

Работа, потенциальные силы

Краткий теоретический курс

Пусть $\gamma: \vec{r}(t), t \in [t_0, t_1]$ — отрезок траектории частицы между моментами времени t_0 и t_1 .

$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ — сила, действующая на частицу.

Работа этой силы над частицей на траектории γ :

$$A_\gamma := \int_{\gamma} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t), \dot{\vec{r}}(t)) dt$$

скалярное произведение
векторов

Сила называется потенциальной, если

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$$

Здесь $U(\vec{r})$ — потенциал, генерирующий силу \vec{F} .

В декартовых координатах:

$$\vec{\nabla} U(\vec{r}) = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)$$

$$(\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \text{etc.})$$

Для потенциальной силы 1-форма

$$(\vec{F}, d\vec{r}) = -(\vec{\nabla} U, d\vec{r}) = -dU(\vec{r}) \quad \text{точка}$$

При этом работа

$$A_{\gamma} = \int_{\gamma} (\vec{F} d\vec{r}) = U(\vec{r}(t)) \Big|_{t_1}^{t_0} \Leftrightarrow A_{\circlearrowleft} = 0$$

Работа потенциальной силы не зависит от формы траектории γ , а зависит лишь от положения её концов.

здесь \neq замкнутой траектории \circlearrowleft

Необходимое условие точности формул ω — её замкнутость

$$\omega = df \Rightarrow d\omega = 0$$

Условие замкнутости формул $(\vec{F}, d\vec{r})$ в декартовых координатах

$$d(\vec{F}, d\vec{r}) = 0 \Leftrightarrow \sum_i F_i \partial_i = \sum_j F_j \partial_j + i, j,$$

здесь обозначим: $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\} \equiv \{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$
 $\{F_x, F_y, F_z\} \equiv \{F_1, F_2, F_3\}$.

Лемма Пуанкаре: если конфигурационное пространство механической системы односвязно, то есть любой замкнутый контур в ней стягивается,

To замкнутость 1-формы \equiv ее торкости:

$$\boxed{d(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{F}, d\vec{r}) = -dU}$$

Причины Даламбера: от Ньютона к лагранжеву формализму.

Ньютонов формализм неудобен тем, что в уравнениях Ньютона присутствуют заранее неизвестные силы реакции. Чтобы разобраться с ними, нужно подробней их свойства.

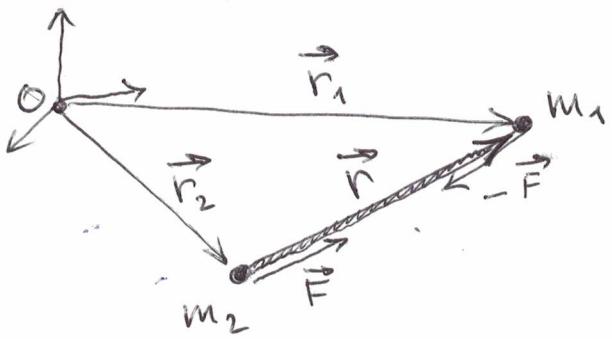
Как работают силы реакции:

Пример 1. Силы реакции в твёрдом теле:

Типичный элемент твёрдого тела — 2 материальных точки m_1, \vec{r}_1 и m_2, \vec{r}_2 , соединённое жёстким невесомым стержнем. Стержень обеспечивает ограничение на движение точек:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \text{const} \quad (1)$$

Со стороны стержня (его концов) на точки действуют силы реакции (см. рис.) направленные вдоль стержня, равные по величине и противоположные по направлению (обозначим)



$$\begin{cases} \vec{F}, -\vec{F} - \text{силы реакции} \\ \vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

Воспользуем суммарную работу этих сил реакции при движении частиц. Для этого надо проинтегрировать 1-форму:

$$(\vec{F}, d\vec{r}_2) + (-\vec{F}, d\vec{r}_1) = - (\vec{F}; d\vec{r})$$

Будем траекториям движения частиц $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$

Заметим, что в силу условия связи:

$$d(\vec{r}^2) = d((\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2) = 0, \text{ то есть}$$

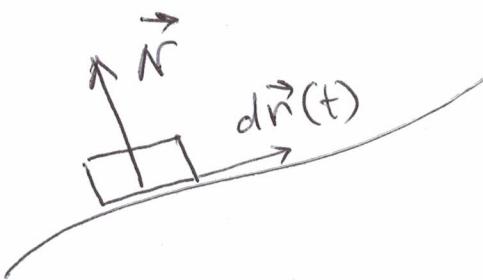
$$(\vec{r} d\vec{r}(t)) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{r}(t) \perp d\vec{r}(t)}$$

Однако $\vec{F} \parallel \vec{r}$, поэтому $\vec{F} \perp d\vec{r}(t)$, следовательно $(\vec{F}, d\vec{r}(t)) = 0$. Заключаем:

В твердом теле суммарная работа сил реакции стержней при любом перемещении тела равна нулю.

Пример 2: Сила реакции опоры.

Рассмотрим движение тела (материальной точки) по гладкой опоре (см. рис.).



Полагаем, что трение отсутствует.

В этом случае сила реакции опоры \vec{N} должна удовлетворять условию $(\vec{N} d\vec{r}(t)) = 0$

Здесь мы предположили, что тело не ног-
прогибает при движении по опоре — свежа удержи-
ванием, а сама свежа задается уравнением
поверхности вида

$$\boxed{f(\vec{r}) = 0} \quad (2)$$

В этом случае $d\vec{r}$ направлен по касательной к
поверхности, а \vec{N} к ней ортогонален, и следовательно

Сила реакции опоры
 гладкой поверхности (2)
 работы не совершает.

Однако, как мы уже проверили (см. Задание 3, №4)
 сила реакции гладкой опоры может совершать
 работу в том случае, если опора двигается
 и уравнение свежи задается условием

$$\boxed{f(\vec{r}, t) = 0} \quad (3)$$

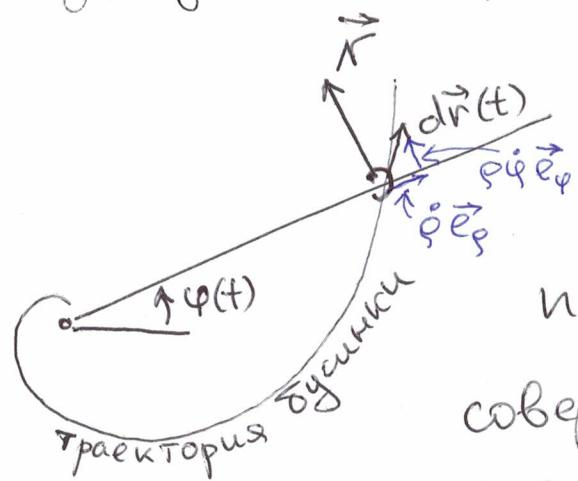
В этом случае

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}, d\vec{r} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0} \quad (4)$$

$d\vec{r} \downarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$, если $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$,

и так как $\vec{N} \parallel \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$, то $(\vec{N}, d\vec{r}(t)) \neq 0$

Наглядный пример такой ситуации — движение бусинки по врашающемуся стержню (см. Лекция 1, ср 15). Вращающийся стержень — движущаяся опора, ее уравнение:



$$\arctg \frac{y}{x} = \varphi = \omega t,$$

поэтому $\vec{N} \times d\vec{r}(t)$ и сила \vec{N} совершают работу, приводящую к изменению кинетической энергии бусинки (см. Задача 3, №4).

В системах со свяжими, явно зависящими от времени, типа (3), сила реакции движущихся опор перпендикулярна не реальным перемещениям тел $d\vec{r}(t)$, а, так называемым, виртуальным $\overset{\leftrightarrow}{\delta r}$

Def: Виртуальным перемещением материала под точки в момент времени $t=t_0$ называется любое ее возможное перемещение вдоль "зарожденной" в момент t_0 связи.

Например, для связи (3) виртуальный явленный любое перемещение, удовлетворяющее

условию

$$\left(\frac{\partial f(\vec{r}, t_0)}{\partial \vec{r}}, \vec{\delta r} \right) = 0 \quad (5)$$

Отличие такого $\vec{\delta r}$ от \vec{dr} (см. (4)) очевидно.

Помимо также, что в разные моменты времени $t = t_0$ виртуальное перемещение $\vec{\delta r}$ будут разными.

Для балки на врачающемся стержне виртуальное перемещение — это перемещение вдоль радиуса:

$$\vec{\delta r} \parallel \vec{e}_z.$$

Помимо виртуальных перемещений для характеристики сил реакции использован Даламбер.

Принцип Даламбера. В системе с идеальными связями суммарная работа сил реакции на

любых виртуальных перемещениях равна нулю

Пояснение: идеальными называются связи, которые не порождают сил трения, сил неизпругой деформации и т. п., то есть тех сил, которые могут не "работать" на виртуальных перемещениях.

Воспользуемся принципом Даламбера для исключения сил реакции идеальных сверхей из уравнений Ньютона.

Итак, пусть наша механическая система состоит из n частиц: $\vec{r}_i, m_i, i=1, 2, \dots, n$. Пусть на " i -ю

частицу в системе действуют известные нам

одинаковые силы \vec{F}_i (типа силы Кулонса, силы гравитации...)

и силы реакции идеальных сверхей \vec{N}_i . Уравнения

Ньютона для системы имеют вид:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{N}_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Дополнив (6) скалярно на виртуальные (предположение "заморозить" сверхей) перемещения частиц $\delta \vec{r}_i$, и суммируя по i , получаем

$$\sum_{i=1}^n m_i (\ddot{\vec{r}}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{N}_i, \delta \vec{r}_i)$$

В силу принципа Даламбера, последнее слагаемое в правой части закупается, и мы имеем:

$$\sum_{i=1}^n m_i (\ddot{\vec{r}}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) \quad (7)$$

Уравнение (7) уже не содержит неизвестных сил реак-

уим №. Сколько уравнений в системе (7)?

Ровно столько, какова размерность пространства виртуальных перемещений $\vec{\delta r}_i$. Это пространство, согласно (5), совпадает с касательным к пространству к поверхности звезд при "антигравитации" времени. Ну а размерность касательного пространства равна числу степеней свободы системы. Значит в системе (7) независимых уравнений столько, сколько степеней свободы системы, то есть достаточное количество.

Чтобы привести (7) к более явному виду, предположим, что наша мех. система имеет N степеней свободы и допускает явную параметризацию с помощью N , так называемых, обобщенных координат

нат
они

$$q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

Rem: Термин "обобщенные координаты" - исторический. Означает, что q_α отличаются от обычных декартовых координат \vec{r}_i . В частности, полярные и сферические координаты можно отнести к обобщенным.

Движение частиц системы по поверхности звезд при этом задается условиями

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) \quad (8)$$

Здесь $\vec{r}_i(\dots)$ в правой части — это определенное функции своих аргументов, задающие параметрическую поверхность сферы. Из (8) получаем для виртуальных и реальных перемещений гасин и для их скоростей соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i(q_1 \dots q_N, t)}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \text{ (т.к. } t=\text{const}) (g_a) \\ d \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i(q_1 \dots q_N, t)}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i(q_1 \dots q_N, t)}{\partial t} dt \\ \dot{\vec{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i(q_1 \dots q_N, t)}{\partial q_\alpha} \cdot \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i(q_1 \dots q_N, t)}{\partial t} (g_c) \end{array} \right.$$

Здесь $\delta q_\alpha / dq_\alpha$ — произвольный набор смешанных/дифференциалов независимых др. от груза обобщенных координат. $\dot{q}^\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt}$ называются обобщенными скоростями.

Обратим внимание, что \vec{r}_i в (g_c) — есть функция от обобщенных координат q_α , обобщенных скоростей \dot{q}^α и времени: $\vec{r}_i(q_1 \dots q_N, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_N, t)$, причём зависимость от \dot{q}^α — линейная. Из (g_c) следует:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}}$$

(10)

Заметим также, что оператор влечет частной производной по времени - $\frac{d}{dt}$ - в применении к $\vec{F}_i(q_1 \dots q_N, t)$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt} = \sum_{\beta=1}^N \dot{q}_{\beta} \frac{\partial}{\partial q_{\beta}} + \frac{\partial}{\partial t},$$

и он коммутирует с оператором влечь частной производной по $q_{\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}}$ (но не коммутирует с $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$)

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right)^{\circ} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \quad (11)$$

Теперь мы готовы преобразовать левую часть динамических уравнений (7), подставив туда выражение для $\delta \vec{r}_i$ (9a) и используя (10), (11):

$$\begin{aligned} m_i(\ddot{\vec{r}}_i, \delta \vec{r}_i) &= \sum_{\alpha=1}^N m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_i \left\{ \left(\ddot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right)^{\circ} - \left(\ddot{\vec{r}}_i, \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right)^{\circ}}_{\substack{(10) \text{ применем (11)}}} \right) \right\} \delta q_{\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_i \left\{ \left(\ddot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right)^{\circ} - \left(\ddot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) \right\} \delta q_{\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_i \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} (\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i) \right)^{\circ} - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} (\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i) \right\} \delta q_{\alpha} = \end{aligned}$$

(перекидываем с $\ddot{\vec{r}}_i$ огни
 "°" на все скалярное
 произведение)

$$= \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \right) \frac{m_i \vec{r}_i^2}{2} \right\} \delta q_\alpha.$$

Вспоминаем, что кинетическая энергия системы
 $T_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{r}_i^2}{2}$, мы можем записать теперь левую

часть (7) как:

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^N \delta q_\alpha \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \right) T_{\text{кин}}} \quad (12a)$$

Преобразуем правую часть (7), предположив, что
 силы \vec{F}_i , действующие в системе, являются потенци-
 альными, то есть существует функция потенциаль-
 ной энергии $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$ (см. стр. 4 лекции 3):

$$\boxed{\vec{F}_i = - \frac{\partial U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)}{\partial \vec{r}_i} \equiv - \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)}$$

Подставляем это в правую часть (7):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) &= - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = \\ &= - \sum_{\alpha=1}^N \delta q_\alpha \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \underbrace{U(\vec{r}_1(q_1, \dots, q_N, t), \dots, \vec{r}_n(q_1, \dots, q_N, t), t)}_{\text{функция } U \text{ из (8)}} \end{aligned}$$

Заметим теперь, что среди аргументов U нет
 обобщенных скоростей \dot{q}_α , поэтому $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$, и

можем написать:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{\alpha=1}^N \delta q_\alpha \left(\underbrace{\frac{d}{dt} \circ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}}_{\text{Этот оператор действует привилегировано на } U} \right) U \quad (12b)$$

Где из (12a) и (12b) естественно определись:

Def: Для механической системы N материальных точек $m_i, \vec{r}_i, i=1, \dots, n$, в которой действуют потенциальное силы $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U$, и движение которой подчиняется идеальными связями (8), функция

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) = T_{\text{кин}} - U \quad (13)$$

называется лагранжианом системы.

Здесь кинетическая энергия $T_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2}$, и пот. энергия U системы выражена как функция обобщенных координат и скоростей (см. (8), (9c)).

Теперь результат преобразований (12a), (12b) уравнений (7) можно сформулировать в виде теоремы:

Th: Движение механической системы с потенциальными силами и идеальными связями полностью определяется ее лагранжианом $L(q, \dot{q}, t)$.

Ее уравнения движения имеют вид:

$$\left(\frac{d}{dt} \circ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \right) L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) = 0, \quad (14)$$

$$\alpha = 1, \dots, N.$$

и называются уравнениями Эйлера-Лагранжа

Док-во: уравнения (14) следуют очевидно из (7), (12a), (12b), (14), если учесть, что виртуальное перемещение δq_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$, обобщенных координат линейко независимо.