5 билет

<u>Опр.</u>: Реш-ие $x: I \to \mathbb{R}^n$ непродолжимо, если $\nexists$ решения $\hat{x}: J \to \mathbb{R}^n$

$$I \subsetneq J : \hat{x}\big|_I = x$$

(I - максимальный интервал продолжимости решения)

Теорема: Всякое решение продолжается до непродолжимого (если верна т. о $\exists$ и ! $f_x, f_x' \in C$)

(глобальная единственность реш-ий ОДУ)

Д-во: Пусть $\mathcal{X}$ - мн-во всех реш-ий

1) Рассм. $J = \bigcup_{(x: I \to \mathbb{R}^n) \in \mathcal{X}} I$, J - откр. связн. мн-во

J - интервал. Если $t \in J$, то $t \in I$ для некоторого реш-ия $(x: I \to \mathbb{R}^n) \in \mathcal{X}$

Тогда $[t_0, t_1] \subset I$, т.е. $[t_0, t_1] \subset J \Rightarrow$

$$J = (\inf J, \sup J)$$

НА ЭТОМ МН-ВЕ МОЖНО ЗАДАТЬ РЕШ-И:

2) Определим $\overline{x} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$

$$\overline{x}(t) = x(t), \text{ если } (x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n) \in \mathcal{X}, \; t \in I$$

31:35 лекция 24.09.20

Корректность: $\left.\begin{matrix} x_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n \\ x_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n \end{matrix}\right\} \in \mathcal{X}$

$$t \in I_1 \cap I_2$$

$x_1(t) = x_2(t)$ следует из глобальной теор. о единственности $x_1\big|_{I_1 \cap I_2} = x_2\big|_{I_1 \cap I_2}$

3) $\overline{x} \in \mathcal{X}$ (т.е. $\overline{x}$ - решение)

Если $\exists (x : I \to \mathbb{R}^n) \in \mathcal{X}$, $t \in I$, тогда

$B_\delta(t) \subset I$

$$\overline{x}\big|_{B_\delta(t)} = x\big|_{B_\delta(t)}$$

$$\frac{d\overline{x}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) = f(t, \overline{x}(t))$$

$\overline{x}(t_0) = x_0$

4) $\overline{x}$ непродолжимо

Если $\overline{x}$ продолжимо, то $\exists (\hat{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n) \to$

$\to \mathcal{X}$

$\tilde{I} \supsetneq I$ — противоречие с

$$I = \bigcup_{(x:\, I \to \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{X}} I$$

$\blacksquare$

Примеры: