1

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_7+a_9. Функция f определена и голоморфна на некоторой проколотой окрестности точки 0. Докажите или опровергните следующие утверждения. Можно пользоваться утверждениями из учебника, снабжая их точными ссылками.

(8) Если 0 является существенной особенностью функции f, то $|f(z_n)| < e^{-1/|z_n|}$ для некоторой последовательности $z_n \to 0$. .

Существенная особенность в точке a $\Rightarrow$
$\forall c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\exists$ такая посл-ть точек
$z_n \in D \setminus \{a\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = c$$

У ф-ии $e^{\frac{1}{z}}$ – существенная особенность в точке 0

$$|f(z_n)| < e^{-\frac{1}{|z_n|}} \qquad z_n \to 0$$

$$|f(z_n)|\, e^{\frac{1}{|z_n|}} < 1 \Rightarrow \left|f(z_n)\, e^{\frac{1}{z_n}}\right| < 1$$

У ф-ии $g = f(z)e^{\frac{1}{z}}$ существенная особенность в точке 0 $\Rightarrow$

для посл-ти $z_n \to 0$ $\exists$ посл-ть

$$g_n = f(z_n)\, e^{\frac{1}{z_n}} \to 0$$

$\Rightarrow \exists N: \forall n > N$ $\quad |g_n| < 1 \Rightarrow$ возьмём эту подпоследовательность $\{f_n\}$, где $\forall n > N$

$|f(z_n)| < e^{-\frac{1}{|z_n|}}$ $(z_n \to 0)$ и получим требуемое

2

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_4+a_5. Для следующих аналитических функций найдите все нули и их кратности. Также, найдите все особенности и определите их тип (устранимая особенность, полюс, существенная особенность, неизолированная особенность). Для тех особенностей, которые являются полюсами, найдите порядок полюса.

(0) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

- нули $z = \pi k$ $k \neq 0$ $z = 0$

$$f'(z) = \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} \neq 0 \text{ при } z = \pi k$$

$$f'(\pi k) = \frac{(-1)^k}{\pi k}$$

$$\lim_{z\to 0} f'(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{z} = \infty \neq 0$$

$\Rightarrow$ нуль кратности 1

- устранимая особенность $z = 0$, т.к.

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

- устранимая особенность $z = \infty$, т.к.

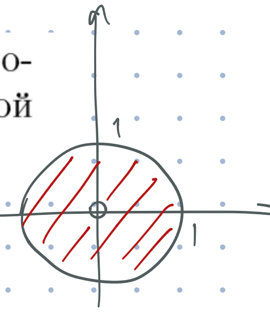
замена $z \mapsto \frac{1}{w}$

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = w \sin\frac{1}{w} \quad \text{особенность в } 0$$

$$\lim_{w\to 0} w\sin\frac{1}{w} = 0 \Rightarrow \text{устранимая особенность}$$

3

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_6$. Найдите ряд Лорана для указанной ниже функции f в указанном кольце A.



(7) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$

$z=0$, $z=1$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+3}}}$$

ОШИБКА: ВЫПИСАН РЯД В ОКР-ТИ ∞
(В $z=0$ РЯД НЕ СХОДИТСЯ)

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+3}$$

4

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6 + a_7$. Для каждой из следующих функций найдите ее вычеты во всех изолированных особенностях.

(4) $f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}$.

c_{-1} − ?

ОСОБЕННОСТЬ (УСТРАНИМАЯ) В $z=0$

$$\lim_{z\to 0} \sin z \sin\frac{1}{z} = 0$$

$$\sin z \sin\frac{1}{z} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots\right) =$$

C_{-1} ЭТО КОЭФ-Т ПРИ $\frac{1}{z}$ В РЯДЕ ЛОРАНА

ПРИ ПЕРЕМНОЖЕНИИ z^{2n+1} И $\frac{1}{z^{2m+1}}$

МОЖЕМ ПОЛУЧИТЬ ТОЛЬКО ЧЁТНУЮ СТЕПЕНЬ $z \Rightarrow$

$\boxed{C_{-1} = 0}$

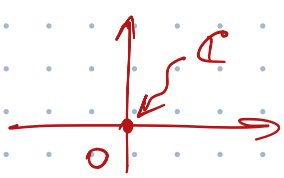
В $z=\infty$ ТОЖЕ УСТРАНИМАЯ ОСОБЕННОСТЬ

(Т.К. $z \mapsto \frac{1}{w} \Rightarrow \lim_{w\to 0} \sin\frac{1}{w} \sin w = 0$)

И ПО ТОЙ ЖЕ ПРИЧИНЕ $C_{-1} = 0$

ОШИБКА: ОСОБЕННОСТИ УСТРАНИМЫЕ $\sin\frac{1}{x}$

ТОЛЬКО ПРИ $x \in \mathbb{R}$, $x \to 0$



А ПРИ $x \in \mathbb{C}$, $x \notin \mathbb{R}$

ОСОБЕННОСТИ НЕУСТРАНИМЫЕ