2к Мат. Анализ. Семинар № 20

Решение уравнения теплопроводности. Обоснование метода Фурье

(1) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q = (0,l) \times (0,T)$

(2) $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in [0,l]$

(3) $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t \in [0,T]$

Формула решения:

(4) $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \, e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x$

где $\mu_k = \frac{k\pi}{l}$, $C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \, ds$ – коэфф. Фурье ф-ии $\varphi(x)$, $k = 1, 2, \ldots$

При каких условиях (4) задаёт решение задачи (1), (2), (3)?

Задача 1. Пусть $\varphi(x) \in C[0,l]$, причём $\exists \, \varphi'(x) \in L_2(0,l)$ и выполнены условия согласования $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Тогда $\exists!$ решение задачи (1), (2), (3), которое задаётся формулой (4).

Решение: $u(x,t)$ – удовлетворяет граничным условиям (3), т.к. им удовлетворяют все члены ряда (4).
Начальные условия (2) так же выполнены, т.к. $u(x,0)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \sin\mu_k x$ – ряд Фурье функции $\varphi(x)$, который равномерно сходится, т.к. $\varphi(0)=\varphi(l)=0$ и $\varphi'(x)\in L_2(0,l)$,
Осталось проверить, что ряд (4) сходится, его сумма $u(x,t)$

1) непрерывна в $\overline{Q}$
2) имеет непрерывные производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в Q
3) удовлетворяет уравнению (1).

Докажем эти утверждения:

$$|c_k e^{-a^2\mu_k t}\sin(\mu_k x)| \le |c_k| \quad \forall (x,t)\in\overline{Q}$$

Установим, что ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k| < \infty$$

Тогда по признаку Вейерштрасса

Получим <u>равномерную</u> сходимость ряда (4). Имеем:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\mu_k s)\,ds = -\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\cdot\frac{d\cos(\mu_k s)}{\mu_k} =$$

$$= -\frac{2}{l\mu_k}\underbrace{\varphi(s)\cdot\cos(\mu_k s)\Big|_0^l}_{=0,\ \text{условия согласования}} + \frac{2}{k\pi}\int_0^l \varphi'(s)\cdot\cos(\mu_k s)\,ds =$$

$$= \frac{l}{k\pi}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l \varphi'(s)\cos(\mu_k s)\,ds = \frac{l}{k\pi}\cdot d_k,$$

где d_k – коэффициенты Фурье функции $\varphi'(x)$ по ортогональной системе $\{\cos\mu_k x\}$.

В силу неравенства Бесселя, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \le \frac{2}{l}\cdot\int_0^l |\varphi'(x)|^2 dx < \infty.$$

сходится. Тогда из неравенства

$$|C_k| = \frac{l}{k\pi}|d_k| \le \frac{l}{2\pi}\left(|d_k|^2 + \frac{1}{k^2}\right)$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|$$

Значит, ряд (4) сходится <u>равномерно</u>, его сумма $u(x,t)$ является <u>непрерывн</u>

функцией на $\overline{Q}$, и при этом:

$$u(x,t) \to \varphi(x) \text{ при } t \to 0 \quad \forall x \in [0,l]$$

$$u(x,t) \to 0 \text{ при } x \to 0+,\ x \to l-$$

т.е. $u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию (2) и граничному условию (3)

Установим дифференцируемость решения. Продифференцируем формально ряд (4) один раз по t и 2 раза по x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 C_k e^{-a^2\mu_k^2 t} \sin\mu_k x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 C_k e^{-a^2\mu_k^2 t} \sin\mu_k x$$

Покажем, что $\forall$ фиксированного $\tau > 0$ эти ряды равномерно сходятся при $x \in [0,l]$, $t \geqslant \tau$.

Поскольку $\varphi(x) \in C[0,l]$, то она ограничена: $\exists M: \ |\varphi(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,l]$

Следовательно $|C_k| = \left|\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\mu_k s\, ds\right| \leq \frac{2}{l}\int_0^l M ds = 2M$

т.е. $|C_k| \leq 2M$

Поэтому, при $t \geqslant \tau > 0$

$$|k^2 C_k \cdot e^{-a^2\mu_k t}\sin\mu_k x| \le 2M k^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2\tau}$$

Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k^2 \cdot e^{-\alpha k^2}}_{=a_k}, \text{ где } \alpha = \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\tau > 0.$$

Этот ряд сходится по признаку Даламбера.

т.к. $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2}{k^2}\cdot e^{-\alpha(2k+1)} \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Тогда ряды, полученные дифференцированием, сходятся равномерно. Следовательно, ряд (4) можно почленно дифференцировать один раз по t и 2 раза по x в области $x\in l$, $t \geq \tau$. Следовательно сумма ряда $u(x,t)$ имеет непрерывные производные при $t \geq \tau$ $\forall \tau > 0$.

Кроме того, $u(x,t)$ – удовлетворяет уравнению (1), поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \sum k^2 C_k e^{-a^2\mu_k t}\sin\mu_k x + a^2\cdot\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum k^2 e^{-a^2\mu_k t}\sin\mu_k x = 0$$

В области $x\in[0,l]$, $t>0$.

З.и.т. (4) – определяет решение (1), (2), (3).

Задача 2 Док. единственность этого решения.
Пусть есть два решения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$.
Рассмотрим разность $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$.
Функция $u(x,t)$ является решением этой же задачи, с нулевыми нач. условиями:

(5) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , (x,t)\in Q$

(6) $\quad u(x,0)=0\ ,\ x\in[0,l]$

(7) $\quad u(0,t)=u(l,t)=0\ ,\ t\in[0,T]$

Покажем, что $u(x,t)\equiv 0$ в $(x,t)\in Q$.
Рассмотрим коэффициент Фурье функции $u(x,t)$ при фиксированном $t>0$:

$$C_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\cdot\sin\mu_k x\,dx$$

Умножим уравнение (5) на $\sin\mu_k x$ и проинтегрируем обе части по $[0,l]$:
Слева получим:

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\sin\mu_k x\,dx=\frac{d}{dt}\int_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\,dx=\frac{l}{2}C_k'(t)$$

Справа проинтегрируем по частям 2 раза:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\sin\mu_k x\,dx=\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\sin\mu_k x\Big|_0^l}_{=0}-\mu_k\int_0^l\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\mu_k x\,dx$$

$$= -\mu_k \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\cdot \cos\mu_k x\,dx = -\mu_k \underbrace{u(x,t)\cos\mu_k x\Big|_0^l}_{=0}$$

$$\mu_k^2 \int_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\,dx = -\frac{l}{2}\mu_k^2\cdot C_k(t).$$

Следовательно, $C_k(t)$ удовлетворяет ур-ю:

$$\frac{d}{dt}C_k(t) = -a^2\mu_k^2 C_k(t) \Rightarrow C_k(t) = C_k(0)e^{-a^2\mu_k^2 t}.$$

Однако, $u(x,t)=0$ при $t=0$. Тогда, в силу непрерывности $u(x,t)$ на $\overline{Q}$, $C_k(0)=0$.

Следовательно $C_k(t)\equiv 0 \quad \forall t\geq 0$.

А если у непрерывной функции все коэффициенты Фурье равны нулю, то она тождественный нуль, т.е.

$$u(x,t)\equiv 0 \quad \forall (x,t)\in \overline{Q}, \text{ а значит}$$

$$u_1(x,t)\equiv u_2(x,t) \quad \forall (x,t)\in\overline{Q}.$$

Задача 3. В условиях задачи 1, показать, что решение $u(x,t)\in C^\infty(Q)$

Решение: Ряд $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-a^2\mu_k^2 t}\sin\mu_k x$

можно сколько угодно раз дифференцировать по x и по t. При этом

при $\forall t\geq \tau > 0$ ...

будут мажорантные ряды, которые имеют мажоранты вида $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2p} e^{-\alpha k}$, $\alpha>0$, которые сходятся. Значит производные то же будут сходиться, и можно дифференцировать почленно, т.е. $u(x,t)\in C^{\infty}(Q)$.

Заметим, что при $t=0$ $u(x,0)=\varphi(x)$ может не быть столь гладкой. В этом заключается свойство сглаживания уравнения теплопроводности.

---

② Функция Грина уравнения теплопроводности.

Перепишем формулу (4) подставив в нее вместо C_k соответствующий интеграл

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-a^2\mu_k^2 t}\sin\mu_k x =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\mu_k x)\sin(\mu_k s)e^{-a^2\mu_k^2 t}\,ds =$$

$$=\int_0^l\left[\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(\mu_k x)\cdot\sin(\mu_k s)\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\right]\varphi(s)\,ds$$

Мы поменяли местами суммирование и интегрирование, т.к. соответствующий ряд равномерно сходится, поскольку имеем мажоранту:

$$e^{-a^2\mu_k t} \le e^{-a^2\mu_k T} = e^{-\alpha k^2} \le \frac{M_n}{k^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Следовательно, его можно интегрировать почленно.

В итоге, если обозначить

$$G(x,s,t) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k x)\sin(\mu_k s)\, e^{-a^2\mu_k^2 t}$$

где $x,s\in[0,l]$, $t>0$.

$$\boxed{u(x,t)=\int_0^l \underbrace{G(x,s,t)}_{\text{функция Грина}}\varphi(s)\,ds}\,, \quad x,s\in[0,l],\ t>0.$$

$G(x,s,t)$ называется <u>функцией Грина</u> задачи (1)(2)(3) для ур. теплопроводности.

<u>Свойства функции Грина:</u>

1) симметричность: $G(x,s,t)=G(s,x,t)$

2) $G(x,s,t)\in C^{\infty}([0,l]\times[0,l]\times\mathbb{R}_+)$.

3) При $t=0$ она не определена!

4) $G(x,s,t) \geq 0 \quad \forall x, s \in [0,l],\ t > 0$.

(Доказывается с помощью принципа максимума)

5) $G(x,s,t)$ – удовлетворяет по x и t уравнению теплопроводности и граничным условиям:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad \forall s \in [0,l], x \in [0,l], \ t > 0.$$

$$G(0,s,t) = G(l,s,t) = 0 \quad \forall s \in [0,l], \ \forall t > 0.$$

Поскольку G это линейная комбинация функций $\sin \mu_n x \cdot e^{-a^2 \mu_n^2 t}$, которые удовлетворяют уравнению теплопроводности (1) и граничным условиям и все ряды сходятся при $t \geq \tau > 0$.