2к Мат. Анализ Семинар № 9

Разбор самостоятельной работы

Зад 1 (I) $a=\{a_n\}$, $a_n>0$. Рассмотрим

$$l_{1,a}=\{x=\{x_n\}: \|x\|_{1,a}=\sum a_n|x_n|<\infty\}$$

а) Доказать, что $l_{1,a}$ – банахово пр-во.

б) При каких условиях $\|\cdot\|_{1,a}\sim\|\cdot\|_1$.

Решение а) $l_{1,a}$ – нормированное пр-во.

Проверить аксиомы: положительность, однородность, нер-во тр-ка.

$l_{1,a}$ – банахово пр-во. Проверить полноту

$x^{(n)}$ – фунд последовательность, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n,m\geq N\ \ \|a^{(n)}-a^{(m)}\|_{1,a}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|<\varepsilon$$

Тогда $\{x_k^{(n)}\}$ – фундаментальная $\forall k\in\mathbb{N}$.

т.е $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_k^{(n)}=x_k$. Покажем, что $x^{(n)}\to x$, т.е.

$$\|x^{(n)}-x\|_{1,a}\to 0\ (n\to\infty).$$

Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n,m\geq N\ \ \sum_{k=1}^{\infty}a_k|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|<\varepsilon$

и $\forall M>0\ \ \sum_{k=1}^{M}a_k|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|<\varepsilon$

Зафиксируем M и перейдем к пределу в этом неравенстве почленно при $m\to\infty$:

$$\sum_{k=1}^{M}a_k|x_k^{(n)}-x_k|\leq\varepsilon.$$ Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k |x_k^{(n)} - x_k| \le \varepsilon .$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\quad \|x^{(n)} - x\|_{1,a} \le \varepsilon$.

Значит $x^{(n)} \to x$ в $l_{1,a}$ и это пр-во является полным.

В вар II $\quad l_{\infty,a} = \{x = \{x_n\}\ \ \|x\|_{\infty,a} = \sup\limits_n a_n |x_n| < \infty\}$

Доказательство аналогичное.

б) Необходимое и достаточное условие эквивалентности норм $l_{1,a}$ и l_1:

$\exists m, M > 0 \qquad m \cdot \|x\|_1 \le \|x\|_{1,a} \le M \cdot \|x\|_1 \quad \forall x \in l_{1,a}$

Утв Нормы эквивалентны $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0$:

$$\alpha \le a_n \le \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Док-во Достаточность очевидна $m = \alpha$, $M = \beta$

$$\alpha \|x\|_1 = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k |x_k|}_{\|x\|_{1,a}} \le \beta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \beta \cdot \|x\|_1$$

Проверим необходимость: если не отделена от нуля, то $\exists\ n_k \quad a_{n_k} \to 0$.

Рассмотрим $x^{(k)} = (0, \ldots \frac{1}{a_{n_k}}, \ldots 0)$

Тогда $\|x^{(k)}\|_{1,a} = 1$, $\|x^{(k)}\|_1 = \frac{1}{a_{n_k}} \to \infty$

Поэтому неверно иметь $m \cdot \|x\|_1 \le \|x\|_{1,a}$

если $\{a_n\}$ не ограничена сверху, т.е. $\exists\, a_{n_k} \to \infty$.

Рассмотрим $x^{(k)} = (0, \dots, \underset{n_k}{1}, 0, \dots)$

тогда $\|x^{(k)}\|_{1,a} = a_{n_k} \to \infty$ $\quad \|x^{(k)}\|_1 = 1$.

Поэтому нет: $\|x\|_{1,a} \le M \cdot \|x\|_1$

Зад 2 (II). $X_0 = \{x \in X : x(0) = x(1)\}$

а) $X = \underset{\max}{C[0,1]}$; б) $X = C[0,1]$ с нормой $L_1(0,1)$

Является ли X_0 — замкнутым подпространством

Решение: а) Является, т.к. если $\{x^{(n)}\} \in X_0$,

$x^{(n)} \to x$ в $C[0,1]$, т.е. $\max\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x(t)| \to 0$

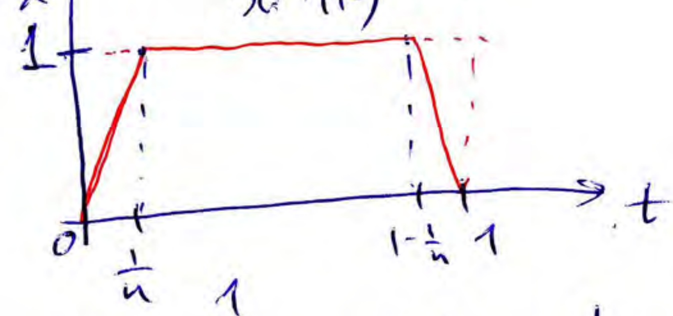
тогда $|x^{(n)}(0) - x(0)| \to 0$, $|x^{(n)}(1) - x(1)| \to 0$

причем $x^{(n)}(0) = x^{(n)}(1) = 0 \Rightarrow x(0) = x(1) = 0$,

т.е. $x \in X_0$. Значит, X_0 — замкнуто

б) Не является.

Пример: $x^{(n)}(t)$



Тогда $x^{(n)} \to 1\!\!1$ в $L_1(0,1)$: $\int_0^1 |x^{(n)}(t) - 1|\,dt = \frac{1}{n}$

но $1\!\!1 \notin X_0$

Зад 2. (I) $l_\infty = \{x = \{x_k\},\ \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\}$

$L = \{x \in l_\infty : \exists \lim_{n\to\infty} x_n\}$.

Доказать, что L — замкнутое под-пр-во l_∞.

Решение. L — линейное под.пр.во — очевидно.

Пусть $x^{(n)} \in L$, $\|x^{(n)} - x\|_\infty \to 0$, $x \in l_\infty$.

Тогда $x^{(n)}$ — фундаментальна в l_∞.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n,m > N\quad |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon\ (*)\ \forall k \in \mathbb{N}$

Рассмотрим число $l^{(n)} = \lim_{k\to\infty} x_k^{(n)}$.

Этот предел существует $\forall n$, т.к. $x^{(n)} \in L$.

Тогда в неравенстве (*) можем перейти к пределу при $k \to \infty$, т.е.

$$|l^{(n)} - l^{(m)}| \le \varepsilon \quad \forall n,m \geqslant N$$

Значит $l^{(n)}$ — фундаментальна в $\mathbb{R}$, т.е.

$\exists \lim_{n\to\infty} l^{(n)} = l$.

Покажем, что $x_k \to l\ (k\to\infty)$, т.е. $x \in L$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\quad \forall n \geqslant N$

$$\|x^{(n)} - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},\quad |l^{(n)} - l| < \frac{\varepsilon}{3},\ \text{т.е.}$$

$|x_k^{(n)} - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}\quad \forall k \in \mathbb{N}$

Зафиксируем такое n.

Поскольку $x_k^{(n)} \to e^{(n)}$ $(k \to \infty)$.
Найдется K: $\forall k \geq K$ $|x_k^{(n)} - e^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}$
Рассмотрим неравенство

$$|x_k - e| \leq \underbrace{|x_k - x_k^{(n)}|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|x_k^{(n)} - e^{(n)}|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|e^{(n)} - e|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$$

Поэтому $|x_k - e| \leq \varepsilon$ $\forall k \geq K$.
Значит $x_k \to e \Rightarrow x \in L$.

Зад 3 (I) Пусть x_n, y_n в евкл. пр-ве H
причем $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ и $(x_n, y_n) \to 1$
Доказать, что $\|x_n - y_n\| \to 0$

Решение

$$0 \leq \|x_n - y_n\|^2 = \|x_n\|^2 - 2(x_n, y_n) + \|y_n\|^2 \leq 2(1 - \underbrace{(x_n, y_n)}_{\to 0})$$

По лемме о 2х милиционерах, $\|x_n - y_n\|^2 \to 0$

Зада 3 (II) Доказать, что любое евклидово пр-во является строго выпуклым, т.е.
$\|x\| = \|y\|$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x = y$.
(Сферы не $\overset{x, y \neq 0}{\text{содержат}}$ отрезков)

Решение $\Leftarrow$ очевидно, т.к. $\|x+x\| = 2\|x\|$

$\Rightarrow$ Пусть $\|x\| = \|y\|$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

Воспользуемся тождеством параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$(\|x\|+\|y\|)^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$(2\|x\|)^2 + \|x-y\|^2 = 4\|x\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = 0 \Rightarrow x = y.$$

Ортогонализация $\{f_n\}$ – лин. независ.,

$\{\varphi_n\}$ – ортогональн. $\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$.

Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – уже построены, то

$$\varphi_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f_{n+1}, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k.$$

Задача 4. (I) Ортогонализ. $\{1, t, t^2\}$ в $L_2(0,1)$

Решение: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = t - \frac{(t,1)}{\|1\|^2} \cdot 1 = t - \frac{1}{2}$

$$(t,1) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}, \quad (1,1) = 1$$

$$\varphi_3 = t^2 - \frac{(t^2, 1)}{\|1\|^2} \cdot 1 - \frac{(t^2, t-\frac{1}{2})}{\|t-\frac{1}{2}\|^2} \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$(t^2, 1) = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}, \quad (t^2, t-\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 t^2 (t - \tfrac{1}{2})\,dt = \frac{1}{12}$$

$$\|t - \tfrac{1}{2}\|^2 = \int_0^1 (t - \tfrac{1}{2})^2\,dt = \frac{1}{12}$$

$$\varphi_3 = t^2 - \frac{1}{3}\cdot 1 - \left(t - \frac{1}{2}\right) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

Ответ $\left\{1,\ t - \frac{1}{2},\ t^2 - t + \frac{1}{6}\right\}$.

$$\left\| t^2 - t + \frac{1}{6} \right\|^2 = \frac{1}{180}$$

<u>Зад 4.</u> (II) $\{1, t, t^3\}$

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = t - \frac{1}{2}$$

$$\varphi_3 = t^3 - \frac{(t^3, 1)}{\|1\|^2}\, 1 - \frac{(t^3, t - \frac{1}{2})}{\|t - \frac{1}{2}\|^2}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$(t^3, 1) = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}\ ; \quad \left(t^3, t - \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^3\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{3}{40}$$

$$\varphi_3 = t^3 - \frac{1}{4} - \frac{3\cdot 12}{40\cdot 1}\left(t - \frac{1}{2}\right) = t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}$$

<u>Ответ:</u> $\left\{1,\ t - \frac{1}{2},\ t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right\}$.

$$\left\| t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5} \right\|^2 = \frac{1}{75}.$$

<u>Задача 5.</u> $\{x_n\}$ — ортогональная в H.
Следующие св-ва эквивалентны:
i) последовательность $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ограничена;
ii) ряд $\sum_{k=1}^{n} x_k$ сходится в H;
iii) числовой ряд $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$ сходится.

Решение: Необходимо воспользоваться теоремой Пифагора: если $x_1,\dots,x_n$ — ортогональны в H, то

$$\|x_1+x_2+\dots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\dots+\|x_n\|^2.$$

В частности $\|y_n\|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$

$$\|y_n-y_m\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}\|x_k\|^2,\quad m>n$$

Поэтому, если $\{y_n\}$ — ограничена, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2$ — сходится $\Rightarrow$ $\{y_n\}$ — фундаментальна, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ — сходится.

А если $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=y_n$ — сходится, то $\{y_n\}$ — ограничена.

Задача 6. Найти расстояние в $L_2(0,\pi)$ от вектора $a(t)$ до подпространства

$$H_0=\left\{x\in L_2(0,\pi):\ \int_0^{\pi} b(t)\,x(t)\,dt\right\}.$$

I) $a(t)=\sin t,\ b(t)=t$

II) $a(t)=t,\ b(t)=\sin t.$

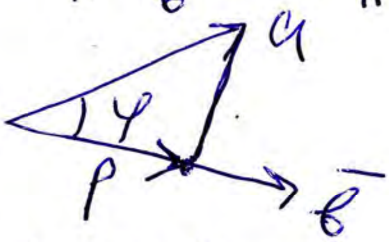
Решение: Воспользуемся тем, что

$$H_0^{\perp} = \{ \lambda \cdot b(t),\ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

В самом деле $x \in H_0 \Leftrightarrow (b, x) = 0 \Leftrightarrow x \perp b$, т.е $\{b(t)\}^{\perp} = H_0$.

Тогда $H_0^{\perp} = \{\{b(t)\}^{\perp}\}^{\perp} = \{b(t)\}$.

Следовательно, $\operatorname{dist}(a, H_0) = \| P_b(a) \| = \dfrac{|(a, b)|}{\|b\|}$



$$p = |a \cdot \cos\varphi| = \frac{|a||b|\cos\varphi}{|b|} = \frac{|(a,b)|}{\|b\|}$$

$$(a, b) = \int_0^{\pi} t \sin t \, dt = \pi$$

I) $b = t$, $\quad \|b\|^2 = \int_0^{\pi} t^2 dt = \dfrac{\pi^3}{3}$

$$\operatorname{dist}(a, H_0) = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

II) $b = \sin t$, $\quad \|b\|^2 = \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \dfrac{\pi}{2}$

$$\operatorname{dist}(a, H_0) = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

Задача 7. Доказать ортогональность и полноту системы: I) $\left\{\sin\frac{2k-1}{2}t\right\}$, II) $\left\{\cos\frac{2k-1}{2}t\right\}$ в $L_2(0,\pi)$.

Решение: 1. Ортогональность. $k\neq n$

I) $\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{2k-1}{2}\cdot\sin\frac{2n-1}{2}\,dt=$

$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left[\cos(k-n)t-\cos(k+n+1)\right]dt=0$

II) $\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{2k-1}{2}t\cdot\cos\frac{2n-1}{2}t\,dt=$

$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left[\cos(k+n+1)t+\cos(k-n)t\right]dt=0.$

2. Полнота. Проверим критерий полноты:

$\{\varphi_n\}_{n\in N}$ – полная $\Leftrightarrow$ $\varepsilon_m(f,\varphi_n)=0 \Rightarrow f\equiv 0$ $\forall n\in N$

Пусть $f\in L_2(0,\pi)$, $\int\limits_0^{\pi}f(t)\sin\frac{(2k-1)t}{2}\,dt=0$

Тогда $\int\limits_0^{\pi}f(t)\cdot\sin\frac{2k+1}{2}\,dt=0$ $\forall k\in N$

Сложим: $\int\limits_0^{\pi}f(t)\left(\sin\frac{2k+1}{2}t+\sin\frac{2k-1}{2}t\right)dt=$

$=2\int\limits_0^{\pi}f(t)\cdot\cos\frac{t}{2}\cdot\sin kt\,dt=0$ $\forall k\in N$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Однако, $\{\sin kt\}$ – полна на $L_2(0,\pi)$.

Следовательно, $f(t)\cdot\cos\frac{t}{2}\equiv 0$ на $[0,\pi]$

$\Rightarrow f(t)\equiv 0$ на $[0,\pi]$ $\Rightarrow \{\sin\frac{2k-1}{2}t$ - полн$\}$

Аналогично для $\{\cos\frac{2k-1}{2}t\}$:

Если $f\in L_2(0,\pi)$, $\int_0^\pi f(t)\cos\frac{2k-1}{2}t\,dt=0$

$\int_0^\pi f(t)\cos\frac{2k+1}{2}t\,dt=0$. <u>Теперь вычтем:</u>

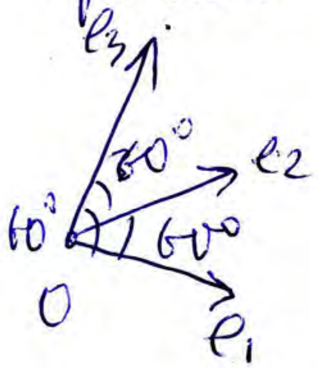
$$\int_0^\pi f(t)\left(\cos\frac{2k+1}{2}t-\cos\frac{2k-1}{2}t\right)dt=$$

$$=2(-)\int_0^\pi f(t)\left(\sin kt\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt=0\quad\forall k\in\mathbb{N}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Значит, $f(t)\cdot\sin\frac{t}{2}\equiv 0\Rightarrow f(t)\equiv 0$.

<u>Задача 8</u> Пусть $\{e_1,e_2,e_3\}$ в $\mathbb{R}^3$ образуют правильный тетраэдр, т.е. $(e_i,e_j)=\frac{1}{2}$



а) Сделать ортогонализацию

б) обобщить на $\mathbb{R}^4$.

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f_{n+1}, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k$$

<u>Решение</u> $f_n = e_n$

$$\varphi_1 = e_1, \quad \varphi_2 = e_2 - \frac{(e_2, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1 = e_2 - \frac{1}{2} e_1$$

$$\varphi_3 = e_3 - \frac{(e_3, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1 - \frac{(e_3, \varphi_2)}{\|\varphi_2\|^2} \cdot \varphi_2$$

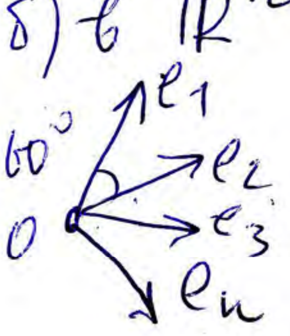
$$(e_3, \varphi_1) = \frac{1}{2}, \quad (e_3, \varphi_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\|\varphi_2\|^2 = \|e_2 - \tfrac{1}{2} e_1\|^2 = \|e_1\|^2 - (e_2, e_1) + \frac{1}{4}\|e_1\|^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\varphi_3 = e_3 - \frac{1}{2} e_1 - \frac{1/4}{3/4}\left(e_2 - \frac{1}{2} e_1\right) = e_3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)e_1 - \frac{1}{3} e_2 = e_3 - \frac{1}{3}(e_1 + e_2)$$

<u>Ответ</u> $\{e_1,\ e_2 - \frac{1}{2} e_2,\ e_3 - \frac{1}{2}(e_1 + e_2)\}$.

б) в $\mathbb{R}^n$ $\quad (e_i, e_j) = \frac{1}{2}$, $\|e_i\| = 1$
$i \neq j$



Угадать ответ: $\varphi_4 = e_4 - \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_3)$
и так далее

$$\varphi_n = e_n - \frac{1}{n}(e_1 + e_2 + \ldots + e_{n-1}).$$

Решение: Очевидно, что $\mathcal{L}(e_1,..,e_n) = \mathcal{L}(\varphi_1 .. \varphi_n)$

Проверить, что $\varphi_k \perp \varphi_j \quad \forall j < k$.

Достаточно проверить, что $\varphi_k \perp e_j$:

$$(\varphi_k, e_j) = \left(e_k - \frac{1}{k}(e_1+e_2+..+e_{k-1}), e_j\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{k}\left(\underbrace{\frac{k-2}{2}}_{\neq j} + \underbrace{1}_{j}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Найдем норму φ_k.

$$\varphi_k = e_k - \frac{1}{k}(e_1+e_2+..+e_{k-1}).$$

φ_k - ортогональна $\mathcal{L}(\varphi_1,..,\varphi_{k-1}) = \mathcal{L}(e_1,..,e_{k-1})$.

т.е. $\varphi_k \perp (e_1+e_2+..+e_{k-1})$. Поэтому

по теореме Пифагора

$$\|\varphi_k\|^2 = 1 - \left\|\frac{1}{k}(e_1+..+e_{k-1})\right\|^2$$

$$\|e_1+..+e_{k-1}\|^2 = \sum_{j=1}^{k-1}\|e_j\|^2 + 2\sum_{1 \le i<j \le k-1}(e_i, e_j) = \quad \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

$$= k-1 + 2\sum_{i<j}\frac{1}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \quad \text{(Индукция)}$$

Ответ: $\|\varphi_k\|^2 = 1 - \frac{(k-1)}{2k} = \frac{k+1}{2k}$

$(k=1, \frac{1}{2}, k=2, \frac{3}{4})$