2к **Мат. Анализ. Семинар № 8**

Ортогонализация в евкл. пр-ве

① Процесс ортогонализации

Пусть E - евклидово или гильбертово пространство.

Задача 1. Дана линейно независимая система $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ векторов из E.
Построить ортогональную систему $\{\varphi_n\}$ такую, что $\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \mathcal{L}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Решение: Пусть векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ - ортогональны и $f \notin \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Тогда вектор

$$v_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}\varphi_k$$

част. сумма р-да Фурье

- является ортогональной проекцией вектора f на линейную оболочку $L_m = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $v_m = P_{L_m}(f)$.

Достаточно проверить, что $(f - v_m, \varphi_j) = 0$ $\forall j = 1, \dots, m$:

$$(f - v_m, \varphi_j) = (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{m} \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}(\varphi_k, \varphi_j) =$$

$$= (f, \varphi_j) - \frac{(f, \varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2}(\varphi_j, \varphi_j) = 0$$

Значит, $h_m = f - v_m \perp L_m = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$

Процесс ортогонализации: Положим $\varphi_1 = f_1$.
Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ - уже построены.
Положим $\varphi_{m+1} = f_{m+1} - v_m = f_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}\varphi_k$

Тогда $\{\varphi_n\}$ — искомая ортогональная система. Действительно, по построению

1) $\varphi_{m+1} \perp \varphi_j \quad \forall j = 1, \dots, m$.

2) $\forall f \in \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n) \; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \; f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k$.

При этом $\varphi_n \in \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$. Следовательно,

$\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$.

Замечание: 1) Можно построить ортонормированную систему $\{e_n\}$, $e_n = \dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$.

2) Система $\{\varphi_n\}$ однозначно определяется по системе $\{f_n\}$.

Задача 2. Проделать процесс ортогонализации для системы $\{1, t, t^2\}$ в $L_2(-1, 1)$.

Решение: $\varphi_1 = 1$, $\quad (t, 1) = \int\limits_{-1}^{1} t\,dt = 0$.

$$\varphi_2 = t - \frac{(t, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1 = t; \quad \|1\|^2 = 2$$

$$\varphi_3 = t^2 - \frac{(t^2, 1)}{\|1\|^2} 1 - \frac{(t^2, t)}{\|t\|^2} t = t^2 - \frac{1}{3}.$$

$$(t^2, 1) = \int\limits_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}; \quad \|t\|^2 = \int t^2\,dt = \frac{2}{3}$$

$$(t^2, t) = \int\limits_{-1}^{1} t^3\,dt = 0;$$

Ответ: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = t$, $\varphi_3 = t^2 - \dfrac{1}{3}$

Можно нормировать:

$$\|\varphi_1\| = \sqrt{2}, \quad \|\varphi_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \|\varphi_3\| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}.$$

<u>Задача 3а</u>. В пространстве ℓ_2 найти расстояние от вектора $e_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ до подпространства $H_n = \{x \in \ell_2 : \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0,\ x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = 0\}$.

<u>Решение</u>: H_n – конечномерное подпространство, размерности $n-1$. Рассмотрим $\mathcal{L}(e_1, H_n)$ $(e_1 \notin H_n)$. Это n-мерное подпространство. Найдем расстояние от e_1 до H_n.

$x \in H_n \iff \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0 \iff x \perp 1\!\!1_n$, где $1\!\!1_n = (1, \dots, 1, 0 \dots)$. Тогда $\operatorname{dist}(e, H_n) = d$, d – длина проекции e_1 на $1\!\!1_n$. Найдем ее

$$d = \frac{(e_1, 1\!\!1_n)}{\|1\!\!1_n\|} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

<u>Ответ</u>: $\operatorname{dist}(e_1, H_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

<u>Задача 3б</u>. Пусть H_n, $n \geq 2$, из задачи 3а, $H_n \subseteq H_{n+1}$ (очевидно). Применить процесс ортогонализации к цепочке пространств $, H_2, \dots, H_n, \dots$ и построить ортог. систему $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ так, чтобы $\varphi_n \in H_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Решение. Построим исходную систему $\{f_n\}$.

$f_1 = (1, -1, 0, \dots 0,)$ $\quad (x_1 + x_2 = 0)$

$f_2 = (0, 1, -1, \dots 0)$ $\quad (x_1 + x_2 + x_3 = 0)$

$f_3 = (0, 0, 1, -1, \dots 0)$ $\quad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0)$

$\dots$

$f_n = (0, 0 \dots \underset{n}{1}, \underset{n+1}{-1}, 0, \dots)$ $\quad (x_1 + \dots + x_{n+1} = 0)$

Ортогонализация:

$\varphi_1 = f_1 = (1, -1, 0 \dots)$, $\boxed{\|\varphi_1\|^2 = 2, \ (f_2, \varphi_1) = -1}$

$\varphi_2 = f_2 - \dfrac{(f_2, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1 = (0, 1, -1, 0 \dots) + \frac{1}{2}(1, -1, 0, \dots) =$

$= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0 \dots)$; $\boxed{(f_3, \varphi_2) = -1, \ \|\varphi_3\|^2 = \frac{3}{2} \quad (f_3, \varphi_1) = 0}$

$\varphi_3 = f_3 - \dfrac{(f_3, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1 - \dfrac{(f_3, \varphi_2)}{\|\varphi_2\|^2}\varphi_2 =$

$= (0, 0, 1, -1, 0 \dots) + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0 \dots) =$

$= (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0 \dots)$

Догадайтесь, что будет φ_4?

$\varphi_4 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1, 0 \dots)$.

Тогда что такое φ_n?

$\varphi_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n \text{ раз}}, -1, 0 \dots)$

Проверим, что $\varphi_n \in H_{n+1}$

$$\big(\underbrace{\tfrac{1}{n}+\ldots+\tfrac{1}{n}}_{n\ \text{раз}} - 1 = 0.$$

Проверим, что $\varphi_n \perp \varphi_{n+1}$.

$$(\varphi_n, \varphi_{n+1}) = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots \tfrac{1}{n},}_{n} -1\, 0 \ldots)\cdot(\underbrace{\tfrac{1}{n+1} \ldots \tfrac{1}{n+1}}_{n+1}, -1, 0 \ldots) =$$

$$= n\cdot\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

Проверим, что $\varphi_n \perp \varphi_m \quad \forall m > n$.

$$(\varphi_n, \varphi_m) = (\underbrace{\tfrac{1}{n} \cdots \tfrac{1}{n},}_{n} -1, 0 \ldots)\cdot(\underbrace{\tfrac{1}{m} \cdots \tfrac{1}{m}}_{m}, -1\, 0 \ldots) =$$

$$= n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m} = 0.$$

Построим φ_n

Задача 3б. Пусть H – линейное подпр. во в l_2.

$$H = \{(x_1, x_2 \ldots x_n \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\}$$

Доказать, что H – не замкнуто в l_2 и его замыкание совпадает со всем l_2.
H не совпадает с l_2.

Решение: Заметим, что $H_{n+1} \subseteq H \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Пусть $x \in l_2$. Покажем, что $\forall \varepsilon > 0$ точку x можно приблизить т. $y_N \in H_N$ с точностью ε, если $N >> 1$: $\|y_N - x\|_{l_2} < \varepsilon$.

Найдем n: $\|x - x^{(n)}\|_{\ell_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, где

$x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0 \dots)$.

Такое n существует: $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Зафиксируем это n. Пусть $N \geq n$.
Найдем расстояние от $x^{(n)}$ до H_N (так же, как это делали для $e_1 = (1, 0 \dots)$ в задаче 3а). Это расстояние равно проекции $x^{(n)}$ на $1\!\!1_N = (\underbrace{1, \dots, 1}_{N}, 0 \dots 0)$

$$dist(x^{(n)}, H_N) = \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{N}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

если только N достаточно велико.

Тогда $dist(x, H_N) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Следовательно, замыкание пространства $\bigcup\limits_{N=2}^{\infty} H_N$ совпадает с ℓ_2.

(Отсюда следует незамкнутость H).

Задача 3г. Разложить вектор $e_1=(1,0\dots)$ по ортогональной системе φ_n, $n=1,2,\dots$ из задачи 3б.

Решение: $\varphi_n = (\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}}_{n\text{ раз}}, -1, 0\dots)$

$$(e_1,\varphi_n)=\frac{1}{n};\quad \|\varphi_n\|^2 = n\cdot\frac{1}{n^2}+1=\frac{n+1}{n}$$

$$e_1=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e_1,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot n}{n\cdot(n+1)}\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{= a_n}\cdot\varphi_n$$

Аналогично разложим e_2

$$(e_2,\varphi_1)=-1,\quad (e_2,\varphi_n)=\frac{1}{n},\quad n=2,\dots$$

$$e_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e_1,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n = -\frac{1}{2}\varphi_1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\varphi_n$$

Далее можно выписать разложение для e_n.

Выпишем равенство Парсеваля для e_1 и φ_n:

$$\|e_1\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n\|^2\cdot a_n^2,\quad a_n=\frac{1}{n+1},\quad \|\varphi_n\|^2=\frac{n+1}{n}$$

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\,\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Легко проверить, что эта тождество, найдя сумму ряда справа

② Общий вид линейного функционала в гильбертовом пр-ве

Пусть $E=\mathbb{R}^n$ конечномерное пр-во

Пусть f - линейный функционал на $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Задача 4 $\exists!\, y\in H:\ f(x)=(x,y)$.

Решение. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ - канонический базис в $\mathbb{R}^n$, тогда $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$$x=\sum_{k=1}^n x_k e_k \Rightarrow f(x)=\sum_{k=1}^n x_k f(e_k).$$

Обозначим $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$, $y_k=f(e_k)$.

тогда $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $f(x)=\sum_{k=1}^n x_k y_k=(x,y)$.

Единственность. Пусть $\exists$ два вектора y_1, y_2

$$f(x)=(x,y_1)=(x,y_2) \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

Тогда $(x, y_1-y_2)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$, Возьмем $x=y_1-y_2$

тогда $(y_1-y_2, y_1-y_2)=\|y_1-y_2\|^2=0 \Rightarrow y_1=y_2$

Аналогичное утверждение верно в любом гильбертовом пространстве с одним важным дополнением: функционал должен быть непрерывным:

Пусть $f: H\to\mathbb{R}$, где H - гильбертово пр-во.

f - линейный, $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$ $\forall x,y\in H$

$f(x)$ - непрерывный, если $x_n \to x$ в H, то $f(x_n) \to f(x)$.

<u>Пример</u> (основной) Пусть $v \in H$

$f(x) = (v, x)$.

Очевидно, это линейный функционал.

Он непрерывен:

$$|f(x) - f(y)| = |(v, x) - (v, y)| \leq \|v\| \cdot \|x - y\|$$

<u>Задача 5.</u> Пусть $f(x)$ - линейный непрерывный функционал на гильб. пр-ве H. Тогда $\exists!\, v \in H \quad f(x) = (v, x)$.

<u>Решение.</u> Пусть $f(x)$ - некоторый линейный непрерывный функционал. Найдем для него вектор $v \in H$.

Рассмотрим его <u>ядро</u>:

$K = \mathrm{Ker}(f) = \{x \in H : f(x) = 0\}$

K - замкнутое подпространство.

Если $f(x) = 0$, $f(y) = 0 \Rightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$

т.е. K - подпространство. Проверим замкнутость. Пусть $x_n \in K$, $x_n \to x$ в H

Тогда $f(x_n) = 0$. По непрерывности

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0 \Rightarrow x \in K.$$

Если $f(x) \equiv 0 \Rightarrow v = 0$ очевидно.

Пусть $f(x) \not\equiv 0$, т.е. $\exists z \in H$: $f(z) \neq 0$.
K – замкнутое подпространство, $z \notin K$.
тогда $\exists !\, y \in K$ – ближайший к т. z,
причем $h = z - y \perp K$, $h \in K^{\perp}$
т.е. $K^{\perp} \neq \{0\}$. Покажем, что $\dim K^{\perp} = 1$

Пусть $h_1, h_2 \in K^{\perp}$. Рассмотрим вектор

$$h = f(h_1)\, h_2 - f(h_2) \cdot h_1 :$$

$$f(h) = f(h_1) \cdot f(h_2) - f(h_2) \cdot f(h_1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow h \in K$, но $h \in K^{\perp}$ ($K^{\perp}$ – линейное)
т.е. $h \in K \cap K^{\perp} \Rightarrow h = 0$. Значит,
h_1 и h_2 – коллинеарны $\Rightarrow \dim K^{\perp} = 1$.

Пусть $h \in K^{\perp}$, $\|h\| = 1$. $a = f(h)$.
Любой вектор $x \in H$ представим в виде

$$x = y + \lambda h, \text{ где } y \in K, \lambda \in \mathbb{R},$$

причем единственным образом. Тогда

$$f(x) = f(y) + \lambda f(h) = \lambda \cdot a$$

$$(x, ah) = (y + \lambda h, ah) = \lambda a \|h\|^2 = \lambda a$$

т.е. $\forall x \in H$ $f(x) = (x, ah) = (x, v)$, $\boxed{v = a \cdot h}$