Лекция 9. Гомотопии и аналитическое продолжение

Теория функций комплексного переменного

Гомотопия между двумя путями

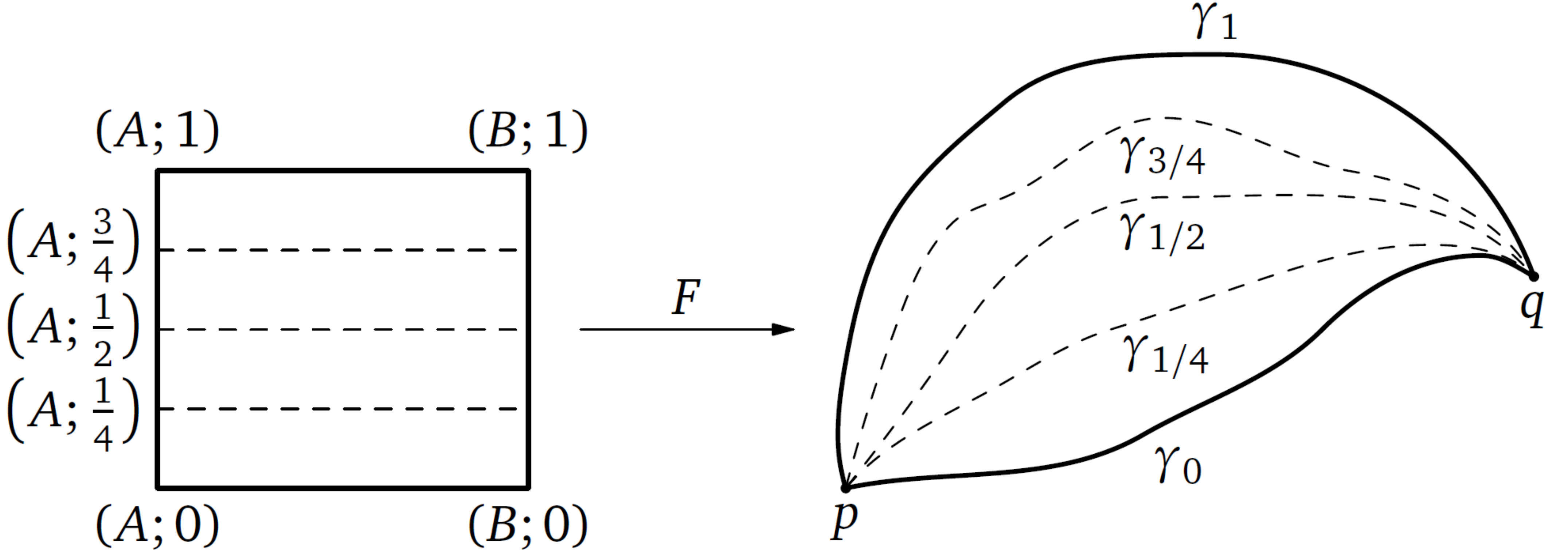
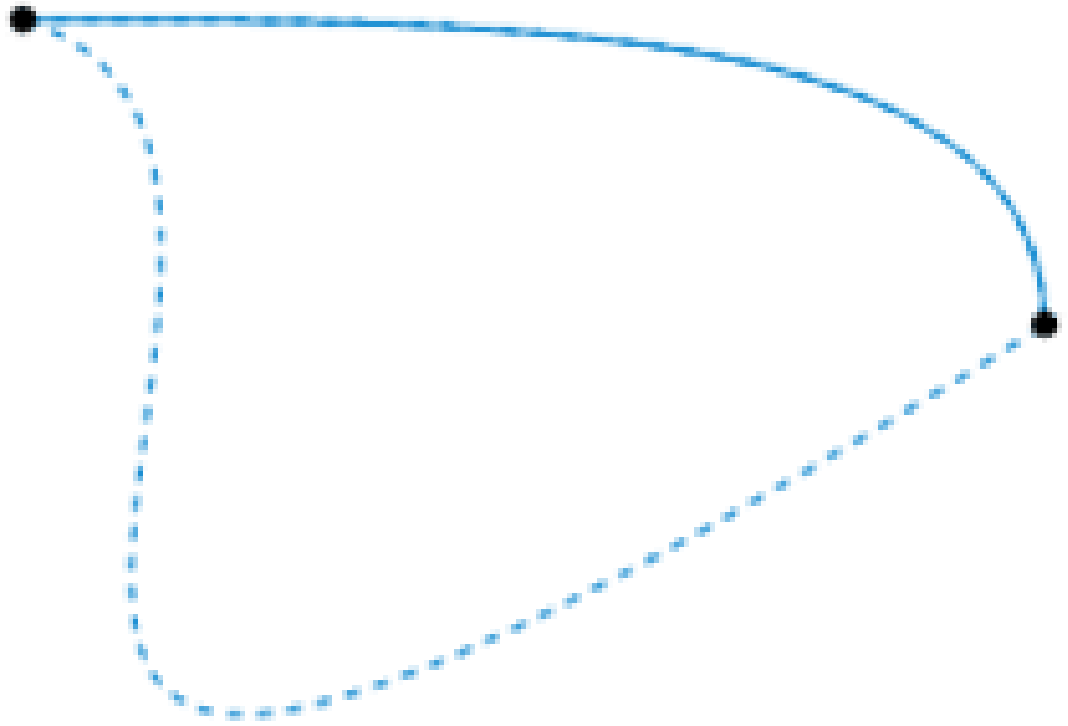


Рис. 6.1. Гомотопия между путями γ_0 и γ_1, соединяющими точки p и q

Гомотопия с закрепленными концами



Свободная гомотопия между петлями

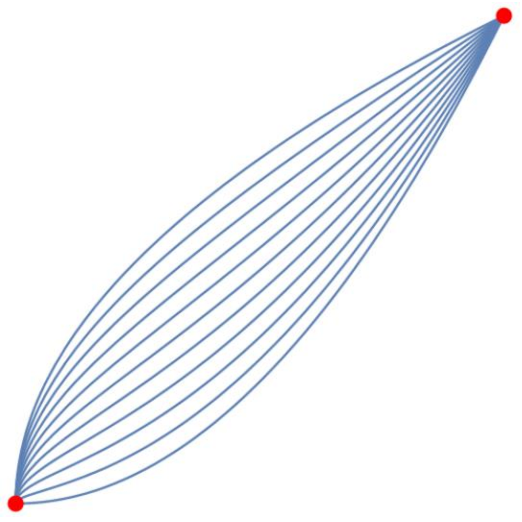
Определение 6.2. Пусть $\gamma_0, \gamma_1 \colon [A;B] \to U$ — непрерывные замкнутые пути в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Говорят, что пути γ_0 и γ_1 *гомотопны*, если существует такое непрерывное отображение $F \colon [A;B] \times [0;1] \to U$, что $F(t,0) = \gamma_0(t)$ и $F(t,1) = \gamma_1(t)$ для всех $t \in [A;B]$, а также $F(A,s) = F(B,s)$ для всех $s \in [0;1]$.

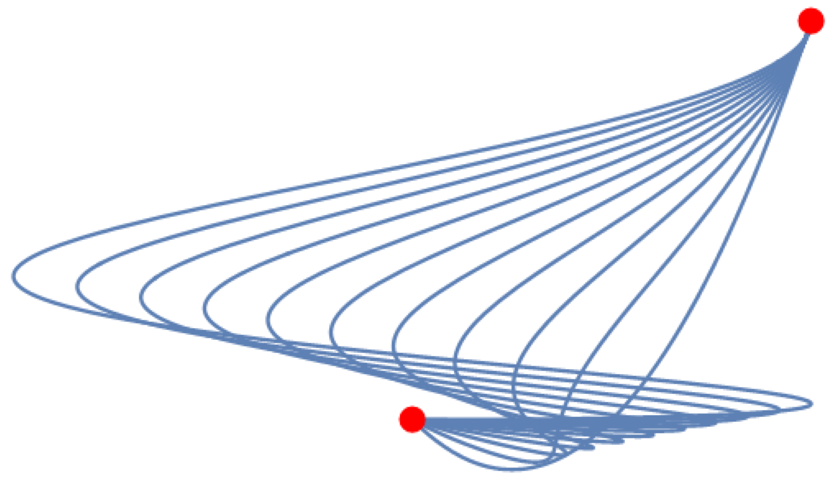
Отображение F называется *гомотопией* (точнее — гомотопией между замкнутыми путями), соединяющей пути γ_0 и γ_1.

Условие «$F(A,s) = F(B,s)$ для всех s» означает, конечно, что все пути γ_s замкнуты.

Линейная гомотопия

- Задается формулой $F(t,s) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$
- Не выходит за пределы множества U, если U выпукло.
- Имеет смысл и как гомотопия с фиксированными концами, и как (свободная) гомотопия замкнутых путей (=петель).

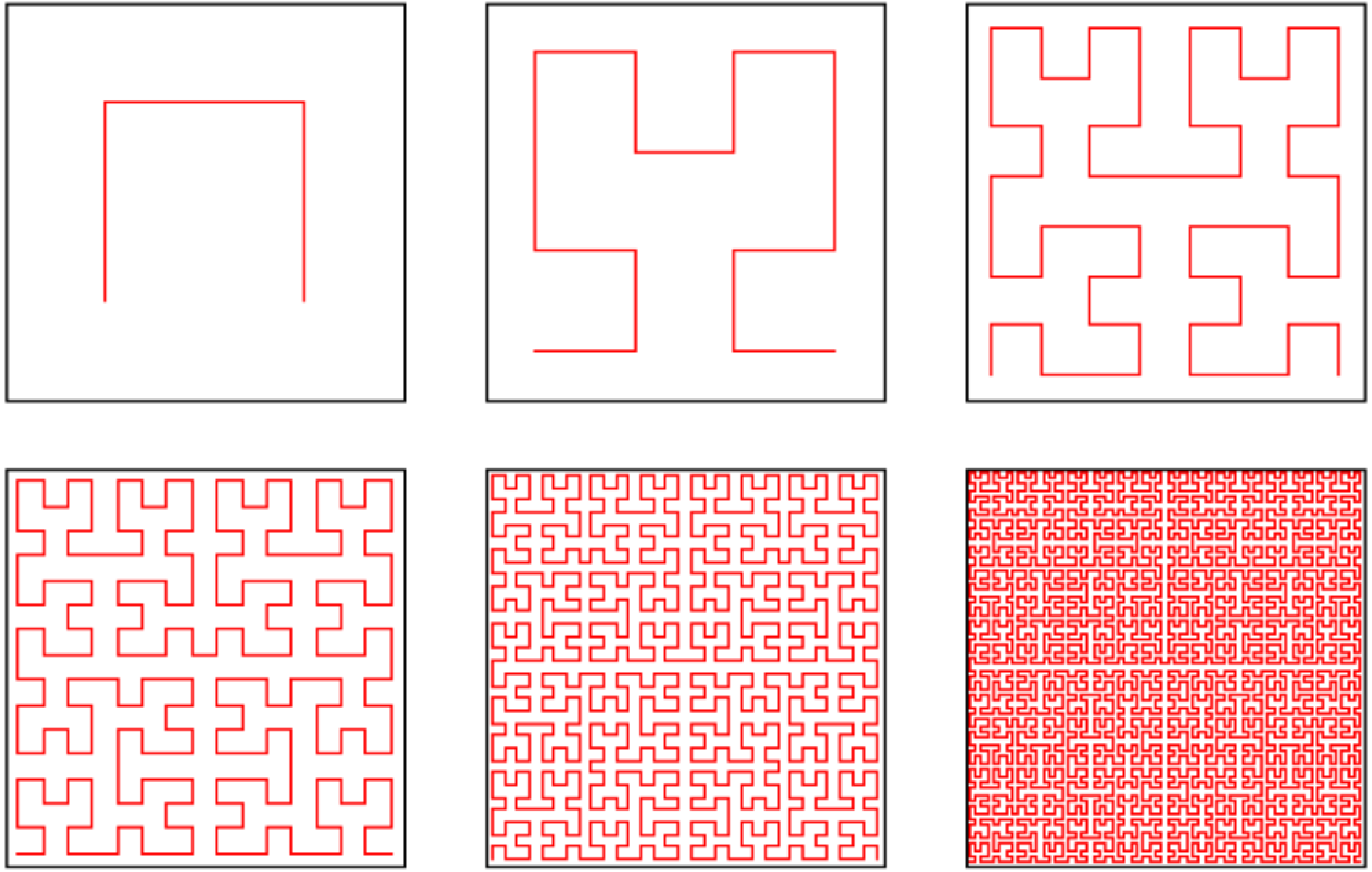




Лемма об улучшении гомотопии

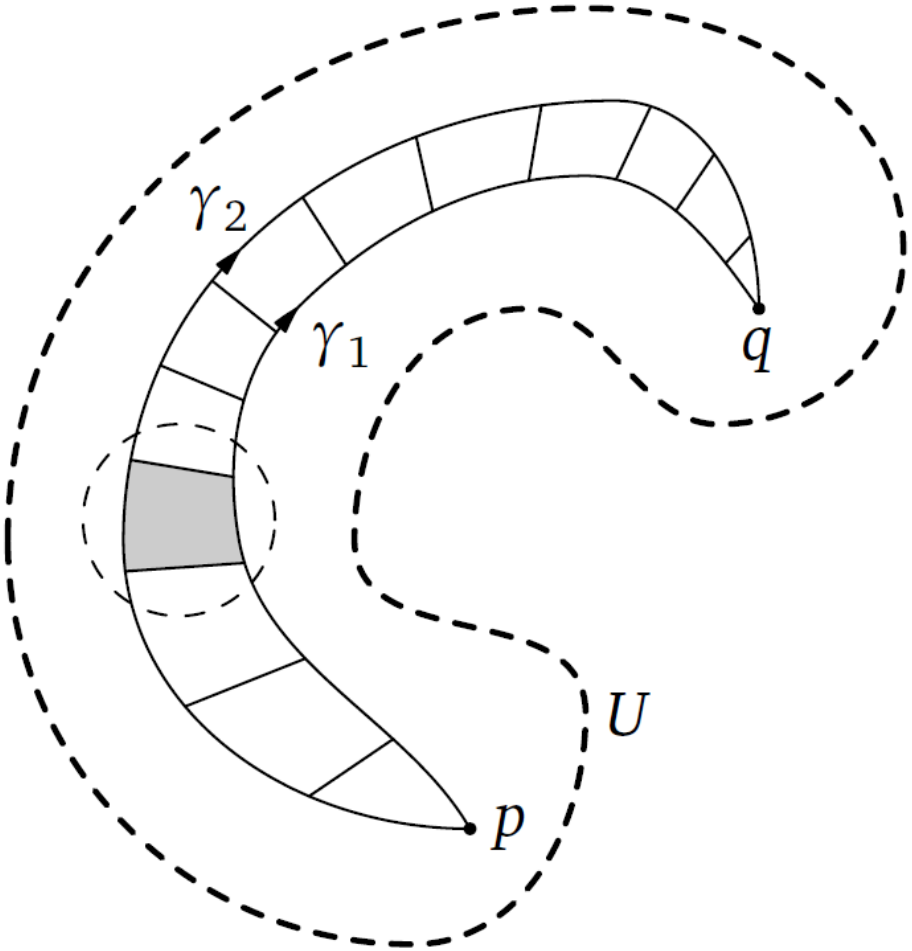
Лемма 6.4 (об улучшении гомотопии)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{C}$ — *открытое подмножество, и пусть* $\gamma_0, \gamma_1 \colon [A;B] \to U$ — *два кусочно гладких пути, которые либо соединяют одну и ту же пару точек* p *и* q*, либо оба являются замкнутыми. Если* γ_0 *и* γ_1 *гомотопны (как пути с закрепленными концами — в первом случае, как замкнутые пути — во втором), то между ними существует такая гомотопия* $G \colon [A;B] \times [0;1] \to U$ *(также являющаяся в первом случае гомотопией путей с закрепленными концами, а во втором — гомотопией замкнутых путей), что для всякого* $s \in [0;1]$ *путь* $\gamma_s \colon [A;B] \to U$, $\gamma_s(t) = G(t,s)$*, является кусочно гладким, а также для всякого* $t \in \in [A;B]$ *путь* $\mu_t \colon [0;1] \to U$, $\mu_t(s) = G(t,s)$*, является кусочно гладким.*

Кривая Пеано



Лемма об улучшении гомотопии: идея доказательства

- Достаточно считать, что γ_0 и γ_1 равномерно близки.
- Покроем $\gamma_0 \cup \gamma_1$ конечным числом выпуклых множеств.
- В каждом из этих выпуклых множеств сделаем линейную гомотопию.



Росток функции

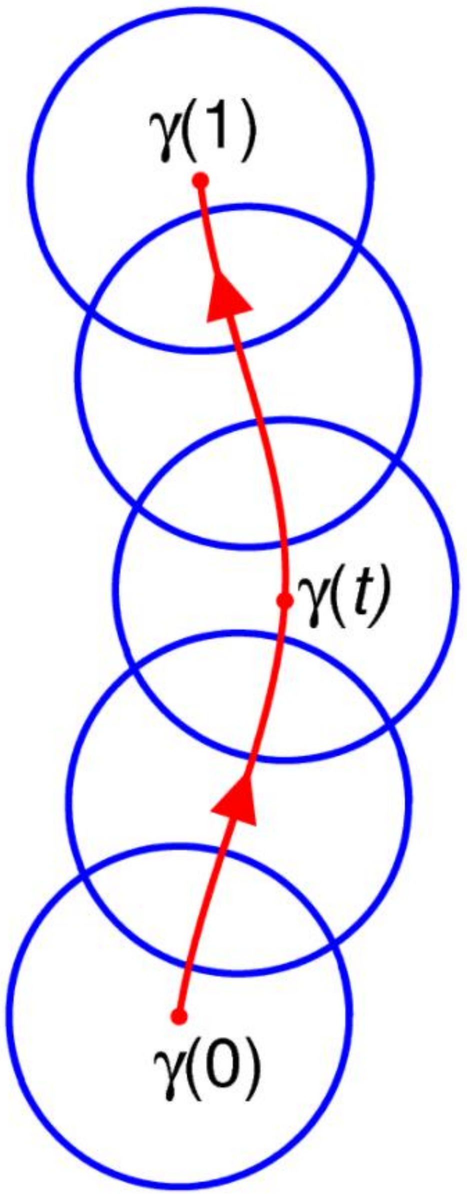
Для данной точки $p \in \mathbb{C}$ рассмотрим множество всех пар (U, f), где $U \ni p$ — окрестность и $f: U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Пары (U_1, f_1) и (U_2, f_2) будем называть эквивалентными, если функции f_1 и f_2 совпадают на некоторой окрестности точки p.

Определение 6.6. *Ростками* голоморфных функций в точке p называются классы эквивалентности пар (U, f) относительно этого отношения эквивалентности; класс эквивалентности пары (U, f) называется *ростком функции f в точке p*.

Множество ростков голоморфных функций в точке p обозначается $\mathcal{O}_p$.

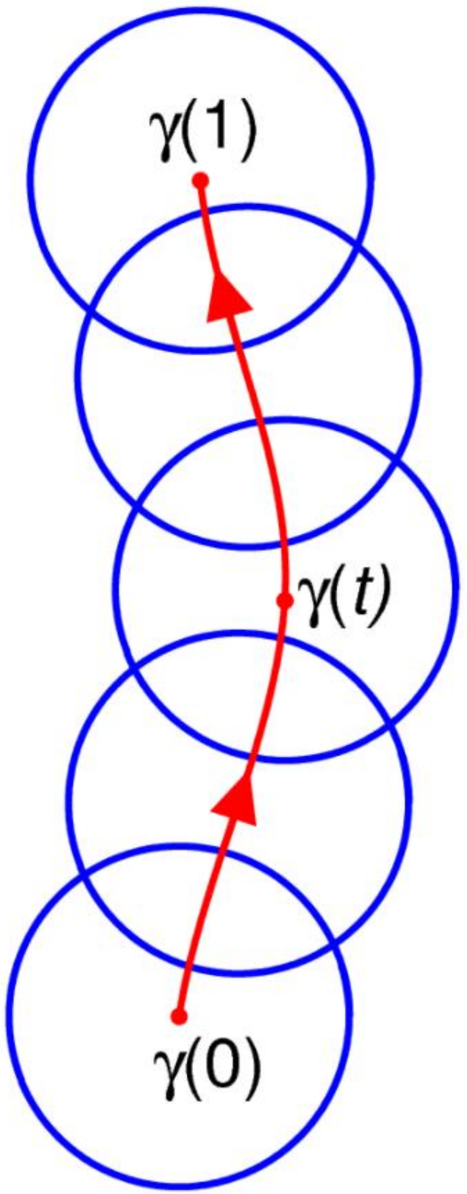
Аналитическое продолжение

- Естественная биекция между $\mathcal{O}_p$ и степенными рядами с центром в p и положительным радиусом сходимости.
- Пусть путь γ покрыт конечным числом открытых дисков D_i с центрами в точках $\gamma(t_i)$ и радиусами $r_i > 0$ т.ч. $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ и $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$.
- Допустим, s_i – сходящийся в i-м диске степенной ряд с центром $\gamma(t_i)$, т.ч. s_i и s_{i+1} сходятся на пересечении соотв. дисков к одинаковой сумме.



Аналитическое продолжение II

- Пусть $f_i\colon D_i \to \mathbb{C}$ – сумма ряда s_i.
- Тогда говорят, что функции f_0 в точке $\gamma(0)$ аналитически продолжается вдоль γ.
- Пусть $\Gamma(t)$ - росток функции f_i т.ч. $\gamma(t) \in D_i$. Тогда все ростки $\Gamma(t)$ являются аналитическими продолжениями друг друга вдоль соответствующих отрезков пути γ.

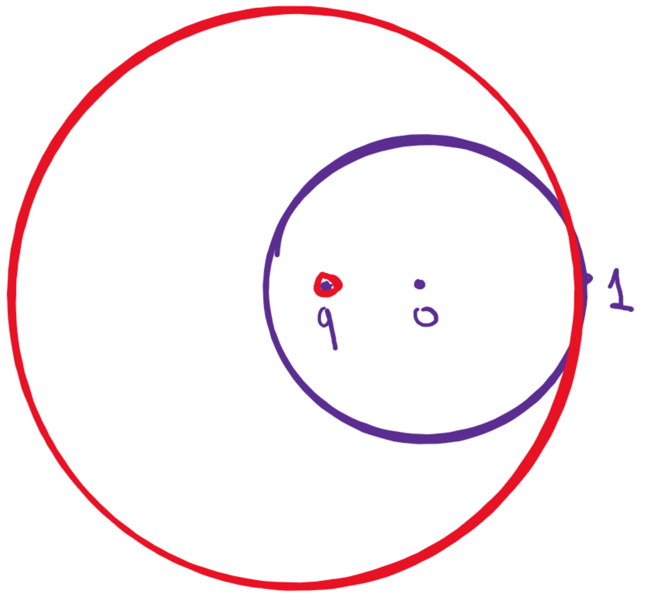


Переразложение ряда

- Пусть $R > 0$ – радиус сходимости ряда
$$s_a(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$
- Возьмем точку $b \in \mathbb{D}(a, R)$ и переразложим этот ряд с центром в этой точке:
$$\begin{aligned} s_b(z) &= s_a\big(b + (z-b)\big) \\ &= \left(c_0 + c_1(b-a) + c_2(b-a)^2 + \cdots\right) \\ &+ \left(c_1 + 2c_2(b-a) + \cdots\right)(z-b) + \left(c_2 + \cdots\right)(z-b)^2 + \cdots \\ &= d_0 + d_1(z-b) + d_2(z-b)^2 + \cdots \end{aligned}$$
- Коэффициенты d_n задаются формулой $d_n = \frac{s_a^{(n)}(b)}{n!}$.
- Ряд s_{i+1} получается из s_i переразложением.

Пример

$$s(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1$$



$$s(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z} \quad \text{при} \quad |z| < 1$$

Пусть $|q| < 1$. Тогда $s(z) = \dfrac{1}{(1-q)-(z-q)} =$

$$= \frac{1}{(1-q)} \frac{1}{1 - \frac{z-q}{1-q}} = \frac{1}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-q)^n}{(1-q)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-q)^n}{(1-q)^{n+1}}$$

Важно:

- Аналитическому продолжению подвергаются ростки, а не значения функции (бывает так, что значения совпадают, а ростки разные).
- Аналитическое продолжение бывает и над вещественными числами. Например, можно аналитически продолжать ростки «функции» угол на окружности.
- Теория аналитического продолжения почти алгебраическая. Из анализа нужна только сходимость ряда.

Карл Вейерштрасс (1815 – 1897)

- Определение непрерывной функции
- Теория эллиптических функций
- Теория аналитического продолжения
- Вариационное исчисление, дифференциальная геометрия, линейная алгебра

Композиция аналитического продолжения и голоморфной функции

Следствие 6.13. *Пусть* $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$ — *непрерывный путь, соединяющий точки* p *и* q, *вдоль которого возможно аналитическое продолжение ростка* $\boldsymbol{f} \in \mathcal{O}_p$ *в росток* $\boldsymbol{g} \in \mathcal{O}_q$. *Если* V — *открытое множество, содержащее* $\gamma([A;B])$, *и* $\varphi : V \to \mathbb{C}$ — *голоморфная функция, то вдоль* γ *возможно аналитическое продолжение ростка* $\varphi \circ \boldsymbol{f}$ *в росток* $\varphi \circ \boldsymbol{g}$.

Доказательство: Каждая из функций $\varphi \circ f_i$ разлагается в сходящийся степенной ряд в диске D_i.

Единственность аналитического продолжения

Предложение 6.14. *Пусть* $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$ *— непрерывный путь на комплексной плоскости, соединяющий точки* $p = \gamma(A)$ *и* $q = \gamma(B)$. *Если аналитическое продолжение ростка* $\boldsymbol{f} \in \mathcal{O}_p$ *вдоль пути* γ *существует, то оно единственно.*

Идея доказательства. Рассмотрим два покрытия пути γ дисками D_i и D_j'. Расположим все эти диски по порядку. Убедимся в том, что семейство $\Gamma(t)$ одно и то же (по теореме единственности).

Теорема о монодромии

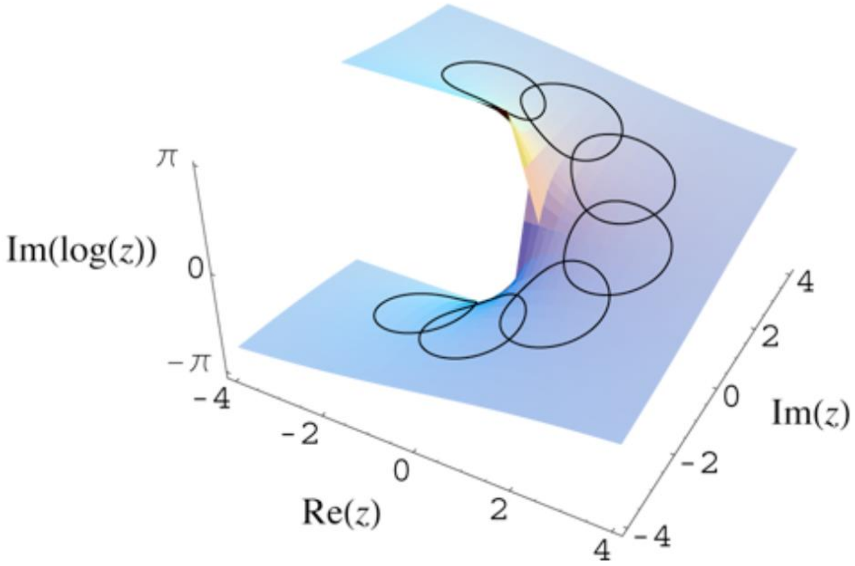
Предложение 6.15. *Пусть* $F\colon [A;B]\times[0;1]\to\mathbb{C}$ *— гомотопия с закрепленными концами путей, соединяющих точки* p *и* q, *так что* $F(A,s)=p$ *для всех* $s\in[0;1]$ *и* $F(B,s)=q$ *для всех* $s\in[0;1]$. *Пусть* $\mathbf{f}\in\mathcal{O}_p$ *— росток голоморфной функции в точке* p, *и предположим, что* $\mathbf{f}$ *допускает аналитическое продолжение вдоль каждого промежуточного пути* $\gamma_s\colon t\mapsto F(t,s)$.

Тогда результаты аналитических продолжений ростка $\mathbf{f}$ *вдоль всех путей* γ_s *(в частности, вдоль путей* γ_0 *и* γ_1*) совпадают.*

- Достаточно доказать для близких путей.
- Они покрываются одной и той же последовательностью дисков.

Многозначная аналитическая функция

- Множество всех ростков, полученных из данного аналитическими продолжениями вдоль всевозможных путей.
- Примеры: $\sqrt[n]{z}$, $\log z$, $\arcsin z$, $z^a = e^{(\log z)a}$, …
- $a^z = e^{(\log a)z}$ НЕ является многозначной аналитической функцией (это разные однозначные функции в зависимости от ветви логарифма).
- Значения многозначной аналитической функции иногда можно определить и в тех точках, в которые нельзя продолжить ростки. Например, $\sqrt{0} = 0$.



By YAMASHITA Makoto - Own work, CC BY 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1063792

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ