Самоконтроль

1. При каких $p \in \mathbb{R}$ функция $\big|\ln|x|\big|^p$ интегрируема по единичному шару в $\mathbb{R}^n$?

2. Вычислить интеграл функции $|x+y|$ по множеству $|x|+|y| \le 1$.

3. Найти площадь ограниченной фигуры в положительном октанте плоскости, выделенную кривой $(x+y)^4 = x^2 + y^2$.

4. Вычислить интеграл от функции xyz по области в $\mathbb{R}^3$ между треугольником в плоскости OXY, порожденным прямыми $x = 1$, $y = 0$, $x = y$, и графиком функции $z = xy$.

5. Найти преобразование Фурье функции $\exp(-x^2 + 2xy - 8y^2)$.

Решения

Задача 1

Заметим, что если функция интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу

$$|x|^p |\ln|x||^p \frac{1}{|x|^p} \qquad \text{непрерывно при } |x| < \frac{1}{2}$$

$$|x| \cdot \ln|x| \to 0,\ x \to 0$$

Введем сферические координаты

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\varphi_1) \\ x_2 = r\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ \vdots \\ x_n = r\sin(\varphi_1)\dots\sin(\varphi_{n-1}) \end{cases}$$

$$|J| = r^{n-1} \cdot f(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$$

$$\int_{x_1^2+\dots+x_n^2 \leqslant 1} |\ln|x||^p dx = \int_{0\leqslant r\leqslant 1} |\ln(r)|^p \cdot r^{n-1} \int f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) d\varphi_1 \dots d\varphi_n$$

$$\int_0^1 |\ln(r)|^p r^{n-1} dr = \int_0^{\frac{1}{2}} |\ln(r)|^p r^{n-1} dr + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln(r)|^p r^{n-1} dr$$

$$|\ln(r)| \leqslant c r^{-\alpha} \quad \forall \alpha > 0$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln(r)|^p dr \leqslant c^p \int_0^{\frac{1}{2}} r^{-\alpha p} dr$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{|\ln(r)|^p}{r} dr < \infty \qquad \int_0^{\ln(2)} t^p dt < \infty \qquad t = \ln(r) \ \Leftrightarrow\ p > -1$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{|\ln(r)|^p}{r} dr = \int_{\frac{1}{2}}^1 (\ln(r))^{p+1} dr \qquad p > -1$$

Задача 2

$$-1 \leqslant x + y \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant x - y \leqslant 1$$

$$x_1 = x + y,\ y_1 = x - y$$

$$\left|\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x, y)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\int_{|x|+|y|\leqslant 1} |x+y| dx dy = \int_{\substack{|x_1|\leqslant 1 \\ |y_1|\leqslant 1}} |x_1| \frac{1}{2} dx_1 dy_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 2x_1 dx\right) dy = 2\int_0^1 dy = 1$$

Задача 3

$$\begin{cases}(x+y)^4 = x^2+y^2\\ x \geqslant 0\\ y \geqslant 0\end{cases} \qquad \begin{cases}x = r\cos(\varphi)\\ y = r\sin(\varphi)\end{cases}$$

$$\begin{cases}r^4(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))^4 = r^2\\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\end{cases} \qquad r = \frac{1}{(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))^2}$$

$$r = \frac{1}{1+\sin(\varphi)^2} = \frac{1}{2\left(\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})\right)^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))^2}} r dr d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))^4} d\varphi =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})\right)^4} d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin(\varphi))^4} d\varphi =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\operatorname{ctan}(\varphi)\cdot\left(\frac{1}{\sin(\varphi)^2}+2\right)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\cdot 4 = \frac{2}{3}$$

Задача 4

$$x = 1,\ y = 0,\ x = y,\ z = xy$$

$$\int xyzdxdydz = \iint_{\substack{y\geqslant 0\\ y\leqslant x\leqslant 1}} \left(\int_0^{xy} xyzdz\right)dxdy = \int_{y\geqslant 0}\int_1^y \frac{(xy)^3}{2}dxdy = \int_{y\geqslant 0}\frac{y^7-y^3}{8}dy$$

Задача 5

$$f = \exp(-x^2+2xy-8y^2) = \exp(-(x-y)^2-7y^2)$$

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-i\langle y,x\rangle)f(x)dx$$

$$\hat{f}(\lambda,\mu) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2+2xy-8y^2-i\lambda x-i\mu y}dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x-y)^2-7y^2-i\lambda x-i\mu y}dxdy$$

$$u = x-y \qquad v = y$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-7v^2-i\lambda(u+v)-i\mu v}dudv = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2-i\lambda u}du\int_{\mathbb{R}} e^{-7v^2-i\lambda v-i\mu v}dv$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2-i\lambda u}du = \int_{\mathbb{R}} e^{-(u^2+i\lambda u-\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^2}{4})}du =$$

$$e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(u+\frac{i\lambda}{2}\right)^2}du = e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda}{4}}$$

Аналогично

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-7v^2-i\lambda v-i\mu v}dv = e^{-\frac{(\lambda+\mu)^2}{28}}\int_{\mathbb{R}} e^{-7v^2} =$$

$$-(7v^2+v(i\lambda+i\mu)\sqrt{7}\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}-\frac{(\lambda+\mu)^2}{28}) - \frac{(\lambda+\mu)^2}{28} =$$

$$-\left(\sqrt{7}v+\frac{i(\lambda+\mu)}{2\sqrt{7}}\right)^2 - \frac{(\lambda+\mu)^2}{28} = \sqrt{\frac{\pi}{7}}e^{-\frac{(\lambda+\mu)^2}{28}}$$

Откуда

$$f(\lambda,\mu)=\frac{\pi}{\sqrt{7}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}-\frac{(\lambda+\mu)^2}{28}}=\frac{\pi}{\sqrt{7}}e^{-\frac{8\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}{28}}$$