

# Алгебра, семинар №1

## ВШЭ, осень, первый курс

1. Сколько существует функций  $f : \{1, \dots, 5\} \rightarrow \{1, \dots, 5\}$ , таких что  $\#f^{-1}(k) \leq 2$  для всех  $k = 1, \dots, 5$ ?

2. Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражениях:

$$(a+b)^n, (a+b+c)^3, (a_1 + \dots + a_m)^n.$$

3. Докажите (по-возможности, комбинаторно) следующие равенства:

$$\text{а). } \sum_{i=0}^n \binom{x+i}{i} = \binom{x+n+1}{n},$$

$$\text{б). } \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1}.$$

4. а). Сколько существует путей на плоскости из точки  $(0,0)$  в точку  $(n_1, n_2)$ ,  $n_1, n_2 \geq 0$ , состоящих из отрезков  $(1,0)$  и  $(0,1)$ ?

б). Обобщите пункт а) на высшие размерности (пути в  $d$ -мерном пространстве).

5. При каких  $n, m$  биномиальный коэффициент  $\binom{n}{m}$  нечётный? При каких  $n$  все биномиальные коэффициенты  $\binom{n}{m}$ ,  $0 \leq m \leq n$  нечётны?

6. Назовём разложением числа  $n$  равенство вида  $n = a_1 + \dots + a_k$ ,  $a_i > 0$ . Например, число 3 имеет ровно 4 разложения  $3 = 3$ ,  $3 = 2 + 1$ ,  $3 = 1 + 2$ ,  $3 = 1 + 1 + 1$ . Числа  $a_i$  называются частями разложения.

а). Найдите число разложений числа  $n$ .

б). Найдите число разложений числа  $n$ , имеющих чётное число чётных частей.