

II Могучь

группа

Группа перестановок

$$S_n = \{ \sigma : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{f: \sigma_{ji}} \{1, \dots, n\} \}$$

операция - композиция.

$$\text{Одожи. } \sigma \in S_n \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\text{сигнатурная запись: } (\sigma(1) \dots \sigma(n))$$

Циклы - перестановки, для которых \exists

i_1, \dots, i_k - попарно различные числа от $\{1, \dots, n\}$

$$\text{т.е. } \sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k,$$

$$\sigma(i_k) = i_1$$

$$\sigma(j) = j \quad \forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$$

Одожи. Таков цикл одожи $(i_1 \dots i_k)$

Утв. циклов длины k в S_n ровно $\binom{n}{k} (k-1)!$

Опр. цикл длины 2 наз-ся транспозиция

$$\text{Пусть } \sigma_1 = (i_1, \dots, i_k), \sigma_k = (j_1, \dots, j_l)$$

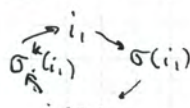
$\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. Предположим, что

$$\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \emptyset. \text{ Тогда } \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1$$

Такие циклы называются неразрешимыми.
(неразрешимыми.)

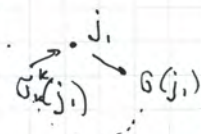
Вместо этого можно дать определение в
проц. неразрешимых циклов, при этом
такое определение единственно в том смысле
до неразрешимости соотношений

$$\square \sigma \in S_n$$

 Если полученный цикл
длиной n , то доказано,
а если ост. недействующими, то


продолжаем:

Продолжаем



процедуру пока не охватили все эл-ты

$$\sigma^a(i) = \sigma^b(j) \quad a < b \Rightarrow i = \sigma^{b-a}(j)$$

Разложение единственно, т.к. наша
процедура каноническая 

Опр. Пусть G - произв. группа, g_1, \dots, g_n - попарно
различные эл-ты G . Тогда говорят, что G поро-
ждена g_1, \dots, g_n , если $\forall g \in G$ g может быть
записан в виде произведения эл-тов из мн-ва $\{g_1, \dots, g_n\}$

Предположение. Группа S_n порождена всеми циклами.

Утв. $S_n = \langle (i, i+1), i=1, \dots, n-1 \rangle$

□ достаточно научиться раскладывать произвольный цикл в произв. транспозицию вида $(i, i+1)$.

• Разложим пр. цикл в произв. транспозиции.

$$(i_1 \dots i_k) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k)$$

$$S_n = \langle (i, j), 1 \leq i < j \leq n \rangle$$

• Для дока-ва утв. необходимо и дост.

проверить, что $\forall i < j$ транспозиция (i, j) может быть представлена в виде произв. транспозиций вида $(a, a+1)$ например

$$(i, i+2) = (i, i+1)(i+1, i+2)(i, i+1)$$

$$(i, i+3) = (i, i+2)(i+2, i+3)(i, i+2)$$

По индукции $\forall i < j$ дана всякая S_n .

существует \square

Замечание. Пусть σ — перестановка σ ,

$\sigma^{-1}(n) = i$. Т.е. $\sigma(i) = n$. Рассмотрим

произведение $(n-1, n) \dots (i+1, i+2)(i, i+1) = \tau$

$\sigma = x\tau$, $x \in S_n$. По опр. $\tilde{\tau}$ и x , $x = \sigma\tau^{-1}$ при

$$x(n) = \sigma\tilde{\tau}^{-1}(n) = \sigma(i) = n$$

Умб. $S_n = \langle (1\ i), i=2, \dots, n \rangle$

Опр. Порядок n -го $g \in G$ — наименьшее k такое что

$$g^k = e \quad (k=1, 2, \dots). \text{ Обозн. } \text{ord } g.$$

Замечание. Пусть $g \in G$ — элемент конечной

группы. Тогда имеется изоморфизм $\text{Cord}(g) \rightarrow \langle g \rangle$,

где $\text{Cord}(g)$ — циклическая группа из $\text{ord } g$ элементов.

Этот изоморфизм одн. определяется формулой

$$a \mapsto g, \text{ где } a - \text{обр. } \text{Cord}(g)$$

Умб. Пусть $\sigma \in S_n$ — перестановка, разложим

в произведение непересекающихся циклов длины

k_1, \dots, k_s ($k_i \geq 1$) ($k_1 + \dots + k_s = n$). Тогда $\text{ord } \sigma =$

$$\text{НОК}(k_1, \dots, k_s).$$

Вопрос Пусть G - конечная группа, $H \subseteq G$ - подгруппа

Есть ли какое-то связь между $|H|$ и $|G|$?

Левые и правые смежные классы

Опр. Левый смежный класс G по H - мн-во элементов вида gH , где $g \in G$. Правый смежный класс - мн-во элементов вида Hg , $g \in G$.

Замечание Мы берём все элементы из H и домножаем их слева или справа на один фикс. элемент из G

Пример. $H = G$ и $H = e$.

Предположение Пусть $g_1, g_2 \in G$. Тогда либо $g_1H = g_2H$ либо $g_1H \cap g_2H = \emptyset$

□ Пусть $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$. Тогда $\exists h_1, h_2$, т.е. $g_1h_1 = g_2h_2 \Leftrightarrow g_2 = g_1h_1h_2^{-1}$.

Тогда $g_2H = \{g_1h_1h_2^{-1} \cdot h, h \in H\} = \{g_1h, h \in H\}$

Пусть $|G|:|H|$ - мн-во смежных классов (левых или правых)

Предположение $|G| = |H| \cdot |G:H|$

Замечание Разбиение по смеж. классам - разбиение

на смеж. классы экв., т.е. $g_1 \sim g_2$, если $g_1 H = g_2 H$

$$g \sim g; g_1 \sim g_2, g_2 \sim g_3 \Rightarrow g_1 \sim g_3; g_1 \sim g_2 \Rightarrow g_2 \sim g_1$$

$$\square g \in G, h_1, h_2 \in H \text{ Тогда } gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Тогда $|gH| = |Hg| = |H|$ т.е. в каждом разб.

на смеж. класс экв. по-во эл-тов в каждом классе

$$\text{равно } |H| \Rightarrow |G| = |H| \cdot |G:H|. \quad \square$$

Теорема Лагранжа

Порядок группы делится на порядок подгруппы.

Следствие 1: $\text{ord}(g) \mid |G|$

Следствие 2: \mathbb{F}_p - поле из p элементов. (p - простое)

$$\text{Тогда } \forall a \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\} \quad a^{p-1} = 1$$

Опр. Пусть $\sigma \in S_n$. Назовём пару чисел $1 \leq i < j \leq n$ деснорядиной, если $\sigma(i) < \sigma(j)$

Чётность σ - кол-во деснорядинов. Одогу:

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ - чёт.} \\ -1, & \sigma \text{ - нечёт.} \end{cases}$$

В транспозиции нечётна.

Предложение. $\forall \sigma, \tau \in S_n$ выполнено $(-1)^{\sigma\tau} = (-1)^\sigma (-1)^\tau$.

□ Пусть σ - транспозиция, (i, j) - трансп.

двух соседних эл-ов. Достаточно

проверить, что $(-1)^{\sigma(l, l+1)} = -(-1)^\sigma$

- Пусть $\{l, l+1\}$ - деснорядина для σ ;
тогда для $\sigma(l, l+1)$ пара $\{l, l+1\}$
не деснорядина.

- Пусть $\{l, l+1\}$ не деснорядина для σ .
тогда для $\sigma(l, l+1)$ пара будет десн.

- если $\{a, b\}$, т.е. $a, b \neq l, l+1$, то
 $\{a, b\}$ является или нет деснорядиной
для σ и $\sigma(l, l+1)$ одновременно

- рассмотрим пару $\{l, b\}$, где $b \neq l+1$.
тогда $(\sigma(l, l+1))(l) = \sigma(l+1)$
 $(\sigma(l, l+1))(b) = \sigma(b)$
 $(\sigma(l, l+1))(l+1) = \sigma(l)$

т.е. (l, b) является деснорядиной

деснорядиной для σ т.е. т.е., когда
 $\{l+1, b\}$ является деснорядиной для $\sigma(l, b)$

^{н-во}
 Т.о., ~~не~~ беспорядков ~~про~~ где $\sigma(e, e+1)$
 либо на 1 больше н-ва беспорядков где σ ,
 либо на 1 меньше \square

Следствие Чётность σ равна чётности н-ва
 транспозиций входящих в разложение σ .

\square Числа

Существование Пусть $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ - число. Тогда
 $(-1)^\sigma = (-1)^{k+1}$

\square Число k равно количеству в
 σ транспозиций, где k чётность k и k разное. \square

Существование. М-во чётных перестановок является
 подгруппой

$A_n \subset S_n$ - подгруппа чётных перест.

$|A_n| = \frac{n!}{2}$ \square Берём $\sigma \in (i, j]$. Тогда если σ чётное,
 то $\sigma(i, j)$ нечётное и наоборот.

Т.е. $\sigma \rightarrow \sigma(i, j)$ - биекция между чётными и нечётными.

Сметные классы

Разделение на счетные классы - отн. экв.

Если G - абелева, то первые счетные классы совпадают.

Пример $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}_+^*$



$$x \in \mathbb{C}, xH = \{x \cdot x, x \in \mathbb{R}_+^*\}$$

Опр.1 Подгруппа H в G называется нормальной, если

$$\forall g \in G \quad gH = Hg, \text{ т.е. } \forall h \in H \exists h_1 \in H \text{ т.ч. } gh = h_1g$$

Опр.2 H - подгруппа в G , если $\forall g \in G \quad gHg^{-1} = H$

Аналогично $S_n \supset H = \{ \sigma \in S_n : \sigma(1) = 1 \}$. Тогда

H - нормальна в G . Действительно

$$gH = \{ \sigma \in S_n : \sigma(1) = g(1) \}$$

$$Hg = \{ \sigma \in S_n : \sigma^{-1}(1) = g^{-1}(1) \}$$

Теорема: Если H - нормальна в G , то на

ли-ве счетных классов можно ввести структуру

группы
$$g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$$

□ $g \in G$ пусть $\bar{g} = gH \in G/H$. Формула

$$\text{умножение } \bar{g}_1, \bar{g}_2 = \overline{g_1g_2}$$

нам нужно проверить, что $\forall h_1, h_2 \in H$
 верно $\overline{g \cdot h_2} \cdot \overline{g_2 h_2} = \overline{g \cdot g_2}$, действительно

$$\overline{g \cdot h_1} \cdot \overline{g_2 h_2} = \overline{g \cdot h_1 g_2 h_2} = \overline{g \cdot g_2 \underbrace{g_2^{-1} h_1 g_2 h_2}_{= h_1}} = \overline{g \cdot g_2}$$

т.е. умножение классов не зависит от выбора предст.

каждого из классов.

• Наличие обратного эл-та: $(gH)^{-1} = g^{-1}H$

• Наличие нейтрального эл-та $\bar{e} = H$

• Ассоциативность $\overline{g_1 (\overline{g_2 g_3})} = (\overline{g_1 g_2}) \overline{g_3}$
 $\overline{g_1 (g_2 g_3)} = \overline{(g_1 g_2) g_3}$
 т.к. G - группа

Обоз. G/H - фактор группа

Замечание Если $|G| \neq \infty$, то $|G/H| = |G:H| = \frac{|G|}{|H|}$

Пример $A_n \subset S_n$ - нормально, т.к. $\sigma A_n \sigma^{-1} \subset A_n$,

$$g \in S_n, \text{ то } g \sigma g^{-1} \in A_n, \text{ т.к. } (-1)^{g \sigma g^{-1}} = (-1)^g (-1)^{\sigma} (-1)^{g^{-1}} = (-1)^g = (-1)^{\sigma}$$

Лемма Пусть G - произвольная группа $g \in G$.

Рассмотрим отображ. $\varphi_g: G \rightarrow G$, $\varphi_g(x) = g x g^{-1}$. Тогда

φ_g - изоморфизм

$$\square \varphi_g(xy) = \varphi_g(x) \varphi_g(y) \Leftrightarrow$$

$$g x g g^{-1} = g x g^{-1} g y g^{-1}$$

$$\varphi_g(x) = \varphi_g(y) \Leftrightarrow g x g^{-1} = g y g^{-1} \Leftrightarrow x = y$$

инъективность

$$g x g^{-1} = y \Leftrightarrow x = g^{-1} y g \leftarrow \text{сюръективность}$$

\square

Лемма: $g \sigma g^{-1}$ - сопряжение эл-та g элемента σ .

$g H g^{-1}$ - сопряжение функции эл-та g . $Ad_g: G \rightarrow G$
 $Ad_g(h) = g h g^{-1}$
 обратное сопряжение

Гомоморфизм, H -инвариант $\Leftrightarrow Ad_g H \subset H \quad \forall g \in G$

Ad_g - гомоморфизм функ:

$$Ad_g(xy) = Ad_g(x) \cdot Ad_g(y)$$

$$Ad_g(x^{-1}) = Ad_g(x)^{-1}$$

Ad_g - изоморфизм, т.е. если $g x g^{-1} = g y g^{-1} \Rightarrow x = y$

$$Ad_g \cdot Ad_{g^{-1}} = Id$$

$$Ad_{g_1 g_2} = Ad_{g_1} \cdot Ad_{g_2}$$

$$Ad_{g_1 g_2}(x) = g_1 g_2 x (g_1 g_2)^{-1} = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} =$$

$$= Ad_{g_1} Ad_{g_2}(x)$$

$\forall g \in G$ Ad_g - автоморфизм G

• $Ad: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ является
гомоморфизмом
групп

□ $\text{Aut}(G)$ - автоморфизмы G
(т.е. б.однот. изоморфизмы $G \rightarrow G$)
Это группа отн. композиции.
Ейтр. элемент - тожд. отобра.

$Ad: G \rightarrow \text{Aut}(G)$, $Ad(g) = Ad_g$

Ad - гомоморфизм групп? \square

Лемма $\ker \varphi$ - подгруппа в G_1 , $\text{Im } \varphi$ - подгруппа
в G_2 .

□ $\forall x, y \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = ee = e$

$\forall x \in \ker \varphi \quad \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} = e^{-1} = e$

$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \Rightarrow \text{Im } \varphi$ замкнут
отн. умножению

$\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} \Rightarrow$ брание обратного

\square

$\ker \varphi$ - нормальная подгруппа.

□ Хотели проверить, что $\forall g \in G_1$

$g \ker \varphi = \ker \varphi g$

Действительно, заметим, что

$$g \in \ker \varphi = \{x \in G_1 : \varphi(x) = \varphi(g)\} \text{ т.к.}$$

1. если $x \in g \in \ker \varphi$, то

$$\varphi(x) = \varphi(g)$$

2. если $\varphi(x) = \varphi(g)$, то

$$x = gh, h \in \ker \varphi.$$

$$\text{т.к. } (\varphi(g))^{-1} \cdot \varphi(x) = e$$

$$\varphi(g^{-1}x), \text{ т.е. } g^{-1}x \in \ker.$$

$$\text{Аналогично } \ker \varphi = \{g \in G_1 : \varphi(x) = \varphi(g)\}$$

Получим образцы из нормальных подгрупп.

$$\text{По-другому: } g \in \ker g^{-1} \in \ker \varphi, \text{ т.е. } \varphi(g h g^{-1}) = \\ = \varphi(g) \varphi(h) \varphi(g^{-1}) = e$$

Но \ker не всегда нормальная: $H \subset G$ - не норм.

$$\text{Тогда } H \rightarrow G$$

Умб. Если H нормальна в G , то отобра.

$$G \rightarrow G/H, \text{ которое задается формулой}$$

$$g \rightarrow \bar{g} \text{ является гомоморфизмом групп.}$$

Этот гомоморфизм называется π проекцией

Свойство: ядро $\ker(G \rightarrow G/H) = H$

$$\text{Im}(G \rightarrow G/H) = G/H$$

Пусть $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ - гомоморфизм групп.

$$G_1 / \ker \varphi \cong \text{Im} \varphi.$$

$$\bar{g} \mapsto \varphi(g)$$

□ • Определение имеет обратное

и не зависит от выбора пред- и

класса смежности: $\varphi(g \ker \varphi) = \varphi(g)$

• Проверим, что $\bar{g} \mapsto \varphi(g)$ - гомом.

$$\bar{g}_1 \bar{g}_2 = \bar{g}_1 \bar{g}_2 \mapsto \varphi(\bar{g}_1 \bar{g}_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2) \text{ групп.}$$

$$A(\bar{g}_1 \bar{g}_2) = A(\bar{g}_1) A(\bar{g}_2)$$

• Осталось проверить, что A изоморфизм

1. A - сюръекция, т.е. если $x \in \text{Im} \varphi$
то $x = \varphi(g)$ где некоторо $g \in G_1$, то
 $A\bar{g} = x$.

2. если $A\bar{g} = A\bar{h}$ ($g, h \in G_1$) то $\varphi(g) = \varphi(h)$
т.е. $g h^{-1} \in \ker \varphi$, т.е. $\bar{g} = \bar{h}$ \square

Пусть $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ - гомоморфизм.

$$\ker \varphi = \{ g \in G_1 : \varphi(g) = e \}$$

Подгруппой, $\ker \varphi = \varphi^{-1}(e)$. Тогда $g_2 \in G_2, 1 \neq g_2$
 $\varphi^{-1}(g_2) \neq \emptyset$, т.е. $g_2 \in \text{Im } \varphi$. Тогда $\varphi^{-1}(g_2)$ ~~состоит~~
 находится в двукратном соотв. с $\ker \varphi$.

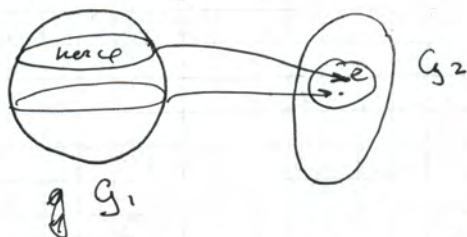
$$\exists x \in G_1 : \varphi(x) = g_2$$

Тогда $\varphi^{-1}(g_2) = x \ker \varphi$, т.к. $\varphi(y) = \varphi(x)$

$y = xh, h \in \ker \varphi$. Моноумим, что

$$\varphi^{-1}(g_2) \text{ порождает } \varphi^{-1}(g_2) \ker \varphi = \varphi^{-1}(e)$$

умножением на подоб. из подгруппы



□

Если G_1 - простая подгруппа, то множества
 всех прообразов совпадают.

Если $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ - гомоморфизм, $|G_2| < \infty$, то
 $|G_1| = |\ker \varphi| \cdot |\text{Im } \varphi|$.

Примеры. Пусть A_n - знакопеременная группа

Тогда \exists гомоморфизм $\varphi: S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$

$\varphi(\sigma) = (-1)^{\sigma}$. В этом случае $\ker \varphi = A_n$,

Ан.12.3.

φ -изоморфизм, $\text{Im } \varphi = \{ \pm 1 \}$

Т.о. $|S_n| = |A_n| \cdot 2$

• $G_1 = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$G_2 = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$

$\varphi(z) = |z|$

Тогда φ -изоморфизм, $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}_{>0}^*$

$\ker \varphi = \{z : |z| = 1\} = S^1$. Т.о. $\mathbb{C}^* / S^1 \cong \mathbb{R}_{>0}^*$

• $G_1 = \mathbb{C}^*$, $G_2 = S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$

$\varphi(z) \mapsto \frac{z}{|z|}$

φ -изоморфизм $\text{Im } \varphi = S^1$

$\ker \varphi = \mathbb{R}_{>0}^*$

$\mathbb{C}^* / \mathbb{R}_{>0}^* \cong S^1$

• $G = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$

$\varphi: G \rightarrow S^1$

$\ker \varphi = \mathbb{Z}$, $\text{Im } \varphi = S^1$

$\mathbb{R} / \mathbb{Z} \cong S^1$

\mathbb{R} — опер. множество, S^1 — группоид.

$\mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\varphi(x * y) = \varphi(x) \varphi(y)$

φ -изоморфизм

$\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ - гомоморфизм. Тогда φ можно представить в виде композиции сюръекции и

$$\text{вложение: } G_1 \rightarrow G_1 / \ker \varphi \rightarrow G_2$$

$$g \rightarrow \bar{g} \rightarrow \varphi(g)$$

□ Отобр. $G_1 \rightarrow \bar{g}$ является сюръекцией,
 отобр. $G_1 / \ker \varphi \rightarrow G_2, \bar{g} \rightarrow \varphi(g)$ - влож.,
 тк. $\varphi(g) = e_2 \Rightarrow g \in \ker \varphi$. По опр. композиция
 действительно равняется φ . □

Действие групп на множествах.

Пусть X -мн-во, $S(X)$ -группа всех биекций.
 отобр. $X \rightarrow X: S(X)$ группа по мн-ву.

Если $|X| < \infty$ (X -мн-во), то $S(X) \cong S_n$
 $n = |X|$

Опр. Группа преобразований X -подгруппа $G \subset S(X)$

Пример Пусть $X = \mathbb{R}^2$, G - все ортогональные, или
 преобр-ия

Опр. Пусть $x \in X$, G -группа преобр-ий.

Тогда орбита x - это все мн-во вида gx ,
 $g \in G$

Ал.12.4.

Орбита эл-та x подг. G_x (или O_x)

Определим отн. зив. на мн-ве X относительно
функции преобр. G по правилу $x \sim y$, если $\exists g \in G$
т.ч. $y = gx$ ($x, y \in X$).

Лемма это отн. зив.

$$\square \cdot x \sim x \text{ т.ч. } x = id \cdot x \quad id \in G$$

$$\cdot x \sim y \Rightarrow y \sim x \text{ Действ. } y = gx \Leftrightarrow g^{-1}y = x$$

$$\cdot x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z. \text{ Действ. } y = g_1x, z = g_2y \Rightarrow$$

$$z = g_2g_1x, \text{ где } g_2g_1 \in G$$

\square

Следствие. 2 орбиты совпадают или не перес.

Все X является объедин. различных орбит

Стабилизатор. X -мн-во, $G \subset S(X)$.

$$x \in X. \text{ Тогда } \text{Stab}_G(x) = \{g \in G : g(x) = x\} \leq G$$

Лемма $\forall x \in X$ $\text{Stab}_G(x)$ - подгруппа G .

$$\square \forall g_1, g_2 \in \text{Stab}_G(x) (g_1, g_2)x = x$$

$$g \in \text{Stab}_G(x), g^{-1}(x) = x \text{ т.ч. } (g(x) = x).$$

Теорема $|G| < \infty$. Тогда $|G| = |O_X| \cdot |Stab_G(x)|$
 $\forall x \in X$

Доказательство: Пусть $y \in O_X$, т.е. $y = h(x)$, $h \in G$

$$\begin{aligned} ev_x^{-1}(y) &= \{g \in G : gx = y\} = \{g \in G : \\ &\quad gx = hx\} \\ &= \{h^{-1}g \in h^{-1}G : h^{-1}gx = x\}, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } h^{-1}g \in Stab_G(x) \Leftrightarrow g \in Stab_G(x)$$

Как посчитать $|ev_x^{-1}(y)|$?

$$\begin{aligned} \text{Заметим, что } |\{h^{-1}g, g \in Stab_G(x)\}| &= \\ &= |Stab_G(x)|, \text{ т.к.} \\ &\text{группа не меняется на } h^{-1} - \text{сдвиге} \\ &\quad G \rightarrow G \end{aligned}$$

П.о. отображ $|ev_x^{-1}(y)| =$

$$= |ev_x^{-1}(x)| = |Stab_G(x)|$$

$$|G| = |G_X| \cdot |Stab_G(x)|$$

$$G \hookrightarrow S(X) \quad G \rightarrow G_X \quad X\text{-многообразие}$$

Ан.13.1.

Замечание $eu_x^{-1}(hx) = h eu_x^{-1}(x)$

Предложение $y \in Gx \Rightarrow Gy = Gx$

Пример: $y = hx$. Тогда $Stab_G(y) = h^{-1} Stab_G(x) h$.

$\square g \in Stab_G(y) \Leftrightarrow gy = y \Leftrightarrow ghx = hx \Leftrightarrow$

$(h^{-1}gh)(x) = x \Leftrightarrow h^{-1}gh \in Stab_G(x) \Leftrightarrow$

$g \in h Stab_G(x) h^{-1} \quad \square$

Следствие • $|G| : |Stab_G x| \quad \forall x \in X$

• $|G| : |Gx| \quad \forall x \in X.$

Примеры: Пример $X = G, g(x) = Ad_g(x) = gxg^{-1}$

$G \hookrightarrow S(G)$

$g \mapsto Ad_g$

$Stab_G(x) = \{g \in G : gxg^{-1} = x\} =$

$= \{g \in G : gx = xg\}.$

• Если G абелева, то $Stab_G(x) = G$
 $\forall x \in X = G$

• Если G не абелева, то $Stab_G(x) \neq G$
 $\forall x$, но имеет другое значение

Опр. $Z(x) = \{g \in G : gx = xg \quad \forall x \in G\} \ni e$

$= \bigcap_{x \in G} Stab_G(x)$

Пример $X = G$, $g(x) = \text{Lg}(x) = gx$

$$Gx = G \quad \forall x \in X; \text{Stab}_G(x) = \{e\}$$

Пример $G = S_n$, $X = G$, присоед. действие.

$$g(x) = \text{Ag}_G(x) = gxg^{-1}$$

~~Gx~~ Gx - это все перест. одного циклического типа.

Лемма $\text{Ad}_g(x_1 \cdot x_2 \dots x_L) = \text{Ad}_g(x_1) \text{Ad}_g(x_2) \dots$

x_1, \dots, x_L - линейно независимые

Замечание $\text{Stab}_G(x)$, $X = S_n$, $G = S_n$, $g(x) = \text{Ad}_g(x)$

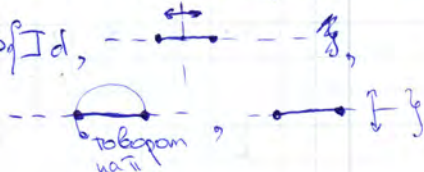
$$gxg^{-1} = x \quad g(i_1 \dots i_n) = (g(i_1) \dots g(i_n))$$

Группы симметрии фигур.

Пусть P_n - правильный n -угольник ^{с центром в 0} на плоскости \mathbb{R}^2 .

Опр. Группа диэдра D_n - подгруппа в группе ортост. линейных преобразований \mathbb{R}^2 , которых сохр. P_n .

Пример $n=2$, \mathbb{R}^2 . $D_2 \cong \{Id, \dots\}$



$$D_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$n = 3$$



$$\begin{cases} \text{Поворот на } \frac{2\pi}{3} \\ \text{поворот на } \frac{4\pi}{3} \\ S_1, S_2, S_3 - \text{симметрии отн. } S_{\text{оси.}} \\ id \end{cases}$$

$$D_3 = S_3$$

Замечание Если G является группой преобр. конечного м-ва X , то мы получим гомоморфизм $G \rightarrow S_{|X|}$

Пусть теперь дана фигура F в \mathbb{R}^3 .

Гр. группа симметрий F состоит из ортогон. преобразований (линейных) \mathbb{R}^3 , которые сохраняют F .
Обозначим $O(F)$, подгруппа $SO(F)$ - собственные орт. преобр.

$SO(F)$ - нормальная подгр. в $O(F)$
т.е. $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$

$$\bullet O(F)/SO(F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\det: O(F) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \ker(\det) = SO(F)$$

$$A \mapsto \det A \quad \text{Im}(\det) = \pm 1$$

Замечание $O(F) = SO(F) \sqcup -SO(F)$
в \mathbb{R}^3

Группа преобразований

$S(X)$ - группа зв.-огр. отображений $X \rightarrow X$

Подгруппа $S(X)$ - группа преобр.

Упр. определить группу ортogonal. операторов
в \mathbb{R}^3 равен ± 1 .

\square e_1, e_2, e_3 - ортонорм. базис в \mathbb{R}^3

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (Ae_1, Ae_1) = 1$$

$\Rightarrow a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$

$$\text{Ортogonal} \Rightarrow AA^T = E$$

$$\det A = \det A^T \Rightarrow (\det A)^2 = 1.$$

Замечание $SO(\Phi) \subset O(\Phi)$ вписанным образом.

Пример.

$D_n = O(\text{шестиугольника})$ - группа симметрий,

Φ - тетраэдр (правильный)



$$O(\Phi) = S_4$$

$$SO(\Phi) \cong S_4, \quad SO(\Phi) \cong A_4, \text{ т.к.}$$

симметрия отн. плоскости - нечетное
орт. преобр.

Пусть G - группа, X - мн-во.

Скажем, что G действует на X , если задан гомоморфизм $G \rightarrow S(X)$ (не обяз. вложение)

Действие группы на мн-ве удобно задавать

$$\hat{\varphi}: G \times X \rightarrow X, \quad \hat{\varphi}(g, x) = \varphi(g)x$$

Пример: $G = S_n$, $X = \{1, 2, \dots\}$, $\varphi: G \rightarrow S(X)$

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} \text{Id}, & \sigma = \text{id} \\ (12), & \sigma = \text{свм.} \end{cases}$$

Опр. Пусть $\varphi: G \rightarrow S(X)$ - действие, тогда

φ - тривиальное, если $\ker \varphi = e \iff G \cong \text{Im } \varphi$.
($G(x) = x \forall x \implies g = e$)

Утв. • Все авт. G образуют группу отн. к композиции. $\text{Aut}(G)$
• Автоморфизм вида $\text{Ad } g$ одр. подгруппу в $(\text{Ad } g \in \text{Aut}(G))$

Все авт. вида $\text{Ad } g$ наз-ся внутр., а ост. внешними.

Опр. Действие $\varphi: G \rightarrow S(X)$ называется свободным,

$$\text{если } \varphi(g)x = x \Rightarrow g = e$$

~~тоже~~ ~~свободно~~ ~~свободно~~

$$\varphi(g) = \text{id} \Rightarrow g = \text{id}$$

$$\varphi(g)x = \text{id} \Rightarrow g = e$$

$$\varphi(g)x = x \quad \forall x \in X \Rightarrow g = \text{id}$$

Пример $L: G \rightarrow S(G) \quad L(g)x = gx$

$g \neq e$, x -любо, то $gx \neq x$ - свободно.

Пример $\text{Ad}: G \rightarrow S(G), \quad \text{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$

Пусть $Z(G) = \{e\} (G = S_n)$. Тогда $\ker \text{Ad} = Z(G) = \{e\}$
тоже действие

Лемма Транзит. действие многогранно и свободно

$\Delta \quad \text{Ad}_g(e) = ge g^{-1} = e \quad \forall g$. Т.о. уст.
свободности наруши при $g = e$. \square

Опр. Действие $\varphi: G \rightarrow S(X)$ называется

транзитивным, если $\forall x, y \in X \exists g \in G$

$$\varphi(g)x = y$$

Опр. Орбита x при действии φ - это мн-во

$$Gx = \{ \varphi(g)x, g \in G \}$$

Задача Орбита Gx совп. с орбитой x где
группы изоморф. $\text{Из } \varphi$

Утв. Действие транзитивно \iff
орбита от a и равна X .

Доку. X/G - мн-во орбит.

Опр. Стабилизатор $x \in X$ при действии φ -подгруппы G , сост. из элементов $g \in G$, т.е. $\varphi(g)x = x$

Теорема $|G| = |Gx| \cdot |\text{Stab}_G x|$

□ ~~$ev_x: G \rightarrow X, ev_x(g) = g(x)$~~

$$G \rightarrow \text{Im } \varphi \subset S(X)$$

\downarrow
 G'

$$|G'| = |G'x| \cdot |\text{Stab}_{G'} x| \text{ знаем.}$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ |\ker \varphi| \cdot |G'| &= |G'x| \cdot |\ker \varphi| \cdot |\text{Stab}_{G'} x| \\ & \parallel \qquad \parallel \\ |G| & \qquad |Gx| \end{aligned}$$

$G' = G/\ker \varphi$ таким образом,

$$|\text{Stab}_G(x)| = |\ker \varphi| \cdot |\text{Stab}_{G'}(x)| \quad \square$$

$$G = S_n, X = S_n, \text{Ad} : S_n \rightarrow S(S_n)$$

Орбита этого действия параметр. символом
матрицы. Это есть набором $1^{m_1} \dots n^{m_n}$.

Умножить так удобно задавать диаграммы Нью

Обозначение

• X^g - м.во неподвижных точек
 $g \in G$
 $\{x \in X : gx = x\}$

Свободное действие много не ост. на месте,
 а только $e \in G$ ост. во м. на месте.

У точности \Rightarrow свобода.

• X/G - м.во орбит.

Замечание Действие свободно \Leftrightarrow ~~$X^g = \emptyset$~~

$X^g = \emptyset \quad \forall g \neq e$

Действие точно $\Leftrightarrow X^g \neq \emptyset \quad \forall g \neq e$

$\cap_{g \in G} X^g = \emptyset \Leftrightarrow |G| > 1$

Теорема Пуанкаре-Бертранда.

Пусть $|G| < \infty$, $|X| < \infty$

$|X/G| = (\sum_{g \in G} |X^g|) / |G|$

□ Став $X = \{g \in G : gx = x\}$

$X^g = \{x \in X : gx = x\}$

$F \subset G \times X : F = \{(g, x) : gx = x\}$

Вопросник 1F1.

$$\varphi: F \rightarrow G$$

$$(g, x) \mapsto g$$

$$\varphi^{-1}(g) = \{ (g, y) : y \in X^g \}$$

$\begin{matrix} \downarrow \\ X^g \end{matrix}$

$$|F| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

$$\psi: F \rightarrow X$$

$$(g, x) \mapsto x \quad \psi^{-1}(x) = \{ (g, x) : g \in \text{Stab}_G x \}$$

$$(**) |F| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G x|$$

$$(*) |\text{Stab}_G x| = |\text{Stab}_G y|$$

$$y = g \cdot x \Rightarrow \forall g \in \text{Stab}_G x \quad g \cdot g \in \text{Stab}_G y$$

$$\text{Stab}_G y = g \cdot \text{Stab}_G x$$

$$x \in X \Rightarrow |F| = \sum_{O\text{-orbita}} |O| \cdot |\text{Stab}_G x| = \sum_{O\text{-orb}} |O| = |G| \cdot 1 \cdot |X_G|$$

$$\text{Следовательно } |G| \cdot |X/G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

Тогда имеем:

Имеется правильное число N .

Рассмотрим м-во X , состоящее из конфигураций чисел от 1 до n в каждой вершине

Но отсюда. два отрезка, если они не пересекаются, то они не имеют общих вершин.

Нас интересует $|X/D_n|$

$$|X| = n^N$$

$$|X/D_n| = \frac{1}{N!} \sum_{g \in D_n} |X^g|$$

$$\frac{1}{12} (3n^4 + 4n^3 + 2n^2 + 2n + n)$$

(смотрим сколько раз поворачиваем n -м D_n ост. и т.д.)

Общий случай: $|X/D_n| = \frac{1}{N!} \sum_{g \in D_n} |X^g|$

$$|X^g| = \begin{cases} n^{\frac{N}{2}+1} & N \text{ чётно.} \\ n^{\frac{N}{2}} & N \text{ нечётно.} \\ n^{\frac{N-1}{2}} & N \text{ нечётно.} \end{cases}$$

$$|X^{\frac{2\pi i}{N} \cdot k}| = n^{d \cdot 7}$$

$d = \text{HOD}(N, k)$

Коммутативна група:

G -группа $g_1, g_2 \in G$

Коммутатор g_1, g_2 $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in G$

Коммутант G - подгруппа $G' \subset G$, порожденная коммутаторами

Теорема. G' - нормальная подгруппа в G .

$$\square \underbrace{x g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} x^{-1}}_A = \underbrace{x A x^{-1}}_{G'} \underbrace{A^{-1}}_{G'}. \underbrace{A}_{G'}$$

$$\text{или же } \underbrace{x A x^{-1}}_{G'} = \underbrace{x A x^{-1}}_{G'} \underbrace{A^{-1}}_{G'} \cdot \underbrace{A}_{G'} \quad \square$$

G/G' - абелева

$$\square [a][b][a^{-1}][b^{-1}] = [aba^{-1}b^{-1}] = [e] \quad \square$$

Пусть H - норм. в G , т.е. G/H - абелева $\Rightarrow H \supset G'$

$$\square \forall a, b \in G [a][b][a^{-1}][b^{-1}] = [e] \Rightarrow [aba^{-1}b^{-1}] = [e] \Rightarrow$$

$$aba^{-1}b^{-1} \in H \quad \forall a, b.$$

H - подгруппа всех произв. элементов, лежащих в H .

Пример $G = S_n$, $G' = A_n$

• $S_n' \subset A_n$, т.к. \forall чётн. перест.

• $(21)(13)(21)(13) = (213)^2 = (123)$.

Порождающая ~~транспозиция~~
циклами 3.

Утв.

$\varphi: G \rightarrow H$ - гомоморфизм в H -абел.,
то $G' \subset \ker \varphi$

$$\square \quad \varphi(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = \varphi(g_1) \varphi(g_2) \varphi(g_1^{-1}) \varphi(g_2^{-1}) = e$$