Лекция 1

Числа Гурвица

Т. Кэли (о перечислении деревьев)

Дерево с n вершинами и каждая вершина помечена меткой от 1 до n

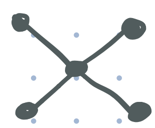
Сколькими способами можно пометить дерево?

$$\frac{n!}{\left|\text{число элем. в группе автоморфизмов дерева}\right|} = n^{n-2}$$

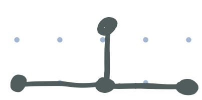
Группа автоморфизмов — подгруппа в группе перестановок вершин: сохраняется инцидентность вершин (т.е. если вершины n и k соед. ребром, то после перест. они тоже соед. ребром)

Примеры

1)  $|\mathrm{Aut}\, D| = 2$

2)  n вершин $|\mathrm{Aut}\, D| = (n-1)!$

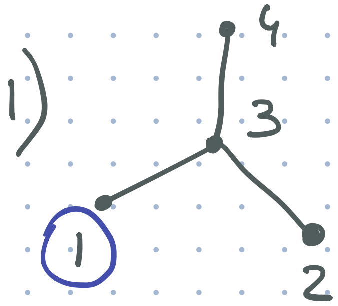
3) Помеченные деревья на 4х вершинах

 $\frac{4!}{2}$  $\frac{4!}{3!}$

$$\Rightarrow \sum = 12 + 4 = 16$$

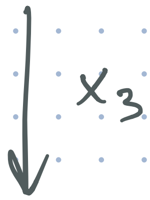
Д-во теоремы 1: Код Прюффера

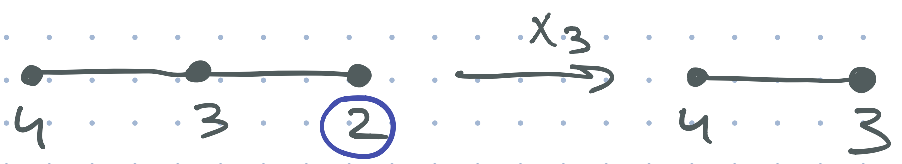
Алфавит $x_1, \dots, x_n$

1) 

Шаг 1

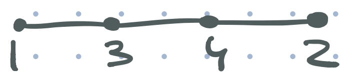
Берём лист с min номером и записываем номер вершины, соед. с листом





$\Rightarrow x_3 x_3$

Отображение дерево $\longmapsto$ слово длины $n-2$ в алфавите $x_1, \dots, x_n$

2) $x_3 x_4 \longmapsto$ 

Степень вершины $i = k+1$, где k — кол-во вхождений x_i в слово

Сколько слов длины $n-2$ в алфавите из $x_1, \dots, x_n$? Ответ: n^{n-2}

Д-во теоремы 2: Производящие функции (формальные степенные ряды)

$T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$

$T_n = n^{n-2}$ — число помеченных деревьев на n вершинах

$$T_0 + T_1 \cdot s + T_2 \cdot s^2 + T_3 \cdot s^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} T_k s^k -$$ произв. ф-ия

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДЯЩАЯ ф-ИЯ $\sum_{k=0}^{\infty} T_k \frac{s^k}{k!} = T(s)$

__ПЛАН__ СОСТАВИТЬ УР-ИЕ НА $T(s)$ И РЕШИТЬ

СТРУКТУРА НА МН-ВЕ — ЭТО „ТО, ЧТО МЫ БУДЕМ СЧИТАТЬ"

ПРИМЕРЫ СТРУКТУР НА МН-ВЕ

1) ДЛЯ КАЖДОГО МН-ВА ИЗ n ЭЛ-ОВ $f_n = 1$

ТОГДА $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} = e^s$

2) ДЛЯ КАЖДОГО МН-ВА ИЗ n ЭЛ-ОВ $f_n = 1$, ЕСЛИ МН-ВО НЕПУСТОЕ

$$\frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \ldots = e^s - 1$$

__ОПЕРАЦИЯ I__ МН-ВО A РАЗБИВАЕТСЯ НА 2 УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОДМН-ВА. НА КАЖДОМ ПОДМН-ВЕ ВЫБРАНА СТРУКТУРА g И h $\left(\sum g_i \frac{s^i}{i!}\right)$

$$A = A_1 \sqcup A_2$$

__ПРИМЕР__ ХОТИМ # ВСЕХ ПОДМН-В В МН-ВЕ ИЗ n ЭЛ-ОВ $= f_n$

$g(k) = g_k$
$h(k) = h_k$

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{s^n}{n!} = G(s)H(s) =$$

$$= \left(g_0 + g_1 \frac{s}{1!} + g_2 \frac{s^2}{2!} + \dots\right)\left(h_0 + h_1 s + h_2 \frac{s^2}{2!} + \dots\right) \Rightarrow$$

коэф. при $s^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{g(k)h(n-k)}{n!}$

$$\frac{f_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{g(k)h(n-k)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{g(k)}{k!} \cdot \frac{h(n-k)}{(n-k)!}$$

РАЗБИЛИ НА 2 ВСЕВОЗМ. ПОДМН-ВА

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{s^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{s^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{s^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{s^n}{n!} = \underbrace{e^s}_{\text{подмн-ва для } A_1} \cdot \underbrace{e^s}_{\text{подмн-ва для } A_2} = e^{2s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2s^n)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{s^n}{n!}$$

$\Rightarrow$ $|$подмн-ва мн-в$| = 2^n$

$$T(s) = s e^{T(s)}$$