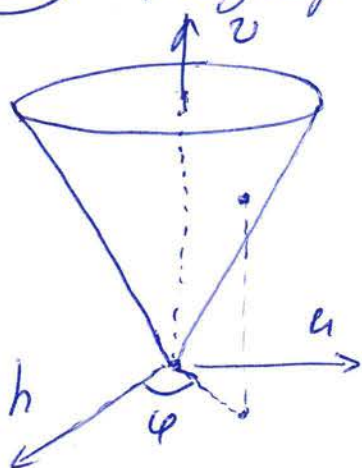


Семинар 16

① Разбор 3-х мин. предыдущего занятия.

$$h^2 + u^2 - v^2 = 0$$



Удобная параметризация:

$$h = v \cos \varphi \quad u = v \sin \varphi \quad v = v$$

$v \in [0, \infty)$ } — независимые
 $\varphi \in [0, 2\pi)$ } координаты.

Требование на параметризацию:

Пусть $f(h, u, v) = 0$ — поверхность.

$h = h(\xi, \eta) \quad u = u(\xi, \eta) \quad v = v(\xi, \eta)$ —
 — параметризация.

(а) Мало параметров 2 (размерность поверхности)

$$(б) f(h(\xi, \eta), u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \equiv 0$$

тождество по ξ и η

— при любых ξ и η — точка на поверхности,
 ξ и η — независимы

(в) А точка поверхности не получается
 при некоторых ξ и η .

Скобки Пуассона

$= 2 =$

$$\{h, u\} = 2v \quad \{h, v\} = 2u \quad \{u, v\} = -2h.$$

$$\cos \varphi = \frac{h}{v}$$

$$\{\cos \varphi, v\} = -\sin \varphi \{\varphi, v\}$$

$$\left\{ \frac{h}{v}, v \right\} = \frac{1}{v} \{h, v\} = 2 \frac{u}{v} = 2 \sin \varphi \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\{\varphi, v\} = -2}$$

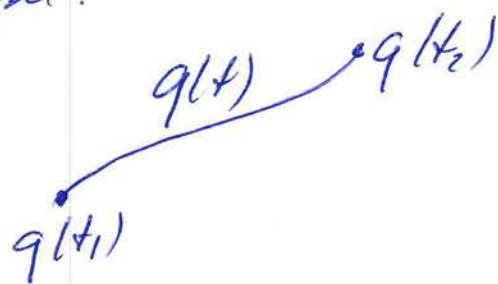
~~Дифференциальное уравнение:~~

Канонические преобразования

Напомним смысл этих преобразований:

(a) Лагранж в формализме:

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$



Для любых обратимых значений $q^i \rightarrow Q^i$
 $q^i = f^i(Q, t)$ (полезные преобразования)

Уравнение Эйлера-Лагранжа с новым лагранжианом имеет

прямой шаг:

= 3 =

$$L \rightarrow \tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} = 0$$

(5) В гамильтоновом формализме:

не любая замена координат

$$q_i, p_i \rightarrow \tilde{q}_i = \tilde{f}_i(q, p, t)$$

$$p_i \rightarrow \tilde{p}_i = \tilde{g}_i(q, p, t)$$

не изменяет ~~не~~ структуру уравнений движения:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

После произвольной замены (пусть даже и обратимой) может не найтись новая функция Гамильтона $\tilde{H}(Q, P, t)$ такая, что

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}$$

Каноническое преобразование = 4 =

— Это подмножество (на самом деле, подгруппа) обратимых преобразований, которые эти св-ва обр-т: сохраняют гамильтоновость динамики в новых переменных.

Вариантность связан на гамильтоновом уровне. (★)

$$\begin{array}{c} q(t), p(t) \\ \nearrow \\ t_1 \end{array} \xrightarrow{t_2} \left[\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0 \right]$$
$$\Rightarrow (\text{при } \delta q(t_1) = 0 = \delta q(t_2)) \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Если новые переменные

$$Q_i = Q_i(q, p, t)$$

$$P_i = P_i(q, p, t)$$

канонические, то применимо (★), где нет
вышестоящего равенства

$$\left[\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(P, Q, t)) dt = 0 \right] \begin{matrix} (★) \\ (★) \end{matrix}$$

Таким образом, подынтегральное $= 52$
 ное выражение $\{A\}$ и $\{\tilde{A}\}$ отменя-
 ются на полный дифференциал некоторой
 ф-ции F , т.к. $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \int_1^2 dt = F(2) - F(1) -$

- пропадает при варьировании:

$$\left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q, P, t) + \frac{dF}{dt} \right] (*)$$

функция F должна быть функцией
 от $4n$ переменных q_i, p_i, Q_i и P_i , но
 т.к. есть $2n$ зависимостей

$$Q_i = Q_i(q, p, t)$$

$$P_i = P_i(q, p, t)$$

то F зависит от каких-то $2n$
 переменных.

F называется производящей ф-цией
 канонического преобразования.

Обычно её выбирают в одном из
 4х видов: $F_1(q, Q, t)$, $F_2(q, P, t)$,
 $F_3(p, Q, t)$ и $F_4(p, P, t)$.

Например, где $F_1(q, Q, t)$ $\Leftarrow b \Leftarrow$
 (q и Q равны как независимые переменные)
 из (*) получаем равенство:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q, P, t) +$$

$$+ \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{Q}_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right)$$

В силу независимости Q и q , можно приравнять коэфф. при \dot{q}_i и \dot{Q}_i по отдельности:

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - \sum_i \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{Q}_i} \right) \dot{Q}_i =$$

$$= H(q, p, t) - \tilde{H}(Q, P, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} \quad P_i = - \frac{\partial F_1}{\partial \dot{Q}_i} \\ \tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} - \text{т.к. справа нет} \\ \text{зависимости от } \dot{q}_i \text{ и } \dot{Q}_i \end{array} \right]$$

$$\rightarrow p_i = \frac{\partial F(Q, q, t)}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow Q_i = Q_i(q, p, t)$$

$$P_i = - \frac{\partial F(Q, q, t)}{\partial \dot{Q}_i} \Rightarrow P_i = P_i(q, p, t)$$

Переход к грассману типа $= 7 =$
 произведений ϕ -тии: произв всего
 преобразованием симплекса.

Например, если хотим $F_2(q, P, t)$.

Поскольку $\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i$, то

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i$$

И тогда (*) превращается в грассе
 равенство:

$$\begin{aligned} \sum p_i \dot{q}_i - H &= \sum P_i \dot{Q}_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt} \underbrace{(F_2 - \sum P_i Q_i)}_{F_1} = \\ &= - \sum \dot{P}_i Q_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt} F_2(q, P, t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_i} \\ \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases}$$

Необх. и достаточное условие $= \delta =$ каноничности:

Теорема Преобразование $q, p \rightarrow Q, P$ каноническое, если оно не изменяет скобок Пуассона:

$$\{q_i, q_j\} = 0$$

$$\{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{Q_i, Q_j\}_{p, q} = 0$$

$$\rightarrow \{P_i, P_j\}_{p, q} = 0$$

$$\{Q_i, P_j\}_{p, q} = \delta_{ij}$$

(канонические скобки не претерпевают)

Скобки вычисляются как от функций от q и p

~~Можно~~ канонические преобразования используются, среди прочего, для поиска переменных, в которых точно решаются уравнения движения.

Пусть, например, после канонического преобразования $\tilde{H}(Q, P, t) = \tilde{H}(P)$.

Тогда $\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow P_i(t) = P_i^{(0)} = \text{const}$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} = f_i(P_i) = f_i(P_i^{(0)}) = \dots = g = \omega_i = \text{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_i = \omega_i t + Q_i^{(0)}$$

Тривиальный пример:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad - \text{гарм. осцилятор}$$

Нужно найти канон. преобр. вида

$$p = f(P) \cos Q$$

$$q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q$$

Если преобразование ϕ -инв. не зависит явно от t ($\frac{\partial F}{\partial t} = 0$), то

$$\tilde{H}(P, Q) = H(q, p) \Big|_{\substack{q=q(Q, P) \\ p=p(Q, P)}} = \frac{f^2(P)}{2m} -$$

- зависит только от P . Надо ~~выбрать~~ подобрать такую f , чтобы преобр. действительным стало каноническим.

Возвращаемся к способу Шварца: $\approx 10 =$

$$1 = \{q, p\} = \left\{ \frac{f(p)}{mw} \sin Q, \frac{f(p)}{mw} \cos Q \right\} =$$

$$= \{ \text{по прав. лебдитица} \} =$$

$$= \frac{f(p)f'(p)}{mw} \cos^2 Q \{Q, P\} - \frac{f'(p)f(p)}{mw} \{P, Q\} \sin^2 Q$$

$$= \left(\{P, Q\} = -1, \{Q, P\} = 1 - \text{где каноничность} \right) =$$

$$= \frac{f(p)f'(p)}{mw} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dp} \left(\frac{f^2}{2} \right) = mw$$

$$f^2(p) = 2mw p + \text{const}$$

константа 0
пересечения.

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{2P}{mw}} \sin Q \\ p = \sqrt{2mwP} \cos Q \end{cases}$$

$$H = wP$$

$$H = wP$$

$$\boxed{\text{Зам.}} \quad f^2 = mwP \Rightarrow f = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \sqrt{mwP}$$

Выбор знака — означает пересечение $Q \rightarrow Q + \pi$.

Преобразованная функция:

= 11 =

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \operatorname{ctg} Q$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \Rightarrow \begin{cases} q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \end{cases}$$

Решение уравнений гамильтона:

$$H = \omega P \Rightarrow P = \frac{E}{\omega} \quad (E - \text{энергия системы})$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \quad Q = \omega t + \alpha$$

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

$$p = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha)$$

Примеры

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} Q = \ln\left(\frac{1}{q} \sin p\right) \\ P = q \cot p \end{cases}$$

- каноническое
преобразование

Доказать, что это скобки. (бонус)

Производящие ф-ции?

② В лагранжиане породе

$$L(q, \dot{q}) \rightarrow \tilde{L} = L + \frac{d}{dt} f(q, t) -$$

- не изменяет вид уравн. движения.

У На гамильтониане уровня - это
канон. преобразование с произв.
функцией $F_2(q, p, t) = q_i p_i - f(q, t)$

③ У Пусть $M^T M = 1 \Rightarrow M \in SO(3) -$
 $\det M = 1$

- группа вращений.

Доказать, что $\begin{cases} Q_i = M_{ij} q_j \\ P_i = M_{ij} p_j \end{cases} -$

- канон. преобразование (выяснить
скобки) и

Найти преобр. функции: = 13 =

ответ: $F_2(q, P) = P_i S_{ij} q_j$

$$P_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

④ Найти всевозм. канонич. преобразован-
ний с преобр. функциями вида:

а) $F_2(\vec{r}, \vec{P}) = \vec{r} \cdot \vec{P} + \vec{a} \cdot \vec{P}$, \vec{a} - пост.
вектор.

$$P_i = \frac{\partial F_2}{\partial r_i} = P_i$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = r_i + a_i \quad - \text{связь начальных координат в канонич. пр-ве.}$$

~~б) $F_2(\vec{r}, \vec{P}) = \vec{r} \cdot \vec{P} + \epsilon \vec{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{P}) + o(\epsilon^2)$
 $Q_i = r_i + \epsilon (\vec{n} \times \vec{r})_i + o(\epsilon)$~~

~~P_2~~

Разбор примеров

= 14 =

$$\textcircled{1} Q = \ln\left(\frac{1}{q} \sinh p\right) = \ln \sinh p - \ln q$$

$$P = q \operatorname{ctg} p$$

$$\{Q, P\} = \frac{1}{\sinh p} \cosh p \{p, q\} \operatorname{ctg} p - \frac{1}{q} \{q, p\} \frac{(-1)}{\sinh^2 p} =$$

$$= -\frac{\cosh^2 p}{\sinh^2 p} + \frac{1}{\sinh^2 p} = 1$$

Найдём произв. функцию.

$$\left\{ \begin{array}{l} qe^Q = \sinh p \Rightarrow p = \operatorname{arcsinh}(qe^Q) \\ P = q \operatorname{ctg} p = e^{-Q} \sqrt{1 - q^2 e^{2Q}} \end{array} \right.$$

Видно, что надо искать произв. ф-цию вида $F_1(q, Q)$

$$P = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \operatorname{arcsinh}(qe^Q)$$

$$\int (\operatorname{arcsinh} x) dx = x \operatorname{arcsinh} x + \sqrt{1 - x^2}$$

но здесь

$$\Rightarrow \int \arcsin(qe^Q) dq =$$

$$= \underbrace{q \arcsin(qe^Q) + e^{-Q} \sqrt{1-q^2 e^{2Q}}}_{\text{" } F_1(q, Q) \text{ "}} + \underbrace{\Phi(Q)}_{\text{" } \Phi\text{-value "}}$$

$$P = - \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \underbrace{\frac{d\Phi(Q)}{dQ}}_{\text{" } 0 \text{ "}} + \underbrace{e^{-Q} \sqrt{1-q^2 e^{2Q}}}_{\text{то, что нужно}}$$

Итого: $F_1(q, Q) = q \arcsin(qe^Q) + e^{-Q} \sqrt{1-q^2 e^{2Q}}$

$$(2) \quad \tilde{L} = L + \frac{df(q, t)}{dt} = L + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$P_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \dot{q}_i = \phi(q, p)$$

$$\downarrow P_i - \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \dot{q}_i = \phi(q, P - \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i})$$

$$\tilde{H}(P, q) = P_i \dot{q}_i - \tilde{L} \equiv \quad \quad \quad = 16 =$$

$$\begin{aligned} Q=q \rightarrow & \equiv \left[\underbrace{(P_i - \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}) \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{---} L \text{---} \frac{df}{dt}} - \right. \\ & \left. \quad \quad \quad \right] \bigg|_{\dot{q} = \phi(P, q, t)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= H(P_i - \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}, q) + \frac{\partial f}{\partial t} \dot{q}_i - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i}_{\text{---} \frac{df}{dt}} = \\ &= H(P_i - \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}, q) - \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\text{канон. } \left\{ \begin{aligned} P_i &= p_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}(q, t) \Rightarrow p_i = P_i - \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \\ Q_i &= q_i \\ \tilde{H} &= H - \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Другой } \phi\text{-мех } F_2(q, p) = q_i P_i - f(q, t)$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$