Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Лекция 1. Предварительные сведения

На протяжении всего курса мы не будем различать *римановы поверхности* и *комплексные кривые*. В свою очередь, *компактные* римановы поверхности не отличаются от комплексных *гладких алгебраических* кривых.

Литература:

Основная:

М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов, Алгебраические кривые: по направлению к пространствам модулей, М., МЦНМО, 2019

Дополнительная:

Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, Принципы алгебраической геометрии, Глава 2

С. М. Львовский, Введение в римановы поверхности, `https://math.hse.ru/spec-riman`

А.К.Звонкин, С.К.Ландо, Графы на поверхностях и их приложения, М. МЦНМО, 2010

С точки зрения топологии компактная риманова поверхность представляет собой двумерную ориентируемую поверхность. Все такие поверхности — это сфера S^2, тор $T^2 = S^1 \times S^1$, и т.д. Поверхность в этом списке однозначно задается натуральным числом — своим *родом* g.

Всякая некомпактная риманова поверхность получается вырезанием некоторого замкнутого подмножества из компактной.

Лекция 1. Предварительные сведения: Склеивание поверхностей из многоугольников

Внутренность всякого многоугольника является поверхностью. Склеивая многоугольники по сторонам (так, чтобы *всякая сторона многоугольника склеилась ровно с одной стороной того же или другого многоугольника*), мы получаем новые поверхности. При этом надо следить, чтобы склеенная поверхность оставалась ориентируемой, т.е. чтобы из нее нельзя было вырезать ленту Мебиуса.
Наоборот, всякую поверхность можно разрезать на многоугольники. Причем это можно сделать бесконечным числом различных способов.

Лекция 1. Предварительные сведения: Склеивание поверхностей с краем из многоугольников

Если включать в пары не все стороны склеиваемых многоугольников, а только некоторые из них, то получится *оиентированная двумерная поверхность с краем*. *Край* поверхности образуют те стороны многоугольников, которые не попали в пары. Край представляет собой несвязное объединение нескольких окружностей.

Лекция 1. Предварительные сведения: Эйлерова характеристика поверхности

Склеивая данную поверхность из многоугольников, мы можем использовать разное количество многоугольников, а также многоугольники с различным числом сторон. Стороны склеиваемых многогугольников образуют граф на поверхности; вершинами этого графа являются отождествленные вершины многоугольников. Обозначим количество многоугольников через F, количество вершин полученного графа через V и количество его ребер через E. Тогда справедливо следующее утверждение:

Theorem

Величина $V - E + F$ не зависит от способа разрезания поверхности на многоугольники. Для поверхности рода g эта величина равна $2 - 2g$.

Величина $V - E + F = 2 - 2g$ называется *эйлеровой характеристикой* данной поверхности.

Лекция 1. Предварительные сведения: Аддитивность эйлеровой характеристики

Будучи равной $2-2g$, эйлерова характеристика поверхности тесно связана с ее родом, который кажется более простой характеристикой поверхности. Однако она во многих отношениях удобнее рода: во-первых, эйлерову характеристику легко определить для любой поверхности, в том числе некомпактной или с краем, во-вторых, она аддитивна: $\chi(M\sqcup N)=\chi(M)+\chi(N)$ для несвязного объединения любых двух поверхностей (и не только поверхностей, а и для любого *симплициального комплекса*).

Например, если из поверхности выкинуть n точек (или n дисков), то ее эйлерова характеристика уменьшится на n (поскольку эйлерова характеристика точки или диска равна 1).

Эйлеровы характеристики гомотопически эквивалентных симплициальных комплексов совпадают.

Пусть $f : M \to N$ — непрерывное отображение двух поверхностей. Отображение f называется *накрытием степени* d, если у каждой точки $y \in N$ есть окрестность $U(y) \subset N$, гомеоморфная диску D^2, полный прообраз которой $f^{-1}(U(y))$ гомеоморфен несвязному объединению d дисков D^2, причем ограничение f на каждый из этих дисков является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом. Здесь d может быть натуральным числом или бесконечностью (если у каждой точки в N бесконечно много прообразов).

Типичный пример накрытия дается отображением $z \mapsto z^d, d = 1, 2, \dots,$ проколотого в нуле единичного диска D' в себя. Степень этого отображения равна d. Всякое *голоморфное* отображение комплексных кривых имеет такой вид в подходящих локальных координатах, что и устанавливает прямую связь между голоморфными отображениями и накрытиями.

Типичный пример накрытия дается отображением $z \mapsto z^d, d = 1, 2, \ldots,$ проколотого в нуле единичного диска D' в себя. Степень этого отображения равна d. Всякое *голоморфное* отображение комплексных кривых имеет такой вид в подходящих локальных координатах, что и устанавливает прямую связь между голоморфными отображениями и накрытиями.

Выберем на данной поверхности N базисную точку $y_0 \in N$. Накрытия $(M, x_0) \to (N, y_0)$ поверхности N с базисной точкой y_0 (рассматриваемые с точностью до гомеоморфизма поверхности (M, y_0)) находятся во взаимно-однозначном соответствии с подгруппами фундаментальной группы $\pi_1(N, y_0)$

Задача. Опишите все накрытия двумерной сферы.

Предыдущая задача показывает, что у поверхности может быть совсем мало накрытий. В то же время, отображение $z \mapsto z^d$ является голоморфным отображением единичного диска в себя, но не накрытием единичного диска. Поэтому для работы с голоморфными отображениями больше подходят разветвленные накрытия.

Непрерывное отображение компактных ориентированных поверхностей $f : N \to M$ называется *разветвленным накрытием* степени d, если в M можно выкинуть конечный набор точек $\{y_1, \dots, y_n\}$ так, что над дополнением к этому набору отображение $f : (N \setminus f^{-1}(\{y_1, \dots, y_n\})) \to (M \setminus \{y_1, \dots, y_n\})$ становится накрытием степени d.

В частности, отображение $z \mapsto z^d$ является разветвленным накрытием единичного диска степени d.

Пусть $f : N \to M$ — разветвленное накрытие степени d. Набор точек $\{y_1, \dots, y_n\} \subset M$ называется набором *точек ветвления*, если над дополнением к нему f является накрытием, а над дополнением к любому его подмножеству — нет.
У каждой точки ветвления y_i меньше, чем d прообразов при f; у каждой из остальных точек поверхности M ровно d прообразов. У каждого прообраза $x \in f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in M$ есть *кратность* — число прообразов точки y', близкой к y, лежащих вблизи x. В окрестности точки кратности d_j можно выбрать комплексную координату z так, что в окрестности ее образа есть комплексная координата, в которой отображение f имеет вид $z \mapsto z^{d_j}$. Сумма кратностей прообразов любой точки равна d.

Лекция 1. Предварительные сведения: Разветвленные накрытия; формула Римана–Гурвица

Пусть $f : N \to M$ — разветвленное накрытие степени d, $\{y_1, \dots, y_n\} \subset M$ — набор его точек ветвления, и пусть $m_i = |f^{-1}(y_i)|$ — количество прообразов точки y_i.

Theorem (формула Римана–Гурвица)

Эйлерова характеристика поверхности N выражается следующей формулой:

$$\chi(N) = d(\chi(M) - n) + \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Лекция 1. Предварительные сведения: Разветвленные накрытия; монодромия

Пусть $f : N \to M$ — накрытие степени d, $y_0 \in M$. Всякая непрерывная петля в M с началом и концом в y_0 определяет перестановку множества точек прообраза $f^{-1}(y_0)$, т.е. перестановку множества из d элементов. Эта перестановка зависит только от гомотопического класса петли и называется *монодромией* пути. Определенный таким образом гомоморфизм $\pi_1(M, y_0) \to S_d$ называется *гомоморфизмом монодромии*, а его образ — *группой монодромии* накрытия. Для разветвленного накрытия монодромия определяется как монодромия соответствующего ему неразветвленного накрытия. Накрывающая поверхность является *связной*, если и только если группа монодромии действует на слое *транзитивно*, т.е. если для любых двух прообразов точки y_0 есть перестановка монодромии, переводящая одну из них в другую.

В частном случае, когда $M \equiv S^2$, монодромия разветвленного накрытия $f : N \to S^2$ полностью определяется набором перестановок прообраза $f^{-1}(y_0)$ точки $y_0 \in S^2$, не являющейся точкой ветвления, задаваемых путями, идущими из точки y_0 в точки ветвления $y_1, \dots, y_n$. Этот набор перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ может быть любым — с единственным ограничением $\sigma_n \circ \sigma_{n-1} \cdots \circ \sigma_1 = \mathrm{id}$.

Семинар 1. Задачи

- Поверхность какого рода дают склейки многоугольников на рисунке?

Семинар 1. Задачи

- Поверхность какого максимального рода можно получить, склеивая многоугольники на рисунке?

Семинар 1. Задачи

- Докажите, что тор можно накрыть только тором. Опишите все конечнократные накрытия тора тором.
- Пусть компактная поверхность рода $g > 1$ накрыта поверхностью рода h со степенью $d > 0$. Выразите h через g и d.
- Перечислите все конечнократные разветвленные накрытия двумерной сферы с двумя точками ветвления.

Семинар 1. Задачи

- Перечислите все конечнократные разветвленные накрытия тора с одной точкой ветвления.
-

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Плоская кривая — это кривая на плоскости. Обычно мы представляем себе вещественную кривую, нарисованную на вещественной плоскости. В этом курсе нас будут интересовать, однако, комплексные кривые на комплексной плоскости. Имея дело с алгебраическими кривыми, естественно рассматривать — как в комплексном, так и в вещественном случае, — кривые на проективной, а не в аффинной, плоскости.

Комплексная проективная плоскость $\mathbb{C}P^2$ определяется как множество троек комплексных чисел, не все из которых равны нулю, рассматриваемых с точностью до умножения на общее ненулевой комплексное число, $\mathbb{C}P^2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$.
Мы будем использовать *однородные координаты* $(x : y : z)$ для точек в комплексной проективной плоскости и записывать уравнения кривых в этих координатах. Условие $x \neq 0$ (так же, как и условия $y \neq 0$, $z \neq 0$) определяет открытое подмножество в проективной плоскости, изоморфное аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$. Иногда мы будем записывать уравнения кривых в аффинных координатах (y, z) (соответственно, (x, z), (x, y)), полагая $x = 1$ (соответственно, $y = 1$, $z = 1$).

Тройка комплексных чисел a, b, c, не все из которых равны 0, определяет в $\mathbb{C}P^2$ прямую $ax + by + cz$.

Еще одним примером плоской кривой является квадрика $x^2 + y^2 + z^2$.

Более общим образом, *плоской алгебраической кривой степени d* называется однородный многочлен степени d

$$F(x, y, z) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=d}} a_{i,j,k} x^i y^j z^k,$$

в котором не все коэффициенты $a_{i,j,k}$ равны 0. Каждой плоской алгебраической кривой соответствует множество ее точек $\{(x : y : z) | F(x, y, z) = 0\}$.
Задача. Докажите, что множество точек всякой плоской алгебраической кривой непусто.

Лекция 2. Плоские алгебраические кривые: точки гладкости

Обе кривые на предыдущем слайде являются гладкими. Точка кривой $F(x,y,z)=0$ называется *гладкой*, если не все частные производные $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z$ обращаются в этой точке в 0. Кривая называется *гладкой*, если все ее точки гладкие. Точки кривой, не являющиеся гладкими, называются *особыми*; кривая, на которой есть особые точки, называется *особой*.

Для прямой $F(x,y,z)=ax+by+cz=0$ частные производные функции F не зависят от выбранной точки кривой и равны a,b,c; поскольку не все числа a,b,c равны 0, все точки кривой гладкие.

Для квадрики $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=0$ частные производные функции F равны $2x,2y,2z$; все они равны 0 только если $x=y=z=0$. Такой точки нет на проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, а значит и на кривой $F=0$.

Согласно теореме о неявной функции, в окрестности своей гладкой точки всякая плоская кривая C допускает параметризацию $\varphi^{-1} : D \to \mathbb{C}P^2$ голоморфным отображением единичного диска, дифференциал которого не обращается в 0. Поэтому гладкая плоская кривая покрывается картами, функции перехода которых имеют положительный определитель, а значит, является ориентируемым вещественным двумерным многообразием.

Квадрика $F(x, y, z) = x^2 + y^2 = 0$ не является гладкой. Она содержит особую точку
Пример особой кривой степени n:

$$F(x, y, z) = \ell_1 \ell_2 \ldots \ell_n = 0,$$

где $\ell_1, \ldots, \ell_n$ — ненулевые линейные многочлены.

Плоская алгебраическая кривая степени d называется *приводимой*, если однородный многочлен $F = F(x, y, z)$, задающий ее, раскладывается в произведение двух однородных многочленов, степень каждого из которых меньше d, $F = HG$. Если такого разложения не существует, то кривая $F = 0$ называется *неприводимой*.
Если плоская кривая $F = 0$ приводима, $F = GH$, то она является объединением кривых $G = 0$ и $H = 0$. Всякая плоская кривая $F = 0$ представляет собой объединение конечного числа неприводимых кривых. Это представление единственно.
Задача. Докажите, что всякая точка пересечения плоских кривых $G = 0$ и $H = 0$ является особой точкой кривой $GH = 0$.
Задача. Приведите пример плоской алгебраической кривой, множество гладких точек которой пусто.

Пусть $(x_0 : y_0 : z_0)$ — точка пересечения двух плоских алгебраических кривых $G = 0$ и $H = 0$. Эта точка называется *точкой трансверсального пересечения кривых*, если дифференциалы dG и dH линейно независимы (т.е. непропорциональны друг другу) в этой точке. В частности, эта точка должна быть гладкой для обеих кривых.
Точка трансверсального пересечения сохраняется при малом возмущении многочленов G и F.

Лекция 2. Плоские алгебраические кривые: трансверсальное самопересечение

Пусть $(x_0 : y_0 : z_0)$ — особая точка плоской алгебраической кривой $F = 0$. Выберем систему аффинных координат (X, Y) с центром в этой точке. В этой системе координат уравнение кривой имеет вид

$$aX^2 + bXY + cY^2 + \tilde{f}(X, Y) = 0,$$

где многочлен $\tilde{f}$ содержит мономы степени 3 и выше. Точка $(x_0 : y_0 : z_0)$ называется *точкой трансверсального самопересечения* кривой $F = 0$, если квадратичная часть $aX^2 + bXY + cY^2$ аффинного уравнения кривой невырождена.
В окрестности точки трансверсального самопересечения кривая имеет два гладких *листа*, касательные к которым задаются прямыми, определяемыми разложением

$$aX^2 + bXY + cY^2 = (a_1X + b_1Y)(a_2X + b_2Y) = 0.$$

Точка трансверсального самопересечения сохраняется при малом возмущении многочлена F.
Задача. Приведите пример неприводимой кривой с точкой трансверсального самопересечения.

Многие свойства плоских алгебраических кривых можно предсказать, а иногда и доказать, рассматривая особые кривые, являющиеся объединениями различных прямых, задаваемых линейными уравнениями.
Например, общий набор прямых $\ell_1 \dots \ell_k = 0$ пересекается с общим набором прямых $\ell_{k+1} \dots \ell_{k+m} = 0$ трансверсально в $k \cdot m$ точках. Первая из этих кривых является плоской алгебраической кривой степени k, вторая — степени m.

Theorem (Bezout)

Гладкая алгебраическая кривая степени k пересекает общую алгебраическую кривую степени m трансверсально в mk точках.

Что означают слова ‘общая’ в формулировке теоремы?
Пусть $F = 0$ — данная плоская кривая степени k. Множество всех плоских кривых степени m представляет собой проективное пространство.
Задача. Чему равна размерность этого пространства?

Theorem

Плоские кривые степени m, пересекающие данную гладкую плоскую кривую C нетрансверсально, образуют алгебраическую гиперповерхность в проективном пространстве плоских кривых степени m.

Дополнение к алгебраической гиперповерхности в комплексном проективном пространстве связно, поэтому количество точек пересечения кривой, отвечающей точке этого дополнения, с кривой $F = 0$ не зависит от точки дополнения, а значит, равно mk.

Лекция 2. Плоские алгебраические кривые: теорема Безу, пересечение с прямой

Пусть, например, $F = 0$ — прямая; ее степень равна 1. Ее можно параметризовать проективной прямой: $(x_0 + \alpha_t : y_0 + \beta t : z_0 + \gamma t)$.
Для определяния точек пересечения с кривой $G = 0$ степени m сделаем подстановку $G(x_0 + \alpha_t : y_0 + \beta t : z_0 + \gamma t)$. Корни полученного многочлена степени m дяют точки пересечения прямой и кривой. Если все корни простые, то точки пересечения трансверсальны и их количество равно m.

Лекция 2. Плоские алгебраические кривые: теорема Безу, второе доказательство

Пусть F — кубическая кривая, G — квадрика, представленные как многочлены от y

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= a_0y^3 + a_1(x,z)y^2 + a_2(x,z)y + a_3(x,z) \\ G(x,y,z) &= b_0y^2 + b_1(x,z)y + b_2(x,z) \end{aligned}$$

где a_i, b_i — однородные многочлены степени i.
В точках пересечения $(x_0 : y : z_0)$ кривых $F = 0$ и $G = 0$ эти многочлены имеют общий корень. Значит, существуют многочлены $f_1(y) = u_0y^2 + u_1y + u_2$ и $g_1(y) = v_0y + v_1$, такие, что

$$(a_0y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3)(v_0y + v_1) \equiv (b_0y^2 + b_1y + b_2)(u_0y^2 + u_1y + u_2),$$

что дает линейную систему уравнений на коэффициенты v_0, v_1, u_0, u_1, u_2:

$$\begin{aligned} a_0v_0 &= b_0u_0 \\ a_1v_0 + a_1v_1 &= b_1u_0 + b_0u_1 \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Эта система имеет ненулевое решение если и только если невырождена ее матрица

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы называется *результантом* многочленов F и G. Он однороден степени $\deg F \cdot \deg G$, его корни — $X, z)$-координаты точек пересечения кривых $F = 0$ и $G = 0$.

Семинар 2. Задачи

- Докажите *тождество Эйлера*: для однородного многочлена $F = F(x, y, z)$ степени d выполняется равенство
$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = d \cdot F.$$
- Воспользовавшись тождеством Эйлера, докажите, что в аффинной карте $z = 1$ условие гладкости $dF \neq 0$ точки кривой эквивалентно условию $df \neq 0$ в этой точке, где $f(x, y) = F(x, y, 1)$.

Семинар 2. Задачи

- Дайте определение кратности точки пересечения двух плоских кривых.
- Докажите общую теорему Безу: если две плоские кривые $F = 0$ и $G = 0$ имеют конечное число точек пересечения, то сумма кратностей этих точек равна произведению степеней кривых.

Семинар 2. Задачи

Семинар 2. Задачи

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Теорема Безу утверждает, что общая плоская алгебраическая кривая степени m пересекает данную гладкую алгебраическую плоскую кривую степени k трансверсально в km точках.

Theorem

Пусть две плоские кривые степени n трансверсально пересекаются в n^2 точках. Тогда если для данного числа p, $0 < p < n$, np из этих точек лежат на плоской кривой степени p, то оставшиеся $n(n-p)$ точек лежат на кривой степени $(n-p)$.

Следствие. Если $2n$-угольник вписан в квадрику, то точки пересечения его сторон с четными номерами со сторонами с нечетными номерами лежат на кривой степени $(n-2)$.
Пример. Пусть $n = 3$. Тогда точки пересечения четных сторон вписанного в квадрику 6-угольника с нечетными лежат на одной прямой.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: кубики через 8 точек

Пусть F, G два однородных многочлена степени d от трех переменных. Однопараметрическое семейство кривых $aF + bG = 0, a, b \in \mathbb{C}$, называется *пучком* кривых. Все кривые пучка проходят через точки пересечения кривых $F = 0$ и $G = 0$ и не имеют других точек пересечения.

Lemma

Пучок кривых степени d, проходящий через данные $D - 1 = d(d+3)/2 - 1$ точек общего положения имеет еще $(d-1)(d-2)/2$ общих точек.

Доказательство. Эти два числа в сумме дают d^2. Если мы зафиксируем $D - 1$ точек общего положения на плоскости, то через них проходит пучок кривых степени d.

Corollary

Для любых 8 точек общего положения на плоскости существует девятая точка, такая, что всякая кубика, проходящая через первые 8 точек, проходит и через нее.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация

Построим явную рациональную параметризацию окружности $(x-1)^2+y^2=1$. Начало координат $(0,0)$ лежит на этой окружности; всякая проходящая через него прямая имеет вид $y=tx$. Подставив в уравнение окружности, получаем

$$(x-1)^2+t^2x^2=1,\ \text{или}\ x^2-2x+1+t^2x^2=1,\ \text{или}\ x((1+t^2)x-2)=0.$$

Поэтому либо $x=0$, либо $x=\frac{2}{1+t^2}$. В первом случае $y=0$ и точка пересечения прямой с окружностью это начало координат. Во втором случае $y=\frac{2t}{1+t^2}$. Эти рациональные функции (отношения двух многочленов) задают изоморфизм комплексной проективной прямой на квадрику в проективной плоскости.

Задача. Найдите рациональную параметризацию произвольной квадрики на плоскости (например, показав, что любая квадрика подходящей проективной заменой координат переводится в указанную).

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация окружности

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация

Плоские кривые степени старше 2 могут допускать рациональную параметризацию только, если у них есть особенности.

Lemma

Неприводимая плоская кубическая кривая может иметь не более одной особой точки.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация

Плоские кривые степени старше 2 могут допускать рациональную параметризацию только, если у них есть особенности.

Lemma

Неприводимая плоская кубическая кривая может иметь не более одной особой точки.

Доказательство. Если у кривой есть две особых точки, то проведем через них прямую. Сумма кратностей точек пересечения этой прямой с кубикой не меньше 4, что противоречит теореме Безу.

Lemma

Кубика с особой точкой допускает рациональную параметризацию.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация

Плоские кривые степени старше 2 могут допускать рациональную параметризацию только, если у них есть особенности.

Lemma

Неприводимая плоская кубическая кривая может иметь не более одной особой точки.

Доказательство. Если у кривой есть две особых точки, то проведем через них прямую. Сумма кратностей точек пересечения этой прямой с кубикой не меньше 4, что противоречит теореме Безу.

Lemma

Кубика с особой точкой допускает рациональную параметризацию.

Доказательство. Кратность особой точки на неприводимой кубике равна 2. Прямая, проведенная через эту точку, пересекает кубику еще в одной точке, задавая, тем самым, ее рациональную параметризацию.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация кубики

Плоские кривые степени старше 2 могут допускать рациональную параметризацию только, если у них есть особенности.

Lemma

Неприводимая плоская кубическая кривая может иметь не более одной особой точки.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация кубики

Плоские кривые степени старше 2 могут допускать рациональную параметризацию только, если у них есть особенности.

Lemma

Неприводимая плоская кубическая кривая может иметь не более одной особой точки.

Доказательство. Если у кривой есть две особых точки, то проведем через них прямую. Сумма кратностей точек пересечения этой прямой с кубикой не меньше 4, что противоречит теореме Безу.

Lemma

Кубика с особой точкой допускает рациональную параметризацию.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация кубики

Плоские кривые степени старше 2 могут допускать рациональную параметризацию только, если у них есть особенности.

Lemma

Неприводимая плоская кубическая кривая может иметь не более одной особой точки.

Доказательство. Если у кривой есть две особых точки, то проведем через них прямую. Сумма кратностей точек пересечения этой прямой с кубикой не меньше 4, что противоречит теореме Безу.

Lemma

Кубика с особой точкой допускает рациональную параметризацию.

Доказательство. Кратность особой точки на неприводимой кубике равна 2. Прямая, проведенная через эту точку, пересекает кубику еще в одной точке, задавая, тем самым, ее рациональную параметризацию.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация особой кубики

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация

Theorem

Плоская неприводимая алгебраическая кривая степени d не может иметь больше $D = (d-1)(d-2)/2$ особых точек.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация

Theorem

Плоская неприводимая алгебраическая кривая степени d не может иметь больше $D = (d-1)(d-2)/2$ особых точек.

Доказательство. Пусть на кривой степени d есть больше, чем D особых точек. Возьмем $D+1$ таких точек и добавим к ним еще $d-3$ точек кривой. Через полученные $(d-1)(d-2)/2+1+(d-3) = (d+1)(d-2)/2$ точек проходит кривая степени $d-2$. Кратность ее пересечения с исходной кривой не меньше, чем $(d-1)(d-2)+2+(d-3) = d(d-2)+1$, что противоречит теореме Безу.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация

Theorem

Если плоская неприводимая алгебраическая кривая степени d имеет $D = (d-1)(d-2)/2$ точек трансверсального самопересечения, то она допускает рациональную параметризацию.

Выберем на кривой еще $d-3$ гладких точки. Через $D + (d-3) = (d^2 - 2d - 4)/2$ точек проходит пучок кривых степени $d-2$. Кривая из этого пучка пересекает исходную кривую в D точках трансверсального самопересечени, а также в $d-3$ гладких точках. Суммарная кратность этих пересечений равна $2D + (d-3) = (d-1)(d-2) + (d-3) = d^2 - 2d - 1$. Поэтому помимо указанных есть еще одна точка пересечения двух кривых. С другой стороны, если к выбранным $d-3$ гладким точкам добавить еще одну точку кривой, то существует кривая пучка, проходящая через эту точку. Значит, значение параметра пучка, отвечающее дополнительной точке пересечения, параметризует исходную кривую.

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: рациональная параметризация

Лекция 3. Плоские алгебраические кривые: интегрируемость в элементарных функциях

Рациональную функцию $R(x) = P(x)/Q(x)$, где P и Q многочлены, можно проинтегрировать в элементарных функциях. Для этого ее нужно представить в виде суммы простейших дробей вида $a/(x-b)^n$ и воспользоваться нашим знанием интегралов от этих дробей. Такой интеграл является либо дробью, либо логарифмом.
Точно так же можно проинтегрировать в элементарных функциях рациональные функции на плоских кривых, допускающих рациональную параметризацию. Отсюда берутся подстановки, приводящие к интегрируемым функциям.

Например, интегрируемость рациональных функций вида $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ обеспечивается рациональной параметризацией квадрики $y^2 = ax^2 + bx + c$. Аналогично, можно проинтегрировать в элементарных функциях рациональных функций вида $R(x, \sqrt{x^2(x-1)})$

Семинар 3. Задачи

- Рассмотрим все кривые степени d, проходящие через данные $dp-(p-1)(p-2)/2$ точек данной кривой степени p, $p<d$. Тогда все они имеют еще $(p-1)(p-2)/2$ общих точек, причем эти точки также ледат на данной кривой степени p.
- Пусть $k>d$, $k>p$ и $k<d+p-3$. Тогда любая кривая степени k, проходящая через

$$dp-\frac{(d+p-k-1)(d+p-k-2)}{2}$$

точек пересечения данной кривой степени d и данной кривой степени p, проходит и через остальные точки их пересечения.

Семинар 3. Задачи

- Докажите, что плоская кривая, заданная уравнением вида $P_d(x, y) + P_{d-1}(x, y) = 0$, где $P_k(x, y)$ — однородный многочлен степени k от двух переменных, допускает рациональную параметризацию.
- Докажите, что если на плоской кривой степени d есть особая точка порядка $d - 1$, то эта кривая допускает рациональную параметризацию.
- Найдите рациональную параметризацию лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Семинар 3. Задачи

- Пусть кривая на плоскости задана как образ отображения $t \mapsto (P_d(t), Q_d(t))$, где P_d, Q_d — многочлены степени d. Докажите, что она алгебраическая, степени не выше d.
- Сколько точек общего положения на плоскости надо задать, чтобы через эти точки проходило конечное множество плоских кривых степени d, допускающих рациональную параметризацию?
- Сколько кривых степени d, допускающих рациональную параметризацию, можно провести через данный набор из   точек общего положения на плоскости?

Семинар 3. Задачи

-
-

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: комплексная структура на кривой

До сих пор мы имели дело только с плоскими алгебраическими кривыми. Общая *риманова поверхность* (или *комплексная кривая*) это двумерная ориентируемая поверхность с комплексной структурой на ней. *Комплексной структурой* на двумерной поверхности называется ее покрытие открытыми дисками вместе с гомеоморфизмами этих дисков на единичный круг на комплексной прямой $\{(U_i, \varphi_i : U_i \to D)\}$, обладающее следующим свойством: если два диска U_i и U_j пересекаются, то композиция $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, определенная на прообразе относительно φ_i пересечения этих дисков, является голоморфным (т.е. комплексно аналитическим) отображением.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: комплексная структура на кривой

Для гладкой плоской алгебраической кривой комплексная структура определяется в согласии с теоремой о неявной функции. В каждой точке кривой $F(x, y, z) = 0$ какая либо из частных производных многочлена F отлична от 0, а значит соответствующая переменная служит локальным параметром в окрестности этой точки. Таким образом мы получаем покрытие плоской кривой подходящими окрестностями ее точек.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: комплексная структура на кривой

Для гладкой плоской алгебраической кривой комплексная структура определяется в согласии с теоремой о неявной функции. В каждой точке кривой $F(x,y,z)=0$ какая либо из частных производных многочлена F отлична от 0, а значит соответствующая переменная служит локальным параметром в окрестности этой точки. Таким образом мы получаем покрытие плоской кривой подходящими окрестностями ее точек.

Аналогично вводится комплексная структура на гладкой алгебраической кривой в проективном пространстве произвольной размерности. Пусть $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — проективные координаты в $\mathbb{C}P^n$, Подмножество $C \subset \mathbb{C}P^n$ называется *гладкой алгебраической кривой*, если у любой точки множества C существует окрестность, в которой это подмножество задается набором однородных полиномиальных уравнений $F_1(x_0,\dots,x_n)=0,\dots,F_{n-1}(x_0,\dots,x_n)=0$, причем ранг матрицы Якоби этого набора равен $n-1$.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: голоморфные отображения кривых

Голоморфное отображение кривых $f : C_1 \to C_2$ это отображение, уважающее комплексную структуру. Если точка $A \in C_1$ покрыта окрестностью $(U, \varphi : U \to D)$, а точка $B = f(A \in C_2)$ покрыта окрестностью $(V, \psi : V \to D)$, то отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ должно быть комплексно аналитическим там, где оно определено.
С топологической точки зрения голоморфное отображение комплексных кривых является разветвленным накрытием.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: голоморфные отображения кривых

Голоморфное отображение кривых $f : C_1 \to C_2$ это отображение, уважающее комплексную структуру. Если точка $A \in C_1$ покрыта окрестностью $(U, \varphi : U \to D)$, а точка $B = f(A \in C_2)$ покрыта окрестностью $(V, \psi : V \to D)$, то отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ должно быть комплексно аналитическим там, где оно определено.
С топологической точки зрения голоморфное отображение комплексных кривых является разветвленным накрытием.

Две комплексные кривые C_1, C_2 называются *биголоморфными*, если существует голоморфное взаимно-однозначное отображение $f : C_1 \to C_2$, обратное к которому тоже голоморфно.

Theorem

Всякая гладкая компактная комплексная кривая биголоморфна некоторой алгебраической кривой в каком-то проективном пространстве.

Theorem (Принцип максимума для голоморфных отображений)

Пусть $f : C_1 \to C_2$ — непостоянное голоморфное отображение компактной комплексной кривой C_1 в связную компактную комплексную кривую C_2. Тогда его образ совпадает со всей кривой C_2.

Действительно, образ отображения f компактен. Если он не совпадает с кривой C_2, то дополнение к нему открыто. Возьмем точку на границе образа. Любая ее окрестность пересекает дополнение к образу. В то же время, на кривой C_1 существует точка, переходящая в выбранную точку границы. Маленький диск вокруг этой точки переходит в открытое множество в C_2, которое поэтому пересекается с дополнением к образу отображения f, и мы приходим к противоречию.

Воспользуемся голоморфными отображениями для вычисления рода гладких плоских алгебраических кривых.
Начнем с вычисления рода *какой-нибудь* гладкой плоской кривой данной степени d.
Одной из наиболее популярных кривых является *кривая Ферма*, задаваемая уравнением $F(x, y, z) = x^d + y^d + z^d = 0$. Эта кривая гладкая. Действительно, все частные производные многочлена F обращаются в 0 только, если $x = y = z = 0$, а такой точки на проективной плоскости нет.

Воспользуемся голоморфными отображениями для вычисления рода гладких плоских алгебраических кривых.
Начнем с вычисления рода *какой-нибудь* гладкой плоской кривой данной степени d.
Одной из наиболее популярных кривых является *кривая Ферма*, задаваемая уравнением $F(x, y, z) = x^d + y^d + z^d = 0$. Эта кривая гладкая. Действительно, все частные производные многочлена F обращаются в 0 только, если $x = y = z = 0$, а такой точки на проективной плоскости нет. Рассмотрим отображение φ этой кривой в проективную прямую $\mathbb{C}P^1$, заданное отображением проколотой в точке $(0 : 0 : 1)$ проективной плоскости $(x : y : z) \mapsto (x : y)$. Отметим, что точка прокола не лежит на кривой Ферма.

Критическими точками проекции φ являются те точки кривой Ферма, в которых $z = 0$. Их d штук. Это точки $(1 : \varepsilon_d^i : 0)$, где ε_d — примитивный корень из -1 степени d, а $i = 0, 1, \dots, d-1$. Такая критическая точка при отображении φ переходит в критическое значение $(1 : \varepsilon_d^i)$. У каждого такого критического значения один прообраз; все остальные точки проективной прямой имеют ровно d прообразов. По теореме Римана–Гурвица эйлерова характеристика накрывающей кривой равна

$$\chi = d \cdot (2 - d) + d = d \cdot (3 - d).$$

Поэтому ее род равен

$$\frac{2 - \chi}{2} = \frac{2 - d(3 - d)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для *общей кривой* степени d. Без ограничения общности можно считать, что кривая не проходит через точку $(0:0:1)$. Проекция вдоль оси z определяет голоморфное отображение кривой в проективную прямую, являющееся разветвленным накрытием сферы степени d. Критические точки этого отображения — это решения системы уравнений $F=0, \partial F/\partial z=0$, т.е. точки пересечения кривой степени d и кривой степени $d-1$. В общем положении эти две кривые имеют $d(d-1)$ точек трансверсального пересечения, и каждая из этих точек является простой точкой ветвления разветвленного накрытия. Поэтому эйлерова характеристика накрывающей поверхности равна

$$\chi = d\cdot(2-d(d-1))+d(d-1)^2 = d(d-3),$$

как и в случае кривой Ферма. Тем самым, справедлива

Theorem

Род гладкой плоской кривой степени d равен $g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

В частности, род гладкой плоской кривой не может принимать других значений кроме $0,1,3,6,10,15,\ldots$.

Вот еще одно доказательство этой теоремы. Пространство плоских кривых степени d это проективное пространство. Особые кривые задаются такими многочленами F, что существуют точки $(x : y : z)$, в которых $F = 0, \partial F/\partial x = 0, \partial F/\partial y = 0, \partial F/\partial z = 0$. Из этой системы уравнений первое можно исключить благодаря формуле Эйлера, а из остальных трех ислючить поочередно z, y и x. Останется одно полиномиальное уравнение от коэффициентов многочлена F, которое выделяет в пространстве многочленов степени d гиперповерхность уравнений особых кривых. Дополнение к этой гиперповерхности связно и состоит из гладких кривых. Поскольку род кривой — непрерывная функция ее коэффициентов, он одинаков для всех гладких кривых. Поэтому его достаточно вычислить у одной кривой.

Вот еще одна гладкая плоская кривая степени d, род которой просто вычисляется. Рассмотрим аффинную кривую $\ell_1 \cdot \dots \cdot \ell_d = \varepsilon$, где линейные многочлены $\ell_1, \dots, \ell_d$ задают набор прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку. При малых ненулевых значениях ε это гладкая кривая. При $\varepsilon = 0$ это особая кривая, представляющая собой объединение d проективных прямых (двумерных сфер), любые две из которых пересекаются трансверсально по одной точке. Добавляем поочередно по одной прямой и сглаживаем точки пересечения. Шаг индукции состоит в доказательнстве того, что добавление прямой, пересекающей гладкую кривую в $d-1$ точке, с последующим сглаживанием в окрестности каждой точки пересечения, увеличивает род гладкой кривой на $d-2$. Поэтому род сглаженной кривой будет равен

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (d-2) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Из формулы для рода гладкой плоской кривой становится ясно, почему нодальная кривая степени d не может иметь больше, чем$(d-1)(d-2)/2$ точек трансверсального самопересечения. Действительно, каждая такая точка понижает род нормализующей кривой на 1.

Рассуждение, позволяющее вычислить род гладкой плоской кривой данной степени d, позволяет подсчитать и число касательных, которые можно к ней провести через данную точку.

Lemma

Через данную общую точку вне кривой можно провести $d(d-1)$ касательных к данной гладкой кривой степени d.

Действительно, пучок прямых, проходящих через данную точку, определяет отображение данной кривой в проективную прямую: каждой точке кривой сопоставляется прямая, соединяющая ее с данной. Точки касания — критические точки этого отображения. Число критических точек у общего голоморфного отображения степени d кривой степени d в проективную прямую мы уже подсчитали.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: касательные к гладкой плоской кривой

При стремлении точки, из которой мы проводим касательные, к общей точке кривой, две проходящие через нее касательные сливаются в одну — касательную к кривой в предельной точке.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: касательные к гладкой плоской кривой

При стремлении точки, из которой мы проводим касательные, к общей точке кривой, две проходящие через нее касательные сливаются в одну — касательную к кривой в предельной точке.

Corollary

Через общую точку на гладкой плоской кривой можно провести к этой кривой $d(d-1)-2$ касательных (не считая касательной в этой точке).

Через общую точку на гладкой плоской кубике можно провести к ней $3 \cdot 2 - 2 = 4$ касательных. Эта четверка касательных определяет четверку точек $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ проективной прямой (пучка прямых, проходящих через данную точку). В свою очередь, четверке точек на проективной прямой можно сопоставить их *двойное отношение*

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} \cdot \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta} \in \mathbb{C}P^1.$$

Это отображение не может принимать значений 0 и ∞. Согласно принципу максимума, оно постоянно. Тем самым, каждой гладкой кубической кривой C сопоставляется комплексное число $j(C)$ — ее j-инвариант.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: свойства двойного отношения

Семинар 4. Задачи

- Докажите, что проекция из точки является голоморфным отображением гладкой плоской кривой на проективную прямую.
-

Семинар 4. Задачи

- Докажите, что двойное отношение четырех точек не меняется при замене координаты на проективной прямой.
- Докажите свойства двойного отношения:

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [\beta, \alpha, \gamma, \delta]^{-1};$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = 1 - [\alpha, \gamma, \beta, \delta].$$

- Докажите, что функция комплексного переменного λ
$$J(\lambda)=\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$
не меняется при замене $\lambda\mapsto\lambda^{-1}$, $\lambda\mapsto 1-\lambda$.
- Докажите, что если $\lambda=[\alpha,\beta,\gamma,\delta]$ — двойное отношение четырех точек, то $J(\lambda)$ не зависит от порядка, в котором берутся точки.
- Докажите, что для кубики $y^2=x(x-1)(x-\lambda)$ ее J-инвариант равен $J(\lambda)$.

Семинар 4. Задачи

- Алгебраическая кривая в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ с проективными координатами $(u : v, s : t)$ задается уравнением $F(u, v, s, t) = 0$, где F — многочлен, однородный по переменным u, v и по переменным s, t. Найдите род кривой в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, имеющей степень m по одной и степень n по другой паре переменных.
-

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Общая прямая, проходящая через гладкую точку плоской кривой, пересекает эту кривую в этой точке с кратностью 1. Через каждую гладкую точку проходит единственная прямая, пересекающая кривую с кратностью, большей 1 — *касательная* к кривой в точке. Если степень кривой больше 1, то для всех ее гладких точек кроме конечного числа кратность пересечения кривой с касательной в точке касания равна 2.

Гладкая точка плоской алгебраической кривой называется *точкой перегиба*, если кратность пересечения касательной к кривой в этой точке с кривой больше 2.

Точки перегиба плоской кривой $F(x, y, z) = 0$ выделяются условием обращения в нуль гессиана многочлена F. *Гессианом* $H(F)$ многочлена F от трех переменных называется определитель его *матрицы Гессе*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Нетрудно проверить, что в точке перегиба кривой $F = 0$ гессиан $H(F)$ многочлена F действительно обращается в 0, и что это свойство сохраняется при проективной замене координат.

Если степень многочлена F равна d, то степень его гессиана равна $3(d-2)$. Поэтому в общем положении у кривой $F=0$ степени d имеется $3d(d-2)$ точек перегиба. В частности, у квадрик точек перегиба нет, а у общей гладкой кубики $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$ точек перегиба.

Если степень многочлена F равна d, то степень его гессиана равна $3(d-2)$. Поэтому в общем положении у кривой $F=0$ степени d имеется $3d(d-2)$ точек перегиба. В частности, у квадрик точек перегиба нет, а у общей гладкой кубики $3\cdot 3\cdot 1=9$ точек перегиба.

Найдем точки перегиба для кубики Ферма $x^3+y^3+z^3=0$. Гессиан этой кривой равен, с точностью до постоянного множителя,

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = xyz.$$

Гессиан обращается в 0, если и только если одна из координат обращается в 0. На кубике Ферма есть три точки с координатой $z=0$, и то же самое справедливо при $y=0$ и $x=0$. Две другие координаты тогда имеют вид $(1:\varepsilon_3^i)$, $i=0,1,2$, где ε_3 — примитивный корень степени 3 из -1. Тем самым, каждая из прямых $x=0$, $y=0$, $z=0$ содержит три из девяти точек перегиба.

Упражнение. Докажите, что каждая прямая на плоскости, проходящая через две точки перегиба кубики Ферма, проходит еще через одну ее точку перегиба. Сколько всего есть прямых, проходящих через три точки перегиба кубики Ферма?

Лекция 5. Задание комплексной структуры: опускание комплексной структуры

Есть способы наделения двумерной поверхности структурой комплексной кривой, отличные от рассмотрения алгебраических кривых в проективных пространствах. Один из этих способов — опускание комплексной структуры.
Пусть X — комплексная кривая, группа G действует на X голоморфными преобразованиями дискретно и без неподвижных точек. Тогда на факторкривой $Y = X/G$ имеется естественно заданная комплексная структура.

Лекция 5. Задание комплексной структуры: опускание комплексной структуры

Есть способы наделения двумерной поверхности структурой комплексной кривой, отличные от рассмотрения алгебраических кривых в проективных пространствах. Один из этих способов — опускание комплексной структуры.
Пусть X — комплексная кривая, группа G действует на X голоморфными преобразованиями дискретно и без неподвижных точек. Тогда на факторкривой $Y = X/G$ имеется естественно заданная комплексная структура.
Важный пример — действие группы $\mathbb{Z}^2$ на комплексной прямой $\mathbb{C}$ сдвигами на элементы решетки. Всякий сдвиг комплексной прямой является ее голоморфным отображением и не имеет неподвижных точек (если он не тождественный). Фактор комплексной прямой по действию группы $\mathbb{Z}^2$ является тором (компактной ориентируемой поверхностью рода 1). На всяком торе задана структура комплексной кривой. Замена комплексной координаты $z \mapsto az$ устанавливает биголоморфное соответствие между разными торами. С помощью такой замены одну из образующих решетки $\mathbb{Z}^2$ можно перевести в 1.

Лекция 5. Задание комплексной структуры: опускание комплексной структуры

С другой стороны, всякий двумерный тор с комплексной структурой накрывается комплексной прямой. Тем самым,

Lemma

Всякая комплексная кривая рода 1 биголоморфна фактору комплексной прямой по решетке, натянутой на вектора 1 и τ, где τ — некоторое комплексное число с положительной мнимой частью.

Выбрав в торе $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ образ решетки в качестве нуля, мы вводим на нем структуру абелевой группы. Как мы увидим впоследствии, всякий комплексный тор реализуется гладкой плоской кубикой. При этом если в качестве нуля выбрать одну из точек перегиба, то 9 точек перегиба кубики образуют подгруппу элементов 3-го порядка в торе.

Лекция 5. Задание комплексной структуры: поднятие комплексной структуры

Комплексную структуру на кривой можно не только опускать, но и поднимать.
Пусть $f : X \to Y$ — накрытие двумерных поверхностей, причем на поверхности Y есть комплексная структура. Тогда комплексная структура возникает на поверхности X: в качестве окрестности точки $A \in X$ возьмем компоненту связности прообраза относительно f окрестности V точки $f(A) \in Y$, содержащую точку A; локальной комплексной координатой в окрестности точки A будет композиция $\psi \circ f$, где $\psi : V \to D$ — локальная комплексная координата в окрестности V точки $f(A)$.
Очевидно, что относительно выбранной комплексной структуры на поверхности X отображение f становится голоморфным отображением комплексных кривых.

Лекция 5. Задание комплексной структуры: поднятие комплексной структуры

Замечательно, что эту конструкцию можно распространить на разветвленные накрытия. Пусть $f : X \to Y$ — разветвленное накрытие двумерных поверхностей, причем на поверхности Y есть комплексная структура. Выколов из поверхности Y все точки ветвления, а из поверхности X — все их прообразы при f, мы получаем накрытие проколотых поверхностей, а значит, комплексную структуру на проколотой поверхности X, поднятую с комплексной структуры на проколотой поверхности Y.
Эту поднятую комплексную структуру можно продолжить в точки прокола поверхности X. Для этого выберем в окрестности точки прокола, являющейся критической точкой кратности k отображения f, локальную координату z, в которой композиция $\psi \circ f$ записывается в виде $z \mapsto z^k$.
Как и в случае неразветвленных накрытий, относительно выбранной комплексной структуры на поверхности X отображение f становится голоморфным отображением комплексных кривых.

Лекция 5. Задание комплексной структуры: поднятие комплексной структуры

Пусть теперь $Y = \mathbb{C}P^1$ — проективная прямая, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset \mathbb{C}P^1$ — набор попарно различных точек на проективной прямой, $t_0 \in \mathbb{C}P^1$ — точка, отличная от уже выбранных. Всякий гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{t_1, \dots, t_m\}, t_0) \to S_d$ проколотой сферы с базисной точкой t_0 в симметрическую группу S_d однозначно определяет разветвленное накрытие $X \to Y$, все точки ветвления которого — это точки $t_1, \dots, t_m$, а группа накрытия проколотых поверхностей — это указанная фундаментальная группа.

Тем самым, выбор а) набора точек прокола на проективной прямой; б) базисной точки в дополнении к точкам прокола; в) гомоморфизма из фундаментальной группы проколотой сферы с выбранной базисной точкой в симметрическую группу S_d однозначно определяет голоморфное отображение $f : X \to \mathbb{C}P^1$ степени d некоторой компактной комплексной кривой X в $\mathbb{C}P^1$.

Вопрос. Верно ли, что это соответствие взаимно-однозначно?

При данном числе m точек ветвления и данной степени d голоморфного отображения множество гомоморфизмов фундаментальной группы проколотой в m точках сферы в S_d конечно.

Голоморфное отображение $f : C \to \mathbb{C}P^1$ комплексной кривой C в проективную прямую называется *мероморфной функцией* на C. Прообразы бесконечности называются *полюсами* мероморфной функции. Примером мероморфной функции может служить многочлен $P : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ степени n, $P : z \mapsto p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n$, $p_0 \neq 0$. Голоморфность этого отображения очевидна во всех конечных точках. Для проверки его голоморфности в бесконечности выберем локальную координату $y = 1/z$ в окрестности бесконечности. В этой координате

$$P(1/y) = \frac{1}{y^n}(p_0 + p_1 y + \dots p_n y^n).$$

В локальной координате s в окрестности бесконечности в образе отображение P приобретает вид

$$s = \frac{1}{P(1/y)} = y^n \frac{1}{p_0 + p_1 y + \dots p_n y^n} = \frac{1}{p_0} y^n - \frac{p_1}{p_0^2} y^{n+1} + \dots .$$

Это голоморфное отображение. Кроме того, мы видим, что бесконечность в прообразе является прообразом кратности n бесконечности в образе.

Theorem

Мероморфные функции на данной кривой C образуют поле относительно естественных операций сложения, умножения на число и умножения.

Theorem

Всякая мероморфная функция на проективной прямой рациональна, т.е. является отношением двух многочленов.

Действительно, пусть $z_1, \dots, z_m$ — все нули и полюса мероморфной функции f на комплексной проективной прямой, $e_1, \dots, e_m$ — их порядки (порядки нулей положительны, полюсов — отрицательны). Тогда $\frac{f}{(z-z_1)^{e_1}(z-z_2)^{e_2}\dots(z-z_m)^{e_m}}$ — мероморфная функция на проективной прямой, не имеющая ни нулей, ни полюсов, а значит, константа.

Theorem

Если мероморфная функция $f : C \to \mathbb{C}P^1$ имеет единственный полюс, причем его порядок равен 1, то C — комплексная проективная прямая.

Действительно, f задает разветвленное накрытие проективной двумерной сферы степени 1, а значит, является гомеоморфизмом.

Лекция 5.

Лекция 5.

Семинар 5. Задачи

- Докажите, что любая прямая, проходящая через две точки перегиба гладкой плоской кубики содержит еще одну ее точку перегиба.
- Докажите, что все кубики из пучка $aF + bH(F)$ имеют один и тот же набор точек перегиба.
- Отношение $R_k(x, y, z)/S_k(x, y, z)$ двух однородных многочленов одной и той же степени k задает функцию на проективной плоскости. Докажите, что ограничение этой функции на гладкую плоскую алгебраическую кривую, на которой R_k и S_k не обращаются тождественно в 0, задает на этой кривой мероморфную функцию. Чему равна степень этой функции на кривой степени d, если многочлены R_k и S_k не имеют общих множителей?

Семинар 5. Задачи

- Разветвленное накрытие степени 2 над проективной прямой однозначно определяется набором своих точек ветвления. Чему равен род накрывающей кривой, если количество точек ветвления равно n?

Семинар 5. Задачи

- Разветвленное накрытие степени 2 над проективной прямой однозначно определяется набором своих точек ветвления. Чему равен род накрывающей кривой, если количество точек ветвления равно n?
  Если род накрывающей кривой больше 1, то накрытие степени 2 называется *гиперэллиптическим*, а накрывающая кривая — *гиперэллиптической кривой*. Отображение гиперэллиптической кривой в себя, меняющее местами листы накрытия, называется *гиперэллиптической инволюцией*.
- Чему равна размерность пространства гиперэллиптических кривых рода $g \geq 2$?

Семинар 5. Задачи

- Докажите, что всякую гиперэллиптическую кривую можно задать уравнением $y^2 = P_n(x)$, где P_n — многочлен, корнями которого являются точки ветвления гиперэллиптической кривой. При этом гиперэллиптическое накрытие задается проекцией на ось x, а гиперэллиптическая инволюция — преобразованием $(x, y) \mapsto (x, -y)$.
- Докажите, что всякая мероморфная функция на гиперэллиптической кривой $y^2 = P(x)$ имеет вид $f = R(X) + yS(X)$, где R и S — рациональные функции одной переменной.

Семинар 5. Задачи

-
-

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Мы определяли кривую в n-мерном проективном пространстве как подмножество в этом пространстве, которое можно задать набором из $n-1$ независимых полиномиальных уравнений в окрестности каждой ее точки. Как получить такое подмножество?
Один из способов — отобразить кривую в пространство. Например, отображение

$$(u:v) \mapsto (u^3 : u^2v : uv^2 : v^3)$$

проективной прямой в проективное пространство $\mathbb{C}P^3$ задает в нем *скрученную кубику*.
Скрученная кубика является алгебраической кривой: в окрестности каждой своей точки она задается двумя из трех уравнений $z_0z_3 = z_1z_2, z_1^2 = z_0z_2, z_2^2 = z_1z_3$. В то же время, любые два из этих уравнений, помимо скрученной кубики, выделяют еще прямую. Например, первые два уравнения выделяют прямую $z_0 = z_1 = 0$. Эта прямая пересекает скрученную кубику в точке $(0:0:0:1)$.

Степень алгебраической кривой в проективном пространстве нельзя определить как степень задающего ее многочлена, поскольку кривую нельзя задать одним уравнением. Однако второе определение степени работает.

Степень алгебраической кривой в проективном пространстве нельзя определить как степень задающего ее многочлена, поскольку кривую нельзя задать одним уравнением. Однако второе определение степени работает.

Definition

Степенью кривой в проективном пространстве называется количество точек ее пересечения с общей гиперплоскостью.

Общая гиперплоскость пересекает кривую трансверсально, и кратность всех точек пересечения равна 1. Как и в плоском случае, количество точек пересечения с общей гиперплоскостью мы можем заменить количеством точек пересечения с произвольной гиперплоскостью, если будем учитывать их кратность.

Задача. Чему равна степень скрученной кубики?

Лекция 6. Алгебраические подмногообразия в проективных пространствах

Степень можно определить не только у кривой, но и у гладкого алгебраического подмногообразия любой размерности в проективном пространстве.

Definition

Подмножество $X \subset \mathbb{C}P^n$ называется *гладким алгебраическим подмногообразием коразмерности* k, если для любой его точки $x \in X$ существует такой набор из k однородных многочленов $F_1, \dots, F_k$, что X в некоторой окрестности точки x задается набором уравнений $F_1 = \dots = F_k = 0$ и дифференциалы $dF_1, dF_2, \dots, dF_k$ линейно независимы в точке x (а значит, и в некоторой ее окрестности).

Лекция 6. Алгебраические подмногообразия в проективных пространствах

Степень можно определить не только у кривой, но и у гладкого алгебраического подмногообразия любой размерности в проективном пространстве.

Definition

Подмножество $X \subset \mathbb{C}P^n$ называется *гладким алгебраическим подмногообразием коразмерности* k, если для любой его точки $x \in X$ существует такой набор из k однородных многочленов $F_1, \dots, F_k$, что X в некоторой окрестности точки x задается набором уравнений $F_1 = \dots = F_k = 0$ и дифференциалы $dF_1, dF_2, \dots, dF_k$ линейно независимы в точке x (а значит, и в некоторой ее окрестности).

Размерность гладкого алгебраического подмногообразия коразмерности k в $\mathbb{C}P^n$ равна $n - k$.

Лекция 6. Алгебраические подмногообразия в проективных пространствах: теорема Безу

Theorem (Теорема Безу)

Пусть F, G — однородные многочлены от четырех переменных и X — кривая, заданная уравнениями $F = G = 0$, причем в каждой ее точке дифференциалы dF и dG линейно независимы. Тогда степень кривой X равна произведению степеней многочленов F и G.

Разумеется, аналогичная теорема верна для гладких алгебраических многообразий, заданных трансверсальным пересечением произвольного набора гиперповерхностей в комплексном проективном пространстве произвольной размерности. Она носит (ко)гомологический характер. Кольцо когомологий $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ порождено классом h гиперплоскости, причем $h^{n+1} = 0$. Гиперповерхность степени d представляет класс когомологий $d \cdot h$, а алгебраическое подмногообразие X коразмерности k представляет класс когомологий $\deg X \cdot h^k$.

Теорема Безу означает, в частности, что скрученную кубику нельзя представить в виде трансверсального пересечения двух гиперповерхностей в $\mathbb{C}P^3$. Если бы это можно было сделать, то эти гиперповерхности должны были бы иметь степени 1 и 3, т.е. кубика лежала бы на плоскости, а это не так (она "скрученная").

Лекция 6. Род трансверсального пересечения двух квадрик

Трансверсальное пересечение достаточного количества гиперповерхностей — еще один способ задания кривых в проективных пространствах. Пусть $F(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, $G(z_0, z_1, z_2, z_3) = a_0 z_0^2 + a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_3 z_3^2$ — два однородных многочлена степени 2 от 4 переменных. Поверхность $F = 0$ гладкая, и при общем значении параметров a_i поверхность $G = 0$ тоже гладкая и пересекает поверхность $F = 0$ трансверсально. Вычислим род кривой, являющейся пересечением этих поверхностей.

Рассмотрим проекцию кривой пересечения из точки $(0 : 0 : 0 : 1)$, т.е. отображение $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \mapsto (z_0 : z_1 : z_2)$. Это отображение переводит пересечение квадрик в конику $a_0 z_0^2 + a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 = a_3(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2)$ и является разветвленным накрытием кратности 2. У этого отображения 4 точки ветвления (все они простые).

Таким образом, накрывающая кривая имеет род 1. Поскольку условие нетрансверсальности пересечения выделяет в пространстве пар квадрик гиперповерхность, *трансверсальное пересечение любых двух квадрик в проективном пространстве имеет род* 1.

Еще один способ получения кривых в проективных пространствах — проектирование кривых, вложенных в какое-либо пространство, в пространство меньшей размерности. Любую гладкую кривую в проективном пространстве размерности больше 3 можно биголоморфно спроектировать в проективное пространство меньшей размерности.

Theorem (Whitney)

Всякую алгебраическую кривую можно вложить в $\mathbb{C}P^3$.

Доказательство. Пусть $C \subset \mathbb{C}P^n$ — гладкая алгебраическая кривая, $n \geq 4$. Рассмотрим многобразие в $\mathbb{C}P^n$, являющееся замыканием множества точек, лежащих на хордах кривой C, т.е. прямых, соединяющих пары ее точек. Это подмногообразие имеет размерность 3, а значит содержит не все точки пространства $\mathbb{C}P^n$. Поэтому есть точка, проектирование из которой осуществляет биголоморфное отображение кривой C в кривую в проективном пространстве меньшей размерности.

Кривую в проективном пространстве $\mathbb{C}P^3$ можно спроектировать в кривую на плоскости, но эта проекция уже не обязательно будет биголоморфизмом.

Theorem

Пусть $C \subset \mathbb{C}P^3$ — гладкая алгебраическая кривая. Тогда в $\mathbb{C}P^3$ существует точка, образ проекции кривой C из которой — погруженная кривая.

Плоская кривая называется *погруженной* (или *нодальной*), если ее единственные особенности — точки двойного трансверсального самопересечения (*узлы, ноды*).

Доказательство. Исключительными направлениями проектирования являются касательные к кривой C и тройные секущие. Замыкание множества точек, лежащих на этих прямых — двумерное алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{C}P^3$, поэтому в пространстве есть точки, не лежащие на нем.

Гладкая кривая, невырожденное голоморфное отображение которой в нодальную плоскую кривую взаимно-однозначно на дополнении к множеству двойных точек, называется *нормализацией* этой нодальной кривой. Теорема означает, что *всякая гладкая алгебраическая кривая является нормализацией некоторой нодальной плоской кривой*.

При проектировании из общей точки степень кривой остается неизменной.

Theorem

Пусть δ — количество двойных точек плоской нодальной кривой степени d. Тогда род нормализации этой кривой равен $(d-1)(d-2)/2-\delta$.

Доказательство. Пусть нодальная кривая имеет в аффинной карте уравнение $f=0$, причем обе касательные к кривой в каждой двойной точке невертикальны. Эта кривая пересекается с кривой $\partial f/\partial y=0$ по $d(d-1)$ точкам с учетом кратности. Каждая из δ двойных точек является точкой пересечения кратности 2 кривых $f=0$ и $\partial f/\partial y=0$ (по одной точке на каждой из ветвей). Поэтому на кривой $f=0$ имеется $d(d-1)-2\delta$ точек ветвления проекции на ось x. По формуле Римана–Гурвица

$$d(d-1)-2\delta=2d+2g-2,$$

откуда

$$g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}-\delta.$$

Лекция 6.

- Представьте рациональную нормальную кривую в $\mathbb{C}P^4$ в виде пересечения гиперповерхностей.
- Докажите, что при проектировании кривой в проективном пространстве, не лежащей ни в какой гиперплоскости, из общей точки кривой степень ее образа на 1 меньше степени кривой.

Семинар 6. Задачи

- Докажите, что никакие $n+1$ точек рациональной нормальной кривой не лежат в одной гиперплоскости. Докажите, что это единственная (с точностью до проективных преобразований) кривая с таким свойством.
- Докажите, что любая кривая степени 3 в проективном пространстве, не лежащая ни в какой гиперплоскости, переводится в скрученную кубику проективным преобразованием пространства.
- Докажите, что через любые $n+3$ точки в общем положении (т.е. таких, что ни через какие $n+1$ из них не проходит гиперплоскость) в n-мерном проективном пространстве проходит единственная рациональная нормальная кривая.
-

Семинар 6. Задачи

- Найдите размерность пространства плоских кривых степени 4 с одной двойной точкой.
- Оцените степень плоских кривых (с двойными точками), необходимую, чтобы представить любую кривую рода g.

Семинар 6. Задачи

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Каждая плоская алгебраическая кривая определяет другую алгебраическую кривую, которая лежит в двойственной проективной плоскости. Как хорошо известно, *двойственным векторным пространством* к данному векторному пространству $V = \mathbb{C}^n$ называется пространство линейных функционалов $V^\vee = \{f : V \to \mathbb{C}\}$ на V. Проективизация $PV^\vee$ двойственного пространства называется *двойственным проективным пространством* к проективизированному пространству PV.

Каждая плоская алгебраическая кривая определяет другую алгебраическую кривую, которая лежит в двойственной проективной плоскости. Как хорошо известно, *двойственным векторным пространством* к данному векторному пространству $V = \mathbb{C}^n$ называется пространство линейных функционалов $V^\vee = \{f : V \to \mathbb{C}\}$ на V. Проективизация $PV^\vee$ двойственного пространства называется *двойственным проективным пространством* к проективизированному пространству PV.
В свою очередь, каждой точке $v \in V$ пространства V соответствует линейный функционал на двойственном пространстве $V^\vee$: мы полагаем $v(f) = f(v)$. Это соответствие отождествляет V с $(V^\vee)^\vee$ и, в свою очередь, PV с $(PV^\vee)^\vee$.

Каждой точке f двойственного проективного пространства $PV^\vee$ соответствует гиперплоскость в пространстве V. Эта гиперплоскость состоит из нулей функционала f, определенного с точностью до умножения на ненулевую константу.

Каждой точке f двойственного проективного пространства $PV^\vee$ соответствует гиперплоскость в пространстве V. Эта гиперплоскость состоит из нулей функционала f, определенного с точностью до умножения на ненулевую константу.
В частности, точки проективной плоскости, двойственной к данной, находятся во взаимно-однозначном соответствии с прямыми на исходной плоскости.

Definition

Пусть $C \subset \mathbb{C}P^2$ — плоская алгебраическая кривая. Двойственной кривой $C^\vee$ в двойственной проективной плоскости называется кривая, образованная касательными к кривой C.

Theorem

Кривая, двойственная к двойственной, естественно отождествляется с исходной кривой, $(C^\vee)^\vee = C$.

Доказательство.

Theorem

Кривая двойственная к гладкой алгебраической является алгебраической.

Доказательство. Каждой алгебраической кривой $C \subset PV = \mathbb{C}P^2$ можно сопоставить кривую $\hat{C}$ в произведении $PV \times PV^\vee$ проективной плоскости и двойственной к ней, состоящую из пар (точка кривой C, касательная к C в этой точке). Кривая $\hat{C}$ называется *конормальной разверткой* кривой C; она алгебраическая. Действительно, если $F(x, y, z) = 0$ — уравнение кривой C, то касательная к ней в точке $(x_0 : y_0 : z_0)$ имеет вид

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Поэтому конормальную развертку можно задать уравнениями

$$a = \partial F/\partial x, \qquad b = \partial F/\partial y, \qquad c = \partial F/\partial z, \qquad F = 0,$$

причем последнее уравнение можно заменить более простым $ax + by + cz = 0$, поскольку многочлен F однороден. (Здесь $(a : b : c)$ — проективные координаты в двойственной проективной плоскости.)

Двойственная к C кривая $C^\vee$ — проекция кривой $\hat{C}$ на второй сомножитель — также является алгебраической.

В качестве примера вычислим двойственные кривые для кубических кривых семейства

$$y^2z - x^3 + \alpha xz^2 = 0.$$

При общем значении параметра α кривая является гладкой.

Уравнения конормальной развертки имеют вид

$$\begin{aligned} a + 3x^2 - \alpha z^2 &= 0 \\ b - 2yz &= 0 \\ c - y^2 - 2\alpha xz &= 0 \\ ax + by + cz &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения конормальной развертки имеют вид

$$\begin{aligned} a + 3x^2 - \alpha z^2 &= 0 \\ b - 2yz &= 0 \\ c - y^2 - 2\alpha xz &= 0 \\ ax + by + cz &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения конормальной развертки имеют вид

$$\begin{aligned} a+3x^2-\alpha z^2 &= 0\\ b-2yz &= 0\\ c-y^2-2\alpha xz &= 0\\ ax+by+cz &= 0. \end{aligned}$$

Выражая x из четвертого уравнения и подставляя результат в первое и третье, получаем систему

$$\begin{aligned} a^3-\alpha a^2z^2+3b^2y^2+6bcyz+3c^2z^2 &= 0\\ b-2yz &= 0\\ ay^2-ac-2\alpha byz-2\alpha cz^2 &= 0. \end{aligned}$$

Выражая y из второго уравнения и подставляя результат в первое и третье, получаем систему

$$\begin{aligned} 4a^3z^2 - 4\alpha a^2 z^4 + 12c^4z^4 + 3b^4 &= 0 \\ bc^2 - 4acz^2 - 4\alpha b^2 z^2 - 8\alpha c z^4 &= 0. \end{aligned}$$

Выражая y из второго уравнения и подставляя результат в первое и третье, получаем систему

$$\begin{array}{rcl} 4a^3z^2 - 4\alpha a^2z^4 + 12c^4z^4 + 3b^4 & = & 0 \\ bc^2 - 4acz^2 - 4\alpha b^2z^2 - 8\alpha cz^4 & = & 0. \end{array}$$

Наконец, исключая z, получаем уравнение двойственной кривой

$$4a^3c^3 + 27b^2c^4 - \alpha(\alpha a^4b^2 + 24\alpha ab^4c + 30a^2b^2c^2 + 4a^5c + 4\alpha^2b^6) = 0.$$

Это кривая степени 6. Степень $d^\vee$ двойственной кривой $C^\vee$ называется *классом* плоской алгебраической кривой C.

Выражая y из второго уравнения и подставляя результат в первое и третье, получаем систему

$$\begin{array}{rcl} 4a^3z^2 - 4\alpha a^2z^4 + 12c^4z^4 + 3b^4 & = & 0 \\ bc^2 - 4acz^2 - 4\alpha b^2z^2 - 8\alpha cz^4 & = & 0. \end{array}$$

Наконец, исключая z, получаем уравнение двойственной кривой

$$4a^3c^3 + 27b^2c^4 - \alpha(\alpha a^4b^2 + 24\alpha ab^4c + 30a^2b^2c^2 + 4a^5c + 4\alpha^2b^6) = 0.$$

Это кривая степени 6. Степень $d^\vee$ двойственной кривой $C^\vee$ называется *классом* плоской алгебраической кривой C.
При $\alpha = 0$ уравнение двойственной кривой вырождается в уравнение $c^3(4a^3 + 27b^2c) = 0$. Прямая $c = 0$ является "лишней", и двойственной кривой к полукубической параболе $x^3 = y^2z$ является полукубическая парабола $4a^3 + 27b^2c = 0$. В частности, класс полукубической параболы равен 3.

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Лекция 7. Формулы Плюккера: двойственная кривая

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Theorem

Класс гладкой плоской алгебраической кривой степени d равен $d(d-1)$.

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Theorem

Класс гладкой плоской алгебраической кривой степени d равен $d(d-1)$.

Corollary

Кривая, двойственная гладкой плоской алгебраической кривой степени $d \geq 3$, не может быть гладкой.

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Theorem

Класс гладкой плоской алгебраической кривой степени d равен $d(d-1)$.

Corollary

Кривая, двойственная гладкой плоской алгебраической кривой степени $d \geq 3$, не может быть гладкой.

Доказательство теоремы. Степень двойственной кривой это число точек ее пересечения с общей прямой в двойственной проективной плоскости. Прямая в двойственной проективной плоскости состоит из прямых в исходной плоскости, проходящих через данную точку. Как мы знаем, из данной общей точки вне кривой к плоской алгебраической кривой степени d можно провести $d(d-1)$ касательных. Они и являются точками пересечения прямой с двойственной кривой.

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Theorem

Класс гладкой плоской алгебраической кривой степени d равен $d(d-1)$.

Corollary

Кривая, двойственная гладкой плоской алгебраической кривой степени $d \geq 3$, не может быть гладкой.

Доказательство теоремы. Степень двойственной кривой это число точек ее пересечения с общей прямой в двойственной проективной плоскости. Прямая в двойственной проективной плоскости состоит из прямых в исходной плоскости, проходящих через данную точку. Как мы знаем, из данной общей точки вне кривой к плоской алгебраической кривой степени d можно провести $d(d-1)$ касательных. Они и являются точками пересечения прямой с двойственной кривой.
Доказательство следствия. Если бы двойственная кривая была гладкой, то двойственная к ней кривая не могла бы иметь степень d.

Особенности у кривой, двойственной к данной общей гладкой кривой, бывают двух различных типов. Особенности первого типа соответствуют двойным касательным к исходной кривой. Эти особенности — точки самопересечения двойственной кривой. Особенности второго типа отвечают точкам перегиба исходной кривой. Как мы видели для случая полукубической параболы, эти особенности — точки возврата (каспы).

Особенности у кривой, двойственной к данной общей гладкой кривой, бывают двух различных типов. Особенности первого типа соответствуют двойным касательным к исходной кривой. Эти особенности — точки самопересечения двойственной кривой. Особенности второго типа отвечают точкам перегиба исходной кривой. Как мы видели для случая полукубической параболы, эти особенности — точки возврата (каспы).

Theorem

Кривая, двойственная общей гладкой плоской алгебраической кривой степени d, имеет $3d(d-2)$ каспов.

Действительно, на общей гладкой кривой степени d есть $3d(d-2)$ точек перегиба.

Лекция 7. Формулы Плюккера: двойственная кривая

Полученные результаты позволяют вычислить количество точек самопересечения двойственной кривой, т.е. количество двойных касательных к исходной кривой.

Theorem

Количество двойных касательных к общей гладкой плоской алгебраической кривой степени d равно

$$\frac{1}{2}d(d-2)(d-3)(d+3).$$

В частности, у кубической кривой нет двойных касательных (что мы и так знали), а у кривой степени $d=4$ их 28.

Лекция 7. Формулы Плюккера: двойственная кривая

Полученные результаты позволяют вычислить количество точек самопересечения двойственной кривой, т.е. количество двойных касательных к исходной кривой.

Theorem

Количество двойных касательных к общей гладкой плоской алгебраической кривой степени d равно

$$\frac{1}{2}d(d-2)(d-3)(d+3).$$

В частности, у кубической кривой нет двойных касательных (что мы и так знали), а у кривой степени $d=4$ их 28.

Доказательство. Каждое самопересечение и каждый касп понижают род (нормализации) кривой на 1. Род конормальной развертки $\hat{C}$ совпадает с родом кривой C и равен $(d-1)(d-2)/2$. Поэтому количество двойных точек на двойственной кривой равно

$$\frac{1}{2}((d(d-1)-1)(d(d-1)-2)-\frac{1}{2}(d-1)(d-2)-3d(d-2) \quad = \quad \frac{1}{2}d(d-2)(d-3)(d+3).$$

Двойственная кривая к гладкой плоской алгебраической кривой имеет особенности — точки простого самопересечения и точки возврата. В свою очередь, кривая двойственная к ней — гладкая. Не расширяя списка допустимых особенностей, можно распространить формулы Плюккера на более широкую ситуацию, когда не только двойственной кривой, но и исходной разрешается иметь точки двойного самопересечения и точки возврата. Конормальная развертка $\hat{C}$ при этом остается гладкой.

Двойственная кривая к гладкой плоской алгебраической кривой имеет особенности — точки простого самопересечения и точки возврата. В свою очередь, кривая двойственная к ней — гладкая. Не расширяя списка допустимых особенностей, можно распространить формулы Плюккера на более широкую ситуацию, когда не только двойственной кривой, но и исходной разрешается иметь точки двойного самопересечения и точки возврата. Конормальная развертка $\hat{C}$ при этом остается гладкой.

Пусть d — степень кривой C, δ — число ее точек самопересечения, κ — число ее точек возврата, а $d^\vee, \delta^\vee, \kappa^\vee$ — аналогичные параметры двойственной кривой $C^\vee$. Род конормальной развертки $\hat{C}$ — общей нормализации кривых C и $C^\vee$ — дается формулой

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \delta - \kappa = \frac{1}{2}(d^\vee - 1)(d^\vee - 2) - \delta^\vee - \kappa^\vee.$$

Theorem

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} d^\vee &= d(d-1) - 2\delta - 3\kappa \\ d &= d^\vee(d^\vee - 1) - 2\delta^\vee - 3\kappa^\vee \\ \kappa^\vee &= 3d(d-2) - 6\delta - 8\kappa \\ \kappa &= 3d^\vee(d^\vee - 2) - 6\delta^\vee - 8\kappa^\vee. \end{aligned}$$

Theorem

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} d^\vee &= d(d-1) - 2\delta - 3\kappa \\ d &= d^\vee(d^\vee - 1) - 2\delta^\vee - 3\kappa^\vee \\ \kappa^\vee &= 3d(d-2) - 6\delta - 8\kappa \\ \kappa &= 3d^\vee(d^\vee - 2) - 6\delta^\vee - 8\kappa^\vee. \end{aligned}$$

Эти четыре равенства не являются независимыми. Любое из них является следствием остальных трех.

Доказывать формулы Плюккера можно так же, как и для гладкой кривой C. Следующее рассуждение, однако, носит более общий характер и проясняет геометрическую природу формул. Рассмотрим однопараметрическое семейство $F_t(x, y, z)$ однородных многочленов степени d, являющееся деформацией многочлена F_0, такое, что кривая $F_t = 0$ является неособой при малых t, отличных от 0. Из точки $P \in \mathbb{C}P^2$ общего положения можно провести $d(d-1)$ касательных к кривой $C_t = \{(x : y : z) | F_t(x, y, z) = 0\}$, $t \neq 0$. При $t \to \infty$ часть из этих касательных стремятся к касательным к кривой C, в то время как остальные стремятся к прямым, соединяющим P с точками самопересечения и каспами кривой C (“исчезают” в этих точках). Аналогично, некоторые точки перегиба кривых C_t стремятся к точками перегиба кривой $C = C_0$, тогда как остальные стремятся к ее особым точкам.

Доказывать формулы Плюккера можно так же, как и для гладкой кривой C. Следующее рассуждение, однако, носит более общий характер и проясняет геометрическую природу формул. Рассмотрим однопараметрическое семейство $F_t(x,y,z)$ однородных многочленов степени d, являющееся деформацией многочлена F_0, такое, что кривая $F_t = 0$ является неособой при малых t, отличных от 0. Из точки $P \in \mathbb{C}P^2$ общего положения можно провести $d(d-1)$ касательных к кривой $C_t = \{(x:y:z)|F_t(x,y,z) = 0\}$, $t \neq 0$. При $t \to \infty$ часть из этих касательных стремятся к касательным к кривой C, в то время как остальные стремятся к прямым, соединяющим P с точками самопересечения и каспами кривой C (“исчезают” в этих точках). Аналогично, некоторые точки перегиба кривых C_t стремятся к точками перегиба кривой $C = C_0$, тогда как остальные стремятся к ее особым точкам.

Lemma

В общем положении

- *в точке простого самопересечения кривой C исчезает две касательные из данной точки и шесть точек перегиба кривых C_t;*
- *в точке возврата кривой C исчезает три касательные из данной точки и восемь точек перегиба кривых C_t.*

Лекция 7.

- Найдите двойственную кривую к эллипсу
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
- Найдите двойственную кривую к объединению двух эллипсов
$$\frac{x^2}{a^2} + a^2y^2 = 1 \qquad \text{и} \qquad a^2x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$
- Пусть C — выпуклая кривая на вещественной проективной плоскости. Докажите, что двойственная к ней кривая тоже выпукла.

Семинар 7. Задачи

- Найдите двойственную кривую к кривой
$$y^2z^2 - x^2(z^2 - x^2) = 0.$$
Вычислите характеристики этой кривой.
- Найдите двойственную кривую к лемнискате
$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)z^2.$$
Вычислите характеристики этой кривой.
- Пусть C — общая плоская кривая степени 4, класс которой равен 4. Сколько особенностей каждого типа имеют кривые C и $C^\vee$? Существует ли такие двойственные кривые C и $C^\vee$?

Семинар 7. Задачи

Семинар 7. Задачи

-
-

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Лекция 8. Отображения кривых: автоморфизмы римановой сферы

Мероморфные функции — голоморфные отображения комплексных кривых в проективную прямую. Можно рассматривать и голоморфные отображения комплексных кривых в другие кривые. Прежде всего — автоморфизмы кривых, т.е. биголоморфные отображения кривой в себя. Автоморфизмы каждой кривой образуют группу.

Мероморфные функции — голоморфные отображения комплексных кривых в проективную прямую. Можно рассматривать и голоморфные отображения комплексных кривых в другие кривые. Прежде всего — автоморфизмы кривых, т.е. биголоморфные отображения кривой в себя. Автоморфизмы каждой кривой образуют группу.

Theorem

Группа автоморфизмов проективной прямой образована дробно-линейными преобразованиями

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d — комплексные числа, такие, что $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

Действительно, автоморфизм проективной прямой — это мероморфная функция степени 1. Всякая мероморфная функция степени k, как мы знаем, это рациональная функция — отношение двух взаимно простых многочленов степени k. Заметим, что умножение числителя и знаменателя на одно и то же ненулевое комплексное число не меняет дробно-линейного преобразования.

Лекция 8. Отображения кривых: отображения эллиптических кривых в эллиптические кривые

Кривая рода 1 — эллиптическая кривая — является фактором комплексной прямой $\mathbb{C}$ по решетке. Пусть $X = \mathbb{C}/L$, $Y = \mathbb{C}/M$ — две эллиптические кривые с выделенными нулями $L/L, M/M$ соответственно, $f : X \to Y$ — непостоянное голоморфное отображение. Выполнив композицию f со сдвигом, мы можем считать, что $f(0) = 0$. Из формулы Римана–Гурвица вытекает, что разветвленное накрытие тора тором не может иметь точек ветвления, т.е. является накрытием. Поэтому имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \stackrel{F}{\longrightarrow} & \mathbb{C} \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ X & \stackrel{f}{\longrightarrow} & Y. \end{array}$$

При этом $F(0)$ — точка решетки M, и можно считать, что $F(0) = 0$. Более того, F отображает $p^{-1}(0)$ в $q^{-1}(0)$, т.е. $F(L) \subset M$. Функция $dF(z)/dz$ инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L, поэтому она ограничена на X, поэтому она постоянна. Значит, $F(z) = cz$, где $c \neq 0$ — некоторая константа. Поэтому *любое голоморфное отображение эллиптических кривых индуцировано отображением $F(z) = cz + a$ комплексной прямой*, причем $cL \subset M$.

Theorem

Группа автоморфизмов данной эллиптической кривой $X = \mathbb{C}/L$, сохраняющих точку 0, — циклическая группа порядка 4, если решетка L квадратная, порядка 6, если решетка L гексагональная, и порядка 2 во всех остальных случаях.

Theorem

Группа автоморфизмов данной эллиптической кривой $X = \mathbb{C}/L$, сохраняющих точку 0, — циклическая группа порядка 4, если решетка L квадратная, порядка 6, если решетка L гексагональная, и порядка 2 во всех остальных случаях.

Corollary

Существуют неизоморфные эллиптические кривые.

Действительно, группы автоморфизмов изоморфных эллиптических кривых, сохраняющих данную точку, также должны быть изоморфны.

Доказательство. Отображение $z \mapsto cz$ переводит решетку L в себя. В частности, оно сохраняет площади, поэтому $|c| = 1$. Более того, c — корень из 1, поскольку иначе образы ненулевого элемента решетки образовывали бы всюду плотное множество на окружности. Если векторы τ_1, τ_2 порождают решетку L, то $c\tau_1 = u_1\tau_1 + v_1\tau_2$ и $c\tau_2 = u_2\tau_1 + v_2\tau_2$ (где числа u_1, v_1, u_2, v_2 целые), а значит c является собственным числом матрицы

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен 1, так как она сохраняет площади, и корень характеристического многочлена $x^2 - (u_1 + v_2)x + 1$ может быть корнем из 1 только если $(u_1 + v_2) = 0$ (что соответствует квадратной решетке), $(u_1 + v_2) = \pm 1$ (что соответствует гексагональной решетке, так как в этом случае $x^3 = \pm 1$) или $(u_1 + v_2) = \pm 2$ (что соответствует всем остальным решеткам — имеющим единственный нетривиальный автоморфизм $z \mapsto -z$).

Theorem

Пусть C_1, C_2 — две гладкие плоские коники. Определим отображение $f : C_1 \to C_1$, переводящее точку x коники C_1 во вторую точку пересечения с C_1 касательной к C_2, проходящей через x. Если для некоторой точки $x_1 \in C_1$ последовательность $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $x_4 = f(x_3), \dots$ имеет период длины n, то такая же последовательность, начинающаяся с любой точки $x \in C_1$, имеет период такой же длины.

Мы знаем, что это так для двух концентрических окружностей, однако утверждение оказывается гораздо более общим.

Доказательство. Будем считать, что коники C_1, C_2, находятся в общем положении, т.е. пересекаются трансверсально в четырех точках. Пусть $C_2^\vee \subset (\mathbb{C}P^2)^\vee$ — кривая двойственная к C_2. Рассмотрим в поверхности $C_1 \times (C_2)^\vee$ подмножество $E = \{(x, \ell) | x \in \ell\}$.

Доказательство. Будем считать, что коники C_1, C_2, находятся в общем положении, т.е. пересекаются трансверсально в четырех точках. Пусть $C_2^\vee \subset (\mathbb{C}P^2)^\vee$ — кривая двойственная к C_2. Рассмотрим в поверхности $C_1 \times (C_2)^\vee$ подмножество $E = \{(x,\ell) | x \in \ell\}$.

Lemma

Кривая E эллиптическая.

Доказательство. Будем считать, что коники C_1, C_2, находятся в общем положении, т.е. пересекаются трансверсально в четырех точках. Пусть $C_2^\vee \subset (\mathbb{C}P^2)^\vee$ — кривая двойственная к C_2. Рассмотрим в поверхности $C_1 \times (C_2)^\vee$ подмножество $E = \{(x, \ell) | x \in \ell\}$.

Lemma

Кривая E эллиптическая.

Действительно, проекция $E \to C_1$ — накрытие степени 2, разветвленное в 4 точках (точках пересечения коники C_1 с C_2).

Доказательство. Будем считать, что коники C_1, C_2, находятся в общем положении, т.е. пересекаются трансверсально в четырех точках. Пусть $C_2^\vee \subset (\mathbb{C}P^2)^\vee$ — кривая двойственная к C_2. Рассмотрим в поверхности $C_1 \times (C_2)^\vee$ подмножество $E = \{(x, \ell) | x \in \ell\}$.

Lemma

Кривая E эллиптическая.

Действительно, проекция $E \to C_1$ — накрытие степени 2, разветвленное в 4 точках (точках пересечения коники C_1 с C_2).
Рассмотрим на кривой E инволюции $\sigma_1 : (x_1, \ell) \mapsto (x_2, \ell)$, переставляющую точки пересечения касательной к C_2 с C_1, и $\sigma_2 : (x, \ell_1) \mapsto (x, \ell_2)$, переставляющую две касательные к C_2, выходящие из одной точки коники C_1, $\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \mathrm{id}$. Всякая инволюция эллиптической кривой имеет вид $z \mapsto c - z$ для некоторой константы c. Поэтому $\sigma_1(z) = c_1 - z, \sigma_2(z) = c_2 - z$ и $f(z) = \sigma_2 \circ \sigma_1(z) = z + (c_2 - c_1)$ есть сдвиг. Его n-я степень тоже сдвиг, а если у сдвига есть неподвижная точка, то он является тождественным отображением.

Пусть C — гладкая неприводимая алгебраическая кривая, G — ее конечная группа автоморфизмов.

Lemma

Множество неподвижных точек нетождественного автоморфизма гладкой компактной алгебраической кривой конечно.

Лекция 8. Отображения кривых: теорема Гурвица

Пусть C — гладкая неприводимая алгебраическая кривая, G — ее конечная группа автоморфизмов.

Lemma

Множество неподвижных точек нетождественного автоморфизма гладкой компактной алгебраической кривой конечно.

Обозначим через C' двумерную компактную ориентируемую поверхность C/G (которая может и не быть алгебраической кривой; так происходит, если группа G действует несвободно). Естественная проекция $C \to C'$ является разветвленным накрытием. У всех точек поверхности C' за исключением конечного числа имеется $|G|$ прообразов, у точек ветвления их меньше. Для точки $x \in C$ обозначим через $G_x \subset G$ ее стационарную подгруппу; для всех точек кроме конечного числа она тривиальна. Формула Римана–Гурвица дает

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x \in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x \in C} \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

Theorem (Гурвиц)

Порядок конечной группы автоморфизмов гладкой неприводимой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ не превосходит $84(g-1)$.

Кривые, имеющие группу автоморфизмов такого порядка, называются *кривыми Гурвица*.
Доказательство.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x \in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x \in C} \left(1 - \frac{1}{|G_x|} \right) \right).$$

Theorem (Гурвиц)

Порядок конечной группы автоморфизмов гладкой неприводимой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ не превосходит $84(g-1)$.

Кривые, имеющие группу автоморфизмов такого порядка, называются *кривыми Гурвица*.

Доказательство.

Обозначим через g' род поверхности $C' = C/G$. Пусть $|G| > 1$, так что $g' < g$.

Рассмотрим по отдельности три случая:

1. $g' \geq 2$. Тогда $2g - 2 \geq 2|G|$, откуда $|G| \leq g - 1$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

2. $g' = 1$. Тогда $2g - 2 = |G| \sum \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)$. Если точек ветвления нет, то $g = 1$, а мы предполагаем, что $g > 1$. Поэтому для некоторых точек $|G_x| \geq 2$, и правая часть не меньше, чем $|G|/2$, т.е. $|G| \leq 4(g-1)$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C}\frac{|G|}{|G_x|}(|G_x|-1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1-\frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3. $g'=0$. Тогда $2g-2=|G|\left(\sum\left(1-\frac{1}{|G_x|}\right)-2\right)$. Левая часть положительна, $|G|>0$ и каждое слагаемое в сумме меньше 1, поэтому слагаемых должно быть не меньше трех.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3. $g' = 0$. Тогда $2g - 2 = |G|\left(\sum\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right) - 2\right)$. Левая часть положительна, $|G| > 0$ и каждое слагаемое в сумме меньше 1, поэтому слагаемых должно быть не меньше трех.
3.1. Если число слагаемых больше четырех, то, поскольку каждое слагаемое не меньше 1/2, получаем $2g - 2 \geq |G|/2$, откуда $|G| \leq 4(g - 1)$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3. $g' = 0$. Тогда $2g - 2 = |G|\left(\sum\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right) - 2\right)$. Левая часть положительна, $|G| > 0$ и каждое слагаемое в сумме меньше 1, поэтому слагаемых должно быть не меньше трех.
3.1. Если число слагаемых больше четырех, то, поскольку каждое слагаемое не меньше $1/2$, получаем $2g - 2 \geq |G|/2$, откуда $|G| \leq 4(g-1)$.
3.2. Если в сумме 4 слагаемых, то хотя бы одно из чисел $|G_x|$ должно быть больше 2, откуда $2g - 2 \geq |G|(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 2) = \frac{1}{6}|G|$, или $|G| \leq 12(g-1)$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x \in C} \left(1 - \frac{1}{|G_x|} \right) \right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \geq 3$.
а) $c \geq 7 \Longrightarrow |G| \leq 84(g-1)$;

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C} \left(1 - \frac{1}{|G_x|} \right) \right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.
a) $c \ge 7 \Longrightarrow |G| \le 84(g-1)$;
b) $(c = 6)\&(a = 2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 24(g-1)$;

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \geq 3$.

a) $c \ge 7 \implies |G| \le 84(g-1)$;

b) $(c = 6)\&(a = 2) \implies b \ge 4 \implies |G| \le 24(g-1)$;

c) $(c = 6)\&(a \ge 3) \implies |G| \le 12(g-1)$;

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C)=|G|\chi(C')-\sum_{x\in C}\frac{|G|}{|G_x|}(|G_x|-1)=|G|\left(\chi(C')-\sum_{x\in C}\left(1-\frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a,b,c, $a\le b\le c$. Сумма $(1-\frac{1}{a})+(1-\frac{1}{b})+(1-\frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c>3$, а $b\ge 3$.

a) $c\ge 7\implies |G|\le 84(g-1)$;

b) $(c=6)\&(a=2)\implies b\ge 4\implies |G|\le 24(g-1)$;

c) $(c=6)\&(a\ge 3)\implies |G|\le 12(g-1)$;

d) $(c=5)\&(a=2)\implies b\ge 4\implies |G|\le 40(g-1)$;

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C} \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1-\frac{1}{a}) + (1-\frac{1}{b}) + (1-\frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.

a) $c \ge 7 \Longrightarrow |G| \le 84(g-1)$;

b) $(c=6)\&(a=2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 24(g-1)$;

c) $(c=6)\&(a\ge 3) \Longrightarrow |G| \le 12(g-1)$;

d) $(c=5)\&(a=2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 40(g-1)$;

e) $(c=5)\&(a\ge 3) \Longrightarrow |G| \le 15(g-1)$;

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1-\frac{1}{a}) + (1-\frac{1}{b}) + (1-\frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.
a) $c \ge 7 \Longrightarrow |G| \le 84(g-1)$;
b) $(c=6)\&(a=2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 24(g-1)$;
c) $(c=6)\&(a\ge 3) \Longrightarrow |G| \le 12(g-1)$;
d) $(c=5)\&(a=2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 40(g-1)$;
e) $(c=5)\&(a\ge 3) \Longrightarrow |G| \le 15(g-1)$;
f) $(c=4)\&a(\ge 3) \Longrightarrow |G| \le 24(g-1)$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.

a) $c \ge 7 \Longrightarrow |G| \le 84(g-1)$;

b) $(c = 6)\&(a = 2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 24(g-1)$;

c) $(c = 6)\&(a \ge 3) \Longrightarrow |G| \le 12(g-1)$;

d) $(c = 5)\&(a = 2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 40(g-1)$;

e) $(c = 5)\&(a \ge 3) \Longrightarrow |G| \le 15(g-1)$;

f) $(c = 4)\&a(\ge 3) \Longrightarrow |G| \le 24(g-1)$.

Значение $|G| = 84(g-1)$ достигается только при $a = 2, b = 3, c = 7$. *Гладкая компактная неприводимая алгебраическая кривая рода g может иметь группу автоморфизмов из $84(g-1)$ элементов только в том случае, если на ней существует мероморфная функция с ровно тремя критическими значениями, причем все прообразы этих критических значений являются критическими точками — кратностей $2, 3, 7$, соответственно.*

Лекция 8.

Лекция 8.

Семинар 8. Задачи

- Проверьте, что композиция двух дробно-линейных преобразований

$$z \mapsto \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, z \mapsto \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2},$$

  задается произведением матриц, т.е. группа автоморфизмов проективной прямой изоморфна группе $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$.
- Проверьте, что подгруппа $\{\pm I\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ нормальна.
- Докажите, что образы трех точек полностью определяют дробно-линейное преобразование.
- Найдите подгруппу в группе дробно-линейных преобразований а) оставляющую неподвижной данную пару точек; б) оставляющую неподвижной данную точку.

Семинар 8. Задачи

- Найдите количество d-кратных накрытий данной эллиптической кривой (рассматриваемых с точностью до изоморфизма накрытий).
- Пусть C — гиперэллиптическая кривая рода $g \geq 2$, $f : C \to \mathbb{C}P^1$ — гиперэллиптическое накрытие, $\{t_1, \dots, t_{2g+2}\} \subset \mathbb{C}P^1$ — точки ветвления накрытия. Докажите, что группа автоморфизмов G кривой C является членом точной последовательности групп

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to G \to \mathrm{Aut}(\{t_1, \dots, t_{2g+2}\}) \to 0,$$

  где предпоследний член это подгруппа в группе дробно-линейных преобразований, переводящая множество точек ветвления в себя.
- Вычислите порядок группы автоморфизмов *кривой Больца* — кривой рода 2, заданной уравнением

$$y^2 = x^5 - x.$$

- Докажите, что не существует кривой Гурвица рода 2.

Семинар 8. Задачи

- Плоская *кривая Клейна* задается уравнением $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$.
  а) Докажите, что эта кривая гладкая и ее род равен 3.
  б) Укажите 168 автоморфизмов кривой Клейна. В частности, проверьте, что она допускает автоморфизм порядка 7
  $$(x : y : z) \mapsto (x, \zeta^4 y, \zeta^5 z),$$
  где ζ — примитивный корень из 1, $\zeta^7 = 1$.

Семинар 8. Задачи

- Что представляют собой факторповерхности эллиптических кривых по группам их автоморфизмов, сохраняющих 0? Как ответ зависит от группы автоморфизмов?
- Вычислите порядок группы автоморфизмов кривой Ферма $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, сохраняющих 0.
- Вычислите порядок группы автоморфизмов кривой Ферма $x^4 + y^4 + z^4 = 0$.

Семинар 8. Задачи

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Мы знаем, что гладкая плоская кубика имеет род 1, т.е. является эллиптической кривой. Наша цель — доказать обратное утверждение.

Theorem

Всякая эллиптическая кривая реализуется некоторой гладкой плоской кубикой.

Для доказательства мы построим вложение эллиптической кривой E, представленной в виде $E = \mathbb{C}/L$, где L — некоторая решетка в $\mathbb{C}$, в плоскость, образ которого имеет степень 3. (Точнее говоря, мы построим вложение, образ которого гладкий, — такой образ неизбежно будет иметь степень 3.)
Для построения вложения нам потребуются две мероморфные функции на E; одна из них будет функцией степени 2, вторая будет иметь степень 3. Напомним, что все голоморфные функции на E постоянны, поэтому для построения отображений кривой они бесполезны — приходится пользоваться мероморфными функциями. Кроме того на E нет мероморфных функций степени 1, поэтому 2 — минимально возможная степень мероморфной функции.

Пусть решетка $L \subset \mathbb{C}$ порождена двумя $\mathbb{R}$-линейно независимыми векторами ω_1, ω_2, $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$; координату в $\mathbb{C}$ обозначим через z. Положим

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Пусть решетка $L \subset \mathbb{C}$ порождена двумя $\mathbb{R}$-линейно независимыми векторами ω_1, ω_2, $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$; координату в $\mathbb{C}$ обозначим через z. Положим

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Lemma

Функция P_L является корректно определенной мероморфной функцией на $\mathbb{C}$. Она инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L и опускается до мероморфной функции степени 2 на эллиптической кривой $E = \mathbb{C}/L$, имеющей единственный полюс порядка 2 в нуле.

Функция P_L называется *функцией Вейерштрасса* кривой $\mathbb{C}/L$ и обозначается специальной буквой $\wp$ с индексом L.

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Доказательство. На любом компакте, не содержащем точек решетки L, ряд, определяющий функцию P_L, сходится абсолютно и равномерно:

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{2z\omega - z^2}{\omega^2(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^3}\frac{2z - z^2\omega^{-1}}{(z\omega^{-1}-1)^2}.$$

Учитывая, что при достаточно большом $|\omega|$

$$\frac{2z - z^2\omega^{-1}}{(z\omega^{-1}-1)^2} \approx 2z,$$

заключаем, что для каждого $z \notin L$ найдется $C > 0$, т.ч.

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| < \frac{C}{\omega^3} \qquad \forall \omega \in L \setminus \{0\}.$$

Ряд $1/\omega^3$ на решетке сходится (число элементов решетки с данным $|\omega|$ линейно по $|\omega|$).

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Производная функции P_L имеет вид

$$P_L'(z) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Она, очевидно, инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L. Поэтому при сдвиге на элемент решетки к P_L прибавляется некоторая константа c. Подставляя $z = \pm\omega_1/2$, получаем $P_L(\omega_1/2) = P_L(-\omega_1/2) + c$, откуда $c = 0$ в силу (очевидной) четности функции P_L. Теорема доказана.

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Производная функции P_L имеет вид

$$P_L'(z) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Она, очевидно, инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L. Поэтому при сдвиге на элемент решетки к P_L прибавляется некоторая константа c. Подставляя $z = \pm\omega_1/2$, получаем $P_L(\omega_1/2) = P_L(-\omega_1/2) + c$, откуда $c = 0$ в силу (очевидной) четности функции P_L. Теорема доказана.
С этого момента функцию Вейерштрасса будем обозначать $\wp_L$. Эту функцию можно понимать и как функцию на эллиптической кривой $E = \mathbb{C}/L$, и как (дваждыпериодическую) функцию на $\mathbb{C}$.

Theorem

Функция Вейерштрасса удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(\wp_L')^2 = 4\wp_L^3 - g_2\wp_L - g_3$$

для некоторых констант g_2, g_3, *определяемых решеткой* L.

Theorem

Функция Вейерштрасса удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(\wp_L')^2 = 4\wp_L^3 - g_2\wp_L - g_3$$

для некоторых констант g_2, g_3, определяемых решеткой L.

Доказательство. Поскольку

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots,$$

имеет место разложение в ряд в окрестности точки $z = 0$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\omega}\right)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(2\frac{z}{\omega} + 3\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 + \dots\right), \qquad \omega \neq 0.$$

Суммируя по всем ненулевым векторам решетки L, получаем разложение

$$\wp_L(z) = z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots,$$

где $G_k = \sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \omega^{-k}$ (для нечетных k сумма равна 0 в силу симметрии).

$$
\begin{aligned}
\wp_L(z) &= z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots, \\
(\wp_L(z))^2 &= z^{-4} + 6G_4 + \dots, \\
(\wp_L(z))^3 &= z^{-6} + 9G_4 z^{-2} + 15G_6 + \dots, \\
\wp_L'(z) &= -2z^{-3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots, \\
(\wp_L'(z))^2 &= 4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6 + \dots.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\wp_L(z) &= z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots, \\
(\wp_L(z))^2 &= z^{-4} + 6G_4 + \dots, \\
(\wp_L(z))^3 &= z^{-6} + 9G_4 z^{-2} + 15G_6 + \dots, \\
\wp_L'(z) &= -2z^{-3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots, \\
(\wp_L'(z))^2 &= 4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6 + \dots.
\end{aligned}
$$

Из этих разложений вытекает, что разложение функции

$$(\wp_L'(z))^2 - (4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6)$$

начинается не ранее, чем с члена z^2 (отметим, что эта функция четна). Тем самым, она мероморфна и не имеет полюсов на E, равна 0 при $z = 0$, а значит равна нулю тождественно. Полагаем $g_2 = 60G_4, g_3 = 140G_6$. Теорема доказана.

Функция $\wp_L : E \to \mathbb{C}P^1$ имеет степень 2 и осуществляет эллиптическое накрытие проективной прямой. Отображение $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ осуществляет биголоморфизм кривой E на гладкую плоскую кубику

$$y^2 = 4x^3 - g_2x^2 - g_3.$$

Функция $\wp_L : E \to \mathbb{C}P^1$ имеет степень 2 и осуществляет эллиптическое накрытие проективной прямой. Отображение $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ осуществляет биголоморфизм кривой E на гладкую плоскую кубику

$$y^2 = 4x^3 - g_2x^2 - g_3.$$

Замечание. Считая, что решетка L порождена векторами 1 и $\tau, \Im\tau > 0$, мы превращаем функции $G_4 = \sum'(m+n\tau)^{-4}, G_6 = \sum'(m+n\tau)^{-6}$ в функции точки τ в верхней полуплоскости. Эти функции являются примерами *модулярных форм* (*весов* 4 и 6 соответственно).

Theorem

Гладкую плоскую кубическую кривую проективной заменой переменных можно привести к виду

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

для некоторых констант g_2, g_3.

Такое уравнение кубической кривой называется *формой Вейерштрасса*.

Theorem

Гладкую плоскую кубическую кривую проективной заменой переменных можно привести к виду

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

для некоторых констант g_2, g_3.

Такое уравнение кубической кривой называется *формой Вейерштрасса*.

Доказательство. Выберем на кривой какую-нибудь из 9 точек перегиба и совместим ее с точкой $(0:1:0)$. Кроме того, потребуем, чтобы касательная в этой точке перегиба задавалась уравнением $z = 0$. Тогда уравнение кривой приобретает вид

$$y^2 - 2(ax + b)y + P_3(x) = 0,$$

где P_3 — многочлен степени 3. Заменой $y_1 = y - ax - b$ мы приводим уравнение к виду $y^2 = Q_3(x)$. Здесь Q_3 — многочлен степени 3 с попарно различными корнями. Аффинным преобразованием переменной x приводим его к желаемому виду.

Лекция 9.

Лекция 9.

Семинар 9. Задачи

- Постройте на эллиптической кривой мероморфную функцию с одним полюсом порядка 4.
- Постройте на эллиптической кривой мероморфную функцию с двумя полюсами порядка 1, не имеющую других полюсов.
- Найдите нули функции Вейерштрасса $\wp_L(z)$.
- Найдите точки ветвления функции Вейерштрасса $\wp_L(z)$.

Семинар 9. Задачи

- Пусть уравнения $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ и $y^2 = 4x^3 - g_2'x - g_3'$ задают изоморфные эллиптические кривые. Докажите, что тогда

$$\frac{g_2^3}{g_3^2 - 27g_2^3} = \frac{{g_2'}^3}{{g_3'}^2 - 27{g_2'}^3}.$$

- Пусть A, B, C — точки пересечения данной прямой с эллиптической кривой в форме Вейерштрасса. Докажите, что $A + B + C = 0$ в аддитивной группе эллиптической кривой с нулем на бесконечности.
- Докажите, что третья точка пересечения прямой, соединяющей две точки перегиба плоской кубики, также является точкой перегиба.

- Плоская *кривая Клейна* задается уравнением $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$.
  (a) Докажите, что наряду с проективными преобразованиями, задаваемыми матрицами
  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^4 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^5 \end{pmatrix},$$
  где ζ — примитивный корень из 1, $\zeta^7 = 1$, эта кривая сохраняется также инволюцией, задаваемой матрицей
  $$\frac{1}{\sqrt{-7}} \begin{pmatrix} \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 \\ \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 \\ \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 \end{pmatrix}.$$
  (b) Проверьте, что эти три матрицы порождают группу порядка 168.

Семинар 9. Задачи

-
-

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Лекция 10. Отступление: вещественные алгебраические кривые

На проективной прямой имеется естественное антиголоморфное отображение — комплексное сопряжение $\sigma : z \mapsto \bar{z}$. (Отображение кривых называется *антиголоморфным*, если в локальных комплексных координатах оно комплексно сопряжено голоморфному отображению, т.е. представляется рядом от переменной $\bar{z}$.) Это отображение не является голоморфным, является инволюцией, $\sigma^2 = \mathrm{id}$, и играет ключевую роль при изучении вещественных кривых. Неподвижные точки этого отображения образуют *вещественную проективную прямую* $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$.

На проективной прямой имеется естественное антиголоморфное отображение — комплексное сопряжение $\sigma : z \mapsto \bar{z}$. (Отображение кривых называется *антиголоморфным*, если в локальных комплексных координатах оно комплексно сопряжено голоморфному отображению, т.е. представляется рядом от переменной $\bar{z}$.) Это отображение не является голоморфным, является инволюцией, $\sigma^2 = \mathrm{id}$, и играет ключевую роль при изучении вещественных кривых. Неподвижные точки этого отображения образуют *вещественную проективную прямую* $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$.

Definition

Вещественной алгебраической кривой называется пара (C, η), где C — комплексная алгебраическая кривая, $\eta : C \to C$ — антиголоморфная инволюция, $\eta^2 = \mathrm{id}$. Неподвижные точки отображения η называются *вещественными точками* кривой (C, η).

На проективной прямой имеется естественное антиголоморфное отображение — комплексное сопряжение $\sigma : z \mapsto \bar{z}$. (Отображение кривых называется *антиголоморфным*, если в локальных комплексных координатах оно комплексно сопряжено голоморфному отображению, т.е. представляется рядом от переменной $\bar{z}$.) Это отображение не является голоморфным, является инволюцией, $\sigma^2 = \mathrm{id}$, и играет ключевую роль при изучении вещественных кривых. Неподвижные точки этого отображения образуют *вещественную проективную прямую* $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$.

Definition

Вещественной алгебраической кривой называется пара (C, η), где C — комплексная алгебраическая кривая, $\eta : C \to C$ — антиголоморфная инволюция, $\eta^2 = \mathrm{id}$. Неподвижные точки отображения η называются *вещественными точками* кривой (C, η).

Упражнение. Почему отображение $z \mapsto \bar{z}$ неголоморфно?

На проективной прямой имеется естественное антиголоморфное отображение — комплексное сопряжение $\sigma : z \mapsto \bar{z}$. (Отображение кривых называется *антиголоморфным*, если в локальных комплексных координатах оно комплексно сопряжено голоморфному отображению, т.е. представляется рядом от переменной $\bar{z}$.) Это отображение не является голоморфным, является инволюцией, $\sigma^2 = \mathrm{id}$, и играет ключевую роль при изучении вещественных кривых. Неподвижные точки этого отображения образуют *вещественную проективную прямую* $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$.

Definition

Вещественной алгебраической кривой называется пара (C, η), где C — комплексная алгебраическая кривая, $\eta : C \to C$ — антиголоморфная инволюция, $\eta^2 = \mathrm{id}$. Неподвижные точки отображения η называются *вещественными точками* кривой (C, η).

Упражнение. Почему отображение $z \mapsto \bar{z}$ неголоморфно?
Упражнение. Придумайте антиголоморфную инволюцию проективной прямой $\mathbb{C}P^1$, не имеющую неподвижных точек.

Типичным примером вещественной алгебраической кривой служит гладкая плоская комплексная кривая, заданная однородным полиномиальным уравнением с *вещественными* коэффициентами. Отображение η индуцируется отображением комплексной проективной плоскости в себя $(x:y:z)\mapsto(\bar{x}:\bar{y}:\bar{z})$; это отображение переводит кривую в себя, поскольку при вещественном a выполняется равенство $\overline{ax^iy^jz^k}=a\bar{x}^i\bar{y}^j\bar{z}^k$ для любых целых неотрицательных i,j,k.

Типичным примером вещественной алгебраической кривой служит гладкая плоская комплексная кривая, заданная однородным полиномиальным уравнением с *вещественными* коэффициентами. Отображение η индуцируется отображением комплексной проективной плоскости в себя $(x:y:z)\mapsto(\bar{x}:\bar{y}:\bar{z})$; это отображение переводит кривую в себя, поскольку при вещественном a выполняется равенство $\overline{ax^iy^jz^k}=a\bar{x}^i\bar{y}^j\bar{z}^k$ для любых целых неотрицательных i,j,k.
Множество вещественных точек такой кривой образует вещественную кривую — пересечение исходной комплексной кривой с вещественной проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2\subset\mathbb{C}P^2$. Эта вещественная кривая может оказаться пустой, как, например, в случае кривой $x^2+y^2+z^2=0$. Однако кривая нечетной степени обязательно является непустой (поскольку вещественный многочлен нечетной степени обязательно имеет вещественный корень).

В окрестности каждой неподвижной точки антиголоморфной инволюции $\eta : C \to C$ эта инволюция приводится в подходящей голоморфной координате z к виду $z \mapsto \bar{z}$. Поэтому множество неподвижных точек инволюции — гладкое вещественно одномерное подмногообразие в C. Это подмногообразие компактно, поэтому оно состоит из конечного числа окружностей.

В окрестности каждой неподвижной точки антиголоморфной инволюции $\eta : C \to C$ эта инволюция приводится в подходящей голоморфной координате z к виду $z \mapsto \bar{z}$. Поэтому множество неподвижных точек инволюции — гладкое вещественно одномерное подмногообразие в C. Это подмногообразие компактно, поэтому оно состоит из конечного числа окружностей.

Theorem (Harnack's curve theorem, Неравенство Харнака)

Множество неподвижных точек антиголоморфной инволюции на вещественной алгебраической кривой рода g имеет не более $g+1$ компонент связности.

Лекция 10. Неравенство Харнака

В окрестности каждой неподвижной точки антиголоморфной инволюции $\eta : C \to C$ эта инволюция приводится в подходящей голоморфной координате z к виду $z \mapsto \bar{z}$. Поэтому множество неподвижных точек инволюции — гладкое вещественно одномерное подмногообразие в C. Это подмногообразие компактно, поэтому оно состоит из конечного числа окружностей.

Theorem (Harnack's curve theorem, Неравенство Харнака)

Множество неподвижных точек антиголоморфной инволюции на вещественной алгебраической кривой рода g имеет не более $g + 1$ компонент связности.

Доказательство. Пусть (C, η) — вещественная алгебраическая кривая рода g. Тогда факторповерхность C/η — поверхность с краем, эйлерова характеристика которой равна $\chi(C)/2 = (2 - 2g)/2 = 1 - g$. Поэтому эта поверхность не может иметь больше $g + 1$ компонент края, и это количество реализуемо лишь если факторповерхность C/η является сферой с $g + 1$ дырками.

Лекция 10. Неравенство Харнака

В окрестности каждой неподвижной точки антиголоморфной инволюции $\eta : C \to C$ эта инволюция приводится в подходящей голоморфной координате z к виду $z \mapsto \bar{z}$. Поэтому множество неподвижных точек инволюции — гладкое вещественно одномерное подмногообразие в C. Это подмногообразие компактно, поэтому оно состоит из конечного числа окружностей.

Theorem (Harnack's curve theorem, Неравенство Харнака)

Множество неподвижных точек антиголоморфной инволюции на вещественной алгебраической кривой рода g имеет не более $g+1$ компонент связности.

Доказательство. Пусть (C, η) — вещественная алгебраическая кривая рода g. Тогда факторповерхность C/η — поверхность с краем, эйлерова характеристика которой равна $\chi(C)/2 = (2-2g)/2 = 1-g$. Поэтому эта поверхность не может иметь больше $g+1$ компонент края, и это количество реализуемо лишь если факторповерхность C/η является сферой с $g+1$ дырками.
Вещественная кривая рода g, множество вещественных точек которой имеет $g+1$ компонент связности, называется *M-кривой*.

Definition

Вещественная кривая (C,η) называется *разделяющей*, если множество ее вещественных точек $C^{\mathbb{R}} \subset C$ разбивает ее на две компоненты связности. В противном случае она называется *неразделяющей*.

Definition

Вещественная кривая (C, η) называется *разделяющей*, если множество ее вещественных точек $C^{\mathbb{R}} \subset C$ разбивает ее на две компоненты связности. В противном случае она называется *неразделяющей*.

Упражнение. Докажите, что всякая M-кривая является разделяющей.

Definition

Вещественная кривая (C, η) называется *разделяющей*, если множество ее вещественных точек $C^{\mathbb{R}} \subset C$ разбивает ее на две компоненты связности. В противном случае она называется *неразделяющей*.

Упражнение. Докажите, что всякая M-кривая является разделяющей.
Упражнение. Докажите, что факторповерхность C/η вещественной алгебраической кривой (C, η) ориентируема тогда и только тогда, когда кривая (C, η) разделяющая.

Definition

Вещественная кривая (C, η) называется *разделяющей*, если множество ее вещественных точек $C^{\mathbb{R}} \subset C$ разбивает ее на две компоненты связности. В противном случае она называется *неразделяющей*.

Упражнение. Докажите, что всякая M-кривая является разделяющей.
Упражнение. Докажите, что факторповерхность C/η вещественной алгебраической кривой (C, η) ориентируема тогда и только тогда, когда кривая (C, η) разделяющая.
Упражнение. Пусть вещественная часть плоской вещественной кубики имеет одну компоненту связности. Является ли эта кубика разделяющей?

Definition

Вещественная кривая (C, η) называется *разделяющей*, если множество ее вещественных точек $C^{\mathbb{R}} \subset C$ разбивает ее на две компоненты связности. В противном случае она называется *неразделяющей*.

Упражнение. Докажите, что всякая M-кривая является разделяющей.
Упражнение. Докажите, что факторповерхность C/η вещественной алгебраической кривой (C, η) ориентируема тогда и только тогда, когда кривая (C, η) разделяющая.
Упражнение. Пусть вещественная часть плоской вещественной кубики имеет одну компоненту связности. Является ли эта кубика разделяющей?
Упражнение. Докажите, что количество компонент связности вещественной части $C^{\mathbb{R}}$ вещественной разделяющей кривой (C, η) рода g имеет ту же четность, что и $g + 1$.

Лекция 10. Инвариантные контуры

Антиголоморфная инволюция η вещественной алгебраической кривой (C, η) переводит в себя каждый замкнутый контур вещественной части кривой C. Однако на C есть и другие η-инвариантные контуры.

Антиголоморфная инволюция η вещественной алгебраической кривой (C, η) переводит в себя каждый замкнутый контур вещественной части кривой C. Однако на C есть и другие η-инвариантные контуры.

Упражнение. Найдите на $\mathbb{C}P^1$ контур, инвариантный относительно антиголоморфной инволюции $z \mapsto -1/\bar{z}$.

Антиголоморфная инволюция η вещественной алгебраической кривой (C, η) переводит в себя каждый замкнутый контур вещественной части кривой C. Однако на C есть и другие η-инвариантные контуры.

Упражнение. Найдите на $\mathbb{C}P^1$ контур, инвариантный относительно антиголоморфной инволюции $z \mapsto -1/\bar{z}$.

Theorem

На всякой вещественной кривой рода g существует разделяющий набор из $g+1$ попарно непересекающихся инвариантных контуров.

Антиголоморфная инволюция η вещественной алгебраической кривой (C, η) переводит в себя каждый замкнутый контур вещественной части кривой C. Однако на C есть и другие η-инвариантные контуры.

Упражнение. Найдите на $\mathbb{C}P^1$ контур, инвариантный относительно антиголоморфной инволюции $z \mapsto -1/\bar{z}$.

Theorem

На всякой вещественной кривой рода g существует разделяющий набор из $g+1$ попарно непересекающихся инвариантных контуров.

Замечание. Таких наборов (рассматривающихся с точностью до гомотопической эквивалентности) бесконечно много.

Definition

Голоморфное отображение $f : (C_1, \eta_1) \to (C_2, \eta_2)$ вещественных кривых называется *вещественным*, если $\eta_2 \circ f = f \circ \eta_1$. *Вещественной мероморфной функцией* на вещественной кривой (C, η) называется ее вещественное отображение $(C, \eta) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$ в комплексную проективную прямую со стандартной антиголоморфной инволюцией — комплексным сопряжением.

Definition

Голоморфное отображение $f:(C_1,\eta_1)\to(C_2,\eta_2)$ вещественных кривых называется *вещественным*, если $\eta_2\circ f=f\circ\eta_1$. *Вещественной мероморфной функцией* на вещественной кривой (C,η) называется ее вещественное отображение $(C,\eta)\to(\mathbb{C}P^1,\sigma)$ в комплексную проективную прямую со стандартной антиголоморфной инволюцией — комплексным сопряжением.

Упражнение. Докажите, что всякая вещественная мероморфная функция $(\mathbb{C}P^1,\sigma)\to(\mathbb{C}P^1,\sigma)$ задается рациональной функцией с вещественными коэффициентами.

Definition

Голоморфное отображение $f : (C_1, \eta_1) \to (C_2, \eta_2)$ вещественных кривых называется *вещественным*, если $\eta_2 \circ f = f \circ \eta_1$. *Вещественной мероморфной функцией* на вещественной кривой (C, η) называется ее вещественное отображение $(C, \eta) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$ в комплексную проективную прямую со стандартной антиголоморфной инволюцией — комплексным сопряжением.

Упражнение. Докажите, что всякая вещественная мероморфная функция $(\mathbb{C}P^1, \sigma) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$ задается рациональной функцией с вещественными коэффициентами.

Упражнение. Опишите все вещественные мероморфные функции $(\mathbb{C}P^1, \eta) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$, где $\eta : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — антиголоморфная инволюция, имеющая вид $z \mapsto -1/\bar{z}$.

Definition

Голоморфное отображение $f : (C_1, \eta_1) \to (C_2, \eta_2)$ вещественных кривых называется *вещественным*, если $\eta_2 \circ f = f \circ \eta_1$. *Вещественной мероморфной функцией* на вещественной кривой (C, η) называется ее вещественное отображение $(C, \eta) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$ в комплексную проективную прямую со стандартной антиголоморфной инволюцией — комплексным сопряжением.

Упражнение. Докажите, что всякая вещественная мероморфная функция $(\mathbb{C}P^1, \sigma) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$ задается рациональной функцией с вещественными коэффициентами.
Упражнение. Опишите все вещественные мероморфные функции $(\mathbb{C}P^1, \eta) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$, где $\eta : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — антиголоморфная инволюция, имеющая вид $z \mapsto -1/\bar{z}$.
Упражнение. Всякую голоморфную функцию можно задать набором ее критических значений и монодромией вокруг каждого из этих значений. Какие ограничения накладываются на эти данные для вещественных функций?

Простая замкнутая кривая на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ может принадлежать к одному из двух типов:

- *односторонняя кривая* — кривая C, дополнение $\mathbb{R}P^2 \setminus C$ к которой гомеоморфно диску;
- *овал* (двусторонняя кривая) — кривая, разбивающая проективную плоскость на две компоненты связности, одна из которых гомеоморфна диску, вторая — ленте Мебиуса.

Прямая в вещественной проективной плоскости является односторонней кривой.

Простая замкнутая кривая на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ может принадлежать к одному из двух типов:

- *односторонняя кривая* — кривая C, дополнение $\mathbb{R}P^2 \setminus C$ к которой гомеоморфно диску;
- *овал* (двусторонняя кривая) — кривая, разбивающая проективную плоскость на две компоненты связности, одна из которых гомеоморфна диску, вторая — ленте Мебиуса.

Прямая в вещественной проективной плоскости является односторонней кривой. Кубическая вещественная M-кривая состоит из одной односторонней компоненты и одного овала.

Простая замкнутая кривая на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ может принадлежать к одному из двух типов:

- *односторонняя кривая* — кривая C, дополнение $\mathbb{R}P^2 \setminus C$ к которой гомеоморфно диску;
- *овал* (двусторонняя кривая) — кривая, разбивающая проективную плоскость на две компоненты связности, одна из которых гомеоморфна диску, вторая — ленте Мебиуса.

Прямая в вещественной проективной плоскости является односторонней кривой.
Кубическая вещественная M-кривая состоит из одной односторонней компоненты и одного овала.
Вещественная M-квартика состоит из 4 овалов.

Простая замкнутая кривая на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ может принадлежать к одному из двух типов:

- *односторонняя кривая* — кривая C, дополнение $\mathbb{R}P^2 \setminus C$ к которой гомеоморфно диску;
- *овал* (двусторонняя кривая) — кривая, разбивающая проективную плоскость на две компоненты связности, одна из которых гомеоморфна диску, вторая — ленте Мебиуса.

Прямая в вещественной проективной плоскости является односторонней кривой.
Кубическая вещественная M-кривая состоит из одной односторонней компоненты и одного овала.
Вещественная M-квартика состоит из 4 овалов.
Упражнение. Могут ли овалы M-квартики лежать один внутри другого?

Lemma

Всякая гладкая плоская вещественная кривая нечетной степени содержит ровно одну одностороннюю компоненту связности. Все компоненты связности гладкой плоской вещественной кривой четной степени — овалы.

Доказательство.

Lemma

Всякая гладкая плоская вещественная кривая нечетной степени содержит ровно одну одностороннюю компоненту связности. Все компоненты связности гладкой плоской вещественной кривой четной степени — овалы.

Доказательство.
Любые две односторонние кривые на проективной плоскости пересекаются, поэтому у гладкой кривой не может быть больше одной такой компоненты.

Lemma

Всякая гладкая плоская вещественная кривая нечетной степени содержит ровно одну одностороннюю компоненту связности. Все компоненты связности гладкой плоской вещественной кривой четной степени — овалы.

Доказательство.
Любые две односторонние кривые на проективной плоскости пересекаются, поэтому у гладкой кривой не может быть больше одной такой компоненты.
Прямая общего положения пересекает одностороннюю кривую в нечетном числе точек, а всякий овал — в четном числе точек. Количество точек пересечения общей вещественной прямой с вещественной частью плоской вещественной кривой имеет ту же четность, что и степень кривой.

Плоская алгебраическая кривая степени 6 имеет род $(6-1)(6-2)/2 = 10$, поэтому у плоской вещественной M-кривой степени шесть 11 компонент связности. Алгебраическая часть 16-й проблемы Гильберта состоит в описании всех возможных взаимных расположений компонент связности такой кривой на вещественной проективной плоскости. Гильберт утверждал, что среди 11 овалов есть один, содержащий внутри себя еще один, и еще 9 простых овалов вне него, либо наоборот. Д.А.Гудков обнаружил еще один случай: овал, внутри и снаружи которого находится по 5 простых овалов, и доказал, что других возможностей нет.

Плоская алгебраическая кривая степени 6 имеет род $(6-1)(6-2)/2 = 10$, поэтому у плоской вещественной M-кривой степени шесть 11 компонент связности. Алгебраическая часть 16-й проблемы Гильберта состоит в описании всех возможных взаимных расположений компонент связности такой кривой на вещественной проективной плоскости. Гильберт утверждал, что среди 11 овалов есть один, содержащий внутри себя еще один, и еще 9 простых овалов вне него, либо наоборот. Д.А.Гудков обнаружил еще один случай: овал, внутри и снаружи которого находится по 5 простых овалов, и доказал, что других возможностей нет.
Вопрос о возможных конфигурациях овалов для плоских M-кривых степени 8 и выше до сих пор открыт.

Овалам кривой четной степени можно приписать знаки. Овалам, не содержащимся в других овалах, приписывается знак $+$. Овалам, непосредственно содержащимся в овале, имеющим знак $+$, знак $-$, овалам, непосредственно содержащимся в овалах со знаком $+$, и т.д. Обозначим через p количество положительных овалов, через n — количество отрицательных. Например, три возможные конфигурации овалов вещественных плоских M-кривых степени 6 дают наборы значений $p = 10, n = 1$, $p = 6, n = 5$, $p = 2, n = 9$.

Овалам кривой четной степени можно приписать знаки. Овалам, не содержащимся в других овалах, приписывается знак $+$. Овалам, непосредственно содержащимся в овале, имеющим знак $+$, знак $-$, овалам, непосредственно содержащимся в овалах со знаком $+$, и т.д. Обозначим через p количество положительных овалов, через n — количество отрицательных. Например, три возможные конфигурации овалов вещественных плоских M-кривых степени 6 дают наборы значений $p = 10, n = 1$, $p = 6, n = 5$, $p = 2, n = 9$.

Theorem (сравнение Гудкова, доказано В.И.Арнольдом, 1971, и В.А.Рохлиным, 1972)

Для плоской вещественной M-кривой четной степени $2k$ выполняется сравнение

$$p - n \equiv k^2 \mod 8.$$

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Функции на кривой можно понимать как сечения тривиального линейного расслоения над ней. Тривиальное линейное расслоение над кривой C — это прямое произведение $C \times \mathbb{C}$ этой кривой на комплексную прямую. Каждой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ сопоставляется мероморфное сечение этого расслоения $C \to C \times \mathbb{C}$, переводящее точку $x \in C$ в точку $(x, f(x)) \in C \times \mathbb{C}$. Прообразы бесконечности являются полюсами функции f в C. Если кривая C компактна, то все голоморфные функции на ней постоянны, а у всякой непостоянной мероморфной функции есть полюса.

Лекция 11. Линейные расслоения над кривыми

Функции на кривой можно понимать как сечения тривиального линейного расслоения над ней. Тривиальное линейное расслоение над кривой C — это прямое произведение $C \times \mathbb{C}$ этой кривой на комплексную прямую. Каждой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ сопоставляется мероморфное сечение этого расслоения $C \to C \times \mathbb{C}$, переводящее точку $x \in C$ в точку $(x, f(x)) \in C \times \mathbb{C}$. Прообразы бесконечности являются полюсами функции f в C. Если кривая C компактна, то все голоморфные функции на ней постоянны, а у всякой непостоянной мероморфной функции есть полюса.
Помимо тривиального линейного расслоения над всякой кривой есть еще два естественных линейных расслоения: касательное TC и кокасательное $T^\vee C$. Эти два расслоения имеются не только над кривыми, но и над произвольными комплексными многообразиями. Однако над комплексным многообразием размерности $n > 1$ эти расслоения не являются линейными; их ранг (т.е., размерность слоя), равен n, тогда как ранг линейного расслоения, по определению, равен 1.

Definition

Векторным расслоением ранга k, $k \in \mathbb{N}$, над комплексным многообразием M размерности m называется пара, состоящая из комплексного многообразия E размерности $m+k$ и голоморфного отображения $p : E \to M$, такого, что у любой точки $x \in M$ существует открытая окрестность $U(x) \subset M$ и биголоморфизм $\varphi : U(x) \times \mathbb{C}^k \to p^{-1}(U(x))$ прямого произведения $U(x)$ и $\mathbb{C}^k$ на полный прообраз этой окрестности, причем

- $p \circ \varphi : (x, v) \mapsto x$ для любой точки $x \in M$;
- ограничение отображения φ на $y \times \mathbb{C}^k$ является линейным изоморфизмом на $p^{-1}(y)$ для любой точки $y \in U(x)$.

Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in M$ называется *слоем* векторного расслоения $p : E \to M$.
Мероморфным сечением голоморфного векторного расслоения $p : E \to M$ называется мероморфное отображение $\sigma : M \to E$, такое, что $p \circ \sigma : M \to M$ есть тождественное отображение.
Если ранг k векторного расслоения равен 1, то расслоение называется *линейным*.

Лекция 11. Касательное и кокасательное расслоения над кривой

Слоем T_x *касательного расслоения* TC к кривой C над точкой $x \in C$ является касательная прямая к C в точке x. Касательная прямая состоит из *касательных векторов*, которые можно определять по-разному. Например, как классы эквивалентности голоморфных отображений $(D, 0) \to (C, x)$, где D — единичный диск в $\mathbb{C}$, или как *дифференцирования*, т.е. линейные отображения из пространства ростков голоморфных функций в точке $x \in C$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющие правилу Лейбница $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$. При втором определении утверждение о том, что касательные вектора к кривой C в данной точке x образуют векторное пространство, становится очевидным. *Кокасательное расслоение* двойственно к касательному.

Лекция 11. Касательное и кокасательное расслоения над кривой

Слоем T_x *касательного расслоения* TC к кривой C над точкой $x \in C$ является касательная прямая к C в точке x. Касательная прямая состоит из *касательных векторов*, которые можно определять по-разному. Например, как классы эквивалентности голоморфных отображений $(D, 0) \to (C, x)$, где D — единичный диск в $\mathbb{C}$, или как *дифференцирования*, т.е. линейные отображения из пространства ростков голоморфных функций в точке $x \in C$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющие правилу Лейбница $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$. При втором определении утверждение о том, что касательные вектора к кривой C в данной точке x образуют векторное пространство, становится очевидным. *Кокасательное расслоение* двойственно к касательному. *Векторное поле* — это сечение касательного расслоения. *Дифференциальная* 1*-форма* — сечение кокасательного расслоения (*ковекторное поле*). В локальной координате z векторное поле записывается в виде $a(z)\partial/\partial z$; его нули и полюса — это нули и полюса локальных коэффициентов $a(z)$. Если векторное поле голоморфно, то голоморфна и функция $a(z)$; если поле мероморфно, то функция $a(z)$ мероморфна. Соответственно, 1-форма записывается в виде $b(z)dz$.

Лекция 11. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

На любой кривой C голоморфные векторные поля и голоморфные 1-формы образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$. В свою очередь, мероморфные векторные поля и мероморфные 1-формы образуют векторное пространство как над $\mathbb{C}$, так и над полем мероморфных функций на C. Отношение любых двух ненулевых векторных полей является мероморфной функцией, поэтому последнее векторное пространство одномерно. То же самое справедливо и для 1-форм (и сечений любых линейных расслоений).

На любой кривой C голоморфные векторные поля и голоморфные 1-формы образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$. В свою очередь, мероморфные векторные поля и мероморфные 1-формы образуют векторное пространство как над $\mathbb{C}$, так и над полем мероморфных функций на C. Отношение любых двух ненулевых векторных полей является мероморфной функцией, поэтому последнее векторное пространство одномерно. То же самое справедливо и для 1-форм (и сечений любых линейных расслоений). Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, в частности, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Corollary

Всякое голоморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $P_2(z)\partial/\partial z$, где $P_2(z)$ — многочлен степени не выше 2.

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Corollary

Всякое голоморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $P_2(z)\partial/\partial z$, где $P_2(z)$ — многочлен степени не выше 2.

1-форма dz имеет в бесконечности полюс второго порядка: $dz = d\frac{1}{w} = -\frac{dw}{w^2}$.

Лекция 11. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Corollary

Всякое голоморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $P_2(z)\partial/\partial z$, где $P_2(z)$ — многочлен степени не выше 2.

1-форма dz имеет в бесконечности полюс второго порядка: $dz = d\frac{1}{w} = -\frac{dw}{w^2}$.

Corollary

На проективной прямой нет ненулевых голоморфных 1-форм.

Одним из основных источников мероморфных 1-форм на комплексных кривых являются дифференциалы функций. Всякой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ на кривой C соответствует 1-форма df, ее дифференциал, на C. По определению, 1-форма df действует на касательный вектор $v \in T_x C$ по правилу $df : v \mapsto v(f)$. В локальной координате z дифференциал мероморфной функции f записывается в виде $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Одним из основных источников мероморфных 1-форм на комплексных кривых являются дифференциалы функций. Всякой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ на кривой C соответствует 1-форма df, ее дифференциал, на C. По определению, 1-форма df действует на касательный вектор $v \in T_xC$ по правилу $df : v \mapsto v(f)$. В локальной координате z дифференциал мероморфной функции f записывается в виде $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Упражнение. 1-форма dz на проективной прямой является дифференциалом мероморфной функции z. Дифференциалом какой мероморфной функции является 1-форма $\frac{dz}{z}$?

Всякое ненулевое мероморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{\partial}{\partial z}$, где $P(z), Q(z)$ — многочлены, не имеющие общих корней. Всякая ненулевая мероморфная 1-форма на проективной прямой имеет вид $\frac{P(z)}{Q(z)}dz$, где $P(z), Q(z)$ — многочлены, не имеющие общих корней.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на комплексной прямой $\mathbb{C}$ инвариантно относительно сдвигов на любой вектор в $\mathbb{C}$. В частности, оно инвариантно относительно сдвигов на элементы любой решетки $L \subset \mathbb{C}$, и определяет поэтому векторное поле на факторкривой $\mathbb{C}/L$. Это векторное поле голоморфно (у него нет полюсов) и не имеет нулей. Если V — другое голоморфное векторное поле на $\mathbb{C}/L$, то, разделив его на $\partial/\partial z$, получаем голоморфную функцию на $\mathbb{C}/L$, т.е. константу. Поэтому пространство голоморфных векторных полей на $\mathbb{C}/L$ одномерно.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на комплексной прямой $\mathbb{C}$ инвариантно относительно сдвигов на любой вектор в $\mathbb{C}$. В частности, оно инвариантно относительно сдвигов на элементы любой решетки $L \subset \mathbb{C}$, и определяет поэтому векторное поле на факторкривой $\mathbb{C}/L$. Это векторное поле голоморфно (у него нет полюсов) и не имеет нулей. Если V — другое голоморфное векторное поле на $\mathbb{C}/L$, то, разделив его на $\partial/\partial z$, получаем голоморфную функцию на $\mathbb{C}/L$, т.е. константу. Поэтому пространство голоморфных векторных полей на $\mathbb{C}/L$ одномерно.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на эллиптической кривой $C = \mathbb{C}/L$ задает *тривиализацию* касательного расслоения TC к C. Таким образом, в случае эллиптической кривой касательное расслоение тривиально, $TC \cong C \times \mathbb{C}$.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на комплексной прямой $\mathbb{C}$ инвариантно относительно сдвигов на любой вектор в $\mathbb{C}$. В частности, оно инвариантно относительно сдвигов на элементы любой решетки $L \subset \mathbb{C}$, и определяет поэтому векторное поле на факторкривой $\mathbb{C}/L$. Это векторное поле голоморфно (у него нет полюсов) и не имеет нулей. Если V — другое голоморфное векторное поле на $\mathbb{C}/L$, то, разделив его на $\partial/\partial z$, получаем голоморфную функцию на $\mathbb{C}/L$, т.е. константу. Поэтому пространство голоморфных векторных полей на $\mathbb{C}/L$ одномерно.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на эллиптической кривой $C = \mathbb{C}/L$ задает *тривиализацию* касательного расслоения TC к C. Таким образом, в случае эллиптической кривой касательное расслоение тривиально, $TC \cong C \times \mathbb{C}$.

Аналогичные утверждения справедливы и для 1-форм. Кокасательное расслоение $T^\vee C$ к эллиптической кривой тривиально и порождается голоморфной 1-формой dz, не имеющей нулей.

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Лекция 11. Векторные поля и 1-формы

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Задавать векторные поля и 1-формы на кривых рода $g > 1$ сложнее, чем на кривых рода 0 и 1, — из-за отсутствия глобальной координаты и трудностей определения мероморфных функций на произвольной кривой. В то же время, 1-форму можно задать на кривой, отображенной в проективное пространство, подняв на нее мероморфную 1-форму на объемлющем пространстве. Например, если кривая C погружена в плоскость, то всякая 1-форма на плоскости задает 1-форму на C. Дифференциал функции также является поднятием 1-формы dz на $\mathbb{C}P^1$ при отображении $f : C \to \mathbb{C}P^1$.

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Задавать векторные поля и 1-формы на кривых рода $g > 1$ сложнее, чем на кривых рода 0 и 1, — из-за отсутствия глобальной координаты и трудностей определения мероморфных функций на произвольной кривой. В то же время, 1-форму можно задать на кривой, отображенной в проективное пространство, подняв на нее мероморфную 1-форму на объемлющем пространстве. Например, если кривая C погружена в плоскость, то всякая 1-форма на плоскости задает 1-форму на C. Дифференциал функции также является поднятием 1-формы dz на $\mathbb{C}P^1$ при отображении $f : C \to \mathbb{C}P^1$.

Упражнение. Почему мероморфное векторное поле на плоскости не задает векторного поля на погруженной в плоскость кривой?

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Задавать векторные поля и 1-формы на кривых рода $g > 1$ сложнее, чем на кривых рода 0 и 1, — из-за отсутствия глобальной координаты и трудностей определения мероморфных функций на произвольной кривой. В то же время, 1-форму можно задать на кривой, отображенной в проективное пространство, подняв на нее мероморфную 1-форму на объемлющем пространстве. Например, если кривая C погружена в плоскость, то всякая 1-форма на плоскости задает 1-форму на C. Дифференциал функции также является поднятием 1-формы dz на $\mathbb{C}P^1$ при отображении $f : C \to \mathbb{C}P^1$.

Упражнение. Почему мероморфное векторное поле на плоскости не задает векторного поля на погруженной в плоскость кривой?

Более общим образом, голоморфное отображение $F : C \to M$ кривой C в комплексное многообразие M позволяет поднять на C любую 1-форму ω на M, положив $F^*\omega(v) = \omega(dF(v))$. Поэтому 1-формы — более подходящий объект для изучения и более подходящий инструмент исследования кривых, чем векторные поля.

Ограничивая 1-форму dx на произвольную плоскую алгебраическую кривую, мы получаем 1-форму на этой кривой. Если кривая C задана уравнением $(x-1)^2+y^2=1$, то ее можно параметризовать рациональной кривой, положив

$$x=\frac{2}{1+t^2};\qquad y=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда $dx=-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$, и нулями этой 1-формы являются те точки кривой, в которых $t=0$ и $t=\infty$, т.е. точки $(2,0)$ и $(0,0)$. Кроме того, у нее два полюса, оба порядка 2, в точках, отвечающих значениям параметра $t=\pm i$, т.е. в точках $(1:\pm i:0)$ на бесконечности нашей кривой.

Ограничивая 1-форму dx на произвольную плоскую алгебраическую кривую, мы получаем 1-форму на этой кривой. Если кривая C задана уравнением $(x-1)^2+y^2=1$, то ее можно параметризовать рациональной кривой, положив

$$x=\frac{2}{1+t^2}; \qquad y=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда $dx=-\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}$, и нулями этой 1-формы являются те точки кривой, в которых $t=0$ и $t=\infty$, т.е. точки $(2,0)$ и $(0,0)$. Кроме того, у нее два полюса, оба порядка 2, в точках, отвечающих значениям параметра $t=\pm i$, т.е. в точках $(1:\pm i:0)$ на бесконечности нашей кривой.

Другой — и более универсальный, пригодный не только для рациональных кривых, — способ находить нули 1-формы, состоит в том, чтобы сравнить дифференциал на плоскости с дифференциалом df функции f, задающей кривую. В нулях ограничения дифференциала на кривую он пропорционален df; действительно, значение df на любом касательном векторе к кривой $f=0$ равно 0. Полюсами ограничения дифференциала на кривую могут оказаться точки пересечения кривой его полюсов с самой кривой; в частности, это могут быть точки кривой на бесконечности, которые нужно проверять.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1*-форм на ней не меньше ее рода* $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-*форм на ней не меньше ее рода* $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Доказательство. Выберем на проективной плоскости координаты $(x : y : z)$ таким образом, чтобы прямая $z = 0$ пересекала кривую C в d точках (т.е., трансверсально). Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $f(x, y) = 0$.

Lemma

Дифференциальная 1-*форма*

$$\omega_C = \frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1-*формой на* C.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $F(x, y, 1) = f(x, y) = 0$.

Lemma

Дифференциальная 1-форма

$$\omega_C = \frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $F(x,y,1)=f(x,y)=0$.

Lemma

Дифференциальная 1*-форма*

$$\omega_C = \frac{dx\wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1*-формой на* C.

Доказательство. В аффинной карте $z=1$ 1-форма ω_C не имеет особенностей, поскольку df не обращается в нуль на C. Достаточно проверить, что она не имеет полюсов на бесконечности. Перейдем от карты $z=1$ к карте $x=1$: $x=\frac{1}{v}, y=\frac{u}{v}$. Тогда

$$\omega_C = \frac{dx}{\partial f/\partial y} = -\frac{dv/v^2}{\partial f/\partial y\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v},\right)} = -\frac{v^{d-3}dv}{v^{d-1}\partial f/\partial y\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)}.$$

В знаменателе последнего выражения стоит производная по u функции $F(1,u,v)$.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ней не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ней не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Lemma

Для всякого многочлена $p(x, y)$ степени, не превосходящей $d-3$, дифференциальная 1-форма

$$p(x, y)\omega_C$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C, равной 0 в том и только в том случае, когда $p \equiv 0$.

Доказательство. Достаточно проверить, что в точках кривой C на бесконечности порядок нуля 1-формы ω_C равен $d-3$.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских нодальных кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская нодальная кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ее нормализации не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2 - \delta$, где δ — число точек простого самопересечения кривой C.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских нодальных кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская нодальная кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ее нормализации не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2 - \delta$, где δ — число точек простого самопересечения кривой C.

Lemma

Для всякого многочлена $p(x,y)$ степени, не превосходящей $d-3$, обращающегося в нуль в двойных точках кривой C, дифференциальная 1-форма

$$p(x,y)\frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на нормализации кривой C, равной 0 в том и только в том случае, когда $p \equiv 0$.

- Докажите, что ограничение 1-формы dF на плоскую кривую, где F — мероморфная функция на плоскости, является дифференциалом ограничения функции F на эту кривую.
- Рассмотрим результат ограничения 1-формы (a) xdx; (b) ydx на плоскую кривую $x^n + y^n = 1$. Найдите нули этой 1-формы и укажите их порядки. Найдите полюса этой 1-формы и укажите их порядки.

Семинар 11.

- Пусть f — проекция квадрики $x^2 + y^2 = 1$ на ось x. Верно ли, что любая мероморфная 1-форма на квадрике является поднятием некоторой 1-формы на прямой при отображении f?
- Пусть плоская кривая задана уравнением $y^4 = x^3 - 3x$. Найдите ее род. Найдите полюсы ограничения 1-формы dx/y на эту кривую и укажите их порядки. Постройте базис голоморфных 1-форм на этой кривой.
- Докажите, что всякая 1 форма вида

$$\frac{p(x)dx}{y}$$

где p — многочлен степени не выше $g-1$, является голоморфной 1-формой на гиперэллиптической кривой $y^2 = Q_{2g+1}(x)$, где Q_{2g+1} — многочлен степени $2g+1$ с попарно различными корнями.

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Лекция 12. Дифференциальные 1-формы на кривых

На прошлой лекции мы предъявили на всякой алгебраической кривой рода g g-мерное пространство голоморфных 1-форм. Цель сегодняшней лекции — доказать, что это все голоморфные 1-формы на кривой. Для этого мы докажем, что пространство голоморфных 1-форм не может быть более, чем g-мерно. Инструментом доказательства будет интегрирование 1-форм по вещественным путям в комплексных кривых.

Лекция 12. Интегрирование 1-форм

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая, ω — голоморфная дифференциальная 1-форма на ней. Каждому непрерывному пути $\gamma : [0,1] \to C$ сопоставляется интеграл

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*(\omega)$$

1-формы ω вдоль этого пути.

Лекция 12. Интегрирование 1-форм

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая, ω — голоморфная дифференциальная 1-форма на ней. Каждому непрерывному пути $\gamma : [0,1] \to C$ сопоставляется интеграл

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*(\omega)$$

1-формы ω вдоль этого пути.

Точно так же можно интегрировать и мероморфные 1-формы, только в этом случае путь γ не должен проходить через полюса 1-формы ω.

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая, ω — голоморфная дифференциальная 1-форма на ней. Каждому непрерывному пути $\gamma : [0,1] \to C$ сопоставляется интеграл

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*(\omega)$$

1-формы ω вдоль этого пути.

Точно так же можно интегрировать и мероморфные 1-формы, только в этом случае путь γ не должен проходить через полюса 1-формы ω.

Интеграл от 1-формы по пути не меняется при замене его другим путем в том же гомотопичском классе. Если 1-форма ω является точной, т.е. $\omega = df$ для некоторой мероморфной функции f, то по формуле Ньютона–Лейбница ее интеграл не зависит от выбранного пути, соединяющего две данные точки $x_0 = \gamma(0)$ и $x_1 = \gamma(1)$,

$$\int_\gamma df = \int_{x_0}^{x_1} df = f(x_1) - f(x_0).$$

В частности, интеграл от точной 1-формы по любому замкнутому пути равен 0.

Интеграл 1-формы на алгебраической кривой вдоль замкнутого пути на этой кривой называется *периодом* этой 1-формы. Выберем на кривой C рода g какой-нибудь набор $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}\}$ из $2g$ замкнутых путей с началом и концом в данной точке $x_0 \in C$, классы гомологий которых образуют базис в группе одномерных гомологий $H_1(C, \mathbb{Z})$.

Lemma

Если все периоды гладкой вещественной 1-формы ω по путям γ_i равны нулю, то эта 1-форма точна, $\omega = df$ для некоторой гладкой вещественной функции f.

Доказательство. Функция f строится стандартным образом: мы полагаем $f(x) = \int_{x_0}^{x} \omega$. Поскольку все периоды 1-формы ω равны 0, этот интеграл не зависит от выбора гомотопического класса пути, соединяющего точки x_0 и x.

Лекция 12. Периоды 1-форм

Интеграл 1-формы на алгебраической кривой вдоль замкнутого пути на этой кривой называется *периодом* этой 1-формы. Выберем на кривой C рода g какой-нибудь набор $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}\}$ из $2g$ замкнутых путей с началом и концом в данной точке $x_0 \in C$, классы гомологий которых образуют базис в группе одномерных гомологий $H_1(C, \mathbb{Z})$.

Lemma

Если все периоды гладкой вещественной 1-формы ω по путям γ_i равны нулю, то эта 1-форма точна, $\omega = df$ для некоторой гладкой вещественной функции f.

Доказательство. Функция f строится стандартным образом: мы полагаем $f(x) = \int_{x_0}^{x} \omega$. Поскольку все периоды 1-формы ω равны 0, этот интеграл не зависит от выбора гомотопического класса пути, соединяющего точки x_0 и x.

Corollary

Размер пространства голоморфных 1-форм на алгебраической кривой рода g не превышает $2g$.

Действительно, разность двух голоморфных 1-форм с одинаковыми периодами имеет нулевые периоды, а значит является дифференциалом голоморфной функции, т.е. нулем.

Каждой голоморфной 1-форме ω можно сопоставить комплексно сопряженную ей антиголоморфную 1-форму $\bar{\omega}$. Мы хотим доказать, что если голоморфные 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_k$ линейно независимы, то классы когомологий 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_k, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_k$ линейно независимы. Отсюда сразу вытекает, что $k \leq g$.

Каждой голоморфной 1-форме ω можно сопоставить комплексно сопряженную ей антиголоморфную 1-форму $\bar{\omega}$. Мы хотим доказать, что если голоморфные 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_k$ линейно независимы, то классы когомологий 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_k, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_k$ линейно независимы. Отсюда сразу вытекает, что $k \le g$.

Lemma

Если для пары голоморфных 1-форм ω_1, ω_2 1-форма $\omega_1 + \bar{\omega}_2$ является дифференциалом гладкой функции, то $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Лекция 12. Антиголоморфные 1-формы

Lemma

Если для пары голоморфных 1*-форм* ω_1, ω_2 1*-форма* $\omega_1 + \bar{\omega}_2$ *является дифференциалом гладкой функции, то* $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Lemma

Если для пары голоморфных 1-форм ω_1, ω_2 1-форма $\omega_1 + \bar{\omega}_2$ является дифференциалом гладкой функции, то $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Доказательство. Пусть $\omega_1 \wedge \bar{\omega}_2 = df$. В локальной координате $z = u + iv$ имеем $\bar{z} = u - iv$, $dz \wedge d\bar{z} = -2idu \wedge dv$ и $\omega_2 = g_2(z)dz$. Отсюда

$$\frac{i}{2}\omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = |g_2(z)|^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = |g_2(z)|^2 du \wedge dv.$$

Это означает, что если $\omega_2 \neq 0$, то интеграл $\iint_C \frac{i}{2}\omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 > 0$. С другой стороны,

$$\omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = \omega_2 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = \omega_2 \wedge (\omega_1 + \bar{\omega}_2) = \omega_2 \wedge df,$$

и

$$d(f\omega_2) = df \wedge \omega_2 + fd\omega_2 = df \wedge \omega_2,$$

т.е. 1-форма $df \wedge \omega_2$ точна, а значит,

$$\iint_C df \wedge \omega_2 = 0.$$

Лекция 12. Вычеты

Для мероморфных 1-форм утверждение о том, что интеграл по пути не зависит от выбора пути с данными концами в данном гомотопическом классе перестает быть верным. Точнее, оно остается верным но не для кривой C, а для этой кривой проколотой в полюсах 1-формы. Гомологическое описание мероморфной 1-формы дополняется описанием ее интегралов по путям, обходящим вокруг ее полюсов, — *вычетов*.

Лекция 12. Вычеты

Для мероморфных 1-форм утверждение о том, что интеграл по пути не зависит от выбора пути с данными концами в данном гомотопическом классе перестает быть верным. Точнее, оно остается верным но не для кривой C, а для этой кривой проколотой в полюсах 1-формы. Гомологическое описание мероморфной 1-формы дополняется описанием ее интегралов по путям, обходящим вокруг ее полюсов, — *вычетов*.

Пусть мероморфная 1-форма ω в локальной координате z в окрестности своего полюса порядка $k \geq 1$ раскладывается в ряд Лорана

$$\omega = \left(\frac{a_{-k}}{z^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots\right) dz, \qquad a_{-k} \neq 0.$$

Интеграл от каждого монома этого ряда кроме монома $a_{-1}dz/z$ по петле γ, обходящей точку $z = 0$ в положительном направлении, равен 0: интегрируется дифференциал функции. Для исключительного монома

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \frac{a_{-1}dz}{z} = a_{-1} \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t + i\cos t)dt}{\cos t + i \sin t} = 2\pi i a_{-1}.$$

Величина $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega$ называется *вычетом* 1-формы ω в ее полюсе. Она не зависит от выбора локальной координаты z.

Лекция 12. Сумма вычетов

Theorem

Сумма вычетов мероморфной 1*-формы на гладкой алгебраической кривой равна* 0*.*

Theorem

Сумма вычетов мероморфной 1*-формы на гладкой алгебраической кривой равна* 0*.*

Доказательство 1. Представим поверхность как результат склейки сторон многоугольника. Сумма вычетов 1-формы — ее интеграл по композиции петель, обходящих все полюса. Эта композиция гомотопна границе многоугольника. Граница гомологична нулю, так как по каждому отрезку проходит два раза — в противоположных направлениях.

Theorem

Сумма вычетов мероморфной 1-формы на гладкой алгебраической кривой равна 0.

Доказательство 1. Представим поверхность как результат склейки сторон многоугольника. Сумма вычетов 1-формы — ее интеграл по композиции петель, обходящих все полюса. Эта композиция гомотопна границе многоугольника. Граница гомологична нулю, так как по каждому отрезку проходит два раза — в противоположных направлениях.

Доказательство 2. Выберем маленькие диски с центром в каждом из полюсов 1-формы ω. На дополнении к этим дискам ω голоморфна. Значит ее дифференциал равен нулю, и по формуле Стокса ее интеграл по границе равен нулю. С другой стороны, этот интеграл — сумма вычетов 1-формы ω, с точностью до умножения на $-1/2\pi i$.

Лекция 12. Линейные расслоения над комплексными кривыми; дивизоры

Пусть $p : E \to C$ — линейное расслоение над кривой C. Всякому его ненулевому мероморфному сечению $\sigma : C \to E$ сопоставляются два набора точек на C — нули и полюса сечения. Кроме того, каждому нулю и каждому полюсу приписано натуральное число — порядок нуля или полюса. Совокупность нулей и полюсов сечения, с учетом их кратностей, называется *дивизором* сечения и записывается в виде формальной суммы

$$(\sigma) = \sum a_i x_i, \qquad a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

положительные коэффициенты это порядки нулей, отрицательные — порядки полюсов.

Лекция 12. Линейные расслоения над комплексными кривыми; дивизоры

Пусть $p : E \to C$ — линейное расслоение над кривой C. Всякому его ненулевому мероморфному сечению $\sigma : C \to E$ сопоставляются два набора точек на C — нули и полюса сечения. Кроме того, каждому нулю и каждому полюсу приписано натуральное число — порядок нуля или полюса. Совокупность нулей и полюсов сечения, с учетом их кратностей, называется *дивизором* сечения и записывается в виде формальной суммы

$$(\sigma) = \sum a_i x_i, \qquad a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

положительные коэффициенты это порядки нулей, отрицательные — порядки полюсов.

Пример. Для $C = \mathbb{C}P^1$ дивизор функции z равен

$$(z) = 1 \cdot 0 - 1 \cdot \infty,$$

а дивизор 1-формы dz равен

$$(dz) = -2 \cdot \infty.$$

Definition

Дивизором на кривой C называется формальная линейная комбинация конечного числа ее точек с ненулевыми целыми коэффициентами, $\sum a_i \cdot x_i$, $a_i \neq 0$.

Definition

Дивизором на кривой C называется формальная линейная комбинация конечного числа ее точек с ненулевыми целыми коэффициентами, $\sum a_i \cdot x_i$, $a_i \neq 0$.

Дивизоры также естественно записывать в виде сумм

$$\sum_{x \in C} a_x \cdot x, \qquad a_x \in \mathbb{Z},$$

по всем точкам кривой C, в которых лишь конечное число коэффициентов a_x отлично от нуля.

Definition

Дивизором на кривой C называется формальная линейная комбинация конечного числа ее точек с ненулевыми целыми коэффициентами, $\sum a_i \cdot x_i$, $a_i \neq 0$.

Дивизоры также естественно записывать в виде сумм

$$\sum_{x \in C} a_x \cdot x, \qquad a_x \in \mathbb{Z},$$

по всем точкам кривой C, в которых лишь конечное число коэффициентов a_x отлично от нуля.

Дивизоры образуют коммутативную группу относительно сложения:

$$\sum_{x \in C} a_x \cdot x + \sum_{x \in C} b_x \cdot x = \sum_{x \in C} (a_x + b_x) \cdot x.$$

Нулем в этой группе является нулевой дивизор.

Количество нулей каждой мероморфной функции с учетом кратностей равно количеству ее полюсов с учетом их кратностей. Поэтому для дивизора $(f) = \sum a_i \cdot x_i$ мероморфной функции имеем $\sum a_i = 0$.
Умножив ненулевое мероморфное сечение $\sigma : C \to E$ расслоения $p : E \to C$ на ненулевую мероморфную функцию $f : C \to \mathbb{C}P^1$, мы получим новое сечение $f\sigma : C \to E$, дивизор которого равен

$$(f\sigma) = (f) + (\sigma).$$

Поэтому сумма коэффициентов дивизора $(f\sigma)$ такая же, как у (σ). Поскольку отношение любых двух ненулевых сечений данного линейного расслоения является мероморфной функцией, дивизоры всех ненулевых сечений одного линейного расслоения имеют одну и ту же сумму коэффициентов.

Лекция 12. Степень дивизора

Количество нулей каждой мероморфной функции с учетом кратностей равно количеству ее полюсов с учетом их кратностей. Поэтому для дивизора $(f) = \sum a_i \cdot x_i$ мероморфной функции имеем $\sum a_i = 0$.

Умножив ненулевое мероморфное сечение $\sigma : C \to E$ расслоения $p : E \to C$ на ненулевую мероморфную функцию $f : C \to \mathbb{C}P^1$, мы получим новое сечение $f\sigma : C \to E$, дивизор которого равен

$$(f\sigma) = (f) + (\sigma).$$

Поэтому сумма коэффициентов дивизора $(f\sigma)$ такая же, как у (σ). Поскольку отношение любых двух ненулевых сечений данного линейного расслоения является мероморфной функцией, дивизоры всех ненулевых сечений одного линейного расслоения имеют одну и ту же сумму коэффициентов.

Definition

Степенью дивизора на кривой C называется сумма его коэффициентов, $\deg(\sum a_i \cdot x_i) = \sum a_i$. *Степенью линейного расслоения* называется степень дивизора любого его ненулевого мероморфного сечения.

Лекция 12. Степень дивизора

Количество нулей каждой мероморфной функции с учетом кратностей равно количеству ее полюсов с учетом их кратностей. Поэтому для дивизора $(f) = \sum a_i \cdot x_i$ мероморфной функции имеем $\sum a_i = 0$.

Умножив ненулевое мероморфное сечение $\sigma : C \to E$ расслоения $p : E \to C$ на ненулевую мероморфную функцию $f : C \to \mathbb{C}P^1$, мы получим новое сечение $f\sigma : C \to E$, дивизор которого равен

$$(f\sigma) = (f) + (\sigma).$$

Поэтому сумма коэффициентов дивизора $(f\sigma)$ такая же, как у (σ). Поскольку отношение любых двух ненулевых сечений данного линейного расслоения является мероморфной функцией, дивизоры всех ненулевых сечений одного линейного расслоения имеют одну и ту же сумму коэффициентов.

Definition

Степенью дивизора на кривой C называется сумма его коэффициентов, $\deg(\sum a_i \cdot x_i) = \sum a_i$. *Степенью линейного расслоения* называется степень дивизора любого его ненулевого мероморфного сечения.

Пример. Степень тривиального линейного расслоения $C \times \mathbb{C} \to C$ равна 0. Степень кокасательного расслоения к $\mathbb{C}P^1$ равна -2.

Лекция 12. Линейная эквивалентность дивизоров

Дивизоры степени 0 образуют подгруппу в группе дивизоров. Дивизоры мероморфных функций образуют подгруппу в этой подгруппе; эти дивизоры называются *главными*.

Definition

Два дивизора называются *линейно эквивалентными*, если их разность является дивизором мероморфной функции. Факторгруппа группы дивизоров по подгруппе главных дивизоров называется *группой классов дивизоров*.

Дивизоры любых двух сечений одного линейного расслоения линейно эквивалентны между собой.

Дивизоры степени 0 образуют подгруппу в группе дивизоров. Дивизоры мероморфных функций образуют подгруппу в этой подгруппе; эти дивизоры называются *главными*.

Definition

Два дивизора называются *линейно эквивалентными*, если их разность является дивизором мероморфной функции. Факторгруппа группы дивизоров по подгруппе главных дивизоров называется *группой классов дивизоров*.

Дивизоры любых двух сечений одного линейного расслоения линейно эквивалентны между собой.

Упражнение. Пусть C — эллиптическая кривая, $p, q \in C$ — различные точки на ней. Существует ли мероморфная функция f на C с дивизором $(f) = 1 \cdot p - 1 \cdot q$?

Семинар 12.

- Докажите, что касательное и кокасательное расслоения к проективной прямой не являются тривиальными.
- Пусть $E_1 \to C$, $E_2 \to C$ — два линейных расслоения над кривой C, $E_1 \otimes_C E_2$ — линейное расслоение, являющееся их тензорным произведением. Докажите, что

$$\deg(E_1 \otimes_C E_2) = \deg(E_1) + \deg(E_2).$$

- Докажите, что степени двойственных линейных расслоений противоположны.

Семинар 12.

- Приведите пример линейного расслоения степени 1 над проективной прямой.
- Докажите, что для каждого целого d над проективной прямой есть линейное расслоение степени d.
- Чему равна степень касательного расслоения к кривой рода g? Кокасательного расслоения?

Семинар 12.

- Пусть $E_1 \to C$, $E_2 \to C$ — два линейных расслоения над данной кривой C, $\sigma_1 : C \to E_1$, $\sigma_2 : C \to E_2$ — ненулевые мероморфные сечения этих расслоений. Докажите, что если $(\sigma_1) = (\sigma_2)$, то расслоения E_1, E_2 изоморфны.
- Опишите все линейные расслоения над проективной прямой.
- Приведите пример нетривиального линейного расслоения над эллиптической кривой. Чему равна степень этого расслоения? Укажите класс линейной эквивалентности дивизоров его сечений.

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Лекция 13. Восстановление линейного расслоения по классу дивизора

На прошлой лекции мы сопоставили каждому линейному расслоению над данной гладкой компактной алгебраической кривой C класс линейной эквивалентности дивизоров его сечений. Кроме того, мы доказали, что если для двух линейных расслоений эти классы совпадают, то сами расслоения изоморфны. Наша ближайшая цель — доказать следующее утверждение.

Лекция 13. Восстановление линейного расслоения по классу дивизора

На прошлой лекции мы сопоставили каждому линейному расслоению над данной гладкой компактной алгебраической кривой C класс линейной эквивалентности дивизоров его сечений. Кроме того, мы доказали, что если для двух линейных расслоений эти классы совпадают, то сами расслоения изоморфны. Наша ближайшая цель — доказать следующее утверждение.

Theorem

Каждый класс линейной эквивалентности дивизоров на данной гладкой компактной алгебраической кривой C является классом дивизоров некоторого линейного расслоения над C.

Линейное расслоение, сопоставляемое дивизору D, обозначается $\mathcal{O}(D)$.

На прошлой лекции мы сопоставили каждому линейному расслоению над данной гладкой компактной алгебраической кривой C класс линейной эквивалентности дивизоров его сечений. Кроме того, мы доказали, что если для двух линейных расслоений эти классы совпадают, то сами расслоения изоморфны. Наша ближайшая цель — доказать следующее утверждение.

Theorem

Каждый класс линейной эквивалентности дивизоров на данной гладкой компактной алгебраической кривой C является классом дивизоров некоторого линейного расслоения над C.

Линейное расслоение, сопоставляемое дивизору D, обозначается $\mathcal{O}(D)$.

Доказательство. Построим искомое расслоение. Пусть $\sum_{i=1}^k a_i x_i$, $a_i \neq 0$, $x_i \in C$ — дивизор. Выберем на C маленькие диски U_i с центрами в точках x_i, z_i — произвольная локальная координата в U_i, и пусть $W = C \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$. Склеим расслоение над C из тривиального расслоения над W и тривиальных расслоений над U_i, взяв в качестве функций склейки над $U_i \cap W$ отображения $(z_i, t) \mapsto (z_i, z_i^{-a_i} t)$, где t — координата в слое. Тривиализующее сечение расслоения над W превращается в мероморфное сечение построенного линейного расслоения над C, имеющее заданный дивизор.

Лекция 13. Отображения кривых в проективное пространство, связанные с линейными расслоениями

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая, $L \to C$ — линейное расслоение над C. Голоморфные сечения $\sigma : C \to L$ расслоения L образуют векторное пространство $H^0(L)$ над $\mathbb{C}$; это векторное пространство конечномерно. Точка $x \in C$, в которой все сечения расслоения L обращаются в нуль, называется *базисной* для этого расслоения. Если у расслоения L есть ненулевые голоморфные сечения, то множество его базисных точек конечно.

Лекция 13. Отображения кривых в проективное пространство, связанные с линейными расслоениями

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая, $L \to C$ — линейное расслоение над C. Голоморфные сечения $\sigma : C \to L$ расслоения L образуют векторное пространство $H^0(L)$ над $\mathbb{C}$; это векторное пространство конечномерно. Точка $x \in C$, в которой все сечения расслоения L обращаются в нуль, называется *базисной* для этого расслоения. Если у расслоения L есть ненулевые голоморфные сечения, то множество его базисных точек конечно.

Каждая небазисная точка $x \in C$ задает линейный функционал ℓ_x на векторном пространстве $H^0(L)$, определенный с точностью до умножения на ненулевую константу: $\ell_x(\sigma_1)/\ell_x(\sigma_2) = \sigma_1(x)/\sigma_2(x)$ — корректно определенное число. Поэтому линейное расслоение $L \to C$ определяет отображение $x \mapsto \ell_x$ дополнения к базисным точкам в C в проективизацию двойственного к пространству голоморфных сечений расслоения L. Это отображение продолжается до непрерывного отображения $\varphi_L : C \to P(H^0(L))^\vee$.

Пример. Кокасательное расслоение $T^\vee C \to C$ определяет отображение кривой C рода $g > 1$ в проективизацию g-мерного пространства, двойственного пространству $H^0(T^\vee C)$ голоморфных 1-форм на C. Это отображение называется *каноническим*.

Пример. Кокасательное расслоение $T^\vee C \to C$ определяет отображение кривой C рода $g > 1$ в проективизацию g-мерного пространства, двойственного пространству $H^0(T^\vee C)$ голоморфных 1-форм на C. Это отображение называется *каноническим*. Отображения φ_L удобно строить явно, выбрав базис в пространстве голоморфных сечений данного линейного расслоения L. Например, базис $\omega_1, \dots, \omega_g$ в пространстве голоморфных 1-форм на данной кривой C рода g порождает отображение $x \mapsto (\omega_1(x) : \dots : \omega_g(x))$ кривой C в $\mathbb{C}P^{g-1}$.

Лекция 13. Эффективные дивизоры

Дивизор $D = \sum a_i x_i$ называется *эффективным*, если $a_i \geq 0$ для всех i; в этом случае пишем $D \geq 0$.
Эффективные дивизоры образуют *конус*, т.е. сумма двух эффективных дивизоров эффективна, и результат умножения эффективного дивизора на положительное целое число является эффективным.

Лекция 13. Эффективные дивизоры

Дивизор $D = \sum a_i x_i$ называется *эффективным*, если $a_i \geq 0$ для всех i; в этом случае пишем $D \geq 0$.
Эффективные дивизоры образуют *конус*, т.е. сумма двух эффективных дивизоров эффективна, и результат умножения эффективного дивизора на положительное целое число является эффективным.
Для данного дивизора D обозначим множество линейно эквивалентных ему эффективных дивизоров через $|D|$. Это множество естественно отождествляется с проективизацией пространства голоморфных сечений расслоения $\mathcal{O}(D)$: дивизор произвольного мероморфного сечения расслоения $\mathcal{O}(D)$ имеет вид $(f) + D$ для некоторой мероморфной функции f на C, и дивизор $(f) + D$ эффективен тогда и только тогда, когда соответствующее ему сечение голоморфно.

Лекция 13. Эффективные дивизоры

Дивизор $D = \sum a_i x_i$ называется *эффективным*, если $a_i \geq 0$ для всех i; в этом случае пишем $D \geq 0$.

Эффективные дивизоры образуют *конус*, т.е. сумма двух эффективных дивизоров эффективна, и результат умножения эффективного дивизора на положительное целое число является эффективным.

Для данного дивизора D обозначим множество линейно эквивалентных ему эффективных дивизоров через $|D|$. Это множество естественно отождествляется с проективизацией пространства голоморфных сечений расслоения $\mathcal{O}(D)$: дивизор произвольного мероморфного сечения расслоения $\mathcal{O}(D)$ имеет вид $(f) + D$ для некоторой мероморфной функции f на C, и дивизор $(f) + D$ эффективен тогда и только тогда, когда соответствующее ему сечение голоморфно.

Definition

Проективное пространство $|D|$ называется *полной линейной системой*, отвечающей дивизору D. Проективные подпространства в $|D|$ называются *линейными системами*.

Пусть D — дивизор на кривой C. Через $L(D)$ обозначается векторное пространство мероморфных функций, дивизор которых больше $-D$, $L(D) = \{f | (f) + D \geq 0\}$, через $l(D)$ — его размерность, $l(D) = \dim L(D)$. Через $i(D)$ обозначается размерность пространства мероморфных 1-форм на C, дивизор которых больше D.

Theorem

Пусть C *— гладкая алгебраическая кривая рода* g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. *Тогда*

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Проверим, что это равенство выполняется в уже известных нам случаях.

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Проверим, что это равенство выполняется в уже известных нам случаях.
Пример. Пусть $g = 0$. Если для дивизора D его степень $d = \deg(D) \geq 0$, то, как мы знаем, $l(D) = d + 1$ и $i(D) = 0$. Если $d = -1$, то $l(D) = i(D) = 0$. Если же $d < -1$, то $l(D) = 0$ и $i(D) = -d - 1$.

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Проверим, что это равенство выполняется в уже известных нам случаях.

Пример. Пусть $g = 0$. Если для дивизора D его степень $d = \deg(D) \geq 0$, то, как мы знаем, $l(D) = d + 1$ и $i(D) = 0$. Если $d = -1$, то $l(D) = i(D) = 0$. Если же $d < -1$, то $l(D) = 0$ и $i(D) = -d - 1$.

Пример. Пусть $g = 1$. Для дивизора $D = 0$ формула Римана–Роха приобретает вид $l(0) = 0 - 1 + 1 + i(0) = i(0)$. Действительно, пространство голоморфных функций на эллиптической кривой одномерно, $l(0) = 1$, как и пространство голоморфных 1-форм, нигде не обращающихся в 0.

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Theorem

Пусть C *— гладкая алгебраическая кривая рода* g*,* $D \in \mathrm{Div}(C)$*,* $d = \deg(D)$*. Тогда*

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Рациональная кривая. Докажем, наконец, что $\mathbb{C}P^1$ — единственная кривая рода 0. Пусть C — кривая рода $g = 0$, и пусть $D = 1 \cdot x \in \mathrm{Div}(C)$, $x \in C$, $\deg D = 1$. Тогда $l(D) = l(1 \cdot x) = 1 - 0 + 1 + i(1 \cdot x) = 2 + i(1 \cdot x) \geq 2$. Поэтому на C существует мероморфная функция с полюсом первого порядка в точке x, не имеющая других полюсов. Эта функция имеет степень 1 и осуществляет биголоморфизм кривой C на $\mathbb{C}P^1$.

Theorem

Пусть C — *гладкая алгебраическая кривая рода* g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. *Тогда*

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Theorem

Пусть C — *гладкая алгебраическая кривая рода* g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. *Тогда*

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Функция Вейерштрасса. Мы строили функцию Вейерштрасса на эллиптической кривой, представляющей собой результат факторизации комплексной прямой $\mathbb{C}$ по решетке $L_\tau = \langle 1, \tau \rangle$, как сумму ряда по узлам решетки. Построенная мероморфная функция на кривой имеет единственный полюс, и порядок этого полюса равен 2. Формула Римана–Роха позволяет доказать существование функции с полюсом второго порядка, не строя ее явно:

$$l(2 \cdot x) = 2 - 1 + 1 + i(2 \cdot x) = 2 + i(2 \cdot x) \geq 2.$$

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Функция Вейерштрасса. Мы строили функцию Вейерштрасса на эллиптической кривой, представляющей собой результат факторизации комплексной прямой $\mathbb{C}$ по решетке $L_\tau = \langle 1, \tau \rangle$, как сумму ряда по узлам решетки. Построенная мероморфная функция на кривой имеет единственный полюс, и порядок этого полюса равен 2. Формула Римана–Роха позволяет доказать существование функции с полюсом второго порядка, не строя ее явно:

$$l(2 \cdot x) = 2 - 1 + 1 + i(2 \cdot x) = 2 + i(2 \cdot x) \geq 2.$$

Упражнение. Докажите, что функция Вейерштрасса (как и любая функция с единственным полюсом второго порядка) четная, $\wp(-z) = \wp(z)$ для координаты z на торе с центром в полюсе функции.

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Lemma

У кокасательного расслоения нет базисных точек.

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Lemma

У кокасательного расслоения нет базисных точек.

Доказательство. Пусть $x \in C$ — базисная точка кокасательного расслоения $T^\vee C$, т.е. такая точка, в которой каждая голоморфная 1-форма на C обращается в 0. Тогда

$$l(1 \cdot x) = 1 - g + 1 + i(1 \cdot x) = 2 - g + g = 2,$$

поскольку $i(1 \cdot x) = i(0) = g$. Это означает, что на C есть мероморфная функция с единственным полюсом $x \in C$ порядка 1, а значит, $g = 0$.

Theorem

Пусть C *— гладкая алгебраическая кривая рода* g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. *Тогда*

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Лекция 13. Применения теоремы Римана–Роха

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Lemma

Если каноническое отображение $\varphi : C \to \mathbb{C}P^{g-1}$ кривой C рода g переводит какие-то две ее точки в одну, $\varphi(x) = \varphi(y)$, $x \neq y$, то кривая C гиперэллиптическая.

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Lemma

Если каноническое отображение $\varphi : C \to \mathbb{C}P^{g-1}$ кривой C рода g переводит какие-то две ее точки в одну, $\varphi(x) = \varphi(y)$, $x \neq y$, то кривая C гиперэллиптическая.

Доказательство. Пространство голоморфных 1-форм с нулем в точке x совпадает с пространством голоморфных 1-форм с нулем в точке y, поэтому $i(1 \cdot x + 1 \cdot y) = i(1 \cdot x) = i(1 \cdot y) = g - 1$. Отсюда

$$l(1 \cdot x + 1 \cdot y) = 2 - g + 1 + (g - 1) = 2.$$

Поэтому на C есть функция с полюсами первого порядка в точках x и y, не имеющая других полюсов. Степень этой функции равна 2, и она осуществляет гиперэллиптическое накрытие проективной прямой.

Theorem

Пусть C — *гладкая алгебраическая кривая рода* g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. *Тогда*

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Лекция 13. Применения теоремы Римана–Роха

Theorem

Пусть C — *гладкая алгебраическая кривая рода* g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. *Тогда*

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Lemma

Всякая кривая рода $g = 2$ *является гиперэллиптической.*

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Lemma

Всякая кривая рода $g = 2$ является гиперэллиптической.

Доказательство. Каноническое отображение φ кривой рода $g = 2$ отображает ее в $\mathbb{C}P^{g-1} \equiv \mathbb{C}P^1$. Оно не может быть взаимно-однозначным на образ, поэтому $\varphi(x) = \varphi(y)$ для некоторых несовпадающих точек $x, y \in C$. Поэтому кривая C гиперэллиптическая.

Семинар 13.

- Пусть $D = \sum a_i \cdot x_i + a_\infty \cdot \infty$ — дивизор на проективной прямой. Опишите пространство $L(D)$.
- Докажите, что $i(D) = l(K - D)$, где K — канонический дивизор.
- Пусть $C \subset \mathbb{C}P^n$ — гладкая алгебраическая кривая степени d. Точки пересечения гиперплоскости в $\mathbb{C}P^n$ с кривой C образуют эффективный дивизор степени d. Докажите, что все такие дивизоры образуют линейную систему. Найдите размерность этой линейной системы. Является ли она полной?
- Пусть $C \subset \mathbb{C}P^n$ — гладкая алгебраическая кривая степени d. Точки пересечения гиперповерхности степени k в $\mathbb{C}P^n$ с кривой C образуют эффективный дивизор степени kd. Докажите, что все такие дивизоры образуют линейную систему. Найдите размерность этой линейной системы. Является ли она полной?

Семинар 13.

- Верно ли, что каноническое отображение гиперэллиптической кривой является гиперэллиптическим накрытием ее образа?
- Докажите, что если для пары точек $x, y \in C$, $x \neq y$ существует функция с полюсами первого порядка в них и без других полюсов, то $\varphi(x) = \varphi(y)$.
- Пусть $f : C \to \mathbb{C}P^1$ — гиперэллиптическое накрытие. Найдите размерность $l(D)$ пространства $L(D)$ для следующих случаев: а) $D = 2 \cdot x$, где $x = f^{-1}(f(x))$; б) $D = 2 \cdot x$, где $x \neq f^{-1}(f(x))$; в) $D = 1 \cdot x + 1 \cdot y$, где $x \neq y$, $f(x) = f(y)$; г) $D = 1 \cdot x + 1 \cdot y$, где $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$.

Семинар 13.

- Докажите, что всякая кривая рода 2 допускает погружение в проективную плоскость с одной двойной точкой.

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Лекция 14. Задача Миттаг–Леффлера

Для данного набора главных частей локальных мероморфных функций в полюсах на данной кривой определить, является ли он набором главных частей глобальной мероморфной функции на этой кривой, не имеющей других полюсов.

Для данного набора главных частей локальных мероморфных функций в полюсах на данной кривой определить, является ли он набором главных частей глобальной мероморфной функции на этой кривой, не имеющей других полюсов.

Definition

Две мероморфные функции f, g, определенные в окрестности данной точки $x \in C$, имеют в этой точке *одинаковые главные части*, если их разность $f - g$ не имеет полюса в точке x. *Главной частью порядка* k функций в данной точке $x \in C$ называется класс эквивалентности мероморфных функций с полюсом порядка k в x относительно этого отношения эквивалентности.

Для данного набора главных частей локальных мероморфных функций в полюсах на данной кривой определить, является ли он набором главных частей глобальной мероморфной функции на этой кривой, не имеющей других полюсов.

Definition

Две мероморфные функции f, g, определенные в окрестности данной точки $x \in C$, имеют в этой точке *одинаковые главные части*, если их разность $f - g$ не имеет полюса в точке x. *Главной частью порядка* k функций в данной точке $x \in C$ называется класс эквивалентности мероморфных функций с полюсом порядка k в x относительно этого отношения эквивалентности.

Две функции с полюсом порядка k в точке $x \in C$ имеют в нем одинаковые главные части в том и только в том случае, если в какой-нибудь (и, тем самым, в любой) координате z в окрестности точки x разложения этих функций в ряд Лорана имеют один и тот же набор коэффициентов при отрицательных степенях переменной z:

$$\frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + \dots .$$

Начиная с нулевой степени z^0, коэффициенты разложения могут быть различными.

На набор главных частей в полюсах есть естественное ограничение.

Лекция 14. Задача Миттаг–Леффлера

На набор главных частей в полюсах есть естественное ограничение.
Для данной голоморфной 1-формы ω и данной главной части f в точке $x \in C$ определен вычет главной части мероморфной 1-формы $f\omega$ в точке x:

$$\mathrm{Res}_x f\omega$$

как коэффициент при z^{-1} разложения 1-формы $f\omega$ в ряд Лорана.

Лекция 14. Задача Миттаг–Леффлера

На набор главных частей в полюсах есть естественное ограничение.
Для данной голоморфной 1-формы ω и данной главной части f в точке $x \in C$ определен вычет главной части мероморфной 1-формы $f\omega$ в точке x:

$$\mathrm{Res}_x f\omega$$

как коэффициент при z^{-1} разложения 1-формы $f\omega$ в ряд Лорана.

Lemma

Если данный набор главных частей $f_1, \dots, f_n$ в точках $x_1, \dots, x_n \in C$ является набором главных частей мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$, не имеющей других полюсов, то

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{x_i} f_i\omega = 0$$

для любой голоморфной 1-формы ω на C.

Действительно, в этом случае $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{x_i} f_i\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{x_i} f\omega = 0$.

Theorem (Риман)

Набор главных частей $f_1, \dots, f_n$ *в точках* $x_1, \dots, x_n \in C$ *является набором главных частей мероморфной функции* $f : C \to \mathbb{C}P^1$*, не имеющей других полюсов, если и только если* $\sum_{i=1}^n \mathrm{Res}_{x_i} f_i\omega = 0$ *для любой голоморфной* 1*-формы* ω *на* C*.*

Theorem (Риман)

Набор главных частей $f_1, \dots, f_n$ в точках $x_1, \dots, x_n \in C$ является набором главных частей мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$, не имеющей других полюсов, если и только если $\sum_{i=1}^n \mathrm{Res}_{x_i} f_i \omega = 0$ для любой голоморфной 1-формы ω на C.

Тем самым, для проверки реализуемости мероморфной функцией данного набора главных частей достаточно проверить g равенств нулю сумм вычетов для выбранного базиса $\omega_1, \dots, \omega_g$ пространства голоморфных 1-форм на C.

Theorem (Риман)

Набор главных частей $f_1, \dots, f_n$ в точках $x_1, \dots, x_n \in C$ является набором главных частей мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$, не имеющей других полюсов, если и только если $\sum_{i=1}^n \mathrm{Res}_{x_i} f_i \omega = 0$ для любой голоморфной 1-формы ω на C.

Тем самым, для проверки реализуемости мероморфной функцией данного набора главных частей достаточно проверить g равенств нулю сумм вычетов для выбранного базиса $\omega_1, \dots, \omega_g$ пространства голоморфных 1-форм на C.

Доказательство. Ограничимся случаем, когда все полюса имеют первый порядок. Для дивизора $D = 1 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_n$ теорема Римана–Роха дает $l(D) = n - g + 1 + i(D)$. 1-формы, обращающиеся в нуль в точках x_i, не накладывают ограничений на главные части; размерность их пространства равна $i(D)$, а значит размерность пространства ограничений на вычеты равна $g - i(D)$. Размерность пространства главных частей равна n, поэтому никаких других ограничений нет.

Theorem (Риман)

Набор главных частей $f_1, \dots, f_n$ в точках $x_1, \dots, x_n \in C$ является набором главных частей мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$, не имеющей других полюсов, если и только если $\sum_{i=1}^n \mathrm{Res}_{x_i} f_i\omega = 0$ для любой голоморфной 1-формы ω на C.

Тем самым, для проверки реализуемости мероморфной функцией данного набора главных частей достаточно проверить g равенств нулю сумм вычетов для выбранного базиса $\omega_1, \dots, \omega_g$ пространства голоморфных 1-форм на C.

Доказательство. Ограничимся случаем, когда все полюса имеют первый порядок. Для дивизора $D = 1 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_n$ теорема Римана–Роха дает $l(D) = n - g + 1 + i(D)$. 1-формы, обращающиеся в нуль в точках x_i, не накладывают ограничений на главные части; размерность их пространства равна $i(D)$, а значит размерность пространства ограничений на вычеты равна $g - i(D)$. Размерность пространства главных частей равна n, поэтому никаких других ограничений нет.

Набор главных частей в полюсах определяет функцию однозначно с точностью до аддитивной константы.

Лекция 14. Вычисление Римана

Теорема Римана–Роха позволяет подсчитать размерность пространства комплексных кривых данного рода g. Как мы знаем, при $g = 0$ такая кривая одна (размерность пространства кривых равна 0). Размерность пространства эллиптических кривых ($g = 1$) равна 1 (каждая такая кривая однозначно, с точностью до действия группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, определяется вектором τ в верхней полуплоскости).

Лекция 14. Вычисление Римана

Теорема Римана–Роха позволяет подсчитать размерность пространства комплексных кривых данного рода g. Как мы знаем, при $g = 0$ такая кривая одна (размерность пространства кривых равна 0). Размерность пространства эллиптических кривых ($g = 1$) равна 1 (каждая такая кривая однозначно, с точностью до действия группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, определяется вектором τ в верхней полуплоскости).

Размерность пространства функций степени d на кривых рода g определить просто. По формуле Римана–Гурвица общая такая функция имеет $2d + 2g - 2$ точек простого ветвления, и, как мы знаем, значения функции в точках ветвления можно менять произвольно, т.е. они образуют систему локальных координат на пространстве функций.

Лекция 14. Вычисление Римана

Теорема Римана–Роха позволяет подсчитать размерность пространства комплексных кривых данного рода g. Как мы знаем, при $g = 0$ такая кривая одна (размерность пространства кривых равна 0). Размерность пространства эллиптических кривых ($g = 1$) равна 1 (каждая такая кривая однозначно, с точностью до действия группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, определяется вектором τ в верхней полуплоскости).

Размерность пространства функций степени d на кривых рода g определить просто. По формуле Римана–Гурвица общая такая функция имеет $2d + 2g - 2$ точек простого ветвления, и, как мы знаем, значения функции в точках ветвления можно менять произвольно, т.е. они образуют систему локальных координат на пространстве функций.

При $d \geq 2g$ размерность пространства мероморфных функций степени d с полюсами первого порядка на данной кривой рода g равна $2d - g + 1$: пространство дивизоров D полюсов таких функций имеет размерность d, и для конкретного дивизора $D = 1 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_d$ теорема Римана–Роха дает

$$l(D) = d - g + 1 + i(D) = d - g + 1$$

($i(D) = 0$, поскольку суммарная кратность нулей голоморфной 1-формы равна $2g - 2$).

Теорема Римана–Роха позволяет подсчитать размерность пространства комплексных кривых данного рода g. Как мы знаем, при $g = 0$ такая кривая одна (размерность пространства кривых равна 0). Размерность пространства эллиптических кривых $(g = 1)$ равна 1 (каждая такая кривая однозначно, с точностью до действия группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, определяется вектором τ в верхней полуплоскости).
Размерность пространства функций степени d на кривых рода g определить просто. По формуле Римана–Гурвица общая такая функция имеет $2d + 2g - 2$ точек простого ветвления, и, как мы знаем, значения функции в точках ветвления можно менять произвольно, т.е. они образуют систему локальных координат на пространстве функций.
При $d \geq 2g$ размерность пространства мероморфных функций степени d с полюсами первого порядка на данной кривой рода g равна $2d - g + 1$: пространство дивизоров D полюсов таких функций имеет размерность d, и для конкретного дивизора $D = 1 \cdot x_1 + \cdots + 1 \cdot x_d$ теорема Римана–Роха дает

$$l(D) = d - g + 1 + i(D) = d - g + 1$$

($i(D) = 0$, поскольку суммарная кратность нулей голоморфной 1-формы равна $2g - 2$).
Таким образом, размерность пространства кривых рода g равна

$$(2d + 2g - 2) - (2d - g + 1) = 3g - 3.$$

Лекция 14. Вычисление Римана: отмеченные точки

Значение $3g - 3$ для размерности пространства кривых рода g не согласуется с вычисленными нами ранее размерностями 0 и 1 для кривых рода $g = 0$ и $g = 1$ соответственно.

Значение $3g-3$ для размерности пространства кривых рода g не согласуется с вычисленными нами ранее размерностями 0 и 1 для кривых рода $g=0$ и $g=1$ соответственно.

Причина этого несоответствия — наличие у кривых рода 0 и у кривых рода 1 непрерывных автоморфизмов (группа автоморфизмов кривой рода 0 имеет размерность 3, кривых рода 1 — размерность 1). Кривые рода $g=2$ и выше не имеют непрерывных автоморфизмов, и формула $3g-3$ для размерности пространства таких кривых работает.

Лекция 14. Вычисление Римана: отмеченные точки

Значение $3g - 3$ для размерности пространства кривых рода g не согласуется с вычисленными нами ранее размерностями 0 и 1 для кривых рода $g = 0$ и $g = 1$ соответственно.

Причина этого несоответствия — наличие у кривых рода 0 и у кривых рода 1 непрерывных автоморфизмов (группа автоморфизмов кривой рода 0 имеет размерность 3, кривых рода 1 — размерность 1). Кривые рода $g = 2$ и выше не имеют непрерывных автоморфизмов, и формула $3g - 3$ для размерности пространства таких кривых работает.

Чтобы сделать формулу для размерности универсальной, можно добавить на кривую отмеченные точки; если отмеченных точек достаточно много, то группа автоморфизмов кривой, сохраняющих отмеченные точки, становится конечной независимо от ее рода.

Theorem

Размерность пространства кривых рода g с n отмеченными точками равна $3g - 3 + n$ для всех g и n, таких, что $2 - 2g - n < 0$.

Lemma

Всякая гладкая кривая рода g степени $2g-2$ в $\mathbb{C}P^{g-1}$, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости, является канонической.

Lemma

Всякая гладкая кривая рода g степени $2g-2$ в $\mathbb{C}P^{g-1}$, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости, является канонической.

Доказательство. Пусть $C \subset \mathbb{C}P^{g-1}$ — кривая рода g степени $2g-2$ в $\mathbb{C}P^{g-1}$. Обозначим через D дивизор гиперплоского сечения на C, через K — канонический дивизор. Тогда $\deg(K-D)=0$, и $l(K-D)=1$, если дивизор D линейно эквивалентен дивизору K и $l(K-D)=0$ в противном случае. В первом случае кривая C — каноническая. Во втором — по теореме Римана–Роха — $l(D)=g-1$, а значит, C содержится в некоторой гиперплоскости.

Theorem

Всякая гладкая плоская квартика (кривая степени 4) является канонической негиперэллиптической кривой рода 3.

Theorem

Всякая гладкая плоская квартика (кривая степени 4) является канонической негиперэллиптической кривой рода 3.

Доказательство. Каноническое отображение негиперэллиптической кривой рода $g = 3$ переводит ее в кривую в $\mathbb{C}P^{g-1} \equiv \mathbb{C}P^2$, т.е. в гладкую плоскую кривую. Степень этой кривой равна 4 — иначе род кривой не может равняться 3 (а также потому, что степень кокасательного расслоения равна $2g - 2 = 4$). С другой стороны, предыдущая лемма означает, что всякая гладкая кривая степени 4 — каноническая.

Семинар 14.

- Решите задачу Миттаг-Лефлера (докажите теорему Римана) в общем случае — для набора главных частей произвольных порядков.
- Проверьте, что размерность пространства гиперэллиптических ($d = 2$) функций на кривых рода g равна $2d + 2g - 2 = 2g + 2$. Выведите отсюда, что пространство гиперэллиптических кривых рода g имеет размерность $2g - 1$. Воспользовавшись этими сведениями, заключите, что не всякая кривая рода $g = 3$ гиперэллиптическая.
- Найдите размерность пространства плоских квартик с точностью до проективной эквивалентности. Сравните эту размерность с размерностью пространства кривых рода $g = 3$.

Семинар 14.

- С помощью подсчета размерностей докажите, что не всякая кривая рода 10 реализуется как гладкая плоская кривая.
- Пусть $C \subset \mathbb{C}P^2$ — гладкая кривая степени 8, и пусть $D = 1 \cdot p_1 + \dots + 1 \cdot p_7$, где точки $p_1, \dots, p_7 \in C$ попарно различны и лежат на одной прямой. Найдите $l(D)$. Выясните, имеет ли линейная система $|D|$ базисные точки.
-

Семинар 14.

- Докажите, что трансверсальное пересечение гладкой квадрики (гиперповерхности степени 2) и гладкой кубики (гиперповерхности степени 3) в $\mathbb{C}P^3$ является кривой рода 4.
- Воспользовавшись каноническим вложением, докажите, что всякая негиперэллиптическая кривая рода 4 представляется в виде трансверсального пересечения гладких квадрики и кубики в $\mathbb{C}P^3$.

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Для любой пары точек проективной прямой существует ее автоморфизм, переводящий первую точку во вторую. То же самое справедливо и для любой эллиптической кривой. Однако для кривых рода $g \geq 2$ аналогичное утверждение уже неверно, и точки на них отличаются друг от друга. Формула Римана–Роха позволяет "измерить" это отличие.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

Для любой пары точек проективной прямой существует ее автоморфизм, переводящий первую точку во вторую. То же самое справедливо и для любой эллиптической кривой. Однако для кривых рода $g \geq 2$ аналогичное утверждение уже неверно, и точки на них отличаются друг от друга. Формула Римана–Роха позволяет “измерить” это отличие.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

Применим ее к ситуации, когда дивизор D эффективен и сосредоточен в одной точке $x \in C$, $D = k \cdot x$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Lemma

Если $k \geq 2g - 1$, то $l(k \cdot x) = k - g + 1$.

Действительно, при таких k размерность $i(k \cdot x) = 0$ для любой точки $x \in C$, поскольку не существует голоморфных 1-форм с нулем порядка $2g - 1$ или выше.

Лекция 15. Точки Вейерштрасса

Для любой пары точек проективной прямой существует ее автоморфизм, переводящий первую точку во вторую. То же самое справедливо и для любой эллиптической кривой. Однако для кривых рода $g \geq 2$ аналогичное утверждение уже неверно, и точки на них отличаются друг от друга. Формула Римана–Роха позволяет "измерить" это отличие.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

Применим ее к ситуации, когда дивизор D эффективен и сосредоточен в одной точке $x \in C$, $D = k \cdot x$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Lemma

Если $k \geq 2g - 1$, то $l(k \cdot x) = k - g + 1$.

Действительно, при таких k размерность $i(k \cdot x) = 0$ для любой точки $x \in C$, поскольку не существует голоморфных 1-форм с нулем порядка $2g - 1$ или выше.
Таким образом, последовательность $l(k \cdot x)$ при $k \geq 2g - 1$ ведет себя одинаково для всех точек $x \in C$; а вот при $1 \leq k \leq 2g - 2$ ее поведение зависит от выбора точки.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

$l(k \cdot x) = k - g + 1$ при $k \geq 2g - 1$.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

$l(k \cdot x) = k - g + 1$ при $k \geq 2g - 1$.

Lemma

Последовательность $l(k \cdot x)$ монотонно неубывающая, причем $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x)$, если на C не существует мероморфной функции с единственным полюсом в точке x, порядок которого в точности равен $k+1$, и $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$ в противном случае.

В частности, для всех $k \geq 2g - 1$ выполняется равенство $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

$l(k \cdot x) = k - g + 1$ при $k \geq 2g - 1$.

Lemma

Последовательность $l(k \cdot x)$ монотонно неубывающая, причем $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x)$, если на C не существует мероморфной функции с единственным полюсом в точке x, порядок которого в точности равен $k+1$, и $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$ в противном случае.

В частности, для всех $k \geq 2g - 1$ выполняется равенство $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$.

Corollary

На отрезке $1 \leq k \leq 2g - 1$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет $g - 1$ подскоков на 1.

Lemma

Пусть k_1, k_2 — две точки подскока последовательности $l(k \cdot x)$. Тогда $k_1 + k_2$ также является точкой подскока. Другими словами, множество точек подскока является подполугруппой в группе $\mathbb{N}$ натуральных чисел по сложению.

Действительно, если на C есть мероморфная функция f_1 с полюсом порядка k_1 в x, не имеющая других полюсов, и мероморфная функция f_2 с полюсом порядка k_2 в x, не имеющая других полюсов, то их произведение $f_1 f_2$ является мероморфной функцией с полюсом порядка $k_1 + k_2$ в x, не имеющей других полюсов.

Lemma

Пусть k_1, k_2 — две точки подскока последовательности $l(k \cdot x)$. Тогда $k_1 + k_2$ также является точкой подскока. Другими словами, множество точек подскока является подполугруппой в группе $\mathbb{N}$ натуральных чисел по сложению.

Действительно, если на C есть мероморфная функция f_1 с полюсом порядка k_1 в x, не имеющая других полюсов, и мероморфная функция f_2 с полюсом порядка k_2 в x, не имеющая других полюсов, то их произведение $f_1 f_2$ является мероморфной функцией с полюсом порядка $k_1 + k_2$ в x, не имеющей других полюсов.

Remark. Полного независимого описания всех встречающихся подполугрупп в $\mathbb{N}$ такого вида не существует.

Lemma

Пусть k_1, k_2 — две точки подскока последовательности $l(k \cdot x)$. Тогда $k_1 + k_2$ также является точкой подскока. Другими словами, множество точек подскока является подполугруппой в группе $\mathbb{N}$ натуральных чисел по сложению.

Действительно, если на C есть мероморфная функция f_1 с полюсом порядка k_1 в x, не имеющая других полюсов, и мероморфная функция f_2 с полюсом порядка k_2 в x, не имеющая других полюсов, то их произведение $f_1 f_2$ является мероморфной функцией с полюсом порядка $k_1 + k_2$ в x, не имеющей других полюсов.
Remark. Полного независимого описания всех встречающихся подполугрупп в $\mathbb{N}$ такого вида не существует.
Значения параметра k, для которых $l(k \cdot x) = l((k-1) \cdot x)$ называются *лакунами* в точке x. Число лакун в каждой точке равно g и все они находятся на начальном отрезке $\{1, 2, \ldots, 2g-1\}$ значений параметра k. При $g \geq 1$ значение $k = 1$ является лакуной в любой точке x: $l(1 \cdot x) = l(0 \cdot x) = 1$. Множество лакун образует дополнение к полугруппе подскоков.

Example

При $g = 0$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $2, 3, 4, \dots$ для любой точки $x \in \mathbb{C}P^1$.
При $g = 1$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $1, 2, 3, 4, \dots$ для любой точки $x \in C$.

Example

При $g = 0$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $2, 3, 4, \dots$ для любой точки $x \in \mathbb{C}P^1$.
При $g = 1$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $1, 2, 3, 4, \dots$ для любой точки $x \in C$.

Example

Всякая кривая рода $g = 2$ гиперэллиптическая, и последовательность $l(k \cdot x)$ зависит от выбора точки x. Если x является неподвижной точкой гиперэллиптической инволюции, то $l(2 \cdot x) = 2$, т.е. значение $k = 2$ является точкой подскока. Поскольку на отрезке $\{1, 2, 3\}$ значений k должно быть две лакуны, то это значения $k = 1$ и $k = 3$. Таким образом, последовательность значений $l(k \cdot x)$ имеет вид $1, 2, 2, 3, 4, 5, \dots$.
Если же x не является неподвижной точкой гиперэллиптической инволюции, то $l(2 \cdot x) = 1$, а значит лакуны это $k = 1$ и $k = 2$; последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $1, 1, 2, 3, 4, \dots$.

Лекция 15. Точки Вейерштрасса

Definition

Точка $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется *точкой Вейерштрасса*, если $l(k \cdot x) = 2$ для некоторого значения $k \leq g$ (эквивалентно, если $l(g \cdot x) \geq 2$). Точка Вейерштрасса называется *нормальной*, если последовательность ее лакун имеет вид $1, 2, 3, \dots, g-1, g+1$.

Definition

Точка $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется *точкой Вейерштрасса*, если $l(k \cdot x) = 2$ для некоторого значения $k \leq g$ (эквивалентно, если $l(g \cdot x) \geq 2$). Точка Вейерштрасса называется *нормальной*, если последовательность ее лакун имеет вид $1, 2, 3, \dots, g-1, g+1$.

Пусть $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_g \leq 2g-1$ — последовательность лакун точки x гладкой кривой C рода g.

Definition

Весом точки $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется величина $\sum_{i=1}^{g}(a_i - i)$.

Лекция 15. Точки Вейерштрасса

Definition

Точка $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется *точкой Вейерштрасса*, если $l(k \cdot x) = 2$ для некоторого значения $k \leq g$ (эквивалентно, если $l(g \cdot x) \geq 2$). Точка Вейерштрасса называется *нормальной*, если последовательность ее лакун имеет вид $1, 2, 3, \dots, g-1, g+1$.

Пусть $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_g \leq 2g - 1$ — последовательность лакун точки x гладкой кривой C рода g.

Definition

Весом точки $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется величина $\sum_{i=1}^{g}(a_i - i)$.

В частности, если x — не точка Вейерштрасса, то ее вес равен 0. Вес нормальной точки Вейерштрасса равен 1.

Lemma

Если $x \in C$ — точка Вейерштрасса, то ее вес положителен.

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Corollary

Число точек Вейерштрасса на всякой гладкой алгебраической кривой конечно и не превосходит $(g-1)g(g+1)$, где g — род кривой.

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Доказательство.

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Доказательство.
Пусть $\omega_1,\dots,\omega_g$ — базис в пространстве голоморфных 1-форм на кривой C. Запишем эти 1-формы в локальной координате z в окрестности данной точки $x\in C$: $\omega_i=\varphi_i(z)dz$. Составим из коэффициентов ϕ_i этих 1-форм и их производных $g\times g$*-матрицу Вронского*

$$W(z)=\begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1'(z) & \dots & \varphi_1^{(g-1)}(z)\\ \varphi_2(z) & \varphi_2'(z) & \dots & \varphi_2^{(g-1)}(z)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_g(z) & \varphi_g'(z) & \dots & \varphi_g^{(g-1)}(z)\end{pmatrix}.$$

Лекция 15. Точки Вейерштрасса

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Доказательство.
Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис в пространстве голоморфных 1-форм на кривой C. Запишем эти 1-формы в локальной координате z в окрестности данной точки $x \in C$: $\omega_i = \varphi_i(z)dz$. Составим из коэффициентов ϕ_i этих 1-форм и их производных $g \times g$-*матрицу Вронского*

$$W(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1'(z) & \ldots & \varphi_1^{(g-1)}(z) \\ \varphi_2(z) & \varphi_2'(z) & \ldots & \varphi_2^{(g-1)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_g(z) & \varphi_g'(z) & \ldots & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{pmatrix}.$$

Lemma

Вес точки кривой совпадает с порядком нуля определителя $|W(z)|$ матрицы Вронского (вронскиана) в этой точке.

Lemma

Вес точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

В частности, если точка кривой не является точкой Вейерштрасса, то вронскиан в ней отличен от нуля. Ясно также, что порядок нуля вронскиана в данной точке не зависит от выбора базиса в пространстве голоморфных 1-форм.

Lemma

Вес точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

В частности, если точка кривой не является точкой Вейерштрасса, то вронскиан в ней отличен от нуля. Ясно также, что порядок нуля вронскиана в данной точке не зависит от выбора базиса в пространстве голоморфных 1-форм.

Вывод теоремы из леммы: выбор базиса в пространстве голоморфных 1-форм определяет отображение кривой C в пространство, двойственное пространству голоморфных сечений тензорного произведения линейных расслоений

$$T^\vee C \otimes (T^\vee)^{\otimes 2} C \otimes (T^\vee)^{\otimes 3} C \otimes \dots \otimes (T^\vee)^{\otimes g} C.$$

Степень этого линейного расслоения равна

$$(2g-2) + 2 \cdot (2g-2) + 3 \cdot (2g-2) + \dots + g \cdot (2g-2) = (g-1)g(g+1).$$

Эта степень совпадает с суммой порядков нулей любого его голоморфного сечения, в том числе, вронскиана в любом базисе.

Lemma

Вес точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

Lemma

Вес точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

Доказательство. Утверждение локально. Пусть $x \in C$. Построим индуктивно базис в пространстве голоморфных 1-форм:

- в качестве ω_1 возьмем 1-форму, отличную от нуля в т. x (такая 1-форма существует, поскольку у кокасательного расслоения к C нет базисных точек);
- разложим пространство голоморфных 1-форм в прямую сумму прямой $\mathbb{C}\omega_1$ и дополнительного подпространства, состоящего из 1-форм, имеющих нуль в т. x; пусть b_2 — наименьший порядок нуля в x у 1-форм из этого подпространства;
- выберем в построенном подпространстве 1-форму с нулем порядка b_2 в x и возьмем ее в качестве ω_2;
- разложим построенное подпространство голоморфных 1-форм в прямую сумму прямой $\mathbb{C}\omega_2$ и дополнительного подпространства, состоящего из 1-форм, имеющих в т. x нуль порядка $> b_2$; пусть b_3 — наименьший порядок нуля в x у 1-форм из этого подпространства; и т.д.

Lemma

Порядок точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

Получили упорядоченный базис 1-форм $\omega_1,\dots,\omega_g$, порядки нулей элементов которого в точке x равны $0=b_1<b_2<\dots<b_g$. Матрица Вронского такого набора 1-форм имеет вид

$$W(z)=\begin{pmatrix} 1+\dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{b_2}+\dots & b_2z^{b_2-1}+\dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{b_g}+\dots & b_gz^{b_g-1}+\dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Порядок нуля вронскиана равен $0+(b_2-1)+(b_3-2)+\dots+(b_g-g+1)$.

Lemma

Порядок точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

Получили упорядоченный базис 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_g$, порядки нулей элементов которого в точке x равны $0 = b_1 < b_2 < \dots < b_g$. Матрица Вронского такого набора 1-форм имеет вид

$$W(z) = \begin{pmatrix} 1+\dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{b_2}+\dots & b_2 z^{b_2-1}+\dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{b_g}+\dots & b_g z^{b_g-1}+\dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Порядок нуля вронскиана равен $0+(b_2-1)+(b_3-2)+\dots+(b_g-g+1)$.
С другой стороны, условие $\mathrm{Res}_x f\omega = 0$ накладывает на коэффициенты главной части функции f в точке x линейные условия, количество независимых среди которых в точности равно требуемому числу.

Лекция 15. Точки перегиба плоских квартик

Гладкая плоская кривая C степени $d = 4$ (квартика) является кривой рода $g = (d-1)(d-2)/2 = 3$. Каждая точка x гладкой плоской квартики определяет мероморфную функцию степени 3 на ней — проекцию из этой точки. Одну из прямых, проходящих через x, мы можем считать бесконечностью. Если y — точка простого перегиба кривой C, то проходящая через нее касательная пересекает C еще в одной точке, которую мы обозначим через x.

Лекция 15. Точки перегиба плоских квартик

Гладкая плоская кривая C степени $d = 4$ (квартика) является кривой рода $g = (d-1)(d-2)/2 = 3$. Каждая точка x гладкой плоской квартики определяет мероморфную функцию степени 3 на ней — проекцию из этой точки. Одну из прямых, проходящих через x, мы можем считать бесконечностью. Если y — точка простого перегиба кривой C, то проходящая через нее касательная пересекает C еще в одной точке, которую мы обозначим через x.

Проекция, определяемая точкой $x \in C$, имеет в точке y полюс третьего порядка и не имеет других полюсов (прямая xy не пересекает C в других точках). Тем самым, $l(3 \cdot y) \geq 2$, т.е. y является точкой Вейерштрасса кривой C. На общей гладкой квартике имеется 24 точки простого перегиба. Поскольку $(g-1)g(g+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, мы заключаем, что все точки простого перегиба имеют вес 1, а лакуны в этих точках равны $1, 2, 4$.

Гладкая плоская кривая C степени $d = 4$ (квартика) является кривой рода $g = (d-1)(d-2)/2 = 3$. Каждая точка x гладкой плоской квартики определяет мероморфную функцию степени 3 на ней — проекцию из этой точки. Одну из прямых, проходящих через x, мы можем считать бесконечностью. Если y — точка простого перегиба кривой C, то проходящая через нее касательная пересекает C еще в одной точке, которую мы обозначим через x.

Проекция, определяемая точкой $x \in C$, имеет в точке y полюс третьего порядка и не имеет других полюсов (прямая xy не пересекает C в других точках). Тем самым, $l(3 \cdot y) \geq 2$, т.е. y является точкой Вейерштрасса кривой C. На общей гладкой квартике имеется 24 точки простого перегиба. Поскольку $(g-1)g(g+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, мы заключаем, что все точки простого перегиба имеют вес 1, а лакуны в этих точках равны $1, 2, 4$.

Каждая гладкая плоская квартика является канонической кривой рода 3, при каноническом вложении негиперэллиптической кривой рода 3 точки Вейерштрасса переходят в точки перегиба. Точки Вейерштрасса канонических кривых старших родов представляют собой обобщения точек перегиба плоских квартик.

Лекция 15. Конечность группы автоморфизмов

Theorem

Группа автоморфизмов гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ конечна.

Лекция 15. Конечность группы автоморфизмов

Theorem

Группа автоморфизмов гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ конечна.

Lemma

Если автоморфизм гладкой алгебраической кривой C рода g имеет более $2g + 2$ неподвижных точек, то он тождественный.

Theorem

Группа автоморфизмов гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ конечна.

Lemma

Если автоморфизм гладкой алгебраической кривой C рода g имеет более $2g+2$ неподвижных точек, то он тождественный.

Доказательство. Пусть $\eta : C \to C$ — автоморфизм, имеющий s неподвижных точек. Возьмем эффективный дивизор D, состоящих из $g+1$ точек кратности 1, ни одна из которых не является неподвижной точкой автоморфизма η. По теореме Римана–Роха, $l(D) = (g+1) - g + 1 + i(D) = 2 + i(D)$. Поэтому существует функция $f : C \to \mathbb{C}P^1$, имеющая полюса не выше первого порядка, причем только в точках дивизора D. Функция $f - f \circ \eta$ имеет не более чем $2g+2$ полюсов первого порядка и не менее s нулей (всякая неподвижная точка автоморфизма η является ее нулем). Поэтому $s \leq 2g+2$.

Лекция 15. Конечность группы автоморфизмов

Theorem

Группа автоморфизмов гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ конечна.

Lemma

Если автоморфизм гладкой алгебраической кривой C рода g имеет более $2g+2$ неподвижных точек, то он тождественный.

Доказательство. Пусть $\eta : C \to C$ — автоморфизм, имеющий s неподвижных точек. Возьмем эффективный дивизор D, состоящих из $g+1$ точек кратности 1, ни одна из которых не является неподвижной точкой автоморфизма η. По теореме Римана–Роха, $l(D) = (g+1) - g + 1 + i(D) = 2 + i(D)$. Поэтому существует функция $f : C \to \mathbb{C}P^1$, имеющая полюса не выше первого порядка, причем только в точках дивизора D. Функция $f - f \circ \eta$ имеет не более чем $2g+2$ полюсов первого порядка и не менее s нулей (всякая неподвижная точка автоморфизма η является ее нулем). Поэтому $s \leq 2g+2$.

Lemma

Минимальное количество точек Вейерштрасса на кривой рода g равно $2g+2$, и оно достигается только для гиперэллиптических кривых.

Семинар 15.

- Докажите, что на кривой C рода $g \geq 2$ значение $k = 2$ не является лакуной в точке $x \in C$ в том и только в том случае, когда C гиперэллиптическая и x — неподвижная точка гиперэллиптической инволюции.
- Докажите, что всякая точка Вейерштрасса гиперэллиптической кривой является неподвижной точкой гиперэллиптической инволюции.
- Докажите *теорему Клиффорда*: для любой точки x негиперэллиптической кривой C рода $g \geq 3$ справедливо неравенство $l(k \cdot x) < \frac{k}{2} + 1$ для всех $k = 1, 2, \dots, 2g - 1$.

Семинар 15.

- Докажите, что на негиперэллиптической кривой рода $g \geq 3$ есть по крайней мере $2g + 6$ точек Вейерштрасса.
- Вычислите лакуны в точке перегиба второго порядка гладкой плоской квартики.
- Найдите точки перегиба квартики Клейна

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

и опишите действие группы автоморфизмов этой кривой на множестве точек перегиба.

Семинар 15.

- Найдите все точки Вейерштрасса плоской кривой Ферма $x^4 + y^4 = 1$ и укажите их тип. Воспользовавшись этим результатом, найдите группу автоморфизмов кривой Ферма.
- Докажите *лемму Шенберга*: если у автоморфизма гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ больше 4 неподвижных точек, то все они являются точками Вейерштрасса.