

## Избранные главы дискретной математики. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно посылать вашему учебному ассистенту (его адрес сообщен всем записанным на этот НИС на корпоративную почту), до 24:00 четверга перед следующим занятием.

### Задание с 5 занятия.

- (1) Пусть  $n$  натуральное число, большее 1. Обозначим через  $D_n$  множество всех натуральных делителей числа  $n$ . Введем на множестве  $D_n$  операции  $\vee$ ,  $\wedge$  и  $\neg$  следующим образом:  $a \vee b = \text{НОК}(a, b)$ ,  $a \wedge b = \text{НОД}(a, b)$ ,  $\neg a = n/a$ . При каких условиях на число  $n$  множество  $D_n$  с этими операциями  $\vee$ ,  $\wedge$  и  $\neg$  является булевой алгеброй? Какая из аксиом булевой алгебры нарушается в случае, когда  $D_n$  не является булевой алгеброй относительно этих операций?
- (2) Проверьте, что две формулы  $x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$  и  $x\bar{z} \vee z\bar{y} \vee y\bar{x}$  задают одну и ту же булеву функцию. (Напомним, что при записи больших формул мы для обозначения конъюнкции используем знак умножения, а для обозначения отрицания —  $\bar{x}$ .) Придумайте цепочку тождественных преобразований, переводящих одну формулу в другую.

Для удобства повторяем здесь приведенный на занятии (сильно избыточный) список тождеств булевой алгебры.

Коммутативность	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
Ассоциативность	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
Нейтральные элементы	$a \vee 0 = a$	$a \wedge 1 = a$
	$a \vee 1 = 1$	$a \wedge 0 = 0$
Дистрибутивность	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
Идемпотентность	$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$
Инволютивность		$\neg(\neg a) = a$
Дополнительность	$a \vee (\neg a) = 1$	$a \wedge (\neg a) = 0$
	$\neg 0 = 1$	$\neg 1 = 0$
Законы де Моргана	$\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$	$\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
Поглощение	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$