① $F_r = -2r\cos\varphi\,\sin 2\theta$

$F_\theta = -2r\cos\varphi\,(1+\alpha\sin^2\theta)$

$F_\varphi = -\alpha r\cos\theta\,\sin\varphi.$

При каких α сила потенциальна? Найти соотв. потенциал.

1. Необходимые условия потенциальности силы в сферич. коорд

(i) $\partial_\theta F_r = \partial_r(rF_\theta)$

(ii) $\partial_\varphi F_r = \partial_r(r\sin\theta\,F_\varphi)$

(iii) $\partial_\varphi(rF_\theta) = \partial_\theta(r\sin\theta\,F_\varphi)$

(i) $$\frac{\partial F_r}{\partial\theta} = -2r\cos\varphi\cos 2\theta\cdot 2 = -4r\cos\varphi\cos 2\theta.$$

$$\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-2r^2\cos\varphi(1+\alpha\sin^2\theta)\right) = -4r\cos\varphi(1+\alpha\sin^2\theta)$$

(ii) $$\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} = \frac{\partial(-2r\cos\varphi\sin 2\theta)}{\partial\varphi} = +2r\sin\varphi\sin 2\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta(-\alpha r\cos\theta\sin\varphi)\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\alpha r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\right) = -\alpha r\sin 2\theta\sin\varphi$$

(iii) $$\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial\varphi} = -2\frac{\partial}{\partial\varphi}r^2\cos\varphi(1+\alpha\sin^2\theta) = +2r^2\sin\varphi(1+\alpha\sin^2\theta)$$

$$-\frac{\partial(r\sin\theta\,\alpha r\sin\varphi\cos\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial r^2\alpha\sin 2\theta\sin\varphi}{\partial\theta} = -r^2\alpha\cos 2\theta\sin\varphi$$

(i) $\Rightarrow$ $\cos 2\theta = 1+\alpha\sin^2\theta$

(ii) $\Rightarrow$ $\alpha = -2$ $\qquad\Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$

(iii) $\Rightarrow$ $2r^2(1+\alpha\sin^2\theta) = -\alpha r^2\cos 2\theta$

2. Для случая $\alpha=-2$ найдем потенциал U силы $\vec{F}$.

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = F_r = -2r\cos\varphi\sin 2\theta$$

$$U = r^2\cos\varphi\cdot\sin 2\theta + \Phi(\theta,\varphi) \quad (1)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \theta} = rF_\theta = -2r^2\cos\varphi(1+2\sin^2\theta) = -2r^2\cos\varphi\cos 2\theta$$

$$(1)\Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -2r^2\cos\varphi\cos 2\theta - \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \Phi(\theta,\varphi) = \Phi(\varphi) \quad (2)$$

зависи только от φ

$$-\frac{\partial U}{\partial \varphi} = r\sin\theta F_\varphi = r^2\sin 2\theta\sin\varphi$$

$$(1),(2) \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = r^2\sin\varphi\sin 2\theta - \frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi} \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\varphi} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Phi = \text{const}.$

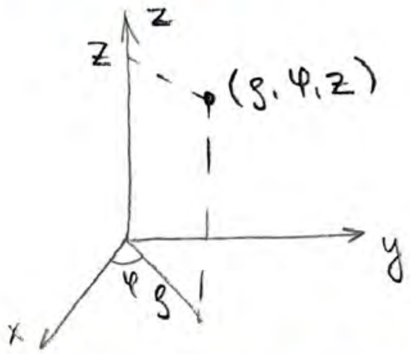
$$\boxed{U(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\varphi\sin 2\theta + C}$$

В силу леммы Пуанкаре, сила будет потенциальна в любой области $\mathbb{R}^3$, не содерж. оси Oz.

Функция $U(r,\theta,\varphi)$ является 2π-периодической по φ, а следовательно работа силы $\vec{F}$ по $\forall$ замкнутому контуру вокруг оси Oz равна 0 и сила $\vec{F}$ потенциальна во всем $\mathbb{R}^3$

Ответ: $\alpha=-2$; $U = r^2\cos\varphi\sin 2\theta + C$.

②
$$\begin{cases} F_\rho = \rho\, X(z)\cos\varphi \\ F_\varphi = \rho\, Y(\varphi)\, e^{-z^2} \\ F_z = V(\rho,\varphi)\, z e^{-z^2} \end{cases}$$



1. При каких X, Y, V выполнены необходимые условия потенциальности $\vec{F}$?

Необходимые условия потенциальности силы $\vec{F}$:

(i) $\partial_\rho(\rho F_\varphi) = 2\rho\, Y(\varphi)\, e^{-z^2}$

$\quad\parallel$

$\partial_\varphi(F_\rho) = -\rho\, X(z)\sin\varphi$

(ii) $\partial_\varphi(F_z) = \left(\partial_\varphi V(\rho,\varphi)\right) z e^{-z^2}$

$\quad\parallel$

$\partial_z(\rho F_\varphi) = -\rho^2\cdot 2z\cdot Y(\varphi)\, e^{-z^2}$

(iii) $\partial_z(F_\rho) = \rho\, X'(z)\cos\varphi$

$\quad\parallel$

$\partial_\rho(F_z) = \left(\partial_\rho V(\rho,\varphi)\right) z e^{-z^2}$

Откуда получаем

(i) $\Rightarrow$ $2Y(\varphi)\, e^{-z^2} = -\sin\varphi\, X(z)$ (1)

(ii) $\Rightarrow$ $\left(\partial_\varphi V(\rho,\varphi)\right) = -\rho^2\cdot 2\, Y(\varphi)$ (2)

(iii) $\Rightarrow$ $\rho\cos\varphi\, X'(z) = \left(\partial_\rho V(\rho,\varphi)\right) z\cdot e^{-z^2}$ (3)

(1) $\Rightarrow$ $X(z) = -2e^{-z^2}\left(\frac{Y(\varphi)}{\sin\varphi}\right) \Rightarrow Y(\varphi) = C\cdot\sin\varphi,\ C = \text{const}$ (*)

Подставим (*) в (2):

$$(\partial_\varphi V(\rho,\varphi)) = -\rho^2 \cdot 2 \cdot C \cdot \sin\varphi$$

$$V(\rho,\varphi) = +\rho^2\, 2C\cos\varphi + f(\rho).$$

Подставим (*) в (1):

$$2C\sin\varphi\, e^{-z^2} = -\sin\varphi\; X(z)$$

$$X(z) = -2C\cdot e^{-z^2} \qquad (**)$$

Подставим (**) в (3):

$$\rho\cos\varphi\cdot 4C\,\cancel{e^{-z^2}}\,\cancel{z} = (\partial_\rho V(\rho,\varphi))\,\cancel{z}\cdot\cancel{e^{-z^2}}$$

$$V(\rho,\varphi) = 2\rho^2\cos\varphi\cdot C + g(\varphi)$$

Приравняем два полученных выражения для $V(\rho,\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\rho) = g(\varphi) = \mathrm{const} = \tilde{C}. \Rightarrow V(\rho,\varphi) = 2\rho^2\cos\varphi\, C + \tilde{C}$

Согласно граничным условиям: $\vec{F}\big|_{\rho=0} = 0$ (на оси Oz)

$F_\rho\big|_{\varphi=z=0} = \rho$ (на оси Ox)

$$\Rightarrow 0 = V(0,\varphi) = 0 + \tilde{C} \Rightarrow \tilde{C} = 0$$

$$\rho = \rho\cos 0\,(-2C) \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Таким образом, $\boxed{\begin{aligned} F_\rho &= \rho\cos\varphi\, e^{-z^2} \\ F_\varphi &= -\frac{1}{2}\rho\sin\varphi\, e^{-z^2} \\ F_z &= -\rho^2\cos\varphi\, z\, e^{-z^2} \end{aligned}}$

2. Определить вид потенциальной силы.

$$-\frac{\partial U}{\partial \rho} = F_\rho = \rho e^{-z^2}\cos\varphi \Rightarrow U = -\frac{\rho^2}{2} e^{-z^2}\cos\varphi + f_1(z,\varphi)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = F_\varphi = -\frac{1}{2}\sin\varphi\,\rho e^{-z^2} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\sin\varphi\,\rho^2 e^{-z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = -\frac{\rho^2}{2}\cos\varphi\, e^{-z^2} + f_2(\rho, z)$$

Приравняем полученные для U выражения $\Rightarrow f_1(z,\varphi) = f_2(\rho, z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_1(z,\varphi) = f_2(\rho,z) = f(z)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = F_z = \rho^2\cos\varphi\, z e^{-z^2} \Rightarrow f(z) = 0$$

Таким образом, $\boxed{U = \frac{1}{2}\rho^2\cos\varphi\, e^{-z^2}}$

В силу леммы Пуанкаре, сила $\vec{F}$ будет потенциальна в любой области $\mathbb{R}^3$, не содержащей оси Oz.

Заметим, что функция $U(r,\theta,\varphi)$ является 2π-периодической по φ $\Rightarrow$ работа силы $\vec{F}$ по $\forall$ замкнутому контуру вокруг оси Oz равна 0 и сила $\vec{F}$ потенциальна во всем $\mathbb{R}^3$.

③ В цилиндрич. координатах

$F_\varphi = f(\rho, z)\cos\varphi$ – компонента потенциальной силы $\vec{F}$

$f(\rho, z)$ – гладкая ф-ция.

$F_\rho, F_z = ?$ $\quad U(\rho, \varphi, z) = ?$

Сила $\vec{F}$ потенциальна $\Rightarrow$ выполнены необх. условия потенциальности

(i) $\partial_\rho(\rho F_\varphi) = \partial_\varphi(F_\rho)$

(ii) $\partial_\varphi(F_z) = \partial_z(\rho F_\varphi)$

(iii) $\partial_z(F_\rho) = \partial_\rho(F_z)$

Тогда

(i) $\Rightarrow \partial_\varphi(F_\rho) = \partial_\rho(\rho f(\rho, z)\cos\varphi)$

(ii) $\Rightarrow \partial_\varphi(F_z) = \partial_z(\rho f(\rho, z)\cos\varphi)$

$$F_\rho = \sin\varphi \, f(\rho, z) + \sin\varphi \, \rho \left(\partial_\rho f(\rho, z)\right) + g(\rho, z)$$

$$F_z = \sin\varphi \, \rho \left(\partial_z f(\rho, z)\right) + h(\rho, z)$$

(iii) $\Rightarrow \sin\varphi \, \partial_z f(\rho, z) + \sin\varphi \, \rho \frac{\partial^2 f}{\partial\rho \partial z} + \frac{\partial g(\rho, z)}{\partial z} = \frac{\partial h(\rho, z)}{\partial\rho} +$

$+ \sin\varphi \, \partial_z f(\rho, z) + \sin\varphi \, \rho \frac{\partial f(\rho, z)}{\partial\rho \partial z} \Rightarrow \boxed{\partial_z g(\rho, z) = \partial_\rho h(\rho, z)}$ (*)

Найдем $U(\rho, \varphi, z)$.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = F_\varphi = f(\rho,z)\cos\varphi$$

$$U = -\rho f(\rho,z)\sin\varphi + f_1(\rho,z)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = F_z = \sin\varphi\, \rho\left(\partial_z f(\rho,z)\right) + h(\rho,z)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = \rho\left(\partial_z f(\rho,z)\right)\sin\varphi - \partial_z f_1(\rho,z)$$

$$\Rightarrow h(\rho,z) = -\partial_z f_1(\rho,z) \Rightarrow f_1 = -\int_0^z h\,dz + \Phi_1(\rho)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \rho} = F_\rho = \sin\varphi\, f(\rho,z) + \sin\varphi\, \rho\left(\partial_\rho f(\rho,z)\right) + g(\rho,z)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \rho} = f(\rho,z)\sin\varphi + \rho\left(\partial_\rho f(\rho,z)\right)\sin\varphi - \partial_\rho f_1(\rho,z)$$

$$\Rightarrow g(\rho,z) = -\partial_\rho f_1(\rho,z) \Rightarrow f_1 = -\int_0^\rho g\,d\rho + \Phi_2(z)$$

$$\to \Phi_1 = -\int_0^\rho g\,d\rho$$

$$\Phi_2 = -\int_0^z h\,dz$$

Проверим, что (*) выполняется:

$$-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z\,\partial \rho} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z\,\partial \rho}$$

Таким образом, $U = -\int_0^\rho g\,d\rho - \int_0^z h\,dz - \rho f(\rho,z)\sin\varphi$

Заметим, что полученная функция 2π-периодична по φ $\Rightarrow$ работа силы $\vec{F}$ по любому замкнутому контуру вокруг O_z равна 0 $\Rightarrow$ $\vec{F}$ действительно потенциальна.

<u>Ответ</u>: $F_\rho = \sin\varphi\left(f(\rho,z) + \rho\left(\partial_\rho f(\rho,z)\right)\right) + g(\rho,z)$,

$F_z = \sin\varphi\, \rho\left(\partial_z f(\rho,z)\right) + h(\rho,z)$, где h и g связаны соотн. (*)

$U = -\int_0^\rho g\,d\rho - \int_0^z h\,dz - \rho f(\rho,z)\sin\varphi$.

(4) $\vec{F} = F_\theta \vec{e_\theta} + F_\varphi \vec{e_\varphi} + 0 \cdot \vec{e_r}$

а) Пример тангенциального поля, которое потенциально:

$$F_\theta = \frac{\sin\varphi \cos\theta}{r}, \quad F_\varphi = \frac{\cos\varphi}{r}$$

$$U = -\sin\varphi \sin\theta$$

Общий вид тангенциальной потенциальной силы.

Из необходимых условий потенциальности

(i) $\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) = 0 \Rightarrow r\frac{\partial F_\theta}{\partial r} + F_\theta = 0 \Rightarrow F_\theta = \frac{f(\varphi, \theta)}{r}$

(ii) $\frac{\partial}{\partial r}(r \sin\theta F_\varphi) = 0 \Rightarrow r\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} + F_\varphi = 0 \Rightarrow F_\varphi = \frac{g(\varphi, \theta)}{r}$

(iii) $\frac{\partial}{\partial \varphi}(r F_\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta F_\varphi) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \theta}(g \sin\theta) = \frac{\partial g}{\partial \theta}\sin\theta + g\cos\theta$

Достаточное условие:

$$A_{\gamma_0} = \int_{\gamma_0} r F_\theta \, d\theta + r F_\varphi \sin\theta \, d\varphi = 0 \iff \int_{\gamma_0} f \, d\theta + g \sin\theta \, d\varphi = 0.$$

γ_0 - любой замкнутый контур, обходящий ось Oz.

б) Сущ-ет ли потенциальное тан. поле, которое в точках, которое в точках экватора сферы радиуса r имеет ненулевую компоненту $F_\varphi(r)$, не зависящую от φ?

Ответ: не существует.

Действительно, рассмотрим петлю γ - экватор сферы радиуса r

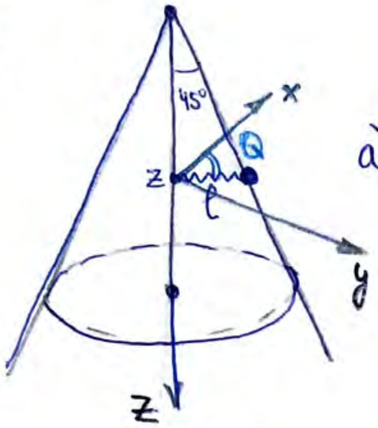
$$\gamma(t) = \begin{cases} r = \text{const} \\ \theta = \pi/2 \\ \varphi = t, \ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Тогда $A_\gamma = \int\limits_\gamma \underset{0}{\underset{\parallel}{f\,d\theta}} + g\underset{1}{\underset{\parallel}{\sin\theta}}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} c\,d\varphi = 2\pi c \neq 0$

из условия
$g(\varphi, \frac{\pi}{2}) = c \neq 0$

$\Rightarrow$ поле не может быть потенциальным, т.к. сущ-ет такой замкнутый контур вокруг оси Oz, работа по которому не равна 0.

(5)



$z^2 = x^2 + y^2 = \tau^2 \quad , \tau = \ell$

а) $U_{пр} = \frac{k\ell^2}{2}$, $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$L = \frac{m}{2}(2\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{Q}^2) - \frac{k\ell^2}{2}$ – не зависит от Q (только от $\dot{Q}$)

$y = \tau\sin\theta$

$x = \tau\cos\theta$

$z = \tau$

$\dot{z}^2 = \dot{\tau}^2$

$\dot{x}^2 = \dot{\tau}^2\cos^2 Q + \tau^2\sin^2 Q\,\dot{Q}^2$

$\dot{y}^2 = \dot{\tau}^2\sin^2 Q + \tau^2\cos^2 Q\,\dot{Q}$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\dot{\tau}^2 + \tau^2\dot{Q}^2$

б) Ур-ие Эйлера – Лагранжа

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} = 2m\dot{\ell} \qquad \frac{d}{dt}\circ\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} = 2m\ddot{\ell}$

$\frac{\partial L}{\partial \ell} = m\dot{Q}^2\ell - k\ell$

$L_\ell = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \ell} = 2m\ddot{\ell} + k\ell - m\dot{Q}^2\ell = 0$

b) $L_Q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q} = \frac{d}{dt}\left(m\ell^2 \dot{Q}\right) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial Q} = 0$

$\Rightarrow m\ell^2 \dot{Q} = J = \text{const}$

$\Rightarrow \dot{Q} = \text{const}$