Лекция 3. Комплексная производная

Теория функций комплексного переменного

Определение производной

Определение 2.1. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество. Функция $f: U \to \mathbb{C}$ называется *комплексно дифференцируемой* в точке $a \in U$, если существует предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{2.1}$$

Если предел (2.1) существует, он называется *производной* функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

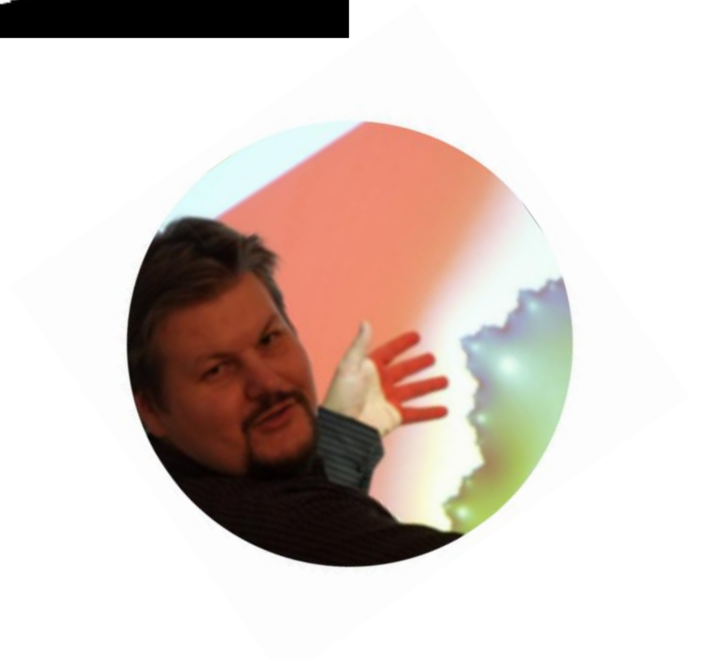
Линейное приближение:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

Вещественная vs. комплексная дифференцируемость

- Вещественно-линейное отображение искажает пропорции.
- Комплексно линейное отображение сохраняет пропорции и углы. Окружности переводит в окружности. Это поворот с растяжением.

- Комплексно дифференцируемое отображение в первом приближении сохраняет пропорции и углы (если $f'(a) \neq 0$).



Теорема о дифференцировании сложной функции

Предложение 2.5. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{C}$ — функция, для которой $f(U) \subset V$, где $V \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и $g : V \to \mathbb{C}$ — еще одна функция. Если функция f комплексно дифференцируема в точке $a \in U$ и функция g комплексно дифференцируема в точке $f(a)$, то композиция $g \circ f$ комплексно дифференцируема в точке a, причем $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Альтернативное доказательство использует теорему о дифференцировании сложной функции от нескольких вещественных переменных. Оператор умножения на $g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$ – композиция умножения на $f'(a)$ и умножения на $g'\big(f(a)\big)$.

Голоморфные функции

Определение 2.6. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Функция $f : U \to \mathbb{C}$ называется *голоморфной на* U, если она комплексно дифференцируема в каждой точке $a \in U$.

Предложение 2.7. *Функция $z \mapsto e^z$ голоморфна на всем $\mathbb{C}$; при этом ее производная в точке a равна e^a. Иными словами, $(e^z)' = e^z$.*

Предложение 2.9. *Функции синус и косинус голоморфны на всей комплексной плоскости; при этом $(\sin z)' = \cos z$ и $(\cos z)' = -\sin z$.*

Примеры голоморфных функций: многочлены, $e^z, \sin z, \cos z$.
Преобразование Мебиуса голоморфно за исключением максимум одной точки (в которой знаменатель обращается в 0)

Теорема об обратной функции («костыль»)

Предложение 2.10. *Пусть $U, V \subset \mathbb{C}$ — открытые подмножества, и пусть $f : U \to V$ — биективное отображение со следующими свойствами:*

(1) f — голоморфная функция на U;

(2) производная функции f не обращается в нуль ни в одной точке множества U;

(3) обратное отображение $g = f^{-1} : V \to U$ непрерывно.

Тогда обратное отображение $g : V \to U$ — голоморфная функция на V и для всякой точки $b \in V$ имеем $g'(b) = 1/f'(g(b))$.

Замечание 2.11. На самом деле верно гораздо более сильное утверждение: из голоморфности и биективности отображения f условия (2) и (3) следуют автоматически. Мы установим это в главе 9.

Теорема об обратной функции (альтернативный «костыль»)

Теорема. Пусть $f: U \to V$ – голоморфная функция, причем f' непрерывна. Если точка $a \in U$ такова, что $f'(a) \neq 0$, то в окрестности точки $b = f(a)$ существует обратная функция g, причем $g'(b) = 1/f'(a)$.

Доказательство: многомерная вещественная теорема об обратной функции.

Замечание: зеленое предположение излишне (вытекает из голоморфности).

Ветви логарифма

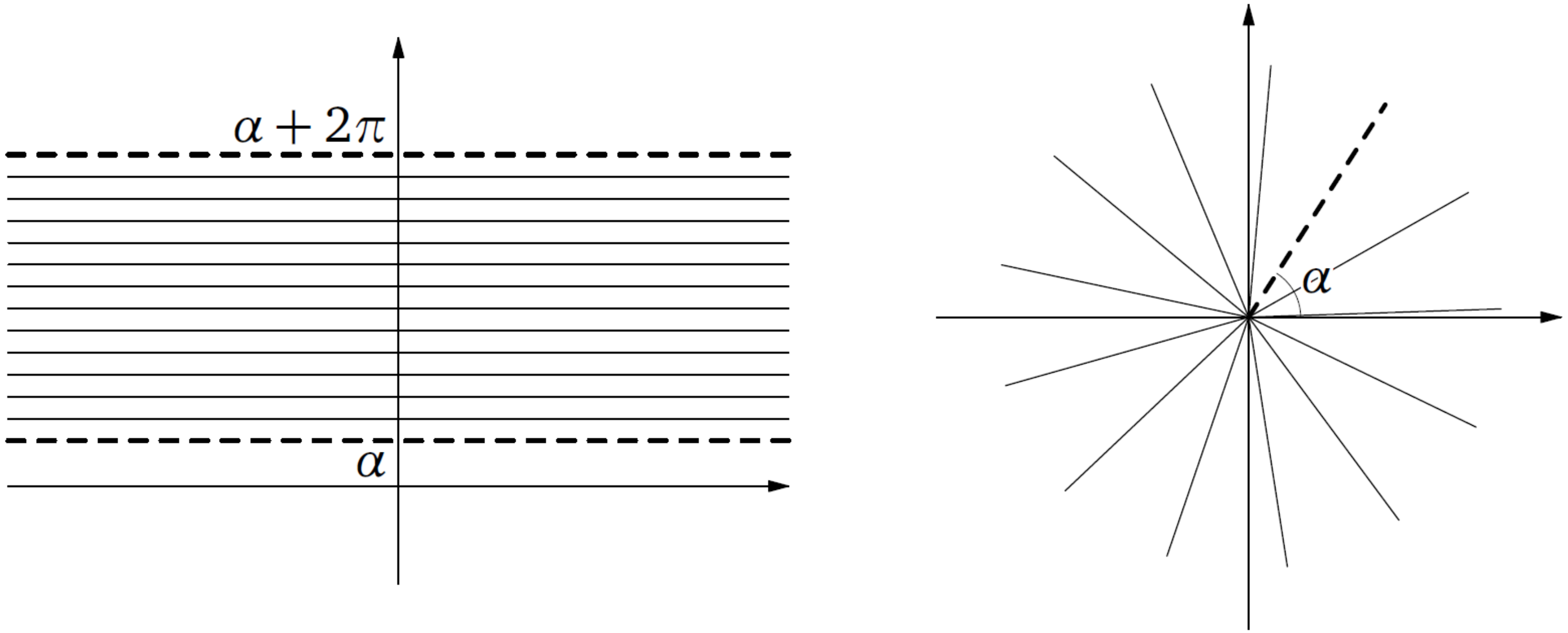


Рис. 2.1. Экспонента задает биекцию между полосой высоты 2π и комплексной плоскостью, разрезанной вдоль луча. Горизонтальные прямые на левом рисунке переходят в лучи на правом рисунке. Пунктирные линии в множества не входят.

Ветви логарифма

Предложение 2.12. *На множестве V_α, получаемом удалением из комплексной плоскости луча, выходящего из нуля под углом α к действительной оси, можно для каждого целого n определить голоморфную функцию* ln *по формуле*

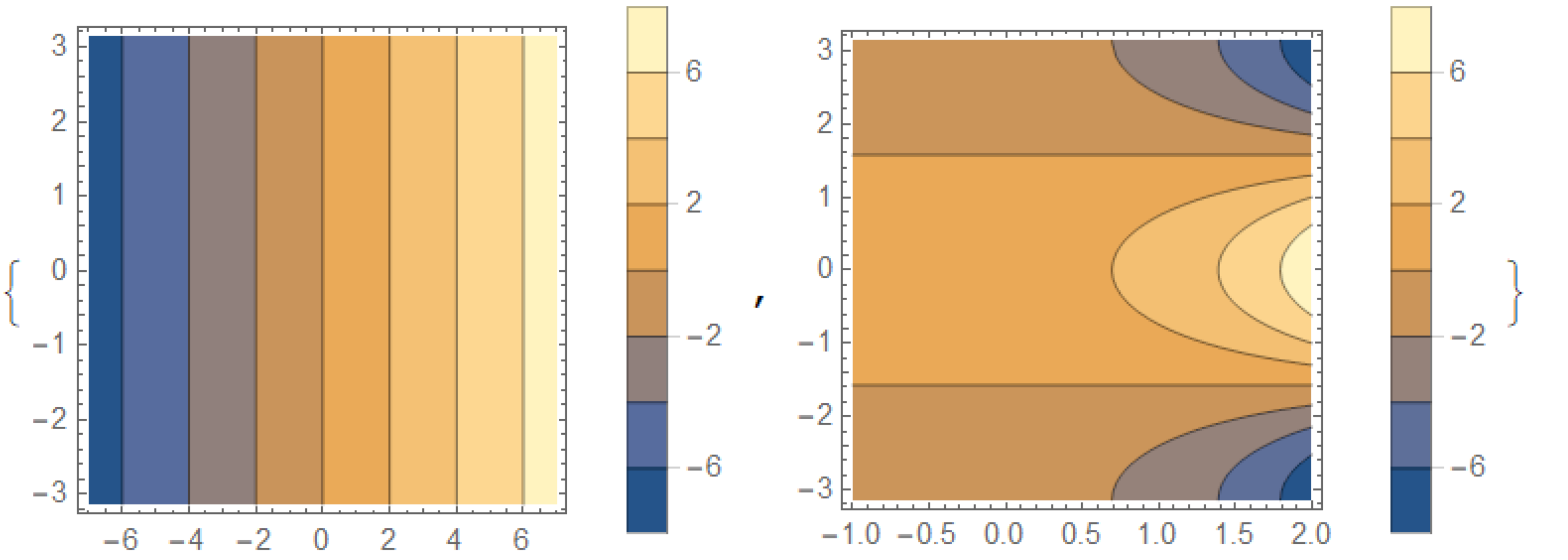
$$\ln(re^{it}) = \ln r + it, \quad \alpha + 2\pi n < t < \alpha + 2\pi(n+1).$$

Имеем $e^{\ln z} = z$ *и* $(\ln z)' = 1/z$.

Через границу области V_α функцию $\ln z$ продолжить нельзя (не только как голоморфную, но даже как непрерывную функцию!).

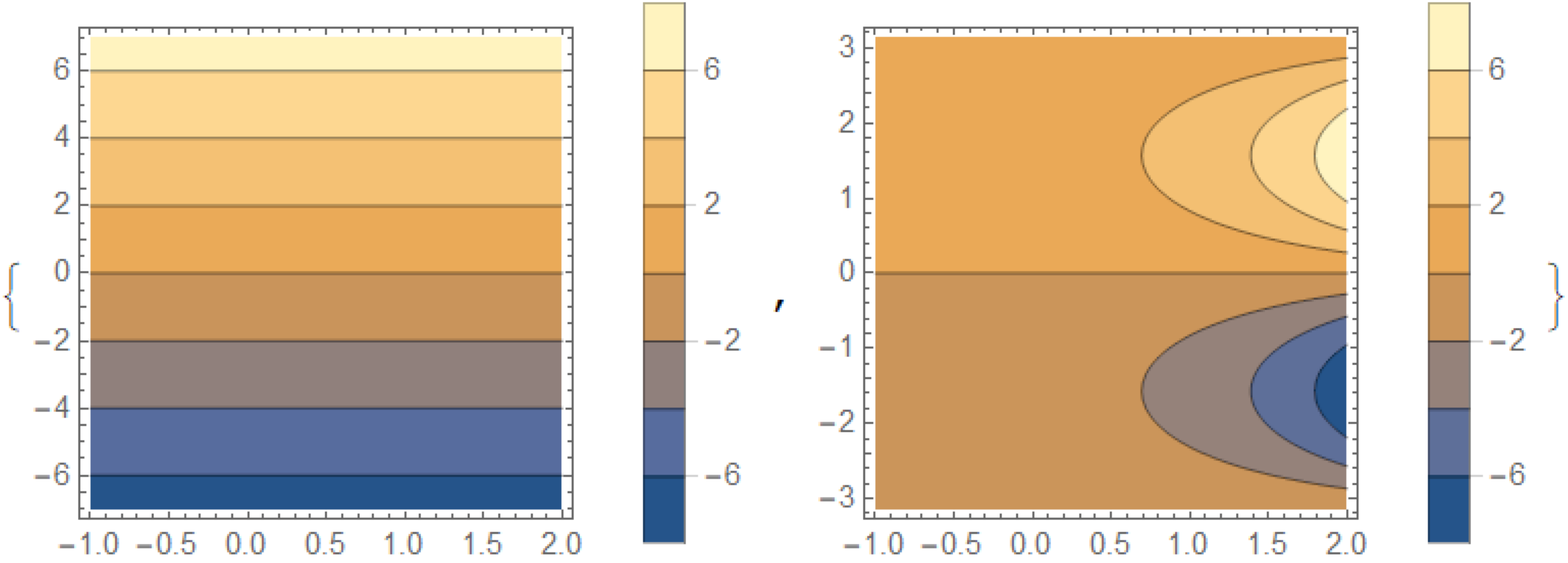
Действие логарифма

```
Map[ContourPlot[#[[1]], {x, #[[2]], #[[3]]}, {y, -Pi, Pi},
   PlotLegends → Automatic] &, {{x, -7, 7}, {Re[Exp[x + I y]], -1, 2}}]
```



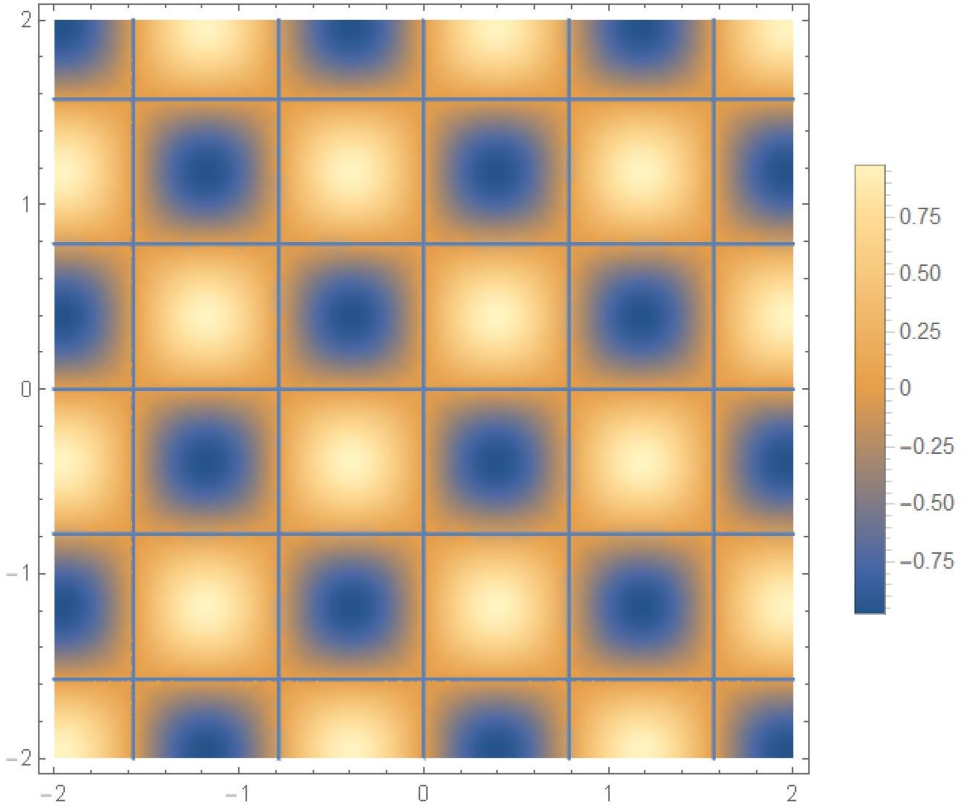
Действие логарифма

```
Map[ContourPlot[#[[1]], {x, -1, 2}, {y, #[[2]], #[[3]]},
   PlotLegends → Automatic] &, {{y, -7, 7}, {Im[Exp[x + I y]], -Pi, Pi}}]
```

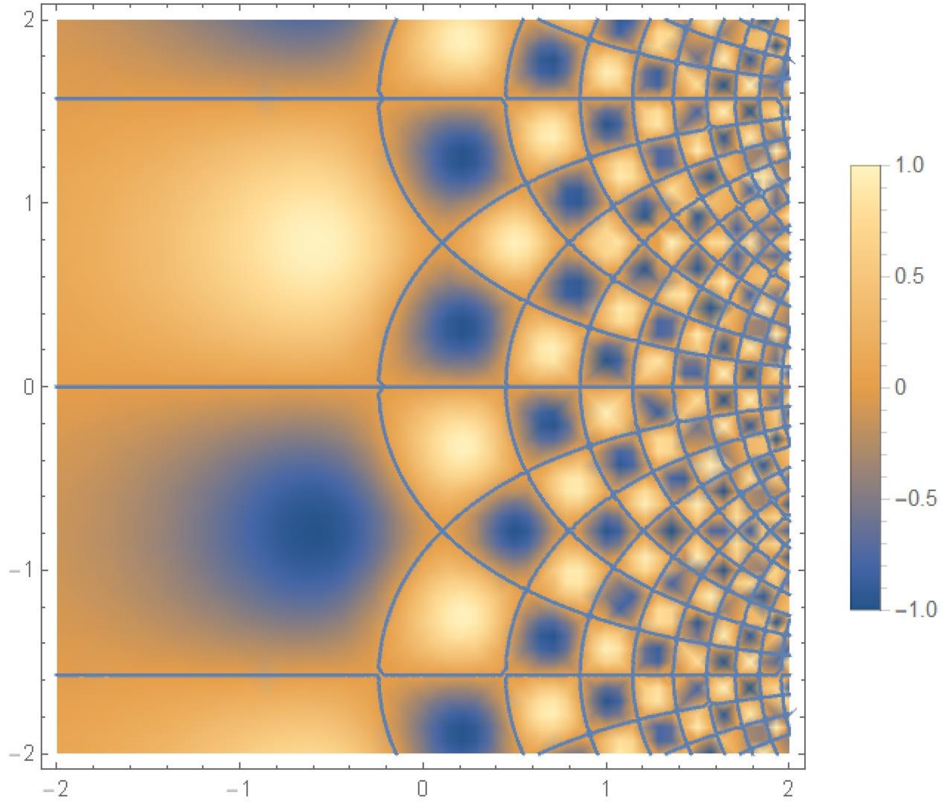


Действие логарифма

```
Show[{DensityPlot[Sin[4 x] Sin[4 y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
   PlotLegends → Automatic],
  ContourPlot[Sin[4 x] Sin[4 y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]}]
```




```
f1[x_, y_] := Module[{w}, w = Exp[x + I y]; Sin[4 Re[w]] Sin[4 Im[w]]];
Show[{DensityPlot[f1[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotLegends → Automatic],
  ContourPlot[f1[x, y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]}]
```



Ветви корня

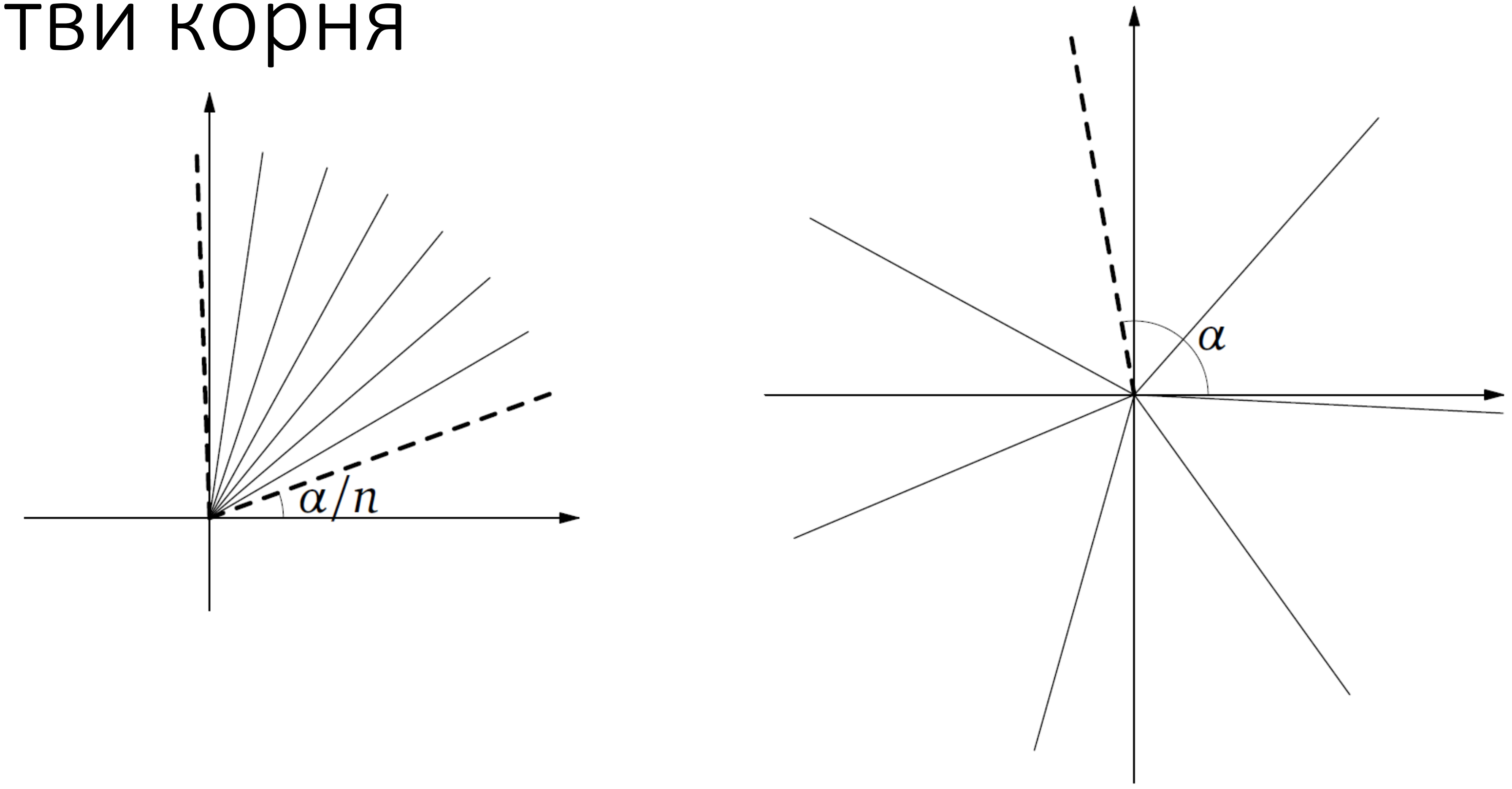


Рис. 2.2. Отображение $z \mapsto z^n$ (в нашем случае $n = 5$) переводит открытый сектор раствором $2\pi/n$ в плоскость с разрезом по лучу. Лучи, выходящие из нуля, переходят в лучи, выходящие из нуля.

Ветви корня

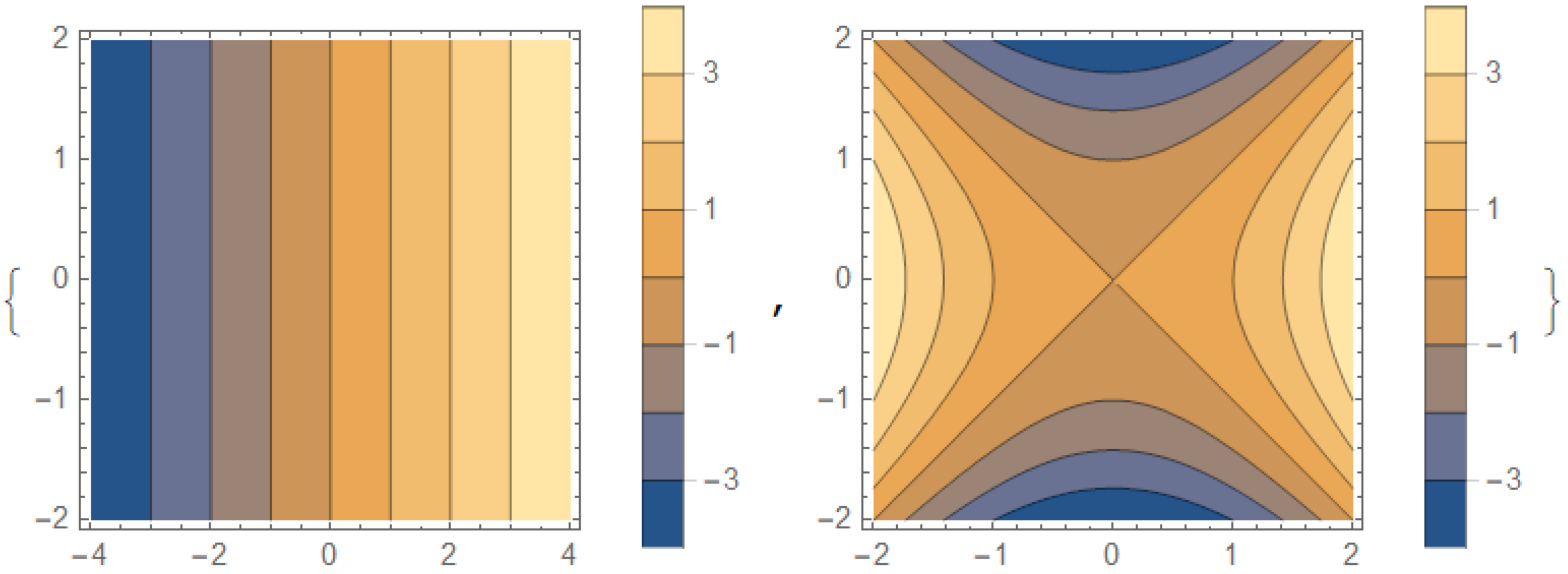
Предложение 2.13. *Пусть $n > 1$ — натуральное число, и пусть через V_α, где $\alpha \in \mathbb{R}$, обозначено то же открытое множество, что в предложении 2.12. Тогда для каждого целого $k \in [0; n-1]$ можно определить на V_α голоморфную функцию $\sqrt[n]{z}$ по формуле*

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \quad \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi.$$

Имеем $(\sqrt[n]{z})^n = z$, $(\sqrt[n]{z})' = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}}$.

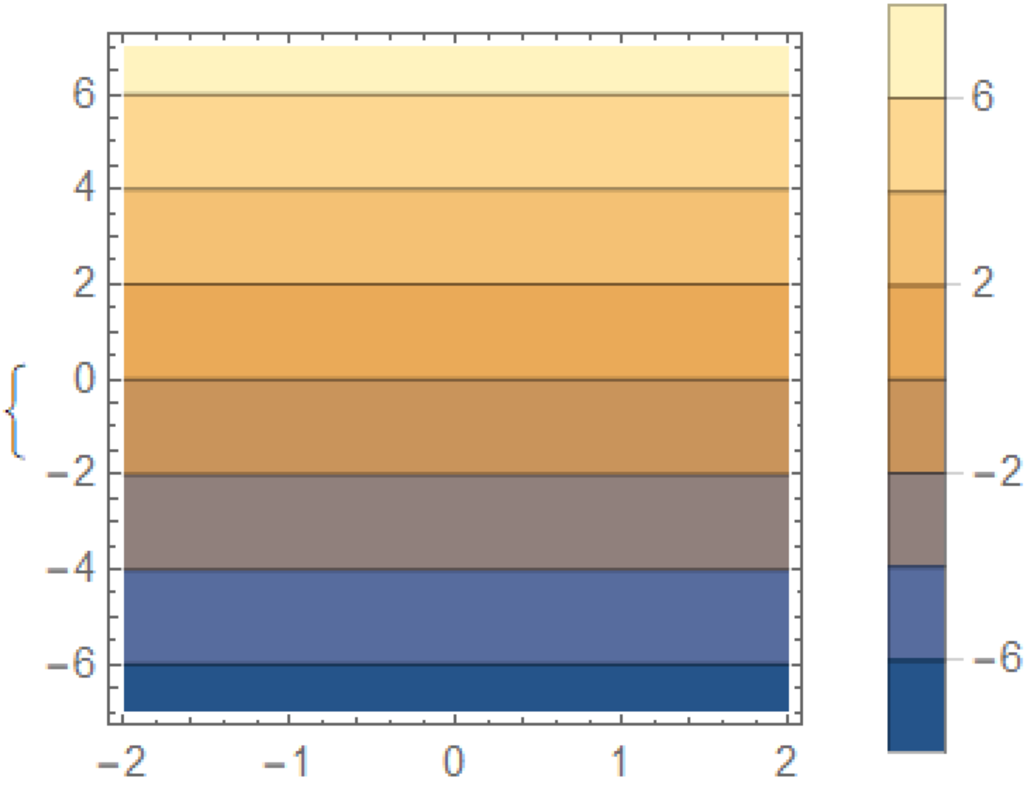
Действие квадратного корня

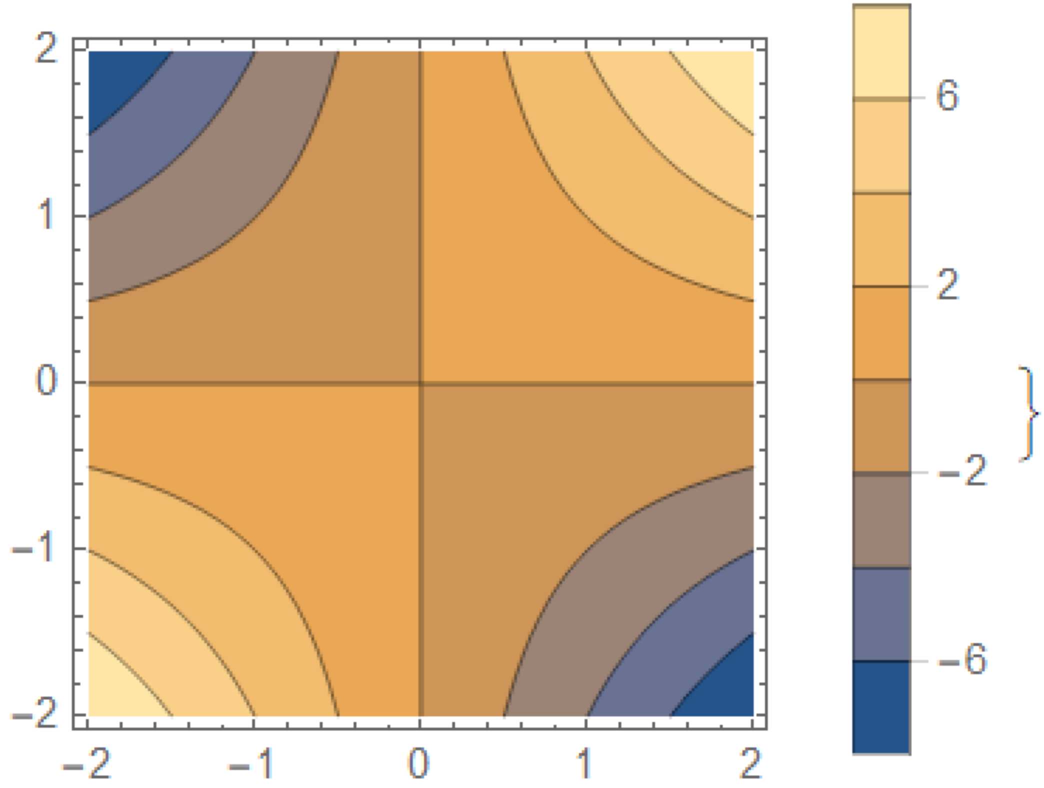
```
Map[ContourPlot[#[[1]], {x, #[[2]], #[[3]]}, {y, -2, 2},
   PlotLegends → Automatic] &, {{x, -4, 4}, {Re[(x + I y)^2], -2, 2}}]
```



Действие квадратного корня

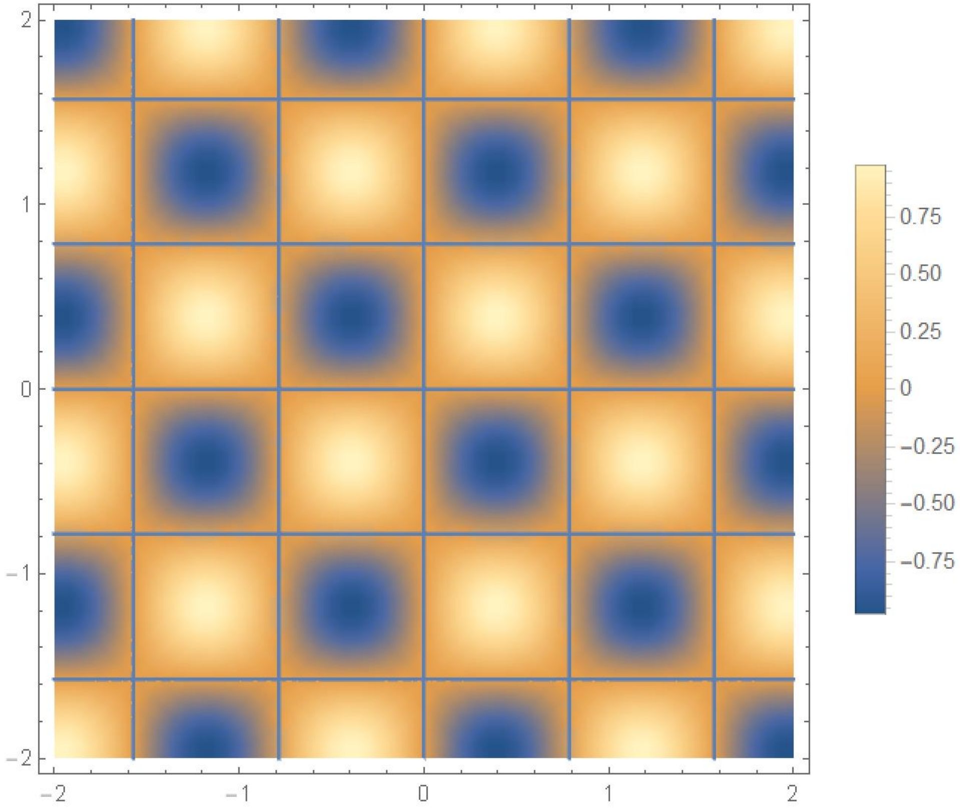
```
Map[ContourPlot[#[[1]], {x, -2, 2}, {y, #[[2]], #[[3]]},
   PlotLegends → Automatic] &, {{y, -7, 7}, {Im[(x + I y)^2], -2, 2}}]
```



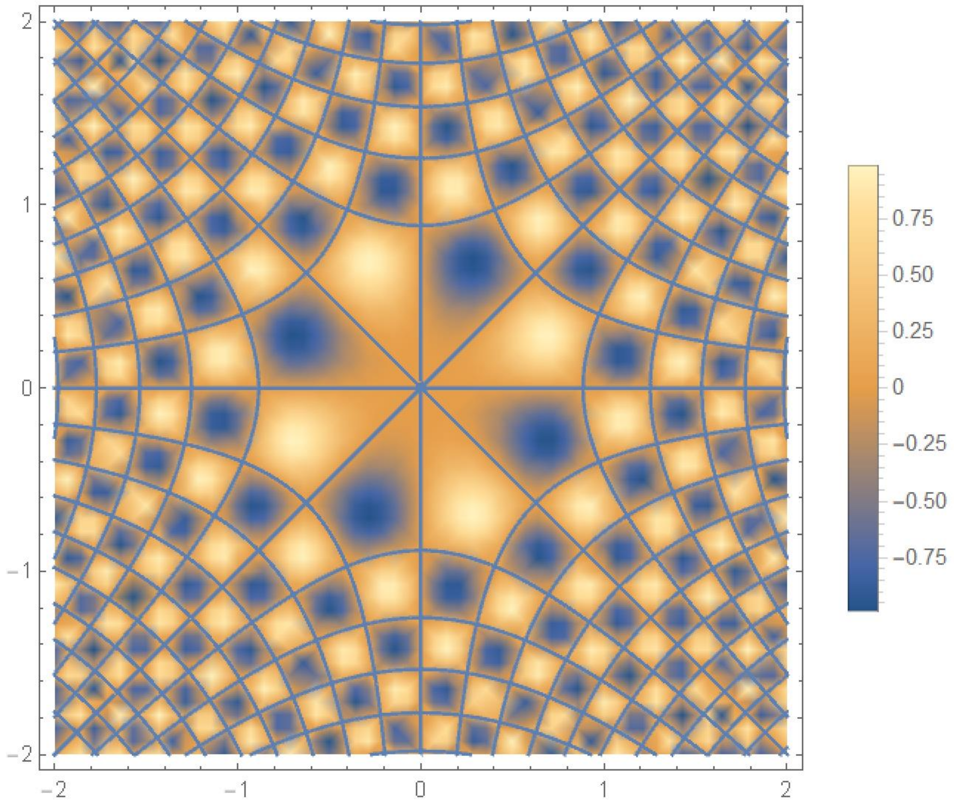


Действие квадратного корня

```
Show[{DensityPlot[Sin[4 x] Sin[4 y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
   PlotLegends → Automatic],
  ContourPlot[Sin[4 x] Sin[4 y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]}]
```

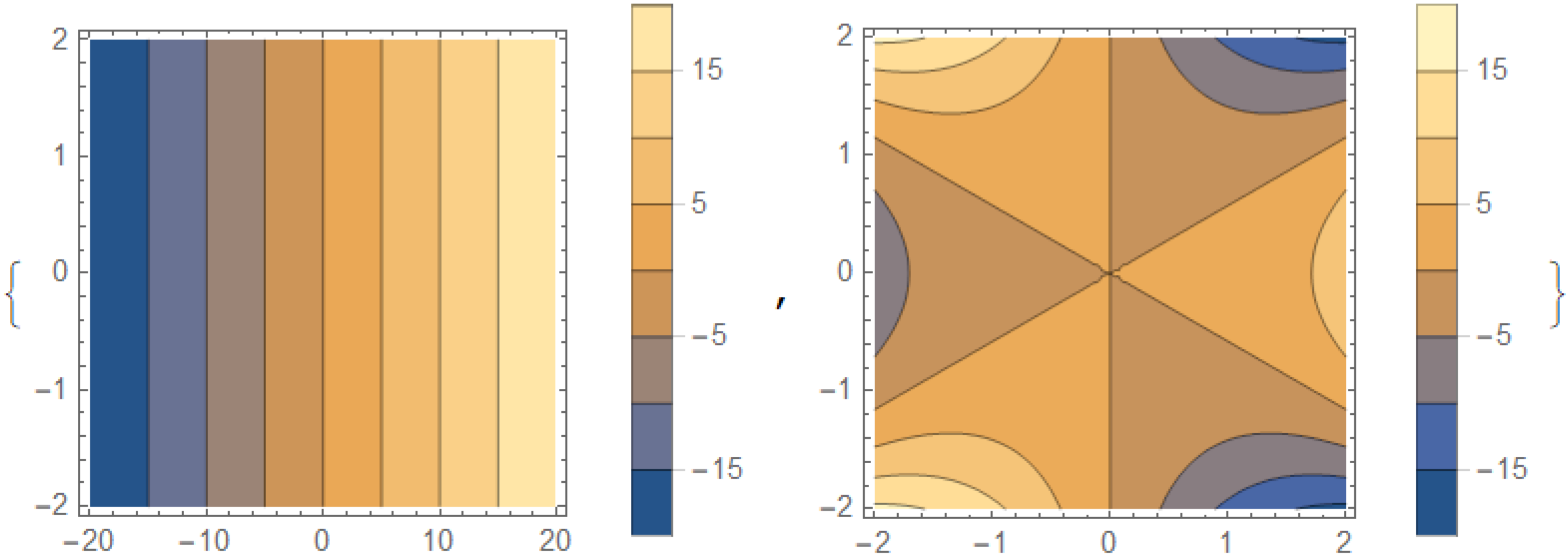



```
f1[x_, y_] := Module[{w}, w = (x + I y)^2; Sin[4 Re[w]] Sin[4 Im[w]]];
Show[{DensityPlot[f1[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotLegends → Automatic],
  ContourPlot[f1[x, y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, MaxRecursion → 3]}]
```



Действие кубического корня

```
Map[ContourPlot[#[[1]], {x, #[[2]], #[[3]]}, {y, -2, 2},
   PlotLegends → Automatic] &, {{x, -20, 20}, {Re[(x + I y)^3], -2, 2}}]
```



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- https://www.hse.ru
- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ