1.1. Пусть X — нормированное пространство. Докажите, что операции сложения $X \times X \to X$ и умножения на число $\mathbb{K} \times X \to X$ непрерывны.

1.2. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство. Докажите, что его замыкание $\overline{X_0}$ — тоже векторное подпространство в X.

1.3. Пусть $p, q \in (1, +\infty)$, и пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Докажите *неравенство Юнга*:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (a, b \geqslant 0).$$

2) Из неравенства Юнга выведите *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

3) Из неравенства Гёльдера выведите *неравенство Минковского*:

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

1.4. Нарисуйте единичный шар на плоскости $\mathbb{R}^2$, снабженной нормой $\|\cdot\|_p$, для различных $p \in [1, +\infty]$. Обратите внимание на случаи $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. Что происходит с единичным шаром с ростом p?

1.5. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.

1) Докажите, что $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_p$ на $\mathbb{K}^n$.
2) Докажите, что существует такая константа $C = C_{n,p,q} > 0$, что $\|\cdot\|_p \leqslant C\|\cdot\|_q$ на пространстве $\mathbb{K}^n$.
3) Можно ли эту константу выбрать не зависящей от n?
4) Найдите наименьшую константу $C_{n,p,q}$ с указанным свойством. Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора.

1.6. Пусть c_{00} — пространство всех *финитных* последовательностей (т.е. числовых последовательностей $x = (x_n)$, для каждой из которых существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n = 0$ для всех $n > N$). Эквивалентны ли нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на c_{00} при $p \neq q$?

1.7. Докажите, что последовательность $(x^{(k)})$ в пространстве $\mathbb{K}^n$ сходится к вектору $x \in \mathbb{K}^n$ по норме $\|\cdot\|_p$ (где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$) тогда и только тогда, когда она сходится к x покоординатно.

1.8. Докажите, что c_0 замкнуто в ℓ^∞. Чему равно замыкание ℓ^p в ℓ^∞?

1.9. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Докажите, что $\ell^p \subset \ell^q$, но $\ell^p \neq \ell^q$ при $p \neq q$. Чему равна норма оператора вложения ℓ^p в ℓ^q?

1.10. Пусть X — множество. Докажите, что последовательность (f_n) в $\ell^\infty(X)$ сходится к $f \in \ell^\infty(X)$ по норме $\|\cdot\|_\infty$ тогда и только тогда, когда она сходится к f равномерно.

1.11. Пусть X — полунормированное пространство, и пусть $N = \{x \in X : \|x\| = 0\}$. Покажите, что формула

$$\|x + N\|^\wedge = \|x\| \qquad (x \in X)$$

корректно определяет норму на X/N. (Корректность в данном случае означает, что правая часть этой формулы зависит лишь от класса $x + N \in X/N$, а не от самого элемента $x \in X$).

1.12. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $p, q \in (1, +\infty)$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Докажите, что если $f \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$ и $g \in \mathscr{L}^q(X, \mu)$, то функция fg интегрируема и справедливо *неравенство Гёльдера*

$$\int_X |fg|\, d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

2) Из неравенства Гёльдера выведите, что $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ — векторное пространство, и что справедливо *неравенство Минковского*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (f, g \in \mathscr{L}^p(X, \mu)).$$

1.13. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.

1) Докажите, что существует такая константа $C = C_{a,b,p,q} > 0$, что $\|\cdot\|_p \leqslant C\|\cdot\|_q$ на пространстве $C[a, b]$.
2) Найдите наименьшую константу $C_{a,b,p,q}$ с указанным свойством. Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора.
3) Эквивалентны ли нормы $\| \cdot \|_p$ и $\| \cdot \|_q$ на $C[a, b]$ при $p \neq q$?

1.14. Проверьте, что измеримая функция существенно ограничена тогда и только тогда, когда она эквивалентна некоторой измеримой ограниченной функции.

1.15. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть f — неотрицательная существенно ограниченная функция на X. Напомним (см. лекцию), что ее *существенная верхняя грань* определяется формулой

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \Big\{ \sup_{x \in E} f(x) : E \subset X,\ \mu(X \setminus E) = 0 \Big\}.$$

Докажите, что inf в этой формуле достигается. Как следствие, $\operatorname{ess\,sup} f = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$ п.в.

1.16. Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что $\operatorname{ess\,sup} |f| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

1.17. Докажите, что $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ — векторное пространство, и что формула

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f|$$

задает полунорму на $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$.

1.18. Пусть $\mu(X) < \infty$. Докажите, что $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Чему равна норма оператора вложения $L^q(X, \mu)$ в $L^p(X, \mu)$?

1.19. Докажите, что $L^p[a, b] \neq L^q[a, b]$ при $p \neq q$.

1.20. Пусть $X = \mathbb{N}$, и пусть μ — «считающая» мера на σ-алгебре всех подмножеств $\mathbb{N}$, заданная формулой $\mu(A) = |A|$ (число элементов в A). Убедитесь, что $L^p(\mathbb{N}, \mu) = \ell^p$ для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Сопоставьте это наблюдение с результатом задачи 1.9 и убедитесь, что результат задачи 1.18 не переносится на случай, когда $\mu(X) = \infty$.

1.21. Покажите, что $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R})$ при $p \neq q$. Полезно сравнить результат этой задачи с задачами 1.9 и 1.18.

2.1. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или c_0. Напомним, что *диагональный оператор* $M_\lambda \colon X \to X$ переводит вектор $x \in X$ в вектор $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, и что $\|M_\lambda\| = \sup_n |\lambda_n|$ (см. лекцию). При каких условиях оператор M_λ достигает нормы?

2.2. Зафиксируем точку $t_0 \in [a,b]$ и рассмотрим линейный функционал

$$F \colon (C[a,b], \|\cdot\|_p) \to \mathbb{K}, \quad F(x) = x(t_0).$$

1) При каких $p \in [1,+\infty]$ функционал F ограничен? **2)** Найдите его норму. **3)** Достигает ли он нормы?

2.3. Пусть $X = (C[a,b], \|\cdot\|_p)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, и пусть $f \in C[a,b]$. *Оператор умножения* $M_f \colon X \to X$ действует по правилу

$$M_f(g) = fg \qquad (f \in X).$$

1) Докажите, что M_f ограничен. **2)** Вычислите его норму. **3)** При каких условиях оператор M_f достигает нормы?

2.4. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $f \colon X \to \mathbb{K}$ — существенно ограниченная измеримая функция. Зафиксируем $p \in [1,+\infty]$. *Оператор умножения* $M_f \colon L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ действует по правилу

$$M_f(g) = fg \qquad (f \in L^p(X,\mu)).$$

1) Докажите, что M_f ограничен. **2)** Вычислите его норму. **3)** При каких условиях оператор M_f достигает нормы?

2.5. Пусть $X = L^p[0,1]$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$. Оператор *неопределенного интегрирования* $T \colon X \to X$ действует по формуле

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (f \in X).$$

1) Докажите, что T ограничен. **2)** Для $p=1$ и $p=\infty$ вычислите его норму. **3)** Для тех же p выясните, достигает ли он нормы.

Анонс: для $p=2$ норма этого оператора равна $2/\pi$. В свое время мы это сможем доказать.

2.6. Пусть $I = [a,b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. *Интегральный оператор* $T \colon C(I) \to C(I)$ задается формулой

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy.$$

Докажите, что T действительно отображает $C(I)$ в $C(I)$, что он ограничен, и что $\|T\| \leqslant \|K\|_\infty$.

2.7. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X\times X, \mu\times\mu)$. *Интегральный оператор Гильберта–Шмидта* $T \colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ задается формулой

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\,d\mu(y).$$

Докажите, что T действительно отображает $L^2(X,\mu)$ в $L^2(X,\mu)$, что он ограничен, и что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$.

2.8. Линейный функционал F на $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ задан формулой

$$F(f) = 2f(0) - 3f(1) + \int_0^1 f(t)\,dt.$$

1) Докажите, что F ограничен. **2)** Вычислите $\|F\|$. **3)** Достигает ли F нормы?

2.9. Пусть X, Y — нормированные пространства, причем X конечномерно. Докажите, что любой линейный оператор $T \colon X \to Y$ ограничен и достигает нормы.

2.10. Пусть X, Y — нормированные пространства. Напомним, что линейный оператор $T \colon X \to Y$ называется *коизометрией*, если он отображает открытый единичный шар пространства X на открытый единичный шар пространства Y.

1) Докажите, что если T отображает замкнутый единичный шар пространства X на замкнутый единичный шар пространства Y, то T — коизометрия.

2) Верно ли обратное утверждение?

3) Докажите, что инъективная коизометрия — это то же самое, что изометрический изоморфизм.

2.11. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или c_0. При каких условиях на λ диагональный оператор $M_\lambda \colon X \to X$ **1)** топологически инъективен; **2)** открыт; **3)** изометричен; **4)** коизометричен?

2.12. Ответьте на те же четыре вопроса для оператора умножения из задачи 2.4.

2.13. Постройте линейные изометрические вложения **1)** $\mathbb{K}_p^n$ в $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, **2)** ℓ^∞ в $C_b(\mathbb{R})$, **3)** c_0 в $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

2.14. Докажите, что нормированное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нем есть плотное подпространство не более чем счетной размерности.

2.15. Докажите, что пространства c_0, $C[a,b]$, ℓ^p, $L^p[a,b]$, $L^p(\mathbb{R})$ при $p < \infty$ сепарабельны, а ℓ^∞, $C_b(\mathbb{R})$, $L^\infty[a,b]$ и $L^\infty(\mathbb{R})$ несепарабельны.

В этом и последующих листках задачи, после номера которых стоит буква “b”, являются бонусными. Это означает, что они не являются обязательными и не будут учитываться при выведении оценки за листки, а будут оцениваться отдельно в качестве дополнительных баллов.

3.1. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Докажите, что
1) факторполунорма на X/X_0 действительно является полунормой;
2) топология на X/X_0, порожденная факторполунормой, является фактортопологией топологии на X (т.е. множество $U \subset X/X_0$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз при факторотображении $Q\colon X \to X/X_0$ открыт в X).

3.2. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Верно ли, что у любого вектора из X/X_0 есть представитель в X, имеющий ту же норму?

Указание. Эта задача эквивалентна одной из задач листка 2 (какой?).

3.3. Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $B(X)$ — пространство всех ограниченных измеримых функций на X, снабженное равномерной нормой. Постройте изометрический изоморфизм между $L^\infty(X, \mu)$ и некоторым факторпространством пространства $B(X)$.

3.4. Докажите, что нормированное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нем есть плотное векторное подпространство не более чем счетной размерности.

3.5. Докажите, что пространства c_0, $C[a,b]$, ℓ^p, $L^p[a,b]$, $L^p(\mathbb{R})$ при $p < \infty$ сепарабельны, а ℓ^∞, $C_b(\mathbb{R})$, $L^\infty[a,b]$ и $L^\infty(\mathbb{R})$ несепарабельны.

3.6. Докажите, что если фундаментальная последовательность в метрическом пространстве имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

Определение 3.1. Пусть X — нормированное пространство. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n$ векторов из X *абсолютно сходится*, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$.

3.7. Докажите, что нормированное пространство X полно тогда и только тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.

3.8. Пусть $\{X_i : i \in I\}$ — семейство нормированных пространств, и пусть X — их ℓ^p-сумма (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Докажите, что X полно тогда и только тогда, когда полны все пространства X_i.

3.9. 1) Докажите, что пространство $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ неполно для любого $p \in [1, +\infty]$ и что пространство $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ неполно при $q > p$. **2)** Опишите пополнения этих пространств.

3.10. 1) При $p < \infty$ предъявите фундаментальную последовательность в нормированном пространстве $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, не имеющую предела.
2) Опишите пополнение этого пространства.

3.11. 1) Докажите полноту пространства $C^n[a,b]$ относительно нормы $\|f\| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$.
2) Полно ли это пространство относительно равномерной нормы? Если нет, то опишите его пополнение.

3.12. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что пространство $L^\infty(X, \mu)$ полно.

3.13. Докажите, что в банаховом пространстве любая убывающая последовательность $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ замкнутых шаров имеет непустое пересечение (даже если радиусы шаров не стремятся к нулю).

В дальнейшем через $\mathscr{N}orm$ обозначается категория, объекты которой — нормированные пространства, а морфизмы — ограниченные линейные операторы. Через $\mathscr{N}orm_1$ будет обозначаться категория с теми же объектами, что и в $\mathscr{N}orm$, морфизмы которой — линейные *сжатия* (т.е. линейные операторы нормы $\leqslant 1$). Полная подкатегория в $\mathscr{N}orm$ (соответственно, $\mathscr{N}orm_1$), состоящая из банаховых пространств, будет обозначаться через $\mathscr{B}an$ (соответственно, $\mathscr{B}an_1$).

3.14-b. 1) Докажите, что в $\mathscr{N}orm$ и $\mathscr{B}an$ любой конечный набор объектов обладает произведением и копроизведением.
2) Докажите, что в $\mathscr{N}orm_1$ и $\mathscr{B}an_1$ любой набор объектов обладает произведением и копроизведением.
3) Верно ли предыдущее утверждение для категорий $\mathscr{N}orm$ и/или $\mathscr{B}an$?

3.15-b. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Докажите, что факторпространство X/X_0 вместе с факторотображением $Q\colon X \to X/X_0$ — это коядро вложения $X_0 \hookrightarrow X$ (в $\mathscr{N}orm$ и в $\mathscr{N}orm_1$, а в случае полного X — в $\mathscr{B}an$ и $\mathscr{B}an_1$).

3.16-b. Пусть X, Y — нормированные пространства. Докажите, что морфизм $T\colon X \to Y$ является
1) изоморфизмом в $\mathscr{N}orm$ (или $\mathscr{B}an$) $\iff$ он — топологический изоморфизм;
2) изоморфизмом в $\mathscr{N}orm_1$ (или $\mathscr{B}an_1$) $\iff$ он — изометрический изоморфизм;
3) мономорфизмом в $\mathscr{N}orm$, $\mathscr{N}orm_1$, $\mathscr{B}an$ или $\mathscr{B}an_1$ $\iff$ он инъективен;
4) эпиморфизмом в $\mathscr{N}orm$, $\mathscr{N}orm_1$, $\mathscr{B}an$ или $\mathscr{B}an_1$ $\iff$ он имеет плотный образ;
5) ядром в $\mathscr{N}orm$ или $\mathscr{B}an$ $\iff$ он топологически инъективен и (в случае категории $\mathscr{N}orm$) имеет замкнутый образ;
6) ядром в $\mathscr{N}orm_1$ или $\mathscr{B}an_1$ $\iff$ он изометричен и (в случае категории $\mathscr{N}orm_1$) имеет замкнутый образ;
7) коядром в $\mathscr{N}orm$ или $\mathscr{B}an$ $\iff$ он открыт;
8) коядром в $\mathscr{N}orm_1$ или $\mathscr{B}an_1$ $\iff$ он коизометричен.

4.1. Пусть f — полуторалинейная форма на векторном пространстве H. Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, и пусть $\zeta \in \mathbb{C}$ — корень из 1 степени n, $\zeta \neq \pm 1$. Докажите *тождество поляризации*:

$$f(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k f(x + \zeta^k y, x + \zeta^k y).$$

4.2. Пусть H — предгильбертово пространство. Докажите, что скалярное произведение непрерывно как функция на $H \times H$.

4.3. Докажите, что в любом предгильбертовом пространстве справедливо *тождество параллелограмма*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

4.4. Покажите, что норма на пространствах $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, ℓ^p, $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$, $L^p(X, \mu)$ (где (X, μ) — пространство с мерой, содержащее хотя бы два непустых измеримых подмножества) при $p \neq 2$ и $n > 1$ не порождается никаким скалярным произведением.

4.5. Придумайте обобщение тождества параллелограмма на случай n векторов.

4.6. Покажите, что норма на пространствах ℓ^p, $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$, $L^p(X, \mu)$ (где (X, μ) — пространство с мерой, содержащее бесконечно много измеримых подмножеств) при $p \neq 2$ не эквивалентна никакой норме, порожденной скалярным произведением.

4.7-b (*теорема фон Ноймана–Йордана*). Пусть H — нормированное пространство, в котором выполняется тождество параллелограмма. Покажите, что формула

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2 \qquad (x, y \in H)$$

задает скалярное произведение на H, и что норма, порожденная этим скалярным произведением, совпадает с исходной.

4.8. 1) Постройте пример предгильбертова пространства H и замкнутого векторного подпространства $H_0 \subset H$, для которых $H_0 \oplus H_0^{\perp} \neq H$.
2) Покажите, что такое подпространство H_0 есть в любом неполном предгильбертовом пространстве.

4.9. Постройте унитарный изоморфизм гильбертовых пространств $L^2[a, b]$ и $L^2[0, 1]$.

4.10. Докажите, что пополнение предгильбертова пространства является гильбертовым пространством.

4.11. Докажите, что факторпространство (пред)гильбертова пространства по замкнутому векторному подпространству само является (пред)гильбертовым пространством.

4.12. *Система Уолша* — это система функций на $[0, 1]$, полученная из системы Радемахера $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ добавлением функции $r_0 \equiv 1$ и всевозможных произведений вида $r_{i_1} \cdots r_{i_n}$, где $i_1 < \ldots < i_n$. Докажите, что система Уолша — ортонормированный базис в $L^2[0, 1]$.

4.13. *Система Хаара* — это система функций на $[0,1]$, задаваемых формулами

$$\chi_k^{(i)}(t) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } \frac{2i-2}{2^{k+1}} \leqslant t < \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{k/2} & \text{при } \frac{2i-1}{2^{k+1}} \leqslant t < \frac{2i}{2^{k+1}}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$(k = 0, 1, \ldots;\ i = 1, \ldots, 2^k)$. Докажите, что система Хаара — ортонормированный базис в $L^2[0,1]$.

4.14. Докажите, что ортонормированная система в сепарабельном предгильбертовом пространстве не более чем счетна.

4.15. Докажите, что пространство $C_c^\infty(a,b)$ гладких функций на интервале (a,b) с компактным носителем плотно в $L^p[a,b]$ для всех $1 \leqslant p < \infty$.

Определение 4.1. Пусть $f \in L^2[a,b]$. Функция $f' \in L^2[a,b]$ называется *обобщенной производной* функции $f \in L^2[a,b]$, если

$$\int_a^b f'\varphi\, dt = -\int_a^b f\varphi' dt$$

для всех $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$.

4.16. Докажите, что если $f \in L^2[a,b]$ обладает обобщенной производной f', то f' единственна (как элемент пространства $L^2[a,b]$).

4.17. *Пространство Соболева* $W^{1,2}(a,b)$ определяется как множество всех $f \in L^2[a,b]$, обладающих обобщенной производной $f' \in L^2[a,b]$. Докажите, что $W^{1,2}(a,b)$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b (f\bar{g} + f'\bar{g}')\, dt.$$

4.18. 1) Пусть (e_n) — стандартный ортонормированный базис в пространстве ℓ^2. Положим $x = \sum_n n^{-1} e_n$ и $H_0 = \operatorname{span}\{x, e_2, e_3, \ldots\}$. Покажите, что $(e_2, e_3, \ldots)$ — максимальная ортонормированная система в H_0, не являющаяся тотальной.
2) Докажите, что в любом неполном сепарабельном предгильбертовом пространстве существует максимальная ортонормированная система, не являющаяся тотальной.

4.19. Докажите, что ортонормированная система (e_i) в предгильбертовом пространстве H тотальна тогда и только тогда, когда для каждого $x \in H$ выполнено равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_i |\langle x, e_i\rangle|^2$.

4.20-b. 1) Постройте пример предгильбертова пространства, чья гильбертова размерность строго меньше, чем у его пополнения.
2) Постройте пример предгильбертова пространства, в котором нет ортонормированного базиса.

5.1. Напомним (см. лекцию), что если $1 < p, q < +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$, то существует изометрический изоморфизм $\ell^q \xrightarrow{\sim} (\ell^p)^*$. Следуя той же схеме, постройте изометрические изоморфизмы **1)** $\ell^\infty \xrightarrow{\sim} (\ell^1)^*$; **2)** $\ell^1 \xrightarrow{\sim} (c_0)^*$.

5.2. Обозначим любой из трех изоморфизмов, упомянутых в предыдущей задаче, через α. Когда функционал $F_a = \alpha(a)$ достигает нормы?

5.3. Можно ли тем же способом, что и в задаче 5.1, построить изометрический изоморфизм $\ell^1 \cong (\ell^\infty)^*$?

5.4. Опишите сопряженные к следующим операторам:
1) диагональный оператор в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0;
2) оператор правого сдвига в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0;
3) оператор двустороннего сдвига в $\ell^p(\mathbb{Z})$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или в $c_0(\mathbb{Z})$;
4) оператор неопределенного интегрирования в $L^2[0, 1]$ (см. задачу 2.5);
5) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X, \mu)$ (см. задачу 2.7).

5.5. 1) Докажите, что линейный функционал на нормированном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто. **2)** Верно ли аналогичное утверждение для линейных операторов?

5.6. Докажите, что на любом бесконечномерном нормированном пространстве существует разрывный линейный функционал.

Указание: воспользуйтесь тем, что в любом векторном пространстве есть алгебраический базис (т.е. максимальное линейно независимое подмножество).

5.7. Пусть $X = \mathbb{R}^2_p$ — плоскость, снабженная нормой $\| \cdot \|_p$, и пусть $X_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset X$ — «ось абсцисс». Зададим функционал $f_0 \colon X_0 \to \mathbb{R}$ формулой $f_0(x, 0) = x$. Ясно, что $\|f_0\| = 1$. Сколько существует линейных функционалов на X, продолжающих f_0 и имеющих норму 1? (Рассмотрите всевозможные $p \in [1, +\infty]$.)

5.8. Пусть X — нормированное пространство.
1) Докажите, что если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно.
2) Верно ли обратное?
3) Покажите, что не существует топологического изоморфизма между $(\ell^\infty)^*$ и ℓ^1.

5.9-b. Докажите, что c_0 не изоморфно сопряженному ни к какому нормированному пространству.

5.10-b. Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$.
1) Постройте изометрический изоморфизм $L^p(X, \mu)^* \cong L^q(X, \mu)$.
2) В предположении, что μ σ-конечна, постройте изометрический изоморфизм $L^1(X, \mu)^* \cong L^\infty(X, \mu)$.
Указание. Отображение $L^q(X, \mu) \to L^p(X, \mu)^*$ строится так же, как в случае $X = \mathbb{N}$ (см. лекцию). Для доказательства его сюръективности воспользуйтесь теоремой Радона–Никодима.