Все задачи этого листка относятся к материалу модуля 2 и будут приниматься в модуле 3 в качестве бонусных.

10.0-b. Докажите, что инъективное банахово пространство (см. листок 6) дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве.

10.1-b. 1) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.
2) Приведите пример неинъективного банахова пространства.
Указание. Можно действовать следующим образом:
a) Докажите, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде несчетного объединения $\mathbb{N} = \bigcup_{i\in I} A_i$ счетных множеств A_i так, что $A_i \cap A_j$ конечно при $i \neq j$. (Подсказка: вместо $\mathbb{N}$ удобнее брать $\mathbb{Q}$).
b) Докажите, что для каждого $f \in (\ell^\infty)^*$, обращающегося в нуль на c_0, множество тех $i \in I$, для которых $f(\chi_{A_i}) \neq 0$, не более чем счетно.
c) Докажите, что на ℓ^∞/c_0 не существует счетного множества непрерывных линейных функционалов, разделяющего точки.
d) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

10.2-b. 1) Докажите, что если банахово пространство X топологически изоморфно Y^* для некоторого банахова пространства Y, то оно дополняемо в X^{**}.
2) Решите задачу 5.9-b с помощью п. 1 и задачи 10.1-b.

10.3-b. Пусть X и Y — банаховы пространства и $S \in \mathscr{B}(Y^*, X^*)$. Обязательно ли существует такой $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, что $S = T^*$?

10.4-b. Отождествим $(\ell^1)^*$ с ℓ^∞ (см. задачу 7.1) и рассмотрим пространство c_0 как подмножество в $(\ell^1)^*$. Найдите ${}^\perp c_0$ и $({}^\perp c_0)^\perp$.

10.5-b. Пусть X — нерефлексивное банахово пространство. Покажите, что в X^* существует замкнутое векторное подпространство N, для которого $N \neq ({}^\perp N)^\perp$.

10.6-b. Придумайте пример инъективного оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ между банаховыми пространствами X и Y, такого, что $\operatorname{Im} T^*$ не плотен в X^*. (*Указание:* X обязано быть нерефлексивным — см. лекцию.)

10.7-b. Пусть X, Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.
1) Докажите, что $T = \varkappa\sigma$, где $\varkappa$ — инъективный, а σ — открытый оператор.
2) Докажите, что $T = \mu\tau$, где μ — топологически инъективный оператор с замкнутым образом, а τ — оператор с плотным образом.
3) Сформулируйте и докажите утверждения о единственности разложений из пп. 1 и 2.

Определение 10.1. Оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ называется *строгим*, если он осуществляет открытое отображение X на $\operatorname{Im} T$ и $\operatorname{Im} T$ замкнут в Y.

10.8-b. Докажите, что если X и Y — банаховы пространства, то оператор T осуществляет открытое отображение X на $\operatorname{Im} T$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} T$ замкнут в Y.

Разложение оператора. Пусть X, Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. Положим $\operatorname{Coim} T = X/\operatorname{Ker} T$ (*кообраз* T). Из свойств факторпространств (см. лекцию) следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ \operatorname{Coim} T \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \overline{\operatorname{Im} T} \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

в которой Q — факторотображение и J — тождественное вложение.

10.9-b. Докажите, что следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ эквивалентны:

(1) T строгий;

(2) для любого разложения из п. 1 задачи 10.7-b оператор $\varkappa$ топологически инъективен и имеет замкнутый образ;

(3) для любого разложения из п. 2 задачи 10.7-b оператор τ открыт;

(4) оператор $\widetilde{T}$ из разложения (1) — топологический изоморфизм.

10.10-b (*«усиленная лемма Серра»*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X,Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y,Z)$ и $TS = 0$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(1) последовательность $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ точна и $\operatorname{Im} T$ замкнут;

(2) последовательность $X^* \xleftarrow{S^*} Y^* \xleftarrow{T^*} Z^*$ точна и $\operatorname{Im} S^*$ замкнут.

Как следствие, цепной комплекс банаховых пространств точен тогда и только тогда, когда точен его сопряженный комплекс.

10.11-b (*«лемма Серра»*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X,Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y,Z)$ и $TS = 0$. Предположим, что операторы S и T имеют замкнутые образы. Постройте изометрический изоморфизм $(\operatorname{Ker} T / \operatorname{Im} S)^* \cong \operatorname{Ker} S^* / \operatorname{Im} T^*$.

Как следствие, если C — цепной комплекс банаховых пространств со строгими дифференциалами, то $H^n(C^*) \cong H_n(C)^*$.

11.1. Для каждой из следующих алгебр A дайте критерий обратимости ее элемента и найдите спектр каждого ее элемента: **1)** $A = \mathbb{C}[t]$; **2)** $A = \mathbb{C}[[t]]$; **3)** $A = \mathbb{C}(t)$.

11.2. 1) Придумайте пример линейного оператора в каком-нибудь векторном пространстве, спектр которого строго больше, чем множество его собственных значений.
2) Докажите, что такой оператор есть в любом бесконечномерном векторном пространстве.

11.3. Пусть X — нормированное пространство, $L(X)$ — алгебра всех линейных операторов в X. Обязательно ли подалгебра ограниченных операторов $\mathscr{B}(X) \subset L(X)$ спектрально инвариантна в $L(X)$?

11.4. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f \colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция.
1) Приведите пример, показывающий, что значение f не обязано быть ее существенным значением.
2) Приведите пример, показывающий, что существенное значение f не обязано быть ее значением.
3) Докажите, что если $X = [a, b]$ — отрезок с мерой Лебега, а f непрерывна, то множество ее значений совпадает с множеством ее существенных значений.

11.5. Пусть A — унитальная алгебра, $a \in A$ — ее элемент и $L_a \colon A \to A$, $b \mapsto ab$ — оператор умножения. Докажите, что $\sigma(a) = \sigma(L_a)$.

11.6. 1) Пусть A — унитальная алгебра и элемент $a \in A$ обратим слева и справа (т.е. существуют такие $a_\ell, a_r \in A$, что $a_\ell a = a a_r = 1$). Докажите, что a обратим.
2) Приведите пример алгебры и ее элемента, который обратим слева (или справа), но не обратим. (См., однако, задачу 11.9-b.)

11.7. Пусть A — унитальная алгебра.
1) Пусть $a_1, \ldots, a_n \in A$ — коммутирующие элементы. Докажите, что элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим тогда и только тогда, когда все элементы $a_1, \ldots, a_n$ обратимы.
2) Покажите, что для некоммутирующих $a_1, \ldots, a_n$ утверждение из п.1 перестает быть верным. (См., однако, задачу 11.9-b.)

11.8. 1) Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ и $|b| < 1$. Положим $c = (1 - ab)^{-1} = \sum_n (ab)^n$. Выразите элемент $(1 - ba)^{-1}$ через a, b и c, не пользуясь коммутативностью умножения в $\mathbb{C}$.
2) Пусть A — унитальная алгебра, $a, b \in A$. Докажите, что элемент $1 - ab$ обратим тогда и только тогда, когда элемент $1 - ba$ обратим.

11.9. Пусть A — унитальная алгебра, $a, b \in A$.
1) Докажите, что $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.
2) Докажите, что если a или b обратим, то $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.
3) Приведите пример, показывающий, что в общем случае $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$. (См., однако, задачу 11.9-b.)

11.9-b. Пусть A — конечномерная алгебра.
1) Докажите, что всякий элемент A, обратимый слева (или справа), обратим.
2) Пусть $a_1, \ldots, a_n \in A$. Докажите, что элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим тогда и только тогда, когда все элементы $a_1, \ldots, a_n$ обратимы.
3) Докажите, что $\sigma(ab) = \sigma(ba)$ для любых $a, b \in A$.

11.10-b. Докажите, что утверждения предыдущей задачи сохраняют силу для нётеровых алгебр.

11.11. Пусть A — ненулевая унитальная алгебра, $a \in A$ — нильпотентный элемент. Докажите, что $\sigma(a) = \{0\}$.

12.1. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства. Докажите, что билинейный оператор $\varphi\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен в следующем смысле: существует такое $C \geqslant 0$, что $\|\varphi(x, y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X,\ y \in Y$.

12.2. Пусть A — алгебра, снабженная нормой. Предположим, что умножение $A \times A \to A$ непрерывно. Докажите, что

1) на A существует субмультипликативная норма, эквивалентная исходной;

2) если A унитальна, то на A существует субмультипликативная норма, эквивалентная исходной и удовлетворяющая условию $\|1\| = 1$.

Подсказка. В случае (2) рассмотрите операторы умножения $L_a\colon A \to A,\ b \mapsto ab$.

12.3. 1) Докажите, что пополнение нормированной алгебры — банахова алгебра.

2) Докажите, что факторалгебра нормированной алгебры по замкнутому двустороннему идеалу — нормированная алгебра.

12.4. Докажите, что норма

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{k!}$$

на алгебре $C^n[a, b]$ субмультипликативна и эквивалентна норме $\|f\| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$. (Здесь, как обычно, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$ — равномерная норма.) Отсюда и из задачи 3.11 следует, что $C^n[a, b]$ — банахова алгебра.

12.5. Пусть G — группа, снабженная топологией. Предположим, что умножение $G \times G \to G$ непрерывно по каждому аргументу, и что операция $g \mapsto g^{-1}$ непрерывна в единице. Докажите, что она непрерывна всюду на G.

Из предыдущей задачи с учетом доказанного на лекции следует, что операция $a \mapsto a^{-1}$ на группе обратимых элементов любой банаховой алгебры непрерывна.

12.6. 1) Докажите, что в унитальной банаховой алгебре $A \neq 0$ не может существовать таких элементов a, b, что $[a, b] = ab - ba = 1$.

2) Докажите, что на алгебре дифференциальных операторов вида $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$, где $a_k \in \mathbb{C}[x]$ (она называется *алгеброй Вейля*), не существует субмультипликативных полунорм, кроме тождественно нулевой.

12.7. Пусть A — унитальная нормированная (но не обязательно банахова) алгебра, $A^\times \subset A$ — группа обратимых элементов. Верно ли, что

1) если $a \in A$ и $\|a\| < 1$, то $1 - a \in A^\times$;

2) $A^\times$ открыто в A;

3) отображение $A^\times \to A^\times,\ a \mapsto a^{-1}$ непрерывно?

12.8. Верна ли теорема Гельфанда–Мазура для неполных нормированных алгебр?

12.9-b (*банахова лемма Шура*)**.** Пусть дано неприводимое представление группы G в банаховом пространстве X ограниченными операторами. Докажите, что любой морфизм G-модулей $\varphi\colon X \to X$ имеет вид $\varphi = \lambda \mathbf{1}_X$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество. Рассмотрим следующие подалгебры в $C(K)$:

$$\mathscr{P}(K) = \overline{\bigl\{p|_K : p \text{ — многочлен}\bigr\}};$$
$$\mathscr{R}(K) = \overline{\bigl\{r|_K : r \text{ — рациональная функция с полюсами вне } K\bigr\}};$$
$$\mathscr{A}(K) = \bigl\{f \in C(K) : f \text{ голоморфна на } \operatorname{Int} K\bigr\}$$

(черта наверху означает замыкание в $C(K)$). Из теоремы Вейерштрасса (см. курс комплексного анализа) следует, что $\mathscr{A}(K)$ — замкнутая подалгебра в $C(K)$. Очевидно, $\mathscr{P}(K) \subseteq \mathscr{R}(K) \subseteq \mathscr{A}(K) \subseteq C(K)$.

12.10 (*дисковая алгебра*)**.** Пусть $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$.
1) Докажите, что $\mathscr{P}(\overline{\mathbb{D}}) = \mathscr{R}(\overline{\mathbb{D}}) = \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$.
2) Постройте изометрический изоморфизм $\mathscr{P}(\mathbb{T}) \cong \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$.

12.11. 1) Докажите, что $\mathscr{P}(\mathbb{T}) \neq \mathscr{R}(\mathbb{T})$.
2) Пользуясь теоремой Вейерштрасса (любая непрерывная 2π-периодическая функция на прямой приближается по равномерной норме тригонометрическими многочленами), докажите, что $\mathscr{R}(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$.

12.12. 1) Докажите, что $\mathscr{R}(K)$ спектрально инвариантна в $C(K)$.
2) Всегда ли $\mathscr{P}(K)$ спектрально инвариантна в $C(K)$?

12.13-b. 1) Докажите, что если $\mathscr{P}(K) = \mathscr{R}(K)$, то $\mathbb{C} \setminus K$ связно.
2) Докажите, что если $\mathbb{C} \setminus K$ связно, то $\mathscr{P}(K) = \mathscr{R}(K)$. (На самом деле верно большее: $\mathscr{P}(K) = \mathscr{A}(K)$, но это уже нетривиальная теорема Мергеляна.)

12.14-b (*швейцарский сыр*)**.** Пусть $K = \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, где D_i — открытые круги с попарно не пересекающимися замыканиями, выбранные таким образом, что $\sum_i r_i < \infty$ (где r_i — радиус D_i) и $\operatorname{Int} K = \varnothing$. Докажите, что $\mathscr{R}(K) \neq C(K)$ (несмотря на то, что $\operatorname{Int} K = \varnothing$).

Подсказка. Постройте ненулевую меру μ на K, сосредоточенную на объединении границ кругов D_i и такую, что $\int_K f\, d\mu = 0$ для любой $f \in \mathscr{R}(K)$.

13.1. Верно ли, что $r(a) = \|a\|$ для любого $a \in A$, если **1)** $A = L^\infty(X,\mu)$? **2)** $A = C^n[a,b]$?

13.2 (*оператор взвешенного сдвига*)**.** Пусть $H = \ell^2$ и $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Оператор

$$T_\alpha\colon H \to H, \quad T_\alpha(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$$

называется *оператором взвешенного сдвига.* (*Реклама*: такие операторы изучаются давно, но особую популярность приобрели в 90-х гг. прошлого века ввиду их важности для теории представлений компактных квантовых групп.)

1) Вычислите $\|T_\alpha\|$.

2) Вычислите $r(T_\alpha)$. Для каких последовательностей $\alpha \in \ell^\infty$ оператор T_α квазинильпотентен? Приведите конкретный пример такой последовательности.

13.3 (*оператор Вольтерра*)**.** Пусть $I = [a,b]$, $H = L^2(I)$ и $K \in L^2(I \times I)$. *Оператор Вольтерра* $V_K\colon L^2(I) \to L^2(I)$ задается формулой

$$(V_K f)(x) = \int_a^x K(x,y) f(y)\, dy$$

Обратите внимание, что это частный случай интегрального оператора Гильберта–Шмидта из задачи 2.12. (*Реклама*: операторы Вольтерра образуют один из наиболее классических и давно изучаемых классов линейных операторов; они играют важную роль в теории интегральных уравнений, описывающих различные физические процессы.)

1) Докажите, что если функция K ограничена, то V_K квазинильпотентен.

2-b) Докажите, что V_K квазинильпотентен для любой $K \in L^2(I \times I)$.

Таким образом, *интегральное уравнение Вольтерра второго рода* $f = \lambda V_K f + g$ относительно неизвестной функции $f \in L^2(I)$ имеет единственное решение для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и любой $g \in L^2(I)$.

13.4. Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектр диагонального оператора в ℓ^∞.

13.5. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, f — существенно ограниченная измеримая функция на X и M_f — оператор умножения на f, действующий в $L^p(X,\mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектр оператора M_f.

13.6. Найдите спектр оператора $T\colon L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi]$, действующего по формуле

$$(Tf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t-s) f(s)\, ds.$$

13.7. Найдите спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр операторов правого и левого сдвига, действующих в пространстве c_0.

13.8. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства ℓ^1.

13.9. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства ℓ^∞.

13.10. Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектр оператора двустороннего сдвига в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$.

13.11-b. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространств $\ell^p(\mathbb{Z})$ и $c_0(\mathbb{Z})$.

13.12. Для фиксированного $\zeta \in \mathbb{T}$ определим оператор сдвига $T_\zeta\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ формулой $(T_\zeta f)(z) = f(\zeta^{-1} z)$. Найдите его спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр.

13.13-b. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространств $L^p(\mathbb{T})$ и $C(\mathbb{T})$.

13.14-b. Пусть A — ненулевая унитальная алгебра и $u, v \in A$ — обратимые элементы, удовлетворяющие соотношению $uv = qvu$, где $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (*Терминология*: если A порождена элементами u, v и между ними нет других соотношений, то A называется *квантовым тором*. Это — одна из простейших некоммутативных нётеровых алгебр, играющая важную роль в некоммутативной геометрии.)
1) Докажите, что если $|q| \neq 1$, то A не может быть банаховой алгеброй.
2) Пусть $|q| = 1$, A — банахова алгебра и q не является корнем из единицы. Что можно сказать про спектры элементов u и v?
3) Пусть $A = \mathscr{B}(X)$ — алгебра ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X, и пусть выполнены условия п. 2. Предположим, что операторы u и v изометричны. Найдите их спектры.
4) Приведите пример операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющих условиям п. 3. (*Подсказка*: см. задачи 13.5 и 13.12. *Реклама*: такие операторы тесно связаны с *каноническими коммутационными соотношениями* Г. Вейля в квантовой механике.)

Определение 13.1. *Пространство Харди* — это замкнутое подпространство в $L^2(\mathbb{T})$, определяемое следующим образом:

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) \,:\, \langle f, z^n \rangle = 0 \quad \forall\, n < 0\}.$$

13.15-b. Для каждой непрерывной функции f на открытом единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ и каждого $0 < \rho < 1$ положим

$$\|f\|_\rho = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Докажите, что определение пространства H^2, данное выше, эквивалентно следующему:

$$H^2 = \{f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ голоморфна и } \|f\| = \lim_{\rho \to 1} \|f\|_\rho < \infty\}.$$

13.16-b. Докажите, что оператор правого сдвига в ℓ^2 унитарно эквивалентен оператору умножения M_z в H^2. Интерпретируйте результаты о точечном, непрерывном и остаточном спектре этого оператора (см. лекцию) с точки зрения теории аналитических функций.

13.17-b. Пусть A — унитальная банахова алгебра и $B \subseteq A$ — подалгебра, содержащая 1_A. Докажите, что
1) $B^\times$ — открыто-замкнутое подмножество в $B \cap A^\times$;
2) для каждого $b \in B$ резольвентное множество $\rho_B(b) = \mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ открыто-замкнуто в $\rho_A(b)$;
3) для каждого $b \in B$ спектр $\sigma_B(b)$ является объединением спектра $\sigma_A(b)$ и некоторого семейства ограниченных компонент связности множества $\rho_A(b)$;
4) для каждого $b \in B$ справедливо включение $\partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b)$.

14.1. Постройте последовательность в единичной сфере пространства $C[a,b]$, у которой нет сходящейся подпоследовательности.

14.2. 1) Пусть X — нормированное пространство, $f \in X^* \setminus \{0\}$ и $X_0 = \operatorname{Ker} f$. Докажите, что в X существует 0-перпендикуляр к X_0 тогда и только тогда, когда f достигает нормы.
2) Приведите пример банахова пространства X и собственного замкнутого векторного подпространства $X_0 \subset X$, к которому не существует 0-перпендикуляра.

14.3. Пусть X — нормированное пространство и множества $M, N \subset X$ вполне ограничены. Докажите, что множества λM (где $\lambda \in \mathbb{K}$) и $M + N$ вполне ограничены.

14.4. Докажите, что равномерно непрерывный образ вполне ограниченного метрического пространства вполне ограничен.

14.5. Докажите, что метрическое пространство вполне ограничено тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ в нем есть вполне ограниченная ε-сеть.

14.6. Пусть X, Y — метрические пространства, причем X компактно. Сформулируйте и докажите критерий полной ограниченности подмножества в пространстве $C(X,Y)$, обобщающий теорему Арцела–Асколи.

14.7. 1) Докажите, что подмножество $S \subset \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\sup_{x \in S} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

(т.е. нормы «хвостов» последовательностей из S равномерно стремятся к нулю).
2) Сформулируйте и докажите аналогичный критерий для пространства c_0.

14.8-b. Докажите, что подмножество $S \subset L^p[a,b]$ (где $1 \leqslant p < \infty$) вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $|h| < \delta$ и всех $f \in S$ выполнено

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < \varepsilon.$$

Указание (достаточность). Для $f \in L^p[a,b]$ функции $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt$ непрерывны и сходятся к f в $L^p[a,b]$. Примените к ним теорему Арцела–Асколи.

Определение 14.1. Пусть X — метрическое пространство. *Расстоянием Хаусдорфа* между ограниченными подмножествами $A, B \subset X$ называется величина

$$\rho_H(A,B) = \max\Big\{ \sup_{a \in A} \rho(a,B),\ \sup_{b \in B} \rho(b,A) \Big\}.$$

14.9-b. Пусть X — метрическое пространство, $A \subset X$ и $r > 0$. Положим $U_r(A) = \{x \in X : \rho(x,A) < r\}$. Докажите, что для любых ограниченных множеств $A, B \subset X$

$$\rho_H(A,B) = \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B),\ B \subset U_r(A)\}.$$

14.10-b. 1) Докажите, что расстояние Хаусдорфа является метрикой на множестве $\mathfrak{F}(X)$ всех замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X.
2) Верно ли предыдущее утверждение, если убрать условие замкнутости?

14.11-b. Докажите, что если X полно, то и $\mathfrak{F}(X)$ полно.

14.12-b. Докажите, что если X вполне ограничено, то и $\mathfrak{F}(X)$ вполне ограничено.

15.1. Компактны ли операторы правого и левого сдвига в ℓ^p и c_0?

15.2. Может ли образ компактного оператора между банаховыми пространствами содержать бесконечномерное замкнутое подпространство?

15.3. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a,b]$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для компактности M_f.

15.4. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для компактности M_f.

15.5-b. Сделайте то же, что в предыдущей задаче, для оператора умножения в пространстве $L^p(X,\mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, где (X,μ) — пространство с мерой.

15.6. Для интегрируемой функции f на $[0,1]$ определим функцию Tf формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Является ли T компактным оператором
1) из $C[0,1]$ в $C[0,1]$?
2) из $L^p[0,1]$ в $C[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)?
3) из $L^p[0,1]$ в $L^p[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)?
4) из $L^1[0,1]$ в $C[0,1]$?
5-b) из $L^1[0,1]$ в $L^1[0,1]$?

15.7. Пусть $I = [a,b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. Докажите компактность *интегрального оператора* $T\colon C(I) \to C(I)$,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy.$$

15.8. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Докажите компактность *интегрального оператора Гильберта–Шмидта* $T\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$,

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y).$$

Указание: докажите, что линейная оболочка множества функций вида $K(x,y) = f(x)g(y)$, где $f, g \in L^2(X,\mu)$, плотна в $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, и воспользуйтесь тем, что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$ (см. задачу 2.7).

15.9. Пусть X — метризуемый компакт, μ — регулярная борелевская мера на X и $K \in C(X \times X)$. Докажите, что образ интегрального оператора Гильберта–Шмидта $T_K\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ содержится в $C(X)$, и что T_K является компактным оператором из $L^2(X,\mu)$ в $C(X)$.

15.10. Пусть X — банахово пространство и $1 \leqslant p < \infty$. Докажите, что всякий компактный оператор $T\colon X \to \ell^p$ аппроксимируется конечномерными операторами.

15.11. Пусть X — банахово пространство, $x \in X$ и $f \in X^*$. Определим оператор $x \otimes f \in \mathscr{B}(X)$ формулой $(x \otimes f)(y) = f(y)x$. Найдите явную формулу для операторов **1)** $T(x \otimes f)$; **2)** $(x \otimes f)T$ (где $T \in \mathscr{B}(X)$); **3)** $(x_1 \otimes f_1)(x_2 \otimes f_2)$.

15.12. Пусть X — банахово пространство и $0 \neq I \subseteq \mathscr{B}(X)$ — двусторонний идеал. Докажите, что $I \supseteq \mathscr{F}(X)$. Как следствие, всякий ненулевой замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$ (где H — гильбертово пространство) содержит $\mathscr{K}(H)$. (*Анонс:* через некоторое время мы сможем доказать, что $\mathscr{K}(H)$ — единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$, отличный от 0 и $\mathscr{B}(H)$).

16.1. Что можно сказать об операторе, который компактен и фредгольмов одновременно?

16.2. Пусть $a_0, \dots, a_n \in C[a,b]$. Докажите, что оператор

$$D\colon C^n[a,b] \to C[a,b], \quad D(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

фредгольмов, и вычислите его индекс.

16.3. Докажите, что оператор

$$D\colon C^1(S^1) \to C(S^1), \quad D(f) = f'$$

фредгольмов, и вычислите его индекс.

16.4. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть M_λ — соответствующий диагональный оператор в ℓ^p или в c_0. Найдите условие на λ, необходимое и достаточное для фредгольмовости M_λ. Вычислите его индекс.

16.5. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a,b]$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для фредгольмовости M_f. Вычислите его индекс.

16.6. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для фредгольмовости M_f. Вычислите его индекс.

16.7-b. Сделайте то же, что в предыдущей задаче, для оператора умножения в пространстве $L^p(X,\mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, где (X,μ) — пространство с мерой.

16.8-b (*второе доказательство аддитивности индекса*)**.** Пусть X, Y, Z — векторные пространства, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — фредгольмовы операторы. Постройте разложения $X = X_0 \oplus X_1$, $Y = Y_0 \oplus Y_1$ и $Z = Z_0 \oplus Z_1$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) X_0, Y_0 и Z_0 конечномерны;
2) $T(X_i) \subset Y_i$ и $S(Y_i) \subset Z_i$ $(i = 0, 1)$;
3) T — изоморфизм X_1 на Y_1, а S — изоморфизм Y_1 на Z_1.

Из существования таких разложений выведите, что формулу $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$ достаточно доказать для операторов между конечномерными пространствами. Докажите эту формулу.

16.9-b (*третье доказательство аддитивности индекса*)**. 1)** Пусть X, Y — векторные пространства, $X_1 \subset X$ и $Y_1 \subset Y$ — векторные подпространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор, осуществляющий изоморфизм между X_1 и Y_1. Определим линейный оператор $\widehat{T}\colon X/X_1 \to Y/Y_1$ формулой $\widehat{T}(x + X_1) = T(x) + Y_1$. Постройте изоморфизмы $\operatorname{Ker} T \cong \operatorname{Ker} \widehat{T}$ и $\operatorname{Coker} T \cong \operatorname{Coker} \widehat{T}$. Выведите отсюда, что T фредгольмов $\iff$ $\widehat{T}$ фредгольмов, и $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} \widehat{T}$.
2) Пусть X, Y, Z — векторные пространства, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — фредгольмовы операторы. Постройте подпространства конечной коразмерности $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ и $Z_1 \subset Z$ так, чтобы T осуществлял изоморфизм X_1 на Y_1, а S — изоморфизм Y_1 на Z_1. Из существования таких подпространств и из п.1 выведите, что формулу $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$ достаточно доказать для операторов между конечномерными пространствами. Докажите эту формулу.

16.10 (*классические теоремы Фредгольма*)**.** Пусть $I = [a,b]$, $K \in C(I \times I)$ и $f \in C(I)$. Рассмотрим следующие уравнения в $C(I)$:

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{1}$$

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = 0, \tag{2}$$

$$\psi(x) - \int_a^b K(y,x)\psi(y)\,dy = 0. \tag{3}$$

Докажите следующие утверждения:

I. Уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда для любого решения ψ уравнения (3) выполнено условие $\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0$.

II. Если уравнение (2) имеет лишь тривиальное решение, то уравнение (1) имеет единственное решение для любой $f \in C(I)$. Если же уравнение (2) имеет нетривиальное решение, то уравнение (1) разрешимо не для всех $f \in C(I)$.

III. Уравнения (2) и (3) имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Указание. С помощью теоремы Рисса–Шаудера докажите аналоги утверждений I–III в пространстве $L^2(I)$, а затем докажите, что если функции f и K непрерывны и $\varphi \in L^2(I)$ — решение уравнения (1), то φ непрерывна.