Мат анализ семинар

07.09.20

Пусть X – множество

Опр. Класс подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^X$ называется **σ-алгеброй**, если

1) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$

2) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

Пусть $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$A \cap (X \setminus B)$ $\quad A \setminus B \in \mathcal{A}$ $\quad A \triangle B \in \mathcal{A}$

$A, B \in \mathcal{A}$

Примеры: $\underset{\max}{2^X}, \{\underset{\min}{\varnothing, X}\}$

$\mathcal{A}$ замк. отн. дополнения и счётного объединения $\Rightarrow \mathcal{A}$ замк. отн. счётного пересечения

Пусть $A_n \in \mathcal{A}$

$$X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$$

Опр. Пусть X — множ., $\mathcal{F} \subset 2^X$

σ-алгебра, порожд. $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{F})$ — наименьшая σ-алгебра, содерж. $\mathcal{F}$

так как $$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{A}:\, \mathcal{A} \supset \mathcal{F},\ \mathcal{A} - \sigma\text{-алг.}} \mathcal{A}$$

Опр. Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — σ-алгебра, порожд. открытыми мн-вами в $\mathbb{R}^n$

Задачи

1 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ порождается (a, b), $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{Q}$

открытое мн-во $= \bigcup$ непересек. интервалов $\Rightarrow$ порожд. всеми интервалами

интервалы можно приближать к отрезку

$a_n \to a$
$b_n \to b$

2 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ порожд. замк. квадратами

Пусть

$U \subset \mathbb{R}^2$ откр.

$x=(a,b)$

$\cap \;\; \cap$

$\mathbb{Q}$

$K_{x,r}$

Берем открыт. квадрат, центр квадр. — рац. точка (x,y), квадрат $\in U$ и сторона кв. = $r \in \mathbb{Q}$

$$\left|\bigcup_{x,r} K_{x,r}\right| \in \mathbb{Q}$$

откр. кв. $\to$ замк. кв. $\Rightarrow$

$$\sigma(\{\text{замкн. квадр.}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

$\supset$ ({откр. квадр.)

Докажем, что иррац. точки $\in \bigcup_x K_x$

т.к. $y \in U$, то $\exists$ откр. шар $r_1 = \varepsilon$ с центром в т. y $\Rightarrow$ $\exists$ квадрат $r_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ с центром в рац. точке

$$K_{y,\frac{\varepsilon}{2}} \subset U_\varepsilon(x)$$

3

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ не порожд. отрезками

σ-алгебра, порожд. отрезками $\subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ $\not\ni$ квадрат

Пусть $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^2 \mid A$ или $\mathbb{R}^2 \setminus A$ можно покрыть счётным объед. отрезков$\}$

$\mathcal{A}$ — σ-алгебра. Докажем это

- $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{R}^2 \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Пусть $A_n \subset$ счёт. объед. отрезков $\forall n$

⇓

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset$ счёт. объед. отр.

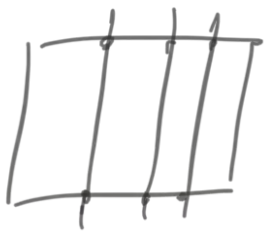
Если $\exists n \mid \mathbb{R}^2 \setminus A_n$ покр. счёт. объед. отр. $\Rightarrow$

$\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A_n$

сч. объед. отр.

⇓

$\mathcal{A}$ — σ-алгебра



квадрат нельзя покрыть счёт. объед. отрезков

круги с центром в 0: аналогично (центр. симметричная алгебра)

$\boxed{4}$ X — мн-во, $\mathcal{A}$ — конечная σ-алгебра на X

$\Rightarrow X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_k$

$\mathcal{A} = \sigma(\{X_1, \ldots, X_k\})$

Берём $A \in \mathcal{A} \mid \nexists \underset{\neq \varnothing}{B} \subset A$

Если $\underset{\subset X_i}{X_i \cap X_j} \neq \varnothing \Rightarrow$ противоречие

$X \setminus (X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_k) \in \mathcal{A} \Rightarrow$

$\exists i: X_i \subset X \setminus (X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_k)$

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_{n,1} \cup \bigcup I_{n,\frac{1}{2}} \cup \ldots$

куб со стороной 1

$n_1: I_{n,1} \subset U$ $\qquad$ $n_2: I_{n,2} \subset U \setminus \left(\bigcup\limits_{n} I_{n,1}\right)$

6] $\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \exists F_1, \ldots F_n \in \mathcal{F} \ldots$

$A \in \sigma(\{F_1, \ldots, F_n, \ldots\})\}$

Док-ть, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра

Пусть $A \in \mathcal{A}$ $\quad X \setminus A \in \sigma(\{F_1, \ldots, F_n \ldots\})$

Пусть $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$A_n \in \sigma(\{F_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\{F_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ $\quad$ проверили замкнутость относительно счётного объединения

σ-алгебра

Листок 1.

1. Доказать, что борелевская σ-алгебра прямой порождается как интервалами с рациональными концами, так и отрезками с рациональными концами.

2. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости порождается замкнутыми квадратами.

3. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости не порождается отрезками, а также не порождается кругами с центром в нуле.

4. Доказать, что всякая конечная σ-алгебра порождается множествами из конечного разбиения пространства на дизъюнктные множества.

5. Доказать, что всякое непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ является счетным объединением кубов с попарно дизъюнктными внутренностями.

6. Доказать, что всякое множество из σ-алгебры, порожденной набором множеств, входит в σ-алгебру, порожденную некоторым не более чем счетным поднабором этих множеств.

7. Доказать, что в сепарабельном метрическом пространстве борелевская σ-алгебра порождается счетным набором открытых шаров.

8. Привести пример метрического пространства, в котором борелевская σ-алгебра строго шире σ-алгебры, порожденной всеми открытыми шарами.

9. Привести пример под-σ-алгебры борелевской σ-алгебры прямой, которая не порождается никаким счетным набором множеств.

10. Привести пример σ-алгебры, в которой всякое непустое множество содержит непустое строго меньшее подмножество из этой σ-алгебры.

11. Привести пример такой счетной последовательности интервалов, что она порождает борелевскую σ-алгебру, но никакая ее собственная часть уже не порождает борелевскую σ-алгебру.

12. Доказать, что σ-алгебра, порожденная счетным набором множеств, имеет мощность не выше континуума.

МАТАН СЕМИНАР

14.09.20

7.

X – Сепарабельное метрич. пр-во ($\supset$ всюду плотное мн-во $\{x_n\}$)

$\mathcal{B}(X)$

$\{U_n\}$ – открытые шары с центрами в x_n и рациональными радиусами

?

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\{U_n\})$$

$\sigma(\{U_n\}) \subset \mathcal{B}(X)$, т.к. шары открытые

$\forall U \subset X$ (откр.) $\quad U \in \sigma(\{U_n\})$

$\forall x \in U \ \exists \ V_\varepsilon \supset x$ (окрестность, шар), $r(V_\varepsilon(x)) = \varepsilon$

$\Rightarrow \exists x_n \in V_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)$

$\exists q \in \left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $q \in \mathbb{Q}$

$x \in U(x_n, q) \subset V_\varepsilon(x) \Rightarrow q + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \Rightarrow$

$U = \bigcup_n U_n$ — выразили U через счётн. объединение $\Rightarrow U \in \sigma(\{U_n\})$

$n: U_n \subset U$

8.

X – метрич. пр-во

$\mathcal{B}(X) \supset \sigma(\{$открытые шары$\})$

X – несчётн. с дискретной метрикой

$\{x\}$ – открыто $\Rightarrow \forall U \subset X$ – открыто

$\Downarrow$

$\mathcal{B}(X) = 2^X$

$\sigma(\{$откр. шары$\}) = \sigma(\{x\}, x \in X) =$

$= \{A \subset X$ A или $X \setminus A$ не более, чем счётно$\}$

т.к. X – несчётн., то $\mathcal{B}(X) \supset \sigma(\{$откр. шары$\})$

9.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathcal{A}$ не порожд. счётным набором множеств

под-σ-алгебра

$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A$ или $X \setminus A$ не более, чем счётно$\}$

Предположим, что $\mathcal{A}$ можно породить

$\exists A_1, \dots, A_n$ $\mathcal{A} = \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$

Тогда или A_n не более чем счётно
или $\mathbb{R}\setminus A_n$

Рассмотрим

$$A = \left(\bigcup_{n \mid A_n \text{ счётно}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n \mid (X\setminus A_n) \text{ счётно}} X\setminus A_n\right) \text{ — счётно}$$

$$\sigma(\{A_1, \dots, A_n, \dots\}) \subset \sigma(\{x\}, x \in A\}$$

$$A_n = \bigcup_{x \in A} \{x\}, \quad X \setminus A_n = \bigcup_{x \in X\setminus A_n} \{x\}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(\{A_1, \dots, A_n, \dots\}) \subset \sigma(\{x\}, x \in A\} \subset \underset{\overset{\shortparallel}{\mathcal{A}}}{\sigma(\{x\}, x \in \mathbb{R})}$$

$$\Downarrow$$

не ~~порождается~~

2 листок

X — множ-во, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра на X

Мера $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ конечно аддитивна, если

$$\boxed{\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)} \qquad A_i \in \mathcal{A}$$

$$A_k \cap A_j = \varnothing \quad \forall\, k \neq j$$

Мера счётно-аддитивная, если

$$\boxed{\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)}$$

1.

$$m(A) = \sum_{n\in A} p_n \qquad p_n \geq 0 \qquad \sum_n p_n < \infty$$

$$A = \bigsqcup_i A_i \qquad A \subset 2^{\mathbb{N}}$$

$$\mu(A) = \sum_{i\in A} p_i = \sum_j \sum_{k\in A_j} p_k = \sum_i \mu(A_i)$$

(т.к. ряд сходится, то можем переставить члены)

2.

$$\begin{cases} m(A) = 0 & \text{для конечных } A \\ m(A) = 1 & \text{для прочих } A \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ или } \mathbb{N}/A \text{ конечн.}\}$$

алгебра, но не σ-алгебра (т.к. можем брать конечные объед., но не счётные)

$$A = \bigsqcup A_i \qquad A_k \cap A_j = \varnothing \quad \forall k \neq j$$

если все A_i конечны, то $m(A) = 0 = \sum m(A_i)$

если $\exists A_i$ не конечное, то $m(A)=1=\sum m(A_i)$
(а оно м.б.
только одно)

не счётно-аддитивн, т.к.

$$m(A)=\begin{cases}1\\0\end{cases} \neq \sum\{x_i\}=\sum 1$$

$\sqcup\{x_i\}$

4.

$\mathcal{K}$ - компактный класс, если

$$\forall\{K_n\}\subset\mathcal{K} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}K_n=\varnothing \Rightarrow \exists N \mid \bigcap_{n=1}^{N}K_n=\varnothing$$

Пусть K_n - компакт, $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n=\varnothing$

$$X\setminus\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\right)\supset K_1$$

$X\setminus K_1, \dots, X\setminus K_n$ - счётное покрытие K_1

$$\Rightarrow \exists N \mid K_1\subset\bigcup_{i=1}^{N}(X\setminus K_i)$$

$\Downarrow$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{N}K_i\right)\cap K_1=\varnothing$$

строим пример:

Конечное число замкн. шаров радиуса 2^{-n} $\forall n\in\mathbb{N}$ $\{U_n\}$ ← замкн. шары

$$\{U_{n_i}\} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty}U_{n_i}=\varnothing \Rightarrow \exists N \mid \bigcap_{i=1}^{N}U_{n_i}=\varnothing$$

$\forall i \quad \underset{\substack{\not\Downarrow \\ \varnothing}}{K_i} = \bigcap_{j=1}^{i} U_{n_j}$ — замкн. $\quad K_1 \supset \ldots \supset K_i \supset \ldots$

$\operatorname{diam} K_i \to 0$

$$\Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{N} K_i \right) \cap K_1 = \varnothing$$

5.

C — Канторово мн-во — компакт континуальной мощности лебеговской меры нуль

$$C = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right)$$

↑ замкн. и огранич.

$\Downarrow$

компакт

Запишем числа в виде троичной записи $0,x_1x_2\ldots$

$\{x_i\} = 0,1,2$

$$C = \{ 0,x_1x_2x_3 \mid \{x_i\} = 0,2 \} \Rightarrow \text{континуум}$$

(т.к. мн-во посл-тей из 0 и 1 $= \uparrow \simeq 2^{x}$)

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\}$$

I_i — интервал

$\lambda(I_i)$ — длина I_i

$\lambda^* : \underset{\substack{\cup \\ C}}{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \to \mathbb{R}$ — счётн.-аддитивная мера

На n шаге остались отрезки $I_1, \ldots I_k$

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i$$

$$\lambda^*(C) = \sum_{i=1}^{2^n} \underbrace{\lambda(I_i)}_{= \frac{1}{3^n}} = \frac{2^n}{3^n} \to 0$$

Листок 1.

1. Доказать, что борелевская σ-алгебра прямой порождается как интервалами с рациональными концами, так и отрезками с рациональными концами.

2. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости порождается замкнутыми квадратами.

3. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости не порождается отрезками, а также не порождается кругами с центром в нуле.

4. Доказать, что всякая конечная σ-алгебра порождается множествами из конечного разбиения пространства на дизъюнктные множества.

5. Доказать, что всякое непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ является счетным объединением кубов с попарно дизъюнктными внутренностями.

6. Доказать, что всякое множество из σ-алгебры, порожденной набором множеств, входит в σ-алгебру, порожденную некоторым не более чем счетным поднабором этих множеств.

7. Доказать, что в сепарабельном метрическом пространстве борелевская σ-алгебра порождается счетным набором открытых шаров.

8. Привести пример метрического пространства, в котором борелевская σ-алгебра строго шире σ-алгебры, порожденной всеми открытыми шарами.

9. Привести пример под-σ-алгебры борелевской σ-алгебры прямой, которая не порождается никаким счетным набором множеств.

10. Привести пример σ-алгебры, в которой всякое непустое множество содержит непустое строго меньшее подмножество из этой σ-алгебры.

11. Привести пример такой счетной последовательности интервалов, что она порождает борелевскую σ-алгебру, но никакая ее собственная часть уже не порождает борелевскую σ-алгебру.

12. Доказать, что σ-алгебра, порожденная счетным набором множеств, имеет мощность не выше континуума.

Семинар 2.

1. Доказать счетную аддитивность меры m на подмножествах $\mathbb{N}$, заданную формулой $m(A) = \sum_{n\in A} p_n$, где $p_n \geq 0$, $\sum_n p_n < \infty$.

2. На алгебре $\mathcal{A}$, состоящей из конечных подмножеств $\mathbb{N}$ и их дополнений, дана функция m: $m(A) = 0$ для конечных A, $m(A) = 1$ для прочих A. Доказать, что m аддитивна и не счетно-аддитивна.

3. Доказать, что всякий набор компактов в $\mathbb{R}^n$ (или в общем топологическом пространстве) является компактным классом, т. е. если последовательность компактов K_n из него имеет пустое пересечение, то некоторое конечное их пересечение $\bigcap_{n=1}^N K_n$ пусто.

4. Привести пример бесконечного компактного класса, состоящего не из компактов.

5. Множество Кантора C получается из $[0,1]$ удалением открытой средней трети $(1/3, 2/3)$, затем средних третей оставшихся отрезков и т.д. по индукции. Доказать, что C — компакт континуальной мощности лебеговской меры нуль.

6. Доказать, что для каждого $q \in (0,1)$ в $[0,1]$ есть компакт лебеговской меры q, не имеющий внутренних точек.

7. Найти лебеговскую меру множества точек из $[0,1]$, не имеющих 1 в десятичной записи.

8. Доказать, что всякое множество положительной меры Лебега на прямой содержит неизмеримое подмножество.

9. Доказать, что всякое непустое открытое множество U в $\mathbb{R}^n$ с точностью до множества меры нуль есть объединение конечного или счетного набора дизъюнктных открытых шаров, содержащихся в U.

10. Доказать, что меру Лебега множества E в $\mathbb{R}^n$ можно задавать как точную нижнюю грань сумм $\sum_{k=1}^\infty \lambda_n(B_k)$ по наборам открытых шаров B_k, покрывающих E (вместо кубов, как в определении).

11. Доказать, что прямую нельзя представить как объединение дизъюнктных отрезков, отличных от точек. Вывести из этого, что пространство нельзя представить как объединение замкнутых шаров ненулевых радиусов без общих внутренних точек.

12. Доказать, что всякое объединение отрезков с ненулевыми длинами измеримо по Лебегу.

СЕМИНАР ПО МАТАНУ

21.09.20

6.

$\forall q \in (0,1)$ $\exists$ K–компакт $\subset [0,1]$

$\lambda(K)=q$, K не имеет внутренних точек

<u>Решение:</u>

(можем решить по аналогии с мн-вом Кантора)

не по аналогии:

$\{q_n\}$ – рац. точки в $[0,1]$

фикс. $\varepsilon>0$ $(q_n-\varepsilon\cdot 2^{-n-1}, q_n+\varepsilon\cdot 2^{-n-1})$

$$\boxed{K=[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}(q_n-\varepsilon\cdot 2^{-n-1}, q_n+\varepsilon\cdot 2^{-n-1})}$$

не имеет внутренних точек, т.к. выкинули всюду плотное мн-во

(длины интервалов $\to 0$ при $n\to\infty$)

K–компакт (замкн. мн-во) $(q_n \notin K)$

оценим снизу:

$$\lambda(K)\geq 1-\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\cdot 2^{-n}=1-\varepsilon$$

$$K=[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

по аналогии с канторовым мн-вом:

$$\lambda(K)=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{3^n}\cdot 2^n=1-3\varepsilon=q$$

(можем взять коэф. гомотетии Q

$$\lambda(QK)=Q\lambda(K)\text{)}$$

7.

$$A=\{x=0,x_1x_2x_3\ldots x_n\ldots \quad x_i\in\{0,2,3,\ldots,9\}\}$$

выкидываем отрезки

$$1-\frac{1}{10}-\frac{9}{100}-\ldots-\frac{9^n}{10^{n+1}}=1-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{9}{10}}\right)=0$$

$\Rightarrow \lambda(A)=0$

или $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{9}{10}\right)^n}=0$ (т.к. каждый раз мн-во уменьшается в $\frac{9}{10}$ раз)

ПРИМЕР НЕИЗМЕРИМОГО МН-ВА — МНОЖ. ВИТАЛИ

$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ $x, y \in \mathbb{R}$

КЛАССЫ ЭКВИВ.

ПОЛЬЗУЯСЬ АКСИОМОЙ ВЫБОРА, ВОЗЬМЁМ ПО 1 ЭЛ-ТУ ИЗ ~~КАЖДОГО~~ КАЖДОГО КЛАССА И ПОЛУЧИМ МН-ВО ВИТАЛИ

ВОЗЬМЁМ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ ИЗ ОТРЕЗКА $[0,1]$

РАССМОТРИМ СДВИГИ МН-ВА НА $q_i \in \mathbb{Q}$

$$(V+q_1) \cap (V+q_2) = \varnothing \quad \forall q_1 \neq q_2$$

Т.К. ПУСТЬ $a+q_1 = b+q_2$, ТОГДА $a-b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \sim b$, НО МЫ ВЫБРАЛИ ПО 1 ЭЛ-ТУ ИЗ КЛАССА ЭКВИВ-ТИ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ СДВИГИ МН-ВА ВИТАЛЯ НЕ ПЕРЕСЕК.

- ЕСЛИ $\lambda(V) = 0$, ТО

ПРОТИ-ВОРЕЧИЕ
$$\begin{cases} \bigsqcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (V+q) = \mathbb{R} \\ \lambda\Big(\bigsqcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (V+q)\Big) = \sum\limits_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(V+q) = 0 \end{cases}$$

$\lambda(V+q) = \lambda(V)$

ИНВ. СДВИГОВ

СЧЁТНАЯ АДДИТИВНОСТЬ

• Если $\lambda(V)=\varepsilon>0$ $\quad \exists n: n\varepsilon>2$

выберем n чисел из $[0,1]\cap\mathbb{Q}$

$$\lambda\left(\bigsqcup_{i=1}^{n}(V+q_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda(V+q_i)=n\varepsilon>2 \quad \subset[0,2]$$

Реш-ие:

$$x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$$
$$x,y\in A$$

V – множ-во представителей классов эквив. для A

$$\bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}} A\cap(V+q)=A$$

мн-во сдвигов покрывает всю $\mathbb{R}$

$$\underbrace{\lambda(A)}_{>0}=\sum_{q\in\mathbb{Q}}\lambda(A\cap(V+q))$$

Если $\lambda(A\cap(V+q))=0$ $\forall q\in\mathbb{Q}$, то противоречие

Непрерывность меры $\quad A_n\subset A_{n+1}\subset\ldots$

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n) \qquad A_n\in\mathcal{A}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap[-n,n])=A$$

$$\lambda(A\cap[-n,n])\to\lambda(A)$$

Если $\exists q \in \mathbb{Q}: \lambda(A \cap (V+q)) > 0$ то рассмотрим

$$\lambda\Big(\bigsqcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r \in [0,1]}} (A \cap (V+q)+r)\Big) = \sum \lambda\big(\underbrace{A \cap (V+q)+r}_{\text{мн-ва одинаковой меры } >0}\big) = \infty$$

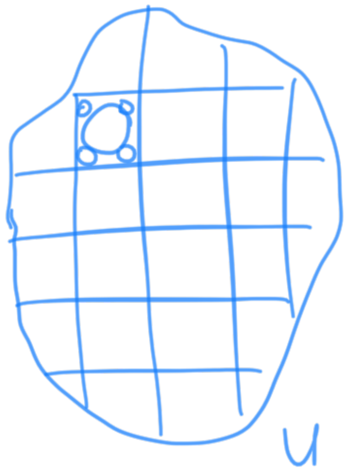
А этого не м. б., т. к.

$$\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}} A \cap (V+q)+r \subset [q, q+r]$$

9.

$U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое $\Rightarrow U = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{V_n}_{\text{откр. шары}} \sqcup B \qquad \lambda(B)=0$

Было: $U = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{I_n}_{\text{откр. кубы}} \sqcup B$



Докажем, почему достаточно взять конечное объединение

Рассм. $\lambda\big(U \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n\big) = \lambda(U) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(V_n) =$

$\lambda(U) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \qquad \lambda(V_n) = \alpha\, \lambda(I_n) \ \forall n \Rightarrow$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(\lambda(I_n) - \lambda(V_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)\lambda(I_n) = (1-\alpha)\lambda(U)$$

$$\Rightarrow \exists N_0: \lambda\Big(U \setminus \bigcup_{n=1}^{N} V_n\Big) \geq \Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\lambda(U)$$

$$U_1 = U \setminus \bigcup_{n=1}^{N} \overline{V_n} - \text{отКР.}$$

$$U_1 = \bigsqcup_{n=1}^{N} V_{n,1} \sqcup \left(U \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{n,1} \right)$$

$$\exists N_1 : \ \lambda\left(U \setminus \bigsqcup_{n=1}^{N_2} V_{n,1} \right) \geq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \lambda(U_1)$$

$$U_2 = U_1 \setminus \bigsqcup_{n=1}^{N_1} \overline{V_{n,1}}$$

$$\vdots$$

$$\lambda\left(U_k \setminus \bigsqcup_{n=1}^{N_k} V_{n,k} \right) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \lambda(U_k)$$

$$\Downarrow$$

$$U = \bigsqcup_{k} \bigsqcup_{n=1}^{N} V_{n,k} \sqcup B, \quad \lambda(B) = 0$$

$$\lambda\left(U \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} \bigsqcup_{n=1}^{N_k} V_{n,k} \right) \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda(B) = 0$$

$$\lambda(U_1) \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \lambda(U)$$

$$\vdots$$

$$\lambda(U_k) \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^k \lambda(U)$$

Семинар 2.

1. Доказать счетную аддитивность меры m на подмножествах $\mathbb{N}$, заданную формулой $m(A) = \sum_{n \in A} p_n$, где $p_n \geq 0$, $\sum_n p_n < \infty$.

2. На алгебре $\mathcal{A}$, состоящей из конечных подмножеств $\mathbb{N}$ и их дополнений, дана функция m: $m(A) = 0$ для конечных A, $m(A) = 1$ для прочих A. Доказать, что m аддитивна и не счетно-аддитивна.

3. Доказать, что всякий набор компактов в $\mathbb{R}^n$ (или в общем топологическом пространстве) является компактным классом, т. е. если последовательность компактов K_n из него имеет пустое пересечение, то некоторое конечное их пересечение $\bigcap_{n=1}^N K_n$ пусто.

4. Привести пример бесконечного компактного класса, состоящего не из компактов.

5. Множество Кантора C получается из $[0, 1]$ удалением открытой средней трети $(1/3, 2/3)$, затем средних третей оставшихся отрезков и т.д. по индукции. Доказать, что C — компакт континуальной мощности лебеговской меры нуль.

6. Доказать, что для каждого $q \in (0, 1)$ в $[0, 1]$ есть компакт лебеговской меры q, не имеющий внутренних точек.

7. Найти лебеговскую меру множества точек из $[0, 1]$, не имеющих 1 в десятичной записи.

8. Доказать, что всякое множество положительной меры Лебега на прямой содержит неизмеримое подмножество.

9. Доказать, что всякое непустое открытое множество U в $\mathbb{R}^n$ с точностью до множества меры нуль есть объединение конечного или счетного набора дизъюнктных открытых шаров, содержащихся в U.

10. Доказать, что меру Лебега множества E в $\mathbb{R}^n$ можно задавать как точную нижнюю грань сумм $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(B_k)$ по наборам открытых шаров B_k, покрывающих E (вместо кубов, как в определении).

11. Доказать, что прямую нельзя представить как объединение дизъюнктных отрезков, отличных от точек. Вывести из этого, что пространство нельзя представить как объединение замкнутых шаров ненулевых радиусов без общих внутренних точек.

12. Доказать, что всякое объединение отрезков с ненулевыми длинами измеримо по Лебегу.

МАТАН СЕМИНАР

28.09.20

$\boxed{10}$

$E \subset \mathbb{R}^n$ λ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$

$$\lambda(E) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(B_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right\}$$

B_k — откр. шары

Как перейти от откр. кубов к шарам?

По опр., $\lambda(E) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$

I_k — куб со сторонами $\parallel$ осям коорд.

Каждый куб с точн. до меры 0 можно покрыть открытыми шарами

$$I_k = \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{\infty} V_{k,j}}_{\text{из предыдущей задачи}} \sqcup A_j \qquad V_{k,n} \text{ — откр. шары} \quad \lambda_n(A_j) = 0$$

Тогда $E \subset \bigcup_{k,j} V_{k,j}$ $\qquad A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{k,j}$

$\lambda(A_k) = 0 \Rightarrow A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{k,j}$ $\quad I_{k,j}$ — откр. кубы

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_{k,j}) < \varepsilon$$

$$\underbrace{W_{k,j}}_{\text{откр. шары}} \supset J_{k,j}$$

$$\lambda(W_{k,j}) = \lambda(J_{k,j}) - \alpha_n$$

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{k,j} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(W_{k,j}) < \alpha_n \cdot \varepsilon$$

$$\sum_{k,j=1} \lambda(V_{k,j}) + \sum_{k,j} \lambda(W_{k,j}) \le \sum_{k} \lambda(J_k) + \alpha_n \cdot \varepsilon$$

$$\sum_k \underbrace{\sum_j \lambda(V_{k,j})}_{\lambda(J_k)} = \sum_k \lambda(J_k)$$

$$\sum_k \underbrace{\sum_j \lambda(W_{k,j})}_{< \alpha_n \cdot \varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$\inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big\} \le \lambda(E)$$

откр. шары

докажем нер-во в другую сторону:

пусть $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ $\quad B_k$ – откр. шары

фикс. $\varepsilon > 0$. Тогда $B_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{J_{k,j}}_{\text{откр. кубы}}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(I_{k,j}) \leq \lambda_n(B_k) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$E \subset \bigcup_{k,j} I_{k,j}$$

$$\sum \sum$$

СЕМИНАР 3.

X – мн-во $\quad \mathcal{A}$ – σ-алг. $\quad \mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ счётно-аддит.

$f: X \to \mathbb{R} \qquad \int_X f \, d\mu$ – интеграл Лебега

Опр. Пусть $f: X \to \mathbb{R}$

f наз. **измеримой** отн. $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-измеримой), если $\{x \in X : f(x) < c\} \in \mathcal{A} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Утв. Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ измер. отн. $\mathcal{A}$

Тогда $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

борел.

$$\{x \in X : f(x) < c\} = f^{-1}(\underbrace{(-\infty; c)}_{\text{измеримо}})$$

измеримо

$\Downarrow$

прообразы всех борел. мн-в измеримы

Св-ва измеримых ф-ий:

1) f, g – изм. отн. $\mathcal{A} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ изм. отн. $\mathcal{A}$ $\quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

2) $f_n : X \to \mathbb{R}$ – изм. отн. $\mathcal{A}$, $f_n(x) \to f(x)$ $\quad \forall x \in X$

$\Downarrow$

f изм. отн. $\mathcal{A}$

$\boxed{1a}$

$f_n : X \to \mathbb{R}$ – изм. отн. $\mathcal{A}$

Д-ть: $\{x \in X : \exists \lim\limits_{n \to \infty} f_n < \infty\} \in \mathcal{A}$

$\|$

$$\{x \in X : \{f_n(x)\} \text{ фундам.}\}$$

A — фундам. посл-ть

$$A = \{x : \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n,m>N} \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\} \underbrace{\in \mathcal{A}}_{\text{т.к. состоит из счётн. } \cup \text{ и } \cap}$$

$\varepsilon = \frac{1}{k}$

$\boxed{1b}$

$A = \{x : f_n(x) \to \infty\}$ по аналогии

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} \{x : f_n(x) \to \infty\} \in \mathcal{A}$$

$$\forall k \ \exists N \ \forall n > N \ f_n(x) > k$$

$\boxed{2}$

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ изм. отн. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(\mathbb{R})$

f измерима отн. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевск.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ изм. по Лебегу, если f измер. отн. $\mathcal{L}(\mathbb{R})$

изм. по Лебегу

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измер. по Лебегу

но $g \circ f$ неизмер.

$$\{x \in X : g(f(x)) < c\} = \{x \in X : f(x) \in g^{-1}(-\infty, c)\}$$

измер. по Лебегу

$\Rightarrow$ прообраз должен быть неизмерим

неизмер.

$$f \qquad f^{-1}(B)$$

измер.

$$f: [0,1] \to C \qquad C \text{ — мн-во Кантора}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n} \in C, \qquad x \in [0,1]$$

$$x \in \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, \quad x_n \in \{0,1\}$$

$$g(x) = I_{f(V)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in f(V) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

V – мн-во Витали на $[0,1]$ тогда

f, g – изм. по Лебегу, $g \circ f$ неизмер.

$I_A(x)$ – измер. отн. $\mathcal{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$

$f(V) \subset C \qquad \lambda(C)=0 \Rightarrow \lambda(f(V))=0 \Rightarrow$

g — изм. по Лебегу

$$\{x\in[0,1] \quad f(x)<c\} = \left\{x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n} : \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{3^n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}\right\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n} : 2x_1=c_1,\dots\ 2x_n=c_n \quad x_{n+1}<c_{n+1}\right\}$$

$\Downarrow$

f - измеримо по Λ.

$$\{x\in\mathbb{R} : g(f(x))=1\} = \{x\in\mathbb{R} : f(x)\subset f(V)\} = V$$

$\Downarrow$

$g\circ f \longrightarrow$ неизмер.

$\boxed{3}$

Можем использовать то, что мн-во меры 0 может дать неизмеримый образ.

$$\lambda(A)=0$$

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in A \\ f_2(x), & x\notin A \end{cases}$$

изм. по Λ.

f — измер. по Λ. так как

$$f(x) = \{x\in X \mid f(x)<c\} =$$

$$= \{x\in A \mid f(x)<c\} \cup (X\setminus A)\cap\{x\in X \; f_2(x)<c\}$$

измер. $\longrightarrow$ $\cup\{x\notin A : f_2(x)<c\}$

C-мн-во Кантора

$f(x) = \{ 0, x \notin C$

$f(C) = V$ — мн-во Витали

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$

$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \in V, x \in C \\ 0, & x \notin C \end{cases}$

$f([0,1]) = V \cup \{0\}$ — неизм.

f — изм. по Лебегу

$\boxed{4}$ подумать.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f(A)$ измер. $\forall A$ — измер. по Лебегу

$\Updownarrow$?

$\lambda(f(A)) = 0 \quad \forall A \subset \mathbb{R} \quad \lambda(A) = 0$

$f(A) = 0$ пусть $\lambda(f(A)) > 0$

$\boxed{\text{тогда } \exists B \subset f(A), B \text{ — неизмер.}}$

$A \cap f^{-1}(B) \subset A \quad \lambda(A \cap f^{-1}(B)) = 0$

измер.

но $f(A \cap f^{-1}(B)) = B$ — неизмер.

Семинар по матану

26.10.20

$X, \mathcal{A}, \mu$ $\quad f: X \to \mathbb{R}$ – измер.

$\int\limits_X f \, d\mu$ $\quad$ простые ф-ии $\quad f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i I_{A_i}(x)$

$c_i \in \mathbb{R} \quad A_i \in \mathcal{A}$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i)$$

Критерий интегрируемости по Лебегу

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ измер.

Тогда f – интегр. $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \mu(\{x : n \leq f(x) \leq n+1\}) < \infty$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : |f(x)| \geq n\}) < \infty$$

$\boxed{1}$

При каких α ф-ия $|\cos x|^{\alpha}$ интегрируема на $[0, 2\pi]$?

$\alpha \geq 0 \quad \lambda(\{x : |\cos x|^{\alpha} \geq n\})$ ограничена $\Rightarrow$ интегр.

$\alpha < 0 \quad \lambda(\{x : |\cos x| \leq n^{\frac{1}{\alpha}}\})$

$c\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq |\cos x| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| \leq \left|\frac{\pi}{2} - x\right| \Rightarrow$

$|\cos x|$ интегр. на $[0, \pi] \Leftrightarrow \left|\frac{\pi}{2} - x\right|^{\alpha}$ интегр. на $[0, \pi]$

$$\lambda\left(\{x\in(0,\pi]: |\tfrac{\pi}{2}-x|<n^{\frac{1}{\alpha}}\}\right)$$

$$\sum\lambda\left(\{x\in(0,\pi]: |\tfrac{\pi}{2}-x|<n^{\frac{1}{\alpha}}\}\right)=\sum 2n^{\frac{1}{\alpha}}<\infty$$

т.е. при $\frac{1}{\alpha}<-1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha>-1}$

Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ интегр. по Риману $\Rightarrow f$ интегр. по Лебегу и интегралы Римана и Лебега равны

Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ — абсолютно несобств. интеграл по Риману $\Rightarrow f$ интегр. по Лебегу

Если $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ — несобств. интеграл, но $|f|$ не интегр. $\Rightarrow f$ не интегр. по Лебегу

II способ:

$$\int_0^{\pi}|\cos x|^{\alpha}dx\le C\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}$$ — несобств. интеграл при $\alpha>-1$

$\Rightarrow$ интегр. по Лебегу

Пусть $\alpha<-1$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi}|\cos x|^{\alpha}dx$$ — интегр. по Риману и Лебегу

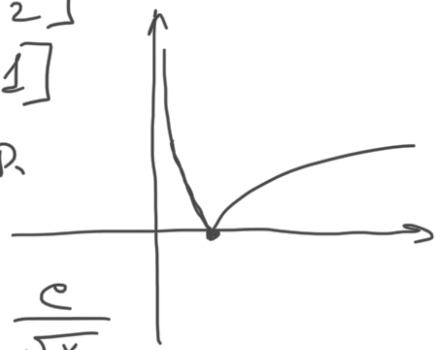
Если бы $|\cos x|^{\alpha}$ была интегр. по Лебегу, то

$$\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi}|\cos x|^{\alpha}d\mu(x)\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos x|^{\alpha}dx$$

$\sup \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} |\cos x|^\alpha dx = \infty$ т.к. $(\cos x)^\alpha$ не несобств. интеграл

$\boxed{2}$

$|\ln x|^\alpha$ инт. на а) $[0, \frac{1}{2}]$ б) $[0, 1]$



а) $\alpha \leq 0$ ограниченно $\Rightarrow$ интегр.

$\alpha > 0$

$\lambda(\{x : |\ln x|^\alpha \geq n\}$

$|\ln x|^\alpha \leq \frac{c}{\sqrt{x}}$

$\downarrow$

x^α интегр. на $\alpha > -1$

$\Rightarrow |\ln x|^\alpha$ интегр. на $[0, \frac{1}{2}]$ $\forall \alpha$

б) $[0, 1]$ при $\alpha \geq 0$ интегр.

при $\alpha < 0$ (в окр 1)

$c(x-1)^\alpha \leq |\ln x|^\alpha = |\ln(1+y)|^\alpha \leq y^\alpha \leq |x-1|^\alpha$

$y < 0$

$|\ln x|^\alpha$ интегр. на $[0, 1] \Leftrightarrow |x-1|^\alpha$ интегр. на $[0, 1]$

$\Updownarrow$

$\alpha > -1$

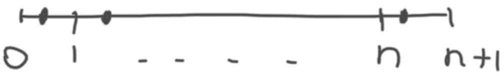
Семинар по матану

02.11.20

$\boxed{4}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — интегрируема

Д-ть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x+n)$ абсолютно сходится почти всюду (п.в)



Нужно проверить, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(x+n)| < \infty$ п.в

Оценим частичные суммы

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} |f(x+n)|$$ — интегрируемы, т.к. каждое слагаемое $|f(x+n)|$ интегр. по усл.

$$\int_0^1 f_N(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\int_0^1 |f(x+n)|\,dx}_{\int_n^{n+1} |f(x)|\,dx} = \int_1^{N+1} |f(x)|\,dx$$

$$\int_1^{N+1} |f(x)|\,dx \longrightarrow \int_1^{\infty} |f(x)|\,dx \Rightarrow$$

$$\sup_N \int_0^1 f_N(x)\,dx < \infty \Rightarrow \sup_N f_N(x) < \infty \text{ п.в.}$$

По теореме Беппо Леви: $f_N(x) \le f_{N+1}(x)$

$$\sup_N \int_0^1 f_N(x)\,dx < \infty$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{N\to\infty} f_N(x) < \infty \text{ п.в.}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x+n)| < \infty \text{ п.в.}$$

$\boxed{5}$

$L^p[0,1]$ – ф-ии, кот. интегрируемы в p-ой степени

$L^p[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ |f|^p$ интегрируема$\}$

$h \sim g$, если $h = g$ п.в.

$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ – f – класс эквив-ти

ЗАДАЧА:

$f_n \to f$ в $L^1[0,1]$

Док-ть: $\sqrt{f_n} \to \sqrt{f}$ в $L^2[0,1]$

$\|f_n - f\|_1 \to 0 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \|\sqrt{f_n} - \sqrt{f}\| \to 0$

$\int |f_n - f|\,dx \to 0$

$$\int \left(\sqrt{f_n} - \sqrt{f}\right)^2 dx = \int \left(f_n + f - 2\sqrt{f_n}\sqrt{f}\right) dx$$

$$\int \sqrt{f_n}\sqrt{f}\,dx \geq \frac{2}{\frac{1}{f_n}+\frac{1}{f}} = \frac{2ff_n}{f+f_n}$$ (ср. гармоническ)

$$\int \left(f_n + f - 4\frac{ff_n}{f+f_n}\right)dx = \int \frac{(f-f_n)^2}{f+f_n}\,dx \leq \int |f_n - f|\,dx \to 0$$

$\boxed{6}$

f — огранич. измер. ф-ия на $[0,1]$

$$\int_0^1 f(x)^2dx = \int_0^1 f(x)^3dx = \int_0^1 f(x)^4dx$$

Д-ть, что f совпадает п.в. с индикатором множества

$f = I_A \quad A \subset [0,1]$

$$A = f(x)^3 \leq \frac{f^2(x)+f^4(x)}{2} \Rightarrow \int f^3(x)\,dx \leq \int \frac{f^2(x)+f^4(x)}{2}\,dx = A$$

$$f^3(x) = \frac{f^2(x)+f^4(x)}{2} \quad \text{п.в.}$$

$$f(x)^2 = f(x)^3 = f(x)^4 \Rightarrow f(x) \in \{0,1\}$$

$$A = \{x : f(x) = 1\} \Rightarrow f = I_A$$

$\boxed{\text{II способ!}}$ Неравенство Коши-Буняковского

Пусть $f, g \in L^2(\mu)$. Тогда

$$\int_X f(x)g(x)\,d\mu \leq \sqrt{\int \|f(x)\|^2 d\mu}\sqrt{\int \|g(x)\|^2 d\mu}$$

$$A=\int f(x)\cdot f(x)^2dx \le \sqrt{\int f(x)^2dx}\sqrt{\int f(x)^4dx} = A$$

$$\Rightarrow f(x) = c\, f(x)^2 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ c\,f(x)=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{c}\mathbb{I}_A$$

$\boxed{7}$

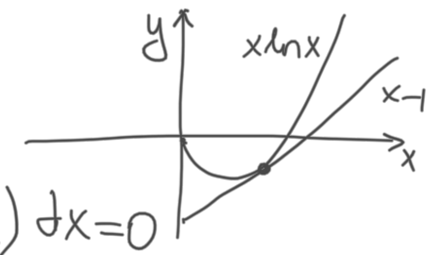
Пусть $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\quad \int_0^1 f(x)dx=1$

$f\ln f$ — интегр. $\Rightarrow$ $\quad f(x)>0$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 f(x)\ln f(x)\,dx}_{\text{энтропия}} \geqslant 0$$

Воспользуемся $f(x)\ln f(x)\geqslant f(x)-1$

$x\ln x \geqslant x-1$

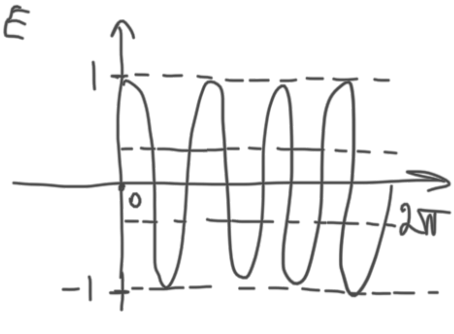


$$\int f(x)\ln f(x)\,dx \geqslant \int (f(x)-1)\,dx=0$$

$\boxed{8}$

$E\subset[0,2\pi]$ $\quad \lambda(E)>0$

$$\inf_n \int_E |\cos nx|\,dx>0$$



$$\int_E |\cos nx|\,dx = \int_{E \cap \{x : |\cos nx| \geqslant \varepsilon\}} |\cos nx|\,dx \geqslant \varepsilon \cdot \lambda(E \cap \{x : |\cos nx| \geqslant \varepsilon\})$$

пусть $\varepsilon > 0$

$\{x : |\cos nx| > \varepsilon\}$

$\lambda(\{x : |\cos nx| < \varepsilon\})$

Семинар по матану

16.11.20

Повторное суммирование

$$\sum_k\left(\sum_n a_{n,k}\right) \neq \sum_n\left(\sum_k a_{n,k}\right)$$

Пример:

$$\forall n \quad \sum_k a_{n,k} = 0$$

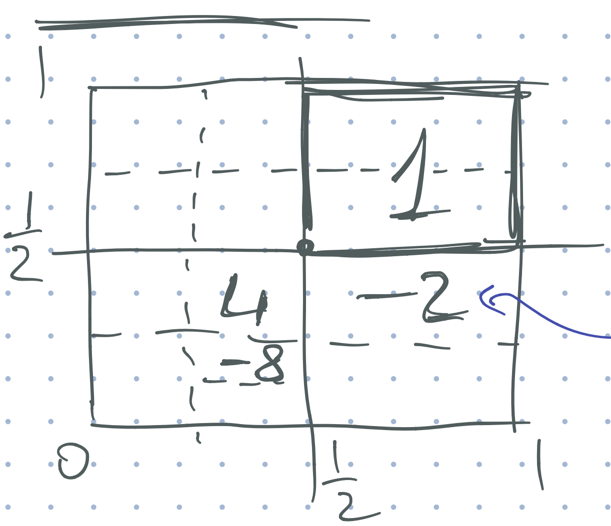
$$\Rightarrow \sum_n\left(\sum_k a_{n,k}\right) = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}$$

$$a_{n,k} = \begin{cases} 1 & n = k \\ -1 & k = n+1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \qquad \sum_n a_{n,k} = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_k\left(\sum_n a_{n,k}\right) = 1$$



$$I_k = \left[2^{-k-1},\ 2^{-k}\right]$$

Выбираем константу так, чтобы интеграл занулился

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy=0 \qquad \forall x\in[\tfrac{1}{2},1]$$

по аналогии строим всю функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}2^{2k}, & (x,y)\in[2^{-k-1},2^{-k}]^2\\ 2^{2k+1}, & (x,y)\in[2^{-k-1},2^{-k}]\times[2^{-k-2},2^{-k-1}]\end{cases}$$

проверим:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy=\underbrace{\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(x,y)\,dy}_{=2^{2k}}+\underbrace{\int_{2^{-k-2}}^{2^{-k-1}} f(x,y)\,dy}_{=2^{2k+1}}$$

$$\int_0^1\Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy\Big)dx=0$$

в другом порядке:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ 0\end{cases}$$

$$\int_0^1\Big(\int_0^1 f(x,y)\,dx\Big)dy=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{4}\neq 0$$

$\boxed{2}$

$f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$

↖ измерима

$\exists \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy$ — конечный, но

$\nexists \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$ — бесконечный

Решение: попробуем построить ряды

$$\exists \sum_n \left(\sum_k a_{n,k}\right) < \infty$$

$$\nexists \sum_k \left(\sum_n a_{n,k}\right)$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{matrix}$$

$$\sum_k a_{n,k} = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \sum_n \left(\sum_k a_{n,k}\right) = 0$$

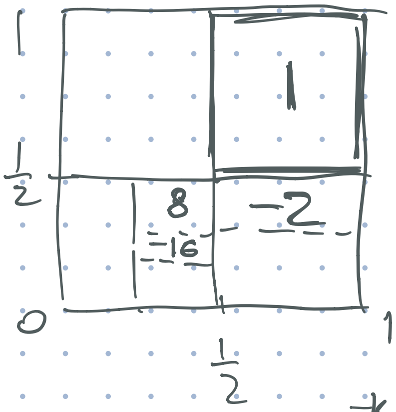
$$\sum_k \left(\sum_n a_{n,k}\right)$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4 & -4 \end{matrix}$$

по строкам $\Rightarrow \sum = 0$

по столбцам $\sum = \infty$

(каждый столбец $=1$)



$$f(x,y)=\begin{cases} 2^{2k}\cdot k & (x,y)\in[2^{-k-1},2^{-k}] \\ -2^{2k}\cdot k\cdot 2 & (x,y)\in[2^{-k-1},2^{-k}]\times \\ & \times[2^{-k-2},2^{-k-1}] \end{cases}$$

$$\int f(x,y)\,dx=\underbrace{\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(x,y)\,dx}_{=\,2^{k}\cdot k}+\underbrace{\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(x,y)\,dx}_{=\,-2^{2(k-1)}(k-1)2}=2^{k}$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy=\sum\frac{1}{2}=\infty$$

$(X,\mathcal{A},\mu),\ (Y,\mathcal{B},\nu)$

$(X\times Y,\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\ \mu\otimes\nu)$

Пусть $f: X\times Y\to\mathbb{R}$ – измер. неотриц.

$\exists \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy)$

Тогда $\exists \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)$

f – измер., ограничен. $\Rightarrow \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)=$

$=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy)$

Пусть $f_n = \min(f, n)$ $\quad f_n \geq 0$

Тогда $f_n(x) \uparrow f(x)$

$$\int_{X\times Y} f_n(x,y)\,d(\mu\otimes\nu) = \int_Y \left(\int_X f_n(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy)$$

по т. Беппо Леви - - -

$$\sup_n \int_{X\times Y} f_n(x,y)\,d(\mu\otimes\nu) = \sup_n \int_Y \left(\int_X f_n(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy) \leq$$

$$\leq \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy)$$

$$U_n \subset \mathbb{R}^n$$

$$U_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

$\lambda_n(U_n) - ?$ (объём n-мерного шара)

$$\lambda_n(U_n) = \int_{U_n} dx_1 \dots dx_n = \int \left(\int_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2} dx_1 \dots dx_{n-1}\right) dx_n =$$

V_n – объём n-мерного шара

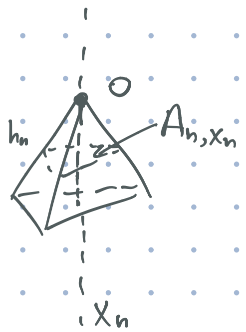
$$= \int V_{n-1} \left(\sqrt{1 - x_n^2}\right)^{n-1} dx_n = V_{n-1} \int \sqrt{1 - x_n^2}^{\,n-1} dx_n$$

$$\Rightarrow V_n = \prod_{k=3}^{n} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{k-1}{2}} dx \quad \underset{\pi}{\overset{\shortparallel}{V_2}}$$

$x = \sin x$ $\qquad$ подстановка Эйлера

$$\int_{-1}^{1} (\cos x)^k dx \qquad \sqrt{1 - x^2} = xt$$

$$V_n = \int_{A_n} d\lambda_n = \int_0^{h_n} \lambda_{n-1}(A_n, x_n)\, dx_n =$$



$$= \int_0^{h_n} \left(\frac{x_n}{h_n}\right)^{n-1} V_{n-1}\, dx_n =$$

$$= V_{n-1} \int_0^{h_n} \left(\frac{x_n}{h_n}\right)^{n-1} dx =$$

$$= V_{n-1} \left(\frac{x_n^n}{n} \cdot \frac{1}{h_n^{n-1}}\right) \Bigg|_0^{h_n} = V_{n-1} \frac{h_n}{n}$$

СЕМИНАР ПО МАТАНУ

$\boxed{1}$ $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ Найти $\int$ по внутренности

$$\int\limits_{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\leq 1} dx\,dy =$$

ЗАМЕНА $\begin{cases} x_1=\frac{x}{a} \\ y_1=\frac{y}{b} \end{cases}$

$x_1^2+y_1^2=1$

$$= \int\limits_{x_1^2+y_1^2\leq 1} |J|\,dx_1\,dy_1 =$$

$$\frac{1}{J}=\left|\frac{\partial(x_1,y_1)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{ab} \Rightarrow |J|=ab$$

или $J=abr$

$r>0$ $\varphi\in[0,2\pi)$

$$= ab \underbrace{\int\limits_{x_1^2+y_1^2\leq 1} dx_1\,dy_1}_{S_{\text{круга}}} = \pi ab$$

2 Фигура ограничена кривой

$$A := \begin{cases} (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2) \\ x^2+y^2 \geq a^2 \end{cases}$$

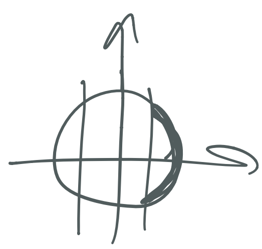
и

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi \\ y = r\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^4 = 2a^2 r^2 \cos 2\varphi \\ r \geq a \end{cases}$$

$r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)$

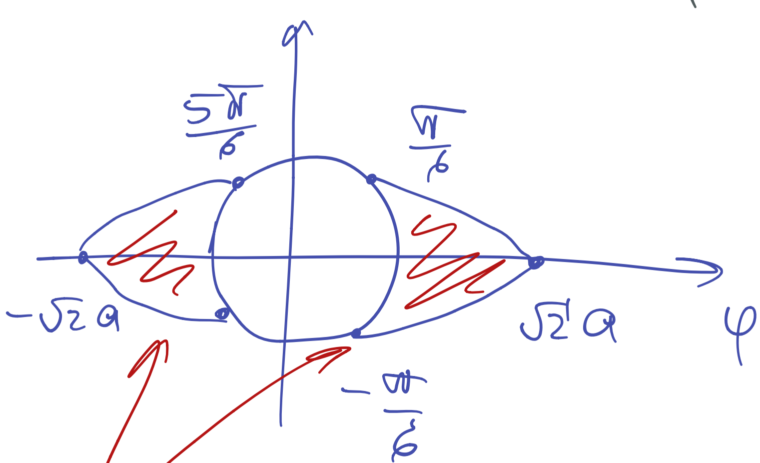
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{2}\,a\sqrt{\cos 2\varphi} \\ r \geq a \end{cases}$$



$$\Downarrow$$

$$\cos 2\varphi \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$$



т.к. 2 симметричных куска

$$S = \int_A dx\,dy = \iint\limits_{a \leq r \leq \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr\,d\varphi = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_a^{a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr \right) d\varphi =$$

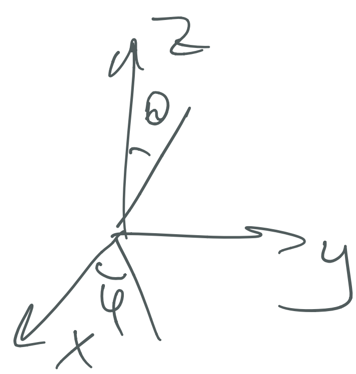
$$= 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2a^2\cos 2\varphi - a^2}{2}\, d\varphi = a^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{13} \quad \int\limits_{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 \le 1} \exp\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x}{a} \\ y_1 = \frac{y}{b} \\ z_1 = \frac{z}{c} \end{cases} \qquad |J| = abc$$

$$= \int\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \le 1} \exp\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\right) abc\, dx_1\, dy_1\, dz_1 =$$

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi \\ y_1 = r\sin\theta\sin\varphi \\ z_1 = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0;\pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array}$$



сферич. коорд-ы.

$$|J| = r^2 \sin\theta$$

$$= abc \int\limits_{r\le 1} \exp(r)\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= abc \int_0^1 e^r r^2 dr \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{=2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} =$$

$$= 4\pi abc \underbrace{\int_0^1 e^r r^2 dr}_{=e} = 4\pi e abc$$

$\boxed{4}$
$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x^2 \\ y_1 = y^2 \\ z_1 = z^2 \end{cases} \qquad |J| = \frac{1}{8xyz}$$

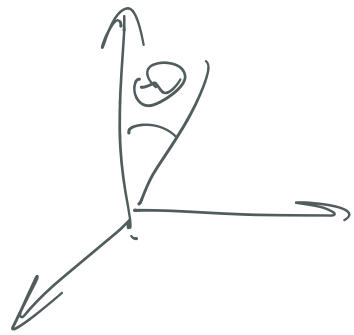
аналогично

$\boxed{5}$

$$\int\limits_{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|\le 1} \frac{1}{|x|^p}\,dx \qquad\qquad \int\limits_{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|\ge 1} \frac{1}{|x|^p}\,dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x:\ \frac{1}{|x|^p}\ge n\right\}\right)<\infty$$

Сферич. координаты



$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n = r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

$$\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}\in[0;\pi]$$
$$\theta_{n-1}\in[0;2\pi)$$

$$|J| = r^{n-1}\cdot F(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$$

$$\int_{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1} \frac{1}{|x|^p}\, dx =$$

$$= \int_{0 \le r \le 1} \frac{1}{r^p} r^{n-1} F(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})\, dr\, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 r^{n-1-p}\, dr}_{< \infty} \; \underbrace{\int_{\theta_i} F(\dots)\, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}}_{< \infty}$$

$n-1-p > -1 \Rightarrow p < n$