

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 1

9 марта 2021

Определение

Пусть T — теория, A — замкнутая формула в ее сигнатуре. A **логически следует** из T (обозначение: $T \models A$), если любая модель теории T является моделью формулы A .

Теорема о корректности для исчисления предикатов

Если $T \vdash A$, то $T \models A$.

Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов

Если $T \models A$, то $T \vdash A$.

Версия для теорий с равенством:

$T \vdash A$ означает выводимость с использованием аксиом равенства.

$T \models A$ означает логическое следование на нормальных моделях.

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Определение

Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω . Отображение носителей $\alpha : M \longrightarrow M'$ называется **изоморфизмом** M на M' , если

- α — биекция,
- $\alpha(c_M) = c_{M'}$ для всех констант c (из Ω),
- $\alpha(f_M(m_1, \dots, m_k)) = f_{M'}(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k))$ для любого k -местного функционального символа f и $m_1, \dots, m_k \in M$,
- $P_M(m_1, \dots, m_k) = P_{M'}(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k))$ для любого k -местного предикатного символа P и $m_1, \dots, m_k \in M$.

Запись $\alpha : M \cong M'$ означает, что α — изоморфизм M на M' .

Лемма 1.1

- 1 Если $\alpha : M \cong M'$ и $\beta : M' \cong M''$, то $\beta\alpha : M \cong M''$.
- 2 Если $\alpha : M \cong M'$, то $\alpha^{-1} : M' \cong M$.

Определение

Модели M, M' называются **изоморфными** (обозначение: $M \cong M'$), если существует изоморфизм $\alpha : M \cong M'$.

\cong задает отношение эквивалентности на классе всех моделей данной сигнатуры.

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Обозначения и терминология

Пусть M — модель сигнатуры Ω .

- *Терм, оцененный в M ,* — это замкнутый терм расширенной сигнатуры $\Omega(M)$. Из обычного термина $t(a_1, \dots, a_n)$ получаются оцененные термы

$$t(m_1, \dots, m_n) := t[a_1, \dots, a_n / \underline{m}_1, \dots, \underline{m}_n].$$

$|r|_M$ — значение оцененного термина r в модели M ; это элемент из M .

- *Формула, оцененная в M ,* — это замкнутая формула сигнатуры $\Omega(M)$, $|A|_M$ — значение оцененной формулы A в M (0 или 1).

Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω , $\alpha : M \cong M'$.

- Для термина t , оцененного в M , обозначим через $\alpha \cdot t$ терм, полученный заменой всех констант m из M на их образы $\alpha(m)$. (Формально $\alpha \cdot t$ определяется по индукции.)
- Аналогично по формуле A , оцененной в M , строится формула $\alpha \cdot A$, оцененная в M' .

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Теорема 1.2 Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω , $\alpha : M \cong M'$.

- ① Если t — терм, оцененный в M , то $|\alpha \cdot t|_{M'} = \alpha(|t|_M)$.
- ② Если A — формула, оцененная в M , то $|\alpha \cdot A|_{M'} = |A|_M$.

Определение

- Пусть M — модель сигнатуры Ω . *Элементарная теория* модели M — это множество всех замкнутых формул сигнатуры Ω , которые истинны в M .

$$Th(M) := \{A \mid M \models A\}.$$

- Модели M_1, M_2 одной сигнатуры называются *элементарно эквивалентными*, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы, т.е. $Th(M_1) = Th(M_2)$; обозначение: $M_1 \equiv M_2$.

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Следствие 1.3 Если $M \cong M'$, то $M \equiv M'$.