Дифференциальные уравнения.

1 Лекция (02.09.19)

Определение 1.1. Пусть $y = y(x) - k-$ значная функция. Тогда $F(y^{(n)}, \dots, y', y, x)$ 0 — *обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)* (бывают и *необыкновенные,* если что, но это не к нам.)

Look, a !

Определение 1.2. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется его *порядком.*

Лемма 1.1. Систему дифференциальных уравнений можно привести к эквивалентной системе первого порядка, сделав все производные, кроме старшей, новыми переменными.

Доказательство. Рассмотрим систему $F(y^{(n)}, \dots, y'', y', y, x) = 0$. Она эквивалентна

$$\begin{cases} F(y'_{n-1}, y_{n-1}, \dots, y_1, y_0, x) = 0 \\ y'_{n-2} - y_{n-1} = 0 \\ \dots \\ y'_0 - y_1 = 0 \end{cases}$$

□

Пример 1.1. $y' = f(x),\ f \in C(a, b)$. Тогда $y(x) = \int f(x)dx + C$.

Пример 1.2. (ВАЖНЫЙ). $y' = g(y)$. Тогда $\dfrac{y'}{g(y)} = 1$, следовательно, $x - x_0 = \int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{y'(\varepsilon)d\varepsilon}{g(y(\varepsilon))} = \int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{d(y(\varepsilon))}{g(y(\varepsilon))} = \int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \dfrac{d(\eta)}{g(\eta)}$

- $y' = y$. По доказанному выше $\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \dfrac{d\eta}{\eta} = x - x_0$. Отсюда $\ln \dfrac{|y(x)|}{|y(x_0)|} = x - x_0$. Таким образом, $y(x) = Ce^x$.
- $y' = y^2 + 1$. Аналогично получаем, что $y = tg(x_C)$.

Дальше привели какие-то неинтересные примеры.

Задача Коши (постановка).

$$\begin{cases} \vec{y}' = G(\leftrightarrow y, x) \\ \vec{y}(x_o) = y_0 \end{cases}$$

Сформулируем теорему, которую докажем потом.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Пусть $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, где $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ открыто (координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$ будем обозначать $(x_1, \ldots, x_n, t)$) удовлетворяет следующим условиям

- F непрерывна;
- F липшицева по x.

Тогда для любого $(x_0, t_0) \in \Omega$

(1) существует интервал $I \subset \mathbb{R}$, содержащий t_0 и функция $x : I \to \mathbb{R}^n$, являющаяся решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases};$$

(2) Для любого еще одного решения $\hat{x} : J \to \mathbb{R}^n$ выполнено $\hat{x}|_{I\cap J} = x|_{I\cap J}$.

Следствие 1.1. Если производная f по первым $n+1$ аргументам существует и непрерывна, то она липшицева и теорема применима.

Доказательство. Достаточно доказать липшицевость. Выберем внутри области Ω прямоугольник K, содержащий нашу точку (t_0, x_0). Пусть $L = sup_{x\in K}|F'(x)|$. Рассмотрим какие-то произвольные точки $x, y \in K$ и соединим их отрезком $z(t) = x + t(y - x)$, $t \in [0, 1]$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$F(y) - F(x) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}(f(z(\tau)))d\tau = \int\limits_0^1 F'(z(\tau))z(\dot{\tau})d\tau \leqslant \int\limits_0^1 L|y-x|d\tau = L|y-x|.$$

$\square$

2 Лекция 2 (03.09.19)

Напоминание: принцип сжимающих отображений. Если X — полное метрическое пространство, $\varphi : X \to X$ липшицево отображение с константой $q < 1$, то существует единственная неподвижная точка (решение $\varphi(z) = z$).

Немного изменив условия, мы можем добавить параметр $\lambda \in \Lambda$ — метрическое пространство и получить следующую теорему.

Теорема 2.1. Если Λ — метрическое пространство, а X — полное метрическое пространство, $\varphi : X \times \Lambda \to X$ непрерывное по λ липшицево отображение с константой $q < 1$ (не зависящей от λ), то неподвижная точка $z(\lambda)$ непрерывно движется по λ.

Доказательство. Будем обозначать $\varphi_\lambda(x) = \varphi(x, \lambda)$. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$, $z_0 = z(\lambda_0)$.

Лемма 2.1. В условиях теоремы, если y — неподвижная точка (λ в лемме фиксировано), то для любой точки y_0 выполнено

$$\rho(y_0, y) \leqslant \frac{\rho(y_0, \varphi(y_0))}{1-q}.$$

Доказательство. Пусть $y_n = \varphi^n(y_0)$. Тогда $\rho(y_n, y_m) \leqslant \sum q^k \rho(y_0, \varphi(y_0)) \leqslant \dfrac{\rho(y_0, \varphi(y_0))}{1-q}$. Теперь положим $n = 0$, $m \to \infty$ и получим требуемое.

□

По лемме 2.1.

$$\rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) = \rho(z_0, z(\lambda)) \leqslant \frac{\rho(z_0, \varphi(z_0, \lambda))}{1-q} = \frac{\rho(\varphi(z_0, \lambda_0), \varphi(z_0, \lambda))}{1-q}.$$

В силу непрерывности по параметру, для любого ε можно выбрать такое δ, $\rho(\varphi(z_0, \lambda_0), \varphi(z_0, \lambda)) < \varepsilon(1-q)$, при $\rho(\lambda, \lambda_0) < \delta$, тогда $\rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) < \varepsilon$.

□

Лемма 2.2. Непрерывная функция $x : I \to \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = F(x, t, \lambda),$$

$$x(t_0) = x_0(\lambda)$$

является решением задачи Коши при некотором значении λ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет

$$x(t) = x_0(\lambda) + \int\limits_{t_0}^{t} F(x(\tau), \tau, \lambda) d\tau.$$

Доказательство. Предположим, что x — решение задачи Коши. Тогда x непрерывна, а значит, непрерывна и функция $t \to F(x(t), t, \lambda)$ (ведь F непрерывна). Проинтегрируем обе части уравнения $\dot{x} = F(x, t, \lambda)$: $x(t) - x(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} F(x(\tau), \tau, \lambda) d\tau$.

Обратно, если x — решение интегрального уравнения, то второе условие проверяется подстановкой, а первое — дифференцированием.

□

Рассмотрим в пространстве функций отображение, заданное формулой

$$(\varphi_\lambda(x))(t) = x_0(\lambda) + \int\limits_{t_0}^{t} F(x(\tau), \tau, \lambda) d\tau.$$

Неподвижные точки такого отображения и будут решениями задачи Коши по лемме.

Сформулируем теорему, которая является более общей, чем самая первая.

Теорема о существовании, единственности и о непрерывной зависимости от параметра. Пусть $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, где $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1+m}$ открыто (координаты в $\mathbb{R}^{n+1+m}$ будем обозначать $(x_1, \ldots, x_n, t, , \lambda_1 \ldots, \lambda_m)$) удовлетворяет следующим условиям

- F непрерывна;
- F липшицева по x.

Пусть также дана непрерывная функция $x_0 : \Lambda \to \mathbb{R}^n$, где $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ открыто. Тогда для любого $(x_0(\lambda), t_0, \lambda) \in \Omega, \lambda_0 \in \Lambda$

(1) существует интервал $I \subset \mathbb{R}$, содержащий t_0, открытое множество $V \in \Lambda$, $\lambda_0 \in \Lambda$ и функция $x : I \to \mathbb{R}^n$, являющаяся решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t, \lambda) = F(x, t, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases};$$

(2) Для любого еще одного решения $\hat{x} : J \to \mathbb{R}^n$ при некотором $\hat{\lambda} \in V$ выполнено $\hat{x}|_{I \cap J} = x|_{I \cap J}$.

Доказательство.

- Рассмотрим уже определенное отображение φ_λ. В качестве пространства, где «живут» функции x рассмотрим

$$E_{I,\varepsilon} = \left\{ x : \bar{I} \to B_\varepsilon(x_0(\lambda_0)) \;\middle|\; x \text{ непрерывна;} \right\}$$

$\varepsilon > 0$ и $I \ni t_0$ выберем ниже. Пространство $C(\bar{I} \to \mathbb{R}^n)$ с нормой $||x|| = \sup_{t \in \bar{I}} |x(t)|$ будет полно(по какой-то там теореме.) Тогда полно и $E_{I,\varepsilon}$ как его замкнутое подмножество.

- Мы хотим применить к $\varphi_\lambda : E_{I,\varepsilon} \to E_{I,\varepsilon}$ параметрическую версию теоремы о сжимающих отображениях. Для этого мы хотим проверить, что φ_λ корректно определено (i), непрерывно (ii), образ лежал где нужно (iii) и действительно сжимало (iv).

(i) Под корректностью имеется правильный выбор переменных так, чтобы подынтегральное выражение было определено, то есть $(x(\tau), \tau, \lambda)$ лежали в Ω. Для этого выберем такие $\varepsilon_0 > 0$, $I_0 > 0$, $V_0 \supset \lambda$, что $\bar{B_{\varepsilon_0}} \times \bar{I_0} \times \bar{V_0} \subset \Omega$. Тогда при любых

$$\varepsilon < \varepsilon_0, \ , I \in I_0, \ V \subset V_0$$

все корректно.

(ii) Теперь хотим доказать непрерывность $\varphi : E_{I,\varepsilon} \times V \to C(\bar{(I)} \to \mathbb{R}^n)$. Действительно, F непрерывна на компакте $\bar{B_{\varepsilon_0}} \times \bar{I_0} \times \bar{V_0}$, а значит, равномерно непрерывно на нем. В частности, для любого γ существует такая $\delta_1(\gamma)$, что если $|\lambda - \hat{\lambda} < \delta_1$ и $|y - \hat{y}| < \delta_1$, то $|F(y, t, \lambda) - F(\hat{y}, t, \hat{\lambda})| < \gamma$. Аналогично, равномерная непрерывность x_0 на $\bar{V_0}$ дает, что для любого γ существует такое $\delta_2(\gamma)$, что для $|\lambda - \hat{\lambda}| < \delta_2$, то $||x_0(\lambda) - x_0(\hat{(\lambda)}) < \gamma||$. Таким образом, в маленькой окрестности

$$|\varphi(x, \lambda)(t) - \varphi(\bar{x}, \bar{\lambda})(t)| \leqslant \gamma + |t - t_0|\gamma.$$

(iii) Далее, нам нужно, чтобы $\varphi(E_{I,\varepsilon} \times V) \subset E_{I,\varepsilon}$. Потребуем даже большего: $\varphi(E_{I,\varepsilon} \times V) \subset E_{I,\frac{5}{6}\varepsilon}$, потом поймем зачем(для единственности).

$$|\varphi(x, \lambda)(t) - x_0(\lambda_0)| \leqslant |x_0(\lambda) - x_0(\lambda_0)| + \int\limits_{t_0}^{t} |F(x(\tau), \tau, \lambda)d\tau|.$$

Первое слагаемое будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, если выбрать $\lambda \in V_1(\varepsilon) = V_0 \cap B_{\delta_2(\frac{\varepsilon}{2})}(\lambda_2)$. Пусть M — максимум, который принимает функция F на уже выбранном компакте. Тогда второе слагаемое не больше $M|t - t_0|$. Потребуем

$$V \subset V_1(\varepsilon), \ I \subset \left(t_0 - \frac{\varepsilon}{3M}, t_0 + \frac{\varepsilon}{3M}\right).$$

(iv) Теперь хотим добиться, чтобы φ_λ сжимало с коэффициентом $q = \frac{1}{2}$.

$$|\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(\hat{x})| \leqslant L|t - t_0|||x - \hat{x}||.$$

$L\frac{\varepsilon}{3M}$ — коэффициент сжатия. Все хорошо, если

$$\varepsilon < \frac{3M}{2L}.$$

- Аккуратно доказав все условия, мы заключаем, что теорема о сжимающих отображениях применима и такое $x : \bar{I} \times V \to \mathbb{R}^n$ существует.

- Для доказательства единственности, хочется сказать, что у сжимающего отображения всего одна неподвижная точка. Проблема в том, что $\hat{x}|_{I \bar{\cap} J}$ не обязано лежать в $I \bar{\cap} J$.

  Итак, давайте выберем компактно вложенное $J' \subset J$ так, чтобы $\hat{x}|_{\overline{I \cap J'}} \notin E_{I \cap J'}$. С другой стороны, $|\hat{x}(t_0) - x_0(\lambda_0)| = |x_0(\hat{\lambda}) - x_0(\lambda_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда существует такой интервал $K \subset I \cap J'$, содержащий t_0 такой, что $\hat{x}|_{\bar{K}} \in E_{K,\varepsilon} \backslash E_{K,\frac{5}{6}\varepsilon}$. Но тогда $\hat{x}|_{\bar{K}}$ — неподвижная точка $\varphi_\lambda : E_{K,\varepsilon} \to E_{K,\varepsilon}$, а значит, $\hat{x}|_{\bar{K}} \in E_{K,\frac{5}{6}\varepsilon}$.

  Поскольку всевозможные J' покрывают весь J, то единственность доказана.

$\square$

3 Лекция (10.09.19)

Продолжение решений. Тут мы будем доказывать, что на самом деле у задачи Коши существует единственное не продолжимое решение, а все остальные решения — это его ограничения.

Глобальная теорема о единственности. Пусть $x^{(j)} : I_j \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2,$ — решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Тогда $x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$ при $t \in I_1 \cap I_2$.

Доказательство. Предположим, что существует $t > t_0$, для которого $x^{(1)}(t) \neq x^{(2)}(t)$. Тогда множество всех таких t — T — непусто и имеет $\inf T = \tau$.

Заметим, что $\tau > t_0$ (по теореме о единственности в некоторой окрестности t_0 все решения совпадают, следовательно, T отделено от τ).

Заметим еще, что $x^{(1)}(\tau) = x^{(2)}(\tau)$ (в противном случае по непрерывности $x^{(j)}$ это не инфинум).

Теперь рассмотрим решения другой задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ x(\tau) = y_0 \end{cases}, \text{ где } y_0 = x^{(1)}(\tau) = x^{(2)}(\tau).$$

Оно существует и единственно в некоторой окрестности τ, тогда τ не инфинум.

$\square$

Теорема о существовании максимального решения. Существует такое $x^* : I^* \to \mathbb{R}^n$ — решение задачи Коши, что для любого другого ее решения $\hat{x} : \hat{I} \to \mathbb{R}^n$ верно, что $\hat{I} \subset I^*$ и $\hat{x} = x^*|_{\hat{I}}$.

Доказательство. Определим I^* как множество всех точек, в окрестности которых существует решение. Оно открыто, как объединение открытых множеств. В каждой точке этого множества определим x^* как $\hat{x}$ для которого в окрестности этой точки существует решение. Все корректно по предыдущей теореме. $\square$

Теорема о неограниченности. Пусть $f, f_x^* \in C(\Omega)$, $x : I \to \mathbb{R}$ — максимальное решение. Тогда для любого компакта $K \subset \Omega$ существует такое $t > t_0$, что $(x(t), t) \notin K$.

Доказательство. Выберем единое для всех точек компакта ε, такое, что существует решение на $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ (этого можно добиться, поскольку мы на компакте). Тогда максимальное решение выбьется из компакта. $\square$

Упражнение. Существует интервал $(\sup I - \delta, \sup I)$, значения на котором лежат вне компакта.

Определение 3.1. *Оператором Коши (оператором сдвига)* называется $\mathcal{X}_{t_0,t_1}(x_0) = y(t_1)$.

Свойства:

- $\mathcal{X}_{t,t} = Id$;
- $\mathcal{X}_{t_1,t_3} = \mathcal{X}_{t_2,t_3} \circ \mathcal{X}_{t_1,t_2}$.

Лемма 3.1. Для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существует такая окрестность $B_{P\delta}(t_0)$, что $\mathcal{X}_{t_0,t}$ — локальный гомеоморфизм.

Теорема 3.1. Для любого отрезка $[t, s] \in \Omega$ $\mathcal{X}_{t_0,t}$ — локальный гомеоморфизм.

Доказательство. По лемме для любой точки отрезка существует интервал, в котором это верно. У этих интервалов есть конечное подпокрытие. $\square$

4 Сразу две лекции (17.09.19)

Автономные дифференциальные уравнения: $\dot{x} = f(x) (*)$ — не зависит от t.

Предложение 4.1. Пусть $\hat{x} : I \to \mathbb{R}^n$ — решение автономного дифференциального уравнения $(*)$. Тогда $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t + a)$ — тоже решение $(*)$.

Доказательство. Действительно, $\dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \dfrac{d\hat{x}(t+a)}{dt} = f(\hat{x}(t))$.

□

Следствие 4.1. Для автономного дифференциального уравнения $\mathcal{X}_{t,s} = \mathcal{X}_{t+a,s+a}$.

Определение 4.1. *Потоком* дифференциального уравнения $(*)$ называется функция $g^t = \mathcal{X}_{0,t}$.

Если $\mathcal{X}_{0,t}$ определено при всех t, x, то $\{g^t\}$ — группа $t \in \mathbb{R}$ гомеоморфизмов.

Линейные дифференциальные уравнения. $\dot{x} = A(t)x(**)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A : I \to Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Теорема 4.1. Пусть A непрерывно по t, тогда любое решение дифференциального уравнения $(**)$ определено при всех $t \in I$.

Доказательство. Поскольку $f(x,t) = A(t)x$, то f, f'_x непрерывны, поэтому теорема о существовании и единственности применима.

Пусть $\hat{x} : J \to \mathbb{R}^n$ — максимальное решение $(**)$.

Предположим, что $supJ < supI$. Выберем $t_0 \in J$, $t_1 \in (supJ, supI)$.

Пусть $C = \max\limits_{t\in[t_0,t_1]} ||A(t)||$. Рассмотрим функцию $y(t) = e^{-Ct}\hat{x}(t)$. Тогда $\dot{y} = -Ce^{-Ct}\hat{x} + e^{-Ct}A(t)\hat{x} = (-CE + A(t))\hat{y}$.

$\dfrac{d}{dt}(||y||^2) = 2(y, \dot{y}) \leqslant 0$.

Пусть $|x(t_0)| \leqslant r$.

Рассмотрим компакт

$$\mathcal{K} = \left\{(x,t) \;\middle|\; t \in [t_0, t_1], |x| \leqslant re^{c(t-t_0)}\right\}.$$

По уже доказанному $e^{-Ct_0}|\hat{x}(t_0)| \leqslant e^{-Ct}|\hat{x}(t)|$. Таким образом, кривая целиком лежит в компакте, что противоречит теореме о продолжении за компакт.

□

Касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ *(Это я писала в сладких.)*

Геометрический взгляд на дифференциальные уравнения.

Автономное дифференциальное уравнение — векторное поле.

Решение дифференциального уравнения — траектория/орбита.

Определение 4.2. *Векторное поле* — это правило, сопоставляющее каждой точке некоторой области вектор $v = \dot{x} = f(x)$.

Лемма 4.1. Векторное поле не зависит от выбора системы координат.

Доказательство. x'^i — другая система координат. Нужно расписать производную сложной функции..

□

5 Лекция (23.09.19)

Теорема 5.1. Решения $(*)$ — это

(1) если $f(a) = 0$, то $x(t) = a$;

(2) остальные решения определены на интервалах, где $f \neq 0$ и $t(x) - t(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{d\varepsilon}{f(\varepsilon)}$.

Доказательство. Нетрудно убедиться что это решение. Рассмотрим какое-то решение, содержащее точку (x_0, t_0) в одной из полос. Если это решение не пересекает полосы, мы уже победители. Предположим, пересекло. Тогда в точке пересечения у задачи Коши два решени

$\square$

Автономные системы на плоскости.

Теорема 5.2. Решения системы $\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ \dot{y} = g(x,t) \end{cases}$ (🍃) это в точности решения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x,y)}{f(x,y)}$ (🍃🍃) кроме случаев, когда $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ и $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \big\{(x,y) \bigm| (f(x,y), g(x,y)) = (0,0)\big\}$. Если решение (🍃) лежит в Ω при некотором $t = t_0$, то оно лежит там целиком, иначе получаем противоречие с единственностью решения.

Если $\dot{x}(t_0) \neq 0$ (без ограничения общности это так), то локально $t = t(x)$. $\dfrac{dt}{dx}(x_0) = \dfrac{1}{\dot{x}(t_0)}$.

$$\frac{dy}{dx}|_{x_0} = \frac{d(y(t(x)))}{dx}|_{x_0} = \dot{y}(t_0)\frac{dt}{dx}|_{x_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{g(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}.$$

Обратно, пусть γ — решение (🍃🍃). $(x_0, y_0) \in \gamma$, локально $y = y(x)$. Пусть $(x(t), y(t))$ — такая параметризация, при которой $\dot{x} = f(x(t), y(t))$. Это локальное решение (🍃).

Пусть $T = \big\{t \bigm| (x(t), y(t)) \in \gamma\big\}$. Это множество одновременно открыто (очевидно), замкнуто (по непрерывности) и непусто (содержит начальную точку). Таким образом, T — совпадает со всем интервалом существования.

$\square$

6 Лекция (01.10.19)

Определение 6.1. *Дифференциальной 1-формой* называется задание в каждой точке некоторого элемента кокасательного пространства $T_p^*\mathbb{R}^n$.

Теорема 6.1. Пусть $\omega = df$. Тогда решения $\omega = 0$ — это гладкие линии уровня функции f $(F_c := \{x \mid f(x) = c\})$.

Доказательство. Это вроде понятно. ∎

Как строить f?

Например, выберем какой-то путь γ. $f(p) - f(p_0) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} f\gamma(t)|_\tau d\tau$ $\int\limits_0^1 d(f(\gamma(\dot{\tau})))d\tau = \int\limits_0^1 \omega(\dot{\gamma}(\tau))d\tau$.

Такое определение не зависит от выбора пути. Почему? Достаточно проверить, что для γ — цикла интеграл зануляется, тогда определение корректно.

Действительно, $\int\limits_0^1 \omega(\dot{\gamma}(\tau))d\tau = \int\limits_\gamma (a(x,y)dx + b(x,y)dy) = \pm \int\limits_D (\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y})dxdy = 0$, где D — внутренность цикла. Последнее равенство называется *формулой Грина-Стокса*, нам было предложено в это поверить, но будет на гладких.

Определение 6.2. Форма ω *точна*, если $\omega = df$ для некоторого f.

Определение 6.3. ω — *замкнута*, если $\dfrac{da}{dy} = \dfrac{db}{dx}$.

Предложение 6.1. Из точности следует замкнутость.

Теорема 6.2. Если форма ω достаточно гладкая, определена в односвязной области и замкнута, то она точна.

7 Лекция (08.10.19)

Пусть $A : I \to Mat_{n\times n}$ непрерывно. $\dot{x} = A(t)x$ $(\star)$, где x — n-мерный вектор, — линейная однородная система.

Пусть $\mathfrak{X}$ — множество всех решений $(\star)$. Очевидно, что $\mathfrak{X}$ — векторное пространство.

Лемма 7.1. $\dim \mathfrak{X} = n$, для любого $\hat{t} \in I$ отображение $\mathfrak{X} \xrightarrow{\varepsilon_{\hat{t}}} \mathbb{C}^n$, $x \mapsto x(\hat{t})$ — изоморфизм.

Доказательство. Это сюръекция. Следует из теоремы о **существовании** и единственности.

Это инъекция. Следует из теоремы о существовании и **единственности**. ∎

Определение 7.1. *Фундаментальная система решений (ФСР)* — базис в пространстве решений.

Определение 7.2. *Фундаментальная матрица решений (ФМР)* — матрица, составленная из ФМР как из вектор-столбцов.

$$M(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

По условию $\dot{M} = AM$.

Определение 7.3. *Определитель Вронского* это определитель ФМР $W(t) = \det M(t)$.

Лемма 7.2. $\dot{W}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \det(x_1(t), \dots, x_{i-1}(t), \dot{x}_i(t), x_{i+1}(t), \dots, x_n(t))$.

Доказательство. Нужно расписать производную по определению и просто много раз вычесть и добавить одно и то же.

$\square$

Теорема. Формула Лиувилля-Остроградского. $\dot{W}(t) = trA(t) \cdot W(t)$.

Доказательство. Пусть при $t = t_0$ выполнено $M(t_0) = E$. Тогда $\dot{W}(t_0) = \sum a_{ii}(t_0) = trA(t_0)$, по предыдущей лемме.

Пусть $M(t_0)$ — произвольная матрица. Тогда $\hat{M}(t) = M(t)M^{-1}(t_0)$. Применяя предыдущий случай получаем требуемое.

$\square$

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения.

$\dot{x}(t) = A(t)x + b(t)$ $(\heartsuit)$.

Чтобы решить это ДУ, нужно сначала решить вспомогательное однородное уравнение.

Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — ФСР.

Тогда общее решение $(\heartsuit)$ нужно искать в виде $x(t) = c_1(t)x_1(t) + \ldots + c_n(t)x_n(t)$.

Если решение такого вида подставить в $(\heartsuit)$ и сократить подобные, получится уравнение $b(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)x_i(t)$. Таким образом, коэффициенты можно найти, если проинтегрировать $M^{-1}(t)b(t)$.

Линейные уравнения n-ого порядка.

$x^{(n)} + \ldots + a_0(t) = 0$ $(\spadesuit)$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Замечание 7.1. Аналогично тому, как делали раньше, очевидно заключаем, что пространство решений (♠) — векторное.

8 Лекция 9 (15.10.19)

В этой лекции нас еще раз научили решать линейные рекурренты и показали, что линейные ДУ с постоянными коэффициентами та же малина.

9 Сразу две лекции (29.10.19)

Определение 9.1. $e^{At} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k t^k}{k!}$.

Теорема 9.1. e^{At} — ФМР.

Матричная норма $||A|| = \sup \dfrac{Av}{v}$.

Эта норма зависит от нормы на векторном пространстве. $||v||_1 = \sum |v_i|$, $||v||_\infty = \max |v_i|$.

Предложение 9.1. $||A||_1 = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$, $||A||_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$.

Доказательство. Это простая проверка. □

Лемма 9.1. Ряд $\sum \dfrac{A^k}{k!}$ сходится даже абсолютно.

Доказательство. Абсолютно это обычная экспонента. □

Рабочая схема для нахождения матричной экспоненты.
Способ 1.

- Пусть $\alpha(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ — минимальный многочлен (или любой многочлен, аннулирующий матрицу).

- Напишем систему

$$Q_t^\ell(\lambda_i) = \frac{d^\ell}{(d\lambda)^\ell}|_{\lambda=\lambda_i}(e^{\lambda t})$$

$$\ell = 0, 1, \ldots, m_i - 1$$

$$i = 0, \ldots, s$$

- У такой системы есть решение — многочлен $(\deg \alpha - 1)$-ой степени $Q_t(\lambda)$.
- Тогда матрица $Q_t(A)$ — искомая экспонента.

Способ 2.

- Приведем матрицу к жордановой нормальной форме: $A = CJC^{-1}$, где J — матрица в ЖНФ, а C — матрица перехода, составленная из вектор-столбцов соответствующего жорданова базиса, записанных в исходном.
- Для ЖНФ считать экспоненту просто (такую матрицу нужно представить в виде суммы диагональной и нильпотентной, для каждой из них экспонента вычисляется легко, потом эти экспоненты нужно перемножить.) *На самом деле, в этом пункте мы пользуемся леммой, которая будет сформулирована ниже.*
- Теперь воспользуемся равенством $e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1}$ и победим.

Тут я про теорему Арцела-Асколи и Пеано не поняла...
Лекции 12–17.