

1.09.20

## ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ.

МАН ОБЪЕКТ  $X$ ,  $G$ ,  $\text{Sym } X$   
(г. симметрия)

МЛР ВАРУХ ОБЪЕКТОВ  $G < \text{Sym } X$

### Опн. Линейное представление

ГРУППА  $G$  — это  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$

$$\rho(g) \rightarrow [ \rho(g) ]$$

$$G \rightarrow \text{GL}(m, k)$$

Примеры. •  $G = \mathbb{R}_+$  на  
матричном  
языке  $\text{GL}(1, k) = k^*$

### КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

ГРУППА  $\mathbb{R}_+$  (ЗАПУСКАЕТ В ПРУЖИ  
 $\mathbb{R}_+^* = \text{БЕЗУ. МАТРИЦ}$

||  
осуществляет  
гомоморфизм ... )

• БИЛУЧЕВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$$\rho(x+y) = \rho(x)\rho(y)$$

$$\rho: X \rightarrow e^{\alpha x} \in \mathbb{R}^*$$

- $\mathbb{R}^*$  — несвязна

$$\rho(x) = |x|^s, s \in \mathbb{R}$$

- $\rho(x) = \text{sign } x$
- $\rho(x) = \text{sign}|x|$

- Пример  $n$ -мерного представления

$$\mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

$$\rho(x) = e^{Ax} \quad A \in \text{MAT}_n(\mathbb{R})$$

- $n$ -мерное комплексное представл.

пример  $\mathbb{Z}$

достаточно

$$\rho(1) = A \quad \text{УК-ТБ, ВУДА неяв. 1}$$

$$\rho(n) = \rho\left(\underbrace{(+1 + \dots + 1)}_n\right) = A^n$$

$$\rho_1(1) = A_1$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \xrightarrow{\rho_1} \quad \rho_1(1) = A_1 \\ \xrightarrow{\rho_2} \quad \rho_2(1) = A_2 \end{array}$$

$$\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow \exists \text{ матрица } T : \\ A_1 = T^{-1} A_2 T$$

Эквивалентные представления

$$\begin{aligned}\rho_1 : G &\rightarrow GL(V_1) \\ \rho_2 : G &\rightarrow GL(V_2)\end{aligned}$$

Опн. Представления  $\rho_1$  и  $\rho_2$

эквивалентны, если  $\exists$  такой изоморфизм  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ , что диаграмма коммутативна

$$\rho_2 \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1$$

$$V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2$$

$$\begin{array}{ccc} \rho_1(g) \downarrow & & \downarrow \rho_2(g) \\ V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \end{array}$$

После выбора базиса

$$[\rho_2] \circ [\varphi] = [\varphi] \circ [\rho_1]$$

Теорема.  $g \in G$

КАКДОЕ  $n$ -ЧИСЛОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ  $\mathbb{Z}$  С ТОЧНОСТЬЮ  $\delta_0$  ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НУМЕРУЮТСЯ

$$\sim \sim \sim \sim (\sum n_{ij} \lambda_{ij})$$

Если  $G$ -произвольная группа, то  
трудно, но



$G$ -тополгич. кн.

a)  $|G| < \infty$

ЕСТЬ ХОРОШАЯ  
ТЕОРИЯ

$G$ -топологич. конч. группа

Пример. Комплексное представление группы  $\mathbb{Z}_{\text{mod } n} = \mathbb{Z}_n$

$$P(i) = A$$

Если для группы  $\mathbb{Z}$   $A$  н.б. тогда,  
то для  $\mathbb{Z}_n$   $A^n = E$

и  $\downarrow$  анал

$A$ -диагональна

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i = \sqrt[n]{1}$$

### Простая конструкция

$$\rho_1: G \rightarrow GL(V_1)$$

$$\rho_2: G \rightarrow GL(V_2)$$

### Прямая сумма представлений

$$\rho_1 \oplus \rho_2: G \rightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2)$$

КАК ЗДЕСЬ МАТРИЦЫ:

$$[\rho_1(g)] = \boxed{\phantom{000}}_{n_1 \times n_1} \quad n_1 = \dim V_1$$

$$[\rho_2(g)] = \boxed{\phantom{000}}_{n_2 \times n_2} \quad n_2 = \dim V_2$$

$$[\rho_1 \oplus \rho_2] \rightarrow \left( \begin{array}{c|c} [\rho_1 g] & \emptyset \\ \hline \emptyset & [\rho_2 g] \end{array} \right)_{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$$\rho: G \rightarrow GL(V)$$

$W \subset V$  — подпространство в  $V$ ,  
БЕКОДИМ

$G$ -УЧЕВАЮЩИЙ

$$G(W) = W$$

$\rho(g)|_W$  — мн. оператор на  
подпр-ве  $W$ , т.е. элемент  
группы  $GL(W)$

$$g \mapsto \rho(g) |_{CGL(W)}$$

представление  
и  
 $G$ -извр. пр-ва

### Неприводимое представление

$$\rho: G \rightarrow GL(V)$$

называется неприводимым, если

$\nexists$   $G$ -извр. подпр-в, отличных  
от  $\{1\}$  и  $V$ .

### Вполне приводимое представление

Представление  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  наз.  
вполне приводимым, если  $\rho$  есть  
прямая сумма неприводимых  
представлений.

Если оставить ненулев

$$\bullet G = S_3 \quad 1 \ 2 \ 3 \quad \hookrightarrow \quad P(\mathcal{E})$$

$$P(\mathcal{E})(x_1, x_2, x_3) = (x_{\mathcal{E}(1)}, x_{\mathcal{E}(2)}, x_{\mathcal{E}(3)})$$

$$W_{\text{const}} = \{(x, x, x)\}$$

$$W_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \sum x_i = 0\}$$

$$S_3 = W_{\text{const}} \oplus W_0$$

$$(1, 2, 3) = (4, 4, 4) + (-3, -2, 5)$$

## Лекция 2

08.09.20

### АЛГЕБРА

$$\rho: G \rightarrow GL(V)$$

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2)$$

ТРИВИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$$\rho(g) = id$$

- $G: V \quad \rho(g)v = gv$

$$id(v) = v, v \in V$$

- $G$ -инвар. подпр-во

$$W \subset V, G(W) = W \text{ обозн. } W_G$$

- НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$$G: V$$

$$\{0\} \leq W_G \leq V \Rightarrow \begin{cases} W_G = \{0\} \\ W_G = V \end{cases}$$

[группа  $G$   
в под- $V$ ]

- ВНОРНЕ ПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$$G: V, \text{ если } V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$$

$$G: V_i - \text{неприводимое}$$

II Def.  $G: V$  вноне приводимо, если

$\forall W_G \leq V \exists W_G$  - инвариантное подпр.

$$V = W_G \oplus W_G^\perp$$

Теорема. Два определения вполне приводимости эквивалентны.

$A$ -бо:  $2 \text{ общ.} \rightarrow 1 \text{ общ.}$

иначеск  
но  $\dim V$

$G: V$  если  $V$  неприводимо, то  
разбирается нечего.

В противном случае  $\exists$   $0 < W_G < V$

5АЗА иск.:  
единичное  
нр-бо

$$V = W_G \oplus W_G'$$

$$\dim W_G < \dim V \Rightarrow W_G = T_1 \oplus \dots \oplus T_s$$

$$\dim W_G' < \dim V \Rightarrow W_G' = S_1 \oplus \dots \oplus S_m$$

$G_i T_i$  и  $G_j S_j$  неприводимы  $\Rightarrow$

$$V = T_1 \oplus \dots \oplus T_s \oplus S_1 \oplus \dots \oplus S_m$$



$1 \text{ общ.} \rightarrow 2 \text{ общ.}$

$G: V$  ДАНО:  $V = T_1 \oplus \dots \oplus T_s$

$$\{0\} < W_G < V$$

используя построение  $W_G'$

## Конструкция

$W_G$

$T_1, \dots, T_s$

1 ЧАСТ. (\*)  $W_G \cap T_{i_1} = \{0\}$  Тогда рассмотрим

сумму  $W_G + T_{i_1}$ . При условии (\*) она будет прямой.

2 ЧАСТ. Из оставшихся  $T$  выберем

$T_{i_2}$  такое, что  $(W_G \oplus T_{i_1}) \cap T_{i_2} = 0$

(это может не быть, тогда наша "ИГРА" ЗАКОНИШЬСЯ)

:

ИГРА ЗАКАНИВАЕТСЯ ВЫБОРОМ ТАКОГО ПОДПР-ВА:

$W_G \oplus T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_k}$

ЭТО ПОДПР-ВО  $G$ -инвариантно

УТВ.1  $\Sigma$  двух  $G$ -инвар. подпр-в  $G$ -инвариантна и  $U_G \cap Z_G$  —  $G$ -инвар.

УТВ.2  $W_G \oplus T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_k} = V$

¶ Пусть  $T_j$  осталось после окончания этой игры. Тогда рассмотрим

$T_j \cap (W_G \oplus T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_k}) \neq \{0\}$

ПРЕСЕЧЕНИЕ 2x ГИМВАР. подпр.  $G$ -инвариантно  $\Rightarrow$

$T_j$  — неприводимо  $\Rightarrow T_j = 0$  или  $T_j \subset W_G$   
и  $G$  — инвар.

НЕТ.

у

$$T_j \cap (W_G \oplus T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_k}) = T_j$$

у

$$T_j \subset W_G \oplus T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_k}$$

у

множе из оставшихся множеств

у

$$\subset W_G \oplus T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_k}$$

$$W_G \oplus T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_k} = V$$



### Унитарные представления.

Оп.  $G: V$  над полем  $\mathbb{C}$  наз. унитарными,  
если в пр-ве  $V_G$   $\exists$  эрмитово скалярное  
произведение  $\langle , \rangle$ , инвариантное  
относительно операторов  $\rho(G)$

$$\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V \text{ и } \forall g \in G$$

Оп. ЭРМИТОВО СКАЛЯРНОЕ произведение:

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad (x, \lambda y) = \lambda(x, y)$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\langle x, x \rangle > 0 \quad \text{если} \quad x \neq 0$$

ПРИМЕР.  $\mathbb{C}^n$  базис  $(1, 0, \dots, 0)$

$$\begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & & \\ (0, 0, \dots, 1) & & & & & & \end{matrix}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

Топология  $\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$

## Миц-теорема. Унитарное представление вполне приводимо.

Лок-бои: Пусть  $G: V_G$  - универсальное представление и пусть  $W_G \subset V$

$$W'_G = W^\perp$$

$$\bullet V = W_G \oplus W_?^\perp \quad (\text{теорема из лин. алгебры})$$

Lemma: If  $w' \in W^\perp$ , then  $u \wedge w' \in W^\perp$

STAR, AND  $\langle \omega, \omega' \rangle = 0$  AND  $\omega \in X$

$$\langle w, gw' \rangle = 0$$

$$\langle \omega, g\omega' \rangle = \langle g^{-1}\omega, \bar{g}^1(g\omega') \rangle = \langle g^{-1}\omega, \omega' \rangle = 0$$

W<sub>G</sub>  
 TAK KAK  $\bar{g}^1 \in G$

$$\Rightarrow g\omega' \in W^\perp \Rightarrow G(W^\perp) = W^\perp$$



Теорема.  $|G| < \infty$   $G: V_G$

Тогда в пр-ве представлений можно выбрать  $G$ -инвар. эрмитово скалярное произведение  $\langle , \rangle$

Мот-во: Идея (главная) Усреднение по группе

$$\overline{H^t} = H, H > 0 \quad (\text{т.е. все главные линейки } \Delta > 0)$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{x^t H y} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Возьмём кадое-нибудь эрмитово скалярное пр-во  $\langle , \rangle$

$$H(x, y) = \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle \quad x, y \in V$$

- Утв.
1.  $H(x, y)$  — эрмитово скаляр. пр-во
  2.  $H(x, y)$  —  $G$ -инвариантно

■  $H(x_1 + x_2, y) = \sum_{g \in G} \langle g(x_1 + x_2), y \rangle = \sum_{g \in G} \langle gx_1 + gx_2, y \rangle =$

$$= \sum_g \langle gx_1, y \rangle + \sum_g \langle gx_2, y \rangle = H(x_1, y) + H(x_2, y)$$

$$H(x, y) = \overline{H(y, x)} \quad (\text{проверить})$$

$$H(x, x) = \sum_{gx \neq 0} \langle gx, gx \rangle > 0 \quad (\text{каждое слагаемое} > 0)$$

2.  $g_0 \in G$

$$H(g_0 x, g_0 y) = H(x, y)$$

$$\sum_{g \in G} \langle gg_0 x, gg_0 y \rangle = \sum_{g' = gg_0} \langle g'x, g'y \rangle = H(x, y)$$

Если  $g$  пробегает группу  $G$ , то и  $g_0$  проб. гр.  $G$



Вывод: Любое конечное линейное (коэффициентное) представление конечной группы  $G$  вполне приводимо.

$G: V \Rightarrow G: V$ -унитарное  $\Rightarrow W_G \subset V$   
 если  $W_G^\perp$  дополнение  $\Rightarrow$  вполне приводимо

## Регулярное представление

$|G| < \infty$      $\mathcal{F} = k[G]$  —  $k$ -значевые  
функции на группе  $G$

$$\mathcal{F} = \{f(g)\}$$

$\mathcal{F}$  — конечномерное векторное  
пространство над полем  $k$

$$f_1(g) + f_2(g)$$

$$\lambda f(g) \quad \lambda \in k \quad \dim \mathcal{F} = |G|$$

Естеств. базис

$$S_g = \begin{cases} 1 & \text{в точке } g \\ 0 & G - \{g\} \end{cases}$$

$$f = \sum_{g \in G} f(g) S_g$$

значение я  
φ-ии  
||  
координаты

ЛЕВОЕ СОСТАВЛЕНИЕ

$$L_g: g \rightarrow g \circ g$$

Возникает представление группы  $G$

$$\text{в простр. } F = k[G]$$

$$L_g(S_{g_0}) = S_{gg_0}$$

$$L_{gg'} = L_g L_{g'}$$

$$\begin{aligned} & \triangleleft L_{gg'}(S_{g_0}) = S_{(gg')g_0} = S_{g(g'g_0)} = \\ & = L_g(S_{g'g_0}) = L_g(L_{g'} S_{g_0}) \end{aligned}$$

Онп. ЛЕВОЕ РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$$L_g \quad \underline{\underline{L(g)}} \quad \begin{matrix} \text{предst. в простран-} \\ \text{стве функций} \end{matrix}$$

Аналогично ПРАВОЕ РЕГУЛЯРНОЕ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$$R_{g_0}: g \rightarrow g g_0^{-1} \quad \begin{pmatrix} \text{если написат} \\ g g_0, \text{ то не} \\ \text{будет действия} \end{pmatrix}$$

$$R_g S_{g_0} = S_{g_0 g^{-1}}$$

$$\dim L(g) = |G|$$

Упр.  $\{f(g)\}$ -координаты ф-ии  $f$   
 в базисе  $S_g$ . Координаты меняются  
 так  $(L_g f)(g_0) = f(g^{-1}g_0)$   
 $L_g(S_{g_0}) = S_{gg_0}^{!!}$

Общая идея.

$$G: X \quad x \rightarrow gx$$

$$(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

$$ex = x, e \in G$$

Например.  $G = S_4 = \text{Aut} \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \right)$

$$G: f(x) \quad (gf)(x) = f(g^{-1}x)$$

\* Если было бы  
 написано  $g f$ , то  
 не выполнялось:

$$f(g_1) f(g_2) = f(g_1 g_2)$$

## ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$\rho: V \rightarrow V^* = \{ \text{нр-бо лин. функ-и на } V \}$

$\rho^* - \text{двойственное представление } \rho$

$$\rho^*(g)(\ell(\sigma)) = \ell(g^{-1}\sigma)$$

$$\Delta \ell(\sigma_1 + \sigma_2) = \ell(\sigma_1) + \ell(\sigma_2)$$

$$\ell(\lambda \sigma) = \lambda \ell(\sigma)$$

$$\ell(g^{-1}(\sigma_1 + \sigma_2)) = \ell(g^{-1}\sigma_1) + \ell(g^{-1}\sigma_2)$$

Лемма Шура — это выше все.

## • СЛАГАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

$$G_{\beta_1}: V_1 \rightarrow V_2$$

$$\varphi: V_1 \rightarrow V_2$$

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$$

ЧИСЛОСТИ МНОЖЕСТВО ВСЕХ  
СЛАГАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ  
(ПРЕДСТАВЛ.  $G_{\beta_1}: V_1 \cup G_{\beta_2}: V_2$ )  $\text{Hom}^G(V_1, V_2)$

- КУЛЕВОЙ ОПЕРАТОР ВСЕГДА СЧИТАЮЩИЙ
- $\text{Hom}^G(V_1, V_2)$  — КОНЕЧНОЕ НР-ВО МНЖ, ПОЛЕНЫ  $R$

$V_2$  — Мин.  $R$ -простр.

$$\begin{array}{c} \varphi_1: V_1 \rightarrow V_2 \\ \varphi_2: V_1 \rightarrow V_2 \end{array} \quad \boxed{\varphi_1 + \varphi_2: V_1 \rightarrow V_2}$$

последовательно  $\varphi_1, \varphi_2$  — СЧИТАЮЩИЕ. ТОГДА

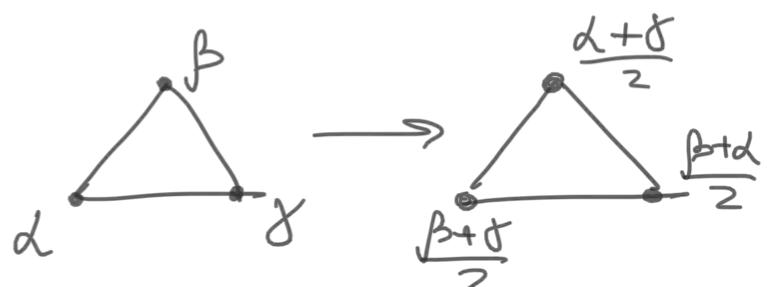
$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \beta_1 &= \beta_2 \circ \varphi_1 \Rightarrow (\varphi_1 + \varphi_2) \circ \beta_1 = \varphi_1 \circ \beta_1 + \varphi_2 \circ \beta_1 \\ \varphi_2 \circ \beta_1 &= \beta_2 \circ \varphi_2 = \beta_1 \circ \varphi_1 + \beta_2 \circ \varphi_2 = \beta_2 \circ (\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

$\dim \text{Hom}^G(V_1, V_2) = c(V_1, V_2)$  — Число счётающих

Пример.

$Z_3$

$\tilde{F}(\Delta)$



$\varphi$  — УСРЕДНЯЮЩЕЕ  
(УСР)

$\varphi \in \text{Hom}(\tilde{F}(\Delta), \tilde{F}(\Delta))$

ПОВОРОТ  $\circ$  УСР = УСР  $\circ$  ПОВОРОТ

## ТЕОРЕМА ШУРА 1.

ИМЕЕТ ПОЛЕМ С

Пусть  $G: V \rightarrow V$  — НЕПРИВОДИМОЕ комплексное представление. Тогда

$\text{Hom}^G(V, V)$  состоит из скалярных операторов.

$$G: V \quad \varphi: V \rightarrow V$$

$$g \circ \varphi = \varphi \circ g \quad \forall g \in G$$

$$\text{ТОГДА } \varphi = \lambda E, \lambda \in \mathbb{C}$$

Лемма  $\varphi: V_C$  пусть  $\lambda$ -собств.знач-ие оператора  $\varphi$

$$E_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$

•  $E_\lambda$  —  $G$ -инвариантно (следует из  $g \circ \varphi = \varphi \circ g$ )

$$v \in E_\lambda \quad \varphi(v) = \lambda v$$

$$\varphi(gv) = g(\varphi v) = g(\lambda v) = \lambda(gv)$$

У в силу неприводимости  
 $V_C$

$$V_C = E_\lambda \quad \varphi(v) = \lambda v$$



№4  
ПОЛЕНС

## ТЕОРЕМА ШУРА 2.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ  
ВЕРНА НАД  
А ПОЛЕНС

- $G: V \rightarrow W$  - АВА неприводимых  
представлений

Тогда  $\text{Hom}^G(V, W) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } V \not\sim W \\ \dim \text{Hom}^G(V, W) = 1, & \text{если } V \sim W \end{cases}$

ночко  $V \not\sim W$  (не эквив.)

$$\varphi \circ p_1(g) = p_2(g) \circ \varphi \quad \varphi: V \rightarrow W$$

показем, что  $\varphi$ -нелиней

$\ker \varphi \in U$        $\ker \varphi$  -  $G$ -инвариантно, если  $v \in \ker \varphi$   
 $\operatorname{Im} \varphi \in W$

$$(p_1(g)v) \in \ker \varphi$$

$$\varphi(p_1(g)v) = p_2(g)(\varphi(v)) = 0$$

$$p_1(g)v \in \ker \varphi$$

аналогично доказывается, что  
образ  $\operatorname{Im} \varphi$  -  $G$ -инвариантен (упр.)

$$\text{о } \ker \varphi = \begin{cases} 0 \\ V \end{cases}$$

$\text{Im } \varphi = \begin{cases} 0 \\ W \end{cases}$

(т.к.  $G: V \rightarrow W$  — изоморфизм)

пусть  $\ker \varphi = 0$   $\Rightarrow \varphi: V \rightarrow W$   
 $\text{изоморфизм}$

$\varphi \circ \beta_1 = \beta_2 \circ \varphi$

не подходит

остаётся  $\ker \varphi = V$ , ч.т.д. □

Теперь рассмотрим  $V \cong W$

$\varphi: V \rightarrow W$   
 изоморфизм

$$\varphi \circ \beta_1 = \beta_2 \circ \varphi$$

пусть  $\varphi$  — любой другой симметричный оператор

$$\varphi: V \xrightleftharpoons{\varphi^{-1}} W$$

$$\psi: V \rightarrow W$$

Упр. композиция симметричных операторов симметричный

$$\varphi^{-1} \circ \varphi : V \rightarrow V$$

СННЕТ. ОПЕРАТОР УЗ  $V_B V$ :

$$\varphi^{-1} \circ \varphi \in \text{Hom}^G(V, V)$$

но т. ВУРА 1:  $\varphi^{-1} \circ \varphi = \lambda E$

$\varphi = \lambda \varphi \Rightarrow$  нпространство  
одномерно



# ЛЕКЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ

22.09.20

- ТЕОРЕМА ЕДИНОСТВЕННОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПО УБЕТУМ

- $G \quad |G| < \infty \quad \text{тогда } k = \mathbb{C}$
- $V^G \quad G \cdot V \quad V_G - \text{ПРЕДСТАВЛЕНИЕ}$

- УБЕТ:

МЕРСИМОВА. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАЗБИВАЮТСЯ НА КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

КАЖДЫЙ КЛАСС ОКРАШЕН В СВОЙ УБЕТ

---

НАВЕД

$$V^G = W_1^G \oplus W_2^G \oplus \dots \oplus \underbrace{W_s^G}_{\text{подпредставление}}$$

НЕТР

$$V^G = V_1^G \oplus V_2^G \oplus \dots \oplus V_s^G$$

ЧИДЕРСКИЕ РАВНЫ (≡), Т.К. МОЖНО ВЫРОВНЯТЬ, ДОБАВИВ НУСТЫЕ подпр.

посчитаем цвета в нормальном.

Цвет	Цвет			
	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>
3	1	5	0	

КОЛ-ВО ПРЕДСТАВЛЕНІЯ.  
ЭТОГО ЦВЕТА В РАЗЛОЖЕНИИ НЕТ РА  
ПАВЕЛ 3 | 0 | 4 | 1 | 1

Вывод 1: V<sub>i</sub> и W<sub>j</sub> РАЗНЫЕ.

① ЭТО ВЫВАЕТ! (ЗАВИСИТ ОТ  
ВЫБОРА БАЗИСА)  
ПРИМЕР V=2d (ТОЧК. ПРЕДСТАВ)

Вывод 2: КРАТНОСТЬ ЦВЕТОВ НЕ  
СОВМЕЩАЕТ

② ЭТОГО НЕ ВЫВАЕТ!

ТЕОРЕМА. КРАТНОСТЬ ВХОДЯЩИХ  
ЦВЕТА В ПРЕДСТАВЛЕНИЕ VG  
НЕ ЗАВИСИТ ОТ СПОСОБА ЕГО  
РАЗЛОЖЕНИЯ НА НЕПРИВАДИМЫЕ.

(аналог: РАЗЛОЖЕНИЕ АБЕЛЕВОЙ гр.)

ЛЕММА 1. ПРОЕКТОР  $\text{Hom}(V, W)$   
БУДИТЕЛЕН.

- $V, W$  — лин. простр-ва

$$\text{Hom}(V, W) = \begin{cases} \text{простр-ва линейных} \\ \text{отображений} \\ \varphi: V \rightarrow W \end{cases}$$

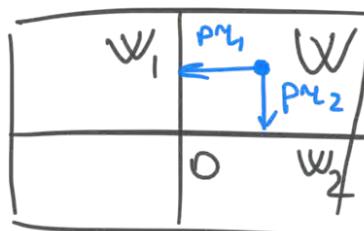
БУДИТЕЛЕНЫЕ:

$$\text{Hom}(V, W_1 \oplus W_2) = \text{Hom}(V, W_1) \oplus \text{Hom}(V, W_2)$$

$$\text{Hom}(V_1 \oplus V_2, W) = \text{Hom}(V_1, W) \oplus \text{Hom}(V_2, W)$$

МОР-ВО:

$$\varphi: V \longrightarrow$$



$$\varphi \begin{matrix} \nearrow Pw_1 \circ \varphi \\ \searrow Pw_2 \circ \varphi \end{matrix}$$

ПРОЕКЦИЯ = лин.  
ИСПОБРАЗОВАНИЕ  
 $\Downarrow$   
 $Pw_1 \circ \varphi$  лин.

$$\varphi \longrightarrow Pw_1 \circ \varphi, Pw_2 \circ \varphi$$

$\text{Hom}(V, W_1)$        $\text{Hom}(V, W_2)$

⇒ ОПЕРАТОР РАСПРОСТРЯВАЕТСЯ В  
ПРЯМУЮ СУММУ ИНВАР. ПОДГР-В  
ХОДУ РАССМОТРЕНО  $\text{Hom}(V^G, W_1^G \oplus W_2^G)$

$$\underline{\text{Hom}_G(V, W)} = \begin{cases} \text{ПРОСТР-ВО ЛИНЕЙНЫХ} \\ \text{ОТОБРАЖЕНИЙ} \\ \varphi: V \rightarrow W, \quad \varphi \circ g = g \circ \varphi \\ \text{ПР-ВО СПЛЕТА-} \\ \text{НОУЩИХ ОПЕРАТОРОВ} \end{cases}$$

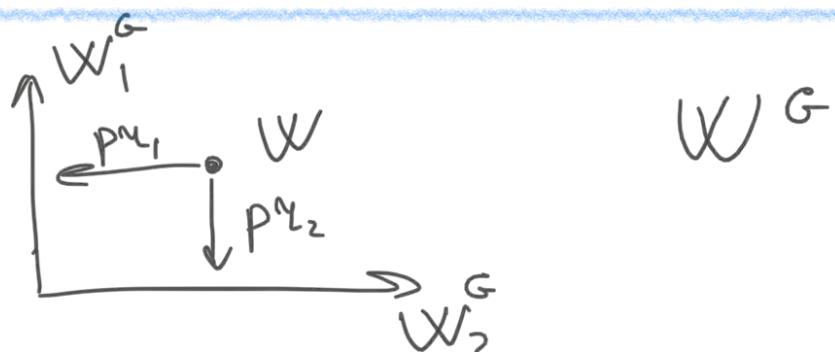
ЛЕММА 2. ФУНКТОР  $\text{Hom}_G(V, W)$

ВИЛИЧЕН.

**Д-БО:** ТО ЖЕ, ЧТО И В ЛЕММЕ 1.

ОСТАЁТСЯ ПРОВЕРИТЬ, ЧТО  $P\varphi, \circ \varphi$  Ч  
 $P\varphi_2 \circ \varphi$  - СПЛЕТАЮЩИЕ

ЛЕММА.



Тогда проектирование  $P\varphi_1$  (на  $W_1^G$ )  
— сплекающий оператор

МОЛ-ВО:  $W = W_1 \oplus W_2 = (p\gamma_1(W)) + (p\gamma_2(W))$   
ВОЗОМЕМ  $w \in W$

ТАК КАК  $W^G = W_1^G \oplus W_2^G$ , ТО

$$gW = gW_1 \oplus gW_2$$

$$p\gamma_1(gW) = gW_1 = g \circ p\gamma_1(W)$$

$(p\gamma_1 \circ g)W \quad \Rightarrow \text{смешающий}$



МОЛ-ВО ТЕОРЕМА О УВЕТАХ.

$$V^G = V_1^G \oplus V_2^G \oplus \dots \oplus V_s^G$$

$$T \rightarrow T^G$$

ПРОСТРАНСТВО  
НЕПРИВОДИМОГО  
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  
УВЕТА  $T$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(T^G, V^G) &= \text{Hom}_G\left(T^G \bigoplus_{i=1}^s V_i^G\right) = \\ &= \bigoplus_{i=1}^s \text{Hom}(T^G, V_i^G) \end{aligned}$$

БИЖН.

$$\dim \text{Hom}_G(T^G, V^G) = \sum_{i=1}^s \dim \text{Hom}_G(T, V_i^G)$$

[число сплитеций]

Если  $V_i$  имеет цвет, отличный от цвета  $T$ , то по лемме ШУРА

$$\dim \text{Hom}_G(T^G, V_i^G) = 0$$

Если цвета совпадают, то

$$\dim \text{Hom}_G(T^G, V_i^G) = 1$$

УТВ. Кратность входящего неприводимого представления  $T^G$  (цвет  $T$ ) в пространстве  $V^G$  равна

$$\dim \text{Hom}_G(T^G, V^G) = [T^G, V^G]$$

[число сплитеций]

Кратность не зависит от разложения np-ва  $V^G \Rightarrow$



$L_g$  - НЕВОЕ РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$G: \mathbb{C}[G]$

$S_g$

$$L_g \circ (S_g) = S_{g \cdot g}$$

Теорема.  $T^G$ -неприводимое представление

тогда

$$\dim \text{Hom}_G(\mathbb{C}[G], T^G) = \dim T^G$$

Следствие: В невом регулярном представлении присутствуют неприводимые представления всех цветов с рангом, равной разности неприводимого представления.

$$L_g = \bigoplus (\dim T_i^G) T^G$$

## БАШННОЕ НАБЛЮДЕНИЕ

$$\dim L_g = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = |G|$$

$$\dim L_g = \dim \bigoplus (\dim T_i^G) T_i^G = \sum n_i^2$$

$$\text{т.е. } n_i = \dim T_i^G$$

$i$  нроберает кн-бо  
всех неприват.нр-шк

$$|G| = \sum n_i^2$$

ДОК-ВО:  $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], T^G)$

$$\varphi \circ g = g \circ \varphi$$

$$\varphi: \mathbb{C}[G] \rightarrow T^G$$

$$\varphi(\delta_g) = \varphi(L_g s_e) \stackrel{!}{=} g \varphi(s_e) \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(s_e) = t_e \\ \varphi(\delta_g) = g(t_e) \end{array} \right\}$$

т.е.  $\varphi$  полностью  
восстанавливается,  
если известно, что  
он переводит базисный  
вертор  $s_e$

$$\begin{aligned}\varphi(f(g)) &= \varphi\left(\sum_{g \in G} f(g) \delta_g\right) = \sum_{g \in G} f(g) \varphi(\delta_g) = \\ &= \sum_{g \in G} f(g) g \underbrace{\varphi(\delta_e)}_{t_e \in T^G} = \sum_{g \in G} f(g) g(t_e)\end{aligned}$$

ФОРМУЛА  А ВЕЛДОРА  $t_e$

ЗАДАЁТ СВЯЗЫВАЮЩИЙ ОПЕРАТОР  
(ПРОВЕРЯЕТ СВОЙСТВО ТЕНЬСКО)

$$\text{Что, } \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], T^G) \xrightarrow{\psi} \varphi \quad \simeq \quad T^G$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[G] &= \bigoplus k_i T_i^G \\ \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], T^G) &= \mathrm{Hom}_G\left(\bigoplus k_i T_i^G, T^G\right) = \\ &= \bigoplus \underbrace{\mathrm{Hom}_G(T_i^G, T^G)}_{\dim \mathrm{Hom}_G(T_i^G, T^G)} = \\ &= \sum_{i=1}^s \dim \mathrm{Hom}_G(T_i^G, T^G) = \\ &= \dim_T T_j^G \quad \text{O} \quad \text{non. форма} \quad ||\end{aligned}$$

КРАТНОСТЬ  
 - ВХОДА, =  
 $T_i$  В  
 ЛЕВОСЕ РЕГУЛ.  
 ПРЕДСТАВ-ШЕ



ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ  $U \otimes V$ 

- $U$  и  $V$  — конечномерные вект.пр-ва над полем  $K$

$U \otimes V$  — лин. пространство, состоящее из формальных лин. комбинаций

$$\sum_{i=1}^N c_i (u_i, v_i) \quad u_i \in U, v_i \in V, c_i \in K$$

$$\{G(u_1, v_1) + c_2(u_2, v_2) + \dots + c_k(u_k, v_k)\}$$

- сложение = это приписывание однокр. ф-и лин. комп. к другой (справа)

$$\{G(u_1, v_1) + c_2(u_2, v_2)\} + \{c_3(u_3, v_3) + c_4(u_4, v_4)\}$$

$$= G(u_1, v_1) + c_2(u_2, v_2) + c_3(u_3, v_3) + c_4(u_4, v_4)$$

- умножение на эл-т поля  $K$

$$\lambda (c_1(u_1, v_1) + \dots + c_k(u_k, v_k)) = \lambda c_1(u_1, v_1) + \dots + \lambda c_k(u_k, v_k)$$

Выполняются все аксиомы вект.пр-ва

- $U \otimes V \subset U \otimes V$

Оп.  $U \otimes V$  — лин.пр-во, порожденное всеми парами векторов  $(u, v)$   $u \in U, v \in V$

$$U \otimes V = \{(u_1 + u_2, v) - (u_1, v) - (u_2, v), \\ (u_1, v_1 + v_2) - (u_1, v_1) - (u_1, v_2), k(u, v) - (ku, v), \\ k(u, v) - (u, kv)\}$$

Odp.

$$U \square V / U \circ V \simeq U \otimes V$$

$$\overline{(u, v)} = u \otimes v$$

$U \otimes V$  — это линейное пространство.  
Это пространство состоит из линейных  
лнр. комбинируемых вида  $\sum c_i (u_i \oplus v_i)$   
(мы перешли от векторов к классам)

для этих лнр. комбинируемых введем правила:

- $(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v$
- $u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2$
- $k(u \otimes v) = ku \otimes v = u \otimes kv$

прим.  $u \otimes v \neq v \otimes u$ !

Пример.  $(2u_1 + 3u_2) \otimes (v_1 - v_2) =$   
 $= 2(u_1 \otimes v_1) + 3(u_2 \otimes v_1) - 2(u_1 \otimes v_2) - 3(u_2 \otimes v_2)$

$$u = \sum a_i u_i \quad v = \sum b_j v_j \Rightarrow$$

$$u \otimes v = \sum_i \sum_j a_i b_j u_i \otimes v_j$$

БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ  $U \otimes V$

Теорема. Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис в  $U$   
 $\{f_1, \dots, f_m\}$  — базис в  $V$

Тогда  $\{e_i \otimes f_j\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$  — базис в  $U \otimes V$   
m n штук

Следствие.  $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$

Доказательство: доказываем утверждение

1. Нач. основания  $\{e_i \otimes f_j\} = U \otimes V$

2.  $\{e_i \otimes f_j\}$  — нач. независимое

1:  $w \in U \otimes V$ ,  $w = \sum a_i (u_i \otimes v_i)$

т.к. ~~КАЖДЫЙ~~ ВЕКТОР ПРЕСТАВЛЕН В ВИДЕ  
 $\Rightarrow$  ПОСТАНОВОДОРОГИ, ЧЬИ ВЕКТОРЫ ТАКОИ  
 $W \subset L\{e_i \otimes f_j\}$

$$u = \sum u_i e_i$$

$$v = \sum v_j f_j \Rightarrow u \otimes v = \sum \sum u_i v_j (e_i \otimes f_j) \Rightarrow$$

ПОКАЗАНО.

2: ПОКАЗАМ, ЧТО ВЕКТОРЫ Л.Н.З.

ШАГ 1.  $e_1 \otimes f_1$

$$\alpha(e_1) = 1$$

$$\alpha(e_k) = 0, k \neq 1$$

БОЛЕЕ МЕНЬШИЕ  
 $\alpha$ -ФУНКЦИИ

$$\begin{aligned} &V \\ &\beta \in V^* \\ &\beta(f_1) = 1 \\ &\beta(f_k) = 0, k \neq 1 \end{aligned}$$

МАША УДОБНО:

$$\alpha(e_1 \otimes f_1) = \begin{cases} 1, & (\rho, q) = (0, 0) \\ \text{иначе } 0 & (\rho \otimes f_1) \end{cases}$$

ОПЕРАТОР  $L$  НА  $U \otimes V$

$$(*) L(\sum c_i (u_i, v_i)) \stackrel{\text{оп.}}{=} \sum c_i \alpha(u_i) \beta(v_i) \in K$$

$$\text{Пример: } 2(u_1, v_1) + \{3(u_2, v_2) + 6(u_3, v_3)\} =$$

$$L_{(s_1)} = 2\alpha(u_1)\beta(v_1)$$

$$L_{(s_2)} = 3\alpha(u_2)\beta(v_2) + 6\alpha(u_3)\beta(v_3)$$

Остальные величины:  $\ell: W \rightarrow K$

$$T \subset W$$

$$\ell(W/T)$$

Чтобы было  $\ell(w+T) = \ell(w)$ , нужно

$$\boxed{\ell|_T = 0}$$

то есть доказать

$$(*) \quad L|_{U \circ V} = 0$$

Покажем, что  $L((u_1+u_2, v) - (u_1, v) - (u_2, v)) = 0$

$$\alpha(u_1+u_2)\beta(v) - \alpha(u_1)\beta(v) - \alpha(u_2)\beta(v) = 0,$$

$$\text{т.к. } \underset{||}{\alpha(u)}\beta(v) + \alpha(u_2)\beta(v)$$

$\Rightarrow L$  продолжается до лин. функционала на тензорном произведении

$$U \square V / U \circ V = U \otimes V \quad \text{и влечет из-за}$$

$$L(\sum c_i (u_i \otimes v_i)) = \sum c_i L(u_i) \beta(v_i)$$

3:  $L(e_p \otimes f_q) = \alpha(e_p) \beta(f_q) = 1$   
также если  $p=q=1$

$$\sum_{p,q} \alpha_{pq} (e_p \otimes f_q) = 0 \quad \alpha_{pq} \neq 0$$

$$L\left(\sum a_{pq} (e_p \otimes f_q)\right) = \sum a_{pq} L((e_p \otimes f_q)) = \\ = \sum a_{pq} \delta_p^{(1)} \delta_q^{(1)} = a_1 \\ a_1 = 0 \Rightarrow \text{ФИНАЛ} \quad \boxed{\phantom{x}}$$

Мечта (также теорема)

$$P_n = \{p(x), \deg p \leq n\}$$

$$Q_m = \{q(y), \deg q \leq m\}$$

$$P_n \otimes Q_m = K[x, y]$$

т.е.  $x^i \otimes y^j \rightsquigarrow x^i y^j$  - изоморфизм

УЗ ТЕОРЕМА О БАЗИСЕ СЛЕДУЕТ

$$\dim(U \otimes V) = \dim U \dim V$$

Фундаментальность тензорного произведения

$U, V$

$U \oplus V$

$U \otimes V$

ТЕОРЕМА 1 (БЕЗ Д-ВА)

$$(U \oplus V) \otimes W = U \otimes W \oplus V \otimes W$$

АССОЛ. ТЕРЗ. УМНОЖЕНИЯ  $U \otimes V \otimes W$

$$(U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W)$$

$$\sum c_i (u_i, v_i, w_i)$$

$$(u_1 + u_2, v, w) - (u_1, v, w) - (u_2, v, w)$$

и ТАК НО УДИЛЯЮЩИЙ АРГУМЕНТЫ

$$\underline{\underline{U \otimes V \cong V \otimes U}}$$

$$U \otimes V \rightarrow V \otimes U - \text{изоморфизм}$$

изоморфизм не  
зывает тензорное

изоморфизм



ПОЛЕЗНАЯ ЛЕММА

НОВЫЙ ТЕНЗОР  $W$  ИЗ  $U \otimes V$  ОТРЕЗКАЧЕМ  
ЗАПИСЫВАЕТСЯ В ВИДЕ

$$W = e_0 \oplus s_1 + \dots + e_n \otimes s_n \quad \text{где } s_i \in V$$

ДОКАЗОВАНИЕ:

$$\sum_{i,j} c_{ij} e_i \otimes f_j = \sum_{i=1}^n e_i \oplus \left( \sum_{j=1}^n c_{ij} f_j \right) =$$

$$= \sum_i e_i \otimes s_i \quad \boxed{\square}$$

Пример 1.  $\bullet P_n(x) \underset{k}{\otimes} P_m(y) \cong P_{m+n}(x, y)$

конструкция

$$p \in P_n(x) \quad q \in P_m(y)$$

(категориески  
изоморфно, т.е.  
не зависит от  
базиса)

$$\varphi: p(x) \otimes q(y) \mapsto p(x)q(y) \in P_{m+n}(x, y)$$

проверим на линейность, т.е.

$$\varphi(W) = \varphi(\sum_i p_i(x) \otimes q_i(y)) = \sum_i p_i(x)q_i(y)$$

$$(p_1(x) + p_2(x)) \otimes q(y) = p_1(x) \otimes q(y) + p_2(x) \otimes q(y)$$

$$\varphi(1, y) = (p_1(x) + p_2(x)) q(y) \Rightarrow \text{КОМПЕТЕНТНО}$$

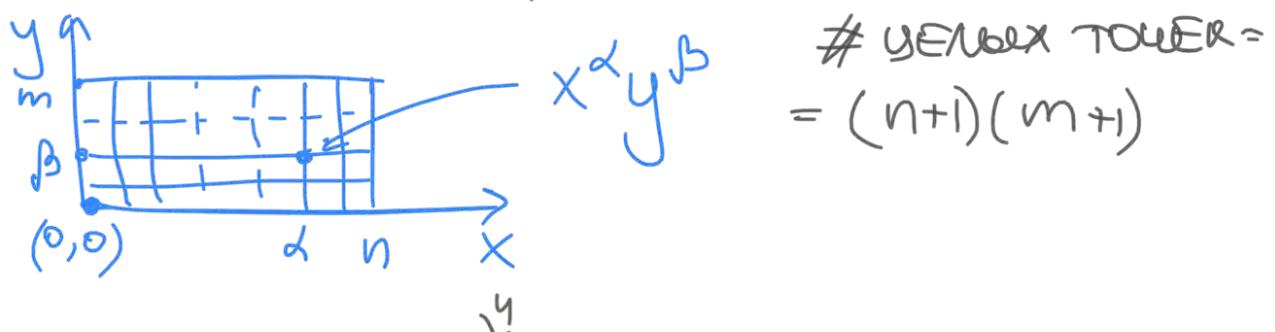
$$\varphi(n, y) = p_1(x) q(y) + p_2(x) q(y)$$

УМБ. •  $\varphi$  есть отображение на

$$x^2 \otimes y + x \otimes y^5 + 1 \otimes y^6 \mapsto x^2y + y^5x + y^6$$

- $\dim P_n \otimes P_m = (n+1)(m+1)$

- $\dim P_{m+n}(x, y)$



$\varphi$  отобр. на  $\Rightarrow$  no т. о лин. отобр.  
 $\varphi$  - изоморфизм

ПРИМЕР 2.

$V^*$  - подпространство  $V$

ТЕОРЕМА.

$$U \otimes V^* \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{пространство} \\ \text{лин. отобр.} \\ V \rightarrow U \\ \text{на } \cong \text{ номенк.} \end{array} \right\} = \text{Hom}_K(V, U)$$

$\dim = mn$

$\dim = mn$

ДОКАЗОВАНИЕ:

БУДЕМ ИСПОЛЬЗОВАТЬ СВ-ВО ЛИН. ОТБОР.:  
если  $\ker \varphi = 0$ , то  $\varphi$  - изоморфизм

## Конструкция

$$u \otimes l \mapsto A_{u \otimes l}(v) = l(v)u$$

$u \in U$       ПРОДОЛЖЕНИЕ по линейности  
 $l \in V^*$        $\varphi(w) = \varphi(\sum u_i \otimes l_i) = A_w = \sum A_{u_i \otimes l_i}$   
 ПРОВЕРКА соотношений:

$$(u_1 + u_2) \otimes l = u_1 \otimes l + u_2 \otimes l$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$l(v)u_1 \qquad \qquad \qquad l(v)u_2$$

$$A(v) = l(v)(u_1 + u_2) \qquad \Rightarrow \text{КОПРЕДЕЛЕНО ОПЕРАТОРНО}$$

ТЕЧЕРЬ ДОКАЗАЛЕН, ЧТО  $\ker \varphi = \{0\}$

$$w \in U \otimes V^*$$

$$A_w(v) = 0$$

$$v \in V$$

Но ненулевой элемент

$$w = e_1 \otimes l_1 + \dots + e_n \otimes l_n$$

$l_i$  - однозначно опр. для каждого  $V^*$

$$A_w = \sum_{i=1}^n A_{e_i \otimes l_i}$$

$$A_w(v) = \sum l_i(v) e_i$$

Если  $w \in \ker \varphi$ , то  $A_w(v) = 0 \Rightarrow l_i(v) = 0 \forall i \Rightarrow$   
 $\Rightarrow l_i = 0 \Rightarrow w = e_1 \otimes 0 + \dots + e_n \otimes 0 = 0$



ТЕОРЕМА.  
(CANOCT.)

$$U^* \otimes V^* = \left\{ \begin{array}{l} \text{пр-во билн.} \\ \text{отображений} \\ U \times V \rightarrow k \end{array} \right\}$$

$$B(u, v) \in k$$

$$B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v)$$

$$B(\lambda v, \mu v) = \lambda \mu B(v, v)$$

$$(U \otimes V)^* = U^* \otimes V^*$$

$$U \otimes V = \left\{ \begin{array}{l} \text{простр. билн.} \\ \text{отображ.} \\ U \times V \rightarrow k \end{array} \right\}^*$$

### ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ Лин. ОПЕРАТОРОВ

$$A : U \rightarrow U$$

$$A \in \text{Hom}(U, U)$$

$$B : V \rightarrow V$$

$$B \in \text{Hom}(V, V)$$

$$(A \otimes B) : U \otimes V = A_u \otimes B_v$$

А ГАДЫШЕ по линейности, и, честное слово, я проверил соответствие!

$$A \otimes B \in \text{Hom}(U, U) \otimes \text{Hom}(V, V)$$

МАТРИЦА ОПЕРАТОРА  $A \otimes B$  В БАЗИСЕ  $\{e_i \otimes f_j\}$

ДЛЯ Н-УА ОПЕР.  $A$  В БАЗИСЕ  $\{e_i\}$  Ч

Н-УА ОПЕР.  $B$  В БАЗИСЕ  $\{f_j\}$

$$(A \otimes B)(e_i \otimes f_j) = Ae_i \otimes Bf_j = \\ = \left( \sum_{p=1}^n a_{ip} e_p \right) \otimes \left( \sum_{e=1}^m b_{je} f_e \right) = \sum_{p=1}^n \sum_{e=1}^m a_{ip} b_{je} L(e_p \otimes f_e)$$

ТО, КАКОЕ МЕСТО ЗАЙМУТ ЭЛ-ТЫ МАТРИЦЫ,  
ЗАВИСИТ ОТ ТОГО, КАКИМ ОБРАЗОМ  
УНОРЯДОЧЕНЫ БАЗИСЫ

ОБЫЧНО ИСПОЛЬЗ. НЕРСЕВОР. ПОРЯДОК

$e_1 \otimes f_1, \dots, e_1 \otimes f_m, e_2 \otimes f_1, \dots, e_2 \otimes f_m, \dots, e_n \otimes f_m$

### ПРИМЕР.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

БАЗИСЫ  
 $e_1, e_2$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$f_1, f_2$

$$A \otimes B =$$

$4 \times 4$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

**Теорема.**

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr} A \text{tr} B$$

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$$

**Тензорное произведение абелевых групп**

$S, T$  - АБЕЛ. ГРУППЫ

$(s, t)$

$m_i \in \mathbb{Z}$

$S \otimes T / S_0 T$

$$S \otimes T = \sum_{\text{конечная}} m_i (s_i t_i)$$

$\overline{(s, t)} = s \otimes t$

$$S_0 T = \begin{cases} (s_1 + s_2, t) - (s_1, t) - (s_2, t) \\ (s, t_1 + t_2) - (s, t_1) - (s, t_2) \\ m(s, t) - (ms, t) - (s, mt) \end{cases}$$

В случае если, например мы умножаем на число из поля  $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , а здесь умножаем на  $\mathbb{Z}$  число.

Пример.  $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 = \{0\}$

$$1 \cdot (a \otimes b) = (2k+3l)(a \otimes b) =$$

$$2k+3l = 1 = k(2a \otimes b) + l(a \otimes 3b) = 0$$

$$\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{(m, n)} \quad (m, n) = \text{НОД}$$

## ЛЕКЦИЯ № АЛГЕБРА

13.10.20

$$A: V^n \quad B: W^m$$

$$(A \otimes B): (V \otimes W)$$

Теорема.  $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B$

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$$

Доказательство:  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $A$

$f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $B$

по теореме из линейной алгебры,  
 $\exists$  такие базисы  $e$  и  $f$ , что

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$B_f = \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr} A_e = \sum \lambda_i$$

$$\operatorname{tr} B_f = \sum \mu_j$$

$$\det A = \prod \lambda_i$$

$$\det B = \prod \mu_j$$

Получаем треугольную матрицу  
 $A \otimes B \in \lambda_i \mu_j$  на диагонали:

$$(A \otimes B)_{e\otimes f} = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_f \\ & \lambda_2 B_f \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n B_f \end{pmatrix}$$

Остальные — Арифметика

**ВАШЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**

$$G \quad p: G \rightarrow GL(V)$$

$$\tau: G \rightarrow GL(W)$$

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ 2Х  
ПРЕСТАВЛЕНИЙ  $p$  И  $\tau$  ГРУППЫ  $G$

$$(p \otimes \tau)(g)(v \otimes w) = p(g)v \otimes \tau(g)w$$

$v \in V, w \in W$

а на оставшихся тензорах  
не меняется

Пример.

$S_3$

$\mathbb{1}, \text{sign}, T_2$

ВСЕРО 3 НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТ.,  
T.K.  $1^2 + 1^2 + 2^2 = |S_3|^2$

ABYN.  
ПРЕДСТ.

$$T_2 \otimes T_2 = \mathbb{1} \oplus \text{sign} \oplus T_2$$

ДЕЙСТВИЕ СИММЕТРИЧЕСКОЙ  
ГРУППЫ  $S_k: V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_k$

$$\sum J_1 \otimes J_2 \otimes \dots \otimes J_k$$

$$J_i \in V$$

TEOREMA - ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

ГРУППА

$S_k: V^{\otimes k}$  ЕСТЕСТВЕННО ДЕЙСТВУЕТ НА  
ПРОСТРАНСТВО  $V^{\otimes k}$ . ЭТО ДЕЙСТВИЕ  
ЛИНЕЙНО (Т.Е. ВОЗНИКАЕТ ПРЕД-  
СТАВЛЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКОЙ  
ГРУППЫ  $S_k$  В  $V^{\otimes k}$ )

Ар-бо:  $G \in S_k$

$$G(J_1 \otimes J_2 \otimes \dots \otimes J_k) = J_{G(1)} \otimes J_{G(2)} \otimes \dots \otimes J_{G(k)}$$

А ЗАНОШЕ НО ЛИНЕЙНОСТИ

ПРИМЕР:  $J'_i + J''_i \otimes V = J'_i \otimes V + J''_i \otimes W$

## СИММЕТРИЧЕСКИЕ И КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЕ ТЕНЗОРЫ.

ТЕНЗОР  $w \in V^{\otimes k}$  наз. симметрическим (кососимметрическим), если

$$Gw = w \quad (G(w) = (\text{sign } \sigma) w)$$

$$\sigma \in S_k$$

ПРИМЕРЫ.  $\sigma_1 \otimes \sigma_2 + \sigma_2 \otimes \sigma_1$  — сим,

$\sigma_1 \otimes \sigma_2 - \sigma_2 \otimes \sigma_1$  — кососим.

$S(V^{\otimes k})$  — напр. сим. тензоров

$A(V^{\otimes k})$  — напр. кососим. тензоров

## СИММЕТРИЗАТОР И АНТИСИММЕТРИЗАТОР.

$P_+$

$P_-$

$$P_+(\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k$$

т.е.  $P_+$  может взять в тензор и превратить его в симметрический

$$P_-(\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma) \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k$$

аналогично — в кососимметрический

$$P_+(\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2) = \frac{1}{2} (\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_2 \otimes \mathcal{J}_1)$$

$$P_-(\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2) = \frac{1}{2} (\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_2 \otimes \mathcal{J}_1)$$

Теорема о  $P_+$  и  $P_-$

$$P_+: V^{\otimes k} \rightarrow S(V^{\otimes k})$$

$$P_-: V^{\otimes k} \rightarrow A(V^{\otimes k})$$

$$P_+|_{S(V^{\otimes k})} = \text{id} \quad (\text{если применить } P_+ \text{ к сумм. тензору, то номера не меняются.})$$

$$P_-|_{A(V^{\otimes k})} = \text{id}$$

Эти операторы — проекторы, т.к.

$$\begin{array}{c} P_\pm^2 = P_\pm \\ \downarrow \quad \downarrow w \quad \downarrow V^{\otimes k} \\ \underline{\text{нек}} \qquad \qquad \qquad P_- \\ \hline P_-(w) \quad A(V^{\otimes k}) \end{array}$$

**ДОК-ВО:** базисы в  $A(V^{\otimes k})$  и  $S(V^{\otimes k})$

$$e = (e_1, \dots, e_n)$$

$$V^{\otimes k} = e^{\otimes k} = \{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\}$$

$$w \in V^{\otimes k} \quad | \leq i_1 \leq n \quad 1 \leq i_k \leq n$$

$$W = \sum_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$$

$$P_- W = C^{i_1, \dots, i_k} P_-(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})$$



## ПРИМЕР (простая)

$$P_-(e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}) = (\text{sign } \sigma) P_-(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})$$

Л и-бо: ну оно расписатъ

$$\text{МАСН. 1} \quad P_- e_1 \otimes e_2 \otimes \dots = 0$$

Если 2 базисных вектора  $e_{i_1} = e_{i_2}$ ,  
то  $P_-( ) = 0 \Rightarrow$  достаточночно

рассмотреть унр. набор  $e_1 \otimes e_2 \otimes \dots \otimes e_k$

$$P_- W = C^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$$

$$1 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

ТЕОРЕМА.  $P_-(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})$  — это базис  
 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$   $A(V^{\otimes k})$

ДЛЯ ДОКАЗАНИЯ: Нужно доказать, что базис  
 линейно независим (т.е. что в нем не содержатся линейно зависимые векторы)

$$P_-(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}) = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$$

$$P_-(\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k) = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_k$$

$k$ -ВЕКТОР

Надо доказать, что:

$$\dim V = 3$$

Например

$$A(V^{\otimes 2}) = \wedge^2 V - \text{ВНЕШНЯЯ СТЕРЕОНОМНАЯ}$$

$$e_{12}(e_1 \wedge e_2) + e_{23}(e_2 \wedge e_3) + e_{13}(e_1 \wedge e_3)$$

$$(e_1 + e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_3 - \text{БИЛЕНЕАРНОСТЬ}$$

$$\text{Пример} \quad \dim A(V^{\otimes 2}) = \dim \Lambda^2 V = 3$$

$$\dim A(V^{\otimes 3}) = \dim \Lambda^3 V$$

" "

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3}$$

$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3 \Rightarrow \exists 1 \text{ базисный вектор } e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$

В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ  $\dim V = n$

$$\dim \Lambda^n V = n$$

$$\langle e_1 \wedge \dots \wedge e_n \rangle$$

МАКСИМУМ  $\Lambda^k V$  — КОМПЛЕКТОР-НАЯ ЗАДАЧА

$$\{1, \dots, n\}$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

$$\dim A(V^{\otimes k}) = \dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$$

$$\text{если } \dim V = n$$

$$\text{Если } k > n \text{ то } \dim \Lambda^k V = 0$$

# ЛЕКЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ

27.10.20

## ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА $T(V)$

$$S(V) \leftarrow \begin{matrix} \searrow \\ \text{АЛГЕБРА} \\ \text{Grassmann} = A(V) \end{matrix}$$

$$T(V) = K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots$$

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ раз}}$$

НР-ВО ТЕНЗОРОВ  
ВАЛЕНТИНОСТИ  $n$

$$w = (w_1 \otimes \dots \otimes w_s) \in V^{\otimes s}$$

$$v = (v_1 \otimes \dots \otimes v_l) \in V^{\otimes l}$$

$$\underline{\text{Оп.}} \quad w \otimes v = w_1 \otimes \dots \otimes w_s \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_l$$

$$\bigcup_{i=1}^{s+l} V^{\otimes (s+l)}$$

$V^{\otimes n} \supset S^n(V)$  симметрич.

$\bigcup_{i=1}^n A^n(V)$   $P_+, P_-$   
кососимметрич.

$$S(V) = K \oplus V \oplus S^2(V) \oplus S^3(V) \oplus \dots \oplus S^n(V)$$

$\Downarrow$   
 $S'(V)$

КОМУТАТИВ,  
АССОЦИТИВ,  
БЕСКОНЕЧНО-  
ПЕРНАЯ

Умножение  $\alpha \otimes \beta$

$$\dim V=4 \quad \begin{matrix} \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \\ \alpha \in S^P(V) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \beta \in S^2(V) \end{matrix}$$

Пример:  $\alpha = v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \in S^2(V)$   
 $\beta = v_3 \otimes v_4 + v_4 \otimes v_3 \in S^2(V)$

Оп. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТЕНЗОРОВ В  
СИММЕТРИИ. АЛГЕБРЕ

$$P_+(\alpha \otimes \beta) = \alpha \circ \beta$$

$$n = \dim V$$

$$A(V) = K \oplus V \oplus A^2(V) \oplus A^3(V) \oplus \dots \oplus A^n(V)$$

$$Gr(V) = \Lambda^0 V \oplus \Lambda^1 V \oplus \Lambda^2 V \oplus \dots \oplus \Lambda^3 V \oplus \dots \oplus \Lambda^n V + \{0\}$$

$$\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$$

$$\dim \Lambda^n V = 1$$

$$\text{при } k > n \quad \dim \Lambda^k V = 0$$

$$\dim A(V) = \dim Gr(V) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\alpha \in \Lambda^p V$$

$$\beta \in \Lambda^q V$$

$$P_-(\alpha \otimes \beta) = \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} V$$

Beispiel.  $\alpha = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4$

$$\beta = \alpha$$

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \alpha &= (\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4)(\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4) = \\ &= \underbrace{\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2}_0 + \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 + \\ &\quad + \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_s \in \Lambda^s V$$

$$\beta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_t \in \Lambda^t V$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \wedge \alpha$$

## Теория ХАРАКТЕРОВ.

$k = \mathbb{C}$   $|G| < \infty$

$\rho: G \rightarrow GL(V)$

ХАРАКТЕР ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

$\chi_\rho(g) \in \mathbb{C}[G]$

$\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$

НЕ ЗАВИСИТ ОТ МАТРИЧНОЙ  
РЕАЛИЗАЦИИ

## БОЛЬШАЯ ТЕОРЕМА

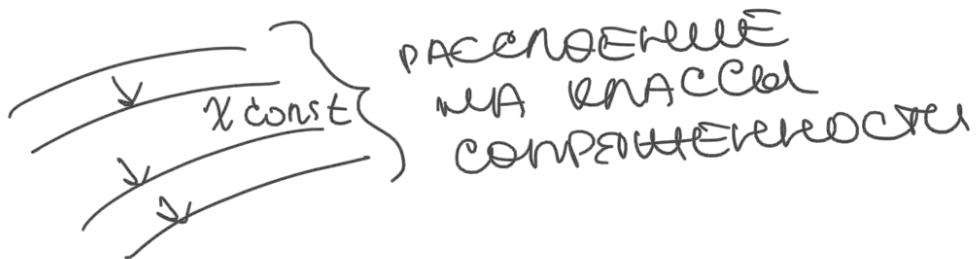
ХАРАКТЕР  $\chi_\rho(g)$  ОПРЕДЕЛЯЕТ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  $\rho$  С ТОЧНОСТЬЮ  
ДО ИЗОМОРФИЗМА

Простые свойства ХАРАКТЕРА

•  $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$

Вывод: ХАРАКТЕР — ЭТО Ф-НЯ НА  
ГРУППЕ, ПОСТОЯННАЯ НА КЛАССЕ  
СОГРУППЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

$$\square \operatorname{tr} f(hgh^{-1}) = \operatorname{tr}(p(h)p(g)p(h)^{-1}) = \\ = \operatorname{tr}(p(g)) = \chi(g) \quad \square$$



- $\chi(1) = \dim V$
- $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$

▶ ПРИЧИНА РОВНОСТИ  $\Rightarrow g^N = 1$  ИЛИ ИМЕЕТ  
 $N \hookrightarrow$  СОСТОЯНИЕ ЗНАЧ-ИЯ ОПЕРАТОРА  
 $p(g)$  ИМЕЕТ КОРНИ  $\sqrt[N]{1} - \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$   
 $n = \dim V$

$$\operatorname{tr} p(g) = \sum e_i$$

$$p(g^{-1}) = p^{-1}(g)$$

$$\operatorname{tr} p(g^{-1}) = \sum e_i^{-1} = \sum \bar{e}_i = \overline{\operatorname{tr} f(g)} \quad \blacktriangleleft$$

- $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$

(из прошлой  
лекции)

- $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$

(из прошлой  
лекции)

Теорема (техническая) об  
ортогональности характеристеров  
(теорема-доказательство)

$$\mathcal{C}[G] = \{f(g)\}$$

В  $\mathcal{C}$  введен эрнштобо скалярное произведение

$$\langle f_1(g), f_2(g) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum f_1(g) f_2(g)$$

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$$

Формулировка. 1) Если представление  $f: G \rightarrow GL(V)$  неприводимо, то  $\|\chi_f\|^2 = 1$

2) Если представления  $\rho_1$  и  $\rho_2$  неприводимы и неизоморфны, то

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = 0$$

## СЛЕДСТВИЕ 1

КРАТНОСТЬ ВХОДЯЩЕГО В НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  $\rho_1$  В РАЗЛОЖЕНИЕ НА НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  $\beta$  РАВНА

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_\beta \rangle$$

$$\square \quad \beta = \bigoplus n_i \rho_i = n_1 \rho_1 + \dots + n_s \rho_s$$

ГДЕ  $\rho_1, \dots, \rho_s$  — ВСЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГР.  $G$   
 $n_i$  — КРАТНОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

$$\chi_\beta = \sum n_i \chi_{\rho_i} = n_1 \chi_{\rho_1} + \dots$$

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_\beta \rangle = \sum_{i=1}^s n_i \langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_i} \rangle =$$

по ТЕОРЕМЕ  
=====  $n_1 \|\chi_{\rho_1}\|^2 = n_1$   
ОБЕЩАЮЩЕ

## СЛЕДСТВИЕ 2 (БОЛЬШАЯ ТЕОРЕМА)

ДВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  $\alpha$  И  $\beta$

ИЗОМОРФНЫЕ  $\Leftrightarrow \chi_\alpha = \chi_\beta$

► ЕСЛИ  $\alpha \sim \beta$ , ТО ПОНЯТО  
(т.к. Э БАЗИС, при кот. МАТРИЦЫ  
РЕАЛИЗАЦИИ ОДИНАКОВЫЕ)

В другую сторону:  $\chi_\alpha = \chi_\beta$

$$\alpha = \bigoplus m_i \beta_i$$

$$\beta = \bigoplus k_i \beta_i$$

но 1 следствию  $m_i = \langle \chi_{\beta_i}, \chi_\alpha \rangle$   
 $k_i = \langle \chi_{\beta_i}, \chi_\beta \rangle$

$\Rightarrow m_i = k_i \Rightarrow \alpha \text{ и } \beta \text{ изоморфны} \blacktriangleleft$

### СЛЕДСТВИЕ 3

КРАТНОСТЬ ВХОДЯЩЕГО ТРИВИАЛЬНОГО  
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  $\rho$

$$\chi_1(g) \equiv 1$$

$$\langle \chi_1, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{\chi_\rho(g)}_{\substack{\parallel \\ n_1}} \parallel 1$$

### СЛЕДСТВИЕ 4

Критерий неприводимости

$\rho$  неприводимо  $\Leftrightarrow \|\chi_\rho\|^2 = 1$

Теория Галуа

# ЛЕКУСИЯ АЛГЕБРА

03.11.20

$\|X_p(g)\| = 1 \Leftrightarrow g$  неприводимо

$\Rightarrow P = \bigoplus n_\lambda P_\lambda$   $P_\lambda$  - НЕПРИВ.  
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  
 $G$

$X_p = \sum n_\lambda X_{P_\lambda}$   $n_\lambda$  - КРАТНОСТЬ  
ВХОДАНИЯ

$$\langle X_p, X_p \rangle = \sum n_\lambda^2 = 1$$

и

$$n_{\lambda_i} = 1 \quad \text{остальные} = 0$$

$\Rightarrow P = P_\lambda$  - неприводимое ◀

В другую сторону: прошлая лекция

**ТЕОРЕМА (ОБЕЩАНИЕ)**

$P_V : V$

$V <e_1, \dots, e_n>$

$P_W : W$

$W <f_1, \dots, f_m>$

$$\langle f_i, f_j \rangle = 0$$

$$\langle f_i, f_i \rangle = 1$$

ЭРНШГОВО СКАЛАРНОЕ ПРОИЗВ-ИЕ:

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$Ae_i = \sum a_{ji} e_j$$

$$a_{ji} = \langle e_j, Ae_i \rangle$$

Ф-НА В ОРТОНОРМ. БАЗИСЕ

$$t^* A = \sum_i a_{ii} = \sum_i \langle e_i, Ae_i \rangle \quad (*)$$

Что известно АОК-П:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_v(g)} \chi_w(g) = \begin{cases} 0, & p_v \neq p_w \\ 1, & p_v = p_w \end{cases}$$

неприводим  
V = W

УЧИТЫВАЯ (\*)

$$\overline{\chi_v(g)} = \chi_v(g^{-1}) = \sum_i \langle e_i, p_v(g^{-1}) e_i \rangle$$

$$\chi_w(g) = \sum_j \langle f_j, p_w(g) f_j \rangle$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \sum_j \sum_g \langle e_i, p_v(g^{-1}) e_i \rangle \langle f_j, p_w(g) f_j \rangle = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$A: V \rightarrow W$$

$p_v, p_w$  - ненулевые  
нестабильные

$C: V \rightarrow W$

$$C(\sigma) = \sum_{g \in G} p_W(g) \circ A \circ p_V(g^{-1})(\sigma)$$

Лемма. Оператор  $C: V \rightarrow W$  симметричный

$$C p_V = p_W C$$

⇒ Рассуждение

по лемме Шура  $C = \begin{cases} 0, & p_V \neq p_W \\ \lambda E, & \text{если } p_V = p_W \end{cases}$

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr} A \cdot |G|}{\dim V} \quad (\text{запомни})$$

$$V = W$$

Граф

Вычисление ↗

$A$ -метод!

$$A: V \rightarrow W$$

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_i & \dots & e_n \\ f_1 & & \vdots & & 0 \\ \vdots & & & & \\ f_j & & \ddots & 1 & \dots \\ \vdots & & & & \\ f_m & 0 & \vdots & 0 & \end{pmatrix}$$

Лемма

$$A_{ji}(\sigma) = \langle e_i, \sigma \rangle f_j$$

$$C(j) = \sum p_w(g) \{ \langle e_i, v \rangle f_j \}$$

$$C_{ji}(j) = \sum p_w(g) \wedge p_v(g^{-1})(v) =$$

$$= \sum_{g \in G} p_w(g) \langle \langle e_i, p_v(g^{-1}) v \rangle f_j \rangle \Rightarrow$$

$$C_{ji}(j) = \sum_{g \in G} \langle \langle e_i, p_v(g^{-1}) v \rangle p_w(g) f_j \rangle$$

① Cvetanu  $p_v \neq p_w \Rightarrow C_{ji}(j)$  - ненулевой

$$\Rightarrow C_{ji}(e_i) = \sum_{g \in G} \langle \langle e_i, p_v(g^{-1}) e_i \rangle p_w(g) f_j \rangle = 0$$

Ненулевые коэффициенты на  $f_j$

$$\sum_{g \in G} \langle \langle e_i, p_v(g^{-1}) e_i \rangle \langle f_j, p_w(g) f_j \rangle = 0$$

$\forall i, j \Rightarrow$

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \sum_j \sum_G \langle \langle e_i, p_v(g^{-1}) e_i \rangle \langle f_j, p_w(g) f_j \rangle = 0$$

Cvetanu ②

$$V = W \quad e_i = f_i$$

$$c_{j_i}(g) = \sum_{g \in G} \langle e_i, p_v(g^{-1}) v \rangle p_w(g) f_j \Rightarrow$$

$$c_{j_i} = \sum_g \langle e_i, p_v(g^{-1}) v \rangle p(g) e_j = \frac{\operatorname{tr} A_{ij}|G|}{\dim V} E$$

a)  $i \neq j$   $c_{j_i} = 0$  T.R.  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
Because  $i \neq j$ , so  $\operatorname{tr} A_{ij} = 0$

b)  $i = j$   $c_{j_i} = \frac{|G|}{\dim V} E$

$$\operatorname{tr} c_{j_i} = |G| \Rightarrow$$

$$\operatorname{tr} c_{j_i} = \sum_i \sum_g \langle e_i, p(g^{-1}) e_i \rangle \langle e_i, p(g) e_i \rangle = |G|$$

TENEPB

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \sum_j \sum_G \langle e_i, p_v(g^{-1}) e_i \rangle \langle f_j, p_w(g) f_j \rangle = 1$$

## Теорема о номоте характеров

•  $C[G]$

$$C[G] \supset Z[G] = \left\{ f \in C[G] \mid f(hgh^{-1}) = f(g) \right\}_{g, h \in G}$$

Такие функции называют **центрическими**

Лемма

$$\dim_C Z[G] = \left\{ \begin{array}{l} \text{число классов} \\ \text{сопряженных} \\ \text{элементов } G \end{array} \right\}$$

•  $\chi_g \in Z[G]$

## Формализмировка

ХАРАКТЕРЫ НЕПРИВОДИМЫХ  
ПРЕСТАВЛЕНИЙ ОБРАЗУЮТ БАЗИС  
ПРОСТРАНСТВА  $Z[G]$

т.е. есть  $f \in Z[G]$      $f = \sum a_g \chi_g$

$f$ -неприводимое  
представление  $G$      $a_g \in C$

## Следствие

Число неприводимых представлений  
конечной группы равно числу  
классов сопряженных элементов

⇒  $\chi_\alpha \perp \chi_\beta$

$\chi, \beta$  неприват.  
представления  
 $\chi \beta$

⇒  $\{\chi_\rho\}$  —� неприват. представа.  
этот система л.к.з.

⇒ они образуют базис ⇒

### ДОК-ВО ТЕОРЕМЫ

- $\{\chi_\rho\}$  — л.к.з., т.к. попарно ортогональны  
предположим, что их

$$\sum \{\chi_\rho\} \leq \sum [G]$$

ρ-неприв.

$$Z^\perp \neq 0 \Rightarrow \langle f, \chi_\rho \rangle = 0$$

$f \neq 0$

модуль  
непр.  
характеру  
непр.  
представления

⇒  $\langle f, \chi_\rho \rangle = 0$  характеристику  $\forall$  представл.

$Z^\perp$	
	$Z$

## ВАШЕАЯ конструюется

$$C = \sum_g \bar{f}(g) p(g)$$

$$f \in \mathbb{Z}[G]$$

p-ненулев. представление

Лемма Оператор  $C$  коммутирует

с операторами  $p(h) \quad h \in G$

$$p(h) C p(h^{-1}) = \sum_g \bar{f}(g) p(hgh^{-1}) =$$

$$= \sum_g \bar{f}(hgh^{-1}) p(hgh^{-1}) = C$$

# НЕКИЯ АЛГЕБРА

W.U. 20

## ТЕОРЕМА О НОМЕРЕ

ХАРАКТЕРОВ

$$\mathbb{Z}[G] \subset \mathbb{C}[G] = \{ f(g) \mid f(hgh^{-1}) = f(g), g, h \in G \}$$

•  $\lambda = p$ -НЕНР. ПРЕСТАВЛЕНИЕ, ТО  
НО Н. ШУРА  $S_p = \lambda E$

$$\operatorname{tr} S_p = \sum_{g \in G} f(g) \chi_p = \lambda \dim p \Rightarrow \lambda = 0$$

Лемма  $S_p = 0$ , если  $p \in \text{Факт } G$



Obr.  $\rho_1 \otimes \rho_2 : G_1 \times G_2 \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g_1, g_2)(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = \rho_1(g_1)\sigma_1 \otimes \rho_2(g_2)\sigma_2$$

но несимметрична с проверкой симметричности

### ТЕОРЕМА

Если  $\rho_i \quad i=1, 2 \in \text{Rep} G_i \quad i=1, 2$ , то

$\rho_1 \otimes \rho_2$

# ЛЕКЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ

17.11.20

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

- Под числом подразумевается комплексное число  
числовое поле  $P \subset \mathbb{C}$ !

### Главное опр

Число  $\lambda$  наз. **АЛГЕБРАИЧЕСКИМ**

нар. полем  $P$ , если это является корнем  
иранцевого многочлена из  $P[x]$

Число  $\lambda$  наз. **TRANSCENDENTНЫМ** нар.  $P$

Пример Если  $P = \mathbb{Q}$ , то алг. нар.  $\mathbb{Q}$  числа  
наз. просто АЛГЕБР.

$$\sqrt{2} \quad x^2 - 2$$

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$  — АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ, т.к.

$$(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = (x + \sqrt{2})^2 - 3$$

$$(x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3}) = (x - \sqrt{2})^2 - 3$$

$$(x^2 + 2\sqrt{2}x - 1)(x^2 - 2\sqrt{2}x - 1) = (x^2 - 1)^2 - 8x^2 = \underline{x^4 - 10x^2 + 1}$$

неприводим  
нар.  $\mathbb{Q}$

### Оп

$P_{alg}$  — множество всех АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
чисел нар. полем  $P$ !

Множество алгебраических чисел счётно

$\pi$ -транс.,  $e$ -транс.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^{n!}} - \text{транс. } k \geq 2 \quad k \in \mathbb{N}$$

„но это непосредственно не мой бизнес“

Минимальный многочлен и  
степень алгебраического числа  
(наш пример Р)

$\alpha \in P_{\text{alg}}$

$$I_{\alpha} = \{ f \in P[x] \mid f(\alpha) = 0 \}$$

{ идеал в кольце многочленов  $P[x]$ !  
(но опр. идеала)}

Является в  $P[x]$  абел. гравиесим

$$\Rightarrow (f_{\alpha}) = I_{\alpha}$$

Оп  $f_{\alpha}$  — минимальный пол. н. алг. числа  $\alpha$   
 $P = \mathbb{Q}$

Примеры

$$f_{\sqrt{2}} = x^2 - 2$$

$$f_{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = x^4 - 10x^2 + 1 \quad (?)$$

Оп

Степень алг. числа  $\alpha = \deg f_{\alpha}$

$$\deg \sqrt{2} = 2 \quad \deg (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 4$$

$$\deg \sqrt[3]{7} < 2$$

$$1 \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

- ЗАМЕЧАНИЕ
- Минимальный многочлен по определению неприводим
  - У минимального многочлена все корни простые

## АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЗАМЫКАНИЕ ЧИСЛОВОГО ПОЛЯ $P$

### ТЕОРЕМА

$\alpha \in P^{\text{alg}}$ ,  $\beta \in P^{\text{alg}}$  Тогда  $\alpha + \beta, \alpha\beta, \frac{1}{\alpha} \in P^{\text{alg}}$

►  $\frac{1}{\alpha}$ : Пусть  $f_\alpha$ -мин. многочлен, тогда  $p_0 \neq 0$

$$f_\alpha(\alpha) = p_n \alpha^n + p_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + p_0 = 0$$

$$\frac{f_\alpha(\alpha)}{\alpha^n} = p_n + p_{n-1} \frac{1}{\alpha} + \dots + p_0 \frac{1}{\alpha^n} = 0$$

$$g = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n \in P[X] \quad g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in P^{\text{alg}}$$

$\alpha + \beta$ :  $f_\alpha$   $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  - ЕГО КОРНИ

гб  $\beta_1 = \beta, \beta_1, \dots, \beta_s$

$$A[X] = \prod_{\substack{i=1, \dots, t \\ j=1, \dots, s}} (X - \alpha_i - \beta_j)$$

УТВ  $A[X] \in P[X]$

В примере было

$$f_{\sqrt{2}} = x^2 - 2$$

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

$$g_{\sqrt{3}} = x^2 - 3$$

$$\sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

$A[X]$  - симметрич. (от непрерывки  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  не изм.)

СВАЩАБЫ применяем т. о симметрич.

Многочленах и получаюм для-во упр.

Аналогично  $B[X] = \prod_{\substack{i=1,..t \\ j=1,..s}} (x - \alpha_i \beta_j) \in P[X]$

СРЕДИ  $\alpha_i + \beta_j$  и  $\alpha_i \beta_j$  есть  $\lambda + \beta$  и  $\alpha \beta \Rightarrow$

Онп  $C \supseteq P^{\text{alg}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Алг. замыкание} \\ \text{пол. } P \end{array} \right\}$

### Пример

[1]  $P = \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^{\text{alg}} = C \quad z \in C$$

$$\text{т.к. } T^2 - (\underbrace{z + \bar{z}}_{\in \mathbb{R}})T + \underbrace{z\bar{z}}_{\in \mathbb{R}} = 0$$

[2]  $P = \mathbb{Q}$

(замыкание:  $P^{\text{alg}} = \overline{P}$ )

$$\mathbb{Q}^{\text{alg}} = \overline{\mathbb{Q}}$$

$\overline{\mathbb{Q}} \neq C$  (т.к., например,  $\pi \notin \overline{\mathbb{Q}}$ )

$P \rightarrow \overline{P}$  корень  $\lambda$  неоднозначно с корн. из пол.

$\overline{P}$  нестаб. в поле  $\overline{P}$

Задача на „подсумато“:

o  $S = e^{\frac{2\pi i}{5}}$  RAR устройство  $\int_S$  - нестаб. неоднозначен  $\Rightarrow Q$ ?

o  $\cos \frac{2\pi}{5}$   $\cos \frac{2\pi}{5} = ?$  нестаб.  $Q$

# Конечные расширения основных полей

He n'est pas nommé à nos nommés !

OnP None  $L \supset P$  reaz. **ПАСЫНЧЕНИЕМ** none  $P$   
 $C \supset R$

3 ANNEAUX 1 L → Pnone, TO none L

restored PACCINATPUBATO RAK BERTOPRUE  
NP-BO NAR nonem P

Ну и неп — это верхнее np-bo near β

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C} = 2 \quad z = a \cdot 1 + \bar{z} \cdot b \\ a, b \in \mathbb{R}$$

1, i-базис с нал Р!

Оп  $L \supset P$  является конечным расширением поля  $P$ , если  $\dim_P L < \infty$

- 1)  $\mathbb{R} > \mathbb{Q}$      $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$   
 2)  $\mathbb{C} > \mathbb{Q}$      $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

$$\text{Дійні} \mathbb{Q} : \{a + b\sqrt{2}\} : a, b \in \mathbb{Q}$$

ТАКИЕ ЧИСЛА ОБРАЗУЮТ НОНЕ

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} \neq 0 \quad \text{if } \begin{cases} a \\ b \end{cases} \in \mathbb{Q}$$

ЭТО  $\text{NONE}$  — РАСШИРЕНИЕ поля  $\mathbb{Q}$   
степени 2

$$L \supset \mathbb{Q}$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} L = 2 \quad \{1, \sqrt[3]{2}\}$$

• Генерик расширения  $= \dim_P L = K \neq \infty$

Пример Расширение поля  $\mathbb{Q}$  степени 3

$$\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\} \quad a, b, c \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}}$$

$\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$  — базис  
над  $\mathbb{Q}$

### Общие свойства конечных расширений

1  $L \supset P$   $L | P$  — конечное расширение

Тогда  $L \subset P^{\text{alg}}$

► По опр.,  $\dim_P L = N < \infty$

Возьмём  $l \in L$  и рассмотрим его генераторы

$$1, l, l^2, \dots, l^N, \dots$$

$$\text{т.к. } \dim_P L = N$$

Все эти полы  $L : 1, l, l^2, \dots, l^{N-1}$  линейно  
независимы, а

$\{1, l, \dots, l^N\}$  — лине. зависимое сущ-во

в вект. простр.  $L$

$$p_i \in P \quad p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot l + \dots + p_N \cdot l^N = 0 \quad p_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ не-н} \quad f(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_N x^N$$

$$f(l) = 0 \Rightarrow l \in P^{\text{alg}}$$

(обратное утв. неверно)



Пример башни

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

снег. этап

$$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3})^2 = \{p + \sqrt{3}q \mid p, q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}$$

$\sqrt{3} \notin (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3})$ , т.к. иначе

высота  
башни

$$\sqrt{3} = c + d\sqrt{2}$$

степень 3 =  $c^2 + 2cd\sqrt{2} + 2d^2$  и  $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

расширения

# ЛЕКУСЫ ПО АЛГЕБРЕ

24.11.20

L  
U  
R  
P

- БАЗИКА КОНЕЧНЫХ ПРОШИРЕНИЙ

$$\dim_P L = \dim_P K \cdot \dim_K L$$

$$L|P = K|P \cdot L|K$$



$d_1, \dots, d_s$  - базис  $L$  над  $K$

$\omega_1, \dots, \omega_t$  - базис  $K$  над  $P$

$$l \in L$$

$$l \in \sum_{i=1}^s k_i d_i \quad k_i \in K$$

$$k_i = \sum_{j=1}^t p_{ij} \omega_j$$

$$l = \sum_{i,j} p_{ij} (d_i \omega_j) \quad p_{ij} \in P$$

$$\{d_i \omega_j\} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, s \\ j=1, \dots, t \end{matrix}$$

ДОКАЖЕМ, ЧТО ОНО Л.И.З.

•  $\{d_i w_j\}$  НАД ПОЛЕМ  $P$

ПРЕДПОЛОЖИМ ОБРАТНОЕ

$$\sum_{i,j} c_{ij} d_i w_j = 0 \quad c_{ij} \in P$$

$c_{ii} \neq 0$

$$\sum_i \left( \underbrace{\sum_j c_{ij} w_j}_{\in K} \right) d_i = 0 \text{ ТОГДА}$$

$$\sum_i c_{ij} d_i = 0$$

ДЛЯ ВСЕХ  $i$



$$c_{ij} = 0$$

ДЛЯ ВСЕХ  $j$



## Простые расширения

$$Q \subset \overline{Q}$$

КРОНЕКЕР

①  $P$

$\lambda$ -АЛГЕБРА НАД  $P$ ,  $\lambda \notin P$

Присоединим число  $\lambda$  к полю  $P$ . Это значит, что мы хотим рассмотреть ТАКОЕ НАСТЫНЬШЕЕ ПОЛЕ, КОТОРОЕ СОДЕРЖИТ  $\lambda$ , ВСЕ ЭЛ-Ы  $P$

И ВСЕ, ЧТО ПОЛУЧИО ИЗ ЭТОГО НАБОРА

получить ОНЕРАЦИИ  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$

1. Это поле  $P(\alpha)$  должно СОДЕРЖАТЬ  
ВСЕ ЧИСЛА ВИДА  $g(\alpha)$ , ГДЕ  $g \in P[x]$

УТВ. ВСЕ ЧИСЛА ВИДА  $g(\alpha)$ ,  $g \in P[x]$   
САМИ ОБРАЗУЮТ КОЛЬЦО!

$$\Rightarrow g_1(\alpha) + g_2(\alpha) = (g_1 + g_2)(\alpha)$$
$$g_1(\alpha)g_2(\alpha) = (g_1g_2)(\alpha)$$

Теорема Кронекера Кольцо  $\{g(\alpha)\} = P[\alpha]$   
является полем  $P(\alpha)$

$$P \subset P(\alpha)$$

 2  $f(\alpha)$  - нециклический многочлен  
 $\alpha$  НЕ  $\in P$

$$f_\alpha(\alpha) = 0$$

Структура кольца  $P[\alpha]$

Возьмем  $\forall$  многочлен  $g(x) \in P[x]$

$$\deg g(x) \geq \deg f_\alpha(x)$$

$$g(x) = f_\alpha(x)q(x) + r(x) \quad \deg r(x) < \deg f_\alpha(x)$$

$$\boxed{g(\alpha) = r(\alpha)}$$

$$P[\alpha] = \{ p_0 + p_1 \alpha + p_2 \alpha^2 + \dots + p_{n-1} \alpha^{n-1} \}$$

$$\text{т.е. } n = \deg \alpha = \deg f_\alpha$$

## Комментарий

Единственное

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВУДЕ

$$\alpha_1(\alpha) = \alpha_2(\alpha)$$

$$\deg \alpha_1 < \deg f_\alpha$$

$$\deg \alpha_2 < \deg f_\alpha$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha) = 0$$

$$\deg(\alpha_1 - \alpha_2) < \deg f_\alpha \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow$$

\alpha\_1 = \alpha\_2

единственный

## СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБРАТНОГО ЭЛ-ТА

$$g(x) \in P[x] \quad \deg g(x) < \deg f_\alpha$$

$$(g(\alpha))^{-1} - ?$$

а  $f_\alpha$  не нуль

$$\Rightarrow (g(x), f_\alpha) = 1$$

$$g(x) A(x) + B(x) f_\alpha(x) = 1$$

$$\deg A(x) < \deg f_\alpha$$

$$g(\alpha) A(\alpha) + B(\alpha) f_\alpha(\alpha) = 1$$

$$g(\alpha) A(\alpha) = 1$$

$$(g(\alpha))^{-1} = (A(\alpha)) \quad \text{СУХСІЙ ОСТАТОК}$$

ІМЯК,  $P[\alpha]$ -нөне  $\alpha$  ЕТПОУСТВО  
ТАРОБО

$$P(\alpha) = \left\{ P_0 + P_1 \alpha + \dots + P_{n-1} \alpha^{n-1} \mid \begin{array}{l} \text{где } P_i \in P, n = \deg f_\alpha \end{array} \right\}$$

и базис  $P(\alpha)|_q \{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$



## ПРИМЕРЫ ПРОСТОВХ РАСПШИРЕНИЙ

1

$\mathbb{Q}$

$$\alpha = \sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$$

$$f_\alpha = x^2 - 7 \quad \leftarrow \text{нек. нулюнан}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{7}) = \{P_0 + P_1 \sqrt{7} \mid \text{но т. Кронекера}$$

2

$\mathbb{Q}$

$$\alpha = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q} \quad f_\alpha = x^3 - 2$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{P_0 + P_1 \sqrt[3]{2} + P_2 (\sqrt[3]{2})^2 \mid$$

$$P_i \in \mathbb{Q}$$

$$\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\} \subset \overline{\mathbb{Q}} (?)$$

$$3 \quad \omega = \sqrt[3]{2} \omega \quad \omega \notin \mathbb{Q} \quad \omega \in \mathbb{C}$$

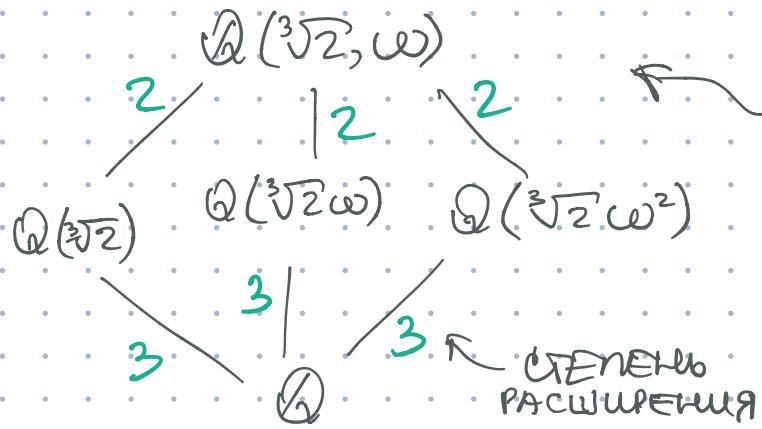
$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega) = \left\{ p_0 + p_1 \sqrt[3]{2}\omega + p_2 \sqrt[3]{4}\omega^2 \right\}$$

РАСШИРЕНИЕ поля  $\mathbb{Q}$  степени 3

примеры ② и ③ отличаются — это 2 расширения, построенные по различным корням ур-ия  $x^3 - 2 = 0$

$$4 \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega^2)$$

## КАРТИНКА



В этом поле лежат все корни ур-ия  $x^3 - 2 = 0$

$x^3 - 2$  — непр. над  $\mathbb{Q}$

$$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2 \quad \omega^3 = 1$$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

$$\omega \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

$$P = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

Каков минимальный ли-н  $\omega$  над полем  $P$ ?

$$(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))(\omega) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$$

$$g(x) = x^3 - 1 \quad \omega^3 - 1 = 0$$

$$f_\omega = x^2 + x + 1 \subset P[x]$$

$$p_0 + p_1 \omega \quad p_i \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

$$(q_0 + q_1 \sqrt[3]{2} + q_2 \sqrt[3]{4}) + (q_0' + q_1' \sqrt[3]{2} + q_2' \sqrt[3]{4})\omega$$

# ЛЕКЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ

01.12.20

## Поле РАЗЛОЖЕНИЯ многочлена

$f \in P[x]$        $L | P$        $L$       содержит все корни  $f$

$\lambda$ -корень многочлена  $P$

•  $\lambda \notin P$

$P_1 = P[\lambda]$        $\lambda$ -алг на  $P$        $P \subset P_1$

$P_1 | P$  — одночленное расширение

$$f(x) = (x - \lambda) f_1(x) \quad f_1(x) \in P_1[x]$$

$f_1$        $\lambda \notin P_1$

$P_2 = P_1[\lambda]$

⋮

$L$  — кокесчное расширение, содержащее все корни  $f$

Def      Поле РАЗЛОЖЕНИЯ — это каскадно-шое полное поле  $\mathbb{C}$ , содержащее все корни  $f$

Ясно, что в поле РАЗЛОЖЕНИЯ

$$f = a_0 (x - \lambda)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_s)^{k_s}$$

$$P = \mathbb{Q}$$

Пример 0  $F = (x^2 - 2)(x^2 - 3) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \quad \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$$

Расширение степеней 4 (min многочлен)

0  $F = x^3 - 2 \quad P = \mathbb{Q} \quad P = \mathbb{Q}$

$$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2 \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

Поле разложения обязательного содержит

$$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega \Rightarrow \text{содержит } \omega$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) = (\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))(\omega)$$

$$\begin{matrix} \\ // \\ P_1 \end{matrix}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \deg 3 \\ \mathbb{Q} \end{array} \quad \left\{ q_0 + q_1 \sqrt[3]{2} + q_2 \sqrt[3]{4} \right\}$$

$$\text{, } P \subset \mathbb{R}$$

$$L = P_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(\omega)$$

Посмотрим на мин. многочлен  $\omega$  над полем  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

$$g_\omega \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

с коэф. из поля  $P_1$

$$x^2 + x + 1$$

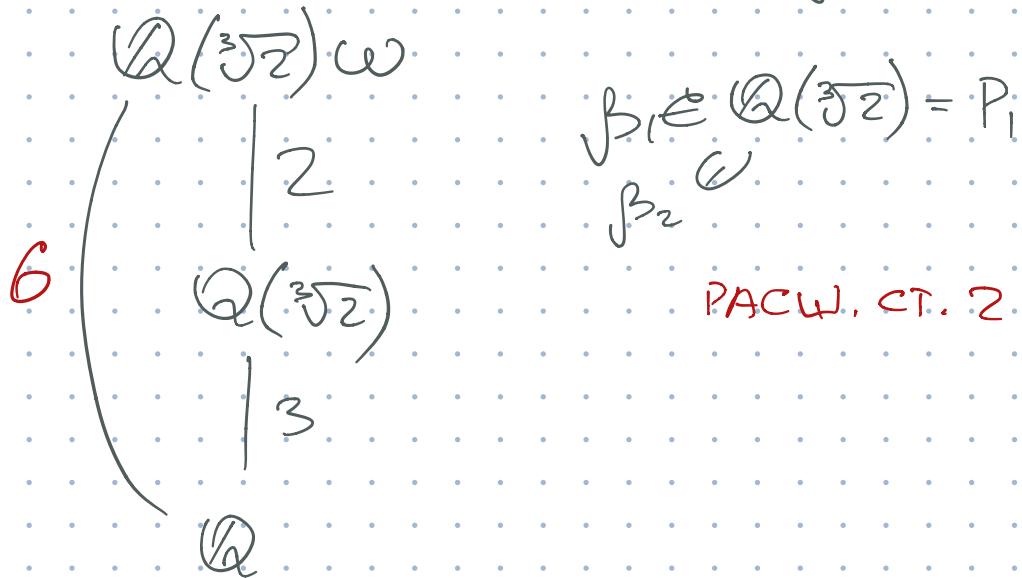
$$\Rightarrow g_\omega | x^2 + x + 1 \text{ над полем } P_1$$

$$\begin{matrix} \\ // \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\deg g_\omega = \lambda - \beta \quad \beta \in P_1$$

но тогда  $x^2 + x + 1$  имеет вещественный корень  $\beta$ , но  
это не так  $\Rightarrow$

$$g_\omega = x^2 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad P_2 = \beta_1 + \beta_2 \omega$$



СЛЕДСТВИЕ 1  $\deg(\text{поля расщепления}) \leq (\deg f)!$

(вопрос: почему (см. конструкцию "шаг за шагом")

СЛЕДСТВИЕ 2  $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_s X^s \quad a_s \in \overline{P}$

коэфф.  $a_i$  — алг. над полем  $P$

тогда  $\lambda$  корень  $f$  является алгебраическим  
над  $P$  числом

$\triangleleft P \subseteq P[a_0] \subseteq P[a_0, a_1] \subseteq \dots \subseteq P[a_0, \dots, a_s] = \tilde{P} \subset \tilde{P}[\beta]$

конечная башня

$\beta \in \text{Roots}(f)$

$\widetilde{P}[\beta]$  — КОНЕЧНОЕ РАСШИРЕНИЕ

$\beta$  — alg над  $P$  (но ТЕОРЕМЕ О КОНЕЧНЫХ РАСШИРЕНИЯХ)

### СЛЕДСТВИЕ 3

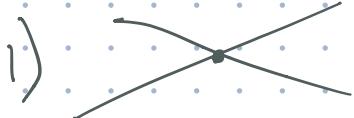
$C > P$     $\overline{P}$  — алг. ЗАМОКИВАНИЕ  
 $P \subset C$

Если  $f \in \overline{P}[x]$ , то Roots  $f \subset \overline{P}$ !

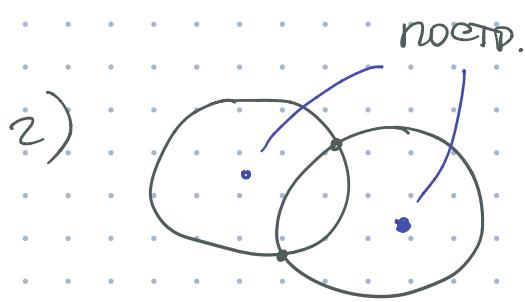
ПРИЛОЖЕНИЕ (Э.Б. ВИНДЕРГА)

ПОСТРОЕНИЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

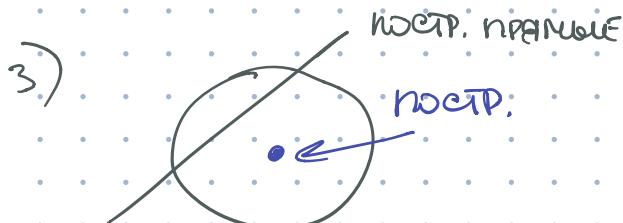
- Линия (отрезок данной линии) наз. **КОНСТРУКТИВНОЙ**, если её можно построить с помощью конечной послед. операций
- Число



т.л 2х прямых,  
проход. через  
чие постр. точки



с центрами в чие  
постр. точках и  
различами чие  
постр. лини



постр. прямые

постр.

## ТЕОРЕМА\*

Конструктивные длины образуют поле.

Это поле содержит  $\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \overline{1} \quad \overline{\frac{1}{2}} \quad \overline{\frac{1}{4}} \quad \overline{\frac{1}{8}} \Rightarrow \text{множество полей} \quad \forall \text{длины } = r \in \mathbb{Q}$$

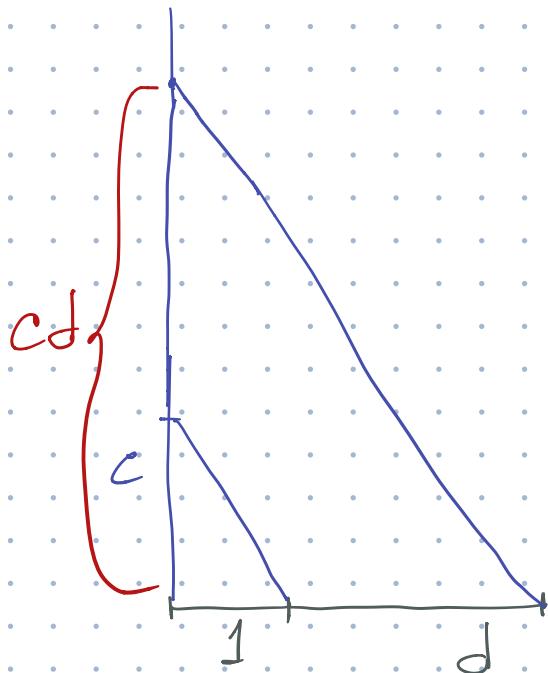
Если  $c, d$  - конструктивны, то

$c \pm d, cd, c^{-1}$  - конструктивны

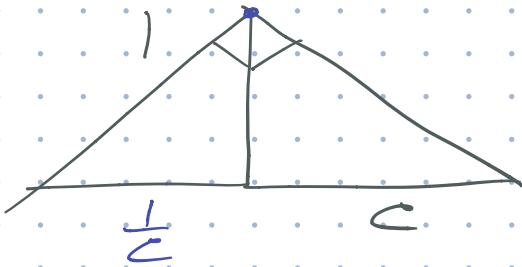
$\sqrt{c}$  - конструктивно, если  $c > 0$

КАК ПОСТРОИТЬ  $cd$ ?

ЗАМ. УМЕЕМ: ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ПРОВОДАТЬ ПРЯМЫЕ,  $\perp$  ДЛЯ КОТОРЫХ  $\Rightarrow$  УМЕЕМ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ПРОВОДАТЬ НР.,  $\parallel$  ДЛЯ КОТОРЫХ



СТРОИМ  $\frac{1}{c}$

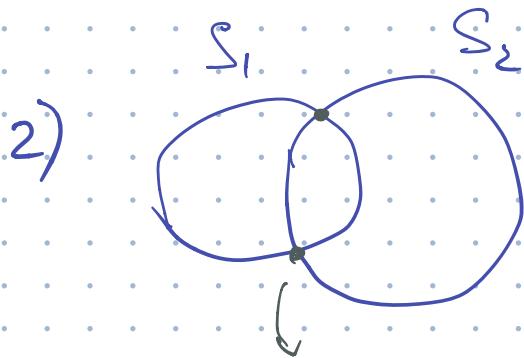
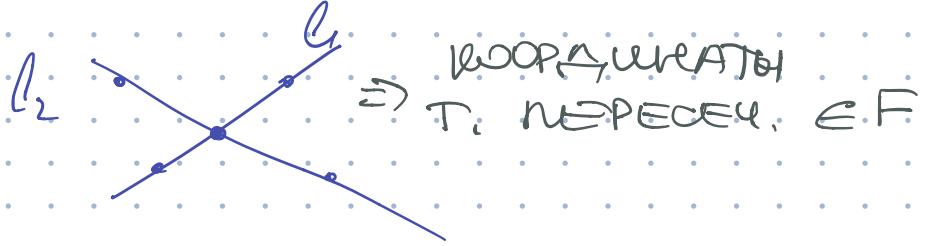


Уч. Киселёва  
Геометрия

1)  $L_1 \cup L_2$

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad i=1,2$$

$$a_i, b_i, c_i \in F$$



$$(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 = c_i^2 \quad i=1,2$$

$$a_i, b_i, c_i \in F$$

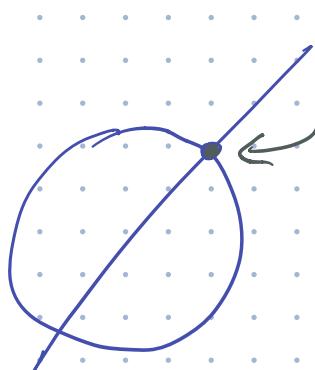
координаты  $\notin F$ ,

но  $\in B$  в базовом

расширении  $F(\sqrt{e})$

$$e > 0$$

3)



$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = q^2$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$A, B, C, a_1, b_1, q \in F$$

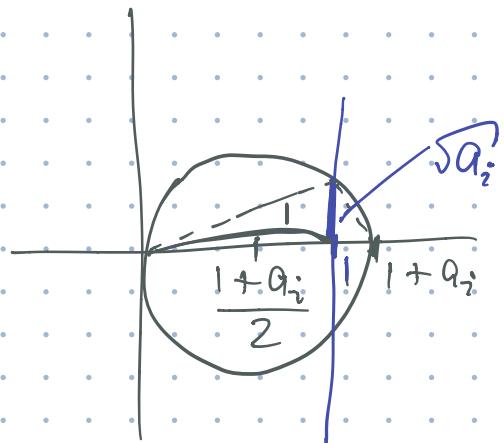
## ТЕОРЕМА

Алгебра 2 конструирование торса и только  
торса, торса  $\Delta \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_r})$   $a_i > 0$   
 $a_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_{i-1}})$

▶ И конструктивная Алиса несет  
в таком порядке (нр 1), 2), 3))

Пусть  $a_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{i-1}})$  — конструктивно

Нужно показать, что  $\sqrt{a_i}$  — конструктивен



Алиса 2 конструирована  $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_r})$

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2})$$

ст. 2

$$a_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{i-1}})$$

$$\deg(L|\mathbb{Q}) = 2^k$$

$$\mathbb{Q}[\alpha] \subseteq L$$

$$\deg(\mathbb{Q}[\alpha]|\mathbb{Q}) | 2^k$$

\Downarrow

$$\deg(\mathbb{Q}[\alpha]|\mathbb{Q}) = 2^n!$$

Если  $\alpha$  не является конст., то

$$\deg(\mathbb{Q}(\alpha) | \mathbb{Q}) = 2^N$$

①  $x^3 - 2$

$\sqrt[3]{2}$  не конст. т.к.

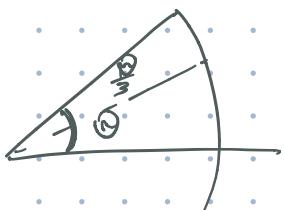
$$\deg(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) | \mathbb{Q}) = 3$$

$$2^N \cancel{|} 3$$

② Трисекция угла

нельзя т.к. иначе

получим



$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$\alpha = 3\alpha = 60^\circ \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

неприводим на  $\mathbb{Q}$

$$\gamma = \cos 20^\circ - \text{его корень}$$



это число не конструируемо, т.к.

$$[\mathbb{Q}(\gamma) | \mathbb{Q}] = 3 \quad 2^N \cancel{|} 3 !$$

расширение

# НЕКВИСЯ АЛГЕБРА

## Интерпретация теоремы Кронекера

- $P \subset \mathbb{C}$
  - $P[x]$        $f \in P[x]$  неприводимый  
 $I_f = (f)$  - простой       $P[x]/I_f$  - область целостности
  - $P[x]/I_f \cong$ , АБСТРАКТИВЕ none",  
согл., none  $P$
  - $\alpha \in \mathbb{C}$        $f(\alpha) = 0$
- $P[x]/I_f$  есть образное изоморфно  
множеству none  $P(\alpha)$
- ⊕  $g(x)(\text{mod } f) \mapsto g(\alpha) \in \mathbb{C}$
- $\bar{x} \equiv x \pmod{f}$        $\bar{x}$  - образ  $x$  в  
предоп. конст  
 $\varphi(\bar{x}) \mapsto$        $P[x]/I_f$
- $\varphi_x \rightarrow P(\alpha) \in$
- $P[x]/I_f$        $\varphi_x$  - изоморфизм

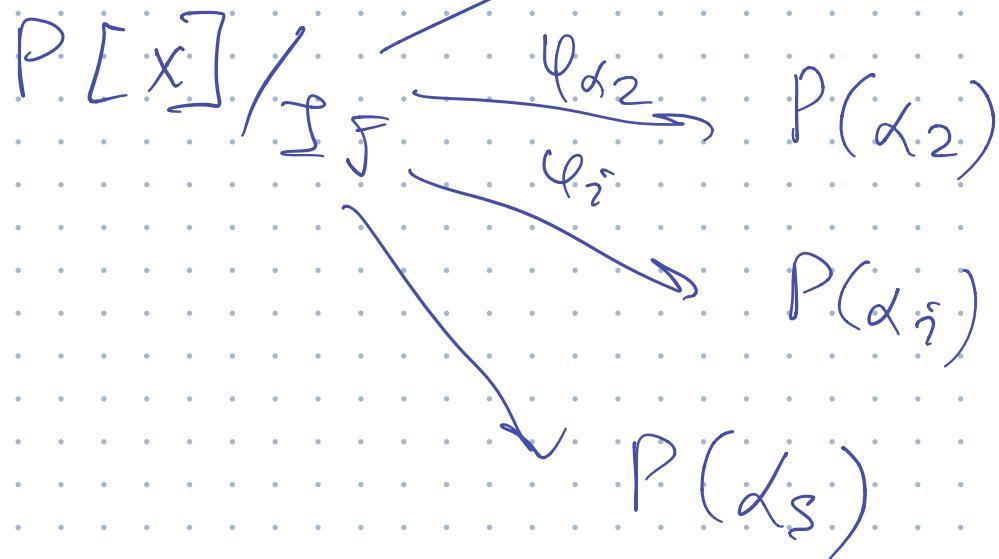
$F(x)$   $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$

(если  $F(x)$  СЕПАРАБЕЛЕН и НЕПРЕВОДИМ,  
то ВСЕ ЕГО КОРНИ РАЗЛИЧНЫЕ, А ИХ  
ЧИСЛО РАВНО  $\deg F$ )

ЗАМЕЧАНИЕ Если  $\text{char } P = 0$

также  $(\text{char } P, \deg F) = 1$ , то НЕПРЕВОДИМЫЙ  
НЕДЕЛЯЮЩИЙ  $F(x)$  ИМЕЕТ ОДНОГО  
РАЗЛИЧНОГО КОРНЕЙ, РАБОТА ЕГО  
СВЕРНУТЬ

$$\forall \alpha = \alpha_1 \in P(\alpha) \subset \mathbb{C}$$



$$|\text{Hom}(P[x]/I_f, \mathbb{C})| = |\text{ЧИСЛО РАЗЛИЧНЫХ КОРНЕЙ } f|$$

$\text{Hom}_P(P(\alpha), \mathbb{C}) = \text{Mon}(P(\alpha), \mathbb{C})$  (вложение)  
 Т.е. нет  
 языка

множество автоморфизмов поля  $P(\alpha)$   
 в  $\mathbb{C}$ , которые сохраняют на  $P$ !

### ДЕСЕРТА

То же самое для множествами

$\text{Hom}_P(P(\alpha), \mathbb{C}) \hookrightarrow$  корни  $f$   
 $\{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_s\}$   
 $\alpha_i \neq \alpha_j$

►  $P(\alpha)$

$\{q(\alpha)\} \quad \deg q < \deg f$

$\varphi \in \text{Hom}_P(P(\alpha), \mathbb{C})$  множество определяется  
 тем, как он переводит  $\alpha$

$$\varphi(q(\alpha)) = q(\varphi(\alpha))$$

т.к.  $\varphi(\alpha) \mapsto \alpha_i$ ,  $\beta \in A^b$   $f(\alpha) = 0 \Rightarrow$

$$\varphi(f(\alpha)) = f(\varphi(\alpha)) = 0$$

$\varphi(\alpha)$  из списка (корни  $f$ )

$$\varphi_1 = \text{id}$$

$$\varphi(x) = \alpha_1 = \alpha!$$



Примеры •  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\sqrt{2}, \mathbb{C})$

$$f: x^2 - 2 \quad \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

Операторы:  $\text{id}: a + b\sqrt{2} \mapsto a + b\sqrt{2} \quad a, b \in \mathbb{Q}$

$$G: a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$

$$G^2 = \text{id}$$

•  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{C}) \quad x^3 - 2$

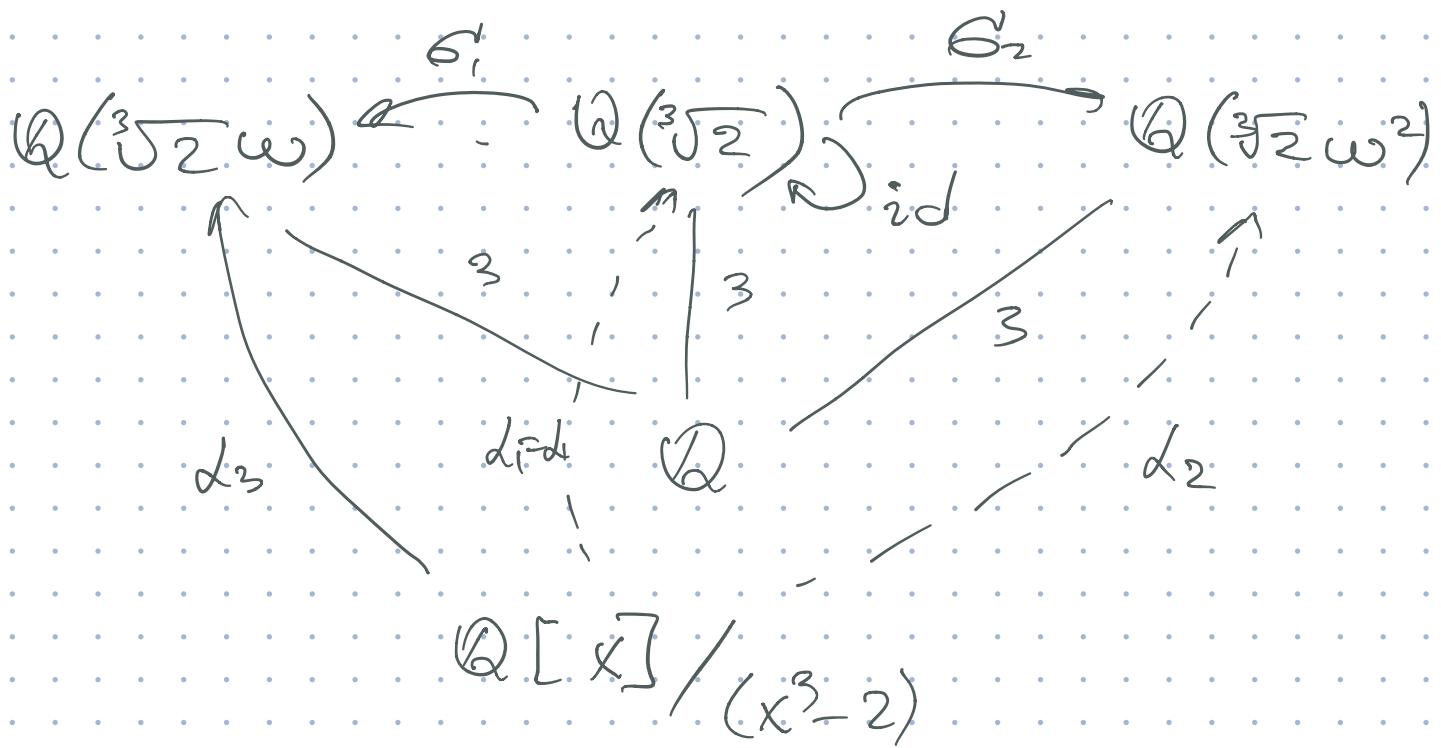
$\uparrow$   
Бес. вклю

$\sqrt[3]{2} = \omega = \omega^2$   
 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{ \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[3]{2} + \alpha_2 \sqrt[3]{4} \}$$

$$\text{id} = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[3]{2} + \alpha_2 \sqrt[3]{4} \rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[3]{2} \rightarrow \alpha_2 \sqrt[3]{4}$$

# Картина



Обычая задача



$\text{Hom}_P(L, L) = \{ \text{ли-бо всех линейнopr физнобр поля } M \text{ в поле } L, \text{ тоутже-} \}$   
 $\text{ственных на } P \}$

Что можно сказать о  $\mathcal{G}$

$\text{Aut}_P L = \text{Hom}_P(L, L)$  (Задача: понять, что  $\text{Aut}_P L$  — группа!)

Одно.

$\text{Aut}_P L = \text{Gal}_P L$

Numerical •  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \{\text{id}\}$

$\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{C}) = \{\text{id}, \sigma_1, \sigma_2\}$

$\Rightarrow x^3 - 2$  PARABOLICO B PARABOLICO

•  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega), \mathbb{C})$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(\omega)$$

| 2

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

| 3

(6)

$\text{Hom}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\omega, \mathbb{C})$

$$x^2 + x + 1$$

do  $\text{id} \left( \begin{array}{l} \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2} \\ \omega \rightarrow \omega \end{array} \right)$

do  $\left( \begin{array}{l} \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2} \\ \omega \rightarrow \omega^2 \end{array} \right)$

$$\sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2} \omega$$

$\delta_1 \left( \begin{array}{l} \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2} \omega \\ \omega \rightarrow \omega \end{array} \right)$

$\delta_1^{-1} = \left( \begin{array}{l} \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2} \omega \\ \omega \rightarrow \omega^2 \end{array} \right)$

$$\sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2} \omega^2$$

$$d_2 \left( \begin{array}{l} \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2} \omega^2 \\ \omega \rightarrow \omega \end{array} \right) \quad d_2' \left( \begin{array}{l} \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2} \omega^2 \\ \omega \rightarrow \omega^2 \end{array} \right)$$

↗  
Komposition

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[3]{2}, \omega) = \{d_0, d_0', d_1, d_1', d_2, d_2'\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega), \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega))$$

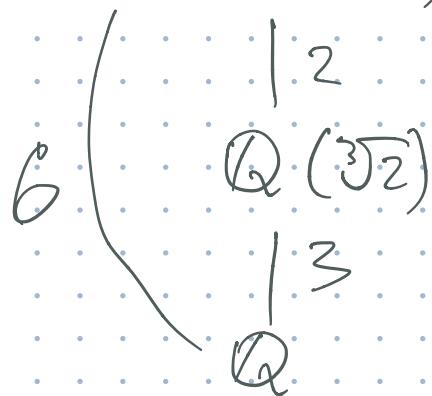
$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega))$$

MEASURABILITY PROP. US ēu ēN-OB TÖRÖK QAHÁ-S<sub>3</sub>

$$\Rightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)) \cong S_3$$

## БОЛЬШАЯ КАРТИНКА

$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$  — нове розв'язання квадратичної рівняння



$$x^3 - 2 \text{ має } 3 \text{ корені}$$

$$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2$$

$$\text{Gal}_{\mathbb{Q}} L = S_3$$

$$|S_3| = 6$$

$f$ -кіндр. над  $\mathbb{Q}$

$f(x) = 0$  розв'язувати в  
РАЗРЕШЕНАХ

Ур-це РАЗРЕШУЄМО в РАЗРЕШАХ

↑

$\text{Gal}(L_f)$  — РАЗРЕШІННА ГРУППА