① S_N - пр-во действительных симметр. матриц $N \times N$.

1) $$Z_N^S := \int\limits_{X \in S_N} e^{-\mathrm{Tr} X^2} \prod_{1 \le i \le j \le N} dx_{ij}$$

$$\int\limits_{X \in S_N} e^{-\mathrm{Tr} X^2} \prod dx_{ij} = \int\limits_{X \in S_N} e^{-\sum\limits_{i=1}^{N} x_{ii}^2 + 2\sum\limits_{1 \le i < j \le N} x_{ij}^2} \prod dx_{ij} =$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_{ii}^2} dx_{ii} \prod_{1 \le i < j \le N} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x_{ij}^2} dx_{ij} = (\sqrt{\pi})^N \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{(\sqrt{\pi})^{\frac{N(N+1)}{2}}}{2^{\frac{N(N-1)}{4}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_N^S = \frac{\pi^{\frac{(N+1)N}{4}}}{2^{\frac{N(N-1)}{4}}}}$$

2) $$\langle \mathrm{Tr}(X^2) \rangle = \frac{1}{Z_N^S} \int\limits_{X \in S_N} \mathrm{Tr}(X^2) e^{-\mathrm{Tr} X^2} \prod_{1 \le i \le j \le N} dx_{ij} =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{N} x_{ii}^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le N} x_{ij}^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle x_{ii}^2 \rangle + 2 \sum_{1 \le i < j \le N} \langle x_{ij}^2 \rangle$$

- $$\langle x_{kk}^2 \rangle = \frac{1}{Z_N^S} \int\limits_{X \in S_N} x_{kk}^2 e^{-\mathrm{Tr} X^2} \prod dx_{ij} = \frac{1}{Z_N^S} \frac{Z_N^S}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_{kk}^2} dx_{kk}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_{kk}^2 e^{-x_{kk}^2} dx_{kk}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$

- $$\langle x_{ks}^2 \rangle = \frac{1}{Z_N^S} \int x_{ks}^2 e^{-\mathrm{Tr} X^2} \prod dx_{ij} = \frac{1}{Z_N^S} \cdot \frac{Z_N^S}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x_{ks}^2} dx_{ks}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_{ks}^2 e^{-2x_{ks}^2} dx_{ks}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4} = \frac{1}{4}$$

Значит, $\langle \mathrm{Tr}(X^2) \rangle = \frac{N}{2} + 2\frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{N^2+N}{4} \Rightarrow \boxed{\langle \mathrm{Tr}(X^2) \rangle = \frac{N^2+N}{4}}$

② $$\langle Tr(X^4)\rangle = \frac{1}{Z_N^S}\int\limits_{X\in S_N} Tr(X^4)\, e^{-TrX^2}\prod_{1\le i<j\le N} dX_{ij}$$

$$\langle Tr(X^4)\rangle = \langle \sum_{1\le i_1,\dots,i_4\le N} X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}X_{i_3i_4}X_{i_4i_1}\rangle =$$

$$= \langle X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\rangle\langle X_{i_3i_4}X_{i_4i_1}\rangle + \langle X_{i_1i_2}X_{i_3X_{i_4}}\rangle\langle X_{i_2i_3}X_{i_4i_1}\rangle + \langle X_{i_1i_2}X_{i_4i_1}\rangle *$$
$$* \langle X_{i_2i_3}X_{i_3i_4}\rangle$$

1^е слагаемое

$\langle X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\rangle\langle X_{i_3i_4}X_{i_4i_1}\rangle \neq 0 \iff i_1=i_3$

- $i_1=i_2=i_3=i_4$

$\langle X_{i_1i_1}^2\rangle\langle X_{i_1i_1}^2\rangle = \frac{1}{4}$

Вклад: $\frac{N}{4}$

- $i_1=i_2=i_3\neq i_4$

$\langle X_{i_1i_1}^2\rangle\langle X_{i_1i_4}X_{i_4i_1}\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Вклад: $\underset{\uparrow}{2}\cdot\frac{N^2-N}{8}$

аналогично $i_1=i_4=i_3\neq i_2$

- $i_1=i_3,\ i_2=i_4,\ i_1\neq i_2$

$\langle X_{i_1i_2}X_{i_2i_1}\rangle\langle X_{i_1i_2}X_{i_2i_1}\rangle = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Вклад: $\frac{N^2-N}{16}$

- $i_1=i_3,\ i_1\neq i_2,\ i_2\neq i_4$

$\langle X_{i_1i_2}X_{i_2i_1}\rangle\langle X_{i_1i_4}X_{i_4i_1}\rangle = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

Вклад: $\frac{N(N-1)(N-2)}{16} = \frac{N^3-3N^2+2N}{16}$

2-е слагаемое

$\langle X_{i_1i_2}X_{i_3i_4}\rangle\langle X_{i_2i_3}X_{i_4i_1}\rangle \neq 0 \iff i_1=i_3, i_2=i_4$ или $i_1=i_2=i_3=i_4$

• $i_1=i_2=i_3=i_4$

$(\langle x_{i_1 i_1}^2\rangle)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Вклад: $\frac{N}{4}$

• $i_1=i_3$, $i_2=i_4$, $i_1\neq i_2$

$\langle x_{i_1 i_2} x_{i_1 i_2}\rangle \langle x_{i_2 i_1} x_{i_2 i_1}\rangle = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Вклад: $\frac{N(N-1)}{16}$

3-е слагаемое

• дает такой же вклад в сумму как и 1-е

Следовательно,

$$\langle Tr(X^4)\rangle = 2\left(\frac{\cancel{N}}{\cancel{4}} + \frac{N^2 \cancel{-N}}{4} + \frac{N^2-N}{16} + \frac{N^3-3N^2+2N}{16}\right) + \frac{N}{4} + \frac{N(N-1)}{16} =$$

$$= \frac{8N^2}{16} + \frac{2N^2-2N}{16} + \frac{2N^3-6N^2+4N}{16} + \frac{4N}{16} + \frac{N^2-N}{16} =$$

$$= \frac{2N^3}{16} + \frac{5N^2}{16} + \frac{5N}{16} \Rightarrow \boxed{\langle Tr(X^4)\rangle = \frac{N^3}{8} + \frac{5N^2}{16} + \frac{5N}{16}}$$

Интерпретация. Склейвание полуребер 4-звезды двойственно склеиванию поверхности из квадрата.

• Ориентируемые склейки

квадрат

$- 3$ вершины $\xrightarrow{\text{вклад}} 2N^3$

таких две склейки

$- 1$ вершина $\xrightarrow{\text{вклад}} N^1$

4-звезда

$- 3$ грани $\xrightarrow{\text{вклад}} 2N^3$

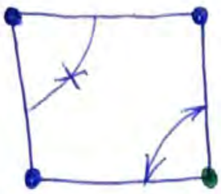
$i_1=i_3$, $i_2\neq i_4$, $i_4\neq i_1$, $i_2\neq i_4$

$- 1$ грань $\xrightarrow{\text{вклад}} N^1$

$i_1=i_4=i_3=i_2$

Неориентируемые склейки

квадрат



— 2 вершины → $4N^2$

таких склеек 4

(„×" означает склейку „наизнанку")

— 2 вершины → N^2

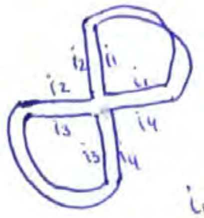
— 1 вершина → $2N^1$

таких склеек две

— 1 вершина → $2N^1$

таких склеек две

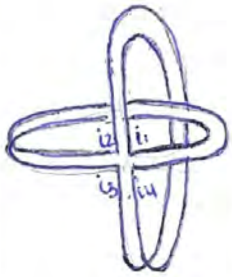
4-звезда



— 2 грани → $4N^2$

$i_1=i_2=i_4$

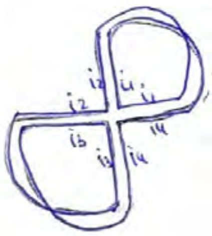
таких склеек 4



— 2 грани → N^2

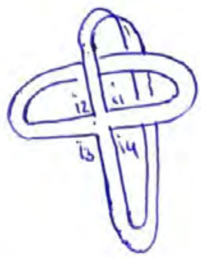
$i_1=i_3$

$i_2=i_4$



— 1 грань → $2N^1$

$i_1=i_2=i_4=i_3$



— 1 грань → $2N^1$

$\underbrace{i_1=i_2}=\underbrace{i_3=i_4}$

<u>Итого</u>: $2N^3+N^1+4N^2+N^2+2N^1+2N^1 = 2N^3+5N^2+5N$

$$\langle Tr(X^4)\rangle = \frac{\sum\limits_{\substack{\text{по всем}\\\text{склейкам}}} N^{\#\,\text{граней}}}{2^4} = \frac{2N^3+5N^2+5N}{16}$$

③ A_N – пр-во действительных кососимм. матриц $N \times N$.

1) $$Z_N^A = \int\limits_{y \in A_N} e^{-\mathrm{Tr}\, y^2} \prod_{1 \le i < j \le N} dy_{ij} = \int\limits_{y \in A_N} e^{-2\sum\limits_{1\le i<j\le N} y_{ij}^2} \prod dy_{ij}$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le N} \int e^{-2y_{ij}^2}\, dy_{ij} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_N^A = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{N(N-1)}{4}}}$$

2) $$\langle \mathrm{Tr}\, y^2 \rangle = \frac{1}{Z_N^A} \int\limits_{y \in A_N} \mathrm{Tr}(y^2) \exp(\mathrm{Tr}\, y^2) \prod_{1 \le i < j \le N} dy_{ij}$$

$$\langle \mathrm{Tr}\, y^2 \rangle = -2 \sum_{1 \le i < j \le N} \langle y_{ij}^2 \rangle$$

$$\langle y_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{Z_N^A} \int\limits_{y \in A_N} y_{ij}^2 e^{-\mathrm{Tr}\, y^2} \prod dy_{ij} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y_{ij}^2} dy_{ij}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_{ij}^2 e^{-2y_{ij}^2} dy_{ij}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4} = \frac{1}{4}$$

Следовательно, $\langle \mathrm{Tr}\, y^2 \rangle = -\cancel{2} \cdot \frac{1}{4} \frac{N(N-1)}{\cancel{2}} = -\frac{N(N-1)}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \mathrm{Tr}\, y^2 \rangle = -\frac{N(N-1)}{4}}$$

④ $$\langle Tr(y^4)\rangle = \frac{1}{Z_N^A}\int_{y\in A_N} Tr(y^4)\, e^{-Tr\, y^2}\prod_{1\le i<j\le N} dy_{ij}$$

$$\langle Tr(y^4)\rangle = \Big\langle \sum_{1\le i_1,i_2,i_3,i_4\le N} y_{i_1i_2}y_{i_2i_3}y_{i_3i_4}y_{i_4i_1}\Big\rangle = $$

$$= \sum_{1\le i_1,\dots,i_4\le N}\Big(\langle y_{i_1i_2}y_{i_2i_3}\rangle\langle y_{i_3i_4}y_{i_4i_1}\rangle + \langle y_{i_1i_2}y_{i_3i_4}\rangle\langle y_{i_2i_3}y_{i_4i_1}\rangle +$$

$$+ \langle y_{i_1i_2}y_{i_4i_1}\rangle\langle y_{i_2i_3}y_{i_3i_4}\rangle\Big)$$

<u>1-е слагаемое</u> $\langle y_{i_1i_2}y_{i_2i_3}\rangle\langle y_{i_3i_4}y_{i_4i_1}\rangle \neq 0 \iff i_1=i_3,\ i_2\neq i_1,\ i_4\neq i_1$

$$\langle y_{i_1i_2}y_{i_2i_1}\rangle\langle y_{i_1i_4}y_{i_4i_1}\rangle = \frac{-1}{4}\cdot\frac{-1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\langle y_{i_1i_2}y_{i_2i_1}\rangle = -\langle y_{i_1i_2}^2\rangle = -\frac{1}{4}$$

Вклад: $\frac{N(N-1)^2}{16}$

<u>2-е слагаемое</u> $\langle y_{i_1i_2}y_{i_3i_4}\rangle\langle y_{i_2i_3}y_{i_4i_1}\rangle \neq 0 \iff i_2=i_4,\ i_1=i_3,\ i_1\neq i_2$

$$\langle y_{i_1i_2}y_{i_1i_2}\rangle\langle y_{i_2i_1}y_{i_2i_1}\rangle = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Вклад: $\frac{N(N-1)}{16}$

<u>3-е слагаемое</u> $\langle y_{i_1i_2}y_{i_4i_1}\rangle\langle y_{i_2i_3}y_{i_3i_4}\rangle \neq 0 \iff i_2=i_4$

Дает такой же вклад в сумму, как и первое слагаемое.

<u>Итого:</u> $$\langle Tr(y^4)\rangle = 2\left(\frac{N(N-1)^2}{16}\right) + \frac{N(N-1)}{16} = \frac{(N-1)N(1+2N-2)}{16} =$$

$$= \frac{(2N-1)(N-1)N}{16} = \frac{2N^3}{16} - \frac{3N^2}{16} + \frac{N}{16} = \frac{N^3}{8} - \frac{3N^2}{16} + \frac{N}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle Tr(y^4)\rangle = \frac{N^3}{8} - \frac{3N^2}{16} + \frac{N}{16}}$$

⑤ Докажем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{n} s^{n} = \left(\frac{1}{1-s}\right)^{k}$.

По биному Ньютона:

$$(1-s)^{-k} = 1 + (-k)(-s) + \frac{(-k)(-k-1)}{2!}(-s)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-(n-1))}{n!}(-s)^n + \ldots$$

Следовательно,

$$[s^n] = (-1)^n \frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-(n-1))}{n!} =$$

$$= (-1)^{2n} \frac{k(k+1)\ldots(n+k-1)}{n!} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,n!} = C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{1-s}\right)^{k}$.

⑥ $$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{n} s^n t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-s)^k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{1-s}\right)^k$$

$$= \frac{1}{1-\frac{t}{1-s}} = \frac{1}{\frac{1-s-t}{1-s}} = \frac{1-s}{1-s-t}$$

Ответ: $\frac{1-s}{1-s-t}$.

⑦ $C_{1^3}, C_{1^12^1}, C_{3^1}$ – базис в $Z\mathbb{C}[S_3]$.

$C_{1^3} = id$

$C_{1^12^1} = (12)+(13)+(23)$

$C_{3^1} = (123)+(132)$

(1) Оператор умножения на $C_{1^12^1}$.

- $(C_{1^12^1})^2 = 3C_{1^3} + 0C_{1^12^1} + 3C_{3^1}$

$((12)+(13)+(23))((12)+(13)+(23))$

- $C_{1^3}C_{1^12^1} = 0C_{1^3} + 1C_{1^12^1} + 0C_{3^1}$

- $C_{3^1}C_{1^12^1} = 0C_{1^3} + 2C_{1^12^1} + 0C_{3^1}$

$((123)+(132))((12)+(13)+(23))$

Матрица
$$\begin{array}{c} \\ C_{1^3} \\ C_{1^12^1} \\ C_{3^1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_{1^3} & C_{1^12^1} & C_{3^1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda^2-9)$

1) $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 1x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $\lambda = 3$ $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\lambda = -3$ $\begin{pmatrix} +3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ собственный вектор $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(12) <u>Оператор умножение на C_{3^1}.</u>

- $C_{1^3} \cdot C_{3^1} = 0\,C_{1^3} + 0\,C_{1^1 2^1} + 1\,C_{3^1}$
- $C_{1^1 2^1}\; C_{3^1} = 0\,C_{1^3} + 2\,C_{1^1 2^1} + 0\,C_{3^1}$

$((12)+(13)+(23))((123)+(132))$

- $(C_{3^1})^2 = 2C_{1^3} + 0\,C_{1^1 2^1} + 1\,C_{3^1}$

Матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \chi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$

1) $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ собственные векторы $v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(8) $b_{m,\nu}$ – число разложений перест. циклич. типа ν в произведение m перестановок.

Найти: эл-т $Z\mathbb{C}[S_n]$, коэфф. разложения по базису C_ν есть $b_{m\nu}$

<u>Ответ:</u>

$$\sum_{\substack{\mu_1 \vdash n \\ \mu_2 \vdash n \\ \vdots \\ \mu_m \vdash n}} C_{\mu_1} C_{\mu_2} \cdots C_{\mu_m} = \sum_{\nu \vdash n} b_{m\nu} C_\nu$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ – необязательно различны