Вариант 7

Мозговой Владимир

№1.1

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx+\int_0^{\pi}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{n+\frac{1}{2}}\Big|_0^{\pi}+\frac{\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)}{n-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n-\frac{1}{2}}\right)=\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\sin nx\,dx=0$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(nx)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{N}\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\cos(nx)$$

№1.2а

в $L^2(-\pi,\pi)$ сходится так как $\cos\frac{x}{2}\in L^2(-\pi,\pi)$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|^2dx<\infty$$

№1.2б

по теореме из лекции, если сходится в L^2, то и в L^1, то есть сходится

№1.2в

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\right|=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n-\frac{1}{2}}\right)\right|<\infty$$

то есть сходится

№1.3а

$$\left(\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\cos(nx)\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\cdot -n\sin(nx)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}\sin nx$$

№1.3б

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}\sin nx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$$

есть поточечная сходимость везде, кроме $x=\pi+2\pi n \quad n\in\mathbb{Z}$

в $x=\pi+2\pi n$ сходится к $\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2}=0$

№1.3в

в $x=\pi+2\pi n$ разрывы => равномерной сходимости нет

№1.3г

по Чезаро сходится, так как сходится поточечно

№1.4а

$$\left(\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\cos(nx)\right)''=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}\sin nx\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}\cos(nx)\right)$$

№1.4б

№2

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{k,m} \cos \pi k x \sin \pi m y$$

$$a_{k,m}=\frac{1}{m}\sin\left(\frac{1}{m}\right)\ln\left(1+\operatorname{sen} k^{-\frac{4}{3}}\right)$$

а) $f(x,y)\in L^2((0,1)^2)$, если $\int_0^1\int_0^1 f^2(x,y)\,dx\,dy$ интегрируемо

$$\int_0^1 \cos^2 \pi k x\,dx \int_0^1 \sin^2 \pi m y\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}-\frac{\cos 2\pi k x}{2}\,dx \int_0^1 \frac{1}{2}+\frac{\cos 2\pi m y}{2}\,dy$$

интегрируемо, то есть $f\in L^2(0,1)^2$

б)

№4   g - проекция $ax+bx^2 \in \langle\{x, x^2\}\rangle$

1) $\langle f(x)-g(x), x\rangle = 0$

$$\int_0^2 x(\sin x - ax - bx^2)\,dx = 0$$

$$\int_0^2 x\sin x\,dx - \int_0^2 x^2 a\,dx - \int_0^2 x^3 b\,dx = \int_0^2 -x\,d\cos x - a\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - b\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^2 + \int_0^2 \cos x\,dx - \frac{8a}{3} - \frac{16b}{4} = -2\cos 2 - \frac{8a}{3} - \frac{16b}{4} + \sin 2 = 0$$

2) $\langle f(x)-g(x), x^2\rangle = 0$

$$\int_0^2 x^2(\sin x - ax - bx^2)\,dx = 0$$

$$\int_0^2 x^2\sin x\,dx - \int_0^2 x^3 a\,dx - \int_0^2 x^4\,dx\,b = -\int_0^2 x^2\,d\cos x - a\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - b\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 =$$

$$= -x^2\cos x\Big|_0^2 + 2\int_0^2 x\cos x\,dx - \frac{16a}{4} - \frac{32b}{5} = -4\cos 2 - 4a - \frac{32b}{5} + 2\int_0^2 x\,d\sin x =$$

$$= -4\cos 2 - 4a - \frac{32}{5}b + 2\left(x\sin x\Big|_0^2\right) - 2\int_0^2 \sin x\,dx = -4\cos 2 - 4a - \frac{32}{5}b + 4\sin 2$$

$$+ 2\cos x\Big|_0^2 = -4\cos 2 + 2\cos 2 - 4a - \frac{32}{5}b - 2\cos 0 = -2\cos 2 + 4\sin 2 - 4a - \frac{32}{5}b - 2 = 0$$

$$\begin{cases} -2\cos 2 - \frac{8a}{3} - \frac{16b}{4} + \sin 2 = 0 \\ -2\cos 2 - 4a - \frac{32}{5}b + 4\sin 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$2(2) - 3(1) = 2\cos 2 - \frac{4}{5}b + 5\sin 2 - 4 = 0$ $b = \frac{5}{4}(2\cos 2 + 5\sin 2 - 4)$

$5(2) - 8(1) = 0$ $a = -\frac{3}{2}(-5 + 6\sin 2 + 3\cos 2) =$

$= \frac{3}{2}(5 - 6\sin 2 - 3\cos 2)$

то есть $\frac{5}{4}(2\cos 2 + 5\sin 2 - 4)x^2 + \frac{3}{2}(5 - 6\sin 2 - 3\cos 2)x$