Листок 6

Задача 1

(А) Рассмотрим такой базис: n матриц, в которых все, кроме одной единичной строки, — нулевые, затем еще n матриц, у которых в одной единичной строке последний элемент заменен на 0, затем еще и предпоследний и т. д. В качестве примера можно записать этот базис для пространства 3×3 матриц:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Несложно заметить, что в таком базисе матрица оператора L_A будет иметь блочно-диагональный вид, матрица будет размером $n^2 \times n^2$, при этом в ней все блоки кроме диагональных будут нулевыми, а диагональные - совпадать с исходной матрицей A. Тогда $\det(L_A) = (\det(A))^n$ и $\operatorname{tr}(L_A) = n \cdot \operatorname{tr}(A)$.

(Б) Аналогично пункту (А), но каждую базисную матрицу нужно транспонировать. После непосредственной проверки получим, что ответ не изменится.

(В) Оператор Ad_A является композицией операторов правого умножения на обратную матрицу и левого умножения. В предыдущих двух пунктах было доказано, что определители этих операторов равны соответственно $(\det(A^{-1}))^n$ и $(\det(A))^n$. Определитель композиции — это произведение определителей, поэтому $\det(\mathrm{Ad}_A) = 1$.

Для того, чтобы найти след, рассмотрим базис из матричных единиц. Рассмотрев матрицы A и $B = A^{-1}$, и умножив их справа или слева на все базисные векторы, получим, что в случае левого умножения матрица оператора будет блочной и состоять из скалярных блоков размера n^2, в которых на диагонали стоят a_{ij}, при этом блоки расположены в том же порядке, что и числа в матрице A. В то же время матрица правого умножения на обратную будет просто блочно-диагональной, где на диагонали - блоки, совпадающие с матрицей B. Чтобы найти след, достаточно перемножить соответствующие строки и столбцы в A и B и сложить:

$$b_{11} \cdot \sum a_{ii} + b_{22} \cdot \sum a_{ii} + \dots + b_{nn} \cdot \sum a_{ii} = \sum a_{ii} \cdot \sum b_{ii} = \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(A^{-1})$$

Задача 2*

-

Задача 3

Рассмотрим действие оператора на стандартный базис в пространстве многочленов степени не выше n:

$$x_i \mapsto x_i$$
$$x_i^2 \mapsto 2x_i \cdot x_i = 2x_i^2$$
$$x_i x_j \mapsto x_i x_j + x_j x_i = 2x_i x_j$$
$$\dots$$

То есть каждый базисный вектор умножается на сумму степеней x_i, которые в него входят. Таким образом, собственные числа — это числа от 1 до n, так как на базисные векторы оператор действует умножением на константу. Собственные подпространства — это подпространства, состоящие из базисных векторов, многочленов одинаковой степени (так как собственных векторов не может быть больше, чем количество строк в матрице, никаких других векторов там нет, потому что количество строк равно количеству векторов в базисе). В данном случае размерность каждого собственного подпространства совпадает с кратностью собственного значения в характеристическом многочлене, поэтому оператор диагонализуем, что равносильно тому, что он аннулируется многочленом, который раскладывается на попарно различные линейные множители. Тогда минимальный многочлен: $\mu_{F(t)} = \prod\limits_{i=1}^{n}(t-i)$.

Задача 4

Заметим, что можно переставить строки/столбцы матрицы так, чтобы она стала блочно-диагональной, при этом если изначальная матрица $n \cdot n$ и n — нечетное, то один блок в середине будет размером $1 \cdot 1$, иначе — все $2 \cdot 2$. Блоки будут иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i \\ a_{n-i+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица даигонализуема, когда диагонализуем каждый блок (блок $1 \cdot 1$ диагонализуем всегда). Характеристический многочлен блока имеет вид $t^2 - a_i a_{n-i+1}$, приравнивая к нулю, получаем, что если произведение $a_i a_{n-i+1} > 0$, то оператор диагонализуем, если меньше — нет. В случае, если произведение равно 0, то и $t^2 = 0$, из чего следует, что оператор нильпотентен. Это означает, что такой блок просто зануляется и, соответственно, диагонализуем.

Задача 5

Рассмотрим какую-то блочную матрицу $\begin{pmatrix} E & \lambda \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Она, очевидно, невырождена. Нужно придумать еще две матрицы, такие что их характеристические многочлены равны $\det(tE - FG)$ и $\det(te - GF)$. Пусть:

$$\begin{pmatrix} E & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GF & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & FG \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

Надо найти λ, μ и θ:

$$\begin{pmatrix} GF + \lambda\mu & 0 \\ E\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E\theta & \theta\lambda + FG \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} GF + \lambda\mu = 0 \\ \mu = \theta \\ \theta\lambda + FG = 0 \end{cases}$$

Пусть $\mu = \theta = F$, тогда:

$$\begin{cases} GF + \lambda F = 0 \\ F\lambda + FG = 0 \end{cases}$$

Из этого следует, что $\lambda = -G$. Характеристические многочлены полученных матриц равны $\det(tE - FG)$ и $\det(te - GF)$, при этом матрицы подобны, из чего следует, что $\chi_{FG} = \chi_{GF}$.

Задача 6

Пусть g_i — неприводимый делитель $\mu_{F(t)}$, тогда $\mu_{F(t)} = g_i \cdot G$. Рассмотрим теперь ядро оператора g_i. Оно инвариантно относительно оператора F, ведь F и g_i коммутируют друг с другом. Многочлен g_i аннулирует $F|_{\ker g_i}$, из чего следует, что g_i делится на μ_{g_i}, а из этого уже можно сделать вывод, что они просто равны. Осталось доказать, что ядро g_i — ненулевое. Предположим, что это не так, тогда можно рассмотреть g_i^{-1}. Верно равенство: $\mu_{F(t)} = g_i(F) \cdot D(F)$, так как в разложение на множители нашего минимального многочлена можно просто подставить оператор F, тогда это равенство переписывается как $0 = g_i \cdot G(F)$. По предположению существует g_i^{-1}, поэтому, домножая на него слева обе части равенства, получаем, что $G(F) = 0$, что невозможно, так как этот многочлен зануляется на операторе F и имеет меньшую степень, чем минимальный многочлен $\mu_{F(t)}$. Тогда получим $U_i = \ker g_i$, так далее можно раскладывать по индукции.

Задача 7

(А) Докажем для начала, что минимальный многочлен какого-то вектора делит характеристический многочлен всей матрицы. Предположим, что это неверно для какого-то вектора. Если подставить в характеристический многочлен оператор, получим 0, то есть остаток от деления на аннулирующий многочлен тоже должен зануляться на $F(v)$. Получим многочлен, меньшей степени, который равен 0 на $F(v)$, следовательно, изначально выбранный многочлен не был минимальным, противоречие.

Известно, что все векторы вида $F^a(v)$ линейно независимы для любого $v \in V$, а многочлен, аннулирующий вектор v — неприводим, таким образом, степень многочлена, аннулирующего v равна размерности пространства, то есть v порождает все пространство.

(Б) Это утверждение неверно, например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

То есть вектор $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ не является циклическим, так как двумерное пространство не может порождаться $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. При этом:

$$\chi_{F(t)} = \det \begin{pmatrix} t & 0 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2$$

Минимальный многочлен делит характеристический, то есть либо совпадает с ним, либо равен t, что невозможно, так как оператор ненулевой.

(В) Пример — тождественный оператор. Любой ненулевой вектор переходит в себя при любой степени оператора, то есть образует максимум одномерное подпространство, то есть ни один из них не является циклическим.

Задача 8

Задача 9

Если есть попарно коммутирующие друг с другом диагонализуемые линейные операторы, то их можно диагонализовать в одном базисе. Так как в условии дано пространство $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, то матрицы будут размера $n \cdot n$, из чего следует, что $\max \dim = n$, ведь базис в пространстве диагональных матриц — n матричных единиц. Значит, таких подпространств там нет.

Задача 10

(А)

(Б) Квадрат жордановой клетки с собственным значением 0 - это квадратная матрица с единичной третьей справа от главной диагональю, в остальных местах нули. При этом при возведении такого оператора в степень эта диагональ сдвигается на 2 вправо.

Пусть в степени n этот оператор впервые зануляется. Тогда базис решений системы уравнений для поиска собственных подпространств — стандартный. Далее смотрим на каждый вектор базиса и умножаем его слева на A^{n-1}. Получим в зависимости от четности размера матрицы жордановы цепочки, которые в итоге приходят либо к вектору $(1, 0, \dots 0)$, либо к $(0, 1, 0, \dots 0)$ (первый случай — четное, второй - нечетное). Единицы в жордановых цепочках двигаются через 1 наверх к первой или второй координате. Далее, рассматривая меньшие степени, каждый раз будем получать векторы, где снизу сколько-то единиц. В итоге получим либо 2 жордановых блока с собственным значением 0 одинакового размера, либо тоже 2 блока, но один из них - на единицу меньшего размера.

Задача 11*

Разложим функцию f в ряд Тейлора:

$$f(J_m(\lambda)) = f(\lambda)E + f'(\lambda)(J_m(\lambda) - \lambda E) + \dots + \frac{f^{(k)}(J_m(\lambda) - \lambda E)^k}{k!}$$

При каком-то m $J_m(\lambda)$ зануляется, то есть все члены, большие m-того зануляются. Тогда несложно записать матрицу:

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(m-2)}(\lambda)}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Задача 12*

Рассмотрим единичную матрицу над полем $\mathbb{F}_5$. Очевидно, что она не является нильпотентной, но при этом для всех степеней k от 1 до n след A^k равен 0.

Задача 13*

Докажем, что $\forall n\ [A, B^n] = nB^n$ по индукции.
База: $[A, B^2] = [A, B \cdot B] = [A, B]B + B[A, B] = 2B^2$, в этом переходе используем правило Лейбница для коммутаторов.
Шаг: Предполагая, что $[A, B^{n-1}] = (n-1)B^{n-1}$, получаем: $[A, B^n] = [A, B^{n-1}]B + B^{n-1}[A, B] = (n-1)B^n + B^n = nB^n$.
Таким образом, если рассмотреть коммутатор как оператор, любой B^k для него будет собственным вектором. Количество собственных значений оператора на конечномерном пространстве конечно, то есть существует $k \neq 0$, такое что $kB^k = 0$, из чего уже следует, что $B^k = 0$.

Задача 14*

Заметим, что по теореме о классификации пространств с оператором достаточно найти Фробениусову нормальную форму данного оператора и транспонированного. При приведении к ФНФ мы приводим характеристическую матрицу к нормальной форме Смита, когда на диагонали стоят многочлены, и каждый предыдущий делит следующий, а в правом нижнем углу расположен минимальный многочлен. Определитель такой матрицы - характеристический многочлен. Но алгоритм приведения к СНФ не зависит от того, столбцы или строки мы приводим сначала, поэтому и сама матрица, и ее транспонированная имеют одинаковые СНФ, из чего следует равенство ФНФ, а, следовательно, и подобие матриц.

Задача 15*

При приведении матрицы F к СНФ получим, что в нижнем правом углу будет минимальный многочлен. По условию $\deg(\mu_{F(t)}) = \deg(\chi_{F(t)})$, а значит, на диагонали матрицы будут стоять какие-то числа и внизу справа минимальный многочлен. По теореме о классификации конечнопорожденных модулей они раскладываются в сумму циклических подпространств. В данном случае такое подпространство только одно (нетривиальный фактор), поэтому есть циклический вектор w. Тогда можно рассмотреть действие некоторого перестановочного с F оператора G на этот циклический вектор: $G(w) = w'$, это какой-то вектор в V. V линейно порождается $w, F(w), F^2(w), \dots F^{n-1}(w)$. Тогда вектор w' можно как-то разложить в линейную комбинацию: $w' = \lambda_0 w + \lambda_1 F(w) + \dots + \lambda_{n-1} F^{n-1}(v)$. Получили некоторый многочлен от F, можно обозначить его за $f(F)$.

$$(G - f(F))F^x(w) = F^x G(w) - F^x f(F)(w) = F^x(G(w) - f(F)(w)) = 0$$

Это верно, так как $G(w) - f(F)(w) = 0$, а $F^x \neq 0$. Значит, G — это многочлен от F, равный $f(F)$.

Листок 7

Задача 2

Докажем по индукции.
База: для одномерного максимум 2 вектора, это очевидно.
Предположение: для n-мерного всего $n+1$ вектор.
Шаг: Пусть в $n+1$-мерном пространстве получили $n+3$ вектора. Пусть в V базис ортонормальный, тогда $e_i = e_i^{\times}$. Спроецируем все векторы на гиперплоскость-ортогонал к $n+3$ вектору. Получим $\pi(v_i) = v_i + \lambda_i \cdot v_{n+3} \Rightarrow (\pi(v_i), v_{n+3}) = 0 = (v_i, v_{n+3}) + \lambda_i(v_{n+3}, v_{n+3})$.
Рассмотрим скалярное произведение между проекциями двух каких-то векторов: $(\pi(v_i), \pi(v_j))$ $= (\pi(v_i), v_j) + \lambda_j\,(\pi(v_i), v_{n+3}) = (\pi(v_j), v_i) + \lambda_i\,(\pi(v_j), v_{n+3}) = (\pi(v_j), v_i) = (\pi(v_i), v_j)$.
Теперь раскроем $(\pi(v_i), v_j) = (v_i + \lambda_i \cdot v_{n+3}, v_j) = (v_i, v_j) + \lambda_i(v_{n+3}, v_j)$.
Все $\lambda_i > 0$, поэтому скалярное произведение $(\pi(v_i), \pi(v_j)) = (\pi(v_i), v_j) + \lambda_j\,(\pi(v_i), v_{n+3}) < 0$.
То есть получили в n-мерном пространстве $n+2$ вектора, между которыми тупые углы, это противоречит предположению индукции.

Задача 3

Заметим, что с помощью отражения можно менять местами базисные векторы или обращать их ($e_i \mapsto -e_i$). Чтобы понять, какие бывают гиперплоскости, надо посмотреть на всевозможные матрицы, переставляющие базисные векторы. Во-первых, матрица может быть просто равна E, это тождественное отражение, у которого просто нет гиперплоскости. Также есть

матрицы с ± 1 на диагонали, при этом должно быть нечетное число -1, ведь определитель несобственного ортогонального преобразования пространства равен -1. Такие матрицы только обращают базисные векторы, при этом либо только 1 из них, таких всего 4 отражения относительно 4 стандартных координатных гиперплоскостей. Также есть матрицы с тремя -1 на диагонали. Для примера рассмотрим матрицу, у которой первые 3 диагональных элемента равны -1, а последний равен 1. Тогда неподвижные точки такого движения имеют вид $(0, 0, 0, \alpha)$, но такие точки лежат на прямой, а не образуют гиперплоскость, поэтому такие матрицы нам не пожходят.
Теперь рассмотрим матрицы, переставляющие какие-то два базисных вектора. Известно, что отражение является инволюцией, поэтому цикловой тип нетривиальной перестановки может быть либо транспозицией, либо парой непересекающихся транспозиций. Допустим, переставляются первые 2 вектора, а другие два остаются на месте и, возможно, меняют знак. Тогда выпишем всевозможные варианты:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этих матриц подходят только две, это будут два отражения, одно из которых относительно гиперплоскости, перпендикулярной e_3 и e_4 и параллельной вектору $e_1 + e_2$, а второе — относительно гиперплоскости, перпендикулярной тем же векторам и параллельной $e_1 - e_2$. Таким способом мы можем выбрать всего $\binom{4}{2} = 6$ переставляемых базисных векторов, то есть всего $2 \cdot 6 = 12$ гиперплоскостей.
Осталось разобрать случай, когда цикловой тип — это пара непересекающихся транспозиций. Несложно заметить, что у любой такой матрицы в характеристическом многочлене есть множитель t^2+1, а собственных векторов меньше, чем должно быть при отражении. Поэтому такие матрицы тоже не подходят.
Итого $12 + 4 = 16$ гиперплоскостей.

Задача 5*

(A) Количество вершин — это сумма вершин куба и октаэдра, у куба их 16, у октаэдра 8, столько же, сколько трехмерных граней у 4-мерного куба, ведь они друг другу двойственные, итого у октаплекса 24 вершины.

Рассмотрим "верхнюю"вершину октаплекса (она принадлежит 4-мерному октаэдру), она соединена с ближайшей к ней гранью куба, то есть степень вершины у нее равна 8. В то же время каждая вершина куба будет соединена с 4 другими вершинами куба и с 4 вершинами октаэдра. Итого получаем $\frac{24 \cdot 8}{2} = 96$ ребер.

Каждое ребро содержится в 3 двумерных гранях, степень всех вершин равна 8, то есть каждая вершина принадлежит ровно 12 двумерным граням. Тогда всего 2-мерных граней $\frac{12 \cdot 24}{3} = 96$.

Можно заметить, что октаплекс является самодвойственным многогранником, то есть если рассмотреть выпуклую оболочку центров трехмерных граней, тоже получится октаплекс. Из этого легко вывести, что трехмерных граней будет столько же, сколько вершин, то есть 24.

(Б) Найдем длины ребер. Если сфера имеет координаты $x^2+y^2+z^2+t^2=4$, а многогранник правильный, то достаточно найти длину одного ребра. Мы знаем, что вершина $(2,0,0,0)$ соединена с $(1,\pm1,\pm1,\pm1)$, поэтому длина ребра равна $\sqrt{1+1+1+1}=2$.

В силу правильности многогранника вписанная сфера касается трехмерных граней октаплекса в их центрах. Найдем произвольную трехмерную грань. По пункту (А) все такие грани — это октаэдры. Для примера можно рассмотреть грань, натянутую на вершины $(2,0,0,0)$, $(1,1,1,1)$, $(1,-1,1,1)$, $(1,1,-1,1)$, $(1,-1,-1,1)$ и $(0,0,0,2)$. Очевидно, что центр этой грани — точка $(1,0,0,1)$, тогда радиус вписанной сферы равен: $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

(В) Трехмерные грани — правильные октаэдры со стороной 2. $V=\frac{2}{3}Sh$, $S=2\cdot2=4$, $h=\sqrt{2^2\cdot2}=\sqrt{2}$. Значит, $V=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

(Г) Двумерные грани — правильные треугольники. Длина высоты у них: $\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$, сторона равна 2, значит, $S=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Задача 6

(А) Плоскости в $\mathbb{R}^3$ могут располагаться 2 способами: быть параллельными или пересекаться. Если они пересекаются, то композиция отражений относительно них — это поворот вокруг прямой, по которой они пересекаются, на удвоенный угол между плоскостями.

(Б) Если же плоскости параллельны, это сдвиг на вектор, перпендикулярный обеим плоскостям и по длине равный удвоенному расстоянию между ними.

(В) Найдем неподвижные точки:

$$\sigma_\pi\circ\rho_{u,\phi}\circ\sigma_\pi(A)=A\Rightarrow\rho_{u,\phi}\circ\sigma_\pi(A)=\sigma_\pi(A)$$

У поворота неподвижной точкой является только его ось, значит, $\sigma_\pi(A)$ - ось поворота. Тогда композиция, данная в условии — это поворот вокруг $\sigma_\pi(u)$ на угол $-\phi$.

(Г) Рассмотрим случай скрещивающихся прямых, другие случаи расположения прямых в пространстве очевидны. Проведем через эти две прямые плоскости $\pi_1\parallel\pi_4$. Далее проведем $\pi_2\cap\pi_3=l$, так что $\sigma_{\pi_4}\circ\sigma_{\pi_3}\circ\sigma_{\pi_2}\circ\sigma_{\pi_1}=\rho_{u,\phi}\circ\rho_{w,\psi}$.

Рассмотрим прообраз l' прямой l относительно σ_{pi_1} и ее образ l'' относительно σ_{π_4}. Композиция отражений относительно второй и третьей плоскостей оставляет прямую l на месте.

$\sigma_{\pi_4}\circ\sigma_{\pi_1}(l')=\tau_q(l')$, так как первая и четвертая плоскости параллельны по построению. Таким образом, при применении композиции прообраз l' сдвигается на вектор q — удвоенный вектор между первой и четвертой плоскостью.

Обозначим композицию движений за μ. Тогда $\tau_q\circ\tau_q^{-1}\circ\mu=\mu$, при этом для $\tau_q^{-1}\circ\mu$ прямая l' является неподвижной, при этом это собственное движение, то есть поворот вокруг l' на какой-то угол α. Получаем, что $\mu=\tau_q\circ\rho_{l',\alpha}$.

Разложим сдвиг в композицию сдвигов на векторы, один из которых параллелен l', а другой — перпендикулярен: $\mu=\tau_q\circ\rho_{l',\alpha}=\tau_{q^\parallel}\circ\tau_{q^\perp}\circ\rho_{l',\alpha}=\tau_{q^\parallel}\circ\rho_{l'+q^\perp,\alpha}$. Наконец, $l'+q^\perp\parallel l'\Rightarrow\parallel q^\parallel$.

Таким образом, v — прообраз l, сдвинутый на $\perp$ составляющую вектора q (между π_1 и π_4), на угол, совпадающий с углом поворота, получающегося при композиции отражений относительно второй и третьей плоскостей.

(Д) Снова ищем неподвижные точки:

$$\rho_{u,\phi} \circ \sigma_{\pi_1} \circ \rho_{u,-\phi}(A) = A$$
$$\sigma_{\pi} \circ \rho_{u,-\phi}(A) = \rho_{u,-\phi}(A)$$

Отражение оставляет на месте плоскость, значит, неподвижные точки — плоскость $\rho_{u,-\phi}(\pi_1) = \pi_2$.

(Е) Домножив обе части равенства справа на σ_{π_1}, получим в правой части композицию отражений, а слева — просто поворот. Далее решение аналогично (А).

(Ж)

$$\tau_{u_2} \circ \sigma_{\pi_2} \circ \tau_{u_1} \circ \sigma_{\pi_1} = \tau_{u_2} \circ \sigma_{\pi_2} \circ \sigma_{\pi_1} \circ \tau_{u_1} = \tau_{u_2} \circ \rho_{l,\psi} \circ \tau_{u_1}$$

Здесь $l = \pi_1 \cap \pi_2$, а $\psi = 2\angle(\pi_1, \pi_2)$.

Пусть $w = u_1 + u_2$. Тогда:

$$\tau_w \circ \tau_{-u_1} \circ \rho_{l,\psi} \circ \tau_{u_1} = \tau_w \circ \rho_{\tau_{-u_1}(l),\pm\psi} = \tau_w \circ \rho_{l',\pm\psi}$$

Сдвиг вдоль w можно разложить в композицию сдвигов вдоль параллельного и перпендикулярного векторов (как в пункте (Г)), получим:

$$\tau_{w^{\parallel}} \circ \tau_{w^{\perp}} \circ \rho_{l',\pm\psi} = \tau_{w^{\parallel}} \circ \rho_{\tau_{w^{\perp}}(l'),\pm\psi}$$

Задача 8

При отражении относительно координатной гиперплоскости одна координата меняет знак на противоположный, а остальные не меняются вообще. Тогда при такой композиции все знаки сменятся на противоположные, что будет соответствовать центральной симметрии относительно начала координат.

Задача 9

$$v \times w = (v_2w_3 - w_2v_3,\ w_1v_3 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1)$$
$$u \times v = (u_2v_3 - v_2u_3,\ v_1u_3 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$
$$u \times w = (u_2w_3 - w_2u_3,\ w_1u_3 - u_1w_3,\ u_1w_2 - u_2w_1)$$
$$u \times (v \times w) = (u_2v_1w_2 - u_2v_2w_1 - u_3w_1v_3 + u_3w_3v_1,\ u_3w_3v_2 - u_3w_2v_3 - u_1v_1w_2 + u_1v_2w_1,$$
$$u_1w_1v_3 - u_1w_3v_1 - u_2v_2w_3 + u_2v_3w_2)$$
$$(u \times v) \times w = (w_3v_1u_3 + w_2u_2v_1,\ w_1u_1v_2 + w_3u_3v_2,\ w_2u_2v_3 + w_1u_1v_3)$$
$$v \times (u \times w) = (-v_2u_2w_1 - v_3w_1u_3,\ -v_3u_3w_2 - v_1u_1w_2,\ -v_1u_1w_3 - v_2u_2w_3)$$

Из подсчетов выше видно, что $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w + v \times (u \times w)$, а также то, что векторное произведение неассоциативно.
Кососимметричность:

$$v \times v = (v_2v_3 - v_2v_3,\ v_1v_3 - v_1v_3,\ v_1v_2 - v_2v_1) = (0,\ 0,\ 0)$$

Листок 8

Задача 1

Известно, что:

$$(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} \oplus W^{\perp}$$

Сумма прямая, то есть пространства трансверсальны, то есть в случае 2 подпространств просто имеют тривиальное пересечение, ортогонал к которому — все пространство, то есть утверждение верно.
Оператор проекции идемпотентен, то есть $\pi = \pi^2 \Rightarrow (\pi^2)^{\times} = \pi^{\times} = (\pi^{\times})^2$. Таким образом сопряженный оператор — тоже проекция, при этом верны равенства:

$$\ker(\pi^{\times}) = \operatorname{im}(\pi)^{\perp} = W^{\perp}$$
$$\operatorname{im}(\pi^{\times}) = \ker(\pi)^{\perp} = U^{\perp}$$

Задача 2

(А) По определению евклидово сопряженного оператора: $(v, f(w)) = (f^{\times}(v), w)$.

Пусть $v = x^{\Delta} y^{\varepsilon} z^{\xi}$ и $w = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$. Тогда:

$$f(w) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta}z^{\gamma} + \beta(\beta-1)x^{\alpha}y^{\beta-2}z^{\gamma} + \gamma(\gamma-1)x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma-2}$$
$$(v, f(w)) = \alpha(\alpha-1)\left(x^{\Delta}y^{\varepsilon}z^{\xi},\ x^{\alpha-2}y^{\beta}z^{\gamma}\right) + \beta(\beta-1)\left(x^{\Delta}y^{\varepsilon}z^{\xi},\ x^{\alpha}y^{\beta-2}z^{\gamma}\right) +$$
$$\gamma(\gamma-1)\left(x^{\Delta}y^{\varepsilon}z^{\xi},\ x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma-2}\right)$$

Тогда $f^{\times}(v) = x^{\Delta+2}y^{\varepsilon}z^{\xi} + x^{\Delta}y^{\varepsilon+2}z^{\xi} + x^{\Delta}y^{\varepsilon}z^{\xi+2}$, действует как умножение на g из пункта (Б).

(Б) Докажем по индукции:

База: Для $m = 0$ очевидно, для $m = 1$ базис в пространстве состоит из многочленов x, y и z, у них всех лапласиан равен 0, при этом их линейными комбинациями можно получить все пространство $S^1V^* \cong H_1$.

Шаг: Пусть $S^mV^* \cong H_m \oplus gH_{m-2} \oplus \dots$. Тогда рассмотрим $g(S^mV^*)$. По пункту (А) умножение слева на g — это применение сопряженного оператора к данному пространству, поэтому надо доказать, что:

$$\Delta^{\times}(S^mV^*) \oplus H_{m+2} \cong S^{m+2}V^*$$

Знаем, что $H_{m+2} = \ker(\Delta)$ на пространстве $S^{m+2}V^*$, а $\Delta^{\times}(S^mV^*) = \operatorname{im}(\Delta^{\times})$.

Далее: $\operatorname{im}(\Delta^{\times}) \oplus \ker(\Delta) = (\ker(\Delta))^{\perp} \oplus \ker(\Delta) = S^{m+2}V^*$.

Задача 3

(А)

(Б) Самосопряженный оператор диагонализуем.

$$R_U(f) = \sum_{i=1}^{r}(u_i, fu_i) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(u_i, fv_j)$$

Здесь $u_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} v_j$, v_j — ортонормальный базис, в котором оператор имеет диагональный вид.

$$R_U(f) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(u_i, \mu_j v_j) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_{ij}^2 (v_j, v_j) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r} \mu_j x_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\mu_j \sum_{i=1}^{r} x_{ij}^2\right)$$

Дополним базис из u_i до ортонормального во всем пространстве V. В столбцах матрицы перехода стоят координаты образов базисных векторов. Пусть в новом базисе матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{r1} & y_{(r+1)1} & \dots & y_{n1} \\ x_{12} & \dots & x_{r2} & y_{(r+1)2} & \dots & y_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{rn} & y_{(r+1)n} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}^2 + \sum\limits_{i=r+i}^{n} y_{ij}^2 = 1 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}^2 \leqslant 1$ Знаем, что $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}^2 = r \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\mu_j \sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}^2\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i$. Равенство достигается при $u_i = v_i$.

Задача 5

(А) $\to$ (В)

$$\left(\frac{f+f^\times}{2}\right)\left(\frac{f-f^\times}{2}\right) = \frac{f^2-(f^\times)^2}{4}$$
$$\left(\frac{f-f^\times}{2}\right)\left(\frac{f+f^\times}{2}\right) = \frac{f^2-(f^\times)^2}{4}$$

(В) $\to$ (Б)

$$\left(\frac{f+f^\times}{2}\right)\left(\frac{f-f^\times}{2}\right) = \left(\frac{f-f^\times}{2}\right)\left(\frac{f+f^\times}{2}\right) \Rightarrow 2f^\times f = 2ff^\times \Rightarrow f^\times f = ff^\times$$

$\forall\ v \in V:$

$(f(v), f(v)) = \big(v, f^\times f(v)\big)$

$\big(f^\times(v), f^\times(v)\big) = \big(v, ff^\times(v)\big)$

По условию $ff^\times = f^\times f$, поэтому $(v, f^\times f(v)) = (v, ff^\times(v))$.

(Б) $\to$ (А)

$\forall\ v \in V\ \ (f(v), f(v)) = \big(f^\times(v), f^\times(v)\big)$

$\big(v, f^\times f(v)\big) = \big(v, ff^\times(v)\big)\ \ \forall\ v$

$\big(v, (f^\times f - ff^\times)(v)\big) = 0$

Заметим, что $(f^\times f - ff^\times)^\times = (f^\times f)^\times - (ff^\times)^\times = f^\times f - ff^\times$, он самосопряжен, соответственно, диагонализуем в базисе из собственных векторов. Если $g = f^\times f - ff^\times$, то $g(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Тогда можно записать:

$$\left(v, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2 = 0$$

Это верно для всех v, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Теперь предположим, что в этой сумме есть ненулевые λ_i, тогда можно рассмотреть такой вектор v, что если $\lambda_i > 0$, то и $v_i > 0$, аналогично с отрицательными, тогда получим ненулевую сумму, большую 0, что противоречит тому, что скалярное произведение нулевое для всех векторов, а значит, все $\lambda_i = 0$, из чего уже следует, что $ff^\times - f^\times f = 0 \Rightarrow ff^\times = f^\times f$.

Задача 6

(1) $ff^\times(V_\lambda) = f^\times f(V_\lambda) = f^\times \lambda v = \lambda f^\times v$ для всех $v \in V_\lambda$

Значит, что $f^\times v \in V_\lambda \Rightarrow f^\times (V_\lambda) \subset V_\lambda$.

(2) $w \in V_\lambda^\perp \Rightarrow$ перпендикулярен всем векторам из V_λ. Тогда:

$$(f(w), v) = 0 = \big(w, f^\times(v)\big)$$
$$v \in V_\lambda \Rightarrow f(w) \in V_\lambda^\perp \Rightarrow f^\times \left(V_\lambda^\perp\right) \subset V_\lambda^\perp.$$

Задача 7

$\rightarrow$ Оператора нормален, следовательно, $ff^\times = f^\times f \Rightarrow h^{-1}g^{-1}gh = h^{-1}h = hh = h^2$. При этом: $gh^2g^{-1} = h^2 \Rightarrow gh^2 = h^2g$.

h — самосопряженный, значит, можно рассмотреть базис из собственных векторов, в котором оператор имеет диагональный вид. Пусть:

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Тогда перемножив g и h^2, а затем h^2 и g, получаем равенство:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1^2 & a_{12}\lambda_2^2 & \dots & a_{1n}\lambda_n^2 \\ a_{21}\lambda_1^2 & a_{22}\lambda_2^2 & \dots & a_{2n}\lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\lambda_1^2 & a_{n2}\lambda_2^2 & \dots & a_{nn}\lambda_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1^2 & a_{12}\lambda_1^2 & \dots & a_{1n}\lambda_1^2 \\ a_{21}\lambda_2^2 & a_{22}\lambda_2^2 & \dots & a_{2n}\lambda_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\lambda_n^2 & a_{n2}\lambda_n^2 & \dots & a_{nn}\lambda_n^2 \end{pmatrix}$$
$$a_{ij}\lambda_i^2 = a_{ij}\lambda_j^2 \Rightarrow a_{ij}(\lambda_i^2 - \lambda_j)^2 = 0$$

Очевидно, что возможны два случая: $a_{ij} = 0$ и $\lambda_i^2 = \lambda_j^2$, причем в обоих случаях из этого следует, что $gh = hg$.

$\leftarrow$ $gh = hg \Rightarrow gh^2 = hgh = hhg = h^2g$.

Листок 9

Задача 1

(A) Спроецируем на координатные оси, получим отрезки. Все прямоугольники пересекаются, из чего следует, что и все проекции тоже пересекаются. Тогда можно обозначить левые и правые конца отрезков, при этом по условию не существует двух отрезков, у которого левый конец одного был бы правее правого конца другого. Значит, можно по теореме о полноте $\mathbb{R}$ выбрать точку между всеми левыми и всеми правыми концами (если они вдруг совпали — берем эту одну точку). То есть мы в любом случае найдем точку, принадлежащую пересечению. Рассмотрим такие x_0 и y_0. Точка на плоскости с этими координатами лежит во всех прямоугольниках.

Листок 9.5

Листок 10

Задача 8

Задача 9

Рассмотрим форму $\beta(y,x) = x_1y_1 + x_1y_2 = x_1(y_1+y_2)$. Тогда $\ker^\vee \beta = y/|/y_1 = -y_2$. Базисный вектор в этом ядре — $(1,-1)$, тогда дополнительное подпространство натянуто на вектор $(0,1)$, тогда ограничение на линейную оболочку:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = 0$$

равно нулю, то есть вырождено.

Задача 10*

-

Задача 11*

(А)

$$\begin{aligned}
&\det(tE - B^{-1}B^T) \ ? \ (-t)^n \det(t^{-1}E - B^{-1}B^T)\\
&\det(tE - B^{-1}B^T) \ ? \ \det(-t)(t^{-1}E - B^{-1}B^T)\\
&\det(tE - B^{-1}B^T) \ ? \ \det(tB^{-1}B^T - E)\\
&\det(B^{-1})\det(tB - B^T) \ ? \ \det(B^{-1})\det(tB^T - B)\\
&\det(tB - B^T) = \det(tB^T - B)
\end{aligned}$$

Последнее равенство верно, так как одна матрица под знаком определителя транспонирована другой, а определители транспонированных матриц равны.

(Б) -

(В) -

Задача 12*

-