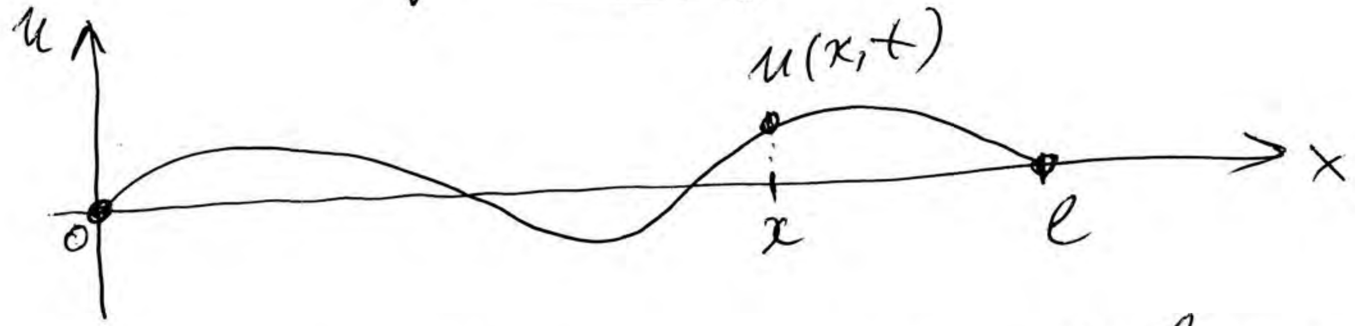
2К

Мат. Анализ. Семинар № 22

Решение уравнения свободных колебаний упругой струны.



(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $(x,t) \in Q$ — уравнение колебаний струны

(2) $u(x,0) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ — начальные условия

(3) $u(0,t) = u(l,t) = 0$ — граничные условия (закреплённые концы)

$x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$, $Q = (0,l) \times (0,T)$.

Ищем решение задачи (1)(2)(3) в классе функций: $u(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $\exists \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(Q)$

Решаем методом Фурье

Шаг 1 Ищем частные решения вида

$$u(x,t) = y(x) \cdot z(t):$$

$$z''(t) \cdot y(x) = a^2 z(t) \cdot y''(x)$$

$$\frac{z''(t)}{a^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda = \text{const}.$$

ШАГ 2. Совпадает с этим шагом для уравнения теплопроводности. Решаем задачу Штурма-Лиувилля

(4) $$y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(l) = 0$$

Её решение имеет вид: $\mu_k = \frac{k\pi}{l}, k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\lambda = -\mu_k^2 = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad y_k(x) = \sin \mu_k x.}$$

ШАГ 3. Решаем уравнение для $z(t)$:

(5) $$z''(t) + a^2 \mu_k^2 z(t) = 0$$

Общее решение имеет вид:

$$z_k(t) = C_k \cdot \cos(a\mu_k t) + D_k \cdot \sin(a\mu_k t)$$

ШАГ 4. Решение (1)(2)(3) ищем в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t), \quad \text{где}$$

$$u_k(x,t) = (C_k \cos a\mu_k t + D_k \sin a\mu_k t) \sin \mu_k x$$

здесь C_k и D_k — некоторые коэффициенты, которые необходимо найти, используя начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

$\varphi(x)$ - форма струны, $\psi(x)$ - скорость при $t=0$.

Подставляем данные при $t=0$

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \mu_k x = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} a\cdot\mu_k\cdot D_k \sin \mu_k x = \psi(x).$$

Это ряды Фурье этих функций, т.е.

(6) $$\boxed{C_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\sin\mu_k x\,dx}, \quad \boxed{\mu_k=\frac{k\pi}{l}}$$

$$a\cdot\mu_k\cdot D_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\mu_k x\,dx$$

(7) $$\boxed{D_k=\frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\mu_k x\,dx}$$

Мы нашли формулу решения задачи (1)(2)(3)

(8)
$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_k\cos(a\mu_k t)+D_k\sin(a\mu_k t)\right]\sin\mu_k x,$$

где C_k и D_k — находятся из формул (6) и (7)

<u>Задача 1.</u> Пусть $\varphi(x)\in C^3[0,l]$, $\psi(x)\in C^2[0,l]$ и выполнены <u>условия согласования</u>

$\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$

$\psi(0)=\psi(l)=0$. Тогда (8) задает решение задачи (1)(2)(3) нужной гладкости

Решение. Необходимо проверить, что ряд (8) равномерно сходится в $\overline{Q}$, его можно дифференцировать почленно, причем $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(\overline{Q})$ и удовлетворяют уравнению. Найдем мажоранту для ряда (8). Для этого найдем оценки для C_k и D_k. Интегрируем по частям

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\mu_k x\,dx = \frac{2}{l\mu_k}\int_0^l \varphi'(x)\cos\mu_k x\,dx =$$

$$= \frac{2}{l\mu_k}\int_0^l \varphi'(x)\,\frac{d\sin\mu_k x}{\mu_k} = \frac{2}{l\mu_k^2}\,\underbrace{\varphi'(x)\sin\mu_k x\Big|_0^l}_{=0} -$$

$$- \frac{2}{l\mu_k^2}\int_0^l \varphi''(x)\sin\mu_k x\,dx = -\frac{2}{l\mu_k^2}\int_0^l \varphi''(x)\sin\mu_k x\,dx$$

$$= +\frac{2}{l\mu_k^3}\int_0^l \varphi''(x)\,d(\cos\mu_k x) = \frac{2}{l\mu_k^3}\,\underbrace{\varphi''(x)\cos\mu_k x\Big|_0^l}_{=0} -$$

$$- \frac{2}{l\mu_k^3}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\mu_k x\,dx = -\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3\int_0^l \varphi'''(x)\cos\mu_k x\,dx =$$

$$= -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\cdot\frac{p_k}{k^3},$$ где p_k — коэфф. Фурье функции $\varphi'''(x)\in C[0,l]$ по ортогональной системе $\{\cos(\mu_k x)\}$.

$$\boxed{C_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{p_k}{k^3}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 < \infty$$

Аналогично

$$D_k = -\frac{2}{la}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \cdot \int_0^l \psi''(x)\sin\mu_k x\,dx$$

$$\boxed{D_k = -\frac{1}{a}\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{q_k}{k^3}},$$ где q_k - коэфф. Фурье функции $\psi''(x) \in C[0,l]$ по орт. системе $\{\sin\mu_k x\}$. $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 < \infty$.

Следовательно:

$$(9)\quad u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\left(p_k \sin\mu_k a t + \frac{q_k}{a}\cos a\mu_k t\right) \times \sin\mu_k x.$$

Этот ряд $\forall (x,t) \in Q$ мажорируется числовым рядом

$$C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\left(|p_k| + |q_k|\right),$$

который сходится! Поэтому ряд (9) равномерно сходится и его сумма $u(x,t) \in C(\overline{Q})$. Покажем, что ряды, которые получаются двукратным дифференцированием ряда (9) тоже равномерно сходящиеся. Получаем:

$$(10)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{l}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(p_k \sin a\mu_k t + \frac{q_k}{a}\cos(a\mu_k t)\right)\times \sin \mu_k x$$

$$(11)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{l}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(p_k \sin a\mu_k t + \frac{q_k}{a}\cos(a\mu_k t)\right)\times \sin \mu_k x$$

Оба ряда мажорируются числовым рядом: $c\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(|p_k| + |q_k|\right)$,

который сходится в силу: $\frac{1}{k}|p_k| \le \frac{1}{2}\left(p_k^2 + \frac{1}{k^2}\right)$

$\frac{1}{k}|q_k| \le \frac{1}{2}\left(q_k^2 + \frac{1}{k}\right)$.

Следовательно, ряды (10) и (11) равномерно сходятся, $u(x,t)$ – можно дифференцировать по x и t два раза,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ – представимы рядами (10) и (11),

$u(x,t)$ – удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3).

Задача 2. Построенное решение задачи (1)(2)(3) является единственным в классе функций $u(x,t) \in C(\overline{Q})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C(\overline{Q})$

Решение: аналогично уравнению теплопроводности. Достаточно доказать, что при $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$ есть только нулевое решение. Пусть это решение $u(x,t)$. Представим рядом Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \cdot \sin \mu_k x$$

причем $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k'(t) \sin \mu_k (x)$

т.е. $p_k(0)=0, \; p_k'(0)=0$

Далее выводится уравнение для $p_k(t)$:

$$p_k''(t) = -a^2 \mu_k^2 \, p_k(t), \quad p_k(0)=0, \; p_k'(0)=0$$

Из которого следует, что $p_k(t) \equiv 0 \;\; \forall t \in [0,T]$

т.е. $u(x,t) \equiv 0 \;\; \forall (x,t) \in \overline{Q}$.

Мы вывели уравнение для более общего случая уравнение вынужденных колебаний струны с закрепленными концами.

Решение уравнения вынужденных колебаний струны.

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q$$

(2) $$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in (0,l)$$

(3) $$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

Здесь $f(x,t)$ – плотность внешней силы.

колебания вынужденные

Решение ищем в виде ряда Фурье по $\{\sin \mu_k x\}$

(4) $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \sin \mu_k x$$

где $p_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx$.

Условия для $f(x,t)$: $f(x,t) \in C(\overline{Q})$,

$\exists f'''_{xxx}(x,t) \in C(\overline{Q})$. Условия согласования:

$$f(0,t) = f(l,t) = 0, \quad f''_{xx}(0,t) = f''_{xx}(l,t) = 0.$$

Разложим $f(x,t)$ в ряд Фурье:

(5) $$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \mu_k x, \quad q_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \mu_k x \, dx$$

С помощью интегрирования по частям

доказывается оценка для $|q_k(t)|$:

(6) $$|q_k(t)| \le \frac{M}{k^3}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

(Используется гладкость и условие согласования для функции $f(x,t)$)

Выведем уравнения, которым удовлетворяют функции $p_k(t)$

Предположим, что $u(x,t) \in C^2(\overline{Q})$

Умножаем уравнение (1) на $\sin \mu_k x$ и интегрируем по $[0, l]$:

$$\boxed{\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \sin \mu_k x \, dx} = a^2 \boxed{\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \mu_k x \, dx} + \frac{l}{2} q_k(t)$$

В левой части переставляем $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ и $\int_0^l$ и получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx \right) = \boxed{\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{l}{2} p_k(t) \right)}$$

В правой части интеграл интегрируем по частям 2 раза:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \mu_k x \, dx = \underbrace{\sin \mu_k x}_{=0} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^l - \mu_k \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \cos \mu_k x \, dx =$$

$$= -\mu_k \underbrace{u}_{0} \cos \mu_k x \Big|_0^l - \mu_k^2 \int_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx = \boxed{-\mu_k^2 \frac{l}{2} p_k(t)}$$

Получим уравнение для $p_k(t)$:

(7) $$\frac{d^2}{dt^2} p_k(t) = -a^2 \mu_k^2 \cdot p_k(t) + q_k(t)$$

Начальные условия:

(8) $$p_k(0) = 0, \quad p_k'(0) = 0$$

<u>Замечание</u>: При $q_k(t) \equiv 0$ получаем уравнение для задачи 2, из которого следует теорема единственности решения уравнения колебаний струны (свободных или вынужденных!)

Решение задачи Коши (7), (8) получается по формуле:

(9) $$p_k(t) = \frac{1}{a \cdot \mu_k} \cdot \int_0^t \sin(a\mu_k(t-s))\, q_k(s)\, ds.$$

(метод вариации постоянных)

$$p_k(t) = C_1(t) \cdot \cos(a\mu_k t) + C_2(t) \sin(a\mu_k t)$$

Найти $C_1(t)$ и $C_2(t)$, подставив в (7)(8).

Проверим, что (9) — решение (7), (8):

$$p_k'(t) = \frac{a \cdot \mu_k}{a \cdot \mu_k} \int_0^t \cos(a\mu_k(t-s))\, q_k(s)\, ds + 0$$

$$p_k''(t) = -a \cdot \mu_k \int_0^t \sin(a\mu_k(t-s))\, q_k(s)\, ds + q_k(t) =$$

$= -(a\mu_k)^2 \cdot p_k(t) + q_k(t)$, т.е.

$$p_k''(t) = -(a\mu_k)^2 p_k(t) + q_k(t).$$

$$p_k(0) = 0, \quad p_k'(0) = 0.$$

Задача 3. При выполнении указанных условий для функции $f(x,t)$ формула

(10) $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \cdot \sin \mu_k x, \text{ где}$$

$$p_k(t) = \frac{1}{a\mu_k} \int_0^t \sin a\mu_k (t-s)\, q_k(s)\, ds$$

определяет решение задачи (1), (2), (3).

Решение. По построению сумма ряда (10) формально удовлетворяет (1), (2), (3).
Действительно:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(0) \cdot \sin \mu_k x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k'(0) \sin \mu_k x = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_k''(t) \sin \mu_k x + a^2 \mu_k^2 p_k(t) \sin \mu_k x \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \cdot \sin \mu_k x = f(x,t).$$

Осталось проверить, что ряд (10) и ряды, полученные двукратным дифференцированием по x и по t равномерно сходятся. Для этого используется оценка $|q_k(t)| \le \frac{M}{k^3}$

тогда $|p_k(t)| \le \frac{M_1}{k^4}$, $|p_k'(t)| \le \frac{M_2}{k^3}$, $|p_k''(t)| \le \frac{M_3}{k^2}$

Поэтому, равномерно сходятся ряды:

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \cdot \sin \mu_k(x)$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'(t) \sin \mu_k x$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k''(t) \sin \mu_k x$

$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cdot p_k(t) \cdot \cos \mu_k(x)$, $-\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 p_k(t) \cdot \sin \mu_k x$.