Лекция 4

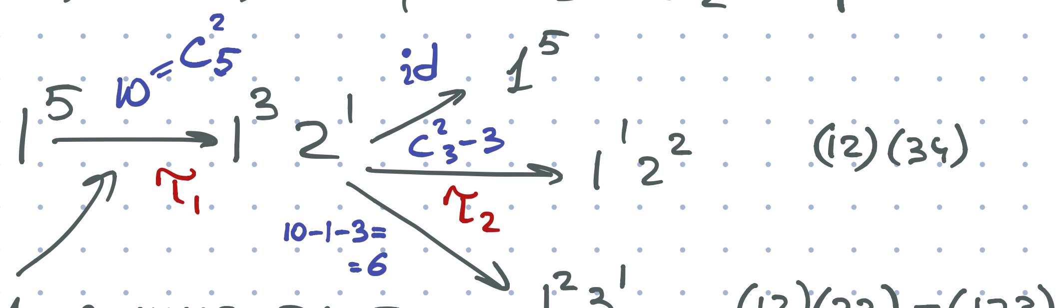
Числа Гурвица

$h^{\circ}_{n-1,n^1} = n^{n-3}$ (с помощью т. Кэли)

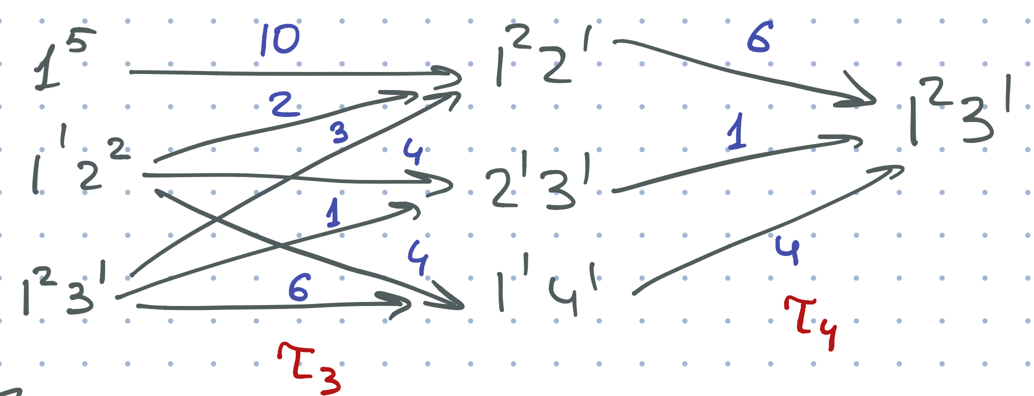
Вычисление чисел Гурвица с помощью ориент. графов

$h^{\circ}_{4,1^2,3^1}$ В S_5 цикла длины 3 как произв-ие 4х транспозиций

$$(123)(4)(5) = \tau_4 \circ \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1$$



Шаг 1 — вычисление первой транспозиции

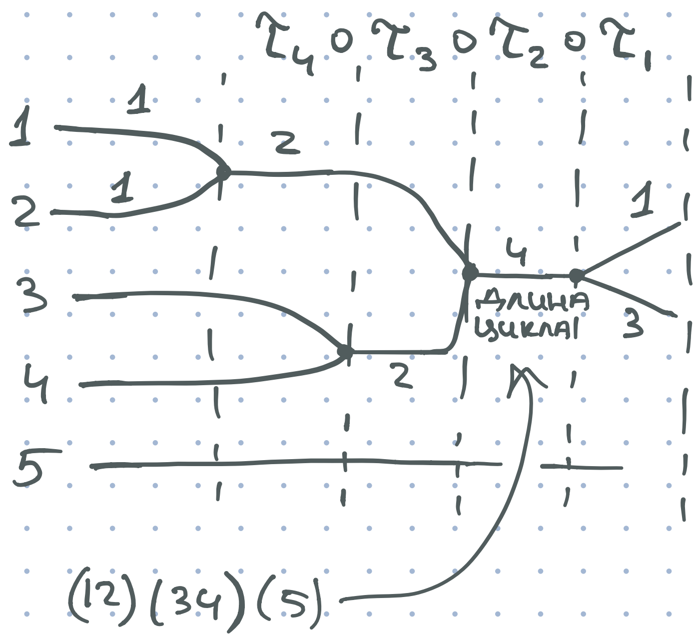


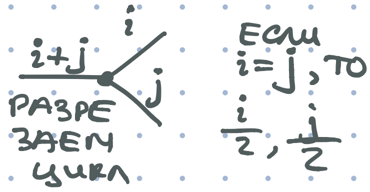
Σ чисел, исход. из 1ой вершины $= 10$

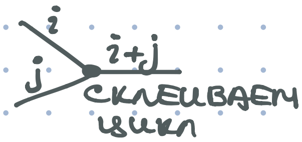
посмотрим на всевозможные пути

„Тропическое" вычисление чисел Гурвица

$h^{\circ}_{4,1^2 3^1}$







Вес ↪ графа $\frac{1}{4}\, 2 \cdot 2 \cdot 4 = 4$

|Aut| веса вершин

Преимущество: легко получить связные числа!

Надо брать только связные графы

Производящие ф-ии чисел Гурвица

$h^{\circ}_{m,\nu}$, $h_{m,\nu}$

$\nu = 1^{n_1} 2^{n_2} \ldots$

перестановка цикл. типа $\underset{\nu}{5} = \underset{\nu_1}{3} + \underset{\nu_2}{1} + \underset{\nu_3}{1}$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ $\quad \nu_1 + \ldots + \nu_k = n$, все перестановки из S_n

$$H^{\circ}(u; p_1, p_2, p_3, \ldots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots} h^{\circ}_{m,\nu} \, p_{\nu_1} p_{\nu_2} \ldots \cdot \frac{u^m}{m!} =$$

Пример. $h^{\circ}_{4,1^2 3^1} = [\frac{u^4}{4!}, p_1^2, p_3] \, H^{\circ}(u; p_1, p_2, p_3, \ldots)$

озн. „коэффициент при таком мономе"

$m=0 \Rightarrow$ для каждого n тожд. перестановка раскл. 1 способом

$$h^{\circ}_{0,1^n} = \frac{1}{n!}$$

$$= \underbrace{\left(1 + p_1 + \frac{p_1^2}{2!} + \frac{p_1^3}{3!} + \ldots\right)}_{\text{при } m=0} + \sum_{\nu = \nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots} h^{\circ}_{1,\nu} \, p_{\nu_1} p_{\nu_2} \ldots \frac{u^1}{1!} + \ldots$$

Получили разложение по степеням u

$$H(u,p_1,p_2,\dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=\nu_1\geqslant\nu_2\geqslant\dots} h_{m,\nu}\, p_{\nu_1} p_{\nu_2}\dots \frac{u^m}{m!} =$$

$$= \underbrace{p_1}_{m=0} + \underbrace{\frac{1}{2} p_2 \frac{u^1}{1!}}_{m=1} + \dots$$

при $m=0$ связное
число только
при $n=1$

$h_{0,1}=1$

$h_{0,1^n}=0$

Вывод: $H^0(u,p_1,p_2\dots) = \exp(H(u,p_1,p_2,\dots))$

Обозначим $\left[\frac{u^m}{m!}\right] H^0(u;p_1,p_2\dots) = H^0_m(p_1,p_2,\dots)$

$$\left[\frac{u^m}{m!}\right] H(u;p_1,p_2\dots) = H_m(p_1,p_2,\dots)$$

при $m=0$ $\quad 1+p+\frac{p_1^2}{2!}+\dots = \exp(p_1)$

Уравнение транспозиции

Теорема (Гульден–Джексон) $H^0 = H^0(u; p_1, p_2, \dots)$

$$\frac{\partial H^0}{\partial u} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geq 1}}\left((i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij\, p_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\right)}_{W} H^0$$

Это ур-ие cut and join

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}\left(2p_1^2\frac{\partial}{\partial p_2} + p_2\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\right)}_{n=2} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(2\cdot 3\, p_1 p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} + 2\cdot 1\cdot 2\, p_3 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2}\right)}_{n=3} + \dots$$

i, j — коэф-ты в графах

$$H^0(u, p_1, p_2, \dots) = e^{p_1} + \frac{u^1}{1!}H_1^0(p_1, p_2, \dots) + \frac{u^2}{2!}H_2^0(p_1, p_2, \dots)$$

$$[u^0]\frac{\partial H^0}{\partial u} = H_1^0(p_1, p_2, \dots) = W e^{p_1} = \frac{1}{2}p_2\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}e^{p_1} = \frac{1}{2}p_2 e^{p_1}$$

$\Rightarrow$ посчитали несвязные числа Гурвица, в кот. есть 1 транспозиция