K2 Мат. Анализ. Семинар №3

Нормированные пространства (продолжение)

Пусть L — нормированное пространство. Оно может быть полным и не полным. Примеры полных пространств l_1, l_2, l_∞; $C[a,b]$. Примеры неполных пространств: $C[a,b]$ с нормой L_1.

Пусть M — подпространство полного пространства L. Само M может быть замкнутым или незамкнутым.

Задача 1. Образуют ли следующие множества непрерывных функций замкнутые подпространства в $C[-1,1]$?

а) монотонные функции;

б) четные функции;

в) многочлены степени $\leq n$;

г) любые многочлены вида $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$

д) непрерывно-дифференцируемые функции;

е) функции с условием $f(0)=0$;

ж) функции с условием $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=0$.

з) функции с условием Липшица: $|f(t_1)-f(t_2)|\leq C\cdot|t_1-t_2|$.

Рассмотрим пространство $C^1[a,b]$, состоящее из непрерывно дифференцируемых функций, т.е. $f(t) \in C[a,b]$, $\exists f'(t) \in C[a,b]$.

Норма $\|f\|_{C^1} = \|f\|_C + \|f'\|_C$.

<u>Задача 2.</u> Доказать, что пространство $C^1[a,b]$ является полным.

<u>Решение</u>: это пространство (очевидно) линейное. Докажем его полноту. Пусть f_n - фунд. последовательность в $C^1[a,b]$. Тогда f_n фундаментальна и в $C[a,b]$, которое полно. Следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ в пространстве $C[a,b]$: $\max\limits_{t\in[a,b]} \| f_n(t) - f(t)\| \to 0$.

Рассмотрим последовательность производных: $f_n'(t)$. Она фундаментальна в $C[a,b]$. У нее тоже есть предел $g(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(t)$.

Докажем, что $f \in C^1[a,b]$, причем $f'(t) = g(t)$. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$f_n(t) = f_n(a) + \int_a^t f_n'(s)\,ds, \quad t \text{ - фиксир.}$$

В каждом члене этого равенства можно перейти к пределу при $n \to \infty$

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)\,ds \Rightarrow f'(t) = g(t).$$

Очевидно, что $\|f_n - f\|_{C^1[a,b]} \to 0 \ (n\to\infty)$,
т.е. $C^1[a,b]$ – полное пр-во □

---

② <u>Пространство $L_1(a,b)$ и его полнота.</u>

Рассмотрим все функции $f(t)$, интегрируемые по Лебегу на отрезке $[a,b]$. Очевидно, они образуют линейное пространство. Введем в нем норму:

$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(t)|\,dt. \qquad (*)$$

(Интеграл по Лебегу по мере Лебега dt)

<u>Определение:</u> Это пространство с такой нормой называется пространством $L_1(a,b)$.

Легко проверить, что $(*)$ – это норма:

1. $\|\alpha\cdot f\|_{L_1} = \int_a^b |\alpha f(t)|\,dt = |\alpha|\cdot\int_a^b |f(t)|\,dt = |\alpha|\cdot\|f\|_{L_1}$

2. $\|f_1+f_2\|_{L_1} = \int_a^b |f_1(t)+f_2(t)|\,dt \le \int_a^b |f_1(t)|\,dt + \int_a^b |f_2(t)|\,dt = \|f_1\|_{L_1} + \|f_2\|_{L_1}$

3. $\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(t)|\,dt \geq 0$. Если $\int_a^b |f(t)|\,dt = 0$, то $f(t)\equiv 0$ почти всюду на $[a,b]$, т.е. $f(t)\equiv 0$ в L_1

(Пространство $L_1[a,b]$ определяется как класс эквивалентности функций, отличающихся лишь на множестве меры 0.

В пространстве $L_1(a,b)$ расстояние определяется формулой
$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt.$$

Аналогично $L_1(a,b)$ определяется пространство $L_1(\mathbb{R})$ с нормой $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$,

а также пространство $L_1(X, \mu)$, где X — пространство с σ-аддитивной мерой μ.

Задача 3. Пространство $L_1(a,b)$ является полным.

Решение: Пусть $\{f_n\}$ — фунд. послед. в $L_1(a,b)$, т.е., $\|f_n - f_m\|_{L_1} \to 0$ $(n, m \to \infty)$.

Выделим из $\{f_n\}$ быстро сходящуюся подпоследовательность, т.е., такую $\{f_{n_k}\}$, что
$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L_1} = \int_a^b |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|dt < \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Это можно сделать для $\forall$ фунд. последовательности.

Рассмотрим следующий ряд
$$|f_{n_1}(t)| + |f_{n_2}(t) - f_{n_1}(t)| + \ldots + |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| + \ldots$$

Он состоит из неотрицательных членов и интегралы от его частичных сумм $S_n(t)$ ограничены:
$$\int_a^b S_n(t)\,dt \le \int_a^b |f_{n_1}(t)|dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \le C + 1$$

Тогда из теоремы Беппо-Леви вытекает, что этот ряд сходится. Но тогда сходится и следующий ряд, который он мажорирует:

$$f_{n_1}(t) + (f_{n_2}(t) - f_{n_1}(t)) + \ldots + |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| + \ldots$$

Он сходится почти всюду к некоторой измеримой функции $f(t) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t)$.

Значит, фунд. послед. $\{f_n(t)\}$ содержит подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

Покажем, что $f_{n_k}(t)$ сходится к $f(t)$ в $L_1(a,b)$.

В силу фундаментальности $\{f_n\}$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ $\forall\, k, l > N$ выполнено нер-во:

$$\int_a^b |f_{n_k}(t) - f_{n_l}(t)|\,dt < \varepsilon.$$

По лемме Фату в этом неравенстве можно перейти к пределу под знаком интеграла при $l \to \infty$ (k - фиксирован)

Получим:

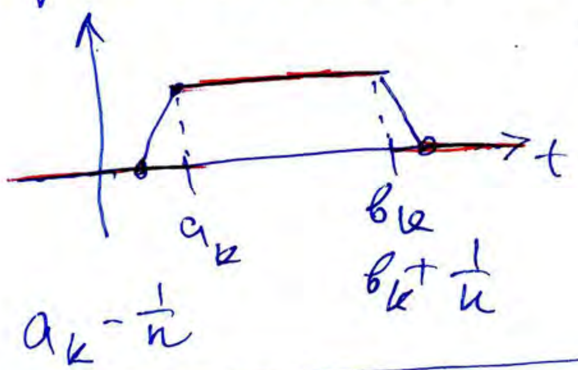
$$\int_a^b |f_{n_k}(t) - f(t)|\,dt \le \varepsilon$$

Откуда следует, что $f(t) \in L_1(a,b)$ и $f_{n_k} \to f$ в пространстве $L_1(a,b)$, но тогда и для всей последовательности $\{f_n\}$ $f_n \to f$ в $L_1(a,b)$. Доказали полноту пространства $L_1(a,b)$. $\square$

Задача 4. Доказать, что непрерывные функции образуют всюду плотное множество в пространстве $L_1(a,b)$.

Решение: В пространстве $L_1(a,b)$ плотно множество всех ступенчатых функций вида $g(t)=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\cdot\chi_k(t)$, где $\chi_k(t)$ — характеристическая функция некоторого интервала $[a_k,b_k]$, т.е. $\chi_k(t)=\begin{cases}1 & t\in[a_k,b_k]\\ 0 & t\notin[a_k,b_k]\end{cases}$

Осталось проверить, что функции $\chi(t)$ приближаются непрерывными функциями.



Это очевидно можно сделать с помощью кусочно линейной функции.

③ Эквивалентность норм.

Пусть в линейном пространстве L заданы две нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$.

Определение. Нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ эквивалентны, если выполнены неравенства: $\exists\, c_1, c_2>0$:

$$c_1\cdot\|x\|_a \le \|x\|_b \le c_2\cdot\|x\|_a \quad \forall x\in L.$$

Задача 5. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ нормы $\|x\|_2$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ эквивалентны.

Решение:

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1} x_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^2 = \|x\|_1^2$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|x_k| \leq n \cdot \max_{k=1,\dots,n}|x_k| = n \cdot \|x\|_\infty.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n}|x_k| \leq \sum_{k=1}^{n}|x_k| = \|x\|_1$$

$$\|x\|_\infty^2 = \max_{k=1,\dots,n}|x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 = \|x\|_2^2$$

Следовательно: $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\cdot\|x\|_\infty \leq n\cdot\|x\|_2$

Задача 6. (На дом) Если L – конечномерное пространство, то в нем любые две нормы эквивалентны.

Задача 7. Рассмотрим пространство L^φ финитных последовательностей $\{x_k\}$, т.е. $\exists N>0: \forall k>N\ a_k=0$.

Рассмотрим в L^φ две нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|, \quad \|x\|_\infty = \sup_{k=1,\dots}|x_k|$$

(сумма конечная).

Доказать, что эти нормы не эквивалентны

Решение: Рассмотрим последовательность

$$x^{(n)} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n\text{ раз}}, 0 \dots 0), \quad \|x^{(n)}\|_1 = n \to \infty$$

При этом $\|x^{(n)}\|_\infty = 1$, но $\|x^{(n)}\|_1 \to \infty$.

т.е. неверно $\|x\|_1 \leq C \cdot \|x\|_\infty$

Однако, как легко видеть, выполнено:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \quad \forall x \in L^1.$$