Лекция 11. Особые точки голоморфных функций

Теория функций комплексного переменного

Порядок изолированного нуля

Предложение 7.2. *Пусть голоморфная функция f имеет в точке $a \in \mathbb{C}$ изолированный нуль, и пусть k — натуральное число. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(1) *Существует такая функция g, голоморфная в окрестности точки a, что $g(a) \neq 0$ и $f(z) = (z-a)^k g(z)$.*

(2) *Ряд Тейлора для f в точке a имеет вид*

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \ldots, \tag{7.1}$$

где $c_k \neq 0$.

(3) $f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0,\ f^{(k)}(a) \neq 0.$

Натуральное число k с такими свойствами всегда существует.

Порядок изолированного нуля

Определение 7.3. Число k, удовлетворяющее эквивалентным условиям (1)—(3) из предложения 7.2, называется *кратностью нуля* a функции f. Обозначение: $\operatorname{ord}_a f$. Если $f(a) \neq 0$, полагаем $\operatorname{ord}_a f = 0$. Можно также говорить не «кратность нуля», а «порядок нуля»: эти два словосочетания являются синонимами.

Определение 7.4. Если функция f, голоморфная в окрестности точки a, имеет в этой точке изолированный нуль кратности 1, говорят, что f имеет *простой нуль* в этой точке.

Предложение 7.5. *Если функции f_1 и f_2 голоморфны в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и не являются тождественным нулем ни в какой ее окрестности, то* $\operatorname{ord}_a(f_1 f_2) = \operatorname{ord}_a(f_1) + \operatorname{ord}_a(f_2)$.

Нормальная форма вблизи нуля

- Пусть $f(z) = (z-a)^k g(z)$, где $g(a) \neq 0$.
- Положим $\psi(z) = (z-a)\sqrt[k]{g(z)}$ (выберем некоторую локальную ветвь корня).
- Тогда $f \circ \psi^{-1}(u) = u^k$, то есть f имеет вид $u \mapsto u^k$ с точностью до обратимой голоморфной замены координаты в прообразе.
- Уравнение $f(z) = \varepsilon$ при маленьких ε имеет k корней вблизи от точки a.

Ряд Лорана

Предложение 7.6. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, *и пусть* f — *функция, голоморфная в кольце* $U = \{z : r < |z-a| < R\}$. *Тогда всюду на* U *имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{7.2}$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset U$, *а его коэффициенты вычисляются по формуле*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z-a)^{-n-1}\, dz, \tag{7.3}$$

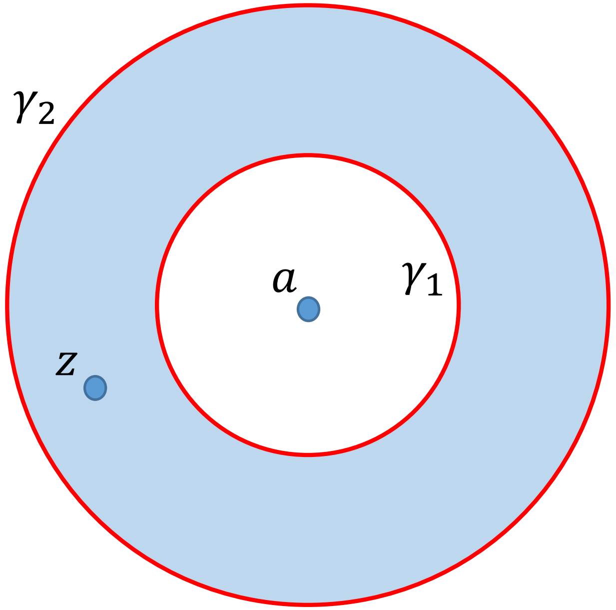
где γ — *любая лежащая в* U *положительно ориентированная окружность с центром в* a *(или, если угодно, любой замкнутый путь в* U, *имеющий индекс* 1 *относительно точки* a).

Идея доказательства предложения 7.4

- Применим формулу Коши к чуть меньшему кольцу.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

- Интеграл по γ_2 раскладывается в ряд как раньше: используется геометрическая прогрессия с частным $\frac{z-a}{z-\zeta}$.
- Для разложения интеграла по γ_1 используется геометрическая прогрессия с частным $\frac{z-\zeta}{z-a}$.



Пьер Альфонс Лоран (1813 – 1854)

- Французский математик, майор инженерных войск.
- Член парижского комитета по проблемам фортификации.

Регулярная часть и главная часть

Определение 7.7. Если голоморфная функция $f\colon U \to \mathbb{C}$ представляется рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

то его часть, содержащая $z-a$ в неотрицательных степенях, т. е. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, называется *правильной частью* ряда Лорана, а ряд $\sum\limits_{k<0} c_k (z-a)^k$, состоящий из членов ряда Лорана с $z-a$ в отрицательных степенях, называется его *главной частью*.

Случай, когда U – проколотый диск

В этом случае главная часть сходится на всем $\mathbb{C}$. В самом деле, ряд $\sum_{n>0} c_{-n} t^n$ сходится при сколь угодно больших t.

Определение 7.8. Функция, голоморфная на всем $\mathbb{C}$, называется *целой функцией*.

Итоги нашего обсуждения можно сформулировать так.

Следствие 7.9. *Пусть* $D = \{z\colon |z-a| < R\}$ *— открытый круг в комплексной плоскости. Всякую голоморфную функцию* $f\colon D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ *можно представить в виде* $f(z) = \varphi(z) + \psi(1/(z-a))$, *где* φ *— функция, голоморфная на всем* D, *а* ψ *— целая функция.*

Теорема об устранимой особенности

Предложение 7.10 (теорема Римана об устранимой особенности). *Пусть* $D = \{z : |z - a| < r\}$, *и пусть* $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ — *голоморфная функция. Тогда следующие три условия эквивалентны.*

(1) *Функция* f *ограничена в некоторой проколотой окрестности точки* a *(возможно, меньшей, чем* $D \setminus \{a\}$*).*

(2) *Функция* f *продолжается до голоморфной функции на всем* D.

(3) *Главная часть ряда Лорана функции* f *в проколотой окрестности точки* a *является тождественным нулем (иными словами, коэффициенты ряда Лорана при отрицательных степенях* $z - a$ *равны нулю).*

Доказательство: $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

Полюсы (алгебраические особенности)

Предложение 7.12. *Пусть* $D = \{z : |z-a| < r\}$, *и пусть* $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ *— голоморфная функция. Тогда следующие четыре условия эквивалентны.*

(1) *Особенность в точке* a *не является устранимой, но при этом существуют такие константы* $N > 0$ *и* $C > 0$, *что* $|f(z)| \leqslant C|z-a|^{-N}$ *для всех* z *из некоторой проколотой окрестности точки* a *(возможно, меньшей, чем* $D \setminus \{a\}$*). Короче это условие можно выразить так:* $|f(z)| = O(|z-a|^{-N})$ *при* $z \to a$.

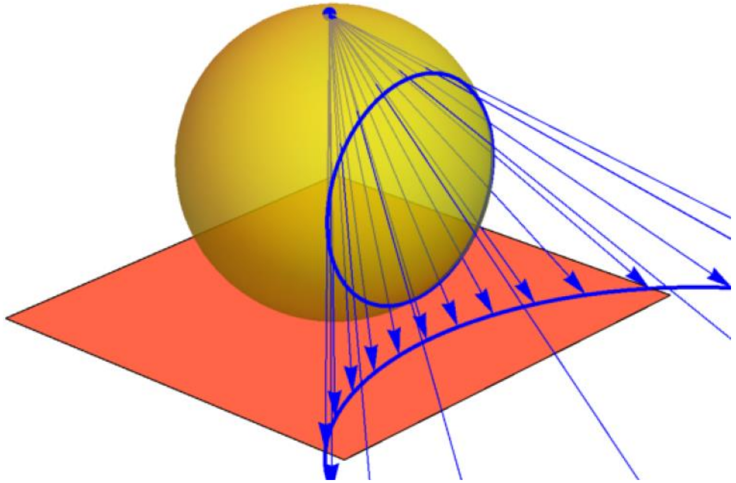
(2) *Существуют такая голоморфная функция* $g : D \to \mathbb{C}$, $g(a) \neq 0$, *и такое натуральное число* $n > 0$, *что* $f(z) = g(z)/(z-a)^n$ *всюду на* $D \setminus \{a\}$.

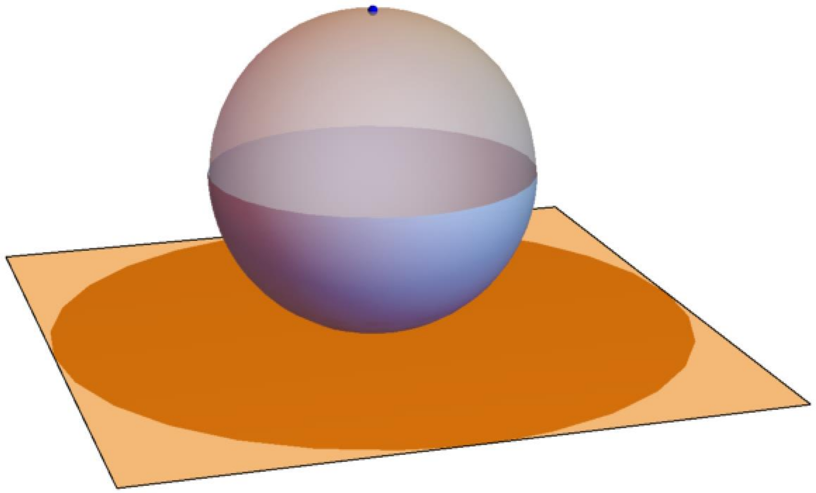
(3) *Главная часть ряда Лорана функции* f *в проколотой окрестности точки* a *не является тождественным нулем, но содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.*

(4) $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

Полюсы и отображения в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2 = \mathbb{C}P^1$

- Пусть $f: D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ имеет полюс в точке a.
- Тогда f отображает проколотую окрестность точки a в проколотую окрестность точки $\infty \in \mathbb{S}^2$.
- Координата $u = \frac{1}{z}$ делает из проколотой окрестности бесконечности проколотую окрестность нуля.
- Функция $\frac{1}{f}$ является голоморфной. Следовательно, f – голоморфное отображение в $\mathbb{S}^2$.





Порядок точки

Обозначение 7.15. Если функция f, голоморфная в проколотой окрестности точки a, имеет вид $f(z) = (z-a)^m g(z)$, где $m \in \mathbb{Z}$, а g — голоморфная функция в окрестности точки a, для которой $g(a) \neq 0$, будем писать $\operatorname{ord}_a(f) = m$.

Предложение 7.16. *Если функции f_1 и f_2, голоморфные в проколотой окрестности точки a, имеют в ней устранимую особенность или полюс и при этом ни одна из этих функций не является тождественным нулем в окрестности a, то отношение f_1/f_2 также имеет в точке a устранимую особенность или полюс. При этом*

$$\operatorname{ord}_a(f_1/f_2) = \operatorname{ord}_a(f_1) - \operatorname{ord}_a(f_2).$$

Теорема Сохоцкого

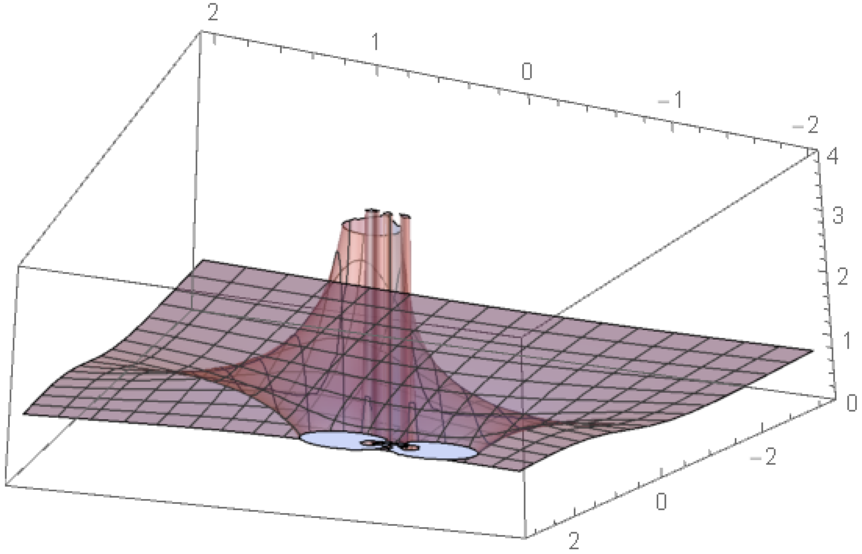
Предложение 7.18. *Пусть* $D = \{z : |z - a| < r\}$, *и пусть* $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ *— голоморфная функция. Тогда следующие два условия эквивалентны.*

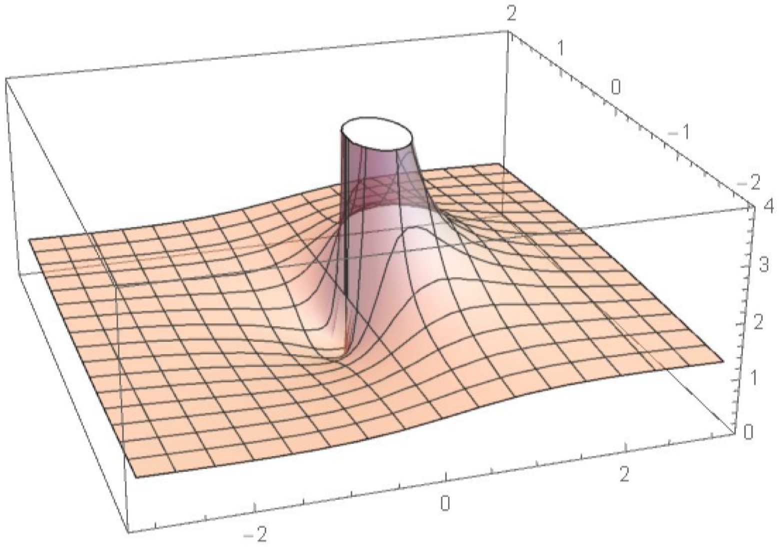
(1) *Главная часть ряда Лорана функции* f *в проколотой окрестности точки* a *содержит бесконечно много ненулевых слагаемых.*

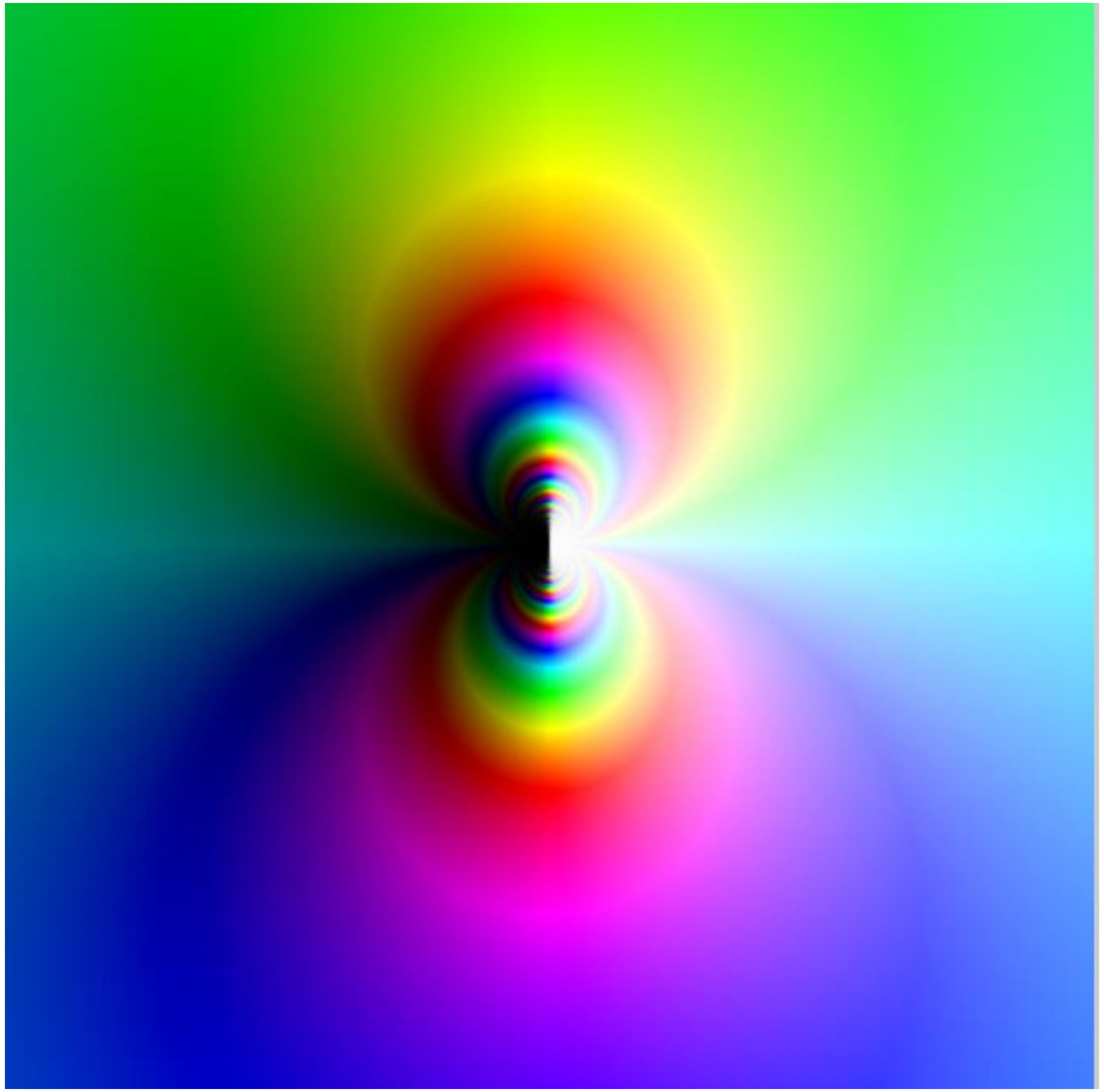
(2) *Для всякого* $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *существует такая последовательность точек* $z_n \in D \setminus \{a\}$, *что* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = c$.

- Сначала докажем для $c = \infty$.
- Потом рассмотрим новую функцию $g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$.

Функция $e^{\frac{1}{z}}$, особенность в 0

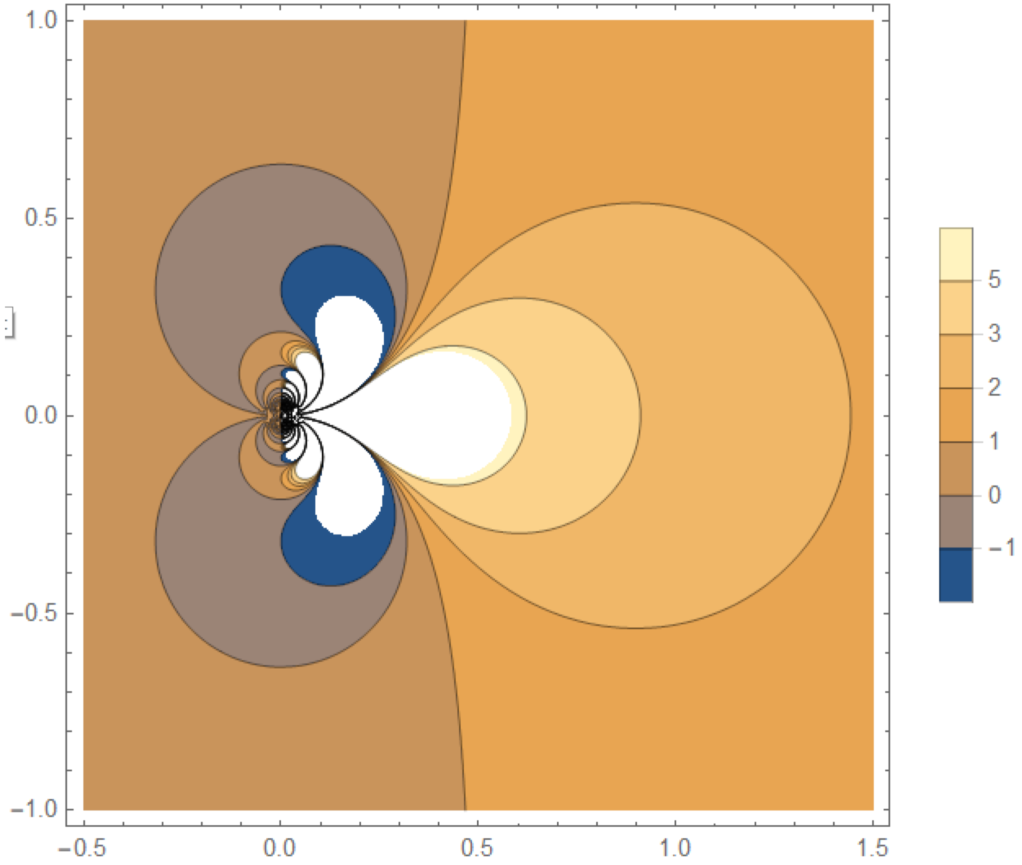




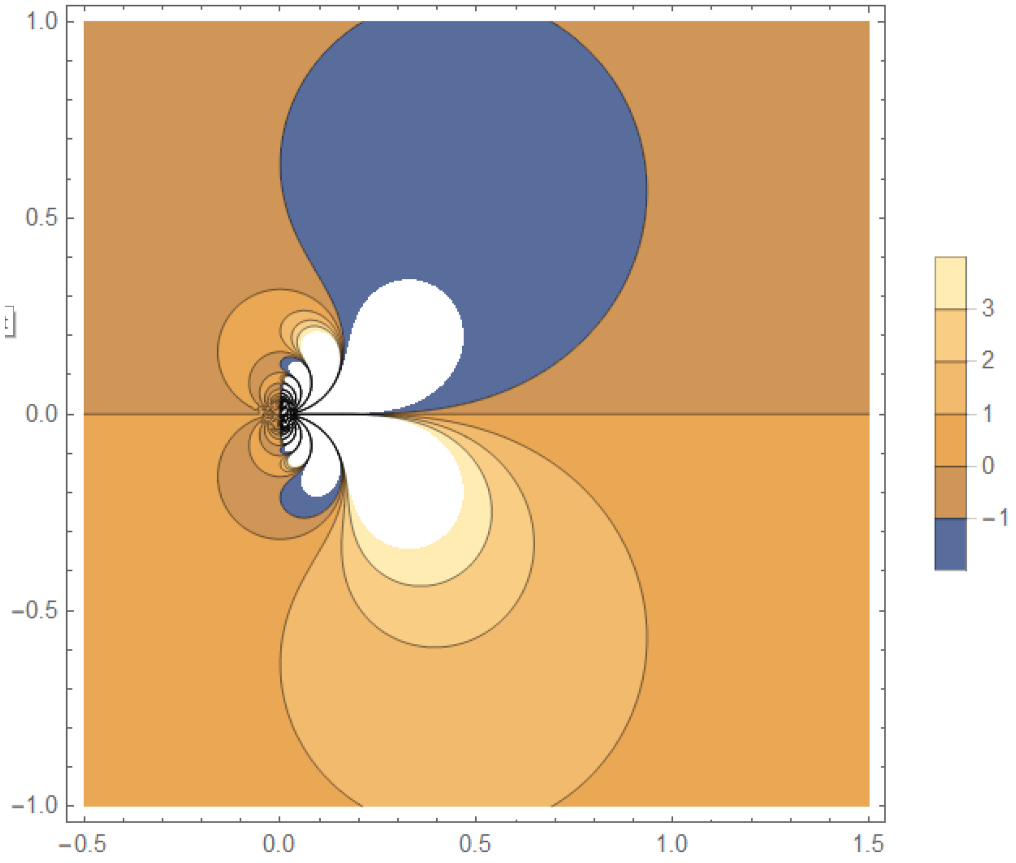


$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{1}{z}}\right), \qquad \mathrm{Im}\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$$

```
ContourPlot[Re[Exp[1 / (x + I y)]], {x, -.5, 1.5}, {y, -1, 1},
 Contours → {-1, 0, 1, 2, 3, 5, 100},
 MaxRecursion → 3, PlotLegends → Automatic]
```




```
ContourPlot[Im[Exp[1 / (x + I y)]], {x, -.5, 1.5}, {y, -1, 1},
 Contours → {-5, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 100},
 MaxRecursion → 3, PlotLegends → Automatic]
```



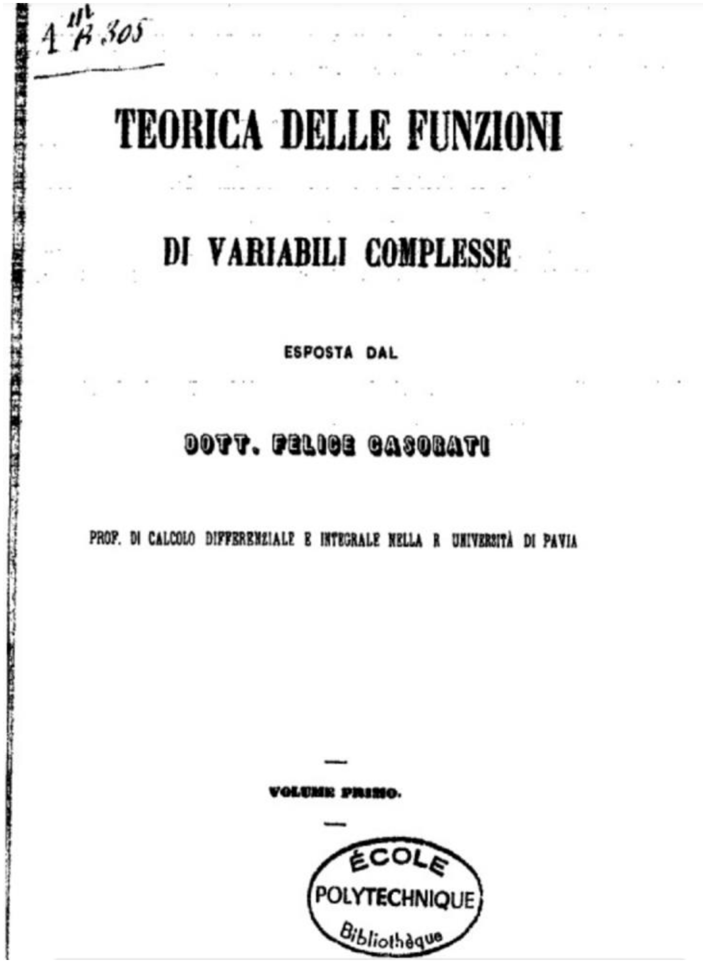
Кто впервые доказал теорему Сохоцкого?

- *Ю.В. Сохоцкий.* Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями. — *СПб., 1868.*
- *F. Casorati* Teorica delle funzioni di variabili complesse. — Pavia, 1868.
- *K. Weierstrass* Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen 1876// Math. Werkc, Bd 2, B. — P. 77-124.
- *C. Briot, I. Bouquet.* Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques. — 1859.

Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842 – 1927)

- В 1890 году стал товарищем председателя только что основанного Санкт-Петербургского математического общества, а с 1892 года его председателем, и оставался на этом посту до того, как общество фактически прекратило свою деятельность перед революцией.

Феличе Казорати (1835 – 1890)



TEORICA DELLE FUNZIONI

DI VARIABILI COMPLESSE

ESPOSTA DAL

DOTT. FELICE CASORATI

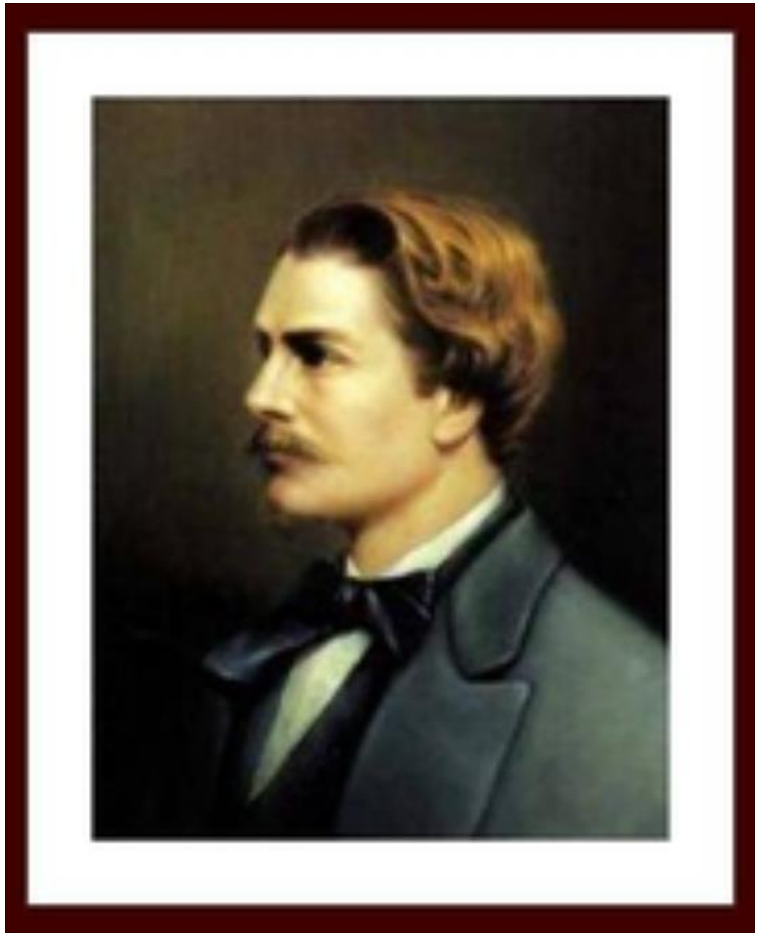
PROF. DI CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA

VOLUME PRIMO.

Карл Вейерштрасс (1815 – 1897)

- Определение непрерывной функции
- Теория эллиптических функций
- Теория аналитического продолжения
- Вариационное исчисление, дифференциальная геометрия, линейная алгебра

Шарль Огюст Брио (1817 – 1882) и Жан-Клод Буке (1859)



Монография Ш. Брио и К. Буке (1859)

Les **Auteurs** et l'**Éditeur** de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toute contrefaçon, soit du texte, soit des gravures, ou toute traduction faite au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours du mois de Février 1859, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Mallet-Bachelier

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

THÉORIE

DES

ONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

ET, EN PARTICULIER,

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR

M. BRIOT,

Professeur de mathématiques au Lycée Saint-Louis, Maître de Conférences à l'École normale supérieure,

ET

M. BOUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand, Répétiteur à l'École Polytechnique.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1859

Глоссарий

- Изолированная особенность.
- Устранимая особенность.
- Полюс.
- Простой полюс.
- Существенная особенность.

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ