Билет 1.

Длина кривой, формула для длины кривой, криволинейные интегралы 1 и 2 рода.

Путь в $\mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение отрезка в $\mathbb{R}^n$.

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Если $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, точка $\gamma(t_1)$ называется кратной. Если таких точек конечное число, будем называть путь параметризованной кривой. Кривая простая, если у неё нет кратных точек кроме концов. Пример: $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ – простая замкнутая кривая.

Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$. Вписанная ломаная – отрезки с концами в $\gamma(t_i)$ и $\gamma(t_{i+1})$. Длина – сумма длин звеньев. Длина по разбиению P: L_P.

При измельчении разбиения длина ломаной не уменьшается по неравенству треугольника.

Путь спрямляемый, если $\sup_P L_P$ – конечен. Тогда $\sup_P L_P$ – длина этого пути.

Другое определение:

$l = \lim_{\lambda(\mathcal{T}) \to 0} S(\mathcal{T})$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathcal{T}: \lambda(\mathcal{T}) < \delta: |l - \sum \|\gamma(t_{j-1}) - \gamma(t_j)\|| < \varepsilon$

Доказательство:

Пусть $S = \sup S(\mathcal{T}) \Rightarrow \exists$ предел и он равен sup. Выберем разбиение, при котором $S(\mathcal{T})$ (длина) $> S - \varepsilon/2$. Если в нём N точек, то в силу равномерной непрерывности отображения $t \mapsto \gamma(t)$ (задаёт) число δ: $|u - v| < \delta \Rightarrow |\gamma(u) - \gamma(v)| < \varepsilon/4N$ и $< \frac{\lambda(\mathcal{T})}{10}$.

Теперь смотрим произв. разбиение $\mathcal{T}'$ мелкость $< \delta$. Пусть есть разбиение $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$, $S(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}') \geq S(\mathcal{T}) > l - \varepsilon/2$. Пусть $S(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}') - S(\mathcal{T}')$ не совпадают ломаные из разбиения $\mathcal{T}$.

$\theta = t_k \in \mathcal{T} \notin \mathcal{T}'$

$|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(\theta)| + |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(\theta)|$ – это в $L_P(S)$

$$S(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}') - S(\mathcal{T}') \leq \sum_{\theta \in \mathcal{T}} \frac{\varepsilon}{2N} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow S(\mathcal{T}') \in (l - \varepsilon, l]$$

В другую сторону если есть предел l, если для некоторого разбиения $\mathcal{T}$ $l(\mathcal{T}) > l$ то из-за того, что при измельчении длина ув., предел не м.б. равен $l \Rightarrow$ если $\exists l$, определено и число $S \Rightarrow S = l$.

Длина в $\mathbb{R}^2$ выражается формулой:

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Доказательство: запишем формулу для длины ломаной по разбиению отрезка $[a,b]$. → формула Лагранжа $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, $\Delta y = f'(c)\,\Delta x$

$$L_p = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \cdot |t_k - t_{k-1}|$$

Перепишем формулу, введя дополнительное обозначение:

$$\Xi = \sum_{k=1}^{N} \left(\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \right) \cdot |t_k - t_{k-1}|$$

Тогда $L_p = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \cdot |t_k - t_{k-1}| + \Xi$

Рассмотрим $\lim_{\lambda(P)\to 0} \Xi$. $|f(t,s) - f(t,t)| = \left|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(s))^2} - \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\right|$

Функция f непрерывна $\Rightarrow$ равномерно непрерывна на компакте $[a,b]^2$

Расстояние считаем между (t,t) и (t,s), S между ними не превосходит параметр разбиения $\Rightarrow$ если он мал, то $|\Xi| < \varepsilon|b-a| \Rightarrow \Xi \to 0$ при $\lambda(P)\to 0$. $\blacktriangle$

Оставшаяся сумма - это сумма Римана для интеграла $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \Rightarrow$ стремится к этому интегралу при стремлении параметра разбиения и нуль $\Rightarrow$ при Ξ (соотв. $\lambda(P)\to 0$) длина стремится к этому интегралу. Для $\mathbb{R}^n$ аналогично

Интегралы 1 рода:

Пусть $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ - это кусочно-гладкий путь, f, P, Q - непр. функции на $\mathbb{R}^2$. Определим интегралы 1 и 2 рода так:

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \left(P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t) \right) dt$$

Альтернативное определение:

$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma_1(f, P, \xi)$, $\sigma_1(f, P, \xi) \overset{\text{по определению}}{=} \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k))\,\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$

$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sigma_2((P,Q), \Pi, \xi)$, $\sigma_2((P,Q), \Pi, \xi) =$

$$= \sum_{k=1}^{N} P(\gamma(\xi_k))\,\underbrace{(x(t_k) - x(t_{k-1}))}_{\Delta x_k} + Q(\gamma(\xi_k))\,\underbrace{(y(t_k) - y(t_{k-1}))}_{\Delta y_k}$$

Теорема: Если P, Q, f - непр. функции, γ - кусочно-гладкий путь, криволинейные интегралы 1 и 2 рода совпадают с Римановскими.

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством теоремы про длину кривой.

Или сводим интеграл ~~первого~~ второго рода к интегралу первого рода:

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \int_a^b ((P,Q), \gamma'(t))dt = \int_a^b ((P,Q), \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}) \cdot \|\gamma'\| dt = \int_\gamma ((P,Q), \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}) ds$$

(вектор (P,Q) скалярно умножает на единичный касательный вектор к кривой и берёт интеграл 1 рода.

Свойства интеграла 1 рода: L_γ - длина кривой. Следует явно

$$\left|\int_\gamma F ds\right| \le \int_\gamma |f| ds \le \sup|f| \cdot L_\gamma,$$

из свойств интеграла Римана.

Для интеграла 2 рода: по нер-ву Буняковского-Коши-Шварца

$$\left|\int_\gamma P dx + Q dy\right| \le \int_a^b |((P,Q), \gamma')| dt \le \int_a^b \|(P,Q)\| \cdot \|\gamma'\| dt \le \sup\|(P,Q)\| \cdot L_\gamma$$

Интеграл первого рода не зависит от параметризации. Действительно: $\gamma(t): [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma'(t): [c,d] \to \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \gamma([a,b]) = \gamma'([c,d])$. Если фиксируем разбиение ξ на отрезке $[a,b]$, $\exists$ разметка ξ' на $[c,d]$ такая что две интегральные суммы совпадают (смотрим прообразы $(\gamma')^{-1}$ $\gamma[a,b] \to [c,d]$, более того, параметры разбиения одновр. стремятся к 0 $\Rightarrow (\gamma')^{-1} \circ \gamma$ - гомеоморфизм отрезков $[a,b]$ и $[c,d]$, γ и γ^{-1} - равномерно непр. (непр. на компакте).

С интегралом 2 рода всё то же самое, но если γ и γ' имеют противоположные направления, ведь в σ_2 есть множители $\Delta x_i, \Delta y_i$, которые меняют знак при смене направления.

Аддитивность: если разрезать кривую на маленькие, интеграл будет равен сумме маленьких интегралов.

Пример: область D ограничена кривой D. Соединим 2 точки кривой внутр. образом, она разделится на D_1, D_2, границы Γ_1, Γ_2 (Пример в т. е) Это 1-форма $P dx + Q dy$:

$$\int_\Gamma P dx + Q dy = \int_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy \quad \left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}\right) = \left(\int_{\Gamma_1'} + \int_B\right) + \left(\int_{\Gamma_2'} - \int_B\right) =$$

$$= \int_{\Gamma_1'} + \int_{\Gamma_2'} = \int_\Gamma$$

Билет 2

Формула Грина вычисление площади плоской фигуры через интеграл от 1-формы

Тут только про $\mathbb{R}^2$

Теорема. Если $D \in \mathbb{R}^2$ - выпуклое, измеримое по Жордану компакт, его граница ∂D - замкнутая простая кусочно-гладкая кривая. Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на D и частные производные P_y', Q_x' определены и непрерывны на D. Тогда:

Обходим по положительному направлению.

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$$

Доказательство: Докажем $\oint_{\partial D} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$, аналогично доказывается $\int_{\partial D} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$

Спроецируем D на горизонтальную ось, получим некоторый отрезок $[a,b]$. Далее можно разбить кривую ∂D на 4 части $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, проходимые против часовой стрелки, Γ_1 и Γ_3 – вертикальные отрезки (возможно вырожд. в точку) на сторонах полосы $[a,b]\times\mathbb{R}^2$. У любой регулярной параметризации этих отрезков горизонтальная компонента скорости $x'(t) \equiv 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_{1,3}} P\,dx = 0$. Γ_2 и Γ_4 – графики функций φ, ψ опр. на $[a,b]$. D – компакт $\Rightarrow$ функции выпуклы в разные стороны $\Rightarrow$ непрерывны. Сводим интеграл к римановскому и делаем замену

$\int_{\Gamma_2} P\,dx = \int_\alpha^\beta P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt = \int_a^b P(x, \varphi(x))\,dx$ где $(x(t), y(t))$ – кусочно-гладкая параметризация Γ_2 с нужным напр. („слева направо").

$\int_{\Gamma_4} P\,dx = \int_\gamma^\delta P(\hat{x}(s), \hat{y}(s))\,\hat{x}'(s)\,ds = -\int_a^b P(x, \psi(x))\,dx$, минус из-за смены напр.

$$P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x)) = -\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} P'_y(x,y)\,dy \Rightarrow \oint_{\partial D} P\,dx = \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_4} = \int_a^b (P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x)))\,dx =$$

$$= -\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} P'_y(x,y)\,dy = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \text{ (по Th Фубини)}$$

Билет 3

Потенциальное поле, независимость интеграла от пути.

Векторное поле потенциально если оно является градиентом некоторой функции ∇F. Например, поле с постоянными компонентами $v = (c_1, c_2, c_3)$ – потенциально с потенциалом $F = c_1 x + c_2 y + c_3 z$.

Свойство п. полей: если соединить 2 точки путём и проинтегрировать потенциальное векторное поле вдоль этого пути, результат будет зависеть только от начальной и конечной точек, но не от пути.

Доказательство: 1) Пусть $\vec{v} = \nabla f \Rightarrow v = (f'_x, f'_y, f'_z)$. Γ – ориент. кривая, соединяющая A с B. Её параметризация $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ с компонентами $x(t), y(t), z(t)$. композиция $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$

*Диф. сложной функции $t \mapsto [x(t), y(t), z(t)]^T$ и $[x,y,z]^T \mapsto f(x,y,z)$. Произв. первого: $[x'(t), y'(t), z'(t)]^T$, второго в т. $[x,y,z]^T$ – $(f'_x(x,y,z), f'_y(x,y,z), f'_z(x,y,z))$. Итого:

$$f(x(t), y(t), z(t))' = (f'_x(x(t), y(t), z(t)), f'_y(x,y,z), f'_z(x,y,z)) \cdot [x'(t), y'(t), z'(t)] = f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y' + f'_z \cdot z'$$

$$\int_\Gamma \left(\vec{v}, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}\right) ds = \int_a^b (f'_x(\gamma(t))x'(t) + f'_y(\gamma(t))y'(t) + f'_z(\gamma(t))z'(t))\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))'\,dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A)$$

$\Leftarrow$ 2) Поле, т.к. $\int$ не зависит от кривой. Зафикс. A и пусть $f(B) = \int_\Gamma (v,n)\,ds$. Проверим, что $\nabla f = v$

n – единичный касательный вектор

Пусть $v = (P, Q, R)$, проверим $f'_x = P$. Для y и z аналогично. $B_1 = (x_1, y_1, z_1)$, рассм. $B_2 = (x_1 + h, y_1, z_1)$, соединим с B_1 кривой $t \mapsto (x_1 + th, y_1, z_1)$. Используя аддитивность и независимость интеграла от пути получим: $f(B_1) + \int_{[B_1, B_2]} (v,n)\,ds = f(B_2)$, или $\int_{[B_1,B_2]} (v,n)\,ds = f(B_2) - f(B_1)$. Заметим: $\left(\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)\right)$

$$\frac{f(B_2) - f(B_1)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[B_1,B_2]} (v,n)\,ds = \frac{1}{h}\int_0^1 P(x_1 + th, y_1, z_1)\cdot h\,dt = P(x_1 + \xi h, y_1, z_1)$$ — по Th о среднем

$P(x_1 + \xi h, y_1, z_1) \xrightarrow[h\to 0]{} P(x_1, y_1, z_1)$ по непр. $\Rightarrow f'_x(B_1) = P(B_1)$

Билет №4

Несобственные интегралы: определение, критерий Коши, замена переменных, интегрирование по частям.

Опр. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\omega > a$. Пусть f интегрируема по Риману на любом $[a, b]$, где $b \in (a, \omega)$. Несобств. интегралом $\int_a^\omega f(x)dx$ по промежутку $[a, \omega)$ называется предел $\lim_{b \to \omega - 0} \int_a^b f(x)dx$, если предел $\exists$.

Если $\omega = +\infty$ – первого рода, если $\in \mathbb{R}$ – второго рода.

1) Если $\omega \in \mathbb{R}$, $f \in R[a, \omega]$, тогда он совпадает с собственным. Интеграл Римана – непрерывная функция (т.к. липшицева) от верхнего предела интегрирования $\Rightarrow \lim_{b \to \omega - 0} \int_a^b f(x)dx = \int_a^\omega f(x)dx$.

2) Линейность и монотонность. Пусть $\int_a^\omega f\,dx$ и $\int_a^\omega g\,dx$ – сходящиеся. Тогда $\int_a^\omega \alpha f + \beta g\,dx = \alpha \int_a^\omega f + \beta \int_a^\omega g$ и $\int_a^\omega f < \int_a^\omega g$ если $f \le g$. Следуют из свойств интеграла Римана, если переходить к пределу.

3) $\varphi: [\alpha, \beta) \to [a, \omega)$ – непрерывно дифференцируемая сюръекция, f интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, $b \in (a, \omega)$. Тогда следующие интегралы либо оба сходятся и равны, либо оба расходятся:

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\lim_{b \to \omega - 0} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\tau \to \beta - 0} \int_a^{\varphi(\tau)} f(x)dx = \lim_{\tau \to \beta - 0} \int_\alpha^\tau f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

4) Интегрирование по частям. $f, g \in C^1[a, b]$, $\lim_{b \to \omega - 0} f(b)g(b)$. Тогда $\int_a^\omega fg'dx$ и $\int_a^\omega f'g\,dx$ сходятся или расходятся одновр. и верно равенство:

$$\int_a^\omega fg'dx = \lim_{b \to \omega - 0} f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^\omega f'g\,dx$$

Доказательство:

$$\lim_{b \to \omega - 0} \int_a^b fg'dx = \lim_{b \to \omega - 0} \Big(f(b)g(b) - \overset{\text{не зависит от } b}{f(a)g(a)} - \int_a^b f'g\,dx\Big)$$

Критерий Коши: Верно, что $F(b_2) - F(b_1) = \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: b_1, b_2 \in U_\delta^-(\omega) \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

$U_\delta^-(\omega)$ – левая полуокрестность ω

Билет №5

Несобств. интегралы: признаки сравнения, интегральный признак, признаки Абеля и Дирихле. Интегралы с несколькими особенностями, интеграл в смысле главного значения

Пусть $f, g \in R[a,b]$ $\forall b \in [a,\omega)$ и $0 \le f \le g \Rightarrow$ сходимость $\int_a^\omega g\,dx$ влечёт сходимость $\int_a^\omega f\,dx$, если $\int_a^\omega f\,dx$ - расходится $\Rightarrow \int_a^\omega g\,dx$ - тоже.

Доказательство: Если $\int_a^\omega g\,dx$ - сходится, то $G(b) = \int_a^b g\,dx$ - ограничена $\Rightarrow$ $F(b) = \int_a^b f\,dx$ тоже ограничена $\Leftrightarrow$ интеграл $\int_a^\omega f\,dx$ сходится.

Тогда интегралы сходятся или расходятся одновременно, если выполнено (либо одно либо второе):

1) $c, C = const > 0$, $cg \le f \le Cg$ - следует явно из утв. выше + множитель не влияет на сходимость

2) $f \sim g$ при $x \to \omega - 0$: $f \sim g \Rightarrow \frac{1}{2} g \le f \le 2g$ для x, близких к ω

<u>Интегральный признак Коши-Маклорена</u>

$f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ - невозр. неотр. функция. Тогда $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ и ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ сходятся или расходятся одновременно.

Функция монотонна + огр. $\Rightarrow$ интегрируема по любому купному отрезку. Для $x \in [k, k+1]$: $f(k+1) \le f(x) \le f(k) \Rightarrow f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le f(k)$

Суммируем по k от 1 до n: $S_{n+1} - f(1) \le F(n+1) \le S_n$. Из этого очевидно следует, что если ряд сходится, то и интеграл, и наоборот.

Абсолютная/условная сходимость определяются так же как у рядов.

1) Если $f \in [a,b]$ $\forall b \in [a,\omega)$. Если интеграл $\int_a^\omega f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Д-во: $\forall b_1, b_2 \in (a,\omega)$ $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \le \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx \le \varepsilon$ Интеграл абсолютно сходится $\Rightarrow$ для $|f|$ выполнено условие Коши $\Rightarrow$ выполнено для $f \Rightarrow$ по Коши сходится.

2) Признак Вейерштрасса. Пусть $f, g \in R[a,b]$ $\forall b \in [a,\omega)$, $|f| \le g$, $\int_a^\omega g\,dx$ сходится. Тогда $\int_a^\omega f\,dx$ сходится абсолютно

<u>Признак Дирихле</u>: $\int f(x) g(x)\,dx$ сходится, если $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$ ~~огр~~ ограничена числом M, а $g(x)$ монотонно сходится к нулю для $x \to \omega \to 0$

<u>Признак Абеля</u>: $\int_a^\omega f(x) g(x)\,dx$ сходится, если $\int_a^\omega f(x)\,dx$ сходится, а $g(x)$ - монотонна и ограничена числом K.

Доказательство: по второй теореме о среднем:

если $f, g \in R[a,b]$ и g монотонна $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x) g(x)\,dx\right| = \left|g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(b_2)\int_\xi^{b_2} f(x)\,dx\right|, \quad \xi \in [b_1, b_2]$$

для Дирихле: при b_1, b_2 близких к ω, $|g(b_1)|$ и $|g(b_2)| < \varepsilon$, а интегралы $F(\xi) - F(b_1) + F(b_2) - F(\xi) \le 2M$

для Абеля: $|g(b_1)|$ и $|g(b_2)| < K$ а интегралы, наоборот, $< \varepsilon$. Тогда в обоих случаях $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x) g(x)\,dx\right| < \varepsilon \cdot const \Rightarrow$ по Коши интегралы сходятся

Если несколько особенностей, режем по ним и исследуем несобственные по отдельности. Все существуют $\Rightarrow$ несоб. интеграл равен сумме по отдельности, если хоть один расходится - расходится вообще весь.

Главное значение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$$

Например $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ расходится, а V.P. $= 0$

Для особ. ω:

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_a^{\omega - \varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\omega+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right)$$

Билет 6

Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцируемость, равенство повторных интегралов.

Пусть $\varphi(y), \psi(y) \in C[a,b]$, $f(x,y) \in C[\Pi]$, $\Pi = [c,d] \times [a,b]$ – прямоугольник, содержащий в себе криволинейную трапецию $T = \{(x,y) : y \in [a,b], x \in [\varphi(y), \psi(y)]\}$. Тогда $F(y) \in C[a,b]$ – интеграл-непрерывная функция параметра.

Доказательство:

$$|F(y+h) - F(y)| = \left| \int_{\varphi(y+h)}^{\psi(y+h)} f(x,y+h)\,dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right| = \left| \int_{\varphi(y+h)}^{\psi(y+h)} f(x,y+h)\,dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+h)\,dx \right| + \left| \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (f(x,y+h) \cancel{dx} - f(x,y))\,dx \right|.$$

Первое слагаемое ограничено $M \cdot (|\varphi(y) - \varphi(y+h)| + |\psi(y) - \psi(y+h)|) \Rightarrow$ При h достаточно малом оно $< M \cdot \varepsilon$. Второе слагаемое: равномерно непрерывно $\Rightarrow |f(x,y) - f(x,y+h)| \le \varepsilon$ из-за того, что Π – компакт,

Оценка: $|F(y+h) - F(y)| \le \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot [\{c,d\}] = const \cdot \varepsilon$

Дифференцируемость: Условия аналогичны предыдущей задаче, f'_y определена и непрерывна на Π. Тогда $F(y) \in C^1[a,b]$

$$F'(y) = f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx$$

Доказательство: Тогда функция трёх аргументов $I(a,b,y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ функция с непрерывными первыми частными производными. $F(y)$ – композиция функции $y \to [\varphi(y), \psi(y), y]$ и функции I. Значит, F дифференцируема и её производная равна производной композиции:

$$F'(y) = I'_a(\varphi(y), \psi(y), y) \cdot \varphi'(y) + I'_b(\varphi(y), \psi(y), y) \cdot \psi'(y) + I'_y(\varphi(y), \psi(y), y) \cdot 1$$

Производная интеграла по функции верхнего предела $I'_a = -f(a,y)$, $I'_b = f(b,y)$, она непрерывна. $I'_y(a,b,y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx$.

$$\frac{1}{h}\left| \int_a^b (f(x,y+h) - f(x,y) - f'_y(x,y) \cdot h)\,dx \right| \overset{\text{теорема Лагранжа}}{=} \left| \int_a^b (f'_y(x, \xi(y)) - f'_y(x,y))\,dx \right|,$$

где: $\xi(x) \in (y, y+h)$, f'_y равномерно непрерывна в силу того, что Π компакт, функция в правой части мала для достаточно небольшого h, левая часть стремится к нулю при $h \to 0$:

$$\frac{I(a,b,y+h) - I(a,b,y)}{h} \to \int_a^b f'_y(x,y)\,dx \text{ для } h \to 0$$

Повторные интегралы:

$$\int_a^b dy \int_c^d f(x,y)\,dx = \int_c^d dx \int_a^b f(x,y)\,dy.$$

Внутренние интегралы непрерывны.

Рассмотрим функцию:

$$H(t) = \int_a^b dy \int_c^t f(x,y)\,dx - \int_c^t dx \int_a^b f(x,y)\,dy, \quad H(c) = 0$$

Имеем $H'(t) = \int_a^b f(t,y)\,dy - \int_a^b f(t,y)\,dy = 0 \Rightarrow H \equiv 0 \Rightarrow H(d) = 0 \Rightarrow$ повторные интегралы равны.

Билет 7

Несобственные интегралы с параметром. Равномерная сходимость. Критерий Коши.

$F(y) = \int_a^\omega f(x,y)\,dx$. Будем рассм. интеграл с одной особенностью.

Интеграл **равномерно** сходится, если:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) \in [a,\omega) : \forall b \in (R,\omega)\ \forall y \in Y\ \left|\int_a^b f(x,y)\,dx - F(y)\right| < \varepsilon$

Последнее неравенство (альтернативный вариант): $\left|\int_b^\omega f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$

$\int_a^\omega f(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows} F(y)$

Критерий Коши:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) \in [a,\omega) : \forall b_1, b_2 \in (R,\omega)\ \forall y \in Y\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$

Равномерная сходимость равносильна критерию Коши:

$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_{b_1}^{\omega} - \int_{b_2}^{\omega}\right| \le \left|\int_{b_1}^{\omega} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int_{b_2}^{\omega} f(x,y)\,dx\right|$ → равномерная сходимость ведёт выполнение условия Коши

Достаточность: Из равномерного условия Коши следует поточечное ⇒ для всех y интеграл сходится и $F(y)$ определена:

$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_a^{b_2} - \int_a^{b_1}\right| < \varepsilon$. Для достаточно больших b_1, b_2, $b_2 \to \omega - 0$

$\left|\int_{b_1}^{\omega} f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_a^{b_1} f\,dx - F(y)\right| \le \varepsilon$ ⇒ сходится равномерно

Билет 8

Признаки Вейерштрасса, Абеля, Дирихле для равномерной сходимости.

Вейерштрасс:

$|f(x,y)| \le g(x,y)$, интеграл $\int_a^\omega g(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y.

Тогда $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится абсолютно и равномерно.

Применяем дважды критерий Коши, применяем неравенство:

$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| < \int_{b_1}^{b_2} g(x,y)\,dx$

Дирихле: $F(u,y) = \int_a^u f(x,y)\,dx$ равномерно ограничена M, g монотонна для всех y по x и равномерно сходится к 0 при $x \to \omega - 0$

Абель: $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ равномерно сход. на Y, $g(x,y)$ равн. ограничена и монотонна по x для всех y.

Д-во: По 2 теореме о среднем:

$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| \le \left|g(b_1,y)\int_{b_1}^{\xi(y)} f(x,y)\,dx\right| + \left|g(b_2,y)\int_{\xi(y)}^{b_2} f(x,y)\,dx\right|$

Для Дирихле при больших b_1, b_2 $|g(b_1,y)|$ и $|g(b_2,y)| < \varepsilon$, интеграл оценивается $2M$.

Для Абеля интегралы $< \varepsilon$ по Коши, $g(b_1,y)$ и $g(b_2,y)$ ограничены M.

Оценка const·ε даёт равномерную сходимость, при этом ни ε, ни const не зависят от y.

Билет 9

Равн. сходимость по Гейне. Предельный переход по пар. в несобств. интеграле, непр. зависимость несобств. инт. от параметра.

Интеграл $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ равномерно сходится по Гейне, если $\forall$ возрастающей к ω последовательности $A_n \in (a,\omega)$ функциональная последовательность $F_n(y)=\int_a^{A_n} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y при $n\to+\infty$

Теорема. Р. сходимость по Коши равносильна р. сходимости по Гейне.

В одну сторону: При больших n A_n близко к ω, поэтому $\left|\int_a^{A_n} f\,dx - F(y)\right| < \varepsilon$

В другую сторону: Пусть нет равномерной сходимости по Коши.

Построим тогда A_n, при которой нет сходимости по Гейне.

$\exists \varepsilon>0\ \forall k(\varepsilon)<\omega\ \exists b_1,b_2\in(k,\omega): \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right|\geq\varepsilon$ для какого-то $y\in Y$ и пусть $A_1=b_1$, $A_2=b_2$. Потом

Зафиксируем какое-нибудь k, по нему b_1 и b_2 для таких k, затем рассмотрим $k=\frac{A_2+\omega}{2}$ для $\omega<\infty$, $k=A_2+1$, $\omega=\infty$. Новые b_1 и b_2 для A_n: $F_n(y)=$ $A_3=b_1$, $A_4=b_2$ и т.д.. Функциональная последовательность $=\int_a^{A_n} f(x,y)\,dx$ не сход. равномерно, ведь $F_{2n+2}-F_{2n+1}=\int_{A_{2n+1}}^{A_{2n+2}} f\,dx$ не равномерно стремится к 0.

Предельный переход: Пусть y_0 — предельная точка метр. пространства Y. Пусть $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows} F(y)$, пусть $\forall b\in(a,\omega)$ верно $f(x,y) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$. Тогда интеграл $\int_a^\omega \varphi(x)\,dx$ сходится, предел $\lim\limits_{y\to y_0} F(y)$ существует и они равны:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^\omega f(x,y)\,dx = \int_a^\omega \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$$

Доказательство: $A_n\to\omega$, $F_n(y)=\int_a^{A_n} f(x,y)\,dx$. Применим к F_n th о функциональной последовательности ($\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$):

$$\lim_{y\to y_0} F_n(y) = \lim_{y\to y_0}\int_a^{A_n} f(x,y)\,dx = \int_a^{A_n}\varphi(x)\,dx$$

φ интегрируема, т.к. φ — предел (равн.) интегрируемых функций, переставляя $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$. Тогда $\exists$ предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^{A_n}\varphi(x)\,dx$ и точно в силу равн. сходимости он равен $\lim\limits_{y\to y_0} F(y)$

Если $f(x,y)\in C([a,\omega)\times[c,d])$ и $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} F(y)$, то $F(y)\in C([c,d])$

$\forall b\in(a,\omega)$ в силу равн. непр. на компакте есть равн. сходимость $f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0)$. Прим. теорему $\varphi(x)=f(x,y_0) \Rightarrow F$ непр. в т. y_0

Билет 10

Дифференцирование несобств. интегралов, зависящих от параметра.

~~Пусть $f(x,y)\in C([a,\omega)\times[\alpha,\beta])$ и $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} F(y)$. Тогда верно:~~

~~$\int_\alpha^\beta F(y)\,dy = \int_\alpha^\beta$~~

Пусть $f, f'_y \in C([a,\omega) \times [\alpha,\beta])$ интеграл $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится к $F(y)$, интеграл производной ~~сходится~~ сходится равномерно: $\int_a^\omega f'_y(x,y)\,dx \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} \varphi(y) \Rightarrow F$ непр. диф. на $[\alpha,\beta]$ и $F' = \varphi$

Рассм. $A_n \to \omega$ и $F_n(y) = \int_a^{A_n} f(x,y)\,dx$. По Th о диф. собств. интеграла с параметром $(F_n)'(y) = \int_a^{A_n} f'_y(x,y)\,dx \Rightarrow$ применим Th о диф. функциональной последовательности

(просуб. ω сх. $\Rightarrow$ функции сход) φ непр., т.к. сотв. Th что $F(y) \in C([c,d])$

Тогда $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \rightrightarrows F(y)$ и $f(x,y) \in C([a,\omega) \times [c,d])$

Билет 11

Интегрирование несобств. интегралов с параметром. перестановка собств. и несобств. интегралов.

Пусть $f(x,y) \in C([a,\omega) \times [\alpha,\beta])$ и $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} F(y)$

$$\int_\alpha^\beta F(y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^\omega f(x,y)\,dx = \int_a^\omega dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy$$

$F(y)$ – непрерывна $\Rightarrow$ интегрируема. Рассматриваем $A_n \nearrow \omega$, положим $F_n(y) = \int_a^{A_n} f(x,y)\,dx$. $F_n \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} F \Rightarrow \int_\alpha^\beta F_n(y)\,dy \xrightarrow{n\to\infty} \int_\alpha^\beta F(y)\,dy$. При этом

$\int_\alpha^\beta F_n(y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^{A_n} f(x,y)\,dx = \int_a^{A_n} dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy$ – по Th о повторных интегралах.

A_n – произв. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{b\to\omega-0} \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta F(y)\,dy$

Билет 12

Перестановка двух несобственных интегралов.

Th: Пусть 1) $f \in C([a,\omega) \times [b,\hat\omega))$, 2) $\forall A \in (a,\omega)$ и $B \in (b,\hat\omega]$ $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \overset{[b,B]}{\rightrightarrows} G(y)$ и $\int_b^{\hat\omega} f(x,y)\,dy \overset{[a,A]}{\rightrightarrows} H(x)$ 3) повторный интеграл $\int_a^\omega dx \int_b^{\hat\omega} |f(x,y)|\,dy$ сходится. Тогда повторные интегралы $\exists$ и равны: $\int_a^\omega dx \int_b^{\hat\omega} f(x,y)\,dy = \int_b^{\hat\omega} dy \int_a^\omega f(x,y)\,dx$

Доказательство: 1) $H_d(x) = \int_b^d f(x,y)\,dy$, $H_d \in C([a,\omega))$

2) Если H_d непр., рассм. интеграл $\int_a^\omega H_d(x)\,dx$. Он равномерно сходится по d на $[b,\hat\omega)$ по признаку Вейерштрасса:

$$|H_d(x)| = \left|\int_b^d f(x,y)\,dy\right| \le \int_b^{\hat\omega} f(x,y)\,dy$$

3) в $\lim\limits_{d\to\hat\omega-0} \int_a^\omega H_d(x)\,dx$ переставляется предел и интеграл, т.к. интеграл равномерно сходится, $H_d(x) \overset{[a,A]}{\rightrightarrows} H(x)$ $\forall A \in [a,\omega) \Rightarrow \lim\limits_{d\to\hat\omega-0} \int_a^\omega H_d(x)\,dx = \int_a^\omega \lim\limits_{d\to\hat\omega-0} H_d(x)\,dx = \int_a^\omega H(x)\,dx$

$$\int_a^\omega H_d(x)\,dx = \int_a^\omega dx \int_b^d f(x,y)\,dy = \int_b^d dy \int_a^\omega f(x,y)\,dx = \int_b^d G(y)\,dy$$

4) $\lim\limits_{d\to\hat\omega-0} \int_a^\omega H_d(x)\,dx = \lim\limits_{d\to\hat\omega-0} \int_b^d G(y)\,dy = \int_b^{\hat\omega} G(y)\,dy \Rightarrow \int_a^\omega H(x)\,dx = \lim\limits_{d\to\hat\omega-0} \int_a^\omega H_d(x)\,dx = \int_b^{\hat\omega} G(y)\,dy$

* Теорема Дини. Пусть $f \in C([a,\omega) \times [\alpha,\beta])$ $f \ge 0$. Пусть $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \to F(y)$ непр. Тогда он сходится равномерно. Д-во: рассм. $A_n \nearrow \omega \Rightarrow I_n(y) = \int_a^{A_n} f(x,y)\,dx$ – возр. посл. непр. функций, сх. на компакте к непр. функции $F(y)$. По Th Дини это посл. $F_n \rightrightarrows F \Rightarrow$ интеграл сх. равномерно по Гейне.

Альт. д-во Th в начале: применяем Th Дини на $[a,A]$ и $[b,B]$ требование п 2 выполнено, ост. следует из усл. Th $\Rightarrow$ можно переставлять.

Билет 13

Вычисление интегралов Эйлера-Пуассона и Дирихле

Интеграл Дирихле: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ * Сходится по пр. Дирихле, в 0 продолжается по непрерывности.

*Рассм. $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$. Функция нечётная $\Rightarrow$ достаточно рассм. только при положительных α. При $y = \alpha x \Rightarrow I(\alpha) = \mathrm{sgn}(\alpha) \cdot \pi/2$

Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ не сходится равномерно, ведь $\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{\delta\alpha}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$

Если $\alpha = \frac{1}{\delta}$, то интеграл не сходится равномерно

Доказательство:

$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$. Интеграл Дирихле сходится, а функция e^{-xy} монотонна по x и ограничена единицей при неотр. $x, y \Rightarrow F(y)$ равномерно сходится по признаку Абеля на $y \in [0, +\infty)$. $\frac{\sin x}{x} e^{-xy}$ непр. $\Rightarrow F(y)$ непр. на $[0, +\infty)$.

$\left(\frac{\sin x}{x} e^{-xy}\right)'_y = -\sin x \cdot e^{-xy}$ - непрерывна. Тогда $\forall \delta > 0$ $\int_0^{+\infty} -\sin x e^{-xy} dx$ сходится равномерно на $[\delta, +\infty)$ по пр. Вейерштрасса, т.к. можно оценить функцией $e^{-x\delta} \Rightarrow$ можно дифференцировать

$F'(y) = -\int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx$ (y помещается в экспоненту вида $[\delta, +\infty)$)

Интегрируем по частям: $-\frac{e^{-xy}}{y} \sin x + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy} \cos x}{y} dx =$

$= -\frac{e^{-xy} \sin x}{y} - \left(\frac{e^{-xy} \cos x}{y^2} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy} \sin x}{y^2} dx\right) = -\int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx$

$\frac{e^{-xy}(\sin x \cdot (-y) - \cos x)}{y^2+1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{(0-1)}{y^2+1} = \frac{-1}{y^2+1} \Rightarrow F(y) = -\mathrm{arctg}\, y + C$

C: $\lim_{y \to +\infty} F(y) = \lim_{y \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} d = \int_0^{+\infty} \lim_{y \to +\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = \int_0^{+\infty} 0\, dx = 0$

Объясним перестановку пределов: подынтегральная функция ограничена единицей $\Rightarrow \int_0^\delta < \delta$

$\int = \int_0^\delta + \int_\delta^{+\infty}$. Подынтегральная $\int_\delta^{+\infty} e^{-xy} dx = \frac{e^{-\delta y}}{y}$, $y \to +\infty \Rightarrow \int < \delta \Rightarrow$

Второй интеграл: оцениваем e^{-xy}, исходный $< 2\delta$ при больших $y \Rightarrow \lim_{y \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = 0$

второй интеграл тоже $< \delta \Rightarrow$

$\lim_{y \to +\infty} -\mathrm{arctg}\, y + C = 0$, $C = \pi/2$, $F(y) = \pi/2 - \mathrm{arctg}(y)$. Для $y > 0$

$F(0) = \pi/2$ - интеграл Дирихле.

Интеграл Эйлера-Пуассона: $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$f(x, y) = y e^{-y^2(1+x^2)}$

$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(x,y) dx = \int_0^{+\infty} \left(e^{-y^2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(yx)^2} y\, dx\right)\right) dy = \int_0^{+\infty} \left(e^{-y^2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right) dy = I^2$

$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x,y) dy = \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2(1+x^2)} dy^2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

Докажем, что повторные интегралы равны.

$$\int_0^{+\infty} f\,dy = \int_0^1 f\,dy + \int_1^{+\infty} f\,dy$$

$$\int_0^{+\infty} dx \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right) f\,dy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 f\,dy + \int_0^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} f\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} f\,dx + \int_1^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f\,dx$$

Можно ~~по~~ по теореме о перестановке интегралов.

Проверка условий теоремы:

$\int_0^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} f\,dy$, $\int_1^{+\infty} f\,dy$ равн. сходится (функция мажорируется $y \cdot e^{-y^2}$),

$\int_0^{+\infty} f\,dx$ сходится на $[1, R] \ni y$, т.к. мажорируется $R \cdot e^{(-1+x^2)}$

$\int_0^1 f\,dy$ сход. равномерно на $[0, R]$, т.к. подынт. ф. огр., а $\int_0^{+\infty} f\,dx$ сходится равномерно на $[\delta, 1]$ $\forall \delta \in (0,1)$, т.к. f мажорируется $e^{-\delta^2(1+x^2)}$

Билет 14

Гамма-функция: определение, основные свойства, формула дополнения, формула Эйлера-Гаусса. Формула Стирлинга

Рассм. вспомогательные функции: Формула Эйлера-Гаусса

$$\Gamma_n(x) = \frac{(n-1)!\, n^x}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)} \quad n \in \mathbb{N} \setminus 1, \quad x = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2 \dots\}$$

$$\Gamma_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \cdot \frac{n^x}{(n-1)^x} \cdot \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \cdot \dots \cdot \frac{2^x}{1^x}$$

$$(2) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k}\right)^x = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x$$

$$(1) = \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k}{x+k} = \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\frac{x+k}{k}}\right) = \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{k}}\right),$$

Значит, $x\Gamma_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(1+\frac{1}{k})^x}{1+x/k}$ $\quad \Pi = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})^x}{1+x/k}$

Рассмотрим теперь бесконечное произведение

Π сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(1+1/k)^x}{1+x/k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) =$ $= \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right) \Rightarrow \Pi$ сходится абсолютно и функция $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+1/k)^x}{(1+x/k)}$$

Свойства:

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \frac{\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x+1)}{\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)!\,n^{x+1}}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+1+k)}}{\frac{(n-1)!\,n^x}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+x} = x$$

2) $\Gamma(n+1) = n!$ $\quad \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \dots = n!$

3) Формула дополнения: при $x = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\quad \Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x) \Rightarrow \Gamma(1-x)\Gamma(x) = -x\Gamma(-x)\Gamma(x)$

$$\sin(x) = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

$$-x\Gamma(-x)\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+1/k)^{-x}}{1-x/k}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+1/k)^x}{1+x/k} = \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}} = \frac{\pi}{\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Фан-факт: $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$

4) $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$?

5) $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ — Первый интеграл Эйлера.

Для начала докажем, что $\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt$.

Интегрируем по частям:

$$\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \frac{1}{x}\int_0^1 (1-t)^n d(t^x) = \frac{1}{x}(1-t)^n t^x \Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{n}{x}\int_0^1 (1-t)^{n-1} t^x dt =$$

$$= \frac{n}{x}\int_0^1 (1-t)^{n-1} t^x dt = \frac{n(n-1)}{x(x+1)}\int_0^1 (1-t)^{n-2} t^{x+1} dt = \dots = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\int_0^1 t^{x+n-1} dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Пусть в равенстве в начале доказательства $t = y/n$

$$\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \int_0^n \left(1-\frac{y}{n}\right)^n \frac{y^{x-1}}{n^x} dy = \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \int_0^n (1-y/n)^n y^{x-1} dy$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\Gamma_{n+1}(x) = \Gamma(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n (1-y/n)^n y^{x-1}dy = \int_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy$

б) Непрерывность: $\int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}dy = \int_0^1 y^{x-1}e^{-y}dy + \int_1^\infty y^{x-1}e^{-y}dy$

Сходится равномерно на любом отрезке $[a,b]$ с области определения. По признаку Вейерштрасса:

$\int_0^1 y^{x-1}e^{-y}dy \le \int_0^1 y^{a-1}e^{-y}dy$, $\int_1^\infty y^{x-1}e^{-y}dy \le \int_1^\infty y^{b-1}e^{-y}dy$ I_1 и I_2 сходятся равномерно.

Формула Стирлинга:

$n! \propto \left(\frac{n}{e}\right)^n(\sqrt{2\pi n})$ для $n\in\mathbb{N}$

Более точно: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\dots\right)$

~~3) Формула Эйлера-Гаусса~~

Билет №15

Бета-функция: определение, формула понижения, связь с гамма-функцией

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \quad \alpha \text{ и } \beta>0$$

Свойства:

1) Симметричность $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$ (из замены $t\mapsto 1-t$)

2) Для $\alpha>1$ верно: (Формула понижения)

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta)$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = -\frac{1}{\beta}(1-x)^\beta x^{\alpha-1}\Big|_0^1 + \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^\beta dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}\left((1-x)^{\beta-1} - x(1-x)^{\beta-1}\right)dx = \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta) - \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta)$$

$$\frac{\beta}{\beta}B(\alpha,\beta) + \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta)$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}$$

3) Связь с гамма-функцией: $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Для $\alpha>1$ применим индукцию + формулу понижения:

$$B(\alpha-1,\beta) = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha-1}B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\cancel{\alpha+\beta-1}}{\cancel{\alpha-1}}\cdot\frac{\cancel{(\alpha-1)}\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)\cdot\cancel{(\alpha+\beta-1)}}$$

Для $\alpha<1$ (для $\alpha=1$ очевидно)

Сделаем замену $t=\frac{1}{1+x}$, $1-t=\frac{x}{1+x}$, $dt=-t^2dx$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx$$

$\Gamma(u) = \int_0^\infty y^{u-1}e^{-y}dy$ пусть $y=(x+1)z$, где x — параметр, z — переменная

$\Gamma(u) = \int_0^\infty (x+1)^u z^{u-1}e^{-(x+1)z}dz$, верно для всех $x\ge0$

$$B(\alpha,\beta)\cdot\Gamma(\alpha+\beta) = \int \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+\beta)\,dx = \int \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\left(\int_0 (x+1)^{\alpha+\beta} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(x+1)z}\,dz\right)dx =$$

$$= \int_0^\infty x^{\beta-1}\left(\int_0^\infty z^{\alpha+\beta-1} e^{-(x+1)z}\,dz\right)dx \overset{?}{=} \int_0^\infty\left(\int_0^\infty x^{\beta-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(x+1)z}\,dx\right)dz = \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1}\left(\int_0^\infty x^{\beta-1} z^{\beta} e^{-xz}\,dx\right)dz$$

$$= \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1}\left(\int_0^\infty (xz)^{\beta-1} e^{-xz}\,d(xz)\right)dz = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$$

? $\int_0^\infty x^{\beta-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(x+1)z}\,dz \rightrightarrows \ldots$ по Вейерштрассу, ведь $x^{\beta-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(x+1)z} \le z^{\alpha} e^{-z}\max(u^{\beta-1} e^{\ldots})$

$\int_0^\infty x^{\beta-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(x+1)z}\,dx = z^{\alpha-1} e^{-z}\int_0^\infty (xz)^{\beta-1} e^{-xz} z\,dx \rightrightarrows z^{\alpha-1} e^{-z}\Gamma(\beta)$ по th Дини на каждом конечном промежутке.

Билет № 16

Принцип сжимающих отображений, непр. зависимость неподв. точки от параметра.

Отображение $X\to X$ — сжимающее, если оно липшицево: $\forall x_1, x_2 \in X$

$d(f(x_1), f(x_2)) \le q\, d(x_1, x_2)$ с $q<1$

Каждое сжимающее отобр. имеет единств. неподв. точку

Рассм. произв. $x_0\in X$ и построим посл. $x_{n+1} = f(x_n)$

$d(x_e, x_{e+1}) \le q d(x_{e-1}, x_e) \le q^2 d(x_{e-2}, x_{e-1}) \le \ldots \le q^e d(x_0, x_1)$

Для всех n, k: $d(x_n, x_{n+k}) \le \sum_{e=n}^{n+k-1} d(x_e, x_{e+1}) \le \sum_{e=n}^{n+k-1} q^e d(x_0,x_1) = q^n(1+q+q^2+\ldots)\, d(x_0,x_1) \le d(x_0,x_1)\cdot\frac{q^n}{1-q}$

Если 2 предельные точки: ~~$d(x^*, x_*)$~~ $d(x^*, x_*) = d(f(x^*), f(x_*)) \le$

$\le q\, d(x^*, x_*) \Rightarrow x^* = x_*$

Посл. сходится к единственной неподвижной x^*

$d(x_n, x_{n+k}) \le d(x_0, x_1)\frac{q^n}{1-q}$. Перейдем к пределу $k\to\infty$

$d(x_n, x^*) \le d(x_0, x_1)\frac{q^n}{1-q}$ (при $n=0$ $d(x_0, x^*) \le d(x_0, x_1)\frac{1}{1-q}$)

Уст. неподв. точки: отобр. $f(x) = F(x,t)$ $X\to X$ зависит от параметра $t\in D$, D - метрическое пространство с метрикой ρ. При каждом x отобр. $f(x,t)$ как ф-ия от t непр. в точке t_0. $x^*(t)$ - неподв. точка $x\to f(x,t)$

Теорема: $t\to x^*(t)$ в t_0

$\forall t$ решение уравнение $x = f(x,t)$ - предел $x_{n+1} = f(x_n, t)$, x_0 (начальная точка) выбирается как угодно. Пусть $x_0 = x^*(t_0) = f(x^*(t_0), t_0)$

$d(x^*(t), x^*(t_0)) = d(x^*(t), x_0) \le \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0) = \frac{1}{1-q} d(f(x^*(t_0), t), f(x^*(t_0), t_0)) \to 0$

$x_1 = f(x_0, t)$, неравенство следует из оценки $d(x_n, x^*) \le d(x_0, x_1)\frac{1}{1-q}$ для $n=0$

Билет 17

Теорема о неявной функции: существование непрерывной функции, неявно заданной уравнением

Пусть есть система из n уравнений от n+k переменных. Её можно записать в виде векторного уравнения $F(x,y)=0$, $(x,y)\in \mathbb{R}^{n+k}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$. Если считать x к-нибудь параметром, тогда решение – какая-то функция от параметра. Рассм. только случай, когда решение локально единственно ⟺ система неявно задаёт функцию от параметра. Если $n=k=1$, то есть одно уравнение $F(x,y)=0$, которое задаёт x как функцию y или же y как функцию x.

Если $F:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^n$ дифференцируема, $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^k$. Обозначим за $F'_x(x_0,y_0)$ производную отображения $x\to F(x,y_0)$ в т. x_0, аналогично с $F'_y(x_0,y_0)$. Произв. существуют, их матрицы – фрагменты $F'(x_0,y_0)$

<u>Теорема</u>: отобр. $\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^n$ непр. диф. в точке (x_0,y_0), $F(x_0,y_0)=0$ и $F'_y(x_0,y_0)$ – обратимый линейный оператор. Тогда $\exists\ x_0\subset U$, $y_0\subset V$, где U и V – окрестности, непр. функция $\varphi: U\to V$, т.ч. $\forall (x,y)\in U\times V: F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$

<u>Доказательство</u>: Домножим слева $F(x,y)$ на $(F'_y(x_0,y_0))^{-1}$:

$$y = y-(F'_y(x_0,y_0))^{-1}F(x,y) = T(x,y).$$

$T(x,y)$ – оператор, зависящий от параметра x. Если x – фиксирован, то неподвижная точка T даёт решение $(x,\varphi(x))$, $F=0$.

$$T'_y(x_0,y_0) = Id-(F'_y(x_0,y_0))^{-1}F'_y(x_0,y_0)=0$$

Составленная из частных производных всех компонент T. В силу их непрерывности непрерывно зависит от (x,y) ⟹ $T'_y(x,y)$ непрерывно зависит от (x,y). Из существования непрерывность в точке (x_0,y_0). В $(x,y)\to(x_0,y_0)$ производная $T'_y(x_0,y_0)$ имеет малую норму. Рассм. замкнутые шары $x_0\subset U$, $y_0\subset V$, т.ч.: $\|T'_y(x,y)\|<\frac{1}{4}$

[Теорема о конечных приращениях: U – обл. в $\mathbb{R}^n$, $F: U\to\mathbb{R}^n$ диф. во всех точках $[x,x+h]\subset U$. Пусть $M=\sup\limits_{\xi\in[x,x+h]}\|F'(\xi)\|$ конечна ⟹ $\|F(x+h)-F(x)\|\le M\|h\|$

по th о конечных приращениях $\|T(x,y_1)-T(x,y_2)\|\le\frac{1}{4}\|y_1-y_2\|$. Оператор $T_x(x,\cdot)$ сокращает расстояния между точками как минимум в 4 раза. Пусть теперь $V=\overline{B_\varepsilon(y_0)}$ – замкнутый шар с центром в y_0 радиуса ε. x – фиксирован. Покажем, что при $y\in V$ $T(x,y)\in B_\varepsilon(x,y)$ (шар отобр. внутрь себя):

$$\|y_0-T(x,y)\|=\|T(x_0,y_0)-T(x,y)\|\le\|T(x_0,y_0)-T(x,y_0)\|+\|T(x,y_0)-T(x,y)\|$$

Первое слагаемое справа – по непрерывности T. Для x достаточно близкого к x_0 слагаемое $<\varepsilon/2$. Для второго – th о конечных <u>приращениях</u>:

$$\|y_0-T(x,y)\|\le\varepsilon/2+1/4\cdot\|y_0-y\|\le 3/4\,\varepsilon \Rightarrow T_x(B_\varepsilon(y_0))\subset B_\varepsilon(y_0)=V$$

– семейство сжимающих операторов на V. Неподв. точки обр. $\varphi: U\to V$. Если берём $x\in U$ ⟹ $\exists!\ y\in V$, $y=\varphi(x)$, т.ч. $F(x,y)=0$. Усл. действ. выполнено. С окрестностями проблема решается: решение $F=0$ в $U\times V$ – график φ. Замкнутой замкнутого шара на открытый, ведь отображаем шар <u>строго</u> <u>внутрь</u> ⟹ ничего не теряем. внутрь ⟹ неподв. точки все лежат внутри

Билет 18

Дифференцируемость неявной функции и формула для производной

Формула производной: $\varphi'(x) = -(F'_y(x,\varphi(x)))^{-1} F'_x(x,\varphi(x))$

При x близком к x_0 и $h \to 0$ ($\in \mathbb{R}^n$) записываем:

$0 = F(x+h,\varphi(x+h)) - F(x,\varphi(x)) = F(x+h,\varphi(x+h)) - F(x,\varphi(x+h)) + F(x,\varphi(x+h)) - F(x,\varphi(x)) = F'_x(x,\varphi(x+h))h + o(h) + F'_y(x,\varphi(x))(\varphi(x+h) - \varphi(x)) + o(\varphi(x+h)-\varphi(x))$ при $h \to 0$. $F'_y(x_0,y_0)$ — обратима, φ и F'_y непр. $\Rightarrow$ $F'_y(x,\varphi(x))$ — обратим для $x \to x_0$. Следовательно, $\varphi(x+h)-\varphi(x) = -(F'_y(x,\varphi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x,\varphi(x))h + o(h) + o(\varphi(x+h)-\varphi(x))$. Значит, $\Delta\varphi = \varphi(x+h)-\varphi(x) = O(h)$

Если $\beta(h) = o(\varphi(x+h)-\varphi(x)) \Rightarrow \Delta\varphi - \beta(h) = O(h)$, т.к. в правой части огр. лин. оператор умножается на h и $+o(h)$. Но $\|\Delta\varphi\| \le 2\|\Delta\varphi - \beta(h)\|$ для $h \to 0$, т.к. $\beta(h) = o(\Delta\varphi)$. Тогда $o(\Delta\varphi) = o(O(h)) = o(h)$ $\Rightarrow$ $o(\Delta\varphi)$ ни на что не влияет $\Rightarrow$ φ дифференцируема по определению.

Д-во формулы: $0 = F(x,\varphi(x))' = F'_x + F'_y \circ \varphi' \Rightarrow \varphi' = -(F'_y)^{-1} F'_x$

Билет 19

Теорема об обратном отображении

Th Пусть $f: G(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $y_0 \in G$, f непр. дифференцируема в G, производная $f'(y_0)$ обратима. Тогда в некоторой окрестности U $x_0 = f(y_0)$ определено непрерывно дифференцируемое обратное отображение g, $g(U)$ — окрестность y_0 и верна формула $g'(x) = (f'(g(x)))^{-1}$

Доказательство: Рассм. у-ние $x - f(y) = 0$. Пусть $F(x,y) = x - f(y)$. К F можно применить Th о неявной функции: $F \in C^1$, $F(x_0,y_0) = 0$ и $F'_y(x_0,y_0) = -f'(y_0)$ — обратима. Теорема даёт функцию $\varphi = g$, которая и есть обратная, ведь она даёт окрестности: $x = f(y) \Leftrightarrow y = g(x) \Rightarrow g$ биекция между U и $g(U) \subset V$.

Если в $g(U)$ есть граничная точка — обозначим её $\hat{y}$. К ней $\to$ последовательность точек $y_n \in V \setminus g(U)$, $f(y_n) = x_n$ по непр. сходятся к $\hat{x} = f(\hat{y})$ $\Rightarrow \in U$ для больших $n \Rightarrow (x_n, y_n) \in U \times V$, $x_n = f(y_n) \Rightarrow y_n = g(x_n) \Rightarrow y_n \in g(U) \Rightarrow$ не граничная.

Формула производной неявной функции, $F'_x = x'_x = Id \Rightarrow g'(x) = -(-F'_y)^{-1} = (F'_y)^{-1}$

Билет 20

Формула Тейлора для функций многих переменных

Теорема о перестановочности производных. Пусть $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет в области G вторые частные производные. Тогда в т., где они непрерывны, смешанные частные производные совпадают: $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$

Д-во (для функции 2 переменных, для большего числа аналогично).

Пусть $z = (x,y)$ — нужная точка. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(h_1,h_2) = f(x+h_1, y+h_2) - f(x+h_1, y) - f(x, y+h_2) + f(x,y)$ и функцию $\varphi(t) = f(x+h_1 t, y+h_2) - f(x+h_1 t, y) \Rightarrow F(h_1,h_2) = \varphi(1) - \varphi(0)$

$F(h_1,h_2) = \varphi'(\theta) = (f'_x(x+\theta h_1, y+h_2) - f'_x(x+\theta h_1, y))h_1 = f''_{yx}(x+\theta h_1, y+\gamma h_2)h_1 h_2$

(два раза используем Th Лагранжа)

Возьмём $\psi(t) = f(x+h_1, y+th_2) - f(x, y+th_2)$, получим аналогичное равенство $F(h_1,h_2) = \psi'(\xi) = f''_{xy}(x+\zeta h_1, y+\xi h_2)h_1 h_2$

Приравниваем получившиеся выражения и устремляем (h_1, h_2) к 0. Тогда в силу непрерывности вторых частных производных ⇒ производные совпадают в точке (x, y)

Следствие: Если $f \in C^k$, то частные производные $D_{i_1, i_2, \dots i_k} f(x)$ не зависят от порядка, в котором идут индексы.

Доказ-во: Предыдущая th

Шаг индукции: В выражении $D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f(z) = D_{i_1}(D_{i_2} \dots D_{i_k} f)(z)$ операторы $D_{i_2} \dots D_{i_k}$ можно переставить как угодно по предположению индукции. Функция в скобках (φ) не меняется ⇒ $D_{i_1}\varphi$ тоже не меняется. Теперь сделаем нужную перестановку, потом, если надо, переставим два самых левых оператора и потом все, кроме самого левого по предположению ⇒ рез. не изм.

Теорема: Пусть $f: \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ - функция класса C^k и отрезок $[x, x+h]$ ~~...~~ $\subset G$. Тогда имеет место формула Тейлора:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{s!}((h, \nabla)^s f)(x) + r_{k-1}(x, h), \text{ где } r_{k-1}(x, h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}(h, \nabla)^k f(x+th)\,dt$$

Доказательство: Запишем ~~...~~ обычную формулу Тейлора для $\varphi(\Theta) = f(x + \Theta h) \in C^k$:

$$\varphi(\Theta) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}\Theta + \dots + \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\Theta^{k-1} + \int_0^\Theta \frac{(\Theta - t)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k)}(t)\,dt$$

Положим $\Theta = 1$, $\varphi^{(s)}(t) = ((h, \nabla)^s) f(x+th)$

(h, ∇) - сокращение для оператора $D_h = h_1 D_1 + \dots + h_n D_n$ - дифференцирование вдоль вектора h. Когда применяем к f и к Θ, получаем $D_h f$, к которой можно опять применить D_h

* В форме Лагранжа: $r_{k-1}(x, h) = \frac{1}{k!}(h, \nabla)^k f(x + \Theta h)$

Билет 2~~1~~

Экстремумы функций многих переменных, необходимое и достаточное условие

x_0 - точка локального максимума, если ∃ окр., в которой выполнено неравенство $f(x_0) \geq f(x)$ для x из окрестности. Если нер-во строгое, то x_0 - точка строгого локального максимума. Минимума, аналогично. т. max/min - экстремум. x_0 - критическая, если $f'(x_0) = 0$ (все частные производные в этой точке обнуляются). Если т. не явл. т. экстремума, она наз. седлом.

Необходимое условие экстремума: $D_j f(x) = 0 \ \forall j = 1, \dots, n$

Зафиксируем j и ограничим функцию на прямую с напр. вектором e_j, т.е. рассм. $\varphi(t) = f(x_1, \dots, t, \dots x_n)$. Раз f имеет экстремум в точке x, $t = x_j$ - экстремум для φ ⇒ $\varphi'(x_j) = 0$, но $\varphi'(x_j) = D_j f(x)$.

~~Пусть функция~~

Достаточное условие экстремума:

Пусть $f: \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ - C^2-гладкая, $x \in G$ - её крит. точка. Рассм. матрицу Гессе (вторых частных производных). Если отв. этой мат-

...ище квадратичная форма положительно определена, то x – т. строгого локального минимума, если отрицательно – максимума, иначе x – не экстремум.

Д-во: Обозначим через Q квадратичную форму Гессе и запишем разложение Тейлора f в т. x до порядка 2. Точка крит. ⇒ линейная часть нулевая.

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2}Q(h)+o(\|h\|^2)=\frac{\|h\|^2}{2}\left(Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+o(1)\right),\ h\to 0$$

Q – непрерывна ⇒ достигает max и min на компактной сфере $S:\{h:\|h\|=1\}$. Если + -опр., минимум m положителен ⇒ $Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\geq m>0$ для близких к 0 h правая часть >0 ⇒ x – точка локального минимума. Аналогично с максимумом.

Если форма не явл. знакоопределенной для малого t знак $f(x+th_\pm)$ совпадает с $\operatorname{sign}(Q(h_\pm))$ ⇒ принимает ~~принимает~~ значения разных знаков ⇒ x – не точка экстремума.

Билет 22

Теорема о ранге – приведение гладкого отображения к каноническому виду.

Ранг лин. отобр. – размерность образа.

Пусть $f:U\to\mathbb{R}^n$, $f\in C^p$,

Пусть $U\subset\mathbb{R}^m$ окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^m$, $p\geq 1$, $\operatorname{rk} f'(x)=k$ для всех $x\in U$. Тогда $\exists$ такие окрестности $O(x_0)$ и $O(y_0)$ точки x_0 и $y_0=f(x_0)\in\mathbb{R}^n$ и такие диффеоморфизмы* $u=\varphi(x)$, $v=\psi(y)$ класса C^p что в окр. $O(u_0)=\varphi(O(x_0))$ точки $u_0=\varphi(x_0)$ отображение $u\mapsto v=\psi(f(\varphi^{-1}(u)))$ имеет вид $(u_1,\dots u_k,\dots u_m)=(u_1,\dots u_k,0\dots 0)$

* Диффеоморфизм – это отобр $f:U\to V$ обл. $U,V\subset\mathbb{R}^m$ (класса p), т.ч.: 1) f – биекция, 2) $f\in C^p(U,V)$, 3) $f^{-1}\in C^p(U,V)$

Д-во WLOG $x\in\mathbb{R}^m$ имеет 2 части: $x^1=(x_1,\dots x_k)$ и $x^2=(x_{k+1},\dots x_m)$, $y\in\mathbb{R}^n$ тоже: $y^1=(y_1,\dots y_k)$, $y^2=(y_{k+1},\dots y_n)$, $m,n\geq k$, $f: y^1=f^1(x^1,x^2)$, $y^2=f^2(x^1,x^2)$.
Мы полагаем, что $(y^1)'_{x^1}$ обратим ⇒ y^1 соотв. минор с ненулевым определителем.

$$\begin{tikzcd}
x_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & y_0 \arrow[d, "\psi"] \\
u_0 \arrow[r, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}"'] & v_0
\end{tikzcd}$$

O_{x_0}, O_{y_0}, O_{u_0}, O_{v_0}

Рассм. отображение $u^1=f^1(x^1,x^2)$, $u^2=x^2$ в $\mathbb{R}^m$

Матрица Якоби: $\begin{pmatrix}(y^1)'_{x^1} & (y^1)'_{x^2}\\ 0 & E\end{pmatrix}$, $(y^1)'_{x^1}$ – $k\times k$, E – $(m-k)\times(m-k)$

Отобр. $u=\varphi(x)$ – C^p диффеоморфизм, определено $\varphi^{-1}\in C^p$ (в окр. т. x_0)

Композиция $g=f(\varphi^{-1}(u))$ в окр. т. u_0 и имеет представление:

$y^1=f^1(\varphi^{-1}(u))=u^1$, $y^2=f^2(\varphi^{-1}(u))=g(u^1,u^2)$

Матрица Якоби g: $\begin{pmatrix}E & 0\\ g'_{u^1} & g'_{u^2}\end{pmatrix}$, $\operatorname{rk} g\leq k$ (дифференциал – это произв. матриц полного ранга на ранга k), g^2 не зависит от u^2 ⇒ $g^2=g(u^1)$

Значит, $g'_{u^2}=0$, $g=(g^1,g^2)$, $g^1=E$, можно переписать $g=f(\varphi^{-1}(u))$: $y^1=u^1$, $y^2=g(u^1)$

Положим теперь $v = (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^n$, $v = \varphi(y)$, $v^1 = \varphi^1(y) = y^1$, $v^2 = \varphi^2(y) = y^2 - g(y^1)$ – отобр. в $\mathbb{R}^n$ класса C^p с матрицей Якоби

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ g'_{y^1} & E \end{pmatrix}, \ \det = 1 \Rightarrow \text{диффеоморфизм}$$

Приведение к каноническому виду. гладкое $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, чи $F(x)$ – ранг дифференциала $F'(x)$ матрице Якоби

Билет 23
Лемма Адамара, лемма Морса

<u>Лемма Адамара</u>: Пусть функция $f : U \to \mathbb{R} \in C^p$, $p \geq 1$ определена в выпуклой окрестности $U \in \mathbb{R}^m$ точки $0 \in \mathbb{R}^m$. Пусть $f(0) = 0 \Rightarrow \exists\, g(x) = (g_1(x_0, \dots g_m(x))) \in C^{p-1}$ такое, что $f(x) = (x, g(x))$, т.е. что то же самое, $f(x_1, \dots x_m) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, \dots x_m)$, причём $g_i(0) = \partial_i f(0)$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt}\, dt = \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \partial_i f(tx)\, dt, \text{ положим } g_i(x) = \int_0^1 \partial_i f(tx)\, dt$$

<u>Лемма Морса</u> Пусть $f : G \to \mathbb{R}$, $f \in C^3$, пусть $x_0 \in G$ – внутр. т. G явл. невырожденной крит. точкой f. Найдётся такой диффеоморфизм $g : V \to U$ окрестности нуля V на $U \subset G$, что:

$$f(g(u)) = f(x_0) - u_1^2 - \dots - u_k^2 + u_{k+1}^2 + \dots + u_m^2$$

WLOG лин. заменами задача сводится к случаю $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$. Применим к f лемму Адамара, получим $f = (x, g(x))$, 0 – крит. точка, $g(0) = 0$ по той же лемме. Применим по ~~всем~~ координатам g_i лемму Адамара:

$$g_i(x) = (x, h_i(x)) = \sum_{j=1}^m x_j h_{ij}(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x)$$

Из непрерывности h_{ij} и единственности разложения Тейлора $h_{ij}(0) = \partial_{ij} f(0)$, по предположению матрица $h_{ij}(0)$ невырождена, приводим к диагональному виду

Теперь f – в виде матрицы, элементы – диффеоморфизм функции.

<u>Предположение</u>: $\exists$ координаты $u = (u_1, \dots u_m)$ (иными словами диффеоморфизм $x = \varphi(u)$, $\varphi(0) = 0$), при которых $f(\varphi(u)) = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(u)$. Для $r = 1$ – доказано в лемме Адамара. H_{ij} некоторые функции.

Докажем для $r+1$: Матрица $h_{ij}(0)$ не вырождена, φ – диффеоморфизм, матрица формы $\pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j=r}^m u_i u_j H_{ij}(0)$ не вырождена. Линейной заменой u_j, $j = r, \dots m$ можно привести к diag $\Rightarrow$ считаем, что в пред. формуле $H_{rr}(0) \neq 0$, по непр. $H_{rr}(x) \neq 0$ в окр. нуля.

Положим $\psi(u) = \sqrt{|H_{rr}(u)|}$, ψ непр. диф. в окр. нуля сделаем переход к новым коорд. $v = \psi(u)$ отличающейся от

$v_i = u_i$, $i \neq r$

$$v_r = \psi(u)\left(u_r + \sum_{j > r} \frac{u_j H_{jr}(u)}{H_{rr}(u)}\right)$$

Матрица Якоби в нуле преобр. при $u = 0$ на диагонали единицы с одной строкой № r $\psi(0)$. Отличн $\psi(0) \neq 0 \Rightarrow \psi$ – диффеоморфизм ~~и в r~~:

~~$B = u_r^2 H_{rr}(u) + 2u_r \sum_{j=r+1}^m u_j H_{rj}(u)$, дополним~~

(выделим в слагаемых $\sum_{i,j=2}^{n} u_i u_j H_{ij}(u)$ те, которые содержат u_2)

$$B = u_2^2 H_{22}(u) + 2u_2 \sum_{i,j=2}^{n} u_j H_{2j}(u)$$

Запишем их в переменных v: $B = \pm v_2^2 - \frac{1}{H_{22}(u)} \sum_{i,j=2+1}^{n} v_i v_j H_{ij}(u)$, $\pm$ совпадает со знаком $H_{22}(0)$ $\Rightarrow$ ▲

Билет 24

Гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$

• Поверхность размерности k — такое подмножество в $\mathbb{R}^n$, что в окрестности каждой своей точки оно гладкой заменой координат превращается в открытый кусок k-мерного подпространства в $\mathbb{R}^n$.

• Подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется k-мерной поверхностью гладкости C^p, если для любой его точки $x_0 \in S$ $\exists$ окрестность $U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ и C^p-диффеоморфизм φ этой окрестности на некоторую окрестность O начала координат в $\mathbb{R}^n$ такие что $\varphi(S \cap U(x_0))$ есть $\{u \in O : u_{k+1} = u_{k+2} = \dots = u_n = 0\}$, т.е. пересечение k-мерной координатной плоскости с O.

• (Поверхность задаётся системой уравнений). Подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется k-мерной поверхностью гладкости p, если в окрестности любой точки $x_0 \in S$ оно может быть задано параметрически: существует C^p-гладкое отображение постоянного ранга k окрестности нуля в $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$, которое есть биекция на образ, а образом является окрестность $U(x_0)$.

Теорема 3 определения эквивалентны

(1⇒2) Пусть S локально выпрямляется до k-мерного аффинного подпространства локальным диффеоморфизмом φ, т.е. образ под действием этого диффеоморфизма задаётся уравнениями $u_{k+1} = \dots = u_n = 0$. Но это значит, что сам фрагмент поверхности задаётся уравнениями $\varphi_{k+1}(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0$, φ_j — компоненты диффеоморфизма φ. Очевидно, в качестве F мы и берём отображение, составленное из этих компонент. Тогда F имеет ранг $n-k$, потому что φ был диффеоморфизмом (матрица Якоби для F получается вычеркиванием $n-k$ последних строк матрицы Якоби φ).

(2⇒3) Пусть S локально задаётся уравнением $F=0$ с F ранга $n-k$. WLOG считаем, что минор матрицы Якоби для F, отвечающий последним $n-k$ переменным, не обнуляется. Тогда по Th о неявной функции координаты $x_{k+1}, \dots, x_n$ на S локально выражаются через координаты $x_1, \dots, x_k$. Т.о. получаем параметризацию: $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}(x_1, \dots, x_k), \dots, x_n(x_1, \dots, x_k))$. В её матрице Якоби, очевидно, есть единичный блок размера k.

(3⇒1) Пусть S в окрестности x_0 допускает гладкую параметризацию $t = (t_1, \dots, t_k) \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ранга k. Без ограничения общности будем считать, что $(\partial_{t_j} x_i)_{1 \le i,j \le k}$ — обратимая матрица. Применяя теорему об обратном отображении, находим локальный диффеоморфизм, который выражает t_i через $x_1, \dots, x_k$. Это даёт новую параметризацию, где в качестве параметров выступают $x_1, \dots, x_k$ (в окрестности $\hat{x} = (x_1, \dots, x_k)$):

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}(t(\hat{x})), \dots, x_n(t(\hat{x})))$$

Теперь осталось просто написать выпрямляющий поверхность диффеоморфизм. Надо сделать сдвиги, превращающие на поверхности координаты $k+1, \dots, n$ в нули (чтобы обозначения для функций $x_j(t(\hat{x}))$ не путались с именами аргументов, переименуем аргументы в $y_1, \dots, y_n$):

$$\varphi : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_k, y_{k+1} - x_{k+1}(t(y_1, \dots, y_k)), \dots, y_n - x_n(t(y_1, \dots, y_k)))$$

Матрица Якоби — нижнетреугольная с единицами на диагонали, тем что φ — диффеоморфизм.

Касательное пространство к поверхности: пусть k-мерная поверхность S в $\mathbb{R}^n$ в окрестности точки x_0 задаётся уравнением $F(x)=0$, где F имеет ранг n-k. Пользуясь дифференцируемостью F, перепишем это как:

$$F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0)\|x-x_0\|=0$$

Здесь $F(x_0)=0$. Если в этом уравнении стереть слагаемое вида $o(x-x_0)$, останется уравнение аффинного подпространства размерности k, проходящего через x_0: $F'(x_0)(x-x_0)=0$. Действительно, т.к. ранг матрицы Якоби есть n-k, решения образуют k-мерное пространство. Направляющее векторное подпространство задаётся уравнением $F'(x_0)v=0$. Например, в случае поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной одним уравнением $f(x,y,z)=0$, получим плоскость $(\nabla F(v_0), v-v_0)=0$ и $(\nabla F(v_0),v)=0$.

Такое векторное пространство совпадает с пр-вом всевозможных векторов скоростей, которые могут иметь проходящие по поверхности через эту точку гладкие пути. Такие вектора наз. касательными, пр-во их в окр. x_0 и S в т. x_0 — $T_{x_0}S$.

Т. Для гладкой поверхности S в $\mathbb{R}^n$ размерности k, которая в окр. x_0 задаётся уравнением $F(x)=0$ с $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-k}$ ранга n-k, вектора скоростей в точке x_0 гладких путей, проходящих по поверхности, образуют подпр-во, которое задаётся ур-ием $F'(x_0)v=0$.

Д-во: 1) Пусть образ пути $\gamma:[-1,1]\to\mathbb{R}^n$ лежит на поверхности S, $\gamma(0)=x_0$, $\gamma'(0)=v$. Тогда $F(\gamma(t))\equiv 0$. Дифференцируя тождество при $t=0$, получим $F'(x_0)v=0$ — вектор скорости удовл. уравнению.

2) Пусть v удовл. уравнению $F'(x_0)v=0$. Построим путь, для которого v явл. вектором скорости. Для удобства разобьём x на k-мерную компоненту x^1 и (n-k)-мерную x^2. WLOG будем считать, что $F'_{x^2}(x_0)$ обратима. Тогда уравнение $F'(x_0)v=0$ можно переписать в виде $F'_{x^1}(x_0)v^1+F'_{x^2}v^2=0$ или $v^2=-(F'_{x^2}(x_0))^{-1}F'_{x^1}(x_0)v^1$ => последние n-k компонент решения выражаются через первые k (выбираемые на рандом). Выберем и зафиксируем (v_1,v_2).

Пусть $\varphi: x^1\mapsto x^2=\varphi(x^1)$ — неявная функция, определяемая уравнением $F(x)=0$. Рассмотрим кривую $t\mapsto(x_0^1+v^1t,\ \varphi(x_0^1+v^1t))$. С одной стороны, она проходит по поверхности, с другой, её вектор скорости при $t=0$ — это (v_1,v_2) по ф. произв. неявной функции.

Билет 25

Условный экстремум, необходимое условие, метод множителей Лагранжа.

Условный локальный экстремум — если у точки есть окрестность U, что при $y\in U\cap S$, S — поверхность, выполнено $F(y)\le f(x)$ или $f(y)\ge f(x)$, строгие определяются аналогично.

Т. Если регулярная для C^1 функции f точка x является точкой условного экстремума на гладкой поверхности S, то касательное пространство T_xS к пов. S в т. x содержится в касательном пространстве к поверхности уровня функции F.

Д-во: Для произвольного вектора $v\in T_xS$ рассм. гладкий путь γ, проходящий в S с $\gamma'(0)=v$. Тогда x явл. точкой экстремума для композиции $f\circ\gamma$ => по необходимому условию экстремума для функции одного аргумента должно быть верно $(f\circ\gamma)'(0)=(\nabla f(x),v)=0$

последнее равенство означает, что $v \perp \nabla F \Rightarrow$ лежит в касательной гиперплоскости поверхности условия.

* $A \subset B \Rightarrow A^{\perp} \supset B^{\perp} \Rightarrow S$ задана у-ями $F_1 = 0, \dots F_{n-k} = 0$, $T_x S$ задается у-ями $(\nabla F_1(x), v) = 0, \dots (\nabla F_{n-k}(x), v) = 0$ — орт. дополнение и подпр. с градиентами как базис $\Rightarrow$ условие: градиент должен быть линейной комбинацией градиентов $\nabla F_1(x), \dots \nabla F_{n-k}(x)$

<u>Метод множителей Лагранжа</u>: Пусть поверхность снова задана уравнениями $F_1 = 0, \dots F_{n-k} = 0$, все F_i — гладкие и ~~всюду~~ у них всюду ЛНЗ градиенты (ранг $= n-k$). Пусть f — тоже гладкая, для отыскания точек подозрительных на условный экстремум, заводим дополнительные аргументы $(\lambda_1, \dots \lambda_{n-k}) = \lambda$ и составляем функцию Лагранжа $L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i F_i(x)$ и ищем точки $(x, \lambda) = (x_1, \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_{n-k})$, в которых $\nabla L(x,\lambda) = 0$. В этом равенстве градиента нулю первые n уравнений вместе пишутся в виде $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \nabla F_i(x)$ и составляют условие что градиент целевой функции есть линейная комбинация градиентов условий. Последние же $n-k$ уравнений имеют вид $F_i = 0$ и совпадают с у-ями условий. Т.о., решая систему, мы получаем точки которые удовл. необх. условию + автоматически, удаляем лишние переменные λ. Если $\nabla = 0$, то лин. к. с нулевыми λ. Эти точки если нужно добавить в список точек экстремума.

Если где-то ЛЗ, точки надо добавить в список точек экстремума.

Билет 26

<u>Достаточное условие условного экстремума</u>

<u>Th</u> Пусть (x_0, λ) — критическая точка для ф. Лагранжа L. Зафиксируем это λ и рассмотрим $L(x) = L(x,\lambda)$ как функцию аргумента x. Чтобы x_0 была точкой строгого локального экстремума, достаточно чтобы форма $(D_{is} L(x_0))$ была знакоопределенной в огр. на касательное пространство $T_{x_0} S$ (если форма положительна, то min, иначе — max). Если в огр. на $T_{x_0} S$ знакопеременна, локального экстремума нет

<u>Доказательство</u>: На S выполнено $f(x) = L(x) \Rightarrow$ достаточно исследовать $L(x)$. Обозначим матрицу Гессе $L(x)$ как Q. Напишем ряд Тейлора функции $L(x)$ в x_0:

$$L(x) = L(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0, Q(x - x_0)) + o(\|x - x_0\|^2), \ x \to x_0$$

Подставим в него гладкое отображение, которое параметризует поверхность S в окрестности точки x_0. Пусть $x(t): \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^n$ — параметризация ранга k, переводящая $t=0$ в x_0, имеем $x(t) = x(0) + x'(0)t + o(t)$, $t \to 0$. Подстановка даёт:

$$L(x(t)) - L(x_0) = \frac{1}{2}(x'(0)t, Qx'(0)t) + o(\|t\|^2)$$

Образ $x'(0)$ — $T_{x_0} S \xRightarrow{\text{сюр}}$ в огр. на это пр-во форма Гессе положительно определена, то выражение $(x'(0)\frac{t}{\|t\|}, Qx'(0)\frac{t}{\|t\|}) + o(1)$ положительно, и так же, как для обычного экстремума, приращение при $t \neq 0$ положительно $\Rightarrow x_0$ — точка строгого минимума. Для огр. аналогично.

* Если при $\|h_-\| = 1$, $h_- = x'(0)t_- \in T_{x_0} S$ форма прин. отр. знач. $-C$, то при $\varepsilon \to 0$: $L(x(\varepsilon t_-)) - L(x_0) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot (-C + o(1)) < 0$

* Теорема о конечных приращениях

U — отк. в $\mathbb{R}^n$, $F: U \to \mathbb{R}^k$ диф. во всех т. $[x, h+x] \subset U$

$M = \sup_{\xi \in [x, x+h]} \|F'(\xi)\|$ — конечна. Тогда $\|F(x+h) - F(x)\| \leq M\|h\|$

Прогув. огр. ~~норм~~ по норме конст. $\Rightarrow$ отобр. огр. этой же конст