ТФКП
2 курс
Домашнее задание

Владислав Мозговой
1789769386

29 марта 2021 г.

Домашнее задание 2

Цифры Вашего кода — a_0, …, a_9. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_1$. Найдите множество, в которое отображается множество $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ при дробно-линейном преобразовании $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Нарисуйте это множество и вычислите его параметры (например, если это окружность или диск, то найдите центр и радиус).

(0) $X = \{\mathrm{Im}(z) = 0\}$, $f(z) = \frac{2iz}{z-2}$
(1) $X = \{|z| = 2\}$, $f(z) = 1/z$
(2) $X = \{|z| = \frac{1}{3}\}$, $f(z) = (z+3)/z$
(3) $X = \{\mathrm{Im}(z) = 0\}$, $f(z) = \frac{(1+i)z}{4z-2}$
(4) $X = \{|z| = \frac{1}{2}\}$, $f(z) = (z+i)/z$
(5) $X = \{\mathrm{Re}(z) = 1\}$, $f(z) = (z+1)/(z-1)$
(6) $X = \{\mathrm{Im}(z) = -4\}$, $f(z) = iz/(z+4i)$
(7) $X = \{\mathrm{Im}(z) = 1\}$, $f(z) = z/(z-i)$
(8) $X = \{\mathrm{Re}(z) = -3\}$, $f(z) = (z-i)/(z+3)$
(9) $X = \{|z| = 3\}$, $f(z) = -9i/z$

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $3a_2 + a_3$. Отождествим расширенную плоскость $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ со сферой с центром в $(0,0,1)$ и радиусом 1 при помощи стереографической проекции из северного полюса $(0,0,2)$ на горизонтальную плоскость $\{(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), 0)\}$.

(0) Найдите преобразования расширенной плоскости z, соответствующие при стереографической проекции вращению сферы относительно оси с направляющим вектором $(1,0,0)$ на угол $\pi/2$.

(1) Найдите образ экватора (пересечения сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы параллельно плоскости проекции) при стереографической проекции.

(2) Найдите преобразования расширенной плоскости z, соответствующие при стереографической проекции вращению сферы относительно оси с направляющим вектором $(1,0,0)$ на угол π.

(3) Введём на сфере сферические координаты как на глобусе (широта и долгота). Найдите образ части сферы, лежащей выше 30-ой параллели северной широты.

(4) Найдите преобразования расширенной плоскости z, соответствующие при стереографической проекции вращению сферы относительно оси с направляющим вектором $(0,1,0)$ на угол $\pi/2$.

(5) Введём на сфере сферические координаты как на глобусе (широта и долгота). Найдите образ 45-ого мериадиана западной долготы (0-ой меридиан проходит через точку $(1, 0, 1)$).

(6) Найдите преобразования расширенной плоскости z, соответствующие при стереографической проекции вращению сферы относительно оси с направляющим вектором $(0, 1, 0)$ на угол π.

(7) Введём на сфере сферические координаты как на глобусе (широта и долгота). Найдите образ части сферы, лежащей ниже 30-ой параллели южной широты.

(8) Найдите преобразования расширенной плоскости z, соответствующие при стереографической проекции вращению сферы относительно оси с направляющим вектором $(0, 0, 1)$ на угол $\pi/3$.

(9) Введём на сфере сферические координаты как на глобусе (широта и долгота). Найдите образ 60-го мериадиана восточной долготы (0-ой меридиан проходит через точку $(1, 0, 1)$).

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + 2a_5$.

(0) Найдите центр и радиус обобщенной окружности, заданной уравнением $z\overline{z} - i\overline{z} + iz - 1 = 0$

(1) Задайте уравнением относительно координаты z прямую, проходящую через точки $1 + i$ и $2 + 3i$

(2) Найдите множество, в которое отображается множество X при преобразовании f

$X = \{\mathrm{Re}(z) > 0; \mathrm{Im}(z) < 0\}, f(z) = z^4 + 2$

(3) Задайте уравнением относительно координаты z прямую, проходящую через точки $1 + i$ и $e^{\frac{\pi i}{4}}$

(4) Найдите центр и радиус обобщенной окружности, заданной уравнением $iz\overline{z} + \overline{z} - z - 3i = 0$

(5) Задайте уравнением относительно координаты z прямую, проходящую через точки $-3 + i$ и $2 - 4i$.

(6) Найдите центр и радиус обобщенной окружности, заданной уравнением $z\overline{z} - |z| = 1$

(7) Найдите множество, в которое отображается множество X при преобразовании f

$X = \{\mathrm{Re}(z) > 0; \mathrm{Im}(z) - i\}, f(z) = (z + i)^2 - i$

(8) Найдите центр и радиус обобщенной окружности, заданной уравнением $z\overline{z} + \overline{z} + z - 1 = 0$

(9) Найдите множество, в которое отображается множество X при преобразовании f

$X = \{\mathrm{Re}(z) < 0; \mathrm{Im}(z) > 0\}, f(z) = z^3 - i$

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $2a_6 + 3a_7$. Дайте геометрическое описание следующих множеств:

(0) $|z-i| + |z-1| \leqslant 2$
(1) $|z-i| = 2|z|$
(2) $\mathrm{Re}(\frac{z}{1-z}) = 1$
(3) $|z-2| = |z+2|$
(4) $|z-i| = |z+1|$
(5) $|z| \geqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$
(6) $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{5}}|z|$
(7) $|z-i| - |z-1| \leqslant 1$
(8) $\mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 1$
(9) $|z+1| = 3|z|$

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $3a_0 + 4a_8$.

(0) Найдите центр и радиус окружности, описанной вокруг треугольника с вершинами a, b, c. Выразите ответ в симметричном виде.

(1) Найдите все пары коммутирующих дробно-линейных преобразований.

(2) Найдите два семейства окружностей или прямых со следующим свойством. Каждое из двух семейств инвариантно относительно всех дробно-линейных преобразований с неподвижными точками ± 1 (в том смысле, что каждое дробно-линейное преобразование f, такое, что $f(\pm 1) = \pm 1$, переводит каждую окружность или прямую каждого семейства в окружность или прямую того же семейства).

(3) Пусть даны две различные точки a, $b \in \mathbb{C}$ и положительное действительное число $r > 0$. Докажите, что геометрическое множество точек $z \in \mathbb{C}$, таких, что

$$\frac{|z-a|}{|z-b|} = r,$$

является окружностью или прямой.

(4) Найдите общий вид дробно-линейного преобразования, соответствующего вращению сферы при стереографической проекции на $\overline{\mathbb{C}}$.

(5) Дробно-линейное преобразование называется *эллиптическим*, если оно сопряжено в группе дробно-линейных преобразований евклидовому вращению вокруг некоторого центра. Докажите, что если дробно-линейное преобразование f удовлетворяет тождеству $f(f(z)) = z$, то f эллиптическое.

(6) Рассмотрим преобразование $f(z) = \frac{z}{1-z}$. Найдите явную формулу для n-ой итерации $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$.

(7) Выпишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет частное любых двух линейно независимых решений уравнения

$$u''(z) + e^z u(z) = 0.$$

(8) Докажите, что комплексные точки a, b, c, d лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ является вещественным числом.

(9) Дробно-линейное преобразование f имеет только одну неподвижную точку в $\overline{\mathbb{C}}$. Докажите, что f сопряжено в группе дробно-линейных преобразований отображению $z \mapsto z + 1$.

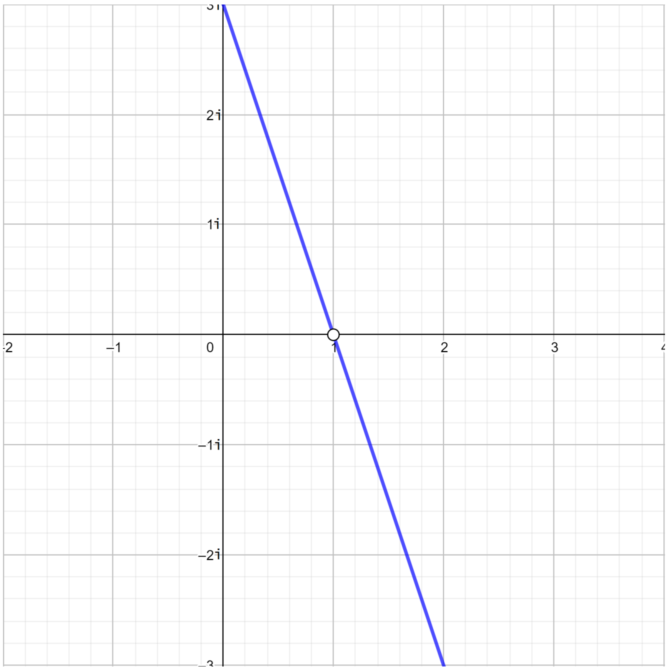
Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_0 + a_1 = 1 + 7 = 8 \mod 10$

$$X = \{\mathrm{Re}(z) = -3\},\ f(z) = \frac{z - i}{z + 3}$$
$$\frac{(x + iy) - i}{(x + iy) + 3} = 1 - \frac{3 + i}{(x + iy) + 3}$$
$$X:\ 1 - \frac{3 + i}{(x + iy) + 3} = 1 - \frac{3 + i}{(-3 + iy) + 3} = 1 - \frac{3 + i}{iy}$$

То есть мы получим прямую с выколотой точкой $z_0 = 1$



Задача 2

Необходимо решить задачу $3a_2 + a_3 = 3 \cdot 8 + 9 = 3 \mod 10$
Заметим, что часть сферы, лежащая выше 30-ой параллели является шапочкой данной сферы, точнее ее частью, лежащей выше $z = 1 + \sin(30) = 1.5$, тогда мы можем посмотреть, куда отображается эта параллель, а она отображается в окружность, точки которой имеют модуль $x = 2\sqrt{3}$, то есть образ части сферы будет лежать вне этой окружности и задаваться формулой $z\overline{z} > (2\sqrt{3})^2 = 12$

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_4 + 2a_5 = 7 + 2 \cdot 6 = 9 \mod 10$

$$X = \{\mathrm{Re}(z) < 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\},\ f(z) = z^3 - i$$

Замеьтим, что при преобразовании $z \to z^3 - i$ модуль z возводится в куб, аргумент умножается на 3, а затем результат сдвигается на i. Заметим, что аргументы элементов множества X лежат в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, а следовательно, после умножения на 3, аргументы будут лежать в $\left(\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right)$. А следовательно в итоге будет множество $A = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(z) < 0,\ \mathrm{Im}(z) < -1\}$

Задача 4

Необходимо решить задачу $2a_6 + 3a_7 = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 7 \mod 10$

$$|z - i| - |z - 1| \leqslant 1$$
$$|x + i(y - 1)| - |(x - 1) + iy| \leqslant 1$$
$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leqslant 1$$
$$x^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1 + (x - 1)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$
$$2x - 2y - 1 \leqslant 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$
$$(2x - 2y - 1)^2 \leqslant 4(x^2 - 2x + 1 + y^2)$$
$$(2x - 2y - 1)(2x - 2y - 1) = 4x^2 + 4y^2 - 8xy - 4x + 4y + 1 \leqslant 4x^2 - 8x + 4y^2 + 4$$
$$-8xy + 4x + 4y \leqslant 3$$
$$y(4 - 8x) \leqslant 3 - 4x$$

Тогда при $4 - 8x > 0: \; x < \frac{1}{2}, \; y \leqslant \frac{3-4x}{4-8x}$ и при $4 - 8x < 0: \; x > \frac{1}{2}, \; y \geqslant \frac{3-4x}{4-8x}$