№ 1

Мозговой Владислав

условия потенциальности

$$\partial_\theta F_r = \partial_r (r F_\theta)$$

$$\partial_\varphi F_r = \partial_r (r \sin\theta F_\varphi)$$

$$\partial_\varphi (r F_\theta) = \partial_\theta (r \sin\theta F_\varphi)$$

1) $\frac{\partial F_r}{\partial \theta} = -2r\cos\varphi \cos 2\theta \cdot 2 = -4r\cos\varphi\cos 2\theta$

$\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-2r^2\cos\varphi(1+\alpha\sin^2\theta)\right) = -4r\cos\varphi(1+\alpha\sin^2\theta$

2) $\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial(-2r\cos\varphi\sin 2\theta)}{\partial\varphi} = 2r\sin\varphi\sin 2\theta$

$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta(-\alpha r\cos\theta\sin\varphi)\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\alpha r^2 \sin\theta\cos\theta\sin\varphi\right) = -\alpha r\sin 2\theta\sin\varphi$

3) $\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial\varphi} = -2\frac{\partial}{\partial\varphi}r^2\cos\varphi\left(1+\alpha\sin^2\theta\right) = 2r^2\sin\varphi\left(1+\alpha\sin^2\theta\right)$

$-\frac{\partial(r\sin\theta\,\alpha\, r\sin\varphi\cos\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial r^2\alpha\sin 2\theta\sin\varphi}{\partial\theta} = -r^2\alpha\cos 2\theta\sin\varphi$

1) $\Rightarrow \cos 2\theta = 1 + \alpha\sin^2\theta$

2) $\Rightarrow \alpha = -\alpha$

3) $\Rightarrow 2r^2(1+\alpha\sin^2\theta) = -\alpha r^2\cos 2\theta$

№2

Для случая $\alpha=-2$ найдем потенциал V силы $\vec{F}$

$$-\frac{\partial V}{\partial r}=F_r=-2r\cos\varphi\sin 2\theta$$

$$V=r^2\cos\varphi\sin 2\theta+\varphi(\theta,\varphi) \quad (1)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial\theta}=rF_\theta=-2r^2\cos\varphi(1+2\sin^2\theta)=-2r^2\cos\varphi\cos 2\theta$$

$$(1)\Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial\theta}=-2r^2\cos\varphi\cos 2\theta-\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0\Rightarrow\varphi(\theta,\varphi)=\varphi(\varphi)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial\varphi}=r\sin\theta F_\varphi=r^2\sin 2\theta\sin\varphi$$

$$(1),(2)\Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial\varphi}=r^2\sin\varphi\sin 2\theta-\frac{\partial\varphi(\varphi)}{\partial\varphi}\Rightarrow\frac{d\varphi}{d\varphi}=0\Rightarrow\varphi=const$$

$$V(r,\theta,\varphi)=r^2\cos\varphi\sin 2\theta+C$$

Функция $V(r,\theta,\varphi)$ является 2π периодической по φ, а следовательно работа силы F по $\forall$ замкнутому контуру вокруг оси Oz равна 0 и сила F потенциальна во всем $\mathbb{R}^3$

Ответ: $\alpha=-2$ $\quad V=r^2\cos\varphi\sin 2\theta+C$

№2

Необходимые условия потенциальности F:

1) $\partial_\rho(\rho F_\varphi) = 2\rho\, Y(\varphi)\, e^{-z^2}$
$\quad\ \ \|$
$\partial_\varphi(F_\rho) = -\rho X(z) \sin\varphi$

2) $\partial_\varphi(F_z) = (\partial_\varphi V(\rho,\varphi)) z e^{-z^2}$
$\quad\ \ \|$
$\partial_z(\rho F_\varphi) = -\rho^2\, 2z \cdot Y(\varphi)\, e^{-z^2}$

3) $\partial_z(F_\rho) = \rho X'(z) \cos\varphi$
$\quad\ \ \|$
$\partial_\rho(F_z) = (\partial_\rho V(\rho,\varphi)) z e^{-z^2}$

Откуда

1) $\Rightarrow 2Y(\varphi)e^{-z^2} = -\sin\varphi\, X(z) \quad \Rightarrow X(z) = -2e^{-z^2}\left(\frac{Y(\varphi)}{\sin\varphi}\right) \Rightarrow Y(\varphi) = C\sin\varphi$
C - const

2) $\Rightarrow (\partial_\varphi V(\rho,\varphi)) = -\rho^2 2 Y(\varphi)$

3) $\Rightarrow \rho\cos\varphi\, X'(z) = (\partial_\rho V(\rho,\varphi)) z e^{-z^2}$

$(\partial_\varphi V(\rho,\varphi)) = -\rho^2 2C\sin\varphi$

$V(\rho,\varphi) = \rho^2 2C\cos\varphi + f(\rho)$

$\Rightarrow 2C\sin\varphi e^{-z^2} = -\sin\varphi\, X(z)$

$X(z) = -2Ce^{-z^2}$

$\Rightarrow \rho\cos\varphi \cdot 4C\, e^{-z^2} z = (\partial_\rho V(\rho,\varphi)) z \cdot e^{-z^2}$

$V(\rho,\varphi) = 2\rho^2\cos\varphi\, C + g(\varphi)$

Приравняем $V(\rho,\varphi)$

$f(\rho) = g(\varphi) = \text{const} = \tilde{C} \Rightarrow V(\rho,\varphi) = 2\rho^2\cos\varphi\, C + \tilde{C}$

$F|_{\rho=0}=0$ (на O_z)

$F_\rho|_{\varphi=z=0}=\rho$ (на O_x)

$\Rightarrow 0=V(0,\varphi)=0+\tilde{c} \Rightarrow \tilde{c}=0$

$\rho=\rho\cos 0(-2c) \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$

~~Ответ~~ $F_\rho=\rho\cos\varphi e^{-z^2}$

$F_\varphi=-\frac{1}{2}\rho\sin\varphi e^{-z^2}$

$F_z=-\rho^2\cos\varphi z e^{-z^2}$

2. Определить вид силы

$-\frac{\partial U}{\partial\rho}=F_\rho=\rho e^{-z^2}\cos\varphi \Rightarrow U=-\frac{\rho^2}{2}e^{-z^2}\cos\varphi+f_1(z,\varphi)\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=$

$=F_\varphi=\frac{1}{2}\sin\varphi\rho e^{-z^2} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}\sin\varphi\rho^2 e^{-z^2}$

$\Rightarrow V=-\frac{\rho^2}{2}\cos\varphi e^{-z^2}+f_2(\rho,z)$

Приравняем V

$f_1(z,\varphi)=f_2(\rho,z) \Rightarrow f_1(z,\varphi)=f_2(\rho,z)=f(z)$

$-\frac{\partial U}{\partial z}=F_z=\rho^2\cos\varphi z e^{-z^2} \Rightarrow f(z)=0$

Ответ: $V=\frac{1}{2}\rho^2\cos\varphi e^{-z^2}$

№3

в цилиндрических координатах

$F_\varphi = f(\rho, z)\cos\varphi$ – компонента потенциальной F

$f(\rho, z)$ – гладкая

1) $\partial_\rho(\rho F_\varphi) = \partial_\varphi(F_\rho) \Rightarrow \partial_\varphi(F_\rho) = \partial_\rho(\rho f(\rho, z)\cos\varphi)$

2) $\partial_\varphi(F_z) = \partial_z(\rho F_\varphi) \Rightarrow \partial_\varphi(F_z) = \partial_z(\rho f(\rho, z)\cos\varphi)$

3) $\partial_z(F_\rho) = \partial_\rho(F_z)$

$$F_\rho = \sin\varphi \cdot f(\rho, z) + \sin\varphi\, \rho(\partial_\rho f(\rho, z)) + g(\rho, z)$$
$$F_z = \sin\varphi\, \rho(\partial_z f(\rho, z)) + h(\rho, z)$$

3) $\Rightarrow \sin\varphi\, \partial_z f(\rho, z) + \sin\varphi\, \rho \frac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial z} + \frac{\partial g(\rho, z)}{\partial z} = \frac{\partial h(\rho, z)}{\partial\rho} + \sin\varphi\, \partial_z f(\rho, z) +$
$+ \sin\varphi\, \rho \frac{\partial f(\rho, z)}{\partial\rho\partial z} \Rightarrow \partial_z g(\rho, z) = \partial_\rho h(\rho, z)$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi} = F_\varphi = f(\rho, z)\cos\varphi$$
$$V = -\rho f(\rho, z)\sin\varphi + f_1(\rho, z)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = F_z = \sin\varphi\, \rho(\partial_z f(\rho, z)) + h(\rho, z)$$
$$-\frac{\partial V}{\partial z} = \rho(\partial_z f(\rho, z))\sin\varphi - \partial_z f_1(\rho, z)$$
$$\Rightarrow h(\rho, z) = -\partial_z f_1(\rho, z) \Rightarrow f_1 = -\int_0^z h\, dz + \Phi_1(\rho)$$
$$-\frac{\partial V}{\partial\rho} = F_\rho = \sin\varphi f(\rho, z) + \sin\varphi\, \rho(\partial_\rho f(\rho, z)) + g(\rho, z)$$
$$-\frac{\partial V}{\partial\rho} = f(\rho, z)\sin\varphi + \rho(\partial_\rho f(\rho, z))\sin\varphi - \partial_\rho f_1(\rho, z)$$
$$\Rightarrow g(\rho, z) = -\partial_\rho f_1(\rho, z) \Rightarrow f_1 = -\int_0^\rho g\, d\rho + \Phi_2(z)$$

$$-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial \rho} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial \rho}$$

$$\Rightarrow V = -\int_0^{\rho} g\,d\rho - \int_0^{z} h\,dz - \rho f(\rho, z)\sin\varphi$$

Заметим, что функция 2π-периодична по $\varphi \Rightarrow$ работа силы F по любому замкнутому контуру вокруг O_z равна $0 \Rightarrow F$ потенциальна

<u>Ответ:</u> $F_\rho = \sin\varphi\left(f(\rho, z) + \rho(\partial_\rho f(\rho, z))\right) + g(\rho, z)$

$F_z = \sin\varphi\, \rho(\partial_z f(\rho, z)) + h(\rho, z)$, где h и g связаны соотношением

$$V = -\int_0^{\rho} g\,d\rho - \int_0^{z} h\,dz - \rho f(\rho, z)\sin\varphi$$

№4

$$\bar F = F_\theta \bar e_\theta + F_\varphi \bar e_\varphi + 0\cdot \bar e_r$$

а) $F_\theta = \dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{r}$ $\quad F_\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{r}$

$U = -\sin\varphi\sin\theta$

1) $\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)=0 \Rightarrow r\frac{\partial F_\theta}{\partial r}+F_\theta=0 \Rightarrow F_\theta=\frac{f(\varphi,\theta)}{r}$

2) $\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta F_\varphi)=0 \Rightarrow r\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}+F_\varphi=0 \Rightarrow F_\varphi=\frac{g(\varphi,\theta)}{r}$

3) $\frac{\partial}{\partial \varphi}(rF_\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta F_\varphi) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\theta}(g\sin\theta)=\frac{\partial g}{\partial\theta}\sin\theta+g\cos\theta$

Достаточное условие:

$$A_{\gamma_0}=\oint_{\gamma_0} rF_\theta d\theta + rF_\varphi\sin\theta d\varphi=0 \Leftrightarrow \oint_{\gamma_0} f d\theta+g\sin\theta d\varphi=0$$

γ_0 – любой замкнутый контур, обходящий ось Oz

б) не существует

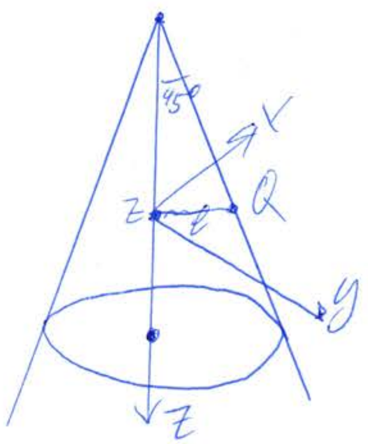
рассмотрим $\gamma(t)=\begin{cases} r=\text{const}\\ \theta=\frac{\pi}{2}\\ \varphi=t,\ t\in[0,2\pi]\end{cases}$

Тогда $A_\gamma=\int_\gamma f d\theta+g\sin\theta d\varphi=\int_0^{2\pi} c\, d\varphi=2\pi c\neq 0$

из условия $g(\varphi,\frac{\pi}{2})=c\neq 0$

$\Rightarrow$ Поле не может быть потенциальным, т.к. существует такой замкнутый контур вокруг O_z, работа по которому не равна 0

№5



$z^2 = x^2 + y^2 = r^2, \; r = l$

а) $V_{пр} = \frac{kl^2}{2}$ $\quad T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$L = \frac{m}{2}(2\dot{l}^2 + l^2\dot{Q}^2) - \frac{kl^2}{2}$

$y = r\sin\theta \qquad \dot{z}^2 = \dot{r}^2$

$x = r\cos\theta \qquad \dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2 Q + r^2\sin^2 Q\,\dot{Q}^2$

$x = r \qquad \dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2 Q + r^2\cos^2 Q\,\dot{Q}$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\dot{r}^2 + r^2\dot{Q}^2$

б) Уравнение Эйлера-Лагранжа

$\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = 2m\dot{l} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = 2m\ddot{l}$

$\frac{\partial L}{\partial l} = m\dot{Q}^2 l - kl$

$L_l = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}}\right) - \frac{\partial L}{\partial l} = 2m\ddot{l} + kl - m\dot{Q}^2 l = 0$

в) $L_Q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{Q}) = 0 \Rightarrow ml^2\dot{Q} = J = const$

$\Rightarrow \dot{Q} = const$