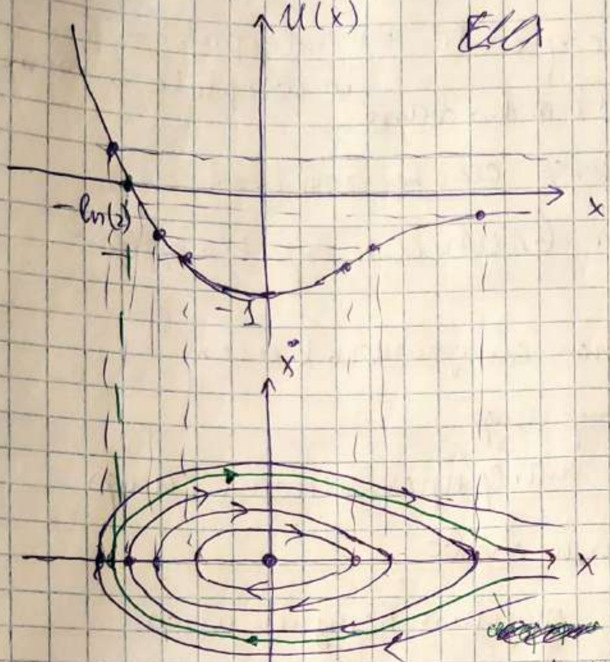
Механика. Домашнее задание №2. Струкиной Ксении.

№1. $U(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$ $U(x) = 0 \Rightarrow e^{-2x} = 2e^{-x} \Rightarrow x = -\ln(2)$

$U'(x) = 0 \Rightarrow -2e^{-2x} + 2e^{-x} = 0$
$x = 0$

$U(0) = -1$ – минимум



В точке 0 минимум => фокус на фазовом портрете

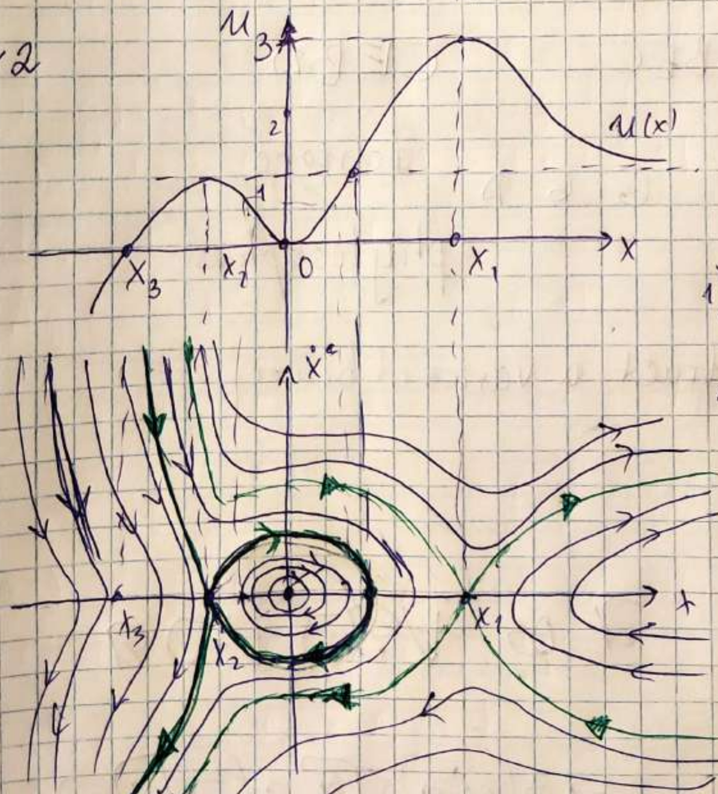
Если $E < -1$, то нет кривых

При $-1 < E < 0$ – замкнутые траектории типа эллипс (несимметричные) вокруг фокуса.

При $E > 0$ траектория размыкается и уходит на $+\infty$ по X,

и при $E = 0$ $\dot{X} = \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$ на $+\infty$ линии стремятся к оси X; и линии стремятся к $\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

№2



$E = 0, 1, 2, 3$

В 0 – точка локального минимума (фокус)

В X_1 и X_2 – точки локального максимума – седловые точки

1) $E = 0$ – фокус и траектория всего 2 штуки слева

2) $E = 1$ точка X_2, зеленые сепаратрисы, соответствующие точке X_2 (всего 3 штуки – часть эллипса и две части от и на бесконечность) – 4 штуки

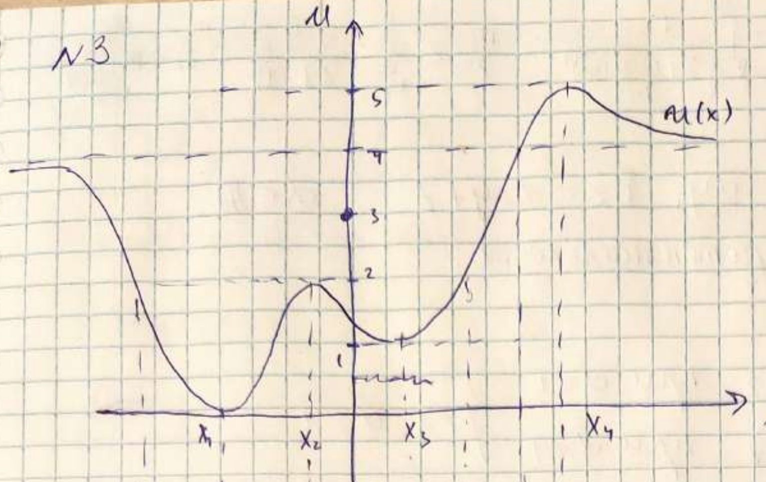
3) $E = 2$ траектория над первой сепаратрисой слева, справа "парабола на боку" (с асимптотами, по факту не парабола, но это они естественно) справа, всего 2 штуки

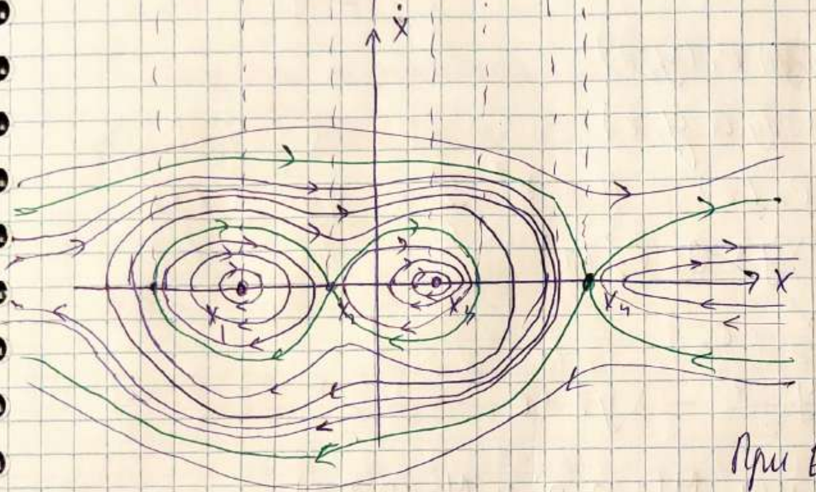
4) $E = 3$. X_1 и 4 части зеленой сепаратрисы

E	0	1	2	3
кол-во	2	4	2	5

Если $E > 3$, то по одной траектории снизу и сверху.

№3





E = 0,1,2,3,4,5

x_1, x_3 – точки локального минимума – фокусы

x_2, x_4 – точки локального максимума – седловые точки

При E<0 нет траекторий

При E=0 – x_1 – 1 точка

При 0<E<1 – один „эллипс"

При E=1 – „эллипс" и x_3 – 2 траектории

При 1<E<2 – два „эллипса"

При E=2 – сепаратриса „восьмерка" – зеленой, 3 траектории – x_2 и C, Ɔ

При 2<E<4 (в т.ч. E=3) – одна траектория – ~~от~~ восьмерка, до влево уходит один край ↑ – 4 скорее даже матрешка без усадки

При E=4 – траектория совсем размыкается

При 4<E<5 справа появляется траектория справа „парабола" – две траектории

При E=5 – сепаратриса – x_4 и 4 части траектории зеленой – 5 штук

При E>5 – две траектории сверху и снизу

E	0	1	2	3	4	5
#	1	2	3	1	1	5

№4 $E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = const$, $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}$

Перепишем уравнение $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(U(x_0)-U(x))}{m}}} = \int dt$

Заметим, что в выражении $U(x_0) - U(x)$ в окрестности x_0 первые два коэффициента ряда Тейлора зануляются $\Rightarrow U(x_0) - U(x) = O(x^2) \Rightarrow$ интеграл справа по окрестности x_0 бесконечный (т.к. интеграл $\int^{x_0} \frac{1}{x-x_0}$ бесконечный, а наш домножен на константу)

$t_1 - t_2 = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(U(x_0)-U(x))}{m}}} = \infty \Rightarrow$ При движении по сепаратрисе частица никогда не достигнет положения неустойчивого равновесия.

№5 Заметим, что $t_2 - t_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}} = \frac{m}{2} \cdot 2 \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{d\sqrt{\frac{2(E(t)-U(x))}{m}}}{dE(t)}\,dx = m\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{dE(t)}\,dx =$

$= m \cdot \frac{dS}{dE}$ – получили

№6 $F_x = yz - x$, $F_y = xz - \alpha y$, $F_z = \alpha xy + z$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

а) Необходимое условие потенциальности:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_y F_x = z = \partial_x F_y \\ &\partial_z F_x = y = \alpha y = \partial_x F_z \quad \text{при } \alpha = 1 \\ &\partial_z F_y = x = \alpha x = \partial_y F_z \quad \text{при } \alpha = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = 1$$

$\partial_x U(x,y,z) = x - yz$

$U = \frac{x^2}{2} - xyz + \cancel{C_1(y,z)}\, C_1(y,z)$

$y - xz = \partial_y U = -xz + \partial_y C_1(y,z)$

$C_1(y,z) = \frac{y^2}{2} + C_2(z) \qquad U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xyz + C_2(z)$

$-z - xy = \partial_z U = -xy + C_2'(z)$

$C_2(z) = -\frac{z^2}{2} + C$

$U(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2} - xyz + C$

б)* γ_1: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ м/у $M_1(1,0,0)$ и $M_2(0,1,0)$

$\vec{r_1} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$d\vec{r_1} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$A_{\gamma_1} = \int\limits_{\gamma_1} (\vec{F}, d\vec{r_1}) = \int\limits_0^{\pi/2} \left((y\cancel{z} - x)(-\sin\varphi\, d\varphi) + (xz - \alpha y)(\cos\varphi\, d\varphi) + 0\right) =$

$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cancel{0} - \cos\varphi(-\sin\varphi) + -\alpha\sin\varphi\cos\varphi\right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi(1-\alpha)\,d\varphi =$

$= \frac{1-\alpha}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\alpha}{2}\left(-\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(2 \cdot 0)\right) = \frac{1-\alpha}{4} \cdot 2 = \frac{1-\alpha}{2}$

**) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2\varphi/\pi$, $\operatorname{tg}\varphi = y/x$ $\quad M_1(1,0,0)$, $M_2(0,1,1)$

$\vec{r_2} = (\cos\varphi, \sin\varphi, \frac{2\varphi}{\pi})$ $\quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$d\vec{r_2} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, \frac{2}{\pi})d\varphi$

$A_{\gamma_2} = \int\limits_{\gamma_2} (\vec{F}, d\vec{r_2}) = \int\limits_0^{\pi/2} \left((yz - x)(-\sin\varphi) + (xz - \alpha y)\cos\varphi +\right.$

$\left.+ (\alpha xy + z)\frac{2}{\pi}\right)d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{2\varphi}{\pi}\sin\varphi - \cos\varphi\right)(-\sin\varphi) + \left(\frac{2\varphi}{\pi}\cos\varphi - \alpha\sin\varphi\right)\cos\varphi +\right.$

$\left.+ \left(\alpha\sin\varphi\cos\varphi + \frac{2\varphi}{\pi}\right) \cdot \frac{2}{\pi}\right)d\varphi = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\sin^2\varphi\, d\varphi + \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\cos^2\varphi\, d\varphi -$

$$-\alpha\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi+\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\varphi\,d\varphi=1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha-1}{\pi},\ \text{т.к.}$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\right)+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}\right)-\frac{\alpha}{2}+\frac{2\alpha}{\pi}\ldots+\frac{4}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2}\varphi\,\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-0^2\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2}\varphi\cos^2\varphi=\int_0^{\pi/2}\varphi(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\varphi\,d\varphi-\int_0^{\pi/2}\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{\varphi^2}{2}\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}$$

Ответ: $1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha-1}{\pi}$

№7 $y=\frac{x^2-\alpha^2}{2}$ $\qquad \vec{F}_{упр}=-k\rho\,\vec{e_\rho},\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}$

В полярных координатах ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $\vec{r}=\left(x,\frac{x^2-\alpha^2}{2}\right).\ x\in[0,\alpha],\ d\vec{r}=(1,x)$

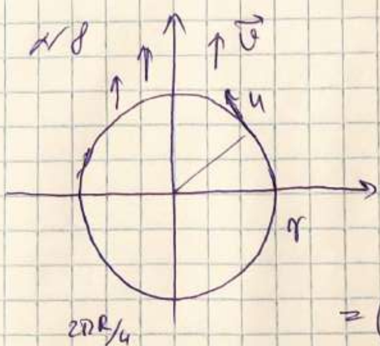
$e_\rho=\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right)\Rightarrow \vec{F}_{упр}=-k\rho\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right)=-k(x,y)$

$$A_\gamma=\int_\gamma(\vec{F}_{упр},d\vec{r})=-k\int_0^\alpha(x+xy)\,dx=-k\int_0^\alpha x\left(1+\frac{x^2-\alpha^2}{2}\right)dx=$$

$$=-k\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^\alpha+\frac{x^4}{8}\Big|_0^\alpha-\frac{\alpha^2x^2}{4}\Big|_0^\alpha\right)=-k\,\frac{4\alpha^2+\alpha^4-2\alpha^4}{8}=-k\left(\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{8}\right)$$

Если $x=0$, то $\rho=\frac{\alpha^2}{2}$, если $y=0$, $x=\alpha$, $\rho=\alpha$

№8



$\vec{F}=k(\vec{u}-\vec{v})\qquad v=(0,at^2)$

Параметризация $\gamma(t)=\left(\cos\left(\frac{u}{R}t\right),\sin\left(\frac{u}{R}t\right)\right)\ t\in\left[0,\frac{2\pi R}{u}\right]$

$(\vec{F},d\vec{r})=k(\vec{u}-\vec{v},\vec{u}\,dt)=(ku^2-k(\vec{v},\vec{u}))\,dt=$

$=ku^2-k\left((0,at^2),\left(-u\sin\left(\frac{u}{R}t\right),u\cos\left(\frac{u}{R}t\right)\right)\right)=$

$=\left(ku^2-kaut^2\cos\left(\frac{u}{R}t\right)\right)dt$

$$\int_0^{2\pi R/u}\left(ku^2-kaut^2\cos\left(\frac{u}{R}t\right)\right)dt=ku^2\frac{2\pi R}{u}-kau\left(\frac{R}{u}\right)^3\int_0^{2\pi\frac{R}{u}}\left(\frac{u}{R}t\right)^2\cos\left(\frac{u}{R}t\right)d\frac{u}{R}t=$$

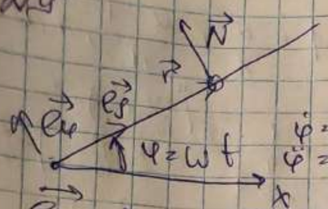
$=(2\pi Rk)u-kaR^3\cdot\frac{1}{u^2}\cdot 4\pi$

$A_\gamma(u)=(2\pi Rk)u-(4\pi kaR^3)\cdot\frac{1}{u^2}$

$A_\gamma'(u)=2\pi Rk-8\pi kaR^3\cdot\frac{1}{u^3}$

$u_{min}=\sqrt[3]{\frac{8\pi kaR^3}{2\pi Rk}}=\sqrt[3]{4aR^2}$

№9



$\vec{r} = \rho \cdot \vec{e_\rho}$ $\quad \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho \cdot \dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}(-\vec{e_\rho}\cdot\dot{\varphi}) =$

$\dot{\varphi} = \omega$
$\ddot{\varphi} = 0$ $\quad = \vec{e_\rho}(\ddot{\rho} - \rho\cdot\dot{\varphi}^2) + \vec{e_\varphi}(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})$

$\vec{e_\rho}$: $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = 0$ $\qquad \ddot{\rho} = \rho\dot{\varphi}^2 \Rightarrow \rho(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$

$\vec{e_\varphi}$: $m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = N$ $\qquad \rho(0) = a \quad \dot{\rho}(0) = 0$

$C_1 + C_2 = a \qquad \omega C_1 e^0 - \omega C_2 e^0 = 0$

$C_1 = C_2$

$C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$

$\rho(t) = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

$\dot{\rho}(t) = \frac{a\omega}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$

$\vec{N} = (0, m(2(\frac{a\omega}{2}e^{\omega t} - \frac{a\omega}{2}e^{-\omega t})\omega + 0) = (0, ma\omega^2(e^{\omega t} - e^{-\omega t}))$

$d\vec{r} = (\dot{\rho}\,dt, \rho\omega\,dt)$

$A_{\vec{N}} = \int_0^T ma\omega^2(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\rho(t)\omega\,dt = \int_0^T \frac{ma^2\omega^3}{2}(e^{2\omega t} - e^{-2\omega t})\,dt =$

$= \frac{ma^2\omega^3}{2}\frac{1}{2\omega}(e^{2\omega T} - 1 + e^{-2\omega T} - 1) = \frac{ma^2\omega^2}{4}(e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} - 2)$

б) $T_{кин} = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2)$

$\Delta T = T_{кин}(T) - T_{кин}(0) = \frac{ma^2\omega^2}{8}(e^{2\omega T} - 2 + e^{-2\omega T} + e^{2\omega T} + 2 + e^{-2\omega T}) -$

$\frac{m}{2}(\underbrace{\dot{\rho}^2(0)}_{0} + \rho^2(0)\omega^2) = \frac{ma^2\omega^2}{4}(e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} - 2) = A_{\vec{N}}$