№1

$$S[x,y] = \int \left\{ \dot{x}^2 y^2 t + \dot{y}^2 x^4 + \frac{\dot{x}\dot{y}t^2}{x^2} \right\} dt$$

а) $\begin{cases} \tilde{x} = e^{\varepsilon} x \\ \tilde{y} = e^{a\varepsilon} y \\ \tilde{t} = e^{b\varepsilon} t \end{cases}$

$$S[\tilde{x},\tilde{y}] = \int d\tilde{t}\, e^{-b\varepsilon}\Big((\tilde{x}')^2 e^{2(b-1)\varepsilon - 2a\varepsilon} \tilde{y}^2 e^{-b\varepsilon}\tilde{t} + e^{2(b-a)\varepsilon} (\tilde{y}')^2 e^{-4\varepsilon} \tilde{x}^4 +$$

$$+ e^{-2b\varepsilon}\tilde{t}^2 e^{2\varepsilon}\tilde{x}^{-2} e^{(b-1)\varepsilon}\tilde{x}' e^{(b-a)\varepsilon}\tilde{y}'\Big) =$$

$$= \int d\tilde{t}\, \Big(e^{(2b-2)\varepsilon - 2a\varepsilon - 2b\varepsilon} (\tilde{x}')^2 \tilde{y}^2 \tilde{t} + e^{(2(b-a)-b-4)\varepsilon} (\tilde{y}')^2 \tilde{x}^4 + e^{(-3b+2+(b-1)+b-a)\varepsilon} \tilde{x}'\tilde{y}'\tilde{x}^{-2}\tilde{t}^2$$

$$\begin{cases} 2a+2=0 \\ b-2a-4=0 \\ -b+1-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

б) При $\varepsilon=0$ тождеств.

$$\xi_0 = \frac{\partial\tilde{t}}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = +2t \qquad \xi_x = \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = x \qquad \xi_y = \frac{\partial\tilde{y}}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = y$$

$$I = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\xi_x + \frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\xi_y + \Big(L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\xi_0\Big)$$

$$I = \Big(2\dot{x}y^2t + \frac{\dot{y}t^2}{x^2}\Big)x + \Big(2\dot{y}x^4 + \frac{\dot{x}t^2}{x^2}\Big)y + \Big(\dot{x}^2y^2t + \dot{y}^2x^4 + \frac{\dot{x}\dot{y}t^2}{x^2} - \dot{x}\Big(2\dot{x}y^2t + \frac{\dot{y}t^2}{x^2}\Big)$$

$$- \dot{y}\Big(2\dot{y}x^4 + \frac{\dot{x}t^2}{x^2}\Big)\Big)(+2t) =$$

$$= 2x\dot{x}y^2t + \frac{\dot{y}t^2}{x} + 2y\dot{y}x^4 + \frac{\dot{x}yt^2}{x^2} + \Big(\dot{x}^2y^2t + \dot{y}^2x^4 + \frac{\dot{x}\dot{y}t^2}{x^2} - 2\dot{x}^2y^2t -$$

$$- \frac{\dot{x}\dot{y}t^2}{x^2} - 2\dot{y}^2x^4 - \frac{\dot{x}\dot{y}t^2}{x^2}\Big)(+2t) =$$

$$= 2x\dot{x}y^2t + \frac{\dot{y}t^2}{x} + 2y\dot{y}x^4 + \frac{\dot{x}yt^2}{x^2}(1-2t) - 2t(\dot{x}^2y^2 + \dot{y}^2x^4)$$

№2

а) Действие системы $S=\int L(\vec r,\dot{\vec r})\,dt$, $\Rightarrow$ есть 3 варианта инвариант-симметрии

• трансляция по времени

$$\tilde{\vec r}=\vec r,\quad \tilde t=t+\varepsilon \;\Rightarrow\; L(\tilde{\vec r},\dot{\tilde{\vec r}},\tilde t)=\frac{m\dot{\vec r}^2}{2}-\frac{e(\vec d,\vec r)}{r^3}=L(\vec r,\dot{\vec r},t)$$

или $\frac{\partial L}{\partial t}=0 \Rightarrow$ ЗСЭ $\Rightarrow$ трансляция по времени — симм. системы

но $\frac{\partial L}{\partial \vec r}\neq 0$ и $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}}\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ пространство не однородно и неизотропно $\Rightarrow$ нет трансляц. и вращений делающих систему инвариантной

запишем для ЗСЭ Нётеров интеграл

$$\xi_0=\frac{\partial\tilde t}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=1 \qquad \xi_r=\frac{\partial\tilde{\vec r}}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0$$

$$I=\xi_r\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}}+\left(L-\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}}\vec r\right)\xi_0=\left(\frac{m\dot{\vec r}^2}{2}-\frac{e(\vec d,\vec r)}{r^3}-m\dot{\vec r}\dot{\vec r}\right)=-\frac{m\dot{\vec r}^2}{2}-\frac{e(\vec d,\vec r)}{r^3}$$

№2

б)

$$\Delta_\alpha : \begin{cases} \tilde{\vec r} = \alpha \vec r \\ \tilde t = \alpha^2 t \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$$

$$S[\tilde{\vec r}(\tilde t)] = \int L\left(\tilde{\vec r}, \frac{\partial \tilde{\vec r}}{\partial \tilde t}, \tilde t\right) d\tilde t = \int d\tilde t\, \alpha^{-2} \left[\frac{m}{2} \alpha^{2(2-1)} \dot{\tilde{\vec r}}^2 - \frac{e(\vec d, \alpha^{-1}\tilde{\vec r})}{\alpha^{-3} \tilde r^3}\right] =$$

$$= \int d\tilde t \left(\frac{m}{2} \dot{\tilde{\vec r}}^2 - \frac{e(\vec d, \tilde{\vec r})}{\tilde r^3}\right) = S[\vec r(t)]$$

при $\alpha = 1$ тождественно

$$\xi_0 = \frac{\partial \tilde t}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=1} = 2t \qquad \xi_{\vec r} = \frac{\partial \tilde{\vec r}}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=1} = \vec r$$

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}} \xi_{\vec r} + \left(L - \dot{\vec r} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}}\right) \xi_0 = (m\dot{\vec r}) \vec r + \left(\frac{m}{2} \dot{\vec r}^2 - e\frac{(\vec d, \vec r)}{r^3} - \dot{\vec r}(m\dot{\vec r})\right) 2t$$

$$= m\dot{\vec r}\vec r - \frac{m}{2} \dot{\vec r}^2\, 2t - \frac{e(\vec d, \vec r)}{r^3} 2t = m\dot{\vec r}\vec r - m\dot{\vec r}^2 t - \frac{2te(\vec d, \vec r)}{r^3} = \mathrm{const}$$

N 3

$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx$ $\Delta_\varepsilon : \tilde{t} = t \quad \tilde{x} = x + \varepsilon$

Проверим, что это группа симметрий системы

$L(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \tilde{t}) = \frac{m}{2}\dot{\tilde{x}}^2 + mg\tilde{x} = \frac{m}{2}(\dot{x+\varepsilon})^2 + mg(x+\varepsilon) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + mgx + mg\varepsilon =$

$= L(x, \dot{x}, t) + mg\varepsilon = L(x, \dot{x}, t) + \frac{d}{dt}(mg\varepsilon t)$

при $\varepsilon = 0$ тождеств

$\xi_0 = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \xi_x = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 1$

$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\xi_x + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\xi_0 = m\dot{x} + \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx - m\dot{x}\dot{x}\right)0 = m\dot{x}$