А. Ю. Пирковский

# Функциональный анализ

# Лекция 14

Одним из важнейших инвариантов линейного оператора является его спектр. Он содержит в себе хоть и не всю информацию об операторе, но весьма существенную ее часть. Понятие спектра придумал Гильберт в начале XX в. в связи с некоторыми задачами теории интегральных уравнений. Интересно, что первоначально оно никак не было связано с тем понятием спектра, которое встречается в физике — совпадение терминов было чисто случайным. Однако впоследствии — после создания математического аппарата квантовой механики в 1920-х–1930-х гг. — чудесным образом оказалось, что связь все же есть. Мы обсудим ее в самом конце нашего курса, если позволит время. А пока наша скромная цель состоит в том, чтобы познакомиться с самыми основами спектральной теории.

Само по себе понятие спектра носит чисто алгебраический характер и имеет смысл не только для линейных операторов, но и для элементов произвольных ассоциативных алгебр.

## 14.1. Спектр элемента алгебры

В дальнейшем мы будем работать над полем комплексных чисел[1] $\mathbb{C}$.

**Определение 14.1.** *Алгеброй* (точнее, *ассоциативной* $\mathbb{C}$-*алгеброй*) называется ассоциативное кольцо $A$, снабженное структурой векторного пространства над $\mathbb{C}$ таким образом, что умножение $A \times A \to A$ билинейно над $\mathbb{C}$. Иначе говоря, требуется, чтобы для любых $a, b \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнялись тождества $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$.

Алгебра с единицей (нейтральным элементом по умножению) $1_A$ называется *унитальной.*

**Определение 14.2.** Пусть $A$ и $B$ — алгебры. Отображение $\varphi\colon A \to B$ называется *гомоморфизмом алгебр* (в дальнейшем — просто *гомоморфизмом*), если оно является гомоморфизмом колец и, кроме того, $\mathbb{C}$-линейно.

Если алгебры $A$ и $B$ унитальны, то гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ называется *унитальным*, если $\varphi(1_A) = 1_B$.

**Определение 14.3.** Пусть $A$ — унитальная алгебра. Элемент $a \in A$ называется *обратимым*, если существует такой элемент $a^{-1} \in A$ (называемый *обратным* к $a$), что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

[1] Хотя формально определение спектра можно дать для алгебр над любым полем, в том числе и над $\mathbb{R}$, тем не менее для построения содержательной теории нам вскоре понадобится пользоваться всеми известными преимуществами поля $\mathbb{C}$ — и его алгебраической замкнутостью, и теорией аналитических функций комплексного переменного.

Из курса алгебры вы знаете, что если обратный элемент к $a$ существует, то он единственный.

Множество всех обратимых элементов алгебры $A$ будет в дальнейшем обозначаться через $A^\times$. Очевидно, $A^\times$ — группа по умножению.

**Определение 14.4.** Пусть $A$ — унитальная алгебра. *Спектром* элемента $a \in A$ называется множество

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \text{ необратим } \}.$$

Множество $\rho_A(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$ называется *резольвентным множеством* элемента $a$.

Посмотрим на некоторые примеры.

**Пример 14.1.** Если $A = \mathbb{C}$, то легко видеть, что $\sigma_{\mathbb{C}}(\lambda) = \{\lambda\}$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Следующий пример более содержателен и известен вам из курса алгебры.

**Пример 14.2.** Пусть $X$ — конечномерное векторное пространство. Обозначим через $L(X)$ алгебру всех линейных операторов в $X$. Напомним, что оператор $T \in L(X)$ обратим тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} T = 0$. Следовательно,

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}_X) \neq 0 \iff \lambda \text{ — собственное значение } T.$$

Таким образом, спектр оператора в конечномерном пространстве — это множество всех его собственных значений.

**Предостережение 14.1.** Разумеется, если $\operatorname{Ker} T = 0$, то оператор $T \in L(X)$ необратим независимо от того, конечномерно пространство $X$ или нет. Поэтому собственные значения оператора $T$ всегда принадлежат его спектру. Однако если $X$ бесконечномерно, то в $X$ всегда есть оператор, спектр которого строго больше множества его собственных значений (см. листок 11).

Посмотрим теперь на спектры элементов различных алгебр, состоящих из функций.

**Пример 14.3.** Пусть $X$ — множество и $\mathbb{C}^X$ — алгебра всех комплексных функций на $X$ относительно поточечного умножения. Ясно, что элемент $f \in \mathbb{C}^X$ обратим тогда и только тогда, когда $f(x) \neq 0$ для всех $x \in X$. Следовательно,

$$\lambda \in \sigma(f) \iff \exists x \in X : (f - \lambda)(x) = 0 \iff \exists x \in X : \lambda = f(x).$$

Таким образом, $\sigma_{\mathbb{C}^X}(f) = f(X)$, т.е. спектр функции — это множество ее значений.

То же самое верно и для многих других алгебр функций — например, для алгебры $C(X)$ непрерывных функций на топологическом пространстве $X$, для алгебры $C^\infty(M)$ гладких функций на многообразии $M$, для алгебры $\mathscr{O}(U)$ голоморфных функций на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ и т.п.

**Наблюдение 14.1.** Из предыдущего примера видно, что спектр элемента алгебры может быть любым непустым подмножеством в $\mathbb{C}$. В самом деле, если дано подмножество $S \subseteq \mathbb{C}$, $S \neq \varnothing$, то $S = \sigma_A(a)$ для $A = \mathbb{C}^S$ и функции $a(t) = t$.

Кстати, спектр может быть и пустым (см. листок 11).

**Пример 14.4.** Пусть по-прежнему $X$ — произвольное множество. Очевидно, пространство $\ell^\infty(X)$ ограниченных функций на $X$ является подалгеброй в $\mathbb{C}^X$. Заметим, что элемент $f \in \ell^\infty(X)$ обратим тогда и только тогда, когда функция $1/f$ не только определена всюду на $X$, но и ограничена. Это означает в точности, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $|f(x)| > \varepsilon$ для всех $x \in X$, или, эквивалентно, что $0 \notin \overline{f(X)}$. Следовательно,

$$\lambda \in \sigma(f) \iff 0 \in \overline{(f-\lambda)(X)} \iff \lambda \in \overline{f(X)}.$$

Таким образом, $\sigma_{\ell^\infty(X)}(f) = \overline{f(X)}$, т.е. спектр ограниченной функции как элемента алгебры $\ell^\infty(X)$ — это замыкание множества ее значений.

То же самое верно и для многих других алгебр ограниченных функций — например, для алгебры $C_b(X)$ непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве $X$, для алгебры $B_{\mathscr{A}}(X)$ измеримых (относительно некоторой $\sigma$-алгебры $\mathscr{A} \subseteq 2^X$) ограниченных функций на множестве $X$ и т.п.

Сопоставляя этот результат с примером 14.3, мы видим, что спектр элемента, вообще говоря, зависит от того, относительно какой алгебры он рассматривается (см. также листок 11).

Кроме того, обратите внимание, что для каждой из алгебр этого примера спектр любого ее элемента — непустой компакт. Скоро мы поймем, что это неспроста…

**Пример 14.5.** Пусть $(X,\mu)$ — пространство с мерой. Пространство $L^\infty(X,\mu)$ классов эквивалентности существенно ограниченных измеримых функций на $X$ является алгеброй относительно поточечного умножения (точнее говоря, произведение классов эквивалентности — это класс эквивалентности поточечного произведения их представителей). Заметим, что элемент $f \in L^\infty(X,\mu)$ обратим тогда и только тогда, когда функция $1/f$ определена почти всюду на $X$ и существенно ограничена. Это означает в точности, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $|f(x)| > \varepsilon$ почти всюду на $X$, или, эквивалентно, что существует такая окрестность нуля $U \subseteq \mathbb{C}$, что $\mu(f^{-1}(U)) = 0$. У этого явления есть специальное название:

**Определение 14.5.** Пусть $f\colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *существенным значением* $f$, если для любой окрестности $U \subseteq \mathbb{C}$ точки $\lambda$ выполнено $\mu(f^{-1}(U)) > 0$.

**Предостережение 14.2.** Вообще говоря, не всякое значение измеримой функции — существенное, и не всякое существенное значение измеримой функции является ее значением. Впрочем, для непрерывных функций на отрезке понятия значения и существенного значения совпадают (см. листок 11).

Перефразируя сделанные выше выводы, мы видим, что элемент $f \in L^\infty(X,\mu)$ обратим тогда и только тогда, когда 0 не является существенным значением $f$. Следовательно,

$$\lambda \in \sigma(f) \iff 0 \text{ — существенное значение } f-\lambda \iff \lambda \text{ — существенное значение } f.$$

Таким образом, $\sigma_{L^\infty(X,\mu)}(f)$ — это множество существенных значений функции $f$.

Перейдем теперь к исследованию общих свойств спектра. Для начала посмотрим, что происходит со спектрами под действием гомоморфизмов.

**Предложение 14.2.** *Пусть $A, B$ — унитальные алгебры и $\varphi\colon A \to B$ — унитальный гомоморфизм. Справедливы следующие утверждения:*

(i) $\varphi(A^\times) \subseteq B^\times$, *и* $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$ *для каждого* $a \in A^\times$*;*

(ii) $\sigma_B(\varphi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ *для каждого* $a \in A$*;*

(iii) $\sigma_B(\varphi(a)) = \sigma_A(a)$ *для каждого* $a \in A \iff \varphi(A \setminus A^\times) \subseteq \varphi(B \setminus B^\times)$.

*Доказательство.* (i) Очевидно.

(ii) $\lambda \notin \sigma_A(a)$ тогда и только тогда, когда $a - \lambda 1 \in A^\times$. Отсюда с учетом (i) следует, что $\varphi(a - \lambda 1) = \varphi(a) - \lambda 1 \in B^\times$, т.е. что $\lambda \notin \sigma_B(\varphi(a))$.

(iii) Импликация ($\Longleftarrow$) доказывается дословно также, как п. (ii). Для доказательства импликации ($\Longrightarrow$) заметим, что $a \notin A^\times$ тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_A(a)$. Но $\sigma_B(\varphi(a)) = \sigma_A(a)$, поэтому $0 \in \sigma_B(\varphi(a))$, а это и означает, что $\varphi(a) \notin B^\times$. $\square$

Итак, любой гомоморфизм «не увеличивает спектр». Кроме того, гомоморфизм «сохраняет спектр» тогда и только тогда, когда он переводит необратимые элементы в необратимые.

**Следствие 14.3.** *Пусть $A$ — унитальная алгебра, $B \subseteq A$ — подалгебра, причем $1_A \in B$. Тогда $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$ для каждого $b \in B$.*

Таким образом, при увеличении алгебры спектр элемента может только уменьшиться. Впрочем, как мы видели в примерах 14.3 и 14.4, он может остаться и прежним, причем для любого элемента подалгебры $B$. У такой ситуации есть специальное название:

**Определение 14.6.** Пусть $A$ — унитальная алгебра, $B \subseteq A$ — подалгебра, причем $1_A \in B$. Подалгебра $B$ называется *спектрально инвариантной* (или *наполненной*) в $A$, если $B^\times = B \cap A^\times$. Иначе говоря, это означает, что всякий элемент из $B$, обратимый в $A$, обратим и в $B$.

Следующее утверждение немедленно следует из п. (iii) предложения 14.2 и объясняет название «спектрально инвариантная подалгебра».

**Следствие 14.4.** *Пусть $A$ — унитальная алгебра, $B \subset A$ — подалгебра, причем $1_A \in B$. Подалгебра $B$ спектрально инвариантна в $A$ тогда и только тогда, когда $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ для каждого $b \in B$.*

**Пример 14.6.** Из примеров 14.3 и 14.4 следует, что подалгебры

$$C(X) \subseteq \mathbb{C}^X, \quad C^\infty(M) \subseteq \mathbb{C}^M, \quad C_b(X) \subseteq \ell^\infty(X), \quad B_{\mathscr{A}}(X) \subseteq \ell^\infty(X)$$

спектрально инвариантны. Вот еще один пример: из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что для любого банахова пространства $E$ подалгебра $\mathscr{B}(E) \subseteq L(E)$ спектрально инвариантна.

С другой стороны, из тех же примеров 14.3 и 14.4 видно, что подалгебра $\ell^\infty(X)$ не является спектрально инвариантной в $\mathbb{C}^X$ за исключением случая, когда множество $X$ конечно.

## 14.2. Теоремы об отображении спектра для полиномиального и рационального исчислений

Пусть $A$ — унитальная алгебра.

**Определение 14.7.** *Полиномиальным исчислением* от элемента $a \in A$ называется унитальный гомоморфизм $\gamma_a^{\mathrm{pol}} \colon \mathbb{C}[t] \to A$, удовлетворяющий условию $\gamma_a^{\mathrm{pol}}(t) = a$.

**Предложение 14.5.** *Для любого $a \in A$ полиномиальное исчисление от $a$ существует, единственно и задается формулой*

$$\gamma_a^{\mathrm{pol}}(f) = f(a) = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k \qquad \text{для } f = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \in \mathbb{C}[t]. \tag{14.1}$$

*Доказательство.* Зададим отображение $\gamma_a^{\mathrm{pol}} \colon \mathbb{C}[t] \to A$ формулой (14.1). Легко проверяется, что оно обладает всеми нужными свойствами. □

В дальнейшем для любого $f \in \mathbb{C}[t]$ вместо $\gamma_a^{\mathrm{pol}}(f)$ мы будем обычно писать $f(a)$, как и в формуле (14.1).

**Теорема 14.6** (об отображении спектра). *Для любых $a \in A$ и $f \in \mathbb{C}[t]$ справедливо равенство*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

*за исключением случая, когда $\sigma(a) = \varnothing$ и $f \in \mathbb{C}1$.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся две леммы.

**Лемма 14.7.** *Элемент $a \in A$ обратим тогда и только тогда, когда существуют такие $a_\ell, a_r \in A$, что $a_\ell a = a a_r = 1$.*

**Лемма 14.8.** *Если $a_1, \ldots, a_n \in A$ — коммутирующие элементы, то элемент $a_1 \ldots a_n$ обратим тогда и только тогда, когда все элементы $a_1, \ldots, a_n$ обратимы.*

Докажите эти леммы самостоятельно в качестве упражнения.

*Доказательство теоремы.* Случай $\deg f = 0$ тривиален (почему?). Пусть $\deg f > 0$. Возьмем произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$ и разложим многочлен $f - \lambda$ на множители: $f(t) - \lambda = c(t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_n)$, где $c \neq 0$. Очевидно, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = f^{-1}(\lambda)$. Поскольку $f(a) - \lambda 1 = c(a - \lambda_1 1) \ldots (a - \lambda_n 1)$, с учетом леммы 14.8 получаем следующее:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(f(a)) &\iff \text{элемент } f(a) - \lambda 1 \text{ необратим} \iff \\ &\iff \exists\, i : \text{элемент } a - \lambda_i 1 \text{ необратим} \iff \\ &\iff \sigma(a) \cap f^{-1}(\lambda) \neq \varnothing \iff \lambda \in f(\sigma(a)). \end{aligned}$$

□

Перейдем теперь от полиномиального исчисления к рациональному. Для произвольного непустого подмножества $M \subseteq \mathbb{C}$ обозначим через $R(M)$ подалгебру в $\mathbb{C}(t)$, состоящую из рациональных функций с полюсами вне $M$. Иначе говоря,

$$R(M) = \{f \in \mathbb{C}(t) : \exists p, q \in \mathbb{C}[t],\ f = p/q,\ q(z) \neq 0\ \forall z \in M\}.$$

Положим также $R(\varnothing) = \mathbb{C}(t)$.

Каждой функции $f \in R(M)$ можно присвоить значение в произвольной точке $z \in M$. Для этого представим $f$ в виде $f = p/q$, где $p, q \in \mathbb{C}[t]$ и $q$ не обращается в нуль на $M$, и положим по определению $f(z) = p(z)/q(z)$. Получаем «настоящую» функцию $\tilde{f}$ на $M$, заданную по правилу $\tilde{f}(z) = f(z)$ для всех $z \in M$. Сопоставление $f \mapsto \tilde{f}$ является унитальным гомоморфизмом из $R(M)$ в $\mathbb{C}^M$. Отметим, что этот гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда $M$ бесконечно (почему?); тем не менее, в дальнейшем вместо $\tilde{f}$ мы часто будем писать просто $f$ — к путанице это не приведет.

Легко видеть, что если $M \neq \varnothing$, то $f$ является обратимым элементом алгебры $R(M)$ тогда и только тогда, когда $f(z) \neq 0$ ни в одной точке множества $M$, т.е. когда $\tilde{f}$ — обратимый элемент алгебры $\mathbb{C}^M$. Поэтому гомоморфизм $f \mapsto \tilde{f}$ сохраняет спектр (см. предложение 14.2 (iii)):

$$\sigma_{R(M)}(f) = \sigma_{\mathbb{C}^M}(\tilde{f}) = f(M). \tag{14.2}$$

**Определение 14.8.** *Рациональным исчислением* от элемента $a \in A$ на множестве $M \subseteq \mathbb{C}$ называется унитальный гомоморфизм $\gamma_a^r \colon R(M) \to A$, удовлетворяющий условию $\gamma_a^r(t) = a$.

Если рациональное исчисление от $a$ на $M$ существует, то оно является продолжением полиномиального в очевидном смысле. Поэтому для $f \in R(M)$ вместо $\gamma_a^r(f)$ обычно пишут просто $f(a)$.

**Теорема 14.9.** *Рациональное исчисление от $a$ на $M$ существует тогда и только тогда, когда $\sigma(a) \subseteq M$; при этом оно единственно.*

*Доказательство.* Начнем с доказательства единственности. Если $\gamma = \gamma_a^r$ — рациональное исчисление от $a$ на $M$, то для любых $p, q \in \mathbb{C}[t]$, где $q(z) \neq 0$ для всех $z \in M$, справедливы равенства

$$\gamma(p/q) = \gamma(pq^{-1}) = \gamma(p)\gamma(q)^{-1} = p(a)q(a)^{-1}.$$

Отсюда понятным образом следует, что рациональное исчисление единственно. Кроме того, с учетом предложения 14.2 и равенства (14.2) получаем

$$\sigma_A(a) = \sigma_A(\gamma(t)) \subseteq \sigma_{R(M)}(t) = M.$$

Покажем теперь, что условие $\sigma(a) \subseteq M$ не только необходимо, но и достаточно для существования рационального исчисления от $a$ на $M$. Возьмем функцию $f \in R(M)$ и представим ее в виде $f = p/q$, где $p$ и $q$ — многочлены и $q$ не обращается в нуль на $M$. Из теоремы 14.6 следует, что элемент $q(a) \in A$ обратим. Положим $\gamma_a^r(f) = p(a)q(a)^{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что $\gamma_a^r \colon R(M) \to A$ — корректно определенный гомоморфизм (убедитесь!). $\square$

**Замечание 14.3** (*для знакомых с основами коммутативной алгебры*)**.** Заметим, что алгебра $R(M)$ — это в точности кольцо частных алгебры $\mathbb{C}[t]$ относительно мультипликативной системы $S = \{q \in \mathbb{C}[t] : q(z) \neq 0 \, \forall z \in M\}$. Поэтому существование и единственность рационального исчисления сразу следуют из универсального свойства колец частных с учетом того, что элемент $\gamma_a^{\mathrm{pol}}(q)$ обратим в алгебре $A$ для любого $q \in S$.

**Теорема 14.10** (об отображении спектра)**.** *Пусть* $\sigma(a) \subseteq M \subseteq \mathbb{C}$*. Тогда для любого* $f \in R(M)$ *справедливо равенство*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) \tag{14.3}$$

*за исключением случая, когда* $\sigma(a) = \varnothing$ *и* $f \in \mathbb{C}1$*.*

*Доказательство.* Предположим, что $\sigma(a) \neq \varnothing$ (случай пустого спектра продумайте самостоятельно). Ограничивая при необходимости функцию $f$ на $\sigma(a)$, мы можем считать, что $M = \sigma(a)$. Положим для удобства обозначений $R = R(M)$ и $\gamma = \gamma_a^r$. Пользуясь (14.2), перепишем формулу (14.3) в виде

$$\sigma_A(\gamma(f)) = f(M) = \sigma_R(f).$$

Таким образом, мы должны показать, что гомоморфизм $\gamma$ сохраняет спектр. В силу предложения 14.2 (iii) это равносильно тому, что $\gamma$ переводит необратимые элементы в необратимые. Итак, пусть элемент $f \in R$ необратим. Представим $f$ в виде $f = p/q$, где $p, q \in \mathbb{C}[t]$ и $q$ не обращается в нуль на $M$. Необратимость $f$ означает, что $p(z) = 0$ для некоторого $z \in M = \sigma(a)$. Отсюда с учетом теоремы 14.6 следует, что элемент $p(a) \in A$ необратим, а значит, и элемент $\gamma(f) = p(a)q(a)^{-1}$ необратим. $\square$

**Следствие 14.11.** *Для любого обратимого элемента* $a \in A$ *справедливо равенство*

$$\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

**Замечание 14.4.** Итак, к любому элементу любой унитальной алгебры $A$ можно применять многочлены и рациональные функции, и в обоих случаях справедлива теорема об отображении спектра (см. (14.3)). Естественно задать вопрос: а можно ли как-нибудь расширить запас функций, которые можно применять к нашему элементу? Можно ли применять к нему, скажем, непрерывные или хотя бы аналитические функции? В общем случае, т.е. для произвольных алгебр, ответ отрицателен. Однако вскоре мы увидим, что если $A = \mathscr{B}(X)$ — алгебра ограниченных операторов в банаховом пространстве $X$ (или, более общо, любая унитальная банахова алгебра), то к ее элементам можно применять уже некоторые аналитические функции. Если же $H$ — гильбертово пространство, то к любому самосопряженному оператору $T \in \mathscr{B}(H)$ можно применять все непрерывные функции, определенные на его спектре. При этом теорема об отображении спектра (14.3) сохраняет силу и для непрерывных функций. Гомоморфизмы вида $f \mapsto f(T)$, где $T$ — фиксированный оператор, а $f$ пробегает какую-нибудь алгебру функций, называются *функциональными исчислениями* от оператора $T$. Они играют очень важную роль в спектральной теории операторов и во всевозможных ее приложениях.

А. Ю. Пирковский

# Функциональный анализ

# Лекция 15

## 15.1. Банаховы алгебры

На прошлой лекции мы видели, что спектр элемента ассоциативной алгебры может быть любым подмножеством комплексной плоскости. Однако спектры элементов некоторых алгебр, которые «по совместительству» являются банаховыми пространствами (см. примеры 14.4 и 14.5), оказались непустыми и компактными. Наша ближайшая задача — познакомиться с понятием банаховой алгебры и понять, что компактность и непустота спектра имеют место для любого элемента любой банаховой алгебры.

**Определение 15.1.** *Нормированная алгебра* — это алгебра $A$, снабженная нормой $\|\cdot\|$, которая обладает свойством $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ для всех $a, b \in A$ (само это свойство называется *субмультипликативностью* нормы). Если алгебра $A$ унитальна, то дополнительно требуется, чтобы выполнялось условие $\|1_A\| = 1$. *Банахова алгебра* — это полная нормированная алгебра.

Прежде чем приводить примеры, расшифруем смысл условия субмультипликативности.

**Предложение 15.1.** *Пусть $X, Y, Z$ — нормированные пространства. Билинейный оператор $\varphi\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда он* ограничен *в следующем смысле: существует такое $C > 0$, что $\|\varphi(x, y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

*Доказательство.* Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичного утверждения о линейных операторах (см. теорему 1.2). □

**Следствие 15.2.** *Умножение в нормированной алгебре непрерывно.*

**Замечание 15.1.** Субмультипликативность нормы и условие $\|1_A\| = 1$, входящие в определение нормированной алгебры, разумеется, не следуют из непрерывности умножения. Однако если $A$ — алгебра, снабженная нормой, относительно которой умножение непрерывно, то на $A$ существует эквивалентная норма, удовлетворяющая условиям определения 15.1 (см. листок 12).

При рассмотрении гомоморфизмов между нормированными алгебрами разумно рассматривать только те из них, которые непрерывны (см. обсуждение в начале §1.3). Ясно, что нормированные (соответственно, банаховы) алгебры и их непрерывные гомоморфизмы образуют категорию. В ней содержится подкатегория, состоящая из унитальных нормированных (соответственно, банаховых) алгебр и непрерывных унитальных гомоморфизмов. Так же, как и в случае нормированных пространств, можно (а иногда и нужно) рассматривать не все непрерывные гомоморфизмы между нормированными алгебрами, а лишь те, которые не увеличивают норму (ср. замечание 2.2). Это дает еще несколько категорий нормированных и банаховых алгебр. Специальных обозначений для них мы вводить не будем — по крайней мере до тех пор, пока эти обозначения нам не понадобятся.

Очевидно, всякая подалгебра нормированной алгебры сама является нормированной алгеброй, а всякая замкнутая подалгебра банаховой алгебры — банаховой алгеброй. Кроме того, из непрерывности умножения в нормированной алгебре следует (убедитесь!), что замыкание любой подалгебры в нормированной алгебре тоже является подалгеброй.

Посмотрим теперь на несколько основных примеров банаховых алгебр, с которыми нам предстоит работать.

**Пример 15.1.** Само поле $\mathbb{C}$, разумеется, является банаховой алгеброй.

**Пример 15.2.** Основной для нашего курса пример — это алгебра $\mathscr{B}(X)$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $X$. Она является банаховой алгеброй относительно обычной операторной нормы (см. предложение 1.6 и теорему 3.18).

**Пример 15.3.** Алгебра $\ell^\infty(X)$, где $X$ — произвольное множество, является банаховой алгеброй относительно равномерной нормы $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

**Пример 15.4.** Пусть $X$ — топологическое пространство. Тогда алгебра непрерывных ограниченных функций $C_b(X)$ — замкнутая подалгебра в $\ell^\infty(X)$ (см. пример 3.3) и, следовательно, является банаховой алгеброй. Подпространство $C_0(X) \subseteq C_b(X)$, состоящее из функций, исчезающих на бесконечности (см. пример 1.10), является банаховой алгеброй по той же причине (см. упражнение 3.3). В частности, пространство $c_0 = C_0(\mathbb{N})$ — банахова алгебра.

Разумеется, если $X$ компактно, то $C(X) = C_b(X) = C_0(X)$ — банахова алгебра.

**Пример 15.5.** Пусть $X$ — множество и $\mathscr{A}$ — $\sigma$-алгебра его подмножеств. Пространство $B_{\mathscr{A}}(X)$, состоящее из ограниченных $\mathscr{A}$-измеримых функций на $X$, является замкнутой подалгеброй в $\ell^\infty(X)$. Следовательно, $B_{\mathscr{A}}(X)$ — банахова алгебра.

**Пример 15.6.** Пусть $(X,\mu)$ — пространство с мерой. Мы уже отмечали выше, что пространство $L^\infty(X,\mu)$ полно (пример 3.4) и является алгеброй относительно поточечного умножения (пример 14.5). Легко проверить (проверьте!), что норма на $L^\infty(X,\mu)$ субмультипликативна. Следовательно, $L^\infty(X,\mu)$ — банахова алгебра.

**Пример 15.7.** Для каждого целого $n \geqslant 0$ пространство $C^n[a,b]$ полно относительно нормы
$$\|f\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty \tag{15.1}$$
(см. листок 3) и является алгеброй относительно поточечного умножения. Норма (15.1) не субмультипликативна, однако ее можно заменить на эквивалентную ей субмультипликативную норму
$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{k!} \tag{15.2}$$
(см. листок 12). Следовательно, $C^n[a,b]$ — банахова алгебра относительно нормы (15.2).

**Пример 15.8.** Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество. Рассмотрим следующие подалгебры в $C(K)$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}(K) &= \overline{\bigl\{p|_K : p \text{ — многочлен}\bigr\}};\\
\mathscr{R}(K) &= \overline{\bigl\{r|_K : r \text{ — рациональная функция с полюсами вне } K\bigr\}};\\
\mathscr{A}(K) &= \bigl\{f \in C(K) : f \text{ голоморфна в } \operatorname{Int} K\bigr\}
\end{aligned}$$

(черта наверху означает замыкание в $C(K)$). Из теоремы Вейерштрасса о сходящихся последовательностях аналитических функций (вспомните ее формулировку!) следует, что $\mathscr{A}(K)$ — замкнутая подалгебра в $C(K)$. Следовательно, мы имеем цепочку вложенных друг в друга замкнутых подалгебр

$$\mathscr{P}(K) \subseteq \mathscr{R}(K) \subseteq \mathscr{A}(K) \subseteq C(K). \tag{15.3}$$

Алгебру $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$, где $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный круг (диск), называют иногда *дисковой алгеброй.*

Вопрос о равенстве каких-либо алгебр в цепочке (15.3) — это, как правило, довольно тонкая задача теории аппроксимации. Некоторые примеры на эту тему содержатся в листке 12.

Еще один важный класс банаховых алгебр — так называемые *свёрточные* алгебры, ассоциированные с группами и полугруппами. Их мы обсудим позже, когда будем изучать преобразование Фурье.

Напомним (см. §14.1), что через $A^\times$ мы обозначаем мультипликативную группу всех обратимых элементов унитальной алгебры $A$. Если $A$ — банахова алгебра, то группа $A^\times$ обладает рядом важных свойств, описанных в следующей теореме.

**Теорема 15.3.** *Пусть $A$ — унитальная банахова алгебра.*

(i) *Если $a \in A$ и $\|a\| < 1$, то $1 - a \in A^\times$ и $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty a^n$.*
(ii) *Множество $A^\times$ открыто в $A$.*
(iii) *Отображение $A^\times \to A^\times$, $a \mapsto a^{-1}$, непрерывно.*

*Доказательство.* (i) Поскольку $\sum_{k=0}^n \|a^k\| \leqslant \sum_{k=0}^n \|a\|^k$, а алгебра $A$ полна, мы видим, что указанный в (i) ряд сходится в $A$ при $\|a\| < 1$ к некоторому $b \in A$. Для каждого $n$ положим $b_n = \sum_{k=0}^n a^k$. Легко проверить, что $(1-a)b_n = b_n(1-a) = 1 - a^{n+1}$. При $n \to \infty$ получаем $(1-a)b = b(1-a) = 1$, т.е. $b = (1-a)^{-1}$, как и требовалось.

(ii) Для каждого $a \in A^\times$ отображение $L_a \colon A \to A$, $b \mapsto ab$, является гомеоморфизмом алгебры $A$ на себя и переводит $A^\times$ в $A^\times$. В силу (i), $A^\times$ содержит окрестность единицы $U = \{b \in A : \|b - 1\| < 1\}$. Следовательно, множество $L_a(U)$ — окрестность $a$, содержащаяся в $A^\times$.

(iii) Проверим, что отображение $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в единице. Возьмем произвольный элемент $a \in A$, удовлетворяющий условию $\|a - 1\| < 1$, и положим $b = 1 - a$. Из (i) следует, что $a$ обратим и

$$\|a^{-1} - 1\| = \|(1-b)^{-1} - 1\| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \|b\|^n = \frac{\|b\|}{1 - \|b\|}.$$

Последнее выражение, очевидно, стремится к 0 при $b \to 0$, т.е. при $a \to 1$. Это и означает, что отображение $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в единице. Остается воспользоваться следующим общим фактом.

**Упражнение 15.1.** Пусть $G$ — группа, снабженная топологией, причем операция умножения $G \times G \to G$ непрерывна, а операция взятия обратного элемента $G \to G$ непрерывна в единице. Докажите, что операция взятия обратного элемента непрерывна всюду на $G$. □

В качестве приложения установим один результат об «автоматической непрерывности». Вначале дадим следующее определение.

**Определение 15.2.** Пусть $A$ — алгебра над $\mathbb{C}$. Гомоморфизмы из $A$ в $\mathbb{C}$ называются ее *характерами.*

**Замечание 15.2.** Нетрудно проверить (проверьте!), что сюръективный гомоморфизм унитальных алгебр унитален. Как следствие, ненулевой характер унитальной алгебры унитален.

**Следствие 15.4.** *Любой характер унитальной банаховой алгебры непрерывен, и его норма не превосходит единицы.*

*Доказательство.* Если характер $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ разрывен, или же если он непрерывен, но $\|\chi\| > 1$, то существует такой элемент $a \in A$, $\|a\| < 1$, что $\chi(a) = 1$. По теореме 15.3 элемент $1 - a$ обратим. Следовательно, таков же и элемент $\chi(1 - a) \in \mathbb{C}$. Но последний элемент равен нулю. Противоречие. □

**Замечание 15.3.** Следствие 15.4 — это простейший пример ситуации, когда непрерывность того или иного отображения между банаховыми алгебрами автоматически следует из его алгебраических свойств. Такие явления «автоматической непрерывности» (гомоморфизмов, дифференцирований, коциклов...) встречаются в теории банаховых алгебр довольно часто. На эту тему написано большое количество статей и несколько обширных монографий (см., например, H. G. Dales, “Banach Algebras and Automatic Continuity”, Oxford, 2000).

## 15.2. Спектр элемента банаховой алгебры

Наша ближайшая цель — показать, что спектр элемента любой унитальной банаховой алгебры компактен и непуст.

**Теорема 15.5.** *Пусть $A$ — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Тогда*

(i) *$\sigma(a)$ — компактное подмножество в $\mathbb{C}$;*
(ii) *для любого $\lambda \in \sigma(a)$ имеем $|\lambda| \leqslant \|a\|$.*

*Доказательство.* Начнем с утверждения (ii). Если $|\lambda| > \|a\|$, то $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, поэтому элемент $1-\lambda^{-1}a$ обратим по теореме 15.3. Значит, и элемент $a-\lambda 1$ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(a)$. Это доказывает (ii) и, как следствие, ограниченность спектра $\sigma(a)$. Осталось доказать его замкнутость. Для этого рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{C} \to A$, $\varphi(\lambda) = a - \lambda 1$, и заметим, что резольвентное множество $\rho(a) = \varphi^{-1}(A^\times)$ открыто ввиду непрерывности отображения $\varphi$ и теоремы 15.3. Следовательно, множество $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ замкнуто, как и требовалось. □

Для доказательства непустоты спектра введем следующее понятие.

**Определение 15.3.** Пусть $A$ — унитальная банахова алгебра. *Резольвентной функцией* элемента $a \in A$ называется функция $R_a\colon \rho(a) \to A,\ R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$.

**Лемма 15.6.** *Функция $R_a$ непрерывна на $\rho(a)$, и $\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_a(\lambda) = 0$.*

*Доказательство.* Непрерывность функции $R_a$ сразу следует из непрерывности взятия обратного элемента в $A^\times$ (теорема 15.3). Далее,

$$\|R_a(\lambda)\| = \|(a - \lambda 1)^{-1}\| = |\lambda|^{-1} \|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\|.$$

Первый сомножитель в последнем выражении стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, а второй — к единице в силу непрерывности взятия обратного элемента. Дальнейшее очевидно. ☐

Оказывается, резольвентная функция не только непрерывна, но и голоморфна в следующем смысле.

**Определение 15.4.** Пусть $X$ — банахово пространство, а $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество. Функция $\varphi\colon U \to X$ называется *голоморфной*, если для каждого $z_0 \in U$ существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}$. Этот предел называется *производной* функции $\varphi$ в точке $z_0$ и обозначается $\varphi'(z_0)$.

**Замечание 15.4.** Легко видеть, что если $\varphi\colon U \to X$ — голоморфная функция, то для любого $f \in X^*$ функция $f \circ \varphi\colon U \to \mathbb{C}$ голоморфна в обычном смысле и $(f \circ \varphi)'(z) = f(\varphi'(z))$ для всех $z \in U$. Верно и обратное утверждение (т.е. из голоморфности функции $f \circ \varphi$ для всех $f \in X^*$ следует голоморфность функции $\varphi$), но оно нам не понадобится.

**Предложение 15.7** (тождество Гильберта)**.** *Резольвентная функция удовлетворяет тождеству $R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda - \mu)R_a(\lambda)R_a(\mu)$.*

*Доказательство.* Достаточно домножить обе части равенства на $a - \lambda 1$ и на $a - \mu 1$. ☐

Из тождества Гильберта с учетом непрерывности резольвентной функции получаем следующий результат.

**Предложение 15.8.** *Резольвентная функция $R_a$ голоморфна на $\rho(a)$, и $R_a'(z) = R_a(z)^2$ для любого $z \in \rho(a)$.*

Теперь у нас все готово для доказательства непустоты спектра.

**Теорема 15.9.** *Спектр любого элемента ненулевой унитальной банаховой алгебры непуст.*

*Доказательство.* Предположим противное; пусть $\sigma(a) = \varnothing$. Зафиксируем функционал $f \in A^*$ и положим $\varphi_f = f \circ R_a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Из предложения 15.8, замечания 15.4 и леммы 15.6 следует, что $\varphi_f$ — это целая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля $\varphi_f \equiv 0$. Поскольку функционал $f$ произволен, отсюда и из следствия 9.5 теоремы Хана–Банаха получаем, что $R_a(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. С другой стороны, элемент $R_a(\lambda)$ обратим. Противоречие. ☐

Вот одно простое, но интересное приложение.

**Теорема 15.10** (Гельфанд, Мазур)**.** *Пусть $A$ — ненулевая банахова алгебра с делением (т.е. унитальная банахова алгебра, в которой любой ненулевой элемент обратим). Тогда $A$ изоморфна $\mathbb{C}$.*

*Доказательство.* Возьмем произвольный элемент $a \in A$. Поскольку $\sigma(a) \neq \varnothing$, элемент $a - \lambda 1$ необратим для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Следовательно, $a - \lambda 1 = 0$, т.е. $a = \lambda 1$. Ввиду произвольности элемента $a \in A$ получаем $A = \mathbb{C}1$, как и требовалось. $\square$

**Замечание 15.5.** Теорема Гельфанда–Мазура имеет следующую разновидность для банаховых алгебр над $\mathbb{R}$: *ненулевая банахова $\mathbb{R}$-алгебра с делением изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо телу кватернионов $\mathbb{H}$.* В такой формулировке теорема Гельфанда–Мазура обобщает классическую теорему Фробениуса о конечномерных $\mathbb{R}$-алгебрах с делением. Доказательство можно прочитать, например, в книге C. E. Rickart, “General Theory of Banach Algebras”.

А. Ю. Пирковский

# Функциональный анализ
# Лекция 16

## 16.1. Спектральный радиус

Пусть $A$ — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент.

**Определение 16.1.** Число $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ называется *спектральным радиусом* элемента $a \in A$.

Поскольку $\sigma(a)$ — непустой компакт в $\mathbb{C}$, спектральный радиус любого элемента определен, конечен и является радиусом наименьшего замкнутого круга с центром в нуле, содержащего $\sigma(a)$.

**Наблюдение 16.1.** Из теоремы 15.5 (ii) следует, что $r(a) \leqslant \|a\|$.

**Пример 16.1.** Легко видеть, что в алгебре $A = \ell^\infty(X)$ для любого $a \in A$ справедливо равенство $r(a) = \|a\|$. То же самое верно и в любой ее спектрально инвариантной подалгебре — в частности, в алгебрах $C_b(X)$ и $B_{\mathscr{A}}(X)$ (см. пример 14.4).

**Пример 16.2.** Пусть $A = \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$, где пространство $\mathbb{C}^n$ снабжено обычной евклидовой нормой $\|\cdot\|_2$ (см. пример 1.4). Пусть $T$ — оператор в $\mathbb{C}^n$, матрица которого в каком-либо ортонормированном базисе диагональна. Легко проверить (ср. предложение 2.6), что норма $\|T\|$ равна наибольшему из модулей его собственных значений. Следовательно, $r(T) = \|T\|$.

Через несколько лекций мы обобщим этот «игрушеченый» пример на случай так называемых *нормальных* операторов в гильбертовом пространстве.

В общем случае равенство $r(a) = \|a\|$ может и не выполняться:

**Пример 16.3.** Пусть $A = \mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$, и пусть оператор $T$ в каком-либо базисе записывается матрицей $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $\sigma(T) = \{0\}$, поэтому и $r(T) = 0$; с другой стороны, $\|T\| \neq 0$. На самом деле аналогичное явление имеет место для любого ненулевого нильпотентного элемента (см. листок 11).

Докажем теперь полезную формулу, выражающую спектральный радиус в терминах нормы.

**Теорема 16.2** (формула Бёрлинга)**.** *Пусть $A$ — унитальная банахова алгебра, и пусть $a \in A$. Тогда*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{1/n}. \tag{16.1}$$

*Доказательство.* Достаточно установить, что

$$r(a) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{1/n} \quad \text{и} \quad r(a) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}; \tag{16.2}$$

отсюда будет следовать как существование указанного в формулировке предела, так и его совпадение с $r(a)$.

Если $\lambda \in \sigma(a)$, то $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ ввиду теоремы об отображении спектра. Поэтому $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$ и $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{1/n}$. Взяв inf по $n \in \mathbb{N}$, а затем sup по $\lambda \in \sigma(a)$, получаем неравенство $r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n}$.

Для доказательства второго неравенства возьмем круг $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1/r(a)\}$ (если $r(a) = 0$, то $D = \mathbb{C}$), зафиксируем функционал $f \in A^*$ и заметим, что функция

$$\psi_f(\lambda) = f\bigl((1 - \lambda a)^{-1}\bigr)$$

определена всюду на $D$. Напомним, что функция $\lambda \mapsto (1 - \lambda a)^{-1} = -\lambda^{-1} R_a(\lambda^{-1})$ голоморфна в $D \setminus \{0\}$ (см. предложение 15.8) и стремится к 1 при $\lambda \to 0$ (см. теорему 15.3). Следовательно, функция $\psi_f$ голоморфна в $D$ (по теореме об устранимой особенности) и поэтому разлагается в ряд Тейлора: $\psi_f(\lambda) = \sum_n c_n \lambda^n$ для всех $\lambda \in D$.

Если $|\lambda| < 1/\|a\|$, то $(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_n (\lambda a)^n$ (см. теорему 15.3). Поэтому $\psi_f(\lambda) = \sum_n f(a^n)\lambda^n$ для всех таких $\lambda$. Пользуясь единственностью ряда Тейлора, заключаем, что $c_n = f(a^n)$ для всех $n$.

Зафиксируем произвольное $\lambda \in D$, $\lambda \neq 0$. Поскольку ряд $\sum_n f(a^n)\lambda^n$ сходится, последовательность $\{f(a^n)\lambda^n\}$ ограничена. Применяя следствие 11.8 из теоремы Банаха–Штейнгауза, видим, что последовательность $\{\lambda^n a^n\}$ ограничена в $A$, т.е. $\|\lambda^n a^n\| \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ и всех $n$. Переписывая полученное неравенство в виде $\|a^n\|^{1/n} \leqslant C^{1/n}/|\lambda|$ и переходя к верхнему пределу, получаем $\overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant 1/|\lambda|$. Ввиду произвольности точки $\lambda \in D \setminus \{0\}$ отсюда следует, что $\overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$, как и требовалось.

Итак, оба неравенства (16.2) установлены, и теорема доказана. □

**Замечание 16.1.** Вы, наверное, заметили, что формула Бёрлинга напоминает формулу Коши–Адамара из комплексного анализа. В этом нет ничего удивительного: на самом деле основные утверждения о рядах Лорана голоморфных функций можно перенести (попробуйте это сделать!) на случай функций со значениями в банаховом пространстве. В частности, если $X$ — банахово пространство, то всякая голоморфная в кольце $D_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ функция $f\colon D_{r,R} \to X$ разлагается в $D_{r,R}$ в ряд Лорана $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ (где $c_n \in X$). Если при этом $f$ не продолжается до голоморфной функции в большем кольце, то радиусы $r$ и $R$ можно вычислить по формулам Коши–Адамара

$$R = \Bigl(\varlimsup_{n\to+\infty} \|c_n\|^{1/n}\Bigr)^{-1}, \quad r = \varlimsup_{n\to+\infty} \|c_{-n}\|^{1/n}. \tag{16.3}$$

Используя эти факты, можно получить простое доказательство формулы Бёрлинга. В самом деле, резольвентная функция $R_a$ элемента $a$ унитальной банаховой алгебры $A$ голоморфна в кольце $D_{r(a),\infty}$ и, как нетрудно проверить, не продолжается до голоморфной функции в большем кольце. С другой стороны, при $|\lambda| > \|a\|$ имеем разложение

$$R_a(\lambda) = -\lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1}a)^{-1} = -\sum_{n\geqslant 0} a^n \lambda^{-n-1}.$$

Следовательно, это же разложение имеет место и при $|\lambda| > r(a)$, и из (16.3) следует, что $r(a) = \overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n}$. Вместе с неравенством $r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n}$, которое составляет «простую часть» доказательства формулы Бёрлинга (см. выше), это дает нужное равенство (16.1).

**Следствие 16.3.** *Для $a \in A$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\sigma(a) = \{0\}$;
(ii) $r(a) = 0$;
(iii) $\|a^n\| = o(\varepsilon^n)$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *(т.е. нормы степеней элемента* $a$ *стремятся к нулю быстрее, чем любая геометрическая прогрессия).*

**Определение 16.2.** Элемент $a \in A$, удовлетворяющий эквивалентным условиям следствия 16.3, называется *квазинильпотентным.*

Для сравнения напомним, что элемент $a \in A$ называется *нильпотентным*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Разумеется, всякий нильпотентный элемент квазинильпотентен, однако обратное неверно. Вот классический пример.

**Упражнение 16.1.** Пусть $I = [a, b]$ и $K \in L^2(I \times I)$. *Интегральный оператор Вольтерра* $V_K \colon L^2(I) \to L^2(I)$ задается формулой

$$(V_K f)(x) = \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy.$$

(i) Докажите, что если $K$ ограничена, то $V_K$ квазинильпотентен.
(ii)* Докажите, что $V_K$ квазинильпотентен для любой $K \in L^2(I \times I)$.

Операторы Вольтерра образуют важный и довольно хорошо изученный класс линейных операторов. В частности, они играют важную роль в теории интегральных уравнений, описывающих различные физические процессы. То, что оператор Вольтерра квазинильпотентен, означает в точности, что для любой функции $g \in L^2(I)$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$ *интегральное уравнение Вольтерра второго рода* $f = \lambda V_K f + g$ с неизвестной функцией $f \in L^2(I)$ имеет единственное решение.

Еще одно полезное следствие формулы Бёрлинга заключается в том, что при «уменьшении» алгебры $A$ спектральный радиус ее элемента остается прежним (напомним, что сам спектр может при этом увеличиться; см., например, листок 12).

**Следствие 16.4.** *Пусть $A$ — унитальная банахова алгебра, $B \subseteq A$ — замкнутая подалгебра, причем $1_A \in B$. Тогда $r_B(b) = r_A(b)$ для любого $b \in B$.*

Более точная информация о том, насколько $\sigma_B(b)$ может быть больше, чем $\sigma_A(b)$, содержится в листке 13.

## 16.2. Спектры ограниченных операторов. Части спектра

От общих банаховых алгебр перейдем теперь к алгебре $\mathscr{B}(X)$ ограниченных операторов в банаховом пространстве $X$. Наша ближайшая задача — вычислить спектры некоторых классических операторов, обсудить несколько общих приемов вычисления спектра и попутно понять, на какие части естественно разбить спектр линейного оператора.

**Предложение 16.5.** *Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или $X = c_0$, $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$ и $M_\alpha \colon X \to X$ — диагональный оператор (см. пример 2.2). Тогда $\sigma(M_\alpha) = \overline{\{\alpha_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$.*

*Доказательство.* Обозначим, как обычно, через $e_n$ последовательность с единицей на $n$-ом месте и нулем на остальных. Очевидно, $M_\alpha e_n = \alpha_n e_n$. Отсюда с учетом замкнутости спектра следует, что $\overline{\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \subseteq \sigma(M_\alpha)$. Для доказательства обратного включения заметим, что отображение

$$\varphi\colon \ell^\infty \to \mathscr{B}(X), \quad \varphi(\alpha) = M_\alpha,$$

является унитальным гомоморфизмом и поэтому не увеличивает спектр (предложение 14.2). Таким образом,

$$\sigma(M_\alpha) = \sigma_{\mathscr{B}(X)}(\varphi(\alpha)) \subseteq \sigma_{\ell^\infty}(\alpha) = \overline{\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$$

(см. пример 14.4). Это завершает доказательство. □

Полученный результат можно обобщить следующим образом.

**Предложение 16.6.** *Пусть $(\Omega, \mu)$ — пространство с мерой*[1]*, $X = L^p(\Omega, \mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ и $M_f\colon X \to X$ — оператор умножения (см. пример 2.5). Тогда спектр $\sigma(M_f)$ равен множеству существенных значений функции $f$.*

*Доказательство.* Как и в предыдущем предложении, имеем унитальный гомоморфизм

$$\varphi\colon L^\infty(\Omega, \mu) \to \mathscr{B}(X), \quad \varphi(f) = M_f.$$

Напомним, что $\sigma_{L^\infty}(f)$ — это в точности множество существенных значений функции $f$ (см. пример 14.5). Поэтому, чтобы доказать требуемое равенство, остается проверить, что гомоморфизм $\varphi$ переводит необратимые элементы алгебры $L^\infty(\Omega, \mu)$ в необратимые операторы (см. предложение 14.2).

Итак, пусть $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ — необратимый элемент. Это означает в точности, что 0 — существенное значение функции $f$, т.е. $\mu(f^{-1}(U)) > 0$ для любой окрестности нуля $U \subseteq \mathbb{C}$. Для каждого $\delta > 0$ выберем измеримое подмножество $E_\delta \subseteq \Omega$ так, чтобы $0 < \mu(E_\delta) < \infty$ и $|f(x)| < \delta$ для всех $x \in E_\delta$. Тогда функция $\chi_\delta = \chi_{E_\delta}$ лежит в $X$, причем $\chi_\delta \neq 0$ в $X$. Нетрудно проверить (проверьте!), что $\|M_f \chi_\delta\| \leqslant \delta \|\chi_\delta\|$ (см. пример 2.5). Следовательно, оператор $M_f$ не топологически инъективен, а значит, необратим. □

Если внимательно посмотреть на разобранные выше примеры, то может возникнуть естественное желание разбить спектр оператора $T$ на несколько частей в зависимости от того, по какой причине соответствующий оператор $T - \lambda\mathbf{1}$ необратим.

Вообще, пусть $S$ — произвольный ограниченный оператор в банаховом пространстве $X$. Почему он может оказаться необратимым? Во-первых, может оказаться, что $\operatorname{Ker} S \neq 0$ (в конечномерном случае этим все и исчерпывается — инъективный оператор в конечномерном пространстве обратим). Во-вторых, возможен случай, когда $\operatorname{Ker} S = 0$, но $\operatorname{Im} S \neq X$ (приведите пример!). Его удобно разбить на два подслучая: либо $\operatorname{Im} S$ плотен в $X$, либо нет. В применении к оператору $S = T - \lambda\mathbf{1}$ это приводит к следующему определению.

[1]Как обычно, мы не предполагаем, что мера $\mu$ конечна, однако будем требовать, чтобы каждое измеримое подмножество в $\Omega$ положительной меры содержало измеримое подмножество конечной положительной меры. Этим свойством обладают все «приличные» меры — в частности, все $\sigma$-конечные меры. Если не требовать выполнения этого условия, то доказываемое утверждение перестает быть верным — приведите пример!

**Определение 16.3.** *Точечным спектром* оператора $T \in \mathscr{B}(X)$ называется множество

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}) \neq 0\}.$$

*Непрерывным спектром* оператора $T$ называется множество

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda \mathbf{1})} = X,\ \operatorname{Im}(T - \lambda \mathbf{1}) \neq X\}.$$

Наконец, *остаточным спектром* оператора $T$ называется множество

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda \mathbf{1})} \neq X\}.$$

Очевидно, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \sqcup \sigma_c(T) \sqcup \sigma_r(T)$. Заметим, что точечный спектр $\sigma_p(T)$ — это в точности множество собственных значений оператора $T$. Если пространство $X$ конечномерно, то $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, а $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ пусты. Посмотрим, что происходит в бесконечномерном случае.

**Предложение 16.7.** *Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или $X = c_0$, $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$ и $M_\alpha \colon X \to X$ — диагональный оператор (см. пример 2.2). Тогда $\sigma_p(M_\alpha) = \{\alpha_n\}$, $\sigma_c(M_\alpha) = \overline{\{\alpha_n\}} \setminus \{\alpha_n\}$ и $\sigma_r(M_\alpha) = \varnothing$.*

*Доказательство.* Поскольку $M_\alpha e_n = \alpha_n e_n$, справедливо включение $\{\alpha_n\} \subseteq \sigma_p(M_\alpha)$. Пусть теперь $\lambda \in \sigma(M_\alpha) \setminus \{\alpha_n\}$. Заметим, что $M_\alpha - \lambda \mathbf{1} = M_\beta$, где $\beta_n = \alpha_n - \lambda$. Поскольку $\beta_n \neq 0$ для всех $n$, оператор $M_\beta$ инъективен, т.е. $\lambda \notin \sigma_p(M_\alpha)$. С другой стороны, вектор $e_n = \beta_n^{-1} M_\beta(e_n)$ лежит в $\operatorname{Im} M_\beta$ для всех $n$. Но линейная оболочка векторов $e_n$ ($n \in \mathbb{N}$) плотна в $X$; значит, и $\operatorname{Im} M_\beta$ плотен в $X$, а это и означает, что $\lambda \in \sigma_c(M_\alpha)$. $\square$

При вычислении спектра часто бывает полезно использовать соображения подобия:

**Предложение 16.8.** *Пусть $X, Y$ — банаховы пространства. Предположим, что операторы $S \in \mathscr{B}(X)$ и $T \in \mathscr{B}(Y)$ подобны (см. определение 7.4). Тогда $\sigma(S) = \sigma(T)$, $\sigma_p(S) = \sigma_p(T)$, $\sigma_c(S) = \sigma_c(T)$ и $\sigma_r(S) = \sigma_r(T)$.*

Доказательство этого предложения — простая проверка (проведите ее!).

В качестве иллюстрации вычислим спектр оператора двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$ (см. пример 2.3).

**Предложение 16.9.** *Пусть $T_b \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ — оператор двустороннего сдвига. Тогда $\sigma(T_b) = \mathbb{T}$.*

*Доказательство.* Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ рассмотрим функцию $f_n(z) = z^n$ ($z \in \mathbb{T}$). Как уже отмечалось в примере 6.7, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{T})$. Сопоставляя каждой функции из $L^2(\mathbb{T})$ последовательность ее коэффициентов Фурье относительно этого базиса, мы получаем унитарный изоморфизм $U \colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ (см. теорему 6.8), переводящий ортонормированный базис $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в стандартный ортонормированный базис $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ пространства $\ell^2(\mathbb{Z})$. Следовательно, оператор $T_b$ унитарно эквивалентен оператору $S = U^{-1} T_b U$ в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Так как $T_b e_n = e_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то и $S f_n = f_{n+1} = f_1 f_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, оператор $S$ действует на базисе $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ так же, как и оператор умножения $M_{f_1}$ на функцию $f_1$. Отсюда заключаем, что $S = M_{f_1}$. Применяя предложения 16.8 и 16.6 и пользуясь тем, что множество существенных значений непрерывной функции — это просто множество ее значений (см. листок 11), получаем равенства $\sigma(T_b) = \sigma(M_{f_1}) = \mathbb{T}$. $\square$

Следующая серия приемов вычисления спектра основана на теории двойственности, т.е. на обсуждавшихся в лекции 13 взаимосвязях между свойствами оператора и свойствами его сопряженного.

**Предложение 16.10.** *Пусть $X$ — банахово пространство и $T \in \mathscr{B}(X)$. Тогда $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.*

*Доказательство.* Мы знаем (см. теорему 13.10), что оператор $T \in \mathscr{B}(X)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $T^* \in \mathscr{B}(X^*)$. Остается применить это утверждение к оператору $T - \lambda \mathbf{1}_X$. □

Исследуем теперь соотношения между частями спектра операторов $T$ и $T^*$, т.е. между их точечными, непрерывными и остаточными спектрами.

**Предложение 16.11.** *Пусть $X$ — банахово пространство и $T \in \mathscr{B}(X)$. Тогда*

(i) $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;
(ii) $\sigma_c(T) \subseteq \sigma_c(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;
(iii) $\sigma_r(T) \subseteq \sigma_p(T^*)$;
(iv) $\sigma_p(T^*) \subseteq \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$;
(v) $\sigma_c(T^*) \subseteq \sigma_c(T)$;
(vi) $\sigma_r(T^*) \subseteq \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$.

*Если же пространство $X$ рефлексивно, то*

(vii) $\sigma_c(T) = \sigma_c(T^*)$;
(viii) $\sigma_r(T^*) \subseteq \sigma_p(T)$.

*Доказательство.* Достаточно применить следствие 13.9 к оператору $T - \lambda \mathbf{1}_X$. □

В качестве иллюстрации вычислим непрерывный, точечный и остаточный спектры операторов правого и левого сдвига.

**Предложение 16.12.** *Пусть $1 < p < \infty$, и пусть $T_r, T_\ell \in \mathscr{B}(\ell^p)$ — операторы правого и левого сдвига. Положим*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}, \quad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

*Тогда*

(i) $\sigma(T_r) = \sigma(T_\ell) = \overline{\mathbb{D}}$;
(ii) $\sigma_p(T_r) = \varnothing, \quad \sigma_c(T_r) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T_r) = \mathbb{D}$;
(iii) $\sigma_p(T_\ell) = \mathbb{D}, \quad \sigma_c(T_\ell) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T_\ell) = \varnothing$.

*Доказательство.* Во-первых, заметим, что

$$\sigma(T_r) \subseteq \overline{\mathbb{D}}, \quad \sigma(T_\ell) \subseteq \overline{\mathbb{D}}, \tag{16.4}$$

поскольку $\|T_\ell\| = \|T_r\| = 1$. Найдем теперь точечные спектры наших операторов. Заметим, что

$$T_r x = \lambda x \iff (0 = \lambda x_1) \,\&\, (x_n = \lambda x_{n+1} \ \forall n) \iff x = 0,$$

поэтому

$$\sigma_p(T_r) = \varnothing. \tag{16.5}$$

С другой стороны,

$$T_\ell x = \lambda x \iff x_{n+1} = \lambda x_n \ \forall n \iff x_n = x_1 \lambda^{n-1} \ \forall n,$$

поэтому вектор $x \neq 0$ является собственным для $T_\ell$ с собственным значением $\lambda$ тогда и только тогда, когда последовательность $(\lambda^{n-1})$ лежит в $\ell^p$, т.е. когда $|\lambda| < 1$. Следовательно,

$$\sigma_p(T_\ell) = \mathbb{D}. \tag{16.6}$$

Пусть теперь число $q$ таково, что $1/p + 1/q = 1$. Операторы $T_\ell, T_r \colon \ell^p \to \ell^p$ нам в дальнейшем будет удобно обозначать через $T_\ell^{(p)}$ и $T_r^{(p)}$ соответственно. Напомним (см. предложение 7.5), что $(T_\ell^{(p)})^* \cong T_r^{(q)}$ и $(T_r^{(p)})^* \cong T_\ell^{(q)}$ (здесь символ $\cong$ означает изометрическую эквивалентность). Применяя предложения 16.8 и 16.11, получаем следующую цепочку включений:

$$\mathbb{D} \overset{(16.6)}{=} \sigma_p(T_\ell^{(q)}) \subseteq \sigma_p(T_r^{(p)}) \cup \sigma_r(T_r^{(p)}) \overset{(16.5)}{=} \sigma_r(T_r^{(p)}) \subseteq \sigma_p(T_\ell^{(q)}) \overset{(16.6)}{=} \mathbb{D}.$$

Следовательно,

$$\sigma_r(T_r) = \mathbb{D}. \tag{16.7}$$

Из (16.4), (16.6) и (16.7) с учетом замкнутости спектра сразу следует утверждение (i). Далее, из (16.5) и (16.7) с учетом (i) следует, что

$$\sigma_c(T_r) = \mathbb{T},$$

откуда с учетом п. (vii) предложения 16.11 получаем равенство

$$\sigma_c(T_\ell) = \mathbb{T}. \tag{16.8}$$

Наконец, из (16.8), (16.6) и (i) получаем оставшееся равенство $\sigma_r(T_\ell) = \varnothing$. $\square$

Полезное упражнение — доказать предложение 16.12 «в лоб», т.е. не используя соображений двойственности. Задача вполне решаемая, но, согласитесь, с двойственностью все выглядит куда проще и красивее.

Разобранные выше примеры — лишь небольшая часть в серии задач о вычислении спектров классических операторов. Несколько других важных примеров — упражнения из листка 13; обязательно постарайтесь их сделать!

# А. Ю. Пирковский

# Функциональный анализ

# Лекция 17

Наша ближайшая стратегическая задача — познакомиться с двумя важными классами линейных операторов, а именно, *компактными* и *фредгольмовыми* операторами. Компактные операторы были впервые введены в работах Ф. Рисса в 1910-х гг., т.е. на самой заре функционального анализа. Фредгольмовы операторы заметно моложе, впервые они появились в работах Ж. Дьедонне, Ф. Аткинсона и С. М. Никольского в 1940-х гг. Компактные и фредгольмовы операторы в определенном смысле противоположны друг другу по своим свойствам: интуитивно, компактные операторы — «маленькие», а фредгольмовы — «большие». Несмотря на это, между этими двумя разновидностями линейных операторов есть тесная связь, поэтому изучать их удобно одновременно.

Прежде чем переходить к изучению компактных и фредгольмовых операторов, нам понадобится ненадолго отвлечься от функционального анализа и обсудить некоторые общие факты о компактных метрических пространствах.

## 17.1. Компактные метрические пространства

**Определение 17.1.** Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство, $Y \subseteq X$ и $\varepsilon > 0$. Подмножество $S \subseteq X$ называется *$\varepsilon$-сетью для $Y$*, если для каждого $y \in Y$ найдется такой $s \in S$, что $\rho(y, s) < \varepsilon$. Если $Y = X$, то $S$ называется *$\varepsilon$-сетью* в $X$.

**Пример 17.1.** Целочисленная решетка $\mathbb{Z}^2$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ является $\varepsilon$-сетью, если $\varepsilon > 1/\sqrt{2}$.

**Определение 17.2.** Метрическое пространство $X$ называется *вполне ограниченным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ в $X$ существует конечная $\varepsilon$-сеть.

Иначе говоря, метрическое пространство вполне ограничено, если оно покрывается конечным числом шаров сколь угодно малого радиуса.

**Замечание 17.1.** По-английски “вполне ограниченное” будет “totally bounded”; не следует путать этот термин с “completely bounded”, который, хотя и переводится на русский язык точно так же, имеет совершенно другой смысл. Впрочем, путаницы здесь быть не должно, т.к. термин “totally bounded” относится к метрическим пространствам, а “completely bounded” — к линейным операторам. Вполне ограниченные операторы нам в этом курсе не встретятся; они изучаются в сравнительно молодой и активно развивающейся области функционального анализа — теории операторных пространств (эту науку иногда еще называют «квантовым функциональным анализом»). Познакомиться с этой теорией можно по книге А. Я. Хелемского «Квантовый функциональный анализ»(М.: МЦНМО, 2009) или E. Effros, Z.-J. Ruan “Operator spaces” (Oxford, 2000).

**Наблюдение 17.1.** Легко видеть, что вполне ограниченное метрическое пространство ограничено (т.к. оно является конечным объединением шаров, а конечное объединение ограниченных множеств ограничено). Скоро мы увидим, что для подмножеств в $\mathbb{R}^n$ верно и обратное, но в общем случае — нет.

Если метрическое пространство $Y$ содержится в некотором большем метрическом пространстве $X$, то для того, чтобы $Y$ было вполне ограниченным, не обязательно, чтобы конечная $\varepsilon$-сеть из определения 17.2 содержалась в самом $Y$:

**Предложение 17.2.** *Подмножество $Y$ метрического пространства $X$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ в $X$ существует конечная $\varepsilon$-сеть для $Y$.*

*Доказательство.* Покроем $Y$ конечным числом шаров радиуса $\varepsilon/2$ и в каждом из них выберем по точке подмножества $Y$ (игнорируя те шары, которые не пересекаются с $Y$). Получим конечную $\varepsilon$-сеть в $Y$. □

**Следствие 17.3.** *Подмножество вполне ограниченного метрического пространства вполне ограничено.*

Вот еще одно простое наблюдение:

**Предложение 17.4.** *Подмножество $Y$ метрического пространства $X$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда вполне ограничено его замыкание.*

*Доказательство.* Любая $\varepsilon/2$-сеть в $Y$ будет $\varepsilon$-сетью в его замыкании. □

Установим теперь взаимосвязь между вполне ограниченными и компактными метрическими пространствами. Напомним, что топологическое пространство $X$ называется *секвенциально компактным*, если каждая последовательность в $X$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Из курса анализа вы знаете, что отрезок прямой и компактен, и секвенциально компактен (теорема Больцано–Вейерштрасса). В общем случае компактность и секвенциальная компактность — несравнимые понятия в том смысле, что ни одно из них не влечет второе (попробуйте привести соответствующие примеры). Тем не менее, для метрических пространств справедлива следующая теорема.

**Теорема 17.5.** *Следующие свойства метрического пространства $X$ эквивалентны:*

(i) *$X$ компактно;*
(ii) *$X$ секвенциально компактно;*
(iii) *$X$ вполне ограничено и полно.*

Доказательство этой теоремы удобно разбить на несколько этапов. Начнем с того, что дадим полезную характеризацию вполне ограниченных пространств в терминах последовательностей.

**Теорема 17.6.** *Следующие свойства метрического пространства $X$ эквивалентны:*

(i) *$X$ вполне ограничено;*
(ii) *каждая последовательность в $X$ имеет фундаментальную подпоследовательность;*
(iii) *каждая последовательность $(x_n)$ в $X$ обладает свойством $\inf\limits_{i \neq j} \rho(x_i, x_j) = 0$.*

*Доказательство.* (i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть $(x_n)$ — последовательность в $X$. Покроем $X$ конечным числом шаров радиуса 1. Хотя бы один из них содержит подпоследовательность $(x_n^{(1)})$ последовательности $(x_n)$. Затем покроем $X$ конечным числом шаров радиуса $1/2$ и найдем подпоследовательность $(x_n^{(2)})$ последовательности $(x_n^{(1)})$, содержащуюся в одном из этих шаров. Продолжая этот процесс, на $k$-м шаге получим подпоследовательность $(x_n^{(k)})$ последовательности $(x_n^{(k-1)})$, содержащуюся в шаре радиуса $1/k$. Легко видеть, что диагональная последовательность $y_n = x_n^{(n)}$ фундаментальна, поскольку для каждого $k \in \mathbb{N}$ все ее члены, начиная с $k$-го, содержится в шаре радиуса $1/k$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): очевидно.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Предположим, что $X$ не является вполне ограниченным, т.е. что для некоторого $\varepsilon > 0$ любая $\varepsilon$-сеть в $X$ бесконечна. Возьмем произвольную точку $x_1 \in X$. Поскольку $\{x_1\}$ — не $\varepsilon$-сеть, найдется такое $x_2 \in X$, что $\rho(x_2, x_1) \geqslant \varepsilon$. Множество $\{x_1, x_2\}$ также не является $\varepsilon$-сетью, поэтому для некоторого $x_3 \in X$ имеем $\rho(x_3, x_k) \geqslant \varepsilon$ для $k = 1, 2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $(x_n)$, у которой $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ для всех $i \neq j$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Из теоремы 17.6 легко следует эквивалентность пп. (ii) и (iii) теоремы 17.5:

**Следствие 17.7.** *Метрическое пространство секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и полно.*

*Доказательство.* Предположим, что метрическое пространство $X$ секвенциально компактно. Тогда, очевидно, выполняется п. (ii) теоремы 17.6, и поэтому $X$ вполне ограничено. Для доказательства полноты $X$ достаточно вспомнить, что фундаментальная последовательность, обладающая сходящейся подпоследовательностью, сама сходится.

Предположим теперь, что $X$ вполне ограничено и полно. Снова применяя теорему 17.6, видим, что всякая последовательность в $X$ обладает фундаментальной подпоследовательностью, которая сходится ввиду полноты $X$. Следовательно, $X$ секвенциально компактно. $\square$

Докажем теперь импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii) в теореме 17.5.

**Лемма 17.8.** *Компактное метрическое пространство секвенциально компактно.*

*Доказательство.* Пусть $(x_n)$ — последовательность точек компактного метрического пространства $X$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $F_n = \overline{\{x_k : k \geqslant n\}}$ и $U_n = X \setminus F_n$. Очевидно, $U_n$ открыто и $U_n \subseteq U_{n+1}$ для всех $n$. Покажем, что $\bigcap_n F_n \neq \varnothing$. В самом деле, в противном случае выполнялось бы равенство $\bigcup_n U_n = X$, и из компактности $X$ и возрастания $U_n$-ых следовало бы, что $U_N = X$ для некоторого $N$. Но тогда $F_N = \varnothing$, что невозможно. Следовательно, $\bigcap_n F_n \neq \varnothing$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in \bigcap_n F_n$. Из включения $x \in F_1$ следует, что $\rho(x, x_{n_1}) < 1$ для некоторого $n_1 \in \mathbb{N}$. Далее, поскольку $x \in F_{n_1+1}$, мы можем найти число $n_2 > n_1$ так, чтобы $\rho(x, x_{n_2}) < 1/2$. Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность $(x_{n_k})$ последовательности $(x_n)$, сходящуюся к $x$. $\square$

Доказательство оставшейся импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i) в теореме 17.5 проведем в четыре шага.

**Лемма 17.9.** *Вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно.*

*Доказательство.* Если $S_n$ — конечная $1/n$-сеть в $X$, то множество $\bigcup_n S_n$ не более чем счетно и плотно в $X$. $\square$

Напомним, что семейство $\mathscr{B}$ открытых множеств в топологическом пространстве $X$ называется *базой*, если каждое открытое подмножество пространства $X$ является объединением множеств из $\mathscr{B}$. Например, шары в метрическом пространстве образуют базу.

**Лемма 17.10.** *Сепарабельное метрическое пространство имеет счетную базу.*

*Доказательство.* Нетрудно проверить (проверьте!), что шары рациональных радиусов с центрами из счетного плотного подмножества образуют базу. $\square$

**Лемма 17.11.** *Пусть $X$ — топологическое пространство со счетной базой. Тогда каждое открытое покрытие пространства $X$ имеет не более чем счетное подпокрытие.*

*Доказательство.* Пусть $\mathscr{U}$ — открытое покрытие пространства $X$ и $\mathscr{B}$ — счетная база в $X$. Положим

$$\mathscr{B}_1 = \{B \in \mathscr{B} : B \subseteq U \text{ для некоторого } U \in \mathscr{U}\}.$$

Легко видеть, что $\mathscr{B}_1$ — не более чем счетное открытое покрытие пространства $X$. Для каждого $B \in \mathscr{B}_1$ зафиксируем произвольное множество $U_B \in \mathscr{U}$, содержащее $B$. Тогда $\{U_B : B \in \mathscr{B}_1\}$ — не более чем счетное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$. $\square$

**Лемма 17.12.** *Секвенциально компактное метрическое пространство компактно.*

*Доказательство.* Пусть $\mathscr{U}$ — открытое покрытие пространства $X$. Применяя следствие 17.7 и леммы 17.9–17.11, мы видим, что $\mathscr{U}$ имеет не более чем счетное подпокрытие. Не ограничивая общности, будем считать, что само $\mathscr{U}$ не более чем счетно. Предположим, что из $\mathscr{U}$ нельзя выбрать конечное подпокрытие, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем точку $x_n \in X \setminus \bigcup_{i \leqslant n} U_i$. Пусть $(x_{n_k})$ — подпоследовательность последовательности $(x_n)$, сходящаяся к точке $x \in X$. Поскольку $\mathscr{U}$ — покрытие $X$, для некоторого $m \in \mathbb{N}$ имеем $x \in U_m$. С другой стороны, $x_{n_k} \notin U_m$, как только $n_k \geqslant m$. Это противоречит сходимости $(x_{n_k})$ к $x$ и завершает доказательство. $\square$

Объединяя следствие 17.7, лемму 17.8 и лемму 17.12, получаем доказательство теоремы 17.5.

**Следствие 17.13.** *Метрическое пространство вполне ограничено тогда и только тогда, когда его пополнение компактно.*

*Доказательство.* Следует из предложения 17.4 и теоремы 17.5. $\square$

Напомним, что подмножество $Y$ топологического пространства $X$ называется *относительно компактным* в $X$, если замыкание $Y$ в $X$ компактно.

**Следствие 17.14.** *Подмножество полного метрического пространства вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно относительно компактно.*

# А. Ю. Пирковский

# Функциональный анализ

# Лекция 18

## 18.1. Компактные метрические пространства (продолжение)

В качестве простого следствия доказанной на прошлой лекции теоремы 17.5 мы получаем известный вам из курса анализа критерий компактности подмножества в $\mathbb{R}^n$:

**Следствие 18.1.** *Пусть $X$ — подмножество в $\mathbb{R}^n$ (где $\mathbb{R}^n$ снабжено евклидовой нормой).*

(i) *$X$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено.*
(ii) *$X$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

*Доказательство.* (i) Достаточно доказать, что куб $I$ в $\mathbb{R}^n$ вполне ограничен. Очевидно, для каждого $\varepsilon > 0$ куб $I$ можно представить в виде конечного объединения кубов с длиной ребра $< \varepsilon$. Но каждый из этих кубов в свою очередь покрывается шаром радиуса $< \varepsilon\sqrt{n}/2$. Следовательно, $I$ покрывается конечным числом шаров сколь угодно малого радиуса, а это и означает, что он вполне ограничен.

(ii) Следует из (i) и следствия 17.14. □

Напомним, что с помощью п. (ii) следствия 18.1 мы в свое время доказали эквивалентность норм на конечномерном векторном пространстве (см. предложение 1.5). Используя это утверждение, мы можем уточнить следствие 18.1 следующим образом.

**Следствие 18.2.** *Утверждения* (i) *и* (ii) *следствия* 18.1 *справедливы для подмножеств любого конечномерного нормированного пространства.*

Следующий пример показывает, что в бесконечномерной ситуации все устроено по-другому.

**Пример 18.1.** Пусть $E = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или $E = c_0$, и пусть $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ — сфера в $E$. Как обычно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $e_n \in S$ последовательность с единицей на $n$-м месте и нулем на остальных. Легко видеть, что $\|e_i - e_j\| = 2^{1/p}$ для всех $i \neq j$. Но во вполне ограниченном метрическом пространстве не может существовать бесконечного набора точек $(e_n)$ с таким свойством (см. п. (iii) теоремы 17.6). Следовательно, сфера $S$ не является вполне ограниченной и тем более не является компактной.

На самом деле ситуация, описанная в примере 18.1, является правилом, а не исключением. Скоро мы увидим, что ни в каком бесконечномерном нормированном пространстве сфера не является вполне ограниченной. Для этого нам понадобится следующее понятие, имеющее и самостоятельный интерес.

**Определение 18.1.** Пусть $X$ — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $\varepsilon \geqslant 0$. Вектор $h \in X$ называется *$\varepsilon$-перпендикуляром* к $X_0$, если $\|h\| = 1$ и $\rho(h, X_0) \geqslant 1 - \varepsilon$.

**Замечание 18.1.** Отметим, что условие $\|h\| = 1$ влечет неравенство $\rho(h, X_0) \leqslant 1$. Таким образом, $\varepsilon$-перпендикуляр — это такой единичный вектор, для которого 0 является «почти ближайшим» элементом подпространства $X_0$.

Следующий пример объясняет происхождение термина «$\varepsilon$-перпендикуляр».

**Пример 18.2.** Пусть $H$ — предгильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — векторное подпространство. Вектор $h \in H$ является 0-перпендикуляром к $H_0$ тогда и только тогда, когда $\|h\| = \rho(h, H_0) = 1$, т.е. когда $\|h\| = 1$ и ближайшим к $h$ элементом подпространства $H_0$ является 0. Согласно предложению 5.5 это равносильно тому, что $h \perp H_0$, т.е. $h$ — «настоящий» перпендикуляр к $H_0$. Напомним (см. теорему 5.9), что такой $h$ заведомо существует, если $H$ — гильбертово пространство, а $H_0$ — его собственное замкнутое векторное подпространство.

В общем случае 0-перпендикуляра к подпространству $X_0 \subsetneq X$ может и не существовать, даже если $X$ банахово и $X_0$ замкнуто в $X$ (см. листок 15). Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 18.3** (Рисс). *Пусть $X_0$ — векторное подпространство нормированного пространства $X$, не плотное в $X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в $X$ существует $\varepsilon$-перпендикуляр к $X_0$.*

*Доказательство.* Возьмем $y \in X \setminus \overline{X_0}$ и положим $d = \rho(y, X_0)$. Очевидно, $d > 0$. Для каждого $\delta > 0$ подберем $x_\delta \in X_0$ так, чтобы $\|y - x_\delta\| \leqslant d + \delta$, и положим

$$h_\delta = \frac{y - x_\delta}{\|y - x_\delta\|}.$$

Тогда $\|h_\delta\| = 1$, и для любого $x \in X_0$ имеем:

$$\|h_\delta - x\| = \frac{1}{\|y - x_\delta\|} \big\|y - (x_\delta + \|y - x_\delta\| x)\big\| \geqslant \frac{d}{d + \delta},$$

что больше $1 - \varepsilon$ при достаточно малом $\delta$. Значит, $h_\delta$ — $\varepsilon$-перпендикуляр к $X_0$. $\square$

**Следствие 18.4.** *Сфера в бесконечномерном нормированном пространстве не является вполне ограниченной и, следовательно, не является компактной.*

*Доказательство.* Поскольку наше пространство $X$ бесконечномерно, в нем существует возрастающая цепочка подпространств $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$, такая, что $\dim X_n = n$ для всех $n$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдем вектор $h_n \in X_{n+1}$, являющийся 1/2-перпендикуляром к $X_n$. Получим последовательность $(h_n)$ точек сферы $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, удовлетворяющую условию $\|h_i - h_j\| \geqslant 1/2$ при $i \neq j$. Применяя теорему 17.6, видим, что сфера $S$ не является вполне ограниченной. $\square$

Напомним, что топологическое пространство $X$ называется *локально компактным*, если каждая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно. Таковы, например, все конечномерные нормированные пространства, все их открытые и замкнутые подмножества, все конечномерные многообразия... Простейший пример топологического пространства, не являющегося локально компактным, — множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с унаследованной из $\mathbb{R}$ топологией.

**Следствие 18.5.** *Бесконечномерное нормированное пространство не является локально компактным.*

Следует иметь в виду, что вполне ограниченность (в отличие от компактности) не является топологическим свойством: например, интервал вполне ограничен, а гомеоморфная ему прямая — нет. Тем не менее, есть важный класс отображений, сохраняющих вполне ограниченность. С этими отображениями вы уже встречались в курсе анализа.

**Определение 18.2.** Пусть $X, Y$ — метрические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, выполнено неравенство $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Разумеется, всякое равномерно непрерывное отображение непрерывно, но не наоборот (см. курс анализа).

**Пример 18.3.** Если $X$ и $Y$ — нормированные пространства, то каждый непрерывный линейный оператор $T\colon X \to Y$ равномерно непрерывен. В самом деле, для любых $x, y \in X$ имеем $\|Tx - Ty\| \leqslant \|T\|\|x - y\|$, и в качестве нужного $\delta$ из определения 18.2 можно взять $\delta = \varepsilon/\|T\|$.

**Теорема 18.6** (Кантор). *Пусть $X$ — компактное, а $Y$ — произвольное метрические пространства. Тогда каждое непрерывное отображение из $X$ в $Y$ равномерно непрерывно.*

Доказательство ничем не отличается от известного вам случая $X = [a, b]$ и $Y = \mathbb{R}$, поэтому мы его опускаем.

**Предложение 18.7.** *Пусть $X$ и $Y$ — метрические пространства, причем $X$ вполне ограничено. Тогда для любого равномерно непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ его образ $f(X)$ вполне ограничен.*

*Доказательство.* Упражнение. □

**Замечание 18.2.** Предложение 18.7 полезно сравнить с близким по смыслу утверждением из топологии: непрерывный образ компакта — компакт.

Для проверки компактности подмножеств «классических» банаховых пространств существуют удобные критерии, опирающиеся на специфику этих пространств (см. листок 14). Один из таких критериев, известный как *теорема Арцела–Асколи*, мы сейчас докажем. Дадим сначала следующее определение.

**Определение 18.3.** Пусть $X, Y$ — метрические пространства. Семейство отображений $S$ из $X$ в $Y$ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, и для любого $f \in S$ выполнено неравенство $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

**Наблюдение 18.8.** Очевидно, если семейство $S$ равностепенно непрерывно, то каждое отображение $f \in S$ равномерно непрерывно. Если же пространство $X$ компактно, то из теоремы Кантора 18.6 следует, что всякое *конечное* семейство непрерывных отображений из $X$ в $Y$ равностепенно непрерывно.

**Теорема 18.9** (Арцела, Асколи)**.** *Пусть $X$ — компактное метрическое пространство. Подмножество $S \subset C(X)$ вполне ограничено (или, что эквивалентно, относительно компактно; см. следствие* 17.14*) тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

*Доказательство.* Предположим, что $S$ вполне ограничено, и для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем конечную $\varepsilon/3$-сеть $F$ в $S$. Из конечности $F$ и теоремы Кантора 18.6 следует, что $F$ равностепенно непрерывно (см. наблюдение 18.8). Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, и для любого $f \in F$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$. Возьмем теперь произвольную функцию $g \in S$ и подберем $f \in F$ так, чтобы $\|g - f\| < \varepsilon/3$. Тогда для любых точек $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, будем иметь

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Следовательно, $S$ равностепенно непрерывно.

Предположим теперь, что $S$ ограничено и равностепенно непрерывно. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы для всех точек $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, и для всех $f \in S$ выполнялось бы неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$. Пользуясь компактностью пространства $X$, выберем в нем конечную $\delta$-сеть $\{x_1, \ldots, x_n\}$, и рассмотрим отображение

$$\varphi\colon C(X) \to \mathbb{K}^n_\infty, \quad f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$$

(здесь, как обычно, $\mathbb{K}$ — это основное поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $\mathbb{K}^n_\infty$ — пространство $\mathbb{K}^n$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$ из примера 1.3). Очевидно, $\varphi$ — ограниченный линейный оператор, поэтому множество $\varphi(S) \subset \mathbb{K}^n_\infty$ ограничено, а значит, и вполне ограничено в силу следствия 18.2. Следовательно, существует такое конечное подмножество $F \subseteq S$, что $\varphi(F)$ — $\varepsilon/3$-сеть в $\varphi(S)$.

Покажем, что $F$ — $\varepsilon$-сеть в $S$. Для этого возьмем $g \in S$ и подберем $f \in F$ так, чтобы $\|\varphi(g) - \varphi(f)\|_\infty < \varepsilon/3$. Последнее неравенство означает в точности, что $|g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon/3$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Возьмем теперь $x \in X$ и найдем $j \in \{1, \ldots, n\}$ так, чтобы $\rho(x, x_j) < \delta$. Тогда

$$|g(x) - f(x)| \leqslant |g(x) - g(x_j)| + |g(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $x \in X$ это означает, что $\|g - f\| < \varepsilon$. Следовательно, $F$ — $\varepsilon$-сеть в $S$, как и утверждалось. $\square$

## 18.2. Компактные операторы

Закончив наш экскурс в теорию метрических пространств, вернемся к линейным операторам. Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства (как обычно, над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Напомним, что через $\mathbb{B}_{1,X}$ мы обозначаем замкнутый единичный шар в пространстве $X$.

**Определение 18.4.** Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *компактным*, если множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ относительно компактно (или, что эквивалентно, вполне ограничено; см. следствие 17.14) в $Y$.

**Замечание 18.3.** Если $Y$ — неполное нормированное пространство, то возникает сразу два (неэквивалентных!) определения компактного оператора: можно требовать, чтобы множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ было относительно компактно, а можно требовать, чтобы оно было вполне ограничено. Оба эти определения встречаются в литературе, так что будьте бдительны! Мы не будем заниматься такими тонкостями, а будем с самого начала рассматривать компактные операторы только между банаховыми пространствами.

Вот несколько простых фактов о компактных операторах, следующих непосредственно из определения.

**Предложение 18.10.** *Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства, $T\colon X \to Y$ — линейный оператор.*

(i) *$T$ компактен тогда и только тогда, когда для любого ограниченного множества $B \subset X$ его образ $T(B)$ относительно компактен в $Y$;*
(ii) *если $T$ компактен, то он ограничен;*
(iii) *если $Y$ конечномерно, то компактность $T$ равносильна его ограниченности;*
(iv) *тождественный оператор $\mathbf{1}_X$ компактен тогда и только тогда, когда $X$ конечномерно;*
(v) *если $Y$ бесконечномерно и $T$ сюръективен, то он не компактен.*

*Доказательство.* (i) Ограниченное множество содержится в некотором шаре, а из линейности и компактности $T$ следует, что он переводит любой шар в относительно компактное множество.

(ii) Следует из предложения 1.1.

(iii) Следует из следствия 18.2.

(iv) Следует из следствия 18.4.

(v) Если $T$ сюръективен и ограничен, то он открыт в силу теоремы Банаха 12.1. Следовательно, множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ содержит шар и не может быть относительно компактным в силу следствия 18.4. $\square$

Множество всех компактных линейных операторов из $X$ в $Y$ обозначается через $\mathscr{K}(X,Y)$. При $Y = X$ вместо $\mathscr{K}(X,X)$ пишут $\mathscr{K}(X)$.

**Теорема 18.11.** *Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *$\mathscr{K}(X,Y)$ — замкнутое векторное подпространство в $\mathscr{B}(X,Y)$;*

(ii) *если $Z$ — банахово пространство, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — ограниченные линейные операторы, один из которых компактен, то и $ST$ компактен;*
(iii) *ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$ компактен тогда и только тогда, когда компактен его сопряженный оператор $T^*\colon Y^* \to X^*$.*

*Доказательство.* (i) Для любых $S, T \in \mathscr{K}(X,Y)$ имеет место включение

$$(S+T)(\mathbb{B}_{1,X}) \subseteq S(\mathbb{B}_{1,X}) + T(\mathbb{B}_{1,X}).$$

Но сумма двух вполне ограниченных множеств, как нетрудно проверить (проверьте!), является вполне ограниченным множеством. Следовательно, $S+T \in \mathscr{K}(X,Y)$. Аналогично проверяется, что $\lambda S \in \mathscr{K}(X,Y)$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$.

Пусть теперь оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ принадлежит замыканию подпространства $\mathscr{K}(X,Y)$. Для $\varepsilon > 0$ подберем оператор $S \in \mathscr{K}(X,Y)$ так, чтобы $\|S - T\| < \varepsilon/2$. Пусть $F \subset Y$ — конечная $\varepsilon/2$-сеть для $S(\mathbb{B}_{1,X})$. Легко проверить, что $F$ будет $\varepsilon$-сетью для $T(\mathbb{B}_{1,X})$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это доказывает, что $T \in \mathscr{K}(X,Y)$.

(ii) Если $S$ компактен, а $T$ ограничен, то множество $S(T(\mathbb{B}_{1,X}))$ является образом ограниченного множества $T(\mathbb{B}_{1,X})$ под действием компактного оператора $S$ и поэтому относительно компактно. Если же $S$ ограничен, а $T$ компактен, то множество $S(T(\mathbb{B}_{1,X}))$ является образом относительно компактного множества $T(\mathbb{B}_{1,X})$ под действием непрерывного оператора $S$ и поэтому относительно компактно.

(iii) Предположим, что оператор $T$ компактен, и положим $K = \overline{T(\mathbb{B}_{1,X})}$. Для любых $f, g \in \mathbb{B}_{1,Y^*}$ имеем

$$\begin{aligned}\|T^*(f) - T^*(g)\| &= \|f \circ T - g \circ T\| = \sup_{x \in \mathbb{B}_{1,X}} |f(Tx) - g(Tx)| \\ &= \sup_{y \in T(\mathbb{B}_{1,X})} |f(y) - g(y)| = \sup_{y \in K} |f(y) - g(y)| = \|f|_K - g|_K\|_{C(K)}.\end{aligned} \tag{18.1}$$

Рассмотрим множество

$$M = \{f|_K : f \in \mathbb{B}_{1,Y^*}\} \subset C(K).$$

Из (18.1) следует, что отображение

$$\varphi\colon M \to T^*(\mathbb{B}_{1,Y^*}), \quad \varphi(f|_K) = T^*(f) \qquad (f \in \mathbb{B}_{1,Y^*}),$$

корректно определено и изометрично. Очевидно, оно также сюръективно и является поэтому изометрическим изоморфизмом метрических пространств $M$ и $T^*(\mathbb{B}_{1,Y})$. Поэтому, чтобы доказать компактность оператора $T^*$, нам достаточно проверить, что множество $M \subset C(K)$ вполне ограничено, т.е. ограничено и равностепенно непрерывно (см. теорему Арцела–Асколи 18.9) . Полагая $C = \sup\{\|x\| : x \in K\}$, для любого $f \in \mathbb{B}_{1,Y^*}$ и любого $x \in K$ получаем $|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \leqslant C$. Следовательно, $M$ ограничено. Далее, для любых $x, y \in K$ и любого $f \in \mathbb{B}_{1,Y^*}$ справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|$, из которого легко следует равностепенная непрерывность множества $M$. С учетом сказанного выше это доказывает компактность оператора $T^*$.

Предположим теперь, что оператор $T^*$ компактен. Из только что доказанного утверждения следует, что оператор $T^{**}$ также компактен. Отсюда с учетом предложения 11.2 получаем, что и $T$ компактен. $\square$

**Замечание 18.4.** Утверждение (ii) теоремы 18.11 означает, что совокупность компактных операторов между всевозможными банаховыми пространствами образует *операторный идеал.* О том, что это такое, можно прочитать в книге А. Пича «Операторные идеалы» (М.: Мир, 1982).

**Следствие 18.12.** *Для любого банахова пространства $X$ множество компактных операторов $\mathscr{K}(X)$ является замкнутым двусторонним идеалом в алгебре $\mathscr{B}(X)$.*

**Замечание 18.5.** На самом деле для многих классических банаховых пространств $\mathscr{K}(X)$ — это единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(X)$, отличный от 0 и $\mathscr{B}(X)$. В свое время мы сможем доказать это утверждение для случая, когда $X$ — гильбертово пространство.

Для банаховых пространств $X$ и $Y$ будем обозначать через $\mathscr{F}(X,Y)$ подмножество в $\mathscr{B}(X,Y)$, состоящее из операторов *конечного ранга*, т.е. из операторов с конечномерным образом. Положим также $\mathscr{F}(X) = \mathscr{F}(X,X)$. Легко видеть, что $\mathscr{F}(X,Y)$ — векторное подпространство в $\mathscr{B}(X,Y)$ (не обязательно замкнутое), и что для операторов конечного ранга справедливо утверждение, аналогичное п. (ii) теоремы 18.11. В частности, $\mathscr{F}(X)$ — двусторонний идеал в $\mathscr{B}(X)$.

**Следствие 18.13.** *Для любых банаховых пространств $X$ и $Y$ справедливо включение $\overline{\mathscr{F}(X,Y)} \subseteq \mathscr{K}(X,Y)$. Иначе говоря, если ограниченный оператор аппроксимируется (по операторной норме) ограниченными операторами конечного ранга, то он компактен.*

# А. Ю. Пирковский

# Функциональный анализ

# Лекция 19

## 19.1. Компактные операторы (продолжение)

На прошлой лекции мы ввели понятие компактного линейного оператора между банаховыми пространствами и выяснили, что если ограниченный оператор приближается по норме операторами конечного ранга, то он компактен. Естественно поинтересоваться, верно ли обратное, т.е. всякий ли компактный оператор приближается операторами конечного ранга. Для операторов со значениями в гильбертовом пространстве ответ утвердителен:

**Предложение 19.1.** *Пусть $X$ — банахово пространство и $H$ — гильбертово пространство. Тогда $\overline{\mathscr{F}(X,H)} = \mathscr{K}(X,H)$. Иначе говоря, всякий компактный оператор из $X$ в $H$ аппроксимируется (по операторной норме) ограниченными операторами конечного ранга.*

*Доказательство.* Пусть $T \in \mathscr{K}(X,H)$ и $\varepsilon > 0$. Зафиксируем конечную $\varepsilon/2$-сеть $F \subset H$ для $T(\mathbb{B}_{1,X})$ и положим $H_0 = \operatorname{span}(F)$. Обозначим через $P \in \mathscr{B}(H)$ ортогональный проектор на $H_0$ (т.е. оператор, тождественный на $H_0$ и переводящий $H_0^\perp$ в 0). Легко видеть, что $P$ ограничен и $\|P\| = 1$. Покажем, что $\|T - PT\| \leqslant \varepsilon$. Для этого зафиксируем произвольный $x \in \mathbb{B}_{1,X}$ и найдем $y \in F$ так, чтобы $\|Tx - y\| < \varepsilon/2$. Справедливы следующие неравенства:

$$\|Tx - PTx\| \leqslant \|Tx - y\| + \|y - PTx\| = \|Tx - y\| + \|P(y - Tx)\| \leqslant 2\|Tx - y\| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $x \in \mathbb{B}_{1,X}$ это означает, что $\|T - PT\| \leqslant \varepsilon$. Поскольку $PT \in \mathscr{F}(X,H)$, а $\varepsilon > 0$ произвольно, мы заключаем, что $T \in \overline{\mathscr{F}(X,H)}$, как и требовалось. □

Верен ли результат предложения 19.1 для произвольных банаховых пространств? Этот вопрос в течение долгого времени оставался одной из наиболее знаменитых нерешенных задач функционального анализа. В этой связи была принята следующая терминология.

**Определение 19.1.** Банахово пространство $Y$ обладает *свойством аппроксимации*, если для каждого банахова пространства $X$ справедливо равенство $\overline{\mathscr{F}(X,Y)} = \mathscr{K}(X,Y)$.

Свойство аппроксимации, по-видимому, впервые упоминается в основополагающей монографии С. Банаха «Теория линейных операций» (1932 г.), однако систематически его начал исследовать А. Гротендик в 1950-х гг. Оказалось, что свойство аппроксимации допускает целую серию эквивалентных характеризаций и тесно связано с рядом других важных вопросов функционального анализа. Начиная с работ Гротендика, свойство аппроксимации и его разновидности стали интенсивно изучаться многими математиками. Было показано, что свойством аппроксимации обладают практически все конкретные примеры банаховых пространств; однако вопрос о том, всякое ли банахово пространство обладает свойством аппроксимации (получивший название *проблемы аппроксимации*), оставался открытым на протяжении еще двух десятилетий. Прорыв произошел в 1972 г., когда П. Энфло построил первый пример банахова пространства без свойства аппроксимации. Пример Энфло был в высшей степени нетривиален. Впоследствии он был существенно упрощен, появилось и много других примеров, однако во всех известных случаях доказательство отсутствия свойства аппроксимации у того или иного банахова пространства — это весьма трудная задача. С одним таким пространством мы на самом деле знакомы: как показал А. Шанковский в 1981 г., пространство ограниченных операторов $\mathscr{B}(\ell^2)$ не обладает свойством аппроксимации.

Сложность проблемы аппроксимации была обусловлена в том числе и тем, что она тесно связана с другой знаменитой проблемой функционального анализа — *проблемой базиса*.

**Определение 19.2.** Последовательность элементов $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в банаховом пространстве $X$ называется *базисом Шаудера* (или просто *базисом*), если каждый элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = \sum_n c_n e_n$, где $c_n \in \mathbb{K}$.

Отметим, что банахово пространство, обладающее базисом Шаудера, с необходимостью сепарабельно (объясните, почему).

Понятие базиса ввел Ю. Шаудер в 1927 г. Довольно быстро выяснилось, что многие «классические» сепарабельные банаховы пространства обладают базисами. Например, любой ортонормированный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве является базисом Шаудера. Также очевидно, что базис Шаудера есть в пространствах $c_0$ и $\ell^p$ для всех $1 \leqslant p < \infty$: в качестве $e_n$ можно взять последовательность с единицей на $n$-ом месте и нулем на остальных. Тригонометрическая система (см. примеры 6.2 и 6.3) является базисом в $L^p[a,b]$ для всех $1 < p < \infty$ (М. Рисс, 1927), хотя и не является базисом в $L^1[a,b]$ (А. Лебег, 1909). Система Хаара (см. листок 4) является базисом в $L^p[a,b]$ для всех $1 \leqslant p < \infty$ (Шаудер, 1928). В пространстве $C[0,1]$ есть базис из кусочно линейных функций — так называемый *базис Фабера–Шаудера* (Шаудер, 1927).

Вопрос о том, всякое ли сепарабельное банахово пространство обладает базисом Шаудера, был впервые явно высказан Банахом в 1932 г. Впоследствии этот вопрос получил название *проблемы базиса*. Можно (и не очень сложно) показать, что банахово пространство с базисом Шаудера имеет свойство аппроксимации. Таким образом, решив проблему аппроксимации, Энфло тем самым решил и проблему базиса — банахово пространство, которое он построил, было сепарабельным, поэтому из-за отсутствия свойства аппроксимации не могло иметь базис.

Отметим, что бывают (довольно экзотические) банаховы пространства без базиса, имеющие тем не менее свойство аппроксимации.

Обратимся теперь к примерам компактных операторов.

**Пример 19.1.** Тождественное вложение пространства $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$ является компактным оператором. В самом деле, если $\|f\|_{C^1[a,b]} \leqslant 1$, то $|f'(t)| \leqslant 1$ для всех $t \in [a,b]$, откуда с учетом теоремы Лагранжа следует, что $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ для всех $x, y \in [a,b]$. Из полученного неравенства, в свою очередь, следует, что единичный шар пространства $C^1[a,b]$ равностепенно непрерывен. Поскольку он, очевидно, ограничен по равномерной норме, мы можем воспользоваться теоремой Арцела–Асколи 18.9, из которой следует, что этот шар компактен как подмножество в $C[a,b]$. Но это и означает, что вложение $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$ — компактный оператор.

**Предложение 19.2.** *Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или $X = c_0$, и пусть $\lambda = (\lambda_n) \in \ell^\infty$. Диагональный оператор $M_\lambda \colon X \to X$ компактен тогда и только тогда, когда $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$ (т.е. когда $\lambda \in c_0$).*

*Доказательство.* Предположим, что $\lambda \in c_0$. Напомним, что $c_0$ является замыканием в $\ell^\infty$ пространства финитных последовательностей $c_{00}$ (см. листки 1 и 2). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\mu \in c_{00}$ так, чтобы $\|\lambda - \mu\|_\infty < \varepsilon$. С учетом предложения 2.6 получаем

$$\|M_\lambda - M_\mu\| = \|M_{\lambda-\mu}\| = \|\lambda - \mu\|_\infty < \varepsilon.$$

Но оператор $M_\mu$, очевидно, имеет конечномерный образ. Применяя следствие 18.13, заключаем, что $M_\lambda$ компактен.

Предположим теперь, что $\lambda \notin c_0$. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существует такая подпоследовательность $(\lambda_{n_k})$ последовательности $(\lambda_n)$, что $|\lambda_{n_k}| \geqslant \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Обозначим, как обычно, через $e_n \in X$ последовательность с единицей на $n$-ом месте и нулем на остальных. Для всех $i \neq j$ имеем оценку

$$\|M_\lambda e_{n_i} - M_\lambda e_{n_j}\| = \|\lambda_{n_i} e_{n_i} - \lambda_{n_j} e_{n_j}\| \geqslant \varepsilon \cdot 2^{1/p}.$$

Отсюда с учетом теоремы 17.6 следует, что множество $M_\lambda(\mathbb{B}_{1,X})$ не является вполне ограниченным, т.е. оператор $M_\lambda$ не является компактным. $\square$

**Пример 19.2.** Пусть $I = [a,b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. Рассмотрим интегральный оператор $T_K \colon C(I) \to C(I)$, действующий по формуле

$$(T_K f)(x) = \int_I K(x,y) f(y)\, dy$$

(см. пример 2.6). Нетрудно проверить (проверьте!), что он переводит единичный шар пространства $C(I)$ в ограниченное и равностепенно непрерывное множество. Отсюда с учетом теоремы Арцела–Асколи 18.9 следует, что оператор $T_K$ компактен.

**Пример 19.3.** Пусть $(X, \mu)$ — пространство с мерой, $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, и пусть $T_K \colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ — интегральный оператор Гильберта–Шмидта (см. пример 2.7). Напомним, что он действует по формуле

$$(T_K f)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y).$$

Этот оператор также компактен. Попробуйте доказать это утверждение, воспользовавшись указанием из листка 15.

## 19.2. Фредгольмовы операторы

К компактным операторам мы еще не раз вернемся, пока же познакомимся с так называемыми *фредгольмовыми* операторами. Эти операторы совершенно не похожи на компактные и никогда (за исключением тривиальных случаев) не бывают компактными. Однако, как вскоре выяснится, между фредгольмовыми и компактными операторами имеется тесная связь.

**Определение 19.3.** Пусть $X$ и $Y$ — векторные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *фредгольмовым*, если его ядро и коядро (см. определение 13.2) конечномерны. Если $X$ и $Y$ — банаховы пространства, то фредгольмовы операторы из $X$ и $Y$ по умолчанию предполагаются ограниченными.

С каждым фредгольмовым оператором можно связать одну важную числовую характеристику:

**Определение 19.4.** *Индексом* фредгольмова оператора $T\colon X \to Y$ называется число $\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Coker} T$.

Вот несколько простейших примеров.

**Пример 19.4.** Любой изоморфизм $T\colon X \to Y$, очевидно, фредгольмов и $\operatorname{ind} T = 0$.

**Пример 19.5.** Если $P\colon X \to X$ — проектор с конечномерным ядром, то он фредгольмов и $\operatorname{ind} P = 0$. Это немедленно следует из разложения $X = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$.

**Пример 19.6.** Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или $X = c_0$, и пусть $T_\ell, T_r\colon X \to X$ — операторы левого и правого сдвига. Заметим, что $T_\ell$ сюръективен и имеет одномерное ядро, а $T_\ell$ инъективен и имеет образ коразмерности 1. Следовательно, оба эти оператора фредгольмовы, $\operatorname{ind} T_\ell = 1$ и $\operatorname{ind} T_r = -1$.

**Замечание 19.1.** Другие примеры фредгольмовых операторов см. в листках 16 и 17. В частности, весьма важный для анализа и топологии класс фредгольмовых операторов — это *операторы Тёплица* из листка 17. Другой и, пожалуй, еще более важный класс фредгольмовых операторов — это *эллиптические псевдодифференциальные операторы* на многообразиях. Самый простой пример такого оператора — лапласиан $\partial^2/\partial\theta^2$ на окружности (имеющий индекс 0; см. листок 16). Кульминацией теории эллиптических операторов является знаменитая теорема Атья–Зингера об индексе, выражающая индекс такого оператора в чисто топологических терминах. Заниматься эллиптическими операторами мы не будем, поскольку даже самое элементарное введение в их теорию потребовало бы немало времени. Познакомиться с эллиптическими операторами можно, например, по запискам лекций М. С. Аграновича (см. `http://ium.mccme.ru`). Вероятно, в ближайшее время М. С. Вербицкий прочитает у нас на факультете спецкурс на эту тему.

Иногда в определении фредгольмова оператора между банаховыми пространствами дополнительно требуют, чтобы этот оператор имел замкнутый образ. Следующее предложение показывает, что это требование выполняется автоматически.

**Предложение 19.3.** *Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства, $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Предположим, что* $\operatorname{Im} T$ *имеет конечную коразмерность в* $Y$. *Тогда* $\operatorname{Im} T$ *замкнут в* $Y$.

*Доказательство.* Переходя, если нужно, к индуцированному оператору $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$, мы можем с самого начала считать, что $T$ инъективен. Выберем конечномерное подпространство $Y_0 \subseteq Y$ так, чтобы $Y = \operatorname{Im} T \oplus Y_0$, и рассмотрим оператор

$$S\colon X \oplus_1 Y_0 \to Y, \quad (x, y) \mapsto Tx + y.$$

Легко видеть, что $S$ ограничен, биективен и является в силу теоремы Банаха 12.5 топологическим изоморфизмом. Следовательно, $S$ переводит замкнутые множества в замкнутые. Поскольку подпространство $X \oplus_1 \{0\}$ замкнуто в $X \oplus_1 Y_0$, мы видим, что $\operatorname{Im} T = S(X \oplus_1 \{0\})$ — замкнутое подпространство в $Y$. $\square$

**Следствие 19.4.** *Фредгольмов оператор между банаховыми пространствами имеет замкнутый образ.*

Посмотрим еще раз на пример 19.6 и вспомним, что операторы сдвига $T_\ell\colon \ell^p \to \ell^p$ и $T_r\colon \ell^q \to \ell^q$ (где $p, q \in (1, +\infty)$ и $1/p + 1/q = 1$) сопряжены друг другу (см. предложение 7.5). То, что индексы этих операторов отличаются знаком, является иллюстрацией следующего общего факта.

**Предложение 19.5.** *Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства. Ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов его сопряженный оператор $T^*\colon Y^* \to X^*$. При этом*

(i) $\operatorname{ind} T^* = -\operatorname{ind} T$;
(ii) $\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^*$.

*Доказательство.* Сначала отметим следующие два несложных факта:

(a) конечномерное нормированное пространство и его сопряженное имеют одинаковую размерность;
(b) если пространство, сопряженное к нормированному пространству $E$, конечномерно, то и $E$ конечномерно.

Факт (a) сразу следует из того, что все линейные функционалы на конечномерном нормированном пространстве ограничены (см. листок 2), а для доказательства факта (b) достаточно вложить $E$ в $E^{**}$.

С учетом фактов (a) и (b) и следствия 19.4, доказываемое предложение становится простым следствием теоремы 13.13. $\square$

Одно из важнейших свойств индекса — его аддитивность:

**Теорема 19.6.** *Пусть $X$, $Y$, $Z$ — векторные пространства, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — фредгольмовы линейные операторы. Тогда оператор $ST\colon X \to Z$ также фредгольмов, и* $\operatorname{ind} ST = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.

Доказательство теоремы основано на двух алгебраических леммах. Вероятно, обе они встречались вам в курсах алгебры или топологии; если же нет — докажите их самостоятельно в качестве упражнений.

**Лемма 19.7.** *Пусть* $0 \to X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n \to 0$ *— точная последовательность конечномерных векторных пространств. Тогда* $\sum_i (-1)^i \dim X_i = 0$.

**Лемма 19.8** (о змее)**.** *Пусть дана коммутативная диаграмма векторных пространств (или модулей над произвольным кольцом)*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{19.1}$$

*с точными строками. Тогда существует точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma \to 0.$$

**Замечание 19.2.** Лемма о змее является частным случаем широко используемой теоремы о том, что короткая точная последовательность цепных комплексов порождает длинную точную последовательность их групп гомологий. В данном случае комплексы — это столбцы диаграммы (19.1), к которым сверху и снизу приписаны нули.

Следующая мнемоническая картинка поясняет, при чем здесь змея:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[d] \arrow[dddll, bend left] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[r] & \operatorname{Coker}\gamma \end{tikzcd}$$

*Доказательство теоремы 19.6.* Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\begin{pmatrix} \mathbf{1}_X \\ T \end{pmatrix}"] \arrow[d, "T"] & X \oplus Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} -T & \mathbf{1}_Y \end{pmatrix}"] \arrow[d, "ST \oplus \mathbf{1}_Y"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "S"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} S \\ \mathbf{1}_Y \end{pmatrix}"'] & Z \oplus Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} -\mathbf{1}_Z & S \end{pmatrix}"'] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Непосредственно проверяется, что она коммутативна и ее строки точны. Применяя лемму 19.8 и учитывая очевидные изоморфизмы

$$\operatorname{Ker}(ST \oplus \mathbf{1}_Y) \cong \operatorname{Ker} ST, \quad \operatorname{Coker}(ST \oplus \mathbf{1}_Y) \cong \operatorname{Coker} ST,$$

получаем точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Ker} T \to \operatorname{Ker} ST \to \operatorname{Ker} S \to \operatorname{Coker} T \to \operatorname{Coker} ST \to \operatorname{Coker} S \to 0, \tag{19.2}$$

в которой все пространства, кроме, быть может, $\operatorname{Ker} ST$ и $\operatorname{Coker} ST$, конечномерны. Отсюда и из точности последовательности заключаем, что $\operatorname{Ker} ST$ и $\operatorname{Coker} ST$ также конечномерны, т.е. $ST$ — фредгольмов оператор. Применяя к последовательности (19.2) лемму 19.7, получаем требуемое равенство $\operatorname{ind} T - \operatorname{ind} ST + \operatorname{ind} S = 0$. $\square$

А. Ю. Пирковский

# Функциональный анализ

# Лекция 20

## 20.1. Теория Рисса–Шаудера

Теория Рисса–Шаудера, о которой пойдет речь ниже, занимает центральное место в теории компактных операторов. На ней основано большинство приложений компактных операторов — как в самом функциональном анализе, так и в других областях математики.

Начнем с некоторых алгебраических определений. Пусть $X$ — векторное пространство и $T$ — линейный оператор в $X$. Для каждого целого $n \geqslant 0$ положим $K_n = \operatorname{Ker} T^n$ и $I_n = \operatorname{Im} T^n$. Получим две цепочки подпространств

$$0 = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots, \quad X = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots.$$

Может случиться, что какая-то из этих цепочек стабилизируется. В такой ситуации используют следующую терминологию.

**Определение 20.1.** *Подъемом* линейного оператора $T\colon X \to X$ называется число

$$a(T) = \min\{n \geqslant 0 : K_n = K_{n+i} \ \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Если таких $n$ не существует, то полагают $a(T) = \infty$.

*Спуском* линейного оператора $T\colon X \to X$ называется число[1]

$$d(T) = \min\{n \geqslant 0 : I_n = I_{n+i} \ \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Если таких $n$ не существует, то полагают $d(T) = \infty$.

**Лемма 20.1.** *Для любого линейного оператора $T\colon X \to X$ справедливы следующие утверждения:*

(i) *Если $K_n = K_{n+1}$ для некоторого $n$, то $K_n = K_{n+i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и, как следствие, $a(T) < \infty$.*

(ii) *Если $I_n = I_{n+1}$ для некоторого $n$, то $I_n = I_{n+i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и, как следствие, $d(T) < \infty$.*

(iii) *Если $a(T) < \infty$ и $d(T) < \infty$, то $a(T) = d(T)$.*

*Доказательство.* (i), (ii): упражнения.

(iii) Докажем, что $d(T) \leqslant a(T)$. Для этого достаточно установить, что если для некоторого $n$ выполняются равенства $K_n = K_{n+1}$ и $I_{n+1} = I_{n+2}$, то $I_n = I_{n+1}$. Возьмем $x \in I_n$ и запишем его в виде $x = T^n y$, где $y \in X$. Имеем $Tx = T^{n+1} y \in I_{n+1} = I_{n+2}$. Следовательно, $T^{n+1} y = T^{n+2} z$ для некоторого $z \in X$. Отсюда получаем, что $y - Tz \in K_{n+1} = K_n$, т.е. $x = T^n y = T^{n+1} z \in I_{n+1}$, как и требовалось.

Неравенство $a(T) \leqslant d(T)$ устанавливается аналогично (докажите его сами в качестве упражнения). □

[1] Обозначения $a(T)$ и $d(T)$ происходят от английских слов ascent (подъем) и descent (спуск).

**Теорема 20.2** (Рисс, Шаудер). *Пусть $X$ — банахово пространство и $T\colon X \to X$ — линейный оператор, причем $T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) (абстрактная теорема Фредгольма). *Оператор $T$ фредгольмов и* $\operatorname{ind} T = 0$.

(ii) *Оператор $T$ имеет конечный подъем и конечный спуск.*

(iii) (разложение Рисса). *Положим $p = a(T) = d(T)$, $K_p = \operatorname{Ker} T^p$ и $I_p = \operatorname{Im} T^p$. Пространства $K_p$ и $I_p$ замкнуты и $T$-инвариантны, $X = K_p \oplus I_p$, оператор $T|_{K_p}\colon K_p \to K_p$ нильпотентен, а оператор $T|_{I_p}\colon I_p \to I_p$ — топологический изоморфизм.*

*Доказательство.* Представим оператор $T$ в виде $T = \mathbf{1}_X - S$, где $S \in \mathscr{K}(X)$. Доказательство будет удобно разбить на несколько лемм.

**Лемма 20.3.** *Оператор $T$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.*

*Доказательство.* Положим $K = \operatorname{Ker} T$. Тогда $S|_K = \mathbf{1}_K$, и из компактности $S|_K$ и предложения 18.10 (iv) следует, что $\dim K < \infty$.

Рассмотрим теперь оператор $\widehat{T}\colon X/K \to X$, $\widehat{T}(x + K) = Tx$. Замкнутость подпространства $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} \widehat{T}$ равносильна тому, что $\widehat{T}$ топологически инъективен (см. теорему 12.6). Предположим, что это не так; тогда существует такая последовательность $(x_n)$ в $X$, что $\|x_n + K\| = 1$ для всех $n$, и $Tx_n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е.

$$x_n - Sx_n \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{20.1}$$

Поскольку оператор $S$ компактен, мы можем (переходя, если нужно, к подпоследовательности) считать, что последовательность $(Sx_n)$ сходится. Из (20.1) заключаем, что тогда и $(x_n)$ сходится. Положим $x = \lim_n x_n$; тогда из (20.1) следует, что $x - Sx = 0$, т.е. $x \in K$. Но это невозможно, т.к. $\rho(x_n, K) = \|x_n + K\| = 1$ для всех $n$. ☐

**Лемма 20.4.** *Оператор $T$ фредгольмов.*

*Доказательство.* С учетом леммы 20.3 нам осталось доказать, что $T$ имеет конечномерное коядро. Поскольку $\operatorname{Im} T$ замкнут, имеем изоморфизм $(\operatorname{Coker} T)^* \cong \operatorname{Ker} T^*$ (см. теорему 13.13). Но $T^* \in \mathbf{1}_{X^*} + \mathscr{K}(X^*)$ в силу теоремы 18.11 (iii), поэтому $\operatorname{Ker} T^*$ конечномерно по лемме 20.3, а значит, таково же и $\operatorname{Coker} T$ (см. факт (b) в доказательстве предложения 19.5). ☐

**Следствие 20.5.** *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ оператор $T^k$ фредгольмов и, в частности, имеет замкнутый образ.*

*Доказательство.* Следует из леммы 20.4 с учетом теоремы 19.6 и следствия 19.4. ☐

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $K_n = \operatorname{Ker} T^n$ и $I_n = \operatorname{Im} T^n$.

**Лемма 20.6.** *Оператор $T$ имеет конечный подъем.*

*Доказательство.* Если $a(T) = \infty$, то $K_n \ne K_{n+1}$ для всех $n$ (см. лемму 20.1). Пусть $x_n \in K_{n+1}$ — 1/2-перпендикуляр к $K_n$ (см. лемму 18.3). Для всех $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, имеем

$$\|Sx_n - Sx_m\| = \|x_n - (Tx_n + x_m - Tx_m)\|.$$

Легко видеть, что векторы $Tx_n$, $x_m$ и $Tx_m$ лежат в $K_n$, поэтому $\|Sx_n - Sx_m\| \geqslant 1/2$. Но это невозможно ввиду компактности оператора $S$. Полученное противоречие показывает, что $a(T) < \infty$, как и требовалось. $\square$

**Лемма 20.7.** *Оператор $T$ имеет конечный спуск.*

*Доказательство.* Применяя лемму 20.6 к оператору $T^*$, получаем, что $\operatorname{Ker}(T^*)^n = \operatorname{Ker}(T^*)^{n+1}$ для некоторого $n$. Пользуясь равенством $(T^*)^k = (T^k)^*$, применяя следствие 20.5 и предложение 13.8 (ii), получаем равенства

$$\operatorname{Im} T^n = \overline{\operatorname{Im} T^n} = {}^\perp\big(\operatorname{Ker}(T^n)^*\big) = {}^\perp\big(\operatorname{Ker}(T^{n+1})^*\big) = \overline{\operatorname{Im} T^{n+1}} = \operatorname{Im} T^{n+1}.$$

Следовательно, $d(T) < \infty$, как и требовалось. $\square$

Из лемм 20.6, 20.7 и 20.1 заключаем, что $p = a(T) = d(T) < \infty$.

**Лемма 20.8.** *Имеет место равенство* $\operatorname{ind} T = 0$.

*Доказательство.* Мы уже знаем, что операторы $T^p$ и $T^{p+1}$ фредгольмовы, $K_p = K_{p+1}$ и $I_p = I_{p+1}$. Следовательно, $\operatorname{ind} T^p = \operatorname{ind} T^{p+1}$. Применяя теорему 19.6, заключаем, что $p \cdot \operatorname{ind} T = (p+1) \cdot \operatorname{ind} T$, откуда и следует требуемое равенство $\operatorname{ind} T = 0$. $\square$

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать утверждение (iii). Замкнутость $K_p$ очевидна, а замкнутость $I_p$ уже была доказана выше (следствие 20.5). Также очевидно, что $K_p$ и $I_p$ $T$-инвариантны и $T|_{K_p}$ — нильпотентный оператор. Докажем равенство $X = K_p \oplus I_p$. Пусть $x \in K_p \cap I_p$; тогда $T^p x = 0$ и $x = T^p y$ для некоторого $y \in X$. Отсюда получаем, что $T^{2p} y = T^p x = 0$, т.е. $y \in K_{2p}$. Но $K_{2p} = K_p$, поэтому $x = T^p y = 0$. Таким образом, $K_p \cap I_p = 0$. Но оператор $T^p$, так же как и $T$, фредгольмов и имеет нулевой индекс. Отсюда с учетом равенства $K_p \cap I_p = 0$ следует, что $K_p \oplus I_p = X$.

Заметим, наконец, что $T(I_p) = I_{p+1} = I_p$, т.е. оператор $T|_{I_p} \colon I_p \to I_p$ сюръективен. Но $K_p \cap I_p = 0$ и $K \subseteq K_p$, поэтому тем более $K \cap I_p = 0$, т.е. оператор $T|_{I_p} \colon I_p \to I_p$ инъективен. Применяя теорему Банаха 12.5, заключаем, что $T|_{I_p} \colon I_p \to I_p$ — топологический изоморфизм. Теорема доказана. $\square$

**Следствие 20.9** (альтернатива Фредгольма)**.** *Пусть $X$ — банахово пространство, $T \colon X \to X$ — линейный оператор, причем $T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$. Оператор $T$ сюръективен тогда и только тогда, когда он инъективен.*

С учетом предложения 19.5 (ii) равенство $\operatorname{ind} T = 0$ из теоремы Рисса–Шаудера можно переформулировать следующим образом.

**Следствие 20.10.** *Пусть $X$ — банахово пространство, $T \colon X \to X$ — линейный оператор, причем $T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$. Тогда* $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T^* < \infty$.

В качестве еще одного важного следствия из теоремы Рисса–Шаудера мы получаем следующий результат о спектре компактного оператора. Напомним, что *кратностью* собственного значения $\lambda$ линейного оператора $T \colon X \to X$ называется размерность собственного подпространства $\operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}_X)$.

**Теорема 20.11.** *Пусть $X$ — банахово пространство и $T \colon X \to X$ — компактный оператор. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если* $\lambda \in \sigma(T)$ *и* $\lambda \neq 0$, *то* $\lambda$ — *собственное значение конечной кратности и изолированная точка спектра* $\sigma(T)$;
(ii) $\sigma(T)$ *не более чем счетен.*

Доказательству предпошлем следующую простую лемму.

**Лемма 20.12.** *Пусть* $X$ — *банахово пространство,* $T\colon X \to X$ — *ограниченный линейный оператор. Предположим, что* $X = X_0 \oplus X_1$, *где* $X_0$ *и* $X_1$ — *замкнутые* $T$*-инвариантные подпространства в* $X$. *Тогда* $\sigma(T) = \sigma(T|_{X_0}) \cup \sigma(T|_{X_1})$.

*Доказательство.* Очевидно, $T$ биективен тогда и только тогда, когда он биективно отображает $X_0$ на $X_0$, а $X_1$ — на $X_1$. Остается заменить $T$ на $T - \lambda\mathbf{1}$ и воспользоваться теоремой Банаха 12.5. □

*Доказательство теоремы* 20.11. Заметим, что $T - \lambda\mathbf{1} = -\lambda(\mathbf{1} - \lambda^{-1}T)$ для любого $\lambda \neq 0$. Поэтому к оператору $T - \lambda\mathbf{1}$ применимы теорема Рисса–Шаудера 20.2 и ее следствие — альтернатива Фредгольма 20.9. Из последней сразу следует, что если $\lambda \in \sigma(T)$ и $\lambda \neq 0$, то $\lambda$ — собственное значение $T$, причем его кратность конечна в силу фредгольмовости оператора $T - \lambda\mathbf{1}$. Положим теперь $p = a(T - \lambda\mathbf{1}) = d(T - \lambda\mathbf{1})$ и рассмотрим разложение Рисса $X = K_p \oplus I_p$, где $K_p = \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})^p$ и $I_p = \operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})^p$ (см. теорему 20.2 (iii)). Подпространства $K_p$ и $I_p$ замкнуты и $T$-инвариантны, поэтому

$$\sigma(T) = \sigma(T|_{K_p}) \cup \sigma(T|_{I_p}) \tag{20.2}$$

в силу леммы 20.12. Поскольку оператор $(T - \lambda\mathbf{1})|_{K_p}$ нильпотентен и $K_p \neq 0$, мы имеем $\sigma((T - \lambda\mathbf{1})|_{K_p}) = \{0\}$ (см. следствие 16.3 или листок 11), что равносильно равенству $\sigma(T|_{K_p}) = \{\lambda\}$. С другой стороны, оператор $(T - \lambda\mathbf{1})|_{I_p}$ обратим, поэтому $\lambda \notin \sigma(T|_{I_p})$. Таким образом, равенство (20.2) приобретает вид

$$\sigma(T) = \sigma(T|_{I_p}) \sqcup \{\lambda\}.$$

Отсюда с учетом замкнутости $\sigma(T|_{I_p})$ следует, что $\lambda$ — изолированная точка множества $\sigma(T)$. Тем самым утверждение (i) доказано.

Утверждение (ii) является непосредственным следствием утверждения (i). В самом деле, из (i) следует, что для каждого $n$ множество

$$K_n = \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant 1/n\}$$

является компактом, все точки которого изолированы. Следовательно, $K_n$ конечно и $\sigma(T) \setminus \{0\} = \bigcup_n K_n$ не более чем счетно. □

**Замечание 20.1.** Понятие компактного оператора ввел Ф. Рисс в 1913 г. для случая гильбертовых пространств. Первоначальное определение, однако, отличалось от определения 18.4 и было дано в терминах слабой сходимости (с которой мы познакомимся несколько позже). Тогда же Рисс доказал, что всякий компактный оператор в гильбертовом пространстве приближается операторами конечного ранга (предложение 19.1). Одним из главных достижений Рисса считается его основополагающая работа "Über lineare Funktionalgleichungen" (Acta Math. **41** (1918), 71–98; русский перевод — УМН, 1936, №1, 175–199), в которой впервые появилось определение 18.4, и в которой была доказана большая часть утверждений из изложенной выше теории Рисса–Шаудера.

Там же была доказана лемма 18.3 об $\varepsilon$-перпендикуляре и ее следствие 18.4 о некомпактности единичной сферы. Общего понятия банахова пространства в то время еще не существовало, и Рисс работал с пространством непрерывных функций $C[a,b]$, однако его работа написана таким образом, что все ключевые рассуждения в ней сохраняют силу для произвольных банаховых пространств.

Основной мотивировкой для Рисса было желание дать элегантное изложение теории интегральных уравнений Фредгольма (см. ниже), не опирающееся на довольно громоздкую теорию «функциональных определителей» Фредгольма. Единственное утверждение теории Фредгольма, которое Риссу не удалось поместить в контекст компактных операторов, — это теорема о связи между числом решений интегрального уравнения Фредгольма и его сопряженного уравнения (см. ниже часть III теоремы 20.14). Говоря современным языком, ему не удалось доказать равенство $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T^*$ (т.е. равенство $\operatorname{ind} T = 0$; см. следствие 20.10) для операторов вида «$\mathbf{1}+$ компактный». Это равенство, как мы видели выше, опирается на часть (iii) теоремы 18.11 о компактности сопряженного оператора. Оба эти утверждения были доказаны Ю. Шаудером в 1930 г.

Завершая этот экскурс в историю, отметим, что понятия фредгольмова индекса во времена Рисса и Шаудера еще не существовало, поэтому первоначальное доказательство равенства $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T^*$ (т.е. $\operatorname{ind} T = 0$) отличалось от приведенного выше. Остальные же шаги нашего доказательства — в сущности те же, что и у Рисса.

В качестве следствий теории Рисса–Шаудера получаем следующие теоремы И. Фредгольма об интегральных уравнениях.

**Теорема 20.13.** *Пусть $(X,\mu)$ — пространство с мерой, $K \in L^2(X\times X, \mu\times\mu)$ и $f \in L^2(X,\mu)$. Рассмотрим следующие уравнения в пространстве $L^2(X,\mu)$ относительно неизвестных функций $\varphi$ и $\psi$:*

$$\varphi(x) - \int_X K(x,y)\varphi(y)\,d\mu(y) = f(x), \tag{20.3}$$

$$\varphi(x) - \int_X K(x,y)\varphi(y)\,d\mu(y) = 0, \tag{20.4}$$

$$\psi(x) - \int_X K(y,x)\psi(y)\,d\mu(y) = 0. \tag{20.5}$$

*Справедливы следующие утверждения:*

I. *Уравнение* (20.3) *разрешимо тогда и только тогда, когда для любого решения $\psi$ уравнения* (20.5) *выполнено условие $\int_X f(x)\psi(x)\,d\mu(x) = 0$.*

II (альтернатива Фредгольма). *Если уравнение* (20.4) *имеет лишь тривиальное решение, то уравнение* (20.3) *имеет единственное решение для любой $f \in L^2(X,\mu)$. Если же уравнение* (20.4) *имеет нетривиальное решение, то уравнение* (20.3) *разрешимо не для всех $f \in L^2(X,\mu)$.*

III. *Уравнения* (20.4) *и* (20.5) *имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.*

*Доказательство.* Пусть $S\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ — интегральный оператор Гильберта–Шмидта с ядром $K$ (см. пример 2.7). Отождествим пространство $L^2(X,\mu)^*$ с $L^2(X,\mu)$ посредством стандартного изоморфизма из теоремы 8.7. При таком отождествлении сопряженный оператор $S^*$ также окажется интегральным оператором Гильберта–Шмидта с ядром $K^*(x,y) = K(y,x)$ (см. листок 5). Положим $T = \mathbf{1} - S$. В результате уравнения (20.3)–(20.5) приобретут следующий вид:

$$T\varphi = f,$$
$$T\varphi = 0,$$
$$T^*\psi = 0.$$

Как было отмечено в примере 19.3, оператор $S$ компактен. Следовательно, к оператору $T$ применима теорема Рисса–Шаудера 20.2. В частности, $\operatorname{Im} T$ замкнут (см. следствие 19.4), откуда с учетом предложения 13.8 получаем равенство $\operatorname{Im} T = {}^{\perp}(\operatorname{Ker} T^*)$ (где символ $\perp$ обозначает аннулятор). Но последнее равенство — это и есть утверждение I доказываемой теоремы. Утверждения II и III получаются непосредственным применением следствий 20.9 и 20.10 соответственно. □

В классической формулировке теорем Фредгольма речь идет не о пространстве $L^2(X,\mu)$, а о пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке. Сформулируем соответствующий результат.

**Теорема 20.14** (классические теоремы Фредгольма). *Пусть $I = [a,b]$, $K \in C(I \times I)$ и $f \in C(I)$. Рассмотрим следующие уравнения в пространстве $C(I)$ относительно неизвестных функций $\varphi$ и $\psi$:*

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{20.6}$$

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = 0, \tag{20.7}$$

$$\psi(x) - \int_a^b K(y,x)\psi(y)\,dy = 0. \tag{20.8}$$

*Справедливы следующие утверждения:*

I. *Уравнение* (20.6) *разрешимо тогда и только тогда, когда для любого решения $\psi$ уравнения* (20.8) *выполнено условие $\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0$.*

II (альтернатива Фредгольма). *Если уравнение* (20.7) *имеет лишь тривиальное решение, то уравнение* (20.6) *имеет единственное решение для любой $f \in C(I)$. Если же уравнение* (20.7) *имеет нетривиальное решение, то уравнение* (20.6) *разрешимо не для всех $f \in C(I)$.*

III. *Уравнения* (20.7) *и* (20.8) *имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.*

В отличие от теоремы 20.13, теорема 20.14 формально не сводится лишь к теории Рисса–Шаудера, т.к. пространство, сопряженное к $C(I)$, — это не $C(I)$, а пространство мер $M(I)$ (см. теорему Рисса 10.13). Положение дел спасает следующая несложная лемма.

**Лемма 20.15.** *Если $\varphi \in L^2(I)$ и $K \in C(I \times I)$, то функция*

$$g(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

*непрерывна на $I$.*

Докажите эту лемму сами в качестве упражнения.

*Доказательство теоремы* 20.14. Утверждение II доказывается по той же схеме, что и утверждение II теоремы 20.13. Чтобы доказать утверждения I и III, заметим, что в силу леммы 20.15 решение любого из уравнений (20.6)–(20.8) в пространстве $L^2(I)$ автоматически лежит в $C(I)$. В итоге утверждения I и III сводятся к соответствующим утверждениям теоремы 20.13. □

**Замечание 20.2.** В заключение упомянем об одной проблеме, связанной с компактными операторами и решенной совсем недавно. Напомним, что для любого банахова пространства $X$ пространство компактных операторов $\mathscr{K}(X)$ является замкнутым векторным подпространством в $\mathscr{B}(X)$, и что $\mathscr{K}(X) \neq \mathscr{B}(X)$, если $X$ бесконечномерно (т.к. тождественный оператор $\mathbf{1}_X$ в этом случае некомпактен). Может ли $\mathscr{K}(X)$ иметь конечную коразмерность в $\mathscr{B}(X)$? Результат предложения 19.2 наводит на мысль, что вряд ли: если $X = \ell^p$ или $c_0$, то факторпространство $\mathscr{B}(X)/\mathscr{K}(X)$ содержит изоморфную копию пространства $\ell^\infty/c_0$, которое, как нетрудно проверить, бесконечномерно. Для многих других «классических» банаховых пространств $X$ тоже нетрудно показать, что пространство $\mathscr{K}(X)$ имеет бесконечную коразмерность в $\mathscr{B}(X)$. Тем удивительнее результат С. Аргироса и Р. Хейдона, построивших в 2009 г. бесконечномерное банахово пространство $X$, в котором каждый ограниченный линейный оператор имеет вид $\lambda\mathbf{1}_X+K$, где $\lambda$ — скаляр и $K$ — компактный оператор (Acta Math. **206** (2011), no. 1, 1–54; preprint arXiv:0903.3921). Иначе говоря, коразмерность $\mathscr{K}(X)$ в $\mathscr{B}(X)$ равна единице. Кроме того, пространство Аргироса–Хейдона — это первый пример бесконечномерного банахова пространства, про которое известно, что каждый ограниченный линейный оператор в нем имеет нетривиальное собственное инвариантное подпространство, и первый пример бесконечномерного банахова пространства $X$, для которого $\mathscr{B}(X)$ сепарабельно.

## А. Ю. Пирковский

# Функциональный анализ

# Лекция 21

## 21.1. Фредгольмовы операторы (продолжение)

Теперь, когда в нашем расположении есть теория Рисса–Шаудера, мы можем вернуться к изучению фредгольмовых операторов и доказать несколько их важных свойств. Начнем с алгебраической подготовки.

**Определение 21.1.** Пусть $X$, $Y$ — векторные пространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор. Будем говорить, что линейный оператор $S\colon Y \to X$ *расщепляет* $T$, если $TST = T$.

Следующая лемма проясняет геометрический смысл этого определения.

**Лемма 21.1.** *Пусть $X$, $Y$ — векторные пространства, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to X$ — линейные операторы. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $TST = T$;

(ii) *существует такое разложение $X = \operatorname{Ker} T \oplus X_0$, что*

$$S|_{\operatorname{Im} T} = (T|_{X_0}\colon X_0 \to \operatorname{Im} T)^{-1}. \tag{21.1}$$

*Если выполнены условия* (i) *и* (ii)*, то $ST$ и $TS$ — проекторы, причем* $\operatorname{Ker} ST = \operatorname{Ker} T$ *и* $\operatorname{Im} TS = \operatorname{Im} T$.

*Доказательство.* (i) $\Longrightarrow$ (ii). Умножая равенство (i) на $S$ слева, а затем на $T$ справа, убеждаемся, что $ST$ и $TS$ — проекторы. Очевидно, $\operatorname{Ker} ST \supseteq \operatorname{Ker} T$ и $\operatorname{Im} TS \subseteq \operatorname{Im} T$, а из равенства (i) следуют противоположные включения. Положим теперь $X_0 = \operatorname{Im} ST$. Учитывая, что $ST$ — проектор, получаем разложение

$$X = \operatorname{Ker} ST \oplus \operatorname{Im} ST = \operatorname{Ker} T \oplus X_0.$$

Рассмотрим теперь операторы

$$T' = (T|_{X_0}\colon X_0 \to \operatorname{Im} T), \quad S' = (S|_{\operatorname{Im} T}\colon \operatorname{Im} T \to X_0).$$

Очевидно, $T'$ биективен, и из (i) следует, что $T'S'T' = T'$. Отсюда получаем требуемое равенство $S' = (T')^{-1}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Из (21.1) следует, что оператор $ST$ тождествен на $X_0$, поэтому операторы $TST$ и $T$ совпадают на $X_0$. Поскольку подпространство $\operatorname{Ker} T$ они оба переводят в ноль, из (ii) заключаем, что $TST = T$. $\square$

**Теорема 21.2** (С. М. Никольский, Ф. Аткинсон)**.** *Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства. Следующие свойства ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$ эквивалентны:*

(i) *$T$ фредгольмов;*
(ii) *существует такой фредгольмов оператор $S\colon Y \to X$, что $TST = T$, и операторы $\mathbf{1}_X - ST$ и $\mathbf{1}_Y - TS$ — проекторы конечного ранга;*
(iii) *существует такой ограниченный линейный оператор $S\colon Y \to X$, что $ST \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$ и $TS \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y)$;*
(iv) *существуют такие ограниченные линейные операторы $S_1, S_2\colon Y \to X$, что $S_1T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$ и $TS_2 \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y)$.*

*Кроме того, справедливы следующие утверждения:*

(a) *если $T$ фредгольмов и $\operatorname{ind} T = 0$, то оператор $S$ из п.* (ii) *можно выбрать так, что он будет топологическим изоморфизмом;*
(b) *если операторы $S_1$, $S_2$ таковы, как в* (iv), *то*

$$S_1 - S_2 \in \mathscr{K}(Y, X), \quad S_2T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X), \quad TS_1 \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y).$$

*Кроме того, $S_1$ и $S_2$ фредгольмовы, и $\operatorname{ind} S_1 = \operatorname{ind} S_2 = -\operatorname{ind} T$.*

**Определение 21.2.** Оператор $S$ из п. (iii) теоремы 21.2 называется *существенно обратным* к $T$, а операторы $S_1$ и $S_2$ из п. (iv) — соответственно, *левым существенно обратным* и *правым существенно обратным* к $T$.

**Замечание 21.1.** В теории операторов прилагательное «существенно» обычно добавляют в ситуациях, когда некоторое свойство оператора выполняется по модулю компактных операторов. В дальнейшем мы еще встретимся с этой терминологией (см. ниже определение 21.4).

Таким образом, эквивалентность (i) $\iff$ (iii) в теореме 21.2 означает, что оператор фредгольмов тогда и только тогда, когда он существенно обратим. Эквивалентность (iii) $\iff$ (iv) означает, что для существенной обратимости оператора достаточно его существенной обратимости слева и справа. Наконец, утверждение (b) теоремы 21.2 означает, что и левый, и правый существенно обратные к $T$ операторы являются существенно обратными к $T$, существенно обратный оператор определен однозначно по модулю компактных операторов, существенно обратный оператор фредгольмов, и его индекс равен $-\operatorname{ind} T$.

*Доказательство теоремы* 21.2. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Поскольку $T$ фредгольмов, его ядро и образ — дополняемые подпространства в $X$ и $Y$ соответственно (см. предложения 12.18 и 12.19). Выберем замкнутые подпространства $X_0 \subseteq X$ и $Y_0 \subseteq Y$ так, чтобы

$$X = \operatorname{Ker} T \oplus_{\text{top}} X_0, \quad Y = \operatorname{Im} T \oplus_{\text{top}} Y_0. \tag{21.2}$$

Определим линейный оператор $S\colon Y \to X$ следующим образом:

$$\begin{gathered} S|_{\operatorname{Im} T} = (T|_{X_0}\colon X_0 \to \operatorname{Im} T)^{-1}, \\ S|_{Y_0}\colon Y_0 \to X \text{ — произвольный линейный оператор.} \end{gathered} \tag{21.3}$$

Из теоремы Банаха 12.5 следует, что $S|_{\operatorname{Im} T}$ ограничен, а из конечномерности $Y_0$ следует, что $S|_{Y_0}$ ограничен. Вспоминая, что $Y = \operatorname{Im} T \oplus_{\text{top}} Y_0$, заключаем, что $S$ ограничен.

Чтобы доказать фредгольмовость $S$, заметим, что $\operatorname{Ker} S \cap \operatorname{Im} T = 0$. Поскольку $\operatorname{codim}_Y \operatorname{Im} T < \infty$, отсюда следует, что $\dim \operatorname{Ker} S < \infty$. С другой стороны, $\operatorname{Im} S \supseteq X_0$ и $\operatorname{codim}_X X_0 = \dim \operatorname{Ker} T < \infty$. Следовательно, $\operatorname{codim}_X \operatorname{Im} S < \infty$ и $S$ фредгольмов. Применяя теперь лемму 21.1, заключаем, что $TST = T$, и операторы $ST$ и $TS$ — проекторы. Следовательно, $\mathbf{1}_X - ST$ и $\mathbf{1}_Y - TS$ — также проекторы, причем

$$\operatorname{Im}(\mathbf{1}_X - ST) = \operatorname{Ker} ST = \operatorname{Ker} T,$$
$$\operatorname{Im}(\mathbf{1}_Y - TS) = \operatorname{Ker} TS \cong \operatorname{Coker} TS = \operatorname{Coker} T.$$

Следовательно, образы проекторов $\mathbf{1}_X - ST$ и $\mathbf{1}_Y - TS$ конечномерны, как и требовалось. Тем самым (ii) доказано.

Докажем теперь утверждение (a). Предположим, что $\operatorname{ind} T = 0$. Тогда из (21.2) следует, что $\dim Y_0 = \dim \operatorname{Ker} T$, поэтому при построении оператора $S$ можно задать его на $Y_0$ так, чтобы он был изоморфизмом между $Y_0$ и $\operatorname{Ker} T$ (см. (21.3)). Получившийся в результате оператор $S$ осуществляет топологический изоморфизм между соответствующими прямыми слагаемыми разложений (21.2) и является поэтому топологическим изоморфизмом между $Y$ и $X$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv): очевидно.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). По предположению,

$$S_1 T = \mathbf{1}_X + K_1, \quad \text{где } K_1 \in \mathscr{K}(X). \tag{21.4}$$

Отсюда получаем включение $\operatorname{Ker} T \subseteq \operatorname{Ker}(\mathbf{1}_X + K_1)$. Но $\operatorname{Ker}(\mathbf{1}_X + K_1)$ конечномерно в силу теоремы Рисса–Шаудера 20.2. Следовательно, таково же и $\operatorname{Ker} T$.

С другой стороны,

$$TS_2 = \mathbf{1}_Y + K_2, \quad \text{где } K_2 \in \mathscr{K}(Y). \tag{21.5}$$

Отсюда получаем включение $\operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Im}(\mathbf{1}_Y + K_2)$. Но $\operatorname{Im}(\mathbf{1}_Y + K_2)$ имеет конечную коразмерность в $Y$ в силу теоремы Рисса–Шаудера 20.2. Следовательно, то же самое верно и для $\operatorname{Im} T$. Таким образом, оператор $T$ фредгольмов, и (i) доказано.

Для завершения доказательства остается доказать утверждение (b). Умножая равенство (21.4) справа на $S_2$, а равенство (21.5) слева на $S_1$, заключаем, что $S_1 T S_2 = S_2 + K_1 S_2 = S_1 + S_1 K_2$. Следовательно, $S_1 - S_2 = K_1 S_2 - S_1 K_2 \in \mathscr{K}(Y, X)$. Но тогда

$$S_2 T + \mathscr{K}(X) = S_1 T + \mathscr{K}(X) = \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X),$$
$$TS_1 + \mathscr{K}(Y) = TS_2 + \mathscr{K}(Y) = \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y).$$

Таким образом, оператор $T$ является существенно обратным как для $S_1$, так и для $S_2$. С учетом уже доказанной эквивалентности (i) $\iff$ (iii) заключаем, что $S_1$ и $S_2$ фредгольмовы. Наконец, приравнивая индексы операторов в равенствах (21.4) и (21.5) и применяя теорему Рисса–Шаудера 20.2, получаем

$$\operatorname{ind} S_1 + \operatorname{ind} T = \operatorname{ind}(\mathbf{1}_X + K_1) = 0, \quad \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S_2 = \operatorname{ind}(\mathbf{1}_Y + K_2) = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{ind} S_1 = \operatorname{ind} S_2 = -\operatorname{ind} T$, как и требовалось. □

Для операторов, действующих в каком-то одном банаховом пространстве $X$, часть (iii) теоремы 21.2 можно переформулировать в более элегантном виде. Напомним (см. следствие 18.12), что множество компактных операторов $\mathscr{K}(X)$ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(X)$.

**Определение 21.3.** Факторалгебра $\mathcal{Q}(X) = \mathscr{B}(X)/\mathscr{K}(X)$ называется *алгеброй Калкина* банахова пространства $X$.

Из задачи 12.3 (см. листок 12) следует, что $\mathcal{Q}(X)$ — банахова алгебра. Отметим, что $\mathcal{Q}(X) \neq 0$, если $X$ бесконечномерно (см. предложение 18.10 (iv)).

**Следствие 21.3.** *Пусть $X$ — банахово пространство. Оператор $T \in \mathscr{B}(X)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда $T + \mathscr{K}(X)$ обратим в $\mathcal{Q}(X)$.*

*Доказательство.* Это просто переформулировка утверждения (iii) теоремы 21.2. □

**Замечание 21.2.** Обратите внимание, что лемма 14.7 в применении к алгебре $\mathcal{Q}(X)$ сразу дает первую половину утверждения (b) теоремы 21.2 (для случая $Y = X$).

Алгебра Калкина играет важную роль в теории расширений операторных алгебр и в операторной $K$-теории. Об этих науках, тесно связанных с топологией, можно прочитать в книгах B. Blackadar, “$K$-theory for operator algebras” (Cambridge, 1998) и N. Higson, J. Roe, “Analytic $K$-homology” (Oxford, 2000). Для наших целей алгебра Калкина удобна потому, что с ее помощью можно определить еще одну часть спектра линейного оператора.

**Определение 21.4.** Пусть $X$ — банахово пространство. *Существенным спектром* оператора $T \in \mathscr{B}(X)$ называется множество

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \mathbf{1} \text{ не фредгольмов } \}.$$

**Следствие 21.4.** *Для любого $T \in \mathscr{B}(X)$ справедливо равенство*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(T) = \sigma_{\mathcal{Q}(X)}(T + \mathscr{K}(X)).$$

Комбинируя это следствие с теоремами 15.5 и 15.9, получаем следующий результат.

**Следствие 21.5.** *Существенный спектр любого ограниченного линейного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве компактен и непуст.*

В дальнейшем множество фредгольмовых операторов из банахова пространства $X$ в банахово пространство $Y$ будет обозначаться через $\mathscr{F}\mathrm{red}(X, Y)$. Мы также полагаем $\mathscr{F}\mathrm{red}(X) = \mathscr{F}\mathrm{red}(X, X)$.

**Наблюдение 21.6.** Пусть $\pi \colon \mathscr{B}(X) \to \mathcal{Q}(X)$ — факторотображение. Следствие 21.3 означает, что

$$\mathscr{F}\mathrm{red}(X) = \pi^{-1}(\mathcal{Q}(X)^\times). \tag{21.6}$$

Поскольку множество обратимых элементов $\mathcal{Q}(X)^\times$ открыто в $\mathcal{Q}(X)$ (см. теорему 15.3), из (21.6) следует, что $\mathscr{F}\mathrm{red}(X)$ — открытое подмножество в $\mathscr{B}(X)$. Следующая теорема усиливает это наблюдение.

**Теорема 21.7.** *Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства. Множество $\mathscr{F}\mathrm{red}(X, Y)$ открыто в $\mathscr{B}(X, Y)$, и функция* $\mathrm{ind} \colon \mathscr{F}\mathrm{red}(X, Y) \to \mathbb{Z}$ *локально постоянна.*

Доказательство теоремы сводится к следующей лемме.

**Лемма 21.8.** *Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства, $T\colon X \to Y$ — фредгольмов оператор. Зафиксируем оператор $S \in \mathscr{B}(Y,X)$, расщепляющий $T$ и существенно обратный к $T$. Тогда для любого оператора $R \in \mathscr{B}(X,Y)$, удовлетворяющего условию $\|R\| < \|S\|^{-1}$, оператор $T+R$ фредгольмов, и* $\operatorname{ind}(T+R) = \operatorname{ind} T$.

*Доказательство.* Поскольку $ST \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$, имеем включение

$$S(T+R) \in \mathbf{1}_X + SR + \mathscr{K}(X). \tag{21.7}$$

Заметим, что $\|SR\| \leqslant \|S\|\|R\| < 1$. Применяя теорему 15.3, заключаем, что оператор $\mathbf{1}_X + SR$ обратим. Полагая $S_1 = (\mathbf{1}_X + SR)^{-1}$, из (21.7) получаем включение

$$S_1 S(T+R) \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X). \tag{21.8}$$

Аналогичным образом строится оператор $S_2 \in \mathscr{B}(Y)$, для которого

$$(T+R)SS_2 \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y). \tag{21.9}$$

Из соотношений (21.8) и (21.9) и из теоремы 21.2 заключаем, что оператор $T+R$ фредгольмов. Заметим теперь, что

$$TS(T+R) = TST + TSR = T + TSR = T(\mathbf{1}_X + SR).$$

Следовательно,

$$\operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S + \operatorname{ind}(T+R) = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind}(\mathbf{1}_X + SR).$$

Но $\operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S = 0$ в силу теоремы 21.2, а $\operatorname{ind}(\mathbf{1}_X + SR) = 0$, т.к. этот оператор обратим (см. выше). Следовательно, $\operatorname{ind}(T+R) = \operatorname{ind} T$, как и требовалось. □

Теорема 21.7 показывает, что как свойство оператора быть фредгольмовым, так и его индекс устойчивы при малых (по норме) возмущениях. Покажем теперь, что они устойчивы и при компактных возмущениях.

**Теорема 21.9.** *Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства, $T \in \mathscr{F}\mathrm{red}(X,Y)$ и $K \in \mathscr{K}(X,Y)$. Тогда $T+K \in \mathscr{F}\mathrm{red}(X,Y)$, и* $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} T$.

*Доказательство.* Пусть $S \in \mathscr{B}(Y,X)$ — оператор, существенно обратный к $T$, т.е.

$$ST = \mathbf{1}_X + K_1, \quad TS = \mathbf{1}_Y + K_2, \quad K_1 \in \mathscr{K}(X), \quad K_2 \in \mathscr{K}(Y).$$

Заменяя $T$ на $T+K$, получаем

$$\begin{aligned} S(T+K) &= \mathbf{1}_X + K_1 + SK \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X), \\ (T+K)S &= \mathbf{1}_Y + K_2 + KS \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y). \end{aligned}$$

Применяя теорему 21.2, заключаем, что оператор $T+K$ фредгольмов, причем $S$ — его существенно обратный. Следовательно, $\operatorname{ind}(T+K) = -\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$. □

В заключение дадим одну полезную характеризацию фредгольмовых операторов с нулевым индексом.

**Теорема 21.10** (С. М. Никольский)**.** *Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства. Следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ эквивалентны:*

(i) *$T$ фредгольмов и $\operatorname{ind} T = 0$;*
(ii) *$T = R + K$, где $R\colon X \to Y$ — топологический изоморфизм и $K \in \mathscr{F}(X,Y)$;*
(iii) *$T = R + K$, где $R\colon X \to Y$ — топологический изоморфизм и $K \in \mathscr{K}(X,Y)$.*

*Доказательство.* (i) $\Longrightarrow$ (ii). Из утверждения (a) теоремы 21.2 следует, что существует такой топологический изоморфизм $S\colon Y \to X$, что $ST = \mathbf{1}_X + K_1$, где $K_1 \in \mathscr{F}(X)$. Следовательно, $T = S^{-1} + S^{-1}K_1$ — искомое разложение оператора $T$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): очевидно.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): следует из теоремы 21.9. □

## 21.2. Операторы Тёплица

Познакомимся теперь с одним интересным классов фредгольмовых операторов, имеющим ряд важных приложений в теории операторных алгебр, геометрии и топологии.

Напомним, что через $\mathbb{T}$ обозначается окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, снабженная нормализованной (т.е. деленной на $2\pi$) мерой Лебега. Стандартный ортонормированный базис в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ образуют функции $e_n(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{Z}$); см. пример 6.7.

**Определение 21.5.** *Пространство Харди* на $\mathbb{T}$ определяется следующим образом:

$$H^2(\mathbb{T}) = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \geqslant 0\} = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \langle f, e_n\rangle = 0 \ \forall n < 0\}.$$

Очевидно, $H^2(\mathbb{T})$ — замкнутое векторное подпространство в $L^2(\mathbb{T})$.

Обозначим через $P$ ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{T})$ на $H^2(\mathbb{T})$. Он однозначно определен формулой

$$Pe_n = \begin{cases} e_n & \text{при } n \geqslant 0,\\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Для $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ через $M_f$ будет обозначаться оператор умножения в $L^2(\mathbb{T})$, действующий по правилу $M_f(g) = fg$ (см. пример 2.5).

**Определение 21.6.** Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Оператор

$$T_f\colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T}), \quad T_f = PM_f|_{H^2(\mathbb{T})},$$

называется *оператором Тёплица с символом $f$*.

Наша ближайшая задача — выяснить, при каких условиях на $f$ оператор Тёплица $T_f$ фредгольмов, и вычислить его индекс.

**Предложение 21.11.** *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для любой $f \in C(\mathbb{T})$ оператор $[P, M_f]$ в $L^2(\mathbb{T})$ компактен;*
(ii) *для любых $f, g \in C(\mathbb{T})$ справедливо равенство $T_f T_g = T_{fg} \mod \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T}))$.*

*Доказательство.* (i) Положим

$$A = \{f \in C(\mathbb{T}) : [P, M_f] \in \mathscr{K}(L^2(\mathbb{T}))\}.$$

Легко видеть, что $A$ — замкнутое векторное подпространство в $C(\mathbb{T})$ (объясните, почему). Очевидно, функция $e_0 \equiv 1$ лежит в $A$. Если $f, g \in A$, то

$$[P, M_{fg}] = [P, M_f M_g] = [P, M_f]M_g + M_f[P, M_g] \in \mathscr{K}(L^2(\mathbb{T})).$$

Следовательно, $A$ — замкнутая подалгебра в $C(\mathbb{T})$.

Прямая проверка (проведите ее) показывает, что

$$[P, M_{e_1}](e_i) = \begin{cases} e_0 & \text{при } i = -1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следовательно, $e_1 \in A$. Аналогично проверяется, что и $e_{-1} \in A$ (убедитесь)! Таким образом, $A$ — замкнутая подалгебра в $C(\mathbb{T})$, содержащая все лорановские многочлены. Из теоремы Вейерштрасса следует, что $A = C(\mathbb{T})$, как и требовалось.

(ii) С учетом (i) получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} T_f T_g = PM_f PM_g &= PPM_f M_g \mod \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T})) \\ &= PM_{fg} \mod \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T})) = T_{fg} \mod \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T})). \end{aligned}$$ □

**Следствие 21.12.** *Отображение*

$$C(\mathbb{T}) \to \mathcal{Q}(H^2(\mathbb{T})), \quad f \mapsto T_f + \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T})),$$

*— гомоморфизм банаховых алгебр.*

Для непрерывной функции $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ обозначим через $[f]$ ее класс в фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Напомним (см. курс топологии), что $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $e_1(z) = z$. Зафиксируем изоморфизм

$$\alpha \colon \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}, \quad [e_1] \mapsto 1.$$

**Определение 21.7.** Число $\operatorname{wn}(f) = \alpha([f])$ называется *числом оборотов*[1] функции $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ вокруг 0.

Число оборотов иногда называется *индексом* петли $f$ относительно 0. Следующая теорема устанавливает красивую связь числа оборотов (индекса) петли с фредгольмовым индексом.

**Теорема 21.13.** *Для любой непрерывной функции $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ оператор Тёплица $T_f$ фредгольмов, и* $\operatorname{ind} T_f = -\operatorname{wn}(f)$.

[1] По-английски winding number.

*Доказательство.* Поскольку $f$ — обратимый элемент алгебры $C(\mathbb{T})$, из следствия 21.12 вытекает, что $T_f + \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T}))$ — обратимый элемент алгебры $\mathcal{Q}(H^2(\mathbb{T}))$, т.е. $T_f$ — фредгольмов оператор (см. следствие 21.3). В группе $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ имеет место равенство $[f] = [e_n]$, где $n = \mathrm{wn}(f)$. Иначе говоря, функции $f$ и $e_n$ можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в $C(\mathbb{T}, \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Отсюда и из непрерывности отображения $f \mapsto T_f$ следует, что операторы $T_f$ и $T_{e_n}$ лежат в одной компоненте связности множества $\mathscr{F}\mathrm{red}(H^2(\mathbb{T}))$, а значит (см. теорему 21.7), имеют одинаковый индекс.

Для завершения доказательства рассмотрим операторы левого и правого сдвига

$$T_\ell, T_r \colon \ell^2(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}) \to \ell^2(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}).$$

Легко видеть, что

$$T_{e_n} \cong \begin{cases} T_r^n & \text{при } n \geqslant 0, \\ T_\ell^{-n} & \text{при } n < 0, \end{cases}$$

где символ $\cong$ означает унитарную эквивалентность. Следовательно,

$$\operatorname{ind} T_f = \operatorname{ind} T_{e_n} = -n. \qquad \square$$

У доказанных выше результатов есть содержательные многомерные аналоги, связанные с различными тонкими вопросами анализа, геометрии и топологии. См. по этому поводу L. Boutet de Monvel, V. Guillemin, “The spectral theory of Toeplitz operators” (Princeton, 1981), L. Boutet de Monvel, “On the index of Toeplitz operators of several complex variables” (Invent. Math. 50 (1979), 249–272), P. Baum, R. G. Douglas, “Toeplitz operators and Poincaré duality” (Operator Theory: Adv. Appl., 4, Birkhäuser, 1982).