Содержание

1 Про топологию **3**

2 Метрические пространства **3**

2.1 Метрика 3

2.2 Норма 4

3 Открытое множество в метрическом пространстве **8**

4 Топологические пространства **9**

5 Открытое множество в метрическом пространстве **11**

6 Топологические пространства **12**

7 База и предбаза топологии **14**

8 Сходимость последовательностей в топологическом пространстве **16**

9 Замыкание, внутренность, граница **17**

9.1 Замыкание 17

9.2 Внутренность 18

10 Аксиомы счетности **19**

11 Непрерывные отображения **21**

11.1 Подпространства топологических пространств 24

12 Инициальные топологии. Произведения топологических пространств **26**

12.1 Инициальные точки 26

12.2 Произведения множеств 27

12.3 Произведения топологических пространств 28

13 Финальные топологии и дизъюнктные объединения **31**

13.1 Финальные топологии 31

13.2 Дизъюнктное объединение множеств 32
13.3 Дизъюнктное объединение топологических пространств (несвязные суммы) 32

14 Связные топологические пространства **32**
14.1 Свойства связных пространств 33
14.2 Линейно связные пространства 35
14.3 Свойства линейно связных пространств 35

15 Связные компоненты **37**
15.1 Свойства связных компонентов 37
15.2 Линейно связные компоненты 38
15.3 Свойства линейной связных компонент 38
15.4 Локально линейно связные пространства 38

16 Компактные топологические пространства **39**
16.1 Свойства компактных пространств 40

17 Некоторые свойства центрированных семейств **41**

18 Теорема Тихонова (очень важная) **42**

19 Локально компактные пространства **43**

20 Одноточечная компактификация **45**

21 Эквивалентность норм **47**

22 Факторпространства **48**

23 Частный случай фактопространств: стягивание подмножества в точку **50**
23.1 Частный случай факторпространств: склейка по отображению . . . 50

24 Нормальные пространства. Лемма Урысона **54**
24.1 Нормальные пространства 54
24.2 Лемма Урысона 56

1 Про топологию

Топология **изучает** свойства пространств, сохраняющихся при непрерывных преобразованиях. Делится на общую (завершенный раздел, переживший период бурного развития) и современную.

Общая топология — элементарная, т.е. не требует предварительных глубоких познаний, и является фундаментом математики. Основные объекты изучения — топологические пространства и непрерывные отображения.

Современная топология состоит из многих разделов, среди которых **алгебраическая** — изучает топологические пространства алгебраическими методами, т.е. проецирует топологию на алгебру, рассматривает топологические пространства, имеющие хорошие комбинаторные свойства, — дифференциальная, объектами которой являются пространства, снабженные дополнительной дифференциальной структурой, и методы дифференциального исчисления, геометрическая, связанная с пространствами малой размерности, и другие. Стоит отметить, что разделы не изолированы, а взаимодействуют друг с другом.

2 Метрические пространства

2.1 Метрика

Определение. Метрика на множестве X — функция $\rho\colon X \times X \to [0;+\infty]$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x,y \in X$;

(2) $\rho(x,x) = 0 \quad \forall x \in X$;

(3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$ — неравенство треугольника;

(4) $\rho(x,y) > 0 \quad \forall x \neq y$.

Таким образом, мы аксиоматически задали способ определить расстояние, т.е. то, что понимать под расстоянием в общем случае.

Метрическое пространство (x, ρ) — множество (точнее — пара), снабженное метрикой. Если выполняется только (1)–(3), то ρ называется полуметрикой, а (x,ρ) — полуметрическим пространством.

Пример 0. Дискретная метрика

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Пример 1. Классический

$x = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |x-y|$. Легко проверить, что выполняются все аксиомы метрики, причем неравенство треугольника — свойство модуля.

Пример 2. Три метрики на R^n

- $\rho_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$, где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$. Для каждой координаты выполняется неравенство треугольника: просуммируем координаты и получим, что для суммы тоже выполняется.
- $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ — «обычное» расстояние — евклидова метрика.
- $\rho_\infty(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|$ (пояснение: если вместо 1 или 2 стоит p, метрика выглядит так: $\rho_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^p}$, это — пример для $p \to \infty$).

Пример 3. X = C[a, b] — множество всех непрерывных функций $[a,b] \to \mathbb{R}$.

Равномерная метрика (также супметрика): $\rho(f,g) = \sup\limits_{t\in[a,b]}|f(t) - g(t)|$. Т.к. функция непрерывна и ограничена, можно назвать max, а не sup.

Наблюдение. В примерах 1-3 X — векторное пространство над $\mathbb{R}$: $\rho(x,y) = \rho(x-y, 0)$ — т.к. это пространства специального вида — нормированные.

2.2 Норма

Определение. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{K}$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Функция $X \to [0; +\infty],\ x \in X \mapsto ||x||$, называется **нормой** на X (т.е. мы аксиоматически определяем, что такое длина вектора, — тогда говорят норма), если она удовлетворяет следующим условиям:

(1) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||,\ \lambda \in \mathbb{K},\ x \in X$ (т.е. λ — число, x — вектор);

(2) аналог неравенства треугольника: $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||,\ (x, y \in X)$ — прим.: на плоскости сводится к неравенству треугольника;

(3) $||x|| > 0 \quad \forall x \neq 0$ ($x = 0 :$ из аксиомы (1) $\Rightarrow ||x|| = 0$).

Пространство на X, снабженное нормой, — **нормированное пространство.** Например, $(x, ||\cdot||)$.

Если (1), (2) выполняются, а (3) — нет, то это **полунорма**, соответственно пространство — полунормированное.

Наблюдение. Пусть $(x, ||\cdot||)$ — нормированное пространство. Тогда $\rho(x, y) = ||x - y||$ $(x, y \in X)$ — метрика на X, порожденная нормой.

Упражнение. Проверить выполнение аксиом метрики для $\rho(x, y)$.

• Всякая **норма порождает метрику**;

• Подмножество метрического пространства — метрическое пространство;

• Подмножество нормированного пространства — нормированное пространство;

• Всякое метрическое пространство изометрично нормированному пространству (изометрия — биекция между метрическими пространствами, сохраняющая расстояния между точками, — *мое* примечание.)

Пример 4. Три нормы на $\mathbb{K}^n$, порожденные метриками из Примера 2

• $||x||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$;

• $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ — евклидова норма;

• $||x||_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$.

Пример 5. Равномерная норма на пространстве непрерывных функций $C[a, b]$, порожденная метрикой из Примера 3.

$||f|| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$.

Обозначение. Напомним, что если X, Y — множества, то Y^X — множество всех отображений $X \to Y$. В частности, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ — множество числовых последовательностей в $\mathbb{K}$.

Пример 6. $l^\infty(S)$ — множество всех ограниченных функций на множестве S: $\{f \in \mathbb{K}^S$: f ограничена$\}$.

$||\text{f}|| = \sup\limits_{s \in S} |f(s)|$ — равномерная норма. Повторное замечание: непрерывная функция ограничена (сверху и снизу) — достигает максимум, можно писать не sup, а max.

Частный случай: пространство ограниченных последовательностей $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$.

Пример 7. $l^1 = \{x = (x_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: ряд сходится$\}$, где x_i — числовая последовательность.

Норма на l^1: $||x||_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

Пример 8 (важный)

l^2 (можно также писать l_2) $= \{x = (x_i) \in \mathbb{K}$: ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ сходится$\}$.

l^2 — векторное подпространство в $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ — следует из неравенства $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2),\ a, b \geq 0$.

***Мое* доказательство.** l^2 — **векторное подпространство** в $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ — 1) если $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 < \infty$, то и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|c \cdot x_i|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}|c||x_i|^2 = |c|\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 < \infty$ для любого c из $\mathbb{K}$, 2) $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2), \quad \forall a, b \geq 0$, то есть ряд, составленный из $|x_n+y_n|^2$, сходится, т.к. каждый его элемент не больше суммы двух соответственных элементов $|x_n|^2,\ |y_n|^2$ сходящихся рядов. $\square$

Норма на $l^2: ||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2}$.

***Мое* доказательство.** Проверим, что выполняются аксиомы нормы:

(1) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||,\ \lambda \in \mathbb{K},\ x \in X: \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\lambda \cdot x_i|^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda^2|x_i|^2} = |\lambda|\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2}$;

(2) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||,\ (x, y \in X)$, то есть $||\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|(x+y)_i|^2} \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|y_i|^2}$. Также следует из $(a+b)^2 < a^2+b^2$.

(3) $||x|| > 0 \quad \forall x \neq 0$ (x = 0: из аксиомы (1) $\Rightarrow$ ||x|| = 0). $|x_i| \geq 0$, причем равенство достигается, только когда $x_i = 0$. Значит, $||x||_2 = 0 \Leftrightarrow \forall x_i = 0$, во всех остальных случаях $\exists |x_i| > 0 \Rightarrow ||x||_2 > 0$. $\square$

В некоторых пространствах норма исходит из скалярного произведения, поэтому **напоминание из геометрии:**

Определение. Евклидово пространство — аксиоматически определено скалярное произведение, а не расстояние.

Скалярное произведение на E, где E — векторное пространство над $\mathbb{R}$ — функция $E \times E \to \mathbb{R},\ (x, y) \in E \times E \mapsto {<}x, y{>} \in \mathbb{R}$ (прим.: пишем ${<}x, y{>}$, чтобы отличать скалярное произведение от пары), удовлетворяющая следующим условиям:

(1) линейность: ${<}\alpha x + \beta y, z{>} = \alpha {<}x, z{>} + \beta {<}y, z{>},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x, y, z \in E$ — линейность по первому аргументу;

(2) ${<}x, y{>} = {<}y, x{>} \quad x, y \in E \Rightarrow$ линейность и по второму аргументу — симметричная билинейная форма;

(3) ${<}x, x{>}\ > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Евклидово пространство — векторное пространство E над $\mathbb{R}$, снабженное скалярным произведением.

Факты:

(1) **неравенство Коши-Буняковского**: $|<x,y>| \leq \sqrt{<x,x>} \cdot \sqrt{<y,y>} \Rightarrow$ над каждым векторным пространством есть норма:

(2) $||x|| = \sqrt{<x,x>}$ — норма на E $\Rightarrow$ нормированное $\Rightarrow$ метрическое пространство.

Пример 9. Норма $||\cdot||_2$ на $\mathbb{R}^n$ порождается скалярным произведением $<x,y>= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Норма $||\cdot||_2$ на l^2 порождается скалярным произведением $<x,y>= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Упражнение. Доказать сходимость ряда.

Пример 10. p-адическая метрика на $\mathbb{Q}$

Наблюдение. Каждое $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ имеет вид $x = p^r \frac{a}{b}$, где $p \in \mathbb{P},\ a, r \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}$, причем $p \nmid a,\ p \nmid b$.

Определение. p-адическая норма ненулевого числа ненулевого рационального числа x: $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ — это $|x|_p = p^{-r}$, т.е. число тем меньше, чем на большую степень оно делится. $|0|_p = 0$.

p-адическая норма не является нормой в предыдущем смысле, поэтому для отличия обозначается, как модуль. $\mathbb{Q}$ не является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

Упражнение. Для $x, y \in \mathbb{Q}$

(1) $|-x|_p = |x|_p$;

(2) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$;

(3) $|x|_p > 0\ \forall x \neq 0$;

(4) «Усиленное неравенство треугольника»: $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \leq |x|_p + |y|_p$;

(5) $\rho_p(x,y) - |x-y|_p$ — метрика на $\mathbb{Q}$.

Пример 11. Метрика Хаусдорфа — способ измерить расстояние между точками и множествами.

Определение. X — метрическое пространство, $x \in X,\ A \subset X$. $\rho(X, A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}$ — расстояние от X до A, т.е. расстояние до ближайшего элемента, если inf достигается.

Определение. Ограниченное подмножество в любом метрическом пространстве можно определить, как на плоскости: подмножество $A \subset X$ ограничено, если $\exists c > 0$, т.ч. $\rho(x,y) \leq c \quad \forall x, y \in A$.

Обозначим $\mathfrak{B}(x) = \{A \subset X$: A ограничено$\}$.

Определение. Расстояние Хаусдорфа между двумя ограниченными множествами $A, B \in \mathfrak{B}(X)$ — это $\rho_H(A,B) = \max\{\sup\limits_{a\in A} \rho(a,B),\ \sup\limits_{b\in B} p(b,A)\}$.

Упражнение. ρ_H — полуметрика на $\mathfrak{B}(X)$.

3 Открытое множество в метрическом пространстве

(X,ρ) — метрическое пространство, $x \in X, r \geq 0$.

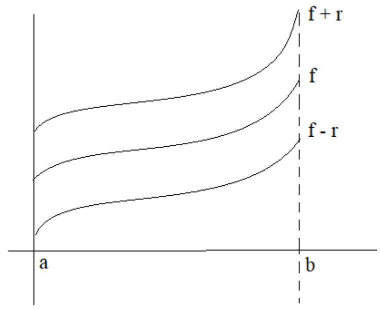
Определение. Открытый шар с центром в x радиуса r — это $B_r(x) = \{y \in X\colon \rho(y,x) < r\}$ — r-окрестность x.

Замкнутый шар с центром в x радиуса r — это $\overline{B}_r(x) = \{y \in X\colon \rho(y,x) \leq r\}$.

Пример. $x = \mathbb{R} \Rightarrow B_r(x) = (x-r, x+r)$; $\quad \overline{B}_r(x) = [x-r, x+r]$.

Упражнение. Нарисовать $B_1(0)$ на $(\mathbb{R}^2,\ \rho_p)$ для $p=1, p=2, p=\infty$ (для $p=2$ — круг, для $p=3$ — шар, как в школе).

Пример. $X = C[a,b]$ с равномерной метрикой.



$\overline{B}_r(f)$ состоит из тех непрерывных функций, графики которых содержатся в заштрихованном множестве.

Определение. (X,ρ) — метрическое пространство, $A \subset X, x \in A$.

x — **внутренняя точка** $A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$.

A называется **открытым** $\Leftrightarrow$ все его точки — внутренние.

Предложение 1. Открытый шар $B_r(x)$ открыт.

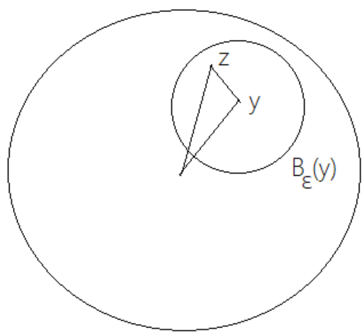
Доказательство. Пусть $y \in B_r(x)$, т.е $\rho(y,x) < r$.

Положим $\varepsilon = r - \rho(y,x)$.

Покажем: $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$. $\quad (*)$

Пусть $z \in B_\varepsilon(y)$.

Неравенство треугольника: $\rho(z,x) \leq \rho(z,y) + \rho(y,x) < \varepsilon + \rho(y,x) = r \Rightarrow z \in B_r(x) \Rightarrow$ $(*)$ доказано $\Rightarrow B_r(x)$ открыто.



Предложение 2. (1) $\varnothing$ открыто;

(2) X открыто;

(3) $\{U_i\}_{i\in I}$ — семейство открытых множеств в $X \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ открыто.

(4) $U_1, U_2, \dots, U_n \subset X$ открыты $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ открыто.

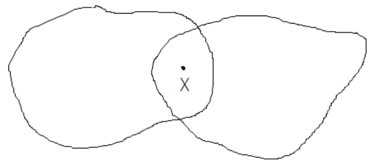
Доказательство. (1), (2) очевидны (из определения).

(3) $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in X$: $x \in U_{i_o} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

(4) достаточно для $n = 2$.

$\exists \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0$: $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U_1, B_{\varepsilon_2} \subset U_2$.

Обозначим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap U_2$.



$x \in U_1 \cap U_2$

4 Топологические пространства

Определение. Пусть X — множество, $\tau \subset 2^X$.

τ называется **топологией** на X, если

(1) $\varnothing \in \tau$;

(2) $X \in \tau$;

(3) $\{U_i\}_{i\in I}$ — семейство множеств из $\tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$.

(4) $U_1, ..., U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

(X, τ) называется **топологическим пространством**.

Обозначение. 2^X — множество всех подмножеств множества X.

Множества из τ называются **открытыми**.

Наблюдение. Из предложения 2: каждая метрика ρ на множестве X порождает топологию τ_ρ на X.

Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется **метризуемым** $\Leftrightarrow \exists$ метрика ρ: $X \times X \to [0;\ +\infty)$: $\tau_\rho = \tau$.

Замечание. Если $\tau = \tau_\rho$, то такая ρ не единственная! Например, $\tau_\rho = \tau_{2\rho}$.

Пример-упражнение. Метрики $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_\infty$ на $\mathbb{K}^n$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ либо $\mathbb{C}$) порождают одну и ту же топологию на $\mathbb{K}^n$.

Пример 1. Дискретная топология

X — $\forall$ множество, $\tau = 2^X$.

Рассмотрим ρ: $X \times X \to [0;\ +\infty)$, $\quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } \ x \neq y, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$

Заметим: $\tau = \tau_\rho$.

Действительно: $B_1(x) = x \Rightarrow x$ открыто в τ_ρ $\forall x \in X \Rightarrow$ каждое $A \subset X$ открыто в τ_ρ, т.к. $A = \bigcup\limits_{x\in A} x \Rightarrow \tau_\rho = \tau$ — дискретная топология (метризуема).

Пример 2. Антидискретная топология

X — $\forall$ множество, $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Определение. Пусть τ_1, τ_2 — топологии на множестве X.

Говорят, что τ_1 грубее τ_2 (τ_2 тоньше τ_1), если $\tau_1 \subset \tau_2$.

Синонимы: грубее = слабее, тоньше = сильнее.

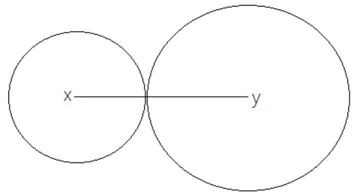
Дискретная топология — самая тонкая, антидискретная — самая грубая.

Определение. **Окрестность** точки x в топологическом пространстве X — любое открытое множество $U \subset X$, содержащее x.

Определение. Топологическое пространство X называется **хаусдорфовым** $\Leftrightarrow \forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists$ окрестности $U \ni x, V \ni y$: $U \cap V = \varnothing$.

Предложение. Метризуемое топологическое пространство хаусдорфово.

Доказательство. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $x, y \in X,\ x \neq y$. Обозначим $a = \rho(x, y),\ a > 0$.



Из неравенства треугольника: $B_{\frac{a}{2}}(x) \cap B_{\frac{a}{2}}(y) = \varnothing$.

Следствие. Антидискретная топология на множестве, содержащем более одного элемента, неметризуема (т.к. неухаусдорфова).

Определение. Пусть X — топологическое пространство.

Множество $F \subset X$ называется **замкнутым** $\Leftrightarrow X \backslash F$ открыто.

Предложение. Пусть X — топологическое пространство, $\tau' = \{F \subset X\colon F$ замкнуто$\}$. Тогда:

(1) $\varnothing \in \tau'$;

(2) $x \in \tau'$;

(3) $\{F_i\}$ - семейство множеств из $\tau' \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \tau'$;

(4) $F_1, F_2, ..., F_n \in \tau' \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ замкнуто.

Наблюдение. Если X — множество, $\tau' \subset 2^X$ удовлетворяет (1)-(4) из предложения $\Rightarrow \{X \backslash F\colon F \in \tau'\}$ — топология на X.

Напоминание:
$X \backslash \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \backslash F_i)\,;$
$X \backslash \bigcup_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (X \backslash F_i)\,.$

Пример. Топология Зарисского

X — множество, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение. $A \subset \mathbb{K}^X$ — **подалгебра** в $\mathbb{K}^X$, если

(1) A — векторное подпространство в $\mathbb{K}^X$;

(2) $1 \in A$ (где 1 – функция, тождественно равная единице);

(3) $f, g \in A \Rightarrow fg \in A$ (fg — поточечное произведение f и g).

Зафиксируем какую-либо подалгебру $A \subset \mathbb{K}^X$.

$\forall S \subset A$ обозначим $V(S) = \{x \in X\,:\ \forall f \in S\ f(x) = 0\}$

Упражнение. На X существует топология, в которой $F \subset X$ замкнуто $\Leftrightarrow$ $F = V(S)$ для некоторого $S \subset A$. Она называется **топологией Зарисского.**

Важный частный случай: $X = \mathbb{K}^n,\ A = \mathbb{K}[t_1, ..., t_n]$.

Упражнение. Описать топологию Зарисского в явном виде для следующих случаев:

(1) X — любое множество, $A = \mathbb{K}^X$;

(2) $X = \mathbb{K},\ A = \mathbb{K}[t]$;

(3) $X = [a, b] \subset \mathbb{R},\ A = C[a, b]$.

5 Открытое множество в метрическом пространстве

(X, ρ) — метрическое пространство, $x \in X,\ r \geq 0$.

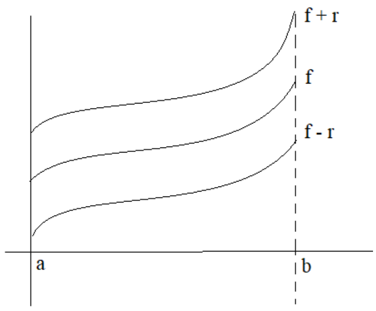
Определение. Открытый шар с центром в x радиуса r — это $B_r(x) = \{y \in X\colon \rho(y, x) < r\}$ — r-окрестность x.

Замкнутый шар с центром в x радиуса r — это $\overline{B}_r(x) = \{y \in X\colon \rho(y, x) \leq r\}$.

Пример. $x = \mathbb{R} \Rightarrow B_r(x) = (x - r, x + r);\quad \overline{B}_r(x) = [x - r,\ x + r]$.

Упражнение. Нарисовать $B_1(o)$ на $(\mathbb{R}^2, \rho_p)$ для $p = 1, p = 2, p = \infty$ (для $p = 2$ — круг, для $p = 3$ — шар, как в школе).

Пример. $X = C[a, b]$ с равномерной метрикой.



$\overline{B}_r(f)$ состоит из тех непрерывных функций, графики которых содержатся в заштрихованном множестве.

Определение. (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X, x \in A$. x — **внутренняя точка** $A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$.

A называется **открытым** $\Leftrightarrow$ все его точки — внутренние.

Предложение 1. Открытый шар $B_r(x)$ открыт.

Доказательство. Пусть $y \in B_r(x)$, т.е $\rho(y, x) < r$.

Положим $\varepsilon = r - \rho(y, x)$.

Покажем: $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$. $\quad (*)$

Пусть $z \in B_\varepsilon(y)$.

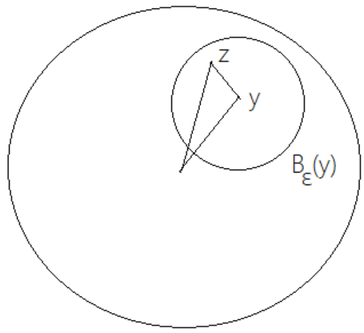
Неравенство треугольника: $\rho(z, x) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x) < \varepsilon + \rho(y, x) = r \Rightarrow z \in B_r(x) \Rightarrow$ $(*)$ доказано $\Rightarrow B_r(x)$ открыто.

Предложение 2. (1) $\varnothing$ открыто;

(2) X открыто;

(3) $\{U_i\}_{i\in I}$ — семейство открытых множеств в $X \to \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ открыто.

(4) $U_1, U_2, ..., U_n \subset X$ открыты $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ открыто.



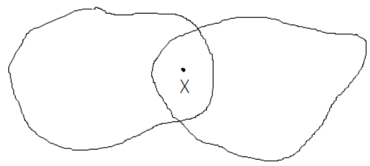
Доказательство. (1), (2) очевидны (из определения).

(3) $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in X$: $x \in U_{i_0} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

(4) достаточно для $n = 2$

$\exists \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0$: $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U_1, B_{\varepsilon_2} \subset U_2$.

Обозначим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap U_2$.



$x \in U_1 \cap U_2$

6 Топологические пространства

Определение. Пусть X — множество, $\tau \subset 2^X$.

τ называется **топологией** на X, если

(1) $\varnothing \in \tau$;

(2) $X \in \tau$;

(3) $\{U_i\}_{i\in I}$ — семейство множеств из $\tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$.

(4) $U_1, ..., U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

(X, τ) называется **топологическим пространством**.

Обозначение. 2^X — множество всех подмножеств множества X.

Множества из τ называются **открытыми**.

Наблюдение. Из предложения 2: каждая метрика ρ на множестве X порождает топологию τ_ρ на X.

Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется **метризуемым** $\Leftrightarrow \exists$ метрика ρ: $X \times X \to [0;\ +\infty)$: $\tau_\rho = \tau$.

Замечание. Если $\tau = \tau_\rho$, то такая ρ не единственная! Например, $\tau_\rho = \tau_{2\rho}$

Пример-упражнение. Метрики $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ на $\mathbb{K}^n$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ либо $\mathbb{C}$) порождают одну и ту же топологию на $\mathbb{K}^n$.

Пример 1. Дискретная топология

X — $\forall$ множество, $\tau = 2^X$.

Рассмотрим ρ: $X \times X \to [0;\ +\infty)$, $\quad \rho(x,y) = \begin{cases} 1, \text{если} \ \ x \neq y, \\ 0 \text{ иначе}. \end{cases}$

Заметим: $\tau = \tau_\rho$.

Действительно: $B_1(x) = x \Rightarrow x$ открыто в τ_ρ $\forall x \in X \Rightarrow$ каждое $A \subset X$ открыто в τ_ρ, т.к. $A = \bigcup_{x \in A} x \Rightarrow \tau_\rho = \tau$ — дискретная топология (метризуема).

Пример 2. Антидискретная топология

X —fa $\forall$ множество, $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Определение. Пусть τ_1, τ_2 — топологии на множестве X.

Говорят, что τ_1 грубее τ_2 (τ_2 тоньше τ_1), если $\tau_1 \subset \tau_2$.

Синонимы: грубее = слабее, тоньше = сильнее.

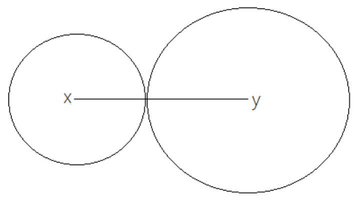
Дискретная топология — самая тонкая, антидискретная — самая грубая.

Определение. Окрестность точки x в топологическом пространстве X — любое открытое множество $U \subset X$, содержащее x.

Определение. Топологическое пространство X называется **хаусдорфовым** $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y, \exists$ окрестности $U \ni x, V \ni y : U \cap V = \varnothing$.

Предложение. Метризуемое топологическое пространство хаусдорфово.

Доказательство. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $x, y \in X, x \neq y$. Обозначим $a = \rho(x,y),\ a > 0$.



Из неравенства треугольника: $B_{\frac{a}{2}}(x) \cap B_{\frac{a}{2}}(y) = \varnothing$.

Следствие. Антидискретная топология на множестве, содержащем более одного элемента, неметризуема (т.к. неухаусдорфова).

Определение. Пусть X — топологическое пространство.

Множество $F \subset X$ называется **замкнутым** $\Leftrightarrow X \backslash F$ открыто.

Предложение. Пусть X — топологическое пространство, $\tau' = \{F \subset X : F \text{замкнуто}\}$. Тогда:

(1) $\varnothing \in \tau'$;

(2) $x \in \tau'$;

(3) $\{F_i\}$ - семейство множеств из $\tau' \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \tau'$;

(4) $F_1, F_2, ..., F_n \in \tau' \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ замкнуто.

Наблюдение. Если X — множество, $\tau' \subset 2^X$ удовлетворяет (1)-(4) из предложения $\Rightarrow \{X \backslash F \colon F \in \tau'\}$ — топология на X.

Пример. Топология Зарисского

X — множество, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение. $A \subset \mathbb{K}^X$ - **подалгебра** в $\mathbb{K}^X$, если

(1) A — векторное подпространство в $\mathbb{K}^X$;

(2) $1 \in A$ (где 1 — функция, тождественно равная единице);

(3) $f, g \in A \Rightarrow fg \in A$ (fg — поточечное произведение f и g).

Напоминание: $X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i)$; $X \setminus \bigcup_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus F_i)$.

Зафиксируем какую-либо подалгебру $A \subset \mathbb{K}^X$.

$\forall S \subset A$ обозначим $V(S) = \{x \in X : \ \forall f \in S \ f(x) = 0\}$

Упражнение. На X существует топология, в которой $F \subset X$ замкнуто $\Leftrightarrow$ $F = V(S)$ для некоторого $S \subset A$.
Она называется **топологией Зарисского.**

Важный частный случай: $X = \mathbb{K}^n, \ A = \mathbb{K}[t_1, ..., t_n]$.

Упражнение. Описать топологию Зарисского в явном виде для следующих случаев:

(1) X — любое множество, $A = \mathbb{K}^X$;

(2) $X = \mathbb{K}, \ A = \mathbb{K}[t]$;

(3) $X = [a, b] \subset \mathbb{R}, \ A = C[a, b]$.

7 База и предбаза топологии

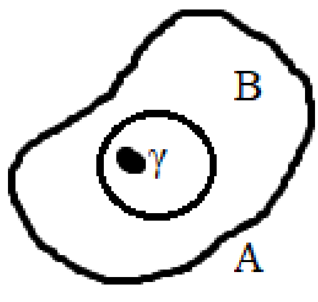
Лемма. X — множество, $\beta \subset 2^X$. Следующие свойства множества $A \subset X$ эквиваленты:

(1) $\exists \gamma \subset \beta$ т.ч. $A = \cup\gamma$;

(2) $\forall x \in A \ \exists B \in \beta$ т.ч. $x \in B \subset A$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $A = \cup\gamma, \gamma \subset \beta, x \in A \Rightarrow \exists B \in \gamma : x \in B \Rightarrow$ B удовлетворяет (2).

(2) $\Rightarrow \forall x \in A \ \exists B_1 \in \beta : x \in B_1 \subset A \Rightarrow \gamma = \{B_x : x \in A\}$ удовлетворяет (1).



$\gamma \subset 2^X$

Обозначение: $\bigcup_{C \in \gamma} C = \cup\gamma$

Определение. (x, τ) — топологическое пространство.

(1) $\beta \in \tau$ — база τ (или база (X, τ)) $\Leftrightarrow$ каждое $U \in \tau$ является объединением некоторого подсемейства в β $\Leftrightarrow$ $\forall U \in \tau \ \forall x \in U \ \exists B \in \beta$ т.ч. $x \in B \subset U$.

(2) $\sigma \subset \tau$ — предбаза τ (предбаза (x, τ) — из леммы) $\Leftrightarrow$ семейство $\{U_1 \cap ... \cap U_n : U_i \in \sigma,\ n \in \mathbb{N}\}$ — база τ.

Пример. (x, ρ) — метрическое пространство $\Leftrightarrow$ $\{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$ — база τ_p.

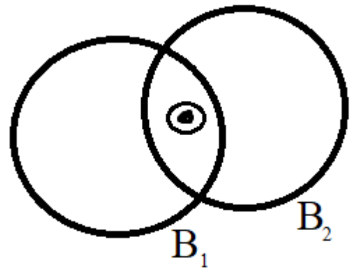
Пример. $X = \mathbb{R},\ \sigma = \{(-\infty, b); (a, +\infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ — предбаза $\mathbb{R}$, но не база.

Предложение. X — множество, $\beta, \sigma \subset 2^X$.

(1) На X $\exists$ топология с базой $\beta \Leftrightarrow \begin{cases} (a) \cup \beta = X \\ (b) \forall B_1, B_2 \in \beta\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_3 \in \beta : \\ x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2. \end{cases}$

(2) На X $\exists$ топология с предбазой $\sigma \Leftrightarrow \cup\sigma = X$.

Доказательство. (1) ($\Leftarrow$) следует из открытости X и $B_1 \cap B_2$.



$\Rightarrow$ Обозначим $\tau = \{\cup\gamma : \gamma \in \beta\}$. Покажем, что τ — топология на X.

$\varnothing = \cup\varnothing \in \tau;\ X = \cup\beta \in \tau$; объединение множеств из τ принадлежит τ.

Пусть $U_1, U_2 \in \tau$. Хотим: $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

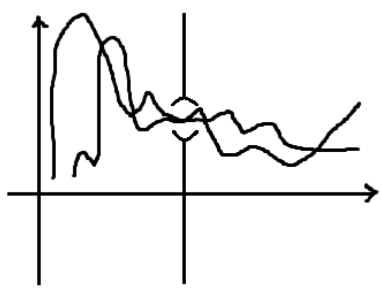
Пусть $x \in U_1 \cap U_2 \xRightarrow{\text{из леммы}} \exists B_1, B_2 \in \beta$ т.ч. $x \in B_k \subset U_k (k = 1, 2) \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow^{(b)} \Rightarrow \exists B_3 \in \beta$ т.ч. $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \xRightarrow{\text{из леммы}} U_1 \cap U_2 \in \tau \Rightarrow \tau$ — топология на X, β — ее база.

(2) ($\Rightarrow$) из открытости X.

($\Leftarrow$) семейство $\{U_1 \cap ... \cap U_n : U_i \in \sigma, n \in \mathbb{B}\}$ удовлетворяет (a), (b) $\Rightarrow$ оно — база топологии, а σ — ее предбаза.

Пример. Топология поточечной сходимости

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C},\ S \subset \mathbb{K}^X$, где $X - \forall$ множество)



$\forall x \in X, \forall$ интервала $I \subset \mathbb{R}$ обозначается $G(x, I) = \{f \in S : f(x) \in I\}$.

Семейство $\{G(x, I) : x \in X, I \subset R$ — интервал (для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ — открытый круг)$\}$ является предбазой некоторой топологии на S. Она называется **топологией поточечной сходимости** на S.

8 Сходимость последовательностей в топологическом пространстве

(Окрестность точки — это любое открытое множество, содержащее эту точку) X — топологическое прространство, $x \in X, (x_n)$ — последовательность в X.

Определедение. (x_n) сходится к x (x является пределом $(x_n) \Leftrightarrow \forall$ окрестности $U \ni x \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; x_n \in U$.

Обозначение. $x_n \to x (n \to \infty)$, или $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Определение. (1) Семейство β_x окрестностей точки $x \in X$ — база окрестностей x (база в x) $\Rightarrow \forall$ окрестности $U \in$ (знак наоборот) $\exists V \in \beta_x, V \subset U$.

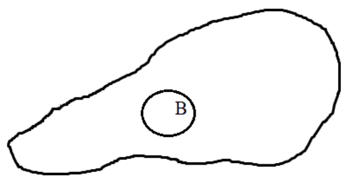
(2) Семейство σ_1 окрестностей точки $x \in X$ —- предбаза окрестностей x (предбаза в x).

$\Leftrightarrow \{U_1 \cap ... \cap ...U_n : U_i \in \sigma_x, n \in \mathbb{N}\}$ — база в x.

Пример. (x, ρ) — метрическое пространство.

$\{B_r(x) : r > 0\}$ — база в x.

$\{B_{\frac{1}{n}}(x) \; : \; n \; \in \; \mathbb{N}\}$ — тоже (важный пример, запомнить.)



Предложение. X — топологическое пространство, $x \in X, \sigma_x$ — предбаза в x, (x_n) — последовательность в X.

$x_n \to x \; (n \to \infty) \Leftrightarrow \forall V \in \sigma_x \;\; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; x_n \in V$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть U — окрестность x $\Rightarrow \exists V1, ..., V_p \in \sigma_x$ т.ч. $V_1 \cap ... \cap V_p \subset U$.

$\exists N_1, ..., N_p$ т.ч. $\forall n \geq N_i \; x_n \in V_i \; (i = 1, ..., p)$.

Обозначим $N = \max\limits_{1 \leq i \leq n} N_i \Rightarrow \forall n \geq N \; x_n \in V_1 \cap ... \cap V_p \subset U$.

Следствие. (x, ρ) — метрическое пространство, $x \in X, (x_n)$ — последовательность в X. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $x_n \to x$;

(2) $\forall$ открытого щара V с центром в x $\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; x_n \in V$;

(3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \rho(x_n, x) < \varepsilon$;

(4) $\rho(x_n, x) \to 0$.

Предложение. X — хаусдорфово топологического пространство, (x_n) — последовательность в X, $x_n \to x \in X, \; x_n \to y \in X \Rightarrow x = y$.

Доказательство. Пусть $x \neq y \Rightarrow \exists$ окрестности $U \ni x, \; V \ni y, \; U \cap V = \varnothing$.

Из $\exists N_1$ т.ч. $\forall n \geq N_1 x_n \in U$ и $\exists N_2$ т.ч. $\forall n \geq N_2\ x_n \in V$ следует, что $x_n \in U \cap V\ \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$ — противоречие.

Пример. X — антидискретное пространство. Каждая последовательность в X сходится к каждой точке $x \in X$.

Пример. X — дискретное топологическое пространство $x_n \to x \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \ x_n = x$.

Действительно: $(\Rightarrow)$ x — окрестность x. Далее см. определение сходимости.

Пример-упражнение. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}, X$ — множество, $S \subset \mathbb{K}^X$.

Пусть $f_n \to F$ в S с топологией поточечной сходимости $\Leftrightarrow \forall x \in X\ \ f_n(x) \to f(x)$.

9 Замыкание, внутренность, граница

9.1 Замыкание

X — топологическое пространство, $A \subset X$.

Определение. Замыкание A — множество $\overline{A} = \cap\{F \subset X : F$ замкнуто, $A \subset F\}$.

Наблюдение. $\overline{A}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A. В частности, если A замкнуто, то $A = \overline{A}$.

Предложение. (1) $A \subset B \subset X \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;

(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Доказательство. (1) из определения, (2) из наблюдения, (3) $A \subset A \cup B \overset{(1)}{\Longrightarrow} \subset \overline{A \cup B}$. Аналогично $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$, т.к. $\overline{A} \cup \overline{B}$ замкнуто.

Предложение. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ окрестности $U \ni x,\ U \cap A \neq \varnothing$.

Доказательство. $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists$ замкнутое $F \subset X$ т.ч. $F \supset A,\ x \notin F \overset{U = X \setminus F}{\Longleftrightarrow} \exists x \in U$ и $\exists$ открытое $U \subset X$ т.ч. $U \cap A = \varnothing \Leftrightarrow \exists$ окрестность $U \ni x,\ U \cap A = \varnothing$.

Определение. X — топологическое пространство, $A \subset X$. Тогда $x \in X$ — **предельная точка** A $\Leftrightarrow\ \ x \in \overline{A \setminus \{x\}} \overset{\text{предложение}}{\Longleftrightarrow}$ в каждой окрестности x есть точки из A, отличные от x.

Обозначение. $A' = \{x \in X | x$ — предельная точка A$\}$ — производное множество множества A.

Из предложения $\overline{A} = A \cup A'$. В частности: A замкнуто $\Leftrightarrow A' \subset A$.

Определение. $x \in A$ — **изолированная точка** A $\Leftrightarrow x \in A \backslash A' \Leftrightarrow \exists$ окрестность $U \ni x$ т.ч. $U \cap A = \{x\}$.

$\overline{A} = A' \sqcup$ изолированные точки A.

9.2 Внутренность

X — топологическое пространство, $A \subset X$.

Определение. Внутренность A — это Int(A) $= \bigcup\{U \subset X$: U открыто, $U \subset A\}$.

Наблюдение. (1) Int A — наибольшее открытое множество, содержащееся в A. В частности: A открытое $\Leftrightarrow$ A = Int A.

(2) Если $(X,\ \rho)$ — метрическое пространство, то $x \in \mathrm{Int} A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ т.ч. $B_\varepsilon(x) \subset A$.

Упражнение. Int A $= X \backslash \overline{(X \backslash A)}$; $\quad \overline{A} = X \backslash \mathrm{Int}(X \backslash A)$.

$\boxed{\text{Int A} \subset A \subset \overline{A}}$

Определение. Граница A — это $\Delta A = \overline{A} \backslash$Int A.

Наблюдение. $x \in \delta\ A \Leftrightarrow \forall$ окрестностей $U \ni x\ U \cap A \neq \varnothing,\ U \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$.

Примечание 1. $X = \mathbb{R}, A = \mathbb{Z} \Rightarrow \overline{A} = \mathbb{Z}$, Int $A = \varnothing,\ \delta A = A = \mathbb{Z}$, все точки A изолированы, $A' = \varnothing$.

Примечание 2. $X = \mathbb{R}, A = (0,1) \Rightarrow \overline{A} = [0,1]$, Int A = A = $(0,1)$, $\delta A = \{0,1\}$, изолированных точек нет, $A' = [0,1]$.

Примечание 3. $X = \mathbb{R}, A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0 \quad \Rightarrow \overline{A} = A$ (т.к. $\mathbb{R} \backslash A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}))$. Int $A = \varnothing,\ \delta A = A$, {изолированные точки A} = $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}; \{0\} = A'$.

Определение. X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ **плотно** в X (= **всюду плотно** в X) $\Leftrightarrow \overline{A} = X$.

Наблюдение. A плотно в X $\Leftrightarrow \forall x \in X \forall$ окрестности $U \ni x\ U \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow \forall$ непустого открытого $U \subset X\ U \cap A \neq \varnothing$.

Определение. X **сепарабельно** $\Leftrightarrow\ \exists$ не более чем счетное плотное подмножество в X.

Пример 1. Дискретное пространство сепарабельно $\Leftrightarrow$ оно само не более чем счетно.

Пример 2. Антидискретное пространство сепарабельно (каждое непустое подмножество плотно).

Пример 3. $\mathbb{R}$ сепарабельно (т.к. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$).

Пример-упражнение 4. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l^1, l^2$ сепарабельны, l^∞ несепарабельно.

***Мое* доказательство.** Из доказанного мною выше (см. первая лекция) l^2 — векторное пространство в $\mathbb{K}^N$, норма на l^2: $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2}$.

Теперь найдем в l^2 *счетное всюду плотное множество.*

Пусть L — множество всех последовательностей с рациональными членами, у которых только конечное число членов не равно нулю, а остальные члены нулевые.

Покажем, что L — искомое.

1) Т.к. L — объединение счетного числа счетных множеств, L *счетно*;

2) Теперь покажем, что L всюду плотно в l^2, то есть что в любом шаре $B_\varepsilon(x) \in l^2$, где $x \in l^2,\ \varepsilon > 0$ — произвольное, найдется точка r из $L:\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i - r_i|^2 < \varepsilon$.

Возьмем в l^2 последовательность $\{x_n\}$. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2$ сходится. Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}|x_k|^2 = 0$, то есть, начиная с некоторого N, $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}|x_k|^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{2}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное.

Множество рациональных чисел всюду плотно в множестве действительных. Это значит, что если зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим каждый интервал $(x_i - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}, x_i + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2N}})$, то в любом из них мы сможем найти некоторое рациональное число r (конечно, для каждого i — свое r). Перепишем это: $|x_i - r| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}$. Возведем обе части неравенства в квадрат, так как они неотрицательные. Получим $|x_i - r|^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{2N}$.

Тогда расстояние между $x \in l^2,\ r \in \mathbb{Q}\ = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i - r|^2} =$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{N}|x_i - r|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty}|x_i|^2} < \sqrt{\tfrac{N\cdot\varepsilon^2}{2N} + \tfrac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon \Rightarrow r \in B_\varepsilon(x).$$

Значит, L *всюду плотно* в l^2. Тогда L — искомое. Значит, l^2 сепарабельно. Что и требовалось доказать. $\square$

10 Аксиомы счетности

X — топологическое пространство.

Определение. (1) X удовлетворяет **1-ой аксиоме счетности** $\Leftrightarrow \forall x \in X \exists$ не более чем счетная база окрестностей x.

(2) X удовлетворяет **2-ой аксиоме счетности** (является пространством со **счетной базой**) $\Leftrightarrow \exists$ не более чем счетная база топологии на X.

Предложение. X удовлетворяет 2-ой аксиоме счетности $\Rightarrow$ X удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности.

Доказательство. Пусть β — не более чем счетная база топологии на X. $x \in X$; тогда $\{U \in \beta : \ U \ni x\}$ — база окрестностей x.

Пример 1. X — метризуемо $\Rightarrow$ X удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности. Действительно, $\forall x \in X$ $\{B_{\frac{1}{n}}(x) : \ n \in \mathbb{N}\}$ — база окрестностей x.

Определение. Семейство β_x окрестностей точки $x \in X$ — **база окрестностей x** $\Leftrightarrow \forall$ окрестности $U \ni x$ $\exists V \in \beta_x, \ V \subset U$.

Пример 2. Дискретное пространство X удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности. Оно удовлетворяет 2-ой аксиоме счетности $\Leftrightarrow$ оно не более чем счетно.

Пример 3. $\mathbb{R}$ удовлетворяет 2-ой аксиоме счетности. А именно, $\{(a,b)\colon a < b, \quad a, \ b \in \mathbb{Q}\}$ — база $\mathbb{R}$. Действительно, $\forall c, d \in \mathbb{R}, \ c < d$, выполнено $(c,d) = \bigcup\{(a,b) : a, b \in \mathbb{Q}, \ c < a < b < d\}$ — в силу плотности $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

Предложение. Топологическое пространство со счетной базой сепарабельно.

Доказательство. $\{U_n\colon \ n \in \mathbb{N}\}$ — счетная база в X; $U_n \neq \varnothing \quad \forall n$ (если пусто, можно выкинуть и ничего не потерять). $\forall n \in \mathbb{N}$ выберем $x_n \in U_n \Rightarrow \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ плотно в X.

Упражнение. Для метризуемых пространств: счетная база $\Leftrightarrow$ сепарабельность. В частности: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l^1, l^2$ — со счетной базой.

Лемма. Пусть X — топологическое пространство, удовлетворяющее 1-й аксиоме счетности. Тогда $\forall x \in X$ $\exists$ база окрестностей $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ точки x, т.ч. $U_n \supset U_{n+1}$ $\forall n$.

Доказательство. Пусть $\{V_n : \ \ n \in \mathbb{N}\}$ — база окрестностей x; обозначим $U_n = V_1 \cap ... \cap V_n \Rightarrow \{U_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ — искомая.

Предложение. X — топологическое пространство, $A \subset X, \ x \in X$.

(1) Если $\exists$ последовательность (x_n) в A т.ч. $x_n \to x \ \Rightarrow \ x \in \overline{A}$;

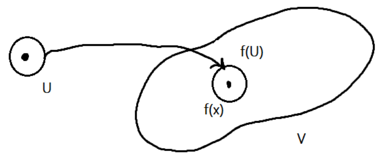
(2) Если X удовлетворяет 1-й аксиоме счетности, то верно и обратное.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть U — окрестность x. $\Rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N}$ т.ч. $x_n \in U \Rightarrow U \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{A}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $x \in \overline{A}$ и пусть $\{U_n\colon \ \ n \in \mathbb{N}\}$ — база окрестностей x т.ч. $U_{n+1} \subset U_n$ $\forall n$ выберем $\forall x_n \in U_n \cap A$. Покажем: $x_n \to x$.

Пусть U — окрестность x. $\exists N \in N$ т.ч. $U_N \subset U \ \Rightarrow \forall n \neq N\ x_n \in U_n \subset U_N \subset U \Rightarrow x_n \to x$.

11 Непрерывные отображения



Определение. X, Y — топологические пространства, $f:\ X \to Y,\ x \in X$.

f **непрерывно** в x $\Leftrightarrow$ $\forall$ окрестности $V \ni f(x)\ \exists$ окрестность $U \ni x$ т.ч. $f(U) \subset V$.

f **непрерывно** $\Leftrightarrow$ оно непрерывно в каждой $x \in X$.

Предложение. Пусть $f : X \to Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X,\ y = f(x)$.

β_x — база топологии x, σ_y — предбаза окрестностей y. Тогда:

f непрерывно в x $\Leftrightarrow$ $\forall V \in \sigma_y \quad \exists$ окрестность $W \ni x$ т.ч. $f(w) \subset V$, $\exists V \in \beta_x$ т.ч. $U \subset W \Rightarrow f(x) \subset V$.

($\Leftarrow$) Пусть V — окрестность y. $\exists V_1, ..., V_p \in \sigma_y$ т.ч. $V_1 \cap ... \cap V_p \subset V$; $\forall i = 1, ..., p\ \exists U_i \in \beta_x$ т.ч. $f(V_i) \subset V_i,\ f(U_1 \cap ... \cap U_p) \subset V$.

Следствие. $(X, \rho_X),\ (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, $x \in X$.

Отображение $f : X \to Y$ непрерывно в x $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ т.ч. $\forall x' \in X$, удовлетворяющей $\rho_X(x, x') < \delta$, выполнено $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Доказательство. Применить предложение к базам окрестностей x и f(x), состоящим из открытых шаров с центрами x и y.

Теорема. X, Y — топологические пространства, $f : X \to Y$ — отображение. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) f непрерывно;

(2)!!! $\forall$ открытых $V \subset Y\ f^{-1}(V)$ открыты в X — часто берут в качестве определения непрерывности отображения;

(3) $\forall$ замкнутого $B \subset Y \quad f^{-1}(B)$ замкнуто в X;

(4) $\forall A \subset X\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $V \subset Y$ — открыто. $\forall x \in f^{-1}(V)\ \exists$ окрестность $U_x \ni x$ т.ч. $f(U_x) \subset V \Rightarrow U_x \subset f^{-1} \Rightarrow \bigcap_{x \in f^{-1}} U_x = f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V)$ открыто.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) — следствие из равенства $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)\ \forall B \subset Y$.

(3) $\Rightarrow$ (4) $\forall A \subset X\ \ A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, где $f^{-1}(\overline{f(A)})$ замкнуто, $\Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, т.е. $f(\overline{A} \subset \overline{f(A)}$.

(4) $\Rightarrow$ (3). Пусть $B \subset Y$ замкнуто, $A = f^{-1}(B)$. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B \Rightarrow \overline{A} \subset g^{-1}(B) = A$, т.е. A замкнуто.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall x \in X$ пусть V — окрестность $f(x) \Rightarrow VU = f^{-1}(V)$ — окрестность x, и $f(U) \subset V$. $\square$

Следствие. Пусть $\tau_1,\ \tau_2$ — топологии на множестве X. Тогда $tau_1 \subset \tau_2 \Leftrightarrow$ отображение $f : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1),\ f(x) = x$ — непрерывно. Т.е. следует из второго пункта теоремы.

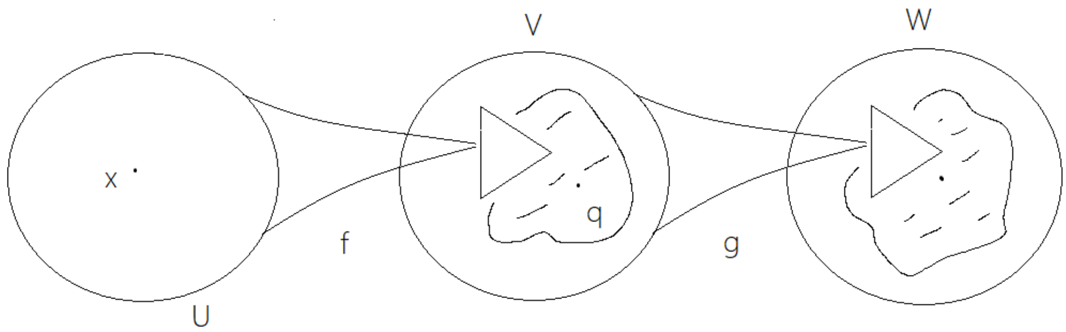
Предложение. Пусть $f : X \to Y$ — отображение топологических пространств, σ — предбаза Y. f непрерывно $\Leftrightarrow$ $\forall V \in \sigma\ f^{-1}(V)$ открыто в X.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $V \subset Y$ открыто $\Rightarrow$ $V = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \bigcap\limits_{\beta \in B_\alpha} V_{\alpha\beta}$, где $V_{\alpha\beta} \in \sigma$, а множества B_x конечны.

$\Rightarrow$ $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \bigcap\limits_{\beta \in B_\alpha} f^{-1}(V_{\alpha\beta})$ — открыто в X. $\square$

Предложение.X, Y, Z — топологические пространства, $F : X \to Y,\ g : Y \to Z,\ x \in X,\ y = f(x)$.

Предположение: f непрерывно в x, g непрерывно в y $\Rightarrow g \circ f$ непрерывно в x. В частности: если f и g непрерывно, то и $g \circ f$ непрерывно.



Доказательство. Пусть W — окрестность $(g \circ f)(x) = g(x)$.

Из того, что $\exists$ окрестность $V \ni y$ т.ч. $g(V) \subset W$, и $\exists$ окрестность $U \ni x$, т.ч. $f(U) \subset V$, следует, что $(g \circ f)(U) \subset W$. Картинка1

Определение. X, Y — топологические пространства, $x \in X,\ f : X \to Y$.

f **секвенциально непрерывно** в x $\Leftrightarrow$ $\forall$ последовательности (x_n) в X, т.ч. $x_n \to x$, выполнено $f(x_n) \to f(x)$.

Предложение. $f : X \to Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X$.

(1) f непрерывна в x $\Rightarrow f$ секвенциально непрерывно в x;

(2) Если X удовлетворяет первой аксиоме счетности (например, метризуемо), то верно и обратное.

Доказательство. (1) Пусть $x_n \to x$, V — окрестность $f(x)$.

$\exists$ окрестность $U \ni x$ т.ч. $f(U) \subset V$. $\exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N \ x_n \in U \ \Rightarrow \forall n \geq N \ f(x_n) \in V \ \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.

(2) Предположение: f не является непрерывным в x.

$\exists$ база окрестностей $\{U_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ точки x, т.ч. $U_n \supset U_{n+1} \ \forall n$;

$\exists$ окрестность $V \ni f(x)$, т.ч. $f(U_n) \ni\subset V \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Т.е. $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n U_n$, т.ч. $f(x_n) \ni V \Rightarrow x_n \to x$, но $f(x_n) \ni\to f(x)$ — противоречие. $\square$

Обозначение. $C(X,Y) = \{f : X \to Y | \text{f непрерывно}\}$.

$C(X) = C(X, \mathbb{K})$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение. $f \in C(X,Y)$ — **гомеоморфизм** $\Leftrightarrow \exists g \in C(Y,X)$, т.ч. $fg = id_Y, \ gf = id_X$.

Определение' (эквивалентное предыдущему). $f : X \to Y$ — **гомеоморфизм** $\Leftrightarrow$ f непрерывно и биективно, f^{-1} непрерывно.

Наблюдение. (1) $f : X \to Y$ — гомеоморфизм $\Rightarrow f^{-1} : \ Y \to X$ — гомеоморфизм.

(2) $f : X \to Y, \ g : Y \to Z$ — гомеоморфизм $\Rightarrow g \circ g : X \to Z$ — гомеоморфизм.

Определение. X и Y **гомеоморфны** $\Leftrightarrow$ $\exists$ гомеоморфизм $X \to Y$.

Определение. X, Y — топологические пространства, $f : X \to Y$.

f **открыто** $\Leftrightarrow$ $\forall$ открытых $U \subset X \quad f(U)$ открыто в Y.

f **замкнуто** $\Leftrightarrow$ $\forall$ замкнутых $B \subset X \quad f(B)$ замкнуто в Y.

Наблюдение. Отображение $f : X \to Y$ — гомеоморфизм $\Leftrightarrow f$ непрерывно, биективно и открыто или $\Leftrightarrow$ $f : X \to Y$ непрерывно, биективно и замкнуто.

Пример-упражнение 1. X — нормированное пространство, $x \in X, \ r > 0$.

$f : B_1(0) \to B_r(x), \ f(y) = x + ry$ — гомеоморфизм.

Пример-упражнение 2. X — нормированное пространство.

$ff : B_1(0) \to X, \ f(x) = \dfrac{x}{1 - ||x||}$ — гомеоморфизм.

Пример-упражнение 3. $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$.

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$.

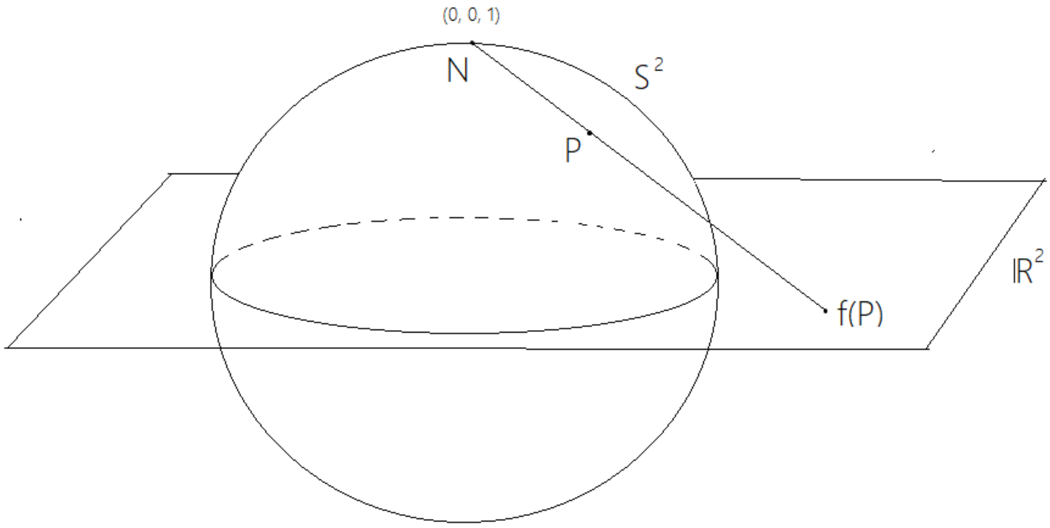
$f : C \to S^1, \ f(p) = \dfrac{p}{||p||_2}$ — гомеоморфизм.

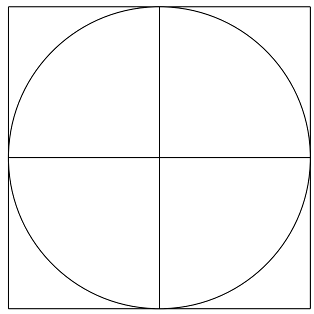
Пример-упражнение 4 (стереографическая проекция)

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — сфера.

$f : \ S^2 \backslash \{\mathbb{N}\} \to \mathbb{R}^2$ — гомеоморфизм.

Упражнение. Построить аналогичный гомеоморфизм между $S^n \backslash \{\mathbb{N}\}$ и $\mathbb{R}^n$.





Определение. Топологическое пространство M — **топологическое многообразие (C^0-многообразие)** размерности n, если

(1) M хаусдорфово;

(2) M со счетной базой;

(3) $\forall x \in M$ $\exists$ окрестность $U \ni x$, гомеоморфная открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$ (здесь топология на U определяется так: $V \subset U$ открыто в $U \Leftrightarrow V$ открыто в M).

Если U — как в (3), $\varphi: U \to V$ — гомеоморфизм, где $V \subset \mathbb{R}^n$ открыто, то (U, φ) называется **картой** на M.

Пример 1. $\mathbb{R}^n$ — топологическое многообразие.

Пример-упражнение 2. Открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ — топологическое многообразие (упражнение: доказать наличие счетной базы).

Пример-упражнение 3. Сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x||_2 = 1\}$ — топологическое многообразие. Упражнение: сколькими картами она покрывается?

11.1 Подпространства топологических пространств

(x, τ) — топологическое пространство, $Y \subset X$.

Обозначение. $\tau_Y = \{V \cap Y : U \in \tau\}$.

Наблюдение. τ_Y — топология на Y.

Определение. τ_Y — топология, **индуцированная (унаследованная)** из (x, τ). (Y, τ_Y) называется **топологическим подпространством** в (X, τ).

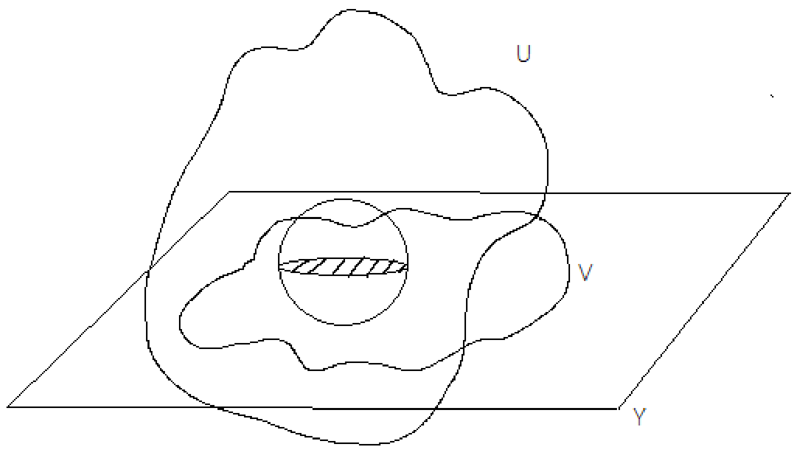
Предложение. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $Y \subset X$, τ_ρ — топология на Y, порожденная ограничением метрики ρ на $Y \times Y \Rightarrow \tau_\rho = \tau_Y$.

Доказательство. Базу τ_ρ образуют шары $B_r^Y = \{z \in Y :\ \rho(z,y) < r\}$ $(y \in Y, r > 0)$.

Замечание. $B_r^Y(y) = B_r(y) \cap Y$ (где $B_r(y) = \{z \in X :\ \rho(z,y) < r\}) \Rightarrow B_r^Y \in \tau_Y \Rightarrow \tau_\rho \subset \tau_Y$.

Пусть $V \in \tau_Y$; $V = U \cap Y$, где U открыто в X.

Пусть $y \in V \Rightarrow \exists r > 0$, т.ч. $B_r(y) \subset U \Rightarrow B_r^Y(y) \subset V \Rightarrow V \in \tau_\rho \Rightarrow \tau_Y = \tau_\rho$. $\square$



Обозначение. X — множество, $Y \subset X$. $y_Y : Y \to X$, $i_Y(y) = y$ $\forall y \in Y$ — **отображение включения** Y в X.

Теорема (основные свойства индуцированной топологии)

(X,τ) — топологическое пространство, $Y \subset X$. Снабдим Y индуцированной топологией τ_y.

(1) τ_Y — самая грубая топология на Y, в которой $i_Y :\ Y \to X$ непрерывно;

(2) Если Z — топологическое пространство, то $f : Z \to Y$ непрерывно $\Leftrightarrow$ $i_Y \circ f : Z \to X$ непрерывно.

Иначе говоря, f непрерывно как отображение из Z в Y $\Leftrightarrow$ оно непрерывно как отображение из Z в X.

Доказательство. (1) $i_Y^{-1}(U) = U \cap Y \Rightarrow i_Y$ непрерывно. Пусть σ — топология на Y, т.ч. $i_Y : (Y,\sigma) \to X$ непрерывно $\Rightarrow$ $\forall U \in \tau$ $i_Y^{-1}(= U \cap Y) \in \sigma \Rightarrow \tau_Y \subset \sigma$.

(2) $\forall U \subset X$ $(i_Y \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(i_Y(U)) = f^{-1}(U \cap Y)$.

$i_Y \circ f$ непрерывно $\Leftrightarrow \forall U \in \tau$ $(i_Y \circ f)^{-1}(U)$ открыто в $Z \Leftrightarrow \forall V \in \tau_Y$ $f^{-1}(V)$ открыто в Z и $\Leftrightarrow f$ непрерывна. $\square$

Упражнение. τ_Y — единственная топология на Y, удовлетворяющая (1), и единственная топология на Y, удовлетворяющая (2).

[дальше лекция 21.11.19]

(X, τ) — топологическое пространство $Y \subset X$.

$\tau_Y = \{U \cap Y : \ U \in \tau\}$ — **индуцированная топология** на Y.

$i_Y : Y \to X$ — отображение включения: $i_Y(y) = y \quad \forall y \in Y$.

τ_Y — самая грубая топология на Y, в которой i_Y непрерывно.

Определение. $f : X \to Y$ — отображение множеств, $A \subset X$.

Ограничение f на A — это $f|_A : \ A \to Y, (f|_A)(a) = f(a) \quad \forall a \in A$.

Предложение. X, Y — топологические пространства, $A \subset X, \ f : X \to Y$ непрерывно $\Rightarrow f\backslash_A : A \to Y$ непрерывно.

Доказательство. $f|_A = f \circ i_A$. $\square$

Предложение. (1) Множество $B \subset Y$ замкнуто в $\tau_Y \quad \Leftrightarrow B = F \cap Y$ для некоторого замкнутого $F \subset X$.

(2)$\forall A \subset Y$ (замыкание A в $(Y, \tau_Y) = \overline{A} \cap Y$, где $\overline{A}$ — замыкание A в X.

Доказательство. (1) следует из формулы $Y \backslash B = (X \backslash B) \cap Y \ \forall B \subset Y$.

(2) (Замыкание A в Y) $= \bigcap\{C \subset Y : \ C$ замкнуто в $(Y, \ \tau_Y)$ и $C \supset A\} \overset{(1)}{=} \bigcap\{F \cap Y : \ F$ замкнуто в X и $F \supset A\} = (\bigcap\{F : F$ замкнуто в X и $F \supset A\}) \cap Y = \overline{A} \cap Y$. $\square$

Предложение. X — топологическое пространство, $A \subset Y \subset X$.

(1) Если Y открыто в X, то A открыто в $Y \ \Leftrightarrow A$ открыто в X.

(2) Если Y замкнут в X, то A замкнут в $Y \ \Leftrightarrow A$ замкнут в X.

Доказательство. (1) $(\Rightarrow)$ $A = Y \cap U$, где U открыто в $X \Rightarrow A$ открыто в X.

$(\Leftarrow)$ $A = Y \cap A$, где A открыто в $X, \ \Rightarrow A$ открыто в Y.

(2) Аналогично. $\square$

12 Инициальные топологии. Произведения топологических пространств

12.1 Инициальные точки

X — множество, $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ — семейство топологических пространств $(I \neq \varnothing)$; $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$ — семейство отображений.

Определение. Инициальная топология на X, порожденная семейством $(f_i)_{i \in I}$, — это топология τ_{in} на X с предбазой $\{f_i^{-1}(U) : \ i \in I, U \in \tau_i\}$.

Пример 1. X — топологическое пространство, $Y \subset X$.

Инициальная топология на Y = инициальная топология, порожденная $\{i_Y : Y \to X\}$.

Обозначение. pt — топологическое пространство,состоящее из одной точки.

Пример 2. X — множество. Инициальная топология на X, порожденная $\{X \to pt\}$, — антидискретная топология.

Теорема (основные свойства инициальной топологии). X — множество, снабженное инициальной топологией, порожденной семейством $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$.

(1) τ_{in} — самая грубая топология на X, в которой все f_i непрерывны;

(2) Если Y — топологическое пространство, то отображение $g\colon Y \to X$ непрерывно $\Leftrightarrow f_i \circ g\colon Y \to X_i$ непрерывно $\forall i$.

Доказательство. (1) $\forall i \in I\ \forall U \in \tau_i \quad f_i^{-1}(U) \in \tau_{in} \ \Rightarrow f_i$ непрерывно.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Пусть σ — некоторая топология на X, т.ч. $\forall i \in I \quad f_i : (X, \sigma) \to X_i$ непрерывно.

$\forall i \in I\ \forall U \in \tau_i \quad f - i^{-1}(U) \in \sigma \ \Rightarrow$ (предбаза τ_{in}) $\subset \sigma \Rightarrow \tau_{in} \subset \sigma$.

(2) ($\Rightarrow$) Если g непрерывно, то $f_i \circ g$ непрерывно, т.к. f_i непрерывно.

($\Leftarrow$) Пусть $f_i \circ g$ непрерывно $\forall i$.

Достаточно доказать: $\forall$ множества $V \subset X$ из предбазы $\tau_{in} \quad g^{-1}(V)$ открыто в Y.

$V = f_i^{-1}(U)$, где $U \subset X_i$ открыто $\Rightarrow g^{-1}(V) = g^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ g)^{-1}(U)$ — открыто в Y. $\square$

Упражнение. τ_{in} — единственная топология на X со свойством (2).

12.2 Произведения множеств

$(X_i)_{i \in I}$ — семейство множеств.

Определение. Произведение семейства $(X_i)_{i \in I}$ — множество.

$\prod\limits_{i \in I} = \{x : I \to \bigcup\limits_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I\ x(i) \in X_i\}$.

Частный случай. Если $X_i = Y \quad \forall i$, то $\prod\limits_{i \in I} X_i = Y^I$ — множество всех отображений $I \to Y$.

Обозначения. $\forall x \in \prod\limits_{i \in I} X_i, \quad x_i = x(i), \quad x = (x_i)_{i \in I}\ (x_i \in X_i)$.

Если $I = \{1, 2, ..., n\}$, то вместо $\prod\limits_{i \in I} X_i$ пишут $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ или $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

В этом случае элементы $X_1 \times ... \times X_n$ — упорядоченные наборы $(x_1, ..., x_n)$, где $x_i \in X_i$.

Обозначение. $\forall j \in I\ p_j : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_j,\ p_j(x) = x_j$.

p_j — **каноническая проекция** на x_j.

12.3 Произведения топологических пространств

$(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ — семейство топологических пространств, $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$.

Определение. Топология произведения (тихоновская топология) на X — это инициальная топология, порожденная семейством $\{p_j : X \to X_j\}_{j\in I}$ — канонических проекций.

Наблюдение. (1) $\forall$ открытых $U \in X_i$

$$(*)\ p_i^{-1}(U) = \prod_{j\in J} V_j, \text{ где } V_j = \begin{cases} U & \text{при j = i,} \\ X_j & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

Множества вида (*) образуют предбазу X.

(2) $\forall$ конечного $I_0 \subset I$, $\forall i \in I_0$ пусть $U_i \subset X_i$ — открытое множество.

$$(**)\ \bigcap_{i\in I_0} p_i^{-1}(U_i) = \underset{j\in I}{V_j}, \text{ где } V_j = \begin{cases} U_j, & \text{если } j \in I_0 \\ X_j, & \text{если } j \notin I_0 \end{cases}$$

Множества вида $(**)$ образуют базу X.

(3) Если I конечно, то базу X образуют множества вида $\underset{i\in I}{U_i}$, где $U_i \subset X_i$ открыто.

Предостережение-упражнение. Если I бесконечно, то $\prod\limits_{i\in I} U_i$ необязательно открыто в X (где $U_i \subset X_i$ открыто).

Отступление. Коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Коммутативна $\Leftrightarrow g = h \circ f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

Коммутативна $\Leftrightarrow k \circ f = g \circ h$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

Коммутативна $\Leftrightarrow f = k \circ g \circ h$

Теорема (универсальное свойство произведения). $(x_i)_{i\in I}$ — семейство топологических пространств, $X = \prod\limits_{i\in i} X_i$, $\quad p_i : X \to X_i$ — каноническая проекция, Y — топологическое пространство.

Тогда $\forall$ семейства $(f_i : Y \to X_i)_{i\in I}$ непрерывных отображений $\exists!$ непрерывное отображение $f : Y \to X$, т.ч. диаграмма (D) коммутативна $\forall i \in I$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & X \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd} \qquad (D)$$

Доказательство. Определим $f : Y \to X$ так: $(f(y))_i = f_i(y) \quad \forall y \in Y,\ \forall i \in I$.

Отображение f делает диаграмму (D) коммутативной и является единственным отображением с этим свойством. Его непрерывность следует из теоремы о свойствах инициальной топологии. □

Предложение. $(x_i,\ \rho_i)$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ — метрическое пространство, $X = \prod\limits_{i=1} X_i$.

Определим ρ: $X \times X \to [0; +\infty)$ так: $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \le i \le n} \rho_i(x_i, y_i)$.

Тогда ρ — метрика на X, и она порождает топологию произведения на X.

Доказательство. Упражнение. ρ — метрика. Обозначим τ = топология на X, τ_ρ — топология, порожденная ρ.

Заметим: $\rho(x, y) < r \Leftrightarrow \rho_i(x_i, y_i) < r \quad \forall i = 1, ..., n \quad \Leftrightarrow B_r(x) = \prod\limits_{i=1}^{n=1} B_r(x_i) \Rightarrow B_r(x)$ открыт в $\tau \Rightarrow \tau_\rho \subset \tau$.

Пусть U — множество из базы τ; $U = \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$, где $U_i \subset X_i$ $\forall i$ открыто.

Пусть $x \in U$. Тогда $\forall i = 1, ..., n \quad x_i \in U_i \Rightarrow \exists r_i > 0$ т.ч. $B_{r_i}(x_i) \subset \prod\limits_{i=1}^{n} U_i = U$.

$\Rightarrow U$ открыто в $\tau_\rho \Rightarrow \tau \subset \tau_\rho \Rightarrow \tau = \tau_\rho$. □

Следствие. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Стандартная топология на $\mathbb{R}^n$, порожденная $||\cdot||_\infty$ (или $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$), совпадает с топологией произведения $\mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}$.

Доказательство. Определим f: $Y \to X$ так: $(f(y))_i = f_i(y) \quad \forall y \in Y \quad \forall i \in I$.

Отображение f делает диаграмму (D) коммутативной и является отображением с этим свойством. Его непрерывность следует из теоремы о свойствах инициальной топологии. □

Определение. (X_i, ρ_i) $(i = 1, ..., n)$ — метрические пространства, $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Определим ρ: $X \times X \to [0; +\infty]$ так: $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \le i \le n} \rho_i(x_i, y_i)$.

Тогда ρ — метрика на X, и она порождает топологию произведения на X.

Доказательство. Упражнение. ρ — метрика.

Обозначение. τ = топология произведения на X, τ_ρ — топология, порожденная ρ. Заметим: $\rho(x, y) < r \Rightarrow \rho_i(x_i, y_i) < r \quad \forall i = 1, ..., n \Rightarrow B_r(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} B_r(X_i) \Rightarrow B_r(X)$ открыто в τ $\Rightarrow \tau_\rho \subset \tau$.

Пусть U — множество из базы τ; $U = \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$, где $U_i \subset X_i \quad \forall i$ открыто.

Пусть $x \in U$. Тогда $\forall i = 1, ..., b \quad x_i \in U_i \Rightarrow \exists r_i > 0 :\ B_r(x_i) \subset U_i$.

Обозначим $r = \min\limits_{1 \le i \le n} r_i \Rightarrow B_r(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} B_r(x_i) \subset \prod\limits_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i) \subset \prod\limits_{i=1}^{n} U_i = U \Rightarrow U$

открыто в $\tau_\rho \Rightarrow \tau \subset \tau_\rho \Rightarrow \tau = \tau_\rho$. $\square$

Следствия. Стандартная топология на $\mathbb{K}^n$, порожденная $||\cdot||_\infty$ (или $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$), где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, совпадает с топологией произведения $\mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}$.

X — множество, $(X_i)_{i\in I}$ — топологические пространства, $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$.

$\{f_i^{-1}(U) \colon U \subset X_i$ открыто, $i \in I\}$ является предбазой инициальной топологии τ_{in}, порожденной (f_i).

$(X_i)_{i\in I}$, $(Y_i)_{i\in I}$ — семейства множеств, $f_i :\ (X_i \to Y_i)_{i\in I}$ — семейство отображений.

Определение. Декартово произведение семейства (f_i) — отображение $\prod\limits_{i\in I} f_i$: $\prod\limits_{i\in I} X_i \to \prod\limits_{i\in I} Y_i$. $\quad (X_i)_{i\in I} \to (f_i(X_i))_{i\in I}$.

Предположение. Пусть $(X_i)_{i\in I}, (Y_i)_{i\in I}$ — семейства топологических пространств, $f_i : X_i \to Y_i)_{i\in I}$ — семейство непрерывных отображений $\Rightarrow \Pi f_i : \Pi X_i \to \Pi Y_i$ непрерывно.

Доказательство. $\Pi X_i = X,\ \Pi Y_i = Y\ \Pi f_i = f$.

f непрерывно $\Leftrightarrow\ p_i^Y \circ f$ непрерывно $\forall i$ (см. свойства инициальной топологии) $\Leftrightarrow f_i \circ p_i^X$ непрерывно, а это верно по условию. $\square$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i^X"'] & Y \arrow[d, "p_i^Y"] \\ X_i \arrow[r, "p_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Следствие. X — топологическое пространство. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $C(X) = C(X, \mathbb{R})$.

Тогда $\forall f,\ g \in C(X)\ \ f + g \in C(X)$ и $fg \in C(X)$. Если $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow \dfrac{1}{f} \in C(X)$.

$X \underset{x \underset{\text{непрерывно}}{\mapsto} (x,x)}{\xrightarrow{\ \ \Delta\ \ }} X \times X \xrightarrow[\text{непрерывно}]{f\times g} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow[\text{непрерывно}]{+} \mathbb{K}$, т.е. $X \xrightarrow{f+g} \mathbb{K}$, $\Rightarrow f + g$ непрерывно. Аналогично fg непрерывно.

$X \xrightarrow[\text{непрерывно}]{f} \mathbb{K}\backslash\{0\} \xrightarrow[\text{непрерывно}]{t \mapsto \frac{1}{t}}$, т.е. $X \overset{\frac{1}{t}}{\to} \mathbb{K} \Rightarrow \dfrac{1}{f}$ непрерывно. $\square$

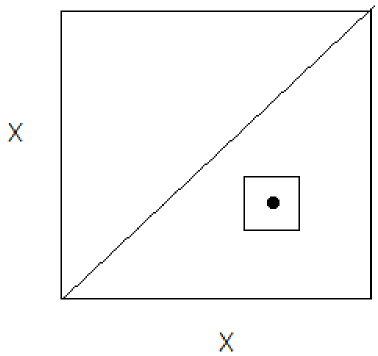
Предложение. Топологическое пространство X хаусдорфово $\Leftrightarrow$ диагональ $D_x = \{(x,\ x) :\ x \in X\} \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Доказательство. D_X замкнута в $X \times X\ \ \Leftrightarrow \forall p \in (X \times X)\backslash D_X\ \exists$ окрестность $W \ni p$ вида $W = U \times V$, где U, V — открыто в X, т.ч. $W \cap D_x = \varnothing$.

$\Leftrightarrow \forall x, y \in X$, т.ч. $x \neq y\ \exists$ открытые $U, V \subset X$, т.ч. $x \in U, y \in V$ и $U \cap V = \varnothing \Leftrightarrow X$ — хаусдорфово. $\square$

Следствие 1. Предложение. X, Y — топологические пространства, Y — хаусдорфово, $f, g : X \to Y$ непрерывно $\Rightarrow\ \{x \in X :\ f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X.

Доказательство. $F: X \to Y \times Y$, $F(x) = (f(x), g(x))$ F непрерывно, $\{x : f(x) = g(x)\} = F^{-1}(D_Y)$, а D_Y замкнуто в $Y \times Y$. $\square$



Следствие 2. X, Y — топологические пространства, Y — хаусдорфово, $f, g : X \to Y$ непрерывно. Пусть $X_0 \subset X$ — плотное подмножество, т.е. замыкание содержит все пространство, $f/_{X_0} = g/_{X_0} \Rightarrow f = g$.

Доказательство. Множество $S = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнуто и содержит X_0 $\Rightarrow S = X$. $\square$

13 Финальные топологии и дизъюнктные объединения

13.1 Финальные топологии

X — множество, $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ — семейство топологических пространств. $(f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ — семейство отображений.

Определение. Финальная топология на X, порожденная $(f_i)_{i \in I}$ — это $\tau_{f_{i \notin I}} = \{U \subset X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i \quad \forall i \in I\}$.

Замечание. $\tau_{f_{in}}$ является топологией на X.

Предложение. Финальная топология на X, порожденная отображением $\{\varnothing \to X\}$, — дискретная топология.

Теорема 1 (основные свойства финальной топологии)

(1) $\tau_{f_{in}}$ — самая тонкая топология на X, т.ч. все $f_i : X_i \to X$ непрерывны.

(2) Если Y — топологическое пространство, то отображение $g : X \to Y$ непрерывно $\Leftrightarrow$ $g \circ f_i$ непрерывно $\forall i$.

Доказательство. (1) $\forall i \in I \quad \forall\, U \subset \tau_{f_{in}} \quad f_i^{-1} \in \tau_i$ — верно по определению $\tau_{f_{in}} \Rightarrow f_i^{-1}$(открытое) = открытое $\Rightarrow f_i$ непрерывно.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & Y \\ X_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, "g \circ f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Пусть σ — топология на X, т.ч. $\forall i \in I \quad f_i : X_i \to (X, \sigma)$ непрерывно $\forall\, U \in \sigma \quad \forall i \in I \quad f_i^{-1}(U) \in \tau_i \Rightarrow U \in \tau_{fin} \Rightarrow \sigma \subset \tau_{fin}$.

(2) g непрерывно $\Leftrightarrow \forall\, V \subset Y$ открыто, $g^{-1}(V) \in \tau_{fin} \Leftrightarrow \forall$ открытого $V \subset Y \quad \forall i \in I \quad f_i^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f_i)^{-1}(V) \in \tau_i$.

Упражнение. τ_{fin} — топология на X, обладающая свойством (2).

13.2 Дизъюнктное объединение множеств

$(X_i)_{i\in I}$ — семейство множеств.

Определение. Дизъюнктное объединение семейства $(X_i)_{i\in I}$ — множество $\bigsqcup\limits_{i\in I} X_i = \{(x,i) : i \in I, x \in X_i\}$.

Обозначение. $\forall j \in I \quad q_j : X_j \to \bigsqcup\limits_{i\in I} X_i,\ \ q_j(X) = (X, j)$ — каноническое вложение X_j в $\bigsqcup\limits_{i\in I} X_i$.

Наблюдение. (1) q_j — инъекция $\forall j$;

(2) $q_i(X_i) \cap q_j(X_j) = 0 \quad \forall i \neq j$;

(3) $\bigsqcup\limits_{i\in I} X_i = \underset{i\in I}{q_i}(X_i)$.

Соглашение. Отождествляем X_j с $q_j(X)$ посредством q_j.

13.3 Дизъюнктное объединение топологических пространств (несвязные суммы)

$(X_i)_{i\in I}$ — семейство топологических пространств, $X = \bigsqcup\limits_{i\in I} X_i$, q_j: $X_j \to X$.

Определение. Топология дизъюнктного объединения на X — финальная топология, порожденная семейством (q_i: $X_i \to X)_{i\in I}$ канонических вложений.

Таким образом, $U \subset X$ открыто $\Leftrightarrow U \cap X_i$ открыто в $X_i \quad \forall i \in I$.

Теорема 2 (универсальное свойство дизъюнктных объединений)

$(x_i)_{i\in I}$ — семейство топологических пространств, Y — топологическое пространство, $X = \bigsqcup\limits_{i\in I} X_i$.

Тогда $\forall$ семейства непрерывных отображений $(f_i : X_i \to Y)_{i\in I}$ $\exists!$ непрерывное $f : X \to Y$, т.ч. диаграмма (D) коммутативна $\forall i \in I$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X_i \arrow[u, "q_i"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd} \qquad (D)$$

Доказательство. Зададим $f : X \to Y$ так: $f((x,i)) = f_i(x) \quad (\forall i \in I, \forall x \in X_i). \quad (*)$

Отображение f делает (D) коммутативной и является единственным отображеним с этим свойством (т.к. $(*)$ эквивалетно $f(q_i(x)) = f_i(x)$). Непрерывность f — из теоремы 1. $\square$

14 Связные топологические пространства

Определение. Топологическое пространство X **связно** $\Leftrightarrow$ X непредставимо в виде $X = U \cup V$, где $U, V \subset X$ открыто, непусто, $U \cap V = \varnothing$. Иначе X называется

несвязным.

Подмножество $Y \subset X$ называется **связным** $\Leftrightarrow$ оно связано как топологическое пространство в индуцированной топологии.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Y \\ X_i \arrow[u, "(D)"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

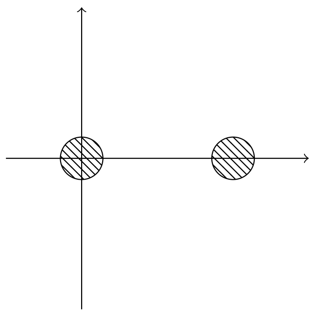
Наблюдение. X связно $\Leftrightarrow$ X непредставимо в виде $X = A \cup B$, где A, B замкнуты, непусты, $A \cap B = \varnothing$ $\Leftrightarrow \nexists$ подмножества $A \subset X$, $A \neq X, A \neq \varnothing$, открыто и замкнуто одновременно.

Пример. Дискретное пространство, состоящее более чем из 1 точки, несвязно.

Пример. Антидискретное пространство связно.

Пример. $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ несвязно, т.к. $\mathbb{R} \backslash \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Пример. $\overline{B_1}(0,0) \cup \overline{B_1}(0,3) \subset \mathbb{R}^2$ — несвязное.



Пример. X, Y — непустые топологические пространства $\Rightarrow$ $X \sqcup Y$ несвязно (т.к. X, Y открыты в $X \sqcup Y$).

Пример. $\forall A \subset \mathbb{Q}$ (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$), состоящего более чем из одной точки, несвязно.

$a, \ b \in A, \ a < b \quad \exists$ иррациональное $c \in \mathbb{R}: \ a < c < b$.

$\bigcup = A \cap (-\infty, c), \quad V = A \cap (c, +\infty) \Rightarrow U, V$ открыто в A, $U \cap V = \varnothing$ и $U \cup V = A$.

Предложение. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ связен.

Доказательство. Предположим, $[a, b] = U \cup V$, $\quad U, V \subset [a, b]$ открыты в топологии отрезка $[a, b]$), непусты, $U \cap V = \varnothing$.

Можем считать: $b \in V \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, т.ч. $(b - \varepsilon, b] \subset V$. $\quad$ (1)

Обозначим $c = \sup U$. Заметим: $c > a$ (иначе бы $U = \{a\}$ — противоречие), $c < b$ в силу (1).

Если $c \in U \Rightarrow \exists \delta > 0$, т.ч. $(c - \delta, c + \delta) \subset U \Rightarrow c + \dfrac{\delta}{2} \in U$ — противоречие с определением c.

Если $c \in V \Rightarrow \exists \delta > 0$, т.ч. $(c - \delta, c + \delta) \subset V \Rightarrow \forall x \in U \quad x \leq c - \delta$ — противоречие с определением $c \Rightarrow c \notin U \cup V = [a, b]$ — противоречие $\Rightarrow [a, b]$ связен. $\square$

14.1 Свойства связных пространств

Теорема (свойства связных пространств)

(1) $X,\ Y$ — топологические пространства, X связно, $f\colon X \to Y$ непрерывно $\Rightarrow f(X)$ связно.

(2) Пусть $X = U \cup V,\ U,\ V$ открыто, $U \cap v = \varnothing$; пусть $A \subset X$ связно $\Rightarrow A \subset U$ либо $A \subset V$.

(3) $A, B \subset X,\ A \subset B \subset \overline{A}$, A связно $\Rightarrow B$ связно.

(4) Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — семейство связных подмножеств X, имеющих общую точку $\Rightarrow \underset{i \in I}{A_i}$ связно.

(5) Пусть любые $x, y \in X$ лежат в некотором связном подмножестве $X \Rightarrow X$ связно.

(6) $X_1, ..., X_n$ — связные топологические пространства $\Rightarrow X_1 \times ... \times X_n$ связно.

Доказательство. (1) Можем считать: $f(X) = Y$. Пусть $Y = U \cup V,\ U, V \subset Y$ открыты, непусты, $U \cap V = \varnothing$.

f — сюръекция $\Rightarrow X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, где $f^{-1}(U),\ f^{-1}(V)$ открыты, непусты, не пересекаются, — противоречие.

(2) $A = (U \cap A) \cup (V \cap A) \Rightarrow U \cap A$ либо $V \cap A$ пусто. Если $U \cap A = \varnothing \Rightarrow A = V \cap A$, т.е. $A \subset V$, где $U \cap A,\ V \cap A$ открыты в A и не пересекаются.

(3) Можем считать: $B = X$, тогда $\overline{A} = X$. Пусть $X = U \cup V,\ \ U, V \subset X$ открыты, непусты, $U \cap V = \varnothing$.

Из (2): $A \subset U$ либо $A \subset V$. Пусть $A \subset U \Rightarrow A \cap V = \varnothing$ — противоречие с тем, что $\overline{A} = X \Rightarrow X$ связно.

(4) Можем считать: $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = X$. Пусть $a \in A_i \quad \forall i \in I$.

Пусть $X = U \cap V, \quad U, V \subset X$ открыты, непусты, $U \cap V = \varnothing$.

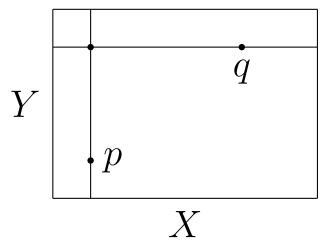
Пусть $a \in U$. Из (2): $A_i \subset U \quad \forall i \in I \Rightarrow V = \varnothing$ — противоречие $\Rightarrow X$ связно.

(5) Зафиксируем $\forall x \in X$.

$\forall y \in X \quad \exists$ связное $A_{xy} \subset X$, т.ч. $x, y \in A_{xy} \Rightarrow \bigcup\limits_{y \in X} A_{xy} = X$. Из (4) X связно.

(6) Достаточно доказать для $n = 2$ (индукция). Обозначим $X_1 = X, X_2 = Y$. Зафиксируем $p = (x_1, y_1) \in X \times Y,\ q = (x_2, y_2) \in X \times Y$.

Обозначим $A = \{x_1\} \times Y,\ B = X \times \{y_2\}$. A гомеоморфно Y, B гомеоморфно $X \Rightarrow A, B$ связно.



$(x_1, y_2) \in A \cap B \Rightarrow A \cap B = \varnothing \xrightarrow[(4)]{} A \cup B$ связно.

$p, q \in A \cup B \underset{5}{\Rightarrow} X \to Y$ связно. $\square$

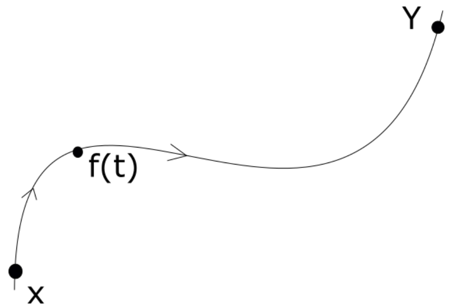
Упражнение. Доказать: произведение $\forall$ семейства топологических пространств связно.

Определение. X — топологическое пространство, $x, y \in X$. Пусть в X из x в

y — непрерывное отображение $f\colon\ [0,1] \to X$, т.ч. $f(0) = x, f(1) = y$.

14.2 Линейно связные пространства

Определение. X **линейно связно,** если $\forall x, y \in X \quad \exists$ путь из x в y.



Предложение. X линейно связно $\Rightarrow$ X связно.

Доказательство. Пусть $x, y \in X$, $f : [0,1] \to X$ — пусть из x в y, $C = f([0,1])$.

C связно (т.к. $[0, 1]$ связен, см. пункт (1) теоремы), $x, y \in C$. Теорема, п. (5) $\Rightarrow$ X связно. $\square$

14.3 Свойства линейно связных пространств

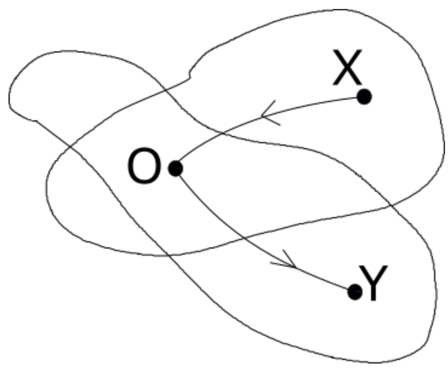
Теорема (свойства линейно связных пространств)

(1) X, Y — топологические пространства, X линейно связно, $f\colon X \to Y$ непрерывно $\Rightarrow$ $f(X)$ линейно связно;

(2) $(A_i)_{i \in I}$ — семейство линейно связных подмножеств в X, имеющих общую точку $\Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ линейно связно;

(3) $X_1, ..., X_n$ линейно связны $\Rightarrow X_1 \times ... \times X_n$ линейно связны.

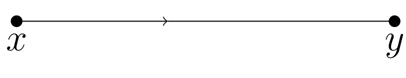
Доказательство. Упражнение. Подсказка к (2) — рисунок.



Пример 1. X — нормированное пространство над $\mathbb{R} \Rightarrow X$ линейно связно.

Действительно: $\forall x, y \in X$ рассмотрим $f : [0,1] \to X,\ f(t) = ty + (1-t)x$. f непрерывно (упражнение), $f(0) = x,\ f(1) = y$.

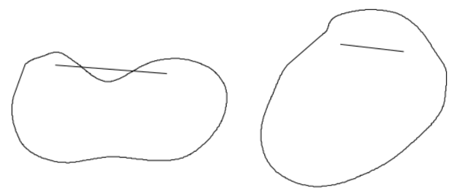
Определение. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $x, y \in X$. Обозначим $[x, y] = \{ty + (1-t)x\colon\ \ 0 \le t \le 1\}$. Это множество называется **отрезком** с концами x, y.



Множество $A \subset X$ **выпукло** $\Leftrightarrow \quad \forall x, y \in A$ выполнено $[x, y] \subset A$.

Упражнение. Шар в нормированном пространстве — выпуклое множество.

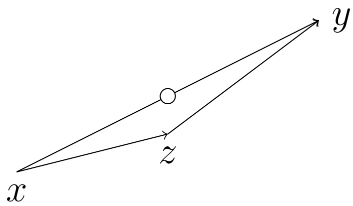
Пример 2. $\forall$ выпуклое подмножество нормированного пространства (над $\mathbb{R}$) линейно связно. Доказательство — см. пример 1.


Не выпукло Выпукло

Пример-упражнение 3. X — нормированное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim X > 1 \Rightarrow X\backslash\{0\}$ линейно связно.

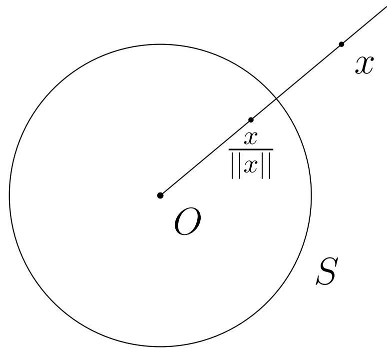
Пример 4. X — нормированное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim X > 1$. Сфера $S = \{x \in X\colon ||x|| = 1\}$ линейно связна.

Действительно: рассмотрим $f: \ X\backslash\{0\} \to S$, $f(x) = \dfrac{x}{||x||}$.



Пример 5 (n-мерный тор). Обозначим $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (окружность).

$T^n = S^1 \times ... \times S^1$ (n раз) — n-мерный тор. T^n линейно связно.



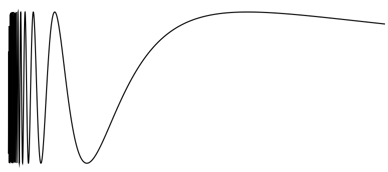
Упражнение. Обозначим $X = \{(x, \sin\dfrac{1}{x})\colon 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,y) : \ -1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Доказать: X связно, но не линейно связно.

Определение. Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ — промежуток $\Leftrightarrow A = (a,b)$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), либо $A = [a,b]$ $(-\infty < a \leq b < +\infty)$, либо $A = [a,b)$, где $(-\infty < a < b \leq +\infty)$, либо $A = (a,b]$ $(-\infty \leq a < b < +\infty)$, либо $A = \varnothing$.

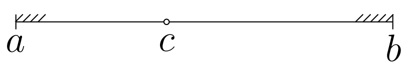
Упражнение. A — промежуток $\Leftrightarrow A$ выпукло.

Предложение. Следующие свойства подмножества $A \subset \mathbb{R}$ эквивалентны:



(1) A связно, (2) A линейно связно, (3) A — промежуток.

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (2) — очевидно, (2) $\Rightarrow$ (1) — знаем.



(1) $\Rightarrow$ (3): предположим, что A ограничено. Обозначим $a = inf A$, $b = \sup A$. $\Rightarrow A \subset [a,b]$.

Покажем: $(a,b) \subset A$. (Этого нам достаточно)

Пусть $\exists c \in (a,b)$, т.ч. $c \notin A$. Обозначим $U = (-\infty, c) \cap A$, $V = (c, +\infty) \cap A$.

U, V открыты в A, $U \cap V = \varnothing$, $\quad U \cup V = A$, $U \neq \varnothing$, $V \neq \varnothing$ — противоречие со связностью A.

Для неограниченного A рассуждения аналогичны (упражнение). $\square$

Следствие (теорема о промежуточном значении)

X — связное топологическое пространство, $f \in C(X, \mathbb{R})$, $\quad x, y \in X \quad f(x) \leq f(y)$.

Тогда $\forall c \in [f(x), f(y)]\ \exists z \in X$, т.ч. $c = f(z)$.

Доказательство. $f(X)$ — связное подмножество $\mathbb{R} \Rightarrow f(X)$ — промежуток; $f(x), f(y) \in f(X) \Rightarrow [f(x), f(y)] \subset f(X)$. $\square$

15 Связные компоненты

X — топологическое пространство.

Определение. Связная компонента — максимальная (по включению) связное подмножество X (т.е. такое связное подмножество X, которое не содержится ни в каком строго большем связном подмножестве).

Синоним: компонента связности (менее приоритетно).

15.1 Свойства связных компонентов

Теорема (свойства связных компонентов)

(1) Связные компоненты образуют разбиение X (т.е.$\forall$ компонент $X_1, X_2 \subset X$ либо $X_1 = X_2$, либо $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, и X = объединение всех его связных компонент);

(2) $\forall x \in X$ множество $C(X) = \bigcup\{A \subset X : A$ связно, $x \in A\}$ является связной компонентой X, содержащей x (связная компонента точки x);

(3) $\forall$ непустое связное $A \subset X$ содержится ровно в одной связной компоненте;

(4) Связные компоненты замкнуты в X.

Доказательство. (1), (2): пусть $X_1,\ X_2 \subset X$ — связные компоненты. Предположим, $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$. Из связности пространств $\Rightarrow X_1 \cup X_2$ связно $\Rightarrow X_1 = X_1 \cup X_2 = X_2$. Из свойств связных пространств: $C(x)$ связно и является наибольшим связных подмножеством, содержащим x. $\Rightarrow C(x)$ — компонента связности $X \Rightarrow (1), (2)$.

(3) $\exists$ связная компонента $B \subset X$, т.ч. $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \cup B$ связно $\Rightarrow B = A \cup B$, т.е. $A \subset B$. Единственность B — из (1).

(4) Пусть $B \subset X$ — это связная компонента $\Rightarrow \overline{B}$ связно $\Rightarrow B = \overline{B}$ в силу максимальности B. $\square$

Следствие. Если X состоит из конечного числа связных компонент, то эти компоненты не только замкнуты, но еще и открыты в X.

Доказательство. $X = C_1 \cup ... \cup C_n$, где $C_1, ..., C_n$ — связные компоненты. $C_1 = X \backslash (C_2 \cup ... \cup C_n)$, где $C_2 \cup ... \cup C_n$ замкнуто, $\Rightarrow C_1$ открыто. $\square$

Пример 1. Связные компоненты $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ — это $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Пример 2. X_1, X_2 — непустые связные топологические пространства, $X = X_1 \sqcup X_2 \Rightarrow X_1$ и X_2 —связные компоненты X.

Пример 3. X дискретно $\Leftrightarrow$ связные компоненты X — одноэлементные множества.

Пример 4. То же самое верно для $X = \mathbb{Q}$ (хотя $\mathbb{Q}$ и не дискретно).

Упражнение. Описать все связные компоненты канторова множества.

15.2 Линейно связные компоненты

Определение. Линейно связная компонента X — максимальное (по включению) линейно связное подмножество X.

15.3 Свойства линейной связных компонент

Теорема (свойства линейно связных компонент)

(1) Линейно связные компоненты образуют разбиение X;

(2) $\forall x \in X$ множество $PC(x) = \bigcup \{A \subset X : A$ линейно связно, $x \in A\}$ является линейно связной компонентой X, содержащей x (линейно связная компонента x). Это множество — то же самое, что $\{y \in X : \exists$ путь из x в $y\}$;

(3) $\forall$ непустое линейно связное подмножество X содержится ровно в одной линейно связной компоненте.

Доказательство. Упражнение (аналогично свойствам связных компонент).

Следствие. Разбиение пространства X на линейно связные компоненты является **измельчением** разбиения X на связные компоненты, т.е. каждая связная компонента является объединением линейно связных компонент X), — разбиение на линейно связные компоненты более мелкое, чем на связные.

Упражнение. $X = \{\sin\dfrac{1}{x}: \quad 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,\ y): \quad -1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Описать линейно связные компоненты. Замкнуты ли они?

15.4 Локально линейно связные пространства

Определение. Топологическое пространство X **локально линейно связно** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ каждая окрестность x содержит линейно связную окрестность x.

Пример 1. Открытое подмножество нормированного пространства локально линейно связно.

Пример 2. $\forall$ топологическое многообразие локально линейно связно.

Упражнение. Произведение топологических многообразий — топологическое многообразие (в конце доказать по индукции).

Предложение. X — локально линейно связное топологическое пространство. Тогда его линейно связные компоненты открыты в X и совпадают со связными компонентами. В частности: X связно $\Leftrightarrow$ оно линейно связно.

Доказательство. Пусть $A \subset X$ — линейно связная компонента. $\forall x \in A$ $\exists$ линейно связная окрестность $U_x \ni x$. $\Rightarrow A \cup U_x$ линейно связно $\Rightarrow A = A \cup U_x$ в силу максимальности A, т.е. $U_x \subset A$. $\Rightarrow A = \bigcup\limits_{x \in A} U_x$ открыто.

Пусть B — связная компонента X, т.ч. $A \subset B$. $B \backslash A = \bigcup\{$линейно связных компонент $B \backslash A$ открыто $\Rightarrow B = A \cup (B \backslash A)$, где A, $B \backslash A$ открыты, B связно $\Rightarrow B \backslash A = \varnothing$, т.е. $A = B$. $\square$

16 Компактные топологические пространства

X — множество, $\mathfrak{U} \subset 2^X$.

Определение. $\mathfrak{U}$ — покрытие подмножества $Y \subset X$ ($\mathfrak{U}$ **покрывает** Y или Y **покрывается** семейством $\mathfrak{U}$), если $\bigcup \mathfrak{U} \supset Y$. Если X — топологическое пространство, то **открытое покрытие** X — это покрытие X открытыми множествами.

Определение. Топологическое пространство X **компактно** $\Leftrightarrow$ каждое открытое покрытие X содержит конечное подпокрытие (т.е. конечное подсемейство, покрывающее X).

Определение. X — множество, $\mathfrak{F} \subset 2^X$. $\mathfrak{F}$ — **центрированное семейство** $\Leftrightarrow$ $\forall$ конечного $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ $\quad \bigcap \mathfrak{F}_0 \neq \varnothing$.

Предложение. Топологическое пространство X компактно $\Leftrightarrow$ каждое центрированное семейство его замкнутых поднмножеств имеет непустое пересечение.

Доказательство. Пусть $X - \forall$ множество, $\mathfrak{F} \subset 2^X$, $\mathfrak{U} = \{X \backslash F : F \in \mathfrak{F}\}$. Заметим:

(1) $\bigcap \mathfrak{F} = \varnothing \Leftrightarrow \mathfrak{U}$ — покрытие X;

(2) $\mathfrak{F}$ центрированное $\Leftrightarrow$ никакое конечное подсемейство в $\mathfrak{U}$ не покрывает X.

Из (1), (2) получаем требуемое. $\square$

Предложение. X — топологическое пространство, $Y \subset X$. Y компактно (в индуцированной топологии) $\Leftrightarrow$ каждое покрытие Y множествами, открытыми в

X, имеет конечное подпокрытие.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\{U_i : i \in I\}$ — покрытие Y множествами, открытыми в X. Обозначим $V_i = U_i \cap Y \Rightarrow \{V_i : i \in I\}$ — покрытие Y множествами, открытыми в $Y, \Rightarrow \exists i_1, ..., i_n \in I$, т.ч. $Y = V_{i_1} \cup ... \cup V_{i_n} \Rightarrow Y \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}$.

($\Leftarrow$) Пусть $\{V_i : i \in I\}$ — покрытие Y множествами, открытыми в Y. $\forall i \in I$ $\exists$ открытое $U_i \subset X$, т.ч. $V_i = U_i \cap Y$. $\Rightarrow \{U_i : i \in I\}$ — покрытие $Y \Rightarrow \exists i_1, ..., i_n$, т.ч. $Y \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n} \Rightarrow Y = V_{i_1} \cup ... \cup V_{i_n} \Rightarrow Y$ компактно. $\square$

Пример 1. Конечное топологическое пространство компактно.

Пример 2. Дискретное пространство компактно $\Leftrightarrow$ оно конечно.

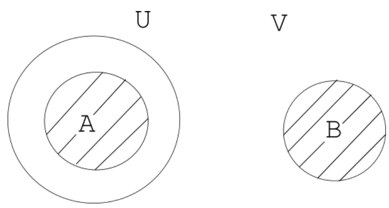
Пример 3. Антидискретное пространство компактно.

Теорема. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен.

Доказательство. См. курс анализа.

16.1 Свойства компактных пространств

Теорема (свойства компактных пространств)



(1) $f : X \to Y$ непрерывно, X компактно $\Rightarrow f(x)$ компактно;

(2) X компактен, $Y \subset X$ замкнуто $\Rightarrow Y$ компактно;

(3) X — хаусдорфово, $A, B \subset X$ компактен, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \exists$ открытые $U, V \subset X$, т.ч. $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \varnothing$;

(4) X — хаусдорфово, $Y \subset X$ компактно $\Rightarrow Y$ замкнуто в X;

(5) X — метрическое пространство, $Y \subset X$ компактно $\Rightarrow Y$ ограничено;

(6) X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ непрерывно $\Rightarrow f$ замкнуто (т.е. $\forall$ замкнутых $B \subset X \quad f(B)$ замкнуто в Y);

(7) X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ — непрерывная биекция $\Rightarrow$ f — гомеоморфизм.

Напоминание. X — метрическое пространство, $A \subset X$.

$\mathrm{diam} A = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\} \in [0; +\infty]$ — диаметр A.

Определение. A ограничено $\Leftrightarrow \mathrm{diam} A < \infty$.

Предложение. A ограничено $\Leftrightarrow A$ содержится в некотором шаре.

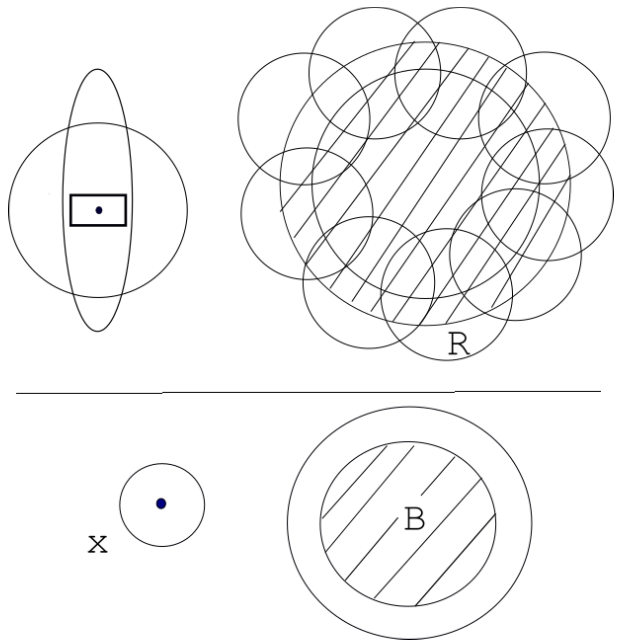
Доказательство. ($\Leftarrow$) $A \subset \overline{B}_r(x) \Rightarrow \mathrm{diam} A \leq 2r < \infty$.

($\Rightarrow$) Обозначается $d = \mathrm{diam} A$; $x \in A \Rightarrow A \subset \overline{B}_d(x)$. $\square$

Доказательство теоремы. (1) Можем считать: $f(X) = Y$. Пусть $U \subset 2^Y$ — открытое покрытие $\Rightarrow \{f^{-1}(V) : V \in U\}$ — открытое покрытие X $\Rightarrow \exists V_1, ..., V_n \in$

U, т.ч. $\{f^{-1}(V_i)\colon 1 \le i \le n\}$ — покрытие $X \overset{f \text{ сюръекция}}{\Rightarrow} \{V_i\colon 1 \le i \le n\}$ — покрытие Y.

(2) Пусть U — покрытие Y множествами, открытыми в $X \Rightarrow U \cup \{X \backslash Y\}$ — открытое покрытие $X \Rightarrow \exists V_1, ..., V_n \in U$, т.ч. $X = V_1 \cup .... \cup V_n \cup (X \backslash Y) \Rightarrow Y \subset V_1 \cup ... \cup V_n \Rightarrow Y$ компактно.



(3) Зафиксируем $x \in A$. $\forall y \in B \exists$ открытое $U_{xy} \ni x, V_{xy} \ni y$, т.ч. $U_{xy} \cap V_{xy} = \varnothing$.

$\{V_{xy}\colon y \in B\}$ — покрытие $B \Rightarrow B \subset V_{xy_1} \cup ... \cup V_{xy_n} \overset{\text{обозначим}}{=} V_x$. Обозначим $U_x = U_{xy_1} \cap ... \cap U_{xy_n}$.

$\Rightarrow U_x,\ V_x \subset X$ открыто, $x \in U_x,\ B \subset V_x,\ U_x \cap V_x = \varnothing$.

$\{U_x\colon x \in A\}$ — покрытие $A \Rightarrow A \subset U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n} \overset{\text{обозначим}}{=} U$.

Обозначим $V = V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_n} \Rightarrow U, V \subset X$ — искомое.

(4) Пусть $x \in X \backslash Y$. Применим (4) к $\{x\}$ и $Y \ \Rightarrow \exists$ открытое $U \ni x,\ U \cap Y = \varnothing \Rightarrow x \notin \overline{Y} \Rightarrow Y = \overline{Y}$.

(5) Зафиксируем $\forall x \in X \Rightarrow X = \bigcup\limits_{r>0} B_r(x) \Rightarrow \exists r_1, ..., r_n > 0$, т.ч. $Y \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{r_i}(x) = B_R(x)$, где $R = \max\limits_{1 \le i \le n} r_i$.

(6) Пусть $B \subset X$ замкнуто $\overset{(2)}{\Rightarrow} B$ компактно $\overset{(1)}{\Rightarrow} f(B)$ компактно $\overset{(4)}{\Rightarrow} f(B)$ замкнуто в Y.

(7) — частный случай (6) (т.к. гомеоморфизм — то же, что замкнутая непрерывная биекция). $\square$

Следствие. X — компактное топологическое пространство, $X \neq \varnothing, f \in C(X, \mathbb{R}) \Rightarrow f$ ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство. Теорема (1) $\Rightarrow\ f(X) \subset \mathbb{R}$ компактно $\overset{(5)}{\Rightarrow} f(X)$ ограничено, т.е. f ограничена. Обозначим $a = inf f(X),\ b = \sup f(X)$. Из (4) теоремы: $f(X)$ замкнуто в $\mathbb{R} \Rightarrow a, b \in f(X)$, т.е. $a = \min\limits_{x \in X} f(x),\ b = \max\limits_{x \in X} f(x)$. $\square$

17 Некоторые свойства центрированных семейств

X — множество.

Определение. Семейство $\mathfrak{F} \subset 2^X$ называется **центрированным**, если $\forall$ конечного $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F} \quad \bigcap \mathfrak{F}_0 \neq \varnothing$.

Предложение 1. Топологическое пространство X компактно $\Leftrightarrow$ $\forall$ центрированного семейства $\mathfrak{F}$ замкнутых подмножеств $X \quad \bigcap \mathfrak{F} \neq \varnothing$.

Доказательство. Было.

Предложение 2. Топологическое пространство X компактно $\Leftrightarrow$ $\forall$ центрированного семейства $\mathfrak{F}$ замкнутых подмножеств $X \quad \bigcap\{\overline{A}\colon A \in \mathfrak{F}\} \neq \varnothing$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Из предложения 1.

($\Rightarrow$) Семейство $\{\overline{A}\colon A \in \mathfrak{F}\}$ центрированное. Далее см. предложение 1. $\square$

Лемма. X, Y — множества.

(1) $\mathfrak{R} \subset 2^X$ — центрированное семейство, $g: X \to Y$ — отображение $\Rightarrow \{g(A)\colon A \in \mathfrak{F}\}$ — центрированное семейство.

(2) $\forall$ центрированного семейства $\mathfrak{F} \subset 2^X \quad \exists$ максимальное центрированное семейство, содержащее $\mathfrak{F}$, т.е. такое центрированное семейство, которое не содержится ни в каком строго большем центрированном семействе подмножеств X).

(3) Пусть $\mathfrak{F} \subset 2^X$ — максимальное центрированное семейство $\Rightarrow \forall A_1, ..., A_n \subset \mathfrak{F}$ выполнено $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. (1) $\forall A_1, ..., A_n \in \mathfrak{F} \quad \bigcap\limits_{i=1}^{n} g(A_i) \supset g(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i) \neq \varnothing$, где $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$.

(2) Обозначим $\Gamma = \{\varepsilon \subset 2^X : \varepsilon > \mathfrak{F}\}$.

(Γ, $\subset$) — ЧУМ. Покажем: Γ удовлетворяет условию леммы Цорна.

Пусть Л $\subset \Gamma$ — линейно упорядоченное подмножество. Обозначим $\mathfrak{H} = \bigcap\{\varepsilon : \varepsilon \in \text{Л}\}$. Покажем: $\mathfrak{H}$ центрированное.

Пусть $H_1, ..., H_n \in \mathfrak{H} \Rightarrow \forall i = 1, ..., n \quad H_i \in \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \in$ Л.

$\exists k$, т.ч. $\varepsilon_i \subset \varepsilon_k \quad \forall i = 1, ..., n \Rightarrow H_1, ..., H_n \in \varepsilon_k \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i \neq \varnothing \Rightarrow \mathfrak{H}$ центрированное $\Rightarrow \mathfrak{H} \in \Gamma$ и $\mathfrak{H} \supset \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in$ Л $\Rightarrow \Gamma$ удовлетворяет условию Леммы Цорна $\Rightarrow$ в Γ есть максимальный элемент.

(3) Семейство $\{A_1 \cap ... \cap A_n\colon A_i \in \mathfrak{F},\ n \in \mathbb{N}\}$ центрированное и содержит $\mathfrak{F} \Rightarrow$ оно равно $\mathfrak{F}$. $\square$

18 Теорема Тихонова (очень важная)

Теорема (А. Н. Тихонов). $(X_i)_{i \in I}$ — семейство компактных топологических пространств $\Rightarrow \prod\limits_{i \in I} X_i$ компактно.

Доказательство. Обозначим $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$. Пусть $\mathfrak{F} \subset 2^X$ — центрированное семейство.

Л(2) $\Rightarrow \exists$ максимальное центрированное семейство $\mathfrak{F}_{\max}$, $\quad \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_{\max}$.

Достаточно доказать: $\bigcap\{\overline{A}\colon A \in \mathfrak{F}_{\max}\} \neq \varnothing$ (см. предложение 2) $(*)$

$\forall i \in I$ обозначим $p_i\colon X \to X_i$ каноническую проекцию.

Семейство $\{p_i(A) : A \in \mathfrak{F}_{\max}\} \subset 2^{X_i}$ — центрированное (Л(1)). Предложение (2) $\Rightarrow \exists x_i \in X_i$, т.ч. $x_i \in \overline{p_i(A)} \quad \forall A \in \mathfrak{F}_{\max}$. Обозначим $x = (x_i)_{i\in I} \in X$.

Пусть U — базисная окрестность x вида $U = \bigcap\limits_{i\in J} p_i^{-1}(U_i)$, где $J \subset I$ конечное, $U_i \subset X_i$ — открыто.

Покажем: $U \cap A \neq \varnothing \quad \forall A \in \mathfrak{F}_{\max}$.

$\forall i \in J \quad x_i = p_i(x) \in U_i \Rightarrow U_i \cap p_i(A) \neq \varnothing \quad A \in \mathfrak{F}_{\max} \Rightarrow p_i^{-1}(U_i) \cap A \neq \varnothing \quad \forall A \in \mathfrak{F}_{\max}$.

$\overset{Л(3)}{\Rightarrow} \mathfrak{F}_{\max} \cup \{p_i^{-1}(U_i)\}$ — центрированное $\Rightarrow p^{-1}(U_i) \in \mathfrak{F}_{\max}$ (в силу максимальности) $\forall i \in J$.

$\overset{Л(3)}{\Rightarrow} U \in \mathfrak{F}_{\max} \Rightarrow \forall A \in \mathfrak{F}_{\max} U \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \forall A \in \mathfrak{F}_{\max} \quad x \in \overline{A}$, т.е. $x \in \bigcap\{\overline{A}\colon A \in \mathfrak{F}_{\max} \Rightarrow (*)$ доказано. $\square$

Следствие. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно $\Leftrightarrow X$ замкнуто и ограничено (в евклидовой метрике).

Доказательство. $(\Rightarrow)$ — из свойств компактных пространств.

$(\Leftarrow)$ X ограничено $\Rightarrow X$ содержится в замкнутом кубе $C \subset \mathbb{R}^n$, C компактен как произведение отрезков, X замкнут в $C \Rightarrow X$ компактен. $\square$

19 Локально компактные пространства

Определение. Топологическое пространство X **локально компактно** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X\ \exists$ окрестность $U \ni x$, т.ч. $\overline{U}$ компактно. Предупреждение: в разной литературе локальная компактность может пониматься по-разному.

Примеры. (1) компактность $\Rightarrow$ локальная компактность;

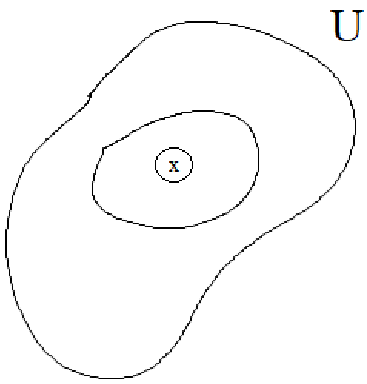
(2) Дискретное пространство локально компактно;

(3) $\mathbb{R}^n$ со стандартной топологией локально компактно (хотя само, конечно, не компактно);

(4) (чуть более общий пример) Открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ локально компактно;

(5) Топологическое многообразие локально компактно;

(6) $\mathbb{Q}$ не локально компактно. Действительно: $\forall$ интервала (a,b) замыкание $(a,b)\cap\mathbb{Q}$ в $\mathbb{Q}$ — это $[a,b]\cap\mathbb{Q}$ — некомпактно (т.к. в $\mathbb{R}$ он не замкнут);



(7) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не локально компактно. Действительно: пусть $U \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — базисное открытое множество, $U = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} U_i$, $U_i \subset \mathbb{R}$, причем все U_i, кроме их конечного числа, — это $\mathbb{R}$. Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$, т.ч. $U_i = \mathbb{R}$. Обозначим $p_i\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ — каноническая проекция.

$p_i(\overline{U}) = \mathbb{R}$ — некомпактен $\Rightarrow \overline{U}$ некомпактен $\Rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не локально компактен.

Предложение (доказательство в других курсах). Любое бесконечномерное нормированное пространство не локально компактно.

Предложение 1. $X_1, ..., X_n$ — локально компактные пространства $\Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ локально компактно.

Доказательство. $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \prod\limits_{i=1}^{n} x_i, \forall i = 1, ..., n$ $\exists$ окрестность $U_i \ni x_i$, т.ч. $\overline{U_i}$ компактно.

$U = \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$ — окрестность x, $\overline{U} = \prod\limits_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ (упражнение) $\Rightarrow \overline{U}$ компактно. $\square$

Наблюдение. Произведение бесконечного числа локально компактных пространств необязательно локально компактно — см пример 7.

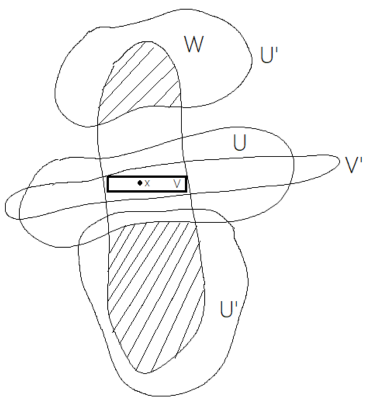
Предложение 2. X — локально компактное пространство, $Y \subset X$ замкнуто $\Rightarrow Y$ локально компактно.

Доказательство. $\forall y \in Y$ $\exists U \subset X$, $U \ni y$, т.ч. $\overline{U}$ компактно.

$U \cap Y$ — окрестность y в Y, замыкание $U\cap Y$ в Y равно $\overline{U}\cap Y$, где $\overline{U}, Y$ замкнуты.

$\overline{U} \cap Y$ — замкнутое подмножество в $\overline{U} \Rightarrow$ оно компактно. $\square$

Предложение 3. X — хаусдорфово локальное компактное пространство, $Y \subset X$ открыто $\Rightarrow Y$ локально компактно.



Лемма. X — хаусдорфово локальное компактное пространство, $x \in X$. Тогда $\forall$ окрестности $U \ni x$ $\exists$ окрестность $V \ni x$, т.ч. $\overline{V}$ компактно и $\overline{V} \subset U$.

Доказательство. $\exists$ окрестность $W \ni x$, т.ч. $\overline{W}$ компактно. $K = \overline{W} \setminus U$ замкнуто в $\overline{W} \Rightarrow K$ компактно, $x \notin K$.

$\exists$ открытые $U', V' \subset X$, т.ч. $K \subset U', x \in V', U' \cap V' = \varnothing$. Обозначим $V = V' \cap W$. V — окрестность x; $\overline{V} \subset \overline{W} \Rightarrow \overline{V}$ компактно.

$\overline{V} \subset \overline{V'} \cap \overline{W} \subset \overline{(X\setminus U')} \cap \overline{W} = (X\setminus U') \cap \overline{W} \subset (X\setminus K) \cap \overline{W} \subset \overline{W}\setminus K \subset U.\square$

Доказательство предложения 3. $\forall y \in Y$ $\exists$ окрестность $V \ni y$ в X, т.ч. $\overline{V}$ компактно, $\overline{V} \subset Y$ (см. лемму) $\Rightarrow V$ — окрестность y в Y, замыкание V в Y — это $\overline{V} \cap Y = \overline{V}$ — компактно. $\square$

Пусть $X - \forall$ топологическое пространство.

20 Одноточечная компактификация

Обозначим $X_+ = X \sqcup \{\infty\}$ — дизъюнктное объединение множеств.

Обозначим $\tau_+ = \{U \subset X : U$ открыто в $X\} \cup \{U \subset X_+ \backslash U$ компактно и замкнуто в $X\}$.

Упражнение. τ_+ — топология на X_+.

Определение. (X_+, τ_+) — **одноточечная компактификация** X.

Определение. X, Y — топологические пространства. Отображение $f \colon X \to Y$ — **открытое вложение** $\Leftrightarrow f$ непрерывно, инъективно и открыто.

Наблюдение. f — открытое вложение $\Rightarrow f$ — гомеоморфизм X на $f(X)$.

Теорема. X — топологическое пространство.

(1) $i_X \colon X \to X_+$ — открыто вложение;

(2) X_+ компактно;

(3) X_+ хаусдорфово $\Leftrightarrow X$ хаусдорфово и локально компактно;

(4) Если X компактно, то X_+ — дизъюнктное объединение X и $\{\infty\}$ как топологических пространств, $\{\infty\}$ — изолированная точка X_+;

(5) X некомпактно $\Leftrightarrow X$ плотно в X_+.

Доказательство. (1) i_X инъективно (очевидно) и открыто — из определения τ_+. Докажем непрерывность. $U \subset X_+$ открыто. Если $\infty \notin U \Rightarrow i_X^{-1}(U) = U$ и U открыто в X.

Если $\infty \in U$, то $i_X^{-1}(U) = U \cap X = X \backslash (X_+ \backslash U)$, где $(X_+ \backslash U)$ замкнуто в X, — открыто в X.

(2) Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие X_+. $\exists j \in I$, т.ч. $\infty \in U_j$. $X_+ \backslash U_j$ компактно, $\{U_i\}_{i \in I}$ — покрытие $X_+ \backslash U_j \Rightarrow \exists i_1, ..., i_n \in I$, т.ч. $X_+ \backslash U_j \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n} \Rightarrow X_+ = U_j \cup U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}$.

(3) ($\Rightarrow$) Пусть X_+ хаусдорфово. Из (1): топология на X, индуцированная из X_+, совпадает с исходной топологией на $X \Rightarrow X$ хаусдорфово.

Пусть $x \in X$. $\exists$ открытые $U, V \subset X_+$, т.ч. $x \in U, \infty \in V, U \cap V = \varnothing \Rightarrow U$ — окрестность x в X; $X_+ \backslash V \Rightarrow \overline{U} \subset X_+ \backslash V$ (где $\overline{U}$ — замыкание U в X) $\Rightarrow \overline{U}$ компактно.

($\Leftarrow$) Пусть X хаусдорфово и локально компактно, $x, y \in X_+, x \neq y$. Покажем: $\exists$ открытое $U, V \subset X_+, U \ni x, V \ni y, U \cap V = \varnothing$. Если $x, y \in X$, то такие $U, V \exists$, т.к. X хаусдорфово.

Пусть $x \in X, y = \infty$. $\exists$ открытое $U \subset X,\ x \in U$, т.ч. $\overline{U}$ компактно (где $\overline{U}$ — замыкание U в X). Обозначим $V = X_+ \setminus \overline{U}$. $\infty \in V, U \cap V = \varnothing, V$открыто (т.к. $X_+ \setminus V = \overline{U}$ замкнуто в X и компактно).

(4) $X_+ \setminus \{\infty\} = X$ — замыкнуто в X и компактно $\Rightarrow \{\infty\}$ — открытое подмножество $X_+ \Rightarrow \{\infty\}$ — изолированная точка X_+.

$\forall$ открытого $U \subset X_+ \quad U \cap X$ открыто и $U \cap \{\infty\}$ открыто (как пересечение двух открытых) $\Rightarrow \tau_+$ — топология дизъюнктного объединения X и $\{\infty\}$.

(5) ($\Leftarrow$) — из (4).

($\Rightarrow$) Если X не плотно в X_+, то $\exists$ открытое непустое $U \subset X_+, U \cap X = \varnothing \Rightarrow U = \{\infty\} \Rightarrow X_+ \setminus U = X$ компактно. $\square$

Предложение. Y — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $y_0 \in Y, X = Y \setminus \{y_0\}$. Определим $f\colon X_+ \to Y$ так: $f(x) = x \quad \forall x \in X, f(\infty) = y_0$. Тогда f — гомеоморфизм.

Доказательство. Очевидно, f — биекция $\Rightarrow$ можем отождествить X_+ и Y как множества: $y_0 = \infty$. Обозначим $\tau =$ исходная топология на Y. Осталось доказать: $\tau = \tau_+$.

Пусть $U \in \tau$. Если $y_0 \notin U \Rightarrow U$ — открытое подмножество $X \Rightarrow U \in \tau_+$.

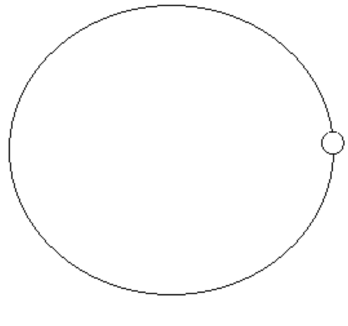
Если $y_0 \in U$, то $Y \setminus U$ замкнуто в $Y \Rightarrow Y \setminus U$ компактно и содержится в X. Оно замкнуто в X, т.к. X хаусдорфово.

Доказали, что $\tau \subset \tau_+$. Это значит, что отображение $I\colon (Y, \tau_+) \to (Y, \tau),\ I(y) = y$, непрерывно. Т.к. (Y, τ_+) компактно, а (Y, τ) — хаусдорфово, то есть I — непрерывная биекция из компактного пространства в хаусдорфово, то I — гомеоморфизм $\Rightarrow \tau = \tau_+$. $\square$

Примеры. (1) $[0;1)_+ \cong [0;1]$ (см. предложение).

(2) $(0;1)_+ \cong S^1 \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

$f\colon (0;1) \to S^1 \setminus \{1\}, f(t) = e^{2\pi i t}$ — гомеоморфизм (упражнение). Из предложения $(0,1)_+ \cong (S^1 \setminus \{1\}_+) \cong S^1$.



(3) (упражнение) $(\mathbb{R}^2)_+ \cong S^2$.

(4) (упражнение) $(\mathbb{R}^n)_+ \cong S^n$.

21 Эквивалентность норм

X — векторное пространство над $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

Пусть $||\cdot||'$ и $||\cdot||''$ — нормы на X; τ', τ'' — порожденные ими топологии на X.

Определение. 1) $||\cdot||'$ **мажорируется** $||\cdot||''$ ($||\cdot||' \prec ||\cdot||''$) $\Leftrightarrow \tau' \subset \tau''$;

2)$||\cdot||'$ и $||\cdot||''$ **эквиваленты** ($||\cdot||' \sim ||\cdot||''$) $\Leftarrow \tau' = \tau''$.

Предложение. Следующие свойства эквивалентны:

(1) $||\cdot||' \prec ||\cdot||''$;

(2) Из $x_n \underset{\tau''}{\to} x \Rightarrow x_n \underset{\tau'}{\to} x$;

(3) $\exists C > 0$, т.ч. $\forall x \in X\ ||x||' \le C||x||''$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ Отображение $I\colon (X, \tau'') \to (X, \tau')$, $I(x) = x$, непрерывно $\Leftrightarrow$ оно секвенциально непрерывно $\Leftrightarrow$ (2).

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $x_n \underset{\tau''}{\to} x$, т.е. $||x_n - x||'' \to 0 \Rightarrow ||x_n - x||' \le C||x_n - x||'' \to 0 \Rightarrow ||x_n - x||' \to 0$, т.е. $x_n \underset{\tau'}{\to} x$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть (3) не выполнено. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X$, т.ч. $||x_n||' > n^2||x_n||''$. Обозначим $y_n = \dfrac{x_n}{n||x_n||''}$. $||y_n||'' = \dfrac{||x_n||''}{n||x_n||''} = \dfrac{1}{n} \to 0 \Rightarrow y_n \underset{\tau''}{\to} 0$.

$||y_n||' = \frac{||x_n||'}{n||x_n||''} > \dfrac{n^2||x_n||''}{n||x_n||''} = n \to \infty \Rightarrow y_n \underset{\tau'}{\not\to} 0$ — противоречие с (2). $\square$

Следствие. $||\cdot||' \sim ||\cdot||'' \Leftrightarrow \exists c,\ C > 0$, т.ч. $\forall x \in X \quad c||x||' \le ||x||'' \le C||x||'$.

Теорема. На конечномерном векторном пространстве любые две нормы эквиваленты.

Доказательство. Пусть $||\cdot||$ — какая-либо норма на $\mathbb{K}^n$. Покажем: $||\cdot|| \sim ||\cdot||_2$, где $||\cdot||_2$ — евклидова норма: $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2}$. $\forall x = (x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}^n)$.

$$||x|| = ||\sum_{i=1}^{n} x_i e_i|| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i|||e_i|| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}||e_i||^2}}_{=C} = C||x||_2 \Rightarrow ||\cdot|| \prec ||\cdot||_2,$$

где $e_i = (0...0\underset{(i)}{1}0...0)$.

Обозначим $f(x) = ||x||$. Покажем: f непрерывна на $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_2)$. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n \quad |f(x) - f(y)| = |||x|| - ||y||| \le ||x - y|| \le C||x - y||_2 \Rightarrow$ из $x_n \underset{||\cdot_2||}{\to} x$ следует $f(x_n) \to f(x)$.

$\Rightarrow f$ секвенциально непрерывна, т.е. непрерывна на $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_2)$. Обозначим $S = \{x \in \mathbb{K}^n \colon ||x||_2 = 1\}$. S компактна (т.к. замкнута и ограничена). f непрерывна на $S\ \Rightarrow \exists \min\limits_{x \in S} f(x) = a > 0$.

$\forall x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ рассмотрим $y = \dfrac{x}{||x||_2}$. $y \in S \Rightarrow f(y) = ||y|| \ge a$, т.е. $||\dfrac{x}{||x||_2}|| \ge a$, т.е. $||x|| \geq a||x||_2 \Rightarrow ||\cdot|| \sim ||\cdot||_2$. $\square$

Теорема$'$ (эквивалентна предыдущей). Любая норма на $\mathbb{K}^n$ задает на $\mathbb{K}^n$ топологию произведения $\underbrace{\mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}}_{n}$.

22 Факторпространства

Пусть X — множество, $\sim$ — отношение эквивалентности на X.

Обозначение. $\forall x \in X$ $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$ — **класс эквивалентности** x.

Напоминание. Классы эквивалентности образуют разбиение X, то есть два класса эквивалентности либо равны, либо не пересекаются.

Обозначание. Факторпространство X по $\sim$ — это множество $X_{/\sim} = \{[x] : x \in X\}$.

Обозначение. $q\colon X \to X_{/\sim}$, $q(x) = [x]$ — **отображение факторизации.**

Пусть теперь X — топологическое пространство.

Определение. Фактортопология на $X_{/\sim}$ — финальная топология τ_q, порожденная q. Т.е.: $U \in \tau_q \Leftrightarrow q^{-1}(U)$ открыто в X.

Определение. $(X_{/\sim}, \tau_q)$ — **факторпространство** X по $\sim$.

Теорема 1 (свойства фактортопологии)

(1) τ_q — самая тонкая топология на $X_{/\sim}$, в которой q непрерывно.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[dl, "y"] \\ X_{/\sim} & \end{tikzcd}$$

(2) Если Y — топологическое пространство, то отображение $g\colon X_{/\sim} \to Y$ непрерывно $\Leftrightarrow$ $g \circ q\colon X \to Y$ непрерывно.

Доказательство. См. теорему о свойствах финальной топологии. $\square$

Теорема 2 (универсальное свойство факторпространств)

Пусть Y — топологическое пространство, $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, постоянное на классах эквивалентности, т.е. из $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$. Тогда $\exists!$ непрерывное $\widetilde{f}$, делающее эту диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X_{/\sim} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Доказательство. $\forall u \in X_{/\sim}$ выберем $\forall x \in u$ и положим $\widetilde{f}(u) = f(x)$. Если $x, y \in u \Rightarrow f(x) = f(y)$ по условию $\Rightarrow \widetilde{f}\colon X_{/\sim} \to Y$ корректно определено.

По построению $\widetilde{f}$ делает диаграмму (1) коммутативной (т.к. определение $\widetilde{f}$ означает, что $\widetilde{f}(a(x)) = f(x)$ $\forall x$) и является единственным отображением с этим свойством. Из теоремы 1 и непрерывности f получаем непрерывность $\widetilde{f}$. $\square$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда:

(1) $\widetilde{f}$ — сюръекция $\Leftrightarrow f$ — сюръекция;

(2) $\widetilde{f}$ — инъекция $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$ условия $x \sim y$ и $f(x) = f(y)$ эквивалентны;

(3) Пусть X компактно, Y хаусдорфово и выполнены (1), (2) $\Rightarrow \widetilde{f}$ — гомеоморфизм.

Доказательство. (1) $\widetilde{f}(X_{/\sim}) = \widetilde{f}(q(X)) = f(X)$.

(2) $\widetilde{f}$ — инъекция $\Leftrightarrow \forall u, v \in X_{/\sim}(\widetilde{f}(u) = \widetilde{f}(v) \Leftrightarrow u = v) \Leftrightarrow \forall x, y \in X \quad (\underbrace{\widetilde{f}(q(x))}_{=f(x)} = \underbrace{\widetilde{f}(q(y))}_{=f(y)} \Leftrightarrow x \sim y)$.

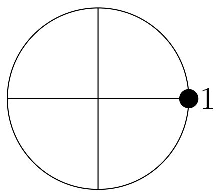
(3) X компактно $\Rightarrow$ $X_{/\sim} = q(X)$ компактно; из (1), (2): $\widetilde{f}$ — непрерывная биекция $\Rightarrow \widetilde{f}$ — гомеоморфизм. $\square$

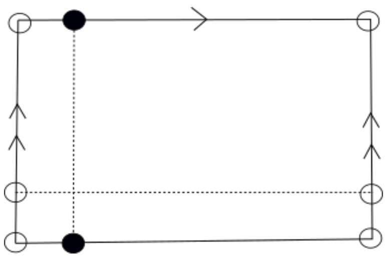
Пример 1. Введем отношение эквивалентности на $[0, 1] : 0 \sim 1$, остальные классы эквивалентности — одноэлементные множества. Покажем: $\boxed{[0, 1]_{/\sim} \simeq S^1.}$

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$

$$\begin{tikzcd}
{[0;1]} \arrow[r, "f"] & S^1 \\
{[0;1]_{/\sim}} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

$f(t) = e^{2\pi i t}$
f удовлетворяет условию теоремы 3 $\Rightarrow \widetilde{f}$ — гомеоморфизм.





Пример 2. Введем отношение эквивалентности на $[0, 1] \times [0, 1]$:

$(t, 0) \sim (t, 1),\ (0, t) \sim (1, t)\ \forall t \in [0, 1]$.

Остальные классы эквивалентности — одноэлементные множества.

Покажем: $\boxed{([0, 1] \times [0, 1])_{/\sim} \simeq T^2}$

$f(s, t) = (e^{2\pi s}, e^{2\pi i t})$. f удовлетворяет условию теоремы 3 $\Rightarrow \widetilde{f}$ — гомеоморфизм.

$$\begin{tikzcd}
{[0;1]^2} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & T^2 \\
{[0;1]^2_{/\sim}} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Пример 3. Введем отношение эквивалентности на $\mathbb{R} : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Покажем: топология на $\mathbb{R}_{/\sim}$ антидискретна.

Пусть $U \subset \mathbb{R}_{/\sim}$ открыто, непусто $\Rightarrow q^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ открыто, непусто и инвариантно относительно сдвигов на различные числа (т.е. если $x \in q^{-1}(U)$, то $\forall r \in \mathbb{Q}\ x + r \in q^{-1}(U)) \Rightarrow q^{-1}(U) = \mathbb{R} \Rightarrow U = q(q^{-1}(U)) = q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{/\sim} \Rightarrow$ фактортопология антидискретна.

23 Частный случай фактопространств: стягивание подмножества в точку

X — топологическое пространство, $A \subset X$.

Введем на X отношение эквивалентности: $x \sim y \Leftrightarrow$ либо $x = y$, либо $x, y \in A$.

Обозначение. X / A = X / $\sim$.

Говорят, X / A получено из X **стягиванием A в точку.**

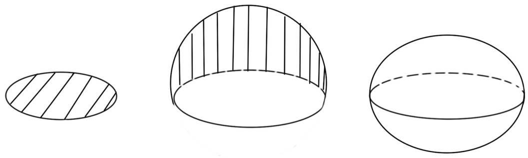
Пример 1. $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$ (см. прошлую лекцию).

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] & X_+ \\ X \arrow[u, "\text{вкл}"] \arrow[ur, "\text{вкл}"'] & \end{tikzcd}$$

Лемма. Пусть Y — хаусдорфово топологическое пространство, $X \subset Y$ — открытое множество. Рассмотрим f: $Y \to X_+$, $f(x) = \begin{cases} x, \text{если } x \in X, \\ \infty, \text{если } x \notin X. \end{cases}$

Доказательство. Пусть $U \subset X_+$ открыто. Предположим: $\infty \notin U \Rightarrow U \subset X, U$ открыто в $X \Rightarrow f^{-1}(U) = U \Rightarrow U$ открыто в Y.

Пусть теперь $\infty \in U \Rightarrow K = X_{+\setminus U} \subset X$, K компактен $\Rightarrow K$ замкнут в $Y \Rightarrow f^{-1}(U) = Y\ f^{-1}(K) = Y\ K$ — открыто в Y. $\square$ (Доказали, что прообраз открытого открыт $\Rightarrow$ доказательство окончено.)



$$\begin{tikzcd} \overline{D} \arrow[r, dash, "f"] & D_+ \arrow[r, dash, "\varphi"] & S^2 \\ & D \arrow[ul, "\text{вкл}"] \arrow[ur, "\text{вкл}"'] & \end{tikzcd}$$

Пример 2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

$\overline{D} = \{(x, y) :\in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, S^1 = \partial\overline{D}$.

Покажем: $\boxed{\overline{D}/S^1 \cong S^2.}$

Знаем: $D_+ \cong \mathbb{R}^2_+ \cong S^2$.

Зафиксируем гомоморфизм $\varphi \colon D_+ \to S^2$.

$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in D, \\ \infty, \text{если } x \in S^1. \end{cases}$ Из леммы: f непрерывна.

Обозначим $g = \varphi \circ f \colon \overline{D}/S^1 \cong S^2$.

23.1 Частный случай факторпространств: склейка по отображению

X, Y — топологические пространства, $A \subset Y, f \colon A \to X$ непрерывно.

Введем отношение эквивалентности на $X \sqcup Y : a \sim f(a)\ \forall a \in A$, остальные классы эквивалентности — одноэлементные множества.

Обозначение. $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/\sim$ — склейка X и Y по f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X_{/\sim} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности.

$\forall x \in X\ [x] = \{y \in X : y \sim x$.

$X_{/\sim} = \{[x] : x \in X \quad qX \to X_{/\sim} \quad$ q(x) = [x].

$U \subset X_{/\sim}$ открыто $\underset{\text{определение}}{\Leftrightarrow}$ $q^{-1}(U)$ открыто в X.

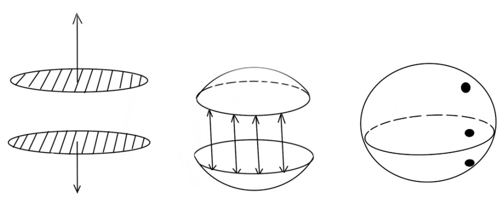
Теорема 2 (универсальное свойство факторпространств)

f непрерывна, $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$. Тогда $\exists!$ непрерывна $\widetilde{f}$, т.ч. диаграмма коммутативна.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда

(1) $\widetilde{f}$ — сюръекция $\Leftrightarrow$ f — сюръекция;

(2) $\widetilde{f}$ — инъекция $\Leftrightarrow \forall x, y \in X(x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y))$.



(3) Если (1), (2) выполнены, X компактно, Y хаусдорфово, то $\widetilde{f}$ — гомеоморфизм.

Пример 3. Рассмотрим $f = i_{s^1} : S^1 \to \overline{D}$ — отображение включения.

Покажем: $\boxed{\overline{D} \cup_f \overline{D} \cong S^2.}$

Обозначим: $\overline{D_1} = \{(p, 1) : p \in \overline{D}\}$.

$\overline{D_{-1}} = \{(p, -1) : p \in \overline{D}\}$.

$\overline{D} \cup D = \overline{D_1} \sqcup \overline{D_1}$.

Рассмотрим $g \colon \overline{D_1} \sqcup \overline{D_{-1}} \to S^2,\ g(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ g(x, y, -1) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ где $(x, y) \in \overline{D}$.

g непрерывно (свойства дизъюнктных объединений).

g сюръективно.

Пусть $p, q \in \overline{D_1} \sqcup \overline{D_{-1}}, p \neq q$.

Если $q(p) = g(p)$, то либо $p \in \overline{D_1},\ q \in \overline{D_{-1}}$, либо наоборот.

Пусть $p \in \overline{D_1},\ q \in \overline{D_{-1}}$.

Тогда $g(p) = g(q) \Leftrightarrow g(p) = g(q) = (x, y, 0), x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 1)p \in \partial\overline{D_1} = S^1,\ q = f(p), 2)p \sim q$.

$\Rightarrow g$ удовлетворяет условию Теоремы 3 $\Rightarrow \overline{D_1} \cup_f \overline{D_{-1}} \cong S^2$.

Пусть X, Y — топологические пространства, $f \colon X \to Y$.

Определение. f — **факторное** $\Leftrightarrow$ f сюръективно, топология на Y совпадает с финальной топологией, порожденной f $\Leftrightarrow$ [f сюръективно, $U \subset Y$ открыто $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$ открыто в X.]

Наблюдение. (1) Факторное $\Rightarrow$ непрерывное.

(2) Сюръективное $f : X \to Y$ — факторное $\Leftrightarrow$ [$B \subset Y$ замкнуто $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(B)$ замкнуто в X.]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X_{/\sim} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Теорема 4. Пусть X, Y — топологические пространства, $\sim$ — отношение эквивалентности на X, $q\colon X \to X/\sim$ — отображение факторизации, $f\colon X \to Y$ непрерывно.

Предположим, $[f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y]$.

Тогда: [$\widetilde{f}$ — гомеоморфизм $\Leftrightarrow$ f — факторное].

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\widetilde{f}$ — гомеоморфизм $\Rightarrow$ $\widetilde{f}$ — сюръекция $\Rightarrow$ f сюръекция (Теорема 3).

Пусть $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ открыто.

U открыто $\Leftrightarrow$ $\widetilde{f}^{-1}(U)$ открыто $\Leftrightarrow$ $\underbrace{q^{-1}(\widetilde{f}^{-1}(U))}_{=f^{-1}(U)}$ открыто. Поэтому f факторное.

($\Leftarrow$) Пусть f факторное. $\widetilde{f}$ — непрерывная биекция (из Теоремы 2 и Теоремы 3).

Пусть $U \subset X/\sim$ открыто.

Из коммутативности диаграммы и из биекции $\widetilde{f}$ $\quad f^{-1}(\widetilde{f}(U)) = q^{-1}(U)$ — открыто в X, f факторное $\Rightarrow$ $\widetilde{f}(U)$ открыто $\Rightarrow$ $\widetilde{f}$ — гомеоморфизм. $\square$

Пусть X, Y — множества, $f\colon X \to Y$ — сюръекция.

Определение. Насыщение множества $A \subset X$ (относительно f) — это множество $f^{-1}(f(A))$. A **насыщено**, если $f^{-1}(f(A)) = A$.

Наблюдение. Введем отношение эквивалентности на $X:$ $\; x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

(1) $\forall A \subset X \quad f^{-1}(f(A)) = \bigcup\{[a]\colon a \in A\}$.

(2) A насыщенно $\forall a \in A$ $[a] \subset A \Leftrightarrow A$ — объединение некоторого семейства классов эквивалентности $\Leftrightarrow A = f^{-1}(B)$ для некоторого $B \subset Y$ (в этом случае $B = f(A)$).

Теорема 5. X, Y — топологические пространства, $f\colon X \to Y$ — непрерывная сюръекция.

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) f — факторное;

(2) $\forall$ насыщенного открытого $U \subset X \quad f(U)$ открыто в Y;

(3) $\forall$ насыщенного замыкания $B \subset X \quad f(B)$ замкнут в Y.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть f факторное, $U \subset X$ открыто и насыщенно. $f^{-1}(f(U)) = U$ — открыто $\Rightarrow$ $f(U)$ открыто.

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть $V \subset Y$ таково, что $f^{-1}(V)$ открыто в X.

$f^{-1}(V)$ насыщенно и открыто $\Rightarrow$ $f(f^{-1}(V))$ открыто, но $f(f^{-1}(V)) = V \Rightarrow$ открыто $\Rightarrow$ (1).

Следствие 1. X, Y — топологические пространства, $f\colon X \to Y$ — непрерывная сюръекция, f открыто либо замкнуто $\Rightarrow$ f факторное.

Следствие 2. X, Y — топологические пространства, $f\colon X \to Y$ — факторное, $Z \subset X$ — открыто либо замкнуто, Z насыщенно $\Rightarrow$ $f_{\setminus Z}\colon Z \to f(Z)$ — факторное.

Следствие 3. X, Y — топологические пространства, $fX \to Y$ — непрерывная сюръекция, X компактно, Y хаусдорфово $\Rightarrow$ f — факторное.

Примечание X, Y — топологические пространства, $X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing$.

Введем отношение эквивалентности на $X \times Y\colon (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Рассмотрим $\rho\colon X \times Y \to X,\ \rho(x, y) = x.$ ρ открыто (упражнение) и сюръективно $\Rightarrow$ ρ факторное.

$\rho(u) = \rho(v) \Leftrightarrow u \sim v.$ Из Теоремы 4: $(X \times Y)_{/\sim} \cong X$.

Предложение. X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности, $q : X \to X_{/\sim}$ — отображение факторизации. Тогда $X_{/\sim}$ хаусдорфово $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X$, т.ч. $x \sim y$, $\exists$ открытое насыщение множеств $U, V \subset X$, т.ч. $[x] \subset U, y \subset V,\ U \cap V = \varnothing$.

Доказательство. Заметим: $\exists$ биекция между множествами $\{W \subset X_{/\sim} : W$ открыто$\}$ и $\{U \subset X : U$ открыто и насыщенно$\}$: $w \mapsto q^{-1}(w),\ U \mapsto q(U)$. $\square$

Пример. Вещественное проективное пространство. $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}P^n = \{l \subset \mathbb{R}^{n+1}\colon$ l — векторное подпространство, $\dim l = 1\}$.

$\mathbb{RP}^n$ снабжается финальной топологией, порожденной отображением $f\colon \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{RP}^n,\ f(v) = \mathrm{span} v = \{\lambda v\colon \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Эквивалентно: $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$, где $u \sim v \Leftrightarrow u = \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Обозначение. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon ||x||_2 = 1\}$.

Предположение. $\mathbb{RP}^n \cong S^n/\sim$, где $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q_1"'] & \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q_2"] & S^n \arrow[d, "q_1"] \\
S^n_{/\sim} \arrow[r, "f"] & \mathbb{RP}^n \arrow[r, "g"] & S^n_{/\sim}
\end{tikzcd}$$

- i — отображение включения;
- $q_1,\ q_2$ — отображение факторизации.

$q_2 i$ постоянно на классах эквивалентности $\Rightarrow$ $\exists! f$, т.ч. диаграмма коммутативна, f непрерывна (свойства факторпространств). Заметим: f — биекция (см. Теорему 3 из позапрошлой лекции). $p\colon \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to S^n,\ p(v) = \dfrac{v}{||v||_2}$.

$q_1 p$ постоянно на классах эквивалентности $\Rightarrow \exists! g$, т.ч. диаграмма коммутативна, g непрерывна.

$p_i = \mathrm{id}_{S^n} \Rightarrow gf = \mathrm{id} S^n/_\sim$ (см. утверждение о единственности в универсальном свойстве факторпространств) $\Rightarrow g = f^{-1} \Rightarrow f^{-1}$ непрерывна $\Rightarrow f$ — гомеоморфизм. $\square$

Предложение. $\mathbb{RP}^n$ — компактно и хаусдорфово.

Доказательство. $\mathbb{RP}^n \cong S^n_{\sim}$, S^n — компактна $\Rightarrow S^n_{/\sim} = q(S^n)$ компактна (q непрерывно).

Пусть $x, y \in S^n, s \not\sim y \Rightarrow x, y, -x, -y$ попарно различны $\Rightarrow \exists r > 0$, т.ч. $Br(x), Br(y), Br(-x), Br(-y)$ попарно не пересекаются.

$U = (Br(x) \cup Br(-x)) \cap S^n$.

$V = (Br(y) \cup Br(-y)) \cap S^n$.

Тогда $U,\ V$ открыто в S^n, $U \cap V = \varnothing$, $U \ni [x]$, $V \ni [y]$ насыщенны $\Rightarrow S^n_{/\sim}$ хаусдорфово. $\square$

24 Нормальные пространства. Лемма Урысона

24.1 Нормальные пространства

Определение. Топологическое пространство X — T_1**-пространство** $\Leftrightarrow \forall x \in X$ $\{x\}$ замкнут в X.

Наблюдение. Хаусдорфово $\Rightarrow T_1$-пространство.

Определение. X — топологическое пространство.

(1) X называется **регулярным** $\Leftrightarrow X - T_1-$пространство, $\forall x \in X,\ \forall$ замкнутого $B \subset X$, т.ч. $x \notin B$ $\exists$ открытые $U, V \subset X,\ x \in U,\ B \subset V, U \cap V = \varnothing. \quad (*)$

(2) X называется **нормальным** $\Leftrightarrow X - T_1-$пространство, $\forall$ замкнутых $A, B \subset X \colon A \cap B = \varnothing \quad \exists$ открытые $U, V \subset X \colon A \subset U, B \subset V,\ U \cap V = \varnothing. \quad (*)$

Наблюдение. Нормальное $\Rightarrow$ регулярное $\Rightarrow$ хаусдорфово.

Предложение. X — T_1-пространство.

(1) X регулярно $\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \forall$ открытого $W \ni x,\ \exists$ открытая U, т.ч. $x \in U \subset \overline{U} \subset W$.

(2) X нормально $\Leftrightarrow \forall$ замкнутого $A \subset X,\ \forall$ открытого $W \supset A$ $\exists$ открытая U, т.ч. $A \subset U \subset \overline{U} W$.

Доказательство. (2) X нормально $\Leftrightarrow \forall$ замкнутого $A \subset X, \forall$ открытого $W \subset X$ ($W = X \backslash B$, где B из определения), т.ч. $A \subset U, C \subset W, U \subset C \Leftrightarrow \forall$ замкнутого

$A \subset X, \forall$ открытого $W \supset A \; \exists$ открытое U, т.ч. $A \subset U \subset \overline{U} \subset W$.

(1) Аналогично. $\square$

Предложение. X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство $\Rightarrow$ X регулярное.

Доказательство. Ранее доказывали $(*)$ для локально компактных хаусдорфовых пространств.

Предложение. (1) $\forall$ компактное хаусдорфово топологическое пространство нормально.

(2) $\forall$ метризуемое пространство нормально.

Определение. (X, ρ) — метризуемое пространство, $A \subset X, x \in X$.

$\rho(x, A) = \int\{\rho(x, a) \colon a \in A\}$ — расстояние от x до A.

Лемма. X — метризуемое пространство, $A \subset X$.

(1) $\rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

(2) Функция $f(x) = \rho(x, A)$. Тогда $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$. Как следствие — f непрерывна.

Доказательство. (1) — упражнение.

(2) $\forall x, y \in X, \forall a \in A \quad \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a)$. x, y фиксированные. Берем $\inf\limits_{a \in A} \Rightarrow f(x) \leq \rho(x, y) + f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) \leq \rho(x, y)$.

$\underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{xy}} \Rightarrow f(y) - f(x) \leq \rho(x, y) \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \rho(x, y)$.

Если $x_n \to x \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| \leq \rho(x_n, x) \to 0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \Rightarrow f(x) \Rightarrow f$ непрерывна. $\square$

Доказательство предложения. (1) X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $A, B \subset X$ замкнуто, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A, B$ компактно. Из свойств компактных пространств мы заключаем, что $\exists$ открытые $U, V \subset X$, т.ч. $A \subset U$. $B \subset V$, $U \cap V = \varnothing$.

(2) (X, ρ) — метрическое пространство, $A, B \subset X$ замкнуто, $A \cap B = \varnothing$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \dfrac{\rho(x, A)}{\rho(x, B) + \rho(x, A)}$, $\varphi \colon X \to [0; 1]$.

Лемма $\Rightarrow \varphi$ непрерывна, $\varphi_{/A} = 0$, $\varphi_{/B} = 1$.

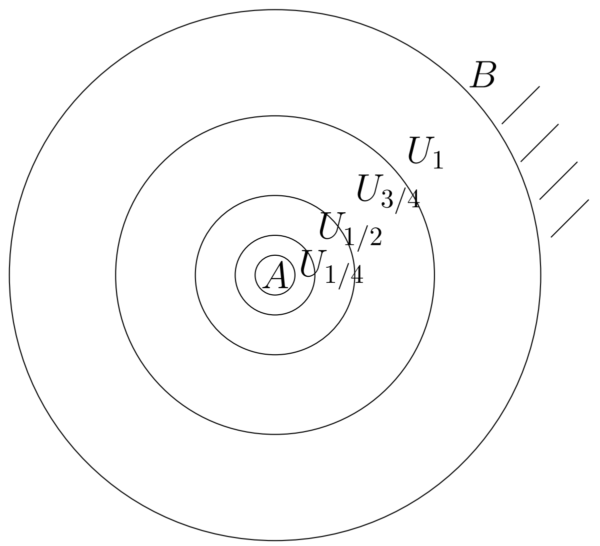
Предположим, $U = \varphi^{-1}([0, \frac{1}{2}])$, $V = \varphi^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$.

U, V открыты, $U \cap V = \varnothing, A \subset U, B \subset V \Rightarrow X$ нормально. $\square$

24.2 Лемма Урысона

Лемма Урысона. X — нормальное топологическое пространство, $A, B \subset X$ замкнуты, $A \cap B = \varnothing$. Тогда $\exists$ непрерывная $f\colon X \to [0;1]$, т.ч. $f|_A = 0, f|_B = 1$.

Доказательство. Обозначим $U_1 = X \backslash B$ $\quad U_1$ открыто, $A \subset U_1 \Rightarrow \exists$ открытое $U_{1/2}$, т.ч. $A \subset U_{1/2} \subset \overline{U}_{1/2} \subset U_1$.



$\exists$ открытое $U_{1/4}, U_{3/4}$, т.ч. $A \subset U_{1/4} \subset \overline{U}_{1/4} \subset U_{1/2} \subset \overline{U}_{1/2} \subset U_{3/4} \subset U_{3/4} \subset \overline{U}_{3/4} \subset U_1$.

И так далее.

Обозначим $D = \{r \in (0;1] : r$ — двоично-рационально$\} = \{\frac{k}{2^n}\colon n \in \mathbb{N}, k = 1, ..., 2^n\}$.

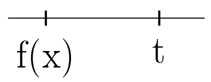
D плотно на [0, 1] — упражнение.

По индукции: $\exists$ семейство открытых множеств $\{U_t : t \in D\}$, т.ч. $\forall r, s \in D, r < s$, выполнено $A \subset U_r \subset \overline{U}_r \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset U_1$.

Рассмотрим $f\colon X \to [0;1], f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in B, \\ \inf\{r \in D\colon x \in U_r\}, \text{если } x \notin B. \end{cases}$

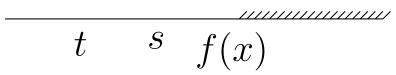
Тогда $f|_B = 1, f|_A = 0$.

Докажем: f непрерывна. Достаточно доказать: $\forall t \in (0;1)$ множества $f^{-1}([0,t))$ и $f^{-1}((t,1])$ открыты. (Т.к. полуинтервалы [0, b), (a, 1] образуют предбазу топологии на [0, 1]).



$x \in f^{-1}([0,t)) \Leftrightarrow f(x) < t \Leftrightarrow \exists r \in D$, т.ч. $x \in U_r, r < t \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\substack{r \in D \\ r<t}} U_r$. Следовательно, $f^{-1}([0,t)) = \bigcup\limits_{\substack{r<t \\ r \in D}} U_r$ — открыто.

$x \in f^{-1}((t,1]) \Leftrightarrow f(x) > t \Leftrightarrow \exists s \in D$, т.ч. s > t и $x \notin U_s \Leftrightarrow \exists r \in D$, т.ч. r > t и $x \notin \overline{U_r}$, т.е. $x \in X \backslash \overline{U}_r$.



Следовательно, $f^{-1}((t,1]) = \bigcup\limits_{\substack{r>t \\ r \in D}} (X \backslash \overline{U}_r)$ — открыто $\Rightarrow f$ непрерывна. $\square$

Теорема (Титце, Урысон) (дополнительная, доказательство в следующих курсах). X — нормальное топологическое пространство, $Y \subset X$ — замкнутое подмножество. Тогда $\forall g \in C(Y, \mathbb{R}) \quad \exists f \in C(X, \mathbb{R})$, т.ч. $f|_Y = g$. Если при этом $g(Y) \in [a, b]$, то и f можно выбрать так, что $f(X) \subset [a, b]$.