Критерии сходимости

Теорема Александрова. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : P_\xi(\partial B) = 0$

$P_{\xi_n}(B) \to P_\xi(B) \iff \forall x \in \mathbb{R} : F_\xi$ - непрер. в т. x

$F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$

Критерий Коши сх-ти п.н. $\exists \xi : \xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \iff P(\xi_n\text{-фундам.}) = 1$

$\{\xi_n - \text{фундам.}\} = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi_k(\omega)| \to 0,\ n,k \to \infty\}$

▶ $(\Rightarrow)$ $\exists \xi : \xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$. $\forall \omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega) \Rightarrow \xi_n(\omega)$ - фундам.

$P(\xi_n - \text{фундам.}) \geq P(\xi_n \to \xi) = 1$

$(\Leftarrow)$ $\omega \in \Omega$: $\xi_n(\omega)$ - фундам. Тогда $\exists \xi(\omega) : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$.

$\omega \in \Omega$: $\xi_n(\omega)$ - не фунд. Тогда положим $\xi(\omega) = 0$

$P(\xi_n \to \xi) \geq P(\xi_n \to \xi,\ \xi_n - \text{фундам.}) = 1$ ◀

Опр. ξ_n - фундам. по вероятности, если $\forall \varepsilon > 0$ $P(|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon)$ $\to 0$, $n, m \to \infty$.

Критерий Коши сх-ти по вероятности $\exists \xi : \xi_n \xrightarrow{P} \xi \iff \xi_n$ фундам. по вероятн.

▶ $(\Rightarrow)$ $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$

$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon/2) < \frac{\delta}{2}$

Пусть $n, m \geq n_0$. $P(|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon) \leq P($либо $|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}$, либо $|\xi_m - \xi| > \frac{\varepsilon}{2})$ $\leq P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon/2) + P(|\xi_m - \xi| > \varepsilon/2) < \delta$.

$(\Leftarrow)$ **Лемма.** Если ξ_n - фундаментальна по вероятности, то $\exists$ подпосл-ть $\xi_{n_k} : \xi_{n_k} \xrightarrow{п.н.} \xi$ для некоторой ξ.

(док-во критерия Коши). Пусть $\xi_{n_k} \xrightarrow{п.н.} \xi$. Докажем, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

Пусть $n_0 : \forall n, m \geq n_0 \quad P(|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon/2) < \frac{\delta}{2}$

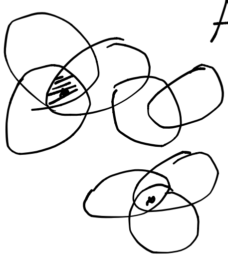
$n_0 : \forall n_k \geq n_0 \quad P(|\xi_{n_k} - \xi| > \varepsilon/2) < \frac{\delta}{2}$

Пусть $n \geq n_0$, $n_k \geq n_0$. Тогда $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \leq P(|\xi_n - \xi_{n_k}| > \varepsilon/2)$

$+P\left(|\xi_{n_k}-\xi|>\varepsilon/2\right)<\delta \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$ ◀

Доказательство леммы:

Лемма Бореля-Кантелли. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$



$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A_n \text{ б.ч.}$$

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty \Rightarrow P(A)=0$

2. Если $A_1, A_2, \ldots$ – независимы и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty$ $\Rightarrow P(A)=1$

▶ 1. $P(A)=P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\boxed{\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n}\right)=\lim\limits_{k\to\infty} P\left(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n\right)=0$

$P\left(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n\right) \le \sum\limits_{n=k}^{\infty} P(A_n) \xrightarrow{k\to\infty} 0$

2. $P(A)=\lim\limits_{k\to\infty} P\left(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1-P\left(\bigcap\limits_{n=k}^{\infty} \overline{A_n}\right)\right)$

$=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1-\prod\limits_{n=k}^{\infty} P(\overline{A_n})\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1-\prod\limits_{n=k}^{\infty}\left(1-P(A_n)\right)\right)$

$1+x\le e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\ge \lim\limits_{k\to\infty}\left(1-\prod\limits_{n=k}^{\infty} e^{-P(A_n)}\right)$

$=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1-e^{-\sum\limits_{n=k}^{\infty} P(A_n)}\right)=1$ ◀

(возвращаемся к док-ву леммы)

$n_1=1$, $n_k=\min\{j>n_{k-1}: \forall r,s\ge j \ P(|\xi_r-\xi_s|>2^{-k})<2^{-k}\}$

$A_k=\{|\xi_{n_{k+1}}-\xi_{n_k}|>2^{-k}\}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)<\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}<\infty \overset{\text{Б.-К.}}{\Rightarrow} P(A_k \text{ б.ч.})=0$

$\{A_k \text{ б.ч.}\}\not\ni\omega$. $\exists k_0 \ \forall k\ge k_0 \ |\xi_{n_{k+1}}(\omega)-\xi_{n_k}(\omega)|\le 2^{-k}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_{n_{k+1}}(\omega)-\xi_{n_k}(\omega)|<\infty$

$(\xi_{n_0}=0) \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\xi_{n_{k+1}}(\omega)-\xi_{n_k}(\omega)\right) < \infty$, $= \lim\limits_{k\to\infty}\xi_{n_k}(\omega)=:\xi(\omega)$

$\forall \omega \in \{A_k \text{ б.ч.}\}$ $\quad \xi(\omega) := 0$

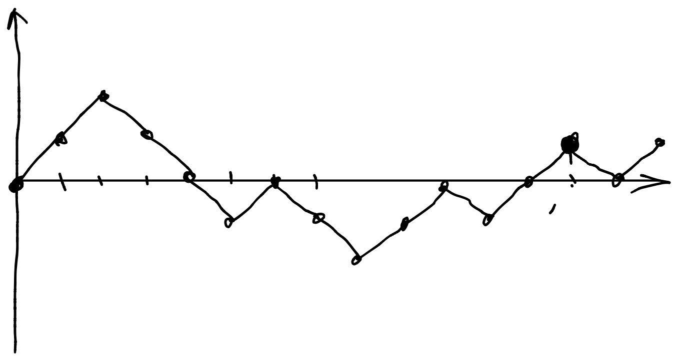
Тогда $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, $\quad k \to \infty$ ∎

Простейшее симметричное случайное блуждание на прямой.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые $U(\{-1, 1\})$

$S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ — случайное блуждание

$\forall \omega$ $\{S_n(\omega), n \in \mathbb{Z}_+\}$ — траектория

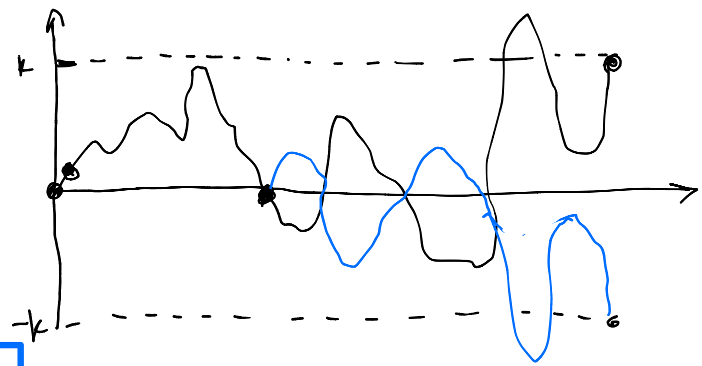


$P(S_n = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot C_n^x$,

$x - (n - x) = k \Rightarrow x = \frac{n+k}{2}$

$P(S_n = k) = 0$, если $|k| > n$, или $n + k$ — нечетно

Пусть $k > 0$. $P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_n = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(C_{n-1}^{\frac{n+k-2}{2}} - C_{n-1}^{\frac{n-k-2}{2}}\right)$



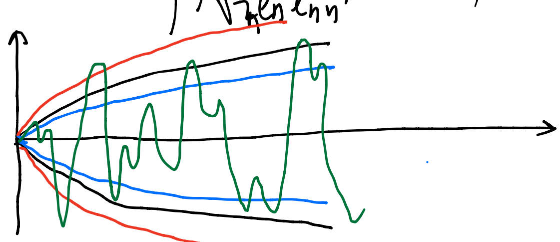
кол-во траекторий в $(n, -k)$: $S_1 > 0$ = кол-во траекторий в (n, k), пересекающих 0 = # траекторий из $(1, 1)$ в $(n, -k)$ = $C_{n-1}^{\frac{n-k-2}{2}}$

11 По ЗБЧ $\forall \omega_n \uparrow \infty$ $\quad \frac{S_n}{\sqrt{n}\, \omega_n} \xrightarrow{P} 0 \qquad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ оптимальность?

Теорема (ЗПЛ) $P\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = 1\right) = 1$

$\|$

$P\left(\forall \varepsilon > 0 \; \left\{\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} > 1 - \varepsilon\right\} \text{ б.ч.}\right\} \wedge \overline{\left\{\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} > 1 + \varepsilon\right\} \text{ б.ч.}\right\}}\right)$



$\pm\sqrt{2n\ln\ln n}$

$\pm(1+\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$

$\pm(1-\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$

$$\frac{w_n}{\sqrt{\ln\ln n}} \to \infty \implies \frac{S_n}{\sqrt{n}\, w_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

Как доказывать, что $P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \eta_n = 1\right) = 1$?

$$\iff 1)\ P(\forall \varepsilon > 0\quad \eta_n > 1-\varepsilon \text{ б.ч.}) = 1,\quad 2)\ P\left(\forall \varepsilon>0\quad \overline{\eta_n > 1+\varepsilon \text{ б.ч.}}\right) = 1$$

$$1) \iff P\left(\forall k \in \mathbb{N}\quad \eta_n > 1 - \tfrac{1}{k} \text{ б.ч.}\right) = 1$$

$$\overset{\shortparallel}{\lim_{k\to\infty}} P\left(\eta_n > 1 - \tfrac{1}{k} \text{ б.ч.}\right)$$

Если η_n – независимы и $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\eta_n > 1 - \frac{1}{k}\right) = \infty$, то $P\left(\eta_n > 1 - \frac{1}{k} \text{ б.ч.}\right) = 1$

$$2) \iff P(\exists \varepsilon > 0\quad \eta_n > 1+\varepsilon \text{ б.ч.}) = 0 \iff P\left(\exists k \in \mathbb{N}\quad \eta_n > 1 + \tfrac{1}{k} \text{ б.ч.}\right) = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{\lim_{k\to\infty}} P\left(\eta_n > 1 + \tfrac{1}{k} \text{ б.ч.}\right)$$

Если $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\eta_n > 1 + \frac{1}{k}\right) < \infty$, то $P\left(\eta_n > 1 + \frac{1}{k} \text{ б.ч.}\right) = 0$

Теорема Муавра-Лапласа (локальная).

Пусть $S_n \sim Bin(n,p)$, $\varphi(n) = o(n^{2/3})$

Тогда

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+:\ |k-np|\le\varphi(n)} \left| \frac{P(S_n = k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(np-k)^2}{2np(1-p)}}} - 1 \right| \longrightarrow 0.$$

Если S_n - простейшее симметр. случ. блуждание $\implies \frac{S_n + n}{2} \sim Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}(S_n^{+n}) = (\xi_1^{+1} + \ldots + \xi_n^{+1})\frac{1}{2}$$

$$\implies P(S_n = 2k - n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n/2}} e^{-\frac{(n/2-k)^2}{n/2}}$$

$$|k - n/2| \le \varphi(n)$$

$$\implies P(S_n = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n/2}}.$$

Док-во локальной теоремы: $P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$

Формула Стирлинга: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Итак,
$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}\, \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}\left(1 + O\left(\tfrac{1}{k}\right) + O\left(\tfrac{1}{n-k}\right)\right) p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sqrt{\frac{1}{k/n\cdot(1-k/n)}} \cdot \frac{1}{(k/n)^k (1-k/n)^{n-k}}\, p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}} \left(\frac{p}{k/n}\right)^k \cdot \left(\frac{1-p}{1-k/n}\right)^{n-k}$$

$$\left(\frac{p}{k/n}\right)^k \left(\frac{1-p}{1-k/n}\right)^{n-k} = \exp\left[-\left(k \ln\frac{k/n}{p} + (n-k)\ln\frac{1-k/n}{1-p}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-n\left(\frac{k}{n}\ln\frac{k/n}{p} + \left(1 - \frac{k}{n}\right)\ln\frac{1-k/n}{1-p}\right)\right]$$

$$f(x) = x\ln\frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p}, \quad x\in(0,1)$$

$$f'(x) = (\ln x - \ln p) + \cancel{\frac{1}{x}\cdot x} - \left(\ln(1-x) - \ln(1-p)\right) - \cancel{\frac{1}{1-x}\cdot(1-x)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}.$$

$$f(p) = 0, \quad f'(p) = 0, \quad f''(p) = \frac{1}{p(1-p)}.$$

$$f(x) = \frac{1}{p(1-p)}\cdot\frac{(x-p)^2}{2} + o\left((x-p)^3\right)$$

$$\exp\left[-n f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \exp\left[-n\left(\frac{1}{p(1-p)}\cdot\frac{(k/n-p)^2}{2} + O\left(\left(\frac{k}{n}-p\right)^3\right)\right)\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)} + \underbrace{O\left(\frac{(k-np)^3}{n^2}\right)}_{\to 0}\right]$$

$$\frac{|k-np|^3}{n^2} \le \frac{\varphi^3(n)}{n^2} = o\left(\frac{(n^{2/3})^3}{n^2}\right) = o(1)$$

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\exp\left[-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right]$$

Интегральная теорема. Пусть $S_n \sim Bin(n,p)$. Тогда

$$\sup_{-\infty\le a<b\le+\infty}\left|P\left(a \underset{\le}{<} \frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \underset{\le}{<} b\right) - \underbrace{\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx}_{=P(a<\eta<b),\ \eta\sim N(0,1)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Иными словами, $\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} \eta\sim N(0,1)$.

Если S_n – блуждание, то $\frac{S_n+n}{2}\sim Bin(n,\frac{1}{2})$. Тогда $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \eta\sim N(0,1)$

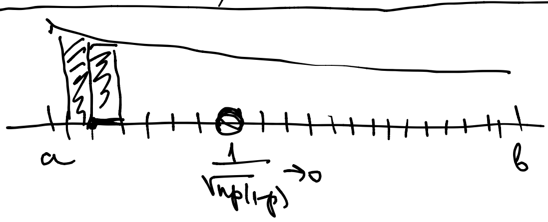
Док-во интегральной теоремы.

$$P\left(a\sqrt{np(1-p)}+np < S_n < b\sqrt{np(1-p)}+np\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+\cap\Delta} P(S_n=k) \sim \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

$$\Delta = \left(a\sqrt{np(1-p)}+np,\ b\sqrt{np(1-p)}+np\right)$$

$$\tilde{\Delta} = (a,b)$$

Замена $y = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \Rightarrow y\in(a,b)$



$$\sum_{y\in(a,b):\ y=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}},\ k\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-y^2/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}dy$$

Теорема Пуассона. Пусть $S_n\sim Bin\left(n, \frac{\lambda}{n}(1+o(1))\right)$. Тогда $S_n \xrightarrow{d} \eta\sim Pois(\lambda)$

Достаточно док-ть, что $\forall k\in\mathbb{Z}_+ \quad P(S_n=k)\to P(\eta=k)$

► $P(S_n=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{\cancel{n^k}}{k!}\frac{\lambda^k}{\cancel{n^k}}(1-p)^n = \frac{\lambda^k}{k!}(1-p)^n \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ◄

$(1-p)^n = \exp[n\ln(1-p)] = \exp[n(-p+o(p^2))]$

$= \exp[-\lambda + o(1)]$

$\boxed{12}$

УЗБЧ

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независ., $E\xi_n^2<\infty$,

$0<b_n \uparrow +\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < \infty$

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{п.н.} 0$.

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независ. одинаково распр., $E|\xi_1|<\infty$

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{п.н.} 0$

Нер-во Колмогорова. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независ., $E\xi_n=0$, $E\xi_n^2<\infty$. Тогда

1) $P(\max\limits_{1\le k\le n} |S_k| \geq \varepsilon) \le \frac{E|S_n|^2}{\varepsilon^2}$

2) Если $\exists C>0 : P(|\xi_n|\le C)=1 \ \forall n\in\mathbb{N}$, то

$P(\max\limits_{1\le k\le n} |S_k|\geq\varepsilon) \geq 1 - \frac{(C+\varepsilon)^2}{ES_n^2}$

► $A = \{\max\limits_{1\le k\le n}|S_k|\geq\varepsilon\}$, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k = \{|S_1|<\varepsilon, \ldots, |S_{k-1}|<\varepsilon, |S_k|\geq\varepsilon\}$

1) $E|S_n|^2 \geq E|S_n|^2 I_A = \sum\limits_{k=1}^n E|S_n|^2 I_{A_k} = \sum\limits_{k=1}^n E(\underline{S_n - S_k} + \underline{S_k})^2 I_{A_k}$

$= \sum\limits_{k=1}^n E\Big(\underbrace{(S_n-S_k)^2 I_{A_k}}_{\geq 0} + 2(S_n-S_k)S_k I_{A_k} + S_k^2 I_{A_k}\Big) \geq 2\sum\limits_{k=1}^n \underbrace{E(S_n - S_k)}_{0} E S_k I_{A_k}$

$+ \sum\limits_{k=1}^n E S_k^2 I_{A_k} = \sum\limits_{k=1}^n ES_k^2 I_{A_k} \geq \varepsilon^2 \sum\limits_{k=1}^n P(A_k) = \varepsilon^2 P(A)$

2) $ES_n^2 = ES_n^2 I_A + ES_n^2 I_{\bar A} \le ES_n^2 I_A + \varepsilon^2(1-P(A))$

$ES_n^2 I_A = \sum\limits_{k=1}^n E(S_n - S_k)^2 I_{A_k} + \sum\limits_{k=1}^n ES_k^2 I_{A_k}$

$$\sum_{k=1}^{n} E(S_n-S_k)^2 I_{A_k} = \sum_{k=1}^{n} E(\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n)^2 I_{A_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E(\xi_{k+1}^2+\ldots+\xi_n^2 + \sum_{i\neq j}\cancel{\xi_i\xi_j}^{\,0}) P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\sum_{i=k+1}^{n} E\xi_i^2$$

$$ES_n^2 = E(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2) \geqslant \sum_{i=k+1}^{n} E\xi_i^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} E(S_n-S_k)^2 I_{A_k} \leq ES_n^2 P(A)$$

$$\sum_{k=1}^{n} ES_k^2 I_{A_k} \leq (c+\varepsilon)^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = (c+\varepsilon)^2 P(A)$$

$$|S_k| = |S_{k-1}+\xi_k| \leq |S_{k-1}|+|\xi_k|$$

Итак, $ES_n^2 \leq ES_n^2 P(A) + (c+\varepsilon)^2 P(A) + \varepsilon^2(1-P(A))$

$$P(A) \geqslant \frac{ES_n^2-\varepsilon^2}{ES_n^2+(c+\varepsilon)^2-\varepsilon^2} = 1-\frac{(c+\varepsilon)^2}{ES_n^2+(c+\varepsilon)^2-\varepsilon^2} > 1-\frac{(c+\varepsilon)^2}{ES_n^2}$$ ◀

Теорема Колмогорова – Хинчина. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые, $E\xi_n = 0$, $E\xi_n^2 < \infty$. Тогда

1) Если $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n^2 < \infty$, то и $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ сходится п.н.

2) Если $\forall n\ P(|\xi_n| \leq c) = 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ сходится п.н., то $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n^2 < \infty$

▶ **Лемма** ξ_n фунд. п.н. $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \lim_{n\to\infty} P(\sup_{k\geqslant 1}|\xi_{n+k}-\xi_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$

▶ ξ_n фунд. п.н. $\Leftrightarrow P(\xi_n$ фунд.$) = 1 \Leftrightarrow P(\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,k \geqslant n_0\ |\xi_{n+k}-\xi_n| < \varepsilon) = 1 \Leftrightarrow P(\exists\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists m>n\ |\xi_m-\xi_n| \geqslant \varepsilon) = 0$

$\Leftrightarrow P(\exists k\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists m>n\ |\xi_m-\xi_n| \geqslant \frac{1}{k}) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} P(\forall n\in\mathbb{N}\ \exists m>n\ |\xi_m-\xi_n| \geqslant \frac{1}{k}) = 0$

$\Leftrightarrow \forall k\ P(\forall n\in\mathbb{N}\ \{\exists m>n\ |\xi_m-\xi_n| \geqslant \frac{1}{k}\}) = 0$

$\Leftrightarrow \forall k\ \lim_{n\to\infty} P(\exists m>n\ |\xi_m-\xi_n| \geqslant \frac{1}{k}) = 0$

$\Leftrightarrow \forall k\ \lim_{n\to\infty} P(\sup_{s\geqslant 1}|\xi_{n+s}-\xi_n| \geqslant \frac{1}{k}) = 0$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon\ \lim_{n\to\infty} P(\sup_{s\geqslant 1}|\xi_{n+s}-\xi_n| \geqslant \varepsilon) = 0$ ◀

1) $P(\sup_{N\geqslant k\geqslant 1}|S_{n+k}-S_n| \geqslant \varepsilon) = P(\sup_{N\geqslant k\geqslant 1}|\xi_{n+1}+\ldots+\xi_{n+k}| \geqslant \varepsilon) \leq \frac{E|S_{n+N}-S_n|^2}{\varepsilon^2}$

$$=\sum_{i=1}^{N} E\xi_{n+i}^2 / \varepsilon^2 < \sum_{i=1}^{\infty} E\xi_{n+i}^2/\varepsilon^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$P(\sup_{k\geq 1}|S_{n+k}-S_n|>\varepsilon) = P(\bigcap_N \{\sup_{N\geq k\geq 1}|S_{n+k}-S_n|>\varepsilon\})$$

$$< \sum_{i=1}^{\infty} E\xi_{n+i}^2/\varepsilon^2 \to 0,\ n\to\infty \Rightarrow \text{по лемме } S_n \text{ сх-ся.}$$

2) Пусть S_n сходится п.н. По лемме $\forall \varepsilon>0$ $P(\sup_{k\geq 1}|S_{n+k}-S_k|\geq\varepsilon)\to 0$

$\exists n_0\in N$ $\forall n\geq n_0$ $P(\sup_{k\geq 1}|S_{n+k}-S_k|\geq\varepsilon) < \frac{1}{2}$

$$P(\sup_{N\geq k\geq 1}|S_{n+k}-S_k|\geq\varepsilon) \geq 1-\frac{(c+\varepsilon)^2}{E(S_{n+N}-S_n)^2} = 1-\frac{(c+c)^2}{\sum_{i=1}^{N} E\xi_{n+i}^2}$$

Если $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n^2=\infty$, то $\sum_{i=1}^{N} E\xi_{n+i}^2 \to\infty$, $N\to\infty$

$\exists N:$ $P(\sup_{N\geq k\geq 1}|S_{n+k}-S_k|\geq\varepsilon)\geq\frac{1}{2}$ — противоречие ◀

Док-во УЗБЧ 1. Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\xi_n}{b_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{\xi_n-E\xi_n}{b_n}\right)^2<\infty$, то

по т. К-Х $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n-E\xi_n}{b_n}<\infty$ п.н.

Лемма Кронекера. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, $0<a_n\uparrow\infty$.

Тогда $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$

$$x_n=\frac{\xi_n-E\xi_n}{b_n},\quad a_n=b_n \quad \overset{\text{л.К}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\cancel{b_k}\cdot\frac{\xi_k-E\xi_k}{\cancel{b_k}} = \frac{S_n-ES_n}{b_n}\xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \ \blacksquare$$

Док-во УЗБЧ 2. $\tilde{\xi}_n=\xi_n I(|\xi_n|\leq n)$

Будем считать, что $E\xi_1=0$.

$$E|\xi_1| = E\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_1|I(k-1\leq|\xi_1|<k) = \sum_{k=1}^{\infty} E|\xi_1|I(k-1\leq|\xi_1|<k)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(k-1\leq|\xi_1|<k) < E|\xi_1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} kP(k-1\leq|\xi_1|<k)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(k-1\leq|\xi_1|<k) = \left[\sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi_1|\geq k-1)\right]-1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kP(k-1\leq|\xi_1|<k) = \sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi_1|\geq k-1)$$

$$E|\xi_1|<\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_1|\geq k-1)<\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_1|\geq k)<\infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_k|\geq k)<\infty \overset{\text{Л.Б-К}}{\Longleftrightarrow} P(|\xi_k|\geq k \text{ б.ч.})=0.$$

$$P(|\xi_k|\geq k \text{ б.ч.})=0 \Rightarrow P(\exists n_0\ \forall n\geq n_0\quad \xi_n=\tilde{\xi}_n)=1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{\tilde{\xi}_1+\ldots+\tilde{\xi}_n}{n}\right| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

Интересует $\dfrac{\tilde{\xi}_1-E\tilde{\xi}_1+\ldots+\tilde{\xi}_n-E\tilde{\xi}_n}{n}$. Докажем, что $\dfrac{E\tilde{\xi}_1+\ldots+E\tilde{\xi}_n}{n}\to 0$

Заметим, что $\xi_1 I(|\xi_1|\leq n) \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi_1 \overset{\text{Т. Лебега}}{\Longrightarrow} E\xi_1 I(|\xi_1|\leq n) \to E\xi_1=0$

$$\underset{\|}{} \qquad E\xi_n I(|\xi_n|\leq n)=E\tilde{\xi}_n$$

Лемма Тёплица. Пусть $x_n\to x$, $a_n>0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k x_k}{\sum_{k=1}^{n}a_k}=x$.

Т.к. $E\tilde{\xi}_n\to 0$, то $\dfrac{E\tilde{\xi}_1+\ldots+E\tilde{\xi}_n}{n}\to 0$

13 Следовательно, $\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\xrightarrow{\text{п.н.}}0 \Leftrightarrow \dfrac{\tilde{\xi}_1-E\tilde{\xi}_1+\ldots+\tilde{\xi}_n-E\tilde{\xi}_n}{n}\xrightarrow{\text{п.н.}}0$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{D\tilde{\xi}_i}{i^2}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E\tilde{\xi}_i^2}{i^2}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\sum_{k=1}^{i}E\tilde{\xi}_i^2 I(k-1\leq|\xi_i|<k)$$

$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\sum_{k=1}^{i}k\cdot E|\xi_i| I(k-1\leq|\xi_i|<k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{k}{i^2}E\big(|\xi_i|\cdot I(k-1\leq|\xi_i|<k)\big)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{i^2}E|\xi_1|I(k-1\leq|\xi_1|<k)=\sum_{k=1}^{\infty}kE|\xi_1|I(k-1\leq|\xi_1|<k)\cdot\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{i^2}$$

$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\cancel{k}E|\xi_1|I(k-1\leq|\xi_1|<k)\cdot\frac{C}{\cancel{k}}$$

$$=C\sum_{k=1}^{\infty}E|\xi_1|I(k-1\leq|\xi_1|<k)=CE|\xi_1|<\infty$$

По УЗБЧ 1 $\dfrac{\tilde{\xi}_1-E\tilde{\xi}_1+\ldots+\tilde{\xi}_n-E\tilde{\xi}_n}{n}\xrightarrow{\text{п.н.}}0 \Rightarrow \dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\xrightarrow{\text{п.н.}}0$ ◀

Вопрос. Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots$ — н.о.р. сл.в., с $E\xi_1=a\geq 0$. Тогда $\dfrac{S_n-ES_n}{n}\xrightarrow{P}0$,

т.е. $\forall\varepsilon>0\quad P(|S_n-ES_n|>\varepsilon n)\to 0$. Какова скорость сходимости?

Предположим, что $E e^{\xi_1 \cdot u} < \infty$ для некоторого $u > 0$

$$P(S_n > ES_n + \varepsilon n) = P(uS_n > u(ES_n + \varepsilon n)) =$$
$$= P(e^{uS_n} > e^{u(ES_n+\varepsilon n)}) \leqslant \frac{Ee^{uS_n}}{e^{u(ES_n+\varepsilon n)}} = \frac{(Ee^{\xi_1 u})^n}{e^{u(na+\varepsilon n)}}$$
$$= [\lambda(u)]^n \cdot e^{-u(na+\varepsilon n)} = \exp[n(-u(a+\varepsilon) + \ln \lambda(u))]$$

$\exists u: \quad -u(a+\varepsilon) + \ln \lambda(u) < 0$

возьмем $u = \arg\min \left(-u(a+\varepsilon) + \ln \lambda(u)\right)$

$P(S_n > ES_n + \varepsilon n) \leq e^{-C \cdot n}$, $C = -u(a+\varepsilon) + \ln \lambda(u)$

Аналогично, $P(S_n < ES_n - \varepsilon n) \leq e^{-\tilde{C} n}$.

Пример. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \sim Bern(p)$. $P(S_n < ES_n - \varepsilon n) =$
$$= P(S_n < (p-\varepsilon)n) \geqslant P(S_n = 0) = (1-p)^n$$

Центральная предельная теорема

Теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – н.о.р. сл.в. с $E\xi_1 = a$, $D\xi_1 = \sigma^2$.
Тогда $\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} \eta \sim N(0,1)$.

Характеристические функции

Пусть ξ – случ. величина. Тогда $\varphi_\xi(x) = E e^{i\xi x} :=$
$$= E\cos\xi x + i E \sin \xi x.$$

Если ξ – случ. вектор, то $\varphi_\xi(x) = E e^{i\langle \xi, x\rangle}$.

Примеры: 1) $\xi \sim Bern(p)$, то $\varphi_\xi(x) = (1-p) + p \cdot e^{ix}$.

2) $\xi \sim U[a,b]$, то $\varphi_\xi(x) = \int_a^b e^{ixt} \cdot \frac{1}{b-a}\, dt$
$$= \left.\frac{e^{ixt}}{ix(b-a)}\right|_a^b = \frac{e^{ixb} - e^{ixa}}{ix(b-a)}.$$

3) $\xi \sim N(0,1)$, то $\varphi_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-ix)^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dt = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Пусть $\eta = a\xi + b$. Тогда $\varphi_\eta(x) = E e^{i\eta x} = E e^{i(a\xi+b)x}$
$= e^{ibx} E e^{iax\xi} = e^{ibx}\varphi_\xi(ax)$

4) $\eta \sim N(a, \sigma^2)$. Пусть $\xi \sim N(0,1)$. Тогда $\sqrt{\sigma^2}\xi + a \overset{d}{=} \eta$

$\varphi_\eta(x) = \varphi_{\sqrt{\sigma^2}\xi + a}(x) = e^{iax}\varphi_\xi(\sqrt{\sigma^2}x) = e^{iax - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2}$.

Теорема (о единственности) Пусть ξ, η — случайные вектора. Тогда $\xi \overset{d}{=} \eta \iff \varphi_\xi = \varphi_\eta$.

Теорема (о независимости). Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — случ. величины. Тогда $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимы $\iff \varphi_{(\xi_1,\dots,\xi_n)}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\xi_j}(x_j)$ $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

► Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимы. Тогда $\varphi_{(\xi_1,\dots,\xi_n)}(x_1,\dots,x_n) =$
$= E e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)} =$
$= E\left(e^{i\xi_1 x_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(e^{i\xi_n x_n}\right) = E e^{i\xi_1 x_1}\cdot\ldots\cdot E e^{i\xi_n x_n}$, т.к.

$E\left(\cos\xi_1 x_1 + i\sin\xi_1 x_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\cos\xi_n x_n + i\sin\xi_n x_n\right)$
$= \left(E\cos\xi_1 x_1 + iE\sin\xi_1 x_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(E\cos\xi_n x_n + iE\sin\xi_n x_n\right)$
$= E\left(\cos\xi_1 x_1 + i\sin\xi_1 x_1\right)\cdot\ldots\cdot E\left(\cos\xi_n x_n + i\sin\xi_n x_n\right)$.

Пусть теперь $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ $\varphi_{(\xi_1,\dots,\xi_n)}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{j=1}^{n}\varphi_{\xi_j}(x_j)$.

Рассмотрим $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$: $\eta_1, \dots, \eta_n$ независимы,
$\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $\eta_j \overset{d}{=} \xi_j$.

Тогда $\varphi_\eta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n}\varphi_{\eta_j}(x_j) = \prod_{j=1}^{n}\varphi_{\xi_j}(x_j)$
$= \varphi_{(\xi_1,\dots,\xi_n)}(x_1,\dots,x_n) \overset{\text{Т.о.!}}{\Longrightarrow} \eta \overset{d}{=} (\xi_1, \dots, \xi_n)$
$\Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$ — независимы. ◄

Свертка

Пусть ξ, η — независ. случ. величины. Тогда
$\varphi_{\xi+\eta}(x) = E e^{i(\xi+\eta)x} = E e^{i\xi x}\cdot e^{i\eta x} = E e^{i\xi x} E e^{i\eta x} = \varphi_\xi(x)\varphi_\eta(x)$

Пример. Пусть $\xi_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$, $\xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2$.

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(x) = \varphi_{\xi_1}(x)\varphi_{\xi_2}(x) = e^{ia_1x - \frac{1}{2}\sigma_1^2x^2} \cdot e^{ia_2x - \frac{1}{2}\sigma_2^2x^2}$$
$$= e^{i(a_1+a_2)x - \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)x^2}$$
$$\Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

Теорема (о непрерывности).

1. Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Тогда $\varphi_{\xi_n}(x) \to \varphi_\xi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — случ. величины. Пусть $\varphi_{\xi_n}(x) \to \varphi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, φ — непрер. в 0. Тогда φ — хар. функция ξ: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

► 1) $\varphi_{\xi_n}(x) = E\cos\xi_n x + iE\sin\xi_n x \longrightarrow E\cos\xi x + iE\sin\xi x = \varphi_\xi(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \cos xt, \sin xt$ — непр. и огр. ◄

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \forall$ непр. огр. f $\quad Ef(\xi_n) \to Ef(\xi)$

$f(t) = \cos xt$, $\quad f(t) = \sin xt$

Свойства хар. функции

1) $|\varphi(x)| \leqslant 1$, $\varphi(0) = 1$

► $|\varphi(x)| = |Ee^{i\xi x}| \leq E|e^{i\xi x}| = 1$

$\varphi(0) = Ee^{\xi \cdot i \cdot 0} = 1$ ◄

2) φ равномерно непрерывна

► $\varepsilon > 0$ $\quad t > s$

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| = |Ee^{it\xi} - Ee^{is\xi}| = |E e^{is\xi}(e^{i(t-s)\xi} - 1)|$$
$$\leqslant E|e^{is\xi}(e^{i(t-s)\xi} - 1)| = E|e^{i(t-s)\xi} - 1| =$$
$$= E|\cos(t-s)\xi + i\sin(t-s)\xi - 1| = E\sqrt{(\cos(t-s)\xi - 1)^2 + [\sin(t-s)\xi]^2}$$
$$= E\sqrt{2 - 2\cos(t-s)\xi} = E\sqrt{4\sin^2\frac{(t-s)\xi}{2}} = E\,2\left|\sin\frac{(t-s)\xi}{2}\right|$$

Если $t - s \to 0$, то $\frac{(t-s)\xi}{2} \longrightarrow 0$ п.н. $\Rightarrow 2\left|\sin\frac{(t-s)\xi}{2}\right| \to 0$ п.н.

$\Rightarrow$ по т. Лебега $E\, 2\left|\sin\frac{(t-s)\xi}{2}\right| \to 0.$

т.е. $\exists\, \delta > 0$, что если $|t-s| < \delta$, то $E\,2\left|\sin\frac{(t-s)\xi}{2}\right| < \varepsilon$ ◄

$$|a_1 + ib_1||a_2 + ib_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

$$|(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)| = |a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)| =$$

$$= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (b_1 a_2 + a_1 b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2}$$

3) φ_ξ принимает все значения в $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ р-е ξ симметр. относ. 0, т.е. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad P(\xi \in B) = P(-\xi \in B)$

► ($\Rightarrow$) Пусть $\varphi_\xi(x) \in \mathbb{R}$. Тогда $E\left(e^{i\xi x}\right) =$

$$= E\cos\xi x + iE\sin\xi x = E\cos\xi x.$$

$$\varphi_{-\xi}(x) = E\,e^{-i\xi x} = E(\cos\xi x - i\sin\xi x)$$

$$= E\cos\xi x - i\,\cancel{E\sin\xi x}^{\,0} = E\cos\xi x$$

$$\Rightarrow \varphi_\xi = \varphi_{-\xi} \Rightarrow \xi \overset{d}{=} -\xi.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\xi \overset{d}{=} -\xi$. Тогда $\varphi_\xi = \varphi_{-\xi}$

$$E(\cos\xi x + i\sin\xi x) = E(\cos\xi x - i\sin\xi x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E\sin\xi x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_\xi(x) \in \mathbb{R} \text{ ◄}$$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \overline{\varphi_\xi(x)} = \varphi_\xi(-x).$

► $\overline{\varphi_\xi(-x)} = \overline{E\,e^{-i\xi x}} = \overline{E\cos\xi x - iE\sin\xi x} = E\cos\xi x + iE\sin\xi x = \varphi_\xi(x)$ ◄

$\boxed{14}$

Теорема (о разложении в ряд). Пусть φ — х.ф. сл. вел-ны ξ.

1. Если $E|\xi|^n < \infty$, то $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall r \le n$ $\exists\, \varphi^{(r)}(x)$, $\varphi^{(r)}(0) = i^r E\xi^r$

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{n} i^r E\xi^r \cdot \frac{t^r}{r!} + \frac{i^n t^n}{n!}\cdot \varepsilon_n(t), \quad |\varepsilon_n(t)| \le 3E|\xi|^n,$$

$\varepsilon_n(t) \to 0$ при $t \to 0$

2. Если сущ. $\varphi^{(2n)}(0)$, то и $E\xi^{2n} < \infty$

3. Пусть $\forall n$ $E|\xi|^n < \infty$ и $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n} = c < \infty$. Тогда $\forall t: |t| < 1/c$ $\quad \varphi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} i^r E\xi^r \cdot t^r / r!$

Док-во ЦПТ: $\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j - a}{\sqrt{\sigma^2}}, \quad \eta_j = \frac{\xi_j - a}{\sqrt{\sigma^2}}.$

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \eta_j$$

$\varphi_{\eta_j}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ по Теореме о разложении в ряд

$E\eta_j = 0, \quad D\eta_j = E\left(\frac{\xi_j - a}{\sqrt{\sigma^2}}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} D\xi_j = 1$

$$\varphi_{\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}}}(t) = \varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \eta_j}(t) = E e^{i \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \eta_j \cdot t}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} E e^{i \eta_j \frac{t}{\sqrt{n}}} = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\eta_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{(t/\sqrt{n})^2}{2} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \longrightarrow e^{-t^2/2}$$

$\Rightarrow$ по Т. о непрерывности $\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ◀

Теорема (об обращении). Пусть φ – х. ф. сл. вел-ны ξ.

1) $\forall a < b$: F_ξ непр. в a и b $\quad F_\xi(b) - F_\xi(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \cdot \varphi(t)\, dt$

2) Если $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty$, то сущ. плотность p_ξ

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt$$

Гауссовские векторы

$\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$, если $\varphi_\xi(x) = e^{i\langle x, a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma x, x\rangle}$.

$a \in \mathbb{R}^n$, Σ – $n \times n$-матрица, симметр. и неотриц. опр.

Теорема (об эквивалентных опред.) 1) ξ – гауссовский вектор $\Leftrightarrow$

2) $\exists\, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$, $A = (n \times m)$, $b \in \mathbb{R}^n$: $\xi = A\eta + b$. $\Leftrightarrow$

$\eta_1, \dots, \eta_m$ – незав. вел. $\mathcal{N}(0,1)$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ $\langle \xi, \lambda \rangle$ – норм. случ. величина. (константа – норм. величина)

▶ 1) ⇒ 2) (в предположении, что $\det \Sigma \neq 0$).

Т.к. Σ неотр. опр. и симметр., то сущ. ортогональная матрица T, диагональная матрица D с положит. числами на диагонали:

$$\Sigma = T^t D T = T^t (\sqrt{D})^t \sqrt{D} T = (\sqrt{D} T)^t \sqrt{D} T$$

$$\xi \sim N(a, \Sigma) \Rightarrow \varphi_{\xi - a}(x) = E e^{i \langle \xi - a, x\rangle} =$$

$$= E e^{-i\langle a, x\rangle} \cdot e^{i\langle \xi, x\rangle} = e^{-i\langle a, x\rangle} \varphi_\xi(x)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma x, x\rangle}$$

$$\varphi_{\xi - a}((\sqrt{D} T)^{-1} x) = e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma (\sqrt{D} T)^{-1} x, (\sqrt{D} T)^{-1} x\rangle}$$

$$\langle \Sigma (\sqrt{D} T)^{-1} x, (\sqrt{D} T)^{-1} x\rangle = \langle (\sqrt{D} T)^t x, (\sqrt{D} T)^{-1} x\rangle$$

$$= x^t \sqrt{D} T \cdot (\sqrt{D} T)^{-1} x = x^t x = \langle x, x\rangle$$

$$\varphi_{\xi - a}((\sqrt{D} T)^{-1} x) = E e^{i\langle \xi - a, (\sqrt{D} T)^{-1} x\rangle} =$$

$$= E e^{i (\xi - a)^T (\sqrt{D} T)^{-1} x} = E e^{i (\xi - a)^T \cdot T^t \sqrt{D^{-1}} \cdot x}$$

$$= E e^{i (\sqrt{D^{-1}} \cdot T(\xi - a))^T \cdot x} = E e^{i\langle \sqrt{D^{-1}} T(\xi - a), x\rangle}$$

$$= \varphi_{\sqrt{D^{-1}} T(\xi - a)}(x)$$

Итак, $\varphi_{\sqrt{D^{-1}} T(\xi - a)}(x) = e^{-\frac{1}{2}\langle x, x\rangle}$.

$$\Rightarrow \sqrt{D^{-1}} T(\xi - a) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \eta, \text{ где } \eta_1, \dots, \eta_n \sim N(0, 1) \text{ — незав.}$$

$$\Rightarrow \xi = a + T^t \sqrt{D} \eta.$$

2) ⇒ 3) Пусть $\xi = A\eta + b$. Тогда $\langle \lambda, \xi\rangle = \lambda^T \cdot \xi$

$$= \lambda^T (A\eta + b) = (\lambda^T A) \cdot \eta + \lambda^T b \sim N(\lambda^T b, \underbrace{\sigma^2}_{= \sum_{i=1}^{n} (\lambda^T A)_i^2})$$

3) ⇒ 1). Пусть $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ $\langle \lambda, \xi\rangle \sim N(a_\lambda, \sigma_\lambda^2)$

$$\varphi_\xi(t) = E e^{i\langle \xi, t\rangle} = \varphi_{\langle \xi, t\rangle}(1) = e^{i a_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2}$$

$a_t = E\langle t, \xi\rangle = \langle t, a\rangle$, где $a = E\xi$

$\sigma_t^2 = D\langle t, \xi\rangle = \langle \Sigma t, t\rangle$, где Σ — матрица ковариаций,

$\quad \| \quad cov(t_1\xi_1 + \ldots + t_n\xi_n,\ t_1\xi_1 + \ldots + t_n\xi_n) \qquad \sigma_{ij} = cov(\xi_i, \xi_j)$

Симметричность очевидна, т.к. $cov(\xi_i, \xi_j) = cov(\xi_j, \xi_i)$.

Неотр. опр.: $\langle \Sigma t, t\rangle = cov\left(\sum_{j=1}^n t_j\xi_j, \sum_{j=1}^n t_j\xi_j\right) = D\sum_{j=1}^n t_j\xi_j \geq 0$ ◄

Следствие 1 Если $\xi \sim N(a, \Sigma)$, то a — вектор мат. ожиданий ξ, Σ — матрица ковариаций ξ!

Следствие 2 (критерий независимости).

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)^T \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $n_1 + \ldots + n_k = n$

гауссовский

Тогда $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независ. $\Leftrightarrow$ $\forall i_1, i_2 \in \{1, \ldots, k\}$, $\forall j_1 \in \{1, \ldots, n_{i_1}\}$, $\forall j_2 \in \{1, \ldots, n_{i_2}\}$ $cov(\xi_{i_1, j_1}, \xi_{i_2, j_2}) = 0$

► Пусть ковариации равны нулю.

$$\varphi_\xi(x) = e^{i\langle a, x\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma x, x\rangle} = e^{i\sum_{s=1}^k \langle a_s, x_s\rangle - \sum_{s=1}^k \langle \Sigma_s x_s, x_s\rangle},$$

$$\begin{array}{l} n_1\{ \\ n_2\{ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{|cccc|} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_3 & \\ & & & \end{array}$$

где a_s — s-ый подвектор вектора a размерности n_s

x_s — s-ый — " — " — x — " — " —

$$\varphi_\xi(x) = \prod_{s=1}^k e^{i\langle a_s, x_s\rangle - \langle \Sigma_s x_s, x_s\rangle} = \prod_{s=1}^k \varphi_{\xi_s}(x_s)$$

$\Rightarrow$ (по т. о независимости) $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независ. ◄

Сходимость случ. векторов.

к-мерные

1) $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$, если $P(\xi_n \to \xi) = 1$
2) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, если $\forall \varepsilon > 0$ $P(\|\xi_n - \xi\|_2 > \varepsilon) \to 0$
3) $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, если $E(\|\xi_n - \xi\|_p)^p \to 0$
$\qquad = \sum_{i=1}^k (\xi_{n,i} - \xi_i)^p$
4) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, если $\forall$ непр. огр. $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $\quad Ef(\xi_n) \to Ef(\xi)$

Утв.
1) $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \iff \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \xi_{n,i} \xrightarrow{п.н.} \xi_i$
2) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \iff \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \xi_{n,i} \xrightarrow{P} \xi_i$
3) $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi \iff \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \xi_{n,i} \xrightarrow{L_p} \xi_i$
4) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \xi_{n,i} \xrightarrow{d} \xi_i$.

Критерий сход. по распр. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k): P_\xi(\partial B) = 0$
$$P(\xi_n \in B) \to P(\xi \in B)$$

Многомерная ЦПТ Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — незав. одинаково распр. случ. векторы, $E\xi_1 = a$ и матрицей ковариаций Σ.
Тогда
$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - na}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

ЗБЧ. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — попарно независ. случ. векторы, $\omega(n) \to \infty$, $\forall i \in \mathbb{N}, \ \forall j \in \{1, \dots, k\} \quad D\xi_{i,j} < C$. Тогда $\dfrac{\xi_1 + \dots + \xi_n - E(\xi_1 + \dots + \xi_n)}{\sqrt{n} \cdot \omega(n)} \xrightarrow{P} 0$

(следует из ЗБЧ для величин и у.т.б.!).

УЗБЧ. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независ. и одинаково распр. случ. векторы, $E|\xi_{1,j}| < \infty \ \forall j \in \{1, \dots, k\}$ Тогда $\dfrac{\xi_1 + \dots + \xi_n - E(\xi_1 + \dots + \xi_n)}{n} \xrightarrow{п.н.} 0$