Теория множеств Цермело-Франкеля с аксиомой выбора

11.01.21

Мн-во

принадлежность $x \in y$ (множества) $\in$ есть est

равенство $x = y$

Аксиома экстенциональности

$$\forall x \ \forall y \ (x = y \longleftrightarrow \forall z (z \in x \Longleftrightarrow z \in y))$$

Аксиома равенства

$$\forall x \ \forall y \ \forall z \ (x = y \longrightarrow (x \in z \Longleftrightarrow y \in z))$$

Принцип свёртывания

Пусть φ – некоторое свойство множеств

Тогда $\exists$ множество $\{x \mid \varphi(x)\}$, т.е. множество всех множеств, обладающих свойством φ

Парадокс Рассела

Аксиома пары

Для любых множеств x, y существует множество $\{x, y\}$, т.е. такое, которое содержит в точности x и y

Аксиома объединения

Для любого множества X существует мн-во $\cup X$, т.е. такое мн-во, кот. содержит элементы, если он принадлежит некоторому элементу X

Примеры

$$A \cup B \overset{\text{аксиома}}{\underset{\text{пары}}{=\!=\!=}} \underset{\text{объед.}}{\overset{\text{аксиома}}{\bigcup}} \{A, B\}$$

$$\{x, y, z\} = \underset{\text{объед}}{\overset{\text{акс.}}{\bigcup}} \Big\{ \underset{\text{выбора}}{\overset{\text{акс.}}{\{x, y\}}}, \{\{z\}\} \Big\}$$

синглетон – мн-во с единственным элементом

Опр. A — подмножество B, $A \subset B$, если $\forall x \ (x \in A \to x \in B)$

Аксиома степени

Для любого мн-ва X $\exists$ мн-во $\mathcal{P}(X)$

(мн-во всех подмн-в)

Аксиома пустого множества

$\exists$ пустое мн-во $\varnothing$, т.е. мн-во, не содержащее ни одного эл-та.

$\varnothing$ $\{\varnothing\}$

0 эл-ов 1 эл-т

Аксиома бесконечности

Существует мн-во S такое, что $\varnothing \in S$ и $\forall x \in S \ \ x \cup \{x\} \in S$

Схема аксиом выделения

Пусть φ — св-во мн-в и $\underline{\underline{X}}$ — некот. мн-во
Тогда $\exists$ мн-во $\{y \in \underline{\underline{X}} \mid \varphi(y)\}$

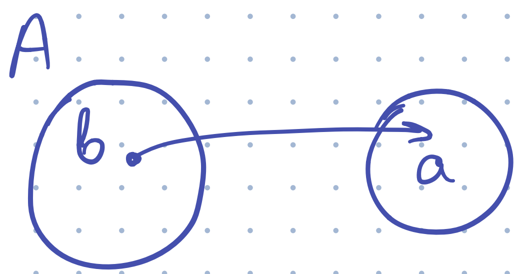
Опр. Класс — это совокупность мн-в, удовл. некоторому св-ву φ, которая сама может не являться множеством

(Схема) аксиом подстановки

Пусть $\varphi(x,y)$ — такое свойство, что для любого мн-ва x $\exists$ не более одного мн-ва y, для которого выполняется $\varphi(x,y)$

Тогда $\forall$ мн-ва A $\exists$ мн-во

$$\{a \mid \exists b \in A \ \varphi(b,a)\}$$



Аксиома регулярности

Любое непустое множество x содержит эл-т y, для которого $x \cap y = \varnothing$

$y \in y$ не существует

ZF – теория мн-в Цермелло-Френкеля

Аксиома выбора

Пусть S – семейство непустых мн-в. Тогда $\exists$ функция выбора на S, т.е. такая функция $f: S \to \bigcup S$, что $\forall x \in S \;\; f(x) \in x$

Опр. Соответствие между эл-тами мн-в A и B – это мн-во $R \subset A \times B$

Опр. Соответствие R между A и B называется функцией из A в B, если R удовл. усл.:

– тотальность $\forall a \in A \;\; \exists b \in B \;\; (a,b) \in R$

– функциональность $\forall a \in A$

$$\forall b_1, b_2 \in R \;\; ((a,b_1) \in R \wedge (a,b_2) \in R \to b_1 = b_2)$$

Примеры

$$\bigcup\{\varnothing,\{\varnothing\}\} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$$

Акс. объед.

$$\forall x\ \exists z\ \forall y\ (y \in z \Leftrightarrow \underbrace{\exists a \in x\ (y \in a)}_{\exists a\,(a \in x \,\wedge\, y \in a)})$$