Анализ 2-2 2021 Семинар 23.
Метод Фурье в уравнении упругих колебаний струны.
Комментарии, решения и ответы

Задача 1. Ищем решение в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(C_k \cos akt + D_k \sin akt)\sin kx$$

а) Начальное условие $u(0,x) = \sin^3 x = 3/4 \sin x - 1/4 \sin 3x$ влечет $C_1 = 3/4$, $C_3 = -1/4$. Из условия $u'_t(0,x) = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} akD_k \sin kx = 0 \ \Rightarrow D_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ответ:

$$u(t,x) = \frac{3}{4}\cos at \sin x - \frac{1}{4}\cos 3at \sin 3x.$$

б) Первое начальное условие как в п. а). Условие $u'_t(0,x) = 1$ эквивалентно соотношению

$$\sum_{k=1} akD_k \sin kx = 1,$$

откуда

$$D_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{2}{ak^2\pi}(1-(-1)^k).$$

Таким образом,

$$u(t,x) = \frac{3}{4}\cos at \sin x - \frac{1}{4}\cos 3at \sin 3x + \frac{4}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)at \sin(2k+1)x.$$

Задача 2. После совершения шагов метода Фурье получатся собственные функции и собственные значения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля (те же самые, что и при решении уравнения теплопроводности с условиями теплоизоляции концов):

$$\cos \mu_k x, \ \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Факторизованные решения имеют вид

$$u_k(x,t) = (C_k \cos(a\mu_k t) + D_k \sin(a\mu_k t))\cos \mu_k x,$$

а общий вид решения

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}(C_k \cos(a\mu_k t) + D_k \sin(a\mu_k t))\cos \mu_k x.$$

Подставляем начальные условия при $t = 0$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos \mu_k x, \;\; \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a\mu_k D_k \cos \mu_k x,$$

Следовательно, используя формулы для коэффициентов Фурье, получаем

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)dx, \;\; C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos \mu_k x dx, \;\; k = 1, 2, \ldots \\ D_k &= \frac{2}{a\mu_k l}\int_0^l \psi(x)\cos \mu_k x dx, \;\; k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Подставляем конкретные функции $\varphi(x) = x$ и $\psi(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right) = \cos \mu_3 x$ и находим

$$C_0 = \frac{l}{2}, \;\; C_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos \mu_k x dx = -\frac{2}{\mu_k l}\int_0^l \sin \mu_k x dx = \frac{-2l}{k^2\pi^2}(1 - (-1)^k).$$

Второе начальное условие дает единственный ненулевой коэффициент при $k = 3$ $D_3 = \frac{1}{a\mu_3} = \frac{l}{3a\pi}$.

Ответ:

$$u = \left(\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left(a\frac{2k+1}{l}\pi t\right)\cos\left(\frac{2k+1}{l}\pi x\right)\right) + \frac{l}{3a\pi}\sin\left(a\frac{3\pi}{l}t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right).$$

Задача 3. Решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}(C_k \cos akt \sin kx + D_k \sin akt \sin kx), \;\; x \in [0, \pi], \;\; t \geq 0; \qquad (1) \\ u(x,0) &= \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), \;\; x \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ сначала нечетным образом на отрезок $[-\pi, \pi]$, а затем по периодичности на всю числовую ось $\mathbb{R}$. Полученные 2π-периодические функции обозначим через $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$, где $x \in \mathbb{R}$.

Тогда формула (1) задаст решение уравнения колебаний струны, определенное при всех $x \in \mathbb{R}$ с начальными условиями $u(x, 0) = \tilde{\varphi}(x)$ и $u_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x)$.

Воспользуемся в (1) формулами произведения синусов и косинусов:

$$\begin{aligned} & u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k\frac{\sin k(x+at) + \sin k(x-at)}{2} + D_k\frac{\cos k(x-at) - \cos k(x+at)}{2}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C_k}{2}\sin k(x+at) - \frac{D_k}{2}\cos k(x+at)\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2}\sin k(x-at) + \frac{D_k}{2}\cos k(x-at)\right) = \\ &= \;\; f(x+at) + g(x-at), \end{aligned}$$

где

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C_k}{2}\sin kx - \frac{D_k}{2}\cos kx\right), \;\; g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C_k}{2}\sin kx + \frac{D_k}{2}\cos kx\right)$$

это некоторые 2π-периодические функции, представленные своими рядами Фурье.

Чтобы найти выражения для $f(x)$ и $g(x)$ через начальные функции $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ достаточно в формулы

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at), \qquad u_t(x,t) = af'(x+at) - ag'(x-at)$$

подставить $t = 0$:

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + g(x), \qquad \tilde{\psi}(x) = af'(x) - ag'(x).$$

Следовательно,

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \tilde{\varphi}(x) \\ f(x) - g(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \tilde{\psi}(s)ds + C \end{cases},$$

т.е.,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x) + \frac{1}{a}\int_0^x \tilde{\psi}(s)ds + C\right) \\ g(x) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x) - \frac{1}{a}\int_0^x \tilde{\psi}(s)ds - C\right) \end{aligned}$$

Наконец, подставляем эти выражение в формулу $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$ и получаем

$$u(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x+at) + \tilde{\varphi}(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(s)ds$$

Эта формула называется формулой Даламбера.

Аналогичные формулы имеют место и для решений уравнений колебаний струны со свободными начальными условиями, только при выводе необходимо продолжать начальные функции сначала на отрезок $[-\pi,\pi]$ четным образом, а потом – периодически на всю числовую ось. Получится такая же формула Даламбера.

Задача 4. Метод разделения переменных $u(x,t) = T(t)X(x)$ дает уравнения на частные решения

$$\frac{T''(t) + 2\beta T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2.$$

Решение соответствующей задачи Штурма-Лиувилля при нулевых граничных условиях дает, как мы знаем,

$$X_k(x) = \sin kx, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Дифференциальное уравнение

$$T'' + 2\beta T' + a^2k^2T = 0 \tag{2}$$

имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + a^2k^2 = 0.$$

Его корни

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\beta \pm \sqrt{\beta^2-(ak)^2} \text{ при } k \le \frac{\beta}{a}\\ \lambda_{1,2} &= -\beta \pm i\sqrt{(ak)^2-\beta^2} \text{ при } k > \frac{\beta}{a}\end{aligned}$$

Если $k=\frac{\beta}{a}$ – целое, то корень $-\beta$ имеет кратность 2. Обозначим

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \sqrt{\beta^2-(ak)^2}\text{при } k < \frac{\beta}{a},\\ \gamma_k &= \sqrt{(ak)^2-\beta^2}\text{при } k > \frac{\beta}{a}.\end{aligned}$$

Поэтому общее решение уравнения (2) имеет вид

$$\begin{aligned}T_k(t) &= e^{-\beta t}\left(C_k e^{\gamma_k t}+D_k e^{-\gamma_k t}\right), \text{ при } k < \frac{\beta}{a}\\ T_k(t) &= e^{-\beta t}\left(C_k + D_k t\right) \text{ при } k = \frac{\beta}{a} \text{ (резонансный случай).}\\ T_k(t) &= e^{-\beta t}\left(C_k\cos\gamma_k t + D_k \sin\gamma_k t\right), \text{ при } k > \frac{\beta}{a}\end{aligned}$$

Для простоты предположим, что число β/a – не целое. Поэтому решение уравнения колебаний струны с трением ищется в виде

$$u(x,t)=e^{-\beta t}\left(\sum_{k<\beta/a}^{\infty}(C_k e^{\gamma_k t}+D_k e^{\gamma_k t})\sin kx + \sum_{k>\beta/a}^{\infty}(C_k\cos\gamma_k t + D_k\sin\gamma_k t)\sin kx\right).$$

Если трение не очень велико, т.е., когда $1>\beta/a$ и $\beta<a$, первой суммы нет. Найдем решение для этого случая.

Подстановка начальных условий $\varphi(x)=\sin x$ и $\psi(x)=\sin 2x$ дает нетривиальные соотношения

$$C_1=1, \quad -\beta C_1+\gamma_1 D_1=0, \quad -\beta C_2+\gamma_2 D_2=1.$$

т.е.

$$C_1=1, \qquad D_1=\frac{\beta}{\gamma_1}, \qquad D_2=\frac{1}{\gamma_2}.$$

Ответ (при $\beta<a$):

$$u(x,t)=e^{-\beta t}\left[(\cos\gamma_1 t+\beta\gamma_1^{-1}\sin\gamma_1 t)\sin x+\gamma_2^{-1}\sin\gamma_2 t\sin 2x\right].$$

Задача 5. Для простоты предположим, что $m=1$. Ищем решение в виде $x(t)=C_1(t)\sin\omega t+C_2(t)\cos\omega t$. Подставляем в уравнение и получаем соотношения

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}C_1 &= \frac{f(t)\cos\omega t}{\omega}, \qquad \frac{d}{dt}C_2=-\frac{f(t)\sin\omega t}{\omega},\\ C_1(0) &= C_2(0)=0.\end{aligned}$$

откуда с учетом начальных условий

$$C_1(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(s)\cos\omega s ds, \qquad C_2(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^t f(s)\sin\omega s ds.$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{\sin\omega t}{\omega}\int_0^t f(s)\cos\omega s\ ds - \frac{\cos\omega t}{\omega}\int_0^t f(s)\sin\omega s\ ds = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(s)\sin\omega(t-s)\ ds.$$

Задача 6. Решение ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\sin kx.$$

Подставляем в уравнение и получаем в пунктах а) и б) нетривиальные соотношения

$$\text{а) } \ddot{p}_1 + p_1 = e^{-t}, \qquad \text{б) } \ddot{p}_3 + 9p_3 = \cos t$$

с нулевыми начальными условиями:

$$p_1(0) = \dot{p}_1(0) = 0, \qquad p_3(0) = \dot{p}_3(0) = 0.$$

Решения этих неоднородных уравнений методом вариации констант имеют вид:

$$\text{а) } p_1(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t), \qquad \text{б) } p_3(t) = \frac{1}{8}(\cos t - \cos 3t).$$

Ответ:

$$\text{а) } u(x,t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)\sin x, \qquad \text{б) } u(x,t) = \frac{1}{8}(\cos t - \cos 3t)\sin 3x.$$

Задача 7. Решается методом вариации констант. Решение ищется в виде $x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$ с соответствующими начальными условиями. Ответ:

$$x(t) = \int_0^t \frac{x_1(t)x_2(s) - x_1(s)x_2(t)}{W(s)} f(s)ds,$$

где $W(t) = \dot{x}_1(t)x_2(t) - x_1(t)\dot{x}_2(t)$ – определитель Вронского.