Семинар 5.

Задача 1. 1) Пусть на проективной прямой пара точек A, B гармонически делит пару точек C, D. Найдите двойное отношение $(ABCD)$.
2) Как меняется двойное отношение $(CDAB)$ при перестановках точек $A,\ B,\ C,\ D$? В группе S_4 перестановок точек $A,\ B,\ C,\ D$ найдите подгруппу G перестановок точек $A,\ B,\ C,\ D$, сохраняющих двойное отношение $(ABCD)$. Какой группе изоморфна группа G?

Задача 2. Пусть A - коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $A[t]$ кольцо многочленов. Делением многочлена $P(t)$ на многочлен $Q(t)$ ($0 < \deg Q$) называется представление $P(t) = Q(t)S(t) + R(t)$, где $\deg R < \deg Q$, либо $R = 0$. Докажите следующие утверждения.
1) Деление с остатком существует, если старший коэффициент многочлена Q обратим.
2 Деление с остатком единственно (если оно существует), если старший коэффициент многочлена Q не является делителем нуля. (Следовательно, в условиях п. 1) есть и единственность.)
3) Если $F(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ и $G(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ однородные многочлены с коэффициентами из некоторого поля, $\deg G = d$ и коэффициент многочлена G при x_0^d отличен от нуля, то существует единственное представление $F = GS + R$, где многочлены S и R однородны, причем x_0 входит в многочлен R только в степенях, строго меньших d.

Задача 3. 1) Докажите теорему Паскаля. (*Указание*: Воспользоваться идеей доказательства теоремы Паппа.)
2) Прямая, на которой лежат три коллинеарные точки в теореме Паскаля, называется *прямой Паскаля*. Сколько прямых Паскаля можно построить по данным 6 различным точкам в на конике C в теореме Паскаля?
3) Коника C по Штейнеру строится по проективному соответствию $f : \check{A} \xrightarrow{\simeq} \check{B}$ между пучками прямых с центрами в точках A и B на конике C такому, что $f(AB) \neq AB$. Как изменится коника C в теореме Паскаля, если потребовать, чтобы $f(AB) = AB$?

Задача 4. Докажите, что если A_1 и B_1 - две различные фиксированные точки на конике, построенной по Штейнеру посредством проективного соответствия между двумя пучками прямых с центрами A и B на C, отличными от A_1 и B_1, то отображение $f : \check{A}_1 \to \check{B}_1 :\ A_1X \mapsto B_1X, \quad X \in C$, является проективным.

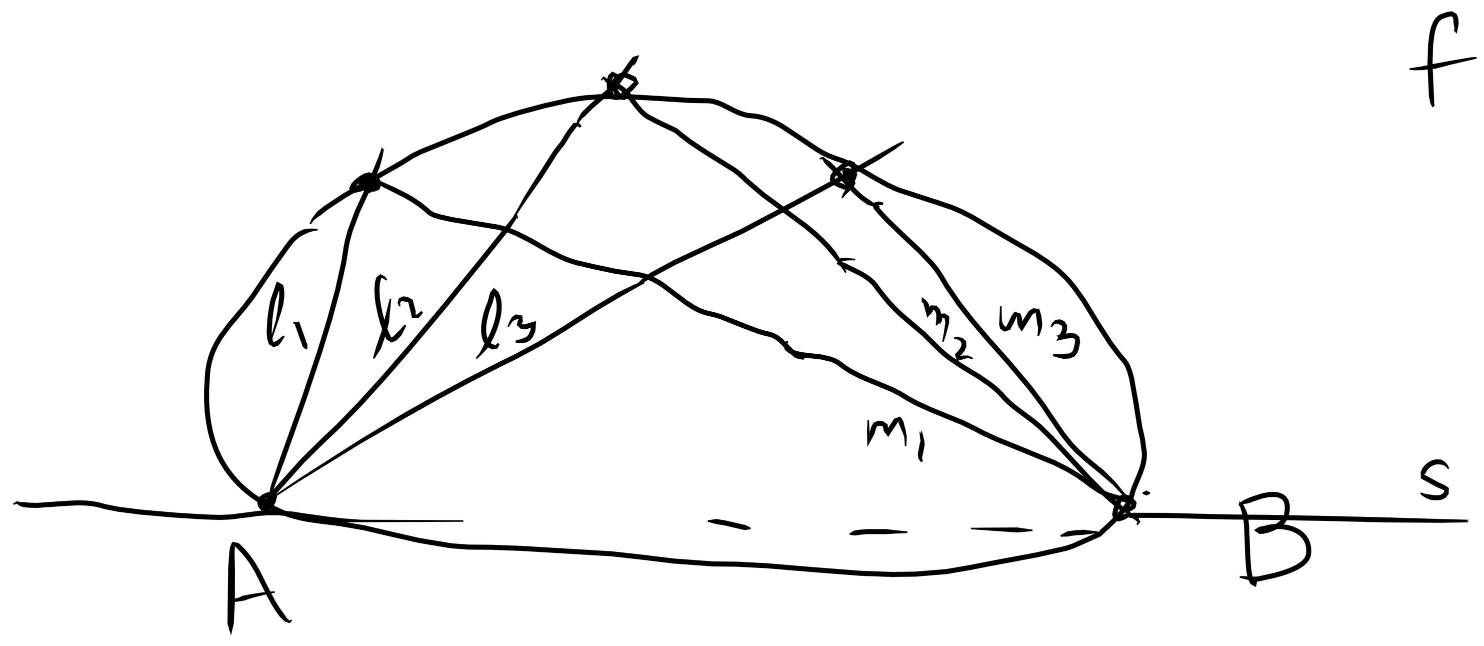
$\{a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0\}$ — прямая в $\mathbb{P}^2$

char $k \neq 2$

$$\det\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} \neq 0$$

$$\{a_{00}x_0^2+a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+2a_{01}x_0x_1+2a_{02}x_0x_2+2a_{12}x_1x_2=0\}$$
— коника в $\mathbb{P}^2$

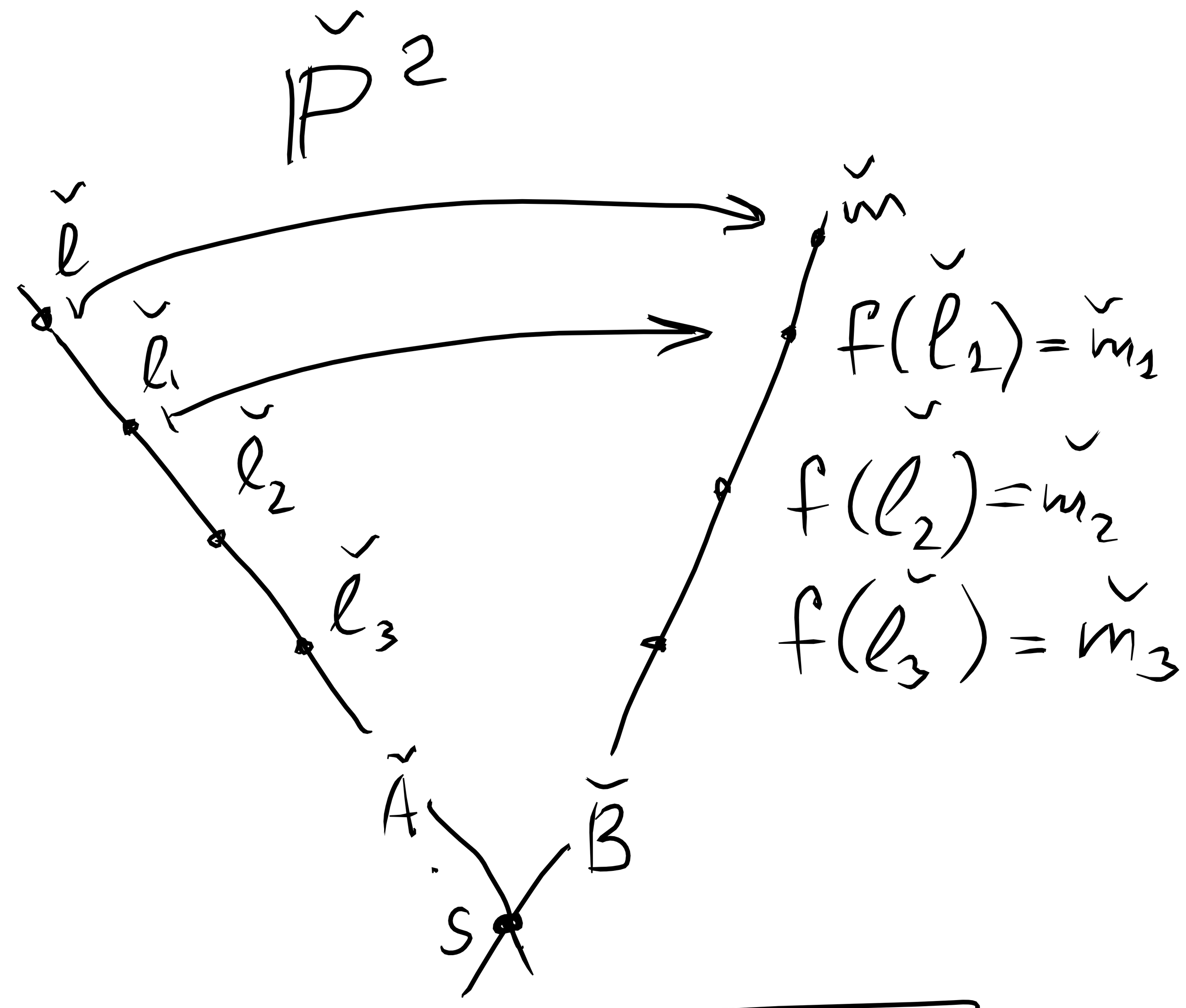
$\mathbb{P}^2$



$f: \check{A} \longrightarrow \check{B}$

$f(AB) \neq AB$

$\check{\mathbb{P}}^2$



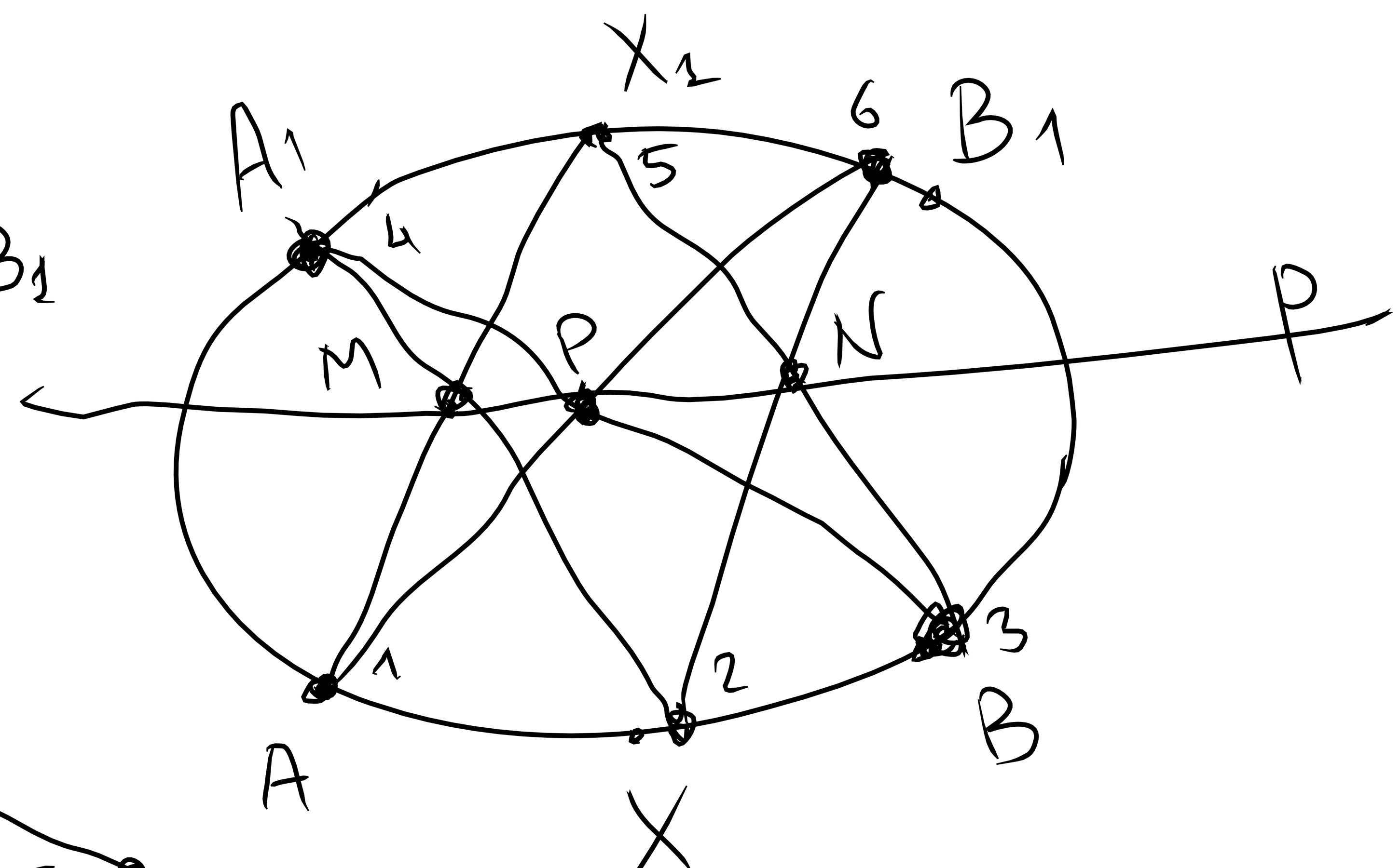
$$C = \bigcup_{\substack{\check{m}=f(\check{l}) \\ \check{l}\in\check{A}}} (l\cap m)$$ || коника по Штейнеру

$\boxed{f(s) \neq s}$

$f: AA_1 \longmapsto BA_1$

$f: AX_1 \longmapsto BX_1$

$f: AB_1 \longmapsto BB_1$



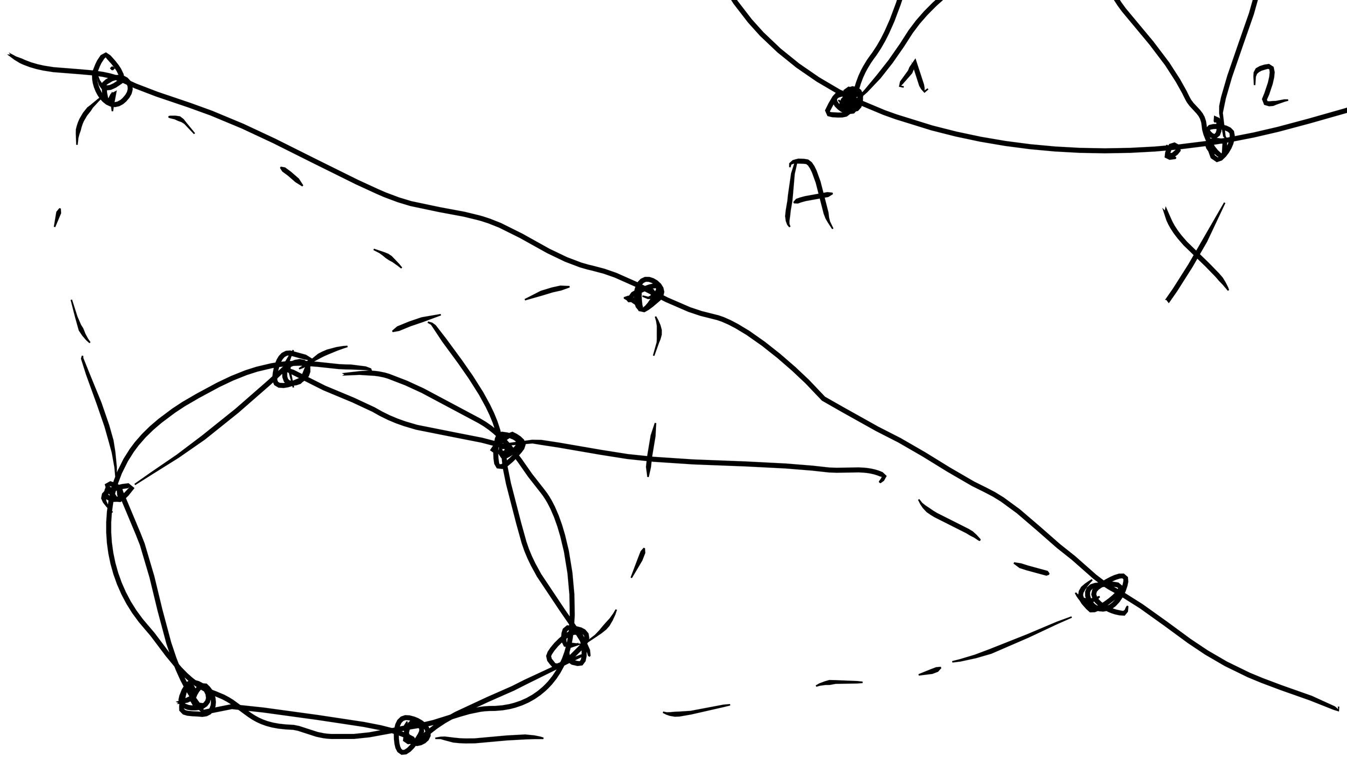
$M = AX_1 \cap A_1X$

$N = BX_1 \cap B_1X$

$P = BA_1 \cap AB_1$

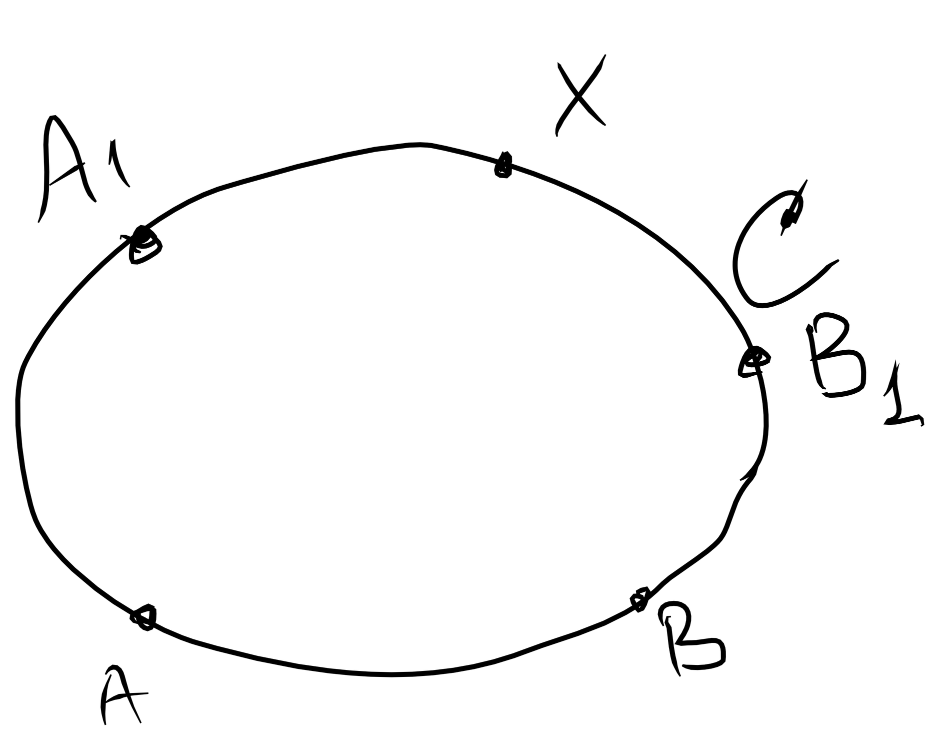
M, N, P коллинеарны

Теорема Паскаля



Задача: Сколько прямых Паскаля можно построить по 6 точкам на конике.

Задача: Докажите теор. Паскаля (Указ.: ср. с теор. Паппа)



Задача:

$f: AX \longmapsto BX \Rightarrow C$ опр-на по f

$f_1: A_1X \longmapsto B_1X \overset{?}{\Rightarrow} f_1$ проективно

Задача. $\boxed{f(s)=s}$ Какова в этом случае коника по Штейнеру?