Геометрия и группы
второе полугодие 1 курса
Задачи

Лист 1

1

А

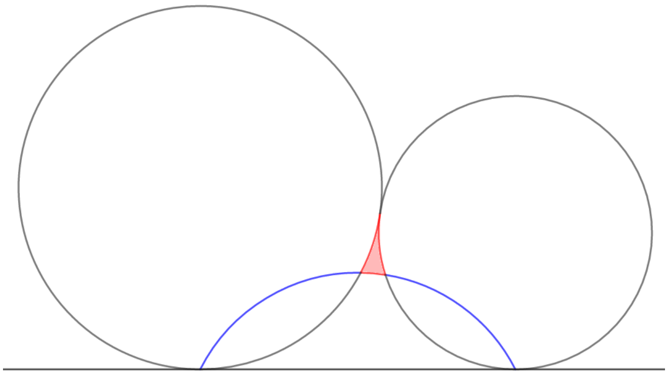
Рассмотрим треугольник в модели Пуанкаре, его вершины соответствуют каким-то трем точкам $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$. Запишем условия касания орициклов с этими координатами, выведя их из теоремы Пифагора:

$$\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)^2=\left(\frac{1}{2q_1^2}+\frac{1}{2q_2^2}\right)^2-\left(\frac{1}{2q_1^2}-\frac{1}{2q_2^2}\right)^2=\frac{1}{q_1^2q_2^2}$$
$$\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_3}{q_3}\right)^2=\left(\frac{1}{2q_1^2}+\frac{1}{2q_3^2}\right)^2-\left(\frac{1}{2q_1^2}-\frac{1}{2q_3^2}\right)^2=\frac{1}{q_1^2q_3^2}$$
$$\left(\frac{p_3}{q_3}-\frac{p_2}{q_2}\right)^2=\left(\frac{1}{2q_3^2}+\frac{1}{2q_2^2}\right)^2-\left(\frac{1}{2q_3^2}-\frac{1}{2q_2^2}\right)^2=\frac{1}{q_3^2q_2^2}$$

Тогда остается заметить, что $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$ нам известны, так как нам извесны вершины треугольников, а следовательно из данной системы уравнений мы получим q_1, q_2, q_3 (так как в левой части каждого из уравнений находится некое число, а в правой произведение неизвестных), а следовательно и p_1, p_2, p_3 (домножив $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$ на q_1, q_2, q_3). И тогда мы однозначно зададим орициклы, тем самым доказав что такая тройка единственная.

Б

Докажем от противного, тогда точка касания орициклов не всегда расположена на стороне треугольника.



Рассмотрим тот случай когда она вне стороны, тогда она пересекает орициклы в каких-то точках, причем в этих точках она также перпендикулярная орициклам(это следует из свойств орицикла и из того, что данная геодезическая заканчивается в основании орицикла). Тогда рассмотрим треугольник образованный точками пересечения геодезической с орициклами и точкой касания орициклов, углы при пересечении геодезической равны $90°$, а следовательно сумма углов данного треугольника хотя бы $180°$, чего быть не может так как сумма углов треугольника в данной плоскости менее $180°$, противоречие.
Следовательно геодезическая с концами в основаниях касающихся орициклах обязана проходить через их точку касания.

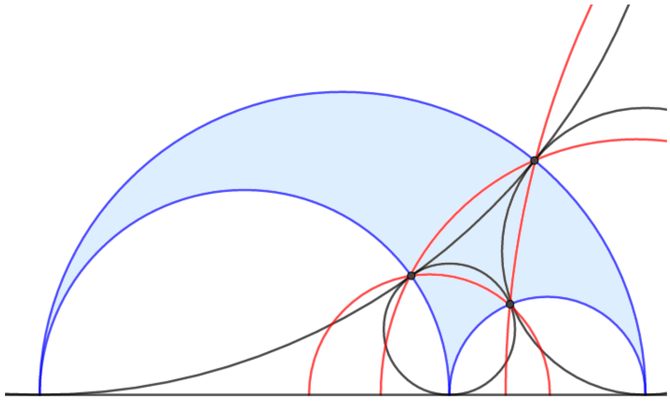
2

А

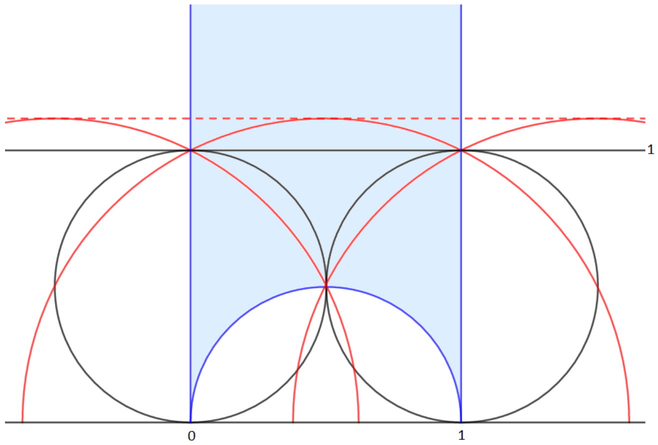
Для удобства бозначим орицикл как $O = o(p,q) = \frac{p}{q}$, геодезическую как g, расстояние между ними как $d(O,g) = d(o(p,q),g)$.
Тогда рассмотрим

Заметим, что мы можем провести проективное преобразование, так как проективное преобразование – это дробно-линейное преобразование вида $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$, что и есть преобразование в модели верхней полуплоскости Пуанкаре при $ac - bd > 0$. Пусть наше преобразование переводит точки $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$ в точки $0, 1, \infty$, тогда мы получим картинку:

Заметим, что орицикл O_{A_1} в точке 0 теперь имеет вид $\frac{0}{1}$, O_{A_2} в точке 1 имеет вид $\frac{1}{1}$, O_{A_3} в ∞ имеет вид $\frac{1}{0}$. Тогда рассмотрим расстояния от этих орициклов до средних линий. Заметим что в этом случае средние линии имеют координаты концов: $\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\}$, $\{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\}$, $\{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\}$



Синим отмечен треугольник, красным отмечены средние линии



Рассотрим линию, пересекающую две вертикальных стороны треугольника. Тогда можно заметить, что расстояние от любого из орициклов до данной средней линии равно расстоянию до пунктирной линии, тогда если обозначить рассмтриваемую среднюю линию за l, то:

$$d(O_{A_1}, l) = d(o(0,1), o(\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}, 0) = 2\ln(|0 \cdot 0 - \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 1|) = -\ln(\frac{\sqrt{5}}{2})$$

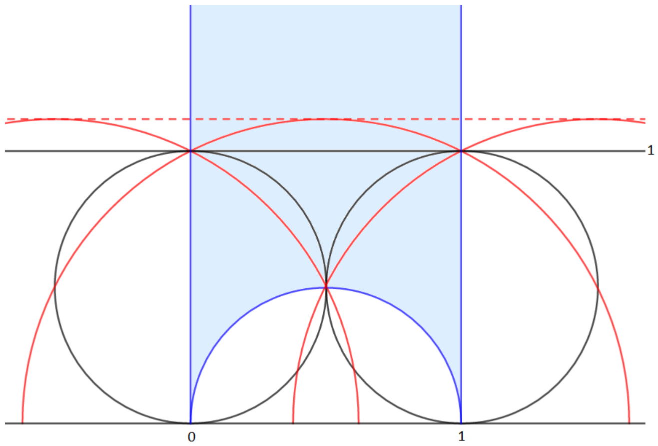
$$d(O_{A_2}, l) = d(o(1,1), o(\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}, 0) = 2\ln(|0 \cdot 1 - \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 1|) = -\ln(\frac{\sqrt{5}}{2})$$

$$d(O_{A_3}, l) = -\ln(\frac{\sqrt{5}}{2})$$

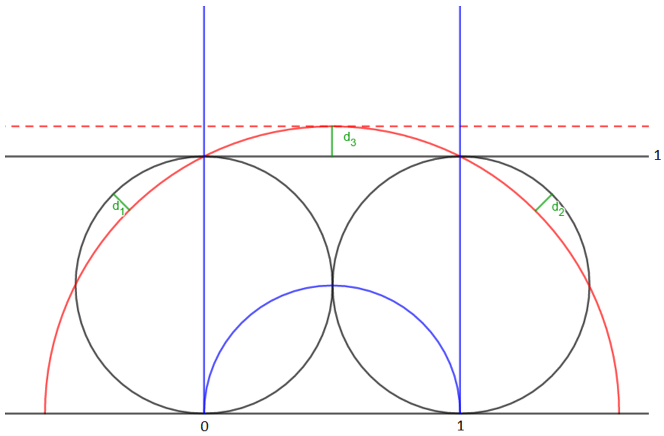
Откуда следует что для данной средней линии расстояние долюбого орицикла равно $-\ln\frac{\sqrt{5}}{2}$, тогда заметим, что это выполнено для всех средних линий, так как мы можем сделать аналогичное пробрезованиеплоскоти и рассуждения для каждой из оставшихся средних линий. Таким образом расстояние между любой средней линией и любым из орициклов равно $-\ln\frac{\sqrt{5}}{2}$

Б

Сделаем преобразование аналогичное тому, что мы делали в прошлом пункте



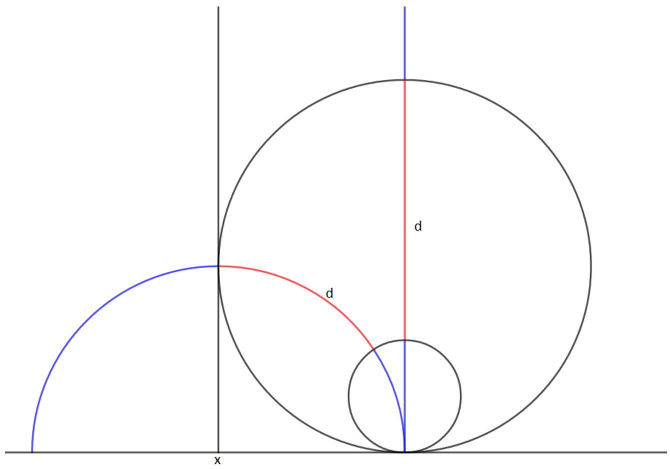
Рассмотрим геодезическую m пересекающую треугольник в каких-то точках.
Заметим что если геодезическая не пересекает какой-либо орицикл, то расстояние до нее от непересекаемого



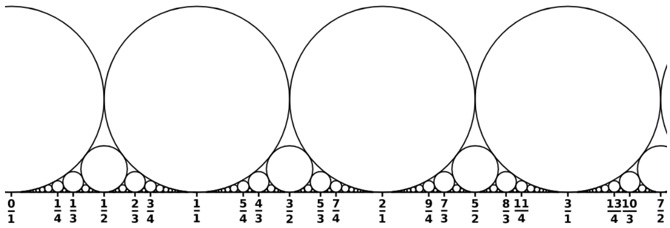
орицикла положительное, а следовательно меньше $-\ln\frac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда если расстояние от каждого орицикла до геодезической отрицательное, то она обязана пересекать все орициклы. Тогда можно заметить, что если у геодезической нет общих точек с пунктирной линией, то расстояние d_3 от неё до $o(1,0)$ будет меньше $-\ln\frac{\sqrt{5}}{2}$. Если общих точек с пунктирной линией 2, то либо d_1, либо d_2 уменьшатся и, соответственно, одно из этих расстояний будет меньше $-\ln\frac{\sqrt{5}}{2}$. В случае когда m имеет ровно одну общую точку с пунктирной линией но не совпадает ни с одной из средних линий либо d_1, либо d_2 уменьшится, так как m будет сдвинуто в какую-то сторону относительно l, а при подобном параллельном переносе одна из величин d_1, d_2 растет, а другая уменьшается.

В

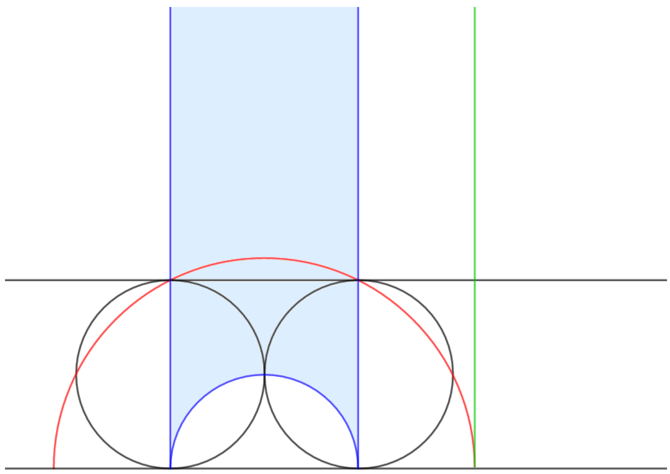
Рассмотрим расстояние от орицикла до вертикальной геодезической



Если орицикл это $o(p,q)$, а геодезичесая это g, то $d(o(p,q),g) = \ln(2q^2|x - \frac{p}{q}|)$, это следует из того что диаметр маленького орицикла равен $\frac{1}{q^2}$, а диаметр большого $2|x - \frac{p}{q}|$.
Теперь перейдем к старой конструкции, но добавим к ней все орициклы вида $\frac{p}{q}$, $\gcd(p,q) = 1$, а также другие орициклы которые можно получить сдвинув полученную картинку на $n \in \mathbb{Z}$, то есть орициклы вида $\frac{p+nq}{q}$, $\gcd(p,q) = 1$. Так мы получим все круги Форда и круги, получаемые сдвигом кругов форда на любое целое число:



Добавим геодезическую g в точке $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ (на рисунке отмечена зеленым)



Так как a иррационально, то геодезическая пересекает бесконенчое число кургов форда и бесконечно много треугольников с вершинами в точках касания кругов форда с абсолютой. Заметим что в каждом из таких треугольников найдется орицикл, для которого выполнено:

$$d(o,g) < -\ln\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Это следует из (2Б)

Теперь докажем что при $x = a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\delta > 0$ только конечное число кругов Фордаможет удовлетворять неравенству

$$d(o, g) < -\ln \frac{\sqrt{5}}{2} - \delta$$

Пусть l геодезическая с концами $\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\}$. Заметим что для неё $d(o, l) = -\ln \frac{\sqrt{5}}{2}$ для всех кругов Форда которые она пересекает, и $d(o, l) > -\ln \frac{\sqrt{5}}{2}$ для всех остальных.
Так как геодезические g, l имеют общий конец (точка $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$), то существует точка $g_1 \in g$ такая что все круги Форда пересекающие отрезок соединяющий g_1 с точкой a, удовлетворяют неравенству

$$|d(g, a) - d(l, a)| < \delta$$
$$d(g, a) \geqslant -\ln \frac{\sqrt{5}}{2} - \delta$$

С другой стороны геодезическая g без отрезка соединяющего g_1 с точкой a, пересекает только конечное число окружностей Форда, то есть только конечное число кругов Форда может удовлетворять

$$d(o, g) < -\ln \frac{\sqrt{5}}{2} - \delta$$

Таким образом мыдоказали теорему гурвица

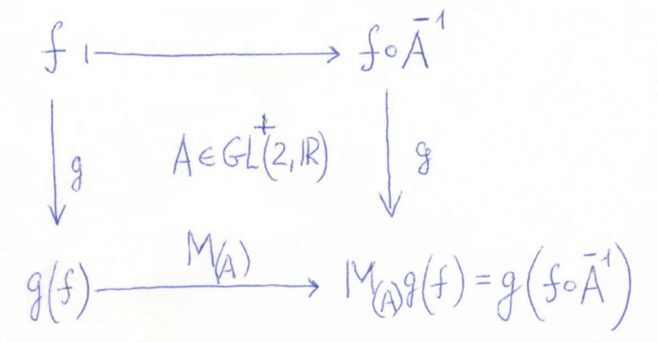
Лист 2

2.1

Заметим, что $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, а $g(f)$ геодезическая с основаниями в корнях $Ax^2 + Bx + C$, то есть геодезическая однозначно задана 2 точками.
Тогда докажем, что $f \to g(f)$ – сюръекция.
Заметим, что f не может соответствовать более чем одной геодезической, так как это значило бы, что через данные 2 точки можно провести более одной геодезической, что не так.
Заметим также что каждой геодезической соответствует хотя бы одна функция f, так как если геодезическая вертикальная с основанием в точке α, то она ей соответствует функция $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$, если же это обычная геодезическая с основаниями x_1, x_2, то ей соответствует функция $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$.
так мы доказали что это сюръекция

Теперь докажем что $g(f) = g(\tilde{f}) \Leftrightarrow \tilde{f} = \lambda f,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
Заметим что если $g(f) = g(\tilde{f})$, то геодезические, а следовательно и их основания, совпали, откуда следует что корни f и $\tilde{f}$ совпадают. то есть $f = (x - x_1)(x - x_2)$ и $\tilde{f} = f_1(x)(x - x_1)(x - x_2)$, осталось заметить, что $\deg(\tilde{f}) = 2$, откуда следует что $f_1(x) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
А из $\tilde{f} = \lambda f$ очевидно следует равенство $g(f) = g(\tilde{f})$, так как при домножении на $\lambda \in \mathbb{R}$ корни уравнения не меняются.

2.2



Пусть $g_1(f)$ – операция приводящая $f(p,q)$ к $f(\tilde{f}, 0)$, то есть сопоставляющая $f(p,q)$ функцию, с корнями совпадающими с основаниями геодезической, также можно заметить что эта функция – инъекция. Тогда

$$
\begin{aligned}
&f = f(p,q) = Ap^2 + Bpq + Cq^2 \\
&g_1(f) = g_1(f(p,q)) = f(\tilde{p}, 0) = A\tilde{p}^2 + B\tilde{p} + C \\
&A\tilde{p}_1^2 + B\tilde{p}_1 + C = A\tilde{p}_2^2 + B\tilde{p}_2 + C = 0 \\
&A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \\
&A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Откуда

$$
\begin{aligned}
&A^{-1} = \frac{1}{a_1 a_4 - a_2 a_3} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix} \\
&f \circ A^{-1}(p,q) = f\left((p,q) \cdot \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix} \right) = f(pa_4 - qa_2, qa_1 - pa_3)
\end{aligned}
$$

Мы выкинули дробь $\frac{1}{a_1 a_4 - a_2 a_3}$ так как она не влияет на корни, а следовательно и на геодезическую.

Теперь рассмотрим

$$
\begin{aligned}
&f(pa_4 - qa_2, qa_1 - pa_3) = 0\\
&g_1(f(pa_4 - qa_2, qa_1 - pa_3)) = f(p'a_4 - a_2, a_1 - p'a_3)\\
&A(p'a_4 - a_2)^2 + B(p'a_4 - a_2)(a_1 - p'a_3) + C(a_1 - p'a_3)^2 = 0\\
&A\left(\frac{p'a_4 - a_2}{a_1 - p'a_3}\right)^2 + B\frac{p'a_4 - a_2}{a_1 - p'a_3} + C = 0\\
&\frac{p'a_4 - a_2}{a_1 - p'a_3} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\\
&(p'a_4 - a_2) = (a_1 - p'a_3) \cdot \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\\
&(p'a_4 - a_2) = (a_1 - p'a_3) \cdot \tilde{p}_{1,2}\\
&p'a_4 - a_2 = a_1\tilde{p}_{1,2} - p'a_3\tilde{p}_{1,2}\\
&p'a_4 + p'a_3\tilde{p}_{1,2} = a_1\tilde{p}_{1,2} + a_2\\
&p' = \frac{a_1\tilde{p}_{1,2} + a_2}{a_3\tilde{p}_{1,2} + a_4}
\end{aligned}
$$

Откуда следует верность коммутативной диаграммы

2.3

Рассмотрим орицикл $q = 0$.
Заметим, что если $g(f)$ – геодезическая, один из концов которой является ∞, то для нее выполнено:

$$d(O\left(\frac{p}{q}\right), g(f)) = \log \frac{|f(p,q)|}{\sqrt{B^2 - 4AC}}$$

А ткаже можно заметить что расстояние между корнями уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0$ это

$$\frac{2p^2\sqrt{B^2 - 4AC}}{|Ap^2|}$$

И, соответственно, высота геодезической с основаниями в этих корнях

$$\frac{p^2\sqrt{B^2 - 4AC}}{|Ap^2|}$$

Теперь рассмотрим общий случай и приведем его к случаю $q = 0$

$$d(O\left(\frac{p}{q}\right), g(f)) =$$

$$d(M_A O\left(\frac{p}{q}\right), M_A g(f)) =$$

$$d(O\left(\frac{\tilde{p}}{0}\right), g(f \circ A^{-1})\Big) =$$

$$\log \frac{|f \circ A^{-1}\ (\tilde{p}, 0)|}{\sqrt{B^2 - 4AC} \circ A^{-1}} =$$

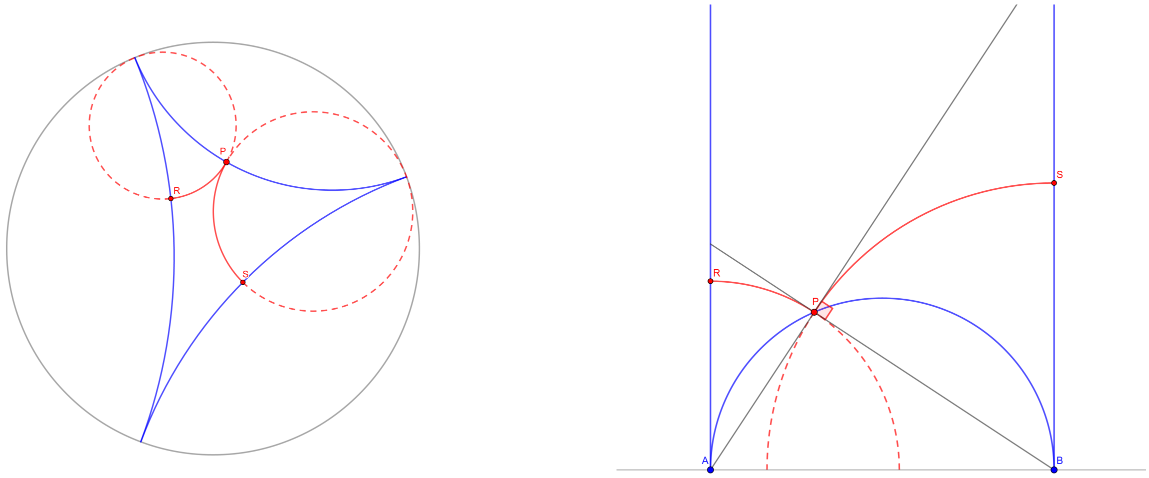
$$\log \frac{|f(p,q)|}{\sqrt{B^2 - 4AC}}$$

Лист 3

1

Идеальный треугольник состоит из 3 вершин и 3 сторон(геодезических), а следовательно имеет ту же группу симметрий что и граф K_3, то есть D_3.

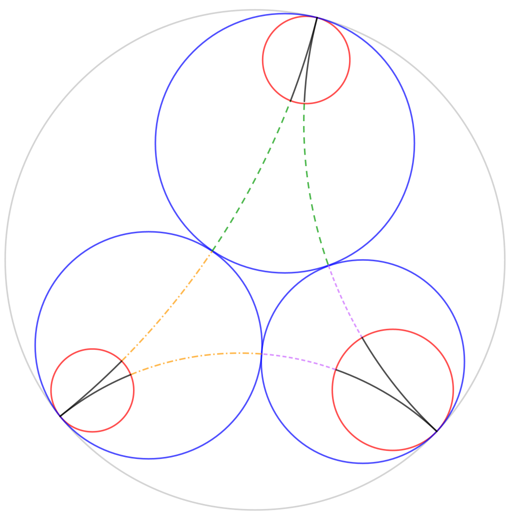
2



Проведем преобразование как в одной из задач прошлого листочка – представим наш треугольник в верхней полуплоскости с вершинами в точках $0, 1, \infty$. Тогда можно заметить что PS и PR являются дугами орициклов. Докажем этот факт, рассмотрим картинку в верхней полуплоскости и заметим, что касательные к сторонам из точек R, S совпадают с вертикальными сторонами, а следовательно центры окружностей (геодезических или орициклов), на которой лежат дуги PS и PR, лежат на этих сторонах, а так как касательная проходящая через P пересекает вертикальные стороны не в вершине, то PS и PR лежат на орициклах. Следовательно $\angle RPS$ это угол между орициклами, отмеченными на картинках красным. Тогда остается заметить, что эти орициклы касаются, а следовательно $\angle RPS = 0$.

3

Заметим, что так как $\Gamma_i = e^{\frac{1}{2}a_i}$ то установив биекцию между треугольниками и тройками (a_i, a_j, a_k) мы также установим биекцию между треугольниками и $(\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k)$, так как $\Gamma_i = e^{\frac{1}{2}a_i}$ задает биекцию между (a_i, a_j, a_k) и $(\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k)$.



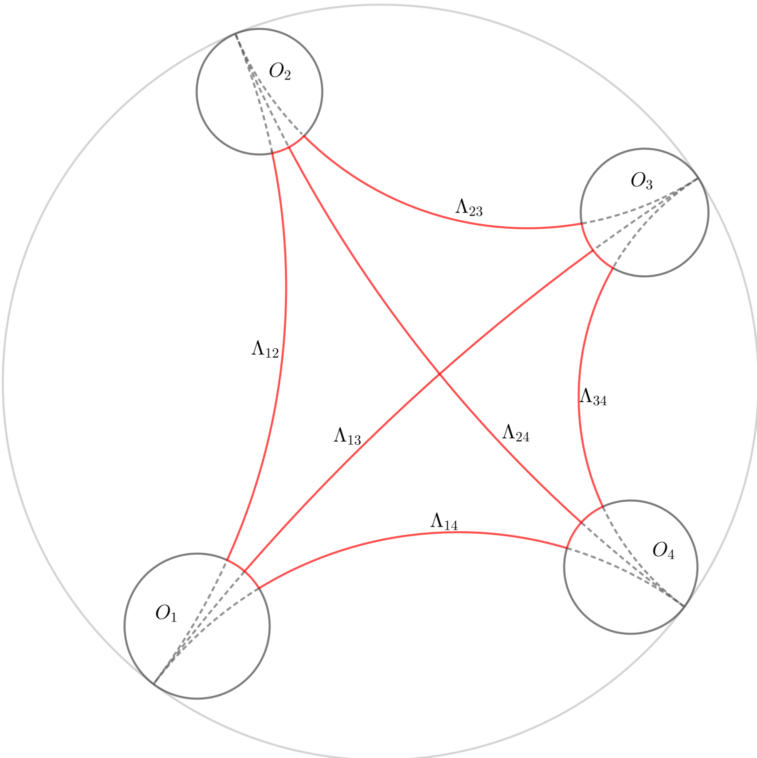
Рассмотрим картинку, где красным отмечены орициклы O_1, O_2, O_3. Тогда заметим что участки геодезических отмеченные одним цветом(зеленым, оранжевым или фиолетовым) имеют равную длину и их длины мы можем вывести из a_1, a_2, a_3 (так как мы можем составить систему из 3 уравнений с 3 неизвестными). Также заметим, что по задаче 4 мы знаем c_1, c_2, c_3. Остается заметить, что из этого мы можем вывести длину цветных (зеленых, фиолетовых или рыжих) при любом размере красных орициклов, а следовательно и в случае нулевого радиуса, тогда мы получим длину 3 сторон, по которым однозначно восстанавливается идеальный треугольник.

4

$$c_k = \frac{\Lambda_k}{\Lambda_i \Lambda_j} = \frac{e^{\frac{1}{2}a_k}}{e^{\frac{1}{2}a_i} e^{\frac{1}{2}a_j}} = e^{\frac{1}{2}a_k} \cdot e^{-\frac{1}{2}a_i} \cdot e^{-\frac{1}{2}a_j} = e^{\frac{1}{2}(a_k - a_i - a_j)}$$

5*

Рассмотрим синий орицикл



Заметим что для дуги отмеченной красным выполнено:

$$c_{13} = c_{12} + c_{23}$$

$$\frac{\Lambda_{13}}{\Lambda_{14}\Lambda_{34}} = \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{14}\Lambda_{24}} + \frac{\Lambda_{23}}{\Lambda_{24}\Lambda_{34}}$$

Домножим на $\Lambda_{14}\Lambda_{24}\Lambda_{34}$

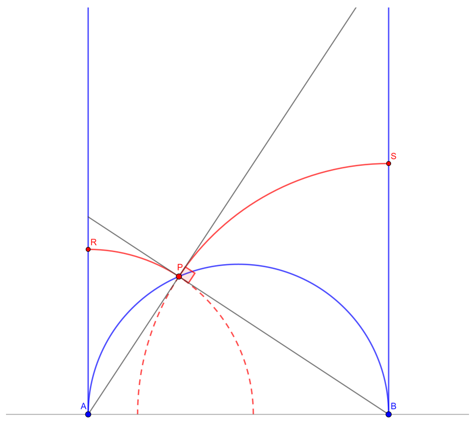
$$\Lambda_{13}\Lambda_{24} = \Lambda_{12}\Lambda_{34} + \Lambda_{23}\Lambda_{14}$$

Лист 3

Задача 1

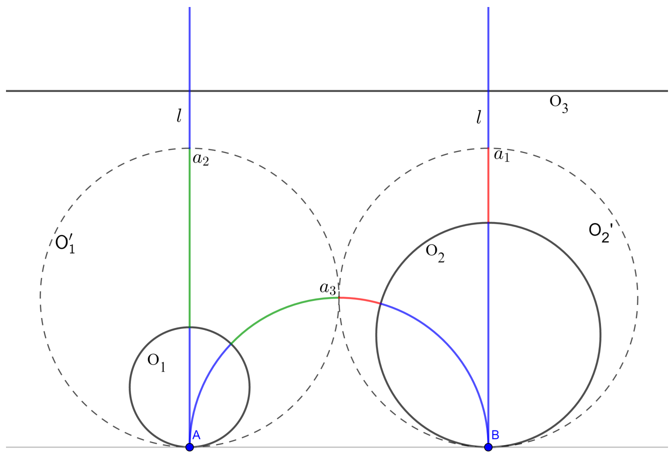
Заметим что идеальный треугольник определяется 3 своими вершинами, лежащими на абсолюте, а следовательно если треугольник перешел сам в себя, то и его вершины перешли сами в себя и наоборот. Следовательно группа симметрий идеального треугольника изоморфна S_3.

Задача 2



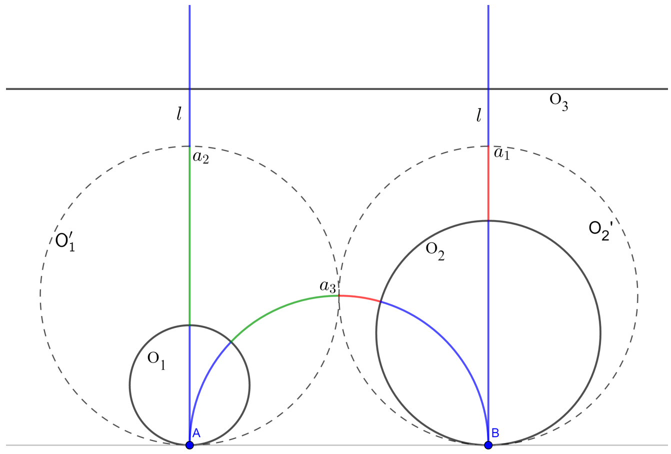
Рассмотрим преобразование при котором вершины треугольника переходят в точки $0, 1, \infty$. Заметим что $\angle APB = \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим геодезическую проходящую через R, P, заметим что PB касается этой геодезической, так как AP – радиус окружности, частью которой является RP, а $AP \perp BP$. Аналогично AP – касательная для PS. Тогда угол между PS и PR равен углу между AP и BP, то есть $\angle RPS = \frac{\pi}{4}$

Задача 4



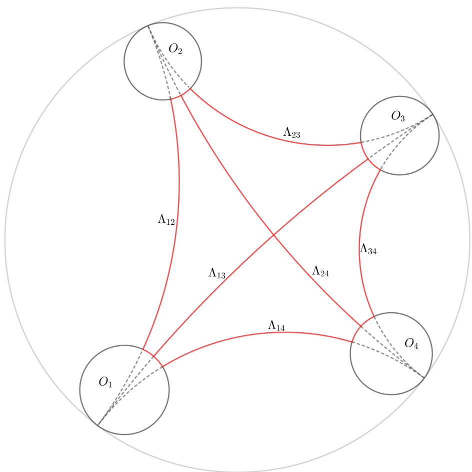
Рассмотрим треугольник в верхней полуплоскости, у которого вершины расположены в точках $0, 1, \infty$ и построим орициклы O_1', O_2', проходящие через середину стороны AB и вершины A, B. Заметим, что тогда участки a_1 и a_2 не покрытые O_1', O_2' будут иметь равную длину $l = \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2}$. Также $\ln(c_3) = l$, откуда следует $c_3 = e^{-l} = e^{-\frac{a_1+a_2-a_3}{2}} = e^{\frac{a_3 - a_1 - a_2}{2}} = \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1 \Lambda_2}$, что и требовалось доказать.

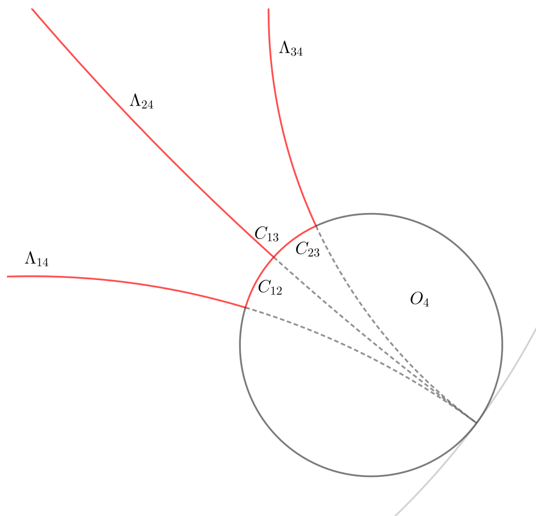
Задача 3



Заметим, что так как $\Gamma_i = e^{\frac{1}{2}a_i}$ то установив биекцию между треугольниками и тройками (a_i, a_j, a_k) мы также установим биекцию между треугольниками и $(\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k)$, так как $\Gamma_i = e^{\frac{1}{2}a_i}$ задает биекцию между (a_i, a_j, a_k) и $(\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k)$.
Тогда заметим что зная a_1, a_2, a_3 можно вывести и c_1, c_2, c_3 тем же способом что мы делали и в 4 задаче, тогда мы будем знать все стороны усеченного идеального треугольника, а следовательно однозначно его определим.

Задача 5*





Рассмотрим один из орициклов, для определенности O_4, заметим что для одной из его дуг выполнено

$$c_{13} = c_{12} + c_{23}$$

Тогда, зная что

$$c_k = \frac{\Lambda_k}{\Lambda_i \Lambda_j}$$

Можно вывести

$$\frac{\Lambda_{13}}{\Lambda_{14}\Lambda_{34}} = \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{14}\Lambda_{24}} + \frac{\Lambda_{23}}{\Lambda_{24}\Lambda_{34}}$$

Домножим на $\Lambda_{14}\Lambda_{24}\Lambda_{34}$

$$\Lambda_{13}\Lambda_{24} = \Lambda_{12}\Lambda_{34} + \Lambda_{23}\Lambda_{14}$$

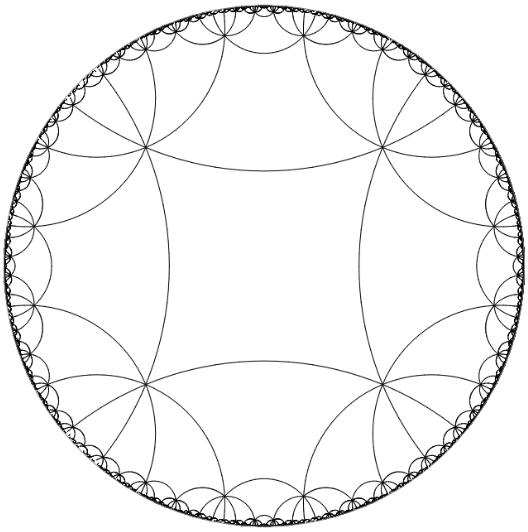
Лист 4

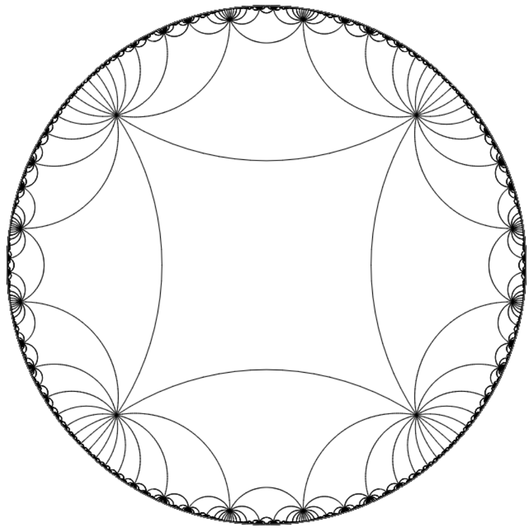
1-2

Заметим что замощение плоскости можно определить через пару (p, q), где p – количество вершин многоугольника которым замощается плоскость, а q – количество многоугольников касающихся друг друга в каждой из вершин.

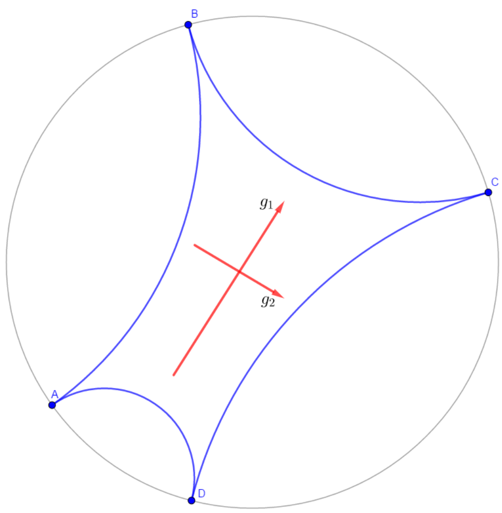
Тогда можно вывести сумму углов каждого многоугольника, зная (p, q): $p \cdot \frac{2\pi}{q}$. Тогда можно заметить, что сумма углов будет являться произведением 2π и некой дроби $\frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N}$.

Вернемся к задаче, так как мы рассматриваем замощение четырехугольниками, то $p = 4$, следовательно все возможные углы можно представить как $\frac{8\pi}{q}$, откуда следует что при $q = 8$ можно получить сумму углов π, а при $q = 32$ можно получить $\frac{\pi}{4}$, также становится очевидным то, что сумму углов $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ получить невозможно, так как $\frac{1}{\sqrt{2}}$ нельзя представить как $\frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{N}$
Ответ: а) да, б) да, в) нет





3



4