

Контрольная работа, 18 мая 2021

1. Центробанк решил выпустить в обращение памятные монеты, который должны состоять хотя бы на 30% из серебра и на 30% из меди. У Московского монетного двора в распоряжении есть два сплава: первый сплав содержит 50% серебра, 40% меди и стоит 100 рублей за грамм; второй сплав содержит 20% серебра, 10% меди и стоит 20 рублей за грамм.

В каком соотношении ММД должен смешать сплавы для минимизации стоимости монет, удовлетворяющих ограничениям Центробанка? Составьте и решите соответствующую задачу линейного программирования.

2. Купажист смешивает бразильский кофе и колумбийский кофе для получения брендов "Rich" и "Deluxe". Каждый кг кофе "Rich" состоит из смеси 0.5 кг бразильского кофе и 0.5 кг колумбийского кофе, в то время как 1 кг бренда "Deluxe" состоит из 0.25 кг бразильского кофе и 0.75 кг колумбийского кофе.

У купажиста есть 120 кг бразильского кофе и 160 кг колумбийского кофе. Каждый кг кофе "Rich" приносит ему 30 рублей чистой прибыли, а каждый кг кофе "Deluxe" приносит ему 20 рублей чистой прибыли. Сколько кг каждого бренда должен смешать купажист для максимизации прибыли? *Обратите внимание, что купажист не обязан использовать весь имеющийся у него запас кофе.*

3. Решите задачу линейного программирования, используя вариант симплекс-метода, рассказанный на лекции:

$$\begin{aligned}8x_1 + 9x_2 + 5x_3 &\rightarrow \max, \\x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 2, \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 3, \\6x_1 + 6x_2 + 2x_3 &\leq 8, \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

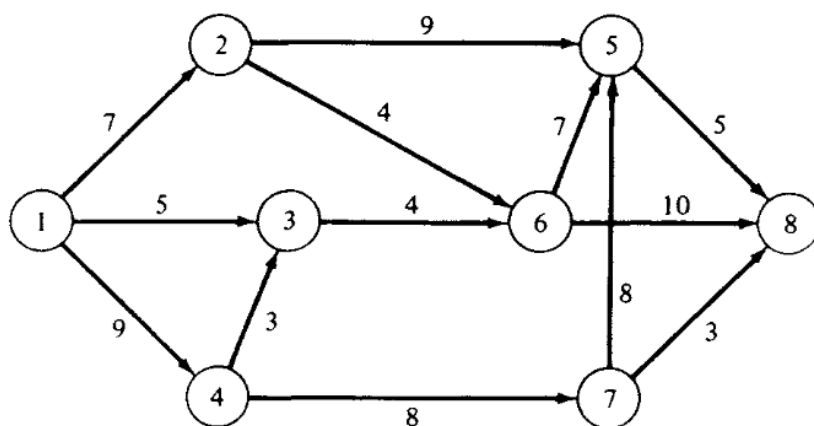
4. Производитель бумаги, владеющий тремя фабриками, должен еженедельно обеспечивать три типографии бумагой. Каждая из фабрик производит 350 тонн бумаги в неделю, и каждая из типографий также нуждается в 350 тоннах бумаги в неделю. Стоимость доставки бумаги, в долларах за тонну, составляет:

	Ф1	Ф2	Ф3
Т1	17	27	20
Т2	23	25	19
Т3	11	18	13

Определите, сколько тонн каждая фабрика должна отправить каждой типографии так, чтобы совокупные транспортные расходы были минимальными?

- (a) Сформулируйте данную задачу в виде задачи линейного программирования и найдите её решение.
- (b) Сформулируйте и решите соответствующую двойственную задачу.

5. Два игрока тайно и независимо друг от друга пишут на первой странице блокнота цифру из множества $\{1, 2\}$, а на второй странице – свою догадку насчет того, какой будет сумма цифр на первых страницах. После этого они показывают друг другу блокноты. Если один из игроков угадал сумму цифр, а его противник нет, то угадавший игрок получает выигрыш, равный угаданному числу (сумме цифр на первых страницах), а проигравший эту сумму теряет. В остальных случаях объявляется ничья.
- (a) Перечислите все чистые стратегии в данной игре.
- (b) Выпишите платежную матрицу данной игры.
- (c) Существует ли пара чистых минимаксных стратегий в данной игре?
- (d) Найдите оптимальную смешанную стратегию.
6. Найдите максимальный поток между вершинами 1 и 8 в графе:



7. Дана непрерывно дифференцируемая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, а также аффинные функции $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, где $1 \leq i \leq m$. Пусть точка x_0 является решением следующей оптимизационной задачи:

Минимизировать: $f(x)$,
при ограничениях: $g_i(x) \geq 0$, $1 \leq i \leq m$.

Докажите, что существуют $\alpha_i \geq 0$, для которых выполняются равенства

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla g_i(x_0),$$

$$\alpha_i \cdot g_i(x_0) = 0 \quad \text{для всех } 1 \leq i \leq m.$$

Примечание: функция $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется аффинной, если $g(x) = \langle a, x \rangle + c$ для некоторого фиксированного вектора a и вещественного числа c .

Указание: воспользуйтесь леммой Фаркаша.