① $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$

а) $\{q_0, p_0\} = 1$. Док-ть: $\{q(t), p(t)\}_{q_0 p_0} = 1$.

Канонические ур-ия Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_A = \lambda^2 + \omega^2 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = i\omega \\ \lambda_2 = -i\omega \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = i\omega \quad v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad Av_1 = \begin{pmatrix} b/m \\ -m\omega^2 a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega a \\ i\omega b \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ im\omega \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -i\omega \quad v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad Av_2 = \begin{pmatrix} b/m \\ -m\omega^2 a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega a \\ -i\omega b \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -im\omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} c_i v_i e^{\lambda_i t} = \begin{pmatrix} c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \\ im\omega(c_1 e^{i\omega t} - c_2 e^{-i\omega t}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \cos\omega t + \tilde{c}_2 \sin\omega t \\ m\omega\tilde{c}_2 \cos\omega t - m\omega\tilde{c}_1 \sin\omega t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ m\omega\tilde{c}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \tilde{c}_1 = q_0 \\ \tilde{c}_2 = \frac{p_0}{m\omega} \end{matrix}$$

Значит, $\begin{cases} q(t) = q_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin\omega t, \\ p(t) = p_0 \cos\omega t - q_0 m\omega \sin\omega t. \end{cases}$

$$\{q(t), p(t)\} = \cos^2\omega t \{q_0, p_0\} - \frac{\sin\omega t}{\omega m} m\omega \sin\omega t \{p_0, q_0\} =$$

$$= \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1.$$

б) $F_1(q_0, q(t), t) = ?$

$$q = q(t) = q_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin\omega t \quad (1)$$

$$p = p(t) = p_0 \cos\omega t - q_0 m\omega \sin\omega t \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow p_0 = \frac{q - q_0 \cos\omega t}{\sin\omega t} \cdot m\omega \quad (*) \quad \left(p_0 = \frac{\partial F_1}{\partial q_0} \right)$$

$$(2) \Rightarrow p(t) = p = m\omega\, ctg(q - q_0 \cos\omega t) - q_0 m\omega \sin\omega t \quad (**)$$

$$(*) \Rightarrow F_1(q_0, q, t) = q_0 \frac{m\omega q}{\sin\omega t} - \frac{q_0^2}{2} \frac{m\omega \cos\omega t}{\sin\omega t} + f(q, t)$$

$$(**) \text{ и } p = -\frac{\partial F_1}{\partial q} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{m\omega q_0}{\sin\omega t} + \frac{\partial f}{\partial q} =$$

$$= -m\omega\, ctg\omega t (q - q_0 \cos\omega t) + q_0 m\omega \sin\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial q}(q, t) = -\frac{m\omega \cos\omega t}{\sin\omega t} q + \frac{m\omega \cos^2\omega t}{\sin\omega t} q_0 + \frac{m\omega \sin^2\omega t}{\sin\omega t} q_0 - \frac{m\omega q_0}{\sin\omega t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{m\omega}{\sin\omega t}(q \cos\omega t + q_0) + \frac{m\omega q_0}{\sin\omega t} = -\frac{m\omega}{\sin\omega t} q \cos\omega t$$

$$\Rightarrow f(q, t) = -\frac{q^2}{2} m\omega\, ctg\omega t + C, \quad C = const$$

Следовательно,

$$F_1(q_0, q, t) = q q_0 \frac{m\omega}{\sin\omega t} - \frac{m\omega\, ctg\omega t}{2}(q^2 + q_0^2) + C.$$

в) $F_2(q_0, p(t), t) = ?$

$$\begin{cases} q = q(t) = q_0 \cos\omega t + \dfrac{p_0}{m\omega}\sin\omega t & (1_в) \\ p = p(t) = p_0 \cos\omega t - q_0 m\omega \sin\omega t & (2_в) \end{cases}$$

$$(2_в) \Rightarrow p_0 = \frac{p + q_0 m\omega \sin\omega t}{\cos\omega t} \qquad (*_в)$$

$$(1_в) \Rightarrow q = q_0 \cos\omega t + \frac{\sin\omega t}{m\omega}\left(\frac{p + q_0 m\omega \sin\omega t}{\cos\omega t}\right) =$$

$$= q_0 \cos\omega t + \operatorname{tg}\omega t \left(\frac{p}{m\omega} + q_0 \sin\omega t\right) \qquad (**_в)$$

$$(*_в) \text{ и } p_0 = \frac{\partial F_2}{\partial q_0} \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial q_0} = \frac{p + q_0 m\omega \sin\omega t}{\cos\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2(q_0, p, t) = q_0 \frac{p}{\cos\omega t} + \frac{q_0^2}{2} m\omega \operatorname{tg}\omega t + f(p, t)$$

$$(**_в) \text{ и } q = \frac{\partial F_2}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial p} = q_0 \cos\omega t + \operatorname{tg}\omega t\left(\frac{p}{m\omega} + q_0 \sin\omega t\right) =$$

$$= \frac{q_0}{\cos\omega t} + \frac{\partial f}{\partial p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial p} = q_0 \cos\omega t + \frac{\sin\omega t}{m\omega \cos\omega t} p + \frac{\sin^2\omega t}{\cos\omega t} q_0 - \frac{1}{\cos\omega t} q_0 =$$

$$= q_0 \cos\omega t + \frac{\sin\omega t}{m\omega \cos\omega t} p - q_0 \cos\omega t = p \frac{\operatorname{tg}\omega t}{m\omega}$$

$$\Rightarrow f(p, t) = \frac{p^2}{2} \frac{\operatorname{tg}\omega t}{m\omega} + \tilde{c}, \quad \tilde{c} = \text{const}$$

Следовательно,

$$F_2(q_0, p, t) = \frac{q_0 p}{\cos\omega t} + \frac{1}{2} q_0^2 m\omega \operatorname{tg}\omega t + \frac{1}{2} p^2 \frac{\operatorname{tg}\omega t}{m\omega} + \tilde{c}$$

Дополнение к задаче 1 пунктам б), в).

При нахождении производящих ф-ций мы не пользовались ур-ем

$$\tilde{H}(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

так как канонические преобразования не связаны с гамильтонианом, они просто должны сохранять пуассонову структуру.

② $\{q, p\} = 1$

$Q = -p, \; P = q + Ap^2$

а) Для того, чтобы док-ть, что преобр. каноническое, достаточно проверить $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$, $\{Q, P\} = 1$.

$\{Q, Q\} = \{-p, -p\} = 0$

$\{P, P\} = \{q + Ap^2, q + Ap^2\} = 2Ap\{q, p\} + 2Ap\{p, q\} = 0$

$\{Q, P\} = \{-p, q + Ap^2\} = -\{p, q\} = 1$

б) $F_1(q, Q) = ?$

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F_1}{\partial q} = -Q & (1б) \\ P = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} = q + AQ^2 & (2б) \end{cases}$$

$(1б) \Rightarrow F_1(q, Q) = -Qq + f(Q)$

$(2б) \Rightarrow \quad q + AQ^2 = q - \dfrac{\partial f}{\partial Q} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial Q} = -AQ^2 \Rightarrow f(Q) = -\dfrac{AQ^3}{3} + c$

Значит, $F_1(q, Q) = -Qq - \dfrac{AQ^3}{3} + c$, $c = \text{const}$.

в) $F_2(q, P) = ?$

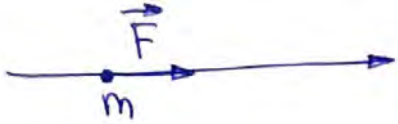
$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F_2}{\partial q} = \sqrt{\dfrac{P - q}{A}} & (1в) \\ Q = \dfrac{\partial F_2}{\partial P} = -\sqrt{\dfrac{P - q}{A}} & (2в) \end{cases}$$

$(1в) \Rightarrow F_2(q, P) = -\dfrac{2}{3} \dfrac{(P - q)^{3/2}}{\sqrt{A}} + f(P)$

$(2в) \Rightarrow -\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{A}} \cdot \dfrac{3}{2} \sqrt{P - q} + \dfrac{\partial f}{\partial P} = -\sqrt{\dfrac{P - q}{A}} \Rightarrow f(P) = c = \text{const}$

Значит, $F_2(q, P) = -\dfrac{2}{3} \dfrac{(P - q)^{3/2}}{\sqrt{A}} + c$

3



$\vec{F} = \overline{const}$

a) $T_{кин} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$, $U = -Fx$ $\left(F = -\frac{dU}{dx}\right)$

$$L = T_{кин} - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + Fx$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H = \dot{x}p - L = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2}\cdot\frac{p^2}{m^2} - Fx = \frac{p^2}{2m} - Fx$$

б) $Q = -p$, $P = x + Ap^2$

$$\tilde{H}(Q,P,t) = H(x(Q,P), p(Q,P), t) =$$
$$= H(P - AQ^2, -Q, t) = \frac{Q^2}{2m} - F(P - AQ^2)$$

$\tilde{H}(Q,P,t) = -FP$ при $A = -\frac{1}{2mF}$.

в) $$\begin{cases} \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P(t) = P_0, \quad P_0 = const \\ \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = -F \Rightarrow Q(t) = -Ft + Q_0, \quad Q_0 = const \end{cases}$$

$$p(t) = -Q(t) = Ft - Q_0$$
$$x(t) = P - \left(-\frac{1}{2mF}\right)p^2 = P_0 + \frac{(Ft - Q_0)^2}{2mF}$$

Ответ: a) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + Fx$, $H = \frac{p^2}{2m} - Fx$;

б) $\tilde{H}(Q,P,t) = \frac{Q^2}{2m} - F(P - AQ^2)$; при $A = -\frac{1}{2mF}$ $\tilde{H}(P) = -FP$.

в) $P(t) = P_0$, $Q(t) = -Ft + Q_0$;

$p(t) = Ft - Q_0$, $x(t) = P_0 + \frac{(Ft - Q_0)^2}{2mF}$, где P_0, Q_0 - константы.

④ $F_2(q, P) = q^2 e^P$

а) $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p) = ?$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = 2qe^P \quad (1)$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q^2 e^P \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow P = \ln \frac{p}{2q} \quad (*)$$

$$(2) \Rightarrow Q = q^2 \frac{p}{2q} = \frac{pq}{2} \quad (**)$$

б) $F_1(q, Q) = ?$

$$(**) \Rightarrow p = \frac{2Q}{q}$$

$$(*) \Rightarrow P = \ln \frac{Q}{q^2}$$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{2Q}{q} \Rightarrow F_1(q, Q) = 2Q\ln q + f(Q)$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \Rightarrow \ln Q - \cancel{2\ln q} = -\cancel{2\ln q} - \frac{\partial f}{\partial Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(Q) = -\int \ln Q \, dQ = -Q\ln Q + Q + C, \quad C = \text{const}$$

$$F_1(q, Q) = 2Q\ln q - Q\ln Q + Q + C$$

Ответ: а) $P = \ln \frac{p}{2q}$, $Q = \frac{pq}{2}$;

б) $F_1(q, Q) = 2Q\ln q - Q\ln Q + Q$.