СЕМИНАР ПО АЛГЕБРЕ

19.03.21

8. Найти степень над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочлена $(X^3 - 5)(X^3 - 7)$.
9. Доказать, что поле $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ не изоморфно полю $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$.
10. Доказать, что конечная область целостности является полем.

8

$$(x^3-5)(x^3-7)$$

Нужно присоед. ω: $\underbrace{\omega^2+\omega+1}_{\frac{\omega^3-1}{\omega-1}} = 0$

Потом $\sqrt[3]{5}$, т.к.

$$\underset{\deg=3}{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]} \not\subset \underset{\deg=2}{\mathbb{Q}[\omega]} \qquad 3 > 2$$

А потом $\sqrt[3]{7}$, т.к. $\sqrt[3]{7} \notin \mathbb{Q}[\omega, \sqrt[3]{5}]$

x^3-7 неприводим

Д-во: если мн-н 3ей степени приводим, то у него есть линейный множитель т.е. $\exists a \mid a^3 \in \mathbb{Q}[\omega, \sqrt[3]{5}]$

$$\deg(\mathbb{Q}[\omega, \sqrt[3]{5}] / \mathbb{Q}) = 6$$

РЕШИМ ЗАДАЧУ ПО-ДРУГОМУ: СНАЧАЛА ПРИСОЕД. $\sqrt[3]{5}$, А ПОТОМ $\sqrt[3]{7}$

$deg_1 = deg_2$ ЕСЛИ $\sqrt[3]{7} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$, ТО

$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$

$r\sqrt[3]{7} = a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25} \ \Big|^3$

$7 = a^3 + 25c^3 + 30abc + 5b^3 + \ldots$

ДОК-ЕМ, ЧТО $\sqrt[3]{5}$ НЕ ВЫРАЖ. ЧЕРЕЗ $\sqrt[3]{7}$

5 НЕ ЯВЛ. КУБОМ ПО МОДУЛЮ 7

ПО МОДУЛЮ 7 КУБЫ ЭТО:

1	2	3
1	1	-1

А $5^3 \neq \pm 1 \mod 7$

$\Rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{7}]$ $\quad deg = 9$

ПРИСОЕД. ω: $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ $\quad deg = 2 \Rightarrow$

$\omega \notin \mathbb{Q}[\ ,\ ] \Rightarrow deg\, \mathbb{Q}[\ ,\ ,\omega] / \mathbb{Q} = 18$

9

$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \not\cong \mathbb{Q}[\sqrt{11}]$

Д-м, что 5 не явл. квадратом mod 11

$$a^2+11b^2+2ab\sqrt{11}=5$$

$a^2 \neq 5$ и $11b^2 \neq 5$

т.к. $b \in \mathbb{Q}$

10

Область целостности — коммут. кольцо с 1 без делителей 0

$\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ — не область целостности

$a \neq 0$ $\quad a, a^2, \ldots\ a^n = a^m$ (т.к. кольцо конечно)

$n \neq m$

$n < m$

$\Rightarrow a^n(a^m-1)=0$ нет делителей $0 \Rightarrow$

$a^m - 1 = 0$