Логика и алгоритмы (весна 2021)
Листок N 3. Срок сдачи 15 июня.

Задачи оцениваются по 1 баллу, кроме задач 6 и 7, за которые дается 2 балла. Можно набрать не более 10 баллов.

В этом листке все сигнатуры и теории с равенством, все модели нормальны.

Спектр замкнутой формулы — это множество мощностей ее конечных моделей.
Теории одной сигнатуры называются *эквивалентными*, если у них одни и те же модели.
Теория называется *конечно аксиоматизируемой*, если существует эквивалентная ей конечная теория.
$A_{=n}$ — формула в сигнатуре $\{=\}$, истинная в точности в моделях мощности n.

1. Докажите, что ординалы $\omega \cdot 2$ и $\omega \cdot 3$ как модели сигнатуры $\{<, =\}$ не элементарно эквивалентны.

2. (a) Докажите, что в сигнатуре $\{=\}$ спектр любой замкнутой формулы — либо конечное, либо ко-конечное (т.е. дополнение к конечному) множество.

   (b) Докажите, что всякая замкнутая формула этой сигнатуры эквивалентна булевой комбинации формул вида $A_{=n}$ (т.е. формуле, построенной из них с помощью $\vee, \wedge, \neg$).

3. Докажите, что если замкнутая формула в сигнатуре $\{+, \cdot, 1, 0, =\}$ истинна во всех полях характеристики 0, то она истинна в некотором поле конечной характеристики.

4. Докажите, что $Th(\mathbb{Q}, <, =, P)$, где $\{r \mid \mathbb{Q} \models P(r)\} = (-\infty, \sqrt{2})$, счетно категорична

5. Даны две теории T и S в сигнатуре Ω со следующими свойствами:

   - теория $T \cup S$ противоречива;
   - всякая модель сигнатуры Ω является либо моделью T, либо моделью S.

   Докажите, что обе теории T и S конечно аксиоматизируемы.

6. (2 балла) Докажите, что любой бесконечный линейный порядок $(X, \leq)$ изоморфно вкладывается в некоторое ультрапроизведение своих конечных подпорядков.

7. (2 балла) Докажите, что теория $Th(\mathbb{Q})$ в сигнатуре $\{+, \cdot, 1, 0, =\}$ не является счетно категоричной.

8. Пусть A, A', B, B' — линейно упорядоченные множества (в сигнатуре $\{<, =\}$). Докажите, что если $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$, то $A+B \equiv A'+B'$.

9. В сигнатуре $\{S, =\}$, где S — одноместный функциональный символ рассмотрим теорию T с аксиомами

$$\forall x \exists ! y\, S(y) = x,$$

$$\forall x\, S^n(x) \neq x \quad \text{(для всех } n\text{)}.$$

   (a) Докажите, что T не счетно категорична.

   (b) Докажите, что T категорична в любой несчетной мощности и, как следствие, теория T полна.

10. Докажите, что в модели $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, <)$ операция умножения не определима.