2.1.3 Теоремы о существовании и единственности и о непрерывной зависимости от параметра решений ОДУ (ФОРМУЛИРОВКА ОДУ)

Теорема 2.1.3. *Пусть функция $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ открыто (координаты в этом $\mathbb{R}^{n+1}$ мы будем обозначать $(x_1, \dots, x_n, t)$), удовлетворяет следующим условиям:*

- *F непрерывна,*
- *F липшицева по x: существует $L > 0$, такое что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$, для которых $(x, t), (y, t) \in \Omega$, выполнено $|F(x,t) - F(y,t)| \leq L|x - y|$.*

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $(x_0, t_0) \in \Omega$. Тогда

- *существует интервал $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ и функция $x\colon I \to \mathbb{R}^n$, являющаяся решением задачи Коши*
$$\dot{x}(t) = F(x, t), \quad x(t_0) = x_0;$$
- *если $\hat{x}\colon J \to \mathbb{R}^n$ — решение этой задачи Коши, то $x(t) = \hat{x}(t)$ при всех $t \in I \cap J$.*

Теорема о непрерывной зависимости от параметра на неё очень похожа, нужно просто в требуемые места дописать λ, эти правки выделены красным цветом.

Теорема 2.1.4. *Пусть функция $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1+m}$ открыто (координаты в этом $\mathbb{R}^{n+1+m}$ мы будем обозначать $(x_1, \dots, x_n, t, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$), удовлетворяет следующим условиям:*

- *F непрерывна,*
- *F липшицева по x: существует $L > 0$, такое что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R}^m$, для которых $(x, t, \lambda), (y, t, \lambda) \in \Omega$, выполнено $|F(x, t, \lambda) - F(y, t, \lambda)| \leq L|x - y|$.*

Пусть также дана непрерывная функция $x_0\colon \Lambda \to \mathbb{R}^n$, где $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ открыто.
Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_0 \in \Lambda$, таковы, что $(x_0(\lambda), t_0, \lambda) \in \Omega$. Тогда

- *существует интервал $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, открытое множество $V \subset \Lambda$, $\lambda_0 \in \Lambda$, и функция $x\colon I \times V \to \mathbb{R}^n$, являющаяся решением задачи Коши*
$$\dot{x}(t, \lambda) = F(x, t, \lambda), \quad x(t_0) = x_0(\lambda);$$
- *если $\hat{x}\colon J \to \mathbb{R}^n$ — решение этой задачи Коши при некотором $\hat{\lambda} \in V$, то $x(t, \hat{\lambda}) = \hat{x}(t)$ при всех $t \in I \cap J$.*

Разумеется, предыдущая теорема — прямое следствие этой: достаточно рассмотреть систему, где параметр λ фиктивен (от него не зависят значения F и x_0).

2.1.2 Сведение к интегральному уравнению

Чтобы применять принцип сжимающих отображений для решения задачи Коши нам нужно сначала представить её в виде задачи поиска некоторой неподвижной точки. Это делается сведением к интегральному уравнению.

Лемма 2.1.2. *Непрерывная функция $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ является решением задачи Коши 2.1.2 при некотором значении λ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x(t) = x_0(\lambda) + \int_{t_0}^{t} F(x(\tau), \tau, \lambda)\, d\tau.$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t,\lambda) = F(x(t,\lambda), t, \lambda) \\ x(t_0, \lambda) = x_0(\lambda) \end{cases}$$

λ-фикс.

$\Rightarrow$

Доказательство. Пусть x — решение задачи Коши. Тогда x непрерывна, а значит, непрерывна и функция $t \mapsto F(x(t), t, \lambda)$ (напомним, что с самого начала мы предполагаем, что функция F непрерывна). Значит, $\dot{x}$ непрерывна, а тогда можно проинтегрировать от t_0 до t обе части уравнения $\dot{x} = F(x, t, \lambda)$ и получить интегральное уравнение.

Обратно, если x — решение интегрального уравнения, то подынтегральная функция в нём непрерывна. Дифференцируя обе его части по t получаем исходное дифференциальное уравнение, а подставляя в него $t = t_0$ — начальное условие. ■

Итак, можно определить отображение Φ_λ формулой

$$(\Phi_\lambda(x))(t) = x_0(\lambda) + \int_{t_0}^{t} F(x(\tau), \tau, \lambda)\, d\tau. \tag{2.1.4}$$

Проблема состоит только в том, что пока не указано пространство, на котором оно действует. Это будет сделано ниже.

Примеры неединственности;

1) $\begin{cases} \dot{x}(t) = 3t^2 = 3x^{\frac{2}{3}} \\ x(t) = t^3 \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = (t-a)^3 + c$

$x(0) = -a^3 + c = 0$

НЕ!

2) $\dot{x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$x(t) = tg(t-c)$

$t \in [c - \frac{\pi}{2}; c + \frac{\pi}{2}]$