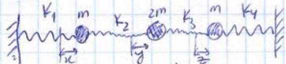
Мельникова Даша

Домашняя работа.

№1.



$K_1 = K_4 = 3K \qquad K_2 = K_3 = 2K$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -K_1 x - K_2(x-y) = x(-K_1 - K_2) + y\cdot K_2 \\ 2m\ddot{y} = K_2(x-y) - K_3(y-z) = x\cdot K_2 + y\cdot(-K_2 - K_3) + z\cdot K_3 \\ m\ddot{z} = K_3(y-z) - K_4 z = y\cdot K_3 + z\cdot(-K_3 - K_4) \end{cases}$$

$\ddot{X} = -AX$

$$A = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 5K & -2K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -2K & 5K \end{pmatrix} = \frac{K}{m}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 41\lambda - 30 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda-6) = 0$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 6$

$\Rightarrow$ собств знач A: $\frac{K}{m}, \frac{5K}{m}, \frac{6K}{m}$; $\omega_1^2 = \frac{K}{m}, \omega_2^2 = \frac{5K}{m}, \omega_3^2 = \frac{6K}{m}$

$A - \lambda_1 E$:
$$\begin{pmatrix} \frac{4K}{m} & -\frac{2K}{m} & 0 \\ -\frac{K}{m} & \frac{K}{m} & -\frac{K}{m} \\ 0 & -\frac{2K}{m} & \frac{4K}{m} \end{pmatrix} = \frac{K}{m}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

собств вектор: $(1, 2, 1)$

2 лин. незав. стр: $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

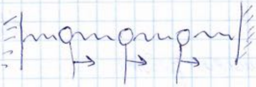
$A - \lambda_2 E$. $\frac{K}{m}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ собств вектор: $(1, 0, -1)$

$A - \lambda_3 E$: $\frac{K}{m}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ собств. вектор: $(2, -1, 2)$

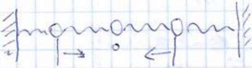
$\psi_1 = (1, 2, 1)$



$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

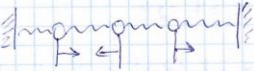
норм. частоты

$\psi_2 = (1, 0, -1)$



$\omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{m}}$

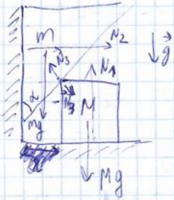
$\psi_3 = (2, -1, 2)$

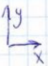


$\omega_3 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$

$\psi_i \cos\omega_i t$, $\psi_i \sin\omega_i t$ $\quad i = 1,2,3$ нормальные моды

N 2.





$$\begin{cases} M\ddot{x}_M = N_3 \cdot \cos\alpha \\ M\ddot{y} = N_1 - Mg - N_3 \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_m = N_2 - N_3 \cdot \cos\alpha \\ m\ddot{y}_m = N_3 \cdot \sin\alpha - mg \end{cases}$$

$$N_2 = N_3 \cdot \cos\alpha = M\ddot{x}$$
$$N_1 = Mg + N_3 \sin\alpha$$

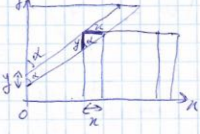
$$\ddot{x} = \frac{N_3 \cos\alpha}{M} \qquad N_3 = \frac{M\ddot{x}}{\cos\alpha}$$

$$\ddot{y} = \frac{N_3 \sin\alpha - mg}{m} = \cancel{\frac{N_1 - Mg - mg}{m}}$$

$$\ddot{y} = \frac{\frac{M\ddot{x}}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha - mg}{m} = \frac{M\ddot{x} \cdot tg\alpha - mg}{m}$$

число степеней свободы: 1

степ. свободы =
= # кр-ций ур-ий Ньютона —
— # нез. сил р-ции = 4 − 3 = 1



$tg\alpha = \frac{x}{y}$

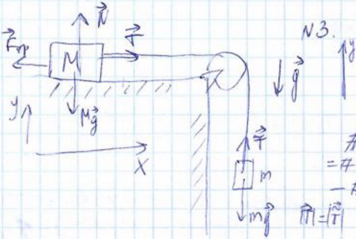
$\dot{x} = -\dot{y} \cdot tg\alpha$

$\ddot{x} = -\ddot{y}\, tg\alpha$

$m\ddot{y} = -m\ddot{x} \cdot ctg\alpha = M\ddot{x}\, tg\alpha - mg$

$\ddot{x}(m\, ctg\alpha + M\, tg\alpha) = +gm$

$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{mg}{M\, tg\alpha + m \cdot ctg\alpha}; \quad \ddot{y} = \frac{mg\, ctg\alpha \cdot (-1)}{M\, tg\alpha + m\, ctg\alpha}$



N3.

$\downarrow \vec{g}$ $\uparrow y$

$|\vec{F}_{тр}| = k \cdot |\vec{N}|$

#степ свободы =
= # ур-ний уравн Ньютона −
− # нез. сил р-ций = 3 − 2 = 1.

число степеней свободы: 1

$$(1)\ \begin{cases} M\ddot{x} = T - F_{тр} = T - k \cdot N \\ M\ddot{y} = N - Mg = 0 \qquad N = Mg \end{cases}\ (2)$$

$$(3)\ m\ddot{y} = -mg + T$$

$$\ddot{x} = -\ddot{y}$$

нить нерастяжима $\quad x + y = c$, $\quad \dot{x} + \dot{y} = 0$

$$(1)-(3)\ \cancel{M(\ddot{x} - \ddot{y}) = mg - kN}$$
$$\cancel{2M\ddot{x} = mg - kMg}$$
$$\cancel{\ddot{x} = \ddot{y} = \frac{g(m - kM)}{2M}}$$

$$(1)-(3)\ M\ddot{x} - m\ddot{y} = -kN + mg$$
$$M\ddot{x} + m\ddot{x} = -kN + mg$$
$$\ddot{x}(M+m) = -kN + mg$$
$$\ddot{x} = \frac{-kN + mg}{M+m} = \frac{-kMg + mg}{M+m}$$
$$\ddot{y} = \frac{kN - mg}{M+m} = \frac{kMg - mg}{M+m}$$

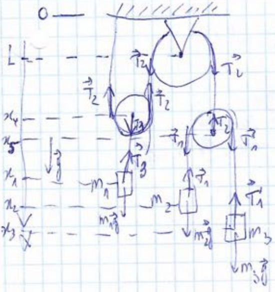
А если кирпич не двигается:

$T = F_{тр}$ $\qquad F_{тр} \le \mu \cdot N$

$T = mg$ $\qquad mg \le \mu M g \Rightarrow \underline{m \le M\mu}$

при таком условии кирпич не двит

№4.



$T_3 = 2T_2 = 4T_1$

$T_2 = 2T_1$

степ. свободы = # ур-ний ур-ий Ньютона — # незав. р-ний $= 3 - 1 = 2$

$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_1'|$

$$l_1 = x_3 - x_5 + \underbrace{\pi R_1} + x_2 - x_5 + x_1 - x_4$$

$$l_2 = x_5 \underbrace{-L} + \underbrace{\pi R_2} + x_4 \underbrace{-L} + \underbrace{\pi R_3} + x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = const$$

$$2x_4 + x_5 = const$$

$$2\dot{x}_4 = -\dot{x}_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = const$$

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 + \dot{x}_4 + 2\dot{x}_4 = 0$$

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 + 3\dot{x}_4 = 0$$

$$x_1 - x_4 = const \quad \dot{x}_1 - \dot{x}_4 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{4\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 0}$$

$$\begin{cases} m_3 \cdot \ddot{x}_3 = m_3 g - T_2/2 \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 = m_2 g - T_2/2 \\ m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - 2T_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}_3 = g - \frac{T_2}{2m_3} \\ \ddot{x}_2 = g - \frac{T_2}{2m_2} \\ \ddot{x}_1 = g - \frac{2T_2}{m_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\left(g - \frac{2T_2}{m_1}\right) + g - \frac{T_2}{2m_2} + g - \frac{T_2}{2m_3} = 0$$

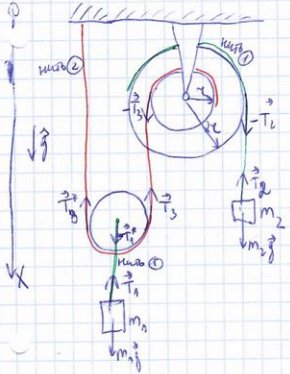
$$6g = \frac{8T_2}{m_1} + \frac{T_2}{2m_2} + \frac{T_2}{2m_3} \Rightarrow T_2 = \frac{6g}{\frac{8}{m_1} + \frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3}} = \frac{12g m_1 m_2 m_3}{16m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2}$$

$$\ddot{x}_1 = g - \frac{24 m_2 m_3 g}{16m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2} = \frac{16m_2m_3 g + m_1m_3 g + m_1m_2 g - 24m_2m_3 g}{16m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2} = \frac{-8m_2m_3 g + m_1m_3 g + m_1m_2 g}{16m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2}$$

$$\ddot{x}_2 = g - \frac{6m_1m_3 g}{16m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2} = \frac{16m_2m_3 g + m_1m_3 g + m_1m_2 g - 6m_1m_3 g}{16m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2} = \frac{16m_2m_3 g - 5m_1m_3 g + m_1m_2 g}{16m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2}$$

$$\ddot{x}_3 = g - \frac{6m_1m_2 g}{16m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2} = \frac{16m_2m_3 g + m_1m_3 g - 5m_1m_2 g}{16m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2}$$

N 5.



степеней свободы = # ур-ий уравн. Ньют — — # нез сил р-ций = $2-1=1$

$$(*)\begin{cases} m_1\ddot x_1 = m_1 g - T_1 \\ m_2\ddot x_2 = m_2 g - T_2 \end{cases}$$

$$T_1 = 2T_3$$

Т.к радиусы r и $2r$, то $T_3 = 2T_2$

$$\Rightarrow T_1 = 4T_2$$

Пусть катушка повернулась по часовой стрелке на угол φ

$$\Delta l_{\text{нить } ①} = 2r\varphi$$

$$\Delta l_{\text{нить } ②} = r\varphi$$

$$\begin{cases} 2x_1 + r\varphi = \text{const} \\ x_2 - 2r\varphi = \text{const} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\dot x_1 + r\dot\varphi = 0 \\ \dot x_2 - 2r\dot\varphi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r\dot\varphi = -2\dot x_1 \\ r\dot\varphi = \dfrac{\dot x_2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2\dot x_1 = \frac{\dot x_2}{2} \qquad \dot x_2 + 4\dot x_1 = 0$$

$$\ddot x_2 = -4\ddot x_1$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} m_2\cdot(-4\ddot x_1) = m_2 g - T_1/4 \\ m_1\ddot x_1 = m_1 g - T_1 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} -16m_2\ddot x_1 = 4m_2 g - T_1 \\ m_1\ddot x_1 = m_1 g - T_1 \end{cases}$$

$$-16m_2\ddot x_1 - m_1\ddot x_1 = g(4m_2 - m_1)$$

$$\ddot x_1 = \frac{g(4m_2 - m_1)}{-m_1 - 16m_2} = \frac{g(m_1 - 4m_2)}{m_1 + 16m_2}$$

$$\ddot x_2 = \frac{-4g(m_1 - 4m_2)}{m_1 + 16m_2}$$

N6

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad tg\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\quad tg\varphi=\frac{y}{x}$

$$(\vec e_r,\vec e_\theta,\vec e_\varphi)=(\vec e_x,\vec e_y,\vec e_z)\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec e}_r=(\vec e_x\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi+\vec e_y\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi+\vec e_z\cdot\cos\theta)'=$$

$$=\vec e_x\cdot\cos\theta\cdot\dot\theta\cdot\cos\varphi+\vec e_x\cdot\sin\theta(-\sin\varphi)\cdot\dot\varphi+\vec e_y\cdot\cos\theta\cdot\dot\theta\cdot\sin\varphi+$$

$$+\vec e_y\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi+\vec e_z(-\sin\theta)\cdot\dot\theta=$$

$$=\dot\theta(\vec e_x\cos\theta\cos\varphi+\vec e_y\cos\theta\sin\varphi-\vec e_z\sin\theta)+$$

$$+\dot\varphi(-\vec e_x\sin\theta\cdot\sin\varphi+\vec e_y\sin\theta\cdot\cos\varphi)=$$

$$=\dot\theta\cdot\vec e_\theta+\dot\varphi\cdot\vec e_\varphi\cdot\sin\theta$$

$$\dot{\vec e}_\theta=(\vec e_x\cos\theta\cdot\cos\varphi+\vec e_y\cos\theta\sin\varphi-\vec e_z\cdot\sin\theta)'=$$

$$=\vec e_x\cdot(-\sin\theta)\cdot\dot\theta\cdot\cos\varphi+\vec e_x\cdot\cos\theta\cdot(-\sin\varphi)\cdot\dot\varphi+$$

$$+\vec e_y\cdot(-\sin\theta)\cdot\dot\theta\cdot\sin\varphi+\vec e_y\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi-\vec e_z\cdot\cos\theta\cdot\dot\theta=$$

$$=\dot\theta(-\vec e_x\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi-\vec e_y\sin\theta\sin\varphi-\vec e_z\cdot\cos\theta)+$$

$$+\dot\varphi(-\vec e_x\cdot\cos\theta\sin\varphi+\vec e_y\cdot\cos\theta\cos\varphi)=$$

$$=\dot\theta\cdot(-\vec e_r)+\dot\varphi\cdot(\cos\theta)\cdot\vec e_\varphi=-\dot\theta\cdot\vec e_r+\dot\varphi\cdot\cos\theta\,\vec e_\varphi$$

$$\dot{\vec e}_\varphi=(-\vec e_x\sin\varphi+\vec e_y\cdot\cos\varphi)'=-\vec e_x\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi-\vec e_y\sin\varphi\cdot\dot\varphi=$$

$$=-\dot\varphi(\vec e_x\cdot\cos\varphi+\vec e_y\sin\varphi)=-\dot\varphi(\vec e_x\cos\varphi(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\vec e_y\sin\varphi(\sin^2\theta+\cos^2\theta))\ (1)$$

$$(=)\ -\dot\varphi(\vec e_x\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\theta+\vec e_y\cdot\sin^2\theta\cdot\sin\varphi+\cancel{\vec e_z\cdot\cos\theta\sin\theta}+$$

$$+\vec e_x\cdot\cos^2\theta\cos\varphi+\vec e_y\cos^2\theta\cdot\sin\varphi-\cancel{\vec e_z\cdot\sin\theta\cos\theta})=$$

$$=-\dot\varphi\cdot(\vec e_r\cdot\sin\theta+\vec e_\theta\cdot\cos\theta).$$

$$\vec r=r\cdot\vec e_r$$

$$\dot{\vec r}=\dot r\cdot\vec e_r+r\cdot\dot{\vec e}_r=\dot r\vec e_r+r(\dot\theta\cdot\vec e_\theta+\dot\varphi\cdot\vec e_\varphi\cdot\sin\theta)=$$

$$=\dot r\cdot\vec e_r+r\cdot\dot\theta\,\vec e_\theta+r\dot\varphi\cdot\sin\theta\cdot\vec e_\varphi$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\dot r\cdot\vec e_r + r\cdot\dot\theta\cdot\vec e_\theta + r\cdot\dot\varphi\cdot\sin\theta\cdot\vec e_\varphi)' =$$

$$= \ddot r\cdot\vec e_r + \dot r\cdot\dot{\vec e}_r + \dot r\cdot\dot\theta\cdot\vec e_\theta + r\cdot\ddot\theta\cdot\vec e_\theta + r\cdot\dot\theta\,\dot{\vec e}_\theta +$$

$$+ \dot r\cdot\dot\varphi\cdot\sin\theta\cdot\vec e_\varphi + r\cdot\ddot\varphi\cdot\sin\theta\cdot\vec e_\varphi + r\cdot\dot\varphi\cdot\cos\theta\cdot\dot\theta\cdot\vec e_\varphi + r\cdot\dot\varphi\cdot\sin\theta\cdot\dot{\vec e}_\varphi =$$

$$= \ddot r\cdot\vec e_r + \dot r(\dot\theta\,\vec e_\theta + \dot\varphi\cdot\sin\theta\cdot\vec e_\varphi) + \dot r\cdot\dot\theta\cdot\vec e_\theta + r\cdot\ddot\theta\cdot\vec e_\theta + r\,\dot\theta\cdot(-\dot\theta\cdot\vec e_r + \dot\varphi\cdot\cos\theta\cdot\vec e_\varphi) +$$

$$+ \dot r\cdot\dot\varphi\cdot\sin\theta\cdot\vec e_\varphi + r\cdot\ddot\varphi\,\sin\theta\cdot\vec e_\varphi + r\dot\varphi\cos\theta\cdot\dot\theta\cdot\vec e_\varphi +$$

$$+ r\cdot\dot\varphi\cdot\sin\theta\cdot(-\dot\varphi)(\vec e_r\cdot\sin\theta + \vec e_\theta\cdot\cos\theta) =$$

$$= \vec e_r\,(\ddot r - r\cdot(\dot\theta)^2 - r\cdot\dot\varphi^2\sin^2\theta) + \vec e_\theta\,(2\dot r\cdot\dot\theta + r\cdot\ddot\theta - r\cdot\dot\varphi^2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta) +$$

$$+ \vec e_\varphi\,(\underline{\dot r\cdot\dot\varphi\cdot\sin\theta} + r\cdot\dot\theta\cdot\dot\varphi\cdot\cos\theta + \underline{\dot r\cdot\dot\varphi\cdot\sin\theta} + r\ddot\varphi\sin\theta + r\dot\varphi\dot\theta\cdot\cos\theta) =$$

$$= \vec e_r\,(\ddot r - r\cdot\dot\theta^2 - r\cdot\dot\varphi^2\cdot\sin^2\theta) + \vec e_\theta\,(2\dot r\cdot\dot\theta + r\cdot\ddot\theta - r\cdot\dot\varphi^2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta) +$$

$$+ \vec e_\varphi(2\dot r\cdot\dot\varphi\cdot\sin\theta + 2r\,\dot\theta\cdot\dot\varphi\cos\theta + r\cdot\ddot\varphi\cdot\sin\theta).$$

На $\mathbb{R}^3$ без оси z переход к сферическим координатам несингулярен, т.к. переход к сферическим координатам называется несингулярным в точке, где якобиан замены координат отличен от 0.