1 HW 6

Задача 1.1. Пусть $f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ открытое вложение аффинных схем, докажите, что B конечно порожденная A-алгебра.

Доказательство. $f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ - открытое вложение $\Rightarrow$ отождествим $\mathrm{Spec}\, B$ с откр $f^{\#}A \to B$ подсх и в $\mathrm{Spec}\, A$. $\mathrm{Spec}\, B = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{Spec}\, B_{g_i} \Rightarrow \mathrm{Spec}\, B_{g_i}$ - гл. вв $\mathrm{Spec}\, A \Rightarrow B_{g_i} = A\left[\frac{a_{ij}}{g_i}\right]$. $\mathrm{Spec}\, B = \bigcup \mathrm{Spec}\, B_{g_i}$ $\Rightarrow 1 = \sum g_i b_i$. Пусть $C = A[a_{ij}, g_i, b_i]$ и $C' = A[a_{ij}, g_i]$. $C'_{g_i} = B_{g_i} \Rightarrow \forall b \in B\ \exists k\ \ g_i^k b = g_i^k c_i\ \ c_i \in C'$, так как i конечное число $\Rightarrow k$ можно взять одно $\Rightarrow$ для достаточно большого k : $\ 1 = \sum \lambda_i f_i^k\ \ \lambda_i \in C \Rightarrow$ $b = \sum b\lambda_i f_i^k = \sum c_i \lambda_i f_i^m \in C \Rightarrow B = C$ □

Задача 1.2. Пусть $f : X \to Y, g : Y \to Z$ морфизмы схем, докажите, что если gf локально конечного типа, то f тоже. А как насчет g ?

Доказательство. $f : X \to Y\ \ \forall U = \mathrm{Spec}\, B \subset Y \quad g(U) = \bigcup W_i = \bigcup \mathrm{Spec}\, A_i\ \ \exists V_i = \mathrm{Spec}\, C_i \subset X :\ C_i$ - алг кон типа над A_i. $U = \bigcup g^{-1}(W_i)\ g^{-1}(W_i) = \bigcup U_{ij} = \bigcup \mathrm{Spec}\, B_{ij}$, B_{ij} - алг кон типа над B. $V_i \supset f^{-1}(U_{ij}) \Rightarrow$ $f^{-1}(U_{ij}) = \bigcup U_{ijk} = \bigcup \mathrm{Spec}\, C_{ijk}$. C_{ijk} - алг кон типа над C_i, а следовательно и над A_i, то есть мы свели задачу к аффинному случаю. $\mathrm{Spec}\, A \to \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, C\quad C \xrightarrow{f^{\#}} B \xrightarrow{g^{\#}} A$. A - алг кон типа над C, откуда $\exists a_1, \ldots, a)n \in A$, такие что $\forall a \in A \quad a = \sum c_i a_i = \sum g^{\#}(f^{\#}(c_i))a_i = \{f^{\#}(c_i) = b_i\} = \sum g^{\#}(b_i)a_i = \sum b_i a_i$ $\Rightarrow A = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ - как B - алг $\Rightarrow A$ - алг кон типа над B. f может не быть морфизмом лок кон типа, например $\mathrm{Spec}\, k \xrightarrow{f} \mathrm{Spek}\, k[xy, xy^2, xy^3, \ldots] \xrightarrow{g} \mathrm{Spec}\, k[x, y]$. (gf) - морфизм лок кон типа, но f нет. □

Задача 1.3.

(а) Пусть $f : X \to Y$ конечный морфизм, являющийся сюрьекцией топологических пространств. Докажите, что размерности X и Y равны.

(б) Верно ли это без предноложения о сюръективности f ? а с более слабым предположением доминантности f (т. е. что $f(X)$ плотно в Y) ?

Доказательство. $f : X \to Y$ - конечный сюръективный морфизм

$$Y = \bigcup U_i = \bigcup \mathrm{Spec}\, A_i \quad \text{- афф покр} X = \bigcup f^{-1}(U_i) = \bigcup \mathrm{Spec}\, B_i \quad \text{- афф покр}$$

f - сюръекция $\Rightarrow ff^{-1}(U_i) = U_i \Rightarrow f\big|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i)$ то есть U_i корр опр. $\dim Y = \max(\dim(U_i))$, возбмем i с макс размерн $\Rightarrow$ задача сводится к aff случаю $f : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ - конечный сюръективный морфизм $\to$ B - к.п. A - модуль, f - сюръекция $\Rightarrow f$ - домин $\Rightarrow f^{\#} : A \to B$ - инъекция $\Rightarrow f^{\#}A \to B$ - целое расширение колец $\Rightarrow \forall q, q' \in \mathrm{Spec}\, B$ таких что $(f^{\#})^{-1}(q) = (f^{\#})^{-1})(q') = p$, тогда $q \not\subset q'$ и $q' \not\subset q \Rightarrow q_0 \subset \ldots \subset q_n \subset B$ - цепочка простых, таких что $\dim B = n \Rightarrow p_i = (f^{\#})^{-1}(q_i)\ p_0 \subset \ldots \subset p_n \subset A \quad \forall i p_i \in \mathrm{Spec}\, A$ и $p_i \neq p_{i+1}$ (иначе $q_i \not\subset q_{i+1}$) $\Rightarrow \dim A \geqslant n \Rightarrow \dim A \geqslant \dim B$. f - целое расширение $\Rightarrow f^{\#}$ удовлетворяет "lying over prop"$\Rightarrow \forall p \in \mathrm{Spec}\, A\ \exists q \in \mathrm{Spec}\, B$ такое что $q \cap A = p \Rightarrow \forall p_0 \subset \ldots \subset p_n \subset A\ \exists q_0 \subset \ldots \subset q_n \subset B \Rightarrow$ $\dim A \leqslant \dim B \Rightarrow \dim A = \dim B$
Если f не доминантый морфизм (в том числе не сюръекция), то это не всегда правда, например $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Q} \to$ $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$ (pt $\to (0)$) - конечный морфизм □

Задача 1.4. Пусть $f : X \to Y$ морфизм схем, $x \in X \times_Y X, p, q$ две ироекции $X \times_Y X$ на $X, \Delta : X \to X \times_Y X$ диагональный морфизм. Верно ли, тто если $x \in \Delta(X)$, то $p(x) = q(x)$? Верно ли, тто если $p(x) = q(x)$, то $x \in \Delta(X)$?

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "A"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{Id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{Id}"'] & & \\
& X \times_\varphi X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"] & \varphi
\end{tikzcd}$$

$$x \in X \times_Y X \ \ x \in \Delta(X) \Rightarrow \exists y \in X \ \ \Delta(y) = X \Rightarrow p(x) = p(\Delta(y)) = \mathrm{id}(y) = q(\Delta(y)) = q(x)$$

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\mathbb{C} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Spec}\mathbb{C} & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\mathbb{R}
\end{array}$$

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2+1} = \frac{\mathbb{C}[x]}{x^2+1} = \frac{\mathbb{C}[x]}{(x+i)(x-i)} = \frac{\mathbb{C}[x]}{x+i} \times \frac{\mathbb{C}[x]}{x-i} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \{\mathrm{pt}\} \bigsqcup \{\mathrm{pt}\} = \{a, b\}$$

$$\Delta(\operatorname{Spec}\mathbb{C}) = \{a\} \ \ p(b) = q(b) = \{\mathrm{pt}\} \ \text{ но } \ \Delta(\{\mathrm{pt}\}) \neq \{b\}$$

□

Задача 1.5. Докажите, что свойство отделимости сохраняется при замене базы.

Доказательство.
f - отделим, то есть $\Delta_{X/Y}$ - замкнутое вложение Без ограничения общности $X \times_Y (X \times_Y K) \simeq (X \times_Y X) \times_Y K$

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, bend right, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\Theta"] \arrow[dd, "\psi"] \arrow[ddl, bend left, "\varphi"] & & \\
X \times_\varphi (X \times_\varphi K) \arrow[rr, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & & X \times_\varphi K \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[dl, "\pi_1"] & K \arrow[ddl, bend left, "g"] \\
X \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \arrow[dr, "f"] & & \\
& & \varphi &
\end{tikzcd}$$

$$f\varphi = f\psi = g\Theta \Rightarrow \exists! \gamma : Z \to X \times_Y K$$
$$\psi - \pi_1\gamma \quad \Theta = \pi_2\gamma$$
$$f\pi_1\gamma = g\pi_2\gamma = f\varphi$$
$$\Rightarrow \exists! \alpha : Z \to X \times_Y (X \times_Y K) \quad p_2\alpha = \gamma \quad p_1\alpha = \varphi$$
$$\Rightarrow \pi_2 p_2 \alpha = \Theta \quad \pi_1 p_2 \alpha = \psi \quad p_1\alpha = \varphi$$

При пост-композиции с π_1 и π_2 может пропасть единственность α.
Пусть $\exists \beta : Z \to X \times_Y (X \times K)$, такое что $\beta \neq \alpha$, тогда

$$\pi_2 p_2 \beta = \Theta \quad \pi_1 p_2 \beta = \psi \quad p_1\beta = \varphi$$
$$\Rightarrow \text{из единственности } gamma \text{ следует} p_2\beta = \gamma \quad p_1\beta = \varphi$$
$$\Rightarrow \beta = \alpha \Rightarrow X \times_Y (X \times_Y K) \text{ предел диаграммы}$$

Аналогично доказывается что $(X \times_Y X) \times_Y K$ предел этой диаграммы, откуда $(X \times_Y X) \times_Y K \simeq X \times_Y (X \times_Y K)$

Без ограничения общности

$$\frac{\Delta X \times_Y K}{K} : X \times_Y K \to X \times_Y K \times_K X \times_Y K \text{ -- замкнутое вложение}$$

$$X \times_Y K \times_K X \times_Y K \simeq X \times_Y (X \times_Y K) \simeq (X \times_Y X) \times_Y K$$

$$\begin{tikzcd}
X \times_{X \times_Y X} (X \times_Y X) \times_Y K \arrow[r] \arrow[d, "\frac{\Delta X \times_Y K}{K}"] & X \arrow[d, "\frac{\Delta X}{Y}"] \\
(X \times_Y X) \times_Y K \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \times_Y X \arrow[d, "\pi_1"] \\
X \times_Y K \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Нижний квадрат декартов, $\mathrm{id} = p_2 \circ \frac{\Delta X \times_y K}{K}$, $\mathrm{id} = \pi_1 \times \frac{\Delta X}{Y}$, то есть

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
X \times_Y K \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

тоже декартов, откуда и верххний квадрат декартов

$\frac{\Delta X \times_Y K}{K}$ - замкнутое вложение, так как замкнутое влодение стабильно относительно смены базы ☐

Задача 1.6. Докажите, что если gf отделим, то f отделим.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \times_Z X \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & Y \times_Z Y
\end{tikzcd} \text{ -- декартов квадрат}$$

$Y \to Y \times_Z Y$ - вложение $\Rightarrow X \times_Y X \to X \times_Z X$ - вложение

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta \frac{x}{z}"] \arrow[d, "\Delta \frac{x}{y}"] & X \times_Z X \\
X \times_Y X \arrow[ur, "h"] &
\end{tikzcd}$$

$\Delta \frac{x}{z}(X)$ - замкн $\Rightarrow \Delta \frac{x}{y}(X)$ - замкн ☐