Дифференциальные уравнения
2 курс
Домашняя работа

Владислав Мозговой

Дифференциальные уравнения 2020

Домашнее задание № 1

Элементарные методы интегрирования дифференциальных уравнений

Дата сдачи задания: 13 октября 2020

Рекомендация. В задачнике А.Ф. Филиппова “Сборник задач по дифференциальным уравнениям” имеется краткое изложение основных методов интегрирования предложенных ниже задач. Теория и полезные приемы представлены в начале каждого тематического раздела задачника.

---

1. Стенки сосуда с жидкостью имеют форму поверхности вращения вида

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a},$$

где $a > 0$ — заданная константа, ось Oz направлена вертикально вверх. Сосуд заполнен жидкостью до уровня $z = H$.

В некоторый момент в нижней точке сосуда открывается небольшое отверстие, площадь которого меняется со временем по закону

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{1 + (t/T_0)^2}$$

где t — время, прошедшее с момента открытия отверстия, σ_0 и T_0 — заданные параметры. Найдите все значения параметра T_0, при которых жидкость успеет полностью вытечь из сосуда до закрытия отверстия. Считайте, что зависимость скорости вытекания жидкости из малого отверстия описывается законом Торричелли $v(h) = \sqrt{2gh}$, где h — текущее значение уровня жидкости в сосуде.

2. Найдите семейство гладких кривых в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, обладающих следующим свойством. Проведем касательную в произвольной точке P кривой семейства и найдем точку Q, в которой эта касательная пересекает ось ординат Oy. Тогда ордината y_Q равна абсциссе точки касания P: $y_Q = x_P$.

3. Найдите кривую в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, которая проходит через начало O декартовой системы координат и обладает следующим свойством. Построим нормаль к кривой в произвольной ее точке M и найдем точку N, в которой эта нормаль пересекает ось абсцисс Ox. Тогда середина отрезка MN лежит на кривой $y^2 = ax$, где $a > 0$ — заданная константа.

Найдите общее решение дифференциальных уравнений

4. $x\,\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 1$

5. $\dfrac{dy}{dx}\,\sqrt{1 - x^4} + x(1 + e^y) = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx} - xy^2 = 2xy$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \sin 2(x + y) - 1$

8. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x}{y-x}$

9. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$

10. $x\dfrac{dy}{dx}-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

11. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy=1$

12. $\dfrac{ds}{dt}+s\cos t=\dfrac{1}{2}\sin 2t$

13. $\Big(x\dfrac{dy}{dx}-1\Big)\ln x=2y$

14. $xy(1+xy^2)\dfrac{dy}{dx}=1$

15. $x\dfrac{dy}{dx}-y=x^2\sqrt{y}$

Найдите значения вещественного параметра α, при котором уравнение становится уравнением в полных дифференциалах и решите его для этих значений α

16. $(x^2+y^\alpha)dx+(\alpha x-2y)\,dy=0$

17. $\Big(\cos^2 x-(x+y)\sin\dfrac{x}{\alpha}\Big)dx+2(\alpha-1)\sin^2 x\,dy=0$

18. $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y^\alpha}{(x-y)^2}\right)dx-\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^\alpha}{(x-y)^2}\right)dy=0$

Найдите интегрирующий множитель и решите уравнения в дифференциалах

19. $\Big(1+\dfrac{3y^2}{x^2}\Big)\,dx=\dfrac{2y}{x}\,dy$

20. $\Big(2x+\dfrac{y}{x^2}\Big)dx+\Big(x^2-\dfrac{y+1}{x}\Big)\,dy=0$

21. $\ln y\,dx-\dfrac{x}{y}\,dy=0$

Решения

Задача 1

Заметим, что

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a} ah = x^2 + y^2$$
$$\sqrt{ah} = r$$
$$S = \pi r^2 = \pi ah$$

и

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{1 + \left(\frac{t}{T_0}\right)^2}$$

Тогда

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{-\sigma(t)v(h)}{ah} = -\frac{\sigma_0 T_0^2 \sqrt{2gh}}{(t^2 + T_0^2)\pi ah} = -C_1 \frac{1}{(t^2 + T_0^2)\sqrt{h}}$$
$$C_1 = \frac{\sigma_0 T_0^2 \sqrt{2g}}{a\pi}$$
$$\int\limits_H^{h(t)} \partial h = \int\limits_0^t -\frac{C_1}{t^2 + T_0^2} \partial t$$
$$\frac{2}{3}(H^{\frac{3}{2}} - h(t)^{\frac{3}{2}}) = C_1 \frac{1}{T_0} \arctan \frac{t}{T_0}$$
$$h(t) = (-\frac{3}{2} C_1 \frac{1}{T_0} \arctan \frac{t}{T_0} + H^{\frac{3}{2}}) \frac{2}{3}$$
$$h(t) = (-C_2 \arctan \frac{t}{T_0} + H^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$$
$$C_2 = \frac{3}{2} \frac{1}{T_0} \frac{\sigma_0 T_0^2 \sqrt{2g}}{a\pi}$$
$$t = T_0 \tan \frac{H^{\frac{3}{2}}}{C_2}$$
$$\frac{H^{\frac{3}{2}}}{C_2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\frac{H^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \frac{1}{T_0} \frac{\sigma_0 T_0^2 \sqrt{2g}}{a\pi}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$T_0 > \frac{4a}{3\sigma_0 \sqrt{2g}}$$

Задача 2

Касательная задается уравнением $f(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$, откуда $x_0 \frac{\partial y(x_0)}{\partial x} = y(x_0) - x_0$ и $x \frac{\partial y}{\partial x} = y - x$

$$y' - \frac{1}{x} y = -1$$
$$c(x) + xc'(x) - c(x) = -1$$
$$c'(x) = -\frac{1}{x}$$
$$\int \partial c(x) = -\frac{1}{x} \partial x$$
$$c(x) = -\ln|x| + c$$
$$y = -x \ln|x| + cx$$

Задача 3

$$f(x) = y(M_x) + y'(M_x)(x - M_x)$$
$$f(x) = y'(M_x)x - M_x y'(M_x) + y(M_x)$$
$$g(x) = kx + b$$
$$k \cdot y'(M_x) = -1$$
$$g(x) = -\frac{1}{y'(M_x)}(x - M_x) + y(M_x)$$
$$g(N) = -\frac{1}{y'(M_x)}(N - M_x) + y(M_x) = 0$$
$$N = M_x + yy'$$

Откуда

$$x = \frac{N + M_X}{2}$$
$$y = \frac{M_y}{2}$$
$$(\frac{M_y}{2})^2 = a\frac{N + M_x}{2}$$
$$(\frac{M_y}{2})^2 = a(M_x + \frac{yy'}{2})$$
$$y^2 = 2a(2x + yy')$$

Пусть $z = y^2$

$$z = 4ax + az'$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{a} = -4x$$
$$\frac{\partial z}{z} = \frac{1}{a}\partial x$$
$$\ln(z) = \frac{x}{a} + c$$
$$z = e^{\frac{x}{a}}c$$
$$\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}c(x) + c'(x)e^{\frac{x}{a}} - \frac{e^{\frac{x}{a}}c(x)}{a} = -4x$$
$$c'(x) = -\frac{4x}{e^{\frac{x}{a}}}$$
$$c(x) = 4ae^{-\frac{x}{a}}(a + x) + c_0$$
$$z = 4a(a + x) + c_0 e^{\frac{x}{a}}$$

Подставим точку $(0, 3a)$ в уравнение

$$9a^2 = 4a^2 + c_0 e^0$$
$$c_0 = 5a^2$$
$$y^2 = 4a(a + x) + 5a^2 e^{\frac{x}{a}}$$

Задача 4

$$x\frac{\partial y}{\partial x}+y^2=1$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1-y^2}{x}$$
$$\frac{\partial y}{1-y^2}=\frac{\partial x}{x}$$
$$\int\frac{\partial y}{1-y^2}\partial x=\int\frac{\partial x}{x}$$
$$\frac{1}{2}\ln|1+y|-\frac{1}{2}\ln|1-y|=\ln|x|+c$$
$$\frac{1+y}{1-y}=\pm x^2c$$
$$y=\frac{e^{2c}x^2\pm 1}{e^{2c}x^2\mp 1}$$
$$y=\frac{cx^2\pm 1}{cx^2\mp 1}$$

Задача 5

$$\frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{1-x^4}+x(1+e^y)$$
$$\frac{\partial y}{1+e^y}=-\frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^4}}$$
$$\int\frac{\partial y}{1+e^y}=\int-\frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^4}}$$
$$y-\ln(1+e^y)=\frac{1}{2}\arcsin(x^2)+c$$
$$\frac{e^y}{1+e^y}=e^{\frac{1}{2}\arcsin(x^2)+c}$$

Задача 6

$$\frac{\partial y}{\partial x}-xy^2=2xy$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}=x(y^2+2y)$$
$$\frac{\partial y}{y^2+2y}=x\partial x$$
$$\int\frac{\partial y}{y^2+2y}\partial x=\int x\partial x$$
$$\frac{1}{2}\ln|y|-\frac{1}{2}\ln|y+2|=\frac{x^2}{2}+c$$
$$y=\pm\frac{2e^{x^2+2c}}{e^{x^2+2c}-1}$$

Задача 7

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sin(2(x+y)) - 1$$
$$u = x + y$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(u-x)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} - 1 = u' - 1 = \sin(2u) - 1$$
$$u' = \sin(2u)$$
$$\frac{1}{2}\ln|\operatorname{ctg} u| = x + c$$
$$\operatorname{ctg}(x+y) = \pm e^{2x}c$$
$$x + y = \pm \operatorname{arcctg}(e^{2x}c) + \pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$y = \operatorname{arcctg}(e^{2x}c) - x + \pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Задача 8

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y+x}{y-x}$$
$$u = y - x$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(u+x)}{\partial x} = u' + 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + 1 = \frac{2x+u}{u}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{u}$$
$$\frac{1}{2}u^2 = x^2 + c$$
$$(y-x)^2 = 2(x^2+c)$$
$$y = x \pm \sqrt{2x^2+c}$$

Задача 9

$$x\partial y - y\partial x = \sqrt{x^2+y^2}\partial x$$
$$x\partial y = (\sqrt{x^2+y^2} + y)\partial x$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$$
$$y = xu$$
$$u + x\frac{\partial u}{\partial x} = u + \sqrt{1+u^2}$$
$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}}$$
$$\int \frac{\partial x}{x}\partial x = \int \frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}}\partial x$$
$$\ln(\sqrt{u^2+1} + u) = \ln|x| + c$$
$$\sqrt{u^2+1} + u = xc$$
$$\sqrt{x^2+y^2} + y = cx^2$$
$$y = \frac{x^2c^2 - 1}{2c}$$

Задача 10

$$
\begin{aligned}
&x\frac{\partial y}{\partial x} - y = x\tan\frac{y}{x}\\
&y = xu(x)\\
&x^2\frac{\partial u}{\partial x} + xu - xu = x\tan u\\
&x^2\frac{\partial u}{\partial x} = x\tan u\\
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tan u}{x}\\
&\frac{\partial u}{\tan u} = \frac{\partial x}{x}\\
&\int \frac{\partial u}{\tan u}\partial x = \int \frac{\partial x}{x}\partial x\\
&\ln|\sin u| = \ln|x| + c\\
&|\sin u| = e^c x\\
&u = \pm\arcsin(e^c x)\\
&y = \pm x\arcsin(e^c x)\\
&y = \pm x\arcsin(cx)
\end{aligned}
$$

Задача 11

$$
\begin{aligned}
&(1+x^2)\frac{\partial y}{\partial x} + xy = 1\\
&\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}\\
&y' + a(x)y = b(x)\\
&y' + a(x)y = 0\\
&\int \frac{\partial y}{y} = \int -\frac{x}{1+x^2}\partial x\\
&\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c\\
&y = \frac{e^c}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}}\\
&\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\frac{c}{\sqrt{1+x^2}}}{\partial x} = \frac{c'(x)\sqrt{1+x^2} - c(x)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\\
&c'(x)\sqrt{1+x^2} - \frac{xc(x)}{\sqrt{1+x^2}} + x\frac{c(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1\\
&c'(x)(1+x^2) - xc(x) + xc(x) = \sqrt{1+x^2}\\
&c'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\\
&c(x) = \operatorname{arcsinh} x + c\\
&y = \frac{\operatorname{arcsinh}(x) + c}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

Задача 12

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$$
$$s' + a(t)s = b(t)s' + a(t)s = 0$$
$$\frac{\partial s}{\partial t} + s\cos t = 0$$
$$\frac{\partial s}{s} = -\cos t\partial t$$
$$s = ce^{-\sin t}$$
$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial c(t)e^{-\sin t}}{\partial t} = c'(t)e^{-\sin t} - \cos te^{-\sin t}c(t)$$
$$c'(t)e^{-\sin t} - e^{-\sin t}c(t)\cos t + c(t)e^{-\sin t}\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$$
$$c'(t)e^{-\sin t} = \sin t\cos t$$
$$c(t) = e^{\sin t}(\sin t - 1) + c$$
$$s = \sin t - 1 + ce^{-\sin t}$$

Задача 13

$$\left(x\frac{\partial y}{\partial x} - 1\right)\ln x = 2y$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{2y}{x\ln x} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial y}{\ln^2 x\partial x} - \frac{2y}{x\ln^3 x} = \frac{1}{x\ln^2 x}$$
$$\frac{\partial y}{\ln^2 x\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\ln^2 x} = \frac{1}{x\ln^2 x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\ln^2 x} = \frac{1}{x\ln^2 x}$$
$$\int\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\ln^2 x}\partial = \int\frac{1}{x\ln^2}\partial x$$
$$\frac{y}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln^2 x} + c$$
$$y = \ln x(c\ln x - 1)$$

Задача 14

$$xy(1+xy^2)\frac{\partial y}{\partial x} = 1$$
$$\frac{\partial x}{\partial y} = xy(1+xy^2)$$
$$u = \frac{1}{x}$$
$$-\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{u}(1+\frac{y^2}{u})$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + uy + y^3 = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + uy = 0$$
$$\ln u = -\frac{1}{2}y^2 + c$$
$$u = e^{\frac{1}{2}y^2}c$$
$$c'(y)e^{-\frac{1}{2}y^2} - yc(y)e^{-\frac{1}{2}y^2} + yc(y)e^{-\frac{1}{2}y^2} = -y^3$$
$$c'(y) = -y^3e^{\frac{1}{2}y^2}$$
$$c(y) = -e^{\frac{1}{2}y^2}(y^2-2) + c$$
$$u = -(y^2-2) + e^{-\frac{1}{2}y^2}c$$
$$x = \left(-(y^2-2) + e^{-\frac{1}{2}y^2}c\right)^{-1}$$

Задача 15

$$x\frac{\partial y}{\partial x} - y = x^2\sqrt{y}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = x\sqrt{y} + \frac{y}{x}$$
$$u = \sqrt{y}$$
$$2u\frac{\partial u}{\partial x} = xu + \frac{u^2}{x}$$
$$2\frac{\partial u}{\partial x} = x + \frac{u}{x}$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}}c(x) + 2\sqrt{x}c'(x) - \frac{c(x)}{\sqrt{x}} = x$$
$$c'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x}}$$
$$c(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$
$$u = \frac{x^2}{2} + cx^{\frac{1}{2}}$$
$$y = \left(\frac{x^2}{3} + cx^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Задача 16

$$(x^2+y^\alpha)\partial x + (\alpha x - 2y)\partial y = 0$$
$$\frac{\alpha x - 2y}{\partial x} = \frac{x^2+y^\alpha}{\partial y}$$
$$\alpha = \alpha y^{\alpha-1}$$

$\alpha = 1$

$$(x^2+y)\partial x + (x-2y)\partial y = 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y$$
$$\int (x^2+y)\partial x = \frac{1}{3}x^3 + f_1(y) + c$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = x - 2y$$
$$\int (x-2y)\partial y = f_2(x) - y^2 + c$$
$$U(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - y^2 + yx + c$$
$$\frac{1}{3}x^3 - y^2 + yx + c = 0$$

$\alpha = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2y$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + 1$$
$$U(x,y) = \int (x^2+1)\partial x = \frac{1}{3}x^3 + x + c + f_y(y)$$
$$U(x,y) = \int (-2y)\partial y = -y^2 + c + f_x(x)$$
$$U(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x - y^2 + c$$
$$\frac{1}{3}x^3 + x - y^2 + c = 0$$

Задача 17

$$(\cos^2(x) - (x+y)\sin\frac{x}{\alpha})\partial x + 2(\alpha-1)\sin^2(x)\partial y = 0$$
$$\frac{\partial(\cos^2(x) - (x+y)\sin\frac{x}{\alpha})}{\partial y} = -\sin\frac{x}{\alpha}$$
$$\frac{\partial(2(2\alpha-1)\sin^2 x)}{\partial x} = 4\sin x\cos x(\alpha-1) = 2(\alpha-1)\sin(2x)$$
$$2(\alpha-1)\sin(2x) + \sin\frac{x}{\alpha} = 0$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sin(2x) - \sin(2x) = 0$$
$$0 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cos^2(x) - (x+y)\sin(2x)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\sin^2(x)$$
$$U = -y\sin^2 x + f(x)$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2y\sin(x)\cos(x) + f'(x) = -y\sin(2x) + \cos^2(x) - x\sin(2x)$$
$$U = x\cos^2 x - y\sin^2 x = c$$

Задача 18

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^\alpha}{(x-y)^2}\right)\partial x - \left(\frac{1}{y} - \frac{x^\alpha}{(x-y)^2}\right)\partial y = 0$$
$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^\alpha}{(x-y)^2}\right)\partial x + \left(-\frac{1}{y} + \frac{x^\alpha}{(x-y)^2}\right)\partial y = 0$$
$$\frac{\partial\left(\frac{1}{x} - \frac{y^\alpha}{(x-y)^2}\right)}{\partial y} = \frac{\alpha y^{\alpha-1}(x-y)^2 - 2(x-y)y^\alpha}{(x-y)^4} = \frac{-\alpha y^{\alpha-1}(x-y) - 2y^\alpha}{(x-y)^3}$$
$$\frac{\partial\left(-\frac{1}{y} + \frac{x^\alpha}{(x-y)^2}\right)}{\partial x} = \frac{\alpha x^{\alpha-1}(x-y)^2 - 2(x-y)x^\alpha}{(x-y)^4} = \frac{\alpha x^{\alpha-1}(x-y) - 2x^\alpha}{(x-y)^3}$$
$$\alpha(x-y)(x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1}) - 2(x^\alpha - y^\alpha) = 0$$

$\alpha = 2$

$$\alpha(x-y)(x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1}) - 2(x^\alpha - y^\alpha) = 0$$
$$2(x-y)(x^{2-1} + y^{2-1}) - 2(x^2 - y^2) = 0$$
$$2(x^2 - y^2) - 2(x^2 - y^2) = 0$$
$$0 = 0$$

$\alpha = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{y} + \frac{x^2}{(x-y)^2}$$
$$U = \int \frac{\partial U}{\partial x}\partial x = \ln|x| + \frac{y^2}{x-y} + f_y(y)$$
$$\frac{2y(x-y)}{(x-y)^2} + f_y'(y) = -\frac{1}{y} + \frac{x^2}{(x-y)^2}$$
$$f_y'(y) = 1 - \frac{1}{y}$$
$$f_y(y) = -\ln|y| + y + c$$
$$U = \ln|x| - \ln|y| + \frac{xy}{x-y} + c$$
$$\ln|x| - \ln|y| + \frac{xy}{x-y} = c$$

Задача 19

$$\left(1+\frac{3y^2}{x^2}\right)\partial x = \frac{2y}{x}\partial y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(1+\frac{3y^2}{x^2})}{\partial y} = \frac{6y}{x^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{2y}{x})}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2}$$

$$\mu\frac{6y}{x^2} = \mu\frac{2y}{x^2}$$

$$-\mu_x\frac{2y}{x} + \frac{2y}{x}\mu = \mu_y(1+\frac{3y^2}{x^2}) + \frac{6y}{x^2}\mu$$

$$-\mu_x\frac{2y}{x} - \mu_y(1+\frac{3y^2}{x^2}) = \mu\frac{4y}{x^2}$$

$$\mu = -\frac{1}{x^2} \qquad \mu_x = \frac{2}{x^3}$$

$$(-\frac{1}{x^2}(1+\frac{3y^2}{x^2}))\partial x + \frac{2}{x^5}\partial y = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^3}$$

$$U = \int\frac{\partial U}{\partial y}\partial y = \frac{y^2}{x^3} + f(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{3y^2}{x^4} + f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + c$$

$$U = \frac{y^2}{x^3} + \frac{1}{x} + c$$

$$\frac{y^2}{x^3} + \frac{1}{x} + c = 0$$

Задача 20

$$(2x+\frac{y}{2x})\partial x+(x^2-\frac{y+1}{x})\partial y=0$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(2x+\frac{y}{x^2})}{\partial y}=\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(x^2-\frac{y+1}{x})}{\partial x}=2x+\frac{y+1}{x^2}$$
$$\mu_y(2x+\frac{y}{x^2})+\frac{1}{x^2}\mu=\mu_x(x^2-\frac{y+1}{x})+(2x+\frac{y+1}{x^2})\mu$$
$$\mu(2x+\frac{y}{x^2})=\mu_x(\frac{y+1}{x}-x^2)+\mu_y(2x+\frac{y}{x^2})$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}=2xe^y+\frac{y}{x^2}e^y$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2e^y-\frac{y+1}{x}e^y$$
$$U=\int\frac{\partial U}{\partial x}\partial x=x^2e^y-\frac{y}{x}e^y+f(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2e^y-\frac{e^y}{x}-\frac{y}{x}e^y+f'(y)=x^2e^y-\frac{y+1}{x}e^y$$
$$f'(y)=0\qquad f(y)=c$$
$$U=x^2e^y-\frac{y}{x}e^y=c$$
$$x^2e^y-\frac{y}{x}e^y=c$$

Задача 21

$$\ln y\partial x-\frac{x}{y}\partial y=0$$
$$\frac{\partial\ln y}{\partial y}=\frac{1}{y}$$
$$\frac{-\partial\frac{x}{y}}{\partial y}=-\frac{1}{y}$$
$$\mu_x(-\frac{x}{y})-\frac{1}{y}\mu=\mu_y\ln y+\frac{1}{y}\mu$$
$$\frac{2}{y}\mu=-\frac{x}{y}\mu_x-\ln y\mu_y$$
$$\mu=\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{1}{x^2}\ln y\partial x-\frac{1}{xy}\partial y=0$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}\partial x=-\frac{1}{x}\ln y+f(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{xy}+f'(y)=-\frac{1}{xy}$$
$$f'(y)=0$$
$$f(y)=c$$
$$U=-\frac{1}{x}\ln y+c$$
$$-\frac{1}{x}\ln y+c=0$$