

## Алгебра, программа экзамена ВШЭ, осень, первый курс

1. Целые числа, делимость, алгоритм Евклида, основная теорема арифметики.
2. Определение кольца, целостные кольца, кольцо многочленов, кольцо вычетов по отношению эквивалентности.
3. Евклидовы кольца, определение нормы, наибольший общий делитель, простые элементы, неприводимые многочлены, алгоритм Евклида.
4. Поля, характеристика поля, количество элементов в конечном поле.
5. Многочлены, деление с остатком, алгоритм Евклида. Факторкольца многочленов, явная реализация, алгебраические числа.
6. Фактор по неприводимым многочленам, построение новых полей, в том числе конечных.
7. Китайская теорема об остатках для чисел и для многочленов. Формулировка в виде изоморфизма колец.
8. Группы, подгруппы, примеры. Гомоморфизмы, изоморфизмы и автоморфизмы групп. Циклические группы и группы с конечным числом порождающих. Группа диэдра.
9. Классы смежности (левые и правые), теорема Лагранжа, нормальные подгруппы. Примеры нормальных и не нормальных подгрупп. Гомоморфизм  $S_4 \rightarrow S_3$ .
10. Нормальные подгруппы и факторгруппы. Ядра гомоморфизмов и нормальные подгруппы. Коммутант группы, нормальность коммутанта, коммутативность фактора по коммутанту.
11. Перестановки, транспозиции, чётность перестановки. Знакопеременная подгруппа, циклы длины три.
12. Действия групп на множествах, орбиты, стабилизаторы. Формула для длины орбиты. Транзитивные, свободные и точные действия.
13. Группы преобразований фигур. Группы преобразования тетраэдра и куба.
14. Действие группы на себе справа и слева. Присоединённое действие, классы сопряжённых элементов. Цикловая структура для перестановок, количество элементов в стабилизаторе данной подстановки для присоединённого действия.
15. Формула Поля-Бернсайда для числа орбит, её приложения, подсчёт различных ожерелий.
16. Общие и специальные линейные группы, фактор-группа  $GL_n$  по  $SL_n$ . Специальная линейная группа целочисленных матриц, критерий наличия целочисленной обратной матрицы у целочисленной матрицы.

17. Определение идеала в кольце, главные идеалы, образующие идеала, примеры. Гомоморфизмы колец, ядро и образ. Фактор кольца по идеалу, смежные классы, структура фактор кольца.

18. Кольца главных идеалов, евклидовы кольца - КГИ. Наибольший общий делитель в КГИ. Кольца без нетривиальных идеалов.

19. Фактор пространства, базисы в фактор пространствах. Двойственное пространство к фактор пространству и аннуляторы. Двойственные операторы, ядра и образы.