Задачи на условный экстремум.

Метод множителей Лагранжа.

Переходя от Ньютонова формализма к лагранжеву с помощью принципа Даламбера, мы удачно поборолись с силами реакции связей. В лагранжевом формализме их нет, они не мешают решать уравнения Эйлера-Лагранжа. Однако иногда их все же полезно знать (чтобы мосты не ломались, например).

Рассмотрим метод восстановления сил реакции связей методом множителей Лагранжа.

Пусть, как в лекции , у нас имеется система n материальных точек. Их радиус-векторы — $\vec{r}_i$, $i=1\ldots n$, и на них, помимо потенциальных сил, действуют силы реакции идеальных связей $\vec{N}_i$.

Пусть на систему точек наложено $3n-N$ идеальных связей вида:

$$\boxed{f_a(\vec{r}_i, t) = 0, \quad a=1,\ldots,3n-N.} \tag{5a}$$

(считаем связи f_a функционально независимыми), которые можно явно разрешить с использованием параметров q_α, $\alpha=1\ldots N$ — обобщенных координат системы:

$$\boxed{\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t)}, \tag{5в}$$

так что $f_a(\vec{r}_i(q,t),t) \equiv 0$. После наложения связей у системы осталось N степеней свободы.

Утверждается, что силы реакции идеальных связей можно представить в виде

$$\boxed{\vec{N}_i = \sum_{a=1}^{3n-N} \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i},} \qquad (6)$$

выбрав подходящие λ_a, причем параметры λ_a, называемые <u>множителями Лагранжа</u> определяются единственным образом.

Действительно, в системе (6) $3n$ уравнений, она линейна по $(3n-N)$ переменным λ_a, и прямоугольная $(3n-N)\times 3n$ матрица $\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}$, стоящая при λ_a, имеет максимальный возможный ранг: $rk\left\|\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}\right\| = 3n-N$ (т.к. связи f_a функционально независимы). При этом у матрицы $\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}$ есть N правых 0-векторов $\delta_\alpha \vec{r}_i$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}, \delta_\alpha \vec{r}_i\right) = 0 \qquad \alpha = 1 \ldots N}$$

Здесь $\{\delta_\alpha \vec{r}_i\}_{\alpha=1\ldots N}$ — некоторый базис касательных векторов к поверхности связей (время t — фиксировано в условиях связей). Действительно, ведь $\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}$ ортогональны к этой касательной поверхности.

В лекции 4 векторы $\delta_\alpha \vec{r}_i$ мы называли

виртуальными перемещениями. Принцип Даламбера утверждает, что

$$\boxed{(\vec{N}_i, \delta_\alpha \vec{r}_i) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (7)}$$

и эти условия являются условиями разрешимости системы относительно λ_a. Итак, ( ) гарантирует однозначную разрешимость (6).

Заметим, что выражения (6) для сил реакции имеют потенциальный вид:

$$\vec{N}_i = -\frac{\partial U_{реакц.}}{\partial \vec{r}_i}, \text{ где } U_{реакц.} = -\sum_{a=1}^{3n-N} \lambda_a f_a(\vec{r}_i, t)$$

и λ_a рассматриваются как независимые от $\vec{r}_i$ переменные

Итак, вместо ограничения числа переменных в задаче с $\vec{r}_i$ до q_α, мы расширяемся с $\vec{r}_i$ до $\{\vec{r}_i\} \cup \{\lambda_a\}$, и рассматриваем мех. систему с лагранжианом

$$\mathcal{L}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \lambda_a, t) = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) - U_{реакц} =$$

$$= L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) + \sum_a \lambda_a f_a(\vec{r}_i, t) \quad (8)$$

При этом уравнение Эйлера-Лагранжа для переменных λ_a:

$$\mathcal{L}_{\lambda_a} := \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_a} = -f_a(\vec{r}_i, t) = 0 \qquad (9a)$$

вовсе не являются дифурами, а воспроизводят условия связей.

Уравнения для переменных $\vec{r}_i$ принимают вид:

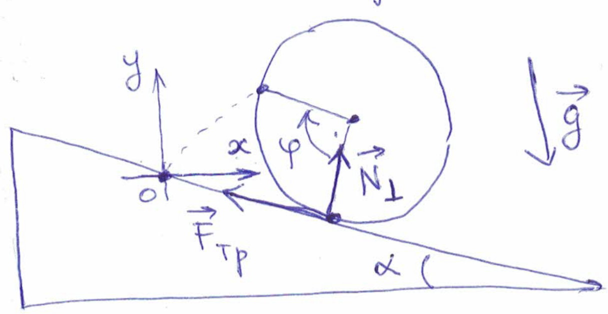
$$\mathcal{L}_{\vec{r}_i} := \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \sum_a \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}} \qquad (9б)$$

Они разрешимы и относительно λ_a (как система линейных уравнений), и относительно $\vec{r}_i(t)$ (как система дифуров 2-го порядка на поверхности связей $f_a = 0$). После определения λ_a силы реакции связей определяются из формулы (6).

Для иллюстрации метода разберем задачу о колесе на наклонной плоскости



Колесо скатывается под действием силы тяжести ($\vec{g}$) с наклонной плоскости (α) без проскальзывания. Масса колеса M распределена равномерно по ободу. Радиус колеса R. Координаты центра колеса (он же — центр масс) — (x, y). Угол поворота колеса — φ.

Условие непроскальзывания накладывает на них связи:
$$\begin{cases} f_1 = x - R\varphi\cos\alpha = 0 \\ f_2 = y + R\varphi\sin\alpha = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Лагранжиан свободного колеса в поле тяжести:
$$L = \frac{M}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{M}{2}R^2\dot{\varphi}^2 - \underbrace{Mgy}$$

потенциальная энергия, как будто вся масса колеса M сосредоточена в центре масс.

Лагранжиан с множителями Лагранжа:
$$\boxed{\mathcal{L} = L + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}$$

Уравнения Э.-Л. по λ_1 и λ_2 восстанавливают условия связей (10).

Уравнения Э.-Л. по переменным x, y, φ:

$\mathcal{L}_x: \quad M\ddot{x} = \lambda_1$

$\mathcal{L}_y: \quad M\ddot{y} + Mg = \lambda_2$

$\mathcal{L}_\varphi: \quad MR^2\ddot{\varphi} + \lambda_1 R\cos\alpha - \lambda_2 R\sin\alpha = 0$

С учётом связей (10) решаем $\mathcal{L}_\varphi$ относительно φ:
$$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{g}{2}\,\frac{\sin\alpha}{R}},$$

откуда вычисляем множители Лагранжа

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{Mg\sin\alpha\cos\alpha}{2}, \quad \lambda_2 = Mg\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}\right)}$$

Как нетрудно посчитать, формула (6) даёт выражения для проекций силы реакции $\vec{N}$ на оси $O\vec{x}$ и $O\vec{y}$:

$$N_x = \lambda_1, \quad N_y = \lambda_2$$

Для удобства интерпретации силу $\vec{N}$ стоит разложить в проекции на наклонную плоскость по которой катится колесо — $N_{\parallel}$, и на нормаль к нему — $N_{\perp}$

$$\begin{cases} N_{\parallel} = N_x\cos\alpha - N_y\sin\alpha = -\dfrac{Mg\sin\alpha}{2} \\ N_{\perp} = N_x\sin\alpha + N_y\cos\alpha = Mg\cos\alpha \end{cases}$$

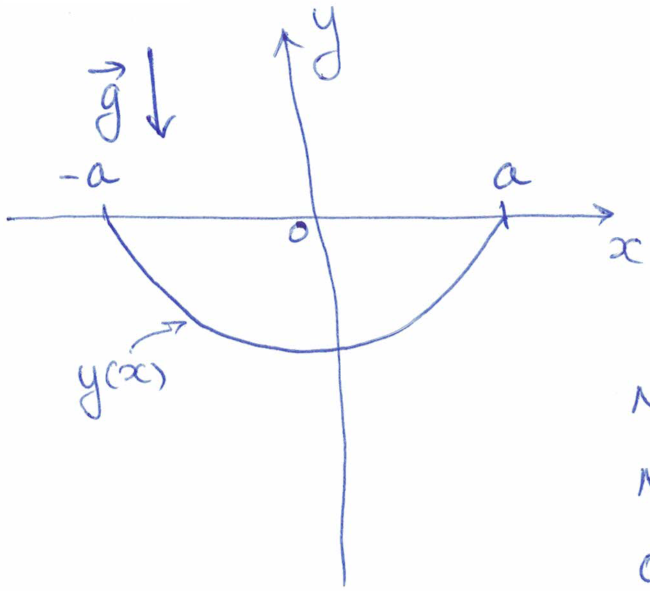
Очевидно $N_{\parallel} = -F_{\text{тр}}$ — сила трения колеса о плоскость, $N_{\perp}$ — сила реакции плоскости.

В задаче была ещё одна независимая переменная — φ. Формула (6) даёт выражение и для силы реакции, относящейся к этой переменной:

$$N_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = R\,\frac{Mg\sin\alpha}{2} = R\cdot F_{\text{тр}}$$

— момент силы трения относительно центра колеса

Пример 2 **Задача о цепной линии**



Нерастяжимая, однородная массивная цепь массы m и длины ℓ висит в однородном поле тяжести. Её концы закреплены в точках a и $-a$ на оси $O\vec{x}$. Надо найти форму $y(x)$ цепной линии.

Это задача статическая: цепь принимает форму с минимальной потенциальной энергией. Она нерастяжима, поэтому энергии сил упругости у неё нет, есть только энергия в поле тяжести

$$\boxed{U_{\text{тяж}}[y(x)] = \int_{-a}^{a} \rho g\, y(x) \sqrt{1+y'^2}\, dx}$$

Здесь $\rho = \dfrac{m}{\ell}$ — линейная плотность цепи, $\sqrt{1+y'^2}\, dx = d\ell$ — инфинитезимальный элемент длины цепи.

Однако минимизировать функционал $U_{\text{тяж}}[y(x)]$ надо не на всех кривых $y(x)$, а только на кривых длины ℓ, то есть надо наложить условие:

$$\boxed{\ell = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\, dx} \qquad (10)$$

Поэтому, вводя множитель Лагранжа λ, мы формулируем задачу о поиске экстремума функционала

$$\boxed{U[y(x),\lambda] = \rho g \int_{-a}^{a} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx + \lambda\left\{\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx - l\right\}}$$

(сравните с (8) на стр 7. Лекции 7)

Уравнение экстремали по переменной λ для этого функционала воспроизводит условие связи (10)

Вместо того, чтобы выписывать уравнение экстремали (оно же, уравнение Эйлера-Лагранжа) по переменной $y(x)$, заметим, что "лагранжиан" модели — подынтегральное выражение

$$L = \rho g\, y(x)\sqrt{1+y'^2(x)} + \lambda\sqrt{1+y'^2(x)} - \frac{\lambda l}{2a}$$

не зависит явно от переменной x (x — аналог времени t в механических задачах). Поэтому должна сохраняться "энергия" системы

$$"E" = y'\frac{\partial L}{\partial y'} + \underbrace{\lambda'\frac{\partial L}{\partial \lambda'}}_{=\,0,\ \text{т.к. } \lambda' \text{ нет}} - L = -\frac{\rho g\, y(x) + \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$-E\sqrt{1+y'^2} = \lambda + \rho g y$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{dx = \pm\frac{E\,dy}{\sqrt{(\lambda+\rho g y)^2 - E^2}}} \quad (11)$$

Подстановка $\lambda + \rho g y(x) = E \operatorname{ch} \theta(x)$

позволяет проинтегрировать это уравнение:

$$\theta(x) = \frac{\rho g}{E} x + \theta_0 \text{, т.е.}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{E}{\rho g} \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} x + \theta_0\right) - \lambda} \quad (12)$$

Симметричные граничные условия $y(a) = y(-a) = 0$

фиксируют $\theta_0 = 0$, и

$$\boxed{\lambda = \frac{E}{\rho g} \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} a\right)}$$

Заметим, что если бы мы не ввели в задачу множитель Лагранжа λ, то у нас не было бы возможности выбором параметров θ_0 и E в общем решении (12) удовлетворить граничным условиям $y(a) = y(-a) = 0$: функционал $U_{теж}[y(x)]$ при таких условиях граничных не имеет экстремали (сравните с задачей о мыльных пленках из Семинара 6).

Итак, фиксация граничных условий приводит решение (12) к виду

$$\boxed{y(x) = \frac{E}{\rho g}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} x\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} a\right)\right)} \quad (13)$$

здесь, т.к. $y \leq 0$ при $|x| < a$, то $E > 0$

Оставшийся параметр E необходим для выполнения условия связи (10)

Элементарное вычисление длины линии $y(x)$ даёт:

$$\boxed{\frac{2E}{\rho g}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\rho g}{E}a\right)=l}$$

Заменяя $E \longmapsto z = \frac{\rho g}{E}a$, получаем уравнение

$$\boxed{\mathrm{sh}(z) = \frac{l}{2a}z}$$

которое при $E>0$, т.е. при $z>0$ разрешимо относительно z единственным образом, если только

$$\boxed{l > 2a}$$

Последнее условие является естественным требованием, чтобы длина l нерастяжимой цепи была больше расстояния $2a$ между точками закрепления её концов.