Геометрия и Группы

О.В. Шварцман

2019-2020

Содержание

1 Введение

$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$
Однородный многочлен от x, y степени 2
Заметим, что $f(tx, ty) = t^2 \cdot f(x, y)$

Пример: $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$ — квадратичная форма

Рассмотрим $\mathbb{Z}^2\{(m, n);\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ и обозначим $\mathbb{Z}^{2\star} = \mathbb{Z}^2/(0, 0)$
Пусть $m(f) = \min|f(x, y)|,\ (x, y) \in \mathbb{Z}^{\nvDash\star}$, тогда $m(\lambda f) = m(f) \cdot \lambda$
Число Маркова
$C(f) = \frac{m(f)}{\sqrt{\Delta f}}$

На курсе планируется рассмотреть несколько вопросов:
1) Как устроен спектр Маркова(т.е. какие значения может принимать $C(f)$)
2) Какую область $C(f)$ занимает на $\mathbb{R}$

2 Появление группы

$x, y \in \mathbb{Z}^{2\star}, \quad (x, y) \to (ax + by,\ cx + dy)$
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ – группа обратимых матриц
1) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ 2) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \pm 1$
Задача
Показать, что $\mathbb{Z}^2$ изоморфно $\mathbb{Z}^{2\,\star}$
Где $\mathbb{Z}^{2\,\star} \ =\ \mathbb{Z}^2/(0, 0)$

Пусть $F(x, y) = f(\alpha x + \beta y,\ \gamma x + \delta y)$

Задача
Докажите, что: $|\Delta(F)| = |\Delta(f)|$

$$f_1 \sim f_2 \ \Leftrightarrow$$
$$1) f_1(x, y) = f_2(\alpha x + \beta y,\ \gamma x + \delta y)$$
$$2) \begin{cases} C(f_1) = C(f_2) \\ C(\lambda f) = C(f) \end{cases}$$

Примеры:
а)
$f(x, y) = 0$
$\exists m, n \in \mathbb{Z}^{2\star}$
б)
$(p_n, q_n) :\ p_n, q_n \in \mathbb{Z}$
$q_n > 0$
$|f(p_n, q_n)| \to 0$

3 Теория диофантовых приближений

Пусть $\omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$
Существует бесконечно много пар (p_n, q_n), $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n > 0$ таких что:

$$|\omega - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$$

Задача
Проверить это утверждение, представив ω в виде цепной дроби, а также проверить, выполнено ли это

утверждение для $\frac{1}{q_n^k},\ k \in \mathbb{Z}$

$f = x^2 + \omega^2 y^2$
$\Delta(f) = b^2 - 4ac = 4\omega^2 > 0$

$$|f(p_n, q_n)| = |p_n^2 - (\omega q_n)^2| = q_n^2 |(\frac{p_n}{q-n} - \omega)(\frac{p_n}{q-n} + \omega)| < q_n^2 \frac{C(\omega)}{q_n^3} = \frac{C(\omega)}{q_n} |\omega - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^3}$$

Построим ω

$$\omega = \sum_{n=1}^{\inf} 10^{-n!}$$

Заметим что в этом случае ω это десятичная непериодическая дробь из 0 и 1

$\mathbf{\Delta(f) < 0}$
$f_0(x, y) = x^2 + xy + y^2$
$|\Delta| = 3$
$C(f_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Теорема
Если $\Delta(f) < 0$, то $C(f) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $C(f) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \qquad f_0$
Спектр Маркова для $\Delta(f) < 0$ это отрезок $[0; \frac{1}{\sqrt{3}}] \Leftrightarrow$
$\rho \in [0; \frac{1}{\sqrt{3}}] \quad \exists [f] : C(f) = \rho$