Пр-я гомотопии

Теперь пусть у нас есть $f_0: M \to N$, $f_1: M \to N$ – гомотопны F.

Тогда f_0^* и f_1^* – одинаковые ~~...~~ отобр-я в когомологиях

◁ $F: M\times[0,1] \to N$ – гомотопия. $\omega \in \Omega^n \rightsquigarrow \Omega = F^*\omega$

$f_i^*(\omega) = \Omega|_{x_i}$ По лемме 1: $f_1^* - f_0^* = (-1)^n(Dd - dD)\Omega = (-1)^n(DdF^* - dDF^*)$

Если $\omega \in Z^n$, то $f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = (-1)^{n+1} dDF^*\omega \in B^n(N) \Rightarrow f_1^*(\omega)$ и $f_0^*(\omega)$ лежат в 1 классе.

Если M и N гомотоп. экв, то g^*f^* и g^*f^* – взаимно обр. изоморф. □

Вычислим $H^*(S^1)$ и $H^*(\mathbb{R})$ • $\mathbb{R} \sim pt \Rightarrow H^1 = 0$ $H^0 = \mathbb{R}$.

• $H^*(S^1)$. $H^0(S^1) = Z^0(S^1) = \{const\} = \mathbb{R}$.

$H^1(S^1) = Z^1/_{B^1} = \mathbb{R}$

$a(\varphi)d\varphi \rightsquigarrow A(\varphi) = \int_0^\varphi a(s)ds$

(49) На U $\int_U \omega = \int_U f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = \int_U f\,dx^1\ldots dx^n$ – интл на ориент. мн-ии.

Пр1 Ин-л не зависит от φ.

◁ $\int \omega = \int f \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}_j}\right) d\tilde{x}^1 \ldots d\tilde{x}^n$ (на $U, \tilde{\varphi}$)

$\int_U \omega = \int_{(по\ U,\tilde{x})} f\,dx^1\ldots dx^n = \int_U f \left|\det \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right| d\tilde{x}^1 \ldots d\tilde{x}^n$, >0 (т.к. ориент) □

Пусть ψ_α – р-е 1, подч $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

Опр Ин-л $\int_M \omega = \sum_{\alpha\in\Xi} \int_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega$.

Пр2 Опр-е не зависит от р-я 1 ψ_α.

◁ Пусть ψ_α^1 и ψ_α^2 – р-я 1. Положим ~~...~~ $\psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^1 \psi_\beta^2$

~~Нужно д-ть, что $\sum\int\psi_\alpha\omega = 0$~~. Для $\psi_{\alpha\beta}$ инт = инт 1 = инт 2. □

Теорема Стокса M – п.комп ориент. n-мерное мн-е с краем, $\omega \in \Omega^{n-1}$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

◁ Дост. док-ть для (несущ) форм $\omega_k = f(x)dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^k}\wedge\ldots dx^n$. Для $k \neq n$ $\omega|_{\partial M} = \omega = 0$, потому что $x^n = dx^n = 0$ на ∂M

~~...~~

$\int d\omega_k = (-1)\int \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = \int\left(f\Big|_{x^k=-\infty}^{x^k=\infty}\right)dx^1\ldots = 0$ (тут можно сказать, что носитель U_α можно сделать компактным)

Остался случай $\omega = \omega_n = f(x)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n-1}$

$\int_{\partial M}\omega = \int f(x^1,\ldots,x^{n-1},0)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n-1}$. $\int_M d\omega = (-1)^{n-1}\int_M \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = \int f(x^1\ldots x^n)\Big|_{x_n=0}^{x_n=\infty} = -f(x^1\ldots x^{n-1},0)$

Что и требовалось □

Замечание Если делать границу $x^1=0$, знака не будет.

Ф-ла Грина $P \subset \mathbb{R}^2$ - огр. кривой область. $\omega = A\,dx + B\,dx$

$$d\omega = \left(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2$$

$$\int_{\partial P} A\,dx^1 + B\,dx^2 = \int_P \left(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2$$

Ф-ла Кельвина - Стокса $P \subset \mathbb{R}^3$ - поверхность, в огр. гладкой кривой

$$\omega = A\,dx^1 + B\,dx^2 + C\,dx^3$$

$$\int_{\partial P} A\,dx^1 + B\,dx^2 + C\,dx^3 = \int_P \left(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial x^2} - \frac{\partial B}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial A}{\partial x^3} - \frac{\partial C}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^2$$

Ф-ла Гаусса-Остроградского $P \subset \mathbb{R}^3$ - область в $\mathbb{R}^3$. $\omega = A\,dx^1 \wedge dx^2 + B\,dx^2 \wedge dx^3 + C\,dx^3 \wedge dx^1$

$$\int_{\partial P} A\,dx^1 \wedge dx^2 + B\,dx^2 \wedge dx^3 + C\,dx^3 \wedge dx^1 = \int_P \left(\frac{\partial A}{\partial x^3} + \frac{\partial B}{\partial x^1} + \frac{\partial C}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

50 Пусть $\omega(z)$ - комплексная ф-я на области $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Если предел

$$\omega'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\omega(z_0 + \Delta z) - \omega(z_0)}{\Delta z}$$ существует, то $\omega'(z_0)$ – комплексная производная в z_0.

Функция н-ся голоморфной в D, если она в каждой точке имеет производную.

Теор (Коши-Римана) $\omega(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ определена в окр-ти z, причем $u, v \in C^1(\mathbb{R})$

Тогда ω дифф. в z необх. и дост. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Δ Необходимость. Пусть $t \in \mathbb{R}, h=t$ $\omega'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\left.\begin{aligned} &t \in \mathbb{R},\ h=t \quad \omega'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ &t \in \mathbb{R},\ h=it \quad \omega'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1: & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ i: & \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Достаточность $h = s + it$ $u(x+s, y+t) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + o(s,t)$

$$v(x+s, y+t) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t + o(s,t)$$

$$\omega(z+h) - \omega(z) = \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t\right) + o(s,t) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}s - \frac{\partial v}{\partial x}t + \frac{\partial v}{\partial x}is + \frac{\partial u}{\partial x}it + o(s,t) = (s+it)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i\right) +$$

$$+ o(s,t) = h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i\right) + o(h).$$

Т.е. lim существует и равен $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i$ $\square$

$z = x + iy$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$\bar{z} = x - iy$ $\quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{\bar{z} - z}{2}i$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Можно посчитать, что $\frac{\partial \omega}{\partial z} = \omega'(z)$, а $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = 0$

(51) <u>Опр 1</u> <u>Интегралом</u> $f(z)$ на кривой γ с концами a, b н-ся предел (если $\exists$)

$$\lim_n \sum_n f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k) := \int_C f(z)\,dz,$$

где $a, z_1, \ldots z_n, b$ - посл. точки, $\xi_k \in [z_k, z_{k+1}]$, а предел берется по мелкости разбиения.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i \int_C (u\,dy + v\,dx)$$

<u>Теор (Коши)</u> f - гол. ф-я в одн. области D и f' непр в D. $\forall \gamma \subset D$ замкн.

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$\triangleleft$ $\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ (грин, G - область, огр. γ)

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i \oint_\gamma (v\,dx + u\,dy) = -\int_G \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{0} + \int_G i \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0} dx\,dy = 0$$

Коши-Римана $\square$

<u>Лемма Гурса</u> f гол. в $D \Rightarrow \forall \Delta \subset D$ $\int_{\partial\Delta} f = 0$

$\triangleleft$ Пусть это не так. $\Delta = \Delta_0$ $\left|\int_{\partial\Delta} f\right| = M$ $\quad \Delta_n : \left|\int_{\partial\Delta_n} f\right| \geq \frac{M}{4^n}$ $\quad \Delta_k \to z_0$

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$ $\quad \forall \varepsilon\ \exists \delta : |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$. $\quad \overset{\shortparallel}{\alpha(z)}$

$\exists N : \forall n \geq N\ \Delta_n \subset U_\delta(z_0)$ $\quad \int_{\Delta_n} c\,dz = 0$ $\int_{\Delta_n} z\,dz$ $\int_\Delta z = 0$

$$\frac{M}{4^N} \leq \int_{\partial\Delta_n} f\,dz = \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)\,dz \leq \int_{\partial\Delta_n} \varepsilon |z - z_0|\,dz = \varepsilon P^2 = \varepsilon \frac{P^2(\Delta)}{4^n}$$

периметр

$M \leq \varepsilon P^2(\Delta)$ $\quad \forall \varepsilon \Rightarrow \underline{M = 0}$

<u>Теор</u> (Инт. формула Коши) D - область, граница ∂D - простая кривая, f - гол в $\overline{D}$. $\forall z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

$\triangle$ Рассм. диск U_r с центром z по теор. Коши для $D \setminus \overline{U_r}$ и ф-ии $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$

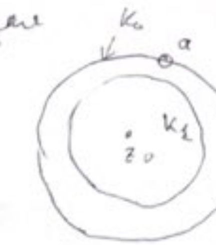
$$\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \int_{\partial U_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \overset{?}{=} 2\pi i f(z)\ (*)$$

$$\int_{\partial U_r} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i \quad (1)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d(z + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} = \int_0^{2\pi} \frac{ri\varphi e^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}} = \int_0^{2\pi} i\varphi\,d\varphi = 2\pi i$$

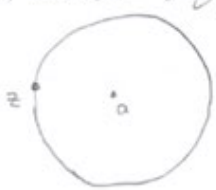
$(*) \Leftrightarrow \int_{\partial U_r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - r}\,d\xi \leq \max_{U_r} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{\underset{\shortparallel\, r}{|\xi - z|}}\, 2\pi r = 2\pi \max |f(\xi) - f(z)| \to 0$

(52) Теор Степенной ряд $\sum_0^\infty c_n(z-a)^n$ сх-ся в z_0. Тогда в круге $K_0=\{|z-a|<|z_0-a|\}$ он сх-ся абсолютно в каждой точке, а для $\rho<|z_0-a|$ в круге $K_1=\{|z-a|\le\rho\}$ равномерно.



Δ Пусть $a=0$. $\sum c_n z_0^n$ сх-ся => $\exists M$ что $|c_n z_0^n|<M$ $\forall n$.
Если $z\in K_0$, то $|c_n z^n|=|c_n z_0^n|\cdot\left|\frac{z}{z_0}\right|^n<Mq^n$, где $q<1$ =>
=> $\sum|c_n z^n|<\infty$ => сх-ся абс. в K_0
$z\in K_1$ $|c_n z^n|\le Mq_1^n$, где $q_1=\frac{\rho}{|z_0|}<1$ - не зав. от z. □

С-е $\forall$ ряда $\sum c_n(z-a)^n$ существует R-радиус сх-ти такой, что внутри круга сх-ся, а вне - р-ся.
Δ ~~Рассм. найдём такое z_0, для кот. $|z_0-a|$ макс. и расх-ся.~~
~~Вне - расх-ся~~



Рассм z, для кот. ряд сх-ся, пусть U - мн-во таких z.
Если U не огр => ряд сх-ся всюду.
Если U - огр, то его замыкание - круг, внутр. которого $\subset U$ □

Теор Голоморфную f можно разложить в ряд Тейлора $\forall$ круге $U_R\subset D$. с ц. в $a\in D$.
Δ Пусть $a\in D$, $U_R\subset D$, $z\in U_r$. Выберем $|z-a|<r<R$. γ_r - окр. рад r, $\xi\in\gamma_r$

$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|<1$ (и отделено от 1.)

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-a)\left(1-\frac{z-a}{\xi-a}\right)}=\sum_0^\infty\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$ - сх-ся равн.

$$\frac{f(\xi)}{2\pi i(\xi-z)}=\frac{f(\xi)}{2\pi i}\sum\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

инт. Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum\underbrace{\left(\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right)}_{c_n}(z-a)^n,$$ c_n не зав. от r.

c_n инт-формула для коэф. ряда Тейлора □

Это ряд Тейлора.

Теор $f(z)=\sum c_n(z-a)^n$ если сх-ся, то голоморфна.
Δ Пусть $R_1>0$. На комп. подмн. R сх-ть равн. => $f(z)$ - непр в R □
Ч произв. тот же ряд

(53) Любую ф-ю, голоморфную в кольце $V=\{r<|z-a|<R\}$ можно представить в виде ряда
$$f(z)=\sum c_n(z-a)^n,\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}.$$ Это н-ся ряд Лорана.

Δ Фикс $z\in V$. $V'=\{\xi: r'<|\xi-a|<R'\}$ $z\in V'\subset V$

Имеем $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$$

(Лоран прод) на Γ' $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| < 1$, По этому

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(\xi-a)\left(1-\frac{z-a}{\xi-a}\right)} = \sum \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$ & абс и равн по ξ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)} = \sum \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}\right)}_{c^n}(z-a)^n \quad (1)$$

аналог $$-\frac{1}{\xi-z} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(\xi-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)} = \sum \frac{1}{2\pi i}\left(\int f(\xi)d\xi\cdot(\xi-a)^{n-1}\right)\frac{1}{(z-a)^n} \quad (2)$$

$(1)+(2) = f(z) = \sum c_n(z-a)^n$ ☐

$R = \left(\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}\right)^{-1}$ $\quad r = \varlimsup \sqrt[n]{c_{-n}}$ $\quad \{r < |z-a| < R\}$ - обл. сх-ти

Единств. ряда Лорана: Нужно у мн-ть f на $(z-a)^{-k-1}$ и проинтегрировать,

Опр Точка $a\in\mathbb{C}$ н-ся изолированной особой точкой для $f(z)$, если f гол. в $V=\{0<|z-a|<\varepsilon\}$

1) устранимой если $\lim_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$ - сущ. кон. предел $\quad \frac{\sin z}{z}$

2) полюсом $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$ $\quad \frac{1}{z}$

3) сущ. особенная когда предела не сущ. $\quad e^{\frac{1}{z}}$

4) нерегуляр $\quad ctg \frac{1}{z}$.

Теор (об устр) TFAE

(1) a - устр особенность

(2) $f(z)$ огр в $V'=\{0<|z-a|<\varepsilon'\}$, $\varepsilon'>0$.

(3) $c_n=0$ $\quad n<0$

(4) можно доопределить $f(a)$ до голоморфной.

◁ (1) => (2) очев.

(2) => (3) $|c_n| \underset{(\text{Коши})}{\le} M\cdot\rho^n$ $\forall\rho>0$ => $c_n=0$.

(3) => (4) Доопр. $f(a)=c_0$ - гол.

(4) => (3) очев. ☐

Теор (о полюсах) ~~TFAE~~ a - полюс <=> отр часть р-а Лорана конечна.

◁ => $\lim f(z)=\infty$ => В ε' окр. $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ определена и голоморфна

$g(a)=0$. Пусть N - порядок нуля $g(z)$ в a $\quad g(a)=(z-a)^N h(z)$

$h\ne0$ и гол => $\frac{1}{h}$ - гол => $f(z)=\frac{1}{(z-a)^N}\cdot\frac{1}{h}$ => фиг => победа.

<= $(z-a)^N \underset{\text{гол}}{g(z)} = f(z)$ => $\lim f(z)=\infty$

☐

Теор (Сохоцкого) Если $a \in \mathbb{C}$ - сущ. особа, то $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$ $\exists z_n \to a$: $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

$\triangleleft$ • $A = \infty$ $f(z)$ не огр ни в какой окр $\Rightarrow \exists z_n$.

• $A \neq \infty$, т.е $A \in \mathbb{C}$. Если в любой окр $\exists z: f(z) = A$, то утв-е теор-мы очев.
Если это не так, то $\exists$ окр a : $g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ гол. в прокол. окр-ти, и имеет в изол. особенность, причем существенную. ($f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$ - не ил. функция)
Тогда $\exists$ $z_n : g(z_n) \to \infty \Rightarrow A + \frac{1}{g(z)} \to A$ $\square$

(54) Опр Пусть a - изол ос. Вычетом н-ся
$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\xi)\, d\xi$$

Теор (Коши о вычетах) $D \subset \mathbb{C}$ - область с прост. границей, G - нек. область в $\mathbb{C}$, $G \supset \overline{D}$. Пусть f гол. в G, за искл. конечного числа ос-ей. $a_1 \dots a_n$
Тогда $$\int_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = 2\pi i \sum \operatorname{res}_{a_i} f$$

$\triangleleft$ Пусть круги B_j попарно не пересекаются.
$$\int_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = \sum \int_{\partial B_j} f(\xi)\, d\xi = 2\pi i \sum \operatorname{res}_{a_j} f$$ $\square$

Предл Если f гол. в прок. окр-ти a, то $f(z) = \sum c_n (z-a)^n$,
$$\operatorname{res}_a f = c_{-1}.$$

$\triangleleft$ $\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \sum c_n \int (z-a)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i\, c_{-1} = c_{-1}$ $\square$

(55) Опр1 Вероятностное пр-во - это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где Ω непустое мн-во, $\mathcal{F}$ - σ-алгебра на Ω, $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ - функция, для которой
(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(2) $\mathbb{P}(\bigsqcup_{i=0} A_i) = \sum \mathbb{P}(A_i)$

Опр2 Случайная величина - это изм. ф-я $X: \Omega \to E$.

Опр3 Распределение сл. величины - мера $\mu := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ на E.

Опр4 Вещественная сл.вел. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ н-ся непрерывной, если μ - абс. непр.
Тогда $\exists$ функция $p \in L_1(\mathbb{R}, dx)$ - плотность, для которой
$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A p(x)\, dx \quad \forall \text{ борелевского } A \subset \mathbb{R}$$

Опр5 Дискретной сл. вел н-ся, если μ дискретна, т.е X принимает $\leq$ счетное число значений.

Опр6 Ф-я распр-я сл вел $X: \Omega \to D$ - это $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$.
$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Опр7 Матожидание X $\quad \mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$

Опр8 Дисперсия X $\quad D[X] := \int_\Omega (X - \mathbb{E}[X])^2\, d\mathbb{P}(\omega)$

Утв 9 $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ – две сл вел. $\underset{\text{ковариация}}{\mathrm{cov}(X_1, X_2)} = \mathbb{E}\left[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])\right]$

$X : \Omega \to \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathcal{F}_X$ – σ-алг на X, натянутая на прообр. бор.

Пр Если X, Y – нез, то $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

◁ $\int_\Omega XY \, d\mathbb{P}_\omega$

$X, Y \geq 0$

$$|XY - X_n Y_n| = |XY - X_n Y + X_n Y - X_n Y_n| \leq$$

$$\leq |Y| \cdot |X - X_n| + |X_n| \, |Y - Y_n| \qquad X_n = \sum \frac{k}{n} I_{\{\frac{k}{n} \leq X \leq \frac{k+1}{n}\}}$$

$$Y_n = \ldots$$

$$|\mathbb{E} XY - \mathbb{E} X_n Y_n| \leq |\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[XY_n]| + |\mathbb{E}[XY_n] - \mathbb{E}[X_n Y_n]| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \mathbb{E}[X] + \frac{1}{n} \mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

▷

Сл $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

(56) Опр1 $X_n \xrightarrow{a.s} X$ почти наверное, если $\mathbb{P}(\lim X_n = X) = 1$

Опр2 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ по вероятности, если $\forall \varepsilon > 0 \ \lim \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$

Закон больших чисел Пусть X_i – iid сл. величины и $m = \mathbb{E}[X_i]$.

Определим $S_n = \frac{\sum X_i}{n}$. 1) Если $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$, $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$

2) Если $\mathbb{E}[X_i^4] < \infty$, $S_n \xrightarrow{a.s} m$

◁ 1) $\mathbb{E}[S_n] = m$ (по лин) $\mathbb{D}[S_n] = \mathbb{E}[(S_n - m)^2] = \cancel{\mathbb{E}[S_n^2] - 2m^2 + m^2} =$

$$= \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left[\left(\sum (X_i - m)\right)^2\right] = \frac{\sum \mathbb{E}[(X_i - m)^2]}{n^2} = \frac{\sum \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2}{n^2} = \frac{\mathbb{D}[X_i]}{n} = \frac{6}{n}$$

$$\underset{\text{(нер-во Чебышева)}}{\mathbb{P}(|S_n - m| \geq \varepsilon) \leq} \frac{\mathbb{D}[S_n]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}(X_i)}{n \varepsilon^2} \to 0 \Rightarrow S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$$

Лемма Если $\sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \ \forall \varepsilon \Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s} X$.

◁ $X_n(p) \not\to X(p)$, если $\exists \varepsilon_p > 0 \ |(X_{n_i} - X)(p)| > \varepsilon_p$ Пусть $\mathbb{P}(\lim X_n = X) < 1$,

Тогда для $\varepsilon_{\frac{1}{n}} > 0$ $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon_{\frac{1}{n}}) = \infty$ (тк. покрывает плохое мн-во боль чем $\mathbb{P}$) ▷

2) Покажем, что если $\mathbb{E}[X_i^4] < \infty$, то $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$

$$\mathbb{P}(|S_n - m| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{E}[|S_n - m|^4] \varepsilon^{-4} = \frac{1}{n^4 \varepsilon^4} \sum \mathbb{E}((X_i - m)^4) + \frac{n(n-1)}{2} \mathbb{E}((X_i - m)^2)^2 -$$

– суммируема

Усиленный закон Достаточно $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$.

(57) Опр Сходимость по распределению $X_n \to X$, если $X, X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$. $\forall f \in C^\infty_{\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}}$ огр ~~на компактах~~ $\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$

Эквив $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow{pt} \varphi_X(t)$, где $\varphi_X \overset{def}{=} \mathbb{E}[e^{itX}]$

Центр. предельная теорема X_i - iid, $\mathbb{E}[X_i] = m$, $D[X_i] = \sigma^2$.

Положим $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n (X_i - m)$. Тогда $Z_n \to \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, если $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$

$\varphi_X = \exp(itm - t^2\sigma^2/2)$.

Δ Мы должны показать, что $\mathbb{E}[e^{itZ_n}] \to \exp(-\sigma^2 t^2/2)$

$$\mathbb{E}[e^{itZ_n}] = \prod_1^n \mathbb{E}[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}(X_i - m)}] =$$

$$= \mathbb{E}[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}(X_i - m)}]^n = \mathbb{E}\left[1 + \frac{it}{\sqrt{n}}(X_i - m) - \frac{t^2}{2n}(X_i - m)^2 + o(\tfrac{1}{n})\right]^n =$$

$$= \mathbb{E}\left[1 - \frac{t^2}{2n}(X_i - m)^2 + o(\tfrac{1}{n})\right]^n = \left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2n}\right)^n \longrightarrow \exp(-\frac{t^2\sigma^2}{2n}) \quad \square$$

Запомнить: ост. член, рад. сх-ти, γ, β-ф-ии, повторить 22d.

Т.Г. Кэли

A; φ - оператор с м-цей A;

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\varphi + a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} - \varphi & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \cdots & \cdots & & a_{nn} - \varphi \end{pmatrix} \qquad \Omega_{ij} \in \mathbb{K}[\varphi]$$

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$\Omega\Omega^* = \Omega^*\Omega = \det\Omega \cdot I_n$$

$$\Omega e = 0 \qquad \sum a_{i1} e_i - \varphi(e_1) = 0$$

$$(\Omega^*\Omega) e = 0 \qquad \det\Omega \cdot I_n e = 0$$

$$\det\Omega = 0$$