Дифференциальные уравнения
2 курс
Домашняя работа
Владислав Мозговой

Дифференциальные уравнения 2020

Домашнее задание № 2

Уравнения, неразрешенные относительно производной, параметр, фазовые портреты

Дата сдачи задания: 17.11.2020

Рекомендация. В задачнике А.Ф. Филиппова “Сборник задач по дифференциальным уравнениям” имеется краткое изложение основных методов интегрирования предложенных ниже задач. Теория и полезные приемы представлены в начале каждого тематического раздела задачника.

Найдите семейство решений приведенных ниже уравнений, получите вид дискриминантной кривой и найдите особые решения, если они есть.

1. $$x\,\frac{dy}{dx} - y = \ln\frac{dy}{dx}$$

2. $$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\,\frac{dy}{dx} + x = 0$$

3. $$\frac{dy}{dx}\left(x - \ln\frac{dy}{dx}\right) = 1$$

Исследуйте фазовый портрет приведенных ниже линейных систем вблизи особой точки: определите тип особой точки и приведите чертеж фазовых кривых в ее окрестности.

4. $$\frac{dx}{dt} = x + 3y \qquad \frac{dy}{dt} = x - y$$

5. $$\frac{dx}{dt} = 6y - 9x \qquad \frac{dy}{dt} = 4x - 11y$$

6. $$\frac{dx}{dt} = 2y - x \qquad \frac{dy}{dt} = 5y - 5x$$

7. $$2\,\frac{dx}{dt} = x - 2y \qquad 2\,\frac{dy}{dt} = 2x - 3y$$

8. $$\frac{dx}{dt} = 13x - 20y \qquad \frac{dy}{dt} = 10x - 15y$$

9. $$\frac{dx}{dt} = 2y - x \qquad \frac{dy}{dt} = y - x$$

10. $$\frac{dx}{dt} = x + 4y \qquad \frac{dy}{dt} = 5y - x$$

Решения

Задача 1

$$
\begin{aligned}
&x\frac{\partial y}{\partial x} - y = \ln\frac{\partial y}{\partial x}\\
&p = y'\\
&y = px - \ln(p)\\
&\frac{\partial y}{\partial x} = p = p + xp' - \frac{p'}{p}\\
&p'\left(x - \frac{1}{p}\right) = 0\\
&x = \frac{1}{p}\\
&x\frac{1}{x} - y = \ln\frac{1}{x}\\
&y = \ln(x) + 1
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&p' = 0\\
&p = c\\
&y = xc - \ln(c)
\end{aligned}
$$

Дискриминантные кривые:

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} F = xp - y - \ln(p) = 0\\ \frac{\partial F}{\partial p} = x - \frac{1}{p} = 0 \end{cases}\\
&F = 1 - y + \ln x = 0\\
&y = \ln x + 1
\end{aligned}
$$

Особые решения: $y = \ln x + 1$

Задача 2

$$
\begin{aligned}
& x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2y\frac{\partial y}{\partial x}+x=0\\
& p=y'\\
& xp^2-2yp+x=0\\
& D-4\left(y^2-x^2\right)\geqslant 0y^2-x^2\geqslant 0\\
& y=\frac{xp}{2}+\frac{x}{2p}\\
& \frac{\partial y}{\partial x}=p=\frac{p}{2}+\frac{xp'}{2}+\frac{1}{2p}-\frac{xp'}{2p^2}\\
& p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=xp'\left(1-\frac{1}{p^2}\right)
\end{aligned}
$$

$1-\frac{1}{p^2}=0$

$$
\begin{aligned}
& p=\pm 1\\
& x\pm 2y+x=0\\
& y=\pm x
\end{aligned}
$$

$xp'=p$

$$
\begin{aligned}
& p=xc\\
& x^3c^2-2xcy+x=0\\
& y=\frac{x^2c}{2}+\frac{1}{2c}\\
& \text{проверим } y^2-x^2\geqslant 0\\
& \frac{x^4c^2}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4c^2}-x^2\geqslant 0\\
& x^4c^2-6x^2+\frac{1}{c^2}\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Ответ:

$$
\begin{aligned}
& y=\pm x\\
& y=\frac{x^2}{c}+\frac{1}{2c}
\end{aligned}
$$

Дискриминантные кривые:

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} F=xp^2-2yp+x=0\\ \frac{\partial F}{\partial p}=2xp-2y=0 \end{cases} \qquad p=\frac{y}{x}\\
& F=\frac{y^2}{x}-\frac{2y^2}{x}+x=0\\
& -\frac{y^2}{x}+x=0\\
& x^2=y^2\\
& y=\pm x
\end{aligned}
$$

Особые решения: $y=\pm x$

Задача 3

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left(x-\ln\frac{\partial y}{\partial x}\right)=1$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}=p$$
$$x=\frac{1}{p}+\ln(p)$$
$$\frac{\partial x}{\partial y}=\left(-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\right)\frac{\partial p}{\partial y}$$
$$\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p^2}p'$$
$$p'=\frac{p}{p-1}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{p}{p-1}$$
$$\frac{p-1}{p}\partial p=\partial y$$
$$\int\left(1-\frac{1}{p}\right)\partial p=\int\partial y$$
$$p-\ln p=y+c$$

Следовательно решение имеет параметрический вид

$$\begin{cases} y=p-\ln(p)+c \\ x=\frac{1}{p}+\ln(p)\end{cases}$$

Дискриминантные кривые

$$\begin{cases} F=px-p\ln p-1=0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}=x-\ln p-1=0\end{cases}$$
$$\frac{\partial(p\ln p)}{\partial p}=\ln p+p\frac{1}{p}$$
$$\ln p=x-1$$
$$p=e^{x-1}$$
$$F=xe^{x-1}-e^{x-1}(x-1)-1=0$$
$$F=e^{x-1}-1=0$$
$$x-1=0$$

Подставим в исходное уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left(1-\ln\frac{\partial y}{\partial x}\right)=1$$
$$1+\ln\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial y}$$

Так как $x=1$, то $\frac{\partial x}{\partial y}=0$, следовательно $x=1$ не решение и особых решений нет.

Задача 4

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$$

Найдем собственные вектора

$$\lambda_1 = 2 \qquad A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\lambda_2 = -2 \qquad A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

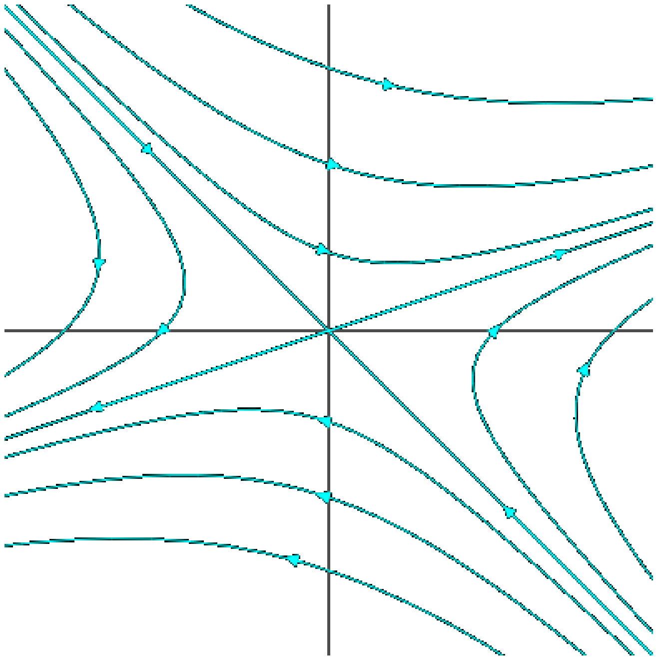

Рис. 1. Седло(λ_1, λ_2 вещественны и разных знаков)

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = Te^{Jt}T^{-1} = \frac{1}{4}e^{2t}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Задача 5

$$\begin{vmatrix} -9-\lambda & 6 \\ 4 & -11-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 20\lambda + 75 = (\lambda+5)(\lambda+15)$$

$\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = -15$

Найдем собственные вектора

$$\lambda_1 = -15 \qquad A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\lambda_2 = -5 \qquad A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = Te^{Jt}T^{-1} = \frac{1}{5}e^{-5t}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

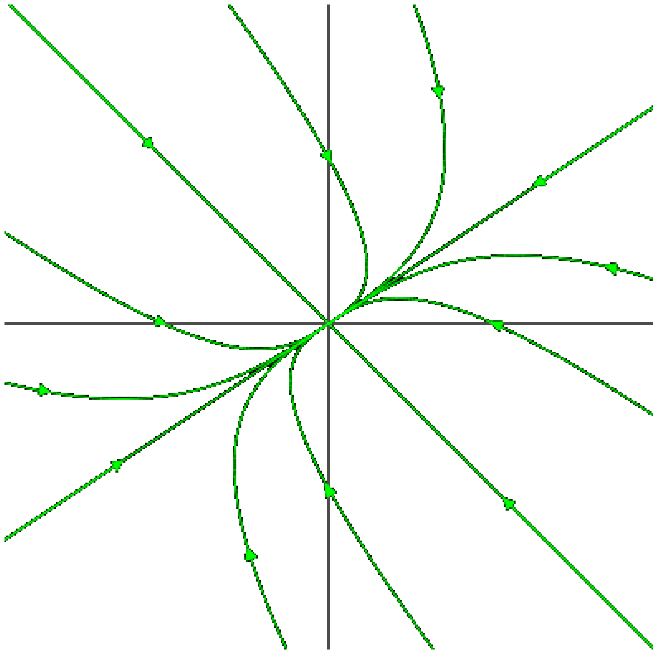

Рис. 2. Устойчивый узел
(λ_1, λ_2 вещественны и отрицательны)

Задача 6

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$\lambda_1 = 2 - i,\ \ \lambda_2 = 2 + i$

$(A - \lambda I)\, f = 0$

$$\begin{pmatrix} -3-i & 2 \\ -5 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix} = 0$$

$$f = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$T = ||u, v|| = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \frac{1}{2} e^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} |_{x=0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

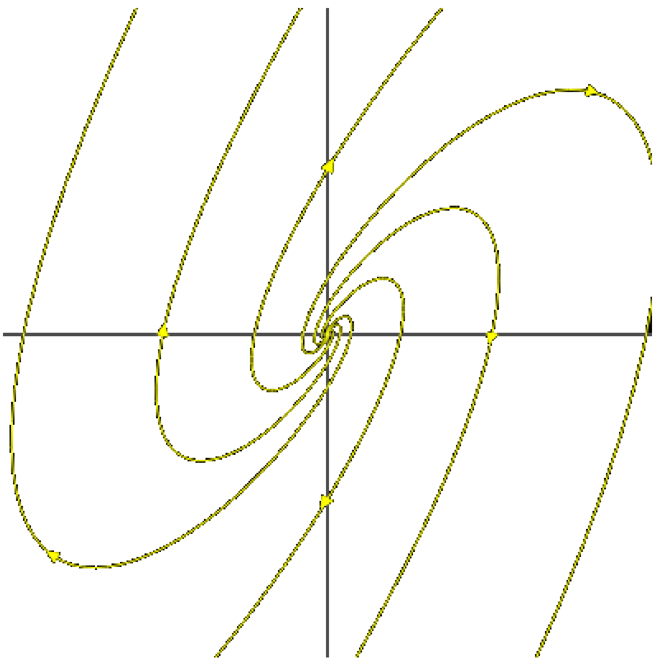

Рис. 3. Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 – комплексны, $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$)

Задача 7

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

Найдем собственные вектора

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A + \frac{1}{2} I\right) u_2 = u_1 \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} |_{y=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x$$

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = T e^{tJ} T^{-1} = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

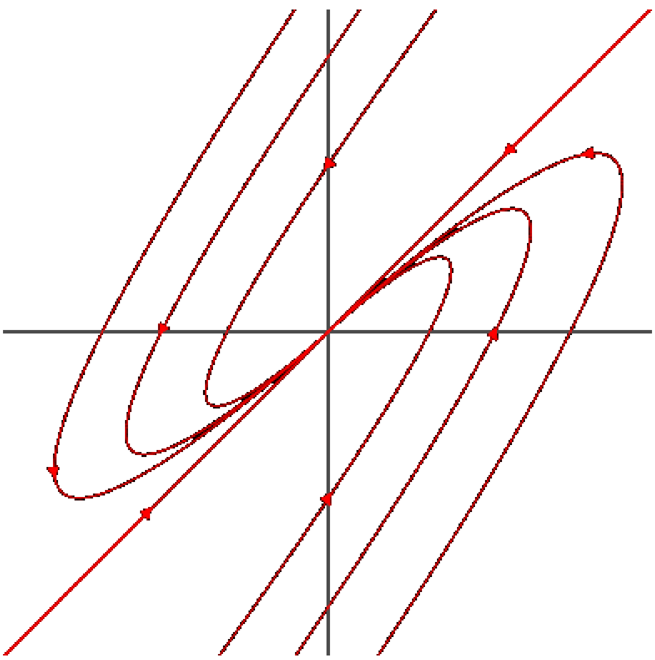

Рис. 4. Вырожденный устойчивый узел

Задача 8

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & -20 \\ 10 & -15-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$\lambda_1 = -1 - 2i,\ \lambda_2 = -1 + 2i$

$(A - \lambda_1 I)\, f = 0$

$$\begin{pmatrix} 14-2i & -20 \\ 10 & -14-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 7+i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = e^{qt} \begin{pmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -\sin wt & \cos wt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 & \eta_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 & \eta_0 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} |_{y=0} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix} x$$

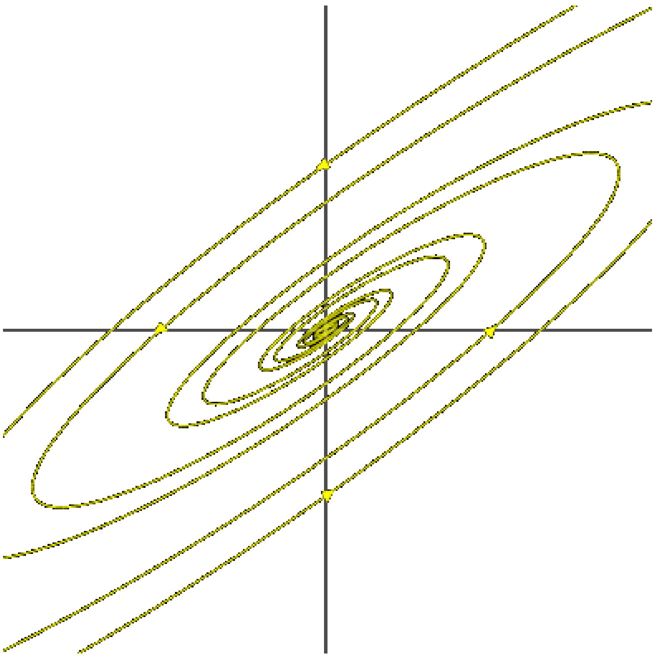

Рис. 5. Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 – комплексны, $\mathrm{Re}\,(\lambda_{1,2}) < 0$)

Задача 9

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$

$(A - iI)\, v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = e^{qt} \begin{pmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -\sin wt & \cos wt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -t & \sin -t \\ -\sin -t & \cos -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} |_{y=0} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} x$$

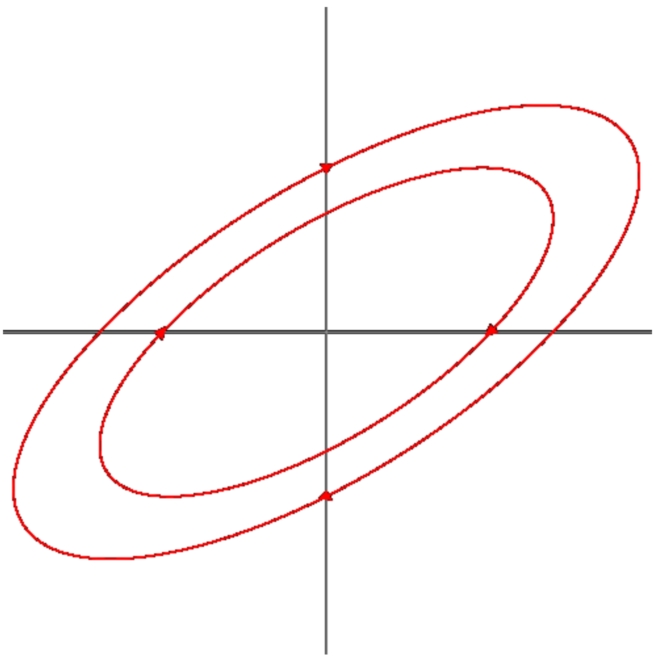

Рис. 6. Центр(λ_1, λ_2 чисто мнимые)

Задача 10

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$$

$$\lambda = 3$$

Найдем собственные вектора

$$\lambda_1 = 3$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I)\, v_2 = v_1 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} |_{y=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x$$

$$X = Te^{tJ}T^{-1} = e^{3t}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

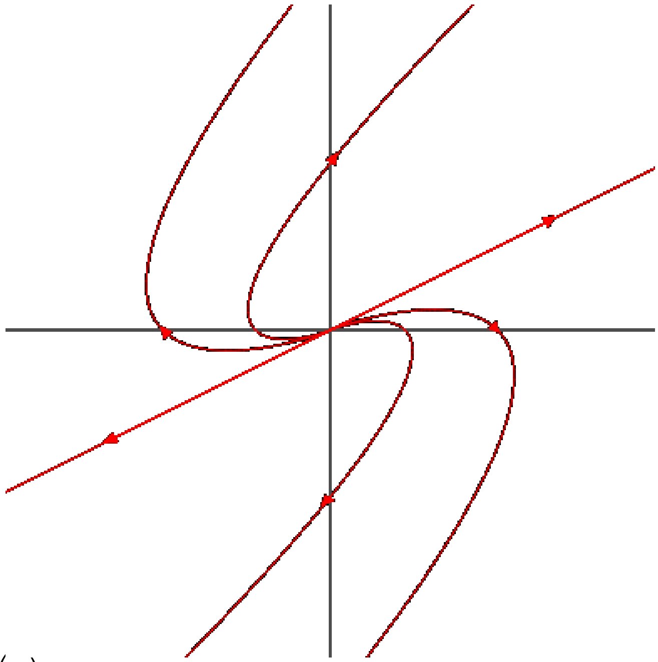

Рис. 7. Вырожденный неустойчивый узел