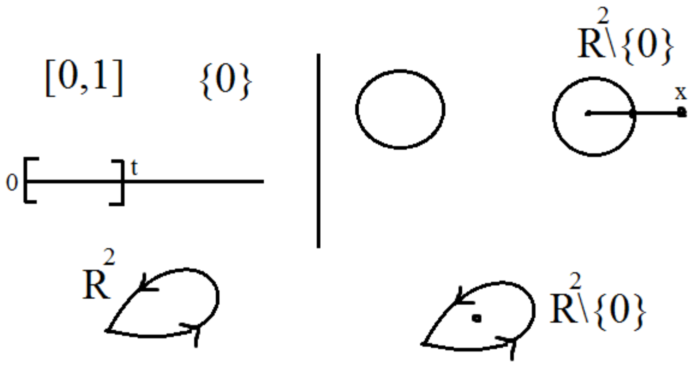
Топология
Зачет
А.Ю. Пирковский
март 2020

22 марта 2020 г.

Содержание

1

Гомотопия отображений. Согласованность гомотопии с композициями. Гомотопия относительно подмножества. Пример: линейная гомотопия отображений со значениями в выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^n$



Обозначение: $I = [0,1]$
Определение: X, Y – топологические пространства, $f, g: \ X \to Y$ – непрерывны. Гомотопия между f и g – непрерывное $F: \ X \times I \to Y$, такое что $F(x,0) = f(x), \ F(x,1) = g(x) \forall x \in X$
Замечание: F порождает семейство $\{F_t: \ X \to Y\} t \in U, \ F_t(x) = F(x,t)$
$F_0 = f, \ F_1 = g$
Обозначение: $F: \ f \simeq g$
Определение: f и g гомотопны $\Leftrightarrow$ существует гомотопия $F: \ f \simeq g$
Предложение: $\simeq$ – отношение эквивалентности на $C(X,Y)$
Лемма(о склейке):
X, Y – топологические пространства, $f: \ X \leftarrow Y, \ X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i, f|_{X_i}$ непрерывно $\forall i$
Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

1. все X_i открыты
2. все X_i замкнуты и I конечно

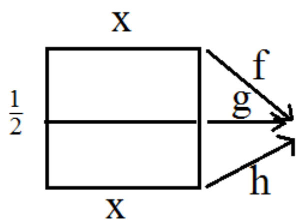
Тогда f непрерывно
Доказательство:

1. очевидно
2. для любого замкнутого $B \subset Y f^{-1}(B) = \bigcup\limits_{i \in I}(f^{-1}(B) \cap X_i) = \bigcup\limits_{i \in I} {f_i}^{-1}(B), \$ где$f_i = f|_{X_i}$
   $f^{-1}(B)$ замкнуто в X_i, то есть f_i – непрерывно $\Rightarrow {f_i}^{-1}(B)$ замкнуто в $X \Rightarrow f^{-1}(B)$ замкнуто и f непрерывно

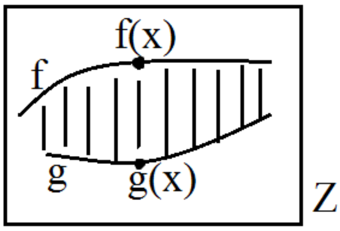
Доказательство предложения:

1. $f \simeq f$: положим $F(x,t) = f(x) \forall x, \forall t$
2. Пусть $F: f \simeq g, G: g \simeq h$. Положим, $G(x,t) = F(x, 1-t) \forall x, \forall t \Rightarrow G: g \simeq f$
3. Пусть $F: f \simeq g, G: g \simeq h$. Положим $H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) \ if \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) \ if \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow H: f \simeq g$. Непрерывность H – из леммы о склейке

Предложение: $f_0, f_1: \ X \to Y, \quad g_0, g_1: \ Y \to Z, \ f_0 \simeq f_1, \ g_0 \simeq g_1 \ \Rightarrow \ g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$
Доказательство: пусть $F: \ f_0 \simeq f_1, \quad G: \ g_0 \simeq g_1$
Рассмотрим $H: \ X \times I \ \to Z, \ H_t / G_t \circ F_t \forall t \in I, \$ то есть $H(x,t) = G(F(x,t),t) \ (x \in X, t \in I)$
H – непрерывно, $H: g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ что и требовалось доказать
Определение: X, Y – топологические пространства, $A \subset X, f, g: \ X \to Y$ непрерывно, $f|_A = g|_A$
Гомотопия $F: f \simeq g$ называется гомотопией относительно A(A-гомотопией) $\Leftrightarrow F_t|_A = f|_A \forall t \in I$
Обозн: $F: f \underset{A}{\simeq} g$
Определение: f и gA – гомотопии $(f \underset{A}{\simeq} g) \Leftrightarrow \exists F: f \simeq g$



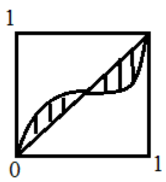
Предложение: (1) $\forall \phi \in C(A, Y)$ отношение $\underset{A}{\simeq}$ является отношением эквивалентности на $\{f \in C(X, Y) : f|_A = \phi\}$
(2)$f_0, f_1 : X \to Y, g_0 \circ g_1 : Y \to Z$ непрерывно, $f_0 \underset{A}{\simeq} f_1, g_0 \underset{B}{\simeq} g_1 (f_0(A) \subset B) \Rightarrow g_0 \circ f_0 \underset{A}{\simeq} g_1 \circ f_1$
Доказательство: аналогично случаю $A = B = \varnothing$ (см.выше)
Примечание: X – топологические пространство, Y – нормированное пространство, $z \subset Y$ выпуклое
Покажем: $\forall A \subset X$ любые непрерывные $f, g : X \to Z$, такие, что $f|_A = g|_A, f$ и gA-гомотопии
В частности: любые два непрерывных $X \to Z$ гомотопии
Рассмотрим $F : X \times I \to Z, F(x, t) = tg(x) + (1 - t)f(x)$ (линейная гомотопия)



2

Гомотопия путей. Пример: замена параметра. Прозведение путей и их гомотопический классов. Свойства операции умножения гомотопических классов путей. Фундаментальная группа.

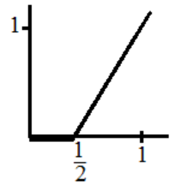
X – топологические пространство, $x_0, x_1 \in X$
Определение: Путь в X из x_0 в x_1 – непрерывен и $I \to X,\ u(0) = x_0,\ u(1) = x_1$
Петля в x_0 – путь из x_0 в x_0
$P(x_0, x_1) = \{$пути в X из x_0 в $x_1\}$
Определение: $u, v \in P(x_0, x_1)$ гомотопны, как пути $\Leftrightarrow u \simeq v \Leftrightarrow \exists$ гомотопия $F:\ u \simeq v$, такие что $\forall t \in I,\ F_t \in P(x_0, x_1)$, то есть $F(0,t) = x_0,\ F(1,t) = x_1,\ \forall t$
Обозначение: $u \underset{p}{\simeq} v$
Обозначение: $\Pi(x_0, x_1) = P(x_0, x_1) \diagup \underset{p}{\simeq}$ – множество гомотопических классов путей из x_0 в $x_1, \forall u \in P(x_0, x_1)$
Обознаяение $[u]$ – его гомотопический класс в $\Pi(x_0, x_1)$
Обозначение: $\pi_1(X, x_0) = \Pi(x_0, x_1)$ – множество гомотопических классов петель в x_0
Определение: пусть $u \in P(x_0, x_1),\ v \in P(x_1, x_2)$
Произведение u, v – путь $uv \in P(x_0, x_2), (uv)(S) = \begin{cases} u(2S)\ if\ S \le \frac{1}{2} \\ v(2S-1)\ if\ S \ge \frac{1}{2} \end{cases}$
Замечание: то, что выше обозначается uv, иногда обозначается vu
Предложение: $u_0, u_1 \in P(x_0, x_1),\ v_0, v_1 \in P(x_1, x_2) u_0 \underset{p}{\simeq} u_1, v_0 \underset{p}{\simeq} v_1 \Rightarrow u_0 v_0 \underset{p}{\simeq} u_1 v_1$
Доказательство: пусть $F: u_0 \underset{p}{\simeq} u_1,\ G: v_0 \underset{p}{\simeq} v_1$
Рассмотрим $H: I \times I \ \to\ X, H_t = F_t \cdot G_t,\ \forall t \in I$, то есть $H(S,t) = \begin{cases} F(2S,t)\ if\ S \le \frac{1}{2} \\ G(2S-1,t)\ if\ S \ge \frac{1}{2} \end{cases}$
H непрерывно (по лемме о склейке), $H: u_o v_o \underset{p}{\simeq} u_1 v_1$ Следствие: определено отображение:
$\Pi(x_0, x_1) \times \Pi(x_1, x_2) \to \Pi(x_0, x_2)$
$([u], [v]) \to [u][v] = [uv]$ (опр)
Обозн: (1) $\forall x_0 \in X, e_{x_0}: I \to X, e_{x_0}(S) = x_0, \forall S \in I$
(2)$\forall u \in P(x_0, x_1) u^{-1} \in P(x_1, x_0), u^{-1}(S) = u(1-S)\ \forall S \in I$ Лемма(о замене параметра)
Пусть $\phi: I \to I$ непрерывно, $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1 \Rightarrow \forall u \in P(x_o, x_1)$
Доказательство: I выпукло $\Rightarrow\ \phi \underset{\{0,1\}}{\simeq} \mathrm{id}_I\ \Rightarrow\ u \cdot \phi \underset{\{0,1\}}{\simeq} u$



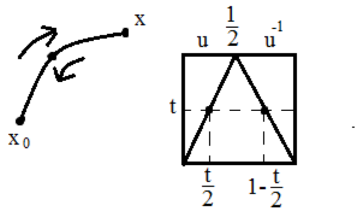
Теорема:

1. $[e_{x_e}][u] = [u] = [u][e_{x_1}]\ \forall u \in P(x_0, x_1)$
2. $[u][u^{-1}] = [e_{x_0}], [u^{-1}][u] = [e_{x_1}]\ \forall u \in P(x_0, x_1)$
3. $([u][v])[w] = [u]([v][w])\ u \in P(x_0, x_1),\ v \in P(x_1, x_2),\ w \in P(x_2, x_3)$

Доказательство:

1. 

   Рассмотрим $\phi: I \to I$ (см.рис)
   $u \cdot \phi = e_{x_0} u \Rightarrow u \underset{p}{\simeq} e_{x_0} u$
   Аналогично $u \simeq u \cdot e_{x_1}$

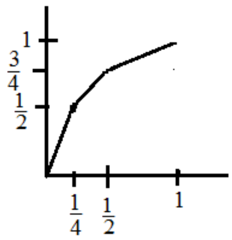


2.

Рассмотрим $F : I \times I \Rightarrow X$

$$F(S,t) = \begin{cases} u(2S) \ if \ S \leq \frac{t}{2} \\ u(t) \ if \ \frac{t}{2} \leq S \leq 1 - \frac{t}{2} \\ v(2S-1) \ if \ 1 - \frac{t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$F : e_{x_0} \simeq uu^{-1}$, непрерывность F - из леммы о склейке
меняем ролями $u, u^{-1} \Rightarrow$ получаем $e_{x_1} \simeq u^{-1}u$



3.

Рассмотрим $\phi : I \Rightarrow I$ (см.рис)
$(u \cdot (v \cdot w)) \cdot \phi = (u \cdot v) \cdot w \Rightarrow u \cdot (v \cdot w) \underset{p}{\simeq} (u \cdot v) \cdot w$ что и требовалось доказать

Следствие: операция произведения гомотопных кассов петель превращает $\pi_1(X, x_0)$ в группу. Её нейтральный элемент $[e_{x_0}]$, $[u]^{-1} = [u^{-1}]$ $\forall u \in \pi_1(X, x_0)$
Определение: $\pi_1(X, x_0)$ – фундаменталная группа X в x_0
Пример: Если Z выпуклое подмножество нормированного пространства X, то $\forall x_0 \in Z$ $\pi_1(Z, x_0)$ – тривиальна

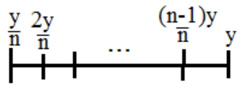
3

Поднятия отображений $Y \to S^1$ до отображений $Y \to \mathbb{R}$: единственность (для произвольного связного пространства Y) и существование (для компактного звездного помножества $Y \subset \mathbb{R}^n$)

Определение: Y – топологические пространство, $f : Y \to S^1$ непрерывно. Непрерывное оторбражение $g : Y \to \mathbb{R}$ называется поднятием $f \Leftrightarrow pog = f$

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dr, "p"] & \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & S^1 \end{tikzcd}$$

Предложение (о единственности поднятия): Y – связное топологическое пространство, $f : Y \to S^1$ непрерывно, $g_1, g_2 : Y \to \mathbb{R}$ – поднятия f
Предположим: $\exists y_0 \in Y, g_1(y_0) = g_2(y_0) \Rightarrow g_1 = g_2$
Доказательство: рассмотрим $g : Y \to \mathbb{R}, g = g_1 - g_2, g$ непрерывно
$pog_1 = pog_2 \Rightarrow \forall y \in Y p(g(y)) = \frac{p(g_1(y))}{p(g_2(y))} = 1 \Rightarrow g(Y) \subset \mathbb{Z}, g(Y)$ связно
$0 = g(y_0) \in g(Y) \Rightarrow g(Y) = \{0\} \Rightarrow g_1 = g_2$ что и требовалось доказать
Определение: X векторное пространство над $\mathbb{R}, Y \subset X, y_0 \in Y$
Y – звездное относительно $y_0 \Rightarrow \forall y \in Y$ отрезок $[y_0, y] \subset Y$
Предложение (о существовании поднятия): Пусть X – нормированное пространство над $\mathbb{R}, Y \subset X$ – компактное множество, звездное относительно $y_o \in Y$
Тогда для любого непрерывного $f : Y \to S^1, \forall t_0 \in \mathbb{R}$, такое что $p(t_0) = f(y_0)$, существует непрерывное $g : Y \to \mathbb{R}$, поднимающее f и такое что $g(y_0) = t_0$
Доказательство: Можем считать, что $y_0 = 0$
Из равномерной непрерывности $f : \exists \delta > 0$, такое что $\forall y, y' \in Y$, удовлетворяющие $||y - y'|| < \delta$, выполнено $|f(y) - f(y')| < 2$ (то есть $f(y) \neq -f(y')$) Обозначим $C = sup\{||y|| : y \in Y\}, C < \infty$, так как Y – ограничено
Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, такое что $\frac{C}{n} < \delta$



$\forall k = 0, \ldots, n-1 \quad \forall y \in Y \quad ||\frac{(k+1)y}{n} - \frac{ky}{n}|| = \frac{||y||}{n} < \delta \Rightarrow f(\frac{(k+1)y}{n})/f(\frac{ky}{n}) \neq -1$
Обозначим $f_k : \ Y \to S^1 \diagup \{-1\}, \quad f_k(y) = f(\frac{(k+1)y}{n})/f(\frac{ky}{n}), \quad f_k$ – непрерывно
Заметим: $f(y) = f(0) f_0(y) f_1(y) \ldots f_{n-1}(y) \quad \forall y \in Y$
Рассмотрим $g : \ Y \to \mathbb{R}, g(y) = t_0 + S(f_0(y)) + S(f_{n-1}(y)), g$ непрерывно, $p \circ g = f, \ g(0) = t_0$ что и требовалось доказать

Степень(= вращение) петли $[0,1] \to (S^1,1)$. Свойства степени. Фундаментальная группа окружности.
Фундаментальная группа окружности.

Обозначение: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
$p : \mathbb{R} \to S^1, p(t) = e^{2\pi it}$
Предложение: $p|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ – гомеоморфно $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ на $S^1 \diagup \{1\}$
Наблюдение: обозначим $I = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}), U = S^1 \diagup \{1\}$
$p|_I$ -биекция I на U
Обозначение: $U \to I, s = (p|_I)^{-1}$, докажем, что S – непрерывно
$\forall n \in \mathbb{N}(n \geq 3)$: обозначим $I_n = (-\frac{1}{2}+\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}), U_n = p(I_n) \subset S$ – открытая дуга на S^1
$p|_{\overline{I}} : \overline{I_n} \to \overline{U_n}$ – гомеоморфизм (т.к. $\overline{I_n}$ – компакт) $\Rightarrow U_n$ открытое, $\underset{n\geq 3}{\cup} U_n = U \Rightarrow S$ – непрерывно что и требовалось доказать

Обозначение: Пусть $u : I \to S^1$ – Петля в 1
Из предложений о единственности и существования поднятий следует, что существует единственный путь $\widetilde{u} : I \to \mathbb{R}$, поднимающий u, такой что $\widetilde{u}(0) = 0$
$p(\widetilde{u}(1)) = u(1) = 1 \Rightarrow \widetilde{u}(1) \in \mathbb{Z}$
Определение: $deg(u) = \widetilde{u}(1)$ – степень u (синонимы: индекс u $(ind(u))$, число оборотов u $(wn(u))$)
Пример: $\forall n \in \mathbb{Z}$ рассмотрим $\omega_n(t) = e^{2\pi it}, \omega_n$ – петля в 1
$\omega_n : I \to \mathbb{R}, \omega_n(t) = nt$ – поднятие $\omega_n, \widetilde{\omega}(0) = 0 \Rightarrow \deg(\omega_n) = \widetilde{\omega}(1) = n$
Предложение: $u, v : I \to S^1$ – петли в $1, u \underset{p}{\simeq} v \Rightarrow \deg(u) = \deg(v)$
Доказательство: пусть $F : u \underset{p}{\simeq} v, F : I \times I \to S^1$

По предложению о сущ. поднятия $\Rightarrow$ сущ. поднятие $\widetilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$ отображения F такое, что $F(0,0) = 0$
$\forall t \in I$ отображение $F_t : I \to S^1, F_t(s) = F(s,t)$ – петля в 1, то есть $F(0,t) = F(1,t) = 1 \forall t \in I \to \widetilde{F}(0,t) \in \mathbb{Z}\forall t, \widetilde{F}(1,t) \in \mathbb{Z}\forall t$
$\widetilde{F_0}$ – поднятие $F_0 = u \Rightarrow \deg(u) = \widetilde{F_0}(1) = \widetilde{F}(1,0) = d$
$\widetilde{F_1}$ – поднятие $F_1 = v \Rightarrow \deg(v) = \widetilde{F_1}(1) = \widetilde{F}(1,1) = d$
(тк $\widetilde{F_0}(0) = \widetilde{F_1}(0) = 0$)
$\Rightarrow \deg(u) = \deg(v)$ что и требовалось доказать
Следствие: корректно определено отображение $\phi : \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}, \phi([u]) = \deg(u)$
Теорема: $\phi : \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}, \phi([u]) = \deg(u)$ – изоморфизм групп
Циклической образующей в $\pi_1(S^1,1)$ является элемент $[\omega]$, где $\omega(t) = e^{2\pi it}$ (то есть $\omega = p|_I$)
Доказательство: сюръективность $\phi : \forall n \in \mathbb{Z}$ расссмотрим $\omega_n : I \to S^1, \omega_n(t) = e^{2\pi it}, \omega_n$ – петля в $1, \deg(\omega_n) = n$, тк поднятие ω_n – путь $\widetilde{\omega_n} = nt$ и $\widetilde{\omega_n}(1) = n$
Пусть $u, v : I \to s^1$ – петли в $1, \deg(u) = \deg(v)$
Пусть $\widetilde{u}, \widetilde{v} : I \to \mathbb{R}$ – их поднятия, $\widetilde{u}(0) = 0, \widetilde{v}(0) = 0 \Rightarrow \widetilde{u}(1) = \deg(u) = \deg(v) = \widetilde{v}(1) \Rightarrow \widetilde{u}, \widetilde{v} \in P(0,d)$, где $d = \deg(u) \in \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ – односвязно $\Rightarrow \widetilde{u} \underset{p}{\simeq} \widetilde{v} \Rightarrow po\widetilde{u} \underset{p}{\simeq} po\widetilde{v}$, то есть $u \underset{p}{\simeq} v \Rightarrow \phi$ – инъекция
Рассмотрим $\phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1,1), \psi(n) = [\omega]^n, \psi$ – гомоморфизм групп $\Rightarrow \phi$ – тоже
Заметим: $\omega^n = \omega_n \Rightarrow \phi \cdot \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \Rightarrow \psi = \phi^{-1}$ – гомоморфизм групп $\Rightarrow \phi$ – тоже
1 – циклическая образующая $\mathbb{Z}, \psi(1) = [\omega] \Rightarrow [\omega]$ – циклическая образующая $\pi_1(S^1,1)$ что и требовалось доказать

5

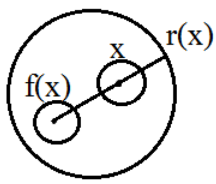
Пространства с отмеченной точкой и их отображения. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением пространств с отмеченной точкой. Свойства индуцированных гомоморфизмов. Ретракции. Примеры. Несуществование ретракции замкнутого круга на его границу. Теорема Брауэра о неподвижной точке (двумерный случай)

Определение: Пространство с отмеченной точкой (пунктированное пространство) – пара (X, x_0), где X – топологическое пространство, $x_0 \in X$
Определение: $(X, x_0), (Y, y_0)$ – пунктированные пространства
Отображение пространств с отмеченными точками $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ – непрерывное $f : X \to Y$, такое что $f(x_0) = y_0$
Предложение: Пусть $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ – отображение пунктированных пространств $\Rightarrow$ существует гомоморфизм групп $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, определенный равенством $f_*([u]) = [f \circ u]$
Доказательство: Если $u, v : I \to X$ – петли в $x_0, u \underset{p}{\simeq} v \Rightarrow fu \underset{p}{\simeq} f \circ v$ $\Rightarrow$ отображение f_* корректно определено
$f_*([u][v]) = f_*([uv]) = [f \circ (uv)] = [(f \circ u)(f \circ v)] = f_*([u])f_*([v])$
Терминология: f_* индуцирован f
Определение: X – топологическоепространство, $A \subset X,\ i_A :\ A \to X$ – отображение включения
Непрерывное $r : X \to A$ – ретракция X на A $\Leftrightarrow$ $r \circ i_A = \mathrm{id}_A$
Если такое r существует, то A называют ретрактом X
Примеры:

1. $I \times 0$ – ретракт $I \times I$
   $r(x, y) = (x, 0)$ – ретракция

2. S^n – ретракт $\mathbb{R}^{n+1}/\{0\}$
   r: $\mathbb{R}^{n+1}/\{0\} \ \to \ S^n$

Обозн: $D = \{(x,) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 1\}$ диск (круг)
Предл: S' не является ретрактом D
Доказательство: Пусть $r : D \to S'$ – ретракция. Зафиксируем $x_0 \in S'$; $\mathbb{Z} \simeq \{\pi_1(S', x_0) \underset{r_*}{\overset{i_*}{\Leftrightarrow}} \pi_1(D, x_0)\} = \{e\}$
$r \circ i = \mathrm{id} \ \Rightarrow \ r_* \circ i_* = \mathrm{id} \ \Rightarrow \ i_*$ – мономорфизм $\Rightarrow$ $\mathbb{Z} \simeq$ подгруппе в тривиальной группе $\Rightarrow$ противоречие, что и требовалось доказать
Предложение (двумерная теорема Брауэра): Каждое непрерывное $f : D \to D$ имеет неподвижную точку
Доказательство: пусть f не имеет неподвижных точек, тогда определим $r : D \to S^1$ так (см. рисунок)



r непрерывно и r является ретракцией D на S^1 $\Rightarrow$ противоречие предыдущему предложению, что и требовалось доказать

Изоморфизм фундаментальной группы пространства и линейно связной компоненты отмеченной точки. Зависимость фундаментальной группы от отмеченной точки. Односвязные пространства, их эквивалентные определения (через петли и через пути). Односвязность выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$

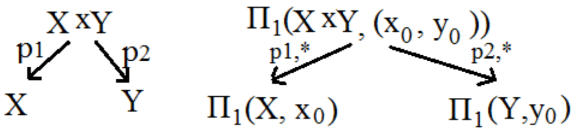
Предложение: $x_0, x_1 \in X,\ p \in P(x_0, x_1)$
Рассмотрим $\phi_p : \pi_1(x, x_1) \to \pi_1(x, x_0)$
$\phi_p([u]) = [p][u][p^{-1}]$
Тогда ϕ_p – изоморфизм групп
Доказательство: $\phi_p([u])\phi_p([v]) = [p][u][p^{-1}][p][v][p^{-1}] = [p][u][e_{x_1}][v][p^{-1}] = [p][u][v][p^{-1}] = \phi_p([u][v]) \Rightarrow \phi_p$ – гомоморфизм групп
Заметим: $\phi_{p^{-1}}\phi_p = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_1)}, \phi_p\phi_{p^{-1}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)} \Rightarrow \phi_{p^{-1}}b\phi_p$ - изоморфизмы, что и требовалось доказать
Нестрогое **Обозначение**: X – линейное связное топологическое пространство
Фундаментальная группа X – группа $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0)$, где $x_0 \in X$ – любая точка
Она определена однозначно с точностью до изоморфизма (см.предложение), но не единственного
Определение: X односвязно $\Leftrightarrow$ X линейно связно и $\pi_1(X)$ тривиальна
Примечание: Выпуклое подномжество в нормированном пространстве односвязно
Предложение: линейно связное топологическоепространство X односвязно $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in X, \forall u, v \in P(x_0, x_1) u \simeq v$
Доказательство:
$(\Rightarrow)$ $[u][v^{-1}] = [e_{x_0}] \Leftrightarrow [u] = [v]$
$(\Leftarrow)$ Взять $x_1 = x_0 v = e_{x_0}$ что и требовалось доказать

7

Лемма о лебеговом числе. Односвязность n-мерной сферы при $n \geq 2$

Теорема: $\forall n \geq 2 S^n$ односвязна (то есть ее фундаментальная группа тривиальна)
Лемма 1 (о лебеговом числе): X – компактное метрическое пространство, U – открытое покрытие $X \Rightarrow \exists \delta > 0$, такое что каждое $S \subset X < \delta$, содержится в некотором элементе U.
Определение: такое δ называется лебеговым числом U
Доказательство: $\forall x \in X$
$\exists r(x) > 0$, такое что $B_{2r(x)} \subset V_x$, где $V_x \in U$
Из компактности $X \Rightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in X$, такое что $X = \underset{i=1}{\overset{n}{cup}} B_{r(x_i)}(x_i)$
Обозначим: $\delta =, in\{r(x) : 1 \leq i \leq n\}$
Пусть $\varnothing \neq S \subset X, diam S < \delta$
Зафиксируем: $\forall y \in S \exists i$, такое что $\phi(y, x_i) \leq r(x_i)$
$\forall x \in S \rho(z, x_i) = \rho(z, y) + \rho(y, x_i) < \delta + r(x_i) \Rightarrow S \subset B_{2r(x_i)}(x_i) \subset V_{x_i}$ что и требовалось доказать
Лемма 2: $n \leq 2, a, b, v \in S^n, c \notin \{a, b\}$
$\forall u \in P(a, b) \exists v \in P(a, b)$, такой что $v \underset{p}{\simeq} u, v(I) : c \notin v(I)$
Доказательство: $S^n = U \cup V$, где U – окрестность c, гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$
$V = S^n / \{c\}$
Пусть ε – лебеговое число $\{U, V\}$
$\exists \delta > 0$, Такое что $\forall t, t \in I$, удовлетворяющее $|t - t'| < \delta$, выполняется $||u(t) - u(t')|| < \varepsilon$
Зафиксируем разбиение: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$, такое что $t_i - t_{i-1} < \delta \forall i$
Обозначим: $x_i = u(t_i) \in S^n$
$u \underset{p}{\simeq} u_1, \ldots, u_m$, где $u_i \in P(x_{i-1}, x_i)$, причем либо $u_i(I) \subset U$, либо $u_i(I) \subset V$
$\forall i$, такой что $u_i(I) \subset U$ найдем $V_i(I) \subset U / \{c\}$ (так как $U / \{c\}$ линейно связно)
$u_i \underset{p}{\simeq} v_i$, так как U односвязно
$\Rightarrow u \underset{p}{\simeq} v$, где $v = v_1 \cdot \ldots \cdot v_m$, где остальные $v_i = u_i$ (по построению $c \notin V(I)$) что и требовалось доказать
Доказательство теоремы: Пусть $a, b \in S^n, u, v \in P(a, b)$
Зафиксируем: $\forall c \notin \{a, b\}$
Из Леммы 2 следует, что $\exists u', v' \in P(a, b)$, такое что $u \underset{p}{\simeq} u', v \underset{p}{\simeq} v', c \notin u'(I), c \notin v'(I)$
$S^n / \{c\}$ – гомеоморфно $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n$ односвзяно $\Rightarrow u' \underset{p}{\simeq} v_i \Rightarrow u \underset{p}{\simeq} v$ что и требовалось доказать

Фундаментальная группа произведения. Примеры: фундаментальная группа тора и фундаментальная группа $\mathbb{R}^n \diagup \{0\}$



$\phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$
$\phi(h) = (p_1, *(h); p_2, *(h))$
Предложение: ϕ – изоморфизм групп
Доказательство: рассмотрим $\psi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)), \psi([u], [v]) = [(u, v,)]$, где $(u, v) : I \to X \times Y, s \to (u(s), v(s))$
Если $u \underset{p}{\simeq} u', v \underset{p}{\simeq} v', (u, v) \underset{p}{\simeq} (u', v')$
Действительно: пусть $F : u \underset{p}{\simeq} u', G : v \underset{p}{\simeq} v'$, рассмотрим $H : I \times I \to X \times Y, H_t(s) = (F_t(s), G_t(s))$
$H : (u, v) \underset{p}{\simeq} (u', v')$, поэтому ψ корректно определено
Из конструкции $\phi \cdot \psi = \mathrm{id}, \psi \cdot \phi = \mathrm{id} \Rightarrow \phi$ – изоморфизм групп
Следствие: $\pi_1(T^n, x_0) \cong \mathbb{Z}^n$
$\pi_1(T^2, x_0) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1)$
Следствие: $\pi_1(\mathbb{R}^n \diagup \{0\}, x_0) \cong \begin{cases} 0 \text{ если } n = 1 \text{ или } n \geq 3 \\ \mathbb{Z} \text{ если } n = 2 \end{cases}$ **Доказательство**: $\mathbb{R} \diagup \{0\} = (-\infty, 0) \sqcup (0, +\infty)$ (оба промежутка односвязны) $\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n \diagup \{0\}) = 0$
Пусть $n \geq 2$. рассмоторим $f : \mathbb{R}^n \diagup \{0\} \to S^{n-1} \times (0, +\infty), f(x) = (\frac{x}{||x||}, ||x||)$
f – гомеоморфизм, $f^{-1}(y, t) = y \cdot t \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n \diagup \{0\}, x_0) \cong \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(0, +\infty) \cong \pi_1(S^{n-1}) \cong \begin{cases} 0 \text{ если } n = 1 \text{ или } n \geq 3 \\ \mathbb{Z} \text{ если } n = 2 \end{cases}$

Гомотопическая эквивалентность и ее категорная интерпретация. Деформационные ретракции и строгие деформационные ретракции. Сфера S^n как строгий деформационный ретракт $\mathbb{R}^n \diagup \{0\}$. Биекция $\pi_0(X) \cong [pt, X]$. Следствие: гомотопическая инвариантность свойства линейной связности. Стягиваемые пространства, их эквивалентные определения, примеры.

Определение: X, Y – топологические пространства. Непрерывное $f : X \to Y$ -гомотопическая эквивалентность $\Leftrightarrow$ существует непрерывное $g : Y \to X$, такое что $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y, g \circ f \simeq if_X.g$ называется гомотопически обратным к f.

X и Y гомотопически эквивалентны $(X \simeq Y) \Leftrightarrow$ существует гомотопическая эквивалентность $X \to Y$

Наблюдение: гомеоморфизм является гомотопической эквивалентностью

Обозначим гомотопической категорией $Hmt : \mathrm{Ob}(Hmt)$ – топологические пространства

Морфизмы – гомотопические классы непрерывных отображений $\mathrm{Hom}_H mt(X, Y) = [X, Y] = C(X, Y) \diagup_{\simeq}, [g]o[f] = [g \circ f]$

Наблюдение: $f : X \to Y$ – гомотопическая эквивалентность $\Leftrightarrow$ его гомотопический класс – изоморфизм в Hmt

Следствие:

1. $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ – гомотопические эквивалентности $\Rightarrow g \circ f$ – гомотопическая эквивалентность
2. Если $f : X \to Y$ – гомотопическая эквивалентность, $g : Y \to$ – его гомотопически обратный

Непрерывный $g_1 : Y \to X$ гомотопические обратно к $f \Rightarrow g_1 \simeq g$

Определение: X – топологическоепространство, $A \subset X$. Ретракция rX на A (то есть непрерывное $r : X \to A$, такое что $r \circ i_A = \mathrm{id}_A$) называется:

1. Деформационной ретракцией $\Leftrightarrow i_A \circ r \simeq \mathrm{id}_X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] & A \arrow[r, hook, "i_A"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_A"'] & X \arrow[r, "r"] & A \end{tikzcd}$$

2. строгой деформационной ретракцией $\Leftrightarrow i_a \circ r \underset{A}{\simeq} if_X$

   A называется деформационным ретрактом(соответственно строгим деформационным ретрактом) $X \Leftrightarrow$ существует деформационная ретракция (соответственно строгая днформационная ретракция) X на A

Строгая деформационная ретракция $\Rightarrow$ деформационная ретракция $\Rightarrow$ ретракция

Наблюдение: деформационная ретракция является гомотопической эквивалентностью

Предложение: S^n – строгий деформационнный ретракт $\mathbb{R} \diagup \{0\}$

Доказательство: рассмотрим ретракцию $r : \mathbb{R}^{n+1} \diagup \{0\} \to S^n$

$r(x) = \frac{x}{||x||}$

Рассмотрим $F : \mathbb{R}^{n+1} \diagup \{0\} \times I \to \mathbb{R}^{n+1} \diagup \{0\}$

$F(x, t) = t\frac{x}{||x||} + (1 - t)x$

$F_0 = \mathrm{id}, F_1 = i_{S^n} \circ r \Rightarrow r$ – строгая деформационная ретракция что и требовалось доказать

Терминология: гомотопические свойства топологические пространства – свойства, которые сохраняются при гомотопических эквивалентностях

Обозначение: $pt = \{p_0\}$ – топологические пространство, состоящее из одной точки p_0

Обозначение: X – топологические пространство, $\pi_0(X)$ – множество его линейно связных компонент

Предложение: для любого топологические пространства X существует биекция $[pt, X] \to \pi_0(X), [f] \to PC(f(p_0))$ – линейно связная компонента $f(p_0)(*)$

Доказательство: Заметим: отображение $C(pt, X) \to X$

$f \to f(p_0)$ – биекция

Пусть $f, g : pt \to x, F : f \simeq g$

F порождает путь $u \in P(f(p_0), g(p_0)), u(t) = F(p_0, t)$

Наоборот: кадлый путь $u \in P(f(p_0), g(p_0))$ порождает $F : f \simeq g$

Поэтому: $f \simeq g \Leftrightarrow f(p_0)g(p_0)$ лежат в одной линейно связной компоненте $\Rightarrow$ отображение (*) корректно определенно и является биекцией что и требовалось доказать

Следствие: $X \simeq Y, Y$ – линейно связно $\Rightarrow Y$ линейно связно

Доказательство: $X \cong YHmt$

$[pt,-]$ – ковариантный функтор $Hmt \to Sets$ (частный случай Hom – функтора) $\Rightarrow [pt,X](=\pi_0(X)) \cong [pt,Y](=\pi_0(Y)) Sets \Rightarrow \pi_0(Y)$ одноэлементно, то есть Y -линейно связно что и требовалось доказать

Стягиваемые пространства, их эквивалентные определения, примеры.
Определение: топологическоепространство X стягиваемо $\Leftrightarrow X \simeq pt$
Наблюдение: Стягиваемость – гомотопическое свойство, стягиваемость $\Rightarrow$ линейная связность
Теорема: следующие свойства топологические пространства $X \neq \varnothing$ эквивалентны:

1. X – стягиваемо
2. (2)для любого Y – топологические пространства любые два непрерывных $f,g: Y \to X$ гомотопны
3. $\exists x_0 \in X$, такое что $\mathrm{id}_X \simeq C_{x_0}$ (где $C_{x_0}: X \to X, C_{x_0}(x) = x_0 \forall x \in X)$ $'$ $\exists x_0 \in X$, такое что $\{x_0\}$ – деформационный ретракт X
4. $\forall x_0 \in X if_X \simeq C_{x_0}$ $'$ $\forall x_0 \in X\{x_0\}$ – деформационный ретракт X

Доказательство:
$(3) \Leftrightarrow (3')$ и $(4) \Leftrightarrow (4')$ из определения деформационного ретракта.
Действительно: ретракция X на $\{x_0\}$ -отображение $r_{x_0}: X \to \{x_0\} r_{x_0}(x) = x_0 \forall x$
Она дефракционный ретракт $\Leftrightarrow i_{\{x_0\}} \circ r_{x_0}(= C_{x_0}) \simeq if_X$

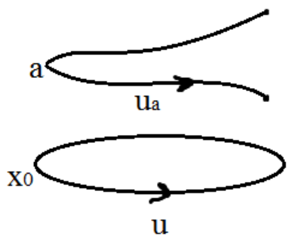
$(1) \Rightarrow (2)$: $[Y,-]: Hmt \to Sets$ – функтор (частный случай Hom – функтора)
$X \cong pt Hmt \Rightarrow [Y,X]$ и $[Y,pt]$ равномощны, но $[Y,pt]$ состоит из одной точки $\Rightarrow [Y,X]$ – тоже

$(2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3)$ – очев

$(3) \Rightarrow (1)$ $X \xrightarrow{f} pt \xrightarrow{g} x, pt = \{p_0\}$
$f(x) = p_0 \forall x \in Y, g(p_0) = x_0$
$g \circ f = C_{x_0} \simeq if_X$
$f \circ g = \mathrm{id}_{pt}$
$\Rightarrow f$ – гомотопическая эквивалентность что и требовалось доказать
Наблюдение: для любого топологические пространства $X \forall x_0 \in X\{x_0\}$ – ретракт X
С другой стороны $\{x_0\}$ – деформационный ретракт $\Leftrightarrow X$ – стягиваемое
Поэтому ретракт не всегда является деформационным ретрактом
Пример: X – нормальное пространство, $Y \subset X$ – звездное относительно $x_0 \in Y$. Тогда Y – стягиваемое
Действительно: $F(x,t) = tx_0 + (1-t)x$ – гомотопия между id_Y и C_{x_0}

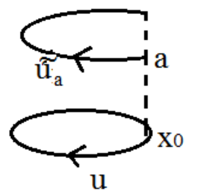
Стабилизатор точки при действии группы. Сопряженность стабилизаторов точек из одной орбиты. Морфизмы G-множеств. Изоморфизм между орбитой и множеством смежных классов по стабилизатору. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный накрывающим отображением: его мономорфность и описание его образа как стабилизатора точки слоя. Следствие: изоморфизм между слоем накрытия и множеством смежных классов фундаментальной группы базы накрытия.

G – группа, X – правое G -множество
Определение: Стабилизатор точки $x \in X$ – это $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G | x \cdot g = x\} \subset G$
Синонимы: стационарная подгруппа, подгрупппа изотропии
Наблюдение: $\mathrm{Stab}(x) < G$
Определение: Правое действие G на G сопряжениями задается формулой: $x * g = g^{-1}xg (x, g \in G)$. Аналогично определяются действия сопряжениями на множестве подгрупп в $G : H * g = g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg | h \in H\}$
X – правое G-множество
Предложение: стабилизаторы точек из одной орбиты сопряжены друг другу.
Более точно: $\mathrm{Stab}(x \cdot g) = g^{-1}\mathrm{Stab}(x) \cdot g$
Доказательство $h \in \mathrm{Stab}(x \cdot g) \Leftrightarrow x \cdot g \cdot h = h \cdot g \Leftrightarrow x \cdot g \cdot h \cdot g^{-1} = x \Leftrightarrow g \cdot h \cdot g^{-1} \in \mathrm{Stab}(x) \Leftrightarrow h \in g^{-1}\mathrm{Stab}(x)g$
Определение: X, Y – правые G-множества
Отображение $\phi : \ X \to Y$ – морфизм G-множеств (G-эквивалентное отображение) $\Leftrightarrow \phi(x \cdot g) = \phi(x) \cdot g (x \in X, g \in G)$
Правые G-множества и их морфизм образуют категорию. Обозначают ее $G - Sets$
Предложение: X – правое G-множество, $x \in X, x \in X$. Существует изоморфизм правых G-множеств $\phi : \ G/_{\mathrm{Stab}(X)} \tilde{\to} x \cdot G, \phi(\mathrm{Stab}(x) \cdot g) = x \cdot g (g \in G)$.
В частности, если X транзитивно, то ϕ-изоморфизм $G/_{\mathrm{Stab}(X)}$ на X.
Доказательство: пусть $g, h \in G$
$\mathrm{Stab}(x) \cdot g = \mathrm{Stab}(x) \cdot h \Leftrightarrow g \cdot h^{-1} \in \mathrm{Stab}(x) \Leftrightarrow x \cdot g \cdot x^{-1} = x \Leftrightarrow x \cdot g = x \cdot h$
Поэтому ϕ – корректно определенно и инъективно. Очевидно, ϕ – сюръективно и является морфизмом G-множеств что и требовалось доказать
Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный накрывающих отображением.
$p : E \to X - -, x_0 \in X, a \in p^{-1}(x_0)$
$p_x : \pi_1(E, a) \to \pi_1(X, x_0)$
Напоминания: Пусть $x_1 \in X, u \in P(x_0, x_1), \widetilde{u_a}$ – поднятие u, такое что $\widetilde{u_a}(0) = a$ (оно существует и единственное)
Если $v, u \in P(x_0, x_1)$, то $u \underset{p}{\simeq} v \Leftrightarrow \widetilde{u_a} \underset{p}{\simeq} \widetilde{v_a} \Rightarrow \widetilde{u_a}(1) = \widetilde{v_a}(1)$



Действие монодромии: $p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0), (a, [u]) \to a[u] = \widetilde{u_a}(1)$
Теорема: $p : E \to X$ – накрытие, $x_0 \in X, a \in p^{-1}(x_0)$

1. $p_* : \ \pi_1(E, a) \to \pi_1(X, x_0)$ – мономорфизм
2. $Imp_* = \{[u] : \ \widetilde{u_a}$ – петля$\}$
3. $Imp_* = \mathrm{Stab}(a)$ при действии монодромии



Доказательство:

1. Пусть $[v] \in Kerp_*$. Обозначим $u = p \cdot v$
   $u \underset{p}{\simeq} e_{x_0} \Rightarrow \widetilde{u}_a \underset{p}{\simeq} (\widetilde{e_{x_0}})_a (= e_a), [v] = [e_a] \in pi_1(E, a)$

2. $[u] \in Imp_* \Leftrightarrow u \underset{p}{\simeq} p \circ v$ для некоторой петли v в $a \Leftrightarrow \widetilde{u}_a \underset{p}{\simeq} v$ для некоторой петли v в $a \Leftrightarrow \widetilde{u}_a$ – петля

3. $\widetilde{u}_a - \Leftrightarrow \widetilde{u}_a(1) = a \Leftrightarrow a = a \cdot [u] \Leftrightarrow [u] \in St(a)$ что и требовалось доказать

Следствие: $p : E \to X$ – накрытие
E – линейно связно, $x_0 \in X, a \in p^{-1}(x_0)$. Существует изоморфизм правых $\pi_1(X, x_0)$ – множеств
$\pi_1(X, x_0)\diagup_{Imp_*} \overset{\sim}{\to} p^{-1}(x_0), (Imp_*) \cdot [u] \to a \cdot [u] = \widetilde{u}_a(1)$
Доказательство: из п.(3) теоремы и транзитивности монодромии что и требовалось доказать

11

Накрытия. Примеры накрытий. Число листов накрытия, его независимость от выбора точки базы (если последняя связна). Теорема о единственности поднятия.

X – топологическоепространство

Определение: Накрытие X – пара (E, p), где E – топологические пространство, $p : E \to X$ непрерывно, такое что: $\forall x \in X$ существует окрестность $U \ni U$, такая что $p^{-1}(U) = \bigsqcup\limits_{i \in I} U$ (достаточно потребовать дизъюнктное отбъединение множеств), $(I \neq \varnothing)$, где U_i открыто $\forall i$, и $p|_{U_i)}$ – гомеоморфизм U_i на U.

X называется базой накрытия, E – накрывающее пространство, p – накрывающее отображение. Часто само p называют накрытие.

$\forall x \in X$ множество $p^{-1}(X)$ называется слоем над X.

Наблюдение: (E, p) накрытие $\Rightarrow p$ – сюръекция E на X

Пример 1: любой гомеоморфизм является накрытием

Пример 2: X – топологическоепространство, D – дискретное пространство. $p : X \times D, p(x,) = x$ – накрытие

Действительно: $\forall U \subset X p^{-1}(U) = U \times D = \bigsqcup\limits_{d \in D}(U \times \{d\})$ (открыто в $X \times D$, так как D – дискретно)

Пример 3: $p : \mathbb{R} \to S^1, p(t) = e^{2\pi i t}$ – накрытие

Действительно: для любого отрезка $I \subset \mathbb{R}$ длины меньше 1

$p|_I : \ I \to p(I)$ – гомеоморфизм

(т.к. I – компактно, $p|I$ – инъективно) $\Rightarrow$ для любого интревала $J \subset \mathbb{R}$ длины меньше 1 множество $U = p(J)$ открыто в $S^1, p^{-1}(U) = \bigsqcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} J_n$, где $J_n = J_n, J_n$ – интервал, $p|_{J_n} \to U$ – гомеоморфизм

Вся S^1 покрывается двумя такими $U \Rightarrow p$ – накрытие

Предложение: $p : E \to X, q : F \to Y$- накрытия $\Rightarrow p \times q : \ E \times F \to X \times Y$ – накрытие

Доказательство: очев

Пример 4: $p : \mathbb{R}^n \to T^n p(t_1, \ldots, t_n) = (e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n})$ – накрытие

Пример 5: $\mathbb{RP}^n = S^n \big/ \sim, x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$

Отображение факторизации $q : S^n \to \mathbb{RP}^n$ – накрытие

Действительно: для любого открытого $U \subset S^n$, такое что $\overline{U}$ не содержит диаметрально противоположных точек, $q|_{\overline{U}} : \overline{U} \to q(\overline{U})$ – гомеоморфизм (так как $q|_{\overline{U}}$ – инъекция, $\overline{U}$ компакт) $\Rightarrow q(U)$ открыто в $\mathbb{RP}^n, q^{-1}(U) = U \sqcup (-U)$ (U и $-U$ открыты) (если $U \cap (-U) = \varnothing$)

$q|_{\pm U} : \pm U \to q(U)$ – гомеоморфизм

Определение: непрерывное $f : X \to Y$ локальный гомеоморфизм $\Leftrightarrow \forall x \in X$ существует окрестность $U \ni x$, такая что $f(U)$ открыто в Y и $f|_U : U \to f(U)$ – гомеоморфизм

Наблюдение: накрытие является локальным гомеоморфизмом

Предл: $p : E \to X$ – накрытие, X – связно $\Rightarrow \forall x, y \in X p^{-1}(x)$ и $p^{-1}(y)$ равномощны

Доказательство: введем на X отношение эквивалентности: $x \sim y \Leftrightarrow p^{-1}(x) p^{-1}(y)$ равномощны

Достаточно докащать: $\forall x \in X$ ее $[x]$ открыт в X

Выберем окрестность $U \ni x$, такая что $p^{-1}(U) = \bigsqcup\limits_{i \in I} U_i$, гомеоморфизм $p|_{U_i} : U_i \to U$

Заметим: $\forall y \in U p^{-1}(y) \cap U_i$ состят ровно из одной точки $(\forall i \in I) \ \Rightarrow p^{-1}(y)$ и I равномощны $\Rightarrow U \subset [x] \Rightarrow [x]$ – открыт что и требовалось доказать

Определение: Пусть $p : E \to X$, X – связно. Числом листов этого накрытия называют мощность $p^{-1}(x) (\forall x \in X)$

Пример: накрытие из примера 5 двулистно, из примеров 3, 4 – счетно листно

Определение: E, X, Y – топологические пространства, $p : E \to X, f : Y \to X$ – непрерывные. Непрерывное $g : Y \to E$ – поднятие(относительно p) $\Leftrightarrow pog = f$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Теорема: $p : E \to X$ – накрытие, $f : Y \to X, Y$ – связно, $g_1, g_2 : Y \to E$ – поднятие f. Пусть $\exists y_0 \in Y$, такой что $g_1(y_0) = g_2(y_0) \Rightarrow g_1 = g_2$ (единственность поднятия)

Лемма: $p : E \to X$ – накрытие, $D = \{(x, x) | x \in E\} \subset E \times E$

$Z = \{(x, y) \in E \times E | p(x) = p(y)\}$

Тогда D открыто и замкнуто в Z

Замечание: E хаусдорфово $\Leftrightarrow D$ замкнуто в $E \times E \Rightarrow$ в Z тоже

Доказательство леммы: Пусть $(x, x) \in D$, существует окрестность $U \ni x$, такая что $p|_U : U \to p(U)$ – гомеоморфизм $\Rightarrow (U \times U) \cap Z$ – окрестность $(x, x) Z$

$(U \times U) \cap Z \subset D \Rightarrow D$ – открыт в Z
Если $(y_1, y_2) \in (U \times U) \cap Z$, то $y_1, y_2 \in U p(y_1) = p(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$, то есть $(y_1, y_2) \in D$
Пусть $(x, y) \in Z \diagup D$, выберем окрестность $V \subset X$ точки $p(x) = p(y)$, такая что $p^{-1}(V) = \bigsqcup\limits_{i \in I} V_i, V_i$ – открыто
$p|_{V_i} : V_i \to V$ – гомеоморфизм
$\exists i, j \in I$, такие что $x \in V_i, y \in V_j$, причем $i \neq j$(так как $x \neq y$)
$W = (V_i \times V_j) \cap Z$ – окрестность $(x, y)Z$
$W \cap D = \varnothing$ (так как $V_i \cap V_j = \varnothing$) $\Rightarrow Z \diagup D$ открыто в Z, то есть D замкнуто в Z что и требовалось доказать
Доказательство теоремы: Рассмотрим $g : Y \to Z, g(y) = (g_1(y), g_2(y)), g$ непрерывно $\Rightarrow g^{-1}(D)$ открыто и замкнуто в $Y, g^{-1}(D) = Y$, то есть $g_1 = g_2$ что и требовалось доказать

12

Теорема о накрывающей гомотопии. Следствие: теорема о поднятии путей. Теорема о поднятии гомотопий путей.

Теорема о накрывающей гомотопии: $p : E \to X$ – накрытие, Y – топологические пространство, $F : Y \times I \to X$ – непрерывно, $f : Y \to E$ – поднятие F_0 (где $F_0 Y \to X F_0(y) = F(y,0)$)

Тогда существует единственное непрерывное $\widetilde{F} :\ Y \times I \to E$, поднимающее F и такое, что $\widetilde{F}_0 = f$

Если, кроме того, $F - -A$-гомотопия для некоторого $A \subset Y$, то и $\widetilde{F} - -A$-гомотопия

Обозначения: пусть $F : Y \times \to X \forall t \in I F_t :\ Y \to X, F_t(y) = F(y,t)$

$\forall y \in Y F^y :\ I \to X, F^y(t) = F(y,t)$

Лемма (о локальном поднятии):

Пусть выполняются условия теоремы, и пусть все пространство X ровно накрыто (то есть $p^{-1}(x) = \bigsqcup\limits_{i \in I} U_i, U_i$ открыто в E, такое что $p|_{U_i} : U_i \to X$ – гомеоморфизм). Тогда $\forall y \in Y$ существует окрестность $Z \ni y$ и поднятие $\widetilde{F} : Z \times I \to E$ отображения $F|_{Z \times I}$, такое что $\widetilde{F_0} = f|_Z$

Доказательство: $\forall y \in Y$ существует окрестность $U \subset E$, такая что $p|_U :\ U \to X$ – гомеоморфизм и $f(y) \in U$. Положим $Z = f^{-1}(U)$

Обозначим $S = (p|_U)^{-1} : X \to U$, рассмотрим $\widetilde{F} : Z \times I \to E, \widetilde{F} = S \circ F|_{Z \times I}$

$pS = \mathrm{id}_x \Rightarrow \widetilde{F}$ – поднятие $F|_{Z \times I}$

$\forall z \in Z f(z) \in U \widetilde{F_0}(z) \in U, p(f(z)) = F_0(z) = p(\widetilde{F_0}(z)) \Rightarrow f(z) = \widetilde{F_0}(z)$, то есть $\widetilde{F_0} = f|_Z$ что и требовалось доказать

Следствие из теоремы (о поднятии путей): $p : E \to X$ – накрытие, $x_0 \in X, y \in P^{-1}(x_0)$. Тогда для любого пути $u : I \to X$, такого что $u(0) = x_0$, существует единственный путь $\widetilde{u} :\ I \to E$, поднимающий u, такой что $\widetilde{u}(0) = y$

Доказательство теоремы: применить теорему для $Y = pt$ что и требовалось доказать

Теорема (о поднятии гомотопий путей): $p : E \to X$ – накрытие, $x_0, x_1 \in X, y \in p^{-1}(x_0), u, v \in P(x_0, x_1)$
$\widetilde{u}, \widetilde{v} : I \to E$ – поднятия u, v, такие что $\widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(0) = y$ (они существуют и единственны по утверждению о поднятии путей).
Тогда:

1. каждая гомотопия $F : u \underset{\simeq}{p} v$ единственным образом поднимается до $\widetilde{F} : \widetilde{u} \underset{\simeq}{p} \widetilde{v}$

2. $u \underset{\simeq}{p} v \Rightarrow \widetilde{u} \underset{\simeq}{p} \widetilde{v}$

3. Если $u \underset{p}{\simeq} v, \widetilde{u}(1) = \widetilde{v}(1)$

Доказательство:

(1) по теореме о накрывающей гомотопии, существует единственное непрерывное $\widetilde{F} : I \times I \to E$, поднимающее F и $\widetilde{F}_0 = \widetilde{u}_0$

Кроме того, $\widetilde{F}$ (как и F) – $\{0,1\}$-гомотопия (то есть гомотопия путей)

$\widetilde{F}_1$ – поднятие $F_1 = v, \widetilde{F}_1(0) = \widetilde{F}_0(0) = \widetilde{u}(0) = y$

(все пути начинаются и заканчиваются в одной точке)

Из единственности следует, что $\widetilde{F}_1 = \widetilde{v}$, то есть $\widetilde{F} : \widetilde{u} \underset{p}{\simeq} \widetilde{v}$

(2)($\Rightarrow$) Из (1)

($\Leftarrow$) Пусть $G : \widetilde{u} \underset{p}{\simeq} \widetilde{v} \Rightarrow poG : u \underset{p}{\simeq} v$

(3) Из (2) что и требовалось доказать

13

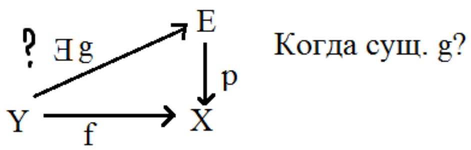
Отображение фундаментальной группы базы накрытия в слой над отмеченной точкой; условия его сюръективности и биективности. Фундаментальная группа вещественного проективного пространства.

Обозначим: $z = y \cdot [u] = \widetilde{u}_y(1) \Rightarrow (y[u]) \cdot [v] = z \cdot [v] = \widetilde{v}_z(1)$
$\widetilde{u}_y \cdot \widetilde{v}_z$ – поднятие $u \cdot v$
$(\widetilde{u}_y \cdot \widetilde{v}_z)(0) = \widetilde{u}_y(0) = y \Rightarrow \widetilde{u}_y \cdot \widetilde{v}_y = (\widetilde{uv})_y$
$y \cdot ([u][v]) = y[u \cdot v] = (\widetilde{uv})_y(1) = (\widetilde{u}_y \cdot \widetilde{v}_z)(1) = \widetilde{v}_z(1) \Rightarrow (y \cdot [u])[v] = y([u][v]) \Rightarrow (*)$ определяет действие
Пусть E линейно связно, $y, z \in p^{-1}(x_0)$
Выберем $v \in P(y,z)$, обозначим $u = p \cdot v \Rightarrow u$ – петля в $x_0, v = \widetilde{u}_y \Rightarrow y \cdot [u] = v(1) = z \Rightarrow$ действие транзитивно
Пусть E односвязно, $y \in p^{-1}(x_0), [u] \in \pi_1(X, x_0), y[u] = y$, то есть $y = \widetilde{u}_y(1) \Rightarrow \widetilde{u}_y$ – петля в $y \Rightarrow \widetilde{u}_y \simeq e_y \Rightarrow u \underset{p}{\simeq} e_{x_0}$, то есть $[u] = [e_{x_0}] \Rightarrow$ действие свободно что и требовалось доказать
Следствие: $p : E \to X$ – накрытие, E – односвязно $\Rightarrow \forall x_0 \in X, \forall y \in p^{-1}(x_0)$, отображение $\pi_1(x, x_0) \to p^{-1}(x_0), [u] \to y[u]$ – биекция
Пример: Пусть $p : \mathbb{R} \to S^1, p(t) = e^{2\pi i t}, x_0 = 1 \in S^1, y = 0 \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$
Отображение $\pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ из предыдущего следствия действие по формуле $[u] \to \deg(u)$
Следствие: $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \simeq \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \forall n \geq 2 \forall x_0 \in \mathbb{RP}^n$
Доказательство: знаем отображение факторизации $q : S^n \to \mathbb{RP}^n$ – двулистное накрытие, S^n – односвязно $\Rightarrow$ (по предыдущему следствию) существует биекция $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \cong q^{-1}(x_0)$
$q^{-1}(x_0)$ – из 2 элементов $\Rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \simeq \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ что и требовалось доказать

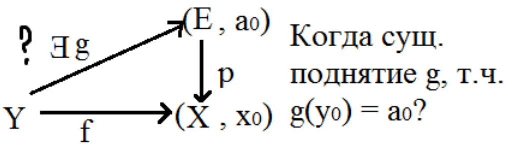
14

Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный накрывающим отображением: его мономорфность и описание его образа. Критерий существования поднятия отображения, действующего в базу накрытия, до отображения в накрывающее пространство. Следствие: существование и единственность поднятия отображения из односвязного пространства.

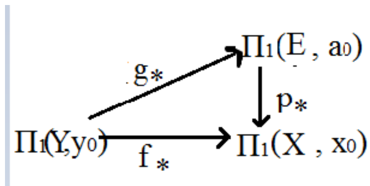
Общая теорема о поднятии



Видоизменим задачу
$y_0 \in Y, x_0 = f(y_0), a_0 \in p^{-1}(x_0)$. Когда существует поднятие g, такое что $g(y_) = a_0$?



Применим функтор:

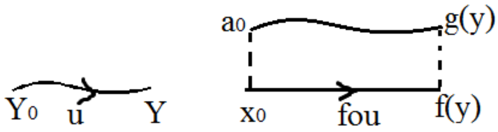


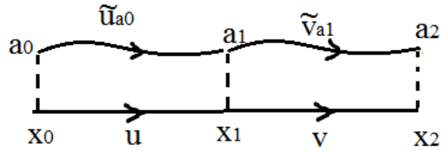
$p_* \circ g_* = f_* \Rightarrow Imf_* \subset Imp_*$
Наблюдение: Если существует поднятие $g : Y \to E$ отображения $f : Y \to X$, такое что $g(y_0) = a_0 \Rightarrow Imf_* \subset Imp_*$
Определение: топологическоепространство Y локально линейно связно $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ для любой окрестности $U \ni y$ существует линейно свячзная окрестность $V \ni yV \subset U$
Напоминание: открытое подмножество любого нормированного пространства локально линейно связно
Напоминание: Y связно, U локально линейно связно $\Rightarrow Y$ линейно связно
Теорема: $p : E \to X$ – накрытие, $z_0 \in X, a_0 \in p^{-1}(x_0)$
$f : Y \to X, f(y_0) = x_0$
Предположим: Y связно и локально линейно связно $\Rightarrow$ следующие утверждения эквивалентны:

1. существует поднятие $g : Y \to E$ отображения f, такое что $g(y_0) = a_0$
2. $Im(f_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)) \subset Im(p_* : \pi_1(E, a_0) \to \pi_1(X, x_0))$

Доказательство: (1) $\Rightarrow$ (2) см.выше
(2) $\Rightarrow$(1) Y линейно связно. $\forall y \in Yu \in P(y_0, y)$

Положим $g(y) = (fou)^{\sim}_{a_0}(1)$
Достаточно доказать, что g корректно определено и непрерывно.
Действительно: пусть это так
$p(g(y)) = (fou)(1) = f(y) \Rightarrow g - -f$
$g(y_0) = (foe_{y_0})^{\sim}_{a_0}(1) = e_{x_0}{}^{\sim}_{a_0}(1) = e_{x_0}(1) = a_0 \Rightarrow g$ – искомое
Наблюдение: пусть $x_0, x_1, x_2 \in X, a_0 \in p^{-1}(x_0)$
$a_1 = \tilde{u}_{a_0}, u \in P(x_0, x_1), v \in P(x_0, x_2)$
$(uv)^{\sim}_{a_0} = u^{\sim}_{a_0} \cdot v^{\sim}_{a_1}$ (из единственности поднятия пути)





1. Покажем: g корректно определено
   Из условия (2): существует петля $w : I \to E$ в a_0, такая что $f \circ uv^{-1} = p \circ w$
   $(f \circ u)(f \circ v^{-1}) = (f \circ u)(f \circ v)^{-1} \Rightarrow (f \circ u) \underset{p}{\simeq} (p \circ w)(f \circ v) \Rightarrow (f \circ u)^{\sim}_{a_0} \underset{p}{\simeq} w \circ (f \circ v)^{\simeq}_{a_0} \Rightarrow (f \circ u)^{\sim}_{a_0}(1) = (f \circ v)^{\sim}_{a_0}(1) \Rightarrow g$ корректно определенно

2. Непрерывность g
   Зафиксируем $\forall y \in Y$. Достаточно доказать: g непрерывно в некоторой окрестности у
   Обозначим: $x = f(y)$
   Пусть $U \ni x$ – ровно накрытая окрестность. Существует линейно связная окрестность V точки y, такая что $f(V) \subset U$
   Существует открытое $W \subset E, p|_w$: $W \Rightarrow U$ – гомеоморфизм, и такой что $g(y) \in W$
   Обозначим $s = (p|_w)^{-1}: \ U \to W$
   Достаточно доказать: $g|_v = so(f|_v)(*)$
   Пусть $z \in V, V$ – линейно связно $\Rightarrow$ выберем $v \in P(y, z), v(I) \subset V$
   ПУсть $u \in P(y_0, y) \Rightarrow g(z) = (fouv)^{\sim}_{a_0}$ (1)
   Заметим: $(fov)^{\sim}_{a} = sofov$
   Обозначим $a = g(y)$ (так как они оба поднимают fov и начинаются в a)
   $(fouv)^{\sim}_{a_0} = (fou)^{\sim}_{a_0} \cdot (fov)^{\sim}_{a_0} = (fou)^{\sim}_{a_0} \cdot (sofov) \Rightarrow g(z) = (sofov)(1) = (sof)(z) = s(f(z)) \Rightarrow (*)$ – доказано
   $\Rightarrow g$ непрерывно что и требовалось доказать

Следствие: $p : E \Rightarrow X$ – накрытие, $x_0 \in X a_0 \in p^{-1}(x_0), Y$ – односвязно и локально линейно связно
Тогда для любого непрерывного $f : Y \Rightarrow X$, такого что $f(y_0) = x_0$ существует единственное поднятие $g : Y \to E$ отображения f, такое что $g(y_0) = a_0$

15

Пунктированные накрытия и их морфизмы. Теорема о классификации морфизмов связных пунктированных накрытий и критерий их изоморфизма в терминах подгрупп фундаментальной группы базы

Теорема об эквивалентности категории накрытия: Функтор $\mathcal{F} : \mathrm{Cov}(X) \to G - Sets$ – эквивалентность категорий
Фнуктор $\mathcal{G} : G - Sets \to \mathrm{Cov}(X)$ – его квазиобр.
Следствие 1: Функтор $\mathcal{F} : \mathrm{Cov}_0(X) \to TrG - Sets$ – эквивалентность категорий
Доказательство: с учетом основной теоремы достаточно доказать:
$\mathcal{G}(TrG - Sets) \subset \mathrm{Cov}_0(X)$
Пусть S – транзитивно, G-множество, $S \cong \mathcal{F}(\mathcal{G}(S)) = p_s^{-1}(x_0)$
Действие монодромии на $p_s^{-1}(x_0)$ транзитивно $\mathcal{G}$ – связно(было)
Следствие 2(теорема о классификации связных накрытий)
Функтор $\mathcal{F}$ порождает биекцию между множеством классов изоморфизма связных накрытий X и множеством подгрупп в G по правилу:
$(E, p) \to \mathrm{Stabs}(\mathcal{F}(E, p))$ = класс сопряженности подгруппы $Imp_{x,a} \subset G$, где a – любая точка из слоя $p_s^{-1}(x_0)$
Обозначение: Функтор $\mathcal{F}^* : \mathrm{Cov}_0^*(X, x_0) \to Sub(G)$
$\mathcal{F}^*((E, p), a) = Imp_{*,a} \subset G$
Знаем: $\mathcal{G}$ – строгий и полный
для любой подгруппы $H \subset G \mathcal{G}^*(H) = (\mathcal{G}(G/H), a_H)$, где $a_H = [(H, e)] \in (G/H) \underset{G}{\times} \underset{\sim}{X}$
Заметим: $p_s(a_H) = x_0$
Пусть $H \subset K \subset G$ – подгруппа, $i_{H;K} : H \subset K$ – отображение включения
$q_{H;K} : G/H \to G/K, Hg \to Kg$ – морфизм G-множеств
$\mathcal{G}^*(i_{H;K}) = \mathcal{G}(q_{H;K}) :\ \mathcal{G}(G/H) \to \mathcal{G}(G/K)$; заметим: $\mathcal{G}^*(a_H) = a_k$
Получим функтор $\mathcal{G}^* : Sub(G) \to \mathrm{Cov}_0^*(X, x_0)$
Следствие 3: $\mathcal{F}^* : \mathrm{Cov}_0^*(X, x_0) \to Sub(G)$ – эквивалентность категорий
$\mathcal{G}^* :\ Sub(G) \to \mathrm{Cov}_0^*(X, x_0)$ – его квазиобр.
Более того: $\mathcal{F}^*\mathcal{G}^* = \mathrm{id}_{Sub(G)}$
Доказательство: с учетом Леммы 2(билет 25) достаточно доказать: $\mathcal{F}^*\mathcal{G}^* = \mathrm{id}_{Sub(G)}$
Пусть $H \subset G$ – подгруппа
$\mathcal{G}(G/H) \underset{p_{G/H}}{\to} X$
Обозначим: $p = p_{G/H}$
Хотим доказать: $H = Im(p_*, a)$, где $a = a_H$
Пусть v – петля в x_0
$[v] \in Im(p_*, a) \Leftrightarrow \tilde{v}_a$ – петля, то есть $\tilde{v}_a(1) = a$
Из Леммы 1: $\tilde{v}_a(1) = [(H, [v])] = [(H[v], e)]$
Поэтому: $\tilde{v}_a(1) \Leftrightarrow [(H[v], e)] = [H, e] \Leftrightarrow$ (так как $S \underset{G}{\times} G \cong S, [(s, e)] \to s)H[v] = H \Leftrightarrow [v] \in H \Rightarrow Im(p_*, a) = H$
что и требовалось доказать
Следствие 4(теорема о классификации связных накрытий с отмеченными точками): Функтор $\mathcal{F}^*$ порождает биекцию между множеством классов изоморфизма связных пунктиных накрытий X и множеством подгрупп в G по правилу $((E, p), a) \to Im(p_*, a)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cov}_0^*(X,x_0) \arrow[r, dash, "\square_X"] \arrow[d, shift right, "\mathcal{F}^*"'] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathrm{Cov}_0(X) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, shift right, "\mathcal{F}"'] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathrm{Cov}(X) \arrow[d, shift right, "\mathcal{F}"'] \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\mathrm{Sub}(G) \arrow[r, dash, "\square_G"] \arrow[u, shift right, "\mathcal{G}^*"'] & \text{Tr. G-Sets} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[u, shift right, "\mathcal{G}"'] & \text{G-Sets} \arrow[u, shift right, "\mathcal{G}"']
\end{tikzcd}$$

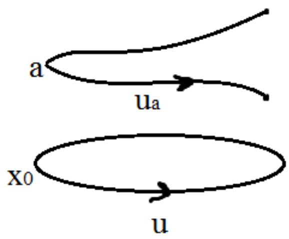
$\square_X$, $\square_G$ - строгие, но не полные, поэтому не эквивалентны

Действие монодромии. Условие его транзитивности. Описание стабилизатора точки слоя при действии монодромии

Теорема: $p : E \to X$ – накрытие $x_0 \in X$. Тогда существует правое действие $\pi_1(X, x_0)$ на $p^{-1}(x_0)$, заданное формулой $y \cdot [u] = \widetilde{u_y}(1)(y \in p^{-1}(x_0), [u] \in \pi_1(X, x_0))(*)$, где $\widetilde{u_y}$ – поднятие u, такое что $\widetilde{u_y}(0) = y$
Если E – линейно связно, то это действие транзитивно
Если E односвязно, то это действие свободно
Определение: действие $(*)$ называется действием монодромии
Доказательство: $P(\widetilde{u_y}(1)) = u(1) = x_0$ (для любой петли в x_0) $\Rightarrow \widetilde{u_y}(1) \in p^{-1}(x_0)$
Из теоремы выше: формула $(*)$ корректно определяет отображение $p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0), (y, [u]) = y \times [u] = \widetilde{u_y}(1)$
Покажем: это действие
$\forall y \in p^{-1}(x_0) : y \cdot [e] = \widetilde{e_y}(1) = y$, так как $\widetilde{e_y}$ – постоянная петля в y
$\forall y \in p^{-1}(x_0), \forall [u], [v] \in \pi_1(X, x_0)$
Обозначим: $z = y \cdot [u] = \widetilde{u_y}(1) \Rightarrow (y[u]) \cdot [v] = z \cdot [v] = \widetilde{v_z}(1)$
$\widetilde{u_y} \cdot \widetilde{v_z}$ – поднятие $u \cdot v$
$(\widetilde{u_y} \cdot \widetilde{v_z})(0) = \widetilde{u_y}(0) = y \Rightarrow \widetilde{u_y} \cdot \widetilde{v_y} = (\widetilde{uv})_y$
$y \cdot ([u][v]) = y[u \cdot v] = (\widetilde{uv})_y(1) = (\widetilde{u_y} \cdot \widetilde{v_z})(1) = \widetilde{v_z}(1) \Rightarrow (y \cdot [u])[v] = y([u][v]) \Rightarrow (*)$ определяет действие
Пусть E линейно связно, $y, z \in p^{-1}(x_0)$
Выберем $v \in P(y, z)$, обозначим $u = p \cdot v \Rightarrow u$ – петля в $x_0, v = \widetilde{u_y} \Rightarrow y \cdot [u] = v(1) = z \Rightarrow$ действие транзитивно
Пусть E односвязно, $y \in p^{-1}(x_0), [u] \in \pi_1(X, x_0), y[u] = y$, то есть $y = \widetilde{u_y}(1) \Rightarrow \widetilde{u_y}$ – петля в $y \Rightarrow \widetilde{u_y} \simeq e_y \Rightarrow u \underset{p}{\simeq} e_{x_0}$, то есть $[u] = [e_{x_0}] \Rightarrow$ действие свободно что и требовалось доказать
Следствие: $p : E \to X$ – накрытие, E – односвязно $\Rightarrow \forall x_0 \in X, \forall y \in p^{-1}(x_0)$, отображение $\pi_1(x, x_0) \to p^{-1}(x_0), [u] \to y[u]$ – биекция

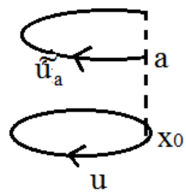
Морфизмы G-множеств. Изоморфизм между орбитой и множеством смежных классов по стабилизатору. Следствие: изоморфизм между слоем накрытия и множеством смежных классов фундаментальной группы базы накрытия по образу фундаментальной группы накрывающего пространства.

Определение: X, Y – правые G-множества
Отображение $\phi: \ X \to Y$ – морфизм G-множеств (G-эквивалентное отображение) $\Leftrightarrow \phi(x \cdot g) = \phi(x) \cdot g(x \in X, g \in G)$
Правые G-множества и их морфизм образуют категорию. Обозначают ее $G - Sets$
Предложение: X – правое G-множество, $x \in X, x \in X$. Существует изоморфизм правых G-множеств $\phi: \ G\diagup_{\mathrm{Stab}(X)} \xrightarrow{\sim} x \cdot G, \phi(\mathrm{Stab}(x) \cdot g) = x \cdot g(g \in G)$.
В частности, если X транзитивно, то ϕ-изоморфизм $G\diagup_{\mathrm{Stab}(X)}$ на X.
Доказательство: пусть $g, h \in G$
$\mathrm{Stab}(x) \cdot g = \mathrm{Stab}(x) \cdot h \Leftrightarrow g \cdot h^{-1} \in \mathrm{Stab}(x) \Leftrightarrow x \cdot g \cdot x^{-1} = x \Leftrightarrow x \cdot g = x \cdot h$
Поэтому ϕ – корректно определенно и инъективно. Очевидно, ϕ – сюръективно и является морфизмом G-множеств что и требовалось доказать
Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный накрывающих отображением.
$p: E \to X - -, x_0 \in X, a \in p^{-1}(x_0)$
$p_x: \pi_1(E, a) \to \pi_1(X, x_0)$
Напоминания: Пусть $x_1 \in X, u \in P(x_0, x_1), \widetilde{u_a}$ – поднятие u, такое что $\widetilde{u_a}(0) = a$ (оно существует и единственное)
Если $v, u \in P(x_0, x_1)$, то $u \underset{p}{\simeq} v \Leftrightarrow \widetilde{u_a} \underset{p}{\simeq} \widetilde{v_a} \Rightarrow \widetilde{u_a}(1) = \widetilde{v_a}(1)$



Действие монодромии: $p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0), (a, [u]) \to a[u] = \widetilde{u_a}(1)$
Теорема: $p: E \to X$ – накрытие, $x_0 \in X, a \in p^{-1}(x_0)$

1. $p_*: \ \pi_1(E, a) \to \pi_1(X, x_0)$ – мономорфизм
2. $Imp_* = \{[u]: \ \widetilde{u_a}$ – петля$\}$
3. $Imp_* = \mathrm{Stab}(a)$ при действии монодромии



Доказательство:

1. Пусть $[v] \in Kerp_*$. Обозначим $u = p \cdot v$
   $u \underset{p}{\simeq} e_{x_0} \Rightarrow \widetilde{u_a} \underset{p}{\simeq} (\widetilde{e_{x_0}})_a (= e_a), [v] = [e_a] \in pi_1(E, a)$
2. $[u] \in Imp_* \Leftrightarrow u \underset{p}{\simeq} p \circ v$ для некоторой петли v в $a \Leftrightarrow \widetilde{u_a} \underset{p}{\simeq} v$ для некоторой петли v в $a \Leftrightarrow \widetilde{u_a}$ – петля
3. $\widetilde{u_a} - \ \Leftrightarrow \widetilde{u_a}(1) = a \Leftrightarrow a = a \cdot [u] \Leftrightarrow [u] \in St(a)$ что и требовалось доказать

Следствие: $p: E \to X$ – накрытие
E – линейно связно, $x_0 \in X, a \in p^{-1}(x_0)$. Существует изоморфизм правых $\pi_1(X, x_0)$ – множеств $\pi_1(X, x_0)\diagup_{Imp_*} \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x_0), (Imp_*) \cdot [u] \to a \cdot [u] = \widetilde{u_a}(1)$
Доказательство: из п.(3) теоремы и транзитивности монодромии что и требовалось доказать

Морфизмы накрытий. Ограничение морфизма накрытий на слой является морфизмом $\pi_1(X, x_0)$ – множеств. Морфизмы транзитивных G-множеств с отмеченной точкой: единственность и критерий существования. Теорема о классификации морфизмов связных накрытий (биективность соответствия между морфизмами накрытий и морфизмами соответствующих $\pi_1(X, x_0)$ – множеств).

Предл: G – группа, X, Y – прав. G мн-ва; $x \in X, y \in Y$

1. $\forall$ морфизм $\varphi : X \to Y$
   $\mathrm{Stab}(x) \subset \mathrm{Stab}(\varphi(x))$
2. X – транзитивно $\Rightarrow \exists$ не более одного морфизма $\varphi : X \to Y$, т.ч $\varphi(x) = y$
3. Если X – транзитивно, то такой φ существует $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Stab}(x) \subset \mathrm{Stab}(y)$

Доказательство:
(1) $\forall g \in \mathrm{Stab}(x)$
$\varphi(x)g = \varphi(xg) = \varphi(x) \Rightarrow g \in \mathrm{Stab}(\varphi(x))$
(2) Если $\varphi(x) = g$, то $\varphi(xg) = yg$, $\forall g \in G$
(3) ($\Rightarrow$): из (1)
($\Leftarrow$): Определим $\varphi : X \to Y$ так $\varphi(xg) = yg$, $\forall g \in G$
Пусть $xg_1 = xg_2 \Rightarrow xg_1g_2^{-1} = x \Rightarrow g_1g_2^{-1} \in \mathrm{Stab}(x) \subset \mathrm{Stab}(y) \Rightarrow yg_1 = yg_2 \Rightarrow \varphi$ корректно определено
Очев, φ – морфизм G-множеств, $\varphi(x) = y$, что и требовалось доказать
Обозн: X – транзитивное G-мн-во,
$\mathrm{Stabs}(X) = \mathrm{Stab}(x)|x \in X$
Наблюдение: для $\forall x, \forall g \in G$
$\mathrm{Stab}(xg) = g^{-1}\mathrm{Stab}(x)g$
X – транз, $\Rightarrow$ $\mathrm{Stab}(X) = \{g^{-1}\mathrm{Stab}(x)g|g \in G\}(*)$ – множество всех подгрупп, сопряженных $\mathrm{Stab}(x)$
Предл. следующие утверждения эквивалентны:

1. $X \simeq Y$
2. $\mathrm{Stabs}(X) = \mathrm{Stabs}(Y)$

Доказательство: (1) $\Rightarrow$ (2)
$\mathrm{Stab}(x) = \mathrm{Stab}\varphi(x) \Rightarrow$ по $(*)\mathrm{Stabs}(X) = \mathrm{Stabs}(Y)$
(2) $\Rightarrow$ (1)
Зафиксируем $\forall x \in X, \exists y \in Y$, т.ч $\mathrm{Stab}(x) = \mathrm{Stab}(y)$
$\exists$ морфизм $\varphi : X \to Y$ и $\phi : Y \to X$, такие что $\varphi(x) = y$ и $\phi(y) = x$ $\Rightarrow$ $(\phi\varphi)(x) = x$ $\Rightarrow$ $\phi\varphi = \mathrm{id}_x$ $\Rightarrow$ φ – изоморфизм, что и требовалось доказать
Th: Функтор $\mathcal{F} :$ $\mathrm{Cov}(X) \to \pi_1(X, x_0)$ строгий и полный
Доказательство: (строгость)
Пусть $f, g : (E, p) \to (F, q)$ – морфизм в $\mathrm{Cov}(X)$, $f|_{p^{-1}(x_0)} = g|_{p^{-1}(x_0)}$
$\{E_i|i \in I\}$ – связные компоненты $E, p_i = p|_{E_i} : E_i \to X$
$\forall i \in I :$ $f|_{p^{-1}(x_0)} = g|_{p^{-1}(x_0)}$
$f, g|_{E_i} : (E_i, p_i) \to (F, q)$, E_i – связно $\Rightarrow$ $f|_{E_i} = g|_{E_i}$ $\forall i$ $\Rightarrow$ $f = g$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ строгий
(полнота) Пусть $G = \pi_1(X, x_0)$; пусть $\varphi : p^{-1}(x_0) \to q^{-1}(x_0)$
Обозначим $\varphi_i : \varphi|{p_i}^{-1}(x_0) : {p_i}^{-1}(x_0) \to q^{-1}(x_0)$
Зафиксируем $\forall a \in {p_i}^{-1}(x_0)$, $b = \varphi_i(a)$; $\mathrm{Stab}(a) \subset \mathrm{Stab}(b)$ $\Rightarrow$ $\exists!$ морфизм накрытий $f_i : (E_i, p_i) \to (F, q)$, т.ч $f_i(a) = b$
$\varphi_i : p^{-1}(x_0) \to q^{-1}(x_0)$ переводит a в b $\Rightarrow$ $f_i|{p_i}^{-1}(x_0) = \varphi_i$
Определим $f : E \to F$ так $f|_{E_i} = f_i$
Очевидно f – морфизм накрытий и $f|p^{-1}(x_0) = \varphi$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ полный
Как следствие $\mathcal{F} : \mathrm{Cov}(X) \to Tr\pi_1(X, x_0)$ строгий и полный

Действие группы сопряжениями (на себе и на множестве подгрупп). Сопряженность стабилизаторов точек из одной орбиты. Критерий изоморфизма транзитивных G-множеств. Критерий изоморфизма накрытий в терминах подгрупп фундаментальной группы базы

Изоморфизмы транзитивных G-множеств и классы сопряженных подгрупп. Функтор $\mathcal{F}$ из категории накрытия $\mathrm{Cov}(X)$ в категорию $\pi_1(X, x_0)$-множеств. Его строгость и полнота. Следствие: критерий изоморфизма связных накрытий в $\mathrm{Cov}(X)$

Предл: G – группа, X, Y – прав. G мн-ва; $x \in X, y \in Y$

1. $\forall$ морфизм $\varphi : X \to Y$
   $\mathrm{Stab}(x) \subset \mathrm{Stab}(\varphi(x))$
2. X – транзитивно $\Rightarrow \exists$ не более одного морфизма $\varphi : X \to Y$, т.ч $\varphi(x) = y$
3. Если X – транзитивно, то такой φ существует $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Stab}(x) \subset \mathrm{Stab}(y)$

Доказательство:
(1) $\forall g \in \mathrm{Stab}(x)$
$\varphi(x)g = \varphi(xg) = \varphi(x) \Rightarrow g \in \mathrm{Stab}(\varphi(x))$
(2) Если $\varphi(x) = g$, то $\varphi(xg) = yg$, $\forall g \in G$
(3) ($\Rightarrow$): из (1)
($\Leftarrow$): Определим $\varphi : X \to Y$ так $\varphi(xg) = yg$, $\forall g \in G$
Пусть $xg_1 = xg_2 \Rightarrow xg_1 g_2^{-1} = x \Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in \mathrm{Stab}(x) \subset \mathrm{Stab}(y) \Rightarrow yg_1 = yg_2 \Rightarrow \varphi$ корректно определено
Очев, φ – морфизм G-множеств, $\varphi(x) = y$, что и требовалось доказать
Обозн: X – транзитивное G-мн-во,
$\mathrm{Stabs}(X) = \mathrm{Stab}(x) | x \in X$
Наблюдение: для $\forall x, \forall g \in G$
$\mathrm{Stab}(xg) = g^{-1}\mathrm{Stab}(x)g$
X – транз, $\Rightarrow$ $\mathrm{Stab}(X) = \{g^{-1}\mathrm{Stab}(x)g | g \in G\}(*)$ – множество всех подгрупп, сопряженных $\mathrm{Stab}(x)$
Предл. следующие утверждения эквивалентны:

1. $X \simeq Y$
2. $\mathrm{Stabs}(X) = \mathrm{Stabs}(Y)$

Доказательство: (1) $\Rightarrow$ (2)
$\mathrm{Stab}(x) = \mathrm{Stab}\varphi(x) \Rightarrow$ по $(*)\mathrm{Stabs}(X) = \mathrm{Stabs}(Y)$
(2) $\Rightarrow$ (1)
Зафиксируем $\forall x \in X, \exists y \in Y$, т.ч $\mathrm{Stab}(x) = \mathrm{Stab}(y)$
$\exists$ морфизм $\varphi : X \to Y$ и $\phi : Y \to X$, такие что $\varphi(x) = y$ и $\phi(y) = x$ $\Rightarrow$ $(\phi\varphi)(x) = x$ $\Rightarrow$ $\phi\varphi = \mathrm{id}_x$ $\Rightarrow$ φ – изоморфизм, что и требовалось доказать
Th: Функтор $\mathcal{F}:$ $\mathrm{Cov}(X) \to \pi_1(X, x_0)$ строгий и полный
Доказательство: (строгость)
Пусть $f, g : (E, p) \to (F, q)$ – морфизм в $\mathrm{Cov}(X)$, $f|_{p^{-1}(x_0)} = g|_{p^{-1}(x_0)}$
$\{E_i | i \in I\}$ - связные компоненты $E, p_i = p|_{E_i} : E_i \to X$
$\forall i \in I :$ $f|_{p^{-1}(x_0)} = g|_{p^{-1}(x_0)}$
$f, g|_{E_i} : (E_i, p_i) \to (F, q)$, E_i – связно $\Rightarrow$ $f|_{E_i} = g|_{E_i}$ $\forall i$ $\Rightarrow$ $f = g$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ строгий
(полнота) Пусть $G = \pi_1(X, x_0)$; пусть $\varphi : p^{-1}(x_0) \to q^{-1}(x_0)$
Обозначим $\varphi_i : \varphi|{p_i}^{-1}(x_0) : {p_i}^{-1}(x_0) \to q^{-1}(x_0)$
Зафиксируем $\forall a \in {p_i}^{-1}(x_0)$, $b = \varphi_i(a)$; $\mathrm{Stab}(a) \subset \mathrm{Stab}(b)$ $\Rightarrow$ $\exists!$ морфизм накрытий $f_i : (E_i, p_i) \to (F, q)$, т.ч $f_i(a) = b$
$\varphi_i : p^{-1}(x_0) \to q^{-1}(x_0)$ переводит a в b $\Rightarrow$ $f_i|{p_i}^{-1}(x_0) = \varphi_i$
Определим $f : E \to F$ так $f|_{E_i} = f_i$
Очевидно f – морфизм накрытий и $f|p^{-1}(x_0) = \varphi$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ полный
Как следствие $\mathcal{F} : \mathrm{Cov}(X) \to Tr\pi_1(X, x_0)$ строгий и полный
Критерий изоморфизма накрытий в $\mathrm{Cov}(X)$:
$(E, p) \sim (F, q)$ – накрытия X; E, F – связны, $x_0 \in X, a \in p^{-1}(x_0), b \in q^{-1}(x_0)$
$((E, p), a_0) \simeq ((F, q), b_0)$ в $\mathrm{Cov}_0^*(X, x_0)$ $\Leftrightarrow$ $Imp_{*,a}$ и $Imq_{*,b}$ сопряжены в $\pi_1(X, x_0)$
Доказательство: из того, что $\mathcal{F}^*$ и $\mathcal{F}$ строгие и полные и из леммы, что и требовалось доказать

20

Нормализатор подгруппы в группе. Описание группы автоморфизмов транзитивного Gмножества в терминах группы G. Описание группы автоморфизмов связного накрытия в терминах фундаментальной группы базы. Следствие: группа автоморфизмов односвязного накрытия.

21

Универсальное накрытие и его универсальное свойство. Относительно односвязные подмножества и полулокально односвязные пространства. Примеры и контрпримеры. Необходимое условие существования универсального накрытия.

Определение: Накрытие: $p : \widetilde{X} \to X$ называется универсальным $\Leftrightarrow \widetilde{X}$ односвязно.

Предл: Пусть $p : \widetilde{X} \to X$ – универсальное накрытие, $x_0 \in X, a \in p^{-1}(x_0)$. Тогда $((\widetilde{X}, a), p)$ – инициальный объект в $\mathrm{Cov}_0^*(X, x_0)$
Пусть $q : F \to X$ – накрытие, A – связно, $b \in q^{-1}(x_0) \subset F$
Знаем: $\exists$ не более одного морфизма.
$(\widetilde{X}, p) \to (F, p)$ в $\mathrm{Cov}_0^*(X, x_0)$ и он $\exists \Leftrightarrow Imp_{*,a} \subset Imq_{*,a}$ Последнее услвоие выполнено, т.к. $\widetilde{X}$ односвязно и $Imp_{*,a} = e$
Предл: След свойства подмножества $U \subset X$ эквивалентны

1. $\forall x \in U$ гомоморфизм $i_* : (U, x) \to \pi_1(X, x)$ индуциров. включением $i : U \to X$ тривиален. (то есть $Imi_x = e$)
2. $\forall$ петля в U гомотопна в X постоянной петле
3. $\forall x_0, x \in U$ Любые пути $u, v : I \to U$ из x_0 в x, гомотопны в X

Доказательство:
(1) $\Leftrightarrow$ (2) из определения i_*
(2) $\Leftrightarrow$ (3) Как для U = X (см ранее)
Определение: Мн-во $U \subset X$, удовл. условиям (выше) называется относительно односвязным. Набл 1: $U \subset X$, отн. односвязно $\Rightarrow$ каждый $v \subset U$ относ. односвязно в X.
Определение: X наз

1. Локально односвязным $\Leftrightarrow \forall x \in X \forall U \ni x \exists$ односвязная окрестность $V \ni x$, т.ч. $V \subset U$
2. Полулокально односвязным $\Leftrightarrow \forall x \in X \exists$ относительно односвяз. окрестность $U \ni x$

Набл 2:
(1) лок. односвязное $\Rightarrow$ полулок. односвяз. и лок линейно связно.
(2) X – полулок односвяз. $\Leftrightarrow \forall x \in X\ \forall U \ni x\ \exists$ относ. односвяз. окрестность $V \ni x, V \subset U$
Если вдобавок X лок лин связно, то $\exists$ линейно связное V с этими свойствами (следует из набл 1)

Предл: Пусть $\exists$ унив. накрытие $p : \widetilde{X} \to X \Rightarrow$ X -полулок односвязно.

Пусть $x \in X, U \ni x$ ровно накр. окр-ть $\forall$ петля г в U поднимается до $\widetilde{u}$ в $\widetilde{X}$, $\widetilde{X}$ односвязно $\Rightarrow$ $\widetilde{u}$ гомотопно в $\widetilde{X}$ пост. петле $\Rightarrow$ г гомотопно в X пост петле $\Rightarrow$ U относ. односвязно

22

Теорема о существовании универсального накрытия. Примеры универсальных накрытий.

X – связное, локально линейно связное, полулокально односвязное топологическоепространство. Тогда $\exists$ универсальное накрытие p: $\widetilde{X} \to$ X.

Набл. (где искать $\widetilde{X}$?)

Предположим универсальное накрытие p: $\widetilde{X} \to$ X существует

$\forall x_0, x_1 \in X(x_0,x_1) = P(x_0,x_1)/\underset{p}{\simeq}$

Зафиксируем $x_0 \in X$; пусть $a \in p^{-1}(x_0)$; u,v $\in P(x_0,x), x \in$

Знаем: $u \simeq v \Leftrightarrow \widetilde{u}_a \simeq \widetilde{v}_a \Leftrightarrow \widetilde{u}_a(1) = \widetilde{v}_a(1)$ (влево из односвязноти $\widetilde{X}$, вправо верно всегда)

Поэтому отобр

$\phi : \bigsqcup\limits_{x \in X}$

$$\begin{tikzcd}
\Pi(x_0,x) \arrow[rr] \arrow[dr, "p'"'] & & \widetilde{X} \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$p^{-1}([u]) = u(1)$, диаграмма комутативна

Лемма (Об Атласе) X – множество, $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Пусть $\forall i \in I$ дано топ пр-во X_i и биекция $\phi_i : U_i \to X_i$. Предположим, что $\forall i,j \in I$ выполнены условия:

1. $\phi_i(U_i \cap U_j)$ – открыто в X_i
2. "Отображение склейки"$\phi_j \cdot \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ непрерывно.

Тогда на X $\exists$! топология, в которой все U_i открыт., и в т.ч. все ϕ_i – гомеоморфизмы

Терминология: (U_I, ϕ_i) – карта, $\{(U_i, \phi_i) | i \in I\}$ – атлас.

Идея доказательсва: Иском топ на X – финальная топ порожденная $\{\phi_i^{-1} | i \in I\}$ т.е. $u \subset X$ открыто $\Leftrightarrow \phi_i(u \cap U_i)$ открыто в $X_i \forall i/$

Доказательство: Зафиксируем $x_0 \in X$ Обозначим $\widetilde{X} = \bigsqcup\limits_{i \in I} (x_0, x)$

$p : \widetilde{X} \to X, \widetilde{p}([u]) = u(1)$ Обозначим $\forall U \subset X \; \forall x,y \in U_U(x,y) (= \{[u]/u \in P(x,y), u(I) \in U\} \subset (x,y))$

$V = \{U \subset X \mid U$ Открыто, лин. связно, относ односвяз$\}$ V покрыв X.

Заметим $\forall U \in V \; \forall x,y \in U_U(x,y)$ состоит из одного элмента $W_x y$

$\forall U \in V \; \forall x \in U$ рассмотрим отображения $p^{-1}(U) \overset{\gamma_{u,x}}{\underset{\phi_{u,x}}{\Leftrightarrow}}$ (тут должны быть стелки тудым сюдым сверху фи, снизу вилы дьявола) $(x_0,x) \times U$

$\gamma_{u,x}(v,y) = v w_{xy} \in p^{-1}(y) \in p^{-1}(U)$

$\phi_{u,x}(u) = (u w_{yx}, y)$, где $y = u(1)$. Заметим:

$w_{xy} \cdot w_{yz} = w_{xz}$

$w_{xy} = w_{yx}^{-1}$ Получили что $\phi \gamma$ биекции обратные друг другу.

$(v,y) \to v \cdot w_{xy} \to (v \cdot w_{xy} \cdot w_{yx}, y) = (v,y)$

$u \to (u \cdot w_{xy}, y) \to u \cdot w_{xy} \cdot w_{yx} = u$

Снабдим (x_0,x) дискретной топологией, $(x_0,x) \times U$ – топологией произведения. Покажем: сем-во $\{\phi_{u,x} : U \in V, x \in U\}$ удовлет. усл. леммы

Пусть $U, W \in V, x \in U, y \in W$

$\phi_{u,x}(p^{-1}(U) \cap p^{-1}(W)) = \phi_{u,x}(p^{-1}(U \cap W)) = (x_0,x) \times (U \cap W)$ – открыто в $(x_0,x) \times U \Rightarrow$ усл(1) из леммы выполнено. Проверим (2)

Нужно, чтобы $\phi_{v,y} \cdot \gamma_{u,x} : (x_0,x) \times (U \cap W) \to (x_0,y) \times (U \cap W)$ было непрерывным. Зафикс $\forall z \in U \cap W$

Пусть Q – линейно связн окр-сть z, $Q \subset U \cap W, w_{xt} \in {}_W(z,t)$ – единств. элемен. $\forall t \in Q \; \forall v \in (x_0,x)$

$(\phi_{v,y} \cdot \;\gamma_{u.x})(v,t) = \phi_{v,y}(v \cdot w_{xt}) = (v \cdot w_{xt} w_{ty}; t) = (v \cdot w_{xz} w_{zt} w_{tz} w_{zy}, t) = (v w_{xz} w_{zy}, t)$ – непр. отображение.

$\Rightarrow$ выполнены условия Леммы $\Rightarrow$ на $\widetilde{X}$ $\exists$! топ, в которой все $p^{-1}(U)$ открыты и все $\phi_{u,x}(U \in V, x \in X)$ – гомеоморфизмы. ИМеем диаграмму.

$\Rightarrow$ U ровно накрыта p $\Rightarrow p : \widetilde{X} \to X$ – накрытие.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_{u,x}", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & & \Pi(x_0, x) \times U \arrow[dl, "pr_2"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

23

Факторизация накрывающего пространства по действию группы. Построение накрытия по подгруппе фундаментальной группы. Теорема о классификации накрытий (с отмеченной точкой и без).