Алгебра

2 курс

Домашняя Работа

Владислав Мозговой

Задачи для Мозговой Владислава

12 февраля 2021 г.

1.Сколько элементов в поле разложения полинома $X^{17} - 1$ над полем $\mathbb{F}_{19}$ из 19 элементов?

2. Найдите группу Галуа многочлена $x^4 - x^2 + 1$.

3. Покажите, что $\mathbb{Q}[\cos(2\pi/105)]$ есть расширение Галуа $\mathbb{Q}$. Какова его группа Галуа?

Решения

Задача 1

$x^{17} - 1 = (x-1)\Phi_{17}$. $\forall x \in \mathbb{F}_{19}\ x^18 = 1,\ x \neq 0$. Всякое расширение $\nVdash \nrightarrow$ имеет вид $\mathbb{F}_q\ (x^{q-1} = 1),\ q = (19)^f$ так как $\mathbb{F}_q$ – векторное пространство над $\mathbb{F}_{19}$. Рассмотрим $\mathbb{F}_q* = \mathbb{Z}_{(q-1)}$, мы хотим чтобы там был элемент порядка 17. Что такое поле разложения над конечным полем? – мы можем взять $\mathbb{F}_19$ и присоединить алгебраические корни. Рассмотрим все конечные поля $(19)^f$, они упорядочены. Поле разложения – наименьшее из полей, содержащее все корни уравнения, тогда

$$
\begin{aligned}
&19^f \equiv 1 \mod 17 \\
&f = 8
\end{aligned}
$$

Ответ: 8

Задача 2

$$
\begin{aligned}
&x^4 - x^2 + 1 \\
&f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\
&a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = 0
\end{aligned}
$$

Кубическая резольвента имеет вид

$$
\begin{aligned}
&g(x) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \\
&b_2 = -a_2 = 1 \\
&b_1 = a_1a_3 - 4a_0 = 0 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4 \\
&b_0 = 4a_0a_2 - a_1^2 - a_0a_3^2 = 4 \cdot 1 \cdot (-1) - 0^2 - 1 \cdot 0^2 = -4 \\
&g(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)(x-2)(x+2)
\end{aligned}
$$

Проверим, является ли дискриминант полным квадратом

$$
\begin{vmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0
\end{vmatrix} = 144 = 12^2
$$

Следовательно группа Галуа V_4

Задача 3

$\cos\frac{2\pi}{105} = \frac{\omega+\omega^{-1}}{2}$, где ω – корень из 1. $K = \mathbb{Q}(\omega),\ \varphi \in \mathrm{Gal}(K|Q)$ – автоморфизм $K|Q$, такой что $\omega \to \omega^{-1}$. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\, K|Q$ оставляет на месте $\mathbb{Q}$ и не оставляет $K|Q$. $K|Q$ получен из $\mathbb{Q}$ добавлением ω, а следовательно автоморфизм определен тем, куда переходит ω. $\omega \to \omega^{-1},\ \omega^{-1} \to \omega,\ \omega + \omega^{-1} \to \omega + \omega^{-1} \in$ подполе инвариантов. $\varphi^2 = \mathrm{id}$, откуда $\langle\varphi\rangle = \mathbb{Z}_2$. $L = \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{105}),\ L = K^{\langle\varphi\rangle} = K^{\varphi} \subset K$. о основной теореме теории Галуа $\mathrm{Gal}(L|Q) = \mathrm{Gal}(K|Q)|_{\langle\varphi\rangle}$. ледовательно нужно посчитать $\mathrm{Gal}(K|Q) = (\mathbb{Z}_{105})*$ и профакторизовать по $\mathbb{Z}_2$ $|\mathrm{Gal}(K|Q)| = \varphi(105) = 48$, откуда порядок $\mathrm{Gal}(K|Q)|_{\langle\varphi\rangle} - \frac{48}{2} = 24$. $(\mathbb{Z}_{175})* = (\mathbb{Z}_3) * \times (\mathbb{Z}_5) * \times (\mathbb{Z}_7)* = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$. Откуда $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_{12}$.