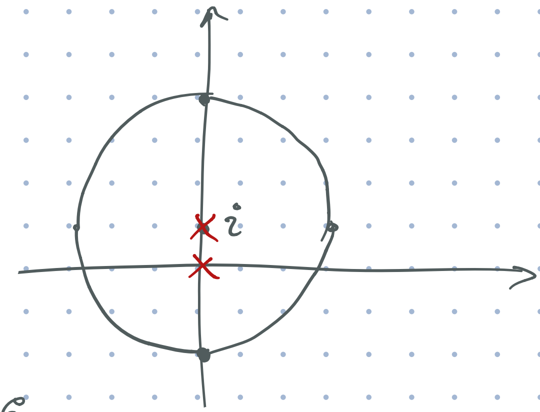
1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_8$. Вычислите следующие интегралы при помощи вычетов.

(4) $\int_{|z-i|=3} \frac{\exp(z^2)-1}{(z^3-iz^2)}dz.$

$$\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{\exp(z^2)-1}{z^2(z-i)}\,dz$$



$$f(z) = \frac{-1+1+z^2-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}-\dots}{z^2(z-i)} = \frac{\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{3!}-\dots\right)}{z-i}$$

$\Rightarrow$ в т. $z=0$ устранимая особенность

$\Rightarrow \operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = 0$

в i полюс 1го порядка

$$\Rightarrow \operatorname{res}_i \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{h(i)}{g'(i)}$$

$$\operatorname*{res}\limits_{z=i} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} = \frac{e^{-1}-1}{3(i)^2-2i(i)} = \frac{\frac{1}{e}-1}{-3+2} = -\frac{1}{e}+1$$

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} f(z) = 2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_9$. Для каждой из указанных ниже функций f, найдите число корней уравнения $f(z) = 0$ в единичном диске $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ с учетом кратностей.

(0) $f(z) = 5z^3 + e^z + 1$.

(1) $f(z) = 3 + z^2 + e^{-z}$.

(2) $f(z) = 5 + \frac{3}{z} + e^z$.

ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ТЕОРЕМОЙ РУШЕ

Предложение 8.12 (теорема Руше). *Пусть* $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$ — *замкнутый непрерывный путь, и пусть* $|\gamma|$ — *множество* $\gamma([A;B]) \subset \subset \mathbb{C}$. *Предположим, что* $f, g\colon |\gamma| \to \mathbb{C}$ — *непрерывные отображения, причем для всякого* $z \in |\gamma|$ *имеем* $f(z) \neq 0$ *и* $|f(z)| > |g(z)|$. *Тогда* $\operatorname{Ind}_0(f \circ \gamma) = \operatorname{Ind}_0((f+g) \circ \gamma)$.

$z = x + iy$ $\quad |z| = 1$ т.е. $x^2 + y^2 = 1$

$$\left|5 + \frac{3}{x+iy}\right| - \left|e^{x+iy}\right| = \left|\frac{5x+5iy+3}{x+iy}\right| - e^x =$$

$$= \frac{\sqrt{(5x+3)^2 + (5y)^2}}{1} - e^x = \sqrt{25(x^2+y^2)+30x+9} - e^x =$$

$$= \sqrt{30x+34} - e^x$$

ХОТИМ, ЧТОБЫ $\sqrt{30x+34} - e^x > 0$

$$30x + 34 > e^{2x}$$

ВОЗРАСТАЮТ

НЕ ОБЪЯСНЕНО, ПОЧЕМУ НЕТ КОРНЕЙ НА $[-1,1]$

УР-НЕ $30x+34 = e^{2x}$ НЕ ИМЕЕТ КОРНЕЙ НА $[-1,1]$

И $30(-1)+34 > e^{2(-1)}$

$$\Rightarrow \left|5+\frac{3}{z}\right| > |e^z| \quad \forall z \in |\gamma|$$

$$\underbrace{\left|5+\frac{3}{z}\right|}_{h(z)} \qquad \underbrace{|e^z|}_{g(z)}$$

$5+\frac{3}{z}=0 \Rightarrow z=-\frac{3}{5}$ ОДИН НУЛЬ

$\Rightarrow f(z)=5+\frac{3}{z}+e^z$ ИМЕЕТ ОДИН НУЛЬ