08.09.20

$\{5'\} = 10 \times Sum / (max \times 0,9)$

$\{D_3\} = 10 \times Sum / (max \times 0,9)$

$\{листок\} = 8 \times Sum / (max \times 0,7)$

Накоп = Колл × 0,1 + D_3 × 0,3 + 5' × 0,6

Итог = {1) Коллок ≥ 6
∨ 2) Авт. = max(накоп, лист.) ; ≥ 8

Итог = Накоп × 0,5 + Экз × 0,3 + Колл. × 0,3

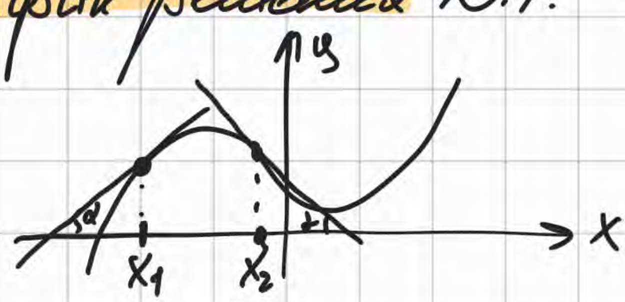
— Оценка —

Дифференциальные уравнения — уравнения вида
$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (*) \qquad x \in \mathbb{R}$$

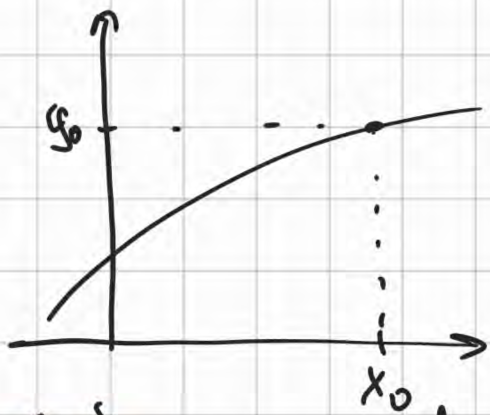
Решение Д.У. — дифф-я ф-ия $y(x)$, которая при подстановке в $(*)$ превращает его в тождество

График решения Д.У. — непр. гладкая! кривая в $\mathbb{R}^2$



$$tg(\alpha)_i = f(x_i, y_i)$$

Поле направлений

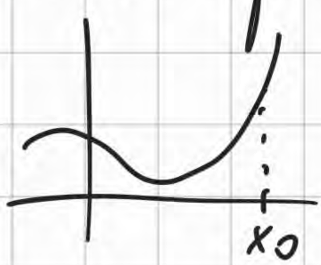


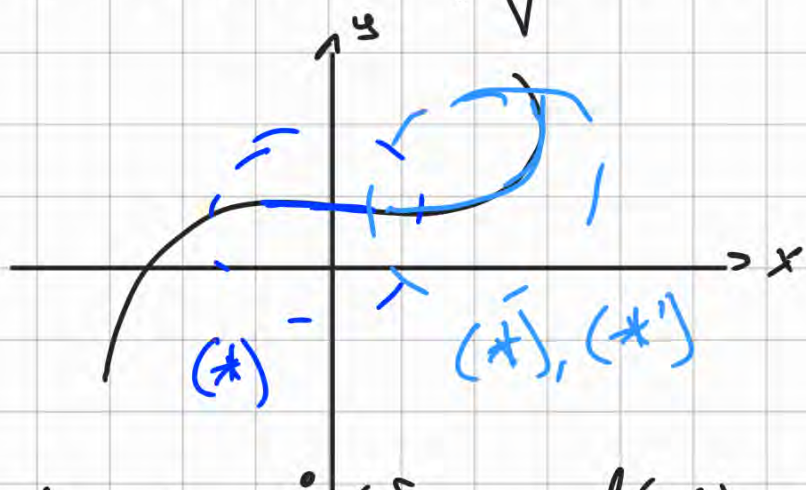
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{1}{\frac{dx(y)}{dy}}\right|_{y=y_0}$$

в точках, где $f(x,y) \neq 0$

(*) $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x,y)} = g(x,y)$ (*')

(*') можно применять в точках x, где $f \to \infty$





$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \\ y(t) = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(t) = \frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)} \Longleftrightarrow f(x(t), y(x(t))) = \frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}$$

Существование решения (*)

Если $f(x,y)$ - непрерывная в $G \in \mathbb{R}^2$, то $\forall (x,y) \in G$ подходит хотя бы 1 $\int$-я кривая.

Если $\exists$ и непр. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в $G \Rightarrow \int$-я кривая единств.

+ усл. Липшицевости f

$\forall x, y_1, y_2: \exists C$ т.ч. $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$

Пример

а) $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow y(x) = F(x) + const \equiv \int f(x)dx$

единств. реш., если есть начальное условие $\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$

$x_0 \mapsto y_0$

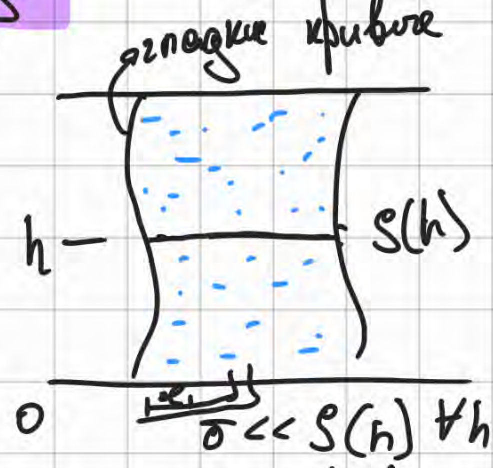
б) $\dfrac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow \dfrac{dy}{f(y)} = dx \Rightarrow x = \int \dfrac{dy}{f(y)} + const$

$y_0 : f(x_0) = 0 \Rightarrow y(x) = y(x_0) = const$ реш.

Составление Д.У.

Пример

а)



$h(t)$ - ?

$v(h)$ - скорость вытекания

За какое время T сосуд опустеет?

процесс вытекания непрерывный

Закон Торричелли: $v(h) = \varkappa\sqrt{2gh}$; $h(t)$ меняется гладко!

$\varkappa \approx 1$ (для воды)

$$\Delta V = S(h)\Delta h + o(\Delta h)$$

за $\Delta t \ll T$ $\quad -\Delta V = \sigma \Delta l + \bar{\bar{o}}(\Delta l) = \sigma v(h)\Delta t + \bar{\bar{o}}(\Delta h)$

$$S(h)\Delta h = -\sigma v(h)\Delta t + \bar{o}(\Delta h; \Delta t)$$

$$S(h)\frac{dh}{dt} = -\sigma\sqrt{2gh}$$

• $S(h) = S = const$

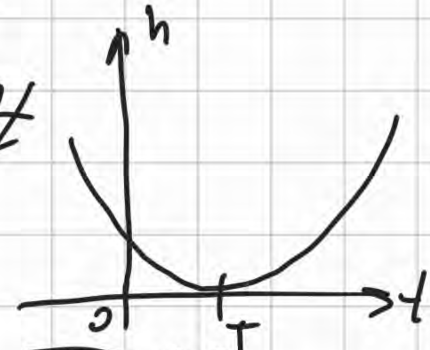
$$S\frac{dh}{dt} = -\sigma\sqrt{2gh}$$

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{S} = -A = const$$

$$\int_0^t \frac{h'(\tau)}{\sqrt{h(\tau)}}\,d\tau = -At$$ монотонные ⇒ меняем перем.

$$dy = h'(\tau)\,d\tau$$

$$\int_{h(0)}^{h(t)} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\left(\sqrt{h(t)} - \sqrt{h(0)}\right) = -At$$

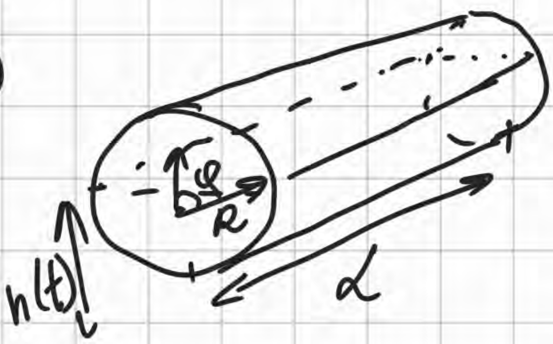


$$\sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{A}{2}t > 0$$

$$t \in \Big[0; \underbrace{\frac{2\sqrt{H}}{A}}_{T}\Big]$$

$$h(t) = H\left(1 - \frac{\sigma}{S}\sqrt{\frac{g}{2H}}\,t\right)^2$$

б)



$$S(h) = l\cdot 2R\cdot\sin\varphi \quad \left(0 \le \varphi \le \pi,\ \sin\varphi \ge 0\right)$$

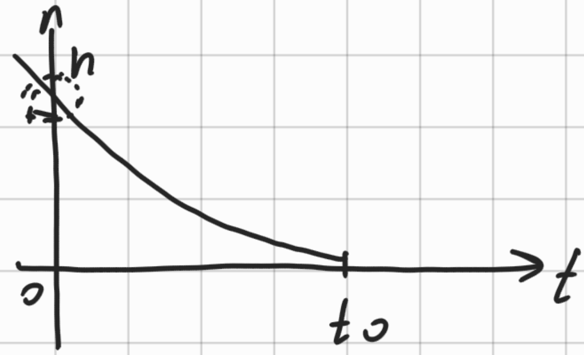
$$h(t) = R(1+\cos\varphi)$$

$$S(h) = 2Rl\sqrt{1-\left(1-\frac{h}{R}\right)^2} = 2l\sqrt{h(2R-h)}$$

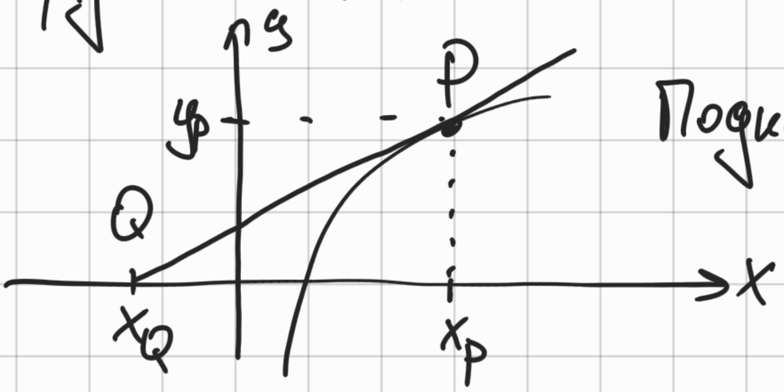
$$S(h)h' \underset{h(0)}{=} -\sigma\sqrt{2gh} \Rightarrow \sqrt{2R-h}\cdot h' = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{l} = -A$$

$$h(t) = H - Ct^{2/3}$$, где $C = \frac{3\sigma\sqrt{2g}}{2l}$

$$n'(t) = -\frac{2}{3} C t^{-\frac{1}{3}}$$



в) „Геометрия", составить д.у. кривой в $\mathbb{R}^2$: подкасательная равна $\sum$ абсцисс и ординат т. касания.



Подкасательная $x_P + x_Q$

Обозначим: $f = x_P - x_Q$ величина со знаком!

Пусть $y(x)$ - зависимость y от x на кривой
⇒ ур-ние касательной в т. x_P:

$$(y - y_P) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_P (x - x_P)$$

⇒ (т.к. при $x = x_Q$ $y(x_Q) = 0$) ⇒

$$-y_P = y'_P \underbrace{(x_Q - x_P)}_{-x} \qquad (**)$$

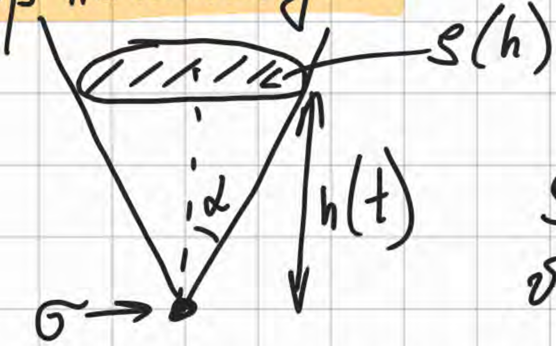
По условию: $f = x_P + y_P$

Т.к. P - произвольная точка ⇒ (**) выполняется в $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \frac{dy}{dx}(x + y)$$

15.09.2020

Разбор пятиминутки



$$h(0) = H$$

$\sigma \ll S$
работает з-н Торричелли

$$S(h)\,h'(t) = -\sigma\sqrt{2gh}$$

$v(h) = æ\sqrt{2gh}$ — не нарушается

$$S(h) = \pi\,tg^2\alpha\, h^2(t)$$

$$\pi\,tg^2\alpha\, h^2(t)\cdot h'(t) = -\sigma\sqrt{2gh}$$

$$\pi\,tg^2\alpha\, h^{3/2}\, h'(t) = -\sigma\sqrt{2g}$$

$$h^{3/2}\,dh = -\underbrace{\frac{\sigma\sqrt{2g}}{\pi\,tg^2\alpha}}_{=A}\,dt \quad \Big|\int$$

$$\frac{2}{5}h^{5/2} - c = -At$$

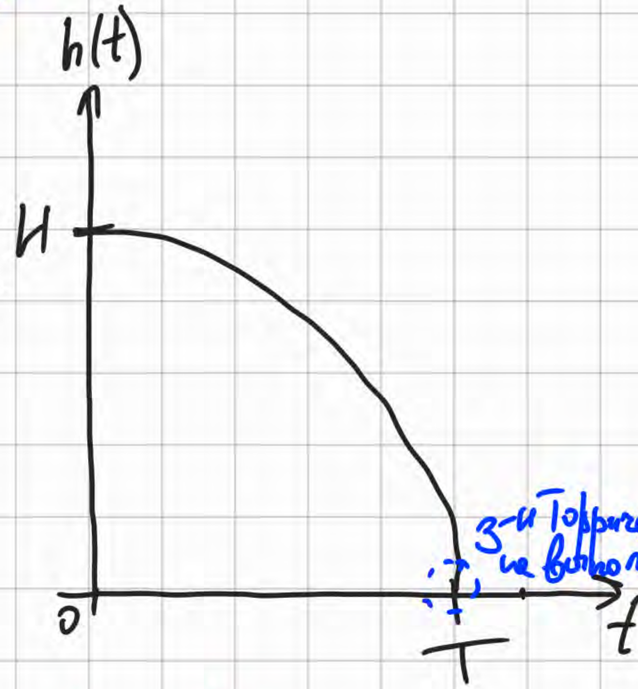
$$\frac{2}{5}\left(h^{5/2}(t) - H^{5/2}\right) = -At$$

$$h^{5/2} = (c - At)\,\frac{5}{2}$$

$$h(t) = \left(\frac{5}{2}c - \frac{5}{2}At\right)^{2/5}$$

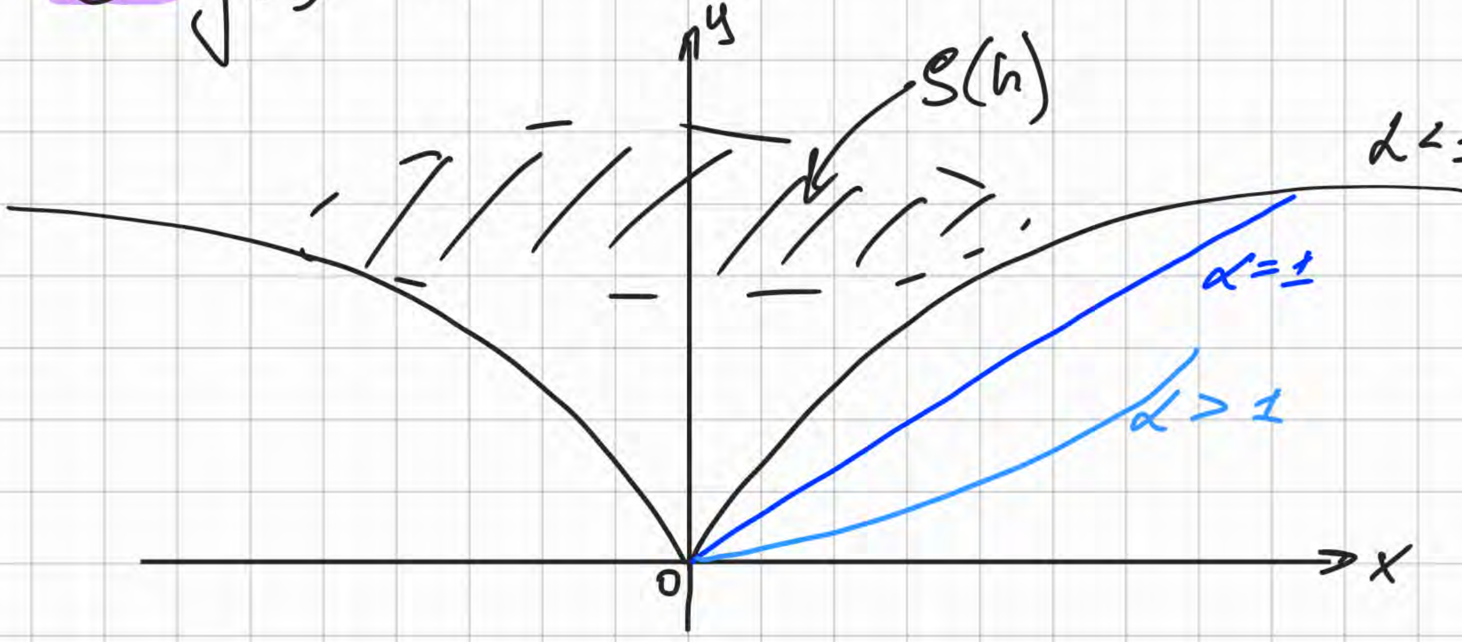
$$h(t) = H\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{2/5}$$

$$T = \frac{1}{5}\,\frac{\pi\,tg^2\alpha\, H^2}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$



Демидович. Составление дифф. ур-ний

① $y(x) = x^{\alpha}$



?α: при которых происходит смена режима вытекания в конце: исчезает сингулярность в $t = T$.

$$S(h) = \pi x^2 = \pi h^{2/\alpha}$$

$$h = y(x) = x^{\alpha} \Rightarrow x = h^{1/\alpha}$$

$$S(h)\, h'(t) = -\sigma\sqrt{2gh}$$

$$\pi h^{2/\alpha} h'(t) = -\sigma\sqrt{2g}\, h^{1/2}$$

$$h(t) = H(1-Ct)^{\frac{1}{\beta+1}}, \text{ где } \beta = \frac{4-\alpha}{2\alpha}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{H}{\beta+1}(1-Ct)^{\frac{1}{\beta+1}-1} \quad \geq 0$$ условие исчезнов. сингуляр.

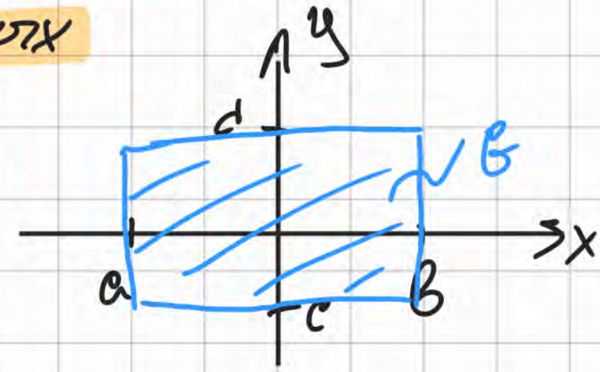
$\beta \leq 0 \Rightarrow \alpha \geq 4$

$h(t) \sim 1 - Ct$ $(\alpha = 4)$ → линейный закон истекания

Метод разделения переменных

$$y' = f(x,y) \equiv g(x)\,\varphi(y) \quad (*)$$

$$f \in C^0([a,b]\times[c,d])$$



1 шаг:

] $\exists y_1 \in [c,d]: \varphi(y_1) = 0 \Rightarrow y'|_{y_1} = 0$

$y = const$: решение в т. y_1

Далее: $\varphi(y) \neq 0$

$c \le y < y_1$ & $y_1 < y \le d$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\varphi(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \quad (**)$$

] $G(x)$ первообр. ф-ии $g(x)$: $\int g(x)\,dx = G(x) + C$

$$g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$$

] $\Phi(y)$ — одна из первообр. ф-ии $\frac{1}{\varphi(y)}$:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \Phi(y) + \tilde{C}$$

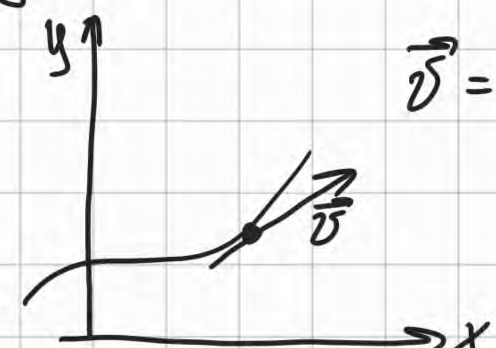
$$\frac{d}{dx}\big(\Phi(y(x))\big) = \frac{d\Phi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi(y)}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\Phi(y(x))\right) = \frac{d}{dx} G(x)$$

$$\Phi(y(x)) - G(x) = C$$

$$x_0 : y(x_0) = y_0 \Rightarrow C = C(x_0, y_0) \equiv G(x_0) - \Phi(y_0)$$

$$\frac{1}{\varphi(y)}dy = g(x)dx \quad (*)$$



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} dx(\vec{v}) = v_x \\ dy(\vec{v}) = v_y \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\varphi(y)} dy = \int g(x) dx$$

$$\Phi(y) = G(x) + C$$

$$\underbrace{\Phi(y) + C_1}_{"\Phi(y_0)} = \underbrace{G(x) + C_2}_{"G(x_0)}$$

Примеры:

①
$$y' - xy^2 = 2xy$$

$$y' = 2xy + xy^2 = \underbrace{x}_{"g(x)}\underbrace{[y(y+2)]}_{\varphi(y)}$$

$$\varphi(y) = 0 : y = 0, y = -2$$

$$y > 0 \; ; \; -2 < y < 0 \; ; \; y < -2$$

$$\frac{dy}{y(y+2)} = x dx$$

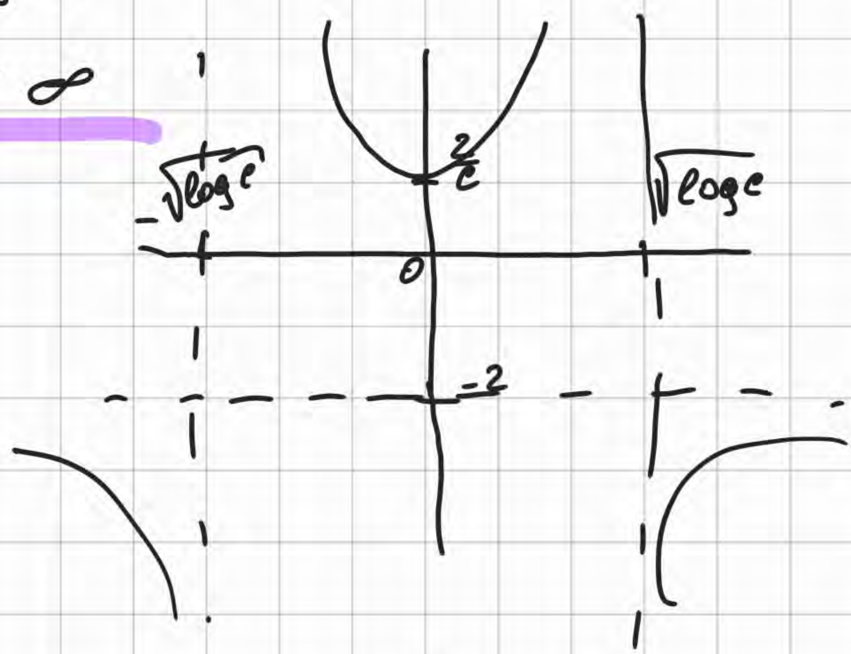
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right)dy = x\,dx \quad \Big| \int$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| + \ln|c| = x^2$$

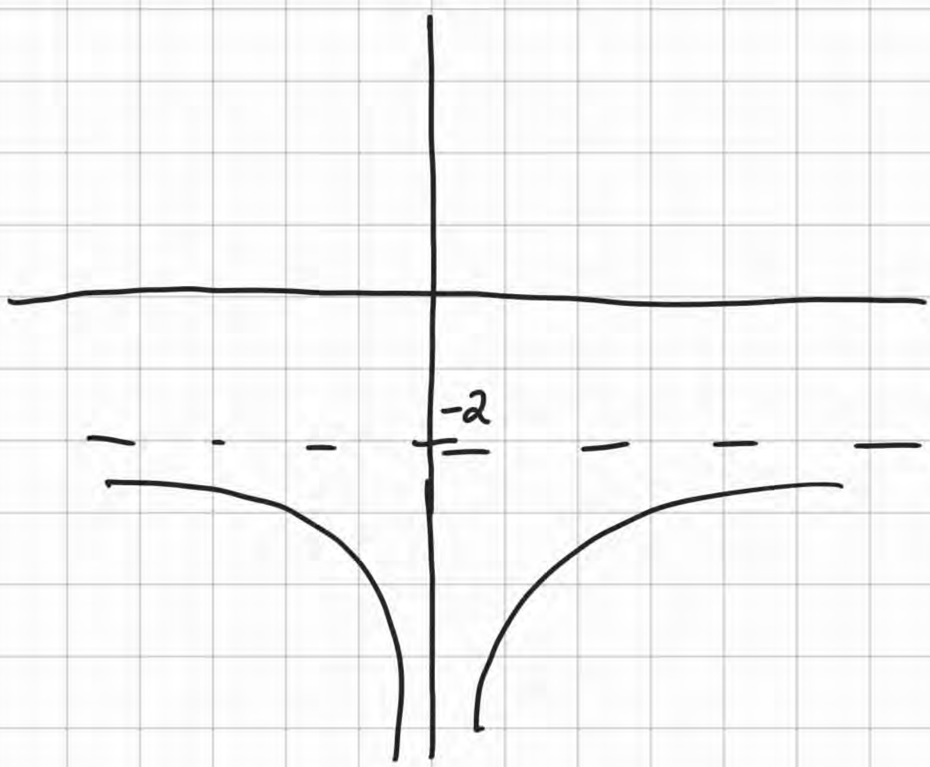
$c=0$? $y(x) = \dfrac{2}{ce^{-x^2}-1}$

$c=0$ $y(x) = -2$

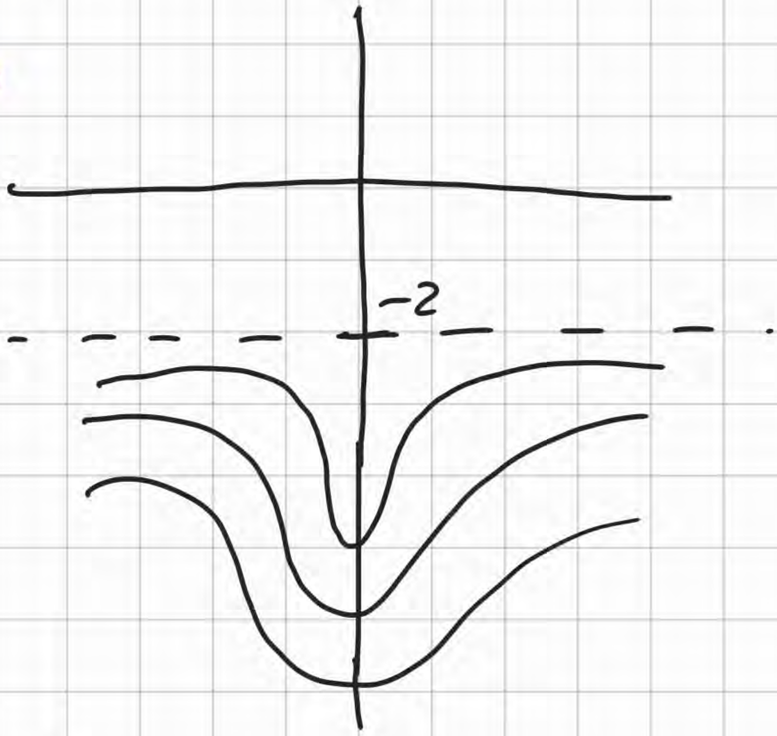
$1<c<\infty$



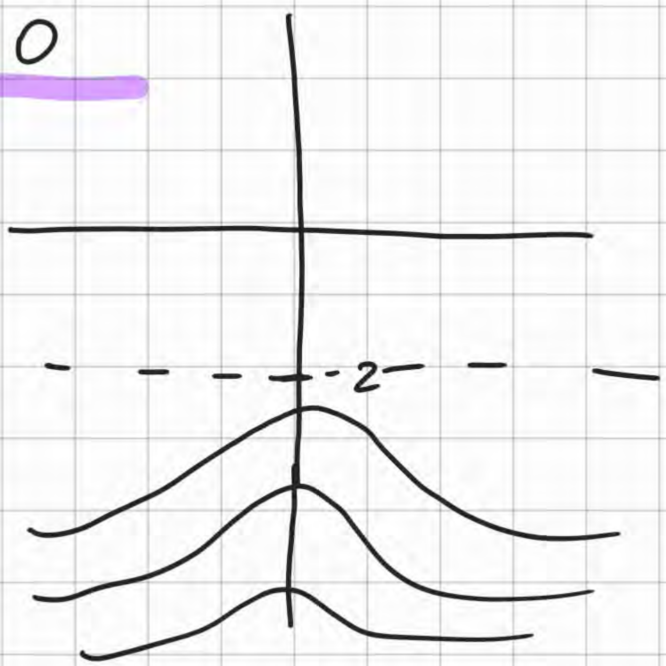
$c=1$



$0 < e < 1$



$e \leq 0$



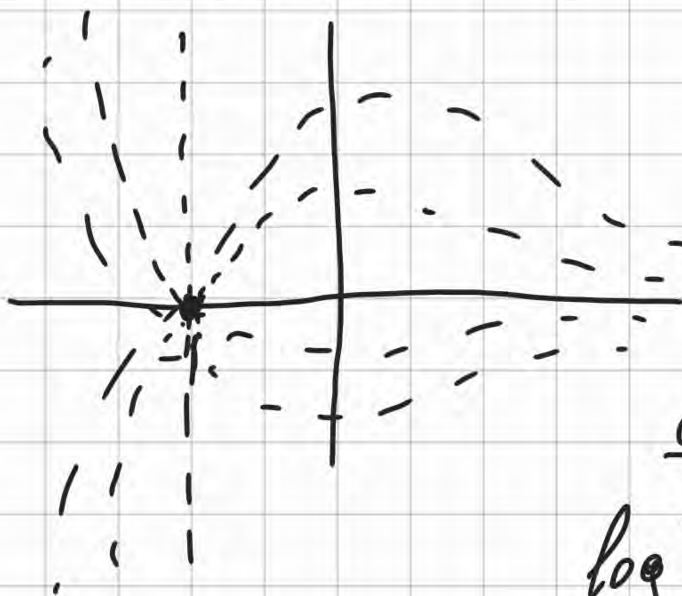
(2) $y'(x+1) + xy = 0$

$$y' = -\frac{xy}{x+1} = -\underbrace{\frac{x}{x+1}}_{g(x)} \, y^{=\varphi(y)}$$

$x = -1$, $y = 0$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} = -\frac{x+1}{xy}$$

$x = 0;\ y = 0$



1) $y' = -\frac{xy}{x+1}$ $\quad x > -1$

$\begin{cases} y(x) = 0 \\ x > -1 \end{cases}$ – ф-я правая

2) $\frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{x+1}$

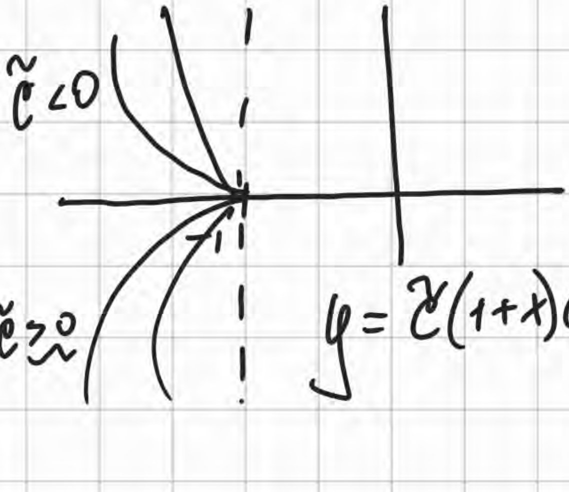
$$\frac{dy}{y} = -\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\log\left|\frac{y}{C}\right| = -x + \log|x+1| \;\Big|\, e^{\cdot}$$

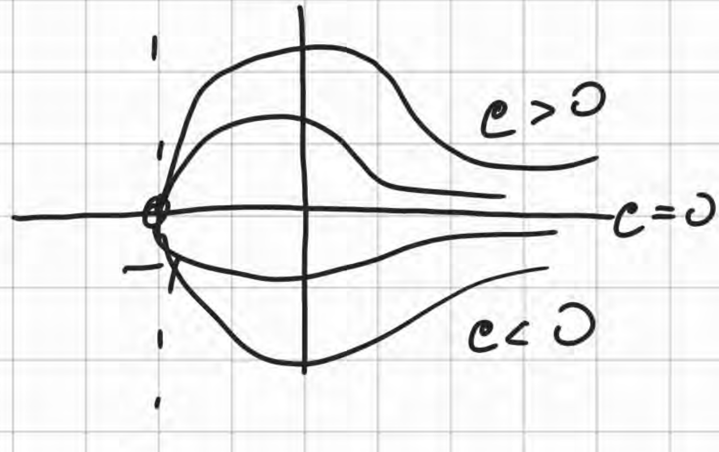
$$y(x) = C(1+x)e^{-x}$$

$C = 0 \Rightarrow y = 0$

$0 < C < 1$



$y = \tilde{C}(1+x)e^{-x}$



$xy' + y = 0$ $\quad$ 93

Разбор пятиминутки

22.09.2020

$$y(y'-x) = 2x$$

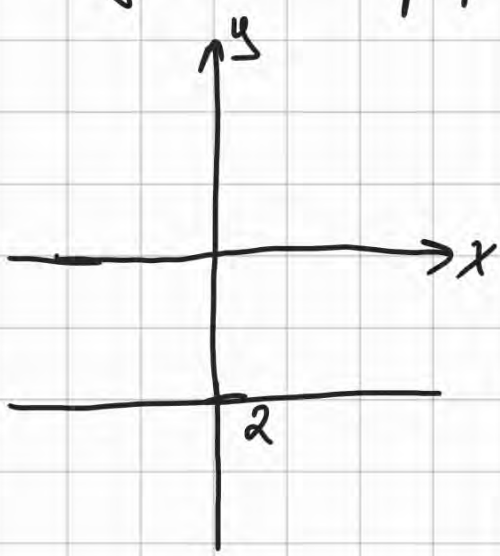
$$y' = \frac{y+2}{y}x \qquad x' = \frac{y}{x(y+2)}$$

$y=0$ особая точка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{y}\cdot x \Rightarrow x\,dx = \frac{y}{y+2}dy$$

$y<0$ $\quad$ $y>0$ единств. реш.

$\exists\ y(x) = -2$ интегр. кр.



$$\frac{x^2}{2} = \int\left(1-\frac{2}{y+2}\right)dy$$

$$\frac{x^2}{2} = \tilde{c} - 2\log|y+2| + y \qquad \log|\tilde{c}|$$

$$\tilde{c}e^{y-\frac{x^2}{2}} = (y+2) \quad \cup \quad y(x) = -2$$

Замены

a) $y' = f(\underbrace{\alpha x + \beta y}_{u(x)})$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\quad y(x)$

$$u'(x) = \alpha + \beta y'$$

$$y' = (u'-\alpha)/\beta = f(u)$$

$$u' - \alpha = \beta f(u)$$

$$u' = \alpha + \beta f(u) \equiv F(u)$$

$$\frac{du}{F(u)} = dx \Rightarrow \Phi(u) = x + c \cup \begin{cases} F(u_i) = 0 \\ u(x) = u_i \end{cases}$$

$$\Phi(\alpha x + \beta y) = x + c \cup F(\alpha x_i + \beta y_i) = 0$$

$$\alpha x_i + \beta y_i = c_i$$

1) $\frac{dy}{dx} = \cos(y - x)$

$$u = y - x \Rightarrow u' = y' - 1 \Rightarrow y' = u' + 1 = \cos u$$

$$u' = -1 + \cos u = -2\sin^2\frac{u}{2}$$

$$-\frac{du}{2\cdot\sin^2\frac{u}{2}} = dx$$

$$-\int\frac{d\tau}{\sin^2\tau} = \operatorname{ctg}\frac{u}{2} = x + c$$

$$\sin\frac{u}{2} = 0 \Rightarrow u_k = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x + c = \operatorname{ctg}\frac{y - x}{2} \\ y_k = x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ - однородная ф-ия порядка однородности 0:

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)\ \forall \alpha \neq 0$$

$$\exists \alpha = \frac{1}{x} \quad f(\alpha x, \alpha y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\frac{y(x)}{x} = u(x) \longmapsto y = xu \Rightarrow y' = u + xu' = \varphi(u)$

$xu' = \varphi(u) - u$ (1) (0;0) - особая точка!

$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u \equiv F(u)$

$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$

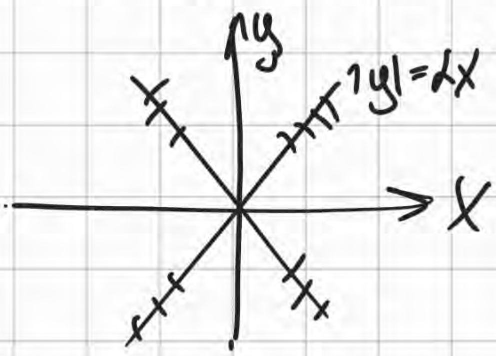
2) $xy' = x + y$

$y' = 1 + \frac{y}{x}$ $\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x < 0 \end{array} \right.$ $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{x+y} = \frac{(x/y)}{(x/y)+1}$

Два луча - ф-е кривые $\left\{ \begin{array}{l} x = 0, y > 0 \\ x = 0, y < 0 \end{array} \right.$

*) на лучах $y = \alpha x$ (или $x = \beta y$)
поле направлений постоянно!

$1 + \frac{y}{x} = 1 + \alpha$ $\left(1 + \frac{x}{y} = 1 + \beta\right)$



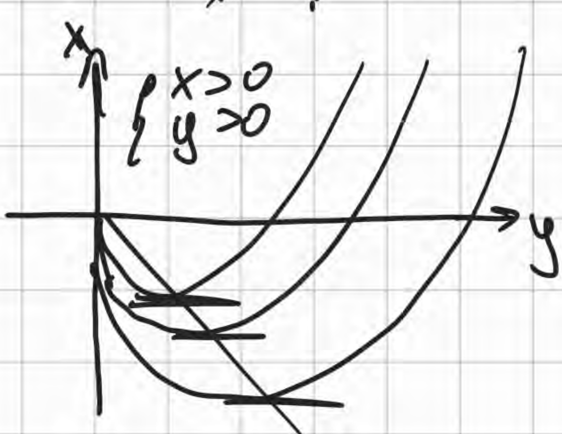
$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$

$y = xu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

$u + xu' = 1 + u$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow u = \log\left|\frac{x}{c}\right|$

$y = x\log\left|\frac{x}{c}\right|$



Разбор пятиминутки

29.09.2020

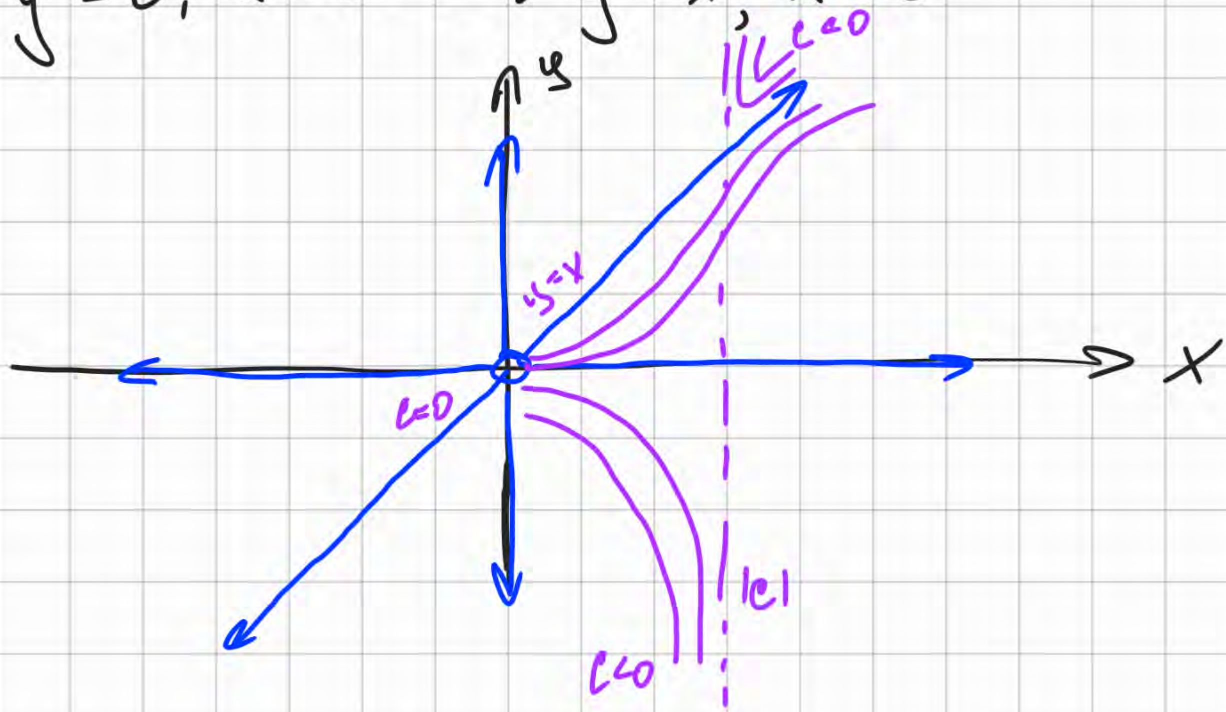
$x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$

$x \neq 0 \Rightarrow y' + \frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} = 0 \mapsto u = \frac{y}{x}$

$xu' = u(1-u)$

$u = 0$ & $u = 1$: $\int$-ые кр.

$\begin{cases} y = 0, & x > 0 \\ y = 0, & x < 0 \end{cases}$ & $\begin{cases} y = x, & x > 0 \\ y = x, & x < 0 \end{cases}$



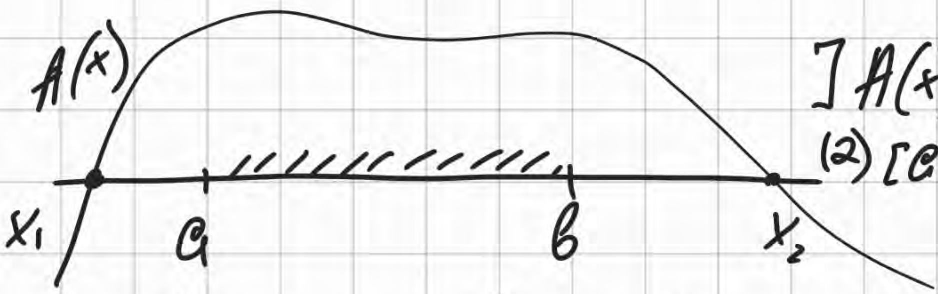
$\int \frac{du}{u(1-u)} = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) du = \log|u| - \log|1-u| + \log|c| =$

$= \log\left(\left|\frac{cu}{1-u}\right|\right) = \log|x|$

$u = \frac{x}{x+c} \Rightarrow \left\{ y(x) = \frac{x^2}{x+c} \right\} \cup \{ y(x) = 0 \}$

Линейное неоднор. ур-ние дифф-ое

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0 \quad (1)$$



$\exists A(x) \neq 0: x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$

(2) $[a;b]: \; y' + P(x)y = Q(x)$

$y' = f(x,y)$

Соотв. (2) однор. уравнение

$$y'(x) + P(x)y(x) = 0 \quad (2')$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$\log|y| = -\int P(x)dx + \log|c|$$

$$y(x) = c\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi}$$

$$y(x_0) = c?$$

$y_1(x)$, $y_2(x)$ | $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \to$ тоже реш. (2'), $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$

$\exists \tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ – два разл. реш (2)

$\Rightarrow \tilde{y}_1(x) - \tilde{y}_2(x)$ реш. однор. ур-я (2')

$\{\tilde{y}_i(x)\}$ – образует аффинное пр-во!

$$y(x) = y_{\substack{\text{общее}\\ \text{одн.}}}(x; c) + y_{\substack{\text{частное}\\ \text{неодн.}}}(x)$$

$y(x) = c e^{-\int p(x)dx}$
одн.

$c \mapsto c(x)$

$\tilde{y}(x) = c(x) e^{-\int p(x)dx} \mapsto$ в (2)

$c' e^{-\int p(x)dx} - cpe^{-\int pdx} + pc e^{-\int pdx} = Q(x$

$c'(x) = Q(x) e^{\int p(x)dx}$

$y(x) = c_0 e^{-F(x)} + e^{-F(x)} \Phi(x)$

1. $xy' - 2y = 2x^4$

$x = 0 \Rightarrow \{A(x) = 0\}$

$x<0 \quad , \quad x>0$

$] x > 0: \quad y' - \frac{2}{x} y = 2x^3 \quad (1)$

A. $y' = \frac{2}{x} y$

$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x} dx$

$\log |y| = 2 \log |x| + \log |c|$

$y(x) = c_0 x^2$

B. $] c_0 \longmapsto c(x): \quad \tilde{y}(x) = c(x) \cdot x^2$

$\tilde{y}'(x) = c'x^2 + 2cx$

подставляем в (1)

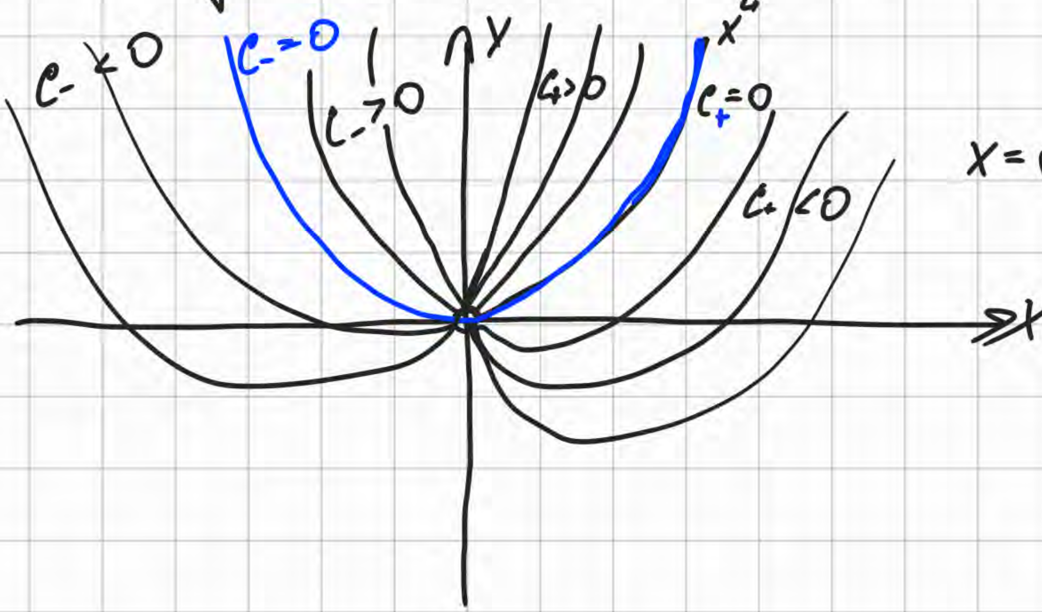
$c'x^2 + 2cx - \frac{2}{x} cx^2 = 2x^3$

$c'x^2 = 2x^3$

$c' = 2x \Rightarrow c(x) = x^2 + \tilde{c}$

$y(x) = c_0 x^2 + x^4 + \tilde{c} x^2 = c x^2 + x^4 ; \; c = \tilde{c} + c_0$

$$\begin{cases} x>0: & y(x) = c_+ x^2 + x^4, \quad c_+ \in \mathbb{R} \\ x<0: & y(x) = c_- x^2 + x^4, \quad c_- \in \mathbb{R} \end{cases}$$



$x = 0, \; y = 0$

(2) $x^2 y' + xy + 1 = 0$

$x^2 : = 0 \qquad x = 0$

$x > 0 \qquad x < 0$

$$y' + \frac{1}{x} y = -\frac{1}{x^2}$$

A. $y' + \frac{1}{x} y = 0$

$y_{одн}(x) = \frac{c_0}{x}$

B. $\tilde{y}(x) = \frac{c(x)}{x}$

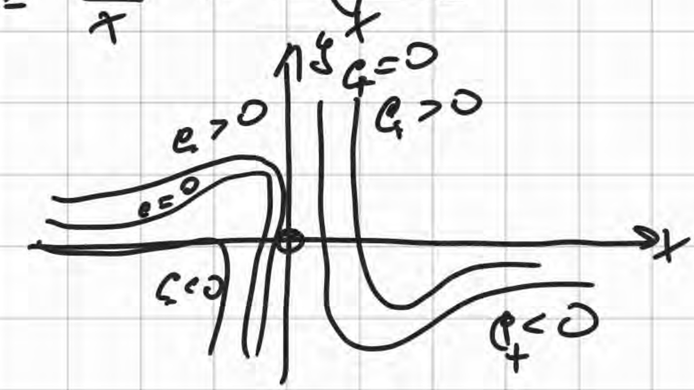
$\tilde{y}'(x) = \frac{c'}{x} - \frac{c}{x^2}$

$c'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow c(x) = \tilde{c} - \log x$

$$y(x) = \frac{c_0}{x} + \frac{\tilde{c}}{x} - \frac{\log|x|}{x} = \frac{c}{x} - \frac{\log|x|}{x}$$

$x<0$ такое же решение

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y(x) = \frac{c}{x} - \frac{\log|x|}{x} \end{cases}$$



6.10.20.

Уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \quad \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$\exists\, \alpha > 0$: $\frac{1}{y^{\alpha}} y' + \frac{1}{y^{\alpha-1}} P(x) = Q(x)$

$$y(x) \to z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}} \Rightarrow z'(x) = -(\alpha-1)\frac{y'}{y^{\alpha}}$$

$$-\frac{1}{1-\alpha} z'(x) = \frac{y'}{y^{\alpha}}$$

$$-\frac{1}{1-\alpha} z'(x) + P(x)z(x) = Q(x)$$

$$z(x) \underbrace{-(\alpha-1)P(x)}_{\tilde{P}(x)} z(x) = \underbrace{-(\alpha-1)Q(x)}_{\tilde{Q}(x}$$

① $\frac{dy}{dx} + 2y + x^5 y^3 = 0 \quad | : y^3$

$$\frac{1}{y^3} y' + \frac{2}{y^2} = -x^5$$

$$\frac{1}{y^2(x)} = z(x) \Rightarrow z'(x) = \frac{-2y'(x)}{y^3}$$

$$\frac{y'(x)}{y^3} = -\frac{1}{2} z'(x)$$

$$-\frac{1}{2} z'(x) + 2z(x) = -x^5$$

$$z'(x) - 4z(x) = 2x^5$$

(2) $y'(2x^2 y \log y - x) = y \qquad (y > 0)$

Вкарте $\frac{dx}{dy}$: $x(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(dx/dy)}$

$$2x^2 y \log y - x = y \frac{dx}{dy}$$

$$x' + \frac{1}{y} x = 2x^2 \log y$$

$$\frac{1}{x^2} x' + \frac{1}{xy} = 2\log y$$

$$z(y) = \frac{1}{x(y)} \Rightarrow z'(y) = \frac{-x'(y)}{x^2}$$

$$-z'(y) + \frac{1}{y} z(y) = 2\log y$$

$$z'(y) - \frac{1}{y} z(y) = -2\log y$$

$y>0: \begin{cases} z>0 \\ z<0 \end{cases}$

1) $z'(y) - \frac{1}{y} z(y) = 0$

$$z(y) = C_0 y$$

2) $\tilde z(y) = c(y)\,y$

$$\tilde z'(y) = c'(y)\,y + c(y)$$

$$c'(y)\,y + c(y) - c(y) = -2\log y$$

$$c'(y)\,y = -2\ln y$$

$$c'(y) = -2\,\frac{\ln y}{y}$$

$$c(y) = -2\int \frac{\ln y}{y}\,dy = -2\int u\,du =$$

$u = \ln y \Rightarrow du = \frac{1}{y}dy$

$$= -2\,\frac{u^2}{2} = -\ln^2 y + \tilde c$$

$z(y) = c(y)\,y = -\ln^2 y \cdot y + \tilde c\, y$

Уравнения в полных дифф. ур-ниях

V $\mathbb{R}$

$\omega : \vec v \to \mathbb{R}$

$\langle \omega, \vec v \rangle = c \in \mathbb{R}$

$$\langle \omega, \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \rangle = k_1 v_x + k_2 v_y \in \mathbb{R}$$

дуальное

$V^* \ni \omega$

e^*_x, e^*_y

$$\begin{cases} \langle e^*_x, \vec e_x \rangle = 1 \\ \langle e^*_x, \vec e_y \rangle = 0 \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{matrix} \langle e^*_y, \vec e_x \rangle = 0 \\ \langle e^*_y, \vec e_y \rangle = 1 \end{matrix}$$

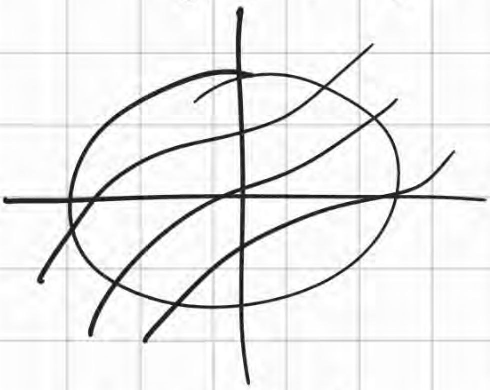
$$\langle \omega, \vec v \rangle = \omega_x v_x + \omega_y v_y \in R$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x,y) \end{cases}$$

$f_{1,2}(x,y)$ - дифф. ф-ии в $D \subset \mathbb{R}^2$

$x(t), y(t)$ - параметр. вид

$$\gamma(t,C) = \begin{cases} x = \varphi(t,C) \\ y = \psi(t,C) \end{cases}$$



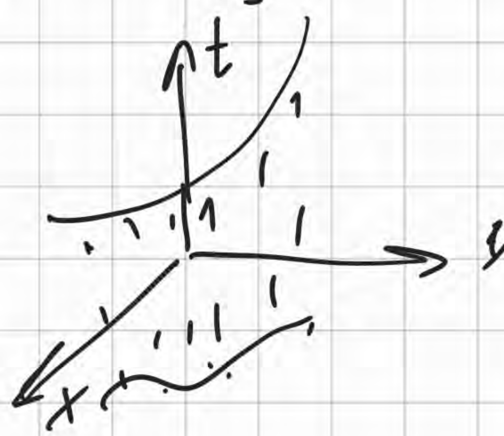
$$\dot\gamma(t,C) = \begin{cases} \dot x = \dot\varphi(t,C) \\ \dot y = \dot\psi(t,C) \end{cases}$$

$\exists\ \vec{v}(x,y) = f_1(x,y)\vec{e}_x + f_2(x,y)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

$\nexists$ особенностей $\Leftrightarrow f_1^2 + f_2^2 \neq 0 \quad \forall x,y \in D$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \dot\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$(\varphi(t), \psi(t), t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$



$$\begin{cases} \omega = f_2(x,y)dx - f_1(x,y)dy \\ \vec{v} = f_1\vec{e}_x + f_2\vec{e}_y \end{cases}$$

$\langle \omega, \vec{v} \rangle = f_2 f_1 - f_1 f_2 = 0$

$\vec{v} \in \ker \omega$ - ур-ние в дифф.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$\exists\, u(x,y)$ в D

$$du(x,y) = \omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dy \qquad u(x,y) = C$$

$$\begin{cases} M = \dfrac{du}{dx} \\ N = \dfrac{du}{dy} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$$\omega' = Mdx + Ndy$$

$$d\omega = 0 \Longleftrightarrow \omega = d\varphi$$

(1)

$$\underbrace{2x\cos^2 y}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(2y - x^2\sin 2y)}_{N(x,y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4x\cos y\sin y = -2x\sin 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2x\sin 2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = 2x\cos^2 y & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = 2y - x^2\sin 2y & (2) \end{cases}$$

$$(1): \frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos^2 y \Rightarrow u(x,y) = x^2\cos^2 y + F(y)$$

$$(2): \frac{\partial u}{\partial y} = -2x^2\cos y\sin y + \frac{dF}{dy} = 2y - x^2\sin 2y$$

$$\frac{dF}{\partial y} = 2y \Rightarrow F(y) = y^2 + C$$

$$u(x,y) = x^2\cos^2 y + y^2 + C$$

13.10.20

$$\begin{cases} M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$?\exists\ \mu(x,y):\ \mu M dx + \mu N dy = 0 \quad (\mu \neq 0)$

$$u(x,y) = e^x(y^2+x) \Rightarrow du(x,y) = e^x(y^2+x+1)dx + 2ye^x dy$$

точна!

$$(y^2+x+1)dx + 2y\,dy = 0 \quad \Big| \Rightarrow \exists\ \mu(x,y) = e^x$$

$2y \neq 0$

интегрирующий множит.

$\mathbb{R}^3$ $\omega = Mdx + Ndy + Pdz$ $\quad \boxed{\mu\ \exists \text{ не всегда}}$

$$u(x,y,z):\ M = \frac{\partial u}{\partial x},\ N = \frac{\partial u}{\partial y},\ P = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \\ \dfrac{\partial M}{\partial z} = \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N}{\partial z} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

(1) $\omega = dz - y\,dx$: $M = -y$, $N = 0$, $P = 1$

$\exists\, \mu(x, y, z)$: $\mu\omega$ – точна?

$$\mu dz - y\mu dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(-\mu y) = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \quad (N = 0)$$

$$\frac{\partial(-\mu y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \mu + y\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

(A) $\mu = \mu(x) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$

$$N(x,y)\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \mu(x)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{\mu(x)}\partial\mu(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

(x) (x, y)

μ – інт. множник $\Leftrightarrow$ фун-ція одного аргумента (не залежить от y)

(3) Аналогично $\mu = \mu(y)$

$$\frac{1}{\mu(y)}\frac{\partial \mu(y)}{\partial y} = \frac{-\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M}$$

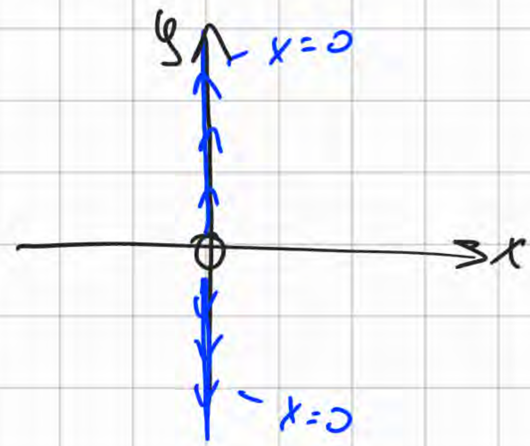
(2) $(x^2 - y)\,dx + (x^2y^2 + x)\,dy = 0$

т. $(x=0,\ y=0)$ особая!

? $\int$-кривое?

$\exists\ x = 0 \Rightarrow -y\,dx = 0$

$(x=0,\ y>0)$
$(x=0,\ y<0)$ – $\int$ кривое



$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 - y)}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (x^2y^2 + x)}{\partial x} = 2xy^2 + 1 \end{cases}$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -1 - 2x^2y - 1 = -2 - 2x^2y$$

(1) $\frac{Q}{N} = \frac{-2(1 + xy^2)}{x^2y^2 + x} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \mu(x)$

$\frac{Q}{M} = \frac{-2(1 + xy^2)}{x^2 - y}$ $\nexists\ \mu(y)$ $\int$-ий множ.

(1) $\frac{1}{\mu(x)}\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = -\frac{2}{x}$

$\mu(x) = \frac{c}{x^2}$ – $\int$-ий множитель

$\exists\, c = 1$

$\frac{1}{x^2}(x^2 - y)dx + \frac{1}{x^2}(x^2y^2 + x)dy = 0$

$\tilde{\omega} = \left(1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \frac{1}{x}\right)dy = 0 \Rightarrow u(x,y) = ?$

$du(x,y) = \tilde{\omega}$

форма точна: $-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{y}{x^2} \longmapsto u(x,y) = x + \frac{y}{x} + F(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 + \frac{1}{x} \longmapsto u'_y = \frac{1}{x} + F'(y) = y^2 + \frac{1}{x}$

$F(y) = \frac{y^3}{3} + c$

$u(x,y) = x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = c \} \cup$

$\cup \{x = 0, y > 0\} \cup \{x = 0, y < 0\}$

(3) $xy\,dx + x^2\left(1+\frac{y}{2}\right)dy = 0$

$x=0;\ \forall y$ } ∫-е кривые
$y=0;\ \forall x$ }

1) $(M'_y - N'_x)/N = \dfrac{x - 2x\left(1+\frac{y}{2}\right)}{N} = \dfrac{-x(1+y)}{x^2 + x^2\frac{y}{2}}$

2) $(M'_y - N'_x)/M = \dfrac{-x(1+y)}{xy} = -\dfrac{1+y}{y} = -\dfrac{1}{y} - 1$

$\exists\ \mu(y)$ ∫-щий множитель

$$\frac{1}{\mu(y)}\frac{\partial \mu(y)}{\partial y} = \frac{1}{y} + 1$$

$$\mu(y) = cye^y$$

$\exists\ c = 1 \Rightarrow \mu(y) = ye^y$

$\tilde{\omega} = xy^2e^y\,dx + x^2ye^y\left(1+\frac{y}{2}\right)dy = 0$

$u(x,y) = ?\quad du = \tilde{\omega} \Rightarrow F'(y) = 0 \Rightarrow F(y) = \text{const}$

$$x^2y^2e^y = C\ ,\quad C \in [0;+\infty)$$

Уравнения 1-ого порядка не разрешенного отн-но производной

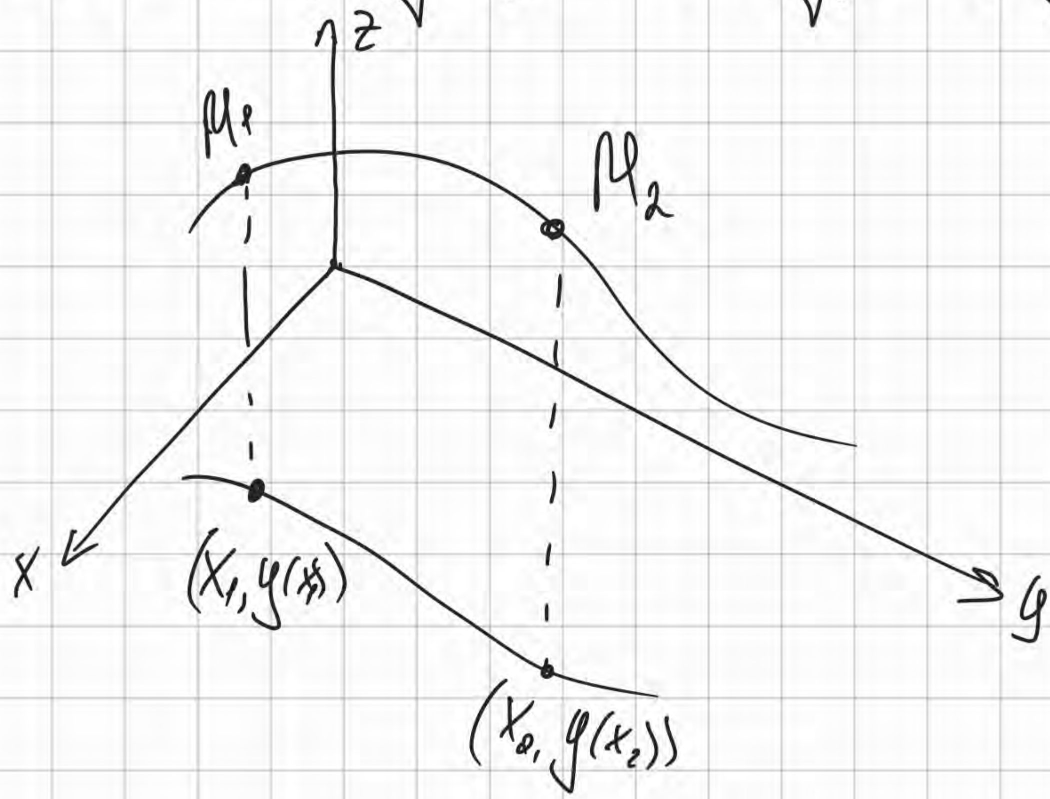
$F(x, y, y') = 0$ (на $\mathbb{R}^3$) y' - независ. перем.

F - непрерывная вместе со всеми своими производными 1-ого порядка.

$$\underbrace{F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}}_{\text{непр. ф-ии}}$$

$\exists\ y(x)$ (либо неявно: $\varphi(x, y) = 0$)

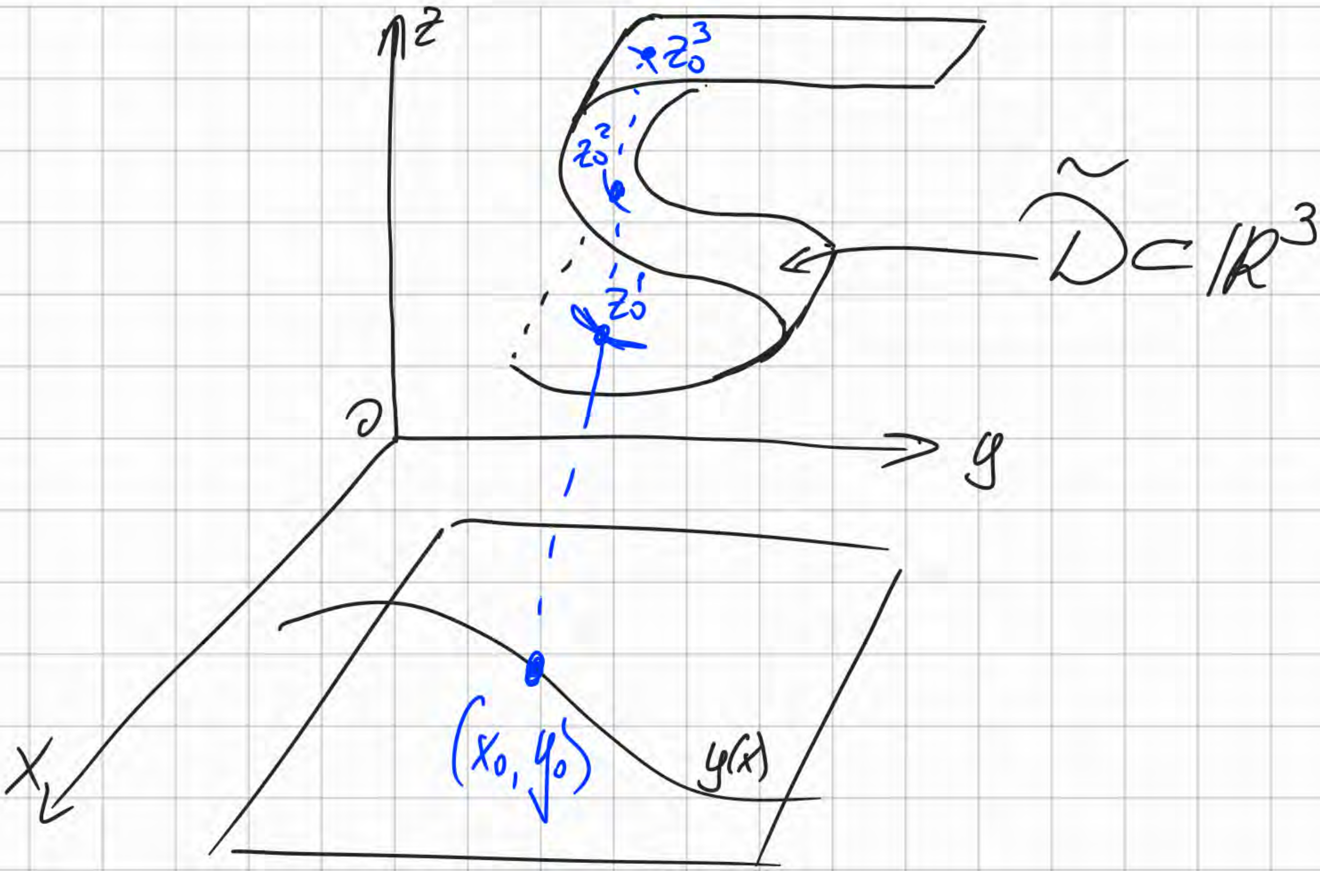
в $\mathbb{R}^2 \ni \tilde{M}(x, y(x)) \mapsto M(x, y, z)\big|_{z = y(x)} \in \mathbb{R}^3$



$F(x_0, y_0, z) = 0$ — может иметь несколько решений

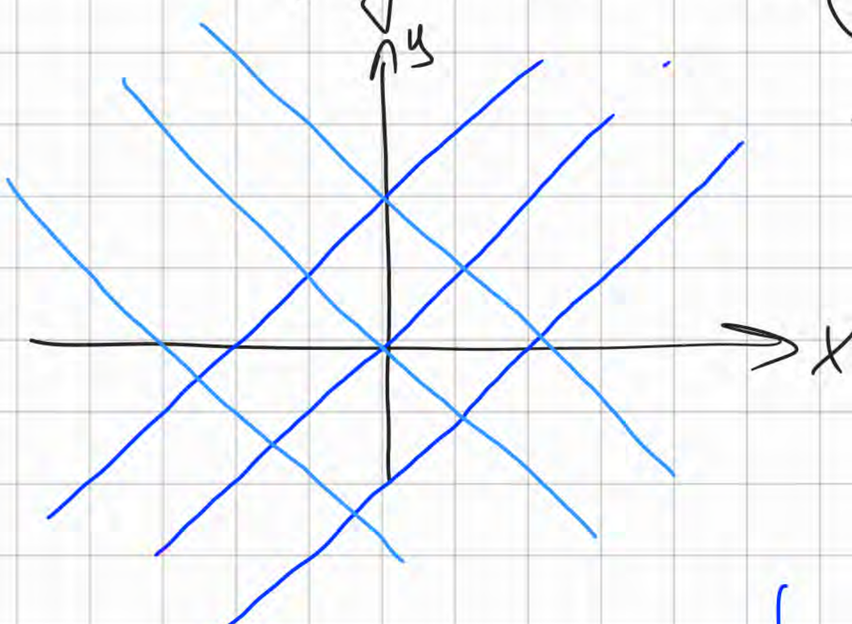
$y'(x_0, y_0)$

$z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, \ldots, z_0^{(n)} \Rightarrow$ через т. $M(x_0, y_0)$ в $\mathbb{R}^2$ будут проходить несколько кривых с разными значениями касательной в M_0: $z_0^{(k)} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x = x_0}$



1. $F(x, y, y') = (y')^2 - 1 = 0$

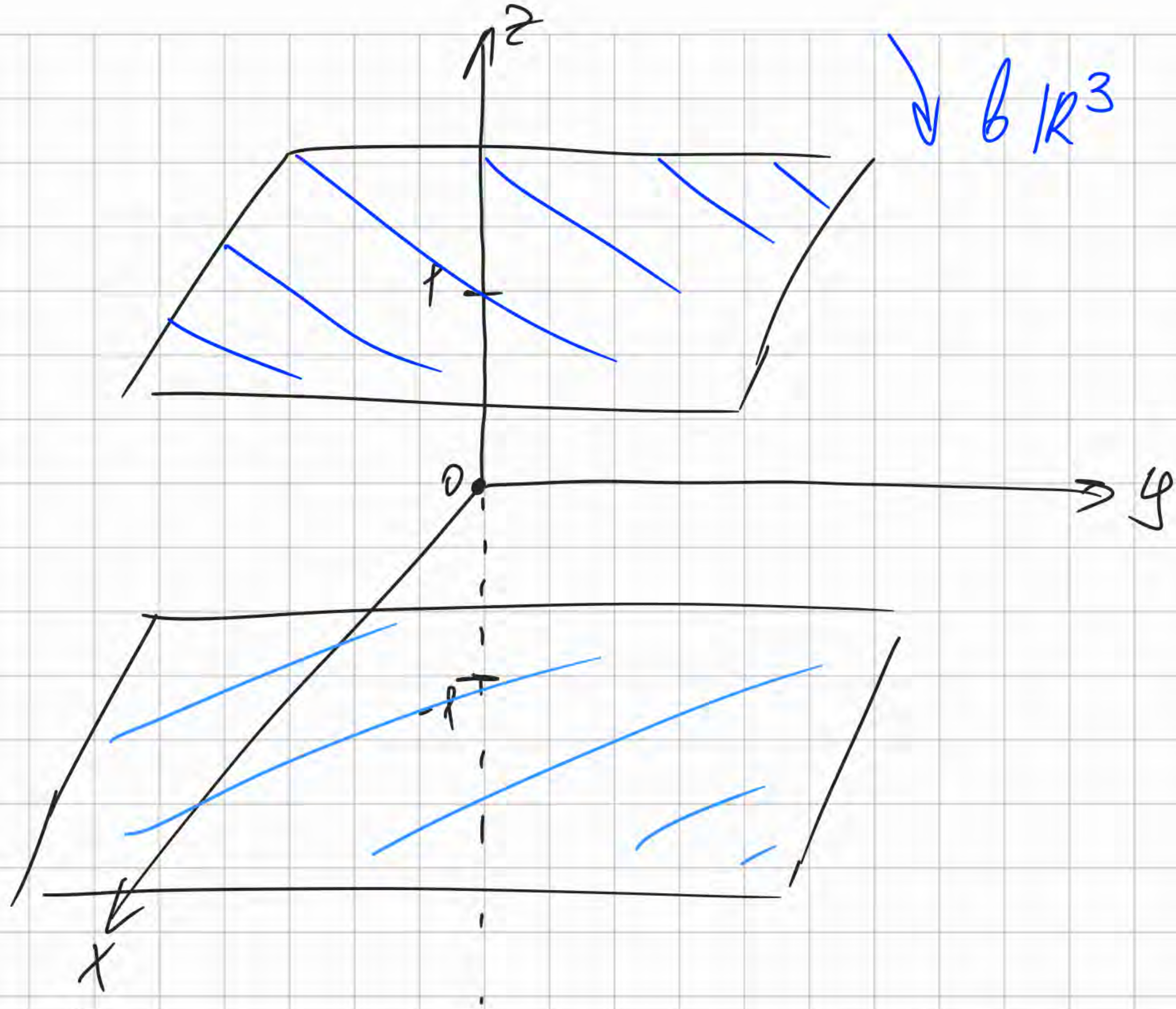
$$\begin{cases} y' = -1 & \Rightarrow y(x) = -x + c_1 \\ y' = 1 & \Rightarrow y(x) = x + c_2 \end{cases}$$



$\gamma_- = (x, y_-(x), y_-'(x)) =$
$= (x, -x + c_1, -1)$

$\gamma_+ = (x, y_+(x), y_+'(x)) =$
$= (x, +x + c_2, 1)$

γ - кривые



Утверждение: $\exists$ в т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \subset D \subset \mathbb{R}^3$ выполняются условия:

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \end{cases}$$

т.е. z_0 простой корень ур-ния $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

у т. M_0 $\exists$ окрестность $U \subset D$, в которой $F(x, y, y') = 0$ можно разрешить отн-но y':

$y^N = f(x, y)$

Если же ур-е $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ имеет n кратных корней $z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, \ldots, z_0^{(n)}$

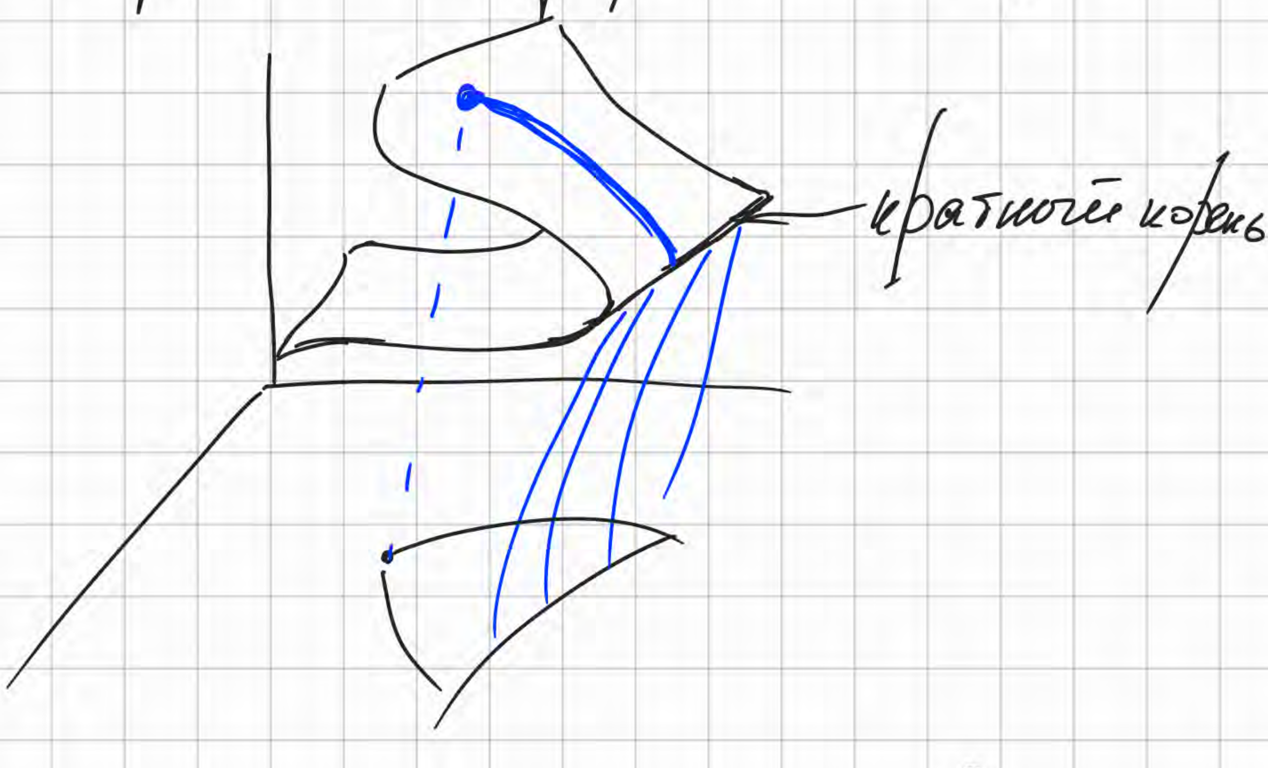
$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0^{(k)}) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z_0^{(k)}}(x_0, y_0, z_0^{(k)}) \neq 0 \end{cases} \quad k = 1, \ldots, n$$

то в окр-ти $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ $\exists$ n решений (ветвей)

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_k(x, y) = 0 \\ \left.\dfrac{dy(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = z_0^{(k)} \end{cases} \qquad k = 1, \dots, n$$

? Кратные корни ? $\Rightarrow$ $\exists_f$ дискриминантной кривой

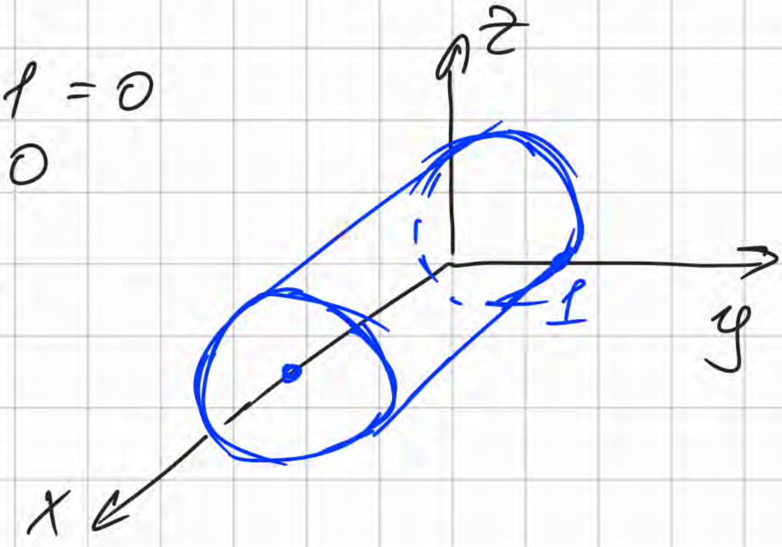


② $F(x, y, y') = (y')^2 + y^2 - 1 = 0$

$z^2 + y^2 - 1 = 0$

на прямой $(z = 0, y = \pm 1)$

исходное ур-е $(y')^2 = 0$



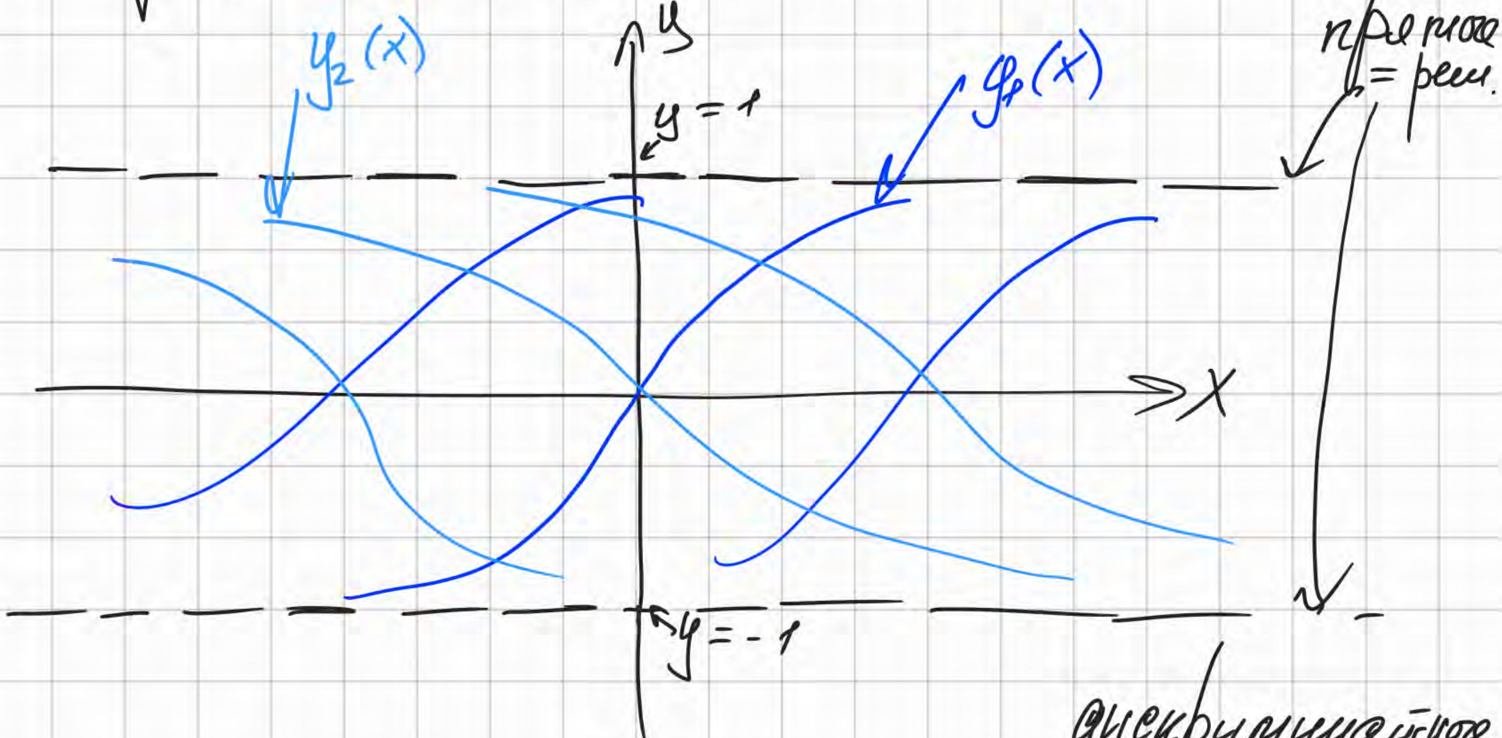
Прямые в $\mathbb{R}^2$: $y = \pm 1$ особые решения

$(y')^2 + y^2 - 1 = 0$ $\qquad -1 < y < 1 \to y \in [-1;1]$

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y^2}$ два решения

$y_1(x) = \sin(x + C_1)$, $\quad -\pi/2 < x + C_1 < \pi/2$

$y_2(x) = \sin(-x + C_2)$, $\quad -\pi/2 < -x + C_2 < \pi/2$



дискриминантное решение

Метод введения параметра

Если $F(x, y, y')$ — полином по y' $\Rightarrow$ можно выразить y' через x, y.

Но иногда ур-е $F(x, y, y') = 0$ можно разрешать отн-но x или y $\Rightarrow$ $\begin{cases} y = f(x, y') \\ x = g(y, y') \end{cases}$

$\Rightarrow$ кривую в $\mathbb{R}^2$, разрешающую ур-е $F(x, y, y') = 0$, можно получить в параметр. виде $\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases}$

А $F(x, y, y') = 0$, $y = f(x, y')$ $\Rightarrow$ $\exists\, y = f(x, p)$

т.е. $y' = p$

$\exists \begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = f(\varphi(p), p) \end{cases} \longrightarrow ?$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, p) + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = p}$$

ур-ние, разреш. отн-но $p'(x)$

Б $F(x, y, y') = 0$, $x = g(y, y')$

$p = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$, $p = p(y)$

ур-ние, разр. отн-но $p'(y)$

$$x = g(y, p) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \boxed{\frac{1}{p} = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{dp}{dy}}$$

③ $(y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2} - y = 0$

Ⓐ $y = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$

$\exists\, p = y' \Rightarrow \quad y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2} \quad (**) \quad \frac{d}{dx}$

$$p = 2p \cdot p' - p - xp' + x$$

$$(2p - x) = (2p - x)\frac{dp}{dx}$$

1. $p = \frac{x}{2}$ алгебраич. ур-е $\quad y = \frac{x^2}{4}$

2. $\frac{dp}{dx} = 1 \quad p(x) = x + c \quad\quad y = \frac{x^2}{2} + cx + c^2$

Ответ: $\{y = \frac{x^2}{2} + cx + c^2\} \cup \{y = \frac{x^2}{4}\}$
общее решение

дискр. прямая - решение, которое касается всех крив.

$$\begin{cases} F(x, y, y') = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2} - y \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \left\| \frac{\partial F}{\partial y'} = (2y' - x)\right|_{y = \frac{x^2}{4}} = 0 \end{cases}$$

(4) $x = y' + e^{y'}$

(5) $x = \varphi(y')$

$p = y'$: $\quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{p} = \dfrac{dp}{dy} + e^{p}\dfrac{dp}{dy} =$

$p(y)$

$= (1+e^{p})\dfrac{dp}{dy}$

$\dfrac{dy}{dp} = p(1+e^{p})$

$$\begin{cases} y(p) = \dfrac{p^2}{2} + \int p e^{p} dp = \dfrac{p^2}{2} + e^{p}(p-1) + C \\ x(p) = p + e^{p} \end{cases}$$ ← ответ

$\dot{x}(p) = 1 + e^{p} \neq 0$

$\dot{y}(p) = p(1+e^{p})$

$\dot{y}(p) = 0 \iff p = 0$

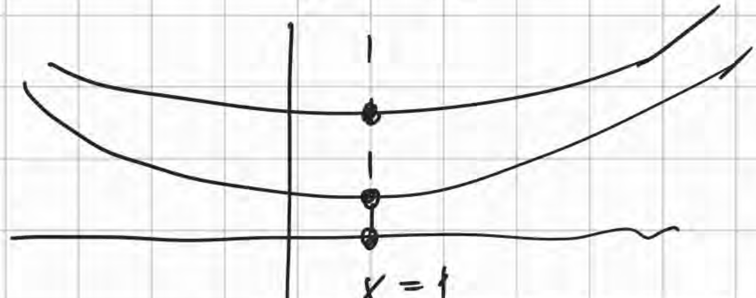
$x(p)\big|_{p=0} = \underline{1}$

$\left(\dot{y}(p)\big|_{p<0} < 0 \quad \dot{y}(p)\big|_{p>0} > 0 \right)$

$p \to -\infty$

$x \sim p$

$y \sim p^2$



положение min

$p \to +\infty$

$x \sim e^{p}$

$y \sim e^{p}$

Пусть для $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ур-е $F(x, y, y') = 0$ имеет n решений отн-но y': $z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(n)}$, $z = y'$
$(x_0, y_0, z_0^{(k)} \in \mathbb{R}^3)$

По Th о неявной ф-ии можно выразить в окр-ти $\forall z_0^{(k)}$:
$$\begin{cases} \frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y), \ k = 1, \dots, n \\ f_k(x_0, y_0) = z_0^{(k)} \end{cases}$$

Th о неявн. ф-ии $\Rightarrow f_k(x, y)$ - непр. по x и y + непр. дифф. по y: $\frac{\partial f_k}{\partial y} = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{z = f_k}$

$\forall$ ветвь y_k будет единств. решением д.у. с данным $z_0^{(k)}$

? Особое решение?
Если нарушить усл. непр. дифф. по y (*) $\Rightarrow$?
$\frac{\partial f_k}{\partial y}$ - непр. $\Rightarrow$ достаточное усл. $\exists !$ реш.

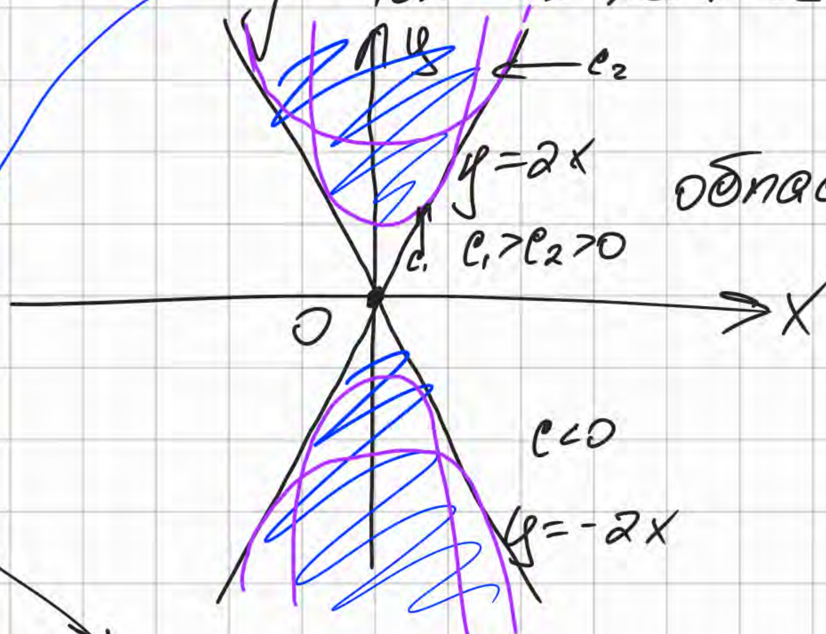
Например, $\exists\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \Rightarrow$ нарушается это усл.!

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases} \quad (**)$$
эта система - необходимое усл. $\exists$ особых решений.

если $\Phi(x, y) = 0$ - дискрим. кривая! (д.у. $F(x, y, y') = 0$)
$$\begin{cases} F = 0 \\ F'_{y'} = 0 \end{cases}$$

(5) $F(x,y,y') = x(y')^2 - 2yy' + 4x = 0 \quad \Big| \cdot \frac{d}{dy'}$

$D = 4y^2 - 16x^2 \Rightarrow D \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \pm 2x$



область, в которой ур-ние разреш.

$2xy' - 2y = 0$ Ищем особые решения

подставляем $y' = \frac{y}{x}$

$$\frac{y^2}{x} - \frac{2y^2}{x} + 4x = 0$$

$-y^2 + 4x^2 = 0$ $\{y = 2x\} \cup \{y = -2x\}$ дискр. кривые

$y = \frac{2x}{y'} + \frac{xy'}{2}$ выразим из нач. ур-ния $\Rightarrow$ разрешенность отн-но y'

$y' = p \quad (p(x))$

$y = \frac{2x}{p} + \frac{xp}{2}$, продифф. по x

$$p = \frac{2}{p} - \frac{2xp'}{p^2} + \frac{p}{2} + \frac{xp'}{2}$$

$$\left(\frac{p}{2}-\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{p}{2}-\frac{2}{p}\right)\frac{x}{p}\frac{dp}{dx}$$

1) $p^2 = 4 \Rightarrow p = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2x$ — подставляем, находим $y = \pm 2x$

2) $p^2 \neq 4 \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \frac{1}{x}dx$

$$p = cx$$

подставляем $p = cx$

$$y = \frac{2x}{cx} + \frac{xcx}{2} = \frac{2}{c} + c\frac{x^2}{2}$$

(6) $F(x, y, y') = y - x - \left(\frac{2}{3}y'\right)^3 + \left(\frac{2}{3}y'\right)^2$

1) Особые решения:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 = -3\cdot\frac{8}{27}\cdot(y')^2 + 2\cdot\frac{4}{9}y' = -\frac{8}{9}y'(y'-1) \end{cases}$$

1) $y' = 0 \Rightarrow$ подставим в ур. $\quad y = x$ $\quad\Rightarrow y' = 1 \neq 0$ | 2 ветви

2) $y' = 1 \Rightarrow$ подставим в ур. $\quad y = x - \frac{4}{27}$ | дискр. кривой

Являются ли они особыми решениями

ветвь 1 не реш!

ветвь 2 решение!

$y' = p$

$y = x + \frac{8}{27}p^3 - \frac{4}{9}p^2 \quad \Big| \frac{d}{dx}$

$p = \left(\frac{8}{27}\cdot 3p^2 - \frac{4}{9}\cdot 2p\right)\cdot p' + 1$

$p - 1 = \frac{8}{9}p(p-1)\frac{dp}{dx}$

1) $p = 1 \Rightarrow y = x - \frac{4}{27}$ — одна из ветвей дискр. кривой

подставим

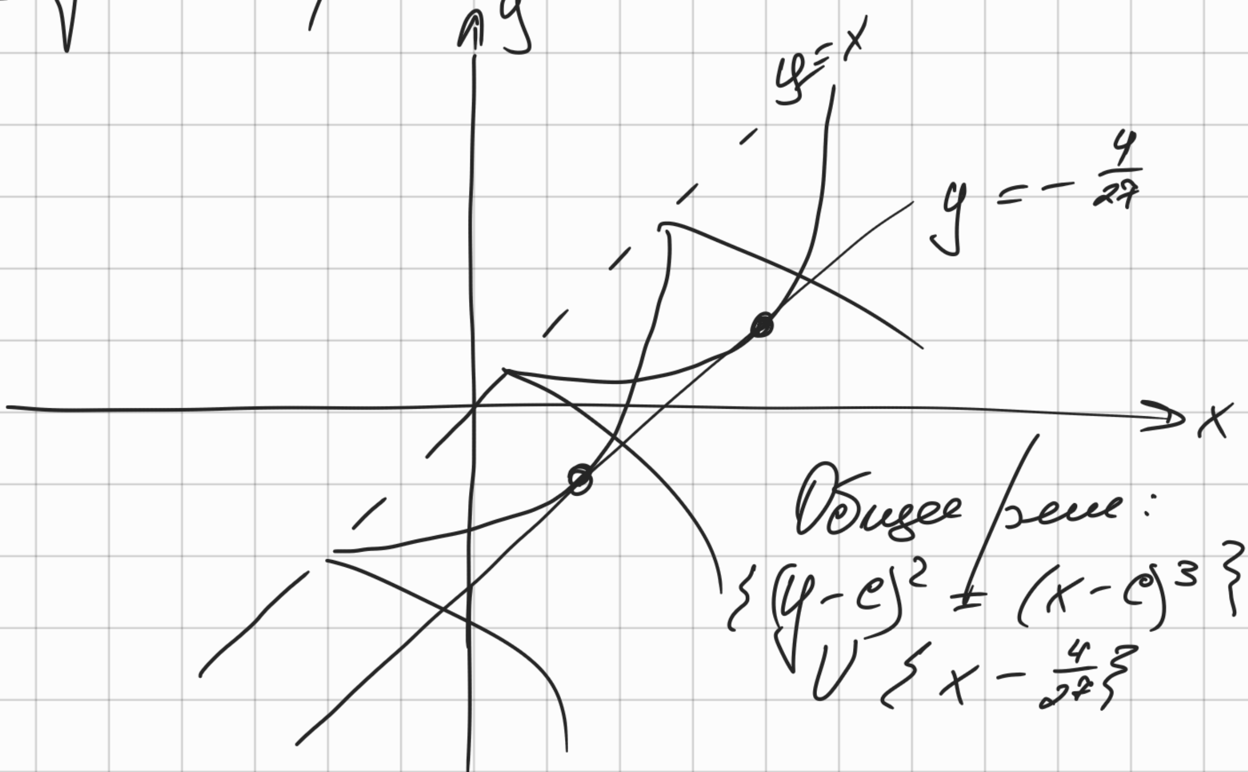
2) $p \neq 1 \Rightarrow dx = \frac{8}{9}p\,dp$

$x = \frac{4}{9}p^2 + C$

подставим

$y = \frac{8}{27}p^3 + C$

$$\begin{cases} x - C = \frac{4}{9}p^2 \\ y - C = \frac{8}{27}p^3 \end{cases} \Rightarrow (y-C)^2 = (x-C)^3$$



Общее реш.:

$\{(y-C)^2 = (x-C)^3\} \cup \{x - \frac{4}{27}\}$