Линейная алгебра и геометрия
второе полугодие 1 курса
Задачи

А.Л. Городенцев

13 июня 2020 г.

1 Евклидова геометрия

ГЛ7 1

Назовем вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, проведем через $\vec{a}, \vec{b}$ плоскость и перпендикуляр к ней (назовем его l). Спроецируем $\vec{c}$ на плоскость и l, получим $\vec{c} = \vec{c_1} + \vec{c_2}$. Заметим, что $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c_1}) + (\vec{a}, \vec{c_2}) = (\vec{a}, \vec{c_1})$, так как $\vec{a} \perp \vec{c_2}$, аналогично $(\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c_1})$.
Значит углы между всеми парами векторов $\leqslant \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим наибольший угол (тогда заметим, что вектор, не являющийся стороной этого угла, лежит внутри угла). Тогда все 3 вектора $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ вписаны в какую-то четверть, а следовательно если выбрать еще один ортогональный вектор, то $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ будут вписаны в октант.

ГЛ7 2

Докажем по индукции
База:
При $n = 1$ есть 2 вектора
Переход:
Рассмотрим пространство размерности n, в нем есть набор из $n+1$ вектора, удовлетворяющий условиям. Если взять пространство размерности $n+1$, то в любом его подпространстве размерности n будет не более $n+1$ вектора, следовательно во всем пространстве $n+1$ будет не более $n+2$ векторов.

ГЛ7 3

Очевидно, что в каждой размерности $\mathbb{R}^n$ есть хотя бы n гиперплоскостей, относительно которых симметричен куб. Далее заметим, что плоскость относительно которой куб симметричен также может проходить через пары противоположных ребер (в размерности $\mathbb{R}^n$ это гиперплоскостей размерности $\mathbb{R}^{n-2}$ ровно $n \cdot (n-1) \cdot 2$). Заметим, что для $\mathbb{R}^n$ есть ровно $\dim(\mathbb{R}^n) + \frac{n \cdot (n-1) \cdot 2}{2} = n + n \cdot (n-1) = n \cdot n$.
Тогда для 4: $4 \cdot 4 = 16$

ГЛ7 4

(A)
Существует $n+1$ точка вида $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 единица и n нулей). В обоих подпространствах выберем базисные векторы. Каждое ребро будет соответствовать вектору $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$ – одна 1 и -1, а также $n-1$ ноль. Для $n-2$ грани векторы с фиксированной 1 и нулями на местах, где у ребер 1 или -1, а на оставшихся местах одна -1 и нули. Пример:

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0) \ \times \ (n-2)$$
$$(0, \ldots, 0, 1, -1)$$

Скалярное произведение векторов из $(n-2)$ мерного пространства с $(0, \ldots, 0, 1, -1)$ будет равно 0, а следовательно ребро перпендикулярно $(n-2)$ мерной грани.

ГЛ7 6

Заметим что отражение σ_{e_i} домножает данный базисный вектор на -1, следовательно композиция отражений $\sigma_{e_1}, \ldots, \sigma_{e_n}$ домножает все вектора на -1, следовательно это просто центральная симметрия относительно начала координат

ГЛ7 7

А $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \rho_{v,\varphi}$
Две симметрии относительно плоскостей эквивалентны поороту когда они не параллельны $\pi_1 \nparallel \pi_2$, v – вектор совпадающий с осью пересечения плоскостей π_1, π_2, φ равен удвоенному углу между π_1, π_2

Б $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \tau_v$
Две симметрии относительно плоскостей эквивалентны сдвигу на вектор в случае если $\pi_1 \parallel \pi_2$, $v \perp \pi_1, \pi_2$ и равен удвоенному расстоянию между π_1, π_2

В $\sigma_\pi \circ \varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_\pi = \varrho_{v,\psi}$
Вектор v симметричен вектору u относительно плоскости π, $\varphi = \psi$

Г $\varrho_{u,\varphi} \circ \varrho_{w,\psi} = \tau_v \circ \varrho_{v,\vartheta}$

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \vec{u}\cdot\vec{w}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}$$
$$\vec{v} = \vec{u}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \vec{w}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \vec{u}\times\vec{w}\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\psi}{2}$$

Д $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_{\pi_1} \circ \varrho_{u,-\varphi} = \sigma_{\pi_2}$

Е $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_{\pi_1} = \sigma_{\pi_2}$

Ж $\tau_{u_2} \circ \sigma_{\pi_2} \circ \tau_{u_1} \circ \sigma_{\pi_1} = \tau_v \circ \varrho_{v,\varphi}$

2 Линейные отображения евклидовых пространств

ГЛ8 1

$V = U \oplus W$
$V = V_U + V_W$

$V = V_U + V_{U^\perp}$
$V = V_W + V_{W^\perp}$
$V_{U^\perp} + V_{W^\perp} = 2V - (V_U + V_W) = V$
откуда
$V = U^\perp \oplus W^\perp$

$\pi :$
$V \to V$
$V \to V_W$

$(\pi U, V) = (U, \pi^\times V)$
$(U_W, V_U + V_W) = (U_W, V_W) + (U_W, V_U) \quad (U_W, V_U) = 0$
Откуда
$(U, \pi^\times V) = (U_W, V_W) \ \Rightarrow\ \pi = \pi^\times \ \Rightarrow$ оператор самосрпяжен
$\ker(\pi^\times) = \{V \mid V \subset U\}$
$\operatorname{im}(\pi^\times) = \{V' \mid V' \subset W\}$

$\pi^\times :$
$V \to V$
$V \to V_W$

ГЛ8 3

А

$(u_i, fu_i) = (fu_i)_i \ \Rightarrow Bu(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} (fu_i)_i$
Выберем новый ортогональный базис
$v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} u_i \qquad \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = 1$
$(v_1, fv_1) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1}^2 (u_i, fu_i)$
$Bu(f) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{1j}^2 (u_1, fu_1) + \sum\limits_{j=1}^{n} x_{2j}^2 (u_2, fu_2) + \ldots + \sum\limits_{j=1}^{n} x_{nj}^2 (u_n, fu_n) \ \Rightarrow$ не зависит

Б

Сформулируем вспомогательную теорему:
$\forall$ самосопряженного оператора F в E^n существует ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов F
(теорема о нормальном базисе), доказательство приведено в 12 лекции

Согласно теореме и пункту (А) выберем в V базис, состоящий из собственных векторов
$f :\ V \to V$ каждому собственному значению сопоставим собственный вектор
Откуда $fu_i = \lambda_i u_i \quad \forall i = 1, \ldots, n \qquad \Rightarrow (u_i, fu_i) = \lambda_i$, где u_i имеет вид $(0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$
$\max_u B_u(A) = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j$ так как $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$

в

Единичная сфера $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^2 = 1$

$x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i u_i$

$qf(x) = (x_1u_1 + \ldots + x_ru_r, \lambda_1 x_1 u_1 + \ldots + \lambda_r x_r u_r) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2$

$x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 1 \;\Rightarrow\; x_i^2 = 1 - (x_1^2 + \ldots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_r^2)$

Найдем экстремумы функции ($\frac{d}{dx_i} \quad i = 1, \ldots, r$)

$qf(x) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)x_2^2 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_1)x_r^2$ $\lambda_2 = \lambda_1$ или $x_2 = 0$ откуда $qf(x) = \lambda_1(x_1^2 + x_2^2)$, а так как $x_1^2 = 1 - x_2^2$ откуда $qf(x) = \lambda_1$

$$\begin{cases} 2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 = 0 \\ 2(\lambda_3 - \lambda_1)x_3 = 0 \\ \ldots \\ 2(\lambda_r - \lambda_1)x_r = 0 \end{cases}$$

Следовательно экстремум достигается при

$$\begin{cases} x_i = 1 & \forall i = 1, \ldots, r \\ x_j = 0 & \text{для всех остальных } x \end{cases}$$

и равен $qf(x) = \lambda_i$ откуда $m_u(f) = \lambda_{\min}$ из λ_j – собстенные значения собственных векторов подпространства U

$\max m_u(f) = \lambda_{n-r+1}$ (собственные значения в подпространстве $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots$)

$\min_W M_W(f) = \lambda_{n-r+1}$ (min собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r+1}$)

г

$u = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i u_i$

$(u, fu) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2$

$(u, Fu) = (x_1u_1 + \ldots + x_{n-1}u_{n-1},\ x_1 h(u_1) + \ldots + x_{n-1}h(u_{n-1}))$

$(u, fu) = (u, hu)$ откуда h имеет те же собственные значения что и f

λ_n значение у h: либо 0, либо $-\lambda_n$, так как у h те же базисные вектора $e_1, \ldots, e_{n-1}$ что и у f

ГЛ8 4

а $\Leftrightarrow$ б

$$ff^\times = f^\times f v$$
$$(fu, fw) = (u, f^\times(fw)) = (u, f(f^\times w)) = (f^\times u, f^\times w)$$

Откуда при $u = w$

$$(fu, fu) = (f^\times u, f^\times u) \;\Rightarrow\; |f(u)| = |f^\times(u)|$$

в)

$$f = f_- + f_+$$
$$F = \frac{F + F^\times}{2} + \frac{F - F^\times}{2}$$
$$\Big(\frac{F + F^\times}{2}\Big)\Big(\frac{F - F^\times}{2}\Big) = \frac{F^2 - FF^\times + F^\times F - (F^\times)^2}{4} = \Big(\frac{F - F^\times}{2}\Big)\Big(\frac{F + F^\times}{2}\Big)$$

Следовательно компоненты перестановочны так как $FF^\times = F^\times F$

Откуда свойства эквивалентны

ГЛ8 5

Нормальный оператор

а)

Требуется доказать, что $f(U^{\perp}) \subset U^{\perp} \quad w \in U^{\perp}$

$$
\begin{aligned}
&(fu, w) = (u, f^{\times}w) \\
&\text{так как } f(u) \in U \;\Rightarrow\; f^{\times}w \in U^{\perp} \\
&(fu, f^{\times}w) = (u, f^{\times}(f^{\times}w))
\end{aligned}
$$

б)

$$
(f^{\times}u, w) = (u, fw) = 0 \;\Rightarrow\; f^{\times}u \in U \quad f^{\times}(U) \subset U
$$

ГЛ8 6*

Каждое биективное линейное преобразование $F \in \mathrm{GL}(V)$ евклидова пространства V допускает единственное разложение $F = GS$, в котором оператор $G \in O(V)$ ортогонален и $S \in \mathrm{GL}(V)$ самосопряжен и имеет собственные значения(следствие из сингулярного разложения)
Тогда так как

$$
G^{\times}G = id, \; S^{\times} = S \tag{1}
$$

То

$$
F^{\times}F = S^{\times}G^{\times}GS = S^2
$$

($\Leftarrow$) При $F = GS = SG$ выполнено

$$
\begin{aligned}
&FF^{\times} = GSS^{\times}G^{\times} = GSS^{\times}G^{\times} = SGS^{\times}G^{\times} = SSGG^{\times} = S^2 \\
&F^{\times}F = S^{\times}G^{\times}GS = S^2 \\
&\Rightarrow F^{\times}F = FF^{\times}
\end{aligned}
$$

($\Rightarrow$) Пусть компоненты не транзитивны и оператор нормален

$$
\begin{aligned}
&F^{\times}F = FF^{\times} \\
&GS \neq SG \\
&\begin{cases} F^{\times}F = S^{\times}G^{\times}GS = S^2 \\ FF^{\times} = GS^2G^{\times} \end{cases} \\
&\Rightarrow S^2 = GS^2G^{\times}
\end{aligned}
$$

Тогда так как G ортогонален, то

$$
\begin{aligned}
&(a_1, a_2) = (Ga_1, Ga_2) = (a_1, G^{\times}Ga_2) \\
&\Rightarrow G^{\times}G = id \Rightarrow G^{\times} = G^{-1}
\end{aligned}
$$

Тогда из $S^2 = GS^2G^{\times}$ следует что

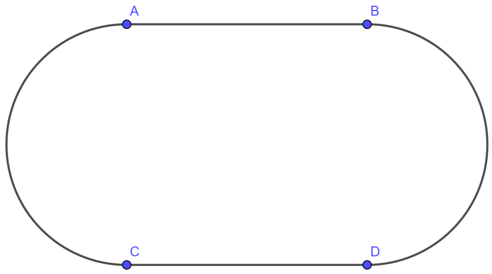
$$
G^{-1}S^2 = S^2G^{\times} \Rightarrow G^{\times}S = SG^{\times} \Rightarrow GS = SG
$$

Откуда следует что предположение было неверным.

3 Выпуклые фигуры

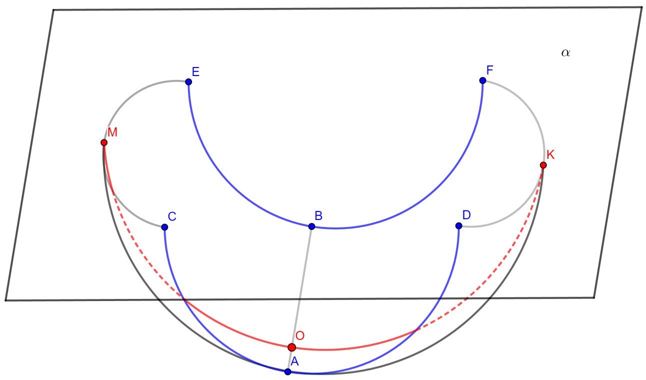
ГЛ9 1

а)
Пусть Φ – некая фигура, ее грани это пересечения замкнутой фигуры с ее опорной гиперплоскостью, вершины – нульмерные грани. То есть если касательная проведенная из некой точки $a \in \Phi$ к Φ в пересечении с Φ содержит только a, то точка a является вершиной.



У фигуры на картинке вершинами являются $\Phi \backslash [A, B] \cup [C, D] = (C, A) \cup (B, D)$ – 2 полуокружности с выколотыми точками. Объединение двух открытых множеств – открытое множество, откуда следует что выпуклое множество удовлетворяет условию.

б)
Рассмотрим фигуру $\Phi \in \mathbb{R}^3$. Она образована движением параболы с вершиной O вдоль оси AB, причем ширина параболы менялась во время движения по AB так как показано на рисунке (чтобы CME и DKF были выпуклыми). Таким образом, имеется замкнутая выпуклая фигура Φ, ее граница – $X \cup$ четырехугольник $CDFE \cup$ отрезок AB.



По определению, крайней точкой фигуры Φ называется точка, которая не является внутренней точкой никакого отрезка $[a, b] \in \Phi$.
У параболы с вершиной A крайними точками являются все точки, кроме A, C, D, следовательно, множество крайних точек не замкнуто, тк существует предельная точка A, не лежащая во множестве крайних точек.
Заметим, что это множество не только не замкнуто, но и открыто, тк оно гомеоморфно объединению 2х интервалов. Объединение бесконечного числа открытых множеств – открыто.
Таким образом, крайней точкой фигуры Φ является объединение бесконечного числа незамкнутых множеств – незамкнутое множество $X/(CE \cup DF \cup AB)$

ГЛ9 2

а) по задаче 6
б)

в)

ГЛ9 3

Рассмотрим набор $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{d+2}\} \subset \mathbf{R}^d$ из $d+2$ точек в пространстве размерности d. Тогда существует множество множителей $a, \ldots, a_{d+2}$, не все из которых равны нулю, тогда решим систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{d+2} a_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{d+2} a_i = 0$$

Так как есть $d+2$ переменных и только $d+1$ уравнений которым они должны удовлетворять (по одному для каждой координаты точек, вместе с окончательным уравнением, требующим, чтобы сумма множителей была равна нулю). Зафиксируем некоторое ненулевое решение $a_1, \ldots, a_{d+2}$. Пусть $I \subseteq X$ Будет множеством точек с положительными множителями, и $J = X \setminus I$ с отрицательными или 0. Тогда I и J формируют требуемое разбиение точек на два подмножества с пересекающимися выпуклыми оболочками.
выпуклые множества I и J должны пересекаться, так как у них есть общая точка

$$p = \sum_{i \in I} \frac{a_i}{A} x_i = \sum_{j \in J} \frac{-a_j}{A} x_j$$

где

$$A = \sum_{i \in I} a_i = -\sum_{j \in J} a_j.$$

Левая часть формулы для p выражает эту точку как выпуклую комбинацию точек в I, а правая часть выражает ее как выпуклую комбинацию точек в J. Следовательно, p принадлежит обеим выпуклым оболочкам.

ГЛ9 4*

Пусть x – точка в выпуклой оболочке P. Тогда x является выпуклой комбинацией конечного числа точек в P

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}_j$$

где каждый x_j находится в P, каждый λ_j является (w.l.o.g.) положительным, а $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$.

Предположим, что $k > d+1$ (иначе доказывать нечего). Тогда векторы $x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1$ линейно зависимы, поэтому существуют действительные скаляры $\mu_2, \ldots, \mu_k$, не все ноль, так что

$$\sum_{j=2}^{k} \mu_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$$

Если μ_1 определить как

$$\mu_1 := -\sum_{j=2}^{k} \mu_j$$

То

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j = 0$$

и не все μ_j равны нулю. Следовательно, хотя бы один $\mu_j > 0$.
Потом,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}_j - \alpha \sum_{j=1}^{k} \mu_j \mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \alpha \mu_j) \mathbf{x}_j$$

для любого вещественного α. В частности, равенство будет иметь место, если α определено как

$$\alpha := \min_{1 \le j \le k} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} : \mu_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

Обратите внимание, что $\alpha > 0$, и для каждого j между 1 и k,

$$\lambda_j - \alpha\mu_j \ge 0$$

В частности, $\lambda_i - \alpha\mu_i = 0$ по определению α. Следовательно,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \alpha\mu_j)\mathbf{x}_j$$

где все $\lambda_j - \alpha\mu_j$ неотрицательны, их сумма равна единице, и, кроме того, $\lambda_i - \alpha\mu_i = 0$. Другими словами, x представляется выпуклой комбинацией не более чем $k-1$ точек из P. Этот процесс может повторяться до тех пор, пока x не будет представлен в виде выпуклой комбинации не более чем $d+1$ точек в P.

ГЛ9 6*

Докажем по индукции:
База:
пусть $n = d + 2$. По нашим предположениям, для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ существует точка x_j, которая находится в общем пересечении всех x_i с возможным исключением X_J. Теперь мы применим теорему Радона к множеству $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, что дает нам непересекающиеся подмножества A_1, A_2 в A такой, что выпуклая оболочка A_1 пересекает выпуклую оболочку A_2. Предположим, что p является точкой на пересечении этих двух выпуклых оболочек. Мы утверждаем, что

$$p \in \bigcap_{j=1}^{n} x_j$$

Действительно, рассмотрим любые $j \in \{1, \ldots, n\}$. Докажем, что $p \in x_j$. Обратите внимание, что единственный элемент A, который может отсутствовать в x_j, это x_j. Если $x_j \in A_1$, то $x_j \notin A_2$ и, следовательно, $x_j \supset A_2$. Поскольку x_j выпуклый, он также содержит выпуклую оболочку A_2 и, следовательно, также $p \in x_j$. Аналогично, если $x_j \notin A_1$, то $x_j \supset A_1$ и по тем же соображениям $p \in x_j$. Поскольку p находится в каждом x_j, он также должен находиться на пересечении.

Выше мы предполагали, что точки $x_1, \ldots, x_n$ различны. Если это не так, скажем, $x_i = x_k$ для некоторого $i \neq k$, тогда x_i находится в каждом из наборов x_j, и снова мы заключаем, что пересечение непусто. Это завершает доказательство в случае $n = d + 2$.

Шаг индукции. Предположим, что $n > d + 2$, и утверждение верно для $n - 1$. Приведенный выше аргумент показывает, что любая подколлекция наборов $d+2$ будет иметь непустое пересечение. Затем мы можем рассмотреть коллекцию, в которой мы заменим два набора x_{n-1} и x_n одним набором $x_{n-1} \cap x_n$. В этой новой коллекции каждая подколлекция наборов $d + 1$ будет иметь непустое пересечение. Следовательно, применяется индуктивная гипотеза, которая показывает, что эта новая коллекция имеет непустое пересечение. Это подразумевает то же самое для оригинальной коллекции и завершает доказательство.

ГЛ9 7*

Лемма Пала дает покрышку лучше, чем теорема Юнга, поэтому, доказав ее, мы докажем и теорему Юнга. Проведем 4 опорные прямые(2 пары параллельных прямых, под углом в $60°$), построим еще 2 под углом $60°$ ко всем предведущим и проведем к ним высоты из точек пересечения предведущих пар. Рассмотрим модуль разности длин этих высот, по-непрерывности при каком-то положении прямых он равен 0 (так как при повороте на $180°$ мы пройдем через 0) – при 0 получим правильный шестиугольник с расстоянием между противоположными сторонами равном 1, расстояние между противолежащими вершинами в нем $\frac{2}{\sqrt{3}}$ – очевидно он вписывается в окружность такого же диаметра, что и требовалось

ГЛ9 10

Минимальная по включению грань – это пересечение опорных гиперплоскостей. Заметим, что пересечение аффинных подпространств тоже аффинно.

Теперь покажем, что $\forall\, v \in \sigma \cap (-\sigma)$, v также лежит в этом аффинном подпространстве. Действительно, если $v \in \sigma \cap (-\sigma)$, то вся прямая, натянутая на v, лежит в σ. Она параллельна каждому опорному подпространству (так как иначе она бы пересекла его и не содержалась бы в σ). Следовательно v лежит в аффинном подпространстве.

4 Билинейные и квадратичные формы

ГЛ10 2

Вспомогательное утверждение
При любых $a_1, a_2 \in \mathbb{F}_q^*$ квадратичная форма $a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ на двумерном координатном пространстве $\mathbb{F}_q^2$ принимает все значения из поля $\mathbb{F}_q$.

Доказательство
При любых фиксированных $a_1, a_2 \in \mathbb{F}_q^*$ и $b \in \mathbb{F}_q$ чисел вида $a_1x_1^2$ и чисел вида $b - a_2x_2^2$ имеется ровно по

$$1 + \frac{q-1}{2} = q + \frac{q-1}{2}$$

штук, так как при отображении

$$f : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{F}_q^*$$
$$f : x \to x^2$$

$x^2 = 1$ имеется 2 корня, следовательно $|\mathrm{im} f| = \dfrac{q-1}{2}$. Значит, множества $a_1x_1^2$ и $b - a_2x_2^2$ имеют общий элемент, и $f(x_1, x_2) = b$

Предложение
Всякая квадратичная форма в пространстве размерности $\geqslant 3$ над полем $\mathbb{F}^q$ имеет ненулевой изотропный вектор.

Доказательство
по теореме 14.2 из лекции 15, квадратичная форма в подходящем базисе записывается как

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1^3 + \dots$$

Если $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$, то вектор $(1, 0, 0, \dots)$ или вектор $(0, 1, 0, \dots)$ изотропен. Если $a_1a_2 \neq 0$, то по доказанной лемме найдутся такие $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q$, что $a_1\lambda^2 + a_2\mu^2 = -a_3$. Тогда вектор $(\lambda, \mu, 1, 0, \dots)$ изотропен.

Из предложения вытекает следствие: анизотропные квадратичные формы имеются только в размерностях 1 и 2.
По предложению 15.4 из лекции 15, в размерности 2 квадратичная форма $x_1^2 + x_2^2$ анизотропна если и только если $q \equiv -1 \pmod 4$ а форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$ анизотропна если и только если $q \equiv 1 \pmod 4$

ГЛ10 3

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Тогда форма $q : A \mapsto \det A = ad - bc$ является квадратичной формой, так как ее можно представить в виде

$$q(A, A) = A^T q A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = ad - bc$$

По определению, поляризация имеет вид

$$2\widetilde{\det}(X, Y) = \det(X + Y) - \det X - \det Y$$

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$2\widetilde{\det}(X, Y) = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = a_1d_2 + a_2d_1 - b_1c_2 - b_2c_1$$

Пусть

$$Y^? = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}\left(X \cdot Y^?\right) = a_1 a + b_1 c + c_1 b + d_1 d = a_1 d_2 + a_2 d_1 - b_1 c_2 - b_2 c_1$$

Следовательно

$$Y^? = \begin{pmatrix} d_2 & -b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, линейное преобразование $Y \mapsto Y^?$ имеет вид $Y \mapsto \det Y \cdot Y^{-1}$
Форма det не является гиперболической, тк не существует базиса, в котором det имеет вид

$$A^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как при смене базиса каждое число в матрице умножается на квадрат числа, и, следовательно, нельзя поменять знак у чисел $-\frac{1}{2}$.

ГЛ10 4

Так как $(y_0, y_1) = (x_0, x_1)\,A$, то:

$$f(y_0, y_1) = f((x_0, x_1)A) = ((x_0, x_1)A)^T f((x_0, x_1)A) = A^T (x_0 x_1)^T f(x_0 x_1) A = A^T f(x_0, x_1) A$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow (y_0, y_1) = (a x_0 + c x_1, b x_0 + d x_1)$$

Обозначим базис в пространстве W $e_1 = x_0^2, e_2 = x_0 x_1, e_3 = x_1^2$.
Тогда любая квадратичная форма $Q \in W$ имеет вид $Q = \alpha e_1 + 2\beta e_2 + \gamma e_3$, $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$
Так как

$$y_0^2 = a^2 x_0^2 + 2ac x_0 x_1 + c^2 x_1^2 \quad y_1^2 = b^2 x_0^2 + 2bd x_0 x_1 + d^2 x_1^2 \quad y_0 y_1 = ab x_0^2 + (ad + bc) x_0 x_1 + cd x_1^2$$

То замена базиса под действием оператора $S^2 A : W \to W$ имеет матрицу

$$Xe = \begin{pmatrix} a^2 & 2ac & c^2 \\ ab & ad + bc & cd \\ b^2 & 2bd & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^{'} \\ e_2^{'} \\ e_3^{'} \end{pmatrix}$$

И линейный оператор действует на матрицу сопряжением

$$S^2 A(Q) \to A^T Q A = \begin{pmatrix} \alpha a^2 + 2\beta ac + \gamma c^2 & \beta(ad + bc) + \alpha ab + \gamma cd \\ \beta(ad + bc) + \alpha ab + \gamma cd & \alpha b^2 + 2\beta bd + \gamma d^2 \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$\mathrm{tr} X = a^2 + ad + bc + d^2 = (a + d)^2 - ad + bc = \mathrm{tr}^2 A - \det A$$
$$\det X = a^3 d^3 + a^2 bcd^2 + 4ac^2 b^2 d - b^2 c^2 ad - b^3 c^3 - 4bcd^2 a^2 =$$
$$(ad)^3 - (bc)^3 - 3abcd(ad - bc) = (ad - bc)((ad)^2 + abcd + (bc)^2 - 3abcd) =$$
$$(ad - bc)^3 = \det^3 A$$

ГЛ10 5

$\det(tE - X) = t^n - \delta_1(x) t^{n-1} + \delta_2(x) t^{n-2} - \ldots$
$\delta_2(x) = q(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \ldots) = a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21} + \ldots = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} a_{ii} a_{jj} - \sum\limits_{\substack{k \neq l \\ k=1 \\ k<l}}^{n} a_{kl} a_{lk}$

Тогда составим матрицу грама, упорядочив a_{kl} по возрастанию суммы индексов:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = 0\\
&\Delta_3 < 0 \quad (1,1)\\
&\Delta_4 > 0 \quad (1,2)\\
&\Delta_6 < 0\\
&\Delta_8 > 0 \quad (3,5)\\
&\Delta_9 < 0 \quad (3,6)
\end{aligned}$$

Блоки $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \simeq H_2 \quad \mathrm{sgn}(H_2) = (1,1)$
Докажем по индукции:
Между $a_{kk} \times a_{kk}$ и $a_{(k+1)} \times a_{(k+1)}$ находится k гиперболических пространств, то $(p_{(k+1)^2-1}, m_{(k+1)^2-1}) = (p_{k^2}+k, m_{k^2}+k)$ ($p_{(k+1)^2-1}$ – минор перед $a_{(k+1)} \times a_{(k+1)}$, так как этот элемент стоит на $(k+1)^2$ месте)
$\Delta_{(k+1)^2} \cdot \Delta_{(k+1)^2} < 0$ откуда $\mathrm{sgn} = (p_{k^2}+k, m_{k^2}+k+1)$
Ответ: $(\frac{n}{2}(n-1), \frac{n+1}{2} \cdot n)$

ГЛ10 6

$\mathrm{sgn}(\mathrm{tr}A^2)$

1. разберем случай $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 = a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 < 0 \\ \Delta_4 < 0 \end{matrix}$$

2. $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$
   Всего n^2 элементов

$$\mathrm{tr}A^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2\sum_{\substack{i<j\\ i=1}}^{n} a_{ij}a_{ji}$$

   Запишем матрицу грама, упорядочив столбцы по возрастанию суммы индексов:
   $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{13},\ a_{31},\ a_{23},\ a_{32},\ a_{33}, \dots$
   Тогда матрица грама состоит из блоков $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \simeq H^2$ на диагонали и 1 при a_{ii}
   Так как между $a_{k^2k^2}$ и $a_{(k+1)^2(k+1)^2}$ ровно k гиперболических пространств, то $(p_{(k+1)^2-1}, m_{(k+1)^2-1}) = (p_{k^2}+k, m_{k^2}+k)$
   Так как знак $\Delta_{(k+1)^2}$ определяется суммой всех H^2 $((-1)^{\sum H^2})$, и $\Delta_{(k+1)^2} \cdot \Delta_{(k+1)^2-1} > 0$, следовательно

$\operatorname{sgn} = (p_{k^2} + k + 1, m_{k^2} + k)$, откуда по индукции получаем:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1 > 0 \quad (1,0)\\
&\Delta_2 = 0\\
&\Delta_3 < 0\\
&\Delta_4 < 0 \quad (3,1)\\
&\Delta_5 = 0\\
&\Delta_6 > 0\\
&\Delta_7 = 0\\
&\Delta_8 < 0\\
&\Delta_9 < 0 \quad (6,3)\\
&\Delta_{10} = 0\\
&\Delta_{11} > 0\\
&\Delta_{12} = 0\\
&\Delta_{13} < 0\\
&\Delta_{14} = 0\\
&\Delta_{15} > 0\\
&\Delta_{16} > 0 \quad (10,6)
\end{aligned}
$$

Откуда: $\operatorname{sgn}(1+2+\ldots+n, 1+2+\ldots+(n-1)) = \operatorname{sgn}(\frac{1+n}{2}\cdot n, \frac{n}{2}(n-1))$

ГЛ10 7

Запишем матрицу Грама для базиса $[1],[x],[x^2]$. Так как $[x^2][x] = [x-1]$, а $[x^2][x^2] = [x^2-x]$, то

$$B = \begin{pmatrix} [1] & [x] & [x^2] \\ [x] & [x^2] & [x-1] \\ [x^2] & [x-1] & [x^2-x] \end{pmatrix}$$

Найдем след умножения базиса на каждый элемент из матрицы B. След умножения на $[1]$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr}([1]) = [1]+[1]+[1] = 0$. След умножения на $[x]$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr}([x]) = 0$. След умножения на $[x^2]$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr}([x^2]) = 2$. След умножения на $[x-1]$:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr}([x-1]) = -3 = 0$. След умножения на $[x^2-x]$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr}([x^2-x]) = 2$.

Таким образом, получаем матрицу Грама для квадратичной формы $\mathrm{tr}(ab)$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$-y^2 - z^2 - 2xz = -y^2 - z^2 + 2xz = 0$
Найдем изотропные векторы этой формы. (будем считать вектор $(0, 0, 0)$ найденным)
Рассмотрим $x = 0$ и $x = 1$, и для каждого из значений найдем перебором y, z.
$x = 0$, следовательно $-y^2 - z^2 = 0$
Форма $y^2 + z^2 = 0$ анизотропна. Таким образом, изотропных векторов нет.
$x = 1$, следовательно $-y^2 - z^2 + 2z = 0$
Изотропные векторы $(1, 0, 1), (1, 1, -1), (1, -1, -1), (1, 0, 0)$

ГЛ10 8

$f : \Omega_{2n} \simeq \Omega_{2n}$
Симплек. группа $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$

$$\mathrm{Sp}_{2n}(k) = \{F \in \mathrm{Mat}_{2n}(k) \mid F^t I F = I\} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

Изотропные подпространства:
Каждое изотропное подпространство $U_1 \subset \Omega_{2n}$
$U_1 \subset L_1$ по определению и $\Omega_{2n} = L_1 \oplus L_1'$ (по теореме: $\forall\ L_1\ \exists\ L_1' \mid V = L_1 \oplus L_1'$. Так как каждое изотропное содержится в симплексе $W,\ \dim(W) = 2\dim(U)$)

$$\forall U_2 \subset \Omega_{2n}\ \exists L_2 \mid U_2 \subset L_2$$

и

$$\Omega_{2n} = L_2 \oplus L_2'$$

Следовательнос существует изометрич. изоморфизм $f : \Omega_{2n} \simeq \Omega_{2n} \quad U_1 \to U_2$

Симплектические прдпространства:
пусть $W_1 \simeq \Omega_{2k},\ W_2 \simeq \Omega_{2k}$ – изометрич. изоморфизм
$W_1^\perp, W_2^\perp \simeq \Omega_{2(n-k)}$
$W_1 \oplus W_1^\perp \simeq \Omega_{2k} + \Omega_{2(n-k)} \simeq W_2 \oplus W_2^\perp$
Композиция изморфизмов = изоморфизм
Базис в
$U = L_1 \oplus L_1' \quad \langle u \rangle, \langle u' \rangle$
$V = L_2 \oplus L_2' \quad \langle v \rangle, \langle v' \rangle$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & \dots & u_n & u_1' & \dots & u_n' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$f(u_i) = V_i$
$f(u_i') = V_i'$
$\Rightarrow$
$f \in \mathrm{Sp}(V)$
$f\,|_{L_1}\ L_1 \simeq L_2 \Rightarrow \mathrm{Sp}(V) \curvearrowright \{L \subset V\}$ транзитивно

5 Проективная геометрия

ГЛ11 1

Если есть 2 вектора, лежащие в пространстве $\mathbb{K}^{n+1}$, то в проективном пространстве $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ им соответствуют две точки.

Возмем гиперплоскость в $\mathbb{K}^{n+1}$, которая пересекает эти векторы. Так как в пересечении будет аффинное подпространство с двумя точками пересечения, там содержится и вся прямая, значит Φ – аффинное подпространство.

Добавим к k-мерному пространству (укажем базис $< e_1, e_2, \dots e_k >$), которое пересекается с аффинной гиперплоскостью, прямую из Φ (направляющий вектор $\overrightarrow{\nu}$), пересекающую гиперплоскость в одной точке. Тогда $\overrightarrow{\nu} \bigcup < e_1, e_2, \dots e_k >$ – базис в Φ, то есть $\dim \Phi = k+1$.

ГЛ11 2

$$\mathrm{GL}_n(F_q) = \bigcup_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$$

1 строка: $q^n - 1$ (все, кроме нулевой)
2 строка: $q^n - q$ (так как строки не пропорц.)
...
n строка: $q^n - 1$

$$\phi: \ \mathrm{GL}_n \to \det(\mathrm{GL}_n)$$
$$\ker(\phi) = \mathrm{SL}_n$$

ϕ – гомоморфизм, так как $A \cdot B \to \det(A) \cdot \det(B) \to \det(A \cdot B)$

$$|\ker(\phi)| \cdot |\mathrm{im}(\phi)| = |\mathrm{GL}_n|$$
$$|\mathrm{im}(\phi) = q - 1|$$
$$\#\mathrm{SL}_n = \frac{\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)}{q-1}$$

$$h : \mathrm{GL}_n(F_q) \to \mathrm{PGL}_n(F_q) = \mathrm{GL}_n(F_q)/ \sim$$
$$\sim: A \sim B \Leftrightarrow A = \lambda B \quad \lambda \in F*_q$$
$$\#\mathrm{PGL}_n(F_q) = \frac{\#\mathrm{GL}_n(F_q)}{q-1} = \#\mathrm{SL}_n$$

ГЛ11 3

Пусть точка o – точка пересечения прямых, на которых лежат точки a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2.
Рассмотрим пересечения прямых:

$$a_1b_2 \cap a_2b_1 = x$$
$$a_1c_2 \cap a_2c_1 = y$$
$$c_1b_2 \cap c_2b_1 = z$$

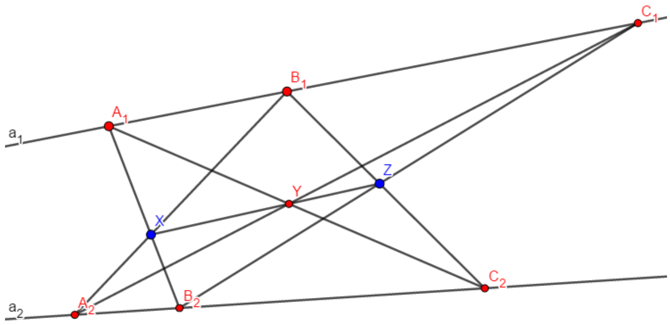
Теперь применим проективное отображение, переводящее прямую xy на бесконечность. Тогда $a_1c_2 \parallel a_2c_1$.
Так как $x \to \infty: \ a_1b_2 \parallel a_2b_1$. Теперь необходимо доказать, что $b_1c_2 \parallel b_2c_1$.
Рассмотрим подобные треугольники.

$$\triangle oa_1c_2 \sim \ \triangle oc_1a_2 \Rightarrow \frac{oc_1}{oa_2} = \frac{oa_1}{oc_2} \Rightarrow oa_1 \cdot oa_2 = oc_1 \cdot oc_2$$
$$\triangle oa_1b_2 \sim \ \triangle ob_1a_2 \Rightarrow \frac{ob_1}{oa_2} = \frac{oa_1}{ob_2} \Rightarrow oa_1 \cdot oa_2 = ob_1 \cdot ob_2$$

Отсюда следует, что $\frac{ob_1}{oc_1} = \frac{ob_2}{oc_2} \Rightarrow \triangle oc_1b_2 \sim \triangle ob_1c_2$ (треугольники подобны) $\Rightarrow b_1c_2 \parallel b_2c_1$.
Что и требовалось доказать.

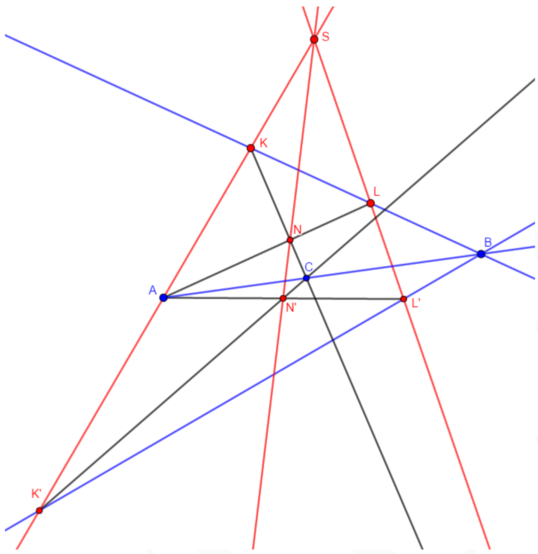
ГЛ11 5

Пусть изначально имеются точки X, Z. Проведем прямые a_1, a_2 так, что расстояние от каждой из них до точек X, Z не больше длины линейки. Отметим B_1 и проведем прямые B_1X, B_1Z, обозначим $B_1X \cap a_2 = A_2$, $B_1Z \cap a_2 = C_2$. Отметим точку A_1 и проведем A_1X, A_1C_2, обозначим $A_1X \cap a_2 = B_2$, $B_2Z \cap a_1 = C_1$, $C_1A_2 \cap A_1C_2 = Y$. Тогда по теореме Паппа X, Y, Z на одной прямой, тогда, проведя прямую XY мы построим и XZ.
Если мы не можем соединить какие-то 2 точки, то повторяем данный алгоритм для них.



ГЛ11 6

Отметим точку $S \notin a, b$. Затем проведем SA, $SA \cap a = K$, $SA \cap b = K'$. Произвольно проведем SL, SN, где $SL \cap a = L$, $SL \cap b = L'$. Теперь проведем AL, AL' и $SN \cap AL = N$, $SN \cap AL' = N'$. Пусть $KN \cap K'N' = C$, тогда AC – искомая прямая, так как A, B, C на одной прямой.
Докажем корректность построения. $\triangle NCN'$ и $\triangle L'LB$ перспективные. Тогда так как $NN' \cap LL' = S$, $NC \cap$



$BL = K$, $NÇ \cap BL' = K'$ и S, K, K' на одной прямой по построению, то $NL, BC, N'L'$ пересекаются в одной точке $NL \cap N'L' = A$ по построению, то A, B, C лежат на одной прямой

ГЛ11 7

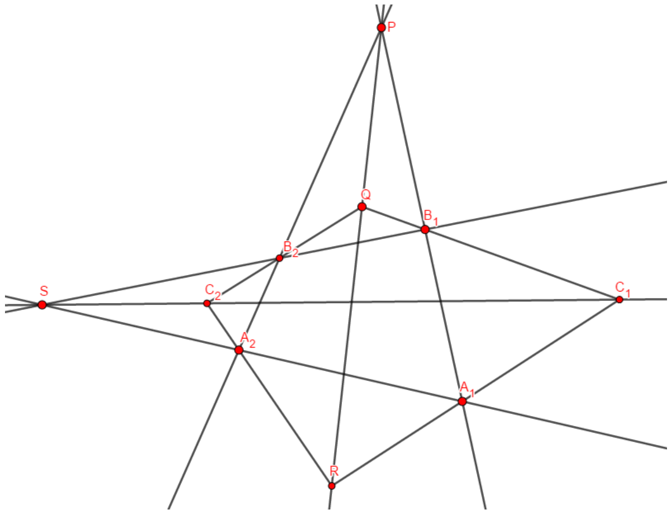
зададим перспективную систему координат

$$\begin{cases} S = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \\ S = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 \\ S = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 \end{cases}$$

$$\alpha_1 A_1 - \beta_1 B_1 = -\alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2$$

Так как

$$A_1B_1 \cap A_2B_2 = P$$



То

$$P = \alpha_1 A_1 - \beta_1 B_1 = -\alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2$$

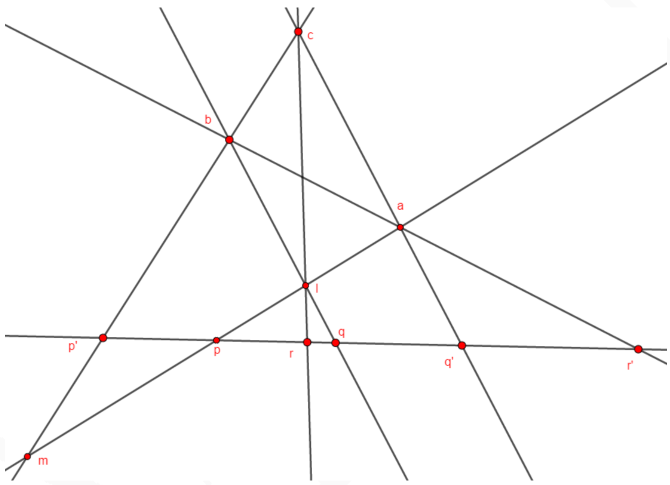
Аналогично

$$Q = \beta_1 B_1 - \gamma_1 C_1 = -\beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2$$
$$R = \gamma_1 C_1 - \alpha_1 A_1 = -\gamma_2 C_2 + \alpha_2 A_2$$

$$P + Q + R = 0$$
$$P = -Q - R$$

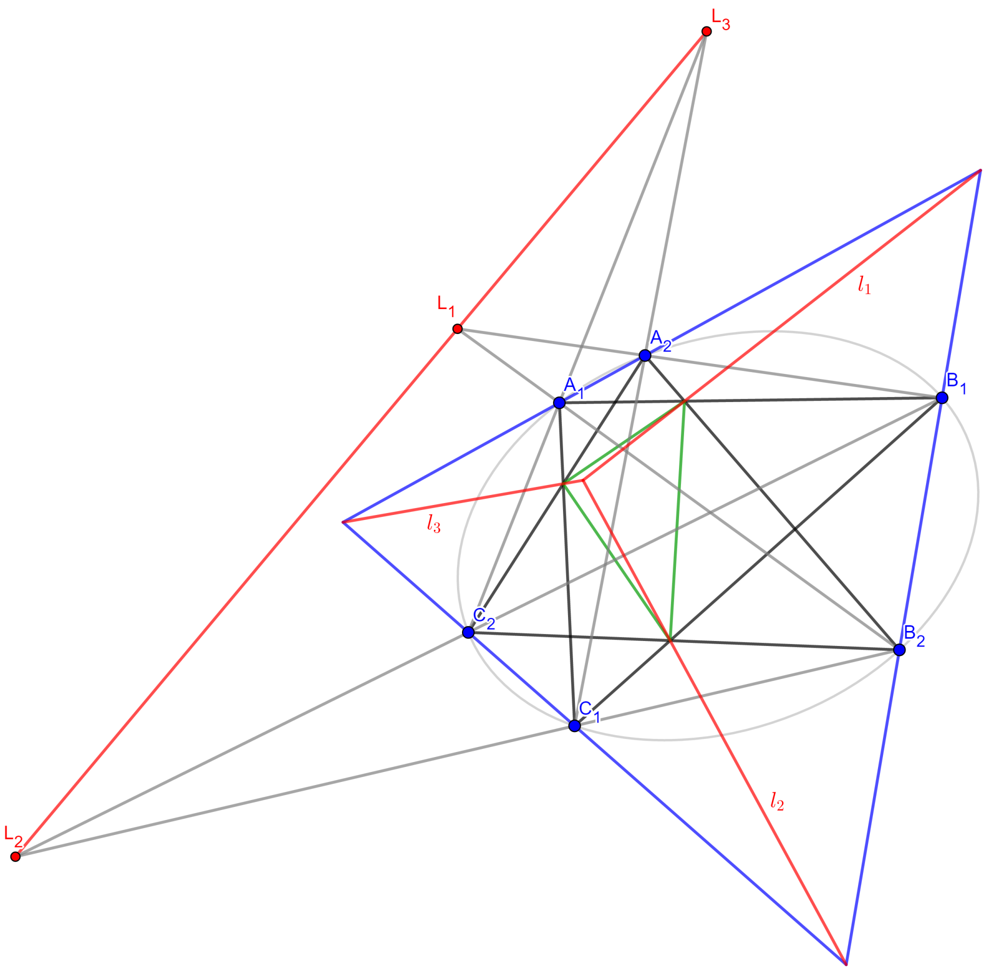
Следовательно P, Q, R принадлежат одной прямой
Если же $A_1A_2 \cap B_1B_2 \cap C_1C_2 \neq S$ то $P, Q, R \neq 1$ откуда следует что P, Q, R не коллинеарны

ГЛ11 8



Докажем от противного. Тогда $l \notin (cr)$ $\quad (bq) \cap (ap) = l$
Заметим, что проективное преобразование одной прямой в другую однозначно задается по трем точкам (то есть по 3 точкам на одной прямой и их образами на другой)
Пусть $f_1 : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2 | \ [p'pqr'] = [mpla]$ при этом $(p'm) \cap (ql) \cap (r'a) = b$
И $f_2 : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2 | \ [mpla] = [p'pr_0q']$ при этом $(mp') \cap (lr_0) \cap (aq') = c, \ r_0 = (cl) \cap (p'r')$
$[p'pqr'] = [p'pr_0q'] \to [pp'r'q] = [p'pr_0q']$
Если в проективном преобразовании f существуют 2 различные точки для которых $f(a) = b, f(b) = a$, то f – инволюция
$f_3 : \ [pp'r'q] = [p'pr_0q]$ – инволюция, следовательно $r' \to r_0 \neq r$, откуда следует, что либо $l \in (cr), \ (bq) \cap (ap) \cap (cr) = l$, либо такой инволюции $f_3 : l \to l$ не существует.
Заметим, что каждая из прямых проводилась либо случайныиобразом, либо в точку пересечения двух других, следовательно если какую-то из прямых мы не можем провести(из-за малой длины линейки), то мы можем применить аналогичное построение уже для новой пары точек.

ГЛ11 9



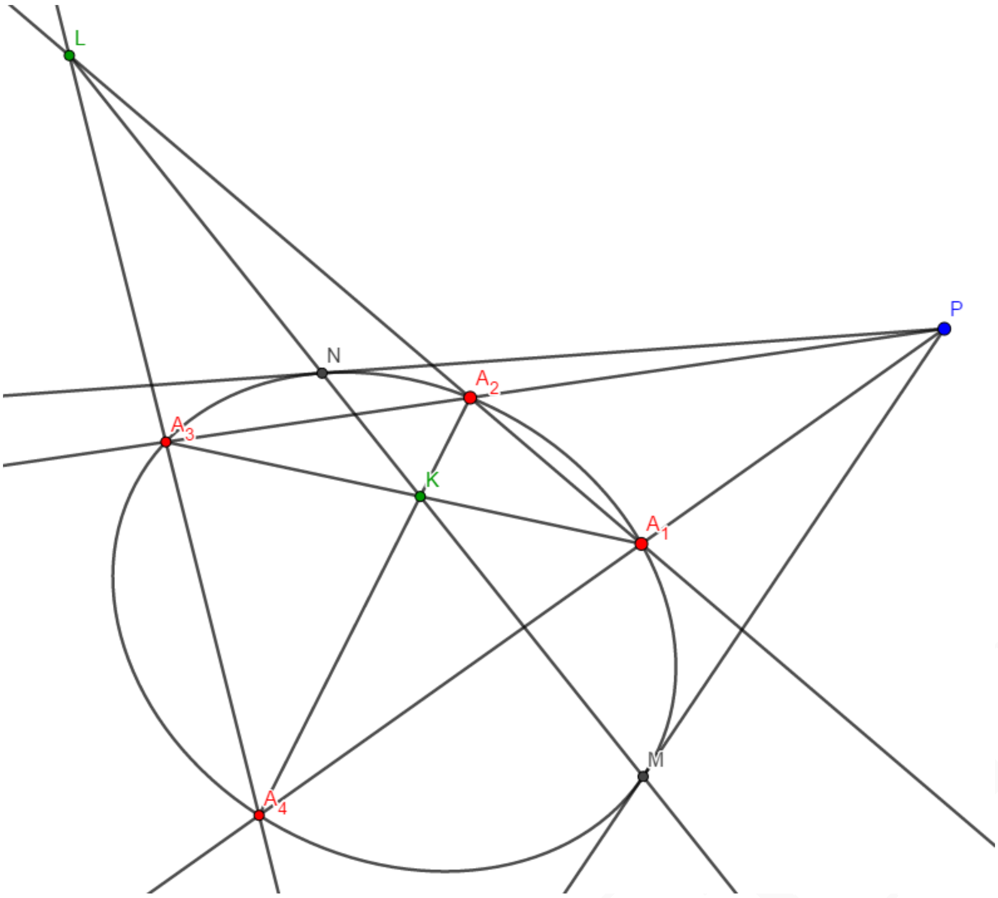
Пусть l_1, l_2, l_3 – прямые соединяющие вершины треугольников, а $L_1 = A_2B_1 \cap A_1B_2,\ L_2 = B_2C_1 \cap B_1C_2,\ L_3 = A_2C_1 \cap A_1C_2$. Тогда заметим, что пересечение l_1, l_2, l_3 в одной точке равносильно коллинеарности L_1, L_2, L_3, которая в свою очередь следует из теоремы паскаля для точек $b_1, a_2, c_1, b_2, a_1, c_2$.

ГЛ11 10

Рассмотрим коническое сечение. Пусть каждая вершина треугольника $A_1B_1C_1$ является полюсом соответственной стороны треугольника ABC (см. рис. ниже). Докажем, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O. Если фиксировать вершины A_1 и B_1, а C_1 перемещать по прямой B_1C_1, то поляра AB этой вершины опишет пучок (A) с центром A, высекая на BC прямолинейный ряд (BC) точек, проективный прямолинейному ряду (B_1C_1), который пробегает C_1. Пучки прямых (B_1) и (C), соответственно перспективные проективным прямолинейным рядам (BC) и (B_1C_1), проективны. Кроме того, общая прямая CB_1 этих пучков сама себе соответствует. Поэтому пучки (B_1) и (C) перспективны. Прямая AA_1 является осью перспективы, так как прямая CA пучка (C) соответствует прямой B_1A пучка (B_1), а прямая CA_1 – прямой B_1A_1. В самом деле, полярой точки $M = CA \cap B_1C_1$ является прямая AB_1, а поэтому в установленном с помощью пучка (A) проективном соответствии рядов (BC) и (B_1C_1) точке M ряда (B_1C_1) соответствует точка $K = BC \cap AB_1$, а значит, прямой $CM = CA$ пучка (C) соответствует прямая $B_1K = B_1A$ пучка (B_1). Соответствие прямых CA_1 и B_1A_1 в этих пучках доказывается аналогично. Поскольку прямые CC_1 и B_1B являются соответственными в перспективных пучках, то они пересекаются на оси перспективы AA_1.

6 Проективные квадрики

ГЛ12 1



Пусть P – заданная точка, тогда проведем через неё любые 2 несовпадающие прямые, пересекающие конику в 2 точках каждая. Назовем эти точки A_1, A_2, A_3, A_4 и проведем прямые $A_1A_3, A_2A_4, A_1A_2, A_3A_4$. Пусть $K = A_1A_3 \cap A_2A_4$ и $L = A_1A_2 \cap A_3A_4$, проведем прямую KL, тогда прямые PN и PM будут касательными.

ГЛ12 2

(а)
Пусть инволюция σ_1 задается точкой p_1, неподвижные точки – точки a и b, а инволюция σ_2 задается точкой p_2, неподвижные точки – точки c и d.

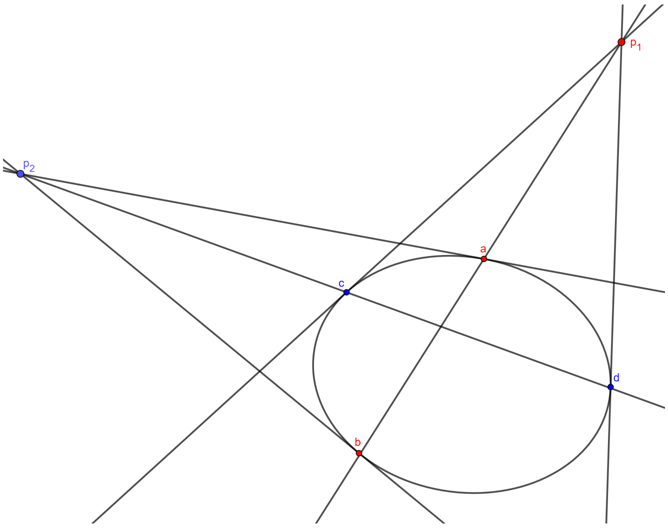
Утверждение. $\sigma_2(a) = b$ если и только если $[a, b, c, d] = -1$
Доказательство. Так как $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]$, то $[a, b, c, d]^2 = 1$. Если $[a, b, c, d] = 1$, то точки a и b совпадают, следовательно $\sigma = id$. тк инволюция нетривиальна, то $[a, b, c, d] = -1$.
аналогично $\sigma_1(c) = d \Leftrightarrow [a, b, c, d] = -1$

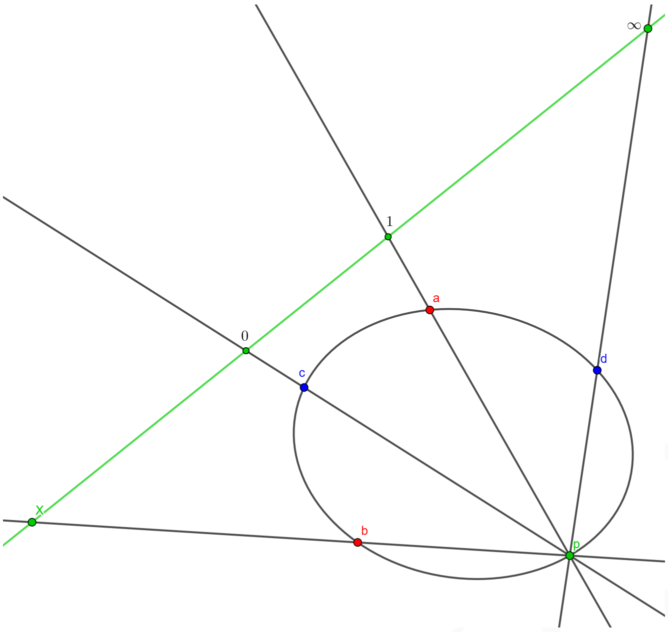
теперь докажем утверждение задачи 2а.
если: очевидно из рисунка

только если:
спроецируем точки a, b, c, d на прямую.

$\sigma : (\infty, 0, 1, x) \to (0, \infty, 1, x)$, следовательно $[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_3, p_4]^{-1}$. Таким образом, $[a, b, c, d] = -1$

(б)
Докажем, что поляра точки P_3 – прямая P_1P_2. (Аналогично доказывается утверждение для точек P_1 и P_2.)
$P_1P_2 \cup C = \{A, B\}$





$\{\mathrm{id}, P_1, P_2, P_3\}$, $P_i^2 = \mathrm{id}$ – группа Клейна, следовательно $P_1P_2 = P_3$ и $\overbrace{P_2 \underbrace{P_1(A)}_{B}}^{A} = P_3(A)$, а значит $A = P_3(A)$.

Следовательно P_3A, P_3B – касательные к конике. Таким образом, P_1P_2 – поляра P_3.

ГЛ12 3/4*

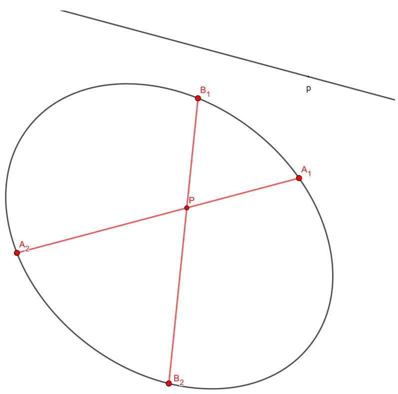
Докажем что такое преобразование задает гомографию на конике $\varphi_p(A_1) = A_1p \cap C = A_2$ (C – коника)
Доказательство

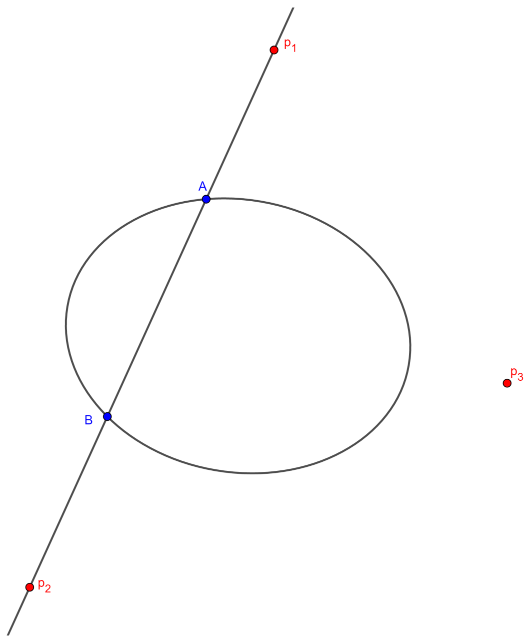
Пусть p_1 – поляра точки p. A_1, p, A_2 лежат на одной прямой, откуда следует что их поляры пересекаются в одной точке, а следовательно $A \in p$, где A – точка пересечения касательных к конике в точках A_1, A_2. Аналогично определим точку $B \in p_1$.
Обозначим $A_2B_1 \cap A_1B_2 = X$, $A_1B_1 \cap A_2B_2 = Y$
Тогда:

(1) по теореме Паскаля для $A_2B_1A_1B_2$ (B_1, B_2 двойные), тогда X, Y, B лежат на одной прямой

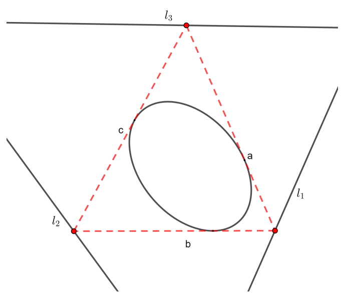
(2) по теореме Паскаля для $A_2B_1A_1B_2$ (A_1, A_2 двойные), тогда X, Y, A лежат на одной прямой

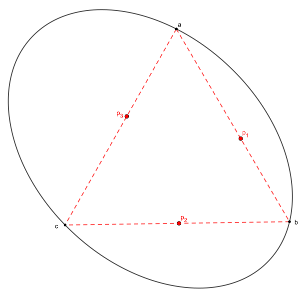
Тогда так как $A \in p_1$, $B \in p_1$, A, B, X, Y лежат на одной прямой, то X, Y – лежат на одной прямой p, следовательно φ_p –





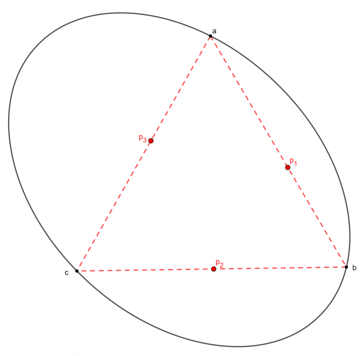
гомография (по задаче 17.13 из семинара)





При замене прямых на их полюсы получим двойственную задачу:
$p_1 \to l_1,\ p_2 \to l_2,\ p_3 \to l_3,\ a \to a,\ b \to b,\ c \to c$

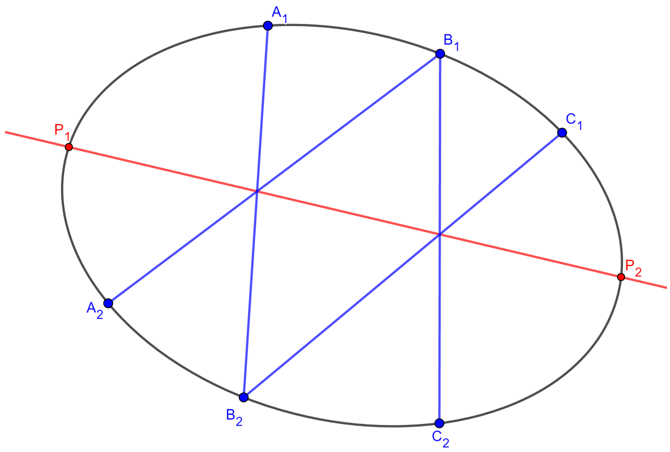
Докажем двойственное утверждение (ГЛ12 4):



Рассмотрим гомографии $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, их композиция тоже гомография $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3$
Заметим, что траектория любой неподвижной точки такой гомографии будет давать нам искомый треугольник

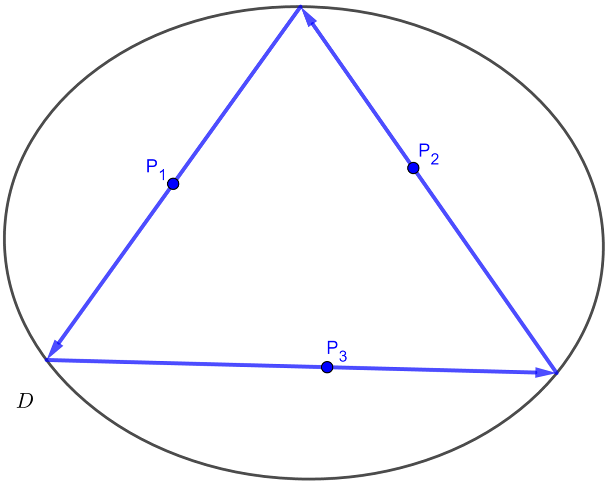
(по задаче 17.13 из семинаров)
Известно, что $\exists$ прямая $l,\ \forall A \in C \quad \varphi(A)B \cap \varphi(B)A \in l$
А неподвижные точки это $\{l \cap C\} = \{$неподвижные точки$\}$ (если φ не тождественно), откуда следует что неподвижных точек может быть $0, 1, 2, \infty$

Тогда можно построить образ любой точки и получить прямую l, а значит и найти неподвижные точки, если такие существуют.



p_1, p_2 – неподвижные

Даже по неподвижной точке достраивается треугольник



В задаче 3 аналогично показываем что отображение φ_e:

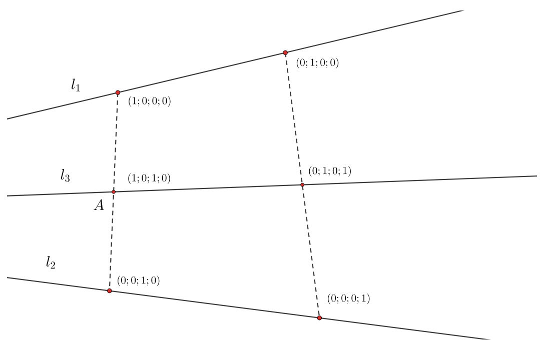
$X \to$ касательная в точке X (назовем ее l_x) $\to l_x \cap l = A_x$

$\to$ вторая касательная l_{2x} к конике из $A_x \to l_{2x} \cap C = \varphi(x)$ – гомография

И далее мы проделываем рассуждения аналогичные прошлым

ГЛ12 4*

ГЛ12 6



Пусть $A \in l_3$, где $l_3 = (xyxy)$.
S_1 – плоскость, проходящая через A и l_1, а S_2 – плоскость, проходящая через A и l_2. $S_1 \cap S_2 = L$ – прямая, $A \in L$, следовательно, существует единственная прямая, пересекающая l_1, l_2 и проходящая через A.

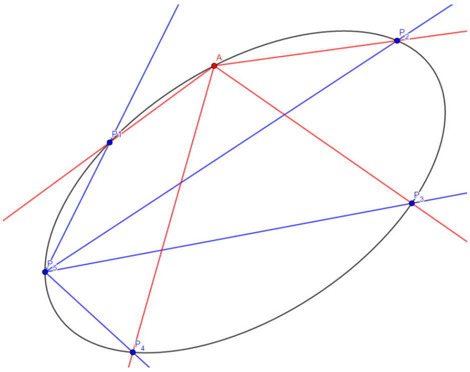
Пусть $p_1 = (\alpha : \beta : 0 : 0), p_2 = (0 : 0 : \gamma : \delta)$. Тогда $p_1p_2 \cap l_3 \to (\mu\alpha : \mu\beta : \lambda\gamma : \lambda\delta) = (x : y : x : y)$, следовательно $\alpha : \beta = \gamma : \delta$
Множество таких прямых – это квадрика $Q = x_0x_3 - x_1x_2 = 0$
На самом деле, l_3 устанавливает проективное соответствие между l_1 и l_2.
Когда и прямые: $l_3 : l_2 \to l_1, \quad l_4 : l_2 \to l_1$.
Тогда искомые прямые $l_3(t_0) = l_4(t_0)$, которых может быть $0, 1, 2, \infty$

0 прямых не может быть в $\mathbb{C}^2$, 1 прямая может быть, но она неустойчива к малым шевелениям, 2 прямые могут быть и они устойчивы к малым шевелениям.

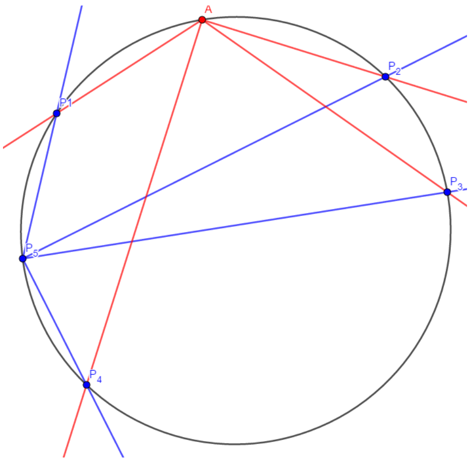
7 Коники

ГЛ13 1

Возьмем случайную точку A на конике и проведем прямые через нее и P_1, P_2, P_3, P_4 чтобы потом найти двойное отношение полученных прямых Вспомним что при проективном преобразовании двойное отношение



не меняется Тогда заметим что $\sin((AP_1, AP_3)) = \sin((P_5P_1, P_5P_3))$ так как $\sin(x) = \sin(\pi - x)$, следовательно



и двойные отношения

$$\frac{\sin((P_5P_1, P_5P_3))}{\sin((P_5P_2, P_5P_3))} : \frac{\sin((P_5P_1, P_5P_4))}{\sin((P_5P_2, P_5P_4))}$$
$$\frac{\sin((AP_1, AP_3))}{\sin((AP_2, AP_3))} : \frac{\sin((AP_1, AP_4))}{\sin((AP_2, AP_4))}$$

Равны, так как какую бы четверку точек на данной окружности мы ни рассмотрели, все они будут лежать на одной кружности, а A и P_5 будут противоположными вершинами, из-за чего будут либо равны, либо в сумме давать π. Так как A выбиралась случайнмобразом, то это двойное отношение равно для всех точек на конике, а вне коники оно будет иным(так как при переводе коники в окружность, точки лежащие вне нее там и остаются, то есть после преобразования точка будет вне окружноти и двойное отношение у нее будет иным)

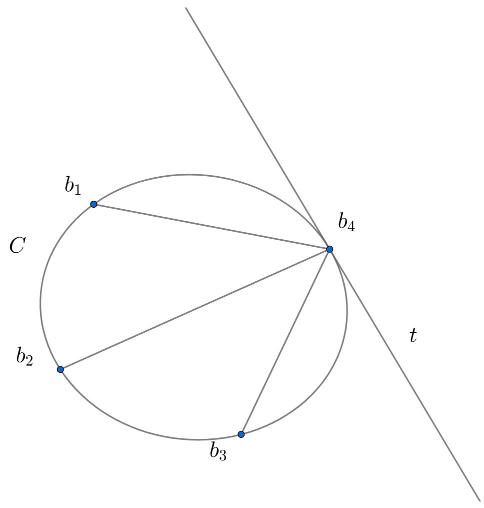
ГЛ13 2

Заметим, что пучок коник – это прямая в $\mathbb{P}_5$. Рассмотрим отображение

$$\varphi : L \to b_4^\times$$

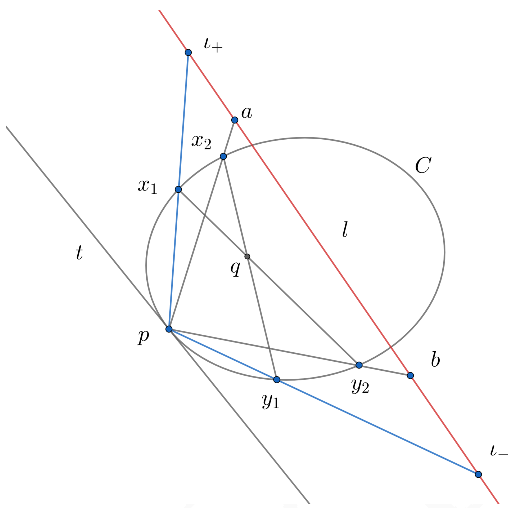
Оно является гомографией, так как биективно и рационально.
Гомография переводит конику в касательную прямую в точке b_4.
При гомографии двойное отношение не меняется: $[b_4b_1, b_4b_2, b_4b_3, b_4b_4]_{b_4^\times} = [S_1, S_2, S_3, C]_L$, так как $b_4b_4 = t$

По определению $[b_1, b_2, b_3, b_4]_C = [pb_1, pb_2, pb_3, pb_4]_{p^\times}$, где $p \in C$
Если $p = b_4$, то $[b_1, b_2, b_3, b_4]_C = [b_4b_1, b_4b_2, b_4b_3, b_4b_4]_{b_4^\times} = [S_1, S_2, S_3, C]_L$



ГЛ13 3

В пучке $p^{\times}$ можно задать инволюцию σ, такую что $\sigma(pa) = (pb)$ откуда следует, что $[\iota_+, \iota_-, a, b] = -1$.



Пусть $x_1 = (p\iota_+) \cap C, y_1 = (p\iota_-) \cap C$, а $\sigma(x) = y,\ x, y \in C$.
У инволюции есть центр, это $(x_1y_1) \cap (x_2y_2)$. Таким образом, все хорды пересекаются в точке q.

Рассмотрим гомографию на конике $\varphi : p^{\times} \to q^{\times}$, $\varphi^2(px) = \varphi(xq) = px$ (обозначим $(px) \leftrightarrow (xq)$). Тогда если $(xq) \cap C = y$, то $(px) \leftrightarrow (py)$, следовательно $x \leftrightarrow y$, причем $(px) \perp (py)$.

При $x = p$ $(xq) = (pq)$, следовательно $p \leftrightarrow (pq) \cap C$ и $t, (pq)$ переставляются инволюцией, следовательно, они перпендикулярны.

ГЛ13 5

Рассмотрим параболу $ax^2 = y$ (все остальные параболы получаются сдвигом данной параболы), ее фокус имеет координаты $(0, \frac{1}{4a})$, а уравнение директрисы $y = -\frac{1}{4a}$.
Рассмотрим касательную в точке (x_0, y_0), она имеет формулу $y = 2ax_0x - ax_0^2$, тогда точка симметричная фокусу относительно касательной имеет координаты

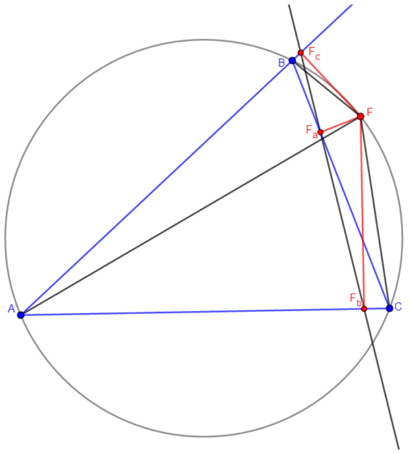
$$y = -\frac{1}{2ax_0}x + \frac{1}{4a}$$
$$(x_0, -\frac{1}{4a})$$

Эта точка очевидно лежит на $y = -\frac{1}{4a}$, то есть на диретрисе

ГЛ13 6

Так как проекции фокуса на касательные лежат на одной прямой, касающейся вершины параболы, то проекции фокуса на стороны треугольника также лежат на одной прямой, тогда по лемме Симсона фокус лежит на описанной окружности.

лемма Симсона
Формулировка:
Проекции точки F на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка F лежит на описанной окружности треугольника.
Доказательство:
Пусть F_a, F_b, F_c — проекции точки F на стороны BC, CA, AB.



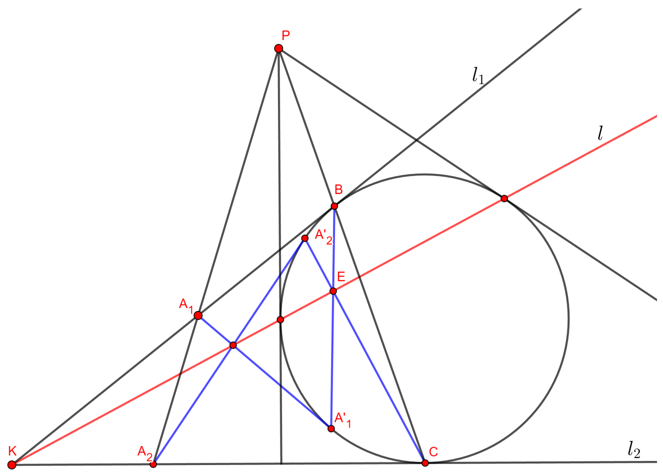
Четырехугольник $F_cF_bF_a$ вписанный, поэтому $\angle FF_bF_a = \angle FCF_a$. Аналогично $\angle FF_bF_c = \angle FAF_c$. Точки F_a, F_b, F_c лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle FF_bF_c = \angle FF_bF_a$, что равносильно $\angle FAF_c = \angle FCF_a$. Откуда следует что точка F лежит на описанной окружности треугольника ABC.

ГЛ13 7

Заметим, что хотя бы 2 точки касания принадлежат одной ветви(в противном случае можно заметить, что радиус окружности не меньше расстояния от центра окружности до точки касания с дальней ветвью, но тогда у нее хотя бы 2 общих точки с ближней ветвью, так как расстояние до точек, симметричных точкам на дальней ветви, не больше радиуса окружности).

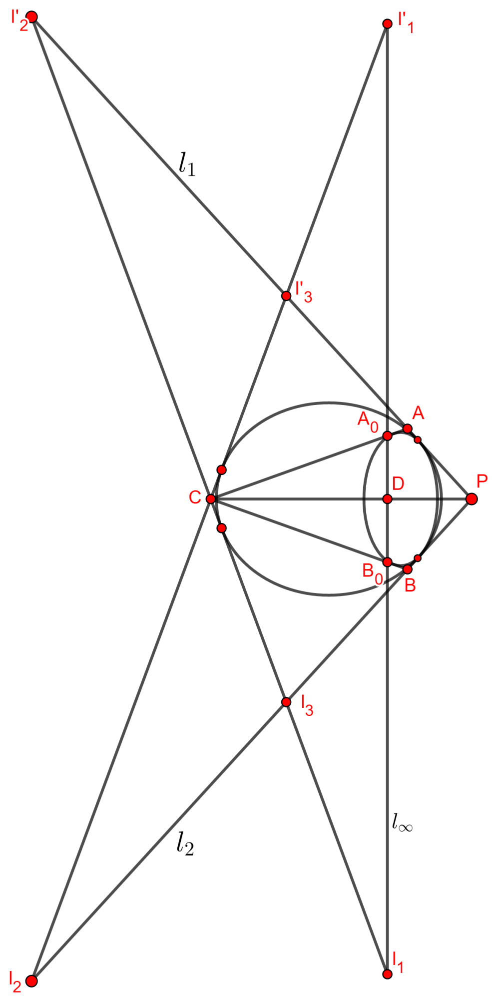
ГЛ13 8

Докажем сперва вспомогательное утверждение



P – полюс l, B полюс l_1, C полюс l_2, следовательно P, B, C на одной прямой.
Рассмотрим гомографию $\varphi : l_1 \to l_2$.
$PA_1 \cap l_2 = A_2$, A_1A_1' и A_2A_2' – касательные, $A_2'C$ поляра A_2, $A_1'B$ поляра A_1.
Следовательно $A_1'B \cap A_2'C \in l$, откуда $P \in A_1'A_2'$, $A_1A_1' \cap A_2A_2' = E$. Тогда поляра E это $A_1'A_2'$ и $E \in l$. И $\varphi(A) = B$ гомография.
Также заметим что для всех коник, касающихся l_1, l_2 в B, C, точка P будет совпадать, а следовательно все такие коники задают одну и ту же гомографию.

Перейдем к задаче



Пусть C_1 – большая коника, а C_2 – меньшая.
$PC \cap l_\infty = D$ и CA, BA – касательные к меньшей конике, $AC \cap l_\infty = A_0$, $CB \cap l_\infty = B_0$.
Заметим что обе коники задают одну и ту же гомографию $\varphi : l_1 \to l_2$, а также $\varphi(I_1) = I_2$, $\varphi(I_1') = I_2'$. $\varphi(P) = P$, $\varphi(A) = B$.
Распишем равенства двойных отношений $[I_1', I_1, D, A_0] = [I_3, I_2, P, B] = [I_2, I_3, B, P] = [I_1', I_1, B_0, D]$, откуда следует равенство углов.

ГЛ13 10*

Докажем сперва вспомогательные факты:
1)
Из точки O проведены касательные OA и OB к эллипсу с фокусами F_1 и F_2. Тогда $\angle AOF_1 = \angle BOF_2$ и $\angle AF_1O = \angle BF_1O$.
Пусть точки G_1 и G_2 симметричны F_1 и F_2 относительно прямых OA и OB соответственно. Точки F_1, B и G_2 лежат на одной прямой и $F_1G_2 = F_1B + BG_2 = F_1B + BF_2$. Треугольники G_2F_1O и G_1F_2O имеют равные стороны. Поэтому $\angle G_1OF_1 = \angle G_2OF_2$ и $\angle AF_1O = \angle AG_1O = \angle BF_1O$.

2)
Длина диагонали прямоугольника описанного вокруг эллипса постоянна
Пусть O – вершина данного прямоугольника, OA и OB – касательные к эллипсу. Тогда треугольник F_1OG_2 (из пункта (1)) прямоугольный. Следовательно, $F_1O^2 + F_2O^2 = F_1G_2^2$ – константа. Если M – центр эллипса, то величина

$$OM^2 = \frac{1}{4}\left(2F_1O^2 + 2F_2O^2 - F_1F_2^2\right)$$

Тоже константа

Тогда заметим, что из вершин рассматриваемых прямоугольников эллипс виден под прямым углом. Тогда рассмотрим точку пересечения диагоналей этих прямоугольников, она совпадает с серединой отрезка, соединяющего фокусы эллипса, следовательно искомое ГМТ это окружность с центром в середине отрезка соединяющего фокусы и диаметром равным длине диагонали прямоугольника из пункта (2)

8 Квадрики в $\mathbb{R}^n$

ГЛ14 1