

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 1

9 марта 2021

Определение

Пусть T — теория, A — замкнутая формула в ее сигнатуре. A **логически следует** из T (обозначение: $T \models A$), если любая модель теории T является моделью формулы A .

Теорема о корректности для исчисления предикатов

Если $T \vdash A$, то $T \models A$.

Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов

Если $T \models A$, то $T \vdash A$.

Версия для теорий с равенством:

$T \vdash A$ означает выводимость с использованием аксиом равенства.

$T \models A$ означает логическое следование на нормальных моделях.

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Определение

Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω . Отображение носителей $\alpha : M \longrightarrow M'$ называется **изоморфизмом** M на M' , если

- α — биекция,
- $\alpha(c_M) = c_{M'}$ для всех констант c (из Ω),
- $\alpha(f_M(m_1, \dots, m_k)) = f_{M'}(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k))$ для любого k -местного функционального символа f и $m_1, \dots, m_k \in M$,
- $P_M(m_1, \dots, m_k) = P_{M'}(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k))$ для любого k -местного предикатного символа P и $m_1, \dots, m_k \in M$.

Запись $\alpha : M \cong M'$ означает, что α — изоморфизм M на M' .

Лемма 1.1

- 1 Если $\alpha : M \cong M'$ и $\beta : M' \cong M''$, то $\beta\alpha : M \cong M''$.
- 2 Если $\alpha : M \cong M'$, то $\alpha^{-1} : M' \cong M$.

Определение

Модели M, M' называются **изоморфными** (обозначение: $M \cong M'$), если существует изоморфизм $\alpha : M \cong M'$.

\cong задает отношение эквивалентности на классе всех моделей данной сигнатуры.

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Обозначения и терминология

Пусть M — модель сигнатуры Ω .

- *Терм, оцененный в M ,* — это замкнутый терм расширенной сигнатуры $\Omega(M)$. Из обычного терма $t(a_1, \dots, a_n)$ получаются оцененные термы

$$t(m_1, \dots, m_n) := t[a_1, \dots, a_n / \underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}].$$

$|r|_M$ — значение оцененного терма r в модели M ; это элемент из M .

- *Формула, оцененная в M ,* — это замкнутая формула сигнатуры $\Omega(M)$, $|A|_M$ — значение оцененной формулы A в M (0 или 1).

Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω , $\alpha : M \cong M'$.

- Для терма t , оцененного в M , обозначим через $\alpha \cdot t$ терм, полученный заменой всех констант m из M на их образы $\alpha(m)$. (Формально $\alpha \cdot t$ определяется по индукции.)
- Аналогично по формуле A , оцененной в M , строится формула $\alpha \cdot A$, оцененная в M' .

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Теорема 1.2 Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω , $\alpha : M \cong M'$.

- ① Если t — терм, оцененный в M , то $|\alpha \cdot t|_{M'} = \alpha(|t|_M)$.
- ② Если A — формула, оцененная в M , то $|\alpha \cdot A|_{M'} = |A|_M$.

Определение

- Пусть M — модель сигнатуры Ω . *Элементарная теория* модели M — это множество всех замкнутых формул сигнатуры Ω , которые истинны в M .

$$Th(M) := \{A \mid M \models A\}.$$

- Модели M_1, M_2 одной сигнатуры называются *элементарно эквивалентными*, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы, т.е. $Th(M_1) = Th(M_2)$; обозначение: $M_1 \equiv M_2$.

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Следствие 1.3 Если $M \cong M'$, то $M \equiv M'$.

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 2

16 марта 2021

Все сигнатуры с равенством, все модели нормальные.

Определения

- Теория **сильно категорична**, если все ее модели изоморфны.
- Теория **конечно аксиоматизируема**, если она эквивалентна конечной теории.

Теорема 1.6

Пусть Ω - конечная сигнатура, M — конечная модель Ω . Тогда

- $Th(M)$ конечно аксиоматизируема.
- $Th(M)$ сильно категорична.

Доказательство теоремы.

Пусть M — конечная модель конечной сигнатуры Ω .

Строим формулу A_M , которая полностью описывает M .

Теория конечной модели

Пусть $M = \{m_1, \dots, m_n\}$. Положим

$$A_M := \exists x_1 \dots \exists x_n B_M(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$B_M(a_1, \dots, a_n) := \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (a_i \neq a_j) \wedge \forall y \bigvee_{i=1}^n (y = a_i) \wedge$$

$$\bigwedge \{c = a_i \mid c \in \text{Const}_\Omega, M \models c = m_i\} \wedge$$

$$\bigwedge \{f(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = a_j \mid f \in \text{Fun}_\Omega, M \models f(m_{i_1}, \dots, m_{i_k}) = m_j\} \wedge$$

$$\bigwedge \{P(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \mid P \in \text{Pred}_\Omega, M \models P(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})\} \wedge$$

$$\bigwedge \{\neg P(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \mid P \in \text{Pred}_\Omega, M \models \neg P(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})\}.$$

Лемма 1.7. Для модели M' сигнатуры Ω

$$M' \models A_M \Leftrightarrow M' \cong M.$$

Доказательство леммы.

(\Leftarrow) Проверяем $M \models A_M$, это следует из $M \models B_M(m_1, \dots, m_n)$.

(\Rightarrow) Предположим, что $M' \models A_M$ и построим изоморфизм M на M' .

По определению истинности, найдутся $m'_1, \dots, m'_n \in M'$, для которых

$$M' \models B_M(m'_1, \dots, m'_n).$$

Докажем, что отображение φ , переводящее каждый m_i в m'_i — искомый изоморфизм.

Окончание доказательства теоремы.

Заметим: $Th(M) \sim \{A_M\}$.

1. По лемме 1.7

$A_M \in Th(M)$ и значит,

$$M' \models Th(M) \Rightarrow M' \models A_M.$$

2. Обратно, если $M' \models A_M$, то по лемме 1.7, $M' \cong M$. И тогда $M' \models Th(M)$.

$Th(M)$ сильно категорична, т.к. эквивалентная ей теория $\{A_M\}$ сильно категорична по лемме 1.7.

Следствие 2.1.

Если M — конечная модель и $M' \equiv M$, то $M' \cong M$.

Доказательство. Если $M' \equiv M$, то $M' \models Th(M)$. Тогда, по теореме 1.6, $M' \cong M$.

Определимость и автоморфизмы

k -местный предикат на множестве M — это отображение $\gamma : M^k \rightarrow \{0, 1\}$.

k -местное отношение на множестве M — это множество $R \subset M^k$.

Рассмотрим формулу $A(\vec{b})$, где $\vec{b} = (b_1, \dots, b_k)$. k -местный предикат, определяемый формулой $A(\vec{b})$ в модели M , — это $A_M : M^k \rightarrow \{0, 1\}$ такое, что для всех m_1, \dots, m_k

$$A_M(m_1, \dots, m_k) = |A(m_1, \dots, m_k)|_M.$$

Теорема 2.2

Пусть α — автоморфизм модели, $A(b_1, \dots, b_k)$ — формула в ее сигнатуре. Тогда для всех $m_1, \dots, m_k \in M$

$$A_M(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) = A_M(m_1, \dots, m_k).$$

В сокращенной записи:

$$A_M(\alpha \vec{m}) = A_M(\vec{m}).$$

Таким образом, определяемый в M предикат инвариантен при всех автоморфизмах M .

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 3

22 марта 2021

Элементарные подмодели

Определение. Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω .
 M' — **подмодель** M , если

- $M' \subset M$ как множество,
- $c_M = c_{M'}$ для всех $c \in \text{Const}_\Omega$,
- $f_M(m_1, \dots, m_k) = f_{M'}(m_1, \dots, m_k)$
для всех k -местных $f \in \text{Fun}_\Omega$ и $m_1, \dots, m_k \in M'$,
- $P_M(m_1, \dots, m_k) = P_{M'}(m_1, \dots, m_k)$
для всех k -местных $P \in \text{Pred}_\Omega$ и $m_1, \dots, m_k \in M'$.

Обозначение подмодели: $M' \subset M$.

Определение. Подмодель $M' \subset M$ — **элементарная**, если

$$M' \models A(m_1, \dots, m_k) \Leftrightarrow M \models A(m_1, \dots, m_k)$$

для любой формулы $A(a_1, \dots, a_k)$ и $m_1, \dots, m_k \in M'$.

(Тогда, в частности, $M' \equiv M$.)

Обозначение элементарной подмодели: $M' \prec M$.

Теорема о спуске

Мощность сигнатуры Ω

$$|\Omega| := |Const_\Omega \cup Fun_\Omega \cup Pred_\Omega|$$

Теорема (Лёвенгейм – Сколем – Тарский).

Для любой модели M сигнатуры Ω существует $M' \prec M$ такая, что

$$|M'| \leq \max(|\Omega|, \aleph_0).$$

Теорема о спуске

Определение. Зафиксируем модель M и $m_0 \in M$.

Для каждой формулы $\exists x A(x, \vec{a})$, где $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k)$ — список свободных переменных, и для каждого $\vec{m} \in M^k$ положим

$$S_{\exists x A(x, \vec{m})} := \begin{cases} \{e \in M \mid M \models A(e, \vec{m})\}, & \text{если это множество непусто,} \\ m_0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция выбора для семейства множеств $(S_{\exists x A(x, \vec{m})})_{\vec{m} \in M^k}$ называется *сколемовской функцией* для формулы $\exists x A(x, \vec{a})$ и обозначается $s_{\exists x A(x, \vec{a})}$ (или короче: $s_{\exists x A}$).

(Случай $k = 0$ тоже включается; тогда просто берем $s_{\exists x A} \in M$.)

Таким образом:

$$s_{\exists x A}(\vec{m}) \in S_{\exists x A(x, \vec{m})},$$

и тогда

$$M \models A(s_{\exists x A}(\vec{m}), \vec{m}),$$

если

$$M \models \exists x A(x, \vec{m}).$$

Теорема о спуске

План доказательства.

Пусть $M_0 := \{m_0\}$ (это множество, еще не модель). По рекурсии строим счетную последовательность множеств $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \dots$. Их объединение даст M' .

$$M_{n+1} := M_n \cup \{s_{\exists x A(x, \vec{a})}[M_n^k] \mid \exists x A(x, \vec{a}) \in Ft\},$$

(Ft — множество всех формул нашей сигнатуры).

$$M' := \bigcup_n M_n \text{ (как множество).}$$

Его можно превратить в модель $M' \subset M$, положив

- $M' \models P(\vec{m}) \Leftrightarrow M \models P(\vec{m})$,
- $c_{M'} = s_{\exists x(x=c)}$,
- $f_{M'}(\vec{m}) = s_{\exists x(x=f(\vec{a}))}(\vec{m})$.

Доказываем, что $M' \prec M$ — искомая.

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 4

23 марта 2021

Фильтры и ультрафильтры

Определение. Фильтр на множестве I — это непустое $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ со свойствами

- $X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F}$
- $X \in \mathcal{F} \ \& \ X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

Фильтр \mathcal{F} **собственный**, если $\emptyset \notin \mathcal{F}$

Ультрафильтр — максимальный по включению собственный фильтр.

Лемма 4.1.

Свойства ультрафильтров:

- $X \in \mathcal{F} \ \& \ Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F},$
- $X \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow (I \setminus X) \in \mathcal{F}.$

Лемма 4.2.

Любой собственный фильтр можно расширить до ультрафильтра,

Фильтры и ультрафильтры

Определение. Фильтр \mathcal{F} **главный**, если $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Лемма 4.3.

Ультрафильтр \mathcal{U} главный, если и только если существует конечное $J \in \mathcal{U}$.

Определение. Пусть задан ультрафильтр \mathcal{U} на I . Рассмотрим свойства элементов I (одноместные предикаты). Свойство Φ верно *почти всегда* (относительно \mathcal{U}), если

$$\{i \mid \Phi(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Обозначение: $\forall^\infty i \Phi(i)$.

Лемма 4.4.

Свойства квантора \forall^∞ .

- $\forall^\infty i (\Phi(i) \wedge \Psi(i)) \Leftrightarrow \forall^\infty i \Phi(i) \wedge \forall^\infty i \Psi(i),$
- $\forall^\infty i \neg \Phi(i) \Leftrightarrow \neg \forall^\infty i \Phi(i).$

Лемма 4.5.

Пусть $(M_i)_{i \in I}$ — семейство моделей сигнатуры Ω , \mathcal{U} — ультрафильтр на I . Тогда

$$\alpha \approx_{\mathcal{U}} \beta := \bigvee^{\infty} i (\alpha_i = \beta_i)$$

задает отношение эквивалентности на множестве $\prod_{i \in I} M_i$.

Класс элемента $(\alpha_i)_{i \in I}$ обозначается $[\alpha_i]_{i \in I}$.

Ультрапроизведения

Определение. Пусть $(M_i)_{i \in I}$ — семейство моделей сигнатуры Ω , \mathcal{U} — ультрафильтр на I .

Ультрапроизведение семейства $(M_i)_{i \in I}$ по ультрафильтру \mathcal{U} задается следующим образом.

- Носитель M — это $\prod_{i \in I} M_i / \approx_{\mathcal{U}}$.
- $c_M := [c_{M_i}]_{i \in I}$.
- $f_M([m_i^1], \dots, [m_i^k]) := [f_{M_i}(m_i^1, \dots, m_i^k)]$.
- $M \models P([m_i^1], \dots, [m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i M_i \models P(m_i^1, \dots, m_i^k)$.

Обозначение: $\prod_{\mathcal{U}} M_i$.

Теорема Лося.

$$\prod_{\mathcal{U}} M_i \models A([m_i^1], \dots, [m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i M_i \models A(m_i^1, \dots, m_i^k).$$

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 5

5 апреля 2021

Фильтры и ультрафильтры

Определение. Фильтр на множестве I — это непустое $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ со свойствами

- $X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F}$
- $X \in \mathcal{F} \ \& \ X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

Фильтр \mathcal{F} **собственный**, если $\emptyset \notin \mathcal{F}$

Ультрафильтр — максимальный по включению собственный фильтр.

Лемма 4.1.

Свойства ультрафильтров:

- $X \in \mathcal{F} \ \& \ Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F},$
- $X \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow (I \setminus X) \in \mathcal{F}.$

Лемма 4.2.

Любой собственный фильтр можно расширить до ультрафильтра,

Фильтры и ультрафильтры

Определение. Фильтр \mathcal{F} **главный**, если $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Лемма 4.3.

Ультрафильтр \mathcal{U} главный, если и только если существует конечное $J \in \mathcal{U}$.

Определение. Пусть задан ультрафильтр \mathcal{U} на I . Рассмотрим свойства элементов I (одноместные предикаты). Свойство Φ верно *почти всегда* (относительно \mathcal{U}), если

$$\{i \mid \Phi(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Обозначение: $\forall^\infty i \Phi(i)$.

Лемма 4.4.

Свойства квантора \forall^∞ .

- $\forall^\infty i (\Phi(i) \wedge \Psi(i)) \Leftrightarrow \forall^\infty i \Phi(i) \wedge \forall^\infty i \Psi(i),$
- $\forall^\infty i \neg \Phi(i) \Leftrightarrow \neg \forall^\infty i \Phi(i).$

Лемма 4.5.

Пусть $(M_i)_{i \in I}$ — семейство моделей сигнатуры Ω , \mathcal{U} — ультрафильтр на I . Тогда

$$\alpha \approx_{\mathcal{U}} \beta := \bigvee^{\infty} i (\alpha_i = \beta_i)$$

задает отношение эквивалентности на множестве $\prod_{i \in I} M_i$.

Класс элемента $(\alpha_i)_{i \in I}$ обозначается $[\alpha_i]_{i \in I}$.

Ультрапроизведения

Определение. Пусть $(M_i)_{i \in I}$ — семейство моделей сигнатуры Ω , \mathcal{U} — ультрафильтр на I .

Ультрапроизведение семейства $(M_i)_{i \in I}$ по ультрафильтру \mathcal{U} задается следующим образом.

- Носитель M — это $\prod_{i \in I} M_i / \approx_{\mathcal{U}}$.
- $c_M := [c_{M_i}]_{i \in I}$.
- $f_M([m_i^1], \dots, [m_i^k]) := [f_{M_i}(m_i^1, \dots, m_i^k)]$.
- $M \models P([m_i^1], \dots, [m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i M_i \models P(m_i^1, \dots, m_i^k)$.

Обозначение: $\prod_{\mathcal{U}} M_i$.

Теорема Лося.

$$\prod_{\mathcal{U}} M_i \models A([m_i^1], \dots, [m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i M_i \models A(m_i^1, \dots, m_i^k).$$

Теорема компактности

Теорема компактности (Гёделя – Мальцева).

Пусть T — теория в некоторой сигнатуре. Если каждое конечное подмножество T выполнимо, то T выполнима.

Доказательство. Рассмотрим

$$I := \{S \subset T \mid I \text{ конечно} \}.$$

Для каждого $S \in I$ существует модель $M_S \models S$.

Для $A \in T$ пусть

$$J_A := \{S \in I \mid A \in S\}.$$

Лемма 5.1. Существует ультрафильтр на I , содержащий все J_A .

Доказательство. $J_{A_1} \cap \dots \cap J_{A_k} \neq \emptyset$, т.к. содержит $\{A_1, \dots, A_k\}$.

Поэтому найдется фильтр, содержащий все такие пересечения.

Теорема компактности

Пусть \mathcal{U} содержит все J_A для $A \in T$. Тогда

$$\prod_{\mathcal{U}} M_S \models T.$$

Действительно,

$$J_A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall^\infty S A \in S.$$

Тогда

$$\forall^\infty S M_S \models A.$$

По теореме Лося,

$$\prod_{\mathcal{U}} M_S \models A.$$

Теорема 5.2

Если теория имеет конечные модели неограниченной мощности, то она имеет и бесконечную модель.

Теорема 5.3 (Лёвенгейма — Сколема о подъеме)

Если теория в сигнатуре Ω имеет бесконечную модель, то она имеет модели любой бесконечной мощности $k \geq |\Omega|$.

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 10

27 апреля 2021

Игры Эренфойхта

Рассматриваем модели в конечной сигнатуре Ω без функциональных символов.

Игра Эренфойхта $G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$ длины n на моделях M, M' с начальной позицией $(\mathbf{m}, \mathbf{m}')$, где $\mathbf{m} \in M^k$, $\mathbf{m}' \in M'^k$ для некоторого k описывается правилами:

- Ходы делаются поочередно, первый ход делает \forall , каждый игрок делает n ходов.
- Ход \forall — это пара (M, l) , где $l \in M$ или (M', l') . Ответный ход \exists — в другой модели.
- *Партия* — последовательность ходов по этим правилам. Законченная партия — длины $2n$. *Последняя позиция* $p(\pi)$ в партии π определяется по рекурсии:
 $p() = (\mathbf{m}, \mathbf{m}')$. Если $p(\pi) = (\mathbf{d}, \mathbf{e})$, то

$$p(\pi, (M, l)) = (\mathbf{d}l, \mathbf{e}), \quad p(\pi, (M', l')) = (\mathbf{d}, \mathbf{e}l').$$

- \exists выигрывает законченную партию π , если $p(\pi)$ задает частичный изоморфизм.

Частичный изоморфизм:

$M, \mathbf{m} \equiv_0 M', \mathbf{m}'$, если

$$M \models A(\mathbf{m}) \Leftrightarrow M' \models A(\mathbf{m}')$$

для любой простой атомарной $A(\mathbf{a})$.

Простые атомарные формулы:

$$a_i = a_j, \quad a_i = c, \quad P(a_1, \dots, a_n).$$

Определение. Стратегия для \exists .

σ : партии нечетной длины $< 2n \longrightarrow$ допустимые ходы

Партия $\pi = \chi_1, \dots, \chi_{2n}$ согласована с σ , если

$$\forall p < n \quad \chi_{2p} = \sigma(\chi_1, \dots, \chi_{2p-1}).$$

σ — выигрышная для \exists , если

для любой партии π , согласованной с σ , π выиграна \exists .

Определение. Игровая эквивалентность $(M, \mathbf{m}) \approx_n (M', \mathbf{m}')$, если

\exists имеет выигрышную стратегию в $G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$.

Лемма 10.1 \approx_n задает отношение эквивалентности.

Лемма 10.2 (Индуктивное определение \approx_n)

$$(M, \mathbf{m}) \approx_{n+1} (M', \mathbf{m}') \Leftrightarrow \begin{cases} \forall d \in M \exists d' \in M' (M, \mathbf{m}d) \approx_n (M', \mathbf{m}'d') \\ \forall d' \in M' \exists d \in M (M, \mathbf{m}d) \approx_n (M', \mathbf{m}'d'). \end{cases}$$

Определение $q(A)$ — *кванторная глубина* формулы A определяется по рекурсии:

$q(A) = 0$ для атомарной A ,

$q(\neg A) = q(A)$,

$q(A * B) = \max(q(A), q(B))$, где $*$ — бинарная связка,

$q(\forall x A[a \setminus x]) = q(\exists x A[a \setminus x]) = q(A) + 1$.

Определение. *Формульная эквивалентность*

$(M, \mathbf{m}) \equiv_n (M', \mathbf{m}')$, если

для любой простой формулы $A(\mathbf{a})$, где $q(A) \leq n$

$$M \models A(\mathbf{m}) \Leftrightarrow M' \models A(\mathbf{m}').$$

Теорема 10.3 (Эренфойхта – Фраиссе)

$$(M, \mathbf{m}) \approx_n (M', \mathbf{m}') \Leftrightarrow (M, \mathbf{m}) \equiv_n (M', \mathbf{m}').$$

Следствие 10.4 $M \equiv M' \Leftrightarrow \forall n M \approx_n M'$.

Логика одноместных предикатов

Рассмотрим сигнатуру Ω_1 с 1-местными предикатами и равенством.

Определение. Замкнутая формула A *финитно выполнима*, если она имеет конечную модель.

Теорема 10.5 (Лёвенгейм, 1915) Всякая выполнимая формула A сигнатуры Ω_1 выполнима в модели мощности $\leq 2^k \cdot n$, где $n = q(A)$ (для простой A),
 k — число предикатных символов в A .

Следствие 10.6 Конечный спектр формулы в Ω_1 не может быть равен $2\mathbb{N}$.

Бесконечные игры Эренфойхта

Бесконечная игра Эренфойхта $G_\omega(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$ задается теми же правилами, что $G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$, с отличиями:

число ходов бесконечно,

бесконечная партия выиграна \exists , если выигран любой ее начальный отрезок четной длины.

Игровая эквивалентность $M \approx_\omega M'$ определяется соответственно.

Теорема 10.7 Для счетных моделей сигнатуры Ω

$$M \approx_\omega M' \Leftrightarrow M \cong M'.$$

Теорема 10.8 (Кантор) Теория DLO_{\leftrightarrow} счетно категорична.