

## Экзамен по теории Галуа

*Задача 1.*

Найдите группу Галуа  $x^3 - x - 1$  над  $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ .

*Задача 2.*

Пусть  $f(x)$  — многочлен степени  $n > 2$  над  $\mathbb{Q}$ ,  $K$  — его поле разложения.

Докажите, что если  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong S_n$  и  $\alpha$  — корень  $f(x)$ , то поле  $\mathbb{Q}(\alpha)$  не имеет нетривиальных автоморфизмов.

*Задача 3.*

Пусть  $E \subset \mathbb{C}$  — максимальное по включению подполе, не содержащее  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ .

Докажите, что если  $F$  — конечное расширение  $E$ , то  $F/E$  — расширение Галуа и  $G = \text{Gal}(F/E)$  — циклическая группа.

*Указание:* Как устроены максимальные собственные подгруппы в  $G$ ?

*Задача 4.*

Какова степень поля разложения  $x^{10} - 5$  над  $\mathbb{Q}$ ?