НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Конспект Лекций

«Дифференциальные уравнения. Первый семестр»

Москва
2020

Содержание

1. Билет 1

1.1. Обыкновенные Дифференциальные Уравнения

$y : I \to \mathbb{R}^d, I \in \mathbb{R}$

Обыкновенное дифференциальное уравнение – $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0(*)$, n – порядок ур-я

$F : \Omega \to \mathbb{R}^d, \Omega \in \mathbb{R}^{1+d(n+1)}$

F – непрпрерывная функция

Определение. Решение ОДУ это $y : I \to \mathbb{R}^d : \exists y', \dots, y^{(n)} : I \to \mathbb{R}^d, (*)$ обращается в тождество при подстановке.

$y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x, \dots, y^{(n-1)}(x))$ $(**)$ – ОДУ разрешенное относительно старшей производной. Мы будем заниматься только ими.

Если $\left|\dfrac{\delta F_i}{\delta y_J^{(n)}}\right| \neq 0$, то локально $(*)$ эквивалентно $(**)$

1.2. Сведение к системе 1-го порядка.

$$(\#)\begin{cases} z_0(x) = y(x) \\ z_1(x) = y'(x) \\ \dots \\ z_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

Или же $(***)$

$$\begin{cases} z'_{n-1} = \varphi(x, z_1, \dots, z_{n-1}) \\ z'_{n-2} = z_{n-1} \\ \dots \\ z'_0 = z_1 \end{cases}$$

Лемма

1) Если $y : I \to \mathbb{R}^d$ – решение $(**)$, то набор $(z_0 = y, z_1 = y', \dots, z_{n-1} = y^{(n-1)})$ – решение $(***)$

2) Пусть $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ – решение $(***)$. Тогда $y = z_0$ – решением $(**)$ и верны формулы $(\#)$

1.3. Задача Коши для уранения первого и высших порядков

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^d$

Пример $\dot{x} = x, x(1) = 2$. Решением будет $x = \dfrac{2}{e}e^t$

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x, \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y_0(x_0) = \hat{z}_0 \\ y_1(x_0) = \hat{z}_1 \\ \dots \\ y_{n-1}(x_0) = \hat{z}_{n-1} \end{cases}, y_i \in \mathbb{R}^d \Longleftrightarrow (**) \begin{cases} y(x_0) = \hat{z}_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)} = \hat{z}_{n-1} \end{cases}$$

1.4. Задача Коши с параметром

$\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$

$*_\lambda$

$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$

$x(t, \lambda)$ – решение $*_\lambda$

2. Билет 2

2.1. Локальная теорема существования и единственности задачи Коши. Доказательство.

$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
$F : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \in \mathbb{R}^{n+1}, (t_0, x_0) \in \Omega$ и выполнено:

1) $D = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\epsilon}(x_0) \subset \Omega$

2) $F \in C(D)(||F||_{C(D)} \leq M)$

3) F липшицева по x на D, т.е. для $\forall\, (t,x), (t,y) \in D|F(t,x) - F(t,y) \leq L|x-y||$

Тогда существует $\tau = \tau(\delta, \epsilon, L, M)$: з.К. имеет единственное решение на $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ (в конце отрезках односторонние производные)

2.2. Эквивалентное интегральное уравнение

Лемма x – непрерывн, решение задачи Коши $\Longleftrightarrow$ x решение: $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds (**)$

Доказательство: ($\Longrightarrow$) Если x решение задачи Коши, то x дифференцируема, т.е. непрерывна. Тогда $F(s, x(s))$ непрерывн, т.е. $x \in C^1$

$x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds = x_0 + x(t) - x(t_0) = x(t)$

($\Longleftarrow$)x – решение интегрального уравнения. Тогда x – непрерывн, тогда $F(s, x(s))$ непрерывно. Тогда $\frac{dx}{dt} = F(t, x(t))$. При этом начальное условие выполняется $x(t_0) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} = x_0$ $\square$

2.3. Пример неединственности

$x(t) = t^3$
$\dot{x}(t) = 3t^2 = 3x^{2/3}$
$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$
$x_1(t) = t^3, x_2(t) = 0, x(t) = (t-a)^3$

Другой пример:
Пусть $x : J \to \mathbb{R}^d$ – решение задачи Коши
$I \subset J, x|_I : I \to \mathbb{R}^d$ – тоже решение
Ограниченный интервал существования
$\dot{x}(t) = x^2 + 1$
$x(t) = \tan(t - c), t \in [c - \dfrac{\pi}{2}; c + \dfrac{\pi}{2}]$ (можно с константой написать, потому что можно сдвигать)

3. билет

3.1. Теорема сжимающих отображений

Пусть (X, ρ)полное метрическое пространтсво и $f : X \to X$ и существует $q < 1 : \forall\ x, y \in X \rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y)$. Тогда $\exists! z \in X : f(z) = z$

Доказательство Взять точку x и начать ее оперировать $x, f(x), f^2(x), \ldots$. тогда $\rho(f^n(x), f^m(x)) \leq \sum\limits_{k=n}^{m-1} q^k d \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} q^k d = q^n \cdot C, C = \frac{d}{1-q}$. Тогда эта последовательность фундаментальна. то есть она сходится.

$f^n(x) \to z, f^{n+1}(x) \to z$. С другой стороны $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \to f(z) \Longrightarrow f(z) = z$.

единственность. Пусть их две. Тогда при операции их образы, а значит и они сами должны стать ближе. Противоречие. $\square$

3.2. Доказательство теоремы локального существования и единственности.

Доказательство нашей теоремы Часть 1:

Потребуем $\tau \leq \delta$ (У1)

$E_I = \{x : I \to \overline{B_\epsilon}(x_0) - .\}$ $I \subset [t_0\tau, t_0 + \tau]$ - отрезок $E \subset C^0(I \to \mathbb{R}^n)$– полное метрическое пространство, E замкнутое подмножество, тогда E полное.

Пусть $\Phi : E \to E : (\Phi(x))(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds$. Тогда

1) φ определена(У1), поскольку $F \in C(D)$, а там ф-я определена и непрерывна и можно взять интеграл

2) $\Phi(x) \to C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau] \to \mathbb{R}^n)$

3) $\forall t \in \overline{B_\epsilon}(t_0)(\Phi(x))(t) \in \overline{B_\epsilon}(x_0)$. Действительно $|\Phi(x)(t) - x_0| = |\int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds| \leq M|t_0 - t| \leq M\tau \leq \epsilon$

Потребуем второе условие $\tau \leq \frac{\epsilon}{M}$ (У2)

Значит Φ действительно из E в E. Проверим, что Φ сжимающее с $q = 0,5$

$x_1, x_2 \in E, |\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)| = |\int\limits_{t_0}^{t} F(s, x_1(s))ds - F(s, x_2(s))|ds \leq$ (в силу липшивости)$|\int\limits_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_2(s)|ds \leq L|t - t_0| \cdot ||x_1 - x_2|| \leq L\tau||x_1 - x_2||x_1 - x_2||$

Положим $L\tau \leq 0,5$. Тогда все ок.

Получили, что при трех условиях $\tau \leq \delta, \tau \leq \frac{\epsilon}{M}, \tau \leq \frac{1}{2L}$ Существует единственное $x \in E_I : x$– решение $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds(**)$ по принципу сжимающего отображения. Решения зазадчи Коши на отрезке (и даже любом подотрезке) единственны.

Вторая часть:

Если $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^n$ – решение $(*)$ или мы уже знаем что или $(**)$, то $x|_{I\cap J} = \tilde{x}|_{I\cap J}$

Пусть K– любой отрезок в $I \cap J$. Тогда если x неподвижная точка $\Phi_{[t_0\tau, t_0+\tau]}$то $x|_K, \tilde{x}|_K$ - решения задачи Коши $(*)$ на K.

По части 1 для $\Phi_K x|_K = \tilde{x}|_K$. Следовательно $x|_{I\cap J} = \tilde{x}|_{I\cap J}$

4. Билет

4.1. Локальная теорема непрерывной зависимости от параметра

$*_\lambda \begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$

$F : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \in \mathbb{R}^{n+1+m}, x_0 : \Psi \to \mathbb{R}^n$ и выполнено:

1) $D = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\epsilon}(x_0(\lambda)) \times \overline{B_\xi}(\lambda_0) \subset \Omega, \forall\, \lambda \in \overline{B_\xi}(\lambda_0) x_0(\lambda) \in \overline{B_{\epsilon/2}}(x_0(\lambda_0))$

2) $F \in C(D), x_0 \in C(\overline{B_\xi}(\lambda_0)(||F||_{C(D)} \leq M)$

3) F линейно по x на D, т.е. для $\forall\, (t, x, \lambda), (t, y, \lambda) \in D |F(t, x, \lambda F(t, y, \lambda)| \leq L|x - y|$

Рисунок 1 Тогда

0. $(*_\lambda)$ имеет решение x_λ на $\overline{B_\tau}(t_0)$, $\tau = \tau(\delta, \epsilon/2, L, M)$ (из теоремы Существования и единственности) (почему $\epsilon/2$ см. лекция 49:50)

1. $x_\lambda \in C^0(\overline{B_\tau}(t_0)) \to \mathbb{R}^n$ b $\lambda \to x_\lambda$ непрерывно на $\overline{B_\xi}(\lambda_0)$. (Утверждается непрерывность из диска в множество непрерывных функций)

Эквивалентно

1'. $x(\lambda, t) = x_\lambda(t), x \in C(\overline{B_\xi}(\lambda_0) \times \overline{B_\tau}(t_0))$

Доказательство экивалентности:

$1 \to 1'$. (t, λ). Хотим построить окрестность, в которой мало будут отличатся функции.

1) $\forall\, \xi > 0 \exists\, \alpha > 0 : \forall\, \lambda' \in B_\alpha(\lambda) ||x_\lambda - x_{\lambda'}|| < \frac{xi}{2}$

2) Сама функция x_λ непрерывна. Поэтому $\forall\, \xi \exists\, \beta > 0 : \forall\, t' \in B_\beta(t) |x_\lambda(t) - x_\lambda(t')| < \frac{\xi}{2}$

Тогда $\forall\, \lambda' \in B_\alpha(\lambda), t' \in B_\beta)(t) |x_\lambda(t) - x_{\lambda'}(t')| \leq |x_\lambda(t) - x_\lambda(t')| + |x_\lambda(t') - x_{\lambda'}(t')| \leq \xi$

$1' \to 1$. Если x непрерывна на $\overline{B_\xi}(\lambda_0) \times \overline{B_\tau}(t_0)$. Поскольку компакт, x равномерно непрерывно. $\forall \xi \exists\, \gamma > 0 : \forall\, \lambda, \lambda' |\lambda - \lambda'| < \gamma \Longrightarrow \forall\, t |x(t, \lambda) - x(t, \lambda')| < \xi$

$\forall \lambda, \lambda' : |\lambda - \lambda'| < \gamma(\xi) \to ||x_\lambda - x'_\lambda||_{C^)(B_\tau(t_0))} < \xi$ – получается непрерывность.

Доказательство теоремы: Будем считать, что решения заданы на множестве $E = \{x : \overline{B_\tau}(t_0) \to \overline{B_\epsilon}(x_0)$ – непрерывно$\}$

$\Phi_\lambda : E \to E : (\Phi_\lambda(x))(t) = x_0(\lambda) + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s), \lambda) ds$. Тогда неподвижная точка Φ_λ – решение задачи Коши, то есть x_λ. Хотим понять, как эта точка будет меняться с изменением λ.

4.2. Принцип сжимающих отображений с параметром

$\Phi : \Lambda \times X \to X, X$ - полное метрическое, Λ – метрическое.

1) Φ непрерыв

2) Существует $q_0 < 1 : \forall\, \lambda \in \Lambda \Phi_\lambda$ сжимающее с коэффициентом q_0 то есть $\forall\, x, y \in X \rho(\Phi_\lambda(x), \Phi_\lambda(y)) \leq q_0 \rho(x, y)$

Тогда если $z(\lambda)$ неподвижная точка Φ_λ, то $z : \Lambda \to X$ – непрерывно.

Доказательство: Докажем, что z непр. в λ_0. $z_0 = z(\lambda_0)$

Рассмотрим последовательность $z_0, \Phi_\lambda(z_0), \Phi^2_\lambda(z_0), \ldots$. Тогда $\rho(z_0, \Phi_\lambda(z_0)) = \rho(\Phi_{\lambda_0}(z_0), \Phi_\lambda(z_0))$.

Из непрерывности Φ_λ следует, что существует $U \ni \lambda_0 : \forall\, \lambda \in U \rho(\Phi_{\lambda_0}(z_0), \Phi_\lambda(z_0)) \leq \epsilon$

$\rho(\Phi_\lambda^n(z_0), \Phi_\lambda^m(z_0)) \leq \epsilon \sum\limits_{k=n}^{m-1} q_0^k \leq \frac{\epsilon q^n}{1-q}$. Опять пользуемся фундаментальностью последовательности, поэтому последовательность имеет предел. $\Phi_\lambda^m(z_0) \to z(\lambda), m \to +\infty$.

Перейдем к пределу. $\rho(\Phi_\lambda^n(z_0), z(\lambda)) \leq \frac{\epsilon q^n}{1-q}$. при $n = 0 \rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) \leq \frac{\epsilon}{1-q}$

Решили, для каких отображений стоит применять принцип сжимающих отображений. Осталось проверить, что Φ непрерывно по λ

1) $\Phi_\lambda : E \to E$ непрерывно и сжимает с коэффициентом $0,5$. Дословно переносится из доказательства Теоремы существования и единственности. Только в нужные места встаить "непрерывно по λ"

2) Φ непрерывн.

$|\Phi(\lambda, x)(t) - \Phi(\tilde{\lambda}, \tilde{x})(t)| = |x_0(\lambda) + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s), \lambda) ds - x_0(\tilde{\lambda}) + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda}) ds| \leq |x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})| + \int\limits_{t_0}^{t} |F(s, x(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda}) ds| \leq$

$\leq |x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})| + \int\limits_{t_0}^{t} |F(s, x(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \lambda) ds| + \int\limits_{t_0}^{t} |F(s, \tilde{x}(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda}) ds|$

1) Здесь пользуемся равномерной непрерывностью $x_0(\lambda)$: Для любого $\xi \ \exists \ \alpha : |\lambda - \tilde{\lambda}| < \alpha \Longrightarrow |x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})| \leq \frac{\xi}{3}$

2) Пользуемся липшиевостью

3) Здесь пользуемся равномерной непрерывностью: Для любого $\xi \ \exists \ \beta : |\lambda - \tilde{\lambda}| < \beta \Longrightarrow |F(t, x, \lambda) - F(t, x, \tilde{\lambda})| < \xi \forall t, x$

Выражение оценивается $\leq \frac{\xi}{3} + L||x - \tilde{x}|| \cdot |t - t_0| + \xi |t - t_0| \leq \xi(\frac{1}{3} + \tau) + L\tau||x - \tilde{x}||$, где $|t - t_0|$ оценивается τ.

Теперь если потребуем еще одно доп. условие $||x - \tilde{x}|| < \xi$, то все выражение оценивается $|\Phi(\lambda, x)(t) - \Phi(\tilde{\lambda}, \tilde{x})(t)| \leq \xi(\frac{1}{3} + \tau + L\tau) \forall t$. То есть норма меньше либо равно то выражение. Значит непрерывно.

5. Билет

5.1. Глобальная теорема единственности

Рассмотрим з. Коши и $(t_0, x_0) \in \Omega, f, f'_x \in C(\Omega)$

Тогда если $x^{(1)} : I^{(1)} \to \mathbb{R}^d, x^{(2)} : I^{(2)} \to \mathbb{R}^d$ – решения з. Коши, то $x^{(1)}|_{I^{(1)} \cap I^{(2)}} = x^{(2)}|_{I^{(1)} \cap I^{(2)}}$ (причем тождественно) (!)

Доказательство: Рассмотрим $\{t \geq t_0 : x^{(1)}|_{[t_0,t]} = x^{(2)}|_{[t_0,t]}\} = A$

1) $t_0 \in A$

2) Если $t \in A$, то $\forall\, t' \in [t_0, t], t' \in A$

3) Может быть $A = [t_0, +\infty)$ Тогда $I^{(1)} = (\dots, +\infty), I^{(2)} = (\dots, +\infty), x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$ при $t \in [t_0, +\infty)$

• Может быть $A = [t_0, \tau)$
• Может быть $A = [t_0, \tau]$

Пусть $A = [t_0, \tau)$. Если $\sup I^{(1)} = \tau$ или $\sup I^{(2)} = \tau$, то (!)– $x^{(1)}|_{I^{(1)} \cap I^{(2)}} = x^{(2)}|_{I^{(1)} \cap I^{(2)}}$ (причем тождественно) верно при $t \geq t_0$ При $t \leq t_0$ разбираемся аналогично.

Пусть $\tau \in I^{(1)} \cap I^{(2)}$. Раз это не макисмум этих интервалов, то это внутренняя точка.

$x^{(1)}(\tau) = \lim\limits_{t \to \tau - 0} x^{(1)}(t) = \lim\limits_{t \to \tau - 0} x^{(2)}(t) = x^{(2)}(\tau)$ (пользуясь тем, что наши решения слева совпадают, а значит и в момент времени τ). Значит $\tau \in A$. А мы договорились, что такого не бывает.

Пусть $A = [t_0, \tau], x^{(1)}.x^{(2)}$ – реш. з. К.(1-1) $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(\tau) = x^{(1)}(\tau) = x^{(2)}(\tau) \end{cases}$

Значит эти два решения совпадают в маленькой окрестности. Т.е. $x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$ при $t \in \overline{B_\delta}(\tau)$.

Множество A таково что на $[t_0, \tau]$ совпадают В силу теоремы сущ. и единственности, примененной к (1-1) з. К. на отрезке с центром в τ. Значит они совпадают на $[t_0, \tau + \delta) \subset A$. Противоречие.

Ослабление условия $f'_x \in C(K)$

5.2. Продолжение решений ОДУ

Определение. Решение задачи Коши $x : I \to \mathbb{R}^n$ (I интервал) непродолжимо, если не существует $\hat{x} : J \to \mathbb{R}, I \subset J : \hat{x}|_I = x$

Теорема Всякое решение продолжается до непродолжимого. (Если верна теореме существования и единстевнности, то есть $f, f'_x \in C$)

Доказательство: Пусть Ξ – множество всех решений задачи Коши. Рассмотрим $J \cup_{(x:I \to \mathbb{R}^n) \in \Xi} I$. Тогда J – открытое множество.

1. J - интервал.

Если $t \in J$, то $t \in I$ для некоторого $(x : I \to \mathbb{R}^n) \in Xi$. Тогда $[t_0, t] \subset I \subset J \implies J = (inf(I), sup(J))$.

2. Определим $\overline{x} : J \to \mathbb{R}^n, \overline{x}(t) = x(t)$, если $(x : I \to \mathbb{R}^n) \in \Xi, t \in I$.

Корректность:

$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n \in \Xi, t \in I_1 \cap I_2$. Тогда $x_1(t) = x_2(t)$ из глобальной теоремы единствнности $(X_1|_{I_1 \cap I_2} = X_2|_{I_1 \cap I_2})$

3. $\overline{x} \in \Xi$

Если $t \in J$, то существует $(x : I \to \mathbb{R}^n) \in Xi, t \in I$. Тогда некоторая $B_\delta(t) \subset I$
$\Longrightarrow x|_{B_\delta(t)} = \overline{x}|_{B_\delta(t)}$
$\Longrightarrow \frac{d\overline{x}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) = f(t, \overline{x}(t))$
$\overline{x}(t_)) = x_0$
4. $\overline{x}$ непродолжимо.
Если нет, то существует $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n) \in \Xi, J \subset \tilde{I}$. НО это противоречит $J = \cup_{(x:I\to\mathbb{R}^n)\in\Xi} I$

5.3. Примеры

6. Билет

6.1. Глобальная теорема непрерывной зависимости от параметра

Рассмотрим задачу Коши $(*_\lambda)$

$\begin{cases}\dot{x} = F(t, x, \lambda)\\ x(t_0) = x_0(\lambda)\end{cases}, F, F' \in C(\Omega)$

при $\lambda = \lambda_0$, x_{λ_0} – решение $(*_{\lambda_0})$. Решение определено на некотором интервале, но мы выделим отрезок I. $x_{\lambda_0} : I \to \mathbb{R}^n$

Тогда $\exists\, U \ni \lambda_0$:

1) $\forall\, \lambda \in U$ решение $(*_\lambda)$ существует на I (по глобальной теореме единственности, раз существует, то и единственно)

2) $x(\lambda, t) = x_\lambda(t), x$ непрервано на $U \times I$.

Доказательство: Основа: решаем задачу Коши на маленьких отрезках и собираем все глобальное решение из множества локальных.

Посмотрим множество точек $K = \{(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda), t \in I\}$ – график непрерывной функции на компакте. Значит это тоже компакт.

Тогда расстояние от компакта до границы $dist(K, \partial\Omega) = \alpha > 0$. Действительно, $dist(x, \partial\Omega)$ непрерывная функция, поскольку даже липшицева (если сдвинули точку x, торасстояние до любого множества не может измениться больше чем на то, что мы сдвинули). Неперывная функция на компакте достигает своего минимума, а ноль быть не может, поскольку тогда точка x лежит на границе.

Фиксируем $\epsilon = \delta = \zeta = \frac{\alpha}{4}$

То есть $\forall\, (\hat{t}, \hat{x}, \hat{\lambda}) \in K\ \overline{B_\delta}(\hat{t}) \times \overline{B_\epsilon}(\hat{x}) \times \overline{B_\zeta}(\hat{\lambda}) \subset \hat{K} \subset \Omega$

Рассмотрим $\{(t, x, \lambda) : dist((t, x, \lambda), K) \le \frac{3\alpha}{4}\} = \hat{K}$ – компакт (замкнуто и ограничено). $\hat{L} \subset \Omega$.

$||F||_{C^0(\hat{K})} \le M, ||F'_x||_{C^0(\hat{K})} \le L$, потому что непрерывная функция на компакте. Все 4 константы, участвующие в локальных теоремах, одинаковы для всех точек компакта K.

Вывод: $\tau = \tau(\delta, \epsilon, L, M)$ можно выбрать одним и тем же для всех точек компакта K.

Рассмотрим $\{min\ I = t_{-l} < t_{-l+1} < \ldots < t_0 < t_1 < \ldots < t_k = max\ I||t_i - t_{i-1}| < \tau\}$

Рассматриваем такую последовательность задач Коши:

$$(*_i)\begin{cases}\dot{x}_i = F(t, x_i, \lambda)\\ x_i(t_{i-1}, \lambda) = \begin{cases}x_{i-1}(t_{i-1}, \lambda), & i \ge 2\\ x_0(\lambda), i = 1\end{cases}\end{cases}$$

$(*_1)$ – задача Коши с начальным условием $x_1(t_0) = x_0(\lambda)$. При $\lambda \in U_1 \ni \lambda_0$ $x_{1\lambda}$ опеределен на $[t_0, t_1]$ (и даже немного шире, потому что расстояние между сосежними точками строго меньше τ).

В частности, $x_1(t_1, \lambda)$ непрерывно по $\lambda, x_1(t_1, \lambda_0) = x_{\lambda_0}(t_1)$.

$(*_2)$ – задача Коши с начальным условием $x_2(t_1) = x_1(t_1, \lambda)$. Правая часть непрерывная функция, которая при $\lambda = \lambda_0$ попадает на наш компакт. То есть решения этой задачи при $\lambda \in U_2 \ni \lambda_0$ определен на $[t_1, t_2]$ (и даже немного шире, потому что расстояние между соседними точками строго меньше τ). $x_2(t_2, \lambda)$ непрерывно по $\lambda, x_2(t_2, \lambda_0) = x_{\lambda_0}(t_2)$.

Замечание: $x_{1,\lambda}, x_{2,\lambda}$ – решения $*_2$. По локальной или глобальной теореме единственности $x_{1,\lambda} = x_{1,\lambda}$ на пересечении областей определения.

Весь процесс продолжается и продолжается. И в итоге...

$\hat{x}(t) = x_i(t, \lambda),$ если$x_i(t, \lambda)$определено и $t \in (\frac{t_{i-1}+t_{i-2}}{2}, \frac{t_i+t_{i+1}}{2}), \lambda \in \cap U_i$

$x(t)$ определено на $[t_0, max(I)]$. Аналогично для $t \in [min(I), t_0]$. Осталось проверить, что $\hat{x}(t,\lambda)$ – решение Коши $(*)$

Действительно: Уравнение: $\forall\ t\ \exists\ (t\beta, t+\beta)\ \hat{x}|_{(t\beta,t+\beta)} = x_i|_(t\beta, t+\beta).x_i$ удовлетворяет уравнению в $t \Longrightarrow \hat{x}$ тоже, но с начальным условием $\hat{x}(t_0) = x_1(t_0) = x_0(\lambda)$.

Итак. доказали, что при $\lambda \in \cap U_i$ (конечное пересение) все решение $x(t,\lambda)$ существуют. Покажем, что $\hat{x}(t,\lambda)$ непрерывна.

Вщзьмем $\tilde{t} \in [t_i, t_{i+1}], i \geq 0$. Локально $\hat{x} = x_i$, тогда проверим, что x_i непрерывна по λ. Заметим. что зависимость от λ передается в каждую следующую задачу Коши и входит в уравнение. Но каждая функция непрерывн по $(t,\lambda)\Box$.

6.2. Теорема о продолжении решения до границы (или за границу) компакта

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n, f, f'_x \in C(\Omega)$. $K \subset \Omega, (t_0, x_0) \in \Omega, (t_0, x_0) \in \Omega, x; J \to \mathbb{R}^n$ непродолжимое решение задачи Коши.

Тогда существует $T : t_0 < T < sup(J) : x(J) \notin K$ при $t \in (T, sup(J))$

Замечание, если $sup(J) = +\infty$, то $T \in \mathbb{R}$

Доказательство: Если $sup(J) = +\infty$, то очевидно. Действительно, $T = max(t|(t,x) \in K)$

$sup(J) = t_= \in \mathbb{R}$.

Напоминание (если помним формулировку теоремы существования и единстевнности): Если $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$, то решение задачи Коши определено на $B_\tau(\tilde{t})$, причем $\tau = \tau(\epsilon, \delta, M, L)$, где эти параметры определяются так: $B = \overline{B_\delta}(\tilde{t}) \times \overline{B_\epsilon}(\tilde{x} \subset \Omega, sup_B|f| \leq M, sup|f'_x| \leq L$

Идея : если точка $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in K$, то можем гарантировать фиксированные значения для (ϵ, δ, M, L)

Рассмотрим $\rho = min_K(dist(t,x), \mathbb{R}^n \backslash \Omega) > 0$. Тогда $\tilde{K}\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : dist((t,x), K)\frac{\rho}{2}\}$ – непрерывная функция принимает значения из данного замкнутого сножетсва, поэтому тоже замкнуто и $\tilde{K} \subset \Omega.\tilde{K}$ ограничено $(K \subset B_R(0,0) \Longrightarrow \tilde{K} \subset B_{R+\rho/2}(0,0))$. Тогда $\tilde{K}$ компакт.

Положим $\epsilon = \delta = \frac{\rho}{4}$. Тогда $\forall\ (\tilde{t}.\tilde{x}) \in KB = \overline{B_\delta}(\tilde{t}) \times \overline{B_\epsilon}(\tilde{x} \subset \tilde{K}$

$sup_B|f| \leq sup_{\tilde{K}}|f| := M, sup_B|f'_x| \leq sup_{\tilde{K}}|f'_x| := L$.

Итак $\tau = \tau_K$ можно считать одинаковым для всех $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in K/$

Положим $T = t_= - \tau_K$. Если существует $t \in (\tau.t_+) : (\hat{t}, x|_{\hat{t}}) \in K$, то задача Коши $(*_y) \begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(\hat{t}) = x(\hat{t}) \end{cases}$ имеет решение $y : B_\tau(\hat{t}) \to \mathbb{R}^n$ (теорема существования и единственности с нашей количественной оценкой).

С другой стороны, $x-$ тоже решение задачи коши $(*_y)$

Тогда существует $\overline{y}$ непродолжимое решение $(*_y)$

$\overline{y}(t_0) = x(t_0) = x_0 \Longrightarrow \overline{y}$ решение $(*)$. НО $\overline{y}$ определено при $t = t_+$ (и равно $y(t_+)$), а $\overline{x}$ непроддолжимое решение $(*)$ – не определено при $t = t_+$. Противоречие с тем, что $\overline{x}$ продолжение $\overline{y}\Box$

7.

7.1. Операторы Коши

$\dot{x} = F(t,x), F, F'_x \in C(\Omega)$. Расммотрим отображение $X_{t_0t_1}(y) = \hat{x}$
$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = y \end{cases}$ $\hat{x}$ ее решение
Свойства:

1) $X_{tt} = id$
2) $X_{t_2t_3}X_{t_1t_2} = X_{t_1t_3}$. Если t_2 между t_1, t_3 – область определения совпадает. Иначе - на пересечении областей определения
3) $X_{st} = X_{ts}^{-1}$
4) $X_{ts}(y)$ непрерывно по (t,s)
5) X_{ts} определено на $A_{ts} \subset$ – открытое множество из глобальной теоремы непрерывной зависимости. $B_{ts} = X_{ts}(A_{ts}) = A_{st}$. $X_{ts} : A_{ts} \to A_{st}, X_{st} \to A_{ts}$ гомеоморфизмы. Вывод: X_{ts} гомеоморфзим.

Лемма (λ -параметр.) $\dot{x} = f(t,x,\lambda), f \in C.X^{\lambda}_{t_0t_1}$-его оператор Коши. Тогда $X^{\lambda}_{t_0t_1}(y)$ непрерывно по $(t, t_0, t_1.\lambda)$

Доказательство:

Мы решим задачу Коши: $(*)\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = y \end{cases}$. Проблема возникает в зависимости от t_0 (В доказательстве непрерывности раннее предполагали t_0 постоянным, а тут надо непрерывность по t_0 еще)

$z(s) = x(t_0 + s)$
$\begin{cases} \frac{ds}{ds}(s) = \dot{x}(t_0+s) = f(t_0+s, x(t_0,s),\lambda) = f(t_0+s, z(s),\lambda) \\ z(0) = y \end{cases}$

$(*) \iff (**)\begin{cases} \frac{ds}{ds} f(t_0+s,\lambda) \\ z(0) = y \end{cases}$. Посмотрим на эту систему, как на задачу коши с параметром-тройкой (λ, t_0, y)

$z_{\lambda,t_0,y}(s)$ непрерывно по (λ, t_0, y, s). Тогда $X^{\lambda}_{t_0t_1}(y) = z_{\lambda,t_0,y}(t_1 - t_0)$ непрерывно.

7.2. Автономные ДУ

$\dot{x} = f(x)$ – нет зависимости от времени

7.3. Сдвиг по времени

Лема Если x– решение автономного ДУ, то $\hat{x}(t) = x(t+a) \forall\ a \in \mathbb{R}$ тоже решение.
Доказательство: $\dot{\hat{x}}(t) = \dot{x}(t+a) = f(x(t+a)) = f(\hat{x}(t))\Box$
следствие Для автономного ДУ $X_{t_0t_1} = X_{t_0+a,t_1+a}$ операторы Коши зависят не от t_0, t_1, а от их разности

7.4. Преобразования потока автономного ДУ

Определение. Преобразования потока автономного ДУ – это $g^t = X_{o,t}$.
Свойства

1) $g^0 = id$
2) $g^{t+s} = g^t g^s (g^t g^s = X_{0,t} X_{0,s} = X_{s,t+s} X_{0,s} = X_{0,t+s} = g^{t+s})$
3) $g^{-t} = (g^t)^{-1}$
4) $g^t(x)$ непрерывно по (t, x)
5) g^t – гомеоморфзим

8. Билет

8.1. Линейное ДУ

$\dot{x} = A(t)x + b(t), A(t) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, A, b \in C(I), I$ – интервал. Тогда выполнено условие теоремы сущ. и един. $f'_x = A$

8.2. Продолжимость решений системв на весь интервал

Теорема Пусть $A, b \in C(I)$. Тогда все решения $\dot{x} = A(t)x + b(t), A(t) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ продолжаются на весь I

Доказательство: Пусть $[\alpha, \beta] \subset I$ Рассмотрим $x(t)$- решение $x(\alpha)$ определено. Докажем, что x определено на $[\alpha, \beta]$. Устремляя $\beta \to \sup I$ получим требуемое.

$||A(t)|| \le M, |b(t)| \le B\forall\ t$ (Норма здесь значит, что применяя A к вектору, он удлинится не более чем в M раз) $\forall\ u|Au| \le M|u|.M = nmax_{[t\in[\alpha,\beta]]}|a_{ij}(t)|, ||Au||_\infty = max|(Au)_j| \le max_{[t\in[\alpha,\beta]]}\cdot (\sum|u_i|) \le Mmax|u_i| = ||u||_\infty$

У нас будет евклидова норма $||Au||_2 \le \tilde{M}||u||_2$

$\frac{d}{dt}(||x||^2) = \frac{d}{dt}(< x, x >) = 2 < x, \dot{x} >\le 2||x||(||Ax + b||) \le 2||x||(\tilde{M}||x|| + B)$

$\frac{d}{dt}(||x||) = \frac{1}{2||x||}\frac{d}{dt}(||x||^2) \le \tilde{M}||x|| + B$

Пусть $R(t) = ||x(t)||$ (по дороге доказали, что она дифференцируема. если норма не равняется нулю)

Тогда $S(t) = e^{-(\tilde{M}+1)t}R(t)$

$\frac{ds}{dt} = -(\tilde{M}+1)s(t)+e^{-(\tilde{M}+1)t}\dot{R}(t) \le e^{-(\tilde{M}+1)t}(-R(t)\tilde{M}+1)+R(t)\tilde{M}+B) \le e^{-(\tilde{M}+1)t}(B-R(t)) \le e^{-(\tilde{M}+1)t}(B - e^{-(\tilde{M}+1)t}s(t)) \le e^{-(\tilde{M}+1)t}(b - e^{-(\tilde{M}+1)\alpha s(t)})$.

Пусть $s(\alpha) = s_0$, $s_1 = 2Be^{-(\tilde{M}+1)\alpha}$, то $s(t)$ не может превзойти $max(s_0, s_1) = \overline{s}$ (s убывает). Тогда $R(t) = e^{-(\tilde{M}+1)t}s(t) \le e^{-(\tilde{M}+1)t}\overline{s}(t)$. То есть R не может неограничено возрастать, что значит, что R определено вплоть до $\beta\square$