

Гладкие многообразия

2 курса

Коллок

1. Билеты

ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА ПО КУРСУ
«ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ»
1 модуль, октябрь 2020

1. Регулярные кривые, замена параметризации, длина кривой и натуральный параметр. ([3], §1.1)
2. Теорема о неявно заданном отображении (формулировка). Производная неявной функции. Определение подмногообразия \mathbb{R}^n и примеры подмногообразий.
3. Теорема об обратной функции. Подмногообразия \mathbb{R}^n : эквивалентность трёх определений. Примеры подмногообразий. ([1], гл. XII, §1; [3], гл. 2 §1.4, §2.1)
4. Гладкие многообразия (топологическое многообразие, карта, атлас, эквивалентность атласов, гладкая структура). ([1], гл. XV, §2.1, §2.2)
5. Ориентация на многообразии, ориентирующие атласы. Эквивалентность ориентирующих атласов. Примеры ориентирующего и неориентирующего атласов одного многообразия. ([1], гл. XV, §2.3)
6. Существование на ориентируемом многообразии ровно двух различных ориентаций. ([1], гл. XV, §2.3)
7. Критерий ориентируемости многообразия с помощью цепочки карт. Пример неориентируемого многообразия. ([1], гл. XV, §2.3)
8. Многообразия с краем: определение. Край многообразия с краем является многообразием без края той же гладкости и на единицу меньшей размерности, чем само многообразие. Пример многообразия с непустым краем с обоснованием. ([1], гл. XII, §3.2)
9. Ориентация края, согласованная с ориентацией многообразия. Пример для поверхности в \mathbb{R}^n . ([1], гл. XII, §3.2)
10. Касательные векторы, касательное пространство к многообразию в точке. Формула преобразования при переходе из одной карты в другую. ([4], гл. 1)
11. Различные определения касательного вектора (класс эквивалентности кривых, дифференцирование) и их эквивалентность. ([4], гл. 1)
12. Дифференциал и сопряженное отображение. ([4], гл. 1)
13. Определение векторного расслоения. Координатное описание векторного расслоения. ([4], гл. 1, §25)
14. Касательное расслоение к многообразию. Устройство атласа тотального пространства. ([4], гл. 1, §25)

Список литературы

- [1] В.А. Зорич, *Математический анализ II* // МЦНМО, 2012.
- [2] Р. НАРАСИМХАН, *Анализ на вещественных и комплексных многообразиях* // МИР, 1971.
- [3] И.А. ТАЙМАНОВ, *Лекции по дифференциальной геометрии* // R&C Dynamics, 2006, Москва-Ижевск.
- [4] Ф. УОРНЕР, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли* // Бибфизмат, 1987.

Глава 1. Теория кривых

§1. Основные определения

Пусть \mathbf{R}^n евклидово пространство размерности n с координатами x^1, \dots, x^n . Расстояние $\rho(x, y)$ между точками $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}.$$

Для краткости n -мерное векторное пространство над полем \mathbf{R} мы также будем обозначать через \mathbf{R}^n , считая, что каждый раз понятно из контекста о чем именно идет речь. Через (v, w) будем обозначать стандартное скалярное произведение в векторном пространстве \mathbf{R}^n :

$$(v, w) = v^1 w^1 + \dots + v^n w^n. \quad (1)$$

Под словом “гладкий” мы будем понимать “дифференцируемый столько раз, сколько нужно”. Любой желающий может восстановить оценки минимально допустимой гладкости во всех утверждениях или понимать “гладкий” как “дифференцируемый бесконечное число раз”.

Кривой в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n называется отображение

$$\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

При этом определении под *точкой* P кривой γ понимается образ точки вместе со значением параметра $t \in [a, b]$:

$$P = (\gamma(t) \in \mathbf{R}^n, t \in [a, b]).$$

Мы ограничимся изучением регулярных кривых:

- кривая γ называется *гладкой*, если отображение γ является гладким.
- гладкая кривая γ называется *регулярной*, если во всех внутренних точках интервала $[a, b]$ производная γ по параметру t не равна нулю:

$$\frac{d\gamma}{dt}(s) \neq 0 \text{ при } a < s < b$$

и существуют ненулевые пределы производных справа и слева в конечных точках a и b соответственно.

Наше определение регулярной кривой несколько отличается от других (см. например [5]): ради краткости мы исключаем возможность появления особых точек, в которых $d\gamma/dt = 0$.

Естественно отождествлять кривые, получающиеся прохождением одной и той же кривой с разными скоростями:

регулярные кривые

$$\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ и } \gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

называются *эквивалентными*, если существует отображение

$$\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$$

такое, что φ обратимо, отображения φ и φ^{-1} являются гладкими и выполняется соотношение

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t)) \text{ при } t \in [a_1, b_1].$$

Мы будем отождествлять эквивалентные кривые, а t и $s = \varphi(t)$ рассматривать как разные параметры на одной и той же кривой.

В качестве длины кривой естественно выбрать такую величину, чтобы она не зависела от выбора параметра, была аддитивна и для отрезков, задаваемых линейными отображениями, совпадала бы с расстоянием между концевыми точками. Данные условия приводят к следующему определению:

длиной (параметризованной) кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, где $-\infty < a < b < +\infty$, называется значение интеграла

$$\text{length}(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right| dt = \quad (2)$$

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx^1(t)}{dt} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dx^n(t)}{dt} \right)^2} dt,$$

где $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$.

Верна следующая лемма.

Лемма 1 *Длина кривой не зависит от выбора параметра на кривой.*

Доказательство. Пусть $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ и $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbf{R}^n$ задают одну и ту же кривую и параметры $t \in [a_1, b_1]$ и $s \in [a_2, b_2]$ связаны монотонным отображением $s = s(t)$ таким, что производная ds/dt существует и положительна. Тогда из теорем о производной сложной функции и замены переменной интегрирования следует, что

$$\int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{d\gamma_1}{dt} \right| dt = \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{d\gamma_2}{ds} \frac{ds}{dt} \right| dt = \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{d\gamma_2}{ds} \right| \frac{ds}{dt} dt = \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{d\gamma_2}{ds} \right| ds.$$

Лемма 1 доказана.

Очевидно, что данное определение длины удовлетворяет и другим указанным выше естественным требованиям.

С понятием длины связано понятие *натурального параметра* — такого параметра l , что длина участка кривой, отвечающего изменению параметра l от a_1 до $b_1 > a_1$ равна $(b_1 - a_1)$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2 1) Если параметр $l \in [a, b]$ на кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ натурален, то

$$\left| \frac{d\gamma}{dl} \right| = 1$$

в гладких точках.

2) На каждой регулярной кривой существует натуральный параметр.

Доказательство. Утверждение 1 немедленно следует из определения длины кривой.

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ кривая с параметром t . Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dl}{dt} = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|.$$

Так как его правая часть является гладкой функцией, то существует и единственно решение этого уравнения с начальными данными $l(a) = 0$ (см. [6]). Очевидно, что $l(b) = \text{length}(\gamma)$. Возьмем функцию, обратную к l : $t = t(l) : [0, \text{length}(\gamma)] \rightarrow [a, b]$, и определим l как параметр на γ по формуле

$$\gamma_0(l) = \gamma(t(l)).$$

Очевидно, что

$$\left| \frac{d\gamma_0}{dl} \right| = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| \frac{dt}{dl} = 1.$$

Следовательно, l натуральный параметр на γ . Лемма 2 доказана.

§2. Кривые на плоскости

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ регулярная кривая на двумерной плоскости. Предположим, что на ней выбран натуральный параметр l . Считая плоскость ориентированной, выберем в каждой точке кривой базис векторов v, n такой, что

ГЛАВА XII

ПОВЕРХНОСТИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В \mathbb{R}^n

В этой главе разобраны понятия поверхности, края поверхности, согласованной ориентации поверхности и ее края, выведена формула для вычисления площади поверхности, лежащей в \mathbb{R}^n , а также даны начальные представления о дифференциальных формах. Владение перечисленными понятиями весьма важно при работе с криволинейными и поверхностными интегралами, которым посвящена следующая глава.

§ 1. Поверхность в \mathbb{R}^n

Определение 1. Поверхностью размерности k (k -мерной поверхностью или k -мерным многообразием) в \mathbb{R}^n называется такое множество $S \subset \mathbb{R}^n$, каждая точка которого имеет в S окрестность $*$), гомеоморфную $**$) \mathbb{R}^k .

Определение 2. Отображение $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow U \subset S$, осуществляющее указанный в определении поверхности гомеоморфизм, называется картой или локальной картой поверхности S ; \mathbb{R}^k — областью параметров, а U — районом или областью действия карты на поверхности S .

Локальная карта вводит в U криволинейные координаты, сопоставляя точке $x = \varphi(t) \in U$ числовой набор $t = (t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k$.

Из определения поверхности видно, что совокупность описываемых им объектов S не изменится, если в нем \mathbb{R}^k заменить любым гомеоморфным \mathbb{R}^k топологическим пространством. Чаще всего вместо \mathbb{R}^k за стандартную область параметров локальных карт

$*$) Под окрестностью точки $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ в множестве S , как и прежде, понимается множество $U_S(x) = S \cap U(x)$, где $U(x)$ окрестность x в \mathbb{R}^n . Поскольку в дальнейшем речь будет только об окрестностях точки на поверхности, для упрощения обозначений, если не возникает недоразумений, мы пишем U или $U(x)$ вместо $U_S(x)$.

$**$) На $S \subset \mathbb{R}^n$, а значит, и на $U \subset S$ имеется естественная, индуцированная из \mathbb{R}^n метрика, поэтому можно говорить о топологическом отображении U в \mathbb{R}^n .

принимают открытый куб I^k или открытый шар B^k в \mathbb{R}^k . Но это чистая условность. Для проведения некоторых аналогий и в целях большей наглядности ряда последующих построений мы, как правило, в качестве канонической области параметров локальных карт поверхности будем брать куб I^k .

Итак, карта

$$\varphi: I^k \rightarrow U \subset S \quad (1)$$

локально дает параметрическое уравнение $x = \varphi(t)$ поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$, а сама k -мерная поверхность, таким образом, локально устроена как продеформированный стандартный k -мерный промежуток $I^k \subset \mathbb{R}^k$.

Для вычислительных целей, как будет видно из дальнейшего, параметрическое задание поверхности особенно важно. Иногда всю поверхность можно задать всего лишь одной картой. Такую поверхность обычно называют *элементарной*. Например, график в \mathbb{R}^{k+1} непрерывной функции $f: I^k \rightarrow \mathbb{R}$ является элементарной поверхностью. Однако элементарность поверхности скорее исключение, чем правило. Например, обычную нашу двумерную земную сферу уже нельзя задать только одной картой. В атласе поверхности Земли должны быть по крайней мере две карты (см. задачу 4 в конце параграфа).

В соответствии с возникшей аналогией примем

Определение 3. Набор $A(S) := \{\varphi_i: I_i^k \rightarrow U_i, i \in \mathbb{N}\}$ локальных карт поверхности S , районы действия которых в совокупности покрывают всю поверхность (т. е. $S = \bigcup_i U_i$), называется *атласом поверхности S* .

Объединение двух атласов одной и той же поверхности, очевидно, тоже является атласом этой поверхности.

Если на отображения (1) — локальные параметрические уравнения поверхности — не накладывать других ограничений, кроме того, что это должны быть гомеоморфизмы, то поверхность в \mathbb{R}^n может оказаться расположенной весьма странно. Например, может случиться, что гомеоморфная двумерной сфере поверхность, т. е. топологически — сфера, лежит в \mathbb{R}^3 , но ограничиваемая ею область не гомеоморфна шару (так называемая *рогатая сфера* *).

Чтобы избавиться от подобных затруднений, не связанных с существом рассматриваемых в анализе вопросов, мы в гл. VIII, § 7. определили *гладкую k -мерную поверхность*, лежащую в \mathbb{R}^n , как такое множество $S \subset \mathbb{R}^n$, что для каждой точки $x_0 \in S$ найдутся ее окрестность $U(x_0)$ в \mathbb{R}^n и диффеоморфизм $\psi: U(x_0) \rightarrow I^n =$

*) Пример поверхности, о которой идет речь, был построен Александером. Д. У. Александер (1888—1971) — американский математик-тополог.

$$\begin{aligned} t^1 &= f^1(x^1, \dots, x^k), \\ &\vdots \\ t^k &= f^k(x^1, \dots, x^k), \\ x^{k+1} &= f_{k+1}^1(x^1, \dots, x^k), \\ &\vdots \\ x^n &= f^n(x^1, \dots, x^k). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = 0, \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

◀ Проверим, что если $S \neq \emptyset$, то S действительно удовлетворяет определению 4. Это вытекает из теоремы о неявной функции, в силу которой в некоторой окрестности любой точки $x_0 \in S$ система (2), с точностью до переобозначения переменных, эквивалентна системе

[illegible]

$$\begin{cases} x^1 = t^1, \\ \dots \\ x^k = t^k, \\ x^{k+1} = f^{k+1}(t^1, \dots, t^k), \\ \dots \\ x^n = f^n(t^1, \dots, t^k), \end{cases}$$

Пример 2. В частности, задаваемая в \mathbb{R}^n уравнением

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = r^2 \quad (r \geq 0) \quad (3)$$

При $n=2$ получаем в \mathbb{R}^2 окружность

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2,$$

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \theta, \\ x^2 = r \sin \theta. \end{cases}$$

Отображение $\theta \mapsto (x^1, x^2)(\theta)$ при фиксированном значении $r > 0$ является диффеоморфизмом на любом промежутке вида $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ и двух карт (например, отвечающих значениям $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = -\pi$) достаточно, чтобы составить атлас окружности. Одной канонической картой (1) здесь обойтись нельзя хотя бы потому, что окружность — компакт, в отличие от \mathbb{R}^1 или $I^1 = B^1$, а свойство топологического пространства быть компактом инвариантно относительно топологических преобразований.

Полярные (сферические) координаты могут быть использованы и для параметризации двумерной сферы

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2$$

в \mathbb{R}^3 . Обозначая через ψ угол между направлением вектора (x^1, x^2, x^3) и направлением оси Ox^3 (т. е. $0 \leq \psi \leq \pi$), а через φ — полярный угол проекции радиус-вектора (x^1, x^2, x^3) на плоскость (x^1, x^2) , получаем

$$\begin{aligned} x^3 &= r \cos \psi, \\ x^2 &= r \sin \psi \sin \varphi, \\ x^1 &= r \sin \psi \cos \varphi. \end{aligned}$$

В общем случае полярные координаты $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ в \mathbb{R}^n вводятся соотношениями

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \theta_1, \\ x^2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x^{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\ x^n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Напомним якобиан

$$J = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \tag{5}$$

перехода (4) от общих полярных координат $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ к декартовым координатам (x^1, \dots, x^n) в \mathbb{R}^n . Из выражения якобиана видно, что он отличен от нуля, если, например, $0 < \theta_i < \pi$, $i = 1, \dots, n-2$ и $r > 0$. Значит, даже не ссылаясь на простой геометрический смысл параметров $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, можно гарантировать, что при фиксированном $r > 0$ отображение $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ как сужение локального диффеоморфизма $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ само локально диффеоморфно. Но сфера однородна относительно группы ортогональных преобразований \mathbb{R}^n , поэтому отсюда уже следует возможность построения локальной карты для окрестности любой точки сферы.

Пример 3. Цилиндр

$$(x^1)^2 + \dots + (x^k)^2 = r^2 \quad (r > 0),$$

при $k < n$ есть $(n-1)$ -мерная поверхность в \mathbb{R}^n , являющаяся прямым произведением $(k-1)$ -мерной сферы плоскости переменных (x^1, \dots, x^k) и $(n-k)$ -мерной плоскости переменных (x^{k+1}, \dots, x^n) .

Локальная параметризация этой поверхности, очевидно, может быть получена, если в качестве первых $k-1$ из $(n-1)$ параметров (t^1, \dots, t^{n-1}) взять полярные координаты $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}$ точки $(k-1)$ -мерной сферы в \mathbb{R}^k , а t^k, \dots, t^{n-1} положить равными x^{k+1}, \dots, x^n соответственно.

Пример 4. Если в плоскости $x=0$ пространства \mathbb{R}^3 , наделенного декартовыми координатами (x, y, z) , взять кривую (1-мерную поверхность), не пересекающую ось Oz , и вращать ее относительно оси Oz , то получится 2-мерная поверхность, в качестве локальных координат которой можно принять локальные координаты исходной кривой (меридиана) и, например, угол поворота (локальная координата на параллели).

В частности, если в качестве исходной кривой взять окружность радиуса a с центром в точке $(b, 0, 0)$, то при $a < b$ получим двумерный тор (рис. 69). Его параметрическое уравнение может быть представлено в виде

$$\begin{cases} x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \\ y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \\ z = a \sin \psi, \end{cases}$$

где ψ — угловой параметр на исходной окружности — меридиане, а φ — угловой параметр на параллели.

Любую поверхность, гомеоморфную построенному тору вращения, в топологии принято называть *тором* (точнее, *двумерным тором*).

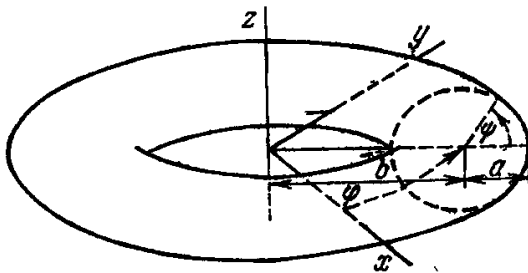


Рис. 69.

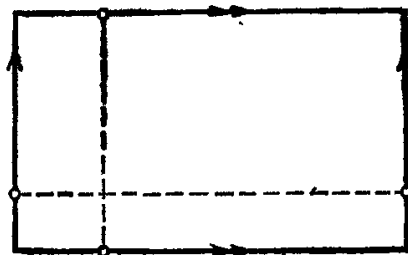


Рис. 70.

Как видно, двумерный тор есть прямое произведение двух окружностей. Поскольку окружность получается из отрезка склеиванием (отождествлением) его концов, тор можно получить из прямого произведения отрезков, т. е. из прямоугольника, склеиванием противоположных сторон прямоугольника по соответствующим точкам (рис. 70).

В сущности, этим мы уже в свое время пользовались, когда установили, что конфигурационное пространство двойного маятника является двумерным тором, а движению маятника соответствует путь на торе.

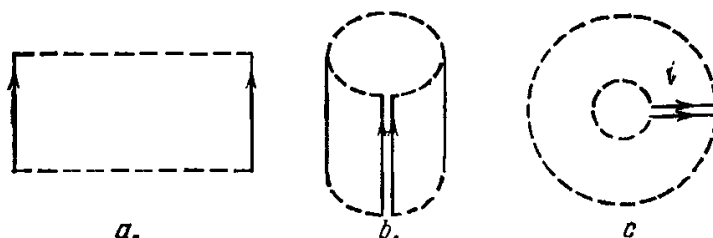


Рис. 71

Пример 5. Если гибкую ленту (прямоугольник) склеить по стрелкам, указанным на рис. 71, *a*, то можно получить кольцо (рис. 71, *c*) или цилиндрическую поверхность (рис. 71, *b*), что с топологической точки зрения одно и то же (эти поверхности гомеоморфны).

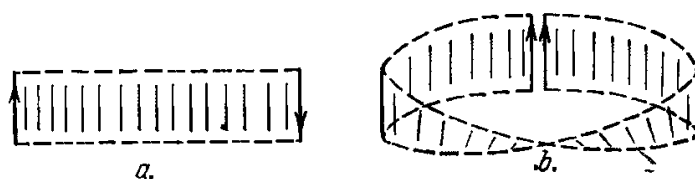


Рис. 72.

Если же ленту склеить по стрелкам, изображенным на рис. 72, *a*, то получим в \mathbb{R}^3 поверхность (рис. 72, *b*), называемую в математике *листом Мёбиуса* *).

Локальные координаты на этой поверхности естественно вводятся посредством координат на плоскости, в которой лежит исходный прямоугольник.

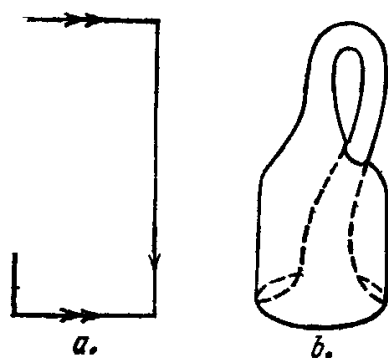


Рис. 73

Пример 6. Сопоставляя изложенное в примерах 4 и 5, поддавшись естественной аналогии, можно теперь предписать склейку прямоугольника (рис. 73, *a*), объединяющую в себе и элементы тора и элементы листа Мёбиуса. Но подобно тому, как лист Мёбиуса нельзя было склеить без разрывов или самопересечений, не выходя

за пределы плоскости \mathbb{R}^2 , так и предписанную склейку не удастся выполнить в \mathbb{R}^3 . Однако в \mathbb{R}^4 это уже можно сделать и в результате получить в \mathbb{R}^4 поверхность, которую принято называть

*) А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий математик и астроном.

бутылкой Клейна *). Попытка изобразить эту поверхность принята на рис. 73, b.

Последний пример дает некоторое представление о том, что поверхность порой легче описать саму по себе, нежели ее же, лежащую в определенном пространстве \mathbb{R}^n . Более того, многие важные поверхности (различной размерности) первоначально возникают не как подмножества \mathbb{R}^n , а, например, как фазовые пространства механических систем, как геометрический образ непрерывных групп преобразований, как фактор-пространства относительно групп автоморфизмов исходного пространства, и так далее, и тому подобное. Мы ограничимся пока этими первоначальными замечаниями, оставляя их уточнение до гл. XV, где будет дано общее определение поверхности, не обязательно лежащей в \mathbb{R}^n . Но уже здесь, еще не дав этого общего определения, сообщим, что, согласно известной теореме Уитни **), любую k -мерную поверхность можно гомеоморфно отобразить на некоторую поверхность, лежащую в пространстве \mathbb{R}^{2k+1} . Значит, рассматривая поверхности в \mathbb{R}^n , мы на самом-то деле ничего не теряем с точки зрения их топологического разнообразия и классификации. Эти вопросы, однако, лежат уже в стороне от наших скромных потребностей в геометрии.

Задачи и упражнения

1. Для каждого из множеств E_α , задаваемых условиями

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = \alpha\}, \\ E_\alpha &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = \alpha\}, \\ E_\alpha &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = \alpha\}, \\ E_\alpha &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| = \alpha\}, \end{aligned}$$

в зависимости от значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ выясните:

- является ли E_α поверхностью;
 - если да, то какова размерность E_α ;
 - связно ли E_α .
2. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, удовлетворяющее условию $f \circ f = f$.
- Покажите, что множество $f(\mathbb{R}^n)$ является гладкой поверхностью в \mathbb{R}^n .
 - Какой характеристикой отображения f определяется размерность этой поверхности?
3. Пусть e_0, e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n+1} , $x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$, $\{x\}$ — точка (x^0, x^1, \dots, x^n) , e_1, \dots, e_n — базис в $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

*) Ф. Х. Клейн (1849—1925) — крупный немецкий математик, впервые строго обосновавший непротиворечивость неевклидовой геометрии. Знаток истории математики, один из организаторов издания «Энциклопедии математических наук».

**) Х. Уитни (1907) — современный американский математик-тополог, один из создателей теории расслоенных пространств.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2.

§4. Группа ортогональных преобразований как гладкое подмногообразие евклидова пространства

Уравнения Френе (3) и (5) выводились из того, что скалярные произведения между векторами, входящими в реперы Френе, сохраняются. Мы сделаем сейчас краткое отступление, посвященное ортогональной группе и вывод этих уравнений с общей точки зрения.

Линейные преобразования $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ векторного пространства \mathbf{R}^n , сохраняющие скалярное произведение (1), называются *ортогональными*. Следующая лемма очевидна

Лемма 3 *Множество ортогональных преобразований образует группу (ортогональную группу $O(n)$) относительно операции обычной композиции: $A \cdot B(v) = A(B(v))$.*

Множество линейных преобразований $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ отождествим с множеством $(n \times n)$ -мерных матриц следующим образом: пусть e_1, \dots, e_n ортонормированный базис в \mathbf{R}^n , тогда матрица $A = (a_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ взаимно однозначно отвечает преобразованию, действующему на базисных векторах по формуле

$$A e_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} e_j.$$

Лемма 4 *Линейное преобразование ортогонально, если и только если задающая его матрица A удовлетворяет уравнениям*

$$A^* \cdot A = E_n, \quad (6)$$

где A^* — транспонированная матрица A ($a_{jk}^* = a_{kj}$) и E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица.

Доказательство. Запишем скалярное произведение (1) в виде произведения матриц (здесь мы записываем векторы как $(n \times 1)$ -матрицы):

$$(v, w) = v^* \cdot E_n \cdot w.$$

Тогда

$$(Av, Aw) = (A \cdot v)^* \cdot E_n \cdot (A \cdot w) = v^* \cdot A^* \cdot E_n \cdot A \cdot w = v^* \cdot (A^* \cdot A) \cdot w$$

и A ортогонально, если и только если

$$v^* \cdot (A^* \cdot A) \cdot w = v^* \cdot E_n \cdot w \quad \text{для всех } v, w \in \mathbf{R}^n,$$

что эквивалентно (6). Лемма 4 доказана.

Рассматривая матричные элементы a_{jk} как координаты в n^2 -мерном пространстве, отождествим пространство $(n \times n)$ -мерных матриц с n^2 -мерным евклидовым пространством \mathbf{R}^{n^2} . Ортогональная группа выделяется в нем $n(n+1)/2$ полиномиальными уравнениями (6):

$$F_{jk}(a_{11}, \dots, a_{nn}) - \delta_{jk} = \sum_{m=1}^n a_{mj} a_{mk} - \delta_{jk} = 0, \quad 1 \leq j \leq k \leq n. \quad (7)$$

Напомним теперь теорему о неявной функции (см., например, [3]):

Теорема о неявной функции Пусть $F : U \times V \rightarrow \mathbf{R}^n$ гладкое отображение прямого произведения областей $U \subset \mathbf{R}^n$ и $V \subset \mathbf{R}^k$ с координатами x и y , соответственно, в \mathbf{R}^n . Пусть $F(x_0, y_0) = 0$ и в $(x_0, y_0) \in U \times V$ матрица

$$J = \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^m} \right)_{1 \leq j, m \leq n} \quad (8)$$

обратима. Тогда существует такая окрестность $W \subset U \times V$ точки (x_0, y_0) и такая окрестность $V_0 \subset V$ точки $y_0 \in \mathbf{R}^k$, что

- 1) в V_0 определены гладкие функции ψ_1, \dots, ψ_n ;
- 2) $F(x, y) = 0$ для $(x, y) \in W$, если и только если $x^1 = \psi_1(y), \dots, x^n = \psi_n(y)$.

Из теоремы о неявной функции следует, что в окрестности точки (x_0, y_0) множество нулей отображения F устроено как график отображения $V_0 \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ и поэтому точки этого множества гладко параметризуются точками области из \mathbf{R}^k .

Теорема 5 Пусть M подмножество евклидова пространства \mathbf{R}^{n+k} . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) в достаточно малой окрестности каждой своей точки M задается как график гладкого отображения

$$\begin{aligned} x^1 &= \psi_1(x^{n+1}, \dots, x^{n+k}), \\ &\dots \\ x^n &= \psi_n(x^{n+1}, \dots, x^{n+k}) \end{aligned} \quad (9)$$

(после подходящего перенумерования координат x^1, \dots, x^{n+k});

2) в достаточно малой окрестности каждой своей точки M задается как множество нулей гладкого отображения $F : W \subset \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^n$ такого, что в этой окрестности матрица (8) обратима (после подходящего перенумерования координат x^1, \dots, x^{n+k}).

Доказательство. Из теоремы о неявной функции следует, что условие 2 влечет условие 1. Обратное тоже верно: зададим F формулами $F^1(x) = x^1 - \psi_1(x^{n+1}, \dots, x^{n+k}), \dots, F^n(x) = x^n - \psi_n(x^{n+1}, \dots, x^{n+k})$. Теорема 5 доказана.

Подмножество M , для которого выполнено любое из двух эквивалентных условий из теоремы 5, называется k -мерным *гладким подмногообразием* (без края) \mathbf{R}^{n+k} .

Пусть в окрестности точки $x \in M$ подмногообразие M задается как график отображения (9). Тогда $y^1 = x^{n+1}, \dots, y^k = x^{n+k}$ задают *локальные координаты* в окрестности x и функция f на M называется *гладкой* в точке x , если она является гладкой как функция от локальных координат: $f(y^1, \dots, y^k)$. Аналогично вводится понятие гладкости и для других объектов на подмногообразиях и, в частности, для векторных полей.

Пусть M является k -мерным подмногообразием \mathbf{R}^{n+k} и $x \in M$. Рассмотрим множество всех гладких путей на M , проходящих через точку x и лежащих в ее окрестности, задаваемой формулами (9). Каждому такому пути γ сопоставим его вектор скорости в точке x : $v = d\gamma(t_0)/dt$, где $\gamma(t_0) = x$. Множество таких векторов образует *касательное пространство* к подмногообразию M в точке x .

Лемма 5 *Касательное пространство к k -мерному подмногообразию $M \subset \mathbf{R}^{n+k}$ в любой его точке является k -мерным векторным пространством.*

Доказательство. Любой путь γ на M , проходящий через x , является поднятием пути $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^k$ с помощью (9). Поэтому вектор скорости $d\gamma/dt$ имеет вид

$$\frac{d\gamma}{dt} = B \left(\frac{d\gamma_0}{dt} \right) = \left(\Psi_* \left(\frac{d\gamma_0}{dt} \right), \left(\frac{d\gamma_0}{dt} \right) \right),$$

где Ψ_* — дифференциал отображения $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Линейное отображение B имеет максимальный ранг k и потому является изоморфизмом на образ: оно задает изоморфизм векторного пространства \mathbf{R}^k и $T_x M$. Лемма 5 доказана.

Существует и иное, эквивалентное, определение касательного пространства:

Задача 3. Если подмногообразие $M \subset \mathbf{R}^{n+k}$ определено в окрестности W точки $x \in M$ как множество нулей отображения $F : W \rightarrow \mathbf{R}^n$, то касательное пространство к M в точке x совпадает с ядром линейного отображения

$$F_* : \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^n : F_*(v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon v) - F(x)}{\varepsilon}.$$

Красивым примером гладкого подмногообразия является ортогональная группа:

Теорема 6 *Ортогональная группа $O(n)$ является $n(n-1)/2$ -мерным гладким подмногообразием n^2 -мерного евклидова пространства, образованного $(n \times n)$ -матрицами. Касательное пространство $T_E O(n)$ к единице группы при этом совпадает с пространством кососимметричных матриц.*

Доказательство. Тожественное преобразование, задаваемое единичной матрицей E_n , является единицей группы $O(n)$. В окрестности $E_n \in O(n)$ разделим переменные a_{jk} на две группы: x отвечает $j \leq k$, y отвечает $j > k$. Рассмотрим отображение

$$F : \mathbf{R}^{n^2} \rightarrow \mathbf{R}^{n(n+1)/2},$$

задаваемое полиномами (7). Легко подсчитать, что в точке $E_n \in \mathbf{R}^{n^2}$ при $j \leq k, r \leq s$

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial a_{rs}} = \begin{cases} 2 & \text{при } j = r, k = s \\ 1 & \text{при } j = r, k = s, j \neq k \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно в окрестности $E_n \in \mathbf{R}^{n^2}$ матрица (8) обратима и так как $O(n)$ выделяется уравнениями $F = 0$, то в окрестности E_n по теореме о неявной функции $O(n)$ — гладкое подмногообразие.

Если $A \in O(n)$, то определим отображение F_A по формуле $F_A(X) = F(X \cdot A^{-1})$ и так как $O(n)$ — группа, то $O(n)$ также определяется уравнениями $F_A = 0$. Из определения F_A следует, что ранг якобиана отображения F_A в точке A совпадает с рангом якобиана отображения F в точке E_n и, следовательно, равен $n(n+1)/2$. Отсюда заключаем, что $O(n)$ является гладким подмногообразием в окрестности любой своей точки.

Так как $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$, то $O(n)$ — $n(n-1)/2$ -мерное подмногообразие.

Пусть γ гладкий путь в $O(n)$, проходящий через E_n . Можно считать, что

$$\gamma(\varepsilon) = E_n + X\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

где $X \in T_E O(n)$ — касательная матрица. Из (6) следует

$$\gamma(\varepsilon)^* \cdot \gamma(\varepsilon) = (E_n + (X^* + X)\varepsilon + O(\varepsilon^2)) \equiv E_n.$$

Значит матрица X кососимметрична ($X^* + X = 0$) и так как размерность пространства кососимметричных матриц совпадает с размерностью $O(n)$, то отсюда следует, что $T_E O(n)$ совпадает с пространством кососимметричных матриц. Теорема 6 доказана.

Теперь вернемся к уравнениям Френе. Обозначим через $R(l)$ репер Френе, отвечающий значению параметра l на кривой γ . Переход от $R(0)$ к $R(l)$ задается ортогональным преобразованием $A(l)$, так как все эти реперы ортонормированы. Значит мы имеем гладкий путь $A(l)$ в группе $O(n)$ и столбцы матриц $A(l)$ задают разложения векторов из $R(l)$ по базису $R(0)$. Уравнения Френе имеют вид

$$\frac{dA(l)}{dl} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(l+\varepsilon) \cdot A^{-1}(l) - E_n}{\varepsilon} \cdot A(l) = B(l) \cdot A(l),$$

где матрица $B(l)$ кососимметрична, так как она касательна к единице группы $O(n)$.

Задача 4. Пусть A кососимметричная $(n \times n)$ -матрица. Тогда абсолютно сходящийся при всех $t \in \mathbb{R}$ ряд

$$\exp(At) = E_n + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \dots$$

задает гладкий путь в $O(n)$.

Глава 2. Теория поверхностей

§5. Регулярные поверхности и первая квадратичная форма

Регулярной поверхностью в \mathbf{R}^3 называется двумерное гладкое подмногообразие \mathbf{R}^3 .

С помощью теоремы о неявной функции уточним это определение:

1) $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ называется регулярной поверхностью, если в достаточно малой окрестности каждой своей точки оно выделяется как множество нулей гладкой функции $F(x^1, x^2, x^3)$ такой, что в этой окрестности

$$\frac{\partial F}{\partial x^3} \neq 0$$

Как и в случае касательных векторов 1-го порядка, мы обычно будем рассматривать касательные векторы как операторы на функциях, а не на их ростках; поэтому мы положим

$$(12) \quad v(f) = v(\mathbf{f}),$$

если f — гладкое отображение в окрестности m , а v — касательный вектор любого порядка в m .

И наконец, подобно тому как существуют естественные отображения касательных векторов и дифференциалов, ассоциированные с дифференцируемым отображением $\varphi: M \rightarrow N$, существуют линейные отображения

$$(13) \quad \begin{aligned} d^k \varphi: M_m^k &\rightarrow N_{\varphi(m)}^k, \\ \delta^k \varphi: {}^k N_{\varphi(m)} &\rightarrow {}^k M_m, \end{aligned}$$

определенные соотношениями ¹⁾

$$(14) \quad \begin{aligned} d^k \varphi(v)(g) &= v(g \circ \varphi), \\ \delta^k \varphi(d^k g) &= d^k(g \circ \varphi) \end{aligned}$$

для любых $v \in M_m^k$ и гладких функций g в окрестности точки $\varphi(m)$. Легко проверяется, что равенства (14) действительно задают отображения (13) и что отображения $d^k \varphi$ и $\delta^k \varphi$ являются сопряженными.

Наше определение касательного вектора первого порядка, данное в этом разделе, совпадает с определением 1.14 в силу леммы 1.16. В результате мы получили три интерпретации дифференциала первого порядка df функции f : представление (13) совпадает с нашим исходным определением 1.22(1), интерпретация (6) эквивалентна 1.22(6), и, кроме того, мы имеет добавочную интерпретацию (1).

Подмногообразия, диффеоморфизмы и теорема об обратной функции

1.27. Определения. Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение.

(а) Отображение ψ называется *погружением*, если его дифференциал $d\psi_m$ является невырожденным для каждой точки $m \in M$.

(б) Пара (M, ψ) называется *подмногообразием* многообразия N , если ψ — инъективное погружение.

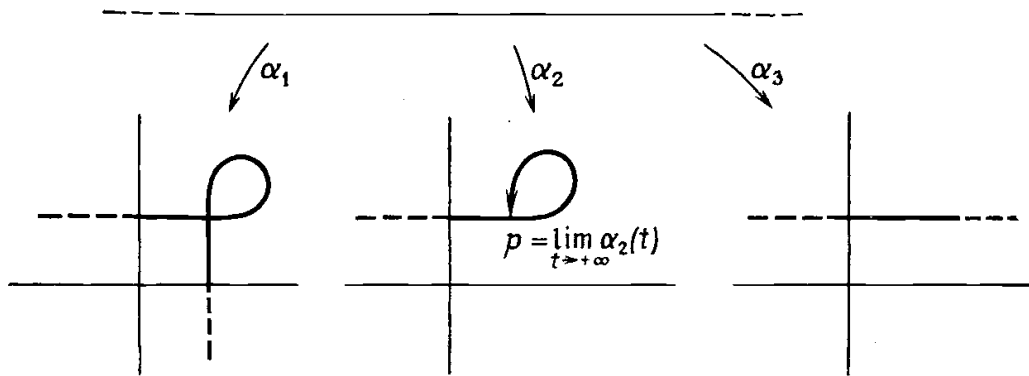
(с) Инъективное погружение ψ называется *вложением*, если оно является гомеоморфизмом на свой образ, т. е. ψ открыто как отображение в $\psi(M)$ в индуцированной топологии.

(д) ψ называется *диффеоморфизмом*, если ψ взаимно однозначно отображает M на N и ψ^{-1} — гладкое отображение.

¹⁾ Заметим, что $\delta^1 \varphi = \varphi^*$. — Прим. перев.

² Уорнер Ф.

1.28. Замечания к разд. 1.27. Как показано на следующем рисунке, вещественную прямую \mathbb{R} можно погрузить в плоскость по-разному. В первом случае отображение будет погружением, но образ не будет подмногообразием, во втором случае мы получим подмногообразие, но соответствующее отображение не является вложением, а в третьем случае имеем вложение.



(а) Погружение, но образ не является подмногообразием.

(б) Подмногообразие, но соответствующее отображение — не вложение.

(с) Вложение.

Заметим, что если (U, φ) — система координат, то отображение $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ является диффеоморфизмом.

Композиция диффеоморфизмов снова будет диффеоморфизмом. Таким образом, отношение диффеоморфности является отношением эквивалентности на совокупности дифференцируемых многообразий. Локально евклидово пространство вполне может допускать различные дифференцируемые структуры, являющиеся диффеоморфными (см. упр. 2). Дж. Милнор в своей замечательной работе [19] установил существование локально евклидовых пространств, допускающих недиффеоморфные дифференцируемые структуры (например, сфера S^7). Имеются также такие локально евклидовы пространства, которые не допускают дифференцируемой структуры (см. [14]).

Если ψ — диффеоморфизм, то $d\psi_m$ — изоморфизм, потому что оба отображения $(d\psi \circ d\psi^{-1})|_{\psi(m)}$ и $(d\psi^{-1} \circ d\psi)|_m$ являются тождественными преобразованиями. Теорема об обратной функции дает локально обратное утверждение, а именно если дифференциал $d\psi_m$ — изоморфизм, то отображение ψ оказывается диффеоморфизмом в некоторой окрестности точки m . Прежде чем напомнить точную формулировку теоремы об обратной функции, мы дадим определение, которое нам потребуется в следствиях.

1.29. Определение. Множество гладких функций y_1, \dots, y_j , определенных в некоторой окрестности точки m из M , называется

независимым множеством в точке m , если их дифференциалы dy_1, \dots, dy_j образуют независимое множество в M_m^* .

1.30. Теорема об обратной функции. Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ — функция класса C^∞ . Если матрица Якоби

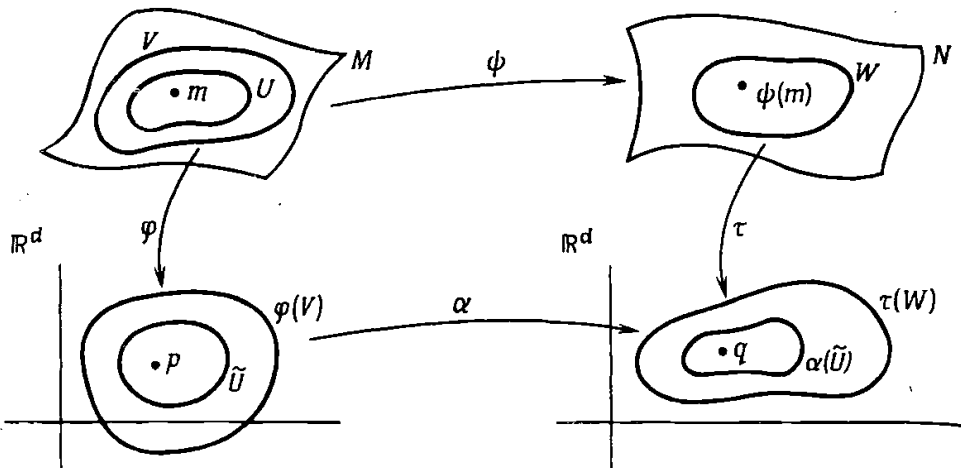
$$\left\{ \frac{\partial r_i \circ f}{\partial r_j} \right\}_{i,j=1, \dots, d}$$

невыврождена в точке $r_0 \in U$, то существует открытое множество V , такое, что $r_0 \in V \subset U$, $f|_V$ взаимно однозначно отображает V на открытое множество $f(V)$ и $(f|_V)^{-1}$ — отображение класса C^∞ .

Эта теорема — один из результатов математического анализа, который мы приводим без доказательства. Читатель может найти его доказательство, например, в [31] или [6].

Следствие (а). Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, такое, что $d\psi: M_m \rightarrow N_{\psi(m)}$ — изоморфизм для $m \in M$. Тогда существует окрестность U точки m , такая, что отображение $\psi: U \rightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом на открытое множество $\psi(U)$ многообразия N .

Доказательство. Заметим, что $\dim M = \dim N$; пусть эта размерность равна d . Выберем системы координат (V, φ) с началом в m и (W, τ) с началом в $\psi(m)$, такие, что $\psi(V) \subset W$. Пусть $\varphi(m) = p$ и $\tau(\psi(m)) = q$. Дифференциал отображения $\tau \circ \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(V)}$ оказывается невырожденным в p . Таким образом, теорема об обратной функции обеспечивает существование диффеоморфизма $\alpha: \tilde{U} \rightarrow \alpha(\tilde{U})$ в окрестности \tilde{U} точки p , лежащей в $\varphi(V)$. Тогда $\tau^{-1} \circ \alpha \circ \varphi$ будет требуемым диффеоморфизмом в окрестности $U = \varphi^{-1}(\tilde{U})$ точки m .



Следствие (b). *Предположим, что $\dim M = d$ и что y_1, \dots, y_d — независимое множество функций в точке $m_0 \in M$. Тогда функции y_1, \dots, y_d образуют систему координат в некоторой окрестности точки m_0 .*

Доказательство. Допустим, что y_i определены в открытом множестве U , содержащем m_0 . Определим отображение $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^d$, полагая

$$\psi(m) = (y_1(m), \dots, y_d(m)) \quad (m \in U).$$

Тогда ψ гладко. Отображение ψ^* является изоморфизмом на пространстве $(\mathbb{R}_{\psi(m_0)}^d)^*$, потому что

$$\psi^*(dr_i) = d(r_i \circ \psi) = dy_i,$$

а это означает, что отображение $\psi^*|_{\psi(m_0)}$ переводит базис в базис. Следовательно, дифференциал $d\psi_{m_0}$ (который сопряжен к $\psi^*|_{\psi(m_0)}$) является изоморфизмом. Применяя теорему об обратной функции, получаем, что ψ — диффеоморфизм в окрестности $V \subset U$ точки m_0 , а потому ограничения функций y_1, \dots, y_d на V образуют в V систему координат.

Следствие (c). *Предположим, что $\dim M = d$ и y_1, \dots, y_l , $l < d$, образует независимое множество функций в m . Тогда этот набор функций составляет часть системы координат в некоторой окрестности точки m .*

Доказательство. Пусть (U, x_1, \dots, x_d) — система координат с началом в m . Тогда пространство M_m^* натянуто на $\{dy_1, \dots, dy_l, dx_1, \dots, dx_d\}$. Выберем $d - l$ функций из x_i так, что $\{dy_1, \dots, dy_l, dx_{i_1}, \dots, dx_{i_{d-l}}\}$ будет базисом пространства M_m^* , и применим следствие (b).

Следствие (d). *Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, а отображение $d\psi: M_m \rightarrow N_{\psi(m)}$ сюръективно. Если функции x_1, \dots, x_l образуют систему координат в некоторой окрестности точки $\psi(m)$, то $x_1 \circ \psi, \dots, x_l \circ \psi$ составляют часть системы координат в некоторой окрестности точки m .*

Доказательство. Тот факт, что отображение $d\psi_m$ является сюръективным, означает, что сопряженное отображение $\psi^*|_{\psi(m)}$ инъективно. Функции $\{x_i \circ \psi: i = 1, \dots, l\}$ независимы в m , так как $\psi^*(dx_i) = d(x_i \circ \psi)$. Наше утверждение вытекает из следствия (c).

Следствие (e). *Пусть y_1, \dots, y_k — такой набор гладких функций, определенных в некоторой окрестности точки m , что пространство M_m^* натянуто на их дифференциалы; тогда некоторое*

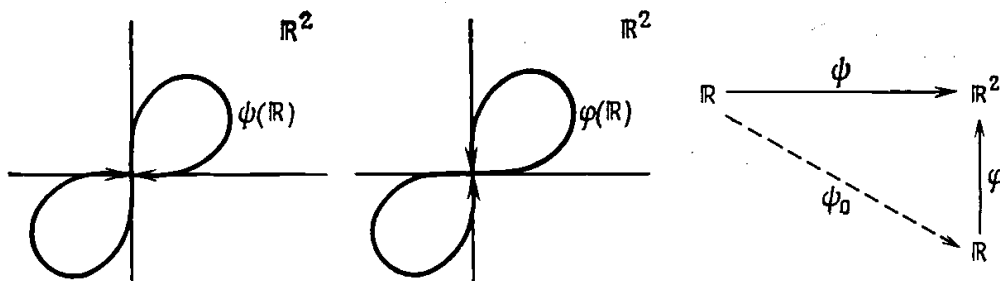
подмножество функций y_i образует систему координат в некоторой окрестности точки m .

Доказательство. Выберем те функции, дифференциалы которых образуют базис пространства M_m^* , и применим следствие (b).

Следствие (f). Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, и допустим, что его дифференциал $d\psi: M_m \rightarrow N_{\psi(m)}$ инъективен. Пусть x_1, \dots, x_k образуют систему координат в окрестности точки $\psi(m)$. Тогда некоторое подмножество функций из $\{x_i \circ \psi\}$ образует систему координат в окрестности точки m , в частности ψ инъективно в окрестности точки m .

Доказательство. Поскольку $d\psi_m$ инъективно, $\psi^*|_{\psi(m)}$ сюръективно. Поэтому M_m^* натянуто на $\{d(x_i \circ \psi) = \psi^*(dx_i): i = 1, \dots, k\}$. Теперь утверждение данного следствия вытекает из предыдущего.

1.31. Часто возникает ситуация, когда имеется гладкое отображение $\psi: N \rightarrow M$ одного многообразия в другое, пропускающее через подмногообразие $(P, \varphi) \subset M$. Это означает, что $\psi(N) \subset \varphi(P)$, откуда следует существование единственного отображения $\psi_0: N \rightarrow P$, такого, что $\varphi \circ \psi_0 = \psi$. Возникает вопрос: когда ψ_0 является гладким отображением? Это не всегда так. Рассмотрим следующий пример: в качестве N и P возьмем вещественные прямые, а в качестве M — плоскость. Пусть (\mathbb{R}, ψ) и (\mathbb{R}, φ) — подмногообразия-«восьмерки» (см. рисунок ниже), совпадающие как множества, но различающиеся тем, что при $t \rightarrow \pm \infty$ $\psi(t)$ приближается к точке пересечения вдоль горизонтального направления, а $\varphi(t)$ — вдоль вертикального. Пусть, кроме того, $\psi(0) = \varphi(0) = 0$. Тогда ψ_0 не будет даже непрерывным, потому что $\psi_0^{-1}(-1, 1)$ состоит из начала координат и двух открытых множеств вида $(\alpha, +\infty)$, $(-\infty, -\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$.



1.32. Теорема. Пусть $\psi: N \rightarrow M$ — гладкое отображение, и пусть (P, φ) — подмногообразие многообразия M . Предположим, что ψ пропускается через подмногообразие (P, φ) , так что $\psi(N) \subset \varphi(P)$.

§ 2. Многообразие

1. Определение многообразия.

Определение 1. Хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой топологии*) называется *n*-мерным многообразием, если любая его точка имеет окрестность U , гомеоморфную либо всему пространству \mathbb{R}^n , либо полупространству $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leq 0\}$.

Определение 2. Отображение $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset M$ (или $\varphi: H^n \rightarrow U \subset M$), осуществляющее указанный в определении 1 гомеоморфизм, называется *локальной картой многообразия M , \mathbb{R}^n (H^n) — областью параметров, а U — районом или областью действия карты на многообразии M .*

Локальная карта наделяет каждую точку $x \in U$ координатами соответствующей ей точки $t = \varphi^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, в районе U действия карты вводится локальная система координат, и потому отображение φ или, в более развернутой записи, пара (U, φ) в самом привычном смысле слова является картой района U .

Определение 3. Набор карт, районы действия которых в совокупности покрывают все многообразие, называется *атласом многообразия*.

Пример 1. Сфера $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ является двумерным многообразием. Если S^2 интерпретировать как поверхность Земли, то атлас географических карт будет атласом многообразия S^2 .

Одномерная сфера $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ — окружность в \mathbb{R}^2 , очевидно, является одномерным многообразием. Вообще, сфера $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ является *n*-мерным многообразием. (См гл. XII, § 1.)

Замечание 1. Вводимый определением 1 объект (многообразие M), очевидно, не изменится, если вместо \mathbb{R}^n и H^n брать любые гомеоморфные \mathbb{R}^n и H^n области параметров в пространстве \mathbb{R}^n . Например, это могут быть открытый куб $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x^i < 1, i = 1, \dots, n\}$ и куб с присоединенной к нему гранью $\tilde{I}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x^1 \leq 1 \text{ и } 0 < x^i < 1, i = 2, \dots, n\}$. Такими стандартными областями параметров довольно часто пользуются.

Нетрудно также проверить, что вводимый определением 1 объект не изменится, если потребовать лишь, чтобы каждая точка $x \in M$ имела в M окрестность U , гомеоморфную некоторому открытому подмножеству полупространства H^n .

Пример 2. Если X — *m*-мерное многообразие с атласом карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, а Y — *n*-мерное многообразие с атласом $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$, то $X \times Y$ можно рассматривать как $(m+n)$ -мерное многообразие с атласом $\{(W_{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta})\}$, где $W_{\alpha\beta} = U_\alpha \times V_\beta$, а отображение $\chi_{\alpha\beta} =$

*) См гл IX, § 2, а также замечания 2, 3 настоящего параграфа.

$\equiv (\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$ переводит в $W_{\alpha\beta}$ прямое произведение областей определения φ_α и φ_β .

В частности, двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$ (рис. 69) или n -мерный тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ раз}}$ являются многообразиями соответствующей размерности.

Если районы U_i, U_j действия двух карт $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ многообразия M пересекаются, т. е. $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то между множествами $I_{ij} = \varphi_i^{-1}(U_j), I_{ji} = \varphi_j^{-1}(U_i)$ естественно устанавливаются взаимно обратные гомеоморфизмы $\varphi_{ij}: I_{ij} \rightarrow I_{ji}, \varphi_{ji}: I_{ji} \rightarrow I_{ij}$, где $\varphi_{ij} = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j|_{I_{ij}}, \varphi_{ji} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i|_{I_{ji}}$. Эти гомеоморфизмы часто называют *функциями замены координат*, поскольку они осуществляют переход от одной системы локальных координат к другой такой же системе в общей области $U_i \cap U_j$ их действия (рис. 96).

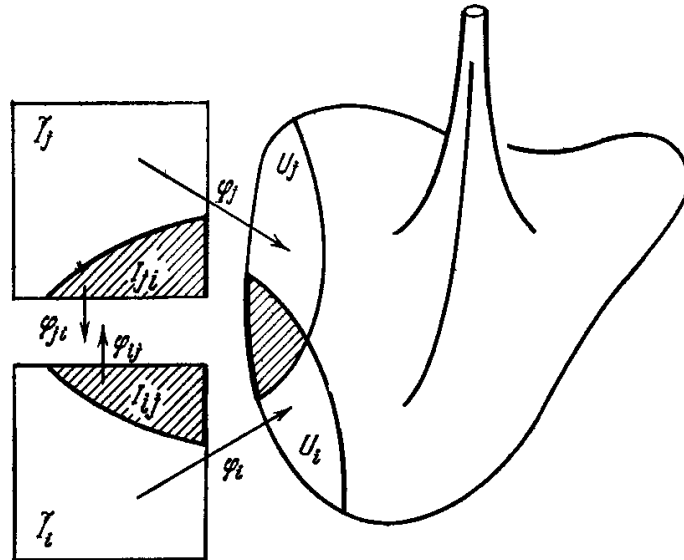


Рис. 96.

Определение 4. Число n в определении 1 называется *размерностью многообразия* M и обычно обозначается символом $\dim M$.

Определение 5. Если при указанном в определении 1 гомеоморфизме $\varphi: H^n \rightarrow U$ точке $x \in U$ соответствует точка $\varphi^{-1}(x)$ на границе ∂H^n полупространства H^n , то x называют *точкой края многообразия* M (и окрестности U). Совокупность всех точек края многообразия M называется *краем* этого многообразия и обычно обозначается символом ∂M .

В силу топологической инвариантности внутренних точек (теорема Брауэра *) понятия размерности и точки края многооб-

*) Теорема утверждает, что при гомеоморфном отображении $\varphi: E \rightarrow \varphi(E)$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ на множество $\varphi(E) \subset \mathbb{R}^n$ внутренние точки множества E преобразуются во внутренние точки множества $\varphi(E)$.

разия определены корректно, т. е. не зависят от используемых в определениях 4 и 5 индивидуальных локальных карт. Теорему Брауэра мы не доказывали, но инвариантность внутренних точек относительно диффеоморфизмов нам хорошо известна (это следствие теоремы об обратной функции). Поскольку в дальнейшем нам придется иметь дело именно с диффеоморфизмами, мы не останавливаемся здесь на теореме Брауэра.

Пример 3. Замкнутый шар $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ или, как говорят, замкнутый n -мерный диск, является n -мерным многообразием, краем которого является $(n-1)$ -мерная сфера $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$.

Замечание 2. Многообразие M , множество точек края которого непусто, обычно называют *многообразием с краем*, оставляя термин *многообразие* (в собственном смысле слова) за многообразиями без края. В определении 1 эти случаи не разделены.

Утверждение 1. Край ∂M n -мерного многообразия с краем M является $(n-1)$ -мерным многообразием без края.

◀ Действительно, $\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$, а сужение на ∂H^n карт вида $\varphi_i: H^n \rightarrow U_i$ атласа многообразия M порождает атлас ∂M . ▶

Пример 4. Рассмотрим плоский двойной маятник (рис. 97), плечо a которого много меньше плеча b и может вращаться сво-

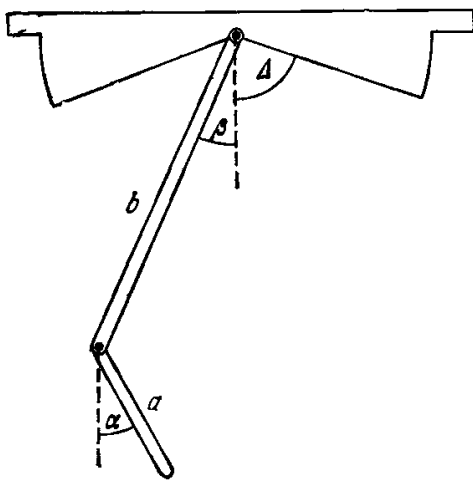


Рис. 97.

бодно, а размах колебаний плеча b ограничен упорами. Конфигурация такой системы в любой конкретный момент характеризуется двумя углами α, β . Если бы ограничений не было, то конфигурационное пространство двойного маятника, очевидно, можно было бы отождествить с двумерным тором $T^2 = S^1_\alpha \times S^1_\beta$.

При наличии указанных ограничений конфигурационное пространство двойного маятника параметризуется точками цилиндра $S^1_\alpha \times I^1_\beta$, где S^1_α — окружность, отвечающая возможным положениям

плеча a , а $I^1_\beta = \{\beta \in \mathbb{R} \mid |\beta| \leq \Delta\}$ — отрезок, в пределах которого может меняться угол β , характеризующий положение плеча b .

В этом случае мы получаем многообразие с краем. Край этого многообразия состоит из двух окружностей $S^1_\alpha \times \{-\Delta\}$, $S^1_\alpha \times \{\Delta\}$, являющихся произведением окружности S^1_α и концов $\{-\Delta\}$, $\{\Delta\}$ отрезка I^1_β .

Замечание 3. На рассмотренном примере 4 видно, что порой координаты на множестве M (в примере это α, β) возникают естественным образом и они сами вводят на M топологию. Значит, в определении 1 многообразия нет нужды всегда заранее требо-

вать, чтобы на M уже была топология. Суть понятия многообразия в том, что точки некоторого множества M параметризуются точками некоторого набора подобластей пространства \mathbb{R}^n . Между появляющимися при этом на частях M системами координат возникает естественная связь, которая выражается в отображениях соответствующих областей пространства \mathbb{R}^n . Значит, можно считать, что M получается из набора областей пространства \mathbb{R}^n указанием закона отождествления их точек или, описательно говоря, путем указания закона их подклейки друг к другу. Итак, задать многообразие по существу означает — задать набор подобластей \mathbb{R}^n и закон соответствия точек этих подобластей. На дальнейших уточнениях сказанного (формализации понятия склеивания или отождествления точек, введении топологии на M и т. п.) мы не задерживаемся.

Определение 6. Многообразие называется *компактным* (*связным*), если оно является компактом (связно) как топологическое пространство.

Рассмотренные в примерах 1—4 многообразия компактны и связны. Край появившегося в примере 4 цилиндра $S^1_\alpha \times I_\beta$ состоит из двух независимых окружностей и является одномерным компактным, но несвязным многообразием. Край $S^{n-1} = \partial B^n$ n -мерного диска из примера 3 является компактным многообразием, которое связно при $n > 1$ и несвязно (состоит из двух точек) при $n = 1$.

Пример 5. Само пространство \mathbb{R}^n , очевидно, является связным, некомпактным многообразием без края, а полупространство H^n доставляет простейший пример связного некомпактного многообразия с краем. (И в том и в другом случае атлас можно взять состоящим из единственной карты, отвечающей тождественному отображению.)

Утверждение 2. Если многообразие M связно, то оно линейно связно.

◀ Фиксировав точку $x_0 \in M$ рассмотрим множество E_{x_0} тех точек многообразия M , которые можно соединить с x_0 в пределах M некоторым путем. Множество E_{x_0} , как видно из определения многообразия, непусто, открыто и замкнуто в M . Но тогда $E_{x_0} = M$. ▶

Пример 6. Если каждой квадратной вещественной матрице порядка n сопоставить точку пространства \mathbb{R}^{n^2} , координаты которой получаются выписыванием в определенном порядке всех элементов матрицы, то группа $GL(n, \mathbb{R})$ всех невырожденных матриц порядка n превращается в n^2 -мерное многообразие. Это многообразие некомпактно (элементы матриц никак не ограничены) и несвязно. Последнее вытекает из того, что $GL(n, \mathbb{R})$ содержит матрицы как с положительным, так и с отрицательным определителем. Точки $GL(n, \mathbb{R})$, отвечающие двум таким матрицам, нельзя соединить путем (на котором бы тогда появилась точка, соответствующая матрице, имеющей определитель, равный нулю).

Пример 7. Группа $SO(2, \mathbb{R})$ ортогональных преобразований плоскости \mathbb{R}^2 , имеющих определитель, равный единице, состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ и, таким образом, может считаться многообразием, которое отождествляется с окружностью — областью изменения углового параметра α . Таким образом, $SO(2, \mathbb{R})$ — одномерное компактное связное многообразие. Если допустить и отражения относительно прямых в плоскости \mathbb{R}^2 , то мы получим группу $O(2, \mathbb{R})$ всех вещественных ортогональных матриц второго порядка. Ее естественно можно отождествить с двумя различными окружностями, отвечающими матрицам с определителем 1 и -1 соответственно. То есть $O(2, \mathbb{R})$ — одномерное компактное, но несвязное многообразие.

Пример 8. Пусть a — вектор плоскости \mathbb{R}^2 и T_a — группа движений плоскости, порожденная вектором a . Элементами группы T_a являются сдвиги на векторы вида na , где $n \in \mathbb{Z}$. Под действием элементов g группы T_a каждая точка x плоскости смещается в точки $g(x)$ вида $x + na$. Совокупность точек, в которые данная точка $x \in \mathbb{R}^2$ переходит под действием элементов данной группы преобразований, называется *орбитой этой точки*. Свойство точек \mathbb{R}^2 принадлежать одной орбите, очевидно, является отношением эквивалентности на \mathbb{R}^2 и орбиты являются классами эквивалентных в этом смысле точек. Область в \mathbb{R}^2 , содержащая по одной точке каждой орбиты, называют *фундаментальной областью* данной группы автоморфизмов (уточнение см. в задаче 5d).

В нашем случае в качестве фундаментальной области можно взять полосу ширины $|a|$, ограниченную двумя параллельными прямыми, ортогональными вектору a . Следует только учесть, что сами эти прямые получаются друг из друга сдвигом на a и $-a$ соответственно. В пределах ортогональной a полосы ширины, меньшей чем $|a|$, нет эквивалентных точек, поэтому все орбиты, имеющие представителей в такой полосе, однозначно наделяются координатами своих представителей. Так фактор-множество \mathbb{R}^2/T_a орбит данной группы T_a превращается в многообразие. Из сказанного выше о фундаментальной области легко понять, что это многообразие гомеоморфно цилиндру, который получается склеиванием по эквивалентным точкам граничных прямых полосы ширины $|a|$.

Пример 9. Пусть теперь a и b — пара ортогональных векторов плоскости \mathbb{R}^2 и $T_{a,b}$ — группа сдвигов, порожденная этими векторами. Фундаментальной областью в данном случае будет прямоугольник со сторонами a, b . В пределах этого прямоугольника эквивалентными будут лишь точки, лежащие на его противоположных сторонах. После соответствующей склейки сторон фундаментального прямоугольника убеждаемся, что возникающее многообразие $\mathbb{R}^2/T_{a,b}$ гомеоморфно двумерному тору.

Пример 10. Рассмотрим еще группу $G_{a,b}$ движений плоскости \mathbb{R}^2 , порожденную следующими преобразованиями: $a(x, y) = (x+1, 1-y)$, $b(x, y) = (x, y+1)$.

Фундаментальной областью для группы $G_{a,b}$ будет единичный квадрат, горизонтальные стороны которого отождествляются по точкам, лежащим на одной вертикали, а боковые стороны квадрата отождествляются по точкам, симметричным относительно его центра. Таким образом, возникающее многообразие $\mathbb{R}^2/G_{a,b}$ оказывается гомеоморфно бутылке Клейна (см. гл. XII, § 1).

Мы не останавливались здесь на полезных и важных примерах, которые были разобраны в § 1 гл. XII.

2. Гладкие многообразия и гладкие отображения.

Определение 7. Атлас многообразия называется *гладким* (класса $C^{(k)}$) или *аналитическим*), если все функции замены координат для карт данного атласа являются гладкими отображениями (диффеоморфизмами) соответствующего класса гладкости.

Два атласа данной (одной и той же) гладкости считаются *эквивалентными*, если их объединение является атласом той же гладкости.

Пример 11. Атлас, состоящий из единственной карты, можно считать сколь угодно гладким. Рассмотрим в этой связи на прямой \mathbb{R}^1 один атлас, порожденный тождественным отображением $\mathbb{R}^1 \ni x \mapsto \varphi(x) = x \in \mathbb{R}^1$, а другой атлас, порожденный любой строго монотонной функцией $\mathbb{R}^1 \ni x \mapsto \tilde{\varphi}(x) \in \mathbb{R}^1$, отображающей \mathbb{R}^1 на \mathbb{R}^1 . Объединением этих атласов будет атлас, который, очевидно, имеет наименьшую из гладкостей функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}^{-1}$.

В частности, если $\tilde{\varphi}(x) = x^3$, то атлас из карт $\{x, x^3\}$ не является гладким, так как $\tilde{\varphi}^{-1}(x) = x^{1/3}$. Используя сказанное, можно построить на \mathbb{R}^1 бесконечно гладкие атласы, объединение которых будет атласом наперед заданного класса гладкости $C^{(k)}$.

Определение 8. *Гладким многообразием* (класса $C^{(k)}$, *аналитическим*) называется многообразие M с заданным на M классом эквивалентности атласов данной гладкости.

После этого определения понятна следующая терминология: *топологическое многообразие* (класса $C^{(0)}$); *многообразие класса $C^{(k)}$* ; *аналитическое многообразие*.

Для того чтобы задать весь класс эквивалентности атласов данной гладкости на многообразии M , достаточно задать любой атлас A из этого класса эквивалентности. Таким образом, можно считать, что гладкое многообразие есть пара (M, A) , где M — многообразие, а A — атлас данной гладкости на M .

Совокупность эквивалентных атласов данной гладкости на многообразии часто называют *структурой данной гладкости на этом многообразии*. На одном и том же топологическом многообразии могут существовать различные гладкие структуры даже одной и той же гладкости (см. пример 11 и задачу 3).

Рассмотрим еще несколько примеров, в которых мы обратим основное внимание на гладкость функций замены координат.

Пример 12. Одномерное многообразие \mathbb{RP}^1 , называемое *вещественной проективной прямой*, есть пучок прямых в \mathbb{R}^2 , проходящих через начало координат, с естественным отношением близости прямых (измеряемой, например, величиной меньшего угла между прямыми). Каждая прямая пучка однозначно определяется ненулевым направляющим вектором (x^1, x^2) , причем два таких вектора задают одну и ту же прямую в том и только в том случае, когда они коллинеарны. Значит, \mathbb{RP}^1 можно рассматривать как совокупность классов эквивалентных упорядоченных пар (x^1, x^2) вещественных чисел. При этом по крайней мере одно из чисел пары должно быть отлично от нуля и две пары считаются эквивалентными (отождествляются), если они пропорциональны. Пары (x^1, x^2) обычно называют *однородными координатами* на \mathbb{RP}^1 . Используя интерпретацию \mathbb{RP}^1 в однородных координатах, легко построить атлас из двух карт на \mathbb{RP}^1 . Пусть U_i , $i=1, 2$, — те прямые (классы пар (x^1, x^2)) из \mathbb{RP}^1 , для которых $x^i \neq 0$. Каждой точке (прямой) $p \in U_1$ взаимно однозначно соответствует пара $(1, \frac{x^2}{x^1})$, определяемая числом $t_1^2 = \frac{x^2}{x^1}$. Аналогично точки района U_2 находятся во взаимно однозначном соответствии с парами вида $(\frac{x^1}{x^2}, 1)$ и задаются одним числом $t_2^1 = \frac{x^1}{x^2}$. Таким образом, в U_1 и U_2 возникают локальные координаты, которые, очевидно, соответствуют введенной выше в \mathbb{RP}^1 топологии. В общей области $U_1 \cap U_2$ действия построенных локальных карт вводимые ими координаты связаны соотношениями $t_2^1 = (t_1^2)^{-1}$, $t_1^2 = (t_2^1)^{-1}$, показывающими, что построенный атлас принадлежит не только классу $C^{(\infty)}$, но даже является аналитическим.

Полезно иметь в виду также следующую интерпретацию многообразия \mathbb{RP}^1 . Каждая прямая исходного пучка прямых вполне определяется точкой пересечения с единичной окружностью. Но таких точек ровно две, причем они являются диаметрально противоположными точками окружности. Близость прямых равносильна близости соответствующих пар точек окружности. Значит, \mathbb{RP}^1 можно интерпретировать как окружность с отождествленными (склеенными) диаметрально противоположными точками. Если взять только полуокружность, то на ней окажется лишь одна пара отождествляемых точек — концы полуокружности. Склеив их, мы получим снова топологически окружность. Таким образом, \mathbb{RP}^1 как топологическое пространство гомеоморфно окружности.

Пример 13. Если рассмотреть теперь пучок прямых, проходящих через начало координат в \mathbb{R}^3 , или, что то же самое, совокупность классов пропорциональных упорядоченных троек (x^1, x^2, x^3) вещественных чисел, не обращающихся в нуль одно-

временно, то мы получим *вещественную проективную плоскость* \mathbb{RP}^2 . В районах U_1, U_2, U_3 , где соответственно $x^1 \neq 0, x^2 \neq 0, x^3 \neq 0$, вводятся локальные системы координат $(1, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}) = (1, t_1^2, t_1^3) \sim (t_1^2, t_1^3), (\frac{x^1}{x^2}, 1, \frac{x^3}{x^2}) = (t_2^1, 1, t_2^3) \sim (t_2^1, t_2^3), (\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}, 1) = (t_3^1, t_3^2, 1) \sim (t_3^1, t_3^2)$, которые, очевидно, связаны между собой соотношениями $t_i^j = (t_j^i)^{-1}, t_i^j = t_k^j (t_k^i)^{-1}$, относящимся к общим частям районов действия локальных карт.

Например, переход от координат (t_1^2, t_1^3) к координатам (t_2^1, t_2^3) в области $U_1 \cap U_2$ выражается формулами

$$t_2^1 = (t_1^2)^{-1}, \quad t_2^3 = t_1^3 \cdot (t_1^2)^{-1}.$$

Якобиан этого преобразования равен $-(t_1^2)^{-3}$ и, поскольку $t_1^2 = \frac{x^2}{x^1}$, он определен и отличен от нуля в точках, отвечающих точкам рассматриваемого множества $U_1 \cap U_2$.

Итак, \mathbb{RP}^2 — двумерное многообразие, обладающее аналитическим атласом из трех карт.

По тем же соображениям, что и в примере 12, где была рассмотрена проективная прямая \mathbb{RP}^1 , проективную плоскость \mathbb{RP}^2 можно интерпретировать как двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ с отождествленными диаметрально противоположными точками или как полусферу с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной окружности. Проектируя полусферу на плоскость, мы получаем возможность интерпретировать \mathbb{RP}^2 как круг (двумерный диск) с отождествленными диаметрально противоположными точками его граничной окружности.

Пример 14. Совокупность всех прямых на плоскости \mathbb{R}^2 можно разбить на два множества: U — невертикальные прямые, V — негоризонтальные прямые. Каждая прямая из U имеет уравнение вида $y = u_1 x + u_2$ и тем самым характеризуется координатами (u_1, u_2) , в то время как любая прямая из V имеет уравнение $x = v_1 y + v_2$ и задается координатами (v_1, v_2) . Для кривых из пересечения $U \cap V$ действуют функции преобразования координат $v_1 = u_1^{-1}, v_2 = -u_2 u_1^{-1}$ и $u_1 = v_1^{-1}, u_2 = -v_2 \cdot v_1^{-1}$. Таким образом, рассматриваемое множество наделяется аналитическим атласом из двух карт.

Любая прямая на плоскости имеет уравнение $ax + by + c = 0$ и характеризуется тройкой чисел (a, b, c) , причем пропорциональные тройки задают одну и ту же прямую. Может поэтому показаться, что здесь мы вновь имеем дело с проективной плоскостью \mathbb{RP}^2 , рассмотренной в примере 13. Однако если в \mathbb{RP}^2 допускались любые тройки чисел, не равных одновременно нулю, то теперь не допускаются тройки вида $(0, 0, c)$, где $c \neq 0$. Всем таким тройкам в \mathbb{RP}^2 отвечает одна и та же точка. Значит, полученное в настоящем примере многообразие гомеоморфно тому, что

получается удалением из \mathbb{RP}^2 одной точки. Если интерпретировать \mathbb{RP}^2 как круг с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной окружности, то, выколыв центр круга, мы с точностью до гомеоморфизма получим кольцо, внешняя окружность которого склеивается по диаметрально противоположным точкам. Простым разрезанием легко показать, что при этом получается не что иное, как знакомый лист Мёбиуса.

Определение 9. Пусть M и N — гладкие многообразия класса $C^{(k)}$. Отображение $f: M \rightarrow N$ называется l -гладким (класса $C^{(l)}$), если локальные координаты точки $f(x) \in N$ являются функциями класса $C^{(l)}$ от локальных координат точки $x \in M$.

Приведенное определение имеет смысл и корректно (не зависит от выбора локальной карты), если $l \leq k$.

В частности, гладкие отображения M в \mathbb{R}^1 — это гладкие функции на M , а гладкие отображения \mathbb{R}^1 (или промежутка \mathbb{R}^1) в M — это гладкие пути на M .

Итак, степень гладкости функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ на многообразии M не может превышать степени гладкости самого многообразия.

3. Ориентация многообразия и его края.

Определение 10. Две карты гладкого многообразия называются *согласованными*, если переход от локальных координат одной карты к локальным координатам другой карты в их общей области действия осуществляется диффеоморфизмом, имеющим всюду положительный якобиан.

В частности, если районы действия локальных карт имеют пустое пересечение, то такие карты признаются согласованными.

Определение 11. Атлас A гладкого многообразия (M, A) называется *ориентирующим атласом* многообразия M , если он состоит из попарно согласованных карт.

Определение 12. Многообразие называется *ориентируемым*, если оно обладает ориентирующим атласом. В противном случае многообразие называется *неориентируемым*.

Два ориентирующих атласа многообразия будем считать *эквивалентными* (в смысле рассматриваемого сейчас вопроса об ориентации многообразия), если их объединение также является ориентирующим атласом этого многообразия. Легко видеть, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности.

Определение 13. Класс эквивалентности ориентирующих атласов многообразия по указанному отношению эквивалентности называется *классом ориентации атласов* многообразия или *ориентацией* многообразия.

Определение 14. *Ориентированным многообразием* называется многообразие с указанным классом ориентации его атласов, т. е. с фиксированной на многообразии ориентацией.

Значит, ориентировать многообразие — это указать на нем (тем или иным способом) определенный класс ориентации его атласов. Для этого, например, достаточно указать любой конкретный ориентирующий атлас данного класса ориентации.

Различные используемые на практике способы задания ориентации на лежащих в \mathbb{R}^n многообразиях описаны в §§ 2, 3 гл. XII.

Утверждение 3. *Связное многообразие либо неориентируемо, либо допускает две ориентации.*

◀ Пусть A и \tilde{A} — два ориентирующих атласа данного многообразия M с диффеоморфными переходами от локальных координат карт одного из них к другому. Предположим, что нашлась точка $p_0 \in M$ и такие две карты этих атласов, районы U_{i_0}, \tilde{U}_{j_0} действия которых содержат p_0 , а якобиан преобразования координат этих карт в соответствующих точке p_0 точках областей параметров положителен. Покажем, что тогда для любой точки $p \in M$ и любых карт атласов A, \tilde{A} , районы действия которых содержат точку p , якобиан преобразования координат в соответствующих координатных точках тоже будет положителен.

Сделаем прежде всего очевидное наблюдение, что если в точке $p \in M$ якобиан преобразования положителен (отрицателен) для какой-то пары включающих p карт из атласов A и \tilde{A} , то он в p положителен (отрицателен) для любой такой пары карт, поскольку в пределах одного атласа преобразования координат происходят с положительным якобианом, а якобиан композиции отображений равен произведению их якобианов.

Пусть теперь E — подмножество M , состоящее из тех точек $p \in M$, в которых преобразования координат от карт одного атласа к картам другого происходят с положительным якобианом.

Множество E непусто, так как $p_0 \in E$. Множество E открыто в M . Действительно, для любой точки $p \in E$ найдутся содержащие p районы U_i, \tilde{U}_j некоторых карт атласов A и \tilde{A} . Множества U_i, \tilde{U}_j открыты в M , поэтому открыто в M и множество $U_i \cap \tilde{U}_j$. На содержащей p связной компоненте множества $U_i \cap \tilde{U}_j$, являющейся открытым в $U_i \cap \tilde{U}_j$ и в M множеством, якобиан преобразования не может менять знак, не обращаясь в нуль. То есть в некоторой окрестности точки p якобиан остается положительным, что и доказывает открытость множества E . Но множество E еще и замкнуто в M . Это следует из непрерывности якобиана диффеоморфизма и того обстоятельства, что якобиан диффеоморфизма не обращается в нуль.

Итак, E — непустое открыто-замкнутое подмножество связного множества M . Значит, $E = M$ и атласы A, \tilde{A} задают на M одну и ту же ориентацию.

Заменив во всех картах атласа A одну из координат, например t^1 на $-t^1$, получим ориентирующий атлас $-A$, принадле-

жащий другому классу ориентации. Поскольку якобиан преобразования координат из произвольной карты в карты атласов A и $-A$ имеет противоположный знак, то на M любой ориентирующий M атлас эквивалентен либо A , либо $-A$. ►

Определение 15. Конечную последовательность карт данного атласа назовем *цепочкой карт*, если районы действия любой пары карт с соседними номерами имеют непустое пересечение ($U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$).

Определение 16. Цепочка карт называется *противоречивой* или *дезориентирующей*, если якобиан преобразования координат от любой карты цепочки к следующей ее карте положителен, районы действия первой и последней карт цепочки пересекаются, но преобразование координат от последней карты к первой имеет отрицательные значения якобиана.

Утверждение 4. *Многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем не существует противоречивой цепочки карт.*

◀ Поскольку любое многообразие распадается на связные компоненты, ориентация которых задается независимо, достаточно доказать утверждение 4 для связного многообразия M .

Необходимость. Пусть связное многообразие M ориентируемо и A — задающий ориентацию M атлас. По доказанному в утверждении 3 любая гладко связанная с картами атласа A локальная карта многообразия M либо согласована со всеми картами атласа A , либо согласована со всеми картами атласа $-A$. Это легко усмотреть из самого утверждения 3, если сузить карты атласа A на район действия взятой карты, который можно рассматривать как связное ориентированное одной картой многообразие. Отсюда следует, что противоречивой цепочки карт на многообразии M не существует.

Достаточность. Из определения 1 следует, что на многообразии существует атлас из конечного или счетного числа карт. Возьмем такой атлас A и занумеруем его карты. Рассмотрим карту (U_1, φ_1) и любую карту (U_i, φ_i) такую, что $U_1 \cap U_i \neq \emptyset$. Тогда якобиан преобразований координат $\varphi_{1i}, \varphi_{i1}$ либо всюду отрицателен, либо всюду в области определения преобразований положителен. Он не может иметь значения разных знаков, поскольку иначе в множестве $U_1 \cup U_i$ можно было бы указать связные подмножества отрицательности и положительности якобиана U_-, U_+ и цепочка карт $(U_1, \varphi_1), (U_+, \varphi_1), (U_i, \varphi_i), (U_-, \varphi_i)$ оказалась бы противоречивой.

Итак, меняя, если потребуется, знак одной из координат в карте (U_i, φ_i) , можно получить карту с тем же районом действия U_i , согласованную с картой (U_1, φ_1) . После описанной процедуры две карты $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ такие, что $U_1 \cap U_i \neq \emptyset, U_1 \cap U_j \neq \emptyset, U_i \cap U_j \neq \emptyset$, сами окажутся согласованными: иначе мы построили бы противоречивую цепочку из трех карт.

Таким образом, все карты атласа, районы действия которых пересекаются с U_1 , уже можно считать согласованными между собой. Принимая теперь каждую из этих карт за эталон, можно согласовать с нею новые, не охваченные на первом этапе карты атласа. Противоречивых ситуаций при этом не возникнет, поскольку противоречивых цепочек на многообразии по условию не существует. Продолжая этот процесс и учитывая связность многообразия, мы построим на нем атлас, состоящий из попарно согласованных карт, что и доказывает ориентируемость данного многообразия. ►

Полученный критерий ориентируемости многообразия, как, впрочем, и соображения, используемые при его доказательстве, можно с успехом применять при исследовании конкретных многообразий. Так, рассмотренное в примере 12 многообразие \mathbb{RP}^1 ориентируемо. Из указанного там атласа легко получить ориентирующий атлас \mathbb{RP}^1 . Для этого достаточно изменить знак локальной координаты одной из двух построенных там карт. Впрочем, ориентируемость проективной прямой \mathbb{RP}^1 , очевидно, следует также из того, что многообразие \mathbb{RP}^1 гомеоморфно окружности.

Проективная плоскость \mathbb{RP}^2 неориентируема: любая пара карт построенного в примере 13 атласа \mathbb{RP}^2 такова, что преобразования координат в пределах пары имеют как области положительности, так и области отрицательности якобиана. Как мы видели при доказательстве утверждения 4, отсюда следует существование противоречивой цепочки карт на \mathbb{RP}^2 .

По той же причине неориентируемо и рассмотренное в примере 14 многообразие, которое, кстати, как отмечалось, гомеоморфно листу Мёбиуса.

Утверждение 5. Край ориентируемого гладкого n -мерного многообразия является ориентируемым $(n-1)$ -мерным многообразием, допускающим структуру той же гладкости, что и исходное многообразие.

◄ Доказательство утверждения 5 проводится дословно так же, как и рассмотренное в гл. XII, § 3, п. 2 доказательство аналогичного утверждения 2 для поверхностей, лежащих в \mathbb{R}^n . ►

Определение 17. Если $A(M) = \{(H^n, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^n, \varphi_j, U_j)\}$ — ориентирующий атлас многообразия M , то $A(\partial M) = \{(\mathbb{R}^{n-1}, \varphi_i|_{\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}}, \partial U_i)\}$ есть ориентирующий атлас края ∂M многообразия M . Задаваемая этим атласом ориентация края называется *ориентацией края, согласованной с ориентацией многообразия*.

Важные и часто используемые на практике способы задания ориентации лежащей в \mathbb{R}^n поверхности и согласованной ориентации ее края подробно описаны в §§ 2, 3 гл. XII.

4. Разбиение единицы и реализация многообразий в виде поверхностей в \mathbb{R}^n . Здесь будет изложена одна специальная конструкция, называемая в математике *разбиением единицы*. Эта

§ 3. Край поверхности и его ориентация

1. Поверхность с краем. Пусть \mathbb{R}^k — евклидово пространство размерности k , наделенное декартовыми координатами t^1, \dots, t^k . Рассмотрим полупространство $H^k := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t^1 \leq 0\}$ пространства \mathbb{R}^k . Гиперплоскость $\partial H^k := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t^1 = 0\}$ будем называть **краем** полупространства H^k .

Заметим, что множество $\dot{H}^k := H^k \setminus \partial H^k$, т. е. открытая часть H^k , является простейшей k -мерной поверхностью. Само же полупространство H^k формально не удовлетворяет определению поверхности ввиду наличия в H^k точек края ∂H^k . Множество H^k является каноническим представителем поверхностей с краем, которые мы сейчас опишем.

Определение 1. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называют *поверхностью* (размерностью k) *с краем*, если любая точка $x \in S$ имеет окрестность U в S , гомеоморфную либо \mathbb{R}^k , либо H^k .

Определение 2. Если при указанном в определении 1 гомеоморфизме $\varphi: U \rightarrow H^k$ точке $x \in U$ соответствует точка $\varphi(x) \in \partial H^k$, то x называется *точкой края* поверхности (с краем) S и своей окрестности U . Совокупность всех точек края называется *краем поверхности* S .

Край поверхности S , как правило, будет обозначаться символом ∂S .

Напомним, что при гомеоморфном отображении $\varphi_{ij}: G_i \rightarrow G_j$ области $G_i \subset \mathbb{R}^k$ на область $G_j \subset \mathbb{R}^k$ внутренние точки области G_i переходят во внутренние точки образа $\varphi_{ij}(G_i)$ (это — теорема Брауэра). Следовательно, понятие точки края поверхности не зависит от выбора локальной карты, т. е. определено корректно.

Определение 1 формально включает в себя и случай поверхности, описанный в определении 1, § 1. Сопоставляя эти определения, видим, что если на S нет точек края, то мы возвращаемся к прежнему определению поверхности, которое теперь можно было бы считать определением поверхности без края. Отметим в этой связи, что термин «поверхность с краем» обычно употребляется тогда, когда множество точек края непусто.

Понятие гладкой (класса $C^{(m)}$) поверхности S с краем вводится, как и для поверхностей без края, требованием, чтобы S обладала атласом карт данного класса гладкости. При этом мы подразумеваем, что для карт вида $\varphi: H^k \rightarrow U$ частные производные от φ в точках края ∂H^k вычисляются только по области \dot{H}^k определения отображения φ , т. е. иногда это односторонние производные, а якобиан отображения φ отличен от нуля всюду в H^k .

Поскольку \mathbb{R}^k можно диффеоморфизмом класса $C^{(\infty)}$ преобразовать в куб $I^k = \{t \in \mathbb{R}^k \mid |t^i| < 1, i = 1, \dots, k\}$, причем так, что H^k преобразуется в часть I_N куба I^k , определяемую дополнительным условием $t^1 \leq 0$, то ясно, что в определении поверхности с краем (даже в случае ее гладкости) можно было бы

заменить \mathbb{R}^k на I^k , а H^k на I_N^k или на куб \tilde{I}^k с одной присоединенной гранью $I^{k-1} := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t^1 = 1, |t^i| < 1, i = 2, \dots, k\}$, являющейся, очевидно, кубом на единицу меньшей размерности.

С учетом этой всегда присутствующей свободы в выборе канонических локальных карт поверхности, сопоставляя определения 1, 2 и определение 1 из § 1 видим, что справедливо следующее

Утверждение 1. *Край k -мерной поверхности класса $C^{(m)}$ сам является поверхностью того же класса гладкости, причем поверхностью без края и на единицу меньшей размерности в сравнении с размерностью исходной поверхности с краем.*

—◀ Действительно, если $A(S) = \{(H^k, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, U_j)\}$ — атлас поверхности S с краем, то $A(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_i|_{\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}$, очевидно, является атласом того же класса гладкости для края ∂S . ▶

Укажем некоторые простые примеры поверхностей с краем.

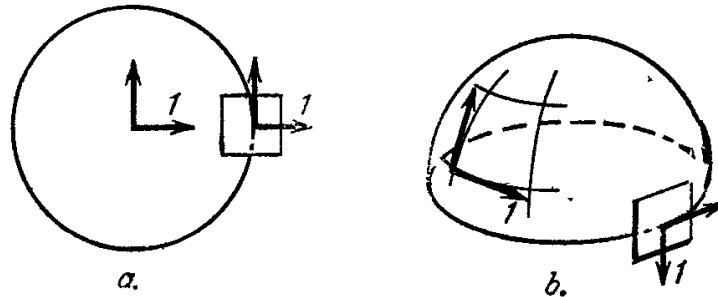


Рис. 77

Пример 1. Замкнутый n -мерный шар \bar{B}^n в \mathbb{R}^n есть n -мерная поверхность с краем. Ее край $\partial \bar{B}^n$ есть $(n-1)$ -мерная сфера (см. рис. 76 и рис. 77, а). Шар \bar{B}^n , называемый часто по аналогии с двумерным случаем n -мерным диском, можно гомеоморфно преобразовать в половину n -мерной сферы, краем которой является экваториальная $(n-1)$ -мерная сфера (рис. 77, б).

Пример 2. Замкнутый куб I^n в \mathbb{R}^n по лучам, исходящим из его центра, можно гомеоморфно преобразовать в замкнутый шар \bar{B}^n . Следовательно, I^n , как и \bar{B}^n , есть n -мерная поверхность с краем, который в данном случае образован гранями куба (рис. 78). Отметим, что на ребрах, являющихся

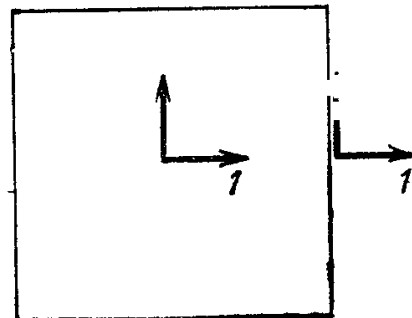


Рис. 78.

пересечениями граней, никакое отображение куба на шар, очевидно, не может быть регулярным (т. е. гладким и ранга n).

Пример 3. Если лист Мёбиуса получать описанным в примере 5, § 1 склеиванием двух противоположных сторон теперь уже замкнутого прямоугольника, то, очевидно, в \mathbb{R}^3 получится

поверхность с краем, причем ее край гомеоморфен окружности (правда, заузленной в \mathbb{R}^3).

При другой возможной склейке этих же сторон получится цилиндрическая поверхность, край которой состоит из двух окружностей. Эта поверхность гомеоморфна обычному плоскому кольцу (см. рис. 71 к примеру 5, § 1).

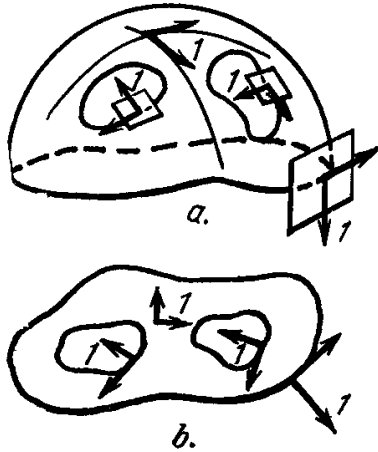


Рис. 79.

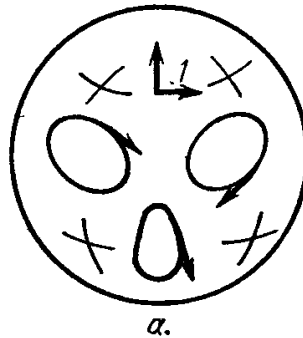
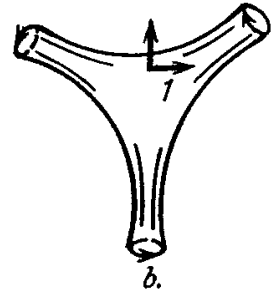


Рис. 80.



На рис. 79, *a, b*, 80, *a, b*, 81, *a, b*, которые мы используем в дальнейшем, изображены попарно гомеоморфные поверхности с краем, лежащие в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .

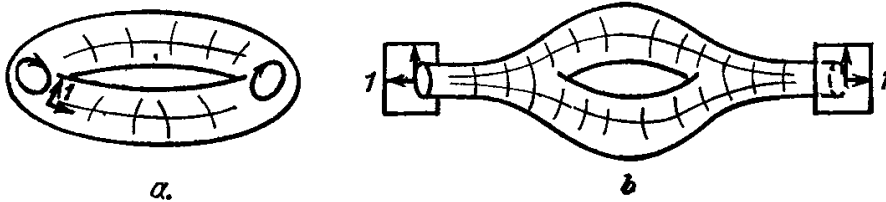


Рис. 81.

Как видно, край поверхности может оказаться несвязным, даже если сама поверхность была связной.

2. Согласование ориентации поверхности и края. Если в евклидовом пространстве \mathbb{R}^k фиксирован ориентирующий орторепер e_1, \dots, e_k , который индуцирует в \mathbb{R}^k декартовы координаты x^1, \dots, x^k , то векторы e_2, \dots, e_k на краю $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}$ полупространства $H^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \leq 0\}$ задают ориентацию, которую считают согласованной с заданной репером e_1, e_2, \dots, e_k ориентацией полупространства H^k .

Мы хотим теперь в общем случае определить, что значит согласованность ориентации поверхности и края. Это весьма важно для практики вычислений, связанных с поверхностными интегралами, о которых будет речь ниже.

Прежде всего убедимся в том, что имеет место следующее общее

Утверждение 2. *Край ∂S гладкой ориентируемой поверхности S сам является гладкой ориентируемой поверхностью (быть может, и несвязной).*

◀ С учетом утверждения 1 нам остается только проверить ориентируемость ∂S . Покажем, что если $A(S) = \{(H^k, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, U_j)\}$ — ориентирующий атлас поверхности с краем S , то атлас $A(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_i|_{\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}$ края тоже состоит из попарно согласованных карт. Для этого, очевидно, достаточно проверить, что если $\tilde{t} = \psi(t)$ есть диффеоморфизм с положительным якобианом окрестности $U_{H^k}(t_0)$ в H^k точки $t_0 \in \partial H^k$ на окрестность $\tilde{U}_H(\tilde{t}_0)$ в H^k точки $\tilde{t}_0 \in \partial H^k$, то положительный якобиан имеет также отображение $\psi|_{\partial U_{H^k}(t_0)}$ окрестности $U_{\partial H^k}(t_0) = \partial U_{H^k}(t_0)$ в ∂H^k точки t_0 на окрестность $\tilde{U}_{\partial H^k}(\tilde{t}_0) = \partial \tilde{U}_{H^k}(\tilde{t}_0)$ в ∂H^k точки $\tilde{t}_0 = \psi(t_0)$.

Заметим, что в любой точке $t_0 = (0, t_0^2, \dots, t_0^k) \in \partial H^k$ якобиан отображения ψ имеет вид

$$J(t_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial t^1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial t^1} & \frac{\partial \psi^2}{\partial t^2} & \dots & \frac{\partial \psi^2}{\partial t^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi^k}{\partial t^1} & \frac{\partial \psi^k}{\partial t^2} & \dots & \frac{\partial \psi^k}{\partial t^k} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi^1}{\partial t^1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi^2}{\partial t^2} & \dots & \frac{\partial \psi^2}{\partial t^k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi^k}{\partial t^2} & \dots & \frac{\partial \psi^k}{\partial t^k} \end{vmatrix},$$

поскольку при $t^1 = 0$ должно быть также $\tilde{t}^1 = \psi^1(0, t^2, \dots, t^k) \equiv 0$ (граничные точки переходят при диффеоморфизме в граничные. Остается заметить, что при $t^1 < 0$ должно быть также $\tilde{t}^1 = \psi^1(t^1, t^2, \dots, t^k) < 0$ (ведь $\tilde{t} = \psi(t) \in H^k$), поэтому значение $\frac{\partial \psi^1}{\partial t^1}(0, t^2, \dots, t^k)$ не может быть отрицательным. По условию $J(t_0) > 0$, и раз $\frac{\partial \psi^1}{\partial t^1}(0, t^2, \dots, t^k) \geq 0$, то из указанного равенства определителей следует, что якобиан отображения $\psi|_{\partial U_{H^k}} = \psi(0, t^2, \dots, t^k)$ положителен. ▶

Определение 3. Если $A(S) = \{(H^k, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, U_j)\}$ — ориентирующий атлас стандартных локальных карт поверхности S с краем ∂S , то $A(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_i|_{\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}$ есть ориентирующий атлас края. Задаваемая им ориентация края ∂S называется *ориентацией края, согласованной с ориентацией поверхности*.

Заканчивая рассмотрение ориентации края ориентируемой поверхности, сделаем два полезных замечания.

Замечание 1. На практике, как уже отмечалось выше, ориентацию лежащей в \mathbb{R}^n поверхности часто задают репером касательных к поверхности векторов, поэтому проверку согласованности ориентации поверхности и ее края в этом случае осуществляют следующим образом. Берут k -мерную плоскость TS_{x_0} , касательную к гладкой поверхности S в точке x_0 края ∂S . Поскольку локально структура поверхности S около точки x_0 такая же, как и структура полупространства H^k около точки $0 \in \partial H^k$, то, направив первый вектор ориентирующего S орторепера $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in TS_{x_0}$ по нормали к ∂S и в сторону внешнюю по отношению к локальной проекции S на TS_{x_0} , получают в $(k-1)$ -мерной плоскости $T\partial S_{x_0}$, касательной к ∂S в точке x_0 , репер ξ_2, \dots, ξ_k , который и задает ориентацию $T\partial S_{x_0}$, а значит, и ∂S , согласованную с заданной репером $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ ориентацией поверхности S .

На рис. 77—80 на простых примерах показаны процесс и результат согласования ориентаций поверхности и ее края.

Отметим, что описанная схема, по существу, предполагает, что на S возможно задание непрерывного поля реперов касательных пространств TS_x , $x \in S$, поскольку мы должны иметь возможность переносить задающий ориентацию S репер в разные точки поверхности и ее края, который, как видно из примеров, может быть и несвязным.

Замечание 2. В ориентированном пространстве \mathbb{R}^k рассмотрим полупространства $H_-^k = H^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \leq 0\}$ и $H_+^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \geq 0\}$ с индуцированной из \mathbb{R}^k ориентацией. Гиперплоскость $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 = 0\}$ является общим краем H_-^k и H_+^k . Легко видеть, что ориентации гиперплоскости Γ , согласованные с ориентациями H_-^k и H_+^k , противоположны.

Аналогично, если ориентированную k -мерную поверхность разрезать некоторой $(k-1)$ -мерной поверхностью (например, сферу — экватором), то на указанном разрезе возникнут две противоположные ориентации, индуцированные ориентациями примыкающих к разрезу частей исходной поверхности.

Этим наблюдением часто пользуются в теории поверхностных интегралов.

Кроме того, им можно воспользоваться, чтобы следующим образом определить ориентируемость кусочно гладкой поверхности.

Дадим прежде всего определение такой поверхности.

Определение 4 (индуктивное определение кусочно гладкой поверхности). Точку условимся относить к *нульмерным* поверхностям любого класса гладкости.

Кусочно гладкой одномерной поверхностью (кусочно гладкой кривой) назовем такую кривую в \mathbb{R}^n , которая после удаления из нее конечного или счетного числа некоторых нульмерных поверхностей (точек) распадается на гладкие одномерные поверхности (кривые).

Поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ размерности k назовем *кусочно гладкой*, если из нее можно так удалить конечное или счетное число кусочно гладких поверхностей размерности не выше $k-1$, что остаток распадется на гладкие k -мерные поверхности S_i (с краем или без края).

Пример 4. Граница плоского угла и граница квадрата суть кусочно гладкие кривые.

Граница куба или граница прямого кругового конуса в \mathbb{R}^3 суть двумерные кусочно гладкие поверхности.

Вернемся теперь к ориентации кусочно гладкой поверхности.

Точку (нульмерную поверхность) принято ориентировать, приписывая ей знак $+$ или $-$. В частности, край отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$, состоящий из двух точек a, b , если отрезок ориентирован направлением от a к b , принято согласованно (с этой ориентацией отрезка) ориентировать так: $(a, -)$, $(b, +)$.

Рассмотрим теперь k -мерную ($k > 0$) кусочно гладкую поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$.

Предположим, что две гладкие поверхности S_{i_1}, S_{i_2} из определения 4 кусочно гладкой поверхности S ориентированы и примыкают друг к другу вдоль гладкого куска Γ $(k-1)$ -мерной поверхности (ребра). Тогда на Γ , как на краю, возникают ориентации, согласованные с ориентациями S_{i_1} и S_{i_2} соответственно. Если эти две ориентации на любом таком ребре $\Gamma \subset \bar{S}_{i_1} \cap \bar{S}_{i_2}$ противоположны, то исходные ориентации S_{i_1} и S_{i_2} считаются *согласованными*. В случае, если $\bar{S}_{i_1} \cap \bar{S}_{i_2}$ пусто или имеет размерность меньшую чем $(k-1)$, любые ориентации S_{i_1}, S_{i_2} считаются согласованными.

Определение 5. Кусочно гладкую k -мерную ($k > 0$) поверхность будем считать *ориентируемой*, если с точностью до конечного или счетного числа кусочно гладких поверхностей размерности не выше $(k-1)$ она является объединением гладких ориентируемых поверхностей S_i , допускающих их одновременную взаимно согласованную ориентацию.

Пример 5. Поверхность трехмерного куба, как легко проверить, является ориентируемой кусочно гладкой поверхностью. И вообще, все указанные в примере 4 кусочно гладкие поверхности ориентируемы.

Пример 6. Лист Мёбиуса легко представить в виде объединения двух ориентируемых гладких поверхностей, примыкающих по части края, однако эти поверхности нельзя ориентировать согласованно. Можно проверить, что лист Мёбиуса не является ориентируемой поверхностью даже с точки зрения определения 5.

Задачи и упражнения

1. а. Верно ли, что край поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ есть множество $\bar{S} \setminus S$, где \bar{S} — замыкание S в \mathbb{R}^n ?

Этот оператор взятия производной по направлению вектора v на дифференцируемых функциях обладает двумя важными свойствами:

$$(2) \quad \begin{aligned} v(f + \lambda g) &= v(f) + \lambda v(g), \\ v(f \cdot g) &= f(p) v(g) + g(p) v(f) \end{aligned}$$

для любых функций f и g , дифференцируемых в окрестности точки p и для любого вещественного числа λ . Первое свойство означает, что оператор v линейно действует на функциях, а второе — что он является *дифференцированием*. Это обосновывает наше определение касательного вектора на многообразии. Касательный вектор будет производной по направлению, т. е. линейным дифференцированием на функциях. Операция взятия производной зависит только от локальных свойств функции, свойств в сколь угодно малых окрестностях точки, в которой берется производная. Чтобы лучше объяснить эту зависимость производной от локальных свойств функций, мы введем понятие ростков функций.

1.13. Определения. Пусть $m \in M$. Говорят, что функции f и g , определенные на открытых множествах, содержащих m , имеют одинаковый *росток* в m , если они совпадают в некоторой окрестности точки m . Тогда в пространстве функций из класса C^∞ , определенных на окрестностях точки m , можно ввести следующее отношение эквивалентности: две функции эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый росток. Классы эквивалентности называются *ростками*, и мы будем обозначать множество ростков в точке m символом \tilde{F}_m . Если f — функция класса C^∞ на некоторой окрестности точки m , то \tilde{f} будет обозначать ее росток. Операции сложения, скалярного умножения и умножения на функциях индуцируют на \tilde{F}_m структуру алгебры над \mathbb{R} . Росток \tilde{f} имеет корректно определенное значение $\tilde{f}(m)$ в точке m , а именно значение в m любого представителя этого ростка. Пусть $F_m \subset \tilde{F}_m$ — множество ростков, принимающих в m нулевое значение. Тогда F_m — это идеал алгебры \tilde{F}_m , и мы обозначим символом F_m^k его k -ю степень. Последняя является идеалом в \tilde{F}_m , состоящим из всех конечных линейных комбинаций произведений по k элементов из F_m . Получается убывающая последовательность идеалов $\tilde{F}_m \supset F_m \supset F_m^2 \supset F_m^3 \supset \dots$.

1.14. Определение. Касательным вектором v в точке $m \in M$ называется линейное дифференцирование алгебры \tilde{F}_m . То есть для любых ростков $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{F}_m$ и вещественного λ выполнены следующие два условия:

- (a) $v(\tilde{f} + \lambda \tilde{g}) = v(\tilde{f}) + \lambda v(\tilde{g})$,
- (b) $v(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = \tilde{f}(m) v(\tilde{g}) + \tilde{g}(m) v(\tilde{f})$.

Символ M_m будет обозначать множество касательных векторов к M в точке m , которое будет называться *касательным пространством многообразия M в точке m* . Заметим, что если мы определим $(v + w)(f)$ и $(\lambda v)(f)$ формулами

$$(1) \quad \begin{aligned} (v + w)(f) &= v(f) + w(f), \\ (\lambda v)(f) &= \lambda(v(f)) \end{aligned}$$

для любых $v, w \in M_m$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $v + w$ и λv также будут касательными векторами в точке m . Таким образом, мы наделили M_m структурой вещественного векторного пространства. Важным свойством векторного пространства M_m , которое мы установим в разд. 1.17, является то, что его размерность совпадает с размерностью пространства M . Сформулированное нами определение касательного вектора не подходит для случая C^k , где $1 \leq k < \infty$. (Мы обсудим случай C^k в разд. 1.21.) Мы даем такое определение касательного вектора в силу нескольких причин. Первая причина состоит в том, что это определение дано в инвариантных терминах, т. е. не зависит от системы координат. Другая — это то, что данное определение естественно обобщается на случай касательных векторов высшего порядка, как мы увидим в разд. 1.26.

1.15. Если c — росток функции с постоянным значением c на некоторой окрестности точки m и если v — касательный вектор в m , то $v(c) = 0$, так как

$$\text{и} \quad v(c) = cv(1)$$

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = 1v(1) + 1v(1) = 2v(1).$$

1.16. Лемма. *Существует естественный изоморфизм пространства M_m на пространство $(F_m/F_m^2)^*$. (Символ $*$ обозначает сопряженное векторное пространство.)*

Доказательство. Пусть $v \in M_m$, тогда он является линейной функцией на F_m , обращающейся в нуль на F_m^2 , в силу свойств дифференцирования. Обратно, если $l \in (F_m/F_m^2)^*$, то мы определим касательный вектор v_l в точке m , полагая $v_l(f) = l(\{f - f(m)\})$ для $f \in \tilde{F}_m$. (Здесь $f(m)$ обозначает росток функции с постоянным значением $f(m)$, а $\{ \}$ употреблены для обозначения смежных классов из F_m/F_m^2). Линейность v_l на \tilde{F}_m очевидна. Кроме того, v_l — дифференцирование, потому что

$$\begin{aligned} v_l(f \cdot g) &= l(\{f \cdot g - f(m)g(m)\}) = \\ &= l(\{(f - f(m))(g - g(m)) + f(m)(g - g(m)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\mathbf{f} - \mathbf{f}(m))g(m)) = \\
& = l((\mathbf{f} - \mathbf{f}(m))(g - g(m))) + \mathbf{f}(m)l((g - g(m))) + \\
& + g(m)l((\mathbf{f} - \mathbf{f}(m))) = \\
& = \mathbf{f}(m)v_l(g) + g(m)v_l(\mathbf{f}).
\end{aligned}$$

Итак, мы получили отображения из M_m на $(F_m/F_m^2)^*$ и обратно. Нетрудно проверить, что эти отображения являются обратными друг другу и, таким образом, изоморфизмами.

1.17. Теорема. $\dim(F_m/F_m^2) = \dim M$.

Доказательство основано на следующей лемме из математического анализа [31].

Лемма. Если g является функцией класса C^k ($k \geq 2$) на выпуклом открытом множестве U , содержащем $p \in \mathbb{R}^d$, то для каждого $q \in U$

$$\begin{aligned}
(1) \quad g(q) &= g(p) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial g}{\partial r_i} \Big|_p (r_i(q) - r_i(p)) + \\
&+ \sum_{i,j} (r_i(q) - r_i(p))(r_j(q) - r_j(p)) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{(p+t(q-p))} dt.
\end{aligned}$$

В частности, если $g \in C^\infty$, то вторая сумма в (1) определяет элемент из F_p^2 , потому что стоящий в ней интеграл как функция от q принадлежит классу C^∞ .

Доказательство теоремы 1.17. Пусть (U, φ) — система координат в окрестности точки m с координатными функциями x_1, \dots, x_d ($d = \dim M$). Пусть $\mathbf{f} \in F_m$. Применим (1) к функции $\mathbf{f} \circ \varphi^{-1}$ и возьмем композицию с φ ; в результате получим

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial (\mathbf{f} \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(m)} (x_i - x_i(m)) + \sum_{i,j} (x_i - x_i(m))(x_j - x_j(m)) h$$

в окрестности точки m , где $h \in C^\infty$. Имеем

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial (\mathbf{f} \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(m)} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i(m)) \bmod F_m^2.$$

Следовательно, F_m/F_m^2 натянуто на $\{\{x_i - x_i(m)\}: i = 1, \dots, d\}$. Поэтому $\dim F_m/F_m^2 \leq d$. Мы утверждаем, что элементы $\{x_i - x_i(m)\}$ линейно независимы. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^d a_i (x_i - x_i(m)) \in F_m^2.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^d a_i (x_i - x_i(m)) \circ \varphi^{-1} = \sum_{i=1}^d a_i (r_i - r_i(\varphi(m))).$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^d a_i (r_i - r_i(\varphi(m))) \in F_{\varphi(m)}^2.$$

Но отсюда следует, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial r_j} \right|_{\varphi(m)} \left(\sum a_i (r_i - r_i(\varphi(m))) \right) = 0$$

для $j = 1, \dots, d$, а это означает, что все a_i должны быть нулями.

Следствие. $\dim M_m = \dim M$.

1.18. На самом деле мы чаще будем рассматривать касательные векторы как операторы на функциях, а не на их ростках. Если f — дифференцируемая функция, определенная в окрестности точки m , и $v \in M_m$, положим

$$(1) \quad v(f) = v(f).$$

Тогда $v(f) = v(g)$ для любых f и g , совпадающих в некоторой окрестности точки m , и очевидно, что

$$(2) \quad \begin{aligned} v(f + \lambda g) &= v(f) + \lambda v(g) \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ v(f \cdot g) &= f(m) v(g) + g(m) v(f), \end{aligned}$$

где $f + \lambda g$ и $f \cdot g$ определены на пересечении областей определения функций f и g .

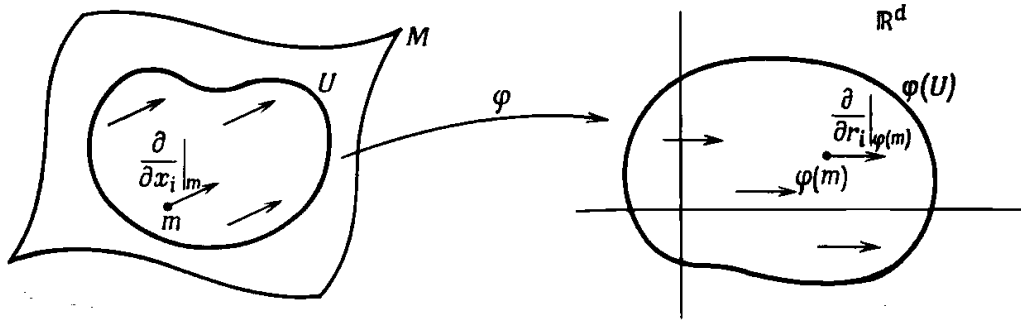
1.19. Определение. Пусть (U, φ) — система координат с координатными функциями x_1, \dots, x_d , и пусть $m \in U$. Для каждого $i \in (1, \dots, d)$ определим касательный вектор $(\partial/\partial x_i)|_m \in M_m$, полагая

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_m (f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(m)}$$

для каждой функции f класса C^∞ в окрестности точки m . Мы интерпретируем выражение (1) как производную функции f

в точке m по направлению x_i i -й координаты. Мы также будем использовать обозначение

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_m = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m \right) (f).$$



1.20. Замечания к разд. 1.19

(а) Очевидно, что $((\partial/\partial x_i)|_m)(f)$ зависит только от ростка функции f в m , и пп. (а) и (б) из разд. 1.14 выполняются, т. е. $(\partial/\partial x_i)|_m$ — касательный вектор в точке m . Кроме того, $\{(\partial/\partial x_i)|_m: i = 1, \dots, d\}$ — базис пространства M_m . Он является базисом в M_m , сопряженным к базису $\{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i(m): i = 1, \dots, d\}$ пространства F_m/F_m^2 , потому что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m (x_j - x_j(m)) = \delta_{ij}.$$

(б) Если $v \in M_m$, то

$$v = \sum_{i=1}^d v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m.$$

Легко проверяется, что при применении к функциям $x_j - x_j(m)$ обе стороны дают одинаковые результаты.

(с) Пусть (U, φ) и (V, ψ) — системы координат в окрестности точки m с координатными функциями x_1, \dots, x_d и y_1, \dots, y_d соответственно. Как следует из замечания (б),

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_m = \sum_{i=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \Big|_m \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m.$$

Заметим, что частная производная $\partial/\partial x_i$ зависит не только от x_i , но и от φ . В частности, даже если x_1 совпадает с y_1 , то необязательно, чтобы $\partial/\partial x_1$ совпадала с $\partial/\partial y_1$.

(д) Если мы применим определение 1.19 к канонической системе координат r_1, \dots, r_d на пространстве \mathbb{R}^d , то касательные векторы будут иметь вид обыкновенных частных производных $(\partial/\partial r_i)$.

1.21. Доказанное нами утверждение о конечности размерности пространства F_m/F_m^2 не проходит в случае, если функции принадлежат классу C^k , где $k < \infty$, так как остаточный член в формуле из леммы разд. 1.17 не будет суммой произведений функций класса C^k , а для случая $k = 1$ эта лемма просто не имеет смысла. Оказывается, что для случая C^k , где $1 \leq k < \infty$, размерность пространства F_m/F_m^2 всегда является бесконечной (см. [21]). Существуют различные способы так определить касательные векторы для случая функций класса C^k , чтобы $\dim M_m = \dim M$ (все эти способы годятся и для случая C^∞). Один из них — определить касательный вектор v в точке m как отображение, ставящее в соответствие каждой функции (определенной и дифференцируемой класса C^k в окрестности точки m) вещественное число $v(f)$, такое, что если (U, φ) — локальная система координат в окрестности точки m , то существует такой набор вещественных чисел (a_1, \dots, a_d) (зависящих от φ), что

$$v(f) = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(m)}.$$

При таком определении касательное пространство M_m снова оказывается пространством конечной размерности с базисом $\{(\partial/\partial x_i)|_m\}$.

1.22. Дифференциал. Пусть отображение $\psi: M \rightarrow N$ принадлежит классу C^∞ , и пусть $m \in M$. Дифференциалом отображения ψ в m называется линейное отображение

$$(1) \quad d\psi: M_m \rightarrow N_{\psi(m)},$$

определенное следующим образом. Если $v \in M_m$, то $d\psi(v)$ должен быть касательным вектором в $\psi(m)$, и мы опишем, как он действует на функциях. Если g — функция класса C^∞ в окрестности точки $\psi(m)$, то определим $d\psi(v)(g)$, полагая

$$(2) \quad d\psi(v)(g) = v(g \circ \psi).$$

Легко проверить, что дифференциал $d\psi$ — линейное отображение пространства M_m в пространство $N_{\psi(m)}$. Строго говоря, дифференциал следует обозначать символом $d\psi|_{M_m}$ или просто $d\psi_m$. Однако в тех случаях, когда невозможны недоразумения, мы будем опускать индекс m . Отображение ψ называется невырожденным в m , если дифференциал $d\psi_m$ является невырожденным, т. е. если ядро отображения (1) состоит только из нуля. Сопряженное отображение

$$(3) \quad \psi^*: N_{\psi(m)}^* \rightarrow M_m^*$$

определяется, как обычно, соотношением

$$(4) \quad \psi^*(\omega)(v) = \omega(d\psi(v))$$

для любых $v \in M_m$ и $\omega \in N_{\psi(m)}^*$. В частном случае, когда функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу C^∞ , если $v \in M_m$ и $f(m) = r_0$, то

$$(5) \quad df(v) = v(f) \frac{d}{dr} \Big|_{r_0}.$$

В этом случае используем символ df , чтобы обозначить элемент сопряженного пространства M_m^* , определенный формулой

$$(6) \quad df(v) = v(f).$$

То есть мы отождествляем df с $f^*(\omega)$, где ω — базис 1-мерного пространства $\mathbb{R}_{r_0}^*$, сопряженный к базису $(d/dr)|_{r_0}$. Конкретное употребление введенных обозначений будет ясно из контекста.

1.23. Замечания к разд. 1.22

(а) Пусть (U, x_1, \dots, x_d) и (V, y_1, \dots, y_l) — системы координат в окрестности точек m и $\psi(m)$ соответственно. Согласно формулам 1.22 (2) и 1.20 (b),

$$d\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_m\right) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial(y_i \circ \psi)}{\partial x_j} \Big|_m \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{\psi(m)}.$$

Матрица $\{\partial(y_i \circ \psi)/\partial x_j\}$ называется *матрицей Якоби (якобианом)* отображения ψ (относительно заданной системы координат). Для отображений между евклидовыми пространствами якобиан всегда берется относительно канонических систем координат.

(b) Если (U, x_1, \dots, x_d) — система координат на M и $m \in U$, то набор $\{dx_i|_m\}$ оказывается базисом пространства M_m^* , сопряженным базису $\{\partial/\partial x_i|_m\}$. Если $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция из класса C^∞ , то

$$df_m = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_m dx_i|_m \circ d\psi_m.$$

(c) *Цепное правило.* Пусть $\psi: M \rightarrow N$ и $\varphi: N \rightarrow X$ — отображения класса C^∞ . Тогда

$$d(\varphi \circ \psi)_m = d\varphi_{\psi(m)} \circ d\psi_m,$$

или просто $d(\varphi \circ \psi) = d\varphi \circ d\psi$. Полезным упражнением было бы найти форму, которую принимает это равенство, когда после выбора систем координат дифференциалы записываются матрицами.

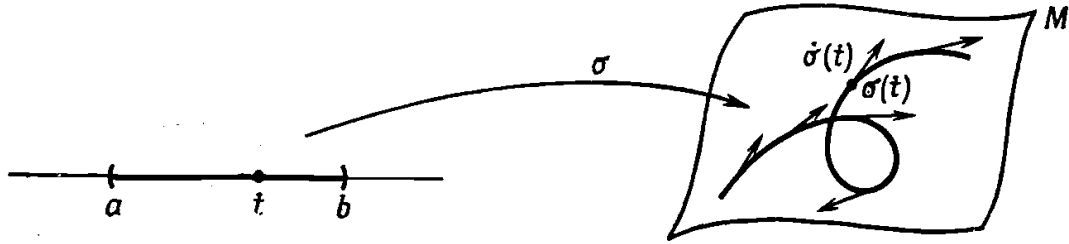
(d) Пусть функции $\psi: M \rightarrow N$ и $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежат классу C^∞ ; тогда $\psi^*(df_{\psi(m)}) = d(f \circ \psi)_m$, так как для любых векторов $v \in M_m$

$$\psi^*(df_{\psi(m)})(v) = df(d\psi(v)) = d(f \circ \psi)_m(v).$$

(е) Гладкой кривой на многообразии M называется отображение $\sigma: (a, b) \rightarrow M$ класса C^∞ . Пусть $t \in (a, b)$. Касательным вектором к кривой σ в t называется вектор

$$d\sigma\left(\frac{d}{dr}\Big|_t\right) \in M_{\sigma(t)}.$$

Для касательного вектора к σ в t мы примем обозначение $\dot{\sigma}(t)$.



Теперь, если взять любой ненулевой вектор v из касательного пространства M_m , то он будет касательным вектором к некоторой гладкой кривой на M . Действительно, можно просто выбрать систему координат (U, φ) с началом в m , для которой

$$v = d\varphi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\Big|_0\right).$$

Тогда вектор v окажется касательным вектором в нуле к кривой $t \mapsto \varphi^{-1}(t, 0, \dots, 0)$. Следует отметить, что две гладкие кривые σ и τ на многообразии M , для которых $\sigma(t_0) = \tau(t_0) = m$, имеют одинаковый касательный вектор в точке t_0 тогда и только тогда, когда

$$\frac{d(f \circ \sigma)}{dr}\Big|_{t_0} = \frac{d(f \circ \tau)}{dr}\Big|_{t_0}$$

для всех функций f класса C^∞ в окрестности m .

Если σ — кривая в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , то

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{d\sigma_1}{dr}\Big|_t \frac{\partial}{\partial r_1}\Big|_{\sigma(t)} + \dots + \frac{d\sigma_n}{dr}\Big|_t \frac{\partial}{\partial r_n}\Big|_{\sigma(t)}.$$

Если мы отождествляем касательный вектор с элементом

$$\left(\frac{d\sigma_1}{dr}\Big|_t, \dots, \frac{d\sigma_n}{dr}\Big|_t\right)$$

пространства \mathbb{R}^n , то

$$\dot{\sigma}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t+h) - \sigma(t)}{h}.$$

При таком отождествлении наше понятие касательного вектора в этом частном случае совпадает с геометрическим понятием касательного вектора к кривой в евклидовом пространстве.

1.24. Теорема. Пусть ψ — отображение класса C^∞ связного многообразия M в многообразие N . Если $d\psi_m \equiv 0$ для каждой точки $m \in M$, то ψ — постоянное отображение.

Доказательство. Пусть $n \in \psi(M)$. Тогда множество $\psi^{-1}(n)$ замкнуто. Нам нужно только показать, что оно открыто. Для этого возьмем другую точку $m \in \psi^{-1}(n)$ и выберем системы координат (U, x_1, \dots, x_d) и (V, y_1, \dots, y_c) в окрестности точек m и n соответственно так, что $\psi(U) \subset V$. Тогда на U из того, что

$$0 = d\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^c \frac{\partial(y_i \circ \psi)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (j = 1, \dots, d),$$

следует, что

$$\frac{\partial(y_i \circ \psi)}{\partial x_j} \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, c; \quad j = 1, \dots, d).$$

Таким образом, функции $y_i \circ \psi$ постоянны на U , т. е. $\psi(U) = n$; следовательно, $\psi^{-1}(n)$ открыто и потому $\psi^{-1}(n) = M$.

Сейчас мы увидим, что множество всех касательных векторов к дифференцируемому многообразию само образует естественным образом дифференцируемое многообразие, называемое *касательным расслоением*. Аналогично линейные функционалы на касательных пространствах составляют двойственный объект, называемый *кокасательным расслоением*.

1.25. Касательное и кокасательное расслоения. Пусть M — гладкое многообразие с дифференцируемой структурой \mathcal{F} . Положим

$$(1) \quad T(M) = \bigcup_{m \in M} M_m,$$

$$T^*(M) = \bigcup_{m \in M} M_m^*.$$

Существуют естественные проекции

$$(2) \quad \begin{aligned} \pi: T(M) &\rightarrow M, & \pi(v) &= m, & \text{если } v \in M_m, \\ \pi': T^*(M) &\rightarrow M, & \pi'(\tau) &= m, & \text{если } \tau \in M_m^*. \end{aligned}$$

Пусть $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ с координатными функциями x_1, \dots, x_d . Определим отображения $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ и $\tilde{\varphi}': (\pi')^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$, полагая

$$(3) \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}(v) &= (x_1(\pi(v)), \dots, x_d(\pi(v)), dx_1(v), \dots, dx_d(v)), \\ \tilde{\varphi}'(\tau) &= \left(x_1(\pi'(\tau)), \dots, x_d(\pi'(\tau)), \tau\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \dots, \tau\left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right) \right) \end{aligned}$$

для всех $v \in \pi^{-1}(U)$ и $\tau \in (\pi')^{-1}(U)$. Заметим, что $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}'$ являются взаимно однозначными отображениями на открытые подмножества пространства \mathbb{R}^{2d} . Следующие утверждения намечают построение топологии и дифференцируемой структуры на $T(M)$. Построение для $T^*(M)$ проводится аналогично. Доказательства мы оставляем в качестве упражнения.

(а) Если (U, φ) и $(V, \psi) \in \mathcal{F}$, то отображение $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ гладкое.

(б) Семейство $\{\varphi^{-1}(W) : W \text{ открыто в } \mathbb{R}^{2d}, (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$ составляет базу топологии на $T(M)$, с которой это пространство становится локально евклидовым пространством размерности $2d$, удовлетворяющим второй аксиоме счетности.

(с) Пусть $\tilde{\mathcal{F}}$ — максимальный набор, удовлетворяющий условию 1.4 (б) и содержащий

$$\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}.$$

Тогда $\tilde{\mathcal{F}}$ — дифференцируемая структура на $T(M)$.

Пространства $T(M)$ и $T^*(M)$ вместе с такими дифференцируемыми структурами называются соответственно *касательным* и *кокасательным расслоениями* многообразия M . Иногда будет удобно обозначать точки из $T(M)$ парами (m, v) , где $m \in M$ и $v \in M_m$ (аналогичное обозначение употребляется для $T^*(M)$).

Если $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, то дифференциал $d\psi$ определяет отображение касательных расслоений

$$(4) \quad d\psi: T(M) \rightarrow T(N),$$

где $d\psi(m, v) = d\psi_m(v)$ для любого вектора $v \in M_m$. Легко проверяется, что (4) будет гладким отображением.

1.26 ¹⁾. Касательные векторы и дифференциалы высшего порядка. Полезно взглянуть на касательное пространство M_m как на $(F_m/F_m^2)^*$, потому что такое его представление непосредственно приводит к определению касательных векторов высшего порядка. Дадим необходимые определения.

Вспомним, что \tilde{F}_m — это алгебра ростков функций в m . Множество $F_m \subset \tilde{F}_m$ является идеалом в \tilde{F}_m , состоящим из ростков, принимающих нулевое значение в m , а F_m^k (k — целое число ≥ 1) — это идеал \tilde{F}_m , состоящий из всех конечных линейных комбинаций произведений по k элементов из F_m .

Векторное пространство F_m/F_m^{k+1} называется пространством дифференциалов k -го порядка в m , и мы будем обозначать его символом kM_m . Как и раньше, f будет обозначать росток функции f в m и скобки $\{ \}$ будут использоваться для обозначения смежных

¹⁾ Материал этого раздела нигде в дальнейшем использоваться не будет. Поэтому его можно пропустить, не нарушив связности изложения.

классов в факторпространстве F_m/F_m^{k+1} . Пусть f — дифференцируемая функция в окрестности точки m . Мы определим *дифференциал $d^k f$ порядка k функции f в m* , полагая

$$(1) \quad d^k f = \{f - f(m)\}.$$

Касательным вектором k -го порядка в m называется линейная функция на \tilde{F}_m , принимающая нулевое значение на F_m^{k+1} , а также на множестве ростков функций, постоянных в некоторой окрестности точки m . Вещественное линейное пространство касательных векторов k -го порядка в m будет обозначаться символом M_m^k . Естественным путем можно отождествить M_m^k с $({}^k M_m)^*$, так как любому касательному вектору порядка k , ограниченному на F_m , соответствует линейная функция на F_m , принимающая нулевое значение F_m^{k+1} , и, следовательно, некоторый элемент пространства $({}^k M_m)^*$; обратно, элемент пространства $({}^k M_m)^*$ единственным образом определяет линейную функцию на F_m , принимающую нулевое значение на F_m^{k+1} , которую единственным способом можно продолжить до касательного вектора k -го порядка, потребовав, чтобы она обращалась в нуль на ростках постоянных функций.

Мы можем связать это понятие касательного вектора высшего порядка и с обычным понятием производной высшего порядка в евклидовом пространстве, рассматривая их представления в некоторой системе координат. Пусть (U, φ) — система координат с началом в m и координатными функциями x_1, \dots, x_d , такая, что $\varphi(U)$ — выпуклое открытое множество в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d . Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ — набор неотрицательных целых чисел. В добавление к принятым нами в разд. 1.1 соглашениям мы положим

$$(x - x(m))^\alpha = (x_1 - x_1(m))^{\alpha_1} \dots (x_d - x_d(m))^{\alpha_d}.$$

Пусть f — гладкая функция на U . Используя лемму 1.17, получим

$$(2) \quad f = f(m) + \sum_{|\alpha|=1}^k a_\alpha (x - x(m))^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} h_\alpha (x - x(m))^\alpha,$$

где h_α — гладкие функции на U и где

$$(3) \quad a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^\alpha} \Big|_{\varphi(m)}.$$

Отсюда

$$(4) \quad d^k f = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} a_\alpha \{(x - x(m))^\alpha\}.$$

Таким образом, пространство ${}^k M_m$ натянуто на

$$(5) \quad \{(\mathbf{x} - \mathbf{x}(m))^\alpha\} : 1 \leq [\alpha] \leq k\}.$$

Доказательство того, что эти элементы линейно независимы в ${}^k M_m$, является очевидным обобщением доказательства для случая $k = 2$, которое было проведено в разд. 1.17. Итак, семейство (5) образует базис пространства ${}^k M_m$. Следовательно, ${}^k M_m$ оказывается пространством конечной размерности, которая равна биномиальному

коэффициенту $\sum_{i=1}^k \binom{d+i-1}{i}$. Поскольку M_m^k — сопряженное пространство к ${}^k M_m$, то оно имеет ту же размерность. Используя отождествление M_m^k с $({}^k M_m)^*$ и то, что эти пространства имеют конечную размерность, мы получаем канонический изоморфизм между пространствами ${}^k M_m$ и $(M_m^k)^*$, при котором элемент $d^k f \in {}^k M_m$, рассматриваемый как элемент пространства $(M_m^k)^*$, обладает следующим свойством:

$$(6) \quad d^k f(v) = v(f).$$

Положим

$$(7) \quad \left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right|_m = \left. \frac{\partial^\alpha (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^\alpha} \right|_{\varphi(m)}.$$

Поскольку производная — это линейный оператор и поскольку значение $\partial^\alpha f / \partial x^\alpha$ в m зависит только от ростка функции f в m и равно нулю, если f постоянна в окрестности m или если f имеет вид произведения $[\alpha] + 1$ функций, принимающих нулевое значение в m , то $(\partial^\alpha / \partial x^\alpha)|_m$ будет касательным вектором $[\alpha]$ -го порядка в m . Таким образом,

$$(8) \quad \left\{ \left(\frac{1}{\alpha!} \right) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \right|_m : 1 \leq [\alpha] \leq k \right\}$$

оказывается базисом пространства M_m^k , сопряженным к базису (5) пространства ${}^k M_m$. Если v — касательный вектор k -го порядка в m , то

$$(9) \quad v = \sum_{[\alpha]=1}^k b_\alpha \left. \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \right|_m,$$

где

$$(10) \quad b_\alpha = \left(\frac{1}{\alpha!} \right) v((\mathbf{x} - \mathbf{x}(m))^\alpha).$$

В базисе (8) равенства (3) приобретают вид

$$(11) \quad a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right|_m.$$

Как и в случае касательных векторов 1-го порядка, мы обычно будем рассматривать касательные векторы как операторы на функциях, а не на их ростках; поэтому мы положим

$$(12) \quad v(f) = v(\mathfrak{f}),$$

если f — гладкое отображение в окрестности m , а v — касательный вектор любого порядка в m .

И наконец, подобно тому как существуют естественные отображения касательных векторов и дифференциалов, ассоциированные с дифференцируемым отображением $\varphi: M \rightarrow N$, существуют линейные отображения

$$(13) \quad \begin{aligned} d^k \varphi: M_m^k &\rightarrow N_{\varphi(m)}^k, \\ \delta^k \varphi: {}^k N_{\varphi(m)} &\rightarrow {}^k M_m, \end{aligned}$$

определенные соотношениями ¹⁾

$$(14) \quad \begin{aligned} d^k \varphi(v)(g) &= v(g \circ \varphi), \\ \delta^k \varphi(d^k g) &= d^k(g \circ \varphi) \end{aligned}$$

для любых $v \in M_m^k$ и гладких функций g в окрестности точки $\varphi(m)$. Легко проверяется, что равенства (14) действительно задают отображения (13) и что отображения $d^k \varphi$ и $\delta^k \varphi$ являются сопряженными.

Наше определение касательного вектора первого порядка, данное в этом разделе, совпадает с определением 1.14 в силу леммы 1.16. В результате мы получили три интерпретации дифференциала первого порядка df функции f : представление (13) совпадает с нашим исходным определением 1.22(1), интерпретация (6) эквивалентна 1.22(6), и, кроме того, мы имеет добавочную интерпретацию (1).

Подмногообразия, диффеоморфизмы и теорема об обратной функции

1.27. Определения. Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение.

(а) Отображение ψ называется *погружением*, если его дифференциал $d\psi_m$ является невырожденным для каждой точки $m \in M$.

(б) Пара (M, ψ) называется *подмногообразием* многообразия N , если ψ — инъективное погружение.

(с) Инъективное погружение ψ называется *вложением*, если оно является гомеоморфизмом на свой образ, т. е. ψ открыто как отображение в $\psi(M)$ в индуцированной топологии.

(д) ψ называется *диффеоморфизмом*, если ψ взаимно однозначно отображает M на N и ψ^{-1} — гладкое отображение.

¹⁾ Заметим, что $\delta^1 \varphi = \varphi^*$. — Прим. перев.

² Уорнер Ф.