Занятие 3

Сигнатура $\sigma = \langle Cnst, Fn, Pr \rangle$ — это фиксированный набор констант, функциональных символов и предикатных символов. Она определяет *язык первого порядка* (элементарный язык) сигнатуры σ. Синтаксис языка содержит определения правильно построенных выражений двух сортов — термов и формул.

Фиксируем множество $Var = \{x_0, x_1, \ldots\}$ *индивидных* переменных (мыслятся пробегающими одно и то же множество значений).

Термы (Tm).

- $Cnst \cup Var \subseteq Tm$
- Если $t_1, \ldots, t_n \in Tm$, $f \in Fn$, $arity(f) = n$, то $f(t_1, \ldots, t_n) \in Tm$.

Формулы (Fm).

- Если $t_1, \ldots, t_n \in Tm$, $P \in Pr$, $arity(P) = n$, то $P(t_1, \ldots, t_n) \in Tm$.
- Если $\varphi, \psi \in Fm$, то $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in Fm$.
- Если $\varphi \in Fm$, $x \in Var$, то $(\forall x\varphi), (\exists x\varphi) \in Fm$. В этих случаях φ считается *областью действия* квантора, а все вхождения переменной x в φ (если они есть) объявляются *связанными*.

Переменные, которые имеют несвязанное вхождение в формулу, называются *свободными* переменными формулы (или ее параметрами). Формула без свободных переменных называется *замкнутой*.

Семантика. Фиксируем интерпретацию I сигнатуры в некоторой математической структуре (модели языка). Переменные пробегают носитель структуры, константы обозначают конкретные (выделенные) элементы носителя, функциональные символы — конкретные (выделенные) операции на носителе, а предикатные символы — конкретные (выделенные) предикаты на носителе структуры. Замкнутые формулы получают однозначно определенное истинностное значение — 0 или 1.

Получаем язык для описания свойств этой структуры.

1. Сигнатура содержит двухместные $=^2$, $\in^2$, $\perp^2$. Констант нет. Носитель интерпретации M — все точки и прямые на плоскости. Предикатные символы интерпретируются равенством, принадлежностью

(точка лежит на прямой) и перпендикулярностью (прямых). Выразить:

(a) "x — точка", "x — прямая".

(b) "Прямые x и y параллельны".

(c) "x, y, z — вершины (невырожденного) треугольника".

(d) "Высоты каждого треугольника пересекаются в одной точке".

(e) "Точки x, y, z , t являются последовательными вершинами параллелограмма".

(f) "Точка z делит отрезок x, y пополам".

2. Язык арифметики. На множестве натуральных чисел заданы трехместные предикаты $S(x, y, z) =$ и $\iff x+y = z$, $P(x, y, z) =$ и $\iff x \cdot y = z$. На языке первого порядка с предикатными символами S, P записать:

   (a) формулы с одной свободной переменной a, истинные тогда и только тогда, когда $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, a — чётное число, a — нечётное число;

   (b) формулы с двумя свободными переменными a и b, истинные тогда и только тогда, когда $a = b$, $a \leq b$, a делит b;

   (c) формулы с тремя свободными переменными a, b и c, истинные тогда и только тогда, когда a — наименьшее общее кратное чисел b и c, a — наибольший общий делитель чисел b и c.

β-функция Гёделя. В стандартной интерпретации (см. задачу 2) языка арифметики выразим график β-функции Геделя. Эта такая функция, что для каждой конечной последовательности натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$ существуют x, y такие, что

$$\beta(x, y, 0) = n, \quad \beta(x, y, 1) = a_1, \quad \ldots \quad , \beta(x, y, n) = a_n.$$

3. Доказать выразимость в стандартной интерпретации языка арифметики условия " $y = 2^x$ ".

Техника доказательства невыразимости. Если отношение не сохраняется при некотором автоморфизме модели, то оно невыразимо. (Автоморфизм — это биекция носителя на себя, сохраняющая все сигнатурные операции, отношения и константы.) Выразимы ли следующие отношения?

4. $a = b$, $b = a + 1$, $c = a + b$ в $(\mathbf{Z}, <)$.

5. $a = 0$, $a = b$, $a < b$ в $(\mathbf{Z}, a + b = c)$.

6. $a = b$, $a = 1$, $a = 3$ в $(\mathbf{N}, a \vdots b)$ где $a \vdots b \Leftrightarrow \exists k(a = k \cdot b)$, т.е. $0 \vdots 0$.

Домашнее задание

7. Доделать задачи 1 и 2.

8. Пусть график функции $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ выразим в стандартной интерпретации языка арифметики. Доказать выразимость графика функции g, определенной рекурсией: $g(0) = a, \quad g(n{+}1) = f(n, g(n))$.

9. Выразимы ли следующие отношения?

   (a) $a = b$, $|a - b| = 2$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.
   (b) $a < b$, $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$ в $(\mathbf{N}, a + b = c)$.
   (c) "a — простое число" в $(\mathbf{N}, a \vdots b)$.
   (d) $a = 1$, $a = 2$ в $(\mathbf{Z}, a + b = c)$.
   (e) $a = 0$ в $(\mathbf{Z}, a = b + 1)$.
   (f) $a = b + 1$ в $(\mathbf{Z}, a = b + 2)$.
   (g) $a = b + 1$ в $(\mathbf{Z}, |a - b| = 1)$.
   (h) $|a - b| = 3$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.

Логика и алгоритмы весна 2019.
Задачи для семинара N 1.

исчисление высказываний

Шпаргалка (аксиомы и правило вывода):

$$
\begin{aligned}
A_1 &: A \to (B \to A);\\
A_2 &: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C));\\
A_3 &: A \wedge B \to A;\\
A_4 &: A \wedge B \to B;\\
A_5 &: A \to (B \to (A \wedge B));\\
A_6 &: A \to (A \vee B);\\
A_7 &: B \to (A \vee B);\\
A_8 &: (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C));\\
A_9 &: (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A);\\
A_{10} &: \neg\neg A \to A.
\end{aligned}
$$

$$\text{Modus Ponens} : \frac{A,\ A \to B}{B}.$$

Теорема о дедукции: $\Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash A \to B$.

1. Докажите что:
   (a) если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \wedge B$;
   (b) если $\Gamma, A \vdash C$ $\Gamma, B \vdash C$, то $\Gamma, A \vee B \vdash C$ (правило разбора случаев).

2. Докажите что:
   (a) если $\Gamma, A \vdash B$ $\Gamma, A \vdash \neg B$, то $\Gamma \vdash \neg A$ (рассуждение от противного),
   (b) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$,
   (c) $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$,
   (d) $\vdash A \vee \neg A$,
   (e) если $\Gamma, A \vdash C$ $\Gamma, \neg A \vdash C$, то $\Gamma \vdash C$.

3. Докажите выводимость следующих формул:
   (a) $A \wedge B \to B \wedge A$;
   (b) $A \vee B \to B \vee A$;
   (c) $A \wedge (B \wedge C) \to (A \wedge B) \wedge C$;
   (d) $A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C$;
   (e) $(A \vee B \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$;

(f) $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \to (A \vee B) \wedge C$;

(g) $(A \vee B) \wedge C \to (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;

(h) $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee C$;

(i) $(A \wedge B) \vee C \to (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

4. Докажите выводимость следующих формул:

(a) $A \to \neg\neg A$;

(b) $A \wedge \neg A \to B$;

(c) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

(d) $A \vee B \to (\neg A \to B)$;

(e) $(\neg A \to B) \to A \vee B$.

5. Докажите выводимость формул, соответствующих *законам де Моргана.*

(a) $\neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$;

(b) $\neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$;

(c) $\neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$;

(d) $\neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$.

Множество формул Γ называется *непротиворечивым*, если нет такой формулы A, для которой одновременно $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$. Максимальное по включению непротиворечивое множество формул называется *максимально непротиворечивым.*
Множество формул Γ называется *полным*, если для любой формулы A из гипотез Γ выводима ровно одна из формул A, $\neg A$.

6. Пусть дана функция $f : Var \longrightarrow \{0,1\}$ (оценка пропозициональных переменных). Докажите, что множество формул $\Gamma_f = \{A \mid f(A) = 1\}$ максимально непротиворечиво.

7. Докажите, что Γ полно тогда и только тогда, когда множество всех формул, выводимых из Γ, максимально непротиворечиво.

8. В этой задаче будем считать, что формулы содержат только три переменные p, q и r. Для следующих множеств формул определите, являются ли они непротиворечивыми и являются ли они полными.

(a) $\{p \to q, q \to p\}$,

(b) $\varnothing$,

(c) $\{p \wedge q \wedge r\}$,

(d) $\{p \vee q \to r, \neg r, p \vee q\}$,

(e) $\{p \wedge q \to q \vee r, r, \neg(p \vee q)\}$,

(f) $\{\neg(p \to \neg q), \neg p\}$.

Логика предикатов.

9. Рассмотрим сигнатуру $\{\cdot, +, =\}$, где $\cdot, +$ — 2-местные функциональные символы, $=$ — 2-местный предикатный символ. Рассмотрим нормальную модель этой сигнатуры $(P(A), \cap, \cup)$, где A — некоторое множество, $P(A)$ — множество всех его подмножеств (т.е. $\cdot$ интерпретируется как операция пересечения, а $+$ — как операция объединения на $P(A)$).

Рассмотрим модель $(P(A), =, \cap, \cup)$, где «=» — предикат равенства, $\cap$ и $\cup$ — соответственно, пересечение и объединение множеств. Запишите формулу, говорящую, что в этой модели

(a) $a \subset b$;

(b) a — одноэлементное множество;

(c) a — двухэлементное множество.

10. Для каждой из следующих формул определите, являются ли они выполнимыми или опровержимыми:

    (a) $\exists x \forall y (Q(x, x) \wedge \neg Q(x, y))$;

    (b) $\exists x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y))$;

    (c) $\forall x \exists y (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))$;

    (d) $\exists y \forall x (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))$;

    (e) $\forall x \neg \forall y \neg P(x, y) \wedge \neg \exists z \forall y P(y, z)$;

    (f) $\forall x\, (\neg P(x, x) \wedge \exists z P(z, x) \wedge \forall y \exists z (P(x, z) \wedge P(z, y) \vee \neg P(x, y)))$.

11. общезначимы ли следующие формулы?

    (a) $\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x Q(x, y)$;

    (b) $\forall y \exists x Q(x, y) \to \exists x \forall y Q(x, y)$;

    (c) $\forall x (P(x) \to \neg Q(x)) \to \neg(\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x))$.