Введение в теорию алгоритмов

1. Частичная функция. Вычислимые функции на словах в конечном алфавите и на кортежах натуральных чисел. Тезис Чёрча – Тьюринга.
2. Определение машины Тьюринга. Конфигурации. Формальное описание работы машины Тьюринга. Пример машины Тьюринга, вычисляющей некоторую функцию.
3. Вычислимая нумерации (кодирование) пар и кортежей натуральных чисел. Вычислимость обратных функций (проекций). Сведение понятия вычислимой функции с несколькими аргументами к понятию вычислимой функции с одним аргументом.
4. Разрешимые множества. Примеры разрешимых множеств. Разрешимость конечных множеств. Замкнутость разрешимых множеств относительно булевых операций (объединения, пересечения и дополнения)
5. Перечислимые множества. Равносильность пяти определений перечислимого множества.
6. Свойства перечислимых множеств. Замкнутость относительно объединения и пересечения. Примеры перечислимых множеств. Существование неперечислимых множеств (из соображений мощности). Теорема Поста (критерий разрешимости множества).
7. Диофантовы уравнения и диофантовы множества. Перечислимость диофантовых множеств. Теорема Матиясевича (без доказательства). Решение 10-й проблемы Гильберта доказательство с использованием теоремы Матиясевича и существования перечислимого неразрешимого множества.
8. Теорема о графике вычислимой функции.
9. Универсальная машина Тьюринга. Её существование.
10. Универсальная функция для данного класса функций. Условное равенство частичных функций. Существование универсальной функции для класса вычислимых функций.
11. Вычислимая функция, непродолжаемая до тотальной вычислимой. Пример перечислимого неразрешимого множества. Пример неперечислимого множества.
12. Проблема остановки машины Тьюринга. Неразрешимость проблемы остановки.
13. Существование пары неотделимых перечислимых множеств.
14. Главная универсальная вычислимая функций и ее существование.
15. Теорема Райса-Успенского.
16. Понятие m-сводимости. Свойства m-сводимости.
17. m-полные множества. Пример m-полного множества.
18. Теорема Клини о неподвижной точке. Существование программы, печатающей свой номер (в данной главной нумерации).

Теоремы Гёделя о неполноте.

19. Арифметика Пеано PA. Пример вывода в PA.
20. Арифметика Робинсона Q. Доказательство выводимости Q в PA.
21. Кодирование конечной последовательностей чисел одним числом и использование этого для выражения предикатов на множестве натуральных чисел формулами в сигнатуре PA. Выразимость предиката «x^y=z».
22. Эффективно аксиоматизируемые теории. Разрешимые и перечислимые теории. Теорема об эквивалентности эффективной аксиоматизируемости и перечислимости теорий. Разрешимость полных эффективно аксиоматизируемых теорий. Примеры разрешимых теорий.
23. Ограниченные формулы и классы Δ_0, Σ_1 и Π_1.

24. Кодирование последовательностей, конфигураций и программ машин Тьюринга. Формула, истинная тогда и только тогда, когда машина Тьюринга заканчивает работу на данном входе (предикат остановки).
25. Эквивалентность разрешимости и Δ_0-определимости для подмножеств $\mathbb{N}^k$. Эквивалентность перечислимости и Σ_1-определимости для подмножеств $\mathbb{N}^k$.
26. Первая теорема Гёделя о неполноте. Теорема Гёделя-Россера (формулировка). Вторая теорема Гёделя о неполноте (формулировка).