

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ЛИСТОК 2

При сдаче этих задач можно без объяснений пользоваться значениями пределов $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x.$$

2. При каких $z \in \mathbb{C}$ сходится и при каких — абсолютно сходится ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$?

3. Пусть $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ — функция, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажите эквивалентность следующих двух утверждений:

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$.

2) Для всякой последовательности $\{x_n\}$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $x_n \in A \setminus \{a\}$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$.

4. Пусть $(a; b) \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал и $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонно возрастающая непрерывная функция.

а) Докажите, что в каждой точке $c \in (a; b)$ существуют односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$.

б) Докажите, что множество точек, в которых функция f не является непрерывной, не более чем счетно.

5. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, и пусть для всякого $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$ (имеется в виду предел последовательности). Следует ли из этого, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

6. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n}.$$

7. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = \exp(a)$.

8. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(x/\sqrt{n})$.

9. Пусть x_n — n -й по порядку возрастания положительный корень уравнения $\operatorname{ctg} x = x$.

а) Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$.

б) Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - \pi n)$.