Логика и алгоритмы весна 2019.
Задачи для семинара N 1.

исчисление высказываний

Шпаргалка (аксиомы и правило вывода):

$$
\begin{aligned}
A_1 &: A \to (B \to A);\\
A_2 &: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C));\\
A_3 &: A \wedge B \to A;\\
A_4 &: A \wedge B \to B;\\
A_5 &: A \to (B \to (A \wedge B));\\
A_6 &: A \to (A \vee B);\\
A_7 &: B \to (A \vee B);\\
A_8 &: (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C));\\
A_9 &: (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A);\\
A_{10} &: \neg\neg A \to A.
\end{aligned}
$$

$$\text{Modus Ponens} : \frac{A,\ A \to B}{B}.$$

Теорема о дедукции: $\Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash A \to B$.

1. Докажите что:
   (a) если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \wedge B$;
   (b) если $\Gamma, A \vdash C$ $\Gamma, B \vdash C$, то $\Gamma, A \vee B \vdash C$ (правило разбора случаев).

2. Докажите что:
   (a) если $\Gamma, A \vdash B$ $\Gamma, A \vdash \neg B$, то $\Gamma \vdash \neg A$ (рассуждение от противного),
   (b) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$,
   (c) $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$,
   (d) $\vdash A \vee \neg A$,
   (e) если $\Gamma, A \vdash C$ $\Gamma, \neg A \vdash C$, то $\Gamma \vdash C$.

3. Докажите выводимость следующих формул:
   (a) $A \wedge B \to B \wedge A$;
   (b) $A \vee B \to B \vee A$;
   (c) $A \wedge (B \wedge C) \to (A \wedge B) \wedge C$;
   (d) $A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C$;
   (e) $(A \vee B \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$;

(f) $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \to (A \vee B) \wedge C$;

(g) $(A \vee B) \wedge C \to (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;

(h) $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee C$;

(i) $(A \wedge B) \vee C \to (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

4. Докажите выводимость следующих формул:

   (a) $A \to \neg\neg A$;

   (b) $A \wedge \neg A \to B$;

   (c) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

   (d) $A \vee B \to (\neg A \to B)$;

   (e) $(\neg A \to B) \to A \vee B$.

5. Докажите выводимость формул, соответствующих *законам де Моргана.*

   (a) $\neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$;

   (b) $\neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$;

   (c) $\neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$;

   (d) $\neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$.

Множество формул Γ называется *непротиворечивым*, если нет такой формулы A, для которой одновременно $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$. Максимальное по включению непротиворечивое множество формул называется *максимально непротиворечивым.*
Множество формул Γ называется *полным*, если для любой формулы A из гипотез Γ выводима ровно одна из формул A, $\neg A$.

6. Пусть дана функция $f : Var \longrightarrow \{0, 1\}$ (оценка пропозициональных переменных). Докажите, что множество формул $\Gamma_f = \{A \mid f(A) = 1\}$ максимально непротиворечиво.

7. Докажите, что Γ полно тогда и только тогда, когда множество всех формул, выводимых из Γ, максимально непротиворечиво.

8. В этой задаче будем считать, что формулы содержат только три переменные p, q и r. Для следующих множеств формул определите, являются ли они непротиворечивыми и являются ли они полными.

   (a) $\{p \to q, q \to p\}$,

   (b) $\varnothing$,

   (c) $\{p \wedge q \wedge r\}$,

   (d) $\{p \vee q \to r, \neg r, p \vee q\}$,

   (e) $\{p \wedge q \to q \vee r, r, \neg(p \vee q)\}$,

   (f) $\{\neg(p \to \neg q), \neg p\}$.

Логика предикатов.

9. Рассмотрим сигнатуру $\{\cdot, +, =\}$, где $\cdot, +$ — 2-местные функциональные символы, $=$ — 2-местный предикатный символ. Рассмотрим нормальную модель этой сигнатуры $(P(A), \cap, \cup)$, где A — некоторое множество, $P(A)$ — множество всех его подмножеств (т.е. $\cdot$ интерпретируется как операция пересечения, а $+$ — как операция объединения на $P(A)$).

Рассмотрим модель $(P(A), =, \cap, \cup)$, где «=» — предикат равенства, $\cap$ и $\cup$ — соответственно, пересечение и объединение множеств. Запишите формулу, говорящую, что в этой модели

(a) $a \subset b$;

(b) a — одноэлементное множество;

(c) a — двухэлементное множество.

10. Для каждой из следующих формул определите, являются ли они выполнимыми или опровержимыми:

(a) $\exists x \forall y (Q(x, x) \wedge \neg Q(x, y))$;

(b) $\exists x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y))$;

(c) $\forall x \exists y (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))$;

(d) $\exists y \forall x (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))$;

(e) $\forall x \neg \forall y \neg P(x, y) \wedge \neg \exists z \forall y P(y, z)$;

(f) $\forall x \, (\neg P(x, x) \wedge \exists z P(z, x) \wedge \forall y \exists z (P(x, z) \wedge P(z, y) \vee \neg P(x, y)))$.

11. общезначимы ли следующие формулы?

(a) $\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x Q(x, y)$;

(b) $\forall y \exists x Q(x, y) \to \exists x \forall y Q(x, y)$;

(c) $\forall x (P(x) \to \neg Q(x)) \to \neg(\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x))$.