Избранные главы дискретной математики. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно посылать вашему учебному ассистенту (его адрес сообщен всем записанным на этот НИС на корпоративную почту), до 24:00 четверга перед следующим занятием.

Задание с 7 занятия.

(1) На занятии мы нашли 5 тупиковых ДНФ для функции (0111.1110) из второй задачи задания 5 и преобразовали одну из этих ДНФ в более экономную формулу (которая уже, конечно, не является ДНФ!) $x(\overline{yz}) \vee \overline{x}(y \vee z)$, в ней используются три умножения, две дизъюнкции и два отрицания. Попробуйте найти еще более экономную формулу для вычисления этой же функции.

(2) Докажите, что две k-мерные грани[1] $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ являются двумя параллельными гранями некоторой грани c размерности $k+1$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

- $a_i = * \Leftrightarrow b_i = *$;
- $a_i \neq b_i$ ровно для одного значения i.

Каким в этом случае будет вектор $c = (c_1, \ldots, c_n)$, кодирующий эту грань?

(3) На занятии был описал способ упрощения задачи о нахождении тупиковых покрытий: если дано некоторое покрытие $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, имеющее непустое ядро[2] $K \subset I$, то задача сводится к такой же задаче с меньшим покрытием $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{i \in \overline{I}} \overline{A_i}$, где $\overline{\Omega} = \Omega \setminus \left(\bigcup\limits_{k \in K} A_k \right)$, $\overline{I} = I \setminus K$, $\overline{A_j} = A_j \setminus \left(\bigcup\limits_{k \in K} A_k \right)$. Покажите, что у этого нового покрытия $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{i \in \overline{I}} \overline{A_i}$ ядро уже пусто.

(4) Задачи 3, 4 и 5 из задания 4 остаются актуальными (и можно присылать их решения!) до тех пор, пока мы на одном из следующих занятий их не обсудим.

---

[1] Напомним, что грани n-мерного булева куба кодируются векторами $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0, 1, *\}$: грань задается уравнениями $t_i = \alpha_i$, при этом уравнение $t_i = *$ означает, что t_i — любое.

[2] Напомним, что **ядром** покрытия называется множество K таких индексов $k \in I$, что существует такое $x \in \Omega$, что $x \in A_k$ и $x \notin A_i$ при всех $i \neq k$ — это индексы тех множеств покрытия, которые обязательно входят в любое тупиковое покрытие.