ЛИСТОК 1. ПРЕДЕЛЫ.

Задача 1. Найдите точную верхнюю и точную нижнюю грань следующих множеств: а) $\{a_1, a_2, \dots\}$, где $a_n = 3 + 1/10 + 4/10^2 + \dots + \pi_n/10^n$, где π_k — k-й знак после запятой числа π. б) $\{\sin n \mid n = 1, 2, \dots\}$.

Задача 2. Пусть $a > 0$ и $R_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < a\}$. Докажите, что число $r \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup R_a$ обладает свойством $r^2 = a$ (и тем самым квадратный корень $\sqrt{a}$ существует).

Задача 3. Докажите, что а) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$ для всякого $\alpha > 0$, б) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, в) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n/2)^n} = 0$.

Задача 4. Найдите предел $\lim_{x\to1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$; здесь m, n — натуральные числа.

Задача 5. Докажите формулу суммирования геометрической прогрессии: $\lim_{n\to+\infty}(1 + q + \dots + q^n) = \frac{1}{1-q}$, если $q \in (-1, 1)$. Что можно сказать о пределе в левой части, если $q \ge 1$ или $q \le -1$? А если $q \in \mathbb{C}$?

Задача 6. Пусть $a_n^{(k)} = 1 + 1/2^k + 1/3^k + \dots + 1/n^k$. Докажите, что при натуральном $k \ge 2$ предел $\lim_{n\to+\infty} a_n^{(k)}$ существует и конечен (является действительным числом), а $\lim_{n\to+\infty} a_n^{(1)} = +\infty$.

Задача 7. Пусть $b, c \in \mathbb{R}$, причем $b \ne 0$; обозначим $x_1(a)$ и $x_2(a)$ корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. а) Докажите, что функции x_1 и x_2 определены при достаточно малом по модулю a (иными словами, существует $M > 0$ такое, что если $-M < a < M$, то $x_1(a)$ и $x_2(a)$ существуют). Найдите пределы $\lim_{a\to0} x_1(a)$ и $\lim_{a\to0} x_2(a)$. б) Найдите пределы $\lim_{a\to0} ax_1(a)$ и $\lim_{a\to0} ax_2(a)$.

Задача 8. Докажите, что последовательность a_n сходится (имеет предел — действительное число) и вычислите ее предел: а) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + 1/a_n$ при всех $n \ge 1$. б) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ при всех $n \ge 1$. в) $a_1 > 0$ произвольное, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right)$ при всех $n \ge 1$. Здесь $p \ge 0$ — действительное число.

Задача 9. Найдите $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos^m(2\pi n! x)$ в зависимости от x (или докажите, что предела не существует).