1 HW 4

Задача 1.1. Покажите, что гомоморфизм градуированных колец $f : R \to R'$ индуцирует морфизм схем в $\operatorname{Proj}(R)$ из дополнения в $\operatorname{Proj}(R')$ к $V(I)$, где I - идеал, порождаемый в R' образом R_+(вначале можно проверить почти очевидную склейку морфизмов: если схема X покрыта открытыми U_i и заданы морфизмы $g_i : U_i \to Y$, совпадающие на пересечениях, то существует и морфизм $g : X \to Y$, совпадающий с g_i на U_i)

Доказательство.

$$g : X \to Y \quad g^{\#} : O_Y \to g_* O_X \quad f_i : U_i \hookrightarrow X$$
$$g_i : U_i \to Y \quad g_i^{\#} O_Y \to g_{i*} O_{U_i} \quad f_i^{\#} : O_x \to f_{i*} O_{U_i}$$
$$\operatorname{Proj} R = \bigcup_{f \in R_+} D_+(f) \Rightarrow \operatorname{Proj} R' \backslash V(\varphi(R_+)) =_{f \in R_+} D_+(\varphi f)$$
$$\varphi_f \left(\frac{a}{f_n} \right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)^n}$$
т.к. φ - гомоморфизм гр колец, то
$$\varphi_f(R_{(f)}) < R'_{(\varphi(f))} \Rightarrow \exists \varphi_{(f)} : R_{(f)} \to R'_{(\varphi(f))} \Rightarrow \varphi*_{(f)} : D_+(\varphi(f)) \to D_+(f) \quad \forall f \in R_+$$
$$D_+(\varphi(f)) \cap D_+(\varphi(g)) = D_+(\varphi(f)\varphi(g)) = D_+(\varphi(fg))$$
$$\Rightarrow \varphi^*_{(f)} \Big|_{D_+(\varphi(f)) \cap D_+(\varphi(g))} = \varphi^*(g) \Big|_{D_+(\varphi(f)) \cap D_+(\varphi(g))} = \varphi^*(fg)$$
$\Rightarrow$ можно склеить $\varphi^* : \operatorname{Proj} R' \backslash V(\varphi(R_+)) \to \operatorname{Proj} R$

□

Задача 1.2. (а) Докажите, что схема $\mathbb{P}^1_k$ (k поле) изоморфна замкнутой подсхеме, определенной уравнением $y^2 = xz$ в $\mathbb{P}^2_k$ (т.е. $\operatorname{Proj}\left(k[x,y,z]/\left(y^2 - xz\right)\right)$).

(б) Докажите, что если k алгебраически замкнуто, то все неприводимые коники над k (то есть подсхемы $\mathbb{P}^2_k$, определенные обращением в нуль неприводимого однородного многочлена второй степени) изоморфны над k.

(в) Верно ли это в общем случае, т.е. если k не является алгебраически замкнутым?

Доказательство. (а)

$$\frac{k[x,y,z]}{y^2 - xz} \simeq k[x_0^2, x_0x_1, x_1^2]$$
$$\operatorname{Proj} k[x_0^2, x_0x_1, x_1^2] = {D_+}^{R'}(x_0^2) \cup {D_+}^{R'}(x_0x_1) \cup {D_+}^{R'}(x_1^2)$$
$$\operatorname{Proj} k[x_0, x_1] = {D_+}^{R}(x_0) \cup {D_+}^{R}(x_1)$$
$$R'(x_0x_1) = \langle \frac{x_1^2}{x_0x_1} = \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_0^2}{x_0x_1} = \frac{x_0}{x_1} \rangle$$
$$R'(x_0^2) = \langle \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^2, \frac{x_1x_0}{x_0^2} = \frac{x_1}{x_0} \rangle = \langle \frac{x_1}{x_0} \rangle$$
$$R'(x_1^2) = \langle \frac{x_0}{x_1} \rangle$$
$$\Rightarrow R'(x_0x_1) = R'(x_0^2) x_k R'(x_1^2) \Rightarrow {D_+}^{R\prime}(x_0x_1) = {D_+}^{R'}(x_0^2) \cup {D_+}^{R'}(x_1^2) \Rightarrow \operatorname{Proj} R' = {D_+}^{R'}(x_0^2) \cup {D_+}^{R'}(x_1^2)$$
$$R(x_0) = \langle \frac{x_1}{x_0} \rangle \quad R(x_1) = \langle \frac{x_0}{x_1} \rangle \Rightarrow R(x_0) \simeq R'(x_1^2)$$
$$R(x_1) \simeq R'(x_1^2) \Rightarrow {D_+}^{R'}(x_0^2) \simeq {D_+}^{R}(x_0)$$
$${D_+}^{R'}(x_1^2) \simeq {D_+}^{R}(x_1) \quad {D_+}^{R'}(x_0^2) \cap {D_+}^{R'}(x_1^2) \simeq {D_+}^{R'}(x_0^2x_1^2) \simeq {D_+}^{R}(x_0x_1) \simeq {D_+}^{R}(x_0) \cap {D_+}^{R}(x_1)$$
$$\Rightarrow \operatorname{Proj} R \simeq \operatorname{Proj} R'$$

(б) $R = k[x,y] \quad R' = \frac{k[x,y,z]}{f}$
с точностью до линейной замены $\exists!$ неприводимая коника над алгебраически замкнутым полем,

которая зажана $xz = y^2$. Если $x_0 = l_0(x,y,z)$ $x_1 = l_1(x,y,z)$ $x_2 = l_2(x,y,z)$, где l_i - линейные уравнения, тогда $k[x_0,x_1,x_2] \simeq k[x,y,z]$, откуда $R' = \frac{k[x,y,z]}{y^2-xz} \Rightarrow \operatorname{Proj} R' \simeq \mathbb{P}'_k$

(в)

$$X = \operatorname{Proj} \frac{\mathbb{R}[x,y,z]}{x^2+y^2+z^2}$$
$$\{\mathbb{R}\text{ - точки } X\} \leftrightarrow \{\text{решения} x^2+y^2+z^2\} \Rightarrow \{\mathbb{R}\text{ - точки} X\} = \varnothing$$
$$\text{но у } \operatorname{Proj} \frac{\mathbb{R}[x,y,z]}{xz-y^2} \text{ есть } \mathbb{R} \text{ - точки, так как } (1,1,1) \text{ - решение } xz-y^2$$

□

Задача 1.3. Пусть k поле, рассмотрим градуированное кольцо $R(a_0,\ldots,a_n)$, которое представляет собой кольцо многочленов $k[X_0,\ldots,X_n]$ с нестандартной градуировкой $\deg(X_i) = a_i$ (так что обычное кольцо многочленов - это $R(1,\ldots,1)$). Положим $\mathbb{P}_k(a_0,\ldots,a_n) = \operatorname{Proj}(R(a_0,\ldots,a_n))$.

(а) Покажите, что $\mathbb{P}_k(a_0,\ldots,a_n) \cong \mathbb{P}_k(da_0,\ldots,da_n)$ для всех $d \in \mathbb{Z}_{>0}$.

(б) Покажите, что $\mathbb{P}_k(a,b) \cong \mathbb{P}^1_k$ для всех $a,b \in \mathbb{Z}_{>0}$.

(в) Постройте замкнутое вложение $\mathbb{P}_k(1,1,2)$ в $\mathbb{P}^3_k$ и опишите $\mathbb{P}_k(1,1,2)$ геометрически.

(г) Изоморфны ли $\mathbb{P}_k(1,1,2)$ и $\mathbb{P}^2_k$?

Доказательство. (а)

$$\operatorname{Proj}(R(a_0,\ldots,a_n)) = \bigcup_{i=0}^{n} D_+(X_i)$$
$$A(x_i) = \left(\frac{x_0^{a_i}}{x_i^{a_0}},\ldots,\frac{x_n^{a_i}}{x_i^{a_n}}\right) \text{ - как } k \text{ алгебра}$$
$$\operatorname{Proj}(R(da_0,\ldots,da_n)) = \bigcup_{i=0}^{n} D'_+(X_i)$$
$$A'(x_i) = \left(\left(\frac{x_0^{a_i}}{x_i^{a_0}}\right)^d,\ldots,\left(\frac{x_n^{a_i}}{x_i^{a_n}}\right)^d\right) \text{ - как } k \text{ алгебра}$$
$$A(x_i) \simeq A'(x_i)$$
$$\frac{f}{x_i^k} \to \frac{f'}{x_i^k} \quad f' = f \quad \deg f = k \quad \deg f' = dk$$
$$\Rightarrow D_+(x_i) \simeq D'_+(x_i) \quad D_+(x_i) \cap D_+(x_j) \simeq D'_+(x_i) \cap D'_+(x_i)$$
$$\Rightarrow \operatorname{Proj} R(a_0,\ldots,a_n) \simeq \operatorname{Proj}(da_0,\ldots,da_n)$$

(б)

$$\mathbb{R}'_k = \operatorname{Proj} k[x,y] = \operatorname{Proj} A$$
$$\mathbb{R}'_k(a,b) = \operatorname{Proj} R(a,b) = \operatorname{Proj} A'$$
$$\operatorname{Proj} A = D_+(x) \cup D_+(y) \quad \operatorname{Proj} A' = D'_+(x) \cap D'_x(y)$$
$$A(x) = \langle \frac{y}{x} \rangle \quad A(y) = \langle \frac{x}{y} \rangle$$
$$A'(x) = \langle \frac{y^a}{x^b} \rangle \quad A'(y) = \langle \frac{x^b}{y^a} \rangle$$
$$A(x) \simeq A'(x) \quad A(y) \simeq A'(y) \Rightarrow D_+(x) \simeq D'_+(x)$$
$$D_+(x) \cap D_+(y) = D_+(xy) \simeq \operatorname{Spec} A(xy)$$
$$A(xy) = \langle \frac{x^2}{xy} = \frac{x}{y}, \frac{y^2}{xy} = \frac{y}{x} \rangle \simeq \frac{k[x_0,x_1]}{x_0x_1 - 1}$$
$$D'_+(x) \cap D'_+(y) = D'_+(xy) \simeq \operatorname{Spec} A'(xy)$$
$$A'(xy) = \langle \frac{x^{a+b}}{(xy)^a} = \frac{x^b}{y^a}, \frac{y^{a+b}}{(xy)^b} = \frac{y^a}{x^b} \rangle \simeq \frac{k[x_0,x_1]}{x_0x_1 - 1}$$
$$\Rightarrow \operatorname{Proj} A \simeq \operatorname{Proj} A'$$

(в) Из 2 задачи знаем что

$$k[x_0^2, x_0x_1, x_1^2] \simeq \frac{k[x,y,z]}{y^2 - xz} \Rightarrow k[x_0^2, x_0x_1, x_1^2][t] \simeq \frac{k[x,y,z]}{y^2 - xz}[t] \simeq \frac{k[x,y,z,t]}{y^2 - xz}$$
$$\deg t = 2 \quad R = k[x_0, x_1, t], \quad R' = k[x_0^2, x_0x_1, x_1^2, t]$$
$$\operatorname{Proj} R \simeq \operatorname{Proj} R' \Rightarrow \mathbb{P}_k(1,1,2) \simeq \operatorname{Proj} \frac{k[x,y,z,t]}{y^2 - xz}$$

это проективный конус над коникой из 2 задачи

(г) $\mathbb{P}_k(1,1,2) \simeq \operatorname{Proj} \frac{k[x,y,z,t]}{y^2-xz}$

аффинная окрестность вершины конуса это Spec $\frac{k[x,y,z]}{y^2-xz}$, вершина $m = (x,y,z)$, $\frac{m}{m^2}$ - трехмерное векторное пространство над k, порожд. $[x],[y],[z]$

$\frac{k[x,y,z]}{y^2-xz} \simeq k[x_0^2, x_0x_1, x_1^2] \subset k[x_0,x_1] \Rightarrow htm \leq 2$ $(0) \subset (x,y) \subset (x,y,z) \Rightarrow htm \geq 2 \Rightarrow htm = 2$, то есть размерность лок. кольца в точке $(x,y,z) = 2$, $2 < 3$, то есть конус не регулярен в вершине, то есть он не может быть изоморфен регулярной схеме.

$\square$

Задача 1.4. Если $\operatorname{Proj}(R)$ - конечное дискретное множество, докажите, что оно покрывается одной аффинной картой $D_+(f)$ (то есть на самом деле совпадает со Spec $\big(R_{(f)}\big)$.

Доказательство. $X = \operatorname{Proj}(R)$ Пусть $\nexists f : X = D_+(f) \Rightarrow \forall f \in R_+ \quad \exists x \in X : f(x) = 0$. Пусть $Y < X$ - минимальное подмножество, такое что $\forall f \in R_+\ \exists y \in Y \quad f(y) = 0$, так как $\forall x \in X \quad x = I \cap R_0 \quad R_+ \not\subset I$, тогда $|Y| \neq 1$ (только если $|X| = 1$, но тогда $X = \operatorname{Spec} O_{X,X}$)

$$\forall y \in Y\ \exists a_y \in R_+ \text{т.ч. } a_y(y) = 0 \quad \forall y' \in Y \quad a_y(y') \neq 0$$
$$b_x =_{y \in Y - \{x\}} a_y \quad b_x(y) = 0 \quad \forall y \neq X$$
$$\Rightarrow \sum_{x \in Y} b_x(y) \neq 0 \quad \forall y \in Y$$

$\square$