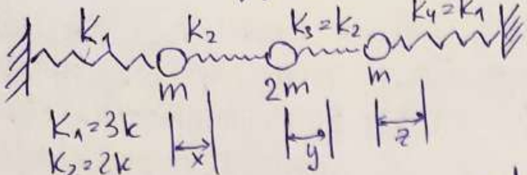
Механика. Домашнее задание № 1

Струкиной Ксении

1)



$k_1 = 3k$, $k_2 = 2k$

Составим систему уравнений Ньютона:

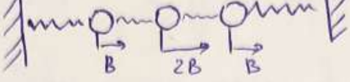
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k_1 x - k_2(x-y) \\ 2m\ddot{y} = k_2(x-y) - k_2(y-z) \\ m\ddot{z} = k_2(y-z) - k_1 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{5kx}{m} + \frac{2ky}{m} \\ \ddot{y} = \frac{kx}{m} - \frac{2ky}{m} + \frac{kz}{m} \\ \ddot{z} = \frac{2ky}{m} - \frac{5kz}{m} \end{cases}$$

$$\ddot{X} = -AX \qquad A = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 12\lambda^2\omega^2 + 41\lambda\omega^4 - 30\omega^6 = (\lambda-\omega^2)(\lambda-5\omega^2)(\lambda-6\omega^2) \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

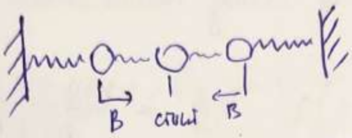
$\lambda_1 = \omega^2$; $\lambda_2 = 5\omega^2$; $\lambda_3 = 6\omega^2$ — все собственные значения больше 0! (хорошо)

1. $A - \omega^2 E: \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



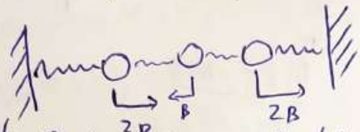
$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — нормальная частота

2. $A - 5\omega^2 E: \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



$\omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{m}}$ — нормальная частота

3. $A - 6\omega^2 E: \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

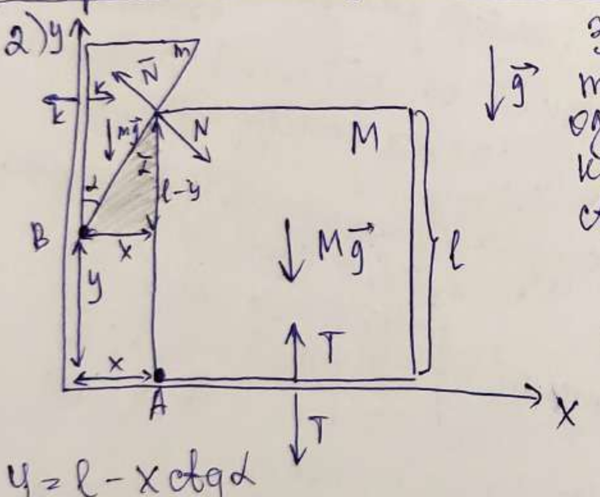


$\omega_3 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$ — нормальная частота

Нормальные моды: $v_i \cos\omega_i t$, $v_i \sin\omega_i t$ — где $i \in \{1,2,3\}$

---

2)



Заметим, что система задается по точкам A и B, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с длинами X и Y, которые, в свою очередь, связаны соотношением: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{l-y}{x}$, где l — сторона квадрата (серый Δ)

$x\operatorname{ctg}\alpha = l - y \Rightarrow \boxed{y = l - x\operatorname{ctg}\alpha}$, $l = \text{const}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \text{const}$

Значит, у системы 1 степень свободы.

Система уравнений:

Куб: $\begin{cases} M\ddot{x} = N\cos\alpha & (1) \\ M\underset{0}{\ddot{y}} = Mg + N\sin\alpha - T = 0 & (2) \end{cases}$ поскольку тут 0, знаки не важны

Брусок: $\begin{cases} m\ddot{x} = k - N\sin\cos\alpha = 0 & (3) \\ m\ddot{y} = -mg + N\sin\alpha & (4) \end{cases}$

$y = l - x\operatorname{ctg}\alpha$

$\ddot{y} = -\ddot{x}\operatorname{ctg}\alpha \quad (*)$

Из $(*)$ и (4): $m\ddot{y} = -m\ddot{x}\operatorname{ctg}\alpha = -mg + N\sin\alpha$, где по (1) $-m\ddot{x}\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{mN\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{M}$

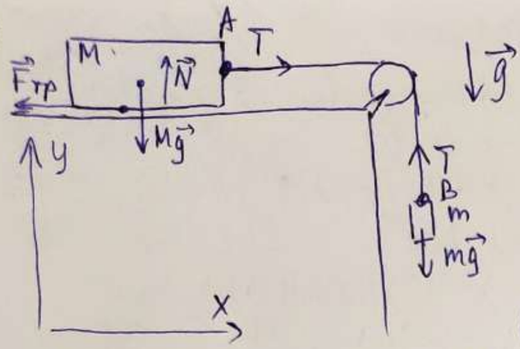
$$\Rightarrow N\frac{(\sin\alpha M + m\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha)}{M} = mg$$

$$N = \frac{Mmg}{\sin\alpha M + m\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha} \qquad \ddot{x} \overset{(1)}{=} \frac{N\cos\alpha}{M} = \frac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha M + m\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{mg}{\operatorname{tg}\alpha M + m\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\ddot{y} \overset{(4)}{=} -g + \frac{N\sin\alpha}{m} = -g + \frac{Mg\sin\alpha}{\sin\alpha M + m\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha} = -g + \frac{Mg}{M + m\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{-mg\operatorname{ctg}^2\alpha}{M + m\operatorname{ctg}^2\alpha}$$ — знак минус — это хорошо

Ответ: $\ddot{x} = \frac{mg}{\operatorname{tg}\alpha M + m\operatorname{ctg}\alpha}$; $\ddot{y} = \frac{-mg\operatorname{ctg}^2\alpha}{M + m\operatorname{ctg}^2\alpha}$

3)



$|\vec F_{тр}| = k|\vec N|$

Поскольку длина нити постоянна, то по координате точки A определяется координата точки B => 1 степень свободы (по точкам A и B определяется положение)

Система уравнений Ньютона:

$$\begin{cases} M\ddot x = T - F_{тр} \\ M\ddot y = N - Mg = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m\ddot x = 0 \\ m\ddot y = T - mg \end{cases}$$

$$T - F_{тр} = M\ddot x \overset{(*)}{=} -M\ddot y = -\frac{M}{m}T + Mg$$

$$F_{тр} = kN = kMg$$

$$T = \frac{(k+1)Mg}{1+\frac{M}{m}}$$

(*) $\ddot x = -\ddot y$ как раз в силу постоянной длины нити

$$\ddot x = \frac{T}{M} - kg = \frac{(k+1)g}{1+\frac{M}{m}} - kg = \frac{mg - kgM}{m+M}$$

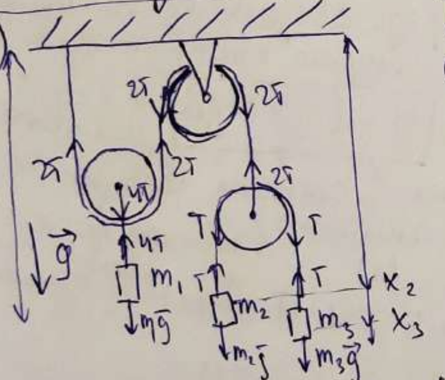
$$\ddot y = \frac{M}{m+M}(k+1)g - g = \frac{Mkg - mg}{m+M}$$

Поскольку $F_{тр}$ не может двигать груз назад, то настоящее ускорение — $\max(\ddot x, 0)$ и $\min(0, \ddot y)$

$m \le Mk$ — при таком условии конструкция стабильна.

$T = mg \quad F_{тр} \le kN$

4)



Поскольку x_2 зависит от x_3 (нить постоянна), а по x_1, x_2 и x_3 задается конструкция, то число степеней свободы - 2.

Более того, по правилу моментов, у координат соотношение: $4x_1 + x_2 + x_3 = const$

$4\dot x_1 + \dot x_2 + \dot x_3 = 0$

Система уравнений:
$$\begin{cases} -4T + m_1 g = m_1 \ddot x_1 & (1) \\ -T + m_2 g = m_2 \ddot x_2 & (2) \\ -T + m_3 g = m_3 \ddot x_3 & (3) \end{cases}$$

Из (3) $T = m_3(g - \ddot x_3)$, тогда

$$\begin{cases} 4m_3(\ddot x_3 - g) = m_1\ddot x_1 - m_1 g \\ m_3(\ddot x_3 - g) = m_2\ddot x_2 - m_2 g \end{cases} \quad 4\ddot x_1 + \ddot x_2 + \ddot x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4m_3(-4\ddot x_1 - \ddot x_2 - g) = m_1\ddot x_1 - m_1 g \\ m_3(-4\ddot x_1 - \ddot x_2 - g) = m_2\ddot x_2 - m_2 g \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot x_1(16m_3 + m_1) = m_1 g - 4m_3\ddot x_2 - 4m_3 g \\ \ddot x_2(m_2 + m_3) = m_2 g - m_3 g - 4m_3\ddot x_1 \end{cases} \Rightarrow (16m_3 + m_1)\ddot x_1 = (m_1 - 4m_3)g - \frac{4m_3(m_2 g - m_3 g - 4m_3\ddot x_1)}{m_2 + m_3}$$

$$\ddot x_1\left((16m_3 + m_1)(m_2 + m_3) - 16m_3^2\right) = (m_1 - 4m_3)g - \frac{4m_3(m_2 g - m_3 g)}{m_2 + m_3}$$

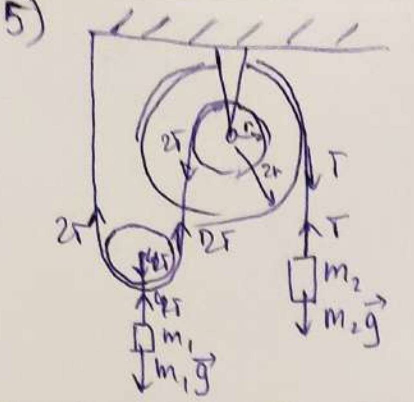
$$\boxed{\ddot x_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 8m_3 m_2}{16m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3}\, g}$$

$$\ddot x_2 = \frac{(m_2 - m_3)g - 4m_3 \cdot \frac{m_1(m_2 + m_3) - 8m_2 m_3}{\underbrace{16m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}_{= z\ (\text{знаменатель})}}\, g}{m_2 + m_3} =$$

$$= -\frac{4m_1 m_3}{z} g + \frac{32m_3^2 m_2 + 16m_2^2 m_3 - 16m_2 m_3^2 + m_1 m_2^2 + \cancel{m_1 m_2 m_3} - \cancel{m_1 m_2 m_3} - m_3^2 m_1}{z(m_2 + m_3)}\, g =$$

$$= \frac{-4m_1 m_3 + 16m_2 m_3 + m_1(m_2 - m_3)}{z}\, g = \boxed{\frac{16m_2 m_3 + m_1 m_2 - 5m_1 m_3}{16m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}\, g = \ddot x_2}$$

$$4\ddot x_1 + \ddot x_2 + \ddot x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot x_3 = \frac{16m_2 m_3 + m_1 m_3 - 5m_1 m_2}{16m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}\, g}$$

5) 

По правилу моментов: $4x_1 + x_2 = const$

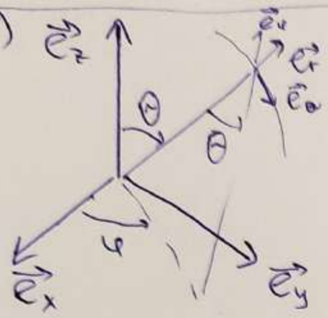
Число степеней свободы — 1.

$4x_1 + x_2 = 0 \quad 4\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 \; (*) \quad \cdot 16 m_2 \ddot{x}_1$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - 4T \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T \mid \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow m_1\ddot{x}_1 - 4m_2\ddot{x}_2 = m_1 g - 4m_2 g$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - 4m_2}{16m_2 + m_1} g$$

$$\ddot{x}_2 \overset{(*)}{=} -4\ddot{x}_1 = \frac{16m_2 - 4m_1}{16m_2 + m_1} g$$

6) 

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \vec{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_z \cos\theta \\ \vec{e}_\theta = \vec{e}_x \cos\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \cos\theta\sin\varphi - \vec{e}_z \sin\theta \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi \end{cases}$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{e}_x(\cos\theta\cos\varphi\,\dot\theta - \sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\dot\varphi) + \vec{e}_y(\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi) + \vec{e}_z(-\sin\theta\cdot\dot\theta) = \dot\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\cdot\vec{e}_\varphi\cdot\dot\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \vec{e}_x(-\dot\theta\sin\theta\cdot\cos\varphi - \dot\varphi\cos\theta\sin\varphi) + \vec{e}_y(-\dot\theta\sin\theta\sin\varphi + \dot\varphi\cos\varphi\cos\theta) + \vec{e}_z(-\dot\theta\cos\theta) = -\dot\theta\vec{e}_r + \dot\varphi\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \vec{e}_x(-\cos\varphi\cdot\dot\varphi) + \vec{e}_y(-\dot\varphi\sin\varphi) = (-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta)\cdot\dot\varphi$$

$$\dot{\vec{r}} = (r\vec{e}_r)^{\cdot} = \dot r\vec{e}_r + r\cdot\dot{\vec{e}}_r = \dot r\vec{e}_r + r(\dot\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_\varphi\cdot\dot\varphi)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot r\vec{e}_r + 2\dot r(\dot\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_\varphi\cdot\dot\varphi) + r\big(\ddot\theta\vec{e}_\theta + \ddot\varphi\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot\theta\cos\theta\,\vec{e}_\varphi\dot\varphi + \underline{\dot\theta\dot\varphi\cos\theta\,\vec{e}_\varphi} - \dot\theta^2\vec{e}_r + \dot\varphi\sin\theta(-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta)\dot\varphi\big) = \vec{e}_r(\ddot r - \dot\theta^2 r - \sin^2\theta\,\dot\varphi^2 r) + \vec{e}_\theta(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - \dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta\, r) + \vec{e}_\varphi(2\dot r\sin\theta\cdot\dot\varphi + r\cdot\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot\theta\dot\varphi\cos\theta\, r)$$

На $\mathbb{R}^3$ без оси z ~~переход~~ якобиан перехода отличен от 0, ⇒ переход к сферическим будет несингулярным.