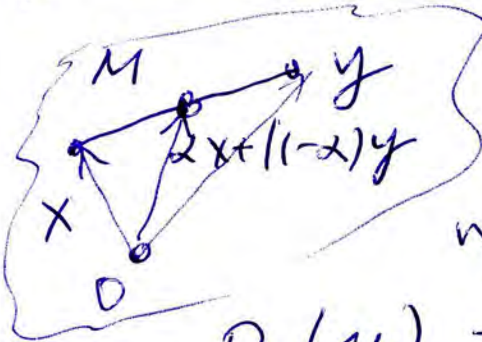
2к **Мат. Анализ. Семинар № 6**

Коэффициенты Фурье векторов в гильбертовом пространстве

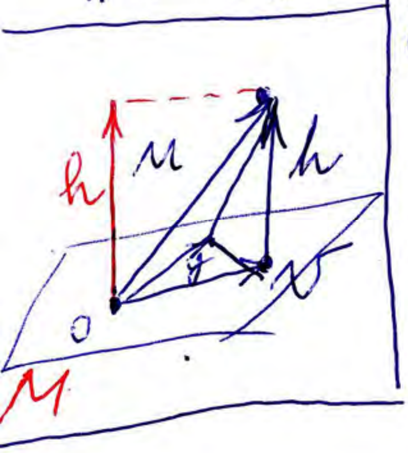
Пусть H – гильбертово пр-во, т.е. полное евклидово пр-во бесконечной размерности. Пусть M – замкнутое подпространство H, $M \subseteq H$. Тогда множество M, очевидно, является выпуклым, т.е. если $x, y \in M$, то $\forall \alpha \in [0,1]$ $\alpha x + (1-\alpha) y \in M$.



Пусть $u \in H$, $u \notin M$. Тогда можно построить проекцию т. u на M, $v = P_M(u)$ – единственная ближайшая точка подпространства M до u, т.е. $\forall y \neq v$ $\|u-y\| > \|u-v\|$.

$$\|v-u\| = \inf_{y \in M} \|u-y\|,$$

Обозначим: $h = u - v$.



Задача 1. Доказать, что

а) $h \perp M$;

б) $\forall y \in M$, $y \neq v$, $u-y \not\perp M$

в) $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|h\|^2$.

<u>Решение</u>: а) Покажем, что $\forall y \in M$ $h \perp y$, т.е. $(h, y) = 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = \|u - (v + \lambda y)\|^2$.
Заметим, что $v + \lambda y \in M$, т.к. M — линейное подпространство H. Тогда $\varphi(0) = \|u - v\|^2$
и $\varphi(\lambda) > \varphi(0)$ $\forall \lambda \neq 0$, т.к. v — единственная точка, на которой достигается расстояние от u до M. Значит 0 — минимум функции $\varphi(\lambda)$ на $\mathbb{R}$. Тогда $\varphi'(0) = 0$.

$$\varphi(\lambda) = \|u - (v + \lambda y)\|^2 = \|h - \lambda y\|^2 =$$
$$= \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda (h, y) + \|h\|^2$$

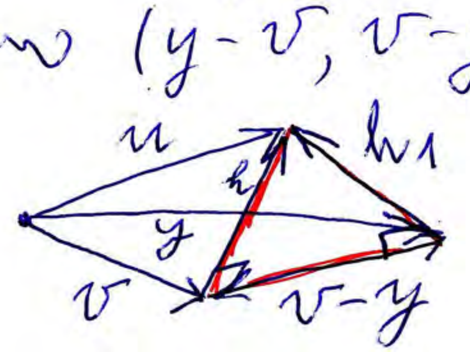
$$\varphi'(\lambda) = 2\lambda \|y\|^2 - 2(h, y), \quad \varphi'(0) = -2(h, y)$$

Следовательно, $(h, y) = 0$, $h \perp y$ $\forall y \in M$.

б) Мы доказали, что $h = u - v \perp M$.
Пусть существует другой вектор $y \in M$, такой, что $h_1 = u - y \perp M$, тогда $v - y \in M$
$h \perp v - y$, $h_1 \perp v - y$, т.е.

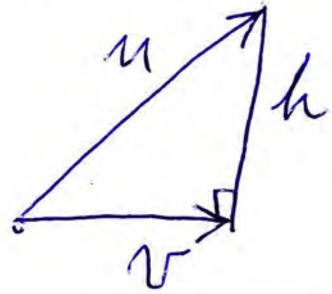
$$(h, v - y) = 0, \quad (h_1, v - y) = 0 \Rightarrow (h - h_1, v - y) = 0$$

Заметим, что $h - h_1 = (u - v) - (u - y) = y - v$
следовательно $(y - v, v - y) = \|y - v\|^2 = 0$
т.е. $y = v$



в) $u = v + u - v = v + h$, $v \perp u - v = h$

По теореме Пифагора $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|h\|^2$.



Теорема Пифагора:

$u_1 \perp u_2 \iff \|u_1 + u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$

Задача 2. Пусть $M = \mathcal{L}(y_1, y_2)$, $y_1 \perp y_2$

Найти $v = P_M(u)$ $\forall u \in H$.

Решение: $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in M$.

$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \|u - y\|^2 = \|u - \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2\|^2 =$

$= \|\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y^2\| - 2\lambda_1 (u, y_1) - 2\lambda_2 (u, y_2) =$

$= \lambda_1^2 \|y_1\|^2 + \lambda_2^2 \|y_2\|^2 - 2\lambda_1 (u, y_1) - 2\lambda_2 (u, y_2)$

$\varphi'_{\lambda_1} = 2\lambda_1 \|y_1\|^2 - 2(u, y_1) = 0$

$\varphi'_{\lambda_2} = 2\lambda_2 \|y_2\|^2 - 2(u, y_2) = 0$.

В точке минимума $\varphi'_{\lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, $\varphi'_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$

$$\lambda_1 = \frac{(u, y_1)}{\|y_1\|^2}, \quad \lambda_2 = \frac{(u, y_2)}{\|y_2\|^2}$$

Ответ: $v = \dfrac{(u, y_1)}{\|y_1\|^2} y_1 + \dfrac{(u, y_2)}{\|y_2\|^2} y_2$.

Замечание 1. $v = \frac{(u,y)}{\|y\|^2}\cdot y$ – проекция вектора u на прямую, содержащую вектор y (одномерное подпространство)

Замечание 2. Если $y_1 \perp y_2$, $\|y_1\|=1$, $\|y_2\|=1$, то $P_M(u) = (u,y_1)y_1 + (u,y_2)y_2$

Определение: Система векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \dots\}$ называется ортонормированной, если $\forall i,j,\ i\neq j$ $(\varphi_i,\varphi_j)=0$, $\|\varphi_i\|=1$.

Задача 3. Пусть задана ортонормированная система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$. Рассмотрим $M_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. Пусть $u \in H$. Найти $v_n = P_{M_n}(u)$.

Решение: При $n=1$ $v_1 = (u,\varphi_1)\varphi_1$

При $n=2$ $v_2 = (u,\varphi_1)\varphi_1 + (u,\varphi_2)\varphi_2$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = (u,\varphi_1)\varphi_1 + (u,\varphi_2)\varphi_2 + \dots + (u,\varphi_n)\cdot\varphi_n.$$

Проверим это. Обозначим $h_n = u - v_n$

Докажем, что $h_n \perp M_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Действительно, $(h_n, \varphi_j) = (u - v_n, \varphi_j) =$

$$= (u, \varphi_j) - (v_n, \varphi_j) = (u, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{n} (u, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_j) =$$

$$= (u, \varphi_j) - (u, \varphi_j)\, \|\varphi_j\|^2 = (u, \varphi_j) - (u, \varphi_j) = 0.$$

Для любого $j = 1, \dots, n$.

Тогда по задаче 1, v_n - это искомая проекция $P_{M_n}(u)$ (т.к. $u - v_n = h_n \perp M_n$).

<u>Ответ</u> $v_n = \sum_{k=1}^{n} (u, \varphi_k)\, \varphi_k$.

<u>Определение</u>: Числа $c_n = (u, \varphi_n)$ называются коэффициентами Фурье вектора u по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}$.

<u>Задача 4</u>. Пусть $\{c_n\}$ - коэффициенты Фурье вектора u по ортонорм. сист. $\{\varphi_n\}$

Пусть $h_n = u - v_n$, где $v_n = P_{M_n}(u)$

$M_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. Тогда

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \|h_n\|^2.$$

Решение: $h_n = u - v_n \perp v_n$. Тогда по теореме Пифагора $\|u\|^2 = \|v_n\|^2 + \|u - v_n\|^2$

Заметим, что $\|v_n\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\|^2$, где $c_k = (u, \varphi_k)$ – коэффициенты Фурье u.

$\|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|c_k \varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$. Следовательно,

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \|h_n\|^2$$

Задача 5. (Неравенство Бесселя). Если $\{c_k\}$ – коэффициенты Фурье u, то $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \|u\|^2$.

Решение. $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \|h_n\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n} c_k^2$

При $n \to \infty$ $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \|u\|^2$.

Следствие: $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Задача 6. Пусть $\{\varphi_n\}$ – ортонормированная система в гильб. пр-ве H. Тогда все векторы из $\{\varphi_n\}$ линейно независимы.

Решение: Пусть это не так: $\exists\, \alpha_k \neq 0$. $\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_n\varphi_n=0$. Умножим на φ_j

$$\alpha_1(\varphi_1,\varphi_j)+\ldots+\alpha_j(\varphi_j,\varphi_j)+\ldots+\alpha_n(\varphi_n,\varphi_j)=0$$

$$\alpha_j(\varphi_j,\varphi_j)=0 \Rightarrow \alpha_j=0 \quad \forall j=1,\ldots,n.$$

Определение. Система $\{\varphi_n\}$ называется полной, если $\mathcal{L}(\{\varphi_n\})$ – линейная оболочка $\{\varphi_n\}$ всюду плотна в H. т.е. $\forall$ вектора $u\in H$ $\exists\, v_n\in\mathcal{L}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$

$$v_n=\alpha_1^n\varphi_1+\alpha_2^n\varphi_2+\ldots+\alpha_n^n\varphi_n:$$

$$\|u-v_n\|_H\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Задача 7. Пусть $\{\varphi_n\}$ – полная ортонормированная система в H. Тогда

а) $\forall u\in H$ $\|u-v_n\|\to 0$, где $v_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$, $c_k=(u,\varphi_k)$ – коэф. Фурье u в $\{\varphi_n\}$

б) Тождество Парсеваля:

$$\|u\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$$

Решение: Обозначим $h_n = u - v_n$

а) По задаче 4: $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \|h_n\|^2$.

Напомним, что $\|h_n\|^2$ - это расстояние от u до $\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Поэтому, если система $\{\varphi_n\}$ полная, то $\|h_n\|^2 \to 0$.

(Вектор $v_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ - это наилучшее приближение вектора u в $\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$)

Следовательно б) $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$

Определение Полная ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ в гильб. пр-ве H называется его базисом.

Примеры ортонормированных базисов

① $\ell_2 = \{ \{x_n\}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \}$.

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

$e_1 = (1, 0, \dots 0, \dots)$
$e_2 = (0, 1, 0 \dots 0 \dots)$
$e_n = (0, 0 \dots \underset{n}{1}\, 0 \dots)$

Ортонормирован очевидно. Проверим полноту

$\forall$ вектора $x = (x_1, \dots x_n, \dots)$ Пусть
$v^{(n)} = (x_1, \dots, x_n, 0 \dots 0) \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$.
тогда $\|x - v^{(n)}\|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \to 0 \ (n \to \infty)$.
т.е. $\{e_n\}$ – полная. x_k – коэфф. Фурье.

---

② $L_2(-\pi, \pi)$; $(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt$.

Ортонормированный базис:
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt, \ n \in \mathbb{N}$
(Доказывали на 1 семинаре)
Полнота следует из т. теорем Вейер-
штрасса. (Докажем позже).

---

③ $L_2(0, \pi)$
Базисы: а) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt, \ n \in \mathbb{N}$
б) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}; \ \cos nt, \ n \in \mathbb{N}$.

Ортонормированность доказывается аналогично $L_2(-\pi, \pi)$. Полнота из теорем Вейерштрасса.