

1 Лист 1

Задача 1.1. $N = \Phi \cdot \text{И} \cdot \text{О}$. Указать элемент максимального порядка в группе обратимых элементов \mathbb{Z}_N^* кольца \mathbb{Z}_N . Доказать, что его порядок, действительно, максимален. Компьютерные решения с перебором вариантов не принимаются.

Доказательство. $\Phi = 8$ (Мозговой), $\text{И} = 9$ (Владислав), $\text{О} = 9$ (Романович), $N = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^4$. $\varphi(N) = \varphi(648) = \varphi(2^3)\varphi(3^4) = 2^2(2-1)3^3(3-1) = 216$. Порядок элемента максимального порядка будет обладать свойством $216 : a$ (по т.Лагранжа).

Порядок равен НОК порядков элементов из $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{81}$, то есть $\varphi(8) = 4, \varphi(81) = 54, \text{lcm}(4, 54) = 54$, то есть максимальный возможный порядок это 54. Рассмотрев образующие элементы $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{81}$, можно заметить что 5 является искомым. \square