21.12.2021

Итоговый письменный экзамен

решения присылайте (желательно pdf) на *kazarian@mccme.ru*

1. Вычислите (целочисленные) гомологии и найдите эйлерову характеристику следующих пространств:

(а) $\mathbb{R}^3 \setminus B(1)$, трехмерное пространство с удаленным открытым единичным шаром;

(б) пространство окружностей (произвольного ненулевого радиуса), лежащих на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$;

(в) (вещественно двумерная) поверхность в $\mathbb{C}^2$, заданная комплексным уравнением $x^n + y^2 = 1$ ($n \geq 2$).

2. Стандарно вложенные поверхности $\mathbb{R}P^2$ и $\mathbb{C}P^1$ в $\mathbb{C}P^2$ представляют два класса гомологий в $H_2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z}_2)$. Равны ли эти классы?

3. Найдите степень следующих отображений:

(а) $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$, задаваемое комплексным сопряжением, $[x : y : z] \mapsto [\overline{x} : \overline{y} : \overline{z}]$;

(б) $\mathbb{R}P^3 \to \mathbb{R}P^3$, задаваемое в однородных координатах равенством $[x : y : z : w] \mapsto [x^3 : y^3 : z^3 : w^3]$.

4. Существует ли непрерывное отображение степени 2 для следующих пространств (если существует, предъявите; если не существует, докажите это):

(а) $S^2 \times S^2 \to \mathbb{C}P^2$;

(б) $\mathbb{C}P^2 \to S^2 \times S^2$.

Задача 1.

а) $\mathbb{R}^3 \setminus B(1) \sim S^2$, т.к. мы можем стянуть всё $\mathbb{R}^3$ на границу

$\chi(\mathbb{R}^3 \setminus B(1)) = \chi(S^2)$, т.к. эйлерова хар. - это гомотоп. инвариант.

Мы знаем, что $\chi(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{при чётном } n \\ 0 & \text{при нечётном } n \end{cases}$ => ответ: 2

$0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z} \to$ $H_0 = H_2 = \mathbb{Z}$ $H_i = 0$ $i \neq 0,2$

б) Пр-во окр. на сфере единичной в $\mathbb{R}^3$

Охарактеризуем это пр-во: постараемся ввести координаты.

Каждая окружность задаётся прямой, проходящей через центр сферы и центр данной окружности, а так же её радиусом, но радиус можно вычислить через расстояние x от центра сферы и центра окружности (он лежит в той же плоскости, что и окружность).

X меняется от $(-1, 1)$ не включительно, т.к. радиус 0 быть не может.

Мн-во всех прямых - $\mathbb{R}P^2$ прох. через O.

Получаем пр-во $\{(l, x) \mid l \in \mathbb{R}P^2, x \in (1,-1)\} = \mathbb{R}P^2 \times (-1,1) \sim \mathbb{R}P^2$

$\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$, опять же эйлерова х. => Ответ: 1.

$H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z}_2$, $H_2 = 0$, $H_n = 0$ для $n > 2$

Задача 3

а) $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$, где $[x:y:z] \to [\bar{x}:\bar{y}:\bar{z}]$

У каждой точки один прообраз

Значит степень ± 1. Покажем, что ~~в~~ отображение сохраняет ориентацию

Рассмотрим аффинные координаты в карте $x \neq 0$, в ней $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \to \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \frac{\bar{z}}{\bar{x}}\right) =$

$$= \left(\frac{y^{-1}|y^2|}{x^{-1}|x|^2}, \frac{z^{-1}|z|^2}{x^{-1}|x|^2}\right) = \left(\frac{\frac{|y|^2}{|x|^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}}, \frac{\frac{|z|^2}{|x|^2}}{\left(\frac{z}{x}\right)^{-1}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\left|\frac{y}{x}\right|^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}}, \frac{\left|\frac{z}{x}\right|^2}{\left(\frac{z}{x}\right)^{-1}}\right) \Rightarrow \text{ориентация сохраняется}$$

Ответ: степень $+1$.

б) $\mathbb{R}P^3 \to \mathbb{R}P^3$

$[x:y:z:w] \longmapsto [x^3:y^3:z^3:w^3]$

Опять же: у каждой точки 1 прообраз, т.к. система $\begin{cases} x^3 = x_0 \\ y^3 = y_0 \\ z^3 = z_0 \\ w^3 = w_0 \end{cases}$ имеет одно решение.

Значит степень опять $+$ или -1. Посчитаем якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} 3x^2 & & & 0 \\ & 3y^2 & & \\ & & 3z^2 & \\ 0 & & & 3w^2 \end{vmatrix}$$

степень $= \sum \operatorname{sgn}(J)$ # прообразов $\Rightarrow$ равна $+1$

Ответ: 1

Задача 4.

а) $S^2 \times S^2 \to \mathbb{C}P^2$ $\qquad S^2 \times S^2 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$

$(x:y), (z:t) \to (xz : yt : xt + yz)$

Заметим, что в $(0:0:0)$ ничего не перейдёт, т.к.

если $x = 0$, то $y \neq 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow z \neq 0 \Rightarrow yz \neq 0$, а $xt = 0 \Rightarrow$

получим $(0:0:yz) \Rightarrow$

определено корректно

Теперь посчитаем его степень: $(z:1), (w:1) \to (zw : 1 : z + w)$

Рассматриваем в одной карте

$\begin{cases} zw = a \\ z + w = b \end{cases}$ имеет 2 корня

$\Downarrow$

степень отобр. 2.

б) $f: \mathbb{C}P^2 \to S^2 \times S^2$

	0	1	2	3	4
$H_k(S^2 \times S^2)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}^2$	0	$\mathbb{Z}$
$H^k(S^2 \times S^2)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}^2$	0	$\mathbb{Z}$

	0	1	2	3	4
$H_k(\mathbb{C}P^2)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$H^k(\mathbb{C}P^2)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$

Данное отображение индуцирует гомоморфизм когомологий.

$$H^2(S^2 \times S^2) \to H^2(\mathbb{C}P^2)$$

Пусть у $H^2(S^2 \times S^2)$ образующие (c) и (d), а у $H^2(\mathbb{C}P^2)$ – (a)

Тогда в старших f^* – просто умножение на 2.

Пусть $f^* c = \alpha \cdot a$, $f^* d = \beta \cdot a$

$0 = f^*(c \cup c) = \alpha a \cup \alpha a = \alpha^2 (a \cup a) \Rightarrow \alpha = 0$ и аналогично $\beta = 0$

А значит $f^*(c \cup d) = 0 \Rightarrow f$ не может иметь степень 2.