

# Логика и алгоритмы, лекция 25

лектор: Кудинов Андрей Валерьевич

25 мая 2021 г.

---

## План лекции:

- Универсальная функция и неразрешимое множество
- Пара неотделимых перечислимых множеств
- Главные универсальные функции
- Теорема Райса–Успенского

# Универсальная функция и неразрешимое множество

$\text{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

Пусть  $\mathcal{F}$  — счётное семейство част. функций  $f : X \rightarrow Y$ .

**Универсальной функцией** для  $\mathcal{F}$  называем такую функцию  $F : \mathbb{N} \times X \rightarrow Y$ , что

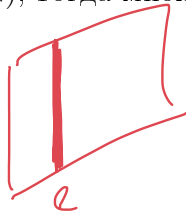
- Для любого  $e \in \mathbb{N}$  функция  $F_e(x) := F(e, x)$  принадлежит  $\mathcal{F}$ .
- $\forall f \in \mathcal{F} \exists e \in \mathbb{N} \forall x \in X f(x) \simeq F(e, x)$ .

Пусть  $F$  — универсальная вычислима функция для  $\text{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ , тогда множество

$$K = \{x \in \mathbb{N} : \neg F(x, x)\}$$

является перечислимым и неразрешимым.

$$f(x) = F(x, x) \\ K = \text{dom}(f)$$



Вопрос.

Что можно сказать про множество  $\overline{K} = \mathbb{N} \setminus K$ ?

Вопрос.

Что можно сказать про множество  $\overline{K} = \mathbb{N} \setminus K$ ?

Оно разрешимо?

$\overline{K}$  - разреш.  $\Rightarrow$   $K$  - разреш.

## Вопрос.

Что можно сказать про множество  $\overline{K} = \mathbb{N} \setminus K$ ?

Оно разрешимо?

Нет

Перечислимо?

Нет

$\overline{K}$  - перечислимо

т.посла

$\Rightarrow$

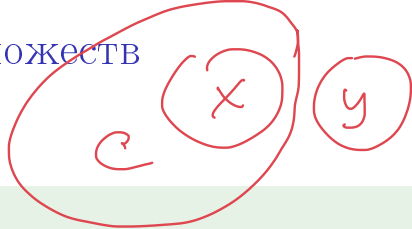
$\overline{K}$  рекур и  $K$ -рекур.

Опр  $A$  - полн. перечислим, если

$\overline{A}$  - перечислимо

$\overline{K}$  - полн. перечислимо

# Пара неотделимых перечислимых множеств



Пара множеств  $X, Y \subseteq \mathbb{N}$  **неотделима**, если

- $X \cap Y = \emptyset$
- не существует **разрешимого** множества  $C \subseteq \mathbb{N}$  такого, что  $X \subseteq C$  и  $Y \cap C = \emptyset$ .

## Теорема 25.1

Существует неотделимая пара перечислимых множеств.

### Доказательство.

Пусть  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  — вычислимая функция без тотального вычислимого продолжения. Положим  $X := \{x \in \mathbb{N} : f(x) = 0\}$  и  $Y := \{x \in \mathbb{N} : f(x) = 1\}$ .

По теореме о графике  $X, Y$  перечислимы.

$$X \cap Y = \emptyset$$

Если разрешимое  $C$  отделяет  $X$  и  $Y$ , то функция

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in C; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$= 1 - \chi_C(x)$$

продолжает  $f$  на всё  $\mathbb{N}$ .



# Установленные факты

- Универсальная вычислимая функция  $F(e, x)$ .

# Установленные факты

- Универсальная вычислимая функция  $F(e, x)$ .
- Частичная вычислимая  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ , не продолжаемая до тотальной вычислимой:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } F(x, x) = 0; \\ 0, & \text{если } !F(x, x) \neq 0; \\ \text{неопр.}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

# Установленные факты

- Универсальная вычислимая функция  $F(e, x)$ .
- Частичная вычислимая  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ , не продолжаемая до тотальной вычислимой:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } F(x, x) = 0; \\ 0, & \text{если } !F(x, x) \neq 0; \\ \text{неопр.}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- $K := \{x \in \mathbb{N} : !F(x, x)\}$  перечислимое, неразрешимое.

# Пара неотделимых перечислимых множеств

Пара множеств  $X, Y \subseteq \mathbb{N}$  **неотделима**, если

- $X \cap Y = \emptyset$
- не существует **разрешимого** множества  $C \subseteq \mathbb{N}$  такого, что  $X \subseteq C$  и  $Y \cap C = \emptyset$ .

## Теорема 25.2

Существует неотделимая пара перечислимых множеств.

**Доказательство.** Пусть  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  — вычислимая функция без тотального вычислимого продолжения. Положим  $X := \{x \in \mathbb{N} : f(x) = 0\}$  и  $Y := \{x \in \mathbb{N} : f(x) = 1\}$ .

По теореме о графике  $X, Y$  перечислимы.

Если разрешимое  $C$  отделяет  $X$  и  $Y$ , то функция

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in C; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

продолжает  $f$  на всё  $\mathbb{N}$ .

# Главные универсальные функции

Вычислимая универсальная функция  $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  называется **главной**, если для любой вычислимой  $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  найдётся тотальная вычислимая функция  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что

$$\forall e, x \quad g(e, x) \simeq F(s(e), x).$$

# Главные универсальные функции

Вычислимая универсальная функция  $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  называется **главной**, если для любой вычислимой  $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  найдётся тотальная вычислимая функция  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что

$$\forall e, x \ g(e, x) \simeq F(s(e), x).$$

## Теорема 25.3

Главная вычислимая универсальная функция  $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  существует.

# Главные универсальные функции

Вычислимая универсальная функция  $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  называется **главной**, если для любой вычислимой  $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  найдётся тотальная вычислимая функция  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что

$$\forall e, x \quad g(e, x) \simeq \underline{\underline{F(s(e), x)}}.$$

## Теорема 25.3

Главная вычислимая универсальная функция  $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  существует.

На самом деле, универсальная МТ задает главную унив. функцию.

*М - вычисляет g на входе где e*



## Замечание

Вычислимую функцию  $g(e, x)$  можно понимать как (возможно, не универсальный) язык программирования, где  $e$  — программа вычисления функции  $x \mapsto g(e, x)$ .

Функция  $s$  есть **интерпретатор**, сопоставляющий программе  $e$  языка  $g$  машину Тьюринга  $s(e)$ , вычисляющую ту же функцию.

(

## Вопросы Мен

$F(x, y)$  — ун. для  $\varphi$ -чл



$T(x, y, z)$  — ун. для  $\varphi$ -чл где

$\text{Con}(\mathbb{N}^3/\mathbb{N})$



F

# Теорема Райса–Успенского

Какие свойства вычислимых функций распознаваемы по программе?

Примеры практически интересных свойств частичных функций  $f$ :

- $\forall x !f(x)$  (тотальность); +
- $f(x_0) = y_0$ , где  $x_0, y_0$  фиксированы; +
- $f = g_0$ , где функция  $g_0$  фиксирована; +
- «вычисление  $f(x)$  на некотором  $x$  приводит к стиранию всех данных на HD компьютера». +

Пусть фиксирована универсальная вычислимая функция  $F$ . Обозначим через  $F_e$  частичную функцию с индексом  $e$ , т.е.  $F_e(x) \simeq F(e, x)$ .

Нетривиальным свойством вычислимых функций называем любое подмножество  $\mathcal{C} \subset \text{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$  такое, что  $\mathcal{C} \neq \emptyset$  и  $\mathcal{C} \neq \text{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ .

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}} = \emptyset \quad \mathcal{I}_{\mathcal{C}} = \mathbb{N}$$

С каждым свойством  $\mathcal{C}$  вычислимых функций связывается множество всех программ, вычисляющих функции со свойством  $\mathcal{C}$ , то есть множество  $I_{\mathcal{C}} := \{e \in \mathbb{N} : F_e \in \mathcal{C}\}$ .

### Теорема 25.4

Если  $\mathcal{C}$  — нетривиальное свойство вычислимых функций, то множество  $\{e \in \mathbb{N} : F_e \in \mathcal{C}\}$  неразрешимо.

$I_{\mathcal{C}} =$

## Доказательство.

- Можно считать, что нигде не определённая функция  $\zeta$  не обладает свойством  $\mathcal{C}$  — иначе заменим  $\mathcal{C}$  на его дополнение.
- Т.к.  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , фиксируем вычислимую функцию  $f_0$   $\in \mathcal{C}$ .

## Доказательство.

- Можно считать, что нигде не определённая функция  $\zeta$  не обладает свойством  $\mathcal{C}$  — иначе заменим  $\mathcal{C}$  на его дополнение.
- Т.к.  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , фиксируем вычислимую функцию  $f_0 \in \mathcal{C}$ .
- Построим тотальную вычислимую функцию  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такую, что для всех  $x \in \mathbb{N}$

$$x \in K \iff s(x) \in I_{\mathcal{C}}.$$

- Если бы  $I_{\mathcal{C}} := \{e \in \mathbb{N} : F_e \in \mathcal{C}\}$  было разрешимо, то мы получили бы следующий разрешающий алгоритм для  $K$ : для данного  $x$  вычислить  $y = s(x)$  и проверить  $y \in I_{\mathcal{C}}$ .

Вычисляем  $g(e, x)$  в соответствии со следующим алгоритмом:

- вычислить  $F_e(e)$ ;  $\leftarrow$
- если  $\neg F_e(e)$ , очистить ленту, а затем вычислить  $f_0(x)$ .  $\in \mathcal{C}$



По свойству главности получаем тотальную вычислимую функцию  $s$  такую, что

$$\forall e, x \ F_{s(e)}(x) \simeq g(e, x).$$

Тогда имеем:

- Если  $e \in K$ , то  $F_{s(e)}(x) \simeq f_0(x)$ ;  $\in \mathcal{C}$
- Если  $e \notin K$ , то  $F_{s(e)} = \zeta$

$$\begin{array}{l} s(e) \in \overline{I_{\mathcal{C}}} \\ \int \notin \mathcal{C} \end{array} \quad s(e) \notin I_{\mathcal{C}}$$

Отсюда  $e \in K \iff F_{s(e)} \in \mathcal{C} \iff s(e) \in I_{\mathcal{C}}.$

## Следствие 25.5

Следующие свойства вычислимых функций не распознаваемы по программе:

- тотальность,
- ограниченность,
- конечность области определения, и т.д.

## Замечание

Такие свойства как

- «вычисление  $f(0)$  завершается менее, чем за 100 шагов»;
- «программа  $f$  содержит менее 100 символов» (при фиксированном алфавите)

являются разрешимыми свойствами программ. Они не соответствуют никакому классу частичных **функций**.

Следствие  $f \in \text{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$   $\{e \mid F_e(x) \simeq f(x)\}$   
— не фазр и сеп. секон.  
 $\{e \mid F_e \text{ — непер. ф-ция}\} = \{0\}$

$F(e, x)$  — ун. выч. ф-ция

## m-СВОДИМОСТЬ

Говорят, что множество  $A$  натуральных чисел  $m$ -сводится к другому множеству  $B$  натуральных чисел, если существует всюду определённая вычислимая функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  с таким свойством:

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

для всех  $x \in \mathbb{N}$ . Обозначение:  $A \leq_m B$ .

Сб-ва. 1) если  $B$  - разрешима  $\Rightarrow A$  - разрешима  
2) если  $B$  - неразрешима  $\Rightarrow A$  - неразрешима  
3)  $\leq_m$  - рефлекс. и транзитивно  
 $x \in A \iff f(x) \in B$   
 $x \in A \iff g(f(x)) \in C$   $y \in B \iff g(y) \in C$

## m-СВОДИМОСТЬ

Говорят, что множество  $A$  натуральных чисел  $m$ -сводится к другому множеству  $B$  натуральных чисел, если существует всюду определённая вычислимая функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  с таким свойством:

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

для всех  $x \in \mathbb{N}$ . Обозначение:  $A \leq_m B$ .

4)  $A$  - разрешима  $\wedge B \neq \emptyset, \mathbb{N}$ , то  
 $A \leq_m B$

5)  $A \leq_m B \Rightarrow \mathbb{N} \setminus A \leq_m \mathbb{N} \setminus B$   
 $\uparrow$   
то же  $f$ .