Теорема Тарского – Зайденберга

$Th(\mathbb{R})$ элимин. кванторы

$\{+, -, 0, 1, \cdot, =, <\}$

$P_i \in \mathbb{Z}[t, \bar{u}]$

$P_{i\bar{u}}(t)$ $\mathbb{R}[t]$

Знаковые диаграммы

$(-\infty, \alpha_1)$ α_1 (α_1, α_2)

$+$ 0 $-$ $\dots$

$B(\bar{a}) = \exists x \bigwedge_i B_i(x, \bar{a})$

$P_i(x, \bar{a}) > 0$

$(=)$

Лемма 9.1

F_- — исходное м-во полиномов (при фикс. $\overline{u}$)

Δ_{F_-} Δ_F

$F_- \subset F$ — замыкание

Утв (по индукции)

F конечно

1. удаление старш. члена
2. только старш. коэфф.
3. $\partial / \partial t$
4. $Rest(f, g)$

$\exists x\, B(F^-)$

$\exists x\, B(F)$

Лемма 9.2 Пусть F замкнуто, F_0 - мн-во всех констант из F

Тогда Δ_F определяется по Δ_{F_0}.

$B(F)$

соотв. бесквант. формуле

$B(F_0)$ - бесквант.

c_1 $+$

$\vdots$ 0

$\vdots$ 0

c_n $-$

Расширение F_0 до F

$F_0 \subset F_1 \subset \dots\dots F$

- $P(t) \in F_1 \setminus F_0$, все $Q(t) \in F$ добавлены в F_1
  $\deg Q < \deg P$

$P(t) - a_m t^m \in F_1$

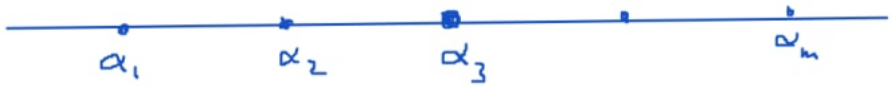
$P(t) = a_m t^m + \dots$

$a_m = 0$
(приведенность)

$B(F_1) = B(\Delta^1_{F_1}) \cup B(\Delta^2_{F_2}) \dots$

Δ_{F_1} увеличивается

- $a_m \neq 0$



Знак $P(\alpha)$

Знак $P(t)$ в гран. точках

1. $Q(\alpha)=0$ для $Q\in F_1$, $\deg Q<\deg P$

$R(t)\in F_1$

$$\beta^s P = U\cdot Q + R$$

$\deg R<\deg Q$

знаем

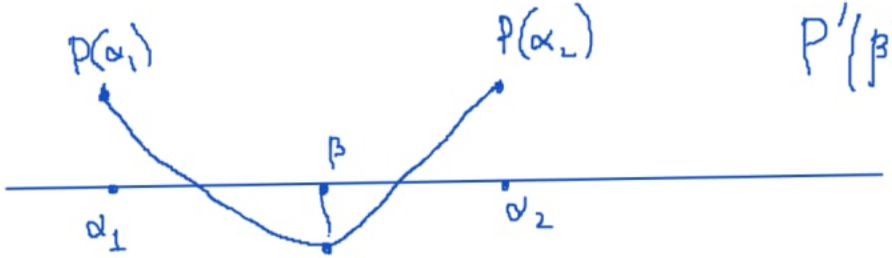
Знак $(\beta^s P(\alpha))$

$=$ Знак $R(\alpha)$

знаем

$P(\alpha)=0$

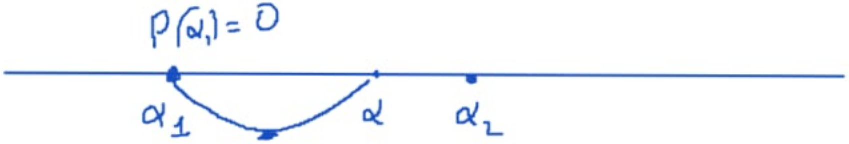
2.1 $P(\alpha_1)P(\alpha_2) > 0 \implies$ P не имеет корней на (α_1, α_2)



$P'(\beta)=0$

(2.2)

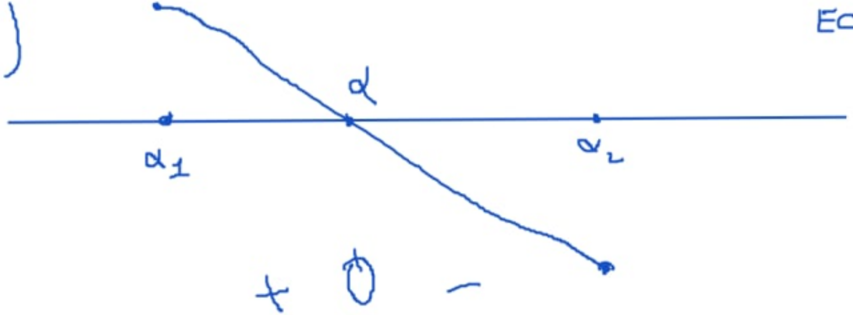
$P(\alpha) \neq 0$ для $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$



$P(\alpha_1) P(\alpha_2) < 0$

(2.3)

Есть корень $\Rightarrow$ единств.



"<u>Следствие</u>" В элементарной геометрии элиминируются кванторы

$\cong$, B

т.к. она сводится к $Th(\mathbb{R})$

Игры Эренфойхта

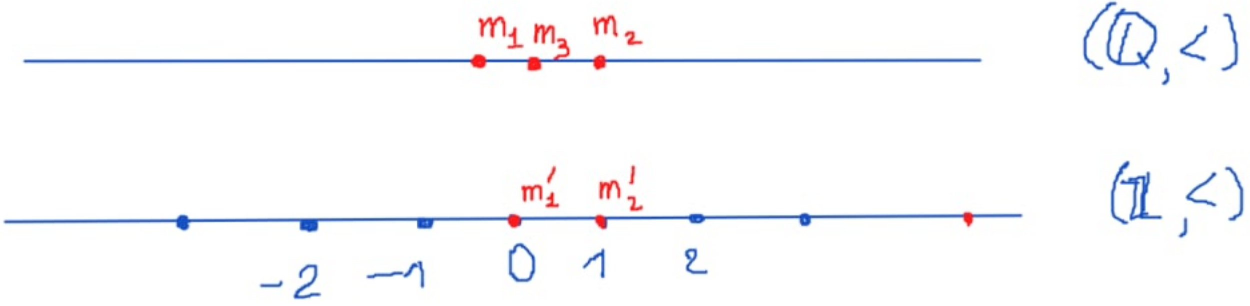
$\forall$, $\exists$

$M \equiv M'$?

M M'

$\{m_1, \dots, m_n\} \equiv \{m'_1, \dots, m'_n\}$

$G_n(M, M')$



$(\mathbb{Q}, <)$

$(\mathbb{R}, <)$

Сигнатура кон. Ω

$Fun_{\Omega} = \varnothing$

атомарные:

$a_i = a_j$

$a_i = c$

$P(a_1, \ldots, a_n)$

Опр Простая формула

Лемма 9.3

Всякая формула эквив. простой

$$P(t_1, \ldots, t_n) \sim \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = t_i \wedge P(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

$\bar{m} \in M^k$

$\bar{m}' \in M^k$

<u>Опр</u>

$\bar{m} \equiv_0 \bar{m}'$, если для любой простой атомарной $A(a_1, \dots, a_k)$

$$M \models A(\bar{m}) \Leftrightarrow M' \models A(\bar{m}')$$

частичный изоморфизм

$G_n(M, \bar{m}, M', \bar{m}')$ — игра Эренфойхта длины n с нач. позицией $(\bar{m}, \bar{m}')$

Ход: $\overset{\mathrm{I}}{(M, \ell)}$, $\ell \in M$; $\overset{\mathrm{II}}{(M', \ell')}$, $\ell' \in M'$

Партия — послед. ходов пред. типов

$p(\pi)$ — последняя позиция в партии π

$(\bar{m}, \bar{m}')$ если $\pi = \emptyset$

$p(\pi, (M, \ell)) = (\bar{a}\ell, \bar{a}')$, если $p(\pi) = (\bar{a}, \bar{a}')$

$p(\pi, (M', \ell)) = (\bar{a}, \bar{a}'\ell)$

π Выиграна $\exists$, если длина $2n$, $p(\pi)$ задает част. изоморф.