

Логика и алгоритмы  
Ч. 3: Теория моделей  
Лекция 4

23 марта 2021

# Фильтры и ультрафильтры

**Определение.** Фильтр на множестве  $I$  — это непустое  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$  со свойствами

- $X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F}$
- $X \in \mathcal{F} \ \& \ X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

Фильтр  $\mathcal{F}$  **собственный**, если  $\emptyset \notin \mathcal{F}$

**Ультрафильтр** — максимальный по включению собственный фильтр.

## Лемма 4.1.

Свойства ультрафильтров:

- $X \in \mathcal{F} \ \& \ Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F}$ ,
- $X \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow (I \setminus X) \in \mathcal{F}$ .

## Лемма 4.2.

Любой собственный фильтр можно расширить до ультрафильтра,

# Фильтры и ультрафильтры

**Определение.** Фильтр  $\mathcal{F}$  **главный**, если  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .

## Лемма 4.3.

Ультрафильтр  $\mathcal{U}$  главный, если и только если существует конечное  $J \in \mathcal{U}$ .

**Определение.** Пусть задан ультрафильтр  $\mathcal{U}$  на  $I$ . Рассмотрим свойства элементов  $I$  (одноместные предикаты). Свойство  $\Phi$  верно *почти всегда* (относительно  $\mathcal{U}$ ), если

$$\{i \mid \Phi(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Обозначение:  $\forall^\infty i \Phi(i)$ .

## Лемма 4.4.

Свойства квантора  $\forall^\infty$ .

- $\forall^\infty i (\Phi(i) \wedge \Psi(i)) \Leftrightarrow \forall^\infty i \Phi(i) \wedge \forall^\infty i \Psi(i),$
- $\forall^\infty i \neg \Phi(i) \Leftrightarrow \neg \forall^\infty i \Phi(i).$

## Лемма 4.5.

Пусть  $(M_i)_{i \in I}$  — семейство моделей сигнатуры  $\Omega$ ,  $\mathcal{U}$  — ультрафильтр на  $I$ . Тогда

$$\alpha \approx_{\mathcal{U}} \beta := \bigvee^{\infty} i (\alpha_i = \beta_i)$$

задает отношение эквивалентности на множестве  $\prod_{i \in I} M_i$ .

Класс элемента  $(\alpha_i)_{i \in I}$  обозначается  $[\alpha_i]_{i \in I}$ .

# Ультрапроизведения

**Определение.** Пусть  $(M_i)_{i \in I}$  — семейство моделей сигнатуры  $\Omega$ ,  $\mathcal{U}$  — ультрафильтр на  $I$ .

**Ультрапроизведение** семейства  $(M_i)_{i \in I}$  по ультрафильтру  $\mathcal{U}$  задается следующим образом.

- Носитель  $M$  — это  $\prod_{i \in I} M_i / \approx_{\mathcal{U}}$ .
- $c_M := [c_{M_i}]_{i \in I}$ .
- $f_M([m_i^1], \dots, [m_i^k]) := [f_{M_i}(m_i^1, \dots, m_i^k)]$ .
- $M \models P([m_i^1], \dots, [m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i M_i \models P(m_i^1, \dots, m_i^k)$ .

Обозначение:  $\prod_{\mathcal{U}} M_i$ .

## Теорема Лося.

$$\prod_{\mathcal{U}} M_i \models A([m_i^1], \dots, [m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i M_i \models A(m_i^1, \dots, m_i^k).$$