Домашнее задание 4

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_7$. Выпишите явную формулу для голоморфного биективного отображения из множества X в верхнюю полуплоскость $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

(0) $X = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > 2\}$.
(1) $X = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{e^{it} \mid t \in [0, \pi/2]\}$.
(2) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ |z-1| < 1\}$.
(3) $X = \mathbb{H} \setminus \{e^{it} \mid t \in [0, \pi/2]\}$.
(4) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2,\ \mathrm{Im}(z) > -1\}$.
(5) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\} \setminus \{(1+i)t \mid t \in (0, 1]\}$.
(6) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \setminus [0, 1]$.
(7) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \setminus ([-1, -1/2] \cup [1/2, 1])$.
(8) $X = \mathbb{C} \setminus \{1 + (1-i)t \mid t \in [1, 2]\}$.
(9) $X = \mathbb{C} \setminus \{1 + e^{\pi i/3} t \mid t \in [0, \infty)\}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6 + a_9$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Дробно линейный автоморфизм единичного диска коммутирует с отображением $z \mapsto 1/\overline{z}$. Другими словами, если $A : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является дробно-линейным автоморфизмом и $w = 1/\overline{z}$, то $A(w) = 1/\overline{A(z)}$.

(1) Отображение $f(z) = z + \frac{1}{z}$ переводит окружности с центром в 0 в эллипсы (за исключением единичной окружности, которая переходит в отрезок).

(2) Любое отображение вида $f(z) = A_1(z) \ldots A_k(z)$, где $A_j(z) = \frac{z - a_j}{1 - \overline{a}_j z}$, переводит единичный диск в себя.

(3) Существует дробно-линейное преобразование множества $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 2\}$ в себя, переводящее точку 1 в точку 0.

(4) Существует не более одного дробно-линейного преобразования множества $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 2\}$ в себя, переводящего точку 1 в точку 0.

(5) Любую окружность, целиком лежащую в верхней полуплоскости, можно автоморфизмом полуплоскости перевести в любую другую такую окружность.

(6) Любую пару окружностей, целиком лежащих в верхней полуплоскости, можно автоморфизмом полуплоскости перевести в любую другую пару таких окружностей.

(7) Будем называть *луночкой* часть плоскости, ограниченную двумя пересекающимися окружностями. Любую луночку можно конформно отобразить на любую другую луночку.

(8) Отображение $f(z) = z^2$ переводит гиперболы вида $xy = C$ (здесь C — постоянный параметр, а x, y — вещественные координаты точки $z = x + iy$) в горизонтальные прямые.

(9) Отображение $f(z) = z^2$ переводит вертикальные прямые, не проходящие через 0, в параболы.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_9$. Найдите хотя бы одну гармоническую функцию $u(x, y)$ от двух вещественных переменных со следующими свойствами. Функция u определена и гармонична в области $U \setminus \{(a, b)\}$, стремится к нулю на границе области U и к бесконечности в точке (a, b).

(0) $U = \{y > x^2\}$, $a = 0$, $b = 1$.
(1) $U = \{xy > 1,\ x, y > 0\}$, $a = 2$, $b = 1$.
(2) $U = \{x^2 + 2y^2 < 1\}$, $a = b = 0$.
(3) $U = \{y > 0\}$, $a = 0$, $b = 1$.
(4) $U = \{x > 0,\ y > 0\}$, $a = b = 1$.
(5) $U = \{x > 0,\ 0 < y < x\}$, $a = 2$, $b = 1$.
(6) $U = \{0 < y < 2\}$, $a = 0$, $b = 1$.
(7) $U = \{x > -1,\ x^2 + y^2 > 1\}$, $a = 2$, $b = 0$.
(8) $U = \{x > 0,\ 0 < y < 2\}$, $a = b = 1$.
(9) $U = \{y > 0,\ x^2 + y^2 < 2\}$, $a = 0$, $b = 1$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $3a_7$. Нарисуйте образ множества X при отображении f.

(0) $X = \{z = x + iy \mid x + y = 1\}$, $f(z) = 1/z$.
(1) $X = \{z = x + iy \mid x = -1\}$, $f(z) = z/(z - 2)$.
(2) $X = \{z = x + iy \mid y < 0,\ x^2 + y^2 < 4\}$, $f(z) = z^2$.
(3) $X = \{z \mid |z| < 1\}$, $f(z) = (z + 1)^2$.
(4) $X = \{z \mid |z| < 1\}$, $f(z) = \sqrt{1 + z}$ (ветвь на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$).
(5) $X = \{z = x + iy \mid y = 1\}$, $f(z) = e^z$.

(6) $X = \{z = x + iy \mid x = 1\}$, $f(z) = \log z$ (ветвь на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$).
(7) $X = \{z = x + iy \mid y = 1\}$, $f(z) = z^3$.
(8) $X = \{z \mid |z| = 2\}$, $f(z) = (z - 1)^2$.
(9) $X = \{z = x + iy \mid 0 < x < \pi/2\}$, $f(z) = \sin z$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа ....

(0) Пусть P и Q — два квадратных многочлена относительно z, не имеющих непостоянных общих множителей. Рассмотрим рациональную функцию $R(z) = P(z)/Q(z)$. Докажите, что найдутся такие дробно-линейные функции ϕ и η, что $\phi \circ R \circ \eta(z) = z^2$.

(1) Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < 2,\ |\mathrm{Im}(z)| < 3\}$ и $f(z) = \cos z - 2$. Докажите, что замыкание множества U содержится во множестве $f(U)$.

(2) Докажите, что группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ изоморфна факторгруппе $\mathrm{PSU}(1,1)$ группы

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

(групповая операция — умножение матриц) по подгруппе, состоящей из скалярных матриц λI, таких, что $|\lambda| = 1$. *Указание:* дайте интерпретацию группы $\mathrm{PSU}(1,1)$ как группы дробно-линейных автоморфизмов единичного диска.

(3) Пусть f — дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости, а $z \in \mathbb{H}$ — точка верхней полуплоскости, такая, что $f(z) = z$. Докажите, что $|f'(z)| = 1$.

(4) Найдите максимум $|f'(0)|$ по всем дробно-линейным автоморфизмам единичного диска.

(5) Предположим, что дробно-линейный автоморфизм f единичного диска имеет неподвижную точку в этом диске. Докажите, что f сопряжен автоморфизму вида $z \mapsto e^{i\theta} z$, где $\theta \in \mathbb{R}$.

(6) Докажите, что любой дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости можно представить в виде композиции двух инверсий, причем можно считать, что окружности, относительно которых осуществляются эти инверсии, перпендикулярны вещественной оси.

(7) Предположим, что дробно-линейный автоморфизм f верхней полуплоскости имеет две разные неподвижные точки на (расширенной) вещественной оси $\overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что в этом случае f сопряжен отображению $z \mapsto kz$, где k — положительное действительное число.

(8) Предположим, что дробно-линейный автоморфизм f верхней полуплоскости имеет ровно одну неподвижную точку на (расширенной) вещественной оси $\overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что в этом случае f сопряжен отображению $z \mapsto z \pm 1$.

(9) При каких вещественных значениях коэффициента a кривая, заданная уравнением

$$x^2 + 2axy - y^2 + 2y + 1 = 0$$

относительно координат (x, y) на плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, переводится в прямую некоторым конформным отображением, определенным в окрестности этой кривой?