Конспект по логике.

(26) Конечная аксиоматизируемость и сильная категоричность элементарной теории конечной модели. Совпадение эл. экв-ти и изоморфности для кон. моделей

Теорема: В конечной сигнатуре с равенством эл. теория кон. модели конечно аксиоматизируема и сильно категорична

◄ Достаточно показать, что существует формула A_M, которая полностью описывает $Th(M)$.

$$A_M = \exists v_1 \dots v_n \Psi_M(v_1, \dots v_n)$$

$$\Psi_M(a_1, \dots a_n) = \underbrace{\bigwedge_{i<j} (a_i \neq a_j)}_{A} \wedge \underbrace{\forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} (v = a_i)}_{B} \wedge \underbrace{\bigwedge \{ c = a_i \mid M \models c = a_i \}}_{C} \wedge$$

$$\wedge \underbrace{\bigwedge \{ f^k(a_{i_1}, \dots a_{i_k}) = a_j \mid f^k \in Fun_\Omega,\ M \models f^k(m_{i_1}, \dots m_{i_k}) = m_j \}}_{D} \wedge$$

$$\wedge \underbrace{\bigwedge \{ P^k(a_{i_1}, \dots a_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \models P^k(m_{i_1}, \dots m_{i_k}) \}}_{E} \wedge$$

$$\wedge \underbrace{\bigwedge \{ \neg P^k(a_{i_1}, \dots a_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \models \neg P^k(m_{i_1}, \dots m_{i_k}) \}}_{F}.$$

Лемма: Для норм. модели M' сигнатуры Ω

$$M' \models A_M \iff M' \cong M$$

◄ ($\Leftarrow$) Для начала заметим, что $M \models \Psi_M(m_1, \dots m_n)$ (мы фактически так строили). Тогда $M \models A_M$ (если для каких-то $m_1, \dots m_n$, то они, ясное дело, существуют). В изом. моделях верны одни и те же ф-лы, $M' \models A_M$.

($\Rightarrow$) $M' \models A_M \Rightarrow \exists m_1' \dots m_n' : \Psi_M(m_1', \dots m_n')$. Тогда $\varphi : m_i \mapsto m_i'$ — из-м

1) это инъекция в силу A; 2) это сюръекция в силу B.

3) $\varphi(c_M) = c_{M'}$ в силу C: $c_M = m_i \Rightarrow M \models c = m_i \Rightarrow M' \models c = m_i' \Rightarrow c_{M'} = \varphi(c_M)$.

4) $\varphi(f_M^k(m_{i_1}, \dots m_{i_k})) = f_{M'}^k(\varphi(m_{i_1}), \dots \varphi(m_{i_k})) = f_{M'}^k(m_{i_1}', \dots m_{i_n}')$ в силу D. ~~Для~~ аналогично. И для предикатов тоже. ■

Таким образом, $Th(M) \sim \{A_M\}$ ($A_M \in Th(M)$, если M'-норм и $M' \models A_M$, то $M' \cong M$ и тогда $M' \models Th(M)$). То есть $Th(M)$ — конечно аксиоматизируема.

Для сильной кат-ти нужно показать, что любые норм. модели $Th(M)$ — изоморфны. Это верно по лемме. ■

Следствие: Если M — конечная и $M' \equiv M$, то $M' \cong M$. (M' — норм)

◄ Если $M' \equiv M$, то $M' \models Th(M) \Rightarrow M' \models A_M \Rightarrow M' \cong M$ ■

(27) Определимость инвариантных подмн-в в конечных моделях.

Замечание: S определимо в $M \Rightarrow S$ инвариантно отн. авт-мов. Обратное, вообще говоря, не верно, потому что существуют модели с лишь только тожд. авт-ом

Лемма: Пусть M — конечная модель конечной сигнатуры, $m_1, m_2 \in M$ — неразличимы: для $\forall A(a)$ $M \models A(m_1) \iff M \models A(m_2)$. Тогда $\exists \alpha : M \cong M$, $\alpha(m_1) = m_2$

◄ Построим сигнатуру $\Omega \cup \{c\}$ с моделями (M, m_1) и (M, m_2), $c_{(M,m_1)} = m_1$, $c_{(M,m_2)} = m_2$.

Тогда $(M, m_1) \equiv (M, m_2)$. ($(M, m_1) \models A(c) \iff M \models A(m_1) \iff M \models A(m_2) \iff (M, m_2) \models A(c)$)

Таким образом, $(M, m_1) \overset{\alpha}{\cong} (M, m_2)$ α сохраняет константы $\Rightarrow \alpha(m_1) = m_2$. ■

(продолжение билета на стр 2.)

Теорема Пусть M – конечная модель конечной сигнатуры Ω. Если $S \subset$ – инвариантно отн. всех автоморфизмов M, то S определимо в M.

◄ Предположим противное. $Th(M, m_i) \sim \{A_i(c)\}$ (Тут $S = \{m_1, \dots m_k\}$).
Рассмотрим формулу $A(a) = A_1(a) \vee \dots \vee A_k(a)$.
S не определимо $\Rightarrow A$ не определяет S. Но $M \models A_i(m_i) \Rightarrow A$ определяет мн-во S'
пусть $m' \in S' \setminus S \Rightarrow M \models A(m') \Rightarrow$ для нек. j $M \models A_j(m') \Rightarrow (M, m') \models A_j(c)$
По лемме из прошлого билета (слова про нормальная) $(M, m_j) \cong (M, m') \Rightarrow$
$\exists \alpha$ – авт-м : $\alpha(m_j) = m'$ – против-е.

28 Свидетели. Теории Хенкина. Лемма о новой константе. Лемма Хенкина.

Лемма о новой константе: Предположим, есть ф-ла с одной своб. переменной $A(b)$ и $T \vdash_{PC} A(c)$ и c не встречается в T (то есть в аксиомах её нет)
Пусть свободная переменная a не встречается в этом доказательстве. (дост. в
Тогда $T \vdash_{PC} A(a)$, следовательно $T \vdash_{PC} \forall x A(x)$ (x не вх. в A)

◄ Индукция по длине вывода $A(c)$. 1) $A(c)$ – аксиома исч. высказываний т.е
$A(c) = F(B_1(c), \dots B_n(c))$. $A(a) = F(B_1(a), \dots B_n(a))$ ~ тоже аксиома.
2) $A(a) = \forall x [x/b] B(b,a) \to [t/b] B(x,a)$, $t(a)$ – терм, ~ I аксиома предикатов (II аналог.)
Немного перепишем: $\forall x B(x,a) \to B(t(a), a)$. $A(c) = \forall x B(x,c) \to B(t(c), c)$ ~
* тут a и c нужно пом. местами
~ частный случай этой же аксиомы.
3) $A(a) = \forall x (C(c) \to B(b,c)) \to (C(c) \to \forall x B(b,c))$ ~ III аксиома
(IV) аналогично.
4) A получено MP: $\vdash B(c), B(c) \to A(c) \overset{инд}{\leadsto} B(a), B(a) \to A(a) \xrightarrow{MP} A(a)$
5) Gen: $T \vdash B(b,c)$, $A = \forall y B(y,c)$ (тут $b \neq a$). По инд $\vdash B(b,a) \xrightarrow{Gen} \forall x B(x,a)$.
по ую лемм
Таким образом $T \vdash_{PC} A(a)$ по пр-лу обобщение $T \vdash \forall x A(x)$, $x \notin A$.

Определение: T – теория в сигнатуре Ω, $\exists x A(x) \in CF_{m\Omega}$ – замкн.
Константа c называется свидетелем для $\exists x A(x)$, если $T \vdash \exists x (A(x) \to A(c))$.

Определение. T – теория Хенкина, если у всякой замкнутой ф-лы вида $\exists x A(x)$ есть свидетель.

Лемма (о добавлении свидетеля) Пусть T – непротиворечива, c – константа, которой нет в T, $\exists x A(x)$ – замкнута. Тогда $T \cup \{\exists x A(x) \to A(c)\}$ – непротиворечива.
◄ Предположим противное. $T \vdash \neg(\exists x A(x) \to A(c)) \Rightarrow T \vdash \exists x A(x), \neg A(c) \Rightarrow$
и по лемме о нов. конст $T \vdash \forall x \neg A(x) \Leftrightarrow T \vdash \neg \exists x A(x). \Rightarrow$
$T \vdash \exists x A(x), \neg\exists x A(x) \Rightarrow T$ – противоречива.

Лемма Хенкина Всякую непрот теорию T можно расширить до непротив теории Хенкина. нек. сигнатуры $\Omega' \supset \Omega$, $|\Omega'| = |\Omega|$

◄ **Определение** Мощностью сигнатуры Ω называется $|\Omega| = \max(|Pred \cup Fun \cup Const|, |\mathbb{N}|)$
Лемма $|\Omega| = |CF_m|$.
◄ Как мы знаем, для беск. мн-в X: $|X| = |X^*|$ (X^* – мн-во кон. слов в алф. X)
Рассмотрим $X = FVar \cup BVar \cup$ символы $\Omega \cup \{\vee, \wedge, \neg, \to, (,), ,\}$ $\Rightarrow |X| = |\Omega|$
Заметим, что $CF_m \subset X^* \Rightarrow |CF_m| \leq |X^*| \leq |X|$. С др. стороны $P^n \to \forall x_1 P(x_1)$, [illegible]
Q^m – предикат, кот. точно есть $c \to \exists x Q^m(c, \dots c)$, $f^n \to \exists x Q^m(f^n(x), x \dots x) \Rightarrow |X| \leq |CF_m|$
Д-во Л.Х. По л. о доб. св-ля выб. для кажд. ф-лы константу и добавим соотв. ф-лы к T.
Получ: непротивор. T_1. Мощность сигнатуры не поменялась. $T' = \cup T_i$, $\Omega' = \cup \Omega_i$.

Несложно понять, что тут мы побеждаем ■

(29) Модель максимальной непротиворечивой теории Хенкина

Напоминание (т. Линденбаума) T - непрот. $\Rightarrow \exists T^m \supset T$ - макс в той же сигнатуре

Лемма T - непрот. в $\Omega \Rightarrow \exists T^+ \supset T$, где T^+ - макс. теория, кот. явл. т. Хенкина в сигнатуре Ω^+, $\Omega^+ = |\Omega|$

◀ Положим $T^+ = (T')^m$ ~ теория осталась т. Хенкина. Ура. ■

Лемма: T - макс. теория. Тогда 1) $T \vdash A \Leftrightarrow A \in T$, 2) $\neg A \in T \Leftrightarrow A \notin T$, ...

Это напоминание.

Построение модели. Дана макс. теория Хенкина T. Строим модель:

$\underline{M} := \{\underline{t} \mid t \in CT_{m\Omega}\}$, $\underline{t}$ - копия t.

$f_M(\underline{t_1}, \dots \underline{t_n}) := \underline{f(t_1, \dots t_n)}$

$P_M(\underline{t_1}, \dots \underline{t_n}) := \begin{cases} 1, & P(t_1 \dots t_n) \in T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$c_M := \underline{c}$

Лемма $|t|_M = \underline{t}$ (для $t \in CT_{m\Omega}$)

◀ Нужно проверить для констант и $f^k(t_1, \dots t_k)$ - это просто ■

Лемма $M \models A \Leftrightarrow A \in T$. ($A \in CF_{m\Omega}$)

◀ Индукция по числу связок и кванторов.

1) $A = P(t_1, \dots t_n)$ $\quad M \models A \Leftrightarrow P_M(|t_1|_M, \dots |t_n|_M) = 1 \Leftrightarrow P_M(\underline{t_1}, \dots \underline{t_n}) = 1 \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} A \in T$.

2) $A = \neg B$ $\quad M \models A \Leftrightarrow M \not\models B \overset{\text{инд.}}{\Leftrightarrow} B \notin T \underset{(\text{макс})}{\Leftrightarrow} A \in T$.

3) аналогично (2) с исп-ем св-в максимальности для всех связок $\wedge, \vee, \neg, \to$.

4) $A = \exists x B(x)$ $\quad M \models A \Leftrightarrow \exists t\ M \models B(\underline{t})$

Техн. лемма: $|B(\underline{t})| = |B(|t|)| = |B(t)|$ (напоминание)

$\underset{(\text{предп. инд})}{\Longleftrightarrow}$ $\exists t$ $B(t) \in T \Leftrightarrow \exists x B(x) \in T$

◀ ($\Rightarrow$) $B(t) \in T$, (II) $B(t) \to \exists x B(x)$, (MP) $\exists x B(x)$.

($\Leftarrow$) $\exists x B(x) \in T$, (т. Хенк.) $(\exists x B(x) \to B(c)) \in T \Rightarrow T \vdash B(c)$ ■

5) Можно прокрутить (4) заново, а можно: $A = \forall x B(x) \sim \neg \exists x \neg B(x)$. ■

(30) Выполнимость непротивор. т. без рав-ва. Т. Гёделя о полноте исч. предикатов без рав-ва. Т. Лёвенгейма - Сколема для теорий без рав-ва.

Теорема T - непрот. т. без р-ва в $\Omega \Rightarrow T$ имеет модель м-ти $|\Omega|$

◀ У T^+ модель есть, осталось заметить, что $|\Omega| = |M|$ ($|M| = |CT_m|$, $|CT_m| \leq |X^*| = |\Omega|$, тут нужно заметить, что уже на шаге $T \to T_1$ мы добавили столько констант, какова мощность сигнатуры и CF_m). Модель T^+ сойдет и для T. ■

(прод. на стр 4)

Теорема Гёделя (о полноте и корректности) T — непротиворечива

(1) $T \vdash A \iff T \models \forall A$.

(2) $\vdash A \iff \models \forall A$.

◂ Из (1) следует (2)

Пусть $T \models \forall A$ и $T \nvdash A \Rightarrow T \nvdash \forall A \Rightarrow T \cup \{\neg \forall A\}$ — непрот. $\Rightarrow$ выполнима $\Rightarrow T \not\models \forall A$. В др. сторону очевидно. ■

Теорема Лёвенгейма-Сколема Если теория T — выполнима, то T имеет модель мощности $|\Omega|$.

◂ T-вып $\Rightarrow$ T непрот $\Rightarrow$ ура по т. с прошлой стр. ■

31 Вып-ть непротиворечивой теории с равенством. Т. Гёделя о полноте для исч. предикатов с р-вом. Т. Левенгейма-Сколема для т. с равенством.

Теорема Если теория T с р-вом непротиворечива, то T имеет норм модель мощности $\le |\Omega|$

◂ T непротив. в $PC^{=}_{\Omega}$ $\Rightarrow$ $T' = T \cup Eq_\Omega$ — непротив. в PC_Ω $\Rightarrow$ $\exists$ модель $M \models T'$, $|M| = \Omega$. Можно её норм-ть: $M \equiv \tilde{M}$ — норм и $\tilde{M} \models T$, причем $|\tilde{M}| \le |\Omega|$ ■

Теорема Гёделя (для Eq_Ω), T — непротивор.

(1) $T \vdash_{=} A \iff T \models_{норм} A$

(2) $\vdash_{=} A \iff \models_{норм} A$.

◂ Все совсем аналогично. ■

Теорема Лёвенгейма-Сколема Если теория T — выполнима, то T имеет норм модель мощности $\le |\Omega|$

◂ Все совсем аналогично

32 Теорема Гёделя-Мальцева о компактности. Теорема о повышении мощности до бесконечной.

Теорема Гёделя-Мальцева Пусть T — теория, любая конечная подтеория T' которой выполнима $\Rightarrow$ сама теория тоже выполнима.

◂ Выполнимость = непротиворечивость. Если T — ~~непротиворечива~~ противоречива, то противоречиво её кон. подмн-во

Замечание Для Eq_Ω нужно добавить дважды слово „нормально". ■

Теорема (о повышении мощности) Если теория имеет конечные модели неограниченной мощност. Тогда она имеет и бесконечную модель.

◂ Рассмотрим сигнатуру $\Omega^+ = \Omega \cup \{c_1, \dots c_n, \dots\}$ (добавили константы) и теорию $T^+ = T \cup \{c_i \ne c_j \mid i \ne j\}$. T^+ финитно выполнима. Действительно, рассмотрим $T' \subset T \cup \{c_i \ne c_j \mid i \ne j,\ i,j \le n\}$ — конечная подтеория. Рассмотрим модель $M \models T$, $|M| \ge n$. Интерпретируем в ней константы: $(c_i)_M \ne (c_j)_M$ $(i \ne j)$ — так можно

Таким образом, по т. о компактности $\exists$ модель $M^+ \models T^+$

Возьмем $N = M^+$ в сигнатуре Ω, но M^+ бесконечно. Что и требовалось ■

33) Существование нестандартных моделей арифметики.

Теорема Рассмотрим сигнатуру $\{+, \cdot, 0, 1, =\}$. Существует счетная модель $M \equiv \mathbb{N}$, но $M \not\cong \mathbb{N}$.

◄ $T = Th(\mathbb{N}) \cup \{c\neq 0, c \neq 1, .., c\neq n, ..\}$. T — финитно выполнима.

Рассм. кон. $T' \subset Th(\mathbb{N}) \cup \{c \neq 0, .., c\neq n\}$ $M'' = (\mathbb{N}, c_{M''})$ $c_{M''} = n+1$

Пусть (по т. о комп.) $M_1 \models T$. По т. Лёвенгейма – Сколема $|M_1| \leq |\mathbb{N}|$ и $\forall m \neq n$ $\bar{m} \neq \bar{n}$ $\Rightarrow$ $|M_1| = |\mathbb{N}|$. $M = M_1$ в сигнатуре Ω.

В M есть эл-т $d = c_M$ (и $d \neq n$) $\Rightarrow$ M и $\mathbb{N}$ не изоморфны

Понятно, что $M \equiv \mathbb{N}$ по постр-ю (в M^+ верно все $Th(\mathbb{N})$ и $\{c\}$, но про c забываем) ■

34) Теорема Лёвенгейма - Сколема о повышении мощности.

Теорема Лёвенгейма - Сколема Если теория T в сигнатуре Ω имеет беск. модель, то она имеет модели любой беск. мощности $k \geq |\Omega|$.

◄ Рассм. сигнатуру $\Omega^+ = \Omega \cup \{c_i \mid i \in k\}$ и теорию $T^+ = T \cup \{c_i \neq c_j \mid i \neq j\}$

T^+ — фин. выполнима. Действ. рассм. для нек. кон. $I \subset k$

$T' \subset T \cup \{c_i \neq c_j \mid i, j \in I, i \neq j\}$ выполнима $M'' = M, (c_i)$, с интерпретацией $(c_i)^{M''}$ — различны.

Таким образом, по т. о компактности $\exists$ модель $M^+ \models T^+$.

Ограничим её на T — получилась модель M, причем её мощность ровно k. ■

35) k-категоричность. Признак полноты Лося - Вота. Теорема Морли о категор-ти.

Определение Пусть T - теория. Она называется *k-категоричной*, если все модели T мощности k изоморфны

Теорема (признак полноты Лося-Вота) Пусть T - теория в не более, чем счетной сигнатуре, не имеющая конечных моделей, k - бесконечно и T - k-категорична. Тогда T - полна.

◄ Пусть она не полна: $T \not\models A$ и $T \not\models \neg A$ $\Rightarrow \exists M_1, M_2$:

$M_1 \models T \cup \{\neg A\}$ и $M_2 \models T \cup \{A\}$. M_1 и M_2 - бесконечны $\Rightarrow \exists N_1, N_2$:

$N_1 \models T \cup \{\neg A\}$ и $N_2 \models T \cup \{A\}$ $|N_1| = |N_2| = k$.

k-категоричность $\Rightarrow N_1 \cong N_2$, но $N_1 \not\equiv N_2$. Противоречие. ■

Теорема Морли (формулировка) Если теория T k-категорична при нек. несчетном k, то она δ-категорична при любом другом несчетном δ.

36) Пример: теория бесконечных множеств в сигнатуре $\{=\}$ k-категорична для всех беск. k.

Рассмотрим $\Omega = \{=\}$, $A_{\geq n} = \exists x_1 .. \exists x_n (\bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j)$ $T_0 = \{A_{\geq n} \mid n \geq 2\}$ - не имеет кон. моделей.

T_0 категорична $\forall k$ $\Rightarrow$ T_0 - полна

(потому что модели - мн-ва мощности k)

(37) Пример: теория DLO неограниченных плотных линейных порядков не κ-категорична для несчетных κ.

DLO — теория плотных лин. порядков без наим. и наиб. эл-ов

$\Omega = \{<, =\}$

Аксиомы:
1) $\forall x\ \neg(x<x)$
2) $\forall x \forall y \forall z\ (x<y,\ y<z \to x<z)$
3) $\forall x \forall y\ ((x<y) \vee (y<x) \vee (x=y))$
4) $\forall x \forall y\ (x<y \to \exists z\ ((x<z) \wedge (z<y)))$
5) $\forall x \exists y\ \ x<y$
6) $\forall x \exists y\ \ y<x$

• DLO не имеет конечных моделей.

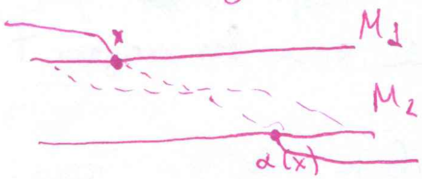
{Предложение:} DLO не κ-категорична для несчетных κ. (а для счетных категорична)

◄ Рассмотрим модели $M_1 = (\mathbb{Q},<)\cdot(\kappa,<)$, $M_2 = (\mathbb{Q},>)\cdot(\kappa,>)$ $\models$ DLO. Почему они не изоморфны?

M_1 — это κ копий $\mathbb{Q}$: $\kappa\ \kappa\ \kappa\ \dots\ x$

Рассм $x \in \kappa$ $|[0,x)| < \kappa \Rightarrow |(-\infty,(q,x))| < \kappa$

То есть для $x \in M_1$ $|\{y \mid y<x\}| < \kappa$. ~~Заметим, что в M_2 знак не такой (=)~~



Но $|\{y \mid y > \alpha(x)\}| = \kappa$. Противоречие ■

(38) Делимые абелевы группы без кручения и векторные пр-ва над $\mathbb{Q}$.

$\Omega = \{+^2, -^1, 0, =\}$. $T = ABG$. Аксиомы
1) $\forall x \forall y \forall z\ ((x+y)+z = x+(y+z))$
2) $\forall x\ \ x+(-x)=0$
3) $\forall x\ \ x+0=x$
4) $\forall x\ \ (x+y=y+x)$
5) $\forall x\ \ nx \neq 0\ \forall n>0,\ x\neq 0$ (получше: $\forall x\,(x\neq 0 \to nx \neq 0)$) $n>0$
6) $\forall x\ \exists y\ \ ny = x,\ n>0$ (делимость)

Модель: $(\mathbb{Q},+,-,0,=) = \mathbb{Q}_+$

• Абелева группа — $\mathbb{Z}$-модуль (умеем умножать на $\mathbb{Z}$)

• $\forall x \exists! y\ \ n\cdot y = x$ (обозн. $y = \frac{x}{n}$) (ед-е знаем если таких 2: $n(y_1-y_2)=0$ пр-е с 5)

• Опр: $\frac{m}{n}\cdot x = \frac{mx}{n}$. Корректность: 1) $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Rightarrow \frac{m}{n}x = \frac{m'}{n'}x$

Тогда аксиомы а) $z(x+y) = zx+zy$, б) $(z_1+z_2)x = z_1x+z_2x$, в) $z_1(z_2x) = z_1($ $\quad z, z_1, z_2 \in \mathbb{Q}$

По модели M можем построить В.П над $\mathbb{Q}$.

{Лемма} $M_1 \cong M_2 \Rightarrow V(M_1) \cong V(M_2)$

◄ Изом-м сохраняет умн-е на число: $\alpha(\frac{m}{n}\cdot x) = \frac{m}{n}\alpha(x)$ ■

6 стр к D

{Лемма} (1) $\dim V$ конечна $\Rightarrow |V| = |\mathbb{N}|$ (V – в.п. над $\mathbb{Q}$) это билет 39

(2) $\dim V = k$-беск $\Rightarrow |V| = k$

{Лемма} Если $\dim V_1 = \dim V_2$, то $V_1 \cong V_2$

{Теорема} (1) Теория ABG k-категорична для несч. ординала k. это билет 40

(2) ABG не ω-категорична

◄ (2) $\mathbb{Q} \not\cong \mathbb{Q}^2 \Rightarrow$ как адд. группы тоже не изоморфны

(1) $|V_1| = |V_2| = k$ – несчетный. $\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2 = k \Rightarrow V_1 \cong V_2$ ■

41) Простые формулы в сигнатуре без функциональных символов. Приведение каждой ф-лы к простому виду.

Опр Простая атомарная ф-ла $\doteq P^s(a_1, \dots a_s)$, $a_i = a_j$; $a_i = c$ (ПАФ)

{Определение} Простая ф-ла – строится из ПАФ.

{Лемма} Любая формула эквивалентна простой.

◄ Заметим сначала, что любая атомарная ф-ла выводится из ПАФ: $P(c_1, a_2 \dots a_n) \Leftrightarrow \exists x\, (x = c_1 \wedge P(x, a_2 \dots a_n))$.
(тут мы избавляемся от конст.)

Ну а этого хватает.

Давайте построим: $P(t_1, \dots t_n) \sim (\bigwedge x_i = t_i \wedge P(x_1, \dots x_n))$
$[x_1 \dots x_n / a_1 \dots a_n] P(a_1 \dots a_n)$ ■

42) Кванторный ранг. Формульная n-эквивалентность кортежей индивидов в моделях

{Определение} $q(A)$ – Кванторный ранг простой формулы A: (по индукции)

- $q(A) = 0$, если A – ПФА.
- $q(A \circ B) = \max(q(A), q(B))$
- $q(\neg A) = q(A)$
- $q(\mathcal{K}_x A(x)) = q(A) + 1$

$\equiv_n$ – для $\forall$ ф-лы ранга $\leq n$ зн-я ф-л эквив.)

{Лемма} $(M, \vec{m}) \equiv_0 (M', \vec{m}')$ $\Leftrightarrow$ для любой простой A $q(A) = 0 \Rightarrow (M \models A(\vec{m}) \Leftrightarrow M' \models A(\vec{m}'))$

◄ ($\Rightarrow$) Для ПАФ по опр. Дальше по инд. ($\vec{m} \in M^k$, $\vec{m}' \in M'^k$)

$\Leftarrow$ $m_i \mapsto m_i'$ – изом-м ■

43) Игры Эренфойта. Определение: ходы, партии, позиции, условие выигрыша. Стратегия и выигрышная стратегия Консерватора. Игровая n-эквивалентность

(продолжение на стр. 8)

Определение Игра Эренфойхта $G_n(M, \bar m, M', \bar m')$ — начальная позиция. Ход: $(M; l)$ и $(M'; l')$. Партия — конечная посл-ть чередующихся ходов. $|\Pi| = 2n$ — длина игры, $|\pi|$ — длина партии.

$p(\pi)$ — последняя позиция (множество вида $(\bar m, \bar m')$ (два слова алф-ов M и M'))

$\forall$ — Новатор

$\exists$ — Консерватор.

$\exists$ выигрывает, если $p(\pi)$ задает част. изом-м.

Определение Стратегия — способ действий, который позволяет выигрывать какому-то игроку. Иными словами, стратегия для $\exists$:
σ: партии неч. длины $< 2n \longrightarrow$ допустимые ходы.
Тогда если π — зак. партия, π — согл. с σ

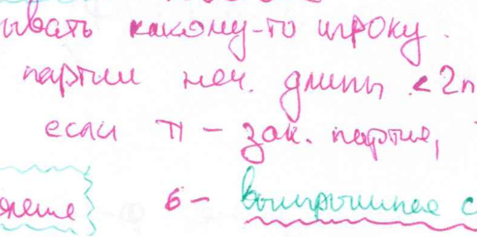
Определение σ — выигрышная стратегия, если $\forall \pi$ согл. с $\sigma \Rightarrow \pi$ выиграна $\exists$,

Определение Модели $(M, \bar m) \approx_n (M', \bar m')$ — n-эквивалентны, если в модели Эренфойта $G_n(M, \bar m, M', \bar m')$ $\exists$ имеет выигрышную стратегию

(44) Индуктивное описание игровой эквивалентности.

не обяз. нужно

Лемма $\approx_n$ — отношение эквивалентности

◄ 

$m_i \mapsto m_i''$ ■

Лемма $p < n \Rightarrow \approx_n \subset \approx_p$, то есть p-эквив $\Rightarrow$ n-экв (очев)

Лемма $(M, \bar m) \approx_{n+1} (M', \bar m') \Leftrightarrow \begin{cases} \forall d \in M\ \exists d' \in M' & \bar m d \approx_n \bar m' d' \\ \forall d' \in M'\ \exists d \in M & \bar m d \approx_n \bar m' d' \end{cases}$

◄ $(\Rightarrow)$ σ — стратегия в G_{n+1}. Тогда σ действует на M: $d \mapsto d'$ (нач. позиция $\bar m d$ и $\bar m' d'$) (обратно тоже)

$(\Leftarrow)$ Хотим построить выигрышную стратегию в G_{n+1}.
$\sigma(M, d) = (M', d')$, дальше действовать по соотв. стратегии ■

(45) Из игровой n-эквивалентности следует формульная. Следствие: признак элементарной эквивалентности моделей.

Теорема Эренфойта-Фраиссе $(M, \bar m) \approx_n (M', \bar m') \Rightarrow (M, \bar m) \equiv_n (M', \bar m')$.

◄ $(\Rightarrow)$ Доказываем по индукции: База $n = 0$ (на доказательство только $\Rightarrow$) — лемма из (43)
Переход: $q(A) \leq n+1$. 1) A — атомарная $+$, 2) $\neg A$ $+$, 3) $A \circ B$ $+$
4) $A = \exists x B(x)$ (аналогично $\exists x \neg Bx \Leftrightarrow \neg \forall x B(x)$) $M \models A(\bar a) \Leftrightarrow M \models \exists x B(x, \bar a) \Leftrightarrow$
$\exists x (M \models B(x, \bar a)) \overset{\text{лемма}}{\Leftrightarrow} \exists x' (M' \models B(x', \bar a))$ (тут была замена $x \leftrightarrow d$, $x' \leftrightarrow d'$) ■

Продолжение на стр 9

(46) Пример: В сигнатуре $\{=\}$ все дост. большие модели n-эквив.

На самом деле хватает уже числа n, ведь мы по сути строим изоморфизм множеств.

(47) Финитная аппроксимируемость исчисления одноместных предикатов.

Теорема: Пусть Ω - сигнатура с одноместным предикатом и $=$. Тогда для любой формулы A A-выполнима $\Leftrightarrow$ A-финитно выполнима (существует конечная модель M)

◀ ($\Leftarrow$) по определению.

($\Rightarrow$) Пусть $P_1, \ldots, P_k$ - одноместные предикаты Ω (можно считать, что их конечно). Назовем цветом $m \in M$ строку $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_k)$, где $\varepsilon_i = P_i(m)$. $M(\varepsilon) = \{m \in M \mid m$ цвета $\varepsilon\}$

Пусть M - какая-то модель A. Будем на ней строить конечную модель N так, чтобы $M \approx_n N$ (тогда и $M \equiv_n N$, тут $n = q(A)$ $\Rightarrow$ победа) и

$|N(\varepsilon)| = \min(|M(\varepsilon)|, n)$.

Таким образом $|N| = 2^k \cdot n$ $\Rightarrow$ конечна.

Определим ходы по индукции:

1) $\forall$ берет старую $\rightarrow$ $\exists$ берет биективную старую.

2) $\forall$ берет новую d $\rightarrow$ $\exists$ берет d', которое новое и цвета d.

Нам всего всегда хватит! ■

Теорема: Исчисление одноместных предикатов с рав-ом разрешимо (существует алгоритм, который отвечает на вопрос: выполнима ли A?)

◀ Если A выполнима, то она выполнима в модели N, $|N| = n \cdot 2^k$.

Всего таких моделей (с точностью до изоморфизма) - конечное число (нужно посмотреть, как работают константы и предикаты, входящие в A) ■

(48) Бесконечные игры Эренфойхта. Игровая ω-эквивалентность. Изоморфность ω-эквивалентных счетных моделей. Теория DLO неограниченных плотных линейных порядков $\aleph_0$-категорична (теорема Кантора)

Определение: Бесконечная игра Эренфойхта: теперь игра длиной $\mathbb{N}$ ходов $G_\infty(M, \overline{m}, M', \overline{m}')$: $\exists$ выигрывает, если стратегия $\exists$ выигрышная при любом конечном количестве ходов.

Определение: $(M, \overline{m}) \approx_\omega (M', \overline{m}')$ - ω-эквивалентны, если $\exists$ имеет выигрышную $\mathbb{N}$-стратегию.

Теорема: Пусть M и M' - счётные модели сигнатуры Ω. Тогда $M \cong M'$ $\Leftrightarrow$ $M \approx_\omega M'$.

◀ ($\Rightarrow$) Если $\varphi: M \xrightarrow{\sim} M'$ - изоморфизм, то играем в соответствии с ним.

($\Leftarrow$) M', M - счетны. Пронумеруем их $M = \{n_1, \ldots\}$, $M' = \{n'_1, \ldots\}$. Поиграем за $\forall$

I - n_1 $\Rightarrow$ II - n'_i

I - первая новая т. в M' II - n_j

I - первая новая т. в M

(продолжение на стр. 10)

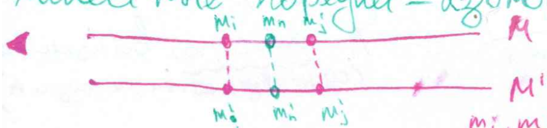
Часть 10

В результате мы выберем все элементы всех моделей.

$\varphi: m_i \mapsto m_i'$ — изоморфизм, потому что $\forall$ предикат, константа, ф-ла выражаются через некоторые частично изоморфные подмн-ва

Ну и это биекция, понятное дело. ■

$\boxed{\text{Теорема Кантора}}$ Любые два неограниченные счетные плотные линейные порядки — изоморфны.



Достаточно выиграть в бесконечной игре. n-ый ход будем делать как на картинке.

m_i, m_j — ближайшие к m_n с обеих сторон (их, возможно, не существует, если m_n самый первый или последний). ■

Содержание