

## Семинар 7.

**Задача 1.** (Эта задача является продолжением задачи 2 к семинару 5.)

- 1) Докажите, что если кривая  $Y$  степени  $d$  на плоскости пересекает некоторую прямую  $l$  в  $d$  различных точках, и проективные координаты выбраны таким образом, что точка  $(1 : 0 : 0)$  лежит на  $l$  и не совпадает ни с одной из точек пересечения  $l \cap Y$ , то в уравнении кривой коэффициент при  $x_0^d$  ненулевой.
- 2) Пусть однородная форма  $G(x_0 : x_1 : x_2)$  степени  $d$  является уравнением кривой  $Y$  из предыдущего пункта, а однородная форма  $F(x_0 : x_1 : x_2)$  обращается в ноль на кривой  $Y$ . Тогда, согласно утверждению задачи 2 к семинару 5, имеется представление вида  $F = SG + R$ , такое что  $x_0$  входит в однородную форму  $R$  только в степенях, меньших  $d$ . Докажите, что  $R$  делится на уравнение прямой  $l$ .
- 3) Докажите, что в условиях пункта 1 существует не более чем конечное множество прямых, проходящих через точку  $(1 : 0 : 0)$  и не пересекающих кривую  $Y$  в  $d$  различных точках. Выведите из этого, что форма  $F$  делится на форму  $G$ .

**Задача 2.** 1) Рассмотрите рациональную параметризацию окружности  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  с помощью пучка прямых через точку  $(-1, 0)$ . (Параметром  $t$  в полученной параметризации будет угловой коэффициент прямых пучка.)

- 1) Получите из этой параметризации известные формулы для перечисления пифагоровых троек (то есть троек натуральных чисел  $(a, b, c)$  таких, что  $a^2 + b^2 = c^2$ ).
- 2) Получите аналогичные формулы для перечисления троек натуральных чисел  $(a, b, c)$  - длин сторон целочисленных треугольников с углом 60 градусов и найдите первый такой треугольник.

**Задача 3.** Пусть  $C$  – невырожденная коника, и  $O$  – произвольная точка вне  $C$ . Проведем три произвольные прямые  $l, m, n$  через точку  $O$ , пересекающие конику  $C$  в точках  $X$  и  $X_1, Y$  и  $Y_1, Z$  и  $Z_1$  соответственно, как показано на рисунке ниже. Тогда по теореме Дезарга точки  $S = (YZ) \cap (Y_1Z_1)$ ,  $S' = (XZ) \cap (X_1Z_1)$ ,  $S'' = (XY) \cap (X_1Y_1)$ , лежат на одной прямой (оси Дезарга), которую мы обозначим через  $\mathbf{p}_O$ . Докажите, что прямая  $\mathbf{p}_O$  не зависит от выбора вписанных в конику  $C$  перспективных треугольников  $XYZ$  и  $X_1Y_1Z_1$ , для которых она является осью Дезарга. (Например, вместо пары треугольников  $XYZ$  и  $X_1Y_1Z_1$  можно взять пару треугольников  $X_1YZ$  и  $XY_1Z_1$ ) Она называется **полярной точкой  $O$  относительно коники  $C$** .

**Задача 4.** 1) Докажите, что для любой прямой  $l$  через точку  $O$ , пересекающей конику  $C$  в точках  $X$  и  $X_1$ , четверка точек  $X, X_1, A, O$ , где  $A = \mathbf{p}_O \cap l$ , является гармонической.

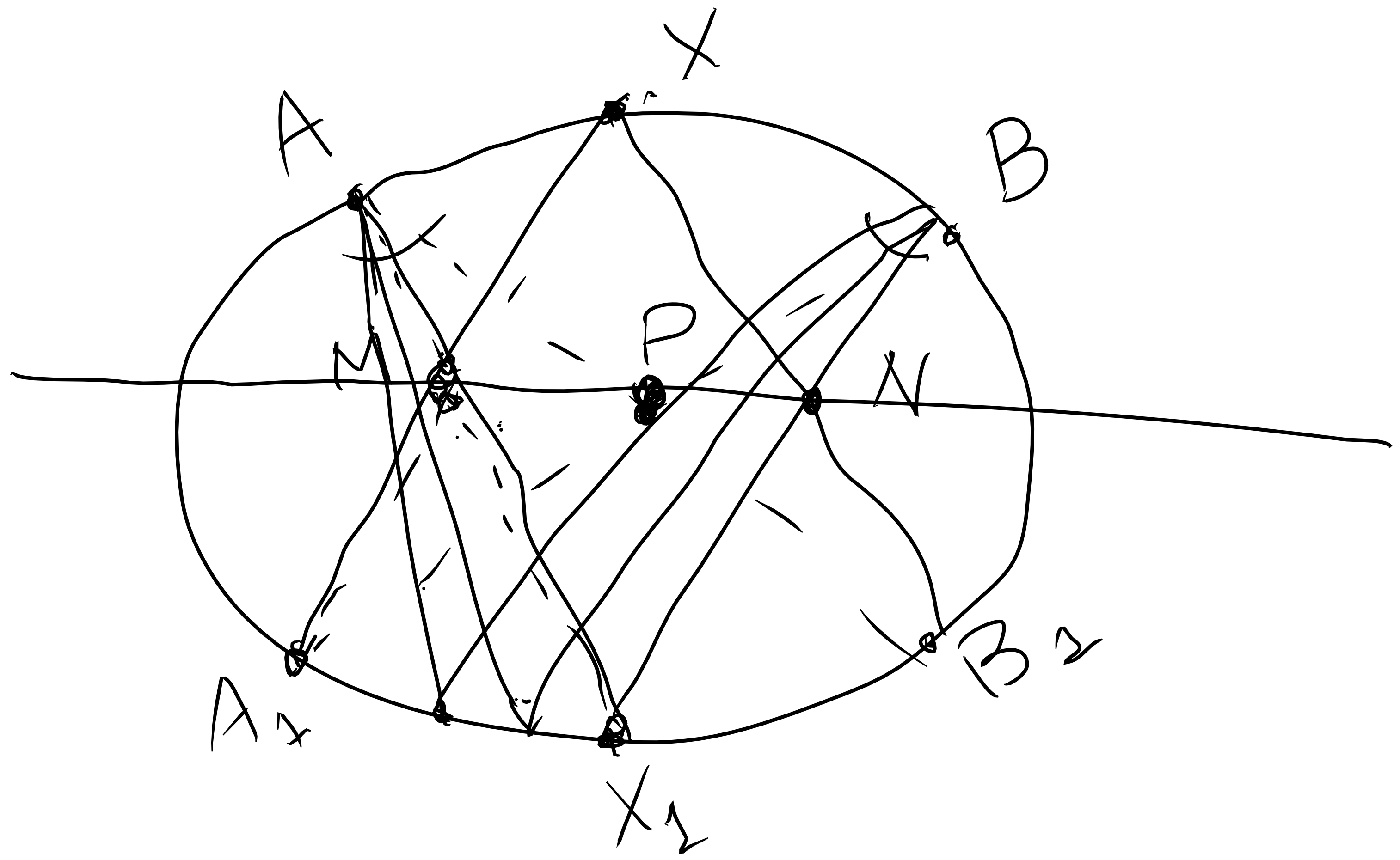
2) Выведите отсюда, что полярная точка  $O$  относительно коники  $C$  не зависит от выбора прямых  $l, m, n$  через точку  $O$ , с помощью которых она построена, а зависит лишь от точки  $O$ .

**Задача 5.** 1) В условиях задачи 3 докажите, что полярная  $\mathbf{p}_O$  пересекает конику  $C$  в двух различных точках  $A$  и  $B$ . (Пусть для простоты основное поле  $\mathbf{k}$  алгебраически замкнуто.)

2) Пусть  $\mathbb{T}_A C$  и  $\mathbb{T}_B C$  – касательные к конике  $C$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Докажите, что  $O$  – точка пересечения прямых  $\mathbb{T}_A C$  и  $\mathbb{T}_B C$ .

**Задача 6.** Докажите, что если точка  $X$  лежит на полярной  $\mathbf{p}_Y$  точки  $Y$  относительно коники  $C$ , то и, наоборот, точка  $Y$  лежит на полярной  $\mathbf{p}_X$  точки  $X$  относительно  $C$ .





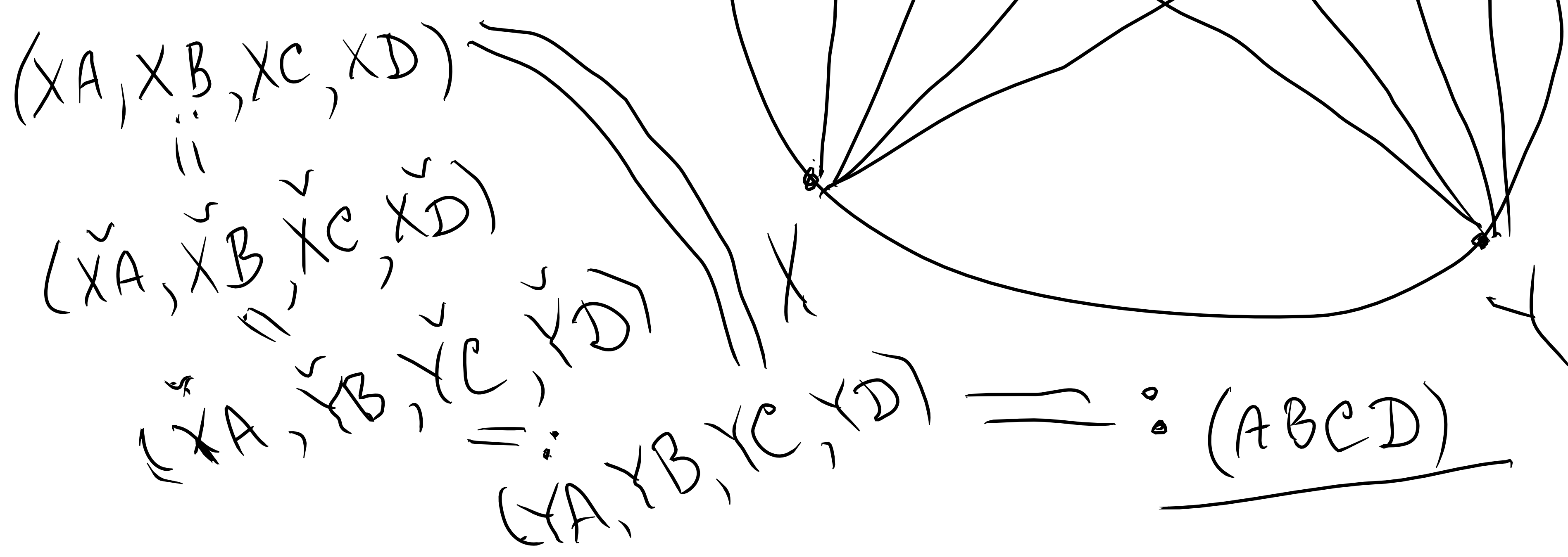
$$A_1X \longrightarrow B_1X$$

$$M \longmapsto N - \text{перпен.}$$

$$\check{X} \longrightarrow \check{Y}$$

$$XA \longrightarrow \check{X}A$$

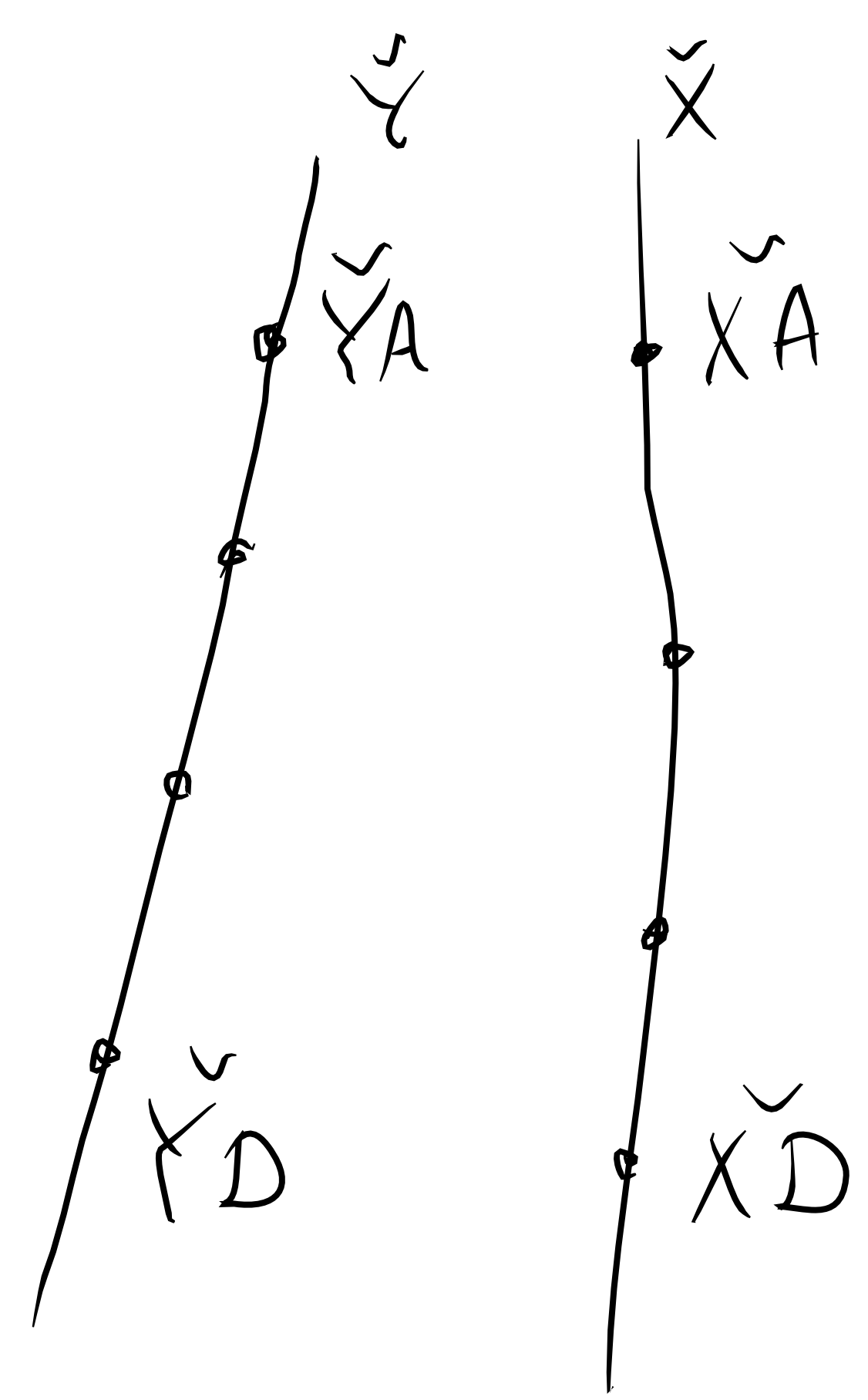
$$\check{X}D \longrightarrow \check{Y}D$$



$$(XA, XB, XC, XD)$$

$$(XA, XB, XC, XD)$$

$$(XA, YB, YC, YD) = (XA, YB, YC, YD) = (ABCD)$$



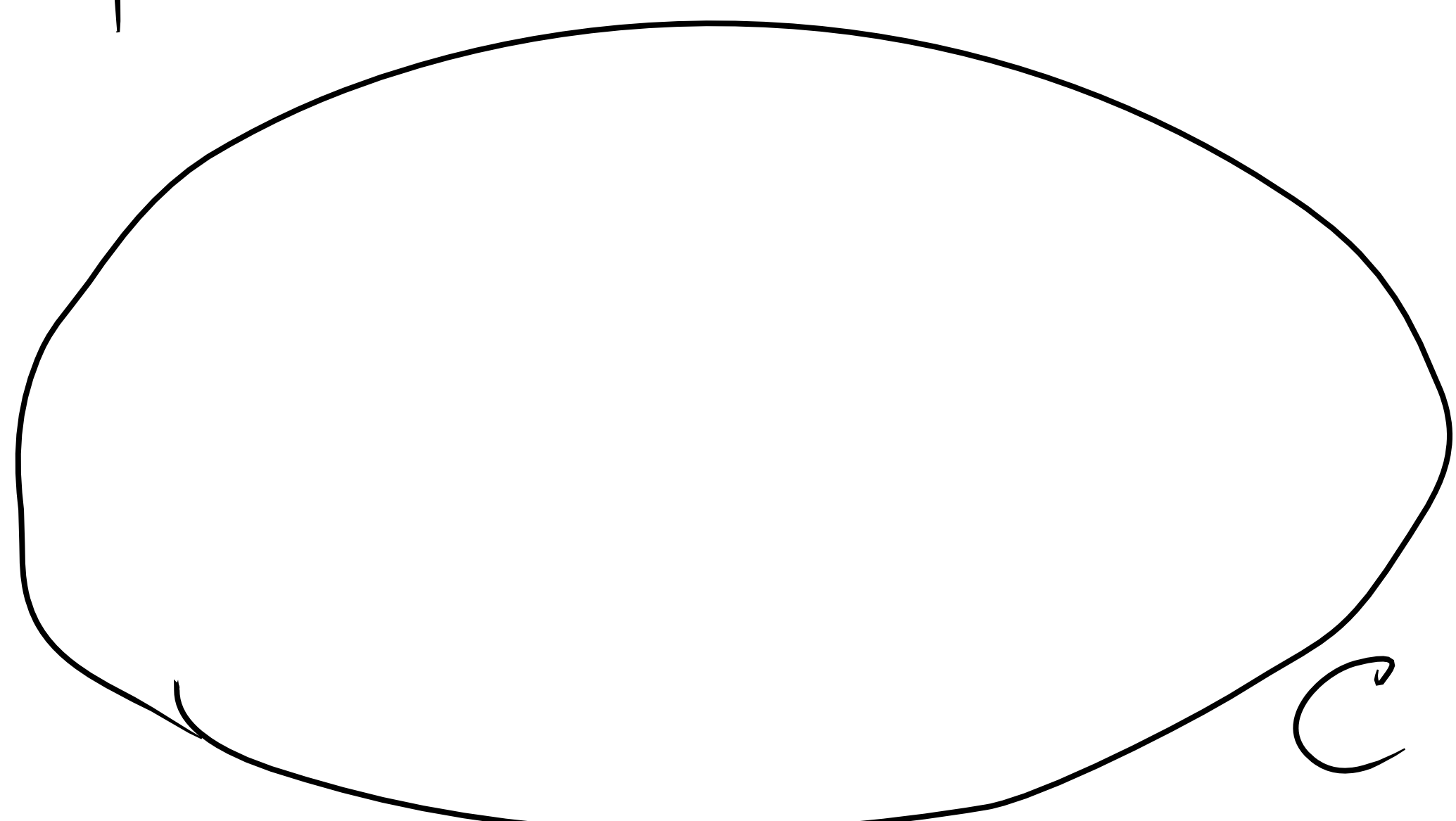
$$D \cap C = \{(t_0: t_1) \in P^1 \mid \tilde{\Phi}(t_0, t_1) = 0\}$$

$$t = \frac{t_0}{t_1}$$

$$\tilde{\Phi}(t, 1) = 0$$

$$\deg \tilde{\Phi} \leq 2d$$

$$\# D \cap C \leq 2d$$



$$x_0 = F_0(t_0, t_1)$$

$$x_1 = F_1(t_0, t_1)$$

$$x_2 = F_2(t_0, t_1)$$

$$C \simeq \mathbb{P}^1$$

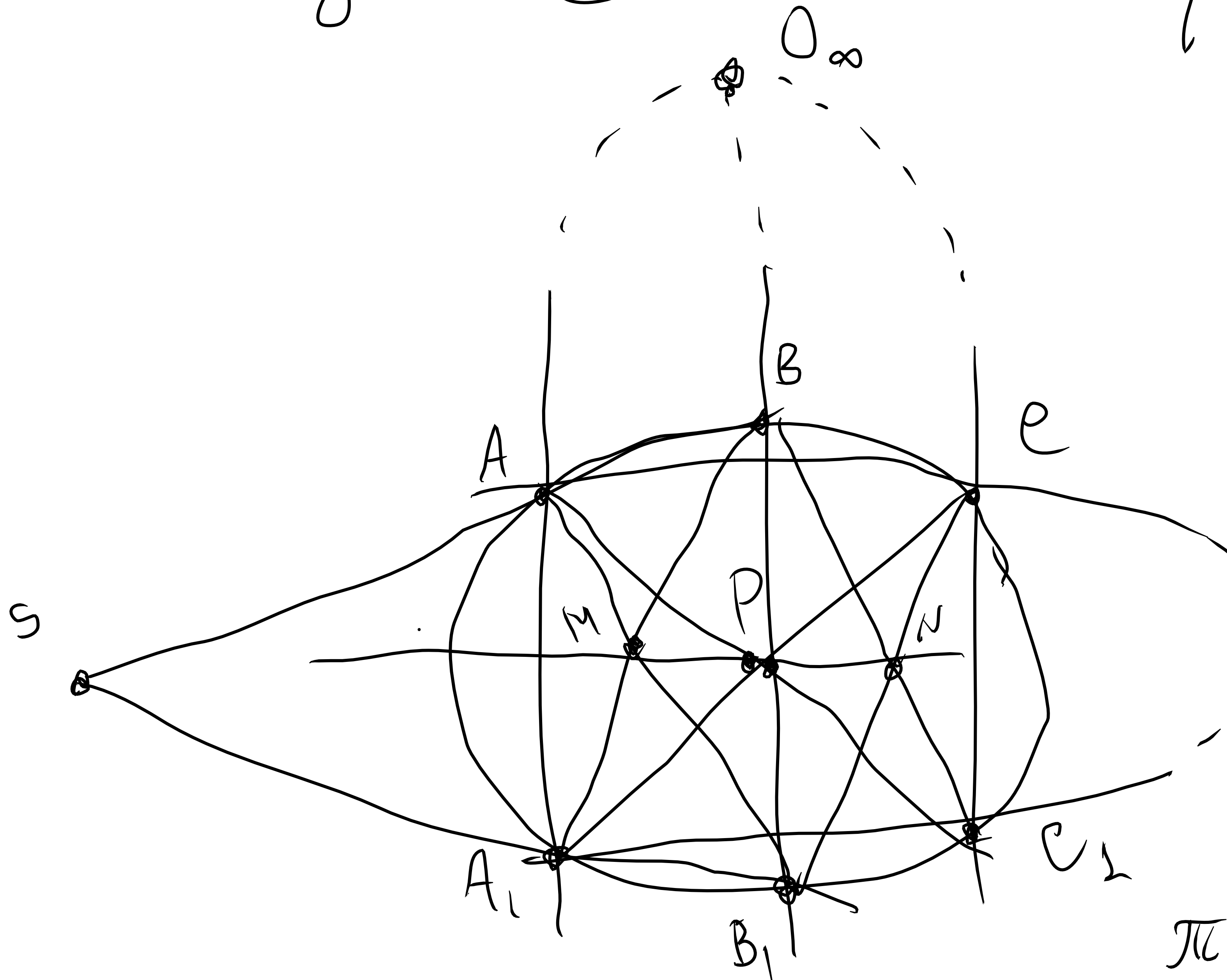
коника

$$\deg \tilde{\Phi} = 2d$$

$$D = \{\Phi(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

$$\tilde{\Phi}(t_0, t_1) = 0$$

$\deg C \geq 3 \Rightarrow$  нет рациональной параметризации



M, N, P колли.

$$\left. \begin{matrix} A_1, B, C \\ A, B_1, C_1 \end{matrix} \right\} \text{ перпен.}$$

$$S' AB \cap A_1 B_1 = S$$

$$BC_1 \cap B_1 C = N$$

$$AC \cap A_1 C_1 = S'$$

$$\pi. \text{Deg}: S, N, S' \text{ колли.}$$

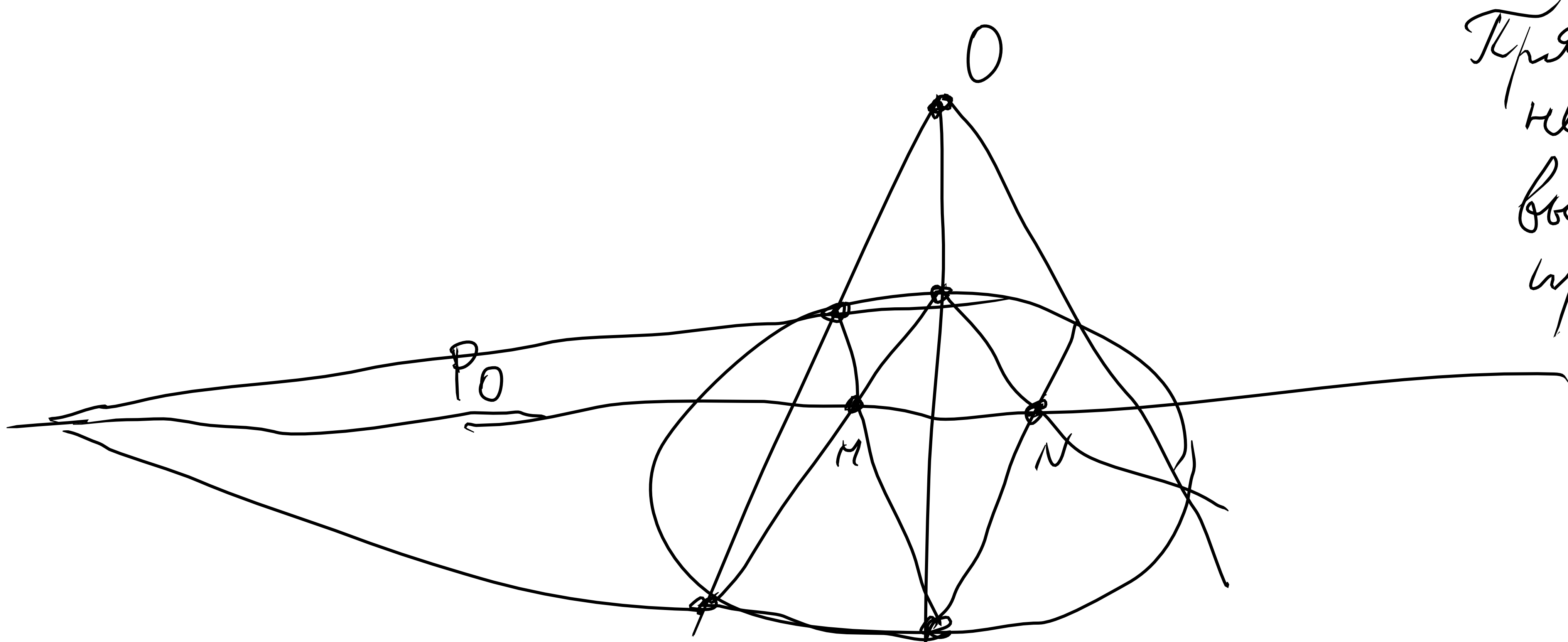
перпен.  $\left\{ \begin{matrix} A, B, C \\ A, B, C_1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi. \text{Deg.}$

$\left\{ A \right\} \Rightarrow \pi. \text{Deg. или Паск.}$

$$\frac{S' M S''}{S' P S''} ?$$

Убедитесь, что:

M, N, P, S, S', S'' коллинеарны



Прямая MN не зависит от выбора трех изначальных точек m. O

$P_0$  наз. полюсом m. O относ. коники C.

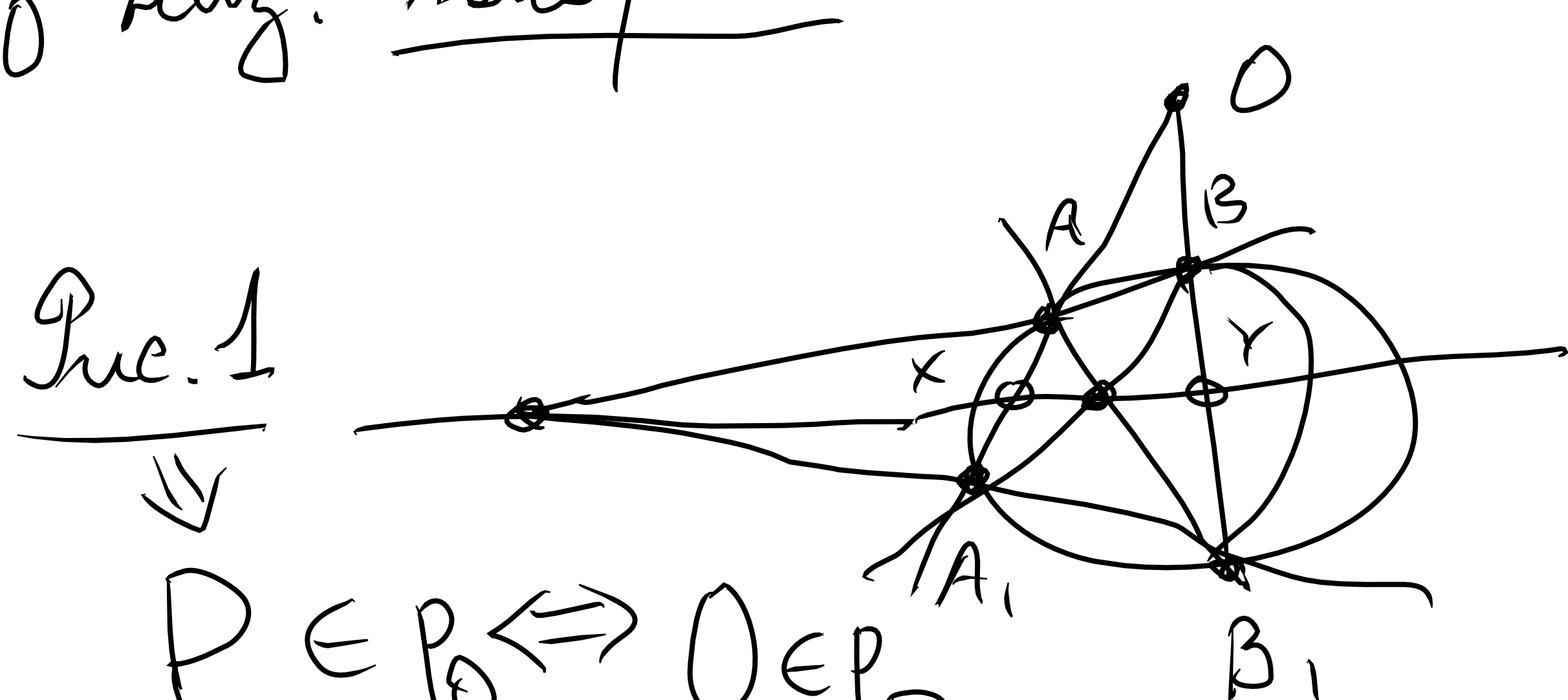
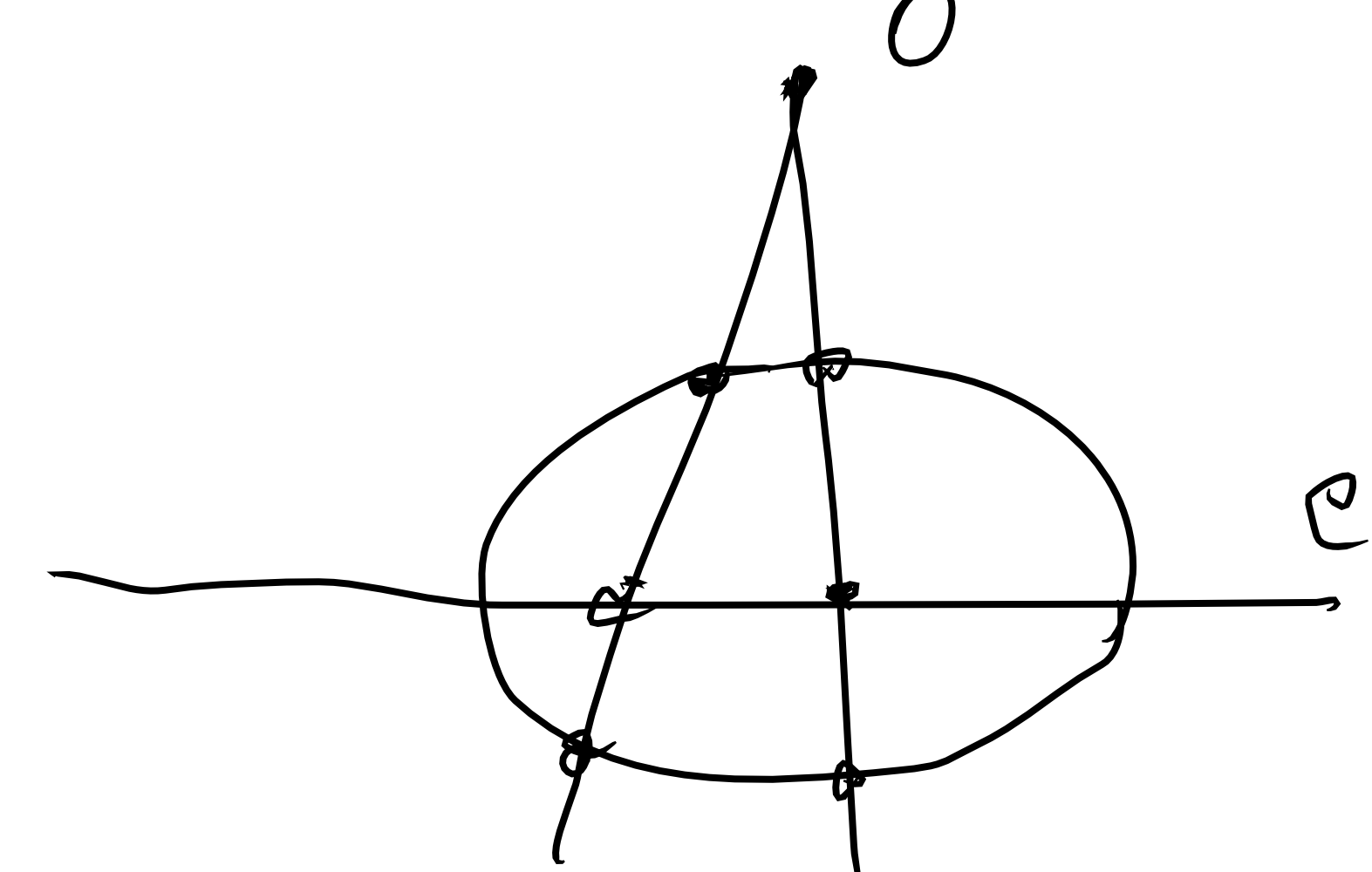
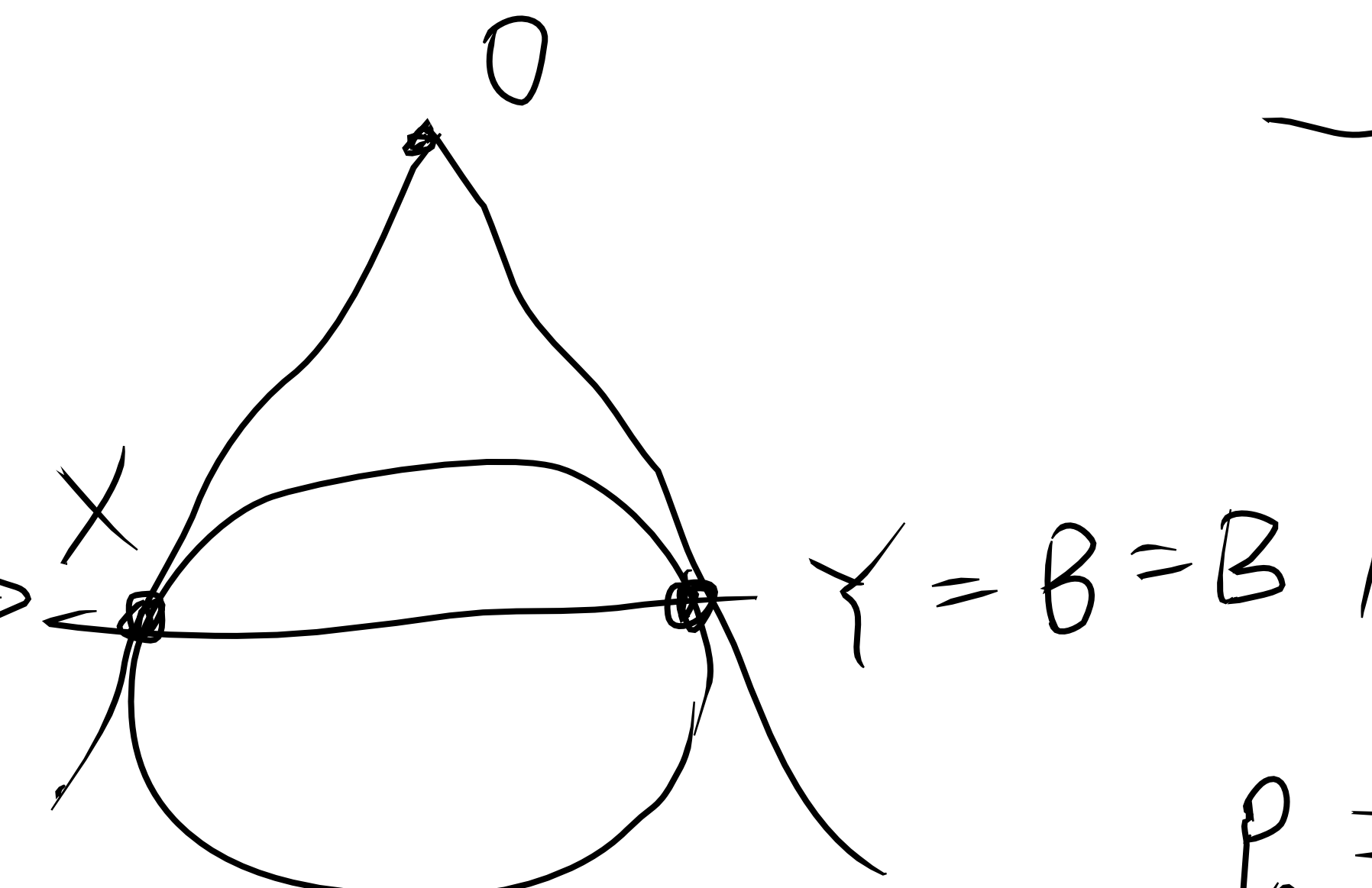


рис. 1

$$P \in P_0 \Leftrightarrow O \in P_P$$

$$A_1 = A$$

$$X = A = A_1$$



$$P_0 = XY, \text{ где } \left. \begin{matrix} OX \\ OY \end{matrix} \right\} \text{ касат. к конике}$$