Лекция 13.

23.04.21

2n-угольник

• $$T_n(N) = \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{склейкам}}} N^{\#\text{вершин}} = \sum_{g=0}^{\infty} \mathcal{E}_g(n)\, N^{n+1-2g}$$

• Производящая ф-ция для T_n:

$$T(N,s) = 1 + 2Ns + 2s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(N)}{(2n-1)!!} s^n$$

Хотим док-ть: $\boxed{T(N,s) = \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^N}$

• $\mathcal{H}$ – эрмитовы матрицы $H = H^+ = \overline{H^T}$

$\dim \mathcal{H} = N^2$

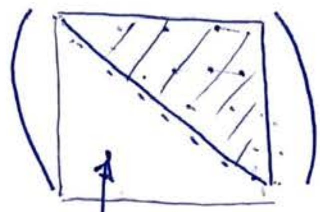
• $$\boxed{\frac{1}{(\sqrt{\pi})^{N^2}} \int_{\mathcal{H}} Tr\left(H^{2n}\right) e^{-Tr H^2} \sqrt{|G|} \prod d h_{ii} \prod_{1 \le i<j \le N} d\, Re\, h_{ij}\, d\, Im\, h_{ij}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{линейное} \\ \text{подпр-во}}}{\mathcal{H}} \subset Mat_{N \times N}(\mathbb{C})$$

Квадратичная форма на $Mat_{N\times N}(\mathbb{C})$: $\begin{array}{cc} & 2N^2 \\ 2N^2 & \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$$Tr(dM \cdot dM^+) = (d\, Re\, z_{ij})^2 + (d\, Im\, z_{ij})^2$$

Хотим эту форму сузить на $\mathcal{H}$

Координаты в $\mathcal{H}$: 

вычисляется из того, что над диагональю.

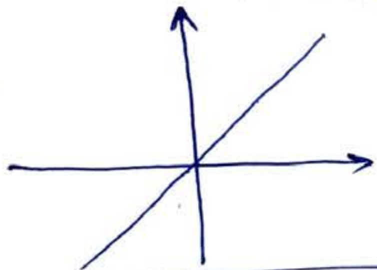
$H \in \mathcal{H}$ $\quad (h_{ij} = \overline{h_{ji}})$

$$\mathrm{Tr}(dH\, dH^+) = \mathrm{Tr}(dH^2) = \sum dh_{ii} + 2\Big(\sum (d\,\mathrm{Re}\,h_{ij})^2 + \sum (d\,\mathrm{Im}\,h_{ij})^2\Big)$$

Получается такая форма:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{1 \; 1 \; 1 \dots 1}_{N\text{ единиц}} & 0 \\ 0 & 2 \; 2 \dots 2 \end{pmatrix} \quad N$$

Пример.



На $\mathbb{R}^2$ форма $dx^2 + dy^2$

На прямой $y = x$ получаем $2dx^2$

$$\sqrt{G} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \underbrace{1 \dots 1}_{N\text{шт}} & \\ & 2 \dots 2 \end{pmatrix}} = 2^{\frac{N^2-N}{2}}$$

$$\underbrace{\int_{\mathcal{H}} 1 \cdot e^{-\mathrm{Tr} H^2} \, 2^{\frac{N^2-2}{2}} \, d \dots}$$

На этот интеграл будем делить

Утв. $1 = \dfrac{1}{\pi^{N^2}} \displaystyle\int_{\mathcal{H}} 1\, e^{-\mathrm{Tr} H^2} \, 2^{\frac{N^2-2}{2}} \cdot d \dots$

▼ $\mathrm{Tr}\, H^2$ – сумма квадратов (некоторые, умножены на 2).

$$(*)=\int_{\mathcal{H}} e^{-\left(\sum h_{ii}^2+2\sum\limits_{1\le i<j\le N}(\operatorname{Re}h_{ij})^2+(\operatorname{Im}h_{ij})^2\right)}\, 2^{\frac{N^2-N}{2}} \prod d\,h_{ii}\prod d\operatorname{Re}h_{ij}\, d\operatorname{Im}h_{ij}$$

$$\int_{\mathcal{H}} e^{-\sum h_{ii}^2}=\left(\sqrt{\pi}\right)^N$$

$$\int_{\mathcal{H}} e^{-2\sum\left((\operatorname{Re}h_{ij})^2+(\operatorname{Im}h_{ij})^2\right)}\,d\ldots=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{N^2-N}\left(\sqrt{\pi}\right)^{N^2-N}$$

- $$\Rightarrow \int_{\mathcal{H}} e^{-\left(\sum h_{ii}^2+2\sum(\operatorname{Re}h_{ij})^2+(\operatorname{Im}h_{ij})^2\right)}=\left(\sqrt{\pi}\right)^{N^2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{N^2-N}$$

$$\Rightarrow (*)=\left(\sqrt{\pi}\right)^{N^2}.$$

Уже знаем, что $\boxed{\dfrac{T_n(N)}{2^n}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^{N^2}}\displaystyle\int_{\mathcal{H}}\operatorname{Tr}(H^{2n})e^{-\operatorname{Tr}H^2}\sqrt{G}}$

- Хотим сделать что-то с интегралом и понять, что что-то многочлен.

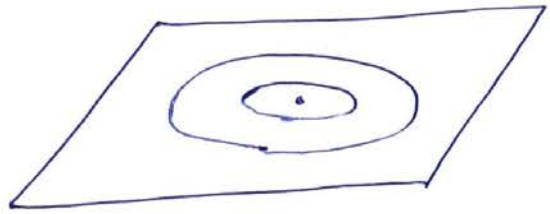
$\boxed{\text{Присоединенное действие унитарной группы}}$ → $U^{-1}ZU$

$Z\in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{C})$

$U^{-1}ZU$

U – унитарная матрица, т.е. $UU^{*}=E$.

Картинка внутри $\mathcal{H}$:



Все эрмитовы матрицы разбиваются на слои при этом действии.

Можно представить, что мы считаем интеграл по двум координатам: координаты в унит. гр, другие - представители разных слоев. (пр-во диаг. матриц Λ)

Будем пытаться разложить нашу форму на диагональную и унитарную.

$$H \in \mathcal{H} \Rightarrow U^{-1} H U \in \mathcal{H}$$

$$\mathrm{Tr}\, H = \mathrm{Tr}(U^{-1} H U) \Rightarrow \mathrm{Tr} \text{ постоянен на слое}$$

<u>Утв.</u> Действие сохраняет нашу форму на всех матрицах $\mathrm{Mat}_{N \times N}(\mathbb{C})$

<u>Сл-ие.</u> Сохр-ет форму на $\mathcal{H}$.

<u>Док-во утв.</u> $M \to U^{-1} M U$ - линейный оператор.

Лин. оператор сохр-ет форму (евклидово скалярное пр-ие) это значит, что он должен быть ортогональным.

$$M \xrightarrow{F_1} MU \longrightarrow U^{-1}(MU)$$

Хотим док-ть: ортогональные операторы

Базис $Mat_{N\times N}(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} \quad \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad \dots$$

В этом базисе матрица " " лин. оператора F_1

$$N\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{U} & & & \\ & \boxed{U} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{U} \end{pmatrix}}_{N}\right.$$

Разберемся с одним блоком

$e_1 \dots e_k$ – один базис

$ie_1 \dots ie_k$ – другой базис ← как выглядит U в этом базисе: $\{e_1,\dots,e_k, ie_1,\dots,ie_k\}$?

Ответ: $\begin{array}{c} j \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Re}\,U & -\mathrm{Im}\,U \\ \mathrm{Im}\,U & \mathrm{Re}\,U \end{array}\right) \end{array}$ – ортогональная матрица (если U была унитарной)

Нужно, чтобы скалярн. произв. каждого столбца было единичным, а между собой столбцы ортогон.

- $\sum_k (\mathrm{Re}\,U_{kj})^2 + \sum_k (\mathrm{Im}\,U_{kj})^2 = 1$

В j-м столбце унитарной U: $\sum U_{kj}\bar{U}_{kj} = 1$

Надо теперь проверить ортогональность.

$$\begin{array}{ccc} k & l & \\ & & \end{array}\begin{pmatrix} \operatorname{Re} & U & -\operatorname{Im} U \\ \operatorname{Im} & U & \operatorname{Re} U \end{pmatrix}$$

действительная часть (*)

$$\sum \operatorname{Re} U_{jk} \operatorname{Re} U_{jl} + \sum \operatorname{Im} U_{jk} \operatorname{Im} U_{jl} = 0, \text{ т.к.}$$

для унитарной U $\boxed{\sum U_{jk} \bar{U}_{jl} = 0}$ (*)

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} U^{(l)} & -\operatorname{Im} U^{(k)} \\ \operatorname{Im} U^{(l)} & \operatorname{Re} U^{(k)} \end{pmatrix}$$

мнимая часть (*)

$$-\sum \operatorname{Re} U_{jl} \operatorname{Im} U_{jk} + \sum_j \operatorname{Im} U_{jl} \operatorname{Re} U_{jk} = 0$$

$\Rightarrow$ сохраняет скалярное произв. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ наш лин. оператор $U \to MU$ сохр. скалярное произв.

<u>Утв.</u> Лин. оператор $M \to U^+ M$ сохр. скалярное произведение.

$\triangledown$ $M \to M^+ \to M^+ U \to (M^+ U)^+$

ортогональное лин. преобр.

$+$ – ортогональное лин. преобр. (просто меняет коорд и какие-то вектора умножает на -1)

$\Rightarrow$ $M \to U^+ M$ – композиция ортогональных. $\triangle$

Наша квадр. форма на $\mathcal{H}$:

$$\mathrm{Tr}(dH)^2.$$

Как устроено dH в новых координатах?

<u>Коорд. в окр. $\Lambda_0 \in \Lambda$</u>

берем унитарные матрицы в окр E:

$$\mathcal{U} = E + t\dot{\mathcal{U}} + o(t)$$

$$\mathcal{U}^+ \Lambda_0 \mathcal{U}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + t\dot{\Lambda} + o(t)$$

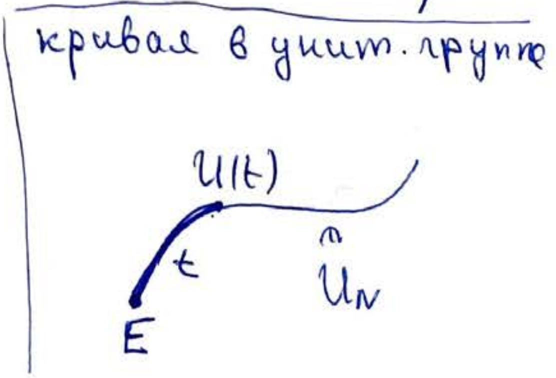
Как выглядит окрестность Λ_0:

такие матрицы $\mathcal{U}^{-1}\Lambda\mathcal{U}$.

$$\mathcal{U}^{-1} = E - t\dot{\mathcal{U}} + o(t)$$

$$\mathcal{U}^{-1}\Lambda\mathcal{U} = \left(E - t\dot{\mathcal{U}} + o(t)\right)\left(\Lambda_0 + t\dot{\Lambda} + o(t)\right)\left(E + t\dot{\mathcal{U}} + o(t)\right) =$$

$$= \Lambda_0 + t(\dot{\Lambda} + \Lambda_0\dot{\mathcal{U}} - \dot{\mathcal{U}}\Lambda_0) + o(t)$$



$$dH = d\Lambda + \Lambda_0\, d\mathcal{U} - (d\mathcal{U})\cdot\Lambda_0$$

$$d\mathcal{U} = \dot{\mathcal{U}}\, dt$$

$$\mathcal{U}(t)\,\mathcal{U}^+(t) = E$$

$$\dot{\mathcal{U}}(t)\,\mathcal{U}^+(t) + \mathcal{U}(t)\,\dot{\mathcal{U}}^+(t) = 0$$

При $t = 0$

$$\dot{\mathcal{U}}(0)\,\mathcal{U}^+(0) + \mathcal{U}(0)\,\dot{\mathcal{U}}^+(0) = 0, \text{ где } \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}^+(0) = E$$

$\Rightarrow \dot{\mathcal{U}}(0) + \dot{\mathcal{U}}^+(0) = 0$ — косоэрмитовы матрицы

$$\mathrm{Tr}\,(dH)^2 = \mathrm{Tr}\Big((d\Lambda + \Lambda_0 dU - dU\Lambda_0)(d\Lambda + \Lambda_0 dU - dU\Lambda_0)\Big) =$$

$$= \mathrm{Tr}\big((d\Lambda)^2 + d\Lambda\Lambda_0 dU - d\Lambda dU\Lambda_0 + \Lambda_0 dU d\Lambda + \Lambda_0 dU \Lambda_0 dU -$$

$$- \Lambda_0 dU dU \Lambda_0 - dU\Lambda_0 d\Lambda - dU\Lambda_0^2 dU + dU\Lambda_0 dU\Lambda_0\big)$$

(используем, что $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$)