Матанализ
2 курс
Задачи

6 сентября 2021 г.

Листок 1.

1. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости порождается замкнутыми правильными треугольниками.

2. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости не порождается параболами.

3. Доказать, что совокупность пересечений борелевских подмножеств плоскости с прямой есть в точности борелевская σ-алгебра прямой.

4. Привести пример борелевского множества, которое не является счетным объединением замкнутых множеств.

5. Пусть A_n — последовательность множеств из σ-алгебры $\mathcal{A}$. Доказать, что в $\mathcal{A}$ входит множество всех точек, принадлежащих бесконечно многим A_n.

6. Доказать, что для каждого $q \in (0,1)$ в $[0,1] \times [0,1]$ есть компакт лебеговской меры q, не имеющий внутренних точек.

7. Пусть A — множество положительной меры Лебега на прямой. Доказать, что множество разностей $A - A = \{a_1 - a_2 \colon a_1, a_2 \in A\}$ содержит интервал.

8. Построить измеримое по Лебегу множество на плоскости с неизмеримыми проекциями на координатные оси.

9. Доказать, что если две борелевские меры на $[0,1]$ имеют равные значения на всех отрезках, то они равны.

10. Привести пример двух различных вероятностных мер на σ-алгебре, значения которых совпадают на некотором классе множеств, порождающих эту σ-алгебру.

Решения

Задача 1

Заметим что борелевская σ-алгебра, тогда мы докажем что квадрат можно замостить правильными треугольниками. Рассмотрим треугольную сетку на плоскости из треугольников со стороной 1 и квадрат нарисованный поверх нее. Выберем в множество A_1 треугольники которые целиком лежат в квадрате, далее рассмотрим сетку в 2 раза меньшую и выберем в множество A_2 треугольники с вдвое меньшей стороной, лежащие внутри квадрата и не пересекающиеся с A_1 и так далее. Таким образом каждая точка войдет в какой-то треугольник и $[0,1]^2 = \bigcup\limits_{i=1} A_i$. Таким образом мы доказали, что борелевскую σ-алгебру плоскости можно породить треугольниками.

Задача 2

Заметим, что парабола пересекается с прямой не более чем в двух точках, тогда если рассмотреть любе счетное число парабол, то они пересекаются с прямой не более чем в счетном числе точек, а следовательно мы не можем представить интервал в виде объединения парабол, а следовательно не все множества на $\mathbb{R}$ могут быть представлены через параболы.

Задача 3

$A = \{V_1 \cap \mathbb{R} \mid V_1 \subset B(\mathbb{R}^2)\}$ – σ-алгебра на $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \in A \quad (\mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R} = \mathbb{R})$$

$$U_1 \in A \;\Rightarrow\; U_1 \backslash \mathbb{R} = V_1 \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{R} = (\mathbb{R}^2 \backslash V_1) \cap \mathbb{R} \quad \mathbb{R}^2 \backslash V_1 \text{ – борелевское, а следовательно } U_1 \backslash \mathbb{R} \in A$$

$$U_1, U_2, \ldots \in A \qquad U_i = V_i \cap \mathbb{R}$$

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} (U_i) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (V_i \cap \mathbb{R}) = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i \right) \cap \mathbb{R} \subset \text{борелевского}$$

Тогда $\mathcal{A} \subset A$, где $\mathcal{A}$ – борелевская σ-алгебра прямой (так как она является наименьшей σ-алгеброй), содержащей все открытые множества в $\mathbb{R}$

$A' = \{W_1 \subset \mathbb{R}^2 \mid W_1 \cap \mathbb{R} \text{ – борелевское множество в } \mathbb{R}\}$

A' – σ-алгебра на $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \subset A' \quad \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \subset B(\mathbb{R})$$

$$W_1 \subset A' \;\Rightarrow\; W_1 \cap \mathbb{R} \subset \mathcal{A}$$

$$\vdots$$

Все открытые множества в $\mathbb{R}^2 \subset A'$, так как $W_1 \cap \mathbb{R} = U_1 \in \mathcal{A}$ (где W_1, U_1 – открыты)

A' – σ-алгебра, следовательно $B(\mathbb{R}) \subset A'$, откуда $A' \cap \mathbb{R} \supset A$, $A \subset A' \cap \mathbb{R} \subset \mathcal{A}$, а следовательно $A = \mathcal{A}$

Задача 4

Борелевское множество не является счетным объединением замкнутых множеств.

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ – борелевское множество

$$\mathbb{R} \backslash q = (-\infty, q) \cup (q, +\infty) \quad q \in \mathbb{Q}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbb{R} \backslash q = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$

$\mathbb{Q}$ (это счетное объединение замкнутых множеств) так как точка $q = \mathbb{R} \backslash (-\infty, q) \cup (q, +\infty)$ замкнута

Пусть $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} z_i$ (z_i – замкнутое множество)

Тогда $\mathbb{Q} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} \backslash z_i)$ ($\mathbb{R} \backslash z_i$ – открытое множество)

<u>Теорема Бэра</u> Семейство A_n –всюду плотные открытые множества, тогда $\bigcap A_n$ – всюду плотно

Если $\mathbb{Q}$ – пересечение открытых, то они содержат рациональные точки, а следовательно эти множества всюду плотные

$$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbb{R} \backslash z_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \mathbb{R} \backslash q_j \right) = \varnothing$$

Противоречие, следовательно $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(\mathbb{R}\backslash z_i)$ не всюду плотно, следовательно $\neq \mathbb{Q}$

Задача 5

$X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

Докажем, что все элементы X удовлетворяют условию

1)
$$x \in X \;\Rightarrow\; \forall N\; \exists n > N:\; x \in A_n$$
$$\forall N:\; x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n \;\Rightarrow\; x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

2) $x \in X$, но при этом x принадлежит конечному числу множеств, а следовательно $\exists N\; \forall n > N : x \notin A_n \;\Rightarrow$ $x \notin \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, следовательно $x \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, но это равносильно тому, что $x \in X$

Задача 6

$K = ([0,1]\backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n) \times ([0,1]\backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n)$.

Зафиксируем $\varepsilon = \sqrt{q}+1$, построим множество лебеговской меры $1-\varepsilon$, пусть есть последовательность $\{a_n\}$: $a_0 = 1,\; a_0 > a_1 > \ldots$ и $\lim \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1-\varepsilon$. Рассмотрим отрезок и будем из него выреать участки длины $\frac{a_{n-1}-a_n}{2^{n-1}}$ (на n шаге), тогда

$$\lambda(K) = \inf(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(u_i),\; K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} u_i) = 1 - \lambda([0,1]\backslash K) = \varepsilon$$

$\lambda([0,1]\backslash K) = 1-\varepsilon$, так как частичные суммы равны равны $l_0 - l_1, l_0 - l_2, \ldots, l_0 - l_n$ $1-(1-\varepsilon) = \varepsilon$

Множество K замкнуто ($[0,1]\backslash K$ открыто как счетное объединение открытых) и ограничено, а следовательно не имеет внутренних точек, так как мы выкинули всюду плотное множество.

Рассмотрим $K \times K \subset [0,1]\times[0,1]$

$\lambda(K\times K) = |x| - 2\varepsilon + \varepsilon^2 = (\varepsilon-1)^2$

-2ε так как мы выкинули S всех "полосок"по горизонтали и вертикали $(a_0 - a_1 + 2\frac{a_1-a_2}{2} + 2\cdot\ldots) = \varepsilon$

$+\varepsilon^2$ так как мы добавляем S пересечения этих полосок $(a_0-a_1)(a_0-a_1+2\frac{a_1-a_2}{2}+2\cdot\ldots) + \frac{a_1-a_2}{2}(a_0-a_1+2\frac{a_1-a_2}{2}+2\cdot\ldots)+\ldots = (a_0-a_1)\varepsilon + (\frac{a_0-a_1}{2})\varepsilon + \ldots = \varepsilon^2$

Задача 7

Докажем что $\exists\varepsilon > 0 : (-\epsilon,\epsilon) \subset A - A$

Если $\mu(A) > 0$, то существуют компакты для которых выполнено что $U_2 \subset A \subset U_1$ и $\mu(U_1\backslash U_2) < \frac{1}{3}\mu(A)$, тогда

$$\mu(U_2) > \mu(A) - \mu(A\backslash U_2) \geqslant \mu(A) - \mu(U_1\backslash U_2) > \frac{2}{3}\mu(A)$$
$$\mu(U_1) \leqslant \mu(A) + \mu(U_1\backslash A) \leqslant \mu(A) + \mu(U_1\backslash U_2) < \frac{4}{3}\mu(A)$$
$$2\mu(U_2) > \mu(U_1)$$

Теперь рассмотрим U_1, U_2 и докажем, что $\exists\varepsilon > 0:\; \forall\delta \in (-\epsilon,\epsilon):\; (U_2+\delta) \subset U_1$

$U_1 = \bigsqcup\limits_{i=1} I_i$ – дизъюнктное объединение интервалов $\{I_n\}$ – открытое покрытие U_2, следовательно $\exists N:\; U_1' = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} I_i$ $U_2 \subset U_1'$

Покажем, что $I_n \cap K$ – компакт ($\forall n = 1,\ldots,N$)

Пусть $I_n = [a_n, b_n]$ и $U_2 \cap I_n = u_n$, заметим что $a_n, b_n \notin U_2$, так как $a_n, b_n \notin U_1'$, откуда $u_n = U_2 \cap [a_n, b_n]$ – ограниченное замкнутое подмножество прямой, а следовательно u_n – компакт и $\inf u_n, \sup u_n \in u_n$.

Обозначим $\varepsilon_n^1 = \inf u_n - a > 0$ и $\varepsilon_n^2 = b - \sup u_n > 0$, $\varepsilon_n = \min(\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2) > 0$ и $\forall\delta \in (-\varepsilon_n, \varepsilon_n):\; u_n + \delta \subset I_n$, следовательно для $\varepsilon = \min\{\varepsilon_n\} > 0$ выполнено что $\forall\delta \in (-\varepsilon,\varepsilon):\; \forall n \in (1,\ldots,N):\; u_n + \delta \subset I_n$. Откуда следует что $U_2 + \delta \subset U_1' \subset U_1$

$$\mu(U_2 \cap U_2 + \delta) = \mu(U_2) + \mu(U_2+\delta) - \mu(U_2 \cup (U_2+\delta)) \geqslant 2\mu(U_2) - \mu(U_2) > 0$$

Задача 8

Известно, что существует хотя бы одно неизмеримое множество на прямой (например множество Витали), обозначим такое множество как A. Построим тогда множества $B_1 = \{(x, y) \mid x \in A, y = 0\}$ и $B_2 = \{(x, y) \mid x = 0,\ y \in A\}$. Тогда множество $B = B_1 \cup B_2$ удовлетворяет условию, ведь B измеримо, так как это объединение подмножеств двух прямых. Проекции же, имеющие вид $A \cup \{0\}$, являются неизмеримыми.

Задача 9

Назовем класс множеств, на которых две меры имеют равные значения – A, заметим что если выбрать в A сходящуюся последовательность отрезков $B_1, B_2, B_3, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_1(B_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(\mu_2(B_n))$, а следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_1(B_n)) = B \in A$. Тогда заметим, что $\forall\{B_n\} \in A,\ B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots : \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in A$, то есть это монотонный класс, а следовательно для него выполнена теорема о монотонном классе, то есть данные две меры порождают какую-то σ-алгебру с равными значениями, а следовательно можно выбрать в них минимальную σ-алгебру.

Задача 10

$$\mu_1(1) = \mu_1(3) = 0 \quad \mu_1(2) = \mu_1(4) = \frac{1}{2}$$
$$\mu_2(1) = \mu_2(2) = \mu_2(3) = \mu_2(4) = \frac{1}{4}$$
$$\sum_{k=1}^{4} \mu_1(k) = \sum_{k=1}^{4} \mu_2(k) = 1$$

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$. σ-алгебра – множество всех подмножеств в A, она порождается $\{1, 2\}$ и $\{2, 3\}$

$$\mu_1(\{1, 2\}) = \frac{1}{2} = \mu_2(\{1, 2\})$$
$$\mu_1(\{2, 3\}) = \frac{1}{2} = \mu_2(\{2, 3\})$$
$$\mu_1(1) \neq \mu_2(1) \text{ меры различны}$$