Мат. анализ. к2. Семинар №1

Ряды Фурье, коэффициенты Фурье.

1) Тригонометрический ряд Фурье.

Задана функция $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$.
Необходимо представить ее в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Справа стоит ряд Фурье функции $f(x)$.

Числа a_n, $n=0,1,\dots$, b_n, $n=1,2,\dots$ называются коэффициентами Фурье.

Задача состоит в нахождении коэффициентов Фурье для заданной ф-ии $f(x)$.

Тригонометрическая система

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

Опр1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными, если $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx = 0$.

Опр2. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ортогональной, если любые две функции ортогональны между собой.

Задача 1. Доказать, что тригонометрическая система является ортогональной.

Решение:

1) Проверим, что ф-я 1 ортогональна всем остальным косинусам и синусам:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\left(\sin n\pi - \sin(-n\pi)\right) = 0$$

Аналогично $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0$, $n=1,2,\ldots$

2) Проверим ортогональность косинусов.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\Big(\cos(n+m)x+\cos(n-m)x\Big)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx = 0+0=0$$

(Воспользовались пунктом 1) и $n\neq m$).

Аналогично при $n\neq m$.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x]dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x-\sin(n-m)x]dx=0$$

(В последнем допускается $n=m$).

<u>Задача 2</u>. Найти следующие интегралы:

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx;\quad\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx;\quad\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx.$$

<u>Решение</u>:

1) $\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx = 2\pi$ (очевидно).

Для остальных воспользуемся ↗

2) $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx+\cos(n-n)x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=0+\frac{2\pi}{2}=\pi$$

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(0\cdot x)-\cos(2nx)\right]dx = \pi$

Ответ: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\,dx = 2\pi$; $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx = \pi$

Вернемся к задаче нахождения коэффициентов Фурье заданной функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx\right].$$

Воспользуемся задачами 1 и 2 и проинтегрируем левую и правую часть по x (формально, не заботясь о корректности)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = a_0\,\pi$$

Получили: $a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$.

Теперь умножим равенство на $\cos nx$ и проинтегрируем по $[-\pi, \pi]$.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos nx\,dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos nx\,dx\right].$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos nx = a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi \cdot a_n$$

Получаем: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos nx\, dx$, $n=1,2,\dots$

Аналогично: умножаем на $\sin nx$ и $\int_{-\pi}^{\pi}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cdot \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot \sin nx\, dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx\, dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi \cdot b_n$$

Получаем: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx\, dx$, $n=1,2,\dots$

В результате получаем формулы для вычисления коэффициентов Фурье:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos nx\, dx, \quad n=1,2,\dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx\, dx, \quad n=1,2,\dots \end{aligned}}$$

Формулу для a_0 можно объединить с a_n, при $n=0$, т.к. $\cos(0\cdot x) = 1$.

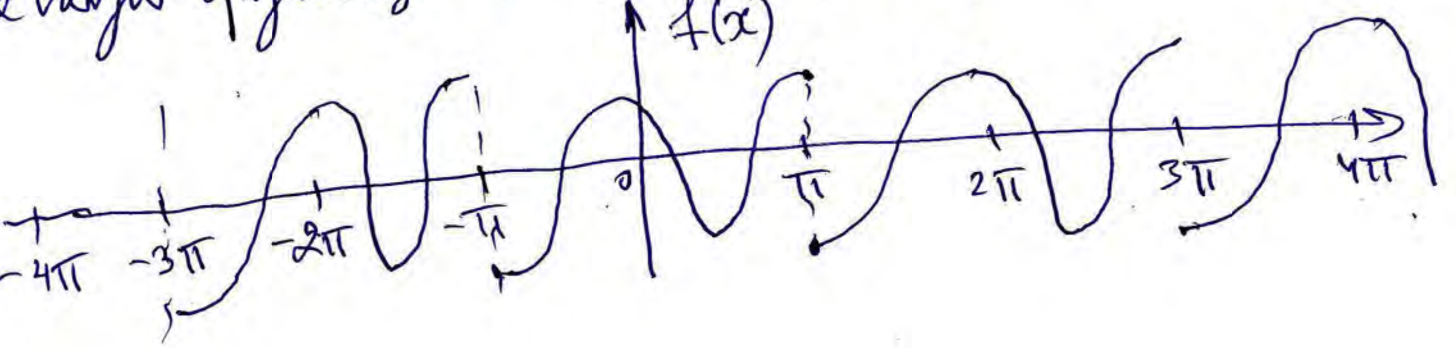
Задача 3. Доказать, что если функция $f(x)$ является а) четной, то все $b_n = 0$, $n=1,2,\ldots$
б) нечетной, то все $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$

Решение: а) если $f(x)$ четная, то под интегралом стоит функция $f(x)\cdot\sin nx$, которая нечетна, т.е. интеграл по $[-\pi,\pi]$ — равен 0.
б) если $f(x)$ нечетная, то под интегралом стоит $f(x)\cdot\cos nx$, которая нечетная, т.е. значит интеграл равен нулю, $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$

Мы пока оставим в стороне вопрос: в каком смысле понимать равенство функции её ряду Фурье, как ряд сходится и т.д. Это важные вопросы, будут разбираться на лекциях и семинарах позже.

Замечание: Функции $\cos nx$ и $\sin nx$ определены при всех $x \in \mathbb{R}$ и являются периодическими функциями с периодом 2π.

Поэтому, ряд Фурье представляет периодическую функцию с периодом 2π



Задача 4. Разложить в ряд Фурье функцию:

$f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Решение: Функция $f(x)$ нечетная, поэтому

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos nx\,dx = 0. \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos x}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} 2\pi \cos n\pi = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Искомый ряд Фурье:

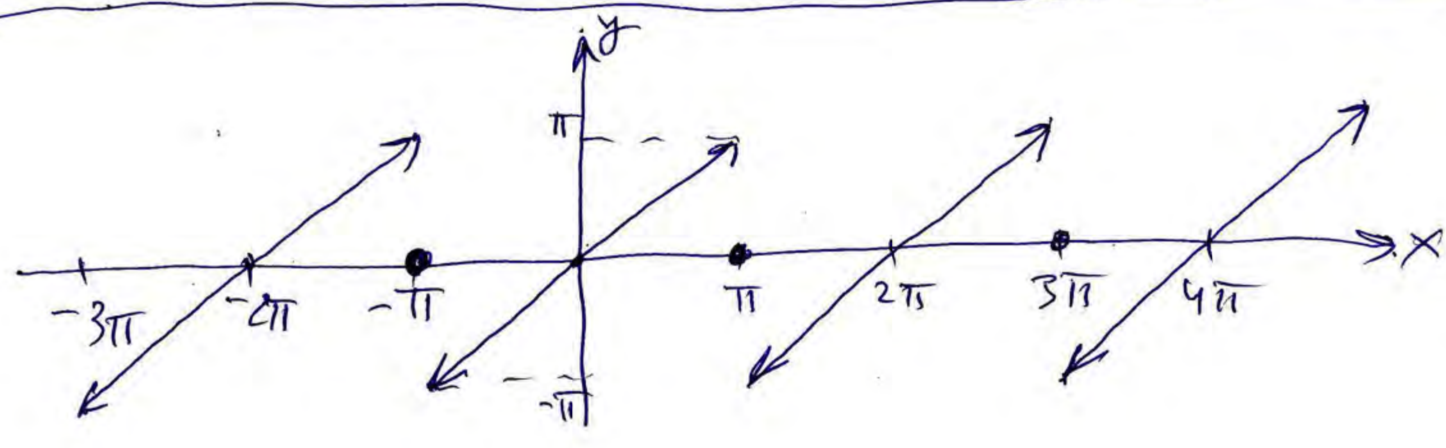
$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

Вопросы: 1) К чему относится ряд Фурье при $x \in \mathbb{R}$, $x \notin [-\pi, \pi]$?

2) Почему сходится этот ряд?

3) К чему он сходится в точках $x = \pm\pi; \pm 3\pi$; $x = 0, \pm 2\pi, \ldots$



Задача 5. Найти коэффициенты Фурье функции: $f(x)=x^2,\ x\in[-\pi,\pi]$.

Решение:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}x^2\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-$$

$$-\frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=0+\left(\frac{2}{\pi n^2}x\cdot\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\cos n\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

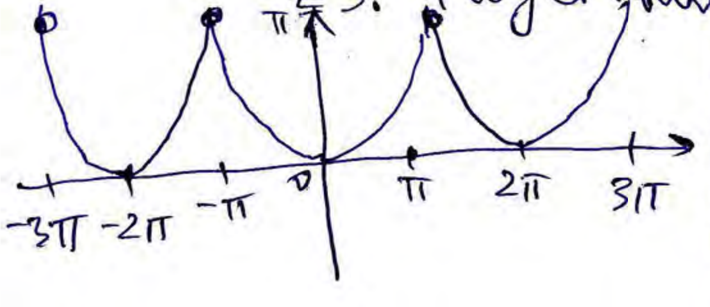
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=0\quad\text{(нечетная ф-я).}$$

Ответ: $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx=$$

$$=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\dots\right]=$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx.$$

Вопросы: 1. Почему сходится этот ряд?
2. К чему сходится при $x\in\mathbb{R}$?
3. Подставить $x=0$; $x=\pi$



$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$$

Задача 6. Найти ряды Фурье следующих функций:

а) $\sin^2 x$; б) $\cos^2 x$; в) $\cos^3 x$; г) $\sin^4 x$

Решение: Не надо вычислять интегралы. Воспользоваться подходящими тригонометрическими формулами.

а) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

т.е. $a_0 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, остальные a_n и все b_n равны 0.

б) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

в) $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) =$

$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\cos x + \cos 3x\right)\right)$

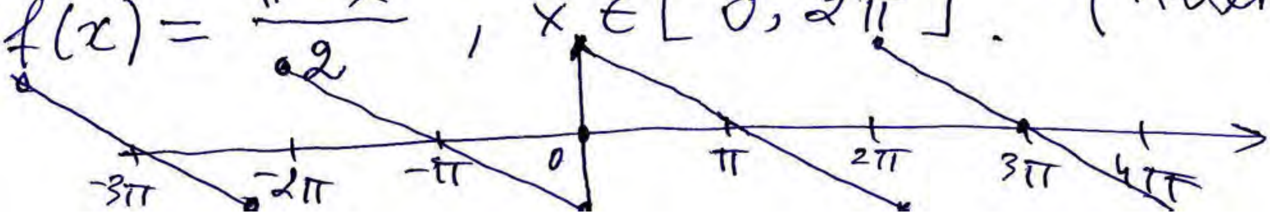
$= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$ $\boxed{\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)}$

г) $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

Задача 7. Найти ряд Фурье функции

$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$. (Нечетная)



<u>Решение:</u> $a_n = 0$, т.к. $f(x)$ нечетная.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

(т.к. подынтегральная функция является периодической с периодом 2π, то интегралы одинаковы по любому отрезку длины 2π.

$$b_n = \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\,d\cos nx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\,\frac{\pi - x}{2}\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx}_{0} = \frac{1}{n}$$

<u>Ответ:</u> $\dfrac{\pi - x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$.

<u>Вопросы:</u> 1) Почему сходится при любом x?

2) Подставить $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

при $x = 0$: $\frac{\pi}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$?! Не сходится к $f(x)$! (точка разрыва).

При $x = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}$

$\sin\frac{\pi n}{2} = 0$ при <u>четных</u> n, <u>а в нечетных $n = 2k+1$ $(-1)^k$</u>

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Получили ряд Лейбница.

Еще раз рассмотрим ряд:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Подставим в него вместо $x \to 2x$ и разделим на 2:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}, \quad x \in [0, \pi]$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad x \in [0, \pi]$$

Вычтем из второго первый ряд:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}. \quad x \in [0, \pi].$$

$\boxed{\text{При } x \in [-\pi, 0]: \text{ Ряд} = -\frac{\pi}{4}}$

К2 Мат. Анализ. Семинар № 2

Норма и нормированные пространства

Напомним определение нормы в линейном пространстве. Пусть L - линейное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

Функция $\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}$ называется нормой, если: (1.) $\|x\| \geq 0$, $\|x\|=0 \Rightarrow x=0$

(2.) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\forall x \in L$

(3.) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$, $\forall x, y \in L$.

Примеры

1) Конечномерное пр-во $\mathbb{R}^n$

а) $\|x\|_e = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$ евклидова норма

б) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ норма городских кварталов (L_1 норма)

в) $\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$ норма Чебышева.

2) Бесконечномерное пр-во. Обобщение $\mathbb{R}^n$

а) $l_1 = \{x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), x_k \in \mathbb{R} : \|x\|_1 < \infty\}$

$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$. Это норма L_1

б) $l_\infty = \{x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \|x\|_\infty < \infty\}$

$\|x\|_\infty = \sup_{k=1,2,\dots} |x_k|$ (Может не достигаться)

Замечание: $l_1 \neq l_\infty$, $l_1 \subset l_\infty$

$\|x\|_1 < \infty \Rightarrow \|x\| < \infty$, но $x_0 = (1, 1, \dots 1, \dots)$

$x_0 \in l_\infty$; $x_0 \notin l_1$.

в) $\ell_2 = \{x = (x_1, x_2, .., x_4, ..) : \|x\|_2 < \infty\}$.

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$ Евклидово пространство.

Опять: $\ell_1 \subset \ell_2$, $\ell_1 \neq \ell_2$

$x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{4}, \dots)$ $\|x\|_1 = \infty$ (гарм. ряд)

$$\|x_0\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \infty$$

$\ell_2 \subset \ell_\infty$, $\ell_2 \neq \ell_\infty$. ℓ_∞ самое широкое.

Евклидовы пространства будем изучать подробно в следующих семинарах.

<u>Основной</u> объект изучения.

2) Пространство непрерывных функций
$C[a, b]$, $f(t)$, $t \in [a, b]$

$$\|f\|_C = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Проверим, что это норма

1) $\|f\|_C \geq 0$ очевидно; 2) $\|f\|_C = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

3) нер-во треугольника:

$$\|f + g\|_C = \max_{t \in [a, b]} |f(t) + g(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t)| + |g(t)| \leq$$

$$\leq \max_{t \in [a, b]} |f(t)| + \max_{t \in [a, b]} |g(t)| = \|f\|_C + \|g\|_C$$

<u>Определение</u>. Линейное пространство с нормой называется <u>нормированным пространством</u>

В нормированном пространстве L можно ввести расстояние (метрику), которая превращает его в метрическое пространство.

$$\rho(x,y) = \|x-y\|_L \ , \quad x,y \in L$$

Проверим, что это расстояние:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, $\|x-y\| \geq 0$, $\rho(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\quad \|x-y\| = \|y-x\|$
$\|-x\| = \|(-1)x\| = \|x\|$

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$
$\|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$
$= \|x-z\| + \|y-z\|$

Задача 1. Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(x,y)$. При каких условиях метрика порождается некоторой нормой? Когда величина $\rho(0,x) = \|x\|_L$ будет нормой?

Ответ: 1) $\rho(0,\lambda x) = |\lambda| \cdot \rho(0,x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

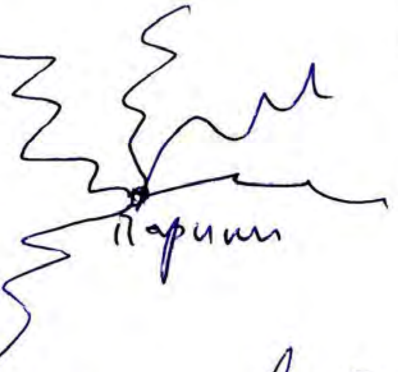
2) $\rho(x,y) = \rho(x+z, y+z)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^2$

Действительно, легко видеть, что такая метрика порождает норму. А любая норма имеет метрику с этими свойствами.

Рассмотрим пример метрики, которая не порождается никакой нормой.

Метрика французских железных дорог

$$\rho_{Ф}(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2, & \text{если } x \text{ и } y \text{ коллинеарны (т.е. } x=\lambda y) \\ \|x\|_2+\|y\|_2, & \text{если } x \text{ и } y \text{ — не колл.} \end{cases}$$

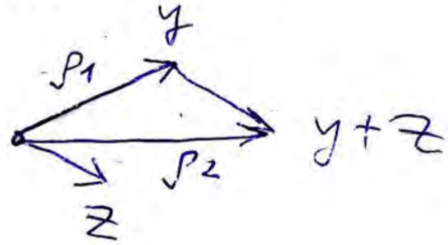


$\rho = \rho_1 + \rho_2$

Какое свойство не выполняется?

1) $\rho(0,\lambda x) = |\lambda|\,\rho(0,x)$ — выполнено

2) $\rho(x+z, y+z) \neq \underbrace{\rho(x,y)}_{\rho_1}$

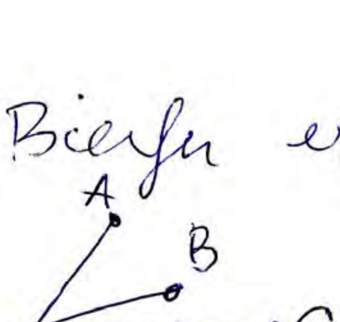


$\underbrace{\rho(z, y+z)}_{\rho_1+\rho_2} \neq \underbrace{\rho(0,y)}_{\rho_1}$.

Метрика британских железных дорог

$$\rho_{Б}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x=y \\ \|x\|_2+\|y\|_2 & \text{если } x\neq y. \end{cases}$$

(Всегда ехать через Лондон!)



Очевидно, 1) выполнено
2) не выполнено.

Обе эти метрики не порождаются нормами

Вспомним понятие полноты метрического пространства.

Метрическое пространство называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность имеет предел

$\{x_n\}$ — фунд. в L, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N$

$$\rho(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|_L < \varepsilon$$

т.е. $\exists x \in L$: $x_n \to x$, т.е. $\|x_n - x\|_L \to 0$

Определение. Полное нормированное пространство называется пространством Банаха или банаховым пространством.

Все приведенные выше нормированные пространства являются полными, т.е., банаховыми пространствами.

а) $\mathbb{R}^n$ — полно, любое конечномерное пространство является полным.

б) $\ell_1 = \{x = (x_1, x_2 \dots x_k, \dots),\ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$

Проверим полноту: $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k=1,2\dots}$

Пусть $\{x^{(n)}\}$ — фундаментальная, т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N\ \forall n, m > N$ $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_1 < \varepsilon$, т.е.

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\forall k$. Тогда $x_k^{(n)}$ — фундаментальная последовательность. Она имеет преде[л]

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^{(0)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, \dots)$.

Утверждаем: $\|x^{(n)} - x^0\|_1 \to 0$

Надо в неравенстве

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$$

перейти к пределу при $m \to \infty$

Получим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| \le \varepsilon$

т.е., $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$ $\|x^{(n)} - x^{(0)}\|_1 \le \varepsilon$

Значит, $x^{(n)} \to x^{(0)}$ в l_1.

Аналогично проверяется полнота пространств l_∞, l_2 и $C[a,b]$.

Бывают ли неполные нормированные пространства? Сколько угодно!

Рассмотрим в пространстве l_2 следующее линейное подпространство l_2^φ, состоящее из финитных последовательностей:

$\{x_n\}$ – финитная, если $\exists N$: $\forall n \ge N$ $a_n = 0$.

Тогда l_2^φ является линейным пространством.

Рассмотрим в l_2^φ обычную евклидову норму: $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$

Получилось нормированное пространство.
Покажем, что оно не полное.
Рассмотрим последовательность $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$
Легко видеть, что она фундаментальна, поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, т.е. $\exists N : \forall n, m > N$

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_2 = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

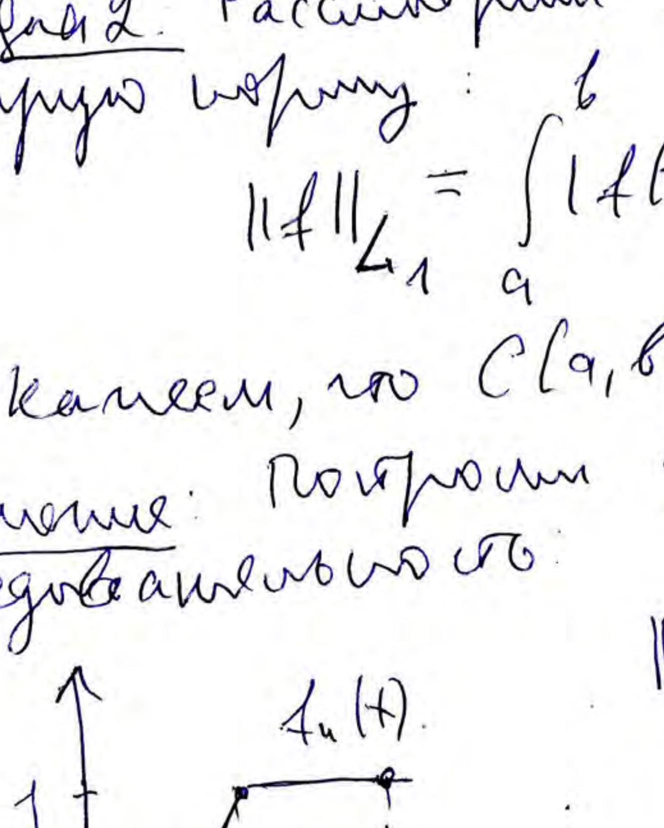
Предел же $x^{(0)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \notin \ell_2^{\varphi}$
Поэтому, ℓ_2^{φ} не полное пространство.

<u>Задача 2.</u> Рассмотрим в пр-во $C[a,b]$ другую норму:

$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Покажем, что $C[a,b]$ с этой нормой <u>не полно</u>.
<u>Решение:</u> Построим фундаментальную последовательность $\in C[0,1]$

$$\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2(n+m)}$$



т.е. фундаментальна.
Однако, она не имеет предела в этом пространстве

предел: $f_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & t \in [0, \frac{1}{2}) \end{cases}$

$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

Разрывная ф-я.

Задача 3. Будут ли следующие пространства полными?

Норма: $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$

а) Все ограниченные непрерывные функции $t \in \mathbb{R}$;

б) Все непрерывные функции, обладающие свойством: $\lim\limits_{|t| \to \infty} |f(t)| = 0$;

в) Все непрерывные финитные функции, т.е. $f(t)$ - финитная, если $\exists M$: $f(t) = 0 \ \forall |t| \geq M$

г) $t \in [a, b]$ Все многочлены вида
$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k.$$

д) $t \in (0, 1)$, Все ограниченные непрерывные функции.

К2 Мат. Анализ. Семинар №3

Нормированные пространства (продолжение)

Пусть L – нормированное пространство. Оно может быть полным и не полным. Примеры полных пространств l_1, l_2, l_∞; $C[a,b]$. Примеры неполных пространств: $C[a,b]$ с нормой L_1.

Пусть M – подпространство полного пространства L. Само M может быть замкнутым или незамкнутым.

Задача 1. Образуют ли следующие множества непрерывных функций замкнутые подпространства в $C[-1,1]$?

а) Монотонные функции;

б) четные функции;

в) многочлены степени $\le n$;

г) любые многочлены вида $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$

д) непрерывно-дифференцируемые функции;

е) функции с условием $f(0)=0$;

ж) функции с условием $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$.

з) функции с условием Липшица: $|f(t_1)-f(t_2)| \le C\cdot|t_1-t_2|$.

Рассмотрим пространство $C^1[a,b]$, состоящее из непрерывно дифференцируемых функций, т.е. $f(t) \in C[a,b]$, $\exists f'(t) \in C[a,b]$.

Норма $\|f\|_{C^1} = \|f\|_C + \|f'\|_C$.

<u>Задача 2.</u> Доказать, что пространство $C^1[a,b]$ является полным.

<u>Решение</u>: это пространство (очевидно) линейное. Докажем его полноту. Пусть f_n - фунд. последовательность в $C^1[a,b]$. Тогда f_n фундаментальна и в $C[a,b]$, которое полно. Следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ в пространстве $C[a,b]$: $\max\limits_{t\in[a,b]} \|f_n(t) - f(t)\| \to 0$.

Рассмотрим последовательность производных: $f_n'(t)$. Она фундаментальна в $C[a,b]$. У нее тоже есть предел $g(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(t)$.

Докажем, что $f \in C^1[a,b]$, причем $f'(t) = g(t)$.

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$f_n(t) = f_n(a) + \int_a^t f_n'(s)\,ds\,, \quad t \text{ - фиксир.}$$

В каждом члене этого равенства можно перейти к пределу при $n \to \infty$

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)\,ds \Rightarrow f'(t) = g(t).$$

Очевидно, что $\|f_n - f\|_{C^1[a,b]} \to 0 \ (n\to\infty)$,

т.е. $C^1[a,b]$ – полное пр-во □

② Пространство $L_1(a,b)$ и его полнота.

Рассмотрим все функции $f(t)$, интегрируемые по Лебегу на отрезке $[a,b]$. Очевидно, они образуют линейное пространство. Введем в нем норму:

$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(t)|\,dt. \qquad (*)$$

(Интеграл по Лебегу по мере Лебега dt)

Определение: Это пространство с такой нормой называется пространством $L_1(a,b)$.

Легко проверить, что $(*)$ – это норма:

1. $\|\alpha\cdot f\|_{L_1} = \int_a^b |\alpha f(t)|dt = |\alpha|\cdot\int_a^b |f(t)|dt = |\alpha|\cdot\|f\|_{L_1}$

2. $\|f_1+f_2\|_{L_1} = \int_a^b |f_1(t)+f_2(t)|\,dt \le \int_a^b |f_1(t)|dt + \int_a^b |f_2(t)|dt = \|f_1\|_{L_1} + \|f_2\|_{L_1}$

3. $\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(t)|dt \ge 0$. Если $\int_a^b |f(t)|dt = 0$, то $f(t)\equiv 0$ почти всюду на $[a,b]$, т.е. $f(t)\equiv 0$ в L_1

(Пространство $L_1[a,b]$ определяется как класс эквивалентности функций, отличающихся лишь на множестве меры 0.

В пространстве $L_1(a,b)$ расстояние определяется формулой
$$\rho(f,g)=\int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt.$$

Аналогично $L_1(a,b)$ определяется пространство $L_1(\mathbb{R})$ с нормой $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt = \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$,

а также пространство $L_1(X,\mu)$, где X — пространство с σ-аддитивной мерой μ.

<u>Задача 3.</u> Пространство $L_1(a,b)$ является полным.

<u>Решение:</u> Пусть $\{f_n\}$ - фунд. послед. в $L_1(a,b)$, т.е., $\|f_n-f_m\|_{L_1}\to 0$ $(n,m\to\infty)$.
Выделим из $\{f_n\}$ быстро сходящуюся подпоследовательность, т.е., такую $\{f_{n_k}\}$, что
$$\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_{L_1}=\int_a^b|f_{n_{k+1}}(t)-f_{n_k}(t)|dt<\frac{1}{2^k}\ \forall k\in\mathbb{N}$$
Это можно сделать для $\forall$ фунд. последовательности.
Рассмотрим следующий ряд
$$|f_{n_1}(t)|+|f_{n_2}(t)-f_{n_1}(t)|+\ldots+|f_{n_{k+1}}(t)-f_{n_k}(t)|+\ldots$$
Он состоит из неотрицательных членов и интегралы от его частичных сумм $S_n(t)$ ограничены:
$$\int_a^b S_n(t)\,dt\le\int_a^b|f_{n_1}(t)|dt+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\le C+1$$

Тогда из теоремы Беппо-Леви вытекает, что этот ряд сходится. Но тогда сходится и следующий ряд, который он мажорирует:

$$f_{n_1}(t) + (f_{n_2}(t) - f_{n_1}(t)) + \ldots + (f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)) + \ldots$$

Он сходится почти всюду к некоторой измеримой функции $f(t) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t)$.

Значит, фунд. послед. $\{f_n(t)\}$ содержит подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

Покажем, что $f_{n_k}(t)$ сходится к $f(t)$ в $L_1(a,b)$. $\forall \varepsilon > 0$ в силу фундаментальности $\{f_n\}$ выполнено нер-во: $\exists N = N(\varepsilon)$ $\forall k, l > N$

$$\int_a^b |f_{n_k}(t) - f_{n_l}(t)|\,dt < \varepsilon .$$

По <u>лемме Фату</u> в этом неравенстве можно перейти к пределу под знаком интеграла при $l \to \infty$ (k – фиксирован). Получим:

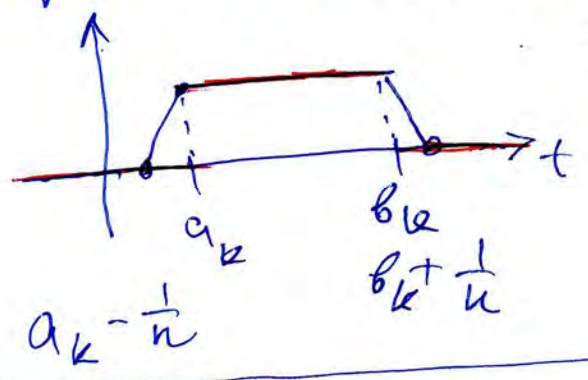
$$\int_a^b |f_{n_k}(t) - f(t)|\,dt \le \varepsilon$$

Откуда следует, что $f(t) \in L_1(a,b)$ и $f_{n_k} \to f$ в пространстве $L_1(a,b)$, но тогда и для всей последовательности $\{f_n\}$ $f_n \to f$ в $L_1(a,b)$. Доказали полноту пространства $L_1(a,b)$. □

<u>Задача 4.</u> Доказать, что непрерывные функции образуют всюду плотное множество в пространстве $L_1(a,b)$.

<u>Решение:</u> В пространстве $L_1(a,b)$ плотно множество всех ступенчатых функций вида $g(t)=\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot \chi_k(t)$, где $\chi_k(t)$ — характеристическая функция некоторого интервала $[a_k,b_k]$, т.е. $\chi_k(t)=\begin{cases}1 & t\in[a_k,b_k]\\ 0 & t\notin[a_k,b_k]\end{cases}$

Осталось проверить, что функции $\chi(t)$ приближаются непрерывными функциями.



Это очевидно можно сделать с помощью кусочно линейной функции.

---

③ <u>Эквивалентность норм.</u>

Пусть в линейном пространстве L заданы две нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$.

<u>Определение.</u> Нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ эквивалентны, если выполнены неравенства: $\exists\, c_1, c_2>0$:

$$c_1\cdot\|x\|_a \le \|x\|_b \le c_2\cdot\|x\|_a \quad \forall x\in L.$$

Задача 5. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ нормы $\|x\|_2$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ эквивалентны.

Решение:

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1} x_k^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^2 = \|x\|_1^2$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \le n \cdot \max_{k=1,\dots,n} |x_k| = n \cdot \|x\|_\infty .$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|x\|_1$$

$$\|x\|_\infty^2 = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \|x\|_2^2$$

Следовательно: $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n \cdot \|x\|_\infty \le n \cdot \|x\|_2$

Задача 6. (На дом) Если L – конечномерное пространство, то в нем любые две нормы эквивалентны.

Задача 7. Рассмотрим пространство L^φ финитных последовательностей $\{x_k\}$, т.е. $\exists N > 0 : \forall k > N \; a_k = 0$.

Рассмотрим в L^φ две нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| , \quad \|x\|_\infty = \sup_{k=1,\dots} |x_k|$$

(сумма конечная).

Доказать, что эти нормы не эквивалентны

Решение: Рассмотрим последовательность

$$x^{(n)} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ раз}}, 0 \dots 0), \quad \|x^{(n)}\|_1 = n \to \infty$$

При этом $\|x^{(n)}\|_\infty = 1$, но $\|x^{(n)}\|_1 \to \infty$.

т.е. неверно $\|x\|_1 \le c \cdot \|x\|_\infty$

Однако, как легко видеть, выполнено:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \quad \forall x \in \ell^1.$$

2к Мат. Анализ Семинар № 4

Евклидовы пространства.

Нормированных и банаховых пространств очень много. $l_1, l_2, l_\infty, C[a,b], L_1(a,b)$. Все эти пространства разные, они не изометричны. В них разные свойства, например, разные топологии.

Евклидовы пространства все изоморфны (с сохранением линейной) структуры

Точнее полные евклидовы пр-ва.

① Скалярное произведение

E - линейное векторное пр-во над $\mathbb{R}$

Определение: Скалярное произведение $\forall x, y \in E \to (x,y) \in \mathbb{R}$

1) $(x,y) = (y,x)$ $\quad \forall x, y \in E$

2) $(x_1+x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ $\quad \forall x_1, x_2, y \in E$

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$, $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E$

4) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Утв. (неравенство Коши-Буняковского)

$$|(x,y)| \leq (x,x)\cdot(y,y) \quad \forall x, y \in E$$

Док-во: $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0$, $x, y \in E$.

$\varphi(\lambda) = \lambda^2 (x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y)$

это квадратичный трехчлен, $\varphi(\lambda) \geq 0$.

тогда его дискриминант $D \le 0$, т.е.

$$\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \le 0.$$

Следовательно, $(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$. □

Задача 1. Неравенство К.Б. есть равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y являются коллинеарными.

Решение: Если один из векторов x, y является нулевым, то это очевидно. $(x,y)=0$, $(x,x)=0$. Если оба x и y ненулевые. Если они коллинеарны, то $\exists \lambda \ne 0$: $y = \lambda x$, тогда

$$(x,y)^2 = (\lambda x, x)^2 = \lambda^2 (x,x)^2 = (x,x)\lambda^2(x,x) =$$
$$= (x,x)(\lambda x, \lambda x) = (x,x)\cdot(y,y)$$ – равенство

если x и y – не коллинеарны, то $\lambda x + y \ne 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ тогда $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) > 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, т.е.

$$D < 0 \Rightarrow (x,y)^2 < (x,x)(y,y).$$

Понятие нормы в евклидовом пр-ве

$$\|x\|_E = \|x\| = \sqrt{(x,x)} \quad \forall x \in E.$$

Задача 2. Проверить, что это норма.

1. $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \ge 0$, $|x| = 0 \Rightarrow (x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x,x)} = |\alpha| \cdot \|x\|$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. Неравенство треугольника:

Из неравенства КБ следует, что

$$|(x,y)| \le \|x\|\cdot\|y\| \quad \forall x,y\in E$$

Проверим нер-во треугольника.

$$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x)+2(x,y)+(y,y) =$$
$$= \|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2 \le \|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2 =$$
$$= \left(\|x\|+\|y\|\right)^2 \Rightarrow \|x+y\|\le\|x\|+\|y\|.$$

Если есть норма, то есть расстояние, или метрика:

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y,x-y)}.$$

Есть топология, есть понятие сходимости.

<u>Задача 3.</u> Проверить, что операция сложения, операция умножения и скалярное произведение все непрерывны относительно введенной топологии.

<u>Решение:</u> Пусть $x_n\to x$, $y_n\to y$ в E.

$\lambda_n\to\lambda$ в $\mathbb{R}$, т.е. $\|x_n-x\|_E\to 0$ $\|x_n-x\|_E\to 0$

$|\lambda_n-\lambda|\to 0$. Проверим, что

$x_n+y_n\to x+y$, $\lambda_n x_n\to\lambda x$, $(x_n,y_n)\to(x,y)$

Это будет означать непрерывность всех этих операций в топологии E.

Действительно, $\|x_n+y_n-x-y\| \le \|x_n-x\|+\|y_n-y\|$

Следовательно, $x_n+y_n \to x+y$ в E

$\|\lambda_n x_n-\lambda x\| = \|\lambda_n(x_n-x)+(\lambda_n-\lambda)x\| \le$

$\le \|\lambda_n\|\cdot\|x_n-x\|+|\lambda_n-\lambda|\,\|x\| \le C\cdot\|x_n-x\|+|\lambda_n-\lambda|\,\|x\|$

поскольку $\{\lambda_n\}$ — ограничена, $|\lambda_n| \le C$.

Следовательно, $\lambda_n x_n \to \lambda x$ в E

Наконец, рассмотрим скалярное произведение

<u>Лемма</u> Если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$.

(Это верно в любом нормированном пространстве).

<u>Док-во</u>: Применим неравенство треугольника:

$\|x\| \le \|x-x_n+x_n\| \le \|x-x_n\|+\|x_n\|$.

Значит $\|x\|-\|x_n\| \le \|x-x_n\|$.

Аналогично $\|x_n\|-\|x\| \le \|x-x_n\|$

т.е. $\big|\,\|x\|-\|x_n\|\,\big| \le \|x-x_n\| \to 0$.

Следовательно, $\|x_n\| \to \|x\|$.

<u>Следствие</u> Если $x_n \to x$, то $\|x_n\|$ — ограничена

Докажем непрерывность скалярного произведения: $x_n \to x$, $y_n \to y$.

Тогда $\|x_n\|$ — ограничена, $\|x_n\| \le C$ $\forall n \in N$

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \le$$
$$\le |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \le \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| +$$
$$+ \|x_n - x\| \cdot \|y\| \le C \cdot \|y_n - y\| + \|y\| \cdot \|x_n - x\| \to 0.$$

Следовательно $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

В вещественном евклидовом пространстве можно так же ввести понятие угла между векторами.

Угол φ между x и y определяется:

$$-1 \le \cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1 \quad (\text{Нер. К.Б})$$

По этой формуле однозначно задается угол $\varphi \in [0, \pi]$

<u>Определение</u> Если $(x, y) = 0$ то векторы x и y называются ортогональными, т.е. $\varphi = 90^\circ$.

Примеры евклидовых пространств.

1) $E = \mathbb{R}^n$, $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

2) $E = \ell_2 = \{ \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \}$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k .$$

Заметим, что если $x, y \in \ell_2$, т.е.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ сходится абсолютно. Действительно, воспользуемся нер-вом К-Б в конечномерном пространстве

$$\sum_{k=n}^{n+m} |x_k \cdot y_k| \le \underbrace{\left(\sum_{k=n}^{n+m} x_k^2\right)^{1/2}}_{\le \varepsilon^{1/2}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=n}^{n+m} y_k^2\right)^{1/2}}_{\le \varepsilon^{1/2}}$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N, \forall m \in \mathbb{N}$ $\sum\limits_{k=n}^{n+m} |x_k y_k| \le \varepsilon$

Легко проверить, что это скалярное произведение. Поэтому, в частности, в l_2 выполнено неравенство К-Б

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2\right).$$

---

3) $E = L_2(a,b) = \{ f(t)$ - измеримая функция, для которой $\int\limits_a^b f(t)^2\,dt < \infty \}$

Скалярное произведение в $L_2(a,b)$

$$(f,g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\,dt.$$

<u>Утверждение:</u> Если $f, g \in L_2(a,b)$, то

1) $f(t) \cdot g(t) \in L_1(a,b)$ и $\int\limits_a^b f(t) g(t)\,dt < \infty$.

2) $f(t)+g(t)\in L_2(a,b)$

Док-во: Вытекает из неравенств

$$|f(t)\cdot g(t)| \le \frac{1}{2}\left(f(t)^2+g(t)^2\right)$$

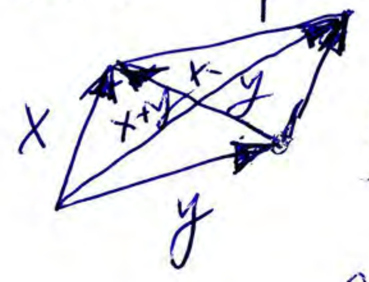
$$|f(t)+g(t)|^2 \le f(t)^2+2|f(t)|\cdot|g(t)|+|g(t)|^2$$

Нер-во К-Б: $\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$

Вопрос: когда нормированное пространство является евклидовым пространством? Точнее, когда норма в пространстве порождена некоторым скалярным произведением.

Необходимое условие: тождество параллелограмма: $\forall x, y \in E$ - евкл. пр-во

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$



Док-во $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2-2(x,y)+\|y\|^2$$

Сложим: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$

Задача 4. Доказать, что пространство l_1 не является евклидовым.

$l_1 = \{\{x_k\} : \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| < \infty\}$

Решение: Найдем 2 вектора, которые не удовлетворяют тождеству пар-мма.

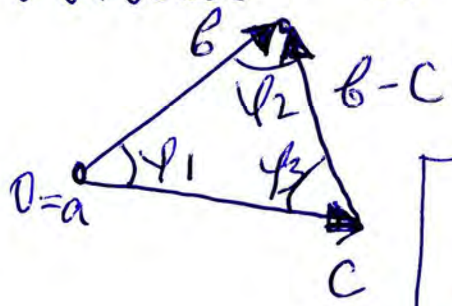
$x=(1,0\dots0)\quad \|x\|=1\quad \|x+y\|=2$

$y=(0,1,0\dots0)\quad \|y\|=1\quad \|x-y\|=2$

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=8,\quad 2\|x\|^2+2\|y\|^2=4\neq 8$

Еще пример не евклидовых простр-ва:
$C[a,b]$, l_∞. (Дом. задание)

Задача 5. В пространстве $E=L_2(0,1)$ найти углы треугольника с вершинами: $a=0$, $b=1$, $c=t$.



$\cos\varphi_1=\dfrac{(b,c)}{\|b\|\cdot\|c\|}=\dfrac{\sqrt3}{2},\ \varphi_1=30^\circ$

$$\boxed{\begin{aligned}&(b,c)=\int_0^1 1\cdot t\,dt=\frac12\\ &\|b\|=1,\quad \|c\|^2=\int_0^1 t^2dt=\frac13,\ \|c\|=\frac{1}{\sqrt3}\end{aligned}}$$

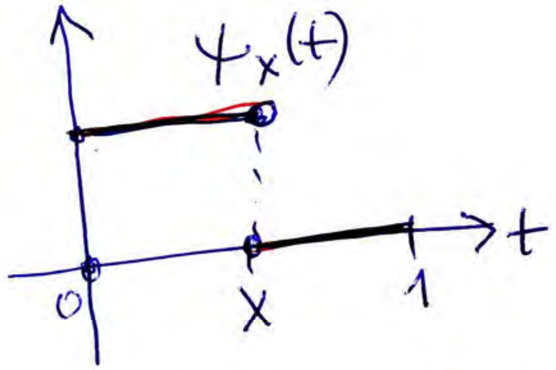
$$\cos\varphi_2=\frac{(-b,c-b)}{\|b\|\cdot\|c-b\|}=\frac{(b,b-c)}{\|b\|\cdot\|c-b\|}=\frac{\sqrt3}{2},\ \varphi_2=30^\circ$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(b,b-c)=\int_0^1(1-t)\,dt=t-\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=1-\frac12=\frac12\\ &\|b-c\|^2=\int_0^1(t-1)^2dt=\frac{(t-1)^3}{3}\Big|_0^1=\frac13\end{aligned}}$$

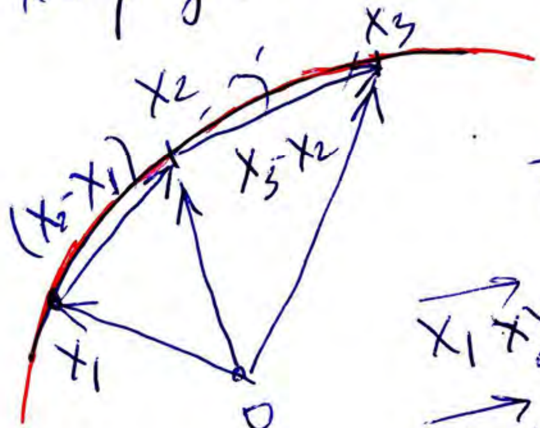
$$\cos\varphi_3=\frac{(-c,b-c)}{\|c\|\cdot\|b-c\|}=\frac{(c,c-b)}{\|c\|\cdot\|c-b\|}=\frac{-\frac16}{\frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{1}{\sqrt3}}=-\frac12$$

$$\boxed{(c,c-b)=\int_0^1 t(t-1)\,dt=\int_0^1(t^2-t)\,dt=\frac13-\frac12=-\frac16}\quad \varphi_3=120^\circ$$

Задача 6. Рассмотрим в $L_2(0,1)$ кривую $f_x(t)$, где $f_x(t) = \chi_{[0,x]}(t)$



Это кривая в евклидовом пр-ве $L_2(0,1)$. Найти угол между хордами $[x_1, x_2]$ и $[x_2, x_3]$



$\overrightarrow{x_1x_2} = x_2 - x_1$, $\overrightarrow{x_2x_3} = x_3 - x_2$

$$\overrightarrow{x_1x_2} = f_{x_2}(t) - f_{x_1}(t) = \chi_{[x_1,x_2]}(t)$$

$$\overrightarrow{x_2x_3} = f_{x_3}(t) - f_{x_2}(t) = \chi_{[x_2,x_3]}.$$

$$(\overrightarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_2x_3}) = \int_0^1 \chi_{[x_1,x_2]}(t)\cdot\chi_{[x_2x_3]}(t)\,dt = 0.$$

Значит: эти хорды ортогональны! Для любых x_1, x_2, x_3.

В $\mathbb{R}^3$ (и в $\mathbb{R}^n$) такой кривой быть не может! А в бесконечномерном пространстве может.

2к. Мат. Анализ. Семинар № 5.

Евклидовы пространства.

На прошлом семинаре было установлено необходимое условие того, что нормированное пространство является гильбертовым пространством. Это тождество параллелограмма:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) \quad (1)$$

Оказывается это условие является так же и достаточным.

Задача 1 (теорема Жордана-фон-Неймана)

Пусть норма $\|\cdot\|$ в нормированном пространстве L удовлетворяет тождеству параллелограмма, тогда эта норма порождается некоторым скалярным произведением.

Решение. Вопрос: как в евклидовом пространстве выразить скалярное произведение (x,y) через норму каких-то векторов, связанных с x и y?

$$(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right) \quad (2)$$

Проверим, что функция (2) удовлетворяет всем аксиомам скалярн. произв.

1. Пусть $x = y$, тогда

$$(x, x) = \frac{1}{4}\left(\|2x\|^2 - \|x-x\|^2\right) = \|x\|^2.$$

Значит, это и будет то ск. произведение, которое определяет нашу норму.

Имеем: $(x, x) \geq 0$ и $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

(это следует из свойства нормы)

2. Проверим симметричность, очевидно,

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = (y, x)$$

3. Проверим аддитивность, т.е.

$$(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x, y, z) = 4\left[(x+y, z) - (x, z) - (y, z)\right],$$

т.е. $\Phi(x, y, z) = \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 -$

$$-\|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \qquad (3)$$

Покажем, что $\Phi(x, y, z) \equiv 0 \quad \forall x, y, z \in L$

Для этого воспользуемся тождеством параллелограмма, которое запишем:

$$\|x+y\pm z\|^2 = 2\|x\pm z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x\pm z-y\|^2.$$

И подставим это в (3)

$$\Phi(x,y,z) = -\|x+z-y\|^2 + \|x-z-y\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \quad (4)$$

Возьмем полусумму тождеств (3) и (4):

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(\|y+z+x\|^2 + \|y+z-x\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\|y-z+x\|^2 + \|y-z-x\|^2\right) - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2$$

Еще раз применим тождество параллелограмма к слагаемым в скобках:

первое равно: $\|y+z\|^2 + \|x\|^2$

второе равно: $\|y-z\|^2 + \|x\|^2$

Получим:

$$\Phi(x,y,z) = \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \left(\|y-z\|^2 + \|x\|^2\right) - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 = 0$$

4. Проверим однородность, т.е.

$$(\lambda x, y) = \lambda(x,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Опять рассмотрим функцию:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x, y) - \lambda(x,y).$$

Тогда: $\varphi(0) = \frac{1}{4}\left(\|y\|^2 - \|y\|^2\right) = 0$

$$\varphi(-1) = \frac{1}{4}\left(\| \quad \|^2 - \|-x-y\|^2 - (-1)\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\right) = 0$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$(nx, y) = (\underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ раз}}, y) = \underbrace{(x,y) + \ldots + (x,y)}_{n \text{ раз}} = n(x,y)$$

Поэтому $\varphi(n) = 0$.

Аналогично: $(-n, x, y) = -n(x,y)$, т.е.

$\varphi(-n) = 0$. Значит, для целых $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда для любых целых p, q, $q \neq 0$

$$\left(\frac{p}{q}x, y\right) = p\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}\, q\left(\frac{1}{q}x, y\right) =$$

$$= \frac{p}{q}(x,y), \text{ т.е. } \varphi(r) = 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Заметим, что функция $\varphi(\lambda)$ является непрерывной (т.к. норма – непрерывна)

В итоге $\varphi(\lambda) \equiv 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, т.е.

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, функция $(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Определение. Если ~~евклидово~~ бесконечномерное пространство является полным, то оно называется гильбертовым пространством

Примеры Гильбертовых пространств

Пример 1. $l_2 = \{\{x_k\}, \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

Пример 2. $L_2(a,b) = \{f(t), \int_a^b f^2(t)\,dt < \infty\}$

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Полноту этого пространства докажем на лекции.

Примеры евклидовых пространств, которые не являются гильбертовыми.

Пример 3. l_2^{φ} – пространство финитных последовательностей, $l_2^{\varphi} = \{\{x_k\}, \exists N: x_k = 0 \ \forall k \geq N\}$

Скалярное пр-е: $(x,y) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$, $N = N(x,y)$

Пополнением служит обычное l_2.

Пример 4. $C_2[a,b]$ – пространство непрерывных функций с скалярным произведением $(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$.

Пространство неполное. Годится пример для пространства с нормой $L_1(a,b)$. Пополнением этого пространства служит пр-во $L_2(a,b)$.

Заниматься задачами, связанными с вычислением расстояний.

Пусть $M \subset H$ — замкнутое множество в гильбертовом пр-ве H.

<u>Определение</u>. Расстояние от точки $u \in H$ до мн-ва M определяется формулой:

$$\operatorname{dist}(u, M) = \inf\{\|u - x\|,\ x \in M\}.$$

Если $x \in M$, то $\operatorname{dist}(u, M) = 0$

Если x — предельная точка M, то $\operatorname{dist}(u, M) = 0$

<u>Задача 2</u>. Если M — замкнутое <u>выпуклое</u> множество, то $\forall u \in H \ \exists v \in M$:

$$\operatorname{dist}(u, M) = \|u - v\|.$$

т.е. расстояние достигается.

<u>Замечание</u>. Если $H = \mathbb{R}^n$ — конечномерное пространство, то $\operatorname{dist}(u, M)$ достигается для любого <u>замкнутого</u> множества M. (не обязательно выпуклого). Почему?

<u>Решение</u>. Рассмотрим так называемую минимизирующую последовательность $\{x_k\} \subset M$; $d_k = \|u - x_k\| \to d = \operatorname{dist}(u, M)$.

Такую последовательность всегда можно построить.

Воспользуемся тождеством парал-мма:

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

Подставим $x=u+x_n$, $y=u-x_m$:

$$\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2+\left\|u-\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(d_n^2+d_m^2\right)$$

где $d_n=\|u-x_n\|$, $d_m=\|u-x_m\|$

Поскольку M выпукло, то, $\frac{x_n+x_m}{2}\in M$ и, следовательно, $\left\|u-\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2\geq d^2$

Поэтому: $\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2+d^2\leq\frac{1}{2}\left(d_n^2+d_m^2\right)$

т.е. $\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\left(d_n^2+d_m^2\right)-d^2\to 0$ $(n,m\to\infty)$.

Следовательно, $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность. Она имеет предел (поскольку пр-во H полное). Обозначим этот предел $\underline{\underline{v}}$: $x_n\to v$, $\|x_n-v\|\to 0$.

Утверждается, что v - искомая точка. Действительно, $x_n\to v$, тогда $\|x_n-u\|\to\|v-u\|$. Но $\|x_n-u\|=d_n\to d$, т.е. $\|v-u\|=d$,

$$\|v-u\|=\operatorname{dist}(u,M).$$

<u>Задача 3.</u> Доказать, что точка $v \in M$, реализующая расстояние от u до M — единственная.

<u>Решение.</u> Пусть найдется две точки, v_1 и v_2:

$$\|v_1 - u\| = \|v_2 - u\|^2 = d(u, M) = d$$

Рассмотрим точку $v = \frac{v_1 + v_2}{2} \in M$ (выпуклость)

Снова воспользуемся тождеством пар-мма

Пусть $x = u - v_1$, $y = u - v_2$, тогда

$$\|u - v_1 + u - v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2(\underbrace{\|u - v_1\|^2}_{= d} + \underbrace{\|u - v_2\|^2}_{= d})$$

т.е. $4\left\|u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 4d$

$$\left\|u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right\| + \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|^2 = d.$$

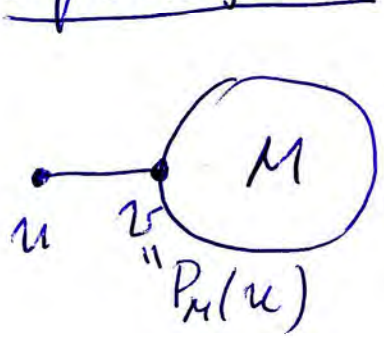
$\frac{v_1 + v_2}{2} \in M \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \geq \\ d \end{array} + \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|^2 \leq d$$

$$\|v_1 - v_2\|^2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

<u>Определение:</u> Если M — замкнутое выпуклое мн-во, то v, реализующая расстояние от u до M называется <u>проекцией</u> т. u на мн-во M

$\boxed{v = P_M(u)}$ — обозначение.



Задача 4. Построить пример невыпуклого множества M (замкнутого) в ℓ_2, для которого расстояние от 0 до M не реализуется.

Решение. $M = \{x_n\}$, где

$$x_n = (0, \dots, \underset{n}{1+\frac{1}{n}}, 0 \dots)$$

Тогда $d(0, x_n) = 1 + \frac{1}{n} \to 1 \ (n \to \infty)$

тогда $d(0, M) = 1$, однако $\forall x \in M \ d(0, x) > 1$

Множество $M = \{x_n\}$, замкнуто, поскольку x_n являются изолированными, т.к.

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{m}\right)^2 \geq 2 \quad m > n$$

M – замкнуто.

Задача 5. Пусть $H = L_2(0, 1)$.

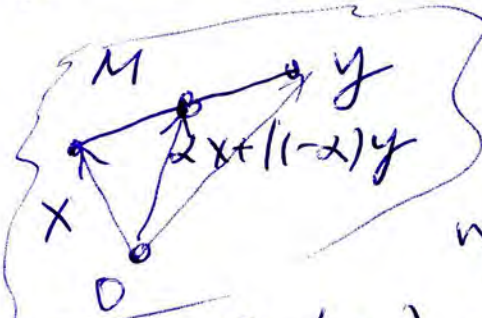
Найти расстояние от точки $x = \cos t$ до множества $M = \{f(t) : \int_0^1 t \cdot f(t)\,dt = 0\}$

(Домашнее задание).

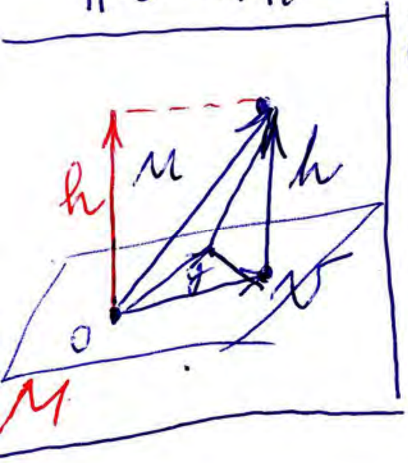
2к Мат. Анализ. Семинар №6

Коэффициенты Фурье векторов в гильбертовом пространстве

Пусть H – гильбертово пр-во, т.е. полное евклидово пр-во бесконечной размерности. Пусть M – замкнутое подпространство H, $M \subseteq H$. Тогда множество M, очевидно, является выпуклым, т.е. если $x, y \in M$, то $\forall \alpha \in [0,1]$ $\alpha x + (1-\alpha) y \in M$.



Пусть $u \in H$, $u \notin M$. Тогда можно построить проекцию т. u на M, $v = P_M(u)$ – единственная ближайшая точка подпространства M до u, т.е. $\|v-u\| = \inf\limits_{y \in M} \|u-y\|$, $\forall y \neq v$ $\|u-y\| > \|u-v\|$. Обозначим: $h = u - v$.



Задача 1. Доказать, что

а) $h \perp M$;

б) $\forall y \in M, y \neq v$, $u - y \not\perp M$

в) $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|h\|^2$.

Решение: а) Покажем, что $\forall y \in M$ $h \perp y$, т.е. $(h, y) = 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = \|u-(v+\lambda y)\|^2$. Заметим, что $v+\lambda y \in M$, т.к. M – линейное подпространство H. Тогда $\varphi(0) = \|u-v\|^2$ и $\varphi(\lambda) > \varphi(0)$ $\forall \lambda \neq 0$, т.к. v – единственная точка, на которой достигается расстояние от u до M. Значит 0 – минимум функции $\varphi(\lambda)$ на $\mathbb{R}$. Тогда $\varphi'(0) = 0$.

$$\varphi(\lambda) = \|u-(v+\lambda y)\|^2 = \|h-\lambda y\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(h,y) + \|h\|^2$$

$$\varphi'(\lambda) = 2\lambda\|y\|^2 - 2(h,y), \quad \varphi'(0) = -2(h,y)$$

Следовательно, $(h,y) = 0$, $h \perp y$ $\forall y \in M$.

б) Мы доказали, что $h = u - v \perp M$. Пусть существует другой вектор $y \in M$, такой, что $h_1 = u - y \perp M$, тогда $v - y \in M$

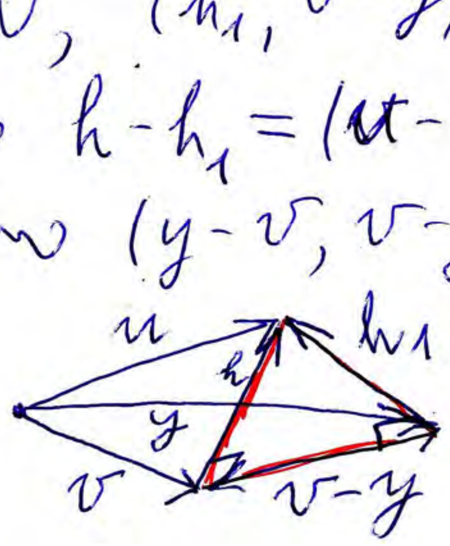
$h \perp v-y$, $h_1 \perp v-y$, т.е.

$(h, v-y) = 0$, $(h_1, v-y) = 0 \Rightarrow (h-h_1, v-y) = 0$

Заметим, что $h - h_1 = (u-v) - (u-y) = y - v$

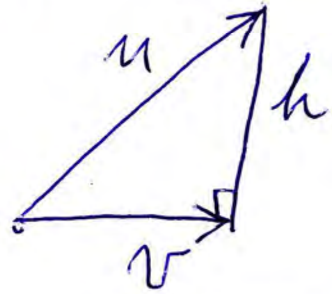
следовательно $(y-v, v-y) = \|y-v\|^2 = 0$

т.е. $y = v$.



в) $u = v + u - v = v + h, \quad v \perp u - v = h$

По теореме Пифагора $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|h\|^2$.



Теорема Пифагора:

$u_1 \perp u_2 \Longleftrightarrow \|u_1 + u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$

Задача 2. Пусть $M = \mathcal{L}(y_1, y_2)$, $y_1 \perp y_2$

Найти $v = P_M(u) \quad \forall u \in H$.

Решение: $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in M$.

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \|u - y\|^2 = \|u - \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2\|^2 =$$

$$= \|\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y^2\| - 2\lambda_1 (u, y_1) - 2\lambda_2 (u, y_2) =$$

$$= \lambda_1^2 \|y_1\|^2 + \lambda_2^2 \|y_2\|^2 - 2\lambda_1 (u, y_1) - 2\lambda_2 (u, y_2)$$

$$\varphi'_{\lambda_1} = 2\lambda_1 \|y_1\|^2 - 2(u, y_1) = 0$$

$$\varphi'_{\lambda_2} = 2\lambda_2 \|y_2\|^2 - 2(u, y_2) = 0.$$

В точке минимума $\varphi'_{\lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, $\varphi'_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$

$$\lambda_1 = \frac{(u, y_1)}{\|y_1\|^2}, \quad \lambda_2 = \frac{(u, y_2)}{\|y_2\|^2}$$

Ответ: $v = \dfrac{(u, y_1)}{\|y_1\|^2} y_1 + \dfrac{(u, y_2)}{\|y_2\|^2} y_2$.

Замечание 1. $v = \frac{(u, y)}{\|y\|^2} \cdot y$ – проекция вектора u на прямую, содержащую вектор y (одномерное подпространство)

Замечание 2. Если $y_1 \perp y_2$, $\|y_1\| = 1$, $\|y_2\| = 1$, то $P_M(u) = (u, y_1) y_1 + (u, y_2) y_2$

Определ. Система векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \dots\}$ называется ортонормированной, если $\forall i, j, i \neq j$ $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, $\|\varphi_i\| = 1$.

Задача 3. Пусть задана ортонормированная система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n \dots\}$. Рассмотрим $M_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. Пусть $u \in H$. Найти $v_n = P_{M_n}(u)$.

Решение. При $n = 1$ $v_1 = (u, \varphi_1) \varphi_1$

При $n = 2$ $v_2 = (u, \varphi_1) \varphi_1 + (u, \varphi_2) \varphi_2$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = (u, \varphi_1) \varphi_1 + (u, \varphi_2) \varphi_2 + \dots + (u, \varphi_n) \cdot \varphi_n.$$

Проверим это. Обозначим $h_n = u - v_n$.
Докажем, что $h_n \perp M_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.
Действительно, $(h_n, \varphi_j) = (u - v_n, \varphi_j) =$

$$= (u, \varphi_j) - (v_n, \varphi_j) = (u, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{n} (u, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_j) =$$

$$= (u, \varphi_j) - (u, \varphi_j)\, \|\varphi_j\|^2 = (u, \varphi_j) - (u, \varphi_j) = 0.$$

Для любого $j = 1, \dots, n$.
Тогда по задаче 1, v_n — это искомая проекция $P_{M_n}(u)$ (т.к. $u - v_n = h_n \perp M_n$).

Ответ: $v_n = \sum_{k=1}^{n} (u, \varphi_k)\, \varphi_k$.

Определение: Числа $c_n = (u, \varphi_n)$ называются коэффициентами Фурье вектора u по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}$.

Задача 4. Пусть $\{c_n\}$ — коэффициенты Фурье вектора u по ортонорм. сист. $\{\varphi_n\}$.
Пусть $h_n = u - v_n$, где $v_n = P_{M_n}(u)$,
$M_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. Тогда

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \|h_n\|^2.$$

Решение: $h_n = u - v_n \perp v_n$. Тогда по теореме Пифагора $\|u\|^2 = \|v_n\|^2 + \|u - v_n\|^2$. Заметим, что $\|v_n\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\|^2$, где $c_k = (u, \varphi_k)$ – коэффициенты Фурье u.

$$\|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|c_k \varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Следовательно,

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \|h_n\|^2$$

Задача 5. (Неравенство Бесселя). Если $\{c_k\}$ – коэффициенты Фурье u, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|u\|^2.$$

Решение. $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \|h_n\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} c_k^2$

При $n \to \infty$ $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|u\|^2$.

Следствие: $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

<u>Задача 6.</u> Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система в гильб. пр-ве H. Тогда все вектора из $\{\varphi_n\}$ линейно независимы.

<u>Решение</u>: Пусть это не так: $\exists\ \alpha_k \neq 0$. Умножим на φ_j

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_n \varphi_n = 0$$

$$\alpha_1 (\varphi_1, \varphi_j) + \ldots + \alpha_j (\varphi_j, \varphi_j) + \ldots + \alpha_n (\varphi_n, \varphi_j) = 0$$

$$\alpha_j (\varphi_j, \varphi_j) = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

<u>Определение</u>. Система $\{\varphi_n\}$ называется полной, если $\mathcal{L}(\{\varphi_n\})$ — линейная оболочка $\{\varphi_n\}$ всюду плотна в H.

т.е. $\forall$ вектора $u \in H$ $\exists\ v_n \in \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$:

$$v_n = \alpha_1^n \varphi_1 + \alpha_2^n \varphi_2 + \ldots + \alpha_n^n \varphi_n$$

$$\|u - v_n\|_H \to 0 \quad (n \to \infty).$$

<u>Задача 7.</u> Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная система в H. Тогда

а) $\forall u \in H$ $\quad \|u - v_n\| \to 0$, где $v_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$,

$c_k = (u, \varphi_k)$ — коэф. Фурье u в $\{\varphi_n\}$

б) <u>Тождество Парсеваля</u>:

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

<u>Решение.</u> Обозначим $h_n = u - v_n$

а) По задаче 4: $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \|h_n\|^2$.

Напомним, что $\|h_n\|^2$ - это расстояние от u до $\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Поэтому, если система $\{\varphi_n\}$ полная, то $\|h_n\|^2 \to 0$.

(Вектор $v_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ - это наилучшее приближение вектора u в $\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$).

<u>Следовательно</u> б) $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$

<u>Определение</u> Полная ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ в гильб. пр-ве H называется его <u>базисом</u>.

<u>Примеры ортонормированных базисов</u>

① $\ell_2 = \{\{x_n\}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$.

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

$$e_1 = (1, 0, \dots 0, \dots)$$
$$e_2 = (0, 1, 0 \dots 0 \dots)$$
$$e_n = (0, 0 \dots \underset{n}{1}\ 0 \dots)$$

Ортонормирован очевидно. Проверим полноту

$\forall$ вектора $x=(x_1,\dots x_n,\dots)$ пусть
$v^{(n)}=(x_1,\dots,x_n,0\dots0)\in\mathcal{L}(e_1,\dots,e_n)$.
тогда $\|x-v^{(n)}\|^2=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x_k^2\to 0$ $(n\to\infty)$.
т.е. $\{e_n\}$ - полная. x_k - коэфф. Фурье.

---

(2) $L_2(-\pi,\pi)$; $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$.

Ортонормированный базис:
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$, $n\in\mathbb{N}$
(Доказывали на 1 семинаре)
Полнота следует из теорем Вейерштрасса. (Докажем позже).

---

(3) $L_2(0,\pi)$

Базисы: а) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt$, $n\in\mathbb{N}$

б) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$; $\cos nt$, $n\in\mathbb{N}$.

Ортонормированность доказывается аналогично $L_2(-\pi,\pi)$. Полнота из теорем Вейерштрасса.

2к.

Мат Анализ. Семинар № 7

Ортогональные дополнения

① Ряды Фурье

На прошлом семинаре представляли вектора гильбертова пр-ва с помощью рядов Фурье. Были ортонормированные системы. Рассмотрим ортогональную систему $\{\psi_n\}$, $(\psi_i, \psi_j) = 0 \ \forall i \neq j$.

По ней можно построить ортонормированную систему $\varphi_n = \dfrac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$

Пусть c_n – коэффициенты Фурье для $u \in H$ относительно $\{\varphi_n\}$:

$$c_n = (u, \varphi_n) = \frac{1}{\|\psi_n\|}(u, \psi_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2} \cdot \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$$

В частности, если система $\{\psi_n\}$ полная, то $\forall u \in H$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n, \text{ где } a_n = \frac{(u, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$$ – коэфф. Фурье по $\{\psi_n\}$

Ряд сходится по норме пр-ва H.

Напишем равенство Парсеваля для системы $\{\psi_n\}$.

– 2 –

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u, \psi_n)^2}{\|\psi_n\|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n\|^2 a_n^2$$

<u>Пример.</u> Рассмотрим в пр-ве $H = L_2(-\pi, \pi)$ ортогональную систему: $1, \cos nt, \sin nt$

$$\|1\|^2 = 2\pi, \quad \|\cos nt\|^2 = \|\sin nt\|^2 = \pi$$

Выберем функцию $f(t) = |t|$, $-\pi \le t \le \pi$

$$a_0 = \frac{1}{\|1\|^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi} \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cdot \cos nt\,dt = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} t\,d\sin nt =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(t \sin nt \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nt\,dt \right) = \frac{2}{\pi n^2} (\cos \pi n - 1) = \begin{cases} 0, & n\text{-чёт} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n\text{-нечёт} \end{cases}$$

<u>Следовательно:</u> <u>Ряд Фурье</u>

$$|t| = \frac{\pi}{2} 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \cos(2n-1)t$$

Подставим $t = 0$ и получим ф-у:

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}$$

Напишем равенство <u>Парсеваля</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = 2\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\| \ \frac{2}{3}\pi^3$$

Получаем: $\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

---

② Ортогональные дополнения

Пусть M – множество гильбертова пространства H. Не обязательно замкнутое, не обязательно линейное подпр-во.

<u>Определение</u>: Ортогональное дополнение к мн-ву M: $M^{\perp} = \{x \in H: (x, y) = 0 \ \forall y \in M\}$

$0 \in M^{\perp}$, $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, $x \perp x \Leftrightarrow x = 0$.

<u>Задача 1</u>. а) Множество $M^{\perp}$ является замкнутым подпространством H;

б) Если M – замкнутое подпространство, то H представляется в виде суммы: $H = M \oplus M^{\perp}$

в) Если M – линейное подпространство H, (не обязательно замкнутое), то

$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$, где $\overline{M}$ – замыкание M

2) Мн-во M – плотно в H $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow : \qquad M^{\perp} = \{0\}$$

<u>Решение</u> а) Если $x_1 \in M^{\perp}$, $x_2 \in M^{\perp}$, то $\forall y \in M$ $(x_1, y) = 0$, $(x_2, y) = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2, y) = 0$ т.е. $x_1 + x_2 \in M^{\perp}$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda x, y) = \lambda (x, y) = 0$

Следовательно, $M^{\perp}$ – подпространство

Если $x_n \to x$ в H и $(x_n, y) = 0$ $\forall y \in M$, тогда $(x_n, y) \to (x, y) \Rightarrow (x, y) = 0 \Rightarrow x \in M^{\perp}$

б) Если M – совпадает с H, то $M^{\perp} = \{0\}$

если $M \neq H$, то $\exists u \notin M$. Рассмотрим её проекцию $P_M u = v \in M$.

Тогда $h = u - v \perp M$ (Задача 1 из прошлого семинара), причем $h \neq 0$.

Следовательно $h \in M^{\perp} \neq \{0\}$

<u>Значит</u>: $\forall u \in H$ $\exists v \in M$, $\exists h \in M^{\perp}$:

$$u = v + h \Rightarrow H = M \oplus M^{\perp},$$

причем v и h однозначно определяются по вектору u.

В самом деле, если есть 2 пары:

$$u = v_1 + h_1 = v_2 + h_2, \quad v_1, v_2 \in M, \; h_1, h_2 \in M^\perp$$

тогда $\underset{\substack{\cap \\ M}}{v_1 - v_2} = \underset{\substack{\cap \\ M^\perp}}{h_2 - h_1}$, но $M \cap M^\perp = \{0\}$

Следовательно, $v_1 = v_2$ и $h_1 = h_2$

в) $\overline{M}$ – замкнутое подпространство в H.
Поэтому, в силу б) $H = \overline{M} \oplus \overline{M}^\perp$
Ясно, что $M^\perp = \overline{M}^\perp$. Значит $H = \overline{M} \oplus M^\perp$
Следовательно $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

г) Если M плотно в H, то $\overline{M} = H$.
Следовательно $\overline{M}^\perp = \{0\}$, но $\overline{M}^\perp = M^\perp$.
поэтому $M^\perp = \{0\}$. Обратно, пусть M не плотно в H, тогда $\exists u \in H$: $u \notin \overline{M}$
пусть $v = P_{\overline{M}}(u)$ – проекция u на $\overline{M}$.
Тогда $h = u - v \in \overline{M}^\perp$, $h \neq 0$, т.к. $u \neq v$
Следовательно $\overline{M}^\perp \neq \{0\}$

Задача 2. В пространстве $L_2(-1,1)$ построить ортогональное дополнение к следующим множествам:
а) $M = \{x \in L_2(-1,1) : \; x(t) = 0 \;\; \forall t \leq 0\}$

б) $M = \{ x \in L_2(-1,1) : x(t) = x(-t) \ \forall t \in (-1,1) \}$

в) $M = \{ x \in L_2(-1,1) : \int_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt = 0 \}$

г) $M = \{ x \in C[-1,1] : x(0) = 0 \}$

д) $M =$ множество всех ступенчатых функций с конечным числом ступенек.

Решение.

а) $M^\perp = \{ y \in L_2(-1,1) \quad y(t) = 0 \ \forall t \geq 0 \}$ (*)

Включение $\supseteq$ очевидно, т.к. $y \perp x \ \forall x \in M$

Проверим обратное включение. $\forall$ функцию $f(t) \in L_2(-1,-1)$ можно представить в виде $f(t) = x(t) + y(t)$, где $x(t) \leq 0$ при $t \leq 0$, $y(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Очевидно, что $x \perp y$, и $x \in M$. Поэтому

Пусть $y \in M^\perp \Rightarrow \int_{-1}^{1} y(t)x(t)\,dt = 0 \ \forall x \in M$.

Возьмем $x(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $x(t) = y(t)$ при $t \geq 0$

Тогда $\int_0^1 y^2(t)\,dt = 0 \Rightarrow y(t) = 0 \ \forall t \geq 0$, т.е. $y(t) \in$ правой части (*).

б) $M^\perp = \{ y \in L_2(-1,1) : y(t) = -y(-t) \}$.
замкн.
(мн-во нечетных ф-ий, под-пр-во)

Опять, включение $\supseteq$ очевидно, т.к. $\forall$ нечетная функция ортогональна $\forall$ четной функции.

Пусть $f(t) \in L_2(-1,1)$ — любая функция. $\exists$ четная функц $x(t)$ и нечетная функ $y(t)$:

$$f(t) = x(t) + y(t).$$

Достаточно взять $x(t) = \dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$

$$y(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

Легко проверить, что $x(t)$ — четная, $y(t)$ — нечетн.

т.е. $L_2(-1,1) = M \oplus \{$нечетные функц$\}$

Но $L_2(-1,1) = M \oplus M^{\perp}$

Следовательно $M^{\perp} = \{$нечетные ф-ии$)$

в) $M^{\perp} = \{\alpha \cdot t,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ — прямая, проходящая через t. Действительно, если $y(t) = \alpha \cdot t$, то $\int_{-1}^{1} y(t)\cdot x(t)\,dt = \alpha \int_{-1}^{1} t\,x(t) = 0 \ \forall x \in M$

Значит, опять, проверим $\supseteq$.

Пусть $y(t) \in M^{\perp}$, т.е. $\int_{-1}^{1} y(t)\,x(t)\,dt = 0 \ \forall x \in M$

Любую функцию $f(t) \in L_2(-1,1)$ найдем число λ: $\int_{-1}^{1} (f(t) - \lambda t)\,t = 0$;

$$\int_{-1}^{1} t f(t)\,dt = \lambda \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2\lambda}{3}$$

т.е. $\lambda = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1} t\cdot f(t)\,dt$, т.е. $\underbrace{f(t)-\lambda t}_{=x(t)} \in M$

т.е. $f(t)=x(t)+\lambda\cdot t$, где $x(t)\in M$

Следовательно $L_2(-1,1)=M\oplus\{$функции вида $\alpha\cdot t\}$

но $L_2(-1,1)=M\oplus M^{\perp}$

Значит $M^{\perp}=\{\alpha t,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$

г) $M^{\perp}=\{0\}$. Надо проверить, что любую функцию из $L_2(-1,1)$ можно приблизить непрерывными функциями с условием $f(0)=0$. Достаточно проверить для ступенчатых функций, и даже для одной ступеньки вида $\chi_{[a,b]}(t)$, где $[a,b]\subset[-1,1]$.

Если $0\notin[a,b]$

Если $0\in[a,b]$

д) $M^{\perp}=\{0\}$, очевидно, что M плотно в $L_2(-1,1)$.

Задача 3. Пусть M — любое множество из H.

$$M^{\perp}=\left(\overline{\mathcal{L}(M)}\right)^{\perp}$$

Решение: Пусть $y \in M^\perp$, тогда $\forall \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\forall x_k \in M$, $k=1,\dots,n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k, y\right) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k (x_k, y) = 0$$

т.е. $y \in (\mathcal{L}(M))^\perp \Rightarrow y \in \overline{\mathcal{L}(M)}^\perp$

Обратное включение очевидно, т.к. $M \subset \overline{\mathcal{L}(M)}$.

Следствие. Система функций $\{\varphi_n\}$ в гильбертовом пространстве образует базис, если $\{\varphi_n\}^\perp = \{0\}$, т.е. если $\exists f \in H$: $(f, \varphi_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, тогда $f = 0$.

Это удобный способ проверить, что система образует базис (ортогональный или неортогональный)

Задача 4. В пространстве $L_2(0,\pi)$ найти расстояние от вектора $x(t) = t^n$ до подпространства $H_0 = \{\ \int_0^\pi y(t)\,dt = 0\}$

Решение: Найдем $H_0^\perp$.

По задаче $H_0^\perp = \{\alpha \cdot 1,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

Доказательство как в задаче 2б.

Тогда $L_2(0,\pi) = M_0 \oplus \{\alpha\cdot 1,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$.
Тогда расстояние от $x(t)=t^n$ до H_0 равно длине проекции $x(t)$ на $\{\alpha\cdot 1\}$
т.е. $d = \dfrac{(t^n, 1)}{\|1\|} = \dfrac{\int_0^\pi t^n dt}{\left(\int_0^\pi 1\, dt\right)^{1/2}} = \dfrac{\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^\pi}{\sqrt{\pi}} =$

$$= \frac{\pi^{n+\frac{1}{2}}}{n+1}.$$

2К Мат. Анализ. Семинар № 8

Ортогонализация в евкл. пр-ве

① Процесс ортогонализации

Пусть E - евклидово или гильбертово пространство.

Задача 1. Дана линейно независимая система $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ векторов из E.

Построить ортогональную систему $\{\varphi_n\}$ такую что $\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \mathcal{L}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Решение: Пусть векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ - ортогональны и $f \notin \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. тогда

вектор $v_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \varphi_k$ - является 4аст. суммой р-ды Фурье

ортогональной проекцией вектора f на линейную оболочку $L_m = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $v_m = P_{L_m}(f)$.

Достаточно проверить, что $(f - v_m, \varphi_j) = 0$ $\forall j = 1, \dots, m$:

$$(f - v_m, \varphi_j) = (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{m} \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} (\varphi_k, \varphi_j) =$$

$$= (f, \varphi_j) - \frac{(f, \varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2} (\varphi_j, \varphi_j) = 0.$$

Значит, $h_m = f - v_m \perp L_m = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$

Процесс ортогонализации: Положим $\varphi_1 = f_1$.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ - уже построены.

Положим $\varphi_{m+1} = f_{m+1} - v_m = f_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \varphi_k$

Тогда $\{\varphi_n\}$ - искомая ортогональная система. Действительно, по построению

1) $\varphi_{m+1} \perp \varphi_j \quad \forall j = 1, \dots, m$.

2) $\forall f \in \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n) \; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \; f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k$.

При этом $\varphi_n \in \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$. Следовательно,

$\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$.

Замечание: 1) Можно построить ортонормированную систему $\{e_n\}$, $e_n = \dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$.

2) Система $\{\varphi_n\}$ однозначно определяется по системе $\{f_n\}$.

Задача 2. Проделать процесс ортогонализации для системы $\{1, t, t^2\}$ в $L_2(-1, 1)$.

Решение: $\varphi_1 = 1$, $\quad (t, 1) = \int\limits_{-1}^{1} t\,dt = 0$.

$$\varphi_2 = t - \frac{(t, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} \varphi_1 = t; \quad \|1\|^2 = 2$$

$$\varphi_3 = t^2 - \frac{(t^2, 1)}{\|1\|^2} 1 - \frac{(t^2, t)}{\|t\|^2} t = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$(t^2, 1) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}; \quad \|t\|^2 = \int t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$(t^2, t) = \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt = 0;$$

Ответ: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = t$, $\varphi_3 = t^2 - \dfrac{1}{3}$

Можно нормировать:

$$\|\varphi_1\|=\sqrt{2},\quad \|\varphi_2\|=\sqrt{\tfrac{2}{3}},\quad \|\varphi_3\|=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}.$$

Задача 3а. В пространстве l_2 найти расстояние от вектора $e_1=(1,0,\dots,0,\dots)$ до подпространства $H_n=\{x\in l_2:\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k=0,\ x_{n+1}=x_{n+2}=\dots=0\}$.

Решение: H_n — конечномерное подпространство, размерности $n-1$. Рассмотрим $\mathcal{L}(e_1,H_n)$ $(e_1\notin H_n)$. Это n-мерное подпространство. Найдем расстояние от e_1 до H_n.

$x\in H_n \iff \sum\limits_{k=1}^{n} x_k=0 \iff x\perp 1\!\!1_n$, где $1\!\!1_n=(1,\dots,1,0\dots)$. Тогда $\operatorname{dist}(e,H_n)=d$, d — длина проекции e_1 на $1\!\!1_n$. Найдем ее.

$$d=\frac{(e_1,1\!\!1_n)}{\|1\!\!1_n\|}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ответ: $\operatorname{dist}(e_1,H_n)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Задача 3б. Пусть H_n, $n\geq 2$, из задачи 3а, $H_n\subseteq H_{n+1}$ (очевидно). Применить процесс ортогонализации к цепочке пространств $, H_2,\dots,H_n,\dots$ и построить ортог. систему $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n,\dots$ так, чтобы $\varphi_n\in H_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Построим исходную систему $\{f_n\}$.

$$f_1 = (1, -1, 0, \dots 0,) \qquad (x_1 + x_2 = 0)$$
$$f_2 = (0, 1, -1, \dots 0) \qquad (x_1 + x_2 + x_3 = 0)$$
$$f_3 = (0, 0, 1, -1, \dots 0) \qquad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0)$$
$$\dots$$
$$f_n = (0, 0 \dots \underset{n}{1}, \underset{n+1}{-1}, 0, \dots) \qquad (x_1 + \dots + x_{n+1} = 0)$$

Ортогонализация:

$$\varphi_1 = f_1 = (1, -1, 0 \dots), \quad \boxed{\|\varphi_1\|^2 = 2, \ (f_2, \varphi_1) = -1}$$

$$\varphi_2 = f_2 - \frac{(f_2, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} \varphi_1 = (0, 1, -1, 0 \dots) + \frac{1}{2}(1, -1, 0, \dots) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0 \dots\right); \quad \boxed{(f_3, \varphi_2) = -1, \ \|\varphi_3\|^2 = \frac{3}{2} \quad (f_3, \varphi_1) = 0}$$

$$\varphi_3 = f_3 - \frac{(f_3, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} \varphi_1 - \frac{(f_3, \varphi_2)}{\|\varphi_2\|^2} \varphi_2 =$$

$$= (0, 0, 1, -1, 0 \dots) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0 \dots\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0 \dots\right)$$

Догадайтесь, что будет φ_4?

$$\varphi_4 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1, 0 \dots\right).$$

Тогда что такое φ_n?

$$\varphi_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n \text{ раз}}, -1, 0 \dots)$$

Проверим, что $\varphi_n \in H_{n+1}$

$$(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n\text{ раз}} - 1 = 0.$$

Проверим, что $\varphi_n \perp \varphi_{n+1}$.

$$(\varphi_n, \varphi_{n+1}) = (\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots \frac{1}{n}}_{n}, -1\, 0 \ldots) \cdot (\underbrace{\frac{1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1}}_{n+1}, -1, 0 \ldots) =$$

$$= n \cdot \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

Проверим, что $\varphi_n \perp \varphi_m$ $\forall m > n$.

$$(\varphi_n, \varphi_m) = (\underbrace{\frac{1}{n}, \cdots \frac{1}{n}}_{n}, -1, 0 \ldots) \cdot (\underbrace{\frac{1}{m} \cdots \frac{1}{m}}_{m}, -1\, 0 \ldots) =$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m} = 0.$$

Построим φ_n

Задача 36. Пусть H – линейное подпр-во в l_2:

$$H = \{(x_1, x_2 \ldots x_n \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\}$$

Доказать, что H – не замкнуто в l_2 и его замыкание совпадает со всем l_2.
H не совпадает с l_2.

Решение: Заметим, что $H_{n+1} \subseteq H$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Пусть $x \in l_2$. Покажем, что $\forall \varepsilon > 0$ точку x можно приблизить т. $y_N \in H_N$ с точностью ε, если $N >> 1$: $\|y_N - x\|_{l_2} < \varepsilon$

Найдём n: $\|x - x^{(n)}\|_{\ell_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, где $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0 \dots)$.

Такое n существует: $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Зафиксируем это n. Пусть $N \geq n$

Найдем расстояние от $x^{(n)}$ до H_N (так же, как это делали для $e_1 = (1, 0 \dots)$ в задаче 3а). Это расстояние равно проекции $x^{(n)}$ на $\mathbb{1}_N = (\underbrace{1, \dots 1}_{N}, 0 \dots 0)$

$$\operatorname{dist}(x^{(n)}, H_N) = \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{N}} < \frac{\varepsilon}{2},$$ если

лишь N достаточно велико.

Тогда $\operatorname{dist}(x, H_N) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Следовательно, замыкание пространства $\bigcup\limits_{N=2}^{\infty} H_N$ совпадает с ℓ_2.

(Отсюда следует незамкнутость H)

<u>Задача 3г</u>. Разложить вектор $e_1=(1,0\dots)$ по ортогональной системе φ_n, $n=1,2,\dots$ из задачи 3б.

<u>Решение</u>: $\varphi_n = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n}}_{n \text{ раз}}, -1, 0\dots)$

$$(e_1, \varphi_n) = \frac{1}{n}; \quad \|\varphi_n\|^2 = n\cdot\frac{1}{n^2}+1=\frac{n+1}{n}$$

$$e_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e_1,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}\cdot\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot n}{n\cdot(n+1)}\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{=a_n}\cdot\varphi_n$$

Аналогично разложим e_2

$$(e_2,\varphi_1)=-1, \quad (e_2,\varphi_n)=\frac{1}{n}, \quad n=2,\dots$$

$$e_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e_1,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n=-\frac{1}{2}\varphi_1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\varphi_n$$

Далее можно выписать разложение для e_n.

Выпишем равенство Парсеваля для e_1 и φ_n:

$$\|e_1\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n\|^2\cdot a_n^2, \quad a_n=\frac{1}{n+1}, \quad \|\varphi_n\|^2=\frac{n+1}{n}$$

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Легко проверить, что это тождество, найдя сумму ряда справа

② Общий вид линейного функционала в гильбертовом пр-ве

Пусть $E = \mathbb{R}^n$ конечномерное пр-во

Пусть f - линейный функционал на $\mathbb{R}^n$, т. е. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

<u>Задача 4</u> $\exists!\, y \in H: \quad f(x) = (x, y)$.

<u>Решение</u>. Пусть $e_1, e_2 \ldots e_n$ - канонический базис в $\mathbb{R}^n$, тогда $\forall x = (x_1, x_2 \ldots x_n)$

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k).$$

Обозначим $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y_k = f(e_k)$.

тогда $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = (x, y)$.

<u>Единственность</u>. Пусть $\exists$ два вектора y_1, y_2

$$f(x) = (x, y_1) = (x, y_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Тогда $(x, y_1 - y_2) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, Возьмем $x = y_1 - y_2$

тогда $(y_1 - y_2, y_1 - y_2) = \|y_1 - y_2\|^2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$

Аналогичное утверждение верно в любом гильбертовом пространстве с одним важным дополнением: функционал должен быть <u>непрерывным</u>:

Пусть $f: H \to \mathbb{R}$, где H - гильбертово пр-во.

f - линейный, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ $\forall x, y \in H$

$f(x)$ – непрерывный, если $x_n \to x$ в H, то $f(x_n) \to f(x)$.

<u>Пример</u> (основной) Пусть $v \in H$

$f(x) = (v, x)$.

Очевидно, это линейный функционал.

Он непрерывен:

$$|f(x) - f(y)| = |(v, x) - (v, y)| \le \|v\| \cdot \|x - y\|$$

<u>Задача 5.</u> Пусть $f(x)$ – линейный непрерывный функционал на гильб. пр-ве H. Тогда $\exists!\, v \in H$ $\quad f(x) = (v, x)$.

<u>Решение.</u> Пусть $f(x)$ – некоторый линейный непрерывный функционал. Найдем для него вектор $v \in H$.

Рассмотрим его <u>ядро</u>

$K = \mathrm{Ker}(f) = \{x \in H : f(x) = 0\}$

K – замкнутое подпространство.

Если $f(x) = 0$, $f(y) = 0 \Rightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$

т.е. K – подпространство. Проверим замкнутость.

Пусть $x_n \in K$, $x_n \to x$ в H

Тогда $f(x_n) = 0$. По непрерывности.

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \Rightarrow x \in K$.

Если $f(x) \equiv 0 \Rightarrow v = 0$ очевидно.

Пусть $f(x) \not\equiv 0$, т.е. $\exists z \in H: f(z) \neq 0$.
K - замкнутое подпространство, $z \notin K$.
тогда $\exists! \, y \in K$ - ближайший к т. z,
причем $h = z - y \perp K$, $h \in K^{\perp}$
т.е. $K^{\perp} \neq \{0\}$. Покажем, что $\dim K^{\perp} = 1$

Пусть $h_1, h_2 \in K^{\perp}$. Рассмотрим вектор

$$h = f(h_1)\, h_2 - f(h_2) \cdot h_1 :$$

$$f(h) = f(h_1) \cdot f(h_2) - f(h_2) \cdot f(h_1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow h \in K$, но $h \in K^{\perp}$ ($K^{\perp}$ - линейное)
т.е. $h \in K \cap K^{\perp} \Rightarrow h = 0$. Значит,
h_1 и h_2 - коллинеарны $\Rightarrow \dim K^{\perp} = 1$.

Пусть $h \in K^{\perp}$, $\|h\| = 1$. $a = f(h)$.
Любой вектор $x \in H$ представим в виде
$$x = y + \lambda h, \text{ где } y \in K, \lambda \in \mathbb{R},$$
причем единственным образом. Тогда

$$f(x) = f(y) + \lambda f(h) = \lambda \cdot a$$

$$(x, ah) = (y + \lambda h, ah) = \lambda a \|h\|^2 = \lambda a$$

т.е. $\forall x \in H \quad f(x) = (x, a h) = (x, v)$, $\boxed{v = a \cdot h}$

2к Мат. Анализ **Семинар № 9**

Разбор самостоятельной работы

Зад 1 (I) $a = \{a_n\}$, $a_n > 0$. Рассмотрим

$$l_{1,a} = \{x = \{x_n\} : \|x\|_{1,a} = \sum a_n |x_n| < \infty\}$$

а) Доказать, что $l_{1,a}$ - банахово пр-во.

б) При каких условиях $\|\cdot\|_{1,a} \sim \|\cdot\|_1$.

Решение а) $l_{1,a}$ - нормированное пр-во.

Проверить аксиомы: положительность, однородность, нер-во тр-ка.

$l_{1,a}$ - банахово пр-во. Проверить полноту

$x^{(n)}$ - фунд последовательность, т.е

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n, m \geq N\ \|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{1,a} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$

Тогда $\{x_k^{(n)}\}$ - фундаментальная $\forall k \in \mathbb{N}$.

т.е $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$. Покажем, что $x^{(n)} \to x$, т.е.

$\|x^{(n)} - x\|_{1,a} \to 0\ (n \to \infty)$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n, m \geq N\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$

и $\forall M > 0\ \sum\limits_{k=1}^{M} a_k |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$

Зафиксируем M и перейдем к пределу в этом неравенстве поточечно при $m \to \infty$:

$\sum\limits_{k=1}^{M} a_k |x_k^{(n)} - x_k| \leq \varepsilon$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left|x_k^{(n)} - x_k\right| \le \varepsilon .$$

т.е. $\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \forall n>N \quad \|x^{(n)}-x\|_{1,a} \le \varepsilon$.

Значит $x^{(n)} \to x$ в $l_{1,a}$ и это пр-во является полным.

В вар II $\quad l_{\infty,a} = \{x=\{x_n\} \quad \|x\|_{\infty,a} = \sup\limits_n a_n|x_n| < \infty\}$

Доказательство аналогичное.

б) Необходимое и достаточное условие эквивалентности норм $l_{1,a}$ и l_1:

$\exists\, m, M>0 \qquad m\|x\|_1 \le \|x\|_{1,a} \le M\cdot\|x\|_1 \quad \forall x\in l_{1,a}$

<u>Утв</u> Нормы эквивалентны $\Leftrightarrow \exists\, \alpha,\beta>0$:

$$\alpha \le a_n \le \beta \quad \forall n\in \mathbb{N}.$$

<u>Док-во</u> Достаточность очевидна $m=\alpha$, $M=\beta$

$$\alpha\|x\|_1 = \alpha\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k|x_k|}_{\|x\|_{1,a}} \le \beta\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| = \beta\cdot\|x\|_1$$

Проверим необходимость: если <u>не отделены от нуля</u>, то $\exists\, n_k \quad a_{n_k}\to 0$.

Рассмотрим $x^{(k)} = \left(0, \dots \frac{1}{a_{n_k}}, \dots 0\right)$

Тогда $\|x^{(k)}\|_{1,a} = 1$, $\quad \|x^{(k)}\|_1 = \frac{1}{a_{n_k}} \to \infty$

Поэтому нельзя иметь $\quad m\cdot\|x\|_1 \le \|x\|_{1,a}$

если $\{a_n\}$ не ограничена сверху, т.е. $\exists\, a_{n_k} \to \infty$.

Рассмотрим $x^{(k)} = (0, \dots \underset{n_k}{1}, 0 \dots)$

тогда $\|x^{(k)}\|_{1,a} = a_{n_k} \to \infty$ $\quad \|x^{(k)}\|_1 = 1$.

Поэтому нет: $\|x\|_{1,a} \le M \cdot \|x\|_1$

<u>Зад 2</u> (II). $X_0 = \{x \in X : x(0) = x(1)\}$

а) $X = \underset{\max}{C[0,1]}$; б) $X = C[0,1]$ с нормой $L_1(0,1)$

Является ли X_0 – замкнутым подпространством

<u>Решение</u>: а) Является, т.к. если $\{x^{(n)}\} \in X_0$, $x^{(n)} \to x$ в $C[0,1]$, т.е. $\max\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x(t)| \to 0$

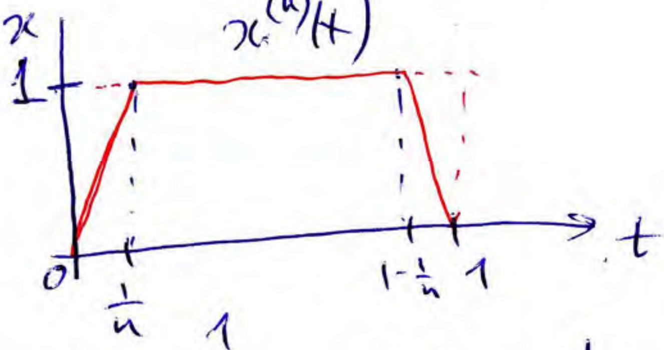
тогда $|x^{(n)}(0) - x(0)| \to 0$, $|x^{(n)}(1) - x(1)| \to 0$

причем $x^{(n)}(0) = x^{(n)}(1) = 0 \Rightarrow x(0) = x(1) = 0$,

т.е. $x \in X_0$. Значит, X_0 – замкнуто

б) Не является.

Пример: $x^{(n)}(t)$



тогда $x^{(n)} \to \mathbb{1}$ в $L_1(0,1)$ $\quad \int\limits_0^1 |x^{(n)}(t) - 1|\,dt = \frac{1}{n}$

но $\mathbb{1} \notin X_0$

Зад 2. (I) $\ell_\infty = \{x = \{x_k\},\ \|x\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\}$

$L = \{x \in \ell_\infty : \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n\}$.

Доказать, что L — замкнутое под-пр-во в ℓ_∞.

Решение. L — линейное под-пр-во — очевидно.

Пусть $x^{(n)} \in L$, $\|x^{(n)} - x\|_\infty \to 0$, $x \in \ell_\infty$.

Тогда $x^{(n)}$ — фундаментальная в ℓ_∞.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\quad |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (*)

Рассмотрим число $\ell^{(n)} = \lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(n)}$.

Этот предел существует $\forall n$, т.к. $x^{(n)} \in L$.

Тогда в неравенстве (*) можем перейти к пределу при $k \to \infty$, т.е.

$$|\ell^{(n)} - \ell^{(m)}| \le \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Значит $\ell^{(n)}$ — фундаментальная в $\mathbb{R}$, т.е.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \ell^{(n)} = \ell$.

Покажем, что $x_k \to \ell$ $(k \to \infty)$, т.е. $x \in L$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N$

$$\|x^{(n)} - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},\quad |\ell^{(n)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{3},\ \text{т.е.}$$

$$|x_k^{(n)} - x_k| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Зафиксируем такое n.

Поскольку $x_k^{(n)} \to e^{(n)}$ $(k \to \infty)$.
Найдется K: $\forall k \geq K$ $|x_k^{(n)} - e^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}$
Рассмотрим неравенство

$$|x_k - e| \leq \underbrace{|x_k - x_k^{(n)}|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|x_k^{(n)} - e^{(n)}|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|e^{(n)} - e|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$$

Поэтому $|x_k - e| \leq \varepsilon$ $\forall k \geq K$.
Значит $x_k \to e$ $\Rightarrow$ $x \in L$.

Зад 3. (I) Пусть x_n, y_n в евкл. пр-ве H причем $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ и $(x_n, y_n) \to 1$.
Доказать, что $\|x_n - y_n\| \to 0$

Решение

$$0 \leq \|x_n - y_n\|^2 = \|x_n\|^2 - 2(x_n, y_n) + \|y_n\|^2 \leq 2\underbrace{(1 - (x_n, y_n))}_{\to 0}$$

По лемме о 2х милиционерах, $\|x_n - y_n\|^2 \to 0$

Зада 3 (II) Доказать, что любое евклидово пр-во является строго выпуклым, т.е.
$\|x\| = \|y\|$, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ $\Leftrightarrow$ $x = y$.
$x, y \neq 0$
(Сферы не содержат отрезков)

Решение $\Leftarrow$ очевидно, т.к. $\|x+x\| = 2\|x\|$

$\Rightarrow$ Пусть $\|x\| = \|y\|$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

Воспользуемся тождеством параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$\left(\|x\|+\|y\|\right)^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$\left(2\|x\|\right)^2 + \|x-y\|^2 = 4\|x\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = 0 \Rightarrow x = y.$$

Ортогонализация $\{f_n\}$ - лин. независ.,

$\{\varphi_n\}$ - ортогональна $\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$.

Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ - уже построены, то

$$\varphi_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f_{n+1}, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k$$

Задача 4. (I) Ортогонализовать $\{1, t, t^2\}$ в $L_2(0,1)$

Решение: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = t - \dfrac{(t,1)}{\|1\|^2} \cdot 1 = t - \dfrac{1}{2}$

$$(t,1) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}, \quad (1,1) = 1$$

$$\varphi_3 = t^2 - \frac{(t^2, 1)}{\|1\|^2} \cdot 1 - \frac{(t^2, t-\frac{1}{2})}{\|t-1/2\|^2}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$(t^2, 1) = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}, \quad (t^2, t-\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 t^2\left(t-\tfrac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{12}$$

$$\|t-1/2\|^2 = \int_0^1 (t-1/2)^2\,dt = \frac{1}{12}$$

$$\varphi_3 = t^2 - \frac{1}{3}\cdot 1 - \left(t - \frac{1}{2}\right) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

Ответ $\left\{1,\ t - \frac{1}{2},\ t^2 - t + \frac{1}{6}\right\}$.

$$\left\|t^2 - t + \frac{1}{6}\right\|^2 = \frac{1}{180}$$

Зад 4. (II) $\{1, t, t^3\}$

$$\varphi_1 = 1,\quad \varphi_2 = t - \frac{1}{2}$$

$$\varphi_3 = t^3 - \frac{(t^3, 1)}{\|1\|^2}\,1 - \frac{(t^3, t - \frac{1}{2})}{\|t - \frac{1}{2}\|^2}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$(t^3, 1) = \int_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{4};\quad \left(t^3, t - \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^3\left(t - \frac{1}{2}\right)dt = \frac{3}{40}$$

$$\varphi_3 = t^3 - \frac{1}{4} - \frac{3\cdot 12}{40\cdot 1}\left(t - \frac{1}{2}\right) = t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}$$

Ответ: $\left\{1,\ t - \frac{1}{2},\ t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right\}$.

$$\left\|t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right\|^2 = \frac{1}{75}.$$

Задача 5. $\{x_n\}$ - ортогональная в H.
Следующие св-ва эквивалентны:
i) последовательность $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ограничена;
ii) ряд $\sum_{k=1}^{n} x_k$ сходится в H;
iii) числовой ряд $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$ сходится.

Решение: Необходимо воспользоваться теоремой Пифагора: если $x_1, \dots, x_n$ - ортогональны в H, то

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

В частности $\|y_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$

$$\|y_n - y_m\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|^2, \quad m > n$$

Поэтому, если $\{y_n\}$ - ограничена, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ - сходится $\Rightarrow$ $\{y_n\}$ - фундаментальная, т.е. $\sum_{k=1}^{n} x_k$ - сходится.

А если $\sum_{k=1}^{n} x_k = y_n$ - сходится, то $\{y_n\}$ - ограничена.

Задача 6. Найти расстояние в $L_2(0, \pi)$ от вектора $a(t)$ до подпространства

$$H_0 = \{ x \in L_2(0, \pi) : \int_0^{\pi} b(t)\, x(t)\, dt \}.$$

I) $a(t) = \sin t, \quad b(t) = t$

II) $a(t) = t, \quad b(t) = \sin t.$

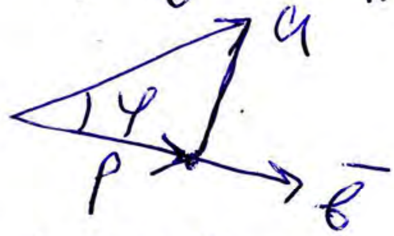
Решение: Воспользуемся тем, что

$$H_0^\perp = \{\lambda \cdot b(t),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

В самом деле $x \in H_0 \Leftrightarrow (b, x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \perp b$. , т.е. $\{b(t)\}^\perp = H_0$.

Тогда $H_0^\perp = \{\{b(t)\}^\perp\}^\perp = \{b(t)\}$.

Следовательно, $\operatorname{dist}(a, H_0) = \| P_b(a) \| =$
$$= \frac{|(a, b)|}{\|b\|}$$



$$p = |a \cdot \cos\varphi| = \frac{|a||b|\cos\varphi}{|b|} = \frac{|(a,b)|}{\|b\|}$$

$$(a, b) = \int_0^\pi t \sin t \, dt = \pi$$

I) $b = t$, $\quad \|b\|^2 = \int_0^\pi t^2 dt = \frac{\pi^3}{3}$

$$\operatorname{dist}(a, H_0) = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

II) $b = \sin t$, $\|b\|^2 = \int_0^\pi \sin^2 t \, dt = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{dist}(a, H_0) = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

Задача 7. Доказать ортогональность и полноту системы: I) $\left\{\sin\frac{2k-1}{2}t\right\}$, II) $\left\{\cos\frac{2k-1}{2}t\right\}$ в $L_2(0,\pi)$.

Решение. 1. Ортогональность. $k\neq n$

I) $$\int_0^{\pi}\sin\frac{2k-1}{2}\cdot\sin\frac{2n-1}{2}\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(k-n)t-\cos(k+n+1)\right]dt=0$$

II) $$\int_0^{\pi}\cos\frac{2k-1}{2}t\cdot\cos\frac{2n-1}{2}t\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(k+n+1)t+\cos(k-n)t\right]dt=0.$$

2. Полнота. Проверим критерий полноты:

$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – полная $\Longleftrightarrow$ $\left(f,\varphi_n\right)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow f\equiv 0$

Пусть $f\in L_2(0,\pi)$, $\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin\frac{(2k-1)t}{2}\,dt=0$.

Тогда $\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\cdot\sin\frac{2k+1}{2}\,dt=0\quad\forall k\in\mathbb{N}$

Сложим: $$\int_0^{\pi}f(t)\left(\sin\frac{2k+1}{2}t+\sin\frac{2k-1}{2}t\right)dt=$$
$$=2\int_0^{\pi}f(t)\cdot\cos\frac{t}{2}\cdot\sin kt\,dt=0\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Однако, $\{\sin kt\}$ – полна на $L_2(0,\pi)$.

Следовательно, $f(t)\cdot\cos\frac{t}{2}\equiv 0$ на $[0,\pi]$

$\Rightarrow f(t)\equiv 0$ на $[0,\pi] \Rightarrow \{\sin\frac{2k-1}{2}t$ – полн$\}$

Аналогично для $\{\cos\frac{2k-1}{2}t\}$:

Если $f\in L_2(0,\pi)$, $\int\limits_0^\pi f(t)\cos\frac{2k-1}{2}t\,dt=0$

$\int\limits_0^\pi f(t)\cos\frac{2k+1}{2}t\,dt=0$. Теперь вычтем:

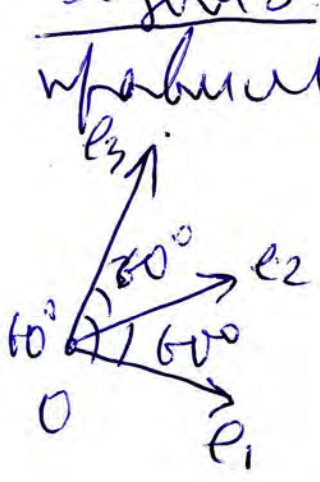
$$\int\limits_0^\pi f(t)\left(\cos\frac{2k+1}{2}t-\cos\frac{2k-1}{2}t\right)dt=$$

$$=2(-)\int\limits_0^\pi f(t)\left(\sin kt\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt=0\quad\forall k\in\mathbb{N}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Значит, $f(t)\cdot\sin\frac{t}{2}\equiv 0 \Rightarrow f(t)\equiv 0$.

Задача 8. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ в $\mathbb{R}^3$ образуют правильный тетраэдр, т.е. $(e_i, e_j)=\frac{1}{2}$



а) Сделать ортогонализацию

б) обобщить на $\mathbb{R}^4$.

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f_{n+1}, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k$$

<u>Решение</u> $f_n = e_n$

$$\varphi_1 = e_1, \quad \varphi_2 = e_2 - \frac{(e_2, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1 = e_2 - \frac{1}{2} e_1$$

$$\varphi_3 = e_3 - \frac{(e_3, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1 - \frac{(e_3, \varphi_2)}{\|\varphi_2\|^2}\cdot\varphi_2$$

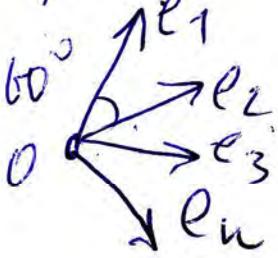
$$(e_3, \varphi_1) = \frac{1}{2}, \quad (e_3, \varphi_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\|\varphi_2\|^2 = \|e_2 - \tfrac{1}{2} e_1\|^2 = \|e_1\|^2 - (e_2, e_1) + \frac{1}{4}\|e_1\|^2 = \\ = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\varphi_3 = e_3 - \frac{1}{2} e_1 - \frac{1/4}{3/4}\left(e_2 - \frac{1}{2} e_1\right) = \\ = e_3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) e_1 - \frac{1}{3} e_2 = e_3 - \frac{1}{3}(e_1 + e_2)$$

<u>Ответ</u> $\{ e_1, \; e_2 - \frac{1}{2} e_2, \; e_3 - \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \}$.

б) в $\mathbb{R}^n$ $\quad (e_i, e_j) = \frac{1}{2}, \; \|e_i\| = 1$
$\quad i \neq j$



Угадать ответ: $\varphi_4 = e_4 - \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_3)$

и так далее

$$\varphi_n = e_n - \frac{1}{n}(e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1}).$$

Решение: Очевидно, что $\mathcal{L}(e_1, .., e_n) = \mathcal{L}(\varphi_1 .. \varphi_n)$

Проверить, что $\varphi_k \perp \varphi_j \quad \forall j < k$.

Достаточно проверить, что $\varphi_k \perp e_j$:

$$(\varphi_k, e_j) = \left(e_k - \frac{1}{k}(e_1 + e_2 + .. + e_{k-1}), e_j\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{k}\Big(\underbrace{\frac{k-2}{2}}_{\neq j} + \underbrace{1}_{j}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Найдем норму φ_k.

$$\varphi_k = e_k - \frac{1}{k}(e_1 + e_2 + .. + e_{k-1})$$

φ_k - ортогональн $\mathcal{L}(\varphi_1, .. , \varphi_{k-1}) = \mathcal{L}(e_1, .. e_{k-1})$.

т.е. $\varphi_k \perp (e_1 + e_2 + .. + e_{k-1})$. Поэтому

по теореме Пифагора

$$\|\varphi_k\|^2 = 1 - \left\|\frac{1}{k}(e_1 + .. + e_{k-1})\right\|^2$$

$$\|e_1 + .. + e_{k-1}\|^2 = \sum_{j=1}^{k-1} \|e_j\|^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le k-1} (e_i, e_j) = \qquad \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

$$= k - 1 + 2 \sum_{i<j} \frac{1}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \quad \text{(Индукция)}$$

Ответ: $\|\varphi_k\|^2 = 1 - \frac{(k-1)}{2k} = \frac{k+1}{2k}$

$(k=1, \frac{1}{2}, k=2, \frac{3}{4})$

Мат. Анализ. Семинар №10

Напомним, что евклидово пространство (или даже метрическое пр-во) называется <u>сепарабельным</u>, если оно содержит счётное всюду плотное множество.

<u>Задача 1.</u> Если евклидово пространство E сепарабельно, то в нём существует ортонормированный базис.

<u>Решение.</u> Пусть $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ — счётное всюду плотное множество в E. Выберем из него линейно независимую систему векторов $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$. Тогда, очевидно, линейная оболочка $\mathcal{L}(f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ будет совпадать с линейной оболочкой $\mathcal{L}(\psi_1, \dots \psi_n \dots)$ и, следовательно, будет плотна в E. Применим к системе $\{f_n\}$ процесс ортогонализации и получим ортогональную (или ортонормированную) систему $\{\varphi_n\}$. Тогда, очевидно, это будет базисом в E.

Напомним, что в евклидовом (и тем более, в гильбертовом) пространстве любой ортонормированный базис $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет равенству Парсеваля:

$$\forall f \in E \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \text{ где } c_k = (f, \varphi_k).$$

Задача 2. Если $\{\varphi_n\}$ - ортонормир. базис в пространстве E, то любой вектор $f \in E$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

Решение: Если векторы f и g имеют одинаковые коэффициенты Фурье

$$(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

тогда вектор $f - g$ имеет нулевые коэффициенты Фурье и, следовательно, по равенству Парсеваля $\|f-g\|^2 = 0 \Rightarrow f = g$

Задача 3. Если $\{\varphi_n\}$ - ортонорм. базис в пр-ве E, то для любых векторов f и g справедливо равенство Парсеваля для их скалярного произведения:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k, \quad a_k = (f, \varphi_k), \; b_k = (g, \varphi_k),$$

причем этот ряд сходится абсолютно.

Решение. В любом евклидовом пр-ве выполнено тождество

$$(f,g)=\frac{1}{2}\left(\|f+g\|^2-\|f\|^2-\|g\|^2\right)$$

Коэффициентами Фурье $f+g$ будут a_k+b_k. Следовательно, в силу равенства Парсеваля для нормы:

$$(f,g)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2-\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2-\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2-a_k^2-b_k^2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot b_k$$

Абсолютная сходимость последнего ряда вытекает из очевидного неравенства

$$|a_k\cdot b_k|\le\frac{1}{2}\left[a_k^2+b_k^2\right]$$

и из признака Вейерштрасса абсолютной сходимости ряда.

Пусть теперь $\{\varphi_k\}$ — произвольная ортонормированная система в евклидовом пространстве. Пусть заданы вещественные числа $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Вопрос: когда эти числа являются коэффициентами Фурье некоторого вектора из E?

Задача 4. (Необходимое условие)
Если $\{C_k\}$ – коэффициенты Фурье некоторого вектора $f \in E$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \infty .$$

Решение. Вытекает из неравенства Бесселя, которое справедливо для любой ортонормированной системы в любом евклидовом пространстве:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \le \|f\|^2 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Оказывается, что в полном евклидовом пространстве (т.е. в гильбертовом пр-ве) это условие является и достаточным.

Задача 5. (Теорема Рисса – Фишера)
Пусть $\{\varphi_n\}$ – ортонормированная система (не обязательно базис) в полном евклидовом пространстве E. Пусть числа $\{C_n\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 < \infty \quad (\text{ряд сходится})$$

Тогда $\exists!$ вектор $f \in E$ такой, что
$C_n = (f, \varphi_n)$, $n = 1, 2, ..$; $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = \|f\|^2$.

<u>Решение</u>. Положим $f_n=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\cdot\varphi_k$. (*)

Тогда, по теореме Пифагора

$$\|f_{n+p}-f_n\|^2=\|c_{n+1}\varphi_{n+1}+\dots+c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2\,\|\varphi_k\|^2=\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

Поэтому, из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ следует, что $\{f_n\}$ фундаментальна в E, и тогда, в силу полноты E, она имеет предел $f\in E$: $\|f_n-f\|_E\to 0$ $(n\to\infty)$.

Найдем коэффициенты Фурье вектора f:

$$(f,\varphi_k)=(f_n,\varphi_k)+(f-f_n,\varphi_k)$$

Тогда при $n\geq k$ первое слагаемое равно $(f_n,\varphi_k)=c_k$ (см. (*)), а второе слагаемое стремится к нулю, т.к.

$$|(f-f_n,\varphi_k)|\leq\|f-f_n\|\cdot\|\varphi_k\|=\|f-f_n\|\to 0$$

Следовательно, $(f,\varphi_k)=c_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

Кроме того, по построению $\|f-f_n\|\to 0$ и тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2=\|f\|^2$ $(\|f_n\|^2\to\|f\|^2)$,

т.к. $\|f_n\|^2=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2$.

Мы доказали существование вектора $f \in E$, для которого $(f, \varphi_k) = C_k$ и $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^2$, причем $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k \varphi_k = f_n \to f$ в E.

Но тогда такой вектор f единственен, поскольку предел, если существует, то он <u>единственен</u>.

<u>Задача 6</u>. Пусть E – полное евклидово пр-во. Ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ является <u>базисом в E</u> если, и только если, не существует вектора, ортогонального всем векторам системы $\{\varphi_n\}$.

<u>Решение:</u> Пусть $\{\varphi_n\}$ – базис и $f \in E$, f – ортогонален всем φ_n, т.е. $C_n = (f, \varphi_n) = 0$. Тогда из равенства Парсеваля получаем:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = 0 \implies f = 0.$$

<u>Обратно:</u>

Пусть $\{\varphi_n\}$ не базис. Тогда найдется вектор, для которого не выполнено равенство Парсеваля:

$$g \neq 0, \quad \|g\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2, \quad C_k = (g, \varphi_k)$$

по теореме Рисса – Фишера $\exists f \in E$:

$$(f, \varphi_k) = C_k, \text{ причем } \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = \|f\|^2$$

Но тогда $(f-g, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (g, \varphi_k) = c_k - c_k = 0$

т.е. $f - g \perp \varphi_k \ \forall k \in \mathbb{N}$;

Из неравенства $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|g\|^2$

заключаем, что $f \neq g$, т.е. $f - g \neq 0$, и

причем $f-g$ - ортогонален всем $\{\varphi_k\}$.

Задача 7. E - евклидово пространство

а) Пусть числа $\{c_n\}$: $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Могут ли $\{c_n\}$ являться коэффициентами Фурье некоторого вектора $f \in E$?

б) Пусть $\{c_n\}$ - коэфф. Фурье. Верно ли, что $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$?

Решение. а) могут, если E - полное.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ - сходится, то $c_n \to 0$.

Поэтому $c_n^2 < |c_n|$, если n - достаточно велико.

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ - сходится.

По теореме Рисса-Фишера, найдется f, для которого $\{c_k\}$ - коэфф. Фурье.

б) Не верно.

пример: $E = l_2$, $f = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}, \dots)$

$\varphi_n = e_n = (0 \dots 1\ 0 \dots)$

тогда $c_n = \frac{1}{n}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится.

② **Изоморфизм гильбертовых пространств.**

Напомним, что бесконечномерное евклидово пространство называется **гильбертовым**, если оно **полное**.

Чаще всего рассматриваются **сепарабельные** гильбертовы пространства. Примерами таких пространств служат пространства

$$l_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots x_n, \dots),\ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}.$$

$$L_2(a,b) = \{f(t) - \text{функ. на } (a,b),\ \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty\}.$$

Определение: Два евклидовых пространства E и E^* называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое сохраняет линейную структуру и скалярное произведение:

т.е., если $x \leftrightarrow x^*$, $y \leftrightarrow y^*$, $x, y \in E$; $x^*, y^* \in E^*$

то $x + y \leftrightarrow x^* + y^*$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x^*$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$(x, y)_E = (x^*, y^*)_{E^*}$$

Известно, что $\forall$ два конечномерных евклидова пр-ва изоморфны между собой.

Если пространства имеют бесконечную размерность, то они не обязательно изоморфны. Пример: l_2 не изоморфно $C_2[a,b]$ – пр-во непрерывных функций со скалярным произведением $\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt$.

Почему? l_2 – полное, а $C_2[a,b]$ – нет!

Однако, если пространства полные и сепарабельные, то это так.

Задача 8. Любые два сепарабельных ~~пространства~~ гильбертовых пространства изоморфны между собой.

Решение: Покажем, что любое сепараб. гильб. пр-во H изоморфно пр-ву l_2. Выберем в H ортонормированный базис. Это возможно, т.к. H сепарабельно. Поставим в соответствие $\forall$ вектору $f \in H$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{c_n\}$, $c_n = (f, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. В силу равенства Парсеваля $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \{c_n\} \in \ell_2$. Обратно, если $\{c_n\} \in \ell_2$, то $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ и по теореме Рисса-Фишера найдется единственный $\exists$ элемент $f \in H$, имеющий коэффициенты $\{c_n\}$.

Если теперь $f \leftrightarrow (c_1, c_2 \ldots c_n, \ldots)$

$$g \leftrightarrow (d_1, d_2, \ldots d_n, \ldots)$$

тогда

$$f+g \leftrightarrow (c_1+d_1, \ldots c_n+d_n, \ldots)$$

$$\lambda f \leftrightarrow (\lambda c_1 \ldots \lambda c_n, \ldots)$$

Проверим сохранение скалярного произведения: $(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$.

Это равенство Парсеваля для скалярного произведения (Задача 3)

Следовательно, все сепараб. гильб. пр-ва изоморфны между собой и в качестве их представителя можно рассматривать пространство ℓ_2.

Задача 9. Привести пример несепарабельного гильбертова пр-ва, которое не изоморфно ℓ_2.

Решение: Рассмотрим пространство функций $f(t)$, $t\in[0,1]$, которые принимают не более чем счетное множество ненулевых значений, причем $\sum\limits_{x\in[0,1]} f(x)^2<\infty$

$\#\{f(t)\neq 0\}$ — конечно или счетно.

Скалярное произведение:

$$(f,g)=\sum_{x\in[0,1]} f(x)\cdot g(x).$$

В этой сумме не более чем счетное число слагаемых и она сходится. Проверьте, что это пр-во не сепарабельное, полное. Оно не изоморфно l_2.

2к Мат. Анализ. Семинар №11

Комплексные евклидовы пр-ва

Пусть E - комплексное линейное пр-во, т.е. над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Нельзя ввести скалярное произведение (комплексное) с сохранением всех свойств: положительность, линейность, однородность и симметричность:

Пусть $x, y \in E$, $(x, y) \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Рассмотрим $(\lambda x, \lambda x) = \lambda(x, \lambda x) = \lambda^2 (x, x)$.

Выберем $\lambda = i$, $i^2 = -1$ $\quad (ix, ix) = (-1)(x, x)$

Числа (ix, ix) и $(\quad)$ не могут быть одновременно положительными!

Аксиомы комплексного евклидова пр-ва (эрмитово пр-во, эрмитово скалярное произведение)

$\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $\forall x, y \in E$

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,

3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

4) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Из 1) и 3) следует, что

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y, x)} = \bar{\lambda} \overline{(y, x)} = $$
$$= \bar{\lambda}(x, y).$$

Примеры эрмитовых пространств

Пример 1. Пр-во $C^n = \{(x_1, .., x_n), x_k \in \mathbb{C}\}$

Скалярное произведение

$x = (x_1, .. x_n)$, $y = (y_1, .., y_n)$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Все конечномерные эрмитовы пр-ва размерности n изоморфны между собой, $\mathbb{C}^n$

Бесконечномерные пр-ва.

Пример 2. Комплексное пр-во $l_2 = \{(x_1, x_2, .., x_n, ...), x_k \in \mathbb{C} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$

Скалярное произведение:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

(Ряд сходится абсолютно)

Пример 3. Комплексное пр-во $C_2[a, b]$, состоящее из комплексно-значных функций, непрерывных на $[a, b]$

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} \, dt.$$

Почти все понятия, свойства, теоремы переносятся на эрмитовы пр-ва:

Понятие нормы: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Н-ер-во Коши-Буняковского

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \ , \ \forall x, y \in E$$

Причем $(x,y) = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow x$ и y - коллин.

Отличие: Нет понятия угла, т.к. (x,y) - комплексное число.

Всё остальное есть!

Ортогональность: $x \perp y \Leftrightarrow (x,y) = 0$.

Задача 1. $x \perp y \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 + |\beta|^2 \|y\|^2.$$

Решение.

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha(x, \alpha x + \beta y) + \beta(y, \alpha x + \beta y) = \alpha \cdot \bar{\alpha}(x,x) + \alpha \cdot \bar{\beta}(x,y) + \beta\bar{\alpha}(y,x) + \beta\bar{\beta}(y,y) = |\alpha|^2 \|x\|^2 + |\beta|^2 \cdot \|y\|^2 + \alpha \cdot \bar{\beta}(x,y) + \beta \cdot \bar{\alpha}\,\overline{(x,y)}$$

Если $x \perp y$, т.е. $(x,y)=0 \Rightarrow$

$$\|\alpha x+\beta y\|^2=|\alpha|^2\|x\|^2+|\beta|^2\|y\|^2$$

Обратно: пусть выполнено $\uparrow$, тогда

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}\quad \alpha\bar\beta(x,y)=-\beta\bar\alpha\overline{(x,y)}$

Выберем $\alpha=\beta=1 \Rightarrow (x,y)=-\overline{(x,y)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(x,y)=0$.

Выберем $\alpha=1,\ \beta=i \qquad -i(x,y)=-i\overline{(x,y)}$

т.е. $(x,y)=\overline{(x,y)} \Rightarrow \operatorname{Im}(x,y)=0$

Значит $(x,y)=0$

Задача 2. Теорема Пифагора.

Если $x_1,\dots,x_n$ – ортогональны, $x_k\perp x_j$.

$$\|x_1+\dots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\dots+\|x_n\|^2$$

(можно с множит. $\alpha_k x_k$, $\alpha_k\in\mathbb{C}$).

Решение очевидно

Ортогонализация: $f_1,f_2,\dots,f_n,\dots$

(линейно независимы).

Строим: $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n,\dots$

(ортонормальные).

$\varphi_1 = f_1$. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ - построены.

Тогда $\varphi_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f_{n+1}, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k$.

Достаточно проверить, что $\varphi_{n+1} \perp \varphi_j$:

$(\varphi_{n+1}, \varphi_j) = (f_{n+1}, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f_{n+1}, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} (\varphi_k, \varphi_j) =$

$= (f_{n+1}, \varphi_j) - (f_{n+1}, \varphi_j) = 0$.

Пусть $\{\varphi_n\}$ - ортонормированная система. $f \in E$. Коэффициенты Фурье: $c_n = (f, \varphi_n)$.

Рассмотрим: $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$

$$r_n = f - S_n.$$

<u>Задача 3</u> а) $r_n \perp S_n$

б) $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \|r_n\|^2$

<u>Решение</u>: а) Проверить, что (r_n, φ_j), $j = 1, \dots, n$

$(r_n, \varphi_j) = (f - S_n, \varphi_j) = (f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, \varphi_j) =$

$= (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{n} c_k (\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0$

б) $r_n \perp S_n$. По теореме Пифагора

$$\|S_n + r_n\|^2 = \|S_n\|^2 + \|r_n\|^2$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \|r_n\|^2.$$

<u>Задача 4.</u> (Неравенство Бесселя)

$\{\varphi_n\}$ - ортонормированная

$$\forall f \in E \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

<u>Задача 5.</u> Коэффициенты Фурье $c_k = (f, \varphi_k)$ $k = 1, .., n$. Обеспечивают наилучшее приближение функции f суммами вида $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$

т.е. $\forall \alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \neq (c_1, .., c_n)$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 > \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2$$

Решение: $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 =$

$$= \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) = \|f\|^2 - \left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) -$$

$$- \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}(f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_k, f) + \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \cdot c_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{c_k} + \sum |\alpha_k|^2$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(|c_k|^2 - \overline{\alpha_k} \cdot c_k - \alpha_k \cdot \overline{c_k} + |\alpha_k|^2 \right)$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \alpha_k|^2$$

<u>Итог</u>:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \alpha_k|^2$$

Если $\alpha_k = c_k$, $k = 1, \dots, n$, то

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$ – минимальное значение для расстояния.

<u>Определение</u>: Ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ в E есть базис, если

$$\overline{\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} = E.$$

Задача 6. $\{\varphi_n\}$ – есть базис в E $\Leftrightarrow$ $\forall f \in E$ $\quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$, $c_k = (f, \varphi_k)$.
(Равенство Парсеваля)

Решение: совпадает с вещественным случаем. (См. Задачу 5)

Задача 7. Пусть $\{\varphi_n\}$ – базис в E.
Тогда $\forall f, g \in E$

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}, \quad a_n = (f, \varphi_k), \; b_k = (g, \varphi_k)$$

Решение: В вещественном случае тождество

$$(f,g) = \frac{1}{2}\left(\|f\|^2 + \|g\|^2 - \|f-g\|^2\right)$$

Раскроем в комплексном случае. Справа

$$\|f-g\|^2 = (f-g, f-g) = (f,f) - (g,f) - (f,g) + (g,g)$$

$$(g,f) + (f,g) = \overline{(f,g)} + (f,g) \neq 2(f,g)$$

$$(f,g) = \alpha + i\beta, \quad \overline{(f,g)} = \alpha - i\beta, \text{ Равно } 2\,\mathrm{Re}\,(f,g)$$

Нужно другое тождество

Задача 8. Поляризационное тождество

$$(f,g) = \frac{1}{4}\left\{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2\right\}$$

Решение: $(f,g)=\alpha+i\beta$, $\overline{(f,g)}=\alpha-i\beta$

$$\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2+(f,g)+(g,f)$$

$$\|f-g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2-(f,g)-(g,f)$$

$$\|f+g\|^2-\|f-g\|^2=2(f,g)+2(g,f)=2\big((f,g)+(g,f)\big)$$

$$=2\big((f,g)+\overline{(f,g)}\big)=4\alpha=4\,\mathrm{Re}\,(f,g).$$

Подставим вместо $g\to ig$.

$$\|f+ig\|^2-\|f-ig\|^2=2(f,ig)+2(ig,f)=$$

$$=2i\big(-(f,g)+\overline{(f,g)}\big)=2i(-i\beta-i\beta)=4\beta=$$

$$=4\,\mathrm{Im}\,(f,g).$$

Следовательно:

$$\|f+g\|^2-\|f-g\|^2+i\big(\|f+ig\|^2-\|f-ig\|^2\big)=4(\alpha+i\beta)=$$

$$=4\big(\mathrm{Re}\,(f,g)+i\,\mathrm{Im}\,(f,g)\big)=4(f,g)$$

Воспользуемся поляризационным тождеством в задаче 7

$f\to a_k=(f,\varphi_k)$, $g\to b_k=(g,\varphi_k)$.

$f+g\to a_k+b_k$, $f-g\to a_k-b_k$

$f+ig\to a_k+ib_k$, $f-ig\to a_k-ib_k$.

Тогда $(f,g)=\frac{1}{4}\left\{\|f+g\|^2-\|f-g\|^2+i\|f+ig\|^2-i\|f-ig\|^2\right\}=$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k+b_k|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |a_k-b_k|^2 + i\sum_{k=1}^{\infty} |a_k+ib_k|^2 - i\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-ib_k|^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k+b_k|^2 - |a_k-b_k|^2 + i|a_k+ib_k|^2 - i|a_k-ib_k|^2 =$$

Для комплексных чисел поляризационное тождество выполнено (т.к. $\mathbb{C}$ - эрм. пр-во)

$$|a+b|^2 - |a-b|^2 + i|a+ib|^2 - i|a-ib|^2 = 4a\cdot\overline{b}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} 4\cdot a_k \overline{b_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$$

Поляризационное тождество можно записать в следующем виде:

$$(f,g) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|f+i^k g\|^2$$

<u>Обобщение</u> тождества:

<u>Задача 9</u> Доказать

a) $(f,g) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{\frac{2\pi i k}{N}}\cdot\|f+e^{\frac{2\pi i k}{N}}g\|^2$, $N\geq 3$.

Здесь $\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi i k}{N}}$ - это корни из 1 N-степени

$\varepsilon_k^N = 1$, $k=0,1,\dots,N-1$, ($N=4$: $\{1, i, -1, -i\}$)

б) $(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f+e^{it}g\|^2 \cdot e^{it}\,dt$

(Домашнее задание)

Полное комплексное пространство называется комплексным гильбертовым пространством.

Задача 10 (Теорема Рисса–Фишера)
Пусть H – комплексное гильб. пр-во
Числа $\{c_k\}$ - являются коэффициентами Фурье вектора $f \in H \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$

Точнее: $\exists! \, f \in H: \quad c_k = (f, \varphi_k), \, \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$

Док-во: полностью аналогично случаю $\mathbb{R}$.

Вводится понятие изоморфизма.

Задача 11. Любые два сепарабельных комплексных гильберт. пр-ва изоморфны между собой и изоморфны пр-ву l_2.

Док-во: как и в действительном случае через отождествление Парсеваля:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$$

$$f \leftrightarrow \{c_k\}, \quad c_k = (f, \varphi_k), \; k = 1, \ldots$$

2К Мат Анализ. Семинар №12

Тригонометрические системы

Рассмотрим пространство $L_2(X, d\mu)$ (вещественные случаи). Это пространство является евклидовым. Скалярное произведение в нем:

$$(f, g) = \int_X f(x) g(x)\, d\mu.$$

Обычно, $X \subset \mathbb{R}^n$, $d\mu$ – мера Лебега на X.

Например: $X = [a, b]$, $[-\pi, \pi]$, $[0, \pi]$.

Тогда $L_2(X, \mu)$ – полное сепарабельное пространство, т.е. оно гильбертово. В нем имеются ортогональные семейства, которые можно строить методом ортогонализации. Пусть $\{\varphi_n\}$ – ортогональная система в $L_2(X, d\mu)$. Тогда $\forall f \in L_2(X, d\mu)$ можно рассмотреть коэффициенты Фурье и построить ряд Фурье:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \varphi_n \quad (*)$$

где $c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_X f(x) \varphi_n(x)\, dx$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_X \varphi_n(x)^2\, dx$$

Ряд (*) сходится в пространстве $L_2(X, d\mu)$,

т.е. $\|f - S_n\|_{L_2} = \left(\int_X |f(x) - S_n(x)|^2 d\mu \right)^{1/2} \to 0$

где $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ - част. сумма р. Ф.

Выполнено равенство Парсеваля:

$$\int_X f(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 \cdot c_n^2 .$$

---

① <u>Тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье</u>

Рассмотрим пр-во $L_2(-\pi, \pi)$.

Тригонометрическая система:

$1, \cos nx, \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots$

Она ортогональна в $L_2(-\pi, \pi)$ (проверим)

Не нормированная, её можно нормировать

$\|1\|^2_{L_2} = 2\pi$; $\|\cos nx\|^2_{L_2} = \|\sin nx\|^2_{L_2} = \pi$.

Пусть $f \in L_2(-\pi, \pi)$.

Её коэффициенты Фурье по триг. системе принято обозначать

$\frac{a_0}{2}, a_n, b_n$, т.е.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Ряд Фурье: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx$.

Ряд сходится к $f(x)$ в норме $L_2(-\pi,\pi)$.

(говорят: сходится в среднеквадратичном)

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\cdot\sin kx$$

$$\|f - S_n\|^2_{L_2} = \|f\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \to 0$$

(следует из полноты триг. системы

(теорема Вейерштрасса).

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Как по коэффициентам Фурье восстановить функцию?

Пусть даны числа a_0, a_n, b_n: $\sum_{n=1}^{\infty} a_k^2 + b_n^2 < \infty$.

Тогда по теореме Рисса-Фишера ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

сходится (в $L_2(-\pi,\pi)$) к некоторой функции $f(x)\in L_2(-\pi,\pi)$, для которой это её коэффициенты Фурье. (единственной).

② **Проблема Лузина.** Ряд Фурье сходится в $L_2(-\pi,\pi)$. Тогда $\exists$ подпоследовательность n_k: $S_{n_k}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{n_k} a_l \cos lx + b_l \sin lx$, что $S_{n_k}(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$.

Николай Лузин (1915): Доказать, что ряд Фурье функции $f(x) \in L_2(-\pi,\pi)$ сходится почти всюду. Решена в 1966 г шведским математиком Леннартом Карлесоном.

Аналогично строятся триг. ряды Фурье в пространстве $L_2(-l,l)$.

Если $f(t) \in L_2(-l,l)$, сделать замену $x = \frac{\pi}{l} \cdot t$.

$$f^*(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right) \Rightarrow f^* \in L_2(-\pi,\pi).$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{\pi}{l} n t \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{\pi}{l} n t \, dt, \quad n = 1, 2 \ldots$$

Ряд Фурье на отрезке $[-l,l]$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi}{l} k t + b_k \sin \frac{\pi}{l} k t$$

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

Пример 1. $f(x)=x,\quad x\in[-\pi,\pi]$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cdot\cos nx\,dx=0,\quad n=0,1,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=2\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=2\left[\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right.$$

Ряд сходится в $L_2(-\pi,\pi)$. (почти всюду).

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2\pi^2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

т.е. $\dfrac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

Пример 2. $f(x)=x^2,\quad x\in[-\pi,\pi]$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2\pi^2}{3},\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=0.$$

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\cos x-\frac{\cos 2x}{4}+\frac{\cos 3x}{9}-\dots\right.$$

Сходится равномерно $(f(-\pi)=f(\pi))$

Рав-во Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,dx=\frac{2\pi^4}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi^4}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4};\quad \frac{\pi^4}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

③ Тригонометрические системы на $[0,\pi]$

I) $1, \cos x, \cos 2x, \dots$ | $\|1\|^2=\pi$, $\|\cos nx\|^2=\frac{\pi}{2}$

II) $\sin x, \sin 2x, \dots$ | $\|\sin nx\|^2=\frac{\pi}{2}$

Ортогональность проверяется. Полнота каждой из них следует из полноты триг. системы $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ на $[-\pi,\pi]$.

Формулы коэффициентов Фурье.
Напр. для $\{\sin nx\}$, $f(x)\in L_2(0,\pi)$.

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Равенство Парсеваля: $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)^2dx=\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$

Аналогично для $\{1, \cos nx\}$.

④ Тригонометрические ряды в комплексной форме.

Рассмотрим ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

Воспользуемся формулами Эйлера

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2};\quad \sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\cdot\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right]=$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - i b_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-inx} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}, \text{ где}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2}.$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}}$$

Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме. Пространство $L_2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ – эрмитово пр-во. Эрмитово произведение:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

Ортогональная система: $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$

Проверим ортогональность: $n \neq m$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot \overline{e^{imx}}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\, dx =$$

$$= \frac{e^{i(n-m)x}}{n-m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{n-m} = 0.$$

при $n = m$.

$$\| e^{inx} \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-inx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

Ряд Фурье по системе $\{e^{inx}\}$:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad n\in\mathbb{Z}}$$

Полнота системы $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ вытекает из полноты системы $\{1, \cos nx, \sin nx\}$, т.к. ряд по косинусам и синусам сходится в L_2.

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2.$$

Для эрмитова произведения:

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}$$

<u>Замечание</u> Если $f(x)\in L_2(-\pi,\pi;\mathbb{R})$ – вещественная функция, то

$$c_{-n}=\overline{c_n}, \quad \forall n\in\mathbb{Z}.$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)e^{-inx}}\,dx = \overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\right)} = \overline{c_n}, \quad \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Аналогично строятся комплексные ряды Фурье в пространстве $L_2(-l,l,\mathbb{C})$.
Заменить e^{inx} на $e^{i\frac{\pi}{l}nx}$

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{\pi}{l}nx}, \quad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{\pi}{l}nx}\,dx$$

Задача 1. Переписать ряд Фурье для функции x и x^2, $x\in[-\pi,\pi]$ в комплексной форме.

Решение:

1) $$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{in}e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{in}e^{-inx}=\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{(-1)^{n+1}}{in}e^{inx}$$

$$c_n=\begin{cases}0 & n=0\\ \frac{(-1)^{n+1}}{in}, & n\neq 0.\end{cases}$$

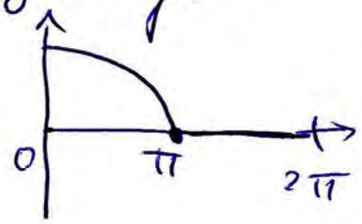
2) $$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}e^{-inx}=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{2(-1)^n}{n^2}e^{inx}.$$

$$c_n=\begin{cases}\frac{\pi^2}{3}, & n=0\\ \frac{2(-1)^n}{n^2}, & n\neq 0.\end{cases}$$

Задача 2. Разложить в компл. ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{x}{2}, & x \in [0; \pi] \\ 0 & x \in [-\pi, 2\pi] \end{cases}$$



Решение

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\, e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}}}{2}\, e^{-inx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{-i(n-\frac{1}{2})x} + e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-i(n-\frac{1}{2})x}}{-2i(n-\frac{1}{2})} + \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{-2i(n+\frac{1}{2})} \Bigg|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{e^{-i(n-\frac{1}{2})\pi}}{1-2n} - \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\pi}}{1+2n} - \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) =$$

$$\boxed{e^{\frac{i\pi}{2}} = i,\quad e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i,\quad e^{-in\pi} = (-1)^n}$$

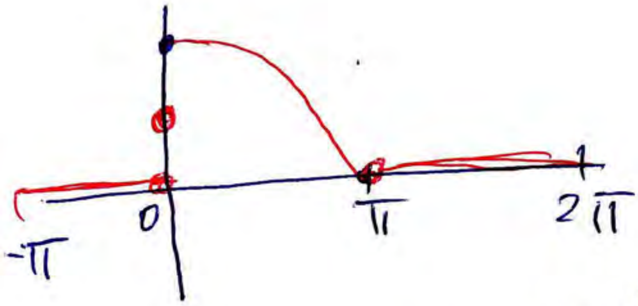
$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{i(-1)^n}{1-2n} + \frac{i(-1)^n}{1+2n} - \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{i(-1)^n \cdot 2}{1-4n^2} - \frac{4n}{1-4n^2} \right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n + 2ni}{1-4n^2} \right)$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n + 2ni}{1-4n^2} \right),$$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n + 2ni}{1-4n^2}\, e^{inx}, \quad 0 \le x \le \pi$$

$$0 = \text{—"—} \quad \pi < x \le 2\pi$$



$$f(\pi)=0$$

$$\frac{f(\pi)+f(0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n+2ni}{1-4n^2}=\frac{1}{2}+i\cdot 0.$$

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\ ;\quad 0=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{2n}{1-4n^2}$$

(Сумма понимается как $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=-N}^{N}(\ )$).

2K

Мат. Анализ. Семинар № 13

① Тригонометрические ряды Фурье

<u>Задача 1.</u> Разложить

$$f(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

в комплексный ряд Фурье.

<u>Решение:</u> Найдем коэффициенты Фурье

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \cdot e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\lambda - ik} e^{(\lambda - ik)x} \Big|_{\pi}^{-\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi(\lambda - ik)} \cdot \frac{e^{\lambda\pi} \cdot e^{-ik\pi} - e^{-\lambda\pi} \cdot e^{ik\pi}}{2}, \quad \lambda \neq ik, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{\pm ik\pi} = (-1)^k; \quad \boxed{c_k = \frac{(-1)^k \cdot sh(\lambda\pi)}{\pi(\lambda - ik)}}$$

$$sh(\lambda\pi) = \frac{e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}}{2} = e^{\alpha\pi} e^{i\beta\pi} - e^{-\alpha\pi} \cdot e^{-i\beta\pi} =$$

$$= \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2} \cdot \cos\beta\pi + i \cdot \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{2} \cdot \sin\beta\pi =$$

$$= sh\,\alpha\pi \cdot \cos\beta\pi + i\, ch\,\alpha\pi \cdot \sin\beta\pi$$

$$e^{i\beta\pi} = \cos\beta\pi + i \sin\beta\pi$$

<u>Ответ:</u> $$f(x) = \frac{sh\,\lambda\pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda - ik} e^{ikx} \qquad (*)$$

Применим к ряду (*) равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{\|f\|^2}{2\pi}$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{\lambda x}|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha x} dx = \frac{e^{2\alpha x}}{2\alpha}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{e^{2\alpha\pi} - e^{-2\alpha\pi}}{\alpha \cdot 2} = \frac{sh(2\alpha\pi)}{\alpha}$$

$$|c_k|^2 = \frac{|sh(\lambda\pi)|^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{|\alpha + i(\beta - k)|^2} = \frac{sh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi}{\pi^2(\alpha^2 + (\beta - k)^2)}$$

Получаем числовой ряд:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (\beta-k)^2} = \frac{\pi \cdot sh\, 2\alpha\pi}{2\alpha(sh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi)}.$$

Использовали: $|sh(\lambda\pi)|^2 =$

$$= |sh\,\alpha\pi \cdot \cos\beta\pi + i\, ch\,\alpha\pi \cdot \sin\beta\pi|^2 =$$

$$= sh^2\alpha\pi \cdot \cos^2\beta\pi + ch^2\alpha\pi \cdot \sin^2\beta\pi =$$

$$= sh^2\alpha\pi(1 - \sin^2\beta\pi) + ch^2\alpha\pi \cdot \sin^2\beta\pi =$$

$$= sh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi(ch^2\alpha\pi - sh^2\alpha\pi) = sh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi$$

Разложение в ряд Фурье с использованием ряда Тейлора по $z=e^{ix}$.

Задача 2. Разложить в тригон. ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}, \quad |a|<1, \quad x\in[-\pi,\pi]$$

Решение: Подставим $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

И воспользуемся формулой $z=e^{ix}$

$$\boxed{z^n=e^{inx}=\cos nx+i\sin nx}$$

$$\cos x=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin x=\frac{z^2-1}{2iz}$$

$$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{a(z^2-1)}{2i(z-a(z^2+1)+a^2z)}=\frac{a(z^2-1)}{2i(z-a)(1-az)}=$$

$$\left[z-az^2-a+a^2z=(z-a)-az(z-a)=(z-a)(1-az)\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-az}-\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1-\frac{a}{z}-1+az}{(1-az)(z-a)}\right)z=$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{a(z^2-1)}{(z-a)(1-az)}=$$

По условию $|z|=1 \Rightarrow |az|<1, \ \left|\frac{a}{z}\right|<1$

Воспользуемся суммой геометрической прогрессии.

$$= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(az)^n - \sum\left(\frac{a}{z}\right)^n\right) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} a^n\left(z^n - z^{-n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} a^n\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin nx$$

Получили ряд Фурье.

Ответ: $$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x-a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin nx$$

На первом семинаре получили:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x \le 2\pi$$

(Можно взять ряд $\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ и подставить $x \to \pi - x$).

Задача 2. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

Решение: Обозначим $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$, $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

$$f(x) = u + iv = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n} + i\,\frac{\sin nx}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx + i\sin nx}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$$

$\boxed{e^{ix} = z}$ Сходится при $|z| \le 1$, $z \ne 1$.

Напоминание из 1 курса:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z}{3} + \frac{z}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Следовательно, $u(x) + i v(x) = \ln\left(\frac{1}{1-e^{ix}}\right)$

$$\frac{1}{1-\cos x - i\sin x} = \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\sin\frac{x}{2} + i\cos\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)} = R\, e^{i\alpha},$$

модуль — $R = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$; аргумент — $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$; $R \in \mathbb{R}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\ln\left(R \cdot e^{i\alpha}\right) = \ln R + i\alpha}$$

Следовательно $\ln\left(\frac{1}{1-e^{ix}}\right) = \ln R + i\alpha = u + iv$

$$u(x) = \ln R = \boxed{-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}}$$

$$v(x) = \alpha = \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

Пусть $f(x)$ — 2π периодическая функция.
Пусть её ряд Фурье: $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}$

<u>Задача 3.</u> Найти ряд Фурье функции $f(x+a)$, $x\in\mathbb{R}$.

<u>Решение:</u>

1) Неформально: $f(x+a) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{in(x+a)} =$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{ina} \cdot e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot e^{inx}, \quad \boxed{d_n = c_n \cdot e^{ina}}$$

2) Докажем это строго: по определению

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y) e^{ina} \cdot e^{iny}\, dy =$$

$\boxed{\text{Замена: } x+a=y}$ $= e^{ina} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\, dy = e^{ina} \cdot c_n$

<u>Значит:</u> $d_n = e^{ina} \cdot c_n$

<u>Задача 4.</u> Ряд Фурье функции а) $f(-x)$

б) $\overline{f(x)}$; в) $e^{i\alpha x} \cdot f(x)$;

г) $f(x) \cdot \cos mx$, д) $f(x) \sin mx$

Решение:

а) $f(-x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-inx}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n} e^{inx}$

т.е. $d_n=c_{-n}$. Обоснование аналогично.

б) $\overline{f(x)}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n} e^{-inx}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_{-n}} e^{inx}$

т.е. $\boxed{d_n=\overline{c_{-n}}}$. Если $f(x)=\overline{f(x)}$, то $c_n=\overline{c_{-n}}$

в) $f(x)\cdot e^{i\alpha x}$. Для каких α это будет 2π-периодическая функция? $\alpha=m\in\mathbb{Z}$

$f(x)\cdot e^{imx}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}\cdot e^{imx}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i(n+m)x}=$

$n+m=k$

$=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_{k-m} e^{ikx} \Rightarrow \boxed{d_n=c_{n-m}}$

г) $f(x)\cdot\cos mx$

$\cos mx=\dfrac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}$

$f(x)\cdot\cos mx=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \dfrac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}e^{inx}=$

$=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{c_n}{2}\cdot e^{i(n+m)x}+\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\dfrac{c_n}{2}e^{i(n-m)x}=$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{c_{k+m} + c_{k-m}}{2}\right) e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k e^{ikx}.$$

$$d_n = \frac{c_{n+m} + c_{n-m}}{2}$$

---

g) $f(x)\cdot \sin mx$, $d_n = \dfrac{c_{n+m} - c_{n-m}}{2i}$

Задача 5. Пусть $f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}$

Найти: а) для $f(2x)$, б) для $f(kx), k\in\mathbb{N}$

Решение:

Неформально: $f(2x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{i2nx}$,

$$f(2x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \cdot e^{inx}, \quad d_n = \begin{cases} c_{n/2}, & n\text{-четно} \\ 0, & n\text{-нечетн} \end{cases}$$

Проверка: $\boxed{2x = y}$

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(2x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(2x) e^{-inx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} f(y)\, e^{-in\frac{y}{2}}\, d\frac{y}{2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(y) e^{-i\frac{ny}{2}}\,dy + \int_{2\pi}^{4\pi} f(y) e^{-i\frac{ny}{2}}\,dy\right) =$$

во втором интеграле замена $y = 2\pi + x$

$f(2\pi + x) = f(x)$, т.к. периодическая

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-\frac{inx}{2}}\left(1 + e^{-in\pi}\right) dx = \right.$$

$1 + e^{-in\pi} = 1+1$, если n-четно, $= 1-1$, если n-нечетно

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-\frac{inx}{2}} dx = c_{\frac{n}{2}}, & n\text{-четно} \\ 0, & \text{если } n\text{-нечетно.} \end{cases}$$

б) $$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(kx) e^{-inx} dx = \quad (kx = y) \quad x = \frac{y}{k}$$

$$= \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi k} f(y)\, e^{in\frac{y}{k}} dy = \frac{1}{2\pi k}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} f(y) e^{\frac{iny}{k}} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-\frac{inx}{k}}\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{-i\frac{n}{k}\cdot 2\pi j}\right) dx$$

Замена $y = 2\pi j + x$, $j = 0, \dots, k-1$

$f(2\pi j + x) = f(x)$.

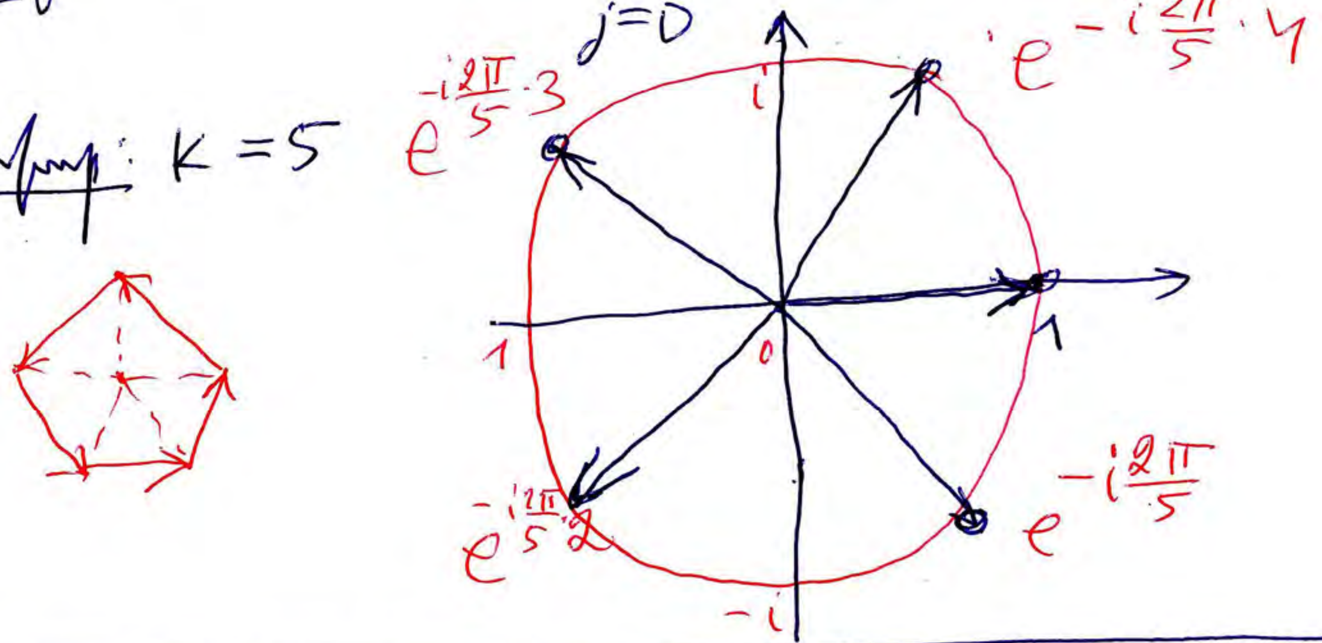
$$\sum_{j=0}^{k-1} e^{-i\frac{n}{k}2\pi j} = \begin{cases} k, & \text{если } n \vdots k \\ 0, & \text{если } n \not\vdots k \end{cases}$$

<u>Докажем это</u> $n \not\vdots k$

Это сумма p-степеней корней k-степени из 1, где $n = k\cdot l + p$, $1 \le p \le k-1$.

$$= \sum_{j=0}^{k-1} e^{-i\frac{p}{k}2\pi j} = \sum_{j=0}^{n} \left(e^{-i\frac{2\pi j}{k}}\right)^p = 0.$$

Напр.: $k=5$



② Свертка функций.

$f(x), g(x) \in L_2(-\pi,\pi)$, периодические.

Определение: $f*g(x) = F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy$

Свойства: 1) $f*g = g*f$.

Замена $x-y=z$

$$f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z) f(x-z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y) f(x-y)\, dy = g*f(x)$$

2) $f * \mathbb{1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, dy = C\cdot \mathbb{1}$, $C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, dy$

это не единица по умножению.

Единицы нет! (Докажите это)

3) Линейность $(f_1+f_2)*g = f_1*g + f_2*g$.

Задача 6. (На дом).
Найти свертку $\sinh x$ и $\cosh x$

Задача 7. (На дом)
Пусть $f(x) \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $g(x) \sim \sum d_n e^{inx}$
Найти s_n, $f*g(x) \sim \sum s_n e^{inx}$

Зад 8. Нет единицы, т.е. $\nexists!\ e(x)$:
$\forall f(x)\quad f*e = f$.

2к

Мат. Анализ. Семинар №14

Комплексная форма рядов Фурье

① Свертка функций.

Заданы комплекснозначные функции $f(x), g(x) \in L_1(-\pi, \pi; \mathbb{C})$, 2π-периодические

Определение. Сверткой функций f и g называется функция:

$$f * g(x) = F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y)\, dy$$

Задача 1. Если $f, g \in L_1(-\pi, \pi)$, то $f * g \in L_1(-\pi, \pi)$

Решение: Заметим, что определен следующий двойной интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y)\, dy\, dx,$$

поскольку, по теореме Фубини, существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| \cdot |g(x)|\, dy\, dx$$

Свойства свертки:

1) симметричность: $f * g = g * f$.

Сделаем замену $x-y=z$

$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g(x-y)\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(z)f(x-z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)f(x-y)\,dy=g*f(x).$$

2) <u>линейность</u> $(f_1+f_2)*g=f_1*g+f_2*g$.

3) $f*1\!\!1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,dy=C\cdot 1\!\!1,\quad C=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,dy.$

<u>Задача 2.</u> Найти свертку $\sin nx*\cos mx$

<u>Решение:</u>

$$\sin nx*\cos mx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin ny\cos m(x-y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin ny\cdot\cos my\cdot\cos nx+\sin ny\sin my\cdot\sin nx\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\cos nx\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin ny\cdot\cos my\,dy}_{=0}+\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}\sin ny\cdot\sin my\,dy\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}\sin ny\cdot\sin my\,dy=\begin{cases}0 & n\neq m.\\ \dfrac{\sin nx}{2} & n=m.\end{cases}$$

Аналогично: $\sin nx*\sin mx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \dfrac{\cos nx}{2}, & n=m\end{cases}$

$$\cos nx*\cos mx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \dfrac{\cos nx}{2}, & n=m.\end{cases}$$

Операция свертки сильно отличается от операции обычного умножения.

<u>Задача 3</u> Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют ряды Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$$

Найти ряд Фурье свертки $f*g$

$$f*g \sim \sum s_n e^{inx}. \qquad s_n = ?$$

<u>Решение:</u>

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy\right\} e^{-inx}\,dx =$$

(меняем порядок интегрирования)

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)e^{-inx}\,dx\right\}dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left\{\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)e^{-inx}\,dx\right\}dy =$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменных: $x-y=z$, $x=y+z$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \int_{-\pi-y}^{-\pi+y} g(z) e^{-in(z+y)}\, dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} g(z)e^{-inz}\,dz\right\}dy =$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)e^{-inz}\,dz\right)=$$

$$= c_n \cdot d_n.$$

Ответ: $\boxed{s_n = c_n\cdot d_n}$.

Задача 4. Пусть $f,g\in L_2(-\pi,\pi)$. Верно ли, что $f*g\in L_2(-\pi,\pi)$?

Решение: Верно!

Рассмотрим c_n и d_n — коэффициенты Фурье функций f и g. В силу равенства Парсеваля $\|f\|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2<\infty$, $\|g\|^2=\sum|d_n|^2<\infty$.

Рассмотрим s_n — коэфф. Фурье $f*g$.

По з.3 $s_n=c_n\cdot d_n$, $|s_n|^2=|c_n|^2\cdot|d_n|^2\le |c_n|^4+|d_n|^4$

Ряды $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^4$ и $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|d_n|^4$ сходятся, т.к. $|c_n|^4\le|c_n|^2$, $|d_n|^4\le|d_n|^4$ при $n\gg1$.

(т. Рисса-Фишера)

Следовательно $\{S_n\} \in l_2$ и ему соответствует функция $F(x) \in L_2(-\pi,\pi)$.
В силу единственности коэффициентов Фурье: $F(x) \equiv f*g$, т.е. $f*g \in L_2(-\pi,\pi)$

Обсудим вопрос существования элементов „единица" для операции свертки.
т.е. $e(x)$: $f*e = e*f = f$

Существуют или нет?

<u>Задача 5</u>. Существуют ли „единицы"?

<u>Решение</u>: Ответ: НЕТ!

Действительно, если $f \in L_1(-\pi,\pi)$, $e \in L_1$, то $f \sim \{c_n\}$, $e \sim \{e_n\}$ - коэф. Фурье

$$f*e = f \Rightarrow c_n e_n = c_n \Rightarrow e_n = 1 \ \forall n$$

<u>Вопрос</u>: Существует ли функция $e \in L_1(-\pi,\pi)$ для которой коэф. Фурье $e_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Если $e \in L_2$ то это <u>нет</u>! т.к. $|e_n| \to 0$.
То же верно и для функций из L_1
$|e_n| \to 0$, т.е. таких функций нет
(Лемма Римана)

На самом деле такая „единица" есть!
Однако в более широком классе объектов, чем даже функции!
В классе обобщенных функций.
δ-функция Дирака:

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=2k\pi\\ 0, & x\neq 2k\pi\end{cases}\qquad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)\,dx=2\pi}$$

В классе обобщенных функций допускаются интегралы с функциями из $C[-\pi,\pi]$,

т.е. $$\boxed{(\delta,f)=\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)f(x)\,dx=f(0)\,2\pi}$$

Тогда $$\delta*f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(y)f(x-y)\,dy=\frac{f(x)}{2\pi}2\pi=f(x)$$

$x-y=0$

т.е. $\delta*f(x)=f(x)$, т.е. $\boxed{\underset{\text{единица}}{e(x)=\delta(x)}}$

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{\varepsilon}, & |x|<\varepsilon\\ 0, & |x|>\varepsilon\end{cases}\quad (2\pi\text{-периодич}).$$

$$\varphi_\varepsilon(x)\longrightarrow\delta(x)\quad(\varepsilon\to 0)$$

В пространстве обобщенных функций

Покажем, что $\varphi_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ $(\varepsilon \to 0)$ в классе обобщенных функций, т.е. $\forall f \in C[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_\varepsilon(x)\,dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \delta(x)\,dx = 2\pi f(0)$$

Действительно

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx = \frac{\pi}{\varepsilon} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,dx$$

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$. Тогда по теореме о среднем значении: $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\ y_\varepsilon \in (-\varepsilon, \varepsilon)$: $\frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,dx = f(y_\varepsilon)$

т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 2\pi f(y_\varepsilon) \to 2\pi f(0)$

при $\varepsilon \to 0$ $f(y_\varepsilon) \to 2\pi f(0)$

$$2\pi f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) \cdot f(x)\,dx$$

Значит $\varphi_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ $(\varepsilon \to 0)$ в классе обобщенных функций

Найдём коэффициенты Фурье $\varphi_\varepsilon(x)$.

$$c_n^\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_\varepsilon(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\pi}{\varepsilon}\cdot e^{-inx}\,dx =$$

$(n \neq 0)$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\cdot\frac{e^{-inx}}{-inx}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon i n}\left(\frac{e^{-in\varepsilon}-e^{in\varepsilon}}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{1}{n\varepsilon^2}\cdot\frac{e^{in\varepsilon}-e^{-in\varepsilon}}{2i} = \frac{\sin n\varepsilon}{n\cdot\varepsilon^2},$$

$$\boxed{c_0^\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_\varepsilon\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{\varepsilon}\cdot 2\varepsilon = 1}$$

$$\varphi_n^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\sin n\varepsilon}{n}\cdot e^{inx} + 1$$

$$\|\varphi_n^\varepsilon\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(x)|^2\,dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^2 dx = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^2\cdot 2\varepsilon = \frac{2\pi^2}{\varepsilon} \to \infty$$

„Коэффициенты Фурье" δ-функции

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot e^{in\cdot 0} = 1.$$

Значит: $\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$ – ряд

расходится в обычном смысле, но сходится в смысле обобщённых функций,

т.е. $S_N(x) = \sum_{|n|\le N} e^{inx} \longrightarrow \delta(x),\ N\to\infty$.

Толкнем: $\forall f \in C[-\pi, \pi]$, $\exists f_л'(0), \exists f_п'(0)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta_N(x) \cdot f(x)\,dx \to 2\pi f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) f(x)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta_N(x) \cdot f(x)\,dx = \sum_{|n| \le N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{inx}\,dx =$$

$$= 2\pi \sum_{|n| \le N} c_{-n} = 2\pi \sum_{|n| \le N} c_n =$$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot e^{-inx} \Rightarrow f(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n$$

Сходится $\sum_{|n| \le N} c_n \to f(0)$ $\left(\begin{matrix} f \in C(0) \\ \exists f_л', f_п' \end{matrix} \right)$.

т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} \delta_N(x) \cdot f(x)\,dx \to 2\pi f(0)$, $N \to \infty$)

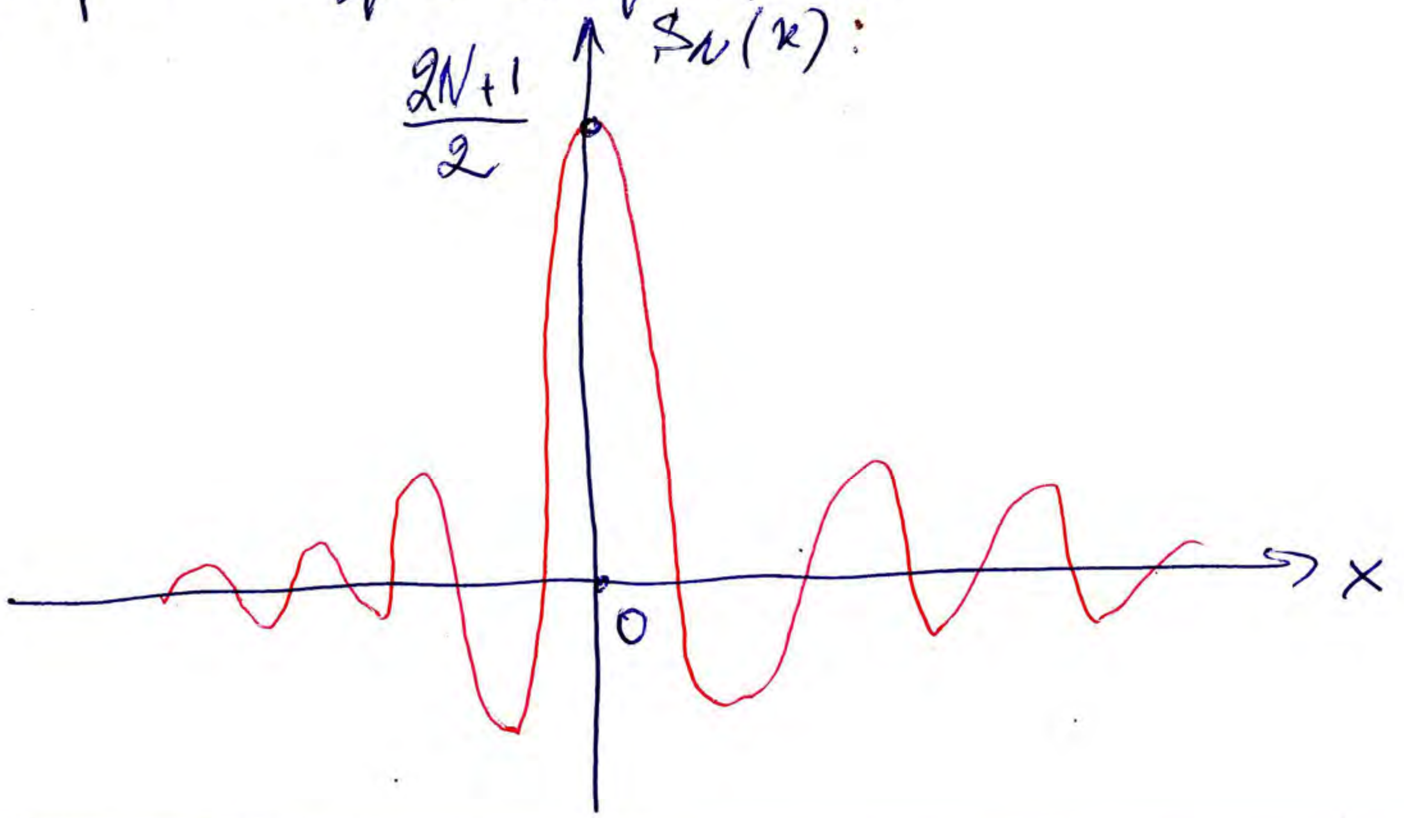
т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} \delta_N(x) f(x)\,dx \to \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) f(x)\,dx$

Значит: $\delta_N(x) \to \delta(x)$

$\delta_N(x) = \sum_{|n| \le N} e^{inx}$ – хорошая, иначе это ядро Дирихле!

Формула: $\delta_N(x) = \dfrac{\sin \frac{2N+1}{2} x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Графике ядра Дирихле:



2 к

Мат. Анализ. Семинар №15.

Сходимость рядов Фурье в точке

Пусть $f(x)\in L_1(-\pi,\pi;\mathbb{C})$. Рассмотрим коэффициент Фурье $c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

Этот интеграл определен $\forall f\in L_1(-\pi,\pi;\mathbb{C})$.

<u>Задача 1.</u> Доказать, что $c_n\to 0$ $(n\to\infty)$.

<u>Решение</u>: Воспользуемся леммой Римана

<u>Лемма 1 (Риман)</u> Если функция $\varphi\in L_1(a,b)$

то $\lim\limits_{p\to\infty}\int\limits_a^b\varphi(x)\sin px\,dx=0$,

$\lim\limits_{p\to\infty}\int\limits_a^b\varphi(x)\cos px\,dx=0$

<u>Доказательство</u>: Пусть $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая ф-ция, $\varphi\in C^1[a,b]$. Тогда, интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_a^b\varphi(x)\sin px\,dx=-\frac{1}{p}\int\limits_a^b\varphi(x)\,d\cos px\,dx=$$

$$=-\frac{1}{p}\varphi(x)\cos px\Big|_a^b+\frac{1}{p}\int\limits_a^b\varphi'(x)\cos px\,dx=$$

$$=\frac{1}{p}\left(\varphi(a)\cos pa-\varphi(b)\cos pb\right)+\frac{1}{p}\int\limits_a^b\varphi'(x)\cos px)dx$$

Все члены стремятся к нулю при $p\to\infty$ т.к. $\varphi\in C^1[a,b]$

Пусть теперь $\varphi \in L_1(a,b)$. Напомним, что множество $C^1[a,b]$ плотно в $L_1(a,b)$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi_\varepsilon \in C^1[a,b]$:

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$ Тогда

$$\left|\int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx\right| \le \left|\int_a^b [\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)] \sin px\, dx\right| + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px\, dx\right|$$

$$\le \int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px\, dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px\, dx\right|$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $p \to \infty$, т.е. $\exists P: \forall p > P$

$$\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно $\left|\int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx\right| < \varepsilon$, т.е.

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx \to 0 \ (p \to \infty).$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_a^b \varphi(x) \cos px\, dx \to 0 \ (p \to \infty).$$

Тогда, по формуле Эйлера,

$$\int_a^b f(x) e^{-inx}\, dx = \int_a^b f(x) \cos nx\, dx - i \int_a^b f(x) \sin nx\, dx \to 0$$
$$(n \to \infty).$$

Пусть $f \in L_1(-\pi,\pi)$, $f \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$

где $c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ — коэфф. Фурье

Рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$:

$$S_n(x)=\sum_{|k|\le n} c_k \cdot e^{ikx} = \sum_{|k|\le n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right)e^{ikx} =$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{2\pi}\left[\sum_{|k|\le n} e^{ik(x-t)}\right]dt =$$

<u>Лемма 2:</u> $$\sum_{|k|\le n} e^{ik\cdot a} = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}$$

<u>Доказательство:</u> Обозначим $e^{ia}=p$

$$\sum_{|k|\le n} e^{ika} = \sum_{|k|\le n} p^k = p^{-n}+p^{-n+1}+\dots+p^{n-1}+p^n =$$

$$= p^{-n}(1+p+\dots+p^{2n-1}+p^{2n}) = p^{-n}\cdot\frac{p^{2n+1}-1}{p-1} = \frac{p^{n+1}-p^{-n}}{p-1} =$$

$$=\frac{e^{i(n+1)a}-e^{-ina}}{e^{ia}-1} = \frac{e^{i\left(\frac{2n+1}{2}\right)a} - e^{-i\left(\frac{2n+1}{2}\right)a}}{e^{\frac{ia}{2}}-e^{-\frac{ia}{2}}} =$$

Разделим на $e^{\frac{ia}{2}}$

$$= \frac{\left(e^{i\left(\frac{2n+1}{2}\right)a}-e^{-i\left(\frac{2n+1}{2}\right)a}\right)/2i}{\left(e^{\frac{ia}{2}}-e^{-\frac{ia}{2}}\right)/2i} = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Формула Эйлера

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt = 2\,(f * D_n)(x)$$

где $D_n(x) = \dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$ ядро Дирихле

интеграл Дирихле

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt. \quad (1)$$

Сделаем замену $t - x = z$. Функция – 2π-периодическая. Получаем:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z)\,D_n(z)\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\,D_n(z)\,dz$$

Заметим, что $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{|k|\le n} e^{ikz}\,dz = 1$

поэтому разность $S_n(x) - f(x)$ можно записать:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+z) - f(x)\right] D_n(z)\,dz \quad (2)$$

Сумма ряда Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{inx}$ совпадает с пределом интеграла Дирихле (1) при $n\to\infty$ (в смысле главного значения)

Задача 2. (Принцип локализации).

Сходимость ряда Фурье, т.е. стремление к нулю правой части (2), и сумма ряда Фурье в точке x, т.е. предел интеграла Дирихле (1) при $n\to\infty$, зависит лишь от значений функции f в любой, сколь угодно малой окрестности $O_\delta(x)$.

Решение: Из леммы Римана следует, что

$\forall\delta>0$

$$\int\limits_{\delta<|z|<\pi} f(x+z)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz \to 0; \quad (n\to\infty)$$

$$\int\limits_{\delta<|z|<\pi}\Big(f(x+z)-f(x)\Big)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

Поскольку функции $\frac{f(x+z)}{2\sin\frac{z}{2}}$, $\frac{f(x+z)-f(x)}{2\sin\frac{z}{2}}$ являются интегрируемыми на $[-\pi,\delta]$ и $]\delta,\pi]$.

Поэтому, сходимость (1) и (2) (к нулю) определяется исключительно значениями функции f в $O_\delta(x)=(x-\delta, x+\delta)$, т.е. выполняется принцип локализации.

Значит, если две функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0, то они имеют одинаковые суммы рядов Фурье, которые сходятся или расходится <u>одновременно</u>.

<u>Теорема 1</u> Пусть $f\in L_1(-\pi,\pi)$ и в точке $x\in[-\pi,\pi]$ выполнено <u>условие Дини</u>: $\exists\,\delta>0$:

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\right|dz<\infty.$$

Тогда $S_n(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$.

<u>Док-во</u>: Запишем (2) в виде:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}}_{=\varphi(z)}\sin\frac{2n+1}{2}z\,dz$$

Тогда функция $\varphi(z)=\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}\in L_1(-\pi,\pi)$

т.к. $\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}\to 1$ $(z\to 0)$. Тогда по лемме Римана

$$S_n(x)-f(x)\to 0\ (n\to\infty).$$

<u>Теорема 2</u>. Пусть $f\in L_1(-\pi,\pi)$ и в т. $x\in[-\pi,\pi]$ выполнено <u>обобщенное условие Дини</u>: $\exists\,\delta>0$

$$\int_{-\delta}^{0}\left|\frac{f(x+z)-f(x-0)}{z}\right|dz<\infty,\quad \int_{0}^{\delta}\left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right|dz<\infty$$

где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ — левый и правый пределы функции f в т. x, тогда

$$S_n(x)\to\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\quad(n\to\infty).$$

Доказательство. Ядро Дирихле $D_n(z)$ — четная функция, поэтому

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz$$

Поэтому:

$$S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} [f(x+z)-f(x-0)]\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+z)-f(x+0)]\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz$$

Опять, в силу леммы Римана, оба этих интеграла стремятся к нулю.

Следствие 1. Пусть $f(x) \in L_1(-\pi,\pi)$. Ряд Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ сходится в каждой точке $x \in [-\pi,\pi]$, в которой функция f имеет левую и правую производные $f'_л(x)$, $f'_п(x)$ (В таких точках функция $f(x)$ имеет разрыв 1-го рода, т.е. $\exists\ f(x-0), f(x+0)$).
В этих точках сумма ряда Фурье равна $f(x)$, если x — точка непрерывности и $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, если x — точка разрыва.

Следствие 2. Если $f(x) \in C^1[-\pi,\pi]$ и является 2π-периодической функцией, $f(-\pi)=f(\pi)$, то

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

Разберем задачи из домашнего задания

<u>Задача 1.</u> Пусть $f, g \in L_2(-\pi,\pi;\mathbb{C})$ имеют коэффициенты Фурье $c_n(f)$ и $c_n(g)$. Найти коэффициенты Фурье $c_n(f\cdot g)$.

<u>Решение.</u> Из неравенства $|f(x)\cdot g(x)| \le \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2+|g(x)|^2\right)$ следует, что $f(x)\cdot g(x) \in L_1(-\pi,\pi;\mathbb{C})$. Поэтому определены коэффициенты Фурье:

$$c_n(f\cdot g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\cdot e^{-int}\,dt$$

Напомним определение свертки:

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\cdot g(x-t)\,dt.$$

Рассмотрим функции $\boxed{g_k(x) = g(-x)\cdot e^{ikx}}$.

Пусть $F_k(x) = (f*g_k)(x)$.

Было доказано, что $c_n(F_k) = c_n(f)\cdot c_n(g_k)$.

Заметим, что $c_n(g_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(-t)\,e^{ikt}\cdot e^{-int}\,dt =$

$t \to -t$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{-i(k-n)t}\,dt = c_{k-n}(g).$$

<u>Следовательно:</u> $c_n(F_k) = c_n(f)\cdot c_{k-n}(g)$.

Заметим, что $F_K(0)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\cdot e^{-ikt}dt = C_K(f\cdot g)$

С другой стороны $F_K(0)$ равно ряду Фурье функции $F_K(x)$ в т. $x=0$, т. е.

$$F_K(0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F_K)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\cdot C_{K-n}(g).$$

Следовательно: $C_K(f\cdot g)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)\cdot C_{K-n}(g)$

Поменяем K и n:

Ответ: $C_n(f\cdot g)=\sum\limits_{K\in\mathbb{Z}} C_K(f)\cdot C_{n-K}(g)$.

Замечание: Воспользовались сходимостью ряда Фурье функции $F_K(x)$ в точке $x=0$.

Задача 2. Пусть $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$. Найти ряд Фурье функции Стеклова $f_h(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt$ (предполагается, что f – 2π-периодична)

Решение: Замена: $t=x+z$
$z=t-x$

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(x+z)dz$$

Тогда:

$$c_n(f_h)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_h(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(x+z)dz\right)e^{-inx}dx=$$

Меняем порядок интегрирования:

$$= \frac{1}{2\pi 2h}\int_{-h}^{h}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)e^{-inx}\,dx\right)dz =$$

Делаем во внутреннем интеграле замену $\boxed{y = x+z}$, $x = y-z$

$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+z}^{\pi+z} f(y)e^{-in(y-z)}\,dy\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e^{inz}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+z}^{\pi+z} f(y)e^{-iny}\,dy\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e^{inz}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right)dz =$$

(Воспользовались 2π-периодичностью $f(y)e^{-iny}$)

$$= c_n(f)\cdot\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e^{inz}\,dz = c_n(f)\cdot\frac{1}{2h}\,\frac{e^{inz}}{in}\Big|_{-h}^{h} =$$

$$= c_n(f)\,\frac{1}{nh}\cdot\left(\frac{e^{inh}-e^{-inh}}{2i}\right) = c_n(f)\cdot\frac{\sin nh}{nh}$$

Ответ: $\boxed{c_n(f_h) = c_n(f)\cdot\frac{\sin nh}{nh}}$

Второе решение (неформальное)

Пусть $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ (ряд Фурье).

Проинтегрируем по x: $[x-h, x+h]$

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{int}\Big)dt = \frac{1}{2h}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int\limits_{x-h}^{x+h} e^{int}\,dt =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \frac{1}{2h}\left(\frac{e^{int}}{in}\Bigg|_{x-h}^{x+h}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \frac{1}{2h}\cdot \frac{e^{in(x+h)} - e^{in(x-h)}}{in} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \frac{1}{h}\cdot \frac{e^{inx}}{n}\left(\frac{e^{inh}-e^{-inh}}{2i}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \frac{\sin nh}{nh}\cdot e^{inx}$$

<u>Ответ:</u> $c_n(f_h) = c_n \cdot \dfrac{\sin nh}{nh}$.

Неформальное решение задачи 1.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\cdot e^{inx}$

$g(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\cdot e^{inx}$.

Тогда

$$f(x)\cdot g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \times \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g) e^{inx} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\, c_{n-k}(g) \right) e^{inx}$$

Ответ: $c_n(f\cdot g) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\cdot c_{n-k}(g)$.

Обоснование: $S_N(f) = \sum\limits_{|k|\le N} c_k(f) e^{ikx}$

$S_N(g) = \sum\limits_{|k|\le N} c_k(g)\cdot e^{ikx}$.

Тогда $S_N(f) \to f$ в $L_2(-\pi,\pi)$

$S_N(g) \to g$ в $L_2(-\pi,\pi)$.

Утв: $S_N(f)\cdot S_N(g) \to f\cdot g$ в $L_1(-\pi,\pi)$.

Док-во: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_N(f)\cdot S_N(g) - f\cdot g|\, dx \le$

$\le \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_N(f)\,(S_N(g) - g)\, dx\right| + \left|\int (S_N(f) - f)\, g\right| dx \le$

$$\leq \|S_N(f)\|_{L_2} \cdot \|S_N(g)-g\|_{L_2} + \|S_N(f)-f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2} \leq$$

т.к. $S_N(f) \to f$ в L_2, то $\|S_N(f)\|$ – огранич.

$$\leq C \cdot \|S_N(g)-g\|_{L_2} + \|S_N(f)-f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Осталось проверить, что $S_N(f) \cdot S_N(g)$ – это куски ряда Фурье соотв. функции

$$S_N(f) \cdot S_N(g) = \sum_{|k| \leq N} c_k(f) e^{ikx} \times \sum_{|n| \leq N} c_n(g) e^{inx} =$$

$$= \sum_{\substack{|k| \leq N \\ |n| \leq N}} c_k(f) \cdot c_n(g) \cdot e^{i(k+n)x} =$$

$$= \sum_{|m| \leq N} \Big(\sum_{\substack{k+n=m \\ |k| < N \\ |n| < N}} c_k(f) \cdot c_n(g) \Big) e^{imx} =$$

$$= \sum_{|m| \leq N} \Big(\sum_{\substack{|k| < N \\ |m-k| < N}} c_k(f) \cdot c_{m-k} \Big) e^{imx} \xrightarrow{L_1}$$

$$\to \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Big(\underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \cdot c_{m-k}}_{= c_m(f \cdot g)} \Big) e^{imx}$$

2К

Мат. Анализ Семинар № 16.

Другие ортогональные системы.

① Многочлены Лежандра.

Линейные комбинации функций
$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \qquad (1)$$
порождают многочлены. По теореме Вейерштрасса любую непрерывную функцию на $[a, b]$ можно равномерно приблизить многочленами. Следовательно система (1) полна в $L_2(a, b)$ для любого $[a, b]$.

Сделаем процесс ортогонализации для системы (1) в пр-ве $L_2(-1, 1)$ со скалярным произведением
$$\int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx .$$
Получим полную ортогональную систему (ортогональный базис)
$$Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots$$
Покажем, что каждый многочлен $Q_n(x)$ совпадает, с точностью до постоянного множителя, с многочленом
$$R_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$
1) Проверим ортогональность $\{R_n(x)\}$.
Пусть $n \geq m$. Заметим, что
$$\frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^n \Big|_{x=-1} = \frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^n \Big|_{x=1} = 0.$$
при $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Будем интегрировать по частям:

$$\int_{-1}^{1} R_m(x) R_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx =$$

$$= \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \cdot \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n}_{=0}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\,dx =$$

$$= \dots\dots = \frac{d^{n+m-1}}{dx^{n+m-1}}(x^2-1)^m \cdot \underbrace{(x^2-1)}_{=0}\Big|_{-1}^{1} + (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^m (x^2-1)\,dx$$

$$= (-1)^n \cdot \int_{-1}^{1} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^m \cdot (x^2-1)\,dx \qquad (2)$$

Поскольку $\frac{d^{n+m}}{d^{n+m}}(x^2-1)^m \equiv 0$ при $m < n$.

Следовательно, $\int_{-1}^{1} R_m(x)\cdot R_n(x)\,dx = 0 \quad \forall m \neq n$.

2) Каждый многочлен $R_n(x)$ имеет степень n, т.е., каждый из них лежит в подпространстве, порожденном $1, x, x^2, \dots, x^n$. Этими же свойствами обладают многочлены $Q_n(x)$. Поэтому из единственности процесса ортогонализации, $R_n(x)$ пропорциональны $Q_n(x)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Найдем нормирующий множитель для $R_n(x)$.

Равенство (2) при $m = n$ дает:

$$\int_{-1}^{1} R_n^2(x)\,dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\right](x^2-1)^n\,dx =$$

$$=(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}.$$

Равенство $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n=(2n)!$ доказывается по индукции. А последний интеграл находится с помощью B-функции: $x^2=t,\ x=\sqrt{t}$

$$\boxed{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx}=2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx=\int_{0}^{1}t^{-1/2}(1-t)^n\,dt=$$

$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$

$$=\int_0^1 t^{1/2-1}(1-t)^{n+1-1}\,dt=B\left(\frac{1}{2},\,n+1\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac12\right)\cdot\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac12+n+1\right)}=\frac{n!\,2^{n+1}}{(2n+1)!!}$$

$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

$\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$

$$\boxed{\begin{gathered}\Gamma\left(\tfrac12\right)=\sqrt{\pi},\qquad \Gamma(n+1)=n!\\ \Gamma\left(\tfrac12+n+1\right)=\Gamma\left(\tfrac12+n\right)\left(\tfrac12+n\right)=\ldots=\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\end{gathered}}$$

$$(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=\frac{(2n)!\cdot n!\cdot 2^{n+1}}{(2n+1)!!}=\frac{(2^n n!)\cdot n!\cdot 2^{n+1}}{2n+1}=$$

$$=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}.$$

Значит, норма многочлена R_n равна

$$\|R_n\|_{L_2(-1,1)}=n!\cdot 2^n\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

Получаем ортонормированную систему

$$\left\{\frac{1}{n!\,2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot R_n(x)\right\}$$

Принято рассматривать многочлены
$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$
которые называются <u>многочленами Лежандра</u>
$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } n = m. \end{cases}$$
Вот первые 4 многочлена Лежандра
$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},$$
$$P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,\quad P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}$$
Разложение функции f на $[-1,1]$ по многочленам Лежандра имеет вид:
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\cdot P_n(x),\quad C_n=\frac{2n+1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$$
Этот ряд сходится в среднем квадратичном.
Равенство Парсеваля имеет вид:
$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\cdot C_n^2$$

<u>Задача 1</u> Доказать, что многочлены Лежандра удовлетворяют дифф. уравнению:
$$(1-x^2)u''-2xu'+n(n+1)u=0,$$
$$u=u(x)=P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Решение: Обозначим $y(x)=(1-x^2)^n$

Тогда $y' = -2nx(1-x^2)^{n-1}$, т.е.

$$(1-x^2)y' + 2nx\cdot y = 0 \qquad (1)$$

Воспользуемся формулой Лейбница

$$\frac{d^k}{dx^k}(u\cdot y') = \sum_{j=0}^{k} C_k^j u^{(j)} y^{(k-j+1)}.$$

При $u = 1-x^2$ получаем:

$$\frac{d^k}{dx^k}(u\cdot y') = u\cdot y^{(k+1)} + k u'\cdot y^{(k)} + \frac{k(k-1)}{2} u''\cdot y^{(k-1)} =$$

$$= (1-x^2)y^{(k+1)} - 2k\cdot x y^{(k)} - k(k-1)y^{(k-1)} \qquad (2)$$

Находим так же по формуле Лейбница

$$\frac{d^k}{dx^k}[2nx\cdot y] = 2nx\cdot y^{(k)} + 2nk y^{(k-1)} \qquad (3)$$

Из (1) следует, что

$$\frac{d^k}{dx^k}\left((1-x^2)y' + 2nxy\right) = 0.$$

Подставляем сюда (2) и (3):

$$(1-x^2)y^{(k+1)} - 2kxy^{(k)} - k(k-1)y^{(k-1)} + 2nxy^{(k)} + 2nky^{(k-1)} = 0$$

Подставляем $k = n+1$

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2xy^{(n+1)} + n(n+1)y^{(n)} = 0.$$

Заметим, что $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = -y^{(n)}$

Следовательно, $u = P_n(x)$ удовлетворяет уравнению $(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$.

Некоторые свойства многочленов Лежандра

1) Рекуррентная формула:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad P_0 = 1, \; P_1 = x$$

2) $P(1) = 1$, $P(-1) = (-1)^n$

(подставив $x = \pm 1$ в рекуррентную ф-лу)

3) Производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot z^n = \frac{1}{(1 - 2zx + z^2)^{1/2}}$$

$$|z| < \min \left| x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right|$$

4) „Явная" формула:

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots \right.$$

---

② Ортогональные системы в произведениях

Пусть на множествах X и Y определены меры μ и ν. Рассмотрим пространства функций с интегрируемым квадратом $L_2(X, \mu)$ и $L_2(Y, \nu)$.

$$L_2(X,\mu)=\{f(x),\ \int_X |f(x)|^2 d\mu<\infty\}$$

$$L_2(Y,\nu)=\{g(y),\ \int_Y |g(y)|^2 d\nu<\infty\}$$

Теперь в произведении $Z=X\times Y$ рассмотрим меру $d\theta=d\mu\otimes d\nu$ и соответствующее ей пространство $L_2(Z,\theta)=L_2(X\times Y, d\mu\otimes d\nu)$

Задача 2. Пусть $\{\varphi_m(x)\}$ и $\{\psi_n(y)\}$ ортонормированные базисы в $L_2(X,\mu)$ и $L_2(Y,\nu)$, соответственно. Тогда система

$$f_{m,n}(x,y)=\varphi_m(x)\cdot\psi_n(y),\ m,n\in\mathbb{N}$$

образует ортонормированный базис в $L_2(Z,\theta)$.

Решение: По теореме Фубини

$$\int_Z |f_{m,n}(x,y)|^2 d\theta=\int_X |\varphi_m(x)|^2\left(\int_Y |\psi_n(y)|^2 d\nu\right)d\mu=1$$

По той же теореме

$$\int_Z f_{mn}(x,y)\cdot f_{m'n'}(x,y)\,d\theta=\int_X \varphi_m(x)\varphi_{m'}(x)\int_Y \psi_n(y)\cdot\psi_{n'}(y)\,d\nu d\mu=0$$

Установили ортонормированность системы $\{f_{m,n}(x,y)\}_{m\in\mathbb{N},\,n\in\mathbb{N}}$

Докажем полноту этой системы.
Пусть в $L_2(Z, \theta)$ существует функция $f(x,y)$, которая ортогональна всем $f_{mn}(x,y)$

$$\int\limits_{X \times Y} f(x,y) f_{mn}(x,y)\, d(\mu \otimes \nu) = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Положим: $F_m(y) = \int\limits_X f(x,y) \varphi_m(x)\, d\mu$

Легко видеть, что $F_m(y) \in L_2(Y, \nu)$.
Поэтому функция $F_m(y) \cdot \psi_n(y)$ интегрируема $\forall n \in \mathbb{N}$. Снова используем теорему Фубини:

$$\int\limits_Y F_m(y) \psi_n(y)\, d\nu = \int\limits_{X \times Y} f(x,y) f_{mn}(x,y)\, d\theta = 0$$

Однако, $\psi_n(y)$ – полная в $L_2(Y, \nu)$, т.е.

$$F_m(y) = 0 \text{ для почти всех } y \in Y$$

Следовательно, для почти каждого $y \in Y$

$$\int\limits_X f(x,y) \varphi_m(x)\, d\mu = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

В силу полноты $\{\varphi_m(x)\}$ в $L_2(X, \mu)$

$$f(x,y) = 0 \text{ при почти всех } x \in X.$$

Итак, при почти каждом $y \in Y$

мера множества

$$\mu(x\in X \mid f(x,y)\neq 0) = 0.$$

По теореме Фубини, это означает, что функция $f(x,y)$ равна нулю почти всюду в $Z = X\times Y$.

Рассмотрим $X=[-\pi,\pi]$, $Y=[-\pi,\pi]$.

$Z=[-\pi,\pi]^2=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$.

$L_2([-\pi,\pi]^2, dxdy)$ на квадрате $[-\pi,\pi]^2$.

В $L_2(-\pi,\pi)$ ортогональная система (базис)

$$1,\ \cos nx,\ \sin nx \quad (n=1,2,\dots)$$

Тогда, в $L_2((-\pi,\pi)^2)$ базис, орт. система

$$1,\ \cos mx,\ \sin nx,\ \cos mx\cos ny,\ \cos mx\sin ny,\ \sin mx\cos ny,\ \sin mx\sin ny;\ n,m\in\mathbb{N}.$$

Выглядит громоздко. Поэтому удобнее использовать комплексную форму тригонометрической системы:

$$e^{imx}\cdot e^{iny}=e^{i(mx+ny)},\quad n,m\in\mathbb{Z}.$$

Это полная ортонормальная система в $L_2((-\pi,\pi)^2)$. Этому базису отвечает ряд Фурье:

$$f(x,y) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)}, \text{ где}$$

$$c_{m,n} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-i(mx+ny)} dx\,dy$$

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|^2 dx\,dy = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} |c_{mn}|^2$$

---

③ Ортогональный базис в $L_2(\mathbb{R})$.

На пространстве с бесконечной мерой $\mathbb{R}$. Здесь нельзя построить базис из тригонометрических функций или из многочленов. В качестве исходной системы можно взять функции, быстро убывающие на бесконечности:

$$x^n \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Линейные комбинации имеют вид $P(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Они образуют всюду плотное м-во в $L_2(\mathbb{R})$. Применив процесс ортогонализации, получим функции вида

$$\varphi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}, \text{ где}$$

$H_n(x)$ - многочлен степени n.

$H_n(x)$ - многочлены Эрмита, $\varphi_n(x)$ - ф-ции Эрмита

Можно показать, что многочлены Эрмита совпадают, с точностью до коэффициента с многочленами:

$$H_n^* = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

Легко проверить, что их степень равна n, а соотношение ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \int H_n^*(x)\cdot H_m^{(*)}\, e^{-x^2}\,dx$$

проверяется интегрированием по частям

Ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\left(2^n\cdot n!\sqrt{\pi}\right)^{1/2}}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

21к Мат. Анализ. Семинар № 17

Равномерная сходимость рядов Фурье

Пусть $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ — 2π — периодическая ф-я.
Рассмотрим её ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Если ряд сходится равномерно, то его сумма — непрерывная функция. Следовательно, если у $f(x)$ есть разрывы, то равномерной сходимости не будет.

Задача 1. Пусть коэффициенты a_n удовлетворяют условию $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < \infty$.
Тогда ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ сходится равномерно, его сумма $f(x)$ — есть непрерывная функция и a_n — являются её коэффициентами Фурье.

Решение. Сходимость следует из теоремы Вейерштрасса, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

$$|a_n e^{inx}| = |a_n|,$$

Значит, есть равномерная сходимость.

Пусть $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ (1)

Если ряд сходится равномерно, то его можно интегрировать почленно.

Умножим левую и правую части на e^{-imx}:

$$f(x)\cdot e^{-imx}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}\cdot e^{-imx}$$

Равномерная сходимость сохраняется (теорема Вейерштрасса). Проинтегрируем ряд почленно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\cdot e^{-imx}\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} = a_m\cdot 2\pi \Rightarrow a_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\, dx$$

<u>Задача 2</u>. Пусть $f(x)$ - 2π-периодическая функция, дифференцируемая на $[-\pi,\pi]$, причем $f'(x)\in L_2(-\pi,\pi)$. Тогда ряд Фурье $f(x)$ сходится к $f(x)$ на всей оси.

<u>Решение</u>: Воспользуемся Задачей 1 и докажем, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$.

Действительно, проинтегрируем по частям:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\, dx = -\frac{1}{2\pi n i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\left(e^{-inx}\right) =$$

$$-\frac{1}{2\pi i n} f(x)\, e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi n i}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx}\, dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{ni}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{d_n}{ni}$$

Здесь $d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx$ — коэфф. Фурье $f'(x)$

т.е. $\boxed{d_n = in\cdot c_n}$ — связь коэфф. Фурье $f(x)$ и $f'(x)$.

Заметим, что $f'(x) \in L^2(-\pi,\pi)$. Поэтому, по равенству Парсеваля

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\, dx < \infty.$$

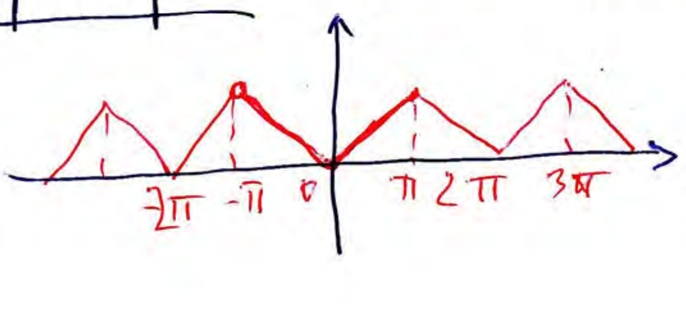
Тогда $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| = \sum \frac{|d_n|}{n} \le \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^2 + \frac{1}{n^2} < \infty.$

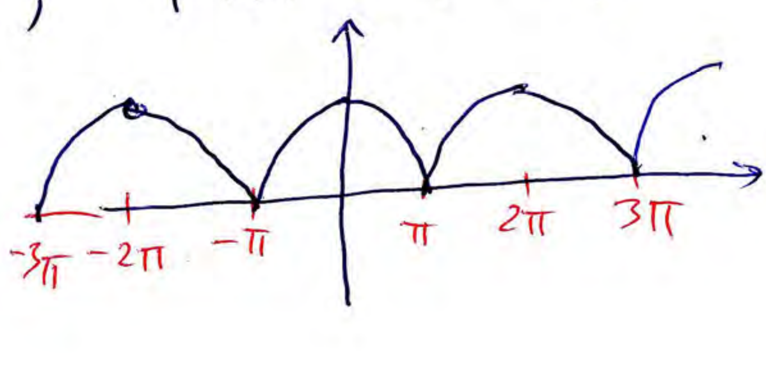
т.к. ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

Следовательно, ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ равн. сходится к функции $f(x)$.

Следствие 1. Если $f(x) \in C^1(-\pi,\pi)$ и 2π-периодическая или $f(x)$ — кусочно непрерывно-дифференцируемая функция, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно.

Примеры: $f(x) = |x|$, $f(x) = x(\pi - x)$





② Суммы Фейера, Теорема Фейера.

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, периодична: $f(-\pi) = f(\pi)$.
Ряд Фурье $f(x)$ не обязательно сходится к функции $f(x)$ равномерно (далее он может не сходиться поточечно). Есть сходимость почти всюду (проблема Лузина). Существуют примеры таких непрерывных функций.
Проблема: как восстановить непрерывную функцию по ее коэффициентам Фурье в равномерной метрике? Знаем, что в L_2 это можно сделать с помощью рядов Фурье.
А как быть в $C[-\pi, \pi]$?
Задача 3. Пусть X – нормированное пр-во. Дана последовательность $x_n \in X$, которая сходится:
$$\|x_n - x\|_X \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Рассмотрим последовательность
$$\sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Доказать, что $\sigma_n \to x$ $(n \to \infty)$, т.е. $\|\sigma_n - x\|_X \to 0$

Решение: Рассмотрим $z_n = x_n - x$, $\|z_n\|_X \to 0$.
Достаточно доказать, что $\left\| \dfrac{z_1 + \ldots + z_n}{n} \right\|_X \to 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N \quad \|z_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\{z_n\}$ – ограничена: $\exists C : \; \|z_n\| \le C \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\|\frac{z_1+z_2+\dots+z_n}{n}\right\| = \left\|\frac{z_1+\dots+z_N+z_{N+1}+\dots+z_n}{n}\right\| =$$

$$\le \frac{\sum\limits_{k=1}^{N}\|z_k\|}{n} + \frac{\sum\limits_{k=N+1}^{n}\|z_k\|}{n} \le \frac{N\cdot C}{n} + \frac{(n-N)\,\varepsilon}{2n}$$

$$\le \frac{N\cdot C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Выберем N_1: $\dfrac{NC}{N_1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, т.е. $N_1 > \dfrac{2NC}{\varepsilon}$

Тогда $\forall n > N_1$ $\quad \dfrac{NC}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

т.е. $\left\|\dfrac{z_1+\dots+z_n}{n}\right\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$.

Следовательно: $\quad \dfrac{z_1+\dots+z_n}{n} \to 0$ в X.

Вывод: $\sigma_n = \dfrac{x_1+\dots+x_n}{n} \to x$ в X.

В обратную сторону не верно

<u>Задача 4</u>. Привести пример последовательности x_n: $\sigma_n = \dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$ — сходится, а сама x_n — не сходится.

<u>Решение</u>: $X = \mathbb{R}$, $\quad x_n = \{1, 0, 1, 0 \dots\}$

Тогда $\sigma_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n}, & n \text{ — нечетные} \\ \dfrac{1}{2}, & n \text{ — четные} \end{cases}$

т.е. $\sigma_n \to \dfrac{1}{2}$ $(n\to\infty)$, $\quad x_n \not\to \dfrac{1}{2}$.

Поставленная проблема решается с помощью аналогичного усреднения.

Пусть $f \in (-\pi, \pi)$, $f(-\pi) = f(\pi)$.

$$S_n = \sum_{|k| \le n} C_k \cdot e^{ikx}, \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Положим: $$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n} \quad (2)$$

Называется суммой Фейера порядка n.

Теорема (Фейер) Если $f(x)$ – непрерывная функция с периодом 2π, то

$$\sigma_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \quad (n \to \infty)$$

сходится равномерно на всей оси.

Док-во: Воспользуемся интегралом Дирихле

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \frac{2k+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}} dz \quad \text{и}$$

подставим в (2):

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}} \right] dz.$$

Найдем сумму:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)u = \frac{\sin^2 nu}{\sin u},$$

которая получается из тождества

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\cos\alpha-\cos\beta,$$

если положить $\alpha=2ku$, $\beta=2(k+1)u$; т.е.

$$2\sin(2k+1)u\cdot\sin u=\cos 2ku-\cos 2(k+1)u$$

Тогда сумма:

$$2\sin u\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)u=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos 2ku-\cos 2(k+1)u\right)=$$

$$=1-\cos 2nu=2\sin^2 nu.$$

Получим: $$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\cdot\left(\frac{\sin\frac{nz}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2 dz$$

Обозначим: $$\Phi_n(z)=\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nz}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2$$

Называется <u>ядром Фейера</u> <u>порядка n</u>

Запишем в виде

$$(3)\quad \boxed{\sigma_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\,\Phi_n(z)\,dz}$$ <u>интеграл Фейера</u>

Сделав замену $z=t-x$ и воспользовавшись периодичностью функций f и Φ_n получим

$$\sigma_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\Phi_n(x-t)\,dt=2\pi f*\Phi_n(x)$$

опять <u>свертка</u> с ядром Фейера.

Свойства ядер Фейера

1) $\Phi_n(z) \geq 0$, функция четная

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)\,dz = 1$.

3) $\forall \delta > 0$ $\int\limits_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z)\,dz = \int\limits_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z)\,dz = \eta_n(\delta) \to 0 \ (n \to \infty)$

Первое свойство – очевидно.

Второе свойство. Положим в (3) $f(x) \equiv 1$.

Тогда $S_k(x) \equiv 1 \Rightarrow \sigma_n(x) \equiv 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Поэтому $1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)\,dz$.

Третье свойство: вытекает из неравенства:

Если $\delta \leq |z| \leq \pi \Rightarrow \left|\sin\frac{z}{2}\right| \geq \sin\frac{\delta}{2}$, т.е.

$$\left(\frac{\sin\frac{nz}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2 \Rightarrow \eta_n(\delta) \leq \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\pi-\delta}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доказательство теоремы Фейера:

Поскольку ф-ия $f(x)$ непрерывна и периодична, то она равномерно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$:

$\exists M > 0$: $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ |x'-x''|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$

Необходимо оценить разность:

$$f(x)-\sigma_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(x+z)]\Phi_n(z)\,dz=$$

$= J_- + J_0 + J_+$, где

$$J_-=\int_{-\pi}^{-\delta}[f(x)-f(x+z)]\Phi_n(z)\,dz,\quad |J_-|\le 2M\cdot\eta_n(\delta)$$

$$J_+=\int_{\delta}^{\pi}[f(x)-f(x+z)]\Phi_n(z)\,dz,\quad |J_+|\le 2M\cdot\eta_n(\delta)$$

$$J_0=\int_{-\delta}^{\delta}[f(x)-f(x+z)]\Phi_n(z)\,dz,\quad x\in(-\delta,\delta)$$

Воспользуемся равномерной непр. f

$$|J_0|\le\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(z)\,dz\le\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(z)\,dz=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Воспользовались свойствами 1 и 2 ядра Φ_n.

Теперь воспользуемся свойством 3: $\forall\varepsilon>0$

$\exists\, n_0=n_0(\delta):\ \forall n>n_0\ \ 2M\cdot\eta_n(\delta)<\frac{\varepsilon}{4}$

Тогда $|f(x)-\sigma_n(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Значит: $\sigma_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty)$ равномерно на $\mathbb{R}$.

Получаем важное

Следствие: (1-я теорема Вейерштрасса)

Любую непрерывную 2π-периодическую функцию можно (равномерно на всей оси) приблизить тригонометрическими многочленами.

Отсюда получаем, что тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ или $\{e^{inx}\}$ полна в $L_2(-\pi,\pi)$.

Задача 5. Ряд Фурье непрерывной периодической функции в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ либо расходится, либо сходится к её значению $f(x)$.

Решение. Если последовательность $S_n(x)$ сходится для некоторого x, то последовательность $\sigma_n(x)$ сходится к тому же пределу (Задача 3). Однако, по теореме Фейера, $\sigma_n(x) \to f(x)$. Следовательно, $S_n(x) \to f(x)$.

---

③ Теорема Фейера в пр-ве $L_1(-\pi,\pi)$.

Мы доказали теорему Фейера для периодических функций из пр-ва $C[-\pi,\pi]$.

Для пространства $L_2(-\pi, \pi)$ она тоже выполнена, в силу сходимости рядов Фурье в этом пространстве.
Есть одно пространство, где она выполнена

<u>Задача 6.</u> Если $f \in L_1(-\pi, \pi)$ – 2π-периодическая функция, то её суммы Фейера $\sigma_n(x)$ сходятся к $f(x)$ в $L_1(-\pi, \pi)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|\, dx \to 0 \ (n \to \infty).$$

(Домашнее задание)

<u>Задача 7.</u> Если $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$, то $f(x)$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

<u>Решение:</u> Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx}\, dx$$

Тогда функция $h(x) = f(x) - g(x)$ имеет нулевые коэффициенты Фурье. Тогда тождественно равны <u>нулю</u> все <u>суммы Фейера</u> для h, Но тогда их предел (функция $h(x)$) тоже равен нулю (почти всюду), т.е. $f(x) = g(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

2К Мат. Анализ. Семинар № 18

① О сходимости тригонометрических рядов

Рассмотрим ряды

$(S)\ \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nt$, $(C)\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos nt$.

Вопрос: 2) при каких условиях ряды (S) и (C) являются рядами Фурье некоторых суммируемых функций?
1) Когда эти ряды сходятся? поточечно? почти всюду? равномерно?

Из прошлых семинаров известно

I) Если $\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 < \infty$, то это ряды Фурье функций из $L_2(-\pi,\pi)$

II) Если $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n| < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |q_n| < \infty$, то это ряды Фурье функции из $C[-\pi,\pi]$.

I) – сходятся в $L_2(-\pi,\pi)$ (п. всюду: Лузин)

II) – сходятся равномерно на $\mathbb{R}$.

Задача 1. Если $0 \le \ldots \le q_{n+1} \le q_n \le \ldots \le q_1$ и $0 \le \ldots p_{n+1} \le p_n \le \ldots \le p_1$, то

а) ряды (C) и (S) сходятся всюду к некоторой функции;

б) Равномерно сходится на $\mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} O_\delta(2\pi n)$ $\forall \delta>0$

<u>Решение:</u> Вытекает из признака Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов вида: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x)$

Условие: 1) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right|$ — равномерно ограничен,

2) $b_n(x) \geq b_{n+1}(x)$, $b_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n\to\infty)$.

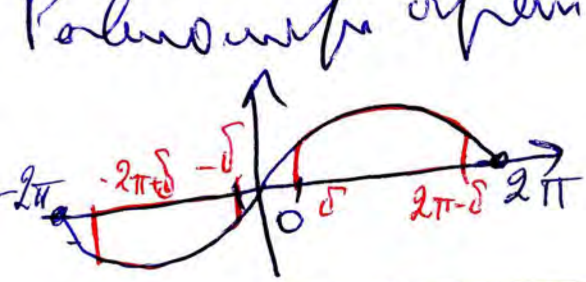
В нашем случае $a_k(x)=\sin kx$ или $\cos kx$

$b_n(x)=p_n$ или $b_n(x)=q_n$.

Равномерная ограниченность: для (S)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Равномерно огран при $\frac{\delta}{2}<\left|\frac{x}{2}\right|<\pi-\frac{\delta}{2}$



Аналогично для (C)

Примеры: 1) $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, 2) $\sum \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$

3) $\sum \frac{\sin nx}{\ln n}$ $\sum \frac{\cos nx}{\ln n}$.

Эти ряды сходятся всюду, кроме $x\in\pi\cdot\mathbb{Z}$.

Пусть $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx$, $x\in(-\pi,\pi)$.

<u>Задача 2.</u> Если ряд (S) сходится к интегрируемой функции $f(x)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$

<u>Решение:</u> Проинтегрируем ряд (S) по $[0, y]$ (это можно сделать, т.к. ряд равномерно сходится при $y < \pi$).

$$\int_0^y f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}(1-\cos nx) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\cos nx$$

Слева стоит конечное число, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\cos nx$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ – сходится

Следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье интегрируемой функции, т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ – расходится!

<u>Задача 3.</u> Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < \infty$, то оба ряда (C) и (S) сходятся к интегрируемой функции.

Домашнее задание. (Обобщение задачи 1Б а) из листка 2.

---

② О скорости убывания коэффициентов Фурье гладких функций

Пусть $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, причем $\exists f'(x) \in L_2(-\pi,\pi)$.

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad f'(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$$

На прошлом семинаре доказали: $\boxed{d_n = in\cdot c_n}$ (1)

т.е. можно формально дифференцировать ряд $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\cdot c_n e^{inx}$.

Задача 4. Пусть $f \in C^{(m-1)}[-\pi,\pi]$,

$f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j=0,1,\dots,m-1$,

$f^{(m)}(x) \in L_2(-\pi,\pi)$. Тогда

$$c_n(f^{(m)}) = (i\cdot n)^m \cdot c_n(f) \quad \text{и} \qquad (2)$$

$$|c_n(f)| = \frac{\gamma_n}{n^m} = o\left(\frac{1}{n^m}\right), \quad n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0. \qquad (3)$$

причем $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n^2 < \infty$.

Решение: применим (1) m раз:

$$c_n(f^{(m)}) = (in)\cdot c_n(f^{(m-1)}) = \dots = (in)^m \cdot c_n(f)$$

Положим теперь $\gamma_n = |c_n(f^{(m)})|$

Применим к функции $f^{(m)}(x) \in L_2(-\pi,\pi)$ равенство Парсеваля:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f^{(m)})|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(x)|^2 dx < \infty$$

при этом $|c_n| = \dfrac{\gamma_n}{n^m}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Если записать ряд Фурье через $\sin nx$ и $\cos nx$, т.е. $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

то действуют те же правила формального дифференцирования:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n \cdot n \sin nx + b_n \cdot n \cdot \cos nx$$

Для оценки сходимости коэффициентов действуют аналогичные неравенства, если учесть, что $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$

$b_n(f) = i\,(c_n(f) - c_{-n}(f))$. т.е.

$$|a_n| \le \frac{\alpha_n}{n^m}\,; \quad |b_n| \le \frac{\beta_n}{n^m}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

причем $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n + \gamma_{-n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 < \infty$.

При исследовании сходимости рядов Фурье производных $f^{(m)}(x)$ используются те же методы, что и для функции $f(x)$.

<u>Например</u>: Если $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$

сходится равномерно, а

$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ — сходится всюду, кроме точки $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, и равномерно на $\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}U_\delta(2k\pi)$.

$f''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\sin nx$ — расходится

<u>③ О скорости сходимости ряда Фурье в зависимости от гладкости функции</u>

Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям задачи 4, т.е. $f\in C^{(m-1)}[-\pi,\pi]$, $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$, $j=0,\dots,m-1$

причем $\exists\, f^{(m)}\in L_2(-\pi,\pi)$.

<u>Задача 5</u>. Доказать, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно, причем $|f(x)-S_n(x)|\le\frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}}$, $\varepsilon_n\to 0$

<u>Решение</u>: Если $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, причем $f'(x) \in L_2(-\pi,\pi)$, то, как установили в задаче 4 $(m=1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $|c_n| \le \frac{\gamma_n}{n}$, причем $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n^2 < \infty$. Следовательно,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n e^{inx}| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\gamma_n}{n} \le \frac{1}{2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2}\Big)$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса о мажорантной сходимости, ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$ <u>сходится равномерно</u>

и сумма этого ряда, очевидно, есть $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Оценим отклонение $f(x)$ от $S_n(x)$:

$$|f(x) - S_n(x)| = \Big|\sum_{|k|\ge n+1} c_k e^{ikx}\Big| \le \sum_{|k|\ge n+1} |c_k| \le$$

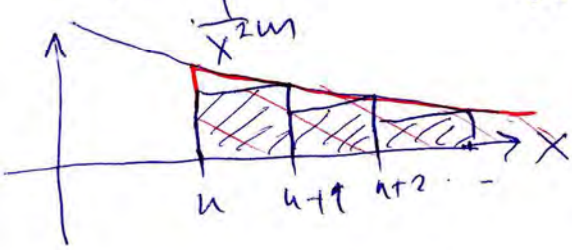
$$\le \sum_{|k|\ge n+1} \frac{\gamma_k}{k^m} \le \Big(\sum_{|k|\ge n+1} \gamma_k^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{|k|\ge n+1} \frac{1}{k^{2m}}\Big)^{1/2}$$

Применили неравенство Коши-Буняковского к суммам.

Обозначим $\delta_n = \left(\sum\limits_{|k|\geq n+1} \gamma_k^2\right)^{1/2} \to 0$ т.к. $\sum \gamma_n^2 < \infty$ сходится.

Оценим второй сомножитель:

$$\sum_{|k|\geq n+1} \frac{1}{k^{2m}} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{2m-1}\,\frac{1}{n^{2m-1}}$$



Следовательно:

$$\left(\sum_{|k|\geq n+1} \frac{1}{k^{2m}}\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot \frac{1}{n^{m-1/2}}$$

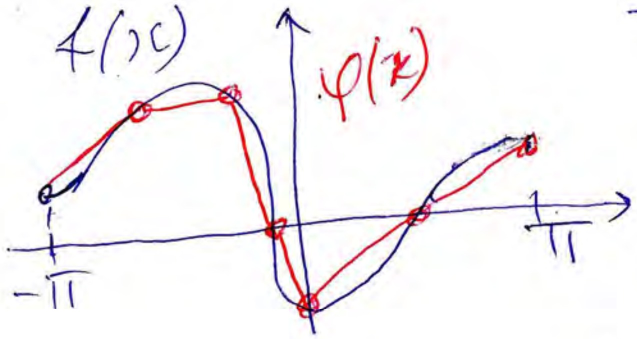
Положим $\varepsilon_n = \frac{\delta_n}{\sqrt{2m-1}}$, тогда

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}}$$

Вывод: чем глаже функция $f(x)$, тем быстрее сходится к ней её ряд Фурье.

С помощью этого результата при $m=1$ можно ещё раз получить теорему Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной функции тригонометрическими полиномами.

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда $f(x)$ — равномерно непрерывна и при $\forall \varepsilon > 0$ её можно приблизить кусочно-линейной функцией $\varphi(x)$:



$\varphi(\pi) = \varphi(-\pi)$

Тогда по задаче 5 при $m = 1$

$$\left|\varphi(x) - S_n(x)\right| \le \frac{\varepsilon_n}{n^{1/2}} \to 0 \ (\varepsilon \to ?)$$

Пусть $\frac{\varepsilon_n}{n^{1/2}} < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда $|f(x) - S_n(x)| \le \varepsilon$.

Ряд Фурье первообразной

Пусть $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$, 2π-периодична.
Пусть $F(x)$ – первообразная $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$

Задача 6. Найти связь коэффициентов Фурье функций $F(x)$ и $f(x)$. При каком условии $F(x)$ – 2π-периодическая функция?

Решение: По формуле Ньютона – Лейбница

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow c_0 = 0$$

т.е. $f(x)$ имеет нулевой коэффициент c_0.

$n \neq 0$

Пусть $d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx}\,dx =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x)}{-in}\,d\left(e^{-inx}\right) = \frac{1}{2\pi}\Bigg(\underbrace{\frac{F(x)}{-in}e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx\Bigg) = \frac{c_n}{in}$$

Следовательно, $d_n = \frac{c_n}{in}$, $n \neq 0$.

А как найти d_0?

Можно взять любое число, т.к. первообразная функции $f(x)$ определяется с точностью до константы.

Вывод: $F(x) \sim d_0 + \sum\limits_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$

Чтобы записать через cos и sin:

Если $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

Однако: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow a_0 = 0$. Получаем:

$$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx$$

Обсудим вопрос о сходимости ряда Фурье первообразной.

Задача 7. Пусть $f \in L_2(-\pi,\pi)$,

$f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$. Сходится в $L_2(-\pi,\pi)$

Тогда после интегрирования по x

$$\int_0^x f(t) = c_0(f)x + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n(f)}{in}\left(e^{inx} - 1\right),$$

при этом ряд сходится равномерно

Решение: Рассмотрим функцию

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt - C_0(f)\cdot x\,, \quad x\in[-\pi,\pi].$$

($C_0(f)$ – нулевой коэффициент Фурье f)

Тогда $F\in C[-\pi,\pi]$, $F(\pi)=F(-\pi)$, т.к.

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - 2\pi C_0(f)=0$$

Поскольку $F'(x)=f(x)-C_0$, то $F'(x)$ принадлежит $L_2(-\pi,\pi)$ и по задаче 5 ряд Фурье функции $F(x)$ равномерно сходится на $[-\pi,\pi]$. А по формуле (1)

$$C_n(F)=\frac{C_n(F')}{in} \quad \text{при } n\neq 0.$$

Однако, очевидно $C_n(F')=C_n(f)$, $n\neq 0$.

Следовательно: $F(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} C_n(F)e^{inx}$

Сходится равномерно, тогда при $x=0$.

$$0=F(0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(F).$$

Тогда $\int_0^x f(t)dt - C_0(f)x = F(x) - F(0) = \sum\limits_{n\neq 0}\frac{C_n(f)}{in}(e^{inx}-1)$

Вывод: ряды Фурье функций из L_2 можно интегрировать формально.

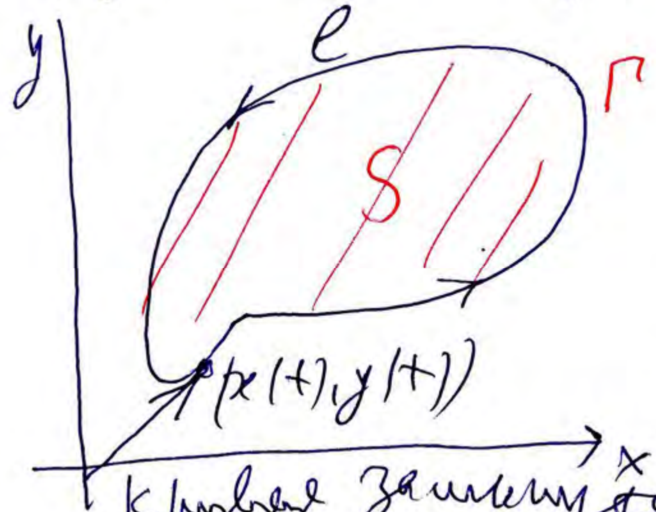
2к

Мат. Анализ. Семинар № 19

Применение рядов Фурье

① Изопериметрическое неравенство

Классическая задача: среди всех кривых на плоскости, длина которых не превосходит числа L, найти кривую, ограничивающую наибольшую площадь.



Кривая Γ: $x = x(t),\ y = y(t),\quad t \in [0, T]$

Кривая гладкая: $x(t), y(t) \in C^1[0, T]$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t),\quad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}(t).$$

Кривая замкнутая: $x(0) = x(T),\ y(0) = y(T)$.

Длина кривой: $l(\Gamma) = \int\limits_0^T \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$

Площадь внутри кривой (против час. стрелки)

$$S(\Gamma) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left(x(t)\cdot \dot{y}(t) - y(t)\cdot \dot{x}(t)\right) dt$$

По условию задачи: $l \le L$

Найти $\max\limits_{\Gamma \in C^1} \{ S(\Gamma) : l(\Gamma) \le L \}$

Поменяем параметризацию на кривой, перейдем к натуральному параметру:

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{(\dot x(t'))^2 + (\dot y(t'))^2}\, dt'$$

получим $s(0)=0$, $s(T)=L$,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot x(t))^2 + (\dot y(t))^2} \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(\dot x(t))^2+(\dot y(t))^2}}$$

Тогда $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}$;

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot y}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}$$

Γ: $x(s), y(s)$, $s\in[0,L]$, $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$

Для удобства введем параметризацию:

$$u = 2\pi\cdot\frac{s}{L} - \pi, \quad u\in[-\pi,\pi].$$

Тогда Γ: $x = x(u)$, $y = y(u)$

причем $x(-\pi) = x(\pi)$, $y(-\pi) = y(\pi)$.

Обозначим $z(u) = x(u) + i\,y(u)$ — комплексная функция

$$\boxed{|z'(u)|^2 = (x'(u))^2 + (y'(u))^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}}$$

Найдем функцию, которая выражает

выразить $S(\Gamma)$ через $z(u)$.

<u>Найдём:</u> $\overline{z}\cdot z' = (x-iy)(x'+iy') =$

$= x\cdot x' + y\cdot y' + i(xy' - y\cdot x') =$

$= \frac{1}{2}(x^2+y^2)' + i(xy' - y\cdot x')$

Следовательно:

$$S(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(x\cdot y' - y\cdot x')\,du = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\cdot z'\,du +$$

$$-\frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+y^2)'\,du + \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\cdot z'\,du =$$

$$= -\frac{1}{2i}\underbrace{(x^2+y^2)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\cdot z'\,du, \text{ т.к. } z(-\pi)=z(\pi)$$

<u>Получим:</u> $S(\Gamma) = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\cdot z'\,du.$

Разложим $z(u)$ в ряд Фурье

$$z(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\cdot e^{inu}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z(u)e^{-inu}\,du$$

Тогда ряд Фурье для производной примет вид:

$$z'(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\cdot c_n e^{inu}$$

Применим равенство Парсеваля:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\cdot|c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|z'(u)|^2\,du = \frac{L^2}{4\pi^2}$$

А для площади $S(\Gamma)$ получаем

$$S = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi} z'(u)\cdot\overline{z}(u)\,du = \pi\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n\cdot c_n)\overline{c_n}$$

(Равенство Парсеваля для скалярного произведения $z'(u)$ и $z(u)$ в комплексной форме). Следовательно, $\dfrac{S}{\pi} = \sum n\cdot|c_n|^2$

В итоге получаем тождество:

$$\frac{L^2}{4\pi^2} - \frac{S}{\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(n^2-n)\cdot|c_n|^2 \geqslant 0$$

Заметим, что правая часть неотрицательна, причем равенство достигается лишь условии $c_n = 0 \ \forall n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0, 1$.

Поэтому для любой кривой Γ выполнено изопериметрическое н-во:

$$\boxed{4\pi S \leq L^2.}$$

Равенство достигается при $z(u) = c_0 + c_1\cdot e^{iu}$

это окружность!

(2) Решение уравнения теплопроводности.

$$Q = \{(x,t),\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$u = u(x,t),\quad u \in C(\overline{Q}),\quad \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(\overline{Q})$$

Уравнение теплопроводности $(a > 0)$

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\quad (x,t) \in Q.$$

Начальные условия:

$$(2)\quad u(x,0) = \varphi(x),\quad x \in [0,l];\quad \varphi \in C[0,l]$$

Граничные условия

$$(3)\quad u(0,t) = u(l,t) = 0,\quad t \in [0,T].$$

Метод Фурье (метод разделения переменных) для решения этой задачи.

Шаг 1: Ищем решения специального вида:

$$u(x,t) = Y(x) \cdot Z(t)$$

Подставляем в уравнение (1):

$$Z'(t) \cdot Y(x) = a^2 \cdot Y''(x) \cdot Z(t)$$

$$\frac{Z'(t)}{a^2 Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda$$

Не зависит от t и от x.

$$Y''(x) = \lambda Y(x), \quad Z'(t) = \lambda \cdot Z(t).$$

Частное решение должно удовлетворять граничному условию (2):

$$Y(0)\cdot Z(t) = Y(l)\cdot Z(t) = 0 \Rightarrow Y(0) = Y(l) = 0$$

<u>ШАГ 2.</u> Находим все решения $Y(x)$ удовлетворяющие граничному условию:

$$\begin{cases} Y''(x) = \lambda Y(x), \; x \in [0, l], & (4) \\ Y(0) = Y(l) = 0. & (5) \end{cases}$$

Называется <u>задача Штурма-Лиувилля</u> при $Y \not\equiv 0$. λ - называется <u>собственным значением</u>, $Y(x)$ - называется <u>собственной функцией</u> задачи Ш-Л. (4), (5).

Если $\lambda > 0$, то общее решение (4):

$$Y(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

Условие (5) влечет:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} l} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} l} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

Следовательно, при $\lambda > 0$ нет решений задачи Ш-Л.

Если $\lambda = 0$, то $y''(x) = 0 \Rightarrow$

$y(x) = C_1 + C_2 \cdot x$, $y(0) = y(l) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

Опять <u>нет</u> решения задачи Ш-Л.

<u>Пусть</u> $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$. Тогда общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 \cdot \sin \mu x + C_2 \cdot \cos \mu x$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$.

$y(l) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot \sin \mu \cdot l = 0 \Rightarrow \sin(\mu l) = 0$

т.е. $\mu l = k \cdot \pi \Rightarrow \mu = \dfrac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$

Следовательно,

$$\lambda_k = -\frac{k^2 \cdot \pi^2}{l^2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

<u>Нашли собственные значения.</u>

Тогда <u>собственные функции:</u>

$$Y_k(x) = \sin \mu_k \cdot x, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \; k \in \mathbb{N}$$

<u>Нашли решения задачи Ш-Л. (4)-(5)</u>

<u>ШАГ 3</u> Решаем уравнение для $Z(t)$ с найденными собственными значениями:

$$Z'(t) = -a^2 \mu_k^2 \cdot Z(t). \quad (6)$$

Решение: $Z_k(t) = C_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 \cdot t}$

Мы нашли все частные решения вида $u(x,t) = Y(x) \cdot Z(t)$, удовлетворяющие уравнению теплопроводности (1) и граничным условиям (3).

$$u_k(x,t) = C_k \cdot e^{-a^2\mu_k t} \cdot \sin \mu_k x, \quad k \in \mathbb{N}$$

ШАГ 4. Решение задачи (1), (2), (3)

Ищем в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-a^2\mu_k t} \cdot \sin \mu_k x.$$

Подставляем $t = 0$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin \mu_k x$$

$$\boxed{\mu_k = \frac{k\pi}{\ell}, \quad k = 1, 2, \dots}$$

Это ряд Фурье $\varphi(x)$ по ортогональной системе $\{\sin \frac{k\pi}{\ell} x, \ k \in \mathbb{N}\}$

Она полная. При $\ell = \pi$ $\{\sin kx\}$

(Теорема Вейерштрасса).

Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$:

Напомним, что

$$\int_0^l \sin^2 \mu_k x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1-\cos 2\mu_k x)\,dx =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{\sin\frac{2k\pi}{l}\cdot x}{\mu_k}\Big|_0^l = \frac{l}{2}$$

Следовательно, коэффициенты Фурье:

$$\boxed{C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\sin\mu_k x\,dx}$$

ШАГ 5. Необходимо обосновать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\cdot\sin\mu_k t$$

является решением задач (1), (2), (3), т.е. найти условия, при которых он сходится, его можно дифференцировать по t один раз, по x два раза, и удовлетворяет уравнению (1), и граничным условиям (3) и начальным условиям (2).

2к Мат. Анализ. Семинар № 20

Решение уравнения теплопроводности. Обоснование метода Фурье

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q = (0,l) \times (0,T)$

(2) $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in [0,l]$

(3) $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t \in [0,T]$

Формула решения:

(4) $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \, e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x$

где $\mu_k = \dfrac{k\pi}{l}$, $C_k = \dfrac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \, ds$ — коэфф. Фурье ф-ии $\varphi(x)$, $k = 1, 2, \ldots$

При каких условиях (4) задает решение задачи (1), (2), (3)?

Задача 1. Пусть $\varphi(x) \in C[0,l]$, причем $\exists\, \varphi'(x) \in L_2(0;l)$, и выполнены условия согласования $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Тогда $\exists!$ решение задачи (1), (2), (3), которое задается формулой (4).

Решение: $u(x,t)$ – удовлетворяет граничным условиям (3), т.к. им удовлетворяют все члены ряда (4).
Начальные условия (2) так же выполнены, т.к. $u(x,0)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \sin \mu_k x$ – ряд Фурье функции $\varphi(x)$, который равномерно сходится, т.к. $\varphi(0)=\varphi(l)=0$ и $\varphi'(x)\in L_2(0,l)$.
Осталось проверить, что ряд (4) сходится, его сумма $u(x,t)$

1) непрерывна в $\overline{Q}$

2) имеет непрерывные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в Q

3) удовлетворяет уравнению (1).

Докажем эти утверждения

$$|C_k e^{-a^2\mu_k t}\sin(\mu_k x)|\le |C_k| \quad \forall (x,t)\in\overline{Q}$$

Установим, что ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|<\infty$$

Тогда по признаку Вейерштрасса

Получим равномерную сходимость ряда (4). Имеем:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\mu_k s)\,ds = -\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\cdot\frac{d\cos(\mu_k s)}{\mu_k} =$$

$$= -\frac{2}{l\mu_k}\underbrace{\varphi(s)\cdot\cos(\mu_k s)\Big|_0^l}_{=0\ \text{условия согласования}} + \frac{2}{k\pi}\int_0^l \varphi'(s)\cdot\cos(\mu_k s)\,ds =$$

$$= \frac{l}{k\pi}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l \varphi'(s)\cos(\mu_k s)\,ds = \frac{l}{k\pi}\cdot d_k,$$

где d_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi'(x)$ по ортогональной системе $\{\cos\mu_k x\}$. В силу неравенства Бесселя, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \le \frac{2}{l}\cdot\int_0^l |\varphi'(x)|^2 dx < \infty.$$

сходится. Тогда из неравенства

$$|C_k| = \frac{l}{k\pi}|d_k| \le \frac{l}{2\pi}\left(|d_k|^2 + \frac{1}{k^2}\right)$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|$$

Значит, ряд (4) сходится равномерно, его сумма $u(x,t)$ является непрерывной функцией на $\overline{Q}$, и при этом:

$$u(x,t) \to \varphi(x) \text{ при } t \to 0 \quad \forall x \in [0,l]$$

$$u(x,t) \to 0 \text{ при } x \to 0+,\ x \to l-$$

т.е. $u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию (2) и граничному условию (3).

Установим дифференцируемость решения. Продифференцируем формально ряд (4) один раз по t и 2 раза по x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 C_k e^{-a^2 \mu_k^2 t} \sin \mu_k x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 C_k e^{-a^2 \mu_k^2 t} \sin \mu_k x.$$

Покажем, что $\forall$ фиксированного $\tau > 0$ эти ряды равномерно сходятся при $x \in [0,l]$, $t \geq \tau$.

Поскольку $\varphi(x) \in C[0,l]$, то она ограничена:

$\exists M$: $\quad |\varphi(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,l]$

Следовательно $\quad |C_k| = \left|\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \, ds\right| \leq \frac{2}{l}\int_0^l M\,ds = 2M$

т.е. $\quad |C_k| \leq 2M$

Поэтому, при $t \geq \tau > 0$

$$|k^2 C_k e^{-a^2\mu_k t}\sin\mu_k x| \le 2M k^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2\tau}$$

Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k^2 e^{-\alpha k^2}}_{=a_k}, \text{ где } \alpha = \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\tau > 0.$$

Этот ряд сходится по признаку Даламбера.

т.к. $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2}{k^2}\cdot e^{-\alpha(2k+1)} \to 0 \ (k\to\infty).$$

Тогда ряды, полученные формальным дифференцированием, сходятся равномерно. Следовательно, ряд (4) можно почленно дифференцировать один раз по t и 2 раза по x в области $x\in l$, $t\geq\tau$.

Следовательно сумма ряда $u(x,t)$ имеет непрерывные производные при $t\geq\tau$ $\forall\tau>0$.

Кроме того, $u(x,t)$ – удовлетворяет уравнению (1), поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\sum k^2 C_k e^{-a^2\mu_k t}\sin\mu_k x + a^2\cdot\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sum k^2 e^{-a^2\mu_k t}\sin\mu_k x = 0$$

В области $x\in[0,l]$, $t>0$.

З.н.ч.т. (4) – определяет решение (1), (2), (3).

Задача 2 Док. единственность этого решения.
Пусть есть два решения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$.
Рассмотрим разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.
Функция $u(x,t)$ является решением этой же задачи, с нулевыми нач. условиями:

(5) $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in Q$$

(6) $$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,l]$$

(7) $$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]$$

Покажем, что $u(x,t) \equiv 0$ в $(x,t) \in Q$.
Рассмотрим коэффициент Фурье функции $u(x,t)$ при фиксированном $t > 0$:

$$C_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \cdot \sin \mu_k x \, dx$$

Умножим уравнение (5) на $\sin \mu_k x$ и проинтегрируем обе части по $[0,l]$:
Слева получим:

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \sin \mu_k x \, dx = \frac{d}{dt} \int_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx = \frac{l}{2} C_k'(t)$$

Справа проинтегрируем по частям 2 раза:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \sin \mu_k x \, dx = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} \sin \mu_k x \Big|_0^l}_{0} - \mu_k \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \mu_k x \, dx$$

$$= -\mu_k \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\cdot \cos\mu_k x\,dx = -\mu_k\, \underbrace{u(x,t)\cos\mu_k x \Big|_0^l}_{=0}$$

$$-\mu_k^2 \int_0^l u(x,t)\sin \mu_k x\,dx = -\frac{l}{2}\,\mu_k^2 \cdot c_k(t).$$

Следовательно, $c_k(t)$ удовлетворяет ур-ю:

$$\frac{d}{dt}\, c_k(t) = -a^2\mu_k^2\, c_k(t) \Rightarrow c_k(t)=c_k(0)\,e^{-a^2\mu_k^2 t}.$$

Однако, $u(x,t)=0$ при $t=0$. Тогда, в силу непрерывности $u(x,t)$ на $\overline{Q}$, $c_k(0)=0$.

Следовательно $c_k(t)\equiv 0$ $\forall t\geq 0$.

А если у непрерывной функции все коэффициенты Фурье равны нулю, то она тождественный нуль, т.е.

$u(x,t)\equiv 0$ $\forall (x,t)\in\overline{Q}$, а значит

$u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ $\forall (x,t)\in\overline{Q}$.

Задача 3. В условиях задачи 1, показать, что решение $u(x,t)\in C^\infty(Q)$.

Решение: Ряд $u(x,t)=\sum_{k=1}^\infty c_k e^{-a^2\mu_k^2 t}\sin\mu_k x$ можно сколько угодно раз дифференцировать по x и по t. При этом при $\forall t \geq \tau > 0$.

будут мажорантные ряды, которые имеют мажорантами ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{2p} e^{-\alpha k}$, $\alpha > 0$, которые сходятся. Значит производные то же будут сходиться, и можно дифференцировать почленно, т.е. $u(x,t) \in C^{\infty}(Q)$.

Заметим, что при $t=0$ $u(x,0)=\varphi(x)$ может не быть столь гладкой.

В этом заключается свойство сглаживания уравнения теплопроводности.

---

(2) Функция Грина уравнения теплопроводности.

Перепишем формулу (4) подставив в нее вместо C_k соответствующий интеграл

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-a^2\mu_k^2 t}\sin\mu_k x =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\mu_k x)\sin(\mu_k s)\, e^{-a^2\mu_k^2 t}\, ds =$$

$$=\int_0^l \left[\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k x)\cdot\sin(\mu_k s)\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\right]\varphi(s)\, ds$$

Мы поменяли местами суммирование и интегрирование, т.к. соответствующий ряд равномерно сходится, поскольку имеем мажоранту:

$$e^{-a^2\mu_k t} \le e^{-a^2\mu_k T} = e^{-\alpha k^2} \le \frac{M_n}{k^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Следовательно, его можно интегрировать почленно.

В итоге, если обозначить

$$G(x, s, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k x) \sin(\mu_k s) \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}$$

где $x, s \in [0, l]$, $t > 0$.

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^l \underbrace{G(x, s, t)}_{\text{функция Грина}} \varphi(s)\, ds}, \quad x, s \in [0, l], \; t > 0.$$

$G(x, s, t)$ называется функцией Грина задачи (1)(2)(3) для ур. теплопроводности.

Свойства функции Грина:

1) симметричность: $G(x, s, t) = G(s, x, t)$

2) $G(x, s, t) \in C^{\infty}([0, l] \times [0, l] \times \mathbb{R}_+)$.

3) При $t = 0$ она не определена!

4) $G(x,s,t) \geq 0 \quad \forall x, s \in [0,l],\ t > 0$.

(Доказывается с помощью принципа максимума)

5) $G(x,s,t)$ – удовлетворяет по x и t уравнению теплопроводности и граничным условиям:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad \forall s \in [0,l],\ x \in [0,l],\ t > 0.$$

$$G(0,s,t) = G(l,s,t) = 0 \quad \forall s \in [0,l]\ \forall t > 0.$$

Поскольку G это линейная комбинация функций $\sin \mu_n x \cdot e^{-a^2 \mu_n^2 t}$, которые удовлетворяют уравнению теплопроводности (1) и граничным условиям и все ряды сходятся при $t \geq \tau > 0$.

Анализ 2-2 2021 Семинары 21.
Метод Фурье в уравнении теплопроводности.
Комментарии, ответы, указания

Задача 1.
Решаем уравнение
$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ x \in [0,\pi], t > 0,$$
с граничными условиями
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$
и с начальным условием
$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,\pi].$$

Частное решение ищем в виде произведения $u(x,t) = Y(x)T(t)$. Подставляем в уравнение и разделяем переменные:
$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda$$

Если $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2$, то общее решение второго уравнения имеет вид $Y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, но граничные условия $Y(0) = Y(\pi) = 0$ влекут $A = B = 0$. Значит таких ненулевых решений при $\lambda > 0$ нет.

Если $\lambda = 0$, то $Y(x) = A + Bx$, и снова из граничных условий следует $A = B = 0$. Опять нет решений.

Поэтому λ отрицательно, $\lambda = -\mu^2$, общее решение имеет вид $Y(x) = A\sin\mu x + B\cos\mu x$.

Из первого граничного условия следует, что $B = 0$, т.е., $Y(x) = \sin\mu x$, из второго граничного условия $\sin\mu\pi = 0$, т.е., $\mu = k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теперь решаем второе уравнение для функции $T(t)$, зависящей только от времени:
$$T'(t) = -k^2a^2T(t),$$

Общее решение $T(t) = b_k\exp(-a^2k^2t)$.

Решение уравнения теплопроводности с граничными условиями – суперпозиция частных решений
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-a^2k^2t}\sin kx.$$
В этой формуле b_k – произвольные коэффициенты, которые необходимо подобрать исходя из начального условия. Подстановка $t = 0$ дает
$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$
так что b_k – это коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, по ортогональной системе $\{\sin kx\}, k \in \mathbb{N}$
$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin kx dx.$$

Для пункта а) $b_1 = 1$, и $b_k = 0$, при всех $k > 1$. Ответ:

$$u(t,x) = e^{-a^2 t} \sin x.$$

Для пункта б) находим коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos x - \cos 3x) \sin kx dx = \\
=& \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(k+1)x + \sin(k-1)x - \sin(k+3)x - \sin(k-3)x)\, dx = \\
=& \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(k+3)x}{k+3} + \frac{\cos(k-3)x}{k-3} - \frac{\cos(k+1)x}{k+1} - \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right) \Big|_0^{\pi} = \\
=& \frac{4k}{\pi} \left(\frac{1}{k^2-1} - \frac{1}{k^2-9} \right)
\end{aligned}$$

если k четно и ноль в противном случае. При $k = 1$, 3 тоже нули. Ответ:

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\pi} \left(\frac{1}{4k^2-1} - \frac{1}{4k^2-9} \right) e^{-a^2 4k^2 t} \sin 2kx.$$

Найдем предельное распределение температуры, Переходя к пределу при $t \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = u_\infty(x) = 0.$$

Что не удивительно, поскольку на концах поддерживается температура ноль. Все тепло уходит наружу.

Задача 2.

а) Решение $u(x,t) = x$. Находится подбором. Достаточно подставить в уравнение, граничные условия и начальные условия.

б) Решается аналогично задаче 1. Нужно разложить в ряд Фурье начальную функцию $\varphi(x) = x$:

$$\begin{aligned}
b_k &= 2 \int_0^1 x \sin k\pi x dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k}, \\
\varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} \sin \pi k x.
\end{aligned}$$

А затем воспользоваться общей формулой для решения. Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} e^{-(k\pi a)^2 t} \sin \pi k x.$$

Отметим, что начальная функция $\varphi(x) = x$ не удовлетворяет нулевому граничному условию на правом конце. Тем не менее, эта формула дает решение задачи при

$t > 0$. Она удовлетворяет уравнению и граничным условиям при $t > 0$ и при всех $x \in [0, 1]$. (Здесь эта функция бесконечно гладкая! Объясните почему?) А при $t = 0$, как следует из теорем о точечной сходимости рядов Фурье, этот ряд сходится к x при $x \in [0, 1)$, а при $x = 1$, этот ряд сходится к $1/2$ (Почему?)

В итоге мы решили задачу всюду, кроме одной точки, в которой не выполнено ни граничное условие, ни начальное условие. Тем не менее, такие решения тоже допускаются, они называются обобщенными решениями.

в) В этом пункте требуется решить уравнение

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ x \in [0,1],\ t > 0,$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 1,$$

и с нулевым начальным условием

$$u(x,0) = 0,\ x \in [0,\pi].$$

В этой задаче мы имеем дело с неоднородными (т.е., с ненулевыми) граничными условиями.

Решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t),$$

где $u_0(x,t)$ – некоторое частное решение этого уравнения с заданными неоднородными граничными условиями (не требуем выполнения начальных условий), которое находим, например, подбором. А $v(x,t)$ – решение уравнения с ОДНОРОДНЫМИ (т.е., с нулевыми) граничными условиями и с начальным условием $v(x,0) = \varphi(x) - u_0(x,0)$. Эту функцию уже честно находим по методу Фурье.

Итак, частное решение $u_0(x,t) = x$ мы уже нашли в пункте а). Осталось найти решение $v(x,t)$ однородной задачи с начальным условием $v(x,0) = 0 - x = -x$. Здесь поможет пункт б). Ответ:

$$u(x,t) = x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} e^{-(k\pi a)^2 t} \sin \pi k x.$$

Как мы видим, это решение тоже обобщенное. Оно годится всюду кроме точки $x = 1$ при $t = 0$.

Задача 3.

Решаем уравнение

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ x \in [0,l], t > 0,$$

с граничными условиями

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

и с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,l].$$

Необходимо повторить все шаги метода Фурье, применительно к новым граничным условиям.

а) В результате получится частные факторизованные решения вида

$$u(t,x) = e^{-a^2\mu_k^2 t}\cos\mu_k x,$$

где $\mu_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Вместо синусов будут косинусы и константа. Эти функции как раз удовлетворяют новому граничному условию. Напомним, что система $\{\cos\mu_k x\}$ является ортогональной и образует базис в $\text{Ł}_2(0,l)$.

б) Общее решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-a^2\mu_k^2 t}\cos\mu_k x$$

где

$$a_k = 2/l\int_0^l \varphi(x)\cos\mu_k x dx,\ k > 0, \qquad a_0 = 1/l\int_0^l \varphi(x)dx \quad -$$

коэффициенты разложения $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе $\cos\mu_k x$ на $[0,l]$.

в) Аналогично теореме 1 из лекции 12 доказывается утверждение: Пусть функция $\varphi(x)$ является абсолютно непрерывной на $[0,l]$, ее производная $\varphi'(x) \in L_2(0,l)$ и выполнено условие согласования $\varphi_x(0) = \varphi_x(l) = 0$. Тогда существует классическое решение этой задачи, представимое выписанным выше рядом с соответствующими коэффициентами. Это решение единственно.

г) Решается аналогично нулевым граничным условиям. Нужно в формулу для решения подставить выражения для коэффициентов Фурье и вынести интеграл и интегрируемую функцию $\varphi(x)$ за суммирование. Что останется и будет функцией Грина:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^l G(x,y,t)\varphi(y)dy,\ \text{где} \\ G(x,y,t) &= \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\mu_k x\cos\mu_k y e^{-a^2\mu_k^2 t}. \end{aligned}$$

Задача 4.

Воспользоваться задачей 3 и посчитать коэффициенты Фурье начального условия $\varphi(x) = \chi_{0,\pi/2}(x)$ – характеристическая функция интервала $[0,\pi/2]$. Ответ:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/l^2}\cos(2n+1)\frac{\pi x}{l}.$$

Опять получается обобщенное решение. При $t = 0$ в точках $x = 0$, $x = \pi/2$ и $x = \pi$, где имеем скачки, сумма ряда равна $1/2$. Однако при $t > 0$ все гладко.

Переходим к пределу при $t \to +\infty$ и получаем предельное распределение температуры

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = u_\infty(x) = \frac{1}{2}.$$

По физическому смыслу это тоже объяснимо. Концы были теплоизолированы. Поэтому тепло из левой половины отрезка перетекло в правую половину и равномерно распределилось по всему отрезку. Температура уменьшилось от 1 до 1/2.

Заметим, что в этих граничных условиях действует закон сохранения тепла: для любых начальных условий

$$\int_0^l u(x,t)dx = const.$$

Попробуйте его доказать. Указание: проинтегрируйте уравнение по x.

Задача 5.

Решается также как и задачи 1 и 3. Решаем краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t),\ x \in [0,1], t > 0, \\ u(0,t) &= 0,\ u'_x(1,t) + cu(1,t) = 0,\ c > 0. \\ u(x,0) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Частное решение ищем в виде произведения $u(x,t) = Y(x)T(t)$. Подставляем в уравнение и разделяем переменные:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda$$

Если $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2$, то общее решение второго уравнения имеет вид $Y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$.

Подставляем граничные условия: $A + B = 0,\ A\mu e^{\mu} - B\mu e^{-\mu} + c(Ae^{\mu} + Be^{-\mu}) = 0$. Откуда $A = -B = 0$ и $\mu = -c\frac{e^{2\mu}-1}{e^{2\mu}+1} < 0$, что не допускаем. Значит, положительных λ нет.

Если $\lambda = 0$, то $Y(x) = A + Bx$, и снова из граничных условий $A = 0$, $B + cB = 0$ $\Longrightarrow$ $B = 0$ так как $c > 0$. Опять нет решений.

Осталось найти отрицательные λ, $\lambda = -\mu^2$, общее решение имеет вид $Y(x) = A\sin\mu x + B\cos\mu x$.

Из первого граничного условия следует, что $B = 0$, т.е., $Y(x) = \sin\mu x$, из второго граничного условия находим

$$\mu\cos\mu + c\sin\mu = 0,$$

что эквивалентно уравнению

$$\tan\mu = -\frac{\mu}{c}.$$

Построим графики левой и правой части и видим, что это уравнение имеет бесконечно много корней $\mu_k > 0$, причем $\mu_k \to +\infty$, Заметим, что $\mu_k \sim \pi k$, т.е., $\lim_{k\to\infty}\frac{\mu_k}{\pi k} = 1$.

Следовательно, $Y_k(x) = \sin\mu_k x,\ k \in \mathbb{N}$.

Частные факторизованные решения имеют вид

$$u_k(x,t) = e^{-a^2\mu_k^2 t}\sin\mu_k x$$

где μ_k – все положительные корни уравнения

$$\tan \mu_k = -\frac{\mu_k}{c}.$$

Проверим, что функции $\sin \mu_k x$ ортогональное семейство в $L_2(0,1)$. Если $\mu_k \neq \mu_n$, то

$$\int_0^1 \sin \mu_k x \sin \mu_n x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(\mu_k - \mu_n)x - \cos(\mu_k + \mu_n)x dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\mu_k - \mu_n)x}{\mu_k - \mu_n} - \frac{\sin(\mu_k + \mu_n)x}{\mu_k + \mu_n}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\mu_k - \mu_n)}{\mu_k - \mu_n} - \frac{\sin(\mu_k + \mu_n)}{\mu_k + \mu_n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \mu_k \cos \mu_n - \cos \mu_k \sin \mu_n}{\mu_k - \mu_n} - \frac{\sin \mu_k \cos \mu_n + \cos \mu_k \sin \mu_n}{\mu_k + \mu_n}\right) =$$
$$= \frac{\mu_n \sin \mu_k \cos \mu_n - \mu_k \cos \mu_k \sin \mu_n}{(\mu_k - \mu_n)(\mu_k + \mu_n)} = \cos \mu_k \cos \mu_n \frac{\mu_n \tan \mu_k - \mu_k \tan \mu_n}{(\mu_k - \mu_n)(\mu_k + \mu_n)} =$$
$$= \cos \mu_k \cos \mu_n \frac{\mu_n \mu_k - \mu_k \mu_n}{c(\mu_k - \mu_n)(\mu_k + \mu_n)} = 0$$

Здесь в последней строке мы воспользовались уравнениями $\tan \mu_k = -\frac{\mu_k}{c}$ и $\mu_k = -\frac{\mu_k}{c}$.

Полноту этой системы доказывать сложнее. Она вытекает из общей теоремы о полноте собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, доказательство которой не входит в программу нашего курса. Ее можно найти в книге Шубина, см. список литературы.

Следующее замечание относится к возникающей здесь задаче Штурма-Лиувилля, которую будем скоро изучать подробнее.

Поскольку оператор $\frac{d^2}{dx^2}$ симметричен на множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi'_x(1) + \alpha\varphi(1) = 0$, то, как мы уже доказали, собственные функции $Y_k(x) = \sin \mu_k x$ взаимно ортогональны в L_2. Норма

$$|f_k|^2 = \int_0^1 \sin^2 \mu_k(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\mu_k}{4\mu_k} = \frac{\mu_k^2 + c^2 + c}{2(\mu_k^2 + c^2)}.$$

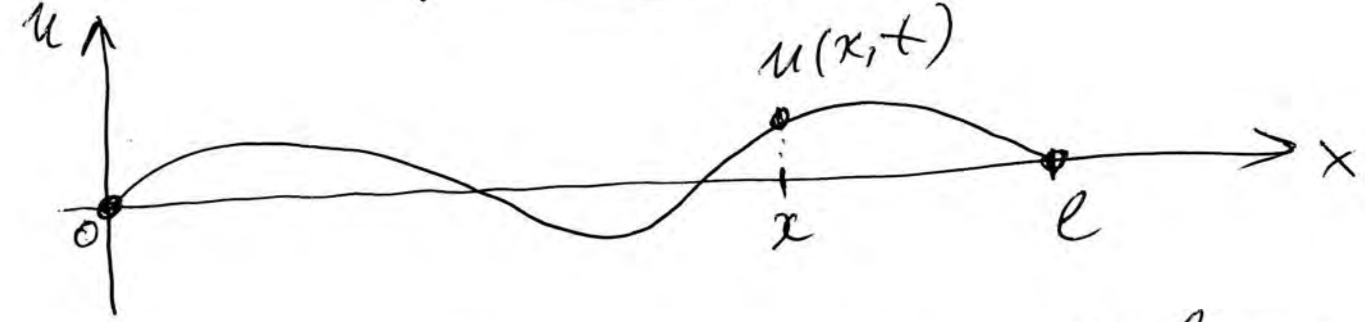
Поэтому функция Грина этой задачи имеет следующий вид:

$$G(t,x,y) = 2\sum_{k>0} \frac{\mu_k^2 + c^2}{\mu_k^2 + c^2 + c} \sin \mu_k x \sin \mu_k y \, e^{-a^2 \mu_k^2 t}.$$

2К

Мат. Анализ. Семинар № 22

Решение уравнения свободных колебаний упругой струны.



(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $(x,t)\in Q$ — уравнение колебаний струны

(2) $u(x,0)=\varphi(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$ — начальные условия

(3) $u(0,t)=u(l,t)=0$ — граничные условия (закрепленные концы)

$x\in[0,l]$, $t\in[0,T]$, $Q=(0,l)\times(0,T)$.

Ищем решение задачи (1)(2)(3) в классе функций: $u(x,t)\in C^1(\overline{Q})$, $\exists\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\in C(Q)$

Решаем методом Фурье

ШАГ 1 Ищем частные решения вида

$$u(x,t)=y(x)\cdot z(t):$$

$$z''(t)\cdot y(x) = a^2 z(t)\cdot y''(x)$$

$$\frac{z''(t)}{a^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda = \text{const}.$$

ШАГ 2. Совпадает с этим шагом для уравнения теплопроводности. Решаем задачу Штурма-Лиувилля

$$(4) \qquad y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(\ell) = 0$$

Её решение имеет вид: $\mu_k = \frac{k\pi}{\ell}, k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\lambda = -\mu_k^2 = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \quad y_k(x) = \sin \mu_k x.}$$

ШАГ 3. Решаем уравнение для $z(t)$:

$$(5) \qquad z''(t) + a^2 \mu_k^2 z(t) = 0$$

Общее решение имеет вид:

$$z_k(t) = C_k \cdot \cos(a\mu_k t) + D_k \cdot \sin(a\mu_k t)$$

ШАГ 4. Решение (1)(2)(3) ищем в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t), \text{ где}$$

$$u_k(x,t) = (C_k \cos a\mu_k t + D_k \cdot \sin a\mu_k t) \sin \mu_k x$$

здесь C_k и D_k — некоторые коэффициенты, которые необходимо найти, используя начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

$\varphi(x)$ - форма струны, $\psi(x)$ - скорость при $t=0$.

Подставляем данные при $t=0$

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \mu_k x = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} a\cdot\mu_k\cdot D_k \sin \mu_k x = \psi(x).$$

Это ряды Фурье этих функций, т.е.

(6) $$\boxed{C_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\sin\mu_k x\, dx}, \quad \boxed{\mu_k=\frac{k\pi}{l}}$$

$$a\cdot\mu_k\cdot D_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\mu_k x\, dx$$

(7) $$\boxed{D_k=\frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\mu_k x\, dx.}$$

Мы нашли формулу решения задачи (1)(2)(3)

(8)

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_k\cos(a\mu_k t)+D_k\sin(a\mu_k t)\right]\sin(\mu_k x),$$

где C_k и D_k – находятся из формул (6) и (7)

Задача 1. Пусть $\varphi(x)\in C^3[0,l]$, $\psi(x)\in C^2[0,l]$ и выполнены условия согласования

$\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$

$\psi(0)=\psi(l)=0$. Тогда (8) задает решение задачи (1)(2)(3) нужной гладкости

Решение. Необходимо проверить, что ряд (8) равномерно сходится в $\overline{Q}$, что можно дифференцировать почленно, причем $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(\overline{Q})$ и удовлетворяет уравнению. Найдем мажоранту для ряда (8). Для этого найдем оценки для C_k и D_k. Интегрируем по частям

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\mu_k x\,dx = \frac{2}{l\mu_k}\int_0^l \varphi'(x)\cos\mu_k x\,dx =$$

$$= \frac{2}{l\mu_k}\int_0^l \varphi'(x)\,\frac{d\sin\mu_k x}{\mu_k} = \frac{2}{l\mu_k^2}\varphi'(x)\underbrace{\sin\mu_k x\Big|_0^l}_{=0} -$$

$$- \frac{2}{l\mu_k^2}\int_0^l \varphi''(x)\sin\mu_k x\,dx = -\frac{2}{l\mu_k^2}\int_0^l \varphi''(x)\sin\mu_k x\,dx$$

$$= +\frac{2}{l\mu_k^3}\int_0^l \varphi''(x)\,d(\cos\mu_k x) = \underbrace{\frac{2}{l\mu_k^3}\varphi''(x)\cos\mu_k x\Big|_0^l}_{=0} -$$

$$- \frac{2}{l\mu_k^3}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\mu_k x\,dx = -\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3\int_0^l \varphi'''(x)\cos\mu_k x\,dx =$$

$$= -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\cdot\frac{\rho_k}{k^3},$$ где ρ_k — коэфф. Фурье функции $\varphi'''(x) \in C[0,l]$ по ортогональной системе $\{\cos(\mu_k x)\}$.

$$\boxed{C_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{p_k}{k^3}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 < \infty$$

Аналогично

$$D_k = -\frac{2}{la}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \int_0^l \psi''(x)\sin\mu_k x\,dx$$

$$\boxed{D_k = -\frac{1}{a}\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{q_k}{k^3}},$$ где q_k – коэфф. Фурье функции $\psi''(x) \in C[0,l]$ по орт. систем $\{\sin\mu_k x\}$. $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 < \infty$.

<u>Следовательно:</u>

(9) $$u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\left(p_k \sin\mu_k a t + \frac{q_k}{a}\cos a\mu_k t\right) \times \sin\mu_k x.$$

Этот ряд $\forall (x,t) \in Q$ мажорируется числовым рядом

$$c\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\left(|p_k| + |q_k|\right),$$

который <u>сходится</u>! Поэтому ряд (9) равномерно сходится и его сумма $u(x,t) \in C(\overline{Q})$. Покажем, что ряды, которые получаются двукратным дифференцированием ряда (9) тоже равномерно сходятся. Получаем:

(10) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{l}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(p_k \sin a\mu_k t + \frac{q_k}{a}\cos(a\mu_k t)\right) \times \sin \mu_k x$$

(11) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{l}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(p_k \sin a\mu_k t + \frac{q_k}{a}\cos(a\mu_k t)\right) \times \sin \mu_k x$$

Оба ряда мажорируются числовым рядом: $c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(|p_k| + |q_k|\right)$, который сходится в силу: $\frac{1}{k}|p_k| \le \frac{1}{2}\left(p_k^2 + \frac{1}{k^2}\right)$

$\frac{1}{k}|q_k| \le \frac{1}{2}\left(q_k^2 + \frac{1}{k^2}\right)$.

Следовательно, ряды (10) и (11) равномерно сходятся, $u(x,t)$ — можно дифференцировать по x и t два раза, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ — представлены рядами (10) и (11), $u(x,t)$ — удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3).

<u>Задача 2</u>. Построенное решение задачи (1)(2)(3) является единственным в классе функций $u(x,t)\in C(\overline{Q})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C(\overline{Q})$.

<u>Решение</u>: аналогично уравнению теплопроводности. Достаточно доказать, что при $\varphi(x)\equiv 0$ и $\psi(x)\equiv 0$ есть только нулевое решение. Пусть это решение $u(x,t)$. Представим рядом Фурье

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\cdot \sin \mu_k x$$

причём $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k'(t)\sin \mu_k(x)$

т.е. $p_k(0)=0,\ p_k'(0)=0$

Далее выводится уравнение для $p_k(t)$:

$$p_k''(t)=-a^2\mu_k^2\, p_k(t),\quad p_k(0)=0,\ p_k'(0)=0$$

Из которого следует, что $p_k(t)\equiv 0\ \forall t\in[0,T]$

т.е. $u(x,t)\equiv 0\ \ \forall (x,t)\in\overline{Q}$.

Мы вывели уравнение для более общего случая уравнение <u>вынужденных</u> колебаний струны с закреплёнными концами.

Решение уравнения вынужденных колебаний струны

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q$$

(2) $$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in (0,l)$$

(3) $$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

Здесь $f(x,t)$ – плотность внешней силы.

колебания вынужденные

Решение ищем в виде ряда Фурье по $\{\sin \mu_k x\}$

(4) $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \sin \mu_k x$$

где $p_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx$.

Условие для $f(x,t)$: $f(x,t) \in C(\overline{Q})$, $\exists f'''_{xxx}(x,t) \in C(\overline{Q})$. Условие согласования:

$$f(0,t) = f(l,t) = 0, \quad f''_{xx}(0,t) = f''_{xx}(l,t) = 0.$$

Разложим $f(x,t)$ в ряд Фурье:

(5) $$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \mu_k x, \quad q_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \mu_k x \, dx$$

С помощью интегрирования по частям

доказывается оценка для $|q_k(t)|$:

(6) $\quad |q_k(t)| \le \dfrac{M}{k^3}, \; k = 1, 2, \dots$

(Используется гладкость и условие согласования для функции $f(x,t)$)

Выведем уравнения, которым удовлетворяют функции $p_k(t)$

Предположим, что $u(x,t) \in C^2(\overline{Q})$

Умножаем уравнение (1) на $\sin \mu_k x$ и интегрируем по $[0, l]$:

$$\boxed{\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \sin \mu_k x \, dx} = a^2 \boxed{\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \mu_k x \, dx} + \frac{l}{2} q_k(t)$$

В левой части переставляем $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ и $\displaystyle\int_0^l$ и получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx \right) = \boxed{\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{l}{2} p_k(t) \right)}$$

В правой части интеграл интегрируем по частям 2 раза:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \mu_k x \, dx = \underbrace{\sin \mu_k x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^l}_{=0} - \mu_k \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \cos \mu_k x \, dx =$$

$$= -\mu_k \underbrace{u \cos \mu_k x \Big|_0^l}_{0} - \mu_k^2 \int_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx =$$

$$= \boxed{-\mu_k^2 \frac{l}{2} p_k(t)}$$

Получим уравнение для $p_k(t)$:

(7) $$\frac{d^2}{dt^2} p_k(t) = -a^2 \mu_k^2 \cdot p_k(t) + q_k(t)$$

Начальные условия:

(8) $$p_k(0)=0, \quad p_k'(0)=0.$$

<u>Замечание</u>: При $q_k(t)\equiv 0$ получаем уравнение для задачи 2, из которого следует теорема единственности решения уравнения колебаний струны (свободных или вынужденных!)

Решение задачи Коши (7), (8) получается по формуле:

(9) $$p_k(t) = \frac{1}{a\cdot\mu_k}\cdot\int_0^t \sin(a\mu_k(t-s))\, q_k(s)\, ds.$$

(метод вариации постоянных)

$$p_k(t) = C_1(t)\cdot\cos(a\mu_k t) + C_2(t)\cdot\sin(a\mu_k t)$$

Найти $C_1(t)$ и $C_2(t)$, подставив в (7)(8).

Проверим, что (9) — решение (7), (8):

$$p_k'(t) = \frac{a\cdot\mu_k}{a\cdot\mu_k}\int_0^t \cos(a\mu_k(t-s))\, q_k(s)\, ds + 0.$$

$$p_k''(t) = -a\cdot\mu_k\int_0^t \sin(a\mu_k(t-s))\, q_k(s)\, ds + q_k(t) =$$

$$= -(a\mu_k)^2 \cdot p_k(t) + q_k(t), \text{ т. е.}$$

$$p_k''(t) = -(a\mu_k)^2 p_k(t) + q_k(t).$$

$$p_k(0) = 0, \quad p_k'(0) = 0.$$

Задача 3. При выполнении указанных условий для функции $f(x,t)$ формула

(10) $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \cdot \sin \mu_k x, \text{ где}$$

$$p_k(t) = \frac{1}{a\mu_k} \int_0^t \sin a\mu_k (t-s)\, q_k(s)\, ds$$

определяет решение задачи (1), (2), (3).

Решение. По построению сумма ряда (10) формально удовлетворяет (1), (2), (3).

Действительно:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(0) \cdot \sin \mu_k x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k'(0) \sin \mu_k x = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_k''(t) \sin \mu_k x + a^2\mu_k^2 p_k(t) \sin \mu_k x \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \cdot \sin \mu_k x = f(x,t).$$

Остаётся проверить, что ряд (10) и ряды, полученные двукратным дифференцированием по x и по t равномерно сходятся. Для этого используется оценка $|q_k(t)| \le \frac{M}{K^3}$

тогда $|p_k(t)| \le \frac{M_1}{K^4}$, $|p_k'(t)| \le \frac{M_2}{K^3}$, $|p_k''(t)| \le \frac{M_3}{K^2}$

Поэтому, равномерно сходятся ряды:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(t) \cdot \sin \mu_k(x)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'(t) \sin \mu_k x$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k''(t) \sin \mu_k x$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k \cdot p_k(t) \cdot \cos \mu_k(x)$, $-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \cdot p_k(t) \cdot \sin \mu_k x.$

Анализ 2-2 2021 Семинар 23.
Метод Фурье в уравнении упругих колебаний струны.
Комментарии, решения и ответы

Задача 1. Ищем решение в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(C_k \cos akt + D_k \sin akt)\sin kx$$

а) Начальное условие $u(0,x) = \sin^3 x = 3/4\sin x - 1/4\sin 3x$ влечет
$C_1 = 3/4$, $C_3 = -1/4$. Из условия $u'_t(0,x) = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} akD_k \sin kx = 0 \ \Rightarrow D_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ответ:

$$u(t,x) = \frac{3}{4}\cos at \sin x - \frac{1}{4}\cos 3at \sin 3x.$$

б) Первое начальное условие как в п. а). Условие $u'_t(0,x) = 1$ эквивалентно соотношению

$$\sum_{k=1} akD_k \sin kx = 1,$$

откуда

$$D_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^{\pi}\sin kxdx = \frac{2}{ak^2\pi}(1-(-1)^k).$$

Таким образом,

$$u(t,x) = \frac{3}{4}\cos at \sin x - \frac{1}{4}\cos 3at \sin 3x + \frac{4}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)at\sin(2k+1)x.$$

Задача 2. После совершения шагов метода Фурье получатся собственные функции и собственные значения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля (те же самые, что и при решении уравнения теплопроводности с условиями теплоизоляции концов):

$$\cos\mu_k x, \ \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Факторизованные решения имеют вид

$$u_k(x,t) = (C_k \cos(a\mu_k t) + D_k \sin(a\mu_k t))\cos\mu_k x,$$

а общий вид решения

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}(C_k \cos(a\mu_k t) + D_k \sin(a\mu_k t))\cos\mu_k x.$$

Подставляем начальные условия при $t = 0$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos \mu_k x, \;\; \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a\mu_k D_k \cos \mu_k x,$$

Следовательно, используя формулы для коэффициентов Фурье, получаем

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)dx, \;\; C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\mu_k x dx, \;\; k = 1, 2, \ldots \\ D_k &= \frac{2}{a\mu_k l}\int_0^l \psi(x)\cos\mu_k x dx, \;\; k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Подставляем конкретные функции $\varphi(x) = x$ и $\psi(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right) = \cos\mu_3 x$ и находим

$$C_0 = \frac{l}{2}, \;\; C_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\mu_k x dx = -\frac{2}{\mu_k l}\int_0^l \sin\mu_k x dx = \frac{-2l}{k^2\pi^2}(1 - (-1)^k).$$

Второе начальное условие дает единственный ненулевой коэффициент при $k = 3$ $D_3 = \frac{1}{a\mu_3} = \frac{l}{3a\pi}$.

Ответ:

$$u = \left(\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left(a\frac{2k+1}{l}\pi t\right)\cos\left(\frac{2k+1}{l}\pi x\right)\right) + \frac{l}{3a\pi}\sin\left(a\frac{3\pi}{l}t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right).$$

Задача 3. Решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}(C_k\cos akt\sin kx + D_k\sin akt\sin kx), \;\; x\in[0,\pi], \;\; t\geq 0; \qquad (1) \\ u(x,0) &= \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), \;\; x\in[0,\pi]. \end{aligned}$$

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ сначала нечетным образом на отрезок $[-\pi,\pi]$, а затем по периодичности на всю числовую ось $\mathbb{R}$. Полученные 2π-периодические функции обозначим через $\tilde\varphi(x)$ и $\tilde\psi(x)$, где $x\in\mathbb{R}$.

Тогда формула (1) задаст решение уравнения колебаний струны, определенное при всех $x\in\mathbb{R}$ с начальными условиями $u(x,0) = \tilde\varphi(x)$ и $u_t(x,0) = \tilde\psi(x)$.

Воспользуемся в (1) формулами произведения синусов и косинусов:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k\frac{\sin k(x+at) + \sin k(x-at)}{2} + D_k\frac{\cos k(x-at) - \cos k(x+at)}{2}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C_k}{2}\sin k(x+at) - \frac{D_k}{2}\cos k(x+at)\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2}\sin k(x-at) + \frac{D_k}{2}\cos k(x-at)\right) = \\ &= f(x+at) + g(x-at), \end{aligned}$$

где

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C_k}{2}\sin kx - \frac{D_k}{2}\cos kx\right), \;\; g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C_k}{2}\sin kx + \frac{D_k}{2}\cos kx\right)$$

это некоторые 2π-периодические функции, представленные своими рядами Фурье.

Чтобы найти выражения для $f(x)$ и $g(x)$ через начальные функции $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ достаточно в формулы

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at), \qquad u_t(x,t) = af'(x+at) - ag'(x-at)$$

подставить $t = 0$:

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + g(x), \qquad \tilde{\psi}(x) = af'(x) - ag'(x).$$

Следовательно,

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \tilde{\varphi}(x) \\ f(x) - g(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \tilde{\psi}(s)ds + C \end{cases},$$

т.е.,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x) + \frac{1}{a}\int_0^x \tilde{\psi}(s)ds + C\right) \\ g(x) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x) - \frac{1}{a}\int_0^x \tilde{\psi}(s)ds - C\right) \end{aligned}$$

Наконец, подставляем эти выражение в формулу $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$ и получаем

$$u(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x+at) + \tilde{\varphi}(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(s)ds$$

Эта формула называется формулой Даламбера.

Аналогичные формулы имеют место и для решений уравнений колебаний струны со свободными начальными условиями, только при выводе необходимо продолжать начальные функции сначала на отрезок $[-\pi,\pi]$ четным образом, а потом – периодически на всю числовую ось. Получится такая же формула Даламбера.

Задача 4. Метод разделения переменных $u(x,t) = T(t)X(x)$ дает уравнения на частные решения

$$\frac{T''(t) + 2\beta T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2.$$

Решение соответствующей задачи Штурма-Лиувилля при нулевых граничных условиях дает, как мы знаем,

$$X_k(x) = \sin kx, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Дифференциальное уравнение

$$T'' + 2\beta T' + a^2k^2T = 0 \tag{2}$$

имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + a^2k^2 = 0.$$

Его корни

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - (ak)^2} \ \text{ при } k \le \frac{\beta}{a} \\
\lambda_{1,2} &= -\beta \pm i\sqrt{(ak)^2 - \beta^2} \ \text{ при } k > \frac{\beta}{a}
\end{aligned}$$

Если $k = \frac{\beta}{a}$ – целое, то корень $-\beta$ имеет кратность 2. Обозначим

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \sqrt{\beta^2 - (ak)^2}\text{при } k < \frac{\beta}{a}, \\
\gamma_k &= \sqrt{(ak)^2 - \beta^2}\text{при } k > \frac{\beta}{a}.
\end{aligned}$$

Поэтому общее решение уравнения (2) имеет вид

$$\begin{aligned}
T_k(t) &= e^{-\beta t}\left(C_k e^{\gamma_k t} + D_k e^{-\gamma_k t}\right), \text{ при } k < \frac{\beta}{a} \\
T_k(t) &= e^{-\beta t}\left(C_k + D_k t\right) \text{ при } k = \frac{\beta}{a} \text{ (резонансный случай).} \\
T_k(t) &= e^{-\beta t}\left(C_k \cos\gamma_k t + D_k \sin\gamma_k t\right), \text{ при } k > \frac{\beta}{a}
\end{aligned}$$

Для простоты предположим, что число β/a – не целое. Поэтому решение уравнения колебаний струны с трением ищется в виде

$$u(x,t) = e^{-\beta t}\left(\sum_{k<\beta/a}^{\infty}(C_k e^{\gamma_k t} + D_k e^{\gamma_k t})\sin kx + \sum_{k>\beta/a}^{\infty}(C_k \cos\gamma_k t + D_k \sin\gamma_k t)\sin kx\right).$$

Если трение не очень велико, т.е., когда $1 > \beta/a$ и $\beta < a$, первой суммы нет. Найдем решение для этого случая.

Подстановка начальных условий $\varphi(x) = \sin x$ и $\psi(x) = \sin 2x$ дает нетривиальные соотношения

$$C_1 = 1, \quad -\beta C_1 + \gamma_1 D_1 = 0, \quad -\beta C_2 + \gamma_2 D_2 = 1.$$

т.е.

$$C_1 = 1, \qquad D_1 = \frac{\beta}{\gamma_1}, \qquad D_2 = \frac{1}{\gamma_2}.$$

Ответ (при $\beta < a$):

$$u(x,t) = e^{-\beta t}\left[(\cos\gamma_1 t + \beta\gamma_1^{-1}\sin\gamma_1 t)\sin x + \gamma_2^{-1}\sin\gamma_2 t \sin 2x\right].$$

Задача 5. Для простоты предположим, что $m = 1$. Ищем решение в виде $x(t) = C_1(t)\sin\omega t + C_2(t)\cos\omega t$. Подставляем в уравнение и получаем соотношения

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}C_1 &= \frac{f(t)\cos\omega t}{\omega}, \qquad \frac{d}{dt}C_2 = -\frac{f(t)\sin\omega t}{\omega}, \\
C_1(0) &= C_2(0) = 0.
\end{aligned}$$

откуда с учетом начальных условий

$$C_1(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(s)\cos\omega s ds, \qquad C_2(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^t f(s)\sin\omega s ds.$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{\sin\omega t}{\omega}\int_0^t f(s)\cos\omega s\ ds - \frac{\cos\omega t}{\omega}\int_0^t f(s)\sin\omega s\ ds = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(s)\sin\omega(t-s)\ ds.$$

Задача 6. Решение ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\sin kx.$$

Подставляем в уравнение и получаем в пунктах а) и б) нетривиальные соотношения

$$\text{а) } \ddot{p}_1 + p_1 = e^{-t}, \qquad \text{б) } \ddot{p}_3 + 9p_3 = \cos t$$

с нулевыми начальными условиями:

$$p_1(0) = \dot{p}_1(0) = 0, \qquad p_3(0) = \dot{p}_3(0) = 0.$$

Решения этих неоднородных уравнений методом вариации констант имеют вид:

$$\text{а) } p_1(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t), \qquad \text{б) } p_3(t) = \frac{1}{8}(\cos t - \cos 3t).$$

Ответ:

$$\text{а) } u(x,t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)\sin x, \qquad \text{б) } u(x,t) = \frac{1}{8}(\cos t - \cos 3t)\sin 3x.$$

Задача 7. Решается методом вариации констант. Решение ищется в виде $x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$ с соответствующими начальными условиями. Ответ:

$$x(t) = \int_0^t \frac{x_1(t)x_2(s) - x_1(s)x_2(t)}{W(s)} f(s)ds,$$

где $W(t) = \dot{x}_1(t)x_2(t) - x_1(t)\dot{x}_2(t)$ – определитель Вронского.

2к Мат. Анализ. Семинар № 23

Задача Штурма - Лиувилля

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u$$

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)\cdot u \quad (p(x)>0)$$

Здесь $u = u(x,t)$, $x \in [0,l]$, $t \geq 0$.

Граничные условия

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

или $$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$

Метод Фурье (метод разделения переменных)

$$u(x,t) = Y(x)\cdot Z(t)$$

Получаем задачу на собственные значения и собственные функции

(1) $$-(p(x)\cdot y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

(2) $y(0) = y(l) = 0$ или $y'(0) = y'(l) = 0$

Более общие граничные условия.

$\alpha y'(0) + \beta y(0) = 0$, $\gamma y'(l) + \delta y(l) = 0$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, $\gamma^2+\delta^2 \neq 0$

Задача Штурма - Лиувилля:

Требуется найти все $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых существуют ненулевые решения $y(x)$ уравнения (1) и граничные условия (2). Необходимо найти все такие $y(x)$.

Условие: $p(x) \in C^1[0,\ell]$, $p(x) \neq 0$ (эллиптичность)

$q(x) \in C[0,\ell]$.

Для определенности пусть $p(x) > 0$.

С помощью замены

$$\xi = \int_0^x p(x)^{-\frac{1}{2}} dx, \quad z = p^{\frac{1}{2}}(x)\, y$$

Задача (1)(2) сводится к более простой задаче, в которой $p(x) \equiv 1$:

Будем изучать задачу Ш.-Л.

$$(3) \quad \begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = y(\ell) = 0 \end{cases}$$

(или $y'(0) = y'(\ell) = 0$)

Можно считать, что $q(x) \geq 0$ (иначе можно к λ - прибавить большую константу).

При $q(x) \equiv 0$ мы уже решали эти задачи Ш.-Л.:

а) $y(0)=y(l)=0$: $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $y_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

б) $y'(0)=y'(l)=0$: $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $y_n = \cos \frac{\pi n}{l}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

② Свойства собственных значений и собственных функций задачи Ш.-Л.

Оператор Ш.-Л.: $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$:

$$Ly = -y''(x) + q(x) \cdot y(x).$$

Область определения оператора Ш.-Л.:

$$D_L = \{ v(x) \in C^1[0,l],\ v(0)=v(l)=0 \}.$$

(или другие граничные условия)

Задача Ш.-Л. принимает вид:

$$Ly = \lambda y, \quad y \in D_L.$$

Задача 1. Доказать, что оператор L симметричен

т.е. $(Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2)$

в пространстве $L_2(0,l)$.

$(u,v) = \int_0^l u(x) \cdot v(x)\,dx$ – скалярное произведение в $L_2(0,l)$.

Решение:

$$(Lv_1, v_2) - (v_1, Lv_2) = \int_0^l [(-v_1'' + q v_1) v_1 - v_1(-v_2'' + q v_2)] dx = \int_0^l (-v_1'' v_2 + v_1 \cdot v_2'') dx =$$

$$= \int_0^l \frac{d}{dx}(-v_1' v_2 + v_1 v_2') dx = -v_1' v_2 + v_1 v_2' \Big|_0^l = 0$$

В силу краевых условий

Задача 2. Оператор L положителен и все его собственные значения положительны

Решение: проверим: $(Lv, v) > 0$

$$(Lv, v) = \int_0^l (-v'' v + q(x) \cdot v^2) dx =$$

$$= -v'(x) \cdot v(x) \Big|_0^l + \int_0^l (v'(x))^2 dx + \int_0^l q(x) \cdot v^2 dx =$$

$$= \int_0^l (v'(x))^2 + q(x) v^2(x) dx > 0 \quad \forall v \in D_L, \ v \neq 0 \quad (q \geq 0)$$

применили интегрирование по частям

Если $Lv = \lambda v \Rightarrow \lambda (v, v) = (Lv, v) > 0 \ \forall x \in D_L$

т.е. $\lambda > 0$. Все с. значения положительны

Задача 3. Все собственные функции с различными собственными значениями ортогональны между собой

Решение:

Пусть $Lv_1 = \lambda_1 v_1$, $Lv_2 = \lambda_2 v_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Тогда $\lambda_1 (v_1, v_2) = (Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2) =$
$= \lambda_2 (v_1, v_2) \Rightarrow (v_1, v_2) = 0$ т.е.
$v_1 \perp v_2$ в $L_2(0, l)$.

Задача 4. Все собственные значения являются однократными, т.е. все собственные подпространства одномерные.

Решение: Следует из теоремы из обыкновенных дифф. уравнений:

Все решения уравнения

$$y'' + a(x) y' + b(x) y = 0, \quad x \in (a, b)$$

с условием $y(x_0) = 0$ $\quad x_0 \in [a, b]$.

пропорциональны (единственному) решению этого уравнения, для которого

$$y'(x_0) = 0.$$

В нашем случае, $a(x) \equiv 0$, $b(x) = -q(x)$, $x_0 = 0$.

Замечание: Такие же свойства имеют решения задач Ш.-Л. с произвольными граничными условиями, кроме положительности собственных значений, которое зависит от $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

т.е. Оператор L — симметричен, собственные функции ортогональны и собственные подпространства одномерны.

Примеры: $-y''=\lambda y$, $y'(0)=y'(1)=0$, $\lambda_0 = 0$.

$y_n(x)=\cos(n\pi x)$

б) $-y''=\lambda y$, $y(0)=0$, $y'(1)+y(1)=0$,

$y_n(x)=\sin \mu_n x$, $\operatorname{tg} \mu_n = -\mu_n$, $n=1,2\ldots$

Все $y_n(x)$ — ортогональны между собой

---

③ Свойства нулей собственных функций оператора Ш.-Л. (Теорема Штурма)

Рассмотрим решения двух уравнений:

$$-y''(x) = q_1(x)\, y(x)$$

$$-z''(x) = q_2(x)\, z(x), \quad x \in [a,b]$$

Предполагаем, что $q_1(x) \geq q_2(x)$, $q_1 \not\equiv q_2$ $\forall x \in [a,b]$.

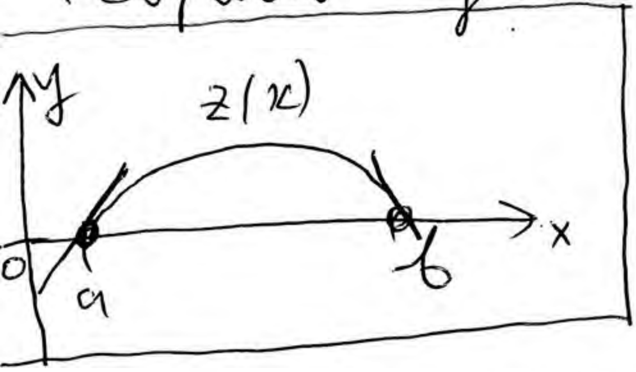
Задача 5. (Теорема Штурма)

Пусть $z(a)=z(b)=0$. Тогда

$\exists x_0 \in (a,b): \ y(x_0)=0$.

<u>Решение</u>: Можно считать, что a и b — <u>соседние</u> нули функции $z(x)$, т.е. $z(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$. Нули не могут „сливаться", т.к. в точке слияния x^* имеем $z(x^*)=0$ и $z'(x^*)=0$ (теорема Ролля!), но $z(x)$ — решение уравнения 2-го порядка. По теореме единственности решения задачи Коши, $z(x)\equiv 0$.

Тогда $z'(a)>0$ и $z'(b)<0$. (Опять по теореме единственности)



Пусть $y(x)$ не имеет нулей на (a,b), т.е. можно считать, что $y(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$

Рассмотрим определитель Вронского:

$$W(x) = y(x)\cdot z'(x) - y'(x)\cdot z(x).$$

Тогда
$$\frac{d}{dx}W(x) = y(x)\cdot z''(x) - y''(x)\cdot z(x) = (q_1(x)-q_2(x))\cdot y(x)\cdot z(x) \geq 0 \quad \forall x\in[a,b]$$

$\not\equiv 0$

Интегрируем по $[a,b]$:

$$W(b)-W(a) = \int_a^b \frac{d}{dx}W(x)\,dx > 0, \text{ т.к. } q_1 \not\equiv q_2$$

С другой стороны, при начальных

предположениях:

$y(a) \geqslant 0, \quad y(b) \geqslant 0 \quad (\text{т.к. } y(x)>0, x\in(a,b))$

Следовательно

$$W(b)-W(a) = \underset{\geqslant 0}{y(b)} \cdot \underset{< 0}{z'(b)} - \underset{\geqslant 0}{y(a)} \cdot \underset{> 0}{z'(a)} \leqslant 0$$

т.е. $W(b) \leqslant W(a)$ __противоречие__.

Следовательно, $y(x)$ имеет __ноль__ на (a,b)

__Задача 6.__ Все собственные значения λ оператора Ш-Л. (при $q(x) \geqslant 0$) удовлетворяют уравнению:

$$\lambda \geqslant \left(\frac{\pi}{e}\right)^2 \qquad (y(0)=y(e)=0).$$

__Решение:__ При $q(x)\equiv 0$ это очевидно, т.к. $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2$, т.е. $\lambda_n \geqslant \lambda_1 = \left(\frac{\pi}{e}\right)^2$

Пусть $q(x)\not\equiv 0$, $z(x)$ = решение задачи Ш.Л., отвечающее с значением λ:

$$-z'' = (\lambda - q(x))\,z, \quad z(0)=z(e)$$

Сравним это решение с решением ур:

$$-y'' = \lambda y, \quad y(x) = \sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

$$x\in(0,e)$$

Применим теорему Штурма:

$$q_1(x) = \lambda \geq \lambda - q(x) = q_2(x)$$

$$q_1(x) \not\equiv q_2(x).$$

Тогда функция $y(x) = \sin\sqrt{\lambda}\, x$ обязана обращаться в ноль, хотя на $(0, l)$. Это возможно, только если выполнено неравенство $\sqrt{\lambda}\cdot l \geq \pi \Rightarrow \lambda \geq \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$.

Изучим асимптотические свойства собственных значений оператора Ш-Л. Обозначим для удобства $\lambda = k^2$:

(4) $-y'' + q(x) = k^2 y$, $k > 0$,

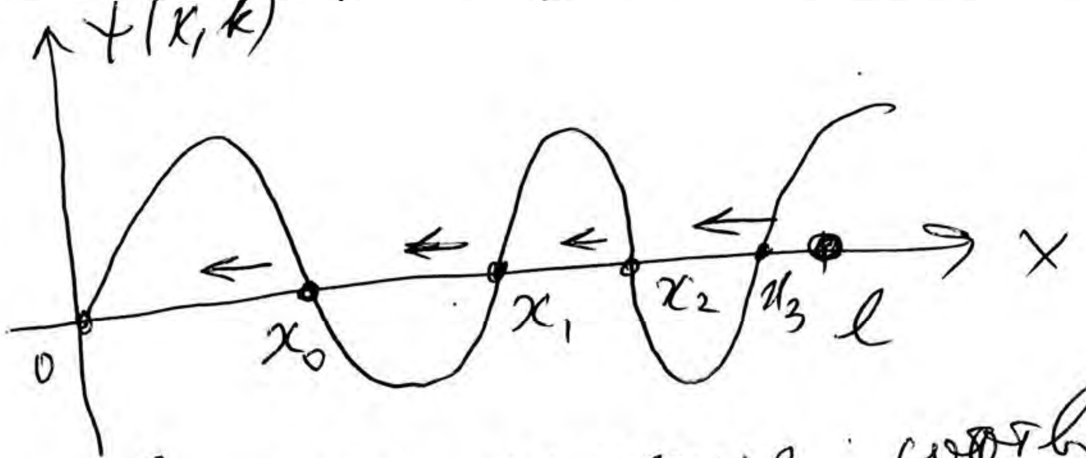
обозначим $\psi = \psi(x, k)$ решение (4) с начальными условиями:

$$\psi(0, k) = 0, \quad \psi'(0, k) = k$$

(при $q(x) \equiv 0$, $\psi(x, k) = \sin kx$).

Следовательно, собственные значения оператора Ш-Л. имеют вид $\lambda = k^2$, где k такие, что $\psi(l, k) = 0$.

Из теоремы Штурма следует, что число нулей функции $\psi(x,k)=0$, лежащих на отрезке $[0,a]$, где $a\le l$ является <u>неубывающей функцией</u> k. Поэтому, с ростом k все нули функции $\psi(x,k)$ двигаются <u>влево</u> с ростом k



при $k \nearrow$

Собственные значения соответствуют тем k, когда в т. $x=l$ появляется <u>новый ноль</u> функции $\psi(x,k)$

Число нулей <u>конечно</u> $\forall k>0$. Поэтому собственные значения образуют дискретную последовательность

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots<\lambda_n<\ldots,$$

которая <u>бесконечна</u>, т.к. по теореме Штурма число нулей функции $\psi(x,k)$ на $(0,l)$ <u>не меньше</u> числа нулей на $(0,l)$ у решения уравнения

$$-y'' + My = k^2 y, \text{ где } M = \max_{x\in[0,l]} q(x)$$

Но этим решением является

$$y(x) = \sin\sqrt{k^2 - M}\, x \quad \text{при } k^2 > M,$$

а число нулей этой функции неограниченно растет при $k \to \infty$.

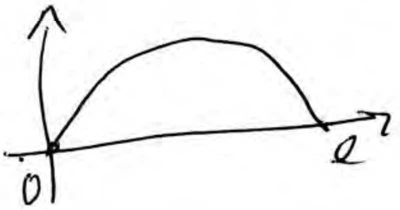
Доказана справедливость

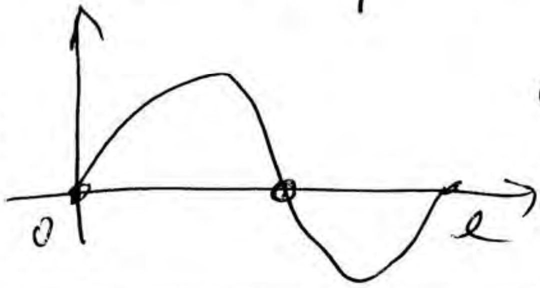
<u>Теорема 1.</u> Задача Ш.-Л. имеет бесконечное число решений, все собственные значения $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to +\infty$.

Собственные функции $y_n(x)$ образуют ортогональные семейство в $L_2(0,l)$.

Собственная функция $y_n(x)$ имеет ровно $(n-1)$ нулей на интервале $(0,l)$.

т.е.

$y_1 =$ 

; $y_2 =$ 

и т.д.

<u>Теорема 2.</u> Собственные функции $\{y_n(x)\}$ образуют ортогональный базис в $L_2(0,l)$.

④ Асимптотика λ_n и $y_n(x)$ при больших n

Из теоремы Штурма следует, что собственные значения оператора Ш.–Л.

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

заключены между с. значениями операторов

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} \text{ и } L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + M, \text{ где } M = \max_{x\in[0,l]} q(x)$$

которые вычисляются и равны:

$$\left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 \text{ и } \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 + M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 \le \lambda_n \le \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 + M,$$

т.е.

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \quad n \to \infty$$

Это асимптотическая формула

Можно показать, что

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi n}{e} x + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Аналогичные результаты для других краевых условий, напр., $y'(0) = y'(e) = 0$. будет cos.

Семинар 12. Малышок Дианы

№1

а) собственные значения $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}$, $k = 1, 2, \dots$

собств. ф-ии $Y_k(x) = \sin(\mu_k x)$, $\mu_k = k\pi/\ell$

б) $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}$

$Y_k(x) = \cos(\mu_k x)$ $k = 0, 1, 2, \dots$
$\mu_k = k\pi/\ell$

с) Если $\lambda > 0$

• общее решение $Y(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} x}$

• с учётом $y(0) = y'(\ell) = 0$ имеем: (1)

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}\ell} - c_2\sqrt{\lambda}\, e^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_1\sqrt{\lambda}\left(e^{\sqrt{\lambda}\ell} + e^{-\sqrt{\lambda}\ell}\right) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

Если $\lambda = 0$

• общее решение $Y(x) = c_1 + c_2 x$

• с учётом (1) $\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow Y(x) \equiv 0.$

Если $\lambda < 0$ $\lambda = -\mu^2$

• общ. решение $Y(x) = c_1 \cdot \sin(\mu x) + c_2 \cos(\mu x)$

• с учётом (1) $\begin{cases} c_2 = 0 \\ \mu c_1 \cos(\mu\ell) = 0 \end{cases}$

Потребуем $\cos(\mu\ell) = 0$, т.е. $\mu = \frac{(\frac{1}{2}+k)\pi}{\ell}$, $k = 0, 1, \dots$

Собств. значения $\lambda_k = -\frac{(\frac{1}{2}+k)^2\pi^2}{\ell^2}$

Собств. ф-ии $Y_k(x) = \sin(\mu_k x)$, где $\mu_k = \frac{(\frac{1}{2}+k)\pi}{\ell}$, $k = 0, 1, \dots$

d) $y'(0) = y(\ell) = 0$ (2)

Если $\lambda > 0$ $Y(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 \cdot e^{\sqrt{\lambda} x}$

с учётом (2): $\begin{cases} c_1\sqrt{\lambda} - c_2\sqrt{\lambda} = 0 \\ c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}\ell} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_1\left(e^{\sqrt{\lambda}\ell} + e^{-\sqrt{\lambda}\ell}\right) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0$

<u>Если $\lambda = 0$</u> $\quad Y(x) = c_1 + c_2 x$

с учётом (2): $\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$

<u>Если $\lambda < 0$</u> $\quad Y(x) = c_1 \sin(\mu x) + c_2 \cdot \cos \mu x$

с учётом (2): $\begin{cases} \mu c_1 = 0 \quad \Rightarrow c_1 = 0 \\ c_2 \cos(\mu \ell) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \mu = \dfrac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi}{\ell} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Собств. значения $\quad \lambda_k = -\dfrac{\left(\frac{1}{2}+k\right)^2 \pi^2}{\ell^2} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

Собств. ф-ии: $\quad Y_k(x) = \cos(\mu_k x) \qquad \mu_k = \dfrac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi}{\ell}$

№3

а) $y = x$

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin(kx)\,dx = \frac{-2}{k\pi}\int_0^\pi x\, d(\cos(kx)) = \frac{-2}{k\pi} x\cos(kx)\Big|_0^\pi + \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin(kx)$$

б) $y = 1$

в) $y = x(2\pi - x)$

$$\| Y_k \|^2 = \int_0^\pi \sin^2\left(\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\right)dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos((1+2k)x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4k}\sin((1+k\cdot 2)x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet\ c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(2\pi - x)\sin\left(\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\right)dx = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\pi x \sin\left(\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\right)dx}_{I_1} -$$

$$- \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin\left(\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\right)dx}_{I_2}$$

- $I_1 = -\frac{4}{(\frac{1}{2}+k)} \int_0^{\pi} x \, d(\cos((\frac{1}{2}+k)x)) = -\frac{4}{\frac{1}{2}+k} \underbrace{x\cos(\frac{1}{2}+k)x \Big|_0^{\pi}}_{0} +$

$+ \frac{4}{\frac{1}{2}+k} \int_0^{\pi} \cos(\frac{1}{2}+k)x \, dx = \frac{4}{(\frac{1}{2}+k)^2} \sin(\frac{1}{2}+k)x \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{(\frac{1}{2}+k)^2}(-1)^k = \frac{16(-1)^k}{(2k+1)^2}$

- $I_2 = -\frac{2}{(\frac{1}{2}+k)\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, d(\cos(\frac{1}{2}+k)x) =$

$= \underbrace{-\frac{2}{\pi(\frac{1}{2}+k)} x^2 \cos(\frac{1}{2}+k)x \Big|_0^{\pi}}_{0} + \frac{2 \cdot 2}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2} \int_0^{\pi} x \, d(\sin(\frac{1}{2}+k)x) =$

$= \frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2} x \cdot \sin(\frac{1}{2}+k)x \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2} \int_0^{\pi} \sin(\frac{1}{2}+k)x \, dx =$

$= \frac{4\pi}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2}(-1)^n + \frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^3} \cos(\frac{1}{2}+k)x \Big|_0^{\pi} = \frac{16\pi(2k+1)(-1)^n - 32}{\pi(1+2k)^3}$

- $c_k = I_1 - I_2 = \frac{32}{\pi(2k+1)^3}$

$y \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{32}{\pi(2k+1)^3} \sin((\frac{1}{2}+k)x)$

г) $y = x^2 - \pi^2$

- $\| Y_k \|^2 = \int_0^{\pi} \cos^2((\frac{1}{2}+k)x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos(1+2k)x}{2} \, dx =$

$= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2(1+2k)} \underbrace{\sin(1+2k)x \Big|_0^{\pi}}_{0} = \frac{\pi}{2}$

- $c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos(\frac{1}{2}+k)x \, dx = \frac{2}{\pi(\frac{1}{2}+k)} \int_0^{\pi} x^2 \, d(\sin(\frac{1}{2}+k)x) - 2\pi \int_0^{\pi} \cos(\frac{1}{2}+k)x \, dx =$

$= \frac{2}{\pi(\frac{1}{2}+k)} x^2 \sin(\frac{1}{2}+k)x \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2} \int_0^{\pi} x \, d(\cos(\frac{1}{2}+k)x) - \frac{2\pi}{\frac{1}{2}+k} \sin(\frac{1}{2}+k)x \Big|_0^{\pi} =$

$$= \frac{4}{\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)^2}\, x\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\,\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)^2}\int_0^{\pi}\cos\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\,dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)^3}\sin\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\,\Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)^3} = \frac{32(-1)^{k+1}}{\pi(1+2k)^3}.$$

$$y \simeq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{32(-1)^{k+1}}{\pi(1+2k)^3}\cos\left(\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\right)$$

№2 Система b) – известная полная ортогон. система на $[0,\ell]$; $\|Y_0\|=\sqrt{\ell}$, $\|Y_k\|=\sqrt{\frac{\ell}{2}}$

Система a) – известная полная ортогон. система на $[0,\ell]$; $\|Y_k\|=\sqrt{\frac{\ell}{2}}$

a) · ортогональность

$m\neq n$ c) $$\int_0^{\ell}\sin\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\pi x}{\ell}\cdot\sin\frac{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi x}{\ell}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{\ell} - \cos\frac{(1+m+n)\pi x}{\ell}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{(m-n)\pi x}{\ell}}{\frac{(m-n)\pi}{\ell}}\Bigg|_0^{\ell} - \frac{\sin\frac{(1+m+n)\pi x}{\ell}}{\frac{(1+m+n)\pi}{\ell}}\Bigg|_0^{\ell}\right] = 0$$

$m\neq n$ d) $$\int_0^{\ell}\cos\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi x}{\ell}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{\ell} + \cos\frac{(1+m+n)\pi x}{\ell}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{(m-n)\pi x}{\ell}}{\frac{(m-n)\pi}{\ell}}\Bigg|_0^{\ell} + \frac{\sin\frac{(1+m+n)\pi x}{\ell}}{\frac{(1+m+n)\pi}{\ell}}\Bigg|_0^{\ell}\right] = 0$$

Ортогональность системы c) видна ещё из того, что ф-ии

$$Y_k = \sin\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{\ell} = \sin\frac{(1+2k)\pi x}{2\ell}$$ — часть системы $\sin\frac{k\pi x}{2\ell}$,

при этом $Y_k(x) = Y_k(2\ell-x)$; следовательно,

$$\int_0^{2\ell} Y_m(x)\cdot Y_n(x)\,dx = 2\int_0^{\ell} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx$$

$$\Vert\ \begin{cases} 0, & \text{если } m\neq n \\ \ell, & \text{если } m=n \end{cases} \Rightarrow \quad Y_m \perp Y_n \text{ на } [0,\ell] \ (m\neq n) \text{ и } \|Y_k\| = \sqrt{\tfrac{\ell}{2}} \text{ на } [0,\ell].$$

Аналогично для системы d):

$$Y_k = \cos\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{l} = \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$ – часть системы $\cos\frac{k\pi x}{2l}$,

при этом $Y_k(x) = -Y_k(2l-x)$; следовательно,

$$\int_0^{2l} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx = \int_0^{l} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx - \int_l^{0} Y_m(2l-y)\,Y_n(2l-y)\,d(2l-y) =$$

$$= \int_0^{l} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx + \int_0^{l} Y_m(y)\,Y_n(y)\,dy = 2\int_0^{l} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx,$$

и поскольку $\int_0^{2l} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m\neq n \\ l, & \text{если } m=n>0 \end{cases}$, то

на $[0,l]$ $Y_m \perp Y_n$ и $\|Y_k\| = \sqrt{\frac{l}{2}}$.

- нули

a) $\sin\frac{k\pi x}{l} = 0 \Rightarrow x = \frac{m}{k}l$, $m\in\mathbb{Z}$; на $(0,l)$ $(k-1)$ нулей

b) $\cos\frac{k\pi x}{l} = 0 \Rightarrow \frac{(1+2m)l}{2k}$, $m\in\mathbb{Z}$; на $(0,l)$ k нулей

c) $\sin\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{l} = 0 \Rightarrow x = \frac{2ml}{1+2k}$, $m\in\mathbb{Z}$; на $(0,l)$ k нулей

d) $\cos\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{l} = 0 \Rightarrow x = \frac{1+2m}{1+2k}l$, $m\in\mathbb{Z}$; на $(0,l)$ k нулей

б) Полнота

c) Для полноты системы c) достаточно, чтобы не существовало ненулевого элемента из $L_2[0,l]$, ортогонального всем элементам системы c).

Пусть $f(x)\in L_2[0,l]$ и $\int_0^{l} f(x)\sin\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{l}\,dx = 0 \quad \forall k$ (3)

Наша цель – показать, что $f(x)$ эквивалентна 0.

Определим $\tilde{f}$ на $[0,2l]$:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x\in[0,l] \\ f(2l-x), & x\in(l,2l] \end{cases}$$

Найдём коэффициенты Фурье $\tilde{f}(x)$ на $[0,2l]$ по системе $\sin\frac{k\pi x}{2l}$

• <u>для чётных синусов</u>

$$l\cdot C_{2k} = \int_0^{2l} \tilde{f}(x)\sin\frac{2k\pi x}{2l}\,dx = \int_0^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \underbrace{\int_l^{2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx}_{} = 0$$

поскольку

$x=2l-m$

$$-\int_l^0 f(2l-m)\sin\left(2k\pi-\frac{k\pi m}{l}\right)dm = -\int_0^l f(m)\sin\left(\frac{k\pi m}{l}\right)dm$$

• <u>для нечётных</u>

$$l\cdot C_{2k+1} = \int_0^l f(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} + \int_l^0 f(2l-m)\sin\left((2k+1)\pi-\frac{(2k+1)\pi m}{2l}\right)d(2l-m)$$

$$= \int_0^l f(x)\sin\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{l}dx + \int_0^l f(m)\sin\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi m}{l}\,dm = 0$$

(Каждое слагаемое равно нулю по предположению (3))

Поскольку система $\left\{\sin\frac{k\pi x}{2l}\right\}$ полна в $L_2[0,2l]$, то $\tilde{f}=0$

$\Rightarrow \tilde{f}\big|_{[0,l]}$ тоже эквивалентна нулю.

d) Аналогично.

Предполагаем $f(x)\in L_2[0,l]$ и $\int_0^l f(x)\cos\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{l}dx = 0 \quad \forall k$

Определим $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x\in[0,l] \\ -f(2l-x), & x\in(l,2l] \end{cases}$

• <u>$l\cdot C_{2k}$</u> $= \int_0^l f(x)\cos\frac{2k\pi x}{2l}\,dx + \int_l^0 f(2l-m)\cos\left(2k\pi-\frac{k\pi m}{l}\right)d(2l-m) =$

$$= \int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx - \int_0^l f(m)\cos\frac{k\pi m}{l}\,dm = 0$$

$$\underline{\cdot\, \ell \cdot c_{2k+1}} = \int_0^\ell f(x)\cos\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{\ell}\,dx + \int_\ell^0 f(2\ell-m)\cos\left[(1+2k)\pi - \frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi m}{\ell}\right]d(2\ell-m)$$

$$= 0 + \underbrace{\int_0^\ell f(m)\cos\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi m}{\ell}\,dm}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{по предположению.}} = 0.$$

№4.

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u$

Разделяем переменные $u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$, тогда

$X''Y + Y''X = \lambda X\cdot Y$ или $\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$ ← умеем решать

$X(x) = \sin(\mu_k x)$ $\quad \mu_k = \frac{k\pi}{a}$ $\quad k = 1, 2, \dots$

$Y(y) = \sin(\xi_\ell y)$ $\quad \xi_\ell = \frac{\ell\pi}{b}$ $\quad \ell = 1, 2, \dots$

Собственные ф-ции $u_{k\ell}(x,y) = \sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right)\left(\sin\frac{\pi\ell}{b}y\right)$

собственные значения $\lambda = -\frac{\pi^2 k^2}{a^2} - \frac{\pi^2\ell^2}{b^2}$

б) Если $a = b = 1$, то $\lambda = -\pi^2(k^2+\ell^2)$.

Количество повторений одного и того же значения λ — количество собственных ф-ций для данного λ, т.е. количество способов представить n как упорядоченную сумму двух квадратов натуральных чисел. (обозначим $S(n)$).

Разложим n в произведение простых $\quad n = 2^e p_1^{e_1} p_2^{e_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r} q_1^{f_1}\cdots q_s^{f_s}$,

$p_i \equiv 1 \pmod 4$

$q_i \equiv 3 \pmod 4$

тогда $S(n) = (e_1+1)(e_2+1)\ldots(e_r+1)$, при этом $f_i \equiv 0 \pmod 2$,

иначе $S(n) = 0$;

т.е. многократные собств. значения возможны.

2к

Мат. Анализ. Семинар № 26.

Обобщенные функции (распределения)

① Пространство основных (пробных) ф-ций.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω - открытое мн-во

Пространство: $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi(x), x \in \Omega\}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, с компактным носителем в Ω, т.е.

$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2 .., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ (мультииндекс)

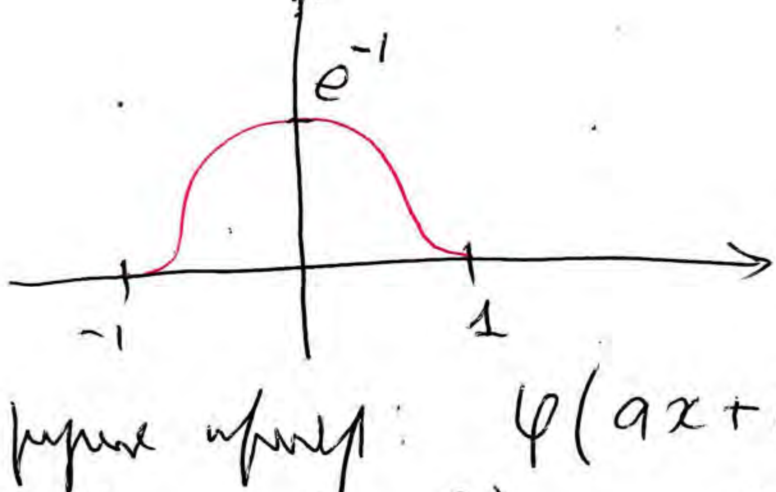
$$\partial_x^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}..\partial x_n^{\alpha_n}}(x) \in C(\Omega), \quad |\alpha| = \alpha_1 + .. + \alpha_n$$

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} = K \text{ - компакт в } \Omega$$

(носитель K)

Пример: $\Omega = \mathbb{R}$ $(n=1)$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$



Можно проверить, что $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi = [-1, 1]$

Другие пример: $\varphi(ax+b)$, $\varphi^k(x)$ и т.д.

в $\mathbb{R}^n$: $\varphi(|x|^2)$, $x = (x_1, .., x_n)$

$\mathcal{D}(\Omega)$ — линейное векторное пр-во.
В нем вводится топология сходимости

<u>Определение 1</u> $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\Omega)$
Если $\exists\, K$ — компакт, $K \subset \Omega$: $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq K$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\quad \partial_x^\alpha \varphi_n(x) \rightrightarrows \partial_x^\alpha \varphi(x)$, $(n \to \infty)$

<u>Равномерно на Ω</u>

<u>Пример 1</u>. $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \varphi(x)$, $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$

Тогда $\varphi_n(x) \to 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$.

<u>Пример 2</u>. $\Omega = \mathbb{R}$, пусть $a_n \to 1$
$\varphi_n(x) = \varphi(a_n x)$. Тогда $\varphi_n(x) \to \varphi$ в $\mathcal{D}$.

<u>Пример 3</u>. $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x - n)$, $x \in \mathbb{R}$.
Тогда $\partial_x^\alpha \varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ $\forall \alpha$, но $\varphi_n(x) \not\to 0$ в $\mathcal{D}$
(т.к. носители уходят)

<u>Замечание</u>: Введенная топология не является метризуемой! т.е. эту сходимость нельзя получить метрикой. $\mathcal{D}(\Omega)$ не является метрическим пр-вом.

Пространство <u>обобщенных функций</u> введено С.Л. Соболевым и Л. Шварцем
(<u>распределения</u>, distributions)

② Пространство обобщённых функций (распределений)

Определение 2. Пространство $\mathcal{D}'(\Omega)$ состоит из линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{D}(\Omega)$, т.е. $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$f: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad f(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2) = \alpha f(\varphi_1)+\beta f(\varphi_2)$$

Обозначим $f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$ т.е., действие функционала f на функцию φ,

f — непрерывен в $\mathcal{D}(\Omega)$, т.е., если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\Omega)$, то $f(\varphi_n) \to f(\varphi)$,

т.е. $\langle f, \varphi_n \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \quad (n \to \infty)$.

③ Примеры обобщённых функций

Пример 1. Пусть $f \in L_1^{loc}(\Omega)$, т.е.

$\forall K \subset\subset \Omega$. $\displaystyle\int_K |f(x)|\,dx < \infty$.

(локально суммируемая функция)

Построим обобщённую функцию:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) \cdot \varphi(x)\,dx.$$

Интеграл конечен, т.к. $\operatorname{supp}\varphi(x) = K \subset\subset \Omega$

2. Функционал f линеен (очевидно)

3. Функционал f непрерывен, т.к. если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}$, то $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq K \subset\subset \Omega$

$\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ равномерно на K.

Тогда $|\varphi_n(x)| \le M \quad \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$|\varphi_n(x)\cdot f(x)| \le M\cdot|f(x)|, \quad x \in K.$$
(интегрируема)

по теореме Лебега, $\varphi_n(x)\cdot f(x) \to \varphi(x) f(x)$ почти всюду в K

$$\int_\Omega f(x)\cdot\varphi_n(x)\,dx \to \int_\Omega f(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

(На самом деле интеграл берется по K).

Следовательно: $L_1^{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Бывают ли другие обобщенные функции
ДА! И огромное количество

Пример 2. δ-функция Дирака $\quad \Omega = \mathbb{R}^n \ (0 \in \Omega)$

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0),$$

1. это линейный функционал, он непрерывен

Обозначение: $\langle \delta, \varphi \rangle = \int_\Omega \delta(x)\cdot\varphi(x)\,dx$

Но это не интеграл! Это обозначение

-5-

<u>Утверждение</u>: $\neg\exists\, f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$f = \delta$, т.е. $\varphi(0) = \int\limits_{\Omega} f(x)\cdot\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

(Доказано в лекциях Степанова)

<u>Пример 3</u>. Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Тогда $f(x) \notin L_1^{loc}(\mathbb{R})$, но интегралы

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\delta\to 0}\left[\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] =$$

$$= V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Пусть $\operatorname{supp}\varphi \in [-1, 1]$ (или $[-M, M]$)

тогда $\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{+\infty} = \int\limits_{-1}^{-\delta}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\delta}^{1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx =$

Сделаем замену $x = -y$ (в первом)

$$= \int\limits_{1}^{\delta}\frac{\varphi(-y)}{-y}(-dy) + \int\limits_{\delta}^{1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = 2\int\limits_{\delta}^{1}\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx$$

По формуле Тейлора $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot x + o(x)$.

$\varphi(-x) = \varphi(0) - \varphi'(0)\cdot x + o(x)$, т.е.

$\varphi(x) - \varphi(-x) = 2\varphi'(0)x + o(x)$, значит

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0)+o(x) \quad (x\to 0).$$

т.е. функция $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ — ограничена. $\psi(x)$

Легко проверить, что $\psi(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Следовательно, $\exists \lim\limits_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx$

$=2\int_0^{\infty}\psi(x)\,dx$

Линейность $P(\frac{1}{x})$ — очевидна.

<u>Непрерывность</u>: Если $\varphi_n\to\varphi$ в $\mathcal{D}$, то

$\psi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)-\varphi(-x)}{x}\longrightarrow\psi(x)$ в $\mathcal{D}$

где $\psi(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\in\mathcal{D}$.

<u>Утверждение 2</u> $P(\frac{1}{x})$ не является функцией из $L_1^{loc}(\mathbb{R})$ ([illegible])

<u>Решение</u>: от противного. Пусть $P(\frac{1}{x})=f$, $f\in L_1^{loc}$. Покажем, что если $0\notin \operatorname{supp}\varphi$, то

$\langle P(\frac{1}{x}),\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$ п.в. в $\mathbb{R}$

Но $\frac{1}{x}\notin L_1^{loc}$. Противоречие.

③ Действия и операции с обобщенными функциями

$D'(\Omega)$ — пр-во обобщенных функций линейно, т.е. если $f_1, f_2 \in D'$, то $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in D'$, $\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi \rangle = \alpha_1 \langle f_1, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle f_2, \varphi \rangle$.

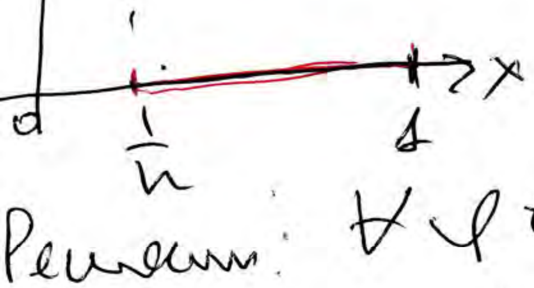
Топология в $D'(\Omega)$, т.е.

Определение 3. определение перехода: $f_n \to f$ в $D'(\Omega)$, если $\forall \varphi \in D(\Omega)$

$$\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \quad (n \to \infty).$$

Пример: Пусть $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$

Рассмотр. $h_n(x) = n \cdot h\left(\frac{x}{n}\right) = \begin{cases} n, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$



Задача 1. Докажите, что $h_n(x) \to \delta(x)$ в $D'(\mathbb{R})$.

Решение: $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$:

$$\langle h_n, \varphi \rangle = n \int_0^{1/n} \varphi(x)\,dx = n \cdot \frac{\varphi(x_n)}{n} = \varphi(x_n)$$

по теореме о среднем $\exists x_n \in [0, \frac{1}{n}]$.

Однако, при $n \to \infty$ $x_n \to 0 \Rightarrow \varphi(x_n) \to \varphi(0)$

т.е. $\langle h_n, \varphi \rangle \to \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$.

т.е. $h_n \to \delta$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Замечание: Вместо $h(x)$ можно взять любую функ. $h \in L^1(\mathbb{R})$, $\int\limits_{\mathbb{R}} h(x)dx = 1$.

тогда $n \cdot h\left(\frac{x}{n}\right) \to \delta(x)$, $n \to \infty$.

Умножение на функ. из $C^\infty(\Omega)$.

Пусть $a(x) \in C^\infty(\Omega)$. $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Определим $a \cdot f$: $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle a \cdot f, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle.$$

Корректно, т.к. $a\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} a\varphi \subseteq \operatorname{supp}\varphi$

непрерывно: Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}$, то $a \cdot \varphi_n \to a \cdot \varphi$ в $\mathcal{D}$ (очевидно), т.е. непрерывно

$$\langle af, \varphi_n \rangle \to \langle af, \varphi \rangle$$

Задача 2. Найти а) $x \cdot \delta(x)$; б) $x \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)$

Решение: $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

а) $\langle x \cdot \delta(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), x \cdot \varphi(x) \rangle = 0 \cdot \varphi(0) = 0$

т.е. $x \cdot \delta(x) \equiv 0$.

б) $\langle xP\left(\frac{1}{x}\right), \varphi(x) \rangle = \lim\limits_{\delta \to 0+} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot x \cdot \varphi(x)\, dx =$

$$= \lim_{\delta\to 0+} \int_{-\infty}^{-\delta} \int_{\delta}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle$$

т.е. $x \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{1}$ (из $L_1^{loc}(\mathbb{R})$)

Задача 3. Пример обобщенной функции:

$f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n)$ — сумма δ-функций, которые сидят в т. $\mathbb{Z}$ (модель двухмерного (кристалла) дальнего ядра). Корректность:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$ $\langle f, \varphi \rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$

Ряд сходится, т.к. $\operatorname{supp}\varphi = K \subset\subset \mathbb{R}^n$, т.е. лишь конечное число членов.

Аналогично: $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot \delta(x-n)$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, что такое $a(x) f(x)$?

Ответ: $a(x)\cdot f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\cdot\delta(x-n)$.

Дифференцирование обобщенных ф-ий

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $n=1$.

Что такое $f' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$? производная.

Определение 4. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$$

Задача 4. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, т.е. непрерывно дифференцируема. Показать, что f' в $\mathcal{D}'$ совпадает с обычной производной.

Решение: Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-M}^{M} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -f(x)\,\varphi(x)\Big|_{-M}^{M} + \int_{-M}^{M} f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

где $\operatorname{supp} \varphi \in [-M, M]$

$$= \int_{-M}^{M} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle f'(x), \varphi(x) \rangle,$$ т.е.

$f'(x)$ совпадает с обычной произв.

Задача 5. Пусть $f(x) = |x|$. Найти f'.

Решение: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} x\,\varphi'(x)\,dx = x\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx +$$

интегрируем по частям

$$-x\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx = \varphi(0) - \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx -$$

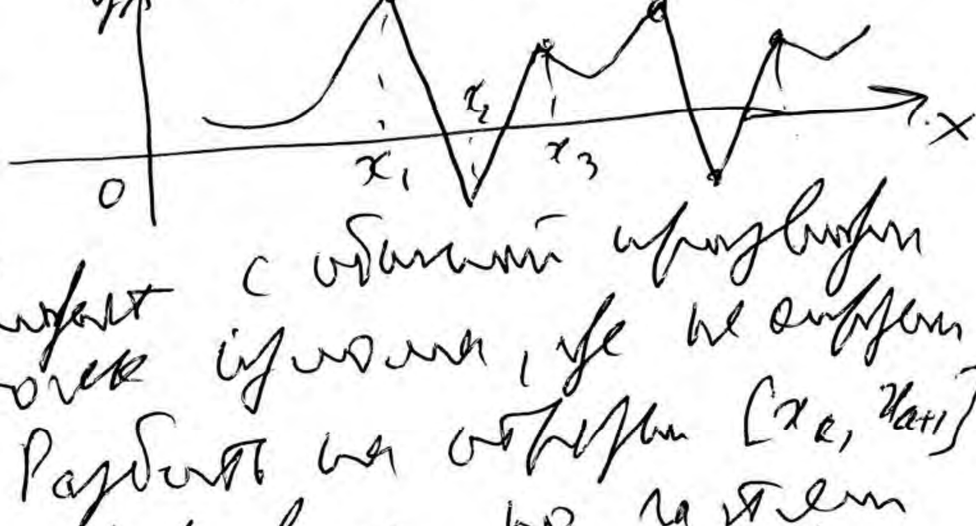
$$-\varphi(0) + \int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx + \int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \text{где } s(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

(функция $s(x) = \mathrm{sign}(x)$)

<u>Ответ</u>: $|x|' = \mathrm{sign}(x)$ в $\mathcal{D}'$

Аналогично доказывается, что если $f(x)$ — кусочно непрерывно дифференцируемая функция:



Тогда $f'(x)$ — совпадает с обычной производной всюду, кроме точек излома, где не определена.
<u>Доказательство</u>: Разбить на отрезки $[x_k, x_{k+1}]$ и применить интегрирование по частям.

Самое интересное начинается, когда у функции $f(x)$ появляются <u>разрывы</u>.

<u>Задача 6</u>. Найти $(\mathrm{sign}(x))'$.

Решение: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $s(x) = \mathrm{sign}(x)$

$$\langle S', \varphi \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle = \int_{-\infty}^{0} +\varphi'(x)dx - \int^{+\infty} \varphi'(x)dx =$$

$$= +\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty} = \varphi(0)+\varphi(0) = 2\varphi(0) =$$

$$= 2\langle \delta, \varphi \rangle \Rightarrow S'(x) = 2\delta(x)$$

Задача 7. Что такое $\delta'(x)$ в $\mathcal{D}'$?

Решение: $\langle \delta'(x), \varphi(x) \rangle = -\langle \delta(x), \varphi'(x) \rangle =$

$= -\varphi'(0)$

Это и есть производная δ-ф-ии Дирака

Задача 8. Найти производную $P(\frac{1}{x})$.

Решение: $\langle P'(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = -\langle P(\frac{1}{x}), \varphi'(x) \rangle =$

$$= \lim_{\delta \to 0+}\left[-\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi'(x)}{x}dx - \int_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x}dx\right] =$$

$$= \lim_{\delta \to 0+}\left[-\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{d\varphi(x)}{x} - \int_{\delta}^{\infty} \frac{d\varphi(x)}{x}\right] = \lim_{\delta \to 0+}\left[-\frac{\varphi(x)}{x}\Big|_{-\infty}^{-\delta} - \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right.$$

$$\left. - \frac{\varphi(x)}{x}\Big|_{\delta}^{+\infty} - \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right] = \frac{\varphi(-\delta)}{\delta} - \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{\varphi(\delta)}{\delta} -$$

$$- \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx = \underbrace{\frac{\varphi(-\delta)-\varphi(\delta)}{\delta}}_{\delta \to 0+} \to 0 = -\lim_{\delta \to \infty}\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx \Rightarrow$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}-\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon}\right)-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx=$$

$$=\underbrace{-\varphi'(0)+\varphi'(0)}_{=0}-v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}=-v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx$$

<u>Ответ:</u> $P\left(\frac{1}{x}\right)'=-v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}=-P\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

<u>Замечание:</u> $P\left(\frac{1}{x^2}\right)$ можно выразить так:

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x^2}\right),\varphi\right\rangle=v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx$$

где $\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}=\frac{\varphi'(0)x-\varphi'(0)x+\varphi''(0)x^2+o(x^2)}{x^2}=$

$=\varphi''(0)+o(x^2)=\psi(x)$ — суммируемая функция

Пусть $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Мы определили f'.

Аналогично определяем $f^{(n)}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

<u>Определение:</u> по индукции:

$$f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}\right)',\quad \text{т.е.}$$

$$\langle f^{(n)},\varphi\rangle=(-1)^n\langle f,\varphi^{(n)}\rangle,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}.$$

Так же определяются производные в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

Определение: $\langle \partial_x^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial_x^\alpha \varphi \rangle$

$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

$\boxed{\text{Операция дифференцирования непрерывна в } \mathcal{D}'.}$

Задача 9. Решить в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ уравнение: $f' = 0$.

Решение:

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 0$.

Тогда $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy \in \mathcal{D}$, $\underline{\psi'(x) = \varphi(x)}$

Действительно, $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$\psi(x) = 0$, если $|x| > M$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Рассмотрим $\forall$ функ. φ_0: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,dx = 1$

Тогда $\exists\, \psi \in \mathcal{D}'$:

$$\varphi(x) = C\cdot\varphi_0(x) + \psi'(x), \text{ где } C = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

Рассмотрим $\varphi(x) - C\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$

Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\,dx = 0$, т.е.

$\varphi_1(x) \in \mathcal{D}$, $\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_1(x) \in \mathcal{D}$.

<u>Следовательно:</u> $\psi'(x) = \varphi_1(x) = \varphi(x) - C \cdot \varphi_0(x)$

<u>Значит:</u> $\varphi(x) = C \cdot \varphi_0(x) + \psi'(x)$, где $\psi'(x) \in \mathcal{D}$.

<u>Решение задачи:</u> Пусть $f' = 0$, тогда

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$ $0 = \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = 0$

Тогда $\forall \varphi$ $\exists \psi \in \mathcal{D}$: $\varphi = C \cdot \varphi_0 + \psi'$, т.е.

$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, C\varphi_0 + \psi' \rangle = C \langle f, \varphi_0 \rangle + \langle f, \psi' \rangle =$

$= C \cdot \langle f, \varphi_0 \rangle + 0 = C \cdot \langle f, \varphi_0 \rangle$

где $C = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$.

<u>Значит:</u> $\langle f, \varphi \rangle = C_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$

т.е. $f \equiv C_1 = \langle f, \varphi_0 \rangle$.

Анализ 2-2 2021 Семинар 25.
Обобщенные функции и операции с ними. Указания и решения.

Задача 1
Замена: $x/\varepsilon = z$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} f(z)\varphi(\varepsilon z)\varepsilon^n dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(\varepsilon z)dz.$$

Так как $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, можем оценить $|f(z)\varphi(\varepsilon z)| \leqslant c \cdot |f(z)|$. По теореме Лебега

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(\varepsilon z)dz \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi(0) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)dz = \langle \delta, \varphi \rangle \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Задача 2

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} \overset{\text{Зад.1}}{=} \delta(x) \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi\delta(x).$$

Задача 3
Следует из задачи 1.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-x^2/2\varepsilon} = \delta(x) \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\delta(x).$$

Задача 4
Очевидно, что ψ финитная. По формуле Тейлора

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^{k-1} + o(x^{(n-1)}),$$

следовательно, $\psi \in C^\infty$ причем $\psi^{(k)}(0) = \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}$.

Задача 5
Для любой пробной функции $\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ выполнено $\langle x\psi(x), f\rangle = 0$. Тогда по задаче 4 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, такой что $\varphi(0) = 0$, выполнено $\langle \varphi(x), f\rangle = 0$, следовательно,

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \varphi_1(0) = \varphi_2(0) : \langle \varphi_1, f\rangle = \langle \varphi_2, f\rangle.$$

Пусть $\varphi(0) \neq 0 \Rightarrow \langle \varphi, f\rangle = \varphi(0) \cdot \underbrace{\left\langle \frac{\varphi}{\varphi(0)}, f\right\rangle}_{\text{не зависит от } \frac{\varphi}{\varphi(0)}} = C \cdot \varphi(0) \Rightarrow f = C\delta(x).$

Задача 6
По задаче 5 из равенства $x(xf) = 0$ следует, что $xf = C_1\delta(x)$. Общим решением уравнения $xf = g$ является $f = f^\star + C\delta(x)$, где $f^\star$ – какое-либо частное решение этого уравнения, так как разность $f - f^\star$ удовлетворяет $x(f - f^\star) = 0$ и поэтому равна $C\delta(x)(x)$. Проверим, что $-C_1\delta'(x)$ является частным решением $xf = C_1\delta(x)$.

$$\langle x\varphi, -C_1\delta'(x)\rangle = -C_1 \cdot \langle x\varphi, \delta'(x)\rangle = C_1(x\varphi)'\big|_0 = C_1\varphi(0) = C_1\langle\varphi(x), \delta(x)\rangle.$$

Значит, $f = C_1\delta_0' + C\delta(x)$.

Задача 7
Докажем, что $f = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ – частное решение $xf(x) = 1$.

$$\Big\langle\varphi, x\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)\Big\rangle = \Big\langle x\varphi, \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)\Big\rangle = \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\frac{1}{x}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \big\langle\varphi, 1\big\rangle$$

Общее решение: $f = \mathcal{P}(\frac{1}{x}) + C\delta_0$.

Задача 8
Ответ:

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}\left(\frac{1}{x+1}\right) + C_1\delta(x-1) + C_2\delta(x+1).$$

Задача 9

$$\lim_{\varepsilon\to\pm0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x\pm i\varepsilon}dx = \lim_{\varepsilon\to\pm0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)}{x\pm i\varepsilon}dx = \lim_{\varepsilon\to\pm0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}dx + \varphi(0)\cdot\lim_{\varepsilon\to\pm0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{dx}{x\pm i\varepsilon} =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \varphi(0)\cdot\lim_{\varepsilon\to\pm0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x\mp i\varepsilon}{x^2\mp\varepsilon^2} =$$

$$= \Big\langle\varphi, \mathcal{P}\frac{1}{x}\Big\rangle + \varphi(0)\cdot\lim_{\varepsilon\to\pm0}\left(\frac{1}{2}\ln(x\mp i\varepsilon)\Big|_{-R}^{R} \mp 2i\arctan\frac{R}{\varepsilon}\right) = \langle\varphi, \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)\rangle.$$

Задача 10
Ответ: $f = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_{n-1}x^{n-1}$. Доказывается по индукции.

Задача 11

$$|x| = \lim_{\varepsilon\to0}\sqrt{x^2+\varepsilon^2}, \quad \ln|x| = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\ln(x^2+\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left(x^2+\varepsilon^2\right)\right)' = \frac{1}{2\left(x^2+\varepsilon^2\right)}\cdot 2x = \frac{x}{\varepsilon^2+x^2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi, \frac{x}{\varepsilon^2+x^2}\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi, \frac{x-i\varepsilon+i\varepsilon}{(x-i\varepsilon)(x+i\varepsilon)}\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi, \frac{1}{x+i\varepsilon}\rangle + i\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi, \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\rangle =$$
$$= \langle\varphi, \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)\rangle + i\langle\varphi, \pi\delta(x)\rangle = \langle\varphi, \mathcal{P}\frac{1}{x}\rangle.$$

Воспользовались задачей 2 и формулой Сохоцкого.

Мат. Анализ. Семинар № 28.

Подготовка к к.р. № 2.

Задача 1. В области $Q=\{0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ 0<t<\infty\}$

Решить задачу: $f(x,y,t)$

$$u_{tt}-\Delta u=\boxed{3\sin 2t\,\sin x\,\cos\frac{y}{2}}$$

$$u\big|_{t=0}=\boxed{0}\ ;\qquad u_t\big|_{t=0}=\boxed{6\sin 2x\,\cos\frac{3y}{2}}$$

$\varphi(x,y)$ $\qquad\qquad \psi(x,y)$

$$u\big|_{x=0}=u_{x=\pi}=0\ ;\quad u_y\big|_{y=0}=u\big|_{y=\pi}=0.$$

$(\psi\neq 0)$, $(f=0)$

Решение: Решаем отдельно однородную и неоднородную задачу:

① Однородная задача. Метод разделения переменных: $u_0(x,y,t)=v(x,y)\,T(t)$

Подставим:

$$T''(t)+\lambda T(t)=0$$

$$v_{xx}+v_{yy}+\lambda v=0$$

$$v\big|_{x=0}=v\big|_{x=\pi}=0;\quad v_y\big|_{y=0}=v\big|_{y=\pi}=0.$$

Опять разделим переменные: $\lambda=\mu+\nu$

$$v(x,y)=X(x)\,Y(y),$$

Получим:

$$X''(x)+\mu X(x)=0 \quad\Big|\quad Y''(y)+\nu Y(y)=0$$

$$X\big|_{x=0}=X\big|_{x=\pi}=0 \quad\Big|\quad Y_y\big|_{y=0}=Y\big|_{y=\pi}=0.$$

Получаем: $\mu_n = n^2$, $X_n(x) = \sin nx$

$\nu_m = \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2$, $Y_m(y) = \cos\frac{2m-1}{2}y$

$\boxed{\lambda_{n,m} = n^2 + \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$.

$v_{n,m}(x,y) = \sin nx \cdot \cos\frac{2m-1}{2}y$

$$T''_{n,m}(t) + \lambda_{n,m} T_{n,m}(t) = 0$$

$$T_{n,m}(t) = A_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t + B_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t$$

Общее решение однородного уравнения:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1,\, m=1}^{\infty,\infty}\left(A_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t + B_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t\right)\times \sin nx \cdot \cos\frac{2m-1}{2}y$$

$A_{n,m}$ – коэф. фурье $\varphi(x,y)$ по $\sin nx \cdot \cos\frac{2m-1}{2}y$

$B_{n,m}$ – коэф. фурье $\psi(x,y)$ по $\sin nx \cdot \cos\frac{2m-1}{2}y$, <u>деленные</u> на $\sqrt{\lambda_{n,m}}$

$$A_{n,m} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x,y)\sin nx \cdot \cos\frac{2m-1}{2}y\,dx\,dy$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,m}}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^{\pi}\psi(x,y)\sin nx \cdot \cos\frac{2m-1}{2}y\,dx\,dy.$$

В нашем случае: $\varphi(x,y) \equiv 0 \Rightarrow A_{n,m} = 0 \ \forall n,m$

$$\psi(x,y) = 6\sin 2x \cos\frac{3y}{2}. \qquad \frac{2m-1}{2} = \frac{3}{2}$$

т.е. все $B_{n,m}$ были нули, кроме $n=2$, $m=2$

т.е. $B_{2,2} = 6$. $\lambda_{2,2} = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$

$\sqrt{\lambda_{2,2}} = \frac{5}{2}$.

Решение однородн. уравн.:

$$u_0(x,y,t) = B_{22} \cdot \sin\sqrt{\lambda_{2,2}}\, t \cdot \sin 2x \cdot \cos\frac{3y}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{6\cdot 2}{5}\sin\left(\frac{5}{2}t\right)\cdot \sin 2x \cos\frac{3y}{2}}.$$

---

② Решаем неоднородную задачу

$$u_{tt} = \Delta u + f(x,y,t)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0; \quad u_y|_{y=0} = u|_{y=0} = 0$$

где $f(x,y,t) = 3\sin 2t \sin x \cdot \cos\frac{y}{2}$

Раскладываем $f(x,y,t)$ в ряд Фурье по $\sin nx \cdot \cos\frac{2m-1}{2}y$

$$f(x,y,t) = \underbrace{(3\sin 2t)}_{f_{1,1}(t)} \cdot \left(\sin x \cdot \cos\frac{y}{2}\right)$$

$n=1$ $\quad m=1$ $\quad$ остальные нулевые

Пусть $f(x,y,t) = \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m}(t) \sin nx \cdot \cos\frac{2m-1}{2}y$

Тогда решение $u_1(x,y,t)$ ищем в виде ряда:

$$u_1(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty} p_{n,m}(t)\cdot \sin nx \cdot \cos\frac{2m-1}{2}y$$

Подставим в уравн. и находим ур. для $p_{n,m}(t)$:

$$\boxed{\begin{gathered} p''_{n,m}(t)+\lambda_{n,m}\,p_{n,m}(t)=f_{n,m}(t) \\ p_{n,m}(0)=0, \quad p'_{n,m}(0)=0. \end{gathered}}$$

Решение имеет вид:

$$\boxed{p_{n,m}(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,m}}}\int_0^t \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,(t-s)\,f_{n,m}(s)\,ds}$$

В нашем случае, только для $\boxed{n=1,\ m=1}$

$$\lambda_{1,1}=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \qquad \sqrt{\lambda_{1,1}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$p_{1,1}=\frac{2}{\sqrt{5}}\int_0^t \sin\frac{\sqrt{5}}{2}(t-s)\cdot 3\cdot \sin(2s)\,ds=$$

Необходимо посчитать этот интеграл.

$$=\frac{6}{\sqrt{5}}\int_0^t\left(\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t\cdot\cos\frac{\sqrt{5}}{2}s-\cos\frac{\sqrt{5}}{2}t\cdot\sin\frac{\sqrt{5}}{2}s\right)\sin(2s)\,ds=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{5}}\left(\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t\int_0^t\cos\frac{\sqrt{5}}{2}s\cdot\sin 2s\,ds-\cos\frac{\sqrt{5}}{2}t\int_0^t\sin\frac{\sqrt{5}}{2}s\cdot\sin 2s\,ds\right)$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5}}\left(\frac{8}{11}\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t - \frac{2\sqrt{5}}{11}\sin 2t\right)$$

Решение неоднородной задачи:

$$u_1(x,y,t) = \frac{6}{\sqrt{5}}\left(\frac{8}{11}\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t - \frac{2\sqrt{5}}{11}\sin 2t\right)\sin x\cdot\cos\frac{y}{2}$$

<u>Ответ</u>: $u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + u_1(x,y,t) =$

$$= \frac{12}{5}\sin\frac{5t}{2}\sin 2x\cdot\cos\frac{3y}{2} + \frac{6}{\sqrt{5}}\left(\frac{8}{11}\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t - \frac{2\sqrt{5}}{11}\sin 2t\right)\sin x\cos\frac{y}{2}$$

можно проверить подстановкой

<u>Задача 2</u>. Записать решение задачи:

$$u_{tt} = \Delta u + 3\sin 2t\cdot f(x,y)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u|_{x=0} = 0 & u|_{x=\pi} = 0 \\ u_y|_{y=0} = 0 & u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$

Решается аналогично 2-й части задачи 1.
Граничные условия одни и те же.
Следовательно решение имеет следующий вид

Пусть $f(x,y)=\sum\limits_{n,m} f_{n,m}\cdot \sin nx\cdot \cos\frac{2m-1}{2}y$

где $f_{n,m}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int\limits_0^{\pi} f(x,y)\cdot\sin nx\cdot\cos\frac{2m-1}{2}y\,dxdy$

коэффициенты Фурье $f(x,y)$ по этой системе.

Решение задачи ищем в виде

(1) $u(x,y,t)=\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} p_{n,m}(t)\cdot\sin nx\cdot\cos\frac{2m-1}{2}y$

$f(x,y,t)=3\sin 2t\cdot f(x,y)$.

Подставляем в уравнение, получаем:

$$\begin{cases} p''_{n,m}(t)+\lambda_{n,m}\,p(t)=3\sin 2t\cdot f_{n,m} \\ p_{n,m}(0)=0,\quad p'_{n,m}(0)=0 \end{cases}$$

Решение: $p_{n,m}(t)=\frac{f_{n,m}}{\sqrt{\lambda_{n,m}}}\int\limits_0^t \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}(t-s)\,3\sin(2s)\,ds$

Необходимо посчитать этот интеграл. (см. стр. 7)

$$=\frac{3f_{n,m}}{\sqrt{\lambda_{n,m}}}\left(\frac{2\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t-\sqrt{\lambda_{n,m}}\sin 2t}{\left(2-\sqrt{\lambda_{n,m}}\right)\left(2+\sqrt{\lambda_{n,m}}\right)}\right)\quad (2)$$

где $\lambda_{n,m}=n^2+\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\quad(\neq 2)$.

$$\int_0^t \sin \alpha(t-s) \cdot \sin(\beta s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\left(\alpha(t-s)-\beta s\right) - \cos\left(\alpha(t-s)+\beta s\right) ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\left(\alpha t - (\alpha+\beta)s\right) - \cos\left(\alpha t + (\beta-\alpha)s\right) ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left(- \frac{\sin\left(\alpha t - (\alpha+\beta)s\right)}{\alpha+\beta}\Bigg|_0^t - \frac{\sin\left(\alpha t + (\beta-\alpha)s\right)}{\beta-\alpha}\Bigg|_0^t \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(+ \frac{\sin\beta t + \sin\alpha t}{\alpha+\beta} - \frac{\sin\beta t - \sin\alpha t}{\beta-\alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\alpha t \cdot \left(\frac{1}{\beta-\alpha} + \frac{1}{\alpha+\beta}\right) - \sin\beta t\left(-\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\beta-\alpha}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha \cdot t) \cdot \frac{\alpha+\beta+\beta-\alpha}{(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)} - \sin\beta t \cdot \frac{-\beta+\alpha+\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)}\right) =$$

$$= \frac{\beta \sin\alpha t - \alpha \sin\beta t}{(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)}.$$

Получили формулу решения:

<u>Ответ</u>: Подставить (2) в (1).

<u>Еще вопрос</u>: определяет ли эта формула обобщенное решение уравнения? <u>Ответ</u>: определяет, т.к. $f(x,y) \in L_2\left((0,\pi)^2\right)$ и, следовательно, ряд: $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m} \sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y$ сходится в $L_2(0,\pi)^2$. Но тогда и ряд (1) тоже сходится в $L_2(0,\pi)^2$,

т.к. $|p_{n,m}| \le C\,|f_{n,m}|$.

Поэтому, этот ряд сходится в пространстве обобщенных функций. Операция дифференцирования непрерывна в пр-ве обобщенных функций. Значит, предельная функция удовлетворяет уравнению.

Задача 3. В пространстве обобщенных функций найти первую и вторую производные для

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x<1 \\ 5 & x=1 \\ x-1, & x>0. \end{cases}$$

Решение: f – кусочно непрерывная функция.

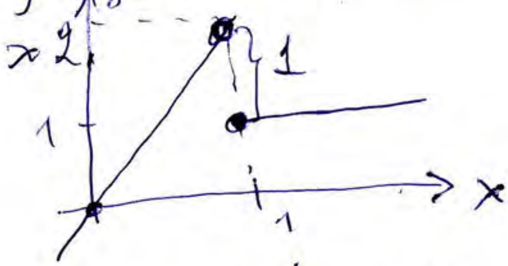
$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{1}(x^2-1)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{1}^{\infty}(x-1)\,\varphi'(x)\,dx = \qquad \boxed{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})}$$

$$= -\underbrace{(x^2-1)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{1}}_{=0} + \int_{-\infty}^{1} 2x\,\varphi(x)\,dx - \underbrace{(x-1)\varphi(x)\Big|_{1}^{+\infty}}_{=0} + \int_{1}^{\infty} 1\cdot\varphi(x)\,dx =$$

$\varphi(-\infty)=0$ $\qquad\qquad$ $\varphi(+\infty)=0$

$$= \int_{-\infty}^{1} 2x\,\varphi(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} 1\cdot\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$



где $g(x) = \begin{cases} 2x, & x<1 \\ 1. & x>1. \end{cases}$

Следовательно $f'(x) = g(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Найдем вторую производную, т.е. $g'(x)$:

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{1} 2x\,\varphi'(x)\,dx - \int_{1}^{\infty} 1\cdot\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -2x\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{1} + \int_{-\infty}^{1} 2\,\varphi(x)\,dx - 1\,\varphi(x)\Big|_{1}^{+\infty} =$$

$\varphi(-\infty)=0$ $\qquad$ $\varphi(+\infty)=0$

$$= -2\varphi(1) + \int_{-\infty}^{1} 2\,\varphi(x)\,dx + \varphi(1) = \int_{-\infty}^{1} 2\varphi(x)\,dx - \varphi(1) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)\,dx - \langle \delta(x-1), \varphi \rangle;$$

$\boxed{\delta(x-1) \text{ – сдвиг } \delta(x)}$

$$\text{где}\quad h(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

<u>Следовательно</u>: $f''(x) = h(x) - \delta(x-1)$.

Результат: $f'(x)$ – регулярная

$f''(x)$ – не регулярная

Задача 4. В области $Q=\{0<x<\pi,\ 0<t<\infty\}$ решить задачу:

$$u_t = 4u_{xx} + t\,e^{-t}\sin\frac{5x}{2}, \quad u(t,0)=u_x(t,\pi)=0$$

$$u(0,x)=\sin\frac{x}{2}\cos x \ \boxed{=\varphi(x)}$$ нач. усл.

Решение: Обозначим $\boxed{f(x,t)=te^{-t}\sin\frac{5x}{2}}$ правая часть.

Решаем отдельно однородную задачу ($f(x,t)=0$) и неоднородную задачу ($\varphi(x)=0,\ f\neq 0$).

1) Однородная задача:

Зад. Штурма-Лиувилля: $-X''=\lambda X$, $X(0)=X'(\pi)=0$

Имеет решен: $\lambda_n=\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$, $X_n(x)=\sin\frac{2n-1}{2}x$.

Общее решение однородн. задачи:

$$u_0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot e^{-4\lambda_n t}\cdot X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-4(n-\frac{1}{2})^2 t}\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x$$

где c_n – коэфф. Фурье функции $\varphi(x)$.

В нашем случае

$$\varphi(x)=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

т.е. $c_1=-\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{1}{2}$, $c_n=0\ \forall\, n\geq 2$

Решение однородн.:

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\cdot\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}e^{-9t}\sin\frac{3x}{2}$$

Неоднородная задача ($\varphi=0$, $f\neq 0$).

Разложим $f(x,t)$ в ряд Фурье по $X_n(x)$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cdot X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cdot\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x$$

В нашем случае $f(x,t)=t\,e^{-t}\sin\frac{5x}{2}$

т.е. $f_3(t)=t\cdot e^{-t}$, $f_n(t)\equiv 0$ $\forall n\neq 3$.

Ищем решение в виде:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)\cdot X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x$$

Подставим в уравнение:

$$p_n'(t)=-4\lambda_n p(t)+f_n(t),\quad p_n(0)=0.$$

Решение: $p_n(t)=\int_0^t e^{-4\lambda_n(t-s)}f_n(s)\,ds$.

В нашем случае $f_n\neq 0$ только при $n=3$

т.е. $p_n(t)\equiv 0$ $\forall n\neq 3$. Найдем $p_3(t)$.

$$p_3(t)=\int_0^t e^{-25(t-s)}\cdot s\,e^{-s}\,ds=$$

$$= e^{-25t}\int_0^t s\cdot e^{24s}\,ds = e^{-25t}\left(\frac{1}{24}te^{24t} - \frac{1}{(24)^2}e^{24t} + \frac{1}{(24)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{24}t\cdot e^{-t} - \frac{1}{(24)^2}\cdot e^{-t} + \frac{1}{(24)^2}\cdot e^{-25t}$$

Следовательно,

$$u_1(x,t) = \left(\frac{te^{-t}}{24} - \frac{e^{-t}}{24^2} + \frac{e^{-25t}}{(24)^2}\right)\cdot \sin\frac{5x}{2}.$$

<u>Ответ:</u> $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) =$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}e^{-9t}\sin\frac{3x}{2} + \left(\frac{te^{-t}}{24} - \frac{e^{-t}}{24^2} + \frac{e^{-25t}}{24^2}\right)\sin\frac{5x}{2}$$