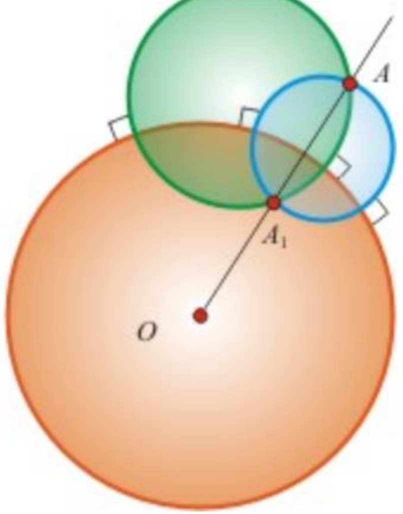
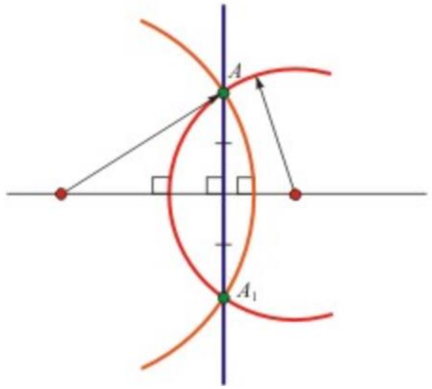
Лекция 17. Принцип симметрии.

Теория функций комплексного переменного

Симметрия (инверсия) относительно обобщенной окружности

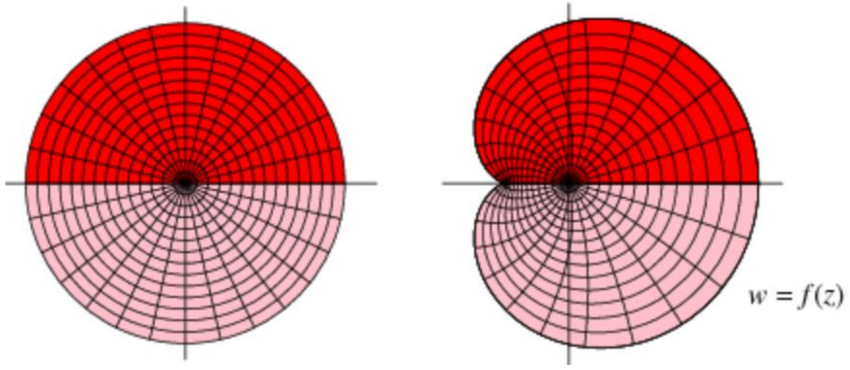


- Точки A, A_1 симметричны относительно обобщенной окружности S, если все окружности через A, A_1 перпендикулярны S.
- Симметрия относительно окружности – инверсия.
- Симметрия относительно прямой – отражение.



Симметричное конформное отображение

- Пусть C, C' – обобщенные окружности, а $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ открыто.
- Рассмотрим голоморфное отображение $f\colon U \to \overline{\mathbb{C}}$. Положим $\tilde{f} = S_{C'} \circ f \circ S_C$.
- При отображении $\tilde{f}$ точка, C -симметричная точке z, переходит в точку, C' -симметричную точке $f(z)$.
- Тогда $\tilde{f}\colon S_C(U) \to \overline{\mathbb{C}}$ тоже голоморфно.



Принцип симметрии Шварца

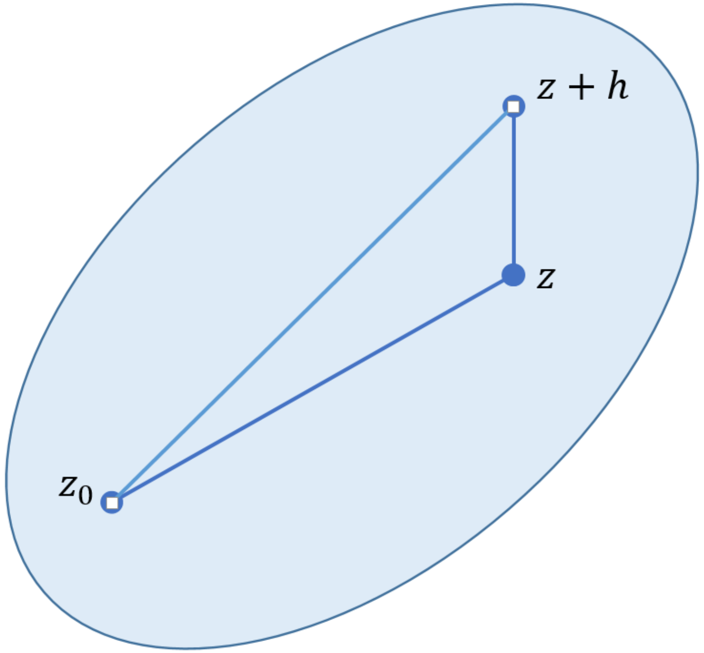
- Пусть теперь $\overline{U} \cap \overline{S_C(U)}$ содержит открытую дугу γ обобщенной окружности C, причем $U \cap S_C(U) = \emptyset$.
- Пусть отображение f продолжается до непрерывного отображения $F: U \cup \gamma \to \mathbb{C}$.
- Пусть $f(\gamma) \subset C'$. Тогда отображение g, равное F на $U \cup \gamma$ и равное $\tilde{f}$ на $S_C(U)$, голоморфно на $U \cup \gamma \cup S_C(U)$.
- Голоморфность выводится из теоремы Мореры.

Теорема Мореры

Предложение 5.15 (теорема Мореры). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Если непрерывная функция $f : U \to \mathbb{C}$ обладает тем свойством, что $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ для всякого треугольника $\Delta \subset U$, то f голоморфна на U.*

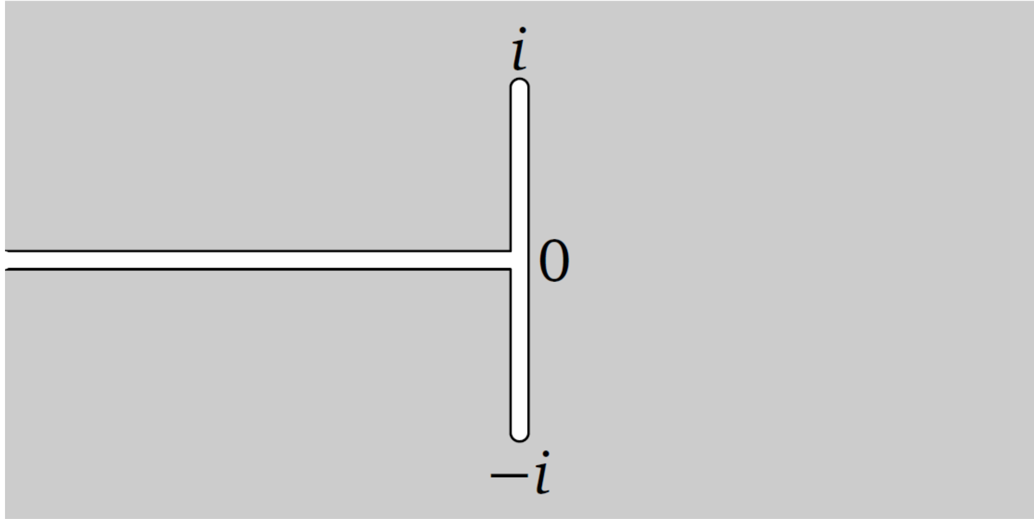
Идея доказательства. 1) Построим первообразную как раньше.

2) Первообразная голоморфна, следовательно, дважды дифференцируема.



Пример применения принципа симметрии

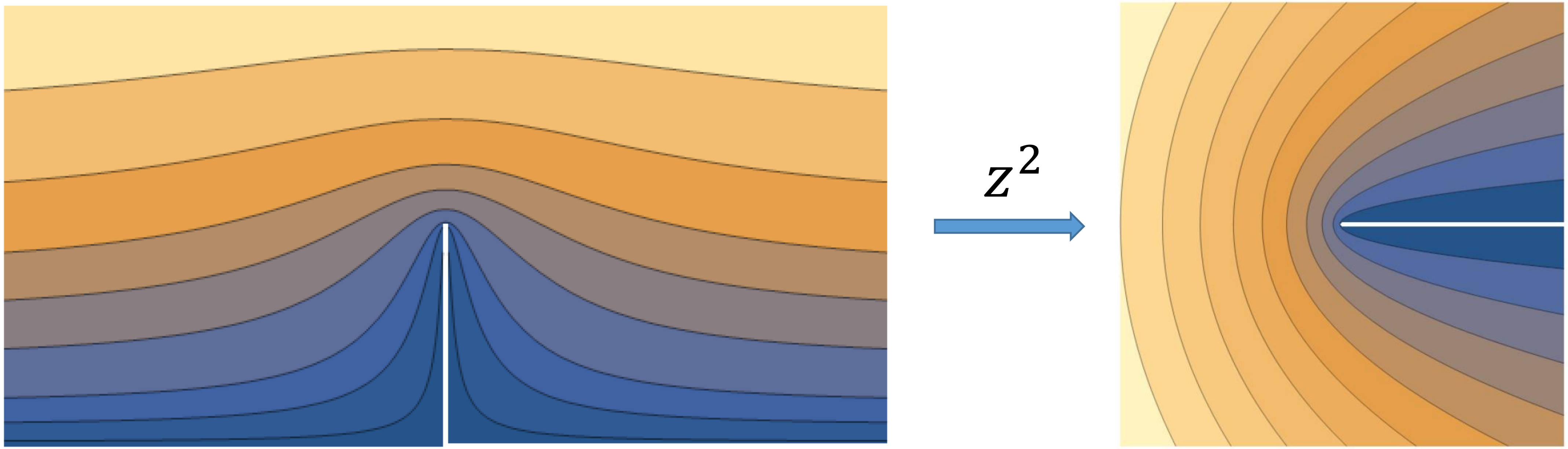
- Вспомним конформный изоморфизм между $U = \mathbb{H} \setminus [0, i]$ и $V = \mathbb{H}$.
- Это $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$.
- Согласно принципу симметрии, f переводит изображенную справа область в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$.



Значит, изоморфизм между изображенной областью и верхней полуплоскостью можно записать как

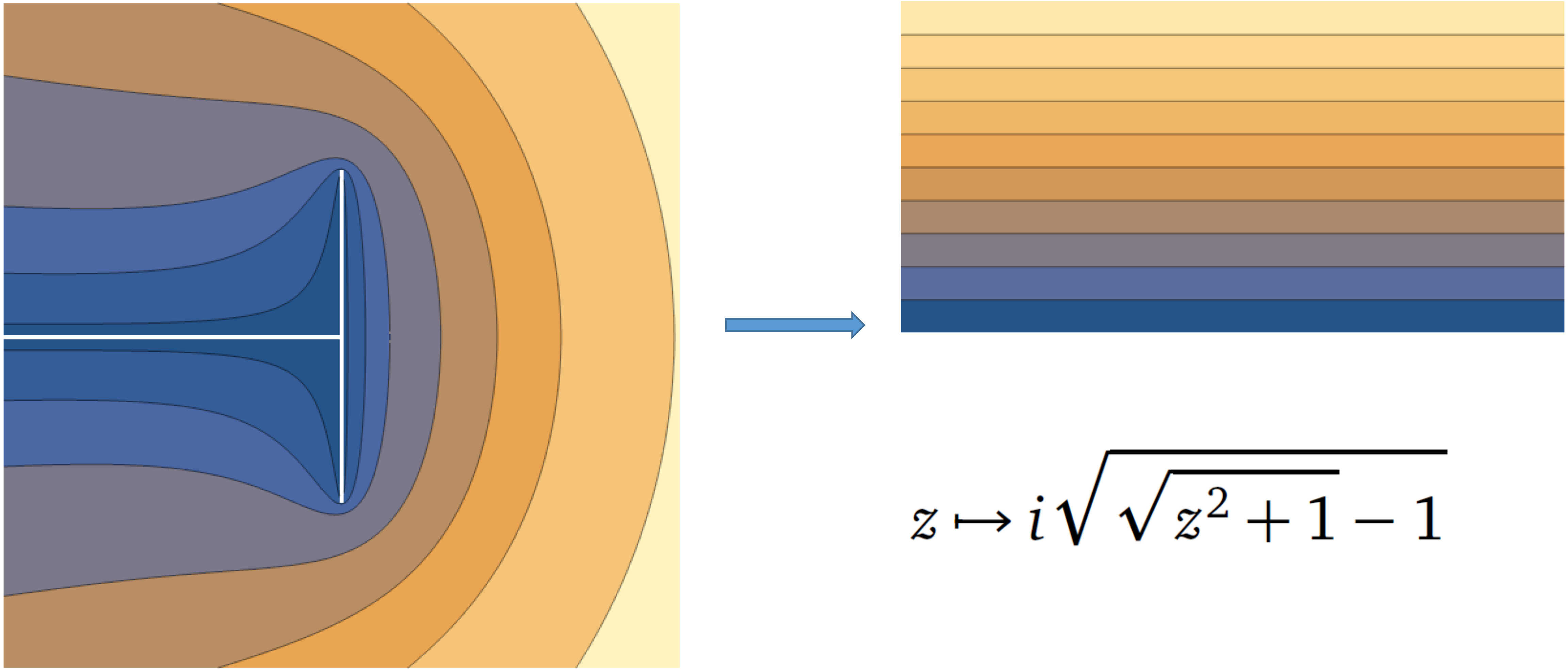
$$z \mapsto i\sqrt{\sqrt{z^2+1} - 1}$$

Отображение на полуплоскость: полуплоскость с разрезом



$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$$

Пример применения принципа симметрии



$$z \mapsto i\sqrt{\sqrt{z^2+1}-1}$$

Карл Герман Шварц (1843 – 1921)

Немецкий математик, член Берлинской академии наук, профессор Галльского, Цюрихского, Гёттингенского и Берлинского университетов.

Ученик Куммера и Вейерштрасса.

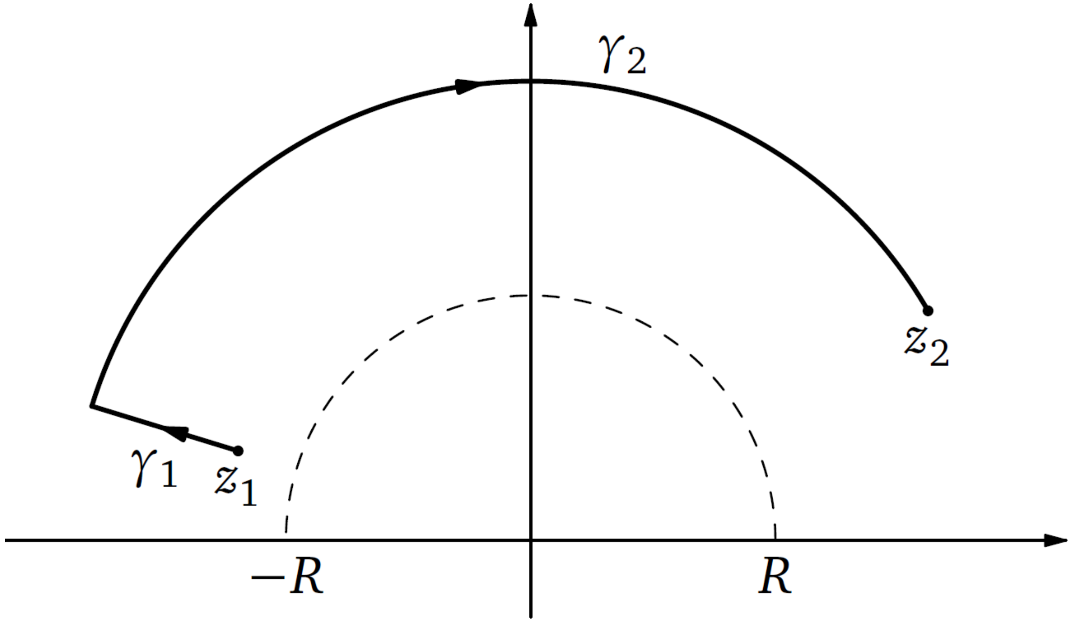
Исследования по конформным отображениям и задачам геометрической оптимизации.

Глава добровольной бригады содействия пожарным.

Отображение из $\mathbb{H}$ на прямоугольник

- Пусть $a_1 < a_2 < a_3$. Определим $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}}$.
- Выбор ветвей: $\sqrt{z-a_j} > 0$.
- Функция F продолжается до непрерывной функции из $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в $\mathbb{C}$.

В самом деле, если $|z_1| \approx R$ и $|z_2| \approx R$, то $|z_1 - z_2|$ имеет порядок R, а подынтегральное выражение имеет порядок $R^{-\frac{3}{2}}$. Отсюда вытекает непрерывность в точке ∞.

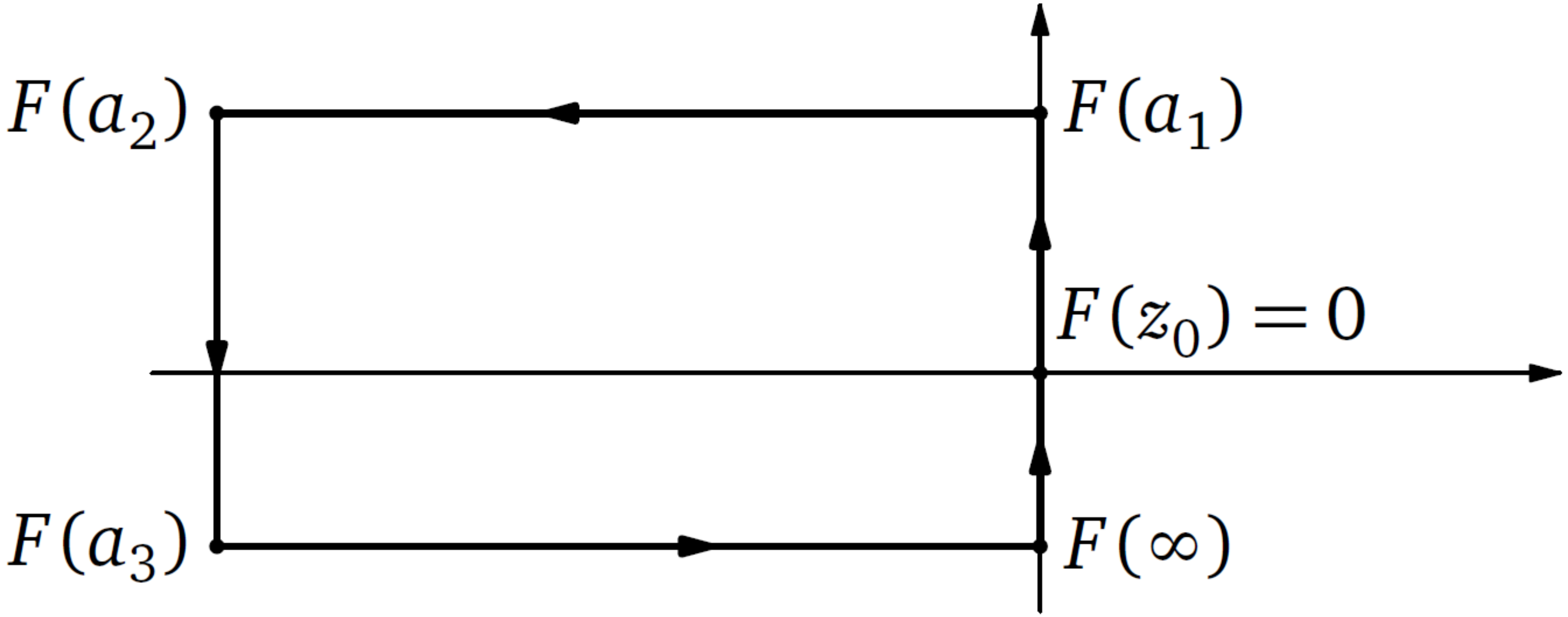


Образ множества $\ell = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Предложение 10.9. *Функция F переводит кривую $\ell \subset \overline{\mathbb{C}}$ (действительную ось с добавленной точкой ∞) в границу прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Когда ℓ однократно обходится в направлении слева направо, граница прямоугольника также однократно обходится в положительном направлении.*

t	$(-\infty; a_1)$	$(a_1; a_2)$	$(a_2; a_3)$	$(a_3; +\infty)$
$\dfrac{1}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}}$	$i\alpha,\ \alpha > 0$	< 0	$i\alpha,\ \alpha < 0$	> 0

Образ множества $\ell = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.



t	$(-\infty; a_1)$	$(a_1; a_2)$	$(a_2; a_3)$	$(a_3; +\infty)$
$\dfrac{1}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}}$	$i\alpha,\ \alpha > 0$	< 0	$i\alpha,\ \alpha < 0$	> 0

Отображение из $\mathbb{H}$ на прямоугольник

Предложение 10.10. *Функция F, определенная выше, осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность прямоугольника со сторонами, параллельными осям. При этом отображение F продолжается до непрерывной биекции между $\bar{H} = H \cup \ell$ и замыканием прямоугольника; точки a_1, a_2, a_3 и ∞ переходят в вершины прямоугольника.*

- Положим $\Pi = F(\mathbb{H})$. Пусть u, v – длины горизонтальной и вертикальной сторон прямоугольника Π.
- Рассмотрим обратное конформное отображение $G = F^{-1}: \Pi \to \mathbb{H}$.

Свойства отображения $G = F^{-1}: \Pi \to \mathbb{H}$.

Предложение 10.11. *Голоморфное отображение* $G\colon \Pi \to H$ *продолжается до функции, мероморфной на всем* $\mathbb{C}$. *Эта продолженная функция* G *обладает следующими свойствами.*

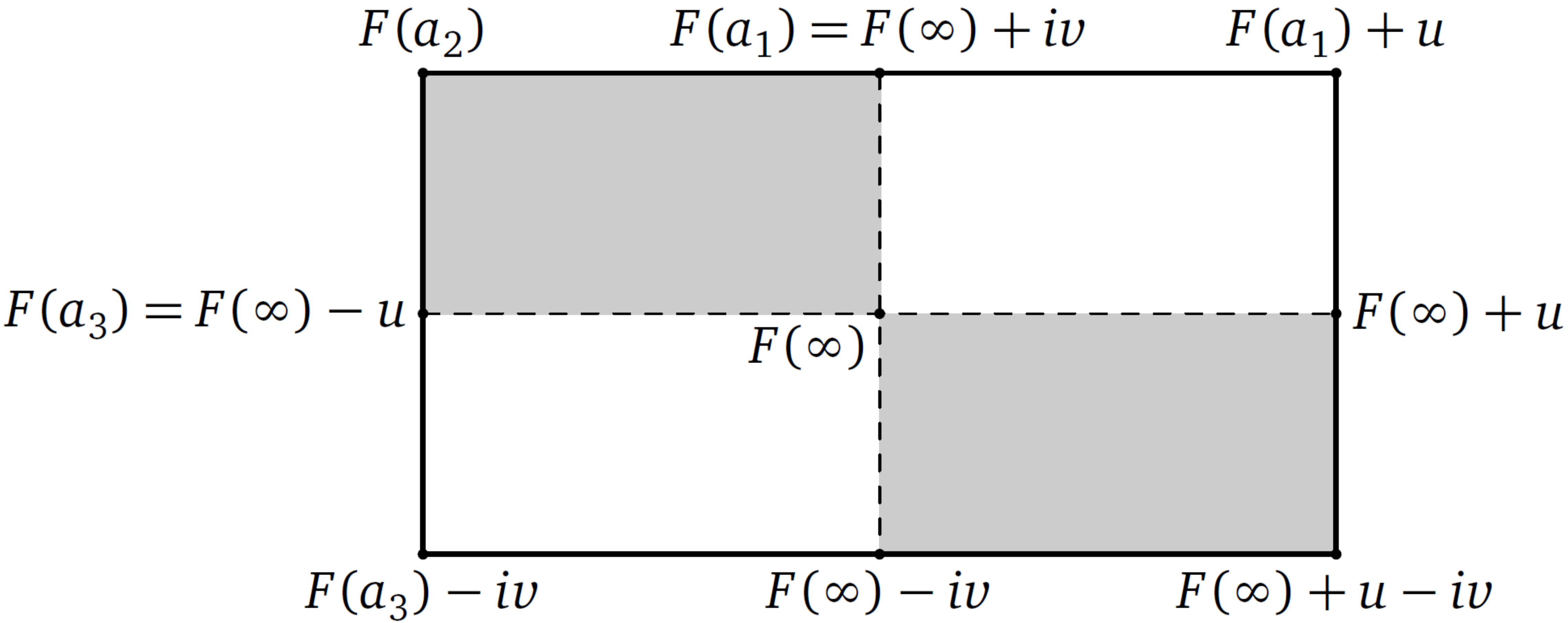
(1) *Функция* G *дважды периодична с периодами* $2u$ *и* $2iv$: *имеем* $G(z + 2mu + 2inv) = G(z)$ *для всякого* z *и всяких* $m, n \in \mathbb{Z}$.

(2) *Если* p — *любая из вершин прямоугольника* Π, *то* $G(p - z) = G(p + z)$ *для всех* z.

(3) *Функция* G *имеет полюсы порядка* 2 *в точках* $F(\infty) + mu + nv$ *для всех* $m, n \in \mathbb{Z}$, *а других полюсов не имеет.*

(4) *Если* p — *вершина прямоугольника* Π, *отличная от* $F(\infty)$, *то во всех точках* $p + mu + inv$, $m, n \in \mathbb{Z}$, *функция* G *разветвлена с индексом* 2; *во всех других точках, где она голоморфна, функция* G *неразветвлена.*

Замощение плоскости прямоугольниками



Эллиптические функции

Определение 11.9. *Решеткой* в $\mathbb{C}$ называется подгруппа по сложению $\Gamma \subset \mathbb{C}$, порожденная двумя образующими $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, линейно независимыми над $\mathbb{R}$.

Иными словами, $\Gamma = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, где ω_1 и ω_2 — ненулевые комплексные числа, отношение которых не лежит в $\mathbb{R}$.

Определение 11.10. *Эллиптической функцией* относительно решетки $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется мероморфная функция f на $\mathbb{C}$, для которой $f(z+u) = f(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$ и $u \in \Gamma$.

- Построенная выше функция G доставляет пример эллиптической функции. Она получена обращением эллиптического интеграла.

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- https://wikipedia.org
- https://mathworld.wolfram.com/

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ