№2. $a_5=9,\ a_7=1 \Rightarrow (1).$

(1)? $\exists!$ росток в $z=0$: $f(z)$ – аналит., $f'(z)=f(z)$, $f(0)=1$.

Предл. 6.7. $\exists!$ вз.-одн. соответствие между ростками голоморфных ф-ий в т. $p\in\mathbb{C}$ и степ. рядами вида $\sum c_k(z-p)^k$ с $R>0$.

Предположим, $\exists$ росток в $z=0$: $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

$c_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$c_1=\dfrac{f'(0)}{1!}=\dfrac{f(0)}{1}=1,\ c_2=\dfrac{f''(0)}{2!}=\dfrac{f'(0)}{2!}=\dfrac{f(0)}{2!}=\dfrac{1}{2!},\ldots,c_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}=\dfrac{f(0)}{k!}=\dfrac{1}{k!}$

$\Rightarrow f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}z^k$. Нетрудно заметить, что это e^z, $\Rightarrow$ знаем, что у этого ряда R сходимости >0. $\Rightarrow$ по предл. 6.7 росток $\exists!$

Ответ: $\exists!$ росток (доказано).

№3. $a_2=9$
$a_6=5$
$\Rightarrow (5)$

$w(z)$ в $\gamma(0)$: $\cos w=z$, $w(0)=\frac{\pi}{2}$, $\underset{[0,1]\to\mathbb{C}}{\gamma(t)}=e^{\pi i t}-1$. $w(\gamma(1))=?$

$w=\arccos z+2\pi k$, $w(0)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, а надо $\frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow w=\arccos z$, $\underline{\underline{k=0}}$.

$\gamma(1)=e^{\pi i}-1=-2$.

$w(\gamma(1))=w(-2)=\arccos(-2)$

• $t=\arccos(-2)$.

$\cos t=-2 \to \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}=-2$. Пусть $m=e^{it}\neq 0$ (иначе $e^{it}=\cos t+i\sin t \Rightarrow \cos t=\sin t \Rightarrow$ прот. с ОТТ). Тогда

$m+\dfrac{1}{m}=-4 \to m^2+4m+1=0 \to m=-2\pm\sqrt3$. Итак, $e^{it}=-2\pm\sqrt3<0$. Прологарифмируем обе части.
$\Rightarrow |-2\pm\sqrt3|=-(-2\pm\sqrt3)=2\mp\sqrt3$.

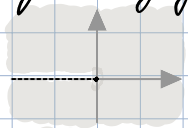
Аргумент $-2\pm\sqrt3$: $\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ Справа: $\ln(2\mp\sqrt3)+(\pi+2\pi k)i, k\in\mathbb{Z}$, $\Rightarrow it=\ln(2\pm\sqrt3)+\pi(2k+1)i, k\in\mathbb{Z}$; $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

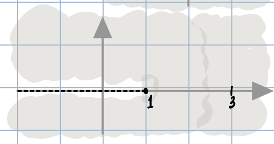
$\Rightarrow t=-i\cdot\ln(2\pm\sqrt3)+\pi(2k+1)$. Мы брали ветвь арккосинуса, т.ч. в нуле было $\frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow t=-i\cdot\ln(2+\sqrt3)+\pi$.

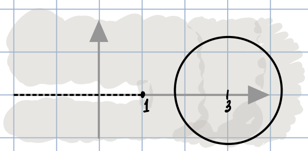
Ответ: $-i\cdot\ln(2+\sqrt3)+\pi=\arccos(-2)$.

№4. $a_0=4,\ a_7=1 \Rightarrow a_0+a_7+1=6.$

(б) радиус сходимости ряда для $f(z)=\log(\log z)$ с центром в $a=3$, $f(a)=0$.

$g(z)=\log z$ голоморфна на 

$f(z)=\log(\log z)$ на 



аналит.
$\Updownarrow$
Максимальный радиус круга, внутри к-го $f(z)$ голоморфна, это $R=2$. $\Rightarrow$ при таком R соотв. ряд сходится. Т.к. $R=2$ — максимальный радиус, это и есть радиус сход-ти.

Ответ: 2.

N1. $a_2=9, a_8=9 \Rightarrow (9)$.

(9) Росток в т.0 с $s(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z^k)^k$, $\gamma: [0,1]\to\mathbb{C}$, $t\mapsto t$.

Пусть $s_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z^k)^k$. Переразложим ряд: $s_0(z)=s_{\gamma(z)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(z^k-\gamma(z)+\gamma(z)\right)^k$. Если $\exists z\in[0,1]$, т.ч. в нем $s_{\gamma(z)}(z)$ не сх-ся, то аналит. продолж. нет. Такое z существует: в $z=1$ $s_0(1)=\infty=s_{\gamma(1)}(1) \Rightarrow$ аналит. прод. нет.

Ответ: нет.