Алгебра, семинар №4
ВШЭ, осень, первый курс

Пусть $K[x]$ – кольцо многочленов от одной переменной над полем K, $f \in K[x]$. Через $K[x]/(f)$ обозначается факторкольцо многочленов по отношению эквивалентности

$$R = \{(a,b) : \ f \mid a-b\} \subset K[x] \times K[x]\}.$$

0. Проверьте, что R – отношение эквивалентности.

1. Является ли кольцо $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+x+1)$ полем?

2. Является ли кольцо $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$ полем?

3. Найдите минимальное k, такое что $\bar{x}^k = 1$ в кольце из задачи а). 1 и б). 2 ($\bar{x}$ – класс эквивалентности элемента x).

4. Найдите все обратимые элементы и все делители нуля в кольцах $\mathbb{F}_2[x]/(f)$ для следующих многочленов f:

$$x+1, \quad x^4+1, \quad x^4+x^2+1.$$

5. Обозначим через $\mathbb{F}_4$ поле $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+x+1)$. Найдите все обратимые элементы и все делители нуля в факторкольце $\mathbb{F}_4[y]/(y^2+\bar{x}y+1)$.

6. Является ли кольцо $\mathbb{R}[x]/(f)$ полем для следующих многочленов f:

$$x^2+1, \quad x^3+1, \quad x^4+1.$$

7. Найдите все корни многочлена x^2-1 в поле $\mathbb{F}_p$.