Лекция 2.

10.09.20

Кривые в $\mathbb{R}^n$

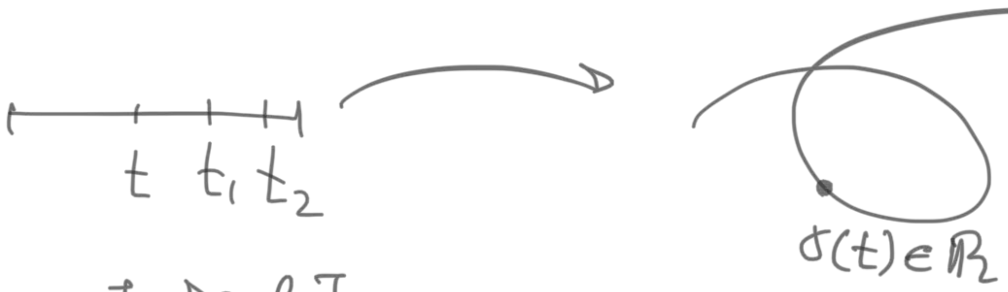
$\mathbb{R}^n$ $\quad e_1,\dots,e_n$ — базис

Скалярное произведение $(v,w)=\sum_i v_i w_i$

$$\|v\| = \sqrt{(v^1)^2+\dots+(v^n)^2}$$

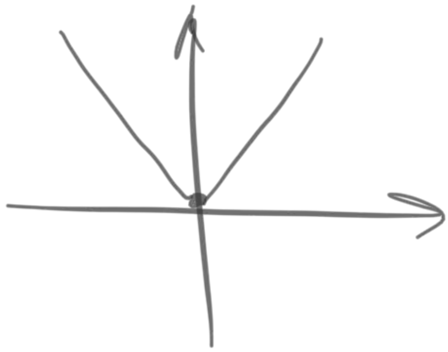
Опр. Гладкой/непр. параметризованной кривой $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$ наз. гладкое/непр. отображение

Точкой параметризованной кривой наз. пара $(\gamma(t),t)$



$I=[a,b]$

Опр. Гладкая кривая $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$ называется регулярной, если $\forall\, t\in \operatorname{int} I$ $\|\gamma'(t)\|\neq 0$, а в граничных точках промежутка I сущ. отличные от нуля пределы производной.



в каждой точке $\exists$ касательная

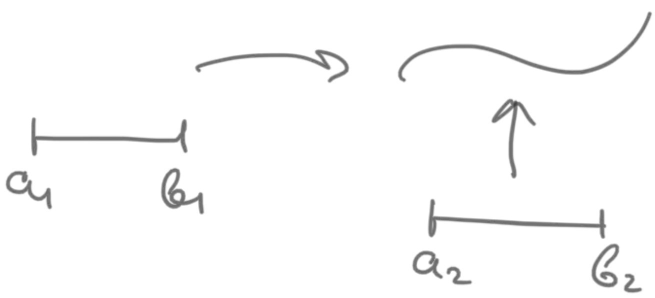
не в каждой точке $\exists$ касательная

$$t \to (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$t \to (\cos 2t, \sin 2t), \quad t \in [0, \pi]$$

образы одинаковые,
но кривые — разные

Опр. Параметр. кривые $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^2$ и $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ наз. эквивалентными $\Leftrightarrow$ $\exists\, \varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$, т.ч. $\exists\, \varphi^{-1}$ | φ, φ^{-1} – гладкие и $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$, $t \in [a_1, b_1]$



Опр. Класс эквивалентных кривых наз. **непараметризованной кривой**, представители этого класса наз. **параметризацией кривой**.

Опр. **Длиной** регулярной кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = (\dot{\gamma}^1(t), \ldots \dot{\gamma}^n(t))$$

Лемма. Длина регулярной непараметризованной кривой не зависит от выбора параметризации.

Док-во: $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ $\quad \gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$

$\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ $\quad t \in [a_1, b_1]$

$\tau = \varphi(t) \in [a_2, b_2]$

$$L(\gamma_1) = \int_{a_1}^{b_1} \|\dot{\gamma}_1(t)\| \, dt = \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{d\gamma_2(\varphi(t))}{dt} \right\| dt =$$

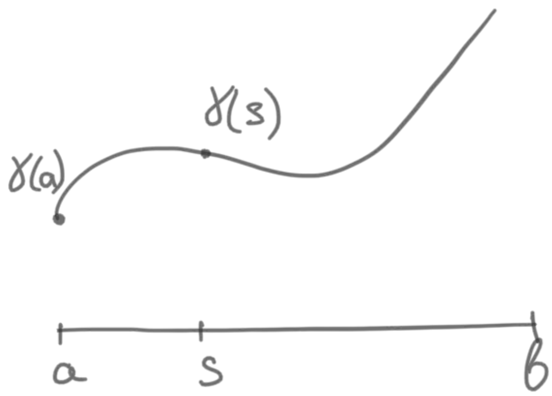
$$= \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{d\gamma_2(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt =$$

[Предположим, что $\frac{d\varphi}{dt} > 0$. Тогда]

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{d\gamma_2(t)}{d\tau} \right\| \underbrace{\frac{d\varphi}{dt} dt}_{d\tau} = \int_{a_2}^{b_2} \left\| \frac{d\gamma_2}{d\tau} \right\| d\tau = \ell(\gamma_2)$$

∎

Опр. Параметризация $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ наз. натуральной (s — натур. параметр), если длина любого участка кривой $\gamma_{a,x} : s \mapsto \gamma(s)$, $s \in [a, x]$ равна $\ell(\gamma_{a,x}) = x - a$



Лемма. На регулярной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ $\exists$ натуральная параметризация.

Д-во: $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ $\quad t \in [a, b]$

$\varphi : [a, b] \to [0, \ell(\gamma)]$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \qquad \varphi(t) = \int_0^{\tau} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt$$

$\varphi \nearrow \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \|\dot{\gamma}(\tau)\| \qquad s = \varphi(t)$

$$l(\gamma_{a,x}) = \int_a^x \|\dot{\gamma}_{a,x}(t)\|\, dt$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\| \qquad \left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\| = 1$$

$$dt = \frac{d\varphi(t)}{\|\gamma(t)\|}$$

$$\left\|\frac{\gamma(\varphi^{-1}(s))}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\varphi^{-1}(s)}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\frac{1}{\frac{d\varphi}{ds}}\right\| = 1 = x - a$$

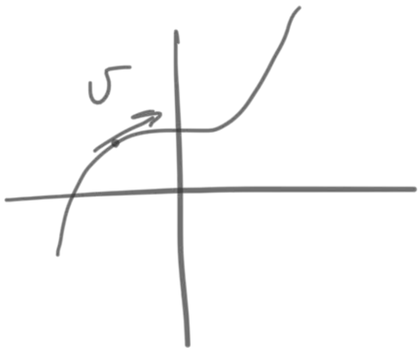
$\blacksquare$

Кривые в $\mathbb{R}^2$

$\gamma(s) = (x(s), y(s))$

s – натур. параметр

$v = \frac{d\gamma}{ds}, \ \|v\| = 1$

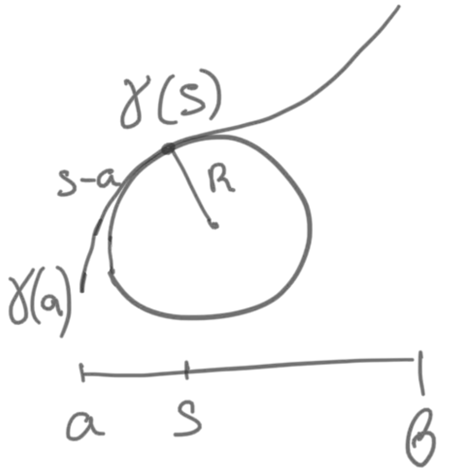


$$\frac{d(v,v)}{ds} = (v'(s), v(s)) + (v(s), v'(s)) =$$

$$= 2(v'(s), v(s)) = 0 \Rightarrow v(s) \perp v'(s)$$

Опр. Кривизной регулярной кривой наз.

$k := \|v'(s)\|$ $R = \frac{1}{k}$ — радиус кривизны кривой

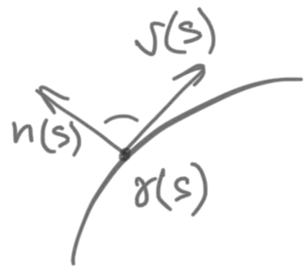


Формулы Френе в $\mathbb{R}^2$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, s — натур. параметр

В точке $(\gamma(s), s)$ выберем базис v, n, т.ч. $v = \gamma'(s)$, $n \perp v$, $\|n\| = 1$, базис v, n положительно ориентирован

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}$$



Док-во: $v \perp v'(s)$, $n \perp n'(s) \Rightarrow$

$$\frac{dv}{ds} = \alpha(s) n \qquad \frac{dn}{ds} = \beta(s) v$$

покажем, чему равны $\alpha(s)$ и $\beta(s)$:

$$\frac{d(\tau, n)}{ds} = \underbrace{(\tau', n)}_{\alpha(s)} + \underbrace{(\tau, n')}_{\beta(s)} = 0 \Rightarrow \alpha(s) = -\beta(s) = k(s)$$

(по определению)