

ЛЕКЦИЯ ПО ГЛАДКИМ

29.10.20

ГЛАДКОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ЕДИНОЙ

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

Оп. Носителем функции f наз.

$$\text{supp } f = \{p \in M \mid f(p) \neq 0\}$$

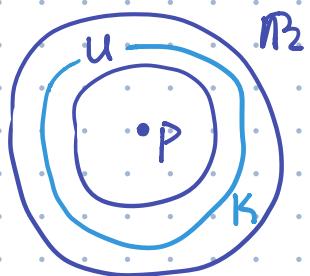
Если $\text{supp } f$ - компакт, то функция f наз. **финитной**

Оп. M -гладкое многообразие, $K \subset M$

Говорят, что набор функций $\{\psi_\alpha\}$ наз.

гладким разбиением 1, если выполн. св-ва:

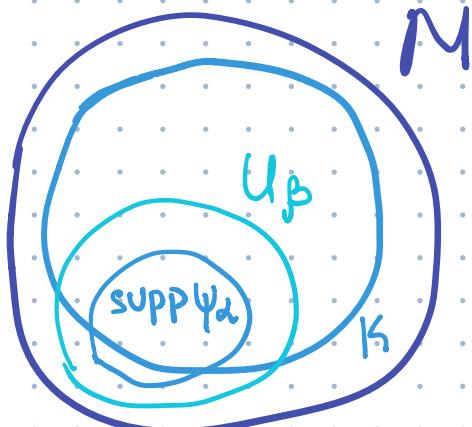
- 1) $\forall \alpha \quad 0 \leq \psi_\alpha(p) \leq 1, \quad p \in M$
- 2) $\forall p \in M \quad \exists$ окр-ть U т. ч. в U лишь конечное число функций ψ_α принимают ненулевые значения
- 3) $\sum_\alpha \psi_\alpha(p) = 1 \quad p \in K$ ψ_α -гладкие функции



Оп. Пусть $\mathcal{E} = \{\psi_\alpha\}$ - разбиение 1, $K \subset \bigcup_\beta U_\beta$

разбиение наз. **положительным покрытием**

$\{\psi_\beta\}$, если $\forall \psi_\alpha \exists U_\beta: \text{supp } \psi_\alpha \subset U_\beta$



Пример: $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(p) = \sum_\alpha (\psi_\alpha(p) f(p))$$

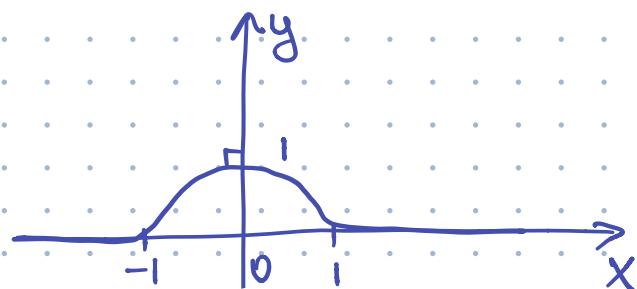
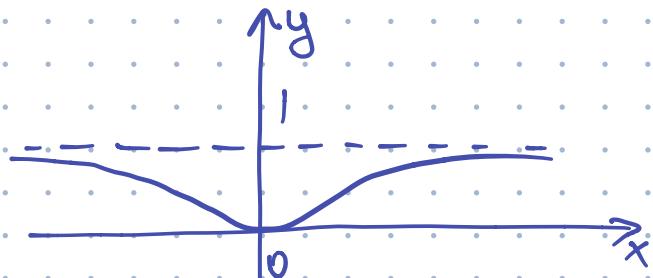
ТЕОРЕМА

Пусть N -малое некомпактное множество, $K \subset N$
 $\{U_\alpha\}$ -покрытие K открытыми множествами
 Тогда на K есть малое разбиение 1 $\{\psi_\beta\}$,
 подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$

ПОСТРОЕНИЕ ФИНЕЙШИХ ФУНКЦИЙ

$$1) g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

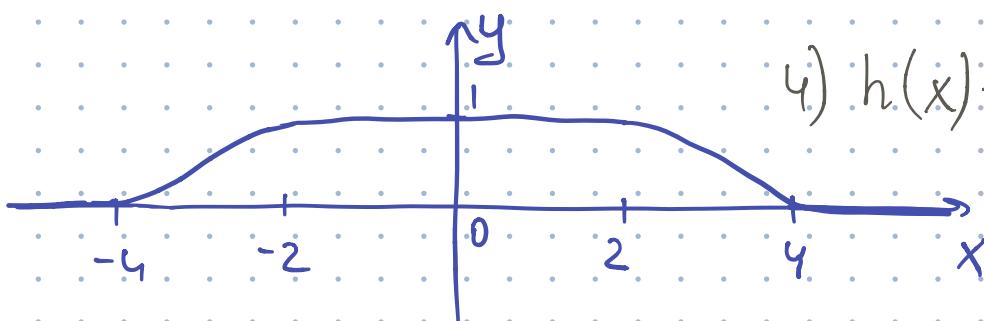
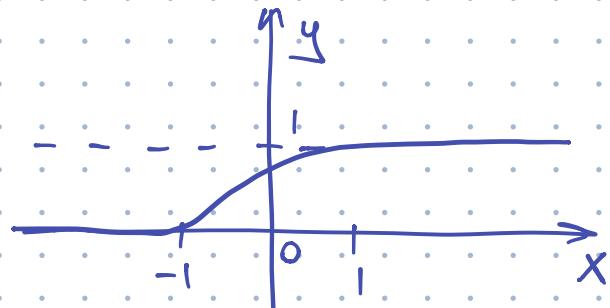
ЭТА ФУНКЦИЯ СОС-МЛАДКАЯ



$$2) G(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^2} - e^{-(x+1)^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

"ШЛЯПА"

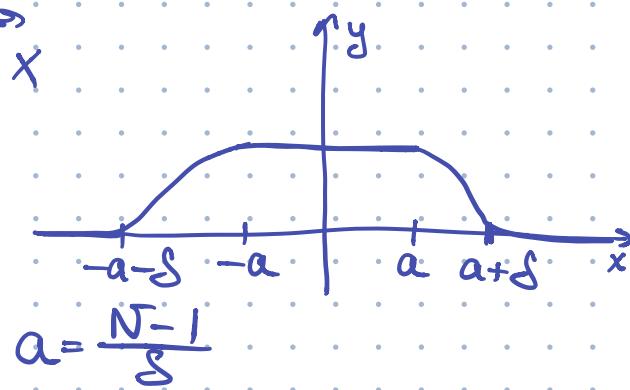
$$3) F(x) = \frac{\int_{-\infty}^x G(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} G(t) dt}$$



$$5) h_N(x) = F(x+N) + F(-x-N) - 1$$

$$\tilde{h}(x) = h_N\left(\frac{x}{2s}\right)$$

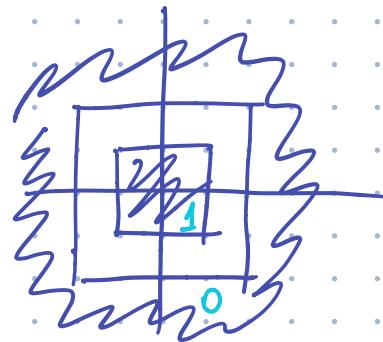
$$\text{ТОГДА } h_{a,s} := h_{as+1}\left(\frac{x}{2s}\right)$$



$$a = \frac{N-1}{s}$$

В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

$$H_{\alpha, \delta} = \bigcap_{i=1}^n h_{\alpha, \delta}(x^i) \quad x = (x^1, \dots, x^n)$$

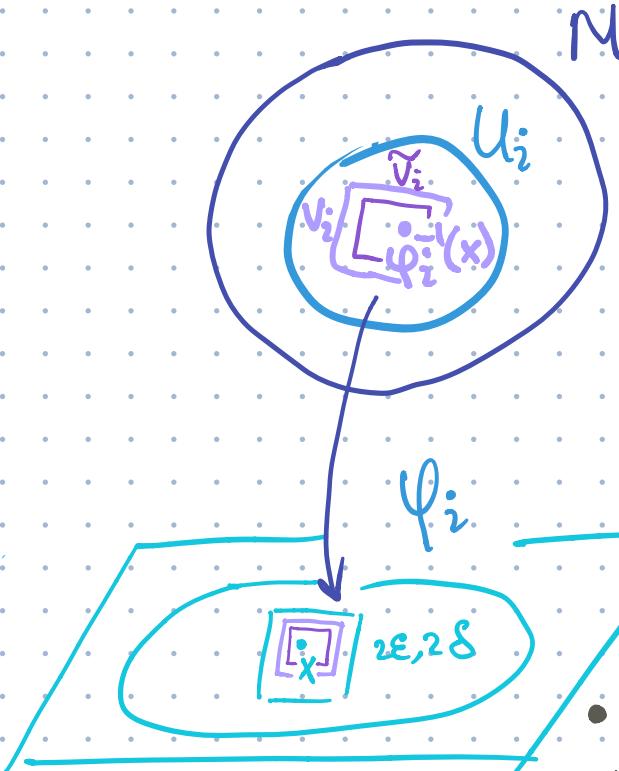
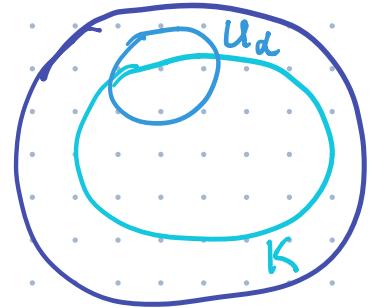


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

$\Rightarrow \bigcup_i U_i \supset K$

Выберем из $\{U_i\}$ конечное покрытие K

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$$



- Для любой точки $x \in \psi_i(U_i)$ ($i=1, \dots, m$) рассмотрим куб C_x с центром в x и стороной $2\epsilon + 2\delta$, который $C_{x, \epsilon+delta} \subset \psi_i(U_i)$

- Рассмотрим $\tilde{V}_{i,x} = \psi_i^{-1}(C_{x, \epsilon+delta})$

- Выберем из $\tilde{V}_{i,x}$ такой поднабор (конечный) \tilde{V}_j ($j=1, \dots, l$), что $K \subset \bigcup_{j=1}^l \tilde{V}_j$ (выбрали конечное покрытие в компакте)

- Новое покрытие K картами

$$\tilde{\Psi}_j(p) = \begin{cases} H_{\epsilon, \delta}(\psi_j(p) - x_j), & p \in V_j \\ 0, & p \notin V_j \end{cases}$$

$$\tilde{V}_{i,x} = \psi_i^{-1}(C_{x, \epsilon+delta})$$

$$\tilde{V}_{i,x} = \psi_i^{-1}(C_{x, \epsilon})$$

$\forall p \in K \exists \tilde{\Psi}_j$ т.ч. $\tilde{\Psi}_j(p) = 1$

БЕСКОНЕЧНО
ГЛАДКИЕ

- Нужно, чтобы было выполнено $\sum_j \tilde{\Psi}_j(p) = 1$

Определим $\Psi_j(p) = \frac{\tilde{\Psi}_j(p)}{\sum_{j=1}^L \tilde{\Psi}_j(p)}$ и получим требуемое

- Если K не все многообразие, то

$$\Psi_1(p) = \tilde{\Psi}_1(p)$$

$$\Psi_2(p) = \tilde{\Psi}_2(p) (1 - \tilde{\Psi}_1(p))$$

:

$$\Psi_e(p) = \tilde{\Psi}_e(p) (1 - \tilde{\Psi}_1(p) \cdots (1 - \tilde{\Psi}_{e-1}(p)))$$

$$1 - \sum_{j=1}^L \Psi_j(p) = (1 - \tilde{\Psi}_1(p)) \cdots (1 - \tilde{\Psi}_e(p)) = 0$$

$p \in K$
т.к. минимум
надежда = 0



ВЛОЖЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ

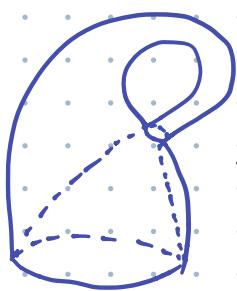
В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Оп. ГЛАДКОЕ отображение $f: M \rightarrow N$ наз. погруженiem,

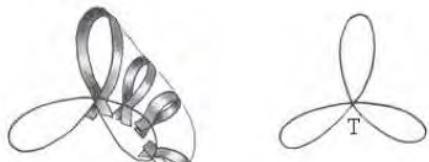
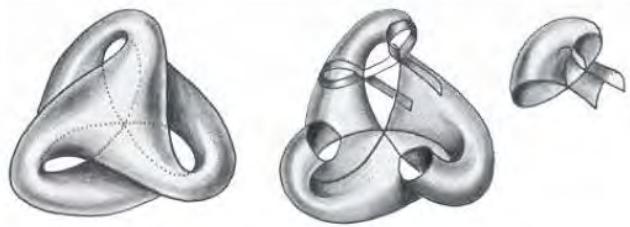
если $\{f\}$ гладко $\forall p \in N$



ногр., но не
взаимно однозначно с образом



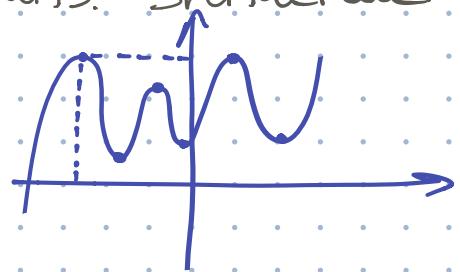
- не регулярная поверхность,
т.к. есть самопересечение,
но авт. погружением в \mathbb{R}^3



ПОВЕРХНОСТЬ ГОР —
ПОГРУЖЕНИЕ $\mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Опр. Точка $p \in M$ наз. **критической т. отображения** f ,
если $|f'|_p = 0$ — воротиль

Опр. Критическим **значением** f наз. значение
 ϕ -мн. в критической точке



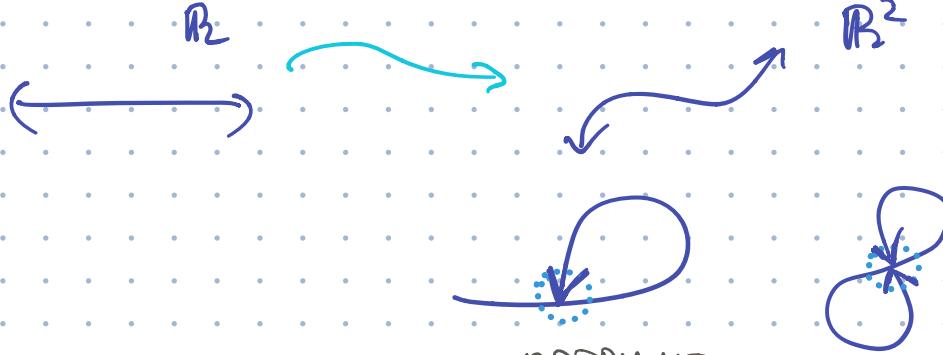
Теорема Сарда У гладкого отображения

$f: M \rightarrow N$ множество критических значений
имеет меру 0

Опр. ПАРА (L, f) т.ч. $f: L \rightarrow M$ называется
полногообразием, если f — инъективное
погружение (вз. однознач. с образом)

Опр. $f: M \rightarrow N$ наз. **вложение**, если это
инъективное погружение, которое такие
явл. гомеоморфизм на образ в
индукционной топологии

Пример



ПОГРУЖЕНИЯ, но НЕ
КОНФОРМ. В ИНДУС. ТОЧКИ
(НЕ ВЛОЖЕНИЯ)

Теорема Уитни (сильная)

Любое многообразие M размерности n
может быть вложено в \mathbb{R}^{2n}

Теорема Уитни (слабая)

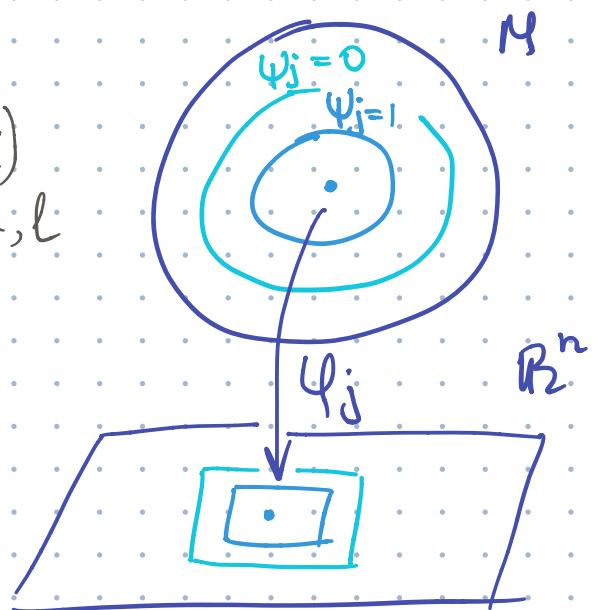
Любое компактное многообразие
может быть вложено в \mathbb{R}^N для
достаточно большого N

► M — конн. многообр. Рассмотрим Атлас
 $A = \{(V_j, \psi_j) \mid j=1, \dots, l\}$ т.ч.

$$\psi_j(V_j) = (-\varepsilon_j - \delta_j, \varepsilon_j + \delta_j)^n, \quad \psi_j(x)_{j=1, \dots, l}$$

$$\tilde{\psi}_j(p) = \begin{cases} \psi_j(p), & p \in V_j \\ 0, & p \notin V_j \end{cases}$$

$$F: p \mapsto (\tilde{\psi}_1(p), \psi_1(p), \dots, \tilde{\psi}_l(p), \psi_l(p), \psi_1(p), \dots, \psi_l(p)) \in \mathbb{R}^{n \cdot l + l}$$



- f — НЕВЫРОЧЛЕН (т.е. РАКЕТ В КАШИ, ОУ Т.)
НАРСИНДЕН ($= n$)
т.к. в некоторой окрестности $\forall p \in N$
 $\exists \psi_j = 1$
- Проверим, что отображение взаимно однозначно с образом
 Если $p_1, p_2 \in V_j$ $\psi_j(p_1) = \psi_j(p_2)$, то $\psi_j(p_1) \neq \psi_j(p_2)$
 Если $p_1, p_2 \notin V_j$, то $\psi_j(p_1) \neq \psi_j(p_2)$

06.11.20

ЛЕКЦИЯ № ГЛАДКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА МНОГООБРАЗИИ

АТЛАС НА ТМ

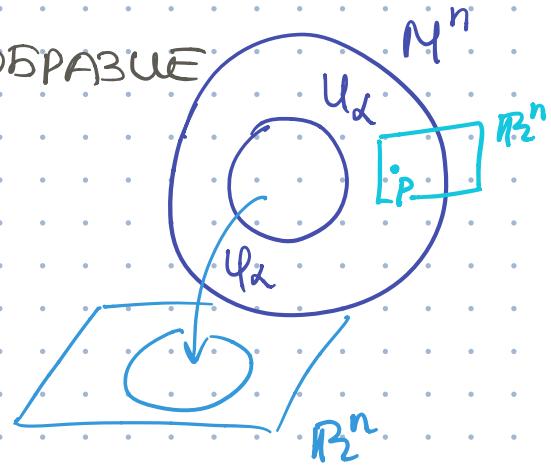
M - n -МЕРКОЕ ГЛАДКОЕ МНОГООБРАЗИЕ

$$\tilde{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$$

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

Листь \tilde{A} - АТЛАС ТМ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

$$\tilde{U}_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p M \ni (p, v) \quad p \in U_\alpha \quad v \in T_p M$$



$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}: (p, v) \mapsto (\varphi_\alpha(p), \underbrace{dx^1(v), \dots, dx^n(v)}_{\in R^n})$$

(U, φ) - КАРТА НА M , x^1, \dots, x^n - КООРДИНАТЫ

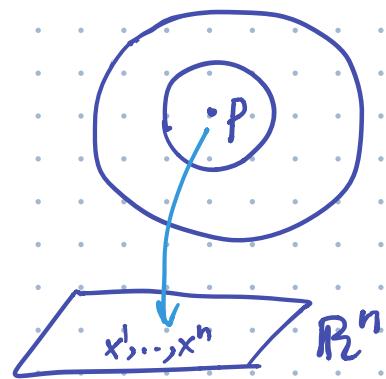
$$x^i(p) = \varphi_\alpha(p)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$$

ДВОЙСТВЕННЫЙ К $\frac{\partial}{\partial x^i}$ БАЗИС -

$T_p^* M$ ОБОЗН. dx^1, \dots, dx^n

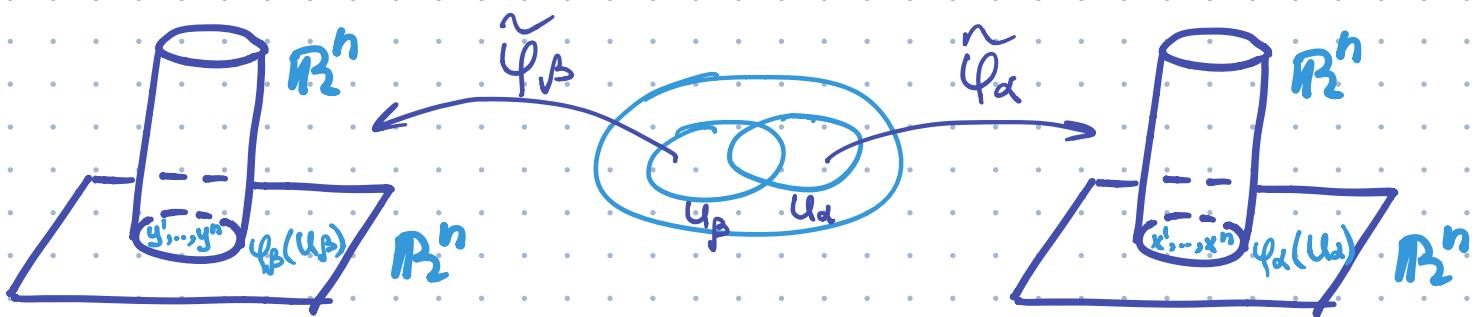
$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$



Например $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$dx^i(v) = v^i$ - ВЗЯТИЕ i -ТОЙ КООРДИНАТЫ

ОТОБРАЖЕНИЕ ПЕРЕКОДА



$$\frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \quad \frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$y^j = \varphi_{\alpha\beta}^j(x) \Rightarrow$

Тогда $\begin{matrix} J^\alpha \\ \downarrow \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} J^\beta \\ \downarrow \end{matrix} = \sum_{i=1}^n v^i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} =$
 x в координатах y

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^1 \\ \vdots \\ J^n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}: (x, J_\alpha) \xrightarrow{y} (\varphi_{\alpha\beta}(x), J(\varphi_{\alpha\beta}) J_\alpha)$$

КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ.

(E = TM, B = M, \pi)

$\pi: (p, J) \mapsto p$

Опн. Сечение векторного расслоения наз. также

отображение $J: B \rightarrow E$ т.ч. $\pi \circ J = id$

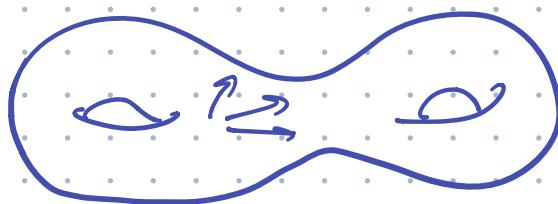
$X: M \rightarrow TM$ $X: P \mapsto (p, J)$

СЕЧЕНИЕ $S: B \rightarrow E$ ВЕКТ. РАССЛ. НАЗ. C^k -ГЛАДКИМ,

ЕСЛИ ОТОБРАЖЕНИЕ S C^k -ГЛАДКОЕ

Оп. ГЛАДКИМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ НА М НАЗ.

ГЛАДКОЕ СЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ К М



ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ (координатное оп.)

М-МНОГООБР. $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ - АТЛАС НА М

РАССЛ. КАРТЫ $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ С КООРД. $(x^1, \dots, x^n) = \varphi_\alpha(p)$

В КАЖДОМ $T_p M$, $p \in U_\alpha$ базис $T_p M: \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$

$$X|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^n a_i(x) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}_{\text{гл. функции}} \quad a_i(x) = a_i(\varphi_\alpha(p)) = \frac{\partial}{\partial x^i}(X(p))$$

Оп. (коорд.) ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ НА М НАЗ. ТАКОЙ

НАБОР $X_\alpha = \sum_{i=1}^n a_i^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ ДЛЯ КАЖДОЙ КАРТЫ $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

АТЛАСА \mathcal{A} , т.ч. при $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ $X_\beta = J(\varphi_{\alpha\beta}) X_\alpha$

$$\begin{pmatrix} a_1^\beta(\varphi_\beta(p)) \\ \vdots \\ a_n^\beta(\varphi_\beta(p)) \end{pmatrix} = J(\varphi_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} a_1^\alpha(\varphi_\alpha(p)) \\ \vdots \\ a_n^\alpha(\varphi_\alpha(p)) \end{pmatrix}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. ВЕКТ. ПОЛЕ НА М ЯВЛЯЕТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ НА $C^\infty(M)$

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \in C^\infty(M)$$

$$X(f) \in C^\infty(M)$$

СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

- 1) ВЕКТ. ПОЛЯ НА М ОБРАЗУЮТ ЛИНЕЙНОЕ ПР-ВО $\text{Vect}(M)$
 $X, Y \in \text{Vect}(M) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha X + \beta Y \in \text{Vect}(M)$
- 2) $X \in \text{Vect}(M), f \in C^\infty(M) \Rightarrow f \cdot X \in \text{Vect}(M)$
- 3) ВЕКТ. ПОЛЯ АВЛ. ДИСКРЕМЕНТИРОВАНИЕМ НА ПР-ВЕ C^∞

КОММУТАТОР (СКОБКА [·])

Опн. Коммутатором (скобкой $[·]$) двух векторных полей $X, Y \in \text{Vect}(M)$ наз. оператор $[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$
 $f \in C^\infty(M)$

ТЕОРЕМА

КОММУТАТОР ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ АВЛ. ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ

► Рассмотрим карту (U, φ) на M . В ней

$$X = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad Y = \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

по определению

$$X(Yf) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i(x) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b_j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + b_j(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)$$

$$Y(Xf) = \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) =$$

аналогично

$$= \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + a_i(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)$$

$$[X, Y] = X(Y_F) - Y(X_F) = \sum_{i,j=1}^n \left(a_j(x) \frac{\partial b_i}{\partial x^j} - b_j(x) \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} F$$

2 ПОРЯДОК ДИСКРЕТЕНУ. СОСР. \Rightarrow ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

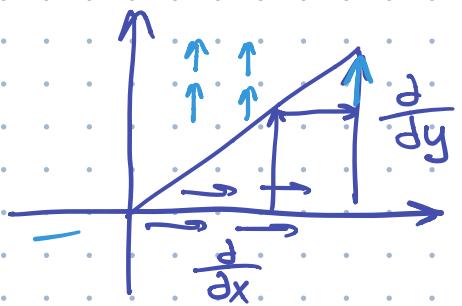


СВОЙСТВАКОММУТАТОРОВ

- $[X, X] = 0$
- $[X, Y] = -[Y, X]$ — АНТИКОММУТАТИВНОСТЬ
- $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha [X, Z] + \beta [Y, Z]$ — ЛИНЕЙНОСТЬ

Примеры 1) $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$

$$2) [\frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial y}]_F = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial F}{\partial y} \right) - x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y}$$



постоянное
единичное поле

ТЕОРЕМА (СВ-ВА КОММУТАТОРА)

1) $[\ ,]$ — линейн

2) $[\ ,]$ — антикоммутативн $[X, Y] = -[Y, X]$

3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$
(ЗАДАЧА ЯКОБИ)

Соотв. Vect(N) с опр. $[\ ,]$ явл. алгеброй Ли на \mathbb{R}



1), 2) \leftarrow OKAZALY

3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

- $[x, [y, z]] = x(\underline{yz} - \underline{zy}) - (\underline{yz} - \underline{zy})x$

- $[y, [z, x]] = y(\underline{zx} - \underline{xz}) - (\underline{zx} - \underline{xz})y$

- $[z, [x, y]] = z(\underline{xy} - \underline{yx}) - (\underline{xy} - \underline{yx})z$



ЛЕКЦИЯ ПО ГЛАДКИМ

08.11.20

ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

M -гладкое многообразие, $X \in \text{Vect}(M)$

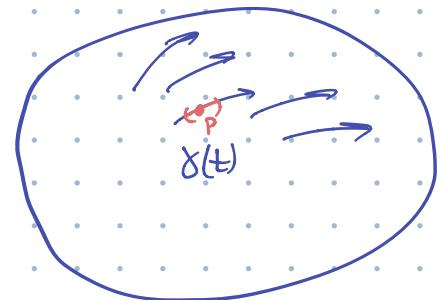
Оп_ Кривая $\gamma(t)$ на M наз. **интегральной кривой (траекторией) вект. поля X** , если $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ (*)

В карте (U, φ) на M с коорд.

$$x^1, \dots, x^n \quad X = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\dot{x}^i = a_i(\gamma(t)) \quad i=1, \dots, n$$

сист. (*) в коорд.



т.е. производная кривой = векторному полю

Теорема о $\exists u!$ решении сист. ОДУ

утверждает, что $\exists (\alpha, \beta) \ni t_0$ и ! кривая

$$\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow M$$

$$\gamma(t_0) = p, \text{ что } \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

Лемма (прямое следствие из теоремы)

$X \in \text{Vect}(M)$. Тогда $\forall p \in M \exists a(p), b(p) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

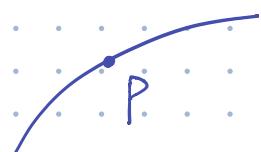
и гл. кривая $\gamma_p: (a(p), b(p)) \rightarrow M$, т.ч.

1) $0 \in (a(p), b(p))$, $\gamma_p(0) = p$

2) γ_p - инт. кривая поля X

3) если $\mu: (c, d) \rightarrow M$ - гл. кривая, для которой выполнены усн. 1) и 2), то $(c, d) \subset (a(p), b(p))$ и

$$\mu(t) = \gamma_p(t) \quad t \in (c, d)$$



⇒ Из теор. Энг! реш-ий следует, что Э инт. кривая

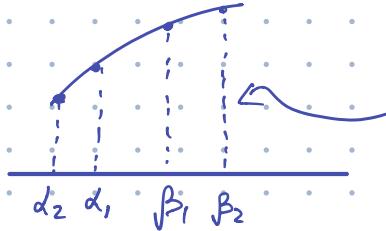
$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \gamma(0) = p$$

Рассмотрим все такие интервалы (α, β) , что Э инт. кривая

$$X \circ \gamma_{\alpha\beta}: (\alpha, \beta) \rightarrow M$$

$$\alpha(p) = \inf \{\alpha_i\}$$

$$\beta(p) = \sup \{\beta_i\}$$



т.к. кривая!, то можем продолжить $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$
 $\beta_1 \Rightarrow \beta_2$

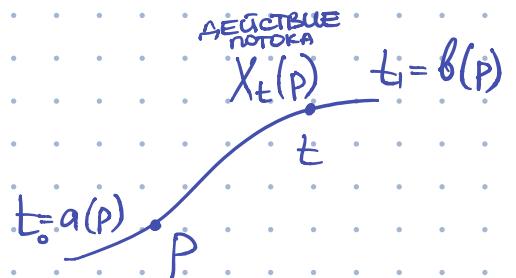


Область определения потока

$$D_t = \{p \in M \mid t \in (\alpha(p), \beta(p))\}$$

Оп. действием потока $X_t: D_t \rightarrow M$

наз. отображение $X_t: p \mapsto \gamma_p(t), p \in D_t$



II лекция
2:00:00

ТЕОРЕМА

1) $\forall p \in M \exists$ откр. окр-ть $V \ni p$ и $\varepsilon > 0$, что отображение $(t, p) \mapsto X_t(p)$ определено на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ и явл. гладким отображением из $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ в M

2) D_t — открыто $\forall t$

3) $\bigcup_{t>0} D_t = M$

4) $X_t: D_t \rightarrow D_t$ диффеоморфизм и X_{-t} — обр. дифф.

5) $s, t \in \mathbb{R}$ область определения $X_s \cdot X_t$ содержится в обл. опр. X_{s+t} и совпадает с ней если $t s \geq 0$

$$\text{и } X_s \cdot X_t = X_{s+t}$$

► 1) Следствие из теор. о гладкой зависимости
РЕШЕНИЙ сист. $\dot{x}_p(t) = X(x_p(t))$
ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

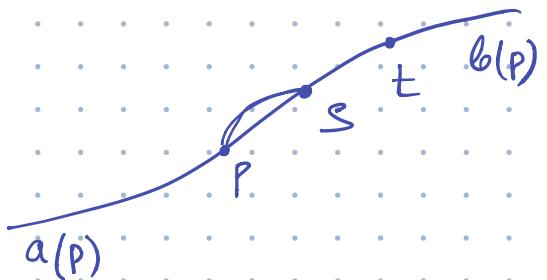
5) Если $t \geq 0$

то область определения

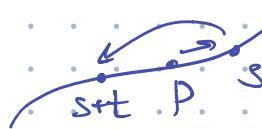
$$x_s, x_t \in D_{s+t}$$

Если $s > 0, t < 0$, то:

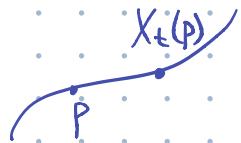
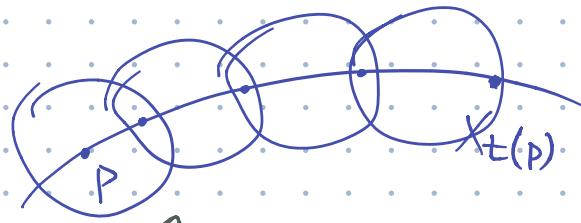
$$x_s, x_t \in D_s \cap D_{s+t}$$



Если $s > 0, t < 0$, то



4) $X_t: D_t \rightarrow D_{-t}$ — ВЗАИННОЕ ОДНОЗНАЧ. ОТОБРАЖЕНИЕ



могем покрыть конечным числом карт

$$X_t = X_{t_k} \circ \dots \circ X_{t_1}, \quad t_1 + \dots + t_k = t$$

По теореме о гл. зависимости реш-ий от нач. условий каждое
из отобр X_{t_i} явл. гладким и обратимым

2) D_t — ОТКРЫТО

По пункту (4) X_t явл. локальными диффеоморфизмами открытия P на открытия $X_t(P)$

3) ОЧЕВИДНО



Онп

Если $D_t = M$, то действие отображения на M .

одноби

Замечание Если $\exists t$, что $D_t = M$, то
 $\forall t \quad D_t = M$

Пример $\circ X = \frac{\partial}{\partial x} \quad x \in \mathbb{R}$

$$X_t(x) = x + t$$

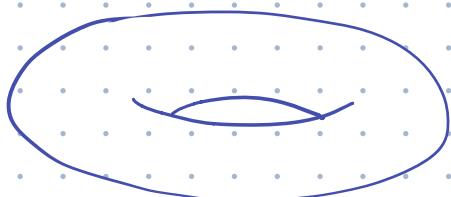
$$\gamma(t) = 1 \quad \gamma(t) = t + c$$

однодименсионное действие, т.к. действие = сдвиг по x

- \circ то же действие, но $x \in \text{Int } \cup$
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{pt\}$

Теорема

Действие отображения на компактном многообразии
всегда однодименсионное

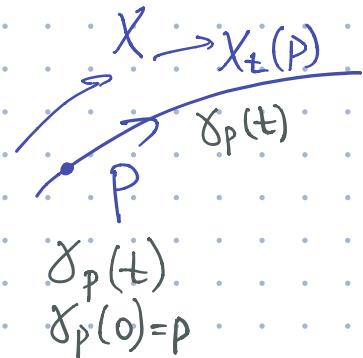


Производная Ли векторного поля

Опн Производной Ли функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

вдоль векторного поля X называется

$$(L_X f)_P = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_t(P)) - f(P)}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(X_t(P))$$



Замечание $L_X f = Xf$

приложение
верт. поля к ф-ии

$$\begin{aligned} & \delta_p(t) \\ & \delta_p(0) = p \end{aligned}$$

$$(L_X f)_P = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(X_t(P)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\delta_p(t)) =$$

По опр. $X_t(P) = \delta_p(t)$ (прошлая лекция)

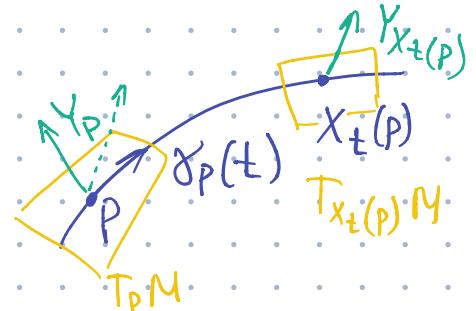
$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (\varphi(p)) \delta_p^i(0) = Xf$$

В КАРТЕ (U, φ)
с коорд. x^1, \dots, x^n

Опн Производной Ли вект. поля Y по вект. полю X

называется

$$\begin{aligned} (L_X Y)_P f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d X_t(Y_{X_t(P)})(f) - Y_P(f)}{t} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d X_t(Y_{X_t(P)}) \end{aligned}$$

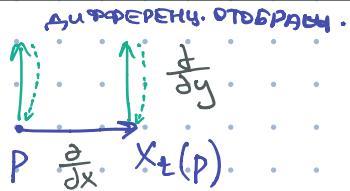


хотим $Y_{X_t(p)}$ вычислить из Y_p
но они лежат в разных КАСАТ.
пр-ва $X \Rightarrow$ перенесём $Y_{X_t(p)}$ и
используем
преобразование потока

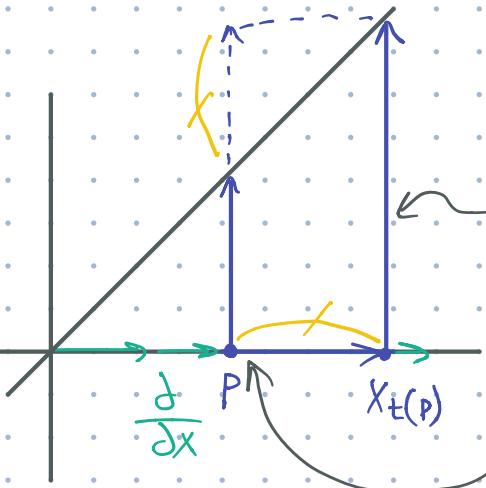
НОДАК ЭТОГО ПОЛЯ: СЛЕВА
ВЛЕВО ИЛИ ВВЕРХ

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \uparrow \end{matrix}$$

$$L_x \frac{\partial}{\partial y} = 0$$



$$L_x \frac{\partial}{\partial x} = 0$$



$$L_x \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} = ?$$

- 1) БЕРЕМ ВЕКТОР
- 2) ПЕРЕДВИГАЕМ

3) ВЫЧИТАЕМ И ДЕЛИМ НА t
 \Rightarrow произвольная N

$$L_x \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}$$

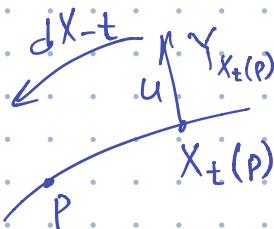
из прошлой лекции $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \times \frac{\partial}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y}$

ТЕОРЕМА

$X, Y \in \text{Vect}(N)$, тогда $L_x Y = [X, Y]$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [Y_{X_t(p)}(f \circ X_{-t})]}$$

($\approx 30:00$)



Пусть $H: U \rightarrow \mathbb{R}$

$U \subset \mathbb{R}^2$ — окр-тб $(0,0)$

$$H(t, u) = f(X_{-t}(Y_u(X_t(p))))$$

$$Y_{X_t(p)}(f \circ X_{-t}) = L_{Y_{X_t(p)}}(f \circ X_{-t}) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} f \circ X_{-t}(Y_{X_t(p)})_u = \\ = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} (f \circ X_{-t} \circ Y_u \circ X_t(p)) = \frac{\partial H}{\partial x^2}(t, 0)$$

$$(L_x Y)_p f = \frac{\partial^2 H}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0)$$

$$K(t, u, s) = f(X_s(Y_u(X_t(p)))) , \quad H(t, u) = K(t, u, -t)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0, 0) - \frac{\partial^2 K}{\partial x^2 \partial x^3}(0, 0, 0) =$$

$$K(t, u, 0) = f(Y_u(X_t(p)))$$

$$\frac{\partial K}{\partial x^2}(t, 0, 0) = Y_{X_t(p)} \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0, 0) = X_p(Yf)$$

$$K(0, u, s) = f(X_s(Y_u(p)))$$

$$\frac{\partial K}{\partial x^3}(0, u, 0) \underset{Y}{\times} f(Y_u(p)) \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2 \partial x^3}(0, 0, 0) = Y_p(Xf)$$

$$= \underline{X_p(Yf) - Y_p(Xf)} = [X, Y]f$$



НЕКИЕ ГЛАДКИЕ

13.11.20

ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

V, W — ВЕКТ. НР-ВА НА \mathbb{K} , R

$P(V, W)$ — ВЕКТ. НР-ВО, ПОРОЧН. НАРАМН
 $(v, w) \quad v \in V, w \in W$

$\lambda \in P(V, W)$, т.е. $\lambda = a \sum_{i=1}^m (v_i, w_i) \quad v_i \in V \quad w_i \in W$
 $a \in \mathbb{K}$

ПОДНР-ВО, ПОРОЧН. ВЕКТОРАМИ ВИДА:

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$$

$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$$

$$(\lambda v, w) - \lambda(v, w)$$

$$(v, \lambda w) - \lambda(v, w)$$

Оп. Тензорные произв. нр-в $V \cup W$ наз.

$$V \otimes W = P(V, W) / N(V, W)$$

e_1, \dots, e_n — базис V

e_1, \dots, e_m — базис W

КЛАСС ЭКВИВ-ТИ ЭЛ-ТА (v, w) ОБОЗН. $V \otimes W$

$v \in V \otimes W \quad v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T_{ij} e_i \otimes e_j$ базис $V \otimes W$

$$\Rightarrow \dim V \otimes W = \dim V \dim W$$

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА $T_k^l(V)$

V -ВЕКТ. НР-БО

V^* -КОНФ. НР-БО

$$T_k^l = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{k} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{l}$$

ЭЛ-ТЫ $T_k^l(V)$ НАЗ. ТЕНЗОРАМИ ТУНА (k, l)

$$T(V) = \sum_{k, l \geq 0} T_k^l(V)$$

$$(e_{i_1} \otimes \dots \otimes \underbrace{e_{i_k}}_{\in V} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes \underbrace{e^{j_l}}_{\in V^*}) (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e^{j_m} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_n})$$

-ТЕНЗОР ТУНА T_{l+n}^{k+m}

$$T_{0,k}(V) = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ РАЗ}}$$

$$\Sigma = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n T_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$$

Оп. $\Sigma(\sigma_1, \dots, \sigma_k) := \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n T_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1}(\sigma_1) \dots e^{i_k}(\sigma_k)$

ПОЛИНомиальная Ф-ИЯ

$$A: V \xrightarrow{A^*} V$$

$$A^* = (A^T)^{-1}$$

$$A^* \Sigma := \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Sigma_{i_1, \dots, i_k} A^* e^{i_1} \otimes \dots \otimes A^* e^{i_k}$$

Отображение $A^*: T_{0,k}(V) \rightarrow T_{0,k}(V)$ — лин. отобр.

$$A^*(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}) = (A^* e^{i_1}) \otimes \dots \otimes (A^* e^{i_k})$$

ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА

$$C(V) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{0,k}(V)$$

$I(V)$ — двусторонний идеал, порождённый тензором вида $\sigma \otimes \sigma$

Оп. ВНЕШНИЙ АЛГЕБРОЙ наз. фактор

$$\Lambda^*(V) = C(V) / I(V)$$

$$I \ni (v+w) \otimes (v+w) = v \otimes v + w \otimes w + (\underbrace{v \otimes w + w \otimes v}_{\text{т.е. } v \otimes w \sim -w \otimes v}) \Rightarrow \in I(V)$$

\Rightarrow ТЕНЗОРЫ ИЗ $\Lambda(V)$ — кососимметричные

Оп. k -той внешней степенью пр-ва V^* наз.

$$\Lambda^k(V) = T_{0,k}(V) \cap \Lambda(V), \quad \Lambda^0(V) = \mathbb{R}$$

$$\Lambda(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V) \quad \Lambda^1(V) = V^*$$

Оп. Обозначим через $\pi^1 \wedge \dots \wedge \pi^k$ класс эквив.

тензора $\pi^1 \otimes \dots \otimes \pi^k$ во внешней степени $\Lambda^k(V)$ $\pi^i \in V^*$

$$\pi^1 \wedge \dots \wedge \pi^k = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \pi^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \pi^{\sigma(k)}$$

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \sim \frac{1}{k!} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

напоминает $\Delta^k(V)$

$$U \wedge W = U \otimes W - W \otimes U$$

Базис $\Delta^k(V)$ состоит из форм $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$
 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

$$\dim \Delta^k(V) = C_n^k$$

$$\dim \Delta(V) = 2^n$$

$A^*: V^* \rightarrow V^*$ $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ — базис $\Delta^k(V)$
 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

$$A^k: \Delta^k(V) \rightarrow \Delta^k(V)$$

$$A^k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = A^* e^{i_1} \wedge \dots \wedge A^* e^{i_k} =$$

$$e^{i_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^* e^{i_1} = \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & 1 & \vdots & \\ 0 & \vdots & 1 & \\ 0 & & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{i_1, j} e^{j_1}$$

$$= \left(\sum_{j_1=1}^n a_{i_1, j_1} e^{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^n a_{i_k, j_k} e^{j_k} \right) =$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} a_{i_1, \sigma(j_1)} \wedge \dots \wedge a_{i_k, \sigma(j_k)} \Delta_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}$$

ВНЕШНЯЯ СТЕПЕНЬ КАК ПОЛИНомИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

$$\begin{aligned}
 & e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} (\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \\
 &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} e^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e^{i_{\sigma(k)}} (\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \\
 &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \varphi_1^{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge \varphi_k^{i_{\sigma(k)}} = \left| \begin{array}{cccc} \varphi_1^{i_1} & \dots & \dots & \varphi_k^{i_k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{i_k} & \dots & \dots & \varphi_k^{i_k} \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_i^1 \\ \vdots \\ \varphi_i^n \end{pmatrix}$$

$$\pi^1 \wedge \dots \wedge \pi^k = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \pi^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \pi^{\sigma(k)}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ НА МНОГООБРАЗИИ

$M - C^\infty$ -многообр. (U, φ) -КАРТА С КООРД.
 $p \in U \quad T_p^* M$ x^1, \dots, x^n

$$\Delta^k(T_p M) = \Delta_k(T_p^* M)$$

базис $T_p^* M$ составляют dx^1, \dots, dx^n

$$\omega \in \Delta^k(T_p M)$$

○ $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ - виd ω
 в координатах

Оп. Внешняя форма ○ наз. C^∞ -диф. формой,
 заданной в карте (U, φ) на M , если
 $a_{i_1 \dots i_k}(x) - C^\infty$ -гладкие функции

Опн. Дифференциальной k -формой

$\omega \in \Omega^k(M)$ на многообразии M с атласом $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ наз. набор k -форм $\{\omega_\alpha^k\}$, опрел. в каждой карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ соответсв., которые перекладят друг в друга под действием отображения, идущ. отобр. $\varphi_{\alpha\beta}^*$

$$(\varphi_{\alpha\beta}^*)^* \omega_\beta = \omega_\alpha, \quad p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

Опн. Дифференциальной k -формой

на многообразии M наз.

C^∞ -гладкое сечение k -й внешней степени расслоения T^*M

$$\Lambda^k(T^*M) \quad (\omega\text{-сеч-ие } \Lambda^k(T^*M))$$

Физическая интерпретация

дифф. форма в \mathbb{R}^3

0-ФОРМА: нулевая форма

1-ФОРМА: $\omega = F^1(x)dx^1 + F^2(x)dx^2 + F^3(x)dx^3$

$$\omega(\vec{v}) = F^1(x)v^1 + F^2(x)v^2 + F^3(x)v^3 = (\vec{F}, \vec{v})$$

интеграл кривой
работа силы при
перемещении точки

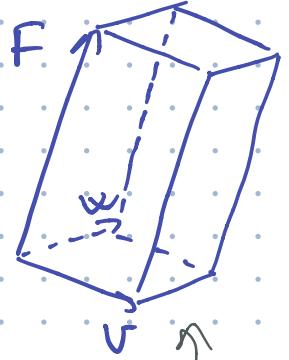


2-ФОРМА

$$\omega = F^1 dx^2 \wedge dx^3 + F^2 dx^3 \wedge dx^1 + F^3 dx^1 \wedge dx^2$$

$$\begin{aligned} \omega(v, w) &= F^1 \begin{vmatrix} v^2 & v^3 \\ w^2 & w^3 \end{vmatrix} + F^2 \begin{vmatrix} v^3 & v^1 \\ w^3 & w^1 \end{vmatrix} + F^3 \begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} F^1 & F^2 & F^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

— ОБЪЕМ
НЕК. НАРАЛ.



Если F -поток скорости, то этот НАРАЛ — v —
V скорости, который успевает пройти за
единицу времени

3-ФОРМА

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad — \text{ФОРМА ОБЪЕМА}$$

$$\omega(v, w, r) = \begin{vmatrix} v^1 & w^1 & r^1 \\ v^2 & w^2 & r^2 \\ v^3 & w^3 & r^3 \end{vmatrix}$$

НЕКИЕ ГЛАДКИЕ

26.11.20

Внешняя производная

Оп.

Внешней производной (внешним дифференциалом) формы $\omega \in \Omega^k(M)$ наз. линейный оператор $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$, удовл. СВ-ВАМ:

- 1) $d: \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ совп. с обычным $d f$, $f \in \Omega^0(M)$
 d -ФОРМА = ФУНКЦИЯ
- 2) $d(\omega^{k_1} \wedge \omega^{k_2}) = d\omega^{k_1} \wedge \omega^{k_2} + (-1)^{k_1} \omega^{k_1} \wedge d\omega^{k_2}$
 $\omega^{k_1} \in \Omega^{k_1}(M)$, $\omega^{k_2} \in \Omega^{k_2}(M)$
- 3) $d^2 \omega = d \circ d\omega = 0$

Внешняя производная в координатах

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum d(a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \\ &= \sum da_{i_1, \dots, i_k}(x) x^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum a_{i_1, \dots, i_k}(x) d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \\ &= \sum da_{i_1, \dots, i_k}(x) x^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

$= 0$ по ЗНУ СВ-ВУ

ЛЕКЦИЯ Дифференциал \mathcal{F} уловл. CB-BAM (1)-(3)

$$\mathcal{F}(a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = da(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

► 1) $\mathcal{F}a(x) = da(x)$ — диф-лан функции

$$2) \omega^{k_1} = a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k_1}}$$

$$\omega^{k_2} = b(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k_2}}$$

$$\mathcal{F}(\omega^{k_1} \wedge \omega^{k_2}) =$$

$$= \mathcal{F}(a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (b(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k_2}}) =$$

$$= \mathcal{F}(a(x) b(x) \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k_2}}} =$$

$$= d(a(x)b(x)) \wedge \boxed{} = (da(x))b(x) + a(x)db(x) \wedge \boxed{} =$$

$$= (\underbrace{da(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{d\omega^{k_1}}) \wedge (b(x) \boxed{}) +$$

$$+ (-1)^{k_1} \underbrace{\omega^{k_1} \wedge d(b(x)) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k_2}}}_{d\omega^{k_2}} =$$

$$= d\omega^{k_1} \wedge \omega^{k_2} + (-1)^{k_1} \omega^{k_1} \wedge d\omega^{k_2}$$

3) ПРОВЕРУМ НА КАЧЕСТВО МОДЕЛИ

$$\omega = a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$d\omega = d(a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = da(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i}_{da(x)} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$\bar{\partial}^2 \omega = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial \omega}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^{i+k} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j}}_{dx^j \wedge dx^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^{i+k} = 0$$

$$dx^j \wedge dx^i - dx^i \wedge dx^j = 0 \Rightarrow$$



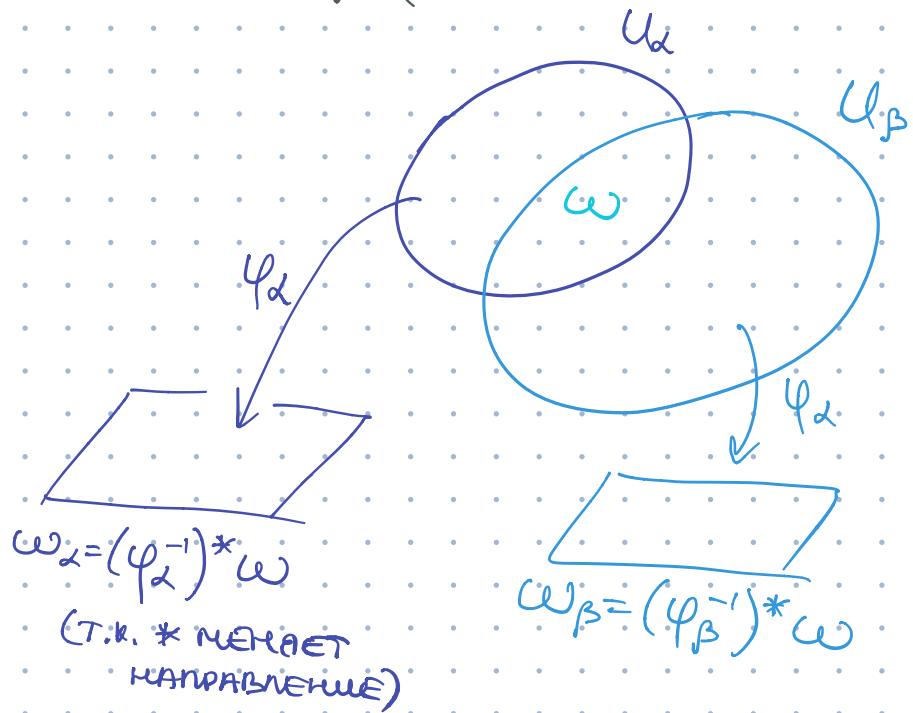
M-многообразие $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) -карты

и $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\text{по опр. } \varphi_{\alpha\beta}^* \omega_\beta = \omega_\alpha$$

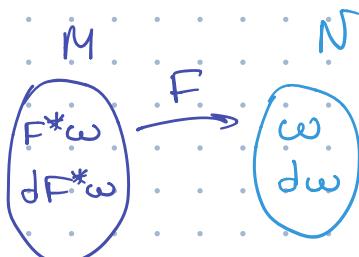


$$\varphi_{\alpha\beta}^* d\omega_\beta = d\omega_\alpha$$



Лемма $\omega_\alpha = (\varphi_\alpha^{-1})^* \omega$, $\omega_\beta = (\varphi_\beta^{-1})^* \omega$, \Rightarrow

$$\varphi_{\alpha\beta}^* d\omega_\beta = d\omega_\alpha$$



$$\text{Пример 1) } \omega = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

$$d\omega = \frac{1}{2}(dx \wedge dy - dy \wedge dx) = dx \wedge dy$$

$$2) d(xdy) = dx \wedge dy$$

ЗАМЕЧАНИЕ $\omega^k \in \Omega^k(M)$, $\omega^l \in \Omega^l(M) \Rightarrow$

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k$$

→ Проверим для многочленов

$$\omega^k = a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$\omega^l = b(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$$

$$\omega^k \wedge \omega^l = a(x)b(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} =$$

$k \cdot l$ транспозиций \Rightarrow

$$= (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k$$

ПОСТАНОВКА ВЕКТОРА В СПОРНУ

$$\omega = a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= a(x) \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(k)}}$$

$$i_j \omega = a(x) \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} dx^{i_{\sigma(1)}} (\underbrace{\sigma}) dx^{i_{\sigma(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(k)}} =$$

т.е. поставили вектор в первые σ -ми \Rightarrow кососим. σ -ия

$$= a(x) \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \underbrace{x^{i_j}}_{\exists \text{--T c monomerom } i_j} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \cancel{dx^{i_j}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \in \Omega^{k-1}(M)$$

т.е. этого монома нет

ЛЕКЦИЯ ГЛАДКИЕ

27.11.20

Интегрирование диф. форм по многообразию

Оп. Носительная форма ω наз.

$$\text{supp } \omega = \overline{\{ p \in M \mid \omega_p \neq 0 \}}$$

Если $\text{supp } \omega$ — компакт, то ω наз. финитной формой

M -н-мерное ориентированное многообразие.

(U, φ) -карта описывает атласа с координатами

$$x^1, \dots, x^n$$

Оп. Интегралом финитной формы

$\omega \in \Omega^n(M)$ такой, что $\text{supp } \omega \subset U$ наз.

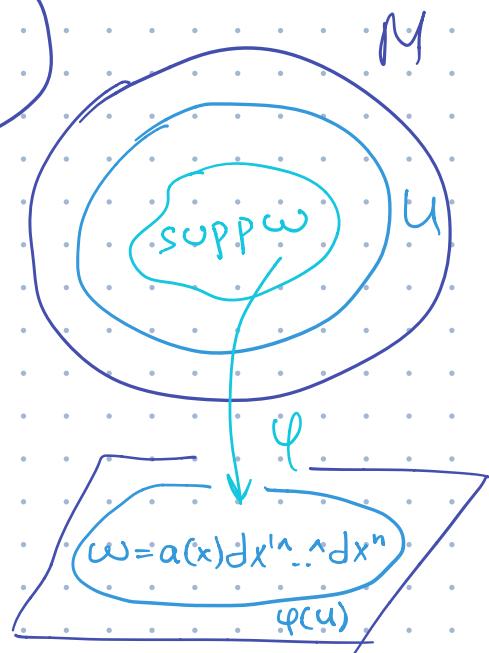
$$(\omega = a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$$

$$\int_M \omega := \int_U a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

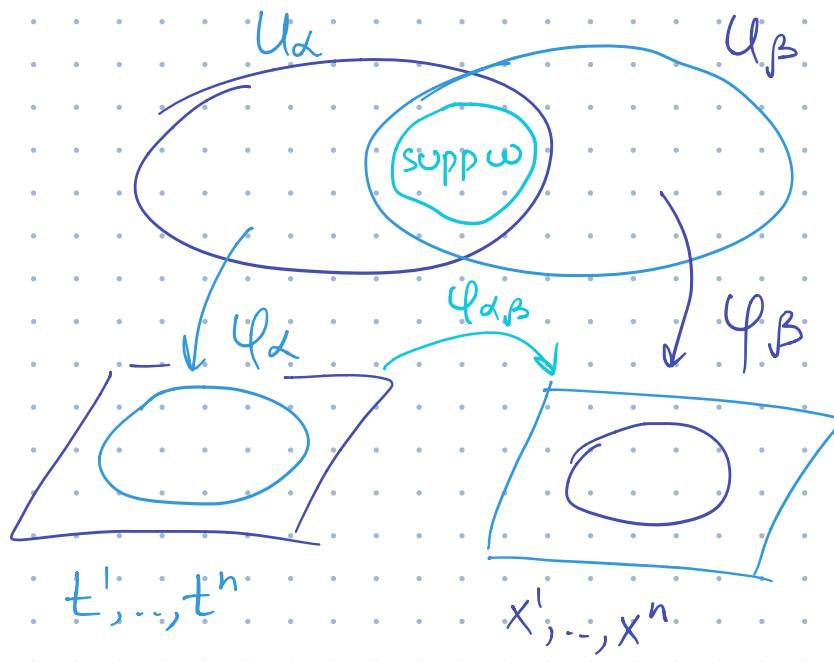
Докажем корректность

Лемма $\int_M \omega$ не зависит

от выбора ориентирующей карты (U, φ) , т.ч. $\text{supp } \omega \subset U$



$$\Rightarrow X = \varphi_{\alpha\beta}(t)$$



$$\int_M \omega = \int_{\varphi_\beta(U_\beta)} a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \stackrel{?}{=} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} a(\varphi_{\alpha\beta}(t)) J(\varphi_{\alpha\beta}(t)) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n$$

С другой стороны, (U_β, φ_β) :

$$\omega = a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = a(\varphi_{\alpha\beta}(t)) d\varphi_{\alpha\beta}^1(t) \wedge \dots \wedge d\varphi_{\alpha\beta}^n(t)$$

$$\varphi_{\alpha\beta}^*(a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = a(\varphi_{\alpha\beta}(t)) d\varphi_{\alpha\beta}^1(t) \wedge \dots \wedge d\varphi_{\alpha\beta}^n(t) =$$

$$d\varphi_{\alpha\beta}^1(t) \wedge \dots \wedge d\varphi_{\alpha\beta}^n(t) = \det J(\varphi_{\alpha\beta}(t)) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n$$

$$dx^i \mapsto d\varphi_{\alpha\beta}^i(t) = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}^i}{\partial t^\ell} dt^\ell$$

$$= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} a(\varphi_{\alpha\beta}(t)) J(\varphi_{\alpha\beta}(t)) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n$$



Пусть ω — физическая n -форма на
 n -мерном ориентированном многообразии M

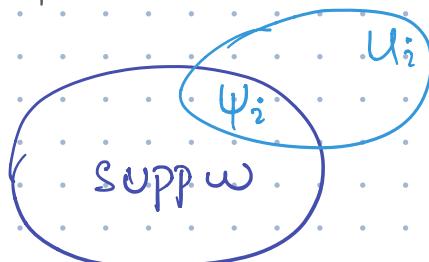
Рассмотрим конечное покрытие

$\text{supp } \omega$ картами $i=1, \dots, m$ ориентирующего
атласа.

T.R.-КОМПАКТ

Рассмотрим малое разбиение 1 ψ_i $i=1, \dots, m$
на $\text{supp } \omega$, называемое покрытием

$$\bigcup_{i=1}^m U_i \supset \text{supp } \omega$$



T.e. $\sum_{i=1}^n \psi_i(p) = 1$

$$p \in \text{supp } \omega$$

$$\text{supp } \psi_i \subset U_i$$

Оп.

Интегралом от физической n -формы ω

на m -мерному ориентир. многообр. M наз.

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^n \int_{U_i} \psi_i \omega$$

$\text{supp } (\psi_i \omega) \subset U_i$

$\omega = \sum_{i=1}^n \psi_i \omega$

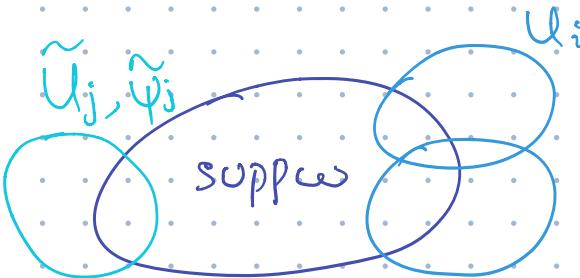
ИНТЕГРАЛЫ
ОПРЕДЕЛЕННЫЕ
С ПОМОЩЬЮ КАРТ
(U_i, ψ_i)

Лемма (КОРРЕКТНОСТЬ) Пусть карты $(U_i, \varphi_i)_{i=1, \dots, m}$

покрывают множество ω и карты

$(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i=1, \dots, l}$ тоже покрывают $\text{supp } \omega$ и
тоже \in ОРИЕНТ. АТЛАСУ;

ψ_i $i=1, \dots, m$ — разделение 1, подчинённое $(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)_{j=1, \dots, l}$



Тогда **интегралы**, опр.

с помощью этих нократий,
сочижают



$$\int_N \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \psi_i \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \sum_{j=1}^l (\psi_i \tilde{\varphi}_j \omega) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \int_M \omega_{ij} =$$

с помощью
 (U_i, φ_i, ψ_i)

$$\text{ФОРМА } \omega_{ij} = \psi_i \tilde{\varphi}_j \omega$$

$$\text{supp } \omega_{ij} \subset U_i \cap \tilde{U}_j$$

наносится
форма $= 1 \Rightarrow$
может так
умножить

Интеграл $\int \omega_{ij}$ не зависит от выбора координат
 (U_i, φ_i) и $(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)$

$$= \sum_{j=1}^l \int \tilde{\varphi}_j \underbrace{\sum_{i=1}^m \psi_i \omega_{ij}}_{!!} = \sum_{j=1}^l \tilde{\varphi}_j \omega := \int_N \omega$$

с помощью
 $(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j, \tilde{\psi}_j)$



Теорема (Формула Стокса)

M - n -мерное, компактное, ориентир. многообразие с краем ∂M

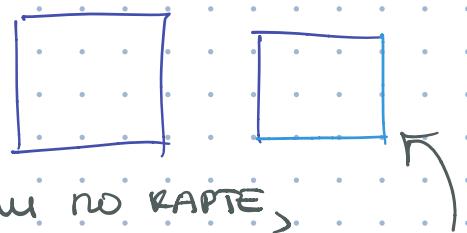
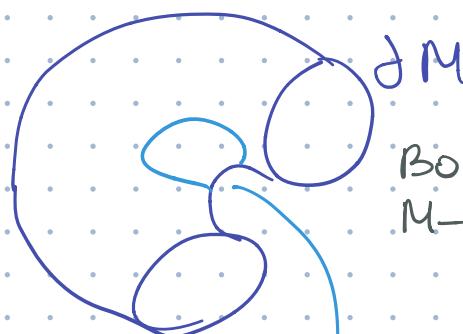
ω - $(n-1)$ -форма на M

Тогда $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$, где ориентации

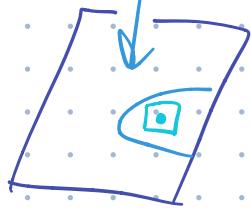
M и ∂M берутся согласованные

Следствие Если $\partial M = \emptyset \Rightarrow \int_M d\omega = 0$

► M -комп. Выберем такой конечный ориентир. атлас $A = \{(U_i, \varphi_i) | i=1, \dots, m\}$ т.ч. $\varphi_i(U_i) = (0, 1)^n$ или $\varphi_i(U_i) = (0, 1] \times (0, 1)^{n-1}$



Вокруг каждой точки взяли по карте, M -компакт \Rightarrow такой атлас можно найти



Пусть $\psi_i | i=1, \dots, m$ - разбиение 1, пачки. Атласу A

$$\omega = \sum_{i=1}^m \psi_i \omega \quad \omega_i = \psi_i \omega$$

остаточное доказательство формулы Стокса $\forall \omega_i$

ФОРМУЛЕМ Ф-НУС СТОРСА АЛЯ $\omega = \omega_i$

$\varphi(U) = (0,1)^n$ или $(0,1] \times (0,1)^{n-1}$ $\text{supp } \omega \subset (U, \varphi)$

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\text{dx}^j}{\wedge} \dots \wedge dx^n$$

$$d\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$$\int_M d\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \stackrel{\text{no opr.}}{=} \text{шт. в один рабте}$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_{\psi(U)} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_j \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1}_{n-1 \text{ шт.}} \underbrace{\frac{\partial a_j}{\partial x_j}}_{\text{без } dx_j} // \text{Ф-ЛА НЬЮТОНА-ЛЕНГ.}$$

Если $\varphi(U) = (0,1)$, то $\Delta = 0$

$$\Delta = a(x^1, \dots, x^{j-1}, 1, x^{j+1}, \dots, x^n) - a(x^1, \dots, 0, \dots, x^n)$$

Если $\varphi(U) = (0,1] \times (0,1)^{n-1}$

и $j \neq 1$ $\Delta = 0 \Rightarrow \Delta \neq 0$ только если $\varphi(U) = (0,1] \times (0,1)^{n-1}$ и $j=1$

$$\int_M d\omega = \int_{\psi(U)} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^j = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 a(1, x^2, \dots, x^n) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 a(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n =$$

no opr.

Интеграл по граничам $\int_M \omega$



ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕНГНИЦА

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

↑
w O-ФОРМА

$$dF = f(x)dx$$

НЕКУИЯ ГЛАДКИЕ

ФОРМУЛЫ ГРИНА 1

22.12.20

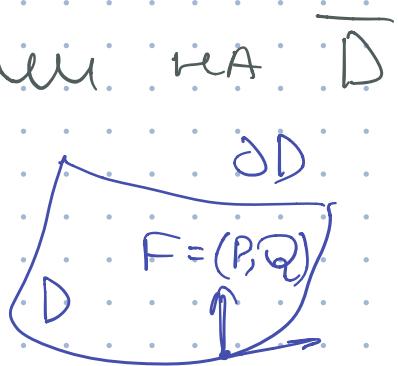
ФОРМУЛА ГРИНА

D -область в \mathbb{R}^2 с кусочно-гладкой
границей

$P(x, y), Q(x, y)$ -функции Φ -ии на \overline{D}

Тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D P dx + Q dy := \int_{\partial D} (\vec{F}, \vec{x}) dt$$



МОК-BO ВРЕАЧИЕ:

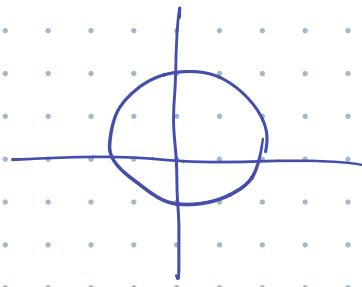
$$\omega = P dx + Q dy$$

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

$$\int (x dy) = dx \wedge dy$$



$$\int_D dx \wedge dy = \int_D \frac{1}{2} (xdy - ydx) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \pi$$

ФОРМУЛА ГАУССА - ОСТРОГРАДЬКОГО

D — конечная область в \mathbb{R}^3 с гладкой границей. P, Q, R — функции на \overline{D} . Тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz =$$

$\operatorname{div} F$

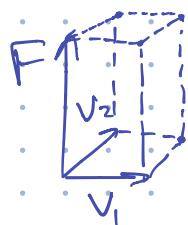
$$= \iint_D P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy =$$

$$= \int_{\partial D} (\vec{F}, \vec{n}) dS$$

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$



$$\vec{F} = (P, Q, R)$$



$$d\omega = d_{\text{inv}} \vec{F} dx \wedge dy \wedge dz$$

ФОРМУЛА ГОЛКА

S - ОГРАНИЧЕНИЕ. ВЫСОКОЕ ГЛАВА РАД
НОВЕРХНЮСТЫ В \mathbb{R}^3 С РЕСУРСОМ M.
ГРАНИЧИЩЕЙ JS. ТОНА

$$\begin{aligned} \int_S P dx + Q dy + R dz &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \\ &+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

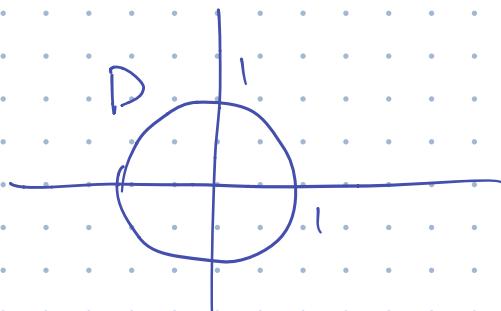
ДОМОШНЕЕ 2

НПУНЕР

$$\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

$$d\omega = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy$$

$= 0 \Rightarrow$ ФИНА ЗАМКНУТА



$$\int_D \omega = \int_D d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin \varphi d\cos \varphi + \cos \varphi d\sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$x = \cos \varphi$$

$$y = \sin \varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \Rightarrow \int_D \omega \neq \int_D d\omega$$

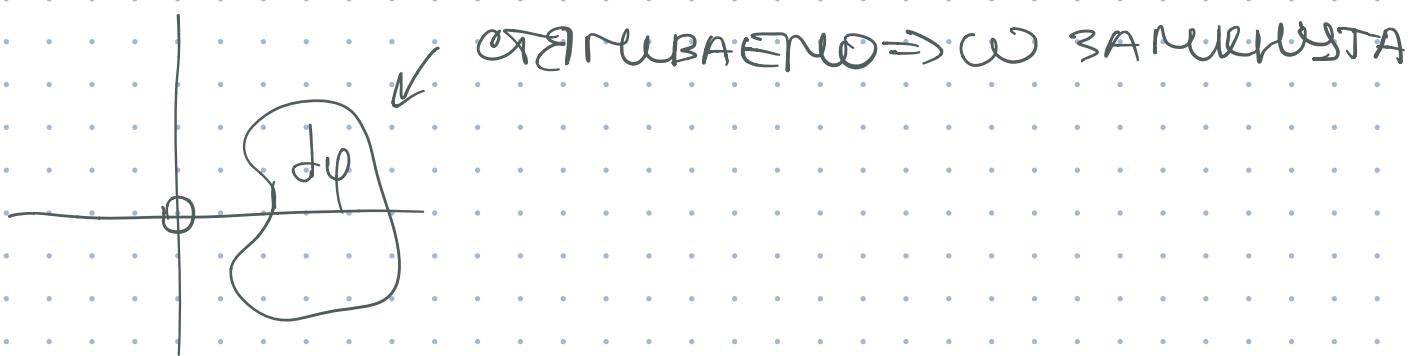
ТАК ЖАК 1-ФОРМА $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, А
 Ф-НА СІӘРСА БЕРНЯ ТОПЫҚ МАЛ
 КӨНЕНДЕРІОВ

ЗАМЕНА $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$$d\varphi = d\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{arctg} \frac{y}{x}) dx + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) dy$$

$$\omega = d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dx + \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dy = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$



ПРЕДЛ. $H^k(M) = 0 \quad k > \dim M$

$$H^0(M) = Z^0(M) = \mathbb{R}^{\# \text{ связности компонент}}$$

№ 7. ПУАНКАРЕ (В ЗАМКНУТАЯ ПОМРА
НЕА СГРУБАЕМОЕ МНОГООСРАЗИ
ЯВЛ. ТОЧКОЙ) $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$
 \downarrow
точка

$$H^0(S^1) = \mathbb{R}$$

$$H^1(S^1) = \mathbb{R}$$

$$\omega = f(\varphi) d\varphi = dF(\varphi)$$

$$\int f(\varphi) d\varphi = F(2\pi) - F(0) = 0$$

ЛЕКЦИЯ ГЛАДКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

04.12.20

М-м. многообр. $SL^k(M)$ — пр-во к формам на М

$$f: M \rightarrow N$$

$$f^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$$

гомоморфизм
дифференц. форм

x^1, \dots, x^n — коорд. на М

y^1, \dots, y^n — коорд. на N

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$$

$$y^i = f^i(x)$$

$$f^*(a_{i_1, \dots, i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k})$$

$$(a_{i_1, \dots, i_k}(f(x)) df^{i_1}(x) \wedge \dots \wedge df^{i_k}(x))$$

Лемма

Линейные операторы $d f^*$
коммутируют

$$d f^* \omega = f^* d \omega$$

$$f: M \rightarrow N$$

$$\omega \in \Omega^k(N)$$

- x^1, \dots, x^m — коорд. на M
 y^1, \dots, y^n — коорд. на N

$$\alpha(y) \in \Omega^0(N)$$

Проверим на
0-форме (α — лн)

$$f^*(d\alpha) = f^*\left(\sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial y^i} dy^i\right) = \sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial y^i}(f(x)) \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$$

Следующие доказательства,

$$d(f^*(\alpha(y))) = d\alpha(f(x)) = \frac{\partial \alpha}{\partial y^i} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$$

→ доказательство след.

$$d f^*(dy^s) \stackrel{?}{=} f^* d^2 y^s = 0$$

$$d f^*(dy^s) = d(dF^s) = 0 \Rightarrow$$

$$d f^*(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = d(dF^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^{i_k}) = 0$$

→ аналогично для произвольной
формы

$$\begin{aligned}
 & f^*(d(a_{i_1, \dots, i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k})) = \\
 & = f^*(da_{i_1, \dots, i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = \\
 & = f^*(da_{i_1, \dots, i_k}(y)) \wedge f^*(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = \\
 & = df^*(a_{i_1, \dots, i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) + \\
 & + f^*(a_{i_1, \dots, i_k}) d(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = \\
 & = df^*(a_{i_1, \dots, i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) \quad \square
 \end{aligned}$$

ЗАМКНУТЬЕ И ТОРМОЗНЕНИЕ ФОРМЫ

Оп. НАЗОВЕМ ФОРМУ $\omega \in \Omega^k(M)$ ЗАМКНУТОЙ,
если $d\omega = 0$

$$Z^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\}$$

НАЗОВЕМ $\omega \in \Omega^k(M)$ ТОРМОЗНОЙ, если
 $\exists \alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, итд $\omega = d\alpha$

$B^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \exists \alpha \in \Omega^{k-1}(M) \mid d\alpha = \omega\}$

$$d \circ d\omega = 0$$

$$\omega = d\lambda$$

$$\Rightarrow B^k(M) \subset Z^k(M)$$

$$d\omega = d \circ d\lambda = 0$$

А ВЕРНО ЛИ ОБРАТИЕ?

Онр. Пространство k -х котономий
для многообразия M наз.

$$M^k(M) = Z^k(M) / B^k(M)$$

Онр. Обобщение $f: M \rightarrow N$ и $g: M \rightarrow N$

наз. гладко гомотопными, если

$\exists F: N \times I \rightarrow N$ — гладкое, $F(p, 0) = f(p)$

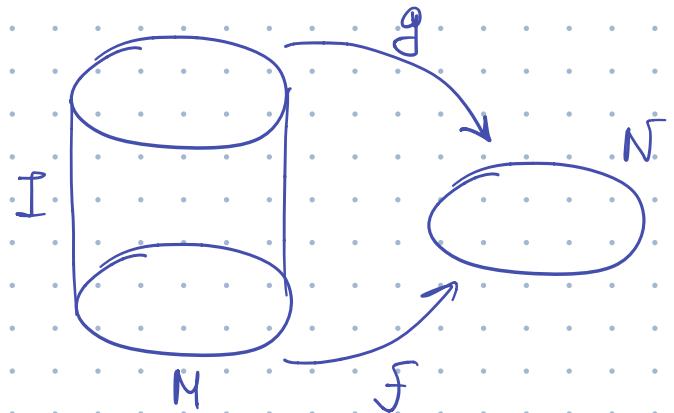
$$I = [0, 1]$$

$$F(p, 1) = g(p)$$

Онр. Многообразие M

наз. связанным,

если $\text{id}_M \sim f: M \rightarrow p \in M$



Пример \mathbb{R}^n связано

$$P = (x^1, \dots, x^n)$$

$F(x^1, \dots, x^n, t) = (x^1 t, \dots, x^n t)$ — гладкое

$F(x, 0) = 0$

$F(x, 1) = x = id_{\mathbb{R}^n}$

Онр.

Многообразия M и N наз. (гладко)

гомотопически эквивалентными,

если \exists гладкие $f: M \rightarrow N$ и $g: N \rightarrow M$
т.ч. $f \circ g \sim id_N$ и $g \circ f \sim id_M$

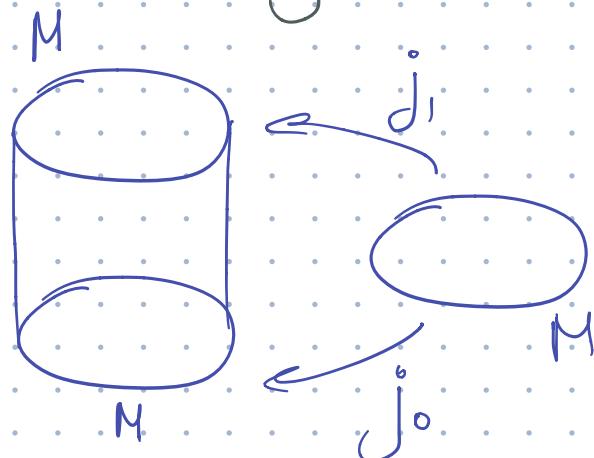
ТЕОРЕМА (ПУАНКАРЕ)

Закрытая форма на ограниченном
многообразии является точной



M -многообр.

$M \times I$ $j_0, j_1: M \rightarrow M \times I$ $j_0: p \mapsto (p, 0)$



$j_1: p \mapsto (p, 1)$

Построим оператор $K: \Omega^{k+1}(M \times I) \rightarrow \Omega^k(M)$
 K -линейн \Rightarrow линейные операторы
на разложенных формах

$$\omega = a(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}$$

$$\omega = a(x, t) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$K(a(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}) = 0$$

$$K(a(x, t) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) :=$$

$$= \int (a(x, t) dt) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(M)$$

Лемма $K(d\omega) + d(K\omega) = j^* \omega - j_* \omega$,
 $\omega \in \Omega^{k+1}(M \times I)$

► Проверим это соотношение на
разложенных формах

$$\omega = a(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}$$

$$K\omega = 0 \Rightarrow d(K\omega) = 0$$

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}} + [\text{линейн}]$$

$$K\omega = \left(\int_0^1 \frac{da}{dt} dt \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}} =$$

$$= (a(x, 1) - a(x, 0)) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}} = j^* \omega - j_0^* \omega$$

$$2) \omega = a(x, t) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$j_0^* \omega = j_1^* \omega = 0$$

$$\begin{aligned} K(d\omega) &= K \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x^i} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i} dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

$$d(K\omega) = d \left(\int_0^1 a(x, t) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int_0^1 a(x, t) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial a(x, t)}{\partial x^i} dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \Rightarrow$$

$$K(d\omega) + d(K\omega) = 0 \quad \square$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛОК-ВА ТЕОРЕМЫ:

ω -ЗАМЕРЕ. $d\omega = 0$ $\omega \in \Omega^{k+1}(M \times I)$

$$d(K\omega) = j_1^*\omega - j_0^*\omega$$

$\eta \in \Omega^{k+1}(M)$

$F: M \times I \rightarrow M$

$$F(p, 0) = p_0$$

$$F(p, 1) = p$$

(NP-B30
Гаре-
БАСНО)

$$\exists \omega = F^*\eta \in \Omega^{k+1}(M \times I)$$

$$\text{Если } d\eta = 0, \text{ то } d\omega = dF^*\eta = F^*d\eta = 0$$

\Rightarrow ФОРМА ЗАМЕРЕСТА \Rightarrow НЕДЕРЖАЩИЙ ВЕНЧУРЫ

$$\text{По венч. } d(K\omega) = j_1^*F^*\eta - j_0^*F^*\eta = \eta - 0 = \eta$$

Анал $\eta \exists$ ФОРМА $\alpha = K(F^*\eta)$, т.к. $\eta = d\alpha$

