ЛЕКЦИЯ ГЛАДКИЕ

13.10.20

КАСАТЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ КАК ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Опр. Дифференцированием функций из M в точке $p \in M$ наз. линейный функционал

$$X : C(M) \to \mathbb{R}, \text{ удовл. условиям:}$$

- $X(\underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} f + \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} g) = \lambda X \underbrace{f}_{} + \mu X \underbrace{g}_{}$ — линейность

  гладкие ф-ии на M $(\in C(M))$

- $X(f \cdot g) = X(f) \cdot \underbrace{g(p) + f(p)}_{\text{в точке } p} X(g)$ — пр-ло Лейбница

Примеры

$\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $\quad \partial v$ — дифференцирование

$\dfrac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$ — не дифференц.

Дифференцирование в точке $p \in M$ образует векторное пространство

$$X, Y \in \mathrm{Diff}_p(M)$$

$$\lambda X + \mu Y \in \mathrm{Diff}_p(M), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Опр. **Касательным вектором** к M в точке $p \in M$ назовём дифференцирование гладких функций на M в точке p

т.е. $X \in \mathrm{Diff}_p(M)$ $\quad X$ — касат. вектор

Теорема Пространство T_pM и Diff_pM канонически изоморфны

▷ 1) Построим гомоморфизм

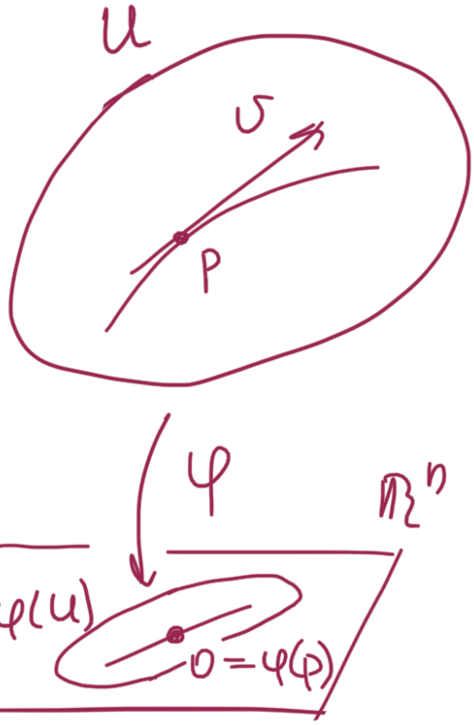
$$\Phi = \Phi_p : T_pM \to \mathrm{Diff}_p(M)$$

$$v \in T_pM, \quad v = [\gamma], \quad \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

$$\gamma(0) = p$$

$$\Phi(v) = X_v : C(M) \to \mathbb{R}$$

$$X_v f = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$$



Покажем, что сопоставление — гомоморфизм

- $X_{v_1+v_2} f = X_{v_1} f + X_{v_2} f$

Рассмотрим карту (U,φ), т.ч. $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$

$$\tilde{\gamma}^i = \varphi \circ \gamma_i, \; i=1,2 \qquad \tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$$

$$X_{v_2+v_1}(f) \underset{\text{опр.}}{=} \frac{d}{dt} \tilde{f}\left(\tilde{\gamma}_1(t) + \tilde{\gamma}_2(t)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \left(\operatorname{grad} \tilde{f}(0), \dot{\tilde{\gamma}}_1(0) + \dot{\tilde{\gamma}}_2(0)\right) =$$

$$= \left(\operatorname{grad} \tilde{f}(0), \dot{\tilde{\gamma}}_1(0)\right) + \left(\operatorname{grad} \tilde{f}(0), \dot{\tilde{\gamma}}_2(0)\right) =$$

$$= X_{v_1}(f) + X_{v_2}(f)$$

- $X_{\lambda v} = \lambda X_v$ по аналогии

$\varphi: U \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$

φ – диффеоморфизм $\varphi: U \to \varphi(U)$

$\varphi^*: C(\varphi(U)) \to C(U)$

$\varphi^*(g) = g \circ \varphi \qquad g \in C(\varphi(U)),\ \varphi^* g \in C(U)$

1) φ^* – изоморфизм $C(\varphi(U))$ и $C(U)$

2) $\varphi^*: \mathrm{Diff}_0(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Diff}_p(M)$

диффеоморфизм по той ~~же~~ причине

$\varphi^*(X)f := X_{\varphi(p)}$, $X \in \mathrm{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$ –

$\in \mathrm{Diff}_p(M)$, $f \in C(M)$

изоморфизм (т.к. $\exists$ обр. ~~отображ~~)

$\Phi_0: T_0\mathbb{R}^n \to \mathrm{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$

Построим Φ_0^{-1}

$f = f(x^1, \ldots, x^n) \qquad x = (x^1, \ldots, x^n)$

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)\, x^i + r_2(x)$$

остаточный член

$$r_2(x) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x)\, x^i x^j$$

$$h_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\Theta x)$$

$$\Theta \in [0,1]$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(x)\, x^j \Rightarrow$$

$$r_2(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, x^i \qquad g_i(0) = 0$$

$$X(r_2(x)) = X\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, x^i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(X g_i \cdot 0 + g_i(0)\, X(x^i)\right) = 0$$

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)\, X(x^i)$$

НАЙДЁМ $\Phi^{-1}(w)$, $w \in T_pM$

$$w = [\varphi^{-1}(wt)]$$

$$X_w(f) = \frac{\partial}{\partial t} f \circ \varphi^{-1}(wt) = w = (w^1, \dots, w^n) =$$

$$= (\operatorname{grad} f(0), (w^1, \dots, w^n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)\, X(x^i) =$$

$$= X(f) \Rightarrow w^i = X(x^i)$$

$$\Phi^{-1}(X) = \varphi^{-1}(w^t), \quad w^i = X(x^i)$$

т.о. изоморфизм $\exists$ $\triangleleft$

Дифференцирование в координатах

$$T_p M = \mathrm{Diff}_p(M)$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$a_i(x) = X(x^i)$$

$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ – базис в $\mathrm{Diff}_p(M)$

$$F: M \to N$$

$$F^*: C(N) \to C(M)$$

$$F_*: \mathrm{Diff}_p(M) \to \mathrm{Diff}_{F(p)}(N)$$

$$g \in C(N), \quad X \in \mathrm{Diff}_p(M)$$

$$F_* X(g) = X(g \circ F)$$

$\in C(M) \Rightarrow$ можем применить X

Опр. Сопряжённым пространством к векторному пр-ву V наз. пространство линейных функционалов на V

Кокасательное пр-во к M в т. p:

$$T_p^*(M) := (T_pM)^*$$

$$F: M \to N$$

$$F_*: T_pM \to T_{F(p)}N$$

$$F^*: T^*_{F(p)}N \to T^*_pM$$

Матрица отображения F^* в базисах, двойств. к базисам T_pM и T_pN выражается как $(J(\tilde{F}))^T$