Лекция 13. Вычеты и принцип аргумента

Теория функций комплексного переменного

Вычеты

Определение 8.1. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $U = \{z : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ точки $a \in \mathbb{C}$. *Вычетом* функции f в точке a называется число

$$\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz,$$

где γ — произвольная замкнутая кусочно гладкая кривая в U, имеющая индекс 1 относительно точки a.

От выбора кривой γ вычет не зависит ввиду предложения 6.21.

Из определения ясно, что если в точке a у функции имеется устранимая особенность, то вычет в этой точке нулевой.

Как считать вычет в конечной точке $a \in \mathbb{C}$

Предложение 8.2. *Если f — голоморфная функция в проколотой окрестности точки a, то вычет $\operatorname{Res}_a f(z)$ равен коэффициенту при $(z-a)^{-1}$ в лорановском разложении функции f в точке a.*

Доказательство. Если записать ряд Лорана

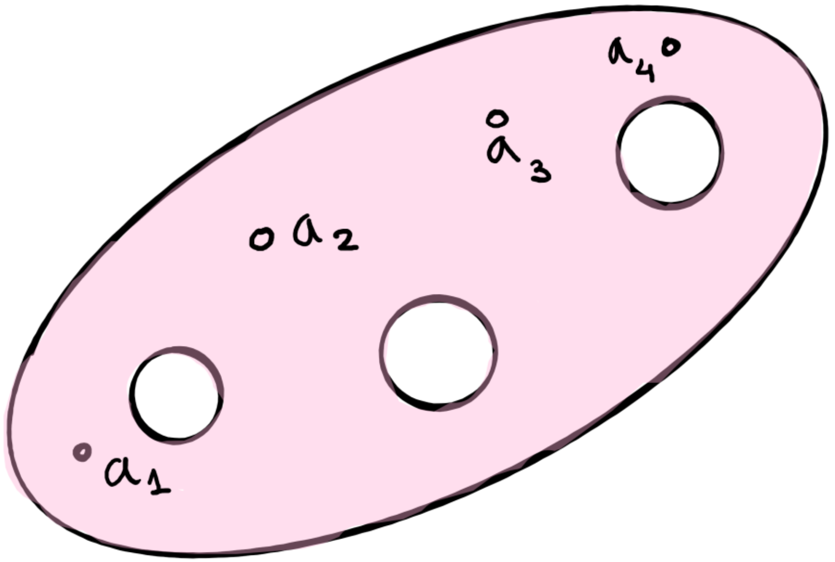
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

и почленно проинтегрировать по замкнутой кривой γ, $\operatorname{Ind}_a \gamma = 1$, то интегралы от всех слагаемых, кроме $c_{-1}(z-a)^{-1}$, обратятся в нуль, а интеграл от этого последнего будет равен $2\pi i c_{-1}$. $\square$

Теорема о сумме вычетов

- Пусть область U имеет кусочно гладкую границу $\gamma = \partial U$.
- Рассмотрим голоморфную функцию $f\colon U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, допускающую непрерывное продолжение на $\overline{U}$. Тогда

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f(z)$$



Лемма о логарифмическом вычете

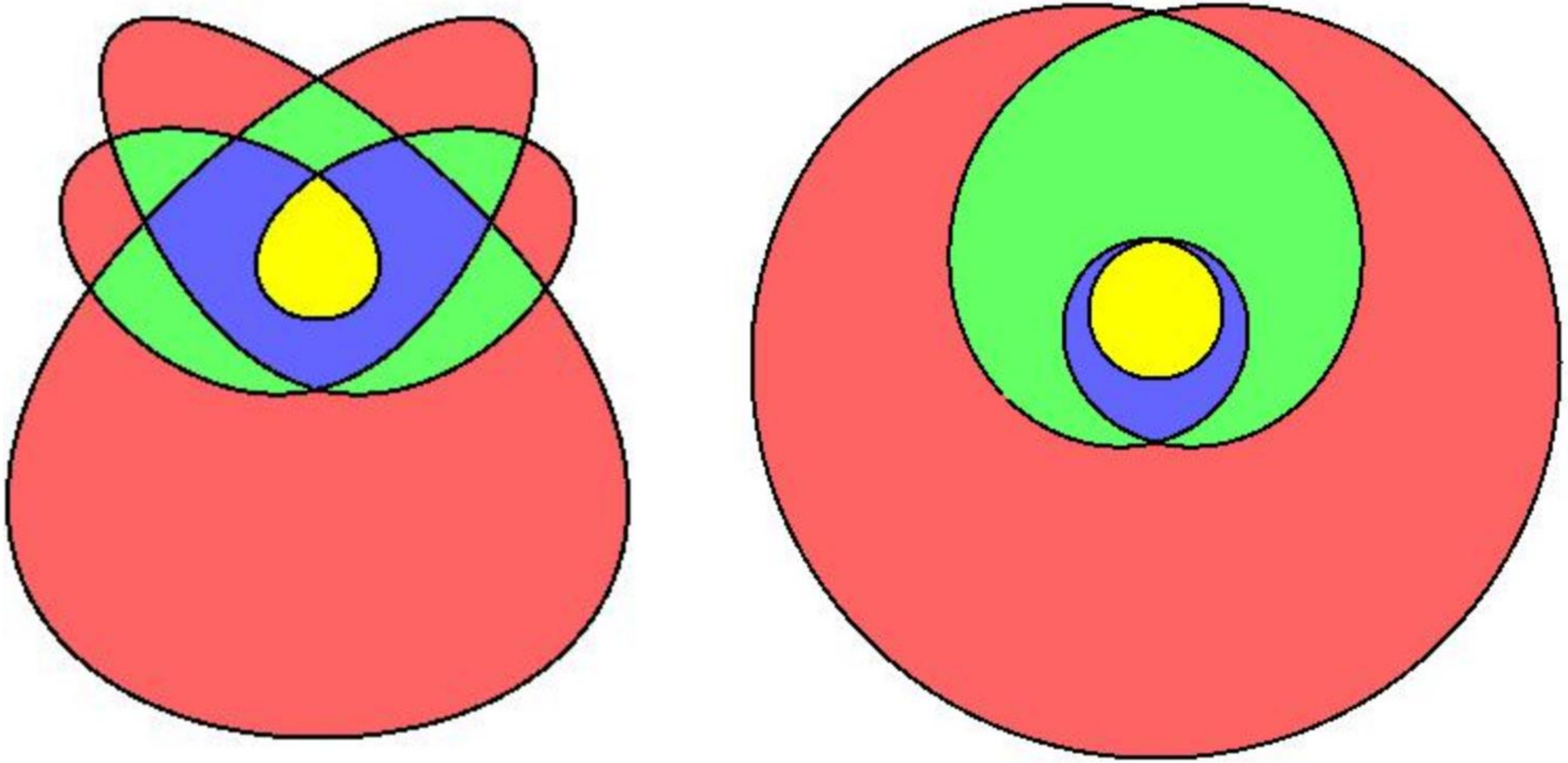
Лемма 8.4 (о логарифмическом вычете). *Пусть функция f либо голоморфна в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и не является тождественным нулем ни в какой окрестности этой точки, либо голоморфна в некоторой проколотой окрестности точки a и имеет в этой точке полюс. Тогда функция f'/f имеет в точке a либо устранимую особенность, либо простой полюс, и при этом* $\operatorname{Res}_a(f'(z)/f(z)) = \operatorname{ord}_a(f)$.

- Положим $k = \operatorname{ord}_a(f)$, тогда $f(z) = (z-a)^k g(z), \quad g(a) \neq 0$.
- $\log f(z) = k \log(z-a) + \log g(z) \ \Rightarrow \ \frac{f'}{f} = \frac{k}{z-a} - \frac{d}{dz} \log g(z)$.

Принцип аргумента

- Пусть U – открытое множество, ограниченное простой замкнутой кусочно гладкой кривой γ.
- Рассмотрим голоморфную функцию $f: V \setminus S \to \mathbb{C}$, где V – окрестность множества $\overline{U}$, а $S \subset U$ – конечное подмножество полюсов функции f.
- Если $f \neq 0$ на γ, то: $$\sum_{a \in U} \operatorname{ord}_a(f) = \operatorname{Ind}_0(f \circ \gamma).$$
- В левой части – число нулей минус число полюсов функции f с учетом кратности.
- В правой части – число оборотов кривой $f(\gamma)$ вокруг 0.

Геометрический смысл

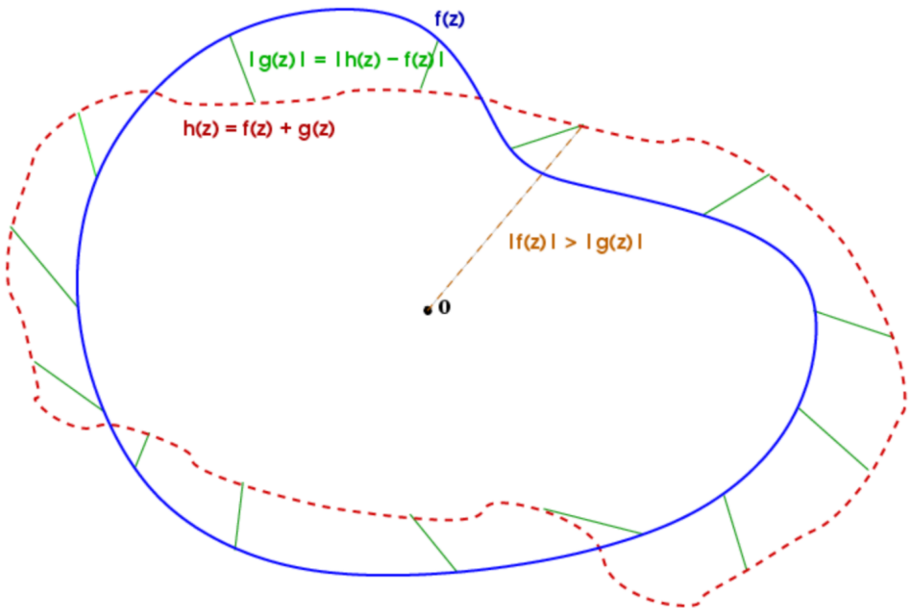


Усиленный принцип аргумента

- Функция f голоморфна на $U \setminus S$ и непрерывна на $\overline{U} \setminus S$.
- Кривая $\gamma = \partial U$ не обязательно кусочно гладкая.
- *Тот же вывод*.
- Доказательство (и даже формулировка) нуждаются в уточнении.
- **Следствие 1**: как понять, лежит ли данная точка в $f(U)$.
- **Следствие 2**: как проверить биективность отображения f.

Теорема Руше («дама с собачкой»)

Предложение 8.12 (теорема Руше). *Пусть* $\gamma : [A; B] \to \mathbb{C}$ — *замкнутый непрерывный путь, и пусть* $|\gamma|$ — *множество* $\gamma([A; B]) \subset \subset \mathbb{C}$. *Предположим, что* $f, g : |\gamma| \to \mathbb{C}$ — *непрерывные отображения, причем для всякого* $z \in |\gamma|$ *имеем* $f(z) \neq 0$ *и* $|f(z)| > |g(z)|$. *Тогда* $\mathrm{Ind}_0(f \circ \gamma) = \mathrm{Ind}_0((f + g) \circ \gamma)$.



Эжен Руше (1832 – 1910)

- Французский геометр
- École Centrale (преподаватель), École Polytechnique (тьютор, экзаменатор), Conservatoire des Arts et Métiers (профессор, зав. кафедрой).

Основная теорема алгебры

Предложение 8.13. *Многочлен степени n от одной переменной с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учетом кратности.*

- Пусть $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$.
- Имеем $|z^n| > |P(z) - z^n|$ при $|z| > R$.
- Применяем теорему Руше.

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org
- http://pbcdallas.com/

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ