Топология
1 курс
Задачи

А.Ю. Пирковский

Содержание

1 Листок 1

1.1

Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство. Всегда ли верно, что $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ для любых $A, B \subset X$ (черта означает замыкание)?

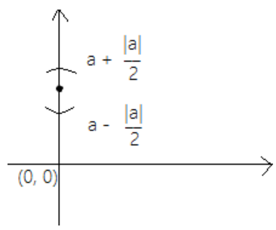
►
Пусть $A = (-1, 0) \quad B = (0, 1)$, тогда $\overline{A \cap B} = \varnothing$, $\overline{A} = [-1, 0] \quad \overline{B} = [0, 1]$ тогда $\overline{A} \cap \overline{B} = 0$

$*$ Верно отношение: $A \cap B \subset A,\ A \cap B \subset B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A},\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
Ответ: нет.

1.2

Снабдим пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ топологией произведения (она же – топология поточечной сходимости). Найдите замыкание в $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ множества всех многочленов без свободного члена.

►
Топология поточечной сходимости на $\mathbb{R}$ – это топология, предбаза которой – образ множества $\sigma(X, I) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall I \subset \mathbb{R}$.



$\{f \mid f(0) = 0\}$ $A = \{$многочлены без свободного члена$\}$.

1. Докажем, что ничего, кроме функций, проходящих через $(0, 0)$, не лежит в замыкании A.
Рассмотрим произвольную функцию f, такую что $f(0) \neq 0$, и найдем ее окрестность, в которой нет точек из A. Без ограничения общности скажем, что $f(0) = a$, и зададим $I = (a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2})$, тогда в $\sigma(0, I)$ не лежит ни одного элемента из A, что равносильно тому, что $f \notin \overline{A}$, что и требовалось доказать

2. Докажем, что все функции проходят через $(0, 0)$ лежат в $\overline{A}$. f – произвольная функция, такая что $f(0) = 0$. Рассмотрим ее произвольную окрестность. Помимо условия в нуле у функции есть еще конечное множество точек с условием.
Тогда пусть есть $\sigma_i(x_i, I_i)$ $i = 1, ..., n$. Выберем в каждом I_i по точке. Получим набор из $n + 1$ различной точки. Тогда составим по этим точкам интерполяционный многочлен Лагранжа. Известно, что он степени не выше n. $\Rightarrow$ в любой точке окрестности функции f мы нашли точку из A. Значит, f – предельная точка A. $\Rightarrow f \in \overline{A}$. Что и требовалось доказать

Ответ. Замыкание – все функции, проходящие через (0, 0).

1.3

Пусть X и Y – топологические пространства, причем Y хаусдорфово, и пусть $f: \ X \to Y$ – непрерывное отображение. Докажите, что его график (т.е. множество $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : \ x \in X\}$) замкнут в $X \times Y$

►
Рассмотрим предельную точку графика, пусть это (x_0, y_0). Предположим, что график не содержит предел (x_0, y_0). Пусть $f(x_0) = y_1$, где $y_1 \neq y_0$. Тогда для y_1, y_0 существуют непересекающиеся окрестности.
Так как отобраение непрерывно, то

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta : \ x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ f(x_0) \in (y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon)$$

По определению предельной точки окрестности, для любой окрестности (x_0, y_0) существует хотя бы 1 точка из множества. Откуда в пересечении окрестностей еть точка из множества $\Rightarrow$ противоречие. Тогда график содержит эту предельную точку, аналогично доказывается содержание и всех остальных точек.

1.4

Пусть A и B – замкнутые подмножества топологического пространства X, причем $A \cup B$ и $A \cap B$ связны. Докажите, что A и B связны. Верно ли это, если не требовать замкнутости A и B?

►
Докажем от противного:
Пусть A несвязно, тогда $A = A_1 \cup A_2$, где A_1, A_2 непустые и замкнутые множества.
1) $A_1 \cap B \neq \varnothing$ и $A_2 \cap B \neq \varnothing$
Тогда рассмотрим $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) = A \cup B$ – связно по условию. Тогда $(A_1 \cap B),\ (A_2 \cap B)$ замкнуты (как пересечения замкнутых), откуда связное множество разбито на два непересекающихся замкнутых подмножества.

2) $A_1 \cap B \neq \varnothing$ и $A_2 \cap B = \varnothing$
$(A_1 \cup A_2) \cup B = A_2 \cup (A_1 \cup B)$ тогда $(A_1 \cup B)$ и A_2 замкнуты

3) $A_1 \cap B = \varnothing$ и $A_2 \cap B = \varnothing$
не может быть, так как $A \cup B$ связно

В случае когда A и/или B незамкнуто, есть контрпример: $A = [1, 2],\ B = [0, 1) \cup [2, 3],\ A \cap B = \{2\}$ и $A \cup B = [0, 3]$

1.5

Пусть X, Y, Z – топологические пространства, причем Y компактно, и пусть $f : X \times Y \to Z$ – непрерывное отображение.
Докажите, что для любого открытого множества $W \subset Z$ множество $M = \{x \in X\ \forall y \in Y :\ f(x, y) \in W\}$ открыто в X.

►
$x_0 \in M\ \forall y_i :\ f(x_0, y_i) \in W$
Так как Y – компактен, то для окретсностей y_i, назовем их U_i, выполнено: $\exists n : U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n \supset Y$.
Рассмотрим окрестность $(x_0, y_i) :\ V_i$ так как f непрерывно, W открыто, то $f(V_i) \subset W$
$V_i = S_i \times U_i$, где S_i – окрестность x_i и $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n$, так как $S_1 \cap \ldots \cap S_n$ – пересечение конечного числа открытых множеств, то S открыто.
Тогда $(x_0, y) \in (S, U)$, тогда заметим, что $f(S, U) \subset W$ (по построению), тогда множество из (x_0, y) – открыто, откуда открыто и M, что и требовалось.

2 Листок 2

2.1 1

2.2 2

2.3 3

2.4 4

2.5 5

3 Листок 3

3.1 1

3.2 2

3.3 3

3.4 4

3.5 5