2к. Мат. Анализ. Семинар № 5.

Евклидовы пространства.

На прошлом семинаре было установлено необходимое условие того, что нормированное пространство является гильбертовым пространством. Это тождество параллелограмма:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) \qquad (1)$$

Оказывается это условие является так же и достаточным.

Задача 1 (теорема Жордана-фон-Неймана). Пусть норма $\|\cdot\|$ в нормированном пространстве L удовлетворяет тождеству параллелограмма, тогда эта норма порождается некоторым скалярным произведением.

Решение. Вопрос: как в евклидовом пространстве выразить скалярное произведение (x,y) через норму каких-то векторов, связанных с x и y?

$$(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right) \qquad (2)$$

Проверим, что функция (2) удовлетворяет всем аксиомам скалярн. произв.

1. Пусть $x = y$, тогда
$$(x, x) = \frac{1}{4}\left(\|2x\|^2 - \|x-x\|^2\right) = \|x\|^2.$$
Значит, это и будет то ск. произведение, которое порождает нашу норму.

Имеем: $(x,x) \geq 0$ и $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
(это следует из свойства нормы)

2. Проверим симметричность, очевидно,
$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = (y, x)$$

3. Проверим аддитивность, т.е.
$$(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$$
Рассмотрим функцию
$$\Phi(x,y,z) = 4\left[(x+y, z) - (x, z) - (y, z)\right],$$
т.е. $\Phi(x,y,z) = \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 -$
$$-\|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \qquad (3)$$

Покажем, что $\Phi(x,y,z) \equiv 0 \quad \forall x,y,z \in L$

Для этого воспользуемся тождеством параллелограмма, которое запишем:
$$\|x+y\pm z\|^2 = 2\|x\pm z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x\pm z - y\|^2.$$

И подставим это в (3)

$$\Phi(x,y,z) = -\|x+z-y\|^2 + \|x-z-y\|^2 +$$
$$\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \quad (4)$$

Возьмем полусумму тождеств (3) и (4):

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(\|y+z+x\|^2 + \|y+z-x\|^2\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\|y-z+x\|^2 + \|y-z-x\|^2\right) - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2$$

Еще раз применим тождество параллелограмма к слагаемым в скобках:

первое равно: $\|y+z\|^2 + \|x\|^2$

второе равно: $\|y-z\|^2 + \|x\|^2$

Получим:

$$\Phi(x,y,z) = \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \left(\|y-z\|^2 + \|x\|^2\right)$$
$$- \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 = 0$$

4. Проверим **однородность**, т.е.

$$(\lambda x, y) = \lambda(x,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Опять рассмотрим функцию:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x, y) - \lambda(x,y).$$

Тогда: $\varphi(0) = \frac{1}{4}\left(\|y\|^2 - \|y\|^2\right) = 0$

$$\varphi(-1) = \frac{1}{4}\left(\| \qquad \|^2 - \|-x-y\|^2 - (-1)\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\right) = 0$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$(nx, y) = (\underbrace{x+\ldots+x}_{n\ \text{раз}}, y) = \underbrace{(x,y)+\ldots+(x,y)}_{n\ \text{раз}} = n(x,y)$$

Поэтому $\varphi(n) = 0$.

Аналогично: $(-nx, y) = -n(x,y)$, т.е. $\varphi(-n) = 0$. Значит, для целых $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда для любых целых p, q, $q \neq 0$

$$\left(\frac{p}{q}x, y\right) = p\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}\, q\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}(x,y),$$

т.е. $\varphi(r) = 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}$.

Заметим, что функция $\varphi(\lambda)$ является непрерывной (т.к. норма – непрерывна)

В итоге $\varphi(\lambda) \equiv 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, т.е.

$$(\lambda x, y) = \lambda(x,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, функция $(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ обладает всеми свойствами скалярного произведения.

<u>Определение.</u> Если бесконечномерное евклидово пространство является <u>полным</u>, то оно называется гильбертовым пространством.

Примеры Гильбертовых пространств

Пример 1. $l_2 = \{ \{x_k\}, \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \}$

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

Пример 2. $L_2(a,b) = \{ f(t), \int_a^b f^2(t)\,dt < \infty \}$

$$(f,g) = \int_a^b f(t) g(t)\,dt .$$

Полноту этого пространства докажут на лекции.

Примеры евклидовых пространств, которые не являются гильбертовыми.

Пример 3. l_2^{φ} — пространство финитных последовательностей, $l_2^{\varphi} = \{ \{x_k\}, \exists N : x_k = 0 \ \forall k \geq N \}$

Скалярное пр-е: $(x,y) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$, $N = N(x,y)$

Пополнением служит обычное l_2.

Пример 4. $C_2[a,b]$ — пространство непрерывных функций с скалярным произведением $(f,g) = \int_a^b f(t) g(t)\,dt$.

Пространство неполное. Годится пример для пространства с нормой $L_1(a,b)$.

Пополнением этого пространства служит пр-во $L_2(a,b)$.

Займемся задачами, связанными с вычислением расстояний.

Пусть $M \subset H$ — замкнутое множество в гильбертовом пр-ве H.

<u>Определение</u>. Расстояние от точки $u \in H$ до мн-ва M определяется формулой:

$$dist(u, M) = \inf\{\|u-x\|, x \in M\}.$$

Если $x \in M$, то $dist(u, M) = 0$

Если x — предельная точка M, то $dist(u, M) = 0$

<u>Задача 2</u>. Если M — замкнутое <u>выпуклое</u> множество, то $\forall u \in H \ \exists v \in M$:

$$dist(u, M) = \|u - v\|.$$

т.е. расстояние достигается.

<u>Замечание</u>. Если $H = \mathbb{R}^n$ — конечномерное пространство, то $dist(u, M)$ достигается для любого <u>замкнутого</u> множества M. (не обязательно выпуклого). Почему?

<u>Решение</u>. Рассмотрим так называемую минимизирующую последовательность

$$\{x_k\} \subset M; \quad d_k = \|u - x_k\| \to d = dist(u, M).$$

Такую последовательность всегда можно построить.

Воспользуемся тождеством парал-мма:

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

Подставим $x=u+x_n$, $y=u-x_m$:

$$\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2+\left\|u-\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(d_n^2+d_m^2\right)$$

где $d_n=\|u-x_n\|$, $d_m=\|u-x_m\|$

Поскольку M выпукло, то, $\frac{x_n+x_m}{2}\in M$ и,

следовательно, $\left\|u-\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2\geq d^2$

Поэтому: $\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2+d^2\leq\frac{1}{2}\left(d_n^2+d_m^2\right)$

т.е. $\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\left(d_n^2+d_m^2\right)-d^2\to 0$ $(n,m\to\infty)$.

Следовательно, $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Она имеет предел (поскольку пр-во H полное). Обозначим этот предел $\underline{v}$: $x_n\to v$, $\|x_n-v\|\to 0$.

Утверждается, что v – искомая точка. Действительно, $x_n\to v$, тогда $\|x_n-u\|\to\|v-u\|$. Но $\|x_n-u\|=d_n\to d$, т.е. $\|v-u\|=d$,

$$\|v-u\|=\operatorname{dist}(u,M).$$

Задача 3. Доказать, что точка $v \in M$, реализующая расстояние от u до M — единственная.

Решение. Пусть найдется две точки, v_1 и v_2:

$$\|v_1 - u\| = \|v_2 - u\|^2 = d(u, M) = d$$

Рассмотрим точку $v = \frac{v_1 + v_2}{2} \in M$ (выпуклость)

Снова воспользуемся тождеством пар-мма

Пусть $x = u - v_1$, $y = u - v_2$, тогда

$$\|u - v_1 + u - v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2(\underset{d}{\|u - v_1\|^2} + \underset{d}{\|u - v_2\|^2})$$

т.е. $4\left\|u - \frac{v_1+v_2}{2}\right\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 4d$

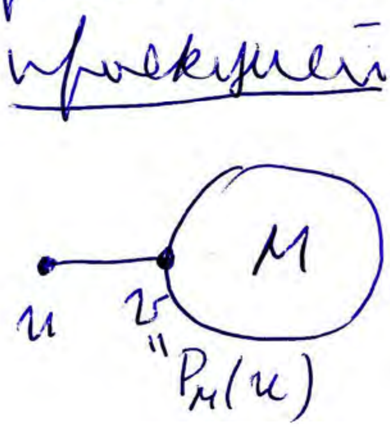
$$\left\|u - \frac{v_1+v_2}{2}\right\| + \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|^2 = d.$$

$$\frac{v_1+v_2}{2} \in M \Rightarrow \begin{matrix}\geq \\ d\end{matrix} + \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|^2 \leq d$$

$$\|v_1 - v_2\|^2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Определение: Если M — замкнутое выпуклое мн-во, то v, реализующее расстояние от u до M называется проекцией т. u на мн-во M

$\boxed{v = P_M(u)}$ — обозначение.



Задача 4. Построить пример невыпуклого множества M (замкнутого) в ℓ_2, для которого расстояние от 0 до M не реализуется.

Решение. $M = \{x_n\}$, где

$$x_n = (0, \ldots, \underset{(n)}{1+\frac{1}{n}}, 0 \ldots)$$

Тогда $d(0, x_n) = \cancel{1} + \frac{1}{n} \to 1 \ (n \to \infty)$

тогда $d(0, M) = 1$, однако $\forall x \in M \ d(0,x) > 1$

Множество $M = \{x_n\}$, замкнуто, поскольку x_n являются изолированными, т.к.

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{m}\right)^2 \geq 2 \quad m > n$$

M – замкнуто.

Задача 5. Пусть $H = L_2(0,1)$.

Найти расстояние от точки $x = \cos t$ до множества $M = \{f(t) : \int_0^1 t \cdot f(t)\,dt = 0\}$

(Домашнее задание).