ТФКП
2 курс
Домашнее задание

Владислав Мозговой
1789769386

8 июня 2021 г.

Домашнее задание 9

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_8$. Вычислите следующие интегралы при помощи вычетов.

(0) $\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{1+x^2+x^4}$.

(1) $\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

(2) $\int_{|z|=1} z \operatorname{tg}(\pi z) dz$.

(3) $\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)} dz$.

(4) $\int_{|z-i|=3} \frac{\exp(z^2)-1}{(z^3-iz^2)} dz$.

(5) $\int_{|z|=5/2} \frac{z^2}{z-3} \sin(\frac{z}{z-2})\, dz$.

(6) $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} e^{\frac{1}{z-1}} dz$.

(7) $\int_{|z-\frac{\pi}{2}(1-i)|=\pi} \frac{z dz}{\cos z - \operatorname{ch} z}$.

(8) $\int_{|z-i|=3} \frac{z}{z^2+9} \operatorname{ch} \frac{z}{z-2} dz$.

(9) $\int_{|z|=2} z^2 \sin \frac{1}{1-z} dz$.

Напомним, что $\operatorname{ch} z$ обозначает функцию гиперболический косинус, равную $\frac{e^z+e^{-z}}{2}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_9$. Для каждой из указанных ниже функций f, найдите число корней уравнения $f(z) = 0$ в единичном диске $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ с учетом кратностей.

(0) $f(z) = 5z^3 + e^z + 1$.

(1) $f(z) = 3 + z^2 + e^{-z}$.

(2) $f(z) = 5 + \frac{3}{z} + e^z$.

(3) $f(z) = \cos(z) + 5z - 3$.

(4) $f(z) = \sin(z) + z^2 + 2$.

(5) $f(z) = 3 + 7z^2 + \log(z+1)$ (рассматривается та ветвь натурального логарифма, для которой $\log(1) = 0$).

(6) $f(z) = e^{3z} - z^2 + z$.

(7) $f(z) = e^z + \sin(z) + 1$.

(8) $f(z) = 3 - 2z^3 + e^z$.

(9) $f(z) = 4 - 2z^2 + \sin(z)$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_1 + a_9$. В следующих ниже задачах про функцию f предполагается, что она определена и голоморфна в диске $\mathbb{D}(2) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$, а через $\mathbb{D}$ обозначен единичный диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Если $f(0) = 0$ и $|f(e^{it})| > 1$ для всех вещественных t, то $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}$.

(1) Если $|f(e^{it})| > 1$ для всех вещественных t, то f имеет хотя бы один корень в $\mathbb{D}$.

(2) Если $|f(e^{it})| < 1$ для всех вещественных t, то $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(3) Если $|f(e^{it})| > 1$ для всех вещественных t, причем индекс кривой $t \mapsto f(e^{it})$ относительно точки 0 равен 1, то $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}$.

(4) Если $f(e^{it}) \neq 0$ при вещественных t, то индекс кривой $t \mapsto f(e^{it})$ относительно точки 0 не может быть отрицательным.

(5) Если $f(0) = 0$ и $|f(e^{it})| > 1$ для всех вещественных t, то индекс кривой $t \mapsto f(e^{it})$ относительно точки 0 не может быть равен нулю.

(6) Если уравнение $f(z) = 2$ имеет ровно два различных корня в $\mathbb{D}$, причем $|f(e^{it})| > 2$ для всех вещественных t, то уравнение $f(z) = 0$ имеет не менее двух корней с учетом кратности.

(7) Если $|f(e^{it})| < 1$ для всех вещественных t, то уравнение $z + f(z) = c$ имеет хотя бы один корень в $\mathbb{D}$ для всякого $c \in \mathbb{D}$.

(8) Если $|f(e^{it})| < 1$ для всех вещественных t, то уравнение $z^2 + f(z) = c$ имеет хотя бы два различных корня в $\mathbb{D}$ для всякого $c \in \mathbb{D}$.

(9) Если $|f(e^{it})| < 1$ для всех вещественных t, то уравнение $z^2 + f(z) = c$ имеет ровно два различных корня в $\mathbb{D}$ для хотя бы одного $c \in \mathbb{D}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_9$. Вычислите следующие интегралы в смысле главного значения

(0) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x(1-x)}$.

(1) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x\,dx}{1-x^6}$.

(2) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos x\,dx}{x^2-6x+10}$.

(3) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$.

(4) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x\,dx}{x^2-4x+8}$.

(5) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2-x)\cos(3x-2)x\,dx}{x^2-2x+2}$.

(6) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3)\sin\frac{x}{2}\,dx}{x^2+4x+20}$.

(7) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3x)\sin(3x)\,dx}{1-x^4}$.

(8) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x+3)\sin(x+5)\,dx}{x^2+4x+8}$.

(9) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+x^3\sin 3x\,dx}{1-x^4}$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_4$.

(0) Упражнение 8.7 на стр. 145 основного учебника.
(1) Упражнение 8.22 на стр. 147 основного учебника.
(2) Упражнение 8.23 на стр. 147 основного учебника.
(3) Упражнение 8.24 на стр. 147 основного учебника.
(4) Упражнение 8.25 на стр. 147 основного учебника.
(5) Положим $f(z) = \cos z - 2$ и $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| < 2,\ |\mathrm{Im}\, z| < 3\}$. Докажите, что $U \subset f(U)$, причем каждая точка в $f(U)$ имеет ровно два прообраза в U с учетом кратности.
(6) Найдите самый большой диск с центром в точке 0, на котором отображение $f(z) = z^2 + z$ инъективно.
(7) Найдите самый большой диск с центром в точке 0, на котором отображение $f(z) = e^z$ инъективно.
(8) Пусть функция f определена и голоморфна в окрестности точки 0, причем $f'(0) \neq 0$. Докажите, что существует голоморфная в окрестности точки 0 функция g, для которой $f(z^3) = f(0) + g(z)^3$.
(9) Пусть R — рациональная функция, не имеющая ни нулей, ни полюсов на единичной окружности $\{|z| = 1\}$. Докажите, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z\,\frac{R'(z)}{R(z)}dz$$

равен разности между суммой нулей и суммой полюсов функции R в единичном диске $\{|z| < 1\}$ с учетом кратности. Какое условие

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_4 + a_8 = 7 + 8 = 5 \mod 10$

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{z^2}{z-3} \sin\left(\frac{z}{z-2}\right) dz$$
$$I = \int_C \frac{z^2}{z-3} \sin\left(\frac{z}{z-2}\right) dz,\ C : |z| = \frac{5}{2}$$
$$I = 2\pi i \sum \text{вычеты } f \text{ внутри контура}$$

Заметим, что особые точки это $z = 3$, но $|3| > \frac{5}{2}$. Следовательно $I = 2\pi i * 0 = 0$, то есть интеграл равен 0

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_3 + a_9 = 9 + 6 = 5 \mod 10$

$$f_1(z) = 3 + \log(z+1) \qquad f_2(z) = 7z^2$$
$$|3 + \log(z+1)| \leqslant 3 + |\log(z+1)|$$
$$|\log(z+1)| = |\log|(z+1)| + i\arg(z+1)| \leqslant |\log|(z+1)|| + \pi \leqslant \log 2 + \pi < 4$$

Откуда $|3 + \log(z+1)| < 3 + 4 = 7$, при $|z| \to 1 :\ |7z^2| \to 7$, откуда $|f_1(z)| < |f_2(z)|$ при $|z| = 1 - \epsilon$. Тогда по теореме Руше функции $f_2(z)$ и $f_1(z) + f_2(z)$ имеют равное количество нулей на $\mathbb{D}$, откуда у $f_1(z) + f_2(z)$ 2 нуля (так как у $f_2(z)$ 2 нуля).

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_1 + a_9 = 7 + 6 = 3 \mod 10$ $|f(e^{it})| > 1$ для всех вещественных t, индекс $t \mapsto f(e^{it})$ относительно 0 равен 1, то $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}$

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_4 + a_9 = 7 + 6 = 3 \mod 10$

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1-x^4} = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{x^2}{1-x^4} dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} -\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int\limits_{-R}^{-1} -\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx + \int\limits_{-1}^{1} -\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx + \int\limits_{1}^{R} -\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx \right)$$
$$= \lim_{R\to\infty} ((-\frac{1}{4}\log(1+R) + \frac{1}{4}\log(-R+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(R)) - (-\frac{1}{4}\log(1+1) + \frac{1}{4}\log(-1+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(-1))$$
$$+(-\frac{1}{4}\log(1+1) + \frac{1}{4}\log(-1+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(-1)) - (-\frac{1}{4}\log(1-1) + \frac{1}{4}\log(1+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(1))$$
$$+(-\frac{1}{4}\log(1-1) + \frac{1}{4}\log(1+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(1)) - (-\frac{1}{4}\log(1-R) + \frac{1}{4}\log(R+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(-R)))$$
$$= \lim_{R\to\infty} (\tan^{-1}(-R) - \tan^{-1}(R)) = -\pi$$