**Теорема 2.1.4.** *Пусть функция* $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, *где* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1+m}$ *открыто (координаты в этом* $\mathbb{R}^{n+1+m}$ *мы будем обозначать* $(x_1, \dots, x_n, t, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$*), удовлетворяет следующим условиям:*

- $F$ *непрерывна,*
- $F$ *липшицева по* $x$*: существует* $L > 0$, *такое что для любых* $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}^m$, *для которых* $(x, t, \lambda), (y, t, \lambda) \in \Omega$, *выполнено* $|F(x, t, \lambda) - F(y, t, \lambda)| \le L|x - y|$.

*Пусть также дана непрерывная функция* $x_0\colon \Lambda \to \mathbb{R}^n$, *где* $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ *открыто.*

*Пусть* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $\lambda_0 \in \Lambda$, *таковы, что* $(x_0(\lambda), t_0, \lambda) \in \Omega$. *Тогда*

- *существует интервал* $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, *открытое множество* $V \subset \Lambda$, $\lambda_0 \in \Lambda$, *и функция* $x\colon I \times V \to \mathbb{R}^n$, *являющаяся решением задачи Коши*

$$\dot{x}(t, \lambda) = F(x, t, \lambda), \quad x(t_0) = x_0(\lambda);$$

- *если* $\hat{x}\colon J \to \mathbb{R}^n$ *— решение этой задачи Коши при некотором* $\hat{\lambda} \in V$, *то* $x(t, \hat{\lambda}) = \hat{x}(t)$ *при всех* $t \in I \cap J$.

Разумеется, предыдущая теорема — прямое следствие этой: достаточно рассмотреть систему, где параметр $\lambda$ фиктивен (от него не зависят значения $F$ и $x_0$).

# Принцип сжимающих отображений с параметром

1) Без параметра:

если $X$ — полное пр-во

$\Phi: X \to X \quad \exists q<1 : \forall x,y \in X$

$$\boxed{\rho(\Phi(x),\Phi(y)) \le q\,\rho(x,y)}$$

то $\exists$ и ! $z$ : $\Phi(z)=z$

Д-во: точка $z$ !, т.к. если $\exists$ $\begin{matrix} f(a)=a \\ f(b)=b \end{matrix}$ то

$$\rho(f(a),f(b)) \le q\,\rho(a,b) \Rightarrow q \ge 1 \text{ или } \rho(a,b)=0$$

существование: возьмём $\forall$ точку $y_0$ и положим $y_n = \Phi^n(y_0)$. Тогда

$$\rho(y_n,y_{n+1}) = \rho(\Phi(y_{n-1}),\Phi(y_n)) \le q\,\rho(y_{n-1},y_n) \le$$

$$\le q^2\rho(y_{n-2},y_{n-1}) \le q^n\rho(y_0,y_1) = q^n\rho(y_0,\Phi(y_0))$$

$$\rho(y_n,y_{n+m}) \le \rho(y_n,y_{n+1}) + \rho(y_{n+1},y_{n+2}) + \ldots + \rho(y_{n+m-1},y_{n+m}) \le$$

$$\le \rho(y_n,y_{n+1}) + q\,\rho(y_n,y_{n+1}) + \ldots + q^m\rho(y_n,y_{n+1}) =$$

$$= \rho(y_n,y_{n+1})\underbrace{(1+q+\ldots+q^m)}_{\text{при } m\to\infty} \le \frac{q^n}{1-q}\,\rho(y_0,\Phi(y_0))$$

при $n\to\infty$

$\rho(y_n,y_{n+m})\to 0 \Rightarrow$

посл-ть фундаментальна

имеет и предел $= y$

при $n=0,\ m\to\infty$

$$\rho(y_0,y)\le \frac{\rho(y_0,\Phi(y_0))}{1-q}$$

2) с параметром:

Пусть $\Phi: X\times\Lambda\to X$ — непрерывное

$X$ — полно. $\exists q<1: \forall x,y\in X \quad \forall\lambda\in\Lambda$:

$$\boxed{\rho(\Phi(x,\lambda),\Phi(y,\lambda))\le q\,\rho(x,y)}$$

Если $\Phi(z,\lambda)=z$ — неподвижная точка, то зависимость $z$ от $\lambda$ непрерывна

$z : \Lambda \to X$

Д-во: пусть $\lambda_0 \in \Lambda$, $z_0 = z(\lambda_0)$

построим точку $z(\lambda)$. по :

$$\rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) = \rho(z_0, z(\lambda)) \le \frac{\rho(z_0, \Phi(z_0, \lambda))}{1-q}$$

$\Phi$ – непрерывна $\Rightarrow \forall \varepsilon \; \exists \delta = \delta(\varepsilon)$:

при $\rho(\lambda, \lambda_0) < \delta$ выполняется

$$\rho(\Phi(z_0, \lambda_0), \Phi(z_0, \lambda)) < \varepsilon \underbrace{(1-q)}_{\text{const}}$$

$\Downarrow$

при $\rho(\lambda, \lambda_0) < \delta$

$$\rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) < \varepsilon$$

$\blacksquare$