Дискретная математика
первый модуль 1 курса
Задачи

И.В.Артамкин

31 декабря 2021 г.

Листок 0. Индукция. Элементарная комбинаторика.

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два). Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X - 3 - 2N$, где N – номер недели, когда происходит сдача листка.

ВАЖНО: Необходимо заранее договариваться с вашим преподавателем о времени сдачи листка!

Задача 1. Вычислите суммы

а) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$; б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, г) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$

Задача 2. Покажите, что $\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}_{n} < 2$.

Задача 3. Число $x + \dfrac{1}{x}$ целое. Покажите, что $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ тоже целое при любом натуральном n.

Задача 4. Числа Фибоначчи F_n определяются условиями $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Докажите, что что квадрат F_n^2 n-го числа Фибоначчи отличается на 1 от произведения $F_{n-1}F_{n+1}$ двух соседних.

Задача 5. a) Сколько диагоналей в выпуклом n - угольнике?

b) Сколько треугольников с вершинами в данных n точках общего положения?

Задача 6. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах:

а) ананас; б) $\underbrace{\text{аа}\ldots\text{а}}_{k}\underbrace{\text{бб}\ldots\text{б}}_{m}$?

Задача 7. Имеется пять коробок, раскрашенных в различные цвета, 10 одинаковых карандашей и 10 попарно различных ручек. Сколькими способами можно разложить

a) ручки по коробкам ?

b) карандаши по коробкам ?

Задача 8. a) Дано n лампочек, каждая может быть либо включена, либо выключена. Сколько всего есть вариантов освещения? Каких вариантов больше: когда горит четное число ламп, или когда горит нечетное их число?

b) Натуральное число называется *свободным от квадратов*, если он не делится на квадрат никакого простого числа. Сколько всего делителей у свободного от квадратов числа?

Задача 9. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8×8 8 ладей, чтобы они не били друг друга?

Задача 10. a) Сколькими способами можно посадить n человек в ряд, чтобы Иванов и Петров не сидели рядом?

b) Сколько существует таких способов рассадки за круглым столом?

Задача 11. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость

a) n прямых;
b) * n окружностей?

Задача 12. * Единичным n-мерным кубом назовем множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, таких, что $0 \leq x_i \leq 1$. Его вершины - это точки, все координаты которых равны либо 0, либо 1. Любое ребро куба, параллельное k-ой координатной оси, соединяет две вершины, отличающиеся только в k-ой позиции. Сколько существует кратчайших путей по ребрам из вершины $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ (все координаты нули) в вершину $(1, 1, 1, \ldots, 1)$?

Листок 0. Индукция. Элементарная комбинаторика.

0.1 1

а)

$$\sin(x)+\sin(2x)+...+\sin(nx)=\frac{\sin(\frac{n+1}{2})*\frac{\sin(nx)}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(a+kd)=$$
$$\sin(a)+\sin(a+k)+...+\sin(a+(k-1)d)=$$
$$\frac{\sin(\frac{nd}{2})}{\sin(\frac{d}{2})}*\sin(\frac{2a+(n-1)d}{2})$$

пусть $a=x$ и $d=x$ тогда

$$\frac{\sin(\frac{nd}{2})}{\sin(\frac{d}{2})}*\sin(\frac{2a+(n-1)d}{2})=$$
$$\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}*\sin(\frac{2x+(n-1)x}{2})=$$
$$\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}*\sin(\frac{(n+1)x}{2})$$

б)
докажем по индукции

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=$$
$$\frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)=$$
$$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)=\frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$$

в)
докажем по индукции

$$1^3+2^3+...+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$$

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2+(n+1)^3=$$
$$\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=(\frac{n(n+1)}{2})^2$$

г)

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+...+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+...+\frac{1}{(n-1)n}=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...=\frac{1}{1}-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$$

0.2 2

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}<2$$

пусть $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$, тогда

$$\lim a_{n+1}=\sqrt{1+\lim a_n}\Longrightarrow a=\sqrt{1+a}$$

0.3 3

Воспользуемся методом индукции для доказательства. Если n равно нулю, тогда: $n=0\Longrightarrow x^0+(\frac{1}{x})^0=1+1=2$ — целое
Если n равно единице, тогда:

$$n=1\Longrightarrow x^1+\frac{1}{x}^1=x+\frac{1}{x}\text{ целое по условию}$$

Пусть мы доказали, что

$$x+\frac{1}{x},x^2+\frac{1}{x}^2,...,x^{k-1}+\frac{1}{x}^{k-1},x^k+\frac{1}{x}^k$$

это целые числа.
Докажем, что $x^{k+1}+\frac{1}{x}^{k+1}$ также является целым числом.
Для этого умножим $x^k+\frac{1}{x}^k$ на $x+\frac{1}{x}$:

$$(x^k+\frac{1}{x}^k)*(x+\frac{1}{x})=x^{k+1}+x^{k-1}+\frac{1}{x}^{k-1}+\frac{1}{x}^{k+1}$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями при x:

$$(x^k+\frac{1}{x}^k)*(x+\frac{1}{x})=(x^{k+1}+\frac{1}{x}^{k+1})+(x^{k-1}+\frac{1}{x}^{k-1})$$

Выразим, чему равно $x^{k+1}+\frac{1}{x}^{k+1}$:

$$x^{k+1}+\frac{1}{x}^{k+1}=(x^k+\frac{1}{x}^k)*(x+\frac{1}{x})-(x^{k-1}+\frac{1}{x}^{k-1})$$

Поскольку множители $x^k+\frac{1}{x}^k$ и $x+\frac{1}{x}$ являются целыми числами (первое из доказанного, второе из условия), значит и их произведение также целое. Число $x^{k-1}+\frac{1}{x}^{k-1}$ является целым, значит и разность будет также целой. Следовательно, число $x^{k+1}+\frac{1}{x}^{k+1}$ является целым. При отрицательных n все выполняется аналогично.

0.4 4

Докажем это утверждение по индукции.
База: для $n=2,3$
$F_1=1,F_2=1,F_3=2,F_4=3$
$n=2:F_2*F_2=1,F_1*F_3=2$
$n=3:F_3*F_3=4,F_2*F_4=3$
Переход:
пусть для н верно предположение индукции, тогда докажем его для н+1. Утверждение для $n+1:F_{n+1}*$

$F_{n+1} = F_{n+2} * F_n \pm 1.$
Заметим, что

$$F_{n+2} * F_n = (F_n + F_{n+1}) * F_n = F_n * F_n + F_n * F_{n+1}$$

По предположению индукции $F_n * F_n = F_{n-1} * F_{n+1} \pm 1$,
следовательно

$$\begin{aligned}
&F_n * F_n + F_n * F_{n+1} = \\
&F_{n-1} * F_{n+1} + F_n * F_{n+1} \pm 1 = \\
&F_{n+1} * (F_{n-1} + F_n) \pm 1 \\
&= F_{n+1} * F_{n+1} \pm 1
\end{aligned}$$

значит

$$F_{n+2} * F_n = F_{n+1} * F_{n+1} \pm 1 \iff F_{n+1} * F_{n+1} = F_{n+2} * F_n \pm 1$$

0.5 5

а)
из вершины можно провести диагональ в любую другую вершину, кроме 2 соседних.Также каждуюдиагональ мы учитываем 2 раза

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

б)

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

0.6 6

а)
Пока что будем считать, что буквы а различны, то есть существуют a_1, a_2, a_3. Аналогично существуют н$_1$, н$_2$. Тогда количество слов $= 6!$ (на первое место можно поставить любую из 6 букв, на второе - любую из оставшихся и тд., из чего следует что кол-во слов = 6*5*4*3*2*1 = 6!)
Теперь объединим слова в группы так, что из каждого слова в группе можно получить другое перестановкой букв a_1, a_2 и a_3 между собой, а также н$_1$ и н$_2$ между собой Заметим, что в каждой группе будет 3! * 2! слов, так как есть 3! способов расставить a_1, a_2 и a_3 в каком либо порядке, аналогично 2! способов для "н".
Количество слов, которое можно составить из слова ананас равно количеству получившихся групп, потому что 2 слова с пронумерованными буквами будут одинаковыми словами без номеров, только если одно слово получается из второго перестановкой "а"между собой и/или "н"между собой, следовательно кол-во слов $= \frac{6!}{3!*2!} = \frac{720}{6*2} = 60$.
б)
Аналогично, как в пункте а, будет считать, что существуют a_1, a_2 ... a_k и b_1, b_2 ... b_m, из чего получаем, что слов с пронумерованными буквами $= (k+m)!$, а слов в группе $= k! * m!$, из чего следует, что всего слов $= \frac{(k+m)!}{k!*m!}$

0.7 7

а)
Каждую ручку можно поместить в любую из 5 коробок, из чего следует, что количество способов положить 10 разных ручек в 5 разных коробок - 5^{10}.
б)
Будем считать, что карандашей не 10, а 15, при этом в каждой коробке должен быть хотя бы 1 карандаш. Заметим, что кол-во способов разложить карандаши не изменилось. Также пронумеруем карандаши от 1 до 15, и будем считать, что если в коробках x_1, x_2, ... x_5 карандашей, то в первой коробке лежат первые x_1 карандашей, во второй x_2 и т.д. Заметим, что количество способов разложить карандаши всё ещё не изменилось.
Теперь заметим, что количество способов разложить карандаши с заданными условиями равно количеству способов поставить 4 перегородки между 15-тью шарами, пронумерованных от 1 до 15, при этом никакие 2 перегородки на могут стоять "вместе". Количество способов поставить перегородки - $\binom{14}{4} = C_{14}^4 = \frac{14!}{4!(14-4)!} =$ 1001 (есть 14 мест, куда можно поставить перегородки).

0.8 8

а) Есть 2^n способов освещения, так как каждая лампочка может быть вкл или выкл независимо от других. Количество освещений с чётным кол-вом лампочек равно кол-ву освещений с нечётным кол-вом лампочек, так как каждому освещению из первого множества можно сопоставить освещение с изменённой последней лампочкой из другого множества (и аналогично наоборот), из чего следует, что данное сопоставление - биекция.
б) Пусть у числа k различных простых делителей, тогда для любого делителя свободного от квадратов числа можно сказать, делится оно на один из k простых делителей или нет, причём отдельно для каждого простого. Заметим, что по множеству "ответов"однозначно определяется делитель, при этом других делителей нет, так как иначе свободное от квадратов число делится на какой то ещё простой делитель или квадрат предыдущих, из чего кол-во делителей - 2^k.

0.9 9

Очевидно в каждых столбце и строке ровно 1 ладья.
Заметим, что есть 8 способов поставить ладью в первый столбец, 7 - во второй, так, чтобы ладьи друг друга не били, ... 1 - в последний. Из чего следует, что кол-во способов расставить ладьи $= 8!$.

0.10 10

Рассмотрим 2 случая: когда Иванов сидит с краю, и когда - нет.
Если Иванов сидит с краю, то кол-во способов посадить Петрова - $n-2$, а остальных - $n-2$, $n-3$ ... 1 способом $\Rightarrow$ кол-во способов $= 2*(n-2)*(n-2)!$ (Иванов может сидеть с любого края).
Второй случай - кол-во способов посадить Петрова - $n-3$, остальных - $n-2$, $n-3$ ... 1 способом $\Rightarrow$ кол-во способов $=(n-2)*(n-3)*(n-2)!$ В сумме получается

$$(n-2)!*(2*(n-2)+(n-2)*(n-3)) = (n-2)!*(n-2)*(n-1) = (n-1)!*(n-2)$$

б)
Кол-во способов расположить Иванова - n, Петрова (после Иванова) - $n-3$, для оставшихся - $(n-2)!$, итого - $n*(n-3)*(n-2)!$

0.11 11

а) Докажем по индукции, что количество частей равно $1+\frac{1}{2}n(n+1)$.
База $(n=1)$ – очевидно. Пусть $n>1$. По предположению индукции перед проведением n-й прямой было $1+\frac{1}{2}n(n-1)$ частей. Новая прямая делится точками пересечения со старыми прямыми на n интервалов. Каждый из этих интервалов разбивает одну часть на две. Следовательно, добавится n частей. Поэтому всего частей станет $1+\frac{1}{2}(n-1)n+n = 1+\frac{1}{2}n(n+1)$.

б) Докажем по индукции, количество частей равно $2+n(n-1)$.
База $(n=1)$ – очевидно. Пусть $n>1$. По предположению индуцкии перед проведением n-й окружности было $2+(n-1)(n-2)$ частей. Рассмотрим n-ю окружность. Она пересекает предыдущие $(n-1)$ окружностей не более чем в $2(n-1)$ точках (каждую окружность – не более, чем в двух точках). Следовательно, n-я окружность разбивается первыми $(n-1)$ окружностями не более чем на $2(n-1)$ дуг. Каждая дуга делит одну из частей, на которые плоскость была разделена $(n-1)$ окружностями, еще на две части. Тем самым, каждая дуга прибавляет одну часть плоскости, и n-я окружность прибавляет не более $2(n-1)$ частей плоскости. Более того, n-я окружность прибавляет ровно $2(n-1)$ частей плоскости тогда и только тогда, когда она пересекает каждую из предыдущих окружностей в двух точках и все эти точки различны. Таким образом, n окружностей делят плоскость не более чем на $2+(2+4+6+...+2(n-1)) = n(n-1)+2$ части, причём равенство достигается, если каждая пара окружностей пересекается в двух точках и все эти точки пересечения различны (то есть никакие три окружности не проходят через одну точку).

0.12 12

Заметим, что все кратчайшие пути имеют длину n, так как за каждое ребро соединяет 2 вершины, отличающиеся в 1 координате $\Rightarrow$ если следить за "концом"пути, то после каждого перемещения сумма координат меняется не больше чем на 1, при этом изначально сумма 0, а в конце - n. Это доказывает, что пути имеют длину $>= n$, при этом существует путь длины n $(0,0,0,..,0)->(1,0,0,..,0)->(1,1,0,..,0)->...->(1,1,1,..,1)$.
Заметим, что если следить за концом пути, то в координатах будет заменяться один "0"на "1 кол-во способов выбрать "0"равно n для первого шага, $n-1$ для второго шага ... 1 для последнего $\Longrightarrow$ всего таких путей $n!$.

Листок 1. Множества, отображения, высказывания.

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два). Перед сдачей листка происходит обсуждение вашего письменного домашнего задания, которое должно быть зачтено для продолжения беседы. Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X - 3 - 2N + k - 2d$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказынных у доски на семинаре задач, $d = 0$, если домашнее задание зачтено в течение 10 дней после его выдачи и $d = 1$ в противном случае.

ВАЖНО: Необходимо заранее договариваться с вашим преподавателем о времени сдачи листка!

Задача 1. Докажите аккуратно одно из тождеств про операции с множествами на выбор принимающего.

Задача 2. Запишите с помощью кванторов и логических операций:
«Для каждого целого x найдётся целое y такое, что $x + y > 0$».
«Существует бесконечно много пар простых чисел, отличающихся на 2».

Задача 3. Докажите тождество $x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} = x\bar{z} \vee z\bar{y} \vee y\bar{x}$ двумя способами:

a) составив таблицы истинности левой и правой части;
b) преобразовав левую часть в правую пользуясь тождествами булевой алгебры.

Задача 4. a) Покажите, что отображение $f : M \to N$ конечных множеств сюръективно тогда и только тогда, когда у него существует правое обратное, т.е., отображение $g : N \to M$ такое, что $f \circ g = \mathrm{Id}_N$. Здесь Id_N - тождественное отображение множества N в себя.
b) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для инъективных отображений.

Задача 5. a) Покажите, что отображение $f : M \to N$ сюръективно тогда и только тогда, когда на него можно сокращать справа, т.е., из всякого равенства $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует, что $g_1 = g_2$.
b) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для инъективных отображений.

Задача 6. Пусть Ω - некоторое множество (не обязательно конечное). Сопоставим каждому подмножеству $A \subset \Omega$ функцию $\chi_A : \Omega \to \{0, 1\}$, заданную условием $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$ и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$ (характеристическая функция подмножества A).

a) Докажите, что сопоставление $A \mapsto \chi_A$ задает биекцию множества $\mathcal{B}(\Omega)$ всех подмножеств множества Ω и множества функций $\{0, 1\}^\Omega$;
b) Покажите,что если A и B — подмножества Ω, то $\chi_{A\cup B} = \chi_A \vee \chi_B$ и $\chi_{A\cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$. Каким операциям над множествами соответствуют сложение по модулю два $\chi_A + \chi_B$ и импликация $\chi_A \to \chi_B$?

Задача 7. Установите биекции между множествами:

a) $Z^{X\cup Y}$ и $Z^X \times Z^Y$, если $X, Y \in \mathcal{B}(\Omega)$ и $X \cap Y = \emptyset$;
b) $\left(A^B\right)^C$ и $A^{B\times C}$

Подсказка. Пусть задано отображение $f : B \times C \to A$. Тогда всякому элементу $c \in C$ можно сопоставить отображение $f(\cdot, c) : B \to A$, переводящее $b \in B$ в $f(b, c)$

Задача 8. Докажите, что любое отображение $f : X \to Y$ можно представить в виде

a) композиции $f = g \circ h$, где g - сюръекция, а h – инъекция;
b) * композиции $f = p \circ q$, где q сюръекция, а p – инъекция.

Задача 9. Пусть $f : M \to M$ - биекция конечного множества.Тогда $f^n = \mathrm{Id}_M$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Приведите пример биекции бесконечного множества, для которой это утверждение неверно

Задача 10. a) Пусть $f = g \circ h$. Докажите, что если отображения g и h инъективны (сюръективны) , то и f инъективно (сюръективно).
b) Известно, что отображение $g \circ h$ сюръективно. Можно ли утверждать, что g сюръективно? Можно ли утверждать, что h сюръективно?

Задача 11. Пусть $f, g \in X^X$, причем $f \circ g = g \circ f$ (в этом случае отображения f и g называются *перестановочными*, или *коммутирующими*), а отображение f имеет единственную неподвижную точку (т.е. существует единственное $a \in X$ такое, что $f(a) = a$).

a) Докажите, что тогда и $g(a) = a$.
b) Приведите пример двух коммутирующих биеций, не имеющих общих неподвижных точек.

Задача 12. * Пусть N - конечное множество из n элементов. Перестановкой называется биекция N в себя. Циклом (длины k) называется перестановка M такая, что $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \ldots, f(x_{k-1}) = x_k, f(x_k) = x_1$ для некоторых попарно различных элементов $x_1, \ldots x_k$ из N и $f(y) = y$ для всех элементов N отличных от $x_1, \ldots x_k$. Покажите, что всякая перестановка представляется в виде композиции коммутирующих циклов.

Задача 13. Таблица истинности булевой функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ от n переменных описывается числами $a_{k_1,\ldots k_p} \in \{0, 1\}$, равными значению функции на наборе $(x_1, ..., x_n)$ из нулей и единиц, в котором единицы стоят на местах $k_1, \ldots k_p$, где $1 \le k_1 < \ldots < k_p \le n$. Зная эту таблицу, выпишите формулу для f с использованием операций $\wedge, \vee, \neg$.

Подсказка. Решите вначале задачу для функции, которая принимает значение 1 ровно один раз .

Задача 14. Сформулируйте принцип доказательства от противного. Предъявите доказательства от противного следующих утверждений:

a) $\sqrt{2}$ – иррациональное число;
b) простых чисел бесконечно много.

Задача 15. Покажите на примере, что прямая теорема $A \to B$ не равносильна обратной $B \to A$. А что можно сказать про утверждения $\neg A \to \neg B$ и $\neg B \to \neg A$?

Задача 16. * Пусть X — некоторое множество. Постройте биекцию между $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}}$ и $X^{\{1,2,\ldots,n\}}$.

1 Листок 1. Множества, отображения, высказывания.

1.1 1

1)

$$x \in \overline{A \cup B} \Longrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

2)

$$\begin{cases} x \in A/B \Longrightarrow x \in \overline{B} \\ x \in B/A \Longrightarrow x \in \overline{A} \\ x \in U/(A \cup B) \Longrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

1.2 2

1.3 3

$$x\bar{y} \cup y\bar{z} \cup z\bar{x} = x\bar{z} \cup z\bar{y} \cup y\bar{x}$$

A)

$$\begin{array}{ccc} x & \bar{y} & x\bar{y} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} z & \bar{x} & z\bar{x} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} y & \bar{z} & y\bar{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} y & \bar{x} & y\bar{x} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \bar{z} & x\bar{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} z & \bar{y} & z\bar{y} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$0 \cup 0 \cup 0 = 0 \cup 0 \cup 0$$

B)
$x\bar{y} = \overline{\overline{x} + y}$ так как $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A * B}$ то

$$\overline{\overline{x} + y} + \overline{\overline{y} + z} + \overline{\overline{z} + x} = \overline{(\overline{x} + y)(\overline{y} + z)(\overline{z} + x)} = \overline{\overline{xyz} + xyz}$$

Аналогично

$$\overline{\overline{x} + z} + \overline{\overline{z} + y} + \overline{\overline{y} + x} = \overline{\overline{xyz} + xyz}$$

1.4 4

A) Требуется показать, что
(1) $f : M \longrightarrow N$ сюръекция
$\Longleftrightarrow$
(2) существует $g : N \longrightarrow M$ такое, что $fog = Id_N$

$$(1) \Longrightarrow (2)$$

Рассмотрим g такое, что $g(x) =$ самый первый прообраз элемента x относительно f (мы считаем, что множества упорядочены, и мы можем так считать, так как они конечны). Заметим, что так как f - сюръекция, то хотя бы один прообраз есть, то есть функция определена для всех x принадлежащих N. Тогда очевидно, что $f \circ g = Id_N$

$$(2) \Longrightarrow (1)$$

Заметим, что если $f \circ g = Id_N$, то любой элемент из N можно получить из f, что и означает, что f - сюръекция

B) Требуется показать, что
(1) $f : M \longrightarrow N$ инъекция
$\Longleftrightarrow$
(2) существует $g : N \longrightarrow M$ такое, что $g \circ f = Id_M$

(1) $\Longrightarrow$ (2)

Рассмотрим g такое, что $g(x)$ = прообраз элемента x относительно f, если такой есть, иначе это первый элемент. Заметим, что так как f - инъекция, то прообраза не более 1, то есть функция определена для всех x принадлежащих N. Тогда очевидно, что $g(f(x)) = f^-1(f(x)) = x \Longrightarrow g \circ f = Id_M$

(2) $\Longrightarrow$ (1)

Заметим, что если $g \circ f = Id_M$, и при этом $f(x_1) = f(x_2)$, то $g \circ f(x_1) = x_1$, $g \circ f(x_2) = x_2$, но $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ $\Longleftrightarrow x_1 = x_2$

1.5 5

а)
Пусть f сюръективно. Тогда так как f сюръективно, то $\forall\ x \in N \quad : \quad \exists\ y \in M \quad : \quad f(y) = x$ Рассмотрим равенство из условия для y.

$$g_1(f(y)) = g_2(f(y)) \qquad g_1(x) = g_2(x)$$

Т.е. для любого x из N результаты отображений g_1 и g_2 равны. Значит отображения равны.
Пусть равенство выполнено. Докажем, что отображение сюръективно. Пусть это не так, тогда покажем, что равенство необязательно выполнено. Пусть $\exists\ x \in N \quad : \quad \forall\ y \in M \quad : \quad f(y) \neq x$. Тогда x при g_1 может отображаться в элемент a, а при g_2 в b, при этом равенство композиций будет выполнено, но равенство $g_1 = g_2$ - нет.
б)

1.6 6

A)
$A \subset \Omega$
$X_A : \quad \Omega \to 0, 1$
$\begin{cases} X_A(x) = 1 & \text{если} \quad x \notin A \\ X_A(x) = 0 & \text{если} \quad x \in A \end{cases}$
A) A $\longrightarrow X_A$
Доказать:
$B(\Omega) \longleftrightarrow \{0, 1\}^{\Omega}$ Доказательство:
Сопоставим элементы множества Ω с элементами $B(\Omega)$

$$\begin{cases} a_i = 1 & \text{если} \quad a_i \notin A_i \\ a_i = 0 & \text{если} \quad a_i \in A_i \end{cases}$$

Аналогично $A \to X_A$
B)

1.7 7

1.8 8

A)

B)
Рассмотрим множество Y_1, состоящее из элементов множества Y, у которых есть прообраз относительно функции f. Тогда пусть $q : X \longrightarrow Y_1$ такое, что q(x) = f(x) для каждого x принадлежащего X, $p : Y_1 \longrightarrow Y$ такое, что $p(y) = y$ для каждого y из Y_1. Нетрудно видеть, что $p \circ q = f$

1.9 9

Заметим, что для каждого x принадлежащего M верно, что существует натуральное n_x, что $f^{n_x} = x$, так как среди элементов x, $f(x)$, $f^2(x)$ ... $f^{|M|}(x)$ есть 2 одинаковых (пусть это $f^a(x)$ и $f^b(x)$), при этом если a или $b \neq 0$, то $f^{a-1}(x)$ и $f^{b-1}(x)$ тоже равны, так как f - сюръекция $\Longrightarrow$ среди этих элементов 2 одинаковых, один из которых - x, из чего следует, что такое n_x есть. Пусть произведение всех $n_i = N$, тогда $f^N = Id_N$, так как каждый x переходит в себя в f^{n_x}, f^{2*n_x} ..., из чего $x \longrightarrow x$ в f^N, что верно для всех x, читд

1.10 10

1.11 11

1.12 12

1.13 13

1.14 14

A)
Предположим $\sqrt(2) = \frac{p}{q}$, тогда $2 = \frac{p^2}{q^2}$, при этом степень вхождения 2 в p^2 и q^2 - чётно, и чётное число минус чётное = чётное, следовательно степень вхождения 2 в $\frac{p^2}{q^2}$ - чётно (считаем, что степень вхождения отрицательная, если в q^2 она больше чем в p^2) что $\neq 1$. Противоречие.
B)
Предположим, что простых чисел конечно. Тогда рассмотрим число = (произведению всех простых чисел) + 1. Заметим, что оно не делится ни на одно простое число $\Longrightarrow$ оно простое - противоречие.

1.15 15

Если число простое, то оно целое. Очевидно, что если число целое, то это не значит, что оно простое. Аналогично с если число не простое, то оно не целое(любое составное число). При этом $A \longrightarrow B \Longleftrightarrow !B \longrightarrow !A$, в чём можно убедится, сравнив таблици истинности:

a	b	$!b$	$!a$	$a \longrightarrow b$	$!b \longrightarrow !a$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1

1.16 16

Листок 2

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два, с двумя - за три). Перед сдачей листка происходит обсуждение вашего письменного домашнего задания, которое должно быть зачтено для продолжения беседы. Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X - 1 - 2N + k - 3d$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на семинаре задач, $d = 0$, если домашнее задание зачтено в течение 10 дней после его выдачи и $d = 1$ в противном случае.

Задача 1. Выведите формулу полинома

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$$

непосредственно и индукцией по m

Задача 2. Выпишите тождества на биномиальные коэффициенты, эквивалентные равенствам $(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b), \quad (a+b)^{n+m} = (a+b)^n(a+b)^m$

Задача 3. Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на пары?; $3n$ человек на тройки?

Задача 4.
a) Сколько имеется различных одночленов степени d от n переменных?
b) Сколько имеется различных одночленов степени d от n переменных, в которых каждая переменная входит в ненулевой степени?

Задача 5. Сколькими способами можно представить число $n \in \mathbb{N}$ в виде суммы (произвольного числа) натуральных слагаемых? Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Задача 6. Имеется n различных круглых бусинок. Сколькими способами можно составить из них ожерелье, насчитывающее k бусинок?

Задача 7. * Сколько k-мерных граней у n-мерного куба? (См задачу 12 листка 0)

Задача 8. Трехмерный параллелепипед размером $n \times m \times p$ $(m, n, p \in \mathbb{N})$ составлен из mnp элементарных кубиков $1 \times 1 \times 1$. Каково количество кратчайших путей из вершины параллелепипеда в противоположную, проходящих по ребрам элементарных кубиков?

Задача 9. Предложите чисто комбинаторные доказательства тождеств:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n-r-1}{k-r} = \binom{n}{k}$

Задача 10. Пусть M – множество из m различных натуральных чисел, N – множество из n различных натуральных чисел. Найдите, сколько имеется различных отображений $M \to N$:

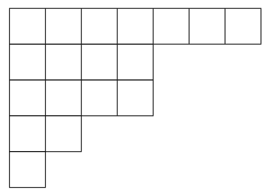
a) произвольных; иньективных; взаимно однозначных; строго возрастающих (т.е. таких, что $\forall x, y \in M \; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$);
b) неубывающих
c) * сюръективных

Задача 11. Сформулируйте и докажите формулу включений–исключений.

Задача 12. Сколько существует целых чисел от 1 до 1 000 000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью целого числа?

Задача 13. * Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – разложение числа n в произведение простых попарно различных чисел. Найдите сумму делителей числа n.

Задача 14. Фигурка типа



(состоящая из выравненных по левому краю клетчатых горизонтальных полосок с клетками одинакового размера, длина которых невозрастает сверху вниз) называется *диаграммой Юнга*. Общее число клеток в диаграмме называется ее *весом*. Выясните, сколько существует диаграмм Юнга

a) веса 7, имеющих не более 3 строк;
b) произвольного веса, но имеющих не более p строк и не более q столбцов.

2 Листок 2

2.1 1

$$(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, ... k_m \geqslant 0 \\ k_1 + k_2 + ... + k_m = n}} \frac{n!}{k_1!...k_m!} * x_1^{k_1} * ... * x_m^{k_m}$$

2.2 2

1)

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1} * (a+b)$$

Заметим, что:

$$\binom{n}{k} =$$
$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} * \left(\frac{n-k}{n} + \frac{k}{n}\right)$$
$$\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$
$$\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} =$$
$$= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Тогда:

$$(a+b)^n =$$
$$\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + ... + \binom{n}{n} b^n =$$

$$\binom{n-1}{0} a^n + \left(\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}\right) a^{n-1} b + \left(\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}\right) a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n-1}{n-1} b^n =$$

$$\left(\binom{n-1}{0} a^n + \binom{n-1}{1} a^{n-1} b + ... + \binom{n-1}{n-1} a b^{n-1}\right) + \left(\binom{n-1}{0} a^{n-1} b + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n-1}{n-1} b^n\right) =$$

$$\left(\binom{n-1}{0} a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b + ... + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1}\right) * (a+b) =$$

$$\left(\binom{n-1}{0} a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b + ... + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1}\right) * \left(\binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b\right) =$$

$$(a+b)^{n-1} * (a+b)$$

2)

$$(a+b)^{n+m} = (a+b)^n * (a+b)^m$$

Заметим, что $m = \underbrace{1 + ... + 1}_{m}$, тогда мыможем прибавлять по 1 как в (1) пункте

2.3 3

A)
Заметим, что количество способов выбрать n упорядоченных пар (то есть существуют первая, вторая ... n-тая пары, при этом люди в самих парах неупорядочены)

$= \frac{(2n)!}{2^n}$, так как для первой пары есть $\frac{n*(n-1)}{2}$ способов выбрать 2х людей в любом порядке, из-за чего кол-во способов в 2! раза меньше, чем $n*(n-1)$, аналогично для второй пары $\frac{(n-2)*(n-3)}{2}$ и так далее. При этом все выборы независимы, из чего получаем, что всего $\frac{(2n)!}{2^n}$ способов. Тогда кол-во способов выбрать n неупорядоченных пар в $n!$ меньше $\Longrightarrow$ ответ - $\frac{(2n)!}{2^n*n!}$

В)

Аналогично кол-во упорядоченных троек $= \frac{(3n)!}{3!^n}$, из чего кол-во неупорядоченных троек $= \frac{(3n)!}{3!^n*n!}$

2.4 4

А)
Пусть переменные это x_1, x_2, ... x_n.
Расположим подряд $d+n-1$ шарик, выкинем из этого ряда произвольным образом $n-1$ шарик. Тогда расстояние от начала ряда до первого выброшенного шарика - степень x_1, расстояние от первого выброшенного до второго выброшенного - степень x_2, и т.д.
Тогда количество различных одночленов степени d от n переменных совпадает с количеством способов выкинуть $n-1$ шарик из $d+n-1$, т.е. $\binom{d+n-1}{n-1}$
В)
Пусть есть d шариков и требуется поставить $n-1$ перегородку(причем $d > n-1$, иначе у какого-то x_i степень нулевая), тогда расстояние от 1 шарика до перегородки - степень x_1, от первой перегородки до 2 перегородки - степень x_2, и т.д.
Всего есть $\binom{d-1}{n-1}$ способов расставить $n-1$ перегородку средиd шариков.

2.5 5

Представим n в виде n подряд идущих единиц, тогда мы можем расставлятьмежду ними "+ объединяя числа(т.е. $1+1, 1 = 2, 1$). Тогда, так как всего n единиц и последовательность не играет роль, то мы можем ставить "+"в $n-1$ промежуток, так мы получим 2^{n-1} вариант.

2.6 6

Заметим, что 2 ожерелья одинаковые - если из одного можно получить комбинацией поворотов и переворотов. Будем называть конкретное расположение бусин картинкой. Тогда всего есть $n!$ картинок и у каждого ожерелья "есть"$2k$ разных картинок, при этом очевидно, что каждая картинка принадлежит ровно одному ожерелью, из чего следует, что ожерелий $= \frac{n!}{2k}$

2.7 7

Заметим, что k-мерная грань - гмт из точек вида $(x_1, x_2, x_3, ... x_n)$, где некоторые из x - константы, равные "0"или "1 при этом кол-во констант $= n - k$. (Сюдя по всему это и есть определение k-мерной плоскости) Тогда нетрудно видеть, что кол-во граней равно $\binom{k}{n-k} * 2^{n-k}$, так как есть $\binom{k}{n-k}$ способов выбрать положение констант и 2^{n-k} способов выбрать сами константы.

2.8 8

Заметим, что каждый из таких кратчайших путей длины $n + m + p$, причём среди рёбер этого пути n параллельны оси x, m параллельны оси y, p параллельны оси z. Тогда каждому пути можно сопоставить последовательность длины $n+m+p$, состоящей из n "1 m "2"и p "3 где каждая цифра соответствует выбору ребра, || одной из осей. Кол-во последовательностей такой длины

$$C^n_{n+m+p} + C^m_{m+p} = \frac{(n+m+p)! * (m+p)!}{n! * (m+p)! * m! * p!} = \frac{(n+m+p)!}{n! * m! * p!}$$

2.9 9

A)
Рассмотрим все способы выбрать n объектов из $2n$. Заметим, что в каждом способе есть такие x и y, что среди первых n выбрано x объектов, среди вторых n выбрано y объектов. Таким образом каждому выбору n объектов из $2n$ можно сопоставить 2 выбора x и y объектов из множеств размером с n, где $x + y = n$, при этом 2м разным выборам из $2n$ сопоставляются разные выборы из 2х n, и по 2м выборам из 2 n можно восстановить выбор из $2n$, таким образом это сопоставление - биекция $\Rightarrow$ в обоих множествах одинаковое кол-во элементов.

B)
Заметим, что C^{k-r}_{n-r-1} равно количеству последовательностей длины n, в котором k "1"и $n - k$ "0"и в котором первый "0"встречается на $r + 1$ позиции (отсчёт начинается с 1), так как первые $r + 1$ цифр заданы однозначно, а среди последующих $n - r - 1$ - $k - r$ "1". Заметим, что при $n = k$ равенство так-же выполнено.

2.10 10

A)
$m * n$;
0 при $m > n$, $\frac{n!}{(n-m)!}$ при $m \leqslant n$;
0 при $m! = n$, $m!$ при $m = n$;
0 при $m > n$, $\binom{n}{m}$ при $m \leqslant n$; ($\binom{n}{m}$ способов выбрать m элементов из N, далее отображение однозначно задаётся)

B)
Заметим, что число неубывающих отображений равно количеству способов распределить m одинаковых шаров по n разным коробкам, причём в коробке может быть 0 шаров, что равно кол-ву способов распределить $m + n$ шаров по n коробкам, где в каждой коробке хотя бы 1 шар, что равно C^{n-1}_{m+n-1}.
C)

2.11 11

Формулировка:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Доказательство:
Возьмём произвольный элемент $x \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Покажем, что x учитывается правой частью формулы ровно один раз. Пусть x принадлежит пересечению ровно k множеств. Без ограничения общности, можно считать, что x принадлежит множествам A_1, A_2, ..., A_k и не принадлежит множествам A_{k+1}, A_{k+2}, ... A_n.
Тогда посчитаем сколько разучитывается x в различных суммах:
1)
В первой сумме $\sum_i |A_i|$ элемент x посчитан $\binom{k}{1}$ раз
2)

Во второй сумме $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$ элемент x посчитан $\binom{k}{2}$ раз
...
k)
В k сумме $\sum_{i<j<...<k} |A_i \cap A_j \cap ... \cap A_k|$ элемент x посчитан $\binom{k}{k}$ раз
$> k$)
Суммы, состоящие из $k+1$ и более пересечений, не учитывают элемент x, так как x не входит в пересечение более чем k множеств
Таким образом, элемент x посчитан $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + ...(-1)^{k+1}\binom{k}{k}$ раз.
Заметим, что

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} * 1^{n-k} * (-1)^k\right) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k * \binom{n}{k}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} * \binom{n}{k}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$1 = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} * \binom{n}{k}\right) = \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + ... + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}$$

Т.е. каждый элемент посчитан ровно 1 раз

2.12 12

Заметим, что любое число, которое является четвёртой степенью целого числа x является и квадратом целого числа x^2. Заметим, что полных квадратов от 1 до 1 000 000 - 1 000, при этом среди них 10 кубов (каждый квадрат - число вида $a * a$, где $1 \leqslant a \leqslant 1000$, при этом тогда среди этих квадратов 10 кубов, так как среди чисел (от 1 до 1 000) 10 кубов). Полных кубов от 1 до 1 000 000 - 100. Итого - $1000 + 100 - 10 = 1090$. Это количество чисел, которые квадрат или куб $\Rightarrow$ чисел, которые ни квадрат, ни куб - $1000000 - 1090 = 998910$.

2.13 13

$$\frac{(p_1^{\alpha_1+1} - 1) * ... * (p_k^{\alpha_k+1} - 1)}{(p_1 - 1) * ... * (p_k - 1)}$$

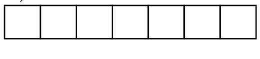
, докажем индукцией по k.
База: $k = 1$
$n = p^{\alpha_k}$, следовательно сумма делителей

$$= 1 + p + p^2 + ... + p^{\alpha_k} = \frac{p^{\alpha_k+1} - 1}{p - 1}$$

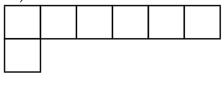
Переход:-
Рассмотрим число $n_1 = p_1^{\alpha_1} * \, ... \, * p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$ и числом S_1 назовём сумму делителей n_1. Тогда S (сумма делителей n) $= S_1 * (\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1})$, так как каждый делитель из n представим в виде $p_k^{\alpha_k} * A$, где A - делитель n_1.

2.14 14

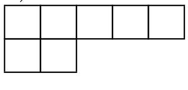
A)
1)



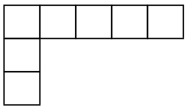
2)



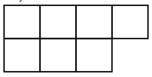
3)



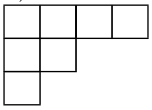
4)



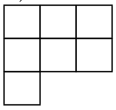
5)



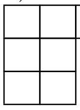
6)



7)



8)



итого - ответ = 8.

В)
Заметим, что кол-во диаграмм Юнга размером не более $p * q$ равно кол-ву диаграмм $p + 1 * q + 1$, так как к каждой диаграмме можно добавить фигуру в форме "Г"слева-сверху длиной $q + 1$ и высотой $p + 1$, таким образом сопоставив каждой диаграмме из первой группы диаграмму из второй группы (причём очевидно, что это инъекция). Также заметим, что любая диаграмма $p+1*q+1$ в первой строке имеет $q+1$ квадрат, и в левом столбце - $p + 1$ квадрат, из чего следует, что можно сопоставить каждой диаграмме их второй группы диаграмму из первой (то есть отображение $(1) \longrightarrow (2)$ - сюръекция) из чего следует что выше была показана биекция.

Листок 3

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два, с двумя - за три). Перед сдачей листка происходит обсуждение вашего письменного домашнего задания, которое должно быть зачтено для продолжения беседы. Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X + 4 - 2N + k - 3d$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на семинаре задач, $d = 0$, если домашнее задание зачтено в течение 10 дней после его выдачи и $d = 1$ в противном случае.

ВАЖНО: Задавайте вопросы преподавателям! Спрашивайте обо всем, в чем не уверены! На количество вопросов до сдачи листка нет ограничений.

Задача 1. Какие из приведенных ниже отношений являются отношениями частичного порядка на плоскости? А какие являются отношениями линейного прядка?

$(x, y) \preceq_1 (x', y')$ если одновременно $x \leq x'$ и $y \leq y'$;
$(x, y) \preceq_2 (x', y')$ если выполняется хотя бы одно из неравенств $x \leq x'$ и $y \leq y'$;
$(x, y) \preceq_3 (x', y')$ если $\max(x, y) \leq \min(x', y')$;
$(x, y) \preceq_4 (x', y')$ если $x + y \leq x' + y'$;
$(x, y) \preceq_5 (x', y')$ если $x < x'$, или $x = x'$, но $y < y'$, или же $x = x'$ и $y = y'$.

Задача 2. Сколько различных отношений частичного порядка можно ввести на множестве из трех элементов ? Нарисуйте их диаграммы Хассе.

Задача 3. Приведите три примера бинарных операций, каждая из которых удовлетворяет двум перечисленным условиям и не удовлетворяет третьему. Условия: коммутативность; ассоциативность; существование нейтрального элемента.

Задача 4. Пусть R — отношение эквивалентности на множестве X. Классом эквивалентности элемента $a \in X$ называется множество $\{x \in X, \quad xRa\}$. Покажите, что любые два класса эквивалентности либо не пересекаюся, либо совпадают, и что тем самым отношение эквивалентности R задает представление множества X в виде объединения его непересекающихся подмножеств (классов эквивалентности). Множество классов эквивалентности называется фактор-множеством и обозначается X/R. Покажите что, наоборот, любое представление множества X в виде объединения его непересекающихся подмножеств задает отношение эквивалентности на X, определяемое тем, что два элемента множества X эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же подмножестве разбиения.

Задача 5. Пусть $f : X \to Y$ некоторое отображение. Введем на X отношение R так: aRb, если $f(a) = f(b)$. Докажите, что R является отношением эквивалентности, и установите биекцию между X/R и образом $f(X)$ отображения f.

Задача 6. Пусть на множестве X задана бинарная операция $*$ и отношение эквивалентности $\sim$. Говорят, что операция $*$ *согласована* с отношением эквивалентности $\sim$, если из $a \sim a'$ и $b \sim b'$ следует, что $a * a' \sim b * b'$. Покажите, что тогда на фактор-множестве $X/\sim$ можно определить бинарную операцию $\bar{*}$ следующим образом: если $A \subset X$ и $B \subset X$ — два класса эквивалентности, то $A \bar{*} B$ это класс эквивалентности, содержащий $a * b$, где a — какой-нибудь элемент класса A, а b — какой-нибудь элемент класса B. Покажите, что если операция $*$ была коммутативной, ассоциативной или обладала нейтральным элементом, то тем же свойством будет обладать и операция $\bar{*}$ на $X/\sim$. Приведите два примера таких операций.

Задача 7. Зададим отношение "$\sim$"на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ следующим образом: $(a,b)\sim(a',b')$ если $a+b'=a'+b$. Докажите, что это отношение эквивалентности. Опишите фактор-множество. Докажите, что операция покоординатного сложения на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ согласована с этим отношением эквивалентности. Покажите, что определенная в соответствии с задачей 6 операция сложения на фактор-множестве $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ коммутативна, ассоциативна, обладает нейтральным элементом, и любой класс обладает противоположным. Опишите это фактор-множество.

Задача 8. Пусть $n>1$ — натуральное число. Введем на множестве $\mathbb{Z}$ отношение *сравнимости по модулю* n: $x\equiv y \mod n$ если $x-y$ делится на n. Покажите, что операции сложения и умножения на $\mathbb{Z}$ согласованы с этим отношением эквивалентности. Это фактор-множество с введенными операциями сложения и умножения обозначается $\mathbb{Z}_n$.

Задача 9. Докажите, что на $\mathbb{Z}_n$ нельзя ввести никакого нетривиального отношения частичного порядка, с которым была бы согласована операция сложения на $\mathbb{Z}_n$, то есть такого, что из $a\le b$ следует, что $a+c\le b+c$ для любого $c\in\mathbb{Z}_n$.

Задача 10. Введем на множестве векторов в трехмерном пространстве отношение эквивалентности следующим образом: два вектора эквивалентны, если их разность параллельна оси OZ. Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности и операция сложения векторов согласована с этим отношением эквивалентности. Установите биекцию между фактор-множеством и множеством векторов плоскости.

Задача 11. Изменим отношение эквивалентности из предыдущей задачи следующим образом: пусть теперь два вектора эквивалентны, если их разность параллельна плоскости XOY. Докажите, что операция сложения векторов согласована с этим отношением эквивалентности. Дайте описание фактор-множества, аналогичное приведенному в предыдущей задаче.

Задача 12. Пусть $f:X\to X$ некоторое отображение. Рассмотрим на X следующее отношение: xRy, если для некоторого $k\ge 0$ $y=f^k(x)$.
а) * Докажите, что если R является отношением эквивалентности, то f биекция. Верно ли обратное? Если нет, найдите и докажите достаточное условие.
б) * Докажите, что если R является отношением частичного порядка, то $\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(X)=\varnothing$. Верно ли обратное? Если нет, найдите и докажите достаточное условие.

Задача 13. Пусть X, Y некоторые множества. Введем отношение на множестве отображений Y^X следующим образом: если $f,g\in Y^X$, то fRg, если существуют такие две биекции $\varphi:X\to X$ и $\psi:Y\to Y$, что $\psi\circ f=g\circ\varphi$. Докажите, что это отношение эквивалентности. Покажите, что все отображения, у которых $f(X)$ состоит из одного элемента, эквивалентны. Опишите классы эквивалентности тех отображений f, у которых $|f(X)|=2$. Сколько их, если X конечно и состоит из n элементов?

Задача 14. На множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел введем отношение эквивалентности $x\sim y$, если $x-y\in\mathbb{Z}$. Обозначим соответствующее фактормножество $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Постройте биекцию между $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и окружностью $S^1=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$. Отождествите функции на S^1 с периодическими функциями на $\mathbb{R}$.

Композицией отношений $R_1\in M\times N$ и $R_2\in N\times P$ называется отношение $R_1\circ R_2\in M\times P$ такое, что $(x,y)\in R_1\circ R_2$ если $\exists z\in N$, такое что $(x,z)\in R_1$ и $(z,y)\in R_2$.

Задача 15. * Отношение $\Gamma_1\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ - транспонированное к графику функции $x=2\cos\varphi$: $\Gamma_1=\{(2\cos\varphi,\varphi)|\varphi\in\mathbb{R}\}$, отношение $\Gamma_2\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ - график функции

$y = 3\sin\varphi$: $\Gamma_2 = \{(\varphi, 3\sin\varphi,)|\varphi \in \mathbb{R}\}$. Вычислите композицию $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ и опишите ее как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача 16. * Граф называется связным, если из любой вершины можно пройти в любую. Ребро графа называется *мостом*, если после удаления этого ребра граф перестает быть связным. Назовем две вершины эквивалентными, если из одной можно пройти в другую, не проходя по мостам. Докажите, что это отношение эквивалентности. Докажите, что если в графе k мостов, то классов зквивалентности будет ровно $k+1$. Докажите, что если из графа удалить все мосты, то каждый класс эквивалентности будет связным графом.

Задача 17. ** Пусть граф не имеет мостов. Назовем ребро такого графа *рокадой*, если при его удалении в графе появляется мост. Введем на множестве всех рокад данного графа отношение эквивалентности следующим образом: каждая рокада эквивалентна самой себе, а две различные рокады эквивалентны, если при их удалении граф становится несвязным. Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности. Приведите примеры графов с как угодно большими классами эквивалентности и любым наперед заданным числом классов эквивлентности. Докажите, что при удалении рокад из одного класса эквивалентности число связных компонент получившегося графа рано числу удаленных рокад.

3 Листок 3

3.1 1

A)
Рефлексивность: $(x, y) \preccurlyeq_1 (x, y)$, так как $x \leqslant x, y \leqslant y$
Антисимметричность: $(x_1, y_1) \preccurlyeq_1 (x_2, y_2) \Longrightarrow x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2$;
$(x_2, y_2) \preccurlyeq_1 (x_1, y_1) \Longrightarrow x_2 \leqslant x_1, y_2 \leqslant y_1$
$\Longrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2 \Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
Транзитивность: $(x_1, y_1) \preccurlyeq_1 (x_2, y_2) \Longrightarrow x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2$;
$(x_2, y_2) \preccurlyeq_1 (x_3, y_3) \Longrightarrow x_2 \leqslant x_3, y_2 \leqslant y_3$
$\Longrightarrow x_1 \leqslant x_3, y_1 \leqslant y_3 \Longrightarrow (x_1, y_1) \preccurlyeq_1 (x_3, y_3)$
Откуда отношение является отношением частичного порядка. При это не является отношением линейного порядка, так как
$(1; 2)! \preccurlyeq_1 (2; 1)$ и $(2; 1)! \preccurlyeq_1 (1; 2)$

B)
Заметим, что если $(\preccurlyeq_2)$ - отношение частичного порядка, то $(1; 2) \preccurlyeq_2 (2; 1)$ и $(2; 1) \preccurlyeq_2 (1; 2)$, откуда должно быть (1;2) = (2;1), что не так $\Longrightarrow$ это не отношение частичного порядка, откуда и не линейного.

C)
Заметим, что если $(\preccurlyeq_3)$ - отношение частичного порядка, то $(1; 2) \preccurlyeq_3 (1; 2)$, но $max(1, 2) = 2; min(1, 2) = 1$, откуда $max(1, 2) > min(1, 2)$, что противоречит $max(1, 2) \leqslant min(1, 2)$, откуда это не отношение частичного порядка, соотв. и не линейного.

D)
Заметим, что если $(\preccurlyeq_4)$ - отношение частичного порядка, то $(1; 2) \preccurlyeq_4 (2; 1)$ и $(2; 1) \preccurlyeq_4 (1; 2)$, откуда должно быть (1;2) = (2;1), что не так $\Longrightarrow$ это не отношение частичного порядка, откуда и не линейного.

E)
Рефлексивность: $(x, y) \preccurlyeq_5 (x, y)$, так как $x = x, y = y$
Антисимметричность: $(x_1, y_1) \preccurlyeq_5 (x_2, y_2) \Longrightarrow x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2$;
$(x_2, y_2) \preccurlyeq_5 (x_1, y_1) \Longrightarrow x_2 \leqslant x_1, y_2 \leqslant y_1$
$\Longrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2 \Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
Транзитивность: $(x_1, y_1) \preccurlyeq_5 (x_2, y_2) \Longrightarrow x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2$;
$(x_2, y_2) \preccurlyeq_5 (x_3, y_3) \Longrightarrow x_2 \leqslant x_3, y_2 \leqslant y_3$
$\Longrightarrow x_1 \leqslant x_3, y_1 \leqslant y_3 \Longrightarrow (x_1, y_1) \preccurlyeq_5 (x_3, y_3)$

Откуда отношение - частиного порядка. При этом оно и линейного порядка, так как для пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) верно, что либо ($x_1 < x_2$ или $x_2 < x_1$) либо ($x_1 = x_2$ и ($y_1 < y_2$ или $y_2 < y_1$)) либо ($x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$), откуда $(x_1, y_1) \preccurlyeq_5 (x_2, y_2)$ или $(x_2, y_2) \preccurlyeq_5 (x_1, y_1)$

3.2 2

Пусть элементы A, B, C. Тогда есть $1 + 6 + 3 * 2 + 6 = 19$ отношения частичного порядка:

1)$A \quad B \quad C$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ C & & B \end{tikzcd}$$

2)$A < B \quad C$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr] & \\ C & & B \end{tikzcd}$$

3)$B < C \quad A$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ C & & B \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

4)$A < C \quad B$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] & \\ C & & B \end{tikzcd}$$

5)$C < A \quad B$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ C \arrow[ur] & & B \end{tikzcd}$$

6)$B < A \quad C$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ C & & B \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

7)$C < B \quad A$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ C \arrow[rr] & & B \end{tikzcd}$$

8)$A < C > B$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] & \\ C & & B \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

9)$B < A > C$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ C \arrow[ur] & & B \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

10)$C < B > A$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr] & \\ C \arrow[rr] & & B \end{tikzcd}$$

11)$A > C < B$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ C \arrow[ur] \arrow[rr] & & B \end{tikzcd}$$

12)$B > A < C$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C & & B \end{tikzcd}$$

13)$C > B < A$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ C & & B \arrow[ul] \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

14)$A < B < C \quad A < C$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C & & B \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

15)$A < C < B \quad A < B$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C \arrow[rr] & & B \end{tikzcd}$$

16)$B < A < C \quad B < C$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl] & \\
C & & B \arrow[ul] \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

17)$B < C < A \quad B < A$

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
C \arrow[ur] & & B \arrow[ul] \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

18)$C < B < A \quad C < A$

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
C \arrow[ur] \arrow[rr] & & B \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

19)$C < A < B \quad C < B$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr] & \\
C \arrow[ur] \arrow[rr] & & B
\end{tikzcd}$$

3.3 3

1) Не коммутативная операция:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix}$$

Коммутативность:
Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
Тогда $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, но $B \cdot A$ не определен Ассоциативность: $(A \cdot B) \cdot C \neq A \cdot (B \cdot C)$
Нейтральный элемент: Единичная матрица

2) Не ассоциативная операция:
Пусть $a \ominus b = |a - b|$, тогда: Коммутативность: $a \ominus b = |a - b| = |b - a| = b\ominus$
Ассоциативность: $(a \ominus b) \ominus c \neq a \ominus (b \ominus c)$
Рассмотрим $||10 - 7| - 3| = 0 \neq 6 = |10 - |7 - 3||$
Нейтральный элемент: $a \ominus 0 = |a|$

3) Без нейтрального элемента:
$x \star y = max(x, y)$, для $x, y \in \mathbb{Z}$
Заметим, что наличие нейтрального элемента равносильно наличию минимального числа, что для $\mathbb{Z}$ не верно, при этом
$x \star y = y \star x$ и $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

3.4 4

1) Заметим, что для класса эквивалетности элемента a верно (далее $M(a)$), что для $\forall b \in M(a): \ M(b) = M(a)$, так как если рассмотреть элемент $c_a \in M(a)$, то $a \sim c_a$, при этом $a \sim b$, откуда $b \sim c_a$. Аналогично для любого элемента c_b из $M(b)$ верно, что $a \sim c_b$.

Откуда следует, что если $M(a_1) \cap M(a_2) \neq 0$, то для $d \in M(a_1) \cap M(a_2): \quad M(a_1) = M(d), \ M(a_2) = M(d) \Longrightarrow M(a_1) = M(a_2)$

2) Покажем, что указанное отношение - отношение эквивалентности:
2.1) $x \sim x$: это выполнено, так как элемент находится в том же подмножестве разбиения, что и этот элемент.
2.2) $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$: очевидно выполнено
2.3) $x \sim y$ и $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$: очевидно выполнено

3.5 5

Проверим, что R – отношение эквивалетности:
1. $f(a) = f(a)$
2. $f(a) = f(b) \Longrightarrow f(b) = f(a)$
3. $f(a) = f(b), \ f(b) = f(c) \Longrightarrow f(a) = f(c)$

Сопоставим каждому множеству M из X/R значение $f(m)$, где m принадлежит M (нетрудно видеть, что для любых m $f(m)$ будет одинаковым), при этом любой образ будет получен.

3.6 6

Покажем "переносимость"коммутативности, ассоциотивности и наличия нейтрального элемента.
1)
Если $a * b = b * a$, то $A \bar{*} B = B \bar{*} A$, так как $a * b \sim c \Rightarrow b * a \sim c$ для любых a и b из множеств A и B соотв.
2)
Если $(a * b) * c = a * (b * c)$, то $(A \bar{*} B) \bar{*} C = A \bar{*} (B \bar{*} C)$, так как $(a * b) * c \sim d \Rightarrow a * (b * c) \sim d$ для любых a, b и c из множеств A, B и C соотв.
3)
Если существует такое e: $a * e = a$, то есть и E: $A \bar{*} E = A$, так как рассмотрим множество, в котором находится e (пусть это E_1), тогда для любого элемента e_1 из E_1 верно: $a * e_1 \sim a$, так как $a * e \sim a$.

Примеры: умножение и сложение на GF_2

3.7 7

Заметим, что выполняются симметричность и рефлексивность. $(a + b^/ = a^/ + b \to a^/ + b = a + b^/; \ a + b = b + a)$. Проверим транзитивность:

$$(a_1, \ b_1) \sim (a_2, \ b_2) \Rightarrow a_1 + b_2 = a_2 + b_1 \Rightarrow a_1 - b_1 = a_2 - b_2$$
$$(a_2, \ b_2) \sim (a_3, \ b_3) \Rightarrow a_2 + b_3 = a_3 + b_2 \Rightarrow a_2 - b_2 = a_3 - b_3$$
$$\Rightarrow a_1 - b_1 = a_3 - b_3 \Rightarrow a_1 + b_3 = a_3 + b_1 \Rightarrow (a_1, \ b_1) \sim (a_3, \ b_3)$$

Заметим, что 2 элемента находятся в одном классе эквивалентности если у них одинаковая разность координат, откуда вытекает, что фактор-множество состоит из множеств, каждому из которых можно сопоставить целое число равное разности координат.
Отсюда следует, что покоординатное сложение согласовано с этим отношением эквивалентности, "складывая"элементы из множеств x и y в $x + y$ (x, y – целые числа, сопоставленные множествам). $(a_1; \ a_1 - x)$ " + " $(a_2; \ a_2 - y) \ = \ (a_1 + a_2; \ a_1 + a_2 - (x + y))$
Заметим, что мы показали, что покоординатное сложение изоморфно сложению, откуда следует, что для него выполнены все указанные в задаче условия.

3.8 8

Пусть $x = a_1 n + z_1 \equiv z_1$ и $y = a_2 n + z_2 \equiv z_2$, причем $z_1 < n$ и $z_2 < n$.
Тогда $x + y = (a_1 n + z_1) + (a_2 n + z_2) = (a_1 + a_2) n + z_1 + z_2 \equiv z_1 + z_2$

И $x \cdot y = (a_1 n + z_1) \cdot (a_2 n + z_2) = a_1 a_2 n^2 + a_1 z_2 n + z_1 a_2 n + z_1 z_2 =$
$(a_1 a_2 n + a_1 z_2 + z_1 a_2) n + z_1 z_2 \equiv z_1 z_2$

3.9 9

3.10 10

Пусть есть 4 вектора: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_1, y_1, z_3)$, $D(x_2, y_2, z_4)$, причем $A \sim C$ и $B \sim D$, где $\sim$ обозначает отношение эквивалентности.
Докажем тогда что $A + B \sim C + D$:

$$(A+B) - (C+D) = \Big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\Big) - \Big((x_1, y_1, z_3) + (x_2, y_2, z_4)\Big) =$$
$$((x_1 + x_2) - (x_1 + x_2), (y_1 + y_2) - (y_1 + y_2), (z_1 + z_3) - (z_2 + z_4)) =$$
$$(0, 0, z_1 + z_3 - z_2 - z_4)$$

Т.е. $(A + B) - (C + D) \parallel O_Z$, что равносильно $A + B \sim C + D$

3.11 11

Пусть есть 4 вектора: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_1)$, $D(x_4, y_4, z_2)$, причем $A \sim C$ и $B \sim D$, где $\sim$ обозначает отношение эквивалентности.
Докажем тогда что $A + B \sim C + D$:

$$(A+B) - (C+D) = \Big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\Big) - \Big((x_3, y_3, z_1) + (x_4, y_4, z_2)\Big) =$$
$$((x_1 + x_2) - (x_3 + x_4), (y_1 + y_2) - (y_3 + y_4), (z_1 + z_2) - (z_1 + z_2)) =$$
$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4, y_1 + y_2 - y_3 - y_4, 0)$$

Т.е. $(A + B) - (C + D) \perp O_Z$, что равносильно $A + B \sim C + D$

3.12 12

A)
(заметим, что f: $x \to x + 1$ для множества целых чисел; является биекцией, но R не является отношением эквивалентности)

Докажем, что если f – объединение биекций конечных непересекающихся подмножеств множества X, объединение которых равно X, то R – отношение эквивалентности. Назовём псевдоклассом эквивалентности с элементом x следующее множество элементов: $x, f(x), f^2(x), \ldots$. Заметим, что так как x принадлежит конечному подмножеству, относительно которого R – биекция, то существует такое $k : f^k(x) = x$, откуда псевдокласс эквивалентности конечен, при этом нетрудно видеть, что если y принадлежит псевдоклассу относительно x, то и наоборот, поэтому разбиение множества X на псевдоклассы эквивалентности однозначно определено. Нетрудно видеть, что для любых 2х элементов из одного класса псевдоэквивалентости равны относительно R, при этом это не верно для 2х элементов из разных классов, откуда следует, что R – отношение эквивалентности, классы которого равны псевдоклассам.

B)
Назовём циклом в f такое упорядоченное с точностью до сдвига множество попарно различных элементов $[a_1, a_2, ..., a_n]$, что $\forall i$ принадлежащего вычетам по модулю $n : a_{i+1} = f(a_i)$. Заметим, что отсутствие циклов в f (1) эквивалентно тому, что R – отношение частичного порядка (2):
Заметим, что R рефлексивно и транзитивно, поэтому R – отношение частичного порядка (2) $\Leftrightarrow$ R – антисимметрично (3)
не (1) $\Rightarrow$ не (3)
Рассмотрим цикл $[a_1, a_2, ..., a_n]$, тогда $a_1 R a_2$ – истина, и $a_2 R a_1$ – истина, откуда R – не антисимметрично, так как $a_1 \neq a_2$
не (3) $\Rightarrow$ не (1)
Рассмотрим пару $a_1, a_2 : \quad a_1 R a_2 \cap a_1 R a_2 \;\Leftrightarrow\; a_1 = a_1$. То есть существуют такие $k_1, k_2 : \quad a_2 = f^{k_1}(a_1), a_1 = f^{k_2}(a_2)$, откуда следует, что существует следующий цикл: $[a_1, f(a_1), ..., f^{k_1 - 1}(a_1), a_2, f(a_2), ..., f^{k_2 - 1}(a_2)]$
Теперь заметим, что если есть цикл, то указанное в условии пересечение ненулевое, а именно является объединением "чего-то"и этого цикла. Нетрудно видеть, что цикл переходит сам себя. Отсюда следует, что если пересечение пусто, то цикла нет $\Rightarrow$ R – отношение частичного порядка
Пусть X – множество из одного элемента, тогда пересечение равно этому элементу, но при этом R – отношение частичного порядка.

В обратную сторону:
Докажем, что если R – отношение частичного порядка, то пересечение $f^k(M) = 0$ для любого конечного

подмножества M без неподвижных элементов. Эквивалентное утверждение: если нет циклов, то пересечение $f^k(M) = 0$. Пусть есть подмножество с ненулевым пересечением, тогда рассмотрим это пересечение. Оно переходит в себя $\Rightarrow$ есть цикл, так как множество конечное. Поэтому если нет циклов, то пересечение пусто.

3.13 13

Заметим, что выполнена рефлексивность, выбрав тождественные биекции.
Выполнена транзитивность, так как есть такие $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2: \quad \psi_1 \circ f = g \circ \phi_1,\ \psi_2 \circ h = f \circ \phi_2 \quad \Rightarrow$ $\psi_1 \circ \psi_2 \circ h = \psi_1 \circ f \circ \phi_2 = g \circ \phi_1 \circ \phi_2$, откуда есть такие биекции для g и h.
Выполнена симметричность, так как $\psi \circ f = g \circ \phi \ \Rightarrow\ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1} = \psi^{-1} \circ g \circ \phi \circ \phi^{-1} \ \Rightarrow\ f \circ \phi^{-1} = \psi^{-1} \circ g$
Поэтому R – отношение эквивалентности.
Заметим, что если f и g такие, что их образы состоят из одного элемента (пусть для f это e_f, для g – e_g, то заметим, что биекция k: $Y \to Y$, переводящая $e_f \to e_g,\ e_g \to e_f$, остальные элементы неподвижны, является такой, что $k \circ f = g$, поэтому fRg.

Заметим, что каждому классу эквивалентности относительно R можно сопоставить диаграмму Юнга фиксированного веса. Так, если рассмотреть количество прообразов у каждого образа, отсортировать их по убыванию, и поставить в каждую строку некое количество квадратов, равное количеству прообразов. Соответственно модуль образа равен количеству строк в сопоставленной диаграмме Юнга. Диаграмм Юнга, состоящих из двух строк суммарной массы n, ровно $[\frac{n}{2}]$. Так как есть $[\frac{n}{2}]$ спообов выбрать выбрать из n не меньшее($\geqslant$) слагаемое.

3.14 14

Заметим, что каждому множеству из фактормножества $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ можно сопоставить точку из отрезка $[0, 1)$ Покажем, что есть биекция между $[0, 1)$ и $[0, 4)$ (домножение на 4) и между $[0, 1)$ и $[0.1]$ (сопоставим точкам вида $\frac{1}{2^k}$ точку $\frac{1}{2^{k-1}}$). $[0, 1) + [1, 2) + [2, 3) + [3, 4) = [0, 4)$. Пусть x принадлежит $[0, 1)$, сопоставим ей точку $(1 - x; \sqrt{2x - x^2})$, таким образом $[0, 1)\ \to$ часть окружности из первой четверти (M_1). Аналогично для остальных полуинтервалов.

3.15 15

Заметим, что композиция - точки вида $(2cos\phi; 3sin\phi)$ для всех углов ϕ. При этом $cos^2\phi + sin^2\phi = 1$, откуда если $2cos\phi = x, 3sin\phi = y$, то $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, что есть эллипс.

3.16 16

1)
Заметим, что
1.1) Из A в A можно попасть минуя мосты
1.2) Если можно пройти из A в B, минуя мосты, то по этому же пути можно пройти и в обратную сторону из B в A
1.3) Если можно пройти из A в B и из B в C, минуя мосты, то из A в C можно попасть через B и тогда мы не пройдем ни по одному мосту
$\Longrightarrow$ эта операция является отношением эквивалентности

2)
Пусть в графе k мостов, докажем тогда что в нем $k + 1$ класс эквивалентности:
2.1) Пусть классов эквивалентности $< k + 1$, тогда после убирания всех мостов, какой-то класс эквивалентности соответствует нескольким компонентам связности, а по (3) класс эквивалентности не может соответствовать $\geqslant 2$ компонентам связности
2.2) Пусть классов эквивалентности $> k + 1$, тогда какие-то 2 класса эквивалентности соответствуют одной компоненте связности, но при этом для них выполнен (1) $\Longrightarrow$ противоречие

3)
Уберем все мосты, тогда заметим, что образовался $k + 1$ связанный граф, так как при убирании каждого моста добавлялся ровно 1 элемент свзности(если элемент не добавлялся, то убранное ребро - не мост, а $\geqslant 2$ элементов добавиться не могло, так как каждое ребро связывает ровно 2 вершины). Заметим, что если класс эквивалентности не связный граф, то мы можем рассмотреть 2 его элемента, принадлежащие разным компонентам связности, но очевидно, что тогда из одной нельзя пройти в другую(так как они в разных компанентах связности), но тогда, если рассматривать изначальный граф, путь, соединяющий эти две вершины, обязан проходить через мост - простиворечие, так как если все пути из одной вершины в другую проходят

через мост, то они принадлежат различным классам эквивалентности.

3.17 17

Рассмотрим рокады, для них по условию выполнено:
1) Каждая рокада эквивалентна самой себе
2) Две различные рокады эквивалентны, если при их удалении граф становится несвязным
Тогда чтобы показать что это отношение эквивалентности, нужно показать что если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$.
3)Действительно, заметим что каждая рокада относится к какому-то одному классу эквивалентности(так как если она относится к нескольким классам эквивалентности, то мы можем рассмотреть любые 2 из них, назовем их a_1 и a_2 – удалим выбранную рокаду и рокаду из a_1, тогда мы можем заметить, что a_2 остался связным(хотя в нем и появился мост), но тогда мы можем заметить, что a_1 тоже остался связным, так как ккждая изего половин осталось соединенной с a_2, а $\Longrightarrow$ при удалении 2 рокад из a_1, граф не потерял связность $\Longrightarrow$ два удаленных ребра не были рокадами), тогда заметим что a с b и c с b в одном классе эквивалентности, а следовательно и a с c в одном классе эквивалентности и $a \sim c$.
Тогда заданное отношение эквивалентности на рокадах действительно является отношением эквивалентности.

Заметим что если построить n-угольник, вершины которого - вершины графа, а стороны - ребра, то у полученного графа будет только один класс эквивалентности(что можно проверить по первому пункту задачи). Также заметим, что если соединить 2 многоугольника по вершине, то мы получим 2 класса эквивалентности. Тогда будем соединять многоугольники(с любым числом вершин, необязательно одинаковым) по вершинам(т.е. у 2 многоугольников будет общая вершина), соединять будем в цепочку, хотя остальные конструкции тоже работают. Рассмотрим цепочку из n многоугольников - у неё будет n классов эквивалентности(по одному на каждый многоугольник)
Пусть в одном из классов эквивалентности k рокад, удалим их все - русть мы удаляли их в каком-то порядке, тогда после удаления одной рокады все остальные рокады стали мостами $\Longrightarrow$ приудалении каждого из них количсетво компанент связности увеличивалось на 1, тогда после удаления всех мостов мы получили $k-1$ новую компаненту связности + был еще изначальный граф, ребра которого мы удаляли - следовательно после удаления k рокад мы получили $1 + (k-1) = k$ компанент связности, что и требовалось.

Листок 4

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два, с двумя - за три). Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X + 6 - 2N + k$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на семинаре задач,

Задача 1. Докажите счетность множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Придумайте формулу, задающую соответствующую биекцию с множеством натуральных чисел.

Задача 2. Какова мощность множества всех прямых на плоскости?

Задача 3. Докажите счетность

a) множества всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$

b) множества периодических с некоторого места последовательностей натуральных чисел

Задача 4. Покажите, что множество всех действительных алгебраических чисел (т.е., множество действительных корней многочленов с рациональными коэффициентами) счетно, а множество трансцендентных чисел имеет мощность континуум.

Задача 5. Покажите, что

a) объединение счетного числа континуальных множеств

b) множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел

c) множество отображений $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

d) множество всех счетных подмножеств $\mathbb{R}$

все имеют мощность континуум.

Задача 6. Имеют ли мощность континуума множества

a) всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) * биективных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

c) * непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Задача 7. * Если квадрат разбит на две части, то хотя бы одна из них имеет мощноссть континуум.

Задача 8. * Покажите, что множества $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ и $2^{\mathbb{R}}$ равномощны.

Задача 9. Рассмотрим все множества, являющиеся подмножествами некоторого множества X. Покажите, что:

a) отношение: равномощности (т.е. $M \sim N$, если существует биекция $f : M \to N$) является отношением эквивалентности на 2^X. Классы эквивалентности называются мощностями множеств;

b) отношение $M \prec N$, если существует инъекция $f : M \to N$, не является отношением частичного порядка на 2^X;

c) отношение $\prec$ согласовано с отношением $\sim$ и определяет на множестве классов эквивалентности отношение $\bar{\prec}$, которое уже является отношением частичного порядка.

Задача 10. Сформулируйте и докажите теорему Кантора-Бернштейна

Задача 11. Докажите теорему Кантора в общей формулировке: мощность множества 2^M всех подмножеств любого множества M больше (см. задачу 9) мощности множества M.

Задача 12. ** Пусть M - замкнутое множество на прямой без изолированных точек. Тогда оно имеет мощность континуум.

4 Листок 4

4.1 1

Сопоставим тройке чисел $(a;b;c)$ числу $\frac{(\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}+b+c-1)(\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}+b+c)}{2}+c$.
Заметим, что отображение $(a;b) \to \frac{(a+b-1)(a+b)}{2}+b$ – биекция, так как для фиксированного $a+b$ выражение принимает значения от $(1+2+...+(b-1))+1$ до $(1+2+...+(b-1))+b$. Если $a_2+b_2 > a_1+b_1$, то очевидно, что образ $(a_2;b_2) >$ образа $(a_1;b_1)$.

Так мы сопоставляем каждой тройке $(a;b;c)$ пару $(\frac{(a+b-1)(a+b)}{2}+b;c)$, а каждой такой паре - число $\frac{(\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}+b+c-1)(\frac{(a+}{}}{2}$
c.

4.2 2

Заметим, что отрезок $[0,1]$ равномощен прямой с дополнительной точкой I(это можно доказать через проецированиае отрезка на прямую, тогда $0 \to 0$, $1 \to \infty$ $(\mathrm{I}) = \infty$). Заметим, что каждая прямая пересекает каждую ось (если нет, считаем, что проходит через I) в какой то точке. Таким образом, прямая задаётся парой расширенных вещественных чисел, кроме $(I;I)$ (что равномощно R^2), при этом любой паре можно сопоставить прямую (проходящие через соотв. 2 точки). Покажем, что R^2 равномощно R: считаем R – последовательностью счётной длины из 0 и 1. Заметим, что каждой паре $(r_1;r_2)$, где $r_1 = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...]$, $r_2 = [b_1,\ b_2,\ b_3,\ ...]$ можем сопоставить $r_3 = [a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ ...]$. При этом аналогично можно сопоставить каждому r_3 пару $(r_1;r_2)$. Откуда множество прямых равномощно R.

4.3 3

A)
Рассмотрим одноэлементные подмножества, заметим что если рассмотреть два одноэлементных множества, то можно однозначно определить отношение элементов из этих множеств(т.е. что единственный элемент множества A больше единственного элемента множества B). Тогда сопоставим одноэлементному множеству с наименьшим элементом первое простое число(т.е. 2), следующему по величине элемента множеству сопоставим следующее простое число(т.е. 3) и т.д. Так мы сопоставили одноэлементные множества простым числам. Далее рассмотрим множество из n элементов(пусть это $\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$) Рассмотрим одноэлементные множества с этими элементами, пусть они сопоставлены числам $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$, тогда сопоставим множеству $\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ число $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$. Очевидно, что разным множества сопоставлены разные числа(так как если двум множества сопоставлено одно и то же число, то элементы этих множест совпали). Так мы показали, что множество всех конечных подмножеств равномощно $\mathbb{N}$, т.е. множество всех конечных подмножеств счетно, что и требовалось доказать.
B)
Сопоставим каждой последовательности из задачи (множество A) паре 2 конечных последовательностей: предпериод и сам период (множество B). Заметим, что $A \leqslant B$. При этом $A \geqslant C$, где C м ножество из пункта a. (а именно можем сопоставить каждому множеству из C последовательность упорядоченно записанных элементов, после которой идёт период из 1). При этом $B = D^2$, где D – множество конечных последовательностей натуральных чисел. Покажем, что D – счётно. Заметим, что D – объединение счётного количества счётного количества конечных множеств, а именно: множеств последовательностей фиксированной длины с фиксированной суммой. Откуда D – счётно $\Rightarrow B$ счётно, при этои C тоже счётно, откуда A – счётно

4.4 4

Заметим, что если корней(алгебраических чисел) конечное количество, то трансцендентных континуум, так как всего чисел континуум.
Заметим, что алгебраические числа – подмножество описываемых чисел, то есть тех, которым можно сопоставить хотя бы одну конечную строку символов, которая бы "означала"это число.
Докажем, что множество описываемых чисел счётно:
Заметим, что их "меньше"чем возможных конечных последовательностей из конечного набора символов, что очевидно счётно, но любое рациональное число можно обозначить/описать(записав ’p/q’). При этом алгебраических хотя бы счётно, так как все рациональные числа - алгебраические (являются корнями уравнений вида $x - \alpha = 0$). Откуда алгебраических чисел счётно.

4.5 5

A)

B)
Заметим, что последовательностей из действительных чисел столько же, сколько последовательностей из

наборов 0 и 1. Докажем, что последовательностей из наборов 0 и 1 столько же, сколько и наборов 0 и 1: Пусть $a_{i\ j}$ – j-тый символ i-той последовательности. Тогда сопоставим последовательности из бесконечных наборов следующую последовательность: $\{a_{1\ 1},\ a_{1\ 2},\ a_{2\ 1},\ a_{1\ 3},\ a_{2\ 2},\ a_{3\ 1},\ ...\}$, то есть будем последовательно записывать символы с фиксированной суммой индексов. Заметим, что если взять 2 различные последовательности наборов, то у них будут различные образы, при этом любая последовательность из 0 и 1 имеет прообраз. Так мы доказали, что последовательностей действительных континуум.
C)
Заметим, что отображений столько же, сколько и последовательностей из натуральных чисел. (сопоставляем отображению последовательность такую, что на i-той позиции - образ i). Заметим, что таких последовательностей столько же, сколько счётных последовательностей из 0 и 1, а именно запишем число n в виде $n-1$ подряд идущих единиц, и разделим числа между собой нулями($1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ \to$ 0010110111011110...).
D)

4.6 6

A)
Предположим есть биекция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (сопоставляющаяя i функцию $f_i(x)$). Тогда рассмотрим следующий элемент из $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: каждому i сопоставим $1 + f_i(i)$. Заметим, что этот элемент из $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ не имеет прообраза, откуда следует, что биекции нет.
B*)

C*)

4.7 7*

Если одна из частей квадрата содержит отрезок, то можно воспользоваться теоремой Кантора-Бернштейна. Допустим первая часть не содержит отрезков, тогда в каждом горизонтальном сечении квадрата есть точка второй части, тогда с помощью аксиомы выбора во второй части можно найти подмножество, равномощное отрезку – после чего снова можно сослаться на теорему Кантора – Бернштейна.

4.8 8*

Заметим, что если $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ равномощно $2^{\mathbb{R}}$, то $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ равномощно $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ и $2^{\mathbb{R}}$.
Заметим, что множество $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ можно разбить на континуальное количество счётных множеств, а именно: фактор-множество отношения эквивалентности: $a \blacklozenge b \Leftrightarrow (a-b) \in \mathbb{Z}$. Теперь покажем, что $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}}$. Это эквивалентно $[0,\ 1)^{[0,\ 1)} \sim 2^{\mathbb{R}}$. Рассмотрим X принадлежащий первому множеству, оно - множество пар $(i,\ a_i)$, где i принадлежит отрезку $[0,\ 1)$. Теперь скажем, что если есть пара $(x,\ a_x)$, то представим a_x в виде последовательности 0 и 1, и классу эквивалентности x сопоставим нули и единицы соответсвенно их позиции. Таким образом показана биекция $[0,\ 1)^{[0,\ 1)} \to 2^{\mathbb{R}}$, что и требовалось.

4.9 9

A)
Заметим, что выполнены рефлексивность (то есть существует тождественная биекция), симметричность (если есть биекция, то есть и обратная биекция) и транзитивность (если есть биекция из A в B: $a_i \to b_i$ и есть биекция из B в C: $b_i \to c_i$, то есть биекция из A в C: $a_i \to c_i$.
B)
Рассмотрим множество из двух элементов: $[a, b]$. Тогда $[a] \prec [b]$ и $[b] \prec [a]$ но $[a] \neq [b]$.
C)
Заметим, что если между a и b есть биекция, то есть и инъекция, откуда любые 2 элемента из одного класса эквивалентности "равны"с точки зрения $\prec$. Если же биекции нет, но есть инъекция (без ограничения общности инъекция $a \to b$), то для любых элементов a_i из A (класс эквивалентности $a \in A$) и b_j из B верно, что есть инъекция $a_i \to b_j$ $(a_i \in a;\ b \in b_j)$.
Проверим, что это отношение частичного порядка:
Рефлексивность (наличие тождественной биекции доказывает рефлексивность)
Антисимметричность (если есть инъекция из $c \in C$ в $d \in D$ и наоборот, то из Т. Кантора-Бернштейна следует, что есть биекция, то есть $d \in C$)
Транзитивность (переносится из основного отношения, то есть, если $\precsim$ обладает транзитивностью, то и $\prec$ обладает транзитивностью).

4.10 10

Теорема Кантора-Бернштейна утверждает, что если существуют инъективные отображения $f: A \to B$ и $g: B \to A$, то $|A| = |B|$
Докажем это.
Пусть $f: A \to A_2$ биекция и $A_3 = f(A_1) \subset A_2$, $A_4 = f(A_2) \subset A_3$ и т.д. Тогда мы получили систему из множеств: $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ...$
В которой A_{2n} есть результат n-кратного применения отображения f к множеству A_0, а A_{2n+1} есть результат n-кратного применения отображения f к множеству A_1.
Представим множество A_0 в виде объединения непересекающихся слоев $C_k = A_k \backslash A_{k+1}$ с центром в $C = \bigcap_k A_k$
Так как $f(C) = C_2$, $f(C_2) = C_4$ и т.д. то C, C_2, C_4, ... равномощны(так как f биекция)
Поэтому мы можем построить биекцию между множествами A_0 и A_1:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup ... \cup C \\
A_1 &= \qquad C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup ... \cup C \\
A_1 &= \qquad C_1 \cup C_0 \cup C_3 \cup C_2 \cup ... \cup C
\end{aligned}
$$

Если элемент a множества A принадлежит слою с четным номером($a \in C_{2k}$), сопоставим ему элемент $f(a)$, если же элемент a в слое с нечетным номером или в сердцевине($a \in C_{2k+1}$), то оставим его на месте (поставив ему в соответствие его же, но как элемент множества A_1). Тогда множества $A = A_0$ и A_1 равномощны.

4.11 11

Заметим, что не меньше, так как есть биекция из наборов принадлежащих 2^M(2^M мы считаем набором из 0 и 1, где мы ставим 1, если рассматриваемый элемент принадлежит подмножеству M, и 0, если не принадлежит), содержащих ровно одну 1 в M.
Покажем, что нет биекции из M в 2^M. Предположим, что есть(назовем ее f). Тогда рассмотрим следующий набор(назовем его m) из 2^M: i-тый элемент противоположен i-тому элементу образа i (где $i \in M$). Заметим, что у этого набора нет прообраза (по построению для каждого i-элемента верно, что $m \neq f(i)$). Откуда следует, что мощность 2^M больше M.

4.12 12**

Листок 5

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два, с двумя - за три). Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X + 8 - 2N + 2k$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на сеинаре задач.

Задача 1. Изоморфны ли следующие упорядоченные множества:

a) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$?
b) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$?
c) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$?

Задача 2. Пусть X - вполне упорядоченное множество. Тогда

a) X содержит минимальный элемент
b) для всякого $x \in X$, кроме максимального, есть непосредственно следующий за ним (но не обязательно есть предыдущий)
c) любое ограниченое сверху множество элементов имеет точную верхнюю грань

Задача 3. Пусть M и N - два линейно упорядоченных множества. Тогда на их произведении $M \times N$ можно определить два естественных порядка: "покоординатный": $(x, y) \leq (x', y')$, если $x \leq x'$ и $y \leq y'$ и "лексикографический": $(x, y) \leq (x', y')$ если $x < x'$ (т.е., $x \leq x'$ и $x \neq x'$) либо $x = x'$ и $y \leq y'$.

a) Убедитесь, что это порядки, один из которых линеен, а другой нет, один согласован с проекциями на сомножители (т.е., проекции являются гомоморфизмами упорядоченных множеств), а другой нет.
b) Для порядка на плоскости $\mathbb{R}^2$, построенного лексикографически из стандартных порядков на $\mathbb{R}$, нарисуйте множество всех таких точек $p \in \mathbb{R}^2$, что $(1, 2) \leq p \leq (2, 1)$.

Задача 4. Пусть M - конечное множество с m элементами. Установите изоморфизм между следующими упорядоченныйми множествами: множеством $P(M)$ всех подмножеств множества M и последовательностями нулей и единиц длины m с покомпонентным порядком.

Задача 5. Рассмотрим финитные последовательности натуральных чисел, т.е., последовательности, все члены которых, за исключением конечного числа, равны нулю. Порядок - покомпонентное сравнение. Докажите, что это частично упорядоченное множество изоморфно множеству натуральных чисел с отношением делимости.

Задача 6. a) Рассмотрим множество 2^M всех подмножеств конечного множества M, $|M| = m$. Порядок - включение подмножеств. Сколько автоморфизмов у этого множества?
b) Покажите, что у множества $\mathbb{N}$, упорядоченного по отношению делимости, континуум автоморфизмов

Задача 7. Два различных элемента x и y линейно упорядоченного множества X называются соседними, если не существует такого $z \in X$ что либо $x < z < y$, либо $y < z < x$. Линейно упорядоченное множество X называется плотным, если в нем нет соседних элементов. Докажите, что всякое плотное линейно счетное упорядоченное множество без максимального и минимального элементов изоморфно $\mathbb{Q}$.

Задача 8. Сформулируйте лемму Цорна, аксиому выбора и теорему Цермело, определив при этом все необходимые для формулировок понятия.

Задача 9. Выведите из леммы Цорна следующие утверждения:

a) * всякий частичный порядок может быть продолжен до линейного
b) * у любой сюръекции есть левый обратный;
c) * в любом линейном пространстве существует максимальное подпространство, не содержащее данный вектор;
d) * на любом линейном пространстве существует линейная функция, равная нулю на одном наперед заданном векторе и единице на втором;
e) * любые два множества сравнимы по мощности.

Задача 10. Выведите из леммы Цорна

a) * аксиому выбора
b) * теорему Цермело

5 Листок 5

5.1 1

A)
Нет, так как в $\mathbb{Q}$ нет минимального элемента, в то время как в $\mathbb{N}$ – есть $\Rightarrow$ биекции нет $\Rightarrow$ множества не изоморфны.

B)
Заметим, что в $\mathbb{Q}$ нет минимума, а в $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ он есть $\Rightarrow$ биекции нет $\Rightarrow$ множества не изоморфны.

C)
Разобьем отрезок $(0, 1)$ на отрезки следующим образом: пусть числу $n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1, 0, 1,$ соответствует

$$a_n : \begin{cases} [1 - \frac{1}{2^n},\ 1 - \frac{1}{2^{n+1}}) & \text{при } n > 0 \\ (\frac{1}{2^{|n|+1}},\ \frac{1}{2^{|n|}}] & \text{при } n < 0 \end{cases}$$

А в качестве a_0 возьмем точку 0.5, $a_1 = (0.5,\ 0.75)$, $a_{-1} = (0.25,\ 0.5)$ Переведем отрезки в $\mathbb{Q}$ – $a_n \to [n-1, n)$, если $n > 1$ и $a_n \to (n, n+1]$, если $n < -1$, $a_1 = (0, 1)$, $a_{-1} = (-1, 0)$, $a_0 = 0$.
Так мы показали явную биекцию между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$

5.2 2

A)
Рассмотрим всё множество без одного элемента α. В нём есть минимум β. Заметим, что $\min(\alpha,\ \beta)$ – минимум всего множества.

B)
Рассмотрим все множества, в которых x – минимально (хотя бы одно нетривиальное такое есть, иначе x – максимум). Рассмотрим множество "вторых"минимумов в этих множествах. Среди них есть минимум z. Заметим, что это и есть непосредственно следующий, так как если есть $y : x < y < z$, то в множестве $[x, y, z]$ второе минимальное - y, откуда z – не минимум из множества "вторых".

C)
Рассмотрим множество всех элементов(далее A), превосходящих все элементы из данного множества. Так как множество ограничено, то множество превосходящих не пустое. Выберем минимум множества A. Заметим, что это и есть точная верхняя грань.

5.3 3

A)

B)
Заметим, что для всех $x \in (1, 2)$ верно, что $\forall y :\ (x, y) \in P$. При $x = 1,\ y \geqslant 2$ при $x = 2,\ y \leqslant 1$. Остальные x не подходят, откуда следует, какое именно это множество точек.

5.4 4

Пронумеруем элементы от 1 до m (элементы вида a_i). Сопоставим каждому множеству U такую последовательность 0 и 1 - на i позиции 1, если $a_i \in U$, иначе 0. Заметим, что если одно множество внутри другого, то образ первого больше образа второго, так как "напротив" "0" из первого множества стоят "0" во втором. Откуда следует, что выше указанное сопоставление - изоморфизм.

5.5 5

Пронумеруем простые числа (каждое простое число вида p_i). Тогда сопоставим финитной последовательности следующее число: $(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot \ldots)$, где α_k - k элемент последовательности. Заметим, что все α_k, кроме конечного числа, $= 0$, поэтому вышеуказанное произведение определено, и это биекция. Теперь проверим, что отношение перенеслось: $b \mid a \Leftrightarrow$ в разложении на простые множители b каждый простой множитель имеет степень $\leq$ степени вхождения в a. Откуда следует, что вышеуказанное сопоставление - изоморфизм.

5.6 6

A)
Заметим, что пустое множество может перейти только в себя, так как любое множество содержит $\varnothing$, а $\varnothing$ содержит только $\varnothing$.
Заметим, что множество из одного элемента может перейти только в множество из одного элемента, так как множество больше чем из одного элемента содержит хотя бы 2 подмножества, кроме себя и пустого, а множество из одного элемента - только пустое(помимо себя).

Заметим, что перестановка одноэлементных множеств однозначно задаёт автоморфизм.
Докажем по индукции.
База: $n = 2$
Заметим, что любое множество из двух элементов содержит два одноэлементных подмножества и пустое, что однозначно задаётся перестановкой множеств из одного элемента, так как по двум одноэлементным множествам однозначно восстанавливается множество из двух элементов.
Переход
Существует лишь одно множество, которое больше k одноэлементных множеств (и с другими не сравнимо), при этом это же множество будет больше любого объединения этих одноэлементных множеств, которые в свою очередь однозанчно задаются по предположению индукции.
Тогда автоморфизмов - $m!$.

B)
Заметим, что автоморфизмов столько же, сколько перестановок простых чисел, что равномощно количеству перестановок натуральных чисел, так как простых чисел счётно. Заметим, что количество перестановок натуральных чисел не меньше количества последовательностей из 0 и 1, не заканчивающихся бесконечной последовательностью 0. А именно: сопоставим перестановке A ($A = [a_1,\ a_2,\ \ldots]$) последовательность B ($B = [b_1,\ b_2,\ \ldots]$) следующим образом - $b_i = 1$ если $a_i < a_{i+1}$, иначе $b_i = 0$. Заметим, что у каждой последовательности B прообраз: мнимый "нулевой" элемент равен 0, на позициях где предыдущий равный 1 (и первый элемент), будет равен (предыдущему + 1 + количество нулей до следующей 1), на остальных позициях - (предыдущий - 1). Нетрудно видеть, что такая последовательность - биекция (покажем, что любое натуральное число встретится: разобьём натуральный ряд на группы подряд идущих чисел, длины групп равные максимальным группам из ряда "0" и "1" вида "1000...000". Заметим, что записанная прообразная перестановка - записанные в обратном порядке (внутри самой группы) группы, откуда и следует, что любое число встретится). При этом количество последовательностей из 0 и 1, не заканчивающихся бесконечной последовательностью 0 - континуум, а количество перестановок $\geqslant$ чем континуум, откуда автоморфизмов континуум, что и требовалось доказать.

5.7 7

Выберем счётное упорядоченное подмножество, пронумеруем их целыми числами. Применим следующий алгоритм для двух соседних (0 и 1), для остальных будем делать аналогично:
2 операция:
0 и 1 не соседи, откуда следует, что есть z между ними, назовём его $\frac{1}{2}$.
n операция:
Рассмотрим все рациональные числа вида $\frac{i}{n}$, $(i,\ n) = 1$, и для каждого из них найдём 2 неприводимых дроби $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ со знаменателями меньшими n, такие что число $\frac{i}{n}$ лежит между ними. Также $\frac{p_1}{q_1}$ (меньшее) максимальное среди возможных (такое есть, т.к. всего рациональных числ удовлетворяющих уловию конечно), а $\frac{p_2}{q_2}$ - минимально. Тогда между прообразами $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ есть элемент, назовём его $\frac{i}{n}$. Таким образом любой элемент между 0 и 1 получил какой-то образ.
Аналогично можно сделать для любых двух пар. Так мы получили изоморфизм из двух указанных множеств.

5.8 8

1) **Лемма Цорна**
Если в частично упорядоченном множестве M для всякого линейного упорядоченного подмножества существует верхняя грань, то в M существует максимальный элемент.

2) **Аксиома выбора**
Для каждого семейства A непустых непересекающихся множеств существует множество B, имеющее один и только один общий элемент с каждым из множеств $X \subset A$

3) **Теорема Цермело**
На всяком множестве можно ввести такое отоношение порядка, что это множество будет вполне упорядочено.

Частично упорядоченое множество – множество на котором введен частичный порядок
Линейно упорядоченное множество – частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов a и b имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$.
Вполне упорядоченное множество – линейно упорядоченное множество M такое, что в любом его непустом подмножестве есть минимальный элемент.
Семейство множеств – множество, элементами которого являются другие множества.

5.9 9

A*)
Рассмотрим частично упорядоченное множество Z, элементами которого будут частичные порядки на X (то есть подмножества множества $X \times X$, обладающие свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности), упорядоченные по включению: $\leqslant_1$ считается меньшим или равным $\leqslant_2$, если $\leqslant_2$ продолжает $\leqslant_1$ $(x \leqslant_1 y \;\Rightarrow\; x \leqslant_2 y)$.
Условие леммы Цорна выполнено: если у нас есть семейство частичных порядков, линейно упорядоченное по включению, то объединение этих порядков является частичным порядком, и этот порядок будет верхней границей семейства.
(Проверим что объединение обладает свойством транзитивности: пусть $x \leqslant_1 y$ в одном из порядков семейства ($\leqslant_1$), а $y \leqslant_2 z$ в другом; один из порядков (например, $\leqslant_1$) продолжает другой, тогда $x \leqslant_1 y \leqslant_1 z$ и потому $x \leqslant z$ в объединении. Рефлексивность и антисимметричность проверяются аналогично)
Тогда, по лемме Цорна на множестве X существует максимальный частичный порядок, продолжающий исходный. Обозначим его как $\leqslant$ (путаницы с исходным порядком не возникнет, так как исходный нам больше не нужен). Нам надо показать, что он будет линейным. Пусть $x, y \in X$ — два несравнимых элемента. Расширим порядок до нового порядка $\leqslant'$, при котором $x \leqslant' y$. Этот новый порядок определяется так: $a \leqslant' b$, если (1) $a \leqslant b$ или (2) $a \leqslant x$ и $y \leqslant b$.
Несложно проверить, что $\leqslant'$ будет частичным порядком.
Рефлексивность очевидна.
Транзитивность: если $a \leqslant' b$ и $b \leqslant' c$, то есть четыре возможности. Если в обоих случаях имеет место случай (1), то $a \leqslant b \leqslant c$ и всё очевидно. Если $a \leqslant' b$ в силу (1), а $b \leqslant c$ в силу (2), то $a \leqslant b \leqslant x$ и $y \leqslant c$, так что $a \leqslant' c$ в силу (2). Аналогично рассматри вается и симметричный случай. Наконец, двукратная ссылка на (2) невозможна, так как тогда $(a \leqslant x)$, $(y \leqslant b)$, $(b \leqslant x)$ и $(y \leqslant c)$, и получается, что $y \leqslant b \leqslant x$, а мы предполагали, что x и y не сравнимы. Антисимметричность доказывается аналогично. Таким образом, отношение $\leqslant'$ будет частичным порядком, строго содержащим $\leqslant$, что противоречит максимальности.

B*)

C*)

D*)

E*)

Пусть даны два непустых множества A и B. Рассмотрим множество M всех функций f таких, что область определения $D_f \subset A$, $f\colon D_f \to B$ и f – иньекция.
Для $f, g \in M$ полагаем $f \leqslant g$, если $D_f \subset D_g$ и $f = g|_{D_f}$, т.е. g является продолжением f. Это частичный порядок. Проверим выполнение условия леммы Цорна. Если $\{f_p : p \in I\}$ – линейно упорядоченное подмножество, то его верхней гранью будет функция, у которой $\operatorname{graph} f = \bigcup_{p\in I} \operatorname{graph} f_p$. Пусть f – максимальный элемент. Тогда либо $D_f = A$, либо $f(D_f) = B$, так как в противном случае найдется точка $a \in A \setminus D_f$ и точка $b \in B \setminus f(D_f)$, и можно продолжить f, полагая $f(a) = b$. Теорема доказана.

5.10 10

A*)
Аксиома выбора из теоремы Цермело (предполагается, что человек сперва сдал 10(b))
Пусть S – данное семейство непустых множеств. По теореме Цермело множество $U = \bigcup S$ может быть вполне упорядочено. Для каждого $x \in S$ имеем $x \subset U$. Пусть $\min(x)$ означает наименьший элемент x в смысле порядка на U. Поскольку $\varnothing \in S$, соответствие $x \mapsto \min(x)$ является функцией выбора на S.

B*)
Вполне упорядоченное множество $(S, < S)$ назовём вполне упорядоченным подмножеством X, если $S \subset X$. Для данного множества X рассмотрим совокупность $W(X)$ всех его вполне упорядоченных подмножеств. На $W(X)$ определим отношение строгого частичного порядка $\prec$ следующим образом:
$(S, < S) \prec (T, < T)$, если и только если $S \subset T$ есть собственный начальный отрезок $(T, < T)$, и $< S$ совпадает с ограничением $< T4$ на S.
Докажем, что $(W(X), \prec)$ удовлетворяет условию леммы Цорна. Рассмотрим любую цепь $C \subset W(X)$. Цепи C соответствует возрастающая по включению цепь подмножеств X и возрастающая по включению цепь бинарных отношений на этих множествах. Обозначим через U объединение этой цепи подмножеств X, а через $< U$ — объединение соответствующей цепи отношений. Ясно, что $< U$ есть отношение линейного порядка на U и каждое $(S, < S) \in C$ есть начальный отрезок $(U, < U)$. Отсюда получаем, что $(U, < U)$ — вполне упорядоченное подмножество X. Таким образом, $(U, < U)$ есть элемент $W(X)$ и верхняя грань цепи C.
Применяя лемму Цорна получаем, что в $(W(X), \prec)$ найдётся некоторый максимальный элемент $(M, < M)$. Тогда M обязано совпадать со всем X: в противном случае мы можем взять $a \in X\ M$ и продолжить порядок $< M$ на большее множество $N = M \cup a$ полагая $x < Na$ для всех $x \in M$. Тогда $(N, < N)$ будет вполне упорядоченным подмножеством X и $(M, < M) \prec (N, < N)$, что противоречит максимальности $(M, < M)$.