

Программа коллоквиума по курсу «Логика и алгоритмы» июнь 2020

Логика высказываний

1. Пропозициональные формулы. Оценки и их продолжения на формулы. Равносильные формулы. Тавтологии.
2. Исчисление высказываний (CL). Выводы (формальные доказательства) и теоремы CL.
3. Вывод из гипотез. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.
4. Теорема корректности для CL. Непротиворечивость CL.
5. Непротиворечивые множества формул. Лемма Линденбаума. Свойства максимальных непротиворечивых подмножеств.
6. Выполнимость непротиворечивых множеств. Теорема о семантической полноте CL.
7. Непротиворечивость выполнимых множеств. Теорема компактности.
8. Синтаксическая полнота CL.

Логика предикатов

9. Сигнатура. Термы, атомарные формулы, формулы. Лемма об однозначном анализе (без док.). Замкнутые термы и формулы.
10. Модель данной сигнатуры. Нормальные модели сигнатуры с равенством.
11. Оцененные термы и формулы, их значения. Выполнимость и общезначимость для замкнутых формул.
12. Исчисление предикатов без равенства (PC). Вывод из гипотез. Свойства отношения выводимости. Примеры теорем и допустимых правил в PC, правила Бернайса. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.
13. Теории первого порядка. Модели теорий, логическое (семантическое) следование. Связь выводимости в теории и выводимости в PC.
14. Универсальное замыкание. Общезначимые формулы. Эквивалентные формулы. Общезначимость примеров тавтологий (лемма о тавтологиях).
15. Теорема корректности для исчисления предикатов без равенства.
16. Стандартные теории равенства и нормальные модели. Исчисление предикатов с равенством. Теорема корректности для исчисления предикатов с равенством.
17. Непротиворечивые теории. Свойства: в противоречивой теории доказуемы все формулы; если $T \cup \{A\}$ противоречива, то $T \vdash \neg A$. Непротиворечивость выполнимой теории.
18. Формулы с тесными отрицаниями (ТО). Приведение формул к ТО-виду.
19. Предваренная нормальная форма (ПНФ). Приведение формул к ПНФ-виду.

Введение в теорию моделей

20. Эквивалентные теории. Элементарная теория модели ($Th(M)$). Элементарная эквивалентность моделей. Полные теории. Равносильные условия полноты.
21. Изоморфизм моделей. Преобразование значений термов и сохранение значений формул при изоморфизме.
22. Изоморфность моделей. Изоморфные модели элементарно эквивалентны.

23. Определимые отношения и предикаты. Их инвариантность при изоморфизмах.
24. Нормализация модели стандартной теории равенства.
25. Сильная категоричность (для теорий с равенством). Полнота сильно категоричных теорий. Примеры сильно категоричных теорий.
26. Конечная аксиоматизируемость и сильная категоричность элементарной теории конечной модели. Совпадение элементарной эквивалентности и изоморфности для конечных моделей.
27. Определимость инвариантных подмножеств в конечных моделях.
28. Свидетели; теории Хенкина. Лемма о новой константе. Лемма Хенкина.
29. Модель максимальной непротиворечивой теории Хенкина.
30. Выполнимость непротиворечивой теории без равенства. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов без равенства. Теорема Лёвенгейма — Сколема для теорий без равенства.
31. Выполнимость непротиворечивой теории с равенством. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов с равенством. Теорема Лёвенгейма — Сколема для теорий с равенством.
32. Теорема Гёделя — Мальцева о компактности. Теорема о повышении мощности до бесконечной.
33. Существование нестандартных моделей арифметики.
34. Теорема Лёвенгейма — Сколема о повышении мощности.
35. k -категоричность. Признак полноты Лося — Вота. Теорема Морли о категоричности (формулировка).
36. Пример: теория бесконечных множеств в сигнатуре $\{=\}$ k -категорична для всех бесконечных k .
37. Пример: теория DLO неограниченных плотных линейных порядков не k -категорична для несчетных k .
38. Делимые абелевы группы без кручения и векторные пространства над \mathbb{Q} .
39. Мощность векторного пространства над \mathbb{Q} бесконечной размерности k . Изоморфность пространств одинаковой размерности.
40. Категоричность теории делимых абелевых групп без кручения в любой несчетной мощности и не категоричность в счетной.
41. Простые формулы в сигнатуре без функциональных символов. Приведение каждой формулы к простому виду.
42. Кванторный ранг. Формульная n -эквивалентность кортежей индивидов в моделях.
43. Игры Эренфойхта. Определения: ходы, партии, позиции, условие выигрыша. Стратегия и выигрышная стратегия Консерватора. Игровая n -эквивалентность.
44. Индуктивное описание игровой эквивалентности.
45. Из игровой n -эквивалентности следует формульная. Следствие: признак элементарной эквивалентности моделей.
46. Фinitная выполнимость любой выполнимой формулы в сигнатуре с одноместными предикатами и равенством. Разрешимость исчисления одноместных предикатов с равенством.

47. Бесконечные игры Эренфойхта. Игровая ω -эквивалентность. Изоморфность ω -эквивалентных счетных моделей. Теория DLO неограниченных плотных линейных порядков \aleph_0 -категорична (теорема Кантора).

Литература

1. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2: Языки и исчисления. <http://www.mscme.ru>
2. Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса. Ч. 1. Теория моделей. М., Наука, 1982.
3. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М., 1984.
3. А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгагин. Математическая логика. Серия "Классический университетский учебник", 2005.
4. В.Н. Крупский, В. Е. Плиско. Математическая логика и теория алгоритмов, Академия, 2013.
5. С.К. Клини. Математическая логика. М., Мир, 1973.
6. W. Rautenberg. A concise introduction to mathematical logic. Springer, 2006.
7. D. Marker. Model theory. An introduction. Springer, 2002.
8. L. Libkin. Elements of finite model theory. Springer, 2012.