Гладкие многообразия.

1 Лекция (02.09.19)

Определение 1.1. *Параметризованная кривая* в $\mathbb{R}^n$ — отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, то есть $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots .x_n(t))$.

Если γ — непрерывное (гладкое), то и кривая непрерывная (гладкая).

Определение 1.2. Гладкая кривая γ называется *регулярной*, если $\gamma'(t) \neq 0$ при $t \in (a, b)$ и на краях имеет ненулевой предел.

Определение 1.3. Регулярные кривые γ_1, γ_2 называются *эквивалентными*, если существует такой *диффеоморфизм* (обратимая и в обе стороны дифференцируемая функция с ненулевой производной) $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$, что $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$.

Определение 1.4. *Регулярной кривой* называется класс эквивалентности параметризованных кривых.

Определение 1.5. *Длиной* регулярной кривой называется $l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\dot{\gamma}(t)||dt$.

Лемма 1.1. Это определение корректно (длина кривой не зависит от параметризации).

Доказательство. Все обозначения сохранены. Пусть $\tau = \varphi(t)$ — диффеоморфизм. Тогда $\gamma_2(\tau) = \gamma_1(t)$ и $\varphi'(t) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi'(t) > 0$.

$$l(\gamma_1) = \int\limits_{a_1}^{b_1} ||\dot{\gamma}_1(t)||dt = \int\limits_{a_1}^{b_1} ||\frac{d\gamma_2}{d\tau}\dot{\tau}||dt = \int\limits_{a_1}^{b_1} ||\frac{d\gamma_2}{d\tau}||\dot{\tau}dt = \int\limits_{a_2}^{b_2} ||\frac{d\gamma_2}{d\tau}||d\tau = l(\gamma_2).$$

□

Определение 1.6. *Натуральной параметризацией* кривой называется такая параметризация, что изменение длины кривой в точности совпадает с изменением параметра (иначе говоря, $||\varphi'(t)|| = 1$).

Лемма 1.2. У регулярной кривой есть натуральная параметризация.

Доказательство. $s(t) := \int\limits_a^t ||\gamma'(\tau)||d\tau$. Такая s гладкая и $s : [a, b] \to [0, l(\gamma)]$ — диффеоморфизм.

□

Формулы Френе.

- **Для** $\mathbb{R}^2$. Пусть γ — кривая, s — натуральный параметр, $v = \gamma'(s)$ — вектор скорости, n — единичная нормаль, дополняющая v до положительного репера. Тогда

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix},$$

  где k — функция на кривой.

  Доказательство. Мы хотим убедиться, что $v' = kn$ и $n' = -kv$. Известно, что $(v, v) = (n, n) = 1$ и $(v, n) = 0$. Продиффиренцируем первое: $(v', v) + (v, v') = 2(v, v') = 0$. Откуда следует, что $v' = an$ (аналогично $n' = bv$.) Теперь продиффиренцируем $(v, n) = 0$: $(v', n) + (v, n') = a + b = 0$. что и требовалось.

  □

  Определение 1.7. k называется *кривизной* плоской кривой, а $R = \dfrac{1}{k}$ — *радиусом кривизны.*

- **Для** $\mathbb{R}^3$.

  Определение 1.8. Натуральная параметризация называется *бирациональной*, если $\gamma''(s) \neq 0$.

  Рассмотрим *репер Френе*: v, $n = \dfrac{\gamma''(s)}{||\gamma''(s)||}$ (*нормаль*), $b = [v, n]$ (*бинормаль*). Тогда

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

  Доказательство. Доказывается аналогично двумерному случаю.

  □

2 Лекция (03.09.19)

Теорема 2.1. Гладкие функции k и κ однозначно определяют бирегулярную кривую в $\mathbb{R}^3$ (с точностью до движения).

Доказательство. Формулы Френе с начальным условием (при $t = 0$) однозначно определяют репер Френе в каждой точке (как решения дифференциального уравнения).

Если еще и точку кривой при $t = 0$ задать, то кривая восстановится однозначно (нужно проинтегрировать функцию v). Условие на начальную точку — единственная свобода, которая у нас есть, откуда и кривая восстанавливается однозначно с точностью до движения.

□

Теорема 2.2. Пусть M — подмножество евклидова пространства R^{n+k}. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) в достаточно малой окрестности каждой своей точки M задается как график гладкого отображения

$$x_1 = (\psi_1(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})),$$

$$\ldots$$

$$x_n = (\psi_n(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})),$$

(после подходящего перенумерования координат $x_1, \ldots, x_{n+k}$);

(2) в достаточно малой окрестности каждой своей точки M задается как множество нулей гладкого отображения $F : W \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ такого, что в этой окрестности матрица $J = \left(\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}\right) \in Mat_{n\times n}$ обратима (после подходящего перенумерования координат $x_1, \ldots, x_{n+k}$);

(3) множество точек $f(x)$, где x — k-мерный вектор, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n+k}$

$$y_1 = f_1(x)$$

$$\ldots$$

$$y_{n+k} = f_{n+k}(x),$$

а матрица Якоби имеет ранг k.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). По теореме о неявной функции.

(1) $\Rightarrow$ (2). $F = (F_1(x), \ldots, F_n(x)) = ((x_1 - \psi_1), \ldots, (x_n - \varphi_n))$.

((1) $\Rightarrow$ (3)). Как частный случай.

((3) $\Rightarrow$ (1)). По теореме об обратной функции (если в некоторой точке функция непрерывно дифференцируема и якобиан ненулевой, то она локально обратима) можно выбрать k строк (без ограничения общности это первые k) и представить в виде

$$x_1 = \varphi_1(y)$$

$$\dots$$

$$x_k = \varphi_k(y).$$

Тогда локально M представимо в виде $(y_1, \dots, y_k, f_{k+1}(\varphi(y)), \dots, f_{k+n}(\varphi(y)))$.

$\square$

Определение 2.1. Подмножество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ называется *подмногообразием,* если удовлетворяет любому из условий теоремы.

3 Лекция (16.09.19)

Определение 3.1. *Подмногообразия* $\mathbb{R}^3$ (двумерные) — регулярная поверхность, удовлетворяющая одному из условий:

(1) $F(x, y, z) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$;

(2) $z = f(x, y)$;

(3) образ такого отображения $r : U \to \mathbb{R}^3$, где $U \subset \mathbb{R}^2$ — открытое подмножество, что r_1, r_2 — столбцы матрицы Якоби отображения r — линейно независимы.

Кривые на двумерных поверхностях в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $r : U \to \mathbb{R}^3$ — поверхность. $\gamma : I \to U$ — уравнение кривой. Тогда кривая на поверхности — это $r \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$.

Длина кривой на поверхности $l(\gamma) = \int\limits_a^b |\dfrac{d}{dt} r(\gamma)| dt = \int\limits_a^b |(r_1 \dot{u}^1 + r_2 \dot{u}^2)| dt =$

$$= \int\limits_a^b |\sqrt{(r_1 \dot{u}^1 + r_2 \dot{u}^2,\ r_1 \dot{u}^1 + r_2 \dot{u}^2)} dt =$$

$$= \int\limits_a^b |\sqrt{(r_1, r_1)(\dot{u}^1)^2 + 2(r_1, r_2)\dot{u}^1 \dot{u}^2 + (r_2, r_2)(\dot{u}^2)^2} dt = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{\gamma} I \dot{\gamma}} dt.$$

Матрица $I = \begin{pmatrix} (r_1, r_1) & (r_1, r_2) \\ (r_1, r_2) & (r_2, r_2) \end{pmatrix}$ называется *первой квадратичной формой двумерной поверхности.*

Замечание 3.1. Скалярное произведение I на касательном пространстве совпадает с обычным евклидовым произведением в $\mathbb{R}^3$. Угол и длина определяются в соответствиии с ним.

Пусть n — вектор единичной нормали к $\langle r_1, r_2 \rangle$, $n = \dfrac{[r_1, r_2]}{||[r_1, r_2]||}$.

Матрица $J = \begin{pmatrix} (r_{11}, n) & (r_{12}, n) \\ (r_{12}, n) & (r_{22}, n) \end{pmatrix}$ называется *второй квадратичной формой двумерной поверхности,* где $r_{ij} = \dfrac{\partial r_i}{\partial u_j}$.

Кривизна линий на поверхности.

s — натуральный параметр.

$$\frac{d}{ds}(r(\gamma(s))) = kn_\gamma.$$

Теорема Менье. $k\cos\theta = k(n, n_\gamma) = \dfrac{J(\dot\gamma, \dot\gamma)}{I(\dot\gamma, \dot\gamma)}$, где θ — угол между n и n_γ.

Доказательство. Первое равенство верно по определению угла.

$$kn_\gamma = \frac{d}{ds}(r(\gamma(s))) = kn_\gamma = \frac{d}{ds}\left(r_1\dot u_1\frac{dt}{ds} + r_2\dot u_2\frac{dt}{ds}\right) =$$

$$= \left(\frac{dt}{dl}\right)^2\left(r_{11}(\dot u_1)^2 + 2r_{12}\dot u_1\dot u_2 + r_{22}(\dot u_2)^2 + r_1\ddot u_1 + r_2\ddot u_2\right) + \frac{d^2t}{dl^2}\left(r_1\dot u_1 + r_2\dot u_2\right).$$

Таким образом, $k(n, n_\gamma) = \dfrac{J(\dot\gamma, \dot\gamma)}{I(\dot\gamma, \dot\gamma)}$.

□

4 Лекция (17.09.19)

Замечание 4.1. $I(v, w) = v^1w^1 + v^2w^2$, $J = k_1v^1w^1 + k_2v^2w^2$. k_1, k_2 — корни многочлена $P(\lambda) = det(J - \lambda I)$.

Определение 4.1. **(1)** k_1, k_2 — *главные кривизны.*

(2) $k = k_1k_2$ — *гауссова кривизна.*

(3) $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ — *средняя кривизна.*

Предложение 4.1. (Формула Эйлера.) $\dfrac{J(v, v)}{I(v, v)} = k_1cos^2\varphi + k_2sin^2\varphi$, где φ — угол между главным направлением и вектором v.

Определение 4.2. Пусть M — множество, τ — топология, хаусдорфова, со счетной базой. M — *топологическое многообразие* размерности n, если для любой его точки существует окрестность, гомеоморфная открытому множеству в $\mathbb{R}^n$.

Определение 4.3. *Локальной картой* на топологическом многообразии называется карта $(U, \varphi) : U \in \tau$, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм.

Определение 4.4. *Атласом* на M назовём такой набор карт, что каждая точка покрыта хотя бы какой-то.

5 Лекция (23.09.19)

Определение 5.1. *Многообразие с краем* определяется так же как и многообразие, только карты отображаются в полупространство.

Определение 5.2. *Краем* соответственно называется прообраз границы полупространства.

Лемма 5.1. Край n-мерного многообразия не зависит от выбора атласа и является $n-1$-мерным многообразием той же гладкости, что и исходное.

Доказательство. Пусть есть два согласованных атласа. Отображения перехода в них гладкие. Заметим, что граничные точки не могут перейти во внутренние. Таким образом, граница сохраняется.

Атлас на границе вводится легко: нужно ограничить все атласы на эту границу. Поскольку граница соответствует нулевой координате образа, то размерность пространства понижается на 1. Проверку невырожденности оставляем читателю в качестве упражнения.

□

Определение 5.3. Атлас называется *ориентирующим*, если якобианы всех композиций положительны во всех точках.

Определение 5.4. Многообразие называется *ориентируемым (ориентированным)*, если на нем существует (задан) ориентирующий атлас.

Лемма 5.2. На связном ориентируемом многообразии существует ровно два не эквивалентных ориентирующих атласа.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}_1 = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ и $\mathcal{A}_2 = \{V_\beta, \psi_\beta\}$ — два ориентирующих атласа многообразия $\mathcal{M}$. Докажем, что либо якобианы всех отображений положительны, либо все якобианы отрицательны.

Рассмотрим множество M_1, где эти якобианы положительны, и множество M_2, где эти якобианы отрицательны. Оба множества открыты *(упражнение)* и $\mathcal{M} = M_1 \sqcup M_2$. Таким образом, поскольку $\mathcal{M}$ связно, одно из M_1, M_2 с ним совпадает.

Ну а два атласа точно существуют, из одного атласа можно получить другой сменой знака первой координаты.

□

Обозначение 5.1. Если $\mathcal{A}$ — атлас, будем обозначать $-\mathcal{A}$ атлас, получающийся из $\mathcal{A}$ сменой знака первой координаты в каждой карте.

6 Лекция (30.09.19)

Определение 6.1. *Цепочкой* карт называется конечная последовательность карт $\{U_i, \varphi_i\}$, причем $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$.

Определение 6.2. Цепочка называется *согласованной*, если якобианы соседних переходов положительны.

Определение 6.3. Цепочка длины m называется *противоречивой*, если она согласована и $J(\varphi_{1m}) < 0$ на всей области $U_1 \cap U_m \neq \varnothing$ пересечения.

Теорема (Критерий ориентируемости). Многообразие $\mathcal{M}$ является ориентируемым тогда и только тогда, когда на нем не существует противоречивой цепочки карт.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ ориентируемо, $\mathcal{A}$ — его ориентирующий атлас. Тогда любая карта $\mathcal{M}$ согласована либо с $\mathcal{A}$, либо с $-\mathcal{A}$ (в отображении делаем симметрию по первой координате). Рассмотрим какую-то согласованную цепочку. Заметим, что любые две соседние карты согласованы с одним и тем же из двух атласов. Тогда все карты (в том числе, крайние) согласованы с одним атласом. Таким образом, якобиан отображения между крайними не может быть отрицательным.

Теперь в другую сторону. Наконец-то воспользуемся тем, что $\mathcal{M}$ имеет счётную базу. Она есть. Тогда и счётный атлас существует (каждую карту можно представить в виде объединения базовых открытых множеств), назовём его $\mathcal{A} = \{U_i, \varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Рассмотрим две карты U_i, U_j. Множество $U_i \cap U_j = U_{ij}^+ \sqcup U_{ij}^-$ разбивается на два — плюсы и минусы якобиана отображения перехода. Рассмотрим цепочку $U_i, U_{ij}^+,\ U_j, U_{ij}^-$. Если оба U_{ij}^+,U_{ij}^- непусты, то такая цепочка противоречива. Таким образом, мы доказали в некотором смысле «корректность» — якобианы всех отображений имеют всюду один знак.

Теперь будем действовать последовательно, если $J(\varphi_{12}) < 0$, то сделаем симметрию первой координаты у второй карты. Дальше рассмотрим пару (2,3)... Каждый раз получившееся множество карт будем обозначать $\mathcal{A}_i$. Рассмотрим первый момент, когда $\mathcal{A}_i$ перестало быть согласованным. Там, очевидно, найдется противоречивая цепочка. Таким образом, $\mathcal{A}_\infty$ — нужный атлас.

Что важно, каждый раз мы добавлям карту, которая непусто пересекает хоть что-то. Можно считать, что мы последовательно строим связный граф. Каждый раз, когда мы добавляем вершину, мы смотрим на ребра — непустые пересечения карт, ребра бывают двух цветов — положительный и отрицательный якобиан. И нам разрешено перекрашивать все ребра из вершины при добавлении. Если мы в какой-то момент хотим добавить вершину, из которой исходит два разноцветных ребра, то рассмотрим цикл, который эти ребра содержит. Этот цикл соответствует противоречивой цепочке.

□

7 Лекция (1.10.19)

Теорема 7.1. Край ориентируемого многообразия с краем ориентируем и имеется соответствие между ориентацией многообразия и края.

Доказательство. Рассмотрим ориентируемый атлас на $\mathcal{M}$ и разобъем его на две компоненты — содержащую край и не содержащую — $\mathcal{A} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\} \cup \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Построим естественным образом атлас на границе: $\mathcal{A}(\delta\mathcal{M}) = \{(V_\beta|_{u^1=0}, \widetilde{\psi_\beta})\}$, $\widetilde{\psi_\beta}(u^2, \ldots, u^n) = \psi_\beta(0, u^2, \ldots, u^n)$.

Запишем якобиан перехода на границе $\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi^1_{\alpha\beta}}{\partial u^1} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial\psi^2_{\alpha\beta}}{\partial u^1} & \frac{\partial\psi^2_{\alpha\beta}}{\partial u^2} & \ldots & \frac{\partial\psi^2_{\alpha\beta}}{\partial u^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\psi^n_{\alpha\beta}}{\partial u^1} & \frac{\partial\psi^n_{\alpha\beta}}{\partial u^2} & \ldots & \frac{\partial\psi^n_{\alpha\beta}}{\partial u^n} \end{pmatrix}$. В нижнем блоке стоит якобиан отображения края. А единственные ненулевой элемент первого отображения — положительный: $\frac{\partial\psi^1_{\alpha\beta}}{\partial u^1} = \frac{\psi_{\alpha\beta}(\Delta t, \ldots) - \psi_{\alpha\beta}(0, \ldots)}{\Delta t} > 0$. Что и требовалось.

$\square$

Морфизмы многообразий.

Пусть даны два многообразия $\mathcal{M}^m$ и $\mathcal{N}^n$ гладкости k и отображение $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ — соответственно атласы этих многообразий.

Определение 7.1. Отображение $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ многообразий гладкости хотя бы k называется *C^k-гладким*, если оно гладко переводит друг в друга образы карт $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Определение 7.2. Отображение называется *C^k-гладкой* функцией, если $\mathcal{N} = \mathbb{R}$.

Касательные пространства к многообразию.

Определение 7.3. Рассмотрим какое-то многообразие $\mathcal{M}$. Назовем *гладким путем* из точки $p \in \mathcal{M}$ такое отображение $\widetilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}$ (считаем, что путь целиком лежит на $\mathcal{M}$), что $\widetilde{\gamma}(0) = p$ и $\gamma(t) = \psi(\widetilde{\gamma}(t))$ (обозначение).

Определение 7.4. Пусть (U, φ) — карта, содержащая p. Два пути в точке p назовем *эквивалентными*, если $\frac{d(\varphi(\widetilde{\gamma_1}) - \varphi(\widetilde{\gamma_2}))}{dt}(0) = 0$. А класс эквивалентности называется *касательным вектором.*

Лемма 7.1. Эквивалентность векторов не зависит от выбора карты.

Доказательство. Рассмотрим две карты U_α, U_β. Рассмотрим путь $\gamma_\alpha : (-\varepsilon,\ \varepsilon) \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$, аналогично определим γ_β.

Мы по определению имеем, что $\gamma_\alpha(t) = \varphi_\alpha(\widetilde{\gamma}(t))$, $\gamma_\beta(t) = \varphi_\beta(\widetilde{\gamma}(t))$ и $\gamma_\beta = \varphi_{\alpha\beta}(\gamma_\alpha(t))$.

Тогда $\dot{\gamma_\beta}(0) = J(\varphi_{\alpha\beta})\dot{\gamma_\alpha}(0)$. То есть эквивалентные векторы под действием отображения перехода снова будут эквивалентны.

□

Определение 7.5. Касательным пространством в точке p называется множество классов эквивалентности путей T_p из этой точки.

Замечание 7.1. Слово «пространство» употреблено не просто так. В действительности на нем можно ввести структуру векторного пространства, причем его размерность совпадает с размерностью гладкого многообразия.

Теорема 7.2. Докажем это. Рассмотрим карту (U, φ) с центром в p (то есть ту, где p в ноль улетает. Такая есть, достигается параллельным переносом (или еще чем угодно)). Определим сложение $v_1 + v_2 := [\gamma_1] + [\gamma_2] = [\gamma_1(t) + \gamma_2(t) - \varphi(p)]$ и умножение на константу $kv := k[\gamma(t)] = [\gamma(kt)]$.

Доказательство. Тут уже почти все сделано в формулировке. Почему размерности совпадают? Потому что условие на эквивалентность задает направление касательного вектора в образе карты. Получилась явная биекция.

□

8 Лекция (8.10.19)

Морфизм многообразий индуцирует отображение в касательных пространствах: $dF : T_p\mathcal{M} \to T_{F(p)}\mathcal{N}$ — *дифференциал*. Оно действует по правилу $dF(v) = dF[\gamma(t)] := [F(\gamma(t))]$.

Лемма 8.1. Координатная запись дифференциала.

Доказательство. Пусть $v - [\gamma(t)] = (\dot{\gamma}^1(0), \ldots, \dot{\gamma}^m(0))^T$. Тогда его образ при морфизме

$$dF(v) = J(F)v,\ J(F) \in Mat_{n\times m}.$$

□

Другое определение. *Касательным вектором* называется дифференцирование по направлению пути.

Лемма 8.2. Два определения касательного пространства эквивалентны.

Доказательство. Сопоставим классу эквивалентности дифференциал. Это биекция по определению.

Нужно проверить, что указанное отображение сохраняет структуру векторного пространства. Но структура векторного пространства в первом определении такова, что это очевидно правда.

□

Определение 8.1. *Векторным расслоением* называется тройка $(\mathcal{F}, \mathcal{M}, \pi)$, где $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$ — многообразия, $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ и у каждой точки $p \in \mathcal{M}$ существует такая окрестность O_p, что $\pi^{-1}(O_p)$ диффеоморфно $O_p \times \mathbb{R}^n$ и $\pi^{-1}(p)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Кроме того, отображение, являющееся композицией диффеоморфизма и обратного к нему, является линейным в каждом слое.

9 Лекция (14.10.19)

Кокасательное пространство и сопряжённое отображение.

Определение 9.1. *Кокасательным пространством* $T_p^*\mathcal{M}$ называется пространство, двойственное к $T_p\mathcal{M}$

Мы уже говорили, что морфизм многообразий индуцирует отображение касательных пространств. Построим отображение, которое действует на кокасательных пространствах.

$$F^* : T^*_{F(p)}\mathcal{N} \to T^*_p\mathcal{M},$$

$$F^*(\tau)(v) = \tau(dF(v)).$$

Определение 9.2. F^* называется *сопряженным отображением.*

Лемма 9.1. Координатная запись сопряженного отображения.

Доказательство. Пусть локальные координаты в точке p — $(x^1, \ldots, x^m)$, в точке $F(p)$ — $(y^1, \ldots, y^n)$ (взятые соответственно в картах (U, φ), (V, ψ)). Пусть $\tau = \tau_1 dy^1 + \ldots + \tau_n dy^n$, $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x^m}$.

Распишем по определению: $F^*(\tau)(v) = \tau(dF(v)) = \tau(J(F)v) = (\tau, J(F)v) = (J^T\tau)^T v = (J^T\tau, v)$. Таким образом $F^*(\tau) = J^T(F)\tau$.

□

Касательное и кокасательное расслоения.

Определение 9.3. *Касательным расслоением* называется множество $T\mathcal{M} = \bigcup\limits_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$, элементами которого служат пары (p, v), $v \in T_p\mathcal{M}$.

Введем структуру многообразия на этом множестве (топология индуцируется из атласов). Пусть $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — атлас на многообразии $\mathcal{M}$. Построим по этому атласу атлас на $T\mathcal{M}$. Пусть $\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — каноническая проекция.

$$\widetilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$$

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(p, v) = (\varphi_\alpha(p), du^1(v), \ldots, du^m(v)).$$

Чтобы определение было корректным, нужно еще проверить, что отображения перехода гладкие.

$\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^m) = (\varphi_{\alpha\beta}, J(\varphi_{\alpha\beta})v)$. То есть получилась блочная матрица размера $2m \times 2m$, каждый блок которой $J(\varphi_{\alpha\beta})$.

Определение 9.4. Кокасательное расслоение определяется точно так же, только один из блоков матрицы перехода будет $J^* = (J^T)^{-1}$.

Конец всего курса, не входящий в коллок.

10 Векторные расслоения

Определение 10.1. *Гладким векторным расслоением* $\mathcal{F}$ *размерности* m *над многообразием* M называется следующий набор объектов: гладкие многообразия M, E и гладкое отображение $\pi : E \to M$, такие, что на M существует атлас $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, для которого выполнены следующие условия:

1) для каждой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ существует диффеоморфизм:

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m;$$

2) отображения перехода $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m$ действует на элементах $(x, v) \in \Phi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta))$ так, что $\Phi_{\alpha\beta}(x, v) = (\varphi_{\alpha\beta}(x), G_{\alpha\beta}(x)v)$, где $G_{\alpha\beta}(x)$ — гладко зависящая от $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ невырожденная матрица $G_{\alpha\beta}(x) \in GL(m, \mathbb{R})$.

Многообразие E называют *пространством расслоения*, многообразие M — *базой расслоения*, пространство $\mathbb{R}^m = \Phi_\alpha(\pi^{-1}(x))$ — слоем расслоения над точной $x \in U_\alpha$, отображение π — *проекцией*, а атлас $\mathcal{A}$ и набор отображени Φ_α в совокупности называют *координатным описанием* расслоения.

Легко видеть, что карты $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$ образуют гладкий атлас многообразия E. Таким образом, чтобы определить расслоение $\mathcal{F}$, достаточно задать многообразие M, атлас $\mathcal{A}$ и отображения $\Phi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m$ перехода между цилиндрами. Многообразие E, точнее многообразие $\tilde{E}$, диффеоморфное E, строится как фактор несвязного объединение цилиндров

$$\tilde{E} = \bigsqcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m / \sim, \tag{1}$$

задаваемым отображениями перехода, т.е. $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \ni (x, v) \sim (\varphi_{\alpha\beta}(x), G_{\alpha\beta}(x)v)$ $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m$.

Определение 10.2. Говорят, что набор матричных функций $G_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(m, \mathbb{R})$ образуют *коцикл*, если они удовлетворяют двум условиям:

1) $G_{\alpha\beta}(x) = G_{\beta\alpha}^{-1}(x)$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$;

2) $G_{\alpha\beta}(x) G_{\beta\gamma}(x) G_{\gamma\alpha}(x) = I$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Задача 10.1. Проверьте, что отношение эквивалентности (1) задаёт многообразие тогда и только тогда, когда набор матричных функций G_α удовлетворяет условию коцикла.

Определение 10.3. *Заменой координатного описания* расслоения $\mathcal{F}$ называется выбор вместо отображений $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m$ отображений $\tilde{\Phi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m$ с другими гладкими матричными функциями $\tilde{G}_\alpha(x) : U_\alpha \to GL(m, \mathbb{R})$. Такие координатные описания называются *эквивалентными*.

Определение 10.4. Два векторных расслоения $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ над базой M называются *эквивалентными*, если их можно задать эквивалентными координатными описаниями. Расслоение называется *тривиальным*, если оно эквивалентно прямому произведению, то есть $E = M \times \mathbb{R}^m$, а π — проекция на первый сомножитель.

Определение 10.5. *Локальным сечением* векторного расслоения $\mathcal{F}$ называется гладкое отображение $s : U \to E$, $U \subset M$ такое, что $\pi(s(x)) = x$, $x \in U$.

11 Связность в векторном расслоении

Определение 11.1. *Связностью* или *ковариантными дифференцированием* в векторном расслоении $\mathcal{F} = (E, M, \pi, \mathbb{R}^m)$ назвается операция, сопоставляющая локальному сечению $s(x)$ расслоения $\mathcal{F}$ и вектору $w \in T_xM$, новый вектор $\nabla_w s \in \mathbb{R}^m$, принадлежащий слою расслоения $\mathcal{F}$ над точной x:

$$s, w \longmapsto \nabla_w s,$$

удоветоворяющая условиям:

1) линейность над $\mathbb{R}$ по обоим аргументам;

2) если $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, то выполнено тождество Лейбница: $\nabla_w(fs) = (\partial_w f)s + f\nabla_w s$.

Обозначим через Γ^k_{ij} элемент в формуле

$$\nabla_{\partial_j} e_i = \Gamma^k_{ij} e_k, \tag{2}$$

где e_i — базисное сечение, отображеющее любую точку x карты в i-й базисный вектор слоя. Функции Γ^k_{ij} называют *символами Кристоффеля*. В формуле (2) и во всех последующих формулах подразумевается суммирование по повторяющимся сверху и снизу индексам, т.е., в данном случае, по индекску k ($1 \leqslant k \leqslant m$), индексы i и j при этом пробегают диапазоны $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда прямым вычислением получается формула произвольного ковариантного дифференцирования сечений $s(x) = s^i e_i$:

$$\nabla_w s = w^j \left(\frac{\partial s^k}{\partial x^j} + s^i \Gamma^k_{ij} \right) e_k.$$

по касательному вектору $w = w^j \partial_j$. Обычно символы Кристоффеля применяют, когда речь идёт о связности в касательном расслоении. Ковариантное дифференцирование по вектору ∂_j можно также записать в матричной форме:

$$\nabla_{\partial_j} s = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + A_j(x) \right) s.$$

Элементы матрицы A_j с номером (i, k) является символом Кристоффеля Γ^k_{ij}.

Определение 11.2. *Параллельным переносом* вектора $v_0 \in \mathbb{R}^m$, принадлежащего слою расслоения $\mathcal{F}$, вдоль кривой $\gamma : [0, t_1] \to M$ из точки $\gamma(0) = x$ в точку $\gamma(t_1)$ называется вектор $v_1 = v(t_1) \in \mathbb{R}^m$, где $v(t)$ — решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} v(t) = \dot\gamma^j \left(\frac{dv^k(t)}{dx^j} + v^i \Gamma^k_{ij} \right) e_k = 0 \tag{3}$$

с начальным условием $v(0) = v_0$. Так как система (3) по теореме о продолжении решений имеет единственное решение на всём отрезке $[0, t_1]$ с заднным начальным условием $v(0) = v_0$, то параллельный перенос вектора вдоль кривой определён однозначно.

Определение 11.3. Связность ∇ в расслоении $\mathcal{F}$ называется *плоской*, если для любых точек $x, y \in M$ и любых гомотопных кривых $\gamma_1 \sim \gamma_2$, имеющих начало и конец в точках x и y, соответственно, результаты параллельного переноса вдоль любого пути из слоя расслоения над точкой x в точку y совпадают.

Определение 11.4. Если в расслоении $\mathcal{F}$ задана плоская связность, то можно определить *горизонтальные сечения*, то есть такие сечения, что, имея значение этого сечения в точке $x \in M$, можно получить его значение в точке y с помощью параллельного переноса вдоль кривой (результат этого переноса может зависить лишь от гомотопического классл пути). В случае, если M — неодносвязное многообразие, возможно существование нетривиальных петель. Параллельный перенос вектора из слоя вдоль петли определяет некоторый оператор на слое, который называется *опреатором монодромии* или *монодромией* связности. Так как этот оператор является автоморфизмом пространства решений системы (3), а пространство её решений — это m-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, то оператор монодромии — m-мерный линейный оператор.