27 октября 2020 г. 23:18

• Гомологии и когомологии с коэффициентами в абелевой группе

$X = \cup \sigma_\alpha$ клеточное пространство

$0 \leftarrow C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \leftarrow \dots$

$C_k \cong \mathbb{Z}^{m_k}$, где m_k – количество k-мерных клеток

$H_k(X) = H_k(C_\bullet)$ — абелева группа

$H_k(X) = \underbrace{\mathbb{Z}^{b_k}}_{\text{свободная часть}} \oplus \underbrace{\bigoplus_i \mathbb{Z}_{d_{k,i}}}_{\text{кручение}}$

свободная часть

b_k – числа Бетти

кручение

A – абелева группа (например $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$)

$C_k(A) = C_k \otimes A \cong A^{m_k}$ — формальные линейные комбинации k-мерных клеток с коэффициентами в A

$0 \leftarrow C_0(A) \xleftarrow{\partial} C_1(A) \xleftarrow{\partial} C_2(A) \leftarrow \dots$

<u>Опр.</u> $H_k(X;A)$ – гомология этого комплекса

$C^k(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_k, A) = \mathrm{Hom}_A(C_k(A), A) \cong A^{m_k}$ —

пространство (группа) A-значных функций на множестве k-мерных клеток

$$0 \to C^0(A) \xrightarrow{\delta} C^1(A) \xrightarrow{\delta} C^2(A) \xrightarrow{\delta} \dots$$

- коцепи
- кограничный гомоморфизм
- коциклы
- кограницы

$$\delta f(a) := f(\partial a^0)$$

матрица оператора δ сопряжена (транспонирована) матрице оператора ∂

когомологии

$$H^k(X;A) = \frac{k\text{-мерные коциклы}}{k\text{-мерные кограницы}}$$

Пример $X = \mathbb{R}P^3$

$$C_\bullet \quad 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

$$C_\bullet(\mathbb{R}) \quad 0 \leftarrow \mathbb{R} \xleftarrow{0} \mathbb{R} \xleftarrow{\cong} \mathbb{R} \xleftarrow{0} \mathbb{R} \leftarrow 0$$

$$C_\bullet(\mathbb{Z}_2) \quad 0 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \leftarrow 0$$

k	0	1	2	3
$H_k(\mathbb{R}P^3)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
$H_k(\mathbb{R}P^3;\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0	0	$\mathbb{R}$
$H_k(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$

$$C^\bullet(\mathbb{Z}) \quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

$$C^\bullet(\mathbb{R}) \quad 0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{0} \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \xrightarrow{0} \mathbb{R} \to 0$$

$$C^\bullet(\mathbb{Z}_2) \quad 0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

k	0	1	2	3
$H^k(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
$H^k(\mathbb{R}P^3;\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0	0	$\mathbb{R}$
$H^k(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$

Свойства

- Если A — поле, то $H_k(X;A)$ — векторное пр-во
(например, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p \dots$)
$$\Rightarrow H_k(X;A) \cong A^{b_k}$$

$H^k(X;A) \cong A^{b_k}$ — двойственное векторное пр-во

$b_k = b_k(A) = \dim H_k(X;A)$ зависит от поля

Если $A = \mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (т.е. х-ки 0)

то b_k = ранг свободной части в $H_k(X)$

- Гомоморфизмы прямого и обратного образа

$$f: X \to Y \rightsquigarrow \begin{array}{l} f_*: H_k(X;A) \to H_k(Y;A) \\ f^*: H^k(Y;A) \to H^k(X;A) \end{array}$$

- Для произвольной A имеются гомоморфизмы

$H_k(X) \otimes A \longrightarrow H_k(X;A)$ инъективный

$H^k(X;A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_k(X;A), A)$ сюръективный

которые в общем случае не являются изоморфизмами

Теорема ("Формула универсальных коэффициентов")

Группы $H_k(X)$ однозначно определяют группы $H_k(X;A)$ и $H^k(X;A)$ для произвольной A

Алгоритм: – даны группы $H_k(X)$

– строим "модельный" комплекс, реализующий эти группы (и не имеющий отношения к клеточному)

— переходим в модельном комплексе с k-той A

	k	
$H_k(X)$	$\mathbb{Z}$	$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0$
$H_k(X,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$0 \leftarrow \mathbb{R} \leftarrow 0$
$H_k(X,\mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$0 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \leftarrow 0$
$H^k(X,\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	$0 \to \mathbb{Z} \to 0$
$H^k(X,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$0 \to \mathbb{R} \to 0$
$H^k(X,\mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$

	k	$k+1$	
$H_k(X)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \leftarrow 0$
$H_k(X,\mathbb{R})$	0	0	$0 \leftarrow \mathbb{R} \xleftarrow{\cong} \mathbb{R} \leftarrow 0$
$H_k(X,\mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$0 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \leftarrow 0$
$H^k(X,\mathbb{Z})$	0	$\mathbb{Z}_2$	$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to 0$
$H^k(X,\mathbb{R})$	0	0	$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \to 0$
$H^k(X,\mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \to 0$

Пример

k	0	1	2	3
$H_k(\mathbb{R}P^3)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
$H_k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$H^k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$H^k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	0	[illegible]	$\mathbb{Z}$

Гомоморфизм Бокштейна β

$$H_{k+1}(X,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} H_k(X,\mathbb{Z})$$

$H^k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
$H_k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{R})$ $H^k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0	0	$\mathbb{R}$

$\beta(u) = \bar{2}^{\sigma k} \in H_k(X,\mathbb{Z})$

Следствие

$$H_k(X) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus Tor_k \qquad Tor_k \cong Tor^{k+1}$$

$$H^k(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus Tor^k$$

Теорема (Обращение формулы универсальных к-тов)

Группы $H_k(X,\mathbb{Q})$ и $H_k(X,\mathbb{Z}_{p^n})$ однозначно определяют $H_k(X)$ (а значит, и $H_k(X;A)$, $H^k(X;A)$ для любой A)

- **Эйлерова характеристика**

Опр. $\chi(X) = \sum\limits_{k\geq 0} (-1)^k b_k$, $b_k = \dim H_k(X,\mathbb{F})$

Ут6 (Задача)

- $\chi(X)$ — гомотопический инвариант
- $\chi(X)$ не зависит от выбора поля коэффициентов, использованного для определения чисел Бетти
- Если X — конечное клеточное пр-во, то

• Если X – конечное клеточное пр-во,

$$\chi(X) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k m_k$$, где m_k – количество k-мерных клеток

$m_k = \mathrm{rk}\, C_k$

Для многогранника $\chi(M) = \underset{m_0}{\underset{\parallel}{В}} - \underset{m_1}{\underset{\parallel}{Р}} + \underset{m_2}{\underset{\parallel}{Г}}$.

Примеры

$\chi(S^2) = 2$

$\chi(S_g) = 2 - 2g$

$\chi(\cdot) = 1 \quad = \quad \chi(\mathbb{R}^n) \neq (-1)^n$

$\chi(S^1) = 0$

$\chi(S^n) = \begin{cases} 2 & n \text{ чётно} \\ 0 & n \text{ нечетно} \end{cases}$

$\chi(\mathbb{C}P^n) = n+1$

$\chi(\mathbb{R}P^n) = \frac{1}{2}\chi(S^n) = \begin{cases} 1 & n \text{ чётно} \\ 0 & n \text{ нечетно} \end{cases}$

Свойство аддитивности (для клеточных пространств)

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

Секретное знание (без доказательства)

Пусть X – не обязательно компактное пр-во, разбитое на конечное число клеток

'полуалгебраический образом

$$\chi^{\text{алг}}(X) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k m_k \quad , \quad m_k \text{ — число } k\text{-мерных клеток} \qquad \chi^{\text{алг}}(\mathbb{R}^n) = (-1)^n$$

- не является гомотопическим инвариантом, но является комбинаторным
- $\chi^{\text{алг}}(X \setminus A) = \chi^{\text{алг}}(X) - \chi^{\text{алг}}(A) \quad \left(= \chi(X) - \chi(A) \ , \ A \subset X \text{ клеточн. комп.} \right)$
- Если X компактно, то $\chi^{\text{алг}}(X) = \chi(X)$
- Если X — гладкое n-мерное многообразие, то
$$\chi^{\text{алг}}(X) = (-1)^n \chi(X)$$

Следствие: M — компактное нечётномерное многообразие $\Rightarrow \chi(M) = 0$

Пример $X = S^2 \setminus \{n \text{ точек}\}$

$$\chi(X) = \chi^{\text{алг}}(X) = \chi(S^2) - n\chi(\cdot) = 2-n$$

С другой стороны,

$$X \sim \bigvee_{n-1} S^1 \Rightarrow \chi(X) = 1-(n-1) = 2-n$$

$S_g \setminus \{n \text{ точек}\} \sim \bigvee_{n-1+2g} S^{\cdot\cdot}$ $\quad \varkappa(\ldots) = \chi(\ldots) = 2-2g-n$