2к

Мат. Анализ. Семинар № 23

Задача Штурма - Лиувилля

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u$$

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)\cdot u \quad (p(x)>0)$$

Здесь $u = u(x,t)$, $x \in [0,l]$, $t \geqslant 0$.

Граничные условия

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

или $$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$

Метод Фурье (метод разделения переменных)

$$u(x,t) = Y(x)\cdot Z(t)$$

Получаем задачу на собственные значения и собственные функции

(1) $$-(p(x)\cdot y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

(2) $y(0) = y(l) = 0$ или $y'(0) = y'(l) = 0$

Более общие граничные условия.

$\alpha y'(0) + \beta y(0) = 0$, $\gamma y'(l) + \delta y(l) = 0$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, $\gamma^2+\delta^2 \neq 0$

Задача Штурма - Лиувилля:

Требуется найти все $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых существуют ненулевые решения $y(x)$ уравнения (1) и граничные условия (2). Необходимо найти все такие $y(x)$.

Условие: $p(x) \in C^1[0,l]$, $p(x) \neq 0$ (эллиптичность)
$q(x) \in C[0,l]$.

Для определенности пусть $p(x) > 0$.

С помощью замены

$$\xi = \int_0^x p(x)^{-\frac{1}{2}} dx, \quad z = p^{\frac{1}{2}}(x) y$$

Задача (1)(2) сводится к более простой задаче, в которой $p(x) \equiv 1$:

Будем изучать задачу Ш.-Л.

$$(3) \quad \begin{cases} -y''(x) + q(x) y(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases}$$

(или $y'(0) = y'(l) = 0$)

Можно считать, что $q(x) \geq 0$ (иначе можно к λ - прибавить большую константу).

При $q(x) \equiv 0$ мы уже решали эти задачи Ш.-Л:

а) $y(0)=y(l)=0$: $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $y_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$,
$n = 1, 2, 3, \ldots$

б) $y'(0)=y'(l)=0$: $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $y_n = \cos \frac{\pi n}{l}$,
$n = 0, 1, 2, \ldots$

---

② Свойства собственных значений и собственных функций задачи Ш.-Л.

Оператор Ш.-Л.: $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$:

$$Ly = -y''(x) + q(x) \cdot y(x).$$

Область определения оператора Ш.-Л.:

$$D_L = \{ v(x) \in C^1[0,l],\ v(0) = v(l) = 0 \}.$$

(или другие граничные условия)

Задача Ш.-Л. принимает вид:

$$Ly = \lambda y, \quad y \in D_L.$$

Задача 1. Доказать, что оператор L симметричен, т.е. $(Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2)$ в пространстве $L_2(0,l)$.

$(u,v) = \int_0^l u(x) \cdot v(x)\,dx$ — скалярное произведение в $L_2(0,l)$.

Решение:

$$(Lv_1, v_2)-(v_1, Lv_2)=\int_0^l [(-v_1''+qv_1)v_1 - -v_1(-v_2''+qv_2)]dx = \int_0^l (-v_1''v_2+v_1 v_2'')dx =$$

$$=\int_0^l \frac{d}{dx}(-v_1' v_2 + v_1 v_2')dx = -v_1'v_2+v_1 v_2' \Big|_0^l = 0$$

В силу краевых условий

Задача 2. Оператор L положителен и все его собственные значения положительны

Решение: проверим: $(Lv, v)>0$

$$(Lv,v)=\int_0^l (-v''v+q(x)\cdot v^2)\,dx =$$

$$= -v'(x)\cdot v(x)\Big|_0^l + \int_0^l (v'(x))^2 dx + \int_0^l q(x)\cdot v^2 dx =$$

$$= \int_0^l (v'(x))^2 + q(x)v^2(x)\,dx > 0 \quad \forall v\in D_L,\ v\neq 0 \quad (q\geq 0)$$

применили интегрирование по частям

Если $Lv=\lambda v \Rightarrow \lambda(v,v)=(Lv,v)>0 \ \forall x\in D_L$

т.е. $\lambda>0$. Все с. значения положительны

Задача 3. Все собственные функции с различными собственными значениями ортогональны между собой

Решение:

Пусть $Lv_1 = \lambda_1 v_1$, $Lv_2 = \lambda_2 v_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Тогда $\lambda_1 (v_1, v_2) = (Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2) =$
$= \lambda_2 (v_1, v_2) \Rightarrow (v_1, v_2) = 0$ т.е.
$v_1 \perp v_2$ в $L_2(0, l)$.

Задача 4 Все собственные значения являются однократными, т.е. все собственные подпространства одномерные.

Решение: Следует из теоремы из обыкновенных дифф. уравнений:

Все решения уравнения

$$y'' + a(x) y' + b(x) y = 0, \quad x \in (a, b)$$

с условием $y(x_0) = 0$ $\quad x_0 \in [a, b]$

пропорциональны (единственному) решению этого уравнения, для которого

$$y'(x_0) = 0.$$

В нашем случае, $a(x) \equiv 0$, $b(x) = -q(x)$
$x_0 = 0$.

Замечание: Такие же свойства имеют решения задач Ш.-Л. с произвольными граничными условиями, кроме положительности собственных значений которое зависит от $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

т.е. Оператор L — симметричен, собственные функции ортогональны и собственные подпространства одномерны

Примеры: $-y'' = \lambda y$, $y'(0) = y'(1) = 0$, $\lambda_0 = 0$.

$y_n(x) = \cos(n\pi x)$

б) $-y'' = \lambda y$, $y(0) = 0$, $y'(1) + y(1) = 0$,

$y_n(x) = \sin \mu_n x$, $\operatorname{tg} \mu_n = -\mu_n$, $n = 1, 2 \ldots$

Все $y_n(x)$ — ортогональны между собой

---

③ Свойства нулей собственных функций оператора Ш.-Л. (Теорема Штурма)

Рассмотрим решения двух уравнений:

$$-y''(x) = q_1(x) y(x)$$

$$-z''(x) = q_2(x) z(x), \quad x \in [a, b]$$

предполагаем, что $q_1(x) \geq q_2(x)$, $q_1 \not\equiv q_2$ $\forall x \in [a, b]$.

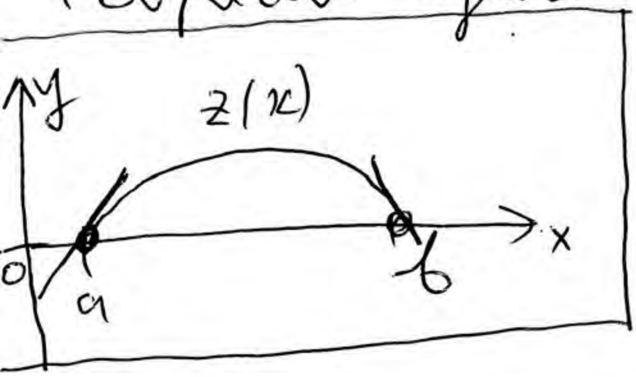
Задача 5. (Теорема Штурма)

Пусть $z(a) = z(b) = 0$. Тогда

$\exists x_0 \in (a, b)$: $y(x_0) = 0$.

<u>Решение</u>: Можно считать, что a и b — <u>соседние</u> нули функции $z(x)$, т.е. $z(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$. Нули не могут „сгущаться", т.к. в точке сгущения x^* имеем $z(x^*)=0$ и $z'(x^*)=0$ (теорема Ролля!), но $z(x)$ — решение уравнения 2-го порядка. По теореме единственности решения задачи Коши, $z(x)\equiv 0$.

Тогда $z'(a)>0$ и $z'(b)<0$. (Опять по теореме единственности)



Пусть $y(x)$ не имеет нулей на (a,b), т.е. можно считать, что $y(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$

Рассмотрим определитель Вронского:

$$W(x) = y(x)\cdot z'(x) - y'(x)\cdot z(x).$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}W(x) = y(x)\cdot z''(x) - y''(x)\cdot z(x) = (q_1(x)-q_2(x))\cdot y(x)\cdot z(x) \geq 0 \quad \forall x\in[a,b] \quad \not\equiv 0$$

Интегрируем по $[a,b]$:

$$W(b)-W(a) = \int_a^b \frac{d}{dx}W(x)\,dx > 0, \text{ т.к. } q_1\not\equiv q_2$$

С другой стороны, при начальных

предположениях:

$y(a) \geq 0, \quad y(b) \geq 0 \quad (\text{т.к. } y(x) > 0, x \in (a,b))$

Следовательно

$$W(b) - W(a) = y(b) \cdot z'(b) - y(a) \cdot z'(a) \leq 0$$

$$y(b) \geq 0, \quad z'(b) < 0, \quad y(a) \geq 0, \quad z'(a) > 0$$

т.е. $W(b) \leq W(a)$ <u>противоречие</u>.

Следовательно, $y(x)$ имеет <u>ноль</u> на (a, b)

<u>Задача 6</u>. Все собственные значения λ оператора Ш-Л. (при $q(x) \geq 0$) удовлетворяют уравнению:

$$\lambda \geq \left(\frac{\pi}{e}\right)^2 \qquad (y(0) = y(e) = 0).$$

<u>Решение</u>: При $q(x) \equiv 0$ это очевидно, т.к.

$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2$, т.е. $\lambda_n \geq \lambda_1 = \left(\frac{\pi}{e}\right)^2$

Пусть $q(x) \not\equiv 0$, $z(x)$ = решение задачи Ш.Л., отвечающее с значением λ:

$$-z'' = (\lambda - q(x))\, z, \quad z(0) = z(e)$$

Сравним это решение с решением ур.:

$$-y'' = \lambda y, \quad y(x) = \sin\sqrt{\lambda}\, x$$

$$x \in (0, e)$$

Применим теорему Штурма:

$$q_1(x) = \lambda \geqslant \lambda - q(x) = q_2(x)$$

$$q_1(x) \not\equiv q_2(x).$$

Тогда функция $y(x) = \sin\sqrt{\lambda}\, x$ обязана обращаться в ноль, хотя на $(0, l)$. Это возможно, только если выполнено неравенство $\sqrt{\lambda}\cdot l \geqslant \pi \Rightarrow \lambda \geqslant \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$.

Изучим асимптотические свойства собственных значений оператора Ш-Л. Обозначим для удобства $\lambda = k^2$:

(4) $-y'' + q(x) = k^2 y$, $k > 0$,

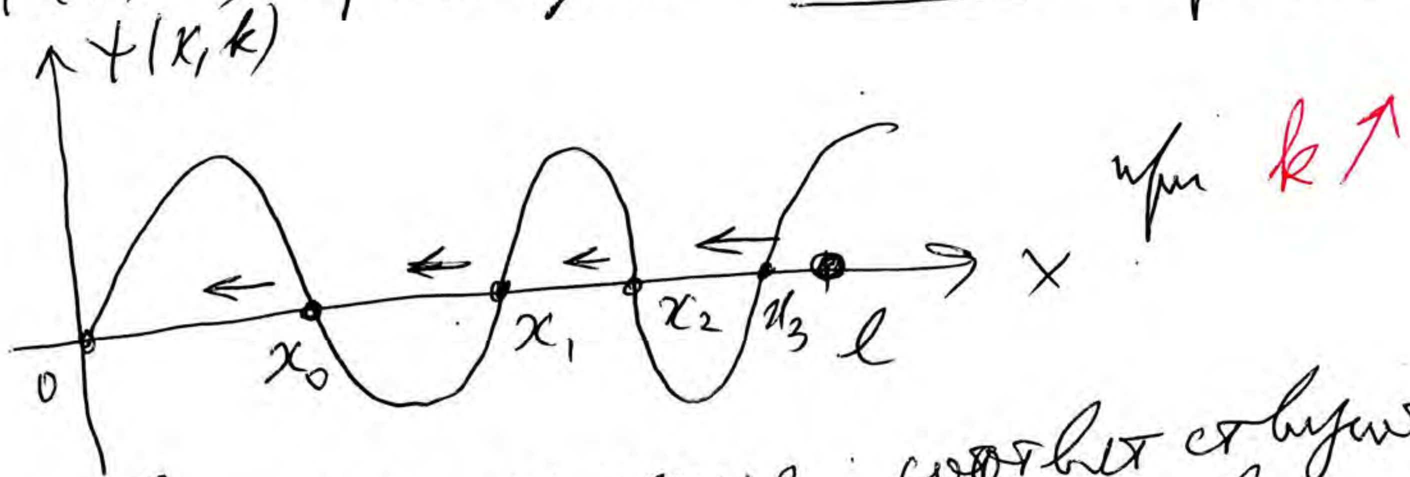
обозначим $\varphi = \varphi(x, k)$ решение (4) с начальными условиями:

$$\varphi(0, k) = 0, \quad \varphi'(0, k) = k$$

(при $q(x) \equiv 0$, $\varphi(x, k) = \sin kx$).

Следовательно, собственные значения оператора Ш-Л. имеют вид $\lambda = k^2$, где k такие, что $\varphi(l, k) = 0$.

Из теоремы Штурма следует, что число нулей функции $\psi(x,k)=0$, лежащих на отрезке $[0,a]$, где $a\le l$ является неубывающей функцией k. Поэтому, с ростом k все нули функции $\psi(x,k)$ двигаются влево с ростом k



Собственные значения соответствуют тем k, когда в т. $x=l$ появляется новый нуль функции $\psi(x,k)$

Число нулей конечно $\forall k>0$. Поэтому собственные значения образуют дискретную последовательность

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots<\lambda_n<\ldots,$$

которая бесконечна, т.к. по теореме Штурма число нулей функц. $\psi(x,k)$ на $(0,l)$ не меньше числа нулей на $(0,l)$ у решения уравнения

$-y'' + My = k^2 y$, где $M = \max\limits_{x\in[0,l]} q(x)$

Но этим решением является

$$y(x) = \sin\sqrt{k^2 - M}\,x \quad \text{при } k^2 > M,$$

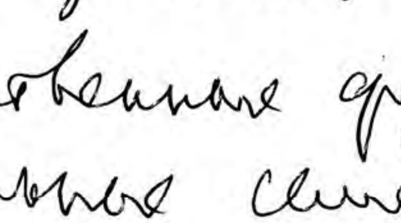
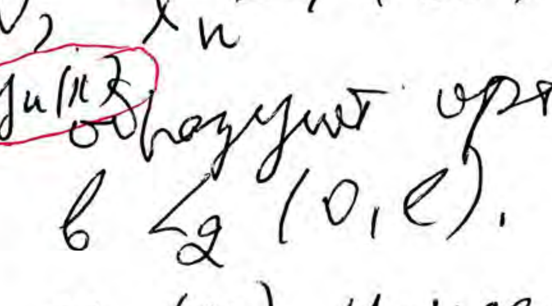
а число нулей этой функции неограниченно растет при $k \to \infty$.

Доказана сходимость

<u>Теорема 1.</u> Задача Ш.-Л. имеет бесконечное число решений, все собственные значения $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to +\infty$.

Собственные функции $y_n(x)$ образуют ортогональные семейство в $L_2(0,l)$.

Собственная функция $y_n(x)$ имеет ровно $(n-1)$ нулей на интервале $(0,l)$.

т.е. $y_1 =$  ; $y_2 =$  и т.д.

<u>Теорема 2.</u> Собственные функции $\{y_n(x)\}$ образуют ортогональный базис в $L_2(0,l)$.

④ Асимптотика λ_n и $y_n(x)$ при больших n

Из теоремы Штурма следует, что собственные значения оператора $Ш - 1$.

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

заключены между с. значениями операторов

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{и} \quad L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + M, \text{ где } M = \max_{x \in [0,\ell]} q(x)$$

которые вычисляются и равны:

$$\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 + M, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \le \lambda_n \le \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 + M,$$

т.е.

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \quad n \to \infty$$

Это асимптотическая формула

Можно доказать, что

$$y_n(x) = \sin\frac{\pi n}{\ell}x + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Аналогичные результаты для других краевых условий, напр., $y'(0) = y'(\ell) = 0$.
будут cos.