Лекция 7

Дифференцирование решений по параметру.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases} \qquad x(t, \lambda)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{x}_i}{\partial \lambda_j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\Big|_{(t, x(t,\lambda), \lambda)} \dfrac{\partial x_k}{\partial \lambda_j} + \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_j} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial \lambda_j}(t_0) = \dfrac{\partial x_0}{\partial \lambda_j} \end{cases}$$

$$\cancel{z_i(t)\ \partial x_i}$$

$$z_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j}(t, \lambda^0)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \lambda_j} \to \text{это } \frac{\partial^2 x_i}{\partial \lambda_j \partial t}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_i = \sum \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\Big|_{(t, x(t,\lambda^0), \lambda^0)} \cdot z_k + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{(\ \ )} \\ z_i(t_0) = \dfrac{\partial (x_0)_i}{\partial \lambda_j}(\lambda^0) \end{cases}$$

Лемма Адамара:

$f = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, $(x, y) \in \Omega \in \mathbb{R}^n$, $f, f'_x \in C$

выпуклая по x.

$\exists\ F_i(x_0, x, y)$ – непр., что

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_0, x, y)(x_i - x_i^0), \text{ при чем}$$

$$F(x_0, x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y)$$

Д-во: $f(x,y) - f(x_0,y) = \int \frac{d}{dt}\left(f(tx + (1-t)x_0, y)\right)dt =$

$$= \int_0^1 \sum (x_i - x_i^0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{(tx + (1-t)x_0, y)} dt =$$

$$= \sum (x_i - x_0^i) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{(tx+(1-t)x_0, y)} dt}_{\leftarrow F}$$

Сведение к параметру только в нач. усл.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = 0 \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \\ y(t_0) = \lambda \end{cases} \quad (**) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f(t, (x(t,\lambda), \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases} \quad (*)$$

Предл: x - решение $(*)$ при данном $\lambda \Leftrightarrow (x, \equiv\lambda)$ - реш $(**)$

Теорема: Пусть $f \in C^1$, $x_0 \in C^1$ $\quad (*)\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$

$x(t,\lambda)$ - решение $(*)$

~~Тогда $\forall i,j \; \exists$~~

$\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_n)$ Фиксируем $j \in \{1, \dots n\}$

Тогда $\forall \lambda^0 \; \exists \; z_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j}(t, \lambda^0)$ и z удовлетв задаче Коши.

$$\begin{cases} \dot{z}_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\Big|_{(t, x(t,\lambda^0))} z_k. \\ z_i(t_0) = \partial (x_0)_i / \partial \lambda_j \end{cases}$$

Д-во: (Из книжки Хартмана.)

$\lambda = \lambda^0 + \delta e_j$

$$\frac{x(t,\lambda) - x(t,\lambda^0)}{\delta}$$ — имеет предел?

$$\boxed{z_{\delta i}(t_0) = (x_{0i}(\lambda) - x_{0i}(\lambda^0)) \cdot \frac{1}{\delta} \quad (\divideontimes_\delta)}$$

$$\frac{1}{\delta}(x(t,\lambda) - x(t,\lambda^0)) = z_\delta(t)$$

$$\dot{z}_{\delta_i}(t) = \frac{1}{\delta} f_i(t, x(t,\lambda)) - f(t, x(t,\lambda^0)) = \frac{1}{\delta}\sum_k F_{ik}(t, x(t,\lambda), x(t,\lambda^0)) \cdot$$

$$\cdot \underbrace{(x_k(t,\lambda) - x_k(t,\lambda^0))}_{z_k} = \underbrace{\sum F_{ik}(t, x(t,\lambda), x(t,\lambda^0))\, z_{\delta_k}}_{(\#_\delta)}$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{z}_{0,i} = \sum_k \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_{(t,\, x(t,\lambda^0))} z_{0,k} & (\#_0) \\ z_{0i}(t_0) = \frac{\partial x_{0i}}{\partial \lambda_j}(\lambda^0) & (\divideontimes_0) \end{cases}$$

— непр. по δ как семейство задач Коши

Вывод: Если $(z_{0,i})$ — реш $(\#_0)(\divideontimes_0)$

то это предел $\delta \to 0$ решений $(\#_\delta, \divideontimes_\delta)$ т.е. $z_{\delta i} \underset{p}{\to}$

$\to z_{0i}$ => Наша ф-я дифференцируема

Следствия:

1) $\dfrac{\partial x(t,\lambda)}{\partial \lambda_j}$ непр по t,λ (теорема о непр. зависимости для (*))

2) $x(t,\lambda) \in C^1$

3) Для системы $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$ $f, x_0 \in C^1$

$\exists \left.\dfrac{\partial x(t,\lambda)}{\partial \lambda_j}\right|_{\lambda=\lambda_0} = z_j$ удовлетв. $\begin{cases} \dot{z}_i = \sum \left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_{t,x,(t,\lambda_0)} z_k + \dfrac{\partial f_i}{\partial \lambda_j}\Big|. \\ z_i(t_0) = \dfrac{\partial x_{0,i}}{\partial \lambda}(\lambda^0) \end{cases}$

Перейдем к (**), $w_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial \lambda_j}$

$$\dot{z}_i = \sum_k \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_{\dots} + \sum_l \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_l} w_l$$

$\dot{w}_i = 0$

$z_i(t_0) = \dfrac{\partial x_{0,i}}{\partial \lambda_j}(\lambda^0)$

$w_i(t_0) = \delta_{ij}$ $\quad w_i = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i = j \end{cases}$

4) Если $f \in C^2$, то можно найти $\dfrac{\partial^2 x(t,\lambda)}{\partial x_j \partial \lambda_k}$. – проверим руками. (правая часть нового уравнения будет из C^1)

5) Можно разлагать решение в асимптотич. ряды.

$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$

$$x(t,\lambda) = x(t,\lambda^0) + \sum_j \left.\frac{\partial x}{\partial \lambda_j}\right|_{\lambda_0} (\lambda_j - \lambda_j^0) + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} (\lambda \dots + o(\|\lambda - \lambda^0\| \dots$$

$x(t,\lambda^0) + \sum a_j(\lambda_j - \lambda_j^0) + \frac{1}{2}\sum b_{ij}(\lambda_j - \lambda_j^0)(\lambda_i - \lambda_i^0) + \ldots$

$\ldots + \bar{o}(|\lambda_k - \lambda^0|)^n$

подставим в $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda_0) \end{cases}$ и получаем систему.

— таким образом можно для ...

б) $X_{t_0,t_1}(x)$ для $\dot{x} = f(t,x)$

$g^t(x)$ для $\dot{x}\ f(x)$

$\Big\}\ \in C^1$ по совокупности аргументов.

~~$\dot{x}(s) = f(s+t_0,\ x(s+t_0) = f(s+t_0$~~

$\begin{cases} \dot{y}(s) = f(s+t_0,\ y(s)) \\ y(0) = x \end{cases}$ $X_{t_0 t_1}(x) = y(t_1 - t_0) \in C^1.$