

Вариант 1.

1. Кабина лифта массы M может без трения двигаться в вертикальном направлении в лифтовой шахте. Кабина соединена с потолком шахты системой блоков (см. рис. 1). Груз m может свободно двигаться в вертикальном направлении. Все нити невесомы, нерастяжимы и всегда натянуты (не сминаются). Массой блоков и трением в осях можно пренебречь.

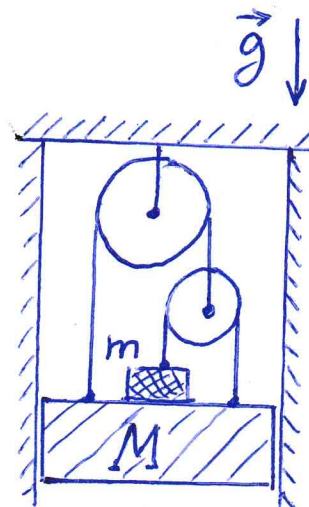


Рисунок 1

- При каких значениях масс m и M кабина лифта может находиться в состоянии покоя?
- Найдите величину силы реакции N , действующей на груз со стороны кабины лифта, при $m = M/2$.

2. Материальная точка движется вдоль прямой Ox в поле потенциальной силы, потенциальная энергия $U(x)$ которой дается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} 1 - e^{-8x^2} & x \leq 0 \\ 8x^2(1 - x^2) & x > 0. \end{cases}$$

- Нарисуйте качественный фазовый портрет этой одномерной механической системы.
 - Укажите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям полной механической энергии $E = 0$, $E = 1$ и $E = 2$.
3. Силовое поле \vec{F} задано в декартовых прямоугольных координатах (x, y, z) пространства \mathbb{R}^3 следующими выражениями своих компонент:

$$F_x = 2xy + y, \quad F_y = -2\alpha yz + x^2 + x, \quad F_z = \alpha z - y^2$$

где α — вещественный числовой параметр.

- Найдите работу силы \vec{F} вдоль отрезка кривой, заданной уравнениями

$$x = y, \quad z = y^2$$

от начальной точки $(0, 0, 0)$ до конечной точки $(1, 1, 1)$.

- Определите значение параметра α , при котором сила \vec{F} потенциальна, и найдите выражение для соответствующей потенциальной энергии $U(x, y, z)$.

4. Компоненты силы \vec{F} заданы в полярных координатах (ρ, ϕ) пространства \mathbb{R}^2 следующими выражениями:

$$F_\rho = \rho f(\phi), \quad F_\phi = g(\rho) \cos^3 \phi,$$

где $f(\phi)$ и $g(\rho)$ некоторые дифференцируемые функции своих аргументов.

- Определите наиболее общий вид функций $f(\phi)$ и $g(\rho)$, при которых сила \vec{F} потенциальна и не имеет сингулярности в начале координат $\rho = 0$.
- Найдите вид соответствующей потенциальной энергии $U(\rho, \phi)$.