- Поверхность какого рода дают склейки многоугольников на рисунке?

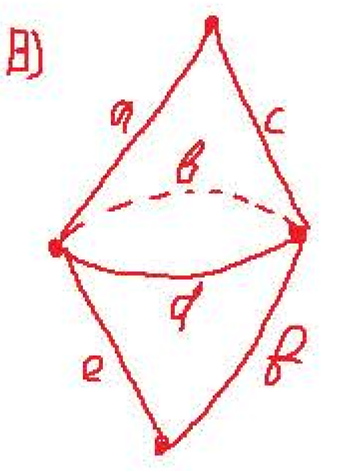
A)

B)

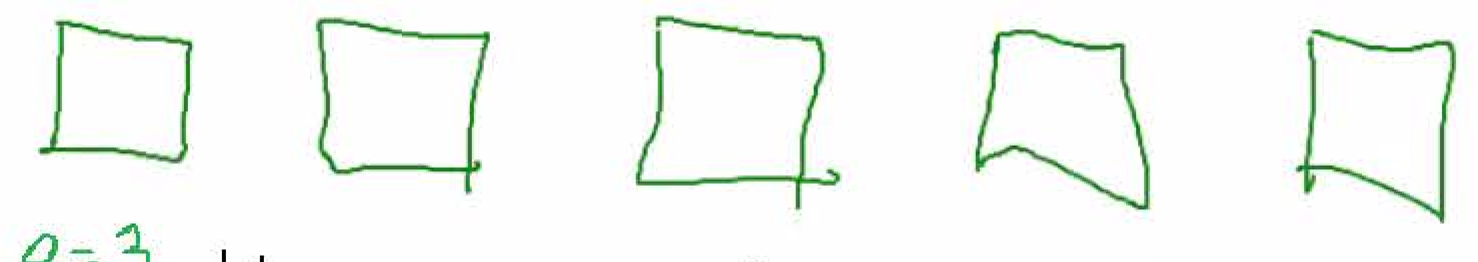
ответы: a-1, b-0

A) $V-E+F=4-8+4=2-2=0$, $g=1$

B) $4-6+4=2-0=2$, $g=0$

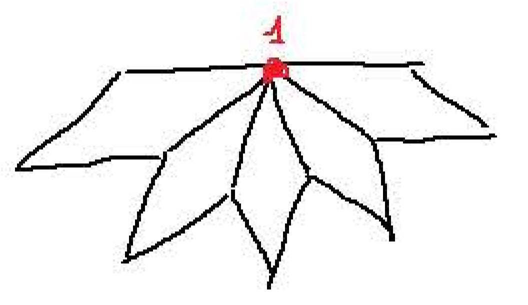


- Поверхность какого максимального рода можно получить, склеивая многоугольники на рисунке?

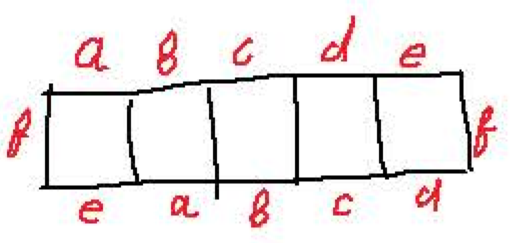


$g=3$ $\quad V-E+F=2-2g$ $\quad V\to\min: 1,3,5$

$E=10$, $F=5$ $\quad 1-10+5=-4,\ g=3$



или



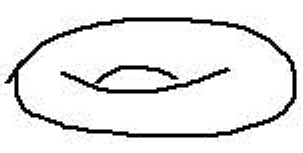
какое наименьшее число вершин можно получить из 2k угольника? (для 12 - 1)

$4k \to 1$

$4k+2 \to 2$ (склеить 2 соседних ребра и получить 4k)

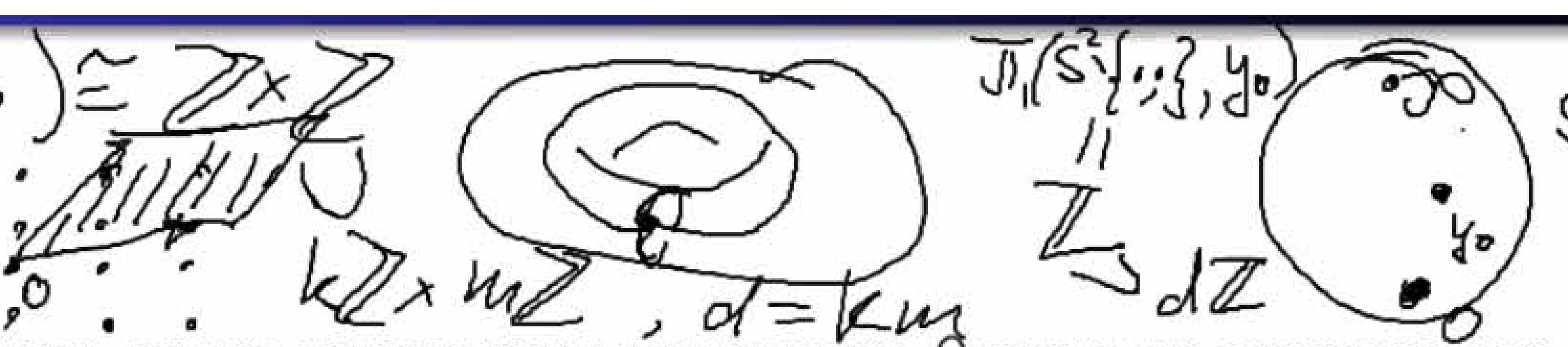
- Докажите, что тор можно накрыть только тором. Опишите все конечнократные накрытия тора тором.
- Пусть компактная поверхность рода $g>1$ накрыта поверхностью рода h со степенью $d>0$. Выразите h через g и d.
- Перечислите все конечнократные разветвленные накрытия двумерной сферы с двумя точками ветвления.

$\pi(T,\cdot)\cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$



$k\mathbb{Z}\times m\mathbb{Z},\ d=km$

$\pi_1(\mathbb{T},\cdot)\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\quad \pi_1(S^2\setminus\{\cdot,\cdot\},y_0)$ $\quad S^2$



$k\mathbb{Z}\times m\mathbb{Z},\ d=km$ $\quad \mathbb{Z}$ $\quad d\mathbb{Z}$ $\quad S^2\to S^2_d,\ z\mapsto z^d$

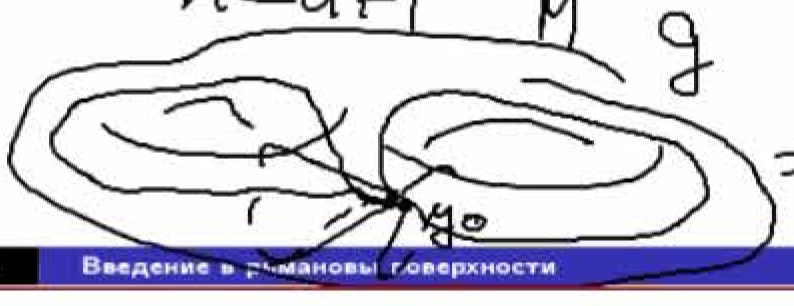
- Докажите, что тор можно накрыть только тором. Опишите все конечнократные накрытия тора тором.
- Пусть компактная поверхность рода $g>1$ накрыта поверхностью рода h со степенью $d>0$. Выразите h через g и d.
- Перечислите все конечнократные разветвленные накрытия двумерной сферы с двумя точками ветвления.

$M, x_0 \to M, y_0$

$2-2h=d(2-2g)$ $\quad g=2$

$1-h=d(1-g)$ $\quad h=d+1$

$h=(g-1)d+1$

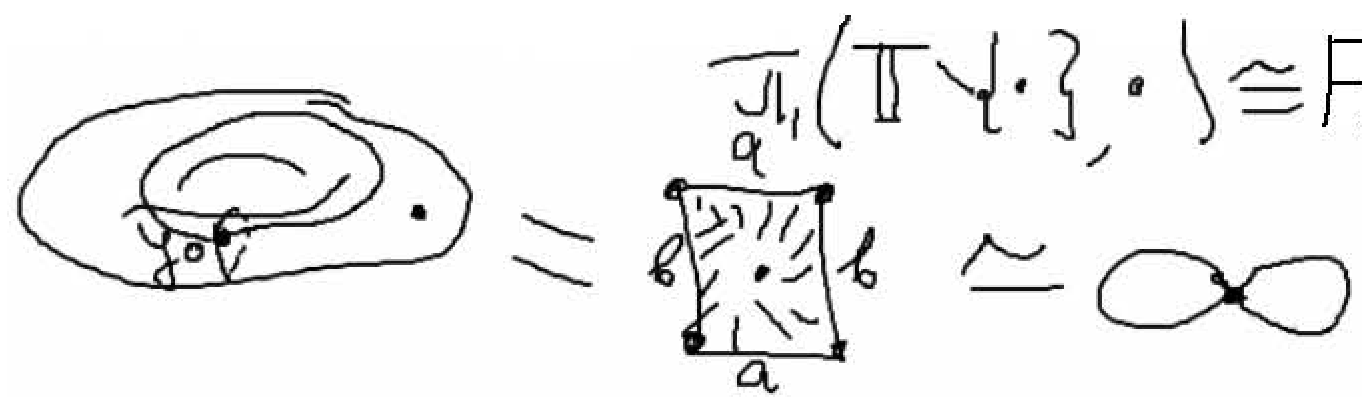


M $\quad g$ $\quad \pi_1(M,y_0)$

С. К. Ландо — Введение в римановы поверхности

- Перечислите все конечнократные разветвленные накрытия тора с одной точкой ветвления. (дорешать)

$\pi_1(\mathbb{T}\setminus\{\cdot\},\cdot)\cong F_2$



- $S^2=\overline{\mathbb{C}}$ $\quad f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}},$

$f(z)=z^4+4z^2+5$

Какие у f точки ветвления и каковы индексы ветвления в них?

$z^4+4z^2+5=(z^2+2)^2+1$

$(z^4+4z^2+5)'=4z(z^2+2)$ $\quad f(z_1)=5$

$z=0,\pm i\sqrt{2}$ $\quad f(z_{2,3})=1$ $\quad \Rightarrow$ т. ветвления $\{1,5,\infty\}$

скрин:

Семинар 1. Задачи

$z_1=0$

$z_{2,3}=\pm i\sqrt{2}$

$f(z_1)=5$

$f(z_2)=4-8+5=1$

$f(z_3)=4-8+5=1$

$\pi_1(\mathbb{T}\setminus\{\cdot\},\cdot)\cong F_2$ $\quad f'(z)=0$

$4z^3+8z$

$4z(z^2+2)$

- Перечислите все конечнократные разветвленные накрытия тора с одной точкой ветвления.

$\deg f=4$

- $S^2=\overline{\mathbb{C}}$ $\quad f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}},$ $\quad 5$ $\quad z^4+4z^2+5$ $\quad (4)$

$\circ(1\,2)(2)\ \circ(3,4)$ $\quad f(z)=z^4+\cancel{4}z^2+\cancel{5}$

Какие у f точки ветвления и каковы индексы ветвления в них?

$z^4+4z^2+5=1$ $\quad (1,1,2)$

Точки ветвления $\{5,1,\infty\}$

$z^4+4z^2+5=1$ $\quad (2,2)$

- Докажите *тождество Эйлера*: для однородного многочлена $F = F(x, y, z)$ степени d выполняется равенство
$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = d \cdot F.$$
- Воспользовавшись тождеством Эйлера, докажите, что в аффинной карте $z = 1$ условие гладкости $dF \neq 0$ точки кривой эквивалентно условию $df \neq 0$ в этой точке, где $f(x, y) = F(x, y, 1)$.

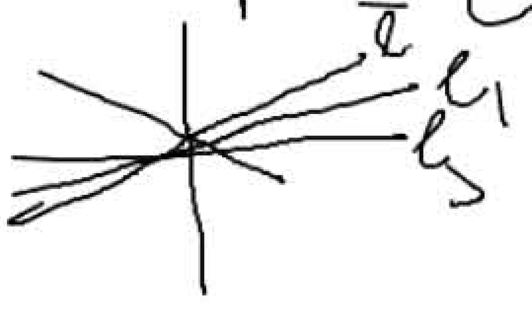
Кратность нуля ф-ции F в карте на $G=0$

- Дайте определение кратности точки пересечения двух плоских кривых.
- Докажите общую теорему Безу: если две плоские кривые $F = 0$ и $G = 0$ имеют конечное число точек пересечения, то сумма кратностей этих точек равна произведению степеней кривых.

$$F\big|_U = f(t) = \alpha_l z^l + \alpha_{l+1} z^{l+1} + \dots$$

$F = x^2 + y^3$, $G = x^2 + y^4$

$F = 0$



$$\underline{f(t)} = \beta_l t^l + \beta_{l+1} t^{l+1}$$

Порядок особой точки — минимальное число l

$\mathrm{Resultant}_y(F, G) = R(x, z)$. $\deg R = \deg F \cdot \deg G$

кратность корня результанта

Сколько точек на плоскости надо задать, чтобы через них проходила одна квадрика?

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + d xy + e xz + f yz = 0$$

$(x_0 : y_0 : z_0)$ — линейное условие на к-ты a, b, c, d, e, f

$6 - 1 = 5 \quad \frac{m(m+3)}{2} \underset{m=2}{=} \frac{2\cdot 5}{2} = 5$

$(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1), (1:1:0), (1:0:1)$

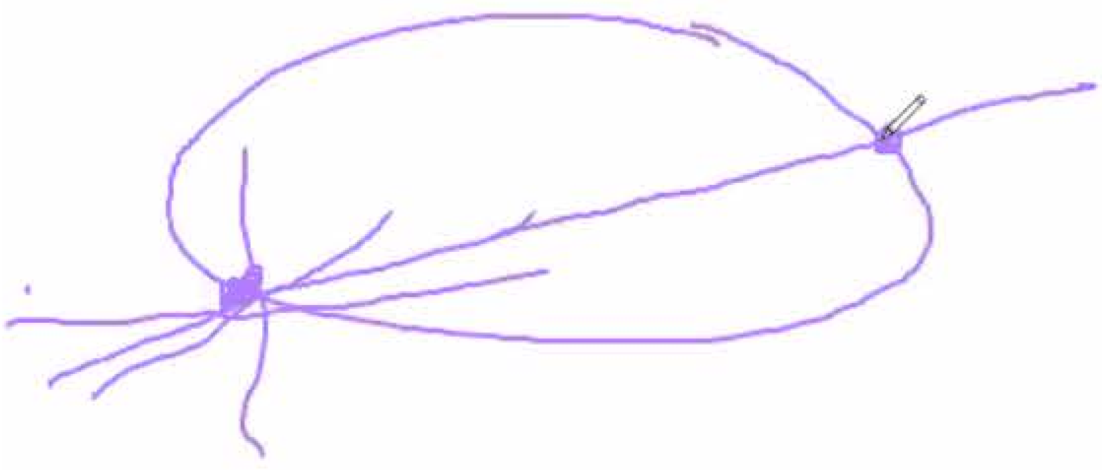
Что из себя представляет многообразие квадрик, проходящих через данные 4 точки на плоскости?

Проективная прямая. Все квадрики кроме трех гладкие; три квадрики особые, каждая из них пара пересекающихся прямых.

$\overline{M}_{0,4} \cong \mathbb{CP}^1$ — пространство модулей рациональных кривых с 4 отм. точками

$M_{0,4}$

Гладкая плоская кривая степени 2 рациональна — изоморфна проективной прямой $\mathbb{CP}^1$. $\mathbb{CP}^2$



прямые, проходящие через данную точку на пл-ти, образуют проективную прямую

- Рассмотрим все кривые степени d, проходящие через данные $dp-(p-1)(p-2)/2$ точек данной кривой степени p, $p<d$. Тогда все они имеют еще $(p-1)(p-2)/2$ общих точек, причем эти точки также лежат на данной кривой степени p.
- Пусть $k>d$, $k>p$ и $k<d+p-3$. Тогда любая кривая степени k, проходящая через

$$dp-\frac{(d+p-k-1)(d+p-k-2)}{2}$$

точек пересечения данной кривой степени d и данной кривой степени p, проходит и через остальные точки их пересечения.

$P_d(x,y)+P_{d-1}(x,y) \overset{y=tx}{=} P_d(x,tx)+P_{d-1}(x,tx)$ $\quad x=-\frac{p_{d-1}(t)}{p_d(t)}$

$= x^d p_d(t)+x^{d-1}p_{d-1}(t)=x^{d-1}(p_d(t)x+p_{d-1}(t))=0$ $\quad (x=0, y=\pm\frac{i}{\sqrt{2}})$

- Докажите, что плоская кривая, заданная уравнением вида $P_d(x,y)+P_{d-1}(x,y)=0$, где $P_k(x,y)$ — однородный многочлен степени k от двух переменных, допускает рациональную параметризацию. $F(0,y)=y^4+y^2=y^2(y^2+1)$
- Докажите, что если на плоской кривой степени d есть особая точка порядка $d-1$, то эта кривая допускает рациональную параметризацию.
- Найдите рациональную параметризацию лемнискаты $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.

$y=tx$ $\quad (x^2+t^2x^2)^2=x^2-t^2x^2$

$(1+t^2)^2x^2=1-t^2$

особые точки: $\frac{\partial F}{\partial x}=4x(x^2+y^2)-2x=2x(2x^2+2y^2-1)$

$F(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y}=4y(x^2+y^2)+2y=2y(2x^2+2y^2+1)$

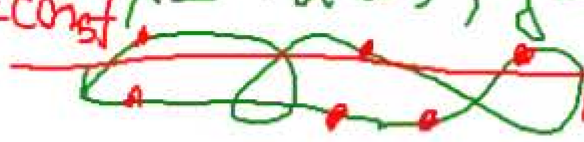
$2x^2+2y^2-1=0$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l}2x^2+2y^2-z^2=0\\ 2x^2+2y^2+z^2=0\end{array}\right\} \Rightarrow z^2=0$, $z=0$

$2x^2+2y^2+1=0$

$(1:0:1)$ $\quad 2x^2+2y^2=0$ $\quad (1:i:0)$

$(0:0:1)$ $\quad x^2+y^2=0$ $\quad (1:-i:0)$

$y=\text{const}$ $\quad x=P_d(t),\ y=Q_d(t)$ $\quad \exists\, F(x,y)\overset{?}{=}0$



$\mathrm{Result}_t(x-P_d(t),\ y-Q_d(t))=F(x,y)$

- Пусть кривая на плоскости задана как образ отображения $t\mapsto(P_d(t),Q_d(t))$, где P_d, Q_d — многочлены степени d. Докажите, что она алгебраическая, степени не выше d.

$d=3$ через 8 точек на пл-ти можно провести 12 рационал. кубик

- Сколько точек общего положения на плоскости надо задать, чтобы через эти точки проходило конечное множество плоских кривых степени d, допускающих рациональную параметризацию? $3d-1$
- Сколько кривых степени d, допускающих рациональную параметризацию, можно провести через данный набор из $3d-1$ точек общего положения на плоскости?

Через $\frac{d(d+3)}{2}$ точек проходит единств. кривая степени d

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & a_1 & a_2 & a_3 & \\ b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ & & b_1 & b_2 & b_3 & \end{vmatrix} = \Theta(u:t)\mapsto(P_d:Q_d:R_d)$

$t\mapsto\frac{at+b}{ct+d}$

$3d+3-1-3=3d-1$

Рациональная нормальная кривая в $\mathbb{C}P^n$

$(u:v) \longmapsto (u^n : u^{n-1}v : u^{n-2}v^2 : \dots : v^n)$

- Постройте нормализацию плоской кривой
$$y^2z^2 - x^2(z^2 - x^2) = 0.$$
- Представьте рациональную нормальную кривую в $\mathbb{C}P^4$ в виде пересечения гиперповерхностей.
- Докажите, что любая рациональная кривая степени 3 в проективном пространстве, не лежащая ни в какой гиперплоскости, переводится в скрученную кубику проективным преобразованием пространства.

Любая кривая степени 3 в $\mathbb{C}P^3$, никакие 4 точки которой не лежат ни в какой гиперплоскости.

$(u:v) \mapsto (u^4 : u^3v : u^2v^2 : uv^3 : v^4)$

$\quad z_0 \quad z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4$

$z_i^2 = z_{i-1}z_{i+1}$ $\qquad z_2^2 = z_0 z_4$

$i = 1, 2, 3$

$z_1^2 = z_0 z_2$ $\quad 0 \quad$ $z_2\,dz_0 - 2z_1\,dz_1 + z_0\,dz_2$

$z_2^2 = z_1 z_3$ $\quad 0 \quad$ $z_3\,dz_1 - 2z_2\,dz_2 + z_1\,dz_3$

$z_3^2 = z_2 z_4$ $\quad dz_2 \quad$ $z_4\,dz_2 - 2z_3\,dz_3 + z_2\,dz_4$

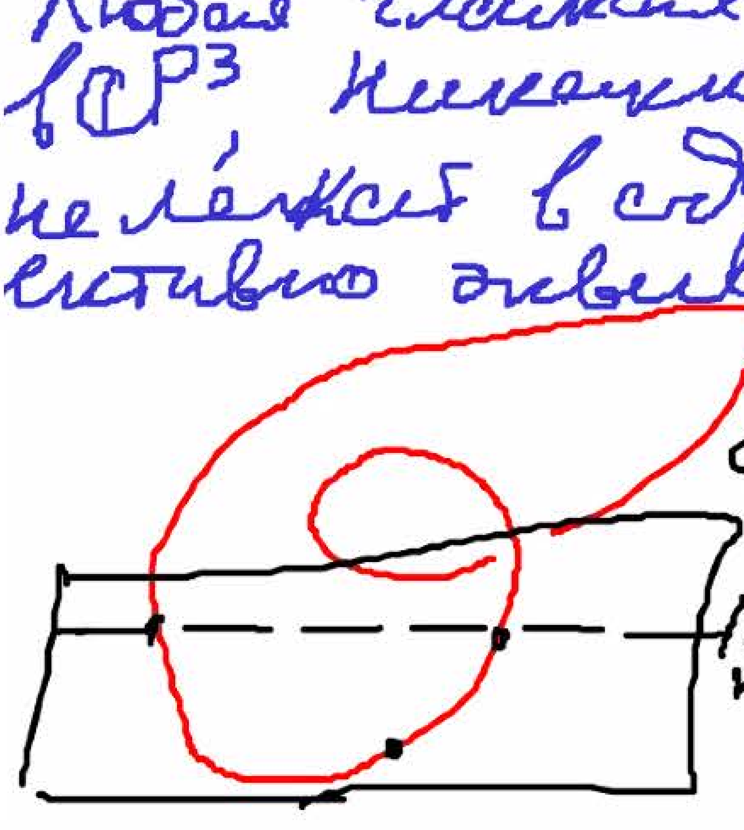
$z_2 = 0$ $\qquad (0:0:0:0:1)$

$z_1 = z_2 = z_3 = 0$ $\qquad (1:0:0:0:0)$

$(u^2 : uv : v^2)$ $\qquad y^2 = xz$ — любые гладкие квадрики проективно эквивалентны этой

$(u:v) \longmapsto (u^3 : u^2v : uv^2 : v^3)$ $\qquad (*)$

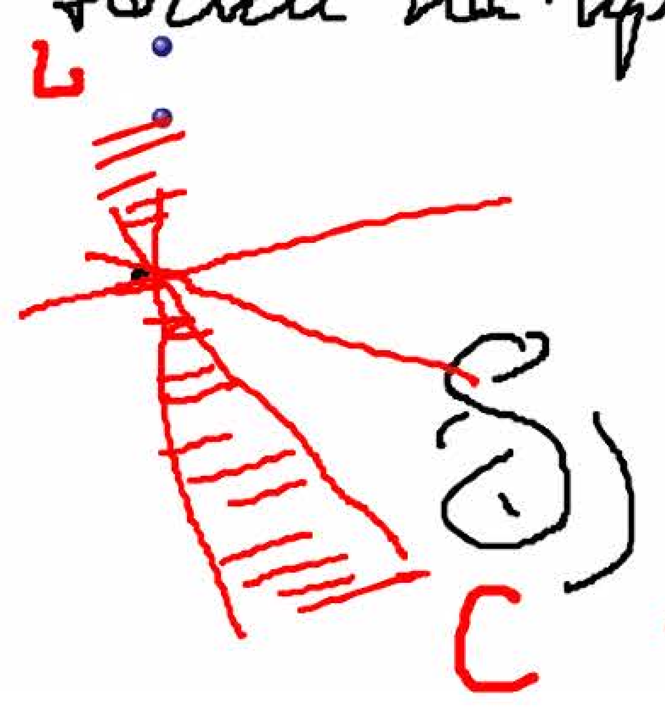
Любая гладкая кривая степени 3 в $\mathbb{C}P^3$, никакие 4 точки которой не лежат в одной плоскости, проективно эквивалентна кривой $(*)$



Пучок плоскостей, проходящих через данную пару точек кривой.

$(*)$ Пересекает общую квадрику по 6 точкам.

Что происходит со степенью кривой в проективном пр-ве, если ее спроектировать из общей точки на кривой? $d - 1$



$\pi(C)$ — проекция кривой C

$\deg \pi(C) = \#(\pi(C) \cap L)$

$\pi^{-1}(L)$ — гиперплоскость в исходном пр-ве

$C \quad \#(C \cap \pi^{-1}(L))$

1° Найдите размерность пр-ва плоских кривых степени 4 с одной двойной точкой

$g = \frac{(4-1)(4-2)}{2} - 1 = 2$

$x^4, \dots$ $\qquad 10000$ $\qquad \binom{6}{2} = 15$

$x^0 y^2 z^2$

Размерность пр-ва кривых степени 4 равна $15 - 1 = 14$. $\qquad f(x,y) = xy = 0$

$df = x\,dy + y\,dx$

$\sum_{i+j+k=4} a_{ijk} x^i y^j z^k = F(x,y,z)$

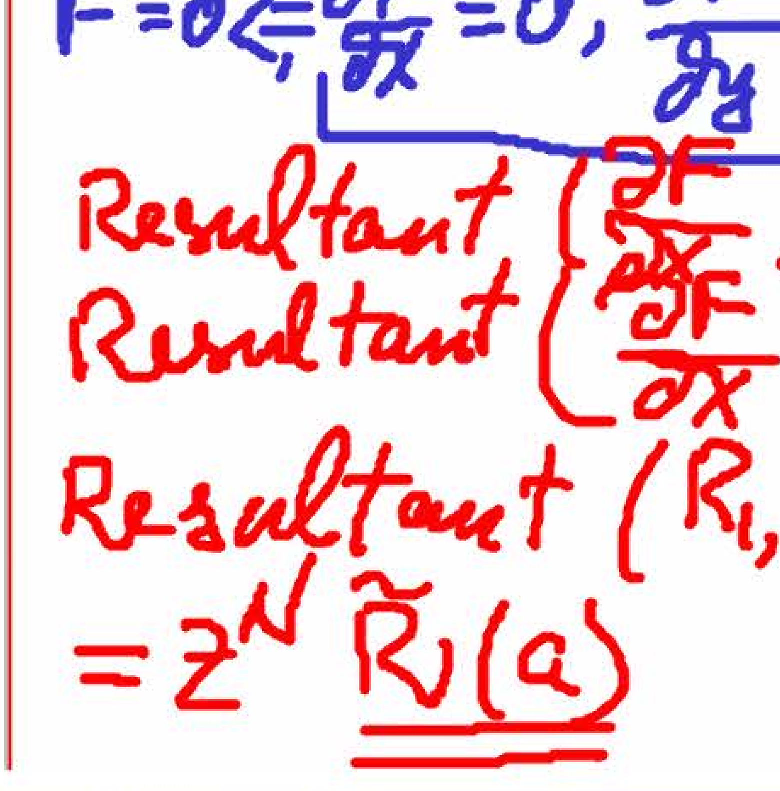
$F = 0 \Leftarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = 0$

$\mathrm{Resultant}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, x\right) = R_1(y, z, a)$

$\mathrm{Resultant}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial z}, x\right) = R_2(y, z, a)$

$\mathrm{Resultant}(R_1, R_2, y) = R(z, a)$

$= z^N \underline{\underline{\tilde{R}(a)}}$ $\qquad \tilde{R}(a) = R_X(a) R_Y(a)$



В пучке кривых
$x^3 + y^3 + z^3 + \mu xyz = 0$
все кривые имеют общие точки перегиба.

$H = \begin{vmatrix} x & z & y \\ z & y & x \\ y & x & z \end{vmatrix} =$

Любая гладкая плоская кубика проективно эквивалентна некоторой кривой из пучка Ферма

$\mathbb{C}P^1_{(u:v)} \times \mathbb{C}P^1_{(s:t)} \supset C$

$a \qquad b$

гладкой

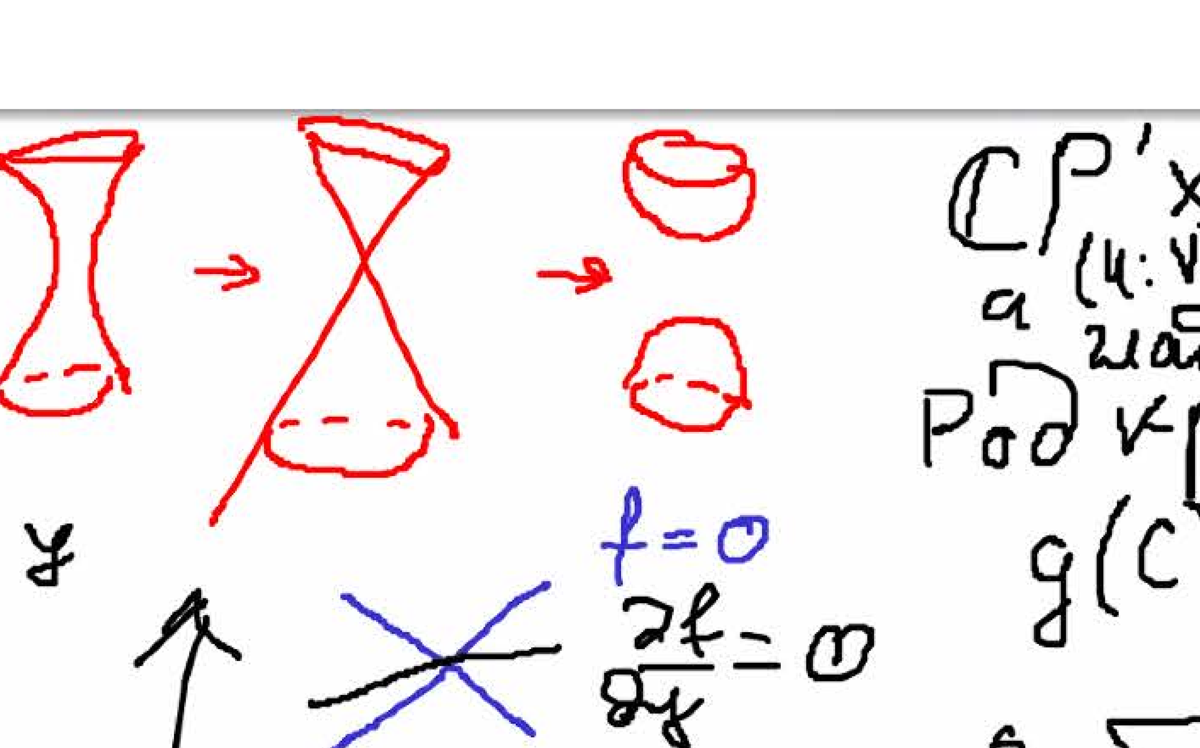
Род кривой C?

$g(C) = (a-1)(b-1)$

$0 = \sum_{\substack{i+j=a \\ k+l=b}} \alpha_{ijkl} u^i v^j s^k t^l$

$f = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$



Кривая Больца $|Aut| \neq 16$

$y^2 = x^5 - x$, $g = 2$

$(x, y) \mapsto x$ – двулистное накрытие $\mathbb{CP}^1$ с ветвлением в точках $\{0, \infty, 1, i, -1, -i\}$

i, -1, 0, 1, $-i$

$x \mapsto ix$

$x \mapsto \frac{1}{x}$

$x \mapsto \frac{i}{x}$

Группа автоморфизмов сферы, сохраняющих ориентацию

$|Aut| = 2 \cdot |S_4| = 48$

$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

$0 \mapsto 1 \mapsto \infty \mapsto -1 \mapsto 0$

$b = d$, $c = -d$, $a = -c$

$i \mapsto \frac{i+1}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = i$

$x \mapsto \frac{x+1}{-x+1}$

Квартика Клейна $g = 3$

$xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$

$|Aut| = 84(g-1) = 168$

$(x:y:z) \mapsto (y:z:x)$

$(x:y:z) \mapsto (x:\zeta^4 y:\zeta^5 z)$, $\zeta^7 = 1$.

- Плоская *кривая Клейна* задается уравнением $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$.
(a) Докажите, что наряду с проективными преобразованиями, задаваемыми матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^4 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^5 \end{pmatrix},$$

где ζ — примитивный корень из 1, $\zeta^7 = 1$, эта кривая сохраняется также инволюцией, задаваемой матрицей

$$\frac{1}{\sqrt{-7}} \begin{pmatrix} \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 \\ \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 \\ \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 \end{pmatrix}.$$

(b) Проверьте, что эти три матрицы порождают группу порядка 168.

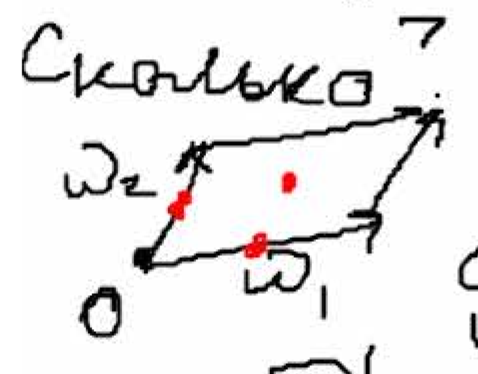
$(\wp_L)^2$ – мероморфная ф-ция с одним полюсом порядка 4.

$\frac{1}{\wp_L - c}$ – " – с двумя простыми полюсами для почти всех c

- Постройте на эллиптической кривой мероморфную функцию с одним полюсом порядка 4. $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ $(0:1:0)$ $x = a$, $y = \pm \ldots$
- Постройте на эллиптической кривой мероморфную функцию с двумя полюсами порядка 1, не имеющую других полюсов. $\wp(\omega_1/2) + \wp(\omega_2/2) + \wp((\omega_1 + \omega_2)/2) = 0$
- Найдите нули функции Вейерштрасса $\wp_L(z)$.
- Найдите точки ветвления функции Вейерштрасса $\wp_L(z)$.

Сколько? 4; $\wp_L'(z) = 0$ $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$

e_1, e_2, e_3 – корни этого уравнения.



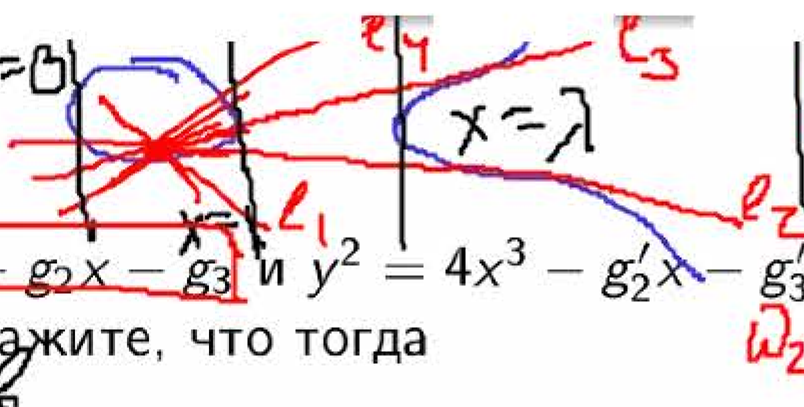
$\omega_1/2$, $\omega_2/2$, $(\omega_1 + \omega_2)/2$

$\wp_L'$ – нечетная периодическая ф-ция

$\Rightarrow \wp_L'(-\omega_1/2) = -\wp_L'(\omega_1/2) = \wp_L'(\omega_1/2)$

j-инвариант

λ, $j(\lambda) = \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$



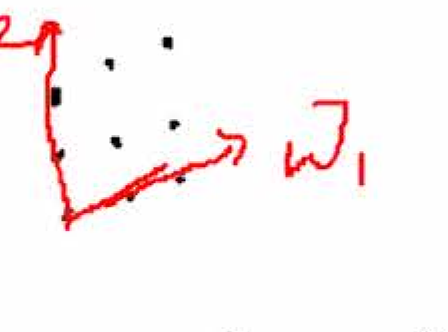
$[\ell_1 : \ell_2 : \ell_3 : \ell_4]$ $x = \infty$

- Пусть уравнения $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ и $y^2 = 4x^3 - g_2' x - g_3'$ задают изоморфные эллиптические кривые. Докажите, что тогда

$x \mapsto ax + b$

$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$

$$\frac{g_2^3}{g_3^2 - 27g_2^3} = \frac{{g_2'}^3}{{g_3'}^2 - 27{g_2'}^3}.$$



$\wp = 0$ группы.

- Пусть A, B, C — точки пересечения данной прямой с эллиптической кривой в форме Вейерштрасса. Докажите, что $A + B + C = 0$ в аддитивной группе эллиптической кривой с нулем на бесконечности.
- Докажите, что третья точка пересечения прямой, соединяющей две точки перегиба плоской кубики, также является точкой перегиба.

$A + B + C = 0$

$E = \mathbb{C}/L$ – группа по сложению

$$\left(\frac{\wp'(a) - \wp'(b)}{\wp(a) - \wp(b)} \right)^2 = 4\left[\wp(a+b) + \wp(a) + \wp(b)\right]$$

$$\begin{vmatrix} \wp(a) & \wp'(a) & 1 \\ \wp(b) & \wp'(b) & 1 \\ \wp(c) & \wp'(c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

- Для любой мероморфной функции на эллиптической кривой сумма ее нулей равна сумме ее полюсов

Подсказка: $\forall$ мероморфная ф-ция на кривой $y^2 = P(x)$ есть $Q(x) + yR(x)$, где Q, R – рациональные функции.

$z \mapsto (\wp(z) : \wp'(z) : 1)$

$\tau = \omega_2/\omega_1$

$g_2 = 60 \sum \ldots$

Разветвленные накрытия тора с одной точкой полного ~~ветвления~~ степени d.

Монодромия — цикл степени d.

$g=1,\ \chi=0,\quad \chi'=-1,\ \bar\chi=-d+1$

$d=3,\ \bar g=2.$

$a^{-1}b^{-1}ab$ — пере

Накрытия с точностью до эквивалентности

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r] \arrow[dr, "p_1"'] & Y_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

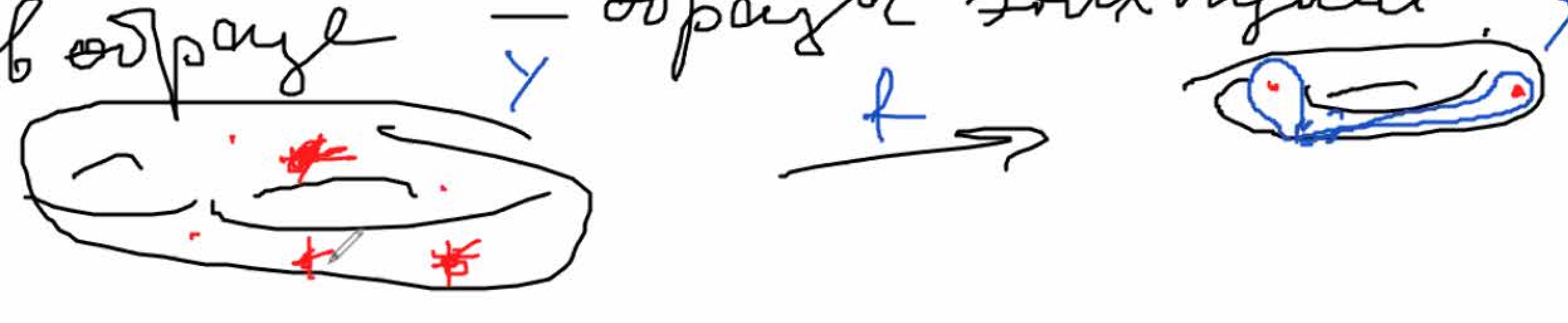
поддаются классификации (= инварианты Громова-Виттена)

с точностью до эквивалентности

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "p_1"'] & Y_2 \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

— нет.

Всякое голоморфное отображение $f: Y\to X$ компактных комплексных кривых является разветвл. накрытием. Точки ветвления в прообразе = нули df, в образе — образы этих нулей.



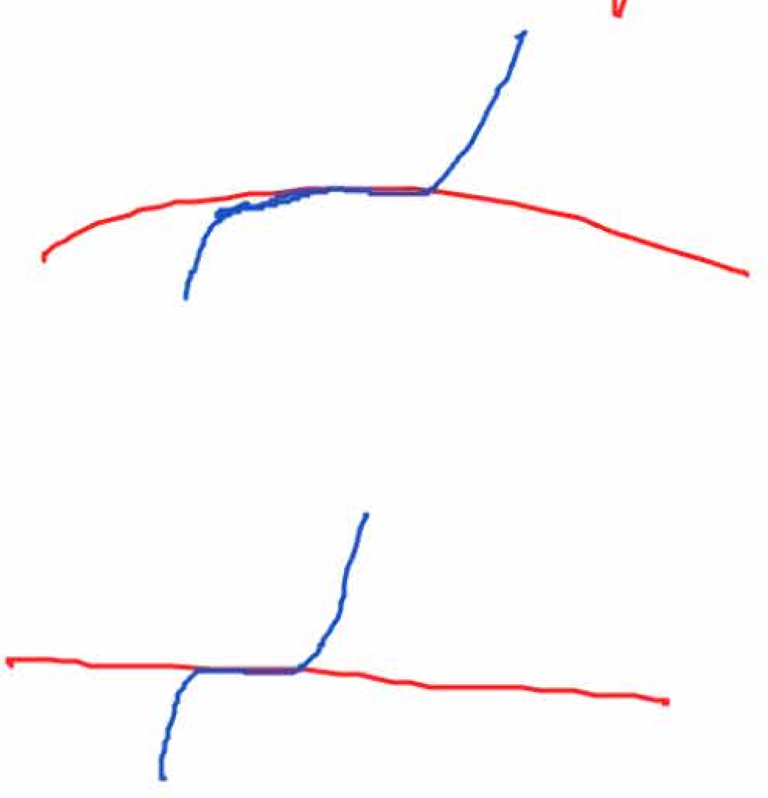
$z\mapsto z^k$

Кратность точки пересечения двух кривых, являющейся гладкой точкой для обеих кривых

(0) Если пересечение трансверсально, то кратность $=1$.

(1). Выберите координаты в окрестности точки пересечения, в которых 1-я кривая приобретает вид $y=0$.

(2). Представьте вторую кривую в виде графика функции $y=f(x)$. Порядок нуля f и будет кратн.



Если кривая имеет особую точку, то заменяйте ее близкой гладкой кривой той же степени и считайте сумму кратностей всех близких точек пересечения.

$\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ Кривая бистепени (m,n) имеет род $(m-1)(n-1)$.

$(u:v)\quad (s:t)$

$\downarrow$ биголоморфно на образ

$\mathbb{CP}^3$

$(us:ut:vs:vt)$

$(x:y:z:w)$

$xw=yz$

Кривая переходит в кривую степени $m+n$

$\mathbb{CP}^k\times\mathbb{CP}^l$

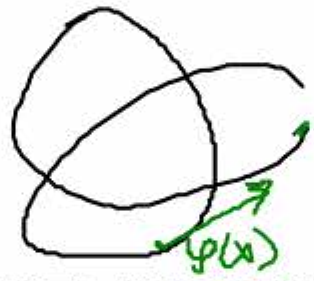
$\mathbb{CP}^2\supset$ кривую степени $m+n$

$$\sum_{i+j+k=4} a_{ijk}x^iy^jz^k$$

Любая кривая рода 1 реализуется гладкой плоской кубикой.

$g=2$ Плоская квартика с одной точкой трансверсального самопересечения имеет род 2? Верно ли, что всякая кривая рода 2 реализуется как нормализация плоской квартики с одной точкой трансверсального самопересеч.?

Размерность пр-ва плоских квартик равна $15-1=14$ с точностью до проект. преобр. $14-8=\underline{\underline{6}}$ с точкой трансв. самопер. 5



$\varphi: C \to \mathbb{P}^2$

$F: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$

$v \in T_x C$

$d\varphi(v) \in T_{\varphi(x)}\mathbb{P}^2$

$d(F\circ\varphi)(v) \in T_{F\circ\varphi(x)}$

- Докажите, что ограничение 1-формы dF на плоскую кривую, где F — мероморфная функция на плоскости, является дифференциалом ограничения функции F на эту кривую.
- Рассмотрим результат ограничения 1-формы (a) xdx; (b) ydx на плоскую кривую $x^n + y^n = 1$. Найдите нули этой 1-формы и укажите их порядки. Найдите полюса этой 1-формы и укажите их порядки.

$k \in 0, \ldots, n-1$

$dF = nx^{n-1}dx + ny^{n-1}dy$

$dF \sim xdx \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow (\varepsilon^k; 0) \\ x=0 \quad (0; \varepsilon^k) \end{array}\right.$

$n-1$

$\varepsilon = \sqrt[n]{1}$

$\left(-\frac{y^n}{n}+1\right) d\frac{y^n}{n}$

$(1;0)$ y — коорд

$x = 1+\xi$

$(1+\xi)^n + y^n = 1$ $\quad \xi = -\frac{y^n}{n}$

$n\xi + y^n = 0$

$x = -1+\xi$

нули поднятой 1-формы

$y \mapsto -y$

$\varphi(x)dx = (a_0 + a_1\xi + \ldots)d\xi = (a_0 + a_1 y^2 \ldots)\, y\,dy$

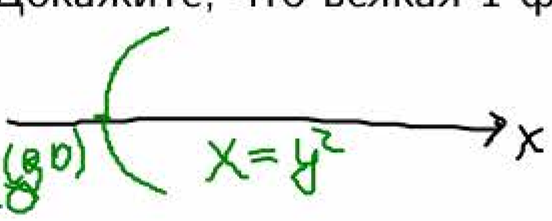
- Пусть f — проекция квадрики $x^2 + y^2 = 1$ на ось x. Верно ли, что любая мероморфная 1-форма на квадрике является поднятием некоторой 1-формы на прямой при отображении f?

dy

$\boxed{\xi = y^2}$ $\quad \varphi(x)dx = \frac{d\xi}{\xi^k} = \frac{y\,dy}{y^{2k}} = \frac{dy}{y^{2k-1}}$

- Пусть плоская кривая задана уравнением $y^4 = x^3 - 3x$. Найдите ее род. Найдите полюсы ограничения 1-формы dx/y на эту кривую и укажите их порядки. Постройте базис голоморфных 1-форм на этой кривой.
- Докажите, что всякая 1 форма вида

$y=0$



$Q_{2g+1}(0) = (0;0)$

$$\frac{p(x)dx}{y} = \frac{P(y^2)\,dy^2}{y} = \frac{P(y^2)\cancel{y}\,dy}{\cancel{y}} = P(y^2)\,dy$$

где p — многочлен степени не выше $g-1$, является голоморфной 1-формой на гипреэллиптической кривой $y^2 = Q_{2g+1}(x)$, где Q_{2g+1} — многочлен степени $2g+1$ с попарно различными корнями.

y - локальная к-та на кривой.

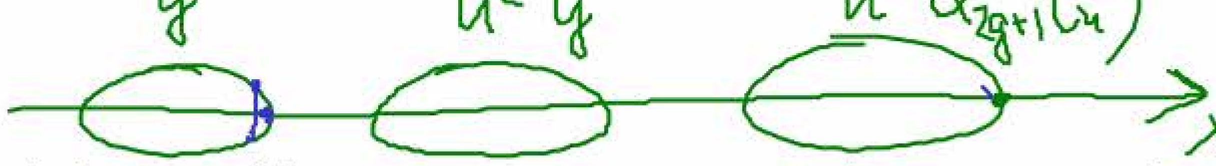
x — коорд

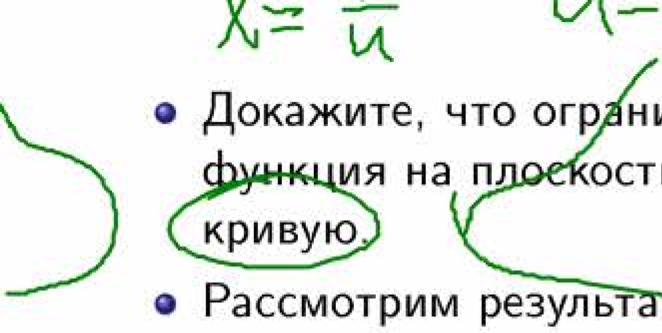
0 порядка 1 в $(0;\varepsilon^k)$

$y^2 = Q_{2g+1}(x) = Q_{2g+1}\left(\frac{1}{u}\right)$

$$\frac{p(x)dx}{y} = \frac{p\left(\frac{1}{u}\right)du}{u^2 y} = \frac{P\left(\frac{1}{u}\right)du}{u^2 Q_{2g+1}\left(\frac{1}{u}\right)}$$

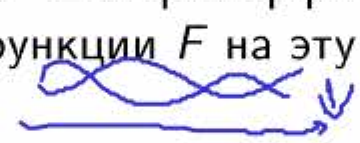
$x = \frac{1}{u}$ $\quad u = y^2$





- Докажите, что ограничение 1-формы dF на плоскую кривую, где F — мероморфная функция на плоскости, является дифференциалом ограничения функции F на эту кривую.

$d\frac{x}{2}$



- Рассмотрим результат ограничения 1-формы (a) xdx; (b) ydx на плоскую кривую $x^n + y^n = 1$. Найдите нули этой 1-формы и укажите их порядки. Найдите полюса этой 1-формы и укажите их порядки.

$k \in 0, \ldots, n-1$

$dF = nx^{n-1}dx + ny^{n-1}dy$

$dF \sim xdx \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow \exists(\varepsilon^k; 0) \\ x=0 \quad (0; \varepsilon^k) \end{array}\right.$

$n-1$

$\varepsilon = \sqrt[n]{1}$

$\left(-\frac{y^n}{n}+1\right) d\frac{y^n}{n}$

$(1;0)$ y — коорд

$x = 1+\xi$

$(1+\xi)^n + y^n = 1$ $\quad \xi = -\frac{y^n}{n}$

$n\xi + y^n = 0$

Суммарный вес $(g-1)g(g+1)$

$$\frac{(g-1)g(g+1)}{2g+2} = \frac{g(g-1)}{2}$$

Неподвижная точка гиперэлл. инвол. имеет лакуны

подскоки $2, 4, 6, \ldots, 2g-2, 2g$

Лакуны $1, 3, 5, \ldots, 2g-1$

Вес неподв. точки гиперэлл. инволюции $\sum_{i=1}^{g}(a_i - i) = 0+1+2+\ldots+g-1 = \frac{g(g-1)}{2}$

$[x(2g+2) = (g-1)g(g+1)]$

$g=3$ $\{\underline{1}, \underline{2}, 3, 4, \underline{5}\}$ $\quad 5-3 = 2 < \frac{3\cdot 2}{2}$

$a_i \geq 2i-1$

Лемма На любом отрезке $\{1, \ldots, k\}$ имеется не больше $[\frac{k}{2}]$ точек подскока, $1 \leq k \leq 2g$

$g=4$ $\{\underline{1}, \underline{2}, 3, \underline{4}, 5, 6, \underline{7}\}$

$(4-3)+(7-4) = 4 < \frac{4\cdot 3}{2}$

$\{1, \ldots, k\}$ с $> [\frac{k}{2}]$ точек подскока. Тогда $k+1$ - точка подскока

$(k+1) = (1+k) = 2+(k-1) = 3+(k-2) = \ldots$

- Докажите, что на кривой C рода $g \geq 2$ значение $k = 2$ не является лакуной в точке $x \in C$ в том и только в том случае, когда C гиперэллиптическая и x — неподвижная точка гиперэллиптической инволюции.
- Докажите, что всякая точка Вейерштрасса гиперэллиптической кривой является неподвижной точкой гиперэллиптической инволюции.
- Докажите *теорему Клиффорда*: для любой точки x негиперэллиптической кривой C рода $g \geq 3$ справедливо неравенство $l(k \cdot x) < \frac{k}{2} + 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots, 2g-1$.

$(g-1)g(g+1)$ $\quad x \quad$ веса $\leq \frac{g(g-1)}{2} - 1$

$\frac{g(g-1)}{2} - 1 = \frac{g^2-g-2}{2} = \frac{(g-2)(g+1)}{2}$

$1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 7$

- Докажите, что на негиперэллиптической кривой рода $g \geq 3$ есть по крайней мере $2g+6$ точек Вейерштрасса.
- Вычислите лакуны в точке перегиба второго порядка гладкой плоской квартики.
- Найдите точки перегиба квартики Клейна

$g=3$

$\{\underline{1}, \underline{2}, 3, 4, \underline{5}\}$

$y = x^4$

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

и опишите действие группы автоморфизмов этой кривой на множестве точек перегиба.

$$\frac{(g-1)g(g+1)}{(g-2)(g+1)} = \frac{g(g-1)}{g-2} \leq g+3$$

$$g^2 - g \leq g^2 + g - 6$$

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

- Докажите, что на кривой C рода $g \geq 2$ значение $k = 2$ не является лакуной в точке $x \in C$ в том и только в том случае, когда C гиперэллиптическая и x — неподвижная точка гиперэллиптической инволюции.
- Докажите, что всякая точка Вейерштрасса гиперэллиптической кривой является неподвижной точкой гиперэллиптической инволюции.
- Докажите *теорему Клиффорда*: для любой точки x негиперэллиптической кривой C рода $g \geq 3$ справедливо неравенство $l(k \cdot x) < \frac{k}{2} + 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots, 2g-1$.

$$\begin{vmatrix} 2xy & x^2 & z^2 \\ x^2 & 2yz & y^2 \\ z^2 & y^2 & 2zx \end{vmatrix} = 10x^2y^2z^2 - 2(zx^5 + xy^5 + yz^5)$$

- Найдите все точки Вейерштрасса плоской кривой Ферма $x^4 + y^4 = 1$ и укажите их тип. Воспользовавшись этим результатом, найдите группу автоморфизмов кривой Ферма.
- Докажите *лемму Шенберга*: если у автоморфизма гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ больше 4 неподвижных точек, то все они являются точками Вейерштрасса.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{vmatrix} = x^2y^2z^2$$

$z=0 \Rightarrow x^4 + y^4 = 0$

$x^4 + y^4 + z^4 = 0$

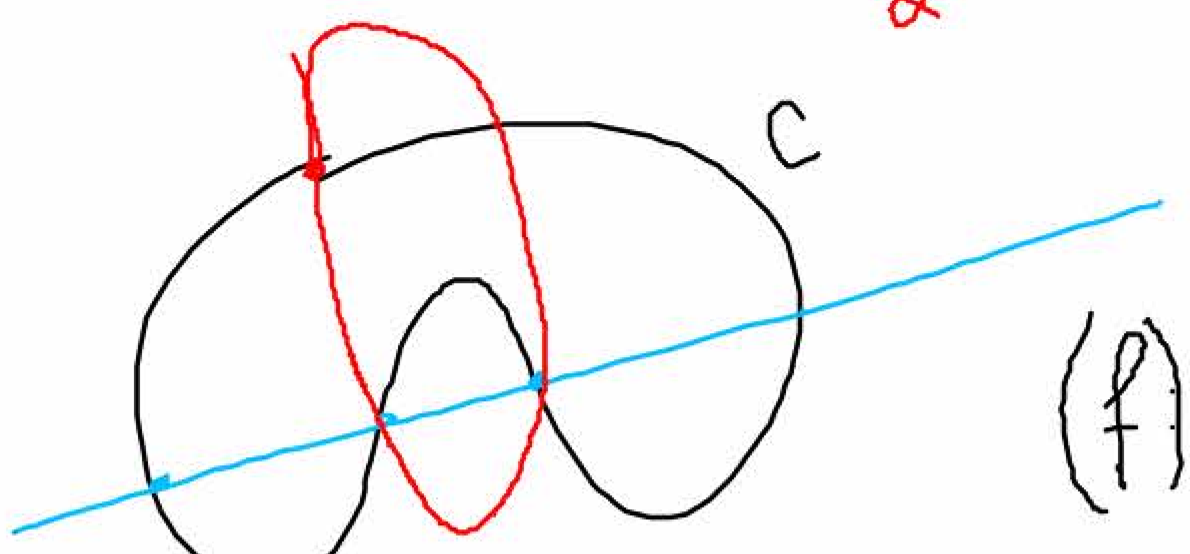
- Найдите все точки Вейерштрасса плоской кривой Ферма $x^4 + y^4 = 1$ и укажите их тип. Воспользовавшись этим результатом, найдите группу автоморфизмов кривой Ферма.
- Докажите *лемму Шенберга*: если у автоморфизма гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ больше 4 неподвижных точек, то все они являются точками Вейерштрасса.

Является ли линейная система $\mathcal{O}(1)$ дивизоров пересечения D прямых с данной плоской кривой C полной?

$$w = \frac{dx\wedge dy + dy\wedge dz + dz\wedge dx}{dF} \qquad \omega G(x,y,z),\ \deg G \le d-3$$

$$\frac{(d-2)(d-1)}{2} - d$$

$\deg C = d.$



$D' \sim D$, если существует $D' \geq 0$

$$(f) = D' - D \qquad \frac{l_1}{l_2}$$

$$i(D)$$

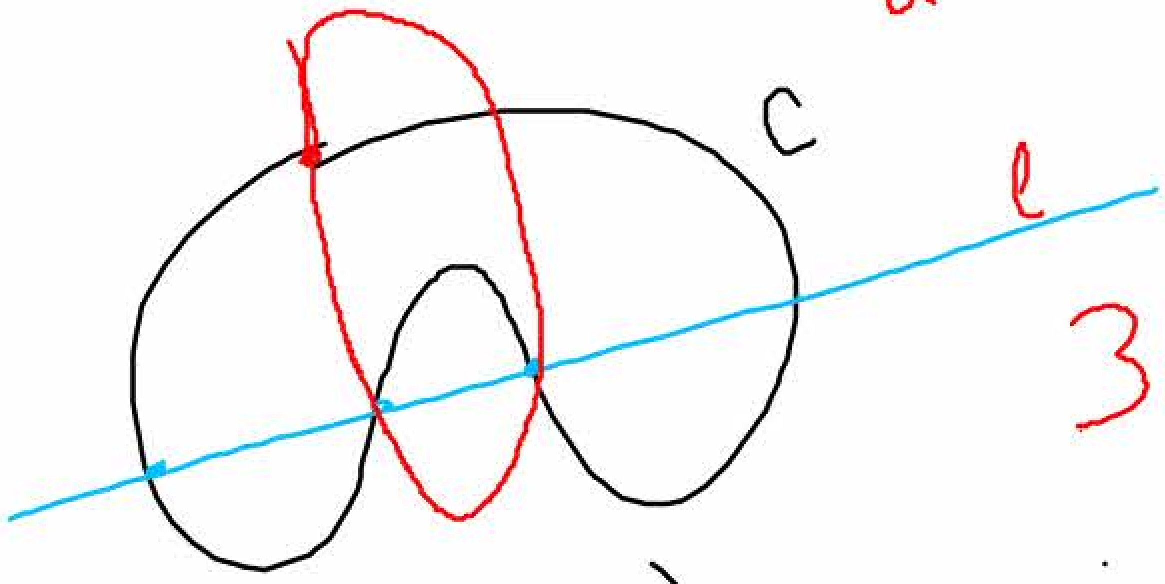
$D \in \mathrm{Div}(C)$

$$3 \overset{?}{=} l(D) = d + 1 - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + i(D)$$

$$w = \frac{dx\wedge dy + dy\wedge dz + dz\wedge dx}{dF} \qquad \omega G(x,y),\ \deg G \le d-3$$

$$G = H\cdot l,\ \deg H \le d-4$$

$$i(D) \overset{?}{=} \frac{(d-2)(d-3)}{2}$$



$$3 \overset{?}{=} d+1 + \frac{(d-2)(-2)}{2}$$

$D \in \mathrm{Div}(C)$

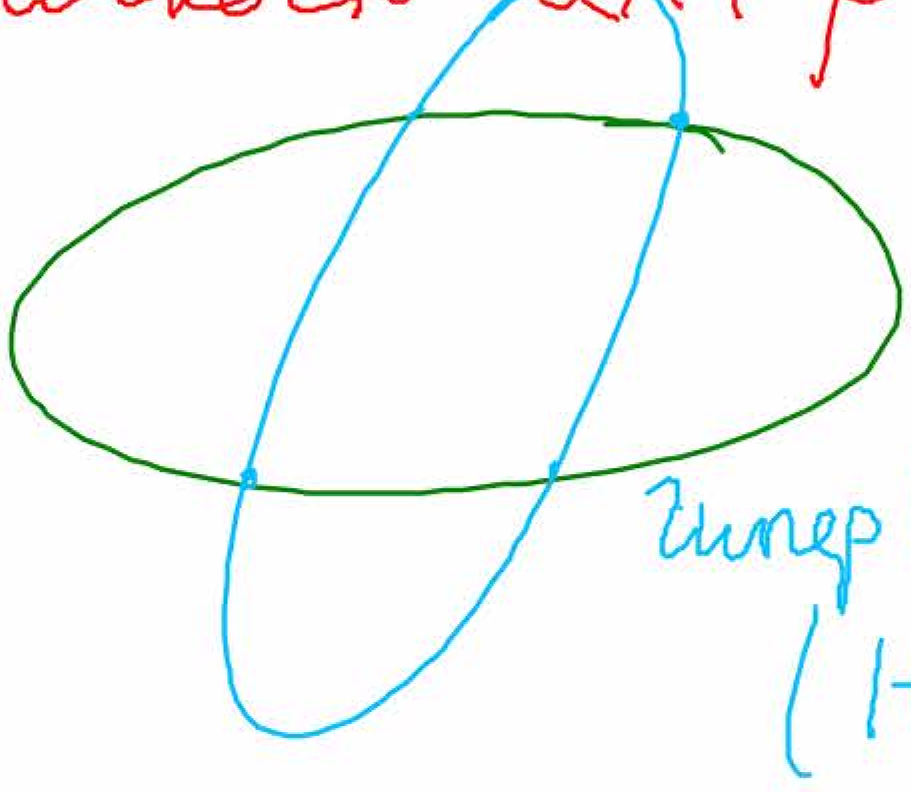
$$3 \overset{?}{=} l(D) = d + 1 - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + i(D)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0 \qquad \mathbb{C}P^3$$

?

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$$

Плоскость $\alpha x + \beta y + \delta z + \varepsilon w = 0$



$\mathbb{C}P^n$

$(1+t)^{n+1}$ t – класс гиперплоского сечения

гиперпов-сть степени d.

$(1+dt)$ $t^{n+1} = 0$