Математический анализ
первый модуль 1 курса
Задачи

Ю.М. Бурман

3 декабря 2019 г.

Содержание

1 ЛИСТ 1

1.1 1

A)

$$\{a_1, a_2, ...\} \quad a_n = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + ... + \frac{\pi_n}{10^n}$$

Очевидно, что верхняя грань $= \pi$, т.к. если верхняя грань $= b < \pi$, то будем сравнивать эти два числа поразрядно, пусть они не совпали впервые в k разряде, тогда заметим, что $a_k > b$ - противоречие
Нижняя грань $= 3.1$, т.к. в множестве $\{a_1, a_2, ...\}$ есть $a_1 = 3.1$ и $\forall i \in \mathbb{N}: \quad a_i \geq a_1$
B)

$$\{\sin(n)|n = 1, 2, ...\}$$

Заметим, что $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ и $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$,
далее заметим, что $\sin(\frac{5^n\pi}{2}) = 1$ и $\sin(\frac{5^n 3\pi}{2}) = -1$
Пусть $b_x = \left[\frac{5^x\pi}{2}\right]$ и $c_x = \left[\frac{5^x 3\pi}{2}\right]$
Тогда $\lim_{x\to\infty} \sin(b_x) = 1$ и $\lim_{x\to\infty} \sin(c_x) = -1$
Тогда точная нижняя грань $= -1$ и точная нижняя грань $= 1$

1.2 2

Пусть не так. Пусть $s = |r^2 - a| > 0$. Определим $t = min\{\frac{s}{4r}, \frac{s}{4}, 1\}$. В таком случае $|2tr| \leqslant \frac{s}{4}$; $|t| \leqslant 1, |t| \leqslant \frac{s}{4} \Rightarrow |t^2| \leqslant \frac{s}{4}$. Значит, $|(r \pm t)^2 - r^2| = | \pm 2rt - t^2| \leqslant |2rt| + |t^2| \leqslant \frac{2s}{4} + \frac{s}{4} < s$. Значит, $(r-t)^2, r^2, (r+t)^2$ лежат по одну сторону от a. Но если они все меньше a, то получаем, что $r + t \in R_a$, а если больше a, то $r - t$ тоже является верхней гранью множества R_a. В обоих случаях получаем противоречие с тем, что r - супремум.

1.3 3

A)
Пусть a_i - $i-$тый член последовательности.
Заметим, что для $n \geq a^2: \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{a}$, из чего следует, что если $a_{a^2} = A$, то $a_i < \frac{A}{a^{i-a^2}}$ при $i \geq a^2$, из чего следует, что для $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta: \quad \forall n > \delta: \quad a_n < \epsilon$ (т.к. это равносильно тому, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$)

B)
Пусть a_i - $i-$тый член последовательности.
Заметим, что для $n \geq 3: \quad a_n < \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$ (т.к. $n! < n^{\frac{n+1}{2}} * \frac{n}{2}^{\frac{n-1}{2}}$), из чего $\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$, поэтому, применив теорему о милиционерах для этой функции и для $b_n = 0$ и $c_n = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$, получаем, что $\lim_{n\to\infty} a_i = 0$

C)
Пусть a_i - $i-$тый член последовательности.
Заметим, что $k*(n-k) \leq (\frac{n}{2})^2$ при $k < \frac{n}{2} \qquad (k*(n-k)) = (\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}-k))*(\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}-k)) = (\frac{n}{2})^2-(\frac{n}{2}-k)^2$, из чего следует, что $\frac{n!}{(\frac{n}{2})^n} \leq \frac{n*(n-1)*1}{(\frac{n}{2})^3} = \frac{2(n-1)}{(\frac{n}{2})^2} = \frac{8n-8}{n^2} = b_n$, в свою очередь очевидно, что $b_n \to 0$, в следствие чего можно применить теорему о милиционерах для a_n и пары b_n и $c_n = 0$, из чего следует, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

1.4 4

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$$

Решение:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=$$
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n}+\frac{1}{1-x}\right)=$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{(1-x^{m-1})+(1-x^{m-2})+...+(1-x)+(1-1)}{1-x^m}-\frac{(1-x^{n-1})+(1-x^{n-2})+...+(1-x)+(1-1)}{1-x^n}\right)=$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{(1-x^{m-1})+(1-x^{m-2})+...+(1-x)+(1-1)}{(1-x)(x^{m-1}+...+1)}-\frac{(1-x^{n-1})+(1-x^{n-2})+...+(1-x)+(1-1)}{(1-x)(x^{n-1}+...+1)}\right)=$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{(1+x+...+x^{m-2})+(1+x+...+x^{m-3})+...+1}{(x^{m-1}+...+1)}-\frac{(1+x+...+x^{n-2})+(1+x+...+x^{n-3})+...+1}{(x^{n-1}+...+1)}\right)=$$

$$\frac{(m-1)+(m-2)+...+1}{m}-\frac{(n-1)+(n-2)+...+1}{n}=$$
$$\frac{m(m-1)}{2m}-\frac{n(n-1)}{2n}=\frac{m-n}{2}$$

1.5 5

Пусть a_i - i-тый член последовательности.
Тогда:

$$a_n=1+q+...+q^n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}$$

$$|q|<1\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}q^n=0\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}=0$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-0$$

Что и требовалось доказать
При $q\geq1$ a_n неограниченно возрастает, т.к. $a_{n+1}-a_n>1$. При $q\leq-1$ a_{2n} неограниченно возрастает, т.к. $a_{n+2}-a_n=q^{n+2}+q^{n+1}>q^2+q$
Для комплексных q есть предел при $|q|<1$, т.к. модуль последовательных сумм меняется не более чем на $|q|^k$, из чего следует что модули чисел из последовательности имеют предел.
При комплексных $|q|\geq1$ предела нет.

1.6 6

Заметим, что если $a_n^{(2)}$ имеет предел, то и для $\forall a_n^{(k)}$ при $k\geq2$ это верно, т.к. последовательности ограничены пределом $a_n^{(2)}$.
Докажем, что $a_n^{(2)}$ ограничена: заметим, что $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<\frac{1}{4}$, ... $\frac{1}{(2^k)^2}+\frac{1}{(2^k+1)^2}+...+\frac{1}{2^{2k+1}-1}<\frac{1}{2^k}$, из чего следует, что $a_n^{(2)}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...<2$.
$a_n^{(2)}$ ограничена и монотонна, из чего у неё есть предел.
Заметим, что $\lim_{n\to+\infty}a_n^{(1)}=\infty$, т.к. $\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}*2=\frac{1}{2}$, ... , $\frac{1}{2^n+1}+...+\frac{1}{2^{n+1}}\geq\frac{1}{2^{n+1}}*2^n=\frac{1}{2}$ из чего следует, что $a_n^{(1)}$ неограничена.

1.7 7

A)
Очевидно, что корни будут существовать при дост. малых a, т.к. $D=b^2-4ac$ будет >0. Предположим, что $b>0$. Будем считать, что $x_1(a)<x_2(a)$. Тогда $\lim\limits_{a\to0}x_1(a)=\lim\limits_{a\to0}\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\lim\limits_{a\to0}\frac{4ac}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}=\lim\limits_{a\to0}\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}=\frac{2c}{b+\sqrt{\lim\limits_{a\to0}(b^2-4ac)}}=\frac{c}{b}$; $\lim\limits_{a\to0}x_2(a)=\lim\limits_{a\to0}\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\pm\infty$, так как $|\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}|\geqslant|\frac{b}{2a}|$.

B)
(Продолжаем работать в предположении $b > 0$.) Так как $\lim\limits_{a\to 0} x_1(a)$ существует, то $\lim\limits_{a\to 0} a\, x_1(a) = 0$; $\lim\limits_{a\to 0} a\, x_2(a) = \lim\limits_{a\to 0} \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2} = b$.
Легко видеть, что при домножении a, b, c на (-1) корни не изменятся (разве что их порядок). Значит, $\lim\limits_{a\to 0} x_1(a) = \lim\limits_{-a\to 0} x_1(-a) = \frac{-c}{-b} = \frac{c}{b}$ $\lim\limits_{-a\to 0} -a\, x_2(-a) = -b \Rightarrow \lim\limits_{a\to 0} a\, x_2(a) = b$.

Ответ: A) $\{\frac{c}{b}, \pm\infty\}$; B) $\{0, b\}$.

1.8 8

A)

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

Заметим, что $a_2 = \frac{2}{1} = \frac{F_3}{F_2}$ (где $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ и $F_1 = F_2 = 1$) и $a_n = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{F_{n-1}+F_n}{F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.
Тогда вспомним формулу Бине:

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

И рассмотрим $\lim_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}$$

Пусть $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a-b)(a^n + ... + b^n)}{(a-b)(a^{n-1} + ... + b^{n-1})} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + ... + b^n}{a^{n-1} + ... + b^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^n + ... + ab^{n-1}}{a^{n-1} + ... + b^{n-1}} + \frac{b^n}{a^{n-1} + ... + b^{n-1}} \right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a * (a^{n-1} + ... + b^{n-1})}{a^{n-1} + ... + b^{n-1}} + \frac{b^n}{a^{n-1} + ... + b^{n-1}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{b^n}{a^{n-1} + ... + b^{n-1}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{b^n}{\frac{a^n - b^n}{a-b}} \right) =$$
$$a + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b^n (a-b)}{a^n - b^n} \right) = a + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^n - b^n}{b^n} \right)} = a + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^n}{b^n} - 1 \right)} = a + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}^n - 1 \right)} =$$
$$a + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^n - 1 \right)} = a + 0 = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

B)

$$a_1 = 0 \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

Заметим, что $a_n < 2$, докажем это по индукции.
База:
$n = 1: \quad \sqrt{2} < 2$
Переход:
$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < 2 \iff 2 + a_n < 4 \iff a_n < 2$, что является предположением индукции.
Заметим, что $a_{n+1} > a_n$, т.к. это равносильно $\sqrt{2 + a_n} > a_n \iff 2 + a_n > a_n^2 \iff a_n^2 < a_n * 2 < a_n + 2$, поэтому a_n возрастает и ограничена $\implies$ она имеет предел.
Докажем, что $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2 : \quad (\lim a_n)^2 = \lim a_n + 2 \quad \implies \quad \lim a_n = 2 \quad | \quad -1$, но очевидно -1 не является пределом, т.к. $\forall n: \quad a_n > 0$, поэтому $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$

C)
Заметим, что по неравенству Коши(среднее арифметическое и среднее геометрическое) $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \geqslant \sqrt{p}$.

Заметим также, что если $a_n \geqslant \sqrt{p}$, то $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \leqslant \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$, то есть начиная с $n = 2$ последовательность $\{a_n\}$ нестрого убывает и ограничена снизу, значит, она имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$. Тогда $A \geqslant 0$ и (выполним переход к пределу в рекуррентном соотношении) $A = \frac{A + \frac{p}{A}}{2} \Rightarrow A = \sqrt{p}$

1.9 9

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \cos^m(2\pi n! x)$$

Заметим, что если x - иррационально, то $|cos(2\pi n!x)| < 1$, т.к. $cosx = \pm 1$ при $x = \pi k$ для целых k, а $2 * n!x$ очевидно не целое, из чего следует, что $\forall n \quad lim_{m\to\infty} cos^m(2\pi n!x) = 0$, из чего $lim_{n\to\infty} lim_{m\to\infty} cos^m(2\pi n!x) = 0$
Если же x - рационально, то $x = \frac{p}{q}$, значит, что для $n > q: \quad cos(2\pi n!x) = 1$, т.к. $2 * n!x$ - целое и чётное, поэтому для $n > q$:
$\lim_{m\to\infty} \cos^m(2\pi n!x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos^m(2\pi n!x) = 1.$

2 ЛИСТ 2

2.1 1

Сделаем замену: $x - \frac{\pi}{2} = y$, тогда:

$$\lim_{y\to 0}\left(y \cdot \tan(y + \frac{\pi}{2})\right) = \lim_{y\to 0}\left(y \cdot \frac{\sin(y+\frac{\pi}{2})}{\cos(y+\frac{\pi}{2})}\right) = \lim_{y\to 0}\left(y \cdot \frac{\cos(y)}{\sin(y)}\right) = \lim_{y\to 0}(\cos(y)) = 1$$

2.2 2

A)
$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$
ряд знакочередуется, сходится, если $|z| < 1$
$\lim_{n\to\infty} nz^n = 0$
1) при $z \neq 0: \ |(n+1)z^{n+1}| > |nz^n| \ \Rightarrow$ возрастает, предел $\neq 0$
2) при $z = 0: \ nz^n = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} nz^n = 0 \ \Rightarrow$ ряд сходится
3) при $|z| < 1$ – ряд сходится абсолютно и нет: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = z \in (-1,\ 1) \ \Rightarrow$ сходится
$z = 1: \ \sum_{n=1}^{\infty} n$
$z = -1: \ \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$
абсолютно:
$\lim |nz^n| = 0$

B)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$
$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{\left(\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}\right)}{\left(\frac{z^n}{n^2}\right)} \mid = \lim_{n\to\infty} \mid \frac{z}{(n+1)^2} \cdot n^2 \mid = |z| \lim_{n\to\infty} \mid \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \mid = |z|$
Интервал сходимости: $|z| \leq 1$
1)
$z = -1: \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}: \ \lim_{n\to\infty} |a_n| = \frac{1}{n^2} = 0$ – члены ряда уменьшаются по модулю, предел равен 0
$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \ \Rightarrow$ убывание монотонно. Следовательно, ряд сходится(признак Лейбница).
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится. И тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно.
2)
$z = 1: \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится (абсолютно) и ряд из модулей.

Следовательно ряд сходится абсолютно при $z \in [-1,\ 1]$
По признаку Лейбница: ряд знакочередуется и члены ряда убывают по модулю (так как $\lim \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = 0$ при $|z| < 1$)
$z \geq 0 \ \Rightarrow$ ряд сходится (так как сходится абсолютно) при $|z| < 1$

2.3 3

2.4 4

$(a,\ b) \subset \mathbb{R}$
$f: \ A \to C,\ a \in \mathbb{R}$

A)
$c \in (a,\ b)$ $M = \{f(x) \mid x \in (c,\ b))\}$. Множество непусто, так как $c < b$, и ограничено снизу, так как $\forall\, x > c: \ f(x) \geq f(c)$
Пусть $\inf M = \gamma$. γ – правы предел.
$\gamma = f(c+0)$
По определению точной нижней грани, $\exists \delta > 0: \ f(c+\delta) < \gamma + \varepsilon$
$\forall\, x \in (c,\ b): \ \gamma \leq f(x) \ \Rightarrow \ \forall\, x \in (c,\ c+\delta): \ \gamma \leq f(x) < \gamma + \varepsilon \qquad |\gamma - f(x)| < \varepsilon$

B)

2.5 5

2.6 6

Заметим, что

$$\sin(x) =$$
$$2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) =$$
$$2^2\sin(\frac{x}{4})\cos(\frac{x}{4})\cos(\frac{x}{2}) =$$
$$2^3\sin(\frac{x}{8})\cos(\frac{x}{8})\cos(\frac{x}{4})\cos(\frac{x}{2}) =$$
$$\vdots$$
$$2^n\sin(\frac{x}{2^n})\cos(\frac{x}{2^n})...\cos(\frac{x}{4})\cos(\frac{x}{2})$$
$$\Rightarrow \sin(x) = 2^n\sin(\frac{x}{2^n})\cos(\frac{x}{2^n})...\cos(\frac{x}{4})\cos(\frac{x}{2})$$
$$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{2^n\sin(\frac{x}{2^n})} = \cos(\frac{x}{2^n})...\cos(\frac{x}{4})\cos(\frac{x}{2})$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos(\frac{x}{2^n})...\cos(\frac{x}{4})\cos(\frac{x}{2})\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{2^n\sin(\frac{x}{2^n})}\right)$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{2^n\sin(\frac{x}{2^n})}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{2^n\sin(\frac{x}{2^n})\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}\frac{\sin(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{\frac{2^n\cdot x}{2^n}\frac{\sin(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}}}\right) =$$
$$\frac{\sin(x)}{x}$$

2.7 7

1)

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{a}{x})^x \quad t=\frac{1}{x}$$
$$\lim_{t\to0}(1+at)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to0}((1+at)^{\frac{1}{ta}})^a = \lim_{t\to0}((1+at)^{\frac{1}{ta}})^{\lim_{t\to0}a} = e^a$$

2)
Пусть $x = y\cdot a$.
$\lim(1+\frac{a}{x})^x = \lim(1+\frac{1}{y})^{y\cdot a} = \exp(1)^a = \exp(a)$

2.8 8

A)
$\pi(n-1) < x_n < \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ Тогда $\pi(n-1),\ \pi n$ – асимптоты, между которыми лежит часть графика, т.е. раз в период пересечение – период равен π
$\pi - \frac{\pi}{n} < \frac{x_n}{n} < \pi$
$\lim_{n\to\infty}(\pi-\frac{\pi}{n}) = \pi,\ \lim_{n\to\infty}\pi = \pi$, по лемме о 2 милиционерах: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \pi$

B)
$\pi(n-1) < x_n < \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$
Сделаем более точную оценку сверху $y = x$ при $x > 0,\ y > 0\ \Rightarrow$ "ветви"пересекаются левее нуля координат, т.е. $x_n < \pi n - \frac{\pi}{2}$ (нули в $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$).

$$\pi(n-1) < x_n < \pi(n-\frac{1}{2})$$
$$-\pi < x_n - \pi n < -\frac{\pi}{2}$$
$$-\pi n < n(x_n-\pi n) < -\frac{\pi n}{2}$$

$\lim_{n\to\infty} -\pi n = -\infty,\ \lim_{n\to\infty} -\frac{\pi n}{2} = -\infty \quad \Rightarrow$ по лемме о 2 милиционерах: $\lim n(x_n - \pi n) = -\infty$

3 ЛИСТ 3

3.1 1

А)

$$\lim_{x\to\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)) = \lim_{x\to\infty} x(\operatorname{arccot}(x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccot}(x)}{\frac{1}{x}} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1+x^2)\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

Б)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sin(x) - \cos(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots) - \cos(x)}{x^4} =$$
$$\frac{1 - \frac{(x-\frac{x^3}{3!}+\dots)^2}{2!} + \frac{(x-\dots)^4}{4!} - \dots - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots)}{x^4} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 \cdot (\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{4!}) + x^2 \cdot (-\frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}) + (\text{степени} > 4)}{x^4} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 \cdot \frac{1}{3!} + (\text{степени} > 4)}{x^4} = \frac{1}{6}$$

В)

$$\lim_{x\to 0} (\cot(x))^{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} e^{\sin(x)\ln\cot(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)\ln\cot(x)}$$

рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\Bigg(\sin(x)\ln\cot(x)\Bigg)$:

$$\lim_{x\to 0}\Bigg(\sin(x)\ln\cot(x)\Bigg) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cot(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0}\Bigg(\frac{1}{\cot(x)} \cdot -\frac{1}{\sin^2(x)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sin^2(x)} \cdot \cos(x)}\Bigg) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{0}{1} = 0$$

вернемся к изначальной задаче:

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)\ln\cot(x)} = e^0 = 1$$

Ответ: а)1 б)$\frac{1}{6}$ в)1

3.2 2

3.3 3

А)Б)
Рассмотрим $\alpha = \frac{1}{2}$:
Заметим, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \cdot \sin^2(x)} = \frac{1}{3} \quad \text{по правилу Лопиталя}$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

Теперь докажем что:

$$\lim_{n\to\infty} n a_n^2 = 3$$

Доказательство:
Докажем более общий факт:
если

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a$$

Это можно доказать с помощью теоремы Штольца, в которой x_n заменим на a_n, а y_n заменим на n:
Формулировка:
Пусть x_n и y_n – две последовательности вещественных чисел, причём y_n положительна, неограничена и строго возрастает (хотя бы начиная с некоторого члена).
Тогда, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ причём эти пределы равны.
Доказательство:
Допустим сначала, что предел равен конечному числу L, тогда для любого заданного $\varepsilon>0$ существует такой номер $N>0$, что при $n>N$ будет иметь место:

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<L+\frac{\varepsilon}{2}$$

Значит, для любого $n>N$ все дроби:

$$\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N},\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},...,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

лежат между этими же границами. Так как знаменатели этих дробей положительны (в силу строгого возрастания последовательности y_n), то, по свойству медианты, между теми же границами содержится и дробь:

$$\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}$$

числитель которой есть сумма числителей написанных выше дробей, а знаменатель — сумма всех знаменателей. Итак, при $n>N$:

$$\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Теперь рассмотрим следующее тождество (проверяемое непосредственно):

$$\frac{x_n}{y_n}-L=\frac{x_N-Ly_N}{y_n}+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-L\right)$$

откуда имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-L\right|\le\left|\frac{x_N-Ly_N}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-L\right|$$

Второе слагаемое при $n>N$ становится меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, первое слагаемое также станет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, при $n>M$, где M — некоторый достаточно большой номер, в силу того, что $y_n\to+\infty$. Если взять $M>N$, то при $n>M$ будем иметь

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-L\right|<\varepsilon$$

что и доказывает наше утверждение.

Случай бесконечного предела можно свести к конечному. Пусть, для определённости:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$$

из этого следует, что при достаточно больших n: $x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, причём последовательность x_n строго возрастает (начиная с определённого номера). В этом случае, доказанную часть теоремы можно применить к обратному отношению $\frac{y_n}{x_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$$

откуда и следует, что:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$$

Теорема доказана, откуда $\lim\limits_{x\to\infty}na_n^2=3$, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$, что и требовалось

3.4 4

А)
Заметим, что у уравнений вида $x^3 - kx - 1 = 0$ ровно 1 корень при всех отрицательных k (так как функция $x^3 - kx - 1$ будет монотонной и неограниченной), а также при всех $k < 1$, так как на интервале $[-1, 0)$ выражение $x^3 - kx$ будет меньше 1, в силу того, что $kx \leqslant 1$ и $x^3 > 0$. На интервале $(-\infty, 1)$ функция монотонно возрастает, так как производная ($= 3x^2 - k$) больше 0.
Поэтому есть только одна функция, удовлетворяющая условию при $a = k$. Докажем, что она непрерывна.
Заметим, что она монотонна, ведь при замене k на $k + d$ выражение $\alpha^3 - (k + d)\alpha - 1$ уменьшается, откуда, единственный корень β уравнения $x^3 - (k + d)x - 1 = 0$ больше, чем α. При этом для любого значения γ, лежащего между α и β, существует y, такой что γ является корнем соответствующего уравнения (потому что $\gamma^3 - y\gamma - 1$ непрерывно, и при $y = k$ оно меньше 0, а при $y = k + d$ – наоборот), откуда и следует непрерывность функции.
Б)

В)

3.5 5

Пусть $m = 27$, тогда задача имеет вид: $\ln \cos \frac{1}{m+5}$.
Посчитаем сперва $\cos \frac{1}{m+5}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{C}$$

$$\cos(\frac{1}{32}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{32}^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{\frac{1}{32}^2}{2!} + \frac{\frac{1}{32}^4}{4!} - \ldots \approx$$

$$1 - \frac{\frac{1}{32}^2}{2!} + \frac{\frac{1}{32}^4}{4!} \approx 0.9995117$$

А теперь посчитаем логарифм от полученного значения

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad \text{для } -1 < x < 1$$

$$\ln(0.9995117) = \ln(1 - 0.0004883) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 0.0004883^n}{n} =$$

$$0.0004883 - \frac{0.0004883^2}{2} + \frac{0.0004883^3}{3} - \ldots \approx 0.0004883 - \frac{0.0004883^2}{2} + \frac{0.0004883^3}{3} \approx$$

$$0.0004883$$

Откуда первые две значащие цифры это 4, 8

3.6 6

Заметим, что $f'(x) = \alpha \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(t + x) - f(x)) = \alpha$, откуда в некоторой окресности нуля выражение $\frac{1}{t}(f(t + x) - f(x)) > 0$, поэтому при $t > 0 :\; f(t + x) - f(x) > 0$ и наоборот. Но это и означает, что функция возрастает.

3.7 7

А)
Возьмем минимальное $y = c$ и будем двигать вверх эту горизонтальную прямую. разность площадей верхнего и нижнего многоугольника меняется непрерывно, так как это разность непрерывных функций (пусть f_1 – площадь нижнего многоугольника, а f_2 – площадь верхнего, тогда обе эти функции непрерывны, откуда $f = (f_1 - f_2)$ также непрерывна). Заметим, что если площадь всего многоугольника S то значения f лежат в $[S,\ -S]$. Тогда, так как $0 \in [S,\ -S]$ то $\exists c :\; f(c) = 0$

Б)
Пусть S – окружность с центром $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, внутри которой лежат M_1 и M_2 (M_1 и M_2 ограничены $\Rightarrow$ она существует). Изменим масштаб так, чтобы диаметр S стал равен 1. Для $\forall x \in S$ рассмотрим диаметр D_x

проходящий через x. Пусть L_t – перпендикуляр к D_x, проходящий через точку на D_x, расположенную на расстоянии t от x.
Пусть $S_1(t)$ – площадь части M_1, лежащей по одну сторону от L_t, что и x. Аналогично определим $S_2(t)$ для M_2. Заметим, что $S_1(0) = S_2(1) = 0$. Очевидно, что $S_1(t),\ S_2(t)$ – непрерывные функции, отображающие l в $\mathbb{R}$. Пусть $f:\ l \to \mathbb{R}$ это $f(t) = S_1(t) - S_2(t)$, это непрерывная функция и $f(0)f(1) \leqslant 0$. Откуда существует $t \in l:\ \ f(t) = 0$ либо на отрезке $[a, b]$, либо в одной точке c. В первом случае определим $h_1(x) = \frac{a+b}{2}$, во втором случае $h_1(x) = c$.
То есть перпендикуляр к D_x, проходящий через точку на D_x, расстояние от которой до x равно $h_1(x)$, делит площадь M_1 пополам. Заметим, что $h_1(-x) = 1 - h_1(x)$ и $h_1:\ S \to l$ – непрерывная функция.
Аналогично определим $h_2:\ S \to l$, где вместо M_1 действие происходит на M_2.
Теперь определим $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$. Так как $h_1(x)$ и $h_2(x)$ непрерывны, то и $h(x)$ непрерывна. Заметим, что $h(x) = -h(-x)\ \forall x \in S$. Но также есть и точка $y:\ \ h(y) = h(-y)$. Значит $h(y) = 0$ и $h_1(y) = h_2(y)$ и перпендикуляр к D_y, расстояние от которой до y равно $h_1(y)$, делит пополам M_1 и M_2, что и требовалось доказать.

3.8 8

3.9 9

А)

Б)

3.10 10

$f:\ (p, q) \to \mathbb{R}$ выпуклая и дифференцируемая А)$f:\ (p, q) \to \mathbb{R}$ выпуклая
Любая касательная не выше графика $l(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, также $f(x)$ выпуклая $\Rightarrow\ \ f''(x) > 0$

$$f(x) - l(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

По теорема Лагранжа на (a, x) $\exists c:\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$

$$f(x) - l(x) = (f'(c) - f'(a))(x - a)$$

1) $a = x\ \ f(x) = l(x)$
2) $a < x\ \ f'(a) \leqslant f(c)\ \ \Rightarrow\ \ f(x) - l(x) \geqslant 0$
3) $a > x$ аналогично

Что и требовалось
Б) $f'(x) > 0 \quad f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$ если $x_1 \leqslant x_2$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = x \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1\ \Rightarrow\ \alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 + x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 + x_1} f(x_2)$$
$$(x_2 - x) + (x - x_1) = x_2 - x_1$$
$$f(x)(x_2 - x_1) = f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1) \leqslant (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$$

Откуда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\ \ \Rightarrow$$
$$x \to x_1: \quad f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_1)}{x_1 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$x \to x_2: \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_2)}{x_2 - x_2} = f'(x_2)$$

Следовательно

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2)$$

Что и требовалось

В)
Обратно

$$a < x_1 < x_2 < b \text{ откуда по Т.Лагранжа о среднем значении}$$
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1); \ \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2), \text{ где } x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$$
$$f'(c_1) \leqslant f'(c_2) \ \Rightarrow \ \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$
$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \alpha(x_1-x_2)+x_2, \text{ тогда если } x_1 < x_2, \text{ то и } x_1 < x < x_2$$

Что и требовалось

3.11 11

А)

$$f\left(\frac{x_1}{n} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{x_2+\ldots+x_n}{n-1}\right)\right) \leqslant \frac{f(x_1)}{n} + \frac{n-1}{n} f\left(\frac{x_2+\ldots+x_n}{n-1}\right) \leqslant$$
$$\frac{f(x_1)}{n} + \frac{n-1}{n} f\left(\frac{x_2}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\frac{x_3+\ldots+x_n}{n-2}\right) \leqslant \ldots \leqslant \frac{f(x_1)}{n} + \frac{f(x_2)}{n} + \frac{n-2}{n} f\left(\frac{x_3+\ldots+x_n}{n-2}\right) \leqslant$$
$$\ldots \leqslant \frac{f(x_1)}{n} + \ldots + \frac{f(x_{n-2})}{n} + \frac{2}{n} f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)}{n} + \ldots + \frac{f(x_{n-2})}{n} + \frac{2}{n}\left(f\frac{x_{n-1}}{2} + f\frac{x_n}{2}\right) =$$
$$\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

Б)
Используем неравенство из (а) для выпуклой формы
$f(x) = x^2$

$$\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}$$
$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

В)
$f(x) = \log_a(x)$

$$\log\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \geqslant \frac{\log_a(x_1)+\ldots+\log_a(x_n)}{n}$$
так как $\log_a(x)$ - вогнутая функция
$$\frac{\log_a(x_1)+\ldots+\log_a(x_n)}{n} = \log_a(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} = \log_a \sqrt{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Откуда:

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

что и требовалось

3.12 12

По условию окружность должна лежать в $y \geqslant x^2$, то есть внутри параболы $y = x^2$. Также она доржна содержать точку $(0, 0)$. Тогда в силу того, что $y = x^2$ симметрична относительно $x = 0$, и на $y = x^2$ также лежит и требуемая точка $(0, 0)$, окружность касается параболы в точке $(0, 0)$. Тогда уравнение окружности имеет вид $(x - a)^2 - (y - b)^2 = r^2$, где $a = 0,\ b = r$. То есть $x^2 + (y - r)^2 = r^2 \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 - 2yr = 0$. Откуда $r = \frac{x^2+y^2}{2y} \leqslant \frac{y+y^2}{2y} = \frac{y+1}{2} \quad y \in [0; +\infty)$, следовательно $r \leqslant \frac{1}{2}$. Заметим, что при $r = \frac{1}{2}$ требования условия выполнены.

3.13 13