# Алгебра
# Домашнее задание
В.Мозговой

8 апреля 2020 г.

# 1

## Задача 1

### Условие

Пусть $p$ и $q$ – простые числа. Покажите, что группа порядка $pq$ всегда является полупрямым произведением циклических групп. При каких значениях $p$ и $q$ можно утверждать, что это произведение прямое?

### Решение

Пусть $G$ – группа порядка $pq$, где $p > q$ простые, тогда по теореме Коши есть подгруппы $P = \langle x | x^p = 1\rangle$ и $Q = \langle x | x^q = 1\rangle$ порядка $p$ и $q$ соответственно. Это следует из того, что по тереме Силова $P \lhd G$ нормальна (так как все силовские $p$-подгруппы сопряжены в $G$ и количество $n_p$ силовских $p$-подгрупп должно делиться на $q$ и соответствовать $n_p \equiv 1 \pmod{p}$)
Тогда докажем что $G \cong P \rtimes Q$, где полупрямое произведение определено гомоморфизмом $\varphi : Q \to \mathrm{Aut}(P)$

1. Сперва заметим что так как $|P \cap Q|$ делится как $p$ так и на $q$, то $|P \cap Q|$, так как

   $$|PQ| = \frac{|P||Q|}{|P \cap Q|} = pq = |G|$$

   Откуда $PQ = G$

2. Теперь так как $Q = \langle y\rangle$ нормализует $P = \langle x\rangle$, отображение $\varphi_k : P \to P$ задано $\varphi_k(x) = y^k x y^{-k}$. Это также автоморфизм так как $\varphi_{-k}$ определен. И так как $\varphi_i\varphi_j = \varphi_{i+j}$, отображение $y^k \mapsto \varphi_k$ определяет гомоморфизм $\varphi : Q \to \mathrm{Aut}(P)$

3. И так мы определили $P \rtimes Q$ как множество $P \times Q$ с умножением $(x^{i_1}, y^{j_1})(x^{i_2}, y^{j_2}) = (x^{i_1}\varphi_{j_1}(x^{i_2}), y^{j_1+j_2})$. Убидимся что это группа, $(1, 1)(x^i, y^j)^{-1} = (\varphi_{-j}(x^{-i}), y^{-j})$. Ассоциативность также выпонена.

4. Определим отображение $\psi : P \rtimes Q \to G$ как $\psi(x^i, y^j) = x^i y^j$, $\psi$ сюрьекция так как $PQ = G$ и инъекция так как $|P \rtimes Q| = pq = |G|$, тогда заметим что

   $$\begin{aligned}&\psi((x^{i_1}, y^{j_1}), (x^{i_2}, y^{j_2})) = \psi(x^{i_1}\varphi_{j_1}(x^{i_2}), y^{j_1+j_2}) = \\ &x^{i_1}\varphi_{j_1}(x^{i_2})y^{j_1+j_2} = x^{i_1}y^{j_1}x^{i_2}y^{j_2} = \psi(x^{i_1}, y^{j_1})\psi(x^{i_2}, y^{j_2})\end{aligned}$$

   Откуда следует что $\psi$ гомоморфизм

5. Теперь определим тривиален гомоморфизм $\varphi : Q \to \mathrm{Aut}(P)$ или нет
   Если он тривиален то $G \cong P \rtimes Q = P \times Q \cong C_p \times C_q \cong C_{pq}$
   Если он не тривиален то $G = \langle x, y | x^p = 1 = y^q, yx = x^n y\rangle$ где $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет $n \not\equiv 1 \pmod{p}$ и $n^q \equiv 1 \pmod{p}$ (так как $yxy^{-1} = x^n$ для некоторых $n \not\equiv_p 1$, но $x = y^q x y^{-q} = x^{n^q}$)
   Это выполнено для любой пары простых, где $q|(p-1)$

То есть произведение прямое при $q|(p-1)$

## Задача 2

**Условие**
Опишите классы сопряженности в группе $A_6$

**Решение**
Напомним, что класс сопряженности в $S_6$ четной перестановки $\sigma$ остается в виде класс сопряженности в $A_6$, если $\sigma$ коммутирует с нечетной перестановкой и расщепляет на два равных класса сопряженности в $A_6$ в противном случае. Тогда $(123)$, $(12)(34)$, $(1234)(56)$ коммутируют с нечетной перестановкой $(56)$, а также $(123)(456)$ коммутирует с нечетной перестановкой $(14)(25)(36)$. Таким образом, классы сопряженности в $S_6$ из этих элементов остаются в качестве классов сопряженности в $A_6$. С другой стороны $(12345)$ не коммутирует с любой четной перестановкой, поэтому его класс сопряженности в $S_6$ должен разделиться на два класса в $A_6$: $(12345)$ и $(56)(12345)(56)^{-1} = (12346)$, откуда следует таблица:

| Представитель | Размер класса |
|---|---|
| id | 1 |
| (123) | 40 |
| (12345) | 72 |
| (12346) | 72 |
| (12)(34) | 45 |
| (1234)(56) | 90 |
| (123)(456) | 40 |

## Задача 3

**Условие**
Найдите группу автоморфизмов группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

**Решение**
В дальнейшем решении $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ будет обозначаться как $\mathbb{Z}_a$ для всех $a$

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)$$
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2$$

Заметим что у $\mathbb{Z}$ только 2 образующих: 1 и -1, и тогда есть только два автоморфизма: $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = -x$, то есть $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})| = 2$ и $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.
И тогда

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

## Задача 4

**Условие**
Найдите ЖНФ матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

**Решение**
Обозначим данную многочленную матрицу как

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A(\lambda) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

То есть данный многочлен регулярный
Приведем его к диагональному виду

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A(\lambda) = \operatorname{diag}\left(1; \dots; 1; (-1)^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil}; (-1)^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil}\right)$$

То есть $n-2$ единицы и 2 не единичных значения на диагонали
Тогда инвариантные множители:

$$e_1(\lambda) = 1$$
$$\dots$$
$$e_{n-2}(\lambda) = 1$$
$$e_{n-1}(\lambda) = (-1)^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil}$$
$$e_n(\lambda) = (-1)^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil}$$

Заметим что эти же инвариантные множетели есть и у матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Так как мы проводили с ней только элементарные преобразования, а при них инвариантные множители не меняются.

**Доказательство**:
При совершении любого одгого элементарного преобразования матрицы $A(\lambda)$ любой ее минор порядка $k$ либо не изменится, либо меняет знак на противоположный, либо совпадет с другим минором того же порядка, либо окажется равным сумме двух миноров тогоже порядка (взятых с некоторыми множителями). Ни одно из этих действий не меняет gcd(миноров порядка $k$). Откуда и отношения наибольших общих делителей не изменятся.

Тогда есть 2 элементарных делителя $(-1)^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil}$ и $(-1)^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil}$
Тогда есть одна клетка (назовем ее $J_1$) с делителем: $(-1)^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil}$
И вторая клетка (назовем ее $J_2$) с делителем: $(-1)^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil}$

Следовательно ЖНФ изначальной матрицы имеет вид:

$$J = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2)) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) \end{pmatrix}$$

И

$$(J - \lambda E) \sim \operatorname{diag}(1, \dots, 1, (-1)^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil}, 1, \dots, 1, (-1)^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil+1}\lambda^{\left\lceil\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right\rceil})$$