# 1 Задачи для досрочного экзамена

## 1.1 Задача 1

По теореме Больцано-Вейерштрасса из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Рассмотрим предел этой последовательности и выберем в его окрестности произвольную точку $x$. По определению предела, в любой его окрестности находится бесконечно много точек последовательности, значит, можно выбрать такую точку $x'$, что $|A - x| > |A - x'|$, где $A$ - предел последовательности. То есть для каждой точки можно выбрать следующую, лежащую ближе к пределу. Будем так выбирать, очевидно, что все такие точки образуют убывающую или возрастающую подпоследовательность изначально данной последовательности.
PS нетрудно заметить, что нужно выбрать именно полуокрестность предела. Очевидно, что если мы выбрали не ту половину окрестности (если вдруг в ней конечное число точек), то вторая половина обязательно "хорошая так как в противном случае рассматриваемая точка не была бы пределом.

## 1.2 Задача 2

Если последовательность сходится, утверждение задачи становится очевидным. Иначе предположим противное: пусть какая-то точка на отрезке от нижнего до верхнего предела не является частичным пределом. Это означает, что у нее существует $\varepsilon$-окрестность такая, что в ней содержится лишь конечное число членов данной последовательности. В какой-то момент разность между соседними членами последовательности станет меньше $\varepsilon$ (так как по условию она стремится к 0). Тогда последовательность при проходе от верхнего к нижнему пределу обязательно будет попадать на этот интервал. причем бесконечное количество раз. В случае же, если последовательность не проходит через этот отрезок при достаточно маленькой разности этих членов, получим, что либо верхний, либо нижний предел не имеют окрестности с бесконечным количеством членов, из чего следует, что какой-то из них пределом не является. Тогда мы получили противоречие, то есть каждая точка является частичным пределом последовательности.

## 1.3 Задача 3

Так как по условию все числа больше 0, существует нижняя грань такой последовательности, равная 0. Обозначим точную нижнюю грань множества за $A$ и докажем, что это предел последовательности. Для какого-то $\varepsilon > 0$ существует $y$ такое, что $\frac{x_y}{y} < A + \varepsilon$. Рассмотрим $a_n$:

$$a_n = a_{by+c} < a_{by} + a_c < ba_y + a_c$$
$$\frac{a_n}{n} < \frac{ba_y}{n} + \frac{a_c}{n}$$
$$\frac{a_n}{n} < \frac{by}{n}\frac{a_y}{y} + \frac{a_c}{n}$$

В правой части второе слагаемое стремится к 0, так как числитель ограничен сверху. Первый множитель первого слагаемого сходится к 1, так как $by = n - c$, из чего можно сделать вывод, что для всех $A + \varepsilon$ у нас $A \leq \lim \frac{a_n}{n} < \frac{a_y}{y} < A + \varepsilon$. Уменьшая $\varepsilon$, получим нужное утверждение.

## 1.4 Задача 4

Заметим, что если обозначить последовательность, от которой мы ищем предел, за $A$, то $A > 0$. Пусть этот предел равен $B < e$. Тогда для любого положительного $\varepsilon$ можно выбрать такой номер $N$, что $e - \varepsilon > \sup A \geq B$ для всех $n > N$. Рассмотрим второй замечательный предел, $\lim(\frac{n+1}{n})^n = e$. Последовательность $C$, равная последовательности из-под этого предела, возрастает. Рассмотрим номер $M$ такой, что для всех $n > M: \quad e > C > e - \varepsilon$. Рассмотрим максимум из двух выбранных нами номеров, тогда для обеих последовательностей неравенства будут верны, то есть $\sup A < C \Rightarrow A < C$.

$$\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} < \frac{n+1}{n}$$
$$\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1} < \frac{a_n}{n}$$
$$\frac{a_1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}$$

Рассмотрим ряд, сумму с нашего максимума $X$:

$$\sum_{i=X+1}^{y} \frac{1}{i+1} < \frac{a_{X+1}}{X+1} - \frac{a_y}{y} < \frac{a_{X+1}}{X+1}$$

Получается, что ряд $\sum\limits_{i=X+1}^{y} \frac{1}{i+1}$ для $y \to \infty$ ограничен сверху, хотя на самом деле он расходится, противоречие.

## 1.5 Задача 5

(а) Рассмотрим ряд обратных факториалов $\sum \frac{1}{n!}$. Сумма этого ряда для бесконечно большого $n$ равна $e$. Значит, осталось оказать, что это число иррационально. Пусть оно представляется в виде $\frac{p}{q}$. Заметим, что можно рассмотреть выражение $q!(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum\limits_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}) = q! \sum\limits_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Оно меньше 1 и при этом положительное. С другой стороны, если использовать факт, что $\sum \frac{1}{n!} = e$, то:

$$q!\left(\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}\right) = p(q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

Получаем, что это выражение принимает целые значения, при этом оно лежит в интервале от 0 до 1. Значит, противоречие, то есть e - иррационально.

(б) В пункте (а) мы предположили, что ряд уже сходится. Очевидно, что ряд обратных факториалов больше ряда такой последовательности, поэтому мы по-прежнему будем работать с $\sum \frac{1}{n!}$. Надо доказать сходимость ряда. Применим признак Раабе: $\lim n(\frac{(n+1)!}{n!} - 1) = \lim n^2 > 1$, значит, ряд сходится.

## 1.6 Задача 6

$$x\sin(2ex!\pi) = x\sin(\pi 2x! \sum \frac{1}{y!}) = x\sin(\pi 2 \sum \frac{x!}{y!})$$
$$= x\sin\left(\pi 2[\sum \frac{x!}{y!}] + \pi 2(\sum \frac{x!}{y!})\right) = x\sin(2\pi \sum_{y=x+1}^{\infty} \frac{x!}{y!})$$
$$= x\sin(2\pi w) = \frac{2\pi w x \sin(2\pi w)}{2\pi w}$$

$$\lim\left(\frac{2\pi w x \sin(2\pi w)}{2\pi w}\right) = \lim 2\pi x w \cdot \lim \frac{\sin(2\pi w)}{2\pi w}$$
$$\lim w = 0 \Rightarrow \lim(2\pi w x) = 2\pi$$
$$\lim_{\infty} \frac{\sin(2\pi w)}{2\pi w} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$
$$2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

PS используем факт, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(b) = A$

## 1.7 Задача 7

Для вещественного $x$, для каждого $m \in [1, N+1]$, выберем $n = n_m$ такое что $mx - n_m \in [0,1)$ – дробная часть $mx$. $N+1$ способ выбора $m$ порождает $N+1$ число вида $mx - n$ на интервале $[0,1)$. Разделим интервал на $N$ частей длины $\frac{1}{N}$ каждая, по принципу Дирихле, какой-то из них содержит $m_1 x - n_1$ и $m_2 x - n_2$ для некоторых $1 \leqslant m_2 < m_1 \leqslant N+1$, тогда

$$\frac{1}{N} \geqslant |(m_1 x - n_1) - (m_2 x - n_2)| = |(m_1 - m_2)x - (n_1 - n_2)|$$

Тогда $1 \leqslant q = m_1 - m_2 \leqslant N$ и $p = n_1 - n_2$, задает $|qx - p| < \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{q}$, разделив все на $\frac{1}{q}$

## 1.8 Задача 8

Воспользуемся предыдущей задачей и подставим $2\pi$ вместо $x$. Получим:

$$\left|2\pi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \Rightarrow p = 2\pi q + \alpha, \quad \alpha < \frac{1}{q}$$

Рассмотрим какое-то натуральное число $m > 2\pi$. $\frac{p}{q} < m \Rightarrow p < mq \Rightarrow \frac{1}{q} < \frac{m}{p}$. Несложно заметить, что тогда $\alpha < \frac{m}{p}$. Также известно, что $sin(p) = sin(2\pi q + \alpha) = sin(\alpha) < \alpha < \frac{1}{q} < \frac{m}{p}$. Домножая на $p$, получим $psinp < m$. Из-за того, что дробей вида $\frac{p}{q}$ бесконечно много, значения $nsinn$ попадают в интервал бесконечно много раз, а значит, у этой последовательности есть ограниченная подпоследовательность.
PS Очевидно, что снизу этот интервал можно ограничить $-m$, так как в изначальном неравенстве имеется модуль.

## 1.9 Задача 9

## 1.10 Задача 10

## 1.11 Задача 11

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n})$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\to n}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\to n}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln(2),$$

где $x = \frac{k}{n}$
PS Используем факт:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{b-a}{n}(k-1))$$

## 1.12 Задача 12

Сходится ли ряд $\sum(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$?
Представим ряд в виде:

$$\sum(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{1}{\sqrt{n-1}-1} = \sum \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}-2}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n-1}-1)}$$

Несложно заметить. что каждый член такого ряда отрицательный, значит, и суммы тоже все отрицательные. Как известно, отрицательный гармонический ряд расходится. Заметим, что каждый член нашего исходного ряда меньше (=больше по модулю) соответствующего члена гармонического ряда с удвоенным знаменателем (так как мы объединили 2 члена ряда в один, $n$ учитываются только четные):

$$\lim \sum -\frac{1}{2n} = -\infty$$
$$\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}-2}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n-1}-1)} < -\frac{1}{2n}$$
$$\frac{-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}+2}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n-1}-1)} > \frac{1}{2n}$$

Можно увеличить знаменатель, тогда дробь уменьшится, но если она все еще будет удовлетворять неравенству, мы получим нужное нам соотношение:

$$\frac{\sqrt{n}+2-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n-1}-1)} > \frac{\sqrt{n}+2-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)} = \frac{\sqrt{n}+2-\sqrt{n-1}}{n-1}$$
$$\frac{\sqrt{n}+2-\sqrt{n-1}}{n-1} > \frac{1}{2n}$$
$$2n\sqrt{n}+4n-2n\sqrt{n-1} > n-1$$
$$3n+1 > 2n(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})$$

Это верно для всех положительных $n$, значит, каждый член по модулю больше соответствующего члена четного гармонического ряда, то есть ряд расходится.

## 1.13 Задача 13

По условию, точки непрерывности функции - это все рациональные числа. При этом точки непрерывности функции - это пересечение счетного количества открытых множеств, так как для какого-то натурального $n$ можно рассмотреть множество, состоящее из таких $x$, что из какой-то $\varepsilon$-окрестности для всех чисел из нее верно, что $|f(a)-f(b)| < \frac{1}{n}$. Пересечение таких множеств и будет точками непрерывности, при этом счетное, так как всего натуральных чисел счетно. Рациональные числа нельзя представить в виде счетного пересечения открытых множеств, так как если бы было можно, это бы противоречило теореме Бэра (если рациональные - счетное объединение открытых, то иррациональные - объединение счетного количества нигде не плотных, что противоречит тому, что они второй категории по Бэру).

## 1.14 Задача 14

Для начала рассмотрим случай для $\frac{1}{2}$. Если в точке $\frac{1}{2}$ функция принимает значение 0, то очевидно, что у нас будет нужная горизонталь. Иначе пусть значение в этой точке больше 0. Тогда для левой половины левый конец меньше правого, а для правой - больше $(0 < f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{2}) > 0)$, значит, если "совместить"эти две половины, то они пересекутся в какой-то точке, то есть таким образом мы тоже найдем горизонталь длиной $\frac{1}{2}$. Аналогичное рассуждение, если значение в той точке отрицательно.
Теперь рассмотрим случай для $n$. Разделим отрезок на $n$ равных частей. Рассмотрим первые две части. Начало у первой - в нуле. Пусть конец первой больше нуля (если равен - мы победили). Тогда если конец второй части ниже конца первой, то две эти части пересекаются, то есть мы сможем найти нужную нам горизонталь. Избежать пересечения можно только в случае, если конец второго будет выше конца первого. Аналогично для 2 и 3 приходим к выводу, что единственный способ не найти горизонталь - если конец третьего будет выше конца второго. таким образом, если у нас нет ни одной горизонтали, то все такие концы монотонно возрастают (опять же, если какие-то два соседних равны - горизонталь найдена). Такое невозможно, так как в единице функция принимает значение 0, как и в нуле, из чего следует, что горизонталь по-любому найдется.
Теперь возьмем произвольное рациональное $\frac{a}{b}$, которое не имеет нужный нам вид и лежит на отрезке. Рас-

смотрим функцию $\cos(b\pi x) + ax - 1$. Тогда:

$$f(x + \frac{a}{b}) - f(x) = \cos(b\pi x + a\pi) + ax - 1 + \frac{a^2}{b} - \cos(b\pi x) - ax + 1$$
$$= \cos(b\pi x + a\pi) - \cos(b\pi x) + \frac{a^2}{b}$$
$$= -2\sin\frac{a\pi}{2}\sin\frac{2b\pi + a\pi}{2} + \frac{a^2}{b}$$
$$= \pm 2\sin\frac{a\pi}{2}\sin\frac{a\pi}{2} + \frac{a^2}{b}$$
$$= \frac{a^2}{b} \pm 2\sin^2\frac{a\pi}{2}$$

Последнее выражение не принимает значение 0 в заданных нами условиях.
Для иррациональных чисел можно привести в пример функцию, схожую с описанной выше. Если построить график по такому же принципу, но взять вместо аргумента иррациональное число, он по прежнему будет подходить под условие, так как иррациональные числа максимально хорошо приближаются рациональными.

## 1.15 Задача 15

а) Пусть новая функция $g(x)$, равна точной нижней грани множества $f(y) + L|x - y|$, где $L$ - константа Липшица, а $y \in E$. Такое расширение функции работает на всем отрезке.
б) Можно обобщить случай в трехмерном пространстве так: разделим квадрат на отрезки, на каждом из них можно функцию продолжить до полного отрезка до Липшицевой функции.

## 1.16 Задача 16

Докажем для начала, что если производная в точках $a$ и $b$ имеет разные знаки, то она достигает 0 на отрезке $[a, b]$. Так как по условию функция дифференцируема на прямой, у нее существует минимум/максимум на отрезке, причем он не в крайней точке отрезка, так как в любой окрестности $a$ и $b$ есть значения функции, большие минимума. Этот случай несложно перенести на условие данной задачи. Для этого рассмотрим произвольное значение производной, меньшее $f'(a)$ и большее $f'(b)$, равное y. Тогда, чтобы как-то применить предположение предыдущего рассуждения, можно рассмотреть функцию, равную разности производной $f$ и значения y. Тогда $f'(a) - y > 0$ и $f'(b) - y < 0$. Несложно найти первообразную данной функции, она равна $f(x) - xy$ (пусть константа для простоты равна 0). По предыдущему рассуждению существует значение, лежащее на отрезке $[a, b]$, такое, что производная функции $f$ в этой точке равна выбранному нами значению $y$.

## 1.17 Задача 17

Дифференцируема ли функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^6}$?
Проверим, существуют ли частные производные в точке $(0, 0)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3 + 0} - 0}{x} = 1$$
$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{0 + y^6} - 0}{y} = 0$$

Частные производные существуют и конечные, поэтому надо проверить более сильное условие:

$$\lim_{x\to 0, y\to 0}\frac{f(x,y) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y - f(0,0)}{||(x,y)||}$$
$$= \lim_{x\to 0, y\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3 + y^6} - x - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0, y\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3 + y^6} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Обозначим полученную функцию как $g(x,y)$. Если предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} g(x,y) = 0$ всегда, то функция дифференцируема в нуле. Введем полярные координаты $x = r\cos\xi, \quad y = r\sin\xi$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} \frac{\sqrt[3]{r^3\cos^3\xi + r^6\sin^6\xi} - r\cos\xi}{\sqrt{r^2\cos^2\xi + r^2\sin^2\xi}}\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r\sqrt[3]{\cos^3\xi + r^3\sin^6\xi} - r\cos\xi}{r}\\
&= \lim_{r\to 0} \sqrt[3]{\cos^3\xi + r^3\sin^6\xi} - \cos\xi\\
&= \cos\xi + 0 - \cos\xi = 0
\end{aligned}
$$

Таким образом, этот предел существует и равен нулю, из чего можно сделать вывод, что функция дифференцируема в начале координат.

## 1.18 Задача 18

## 1.19 Задача 19

Рассмотрим набор последовательность $f_{x_0}$ такую, что в каждом натуральном числе она равна значению $f_n$ в точке $x_0$. Изобразив это на плоскости, получим много последовательностей точек. Для каждого $\varepsilon_n$ изменяется расстояние от этой точки до оси $OX$. Построим $\varepsilon$ по предыдущему. Рассмотрим значения всех $f_{x_i}$ для какого-то $m$ и выберем наибольшее по модулю. Далее для $m-1$ выберем такое значение $f$, чтобы оно по модулю было меньше остальных, и умножим максимальное на какой-то $\varepsilon$ так, чтобы новое расстояние до оси $OX$ было меньше минимального, найденного ранее. Тогда для оставшихся оно будет еще меньше, то есть "монотонность"не нарушится. Также полученная последовательность будет ограничена сверху и снизу первым отрицательным и положительным элементами. Значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а ее несложно привести к виду, чтобы она сходилась к 0.

## 1.20 Задача 20

Обозначим композицию таких функций за $f(x)$. Данная композиция при определенных $n$ и значениях аргумента должна выдавать разные значения, а ее график должен описывать все многочлены, которые нам даны. Пусть на каждом отрезке длины 1 функция задает какой-то один многочлен, то есть на отрезке от 0 до 1 она принимает все значения многочлена $P_1(x)$, на отрезке от 1 до 2 - $P_2(x)$ и так далее. Можно рассмотреть периодическую функцию $g(x)$, для которой на каком-то единичном отрезке другая функция $h(x) = P_n(g(x))$. Применяя $h(x)$ в самом конце композиции, получим, что на каждом отрезке у нас будет нужное нам значение определенного многочлена. Осталось лишь задать функции, которые "перенесут"нас в нужный отрезок. Рассмотрим функцию, обратную $g(x)$. Для каждого x будем применять ее, потом некую функцию $q(x)$, которая позволит нам сдвинуться в нужный отрезок на прямой (сдвигаясь каждый раз на 1 вправо, можно применить функцию $n$ раз для получения $P_{n+1}$), а затем применять функцию $h(x)$ в заданном отрезке. Таким образом, такая композиция существует для бесконечного количества многочленов. Для примера периодической функции можно взять $\operatorname{tg} x$, например.

## 1.21 Задача 21

Прямую нельзя разбить на непересекающиеся отрезки. Предположим противное и рассмотрим для каждого такого множества множество его крайних точек. Так как множества непересекающиеся, множество множеств крайних точек не более, чем счетно, более того, замкнуто. Для каждого замкнутого множества такой набор крайних точек не плотный, так как каждая точка является предельной не только для "внутренности но и для ее дополнения до прямой. Тогда замкнутое множество всех крайних точек разбивается в счетное количество множеств, которые не содержат интервал, а с другой стороны множество таких крайних точек совершенно, то есть континуально.