ТФКП
2 курс
Домашнее задание

Владислав Мозговой
1789769386

29 марта 2021 г.

Домашнее задание 4

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_7$. Выпишите явную формулу для голоморфного биективного отображения из множества X в верхнюю полуплоскость $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

(0) $X = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > 2\}$.
(1) $X = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{e^{it} \mid t \in [0, \pi/2]\}$.
(2) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ |z-1| < 1\}$.
(3) $X = \mathbb{H} \setminus \{e^{it} \mid t \in [0, \pi/2]\}$.
(4) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2,\ \mathrm{Im}(z) > -1\}$.
(5) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\} \setminus \{(1+i)t \mid t \in (0,1]\}$.
(6) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \setminus [0,1]$.
(7) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \setminus ([-1,-1/2] \cup [1/2,1])$.
(8) $X = \mathbb{C} \setminus \{1 + (1-i)t \mid t \in [1,2]\}$.
(9) $X = \mathbb{C} \setminus \{1 + e^{\pi i/3} t \mid t \in [0, \infty)\}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6 + a_9$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Дробно линейный автоморфизм единичного диска коммутирует с отображением $z \mapsto 1/\overline{z}$. Другими словами, если $A : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является дробно-линейным автоморфизмом и $w = 1/\overline{z}$, то $A(w) = 1/\overline{A(z)}$.

(1) Отображение $f(z) = z + \frac{1}{z}$ переводит окружности с центром в 0 в эллипсы (за исключением единичной окружности, которая переходит в отрезок).

(2) Любое отображение вида $f(z) = A_1(z) \ldots A_k(z)$, где $A_j(z) = \frac{z - a_j}{1 - \overline{a}_j z}$, переводит единичный диск в себя.

(3) Существует дробно-линейное преобразование множества $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 2\}$ в себя, переводящее точку 1 в точку 0.

(4) Существует не более одного дробно-линейного преобразования множества $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 2\}$ в себя, переводящего точку 1 в точку 0.

(5) Любую окружность, целиком лежащую в верхней полуплоскости, можно автоморфизмом полуплоскости перевести в любую другую такую окружность.

(6) Любую пару окружностей, целиком лежащих в верхней полуплоскости, можно автоморфизмом полуплоскости перевести в любую другую пару таких окружностей.

(7) Будем называть *луночкой* часть плоскости, ограниченную двумя пересекающимися окружностями. Любую луночку можно конформно отобразить на любую другую луночку.

(8) Отображение $f(z) = z^2$ переводит гиперболы вида $xy = C$ (здесь C — постоянный параметр, а x, y — вещественные координаты точки $z = x + iy$) в горизонтальные прямые.

(9) Отображение $f(z) = z^2$ переводит вертикальные прямые, не проходящие через 0, в параболы.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_9$. Найдите хотя бы одну гармоническую функцию $u(x, y)$ от двух вещественных переменных со следующими свойствами. Функция u определена и гармонична в области $U \setminus \{(a, b)\}$, стремится к нулю на границе области U и к бесконечности в точке (a, b).

(0) $U = \{y > x^2\}$, $a = 0$, $b = 1$.
(1) $U = \{xy > 1,\ x, y > 0\}$, $a = 2$, $b = 1$.
(2) $U = \{x^2 + 2y^2 < 1\}$, $a = b = 0$.
(3) $U = \{y > 0\}$, $a = 0$, $b = 1$.
(4) $U = \{x > 0,\ y > 0\}$, $a = b = 1$.
(5) $U = \{x > 0,\ 0 < y < x\}$, $a = 2$, $b = 1$.
(6) $U = \{0 < y < 2\}$, $a = 0$, $b = 1$.
(7) $U = \{x > -1,\ x^2 + y^2 > 1\}$, $a = 2$, $b = 0$.
(8) $U = \{x > 0,\ 0 < y < 2\}$, $a = b = 1$.
(9) $U = \{y > 0,\ x^2 + y^2 < 2\}$, $a = 0$, $b = 1$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $3a_7$. Нарисуйте образ множества X при отображении f.

(0) $X = \{z = x + iy \mid x + y = 1\}$, $f(z) = 1/z$.
(1) $X = \{z = x + iy \mid x = -1\}$, $f(z) = z/(z - 2)$.
(2) $X = \{z = x + iy \mid y < 0,\ x^2 + y^2 < 4\}$, $f(z) = z^2$.
(3) $X = \{z \mid |z| < 1\}$, $f(z) = (z + 1)^2$.
(4) $X = \{z \mid |z| < 1\}$, $f(z) = \sqrt{1 + z}$ (ветвь на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$).
(5) $X = \{z = x + iy \mid y = 1\}$, $f(z) = e^z$.

(6) $X = \{z = x + iy \mid x = 1\}$, $f(z) = \log z$ (ветвь на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$).
(7) $X = \{z = x + iy \mid y = 1\}$, $f(z) = z^3$.
(8) $X = \{z \mid |z| = 2\}$, $f(z) = (z-1)^2$.
(9) $X = \{z = x + iy \mid 0 < x < \pi/2\}$, $f(z) = \sin z$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа ....

(0) Пусть P и Q — два квадратных многочлена относительно z, не имеющих непостоянных общих множителей. Рассмотрим рациональную функцию $R(z) = P(z)/Q(z)$. Докажите, что найдутся такие дробно-линейные функции ϕ и η, что $\phi \circ R \circ \eta(z) = z^2$.

(1) Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < 2,\ |\mathrm{Im}(z)| < 3\}$ и $f(z) = \cos z - 2$. Докажите, что замыкание множества U содержится во множестве $f(U)$.

(2) Докажите, что группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ изоморфна факторгруппе $\mathrm{PSU}(1,1)$ группы

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

(групповая операция — умножение матриц) по подгруппе, состоящей из скалярных матриц λI, таких, что $|\lambda| = 1$. *Указание:* дайте интерпретацию группы $\mathrm{PSU}(1,1)$ как группы дробно-линейных автоморфизмов единичного диска.

(3) Пусть f — дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости, а $z \in \mathbb{H}$ — точка верхней полуплоскости, такая, что $f(z) = z$. Докажите, что $|f'(z)| = 1$.

(4) Найдите максимум $|f'(0)|$ по всем дробно-линейным автоморфизмам единичного диска.

(5) Предположим, что дробно-линейный автоморфизм f единичного диска имеет неподвижную точку в этом диске. Докажите, что f сопряжен автоморфизму вида $z \mapsto e^{i\theta} z$, где $\theta \in \mathbb{R}$.

(6) Докажите, что любой дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости можно представить в виде композиции двух инверсий, причем можно считать, что окружности, относительно которых осуществляются эти инверсии, перпендикулярны вещественной оси.

(7) Предположим, что дробно-линейный автоморфизм f верхней полуплоскости имеет две разные неподвижные точки на (расширенной) вещественной оси $\overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что в этом случае f сопряжен отображению $z \mapsto kz$, где k — положительное действительное число.

(8) Предположим, что дробно-линейный автоморфизм f верхней полуплоскости имеет ровно одну неподвижную точку на (расширенной) вещественной оси $\overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что в этом случае f сопряжен отображению $z \mapsto z \pm 1$.

(9) При каких вещественных значениях коэффициента a кривая, заданная уравнением

$$x^2 + 2axy - y^2 + 2y + 1 = 0$$

относительно координат (x, y) на плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, переводится в прямую некоторым конформным отображением, определенным в окрестности этой кривой?

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_0 + a_7 = 1 + 3 = 4 \mod 10$

$$X = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 2,\ \Im(z) > -1\} \qquad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} |\ \Im(z) > 0\}$$

Заметим, что у X есть 2 угла $\frac{2\pi}{3}$, тогда переведем один из них (пусть это будет точка $\sqrt{3} - i$) на бесконечность, а второй $(-\sqrt{3} - i)$ в 0. И тогда, чтобы угол $\frac{2\pi}{3}$ стал равным π, необходимо возвести итоговое отображение в степень $\frac{3}{2}$.

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\begin{cases} f(\sqrt{3} - i) = \frac{a(\sqrt{3}-i)+b}{c(\sqrt{3}-i)+d} = \infty & c(\sqrt{3} - i) + d = 0 \\ f(-\sqrt{3} - i) = \frac{a(-\sqrt{3}-i)+b}{c(-\sqrt{3}-i)+d} = 0 & a(-\sqrt{3} - i) + b = 0 \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{az + (\sqrt{3} + i)a}{cz + (i - \sqrt{3})c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + i + \sqrt{3}}{z + i - \sqrt{3}}$$

$$f_1(z) = f(z)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{z + i + \sqrt{3}}{z + i - \sqrt{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Осталось заметить, что данное преобразование дает нам полуплоскость $\{\Re(z) < 0\}$, это можно проверить, посмотрев куда переходит центр окружности $\frac{0+i+\sqrt{3}}{0+i-\sqrt{3}}^{\frac{3}{2}} = -1$, тогда для получения отображения необходимо повернуть все на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, то есть домножить на $-i$, откуда

$$F(z) = -i \cdot \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{z + i + \sqrt{3}}{z + i - \sqrt{3}} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{a}{c} \in \mathbb{R}$$

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_6 + a_9 = 9 + 6 = 5 \mod 10$
Мы можем задать окружность 3 точками, поэтому будем рассматривать автоморфизм $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2, y_3)$, обозначим его как Φ и $\Phi(x_i) = y_i$. Заметим, что $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ – автоморфизмы верхней полуплоскости и

$$z \to \frac{az + b}{cz + d}$$

$$ad - bc = 1$$

$$(a, b, c, d) \sim (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d)$$

То есть эти матрицы задаются 3 параметрами (так как 4 получается из $ad - bc = 1$). Тогда заметим, что у нас есть система из 4 уравнений с 4 неизвестными:

$$\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = y_1 \qquad \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} = y_2 \qquad \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d} = y_3 \qquad ad - bc = 1$$

У это системы есть хотя бы одно решение, а следовательно есть и автоморфизм, переводящий одну окружность в другую.

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_3 + a_9 = 9 + 6 = 5 \mod 10$

$$U = \{x > y > 0\},\ (a, b) = (2, 1)$$

Переведем нашу область в полуплоскость, получим отображение $f_1(z) = z^4$ и $(2, 1)$ перейдет в $(-7, 24)$. Теперь переведем полуплоскость $\mathbb{H}$ в окружность, но сперва переведем $(-7, 24)$ в $(0, 1)$

$$f_2(z) = \frac{z+7}{24}$$
$$f_3(z) = \frac{z-i}{z+i}$$
$$f(z) = f_1 \circ f_2 \circ f_3 = \frac{\frac{z^4+7}{24} - i}{\frac{z^4+7}{24} + i} = \frac{z^4 + 7 - 24i}{z^4 + 7 - 24i}$$

Возьмем логарифм от $f(z)$, он перведет центр окружности в бексонечность, а края в 0, что и трбовалось

$$F(z) = \log(f(z)) = \log\left(\frac{z^4 + 7 - 24i}{z^4 + 7 - 24i}\right)$$

Задача 4

Необходимо решить задачу $3a_7 = 3 \cdot 3 = 9 \mod 10$

$$X = \{z = x + iy|\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\}, \quad f(z) = \sin(z)$$
$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + i\cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$
$$\Re(\sin(z)) = \sin(x)\cosh(y), \quad \Im(\sin(z)) = \cos(x)\sinh(y)$$

Заметим что есть период 2π, а следовательно достаточно рассмотреть $x \in (-\pi, \pi)$. Заметим, что

$$u\left(\frac{\pi}{2} - x, y\right) = u\left(\frac{\pi}{2} + x, -y\right)$$
$$v\left(\frac{\pi}{2} - x, y\right) = v\left(\frac{\pi}{2} + x, -y\right)$$

Тогда

Рис. 1. Комплексная плоскость

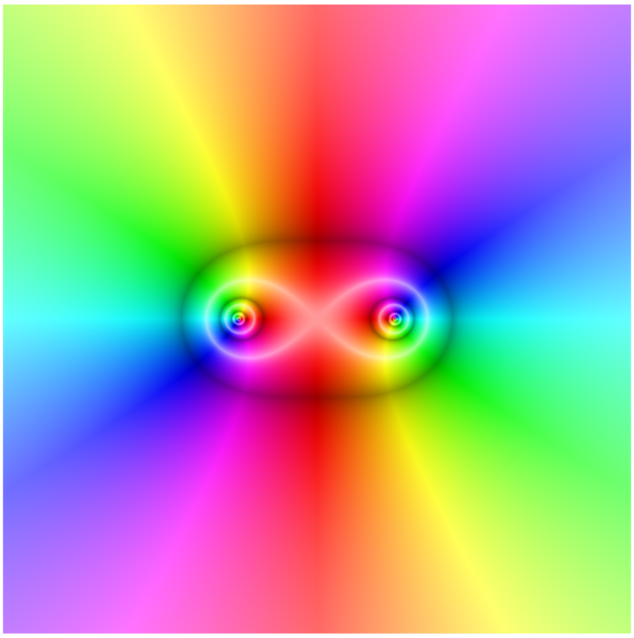

Рис. 2. Плоскость после преобразования $\sin z$ на X