Главные расслоения и связности.

1 Главные расслоения

Пусть G — группа Ли. Расслоение со слоем, гомеоморфным G, называется

Определение 1.1. *Главным G – расслоением* называется локально тривиальное расслоение, задаваемое тройкой (P, B, π), где P — *тотальное пространство*, B — *база*, $\pi : P \to B$ — проекция, а группа Ли G действует на P правыми сдвигами, сохраняя слои, причем действие внутри каждого слоя — свободно и транзитивно

Замечание 1.1. Локальную тривиальность нужно понимать следующим образом: существует такое покрытие базы B картами $\{U_\alpha\}_\alpha$ и набор гомеоморфизмов $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times G$, $\varphi_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha(p))$, причем функции g_α уважают действие группы G.

2 Примеры главных расслоений.

Пример 2.1. *Расслоение реперов (frame bundle).* Пусть $\mathcal{M}$ — гладкое многообразие размерности n. Рассмотрим расслоение со слоем в точке $x \in \mathcal{M}$, состоящем из всевозможных упорядоченных базисов $T_x\mathcal{M}$. Это — главное $GL_n(\mathbb{R})$ – расслоение.

Пример 2.2. Предыдущий пример можно немного модифицировать. Например, если многообразие *риманово*, можно рассматривать только ортонормированные базисы, то получится главное $O_n(\mathbb{R})$ – расслоение. А если оно еще и ориентировано, то можно рассматривать ортонормированные базисы с фиксированной ориентацией, получится главное $SO_n(\mathbb{R})$ – расслоение.

Оба предыдущий примера так или иначе строятся с помощью касательного расслоения $T_x\mathcal{M}$. Но бывают и менее тривиальные главные расслоения.

Пример 2.3. *Главное тавтологическое S^1 – расслоение* над проективным комплексным пространством $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1}/\sim$. Пусть $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ — единичная сфера. Рассмотрим проекцию $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$. Она склеивает точки, отличающиеся домножением на комплексное число, модуль которого 1. То есть слой изоморфен S^1. Получилось главное S^1 – расслоение $(S^{2n+1}, \mathbb{CP}^n, \pi)$.

Возможно, тут стоит и более общее определение написать.

3 Функции перехода.

Определение 3.1. *Функциями перехода* называются функции $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, определенные по правилу

$$g_\alpha(p) = g_{\alpha\beta}(\pi(p)) \cdot g_\beta(p). \tag{1}$$

Предложение 3.1. Определение (1) корректно, то есть не зависит от выбора представителя p слоя.

Доказательство. Рассмотрим точку $p \cdot g$, где $g \in G$. Тогда по определению 1.1 $\pi(p) = \pi(p \cdot g)$. Согласно (1)

$$g_\alpha(p) \cdot g = g_\alpha(p \cdot g) = g_{\alpha\beta}(\pi(p \cdot g))g_\beta(p \cdot g) = g_{\alpha\beta}(\pi(p \cdot g))g_\beta(p) \cdot g.$$

Таким образом, $g_{\alpha\beta}(\pi(p)) = g_{\alpha\beta}(\pi(p \cdot g))$. □

Замечание 3.1. Функции перехода удовлетворяют *условиям коцикла*:
(1) $g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$, для $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$;
(2) $g_{\alpha\beta}(x) = g^{-1}_{\beta\alpha}(x)$, при $x \in U_\alpha \cap U_\beta$;
(3) $g_{\alpha\alpha} = 1$, при $x \in U_\alpha$.

Предположим, $\varphi'_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ — какая-то другая тривиализация в тех же картах. Тогда существуют такие функции $h_\alpha(x) : U_\alpha \to G$, что выполнено

$$g'_\alpha(p) = h_\alpha(\pi(p)) \cdot g_\alpha(p).$$

Предложение 3.2. Функции перехода преобразуются следующим образом:

$$g'_{\alpha\beta}(x) = h_\alpha(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x) \cdot h^{-1}_\beta(x).$$

Доказательство.

$$g'_{\alpha\beta}(\pi(p)) = g'_\alpha(p) \cdot (g'_\beta(p))^{-1} = h_\alpha(\pi(p)) \cdot g_\alpha(p) \cdot (h_\beta(\pi(p)) \cdot g_\beta(p))^{-1} =$$

$$= h_\alpha(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x) \cdot h^{-1}_\beta(x).$$

□

Функции перехода — это один из способов говорить о главных расслоениях.

Предложение 3.3. Предположим, есть функции $g_{\alpha\beta}$, которые удовлетворяют условиям коцикла (покрытие $\{U_\alpha\}_\alpha$ тоже дано) Тогда главное расслоение на базе B определяется ими однозначно.

Доказательство. Рассмотрим пространство $E = \bigsqcup\limits_{\alpha} U_\alpha \times G$. Заведем на нем отношение эквивалентности $\sim$:

$$(x, g) \sim (x, g_{\beta\alpha(x)\cdot g}),$$

оно склеивает точки из $U_\beta \times G$ и $U_\alpha \times G$ соответственно. Заметим, что это честное отношение эквивалентности в силу условий коцикла. Положим теперь $P = E/\sim$. Все корректно и хорошо. $\square$

4 Pullback – расслоения

Пусть $f : A \to B$ — непрерывное отображение многообразий. Определим $f^*P \subset A \times P$ как максимальное подмножество, для которого диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} f^*P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & P \arrow[d, "\pi"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd},$$

где p_1, p_2 — проекции на соответствующие координаты. То есть $f^*P = \big\{(a, p) \in A \times P \;\big|\; f(a) = \pi(b)\big\}$. Проекция $\tau : f^*P \to A$ получается ограничением проекции p_1 на f^*P. Получилось главное G – расслоение (f^*P, A, τ), групповая структура наследуется у расслоения (P, B, π).

Замечание 4.1. Предположим, есть два главных G – расслоения $Q \to A$, $P \to B$ и отображение $F : Q \to P$, уважающее дейтвие группы G. Оно индуцирует $f : A \to B$ и изоморфизм $Q \to f^*P$.

5 Ассоциированные расслоения

Предположим, группа G действует слева на многообразие F. Тогда можно определить расслоение

$$P \times_G F \to B.$$

Тотальное пространство определяется аналогично тому, как мы это делали в доказательстве предложения 3.3.

Замечание 5.1. Аналогично, но не совсем. Действие теперь левое, поэтому чуть-чуть определение эквивалентности на пересечении компонент изменится. Это будет видно в следующем примере.

Пример 5.1. Предположим, есть представление группы G:

$$\rho : G \to Aut(V).$$

Пусть $\rho(g) = \rho_g$. Определим векторное расслоение

$$P \times_G V \to B.$$

Аналогично предложению 3.3 мы хотим профакторизовать $E = P \times V$ по отношению эквивалентности. Определим $\sim$ отношение эквивалентности:

$$(p, v) \sim (p \cdot g, \rho_g^{-1}(v)).$$

Нетрудно убедиться, что это действительно отношение эквивалентности. Положим теперь $P \times_G V = E/\sim$.

Замечание 5.2. *Про алгебру Ли.* Вот у нас есть группа Ли G. Это многообразие, у него есть касательное пространство в каждой точке. Вектор касательного пространства T_gG однозначным образом сопоставляется вектору касательного пространства T_eG сдвигом на g^{-1}. Таким образом, векторное поле, уважающее групповую структуру однозначно задается одним ветором в T_eG. Теперь можно строить алгебру Ли $\mathcal{G}$. Пусть её элементы — векторы из T_eG. Определим умножение на них как скобку Ли соответствующих полей.

Пример 5.2. *Сопряженное расслоение.* Определим сопряженное представление группы Ли G её алгеброй Ли $\mathcal{G}$:

$$G \times \mathcal{G} \to \mathcal{G};$$

$$(g, X) \mapsto g \cdot X \cdot g^{-1}.$$

Векторное расслоение adP, ассоциированное с этим представением, называется *сопряженным расслоением.*

6 Универсальное расслоение

Пусть $Gr(n, k)$ — n – плоскости в $\mathbb{R}^{n+k}$. Вектороное расслоение ранга n

$$\xi(n, k) \to Gr(n, k)$$

называется *тавтологическим* (слой над плоскостью — это точки этой плоскости). Есть тривиальное включение $Gr(n, k) \subset Gr(n, k+1)$. Обозначим через $Gr(n, \infty) = \bigcup\limits_{k \geqslant 0} Gr(n, k)$ (об этом можно мыслить как о поскостях в $\mathbb{R}^\infty$). Тавтологическое расслоение для $Gr(n, \infty)$ обозначается $\xi(n)$.

Дальше я ничего не поняла, но вроде оно и не потребуется.

7 Связности на гладких главных расслоениях

Определение 7.1. В каждой точке p тотального пространства расслоения P гладко выберем подпространство $\mathcal{H}_p \subset T_pP$ размерности $\dim B$ так, чтобы $T_pP = \mathcal{H}_p \oplus \ker(d\pi(p))$. Такой выбор плоскостей, который еще и уважает действие группы, называется *связностью на главном расслоении.* Пространство $\mathcal{H}_p$ называется *множеством горизонтальных векторов*, пространство $\ker(d\pi(p)) = T_pP^v$ — *множеством вертикальных векторов* (по сути это векторы, лежащие «в слое» над p).

Лемма 7.1. Пусть Γ — связность на $\pi : P \to B$, $\gamma : [0,1] \to B$ — гладкий путь на базе B. Выберем $e \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ — точку из слоя над началом пути. Тогда путь γ однозначно поднимается до пути $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to P$, начало которого e, $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ и $\widetilde{\gamma}'(t)$ содержится в горизонтальном пространстве $\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}(t)}$.

Доказательство. Рассмотрим отображение, задаваемое путем $\gamma : [0,1] \to B$ и применим к нему pullback. Получим главное расслоение $\gamma^*P \to [0,1]$. То есть без ограничения общности $B = [0,1]$. Связность в главном расслоении с одномерной базой — векторное поле. Тогда по тереме из диффуров о существовании и единственности мы на самом деле просто решаем задачу Коши. $\square$

Замечание 7.1. Если мы захотим построить путь с началом в точке $e \cdot g$, например, то нужно просто старый домножить на соответствующий элемент группы: $\widetilde{\gamma} \cdot g$. То есть на самом деле над каждым путем на базе лежит целое семейство его поднятий — сечений.

Следствие 7.1. Пусть на базе дана кривая $\gamma : [0,1] \to B$, $\gamma(0) = b_0$, $\gamma(1) = b_1$. Связность Γ задает изоморфизм между слоями $\pi^{-1}(b_0) \xrightarrow{\simeq} \pi^{-1}(b_1)$, эквивариантный относительно действия G.

8 Дифференциальные формы, описывающие связности

Определение 8.1. Внешняя 1 – форма $\omega_{MC} \in \Omega^1(G, \mathcal{G})$, инвариантная относительно левого домножения на G и значение $e \in G$ на которой — тривиальный изоморфизм $T_eG \to \mathcal{G}$, называется *формой Маурера – Картана.*

Замечание 8.1. Такая форма существует и единственна, потому что любая форма, уважающая сдвиги, задается своим значением в единичном элементе G.

Обозначение 8.1. Если $\tau \in T_gG$, то значение формы в точке g принято и естественно обозначать $(\omega_{MC})_g = g^{-1}\tau \in T_eG = \mathcal{G}$.

Лемма 8.1. Каждой связности на гладком расслоении $\pi : P \to B$ можно сопоставить форму $\omega \in \Omega^1(P, \mathcal{G})$, удовлетворяющую условиям

(a) При правом домножении на $g \in G$ форма преобразуется по правилу

$$\omega_{pg}(\tau \cdot g) = g^{-1}\omega_p(\tau) \cdot g,$$

где $p \in P$, $\tau \in T_pP$.

(b) Для любого $p \in P$ рассмотрим вложение $R_p : G \to P$, $R_p(g) = p \cdot g$. Тогда

$$R_p^*(\omega) = \omega_{MC}.$$

Обратно тоже верно.

Доказательство. Докажем сначала обратно. Пусть дана форма $\omega \in \Omega^1(P, \mathcal{G})$, которая удовлетворяет (a) и (b). Пусть $\mathcal{H}_p$ — ядро отображения $\omega_p : T_pP \to \mathcal{G}$. Чтобы выбранные плоскости задавали связность, нужно проверить, что они имеют размерность действительно $\dim B$, причем выбор плоскостей гладкий, и эквивариантность относительно G.

Размерность и гладкость. Посмотрим на $R_p^* : T_p^*P \to T_e^*G$.

$$\omega_p(p \cdot \tau) = R_p^*(\omega_p)(\tau) = (\omega_{MC})_e(\tau) = e^{-1}\tau = \tau.$$

Получается, что если путь τ нарисовать на G, то $\omega_p(p \cdot \tau) = 0$ только когда $\tau = 0$. Это значит, что $\dim(\mathrm{im}(\omega_p)) \geqslant \dim G$, а больше быть и не может. Таким образом, все $\mathcal{H}_p$ — плоскости нужных размерностей, а их выбор гладкий, потому что форма ω — гладкая.

Эквивариантность. Действительно, если $\tau \in \mathcal{H}_p$, то $\tau \cdot g \in \mathcal{H}_{pg}$ по свойству (a).

Теперь докажем в другую сторону. Пусть у нас есть связность Г. Определим $\omega_p : T_pP \to \mathcal{G}$ через композицию

$$T_pP \to T_pP^v \xrightarrow{(R_p^*)^{-1}},$$

где первая стрелочка — проекция на подпространство вертикальных векторов, а второе отображение корректно определено, поскольку ядро — это в точности горизонтальные векторы. □

9 Существование связности

Хотелось бы, чтобы связность всегда была.

Лемма 9.1. Тривиальное расслоение имеет связность.

Доказательство. Структура $B \times G$ дает естественную структуру горизонтальных сечений (сечения состоят из точек с фиксированной второй координатой). □

Лемма 9.2. Если P имеет хотя бы одну связность, тогда пространство всех связностей — аффинно, причем ему соответствует векторное пространство 1 – форм $\Omega^1(B, adP)$.

Доказательство. В лемме 8.1 мы поняли, что связностям соответствуют особенные 1 – формы из $\Omega^1(P, \mathcal{G})$. Если рассмотреть множество их попарных разностей, получится векторное подпространство, удовлетворяющее условиям (a) и (c) $R_p^*(\omega) = 0$ (получается из (b) вычитанием). Рассмотрим отображение

$$\pi^* : \Omega^1(B, adP) \to \Omega^1(P, \mathcal{G}),$$

$$\pi^* : \delta \mapsto \omega.$$

Покажем, что его ограничение на подпространство $\Omega^1(P, \mathcal{G})$, удовлетворяющее (a) и (c) — изоморфизм.

Для начала заметим, что образ $im(\pi^*)$ удовлетворяет (a) и (c). Действительно, все касательные векторы, «лежащие в слое» схлопываются, у поскольку именно они составляли дополнение к ядру $R_p^*(\omega)$, то выполнено (c).

Предположим, $\pi(p) = b$, $\tau \in T_pP$. Тогда $\omega_p(\tau) = \pi^*(\delta_b)(\tau) = \delta_b(\pi\tau)$. Таким образом,

$$\omega_p(\tau) = \delta_b(\pi\tau) \tag{2}$$

и выполнено (a) (нужно просто подставить (2)).

Из формулы (2) видно, что π^* — инъекция, значит, имеется изоморфизм с образом. □

Предложение 9.1. Любое гладкое главное расслоение имеет связность. Пространство связностей отождествляется с $\Omega^1(B, adP)$.

Доказательство. Рассмотрим разбиение единицы $\{\lambda_\alpha\}_\alpha$, подчиненное покрытию локальной тривиализации $\{U_\alpha\}_\alpha$. В каждой окрестности $\pi^{-1}(U_\alpha)$ есть форма связности A_α по леммы 9.1. Положим

$$A \sum_\alpha \lambda_\alpha A_\alpha.$$

Мы нашли глобальную форму связности на P.

Вторая частьпредложения — следствие леммы 9.2. □

10 Коваринатная производная