Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 10

27 апреля 2021

Игры Эренфойхта

Рассматриваем модели в конечной сигнатуре Ω без функциональных символов.

Игра Эренфойхта $G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$ длины n на моделях M, M' с начальной позицией $(\mathbf{m}, \mathbf{m}')$, где $\mathbf{m} \in M^k$, $\mathbf{m}' \in M'^k$ для некоторого k описывается правилами:

- Ходы делаются поочередно, первый ход делает $\forall$, каждый игрок делает n ходов.
- Ход $\forall$ — это пара (M, l), где $l \in M$ или (M', l'). Ответный ход $\exists$ — в другой модели.
- *Партия* — последовательность ходов по этим правилам. Законченная партия — длины $2n$. *Последняа позиция* $p(\pi)$ в партии π определяется по рекурсии: $p() = (\mathbf{m}, \mathbf{m}')$. Если $p(\pi) = (\mathbf{d}, \mathbf{e})$, то
$$p(\pi, (M, l)) = (\mathbf{d}l, \mathbf{e}),\ p(\pi, (M', l')) = (\mathbf{d}, \mathbf{e}l').$$
- $\exists$ выигрывает законченную партию π, если $p(\pi)$ задает частичный изоморфизм.

Игры Эренфойхта

Частичный изоморфизм:
$M, \mathbf{m} \equiv_0 M', \mathbf{m}'$, если

$$M \vDash A(\mathbf{m}) \Leftrightarrow M' \vDash A(\mathbf{m}')$$

для любой простой атомарной $A(\mathbf{a})$.
Простые атомарные формулы:

$$a_i = a_j,\ a_i = c,\ P(a_1, \ldots, a_n).$$

Определение. *Стратегия для* $\exists$.

$$\sigma: \text{ партии нечетной длины } < 2n \longrightarrow \text{ допустимые ходы}$$

Партия $\pi = \chi_1, \ldots, \chi_{2n}$ *согласована с* σ, если

$$\forall p < n\, \chi_{2p} = \sigma(\chi_1, \ldots, \chi_{2p-1}).$$

σ — *выигрышная для* $\exists$, если
для любой партии π, согласованной с σ, π выиграна $\exists$.

Игры Эренфойхта

Определение. *Игровая эквивалентность* $(M, \mathbf{m}) \approx_n (M', \mathbf{m}')$, если

$$\exists \text{ имеет выигрышную стратегию в } G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}').$$

Лемма 10.1 $\approx_n$ задает отношение эквивалентности.

Лемма 10.2 (Индуктивное определение $\approx_n$)

$$(M, \mathbf{m}) \approx_{n+1} (M', \mathbf{m}') \Leftrightarrow \begin{cases} \forall d \in M \, \exists d' \in M' \, (M, \mathbf{m}d) \approx_n (M', \mathbf{m}'d') \\ \forall d' \in M' \, \exists d \in M \, (M, \mathbf{m}d) \approx_n (M', \mathbf{m}'d'). \end{cases}$$

Игры Эренфойхта

Определение $q(A)$ — *кванторная глубина* формулы A определяется по рекурсии:
$q(A) = 0$ для атомарной A,
$q(\neg A) = q(A)$,
$q(A * B) = \max(q(A), q(B))$, где $*$ — бинарная связка,
$q(\forall x A[a \backslash x]) = q(\exists x A[a \backslash x]) = q(A) + 1$.

Определение. *Формульная эквивалентность*
$(M, \mathbf{m}) \equiv_n (M', \mathbf{m}')$, если
для любой простой формулы $A(\mathbf{a})$, где $q(A) \leq n$

$$M \models A(\mathbf{m}) \Leftrightarrow M' \models A(\mathbf{m}').$$

Игры Эренфойхта

Теорема 10.3 (Эренфойхта – Фраиссе)

$$(M, \mathbf{m}) \approx_n (M', \mathbf{m}') \Leftrightarrow (M, \mathbf{m}) \equiv_n (M', \mathbf{m}').$$

Следствие 10.4 $M \equiv M' \Leftrightarrow \forall n\, M \approx_n M'$.

Логика одноместных предикатов

Рассмотрим сигнатуру Ω_1 с 1-местными предикатами и равенством.

Определение. Замкнутая формула A *финитно выполнима*, если она имеет конечную модель.

Теорема 10.5 (Лёвенгейм, 1915) Всякая выполнимая формула A сигнатуры Ω_1 выполнима в модели мощности $\leq 2^k \cdot n$, где
$n = q(A)$ (для простой A),
k — число предикатных символов в A.

Следствие 10.6 Конечный спектр формулы в Ω_1 не может быть равен $2\mathbf{N}$.

Бесконечные игры Эренфойхта

Бесконечная игра Эренфойхта $G_\omega(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$ задается теми же правилами, что $G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$, с отличиями:
число ходов бесконечно,
бесконечная партия выиграна $\exists$, если выигран любой ее начальный отрезок четной длины.
Игровая эквивалентность $M \approx_\omega M'$ определяется соответственно.

Теорема 10.7 Для счетных моделей сигнатуры Ω

$$M \approx_\omega M' \Leftrightarrow M \cong M'.$$

Теорема 10.8 (Кантор) Теория $DLO_\leftrightarrow$ счетно категорична.