Логика и алгоритмы 2021. Листок 1.
Срок сдачи 19.02.2021

Каждая задача оценивается некоторым количеством баллов, которое указано в скобках после ее номера. Оценка за листок равна сумме баллов сданных задач, но не может превышать 10.

1. (1) Для множеств A, B и функции $f : A \to B$ показать, что $f(X) = \{y \mid \exists x \in X(f(x) = y)\}$ и $f^{-1}(Y) = \{x \mid \exists y \in Y(f(x) = y)\}$ являются множествами.

2. (1) Существует ли множество, содержащее в точности все кардиналы?

3. (1) Докажите, что любой плотный (т.е. для которого верно $\forall x \forall y\,(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$) счётный линейный порядок без максимального и минимального элементов изоморфен $\mathbb{Q}$.

4. (1) Докажите, что для двух множеств A и B, таких что $A \lesssim B$ и $A \gtrsim B$, верно, что $A \sim B$. Это утверждение известно, как теорема Кантора-Бернштейна.

5. (баллы по пунктам) Пусть $(X, <)$ — вполне упорядоченное множество. Обозначим через $\Omega(X)$ множество всех конечных последовательностей $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ элементов X таких, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, где n может быть произвольным.

   Зададим на $\Omega(X)$ порядок: $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ меньше $\langle y_1, y_2, \ldots, y_m\rangle$, если для некоторого $k \leqslant \min(n, m)$ верно $x_k < y_k$ и $\forall i < k\,(x_i = y_i)$, или же если $n < m$ и $\forall i \leqslant n\,(x_i = y_i)$. Такой порядок обычно называется лексикографическим. Например для $\Omega(\mathbb{N})$ верно

$$\langle 5,4,3,2,1\rangle < \langle 5,4,3,2,2\rangle;$$
$$\langle 5,4,3,2,1\rangle < \langle 5,4,3,2,1,0\rangle;$$
$$\langle 5,4,3,2,1\rangle < \langle 5,5\rangle.$$

   а) (1 балл) Докажите, что $\Omega(X)$ вполне упорядочено.

   б) (2 балла) Проверьте, что $\Omega(1) \cong \omega$; $\Omega(X+1) \cong \Omega(X) \times \omega$; $\Omega(X+Y) \cong \Omega(X) \times \Omega(Y)$.

6. (3) Пусть ω_1 — первый несчётный кардинал. Определите порядковый тип вполне упорядоченного множества $\Omega(\omega_1)$?

7. (3) Пусть $(P, <)$ — частично упорядоченное множество, в котором всякая цепь имеет точную верхнюю грань. Дана функция $f : P \to P$, т.ч. $f(x) \leqslant f(y)$ для всех $x \leqslant y$. Докажите, что у функции f есть неподвижная точка, т.е. $\exists z\,(f(z) = z)$.

8. (2) Выведете Теорему Цермело из Леммы Цорна непосредственно (в теории Цермело-Френкеля без аксиомы выбора).

9. (2) Докажите, что в теории Цермело-Френкеля с аксиомой выбора, но без аксиомы регулярности, докажите, что аксиома регулярности эквивалентна утверждению об отсутствии бесконечных $\in$-убывающий последовательностей множеств.

   Замечание. В доказательстве теоремы о рекурсии для натуральных чисел не используется аксиома регулярности.

10. (2) Пусть $X \neq \varnothing$ и $R \subset X \times X$ — ациклическое отношение на X, т.е. не существует x_1, x_2, $\ldots x_n$ $(n \geqslant 1)$, таких что

$$x_1 R x_2, \ldots x_{n-1} R x_n, x_n R x_1$$

   (в частности, R иррефлексивно и не симметрично). Докажите, что существует линейный порядок продолжающий R.

11. (3) Докажите, что в $\mathbb{R}^3$ существует множество окружностей радиуса 1, такое что через каждую точку проходит ровно одна окружность. Т.е. что пространство $\mathbb{R}^3$ можно разбить на непересекающиеся окружности.

12. (2) В теории Цермело-Френкеля без аксиомы выбора докажите, что следующие утверждение эквивалентно аксиоме выбора:

    У любого связного графа (неориентированного без петель) существует остовное дерево, т.е. подграф-дерево, содержащее все вершины.