1 Лист 2

Задача 1.1. Дана случайная величина $\xi \in \mathbb{R}$. Предъявите функцию $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, такую что случайная величина $G(\eta)$, где η имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, имеет такое же распределение как и ξ.

Доказательство. Пусть случайная величина ξ имеет функцию распределения F
Определим функцию $F^- : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$F^-(y) := \inf\{x : F(x) \geqslant y\}, y \in [0,1]$$

Покажем, что сучайная величина $X = F^-(\eta)$, где η имеет равномерное распределение на $[0,1]$, имеет то же распредление, что и η, то есть

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим случай, когда $x > y \Rightarrow F(x) > F(y)$ (то есть F обратима). Заметим, что в этом случае $F^- = F^{-1}$. Нам нужно показать, что $\mathbb{P}(F^{-1}(\eta) \leqslant x) = F(x),\ x \in \mathbb{R}$

$$\{F^{-1}(\eta) \leqslant x\} = \{\eta \leqslant F(x)\}$$
$$F^{-1}(\eta) \leqslant x \Rightarrow F(F^{-1}(\eta)) \leqslant F(x) \Rightarrow \eta \leqslant F(x)$$
$$\eta \leqslant F(x) \Rightarrow F^{-1}(\eta) \leqslant F^{-1}(F(x)) = x$$

Следовательно $\mathbb{P}(F^{-1}(\eta) \leqslant x) = \mathbb{P}(\eta \leqslant F(x)) = F(x)$

Рассмотрим случай, когда F – произвольное распределение Покажем, что $\{\eta \leqslant F(x)\} \subseteq \{F^-(\eta) \leqslant x\} \subseteq \{\eta \leqslant F(x)\}$, то есть $\{\eta \leqslant F(x)\} = \{F^-(\eta) \leqslant x\}$
так как F^- не убывает, то $\eta \leqslant F(x) \to F^-(\eta) \leqslant F^-(F(x))$

$$F^-(F(x)) - \inf\{x_0 : F(x_0) \geqslant F(x)\}$$
$$x \in \{x_0 : F(x_0) \geqslant F(x)\} \Rightarrow \inf\{x_0 : F(x_0) \geqslant F(x)\} \leqslant x \Rightarrow F^-(F(x)) \leqslant x$$

Следовательно $F^-(\eta) \leqslant x \Rightarrow \{\eta \leqslant F(x)\} \subseteq \{F^-(\eta) \leqslant x\}$ Так как F монотонна и не убывает, то $F^-(\eta) \leqslant x \Rightarrow F(F^-(\eta)) \leqslant F(x)$ Покажем, что $F(F^-(y)) \geqslant y$ при $F^-(y) < \infty$

$$F^-(y) < \infty \Rightarrow A = \{x \in \mathbb{R} |\ F(x) \geqslant y\} \neq \emptyset$$

То есть существует последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A :\ \ x_n \downarrow \inf A = T^-(y)\ n \to \infty$ Так как F – функция распределения случайной величины, то F непрерывна справа, откуда $F(x_n)$ убывает к $F(F^-(y))$ при $n \to \infty$, то есть $F(F^-(y)) > y$. Следовательно

$$F(F^-(\eta)) \geqslant \eta \Rightarrow \eta \leqslant F(x) \Rightarrow \{F^-(\eta) \leqslant x\} \subseteq \{\eta \leqslant F(x)\}$$

Таким образом, $\{F^-(\eta) \leqslant x\} = \{\eta \leqslant F(x)\}$ Получается, что опять $\mathbb{P}(F^-(\eta) \leqslant x) = \mathbb{P}(\eta \leqslant F(x)) = F(x)$ Значит функция G, котрую нужно было найти в задаче, равна F^- □

Задача 1.2. Имеется случайная величина, равномерно распределенная на $[0,1]$, и симметричная монетка. Как с их помощью построить случайную величину с плотностью распределения

$$\rho(x) = \left(3(x-1/2)^2 + \frac{9}{8}|1-2x|^{1/2}\right), \quad x \in [0,1]?$$

Доказательство. □

Задача 1.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$, и $S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$, а $M_k = \max(0, S_1, \ldots, S_k), k \geq 1$. Покажите, что для любого n

$$\mathbb{E}M_n = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}S_k^+}{k}$$

где $S_k^+ = \max(0, S_k)$

Доказательство. $\square$

Задача 1.4. Пусть $\varphi(n)-$ функция Эйлера, равная количеству простых чисел p, таких что $1 < p \leq n$. Докажите формулу Эйлера, используя вероятностные соображения:

$$\varphi(n) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

где произведение берется по всем простым числам p, делящим n.

Доказательство. Рассмотрим дискретное распределение на множестве $\{1, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}(x = k) = \frac{1}{n}$$

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ – разложение n.

$$A_{p_i} := \{X \text{ делится на } p_i\}$$
$$P(A_{p_i}) = \frac{\text{число элементов } \mathbb{Z}_n \text{, кратных } p_i}{n} = \frac{\frac{n}{p_i}}{n} = \frac{1}{p_i}$$

Покажем, что события $A_{p_1}, \ldots, A_{p_m}$ независимы
Возьмем $I = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$

$$P(\bigcap_I A_{p_i}) = P(A_{\cap_I p_i}) = \frac{\text{число элементов } \mathbb{Z}_n \text{, кратных } \prod_I p_i}{n} = \frac{\frac{n}{\prod_I p_i}}{n} = \prod_I pi^{-1} = \prod_{i \in I} P(A_{p_i})$$
$$\Rightarrow A_{p_1, \ldots, p_m} \text{ независимы}$$

Число взаимно просто с $n \Leftrightarrow$ это число не делится на $p_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m$

$$P(\bigcap_{i=1}^m A_{p_i}^c) = \prod_{i=1}^m P(A_{p_i}^c) = \prod_{i=1}^m (1 - \frac{1}{p_i})$$

Заметим теперь, что $P(X \text{ взаимнопросто с } n) = \frac{\varphi(n)}{n}$, таким образом $\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$ $\square$

Задача 1.5. Случайные точки $A_1 = (\xi_1, \eta_1)\,, A_2 = (\xi_2, \eta_2)\,, A_3 = (\xi_3, \eta_3)$ независимы и нормально распределены на плоскости с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей ковариаций. Найдите вероятность того, что треугольник $A_1 A_2 A_3$ будет тупоугольным.

Доказательство. $\square$