II Модуль

группы

Группа перестановок

$$S_n = \{ \sigma : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\text{вз. одн.}} \{1, \dots, n\} \}$$

операция - композиция.

Обозн. $\sigma \in S_n \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

однострочная запись: $(\sigma(1) \dots \sigma(n))$

Цикл - перестановка, для которой $\exists$

$i_1, \dots, i_k$ - попарно различные числа от 1 до n

т.ч. $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k$,

$\sigma(i_k) = i_1$

$\sigma(j) = j \quad \forall j \notin \{i_1 \dots i_k\}$

Обозн. Такой цикл обозн $(i_1 \dots i_k)$

Утв. циклов длины k в S_n ровно $\binom{n}{k}(k-1)!$

Опр. цикл длины 2 наз-ся транспозицией

Пусть $\sigma_1 = (i_1, \dots, i_k)$, $\sigma_2 (j_1, \dots, j_\ell)$

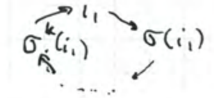
$\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. Предположим, что

$\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_\ell\} = \varnothing$. Тогда $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1$

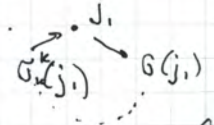
Такие циклы наз-ся независимыми.
(непересекающ.)

$\forall$ перестановка может быть разложена в произв. непересекающихся циклов, причём такое разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей

$\square$ $\sigma \in S_n$



Если получился цикл длины n, то дело в шляпе, а если ост. незадействованные, то продолжаем:



Продолжаем процедуру пока не охватим все эл-ты

$\sigma^a(i) = \sigma^b(j)$ $a<b \Rightarrow i = \sigma^{b-a}(j)$

Разложение единственно, т.к. наша процедура каноническая $\blacksquare$

Опр. Пусть G - произв. группа, $g_1, \dots, g_n$ - попарно различные эл-ты G. Тогда говорят, что G ~~поро~~ порождена $g_1, \dots, g_n$, если $\forall g \in G$ g может быть записан в виде произведения эл-тов из мн-ва $\{g_1 \dots g_n\}$

Предложение. Группа S_n порождена всеми циклами.

Утв. $S_n = \langle (i, i+1), i=1, \dots, n-1 \rangle$

$\square$ достаточно научиться раскладывать произвольный цикл в произв. транспозиций вида $(i, i+1)$.

- Разложим пр. цикл в произв. транспозиций.

$$(i_1 \dots i_k) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k)$$

$S_n = \langle (i, j), 1 \le i < j \le n \rangle$

- Для док-ва утв. необходимо и дост. проверить, что $\forall i < j$ транспозиция $(i j)$ может быть представлена в виде произв. транспозиций вида $(a, a+1)$ например

$$(i, i+2) = (i, i+1)(i+1, i+2)(i, i+1)$$

$$(i, i+3) = (i, i+2)(i+2, i+3)(i, i+2)$$

По индукции по $i-j$ доказываем общ. случай $\blacksquare$

Замечание. Пусть дана перестановка σ, $\sigma^{-1}(n) = i$. Т.е $\sigma(i) = n$. Рассмотрим произведение $(n-1, n) \dots (i+1, i+2)(i, i+1) = \tau$

$\sigma = x\tilde{\tau}$, $x \in S_n$. По опр. $\tilde{\tau}$ и x, $x = \sigma\tau^{-1}$ причем

$x(n) = \sigma\tilde{\tau}^{-1}(n) = \sigma(i) = n$

Утв. $S_n = \langle (1\ i), i = 2 \dots n \rangle$

Опр. Порядок эл-та $g \in G$ - наименьшее k такое что $g^k = e$ $(k = 1, 2, \dots)$. Обозн. $\operatorname{ord} g$.

Замечание. Пусть $g \in G$ - элемент конечного порядка. Тогда имеется гомоморфизм $C_{\operatorname{ord}(g)} \to G$, где $C_{\operatorname{ord}(g)}$ - цикл. группа из $\operatorname{ord} g$ элементов. Этот гомоморфизм одн. определяется формулой $a \mapsto g$, где a - обр. $C_{\operatorname{ord}(g)}$

Утв. Пусть $\sigma \in S_n$ - перестановка, разложенная в произведение непересекающихся циклов длин $k_1, \dots, k_s$ $(k_i \geq 1)$ $(k_1 + \dots + k_s = n)$. Тогда $\operatorname{ord} \sigma =$ НОК$(k_1, \dots, k_s)$.

Вопрос Пусть G - конечная группа, $H \subset G$ - подгруппа
Есть ли какая-то связь между $|H|$ и $|G|$

Левые и правые смежные классы

Опр. Левый смежный класс G по H - мн-во элементов вида gH, где $g \in G$. Правый смежный класс - мн-во элементов вида Hg, $g \in G$.

Замечание Мы берём все эл-ты из H и домножаем их слева или справа на один фикс. элемент из G

Пример. $H = G$ и $H = e$.

Предложение Пусть $g_1, g_2 \in G$. Тогда либо $g_1 H = g_2 H$
либо $g_1 H \cap g_2 H = \varnothing$

$\square$ Пусть $g_1 H \cap g_2 H \neq \varnothing$. Тогда $\exists h_1$ и h_2,
т.ч. $g_1 h_1 = g_2 h_2 \Leftrightarrow g_2 = g_1 h_1 \cdot h_2^{-1}$.
Тогда $g_2 H = \{g_1 h_1 h_2^{-1} \cdot h, h \in H\} =$
$= \{g_1 h, h \in H\}$

Пусть $|G : H|$ - мн-во смежных классов
(левых или правых)

Предложение $|G| = |H| \cdot |G:H|$

Замечание Разбиение на см. классы - разбиение

на классы экв., т.е. $g_1 \sim g_2$, если $g_1H = g_2H$

$g \sim g$; $g_1 \sim g_2$, $g_2 \sim g_3 \Rightarrow g_1 \sim g_3$; $g_1 \sim g_2 \Rightarrow g_2 \sim g_1$

□ $g \in G$, $h_1, h_2 \in H$ Тогда $gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$.

Тогда $|gH| = |Hg| = |H|$ Т.е в нашем разб.

на классы экв. кол-во эл-тов в каждом классе

равно $|H| \Rightarrow |G| = |H| \cdot |G:H|$. ■

Теорема Лагранжа

Порядок группы делится на порядок подгруппы.

Следствие 1: $\mathrm{ord}(g) \mid |G|$

Следствие 2: $\mathbb{F}_p$ - поле из p элементов. (p - простое)

Тогда $\forall a \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ $a^{p-1} = 1$

Опр. Пусть $\sigma \in S_n$. Назовём пару чисел $1 \le i < j \le n$ беспорядком, если $\sigma(i) < \sigma(j)$

Чётность σ - кол-во беспорядков. Обозн:

$$(-1)^{\sigma} = \begin{cases} 1, & \sigma\text{-чёт.} \\ -1, & \sigma\text{-нечёт.} \end{cases}$$

$\forall$ транспозиция нечётна.

Предложение. $\forall \sigma, \tau \in S_n$ выполнено $(-1)^{\sigma\tau} = (-1)^{\sigma}(-1)^{\tau}$.

$\square$ Пусть σ-перестановка, $(l, l+1)$-трансп. двух соседних эл-ов. Достаточно проверить, что $(-1)^{\sigma(l,l+1)} = -(-1)^{\sigma}$

- Пусть $\{l, l+1\}$-беспорядок для σ; тогда для $\sigma(l, l+1)$ пара $\{l, l+1\}$ не беспорядок.
- Пусть $\{l, l+1\}$ не беспорядок для σ. тогда для $\sigma(l, l+1)$ пара будет бесп.
- если $\{a, b\}$, т.ч. $a, b \neq l, l+1$, то $\{a, b\}$ является или нет беспорядком для σ и $\sigma(l, l+1)$ одновременно
- рассмотрим пару $\{l, b\}$, где $b \neq l+1$. Тогда $(\sigma(l, l+1))(l) = \sigma(l+1)$
  $(\sigma(l, l+1))(b) = \sigma(b)$
  $(\sigma(l, l+1))(l+1) = \sigma(l)$

  т.о. (l, b) является ~~~~ беспорядком для σ т.и т.т., когда $\{l+1, b\}$ является беспорядком для $\sigma(l, l+1)$

Т.о., ~~в~~ кол-во беспорядков ~~троек~~ для $\sigma(l, l+1)$

либо на 1 больше кол-ва беспорядков в для σ,

либо на 1 меньше ⊠

Следствие Чётность σ равна чётности кол-ва транспозиций входящих в разложение σ.

~~∃ цикл~~

Следствие Пусть $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ - цикл. Тогда $(-1)^\sigma = (-1)^{k+1}$

□ Цикл длины k раскладывается в m транспозиций, где ~~т~~ чётность m и k разные. ⊠

Следствие. Мн-во чётных перестановок является подгруппой

$A_n \subset S_n$ - подгруппа чётных перест.

$|A_n| = \frac{n!}{2}$ □ Берём $\forall (i,j)$. Тогда если σ чётная, то $\sigma(i,j)$ нечётная и наоборот.

Т.е. $\sigma \to \sigma(i,j)$ - биекция между чётн и нечёт.

Смежные классы

Разбиение на смежные классы - отн. экв.

Если G - абелева, то левые смежные классы совп. с правыми.

Пример $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}^*_+$

$z \in \mathbb{C}$, $zH = \{zx, x \in R_{>0}\}$

Опр.1 Подгруппа H в G наз-ся нормальной, если $\forall g \in G$ $gH = Hg$, т.е $\forall h \in H$ $\exists h_1 \in H$ т.ч $gh = h_1 g$

Опр.2 H - подгруппа в G, если $\forall g \in G$ $gHg^{-1} = H$

Антипример $S_n \supset H = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = 1\}$. Тогда H ненормальна в G. Действительно

$$gH = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = g(1)\}$$

$$Hg = \{\sigma \in S_n : \sigma^{-1}(1) = g^{-1}(1)\}$$

Теорема: Если H - нормальная в G, то на мн-ве смежных классов можно ввести структуру группы $g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$

$\square$ $g \in G$ пусть $\bar{g} = gH \in G:H$. Формула умножения $\bar{g}_1 \bar{g}_2 = \overline{g_1 g_2}$

нам нужно проверить, что $\forall h_1, h_2 \in H$

выполнено $\overline{g_1h_1} \cdot \overline{g_2h_2} = \overline{g_1g_2}$, действительно

$$\overline{g_1h_1} \cdot \overline{g_2h_2} = \overline{g_1h_1g_2h_2} = \overline{g_1g_2\underbrace{g_2^{-1}h_1g_2}_{\in H}h_2} = \overline{g_1g_2}$$

Т.о. умножение классов не зависит от выбора предст. каждого из классов.

- Наличие обратного эл-та: $(gH)^{-1} = g^{-1}H$
- Наличие нейтрального эл-та $\bar{e} = H$
- Ассоциативность $\bar{g}_1(\bar{g}_2\bar{g}_3) = (\bar{g}_1\bar{g}_2)\bar{g}_3$

$$\overline{g_1(g_2g_3)} = \overline{(g_1g_2)g_3}$$

т.к. G - группа

Обозн. G/H - фактор группа

Замечание Если $|G| \neq \infty$, то $|G/H| = |G:H| = |G|/|H|$

Пример $A_n \subset S_n$ - нормальна, т.к. $\sigma \in A_n$, $g \in S_n$, то $g\sigma g^{-1} \in A_n$, т.к. $(-1)^{g\sigma g^{-1}} = (-1)^g(-1)^\sigma(-1)^{-g} = (-1)^\sigma$

Лемма Пусть G - произвольная группа $g \in G$. Рассмотрим отобр. $\varphi_g : G \to G$, $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$. Тогда φ_g - изоморфизм

Д-во □ $\varphi_g(xy) = \varphi_g(x)\varphi_g(y) \Leftrightarrow$

$$gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}$$

$$\varphi_g(x) = \varphi_g(y) \Leftrightarrow gxg^{-1} = gyg^{-1} \Leftrightarrow x = y$$

инъективность

$$gxg^{-1} = y \Leftrightarrow x = g^{-1}yg$$ ← сюръективность

■

Термин. $g\sigma g^{-1}$ – сопряжение эл-том g элемента σ.

gHg^{-1} – сопряжение группы эл-ом g. $Ad_g : G \to G$

$$Ad_g(h) = ghg^{-1}$$

отображение сопряжения

Например, H – нормальна $\Leftrightarrow Ad_g H \subset H \ \forall g \in G$

Ad_g – гомоморфизм групп: $Ad_g(xy) = Ad_g(x) \cdot Ad_g(y)$

$$Ad_g(x^{-1}) = Ad_g(x)^{-1}$$

Ad_g – изоморфизм, т.к. если $gxg^{-1} = gyg^{-1} \Rightarrow x = y$

$Ad_g \cdot Ad_{g^{-1}} = Id$

$Ad_{g_1 g_2} = Ad_{g_1} \cdot Ad_{g_2}$

$Ad_{g_1 g_2}(x) = g_1 g_2 x (g_1 g_2)^{-1} = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} =$

$= Ad_{g_1} Ad_{g_2}(x)$

$\forall g \in G$ Ad_g - автоморфизм G

· $Ad: G \to Aut(G)$ является гомоморфизмом групп

$\square$ $Aut(G)$ - автоморфизмы G
(т.е. вз. однозн. изоморфизмы G в G)
Это группа отн. композиции.
Нейтр. элемент - тожд. отобр.

$Ad: G \to Aut(G)$, $Ad(g) = Ad_g$

Ad - гомоморфизм групп? $\boxed{E}$

Лемма $\ker\varphi$ - подгруппа в G_1, $Im\,\varphi$ - подгруппа в G_2.

$\square$ $\forall x, y \in \ker\varphi \rightsquigarrow \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = e \cdot e = e$

$\forall x \in \ker\varphi$ $\quad \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} = e^{-1} = e$

$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \Rightarrow Im\,\varphi$ замкнут отн. умножения

$\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} \Rightarrow$ взятие обратного

$\boxed{E}$

$\ker\varphi$ - нормальная подгруппа.

$\square$ Хотим проверить, что $\forall g \in G_1$

$g \ker\varphi = \ker\varphi\, g$

Действительно, заметим, что

$g\ker\varphi = \{x \in G_1 : \varphi(x) = \varphi(g)\}$ т.к.

1. если $x \in g\ker\varphi$, то

$\varphi(x) = \varphi(g)$

2. если $\varphi(x) = \varphi(g)$, то

$x = gh,\ h \in \ker\varphi.$

т.к. $(\varphi(g))^{-1} \cdot \varphi(x) = e$)

$\overset{\shortparallel}{\varphi(g^{-1}x)}$, т.е. $g^{-1}x \in \ker.$

Аналогично $\ker\varphi\, g = \{x \in G_1 : \varphi(x) = \varphi(g)\}$

Таким образом ядро нормальная подгруппа.

По-другому: $g\ker g^{-1} \subset \ker\varphi$, т.е. $\varphi(ghg^{-1}) =$

$= \varphi(g)\, e\, \varphi(g^{-1}) = e$

Но Im не всегда нормальна: $H \subset G$ - не норм.

Тогда $H \to G$

Утв. Если H нормальна в G, то отобр.

$G \to G/H$, которое задаётся формулой

$g \to \bar{g}$ является гомоморфизмом групп.

Этот гомоморфизм наз-ся проекцией

Свойство: ядро $\ker(G \to G/H) = H$

$$\operatorname{Im}(G \to G/H) = G/H$$

Пусть $\varphi: G_1 \to G_2$ - гомоморфизм групп.

$$G_1/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi.$$
$$\bar{g} \mapsto \varphi(g)$$

□ • Определённое нами отображение не зависит от выбора пред-ля класса смежности: $\varphi(g\ker\varphi) = \varphi(g)$

• Проверим, что $\bar{g} \to \varphi(g)$ - гомом. групп.

$$\overline{g_1 g_2} = \bar{g}_1 \bar{g}_2 \mapsto \varphi(\bar{g}_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$
$$A(\bar{g}_1 \bar{g}_2) = A(\bar{g}_1) A(\bar{g}_2)$$

• Осталось проверить, что A изоморфизм

1. A - сюръекция, т.к. если $x \in \operatorname{Im}\varphi$ то $x = \varphi(g)$ для некоторого $g \in G_1 \Rightarrow A\bar{g} = x$.

2. если $A\bar{g} = A\bar{h}$ $(g, h \in G_1)$ то $\varphi(g) = \varphi(h)$ т.е. $gh^{-1} \in \ker\varphi$, т.е. $\bar{g} = \bar{h}$ ■

Пусть $\varphi: G_1 \to G_2$ - гомоморфизм.

$\ker\varphi = \{g_1 \in G_1 : \varphi(g_1) = e\}$

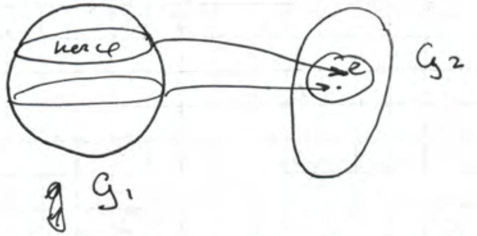
Подругому, $\ker\varphi = \varphi^{-1}(e)$. Тогда $g_2 \in G_2$, т.е. $\varphi^{-1}(g_2) \neq \varnothing$, т.е $g_2 \in \operatorname{Im}\varphi$. Тогда $\varphi^{-1}(g_2)$ ~~естественно~~ находится в биективном соотв. с $\ker\varphi$.

$\exists\ x \in G_1 : \varphi(x) = g_2$

Тогда $\varphi^{-1}(g_2) = x\ker\varphi$, т.к. $\varphi(y) = \varphi(x)$

$y = xh,\ h \in \ker\varphi$. Мы получили, что $\varphi^{-1}(g_2)$ получается из $\ker\varphi = \varphi^{-1}(e)$ умножением на любой из прообраза

$\boxed{G}$



Если G_1 - конечная подгруппа, то мощности всех прообразов совпадают.

Если $\varphi: G_1 \to G_2$ - гомоморфизм, $|G_1| < \infty$, то $|G_1| = |\ker\varphi| \cdot |\operatorname{Im}\varphi|$.

Пример. • Пусть A_n - знакопеременная группа

Тогда $\exists$ гомоморфизм $\varphi: S_n \to \{\pm 1\}$

$\varphi(\sigma) = (-1)^{\sigma}$. В этом случае ядро $\varphi = A_n$,

Ал.12.3.

φ - гомоморфизм, $\operatorname{Im}\varphi = \{\pm 1\}$

Т.о. $|S_n| = |A_n| \cdot 2$

- $G_1 = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

  $G_2 = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \varphi : G_1 \to G_2$

  $\varphi(z) = |z|$

  Тогда φ - гомоморфизм групп, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^*_{>0}$

  $\ker\varphi = \{z : |z| = 1\} = S^1$. Т.о. $\mathbb{C}^*/S^1 \cong \mathbb{R}^*_{>0}$

- $G_1 = \mathbb{C}^*$, $G_2 = S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$

  $$\varphi(z) \longmapsto \frac{z}{|z|}$$

  φ - гомоморфизм $\quad \operatorname{Im}\varphi = S^1$

  $$\ker\varphi = \mathbb{R}^*_{>0}$$

  $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*_{>0} \cong S^1$

- $G = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$

  $$\varphi : G \to S^1$$

  $\ker\varphi = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Im}\varphi = S^1$.

  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$

  $\mathbb{R}$ с опер. сложение, S^1 - умножение.

  $\mathbb{R} \to S^1$, $\varphi(x * y) = \varphi(x)\varphi(y)$

  φ - гомоморфизм

$\varphi: G_1 \to G_2$ - гомоморфизм. Тогда φ можно представить в виде композиции сюръекции с вложением: $G_1 \to G_1/_{\ker\varphi} \to G_2$

$$g \to \bar{g} \to \varphi(g)$$

□ Отобр. $G_1 \to \bar{g}$ является сюръекцией, отобр. $G_1/_{\ker\varphi} \to G_2$, $\bar{g} \to \varphi(g)$ - влож., т.к. $\varphi(g) = e \Leftrightarrow g \in \ker\varphi$. По опр. композиции действительно равняется φ. ☒

Действие групп на множествах.

Пусть X-мн-во., $S(X)$- группа всех взаимнодн. отобр. $X \to X$: $S(x)$ группа по умножению.

Если $|X| < \infty$ (X-конечно), то $S(X) \cong S_n$

$n = |X|$

Опр. Группа преобразований X - $\forall$ подгруппа $G < S(X)$

Пример Пусть $X = \mathbb{R}^2$, G - все ортогональные, лин преобр-ние

Опр. Пусть $x \in X$, G-группа преобр-ий.

Тогда орбита x - это все эл-ты вида gx, $g \in G$

Ал.12.4.

Орбита эл-та x обозн. Gx (иногда O_x)

Определим отн. экв. на мн-ве X относительно группы преобр. G по правилу $x \underset{G}{\sim} y$, если $\exists g \in G$ т.ч. $y = gx$ $(x, y \in X)$.

Лемма Это отн. экв.

$\square$ • $x \sim x$ т.к. $x = id \cdot x$ $id \in G$

• $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ Действ. $y = gx \Leftrightarrow g^{-1}y = x$

• $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$. Действ., $y = g_1 x$, $z = g_2 y \Rightarrow$

$z = g_2 g_1 x$, причём $g_2 g_1 \in G$

$\boxtimes$

Следствие 2 орбиты совпадают или не перес.

Все X есть объед. различных орбит

Стабилизатор. X-мн-во, $G \subset S(X)$.

$x \in X$. Тогда $Stab_G(x) = \{g \in G : g(x) = x\} < G$

Лемма $\forall x \in X$ $Stab_G(x)$ - подгруппа G.

$\square$ $\forall g_1, g_2 \in Stab_G(x)$ $(g_1 g_2)x = x$

$g \in Stab_G(x)$, $g^{-1}(x) = x$ т.к. $(g(x) = x)$.

Теорема $|G| < \infty$. Тогда $|G| = |O_x| \cdot |Stab_G(x)|$ $\forall x \in X$

Док-во: Пусть $y \in O_x$, т.е. $y = h(x)$, $h \in G$

$ev_x^{-1}(y) = \{g \in G : gx = y\} = \{g \in G : gx = hx\}$

$= \{ h^{-1} g x = x \}$,

т.е $h^{-1}g \in Stab_G(x) \Leftrightarrow g \in Stab_G(x)$

Как понять $|ev_x^{-1}(y)|$?

Заметим, что $|\{h^{-1}g, g \in Stab_G(x)\}| =$

$= |Stab_G(x)|$, т.к. умножение слева на h^{-1} – биекция $G - G$

Т.о. прообраз $|ev_x^{-1}(y)| =$

$= |ev_x^{-1}(x)| = |Stab_G(x)|$

$\Downarrow$

$|G| = |Gx| \, |Stab_G(x)|$

$G \longleftrightarrow S(x)$ $\quad G \to Gx \quad X$ - множество

Ал. 13.1.

Замечание $ev_x^{-1}(hx) = h\, ev_x^{-1}(x)$

Предложение $y \in Gx \Rightarrow G_y = G_x$

Пусть $y = hx$. Тогда $Stab_G(y) = h\, Stab_G(x)\, h^{-1}$.

$\square$ $g \in Stab_G(y) \Leftrightarrow gy = y \Leftrightarrow ghx = hx \Leftrightarrow$

$(h^{-1}gh)(x) = x \Leftrightarrow h^{-1}gh \in Stab_G\, x \Leftrightarrow$

$g \in h\, Stab_G(x)\, h^{-1}$ $\boxtimes$

Следствие • $|G| \vdots |Stab_G\, x|$ $\forall x \in X$

• $|G| \vdots |Gx|$ $\forall x \in X$.

Примеры: Пусть $X = G$, $g(x) = Ad_g(x) = gxg^{-1}$

$$G \hookrightarrow S(G)$$
$$g \mapsto Ad_g$$

$Stab_G(x) = \{g \in G : gxg^{-1} = x\} =$

$= \{g \in G : gx = xg\}$.

• Если G абелева, то $Stab_G(x) = G$ $\forall x \in X = G$

• Если G не абелева, то $Stab_G(x) \ni e$ $\forall x$, но может быть и больше

Опр. $Z(x) = \{g \in G : gx = xg \;\; \forall x \in G\} \ni e$

$= \bigcap\limits_{x \in G} Stab_G(x)$

Пример $X = G$, $g(x) = L_g(x) = gx$

$G_x = G \quad \forall x \in X$; $Stab_G(x) = \{e\}$

Пример $G = S_n$, $X = G$, присоед. действие.

$g(x) = Ad_g(x) = gxg^{-1}$

Gx - это все перест. одного циклового типа.

Лемма $Ad_g(x_1 \cdot x_2 \cdots x_t) = Ad_g(x_1)\, Ad_g(x_2) \dots$

$x_1 \dots x_t$ - t непересек. циклов

Замечание $Stab_G(x)$, $X = S_n$, $G = S_n$, $g(x) = Ad_g(x)$

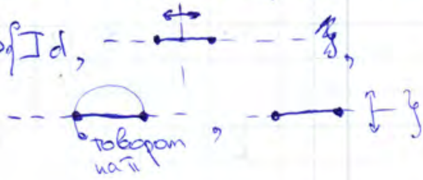
$gxg^{-1} = x \quad g(i_1 \dots i_n) = (g(i_1) \dots g(i_n))$

Группа симметрии фигур.

Пусть P_n - правильный n-угольник с центром в 0 на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Опр. Группа диэдра D_n - подгруппа в группе ортог. линейных преобразований $\mathbb{R}^2$, которых сохр. P_n.

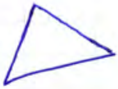
Пример. $n=2$, $\mathbb{R}^2$. $D_2 \ni \{Id$,



$\}$

$D_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$n = 3$



$$\begin{cases} \text{Поворот на } \frac{2\pi}{3} \\ \text{поворот на } \frac{4\pi}{3} \\ S_1, S_2, S_3 \text{ - симметрии отн. биcc.} \\ id \end{cases}$$

$D_3 = S_3$

<u>Замечание</u> Если G является группой преобр. конечного мн-ва X, то мы получаем гомоморфизм $G \to S_{|X|}$

Пусть теперь дана фигура Φ в $\mathbb{R}^3$.

<u>Опр.</u> группа симметрий Φ состоит из ортогон. преобразований (линейных) $\mathbb{R}^3$, которые сохраняют Φ. Обозначение $O(\Phi)$, подгруппа $SO(\Phi)$ - собственные орт. преобр.

$SO(\Phi)$ - нормальная подгр. в $O(\Phi)$
т.к. $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$

• $O(\Phi)/SO(\Phi) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\det: O(\Phi) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \ker(\det) = SO(\Phi)$
$A \mapsto \det A$ $\quad \operatorname{Im}(\det) = \pm 1$

<u>Замечание</u> $\underset{\text{в } \mathbb{R}^3}{O(\Phi) = SO(\Phi)} \sqcup -SO(\Phi)$

Группа преобразований

$S(X)$ - группа вз.-одн. отображений $X \to X$

Подгруппа $S(X)$ - группа преобр.

<u>Утв.</u> определитель ортогон. оператора ~~преобр~~ в $\mathbb{R}^3$ равен ± 1.

□ e_1, e_2, e_3 - ортонорм. базис в $\mathbb{R}^3$

$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (Ae_1, Ae_1) = 1 \Rightarrow a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1.$$

A ортогон $\Rightarrow AA^t = E$

$\det A = \det A^t \Rightarrow (\det A)^2 = 1.$

<u>Замечание</u> $SO(\Phi)$ и $O(\Phi)$ в принципе может совпадать.

Пример. ~~$D_n = O(\ )$ - группа симм. поля,~~

Φ - тетр. (правильный) 

$O(\Phi) = S_4$

$SO(\Phi) \subset S_4$, $SO(\Phi) \cong A_4$, т.к. симметрии отн. плоскости - несобств. орт. преобр.

Пусть G - группа, X - мн-во.

Скажем, что G действует на X, если задан гомоморфизм $G \to S(X)$ (не обяз. вложение)

Действие группы на мн-ве удобно задавать
$\hat{\varphi}: G \times X \to X$, $\hat{\varphi}(g, x) = \varphi(g)x$

Пример: $G = S_n$, $X = \{1, 2\}$, $\varphi: G \to S(X)$
$\varphi(\sigma) = \begin{cases} Id, & \sigma\text{-чёт} \\ (12), & \sigma\text{-нечёт.} \end{cases}$

<u>Опр.</u> Пусть $\varphi: G \to S(X)$ - действие, тогда

φ - точное, если $\ker\varphi = e \Leftrightarrow G \simeq \operatorname{Im}\varphi$.
$(G(x) = x \ \forall x \Rightarrow g = e)$

<u>Утв.</u> • Все авт. G образуют группу отн. компн. $Aut(G)$
• Автоморфизмы вида Ad_g обр. подгруппу в ($Aut(G)$)

Все авт. вида Ad_g наз-ся внутр., а ост. внешними.

Опр. Действие $\varphi: G \to S(X)$ наз-ся свободным,

если $\varphi(g)x = x \underset{\Leftarrow}{\Rightarrow} g = e$

точное ~~является~~ свободным.

$\varphi(g) = id \Rightarrow g = id$ $\qquad\qquad$ $\varphi(g)x = \cancel{x} \Rightarrow g = e$

$\varphi(g)x = x \ \forall x \in X \Rightarrow g = id$

Пример $L: G \to S(G)$ $L(g)x = gx$

$g \neq e$, x - любое, то $gx \neq x$ - свобод.

Пример $Ad: G \to S(G)$, $Ad_g(x) = gxg^{-1}$

Пусть $Z(G) = e$ $(G = S_n)$. Тогда $\ker Ad = Z(G) = e$

точное действие

Лемма Присоед. действие никогда не свободно

△ $Ad_g(e) = geg^{-1} = e$ $\forall g$. Т.о. усл. свободности наруш при $g \neq e$. ▣

Опр. Действие $\varphi: G \to S(X)$ наз-ся

транзитивным, если $\forall x, y \in X \ \exists g \in G$

$\varphi(g)x = y$

Опр. Орбита X при действии φ - это мн-во

$Gx = \{\varphi(g)x, g \in G\}$

Замечание Орбита Gx совп с орбитой x для группы преобр. $\operatorname{Im}\varphi$

Утв. Действие транзитивно $\Leftrightarrow$ орбита одна и равна X.

Обозн. X/G - мн-во орбит.

Опр. Стабилизатор $x \in X$ при действии φ - подгр. в G, сост. из элементов $g \in G$, т.ч. $\varphi(g)x = x$

Теорема $|G| = |Gx| \cdot |\mathrm{Stab}_G x|$

$\square$ ~~$ev_x : G \to X$, $ev_x(g) = g(x)$~~

$$G \to \underset{\overset{\shortparallel}{G'}}{\mathrm{Im}\,\varphi} \subset S(X)$$

$$|G'| = |G'x| \, |\mathrm{Stab}_{G'} x| \text{ знаем.}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{|\ker\varphi| \, |G'|}_{|G|} = \underbrace{|G'x|}_{|Gx|} \cdot |\ker\varphi| \cdot |\mathrm{Stab}_{G'} x|$$

$G' = G/\ker\varphi$ таким образом,

$|\mathrm{Stab}_G(x)| = |\ker\varphi| \cdot |\mathrm{Stab}_{G'}(x)|$ $\blacksquare$

$G = S_n$, $X = S_n$, $Ad : S_n \to S(S_n)$

Орбиты этого действия парамет. цикловыми типами. То есть наборами $1^{m_1} \dots n^{m_n}$.

Цикловой тип удобно задавать диаграммой Юнга

Обозначение $\bullet$ X^g - мн-во неподвижных точек $g \in G$

$\{x \in X : gx = x\}$

Свободное действие много не ост. на месте, а точное - только $e \in G$ ост. все эл. на месте.

Из точности => свободность.

$\bullet$ X/G - мн-во орбит.

Замечание Действие свободно <=> $X^g = \varnothing \ \forall g \neq e$

Действие точно <=> $X^g \subsetneq X \ \forall g \neq e$

$\bigcap_{g \in G} X^g = \varnothing \iff |Gx| > 1$

Теорема Полиа-Бернсайда.

Пусть $|G| < \infty$, $|X| < \infty$

$$|X/G| = \left(\sum_{g \in G} |X^g|\right) / |G|$$

$\square$ $Stab_G\, x = \{g \in G : gx = x\}$

$X^g = \{x \in X : gx = x\}$

$F \subset G \times X : F = \{(g, x) : gx = x\}$

Вычислим $|F|$.

$$\varphi: F \to G \qquad \varphi^{-1}(g) = \{(g, y) : y \in X^g\}$$
$$(g,x) \mapsto g \qquad \underset{X^g}{\wr}$$

$$|F| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

$$\psi : F \to X$$
$$(g,x) \mapsto x \qquad \psi^{-1}(x) = \{(g,x) : g \in Stab_G x\}$$

$$(**)\ |F| = \sum_{x \in X} |Stab_G x|$$

$$(*)\ |Stab_G x| = |Stab_G y|$$

$$y = g_1 x \Rightarrow \forall g \in Stab_G x \quad g_1 g \in Stab_G y$$
$$Stab_G y = g_1 Stab_G x$$

$$(**) \Rightarrow |F| = \sum_{O\text{-орбита}} |O| \cdot |Stab_G \underset{O}{\underset{\cap}{x}}| = \sum_{O \text{ орб}} |G| = |G| \cdot |X/G|$$

Следовательно $|G| \cdot |X/G| = \sum_{g \in G} |X^g|$

Подсчёт ожерелий.

Имеется правильный N-угольник.

Рассмотрим мн-во X, состоящее из конфигураций чисел от 1 до n в каждой вершине

Мы отожд. два ожер. если они переводятся друг в друга комм-щим элементом D_n

Нас интересует $|X/D_n|$

$|X| = n^N$

$|X/D_N| = \frac{1}{2N}\sum_{g\in D_N} |X^g|$

$\frac{1}{12}(3n^4 + 4n^3 + 2n^2 + 2n + n^6)$

(смотрим сколько каждый эл-нт D_n ост. на месте)

Общий случай: $\left|X/D_N\right| = \frac{1}{2N}\sum_{g\in D_N} |X^g|$

$$|X^g| = \begin{cases} n^{\frac{N}{2}+1} & N \text{ чётн.} \\ n^{\frac{N}{2}} & N \text{ чётн} \\ n^{\frac{N+1}{2}} & N \text{ нечёт.} \end{cases}$$

$$|X^{\Gamma_{\frac{2\pi}{N}\cdot k}}| = n^{d}, \quad d = \text{НОД}(N,k)$$

Коммутант групп:

G - группа $g_1, g_2 \in G$

Коммутатор g_1 и g_2 $\quad g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in G$

Коммутант ~~g~~ G - подгруппа $G' \subset G$, порожд. всеми коммутаторами

Теорема. G' - нормальная подгруппа в G

$\Box$ $x \underbrace{g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}}_{A} x^{-1} = x A x^{-1} A^{-1} \cdot A$

$\qquad\qquad \in G' \qquad \in G'$

или же $\underset{\in G'}{x A x^{-1}} = \underset{\in G'}{x A x^{-1} A^{-1}} \cdot A$ $\boxed{з}$

G/G' - абелева

$\Box$ $[a][b][a^{-1}][b^{-1}] =$

$= [a b a^{-1} b^{-1}] = [e]$

$\boxed{з}$

Пусть H - норм. в G, т. что G/H - абелева $\Rightarrow$

$H \supset G'$

$\Box$ $\forall a, b \in G$ $[a][b][a^{-1}][b^{-1}] = [e] \Rightarrow$

$[a b a^{-1} b^{-1}] = [e] \Rightarrow$

$a b a^{-1} b^{-1} \in H$ $\forall a, b$.

H - подгр. $\Rightarrow$ и все произв. комм. тоже лежат в H.

Пример $G = S_n$, $S_n' = A_n$

- $S_n' \subset A_n$, т.к. $\forall$ ком. чётен.
- $(21)(13)(21)(13) = (213)^2 = (123)$.

Порождена ~~транспозициями~~ циклами длин 3.

<u>Утв.</u> $\varphi: G \to H$ - гомоморфизм и H-абел, то $G' \subset \ker\varphi$

$\square$ $\varphi(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(g_2)^{-1}\varphi(g_1^{-1}) = e$ $\blacksquare$