№1. $a_1 = 4,\ a_2 = 7 \to a_1 + a_2 \equiv_{10} 1.$

(1) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{(1+i)^5(1+i)^3}{(1^2-i^2)^3} = \frac{(1+i)^8}{8} = \frac{(1+2i+i^2)^4}{8} = \frac{(2i)^4}{8} = \frac{16i^4}{8} = 2 = 2+0\cdot i.$

Ответ: вещественная часть: 2, мнимая: 0.

№2. $a_3 = 9,\ a_4 = 4 \to 3a_3 + 7a_4 = 27 + 28 \equiv_{10} 5.$

(5) $\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow$

- модуль: 1
- аргументом может быть любое из чисел $\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, напр., $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Ответ. модуль: 1, аргумент: $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

№3. $a_6 = 9,\ a_7 = 5 \to 2a_6 + a_7 = 18 + 5 \equiv_{10} 3.$

(3) $\cos 4x + i\sin 4x \overset{\text{ф-ла Муавра}}{=} (\cos x + i\sin x)^4 \overset{\text{бином}}{=} \cos^4 x + 4\cos^3 x\, i\sin x + 6\cos^2 x\, i^2 \sin^2 x + 4\cos x\, i^3 \sin^3 x + i^4 \sin^4 x = \cos^4 x + 4i\cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 4i\cos x \sin^3 x + \sin^4 x.$

Приравняем действительные и мнимые части:

- $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x.$
- $\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x.$

Тогда $\operatorname{tg} 4x = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \frac{4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x}{\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x} \overset{\text{делим на } \cos^4 x}{=} \frac{4\frac{\sin x}{\cos x} - 4\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}{1 - 6\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}} = \frac{4\operatorname{tg} x - 4\operatorname{tg}^3 x}{1 - 6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}.$

Ответ: $\operatorname{tg} 4x = \frac{4\operatorname{tg} x - 4\operatorname{tg}^3 x}{1 - 6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}.$

№4. $a_8 = 1,\ a_9 = 9 \to a_8 + a_9 \equiv_{10} 0.$

(о) $\cos z = 2 \to \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2.$

Пусть $t = e^{iz} \neq 0$ (иначе из $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ следует $\cos z = \sin z = 0$ — противоречие основному триг. тождеству). Тогда $t + \frac{1}{t} = 4 \to t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}.$

Итак, $e^{iz} = \underbrace{2 \pm \sqrt{3}}_{>0}$. Прологарифмируем обе части. Аргументом $2 \pm \sqrt{3}$ могут быть все $2\pi k$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, напр., 0, тогда знаем, что справа будет $\ln|\underbrace{2 \pm \sqrt{3}}_{>0}| + (0 + 2\pi k)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$. $\to z = \dfrac{\ln(2 \pm \sqrt{3})}{i} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i \to z = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$z = -i \cdot \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-i \cdot \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.