Листок 2. Многообразия (ориентируемость, касательное пространство)

Гладкие многообразия

Крайний срок сдачи 20.10.2020

Задачи со звездочками можно сдавать и после дедлайна.

1. Можно ли на границе единичного квадрата ввести (а) структуру гладкого многообразия? (б) структуру подмногообразия $\mathbb{R}^2$?

2. Рассмотрим пространства $n \times n$-матриц с нормой $|A|^2 = \sum_{i,j} |a_i^j|^2$. Покажите, что следующие группы G являются гладкими многообразиями и опишите касательные пространство к группам G в их матричных единицах, если (а) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$; (б) $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$; (а) $G = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$; (б) $G = \mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$.

3. Покажите, что $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ как многообразие диффеоморфно полноторию.

4. (а) Постройте атлас $\mathbb{R}P^2$ и покажите, что оно неориентируемо.
(б) Постройте атласы $\mathbb{R}P^n$. При каких n эти многообразия являются ориентируемыми, а при каких нет?

5. Пусть отображение $F : S^n \to \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее каждой точке сферы S^n проходящую через неё и начало координат прямую в $\mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что отображение F — гладкое, dF — невырожден во всех точках.

6. (а) Докажите, что лист Мёбиуса и бутылка Клейна — неориентируемые многообразия. (б)* Докажите, что двумерное многообразие тогда и только тогда ориентируемо, когда не содержит в себе лист Мёбиуса.

7. Докажите, что гладкие структуры на множестве M совпадают тогда и только тогда, когда пространства гладких функций на этих многообразиях совпадают.

8. (а) Приведите пример погружения многообразия в $\mathbb{R}^n$, взаимно однозначного с образом, но не являющегося вложением. (б) Пусть $f : N \to M$ — гладкое отображение одного многообразия в другое. Если существует такое подмногообразие (L, g) многообразия M, что $f(N) \subset g(L)$, то существует единственное отображение $h : N \to L$ такое, что $g \circ h = f$. Всегда ли отображение h является гладким (непрерывным)? Приведите контрпример, если он существует. *(В этом случае говорят, что отображение f пропускается через подмногообразие (L, g).)*

9. * Введите структуру гладкого многообразия на TM и T^*M. Являются ли они ориентируемыми?

10. * Докажите, что компактное n-мерное многообразие с краем M может быть вложено в евклидово полупространство $H^N = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{N-1}$ при достаточно большом N так, что образ ∂M лежит в пространстве $x^1 = 0$.