Лекция 5. Примеры конформных отображений

Теория функций комплексного переменного

Отображение диска в полуплоскость

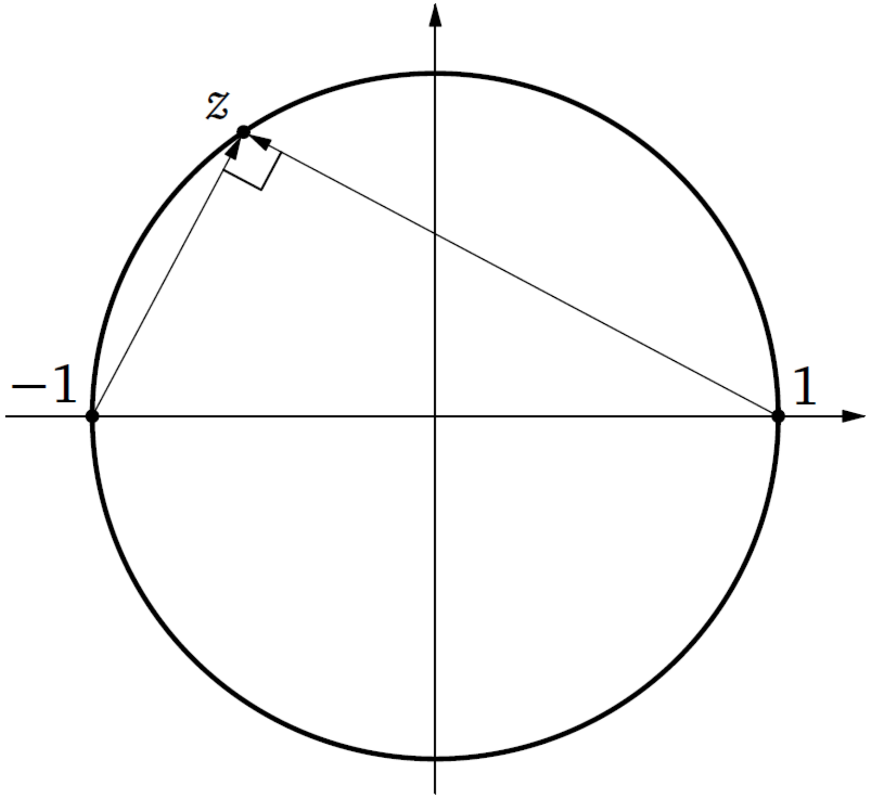


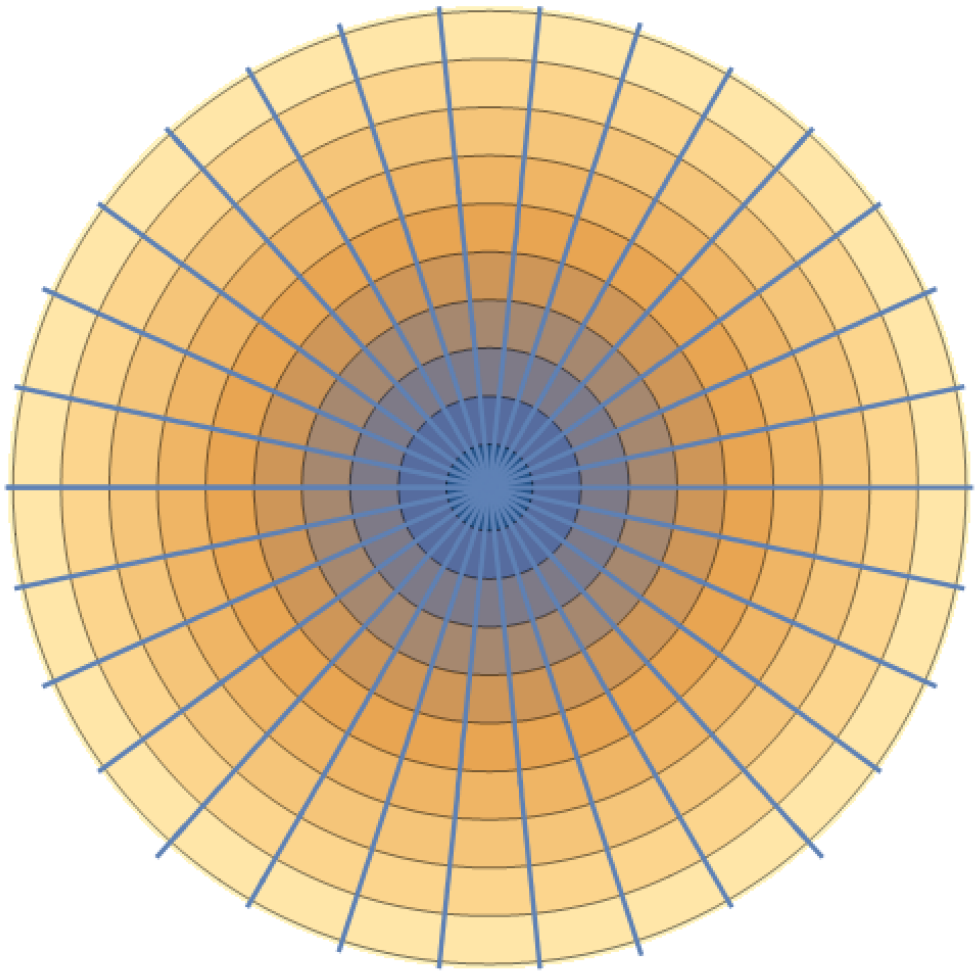
Рис. 3.1. Отображение $z \mapsto (z-1)/(z+1)$ переводит единичную окружность в мнимую ось

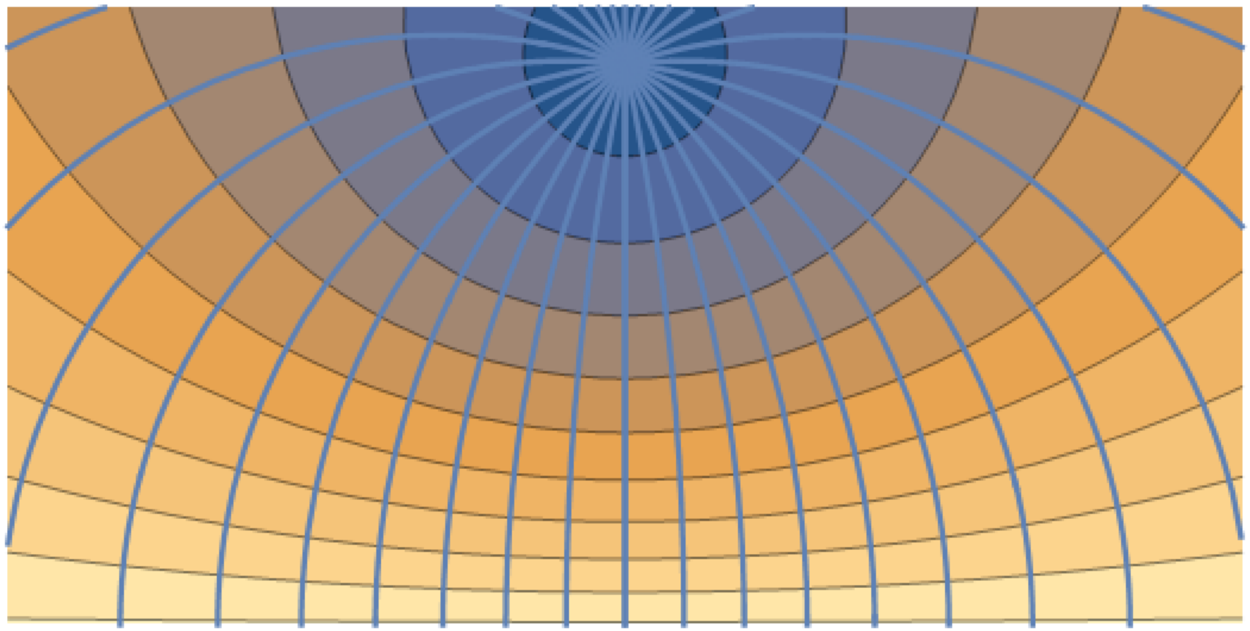
Отображение диска в полуплоскость

- Точки $0, 1, \infty$ лежат на (обобщенной) окружности, ортогональной к $\mathbb{S} = \{z : |z| = 1\}$, причем $1 \in \mathbb{S}$, а 0 и ∞ симметричны относительно $\mathbb{S}$.
- Точки $i, 0, -i$ лежат на окружности, ортогональной к $\mathbb{R}$, причем $0 \in \mathbb{R}$, а i и $-i$ симметричны относительно $\mathbb{R}$.
- Поэтому, если дробно-линейное преобразование f переводит $0,1,\infty$ в $i, 0, -i$, то $f(\mathbb{S}) = f(\mathbb{R})$ и $f(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$.
- Нетрудно найти

$$f(z) = i\,\frac{1-z}{1+z}.$$

Отображение $f(z) = i\,\frac{1-z}{1+z}$.





Автоморфизмы верхней полуплоскости

Предложение 3.4. *Дробно-линейные автоморфизмы верхней полуплоскости* $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ *суть отображения вида*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Группа дробно-линейных автоморфизмов верхней полуплоскости изоморфна $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$, *где* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ — *группа вещественных матриц с определителем* 1, *а* I — *единичная матрица.*

Ключевая идея: если $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, то $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Если $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$, то $f(i) \in \mathbb{R}$.

Автоморфизмы диска

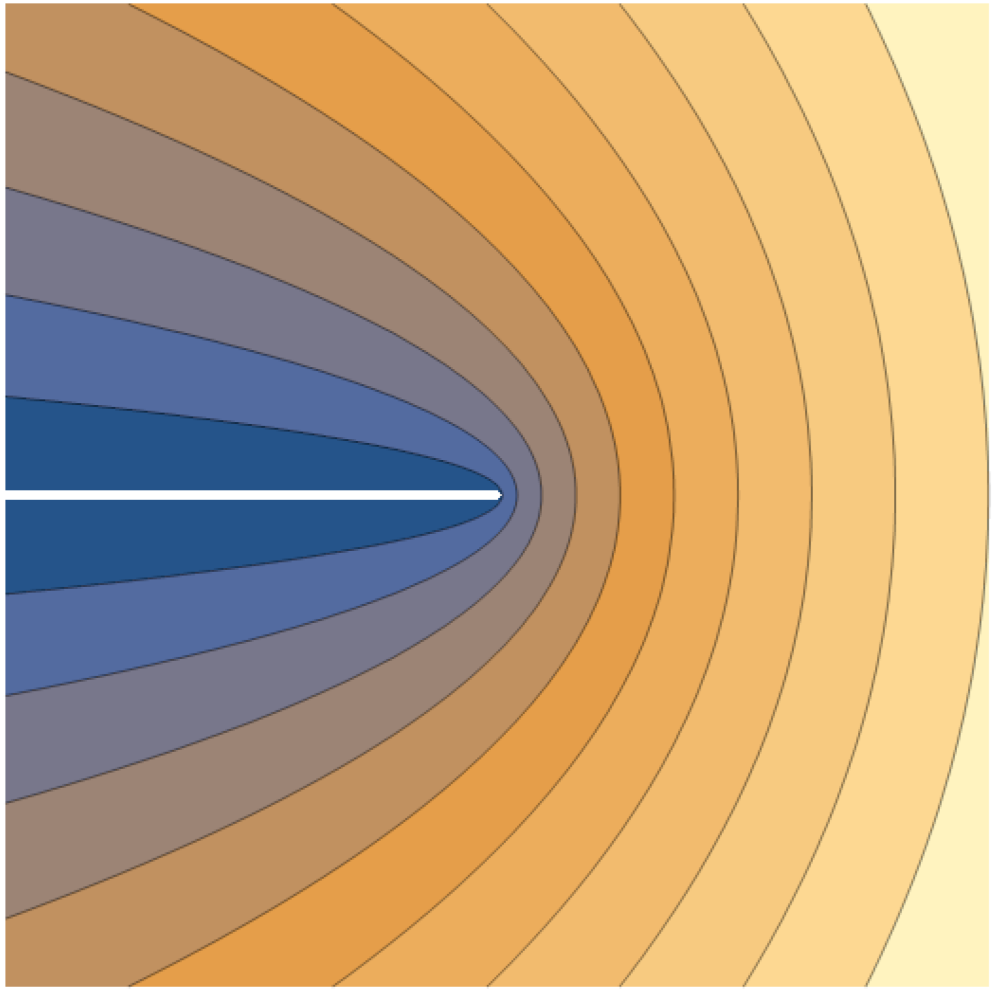
Предложение 3.5. *Дробно-линейные автоморфизмы единичного круга $U = \{z : |z| < 1\}$ суть отображения вида*

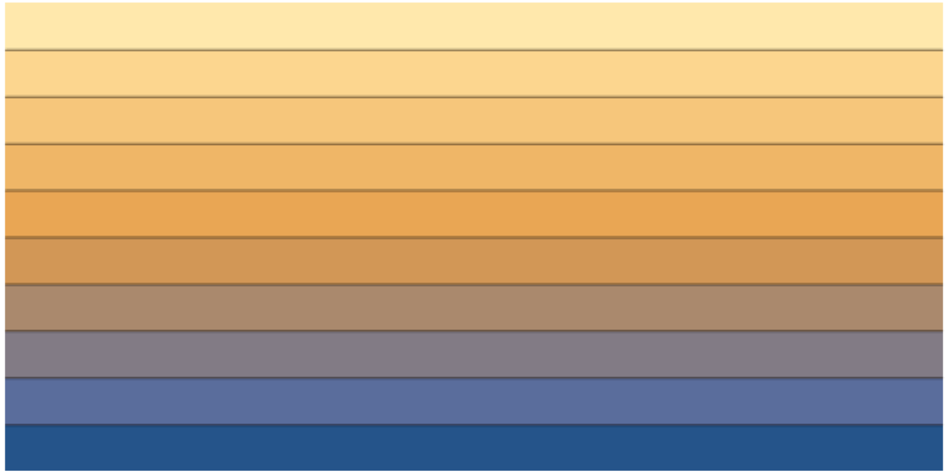
$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbb{R},\ |a| < 1, \tag{3.2}$$

и только они.

- Если точка a переходит в 0, то симметричная к a относительно $\mathbb{S}$ точка $\frac{1}{\bar{a}}$ переходит в симметричную к 0 точку ∞.

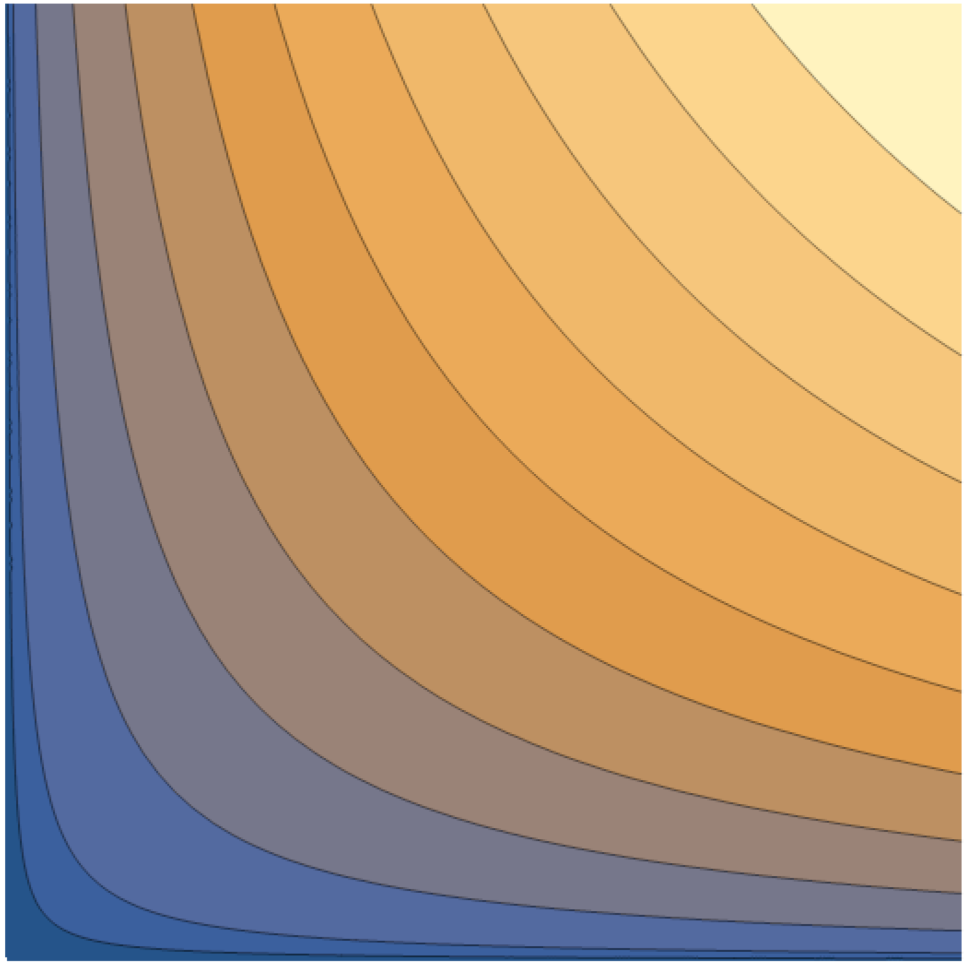
Отображение на полуплоскость: плоскость с разрезом



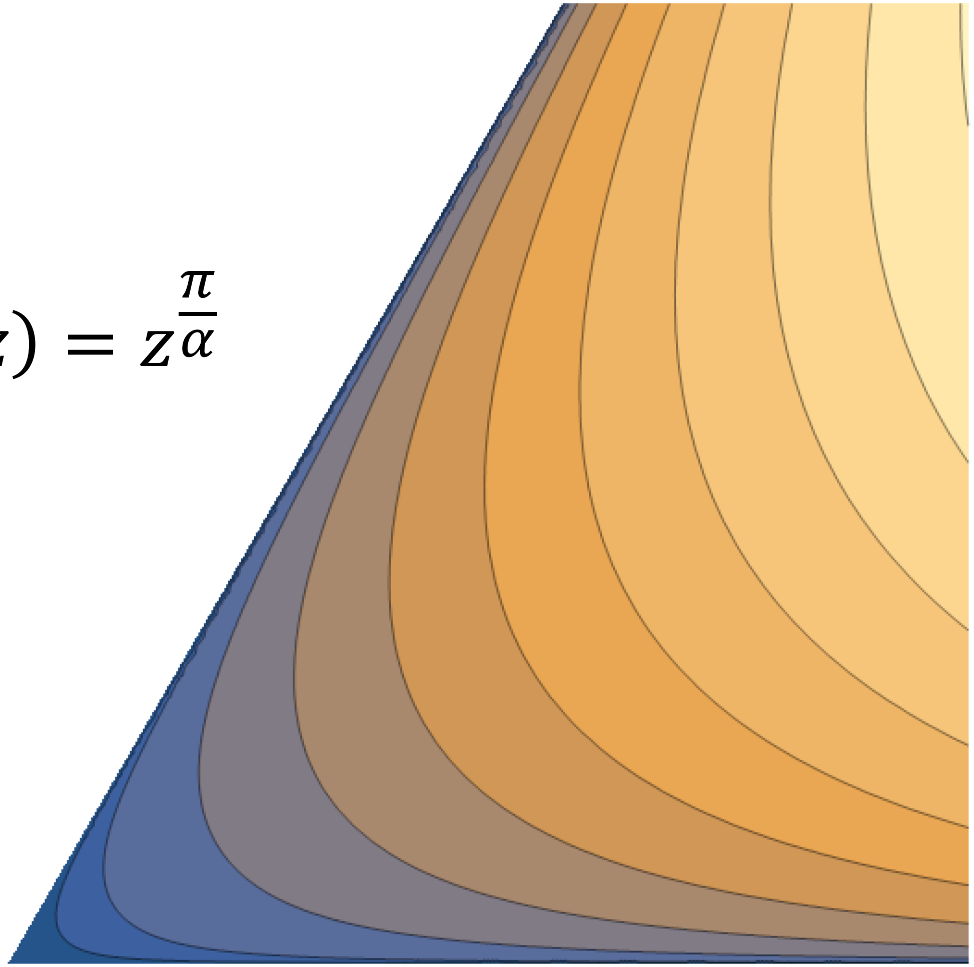


$$f(z) = i\sqrt{z}$$

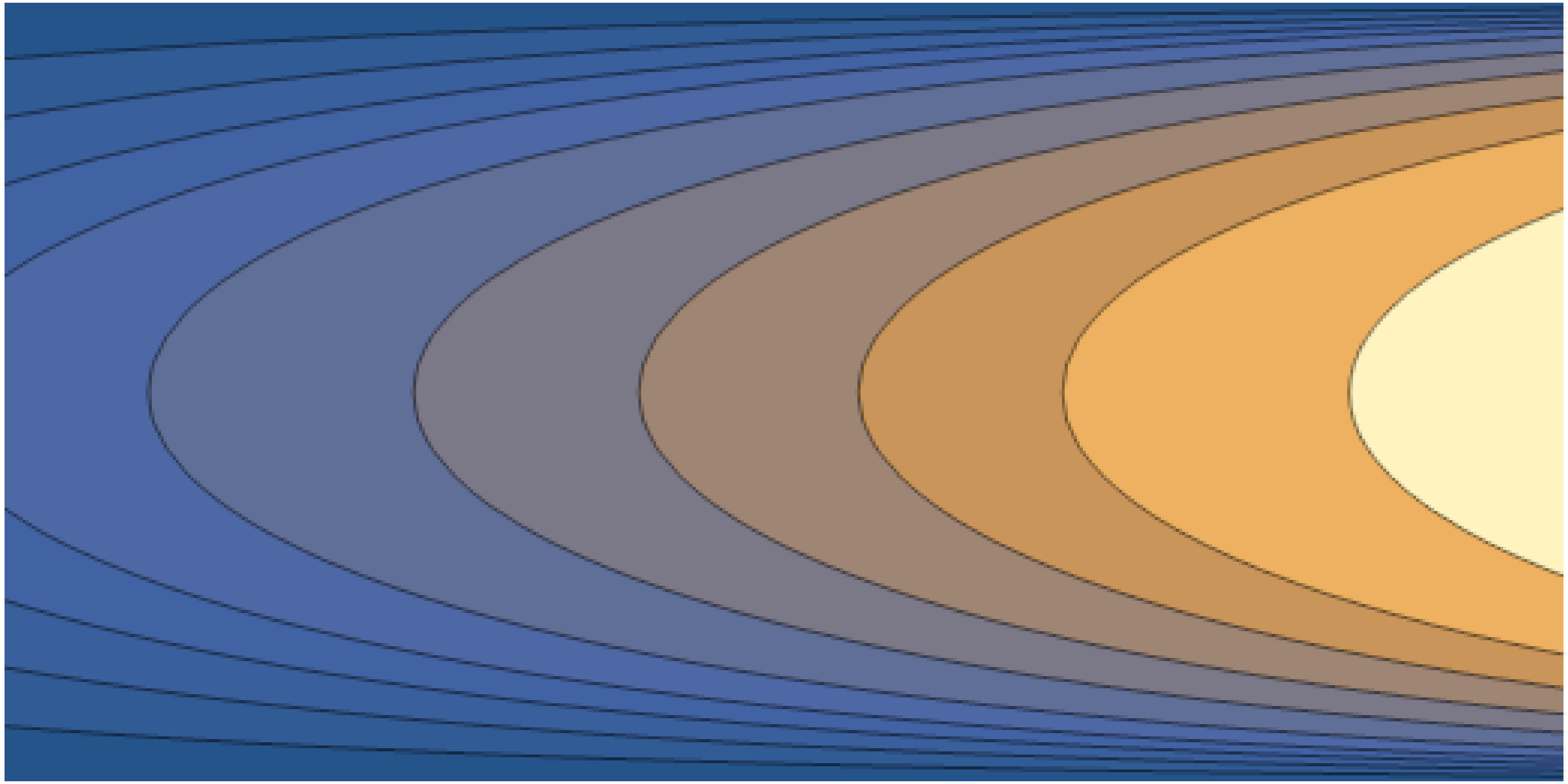
Отображение на полуплоскость: угол



$$f(z) = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

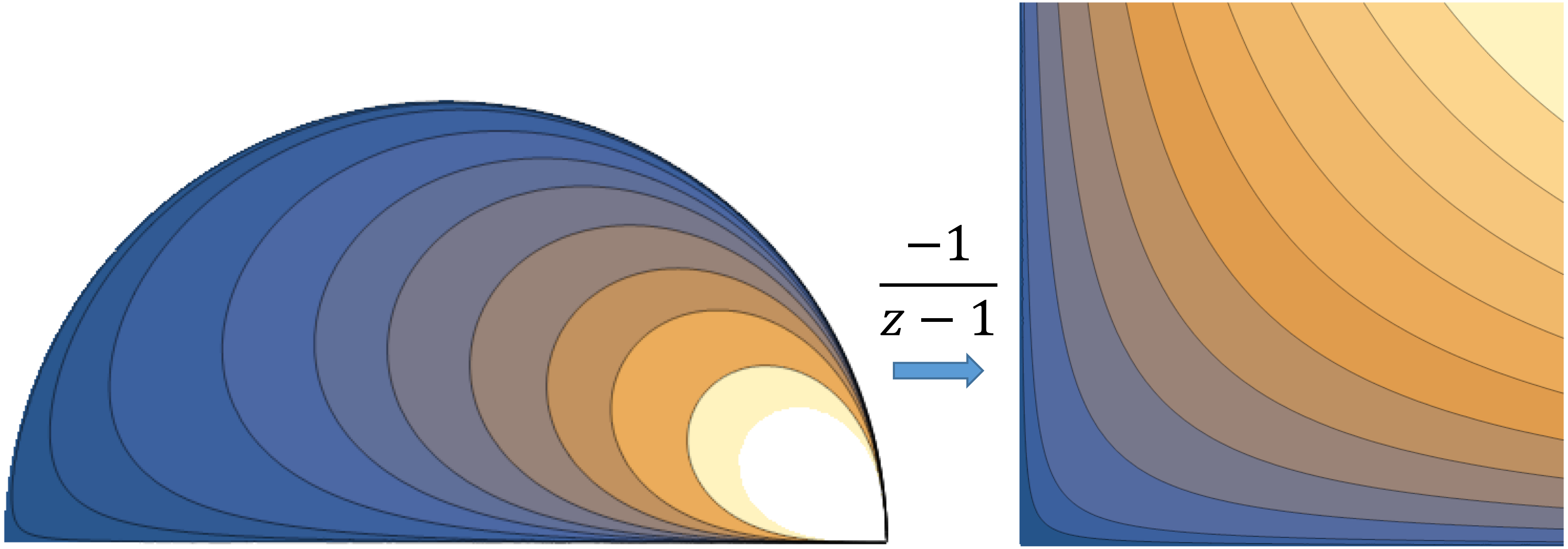


Отображение на полуплоскость: полоса



$$f(z) = e^z$$

Отображение на полуплоскость: полудиск



$$z \mapsto \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

Отображение на полуплоскость: полуполоса

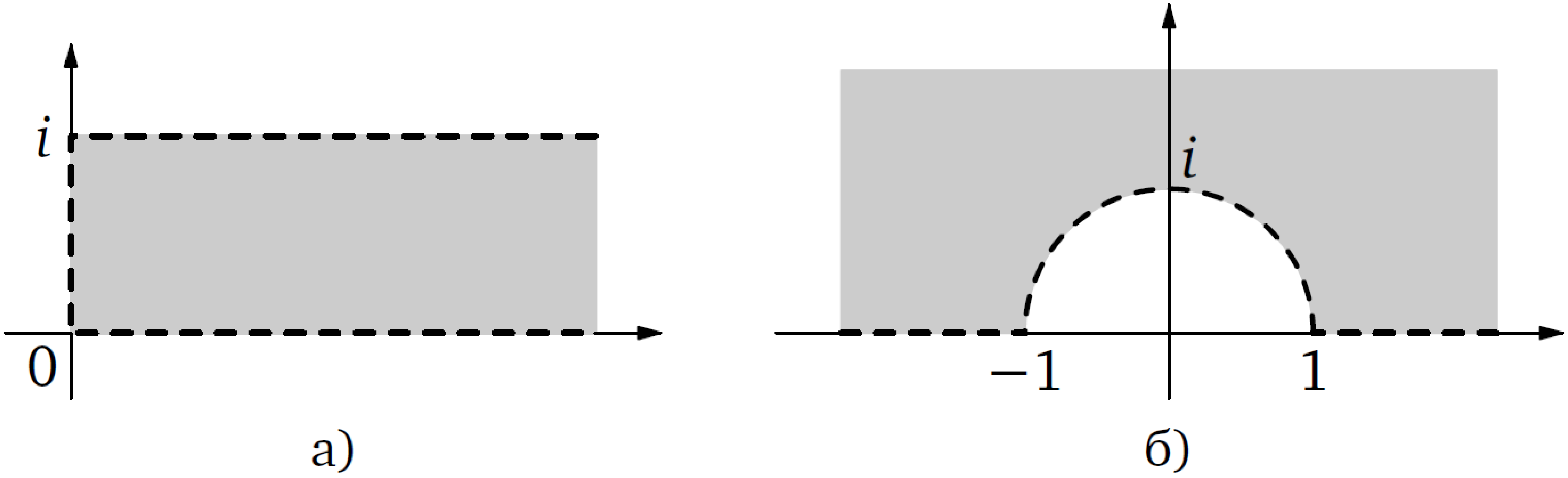
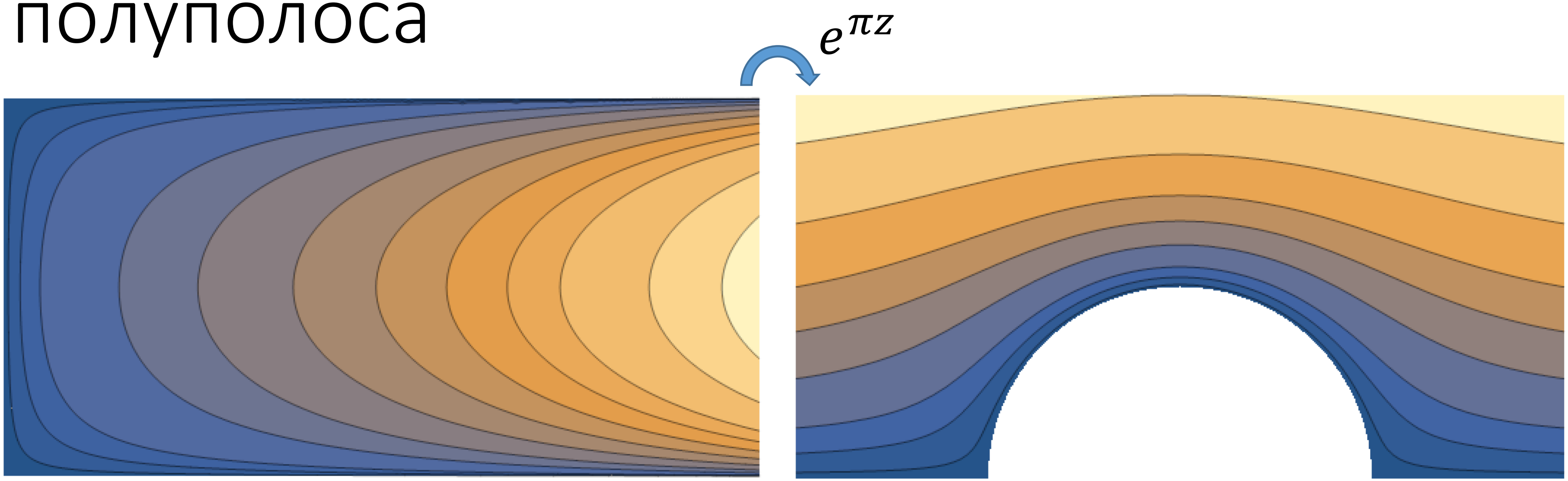


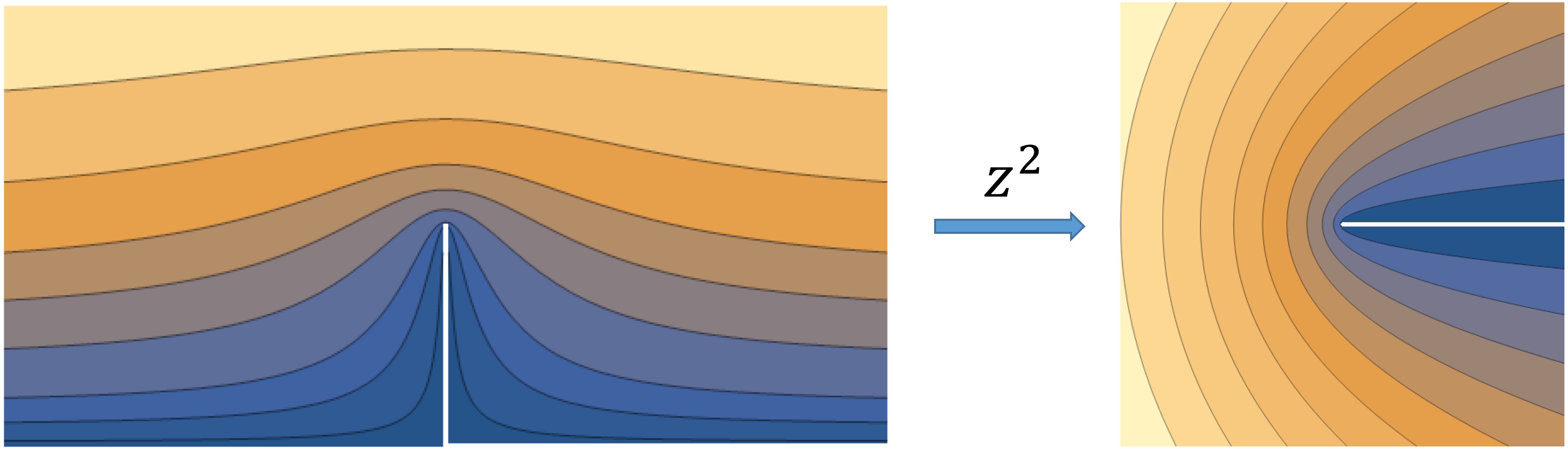
Рис. 3.4. Отображение $z \mapsto z_1 = e^{\pi z}$ переводит полуполосу (а) в верхнюю полуплоскость с выемкой (б)

Отображение на полуплоскость: полуполоса



$$z \mapsto e^{\pi z} + e^{-\pi z} = 2\cos \pi i z$$

Отображение на полуплоскость: полуплоскость с разрезом



$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$$

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ