А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 22

22.1. Операторы в гильбертовом пространстве. Сопряженный оператор

До сих пор мы занимались линейными операторами между произвольными банаховыми пространствами; сосредоточимся теперь на операторах в гильбертовом пространстве. Основная специфика гильбертова случая состоит в том, что на алгебре $\mathscr{B}(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H имеется дополнительная операция — *инволюция*, или переход к сопряженному оператору. Наличие этой операции существенно обогащает теорию операторов и расширяет диапазон ее приложений.

Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T\colon H_1 \to H_2$ — ограниченный линейный оператор. У него, как и у всякого ограниченного линейного оператора между нормированными пространствами, есть сопряженный оператор $T^*\colon H_2^* \to H_1^*$ (см. определение 7.2). Вспомним теперь теорему Рисса 7.3, согласно которой для любого гильбертова пространства H существует антилинейная изометрическая биекция

$$R_H\colon H \to H^*, \quad [R_H(x)](y) = \langle y, x\rangle \qquad (x, y \in H).$$

Используя биекции $R_1 = R_{H_1}$ и $R_2 = R_{H_2}$, можно «заставить» сопряженный оператор T^* действовать не между сопряженными пространствами H_2^* и H_1^*, а между самими пространствами H_2 и H_1. Формальное определение таково.

Определение 22.1. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T\colon H_1 \to H_2$ — ограниченный линейный оператор. Оператор

$$T^\dagger\colon H_2 \to H_1, \quad T^\dagger = R_1^{-1} T^* R_2,$$

называется *гильбертово сопряженным* к T.

Иначе говоря, $T^\dagger$ однозначно определен следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} H_2^* \arrow[r, "T^*"] & H_1^* \\ H_2 \arrow[u, "R_2"] \arrow[r, "T^\dagger"] & H_1 \arrow[u, "R_1"'] \end{tikzcd} \tag{22.1}$$

Предложение 22.1. *Оператор $T^\dagger$ линеен, ограничен, и $\|T^\dagger\| = \|T\|$.*

Доказательство. Линейность $T^\dagger$ следует из того, что T^* линеен, а R_1 и R_2 антилинейны. Ограниченность $T^\dagger$ и равенство $\|T^\dagger\| = \|T\|$ следуют из равенства $\|T^*\| = \|T\|$ и изометричности R_1 и R_2. $\square$

Полезно иметь следующую характеризацию оператора $T^\dagger$, не использующую сопряженных пространств.

Предложение 22.2. *Оператор $T^\dagger$ — это единственное отображение из H_2 в H_1, удовлетворяющее любому из следующих эквивалентных условий:*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\dagger y\rangle \qquad (x \in H_1,\ y \in H_2); \tag{22.2}$$

$$\langle T^\dagger y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \qquad (x \in H_1,\ y \in H_2). \tag{22.3}$$

Доказательство. Эквивалентность условий (22.2) и (22.3) очевидна. Заметим теперь, что условие (22.2) может быть записано в виде

$$[R_1(T^\dagger y)](x) = [R_2(y)](Tx) = [T^*(R_2(y))](x) \qquad (x \in H_1,\ y \in H_2).$$

Но это и означает, что $R_1 T^\dagger = T^* R_2$, т.е. $T^\dagger = R_1^{-1} T^* R_2$. □

Конечно, операторы T^* и $T^\dagger$ — это, строго говоря, не одно и то же. Тем не менее из формулы $T^\dagger = R_1^{-1} T^* R_2$ и изометричности R_1 и R_2 легко понять, что у этих операторов много общего. В частности, инъективность (сюръективность) $T^\dagger$ равносильна инъективности (сюръективности) T^*, изометричность (коизометричность) $T^\dagger$ — изометричности (коизометричности) T^*, и т.п. (продолжите список сами). Поэтому обычно принимают следующее соглашение.

Соглашение 22.1. Гильбертово сопряженный оператор $T^\dagger \colon H_2 \to H_1$ будет в дальнейшем обозначаться через T^* и называться *сопряженным* к T.

К путанице это соглашение обычно не приводит[1]. Если оператор действует между гильбертовыми пространствами H_1 и H_2, то необходимости рассматривать его «обычный» сопряженный оператор $T^* \colon H_2^* \to H_1^*$, как правило, нет. Поэтому для операторов между гильбертовыми пространствами под сопряженным оператором по умолчанию всегда понимается гильбертово сопряженный оператор.

Предложение 22.3. *Пусть H_1, H_2, H_3 — гильбертовы пространства.*

(i) *Если $S, T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то $(\lambda S + \mu T)^* = \bar\lambda S^* + \bar\mu T^*$.*
(ii) *Если $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ и $S \in \mathscr{B}(H_2, H_3)$, то $(ST)^* = T^* S^*$.*
(iii) *$T^{**} = T$ для всех $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$;*
(iv) *$\|T^*\| = \|T\|$ для всех $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$;*
(v) (C^*-тождество) *$\|T^*T\| = \|T\|^2$ для всех $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) сразу следуют из аналогичных свойств сопряженных операторов между сопряженными пространствами (см. предложение 7.1) и диаграммы (22.1). Утверждение (iii) — простое следствие предложения 22.2. Утверждение (iv) уже упоминалось выше (предложение 22.1). Чтобы доказать (v), заметим, что

$$\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$$

в силу (iv). С другой стороны, из неравенства Коши–Буняковского–Шварца следует, что

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \langle Tx, Tx\rangle = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T^*Tx\| = \|T^*T\|.$$ □

[1] Интересно, что физики в этом отношении более последовательны, чем математики: гильбертово сопряженный оператор они чаще всего обозначают именно $T^\dagger$.

Свойства операции $T \mapsto T^*$, сформулированные в предложении 22.3, приводят к следующим определениям.

Определение 22.2. Пусть A — алгебра (как обычно, ассоциативная и над $\mathbb{C}$). Отображение $A \to A$, $a \mapsto a^*$, называется *инволюцией*, если оно удовлетворяет условиям (i)–(iii) предложения 22.3. Алгебра, снабженная инволюцией, называется *инволютивной алгеброй* или *$*$-алгеброй*.

Инволютивная банахова алгебра или *банахова $*$-алгебра* — это банахова алгебра, снабженная изометрической инволюцией.

Наконец, *C^*-алгебра* — это инволютивная банахова алгебра, в которой выполняется C^*-тождество (v) из предложения 22.3.

Определение 22.3. Подалгебра B $*$-алгебры A называется *$*$-подалгеброй*, если для любого $b \in B$ выполнено $b^* \in B$.

Очевидно, любая $*$-подалгебра сама является $*$-алгеброй. Если A — банахова $*$-алгебра (соответственно, C^*-алгебра), то любая ее замкнутая $*$-подалгебра является банаховой $*$-алгеброй (соответственно, C^*-алгеброй).

Пример 22.1. Поле $\mathbb{C}$ является C^*-алгеброй относительно инволюции $\lambda^* = \bar{\lambda}$.

Пример 22.2. Если H — гильбертово пространство, то $\mathscr{B}(H)$ — C^*-алгебра (см. предложение 22.3). То же самое верно и для любой ее замкнутой $*$-подалгебры. В частности, $\mathscr{K}(H)$ — C^*-алгебра.

Пример 22.3. Если X — множество, то $\ell^\infty(X)$ — C^*-алгебра относительно инволюции $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

Пример 22.4. Если X — топологическое пространство, то $C_b(X)$ и $C_0(X)$ — замкнутые $*$-подалгебры в $\ell^\infty(X)$ и, следовательно, являются C^*-алгебрами. В частности, если X компактно, то $C(X)$ — C^*-алгебра.

Пример 22.5. Если (X, μ) — пространство с мерой, то $L^\infty(X, \mu)$ — C^*-алгебра относительно той же инволюции, что и в примере 22.3.

Пример 22.6. Алгебра $C^n[a, b]$ (см. пример 15.7) является банаховой $*$-алгеброй относительно той же инволюции, что и в примере 22.3, однако не является C^*-алгеброй (см. листок 18).

Пример 22.7. Дисковая алгебра $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ (см. пример 15.8) является банаховой $*$-алгеброй относительно инволюции $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$, однако не является C^*-алгеброй (см. листок 18).

Определение 22.4. Если A, B — $*$-алгебры, то гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ называется *инволютивным гомоморфизмом* или *$*$-гомоморфизмом*, если $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ для всех $a \in A$.

Пример 22.8. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Для каждой $f \in L^\infty(X, \mu)$ обозначим через M_f оператор умножения на f, действующий в $L^2(X, \mu)$ (см. пример 2.5). Легко видеть, что отображение

$$L^\infty(X, \mu) \to \mathscr{B}(L^2(X, \mu)), \quad f \mapsto M_f,$$

является $*$-гомоморфизмом.

Теория C^*-алгебр — это довольно обширная и очень красивая наука, имеющая много приложений в теории операторов, топологии, некоммутативной геометрии и теории квантовых групп. В этом курсе C^*-алгебры будут встречаться нам лишь эпизодически; более подробно познакомиться ними желающие смогут на спецкурсе, запланированном на следующий учебный год.

Вернемся к операторам между гильбертовыми пространствами. С каждым таким оператором удобно связать некоторую полуторалинейную форму:

Определение 22.5. Пусть H_1, H_2 — предгильбертовы пространства и $T\colon H_1 \to H_2$ — линейный оператор. Легко видеть, что функция

$$f_T\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}, \quad f_T(x,y) = \langle Tx, y\rangle,$$

является полуторалинейной формой. Говорят, что f_T *ассоциирована* с T. Если $H_2 = H_1$, то ассоциированная с f_T комплексно-квадратичная форма (см. определение 4.3)

$$q_T\colon H_1 \to \mathbb{C}, \quad q_T(x) = f_T(x,x) = \langle Tx, x\rangle,$$

называется *комплексно-квадратичной формой, ассоциированной с T.*

Следующее предложение показывает, что формы f_T и q_T содержат в себе всю информацию об операторе T.

Предложение 22.4. *Пусть H_1, H_2 — предгильбертовы пространства, $S, T\colon H_1 \to H_2$ — линейные операторы. Тогда:*

(i) $S = T \iff f_S = f_T$;
(ii) *если $H_1 = H_2$, то* $S = T \iff q_S = q_T$.

Доказательство. (i) Достаточно доказать, что $T = 0$ тогда и только тогда, когда $f_T = 0$ (объясните, почему). Очевидно, если $T = 0$, то $f_T = 0$. Обратно, если $f_T = 0$, то $\langle Tx, Tx\rangle = 0$ для всех $x \in H_1$, а значит, $T = 0$.

(ii) Следует из (i) и следствия 4.8. □

Обсудим взаимосвязь между свойствами оператора и его сопряженного. Следующие два предложения легко выводятся из доказанных ранее утверждениях об операторах между банаховыми пространствами.

Предложение 22.5. *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T\colon H_1 \to H_2$ — ограниченный линейный оператор. Справедливы следующие утверждения:*

(i) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$;
(ii) $\overline{\operatorname{Im} T} = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$;
(iii) $H_2 = \overline{\operatorname{Im} T} \oplus \operatorname{Ker} T^*$;
(iv) *T топологически инъективен $\iff$ T^* сюръективен;*
(v) *T изометричен $\iff$ T^* коизометричен.*

Доказательство. (i), (ii) Следует из предложения 13.8 с учетом того, что каноническая биекция между гильбертовым пространством и его сопряженным переводит ортогональное дополнение в аннулятор (см. наблюдение 13.1).

(iii) Следует из (ii) с учетом теоремы 5.9 об ортогональном дополнении.

(iv), (v) Следует из теорем 13.10 и 13.12. □

Предложение 22.6. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$. Тогда*

(i) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$;
(ii) $\sigma_p(T^*) \subseteq \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)\}$;
(iii) $\sigma_c(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T)\}$;
(iv) $\sigma_r(T^*) \subseteq \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T)\}$.

Доказательство. Следует из предложений 16.10 и 16.11 с учетом того, что $(T - \lambda\mathbf{1})^* = T^* - \bar{\lambda}\mathbf{1}$. □

Введем теперь операторы, которые играют очень важную роль как в самом функциональном анализе, так и во всевозможных его приложениях.

Определение 22.6. Пусть A — $*$-алгебра. Элемент $a \in A$ называется *самосопряженным* (или *эрмитовым*), если $a^* = a$. Если H — гильбертово пространство, то *ограниченный самосопряженный оператор*[1] в H — это самосопряженный элемент алгебры $\mathscr{B}(H)$.

Пример 22.9. Если A — любая из функциональных $*$-алгебр, упомянутых в примерах 22.3–22.6, то функция $f \in A$ является самосопряженным элементом тогда и только тогда, когда $f(x) \in \mathbb{R}$ для всех (в примере 22.5 — для почти всех) x.

На инволюцию в алгебре $\mathscr{B}(H)$ можно смотреть как на аналог операции комплексного сопряжения в $\mathbb{C}$. С этой точки зрения самосопряженные операторы играют роль действительных чисел. Следующее предложение подчеркивает эту аналогию.

Предложение 22.7. *Пусть A — $*$-алгебра. Каждый элемент $a \in A$ единственным образом представим в виде $a = b + ic$, где $b, c \in A$ — самосопряженные элементы.*

Доказательство. Легко видеть, что элементы

$$b = \frac{a + a^*}{2}, \quad c = \frac{a - a^*}{2i}$$

удовлетворяют нужным условиям. Единственность докажите сами в качестве упражнения. □

Самосопряженные операторы нетрудно охарактеризовать в терминах соответствующих полуторалинейных и комплексно-квадратичных форм.

Предложение 22.8. *Пусть H — гильбертово пространство. Следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(H)$ эквивалентны:*

(i) $T^* = T$;
(ii) $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ *для всех* $x, y \in H$;
(iii) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ *для всех* $x \in H$.

Доказательство. (i) $\iff$ (ii). Следует из предложения 22.2.

(ii) $\iff$ (iii). Заметим, что равенство (i) означает в точности, что форма f_T эрмитова (см. определение 4.4). Остается воспользоваться следствием 4.9. □

[1] Следует отметить, что не менее важную роль в приложениях (в том числе в квантовой механике) играют *неограниченные* самосопряженные операторы. К сожалению, на их обсуждение у нас, скорее всего, не хватит времени…

Следствие 22.9. *Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор и $H_0 \subseteq H$ — замкнутое T-инвариантное подпространство. Тогда $T|_{H_0}$ — самосопряженный оператор в H_0.*

Доказательство. См. п. (iii) предложения 22.8. □

К обсуждению самосопряженных операторов мы еще не раз вернемся и докажем про них несколько важных теорем. Основным результатом о самосопряженных операторах является так называемая *спектральная теорема*, которая полностью описывает строение таких операторов, а при надлежащей интерпретации классифицирует их с точностью до унитарной эквивалентности. Для компактных операторов спектральная теорема превращается в теорему Гильберта–Шмидта о диагонализации, которую мы докажем на следующей лекции. Спектральная теорема для произвольных ограниченных самосопряженных операторов будет доказана в конце нашего курса.

Следующий класс операторов включает в себя как самосопряженные, так и унитарные операторы.

Определение 22.7. Пусть A — $*$-алгебра. Элемент $a \in A$ называется *нормальным*, если $aa^* = a^*a$. Если H — гильбертово пространство, то *ограниченный нормальный оператор* в H — это нормальный элемент алгебры $\mathscr{B}(H)$.

Многие утверждения, которые мы будем доказывать впоследствии для самосопряженных операторов, сохраняют силу и для нормальных операторов. См. по этому поводу задачи из листка 18.

Одна из замечательных особенностей инволюции в $\mathscr{B}(H)$ состоит в том, что с ее помощью многие геометрические свойства линейных операторов могут быть записаны в виде простых алгебраических тождеств. Приведем несколько иллюстраций этого принципа.

Предложение 22.10. *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$. Тогда:*

(i) *T — изометрия тогда и только тогда, когда $T^*T = \mathbf{1}_{H_1}$;*
(ii) *T — коизометрия тогда и только тогда, когда $TT^* = \mathbf{1}_{H_2}$.*

Доказательство. (i) Оператор T изометричен тогда и только тогда, когда

$$\langle x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \quad \text{для всех } x \in H_1,$$

т.е. тогда и только тогда, когда $q_{T^*T} = q_{\mathbf{1}_{H_1}}$. Остается воспользоваться предложением 22.4.

(ii) Следует из (i) и предложения 22.5 (v). □

Следствие 22.11. *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Линейный оператор $U \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ унитарен (см. определение 5.1) тогда и только тогда, когда он обратим и $U^* = U^{-1}$.*

Предложение 22.12. *Пусть H — гильбертово пространство. Следующие свойства оператора $P \in \mathscr{B}(H)$ эквивалентны:*

(i) *P — проектор и* $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P$*;*

(ii) $P^* = P = P^2$.

Доказательство. Заметим, что для $P \in \mathscr{B}(H)$ равенства $P = P^2$ и $P^* = (P^*)^2$ эквивалентны. Иначе говоря, P — проектор тогда и только тогда, когда P^* — проектор (см. определение 12.3). Ясно, что два проектора равны тогда и только тогда, когда у них одинаковые ядра и образы. Но из предложения 22.5 следует, что $\operatorname{Ker} P^* = (\operatorname{Im} P)^\perp$ и $\operatorname{Im} P^* = (\operatorname{Ker} P)^\perp$. Таким образом, $P = P^*$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^\perp$, как и требовалось. $\square$

Определение 22.8. Оператор, удовлетворяющий условиям предложения 22.12, называется *ортогональным проектором.*

Соглашение 22.2. Как правило, когда говорят об операторах в гильбертовом пространстве, ортогональные проекторы называют просто проекторами. К путанице это не приводит.

Следующий класс операторов включает в себя все изометрии, коизометрии и ортогональные проекторы.

Предложение 22.13. *Пусть H — гильбертово пространство. Следующие свойства оператора $V \in \mathscr{B}(H)$ эквивалентны:*

(i) $VV^*V = V$;
(ii) V^*V *— проектор;*
(iii) *ограничение V на* $(\operatorname{Ker} V)^\perp$ *— изометрия.*

Доказательство. Упражнение. $\square$

Определение 22.9. Оператор, удовлетворяющий условиям предложения 22.13, называется *частичной изометрией.*

Предложение 22.14. *Пусть V — частичная изометрия в гильбертовом пространстве H. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Оператор V^* — частичная изометрия.*
(ii) *Положим $H_0 = (\operatorname{Ker} V)^\perp$ и $H_1 = \operatorname{Im} V$. Тогда операторы $V|_{H_0} \colon H_0 \to H_1$ и $V^*|_{H_1} \colon H_1 \to H_0$ — обратные друг другу изометрические изоморфизмы, V^*V — ортогональный проектор на H_0, а VV^* — ортогональный проектор на H_1.*

Доказательство. Упражнение. $\square$

Определение 22.10. Пусть V — частичная изометрия в гильбертовом пространстве H. Проектор V^*V называется ее *начальным проектором*, а проектор VV^* — ее *конечным проектором.*

Перейдем теперь к обсуждению спектров введенных выше операторов.

Предложение 22.15. *Пусть A — унитальная алгебра, $p \in A$, $p^2 = p$, причем $p \neq 0$ и $p \neq 1_A$. Тогда $\sigma(p) = \{0, 1\}$. В частности, спектр любого проектора в гильбертовом пространстве, отличного от* 0 *и* $\mathbf{1}$, *равен* $\{0, 1\}$.

Доказательство. Упражнение. $\square$

Предложение 22.16. *Пусть H — гильбертово пространство и $U \in \mathscr{B}(H)$ — унитарный оператор. Тогда $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \sigma(U)$, то $|\lambda| \leqslant \|U\| = 1$ (см. теорему 15.5 (ii)). С другой стороны, $\lambda^{-1} \in \sigma(U^{-1})$ (см. следствие 14.11), а оператор U^{-1}, очевидно, также унитарен. По только что доказанному, $|\lambda^{-1}| \leqslant 1$, т.е. $|\lambda| \geqslant 1$. Отсюда окончательно получаем $|\lambda| = 1$, как и требовалось. □

Предложение 22.17. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор. Тогда $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$, $\beta = \operatorname{Im}\lambda$, причем $\beta \neq 0$. Тогда $T - \lambda\mathbf{1} = (T - \alpha\mathbf{1}) - i\beta\mathbf{1}$, причем оператор $T - \alpha\mathbf{1}$ самосопряжен. Заменяя T на $T - \alpha\mathbf{1}$, мы видим, что нам остается доказать обратимость оператора $T - i\beta\mathbf{1}$ для любого $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Для любого $x \in H$ с учетом самосопряженности T имеем

$$\|(T - i\beta\mathbf{1})x\|^2 = \langle Tx - i\beta x, Tx - i\beta x\rangle = \|Tx\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2.$$

Аналогично устанавливается оценка $\|(T + \beta\mathbf{1})x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2$. Следовательно, операторы $T \pm i\beta\mathbf{1}$ топологически инъективны. Но эти операторы сопряжены друг другу, поэтому, применяя предложение 22.5 (iv), заключаем, что они оба сюръективны, а значит, обратимы. □

Следствие 22.18. *Остаточный спектр самосопряженного оператора пуст.*

Доказательство. Пусть T — самосопряженный оператор и $\lambda \in \sigma_r(T)$. Из предложений 22.6 (iv) и 22.17 следует, что $\lambda \in \sigma_p(T)$. Противоречие. □

Следствие 22.19. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор. Тогда $r(T) = \|T\|$.*

Доказательство. Применяя C^*-тождество, получаем равенства $\|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$. Отсюда по индукции легко следует, что $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. С учетом формулы Бёрлинга (16.1) это дает равенства

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|.$$ □

С учетом того, что спектр самосопряженного оператора содержится в $\mathbb{R}$, следствие 22.19 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 22.20. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор. Тогда $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$, причем хотя бы один из концов этого отрезка принадлежит $\sigma(T)$.*

Следствие 22.21. *Собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор, $x, y \in H$, $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, причем $\lambda \neq \mu$. В силу предложения 22.17, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Отсюда получаем $\langle x, y\rangle = 0$, как и требовалось. □

В заключение сделаем несложное, но полезное наблюдение об инвариантных подпространствах операторов в гильбертовом пространстве.

Предложение 22.22. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$. Замкнутое векторное подпространство $H_0 \subseteq H$ T-инвариантно тогда и только тогда, когда $H_0^\perp$ T^*-инвариантно.*

Доказательство. Включение $T(H_0) \subseteq H_0 = H_0^{\perp\perp}$ означает в точности, что $\langle Tx, y\rangle = 0$ для всех $x \in H_0$ и всех $y \in H_0$. Это равносильно тому, что $\langle x, T^*y\rangle = 0$ для тех же x и y, а это и означает, что $T^*(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp$. □

Следствие 22.23. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор. Замкнутое векторное подпространство $H_0 \subseteq H$ T-инвариантно тогда и только тогда, когда $H_0^\perp$ T-инвариантно.*

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 23

23.1. Компактные операторы в гильбертовом пространстве

Про компактные операторы в банаховых пространствах нам уже довольно много известно (см. лекции 18–20). Оказывается, в гильбертовом случае можно сказать гораздо больше. Наша ближайшая цель — доказать два фундаментальных результата о компактных операторах в гильбертовом пространстве. Первый из них — теорема Гильберта–Шмидта — фактически полностью описывает строение компактных самосопряженных операторов; второй — теорема Шмидта — содержит в себе существенную информацию о произвольных компактных операторах.

Начнем со вспомогательной леммы.

Лемма 23.1. *Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, $(e_i)_{i\in I}$ и $(f_i)_{i\in I}$ — ортонормированные системы в H_1 и H_2 соответственно, и пусть $(\lambda_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I)$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для каждого $x \in H_1$ семейство $\sum_i \lambda_i\langle x, e_i\rangle f_i$ суммируемо в H_2, и формула*

$$Tx = \sum_{i\in I} \lambda_i\langle x, e_i\rangle f_i \qquad (x \in H_1) \tag{23.1}$$

определяет ограниченный линейный оператор $T\colon H_1 \to H_2$;

(ii) *$Te_i = \lambda_i f_i$ для всех $i \in I$, и $Tx = 0$ для всех $x \perp \{e_i\}_{i\in I}$;*

(iii) *$\|T\| = \sup_{i\in I} |\lambda_i|$.*

Доказательство. Для любого конечного подмножества $J \subseteq I$ с учетом неравенства Бесселя справедлива оценка

$$\sum_{i\in J} |\lambda_i\langle x, e_i\rangle f_i|^2 \leqslant \sup_{i\in J} |\lambda_i|^2 \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \sup_{i\in I} |\lambda_i|^2\|x\|^2.$$

Следовательно, $\sum_i |\lambda_i\langle x, e_i\rangle f_i|^2 < \infty$ (см. определение 3.2). Применяя теорему Рисса–Фишера (следствие 6.10), видим, что семейство $\sum_i \lambda_i\langle x, e_i\rangle f_i$ суммируемо в H_2, причем

$$\Bigl\|\sum_{i\in I} \lambda_i\langle x, e_i\rangle f_i\Bigr\| \leqslant \sup_{i\in I} |\lambda_i|\|x\|. \tag{23.2}$$

Следовательно, формула (23.1) определяет оператор $T\colon H_1 \to H_2$, который, очевидно, линеен. Его ограниченность, а также неравенство $\|T\| \leqslant \sup_i |\lambda_i|$ следуют из оценки (23.2). Это доказывает утверждение (i). Утверждение (ii) очевидным образом следует из (23.1). Наконец, равенство (iii) вытекает из предыдущей оценки и из (ii) (ср. доказательство предложения 2.6). $\square$

Определение 23.1. Оператор $T\colon H_1 \to H_2$, имеющий указанный в лемме 23.1 вид, будем называть *обобщенным диагональным оператором.* Если $H_2 = H_1$ и $f_i = e_i$ для всех i, то будем называть T *диагональным оператором.*

Наблюдение 23.2. Легко видеть, что в случае бесконечномерного сепарабельного пространства H_1 диагональный оператор, понимаемый в смысле определения 23.1, унитарно эквивалентен некоторому диагональному оператору в ℓ^2 (см. предложение 2.6). Для этого достаточно дополнить систему (e_i) до ортонормированного базиса в H_1 и рассмотреть унитарный изоморфизм между H_1 и ℓ^2, переводящий полученный базис пространства H_1 в стандартный базис пространства ℓ^2.

Теорема 23.3 (Гильберт, Шмидт)**.** *Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Существуют не более чем счетная ортонормированная система $(e_n)_{n<N}$ в H (где $N \in \mathbb{N}$ либо $N = \infty$), а также семейство ненулевых действительных чисел $(\lambda_n)_{n<N}$ той же мощности, такие, что для каждого $x \in H$ имеет место равенство*
$$Tx = \sum_{n<N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n. \tag{23.3}$$

(ii) *Если оператор T представлен в виде* (23.3)*, то $\{\lambda_n\}_{n<N} = \sigma_p(T)\setminus\{0\}$, $Te_n = \lambda_n e_n$ для всех n, кратность каждого собственного значения λ_n конечна, и каждое ненулевое собственное значение оператора T входит в семейство $(\lambda_n)_{n<N}$ столько раз, какова его кратность. Кроме того, если $N = \infty$, то $\lim_n \lambda_n = 0$.*

Определение 23.2. Формула (23.3) называется *разложением Гильберта–Шмидта* оператора T. Из п. (ii) теоремы 23.3 следует, что оно определено оператором T однозначно с точностью до перестановки слагаемых.

Доказательство теоремы 23.3. (i) Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ положим $H_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$. Положим также
$$L = \overline{\sum_{\lambda\neq 0} H_\lambda} = \overline{\sum_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} H_\lambda}.$$

Очевидно, L инвариантно относительно T. Применяя следствие 22.23, заключаем, что и $L^\perp$ инвариантно относительно T. Таким образом, $T|_{L^\perp}$ — компактный и самосопряженный (в силу следствия 22.9) оператор в $L^\perp$. По построению, $\sigma_p(T|_{L^\perp}) \subseteq \{0\}$. С учетом теоремы 20.11 это означает, что $\sigma(T|_{L^\perp}) \subseteq \{0\}$, или, эквивалентно, $r(T|_{L^\perp}) = 0$. Применяя следствие 22.19, видим, что $T|_{L^\perp} = 0$.

Для каждого $\lambda \in \sigma_p(T)\setminus\{0\}$ выберем ортонормированный базис B_λ в H_λ. Согласно теореме 20.11, он конечен. Положим
$$B = \bigcup_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} B_\lambda.$$

В силу следствия 22.21, B — ортонормированный базис в L, и он не более чем счетен, поскольку каждый B_λ конечен, а множество $\sigma_p(T)$ не более чем счетно по теореме 20.11.

Пусть $B = \{e_n\}_{n<N}$, где $N \in \mathbb{N}$ либо $N = \infty$. По построению, $Te_n = \lambda_n e_n$ для некоторого $\lambda_n \neq 0$, причем $\lambda_n \in \mathbb{R}$ в силу предложения 22.17. Заметим, что $|\lambda_n| \leqslant \|T\|$ для всех n, поэтому семейство $(\lambda_n)_{n<N}$ ограничено. По лемме 23.1, формула

$$Sx = \sum_{n<N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

определяет ограниченный линейный оператор $S\colon H \to H$, причем $Se_n = \lambda_n e_n = Te_n$ для всех $n < N$. Следовательно, операторы S и T совпадают на L, а на $L^\perp$ они оба равны нулю. Таким образом, $S = T$, что и доказывает утверждение (i).

(ii) Пусть оператор T представлен в виде (23.3). Включение $\{\lambda_n\}_{n<N} \subseteq \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ очевидно. Предположим, что $Tx = \lambda x$ для некоторых $x \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. С учетом (23.3) получаем

$$x = \lambda^{-1} Tx \in \operatorname{Im} T \subseteq \overline{\operatorname{span}}\{e_n\}_{n<N}.$$

Следовательно, $x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$, и равенство $Tx = \lambda x$ приобретает вид

$$\sum_{n<N} (\lambda_n - \lambda) \langle x, e_n \rangle e_n = 0. \tag{23.4}$$

Поскольку $x \neq 0$, найдется такое k, что $\langle x, e_k \rangle \neq 0$, откуда с учетом (23.4) получаем равенство $\lambda = \lambda_k$. Следовательно, $\{\lambda_n\}_{n<N} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, как и требовалось. Применяя теорему 20.11, заключаем, что кратность каждого ненулевого собственного значения λ конечна. Заметим теперь, что равенство $Tx = \lambda x$ эквивалентно в силу (23.4) включению $x \in \operatorname{span}\{e_n : \lambda_n = \lambda\}$. Это и означает, что λ встречается в наборе $(\lambda_n)_{n<N}$ столько раз, какова его кратность. Для завершения доказательства остается заметить, что если $N = \infty$ и последовательность (λ_n) не стремится к 0, то у нее есть подпоследовательность с пределом $\mu \neq 0$, лежащим в $\sigma(T)$ в силу замкнутости последнего. Поскольку каждый член последовательности (λ_n) входит в нее лишь конечное число раз, μ является предельной точкой $\sigma(T)$. Но это противоречит изолированности всех ненулевых точек $\sigma(T)$ (см. теорему 20.11). Таким образом, если $N = \infty$, то $\lim_n \lambda_n = 0$. $\square$

Следствие 23.4. *Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора T.*

Доказательство. Достаточно дополнить ортонормированную систему (e_n) из теоремы 23.3 произвольным образом до ортонормированного базиса пространства H. $\square$

Замечание 23.1. Из следствия 23.4 видно, что теорема Гильберта–Шмидта обобщает хорошо известный алгебраический результат о том, что всякий самосопряженный оператор в конечномерном гильбертовом пространстве в некотором ортонормированном базисе записывается диагональной матрицей.

Следствие 23.5. *Всякий компактный самосопряженный оператор в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве унитарно эквивалентен диагональному оператору в пространстве ℓ^2.*

Доказательство. См. наблюдение 23.2. $\square$

Следующая теорема является, в сущности, переформулировкой теоремы Гильберта–Шмидта в несколько иных терминах.

Теорема 23.6 (спектральная теорема для компактного оператора)**.** *Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Существует такое семейство $\mathscr{P} = \{P_\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$ ортогональных проекторов в H, что*

$$\operatorname{Im} P_\lambda \perp \operatorname{Im} P_\mu \quad \forall \lambda \neq \mu, \quad H = \overline{\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)} \operatorname{Im} P_\lambda},$$

$$T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda P_\lambda, \tag{23.5}$$

причем семейство $\sum_\lambda \lambda P_\lambda$ суммируемо к T в топологии пространства $\mathscr{B}(H)$, задаваемой операторной нормой.

(ii) *Если семейство $\mathscr{P}$ таково, как в п.* (i)*, то* $\operatorname{Im} P_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$ *для всех λ. В частности, это семейство определено оператором T однозначно.*

Доказательство. Обозначим через P_λ ортогональный проектор на подпространство $H_\lambda = \operatorname{Ker}(T-\lambda\mathbf{1})$. В силу следствия 22.21, $H_\lambda \perp H_\mu$ при $\lambda \neq \mu$. Применяя следствие 23.4, получаем разложение $H = \overline{\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)} H_\lambda}$. Равенство $Tx = \sum_\lambda \lambda P_\lambda x$, справедливое для всех $x \in H$, — это просто переформулировка разложения Гильберта–Шмидта (23.3). Остается проверить, что семейство $\sum_\lambda \lambda P_\lambda$ суммируемо к T по операторной норме (а не просто на каждом фиксированном векторе из H). С этой целью заметим, что для любого конечного подмножества $J \subseteq \sigma(T)$ справедлива оценка

$$\Big\| T - \sum_{\lambda\in J} \lambda P_\lambda \Big\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \Big\| \sum_{\lambda\in\sigma(T)\setminus J} \lambda P_\lambda x \Big\| \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(T)\setminus J} |\lambda|. \tag{23.6}$$

Но из п. (ii) теоремы 23.3 следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное подмножество $J_0 \subseteq \sigma(T)$, что $\sup_{\lambda\in\sigma(T)\setminus J_0} |\lambda| < \varepsilon$. Отсюда и из (23.6) получаем (23.5).

(ii) Если $x \in \operatorname{Im} P_\lambda$, то из (23.5) получаем $Tx = \lambda x$, т.е. $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$. Обратно, если $Tx = \mu x$, то из (23.5) и из равенства $x = \sum_\lambda P_\lambda x$ получаем, что $\sum_\lambda (\lambda - \mu) P_\lambda x = 0$. Следовательно, $P_\lambda x = 0$ для всех $\lambda \neq \mu$, а это и означает, что $x \in \operatorname{Im} P_\mu$. $\square$

Обратимся теперь к произвольным (не обязательно самосопряженным) компактным операторам между, вообще говоря, различными гильбертовыми пространствами.

Теорема 23.7 (Шмидт)**.** *Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства и $T\colon H_1 \to H_2$ — компактный оператор. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Существуют не более чем счетные ортонормированные системы $(e_n)_{n<N}$ в H_1 и $(f_n)_{n<N}$ в H_2 (где $N \in \mathbb{N}$ либо $N = \infty$), а также семейство положительных чисел $(s_n)_{n<N}$ той же мощности, такие, что $s_n \geqslant s_{n+1}$ для всех n, и для каждого $x \in H$ имеет место равенство*

$$Tx = \sum_{n<N} s_n \langle x, e_n\rangle f_n. \tag{23.7}$$

При этом, если $N = \infty$, то $\lim_n s_n = 0$.

(ii) *Если оператор T представлен в виде* (23.7), *то* $\{s_n^2\}_{n<N} = \sigma_p(T^*T) \setminus \{0\}$, $Te_n = s_n f_n$ *для всех* n, *и каждое ненулевое собственное значение оператора* T^*T *входит в семейство* $(s_n^2)_{n<N}$ *столько раз, какова его кратность. В частности, семейство* $(s_n)_{n<N}$ *определено оператором* T *однозначно.*

Определение 23.3. Формула (23.7) называется *разложением Шмидта* оператора T, а числа $s_n = s_n(T)$ из (23.7) — его *s-числами.*

Для доказательства нам понадобится простая лемма.

Лемма 23.8. *Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, $T\colon H_1 \to H_2$ — ограниченный линейный оператор, $S = T^*T\colon H_1 \to H_1$. Тогда $\sigma_p(T) \subset [0, +\infty)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma_p(T)$, и пусть $x \in H_1$ таков, что $Sx = \lambda x$. Тогда

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle Sx, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geqslant 0.$$

Следовательно, $\lambda \geqslant 0$, как и требовалось. $\square$

Замечание 23.2. На самом деле в предположениях леммы 23.8 справедливо включение $\sigma(S) \subset [0, +\infty)$. На данном этапе этот результат нам не нужен, мы докажем его позже.

Доказательство теоремы 23.7. (i) Оператор $S = T^*T\colon H_1 \to H_1$ компактен и самосопряжен, поэтому к нему применима теорема Гильберта–Шмидта 23.3. Пусть $Sx = \sum_{n<N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ — его разложение Гильберта–Шмидта. В силу леммы 23.8, $\lambda_n > 0$ для всех n. Переупорядочим векторы e_n и числа λ_n таким образом, чтобы $\lambda_n \geqslant \lambda_{n+1}$ для всех n (это можно сделать, т.к. если $N = \infty$, то $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$). Для каждого n положим $s_n = \sqrt{\lambda_n}$ и $f_n = s_n^{-1} T e_n$. Для любых m, n имеем

$$\langle Te_m, Te_n\rangle = \langle Se_m, e_n\rangle = s_m^2 \delta_{mn},$$

откуда следует, что $(f_n)_{n<N}$ — ортонормированная система в H_2. Положим $L = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n < N\}$ и, пользуясь леммой 23.1, зададим оператор $T_0 \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ формулой

$$T_0 x = \sum_{n<N} s_n \langle x, e_n\rangle f_n \qquad (x \in H_1).$$

Для каждого n имеем $T_0 e_n = s_n f_n = Te_n$, поэтому $T|_L = T_0|_L$. Если $x \in L^\perp$, то $Sx = 0$, поэтому $\langle Tx, Tx\rangle = \langle Sx, x\rangle = 0$, т.е. $Tx = 0$. Таким образом, $T|_{L^\perp} = T_0|_{L^\perp} = 0$ и, следовательно, $T = T_0$. Это доказывает утверждение (i).

(ii) Пусть оператор T представлен в виде (23.7). Для любого $x \in H_1$ и любого m имеют место равенства

$$\langle x, T^* f_m\rangle = \langle Tx, f_m\rangle = \sum_{n<N} s_n \langle x, e_n\rangle\langle f_n, f_m\rangle = \langle x, s_m f_m\rangle,$$

откуда следует, что $T^* f_m = s_m e_m$ для всех m. Применяя к (23.7) оператор T^*, получаем равенство

$$T^*Tx = \sum_{n<N} s_n^2 \langle x, e_n\rangle e_n \qquad (x \in H_1),$$

представляющее собой разложение Гильберта–Шмидта оператора T^*T. В результате доказываемое утверждение сводится к п. (ii) теоремы 23.3. $\square$

23.2. Приложение: задача Штурма–Лиувилля

В качестве иллюстрации теоремы Гильберта–Шмидта покажем, как она используется в одной классической задаче из теории дифференциальных уравнений. Пусть p, q — непрерывные функции на отрезке $[0, \ell]$, причем $p(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0, \ell]$. Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{R}$. Уравнение

$$-(pu')' + qu = \lambda u \tag{23.8}$$

относительно неизвестной функции $u \in C^2[0, \ell]$ называется *уравнением Штурма–Лиувилля*. Рассмотрим также граничные условия

$$\begin{cases} \alpha u'(0) + \beta u(0) = 0, \\ \gamma u'(\ell) + \delta u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{23.9}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ — произвольные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ и $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$. Задача нахождения функции $u \in C^2[0, \ell]$, удовлетворяющей уравнению (23.8) и граничным условиям (23.9), называется *задачей Штурма–Лиувилля.*

Задача Штурма–Лиувилля естественно возникает в ряде вопросов математической физики, и про ее решения много что известно (см., например, учебник В. С. Владимирова «Уравнения математической физики»). Сразу предупредим, что бóльшая часть того, что известно про задачу Штурма–Лиувилля, обсуждаться ниже не будет. Наша скромная цель будет состоять в том, чтобы с помощью теоремы Гильберта–Шмидта получить информацию о множестве тех $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых задача Штурма–Лиувилля имеет нетривиальное решение, а также о кратностях этих решений.

В целях упрощения изложения мы будем рассматривать задачу Штурма–Лиувилля в следующем частном случае:

$$-u'' + qu = \lambda u, \tag{23.10}$$

$$u(0) = u(\ell) = 0. \tag{23.11}$$

Вся специфика задачи Штурма–Лиувилля будет видна уже на этом примере; общий случай отличается лишь некоторыми деталями.

Для удобства мы будем работать над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел; как мы увидим ниже, интересующие нас значения λ окажутся действительными автоматически.

Положим

$$\mathscr{D}_L = \{u \in C^2[0, \ell] : u(0) = u(\ell) = 0\}$$

и рассмотрим *оператор Штурма–Лиувилля*

$$L \colon \mathscr{D}_L \to C[0, \ell], \quad Lu = -u'' + qu.$$

Во введенных обозначениях задача (23.10)–(23.11) приобретает вид $Lu = \lambda u$. Таким образом, те $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых она имеет нетривиальное решение, — это собственные значения оператора L. Следует, однако, иметь в виду, что оператор L действует между *разными* пространствами, поэтому говорить о его собственных значениях в том смысле, как это принято в линейной алгебре, вообще не имеет смысла. Общий подход к задачам такого рода основан на том, что, как мы увидим ниже, обратный оператор L^{-1}

является ограничением некоторого интегрального оператора Гильберта–Шмидта (см. примеры 2.7 и 19.3, а также теорему 20.13) в пространстве $L^2[0,\ell]$. В частности, такой оператор компактен и, как мы увидим, самосопряжен, поэтому к нему можно будет применить всю развитую выше технику.

Лемма 23.9. *Пусть $u \in \mathscr{D}_L$, $u \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $Lu = \lambda u$. Тогда $\lambda > 0$.*

Доказательство. Интегрирование по частям показывает, что если $u \in \mathscr{D}_L$ и $u \neq 0$, то $\langle Lu, u\rangle > 0$ (убедитесь). Дальнейшее очевидно. □

Следствие 23.10. $\operatorname{Ker} L = 0$.

Зафиксируем теперь два нетривиальных действительных решения u_1, u_2 уравнения

$$-u'' + qu = 0, \tag{23.12}$$

удовлетворяющие условиям $u_1(0) = u_2(\ell) = 0$. Отметим, что если наложить дополнительные условия типа $u_1'(0) = a$ и $u_2'(\ell) = b$, то такие решения не только существуют, но и единственны в силу теоремы существования и единственности задачи Коши. Для наших целей явные значения a и b не важны.

Лемма 23.11. *Функции u_1 и u_2 линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что u_1 и u_2 линейно зависимы. Тогда $u_1(0) = u_1(\ell) = 0$, т.е. $u_1 \in \mathscr{D}_L$, и $Lu_1 = 0$ в силу (23.12). Но это противоречит следствию 23.10. □

Введем в рассмотрение *определитель Вронского*

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}.$$

Лемма 23.12. *Функция W — ненулевая константа.*

Доказательство. Простая проверка показывает (убедитесь), что $W' = 0$, так что W — константа. Если $W = 0$, то столбцы матрицы $\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{smallmatrix}\right)$ линейно зависимы в каждой точке отрезка $[0,\ell]$, в частности, в точке 0. Но, как известно из курса дифференциальных уравнений, сопоставление $u \mapsto (u(0), u'(0))$ является изоморфизмом между пространством решений уравнения (23.12) и $\mathbb{R}^2$. Следовательно, u_1 и u_2 линейно зависимы, что противоречит лемме 23.11. □

Теорема 23.13. *Оператор $L\colon \mathscr{D}_L \to C[0,\ell]$ биективен, и его обратный оператор задается формулой*

$$(L^{-1}f)(x) = \int_0^\ell G(x,y)f(y)\,dy \qquad (f \in C[0,\ell]),$$

где

$$G(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{W}\,u_1(x)u_2(y) & \text{при } x \leqslant y, \\[2mm] -\dfrac{1}{W}\,u_2(x)u_1(y) & \text{при } x > y. \end{cases}$$

Доказательство теоремы — простое упражнение на дифференцирование. Более интересная задача — не пользоваться «данными свыше» формулами для оператора L^{-1} и функции G, а вывести их с помощью метода вариации постоянных.

Функция G, фигурирующая в теореме 23.13, называется *функцией Грина* оператора L. Заметим, что она непрерывна на квадрате $[0,\ell]\times[0,\ell]$ и удовлетворяет условию $G(y,x)=G(x,y)$ для всех $x,y\in[0,\ell]$.

Введем в рассмотрение интегральный оператор Гильберта–Шмидта (см. пример 2.7)

$$G\colon L^2[0,\ell]\to L^2[0,\ell],\quad (Gf)(x)=\int_0^\ell G(x,y)f(y)\,dy$$

(следуя традиции, мы обозначаем его той же буквой G, что и функцию Грина; к путанице это не приведет). Как уже упоминалось в примере 19.3, этот оператор компактен, а равенство $G(x,y)=G(y,x)\in\mathbb{R}$ влечет за собой его самосопряженность (см. листок 18, задача 18.1 (5)). Из теоремы 23.13 следует, что $G|_{C[0,\ell]}=L^{-1}$.

Лемма 23.14. *Пусть $f\in L^2[0,\ell]$ и $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$f\in\mathscr{D}_L$ и $Lf=\lambda f$ (т.е. f — решение задачи* (23.10)–(23.11));
(ii) *$Gf=\lambda^{-1}f$.*

Если эти условия выполнены, то $\lambda>0$.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Применяя теорему 23.13, получаем $f=GLf=\lambda Gf$, т.е. $Gf=\lambda^{-1}f$. То, что $\lambda>0$, следует из леммы 23.9.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Из непрерывности функции G следует (убедитесь!), что $\operatorname{Im}G\subseteq C[0,\ell]$. Поэтому $f=\lambda Gf\in C[0,\ell]$. Но $G|_{C[0,\ell]}=L^{-1}$ по теореме 23.13, поэтому $f=\lambda L^{-1}f\in\operatorname{Im}L^{-1}=\mathscr{D}_L$ и $Lf=\lambda f$. $\square$

Таким образом, ненулевые собственные значения оператора G в точности обратны собственным значениям оператора L. Что же до числа 0, то оно вообще не является собственным значением оператора G:

Лемма 23.15. $\operatorname{Ker}G=0$.

Доказательство. Из самосопряженности G следует, что $\operatorname{Ker}G=(\operatorname{Im}G)^\perp$ (см. предложение 22.5). С другой стороны, $\operatorname{Im}G\supseteq\mathscr{D}_L$, а $\mathscr{D}_L$ плотно в $L^2[0,\ell]$ (докажите). Следовательно, $\operatorname{Ker}G=0$, как и требовалось. $\square$

Лемма 23.16. *Каждое собственное значение оператора G имеет кратность* 1.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda\in\sigma_p(G)$ и предположим, что существуют линейно независимые функции $v_1,v_2\in\operatorname{Ker}(G-\lambda\mathbf{1})$. Согласно лемме 23.15, $\lambda\neq0$. Применяя лемму 23.14, заключаем, что $\lambda>0$ и что функции v_1,v_2 являются решениями уравнения

$$-u''+qu=\lambda^{-1}u. \tag{23.13}$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что пространство V его решений двумерно. Следовательно, $V=\operatorname{span}\{v_1,v_2\}$. Но $v_1,v_2\in\mathscr{D}_L$ в силу леммы 23.14, поэтому $V\subset\mathscr{D}_L$, и, в частности, каждое решение u уравнения (23.13) удовлетворяет условию $u(0)=0$. Это противоречит теореме существования решения задачи Коши. Следовательно, таких функций v_1,v_2 не существует, и $\dim\operatorname{Ker}(G-\lambda\mathbf{1})=1$. $\square$

Следующая теорема дает нам желаемую информацию о собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля и об их кратностях.

Теорема 23.17. *Существуют последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ положительных чисел и ортонормированный базис $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в пространстве $L^2[0,\ell]$, такие, что*

(i) *последовательность (λ_n) строго возрастает и стремится к ∞;*
(ii) *$e_n \in \mathscr{D}_L$ для всех n;*
(iii) *задача Штурма–Лиувилля* (23.10)–(23.11) *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda_n$ для некоторого n; соответствующее решение имеет вид $u = Ce_n$, где C — произвольная константа.*

Доказательство. Запишем разложение Гильберта–Шмидта (23.3) оператора G в виде

$$Gf = \sum_{n<N} \lambda_n^{-1} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Из леммы 23.14 следует, что $\lambda_n > 0$ для всех n. Применяя лемму 23.15, получаем, что $\{e_n\}_{n<N}^{\perp} = \operatorname{Ker} G = 0$. Следовательно, $(e_n)_{n<N}$ — ортонормированный базис в $L^2[0,\ell]$. В частности, $N = \infty$, и $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (см. теорему 23.3). Применяя лемму 23.16, заключаем, что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Поэтому, переупорядочивая числа (λ_n) и векторы (e_n), мы можем считать, что последовательность (λ_n) строго возрастает. Далее, из соотношения $Ge_n = \lambda_n^{-1} e_n$, согласно лемме 23.14, следует, что e_n — решение задачи (23.10)–(23.11) при $\lambda = \lambda_n$. Из той же леммы и из леммы 23.16 вытекает, что это решение единственно с точностью до постоянного множителя. Наконец, согласно лемме 23.14 и теореме 23.3, для $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ задача (23.10)–(23.11) имеет лишь тривиальное решение. □

Доказанная теорема по сути дает разложение оператора Штурма–Лиувилля L по его собственным функциям. Разложение дифференциальных операторов по собственным функциям — классическая и хорошо развитая область математики, относящаяся в основном к области дифференциальных уравнений, но существенно опирающаяся на методы функционального анализа. Об этих вещах можно прочитать, например, в книгах М. А. Наймарка «Линейные дифференциальные операторы» и Ю. М. Березанского «Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов».

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 24

24.1. Локально выпуклые пространства

В процессе изучения функционального анализа вы, вероятно, заметили, что не все естественно возникающие векторные пространства являются нормированными. В частности, пространство всех числовых последовательностей, пространства непрерывных и гладких функций на прямой, пространство голоморфных функций на комплексной плоскости и многие другие не имеют никакой естественной нормы. Однако, как мы вскоре увидим, на каждом из них имеется естественная топология, согласованная с линейной структурой. Топологические векторные пространства, о которых пойдет речь ниже, начиная приблизительно с 1940-х гг. изучаются в функциональном анализе наряду с нормированными пространствами. Теория топологических векторных пространств имеет ряд важных приложений в комплексном анализе, геометрии, математической физике. Кроме того, она оказывается весьма полезной и в более классических разделах функционального анализа — теории банаховых пространств и теории операторов.

Напомним, что символом $\mathbb{K}$ мы обозначаем либо поле $\mathbb{R}$, либо поле $\mathbb{C}$.

Определение 24.1. *Топологическое векторное пространство* — это векторное пространство X над $\mathbb{K}$, снабженное топологией, относительно которой операции

$$\begin{aligned} X \times X \to X, &\quad (x, y) \mapsto x + y, \\ \mathbb{K} \times X \to X, &\quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x, \end{aligned}$$

непрерывны.

Пример 24.1. Всякое нормированное пространство, разумеется, является топологическим векторным пространством (убедитесь). Другие примеры появятся чуть позже.

Если X и Y — топологические векторные пространства, то через $\mathscr{L}(X, Y)$ обозначается множество всех непрерывных линейных операторов из X в Y.

Предложение 24.1. *Пусть X и Y — топологические векторные пространства. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *линейный оператор $T \colon X \to Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле;*
(ii) *$\mathscr{L}(X, Y)$ — векторное подпространство в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$.*

Доказательство. Упражнение. □

Произвольные топологические векторные пространства — слишком общие объекты, чтобы из них можно было построить достаточно содержательную теорию. Нас будут интересовать топологические векторные пространства специального типа. Прежде чем их определять, напомним несколько общетопологических определений.

Определение 24.2. Пусть X — топологическое пространство.

(i) Семейство β открытых подмножеств X называется *базой* топологии на X, если каждое непустое открытое подмножество X является объединением множеств из β.
(ii) Семейство σ открытых подмножеств X называется *предбазой* топологии на X, если семейство $\{U_1 \cap \ldots \cap U_n : U_i \in \sigma,\ n \in \mathbb{N}\}$ является базой топологии.
(iii) Семейство β_x окрестностей точки $x \in X$ называется *базой в* x, если для любой окрестности U точки x найдется такая окрестность $V \in \beta_x$, что $V \subseteq U$.
(iv) Семейство σ_x окрестностей точки $x \in X$ называется *предбазой в* x, если семейство $\{U_1 \cap \ldots \cap U_n : U_i \in \sigma,\ n \in \mathbb{N}\}$ является базой в x.

Пример 24.2. Если X — метрическое пространство, то множество всех открытых шаров в X является базой его топологии, а множество всех открытых шаров с центрами в фиксированной точке x — базой в x. Если $X = \mathbb{R}^2$, то множество всех открытых полос вида $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \varepsilon\}$ и $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \varepsilon\}$ (где $\varepsilon > 0$) является предбазой в нуле, но не является базой в нуле.

Вот два простых утверждения, связанные с понятиями базы и предбазы. Докажите их сами в качестве упражнений.

Предложение 24.2. *Пусть X — множество и σ — семейство его подмножеств, покрывающее X. Тогда на X существует единственная топология, для которой σ является предбазой.*

Предложение 24.3. *Пусть X и Y — топологические пространства, $f \colon X \to Y$ — отображение, $x \in X$, $y = f(x)$, σ_y — предбаза в y, β_x — база в x. Для того чтобы f было непрерывным в x, необходимо и достаточно, чтобы для каждого множества $V \in \sigma_y$ существовало такое множество $U \in \beta_x$, что $f(U) \subseteq V$.*

Вернемся теперь к топологическим векторным пространствам и обсудим конструкцию, обобщающую пример 24.1. Напомним, что функция $p \colon X \to [0, +\infty)$ на векторном пространстве X называется *полунормой*, если

(i) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad (x, y \in X)$;
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \qquad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$.

Определение 24.3. *Полинормированное пространство* — это пара (X, P), состоящая из векторного пространства X и семейства полунорм P на X.

На полинормированном пространстве (X, P) можно ввести топологию следующим образом. Для каждого $x \in X$, каждой полунормы p на X и каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$U_{p,\varepsilon}(x) = \{y \in X : p(y - x) < \varepsilon\}. \tag{24.1}$$

Определение 24.4. Топологией, *порожденной семейством полунорм* P, называется топология $\tau(P)$, предбазой которой является семейство $\{U_{p,\varepsilon}(x) : x \in X,\ p \in P,\ \varepsilon > 0\}$.

Множество $U_{p,\varepsilon}(x)$ естественно представлять себе как «открытый шар по полунорме p с центром в точке x радиуса ε». Следует, однако, иметь в виду, что если полунорма

p не является нормой, то такой шар содержит в себе нетривиальное аффинное подпространство $x + p^{-1}(0)$.

Отметим, что если семейство P состоит из одной-единственной нормы $\|\cdot\|$, то топология $\tau(P)$ — это стандартная топология нормированного пространства X, порожденная метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Разумеется, в этом случае шары $U_{p,\varepsilon}(x)$ образуют не просто предбазу, а базу топологии $\tau(P)$, однако для произвольного семейства P это уже не всегда так (см. пример 24.2). Чтобы получить базу, удобно ввести еще одно обозначение. Для каждых $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и каждого конечного набора $p_1, \ldots, p_n \in X$ положим

$$U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon}(x) = \bigcap_{i=1}^{n} U_{p_i,\varepsilon}(x) = \{y \in X : p_i(y - x) < \varepsilon \ \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Предложение 24.4. *Пусть (X, P) — полинормированное пространство. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для каждого $x \in X$ семейство $\{U_{p,\varepsilon}(x) : p \in P,\ \varepsilon > 0\}$ — предбаза в x;*
(ii) *для каждого $x \in X$ семейство $\{U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon}(x) : p_i \in P,\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0\}$ — база в x;*
(iii) *семейство $\{U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon}(x) : x \in X.\ p_i \in P,\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0\}$ — база топологии $\tau(P)$.*

Доказательство. Утверждение (i) легко выводится из неравенства треугольника (убедитесь). Утверждение (ii) следует из (i) почти по определению, а (iii) — непосредственное следствие (ii). □

Предложение 24.5. *Если (X, P) — полинормированное пространство, то $(X, \tau(P))$ — топологическое векторное пространство.*

Доказательство. Непрерывность сложения следует из легко проверяемого включения

$$U_{p,\varepsilon/2}(x) + U_{p,\varepsilon/2}(y) \subseteq U_{p,\varepsilon}(x + y).$$

Непрерывность умножения на скаляр доказывается чуть сложнее: достаточно убедиться, что для каждых $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$, $p \in P$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$U_\delta(\lambda) \cdot U_{p,\delta}(x) \subseteq U_{p,\varepsilon}(\lambda x),$$

где $U_\delta(\lambda) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| < \delta\}$. Сделайте это сами в качестве упражнения. □

Замечание 24.1. Отметим тот очевидный факт, что если (X, P) — полинормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство, то топология на X_0, унаследованная из $(X, \tau(P))$, порождается ограничениями на X_0 всевозможных полунорм из семейства P.

В дальнейшем мы будем изучать топологические векторные пространства именно такого вида, как в предложении 24.5. Скоро мы увидим, что их можно определить и в других, более геометрических терминах. Одно из преимуществ таких пространств (хотя и не главное, но приятное) заключается в том, что многие утверждения о них можно формулировать на двух языках: на языке топологий и на языке полунорм. Вот две иллюстрации:

Предложение 24.6. *Пусть (X, P) — полинормированное пространство. Направленность (x_λ) сходится в топологии $\tau(P)$ к элементу $x \in X$ тогда и только тогда, когда $p(x_\lambda - x) \to 0$ для всех $p \in P$.*

Доказательство. Упражнение. □

Предложение 24.7. *Пусть (X, P) — полинормированное пространство. Топология $\tau(P)$ хаусдорфова тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X \setminus \{0\}$ существует такая полунорма $p \in P$, что $p(x) \neq 0$.*

Доказательство. Упражнение. □

Посмотрим теперь на несколько стандартных примеров.

Пример 24.3. Пусть X — множество и $\mathbb{K}^X$ — пространство всех $\mathbb{K}$-значных функций на X. Для каждого $x \in X$ определим полунорму $\|\cdot\|_x$ на $\mathbb{K}^X$ формулой $\|f\|_x = |f(x)|$. Топология на $\mathbb{K}^X$, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_x : x \in X\}$, называется *топологией поточечной сходимости*. Из предложения 24.6 следует, что направленность (f_λ) сходится в этой топологии тогда и только тогда, когда она сходится поточечно. Нетрудно проверить (проверьте!), что топология поточечной сходимости на $\mathbb{K}^X$ совпадает с тихоновской топологией.

Пример 24.4. Пусть X — топологическое пространство и $C(X)$ — пространство всех непрерывных $\mathbb{K}$-значных функций на X. Для каждого компакта $K \subseteq X$ определим полунорму $\|\cdot\|_K$ на $C(X)$ формулой $\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Топология на $C(X)$, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_K : K \subset X$ — компакт$\}$, называется *компактно-открытой топологией*, или *топологией компактной сходимости*. Из предложения 24.6 следует, что направленность (f_λ) сходится к функции $f \in C(X)$ в этой топологии тогда и только тогда, когда она сходится к f равномерно на каждом компакте.

Пример 24.5. Стандартная топология на пространстве гладких функций $C^\infty[a, b]$ порождается последовательностью полунорм $\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$, где $\|f\|_n = \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n)}(t)|$. Из предложения 24.6 следует, что направленность (f_λ) сходится к функции $f \in C^\infty[a, b]$ в этой топологии тогда и только тогда, когда она сходится к f равномерно вместе со всеми производными.

Пример 24.6. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ и каждой гладкой функции $f \in C^\infty(U)$ положим

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Для каждого компакта $K \subset U$ определим полунорму $\|\cdot\|_{K,\alpha}$ на $C^\infty(U)$ формулой $\|f\|_{K,\alpha} = \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|$. Стандартная топология на $C^\infty(U)$ порождается семейством полунорм $\{\|\cdot\|_{K,\alpha} : \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0},\ K \subset U$ — компакт$\}$. Из предложения 24.6 следует, что направленность (f_λ) сходится к функции $f \in C^\infty(U)$ в этой топологии тогда и только тогда, когда она сходится к f равномерно на каждом компакте вместе со всеми частными производными.

Пример 24.7. Пусть X и Y — нормированные пространства. Для каждого $x \in X$ определим полунорму $\|\cdot\|_x$ на пространстве ограниченных линейных операторов $\mathscr{B}(X,Y)$ формулой $\|T\|_x = \|Tx\|$. Топология на $\mathscr{B}(X,Y)$, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_x : x \in X\}$, называется *сильной операторной топологией* и обозначается SOT (по-английски strong operator topology). Из предложения 24.6 следует, что направленность (T_λ) сходится к оператору $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ в этой топологии тогда и только тогда, когда она сходится поточечно.

Пример 24.8. Пусть X и Y — нормированные пространства. Для каждого $x \in X$ и каждого $f \in Y^*$ определим полунорму $\|\cdot\|_{x,f}$ на пространстве $\mathscr{B}(X,Y)$ формулой $\|T\|_{x,f} = |f(Tx)|$. Топология на $\mathscr{B}(X,Y)$, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_{x,f} : x \in X,\ f \in Y^*\}$, называется *слабой операторной топологией* и обозначается WOT (по-английски weak operator topology). Из предложения 24.6 следует, что направленность (T_λ) сходится к оператору $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ в этой топологии тогда и только тогда, когда направленность $f(T_\lambda x)$ сходится к $f(Tx)$ для каждого $x \in X$ и каждого $f \in Y^*$. Отметим, что если X и Y — гильбертовы пространства, то в силу теоремы Рисса 7.3 слабая операторная топология на $\mathscr{B}(X,Y)$ порождается семейством полунорм $\{\|\cdot\|_{x,y} : x \in X,\ y \in Y\}$, где $\|T\|_{x,y} = |\langle Tx, y\rangle|$.

Наша следующая цель — охарактеризовать топологии, порожденные семействами полунорм, в геометрических терминах. С этой целью дадим несколько определений (см. также определение 9.2).

Определение 24.5. Пусть X — векторное пространство и $S \subseteq X$ — непустое подмножество. Его *выпуклой оболочкой* называется пересечение всех выпуклых подмножеств пространства X, содержащих S. Выпуклая оболочка множества S обозначается через $\operatorname{conv}(S)$. Аналогично определяются *закругленная оболочка* $\operatorname{circ}(S)$ и *абсолютно выпуклая оболочка* $\Gamma(S)$ множества S.

Из предложения 9.11 следует, что $\operatorname{conv}(S)$ (соответственно, $\operatorname{circ}(S)$, $\Gamma(S)$) — это наименьшее выпуклое (соответственно, наименьшее закругленное, наименьшее абсолютно выпуклое) множество, содержащее S. Вот более явное описание этих оболочек:

Предложение 24.8. *Пусть X — векторное пространство и $S \subseteq X$ — непустое подмножество. Тогда*

$$\begin{aligned}
\operatorname{conv}(S) &= \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in S,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\Big\},\\
\operatorname{circ}(S) &= \Big\{\lambda x : x \in S,\ \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leqslant 1\Big\},\\
\Gamma(S) &= \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in S,\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leqslant 1,\ n \in \mathbb{N}\Big\}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Упражнение. □

Следствие 24.9. *Пусть X — векторное пространство и $S \subseteq X$ — непустое подмножество. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если S закруглено, то и $\operatorname{conv}(S)$ закруглено;*

(ii) $\Gamma(S) = \operatorname{conv}(\operatorname{circ}(S))$.

Первые два пункта следующего утверждения нам уже встречались в контексте нормированных пространств (см. предложение 9.11).

Предложение 24.10. *Пусть X — топологическое векторное пространство и $S \subseteq X$ — непустое подмножество. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если S выпукло, то $\overline{S}$ и $\operatorname{Int}(S)$ тоже выпуклы;*
(ii) *если S закруглено, то и $\overline{S}$ закруглено;*
(iii) *если S закруглено и $0 \in \operatorname{Int}(S)$, то и $\operatorname{Int}(S)$ закруглено;*
(iv) *если S открыто, то $\operatorname{conv}(S)$ и $\Gamma(S)$ тоже открыты;*
(v) *если S открыто и $0 \in S$, то и $\operatorname{circ}(S)$ открыто.*

Доказательство. Упражнение. □

Определение 24.6. Топологическое векторное пространство называется *локально выпуклым*, если в нем есть база окрестностей нуля, состоящая из выпуклых множеств.

Вместо того чтобы говорить «локально выпуклое топологическое векторное пространство», обычно используют более короткий термин «*локально выпуклое пространство*».

Пример 24.9. Если (X, P) — полинормированное пространство, то топологическое векторное пространство $(X, \tau(P))$ локально выпукло. В самом деле, из определения полунормы легко следует, что все множества вида $U_{p,\varepsilon}(0)$ абсолютно выпуклы, поэтому таковы же и их конечные пересечения, образующие базу окрестностей нуля.

Оказывается, все локально выпуклые пространства получаются таким образом, как в примере 24.9:

Теорема 24.11. *Топологическое векторное пространство локально выпукло тогда и только тогда, когда его топология порождается некоторым семейством полунорм.*

Прежде чем доказывать теорему, дадим еще одно, более удобное определение локально выпуклых пространств.

Лемма 24.12. *Пусть X — топологическое векторное пространство. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *каждая окрестность нуля в X содержит закругленную окрестность нуля;*
(ii) *если X локально выпукло, то каждая окрестность нуля в X содержит абсолютно выпуклую окрестность нуля.*

Доказательство. (i) Пусть $U \subseteq X$ — окрестность нуля. Положим $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$. Из непрерывности умножения на скаляр следует, что существует такая окрестность нуля $V \subseteq X$, что $\bar{\mathbb{D}} \cdot V \subseteq U$. Положим $W = \bar{\mathbb{D}} \cdot V$. Очевидно, W — закругленное множество. Кроме того,

$$W = \bigcup \{\lambda V : 0 < \lambda \leqslant 1\},$$

откуда следует, что W открыто (объясните, почему). Таким образом, W — искомая окрестность нуля.

(ii) Пусть $U \subseteq X$ — окрестность нуля. Не ограничивая общности, можно считать, что она выпукла. Пользуясь утверждением (i), выберем закругленную окрестность нуля $W \subseteq U$, и положим $W' = \operatorname{conv}(W)$. Применяя следствие 24.9 (i) и предложение 24.10 (iv), заключаем, что W' — абсолютно выпуклая окрестность нуля, причем $W' \subseteq U$ в силу выпуклости U. $\square$

Следствие 24.13. *Топологическое векторное пространство локально выпукло тогда и только тогда, когда в нем есть база окрестностей нуля, состоящая из абсолютно выпуклых множеств.*

Доказательство теоремы 24.11. Пусть X — локально выпуклое пространство. Пользуясь следствием 24.13, выберем базу $\mathscr{V}$ абсолютно выпуклых окрестностей нуля в X, и положим $P = \{p_V : V \in \mathscr{V}\}$ (где p_V — функционал Минковского множества V, см. определение 9.3). Пусть τ — исходная топология пространства X. Для завершения доказательства достаточно установить, что $\tau = \tau(P)$. В силу предложения 9.12 (v), для каждого $V \in \mathscr{V}$ имеем включения $U_{p_V,1}(0) \subseteq V \subseteq U_{p_V,2}(0)$. Первое из этих включений влечет за собой непрерывность тождественного отображения $(X, \tau(P)) \to (X, \tau)$ (см. предложение 24.1 (i)), а второе — непрерывность тождественного отображения $(X, \tau) \to (X, \tau(P))$. Следовательно, $\tau = \tau(P)$, как и требовалось. $\square$

Замечание 24.2. На самом деле нетрудно проверить (проверьте!), что для каждой абсолютно выпуклой окрестности нуля $V \subseteq X$ справедливо равенство $U_{p_V,1}(0) = V$.

Таким образом, связь между полинормированными и локально выпуклыми пространствами примерно такая же, как между метрическими пространствами и метризуемыми топологическими пространствами. Конечно, структура полинормированного пространства более богата, нежели структура соответствующего локально выпуклого пространства; иначе говоря, одна и та же топология вполне может порождаться разными семействами полунорм. Однако, как правило, при работе с полинормированными пространствами конкретное семейство полунорм не так уж важно — важна топология, которую это семейство порождает. По этой причине термин «полинормированное пространство» гораздо меньше распространен, чем термин «локально выпуклое пространство». Следуя сложившейся традиции, термин «полинормированное пространство» мы в дальнейшем использовать не будем; однако сам факт «полинормируемости» локально выпуклых пространств будем использовать постоянно.

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 25

25.1. Непрерывные линейные операторы

Напомним (см. теорему 1.2), что линейный оператор между нормированными пространствами непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен. Наша ближайшая задача — доказать аналогичный критерий непрерывности для операторов между локально выпуклыми пространствами.

Пусть X — векторное пространство (пока без топологии).

Определение 25.1. Пусть p и q — полунормы на X. Говорят, что p *мажорируется* q (и пишут $p \prec q$), если существует такое $C > 0$, что $p(x) \leqslant Cq(x)$ для всех $x \in X$.

С понятием мажорирования полунорм мы фактически уже встречались ранее в контексте норм (см. лекцию 1). Так же, как для норм, соотношение $p \prec q$ равносильно тому, что топология, задаваемая полунормой p, не сильнее, чем топология, задаваемая полунормой q (см. следствие 1.4).

Введем теперь близкое по духу отношение для подмножеств пространства X.

Определение 25.2. Пусть $M, N \subseteq X$ — подмножества. Говорят, что M *поглощается* N (и пишут $M \prec N$), если существует такое $C > 0$, что для всех $\lambda \in \mathbb{K}$, удовлетворяющих условию $|\lambda| \geqslant C$, имеет место включение $M \subseteq \lambda N$.

Множество, поглощающее все одноэлементные (или, эквивалентно, конечные) множества, называется *поглощающим* (см. определение 9.2).

Отметим, что если множество N закруглено, то соотношение $M \prec N$ означает попросту, что $M \subseteq \lambda N$ для некоторого $\lambda > 0$ (убедитесь!).

Введем еще несколько обозначений. Для каждой полунормы p на X и каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$U_{p,\varepsilon} = U_{p,\varepsilon}(0), \quad U_p = U_{p,1}.$$

Шары вида U_p играют выдающуюся роль, т.к. все остальные шары вида (24.1) через них выражаются:

$$U_{p,\varepsilon}(x) = x + U_{p,\varepsilon}, \quad U_{p,\varepsilon} = \varepsilon U_p = U_{\varepsilon^{-1}p}.$$

Если $p_1, \ldots, p_n$ — полунормы на X, то через $\max_{1\leqslant i\leqslant n} p_i$ мы будем обозначать их «поточечный максимум», т.е. функцию $x \mapsto \max_{1\leqslant i\leqslant n} p_i(x)$ на X. Легко проверить (проверьте), что $\max_{1\leqslant i\leqslant n} p_i$ — тоже полунорма.

Следующее простое предложение устанавливает взаимосвязь между введенными выше отношениями $\prec$ для полунорм и для множеств.

Предложение 25.1. *Для любых полунорм p, q на векторном пространстве X справедливы следующие утверждения:*

(i) $U_p \cap U_q = U_{\max\{p,q\}}$;

(ii) $U_p \subseteq U_q \iff q \leqslant p$;
(iii) $U_p \prec U_q \iff q \prec p$.

Доказательство. Упражнение. □

Теорема 25.2. *Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P. Следующие свойства полунормы q на X эквивалентны:*

(i) *q непрерывна;*
(ii) *q непрерывна в нуле;*
(iii) *существуют такие $p_1, \ldots, p_n \in P$, что $q \prec \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Очевидно.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Если q непрерывна в нуле, то существуют такие $p_1, \ldots, p_n \in P$ и $\varepsilon > 0$, что

$$q(U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon}(0)) \subseteq [0, 1). \tag{25.1}$$

Положим $p = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$. Включение (25.1) означает в точности, что $U_{\varepsilon^{-1}p} = U_{p,\varepsilon} \subseteq U_q$, а это в силу предложения 25.1 равносильно тому, что $q \leqslant \varepsilon^{-1} p$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Выберем такое $C > 0$, что $q \leqslant Cp$, где $p = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$. Тогда для любого $x \in X$, любого $\varepsilon > 0$ и любого $y \in U_{p,\varepsilon/C}(x)$ имеем

$$|q(y) - q(x)| \leqslant q(y - x) \leqslant Cp(y - x) < \varepsilon.$$

Это и означает, что q непрерывна в x. □

Следствие 25.3. *Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P. Тогда каждая полунорма из P непрерывна на X.*

Вот, наконец, и обещанный критерий непрерывности линейного оператора, обобщающий теорему 1.2.

Теорема 25.4. *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства с топологиями, порожденными семействами полунорм P и Q соответственно. Следующие свойства линейного оператора $T\colon X \to Y$ эквивалентны:*

(i) *T непрерывен;*
(ii) *для каждой полунормы $q \in Q$ функция $q \circ T$ непрерывна на X;*
(iii) *для каждой полунормы $q \in Q$ существуют такие $C > 0$ и $p_1, \ldots, p_n \in P$, что для каждого $x \in X$ справедливо неравенство*

$$q(Tx) \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x). \tag{25.2}$$

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Следует из следствия 25.3.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Функция $q \circ T$, как нетрудно видеть, является полунормой на X, поэтому требуемая импликация вытекает из теоремы 25.2.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Положим $p = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$. Пользуясь предложением 25.1 и линейностью оператора T, видим, что

$$\begin{aligned} (25.2) &\iff q \circ T \prec p \iff U_p \prec U_{q \circ T} \\ &\iff T(U_p) \prec U_q \iff \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 \quad T(\varepsilon U_{p,\delta}) \subseteq U_{q,\delta}. \end{aligned}$$

В силу предложения 24.3 это означает, что T непрерывен в нуле, а значит, и всюду на X (см. предложение 24.1). □

Следующее определение обобщает определение 1.4.

Определение 25.3. Пусть X — векторное пространство, P и Q — семейства полунорм на X. Говорят, что Q *мажорируется* P (и пишут $Q \prec P$), если $\tau(Q) \subseteq \tau(P)$. Если же $\tau(Q) = \tau(P)$, то семейства P и Q называют *эквивалентными* (и пишут $P \sim Q$).

Следствие 25.5. *Пусть X — векторное пространство, P и Q — семейства полунорм на X. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $Q \prec P$*;*
(ii) *каждая полунорма из Q непрерывна относительно топологии $\tau(P)$;*
(iii) *для каждой полунормы $q \in Q$ найдутся такие $p_1, \ldots, p_n \in P$, что $q \prec \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$.*

Доказательство. Условие (i) означает в точности, что тождественный оператор из $(X, \tau(P))$ в $(X, \tau(Q))$ непрерывен. Остается применить к нему теорему 25.4. □

Конкретные примеры эквивалентных семейств полунорм см. в листке 19. Вот пример общего характера:

Пример 25.1. Пусть P — какое-либо семейство полунорм на векторном пространстве X. Обозначим через $\widehat{P}$ семейство всех $\tau(P)$-непрерывных полунорм на X. Тогда каждое семейство полунорм Q на X, удовлетворяющее условию $P \subseteq Q \subseteq \widehat{P}$, эквивалентно P. В частности,

(i) $\widehat{P} \sim P$;
(ii) $P_\infty = \left\{ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i : p_i \in P,\ n \in \mathbb{N} \right\} \sim P$;
(iii) $P_1 = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i : p_i \in P,\ n \in \mathbb{N} \right\} \sim P$.

Семейства полунорм $\widehat{P}$, P_∞ и P_1, упомянутые в примере 25.1, обладают следующим удобным свойством.

Определение 25.4. Семейство полунорм P на векторном пространстве X называется *направленным*, если для любых $p, q \in P$ найдется такая полунорма $r \in P$, что $\max\{p, q\} \prec r$.

То же самое определение можно дать и в топологических терминах:

Предложение 25.6. *Следующие свойства семейства полунорм P на векторном пространстве X эквивалентны:*

(i) P *направленное;*
(ii) *для каждого $x \in X$ семейство $\sigma_x = \{U_{p,\varepsilon}(x) : p \in P,\ \varepsilon > 0\}$ является базой в x для топологии $\tau(P)$;*
(iii) *семейство σ_0 является базой в нуле для топологии $\tau(P)$.*

Доказательство. См. предложение 25.1. □

Из примера 25.1 следует, что всякое семейство полунорм эквивалентно направленному семейству. Это довольно удобно; например, для направленных семейств P формулировки теорем 25.2 и 25.4 упрощаются — вместо конечных максимумов в пп. (iii) этих теорем достаточно брать одну полунорму из семейства P.

Так же, как и в случае нормированных пространств, для топологического векторного пространства X векторное пространство $\mathscr{L}(X, \mathbb{K})$ непрерывных линейных функционалов на X обозначается через X^* и называется *сопряженным* к X. В применении к линейным функционалам теорема 25.4 дает следующее:

Следствие 25.7. *Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P. Линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{K}$ непрерывен тогда и только тогда, когда существуют такие $C > 0$ и $p_1, \dots, p_n \in P$, что для каждого $x \in X$ справедливо неравенство*

$$|f(x)| \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x).$$

Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, чем же локально выпуклые пространства так хороши по сравнению с произвольными топологическими векторными пространствами. Одна из их приятных особенностей нам уже известна: благодаря «полинормируемости» локально выпуклых пространств (см. теорему 24.11), многие утверждения о таких пространствах удобно формулировать и доказывать в терминах полунорм. Но язык полунорм — это скорее удобный «пользовательский интерфейс», чем принципиальное преимущество локально выпуклых пространств. Принципиальное же их преимущество заключается в следующем.

Предложение 25.8. *Пусть X — локально выпуклое пространство, $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство. Тогда для любого $f_0 \in X_0^*$ существует $f \in X^*$, продолжающий f_0.*

Доказательство. В силу следствия 25.7 и замечания 24.1, существует такая непрерывная полунорма p на X, что $|f_0(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in X_0$. Остается применить теорему Хана–Банаха 9.3. □

Следствие 25.9. *Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Тогда для любого ненулевого $x \in X$ найдется такой $f \in X^*$, что $f(x) \neq 0$.*

Доказательство. В силу хаусдорфовости X и предложения 24.7, существует такая непрерывная полунорма p на X, что $p(x) \neq 0$. Зададим функционал $f_0\colon \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$ формулой $f_0(\lambda x) = \lambda p(x)$. Очевидно, $|f_0(y)| = p(y)$ для любого $y \in \mathbb{K}x$, поэтому f_0 непрерывен. Остается воспользоваться предложением 25.8. □

Следствие 25.10. *Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство и $x_1, x_2 \in X$ — различные векторы. Тогда существует такой $f \in X^*$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Ряд других следствий теоремы Хана–Банаха, в частности, теорема 9.13 о разделении выпуклых множеств, также оказываются справедливыми для произвольных хаусдорфовых локально выпуклых пространств (убедитесь). Однако без предположения локальной выпуклости ни предложение 25.8, ни его следствия уже неверны. По поводу примеров см. задачи 20.4 и 20.5 из листка 20. Таким образом, основное преимущество локально выпуклых пространств по сравнению с произвольными топологическими векторными пространствами заключается в том, что на них (в предположении хаусдорфовости) имеется достаточно много непрерывных линейных функционалов. Благодаря этому, при работе с локально выпуклыми пространствами, так же как и при работе с нормированными пространствами, можно использовать соображения двойственности. Это оказывается весьма удобным и эффективным методом их исследования.

25.2. Ограниченные множества

Определение 25.5. Подмножество топологического векторного пространства называется *ограниченным*, если оно поглощается любой окрестностью нуля.

Наблюдение 25.11. Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P. Тогда для ограниченности множества $B \subseteq X$ необходимо и достаточно, чтобы $B \prec U_p$ для каждой полунормы $p \in P$. Это, в свою очередь, равносильно условию $\sup_{x \in B} p(x) < \infty$ для всех $p \in P$. В частности, для нормированных пространств ограниченность в смысле определения 25.5 равносильна обычной ограниченности по норме.

В терминах ограниченных множеств можно дать следующий удобный критерий нормируемости локально выпуклого пространства.

Предложение 25.12 (критерий Колмогорова)**.** *Хаусдорфово локально выпуклое пространство нормируемо тогда и только тогда, когда в нем есть ограниченная окрестность нуля.*

Доказательство. Необходимость очевидна; докажем достаточность. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство и $U \subseteq X$ — ограниченная окрестность нуля. Не ограничивая общности, можем считать, что U абсолютно выпукла. Из открытости U и включения $p_U(U) \subseteq [0,1]$ (см. предложение 9.12 (v)) следует, что полунорма p_U непрерывна, а из ограниченности U и предложения 25.1 (iii) — что она мажорирует любую другую непрерывную полунорму на X. Следовательно, топология на X, порожденная одной лишь полунормой p_U, совпадает с исходной (см. пример 25.1). Остается заметить, что p_U является нормой в силу хаусдорфовости X. $\square$

Другой критерий нормируемости см. в листке 19 (задача 19.9).

Напомним (см. предложение 1.1 и теорему 1.2), что линейный оператор между нормированными пространствами непрерывен тогда и только тогда, когда он переводит ограниченные множества в ограниченные. Сохраняет ли силу этот критерий для произвольных топологических векторных пространств, или хотя бы для локально выпуклых пространств? В общем случае ответ отрицателен (см. листок 20, задача 20.10), однако кое-что все-таки сказать можно.

Предложение 25.13. *Пусть X и Y — топологические векторные пространства. Рассмотрим следующие свойства линейного оператора $T\colon X \to Y$:*

(i) *T непрерывен;*

(ii) *для любого ограниченного множества $B \subseteq X$ множество $T(B) \subseteq Y$ ограничено.*

Тогда (i) $\Longrightarrow$ (ii)*. Если же X нормируемо, то свойства* (i) *и* (ii) *эквивалентны.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Для любой окрестности нуля $U \subset Y$ имеем $B \prec T^{-1}(U)$, поэтому $T(B) \prec U$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Если X нормируемо и выполнено условие (ii), то для любой окрестности нуля $U \subset Y$ имеем $T(\mathbb{B}_1^\circ) \prec U$, т.е. $T(\mathbb{B}_\varepsilon^\circ) \subseteq U$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Следовательно, T непрерывен в нуле и поэтому непрерывен. $\square$

Замечание 25.1. На самом деле импликация (ii) $\Longrightarrow$ (i) в предложении 25.13 верна для более широкого класса пространств. Локально выпуклое пространство X называется *борнологическим*, если всякое его абсолютно выпуклое подмножество, поглощающее все ограниченные множества, содержит окрестность нуля. Очевидно, всякое нормированное пространство обладает этим свойством: если какое-то множество поглощает все ограниченные множества, то оно поглощает и шар $\mathbb{B}_1^\circ$, а значит, для некоторого $\varepsilon > 0$ содержит шар $\mathbb{B}_\varepsilon^\circ$, являющийся окрестностью нуля. Можно показать (попробуйте это сделать), что всякое метризуемое локально выпуклое пространство тоже является борнологическим. Пример неборнологического пространства вы получите, если сделаете задачу 20.10 (2) из листка 20. В качестве несложного упражнения попробуйте доказать эквивалентность следующих свойств локально выпуклого пространства X:

(i) X борнологическое;
(ii) всякая полунорма на X, ограниченная на ограниченных множествах, непрерывна;
(iii) для произвольного локально выпуклого пространства Y всякий линейный оператор $T\colon X \to Y$, переводящий ограниченные множества в ограниченные, непрерывен.

Грубо говоря, борнологические пространства — это такие локально выпуклые пространства, топология которых полностью определяется запасом ограниченных множеств. Следует иметь в виду, что термин «борнологическое пространство» имеет еще и другое значение. Так называют векторные пространства, не снабженные топологией, в которых аксиоматически введено понятие ограниченного подмножества. Такие абстрактные борнологические пространства придумал в 1950-х гг. Л. Вальбрук в связи с некоторыми вопросами спектральной теории локально выпуклых алгебр. Особой популярности эти пространства, впрочем, тогда не приобрели. Ситуация кардинально изменилась сравнительно недавно, уже в 2000-х гг., когда выяснилось, что абстрактные борнологические пространства и алгебры весьма удобны для K-теории, теории циклических гомологий и некоторых других вопросов. Об этом можно прочитать в книгах J. Cuntz, J. M. Rosenberg, R. Meyer, "Topological and bivariant K-theory" и R. Meyer, "Local and analytic cyclic homomlogy".

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 26

26.1. Двойственность. Слабые топологии

Мы уже немного знакомы с теорией двойственности для банаховых пространств (см. лекцию 13). Напомним, что теория двойственности — это, по сути, не совсем теория, а скорее совокупность методов, устанавливающих взаимосвязи между свойствами банаховых пространств и их сопряженных, а также линейных операторов и их сопряженных. Наша ближайшая задача будет состоять в том, чтобы обогатить уже известные нам методы теории двойственности новыми результатами, основанными на понятии слабой топологии.

Вы, возможно, заметили, что в ряде вопросов банахово пространство и его сопряженное в некотором смысле оказываются равноправными: заменив в той или иной теореме банаховы пространства на их сопряженные, а сопряженные — на исходные пространства, мы часто (хотя и не всегда) получаем верное утверждение, даже если пространства не рефлексивны (см. например, предложение 13.8, теоремы 13.10 и 13.12). Чтобы иметь дело с ситуациями такого рода, удобно ввести следующее понятие.

Определение 26.1. Пусть X, Y — векторные пространства и $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon X\times Y\to\mathbb{K}$ — билинейная форма. Тройка $(X, Y, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ называется *дуальной парой*, если выполняются следующие условия невырожденности:

(i) для каждого $x\in X,\ x\neq 0$, найдется такой $y\in Y$, что $\langle x,y\rangle\neq 0$;
(ii) для каждого $y\in Y,\ y\neq 0$, найдется такой $x\in X$, что $\langle x,y\rangle\neq 0$.

Дуальную пару $(X, Y, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ мы в дальнейшем будем обозначать через $\langle X,Y\rangle$. Билинейная форма $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ обычно называется *спариванием* пространств X и Y.

Очевидно, что если $\langle X,Y\rangle$ — дуальная пара, то и $\langle Y,X\rangle$ — дуальная пара относительно спаривания $\langle y,x\rangle=\langle x,y\rangle$ (где $x\in X,\ y\in Y$).

Для векторного пространства X обозначим через $X^\sharp=\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X,\mathbb{K})$ пространство всех линейных функционалов[1] на X. Тогда условия невырожденности (i), (ii) из определения 26.1 означают, что имеют место вложения

$$\begin{aligned} i_{X,Y}\colon X &\hookrightarrow Y^\sharp, \quad x\mapsto\langle x,\cdot\,\rangle;\\ i_{Y,X}\colon Y &\hookrightarrow X^\sharp, \quad y\mapsto\langle\cdot\,,y\rangle. \end{aligned}\tag{26.1}$$

Соглашение 26.1. В дальнейшем, имея дело с дуальной парой $\langle X,Y\rangle$, мы обычно будем отождествлять X с подпространством в $Y^\sharp$, а Y — с подпространством в $X^\sharp$ посредством вложений (26.1).

[1] Мы используем обозначение $X^\sharp$, т.к. более привычный символ X^* у нас уже зарезервирован для обозначения пространства *непрерывных* линейных функционалов на топологическом векторном пространстве X.

Пример 26.1. Если X — векторное пространство, то $\langle X, X^\sharp\rangle$ — дуальная пара относительно спаривания $\langle x, f\rangle = f(x)$ (где $x \in X,\ f \in X^\sharp$).

Пример 26.2. Если X — хаусдорфово локально выпуклое пространство, то $\langle X, X^*\rangle$ — дуальная пара относительно того же спаривания, что в предыдущем примере. При этом одно из условий невырожденности (i), (ii) выполнено по очевидным причинам, тогда как второе является переформулировкой следствия 25.9 из теоремы Хана–Банаха.

Наблюдение 26.1. Вы, возможно, уже заметили, что вложения (26.1) и каноническое вложение нормированного пространства в его второе сопряженное (см. определение 11.1) определяются совершенно одинаково. Точнее говоря, если X — нормированное пространство, то композиция канонического вложения $i_X \colon X \hookrightarrow X^{**}$ и включения $X^{**} \subset (X^*)^\sharp$ — это в точности вложение $i_{X,X^*} \colon X \hookrightarrow (X^*)^\sharp$, соответствующее дуальной паре $\langle X, X^*\rangle$. Стало быть, раз уж мы приняли соглашение 26.1, то всякое нормированное пространство X мы будем считать частью его второго сопряженного X^{**} посредством канонического вложения i_X.

Нас будут в первую очередь интересовать дуальные пары такого вида, как в примере 26.2, особенно в случае, когда X — банахово пространство. Конечно, может возникнуть вопрос: а зачем тогда нужно вводить общее понятие дуальной пары? Дело в том, что, как мы уже заметили выше, в определении дуальной пары оба пространства равноправны, поэтому наряду с дуальной парой $\langle X, X^*\rangle$ (где X — банахово пространство) мы имеем право рассматривать и дуальную пару $\langle X^*, X\rangle$. А она уже, вообще говоря, не может быть представлена в виде $\langle Y, Y^*\rangle$, где Y — какое-то банахово пространство (если только X не рефлексивно). В результате, доказывая какое-либо общее утверждение о дуальных парах, для банахова пространства X мы получаем сразу два следствия: одно — для дуальной пары $\langle X, X^*\rangle$, а другое — для дуальной пары $\langle X^*, X\rangle$.

Само по себе понятие дуальной пары — чисто алгебраическое; никаких топологий на пространствах X и Y, участвующих в определении 26.1, заранее не задано. На самом деле для любой дуальной пары $\langle X, Y\rangle$ пространства X и Y можно снабдить естественными локально выпуклыми топологиями, причем не единственным способом. Ниже мы обсудим самый простой (и, возможно, самый полезный) из этих способов.

Определение 26.2. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара векторных пространств. Для каждого $y \in Y$ введем полунорму $\|\cdot\|_y$ на X, полагая $\|x\|_y = |\langle x, y\rangle|$. Топология на X, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_y : y \in Y\}$, называется *слабой топологией* дуальной пары $\langle X, Y\rangle$ и обозначается через $\sigma(X, Y)$.

Наблюдение 26.2. Из предложения 24.7 следует, что топология $\sigma(X, Y)$ хаусдорфова. Кроме того, из предложения 24.6 следует, что направленность (x_λ) в X сходится к вектору x относительно топологии $\sigma(X, Y)$ тогда и только тогда, когда $\langle x_\lambda, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ для всех $y \in Y$. Иначе говоря, если интерпретировать элементы пространства X как функционалы на Y, то $\sigma(X, Y)$ — это топология поточечной сходимости (ср. с примером 24.3).

Вот два важных частных случая:

Определение 26.3. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Топология $\sigma(X, X^*)$ называется *слабой топологией* на X, а топология $\sigma(X^*, X)$ — *слабой**

(произносится «слабой-со-звездочкой» или «слабой-со-звездой») топологией на X^*. В дальнейшем мы будем использовать обозначения $\sigma(X, X^*) = \mathrm{wk}$ и $\sigma(X^*, X) = \mathrm{wk}^*$.

Отметим, что обе эти топологии можно рассматривать и в более общей ситуации, когда X — произвольное топологическое векторное пространство (не обязательно хаусдорфово и не обязательно локально выпуклое). Разумеется, слабая топология на X при этом уже не обязана быть хаусдорфовой, а вот слабая* топология на X^* хаусдорфова всегда — убедитесь.

Замечание 26.2. Может возникнуть вопрос: а зачем называть топологию $\sigma(X^*, X)$ именно «слабой*», почему бы не назвать ее просто «слабой»? Дело в том, что если X — нормированное пространство, то X^* — тоже нормированное пространство относительно стандартной нормы, поэтому на X^* есть слабая топология $\sigma(X^*, X^{**})$, которая, вообще говоря, сильнее, чем $\sigma(X^*, X)$ (см. об этом ниже). Поэтому, чтобы избежать путаницы и как-то различать эти две топологии, первую из них называют слабой, а вторую — слабой*.

Замечание 26.3. Когда говорят о слабой топологии, обычно используют следующую терминологию: направленность, сходящуюся относительно слабой топологии, называют *слабо сходящейся*, множество, замкнутое (соответственно, открытое, ограниченное) относительно слабой топологии — *слабо замкнутым* (соответственно, *слабо открытым, слабо ограниченным*), и т.п. Аналогичная терминология применяется и к слабой* топологии.

Замечание 26.4. Напомним (см. примеры 24.7 и 24.8), что для нормированных пространств X и Y на пространстве $\mathscr{B}(X, Y)$ определены сильная и слабая операторные топологии. Если положить $Y = \mathbb{K}$, то обе они превратятся в слабую* топологию на пространстве X^* (убедитесь!).

Наблюдение 26.3. Если X — произвольное топологическое векторное пространство, то его слабая топология не сильнее исходной (именно поэтому она и называется слабой). В самом деле, предбазу окрестностей точки $x \in X$ в слабой топологии образуют множества вида $U_{f,\varepsilon}(x) = \{y \in X : |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$, рассмотренные для всевозможных $f \in X^*$ и $\varepsilon > 0$. Из непрерывности f очевидным образом следует, что эти множества открыты и в исходной топологии пространства X. А это и означает, что слабая топология на X не сильнее исходной. Отметим, что для большинства (хотя и не для всех) естественно возникающих локально выпуклых пространств слабая топология строго слабее исходной; в частности, это так для всех бесконечномерных нормированных пространств. См. по этому поводу задачи 20.6 и 20.7 из листка 20.

Вернемся к общей ситуации и рассмотрим произвольную дуальную пару $\langle X, Y\rangle$. Обозначим через X_σ пространство X, снабженное слабой топологией $\sigma(X, Y)$. Что можно сказать про его сопряженное? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ по определению справедливо равенство $|\langle x, y\rangle| = \|x\|_y$. Отсюда и из следствия 25.7 вытекает, что y — непрерывный линейный функционал на X_σ. Оказывается, этот пример описывает общую ситуацию:

Предложение 26.4. *Для любой дуальной пары $\langle X, Y\rangle$ справедливо равенство $X_\sigma^* = Y$.*

Для доказательства предложения 26.4 нам понадобится следующая алгебраическая лемма, доказательство которой проведите сами в качестве упражнения.

Лемма 26.5. *Пусть X — векторное пространство, $f, f_1, \ldots, f_n$ — линейные функционалы на X. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\operatorname{Ker} f \supseteq \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$;
(ii) $f \in \operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_n\}$.

Доказательство предложения 26.4. Мы уже заметили выше, что $Y \subseteq X_\sigma^*$. Для доказательства обратного включения зафиксируем $f \in X_\sigma^*$ и, пользуясь следствием 25.7, найдем такие $y_1, \ldots, y_n \in Y$ и $C > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle x, y_i \rangle| \qquad (x \in X).$$

Из последнего неравенства следует, что $\operatorname{Ker} f \supseteq \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} y_i$. Применяя лемму 26.5, заключаем, что $f \in \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$. □

Следствие 26.6. *Для любого хаусдорфова локально выпуклого пространства X справедливы равенства $(X, \mathrm{wk})^* = X^*$ и $(X^*, \mathrm{wk}^*)^* = X$. Иначе говоря,*

(i) *линейный функционал на X непрерывен тогда и только тогда, когда он слабо непрерывен;*
(ii) *образ пространства X при вложении $i_{X,X^*} \colon X \hookrightarrow (X^*)^\sharp$ (см. (26.1)) состоит в точности из тех функционалов, которые слабо* непрерывны.*

Формула $(X^*, \mathrm{wk}^*)^* = X$ из следствия 26.6 может, говоря неформально, трактоваться как свойство «ослабленной рефлексивности» пространства X. В самом деле, если канонически отождествить нормированное пространство X с подпространством в X^{**} (см. наблюдение 26.1), то равенство $X = X^{**}$ равносильно рефлексивности X, в то время как равенство $X = (X^*, \mathrm{wk}^*)^*$ верно всегда.

Мы уже заметили выше, что для нормированного пространства X на его сопряженном X^* имеются как минимум три естественные топологии: топология, порожденная стандартной нормой, слабая топология $\mathrm{wk} = \sigma(X^*, X^{**})$ и слабая* топология $\mathrm{wk}^* = \sigma(X^*, X)$. Следующее утверждение проясняет взаимосвязи между ними[1].

Следствие 26.7. *Пусть X — нормированное пространство. Топологию на X^*, порожденную стандартной нормой, обозначим через* norm.

(i) *На пространстве X^* имеют место включения* $\mathrm{wk}^* \subseteq \mathrm{wk} \subseteq \mathrm{norm}$.
(ii) *Равенство* $\mathrm{wk}^* = \mathrm{wk}$ *на X^* равносильно рефлексивности X.*

Доказательство. (i) Слабая* топология на пространстве X^* порождается семейством полунорм $\{\|\cdot\|_x : x \in X\}$, а слабая — семейством полунорм $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in X^{**}\}$. Обозначим через $i \colon X \to X^{**}$ каноническое вложение и заметим, что для каждого $x \in X$ и каждого $f \in X^*$ справедливо равенство $\|f\|_x = \|f\|_{i(x)}$. Следовательно, первое из указанных

[1] На самом деле на пространстве X^* есть еще две важные топологии — топология компактной сходимости и топология Макки. О них можно прочитать в книгах по топологическим векторным пространствам (например, А. П. Робертсон и В. Дж. Робертсон, Топологические векторные пространства, М.: Мир, 1967).

выше семейств полунорм содержится во втором, а значит, порождает не более сильную топологию. Это доказывает включение $\mathrm{wk}^* \subseteq \mathrm{wk}$. Включение $\mathrm{wk} \subseteq \mathrm{norm}$ нам уже известно (см. наблюдение 26.3).

(ii) Если X рефлексивно, то указанные выше семейства полунорм совпадают и поэтому порождают одну и ту же топологию $\mathrm{wk} = \mathrm{wk}^*$ на X^*. Обратно, если $\mathrm{wk} = \mathrm{wk}^*$ на X^*, то примененное дважды следствие 26.6 дает равенства

$$X = (X^*, \mathrm{wk}^*)^* = (X^*, \mathrm{wk})^* = X^{**}. \qquad \square$$

Замечание 26.5. Для сравнения отметим, что второе включение $\mathrm{wk} \subseteq \mathrm{norm}$ из п. (i) обращается в равенство тогда и только тогда, когда X конечномерно (см. задачу 20.6 из листка 20).

Подводя итог сказанному выше, для любого нормированного пространства X получаем следующую картинку:

$$X \xrightarrow[\text{канонич.}]{\sim} (X^*, \mathrm{wk}^*)^* \subseteq (X^*, \mathrm{wk})^* = X^{**}.$$

Обратимся теперь к линейным операторам между дуальными парами. Следующее определение обобщает понятие сопряженного оператора из лекции 7.

Определение 26.4. Пусть $\langle X_1, Y_1\rangle$ и $\langle X_2, Y_2\rangle$ — дуальные пары. Говорят, что линейные операторы $T\colon X_1 \to X_2$ и $S\colon Y_2 \to Y_1$ *сопряжены* друг другу, если $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ для всех $x \in X_1,\ y \in Y_2$.

Наблюдение 26.8. Для линейного оператора $T\colon X_1 \to X_2$ рассмотрим его алгебраически сопряженный оператор $T^\sharp\colon X_2^\sharp \to X_1^\sharp$, действующий по правилу

$$T^\sharp(f) = f \circ T \qquad (f \in X_2^\sharp).$$

Легко видеть, что оператор $S\colon Y_2 \to Y_1$, сопряженный к T в смысле определения 26.4, существует тогда и только тогда, когда $T^\sharp(Y_2) \subseteq Y_1$, и при этом $S = T^\sharp|_{Y_2}$. В частности, если такой оператор S существует, то он однозначно определен оператором T.

В дальнейшем оператор $S\colon Y_2 \to Y_1$, сопряженный к оператору $T\colon X_1 \to X_2$ в смысле определения 26.4, будет обозначаться через T'. Заметим, что если такой оператор существует, то существует и оператор $T'' = (T')'$, и $T'' = T$.

Следующее предложение устанавливает условия существования сопряженного оператора.

Предложение 26.9. *Пусть $\langle X_1, Y_1\rangle$ и $\langle X_2, Y_2\rangle$ — дуальные пары и $T\colon X_1 \to X_2$ — линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *оператор T непрерывен относительно топологий $\sigma(X_1, Y_1)$ и $\sigma(X_2, Y_2)$;*
(ii) *оператор $T'\colon Y_2 \to Y_1$ существует;*
(iii) *оператор $T'\colon Y_2 \to Y_1$ существует и непрерывен относительно топологий $\sigma(Y_2, X_2)$ и $\sigma(Y_1, X_1)$.*

Доказательство. (i) $\iff$ (ii). Условие (i) означает в точности, что для любого $y \in Y_2$ полунорма $x \mapsto \|Tx\|_y$ непрерывна на $(X_1, \sigma(X_1, Y_1))$ (см. теорему 25.4 (ii)). Замечая, что

$$\|Tx\|_y = |\langle Tx, y\rangle| = |(y \circ T)(x)|$$

и снова применяя теорему 25.4 (ii) — на этот раз к функционалу $y \circ T$, — заключаем, что условие (i) равносильно непрерывности функционала $y \circ T = T^\sharp(y)$ на X_1 относительно топологии $\sigma(X_1, Y_1)$ для каждого $y \in Y_2$. В силу предложения 26.4 это означает в точности, что $T^\sharp(y) \in Y_1$ для всех $y \in Y_2$, а это, с учетом наблюдения 26.8, равносильно существованию оператора T'.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Как уже было отмечено выше, если существует оператор T', то существует и T'', а именно, $T'' = T$. Применяя к оператору T' уже доказанную эквивалентность (i) $\iff$ (ii), получаем утверждение (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): очевидно. □

Следствие 26.10. *Пусть X и Y — хаусдорфовы локально выпуклые пространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор. Рассмотрим следующие утверждения:*

(i) *оператор T непрерывен;*

(ii) *оператор T непрерывен относительно слабых топологий на X и Y соответственно;*

(iii) *существует оператор $T^*\colon Y^* \to X^*$, действующий по правилу*

$$T^*(f) = f \circ T \qquad (f \in Y^*);$$

(iv) *оператор из п.* (iii) *существует и непрерывен относительно слабых* топологий на Y^* и X^* соответственно.*

Тогда (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv).

Доказательство. Очевидно, (i) $\Longrightarrow$ (iii). Эквивалентности (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv) следуют из предложения 26.9, примененного к дуальным парам $\langle X, X^*\rangle$ и $\langle Y, Y^*\rangle$. □

Обсудим теперь слабо ограниченные множества в локально выпуклых пространствах. Возьмем какую-нибудь дуальную пару $\langle X, Y\rangle$ и заметим, что подмножество $B \subset X$ ограничено относительно слабой топологии $\sigma(X, Y)$ тогда и только тогда, когда $\sup_{x\in B} |\langle x, y\rangle| < \infty$ для каждого $y \in Y$ (см. наблюдение 25.11), т.е. тогда и только тогда, когда множество $y(B) \subset \mathbb{K}$ ограничено для каждого $y \in Y$. Вы, возможно, уже заметили, что «запахло теоремой Банаха–Штейнгауза». Так оно и есть:

Предложение 26.11. *Подмножество хаусдорфова локально выпуклого пространства ограничено тогда и только тогда, когда оно слабо ограничено.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Поскольку слабая топология на X не сильнее исходной (см. наблюдение 26.3), из ограниченности, очевидно, следует слабая ограниченность. Докажем обратное утверждение. Если X — нормированное пространство, то все сводится к теореме Банаха–Штейнгауза (см. следствие 11.8). Рассмотрим теперь общий случай. Нам достаточно доказать, что для любой непрерывной полунормы p на X множество $p(B) \subset \mathbb{R}$ ограничено. Рассмотрим пару (X, p) как полунормированное пространство и обозначим через $X_p = (X, p)/p^{-1}(0)$

ассоциированное с ним нормированное пространство (см. определение 1.2). Очевидно, оператор
$$\pi_p\colon X \to X_p\,, \quad x \mapsto x + p^{-1}(0),$$
непрерывен, а значит, непрерывен и относительно слабых топологий на X и X_p соответственно (см. следствие 26.10). Применяя предложение 25.13, заключаем, что множество $\pi_p(B)$ слабо ограничено в X_p. Поскольку для нормированных пространств предложение уже доказано, множество $\pi_p(B)$ ограничено по норме. Остается заметить, что $p(B) = \{\|\pi_p(x)\| : x \in B\}$. □

Следующее утверждение является частичным обращением следствия 26.10.

Следствие 26.12. *Пусть X и Y — хаусдорфовы локально выпуклые пространства, причем X нормируемо. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен относительно слабых топологий на X и Y соответственно.*

Доказательство. Если оператор T непрерывен относительно слабых топологий, то в силу предложения 25.13 он переводит слабо ограниченные множества в слабо ограниченные, т.е. (с учетом предложения 26.11) ограниченные в ограниченные. Пользуясь нормируемостью X и снова применяя предложение 25.13, заключаем, что T непрерывен. Утверждение «только тогда» вытекает из следствия 26.10. □

Замечание 26.6. Если принять на веру утверждения, сделанные в замечании 25.1, то становится ясно, что следствие 26.12 справедливо не только для нормируемых, но и для всех борнологических (в частности, для всех метризуемых) пространств X. В то же время без каких-либо дополнительных предположений о пространстве X оно неверно (приведите пример!).

Замечание 26.7. На самом деле нетрудно убедиться (убедитесь), что в следствии 26.10, предложении 26.11 и следствии 26.12 хаусдорфовость рассматриваемых пространств несущественна.

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 27

27.1. Аннуляторы и поляры

Продолжим начатое на прошлой лекции обсуждение двойственности. Следующее понятие уже встречалось нам в контексте нормированных пространств.

Определение 27.1. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара. *Аннулятором* подмножества $M \subseteq X$ относительно двойственности $\langle X, Y \rangle$ называется множество

$$M^{\perp}_{\langle X,Y \rangle} = \{y \in Y : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in M\}.$$

В тех случаях, когда ясно, о какой дуальной паре идет речь, мы будем вместо $M^{\perp}_{\langle X,Y \rangle}$ писать просто $M^{\perp}$.

Заметим, что аннулятор $M^{\perp}$ в смысле определения 13.1 — это в точности аннулятор $M^{\perp}_{\langle X,X^* \rangle}$. Понятие преданнулятора из определения 13.1 также сводится к определению 27.1:

Определение 27.2. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. *Преданнулятором* подмножества $N \subseteq X^*$ называется его аннулятор ${}^{\perp}N = N^{\perp}_{\langle X^*,X \rangle}$ относительно двойственности $\langle X^*, X \rangle$. Иначе говоря,

$${}^{\perp}N = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in N\}.$$

Следующее понятие тесно связано с понятием аннулятора и, как мы вскоре увидим, обобщает его.

Определение 27.3. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара. *Полярой* подмножества $M \subseteq X$ относительно двойственности $\langle X, Y \rangle$ называется множество

$$M^{\circ}_{\langle X,Y \rangle} = \{y \in Y : \mathrm{Re}\langle x, y \rangle \leqslant 1 \ \forall x \in M\}.$$

В тех случаях, когда ясно, о какой дуальной паре идет речь, мы будем вместо $M^{\circ}_{\langle X,Y \rangle}$ писать просто M°.

Соглашение 27.1. В дальнейшем нам неоднократно понадобится рассматривать замыкания подмножества M локально выпуклого пространства X относительно топологий, отличающихся от исходной (например, относительно слабой топологии $\sigma(X, X^*)$). В этой связи договоримся о следующих обозначениях. Символ $\overline{M}$ всегда по умолчанию будет означать замыкание множества M относительно исходной топологии пространства X; если же τ — какая-либо другая топология на X, то замыкание M относительно топологии τ будет обозначаться через $\overline{M}^{\tau}$.

Перечислим простейшие свойства поляр, вытекающие непосредственно из определения.

Предложение 27.1. *Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. Справедливы следующие утверждения:*

(i) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq X \Longrightarrow M_2^\circ \subseteq M_1^\circ \subseteq Y$;

(ii) *если $M \subseteq X$ закруглено, то*

$$M^\circ = \{y \in Y : |\langle x, y\rangle| \leqslant 1 \ \forall x \in M\}; \tag{27.1}$$

(iii) *если $M \subseteq X$ — векторное подпространство, то $M^\circ = M^\perp$;*

(iv) *поляра M° любого множества $M \subseteq X$ выпукла и $\sigma(Y, X)$-замкнута;*

(v) *если $M \subseteq X$, то $M^\circ = \left(\overline{\operatorname{conv}(M)}^{\sigma(X,Y)}\right)^\circ$.*

(vi) *если X — хаусдорфово локально выпуклое пространство, $Y = X^*$ и $M \subseteq X$, то $M^\circ = \left(\overline{\operatorname{conv}(M)}\right)^\circ$.*

Замечание 27.2. Иногда равенство (27.1) принимают в качестве *определения* поляры любого (не обязательно закругленного) множества $M \subseteq X$. Больших проблем эти отличия в терминологии обычно не вызывают, т.к. в большинстве ситуаций приходится иметь дело с полярами лишь закругленных множеств.

Замечание 27.3. Заметим, что из п. (ii) следует, в частности, что полярой замкнутого единичного шара в нормированном пространстве X относительно двойственности $\langle X, X^*\rangle$ является замкнутый единичный шар в X^*.

Определение 27.4. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. *Биполярой* подмножества $M \subseteq X$ называется множество

$$M^{\circ\circ} = \left(M^\circ_{\langle X,Y\rangle}\right)^\circ_{\langle Y,X\rangle} \subseteq X.$$

Ясно, что всегда $M \subseteq M^{\circ\circ}$. Более того, отсюда и из предложения 27.1 (iv) немедленно следует, что

$$\overline{\operatorname{conv}(M)}^{\sigma(X,Y)} \subseteq M^{\circ\circ}.$$

Фундаментальный результат теории двойственности, который мы сейчас докажем, утверждает, что на самом деле последнее включение является равенством.

Теорема 27.2 (о биполяре для дуальных пар)**.** *Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. Для любого подмножества $M \subseteq X$ справедливо равенство*

$$M^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{conv}(M)}^{\sigma(X,Y)}.$$

Теорема 27.2, как мы увидим ниже, является частным случаем следующего утверждения.

Теорема 27.3 (о биполяре для локально выпуклых пространств)**.** *Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Для любого подмножества $M \subseteq X$ справедливо равенство*

$$M^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{conv}(M)},$$

где биполяра берется относительно двойственности $\langle X, X^*\rangle$, а замыкание берется в исходной топологии пространства X.

Доказательство. С учетом предложения 27.1 (vi) мы можем заменить M на $\overline{\mathrm{conv}(M)}$ и считать с самого начала, что M выпукло и замкнуто. Таким образом, нам следует доказать включение $M^{\circ\circ} \subseteq M$. Зафиксируем произвольный элемент $x_0 \in X \setminus M$. В силу теоремы об отделении выпуклых множеств (см. теорему 9.13 (iii) и обсуждение после следствия 25.10), существует такой непрерывный $\mathbb{R}$-линейный функционал g на X, что $g(x) \leqslant 1$ для всех $x \in M$, но $g(x_0) > 1$. Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $g = \mathrm{Re}\, f$ для некоторого (единственного) $f \in X^*$ (см. лемму 9.2); если же $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то мы полагаем $f = g$. Неравенство $\mathrm{Re}\, f(x) \leqslant 1$, справедливое для всех $x \in M$, означает, что $f \in M^\circ$, откуда $M^{\circ\circ} \subseteq \{f\}^\circ$. С другой стороны, неравенство $\mathrm{Re}\, f(x_0) > 1$ означает, что $x_0 \notin \{f\}^\circ$. Объединяя два последних наблюдения, заключаем, что $x_0 \notin M^{\circ\circ}$. Это завершает доказательство. □

Доказательство теоремы 27.2. Достаточно применить теорему 27.3 к пространству $(X, \sigma(X, Y))$. □

Следствие 27.4. *Если X — хаусдорфово локально выпуклое пространство и $M \subseteq X$ — выпуклое подмножество, то замыкание M совпадает с его слабым замыканием. В частности, M замкнуто тогда и только тогда, когда оно слабо замкнуто.*

Доказательство. В силу теоремы 27.3, как замыкание M, так и его слабое замыкание совпадают с его биполярой. □

Замечание 27.4. Разумеется, условие выпуклости M в следствии 27.4 существенно. Если бы замкнутость любого подмножества в X была равносильна его слабой замкнутости, то слабая топология на X совпадала бы с исходной, а это в большинстве случаев не так (см. наблюдение 26.3).

Замечание 27.5. Хотя слабая топология на локально выпуклом пространстве X в большинстве интересных случаев строго слабее исходной, все же в некоторых ситуациях эти две топологии ведут себя так, как если бы они совпадали. Напомним, в частности, что линейный функционал на X непрерывен тогда и только тогда, когда он слабо непрерывен (следствие 26.6 (i)), а подмножество в X ограничено тогда и только тогда, когда оно слабо ограничено (предложение 26.11). Теперь же мы видим, что выпуклое подмножество в X замкнуто тогда и только тогда, когда оно слабо замкнуто.

Следующее утверждение уточняет то, что мы уже знаем для нормированных пространств (см. предложение 13.4 и следствие 13.5).

Следствие 27.5. *Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство, $M \subseteq X$ и $N \subseteq X^*$ — произвольные подмножества. Справедливы следующие утверждения:*

(i) ${}^\perp(M^\perp) = \overline{\mathrm{span}(M)} = \overline{\mathrm{span}(M)}^{\mathrm{wk}}$;

(ii) $({}^\perp N)^\perp = \overline{\mathrm{span}(N)}^{\mathrm{wk}^*}$;

(iii) *если X — нормированное пространство, то*

$$({}^\perp N)^\perp = \overline{\mathrm{span}(N)}^{\mathrm{wk}^*} \supseteq \overline{\mathrm{span}(N)}^{\mathrm{wk}} = \overline{\mathrm{span}(N)}; \tag{27.2}$$

(iv) *если X — рефлексивное банахово пространство, то все множества в* (27.2) *совпадают.*

Доказательство. (i) Следует из теоремы 27.3 и следствия 27.4, примененных к множеству $\operatorname{span}(M)$.

(ii) Следует из теоремы 27.2, примененной к дуальной паре $\langle X^*, X\rangle$ и множеству $\operatorname{span}(N)$.

(iii) Следует из (ii), следствия 26.7 и следствия 27.4.

(iv) Следует из (iii) и следствия 26.7. $\square$

Обратимся теперь к линейным операторам между локально выпуклыми пространствами. Следующие два утверждения усиливают предложение 13.8 и следствие 13.9 соответственно.

Следствие 27.6. *Пусть X, Y — хаусдорфовы локально выпуклые пространства и $T\colon X \to Y$ — непрерывный линейный оператор. Справедливы следующие соотношения:*

(i) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$;

(ii) $\overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{Im} T}^{\mathrm{wk}} = {}^\perp(\operatorname{Ker} T^*)$;

(iii) $\operatorname{Ker} T = {}^\perp(\operatorname{Im} T^*)$;

(iv) $\overline{\operatorname{Im} T^*}^{\mathrm{wk}^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Доказательство. Утверждение (i) доказывается точно так же, как и для нормированных пространств (см. предложение 13.8). Утверждение (ii) вытекает из (i) и следствия 27.5. Наконец, утверждения (iii) и (iv) получаются, если применить (i) и (ii) к оператору $T^*\colon (Y^*, \mathrm{wk}^*) \to (X^*, \mathrm{wk}^*)$. $\square$

Следствие 27.7. *Пусть X, Y — хаусдорфовы локально выпуклые пространства и $T\colon X \to Y$ — непрерывный линейный оператор. Тогда*

(i) T^* *инъективен* $\iff$ $\operatorname{Im} T$ *плотен в* Y $\iff$ $\operatorname{Im} T$ *слабо плотен в* Y;

(ii) T *инъективен* $\iff$ $\operatorname{Im} T^*$ *слабо* плотен в* Y.

Наконец, имеет место следующее уточнение теоремы 13.13.

Теорема 27.8. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\operatorname{Im} T$ *замкнут;*

(ii) $\operatorname{Im} T$ *слабо замкнут;*

(iii) $\operatorname{Im} T^*$ *замкнут;*

(iv) $\operatorname{Im} T^*$ *слабо* замкнут.*

Если эти условия выполнены, то

$$\operatorname{Im} T = {}^\perp(\operatorname{Ker} T^*), \quad \operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp, \tag{27.3}$$

и существуют изометрические изоморфизмы

$$\operatorname{Ker} T^* \cong (\operatorname{Coker} T)^*, \quad \operatorname{Coker} T^* \cong (\operatorname{Ker} T)^*. \tag{27.4}$$

Доказательство. Эквивалентность (i) и (ii) — это тривиальный частный случай следствия 27.4. Из теоремы 13.13 мы знаем, что (i) $\iff$ (iii), и что выполнение этих условий влечет за собой (27.3) и (27.4). С другой стороны, второе из равенств (27.3) влечет (iv), а оставшаяся импликация (iv) $\Longrightarrow$ (iii) очевидна. $\square$

Предостережение 27.6. В связи с теоремой 27.8 подчеркнем еще раз, что замкнутое подпространство в сопряженном к банахову пространству вовсе не обязано быть слабо* замкнутым. Для эквивалентности утверждений (iii) и (iv) существенно, что речь там идет именно об образе сопряженного оператора.

Следующий результат является непосредственным следствием, а с исторической точки зрения — предтечей теоремы о биполяре.

Теорема 27.9 (Голдстайн)**.** *Для любого нормированного пространства X канонический образ его замкнутого единичного шара слабо* плотен в замкнутом единичном шаре пространства X^{**}.*

Доказательство. Пусть $M = i_X(\mathbb{B}_{1,X}) \subset X^{**}$. Для дуальной пары $\langle X^{**}, X^* \rangle$ имеем $M^\circ = \mathbb{B}_{1,X^*}$ и, следовательно, $M^{\circ\circ} = \mathbb{B}_{1,X^{**}}$ (см. замечание 27.3). Остается применить теорему 27.2, согласно которой $M^{\circ\circ} = \overline{M}^{\mathrm{wk}^*}$. □

Следствие 27.10. *Пусть X — нормированное пространство и $i_X \colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Тогда*

(i) $i_X \colon (X, \mathrm{wk}) \to (X^{**}, \mathrm{wk}^*)$ — *топологические инъективный оператор, и*
(ii) $\operatorname{Im} i_X$ *слабо* плотен в X^{**}.*

Доказательство. Утверждение (i) следует непосредственно из определения слабой топологии на X и слабой* топологии на X^{**}, а утверждение (ii) вытекает из теоремы 27.9. □

Замечание 27.7. Вместо теоремы 27.9 для доказательства утверждения (ii) можно применить следствие 27.5 к подпространству $\operatorname{Im} i_X \subseteq X^{**}$.

27.2. Равностепенная непрерывность. Теорема Банаха–Алаоглу–Бурбаки

Определение 27.5. Пусть X и Y — топологические векторные пространства. Множество $M \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждой окрестности нуля $V \subseteq Y$ найдется такая окрестность нуля $U \subseteq X$, что $\varphi(V) \subseteq U$ для каждого $\varphi \in M$.

Разумеется, если множество M равностепенно непрерывно, то каждый оператор из M непрерывен (см. предложение 24.1). Также легко видеть, что всякое конечное подмножество в $\mathscr{L}(X, Y)$ равностепенно непрерывно.

Наблюдение 27.11. Если X и Y — нормированные пространства, то множество $M \subseteq \mathscr{L}(X, Y)$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено по операторной норме (докажите!).

Замечание 27.8. Мы уже встречались с понятием равностепенной непрерывности «под другим соусом», а именно, в контексте отображений между метрическими пространствами (см. определение 18.3). Формально ни определение 27.5 не является частным случаем определения 18.3, ни наоборот. Однако оба эти определения являются частными случаями общего понятия равностепенно непрерывного семейства отображений между *равномерными* пространствами. Мы не будем приводить здесь определение равномерного пространства, поскольку для наших целей такая общность не требуется. Говоря нестрого, равномерное пространство — это множество X, снабженное некоторой дополнительной структурой (так называемой *равномерностью*), которая порождает топологию на X, и благодаря наличию которой имеет смысл «сравнивать» между собой окрестности разных точек. В частности, каждое метрическое пространство и каждая топологическая абелева группа обладают естественными равномерными структурами. Вышеупомянутая возможность «сравнивать» окрестности разных точек для этих двух примеров сводится к следующему: чтобы сравнить шары в метрическом пространстве с разными центрами, достаточно сравнить их радиусы, а чтобы сравнить окрестности U и V разных точек x и y в топологической абелевой группе, надо сначала совместить эти точки посредством сдвига на $x-y$, а затем сравнить окрестности U и $V+(x-y)$ точки x. Для равномерных пространств имеют смысл такие понятия, как равномерно непрерывное отображение, равностепенно непрерывное семейство отображений, полнота, пополнение... С теорией равномерных пространств можно познакомиться, например, по книге Р. Энгелькинга «Общая топология» (М.: Мир, 1986).

Предложение 27.12. *Пусть X — топологическое векторное пространство. Рассмотрим следующие свойства множества $M \subseteq X^*$:*

(i) *M равностепенно непрерывно;*
(ii) *M слабо* ограничено.*

Тогда (i) $\Longrightarrow$ (ii)*. Если же X — банахово пространство, то свойства* (i) *и* (ii) *эквивалентны.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Слабая* ограниченность множества M означает в точности, что $\sup_{f\in M} |f(x)| < \infty$ для каждого $x \in X$. Пользуясь равностепенной непрерывностью M, найдем такую окрестность нуля $U \subseteq X$, что $|f(x)| < 1$ для всех $f \in M$ и всех $x \in U$. Если теперь $x \in X$ произволен, то из непрерывности умножения на скаляр следует, что $\lambda x \in U$ для некоторого $\lambda > 0$. Следовательно, $|f(x)| < \lambda^{-1}$ для всех $f \in M$, что и доказывает слабую* ограниченность M.

Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (i) для банахова пространства X вытекает из теоремы Банаха–Штейнгауза (см. следствие 11.7) и наблюдения 27.11. □

Следующий результат существенно усиливает импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii) из предыдущего предложения.

Теорема 27.13 (Банах, Алаоглу, Бурбаки)**.** *Пусть X — топологическое векторное пространство. Всякое равностепенно непрерывное множество $M \subseteq X^*$ относительно компактно в слабой* топологии.*

Доказательство. Заметим, что слабая* топология на X^* является ограничением на X^* тихоновской топологии на пространстве $\mathbb{K}^X$. Пусть $M \subseteq X^*$ — равностепенно непрерывное множество, и пусть K — его замыкание в $\mathbb{K}^X$. Нам достаточно показать, что K компактно и содержится в X^*. В силу предложения 27.12, для каждого $x \in X$ множество $M_x = \{f(x) : f \in M\}$ ограничено в $\mathbb{K}$. Отсюда и из теоремы Тихонова следует, что произведение $\prod_{x\in X} \overline{M}_x$ компактно. Поскольку K — замкнутое подмножество в $\prod_{x\in X} \overline{M}_x$, мы заключаем, что K также компактно.

Покажем теперь, что $K \subseteq X^*$. Пусть $f \in K$ и (f_λ) — направленность в M, сходящаяся к f в тихоновской топологии, т.е. поточечно. Легко видеть, что f — линейный функционал. Для доказательства его непрерывности зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равностепенной непрерывностью M, подберем такую окрестность нуля $U \subseteq X$, что $|f_\lambda(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in U$ и всех λ. Переходя к пределу по λ, получаем, что $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in U$. Следовательно, f непрерывен в нуле, а значит, непрерывен. Таким образом, K — компактное подмножество в X^*, что и требовалось доказать. □

Следствие 27.14. *Если X — нормированное пространство, то замкнутый единичный шар $\mathbb{B}_{1,X^*}$ в его сопряженном пространстве слабо* компактен.*

Для сепарабельных пространств теорему 27.13 можно уточнить.

Теорема 27.15. *Пусть X — сепарабельное топологическое векторное пространство. Всякое равностепенно непрерывное множество $M \subseteq X^*$ относительно компактно и метризуемо в слабой* топологии.*

Доказательство (набросок). Пусть $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ — плотное множество в X и (f_λ) — направленность в M. Из равностепенной непрерывности M следует (убедитесь), что

$$f_\lambda \xrightarrow{\text{wk}^*} f \iff f_\lambda(x_n) \to f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{27.5}$$

Пусть теперь τ — топология на X^*, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $\|f\|_n = |f(x_n)|$. В силу задачи 19 листка 19, топология τ метризуема. С другой стороны, из (27.5) вытекает, что ограничения на M топологии τ и слабой* топологии совпадают. Следовательно, M метризуемо. Остальное следует из теоремы 27.13. □

Следствие 27.16. *Если X — сепарабельное нормированное пространство, то замкнутый единичный шар $\mathbb{B}_{1,X^*}$ в его сопряженном пространстве компактен и метризуем в слабой* топологии.*

Предостережение 27.9. Следует иметь в виду, что если X — бесконечномерное банахово пространство, то X^* неметризуемо в слабой* топологии (несмотря на то, что его единичный шар является таковым при условии сепарабельности X); см. задачу 20 из листка 19).

Следствие 27.17. *Банахово пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда его замкнутый единичный шар $\mathbb{B}_{1,X}$ слабо компактен.*

Доказательство. Если X рефлексивно, то каноническое вложение i_X устанавливает гомеоморфизм между шаром $\mathbb{B}_{1,X}$, снабженным слабой топологией, и шаром $\mathbb{B}_{1,X^{**}}$, снабженным слабой* топологией; последний же компактен в силу следствия 27.14. Обратная импликация следует из теоремы Голдстайна 27.9. □

Замечание 27.10. Первоначальная версия теоремы Банаха–Алаоглу–Бурбаки была доказана Банахом в 1929 г. и представляла собой утверждение, эквивалентное нашему следствию 27.16. Фактически Банах доказал *секвенциальную* компактность шара $\mathbb{B}_{1,X^*}$ в слабой* топологии (в предположении метризуемости X) — в то время понятие компактного топологического пространства, введенное Александровым и Урысоном пятью годами ранее, еще не являлось общепринятым. Современная версия теоремы Банаха–Алаоглу–Бурбаки была получена независимо Алаоглу, Бурбаки, Шмульяном и Какутани в конце 1930-х гг.

27.3. Слабые топологии и компактные операторы

Установим теперь некоторые факты о компактных операторах, основанные на использовании слабых топологий.

Предложение 27.18. *Пусть X и Y — банаховы пространства, причем X рефлексивно. Тогда для любого компактного линейного оператора $T\colon X \to Y$ множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ компактно.*

Доказательство. Согласно определению 18.4, множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ относительно компактно в Y. Остается доказать его замкнутость. Поскольку пространство X рефлексивно, шар $\mathbb{B}_{1,X}$ слабо компактен в X (см. следствие 27.17). Отсюда и из непрерывности T в слабых топологиях (следствие 26.10) вытекает, что множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ слабо компактно в Y, а следовательно, слабо замкнуто и тем более замкнуто в Y. □

Теорема 27.19. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Рассмотрим следующие свойства ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$:*

(i) *T компактен;*
(ii) *$T\colon (X, \mathrm{wk}) \to (Y, \|\cdot\|)$ секвенциально непрерывен (т.е. для любой последовательности (x_n) в X, слабо сходящейся к элементу $x \in X$, последовательность (Tx_n) сходится к Tx по норме).*

Тогда (i) $\Longrightarrow$ (ii)*; если же X рефлексивно, то свойства* (i) *и* (ii) *эквивалентны.*

Доказательство. При доказательстве импликации (i) $\Longrightarrow$ (ii) мы можем считать, что $x = 0$. Из слабой сходимости последовательности (x_n) следует ее ограниченность (следствие 11.8), откуда с учетом компактности оператора T вытекает, что последовательность (Tx_n) относительно компактна в Y. Для доказательства ее сходимости к 0 достаточно доказать, что 0 — ее единственная предельная точка. Пусть y — какая-либо предельная точка этой последовательности, и пусть возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такова, что $Tx_{n_k} \to y$ при $k \to \infty$. Поскольку $x_{n_k} \xrightarrow{\mathrm{wk}} 0$, а T непрерывен в слабых топологиях (следствие 26.10), имеем $Tx_{n_k} \xrightarrow{\mathrm{wk}} 0$, откуда $y = 0$, как и требовалось.

Предположим теперь, что X рефлексивно, и докажем импликацию (ii) $\Longrightarrow$ (i). Зафиксируем произвольную последовательность (x_n) в $\mathbb{B}_{1,X}$; наша задача — показать, что последовательность (Tx_n) имеет сходящуюся (по норме) подпоследовательность. Предположим сначала, что X сепарабельно; тогда, с учетом рефлексивности X, сепарабельно и X^* (см. задачу 8 из листка 5), поэтому шар $(\mathbb{B}_{1,X^{**}}, \mathrm{wk}^*)$ компактен и метризуем в силу следствия 27.16, и таков же гомеоморфный ему шар $(\mathbb{B}_{1,X}, \mathrm{wk})$. Следовательно, некоторая подпоследовательность (x'_n) последовательности (x_n) слабо сходится к элементу $x \in X$; но тогда последовательность (Tx'_n) сходится к Tx по норме в силу условия (ii). Это завершает доказательство импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i) в предположениях, что X рефлексивно и сепарабельно.

Если X несепарабельно, то положим $X_0 = \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, X_0 сепарабельно; кроме того, оно рефлексивно (упражнение: пользуясь задачей 10 из листка 10, докажите, что любое замкнутое подпространство и любое хаусдорфово факторпространство рефлексивного банахова пространства рефлексивны). Далее, из теоремы

Хана–Банаха легко следует (убедитесь), что слабая топология на X_0 совпадает с ограничением на X_0 слабой топологии на X. Следовательно, оператор $T|_{X_0} : X_0 \to Y$ удовлетворяет условию (ii) и поэтому компактен в силу уже разобранного выше случая. В частности, последовательность (Tx_n) имеет сходящуюся (по норме) подпоследовательность, что и требовалось доказать. $\square$

Упражнение 27.1. Приведите пример, показывающий, что для нерефлексивного пространства X условия (i) и (ii) теоремы 27.19 не эквивалентны.

Упражнение 27.2. Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что линейный оператор $T : (X, \mathrm{wk}) \to (Y, \|\cdot\|)$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен и имеет конечномерный образ. (Таким образом, слово «секвенциально» в п. (ii) теоремы 27.19 отбросить нельзя.)

Упражнение 27.3*. Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что ограниченный линейный оператор $T : X \to Y$ компактен тогда и только тогда, когда его ограничение $T|_{\mathbb{B}_{1,X}} : (\mathbb{B}_{1,X}, \mathrm{wk}) \to (Y, \|\cdot\|)$ непрерывно.

Замечание 27.11. Компактные операторы были впервые введены Ф. Риссом в 1913 г. в контексте гильбертовых пространств под названием *вполне непрерывных* операторов. Первоначальное определение Рисса было идентичным условию (ii) теоремы 27.19. Определение, эквивалентное современному определению компактного оператора, было дано также Риссом в 1918 г. Пришел он к этому определению в процессе изучения операторов в пространстве $C[a, b]$, осознав, по-видимому, что в негильбертовом случае условие (ii) уже не столь содержательно. Термин «вполне непрерывный оператор» уступил место термину «компактный оператор» под влиянием монографии Э. Хилле «Функциональный анализ и полугруппы», опубликованной в 1948 г.