Случайные процессы, случайные матрицы и интегрируемые модели .

Листок 2. (Формула оценки: max(сумма баллов/30,10))

Задача 1. Инвариантные ансамбли vs матрицы Вигнера(4 балла)
Матрицами Вигнера называются эрмитовы матрицы, матричные элементы которых на и выше главной диагонали являются независимыми случайными величинами. Предполагая, что плотности вероятностей матричных элементов матриц Вигнера дифференцируемы, покажите, что единственный пример, когда мера на вещественных (комплексных, кватернионно-вещественных) матрицах Вигнера инвариантна относительно присоединенного действия ортогональной (унитарной, унитарной симплектической) группы, дается мерой вида

$$P(dA) = Z^{-1} \exp\left(-a\mathrm{Tr}A^2 + b\mathrm{Tr}A\right) dA$$

Указание:

1) Заметьте, что матрицы перестановки - частный случай унитарных матриц. Покажите, что элементы на главной диагонали одинаково распределены. То же самое справедливо для элементов вне главной диагонали. Таким образом мера задается в терминах двух неизвестных дифференцируемых функций.

2) Чтобы выяснить вид этих функций, попробуйте потребовать инвариантности по отношению к конкретному бесконечно малому унитарному преобразованиютипа малого вращения в плоскости натянутой на два базисных вектора. Решите полученные дифференциальные уравнения, и воспользуйтесь тем, что инвариантность плотности требует, чтобы она была функцией следов степеней матрицы A.

Задача 2. Свойство максимальной случайности гауссовых ансамблей (3 балла)

Покажите, что распределение $P(H) = Z^{-1}\exp\left[-Tr(H^2)/2\right]$ максимизирует функционал «энтропии»

$$S(P) = -\int p(H)\log P(H) d^n H$$

при условии $\mathbb{E}(Tr(H^2)) = n$, где $n = N + \beta N(N-1)/2$ — число степеней свободы, а dH - мера лебега в $\mathbb{R}^n$ на n независимых компонент матричных элементов.

Задача 3. Минимальный пример гауссовых ансамблей (4 балла (a) + 5 баллов (b))

Найдите прямой диагонализацией распределение собственных значений матриц размера 2×2 из гауссовых ортогонального, унитарного и симплектического ансамбля.

a) Рассморите вещественную симметричную матрицу $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, с независимыми матричными элементами, $a_{11}, a_{22} \sim \mathcal{N}(0,1), a_{12} = a_{21} \sim \mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$. Постройте ортогональные преобразования, диагонализующие эти матрицы. От распределения матричных элементов перейдите к новым переменным — собственным значениям и углу поворота, который задает ортогональное преобразование. Проинтегрируйте по углу и найдите распределение собственных значений.

b) Попробуйте проделать то же самое для эрмитовых и кватернионно-вещественных эрмитовых матриц 2×2 с нормально распределенными матричными элементами, применив для диагонализации унитарные и симплектические матрицы соответственно. В кватернионном случае можно думать о кватернионах как о матрицах как о матрицах 2×2, построенных из матриц Паули, $e_0 = I_2, e_k = \mathrm{i}\sigma_k, k = 1, 2, 3$. Вещественный кватернион в таком представлении имеет вид

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix},$$

где z и w - комплексные числа.

Задача 4. Обращение времени и вырождение Крамера (3 балла)

1. Убедитесь, что вещественно-кватернионная эрмитова матрица $X = X^+ \in \mathbb{H}^{N\times N}$ коммутрует с оператором обращения времени $T = Z_{2N}C$, где $Z_{2N} := e_2 \otimes I_N$, а C — комплексное сопряжение, действующее на кватернионы следующим образом $Ce_kC = (-1)^k e_k, k = 0, \ldots, 3$. (Буквально комплексным сопряжением оператор C будет, если реализовать кватернионы в терминах матриц Паули, $e_0 = I_2, e_k = \mathrm{i}\sigma_k, k = 1, 2, 3$, а кватернинно вещественные матрицы X как комплексные блочные матрицы из $\mathbb{C}^{2N\times 2N}$, построенные из блоков 2x2).

2. Покажите, что матрицы, коммутрующие с оператором обращения времени, имеют двояко вырожденный спектр.

1) Предположим ϕ собственный вектор X с собственным значением λ. Покажите, что $T\phi$ — тоже собтвенный вектор с собственным значением λ.

2) Используя свойство $T^2 = -I_N$, покажите что эти вектора ортогональны.

Задача 5. Ансамбль Вишерта (8 баллов)

Мера Вишерта – многомерное обобщение распределения χ^2. Пусть $X \in \mathbb{R}^{N\times p}$— вещественная, $\beta = 1$, комплексная, $\beta = 2$ или кватернионно-вещественная, $\beta = 4$, матрица с независимыми нормально распределенными матричными элементами, независимые вещественные компоненты которых имеют дисперсию $1/\beta$, и $N < p$.

1) Покажите, что эрмитова марица $A = X^+X$ распределена по закону

$$P(dA) = C^{-1}e^{-\frac{\beta}{2}Tr(A)} \left(\det A\right)^{\beta a/2} \prod_{i\le j} dA_{ij}, \tag{1}$$

где $a = p - N + 1 - 2/\beta$.

Указание: Один из способов - использовать соответствие между распределениями и производящими функциями моментов (или характеристическими функциями). Вычислите производящую функцию вида

$$M_A(\Theta) := \mathbb{E}\exp\left(\sum_i \Theta_{ii}A_{ii} + 2\sum_{i<j}\Theta_{ij}A_{ij}\right) = \mathbb{E}\exp Tr\left(\Theta^+A\right),$$

двумя способами: прямым интегрированием по мере на матрицах X и интегрированеим по мере (1). Здесь Θ – постоянная эрмитова вещественная (комплексная, кватернионно-вещественная) матрица. При этом воспользуйтесь тем, что матрица Θ приводится к диагональной матрице D соответствующим унитарным преобразованием $\Theta = UDU^+$, а так же тем фактом, что меры Лебега на матрицах X и A инвариантны относительно преобразований $X \to UX$ и $A \to UAU^+$ соответственно.

2) Покажите, что распределение собственных значений матрицы A имеет вид

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = Z^{-1} e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^N \lambda_i} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\beta a/2} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta.$$

Задача 6.Вариационная задача для распределения Пастура-Марченко. (7 баллов)

Плотность распределения собственных значений выборочной ковариационной матрицы $N \times N$ имеет вид

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = Z^{-1} e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^N \lambda_1} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\beta a/2} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta, \tag{2}$$

где $\beta = 1, 2, 4$ и $a = \alpha N$. Предположим. что при $N \to \infty$ случайная эмпирическая спектральная мера

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i/N},$$

стремится к некоторой детерминистичской мере L_∞ с конечным носителем, в том смысле, что для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ предел среднего вида $N^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N f(\lambda_i/N)\right)$ вычисляется как

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N f(\lambda_i/N)\right) = \int f(x) dL_\infty(x).$$

а) Стартуя с плотности (2) сформулируйте вариационную задачу о нахождении предельной эмпирической меры.
б) Запишите решение вариационной задачи в виде интегрального уравнения и, продифференциорвав его, с помощью формул Сохоцкого-Племеля запишите задачу Римана-Гильберта для преобразования Стильтьеса от L_∞.
в) Решите полученную задачу и, обратив преобразование Стильтьеса, выведите распределение Пастура-Марченко.

Задача 7. Формула Гейне для унитарных ортогональных многочленов. (2 балла)

Пусть

$$P_n(n) = x^n + \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

система унитарных многочленов, ортогональных относительно меры $\alpha(x)$,

$$\int P_n(x) P_m(x) d\alpha(x) = h_n \delta_{n,m}.$$

Докажите, что $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = \frac{1}{n! D_{n-1}} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n (x - x_i)\right],$$

где матожидание вычисляется относительно меры

$$\mu(dx_1 \times \ldots \times dx_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2 d\alpha(x_1) \ldots d\alpha(x_n),$$

и $D_n = \det \left[\int x^{i+j} d\alpha(x) \right]_{0 \le i,j \le n}$.

Задача 8. Лемма Кристофеля-Дарбу (2 балла)

Рассмотрите систему унитарных многочленов

$$p_n(x) = x^n + \ldots,$$

ортогональных относительно веса $w(x)$ с нормировкой

$$\langle p_k, p_m \rangle := \int p_k(x) p_m(x) w(x) dx = \delta_{k,m} h_m, \quad k, m = 0, 1, \ldots,$$

которые удовлетворяют трёхчленным рекуррентным соотношениям

$$p_{k+1}(x) + (A_k - x) p_k(x) + B_k p_{k-1}(x) = 0,$$

где

$$A_k = \frac{\langle x p_k, p_k \rangle}{h_k} \ \text{ и } \ B_k = \frac{h_k}{h_{k-1}}.$$

Пусть

$$\psi_n(x) := p_n(x) \sqrt{\frac{w(x)}{h_n}}$$

соответствующий базис Фурье, а

$$K_N(x, y) := \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(x) \psi_n(y)$$

проектор ранга N. Докжите формулы Кристофеля-Дарбу

$$K_N(x, y) = \gamma_N \frac{\psi_{N-1}(x)\psi_N(y) - \psi_N(x)\psi_{N-1}(y)}{y - x}$$

и

$$K_N(x, x) = \gamma_N (\psi'_N(x)\psi_{N-1}(x) - \psi_N(x)\psi'_{N-1}(x)),$$

где $\gamma_k = \sqrt{h_k / h_{k-1}}$.

Задача 9. Матрица Якоби (2 балла)

В условиях предыдущей задачи бесконечная матрица вида

$$Q = \begin{pmatrix} A_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & . \\ \gamma_1 & A_1 & \gamma_2 & 0 & . \\ 0 & \gamma_2 & A_2 & \gamma_3 & . \\ 0 & 0 & \gamma_3 & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

называется матрицей Якоби. Докажите следующие формулы для представления ортогональных многочленов и ядра

$$p_N(x) = \det_{N\times N}(x-Q), \quad K_N(x,y) = \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_{N-1}} \det_{(N-1)\times(N-1)} \left[(x-Q)(y-Q)\right],$$

где определители понимаются как главные миноры порядка N.

Задача 10. Ансамбль Лагерра-Вишерта (10 баллов)

Плотность распределения собственных значений ковариационных выборочных матриц из ансамбля Лагерра-Вишерта имеет вид

$$f(\lambda_1,\ldots,\lambda_N) = Z^{-1} e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^N \lambda_1} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\beta a/2} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

где $\lambda_i \in [0,\infty)$ (см. Листок 1.).

Используя многочлены Лагерра, $L_n^{(a)}(x)$ (необходимые справочные сведения приведены в конце задачи), постройте корреляционное ядро $K_N(x,y)$, для случая $\beta = 2$ и $a \geq 0$. Проведите его асимптотический анализ в различных пределах:

1. Выведите уравнение на производящую функцию многочленов Лагерра из трёхчленных рекуррентных соотношений и, решив его, покажите, что производящая функция имеет вид

$$G^{(a)}(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(a)}(x) t^k = \frac{\exp\left(-\frac{tx}{1-t}\right)}{(1-t)^{a+1}}.$$

   Запишите интегральное представление многочленов Лагерра.

2. Исследуйте поведение полученного интеграла в пределе $N \to \infty$, считая что $0 \leq a \leq \infty$ остается конечной величиной, и выведите предельные формулы для корреляционного ядра в различных скейлинговых пределах:

   (a) Покажите, что средняя плотность

   $$\rho(x) = \lim_{N\to\infty} K_N(Nx, Nx)$$

   дается частным случаем распределения Пастура-Марченко. Его можно переписать как как четвертькруговой закон — половину полукруглого закона Вигнера. Объясните эту связь.

   (b) Покажите, что во внутренней части спектра, $0 < w < 4$, предельное корреляционное ядро

   $$K_\infty^{\text{bulk}}(x,y) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\rho(w)} K_N\left(Nw + \frac{x}{\rho(w)}, Nw + \frac{y}{\rho(w)}\right)$$

   не зависит от референтной точки w и стремится к синус-ядру.

(c) Покажите что при некотором выборе константы σ корреляционное ядро в окрестности правого края спектра (режим мягкого края, soft edge)) сходится к ядру Айри

$$\begin{aligned} K_\infty^{\text{soft edge}}(x,y) &:= \lim_{N\to\infty} N^{1/3}\sigma K_N\left(4N+\sigma N^{1/3}x, 4N+\sigma N^{1/3}y\right) \\ &= \frac{Ai(x)Ai'(y)-Ai(y)Ai'(x)}{x-y} \end{aligned}$$

$$K_\infty^{\text{soft edge}}(x,y) = K_{Airy}(x,y).$$

(d) Покажите, что на левой границе спектра (в режиме жесткого края, hard edge scaling limit) корреляционное ядро сходится к ядру Бесселя

$$\begin{aligned} K_\infty^{\text{hard edge}}(x,y) &\doteqdot \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4N} K_N\left(\frac{x}{4N}, \frac{y}{4N}\right) \\ &= \frac{J_a(\sqrt{x})\sqrt{y}J_a'(\sqrt{y}) - J_a(\sqrt{y})\sqrt{x}J_a'(\sqrt{x})}{2(x-y)}. \end{aligned}$$

(e) Убедитесь , что при $a = \pm 1/2$ мы возвращаемся к четной и нечетной части синус ядра, а в пределе $a \to \infty$, когда левый край отодвигается от твердой стенки, к ядру Эйри.

Используйте следующие справочные формулы:

Многочлены Лагерра $L_k^{(a)}(x)$ ортогональны в $L_2([0,\infty), w(x)dx)$ с весом $w(x) = x^a e^{-x}$. Для решения достаточно знать коэффициент при старшем члене

$$L_n^{(a)}(x) = x^n \frac{(-1)^n}{n!} + \text{члены более низких порядков}$$

норму[1]

$$\left\langle L_n^{(a)}, L_m^{(a)} \right\rangle = \frac{\Gamma(n+a+1)}{n!}\delta_{n,m},$$

а так же коэффициетнты трехчленных рекуррентных соотношений

$$-(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$$

Функции Эйри и Бесселя можно понимать в смысле их интегральных представлений, например

$$\begin{aligned} Ai(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(zt+t^3/3)}dt \\ J_a(z) &= \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^a}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right)\frac{dt}{t^{a+1}}, \end{aligned}$$

или любых других. В последнем интеграле контур интегрирования начинается в $-\infty - i0$, заканчивается в $-\infty + i0$ и обходит разрез функции t^{a+1}, проведенный вдоль отрицательной части действительной оси.

[1]Заметьте, что при таком традиционном определении, многочлены Лагерра не являются ни унитарными ни нормированными на единицу.

Задача 11. Число частиц в детерминантном точечном прцессе (4 балла)

Пусть ($\mathfrak{X}$,Conf($\mathfrak{X}$),$\mathbb{P}$) – детерминантный точечный процесс, задаваемый корреляционным ядром $K_n : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$, которое определяет линейный опреатор $\widehat{K}_n : L_2(\mathfrak{X}, \mu) \to L_2(\mathfrak{X}, \mu)$,

$$\widehat{K}_n f(x) = \int_{\mathfrak{X}} K_n(x, y) f(y) d\mu(y), \quad f(x) \in L_2(\mathfrak{X}, \mu),$$

являющийся проектором, $\widehat{K}_n^2 = \widehat{K}_n$, на подпространство размерности n, т.е. $\mathrm{dimIm}\widehat{K}_n = n$. Докажите, что общее число частиц в этом процессе почти наверное равно n,

$$\mathbb{P}(\nu(\mathfrak{X}) = n) = 1.$$

Задача 12. Число частиц в интервале в гауссовом унитарном ансамбле и пуассоновском процессе. (6 баллов)

Рассмотрите гауссов унитарный ансамбль матриц $n \times n$, где плотность распределения собственных значений имеет вид

$$f_{\Lambda_n}^{\mathrm{G},\beta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n^{GUE}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2} \prod_{1 \le i < j \le n} |x_i - x_j|^2.$$

Пусть $E_n(L) := \nu\left([-L/\sqrt{n}, L/\sqrt{n}]\right)$ – число собственных значений в отрезке $[-L/\sqrt{n}, L/\sqrt{n}]$ и $E(L) := \lim_{n\to\infty} E_n(L)$ в смысле моментов. Вычислите дисперсию $\mathbb{D}(E(L))$ случайной величины $E(L)$ и докажите, что имеет место предел

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\mathbb{D}E(L)}{\ln L} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Проделайте то же самое для пуассоновского точечгого процесса с интенсивностью ρ в $\mathbb{R}^d$для куба $[-L, L]^d$, а также вычислите вероятность отсутствия частиц в этом кубе