Логика и алгоритмы

Задачи семинаров 3

Начальным отрезком множества $(X, <)$ называется такое подмножество $Y \subset X$, для которого $\forall x, y \in X\ (y < x \wedge x \in Y \Rightarrow y \in Y)$. Начальный отрезок, не совпадающий со всем множеством X, называется *собственным.*

Теорема 1. *Никакое вполне упорядоченное множество* $(X, <)$ *не является изоморфным своему собственному начальному отрезку.*

Теорема 2 (Кантор)**.** *Для двух вполне упорядоченных множеств верно, что одно из них изоморфно начальному отрезку другого.*

Для двух линейно упорядоченных множеств $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ их *суммой* называется множество $A \sqcup B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ вместе с отношением порядка

$$(x, i) < (y, j) \iff \left[\begin{array}{l} i = j = 0 \text{ и } x <_A y, \\ i = j = 1 \text{ и } x <_B y, \\ i = 0 \text{ и } j = 1. \end{array} \right.$$

Произведением двух линейно упорядоченных множеств $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ называется множество $A \times B$ вместе с отношением порядка

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \iff \left[\begin{array}{l} y_1 = y_2 \text{ и } x_1 <_A x_1, \\ y_1 <_B y_2. \end{array} \right.$$

1. Верно ли, что операции сложения и умножения линейно упорядоченных множеств обладают свойствами коммутативности, ассоциативности, левой и правой дистрибутивности (с точностью до изоморфизма)?

2. Докажите, что для линейно упорядоченного множества $(X, <)$ следующие условия эквивалентны:

   а) для любого множества A верно, что если $\forall x \in X\ (\forall y < x\ y \in A \to x \in A)$, то $X \subset A$;

   б) любое непустое подмножество X содержит минимальный элемент;

   в) не существует убывающей последовательности $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$ элементов множества X.

3. Докажите, что сумма двух вполне упорядоченных множеств и произведение двух вполне упорядоченных множеств также является вполне упорядоченным.

4. Докажите, что всякое вполне упорядоченное множество изоморфно сумме α и β, где α — множество без наибольшего элемента, β — конечное множество.

5. Докажите, что любое вполне упорядоченное множество без наибольшего элемента изоморфно произведению ω на α.

6. Докажите, что любой собственный начальный отрезок вполне упорядоченного множества $(X, <)$ имеет вид $[0, a) = \{x \in X \mid x < a\}$ для некоторого $a \in X$.

7. Докажите, что любое подмножество вполне упорядоченного множества $(X, <)$, как множество с индуцированным порядком, изоморфно начальному отрезку $(X, <)$.

   Множество T называется *транзитивным*, если $\bigcup T \subset T$. *Ординал* — это транзитивное множество, каждый элемент которого транзитивен.

8. Приведите пример транзитивного множества, которое не является ординалом.

9. Докажите, что элемент любого ординала является ординалом, что для любого ординала α множество $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ является ординалом, а также, что $\bigcup X$ является ординалом для любого множество ординалов X.

10. Докажите, что каждое натуральное число и всё множество $\mathbb{N}$ — ординалы.

    Обозначение: $x < y :\Leftrightarrow x \in y$. Мы также будем писать $x \leqslant y$, если $x < y$ или $x = y$.

    Теорема 3. *Класс всех ординалов линейно упорядочен с помощью $<$. Более того, всякое непустое множество ординалов содержит $<$-наименьший элемент.*

11. Докажите, что для ординалов α и β

$$\alpha < \beta \iff \alpha \subsetneqq \beta, \qquad \alpha \leqslant \beta \iff \alpha \subset \beta.$$

    Также для для ординалов α и β проверьте, что если $\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha + 1$, то $\beta = \alpha$ или $\beta = \alpha + 1$.

12. Докажите, что всякий ординал α либо имеет вид $\beta+1$ для некоторого ординала β, либо равен объединению всех предшествующих ординалов $\bigcup \alpha$.

    Ординалы вида $\beta+1$ называются ординалами-*последователями*; все остальные ординалы, кроме 0, называются *предельными*.

13. Докажите, что для любого множество ординалов X множество $\bigcup X$ является точной верхней гранью множества X, $\sup X$.

14. В две строчки докажите, что любое подмножество конечного множества конечно, а также, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

15. Бывают ли конечные ординалы, которые отличны от всех натуральных чисел?