Алгебраическая геометрия: дз 5, до 25.11

1) (Лемма, полезная при склейке схем и т. п.) Покажите, что если $U = D(f)$ главное открытое подмножество в $X = Spec(A)$, а V главное открытое подмножество в U, то V главное открытое подмножество и в X, выведите отсюда, что пересечение двух открытых аффинных подмножеств произвольной схемы можно покрыть открытыми подмножествами, главными в них обоих.

2) Пусть X схема с открытым аффинным покрытием $U_i = Spec(A_i)$. Докажите, что $Spec(A_i/N(A_i))$, где N обозначает нильрадикал, тоже склеиваются в схему (замечание: она совпадает со схемой X_{red}, определенной на лекциях - т. е. со структурным пучком $\mathcal{O}_X/\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}(U)$ состоит из сечений, нильпотентных в любой точке U).

3) Пусть X, Y S-схемы, а Z Y-схема (в частности, Z тоже S-схема). Проверьте, что $(X \times_S Y) \times_Y Z$ изоморфна $X \times_S Z$.

4) а) Пусть X приведенная схема над полем k и L сепарабельное алгебраическое расширение k . Докажите, что $X_L = X \otimes_k L$ тоже приведена.

б) Приведите пример схемы, которая приведена, но не геометрически приведена.

5) Пусть X, Y целые схемы. Говорят, что морфизм $f : X \to Y$ доминантный, если образ топологического пространства X плотен в Y . Докажите, что следующие условия эквивалетны: а) f доминантный б) общая точка X отображается в общую точку Y в) гомоморфизм пучков $f^{\#}$ инъективен.

6) а) Проверьте, что морфизм $\phi_{n,m} : \mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^m_k \to \mathbb{A}^{mn+n+m}_k$, заданный формулой $((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, x_1y_1, x_1y_2, \dots, x_ny_m)$ - замкнутое вложение, и опишите его образ.

б) Проверьте, что формула $((X_0 : \dots : X_n), (Y_0 : \dots : Y_m)) \mapsto (X_0Y_0 : X_0Y_1 : \dots : X_nY_m)$ задает замкнутое вложение $S_{n,m} : \mathbb{P}^n_k \times_k \mathbb{P}^m_k$ в $\mathbb{P}^{mn+m+n}_k$.

в) Вычислите степень получившейся замкнутой подсхемы в $\mathbb{P}^{mn+m+n}_k$. Указание: пусть P ее многочлен Гильберта, тогда $P(d)$ при больших d - размерность пространства многочленов от $X_0, \dots, Y_m$, однородных степени d как по X_i, так и по Y_j.

$X = Spec A \ , \ X_f = X \setminus V(f) = D(f)$

$X = Spec A \qquad X_f = U \subset X \Rightarrow U \simeq (Spec A)_f \simeq Spec(A_f)$

$U_g = V \subset U \Rightarrow V \simeq (Spec A_f)_g \simeq Spec((A_f)_g) \simeq$

$\simeq Spec A_{fg} \simeq (Spec A)_{fg} \Rightarrow V = X_{fg}$

$= \mathrm{Spec}\, A_g$ ...

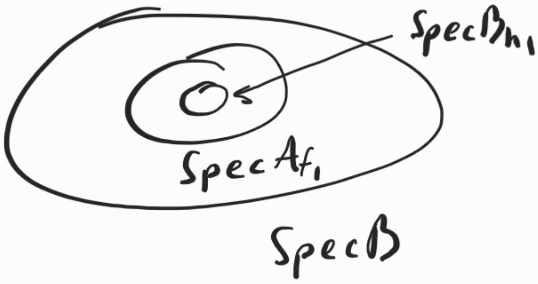
$U_1 = \mathrm{Spec}\, A_1,\ U_2 = \mathrm{Spec}\, A_2 \subset X$

$U_1 \cap U_2 = \bigcup \mathrm{Spec}\, A_{f_i}$

$\mathrm{Spec}\, A_{f_1} = \bigcup \mathrm{Spec}\, B_{h_i}$

$\mathrm{Spec}\, B_{h_1} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, A_{f_1} \Rightarrow A_{f_1} \to B_{h_1}$

$\mathrm{Spec}\, A_f \hookleftarrow \mathrm{Spec}\, B \Rightarrow \begin{matrix} B & \to & A_{f_1} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ h_1 & \mapsto & \lambda_1 \end{matrix} \Rightarrow B_{h_1} \to (A_{f_1})_{\lambda_1}$



B_{h_1} - ф-ции $\neq 0$ в h_1 на B

$(A_{f_1})_{\lambda_1}$ - ф-ции $\neq 0$ в h_1 на A_{f_1}

$\mathrm{Spec}\, B_{h_1} \subset \mathrm{Spec}\, A_{f_1} \Rightarrow (A_{f_1})_{\lambda_1} = B_{h_1}$

№2 и так $\forall f_i, h_j$

$X = \bigcup U_i = \bigcup \mathrm{Spec}\, A_i$

$\left(\mathrm{Spec}\frac{A_i}{N(A_i)}, \frac{A_i}{N(A_i)}\right)$ - aff схема

$\mathrm{Spec}\frac{A_i}{N(A_i)} \simeq \mathrm{Spec}\, A_i$ - как топ. пр-ва

$U_{ij} = \mathrm{Spec}\frac{A_i}{N(A_i)} \cap \mathrm{Spec}\frac{A_j}{N(A_j)} \simeq \mathrm{Spec}\, A_i \cap \mathrm{Spec}\, A_j$

$f:(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}) \to (U_{ji}, \mathcal{O}_{U_{ji}})$ f - тождеств. как отображение топ. пр-в

$\varphi_{ji}^*: \mathcal{O}_X(U_{ji}) \simeq \mathcal{O}_X(U_{ij})$ $\varphi_{ji}^*(N(U_{ji})) = N(U_{ij}) \Rightarrow$

$\exists\ f_{ji}^*: \frac{\mathcal{O}_X(U_{ji})}{N(U_{ji})} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{O}_X(U_{ij})}{N(U_{ij})} \Rightarrow f_{ji}^* \circ f_{ij}^* = id$ и

$f_{ik}^* = f_{jk}^* \circ f_{ij}^*$

№3

№3

X, Y - S-сх $\quad Z$ - Y - сх

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rrd, bend left, "\psi"] \arrow[rdd, "\varphi"'] & & \\
& X\times_S Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, dashed, "p_1"] & Z \arrow[d, "f"] \\
& X\times_S Y \arrow[r, "p_2'"] \arrow[d, "p_1'"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "h"] & S
\end{tikzcd}$$

$\pi_1 : X\times_S Z \to X$

$p_2 : X\times_S Z \to Z$

$h\pi_1 = gfp_2 \Rightarrow \exists!\, p_1$

$p_2'\varphi = f\psi \Rightarrow$

$\Rightarrow gf\psi = gp_2'\varphi = hp_1'\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!\, r : W \to X\times_S Z \Rightarrow X\times_S Z$ - pull back

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d] \\
X\times_S Y \arrow[r, "p_2'"] & Y
\end{tikzcd}$$

№4

а) X - привед. $\Rightarrow X = \bigcup U_i = \bigcup \operatorname{Spec} A_i \quad A_i$ - привед.

w.l.o.g. $X = \operatorname{Spec} A$, привед. лок. св-во $\Rightarrow$ w.l.o.g. $D(f) \subset \operatorname{Spec}(A\otimes L)$

рассматриваем $D(f)$ $f = \sum a'\otimes b'$ $\quad A' = \langle a' \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow$ w.l.o.g. $\operatorname{Spec} A'\otimes L \Rightarrow A'$ - нёт. $\Rightarrow$ в нём кон. кол-во

мин. простых $A' \hookrightarrow \prod\limits_{p_i\in \operatorname{Spec}\min} \frac{A}{p_i} = \oplus \frac{A}{p_i} \Rightarrow$ w.l.o.g. $A = \oplus Q(\frac{A}{p_i}) = \oplus F_i$

$(\oplus F_i)\otimes L = \oplus (F_i \otimes_k L)$

Аналогично w.l.o.g. $L = k(b_1, \dots b_i \dots)$ - кон. сеп $\Rightarrow$ по т. о примит. элементе $L = k(\alpha_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow A\otimes_k L = A(\alpha_1)$ - привед.

б) $\mathbb{F}_p(t) = k \qquad \frac{\mathbb{F}_p(t)[x]}{x^p - t} = \mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p}})$

привед. т.к

$\mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p}}) \otimes_k \mathbb{F}_p(t^{1/p})$ - не привед. ...

$$\| \quad \frac{\mathbb{F}_p(t)[x][y]}{(x^p-t)(y^p-t)} \qquad x \neq y \Rightarrow x-y \neq 0$$

$$(x-y)^p = x^p - y^p = t - t = 0$$

$\mathbb{F}_p(t^{1/p}) = L \qquad \operatorname{Spec} L \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} L$ - не привед. сх.

но $\operatorname{Spec} L$ - спектр поля $\Rightarrow$ привед сх.

№5

а) $\Rightarrow$ б) $\quad y$ - общ. т. Y, x - общ. т. X

$\overline{\{x\}} = X \qquad Y = \overline{f(X)} = f(\overline{\{x\}}) = \overline{f(\{x\})} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\{x\}) = \{y\}$

б) $\Rightarrow$ а) $\quad f(\{x\}) = \{y\} \Rightarrow \overline{f(\{x\})} = \overline{f(\{x\})} = \overline{\{y\}} = Y$

а) $\Rightarrow$ в) $\quad \emptyset \neq U \subset X$ - aff откр $\quad f(U) \subset V \subset Y$ - aff откр, $V \neq \emptyset$

$U = \operatorname{Spec} A \quad V = \operatorname{Spec} B \quad A, B$ - области $\Rightarrow$

$\Rightarrow f|_U : U \to V \rightsquigarrow \varphi : B \to A \quad f$ переводит

общую т. в общ. т. $\Leftrightarrow \varphi^{-1}((0)) = (0) \Leftrightarrow \varphi$ - инъ.

это верно $\forall U \subset X, \forall V \subset Y, f(U) \subset V \Rightarrow f^*$ - инъ,

любое его огранич. на откр. инъ.

в) $\Rightarrow$ а) $\quad f^*$ - инъ $\quad \forall U = \operatorname{Spec} A \subset X \quad V = \operatorname{Spec} B \subset Y \quad f(U) \subset V$

$f|_U : U \to V \rightsquigarrow \varphi : B \to A$ - инъ $\Rightarrow \varphi((0)) = (0) \Rightarrow$

$\Rightarrow f|_U$ - переводит общ. т. U в общ. т. V

и так $\forall U, V$ $f(U) \subset V$ - aff $\Rightarrow f$ переводит общ. т. X в общ. т. Y

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "\beta"] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[ddr, dashed, "\alpha"'] \arrow[dddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& X\times_S Y\times_Y Z \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & Z \arrow[d, "g"] \\
& X\times_S Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "h"] & S
\end{tikzcd}$$

$\varphi: W \to X$

$\psi: W \to Z$

$fg\psi = h\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists! \alpha: W \to X \times_S Y$, т.ч.

$p_1 \circ \alpha = \varphi \qquad p_2 \circ \alpha = g\psi \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists! \beta: W \to X \times_S Y \times_Y Z$, т.ч. $\pi_2 \circ \beta = \psi$

$\pi_1 \circ \beta = \alpha \Rightarrow p_1 \circ \pi_1 \circ \beta = \varphi \quad \pi_2 \circ \beta = \psi$

при пост-композиции с p_1 могла потеряться единственность $\Rightarrow$

Пусть $\exists \gamma: W \to X \times_S Y \times_Y Z$, т.ч. $p_1 \circ \pi_1 \circ \gamma = \varphi$ и

$\pi_2 \circ \gamma = \psi$, $\quad p_2 \circ \pi_1 \circ \gamma = g \circ \pi_2 \circ \gamma = g\psi \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_1 \circ \gamma = \alpha$ (из-за ед α) $\quad \pi_2 \circ \gamma = \psi \Rightarrow \gamma = \beta$

из-за ед β