НИУ «Высшая школа экономики»

Факультет математики

Введение в топологию

лектор: Пирковский Алексей Юльевич

2019/2020 г.

Оглавление

1 Лекция 1. 30 октября 2019 г.

Введение: какая бывает топология и чем она занимается. Метрические пространства, нормированные пространства, евклидовы пространства. Примеры: $\mathbb{R}_n$, $C[a,b]$, дискретная метрика, $l^\infty(S), l^1, l^2$, p-адическая метрика на $\mathbb{Q}$, метрика Хаусдорфа.

1.1 Метрики, метрические пространства

X - множество

Определение. *Метрика* на X - функция $\rho\colon X \times X \longrightarrow [0;\ +\infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall\, x,y \in X$

(2) $\rho(x,x) = 0 \quad \forall\, x \in X$

(3) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in X$ (неравенство треугольника)

(4) $\rho(x,y) > 0 \quad \forall\, x \neq y$

Определение. *Метрическим пространством* называется пара (X,ρ), то есть некоторое множество X с заданной на нем метрикой.

Определение. Функция ρ называется ***полуметрикой***, если выполняются (1)-(3) условия, а (X,ρ) тогда - полуметрическое пространство.

Пример 0. X - мн-во $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \neq y \\ 0, \text{ если } x = y \end{cases}$

Пример 1. $X = \mathbb{R} \quad \rho(x,y) = |x-y|$

Пример 2. Три метрики на $\mathbb{R}^n$:

$\rho_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ - евклидова метрика

$\rho_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$

Пример 3. $X = C[a,b]$ - мн-во всех непрерывных функций из $[a,b]$ в $\mathbb{R}$.

Равномерная метрика: $\rho(f,g) = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$

Упражнение. Доказать, что ρ из примера 3, действительно, является метрикой.

Наблюдение: В примере 3 X - векторное пространство над $\mathbb{R}$, и $\rho(x,y) = \rho(x-y, 0)$

Определение Пусть X - векторное пространство над $\mathbb{K}$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Функция $X \longrightarrow [0,+\infty)$, $\ x \in X \longrightarrow ||x||$, называется ***нормой*** на векторном пространстве X, если она удовлетворяет следующим условиям:

(1) $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x|| \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in X)$

(2) $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \quad (x,y \in X)$

(3) $||x|| > 0 \quad \forall\, x \neq 0$

$(X, ||\cdot||)$ - *нормированное пространство.*

Наблюдение: Пусть $(X, ||\cdot||)$ - нормированное пространство. Тогда $\rho(x,y) = ||x-y|| \quad (x,y \in X)$ - метрика на X (метрика, порожденная нормой)

Упражнение. Доказать, что ρ из наблюдения, действительно, является метрикой.

Пример 4. Три нормы на $\mathbb{K}^n$:

$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ (евклидова норма)

$||x||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$

Они порождают метрики из примера 2.

Пример 5. Равномерная норма на $C[a,b]$: $||f|| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ Она порождает метрику из примера 3

Обозначение X, Y - множества.

Y^X - множество всех отображений из X в Y

В частности: $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ - множество числовых последовательностей в $\mathbb{K}$

Пример 6. S - множество

$$l^\infty(S) = \left\{ f \in \mathbb{K}^S : f \text{ ограничена} \right\} \qquad ||f|| = \sup_{s\in S} |f(s)| \text{ - равномерная норма}$$

Частный случай: $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$ - пространство ограниченных последовательностей

Пример 7. $l^1 = \left\{ x = (x_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \text{ ряд} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \text{ сходится} \right\}$

Норма на l^1: $||x||_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$

Пример 8. $l^2 = \left\{ x = (x_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \text{ ряд} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \text{ сходится} \right\}$

l^2 - векторное подпространство в $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ - след. из неравенства $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \quad (a, b \geqslant 0)$

Норма на l^2: $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$ Неравенство треугольника в l^2 следует из неравенства треугольника для $|| \cdot ||_2$ на $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ при $n \to \infty$

Определение E - векторное пространство над $\mathbb{R}$

Скалярное произведение на E - функция $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \in E \times E \longrightarrow \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

(1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \ x, y, z \in E)$

(2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \ (\forall\, x, y \in E)$

(3) $\langle x, x \rangle > 0 \ \ \forall\, x \neq 0$

Евклидово пространство - векторное пространство E над $\mathbb{R}$, снабженное скалярным произведением.

Факты:

(1) $|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$ - неравенство Коши-Буняковского

(2) $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ - норма на E

Пример 9. Норма $|| \cdot ||_2$ на $\mathbb{R}^n$ порождено скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Норма $|| \cdot ||_2$ на l^2 порождена скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (*упражнение*: доказать сходимость этого ряда)

Упражнение. Доказать сходимость этого ряда.

Упражнение*. Доказать, что остальные нормы из примеров не порождаются скалярным произведением.

Пример 10. p - *адическая метрика* на $\mathbb{Q}$

Пусть $p \in \mathbb{N}$ - простое

Наблюдение: Каждый $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ имеет вид $x = p^r \frac{a}{b}$, где $a, r \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$, причем $p \nmid a, p \nmid b$

Определение p - *адическая норма* $x \in Q \setminus \{0\}$ - это $|x|_p = p^{-r}$; $\ |0|_p = 0$

Упражнение

(1) $|-x|_p = |x|_p$

(2) $|xy|_p = |x|_p|y|_p$

(3) $|x|_p > 0 \quad \forall\, x \neq 0$

(4) $|x+y|_p \leqslant \max\Big\{|x|_p, |y|_p\Big\} \leqslant |x|_p + |y|_p$

(5) $\rho_p(x,y) = |x-y|_p$ - метрика на $\mathbb{Q}$

Пример 11. *метрика хаусдорфа*

Определение X - метрическое пространство, $x \in X, A \subset X$

$$\rho(x,A) = \inf\Big\{\rho(x,a) : a \in A\Big\} \text{ - расстояние от } x \text{ до } A$$

X - метрическое пространство

Определение. Подмножество $A \subset X$ *ограничено*, если $\exists\, C > 0 : \rho(x,y) \leqslant C \;\; \forall\, x,y \in A$

Обозначение $\mathfrak{B}(x) = \Big\{A \subset X \colon A \text{ ограничено}\Big\}$

Определение *Расстояние Хаусдорфа* между $A, B \in \mathfrak{B}(x)$ - это

$$\rho_H(A,B) = \max\Big\{\sup_{a\in A}\rho(a,B),\;\; \sup_{b\in B}\rho(b,A)\Big\}$$

Упражнение ρ_H - полуметрика на $\mathfrak{B}(x)$

2 Лекция 2. 6 ноября 2019 г.

Открытые множества в метрическом пространстве. Топологические пространства. Метризуемость. Хаусдорфовость. Сравнение топологий. Замкнутые мнжества. Примеры: дискретная и антидискретная топологии, топология Зарисского.

2.1 Открытые множества в метрическом пространстве

(X,ρ) - метрическое пространство, $x \in X, r \geqslant 0$.

Определение. Открытый шар с центром в x радиуса r - это

$$B_r(x) = \{y \in X \colon \rho(y,x) < r\}$$

Замкнутый шар с центром в x радиуса r - это

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \colon \rho(y,x) \leqslant r\}$$

Пример. $\quad x = \mathbb{R} \to B_r(x) = (x-r, x+r); \quad \overline{B}_r(x) = [x-r, x+r]$

Упражнение. Нарисовать $B_1(o)$ на $(\mathbb{R}^2, \rho_p)$ для $p=1, p=2, p=\infty$.

Пример. $X = C[a,b]$ с равномерной метрикой

(картинка графика)

$\overline{B}_r(f)$ состоит из тех непрерывных функций, графики которых содержатся в заштрихованном множестве

Определение. (X,ρ) - метрическое пространство, $A \subset X, x \in A$

x - внутренняя точка $A \iff \exists\, \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset A$

A называется открытым $\iff$ все его точки - внутренние

Предложение 1. Открытый шар $B_r(x)$ открыт.

Доказательство

(картинка док-ва)

Пусть $y \in B_r(x)$, т.е $\rho(y, x) < r$.

Положим $\varepsilon = r - \rho(y, x)$

Покажем: $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$ (*)

Пусть $z \in B_\varepsilon(y)$

$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x) < \varepsilon + \rho(y, x) = r \Rightarrow z \in B_r(x) \Rightarrow$ (*) доказано

$\Rightarrow B_r(x)$ открыто $\square$

Предложение 2.

(1) $\varnothing$ открыто

(2) X открыто

(3) $\{U_i\}_{i \in I}$ - семейство открытых множеств в $X \to \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ открыто

(4) $U_1, U_2, \ldots, U_n \subset X$ - открыты $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ открыто

Доказательство (1), (2) очевидны

(3) $x \in \bigcup\limits_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in X : x \in U_{i_o} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$

(4) достаточно для $n = 2$

$x \in U_1 \cap U_2$

$\exists\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0\colon B_{\varepsilon_1}(x) \subset U_1, B_{\varepsilon_2} \subset U_2$

Обозначим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap U_2$

2.2 Топологические пространства

Определение. Пусть X - множество, $\tau \subset 2^X$

τ называется топологией на X, если

(1) $\varnothing \in \tau$

(2) $X \in \tau$

(3) $\{U_i\}_{i \in I}$ - семейство множеств из $\tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \tau$

(4) $U_1, \ldots U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$

(X, τ) называется топологическим пространством

Множества из τ называются открытыми

Наблюдение. Из предложения 2: каждая метрика ρ на множестве X порождает топологию τ_ρ на X

Определение.

Топологическое пространство (X, τ) называется метризуемым $\iff \exists$ метрика $\rho\colon X \times X \to [0;\ +\infty)\colon \tau_\rho = \tau$

Замечение Если $\tau = \tau_\rho$, то такая ρ не единственная!

Например: $\tau_\rho = \tau_{2\rho}$

Пример-упражнение Метрики $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ на $\mathbb{K}^n$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ либо $\mathbb{C}$) порождают одну и ту же топологию на $\mathbb{K}^n$

Пример 1 (дискретная топология)

X - $\forall$ множество, $\tau = 2^X$

Рассмотрим $\rho\colon X \times X \to [0;\,+\infty), \quad \rho(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \neq y, \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$

Заметим: $\tau = \tau_\rho$

Действительно: $B_1(x) = x \Rightarrow x$ открыто в $\tau_\rho \; \forall\, x \in X \Rightarrow$ каждое $A \subset X$ открыто в τ_ρ, т.к. $A = \bigcup\limits_{x \in A} x \Rightarrow \tau_\rho = \tau$ - дискретная топология

Пример 2. (антидискретная топология)

X - $\forall$ множество, $\tau = \{\varnothing, X\}$

Определение. Пусть τ_1, τ_2 - топологии на множестве X

Говорят, что τ_1 грубее τ_2 (τ_2 *тоньше* τ_1), если $\tau_1 \subset \tau_2$

Синонимы: грубее = слабее, тоньше = сильнее

Дискретная - самая тонкая, антидискретная - самая грубая.

Определение. Окрестность точки x в топологическом пространстве X - любое открытое множество $U \subset X$, содержащее x

2.3 Хаусдорфово топологическое пространство

Определение.

Топологическое пространство X называется хаусдорфовым $\iff \forall\, x, y \in X, x \neq y, \exists$ окрестности $U \ni x, V \ni y\colon U \cap V = \varnothing$

Предложение. Метризуемое топологическое пространство хаусдорфово.

Доказательство: Пусть (X,ρ) - метр. пространство, $x, y \in X, x \neq y$. Обозначим $a = \rho(x,y), \quad a > 0$

Из неравенства треугольника: $B_{\frac{a}{2}}(x) \cap B_{\frac{a}{2}}(y) = \varnothing$ (картинка с шарами)

Следствие: Антидискретная тополония на множестве, содержащем более 1 элемента, неметризуема (т.к. неухаусдорфова)

Определение. Пусть X - топологическое пространство.

Множество $F \subset X$ называется замкнутым $\iff X \backslash F$ открыто.
Предложение. Пусть X - топологическое пространство, $\tau' = \{F \subset X : F \text{ замкнуто}\}$. Тогда:

(1) $\varnothing \in \tau'$

(2) $x \in \tau'$

(3) $\{F_i\}$ - семейство множество из $\tau' \Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} F_i \in \tau'$

(4) $F_1, F_2, \dots, F_n \in \tau' \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ замкнуто

Напоминание:

45 $X \backslash \bigcap\limits_{i \in I} F_i = \bigcup\limits_{i \in I} (X \backslash F_i)$

$X \backslash \bigcup\limits_{i \in I} F_i = \bigcap\limits_{i \in I} (X \backslash F_i)$

Наблюдение: Если X - множество, $\tau' \subset 2^X$ удовлетворяет (1) - (4) из предл. $\Rightarrow \{X \backslash F\colon F \in \tau'\}$ - топология на X

2.4 Топология Зарисского

Пример (топология Зарисского)

X - множество, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение. $A \subset \mathbb{K}^X$ - подалгебра в K^X, если

(1) A - векторное подпространство в K^X

(2) $1 \in A$ (где 1 - функция, тождественно равная единице)

(3) $f, g \in A \Rightarrow fg \in A$ (fg - поточечное произведение f и g)

Зафиксируем какую-либо подалгебру $A \subset \mathbb{K}^X$

$\forall\, S \subset A$ обозначим $V(S) = \{x \in x\colon\ \ \forall\, f \in S\ \ f(x) = 0\}$

Упражнение. На X существует топология, в которой $F \subset X$ замкнуто $\iff F = V(S)$ для некоторого $S \subset A$. Она называется <u>топологией Зарисского</u>

Важный частный случай: $X = \mathbb{K}^n,\ A = \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_n]$

Упражнение: Описать топологию Зарисского в явном виде для следующих случаев:

(1) X - любое множество, $A = \mathbb{K}^X$

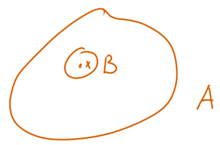
(2) $X = \mathbb{K},\ A = \mathbb{K}[t]$

(3) $X = [a, b] \subset \mathbb{R},\ A = C[a, b]$

3 Лекция 3. 7 ноября 2019 г.

База и предбаза топологии. Примеры. Критерий существования топологии с данной (пред)базой. Пример: топология поточечной сходимости. Сходимость последовательностей в топологическом пространстве. База и предбаза в точке. Описание сходимости в метрическом пространстве. Замыкание множества в топологическом пространстве. Свойства операции замыкания. Предельные и изолированные точки.

Лемма. X — множество, $\beta \subset 2^X$. Следующие свойства множества $A \subset X$ эквивалентны:



(1) $\exists\, \gamma \subset \beta\colon A = \cup\gamma$

(2) $\forall\, x \in A \exists\, B \in \beta\colon x \in B \subset A$

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2)

Пусть $A = \cup\gamma, \gamma \subset \beta, x \in A \Rightarrow \exists\, B \in \gamma\colon x \in B \Rightarrow B$ удовл. (2)

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall\, x \in A \exists\, B \in \beta\colon x \in B_x \subset A \Rightarrow \gamma = \{B_x\colon x \in A\}$ удовл. (1)

$\gamma \subset 2^X$

Обозначение: $\bigcup\limits_{C \in \gamma} C = \cup\gamma$

Определение. (X, τ) — топологическое пространство

(1) $\beta \subset \tau$ — база топологии τ (или база (X, τ)) $\iff$ кажд. $U \in \tau$ является объединением некоторого подсемейства в $\beta \underset{\text{лемма}}{\iff} \forall\, U \in \tau \forall\, x \in U \exists\, B \in \beta\colon x \in B \subset U$

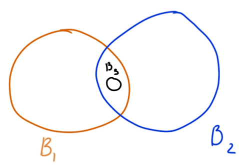
(2) $\sigma \subset \tau$ — предбаза τ (предбаза (X, τ)) $\iff$ семейство $\{U_1 \cap \ldots \cap U_n\colon U_i \in \sigma,\ \ n \in \mathbb{N}\}$

Пример. (X, ρ) — метрическое пространство $\Longrightarrow \{B_r(x)\colon x \in X, r > 0\}$ — база τ_ρ

Пример: $X = \mathbb{R}\quad \sigma = \{(^-\infty;\, b); (a, +\infty)\colon a, b \in \mathbb{R}\}$ — предбаза $\mathbb{R}$, но не база.

Предложение X — множество, $\quad \beta, \sigma \subset 2^X$

(1) На X $\exists$ топология с базой $\beta \iff \begin{cases} (a) \cup \beta = X \\ (b) \forall\, B_1, B_2 \in \beta\, \forall\, x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists\, B_3 \in \beta\colon x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \end{cases}$



(2) На X $\exists$ топология с предбазой $\sigma \iff \cup\sigma = X$

Доказательство: (1) ($\Rightarrow$) следует из открытости X $B_1 \cap B_2$

Обозначим $\tau = \{\cup\gamma\colon \gamma \subset B\}$. Покажем τ — топология на X

$\varnothing = \cup\varnothing \in \tau;\ X = \cup\beta \in \tau$; объединение множеств из τ принадлежит τ

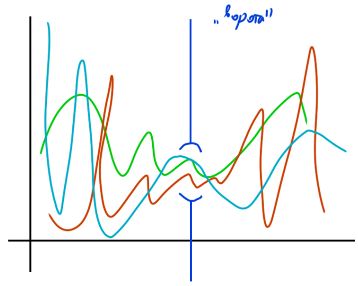
Пусть $U_1, U_2 \in \tau$. Хотим: $U_1 \cap U_2 \in \tau$

Пусть $x \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow \exists\, B_1, B_2 \in \beta \colon x \in B_k \subset U_k \quad (k = 1, 2) \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \underset{\text{(b)}}{\Longrightarrow} \exists\, B_3 \in \beta \colon x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \Longrightarrow_{\text{л}} U_1 \cap U_2 \in \tau \Rightarrow \tau$ — топология на X, и β — её база.

(2) ($\Rightarrow$) из открытости X

($\Leftarrow$) Семейство $\{U_1 \cap \ldots \cap U_n \colon U_i \in \sigma,\ n \in \mathbb{N}\}$ удовл. (a), (b) $\Rightarrow$ оно — база топологии, а σ — её предбаза. $\square$

Пример. (топология поточечной сходимости)



Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $S \subset \mathbb{K}^X$ (где X — любое множество)

$\forall\, x \in X$, для каждого интервала (для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ — открытый круг) $I \subset \mathbb{R}$ обозначим

$G(x, I) = \{f \in S \colon f(x) \in I\}$

Семейство $\{G(x, I) \colon x \in X, I \subset \mathbb{R}$ — интервал (для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$— открытый круг)$\}$ является предбазой некоторой топологии на S. Она называется *топологией поточечной сходимости* на S

3.1 Сходимость последовательностей в топологическом пространстве

X — топологическое пространство, $x \in X$, (x_n) — последовательность в X.

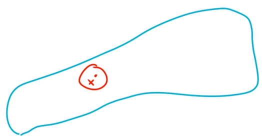
Определение. (x_n) *сходится* к x (x является *пределом* (x_n)) $\Longleftrightarrow \forall$ окрестности $U \ni x\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \geqslant N\ x_n \in U$

Обозначение $x_n \to x \ \ (n \to \infty)$, или $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Определение. (1) Семейство β_x окрестностей точки $x \in X$ — *база окрестностей* x (*база* в x) $\Longleftrightarrow$ для любой окрестности $U \ni x\ \ \exists\, V \in \beta_x \subset U$

(2) Семейство σ_x окрестностей точки $x \in X$ — *предбаза окрестностей* x (*предбаза* в x) $\Longleftrightarrow \{U_1 \cap \ldots \cap U_n \colon U_i \in \sigma_x,\ n \in \mathbb{N}\}$ — база в x.

Пример. (X, ρ) — метрическое пространство.



$\{B_r(x) \colon r > 0\}$ — база в x

$\left\{B_{\frac{1}{n}}(x) \colon n \in \mathbb{N}\right\}$ — тоже

Предложение X — топологическое пространство, $x \in X$, σ_x — предбаза в x, (x_n) — последовательность в X.

$$x_n \to x (n \to \infty) \Longleftrightarrow \forall\, V \in \sigma_x\ \exists\ \ N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geqslant \mathbb{N}\ x_n \in V$$

Доказательство: ($\Leftarrow$) Пусть U — окрестность $x \Rightarrow \exists\ \ V_1, \ldots, V_p \in \sigma_x \colon V_1 \cap \ldots \cap V_p \subset U$

$\exists\, N_1, \ldots, N_p \colon \forall\, n \geqslant N_i\ \ x_n \in V_i \quad (i = 1, \ldots, p)$

Обозначим $N = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} N_i \Rightarrow \forall\, n \geqslant N \quad x_n \in V_1 \cap \ldots \cap V_p \subset U$ $\square$

Следствие (X, ρ) — метрическое пространство, $x \in X, (x_n)$ — последовательность в X. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $x_n \to x$

(2) $\forall$ открытого шара U с центром в $x\ \exists\ \ N \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \geqslant N\ \ x_n \in U$

(3) $\forall\ \ \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \geqslant N\ \ \rho(x_n, x) < \varepsilon$

(4) $\rho(x_n, x) \to 0$

Предложение. X — хаусдорфово топологическое пространство, (x_n) — последовательность в X, $\quad x_n \to x \in X, x_n \to y \in X \Rightarrow x = y$

Доказательство: пусть $x \neq y \Rightarrow \exists$ окрестности $U \ni x, V \ni y, U \cap V = \varnothing$

$\left.\begin{array}{l} \exists\, N_1 \colon\ \forall\, n \geqslant N_1,\ x_n \in U \\ \exists\, N_2 \colon\ \forall\, n \geqslant N_2\ x_n \in V \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \in U \cap V\ \ \forall\, n \geqslant max\, \{N_1, N_2\}$ — противоречие. $\square$

Пример. X — антидискретное топологическое пространство

Каждая последовательность в X сходится к каждой точке $x \in X$

Пример. X — дискретное топологическое пространство

$x_n \to x \iff \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \geqslant N\ \ x_n = x$

Действительно: ($\Rightarrow$) $\{x\}$ — окрестность x. Далее см. определение сходимости.

Пример-упражнение.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, X — множество, $S \subset \mathbb{K}^X$

Пусть $f_n \to f$ в S с топологией поточечной сходимости $\iff \forall\, x \in X\ \ f_n(x) \to f(x)$

3.2 Замыкание, внутренность, граница ...

X — топологическое пространство, $A \subset X$

Определение. *Замыкание* A — множество $\overline{A} = \bigcap \{F \subset X\ :\ F \text{ замк}, F \supset A\}$

Наблюдение. $\overline{A}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A. (В частности, если A замкнуто, то $A = \overline{A}$).

Предложение.

(1) $A \subset B \subset X \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Доказательство: (1) из опр. (2) из наблюдения

(3) $A \subset A \cup B \Rightarrow^{(1)} \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Аналогично, $\overline{B} \cup \overline{A \subset B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow^{(1)} \overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$, т.к. $\overline{A} \cup \overline{B}$ замкнуто. $\square$.

Предложение. $x \in \overline{A} \iff \forall$ окрестности $U \ni x \quad U \cap A \neq \varnothing$.

Доказательство:

$x \notin \overline{A} \iff \exists\,\text{замкн. } F \subset X : F \supset A, x \notin F \underset{U = x \setminus F}{\iff} \exists\,\text{откр } U \subset X:\ U \cap A = \varnothing, \text{и } x \in U \iff \exists\ \text{окр } U \ni x,\ \ U \cap A = \varnothing\ \ \square$

Определение. X — топологическое пространство, $A \subset X$

$x \in X$ — *предельная точка* $A \iff x \in \overline{A \setminus \{x\}}, \underset{\text{предл.}}{\iff}$ в каждой окрестности x есть точки из A, отличные от x.

$A' = \{x \in X :\ x - \text{предельная точка } A\}$ — *производное множество* множества A

Из предл. $\overline{A} = A \cup A'$. В частности: A замкнуто $\iff\ A' \subset A$

Определение. $x \in A$ — *изолированная точка* $A \iff x \in A \setminus A' \iff \exists$ окрестность $U \ni x\ :\ U \cap A = \{x\}$

$\overline{A} = A'$ изолированные точки A.

4 Лекция 4. 13 ноября 2019 г.

Предельные и изолированные точки, внутренность и граница множества; примеры. Плотные множества и сепарабельные пространства. Первая и вторая аксиомы счетности. Описание замыкания через последовательности в пространствах с первой аксиомой счетности. Непрерывные отображения топологических пространств.

X — топологическое пространство, $A \subset X$

Определение. *Внутренность* A — это $\operatorname{Int}(A) = \bigcup \{V \subseteq X : V, V \subset A\}$

Наблюдение:

(1) $\operatorname{Int} A$ — наиболее открытое множество, содержащееся в A. В частности: A откр $\Longleftrightarrow A = \operatorname{Int} A$.

(2) Если (X, ρ) — метрическое пространство, то $x \in \operatorname{Int} A \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset A$

Упражнение. $\operatorname{Int} A = X \backslash \overline{X \backslash A}$; $\overline{A} = X \backslash \operatorname{Int}(X \backslash A)$

$$\boxed{\operatorname{Int} A \subset A \subset \overline{A}}$$

Определение. *Граница* A — это $\delta A = \overline{A} \backslash \operatorname{Int}(A)$

Наблюдение. $x \in \delta A \Longleftrightarrow \forall$ окрестности $U \ni x$ $U \cap A \neq \varnothing$ и $U \cap (x \backslash A) \neq \varnothing$

Пример 1. $x = \mathbb{R}, A = \mathbb{Z} \Rightarrow \overline{A} - \mathbb{Z}$, $\operatorname{Int} A = \varnothing$

$\delta A = A = \mathbb{Z}$, все точки A изолированные, $\overline{A'} = \varnothing$

Пример 2. $X = \mathbb{R}, A = (0, 1) \Longleftrightarrow \overline{A} = [0;\ 1], \operatorname{Int} A = A = (0,\ 1), \delta A = \{0, 1\}$.

(картинка с прямой) Изолированных точек нет, $A' = [0, 1]$

Пример 3. $X = \mathbb{R}, A = \left\{\dfrac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \Rightarrow \overline{A} = A$ ((т.к. $\mathbb{R} \backslash A = (-\infty;\ 0) \cup (1; +\infty) \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right)\right)$ $^-$открытое),

(картинка с прямой) $\operatorname{Int} A = \varnothing,\ \delta A = A$ $\{$изолированные точки $A\} = \left\{\dfrac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\right\}$; $\{0\} = A'$

X — топологическое пространство.

Определение. Множество $A \subset X$ *плотно* в X (*всюду плотно* в X) $\Longleftrightarrow \overline{A} = X$

Наблюдение. A плотно в $X \Longleftrightarrow \forall\, x \in X \forall$ окрестности $U \ni x$ $U \cap A \neq \varnothing$

A плотно в $X \Longleftrightarrow \forall$ непустого открытого $U \subset X$ $U \cap A \neq \varnothing$

Определение. X *сепарабельно* $\Longleftrightarrow$ существует не более чем счетное плотное подмножество в X

Пример 1. Дискретное пространство сепарабельно $\Longleftrightarrow$ оно само не более чем счетно

Пример 2. Антидискретное пространство сепарабельно (каждое непустое подмножество плотно)

Пример 3. $\mathbb{R}$ сепарабельно (т.к. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$)

Пример-упражнение 4. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l^1, l^2$ сепарабельны, l^∞ несепарабельно.

4.1 Аксиомы счетности

X — топологическое пространство

Определение. (1) X удовлетворяет *1-ой аксиоме счетности* $\Longleftrightarrow \forall\, x \in X$ существует не более чем счетная база окрестностей x.

(2) X удовлетворяет *2-ой аксиоме счетности* (является пространством *со счётной базой*) $\Longleftrightarrow$ существует не более чем счетная база топологии на X.

Предложение. X удовлетворяет 2-ой аксиоме счетности $\Rightarrow X$ удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности

Доказательство: Пусть β — не более чем счетная база топологии на X.

$x \in X$; тогда $\{U \in \beta\colon U \ni x\}$ — база окрестностей x $\square$

Пример 1. X метризуемо $\Longleftrightarrow X$ удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности.

Действительно, $\forall\, x \in X$ $\left\{B_{\frac{1}{n}}(x)\colon n \in \mathbb{N}\right\}$ — база окрестностей x.

Пример 2. Дискретное пространство X удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности.

Оно удовлетворяет 2-ой аксиоме счетности $\Longleftrightarrow$ оно не более чем счетно.

Пример 3. $\mathbb{R}$ удовлетворяет 2-ой аксиоме счетности.

А именно, $\{(a, b)\colon a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ — база $\mathbb{R}$.

Действительно, $\forall\, c, d \in \mathbb{R}, c < d$, выполнено $(c, d) = \bigcup \{(a, b)\colon a, b \in \mathbb{Q}, c < a < b < d\}$ — в силу плотности $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

Определение. Семейство $\beta(x)$ окрестностей точки $x \in X$ — *база окрестностей* $x \iff$ для любой окрестности $U \ni x$, $V \subset U$.

Предложение: Топологическое пространство со счетной базой сепарабельно.

Доказательство: $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счетная база в X,

$U_n \neq 0 \forall\, n$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ выберем $x_n \in U_n \Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ плотно в X $\square$

Упражнение: Для метризуемых пространств: счетная база $\iff$ сепарабельность.

В частности: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l^1, l^2,$ — со счетной базой.

Лемма: Пусть X — топологическое пространство, удовлетворяющее 1-ой аксиоме счетности.

Тогда $\forall\, x \in X$ существует база окрестностей $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ точки x, такая что $U_n \supset U_{n+1} \forall\, n$.

Доказательство: Пусть $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база окрестностей x; обозначим $U_n = V_1 \cap \ldots \cap V_n \Rightarrow \{\}$ — искомая. $\square$

Предложение. X — топологическое пространство, $A \subset X$, $x \in X$

(1) Если существует последовательность (x_n) такая, что $x_n \to x \Rightarrow x \in \overline{A}$,

(2) Если X удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности, то верно и обратное.

Доказательство: (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть U — окрестность $x \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : x_n \in U \Rightarrow U \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{A}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть $x \in \overline{A}$, и пусть $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база окрестностей x такая, что $U_{n+1} \subset U_n \forall\, n$.

Выберем любую последовательность $x_n \in U_n \cap A$. Покажем, что $x_n \to x$.

Пусть U — окрестность точки x. Тогда $\exists\, N \in \mathbb{N}$, т.ч. $U_n \subset U \Rightarrow \forall\, n \geqslant N$ $x_n \in U_n \subset U_N \subset U \Rightarrow x_n \to x$ $\square$.

4.2 Непрерывные отображения

Определение. X, Y — топологические пространства, $f : X \to Y$, $x \in X$

f — ***непрерывно в*** $x \iff \forall$ окрестности $V \ni f(x)$ $\exists$ окрестность $U \ni x : f(U) \subset V$

f — ***непрерывно в*** $x \iff$ оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Предложение. Пусть $f : X \to Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X, y = f(x)$

β_x — база окрестностей x, σ_y — предбаза окрестностей y.

Тогда: f непрерывно в $x \iff \forall\, V \in \sigma_y\, \exists\, U \in \beta_x : f(U) \subset V$.

Доказательство: $(\Rightarrow) \forall\, V \in \sigma_y\, \exists$ окрестность W такая, что $f(W) \subset V$; $\exists\, U \in \beta_x : U \subset W \Rightarrow f(U) \subset V$.

$(\Leftrightarrow)$ Пусть V — окрестность $y \exists\, V_1, V_2, \ldots, V_p \in \sigma_y$ т.ч. $V_1 \cap \ldots \cap V_p = W$

$\forall\, i = 1, \ldots, p\, \exists\, U_i \subset \beta_x$, т.ч. $f(U_i) \subset V_i \Rightarrow f(U_1 \cap \ldots \cap U_p) \subset V$ $\square$.

Следствие: $(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ — метрические пространства $x \in X$

Отображение $f : X \to Y$ непрерывно в $x \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta$ такая, что $\forall\, x \in X$, удовлетворяющий $\rho_X(x, x') < \varepsilon$ выполняется $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Доказательство: применить предл. к базам окрестностей x и $f(x)$, состоящим из открытых шаров с центрами x и y.

Теорема

X, Y — топологические пространства, $f : X \to Y$ отображение. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) f непрерывно

(2) для любой окрестности $V \subset Y$ $f^{-1}(V)$ — открыто в X

(3) для любого замкнутого $B \subset Y$ $f^{-1}(B)$ замкнуто в X

(4) для любого $A \subset X$ $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

5 Лекция 5. 20 ноября 2019 г.

X, Y — топологические пространства, $x \in X$

Определение. отображение $f\colon X \to Y$ **непрерывно** в $x \Longleftrightarrow \exists\ V \ni f(x) \exists\ U \ni x\colon f(U) \subset V$

f **непрерывно**, если f непрерывно в $x\ \forall\, x \in X$

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) f непрерывно,

(2) $\forall\ V \subset Y\ \ f^{-1}(V)$ открыто в X,

(3) $\forall$ замкнутого $B \subset Y f^{-1}(B)$ замкнуто в X,

(4) $\forall\, A \subset X\ \ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Доказательство:

(1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $V \subset Y$ — открыто.

$\forall\, x \in f^{-1}(V) \exists$ окр $U_x \ni x\colon f(U_x) \subset V \Rightarrow U_x \subset f^{-1}(V) \Rightarrow \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x = f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V)$ открыто.

(2) $\Rightarrow$ (3) — следует из равенства $f^{-1}\left(Y \backslash B\right) = X \backslash f^{-1}(B)\quad \forall\, B \subset Y$

(3) $\Rightarrow$ (4) $\forall\, A \subset X \quad A \subset f^{-1}\left(f(A)\right) \subset \underbrace{f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)}_{} \Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right), .. f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

(4) $\Rightarrow$ (3) Пусть $B \subset Y$ замнкуто, $A = f^{-1}(B)$

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B \Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}(B) = A, .. A$$

Заметим, что (2) и (3) эквивалентны.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall\, x \in X$ пусть V — окрестность $f(x) \Rightarrow V = f^{-1}\left(V\right)$ — окрестность x, и $f(U) \subset V \quad \square$.

Следствие. Пусть τ_1, τ_2 — топологии на множестве X.

Тогда $\tau_1 \subset \tau_2 \Longleftrightarrow$ отображение $f\colon\ (X, \tau_2) \Rightarrow (X, \tau_1)\,,\ f(x) = x$, непрерывно.

Предложение. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств, σ — предбаза Y.

f непрерывно $\Longleftrightarrow \forall\, V \in \sigma\ \ f^{-1}(V)$ открыто в X

Доказательство: $(\Leftarrow)$ Пусть $V \subset Y$ открыто $\Rightarrow\ V = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \bigcap\limits_{\beta \in B_\alpha} V_{\alpha\beta}$, где $V_{\alpha\beta} \in \sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \bigcap\limits_{\beta \in B_\alpha} f^{-1}\left(V_{\alpha\beta}\right)$ — открыто в $X \quad \square$.

Предложение. X, Y, Z — топологические пространства, $f\colon X \to Y, g\colon Y \Rightarrow Z,\ \ x \in X,\ y = f(x)$

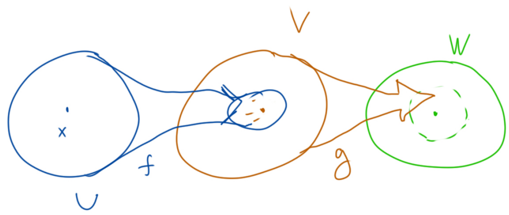
Предположение: f непрерывно в x, g непрерывно в $y \Rightarrow g \circ f$ непрерывно в x.

В частности: если f и g непрерывны, то и $g \circ f$ непрерывно.

Доказательство:

Пусть W — окрестность $(g \circ f)(x) = g(x)$

$\left.\begin{array}{l} \exists\ V \ni y\colon g(V) \subset W \\ \exists\ U \ni y\colon f(U) \subset V \end{array}\right\} \Rightarrow (g \circ f)(U) \subset W$



Определение. X, Y — топологические пространства, $x \in X, f\colon X \to Y$

f ***секвенциально непрерывно*** в $x \Longleftrightarrow \forall$ последовательности (x_n) в X, т.ч. $x_n \to x$, выполнено $f(x_n) \to f(x)$.

Предложение. $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X$.

(1) f непрерывно в $x \Rightarrow f$ секвенциально непрерывно в x.

(2) Если X удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности (непрерывно, метризуемо), то верно и обратное

Доказательство: (1) Пусть $x_n \to x$, V — окрестность $f(x)$

$\exists$ окрестность $U \ni x \colon f(U) \subset V$

$\exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geqslant N x_n \in U \Rightarrow \forall\, n \geqslant N \;\; f(x_n) \in V \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

(2) Предположение: f не является непрерывным в x

$\exists$ база окрестностей $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ точки $x \colon U_n \supset U_{n+1} \;\; \forall\, n$

$\exists$ окрестность $V \ni f(x) \colon f(U_n) \not\subset V \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$

то есть $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, x_n \in U_n, f(x_n) \notin V \Rightarrow x_n \to x$, но $f(x_n) \not\to f(x)$ — противоречие. $\square$.

Обозначение. $C(X, Y) = \{f \colon X \to Y \mid f \;\}$

$C(X) = C(X, \mathbb{K})$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение. $f \in C(X, Y)$ — ***гомеоморфизм*** $\iff \exists\, g \in C(Y, X) \colon fg = \mathrm{id}_Y$ и $gf = \mathrm{id}_X$

Определение. ' (эквивалентное предыдущему)

$f \colon X \to Y$ — ***гомеоморфизм*** $\iff f$ непрерывно, биективно, и f^{-1} непрерывно.

Наблюдение:

(1) $f \colon X \to Y, g \colon Y \to Z$ — гомеоморфизмы $\Rightarrow g \circ f \colon X \to Z$ — гомеоморфизм.

Определение. X и Y *гомеоморфны* $\iff \exists$ гомеоморфизм $X \to Y$.

Определение. X, Y — топологические пространства, $f \colon X \to Y$.

f ***открыто*** $\iff \forall$ открытого $U \subset X \quad f(U)$ открыто в Y

f ***замкнуто*** $\iff \forall$ замкнутого $B \subset X \quad f(B)$ замкнуто в Y

Наблюдение:

Отображение $f \colon X \to Y$ — гомеоморфизм $\iff f$ непрерывно, биективно и открыто.

Отображение $f \colon X \to Y$ — гомеоморфизм $\iff f$ непрерывно, биективно и замкнуто.

Пример-упражнение 1. X — нормированное пространство, $x \in X, r > 0$

$f \colon B_1(0) \to B_r(x), \quad f(y) = x + ry$ — гомеоморфизм.

Пример-упражнение 2. X — нормированное пространство, $x \in X, r > 0$

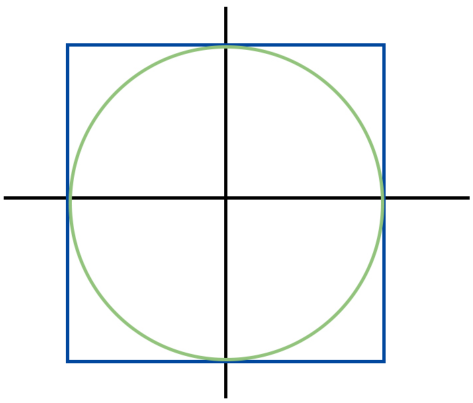
$f \colon B_1(0) \to X, \; f(x) = \dfrac{x}{1 - ||x||}$ — гомеоморфизм.

Пример-упражнение 3.

$S^1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \colon x^2 + y^2 = 1\big\}$

$C = \{(x, y) \in R \colon \max\{|x|, |y|\} = 1\}$

$f \colon C \to S^1, \quad f(p) = \dfrac{p}{||p||_2}$ — гомеоморфизм.



Пример-упражнение 4. (стереографическая проекция)

(картинка 3)

$$S^2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$$

— сфера

$f \colon S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2$ — гомеоморфизм

Построить аналогичный гомеоморфизм между $S^n \backslash \{N\}$ и $\mathbb{R}^n$

Определение. Топологическое пространство M — ***топологическое многообразие*** (*C^0-многообразие*) ***размерности*** n, если

(1) M хаусдорфово

(2) M со счетной базой

(3) $\forall x \in X\ \exists$ окрестность $U \ni x$, гомеоморфная открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$ (здесь топология на U определяется так: $V \subset U$ открыто в $U \iff V$ открыто в M)

Если U — как в (3), $\varphi\colon U \to V$ — гомеоморфизм, где $V \subset \mathbb{R}^n$ открыто, то (U, φ) называется ***картой*** на M.

Пример 1. $\mathbb{R}^n$ — топологическое многообразие.

Пример 2 - упражнение. Открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ — топологическое многообразие (доказать наличие счетной базы)

Пример 3 - упражнение. Сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon ||x||_2 = 1\right\}$ — топологическое многообразие. Сколькими ***картами*** она покрывается?

5.1 Подпространства топологических пространств

(X, τ) — топологическое пространство, $Y \subset X$

Обозначение. $\tau_Y = \{U \cap Y\ :\ U \in \tau\}$

Наблюдение. τ_Y — топология на Y

Определение. τ_Y — топология, *индуцированная* (*унаследованная*) из (X, τ).

Определение. (Y, τ_Y) — называется *топологическим подпространством* в (X, τ).

Предложение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $Y \subset X, \tau_\rho$ — топология на Y, порожденная ограничением метрики ρ на $Y \times Y\ \Rightarrow \tau_\rho = \tau_Y$.

Доказательство: Базу τ_ρ образуют шары $B_r^Y(y) = \{z \in Y\colon \rho(z, y) < r\} \quad (y \in Y, r > 0)$

Заметим, что $B_r^Y(y) = B_r(y) \cap Y \quad$ (где $B_r(y) = \{z \in X\colon \rho(z, y) < r\}) \Rightarrow B_r^Y(y) \in \tau_Y \Rightarrow \tau_\rho \subset \tau_Y$

Пусть $V \in \tau_Y\colon V = U \cap Y$, где U открыто в X.

Пусть $y \in V \Rightarrow \exists\, r > 0\colon\ B_r(y) \subset U \Rightarrow B_r^Y(y) \subset V \Rightarrow V \in \tau_\rho \Rightarrow \tau_Y = \tau_\rho \quad \square$.

(картинка 4). *Обозначение.* X — множество, $Y \subset X$

$i_Y\colon Y \to X, i_Y(y) = y\ \forall\, y \in Y$ — *отображение включения* Y в X.

Теорема: (основное свойство индуцированной топологии)

(X, τ) — топологическое пространство, $Y \subset X$. Снабдим Y индуцированной топологией τ_Y. Тогда:

(1) τ_Y — самая грубая[1] топология на X в которой $i_Y\colon Y \to X$ непрерывно,

(2) Если Z — топологическое пространство, то $f\colon Z \to Y$ непрерывно $\iff i_Y \circ f\colon Z \to X$ непрерывно.

Иначе говоря: f непрерывно как отображение из Z в $Y \iff$ оно непрерывно как отображение из Z в X.

Доказательство:

(1) $i_Y^{-1}(U) = U \cap Y \Rightarrow i_Y$ непрерывно.

Пусть σ — топология на Y, т.ч. $i_Y\colon (Y, \sigma) \to X$ непрерывно $\iff \forall\, U \in \tau\ \ \underbrace{i_Y^{-1}(U)}_{=U\cap Y} \in \sigma \Rightarrow \tau_Y \subset \sigma$.

(2) $\forall\, U \subset X$

$(i_Y \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\left(i_Y^{-1}(U)\right) = f^{-1}(U \cap Y)$

[1] А существует ли самая тонкая? Да — дискретная.

$i_Y \circ f$ непрерывно $\Longleftrightarrow \forall\, U \in \tau (i_Y \circ f)^{-1}(U)$ открыто в $Z \Longleftrightarrow \forall\, V \in \tau_Y \;\; f^{-1}(V)$ открыто в $Z \Rightarrow f$ непрерывно $\square$.

Упражнение. τ_Y — единственная топология на Y, удовл (1), и единственная топология на Y, удовлетворяющая (2).

6 Лекция 6. 21 ноября 2019 г.

Вспомним материалы прошлой лекции:

(X, τ) - топологическое пространство, $Y \subset X$

$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$ - *индуцированная* топология на Y.

$i_Y \to x$ - отображение включения. $i_Y(y) = y \;\forall\, y \in Y$

τ_Y - самая грубая топология на Y, в которой i_Y непрерывно

$f\colon X \to Y$ - отображение множеств, $A \subset X$

Определение. *Ограничение* f на A - это $f|_A\colon A \to Y$, $(f|_A)(a) = f(a) \;\forall\, a \in A$

Предложение. X, Y - топологические пространства, $A \subset X$, $f\colon X \to Y$ непрерывно $\Rightarrow f|_A\colon A \to Y$ непрерывно

Доказательство: $f|_A = f \circ i_a \quad \square$

Предложение:

(1) Множество $B \subset Y$ замкнуто в $\tau_Y \Longleftrightarrow B = F \cap Y$ для некоторого замкнутого $F \subset X$

(2) $\forall\, A \subset Y$ (замыкание A в $(Y, \tau_Y)) = \overline{A} \cap Y$, где $\overline{A}$ - замыкание A в X.

Доказательство: (1) следует из формулы $Y \backslash B = (X \backslash B) \cap Y \;\; \forall\, B \subset Y$

(2) (Замыкание A в X) $= \bigcap \{C \subset Y : C \quad (Y, \tau_Y)\; C \supset A\} =^{(1)} \cap \{F \cap Y : F \quad F \supset A\} =$

$= (\cap \{F : F \quad X\; F \supset A\}) \cap Y = \overline{A} \cap Y \quad \square$

Предложение: X - топологическое пространство, $A \subset Y \subset X$

(1) Если Y открыто в X, то A открыто в $Y \Longleftrightarrow A$ открыто в X

(2) Если Y замкнуто в X, то A замкнуто в $Y \Longleftrightarrow A$ замкнуто в X

Доказательство: (1) $\Rightarrow A = Y \cap U$, где U открыто в $X \Rightarrow A$ открыто в X

$(\Leftarrow) A = Y \cap \underbrace{A}_{x} \Rightarrow A$ открыто в Y

(2) Аналогично. $\quad \square$

6.1 Инициальные топологии. Произведения топологических пространств.

1 *Инициальные топологии*

X - множество, $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ - семейство топологических пространств $(I \neq \varnothing)$; $(f\colon X \to X_i)_{i \in I}$ - семейство отображений.

Определение. ***Инициальная топология*** на X, порожденная семейством $(f_i)_{i \in I}$ - это топология τ_{in} на X с предбазой $\left\{f_i^{-1}(U) : i \in I, U \in \tau_i\right\}$

Пример 1. X - топологическое пространство, $Y \subset X$

Индуцированная топология на Y = инициальная топология, порожденная $\{i_Y : Y \to X\}$

Обозначение: pt - топологическое пространство, состоящее из одной точки. (от слова point)

Пример 2. X - множество. Инициальная топология на X, порожденная $\{X \to \mathrm{pt}\}$ - антидискретная топология.

Теорема (основные свойства инициальной топологии)

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

X - множество, снабженное инициальной топологией, порожденной семейством $(f_i\colon X \to X_i)_{i\in I}$

(1) τ_{in} - самая грубая топология на X, в которой все f непрерывны,

(2) Если Y - топологическое пространство, то отображение $g\colon Y \to X$ непрерывно $\iff f_i \circ g\colon Y \to X_i$ непрерывно $\forall\, i$.

Доказательство: (1) $\forall\, i \in I\ \forall\, U \in \tau_i \quad f_i^{-1}(U) \in \tau_{in} \Rightarrow f_i$ непрерывно.

Пусть σ - некоторая топология на X, т.ч. $\forall\, i \in U \quad f_i\colon (X, \sigma) \to X_i$ непрерывно

$\forall\, i \in I\ \forall\, U \in \tau_i \quad f_i^{-1}(U) \in \sigma \Rightarrow (\ \tau_{in}) \subset \sigma \Rightarrow \tau_{in} \subset \sigma$

(2) ($\Rightarrow$) Если g непрерывно, то $f_i \circ g$ непрерывно, т.к. f непрерывно

($\Leftarrow$) Пусть $f_i \circ g$ непрерывно $\forall\, i$

Достаточно доказать: $\forall$ множества $V \subset X$ из предбазы $\tau_{in} \quad g^{-1}(V)$ открыто в Y

$V = f_i^{-1}(U)$, где $U \subset X$ открыто $\Rightarrow g^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ g)^{-1}(U)$ - открыто в Y $\square$

Упражнение τ_{in} - единственная топология на X со свойством (2).

6.2 Произведения множеств

$(X_i)_{i\in I}$ - семейство множеств.

Определение. *Произведение* семейства $(X_i)_{i\in I}$ - множество:

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ x\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i \middle| \forall\, i \in I\ x(i) \in X_i \right\}$$

Частный случай Если $X_i = Y \forall\, i$, то $\prod\limits_{i\in I} X_i = Y^I$ - множество всех отображений $I \to Y$

Обозначения. $\forall\, x \in \prod\limits_{i\in I} X_i \ \ x_i = x(i), \ \ x = (x_i)_{i\in I} \ \ (x_i \in X_i)$

Если $I = \{1, \ldots, n\}$, то вместо $\prod\limits_{i\in I} X_i$ пишут $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ или $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

В этом случае элементы $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ - упорядоченные наборы $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i$.

Обозначение. $\forall\, j \in I \ \ p_J\colon \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_j, \ \ p_j(x) = x_j$

p_j - ***каноническая проекция*** на X_j

6.3 Произведения топологических пространств

$(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ - семейство топологических пространств, $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$

Определение. ***Топология произведения*** (*тихоновская топология*) на X - это инициальная топология, порожденная семейством $\{p_j\colon X \to X_j\}_{j\in I}$ канонических проекций.

Наблюдение: (1) $\forall$ открытого $U \subset X_i$

$p_i^{-1}(U) = \prod\limits_{j\in J}$, где $V_j = \begin{cases} U & j = i \\ X_j & j \neq i \end{cases}$. Множества вида (1) образуют предбазу X.

(2) $\forall$ конечного $I_0 \subset I$, $\forall\, i \in I_0$ пусть $U_i \subset X_i$ - открытое множество.

(**) $\bigcap\limits_{i\in I_0} p_i^{-1}(U_i) = \prod\limits_{j\in I} V_j$, где $V_j = \begin{cases} U_j & j \in I_0 \\ X_j & j \notin I_0 \end{cases}$

Множества вида (**) образуют базу X.

(3) Если I конечно, то базу X образуют множества вида $\prod\limits_{i\in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто.

Предостережение-упражнение: Если I бесконечно, то $\prod\limits_{i\in I} U_i$ не обязательно открыто в X (где $U_i \subset X_i$ открыто)

Отступление: коммутативные диаграммы

(здесь будут картинки диаграмм)

Теорема (универсальное свойство произведения)

$(X_i)_{i\in I}$ - семейство топологических пространств, $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$, $p_i\colon X \to X_i$ - каноническая проекция; Y - топологическое пространство.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & X \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Тогда для любого семейства $(f_i\colon Y \to X_i)_{i\in I}$ непрерывных отображений $\exists\,!$ непрерывное отображение $f\colon Y \to X_i$, такое что диаграмма (D) коммутативна $\forall\, i \in I$

Доказательство: Определим $f\colon Y \to X$ так: $(f(y))_i = f_i(y)\ \forall\, y \in Y, \forall\, i \in I$

Отображение f делает диаграмму (D) и является единственным отображением с этим свойством. Его непрерывность следует из теоремы о свойствах инициальной топологии. $\square$.

Предложение. (X_i, ρ_i) $(i = 1, \dots, n)$ - метрические пространства, $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$

Определим $\rho\colon X \times X \to [0, +\infty)$ так: $\rho(x, y) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \rho_i(x_i, y_i)$

Тогда ρ-метрика на X, и она порождает топологию на X.

Доказательство: Упражнение: ρ - метрика.

Обозначим $\tau =$ топология произведения на X, τ_ρ - тополония, порожденная ρ.

Заметим: $\rho(x, y) < r \iff \rho_i(x_i, y_i) < r\ \forall\, i = 1, \dots, n$

$(\Rightarrow) B_r(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} B_r(x_i) \Rightarrow B_r(x)$ открыто в $\tau \Rightarrow \tau_\rho \subset \tau$

Пусть U - множество из базы τ; $U = \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$, где $U_i \subset X_i \forall\, i$ открыто

Пусть $x \in U$. Тогда $\forall\, 1 = 1, \dots, n\ \ x_i \in U_i \Rightarrow \exists\, r_i > 0\colon B_r(x) \subset U_i$

Обозначим $r = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i \iff B_r(x) \prod\limits_{i=1}^{n} B_r(x_i) \subset \prod\limits_{i=1}^{n} B_{r_i}(x) \subset \prod\limits_{i=1}^{n} U_i = U$

$\Rightarrow U$ открыто в $\tau_\rho \Rightarrow \tau \subset \tau_\rho \Rightarrow \tau = \tau_\rho$ $\square$

Следствие: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

Стандартная топология на $\mathbb{K}^n$, порожденная $||\cdot||_\infty$ (или $||\cdot||_1$ или $||\cdot||_2$) совпадает с топологией произведения $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$.

7 Лекция 7. 27 ноября 2019 г.

Обозначение. $(X_i)_{i\in I}, (Y_i)_{i\in I}$ — семейства множеств, $(f_i\colon X_i \to Y_i)_{i\in I}$ — семейство отображений.

Определение. (декартово) произведение семейства (f_i) отображение $\prod\limits_{i\in I} f_i\colon \prod\limits_{i\in I} X_i \to \prod\limits_{i\in I} Y_i, (x_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(x_i))_{i\in I}$

Предложение. Пусть $(X_i)_{i\in I}, (Y_i)_{i\in I}$ — семейства топологических пространств, $(f_i\colon X_i \to Y_i)_{i\in I}$ — семейство непрерывных отображений.

Тогда $\prod f_i\colon \prod X_i \to \prod Y_i$ — непрерывно.

Доказательство: Обозначим $X - \prod X_i, Y = \prod Y_i, f = \prod f_i$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i^X"'] & Y \arrow[d, "p_i^Y"] \\ X_i \arrow[r, "p_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

f непрерывно $\iff p_i^Y \circ f$ непрерывно $\forall\, i$ (см. свойства инициальной топологии) $\iff f_i \circ p_i^X$ непрывно $\forall\, i$; а это верно по условию. $\square$

Следствие: X — топопологическое пространство, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $C(X) = C(X, \mathbb{R})$.

Тогда $\forall\, f, g \in C(X) \quad f + g \in C(X)$ и $fg \in C(X)$

Если $f(x) \neq 0 \,\forall\, x \in X$, то $\dfrac{1}{f} \in C(X)$

Доказательство:

Предложение: Топологическое пространство X — хаусдорфово $\iff$ диагональ $D_X = \{(x, x) \colon x \in X\} \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$

(картинка квадрата)

Доказательство: D_x замк в $X \times X \iff \forall\, p \in (X \times X) \backslash D_x \,\exists$ окрестность W вида $W = U \times V$ (где $U, V \subset X$ откр.), т.ч. $W \cap D_x = \varnothing$

$\iff \forall\, x, y \in X$, т.ч. $x \neq y, \exists$ откр $U, V \subset X$, т.ч. $x \in U, y \in V$, и $U \cap V = \varnothing \iff X$ хаусдорфово. $\square$.

Следствие 1. X, Y — топологические пространства, Y хаусдорфово, $f, g \colon X \to Y$ непрерывно $\Rightarrow \{x \in X \colon f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X.

Доказательство: Рассмотрим $F \colon X \to Y \times Y, \quad F(x) = (f(x), g(x))\,, \quad F$ непрерывно.

$\{x \colon f(x) = g(x)\} = F^{-1}(D_Y)$, а D_Y замкнуто в $Y \times Y$. $\square$.

Следствие 2. X, Y — топологические пространства, Y хаусдорфово, $f, g \colon X \to Y$ непрерывно.

Пусть $X_0 \subset X$ — плотное подмножество, $f\big|_{x_0} = g\big|_{x_0} \Rightarrow f = g$

Доказательство: Множество $S = \{x \in X \colon f(x) = g(x)\}$ замкнуто и содержит $X_0 \Rightarrow S = X$ $\square$.

7.1 Финальные топологии. Дизъюнктные объединения

X — множество, $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ — семейство топологических пространств; $(f_i \colon X_i \to X)_{i \in I}$ — семейство отображений

Определение. ***Финальная топология*** на X, порожденная семейством отображений $(f_i)_{i \in I}$ — это

$$\tau_{\text{fin}} = \{U \subset X \colon f^{-1}(U) \in \tau_i \,\forall\, i \in I\}$$

Замечание: τ_{fin} действительно является топологией на X

Примечание: Финальная топология на X_i, порожденная отображением $\{\varnothing \to X\}$ — дискретная топология.

Теорема: (основные свойства финальной топологии)

(1) τ_{fin} — самая тонкая топология на X_i , т.ч. все $f_i \colon X_i \to X$ непрерывны (существует ли самая грубая? Да: антидискретная)

(2) Если Y — топологическое пространство, то отображение $g \colon X \to Y$ непрерывно $\iff g \circ f_i$ непрерывно $\forall\, i$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & Y \\ X_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, "g \circ f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство:

(1) $\forall\, i \in I \,\forall\, U \in \tau_{\text{fin}} \quad f_i^{-1}(U) \in \tau_{\text{fin}}$ — верно по определению $\tau_{\text{fin}} \Rightarrow f$ непрерывно.

Пусть σ — топология на X, т.ч. $\forall\, i \in I \quad f_i \colon X_i \to (X, \varnothing)$ непр

$\forall\, U \in \sigma \,\forall\, i \in I \quad f_i^{-1}(U) \in \tau_{\text{fin}} \Rightarrow U \in \tau_{\text{fin}} \Rightarrow \sigma \subset \tau_{\text{fin}}$

(2) g непрерывно $\iff \forall$ откр $V \subset Y \quad g^{-1}(V) \in \tau_{\text{fin}} \iff \forall$ откр $V \subset Y \forall i \in I \quad \underbrace{f_i^{-1}(g^{-1}(V)))}_{(g \circ f_i}{}^{-1}(V) \in \tau_{ß}$

$\iff \forall\, i \in I \quad g \circ f_i \colon X_i \to Y$ непрерывно. $\square$

Упражнение: τ_{fin} — единственная топология на X, обладающая свойством (2).

7.2 Дизъюнктные объединения множеств

$(X_i)_{i\in I}$ — семейство множеств.

Определение. *Дизъюнктное объединение* семейства $(X_i)_{i\in I}$ — множество

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i = \{(x,i) \colon i \in I, x \in X_i\}$$

Обозначение $\forall\, j \in I \quad q_j \colon X_j \to \sqcup_{i\in I} X_i$; $q_j(x) = (x,j)$ — каноническое вложение X_j в $\sqcup_{i\in I} X_i$.

Наблюдение:

(1) q_j — инъекция $\forall\, j$

(2) $q_i(X_i) \cap q_j(X_j) = \varnothing \;\forall\, i \neq j$

(3) $\sqcup_{i\in I} X_i = \bigcup\limits_{i\in I} q_i(X_i)$

Соглашение: Отождествляем $X_j \subset q_j(X)$ посредством q_j

7.3 Дизъюнктные объединения (несвязные суммы) топологических пространств

$(X_i)_{i\in I}$ — семейство топ пр; $X = \sqcup_{i\in I} X_i, q_j \colon X_j \to X$ — каноническое вложение $(j \in I)$.

Определение. *Топология дизъюнктного объединения* на X — финальная топология, порожденная семейством $(q_i \colon X_i \to X)_{i\in I}$ канонических вложений.

Таким образом $U \subset X$ откр $\iff U \cap X_i$ открыто в $X_i \forall\, i \in I$

Теорема: (универсальное свойство дизъюнктного объединения)

$(X_i)_{i\in I}$ — семейство топологических пространст, Y — топологическое пространство, $X = \sqcup_{i\in I} X_i$.

Тогда для любого семейства непрерывных отображений $(f_i \colon X_i \to Y)_{i\in I}$ существует единственное непрерывное $f \colon X \to Y$, т.ч. диаграмма (D) коммутативна $\forall\, i \in i$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
X_i \arrow[u, "q_i"] \arrow[ur, "f_i"'] & (D)
\end{tikzcd}$$

Доказательство:

зададим $f \colon X \to Y$ так:

$$f((x,i)) = f_i(x) \quad (\forall\, i \in I, \forall\, x \in X_i) \quad (*)$$

Отображение f делает (D) коммутативной и является единственным отображением с этим свойством (т.к. (*) эквивалентно $f(q_i(x)) = f_i(x)$).

Непрерывность f из теоремы 1 $\square$.

7.4 Связные топологические пространства

Определение. Топологическое пространство X ***связно*** $\iff X$ не представимо в виде $X = U \cup V$, где U, V открыты, непусты и $U \cap V = \varnothing$

X *несвязно*, если оно не является связным

Подмножество $Y \subset X$ *связно* $\iff$ оно связно как топологическое пространство в индуцированной топологии.

Наблюдение: X связно $\iff X$ не представимо в виде $X = A \cup B$, где A, B замкнуты, непусты и $A \cap B = \varnothing$ $\iff$ не существует подмножества $A \subset X, A \neq X, A \neq \varnothing$, открытого и замкнутого одновременно.

Пример. Дискретное пространство, состоящее более чем из 1 точки, несвязно.

Пример 2. Антидискретное пространство связно.

Пример 3. $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ несвязно, т.к. $\mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$.

Пример 4. (картинка) $\overline{B_1}(0,0) \cup \overline{B_1}(0,3) \subset \mathbb{R}^2$ — несвязное.

Пример 5. Любое подмножество $A \subset \mathbb{Q}$ (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$), состоящее более чем из одной точки, несвязно.

Действительно: пусть $a, b \in A, a < b. \exists$ иррац. $c \in \mathbb{R}$, т.ч. $a < c < b$

$U = A \cap (-\infty;\ c), V = A \cap (c,\ +\infty) \Rightarrow U, V$ откр. в $A, U \cap V = \varnothing, U \cup V = A$.

8 Лекция 8. 4 декабря 2019 г.

Предложение. Отрезок $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ связен.

Доказательство: (от противного)

Предположим, что $[a,\ b] = U \cup V, \quad U, V \subset [a,\ b]$ открыты (в топологии отрезка $[a,\ b]$), непусты, $U \cap V = \varnothing$.

Можем считать, что $b \in V \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, т.ч. $(b-\varepsilon; b] \subset V \quad (1)$

Обозначим $c = \sup V$.

Заметим, что:

$c > a$ (иначе $U = \{a\}$ — противоречие с тем, что U открыто),

$c < b$ в силу (1)

Если $c \in U \Rightarrow \exists\, \delta > 0\colon (c-\delta, c+\delta) \subset U \Rightarrow c + \dfrac{\delta}{2} \in U$ — противоречит с определением c.

Если $c \in V \Rightarrow \exists\, \delta > 0\colon (c-\delta, c+\delta) \subset V \Rightarrow \forall\, x \in U\ x \leqslant c - \delta$ — противоречие с определением c.

Значит, $c \notin U \cup V = [a,\ b]$ — противоречие. Следовательно, отрезок $[a,\ b]$ связен. $\square$.

Теорема: (свойства связных пространств)

(1) X, Y — топологические пространства, X связно, $f\colon X \to Y$ непрерывно $\Rightarrow f(X)$ связно.

(2) Пусть $X = U \cup V, \quad U, V$ открыты, $U \cap V = \varnothing$;

пусть $A \subset X$ связно $\Rightarrow A \subset U$ либо $A \subset V$.

(3) $A, B \subset X,\ A \subset B \subset \overline{A},\ A$ связно $\Rightarrow B$ связно.

(4) Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — семейство связных подмножеств X, имеющих общую точку $\Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ связно,

(5) Пусть любые $x, y \in X$ лежат в некотором связном подмножестве $X \Rightarrow X$ связно.

(6) Произведение конечного числа связных топологических пространств связно:

$X_1, \ldots X_n$ — связные топологические пространства $\Rightarrow X_1 \times \ldots \times X_n$ связно.

Доказательство:

(1) Можем считать: $f(X) = Y$ (f — сюръекция)

Пусть $Y = U \cap V$, U, V открыты, непусты, $U \cap V = \varnothing$

f — сюръекция $\Rightarrow X = \underbrace{f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)}_{\text{откр., непусты, не пересек. — противоречие}}$

(2) $A = \underbrace{(U \cap A) \cup (V \cap A)}_{\text{откр. в A и не пересек.}} \Rightarrow U \cap A$ либо $V \cap A$ пусто. Если $U \cap A = \varnothing \Rightarrow A = V \cap A$, т.е. $A \subset V$.

(3) Можем считать, что $B = X$; тогда $\overline{A} = X$

Пусть $X = U \cup V$, $U, V \subset X$ откр, непусты, $U \cap V = \varnothing$

Из (2) $A \subset U$ либо $A \subset V$. Пусть $A \subset U \Rightarrow A \cap V = \varnothing$ — противоречие с тем, что $\overline{A} = X \Rightarrow X$ связно.

(4) Можем считать: $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = X$. Пусть $a \in A_i \forall\, i \in I$

Пусть $X = U \cup V,\ U, V \subset X$ откр, непусты, $U \cap V = \varnothing$

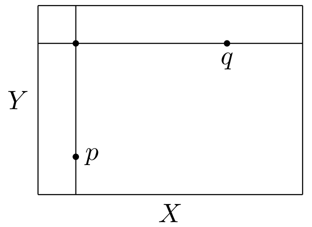
Пусть $a \in U$. Из (2): $A_i \subset U\ \forall\, i \in I \Rightarrow V = \varnothing$ — противоречие. $\Rightarrow X$ связно.

(5) Зафиксируем произвольную точку $x \in X$. $\forall\, y \in X\ \exists$ связ $A_{xy} \subset X$, т.ч. $x, y \in A_{xy} \Rightarrow \bigcup\limits_{y \in X} A_{xy} = X$

Из (4): X связно.

(6) Достаточно доказать для $n = 2$ (индукция). Обозначим $X_1 = X, X_2 = Y$

Зафиксируем $p = (x_1, y_1) \in X \times Y, q = (x_2, y_2) \in X \times Y$



Обозначим $A = \{x_1\} \times Y, \quad B = X \times \{y_2\}$

A гомеоморфно Y, B гомеоморфно $X \Rightarrow A, B$ связны.

$(x_1, y_2) \in A \cap B \Rightarrow A \cap B = \varnothing \xrightarrow[(4)]{} A \cup B$ связно.

$p, q \in A \cup B \xrightarrow[(5)]{} X \times Y$ связно. $\quad\square$.

Упражнение. Доказать: произведение любого семейства связных топологических пространств связно.

Определение. X — топологическое пространство, $x, y \in X$

Путь в X из x в y — непрерывное отображение $f\colon [0,1] \to X$, т.ч. $f(0) = x, f(1) = y$

Определение. X *линейно связно*, если $\forall\, x, y \in X$ существует путь из x в y

Предложение. X линейно связно $\Rightarrow X$ связно.

Доказательство: Пусть $x, y \in X; \quad f\colon [0,\ 1] \to X$ — путь из x в $y; \quad C = f\left([0,\ 1]\right)$

C связно (т.к. $[0,1]$ связен; см. п (1) теоремы); $x, y \in C$. Теорема, п(5) $\Rightarrow X$ связно. $\square$

Теорема: (свойства линейно связных пространств)

(1) X, Y — топологические пространства, X линейно связно, $f\colon X \to Y$ непрерывно $\Rightarrow f(X)$ линейно связно.

(2) Пусть $(A_i)_{i\in I}$ — семейство линейно связных подмножеств X, имеющих общую точку $\Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ линейно связно,

(3) Произведение конечного числа линейно связных топологических пространств линейно связно:

$X_1, \ldots X_n$ — линейно связные топологические пространства $\Rightarrow X_1 \times \ldots \times X_n$ линейно связно.

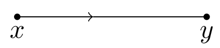
Доказательство: упражнение.

Пример 1. X — нормированное пространство над $\mathbb{R} \Rightarrow X$ линейно связно.

Действительно:

$\forall\, x, y \in X$ рассмотрим $f\colon [0,1] \to X, \quad f(t) = ty + (1-t)x$

f непрерывно (упражнение), $f(0) = x, f(1) = y$



Определение. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$; $x, y \in X$

Обозначим $[x, y] = \{ty + (1-t)x\colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Это множество называется *отрезком* с концами x, y.

Множество $A \subset X$ *выпукло* $\Longleftrightarrow \forall\, x, y \in A$ выполнено $[x, y] \subset A$

Упражнение. Шар в нормированном пространстве — выпуклое множество.

Пример 2. Любое выпуклое подмножество нормированного пространства (над $\mathbb{R}$) линейно связно. (док-во — см. пример 1)

Пример 3/упр.

X — нормированное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim X > 1 \Rightarrow X \backslash \{0\}$ линейно связно.

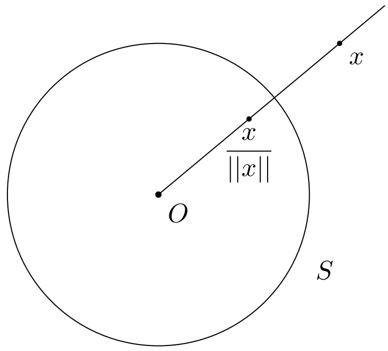
Пример 4. X — нормированное пространство над $\mathbb{R}, \dim X > 1$

Сфера $S = \{x \in X \colon ||x|| = 1\}$ линейно связна

Действительно: рассмотрим $f \colon X \backslash \{0\} \to S,\ f(x) = \dfrac{x}{||x||}$.

Упражнение: f непрерывно и сюръективно

$\Rightarrow S$ линейно связно.

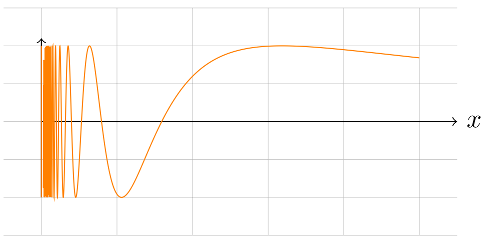


Пример 5. (n-мерный тор)

Обозначим $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ (окружность)

$T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots S^1}_{n}$ — *n-мерный тор.* T^n линейно связен.

Упражнение. Обозначим $X = \left\{ \left(x, \sin \dfrac{1}{x} \right) \colon 0 < x \leqslant 1 \right\} \cup \{(0, y) \colon\ -1 \leqslant y \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^2$



Доказать: X связно, но не линейно связно.

Определение. Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ — *промежуток* $\iff A = (a, b)$ (где $-\infty \leqslant a < c \leqslant +\infty$),

либо $A = [a, b]$ $(-\infty < a \leqslant b < +\infty)$,

либо $A = [a, b)$ (где $-\infty < a < b \leqslant +\infty$),

либо $A = (a, b]$ $(-\infty \leqslant a < b < +\infty)$,

либо $A = \varnothing$

Упражнение: A — промежуток $\iff A$ выпукло

Предложение. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) A связно; (2) A линейно связно; (3) A — промежуток.

Доказательство: (3) $\Rightarrow$ (2) — очевидно; (2) $\Rightarrow$ (1) — знаем.

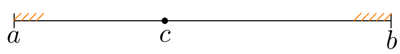
(1) $\Rightarrow$ (3) : предположим, что A ограничено. Обозначим $a = \inf A,\ b = \sup A \Rightarrow A \subset [a,\ b]$

Покажем, что $(a, b) \subset A$. (этого нам достаточно)

Пусть $\exists\, c \in (a, b)$, т.ч. $c \notin A$. Обозначим $U = (-\infty;\ c) \cap A,\ V = (c;\ +\infty) \cap A$.

U, V открыты в A, $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = A, U \neq \varnothing, V \neq \varnothing$

— противоречие со связностью A.



Для неограниченного A рассуждения аналогичны (упр.) $\square$

Следствие (теорема о промежуточном значении)

X — связное топологическое пространство, $f \in C(X, \mathbb{R})$, $x, y \in X$ $f(x) \leqslant f(y)$

Тогда $\forall\, c \in [f(x), f(y)]\ \exists\, z \in X$, т.ч. $c = f(z)$.

Доказательство: $f(X)$ связное подмножество $\mathbb{R} \Rightarrow f(X)$ — промежуток; $f(x), f(y) \in f(X) \Rightarrow [f(x), f(y)] \subset f(X)$ $\square$.

9 Лекция 9. 5 декабря 2019 г.

9.1 Связные компоненты.

Определение. Пусть $(X,\ \tau)$ - топологическое просранство. Связное множество $A \subset X$ называется ***связной компонентой*** (или ***компонентой связности***), если оно является максимальным по вложению среди связных множеств. Иначе говоря, $\forall\ B \supsetneq A\ \Rightarrow\ B$ - несвязное.

Теорема: (Свойства связных компонент)

(1) Связные компоненты образуют разбиение X (то есть $\forall\ X_1,\ X_2$ - связные компоненты $\Rightarrow\ X_1 = X_2$ или $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и $X = \bigcup\{A \subset X \mid A$ - компонента свзности в $X\}$).
(2) $\forall\, x \in X\ \Rightarrow\ C(x) := \bigcup\{A \subset X \mid A \ni x,\ A$ - связно$\}$ является связной компонентой, содержащей x.
(3) Всякое непустое связное множество $A \subset X$ содержится ровно в одной связной компоненте.
(4) Связные компоненты замкнуты в X.

Доказательство:

(1), (2): пусть $X_1,\ X_2$ - копмоненты связности, $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$. Тогда (по свойствам сваных множеств) $X_1 \cup X_2$ тоже связное, $X_1 \cup X_2 \supset X_1,\ X_2$, а так как $X_1,\ X_2$ - максимальные, то $X_1 = X_1 \cup X_2 = X_2$.
Аналогично, $C(x)$ - связное и содержит в себе любое связное множество, содержащее точку x, значит оно максимальное, то есть является компонентой связности.
Теперь множество $\{C(x) \mid x \in X\}$ есть множество всех связных компонент и очевидно, что обьединение элементов этого множества является все множество X.

(3): пусть B - такая компонента связности, что $A \cap B \neq \varnothing$ (такая существует, так как $\forall\ \ x \in A\ \exists\ B = C(x):\ x \in B \cap A \neq \varnothing$), тогда $A \cup B \supset B$ - связное множество, а значит $A \cup B = B$. B единственно в силу (1).

(4): пусть B - связная компонента, тогда $\overline{B} \supset B$ - связное множество $\Rightarrow \overline{B} = B$. $\square$

Следствие: если X - пространство, состоящее из конечного числа связных компонент, то компоненты связности открыты.

Доказательство: $X = C_1 \cup ... \cup C_n\ \ \Rightarrow C_i = X \backslash (C_1 \cup ... \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup ... \cup C_n) = X \backslash$[замкнутое множество] $\ \Rightarrow C_i$ - открытое множество. $\square$

Пример 1. Связные компоненты $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ - это $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$.

Пример 2. $X_1,\ X_2$ - непустые связные пространства, $X = X_1 \sqcup X_2\ \Rightarrow\ X_1,\ X_2$ - связные компоненты X.

Пример 3. X - дискретное топологическое пространство $\Rightarrow$ связные компоненты - все одноэлементные множества.

Пример 4. То же самое верно для $X = \mathbb{Q}$ со стандартной топологией.

Упражнение: описать компоненты канторова множества.

Определение. Линейно связное $A \subset X$ называется ***линейно связной компонентой***, если A - максимальное линейно связное множество.

Теорема

(1) Линейно связные компоненты образуют разбиение X.
(2) $\forall\, x \in X$ множество $PC(x) := \bigcup\{A \subset X\ -$ линейно связное $\mid A \ni x\} = \{y \in X \mid \exists$ путь из x в $y\}$ является линейно связной компонентой, содержащей x.
(3) Всякое непустое линейно связное подмножество $A \subset X$ содержится ровно в одной линейно связной компо-

ненте.

Доказательство: в качестве упражнения. □

Следствие: разбиение пространства на линейно свзные компоненты является измельчением разбиения на связные компоненты.

Упражнение: описать линейно связные компоненты $X = \{(x, \sin\frac{1}{x})\} \cup [(0,\ -1),\ (0,\ 1)]$. Замкнуты ли они?

Определение. Топологическое пространство X называется ***локально линейно связным***, если $\forall\ \ x \in X\ \forall\ \ U$ - окрестности точки $x\ \exists\ V \subset U$ - линейно связная окрестность точкиx.

Пример 5. Открытое множество нормированного пространства локально линейно связно.

Пример 6. Любое топологическое многообразие локально линейно связно.

Предложение. Пусть X - локально линейно связное пространство, тогда его линейно связные компоненты открыты в X и совпадают со связными компонентами.

Доказательство: Пусть A - линейно связная компонента. $\Rightarrow\ \forall\ \ x \in A\ \exists\ U_x \ni x$ - линейно связная окрестность $A \cup U_x \supset A$ - линейно связно $\Rightarrow\ \ A = A \cup U_x$, то есть $U_x \subset A\ \Rightarrow\ A = \bigcup\limits_{x \in A} U_x$ - объединение открытых множеств, значит A - открыто.

Пусть B - связная компонента, такая что $A \subset B$. $B \backslash A = \bigcup\{$линейно связные компоненты, содержащиеся в B и отличные от $A\}\ \Rightarrow\ \ B \backslash A$ - открыто $\Rightarrow\ \ B = A \cup B \backslash A$ - объединение открытых $\Rightarrow\ \ B \backslash A = \varnothing$. □

9.2 Компактные топологические пространства.

Пусть X - множество, $\Gamma \subset 2^X$.

Определение. Γ - ***покрытие*** подмножества $Y \subset X$ (Γ ***покрывает*** Y или Y ***покрывается*** семейством Γ), если $\bigcup \Gamma \supset Y$. Если на X есть топология, то открытое покрытие означает покрытие открытыми множествами, замкнутое покрытие - замкнутыми.

Определение. Топологическое пространство X - ***компактно***, если из всякого открытого покрытия Γ можно извлечь конечное подпокрытие (то есть конечное подсемейство $\Omega \subset \Gamma$, являющееся покрытием).

Определение. $F \subset 2^X$. F - центрированное семейство, если всякое конечное семейство $F_0 \subset F$ имеет непустое пересечение: $\bigcap F_0 \neq \varnothing$.

Предложение. Топологическое пространство X компактно $\iff\ \ \forall\ \ \Gamma \subset 2^X$ - центрированное семейство его замкнутых подмножеств $\Rightarrow \bigcap \Gamma \neq \varnothing$.

Доказательство: Пусть X - множество, $\mathcal{F} \subset 2^X$, $\Gamma = \{X \backslash F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Заметим:

(1) $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing\ \Leftrightarrow\ \Gamma$ - покрытие X;

(2) $\bigcap \mathcal{F}$ - центрированное $\Leftrightarrow$ никакое конечное подсемейство в Γ не покрывает X.

Скомбинировав эти два замечания, получим требуемое. □

Предложение. X - топологическое пространство, $Y \subset X$.

Y - компактно в индуцированной топологии $\iff$ каждое покрытие Y множествами, открытыми в X, имеет конечное подпокрытие.

Доказательство: $\Rightarrow$: Пусть $\{U_i \mid i \in I\}$ - покрытие Y множестами, открытыми в X. Обозначим $V_i = U_i \cap Y$ - открытые в индуцированной топологии множества $\Rightarrow\ \ \{V_i\}$ - открытое покрытие $Y\ \Rightarrow\ \exists\ i_1,\ \dots,\ i_n :\ Y = V_{i_1} \cup\ \dots\ \cup V_{i_n}\ \Rightarrow\ Y \subset U_{i_1} \cup\ \dots\ \cup U_{i_n}$.

$\Leftarrow$: Пусть$\{V_i \mid i \in I\}$ - покрытие Y множестами, открытыми в Y, тогда $V_i = U_i \cap Y$, где U_i - некоторые открытые в X множества $\Rightarrow\ \ \{U_i\}$ - открытое покрытие $Y\ \Rightarrow\ \exists\ i_1,\ \dots,\ i_n :\ Y = U_{i_1} \cup\ \dots\ \cup U_{i_n}\ \Rightarrow\ Y \subset V_{i_1} \cup\ \dots\ \cup V_{i_n}$. □

Пример 7. Конечное топологическое пространство компактно.

Пример 8. Дискретное пространство компактно $\iff$ оно конечно.

Пример 9. Антидискретное пространство компактно

Теорема

Отрезок $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ компактен

Доказательство: смотреть курс анализа

10 Лекция 10. 11 декабря 2019 г.

10.1 Основные свойства компактных пространств.

Напоминание.

Пусть X - метрическое пространство, $A \subset X$. ***Диаметр*** множества A - число (возможно ∞) $diam\ A := \sup\{\rho(x,\ y) \mid x,\ y \in X\}$.

Множество A - ***ограничено***, если $diam\ A\ <\ \infty$.

Предложение. A - ограниченное множество $\leftrightarrow$ A содержится в некотором шаре.

Доказательство:

$\Leftarrow$: $A \subset B_r(x)\ \Rightarrow\ diam\ A \leqslant\ 2r\ <\ \infty$.

$\Rightarrow$: $A \subset B_{diam\ A}(x),\ x \in A$. $\square$

Теорема: (Основные свойства компактных пространств)

(1) $f:\ X \to Y$ - непрерывное отображение, X - компактно $\Rightarrow$ $f(X)$ - компактно.

(2) X - компактно, $Y \subset X$ - замкнуто $\Rightarrow$ Y - компактно.

(3) X - хаусдорфово, $A,\ B \subset X$ - компактны, $A \cap B = \varnothing$ $\Rightarrow$ $\exists$ открытые множества $U,\ V \subset X : U \supset A,\ V \supset B,\ U \cap V = \varnothing$.

(4) X - хаусдорфово, $Y \subset X$ - компакт $\Rightarrow$ Y замкнуто в X.

(5) X - метрическое пространство, $Y \subset X$ - компакт $\Rightarrow$ Y - ограничено.

(6) X - компакт, Y - хаусдофово, $f:\ X \to Y$ - непрерывно $\Rightarrow$ f - замкнуто.

(7) X - компакт, Y - хаусдофово, $f:\ X \to Y$ непрерывная биекция $\Rightarrow$ f - гомеоморфизм.

Доказательство:

(1): Можем считать $f(X) = Y$. Пусть $U \subset 2^Y$ - открытое покрытие Y $\Rightarrow$ $\{f^{-1}(V) \mid V \in U\}$ - открытое покрытие X в силу непрерывности f $\Rightarrow$ $\exists\ V_1,\ \dots,\ V_n \in U : \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(V_i) = X$ $\Rightarrow$ $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i = Y$ $\Rightarrow V_1,\ \dots,\ V_n$ - Конечное подпокрытие Y.

(2): Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ - покрытие Y множествами, открытыми в X, тогда $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{X\backslash Y\}$ - открытое покрытие X, значит $\exists\ V_1,\ \dots,\ V_n \in \{U_i\}_{i\in I} \cup \{X\backslash Y\}$ - конечное подпокрытие X. Если $X\backslash Y = V_i$, то $V_1,\ \dots,\ V_{i-1},\ V_{i+1},\ \dots,\ V_n$ - конечное подпокрытие Y.

(3): Зафиксируем $x \in A$. $\forall\ \ y \in B\ \exists\ U_{xy} \ni x,\ V_{xy} \ni Y\ :\ \ U_{xy} \cap V_{xy} = \varnothing$, значит $\{V_{xy}\}$ - покрытие B $\Rightarrow$ $B \subset V_{xy_1} \cup\ \dots\ \cup V_{xy_n} = V_x$ - открытое множество. Обозначим $U_x = U_{xy_1} \cap\ \dots\ \cap U_{xy_n}$ - открытое множество, $U_x \ni x,\ V_x \supset B,\ U_x \cap V_x = \varnothing$. Теперь $\{U_x \mid x \in A\}$ - открытое покрытие A $\Rightarrow$ $\exists\ \{U_{x_1},\ \dots,\ U_{x_n}\}$ - конечное подпокрытие A. Положим $U = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i},\ V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$ - открытые монжества, $U \supset A,\ V \supset B,\ U \cap V = U \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (U \cap V_{x_i}) =$

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}(U_{x_i}\bigcap\limits_{j=1}^{n}(V_{x_j}))=\varnothing$, так как $U_{x_i}\bigcap\limits_{j=1}^{n}(V_{x_j})\subset U_{x_i}\cap V_{x_i}=\varnothing$.

(4): Пусть $x\in X\backslash Y$. $\{x\}$, Y - компакты, тогда по (3) $\exists\, U\ni x, V\supset Y:\ u\cap V=\varnothing\ \Rightarrow\ U\cap Y=\varnothing\ \Rightarrow\ x\notin\overline{Y}\ \Rightarrow\ Y=\overline{Y}$.

(5): Рассмотрим открытые шары $\{B_r(x)\mid r\in\mathbb{R}\}$, где $x\in X$ - некоторая точка. Заметим, что $Y\subset X=\bigcup\limits_{r}B_r(x)\ \exists\, r_1,\ \ldots,\ r_n:$ $Y\subset B_{r_1}(x)\cup\ \ldots\ \cup B_{r_n}(x)=B_r(x)$, где $r=\max\{r_1,\ \ldots,\ r_n\}$.

(6): Пусть $B\subset X$ - замкнуто $\Rightarrow$ B - компактно в X $\Rightarrow$ $f(B)$ - компактно в хаусдорфовом Y $\Rightarrow$ $f(B)$ - замкнуто.

(7): Частный случай (6). □

10.2 Некоторые свойства центрированных множеств.

X - множество

Определение. Семейство $\mathcal{F}\subset 2^X$ называется ***центрированным***, если для любого конечного $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}\ \Rightarrow\ \bigcap\mathcal{F}_0\neq\varnothing$.

Предложение 1. X - компактно $\Leftrightarrow$ $\forall$ центрированного семейства $\mathcal{F}$ замкнутых множеств $\bigcap\mathcal{F}\neq\varnothing$.

Доказательство: было ранее. □

Предложение 2. X - компактно $\Leftrightarrow$ $\forall$ центрированного семейства $\mathcal{F}$ множеств $\bigcap\{\overline{F}\mid F\in\mathcal{F}\}\neq\varnothing$.

Доказательство:

$\Leftarrow$: из предложения (1).

$\Rightarrow$: семейство $\{\overline{F}\mid F\in\mathcal{F}\}$ - центрированное, далее смотреть предложение (1). □

Лемма. X, Y - множества, $\mathcal{F}\subset 2^X$ - центрированное семейтсво.

(1) $f:\ X\to Y$ - отображение $\Rightarrow$ $\{f(A)\mid A\in\mathcal{F}\}$ - центрированное семейство.

(2) Существует максимальное по включению центрированное семейство $\mathcal{F}_{\max}\supset\mathcal{F}$.

(3) Если $\mathcal{F}$ - максимальное центрированное множество, то $\forall\ A_1,\ \ldots,\ A_n\in\mathcal{F}$ выполнено $A_1\cap\ \ldots\ \cap A_n\in\mathcal{F}$.

Доказательство:

(1): $\forall\, A_1,\ \ldots,\ A_n\in\mathcal{F}\ \Rightarrow\ \bigcap\limits_{i=1}^{n}g(A_i)\supset g(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)\neq\varnothing$.

(2): Обозначим $\Gamma=\{\xi\subset 2^X\mid\xi$ - центрированное семейство$\}$.

Пусть $A\subset\Gamma$ - линейно упорядоченное по вложению подмножество.

Обозначим $\mathcal{H}=\bigcup\{\xi\mid\xi\in A\}$. Покажем, что $\mathcal{H}$ центрированное семейство.

Действительно, пусть $H_1,\ \ldots,\ H_n\in\mathcal{H}\ \Rightarrow\ \forall\, i=1,\ \ldots,\ n\quad H_i\in\xi_i$, где $\xi_i\in A\ \exists\, k:\ \xi_k\supset\xi_i\ \forall\ i\ \Rightarrow\ H_1,\ \ldots,\ H_n\in\xi_k\ \Rightarrow$ $\mathcal{H}$ - центрированное.

Значит $\mathcal{H}\in\Gamma$, $\mathcal{H}\ni\xi\ \forall\ \xi\supset A$, то есть максимальное $\Rightarrow$ Γ удовлетворяет условиям леммы Цорна.

Тогда по лемме существует максимальный элемент $\mathcal{F}_{max}\in\Gamma$.

(3): Семейство $\{A_1\cap\ \ldots\ \cap A_n\}\cup\mathcal{F}$ центрировано и содержит максимальный $\mathcal{F}\ \Rightarrow$ эти множества совпадают. □

10.3 Теорема Тихонова.

Теорема: (Тихонова)

$(X_i)_{i\in I}$ - семейство компактных пространств $\Rightarrow$ $X=\prod\limits_{i\in I}X_i$ компактно.

textitДоказательство:

Пусть $\mathcal{F}\subset 2^X$ - центрированное семейство. Из леммы (2) следует, что найдется максимальное $\mathcal{F}_{max}\supset\mathcal{F}$. Достаточно доказать, что $\bigcap\{\overline{A}\mid A\in\mathcal{F}_{max}\}\neq\varnothing$ (это множество содержится в пересечении замыканий элементов из $\mathcal{F}$).

$p_i\ : X \to X_i$ - канонические проекции. Семейство $\{p_i(A) \mid A \in \mathcal{F}_{max}\} \subset 2^{X_i}$ является центрированным $\forall\ i$ (из леммы (1)) $\Rightarrow\ \exists\, x_i \in p_i(A)\ \forall\ ; A \in \mathcal{F}_{max}$ (из предложения 2).

Обозначим $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Пусть U - базисная окрестность точки x вида $U = \bigcap\limits_{i \in J} p_i(U_i)$, где $J \subset I$ конечно, $U_i \subset X_i$ открыты. Покажем, что $U \cap A \neq \varnothing\ \forall\ A \in \mathcal{F}$.

Действительно, $\forall\ i \in J\ x_i \in U_i\ \Rightarrow\ U_i \cap p_i(A) \neq \varnothing\ \forall\ A \in \mathcal{F}_{max}\ \Rightarrow\ p_i^{-1}(U_i) \cap A \neq \varnothing\ \forall\ A \in \mathcal{F}$. Тогда по лемме (3) $\mathcal{F}_{max} \cup \{p_i^{-1}\}$ - центрированное $\Rightarrow\ p_i^{-1} \in \mathcal{F}_{max}\ \forall\ i \in J$ (в силу максимальности) $U \in \mathcal{F}_{max}\ \Rightarrow\ \forall\ A \in \mathcal{F}_{max}\ U \cap A \neq \varnothing$ $\Rightarrow\ \forall\ A \in \mathcal{F}_{max}\ x \in \overline{A}$, то есть $x \in \bigcap\{\overline{A} \mid A \in \mathcal{F}_{max}\}$, что равносильно компактности. $\square$

Следствие: подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено в евклидовой метрике.

Доказательство:

$\Rightarrow$: из свойств компактных пространств.

$\Leftarrow$: X ограничено $\Rightarrow\ X$ содержится в замкнутом кубе $C \subset \mathbb{R}^n$, C компактно как произведение отрезков; X замкнуто в $C\ \Rightarrow\ X$ компактно. $\square$

11 Лекция 11. 18 декабря 2019 г.

11.1 Локально компактные топологическтие пространства.

Определение. Топологическое пространство X называется ***локально компактным***, если $\forall\, x \in X\ \exists\, U \ni x$ окрестность : $\overline{U}$ - компактно.

Пример 1. Компактное пространство локально компактно.

Пример 2. Дискретное пространство локально компактно.

Пример 3. $\mathbb{R}^n$ локально компактно.

Пример 4. Открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$ локально компактны.

Пример 5. Топологическое многообразие локально компактно.

Пример 6. $\mathbb{Q}$ не локально компактно.

Доказательство: Возьмем произвольную базисную окрестность $\forall\ x \in \mathbb{Q}\quad \forall\ U = (a,\ b) \cap \mathbb{Q} \ni x$. Ее замыкание - множество $\overline{U} = [a,\ b] \cap \mathbb{Q}$ - не является компактным, так как семейство $\mathcal{F} = \{(r,\ b],\ [a,\ r_1),\ (r_1,\ r_2),\ ...,\ (r_{n-1},\ r_n),\ ...\}$, где r - произвольное иррациональное число из U, $r_n \longrightarrow\ r\ (n \to \infty)$, $r_i \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $r_i > r_{i-1}\ \forall\ i \in \mathbb{N}$ является открытым покрытием $\overline{U}$, но любое конечное подмножество не является покрытием: $\forall\ \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ - конечное подсемейство $\Rightarrow\ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ (r_{n-1},\ r_n) \in \mathcal{A},\ n$ - наибольший $\Rightarrow\ [r_n,\ r] \subset X \backslash \bigcup \mathcal{A}$. $\square$

Пример 7. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ - не локально компактное.

Доказательство: Пусть $U \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ - базисное открытое множество, $U = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} U_i$, где $U_i \subset \mathbb{R}$ - открытое множество, причем только конечное их количество отлично от прямой: $\exists\ J$ - конечное подмножество натуральных чисел, такое что $U_i \subsetneq \mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ i \in J$. Зафиксируем $i \in \mathbb{N}:\ U_i = \mathbb{R}$. Каноническая проекция $p_i:\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ \to\ R$ - непрерывное отображение $\Rightarrow$ если $\overline{U}$ - компакт, то $p_i(\overline{U}) \supset p_i(U) = U_i = \mathbb{R}$ - компакт $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow\ \forall\ V$ - открытое множество $\forall\ U$ - базисное открытое множество, $U \subset V\ \Rightarrow\ \overline{U}$ - не компактно $\Rightarrow\ V$ - не компактно. $\square$

Предложение 1. $X_1,\ ...,\ X_n$ - локально компактные пространства, тогда $X = X_1 \times ... \times X_n$ - локально компактное пространство.

Доказательство: Пусть $x = (x_1,\ ...,\ x_n)$, $U = U_1 \times ... \times U_n$ - окрестность x, где $U_i:\ \overline{U}_i$ компактно.

Докажем, что $\overline{U} = \overline{U}_1 \times ... \times \overline{U}_n$: во-первых, $\overline{U}_1 \times ... \times \overline{U}_n = \mathbb{R}^n \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \times ... \times (\mathbb{R} \backslash \overline{U}_i) \times ... \times \mathbb{R})$ - замкнутое множество

$\Rightarrow$ $\overline{U} \subset \overline{U}_1 \times ... \times \overline{U}_n$, а во-вторых, $\forall\ y = (y_1, ..., y_n) \in \overline{U}_1 \times ... \times \overline{U}_n \Rightarrow \forall\ i\, \forall\ V_i$ - окрестность y_i $\ V_i \cap U_i \neq \varnothing \Rightarrow \forall\ V$ - базисная окрестность y выполняется $V \cap U \neq \varnothing \Leftrightarrow y \in \overline{U} \Leftrightarrow \overline{U} \supset \overline{U}_1 \times ... \times \overline{U}_n$.

Имеем, что $\overline{U} = \overline{U}_1 \times ... \times \overline{U}_n$ - произведение компактов, значит компактно. $\square$

Наблюдение: произведение бесконечного числа локально компактных не всегда локально компактное (см. пример 7).

Предложение 2. X - локально компактное пространство, $Y \subset X$ является замкнутым $\Rightarrow$ Y - локально компактное.

Доказательство: $\forall\ y \in Y\ \exists\ U \subset X$ - окрестность в X : $\overline{U}$ - компактно. $Y \cap \overline{U}$ - замкнутое подмножество компакта $\Rightarrow$ $\overline{U} \cap Y$ - компактно. $\square$

Предложение 3. X - хаусдорфово локально компактное топологическое пространство, $Y \subset X$ - открытое подмножество $\Rightarrow$ Y является локально компактным.

Доказательство:

Лемма. X - хаусдорфово локально компактное топологическое пространство, $x \in X$, тогда внутри всякой окрестности $U \ni x$ найдется окрестность $V \ni x$, $U \supset \overline{V}$ - компакт.

Доказательство леммы: ***добавьте картиночеееееек, я их делать не умееееееею :'(***

$\exists\ W \ni x$ - окрестность: $\overline{W}$ - компакт. Пусть $K = \overline{W} \backslash U$ - замкнутое подмножество компакта $\Rightarrow$ K - компакт, $x \notin K$.

Это означает, что найдутся такие окрестности $V' \ni x$, $U' \supset K$, что $U' \cap V' = \varnothing$, тогда $V = V' \cap W$ - искомое:

V - окрестность x, $\overline{V} \subset \overline{W} \Rightarrow \overline{V}$ - компакт. $\overline{V} \subset \overline{V'} \cap \overline{W} \subset \overline{X \backslash U'} \cap \overline{W} = X \backslash U' \cap \overline{W} \subset X \backslash K \cap \overline{W} = \overline{W} \backslash K = U$. ▲

Для всякого $y \in Y$ найдется окрестность $V \ni x$ в X : $\overline{V}$ - компакт, $\overline{V} \subset Y \Rightarrow V$ - открыто в Y и замыкание V в Y - это $\overline{V} \cap Y = \overline{V}$ - компактное пространство. $\square$

11.2 Одноточечная компактификация.

<u>*Обозначения:*</u> $X_+ := X \sqcup \{\infty\}$, $\tau_+ = \tau \cup \{U \subset X_+ \mid \infty \in U,\ X \backslash U$ - компактное замкнутое множество$\}$

Упражнение: доказать, что τ_+ действительно является топологией на X_+.

Определение. (X_+, τ_+) - ***одноточечная компактификация топологического пространства*** (X, τ).

Определение. X, Y - топологичесие пространтва, $f:\ X \to Y$ - ***открытое вложение***, если оно непрерывно, инъективно и открыто.

Наблюдение: открытое вложение является гомеоморфизмом X и $f(X)$.

Теорема

X - топологическое пространство, $i_X\ : X \to Y$, $i_X(x) = x$ - отображение включения.

(1) Отображение включения является открытым вложением.

(2)X_+ компактно.

(3)X_+ хаусдорфово $\Leftrightarrow$ X хаусдорфово и локально компактно.

(4) Если X компактно, то X_+ - дизъюнктное объединение $X \sqcup \{\infty\}$ как топологических пространств, $\{\infty\}$ - изолированная точка.

(5) X некомпактно $\Leftrightarrow$ X плотно в X_+

Доказательство:

(1): i_X инъективно (очевидно) и открыто (в силу тождественности на X и факта, что $\tau \subset \tau_+$).

Посмотрим на прообраз открытого множества $U \subset X_+$: $i_X^{-1}(U) = U \cap X = X \backslash (X_+ \backslash U)$, $X_+ \backslash U$ - замкнутое по определению $\Rightarrow$ $i_X^{-1}(U)$ открыто.

(2): Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ - открытое покрытие X_+, тогда ∞ содержится в каком-то множестве из покрытия, скажем в $U_j,\ j\in I$. $X_+\backslash U_j$ - компактное пространство, $\{U_i\}_{i\in I\backslash\{j\}}$ - его открытое покрытие $\Rightarrow\ \exists\ i_1,\ \ldots,\ i_n\ :\ \{U_{i_k}\}_{k=\overline{1,n}}$ - конечное подпокрытие $X_+\backslash U_j\ \Rightarrow\ \{U_{i_k}\}_{k=\overline{1,n}}\cup\{U_j\}$ - конечное подпокрытие X_+.

(3):

$\Rightarrow$: пусть X_+ хаусдорфово, тогда из (1) τ совпадает с индуцированной топологией τ_+ на $X\ \Rightarrow\ X$ хаусдорфово. Пусть $x\ni X$, тогда найдутся окрестности $U\ni X, V\ni\infty$, которые не пересекаются, то есть $U\subset X_+\backslash V$, тогда $\overline{U}$ - замкнутое подмножество компактного пространства $X_+\backslash V\ \Rightarrow$ компактно, значит X локально компактно.

$\Leftarrow$: Пусть X хаусдорфово и локально компактно, тогда $\forall\ x,\ y\in X\ \exists\ U,\ V\subset XU\ni x,\ V\ni y$ - открыты в X_+ и не пересекаются. теперь если одна из этих точек, без ограничения общности пусть y, то для x существует $U\subset X:\overline{U}$ компактно, замкнуто, то есть $V=X_+\backslash\overline{U}$ - окрестность y, $U\cap V=\varnothing$.

(4): $X_+\backslash\{\infty\}$ - замкнутое компактное множество $\Rightarrow\ \{\infty\}$ - окрестность ∞, то есть ∞ - изолированная точка в X_+. $\forall\ U\in\tau_+\ \ U\cap X$ открыто и $U\cap\{\infty\}$ открыто, значит τ_+ совпадает с топологией дизъюнктного объединения X и $\{\infty\}$.

(5):

$\Leftarrow$: из (4).

$\Rightarrow$: если X - не плотно в X_+, то найдется такое непустое открытое в X_+ множество U, что $U\subset X_+\backslash X=\{\infty\}$, то есть $U=\{\infty\}\ \Rightarrow\ X=X_+\backslash\{\infty\}$ - компакт. $\square$

Предложение 4. (Y,τ) - компактное хаусдорфово топологическое пространство, $y_0\in Y$ и $X=Y\backslash\{y_0\}$. Определим

$$f:\ X_+\to Y,\ x\mapsto\begin{cases}x, & x\in X\\ y_0, & x=\infty\end{cases},$$

тогда f - гомеоморфизм.

Доказательство:

f - биекция, так как $f(X_+)=\overbrace{X}^{f(X)}\cup\overbrace{\{y_0\}}^{f(\{\infty\})}=Y,\ f|_X=i_X$, то есть инъекция и сюръекция.

Пусть $U\in\tau,\ y_0\notin U$, тогда $f^{-1}(U)=U$ - открытое в τ_+. Если $U\ni y_0$, то $f^{-1}(U)=U\backslash\{y_0\}\cup\{\infty\}=V$, $X_+\backslash V=Y\backslash U$ - замкнутое подмножество компактного Y, значит компактно, то есть V - открыто в одноточечной компактификации.

Тогда $f:\ \underbrace{X_+}_{\text{компакт}}\ \to\ \underbrace{Y}_{\text{хаусдорфово}}$ - непрерывная биекция $\Rightarrow\ f$ - гомеоморфизм. $\square$

Пример 8.

12 Лекция 12. 15 января 2020 г.

12.1 Эквивалентные нормы.

X - векторное пространство над $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R},\ \mathbb{C}$). Пусть $||\cdot||',\ ||\cdot||''$ - две нормы на X, $\tau',\ \tau''$ соответственно топологии, порожденные нормами на X.

Определение. Норма $||\cdot||'$ ***мажорируется нормой*** $||\cdot||''$ ($||\cdot||'\prec||\cdot||''$), если $\tau'\subset\tau''$.

Определение. нормы ***эквивалентны*** ($||\cdot||'\sim||\cdot||''$), если $\tau'=\tau''$.

Предложение 1. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $||\cdot||'\prec||\cdot||''$,

(2) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \text{в } \tau''}}x_n=x\ \Rightarrow\ \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \text{в } \tau'}}x_n=x$,

(3) $\exists\ c>0:\ \forall\ x\in X\ ||x||'\leqslant c||x||''$.

Доказательство:

(1) $\Leftrightarrow$ (2): (1) $\Leftrightarrow$ отображение $I: \ (X, \ \tau'') \to (X, \tau'), \ x \mapsto x$ непрерывно $\Leftrightarrow$ (так как метрическое пространство) оно секвенциально непрерывно $\Leftrightarrow$ (2).

(3) $\Rightarrow$ (2): Пусть $x_n \to x$ в τ'', то есть $||x - x_n||'' \to 0$, $||x - x_n||' \leqslant c||x - x_n||'' \ \Rightarrow \ ||x - x_n||'$, то есть $x_n \to x$ в τ'.

(3) $\Leftarrow$ (2): Пусть (3) неверно, тогда $\forall \ n \in \mathbb{N} \ \exists \ x_n \in X: \ ||x_n||' > n^2||x_n||''$. Пусть $y_n = \dfrac{x_n}{n||x_n||''}$, $||y_n||'' = \dfrac{||x_n||''}{n||x_n||''} = \dfrac{1}{n}$, то есть $||y_n||'' \to 0 \ \Leftrightarrow \ y_n \to 0$ в τ''. $||y_n||' = \dfrac{||x_n||'}{n||x_n||''} > \dfrac{n^2||x_n||''}{n||x_n||''} = n$, то есть $y_n \nrightarrow 0$ □

Следствие: $|| \cdot ||' \sim || \cdot ||'' \ \Leftrightarrow \ \exists c, \ C > 0: \ \forall \ x \in X c||x||' \leqslant ||x||'' \leqslant C||x||'$.

Теорема

На конечномерном векторном пространстве любые две нормы эквивалентны.

Доказательство:

Пусть $|| \cdot ||$ - какая-либо норма на $\mathbb{K}^n$. Покажем, что $|| \cdot || \sim || \cdot ||_2$:

$\forall \ x = (x_1, \ \ldots, \ x_n) \in X = \mathbb{K}^n \ ||x|| = ||\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \, e_i||$, где $e_i = (\underbrace{0, \ \ldots \ , \ 1}_{i}, \ 0, \ \ldots \ , \ 0)$. $||\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \, e_i|| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \, ||e_i|| \leqslant$(по неравенству Коши-Буняковского) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} ||e_i||^2} = C||x||_2 \ \Rightarrow \ || \cdot || \prec || \cdot ||_2$.

Теперь покажем, что $f: \ X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \ x \mapsto ||x||$ непрерывна на $(X, || \cdot ||_2)$: Действительно, $|f(x) - f(y)| = | \, ||x|| - ||y|| \, | \leqslant ||x - y|| \leqslant C||x - y||_2$, отсюда следует, что $X_n \to x$ $(|| \cdot ||_2)$ влечет $f(x_n) \to f(x) \ \Rightarrow \ f$ секвенциально непрерывна на $(X, || \cdot ||_2)$.

Для $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ существует $\min\limits_{x \in S} f(x) = a > 0$, так как S^{n-1} компакт, а f - непрерывна. Теперь $\forall \ x \neq 0$ рассмотрим $y = \dfrac{x}{||x||_2}$. $y \in S \ \Rightarrow f(y) = \dfrac{||x||}{||x||_2} \geqslant a \ \Rightarrow \ a||x||_2 \leqslant ||x|| \leqslant C||x||_2$. □

Теорема: (Эквивалентна предыдущей)

Любая норма на $\mathbb{K}^n$ порождает топологию произведения.

Доказательство: $|| \cdot ||_\infty$ порождает топологию произведения. □

12.2 Факторпространства.

Пусть даны множество X, отношение эквивалентности $\sim$, $\forall x \in X$ $[x]$ - класс эквивалентности элемента x.

Определение. ***Фактормножество*** (***фактор*** множества) X по $\sim$ - это множество $X/_\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ смежных классов. $q: \ X \to X \to x/_q, \ x \mapsto [x]$ - ***отображение факторизации***.

Определение. ***Фактортопология*** на факторе $X/_\sim$ - это финальная топология τ_q, порожденная отображением факторизации, то есть $U \in \tau_q \ \Leftrightarrow \ q^{-1}(U)$ открыто в X. $(X/_\sim, \ \tau_q)$ - ***факторпространство*** пространства X по разбиению (отношению эквивалентности) $\sim$.

Теорема

(1) τ_q самая тонкая топология на $X/_\sim$, в котором q непрерывно,

(2) Пусть Y - топологическое пространство, тогда $g: \ X/_\sim \to Y$ непрерывно $\Leftrightarrow \ g \circ q: \ X \to Y$ нерпрерывно.

Доказательство: по свойствам финальной топологии. □

Теорема: (Универсальное свойство факторпространств)

Пусть Y - топологическое пространство, $f:\ X\to Y$ - непрерывное отображение, постоянное на классах: $f([x])=\{f(x)\}$, тогда $\exists!$ непрерывное отображение $\tilde{f}:\ X/_{\sim}\to Y$, которое делает диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/_{\sim} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство:

$\forall\ U\in x/_{\sim}$ выберем $x\in U$ и положим $\tilde{f}(U)=f(x)$. Это дает однозначное задание функции $\tilde{f}$, так как f постоянна на каждом элементе класса, так что $\tilde{f}$ корректно определена и делает диаграмму коммутативной, иное отображение не делает. По предыдущей теореме она непрерывна. $\square$

Теорема

Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, тогда:

(1) $\tilde{f}$ - сюръекция $\Longleftrightarrow$ f - сюръекция,

(2) $\tilde{f}$ - инъекция $\Longleftrightarrow \forall\ x,\ y\in X\quad f(x)=f(y)\ \Leftrightarrow\ x\sim y$,

(3) Пусть (1) и (2) выполнены, X компактно, Y хаусдорфово, тогда $\tilde{f}$ - гомеоморфизм.

Доказательство:

(1): $\tilde{f}(X/_{\sim})=\tilde{f}(q(X))=f(X)$.

(2): $\tilde{f}$ - инъекция $\Longleftrightarrow \forall\ U,\ V\in X/_{\sim}\quad \tilde{f}(U)=\tilde{f}(V)\ \Leftrightarrow\ U=V \Longleftrightarrow \forall\ x,\ y\in X\quad \tilde{f}(q(x))=\tilde{f}(q(y))\ \Leftrightarrow\ q(x)=q(y)$, что и означает эквивалентность $x\sim y$.

(3): X компактно $\Rightarrow\ X/_{\sim}=q(X)$ компактно, из (1), (2): $\tilde{f}$ - непрерывная биекция из компакта в хаусдорфово. $\square$

Пример 1. Введем отношение эквивалентности на отрезке $[0,\ 1]$: $0\sim 1, x\sim x$, тогда $[0,\ 1]/_{\sim}\cong S^1$

Доказательство: $f(t)=e^{2\pi it}$ - непрерывная сюрьекция. $\square$

Пример 2. Введем отношение эквивалентности на квадрате $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$, $(t,0)\sim(t,1)$, $(0,t)\sim(1,t)$, а остальные классы - одноэлементные. тогда $[0,\ 1]\times[0,\ 1]/_{[}0,\ 1]\times[0,\ 1]\cong T^2$.

Доказательство: $f(s,t)=(e^{2\pi is},e^{2\pi it})$. $\square$

Пример 3. Введем отношение эквивалентности на $\mathbb{R}$: $x\sim y\ \Leftrightarrow\ x-y\in\mathbb{Q}$. Обозначим $\mathbb{R}/\mathbb{Q}=\mathbb{R}/_{\sim}$, тогда топология на $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ антидискретна.

Доказательство: $U\subset\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ - открытое непустое множество, тогда $q^{-1}(U)\subset\mathbb{R}$ открыто, непусто и инвариантноотносительно прибавления рационального числа: $\forall\ x\in q^{-1}(U)\ \forall\ v\in\mathbb{Q}\quad x+v\in q^{-1}(U)$, то есть оно открыто и содержит плотное множество $x+\mathbb{Q}$, а значит каждую точку этого множества осдержит вместе со своей окрестностью, значит совпадает со всей прямой $\mathbb{R}$. $\square$

13 Лекция 13. 22 января 2020 г.

13.1 Частные случаи факторпространтв. Стягивание.

X - топологическое пространство, $A\subset X$. Введем отношение эквивалентности: $x\sim y\Leftrightarrow x=y$ или $x,y\in A$.

Обозначение: $X/_A=X/_{\sim}$.

Определение. Говорят, что $X/_A$ получено из X ***стягиванием*** A в точку.

Пример 1. $[0,\ 1]/_{\{0,\ 1\}} \cong S^1$

Лемма. Пусть Y - хаусдорфово топологическое пространство, $X \subset Y$ - открытое множество. Тогда $f:\ Y \to X_+$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in X \\ \infty, & x \notin X \end{cases} \text{ - непрерывно.}$$

Доказательство:

Пусть $U \subset X_+$ - открыто. далее возможны 2 случая: $\infty \notin U(*)$ и $U \ni \infty(**)$.

(*): тогда по определению τ_+ $U \subset X$ и U открыто в X, $f^{-1}(U) = U$ - открыто.

(**): Тогда $K = X_+ \backslash U$ - компактно, замкнуто, $K \subset Y$, но Y хаусдорфово, значит K - замкнут в Y и $f^{-1}(U) = Y \backslash f^{-1}(K) = Y \backslash K$ - открыто, то есть отображение f непрерывно. $\square$

Пример 2. $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $\overline{D} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $S^1 = \partial\overline{D}$. Покажем, что $\overline{D}/S^1 \cong S^2$. Действительно, $D \cong \mathbb{R}^2 \ \Rightarrow\ D_+ \cong \mathbb{R}^2_+ \cong S^2$. Зафиксируем гомеоморфизм $\phi:\ D_+ \to S^2$

$$\begin{tikzcd} \overline{D} \arrow[r, "f"] & D_+ \\ D \arrow[u, "\text{включение}"] \arrow[ur, "\text{включение}"'] & \end{tikzcd} \qquad f(x) = \begin{cases} x, & x \in D \\ \infty, & x \in S^1 \end{cases} \qquad \Rightarrow\ f \text{ - непрерывно по лемме.}$$

Обозначим $g = \phi \circ f:\ \overline{D} \to S^2$, $\tilde{g}$ - биекция и нерперывна, S^2 - хаусдорфово, $\overline{D}$ - компактно, значит $\tilde{g}$ - гомеоморфизм.