1 HW 3

Задача 1.1. Докажите, что гомоморфизм пучков

(а) инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен послойно,

(б) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он послойный изоморфизм.

(замечание: поскольку "образ"морфизма пучков $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, определенный по формуле $U \to im(\mathcal{F}(U))$, в общем случае пучком не является, образом морфизма пучков обычно называется пучок, ассоциированный с этим предпучком, так что сюръективный морфизм пучков - это по определению морфизм, сюръективный послойно, при этом $F(U) \to G(U)$ не обязаны быть сюръекциями для всех U.)

Доказательство.

(а) $\varphi : F \to G$ - инъективен $\Leftrightarrow \varphi_p : F_p \to G_p$ инъективен

(=>) φ - injective $\Rightarrow \ker\phi$ - zero presheaf $\Rightarrow \forall U \subset X \quad (\ker\phi)_u = 0$ 0 - colim of a 0 diagram $\Rightarrow (\ker\phi)_p = 0$

(<=) φ_p - injective

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall p : \ker\varphi_p = 0 \\
&\Rightarrow (\ker\varphi)^+_u : U \to \bigsqcup_{p\in U} \ker\varphi_p \\
&\Rightarrow (\ker\varphi)^+_u = 0 \quad \forall U \subset X \quad \text{since } \ker\varphi \text{ - sheaf} \\
&\Rightarrow \ker\varphi \cong (\ker\varphi)^+ \cong 0
\end{aligned}$$

(b) $\varphi : F \to G$ - isomorphism $\varphi_p : F_p \to G_p$ - isomorphism

(=>) φ - isomorphism $\Rightarrow \exists\varphi^{-1} \Rightarrow (\varphi^{-1})_p = (\varphi_p)^{-1}$

(<=) $\forall U \ \varphi_u$ - isomorphism, injectivity follows from (a)

$$\begin{aligned}
&\text{crop.} t \in G(U) \quad t_p \in G_p \Rightarrow \exists s_p \in F_p \quad \varphi(s_p) = t_p \\
&\exists V'_p \subset X : \quad \exists s(p) \in F(V'_p) \quad s(p)\Big|_p = s_p \\
&\varphi(s(p)), t\Big|_{V'_p} \in G(V'_p) \text{ - their stalks in p are equal} \\
&\Rightarrow \exists V_p : \varphi(s(p))\Big|_{V_p} = t\Big|_{V_p} \\
&U = \bigcup V_p \quad p, q \in U \quad s(p)\Big|_{V_p\cap V_q}, \ s(\varphi)\Big|_{V_p\cap V_q} \in F(V_p \cap V_q) \\
&\varphi(s(p)\Big|_{V_p\cap V_q}) = s(q)\Big|_{V_p\cap V_q} \quad \text{because F - sheaf} \\
&\Rightarrow \exists s \in F(U) \quad \varphi(s)\Big|_{V_p} = t\Big|_{V_p} \Rightarrow \varphi(s) = t
\end{aligned}$$

□

Задача 1.2. Пусть A кольцо и M некоторый модуль. Проверьте, что определенный следующим образом $\tilde{M}$:

$$\tilde{M}(U) = \left\{ s : U \to \sqcup_{p\in U} M_p \mid \forall p s(p) \in M_p, \forall p \exists D(f), p \in D(f), \forall q \in D(f) s = m/f^k \right\}$$

является пучком, что его слой в точке p - это M_p и что $\tilde{M}(D(f)) = M_f$.

Доказательство.

$$U = \bigcup U_i \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \tilde{M}(U) \qquad \forall U_i : \sigma_1|_{U_i} = \sigma_2|_{U_i}$$

If $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \exists p \in U : \sigma_1(p) \neq \sigma_2(p)$

$\exists U_i$ such that $p \in U_i \Rightarrow \sigma_1|_{U_i}(p) = \sigma_2|_{U_i}(p)$, but

$\forall p \in U_i \quad \sigma_j|_{U_i}(p) = \sigma_j(p) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$

Let $\sigma : U_i \cap U_j \Rightarrow \sigma(p) = \sigma_i(p)$ and $\sigma(p) = \sigma_j(p)$, but

$\sigma_i(p) = \sigma_j(p)$, because $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow \tilde{M}(U)$ - sheaf

$\varphi : \tilde{M}(p) \to M_p \quad s \to s(p) \quad \varphi$ - homomorphism $\quad \frac{a}{f} \in M_p$

$\Rightarrow p \in D(f)$ - open neighbourhood $\quad s : D(f) \to \bigsqcup_{p \in D(f)} M_p \quad s(x) = \frac{a}{f} \Rightarrow \varphi$ - surjection

$p \in U$ - neighborhood $\quad s, t \in \tilde{M}(U) \quad s(p) = t(p) \quad s = \frac{a}{f} \; t = \frac{b}{g} \quad \frac{a}{f} = \frac{b}{g}$ in M_p

$\Rightarrow h(ga - fb) = 0$ in $M \Rightarrow \frac{a}{f} = \frac{b}{g}$ in $M_q \quad \forall q, f, g, h$ such that

$q \in D(f) \cap D(g) \cap D(h) \quad p \in D(f) \cap D(g) \cap D(h) \Rightarrow s = t \Rightarrow \varphi$ - isomorphism

□

Задача 1.3. Носитель $\operatorname{Supp}(M)$ модуля M - это носитель пучка $\tilde{M}$, т е множество таких $p \in \operatorname{Spec}(A)$, что слой $M_p \neq 0$.

(а) Пусть M A-модуль. Докажите, что если $M_p = 0$ для любого простого идеала $p \subset A$, то $M = 0$.

(б) Если M конечно порожден, докажите, что носитель M замкнут (сначала можно рассмотреть случай циклического M). Верно ли это в случае произвольного M ?

(в) Докажите, что если M является суммой своих подмодулей M_1 и M_2, то $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}(M_1) \cup \operatorname{Supp}(M_2)$ (воспользуйтесь точностью локализации, вспомнив, что это такое).

(г) Докажите, что носитель тензорного произведения конечно порожденных модулей $M_1 \otimes M_2$ - это пересечение носителей M_1 и M_2 (вспомните лемму Накаямы, выведите из нее, что тензорное произведение к.п. модулей над локальным кольцом нулевое если и только если таков один из модулей).

Доказательство.

(а)

$x \in M \quad x \neq 0 \quad \forall p : M_p = 0 \Rightarrow \exists s \in A \quad sx = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ann}(x) \not\subset p \; \forall p$ but $\operatorname{Ann}(x)$ - ideal $\Rightarrow \operatorname{Ann}(x) = A \; \forall x \in M$

(б)

$(x_1, \ldots, x_n) = M \quad T = \operatorname{Spec} A \setminus \operatorname{Supp} M$

$T = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid M_p = 0\} \Rightarrow \exists t_i \in A \setminus p \Rightarrow D(t) = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid t \notin p\}$

$\Rightarrow D(t) \subset T \Rightarrow T$ - open

(в)

$M = M_1 \oplus M_2$

$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0 \quad p \in \operatorname{Supp} M_1 \sqcup \operatorname{Supp} M_2$

$0 \to (M_1)_p \to M_p \to (M_2)_p \to 0$ either $(M_1)_p \neq 0$ either $(M_2)_p \neq 0$

$\Rightarrow M_p \neq 0 \Rightarrow p \in \operatorname{Supp} M$

similarly vice versa

(г)

$$
\begin{aligned}
&M_1 \otimes M_2 = 0 \Leftrightarrow M_1 = 0 \text{ or } M_2 = 0\\
&\Rightarrow p \notin \operatorname{Supp} M_1 \cap SuppM_2 \Rightarrow (M_1)_p = 0 \text{ or } (M_2)_p = 0\\
&\Rightarrow (M_1)_p \otimes (M_2)_p = (M_1 \otimes M_2)_p = 0\\
&p \in \operatorname{Supp}(M_1 \otimes M_2) \Rightarrow (M_1 \otimes M_2)_p \neq 0 \Rightarrow (M_1)_p \neq 0,\ (M_2)_p \neq 0\\
&\Rightarrow p \in \operatorname{Supp}(M_1) \cap \operatorname{Supp}(M_2)
\end{aligned}
$$

□

Задача 1.4.

(а) Проверьте, что если $(X, \mathcal{O}_X)$ - схема и U открыто в X, то $\left(U, (\mathcal{O}_X)\Big|_U\right)$ тоже схема (вместо $(\mathcal{O}_X)\Big|_U$ будем писать просто $\mathcal{O}_U$).

(б) Пусть $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ схемы, а U_{ij} открыты в X_i, причем для $i \neq j$ заданы морфизмы $\phi_{ij} : \left(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}\right) \to \left(U_{ji}, \mathcal{O}_{U_{ji}}\right)$ со свойством $\phi_{ij} \circ \phi_{ji} = id$, $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$ (на $U_{ij} \cap U_{ik}$). Проверьте, что существует схема $(X, \mathcal{O}_X)$, ее открытое покрытие U_i и изоморфизмы схем $f_i : X_i \to U_i$, такие, что $f_i\left(U_{ij}\right) = U_i \cap U_j$ и $f_i = f_j \phi_{ij}$.

Доказательство.

(a) (X, O_x) - scheme $\quad X = \bigcup U_i$ - affine covering when $i \neq j$

$$
\begin{aligned}
&U \subset X \text{ - open} \quad U_i = \bigcup (U_i)_f = \bigcup \{x \in U_i \mid f(x) \neq 0\}\\
&f \in \Gamma(U_i, O_{U_i}) \quad (U_i)_f \text{ - affine scheme}\\
&(U_i)_f \{-abaseforthetopology\} \Rightarrow U \cap U_i \text{ - also affine covering}
\end{aligned}
$$

(b) $(X_i, O_{X_i}$ - scheme $\quad U_{ij} \subset X_i$ - open when $i \neq j$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{ij} : (U_{ij}, O_{U_{ij}}) \to (U_{ij}, O_{U_{ij}}) \quad \varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} = \mathrm{Id}\\
&\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}\ (U_{ij} \cap U_{ik}) \ \Rightarrow \exists (X, O_X) \text{ - scheme}\\
&X = \bigcup U_i \quad f_i : X_i \to U_i \text{ - isomorphism} \quad f_i(U_{ij}) = U_i \cap U_j \quad f_i = f_j \varphi_{ij}\\
&X = \bigsqcup X_i \text{ - as a set}\\
&\mathrm{Top}(X) = \{U \text{ - open, if } \forall i : U \cap X_i \text{ - open}\}
\end{aligned}
$$

□

Задача 1.5. Найдите $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\mathbb{P}^n_K)$.

Доказательство. Lets cover $\mathbb{P}^n_k$ with standart affine charts

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Spec}\left(k\left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right]\right) = U_i\\
&y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \ldots, y_n = \frac{x_n}{x_i} \quad \frac{x_i}{x_j} = y_i \cdot \frac{1}{y_j}\\
&\Rightarrow f \in \Gamma(U_i, O_{U_i}) \quad g \in \Gamma(U_j, O_{U_j})\\
&f\Big|_{U_i \cap U_j} = g\Big|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow f(y_1, \ldots, y_n) = y_j^{-m} g_m + \ldots + y_j^{-1} g_1 + g_0 \Rightarrow y_j^m (f - g_0) = g_1 y_j^{m-1} + \ldots + g_m\\
&\Rightarrow f = g_0 = g \Rightarrow \Gamma(\mathbb{P}^n_k, O_{\mathbb{P}^n_k}) = k
\end{aligned}
$$

□