Логика, второй коллок.

1. Пропозициональные формулы. Оценки и их продолжения на формулы. Равносильные формулы. Тавтологии.

Определение 1.1. Фиксируем счетное множество *пропозициональных переменных* $PV = \{p_1, \ldots\}$. Множество PFm *пропозициональных переменных* строится из этих переменных, логических связок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$ и скобок по индукции:

1) Если $A \in PV$, то $A \in PFm$.

2) Если $A, B \in PFm$, то $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B) \in PFm$.

3) Если $APFm$, то $\neg A \in PFm$.

Определение 1.2. *Оценкой пропозициональных переменных* называется любое отображение $\theta : PV \to \{0, 1\}$.

Лемма 1.1. Для любой оценки θ существует единственное продолжение на формулы PFm, такое, что для всех формул получается естественное значение.

Доказательство. Доказательство индукцией по длине формулы. □

Определение 1.3. Формулы называются *равносильными* ($\sim$), если при всех оценках их значения совпадают.

Определение 1.4. Формула называется *тавтологией (или общезначимой)*б если при любой оценке она принимает значение 1.

2. Исчисление высказываний (CL). Выводы (формальные доказательства) и теоремы CL.

A_1	$A \to (B \to A)$
A_2	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
A_3	$A \wedge B \to A$
A_4	$A \wedge B \to B$
A_5	$A \to (B \to (A \wedge B))$
A_6	$A \to (A \vee B)$
A_7	$B \to (A \vee B)$
A_8	$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
A_9	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
A_{10}	$\neg\neg A \to A$
MP	$A,\ (A \to B) \vdash B$

Определение 2.1. *Выводом в исчислении высказываний* называется конечная последовательность формул, каждая из которых является аксиомой или получается из предыдущих по правилу вывода.

Определение 2.2. Формула A называется *выводимой (или теоремой)* ($\vdash A$), если существует вывод, в котором последняя формула — это A.

3. Вывод из гипотез. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.

Определение 3.1. *Вывод из гипотез* — это абсолютно то же самое, только теперь к аксиомам добавляются гипотезы.

$A \to A.$

A_1: $B = A$	$(A \to (A \to A)$
A_1: $B = (A \to A)$	$(A \to ((A \to A) \to A))$
A_2: $B = (A \to A)$, $C = A$	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$
MP:	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$
MP:	$(A \to A)$

Теорема о дедукции. Если $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, то $\Gamma \vdash (A \to B)$. Во вторую сторону тоже верно.

Доказательство. Сначала докажем во вторую сторону — это проще. Пусть существует вывод $(A \to B)$ из Γ, Допишем строчку

MP	B

Ну и все.

Теперь в другую сторону, будем доказывать индукцией по длине вывода B из $\Gamma \cup \{A\}$. База: B является аксиомой или совпадает с A. Во втором случае помогает красная формула. В первом случае запишем явно вывод $(A \to B)$:

B	B
A_1	$B \to (A \to B)$
MP	$(A \to B)$

Теперь переход, B получена правилом вывода из некоторых предыдущих формул C и $C \to B$. Тогда, по предположению индукции $\Gamma \vdash (A \to C), (A \to (C \to B))$. Допишем к этому выводу строчки:

A_2	$(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$
MP	$(A \to C) \to (A \to B)$
MP	$(A \to B)$

□

4. Теорема корректности для CL. Непротиворечивость CL.

Теорема о корректности. Все теоремы CL — тавтологии.

Доказательство. Проверяется индукцией. □

Определение 4.1. Множество формул Γ называется *противоречивым*, если для некоторой формулы A имеем $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$. А в противном случае — *непротиворечивым.*

Следствие 4.1. CL непротиворечиво.

5. Непротиворечивые множества формул. Лемма Линденбаума. Свойства максимальных непротиворечивых подмножеств.

(От противного) $(A \to B),\ (A \to \neg B) \vdash \neg A.$

A_9	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
MP	$(A \to \neg B) \to \neg A$
MP	$\neg A$

Лемма 5.1. Множество $\Gamma \cup \{B\}$ — противоречиво тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \neg B$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \vdash \neg B$, тогда $\Gamma \cup \{B\} \vdash B, \neg B$, то есть $\Gamma \cup \{B\}$ — противоречиво.

Пусть $\Gamma \cup \{B\}$ — противоречиво, то есть можно вывести A и $\neg A$. Тогда по теореме о дедукции имеем $\Gamma \vdash (B \to A), (B \to \neg A)$, а по красной формуле получаем $\neg B$.

□

Определение 5.1. Непротиворечивое множество Γ называется *максимальным непротиворечивым*, если для любой формулы $A \notin \Gamma$ множество $\Gamma \cup \{A\}$ — противоречиво.

Теорема Линденбаума. Любое непротиворечивое множество Γ содержится в некотором максимальном.

Доказательство. Рассмотрим семейство всех непротиворечивых множеств, содержащих Γ. Это ЧУМ по включению. Проверим условие леммы Цорна. Рассмотрим какую-то цепь и объединим все её элементы. Получилось множество, нужно показать, что оно непротиворечиво. Это так, потому что если выводимо A и $\neg A$, то они выводимы и из какого-то элемента цепи.

□

Свойства максимальных непротиворечивых. 1) $\Gamma \vdash B \to B \in \Gamma$.
2) $(B \wedge C) \in \Gamma \leftrightarrow B \in \Gamma, C \in \Gamma$.
3) $(\neg B \in \Gamma) \leftrightarrow \neg(B \in \Gamma)$.
4) $(B \vee C) \in \Gamma \leftrightarrow B \in \Gamma$ или $C \in \Gamma$.
5) $(B \to C) \in \Gamma \to (\neg B \in \Gamma$ или $C \in \Gamma)$.

6. Выполнимость непротиворечивых множеств. Теорема о семантической полноте CL.

Определение 6.1. Высказывание (семейство высказываний) *выполнимо*, если существует такая оценка, что значение формулы равно 1.

Теорема 6.1. Непротиворечивое множество формул выполнимо.

Доказательство. Будем рассматривать максимальное непротиворечивое множество. Наложим на оценку условие: $f(F) = 1 \leftrightarrow F \in \Gamma$. По индукции такая оценка существует и единственна, что и требовалось.

□

Теорема о полноте. Все тавтологии выводимы в CL.

Доказательство. Предположим противное, то есть A — не выводимая тавтология. Тогда $\{\neg A\}$ — непротиворечиво, иначе, выводимо $\neg\neg A$, а значит, выводимо и A. Но тогда для него существует хорошая оценка. То есть A не может быть тавтологией.

□

7. Непротиворечивость выполнимых множеств. Теорема компактности.

Замечание 7.1. Выполнимое множество формул очевидно непротиворечиво.

Теорема о компактности. Пусть $\Gamma \subset Fm$ и всякое конечное подмножество выполнимо. Тогда и все Γ выполнимо.

Доказательство. Всякое конечное множество формул непротиворечиво, следовательно, все Γ непротиворечиво, тогда оно и выполнимо.

□

8. Синтаксическая полнота CL.

Теорема о синтаксической полноте. Пусть Φ — пропозициональная формула, и она не выводится из CL. Тогда Cl, Φ — противоречиво.

Доказательство. Наша формула Φ — точно не тавтология,тогда сущствует оценка f, для которой $f(\Phi) = 0$. Предположим, $\Phi = \Phi(p_1, \ldots, p_n)$. Положим b_i — любая тавтология, если $f(p_i) = 1$, и отрицание к тавтологии иначе. По условию у нас аыводимо $\Phi(b_1, \ldots, b_n)$. Покажем, что выводимо обратное. Для этого по индукции по формуле A покажем, что для любой оценки g

$$g(A(b_1, \ldots, b_n)) = f(A),$$

отсюда будет все следовать. А это верно по индукции.

□

9. Сигнатура. Термы, атомарные формулы, формулы. Лемма об однозначном анализе (без док.). Замкнутые термы и формулы.

Определение 9.1. *Сигнатурой* называется четверка вида $\Omega = (Pred_\Omega, Const_\Omega, Fun_\Omega, \nu)$, в которой

1) $Pred_\Omega, Const_\Omega, Fun_\Omega$ — попарно непересекающиеся множества;

2) $Pred_\Omega \neq \varnothing$;

3) $\nu : Pred_\Omega \cup Fun_\Omega \to \mathbb{N}_+$.

Множества $Pred_\Omega, Const_\Omega, Fun_\Omega$ — называются соответственно *множеством предикатных символов, множеством предметных констант и множеством функциональных символов* сигнатуры Ω, ν называется *функцией валентности.*

Предикатный или функциональный символ G называется n – местным, если $\nu(G) = n$.

Определение 9.2. *Термы* Tm_Ω сигнатуры Ω строятся индуктивно:

1) все константы сигнатуры Ω — термы;

2) все свободные переменные $FVar$ — термы;

3) если $f^n \in Fun_\Omega$ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ — термы.

Определение 9.3. *Атомарные формулы* это слова вида $P(t_1, \ldots, t_n)$, где $P^n \in Pred_\Omega$, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы.

Определение 9.4. *Формулы* Fm_Ω сигнатуры Ω строятся индуктивно:

1) все атомарные формулы сигнатуры Ω — формулы;

2) если $A, B \in Fm_\Omega$, то $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), \neg A \in Fm_\Omega$;

3) если $A \in Fm_\Omega$, $a \in FVar$, $x \in BVar$ и x не входит в A, то $\exists x[x/a]A, \forall x[x/a]A \in Fm_\Omega$.

Лемма об однозначном анализе. 1) Каждый терм либо константа, либо свободная переменная, либо имеет вид $f(t_1, \ldots, t_n)$, где $f^n \in Fun_\Omega$, $t_1, \ldots, t_n \in Tm_\Omega$.

2) Каждая атомарная формула имеет вид $P(t_1, \ldots, t_n)$.

3) Каждая не атомарная формула почти* однозначно представляется в виде $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $\neg A$, $\exists x[x/a]A$, $\forall x[x/a]A$ (однозначность теряется в последних двух случаях).

Определение 9.5. Терм называется *замкнутым*, если он не содержит переменных. Множество замкнутых термов обозначается CTm_Ω.

Определение 9.6. Формула называется *замкнутой*, если она не содержит свободных переменных. Множество замкнутых формул обозначается CFm_Ω.

10. Модель данной сигнатуры. Нормальные модели сигнатуры с равенством.

Определение 10.1. *Модель* сигнатуры Ω — это пара вида $M = (\underline{M}, I)$, где $\underline{M}$ — непустое множество (*носитель модели*), I — функция, определенная на множестве $Pred_\Omega \cup Const_\Omega \cup Fun_\Omega$, причем

1) если $c \in Const_\Omega$, то $I(c) \in \underline{M}$;

2) если $P^n \in Pred_\Omega$, то $I(P) : \underline{M}^n \to \{0, 1\}$,

3) если $f^n \in Fun_\Omega$, то $I(f) : \underline{M}^n \to \underline{M}$.

Определение 10.2. Модель M сигнатуры, содержащей 2 – местный предикатный символ $=$, называется *нормальной*, если для всех $m_1, m_2 \in M$

$$=_M (m_1, m_2) = \begin{cases} 1 & \text{если } m_1, m_2 \text{ совпадают} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

11. Оцененные термы и формулы, их значения. Выполнимость и общезначимость для замкнутых формул.

Определение 11.1. Пусть M — модель сигнатуры Ω *Расширенной сигнатурой модели* $\Omega \cup M$ называется сигнатура, в которой множество констант — это $Const_\Omega \cup \underline{M}$, а в остальном ничем не отличается от Ω.

Определение 11.2. Пусть M — модель сигнатуры Ω. Терм, *оцененный* в M, — это замкнутый терм расширенной сигнатуры M, аналогично определяется *оцененная формула.*

Определение 11.3. Их значения определяются естественно и по индукции.

Предложение 11.1. Значения термов и формул определены однозначно в соответствии с моделью.

Доказательство. Опять доказываем индукцией по длине записи, только в случае кванторов у нас уже нет единственности. Если аккуратненько позаменять перемнные, то и этот случай разбирается.

□

Определение 11.4. Замкнутая формула называется *выполнимой*, если существует модель, в которой она истинна.

Определение 11.5. Замкнутая формула называется *общезначимой*, если она истинна во всех моделях.

12. Исчисление предикатов без равенства (PC). Вывод из гипотез. Свойства отношения выводимости. Примеры теорем и допустимых правил в PC, правила Бернайса. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.

Аксиомы исчисления предикатов PC состоят из аксиом исчисления высказываний CL и 4 предикатных аксиом:

A.1.1) $\forall x[x/a]A \to [t/a]A$;

A.1.2) $[t/a]A \to \exists x[x/a]A$;

A.1.3) $\forall x[x/a](A \to B) \to (A \to \forall x[x/a]B)$;

A.1.4) $\forall x[x/a](B \to A) \to (\exists x[x/a]B \to A)$.

Здесь A, B — формулы, t — терм, a — свободная переменная, которая в последних двух аксиомах не входит в a, x — связанная переменная, которая не входит в A и B.

Определение 12.1. *Выводом* формулы A называется конечная последовательность, состоящая из аксиом, гиппотез правила вывода MP и нового правила Gen :

$$\frac{A}{\forall x[x/a]A},$$

где x не входит в A

Свойства выводимости. 1) Если $\Delta \subset \Gamma$ и $\delta \vdash$, то $\Gamma \vdash A$.

2) Если $\Gamma \vdash A$, то существует конечное $\Delta \subset \Gamma$, для которого $\Delta \vdash A$.

3) Если $\delta \vdash \Gamma$ и $\Gamma \vdash A$, то $\Delta \vdash A$.

Теоремы и допустимые правила. 1) $\forall x[x/a]A \to A$ (x не входит в A).

2) $A \to \exists x[x/a]A$ (x не входит в A).

3) $\dfrac{A \to B}{A \to \forall x[x/a]B}$.

4) $\dfrac{B \to A}{\exists x[x/a]B \to A}$.

В последних двух правилах x не входит в A, B, переменная a не входит в A. Они называются *ослабленными правилами Бернайса*.

Доказательство. Первые две теоремы — следствия двух первых аксиом для $t = a$.

3) Пусть $\Gamma \vdash (A \to B)$.

Gen	$\forall x[x/a](A \to B)$
$A.1.3$	$A \to \forall a[x/a]B$
MP	$\neg A$

4) выводится аналогично.

□

Полезное следствие. $\forall y[y/a]A \to \forall x[x/a]A$, переменные x, y не входят в A (аналогичное верно и для квантора $\exists$).

Доказательство.

$A.1.1$	$\forall y[y/a]A \to [x/a]A)$
Ослабленный Бернайс	$\forall y[y/a]A \to \forall x[x/a]A$

□

Ослабленная теорема о дедукции. Если $\Gamma, A \vdash_{PC_\Omega} B$ без применения правила Gen, то $\Gamma \vdash_{PC_\Omega} A \to B$.

Правила Бернайса. 1) $\dfrac{A \to B}{A \to \forall x[x/a]B}$.

2) $\dfrac{B \to A}{\exists x[x/a]B \to A}$.

Тут уже x не входит в B, переменная a не входит в A.

Доказательство.

ослабленный Бернайс	$A \to \forall y[y/a]B$, тут мы выбираем y, не входящую в A, B
Полезное следствие	$\forall y[y/a]B \to \forall x[x/a]B$
Силлогизм	$A \to \forall x[x/a]B$

$\square$

Теорема о дедукции для предикатов. Если A — замкнутая формула, то

$$\Gamma, A \vdash_{PC_\Omega} B \Longleftrightarrow \Gamma \vdash_{PC_\Omega} A \to B.$$

Доказательство. Все доказывается как раньше, нужно только разобрать один случай, когда B получается по правилу Gen. Предположим $G = \forall x[x/a]C$ и $\Gamma, A \vdash C$. По предположению индукции $\Gamma \vdash A \to C$. Но тогда применяя правило Бернайса (можем, потому что A вообще не содержит переменных, то есть a тоже), получаем что хотелось. $\square$

13.Теории первого порядка. Модели теорий, логическое (семантическое) следование. Связь выводимости в теории и выводимости в PC.

Определение 13.1. *Теорией первого порядка* в сигнатуре Ω называется произвольное множество замкнутых формул этой сигнатуры. Формулы, принадлежащие этой теории, называются *ее аксиомами*, *теоремы* — формулы, выводимые из этой теории.

Определение 13.2. *Модель теории* T — это модель сигнатуры Ω, где истинны все аксиомы T.

Определение 13.3. Замкнутая формула A сигнатуры Ω называется *логическим следствием* T, если A истинна во всех моделях теории T.

Связь выводимости в теории и выводимости в PC

14. Универсальное замыкание. Общезначимые формулы. Эквивалентные формулы. Общезначимость примеров тавтологий (лемма о тавтологиях).

Определение 14.1. *Универсальным замыканием* формулы $A(b_1, \ldots, b_n)$ (b_i —свободные) называется формула $\bar{\forall} A = \forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 14.2. Формула называется *общезначимой*, если её универсальное замыкание общезначимо.

Замечание 14.1. Как несложно заметить, это значит, что она верна в любой модели при любых свободных переменных.

Лемма о тавтологиях. Подстановочные примеры тавтологий общезначимы.

Доказательство. Пусть дана тавтология $F(P_1, \ldots, P_n)$. Рассмотрим подстановку S, заменяющую $P_1, \ldots, P_n$ на $B_1, \ldots, B_n$, $B_i = B_i(a_1, \ldots, a_k)$.

Рассмотрим произвольную модель M и произвольные элементы $m_1, \ldots, m_k$ в ней. Обозначим $B_i' = B_i(m_1, \ldots, m_k)$, рассмотрим произвольную оценку $\theta : Var \to \{0, 1\}$. По индукции доказывается, что $\theta(F) = |SF(m_1, \ldots, m_k)|_M$. таким образом, если F — тавтология, то любая подстановка в любой модели истинна. □

15. Теорема корректности для исчисления предикатов без равенства.

Теорема о корректности. 1) Пусть T — теория в сигнатуре Ω. Тогда для любой формулы A этой сигнатуры если $T \vdash_{PC_\Omega}$, тогда $\bar{\forall} A$ является логическим следствием T.

2) *(следствие 1))* Любая теорема A сигнатуры Ω общезначима.

Доказательство. Доказывем как всегда индукцией по длине вывода A.

(1) Если $A \in T$, то (так как A — замкнута) $A = \bar{\forall} A$ — истинна во всех моделях.

(2) Пусть A получается по MP из B и $(B \to A)$, тогда по индукции $\bar{\forall} B$, $\bar{\forall}(B \to A)$ — логически следуют из T. По лемме о тавтологиях чтобы доказать общезначимость A, нужно проверить истинность при всех подстановках элементов произвольной модели M, тут и воспользуемся предположением.

(3) Пусть A получается по правилу Gen, то есть $A = \forall x[x/a]B$ и B общезначима в T. Если a входит в B, то $\bar{\forall} A$ и $\bar{\forall} B$ отличаются лишь порядком кванторов, а это значит, что они общезначимы одновременно.

    Если a не входит в B, то $A \sim B$.

(4) A получается аксиомой $A.1.3$ ($A.1.4$ разбирается аналогично):

$$A = \forall x[x/a](C \to B) \to (C \to \forall x[x/a]B),$$

где x не входит в C и B, a не входит в C. Рассмотрим произвольную замену переменных в произвольной модели:

$$A_1 = \forall x(C_1 \to B_1(x)) \to (C_1 \to \forall x B_1(x)).$$

Нетрудно проверить общезначимость этой формулы.

(5) A получается аксиомой $A.1.1$ ($A.1.2$ разбирается аналогично):

$$A(a, \bar{b}) = \forall x[x/a]B \to [t/a]B,$$

где $\bar{b}$ — список всех остальных (кроме a) переменных. Заменим это все некторой модели на $(q, \bar{m})$:

$$\forall x[x/a]B_1(a) \to B_1(t_1).$$

Предположим первое, тогда по нижеследующей технической лемме из него следует второе. □

Техническая лемма. Пусть $B_1(a) \in Fm_{\Omega\cup M}$, $r(a) \in Tm_{\Omega\cup M}$, $t_1 \in CTm_{\Omega\cup M}$. Тогда

1) $|r(t_1)|_M = |r(|t_1|_M)|_M$, 2) $|B_1(t_1)|_M = |B_1(|t_1|_M)|_M$.

Тут $r(t_1) = [t_1/a]r(a)$

Доказательство. Лемма и правда техническая, опишу только идейно.

1) Доказывам по индукции. Для констант все очевидно, далее имеем два случая, либо r не содержит a (тогда тоже доказывать нечего), либо r содержит a. Тогда базой индукции будет $r = a$ и это несложно разбирается.

Хотим сделать шаг, то есть $r(a) = f(r_1(a), \dots, r_n(a))$. Тоже очевидно.

2) Доказываем опять по индукции. База индукции это случай атомарной формулы, это почти как прошлый переход.

Дальше шаг. Если формула получается применением связок, то все очевидно по определению. Если формула получается применением кванторов, то тоже все очевидно, но писать чуть дольше. □

16. Стандартные теории равенства и нормальные модели. Исчисление предикатов с равенством. Теорема корректности для исчисления предикатов с равенством.

Теперь есть знак равенства и новые аксиомы:

O) Аксиомы теории Eq: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

I) $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i = y_i \to (P^n(x_1, \dots, x_n) \to P^n(y_1, \dots, y_n)))$ для всех $P^n \in Pred_\Omega$.

II) $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i = y_i \to f^n(x_1, \dots, x_n) = f^n(y_1, \dots, y_n))$ для всех $f^n \in Fun_\Omega$.

Определение 16.1. Пусть A — замкнутая формула, $T \vdash_{\text{норм}} A$ означает, что формула A истинна во всех нормальных моделях теории T. *Нормальная общезначимость* — это когда универсальное замыкание истинно во всех моделях.

Определение 16.2. В нормальной модели новые аксиомы общезначимы.

Теорема о корректности. 1) Пусть T — теория с равенством в сигнатуре Ω. Тогда для любая замкнутая формула A, выводимая из теории T, будет логически следовать из этой теории.

2) Любая теорема A нормально общезначима.

Доказательство. Это все следствие замечания. □

17. Непротиворечивые теории. Свойства: в противоречивой теории доказуемы все формулы; если $T \cup \{A\}$ противоречива, то $T \vdash \neg A$. Непротиворечивость выполнимой теории.

Определение 17.1. Теория называется противоречивой, если из нее выводятся некоторые A и $\neg A$.

Лемма 17.1. Если $T \cup \{A\}$ противоречива, то $T \vdash \neg A$.

◀

Доказательство. Предположим, для некоторой формулы B умеем выводить B и $\neg B$. Тогда воспользуемся теоремой о дедукции, а потом A_9.

□

Лемма 17.2. Если T —противоречива, то из нее выводится любая формула

(Из лжи следует все) $A, \neg A \vdash B$.

A_1	$A \to (\neg B \to A)$
MP	$\neg B \to A$
A_1	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$
MP	$\neg B \to \neg A$
A_9	$(\neg B \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B)$
MP	$(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$
MP	$\neg\neg B$
A_{10}	B

Следствие 17.1. Если теория выполнима, то она непротиворечива.

Доказательство. Нужно предположить противное и рассмотреть какую-нибудь тавтологию.

□

18. Формулы с тесными отрицаниями (ТО). Приведение формул к ТО-виду.

Тут должна быть вспомогательная лемма про эквивалентные формулы (как всякие связки с кванторами переставлять), но она длинная и понятная, поэтому пропущу.

Определение 18.1. Формулы с тесными отрицаниями строятся индуктивно:

1) если A — атомарная, то $A, \neg A$ — ТО;

2) если A, B — ТО, то $A \vee B, A \wedge B$ — ТО;

3) если A — ТО, $a \in FVar$, $x \in BVar$ и не входит в A, то $\forall x[x/a], \exists x[x/a]$ — ТО.

Замечание 18.1. Всякая формула равносильна некоторой ТО. По честному это стоит делать индуктивно, но идейно нужно сначала избавиться от равносильностей, потом повносить отрицания внутрь скобок и кванторов.

19. Предваренная нормальная форма (ПНФ). Приведение формул к ПНФ-виду.

Определение 19.1. *Предваренная нормальная форма(ПНФ)* — это формула вида n кванторов, которые подставляют зависимые переменные, не входящие в A, вместо различных свободных в форму A (да, я не умею рисовать значок обобщенного квантора).

Лемма 19.1. Любая формула равносильна некоторой ПНФ.

Доказательство. Можем доказывать только для ТО форм. Докажем индукцией по длине. Если A — литерал, то это уже ПНФ.

Если $A = B \vee C$ или $A = B \wedge C$, то теперь уже будем вести индукцию по числу кванторов, тут нужно аккуратно переименовывать переменные. Если формула получается довешиванием квантора, то зависимую переменную стоит переименовать. □

20. Эквивалентные теории. Элементарная теория модели (Th(M)). Элементарная эквивалентность моделей. Полные теории. Равносильные условия полноты.

Определение 20.1. Теория T называется *полной*, если для любая замкнутая формула или её отрицание общезначимы.

Определение 20.2. Теории T_1, T_2 одной сигнатуры называются эквивалентными, если у них одни и те же модели.

Обозначим $[T]$ множество всех логических следствий из T.

Лемма 20.1. Теории T_1 и T_2 — эквивалентны тогда и только тогда, когда $[T_1] = [T_2]$.

Доказательство. Если теории эквивалентны, то в каждой модели истинными будут одинаковые формулы. Обратно, если множества совпадают, то каждая теория логически следует из другой, тогда каждая модель одной является моделью другой. □

Определение 20.3. Две модели одной сигнатуры называются *элементарно эквивалентными,* если в них истинны одни и те же замкнутые формулы, то есть $Th(M_1) = Th(M_2)$, обозначается $M_1 \equiv M_2$.

Равносильные условия полноты. Пусть T — выполнимая теория. Следующие условия эквивалентны:

(1) T — полна;

(2) любое выполнимое расширение T эквивалентно T;

(3) $[T] = Th(M)$ для некоторой модели M;

(4) Все модели теории T элементарно эквивалентны.

Доказательство.

(1)→(2) Пусть $T' \supset T$ — выполнима, очевидно, что $[T'] \supset [T]$. Предположим противное, то есть нашлась формула $A \in [T'] \backslash [T]$. В силу полноты теории $\neg A \in [T]$, но тогда $\neg A \in [T']$, противоречие с выполнимостью.

(2)→(3) Пусть M — модель T. $T \subset Th(M)$, то есть $Th(M)$ эквивалентна T, но тогда $[T] = [Th(M)] = Th[M]$.

(3)→(4) Покажем, что любая модель M' теории T эквивалентна M. По предположению $Th(M) = [T] \subset Th(M')$. Теперь обратно, предположим $A \notin Th(M)$, тогда $\neg A \in Th(M)$, значит $A \notin Th(M')$.

(4)→(1) Предположим, нашлась такая формула A, что $A, \neg A \notin [T]$ тогда обе теории $T \cup \{A\}$ и $T \cup \{\neg A\}$ выполнимы, но их модели не могут быть эквивалентными. □

21. Изоморфизм моделей. Преобразование значений термов и сохранение значений формул при изоморфизме.

Определение 21.1. Пусть M и M' — модели сигнатуры Ω. Отображение $\alpha : \underline{M} \to \underline{M'}$ называется *изоморфизмом*, если это биекция и

(1) $\alpha(c_M) = c_{M'}$, для всех $c \in Const_\Omega$,

(2) $\alpha(f_M(m_1, \ldots, m_k)) = f_{M'}(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k))$ для всех $f^k \in Fun_\Omega$,

(3) $P_M(m_1, \ldots, m_k) = P_{M'}(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k))$ для всех $P^k \in Pred_\Omega$.

Как изменяются значения термов и формул?

(1) Если $t \in CTm_{\Omega \cup M}$, то $|\alpha \cdot t|_{M'} = \alpha(|t|_M)$.

(2) Если $A \in CFm_{\Omega \cup M}$, то $|\alpha \cdot A|_{M'} = \alpha(|A|_M)$.

Доказательство. Простая индукционная проверка. Заметим на будущее, что тут используется только сюрьекция. □

22. Изоморфность моделей. Изоморфные модели элементарно эквивалентны.

Теорема 22.1. Изоморфные модели элементарно эквивалентны.

Доказательство. Мы хотим показать, что изоморфизм сохраняет значение замкнутых в данной сигнатуре формул. Это следствие прошлой теоремы. □

23. Определимые отношения и предикаты. Их инвариантность при изоморфизмах.

Определение 23.1. k – местный предикат на множестве M — это отображение $\gamma : M^k \to \{0, 1\}$. k – местное отношение на множестве M —это любое подмножество $R \subset M^k$.

Замечание 23.1. Любому отношению соответствует предикат.

Определение 23.2. *Параметрами* $FV(A)$ формулы A называются входящие в нее свободные переменные.

Рассмотрим формулу $A(\overrightarrow{b})$, где $\overrightarrow{b} = (b_1, \dots, b_k)$. k – местный предикат, определяемый этой формулой, это отображение $A_M : \underline{M}^k \to \{0, 1\}$ такое, что для всех $m_1, \dots, m_k$

$$A_M(m_1, \dots, m_k) = |A(m_1, \dots, m_k)|_M.$$

Определение 23.3. Функция $f : M^k \to M$ называется *определимой* в модели M, если существует такая формула A, что $f(\overrightarrow{m}) = m'$ тогда и только тогда, когда $A(\overrightarrow{m}, m')$ истинно в M.

Теорема 23.1. Пусть α — автоморфизм модели M сигнатуры Ω, $A(b_1, \dots, b_k)$ — формула этой сигнатуры. Тогда для всех $m_1, \dots, m_k \in M$

$$A_M(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) = A_M(m_1, \dots, m_k).$$

Доказательство. $A_M(\alpha\overrightarrow{m}) = |A(\alpha\overrightarrow{m})|_M$ и $A_M(\overrightarrow{m}) = |A(\overrightarrow{m})|_M$ по определению. $|A(\alpha\overrightarrow{m})|_M = |A(\overrightarrow{m})|_M$ по прошлому билету. □

Следовательно, определимый предикат инвариантен при изоморфизмах.

24. Нормализация модели стандартной теории равенства.

В билете 16 мы поняли, что любая нормальная модель является моделью Eq_Ω.

Теперь мы хотим показать, что для произвольной модели Eq_Ω существует нормальная эквивалентная ей.

Для этого давайте профакторизуем нашу модель M по отношению эквивалентности $\approx$, определяемом $=$ (это — честное отношение эквивалентности в силу аксиомы (O)). На фактормножестве $\underline{M}/\approx$ зададим нормальную модель $\widetilde{M}$ сигнатуры Ω следующим образом:

$$c_{\widetilde{M}} = \widetilde{c_M},$$

$$f^k_{\widetilde{M}}(\widetilde{m_1}, \dots, \widetilde{m_k}) = f^k_M(\widetilde{m_1, \dots, m_k}),$$

$$P^k_{\widetilde{M}}(\widetilde{m_1}, \dots, \widetilde{m_k}) = P^k_M(m_1, \dots, m_k).$$

Лемма 24.1. $\widetilde{M}$ корректно определена.

Доказательство. Нужно проверить, что если заменить m_i на эквивалентные, то правые части не изменятся, в силу аксиом $(I), (II)$. □

Теперь у нас есть сюръекция $\alpha : \underline{M} \to \underline{M}/\approx$. Всилу леммы $\alpha(f_M(\overrightarrow{m})) = f_{\widetilde{M}}(\alpha\overrightarrow{m})$ и $P_M(\overrightarrow{m}) = P_{\widetilde{M}}(\alpha\overrightarrow{m})$. В силу билета 21 это обеспечивает элементарную эквивалентность моделей.

25. Сильная категоричность (для теорий с равенством). Полнота сильно категоричных теорий. Примеры сильно категоричных теорий.

Теорема 25.1. Пусть T — теория в сигнатуре с равенством Ω, содержащая Eq_Ω. Предположим, что все нормальные модели T изоморфны (такая теория называется *сильно категоричной*). Тогда T полна.

Доказательство. Достаточно доказать, что все модели T элементарно эквивалентны, а еще мы знаем, что для любой модели существует эквивалентная ей нормальная, но все нормальные изоморфны (а изоморфизм сильнее эквивалентности). □

Пример 25.1. В сигнатуре $\{=\}$ рассмотрим теорию $Eq \cup \{A_{=n}\}$, где

$$A_{=n} = \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \wedge \forall x_{n+1} \bigvee_{i \leqslant n} (x_{n+1} = x_i)).$$

Эта аксиома утверждает, что в нормальной модели ровно n элементов.

Пример 25.2. Рассмотрим теорию линейных порядков с $<, =$. Каждая теория $LO + A_{=n}$ категорична, потому что конечные линейные порядки с одинаковым количеством элементов изоморфны.

Пример 25.3. Теория групп простого порядка категорична.

26. Конечная аксиоматизируемость и сильная категоричность элементарной теории конечной модели. Совпадение элементарной эквивалентности и изоморфности для конечных моделей.

Теорема 26.1. В конечной сигнатуре с равенством элементарная теория конечной модели конечно аксиоматизируема и сильно категорична.

Доказательство. Достаточно показать, что существует подгруппа A_M, которая полностью описывает $Th(M)$

$$A_M = \exists v_1, \dots v_n \psi_M(v_1, \dots v_n)$$

$$\psi_M(a_1, \dots a_n) = \bigwedge_{i<j}(a_i \neq a_j) \wedge \forall v_{n+1} \bigwedge_{i=1}^{n}(y = a_i) \wedge \bigwedge \{c = a_i |\ M \models c = a_i\} \wedge$$

$$\wedge \bigwedge \left\{f^k(a_{i_1}, \dots a_{i_k}) = a_j |\ f \in Fun_\Omega, M \models f(m_{i_1}, \dots m_{i_k}) = m_j\right\} \wedge$$

$$\wedge \bigwedge \left\{P^k(a_{i_1}, \dots a_{i_k}) |\ P \in Pred_\Omega,\ M \models P(m_{i_1}, \dots m_{i_k})\right\} \wedge$$

$$\wedge \bigwedge \left\{\neg P^k(a_{i_1}, \dots a_{i_k}) = a_j |\ P \in Pred_\Omega,\ M \models \neg P(m_{i_1}, \dots m_{i_k})\right\}$$

□

Лемма 26.1. Для нормальной модели M' сигнатуры Ω

$$M' \models A_M \Leftrightarrow M' \cong M$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Для начала заметим, что $M \models \psi_M(m_1, \dots m_n)$ (по построению). Тогда $M \models A_M$. В изоморфных моделях верны одни и те же формулы, следовательно $M' \models A_M$
($\Rightarrow$) $M' \models A_M$, следовательно, $\exists m'_1, \dots m'_n : \psi_M(m'_1, \dots m'_n)$ Тогда $\varphi : m_i \to m'_i$ – изоморфизм.

(1) это инъекция в силу A

(2) это сюръекция в силу B

(3) $\varphi(c_M) = c_{M'}$ в силу $c_M = m_i$, следовательно, $M \models c = m_i \Rightarrow M' \models c = m_i \Rightarrow c'_M = \varphi(c_M)$

(4) $\varphi(f^k_M(m_{i_1}, \dots m_{i_k})) = f^k_{M'}(\varphi(m_{i_1}), \dots \varphi(m_{i_k})) = f^k_{M'}(m'_{i_1}, \dots m'_{i_k})$ в силу D. Аналогично для предикатов.

□

Таким образом, $Th(M) \sim \{A_M\}$ ($A_M \in Th(M)$, если M' – нормальная модель и $M' \models A_M$, то $M' \cong M$ и тогда $M' \models Th(M)$. То есть $Th(M)$ конечно аксиоматизируема.)
Для сильной категоричности нужно показать, что любые нормальные модели $Th(M)$ изоморфны. Это верно по лемме.

Следствие 26.1. Если M – конечная и $M' \equiv M$, то $M' \cong M$ (M' – нормальная)

Доказательство. Если $M' \equiv M$, то $M' \models Th(M)$, следовательно $M' \models A_M$ и $M' \cong M$ □

27. Определимость инвариантных подмножеств в конечных моделях.

Замечание 27.1. S определимо в $M \Rightarrow S$ инвариантно относительно автоморфизмов. Обратное, вообще говоря, неверно, потому что существуют модели только с тождественным автоморфизмом.

Лемма 27.1. Пусть M – конечная модель конечной сигнатуры; $m_1, m_2 \in M$ неразличимы: для $\forall A(a)$ $M \models A(m_1) \Leftrightarrow M \models A(m_2)$. Тогда существует
$\alpha : (M, m_1) \cong (M, m_2)$, $\alpha(m_1) = m_2$

Доказательство. Построим сигнатуру $\Omega \cup \{c\}$ с моделями (M, m_1) и (M, m_2), $c_{(M,m_1)} = m_1, c_{(M,m_2)} = m_2$. Тогда $(M, m_1) \equiv (M, m_2)$, так как

$$(M, m_1) \models A(c) \Leftrightarrow M \models A(m_1) \Leftrightarrow M \models A(m_2) \Leftrightarrow (M, m_2) \models A(c)$$

Таким образом, существует $\alpha : (M, m_1) \cong (M, m_2)$, α сохраняет константы $\Rightarrow$ $\alpha(m_1) = m_2$ □

Теорема 27.1. Пусть M – конечная модель конечной сигнатуры Ω. Если $S \in M$ – инвариантно отн. всех автоморфизмов M, то S определимо в M.

Доказательство. Предположим противное. $Th(M, m_1) \sim \{A_i(c)\}$. (и рассмотрим $S = \{m_1, \ldots m_k\}$) Рассмотрим формулу $A(a) = A_1(a) \vee \ldots \vee A_k(a)$.
S не определимо $\Rightarrow A(a)$ не определяет S. Но $M \models A_i(m_1) \Rightarrow A$ определяет множество S.
Пусть $m' \in S' \setminus S \Rightarrow M \models A(m') \Rightarrow$ для некторого j $M \models A_j(m') \Rightarrow (M, m') \models A_j(c)$. По лемме из прошлого билета $(M, m_j) \cong (M, m') \Rightarrow$ существует автоморфизм $\alpha : \alpha(m_j) = m'$. Получаем противоречие. □

28. Свидетели; теории Хенкина. Лемма о новой константе. Лемма Хенкина.

Нужно записать доказательства

Лемма 28.1. (О новой константе) Предположим, что есть формула с одной свободной переменной $A(b)$ и $T \models A(c)$ и c не присутствует в аксиомах. Пусть свободная переменная a не встречается в этом доказательстве. Тогда $T \vdash_{PC} A(a)$, следовательно $T \vdash_{PC} \forall\, xA(x)$ (x не входит в A)

Доказательство. Индукция по длине вывода $A(c)$.

(1) $A(c)$ – аксиома исчисления высказываний, т.е. $A(c) = F(B_1(c), \dots B_n(c))$. Тогда $A(a) = F(B_1(a), \dots B_n(a))$ – тоже аксиома

(2) что-то там еще

□

Определение 28.1. T – теория в сигнатуре Ω $\exists\, xA(x) \in CF_{M\Omega}$ – замкн. Константа называется свидетелем для $\exists\, xA(x)$, если $T \vdash \exists\, xA(x) \longrightarrow A(c)$

Определение 28.2. T – теория Хенкина, если у всякой замкнутой формулы вида $\exists\, xA(x)$ есть свидетель.

Лемма 28.2. (О добавлении свидетеля) Пусть T – непротиворечива, c – константа, которой нет в T, формула $\exists\, xA(x)$ замкнута. Тогда $T \cup \{\exists\, xA(x) \longrightarrow A(c)\}$ непротиворечива.

Лемма 28.3. (Лемма Хенкина) Всякую непротиворечивую теорию T можно расширить до непротиворечивой теории Хенкина.

Определение 28.3. Мощностью сигнатуры Ω называется

$$|\Omega| = \max\left(|Pred \cup Fun \cup Const|, |\mathbb{N}|\right)$$

Лемма 28.4. $|\Omega| = |CF_M|$

29. Модель максимальной непротиворечивой теории Хенкина.

Теорема 29.1. (Линденбаума) T – непротиворечива $\Rightarrow \exists T^m \supset T$ – макс в той же сигнатуре

Лемма 29.1. T – непротиворечива в $\Omega \Rightarrow \exists T^* \supset T$, где $T*$ – максимальная теория, которая является теорией Хенкина в сигнатуре Ω^+, $\Omega^+ = |\Omega|$

Положим $T^+ = (T^1)^m$ – теория т. Хенкина

Лемма 29.2. T – максимальная теория, тогда (1) $T \vdash A \Leftrightarrow A \in T$, (2) $\neg A \in T \leftrightarrow A \notin T$

Построение модели Дана макс. теория Хенкина T. Строим модель:

$$M := \{\pm/+ \in cT_{m\Omega}, \quad \pm \text{ - копия} +$$
$$f_M(\pm_1, \dots, \pm_n) := f(+_1, \dots, +_n)$$
$$P_m(\pm_1, \dots, \pm_n) := \begin{cases} 1, & P(+_1, \dots, +_n) \in T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
$$c_M := \underline{c}$$

Лемма 29.3. $|+|_m = \pm$ (для $+ \in CT_{m\Omega}$)

Доказательство. Нужно проверить для констант и $f^k(+_1, \dots, +_k)$ □

Лемма 29.4. $M \models A \Leftrightarrow A \in T$. $(A \in CF_{m\Omega})$

Доказательство. Индукция по числу связок и кванторов

(1) $A = P(+_1, \dots, +_n) \quad M \models A \Leftrightarrow P_m(H_1|_M, \dots, H_n|_M) = 1 \Leftrightarrow P_M(\pm_1, \dots, \pm_n) = 1 \Leftrightarrow A \in T$

(2) $A = \neg B \quad M \models A \Leftrightarrow M \not\models B \Leftrightarrow B \notin T \Leftrightarrow A \in T$

(3) аналогично (2) с использованием свойств максимальности для всех связок $\vee, \wedge, \neg, \to$

(4) $A = \exists x B(x) \quad M \models A \Leftrightarrow \exists + \;\; M \models B(\pm)$

Лемма 29.5. $|B(\pm)| = |B(|+|)| = |B(+)| \Leftrightarrow \exists + \;\; B(+) \in T \Leftrightarrow \exists x\; B(x) \in T$
$(\Rightarrow)$ $B(+) \in T$, $\quad$ (2) $B(+) \to \exists x B(x)$, (MP) $\exists x B(x)$
$(\Leftarrow)$ $\exists x B(x) \in T$, $\quad$ (т.Хенкина) $(\exists x B(x) \to B(c)) \in T \Rightarrow T \vdash B(c)$

(5) можно аналогично (4), а можно: $A = \forall x B(x) \sim \neg \exists x \neg B(x)$

□

30. Выполнимость непротиворечивой теории без равенства. Теорема Гёделя о полноте исчесления предикатов без равенства. Теорема Лёвенгейма – Сколема для теорий без равенства

Теорема 30.1. T - непротиворечит теори без равенства в $\Omega \Rightarrow T$ имеет модель мощности $|\Omega|$

Доказательство. У T^+ модель есть, осталось заметить, что $|\Omega| = |M|$ $(|M| = |CT_m|,\; |CT_m| \leqslant |x^*| = |\Omega|$ тут нужно заметить, что уже на шаге $T \to T_1$ мы добавили столько констант, какова мощность сигнатуры $CF_m)$ Модель T^+ сойдет и для T □

Теорема 30.2. (Геделя о полноте и корректности) T – непротиворечива

(1) $T \vdash A \Leftrightarrow T \models \overline{\forall} A$

(2) $\vdash A \Leftrightarrow \forall A$

Доказательство. Из (1) следует (2)
Пусть $T \models \overline{\forall} A$ и $T \nvdash A \Rightarrow T \nvdash \overline{\forall} A \Rightarrow T \cup \{\neg\overline{\forall} A\}$ – непротиворечива $\Rightarrow$ выполнима $\Rightarrow T \not\models \overline{\forall} A$. В другую сторону очевидно ☐

Теорема 30.3. (Левенгейма-Сколема) Если теория T выполнима, то T имеет модель мощности $|\Omega|$

Доказательство. T – выполнима $\Rightarrow T$ непротиворечива $\Rightarrow$ все хорошо по теореме 30.1 ☐

31. Выполнимость непротиворечивой теории с равенством. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов с равенством. Теорема Лёвенгейма — Сколема для теорий с равенством.

Теорема 31.1. Если теория T с равенством непротиворечива, то T имеет нормальную модель мощности $\leqslant |\Omega|$

Доказательство. Т непротиворечива в $PC_\Omega \Rightarrow T' = T \cup Eq_\Omega$ непротиворечива в PC_Ω. Следовательно, существует модель $M \models T', |M| = \Omega$. Ее можно нормализовать: $M \equiv \tilde{M}$, где $\tilde{M}$ – нормальная модель, причем $|\tilde{M}| \leqslant |\Omega|$ ☐

Теорема 31.2. (Теорема Гёделя для Eq_Ω) Т – непротиворечива.

$$T \vdash A \Leftrightarrow T \models A \quad \Rightarrow \quad \vdash A \Leftrightarrow \models A$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы Гёделя о полноте и корректности ☐

Теорема 31.3. (Теорема Лёвингейма-Сколема) Если теория Т выполнима, то Т имеет нормальную модель мощности $\leqslant |\Omega|$

Доказательство. Доказательство аналогичное (см. прошлый билет) ☐

32. Теорема Гёделя – Мальцева о компактности. Теорема о повышении мощности до бесконечной

Теорема 32.1. (Гёделя – Мальцева) Пусть T – теория, любая конечная подтеория T' которой выполнима, тогда сама теория тоже выполнима

Доказательство. Выполнимость = непротиворечивость. Если T – противоречива, то противоречиво её конечное подмножество $\square$

Замечание 32.1. Для Eq_Ω нужно добавить дважды слово "нормально"

Теорема 32.2. (о повышении мощности) если теория имеет конечные модели неограниченной мощности, то она имеет и бесконечную модель

Доказательство. Рассмотрим сигнатуру $\Omega^+ = \Omega \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ (добавили константы) и теорию $T^+ = T \cup \{c_i \neq c_j | i \neq j\}$, T^+ финитно выполнима. Действительно, рассмотрим $T' \subset T \cup \{c_i \neq c_j |\ i \neq j,\ i, j \leqslant n\}$ - конечная подтеория. Рассмотрим модель $M \models T,\ |M| \geqslant n$. Интерпретируем в ней константы $(c_i)_M \neq (c_j)_M\ (i \neq j)$ – так можно. Таким образом, по теореме о компактности $\exists$ модель $M^+ \models T^+$. Возьмем $N = M^+$ в сигнатуре Ω, но M^+ бесконечно, что и требовалось. $\square$

33. Существование нестандартных моделей арифметики.

Теорема 33.1. Рассмотрим сигнатуру $\{+, \cdot, 0, 1, =\}$. Тогда существует счётная модель $M \equiv \mathbb{N}$, но $M \ncong \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $T = \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{c \neq 0, \ldots c \neq n, \ldots\}$. T – финитно выполнима. Рассмотрим конечную модель

$$T' \subset \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{c \neq 0, \ldots c \neq n\},\ M'' = (\mathbb{N}, c_{M''}),\ c_{M''} = n + 1$$

Пусть (по теореме о компактности) $M_1 \models T$. По теореме Лёвенгельма-Сколема $|M_1| \leqslant |\mathbb{N}|$ и $\forall m \neq n\ \bar{m} \neq \bar{n} \Rightarrow |M_1| = |\mathbb{N}|$. Тогда $M = M_1$ в сигнатуре Ω.
В M есть элемент $d = c_M$ (и $d \neq n$) $\Rightarrow$ M и $\mathbb{N}$ не изоморфны, но $M \equiv \mathbb{N}$ по построению (в M^+ верно все $Th(\mathbb{N})$ и $\{c\}$, но про с забываем) $\square$

34. Теорема Лёвенгейма – Сколема о повышении мощности

Теорема 34.1. (Лёвенгейма – Сколема) Если теория T в сигнатуре Ω имеет бесконечную модель, то она имеет модели любой бесконечной мощности $k \geqslant |\Omega|$

Доказательство. Рассмотрим сигнатуру $\Omega^+ = \Omega \cup \{c_i |\ i \in k\}$ и теорию $T^+ = T \cup \{c_i \neq c_j |\ i \neq j\}$. T^+ финитно выполнима. Действительно, рассмотрим для некоторой конечной $I \subset k,\ T' \subset T \cup \{c_i \neq c_j |\ i, j \in I,\ i \neq j\}$ выполнима $M'' = M(c_i)$, с интерпретацией $M'' = M, (c_i)$, с интерпретацией $(c_i)_{M''}$ – различны. Таким образом по теореме о компактности $\exists$ модель $M^+ \models T^+$. Ограничим её не T, получилась модель M, причем её мощность ровно K $\square$

35. k-категоричность. Признак полноты Лося — Вота. Теорема Морли о категоричности (формулировка).

Определение 35.1. Пусть T – теория. Она называется k-категоричной, если все модели T мощности k изоморфны.

Теорема 35.1. (признак полноты Лося-Вота) Пусть T – теория в не более, чем счётной сигнатуре, не имеющая конечных моделей, (k-бесконечна (что это?)) и T – k-категорична. Тогда T полна.

Доказательство. Пусть теория T не полна. $T \not\models A$ и $T \not\models \neg A \Rightarrow \exists M_1, M_2$, такие что $M_1 \models T \cup \{\neg A\}$ и $M_2 \models T \cup \{\neg A\}$. M_1, M_2 – бесконечны, следовательно, существуют N_1, N_2, такие что $N_1 \models T \cup \{\neg A\}$ и $N_2 \models T \cup \{\neg A\}, |N_1| = |N_2| = k$ Теория T k-категорична, следовательно, $N_1 \cong N_2$, но $N_1 \not\equiv N_2$. Противоречие □

Теорема 35.2. (формулировка теоремы Морли) Если теория T k-категорична при некотором несчётном k, то она δ-категорична при любом другом несчётном δ.

36. Пример: теория бесконечных множеств в сигнатуре $\{=\}$ k-категорична для всех бесконечных k.

Рассмотрим $\Omega = \{=\},\ A_{\geqslant n} = \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge\limits_{i \neq j} x_i \neq x_j), \qquad T_0 = \{A_{\geqslant n} |\ n \geqslant 2\}$ – не имеет конечных подмоделей. T_0 категорична $\forall k \Rightarrow T_0$ полна (потому что модели – множество мощности k)

37. Пример: теория DLO неограниченных плотных линейных порядков не k-категорична для несчетных k.

DLO – теория плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элементов $\Omega = \{<, =\}$ Аксиомы

(1) $\forall x\ \neg(x < x)$

(2) $\forall x \forall y \forall z\ (x < y, y < z \to x < z)$

(3) $\forall x \forall y\ ((x < y) \vee (y < x) \vee (x = y))$

(4) $\forall x \forall y\ (x < y \to \exists z ((x < z) \wedge (z < y)))$

(5) $\forall x \exists y\ x < y$

(6) $\forall x \exists y\ y < x$

DLO не имеет конечных моделей

Лемма 37.1. DLO не k-категорична для несчетных k

Доказательство. Рассмотрим модели

$$M_1 = (\mathbb{Q}, <) \cdot (k, <),\ M_2 = (\mathbb{Q}, <) \cdot (k, >) \models \mathrm{DLO}$$

почему они не изоморфны? M_1 – это k копий $\mathbb{Q}$
Рассмотрим $x \in k \mid |[0, x)| < k \Rightarrow |(-\infty, (q, x))| < k$
То есть для $x \in M_1$ выполняется $|\{y|\ y < x\}| < k$, но $|\{y|\ y > x\}| = k$ □

38. Делимые абелевы группы без кручения и векторные пространства над $\mathbb{Q}$

$\Omega = \{+, -, 0, =\}, T = ABG$. Аксиомы:

(1) $\forall x \forall y \forall z\ ((x + y) + z = x + (y + z))$

(2) $\forall x\ x + (-x) = 0$

(3) $\forall x\ x + 0 = x$

(4) $\forall x\ (x + y = y + x)$

(5) $\forall x\ nx \neq 0\ \forall n > 0, x \neq 0$. Другими словами, $\forall x (x \neq 0 \to nx \neq 0), n > 0$

(6) $\forall x \exists y\ ny = x, n > 0$ (делимость)

Модель: $(\mathbb{Q}, +, -, 0, =) = \mathbb{Q}_+$

- Абелева группа – $\mathbb{Z}$-модуль (умеем умножать на $\mathbb{Z}$)
- $\forall x \exists! y :\ ny = x$

Определение 38.1. $\frac{m}{n} x = \frac{mx}{n}$. Корректность: $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Rightarrow \frac{m}{n} x = \frac{m'}{n'} x$ Тогда аксиомы:

(1) $z(x + y) = zx + zy$

(2) $(z_1 + z_2)x = z_1 x + z_2 x$

(3) $z_1(z_2 x) = z_1 z_2 x,\ z_1, z_2 \in \mathbb{Q}$

По модели M можем построить векторное пространство над $\mathbb{Q}$.
Лемма 38.1. $M_1 \cong M_2 \Rightarrow V(M_1) = V(M_2)$

Доказательство. Изоморфизм сохраняет умножение на число: $\alpha(\frac{m}{n} x) = \frac{m}{n} \alpha(x)$ □

39. Мощность векторного пространства над $\mathbb{Q}$ бесконечной размерности k. Изоморфность пространств одинаковой размерности.

Лемма 39.1.

(1) $\dim V$ конечная $\Rightarrow |V| = |\mathbb{N}|$, V – в.п. над $\mathbb{Q}$

(2) $\dim V = k$-беск $\Rightarrow |V| = k$

Лемма 39.2. Если $\dim V_1 = \dim V_2$, то $V_1 \cong V_2$

40. Категоричность теории делимых абелевы группы без кручения в любой несчетной мощности и не категоричность в счетной.

Теорема 40.1.

(1) Теория ABG k-категорична для несч. ординала k

(2) ABG не ω-категорична

Доказательство. (2) $\mathbb{Q} \ncong \mathbb{Q}^2$, следовательно как адд. шруппы тоже не изоморфны

(1) $|V_1| = |V_2| = k$ – несчетный, тогда $\dim V_1 = \dim V_2 = k$ и $V_1 \cong V_2$

□

41. Простые формулы в сигнатуре без функциональных символов. Приведение каждой формулы к простому виду.

Определение 41.1. Простая атомарная формула (ПАФ) – формула вида

$$P^s(a_1, \ldots, a_s),\ a_i = a_j,\ a_i = c$$

Определение 41.2. Простая формула – строится из ПАФ
Лемма 41.1. Любая формула эквивалентна простой

Доказательство. Заметим сначала, что любая атомарная формула выводится из ПАФ:

$$P(c_1, a_2, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \exists x(x = c_1 \wedge P(x, a_2, \ldots, a_n))$$

Этого достаточно. Построим

$$P(t_1, \ldots, t_n) \sim (\bigwedge x_i = t_i \wedge P(x_1, \ldots, x_n))$$

□

42. Кванторный ранг. Формульная n-эквивалентность кортежей индивидов в моделях.

Определение 42.1. $q(A)$ – кванторный ранг простой формулы A: (по индукции)

- $q(A) = 0$ если A – ПФА
- $(A \circ B) = \max(q(A), q(B))$
- $q(\neg A) = q(A)$
- $\text{Ӽ}_x A(x)) = q(A) + 1$

Лемма 42.1. $(M, \overline{m}) \equiv_0 (M', \overline{m}') \Leftrightarrow$ для любой простой $A:\ q(A) = 0 \Rightarrow (M \models A(\overline{m}) \Leftrightarrow M' \models A(\overline{m}')$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Для ПАФ по определению. Далее по индукции ($\overline{m} \in M^k$, $\overline{m}' \in {M'}^k$)

$(\Leftarrow)$ $m_i \mapsto m_i'$ – изом

$\square$

43. Игры Эренфойхта. Определения: ходы, партии, позиции, условие выигрыша. Стратегия и выигрышная стратегия Консерватора. Игровая n-эквивалентность.

Определение 43.1. Игра Эренфойхта $G_n(M, \overline{m}, M', \overline{m}')$ – начальная позиция. Ход: (M, l), (M', l'). Партия – конечная последовательность чередующихся ходов, $|\pi| = 2n$ – длина игры, $|\pi|$ – длина партии. $p(\pi)$ – последнаяя позиция (множество вида $(\overline{m}, \overline{m}')$ два слова алфавитов M и M')

$\forall$ – Новатор

$\exists$ – Консерватор

$\exists$ выигрывает, если $p(\pi)$ задает част. изоморфизм

Определение 43.2. Стратегия – способ действий, позволяющий выигрывать какому-то игроку. Иными словами, стратегия для $\exists$, σ: партии нечетной длины $< 2n\ \to$ допустимые ходы. Тогда если π – зак. партия, π-согл с σ

Определение 43.3. σ – выигрышная стратегия, если $\forall \pi$ согл с $\sigma \Rightarrow \pi$ выигрышная $\exists$

Определение 43.4. Модели $(M, \overline{m}) \equiv_n (M', \overline{m}')$ – n-эквивалентны, если в модели Эренфойхта $G_n(M, \overline{m}, M', \overline{m}')$ у $\exists$ имеет выигрышную стратегию

44. Индуктивное описание игровой эквивалентности.

Лемма 44.1. $\equiv_n$ - отношение эквивалентности
Лемма 44.2. $p < n \Rightarrow \approx_n \subset \approx_p$, то есть p-эквивалентность $\Rightarrow$ n-эквивалентность
Лемма 44.3.

$$(M, \overline{m}) \approx_{n+1} (M', \overline{m}') \Leftrightarrow \begin{cases} \forall d \in M \quad \exists d' \in M' \quad \overline{m}d \approx_n \overline{m}'d' \\ \forall d' \in M' \quad \exists d \in M \quad \overline{m}d \approx_n \overline{m}'d' \end{cases}$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) σ - стратегия в G_{n+1}. Тогда σ действует на $M : d \mapsto d'$

($\Leftarrow$) Хотим построить выигрышную стратегию в G_{n+1}. $\sigma(M, d) = (M', d')$, дальше действовать по существующей стратегии

$\square$

45. Из игровой n-эквивалентности следует формульная. Следствие: признак элементарной эквивалентности моделей.

Теорема 45.1. (Эренфойхти-Фраиса) $(M, \overline{m}) \approx_n (M', \overline{m}') \Leftrightarrow (M, \overline{m}) \equiv_n (M', \overline{m}')$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Докаем по индукции: База: $n = 0$ – лемма из 42 Переход: $q(A) \in n + 1$

(1) A - атомарная $+$

(2) $\neg A$ $+$

(3) $A \circ B$ $+$

(4) $A = \exists x B(x)$ (аналогично лемме $\exists x \neg B(x) \Leftrightarrow \neg \forall B(x)$)

$$M \models A(x, \overline{a}) \Leftrightarrow M \models \exists x B(x, \overline{a})$$
$$\Leftrightarrow \exists x (M \models B(x, \overline{a})) \Leftrightarrow \exists x' (M' \models B(x', \overline{a}))$$

$\square$

46. В сигнатуре $\{=\}$ все достаточно большие модели n-эквив

На самом деле хватает уже числа n, ведь мы по сути строим изоморфизм множеств

47. Финитная выполнимость любой выполнимой формулы в сигнатуре с одноместными предикатами и равенством. Разрешимость исчисления одноместных предикатов с равенством.

Теорема 47.1. Пусть Ω – сигнатура с одноместным предикатом и $=$. Тогда для любой формулы A, A – выполнима $\Leftrightarrow$ A – финитно выполнима

Доказательство. ($\Leftarrow$) По определению

($\Rightarrow$) Пусть $p_1, \ldots, p_k$ – одноместные предикаты Ω (можно считать, что их число конечно). Назовем цветом $m \in M$ сторону $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$, где $\varepsilon_i = P_i(m)$. $M(\varepsilon) = \{m \in M |\ m$ цвета $\varepsilon\}$. Пусть M – какая-то модель A. Будем на ней строить конечную модель N так, чтобы $M \approx_n N$ (тогда и $M \equiv_n N$, тут $n = q(A)$) и $|N(\varepsilon)| = \min(|M(\varepsilon)|, n)$

Таким образом $|N| = 2^k \cdot n \Rightarrow$ конечна Определим ходы по индукции

(1) $\forall$ берет старшую $\to$ $\exists$ берет биективную старшую

(2) $\forall$ берет новую $d \to$ $\exists$ берет d', которая новая и цвета d.

□

Теорема 47.2. Исчисление одноместных предикатов с равенством разрешимо (существует алгоритм, который отвечает на вопрос: выполнима ли A?)

Доказательство. Если A выполнима, то она выполнима в модели N, $|N| = n \cdot 2^k$. Всего таких моделей (с точностью до изоморфизма) – конечное число (нужно посмотреть, как работают константы и предикаты, входящие в A) □

48. Бесконечные игры Эренфойхта. Игровая ω-эквивалентность. Изоморфность ω-эквивалентных счетных моделей. Теория DLO неограниченных плотных линейных порядков 0-категорична (теорема Кантора).

Определение 48.1. Бесконечная игра Эренфойхта: теперь игра длится для $\mathbb{N}$ ходов: $G_\infty(M, \overrightarrow{m}, M', \overline{m}')$: $\exists$ выигрывает, если стратегия $\exists$ выигрышна при любом конечном количестве ходов.

Определение 48.2. $(M, \overline{m}) \approx_\omega (M', \overline{m}')$ ω-эквивалентны, если $\exists$ имеет выигрышную $\mathbb{N}$ стратегию.

Теорема 48.1. Пусть M и M' – счётные модели сигнатуры Ω. Тогда $M \equiv M' \Leftrightarrow M \approx M'$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M'$ изоморфизм, то играем в соответствии с ним.

($\Leftarrow$) M, M' счётны. Пронумеруем их $M = \{n_1, \ldots\}, M' = \{n'_1, \ldots\}$. Поиграем за $\exists$

(1) $I - n_1 \Rightarrow II - n'_i$

(2) I – первая новая т. в M', II – n'_j

(3) I – первая новая в т. M

В результате мы выберем все элементы всех моделей. $\varphi : m_i \to m'_i$ – изоморфизм, потому что любой предикат, константа, формула выражаются через некоторые частично изоморфные подмножества. Ну и это биекция. □

Теорема 48.2. (Теорема Кантора) Любые два неограниченные счётные плотные линейные порядки изоморфны.

Доказательство. Достаточно выиграть в бесконечной игре. n-ый ход будем делать как на картинке. m_i, m_j – ближайшие к m_n с обеих сторон (их, возможно, не существует, если m_n самый первый или самый последний) □