Семинар 1 16.03.2021

Вариационные задачи.

Кратко напомним материал из лекции.

Функционал $F[y]$ это отображение из некоторого множества функций $y(x)$ в числовое поле. Обычно "множество функций" – нормированное пространство.

Мы будем всегда работать с функциями $C^k[a,b)$ (a и b могут $\to\infty$).

Если пространство функций, где задан $F[y]$, – линейное, то линейный функционал по определению

$$F[\alpha y_1+\beta y_2] = \alpha F[y_1]+\beta F[y_2].$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Вариация (дифференциал) функционала.

Пусть $y_0(x)$ – фиксиров. функция из области определения $F[y]$. Любую другую функцию из обл. определения можно представить в виде

$$y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$$

$\delta y(x) = y - y_0$ – <u>вариация</u> аргумента функционала в точке $y_0(x)$.

[О] <u>Приращение ф-ла</u> $F[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающее вариации аргумента $\delta y(x)$ называется разность:

$$\Delta F = F[y_0(x) + \delta y(x)] - F[y_0(x)]$$

[О] Если приращение ΔF можно представить в виде

$$\Delta F = L[y_0(x), \delta y(x)] + \lambda[y_0(x), \delta y(x)],$$

где $L[y_0(x), \delta y(x)]$ – <u>линейный</u> функционал по $\delta y(x)$, а функционал λ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|\delta y\| \to 0} \frac{\lambda[y_0, \delta y]}{\|\delta y\|} = 0 \quad , \text{ то}$$

(обычно будем брать норму
$$\|\delta y\| = \max_{x \in [a,b]} |\delta y(x)|$$
)

линейная часть $L[y_0(x), \delta y(x)]$ называется ++вариацией++ функционала $F[y]$ в точке $y_0(x)$. Будем также пользоваться обозначением

$$\delta F[y_0] := L[y_0(x), \delta y(x)].$$

Другое определение (почти эквивалентное): ++фиксируем++ $y_0(x)$ и ++фиксируем++ какую-то вариацию $\delta y(x)$. Вводим параметр ε, тогда $F[y_0 + \varepsilon\delta y]$ — функция ε. Пусть $\exists$ производная $\frac{d}{d\varepsilon}F[y_0+\varepsilon\delta y]$ в $\varepsilon=0$. Эта производная называется вариацией ф-ла $F[y]$ в т. $y_0(x)$

$$\delta F[y_0] = \frac{d}{d\varepsilon}F[y_0+\varepsilon\delta y]\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Пример: $F[y]$ на $C^1[0,1]$

задан правилом:

$$F[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy(x) + (y')^2)\,dx.$$

Найти приращение ΔF и вариацию δF в некоторой заданной ф-ции $\bar{y}(x)$.

Решение:

Приращение: $F[\bar{y} + \delta y] - F[\bar{y}] =$

$$= 2\bar{y}(0)\delta y(0) + (\delta y(0))^2 +$$

$$+ \int_0^1 (x\delta y + 2\bar{y}'(x)\delta y'(x) + (\delta y')^2)\,dx.$$

Вариация

$$\delta F[\bar{y}] = 2\bar{y}(0)\delta y(0) + \int_0^1 (x\,\delta y(x) + 2\bar{y}'(x)\delta y'(x))\,dx.$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Здесь мы пользуемся такой нормой на $C^1[0,1]$:

$$\|y(x)\| = \max_{0\le x\le 1} |y(x)| + \max_{0\le x\le 1} |y'(x)|.$$

Если рассматривать ф-ции из $C^2[0,1]$, то вариацию можно преобразовать, проинтегрировав по частям слагаемое с $\bar{y}'\delta y'$:

$$\int_0^1 2\bar{y}'(x)\delta y'(x) = 2\bar{y}'(x)\delta y(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2\bar{y}''(x)\delta y(x).$$

Тогда вариация функционала примет вид:

$$\delta F[\bar{y}] = 2\bar{y}(0)\delta y(0) + 2\bar{y}'(1)\delta y(1) - 2\bar{y}'(0)\delta y(0) + \int_0^1 (x - 2y''(x))\delta y(x)\,dx.$$

Необх. условия экстремума.

$\boxed{0}$ Функционал $F[y]$ достигает в $y_0(x)$ (локального) максимума (минимума), если $\exists$ ε-окрестность (по норме пространства ф-ций) функции $y_0(x)$ такая, если

$$F[y_0] - F[y] \geq 0 \ (\leq 0)$$

для $\forall y(x): \|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$.

$\boxed{V}$ Необх. условие экстремума в y_0: $\underline{\delta F[y_0] = 0}$.

$\boxed{V}$ Если $F[y] = \int_a^b L(x, y, y')dx$ то

Экстремум достигается на решении ДУ (уравнение Эйлера - Лагранжа):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

с фиксиров. гран. условиями

$y(a) = y_1 \quad y(b) = y_2$.

В заключение разберем упражнение на поиск экстремали функционала

$$\boxed{\Phi[y(x)] = \int_0^1 \left(y'^2(x) + 2y(x)y'(x) + y^2(x)\right) dx} \quad (8)$$

Вычислеем его дифференциал:

$$\delta\Phi = \delta\left(\int_0^1 (y'+y)^2 dx\right) = 2\int_0^1 (y'+y)(\delta y' + \delta y)\, dx =$$

$$= 2\int_0^1 (y'+y)\,\delta y\, dx + 2\int_0^1 \left((y'+y)\,\delta y\right)' dx - 2\int_0^1 (y'+y)'\,\delta y\, dx$$

$$= 2\int_0^1 \left((\cancel{y'}+y) - (y'+\cancel{y})'\right)\delta y\, dx + 2(y'+y)\,\delta y\Big|_0^1 =$$

$$= \boxed{2\int_0^1 (y - y'')\,\delta y\, dx + 2(y'+y)\,\delta y\Big|_0^1}$$

A) Если мы ищем экстремаль на пространстве функций с фиксированными значениями на концах, то $\delta y|_0 = \delta y|_1 = 0$. Условие экстремальности даёт лишь дифур

$$\boxed{y'' - y = 0} \qquad (9)$$

с общим решением $y(x) = Ae^x + Be^{-x}$. (10)

Но мы имеем граничные условия, скажем

$$\boxed{y(0) = 0, \ y(1) = 1}, \text{ которые}$$

фиксируют значение констант $A = -B = 1/2\,\mathrm{sh}(1)$

так что экстремаль действия единственна:

$$\boxed{y_{\text{экстр.}}(x) = \frac{sh(x)}{sh(1)}}$$

Б) Если мы рассматриваем пространство функций, у которых фиксируется значение лишь в точке $x=0$, скажем, $\underline{y(0)=1}$, так что $\delta y\big|_{x=0}=0$, то условие $\delta\Phi=0$, помимо дифура (9), даёт ещё и граничное условие в точке $x=1$.

$$\underline{(y'+y)\big|_{x=1}=0}, \quad /\text{т.к. } \delta y\big|_{x=1} \text{ произвольна}/$$

Граничное условие при $x=1$ фиксирует параметр A: $A=0$ в общем решении (10). Граничное условие при $x=0$ фиксирует B: $B=1$. Экстремаль для этого пространства функций:

$$\boxed{y_{\text{экстр}} = e^{-x}.}$$

В) Рассмотрим пространство функций на отрезке $[0,1]$ без ограничений на их значения на концах. В этом случае условие $\delta\Phi=0$, помимо дифура (9) выдает два граничных условия:

$$\underline{(y'+y)\big|_{x=0} = (y'+y)\big|_{x=1} = 0;}$$

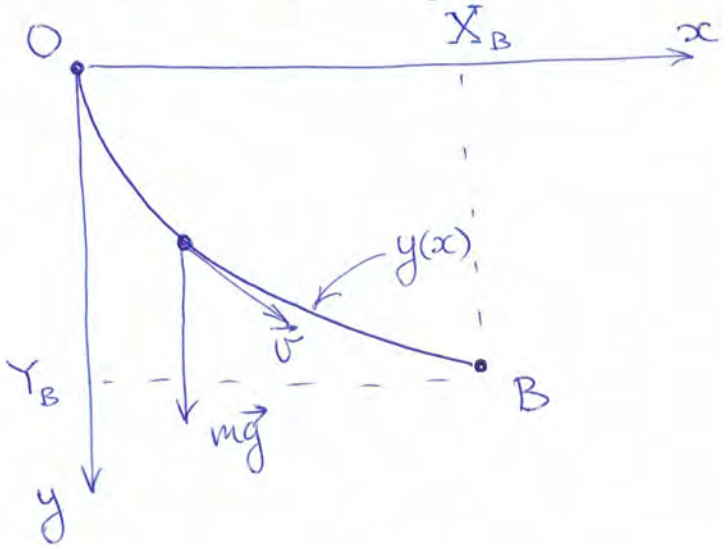
В результате получаем 1-параметрическое семейство экстремалей $\boxed{y_{\text{экстр}} = Ae^{-x} \ \forall A\in\mathbb{R}}$

Решение этой задачи **Не единственно!**

Семинар 2 16.03.2021

Примеры вариационных задач

Исторически первый пример вариационной задачи – задача о брахистохроне. Она была поставлена Иоганном Бернулли в 1696 г. Это было научное соревнование того времени: кто первый решит. Через год было найдено 5 решений, одно из них принадлежит Ньютону (1697 г.). Его мы и разберём.



Задача: найти форму кривой $y(x)$, по которой материальная точка (санки) наиболее быстро соскользнёт из точки O в точку B (см. Рис.).

$O=(0,0)$ $B=(X_B, Y_B)$

На точку действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная по оси $\vec{Oy}$. В начальный момент времени материальная точка стоит.

Используем известный нам закон сохранения энергии точки:

$$E = \frac{mv^2}{2} - mgy,$$

знак "–", т.к. ось $\vec{Oy}$ смотрит вниз.

где $\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ – скорость точки.

Её величина: $v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x}\sqrt{1+y'^2}$,

где $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$.

Так как в начальный момент времени $t=0$

$$v(0) = 0, \quad x(0) = y(0) = 0, \text{ то } E = 0$$

и закон сохранения энергии даёт соотношение

$$v = \sqrt{2gy}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{2gy}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx = dt.$$

Интегрируем:

$$T_B[y(x)] = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx \qquad (0)$$

Время прибытия в точку B является функционалом от траектории $y(x)$.

Задача о минимизации T_B выглядит как механическая задача с лагранжианом

$$\boxed{L(y, y', x) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}},$$

где x играет роль времени, а $y(x)$ – единственная обобщенная координата задачи.

Так как $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, то в системе сохраняется "энергия" (см. Лекцию 5, св-во лагр. формализма С2, стр 14)

$$"E" = y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = -\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = \text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y(1+y'^2) = k = \text{const}} \quad (1)$$

Этот дифур 1-го порядка и будем решать (вместо уравнения Эйлера-Лагранжа) для нахождения экстремали $T_B[y(x)]$

Разрешаем его относительно y':

$$y' = \frac{\sqrt{k-y}}{\sqrt{y}}$$

тут надо бы поставить "±", но мы рассмотрим случай "+", когда в начале движения $y' > 0$. Ответ будет годиться и для $y' \leq 0$

$$\Downarrow$$

$$dx = \frac{dy \cdot y^{1/2}}{\sqrt{k-y}}$$

Интегрируем, сделав в правой части подстановку $y(x) \mapsto \theta(x)$:

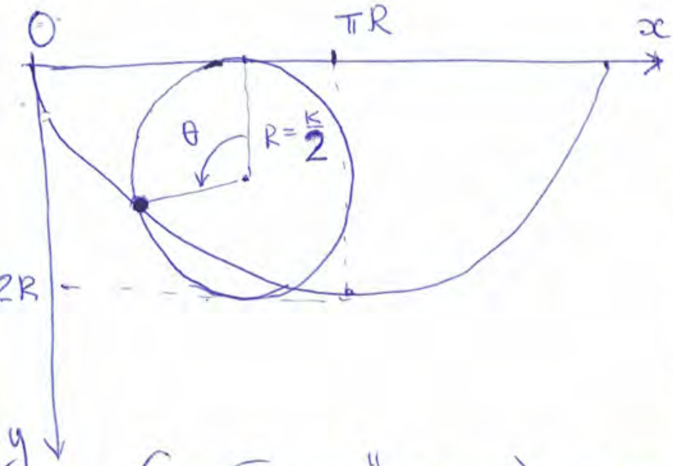
$$\boxed{y = k\sin^2(\theta/2) = \frac{k}{2}(1-\cos\theta)} \quad (2a)$$

$$dx = k\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = \frac{k}{2}(1-\cos\theta)d\theta = \frac{k}{2}d\,(\theta - \sin\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = x_0 + \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta)} \quad (2b)$$

Формулы (2a, b) — это параметрическое задание циклоиды — кривой, по которой движется точка обода колеса, при его качении без проскальзывания по $\vec{Ox}$. Начальное условие $x(0) = y(0) = 0$ выполнены, если $\theta(0) = 0$, $x_0 = 0$



Константа K связана с радиусом колеса: $R = \frac{K}{2}$. Её значение, а также значение параметра θ в точке прибытия $\theta_B = \theta(T_B)$ находятся (приближённым) решением уравнений

$$\begin{cases} Y_B = \frac{K}{2}(1-\cos\theta_B) \\ X_B = \frac{K}{2}(\theta_B - \sin\theta_B) \end{cases}$$

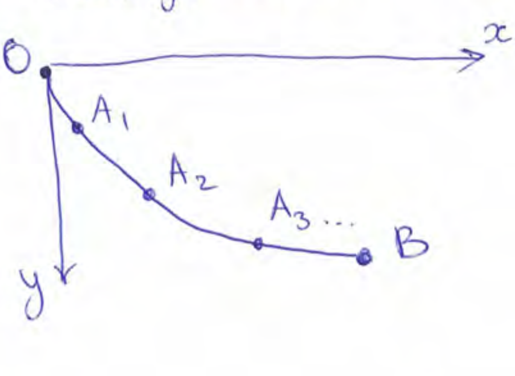
Rem 1. Если $X_B/Y_B > \pi/2$, то y' меняет знак: точке выгодно опуститься ниже Y_B, а затем поехать в горку.

Rem 2. Подставив решение (2a, б) в функционал $T_B[y(x)]$ (0), мы можем вычислить время движения по брахистохроне из O в B:

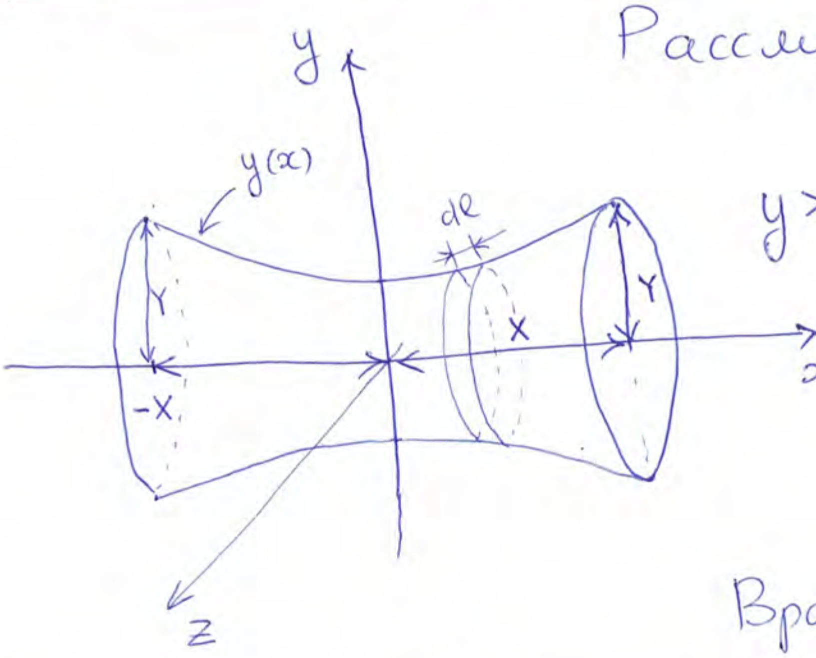
$$T_B = \int_0^{X_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx = \int_0^{\theta_B} \sqrt{\frac{K}{2g}}\,d\theta = \sqrt{\frac{K}{2g}}\,\theta_B.$$

То есть параметр θ пропорционален времени движения по брахистохроне.

Rem 3 Можно проверить, что стартуя из любой промежуточной точки циклоиды $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (см. Рис.), если начинать движение с нулевой скоростью, то до B всегда доберешься за одно и то же время.



Задача о мыльных пленках.



Рассмотрим семейство функций $y(x)$, $x \in [-X, X]$ $y > 0$, с фиксированными значениями на границах

$$y(-X) = y(X) = Y$$

Вращая такие функции вокруг оси $\vec{Ox}$ мы получаем поверхности вращения (см. Рис.). Необходимо определить $y(x)$ такую, чтобы площадь ее фигуры вращения была минимальной. Экспериментально такие поверхности можно получать, натягивая мыльную плёнку между двумя кольцами.

Площадь поверхности вращения

$$\boxed{S[y(x)] = \int_{-Y}^{Y} \underbrace{\underbrace{2\pi y(x)}_{\text{периметр окружности}} \underbrace{\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx}_{= \, dl \text{ — длина боковой образующей куска конуса}}}_{\text{площадь боковой поверхности куска конуса (см. рис.)}}}$$

Поиск экстремалей этого функционала — типичная задача механики: концы кривой $y(x)$ фиксированы.

x играет роль времени. "Лагранжиан" задачи $L = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}$ не зависит явно от времени x, значит выполняется закон сохранения "энергии".

$$"E" = y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = -\frac{2\pi y}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

Разрешаем соотношение относительно y':

$$\boxed{y'^2 = \frac{1}{\alpha^2}y^2 - 1}$$, где α – некоторая константа

Заменой $y(x) \mapsto \varphi(x)$:
$$\begin{cases} y = \alpha \operatorname{ch}\varphi, \\ y' = \alpha \operatorname{sh}\varphi \cdot \varphi', (\varphi \neq 0) \end{cases}$$

получаем уравнение

$$\boxed{\alpha^2\varphi'^2 = 1}$$

Выбор знака φ здесь несущественен. Выбираем решение
$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}x + \varphi_0$$

Симметричность граничных условий для y: $y(X) = y(-X)$ приводит к $\varphi_0 = 0$. Получаем ответ

$$\boxed{y(x) = \alpha \operatorname{ch}\frac{x}{\alpha}}$$

где значение параметра $\alpha(X, Y)$ должно определяться из граничного условия

$$\boxed{Y = \alpha \operatorname{ch}\frac{X}{\alpha}}$$

Не для всяких X и Y это условие разрешимо. Вот отличие граничных условий вариационных задач от начальных условий механических задач.

Прежде чем разрешить это условие, посчитаем площадь фигуры:

$$S = \int_{-X}^{X} 2\pi \left(\alpha \operatorname{ch}\frac{x}{\alpha}\right) \underbrace{\operatorname{ch}\frac{x}{\alpha}} dx =$$

это $\sqrt{1+y'^2}$, т.к. $y' = \operatorname{sh}\frac{x}{\alpha}$

$$= 2\pi\alpha \int_{-X}^{X} \frac{\operatorname{ch}\frac{2x}{\alpha}+1}{2}\, dx =$$

$$= 2\pi\alpha X + \pi\alpha^2 \operatorname{sh}\left(\frac{2X}{\alpha}\right) =$$

преобразуем, используя $Y = \alpha \operatorname{ch}\frac{X}{\alpha}$

$$\boxed{S = 2\pi X\alpha + 2\pi Y\sqrt{Y^2-\alpha^2}}$$

У параметра α есть геом. смысл: $\underline{y(0) = \alpha}$ — это радиус фигуры в самом узком месте.

Ясно, что $\alpha \in [0, Y]$

$\alpha \to 0$, т.е. фигура схлопывается в 2 донышка от цилиндра, $y(x)$ имеет вид $\sqcup$ $-X$ X. $\underline{S = 2\pi Y^2}$ верно!

$\alpha \to Y$, т.е. фигура превращается в боковую поверхность цилиндра $y(x) = \longmapsto$ $S = 4\pi XY$

Rem.: при "тупой" подстановке выходит $2\pi XY$.
На самом деле $\alpha = Y(1-\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$
приводит к $X \to 0$ как $X = \sqrt{2}Y\varepsilon + o(\varepsilon)$
(см. $Y = \alpha \operatorname{ch} X/\alpha$)

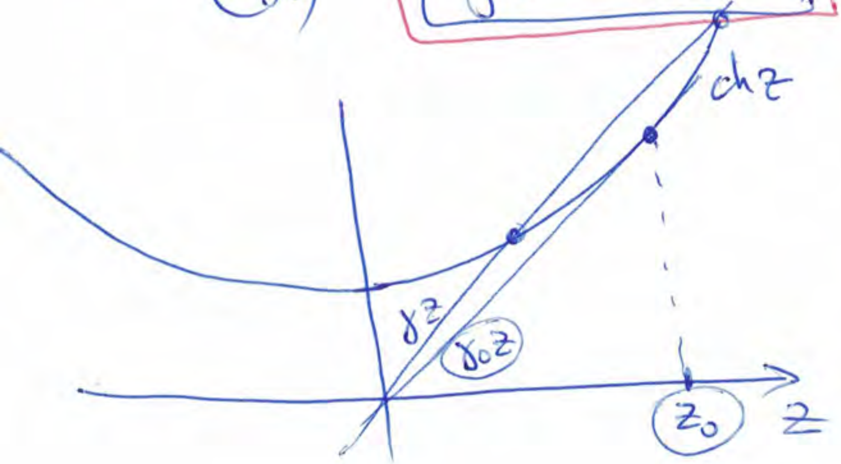
Поэтому $S = 2\pi(\sqrt{2}Y\varepsilon)\cdot Y + 2\pi Y \cdot Y \overbrace{\sqrt{1-(1-\varepsilon^2)^2}}^{=\sqrt{2}\varepsilon} = 4\pi(\sqrt{2}Y\varepsilon)Y = 4\pi XY$

Теперь поищем $\alpha(X,Y)$:

$$\boxed{Y = \alpha \operatorname{ch}\frac{X}{\alpha}} \quad (*)$$

Переобозначим $\gamma = \dfrac{Y}{X}$, $z = \dfrac{X}{\alpha}$.

$$(*) \quad \boxed{\gamma z = \operatorname{ch} z}$$ – надо решить по z



Не при всех γ решение есть.

Касание при $\gamma = \gamma_0$

$$\begin{cases} \gamma_0 = \operatorname{sh} z \\ \gamma_0 z = \operatorname{ch} z \end{cases}$$ ← уравнения на z_0

$$\boxed{\operatorname{th} z_0 = \frac{1}{z_0}}$$

Численно решается: $\boxed{z_0 = 1{,}199678\ldots}$

При этом $\boxed{\gamma_0 = \operatorname{sh} z_0 = 1{,}509\ldots = \dfrac{Y}{X}}$

Начиная с такого отношения $\frac{Y}{X}$ есть фигура min площади

$\gamma > \gamma_0$ – 2 решения уравнения $(*)$

Какое верное?

Проведем численный эксперимент

$$\boxed{Y = 2\,,\quad X = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2 > \gamma_0}$$

2 корня $\quad z_1 = 0{,}589\ldots\,,\quad \alpha_1 = \frac{X}{z_1} = \frac{1}{z_1} = 1{,}697$

$\qquad\qquad z_2 = 2{,}127\ldots\,,\quad \alpha_2 = \frac{1}{z_2} = 0{,}470$

Площади поверхностей

$S_1 = 23{,}97 \quad \alpha_1 = y_1(0) = 1{,}697$

$S_2 = 27{,}38 \quad \alpha_2 = y_2(0) = 0{,}470$

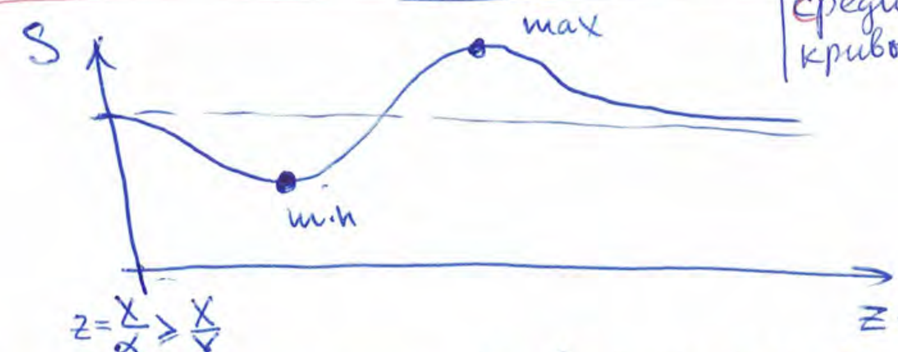
Боковая пов-сть цилиндра $S_{бок} = 2\pi Y \cdot 2X = 8\pi \cong 25{,}1$

Площадь донышек: $S_{2\,дна} = 2(\pi Y^2) = 8\pi \cong 25{,}13$

Получили такое изменение площадей

	$\alpha = y(0) = Y = 2$	$\alpha = 1{,}697$	$\alpha = 0{,}470$	$\alpha = 0$
$S=$	$25{,}13$	$23{,}97$	$27{,}38$	$25{,}13$

$\uparrow$ это min $\qquad$ $\uparrow$ это max среди семейства кривых $y = \alpha\,\mathrm{ch}\frac{x}{\alpha}$



При уменьшении γ вплоть до $\gamma_0 = 1{,}509$ min и max сходятся и при $\gamma = \gamma_0$ min пропадает $\Rightarrow$ пленка лопается!