1 HW 5

Задача 1.1. Покажите, что если $U = D(f)$ главное открытое подмножество в $X = \operatorname{Spec}(A)$, а V главное открытое подмножество в U, то V главное открытое подмножество и в X, выведите отсюда, что пересечение двух открытых аффинных подмножеств произвольной схемы можно покрыть открытыми подмножествами, главными в них обоих.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&X = \operatorname{Spec} A \quad X_f = U \subset X \Rightarrow U \simeq (\operatorname{Spec} A)_f \simeq \operatorname{Spec}(A_f)\\
&U_g = V \subset U \Rightarrow V \simeq (\operatorname{Spec} A_f)_g \simeq \operatorname{Spec}((A_f)_g)\\
&\simeq \operatorname{Spec} A_{fg} \simeq (\operatorname{Spec} A)_{fg} \Rightarrow V = X_{fg}\\
&U_1 = \operatorname{Spec} A_1 \quad U_2 = \operatorname{Spec} A_2 \subset X\\
&U_1 \cap U_2 = \operatorname{Spec} A_2 \subset X\\
&\operatorname{Spec} A_{f_1} = \bigcup \operatorname{Spec} B_{h_i}\\
&\operatorname{Spec} B_{h_1} \hookrightarrow \operatorname{Spec} A_{f_1} \Rightarrow A_{f_1} \to B_{h_1}\\
&\operatorname{Spec} A_f \hookrightarrow \operatorname{Spec} B \Rightarrow B \to A_{f_1} \Rightarrow B_{h_1} \to (A_{f_1})_{\lambda_1}
\end{aligned}
$$

B_{h_1} - функции $\neq 0$ в h_1 на B
$(A_{f_1})_{\lambda_1}$ - функции $\neq 0$ в h_1 на A_{f_1}
$\operatorname{Spec} B_{h_1} \subset \operatorname{Spec} A_{f_1} \Rightarrow (A_{f_1})_{\lambda_1} = B_{h_1}$ и так $\forall f_i, h_j$ □

Задача 1.2. Пусть X схема с открытым аффинным покрытием $U_i = S\sec(A_i)$. Докажите, что $\operatorname{Spec}(A_i/N(A_i))$, где N обозначает нильрадикал, тоже склеиваются в схему (замечание: она совпадает со схемой X_{red}, определенной на лекциях - т. е. со структурным пучком $\mathcal{O}_X/\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}(U)$ состоит из сечений, нильпотентных в любой точке U).

Доказательство. $X = \bigcup U_i = \bigcup \operatorname{Spec} A_i$
$(\operatorname{Spec} \frac{A_i}{N(A_i)}, \frac{A_i}{N(A_i)})$ - аффинная схема
$\operatorname{Spec} \frac{A_i}{N(A_i)} \simeq \operatorname{Spec} A_i$ - как топологические пространства
$U_{ij} = \operatorname{Spec} \frac{A_i}{N(A_i)} \cap \operatorname{Spec} \frac{A_j}{N(A_j)} \simeq \operatorname{Spec} A_i \cap \operatorname{Spec} A_j$
$f : (U_{ij}, O_{U_{ij}}) \to (U_{ji}, O_{U_{ji}})$, f - тождеств. как отображения на топологическом пространстве.

$$
\begin{aligned}
&\varphi^\star_{ji} : O_x(U_{ji}) \simeq O_x(U_{ij}) \quad \varphi^\star_{ji}(N(U_{ji})) = N(U_{ij})\\
&\Rightarrow \exists f^\star_{ji} : \frac{O_x(U_{ji})}{N(U_{ji})} \to \frac{O_x(U_{ji})}{N(U_{ji})}\\
&\Rightarrow f^\star_{ji} \circ f^\star_{ij} = \mathrm{id} \quad \text{и } f^\star_{ik} = f^\star_{jk} \circ f^\star_{ij}
\end{aligned}
$$

□

Задача 1.3. Пусть $X, Y S$-схемы, а $Z Y$-схема (в частности, Z тоже S-схема). Проверьте, что $(X \times_S Y) \times_Y Z$ изоморфна $X \times_S Z$.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "\beta"] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] \arrow[dddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& X \times_S Y \times_Y Z \arrow[r, "\Pi_2"] \arrow[d, "\Pi_1"] & Z \arrow[d, "g"] \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "h"] & S
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi : W \to X \\
&\psi : W \to Z \\
&fg\psi = h\varphi \Rightarrow \exists! \alpha : W \to X \times_S Y, \text{ такое что} p_1 \circ \alpha = \varphi \quad p_2 \circ \alpha = g\psi \\
&\Rightarrow \exists! \beta : W \to X \times_S Y \times_Y Z, \text{ такое что} \Pi_2 \circ \beta = \psi \quad \Pi_1 \circ \beta = \alpha \\
&\Rightarrow p_1 \circ \Pi_1 \circ \beta = \varphi \quad \Pi_2 \circ \beta = \psi
\end{aligned}$$

При пост композиции с p_1 могла потеряться единственность
Пусть $\exists x : W \to X \times_S Y \times_Y Z$, такое что $p_1 \circ \Pi_1 \circ \gamma = \varphi \quad \Pi_2 \circ \gamma = \psi$ $p_2 \circ \Pi_1 \circ \gamma = g \circ \Pi_2 \circ \gamma = g\psi \Rightarrow \Pi_1 \circ \gamma = \alpha$ (из-за единственности α) $\Pi_2 \circ \gamma = \psi \Rightarrow \gamma = \beta$ из-за единственности β □

Задача 1.4.

(а) Пусть X приведенная схема над полем k и L сепарабельное алгебраическое расширение k. Докажите, что $X_L = X \otimes_k L$ тоже приведена.

(б) Приведите пример схемы, которая приведена, но не геометрически приведена.

Доказательство.

(а) X - привед. следовательно $X = \bigcup U_i = \bigcup \operatorname{Spec} A_i$, A_i - привед.
без потери общности $X = \operatorname{Spec} A$, привед. локальное свойство $\Rightarrow$ без потери общности $D(f) \subset \operatorname{Spec}(A \otimes L)$. Рассмотрим $D(f) \quad f = \sum a' \otimes b'$ $A' = \langle a' \rangle$
$\Rightarrow$ без потери общности $\operatorname{Spec} A' \otimes L'$ то есть A' - нечет, тогда в нем кон. количество минимальных простых $A' \hookrightarrow \prod\limits_{p_i \in \operatorname{Spec} min} = \bigoplus \frac{A}{p_i}$, тогда без потери общности $A = \bigoplus Q(\frac{A}{p_i}) = \bigoplus F_i$
$(\bigoplus F_i) \otimes L = \bigoplus (F_i \otimes_k L)$. Аналогично без потери общности $L = k(b_1, \ldots, b_i, \ldots)$ - кон. сеп. $\Rightarrow L = k(\alpha_1) \Rightarrow A \otimes_k L = A(\alpha_1)$ - привед.

(б)

$$\begin{aligned}
&F_p(t^{\frac{1}{p}}) \otimes F_p(t^{\frac{1}{p}}) = \frac{F_p(t)[x][y]}{(x^p - t)(y^p - t)} \text{ - не привед, так как} \\
&x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0 \qquad (x-y)^p = x^p - y^p = t - t = 0 \\
&F_p(t^{\frac{1}{p}}) = L \qquad \operatorname{Spec} L \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} L \text{ - не привед сх} \\
&\text{но } \operatorname{Spec} L \text{ - спектр поля} \Rightarrow \text{привед сх}
\end{aligned}$$

□

Задача 1.5. Пусть X, Y целые схемы. Говорят, что морфизм $f : X \to Y$ доминантный, если образ топологического пространства X плотен в Y. Докажите, что следующие условия эквивалетны:

(a) f доминантный

(b) общая точка X отображается в общую точку Y

(c) гомоморфизм пучков $f^{\#}$ инъективен.

Доказательство.

$(a \Rightarrow b)$ y - общая точка Y, x - общая точка X
$\overline{\{x\}} = X \quad Y = \overline{f(X)} = \overline{f(\overline{\{x\}})} = \overline{f(\{x\})} \Rightarrow f(\{x\}) = \{y\}$

$(b \Rightarrow a)$ $f(\{x\}) = \{y\} \Rightarrow \overline{f(\{x\})} = \overline{f(\overline{\{x\}})} = \overline{\{y\}} = Y$

$(a \Rightarrow c)$ $0 \neq U \subset X$ - афф откр $f(U) \subset U \subset Y$ - афф откр, $U = \operatorname{Spec} A \quad U = \operatorname{Spec} B$ A, B - области $\Rightarrow$ $f|_U : U \to V \to \varphi : B \to A$. f переводит общую точку в общую точку $\Leftrightarrow \varphi^{-1}((0)) = (0) \Leftrightarrow f^{\star}$ - инъ, любое его ограничение на откр. инъ.

$(c \Rightarrow a)$ $f^{\star}$ - инъ, $\forall = \operatorname{Spec} A \subset X \quad V = \operatorname{Spec} B \subset Y \quad f(U)$ $f|_U : U \to V \to \varphi : B \to A$ - инъ $\Rightarrow \varphi((0)) = (0) \Rightarrow$ $f|_U$ переводит общую точку U в общую точку V и так $\forall U, V \quad f(U) \subset V$ - афф $\Rightarrow f$ переводит общую точку X в общую точку Y

□

Задача 1.6.

(a) Проверьте, что морфизм $\phi_{n,m} : \mathbb{A}_k^n \times_k \mathbb{A}_k^m \to \mathbb{A}_k^{mn+n+m}$, заданный формулой $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, x_1y_1, x_1y_2, \ldots, x_ny_m)$ - замкнутое вложение, и опишите его образ.

(б) Проверьте, что формула $((X_0 : \cdots : X_n), (Y_0 : \cdots : Y_m)) \mapsto (X_0Y_0 : X_0Y_1 : \cdots : X_nY_m)$ задает замкнутое вложение $S_{n,m} : \mathbb{P}_k^n \times_k \mathbb{P}_k^m$ в $\mathbb{P}_k^{mn+m+n}$.

(в) Вычислите степень получившейся замкнутой подсхемы в $\mathbb{P}_k^{mn+m+n}$. Указание: пусть P ее многочлен Гильберта, тогда $P(d)$ при больших d размерность пространства многочленов от $X_0, \ldots, Y_m$, однородных степени d как по X_i, так и по Y_j.

Доказательство.

(а)

(б)

(в)

□