О курсе

Теория функций комплексного переменного

Весна 2021

Лектор

- Тиморин Владлен Анатольевич, профессор
- Эл. адрес: vtimorin@hse.ru
- Время консультаций: вторник и пятница 9:30-10:50, skype: vtimorin

Команда курса: семинаристы

Семинаристы	**Эл. адреса**
Забродин Антон Владимирович	zabrodin@itep.ru
Зыбин Кирилл Петрович	zybin@td.lpi.ru
Левин Андрей Михайлович	alevin57@gmail.com
Побережный Владимир Андреевич	poberezh@itep.ru
Львовский Сергей Михайлович	lvovski@gmail.com
Медведев Владимир Олегович	wowa-medved@mail.ru

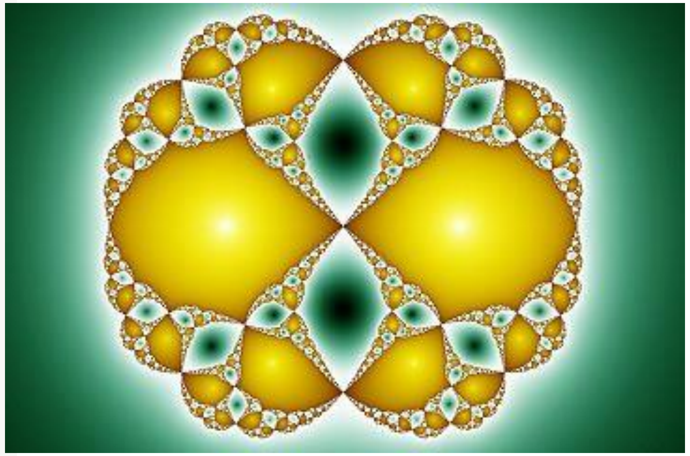
Команда курса: семинаристы

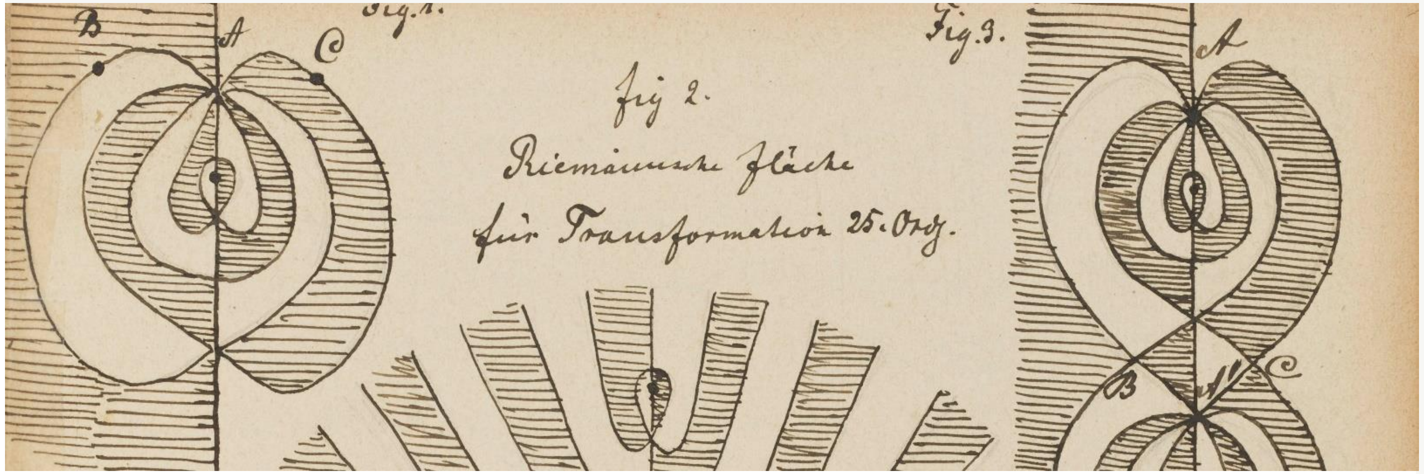
Забродин Антон Владимирович

Зыбин Кирилл Петрович

Левин Андрей Михайлович

Побережный Владимир Андреевич





Львовский Сергей Михайлович

Медведев Владимир Олегович

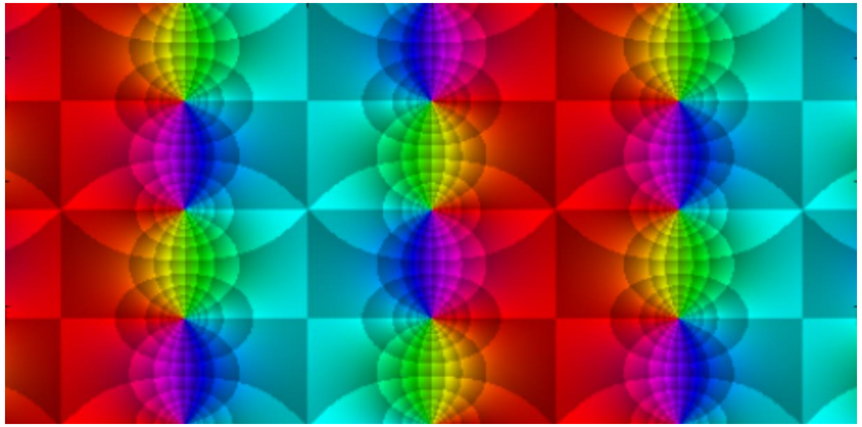
Команда курса: учебные ассистенты

Гаврилова Светлана Алексеевна	sveta_6117@mail.ru
Яковлев Иван Андреевич	iayakovlev_1@edu.hse.ru
Болбачан Василий Сергеевич	vbolbachan@gmail.com
Кучумов Николай Игоревич	samarium93@gmail.com
Викулова Анастасия Вадимовна	vikulovaav@gmail.com
Валиева Рената Фаридовна	renata_valieva@mail.ru
Дудникова Лада Андреевна	ladud111@gmail.com
Федоров Игорь Владимирович	igoron-27@yandex.ru
Ахмедова Евгения Ахмедовна	evakhmedova@gmail.com
Зимин Фёдор Владимирович	zimfv@yandex.ru
Юнг Егор Васильевич	yungegor@gmail.com

О чем курс

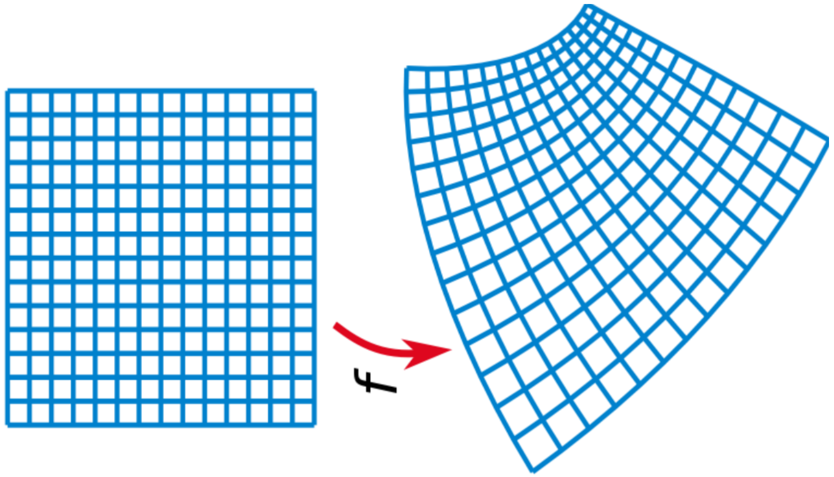
$$\mathrm{sn}(u) = \frac{2\pi}{K\sqrt{m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1-q^{2n+1}} \sin((2n+1)v),$$

- О функциях, заданных явными формулами (в т.ч. явными рядами, интегралами и проч.).



- Об отображениях, сохраняющих углы.

- О том, как сделать задачу проще и решить ее.

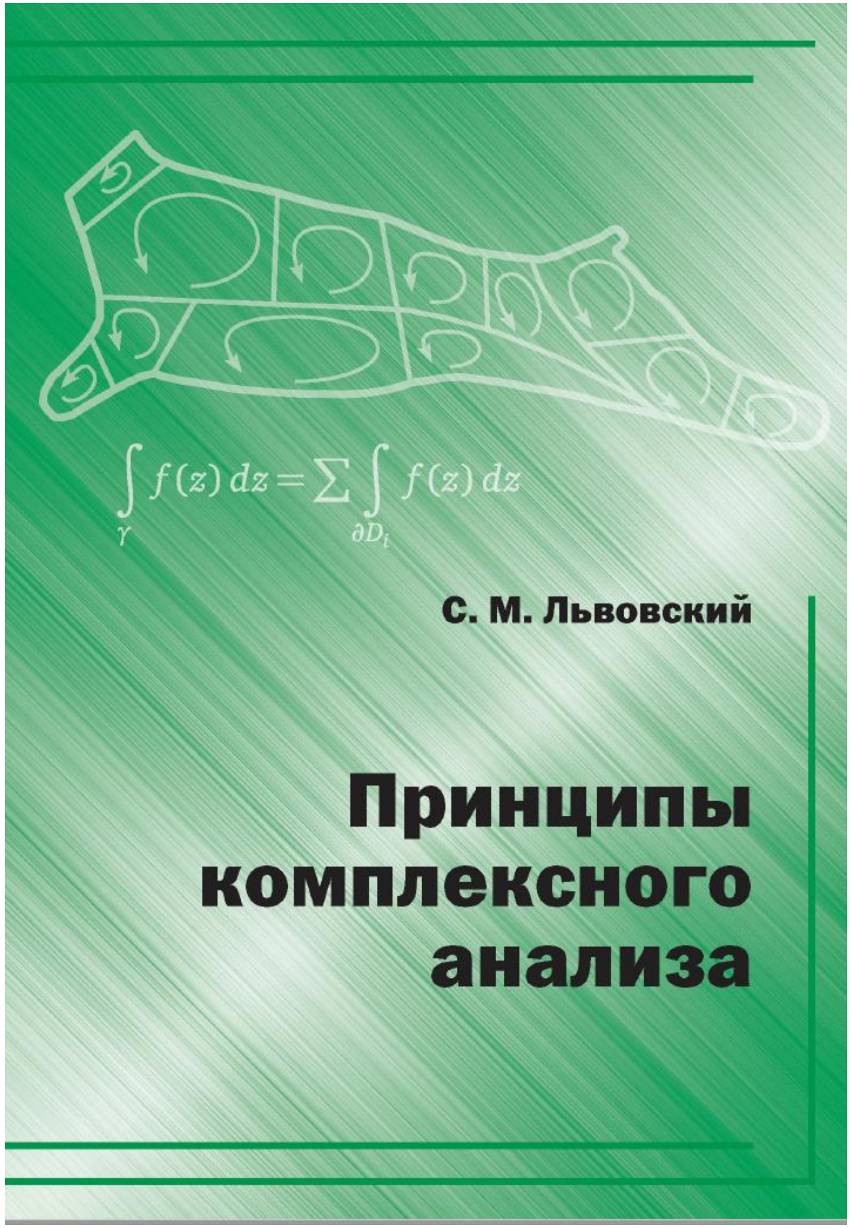


Формула оценки

- Итоговая оценка = **0.5** * *домашние задания* + **0.3** * *письменный экзамен* + **0.2** * *промежуточная контрольная работа*.
- Будут предложены также (необязательные) **бонусные задания**, результаты которых могут повысить оценку, в т.ч. набрать 10 досрочно.
- Домашние задания состоят из автоматически проверяемых тестов и заданий, проверяемых вручную.

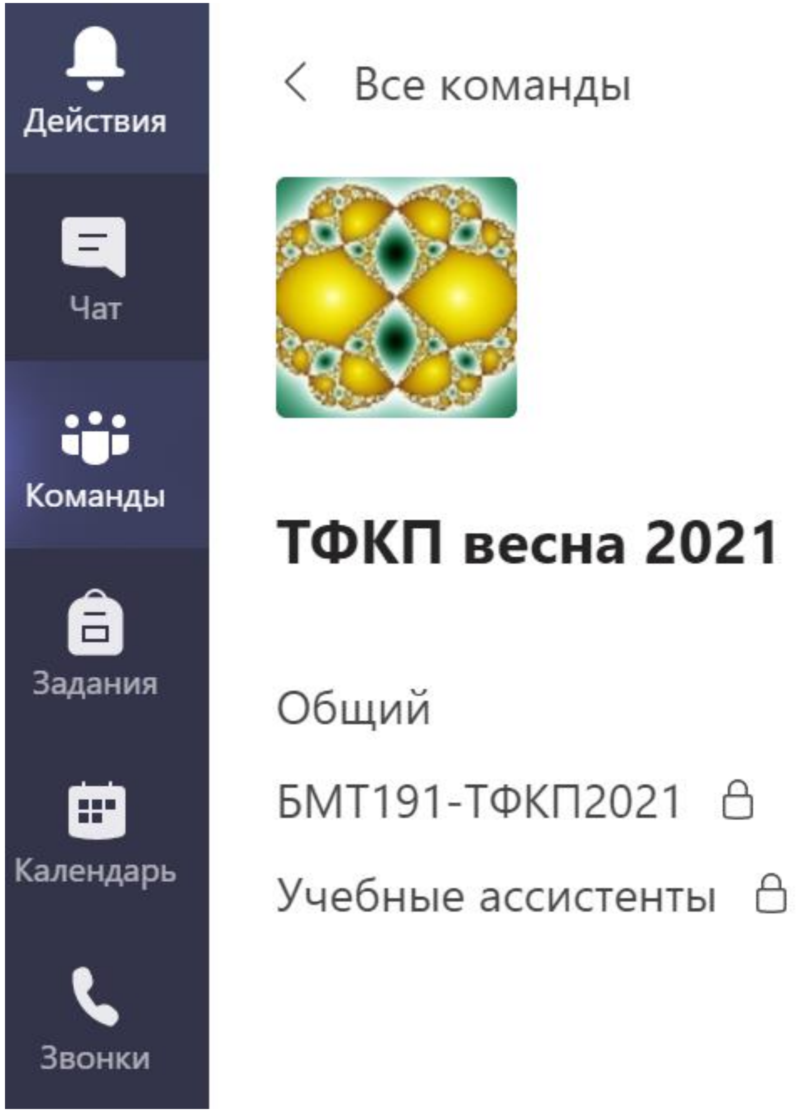
Основной учебник

- В первом приближении: нужно знать, все что написано в главах 1-12.
- **Перед** каждой лекцией нужно прочесть заранее объявленные главы.
- Лекции **не** повторяют книгу, но дополняют и комментируют ее.



Команда в MS Teams

- Все студенты подключены.
- Оповещения, чат, задания, кондуит, учебные материалы размещаются там. Некоторые материалы дублируются на странице курса.
- Лекции тоже там.



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- https://wikipedia.org

Лекция 1. Комплексные числа

Теория функций комплексного переменного

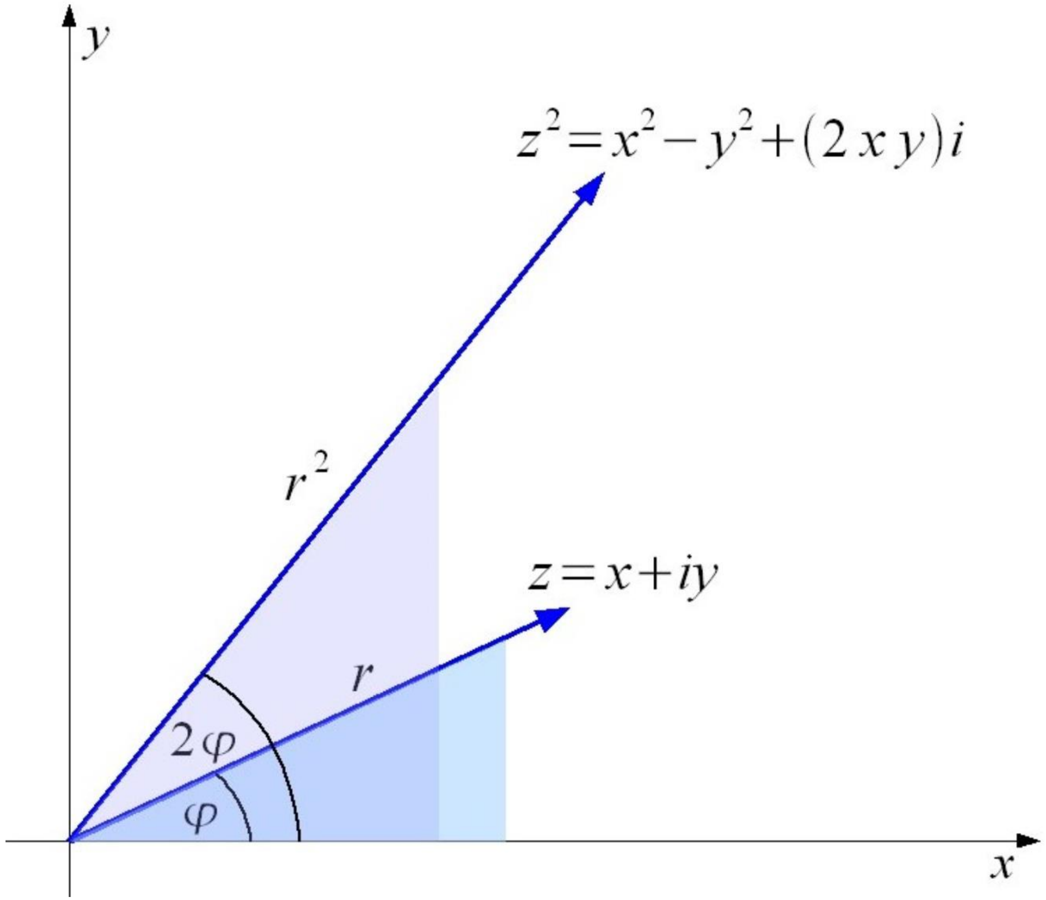
Повторение: алгебра комплексных чисел

- Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел является полем.
- Множество $\mathbb{R}$ действительных (a.k.a. вещественных) чисел является подполем: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Поле $\mathbb{C}$ порождается над $\mathbb{R}$ образующей i и соотношением
$$i^2 = -1.$$
- Комплексное сопряжение
$$z \mapsto \bar{z}, \qquad x + iy \mapsto x - iy$$

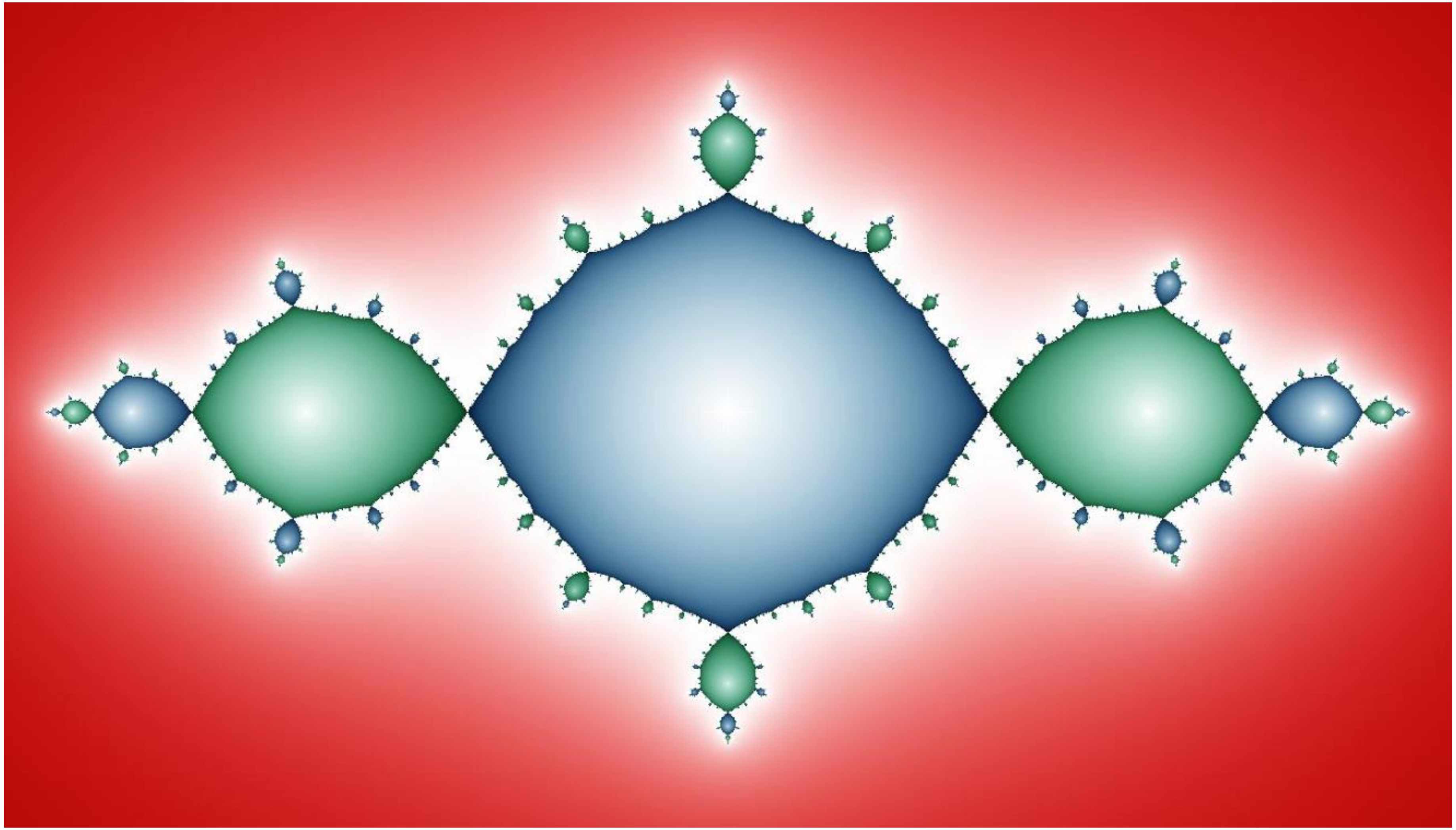
является единственным нетривиальным автоморфизмом поля $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$. Норма $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Повторение: геометрия комплексных чисел

- Сложение комплексных чисел – сложение векторов.
- Норма = длина.
- Умножение на комплексное число = поворот с гомотетией.
- Преобразование $z \mapsto az + b$ сохраняет все углы и умножает все расстояния на одно и то же число $|a|$.



Итерации отображения $f(z) = z^2 - 1$.



Перемножая суммы квадратов…

Если каждое из двух чисел a, b можно представить как сумму квадратов двух целых чисел, то в таком же виде можно представить произведение ab. Это следствие тождества Диофанта-Брахмагупты-Фибоначчи:

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2.$$


Эта формула связана с законом умножения комплексных чисел:

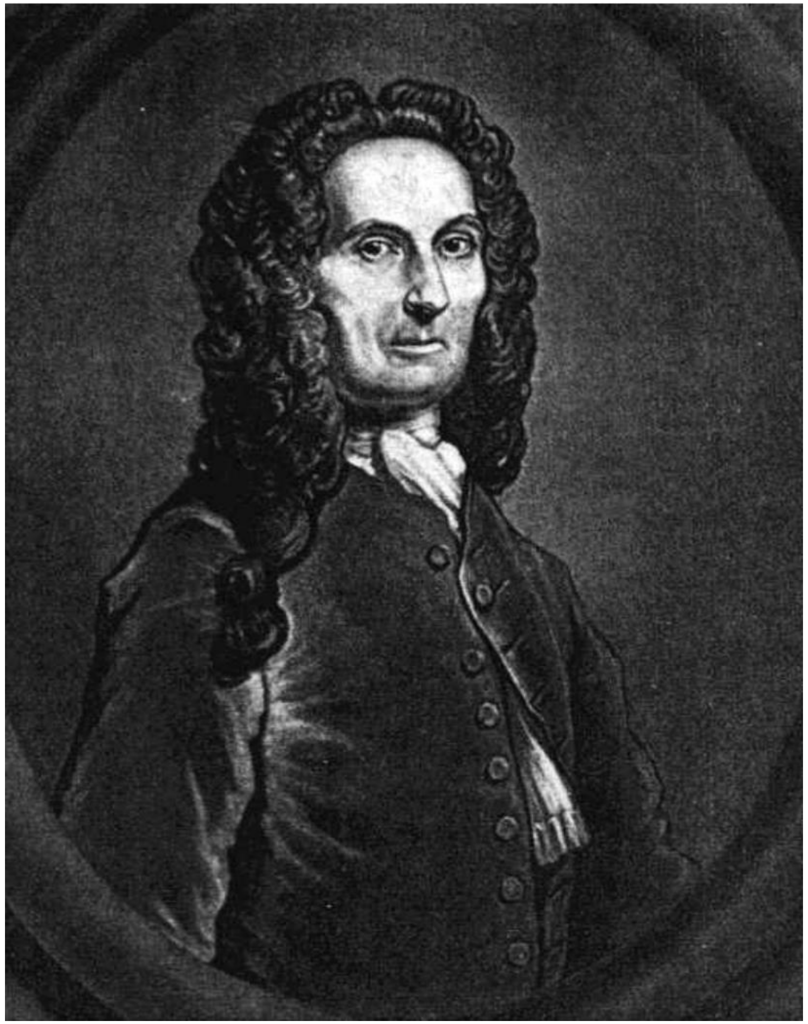
$$|z_1|^2|z_2|^2 = |z_1z_2|^2, \qquad z_1 \coloneqq x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Формула Муавра

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

… позволяет:

- быстро возводить комплексные числа в высокие степени;
- выражать $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ через $\cos\theta$, $\sin\theta$ и наоборот;
- извлекать корни любых степеней из комплексных чисел.



Абраха́м де Муа́вр (1667 — 1754) — английский математик французского происхождения.

Абсолютная и равномерная сходимость

Пусть X — произвольное множество (вы ничего не потеряете, если будете считать X подмножеством комплексной плоскости) и $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — счетное семейство *ограниченных* функций на X со значениями в $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится *абсолютно и равномерно* на X, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x)|$.

Мажорантный признак сходимости

Предложение 1.2 (мажорантный признак Вейерштрасса). *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ — ряд из ограниченных функций на множестве X. Если существует такое натуральное N, что $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)| \leqslant a_n$ для всех $n \geqslant N$, и если при этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно и равномерно.*

Следствия абсолютной и равномерной сходимости

Предложение 1.3. *Если ряд из ограниченных функций* $\sum f_n$ *сходится на* X *абсолютно и равномерно, то он сходится на* X *равномерно. Более того, ряд, полученный из ряда* $\sum f_n$ *любой перестановкой слагаемых, также сходится на* X *абсолютно и равномерно, причем к той же функции.*

- Последнее утверждение вытекает из возможности переставлять члены в абсолютно сходящихся числовых рядах.

Топология плоскости

- Открытый диск $\mathbb{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$.
- Положим $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$.
- Множество $A \subset \mathbb{C}$ открыто, если $\forall\, a \in A \;\; \exists\, r > 0 \;\; \mathbb{D}(a, r) \subset A$.
- Множество $A \subset \mathbb{C}$ замкнуто, если $\mathbb{C} \setminus A$ открыто.
- Множество $A \subset \mathbb{C}$ связно, если его нельзя представить в виде $(U \cup V) \cap A$ для открытых непересекающихся множеств U, V, таких, что $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset$.
- Множество $A \subset \mathbb{C}$ компактно, если оно замкнуто и ограниченно (т.е. $\exists\, R > 0 \;\; A \subset \mathbb{D}(0, R)$).

Формула Коши-Адамара

Рассмотрим степенной ряд

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \tag{1.3}$$

(все коэффициенты c_j и число a — комплексные числа, переменная z также предполагается комплексной).

Предложение 1.18. (1) *Существует* $R \in [0; +\infty]$ *с тем свойством, что ряд* (1.3) *абсолютно сходится при* $|z-a| < R$ *и расходится* (*общий член не стремится к нулю*) *при* $|z-a| > R$.

(2) *Имеем*

$$R = 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}. \tag{1.4}$$

Жак Адамар (1865 – 1963)

- Член Французской академии наук, почётный член попечительского совета Еврейского университета в Иерусалиме. Иностранный член-корреспондент (1922) и иностранный почётный член (1929) Академии наук СССР.

Круг сходимости

- $\mathbb{D}(a, R)$, где R – радиус сходимости.

Предложение 1.19. *Ряд (1.3) сходится абсолютно и равномерно на каждом компактном подмножестве своего круга сходимости.*

Сравнение с геометрической прогрессией.

Следствие 1.20. *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией от z на его круге сходимости.*

Комплексная экспонента

Предложение-определение 1.21. Для всякого $z \in \mathbb{C}$ ряд

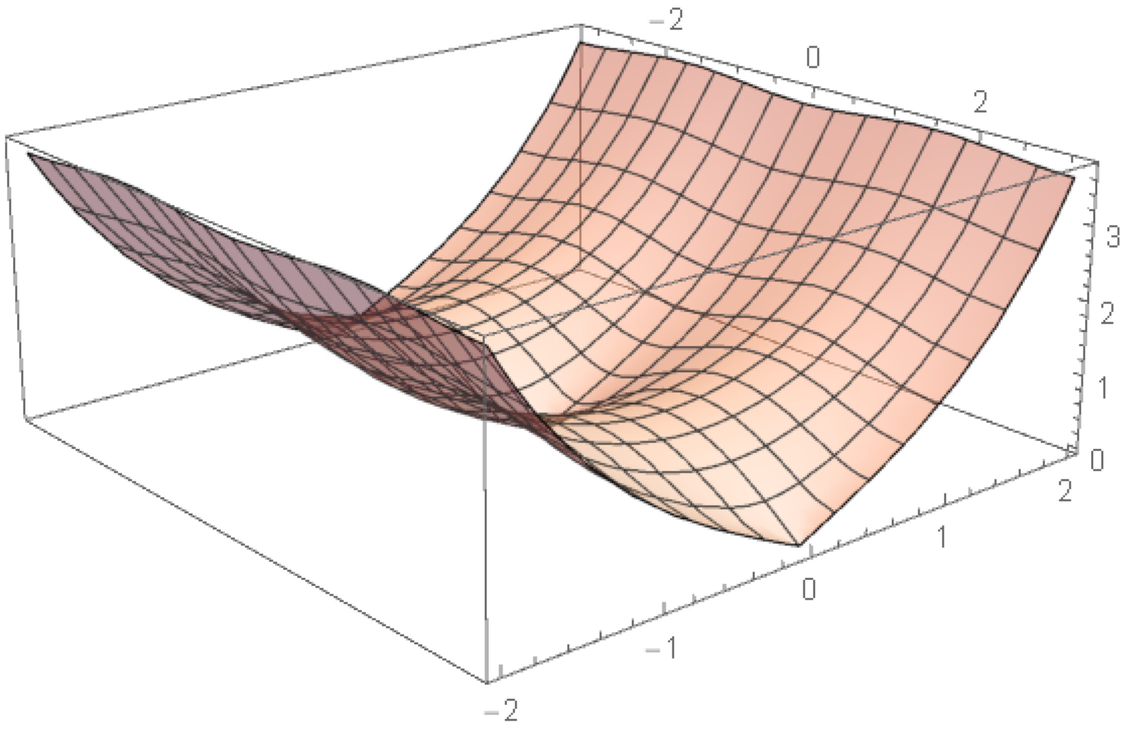
$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{1.5}$$

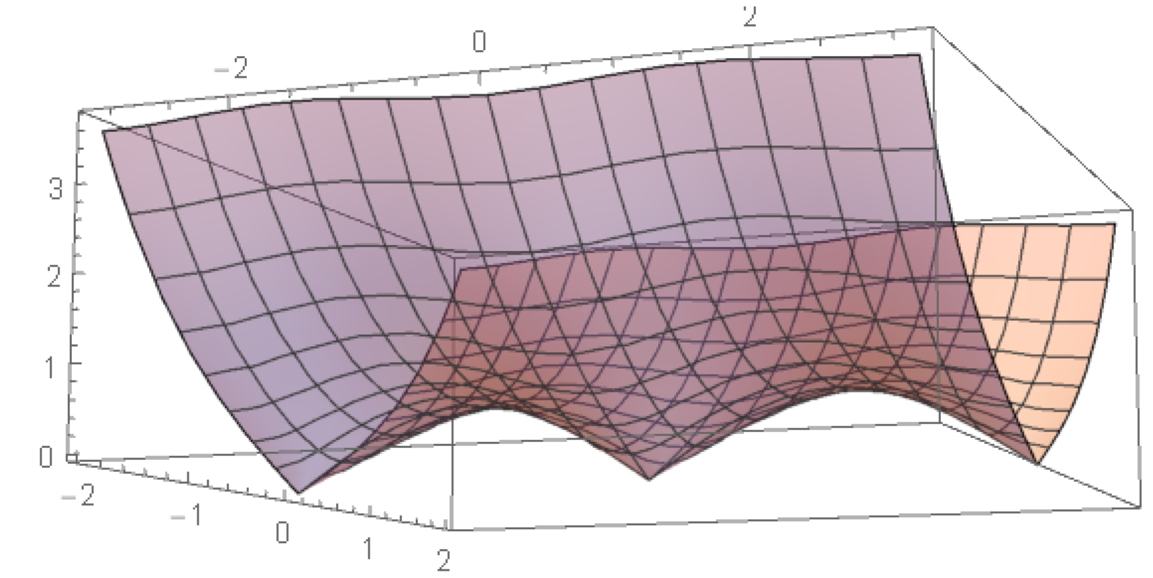
абсолютно сходится. Его сумма обозначается e^z или $\exp(z)$, а функция $z \mapsto e^z$ называется *экспоненциальной функцией* или *экспонентой*.

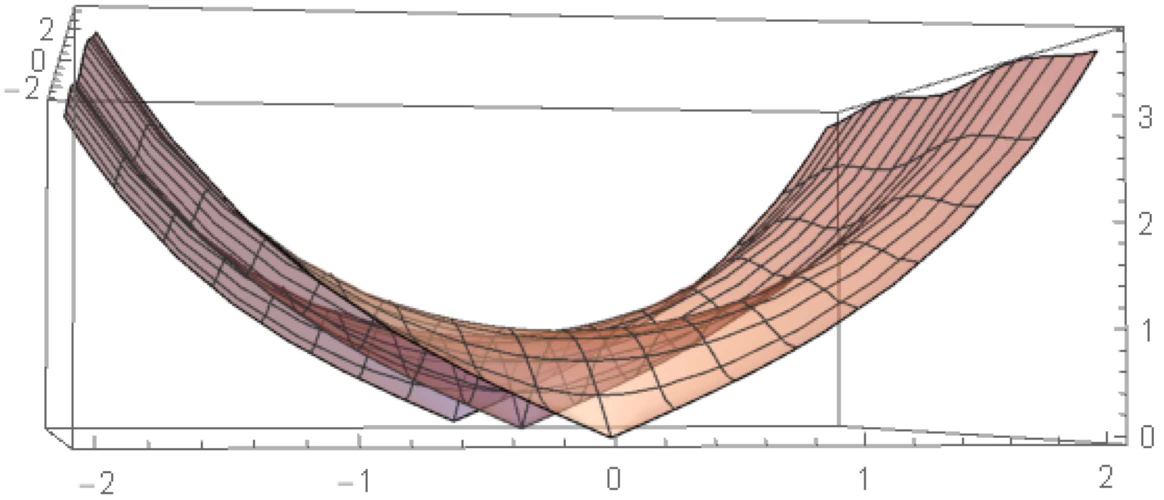
- Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Функция $|\sin z|$

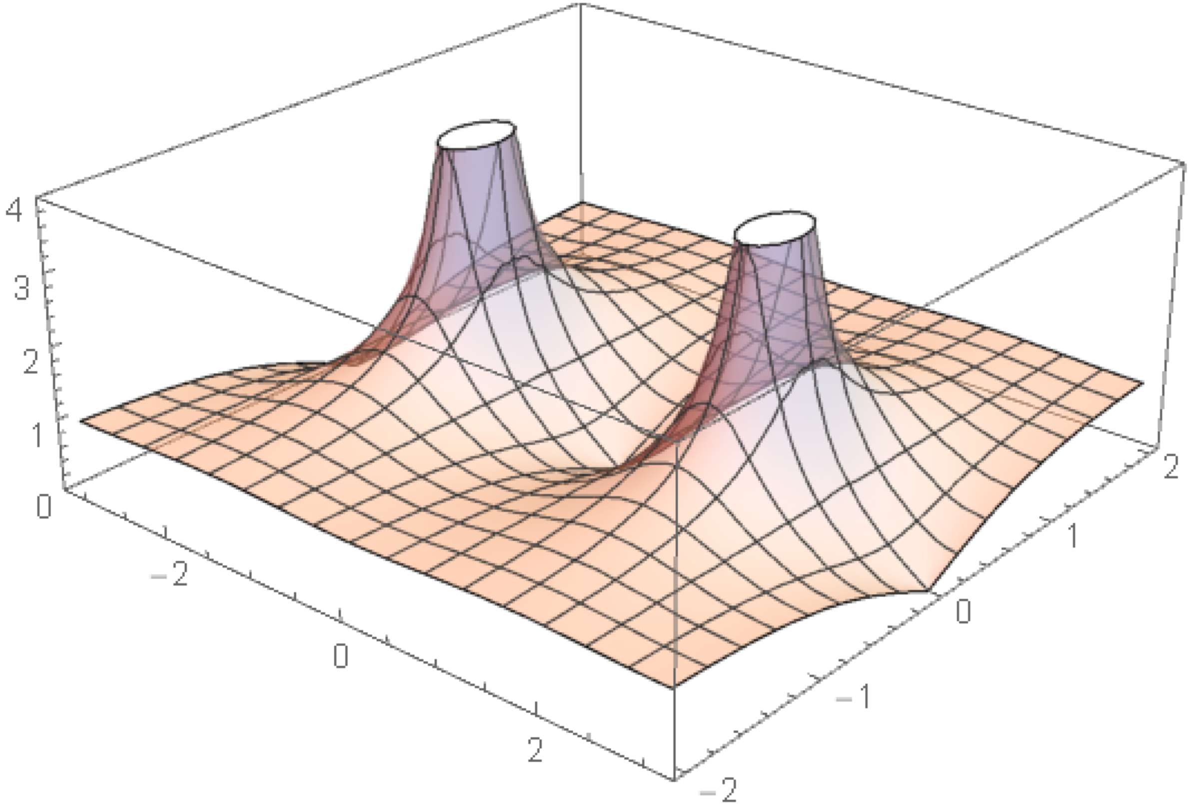


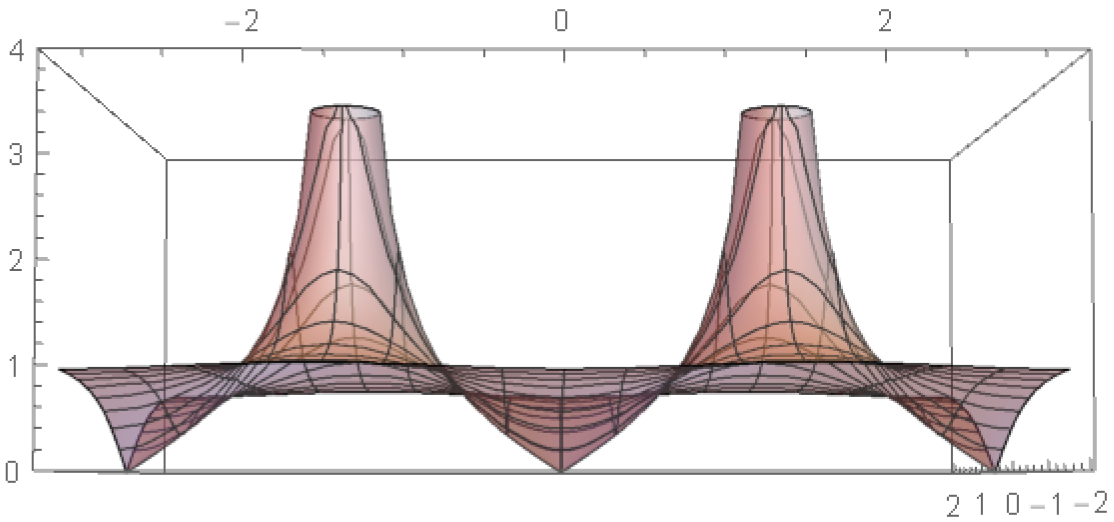


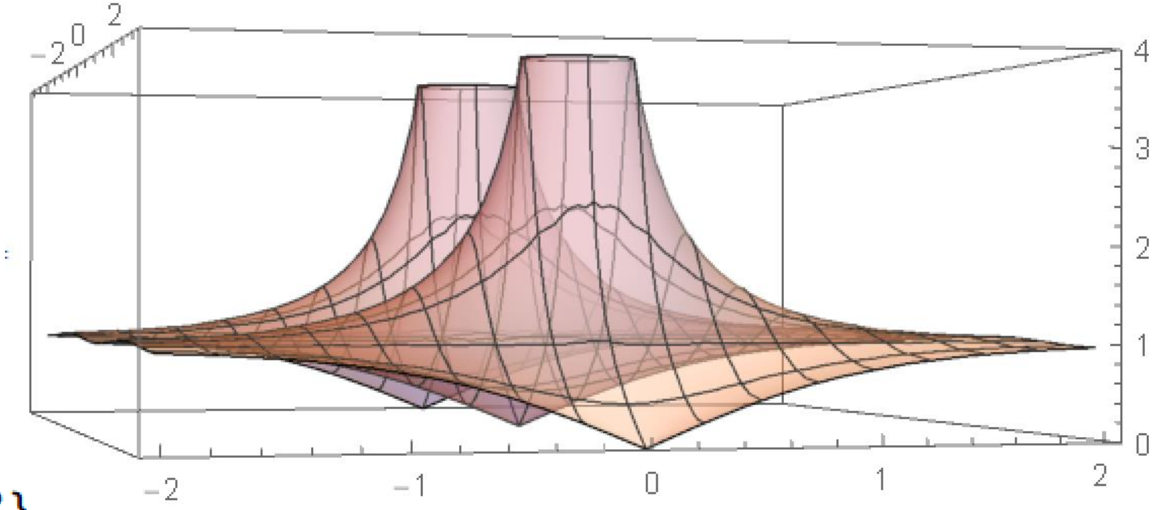



```
Plot3D[Abs[Sin[x + I y]], {x, -Pi, Pi}, {y, -2, 2},
 PlotStyle → Directive[LightRed, Opacity[.5]]]
```

Функция $|\mathrm{tg}(z)|$








```
Plot3D[Abs[Tan[x + I y]], {x, -Pi, Pi}, {y, -2, 2},
 PlotStyle → Directive[LightRed, Opacity[.5]],
 PlotRange → {0, 4}, MaxRecursion → 3]
```

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- https://wikipedia.org
- https://bookshop.org
- Wolfram Mathematica
- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 2. Преобразования Мёбиуса

Теория функций комплексного переменного

Жак Адамар (1865 – 1963)

- Член Французской академии наук, почётный член попечительского совета Еврейского университета в Иерусалиме. Иностранный член-корреспондент (1922) и иностранный почётный член (1929) Академии наук СССР.

Цитата из Ж. Адамара

Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe.

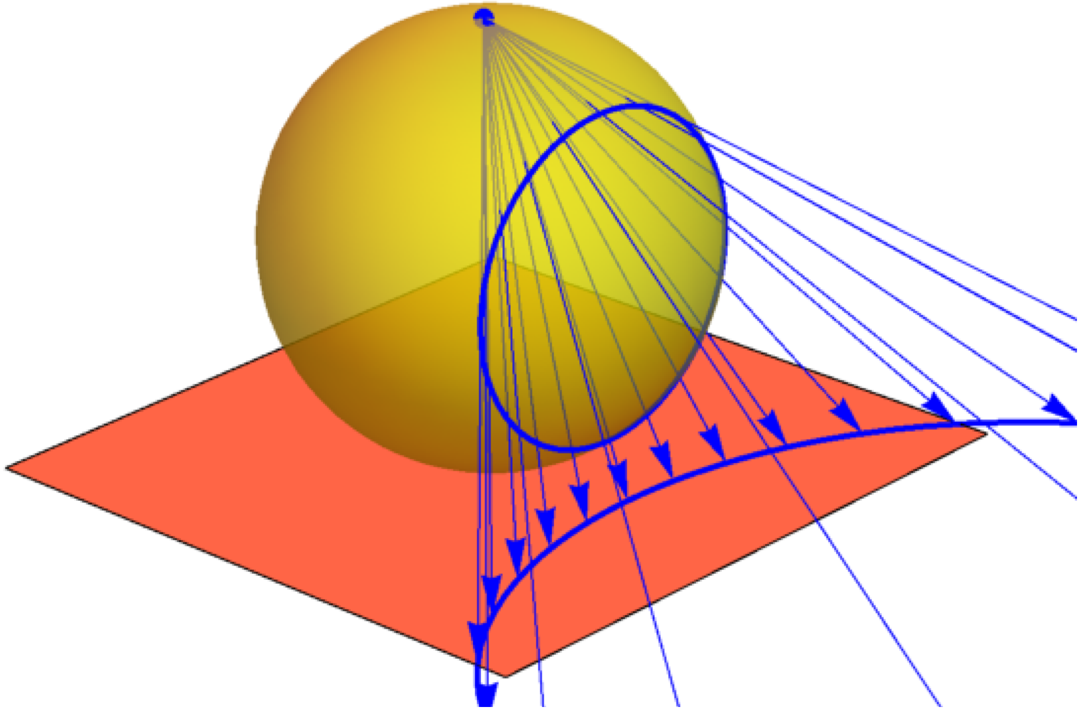
Jacques Hadamard

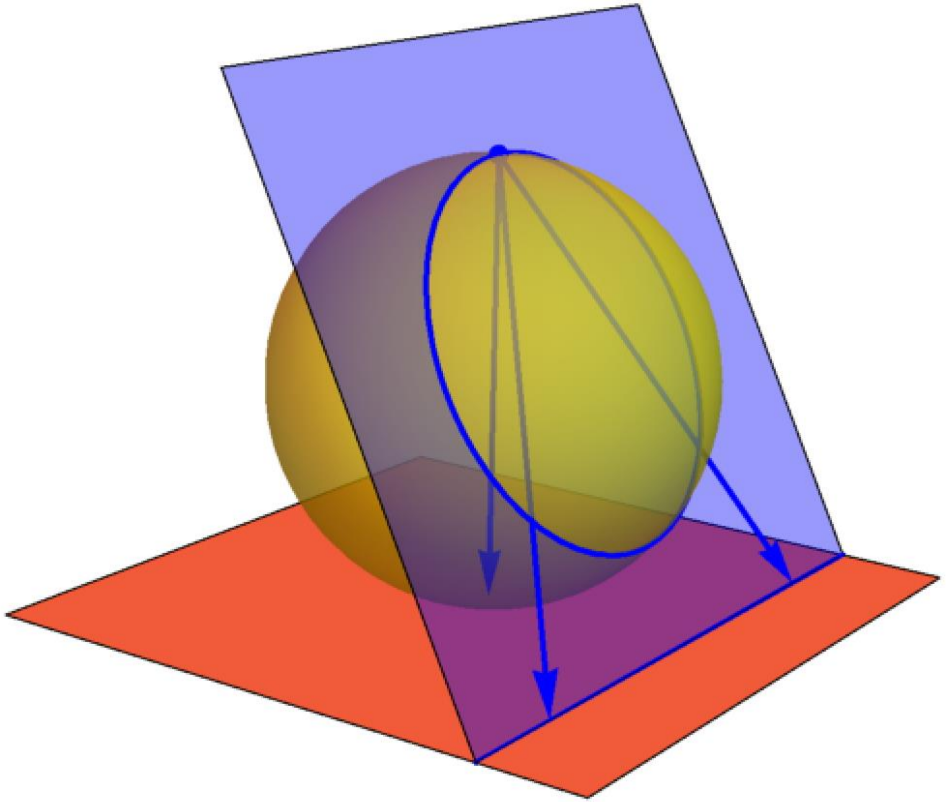
Кратчайший путь между двумя истинами в вещественной области проходит через комплексную область.

Жак Адамар

Стереографическая проекция

Стереографическая проекция – центральная проекция из точки на сфере (северного полюса) на плоскость, касающуюся сферы в противоположной точке.





Обобщенные окружности

- Окружности или прямые на плоскости.
- Образы окружностей на сфере при стереографической проекции.
- Обобщенная окружность на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ является прямой тогда и только тогда, когда она содержит точку ∞.

Теорема Мёбиуса. *Биекция $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности тогда и только тогда, когда f имеет вид*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{или} \quad f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}.$$

Август Фердинанд Мёбиус (1790 – 1868)

- Барицентрические координаты
- Однородные координаты
- Проективные преобразования
- «Основная теорема проективной геометрии»
- Односторонние поверхности
- Статика
- Небесная механика

Группа преобразований Мёбиуса

- Параллельный перенос $z \mapsto z + b$.
- Поворот с растяжением $z \mapsto az$.
- Инверсия относительно единичной окружности: $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$.
- Группа $\mathrm{M\ddot{o}b}$ преобразований Мебиуса порождается перечисленными выше преобразованиями.
- Она также порождается инверсиями относительно любых обобщенных окружностей.
- Дробно линейные преобразования $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ – это те преобразования Мебиуса, которые сохраняют ориентацию.

Группа $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$

- Группа дробно-линейных преобразований $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$.
- Отображение $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ задается матрицей $A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- Композиция $f \circ g$ соответствует матрице $A_f A_g$.
- $f \neq const \quad \Leftrightarrow \quad \det A_f = ad - bc \neq 0$.
- Матрицы A и λA $(\lambda \neq 0)$ задают одно и то же отображение.

- Три-транзитивность: $\forall\ z_0 \neq z_1 \neq z_\infty \quad \exists!\, f \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$

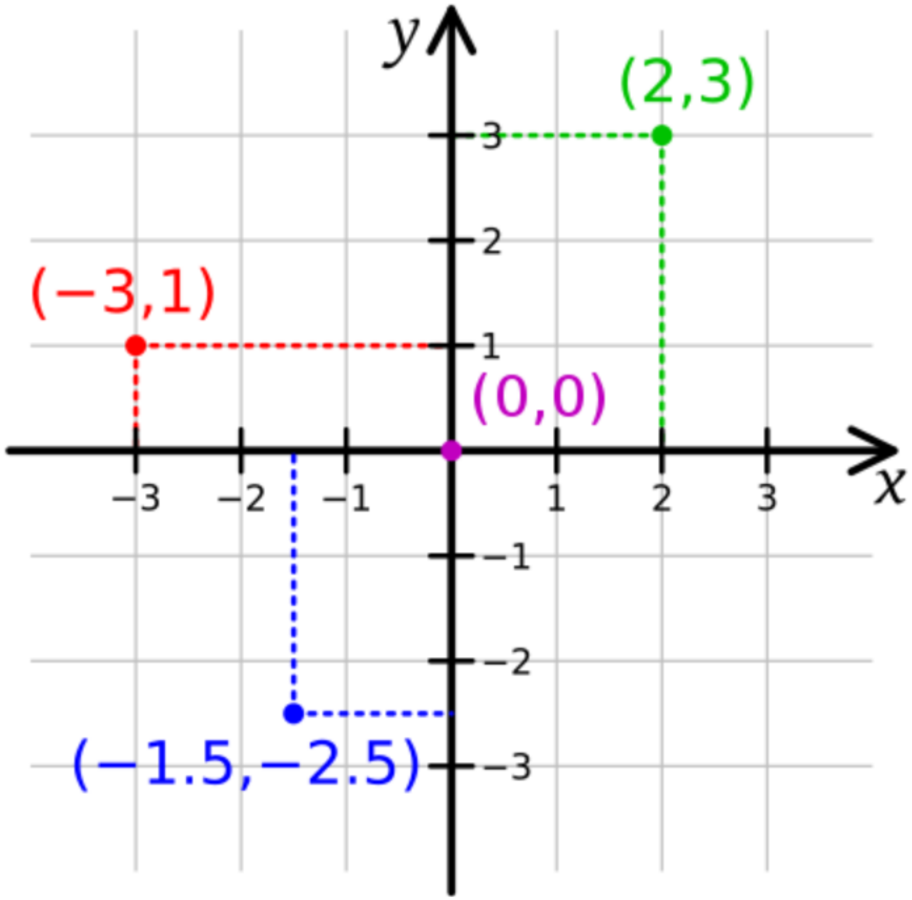
$$f(0) = z_0, \qquad f(1) = z_1, \qquad f(\infty) = z_\infty.$$

Доказательство теоремы Мебиуса 1

- Пусть f переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности.
- Можно считать, что $f(0) = 0, f(1) = 1, f(\infty) = \infty$.
- Тогда $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, прямые переходят в прямые.
- Сохраняются следующие свойства: параллельность прямых, параллелограмм, вписанный многоугольник, касающиеся окружности, описанный многоугольник, прямоугольник, квадрат, центр окружности, внутренность круга, построения циркулем и линейкой.

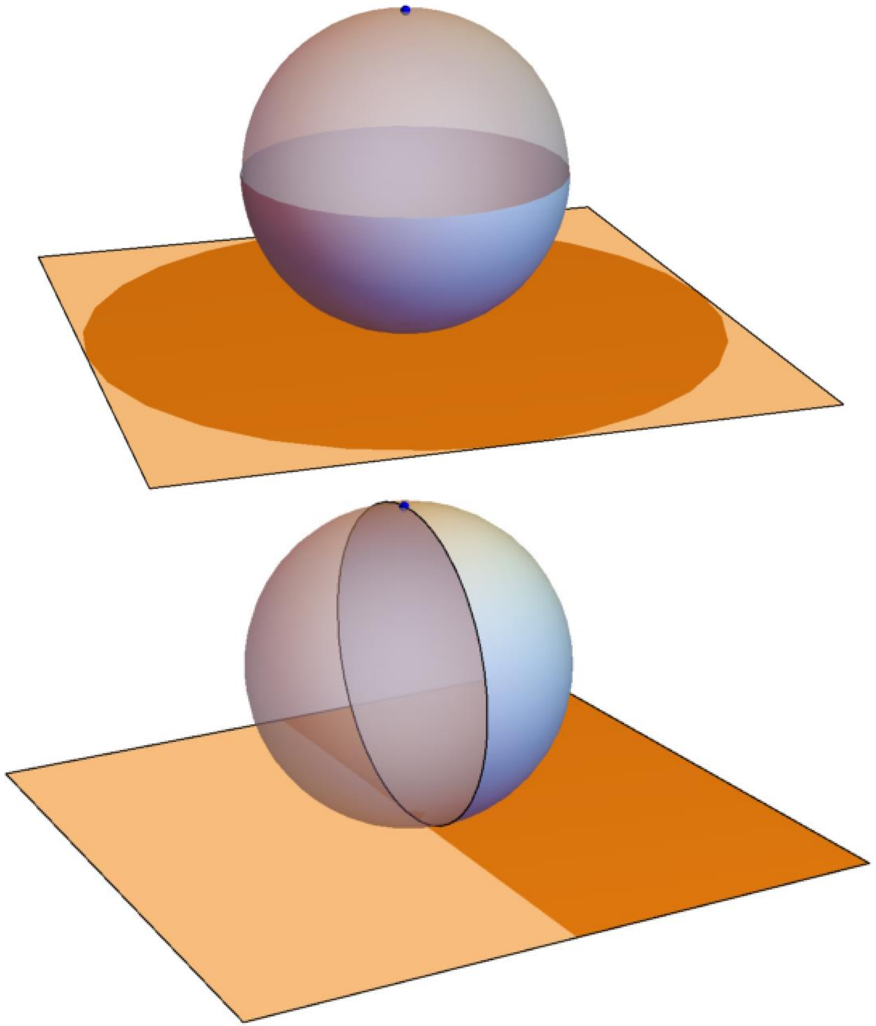
Доказательство теоремы Мебиуса 2

- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ f(1) = 1.$
- Циркулем и линейкой можно построить любое $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
- Если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонно и $f|_{\mathbb{Q}} = id$, то $f = id$.
- $f(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$, более того, $f(iy) = iy$ или $f(iy) = -iy$ для всех $y \in \mathbb{R}$.
- Сохраняется вся сетка координат, т.о. $f(x, y) = (x, y)$ или $(x, -y)$.



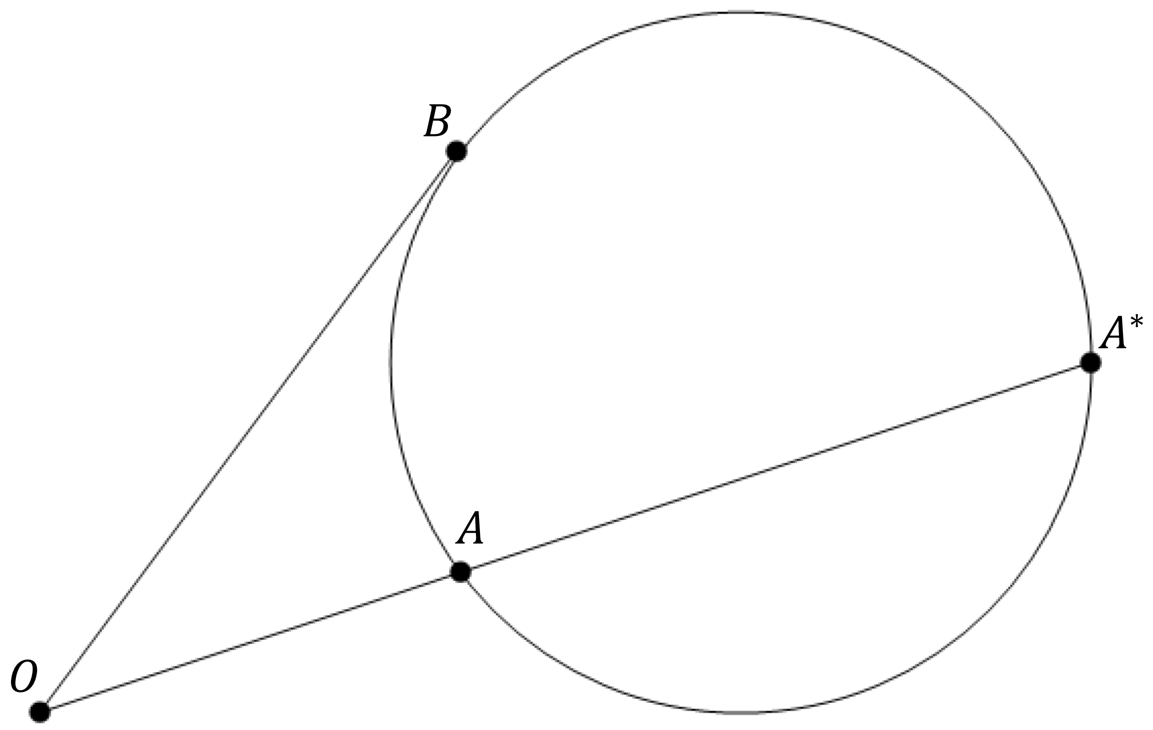
Преобразования Мебиуса сферы

- Любое вращение сферы – преобразование Мебиуса.
- Превращение полуплоскости в диск можно интерпретировать как вращение.
- Вообще, $\mathrm{M\ddot{o}b}$ состоит из проективных преобразований пространства, оставляющих сферу на месте.

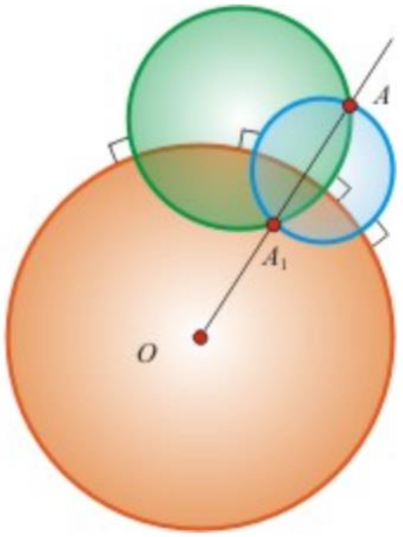


Симметрия относительно окружности

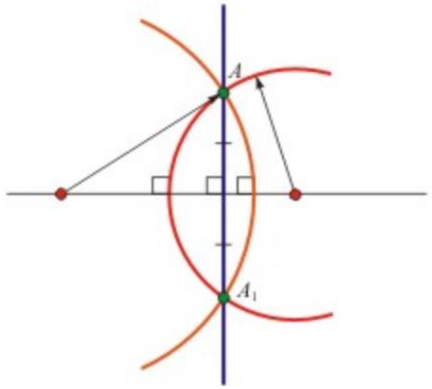
- $|OB|^2 = |OA| \cdot |OA^*|$.
- Следовательно, окружность AA^*B ортогональна окружности S с центром в O и радиусом $|OB|$.
- Точки A, A^* называются симметричными относительно S.
- Инверсия относительно S переводит A в A^*.



Симметрия (инверсия) относительно обобщенной окружности



- Точки A, A_1 симметричны относительно обобщенной окружности S, если все окружности через A, A_1 перпендикулярны S.
- Симметрия относительно окружности – инверсия.
- Симметрия относительно прямой – отражение.



Построение симметричной точки

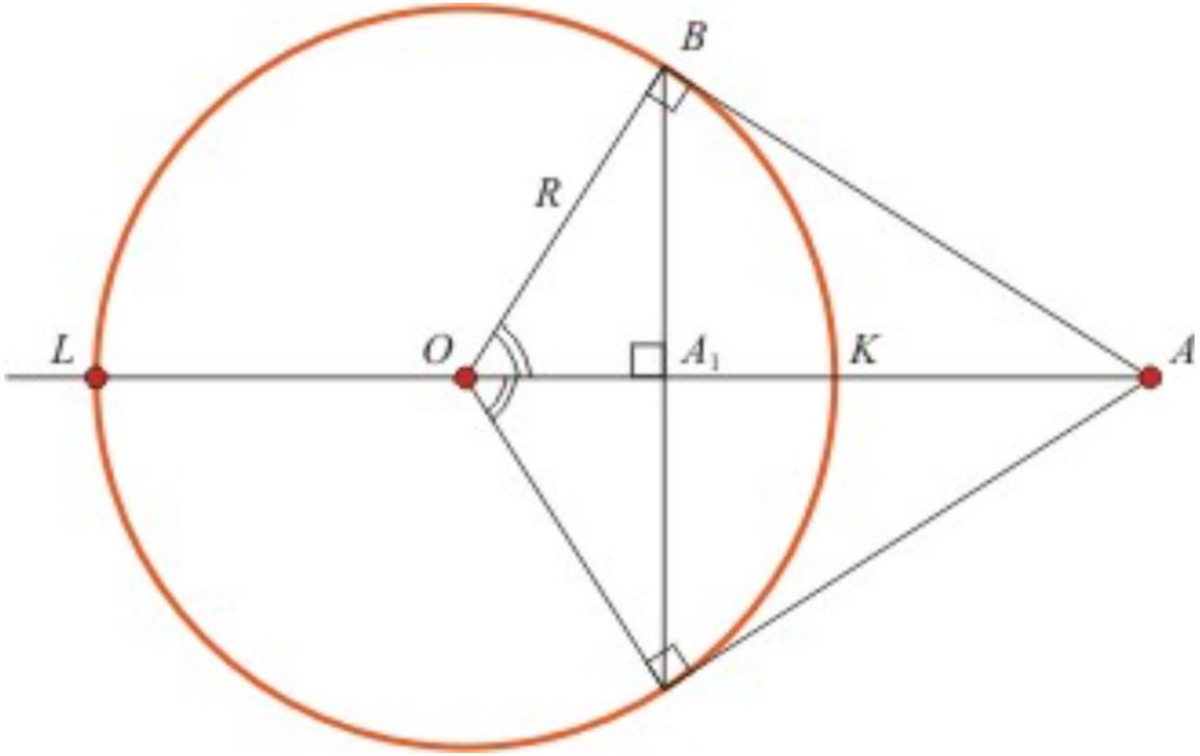


Рис. 2. Точка A – образ точки A_1 и наоборот: точка A_1 – образ точки A

Образы прямых при инверсии

Треугольники OAB и OB_1A_1 подобны. Следовательно, $\angle OB_1A_1 = \frac{\pi}{2}$.

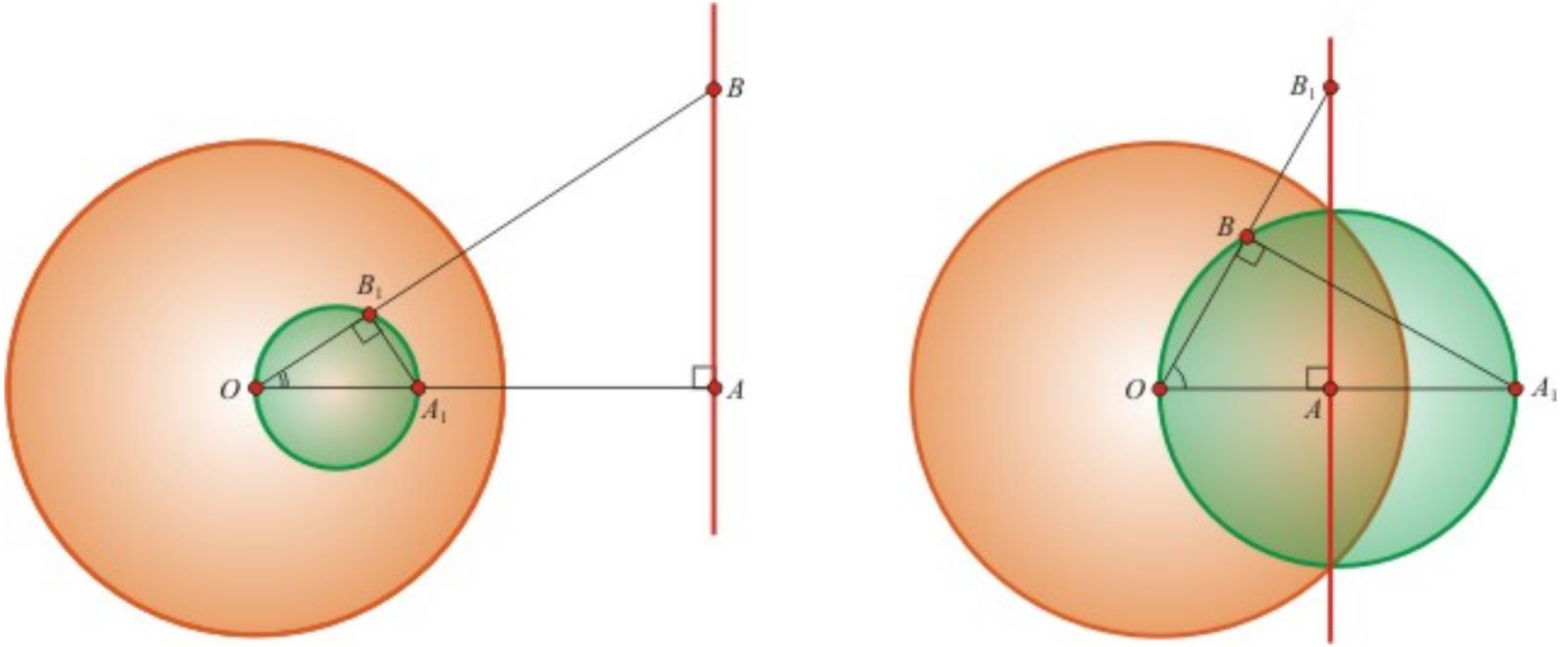


Рис. 3. Прямые, проходящие через центр инверсии, переходят в себя, все другие прямые переходят в окружности

Образы окружностей при инверсии

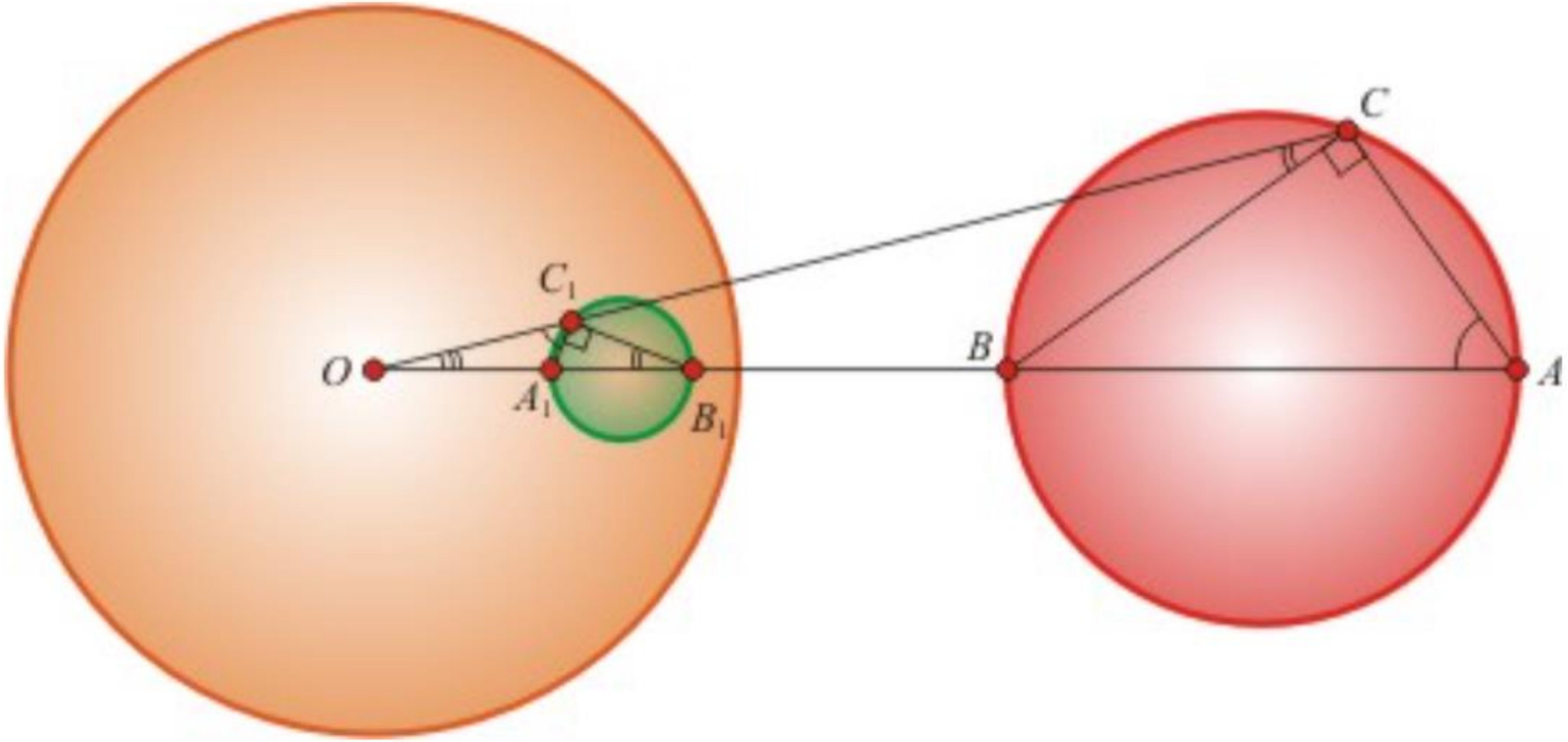
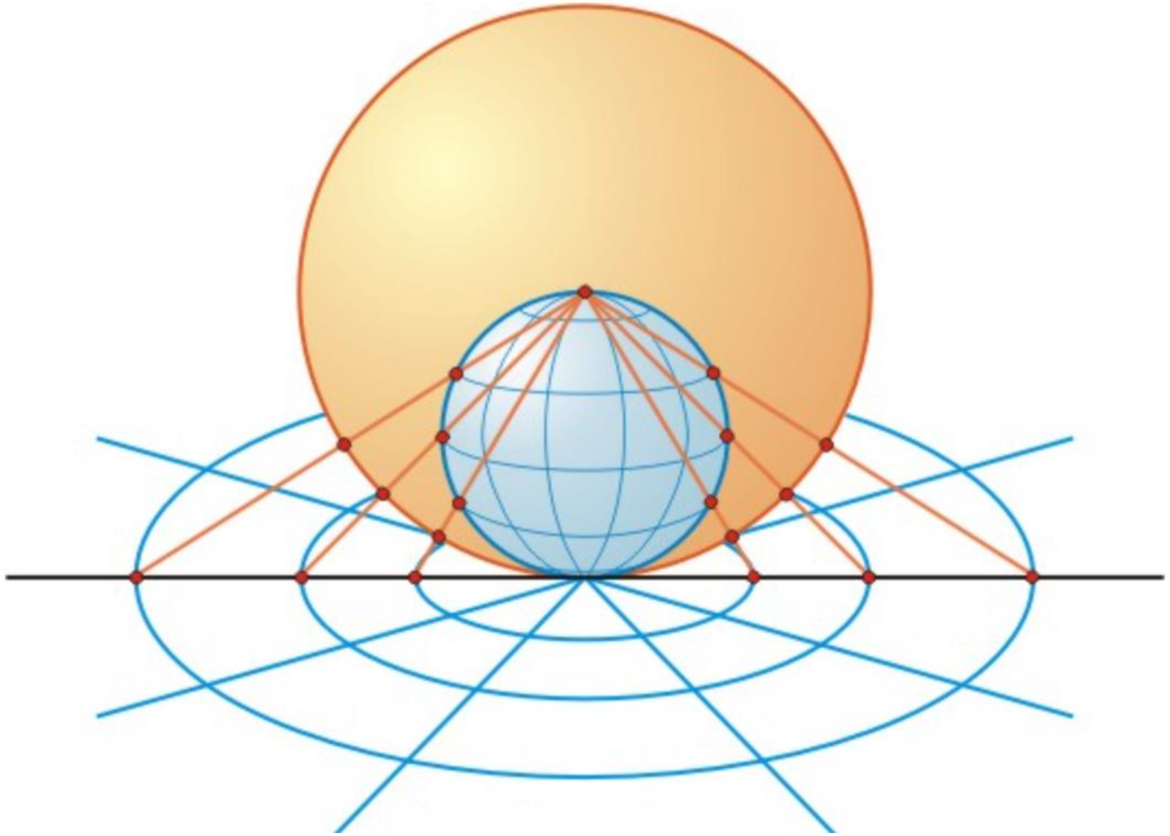


Рис. 4. Окружности, проходящие через центр инверсии, переходят в прямые, все другие окружности переходят в окружности

Инверсия относительно сферы



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- http://school-collection.edu.ru/
- https://wikipedia.org
- Wolfram Mathematica

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 3. Комплексная производная

Теория функций комплексного переменного

Определение производной

Определение 2.1. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество. Функция $f : U \to \mathbb{C}$ называется *комплексно дифференцируемой* в точке $a \in U$, если существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{2.1}$$

Если предел (2.1) существует, он называется *производной* функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

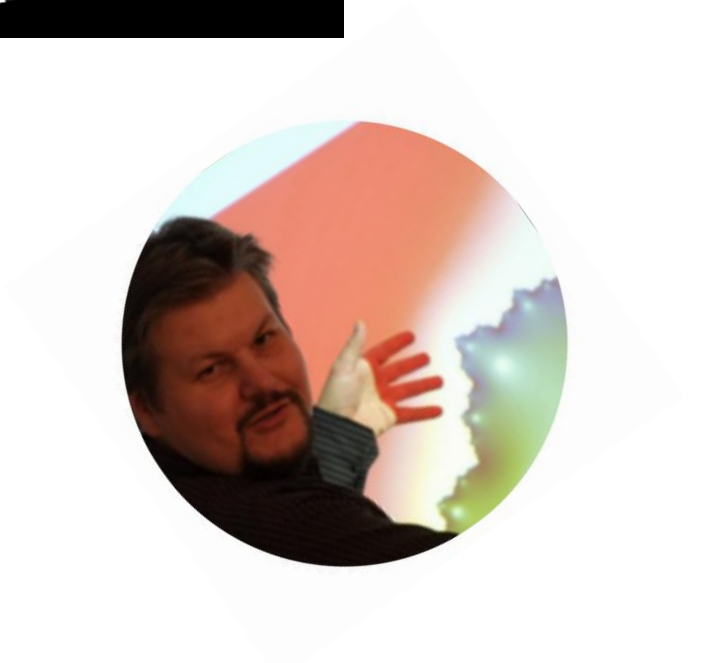
Линейное приближение:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

Вещественная vs. комплексная дифференцируемость

- Вещественно-линейное отображение искажает пропорции.

- Комплексно линейное отображение сохраняет пропорции и углы. Окружности переводит в окружности. Это поворот с растяжением.
- Комплексно дифференцируемое отображение в первом приближении сохраняет пропорции и углы (если $f'(a) \neq 0$).



Теорема о дифференцировании сложной функции

Предложение 2.5. *Пусть* $U \subset \mathbb{C}$ *— открытое множество,* $f : U \to \mathbb{C}$ *— функция, для которой* $f(U) \subset V$*, где* $V \subset \mathbb{C}$ *— открытое множество, и* $g : V \to \mathbb{C}$ *— еще одна функция. Если функция* f *комплексно дифференцируема в точке* $a \in U$ *и функция* g *комплексно дифференцируема в точке* $f(a)$*, то композиция* $g \circ f$ *комплексно дифференцируема в точке* a*, причем* $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Альтернативное доказательство использует теорему о дифференцировании сложной функции от нескольких вещественных переменных. Оператор умножения на $g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$ – композиция умножения на $f'(a)$ и умножения на $g'\big(f(a)\big)$.

Голоморфные функции

Определение 2.6. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Функция $f : U \to \mathbb{C}$ называется *голоморфной на* U, если она комплексно дифференцируема в каждой точке $a \in U$.

Предложение 2.7. *Функция* $z \mapsto e^z$ *голоморфна на всем* $\mathbb{C}$; *при этом ее производная в точке a равна* e^a. *Иными словами,* $(e^z)' = e^z$.

Предложение 2.9. *Функции синус и косинус голоморфны на всей комплексной плоскости; при этом* $(\sin z)' = \cos z$ *и* $(\cos z)' = -\sin z$.

Примеры голоморфных функций: многочлены, e^z, $\sin z$, $\cos z$.
Преобразование Мебиуса голоморфно за исключением максимум одной точки (в которой знаменатель обращается в 0)

Теорема об обратной функции («костыль»)

Предложение 2.10. *Пусть* $U, V \subset \mathbb{C}$ *— открытые подмножества, и пусть* $f: U \to V$ *— биективное отображение со следующими свойствами:*

(1) f *— голоморфная функция на* U*;*

(2) *производная функции* f *не обращается в нуль ни в одной точке множества* U*;*

(3) *обратное отображение* $g = f^{-1}: V \to U$ *непрерывно.*

Тогда обратное отображение $g: V \to U$ *— голоморфная функция на* V *и для всякой точки* $b \in V$ *имеем* $g'(b) = 1/f'(g(b))$*.*

Замечание 2.11. На самом деле верно гораздо более сильное утверждение: из голоморфности и биективности отображения f условия (2) и (3) следуют автоматически. Мы установим это в главе 9.

Теорема об обратной функции (альтернативный «костыль»)

Теорема. Пусть $f\colon U \to V$ – голоморфная функция, причем f' непрерывна. Если точка $a \in U$ такова, что $f'(a) \neq 0$, то в окрестности точки $b = f(a)$ существует обратная функция g, причем $g'(b) = 1/f'(a)$.

Доказательство: многомерная вещественная теорема об обратной функции.

Замечание: зеленое предположение излишне (вытекает из голоморфности).

Ветви логарифма

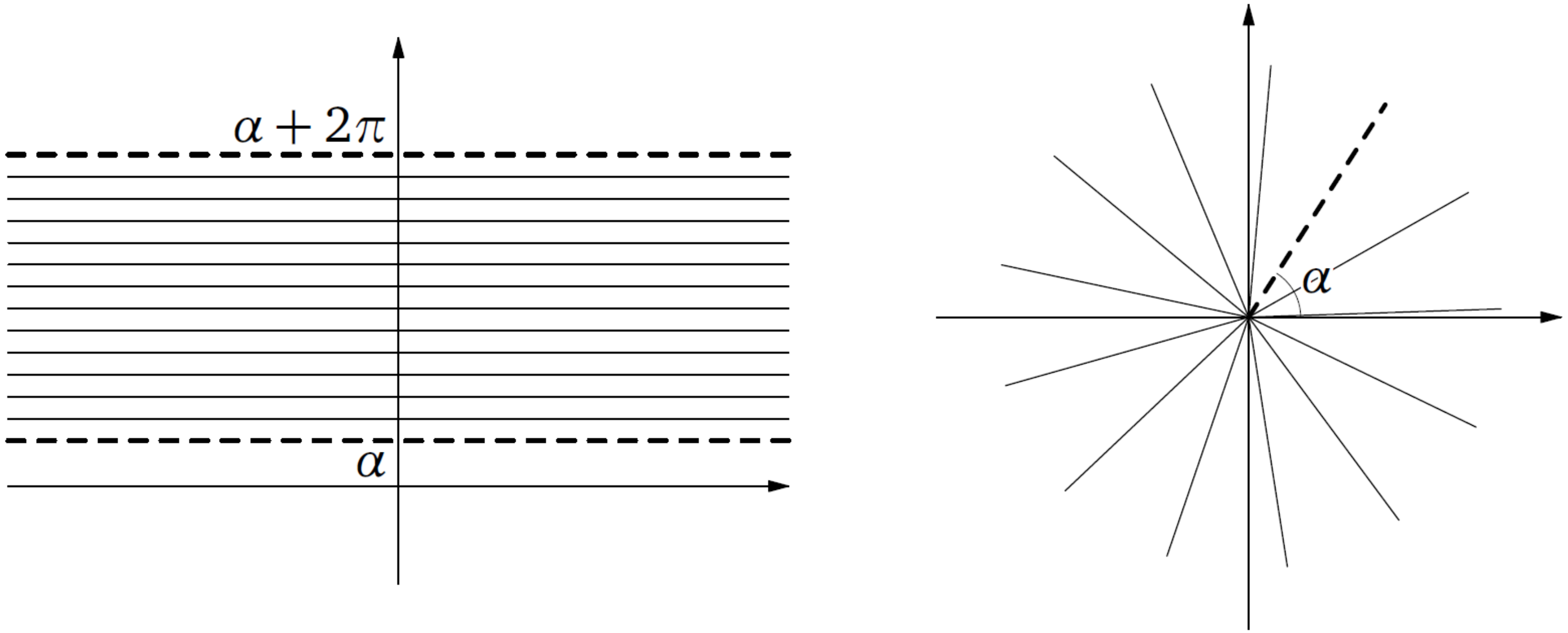


Рис. 2.1. Экспонента задает биекцию между полосой высоты 2π и комплексной плоскостью, разрезанной вдоль луча. Горизонтальные прямые на левом рисунке переходят в лучи на правом рисунке. Пунктирные линии в множества не входят.

Ветви логарифма

Предложение 2.12. *На множестве* V_α, *получаемом удалением из комплексной плоскости луча, выходящего из нуля под углом* α *к действительной оси, можно для каждого целого* n *определить голоморфную функцию* ln *по формуле*

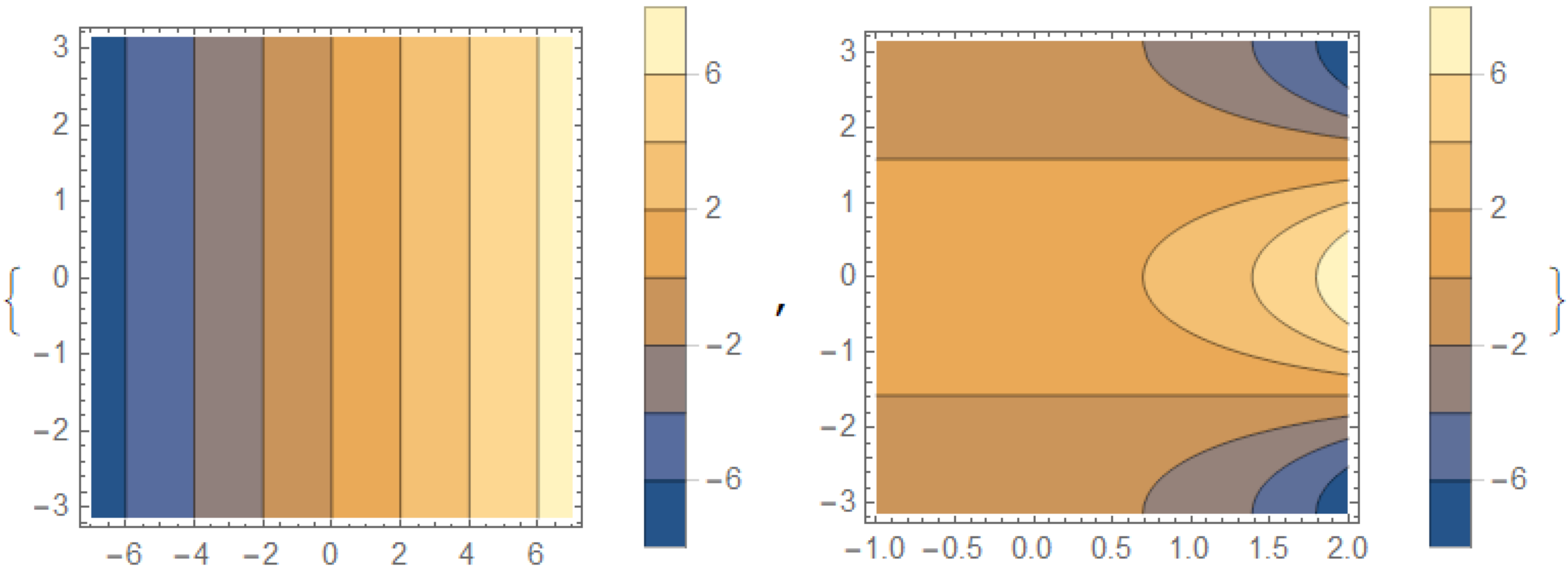
$$\ln(re^{it}) = \ln r + it, \quad \alpha + 2\pi n < t < \alpha + 2\pi(n+1).$$

Имеем $e^{\ln z} = z$ *и* $(\ln z)' = 1/z$.

Через границу области V_α функцию $\ln z$ продолжить нельзя (не только как голоморфную, но даже как непрерывную функцию!).

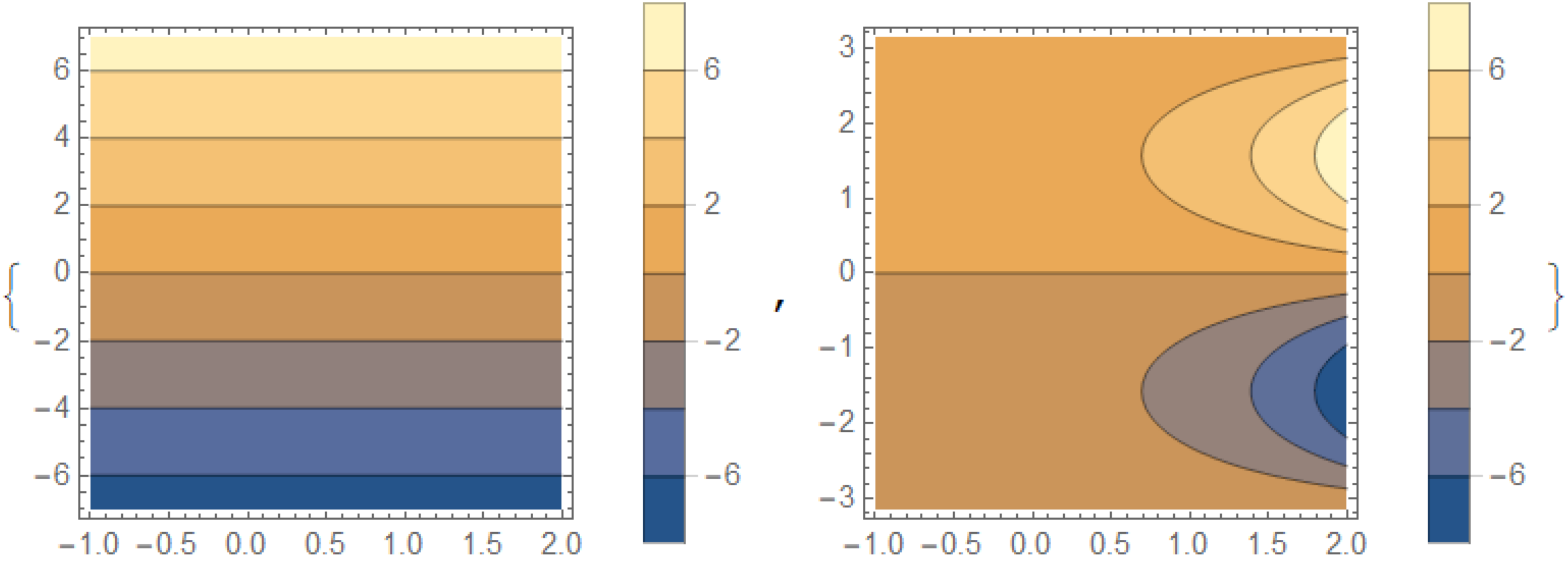
Действие логарифма

```
Map[ContourPlot[#[[1]], {x, #[[2]], #[[3]]}, {y, -Pi, Pi},
   PlotLegends → Automatic] &, {{x, -7, 7}, {Re[Exp[x + I y]], -1, 2}}]
```



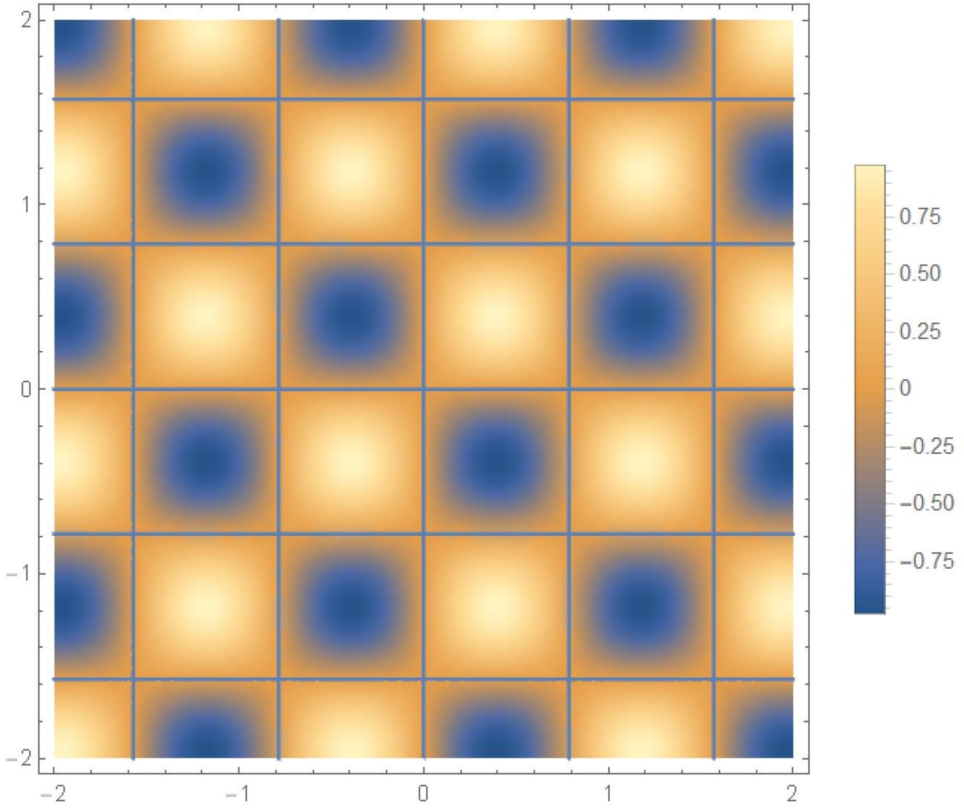
Действие логарифма

```
Map[ContourPlot[#[[1]], {x, -1, 2}, {y, #[[2]], #[[3]]},
   PlotLegends → Automatic] &, {{y, -7, 7}, {Im[Exp[x + I y]], -Pi, Pi}}]
```

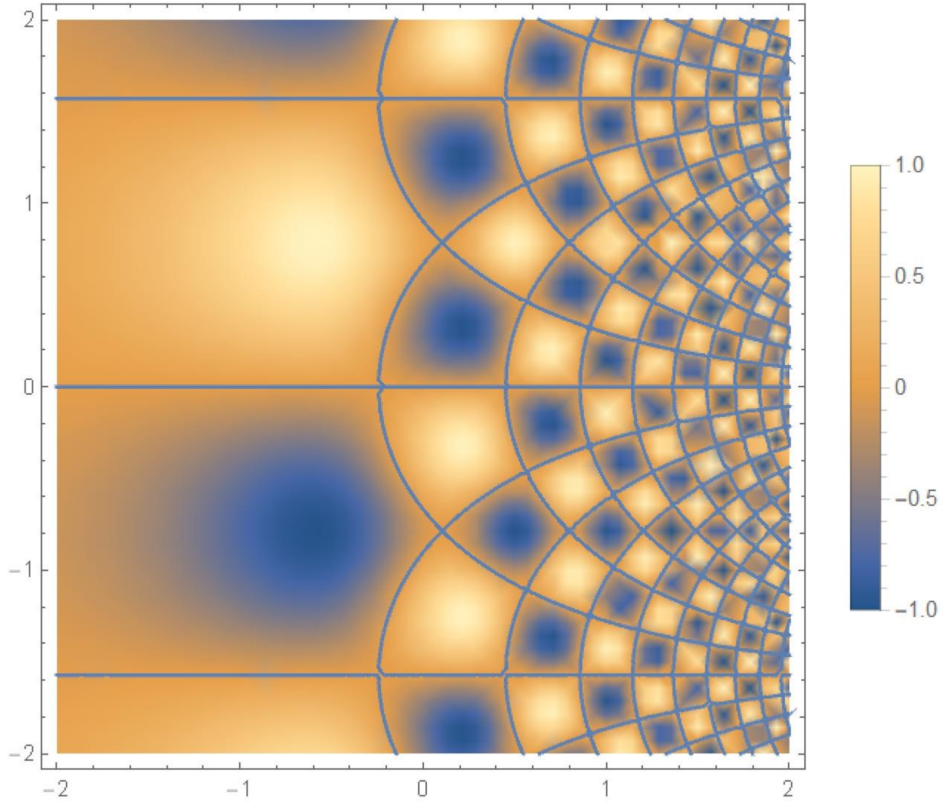


Действие логарифма

```
Show[{DensityPlot[Sin[4 x] Sin[4 y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
   PlotLegends → Automatic],
  ContourPlot[Sin[4 x] Sin[4 y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]}]
```




```
f1[x_, y_] := Module[{w}, w = Exp[x + I y]; Sin[4 Re[w]] Sin[4 Im[w]]];
Show[{DensityPlot[f1[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotLegends → Automatic],
  ContourPlot[f1[x, y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]}]
```



Ветви корня

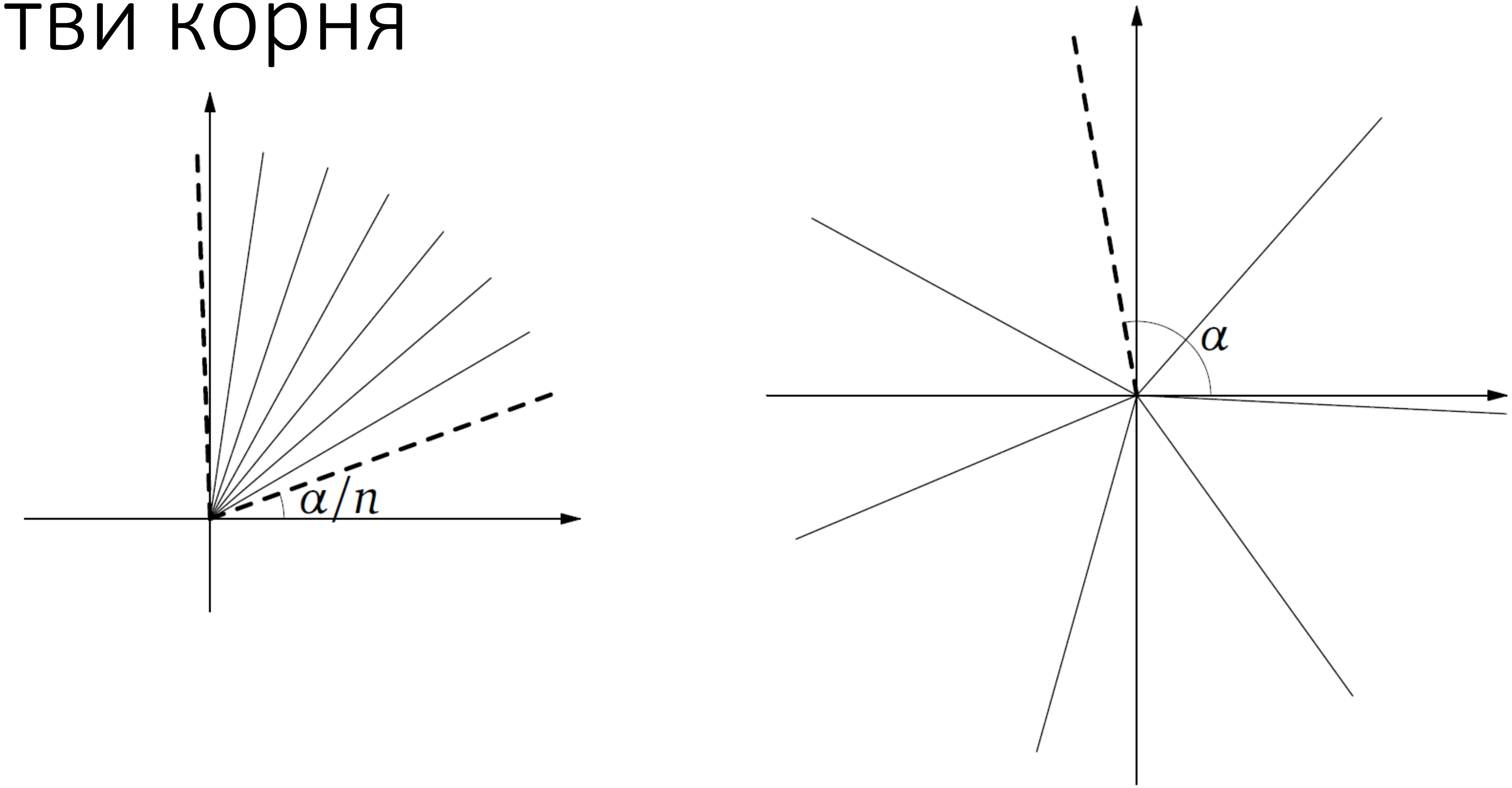


Рис. 2.2. Отображение $z \mapsto z^n$ (в нашем случае $n = 5$) переводит открытый сектор раствором $2\pi/n$ в плоскость с разрезом по лучу. Лучи, выходящие из нуля, переходят в лучи, выходящие из нуля.

Ветви корня

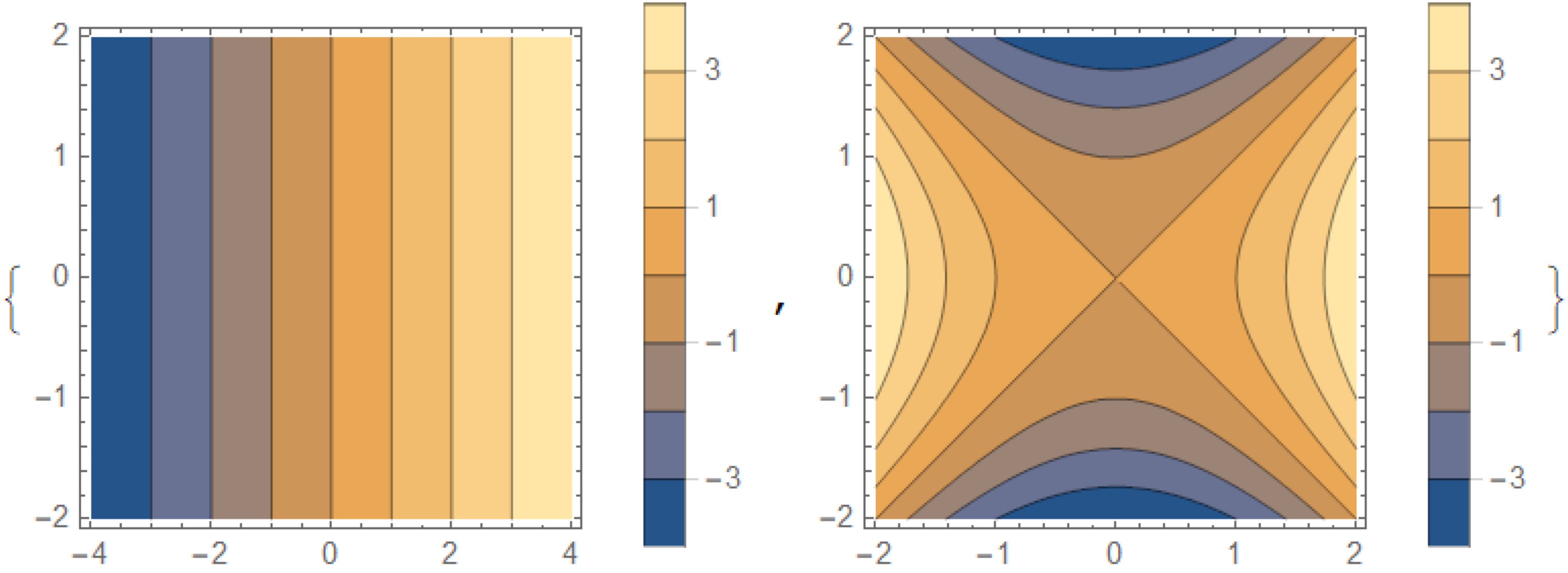
Предложение 2.13. *Пусть $n > 1$ — натуральное число, и пусть через V_α, где $\alpha \in \mathbb{R}$, обозначено то же открытое множество, что в предложении 2.12. Тогда для каждого целого $k \in [0; n-1]$ можно определить на V_α голоморфную функцию $\sqrt[n]{z}$ по формуле*

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \quad \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi.$$

Имеем $(\sqrt[n]{z})^n = z$, $(\sqrt[n]{z})' = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}}$.

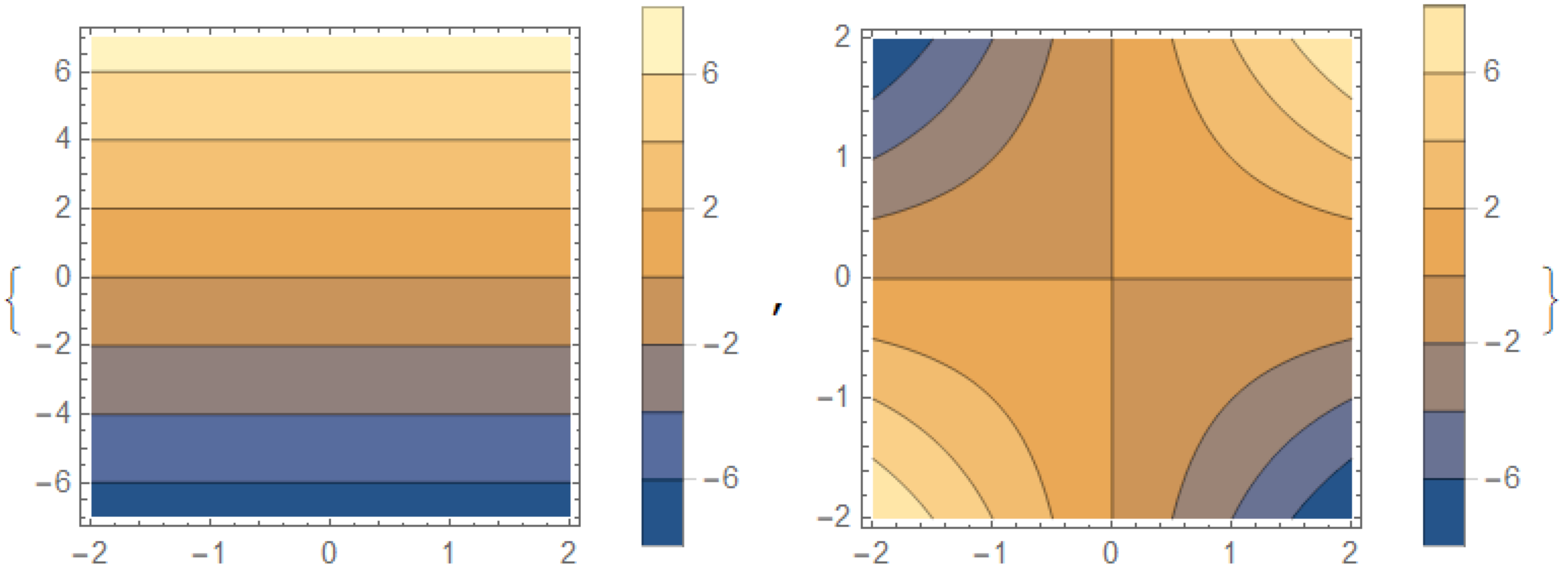
Действие квадратного корня

```
Map[ContourPlot[#[[1]], {x, #[[2]], #[[3]]}, {y, -2, 2},
   PlotLegends → Automatic] &, {{x, -4, 4}, {Re[(x + I y)^2], -2, 2}}]
```



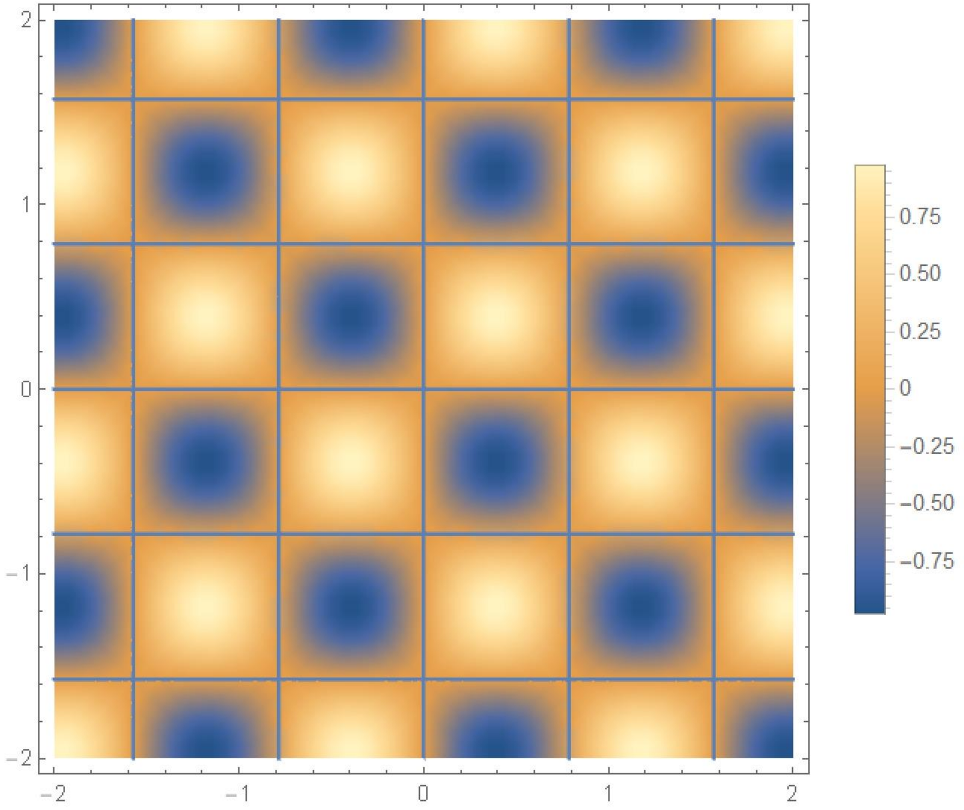
Действие квадратного корня

```
Map[ContourPlot[#[[1]], {x, -2, 2}, {y, #[[2]], #[[3]]},
   PlotLegends → Automatic] &, {{y, -7, 7}, {Im[(x + I y)^2], -2, 2}}]
```

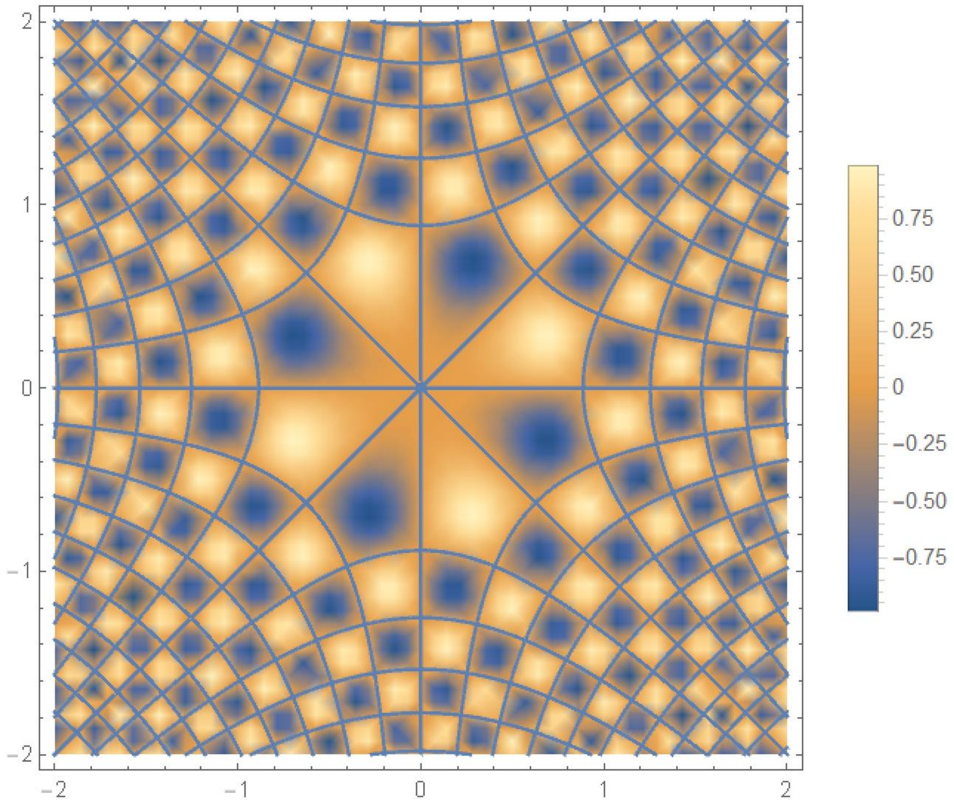


Действие квадратного корня

```
Show[{DensityPlot[Sin[4 x] Sin[4 y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
   PlotLegends → Automatic],
  ContourPlot[Sin[4 x] Sin[4 y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]}]
```

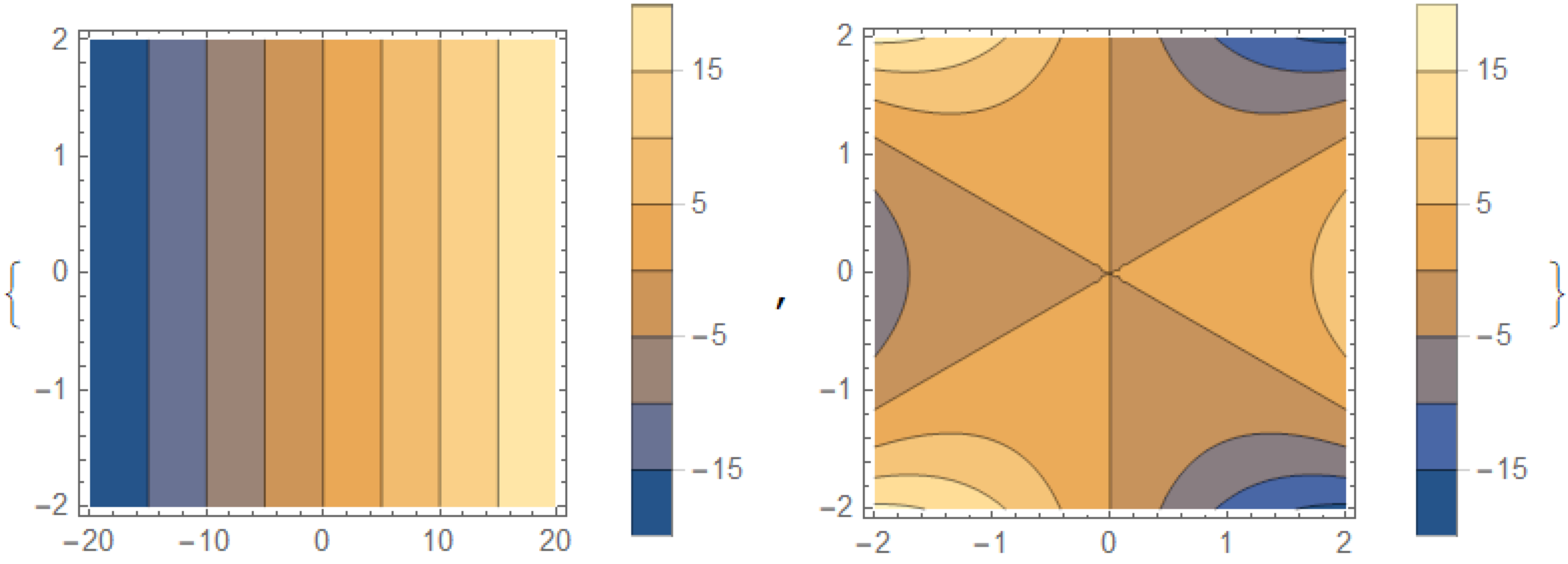



```
f1[x_, y_] := Module[{w}, w = (x + I y)^2; Sin[4 Re[w]] Sin[4 Im[w]]];
Show[{DensityPlot[f1[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotLegends → Automatic],
  ContourPlot[f1[x, y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, MaxRecursion → 3]}]
```



Действие кубического корня

```
Map[ContourPlot[#[[1]], {x, #[[2]], #[[3]]}, {y, -2, 2},
   PlotLegends → Automatic] &, {{x, -20, 20}, {Re[(x + I y)^3], -2, 2}}]
```



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- https://www.hse.ru
- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 4. Условия Коши-Римана

Теория функций комплексного переменного

Уравнения Коши-Римана

$$f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y). \tag{2.4}$$

Предложение 2.14. *Если отображение f, задаваемое формулой* (2.4), *является комплексно дифференцируемым в некоторой точке, то в этой точке имеем*

$$\begin{aligned} \partial u/\partial x &= \partial v/\partial y, \\ \partial u/\partial y &= -\partial v/\partial x. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Если отображение f (или, равносильно, функции u и v) принадлежит классу C^1, то f голоморфно на U тогда и только тогда, когда всюду на U выполняются соотношения (2.5).

Кто придумал условия Коши-Римана

*) Уравнения (8) получены в связи с гидродинамическими задачами Даламбером (1752) и Эйлером (1755); в 1777 г. Эйлер вновь получает эти уравнения в связи с рассмотрением интегралов от функции комплексного переменного. Однако их принято называть условиями Коши — Римана.

Закон Стиглера об эпонимии — эмпирическое наблюдение, описанное профессором статистики Стивеном Стиглером в 1980 г. В простейшей формулировке он гласит: **«Никакое научное открытие не было названо в честь первооткрывателя»**. Сам Стиглер считал, что первооткрывателем закона был Роберт Мертон, таким образом, закон Стиглера применим к самому себе.

В России этот закон называют принципом В.И. Арнольда.

Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783)

Французский учёный-энциклопедист. Широко известен как философ, математик и механик.

Член Парижской академии наук (1740), Французской Академии (1754), Лондонского королевского общества (1748), Петербургской академии наук (1764) и других академий.

Леонард Эйлер (1707-1783)

Базель – Санкт-Петербург –
– Потсдам – Санкт-Петербург

Полное собрание сочинений Эйлера, издаваемое с 1909 года издательством Birkhauser, до сих пор не завершено; планировался выпуск 75 томов, из них вышло 73

Смысл условий Коши-Римана

- Функция имеет комплексную производную если она имеет вещественный дифференциал, который совпадает с оператором умножения на комплексное число.
- Матрица такого дифференциала (линейного отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$) имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$.
- Голоморфная функция с ненулевой производной сохраняет углы между кривыми.
- В частности, декартова координатная сетка отображается в некоторую ортогональную сетку кривых.

Альтернативная формулировка условий Коши-Римана

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \qquad (2.8)$$

Предложение-определение 2.20. Если f вещественно дифференцируема в точке $a \in U$, то ее вещественная производная в этой точке имеет вид

$$h \mapsto \frac{\partial f}{\partial z} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \bar{h}$$

Предложение 2.21. *Функция f комплексно дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда $(\partial f/\partial \bar{z})(a) = 0$.*

Если функция f принадлежит классу C^1, то она голоморфна в U в том и только том случае, когда $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ всюду на U.

Уравнение Лапласа

- Пусть $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет условиям Коши-Римана. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

- Функции u, v называются гармонически сопряженными гармоническими функциями.

Задача: найти гармонически сопряженную

- … функцию к функции $u(x, y) = y^2 - x^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v = -2xy + \phi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad v = -2xy + \psi(y)$$

Течение идеальной жидкости («сухой воды»)

- Поле скоростей не зависит от времени.
- Движение без трения, вихрей, сжатия или растяжения.
- Сохранение площади: $$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$
- Отсутствие (микро)вихрей: $$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$
- При этих условиях можно ввести «потенциалы» φ, ψ, такие, что

$$v_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Комплексный потенциал

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

- Комплексная производная: $\Omega'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y} = v_1 - iv_2$
- Как восстановить скорость: $\overline{\Omega'(z)} = \partial\phi/\partial x + i\partial\phi/\partial y = v_1 + iv_2$
- Равномерный поток определяется комплексным потенциалом вида $\Omega(z) = az, a \neq 0$.
- Обтекание круга: $\Omega(z) = v_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$

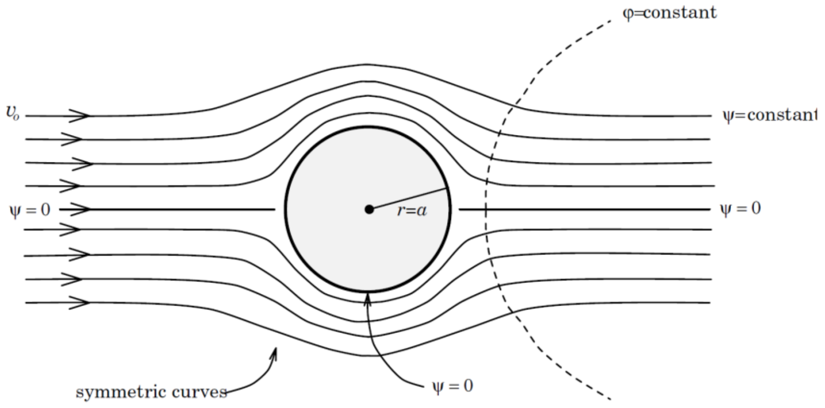
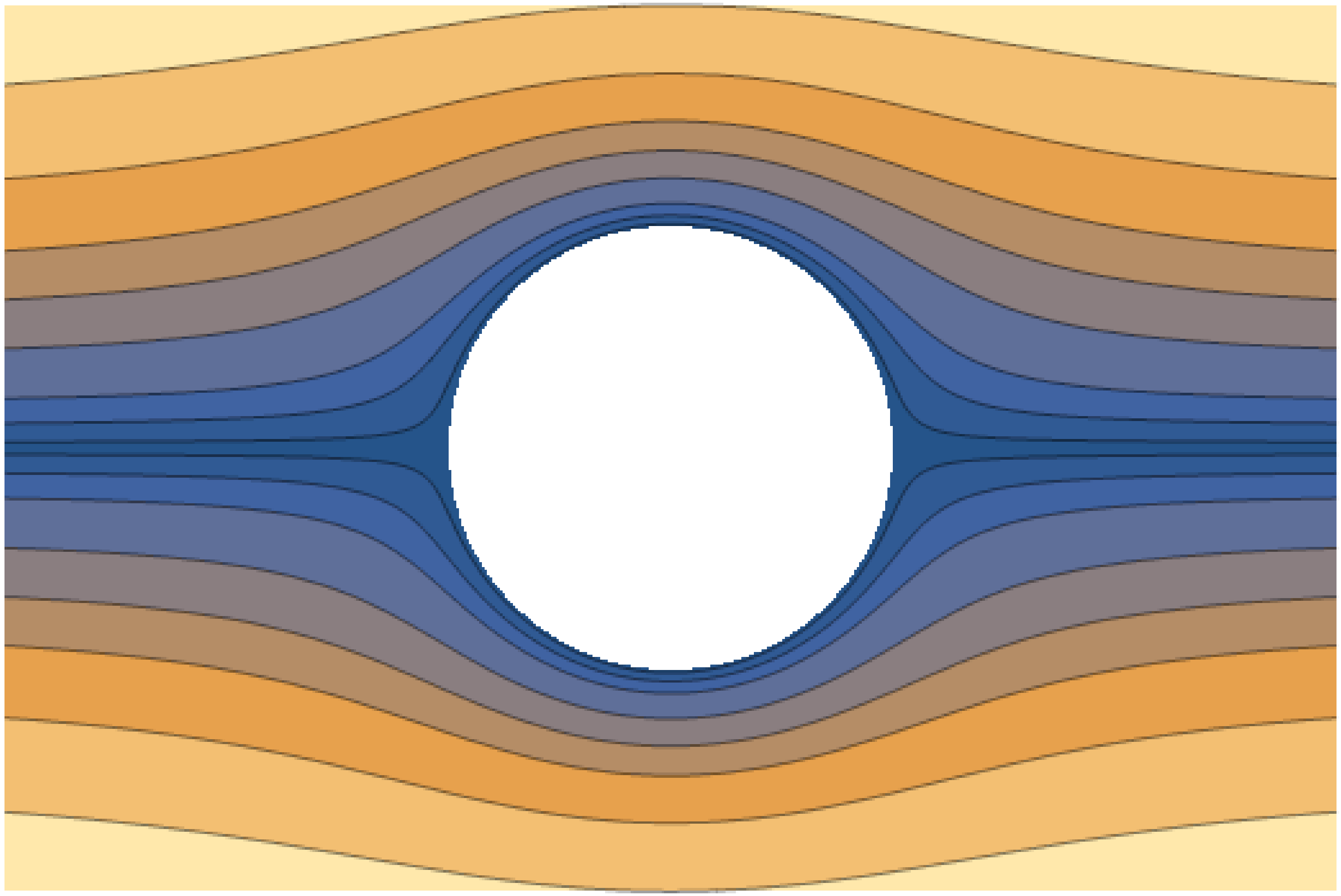


Fig. 2.1.2. Flow around a circular barrier

Обтекание круга



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- Wolfram Mathematica
- https://Wikipedia.org
- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- M.J. Ablowitz, A.S. Fokas, “Complex variables: introduction and applications”. Cambridge University Press.

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 5. Примеры конформных отображений

Теория функций комплексного переменного

Отображение диска в полуплоскость

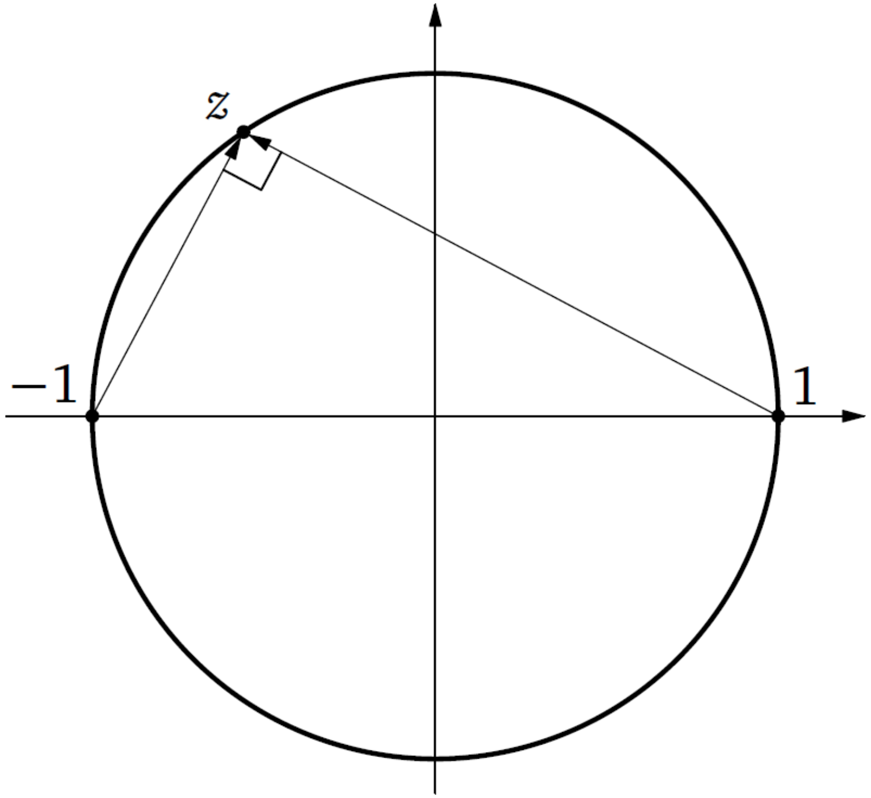


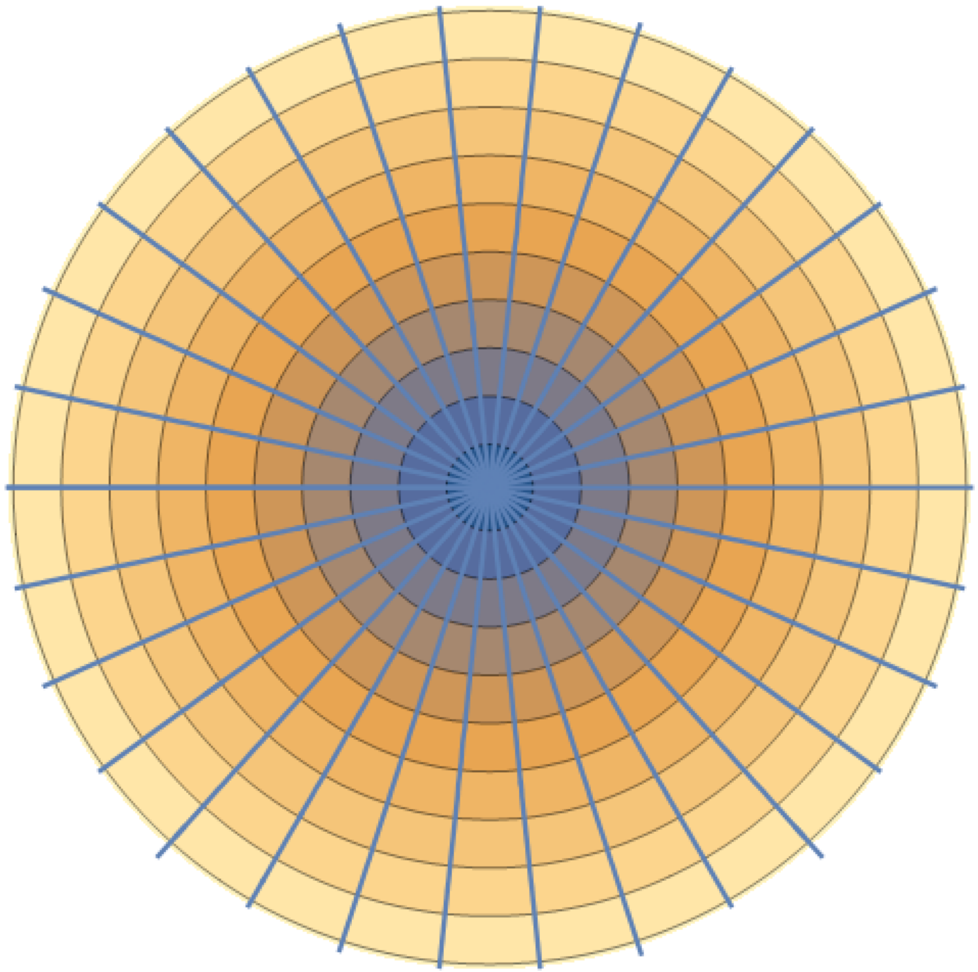
Рис. 3.1. Отображение $z \mapsto (z-1)/(z+1)$ переводит единичную окружность в мнимую ось

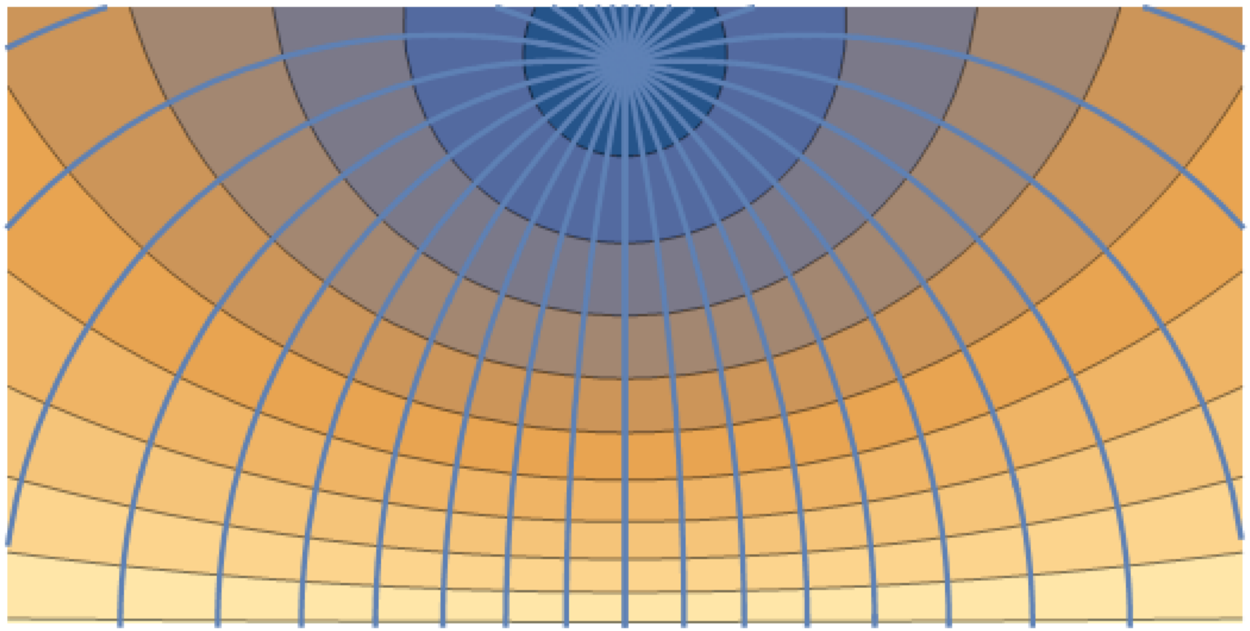
Отображение диска в полуплоскость

- Точки $0, 1, \infty$ лежат на (обобщенной) окружности, ортогональной к $\mathbb{S} = \{z : |z| = 1\}$, причем $1 \in \mathbb{S}$, а 0 и ∞ симметричны относительно $\mathbb{S}$.
- Точки $i, 0, -i$ лежат на окружности, ортогональной к $\mathbb{R}$, причем $0 \in \mathbb{R}$, а i и $-i$ симметричны относительно $\mathbb{R}$.
- Поэтому, если дробно-линейное преобразование f переводит $0,1,\infty$ в $i, 0, -i$, то $f(\mathbb{S}) = f(\mathbb{R})$ и $f(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$.
- Нетрудно найти

$$f(z) = i\,\frac{1 - z}{1 + z}.$$

Отображение $f(z) = i\,\frac{1-z}{1+z}$.





Автоморфизмы верхней полуплоскости

Предложение 3.4. *Дробно-линейные автоморфизмы верхней полуплоскости $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ суть отображения вида*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Группа дробно-линейных автоморфизмов верхней полуплоскости изоморфна $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$, где $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ — группа вещественных матриц с определителем 1, а I — единичная матрица.

Ключевая идея: если $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, то $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Если $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$, то $f(i) \in \mathbb{R}$.

Автоморфизмы диска

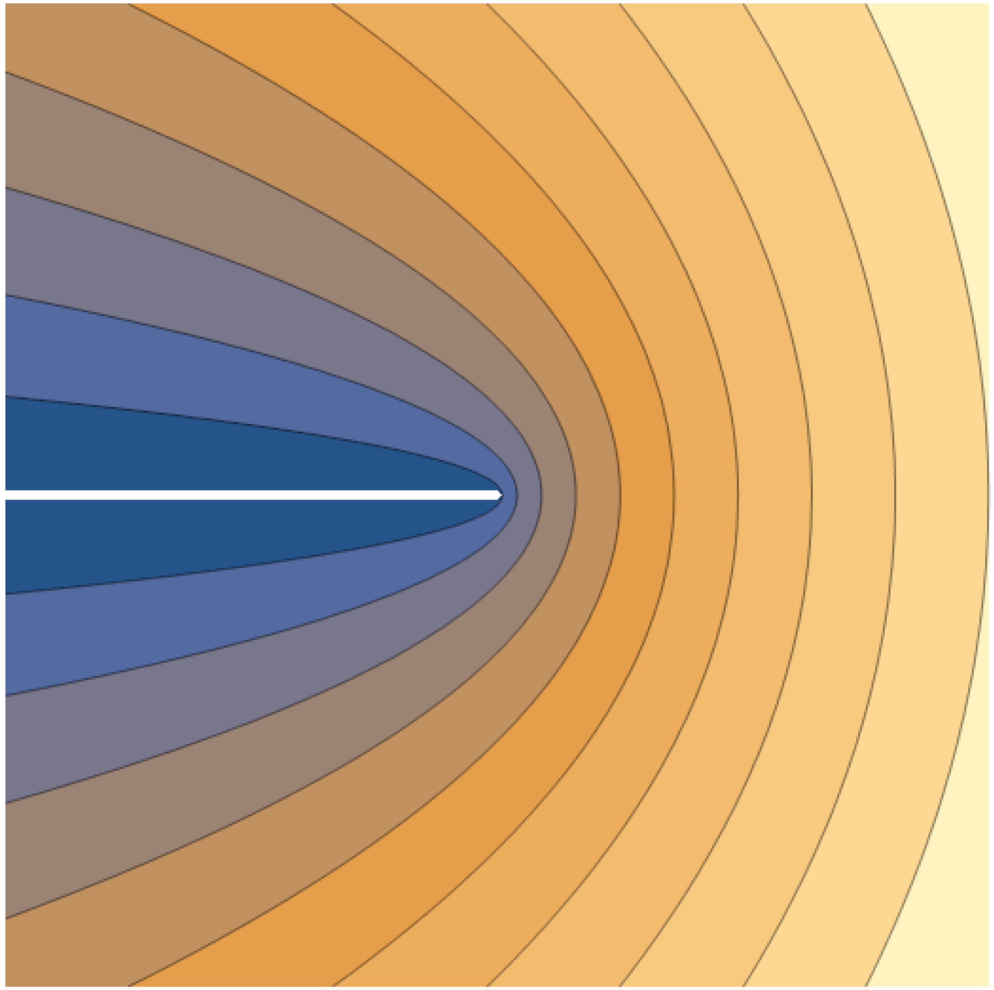
Предложение 3.5. *Дробно-линейные автоморфизмы единичного круга $U = \{z : |z| < 1\}$ суть отображения вида*

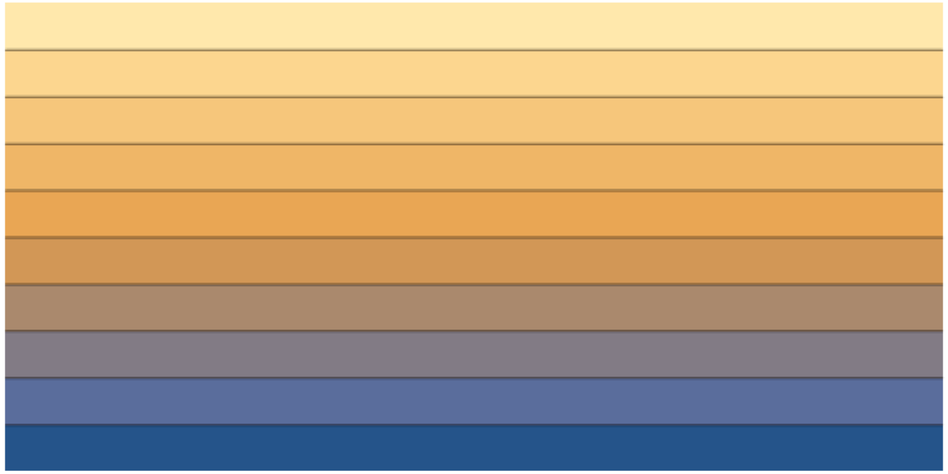
$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbb{R},\ |a| < 1, \tag{3.2}$$

и только они.

- Если точка a переходит в 0, то симметричная к a относительно $\mathbb{S}$ точка $\frac{1}{\bar{a}}$ переходит в симметричную к 0 точку ∞.

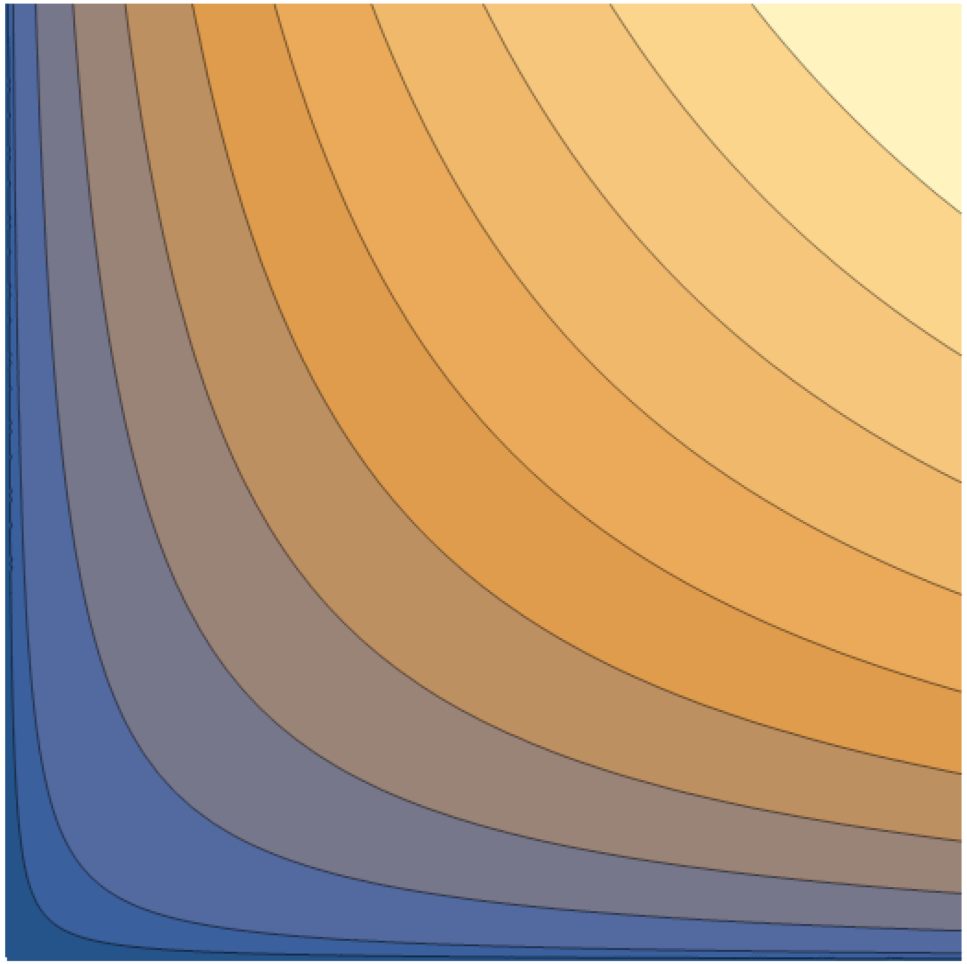
Отображение на полуплоскость: плоскость с разрезом



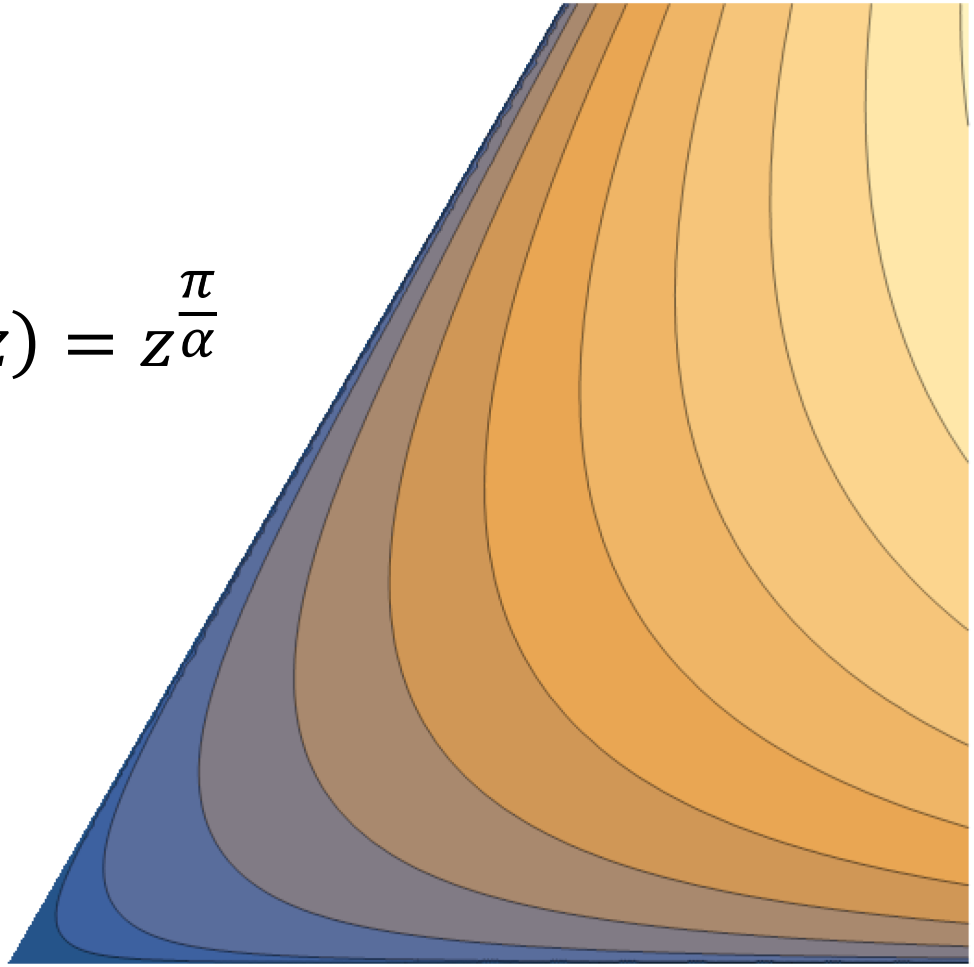


$$f(z) = i\sqrt{z}$$

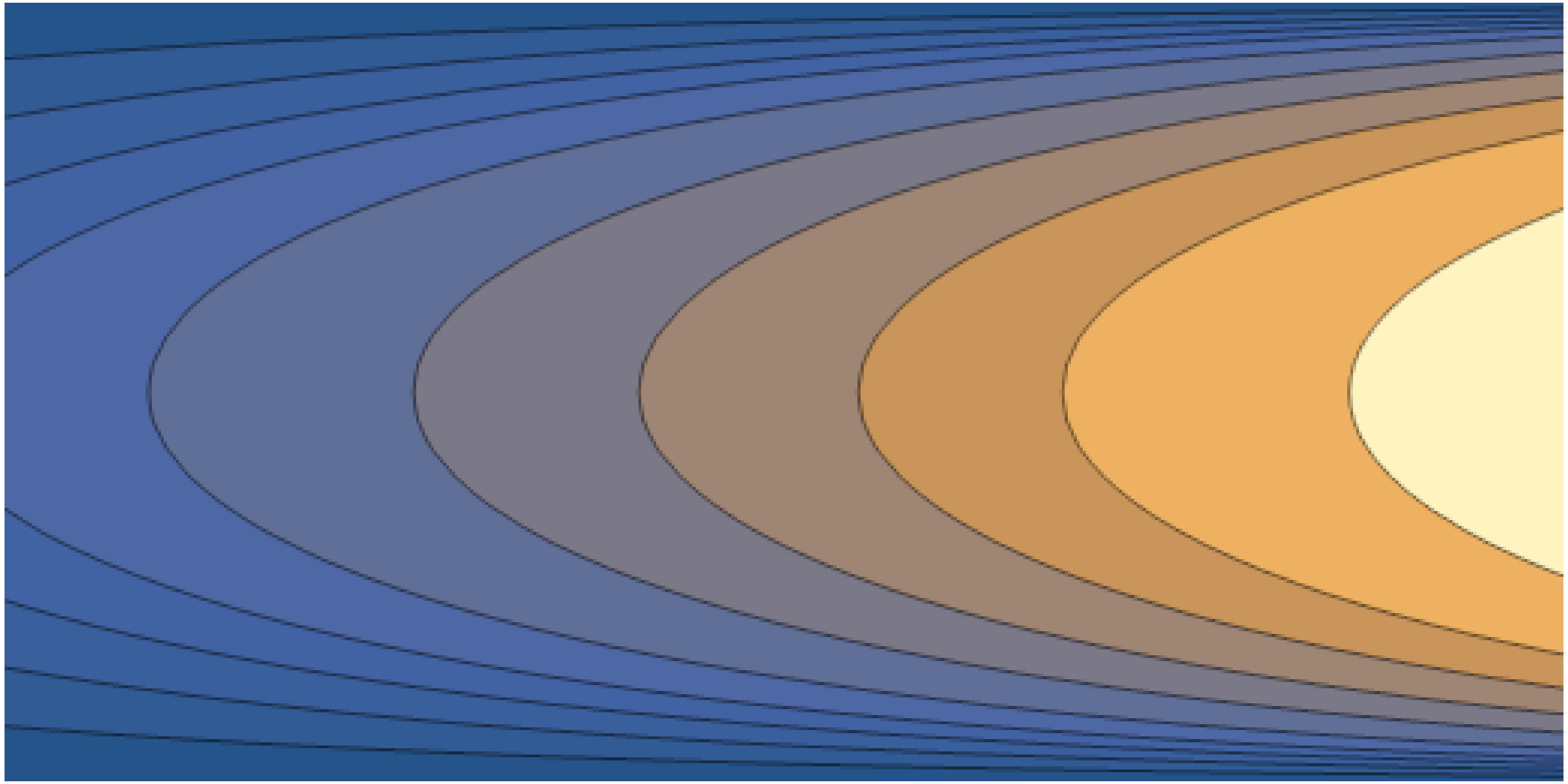
Отображение на полуплоскость: угол



$$f(z) = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

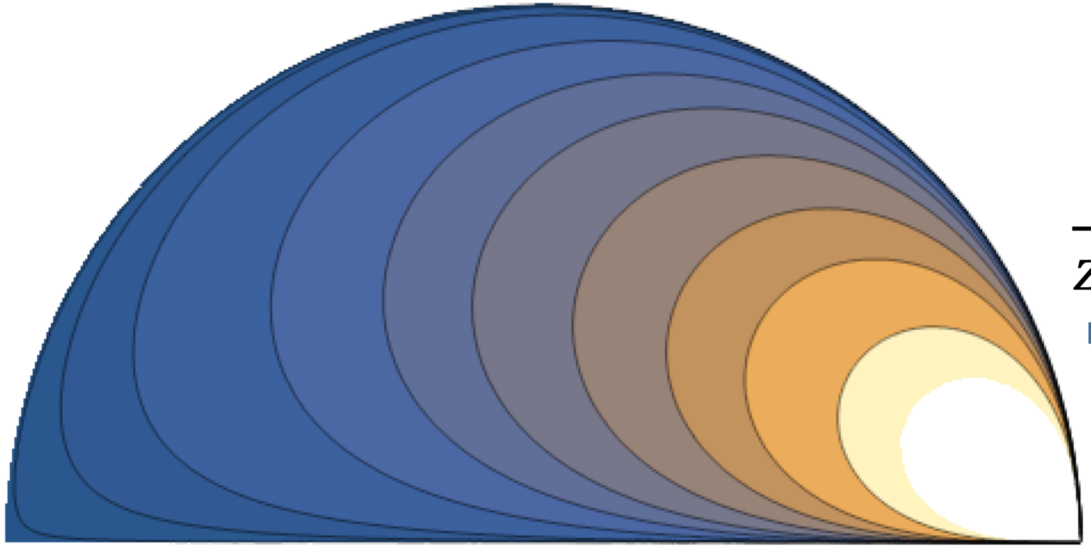


Отображение на полуплоскость: полоса

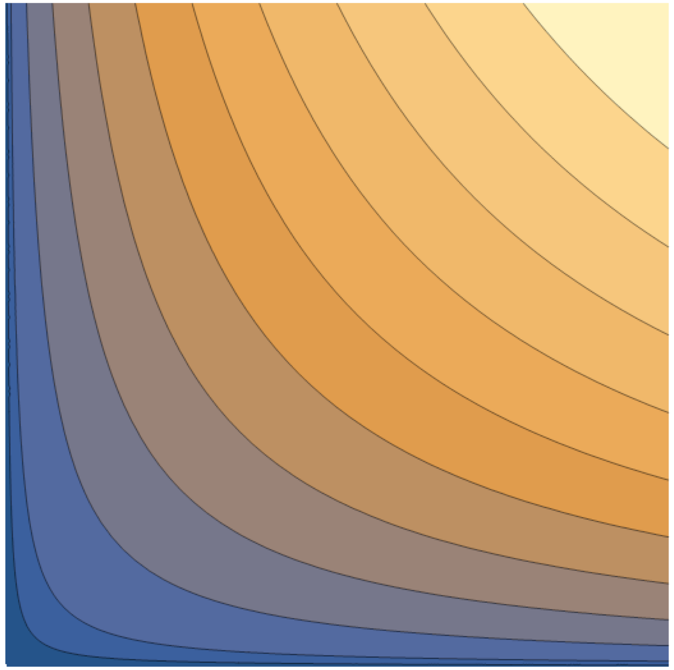


$$f(z) = e^z$$

Отображение на полуплоскость: полудиск



$$\xrightarrow{\frac{-1}{z-1}}$$



$$z \mapsto \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

Отображение на полуплоскость: полуполоса

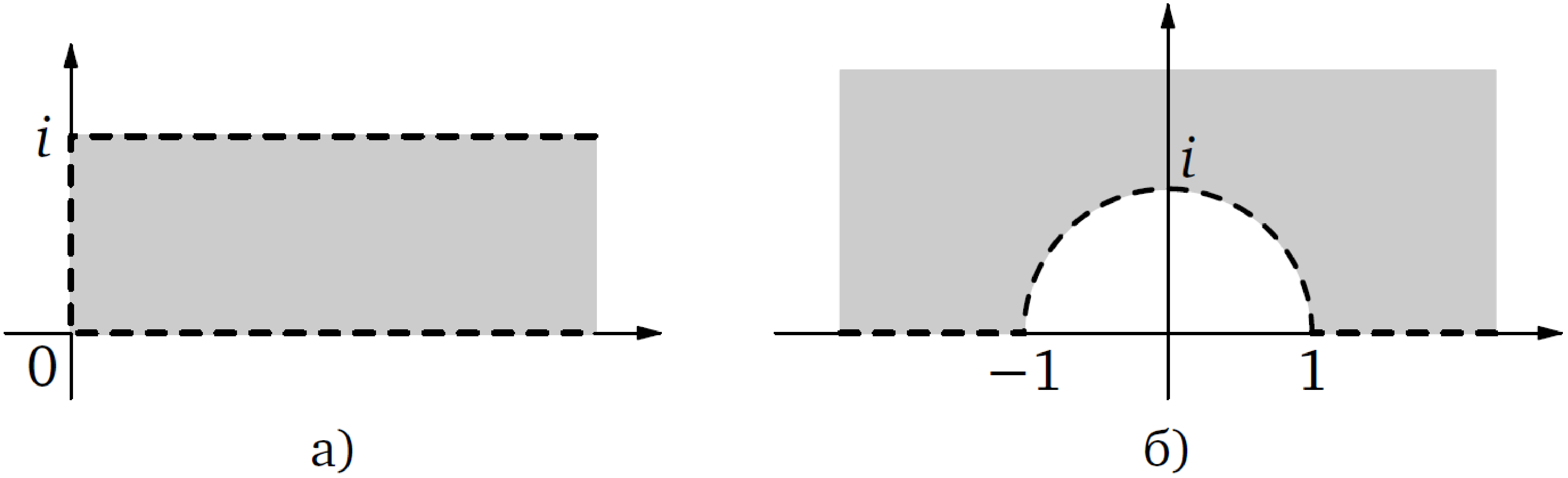
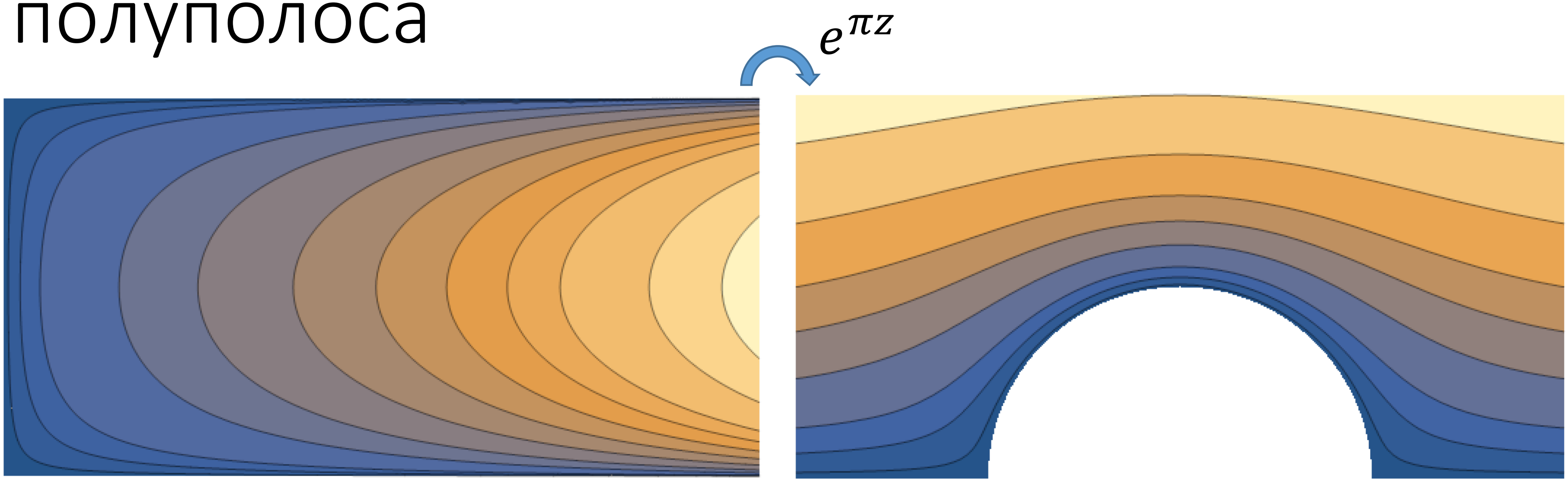


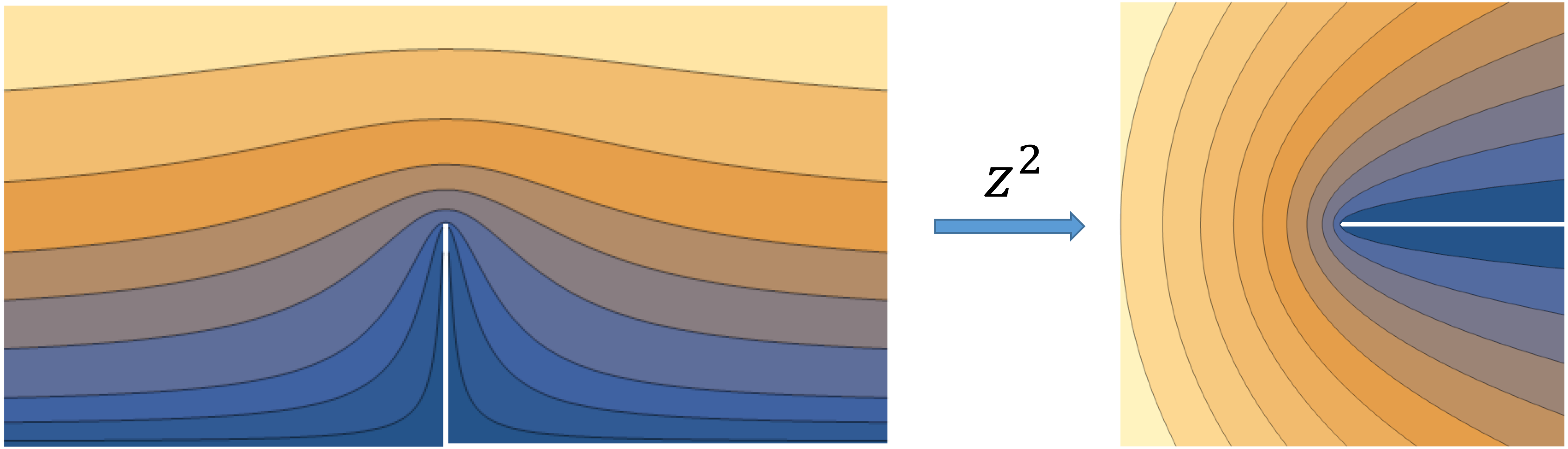
Рис. 3.4. Отображение $z \mapsto z_1 = e^{\pi z}$ переводит полуполосу (а) в верхнюю полуплоскость с выемкой (б)

Отображение на полуплоскость: полуполоса



$$z \mapsto e^{\pi z} + e^{-\pi z} = 2\cos \pi i z$$

Отображение на полуплоскость: полуплоскость с разрезом



$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$$

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 6. Интегралы комплекснозначных функций по путям

Теория функций комплексного переменного

Кусочно-гладкие пути

Определение 4.1. Непрерывное отображение $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$, где $[A;B] \subset \mathbb{R}$ — отрезок, называется *кусочно гладким путем* на комплексной плоскости, если существует такое конечное разбиение $A = A_0 < A_1 < \ldots < A_n = B$, что ограничение γ на каждый отрезок $[A_j; A_{j+1}]$ является гладким путем.

В частности, у кусочно гладкого пути в каждой точке должны существовать односторонние производные. В дальнейшем слово «путь» будет всегда означать «кусочно гладкий путь», если явно не оговорено противное.

Интеграл по пути

Определение 4.2. Пусть $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь и f — непрерывная функция с комплексными значениями, определенная на множестве $\gamma([A;B]) \subset \mathbb{C}$ (или на некотором открытом множестве, содержащем $\gamma([A;B])$). Тогда *интегралом* f по γ называется число

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_A^B f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

(Мотивировка: если $z = \gamma(t)$, то $dz = \gamma'(t)\,dt$, как в формуле для замены переменной.)

Можно определить и через интегральные суммы $\sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\Delta z_i$.

Независимость интеграла от параметризации пути

Предложение 4.3. *Пусть выполнены условия определения 4.2 и $\varphi\colon [A_1; B_1] \to [A; B]$ — биективная дифференцируемая функция со всюду положительной производной. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Если производная функции φ всюду отрицательна, то

$$\int\limits_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

При определении через интегральные суммы независимость от параметризации очевидна.

Интеграл по замкнутому пути

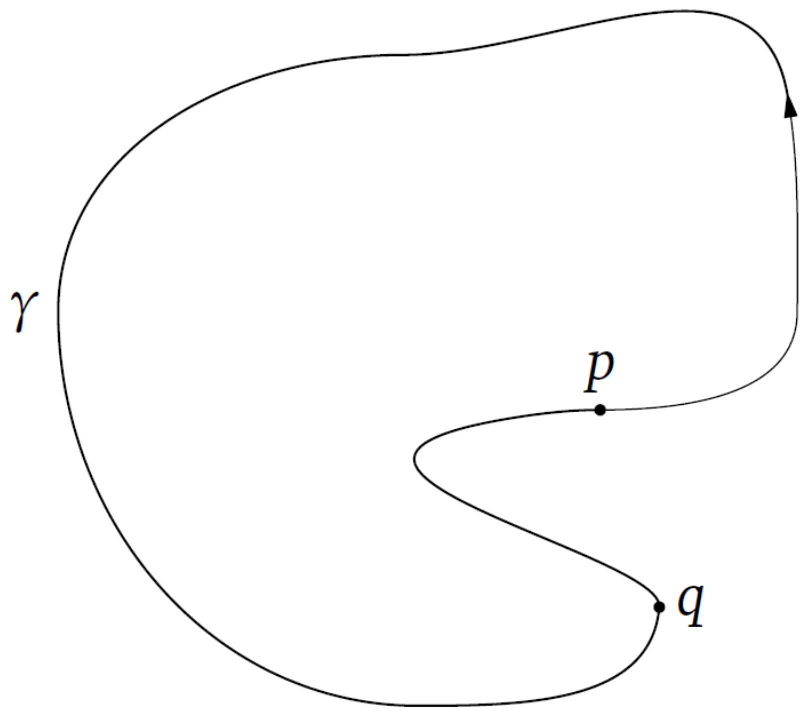


Рис. 4.1. Интеграл по замкнутому пути не зависит от выбора начальной точки

Пример интеграла по окружности

Пример 4.7. Если γ — окружность радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{C}$, ориентированная положительно (т. е. против часовой стрелки), то

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

В самом деле, параметризуем окружность так: $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0; 2\pi]$. Теперь имеем:

$$z = \gamma(t) = a + re^{it}; \qquad dz = \gamma'(t)\,dt = ire^{it}\,dt;$$

$$\frac{dz}{z-a} = \frac{ire^{it}\,dt}{re^{it}} = i\,dt; \qquad \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_{0}^{2\pi} i\,dt = 2\pi i.$$

А что вообще можно интегрировать по путям?

- Дифференциальную 1-форму $f(z)dz$. На «бесконечно малом» отрезке $[z, z + \Delta z]$ она принимает значение $f(z)\Delta\mathrm{z}$, и их мы «суммируем».
- Дифференциальную 1-форму $a(x,y)dx + b(x,y)dy$. Ее же можно записать как $f(z)dz + g(z)d\overline{z}$.
- Элемент длины $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ или $\varphi(x,y)\sqrt{dx^2 + dy^2}$.
- Вообще, $\eta(dx, dy)$, где η – положительно однородная функция степени 1.

Первообразная и интеграл

Определение 4.8. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f : U \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Будем говорить, что функция $F : U \to \mathbb{C}$ является *первообразной* для функции f, если она голоморфна в U и $F'(z) = f(z)$ для всякого $z \in U$.

Предложение 4.10. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и пусть $f : U \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, имеющая в U первообразную F. Если γ — путь в U, соединяющий точки $p \in U$ и $q \in U$, то*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = F(q) - F(p).$$

Важные следствия

Следствие 4.11. *Если функция f, определенная на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, имеет на этом множестве первообразную, то интеграл от* $\cancel{F}$ f *по любому замкнутому пути, лежащему в U, равен нулю.*

Следствие 4.12. *Если f — голоморфная функция на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ и если $f'(z) = 0$ для всех $z \in U$, то f постоянна.*

Доказательство. Соединим две точки из U путем в U и воспользуемся 4.10.

Равномерная сходимость интегралов

Предложение 4.13. *Пусть* $\gamma : [A; B] \to \mathbb{C}$ *— кусочно гладкий путь, и пусть* $\{f_n\}$ *— последовательность функций, определенных и непрерывных на* $\gamma([A; B])$*, равномерно сходящаяся на* $\gamma([A; B])$ *к функции* f*. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)\, dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Это сводится к соответствующей теореме об интегралах на отрезке.

Некоторые оценки

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \sup_{z\in\gamma([A;B])} |f(z)|\cdot \operatorname{length}(\gamma). \qquad \operatorname{length}(\gamma) = \int_A^B |\gamma'(t)|\,dt.$$

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,|dz|. \qquad \int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_A^B f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt.$$

В конечном счете, путем предельного перехода, эти неравенства сводятся к неравенству треугольника.

Индекс кривой относительно точки

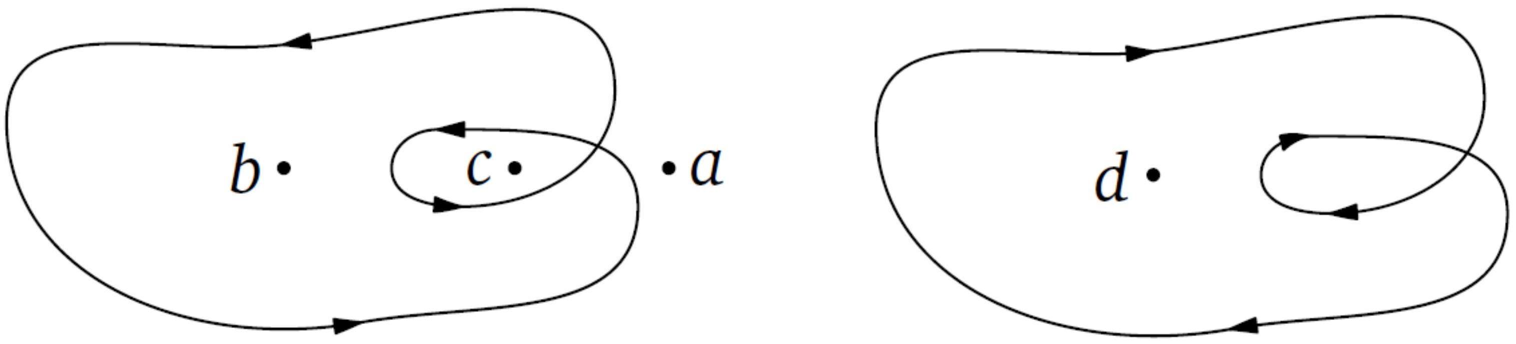


Рис. 4.2. Левая кривая имеет индекс 0 относительно точки a, индекс 1 относительно точки b и индекс 2 относительно точки c; правая кривая имеет индекс -1 относительно точки d

Неформально, индекс = число оборотов.

Что такое угол?

Лемма 4.18. *Пусть* $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$ — *кусочно гладкий путь, и пусть* a — *точка на комплексной плоскости, через которую он не проходит. Тогда найдутся кусочно гладкие функции* $r, \varphi\colon [A;B] \to \mathbb{R}$, *для которых* $\gamma(t) = a + r(t)e^{i\varphi(t)}$.

В топологических терминах: корректно определена функция $\widetilde{\varphi} : [A, B] \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; ее можно поднять на универсальное накрытие.

Определение индекса

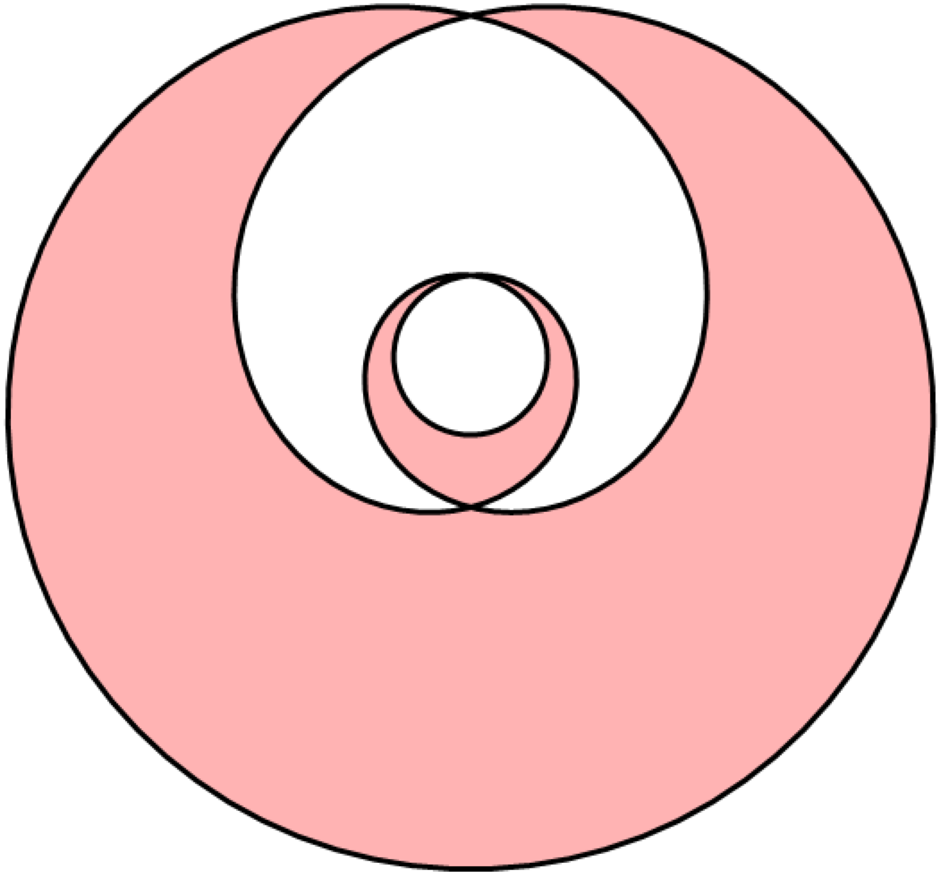
Предложение-определение 4.19. Пусть $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$ — замкнутый путь, не проходящий через точку $a \in \mathbb{C}$. Если записать $\gamma(t) = a + r(t)e^{i\varphi(t)}$, где $r, \varphi\colon [A;B] \to \mathbb{R}$ — кусочно гладкие функции (такое представление возможно ввиду леммы 4.18), то отношение

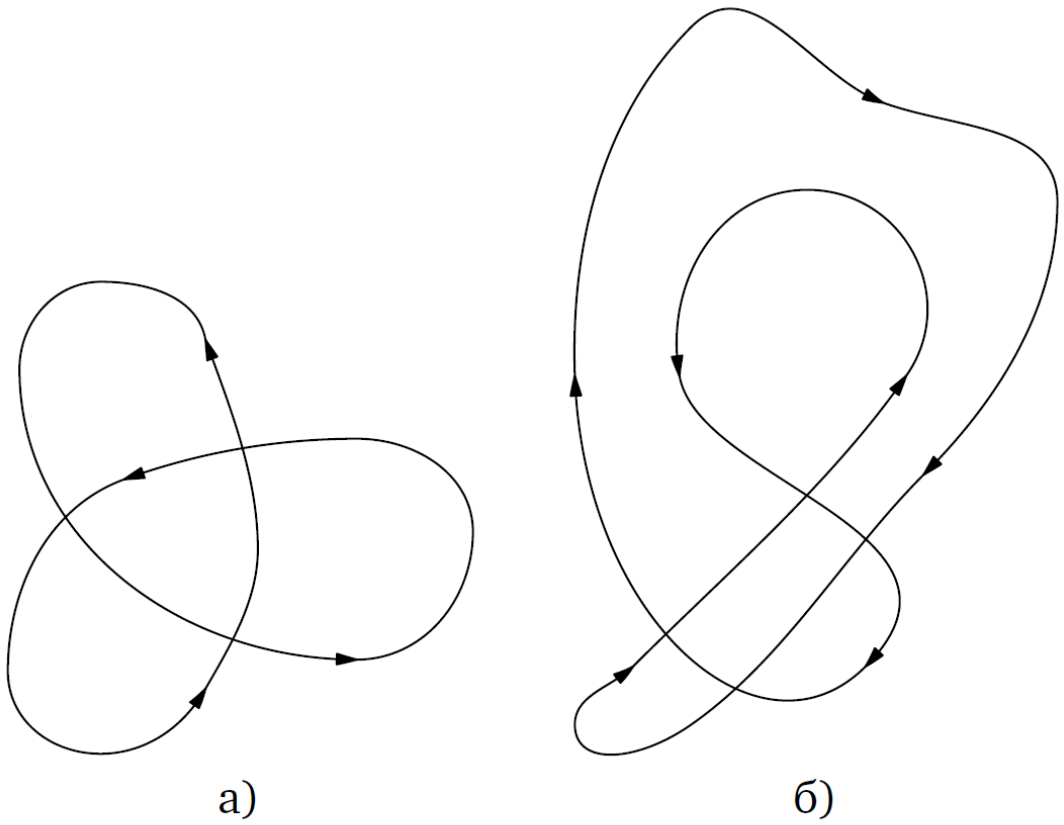
$$\operatorname{Ind}_a \gamma = \frac{\varphi(B) - \varphi(A)}{2\pi}$$

является целым числом, не зависящим от выбора функции φ. Это число называется *индексом пути γ относительно точки a*. Более того, имеет место равенство

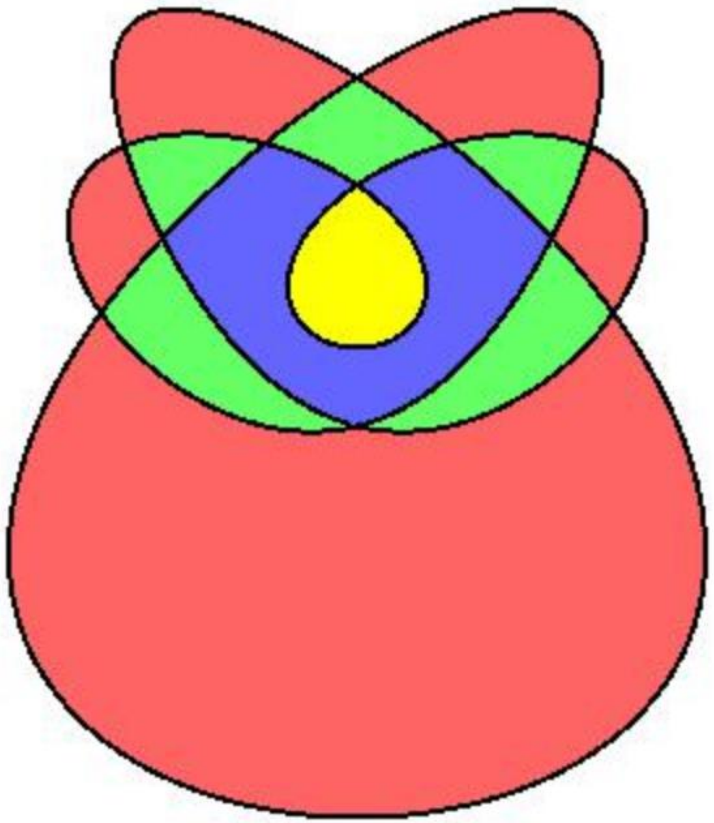
$$\operatorname{Ind}_a \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - a}. \tag{4.2}$$

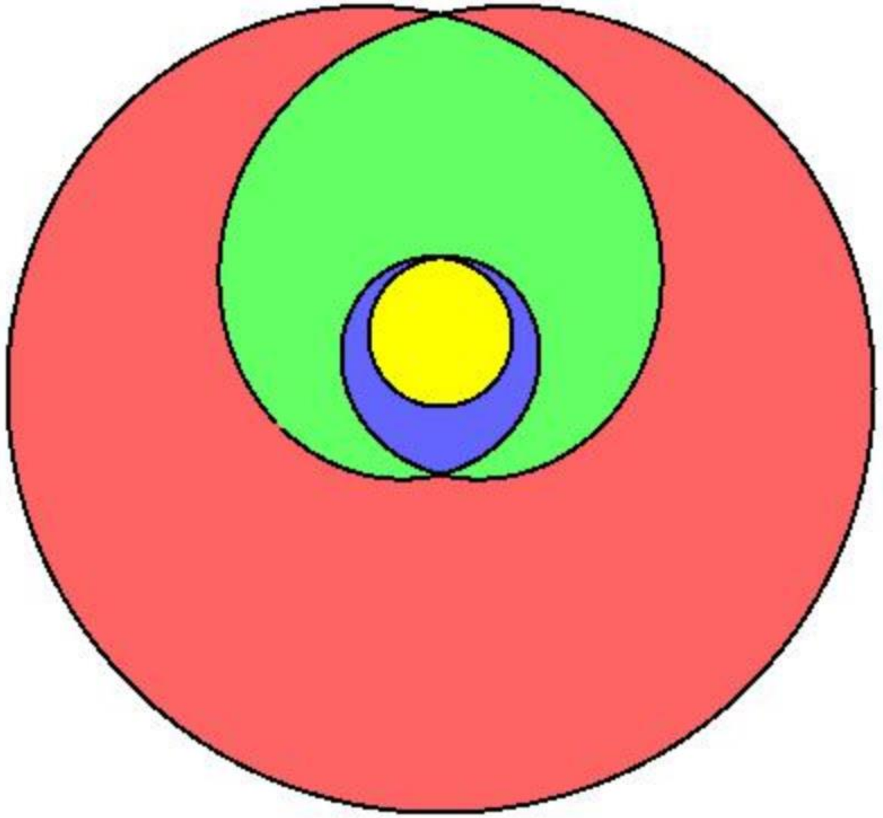
Индексы кривых

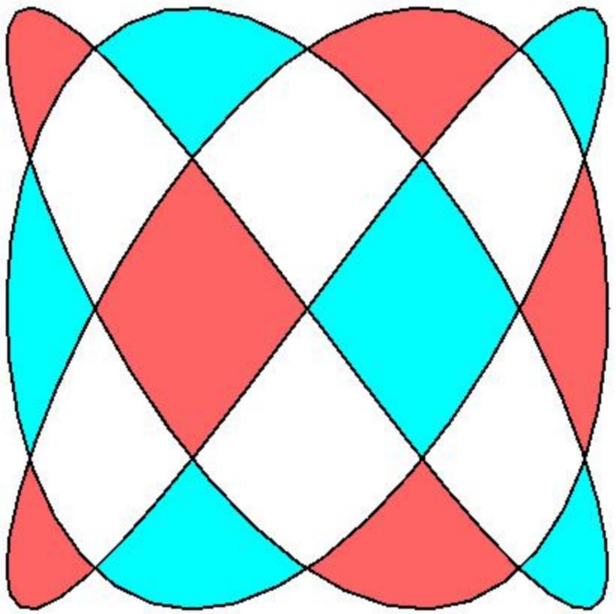


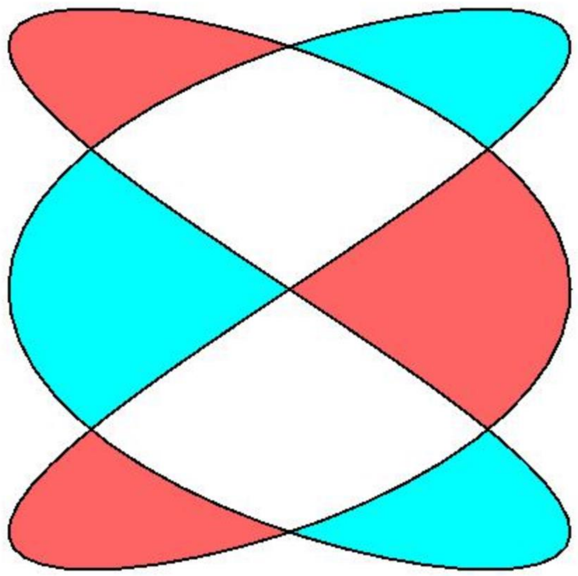


Индексы кривых









В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 7. Теорема Коши

Теория функций комплексного переменного

Теорема Коши: версия 1

Теорема 5.1 (теорема Коши, версия 1). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, $f: U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция и $\Delta \subset U$ — треугольник. Тогда* $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$

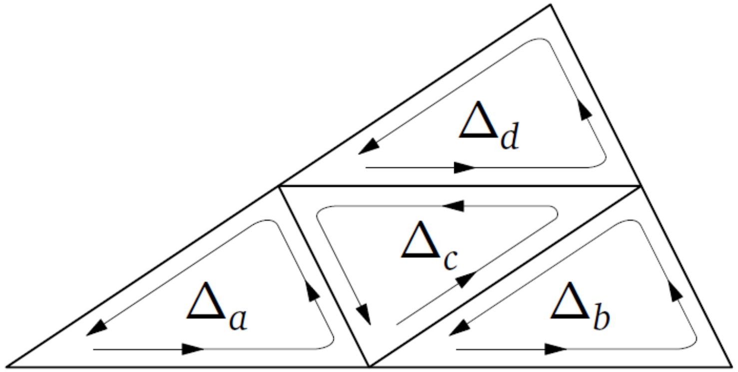
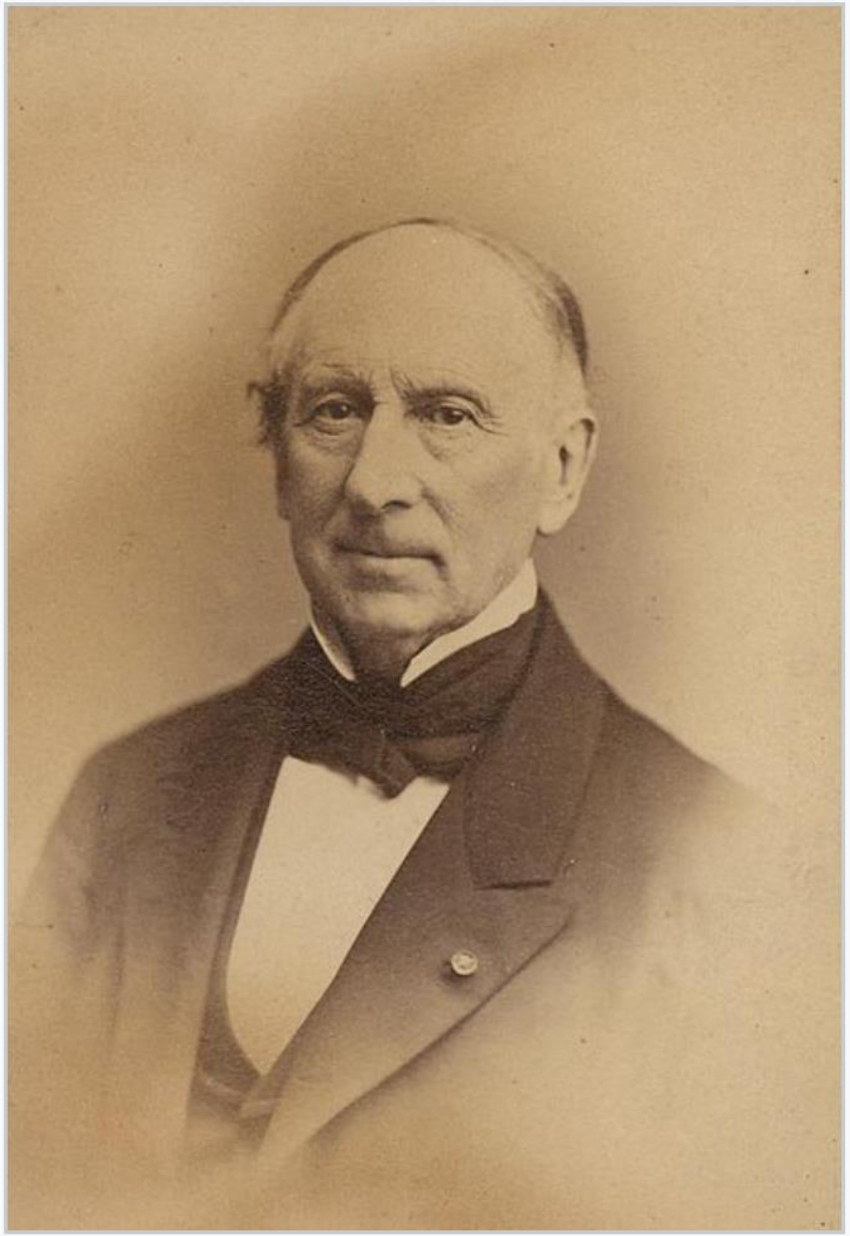


Рис. 5.1. Если границы всех треугольников ориентированы одинаково, то интеграл по большому треугольнику равен сумме интегралов по четырем маленьким

Огюстен Луи Коши
(1789 – 1857)

- французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.
- написал свыше 800 работ, полное собрание его сочинений содержит 27 томов. Его работы относятся к различным областям математики (преимущественно к математическому анализу) и математической физики.



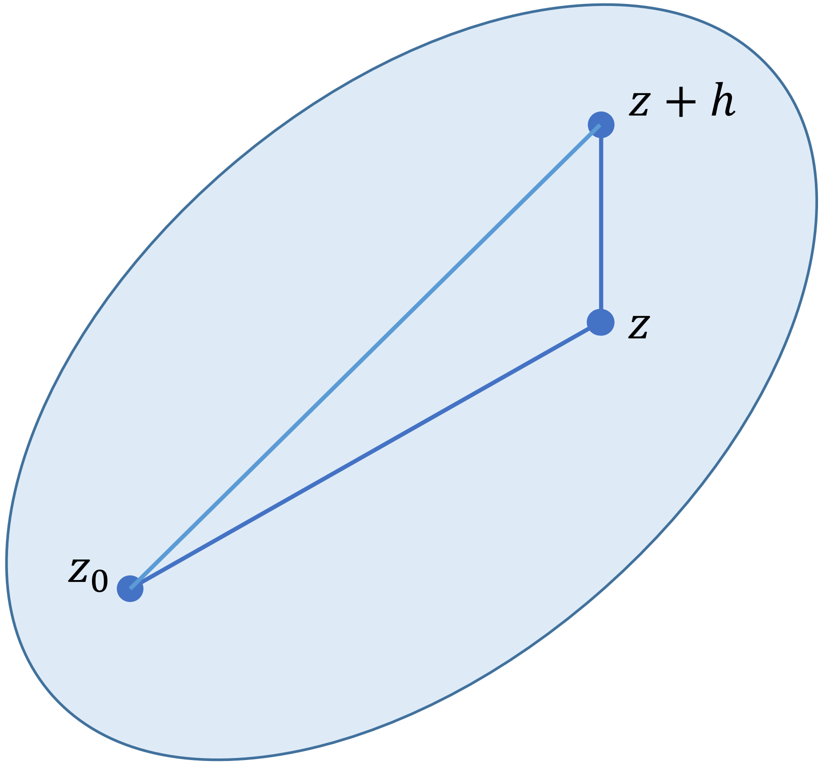
Первообразная

Предложение 5.2. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — выпуклое открытое множество и $f : U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Тогда для f существует первообразная, т. е. функция $F : U \to \mathbb{C}$, для которой $F'(a) = f(a)$ при всех $a \in \mathbb{C}$.*

$$F(z) = \int_{[z_0;z]} f(t)\,dt$$

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(t)dt$$

$$= f(z)h + o(h)$$



Теорема Коши, версия 2

Теорема 5.3 (теорема Коши, версия 2). *Пусть* $U \subset \mathbb{C}$ — *выпуклое открытое множество и* $f : U \to \mathbb{C}$ — *голоморфная функция. Тогда*:

(а) *интеграл от* f *по любому замкнутому пути, лежащему в* U, *равен нулю;*

(б) *если* $p, q \in U$ — *две точки, а* γ_1 *и* γ_2 — *два пути в* U, *соединяющие точки* p *и* q, *то интегралы от функции* f *по* γ_1 *и* γ_2 *совпадают.*

Доказательство. По предложению 5.2 функция f имеет первообразную в U; теперь все вытекает из следствия 4.11 и предложения 4.10. $\square$

Теорема Коши, версия 3

«Теорема» 5.4 (теорема Коши, версия 3). *Предположим, что $f: U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$.*

(а) *Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \subset U$ — замкнутые несамопересекающиеся и не пересекающиеся друг с другом кривые, ориентированные положительно (против часовой стрелки). Если часть плоскости, заключенная между γ_1 и γ_2, целиком содержится в U, то* $\int\limits_{\gamma_1} f\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f\,dz.$

(б) *Пусть γ_1 и γ_2 — две кривые в U, соединяющие точки $p \in U$ и $q \in U$. Если часть плоскости, заключенная между γ_1 и γ_2, целиком содержится в U, то* $\int\limits_{\gamma_1} f\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f\,dz.$

«Доказательство» версии 3

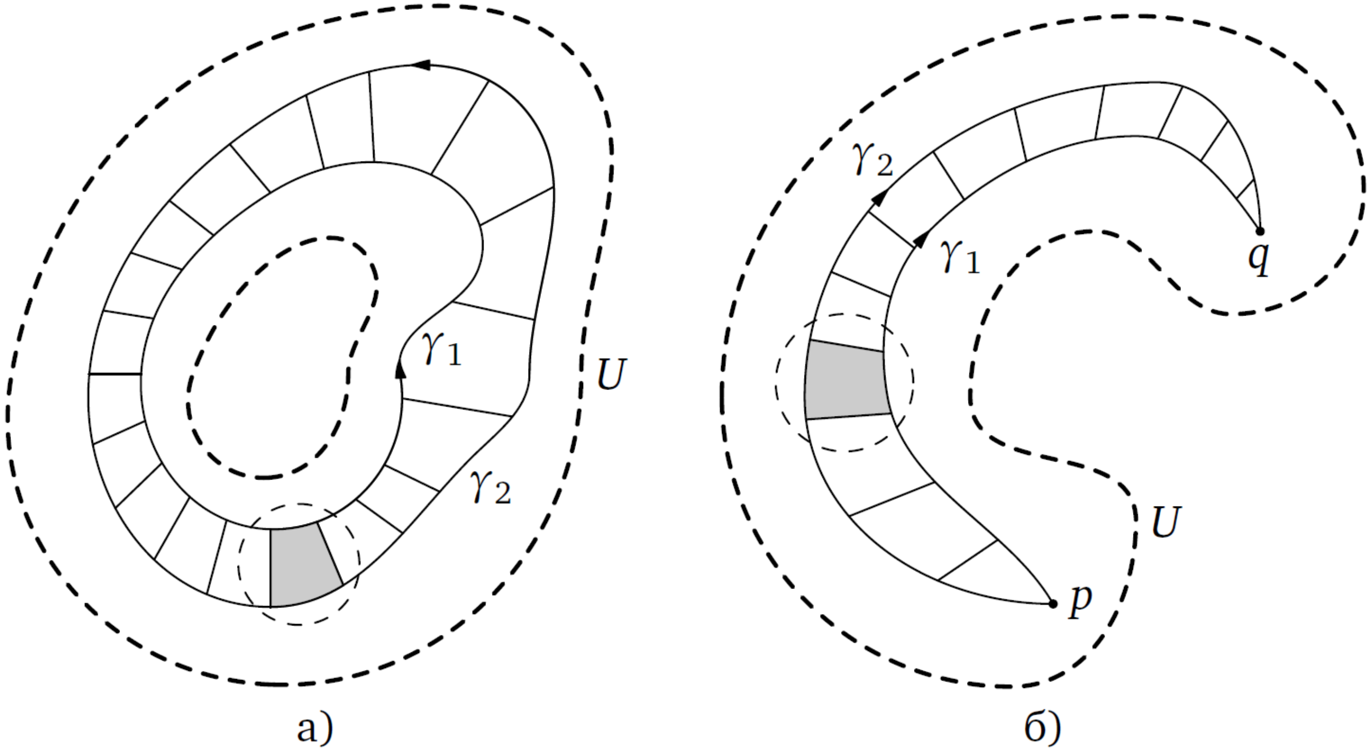
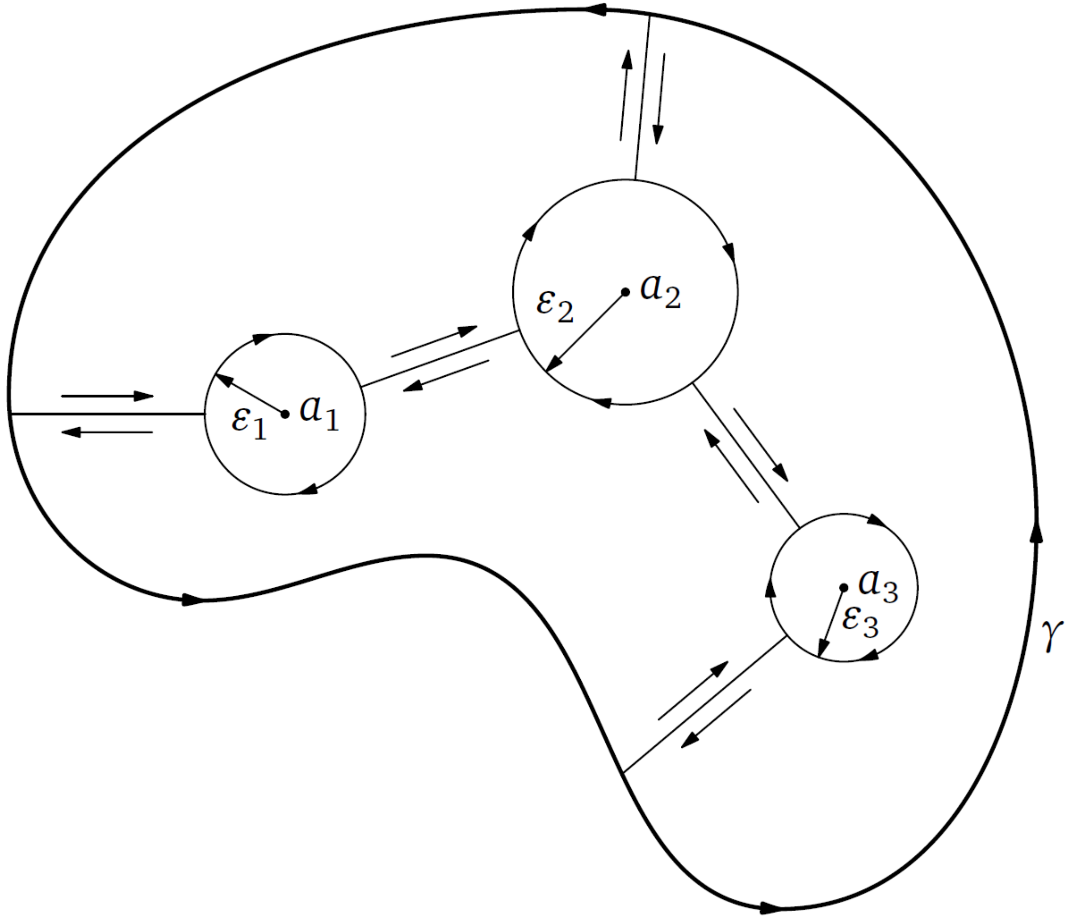
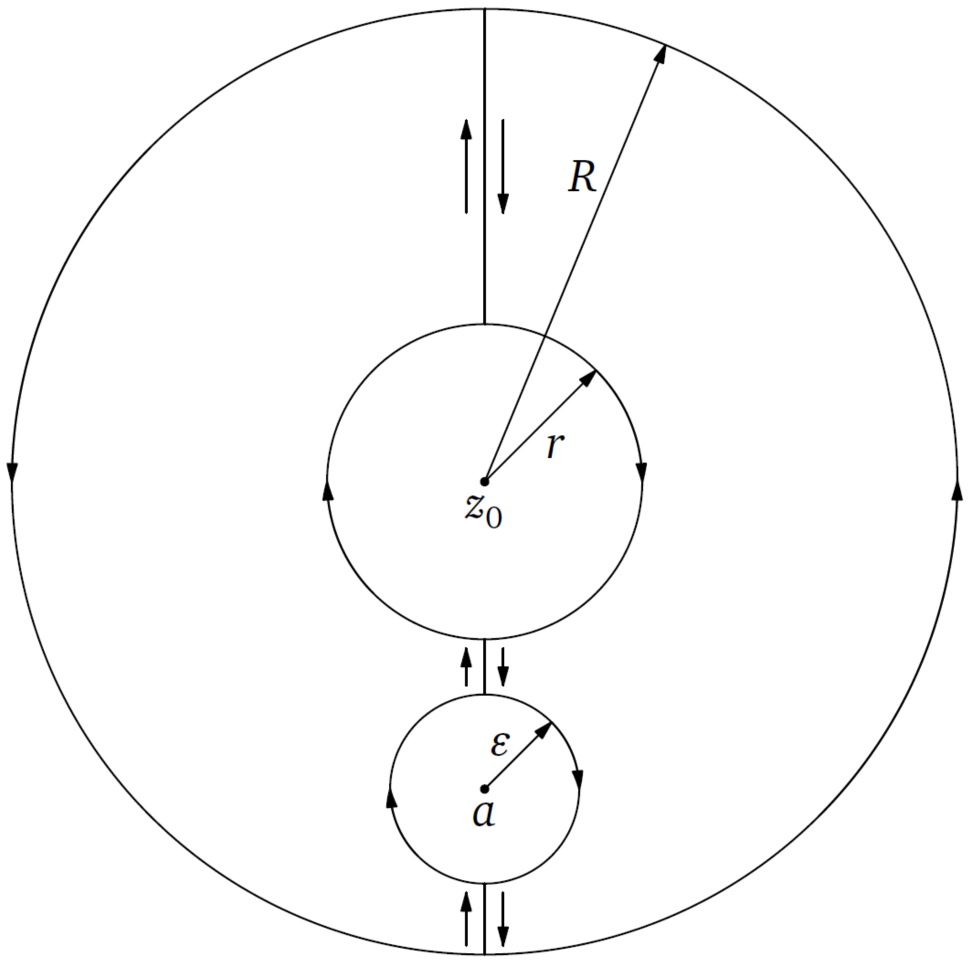


Рис. 5.2. (а) Замкнутые кривые γ_1 и γ_2 ориентированы положительно; (б) кривые γ_1 и γ_2 соединяют точки p и q. Жирным пунктиром обозначена граница области U. Часть плоскости между γ_1 и γ_2 разбита отрезками на «малые» части; одна из этих частей заштрихована, и изображен содержащий ее круг, который, в свою очередь, содержится в U.

Примеры применения версии 3





Теорема Коши vs формула Стокса (Грина)

- Пусть U – гладкое многообразие с краем, а ω – дифференциальная C^1-форма на U. Формула Стокса:
$$\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega .$$
- Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$. Тогда формула Стокса = формула Грина:
$$\int_{\partial U} A(x,y)dx + B(x,y)dy = \int_U \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$
- В классическом изложении требуется, чтобы $A, B \in C^1(\overline{U})$.
- На самом деле достаточно: $A, B \in D^1(\overline{U}),\ B_x - A_y \in C\hat{}1(\overline{U})$.

Теорема Коши vs формула Стокса (Грина)

- $f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy)$.
- $d(fdz) = \left(-\left(v_x + u_y\right) + i\left(u_x - v_y\right)\right) dx \wedge dy$.
- В комплексных терминах $d(fdz) = -f_{\overline{z}}\,dz \wedge d\overline{z}$.
- Если f голоморфна, то $d(f(z)dz) = 0$ согласно условиям Коши-Римана.
- Таким образом, формулу Коши можно вывести из формулы Грина, но не из той версии формулы Грина, которую обычно приводят в курсе «гладких многообразий».

Формула Коши

Теорема 5.8 (формула Коши). *Пусть* $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — *часть комплексной плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой* γ *(кривая* γ *входит в* $\bar{U}$); *положим* $\operatorname{Int}(\bar{U}) = U$. *Если функция* $f\colon \bar{U} \to \mathbb{C}$ *непрерывна на* $\bar{U}$ *и голоморфна в* U, *то для всякого* $a \in U$ *выполнено равенство*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-a}, \tag{5.6}$$

где кривая γ *ориентирована в положительном направлении.*

Идея доказательства. По теореме Коши, достаточно рассмотреть маленькую окружность с центром в точке a.

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

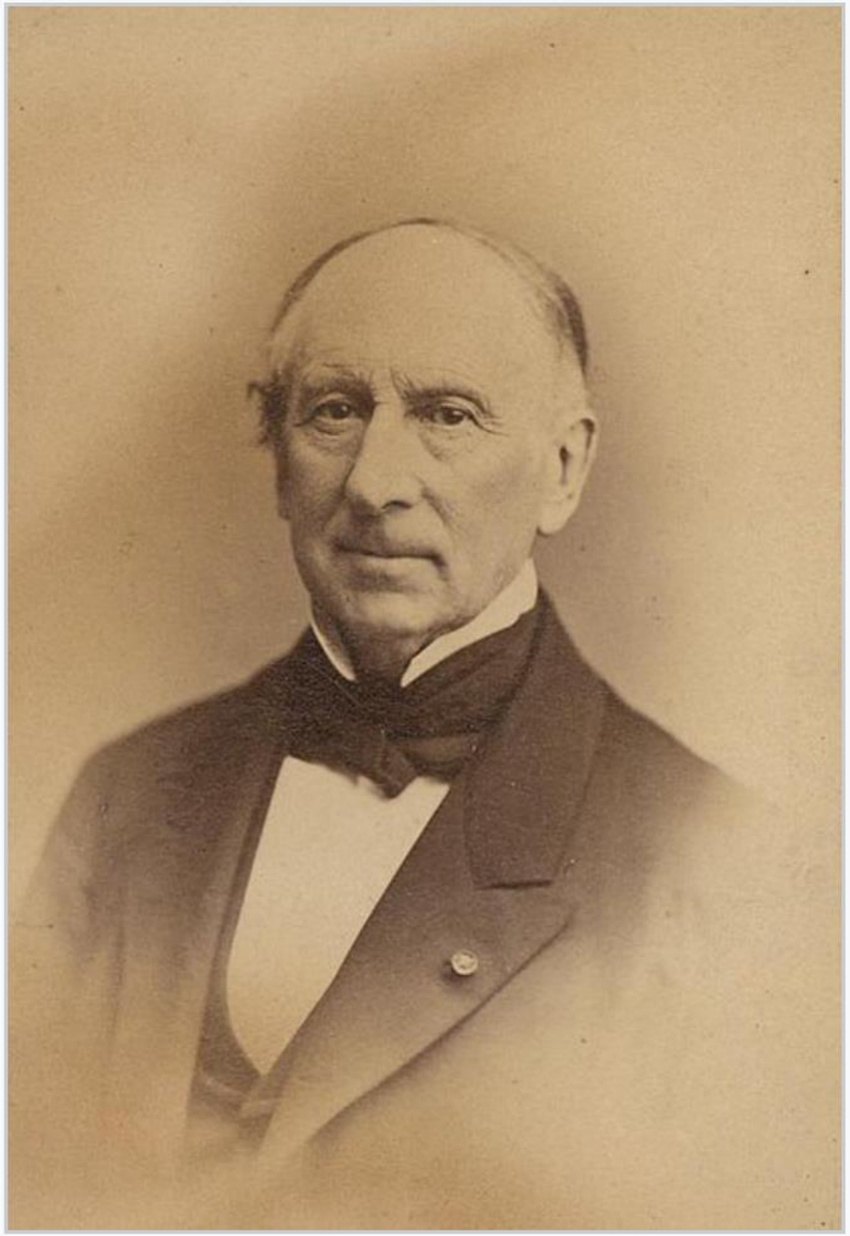
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 8. Следствия из формулы Коши

Теория функций комплексного переменного

Формула Коши
(1789 – 1857)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$



Аналитические функции

Определение 5.9. Функция $f: U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, называется *аналитической*, если для всякой точки $a \in U$ существует такой открытый диск $D = \{z : |z - a| < r\} \subset U$ с центром в a, что для всех $z \in D$ функция f представляется в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots \tag{5.11}$$

Поскольку в силу предложения 1.19 ряд (5.11) сходится равномерно на каждом компактном подмножестве в D, а его частичные суммы непрерывны, получаем, что всякая аналитическая функция непрерывна.

Всякая голоморфная функция аналитична

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Обратите внимание на то, как правая часть зависит от z!

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Голоморфные функции в круге

Следствие 5.11 (из доказательства). *Всякая функция, голоморфная на открытом круге $D \subset \mathbb{C}$ с центром в точке a, представляется в этом круге в виде суммы степенного ряда $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-a)^j$, абсолютно и равномерно сходящегося на каждом компакте* $\cancel{K \subset \mathbb{C}}$. $K \subset D$.

Голоморфные функции бесконечно дифференцируемы

Теорема 5.12. *Пусть* $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — *часть комплексной плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой* γ *(кривая* γ *входит в* $\bar{U}$*); положим* $\mathrm{Int}(\bar{U}) = U$*. Если функция* $f : \bar{U} \to \mathbb{C}$ *непрерывна на* $\bar{U}$ *и голоморфна в* U*, то она имеет во внутренности* D *производные любого порядка; эти производные также голоморфны и задаются формулами*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \tag{5.17}$$

Дифференцирование степенных рядов

- Рассмотрим степенной ряд $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$, сходящийся в диске радиуса $R > 0$ с центром в a.
- Формальная производная $c_1 + 2c_2(z-a) + \cdots$ в точке a сходится в том же диске.
- Сходящийся ряд можно почленно интегрировать:
$$f(z) - c_0 = \int_0^z g(z)dz\,.$$
- Следовательно, $g(z) = f'(z)$. Значит, сходящийся степенной ряд можно почленно дифференцировать (сколь угодно много раз).

Следствия теоремы 5.12

Следствие 5.13 (из теоремы). *Всякая голоморфная функция «бесконечно комплексно дифференцируема»: если функция f голоморфна на открытом множестве U, то и функция $z \mapsto f'(z)$ голоморфна на том же множестве.*

Следствие 5.14 (из доказательства). *Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ — кусочно гладкая кривая и $f\colon \gamma \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Тогда функция*

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \gamma$; ее n-я производная равна

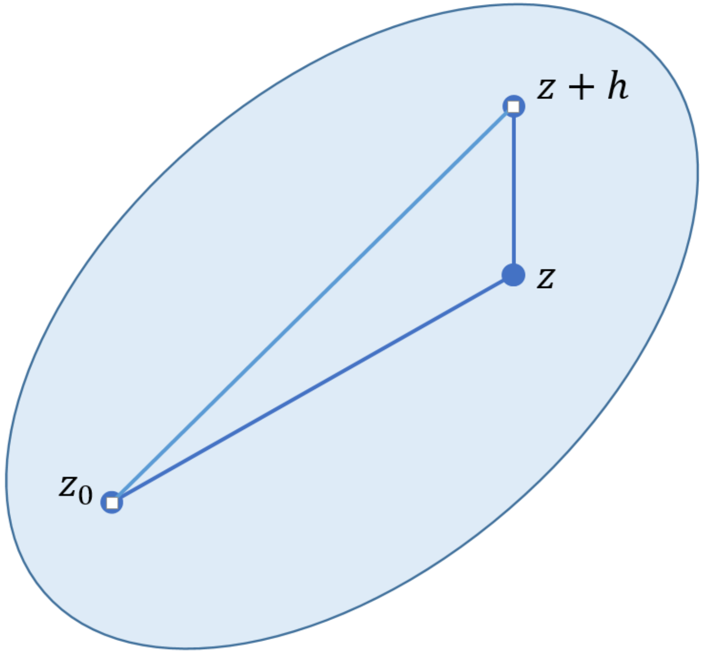
$$\frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Теорема Мореры

Предложение 5.15 (теорема Мореры). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Если непрерывная функция $f : U \to \mathbb{C}$ обладает тем свойством, что $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ для всякого треугольника $\Delta \subset U$, то f голоморфна на U.*

Идея доказательства. 1) Построим первообразную как раньше.

2) Первообразная голоморфна, следовательно, дважды дифференцируема.



Джиачинто Морера (1856 – 1909)

- Итальянский инженер и математик.
- Учился и работал в Турине, Павии, Пизе, Лейпциге, Генуе (15 лет, в т.ч. в должностях декана и ректора).
- Член национальной академии деи Линчеи. Член-корреспондент Харьковского математического общества.
- Комплексный анализ, ОДУ, УрЧП, теория упругости.

Равномерная сходимость голоморфных функций

Предложение 5.16. *Пусть* $U \subset \mathbb{C}$ — *открытое множество, и пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — *ряд из голоморфных на* U *функций, равномерно сходящийся на всяком компактном подмножестве* $K \subset U$. *Тогда сумма этого ряда (обозначим ее* $f(z)$) — *голоморфная функция на* U, *и имеет место равенство* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$, *причем ряд в правой части также равномерно сходится на всяком компактном подмножестве* $K \subset U$.

- Интегралы от равномерно сходящихся функций сходятся.
- Воспользуемся теоремой Мореры.

Аналитичность vs. Голоморфность

Предложение 5.17. *Функция комплексного переменного аналитична тогда и только тогда, когда она голоморфна. Если функция f голоморфна в открытом круге $\{z\colon |z-a|<r\}$, то в этом круге она представляется в виде суммы следующего степенного ряда:*

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots \tag{5.21}$$

Неравенства Коши: если $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ – коэффициенты Тейлора, то

$$|c_n| \leqslant \frac{\sup\limits_{z\in D} |f(z)|}{R^n}.$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

Качественные следствия

Следствие 5.19. *Если функция f голоморфна в окрестности точки a и при этом $f(a) = 0$, то либо f тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки a, либо в некоторой проколотой окрестности точки a функция f в нуль не обращается.*

Предложение 5.20. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество, и пусть $S \subset U$ — подмножество, имеющее в U предельную точку. Если $f, g \colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфные функции, совпадающие на подмножестве $S \subset U$, то $f(z) = g(z)$ для всех $z \in U$.*

Предложение 5.20 известна как **теорема единственности**.

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 9. Гомотопии и аналитическое продолжение

Теория функций комплексного переменного

Гомотопия между двумя путями

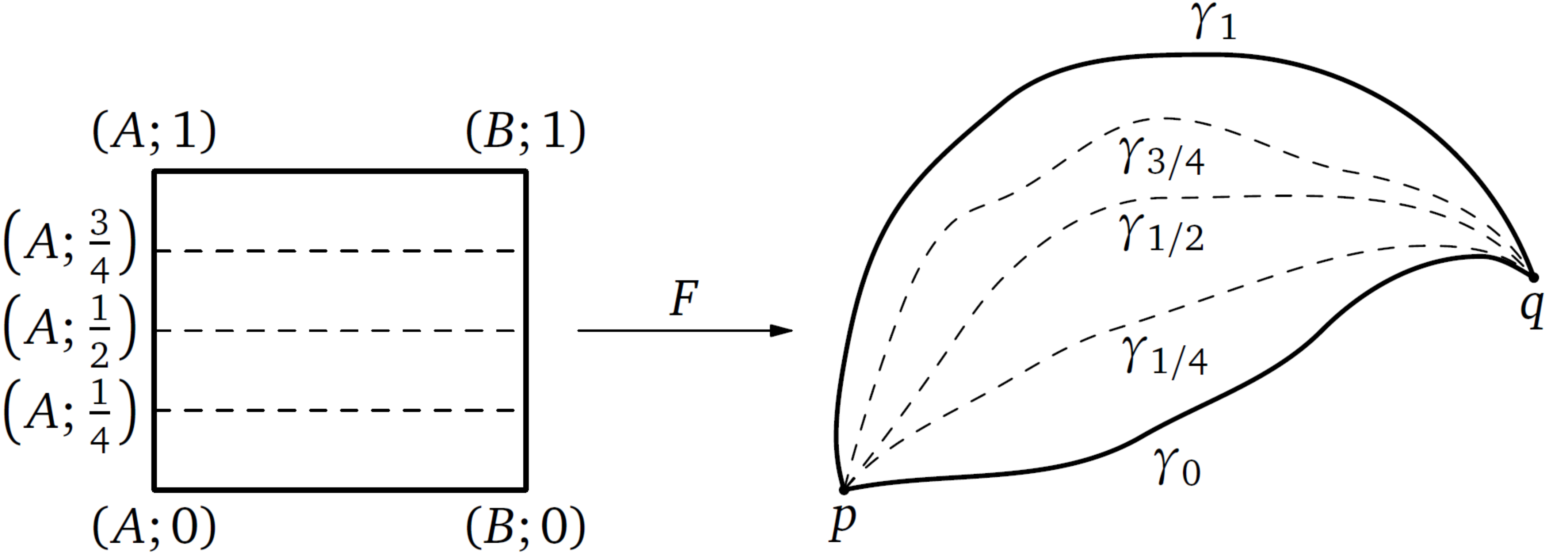
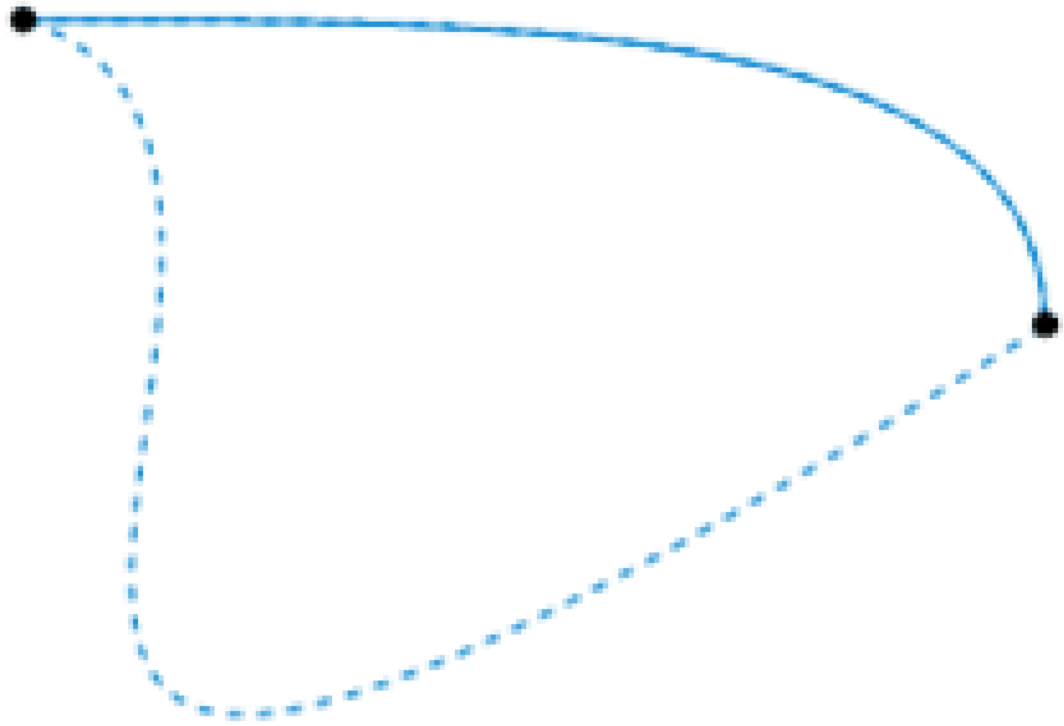


Рис. 6.1. Гомотопия между путями γ_0 и γ_1, соединяющими точки p и q

Гомотопия с закрепленными концами



Свободная гомотопия между петлями

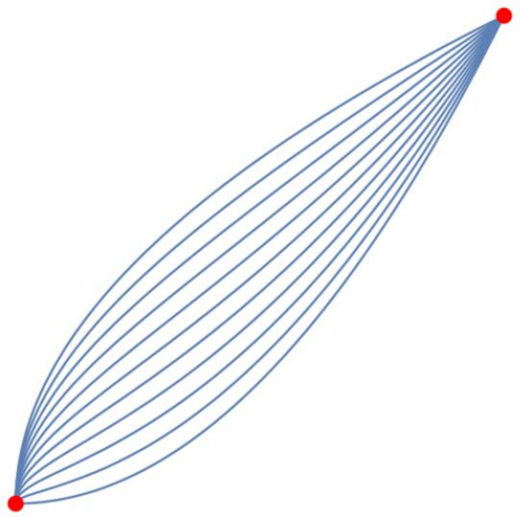
Определение 6.2. Пусть $\gamma_0, \gamma_1 \colon [A; B] \to U$ — непрерывные замкнутые пути в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Говорят, что пути γ_0 и γ_1 *гомотопны*, если существует такое непрерывное отображение $F \colon [A; B] \times [0; 1] \to U$, что $F(t, 0) = \gamma_0(t)$ и $F(t, 1) = \gamma_1(t)$ для всех $t \in [A; B]$, а также $F(A, s) = F(B, s)$ для всех $s \in [0; 1]$.

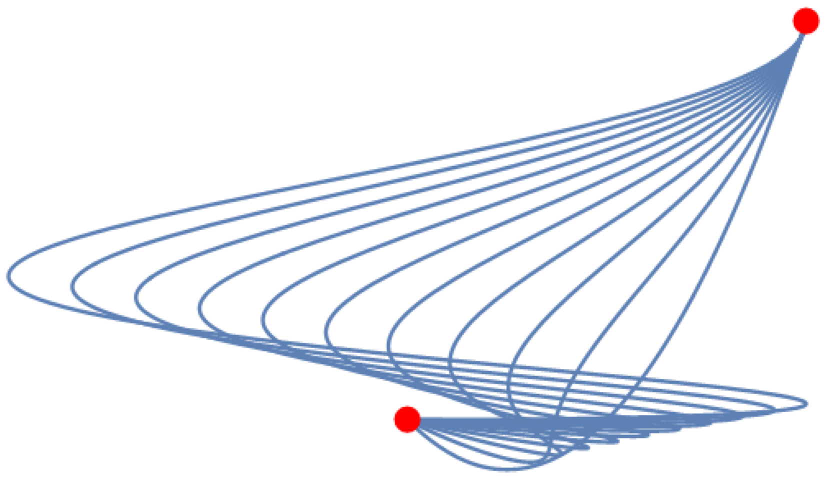
Отображение F называется *гомотопией* (точнее — гомотопией между замкнутыми путями), соединяющей пути γ_0 и γ_1.

Условие «$F(A, s) = F(B, s)$ для всех s» означает, конечно, что все пути γ_s замкнуты.

Линейная гомотопия

- Задается формулой $F(t,s) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$
- Не выходит за пределы множества U, если U выпукло.
- Имеет смысл и как гомотопия с фиксированными концами, и как (свободная) гомотопия замкнутых путей (=петель).

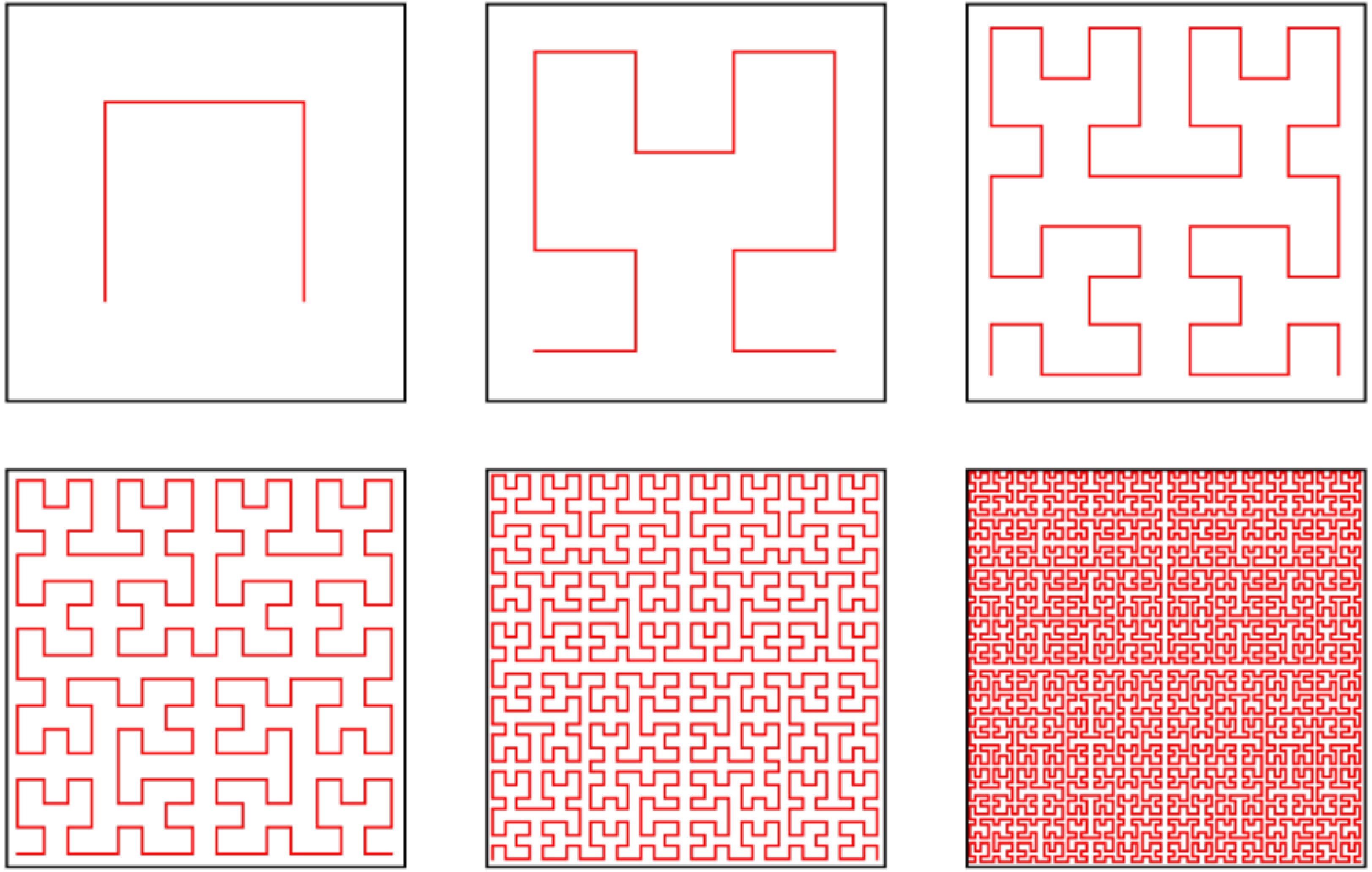




Лемма об улучшении гомотопии

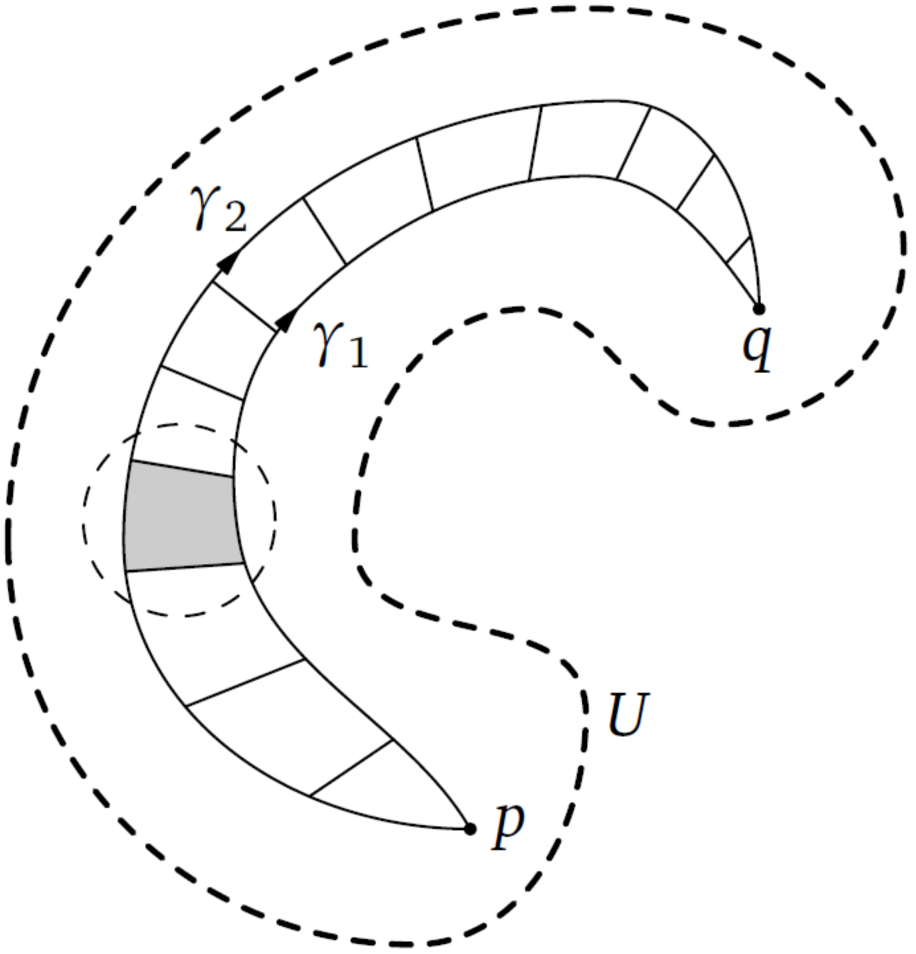
Лемма 6.4 (об улучшении гомотопии)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, и пусть $\gamma_0, \gamma_1 \colon [A;B] \to U$ — два кусочно гладких пути, которые либо соединяют одну и ту же пару точек p и q, либо оба являются замкнутыми. Если γ_0 и γ_1 гомотопны (как пути с закрепленными концами — в первом случае, как замкнутые пути — во втором), то между ними существует такая гомотопия $G \colon [A;B] \times [0;1] \to U$ (также являющаяся в первом случае гомотопией путей с закрепленными концами, а во втором — гомотопией замкнутых путей), что для всякого $s \in [0;1]$ путь $\gamma_s \colon [A;B] \to U$, $\gamma_s(t) = G(t,s)$, является кусочно гладким, а также для всякого $t \in$ $\in [A;B]$ путь $\mu_t \colon [0;1] \to U$, $\mu_t(s) = G(t,s)$, является кусочно гладким.*

Кривая Пеано



Лемма об улучшении гомотопии: идея доказательства

- Достаточно считать, что γ_0 и γ_1 равномерно близки.
- Покроем $\gamma_0 \cup \gamma_1$ конечным числом выпуклых множеств.
- В каждом из этих выпуклых множеств сделаем линейную гомотопию.



Росток функции

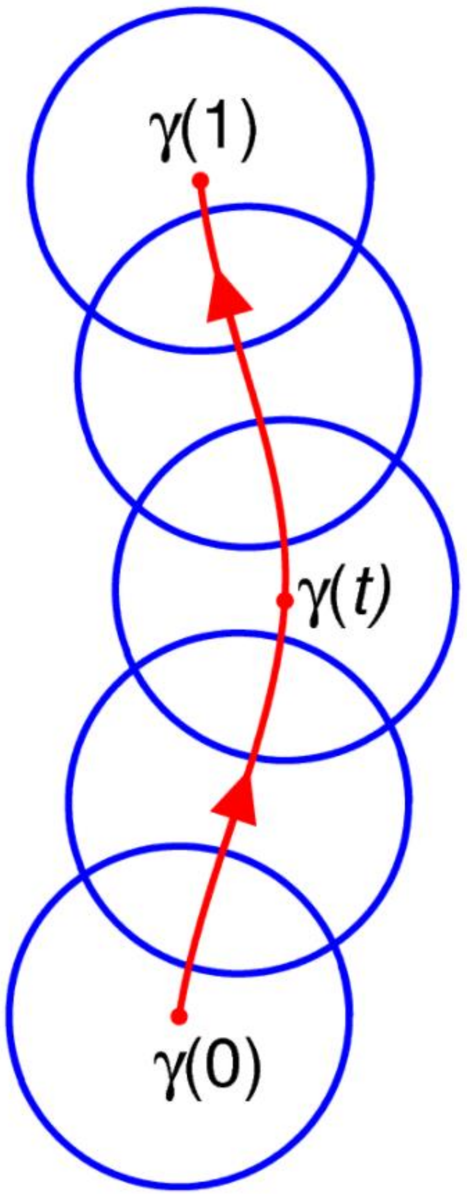
Для данной точки $p \in \mathbb{C}$ рассмотрим множество всех пар (U, f), где $U \ni p$ — окрестность и $f : U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Пары (U_1, f_1) и (U_2, f_2) будем называть эквивалентными, если функции f_1 и f_2 совпадают на некоторой окрестности точки p.

Определение 6.6. *Ростками* голоморфных функций в точке p называются классы эквивалентности пар (U, f) относительно этого отношения эквивалентности; класс эквивалентности пары (U, f) называется *ростком функции f в точке p*.

Множество ростков голоморфных функций в точке p обозначается $\mathcal{O}_p$.

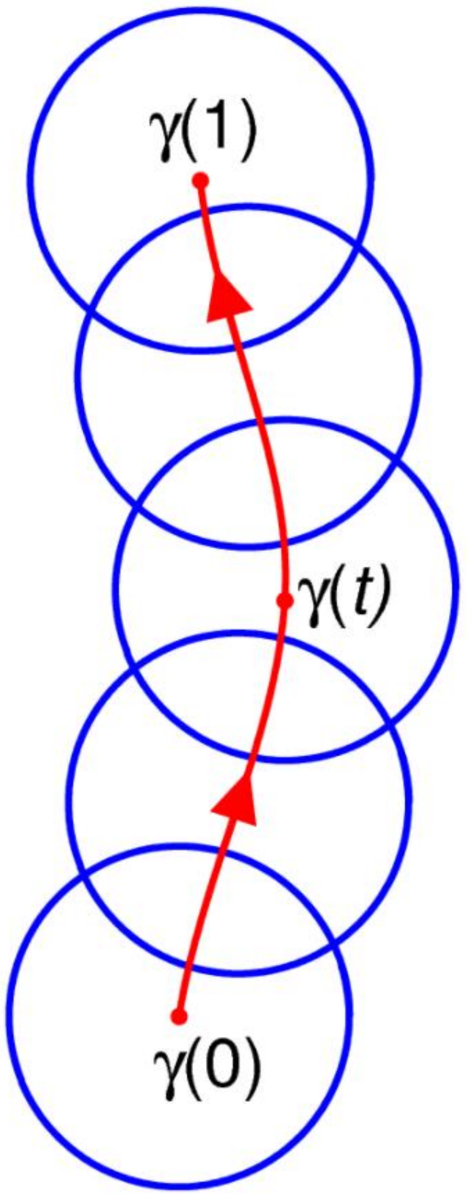
Аналитическое продолжение

- Естественная биекция между $\mathcal{O}_p$ и степенными рядами с центром в p и положительным радиусом сходимости.
- Пусть путь γ покрыт конечным числом открытых дисков D_i с центрами в точках $\gamma(t_i)$ и радиусами $r_i > 0$ т.ч. $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ и $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$.
- Допустим, s_i – сходящийся в i-м диске степенной ряд с центром $\gamma(t_i)$, т.ч. s_i и s_{i+1} сходятся на пересечении соотв. дисков к одинаковой сумме.



Аналитическое продолжение II

- Пусть $f_i: D_i \to \mathbb{C}$ – сумма ряда s_i.
- Тогда говорят, что функции f_0 в точке $\gamma(0)$ аналитически продолжается вдоль γ.
- Пусть $\Gamma(t)$ - росток функции f_i т.ч. $\gamma(t) \in D_i$. Тогда все ростки $\Gamma(t)$ являются аналитическими продолжениями друг друга вдоль соответствующих отрезков пути γ.

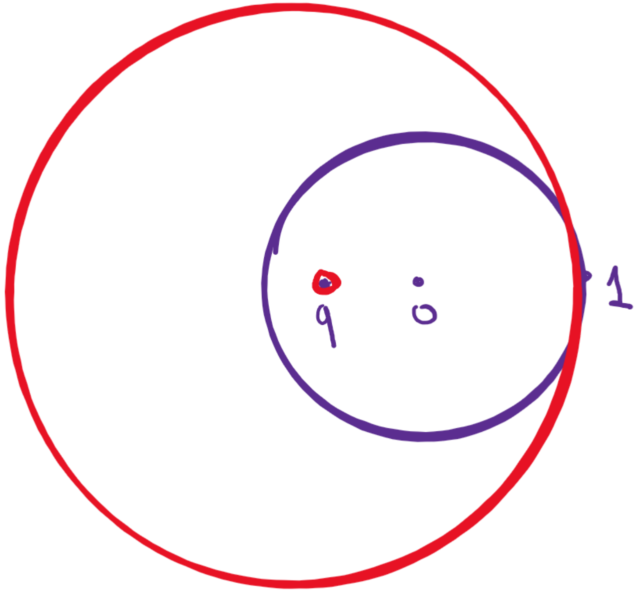


Переразложение ряда

- Пусть $R > 0$ – радиус сходимости ряда
$$s_a(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$
- Возьмем точку $b \in \mathbb{D}(a, R)$ и переразложим этот ряд с центром в этой точке:
$$\begin{aligned} s_b(z) &= s_a\big(b + (z-b)\big) \\ &= \big(c_0 + c_1(b-a) + c_2(b-a)^2 + \cdots\big) \\ &+ (c_1 + 2c_2(b-a) + \cdots)(z-b) + (c_2 + \cdots)(z-b)^2 + \cdots \\ &= d_0 + d_1(z-b) + d_2(z-b)^2 + \cdots \end{aligned}$$
- Коэффициенты d_n задаются формулой $d_n = \frac{s_a^{(n)}(b)}{n!}$.
- Ряд s_{i+1} получается из s_i переразложением.

Пример

$$s(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1$$



$$s(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z} \quad \text{при} \quad |z| < 1$$

Пусть $|q| < 1$. Тогда $s(z) = \dfrac{1}{(1-q)-(z-q)} =$

$$= \frac{1}{(1-q)} \frac{1}{1 - \frac{z-q}{1-q}} = \frac{1}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-q)^n}{(1-q)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-q)^n}{(1-q)^{n+1}}$$

Важно:

- Аналитическому продолжению подвергаются ростки, а не значения функции (бывает так, что значения совпадают, а ростки разные).
- Аналитическое продолжение бывает и над вещественными числами. Например, можно аналитически продолжать ростки «функции» угол на окружности.
- Теория аналитического продолжения почти алгебраическая. Из анализа нужна только сходимость ряда.

Карл Вейерштрасс (1815 – 1897)

- Определение непрерывной функции
- Теория эллиптических функций
- Теория аналитического продолжения
- Вариационное исчисление, дифференциальная геометрия, линейная алгебра

Композиция аналитического продолжения и голоморфной функции

Следствие 6.13. *Пусть* $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$ *— непрерывный путь, соединяющий точки* p *и* q*, вдоль которого возможно аналитическое продолжение ростка* $\boldsymbol{f} \in \mathscr{O}_p$ *в росток* $\boldsymbol{g} \in \mathscr{O}_q$*. Если* V *— открытое множество, содержащее* $\gamma([A;B])$*, и* $\varphi : V \to \mathbb{C}$ *— голоморфная функция, то вдоль* γ *возможно аналитическое продолжение ростка* $\varphi \circ \boldsymbol{f}$ *в росток* $\varphi \circ \boldsymbol{g}$.

Доказательство: Каждая из функций $\varphi \circ f_i$ разлагается в сходящийся степенной ряд в диске D_i.

Единственность аналитического продолжения

Предложение 6.14. *Пусть* $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$ — *непрерывный путь на комплексной плоскости, соединяющий точки* $p = \gamma(A)$ *и* $q = \gamma(B)$. *Если аналитическое продолжение ростка* $\boldsymbol{f} \in \mathcal{O}_p$ *вдоль пути* γ *существует, то оно единственно.*

Идея доказательства. Рассмотрим два покрытия пути γ дисками D_i и D'_j. Расположим все эти диски по порядку. Убедимся в том, что семейство $\Gamma(t)$ одно и то же (по теореме единственности).

Теорема о монодромии

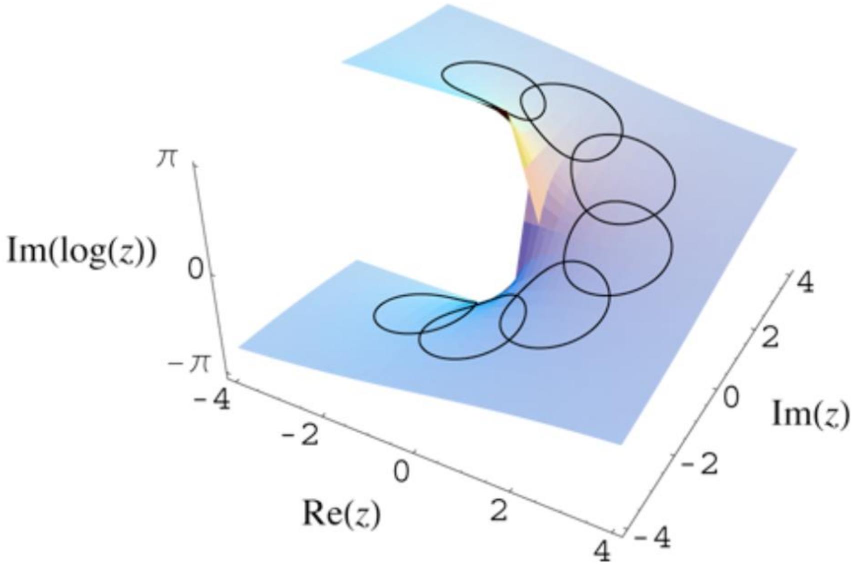
Предложение 6.15. *Пусть* $F\colon [A;B]\times[0;1]\to\mathbb{C}$ — *гомотопия с закрепленными концами путей, соединяющих точки* p *и* q, *так что* $F(A,s)=p$ *для всех* $s\in[0;1]$ *и* $F(B,s)=q$ *для всех* $s\in[0;1]$. *Пусть* $\mathbf{f}\in\mathcal{O}_p$ — *росток голоморфной функции в точке* p, *и предположим, что* $\mathbf{f}$ *допускает аналитическое продолжение вдоль каждого промежуточного пути* $\gamma_s\colon t\mapsto F(t,s)$.

Тогда результаты аналитических продолжений ростка $\mathbf{f}$ *вдоль всех путей* γ_s *(в частности, вдоль путей* γ_0 *и* γ_1*) совпадают.*

- Достаточно доказать для близких путей.
- Они покрываются одной и той же последовательностью дисков.

Многозначная аналитическая функция

- Множество всех ростков, полученных из данного аналитическими продолжениями вдоль всевозможных путей.
- Примеры: $\sqrt[n]{z}$, $\log z$, $\arcsin z$, $z^a = e^{(\log z)a}$, …
- $a^z = e^{(\log a)z}$ НЕ является многозначной аналитической функцией (это разные однозначные функции в зависимости от ветви логарифма).
- Значения многозначной аналитической функции иногда можно определить и в тех точках, в которые нельзя продолжить ростки. Например, $\sqrt{0} = 0$.



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 10. Гомотопическая версия теоремы Коши

Теория функций комплексного переменного

Аналитическое продолжение в односвязное открытое множество

Определение 6.16. Открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ называется *односвязным*, если выполняются следующие два условия:

(1) U связно;

(2) если $p, q \in U$ и если $\gamma_0, \gamma_1 : [A; B] \to U$ — два пути, соединяющие p и q, пути γ_0 и γ_1 гомотопны с закрепленными концами.

Предложение 6.17. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — односвязное открытое множество, $p \in U$ и $\boldsymbol{f} \in \mathcal{O}_p$ — росток голоморфной функции в точке p. Если росток $\boldsymbol{f}$ допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути в U, то существует единственная голоморфная функция $f : U \to \mathbb{C}$, росток которой в точке p совпадает с $\boldsymbol{f}$.*

Радиус сходимости степенного ряда

Теорема. *Рассмотрим росток голоморфной функции в точке a, представленный как степенной ряд. Пусть R – максимальный радиус диска (с центром в точке a), в любую точку которого росток продолжается аналитически вдоль путей, лежащих в этом диске. Тогда радиус сходимости ряда равен R.*

Неформально: радиус сходимости ряда равен расстоянию до ближайшей особенности. НО: для многозначных функций это не будет верно буквально, поскольку такие функции могут иметь особенности во всюду плотном множестве точек.

Снова теорема Коши

Теорема 6.18 (теорема Коши, версия 4). *Пусть* $f\colon U\to\mathbb{C}$ — *голоморфная функция, где* $U\subset\mathbb{C}$ — *открытое множество. Предположим, что* $\gamma_0,\gamma_1\colon[A;B]\to U$ — *кусочно гладкие пути, причем либо пути* γ_0 *и* γ_1 *соединяют одну и ту же пару точек* $p,q\in U$, *либо оба эти пути замкнутые. Если* γ_0 *и* γ_1 *гомотопны (в первом случае — с закрепленными концами, во втором случае — как замкнутые пути), то* $\int\limits_{\gamma_0} f(z)\,dz=\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz$.

- Это более строгая формулировка версии 3.
- То же утверждение верно для любой замкнутой 1-формы.

Идея доказательства с использованием общей теоремы Стокса

- Хотим доказать, что $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$, где ω – гладкая замкнутая (то есть $d\omega = 0$) 1-форма на U.
- Существует кусочно-гладкая гомотопия $F\colon [A, B] \times [0,1] \to U$ между γ_0 и γ_1. Положим $\Pi = [A, B] \times [0,1]$. Достаточно доказать, что
$$\int_{\partial\Pi} F^*\omega = 0.$$
- Заметим, что $d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = 0$, и применим формулу Стокса.

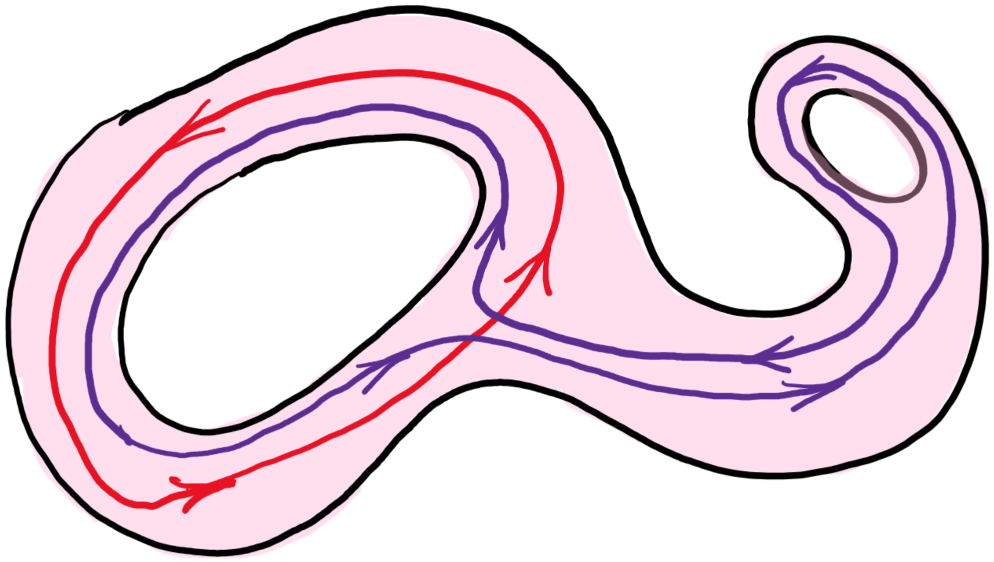
Лебегово число покрытия

Предложение 6.5 (лемма о лебеговом числе). *Пусть $K \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ — компактное множество, и пусть $\{V_\alpha\}$ — такое семейство открытых подмножеств в $\mathbb{C}$, что $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность каждой точки $z \in K$ целиком содержится в каком-то из множеств V_α.*

- Можно предполагать, что покрытие конечное.
- Выберем последовательность точек $x_n \in K$ и чисел $\varepsilon_n \to 0$ т.ч. $\mathbb{D}(x_n, \varepsilon_n)$ не лежит ни в одном элементе покрытия.
- Можно считать, что $x_n \to x_\infty$, тогда x_∞ не может лежать в V_α.

Гомотопическая инвариантность индекса

- Если два замкнутых пути в открытом множестве U (свободно) гомотопны, то их индексы относительно любой точки, не лежащей в U, совпадают.
- Это вытекает из 4й версии теоремы Коши и интегральной формулы для индекса.
- Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.



Снова индексы кривых

Определение 6.19. Пусть $a \in \mathbb{C}$, и пусть $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$. *Кольцом* с центром a на комплексной плоскости называется множество $\{z : r < |z - a| < R\}$.

В частности, кольцом считается и плоскость без точки, и круг с выколотым центром, и дополнение к замкнутому кругу.

Предложение 6.20. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — кольцо с центром в a, и пусть γ_0 и γ_1 — кусочно гладкие замкнутые пути в U. Тогда следующие два утверждения равносильны:*

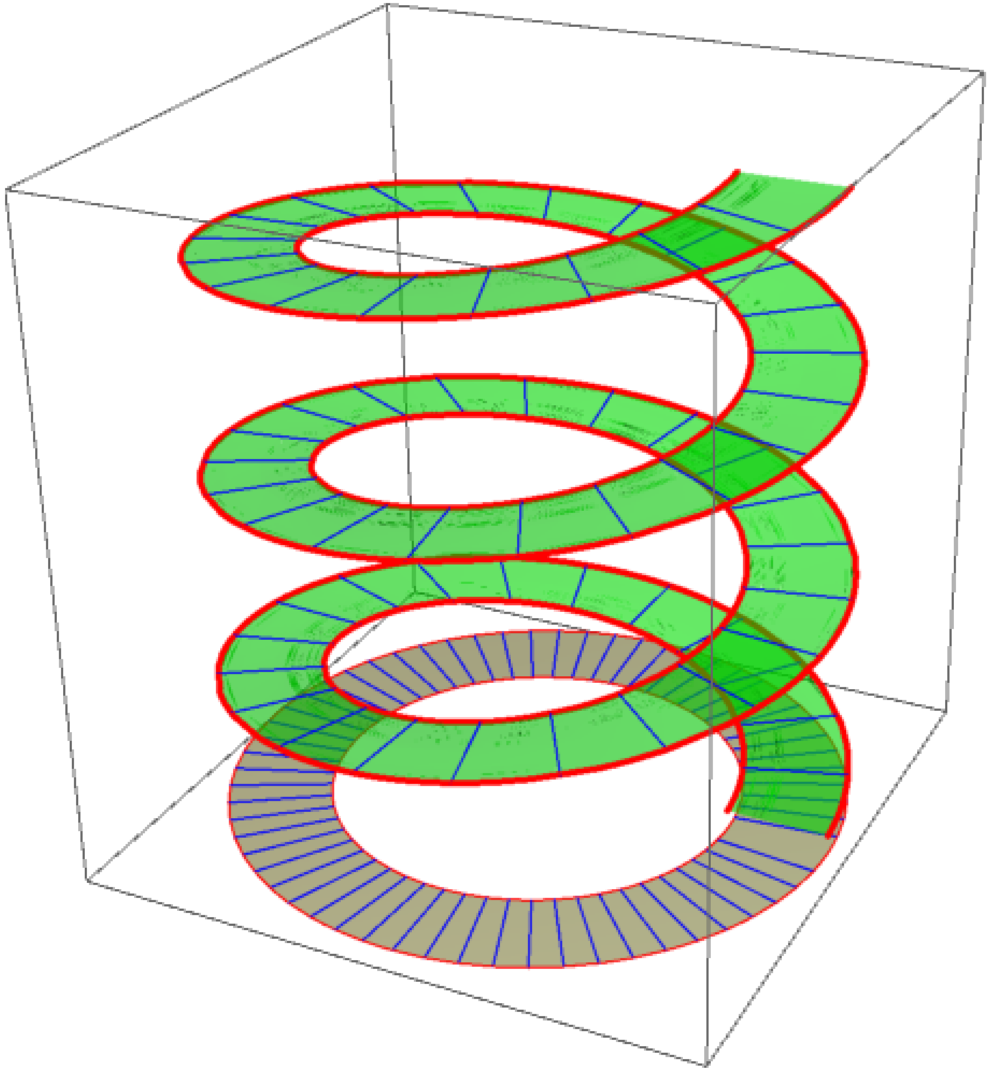
(1) *γ_0 и γ_1 гомотопны как замкнутые пути;*

(2) $\operatorname{Ind}_a \gamma_0 = \operatorname{Ind}_a \gamma_1$.

Идея доказательства $(2) \Rightarrow (1)$ – универсальное накрытие кольца полосой.

Универсальное накрытие кольца

- … гомеоморфно полосе $\mathbb{R} \times [0,1]$.
- Любые два пути с одинаковыми концами гомотопны (например, есть линейная гомотопия).



Замкнутые кривые в проколотом диске

Предложение 6.21. *Пусть* $D \subset \mathbb{C}$ *— открытый круг, и пусть* $a \in D$. *Если* γ_0 *и* γ_1 *— два замкнутых кусочно гладких пути в* $D \setminus \{a\}$, *то они гомотопны как замкнутые пути тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ind}_a \gamma_0 = \operatorname{Ind}_a \gamma_1$.

- То же самое верно и для кольца $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R \}$.
- Или, более общим образом, для $A = U \setminus K$, где U – односвязное открытое множество, а K – связное компактное подмножество в U, такое что $U \setminus K$ связно.
- Функция индекса определяет изоморфизм $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$.

Индексы не задают гомотопический класс

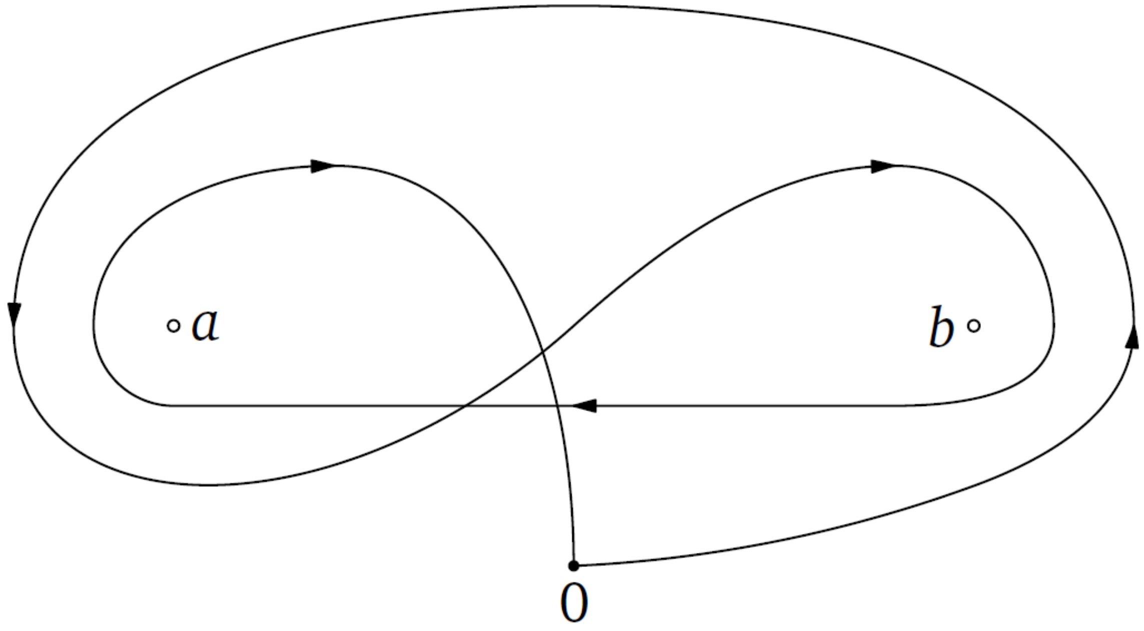


Рис. 6.2. Замкнутый путь, выходящий из нуля, имеет индекс 0 относительно точки a и индекс 0 относительно точки b — так же, как «постоянный путь», сводящийся к одной точке. Тем не менее в $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ стянуть этот путь в точку нельзя.

Теорема Коши и индекс

6.8. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — открытый круг, $f\colon D \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция и γ — замкнутый кусочно линейный путь в D. Покажите, что для всякой точки $a \in D$, не лежащей на γ, выполнено равенство

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}_a\,\gamma \cdot f(a).$$

Упражнение (входит в домашнее задание как бонусная задача).

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 11. Особые точки голоморфных функций

Теория функций комплексного переменного

Порядок изолированного нуля

Предложение 7.2. *Пусть голоморфная функция f имеет в точке $a \in \mathbb{C}$ изолированный нуль, и пусть k — натуральное число. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(1) *Существует такая функция g, голоморфная в окрестности точки a, что $g(a) \neq 0$ и $f(z) = (z-a)^k g(z)$.*

(2) *Ряд Тейлора для f в точке a имеет вид*

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots, \tag{7.1}$$

где $c_k \neq 0$.

(3) $f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0,\ f^{(k)}(a) \neq 0.$

Натуральное число k с такими свойствами всегда существует.

Порядок изолированного нуля

Определение 7.3. Число k, удовлетворяющее эквивалентным условиям (1)—(3) из предложения 7.2, называется *кратностью нуля* a функции f. Обозначение: $\operatorname{ord}_a f$. Если $f(a) \neq 0$, полагаем $\operatorname{ord}_a f = 0$. Можно также говорить не «кратность нуля», а «порядок нуля»: эти два словосочетания являются синонимами.

Определение 7.4. Если функция f, голоморфная в окрестности точки a, имеет в этой точке изолированный нуль кратности 1, говорят, что f имеет *простой нуль* в этой точке.

Предложение 7.5. *Если функции f_1 и f_2 голоморфны в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и не являются тождественным нулем ни в какой ее окрестности, то* $\operatorname{ord}_a(f_1 f_2) = \operatorname{ord}_a(f_1) + \operatorname{ord}_a(f_2)$.

Нормальная форма вблизи нуля

- Пусть $f(z) = (z-a)^k g(z)$, где $g(a) \neq 0$.
- Положим $\psi(z) = (z-a)\sqrt[k]{g(z)}$ (выберем некоторую локальную ветвь корня).
- Тогда $f \circ \psi^{-1}(u) = u^k$, то есть f имеет вид $u \mapsto u^k$ с точностью до обратимой голоморфной замены координаты в прообразе.
- Уравнение $f(z) = \varepsilon$ при маленьких ε имеет k корней вблизи от точки a.

Ряд Лорана

Предложение 7.6. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, *и пусть* f *— функция, голоморфная в кольце* $U = \{z : r < |z - a| < R\}$. *Тогда всюду на* U *имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{7.2}$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset U$, *а его коэффициенты вычисляются по формуле*

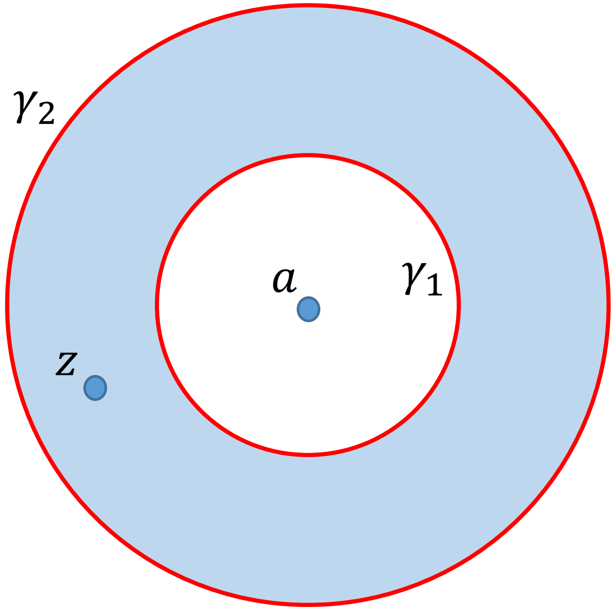
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z-a)^{-n-1}\, dz, \tag{7.3}$$

где γ *— любая лежащая в* U *положительно ориентированная окружность с центром в* a *(или, если угодно, любой замкнутый путь в* U, *имеющий индекс* 1 *относительно точки* a*).*

Идея доказательства предложения 7.4

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

- Применим формулу Коши к чуть меньшему кольцу.
- Интеграл по γ_2 раскладывается в ряд как раньше: используется геометрическая прогрессия с частным $\frac{z-a}{z-\zeta}$.
- Для разложения интеграла по γ_1 используется геометрическая прогрессия с частным $\frac{z-\zeta}{z-a}$.



Пьер Альфонс Лоран (1813 – 1854)

- Французский математик, майор инженерных войск.
- Член парижского комитета по проблемам фортификации.

Регулярная часть и главная часть

Определение 7.7. Если голоморфная функция $f\colon U \to \mathbb{C}$ представляется рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

то его часть, содержащая $z-a$ в неотрицательных степенях, т. е. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, называется *правильной частью* ряда Лорана, а ряд $\sum\limits_{k<0} c_k (z-a)^k$, состоящий из членов ряда Лорана с $z-a$ в отрицательных степенях, называется его *главной частью*.

Случай, когда U – проколотый диск

В этом случае главная часть сходится на всем $\mathbb{C}$. В самом деле, ряд $\sum_{n>0} c_{-n} t^n$ сходится при сколь угодно больших t.

Определение 7.8. Функция, голоморфная на всем $\mathbb{C}$, называется *целой функцией*.

Итоги нашего обсуждения можно сформулировать так.

Следствие 7.9. *Пусть* $D = \{z : |z - a| < R\}$ — *открытый круг в комплексной плоскости. Всякую голоморфную функцию* $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ *можно представить в виде* $f(z) = \varphi(z) + \psi(1/(z-a))$, *где* φ — *функция, голоморфная на всем* D, *а* ψ — *целая функция.*

Теорема об устранимой особенности

Предложение 7.10 (теорема Римана об устранимой особенности). *Пусть* $D = \{z : |z - a| < r\}$, *и пусть* $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ — *голоморфная функция. Тогда следующие три условия эквивалентны.*

(1) *Функция* f *ограничена в некоторой проколотой окрестности точки* a *(возможно, меньшей, чем* $D \setminus \{a\}$*).*

(2) *Функция* f *продолжается до голоморфной функции на всем* D.

(3) *Главная часть ряда Лорана функции* f *в проколотой окрестности точки* a *является тождественным нулем (иными словами, коэффициенты ряда Лорана при отрицательных степенях* $z - a$ *равны нулю).*

Доказательство: $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

Полюсы (алгебраические особенности)

Предложение 7.12. *Пусть* $D=\{z : |z-a|<r\}$, *и пусть* $f : D\setminus\{a\}\to\to\mathbb{C}$ *— голоморфная функция. Тогда следующие четыре условия эквивалентны.*

(1) *Особенность в точке* a *не является устранимой, но при этом существуют такие константы* $N>0$ *и* $C>0$, *что* $|f(z)|\leqslant C|z-a|^{-N}$ *для всех* z *из некоторой проколотой окрестности точки* a *(возможно, меньшей, чем* $D\setminus\{a\}$*). Короче это условие можно выразить так:* $|f(z)|=O(|z-a|^{-N})$ *при* $z\to a$.

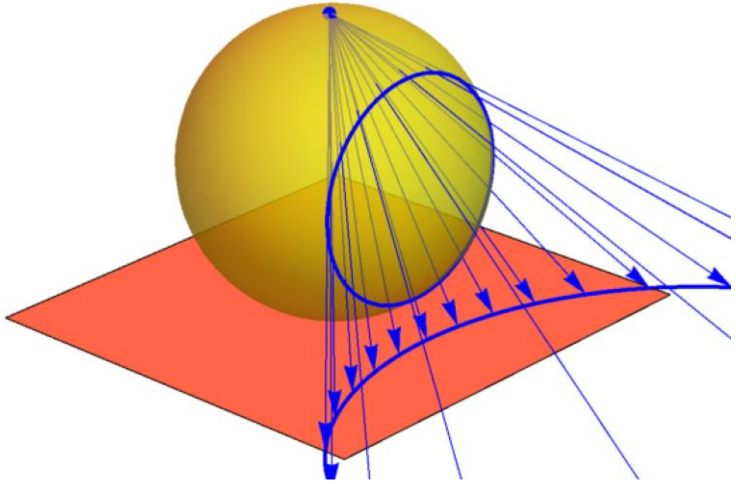
(2) *Существуют такая голоморфная функция* $g : D\to\mathbb{C}$, $g(a)\neq 0$, *и такое натуральное число* $n>0$, *что* $f(z)=g(z)/(z-a)^n$ *всюду на* $D\setminus\{a\}$.

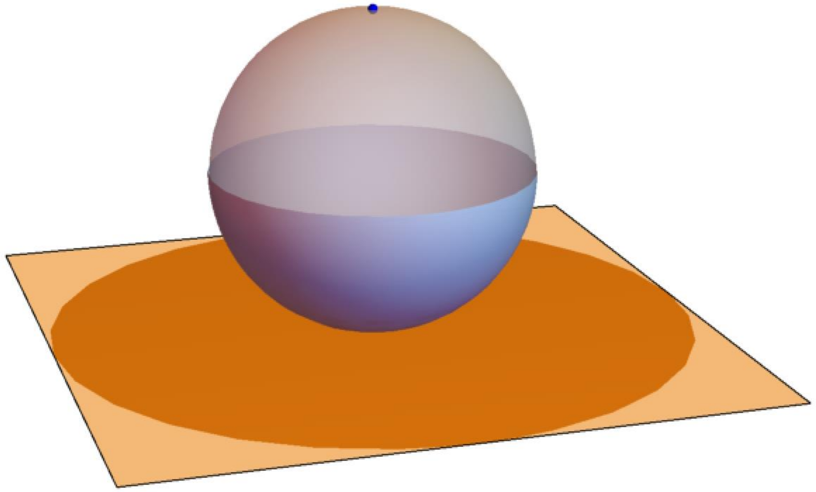
(3) *Главная часть ряда Лорана функции* f *в проколотой окрестности точки* a *не является тождественным нулем, но содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.*

(4) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

Полюсы и отображения в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2 = \mathbb{C}P^1$

- Пусть $f: D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ имеет полюс в точке a.
- Тогда f отображает проколотую окрестность точки a в проколотую окрестность точки $\infty \in \mathbb{S}^2$.
- Координата $u = \frac{1}{z}$ делает из проколотой окрестности бесконечности проколотую окрестность нуля.
- Функция $\frac{1}{f}$ является голоморфной. Следовательно, f – голоморфное отображение в $\mathbb{S}^2$.





Порядок точки

Обозначение 7.15. Если функция f, голоморфная в проколотой окрестности точки a, имеет вид $f(z) = (z-a)^m g(z)$, где $m \in \mathbb{Z}$, а g — голоморфная функция в окрестности точки a, для которой $g(a) \neq 0$, будем писать $\operatorname{ord}_a(f) = m$.

Предложение 7.16. *Если функции f_1 и f_2, голоморфные в проколотой окрестности точки a, имеют в ней устранимую особенность или полюс и при этом ни одна из этих функций не является тождественным нулем в окрестности a, то отношение f_1/f_2 также имеет в точке a устранимую особенность или полюс. При этом*

$$\operatorname{ord}_a(f_1/f_2) = \operatorname{ord}_a(f_1) - \operatorname{ord}_a(f_2).$$

Теорема Сохоцкого

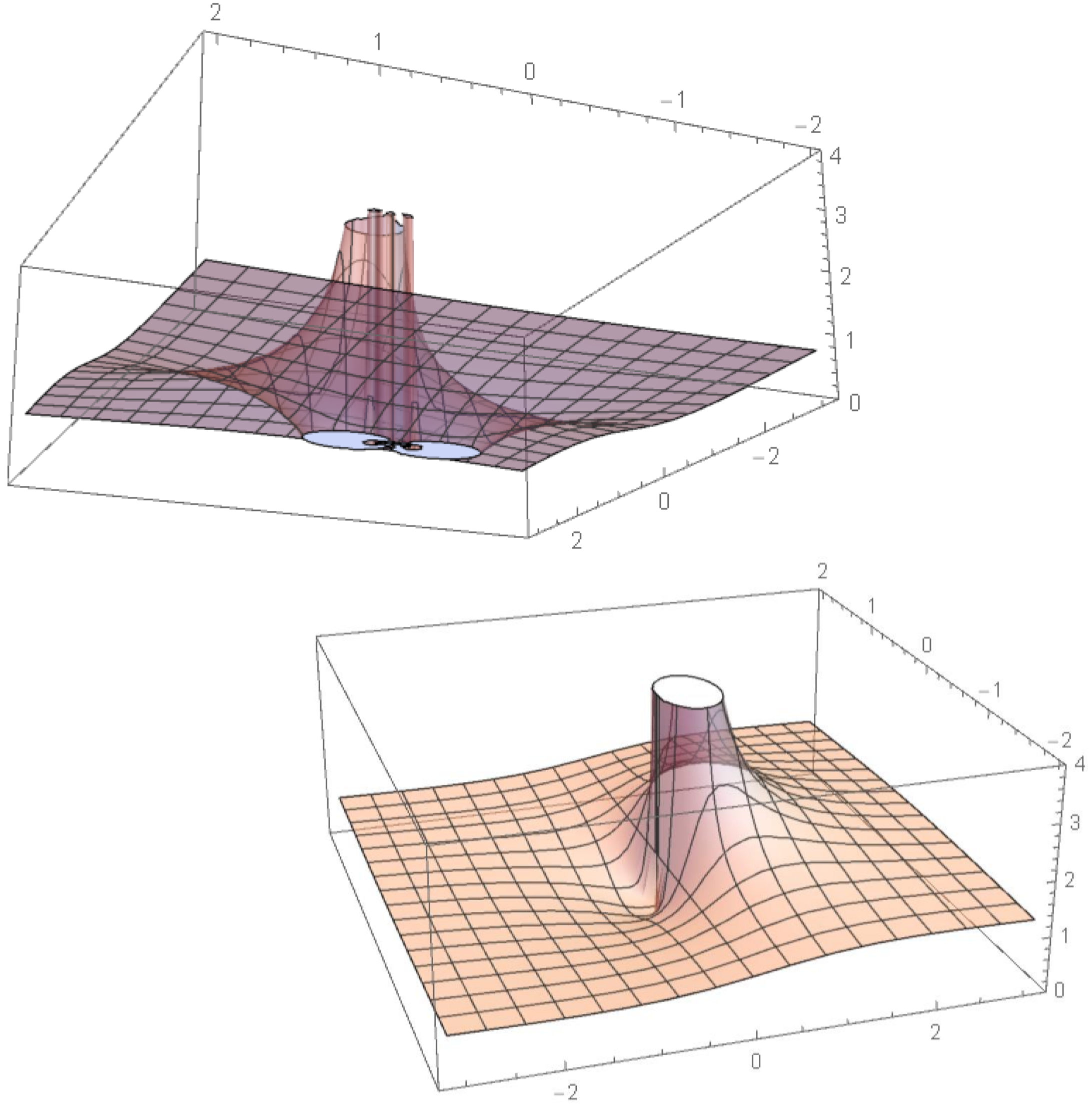
Предложение 7.18. *Пусть* $D = \{z : |z - a| < r\}$, *и пусть* $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ *— голоморфная функция. Тогда следующие два условия эквивалентны.*

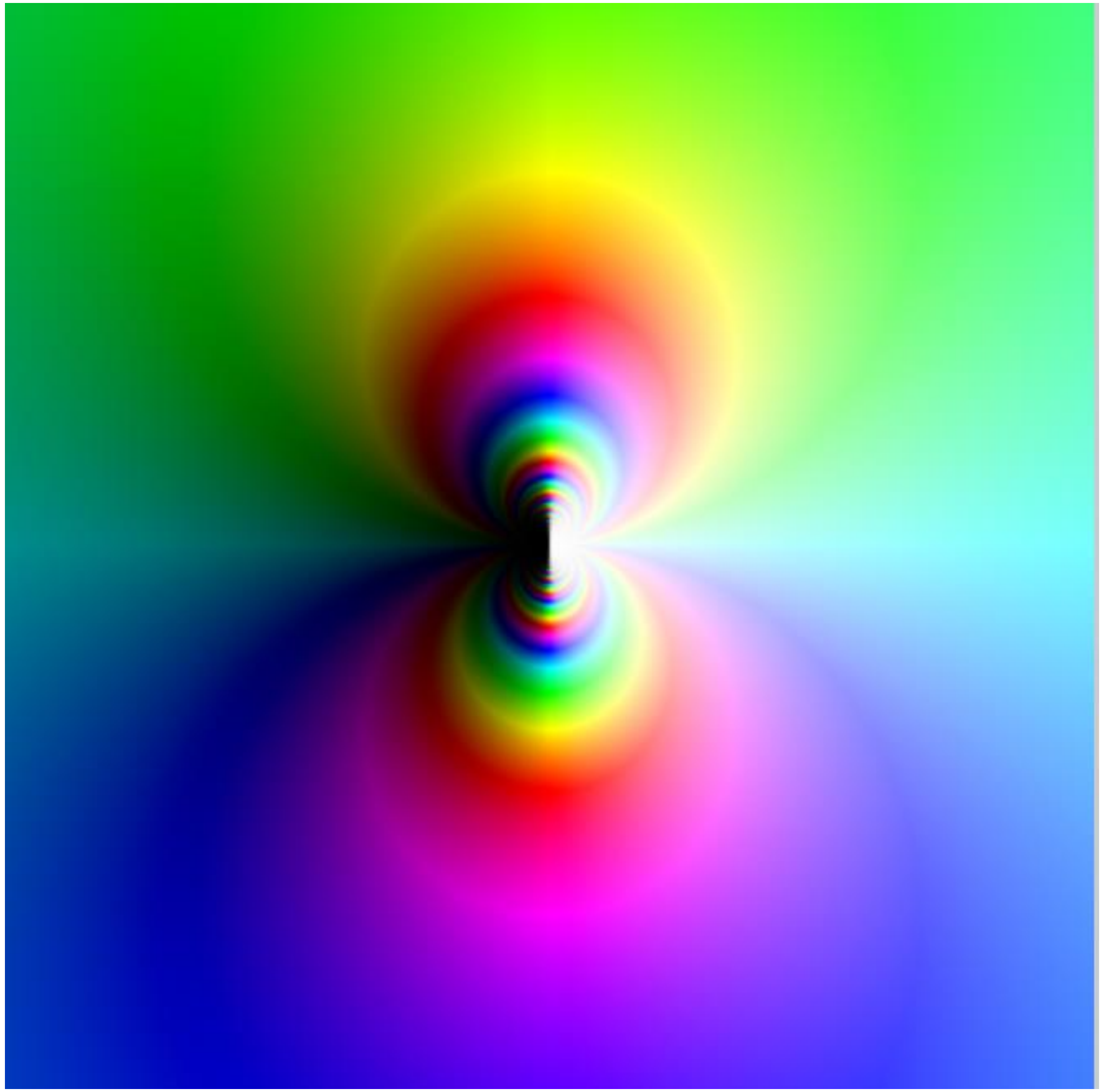
(1) *Главная часть ряда Лорана функции* f *в проколотой окрестности точки* a *содержит бесконечно много ненулевых слагаемых.*

(2) *Для всякого* $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *существует такая последовательность точек* $z_n \in D \setminus \{a\}$, *что* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = c$.

- Сначала докажем для $c = \infty$.
- Потом рассмотрим новую функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$.

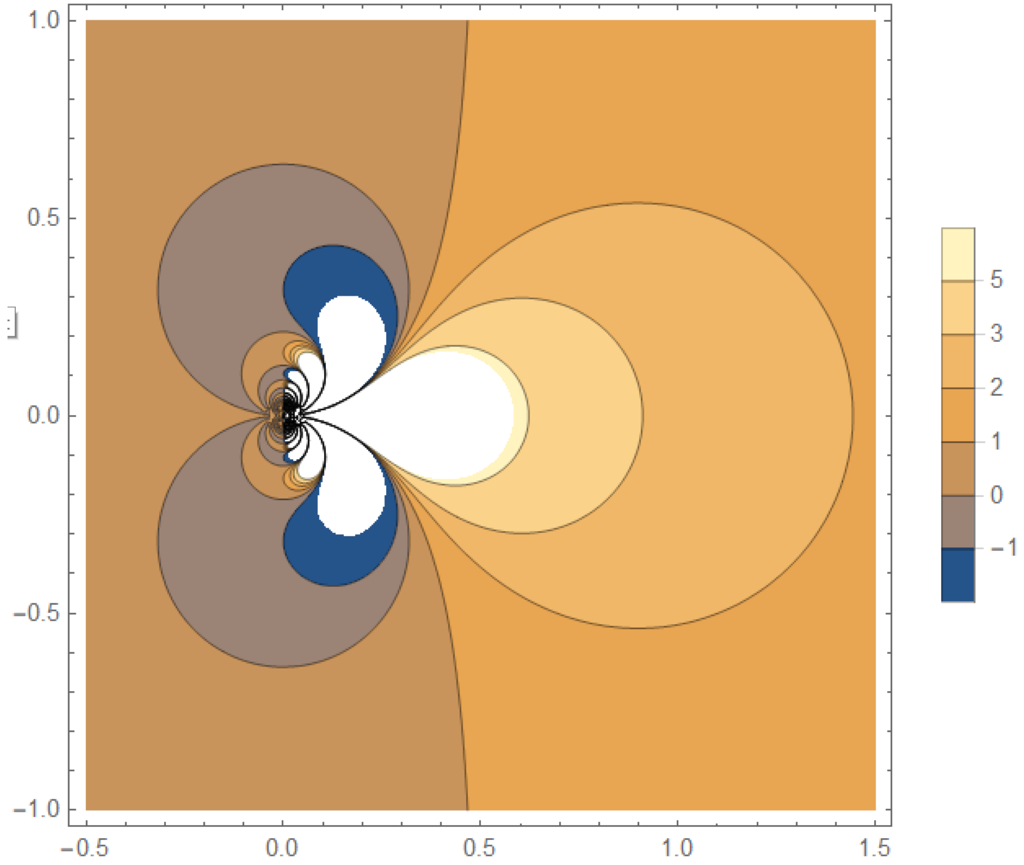
Функция $e^{\frac{1}{z}}$, особенность в 0



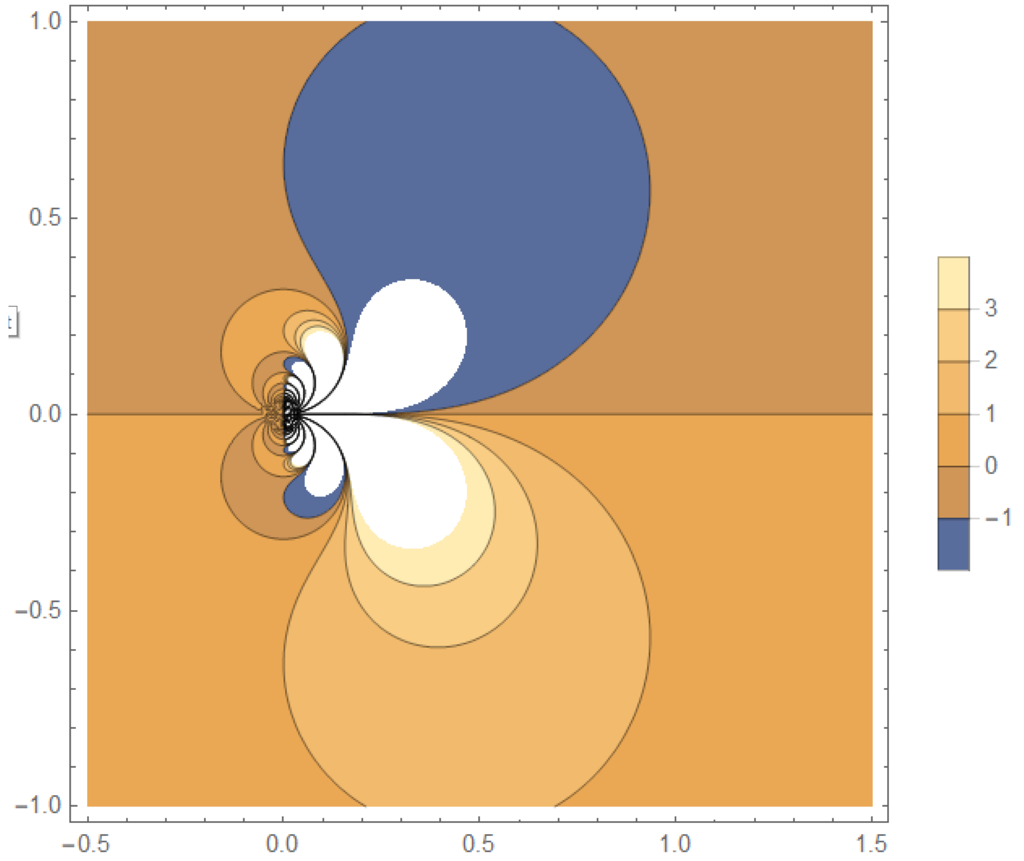


$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{1}{z}}\right), \qquad \mathrm{Im}\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$$

```
ContourPlot[Re[Exp[1 / (x + I y)]], {x, -.5, 1.5}, {y, -1, 1},
 Contours → {-1, 0, 1, 2, 3, 5, 100},
 MaxRecursion → 3, PlotLegends → Automatic]
```




```
ContourPlot[Im[Exp[1 / (x + I y)]], {x, -.5, 1.5}, {y, -1, 1},
 Contours → {-5, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 100},
 MaxRecursion → 3, PlotLegends → Automatic]
```



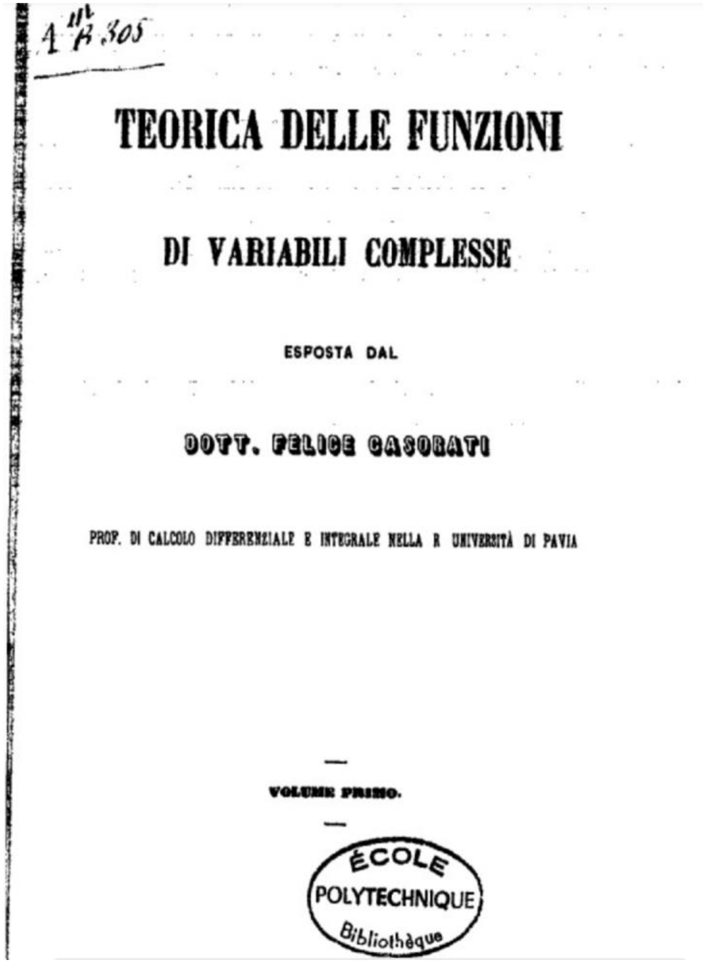
Кто впервые доказал теорему Сохоцкого?

- *Ю.В. Сохоцкий.* Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями. — *СПб., 1868.*
- *F. Casorati* Teorica delle funzioni di variabili complesse. — Pavia, 1868.
- *K. Weierstrass* Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen 1876// Math. Werkc, Bd 2, B. — P. 77-124.
- *C. Briot, I. Bouquet.* Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques. — 1859.

Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842 – 1927)

- В 1890 году стал товарищем председателя только что основанного Санкт-Петербургского математического общества, а с 1892 года его председателем, и оставался на этом посту до того, как общество фактически прекратило свою деятельность перед революцией.

Феличе Казорати (1835 – 1890)



TEORICA DELLE FUNZIONI

DI VARIABILI COMPLESSE

ESPOSTA DAL

DOTT. FELICE CASORATI

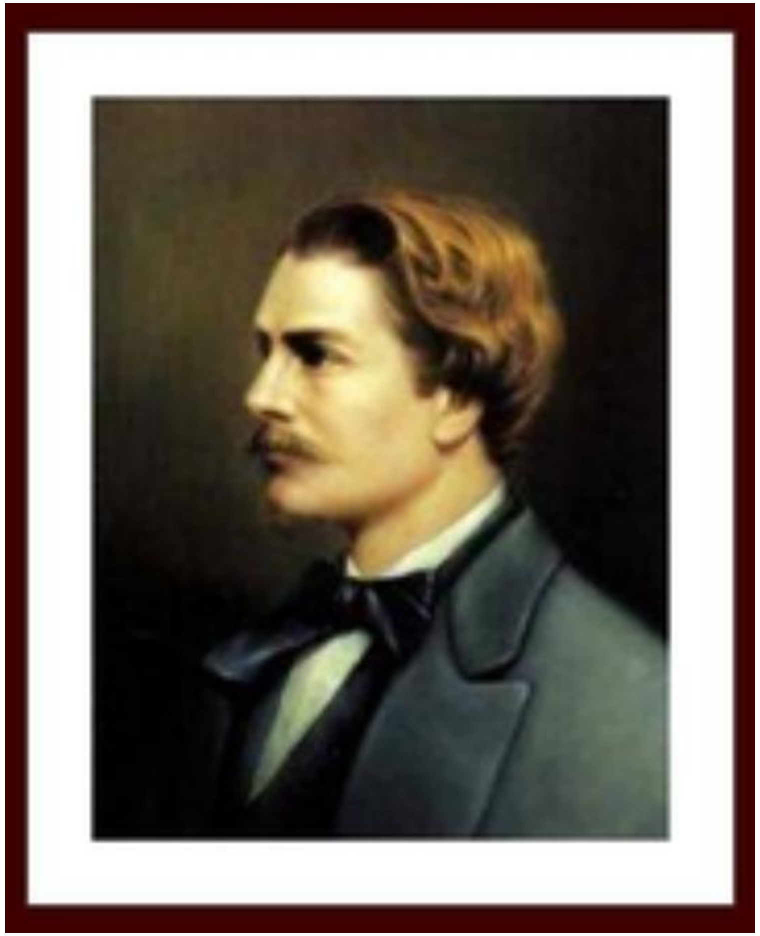
PROF. DI CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA

VOLUME PRIMO.

Карл Вейерштрасс (1815 – 1897)

- Определение непрерывной функции
- Теория эллиптических функций
- Теория аналитического продолжения
- Вариационное исчисление, дифференциальная геометрия, линейная алгебра

Шарль Огюст Брио (1817 – 1882) и Жан-Клод Буке (1859)




Монография Ш. Брио и К. Буке (1859)

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

THÉORIE

DES

ONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

ET, EN PARTICULIER,

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR

M. BRIOT,

Professeur de mathématiques au Lycée Saint-Louis, Maître de Conférences à l'École normale supérieure,

ET

M. BOUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand, Répétiteur à l'École Polytechnique.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1859

Глоссарий

- Изолированная особенность.
- Устранимая особенность.
- Полюс.
- Простой полюс.
- Существенная особенность.

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 12. Теорема Лиувилля

Теория функций комплексного переменного

Глоссарий

- Изолированная особенность.
- Устранимая особенность.
- Полюс.
- Простой полюс.
- Существенная особенность.

Изолированная особенность в точке ∞

Определение 7.21. Пусть f — функция, голоморфная в проколотой окрестности бесконечности. Говорят, что f *имеет в бесконечности устранимую особенность* (*полюс*, *существенную особенность* соответственно), если такого же типа особенность имеет в нуле функция $t \mapsto f(1/t)$.

Определение 7.22. *Правильной частью* ряда Лорана функции, голоморфной в проколотой окрестности бесконечности, называется сумма его членов с *неположительными* степенями переменной. *Главной частью* ряда Лорана функции, голоморфной в проколотой окрестности бесконечности, называется сумма его членов с *положительными* степенями переменной.

Теорема Лиувилля

Предложение 7.24 (теорема Лиувилля). *Если f — целая функция и $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \to \infty$ для некоторого $N > 0$, то f — многочлен степени не выше N.*

Напомним, что в данном случае $|f(z)| = O(|z|^N)$ означает, что существуют такие $C > 0$ и $M > 0$, что $|f(z)| \leqslant C|z|^N$ при $|z| \geqslant M$.

Доказательство. Из условия и предложения 7.12 (а также его доказательства) явствует, что главная часть ряда Лорана функции $t \mapsto f(1/t)$ содержит лишь слагаемые со степенью t не ниже $-N$, так что степенной ряд для $z \mapsto f(z)$ содержит лишь слагаемые, в которые z входит со степенью не выше N. Это и означает, что f — многочлен степени не выше N. $\square$

Жозеф Лиувилль (1809 – 1882)

- Член Парижской академии наук, член-корреспондент Петербургской академии наук, член Лондонского королевского общества.
- Занимался вопросами разрешимости в элементарных функциях и в квадратурах. Поверхность и сеть Лиувилля, числа Лиувилля, дробный интеграл Лиувилля, теорема Лиувилля-Арнольда, ...

Частный случай теоремы Лиувилля

Теорема. *Голоморфная на всем $\mathbb{C}$ ограниченная функция постоянна.*

Несколько вариантов доказательства:

- Применить теорему об устранимой особенности к $f\left(\frac{1}{z}\right)$.
- Воспользоваться неравенствами Коши $|c_n| \leqslant \dfrac{\sup\limits_{z\in D}|f(z)|}{R^n}$.

Мероморфные функции

Определение 7.26. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. *Мероморфной функцией* на U называется голоморфная функция $f: U \setminus S \to \mathbb{C}$, где $S \subset U$ — подмножество, не имеющее в U предельных точек, обладающее следующим свойством: в каждой точке $s \in S$ функция f имеет полюс или устранимую особенность.

Предложение 7.27. *Если $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество, а f и g — голоморфные функции на U, не являющиеся тождественным нулем, то отношение f/g является мероморфной функцией на U.*

Мероморфные функции на сфере

Определение 7.28. Функция, *мероморфная в бесконечности*, — это функция, голоморфная в некоторой проколотой окрестности бесконечности и имеющая в бесконечности полюс (в смысле определения 7.21).

В заключение этой главы опишем функции, мероморфные на всей сфере Римана.

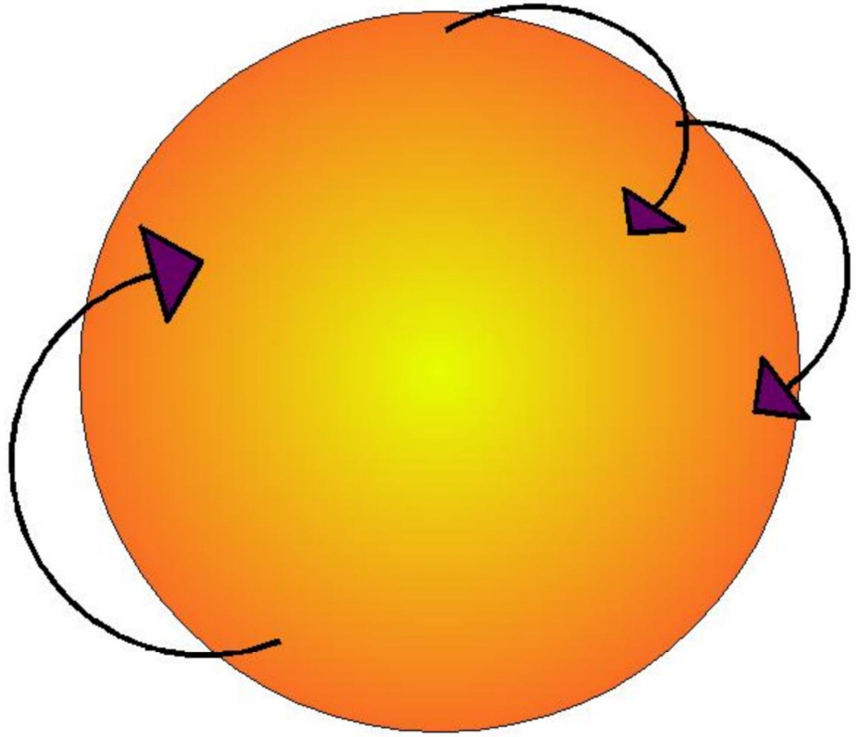
Предложение 7.29. *Функции, мероморфные на всей сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, суть рациональные функции и только они.*

Идея доказательства предложения 7.29

- Пусть $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ – мероморфная (в т.ч. в точке ∞) функция.
- Вычтем из f главные части во всех полюсах (в т.ч. в ∞).
- Останется функция g только с устранимыми особенностями.
- Такая функция постоянна по теореме Лиувилля.
- Т.о. $f =$ константа + главные части в полюсах (сразу получаем разложение f в простейшие дроби).

Что такое рациональная функция над $\mathbb{C}$

- Отношение двух многочленов с комплексными коэффициентами.
- Элемент расширения $\mathbb{C}(x)$, полученного присоединением к полю $\mathbb{C}$ трансцендентного элемента x.
- Мероморфная функция $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.
- Голоморфное отображение из сферы Римана в себя.



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 13. Вычеты и принцип аргумента

Теория функций комплексного переменного

Вычеты

Определение 8.1. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $U = \{z : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ точки $a \in \mathbb{C}$. *Вычетом* функции f в точке a называется число

$$\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz,$$

где γ — произвольная замкнутая кусочно гладкая кривая в U, имеющая индекс 1 относительно точки a.

От выбора кривой γ вычет не зависит ввиду предложения 6.21.

Из определения ясно, что если в точке a у функции имеется устранимая особенность, то вычет в этой точке нулевой.

Как считать вычет в конечной точке $a \in \mathbb{C}$

Предложение 8.2. *Если f — голоморфная функция в проколотой окрестности точки a, то вычет $\operatorname{Res}_a f(z)$ равен коэффициенту при $(z-a)^{-1}$ в лорановском разложении функции f в точке a.*

Доказательство. Если записать ряд Лорана

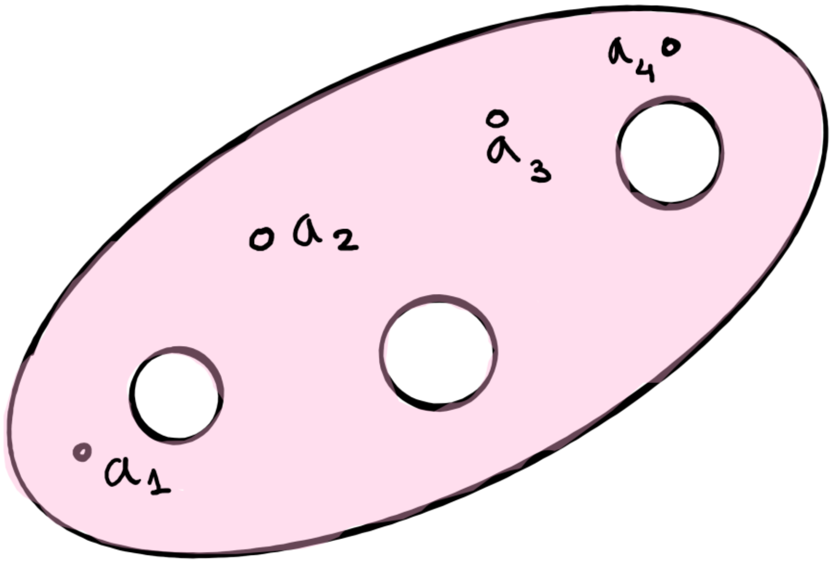
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

и почленно проинтегрировать по замкнутой кривой γ, $\operatorname{Ind}_a \gamma = 1$, то интегралы от всех слагаемых, кроме $c_{-1}(z-a)^{-1}$, обратятся в нуль, а интеграл от этого последнего будет равен $2\pi i c_{-1}$. $\square$

Теорема о сумме вычетов

- Пусть область U имеет кусочно гладкую границу $\gamma = \partial U$.
- Рассмотрим голоморфную функцию $f\colon U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, допускающую непрерывное продолжение на $\overline{U}$. Тогда

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f(z)$$



Лемма о логарифмическом вычете

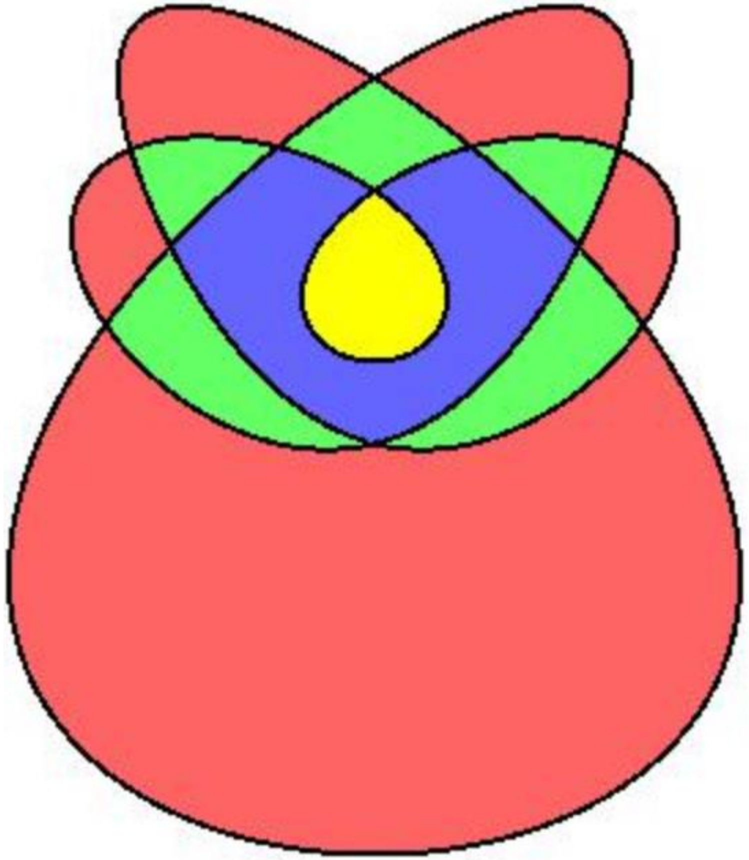
Лемма 8.4 (о логарифмическом вычете). *Пусть функция f либо голоморфна в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и не является тождественным нулем ни в какой окрестности этой точки, либо голоморфна в некоторой проколотой окрестности точки a и имеет в этой точке полюс. Тогда функция f'/f имеет в точке a либо устранимую особенность, либо простой полюс, и при этом* $\operatorname{Res}_a(f'(z)/f(z)) = \operatorname{ord}_a(f)$.

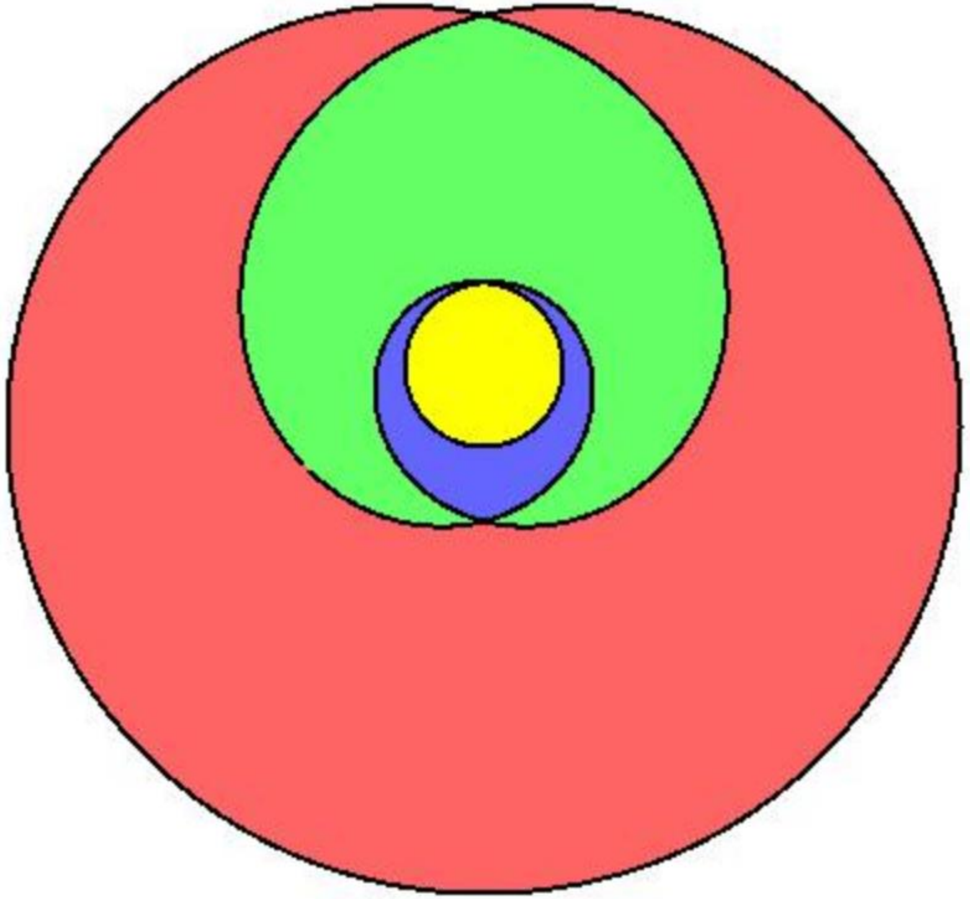
- Положим $k = \operatorname{ord}_a(f)$, тогда $f(z) = (z-a)^k g(z), \quad g(a) \neq 0$.
- $\log f(z) = k \log(z-a) + \log g(z) \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{k}{z-a} - \frac{d}{dz} \log g(z)$.

Принцип аргумента

- Пусть U – открытое множество, ограниченное простой замкнутой кусочно гладкой кривой γ.
- Рассмотрим голоморфную функцию $f: V \setminus S \to \mathbb{C}$, где V – окрестность множества $\overline{U}$, а $S \subset U$ – конечное подмножество полюсов функции f.
- Если $f \neq 0$ на γ, то: $$\sum_{a \in U} \operatorname{ord}_a(f) = \operatorname{Ind}_0(f \circ \gamma).$$
- В левой части – число нулей минус число полюсов функции f с учетом кратности.
- В правой части – число оборотов кривой $f(\gamma)$ вокруг 0.

Геометрический смысл



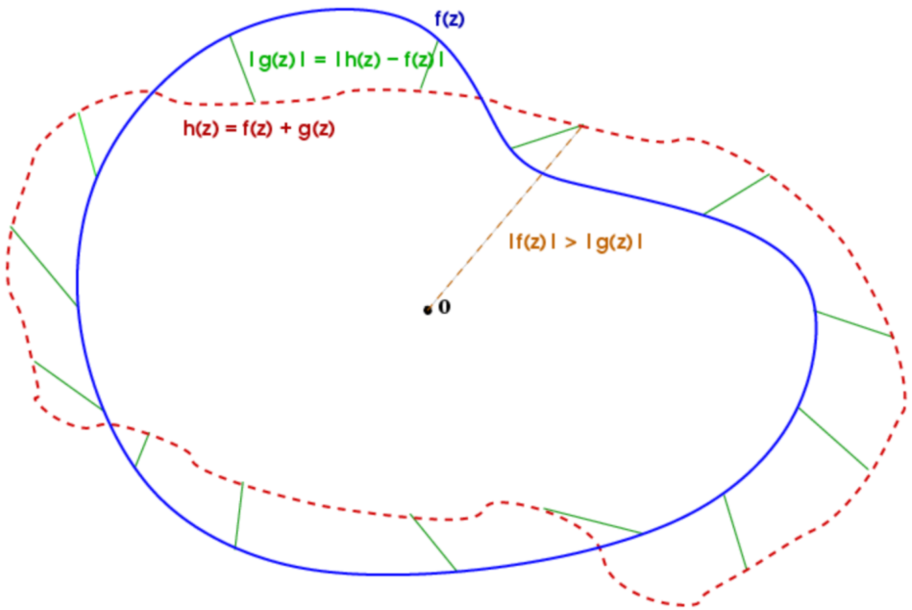


Усиленный принцип аргумента

- Функция f голоморфна на $U \setminus S$ и непрерывна на $\overline{U} \setminus S$.
- Кривая $\gamma = \partial U$ не обязательно кусочно гладкая.
- *Тот же вывод*.
- Доказательство (и даже формулировка) нуждаются в уточнении.
- **Следствие 1**: как понять, лежит ли данная точка в $f(U)$.
- **Следствие 2**: как проверить биективность отображения f.

Теорема Руше («дама с собачкой»)

Предложение 8.12 (теорема Руше). *Пусть* $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$ — *замкнутый непрерывный путь, и пусть* $|\gamma|$ — *множество* $\gamma([A;B]) \subset \subset \mathbb{C}$. *Предположим, что* $f, g\colon |\gamma| \to \mathbb{C}$ — *непрерывные отображения, причем для всякого* $z \in |\gamma|$ *имеем* $f(z) \neq 0$ *и* $|f(z)| > |g(z)|$. *Тогда* $\mathrm{Ind}_0(f \circ \gamma) = \mathrm{Ind}_0((f+g)\circ\gamma)$.



Эжен Руше (1832 – 1910)

- Французский геометр
- École Centrale (преподаватель), École Polytechnique (тьютор, экзаменатор), Conservatoire des Arts et Métiers (профессор, зав. кафедрой).

Основная теорема алгебры

Предложение 8.13. *Многочлен степени n от одной переменной с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учетом кратности.*

- Пусть $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$.
- Имеем $|z^n| > |P(z) - z^n|$ при $|z| > R$.
- Применяем теорему Руше.

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org
- http://pbcdallas.com/

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 14. Вычисления с вычетами.

Теория функций комплексного переменного

Как считать вычет в простом полюсе

Предложение 8.15. *Если функции f и g голоморфны в окрестности точки a и при этом g имеет в точке a простой нуль, то*

$$\operatorname{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}. \tag{8.3}$$

Доказательство. Из условия явствует, что функция f/g имеет в точке a простой полюс (или вовсе устранимую особенность). Поэтому можно действовать так же, как в примере 8.14:

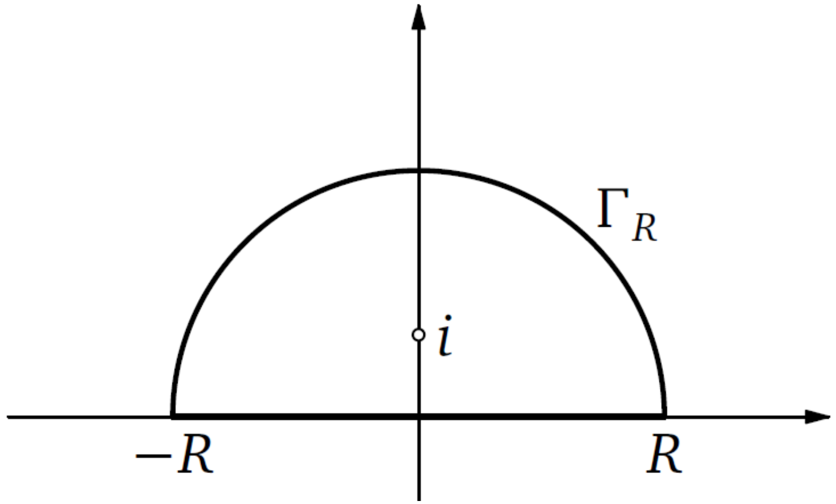
$$\operatorname{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f(z)(z-a)}{g(z)-g(a)} =$$
$$= \lim_{z\to a}\left(f(z)\Big/\frac{g(z)-g(a)}{z-a}\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}. \quad \square$$

Вычисление интегралов 1

Пример 8.17. Найдем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}\,dx}{x^2+1},$$

где t вещественно. Рассмотрим случай $t > 0$.



$$\operatorname{Res}_i \frac{e^{itz}}{z^2+1} = \frac{e^{it\cdot i}}{2i} = \frac{-ie^{-t}}{2}. \qquad \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{itz}\,dz}{z^2+1} = 2\pi i \frac{-ie^{-t}}{2} = \frac{\pi}{e^t}.$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{itz}\,dz}{z^2+1}\right| \leqslant \pi R \sup_{z\in\gamma_R} \frac{|e^{itz}|}{|z^2+1|}. \qquad |e^{itz}| = e^{-Rt\sin\varphi} \leqslant 1$$

Вычисление интегралов 2

Пример 8.18. Найдем теперь интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)\,dx}{x^2+1},$$

где t опять вещественно.

Всю основную работу мы уже сделали в предыдущем примере: поскольку $\cos(tx) = \operatorname{Re} e^{itx}$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)\,dx}{x^2+1} = \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}\,dx}{x^2+1} = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{e^{|t|}}\right) = \frac{\pi}{e^{|t|}}.$$

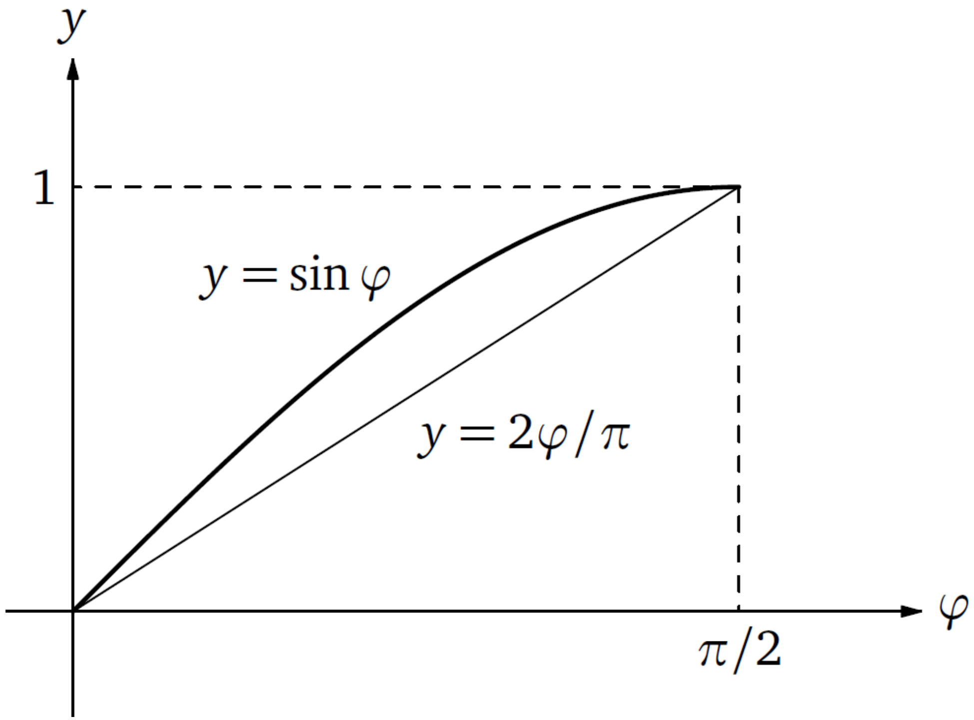
Лемма Жордана

Лемма 8.19 (К. Жордан). *Обозначим через* $\gamma_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *полуокружность радиуса* R *с центром в нуле, лежащую в верхней полуплоскости. Тогда для всякого* $a > 0$ *существует такая константа* C*, зависящая только от* a*, что*

$$\int\limits_{\gamma_R} |e^{iaz}|\,|dz| \leqslant C$$

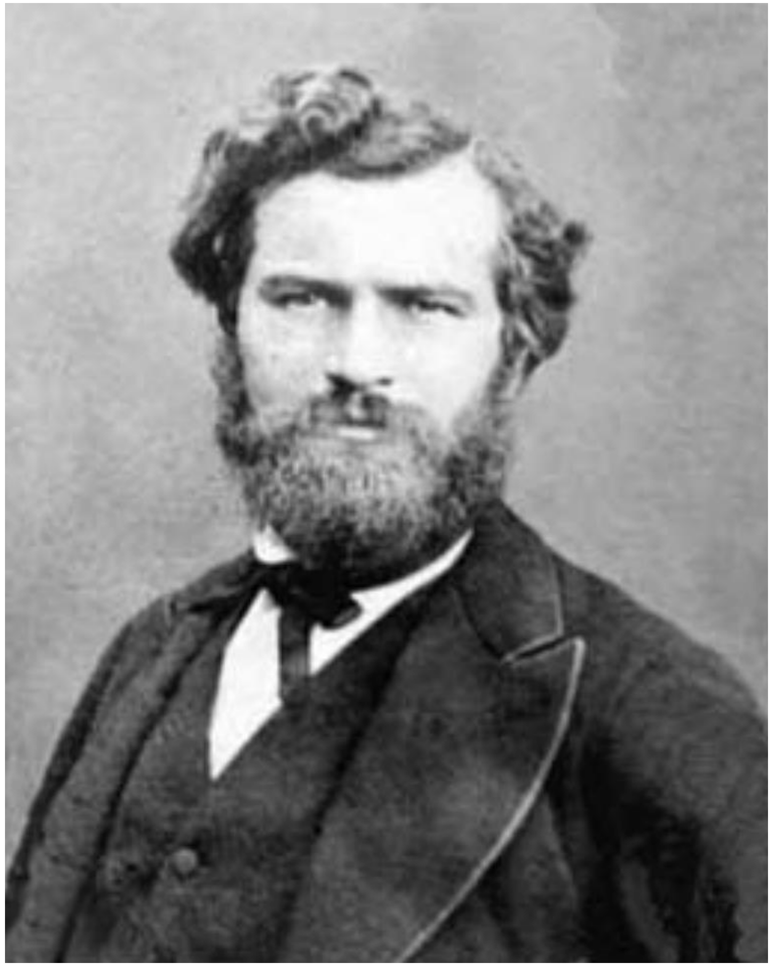
для всех $R > 0$.

$$\int\limits_{\gamma_R} |e^{iaz}|\,|dz| = 2R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi \leqslant 2R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-2aR\varphi/\pi}\,d\varphi = \frac{\pi}{a}(1 - e^{-aR}) \leqslant \frac{\pi}{a}.$$



Камиль Жордан (1838 – 1922)

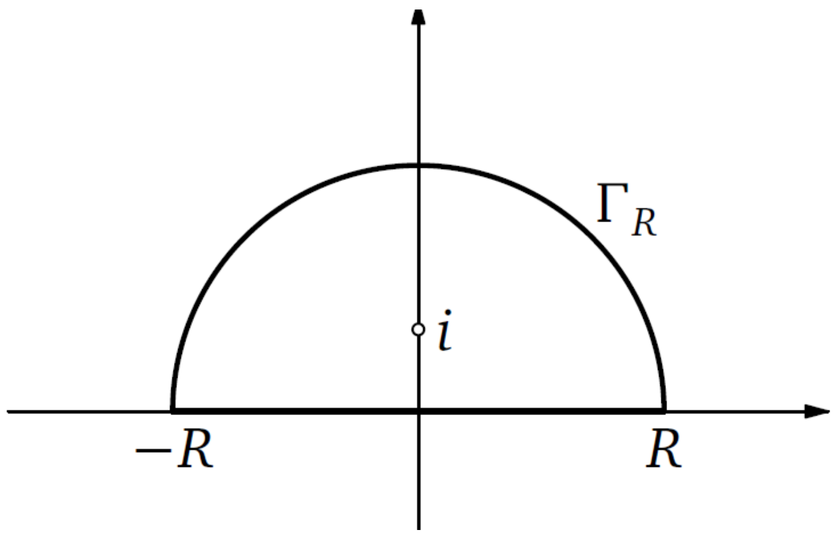
- Политехническая школа, Коллеж де Франс.
- По образованию инженер.
- Жорданова кривая, Жорданова нормальная форма, теорема Жордана-Гёльдера.



Вычисление интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e}$.

$$\frac{x \sin x}{x^2+1} = \operatorname{Im} \frac{x e^{ix}}{x^2+1},$$

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}_i \Bigl(\frac{z e^{iz}}{z^2+1} \Bigr) = \frac{\pi i}{e}.$$



$$\Biggl| \int\limits_{\gamma_R} \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2+1} \Biggr| \leqslant \int\limits_{\gamma_R} \Bigl| \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2+1} \Bigr| \, |dz| \leqslant \sup_{z \in \Gamma_R} \Bigl| \frac{z}{z^2+1} \Bigr| \cdot \int\limits_{\gamma_R} |e^{iz}| \, |dz|.$$

Интеграл в смысле главного значения

- Пусть $a \in I$ – внутренняя точка отрезка $I = [b, c]$. Положим
$$\mathrm{V.p.} \int_b^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_b^{a-\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx \right)$$
для непрерывной функции $f: I \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, имеющей особенность в точке a.
- Аналогично, если $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, то положим
$$\mathrm{V.\,p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}} \left(\int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \right).$$

Примеры интегралов в смысле главного значения

- «Главный» пример: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0$.
- Аналогично, с конечными пределами: $\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{b}{a}\right)$.
- Более общим образом, при $a < c < b$ имеем: $\int_{a}^{b} \frac{dx}{x-c} = \log\left(\frac{b-c}{c-a}\right)$.

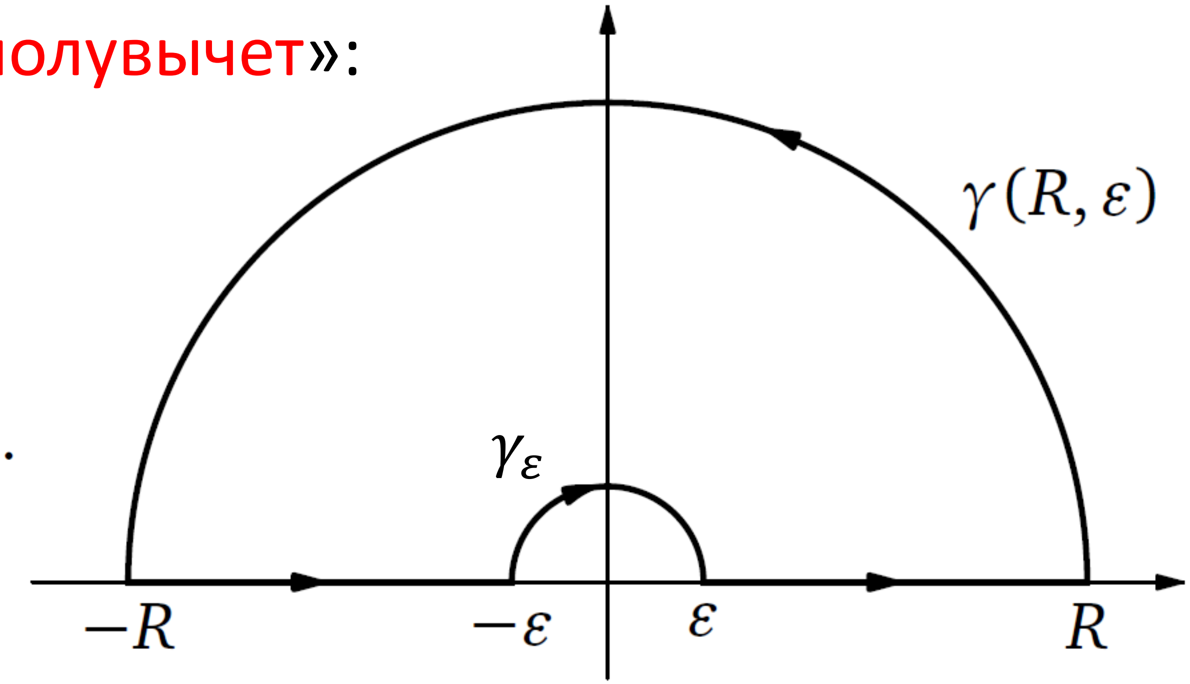
Вычисление интеграла $\mathrm{V.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi.$

Интеграл по γ_ε – так называемый «полувычет»:

$$-\pi i\cdot\mathrm{Res}_0\frac{e^{iz}}{z}=-\pi i$$

$$0=\int\limits_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}\,dx}{x}+\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}\,dz}{z}+\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}\,dx}{x}+\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{iz}\,dz}{z}.$$

$$\mathrm{V.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{x}-\pi i=0;$$



Вычисление интеграла $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z^6\,dz}{z^7+z+1}$

- Нахождение вычетов внутри диска $\{|z| < 2\}$ проблематично.
- Сделаем замену $z = 1/w$.
- Теперь w пробегает окружность $|w| = 1/2$ по часовой стрелке:

$$dz = -\frac{dw}{w^2},$$

$$\frac{z^6}{z^7+z+1} = \frac{w}{1+w^6+w^7},$$

$$\frac{z^6\,dz}{z^7+z+1} = -\frac{dw}{w(1+w^6+w^7)}.$$

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^6\,dz}{z^7+z+1} = -\int\limits_{|w|=\frac{1}{2}} \Big(-\frac{dw}{w(1+w^6+w^7)}\Big) = \int\limits_{|w|=\frac{1}{2}} \frac{dw}{w(1+w^6+w^7)} = 2\pi i$$

Вычет на бесконечности

- Пусть $f\colon \{|z| > R\} \to \mathbb{C}$ – голоморфная функция.
- Рассмотрим ряд Лорана для f в кольце $\{|z| > R\}$:
$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots$$
- Определим вычет в бесконечности $\operatorname{Res}_\infty(f) = -c_{-1}$.
- Тогда сумма всех вычетов функции с конечным числом особенностей (включая вычет на бесконечности) =0.
- Имеем:
$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_\infty(f)$$

Странности вычета на бесконечности

- Почему-то возник знак минус.
- Бывает ненулевой вычет **даже у функции с устранимой особенностью на бесконечности**, например, $1/z$.

Вычет бывает не у функции

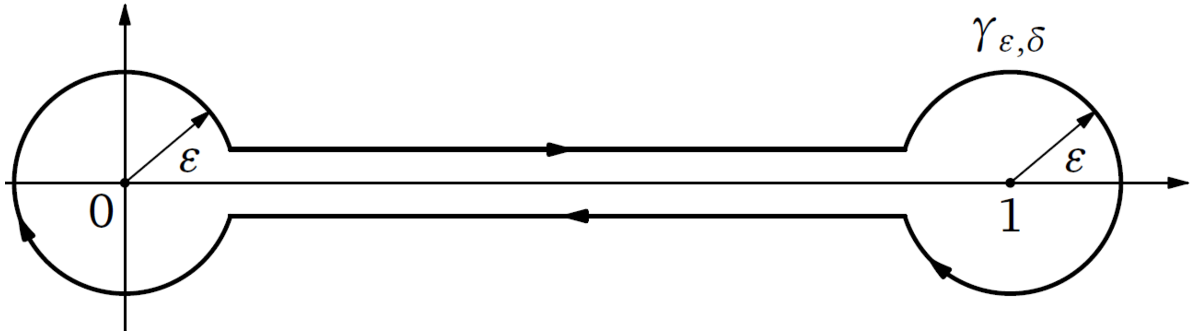
- … а у голоморфной 1-формы с изолированными особенностями.
- Правильно говорить про вычет 1-формы $\omega = f(z)dz$:
$$\mathrm{Res}_a \omega = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z-a|=\varepsilon} \omega$$
- Если поменять координату, ничего не изменится.
- Обойти ∞ против часовой стрелки = обойти большую окружность ПО часовой стрелке.
- Если нет особенности, то вычет всегда равен нулю.

Вычеты голоморфных 1-форм с особенностями

- Например, у формы $\frac{dz}{z}$ есть особенности (полюсы первого порядка) в нуле и бесконечности, с вычетами 1 и -1.
- Почему? У функции $1/z$ нет особенности на бесконечности, но у формы $dz = -dw/w^2$ (здесь $w = 1/z$) имеется полюс второго порядка.
- Если у 1-формы есть только конечное число особенностей на $\mathbb{S}^2$, то сумма всех вычетов всегда равна нулю!

Вычисление интеграла $I = \int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx.$

- Проинтегрируем по указанному контуру.
- Интегралы по маленьким дискам стремятся к нулю.
- Интегралы по горизонтальным отрезкам дают в сумме $2I$.
- Осталось посчитать вычет в бесконечности.



$$\sqrt{z(1-z)} = \pm iz \cdot \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{z(1-z)} = \pm iz\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z^2} + \ldots\right),$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\cdot(-2\pi i c_{-1}) = \pm\frac{\pi}{8}.$$

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 15. Локальные свойства голоморфных функций.

Теория функций комплексного переменного

Принцип сохранения области

Принципом сохранения области называется следующий факт.

Теорема 9.1. *Пусть* $U \subset \mathbb{C}$ — *связное открытое множество и* $f : U \to \mathbb{C}$ — *голоморфная функция, не являющаяся постоянной. Тогда для всякого открытого подмножества* $V \subset U$ *его образ* $f(V) \subset \mathbb{C}$ *также открыт.*

Отображения, переводящие открытые множества в открытые, в топологии называют открытыми. Таким образом, принцип сохранения области гласит, что отличное от константы голоморфное отображение, определенное на связном открытом множестве, является открытым.

- Отличие от вещественного случая! (пример: $f(x) = x^2$).

Доказательство

- Пусть $a \in U$, $f(z) = b + (z-a)^k g(z),\ k = \operatorname{ord}_a(f-b)$.
- Образ маленькой окружности $\{|z-a| = \varepsilon\}$ обходит k раз вокруг точки $b = f(a)$.
- Этот же образ окружности обходит k раз вокруг точек c, близких к точке b.
- Значит, уравнение $f(z) = c$ имеет $k > 0$ решений в диске $\{|z-a| < \varepsilon\}$, с учетом кратностей.

Теорема об обратной функции

Предложение 9.2 (теорема об обратной функции). *Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, и пусть $f'(a) \neq 0$ в точке $a \in \mathbb{C}$. Тогда существуют такие открытые множества $U_1 \ni a$ и $V_1 \ni f(a)$, что $f(U_1) = V_1$ и f индуцирует биекцию U_1 на V_1, причем обратное отображение $f^{-1}\colon V_1 \to U_1$ также голоморфно.*

- Достаточно, чтобы жорданова кривая ∂U_1 отображалась в жорданову кривую ∂U_2 взаимно однозначно с сохранением ориентации. (По принципу аргумента).

Соответствующая вещественная теорема

Замечание 9.3. Предложение 9.2 немедленно следует из «теоремы об обратной функции» вещественного анализа (см. [1, гл. VIII, § 6]): в самом деле, голоморфные функции автоматически непрерывно дифференцируемы, а производная f в точке a (см. раздел 1.5) есть умножение на ненулевое комплексное число, что является обратимым линейным оператором. Так как я стремился минимизировать предварительные сведения из анализа многих переменных, необходимые для чтения книги, у нас приведено независимое доказательство.

- Все же есть упрощение: в комплексном анализе не надо требовать непрерывности производной!

Индекс ветвления

- Пусть $a \in U$, $f(z) = b + (z-a)^k g(z),\ k = \operatorname{ord}_a(f-b)$.
- Число k называется индексом ветвления функции f в точке a.
- При $k > 1$ точка a называется критической точкой.
- Другими словами, $f'(a) = 0$.
- Но это аналитическое условие эквивалентно топологическому!

Свойства индекса ветвления

Предложение 9.5. *Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a и ни в какой ее окрестности не является константой. Положим $f(a)=b$, и пусть*

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots$$

— разложение f в степенной ряд в окрестности точки a. Тогда следующие три числа совпадают:

(1) *индекс ветвления функции f в точке a;*

(2) $\min\{k>0\colon c_k\neq 0\}$;

(3) $\min\{k>0\colon f^{(k)}(a)\neq 0\}$.

Поведение функции в окрестности критической точки

Предложение 9.7. *Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a и ни в какой ее окрестности не является константой. Положим $f(a) = b$, и пусть индекс ветвления функции f в точке a равен k. Тогда существуют такие окрестности $U \ni a$ и $V \ni b$, что $f(U) = V$, всякая точка $b' \in V$, кроме b, имеет ровно k прообразов в U (относительно отображения f), а у точки b в множестве U есть только один прообраз — точка a.*

- Мы уже фактически доказали это утверждение, когда доказывали принцип сохранения области.

Более сильное утверждение

Предложение 9.8. *Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a и ни в какой ее окрестности не является константой. Положим $f(a) = b$, и пусть индекс ветвления функции f в точке a равен k. Тогда существуют окрестности $U \ni a$ и $V \ni b$, для которых $f(U) = V$, и такие конформные изоморфизмы $\alpha\colon U \to U'$, $\beta\colon V \to V'$, где V и V' — открытые круги с центром в нуле, что $\alpha(a) = 0$, $\beta(b) = 0$ и $\beta(f(z)) = (\alpha(z))^k$ для всех $z \in U$.*

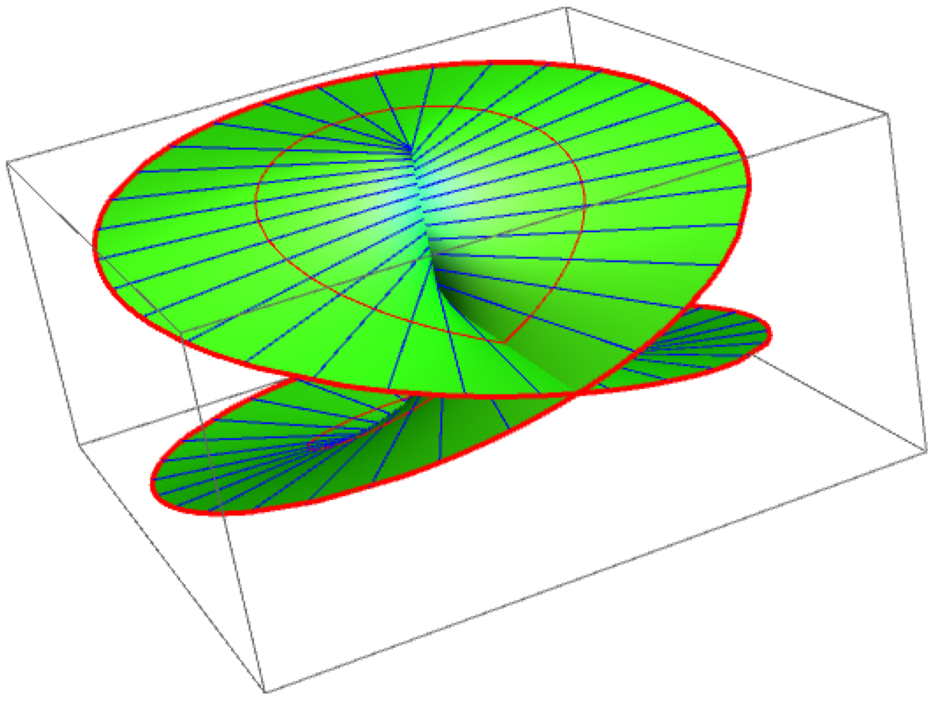
- Другими словами, можно так выбрать голоморфные координаты в образе или в прообразе, чтобы отображение записывалось формулой $g(z) = z^k$.

Набросок доказательства

- $f(z) = b + (z-a)^k g(z)$ вблизи точки a,
- $g(z) = h(z)^k$,
- $f(z) - b = \big((z-a)h(z)\big)^k$,
- Положим $\alpha(z) = (z-a)h(z),\ \beta(w) = w - b$.

Разветвленные накрытия сферы

- Рассмотрим непрерывное отображение $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$.
- Пусть $\forall a \in \mathbb{S}^2 \ \exists\, k \in \mathbb{Z}_{>0}$, окрестности U, V точек $a, b = f(a)$ и гомеоморфные вложения $\alpha\colon U \to \mathbb{C}$, $\beta\colon V \to \mathbb{C}$, такие, что $\beta\big(f(z)\big) = \big(\alpha(z)\big)^k$ для всех $z \in U$.
- Тогда f называется разветвленным накрытием.
- Пример: любая рациональная функция.



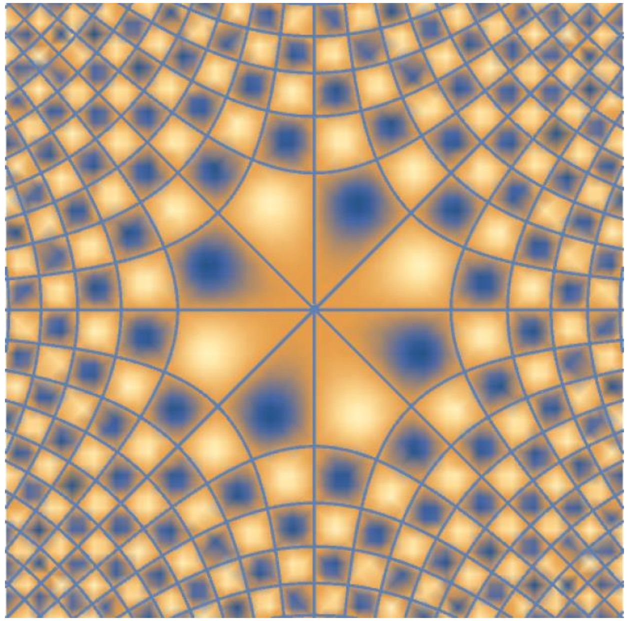
Голоморфная биекция биголоморфна

Предложение 9.9. *Пусть* $f\colon U \to V$ — *голоморфное и биективное отображение между двумя открытыми подмножествами комплексной плоскости. Тогда производная отображения* f *не обращается в нуль нигде на* U *и обратное отображение* $f^{-1}\colon V \to U$ *также голоморфно.*

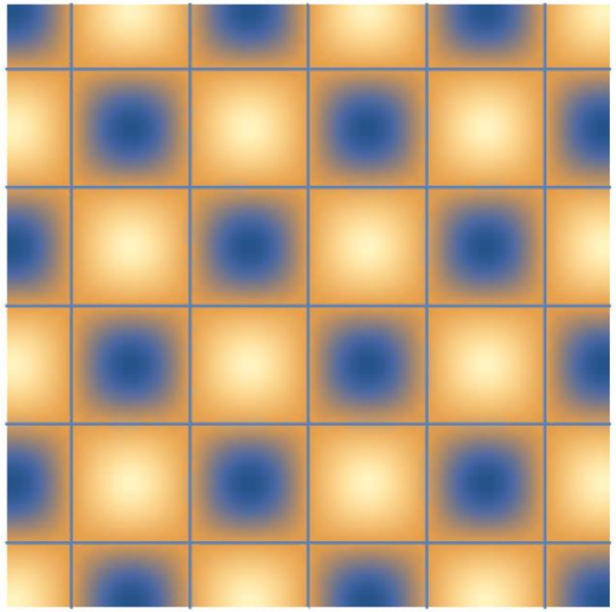
- В самом деле, f не может быть инъекцией ни в какой окрестности критической точки (согласно локальному описанию, данному выше).

Что голоморфное отображение делает с углами

Предложение 9.10. *Пусть функция f голоморфна в точке a и имеет в этой точке индекс ветвления k. Если γ_1 и γ_2 — гладкие кривые, выходящие из точки a и образующие угол φ, то угол между кривыми $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$ в точке $f(a)$ равен $k\varphi$.*



$\xrightarrow{f(z) = z^2}$



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 16. Принцип максимума.

Теория функций комплексного переменного

Принцип максимума

Предложение 9.11 (принцип максимума модуля). *Если функция f голоморфна и не является постоянной на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, то функция $z \mapsto |f(z)|$ ни в одной точке U не может иметь локального максимума.*

- В доказательстве используется принцип сохранения области.
- Также нужно утверждение о том, что непостоянная на U функция не может быть постоянной ни в какой малой окрестности точки из U (здесь важна связность!).

Лемма Шварца

Предложение 9.13 (лемма Шварца). *Пусть* $D = \{z : |z| < 1\}$ — *единичный круг и* $f : D \to D$ — *голоморфное отображение, для которого* $f(0) = 0$. *Тогда:*

(1) $|f(z)| \leqslant |z|$ *для всех* $z \in D$;

(2) $|f'(0)| \leqslant 1$;

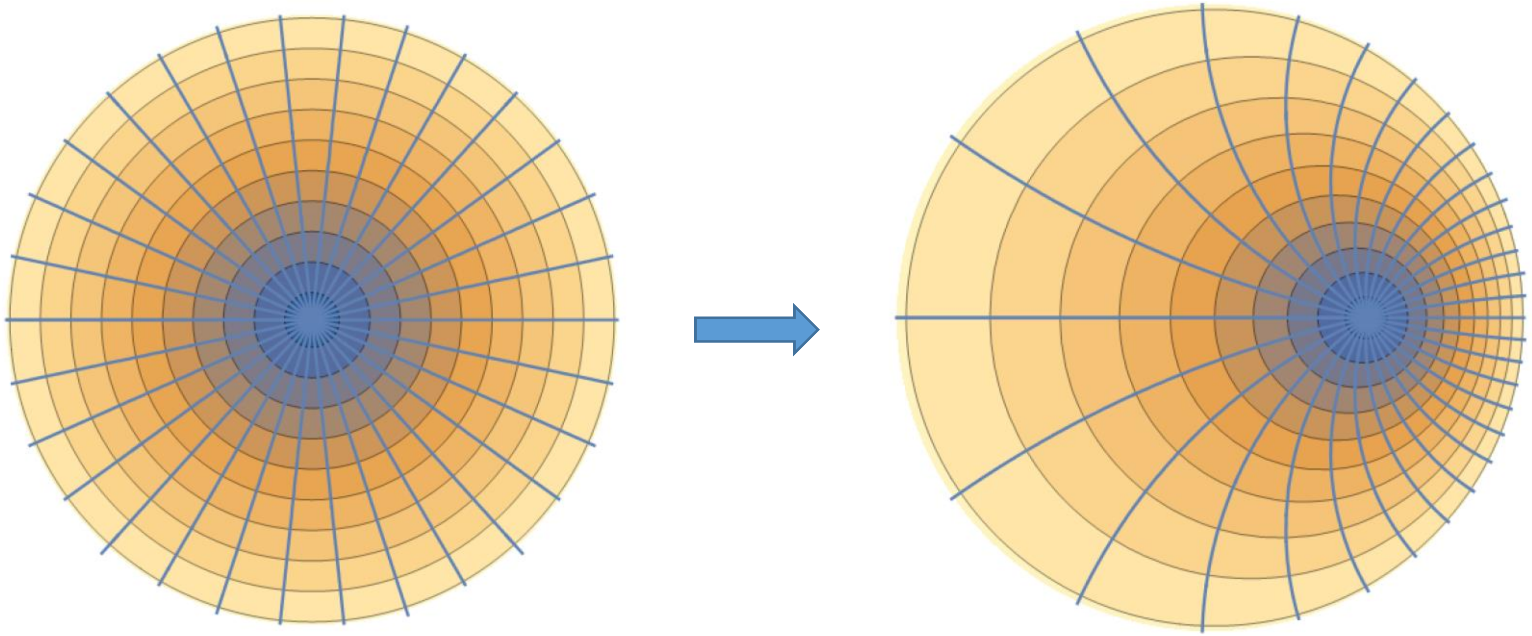
(3) *если в неравенстве* (1) (*хотя бы для одного* $z \neq 0$) *или в неравенстве* (2) *достигается равенство, то существует такое* $\theta \in \mathbb{R}$, *что* $f(z) = e^{i\theta} z$ *для всех* $z \in D$.

- Рассмотрим функцию $g(z) = f(z)/z$ и применим к ней принцип максимума.

Конформные автоморфизмы диска

Предложение 9.14. *Всякий конформный автоморфизм круга* $D = \{z : |z| < 1\}$ *является дробно-линейным.*

- Дробно-линейные автоморфизмы диска уже были описаны (напоминание на след. слайде).



Автоморфизмы диска

Предложение 3.5. *Дробно-линейные автоморфизмы единичного круга $U = \{z : |z| < 1\}$ суть отображения вида*

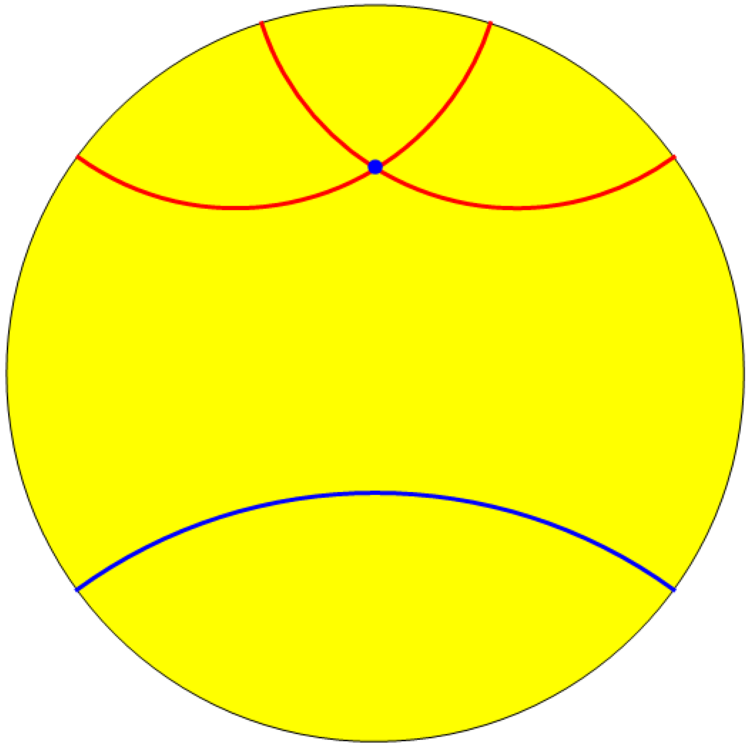
$$z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbb{R},\ |a| < 1, \tag{3.2}$$

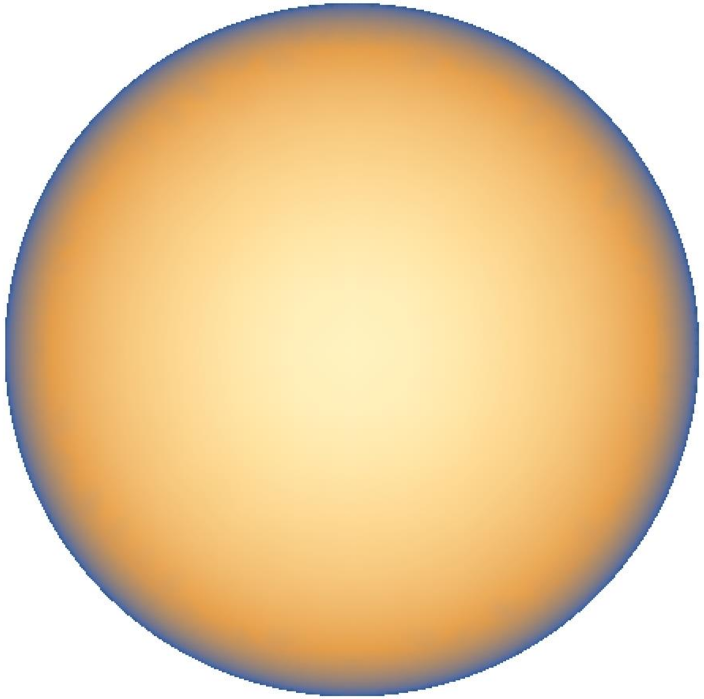
и только они.

- Если точка a переходит в 0, то симметричная к a относительно $\mathbb{S}$ точка $\frac{1}{\bar{a}}$ переходит в симметричную к 0 точку ∞.

Метрика Пуанкаре в диске $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$





Метрика Пуанкаре и голоморфные эндоморфизмы диска

- Любой автоморфизм диска сохраняет метрику Пуанкаре, т.е. сохраняет нормы векторов и длины кривых.
- Пусть $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – произвольное голоморфное отображение, не обязательно автоморфизм.
- Тогда $\forall$ касательного вектора v к $\mathbb{D}$ имеем $\|df(v)\| \leq \|v\|$ (норма берется относительно метрики Пуанкаре).
- Следовательно, длины кривых не могут увеличиваться.
- Если $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, то f строго сжимает нормы векторов и длины.

Теорема Пика

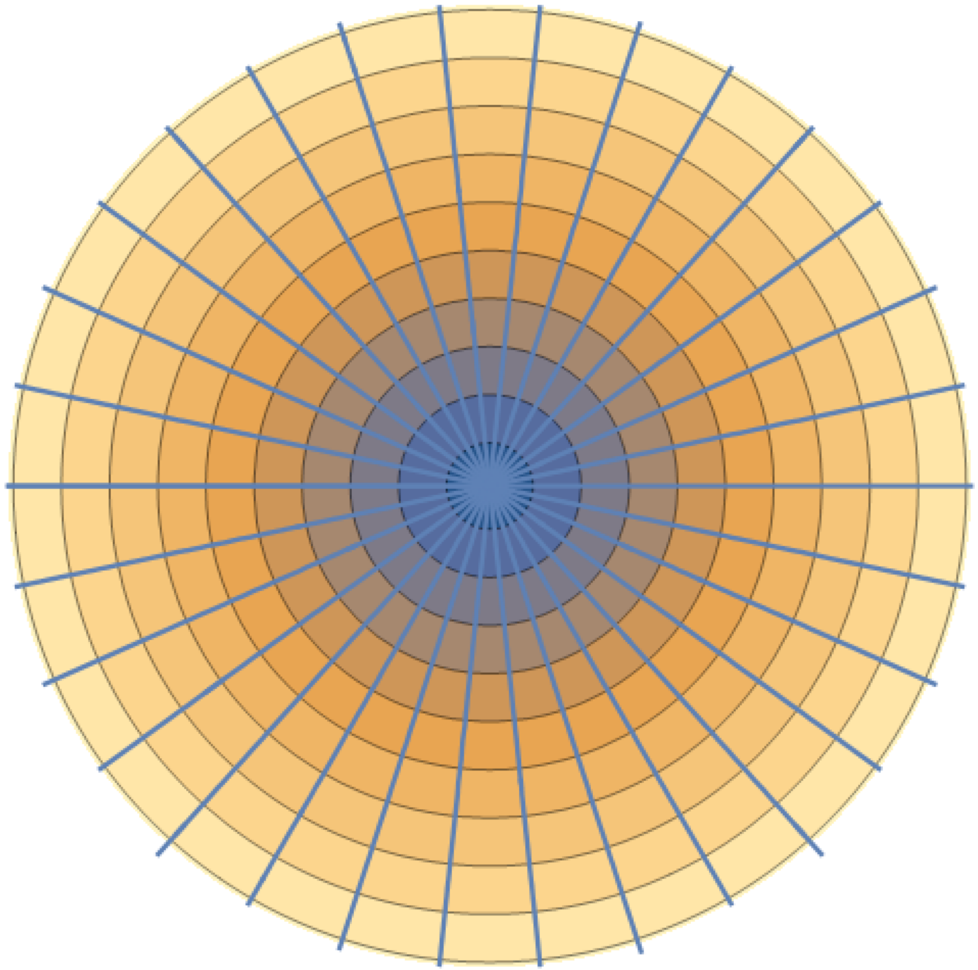
Теорема. *Пусть* $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *– произвольное голоморфное отображение. Тогда* $\forall\ x, y \in \mathbb{D}\ \ \mathrm{dist}\big(f(x), f(y)\big) \le \mathrm{dist}(x, y)$*.* *Равенство возможно только если* f *– автоморфизм.*

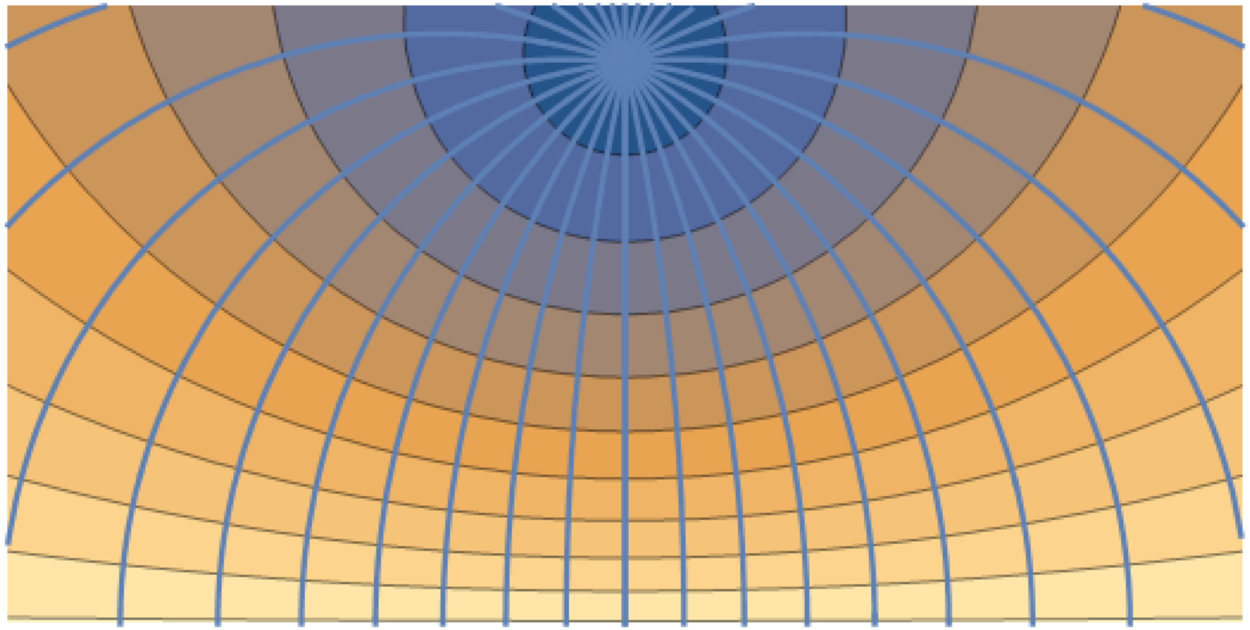
Следствие. Любое семейство $\mathcal{F}$ голоморфных отображений $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ равностепенно непрерывно:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall f \in \mathcal{F}\ \ \ \mathrm{dist}(x, y) < \delta\ \Rightarrow \mathrm{dist}\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

При фиксированном x это верно и в сферической или евклидовой метрике.

Изоморфизм $f(z) = i\,\frac{1-z}{1+z}$ между $\mathbb{D}$ и $\mathbb{H}$





Автоморфизмы верхней полуплоскости

Предложение 3.4. *Дробно-линейные автоморфизмы верхней полуплоскости* $H = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ *суть отображения вида*

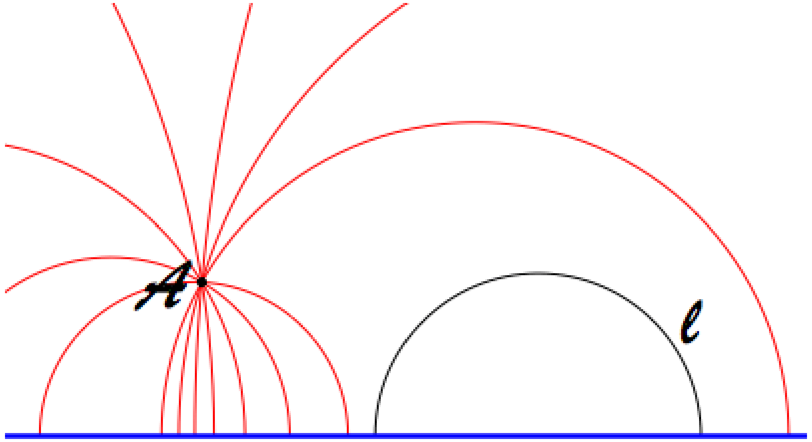
$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Группа дробно-линейных автоморфизмов верхней полуплоскости изоморфна $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$, *где* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ — *группа вещественных матриц с определителем* 1, *а* I — *единичная матрица.*

Ключевая идея: если $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, то $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Если $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$, то $f(i) \in \mathbb{R}$.

Метрика Пуанкаре в полуплоскости

- Метрика Пуанкаре $ds^2 = \frac{|dz|^2}{(\mathrm{Im}\, z)^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.
- Геодезические (кривые, являющиеся кратчайшими путями между любыми парами своих достаточно близких точек) – дуги окружностей, перпендикулярных вещественной прямой.



$$\operatorname{dist}(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}{2y_1y_2}\right)$$
$$= 2\operatorname{arsinh}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}{y_1y_2}}$$
$$= 2\ln\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} + \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2+y_1)^2}}{2\sqrt{y_1y_2}},$$

$$\operatorname{dist}(AB) = \left|\ln\left(\frac{|BA_\infty||AB_\infty|}{|AA_\infty||BB_\infty|}\right)\right|.$$

Николай Иванович Лобачевский (1792-1856)

- Выдающийся математик и деятель образования.
- Ректор Казанского университета.
- «Коперник геометрии».
- *Геометрия Лобачевского* = абсолютная геометрия + отрицание пятого постулата.

Где родился Лобачевский

Эудженио Бельтрами (1835 – 1900)

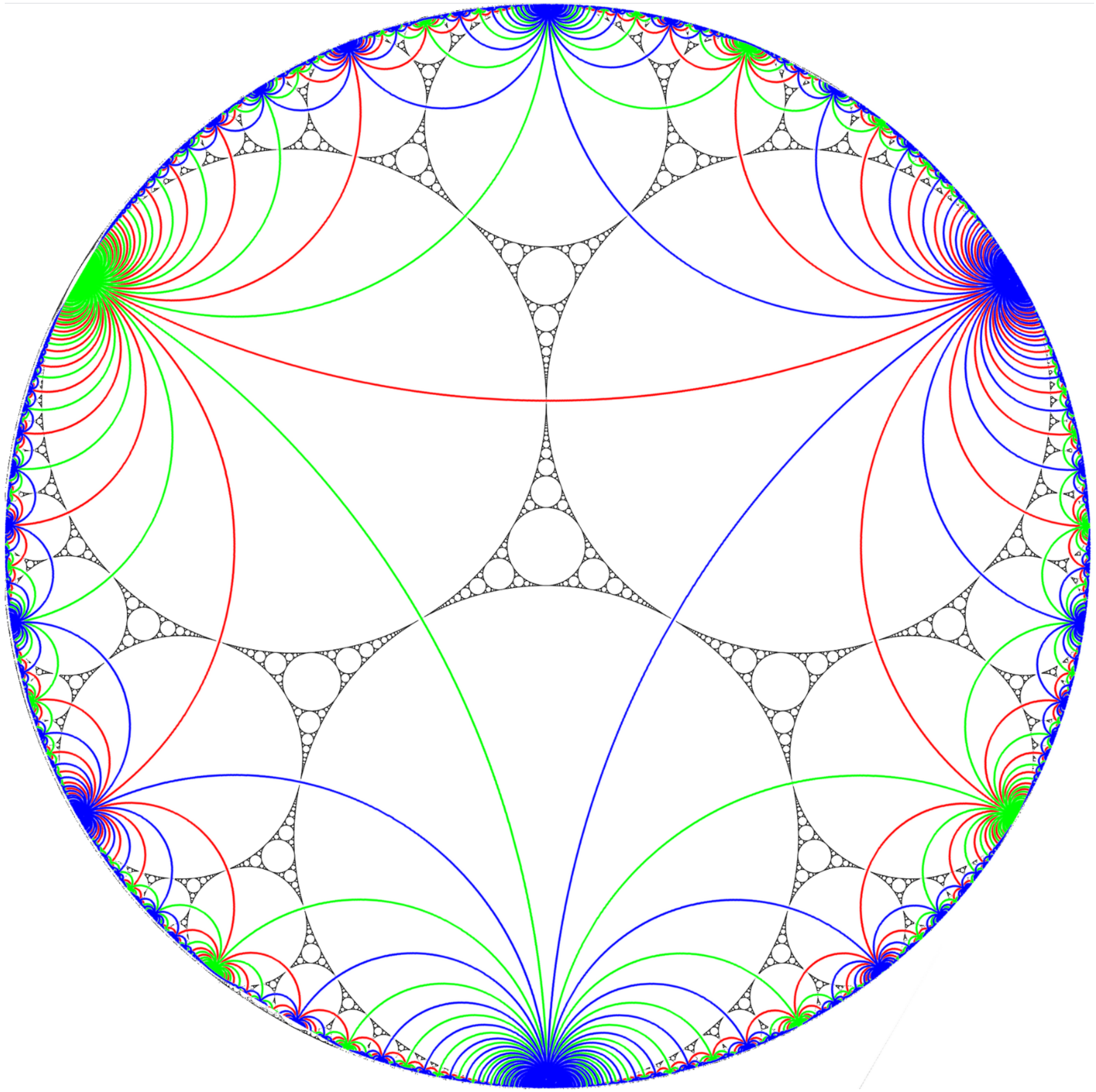
Итальянский математик, известный своими работами по дифференциальной геометрии и математической физике. Сыграл значительную роль в признании неевклидовой геометрии.

Анри Пуанкаре (1854 – 1912)

- Французский математик, механик, физик, астроном и философ.
- Глава Парижской академии наук, член Французской академии и ещё более 30 академий мира, в т.ч. член-корреспондент Петербургской академии наук.
- Топология, качественная теория ДУ, небесная механика, автоморфные функции (в т.ч. связь с неевклидовой геометрией).

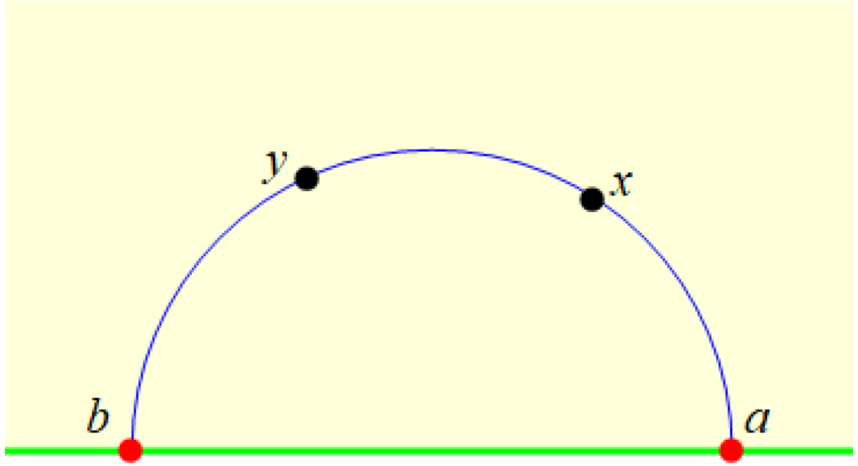
Замечательные кривые на плоскости Лобачевского

- Прямые
- Окружности
- Эквидистанты (на фиксированном расстоянии от прямой).
- Орициклы (предельное положение окружности).
- *Через 3 различные точки можно провести прямую, окружность, орицикл или эквидистанту.*



Двойное отношение $(z_1, z_2; z_3, z_4) = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$

- Инвариантно при действии дробно-линейных преобразований.
- Вещественно, если z_1, z_2, z_3, z_4 принадлежат одной обобщенной окружности.
- Если геодезическая xy (в $\mathbb{H}$) пересекает абсолют $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в точках a, b, то
$$\mathrm{dist}(x, y) = \log |(a, b; x, y)|.$$

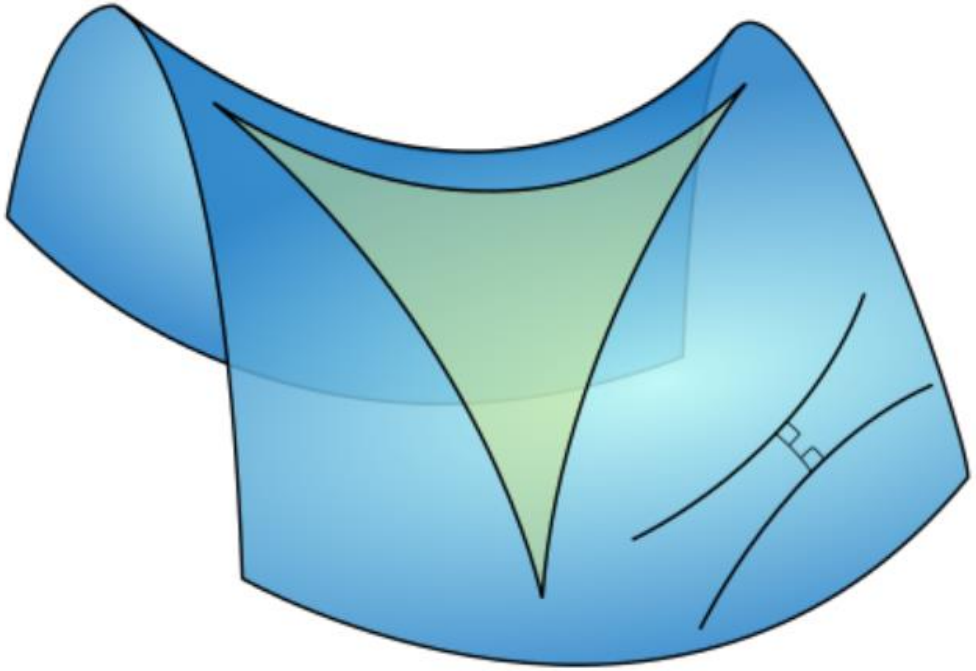


Классификация автоморфизмов $\mathbb{H}$

- Собственные числа матрицы $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ удовлетворяют характеристическому уравнению $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\,\lambda + 1 = 0$
- Следовательно,
$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4}}{2}.$$
- Пусть $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ – конформный автоморфизм с матрицей A.
- Если $|\mathrm{tr}(A)| < 2$, то f эллиптический.
- Если $|\mathrm{tr}(A)| = 2$, то f параболический.
- Если $|\mathrm{tr}(A)| > 2$, то f гиперболический.

Карл Фридрих Гаусс (1777 — 1855)

- Открыл неевклидову геометрию, но ничего не опубликовал на эту тему.
- Ввел понятие кривизны поверхности.



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- https://wikipedia.org

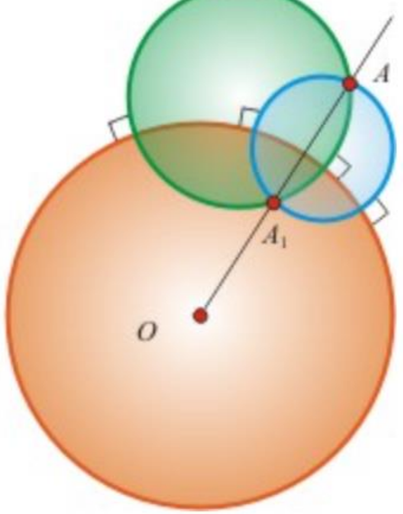
ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

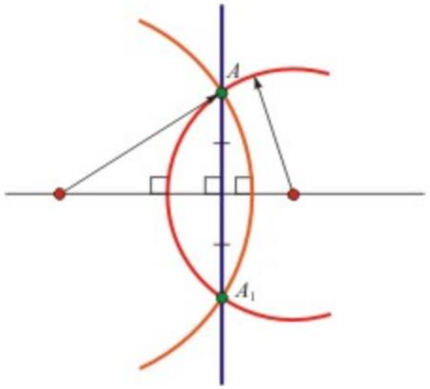
Лекция 17. Принцип симметрии.

Теория функций комплексного переменного

Симметрия (инверсия) относительно обобщенной окружности

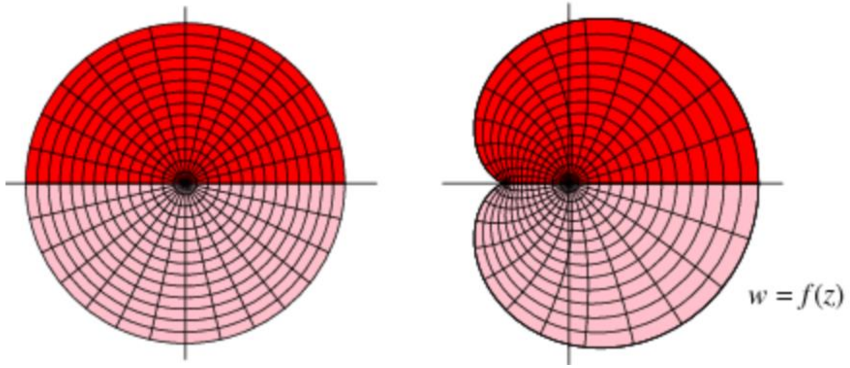


- Точки A, A_1 симметричны относительно обобщенной окружности S, если все окружности через A, A_1 перпендикулярны S.
- Симметрия относительно окружности – инверсия.
- Симметрия относительно прямой – отражение.



Симметричное конформное отображение

- Пусть C, C' – обобщенные окружности, а $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ открыто.
- Рассмотрим голоморфное отображение $f\colon U \to \overline{\mathbb{C}}$. Положим $\tilde{f} = S_{C'} \circ f \circ S_C$.
- При отображении $\tilde{f}$ точка, C -симметричная точке z, переходит в точку, C' -симметричную точке $f(z)$.
- Тогда $\tilde{f}\colon S_C(U) \to \overline{\mathbb{C}}$ тоже голоморфно.

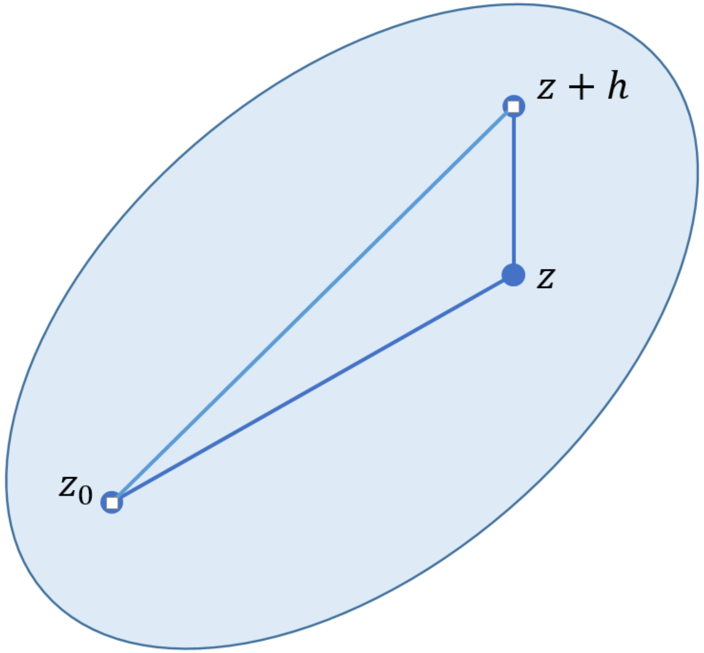


Принцип симметрии Шварца

- Пусть теперь $\overline{U} \cap \overline{S_C(U)}$ содержит открытую дугу γ обобщенной окружности C, причем $U \cap S_C(U) = \emptyset$.
- Пусть отображение f продолжается до непрерывного отображения $F: U \cup \gamma \to \mathbb{C}$.
- Пусть $f(\gamma) \subset C'$. Тогда отображение g, равное F на $U \cup \gamma$ и равное $\tilde{f}$ на $S_C(U)$, голоморфно на $U \cup \gamma \cup S_C(U)$.
- Голоморфность выводится из теоремы Мореры.

Теорема Мореры

Предложение 5.15 (теорема Мореры). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Если непрерывная функция $f : U \to \mathbb{C}$ обладает тем свойством, что $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ для всякого треугольника $\Delta \subset U$, то f голоморфна на U.*

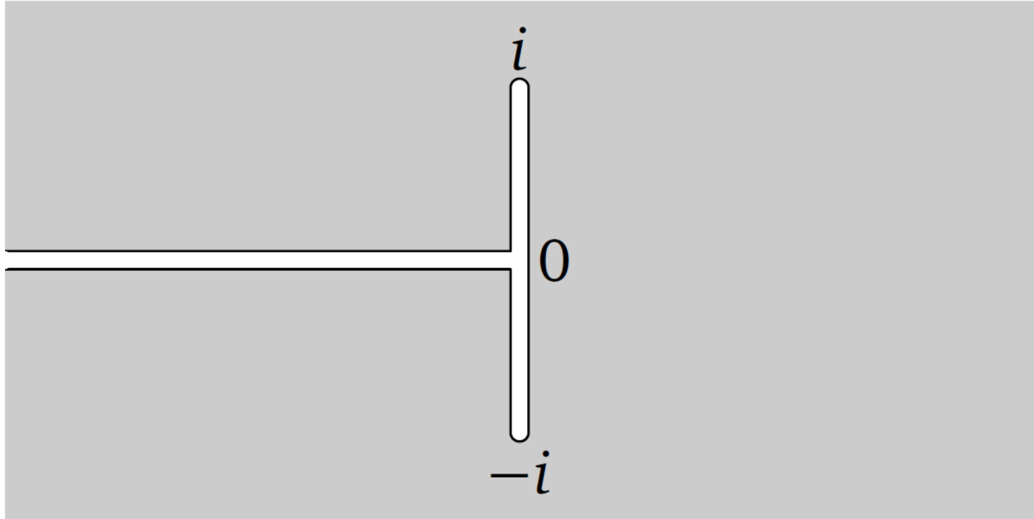


Идея доказательства. 1) Построим первообразную как раньше.

2) Первообразная голоморфна, следовательно, дважды дифференцируема.

Пример применения принципа симметрии

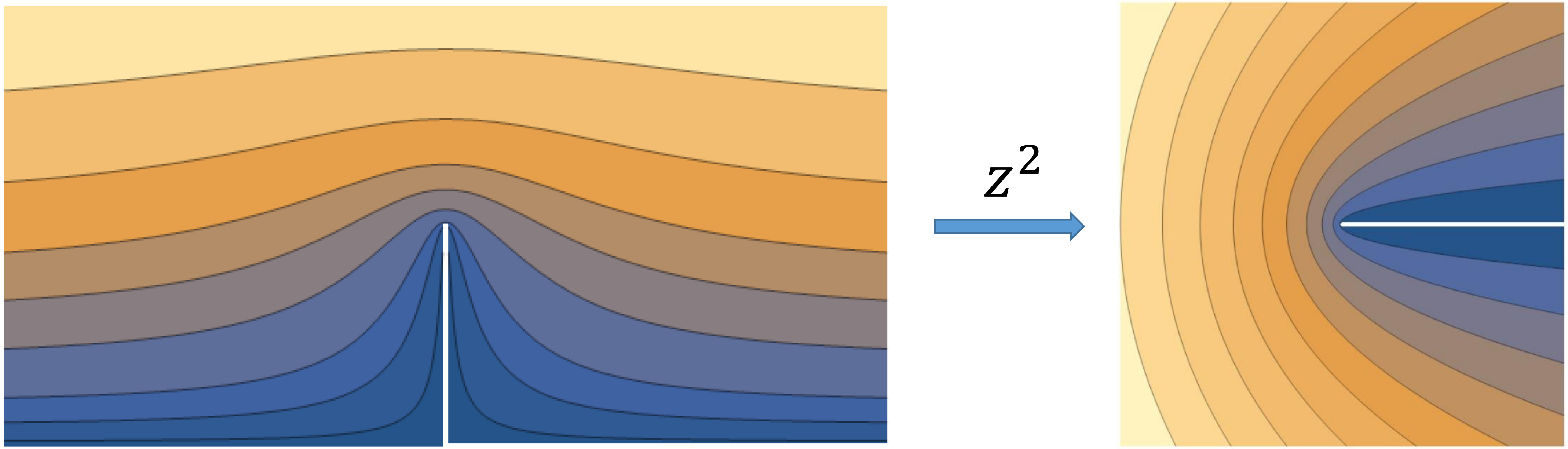
- Вспомним конформный изоморфизм между $U = \mathbb{H} \setminus [0, i]$ и $V = \mathbb{H}$.
- Это $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$.
- Согласно принципу симметрии, f переводит изображенную справа область в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$.



Значит, изоморфизм между изображенной областью и верхней полуплоскостью можно записать как

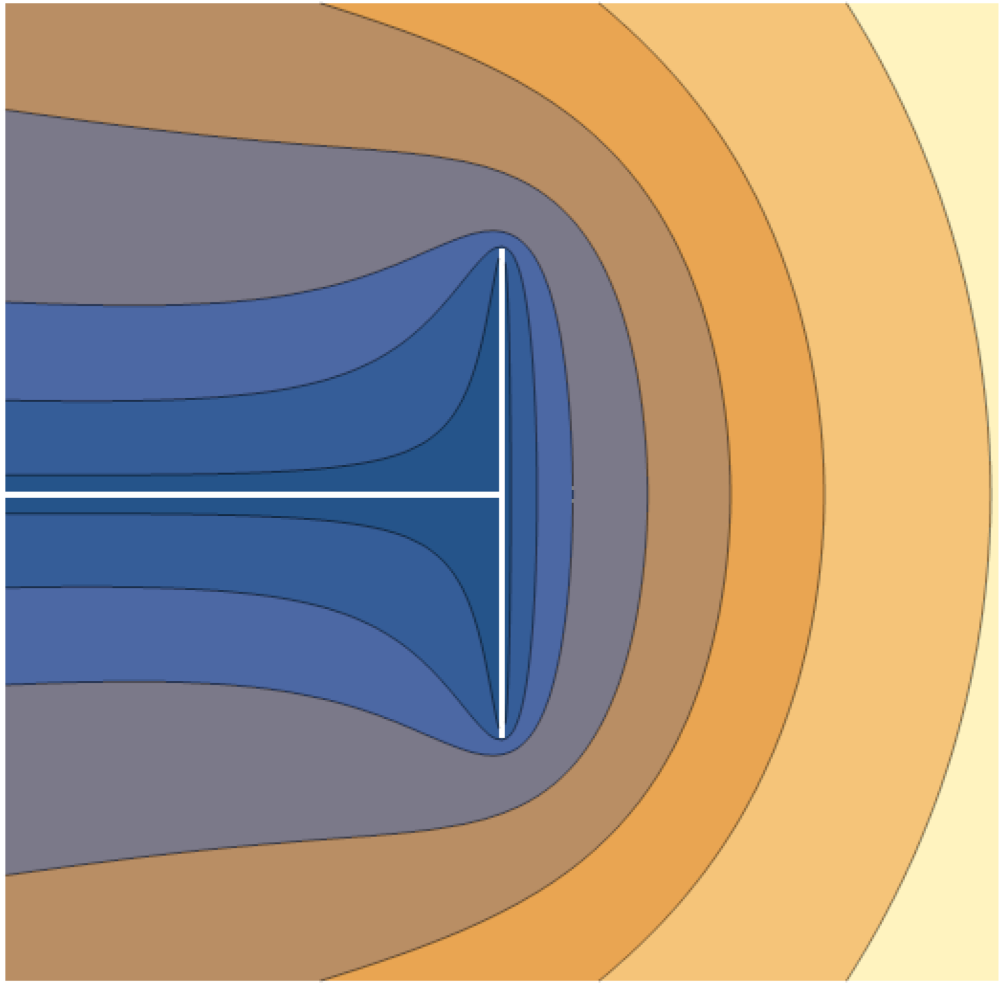
$$z \mapsto i\sqrt{\sqrt{z^2+1} - 1}$$

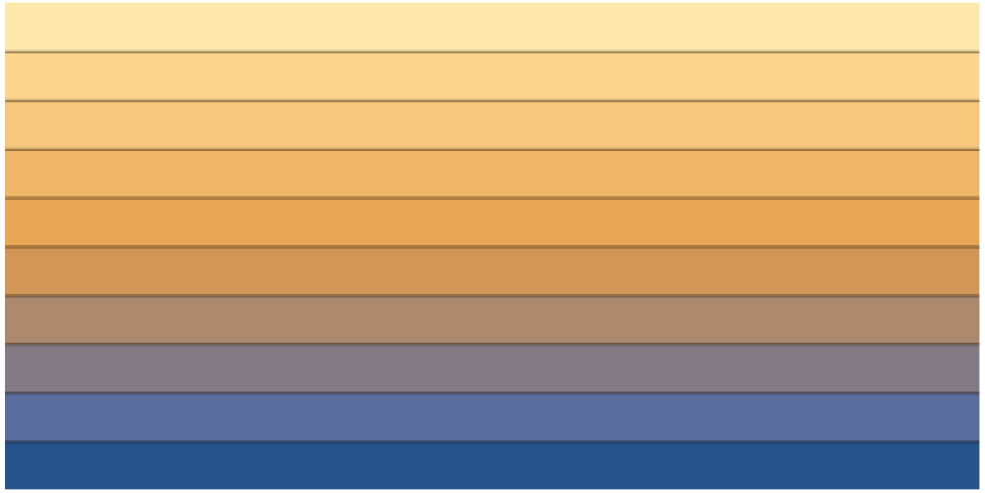
Отображение на полуплоскость: полуплоскость с разрезом



$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$$

Пример применения принципа симметрии





$$z \mapsto i\sqrt{\sqrt{z^2+1}-1}$$

Карл Герман Шварц (1843 – 1921)

Немецкий математик, член Берлинской академии наук, профессор Галльского, Цюрихского, Гёттингенского и Берлинского университетов.

Ученик Куммера и Вейерштрасса.

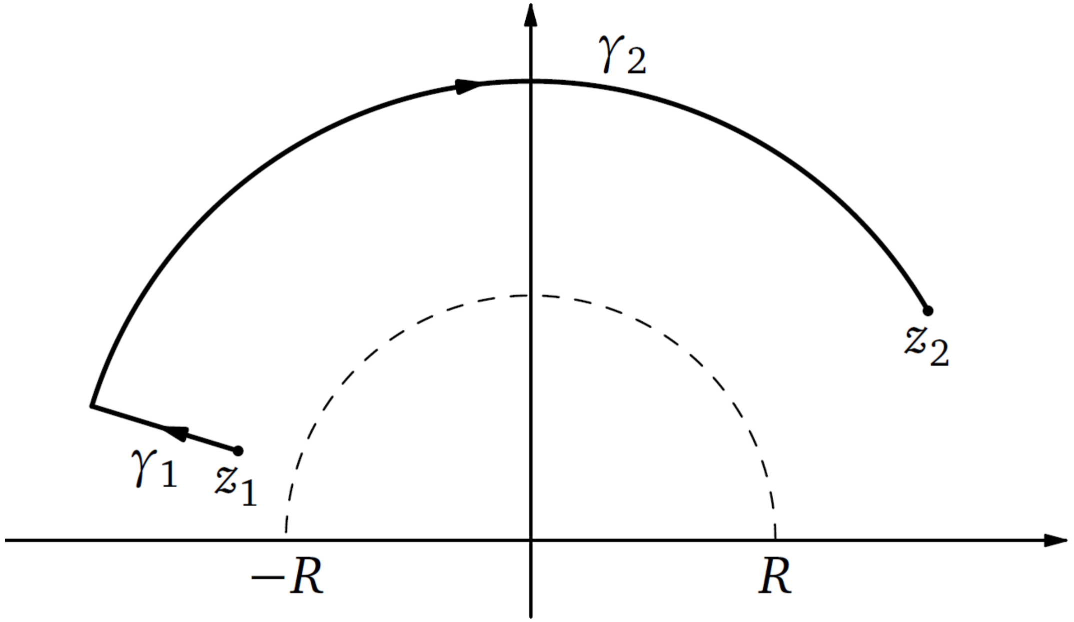
Исследования по конформным отображениям и задачам геометрической оптимизации.

Глава добровольной бригады содействия пожарным.

Отображение из $\mathbb{H}$ на прямоугольник

- Пусть $a_1 < a_2 < a_3$. Определим $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}}.$
- Выбор ветвей: $\sqrt{z-a_j} > 0.$
- Функция F продолжается до непрерывной функции из $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в $\mathbb{C}$.

В самом деле, если $|z_1| \approx R$ и $|z_2| \approx R$, то $|z_1 - z_2|$ имеет порядок R, а подынтегральное выражение имеет порядок $R^{-\frac{3}{2}}$. Отсюда вытекает непрерывность в точке ∞.

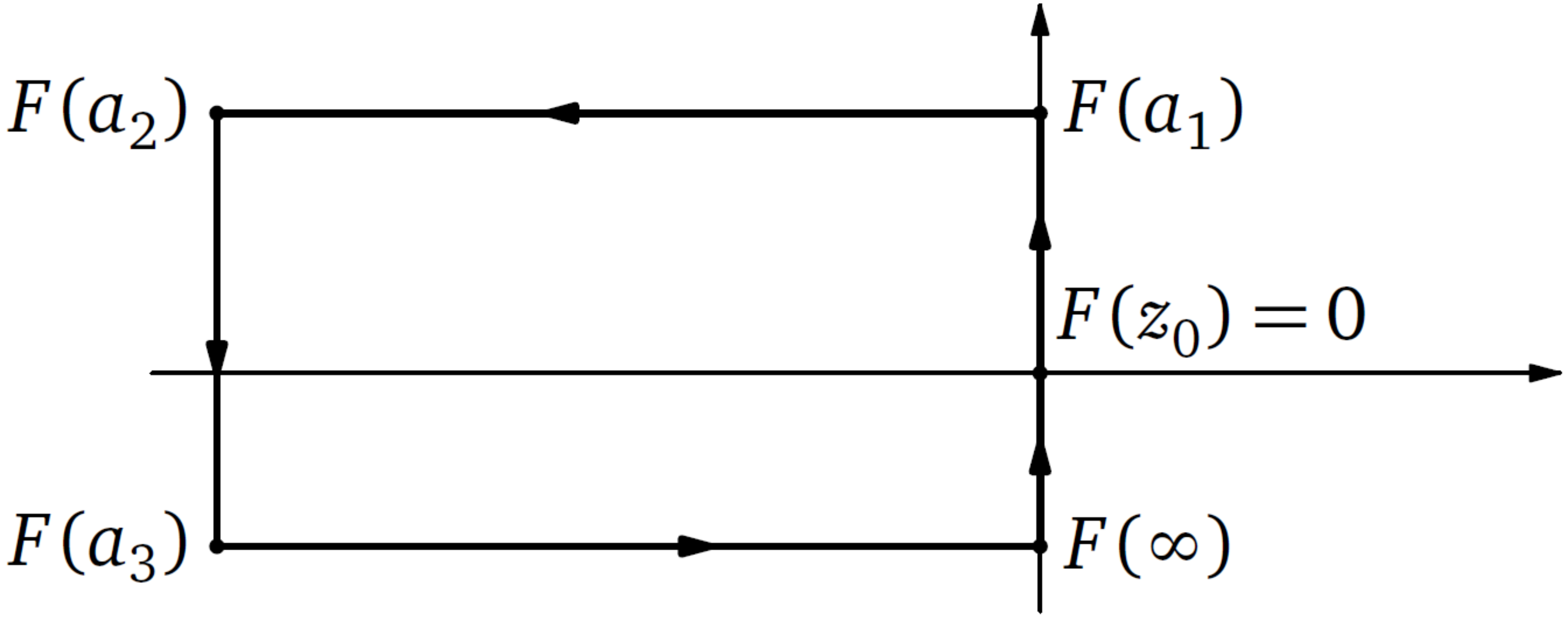


Образ множества $\ell = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Предложение 10.9. *Функция F переводит кривую $\ell \subset \overline{\mathbb{C}}$ (действительную ось с добавленной точкой ∞) в границу прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Когда ℓ однократно обходится в направлении слева направо, граница прямоугольника также однократно обходится в положительном направлении.*

t	$(-\infty; a_1)$	$(a_1; a_2)$	$(a_2; a_3)$	$(a_3; +\infty)$
$\dfrac{1}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}}$	$i\alpha,\ \alpha > 0$	< 0	$i\alpha,\ \alpha < 0$	> 0

Образ множества $\ell = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.



t	$(-\infty; a_1)$	$(a_1; a_2)$	$(a_2; a_3)$	$(a_3; +\infty)$
$\dfrac{1}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}}$	$i\alpha,\ \alpha > 0$	< 0	$i\alpha,\ \alpha < 0$	> 0

Отображение из $\mathbb{H}$ на прямоугольник

Предложение 10.10. *Функция F, определенная выше, осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность прямоугольника со сторонами, параллельными осям. При этом отображение F продолжается до непрерывной биекции между $\bar{H} = H \cup \ell$ и замыканием прямоугольника; точки a_1, a_2, a_3 и ∞ переходят в вершины прямоугольника.*

- Положим $\Pi = F(\mathbb{H})$. Пусть u, v – длины горизонтальной и вертикальной сторон прямоугольника Π.
- Рассмотрим обратное конформное отображение $G = F^{-1}: \Pi \to \mathbb{H}$.

Свойства отображения $G = F^{-1}: \Pi \to \mathbb{H}$.

Предложение 10.11. *Голоморфное отображение* $G\colon \Pi \to H$ *продолжается до функции, мероморфной на всем* $\mathbb{C}$. *Эта продолженная функция* G *обладает следующими свойствами.*

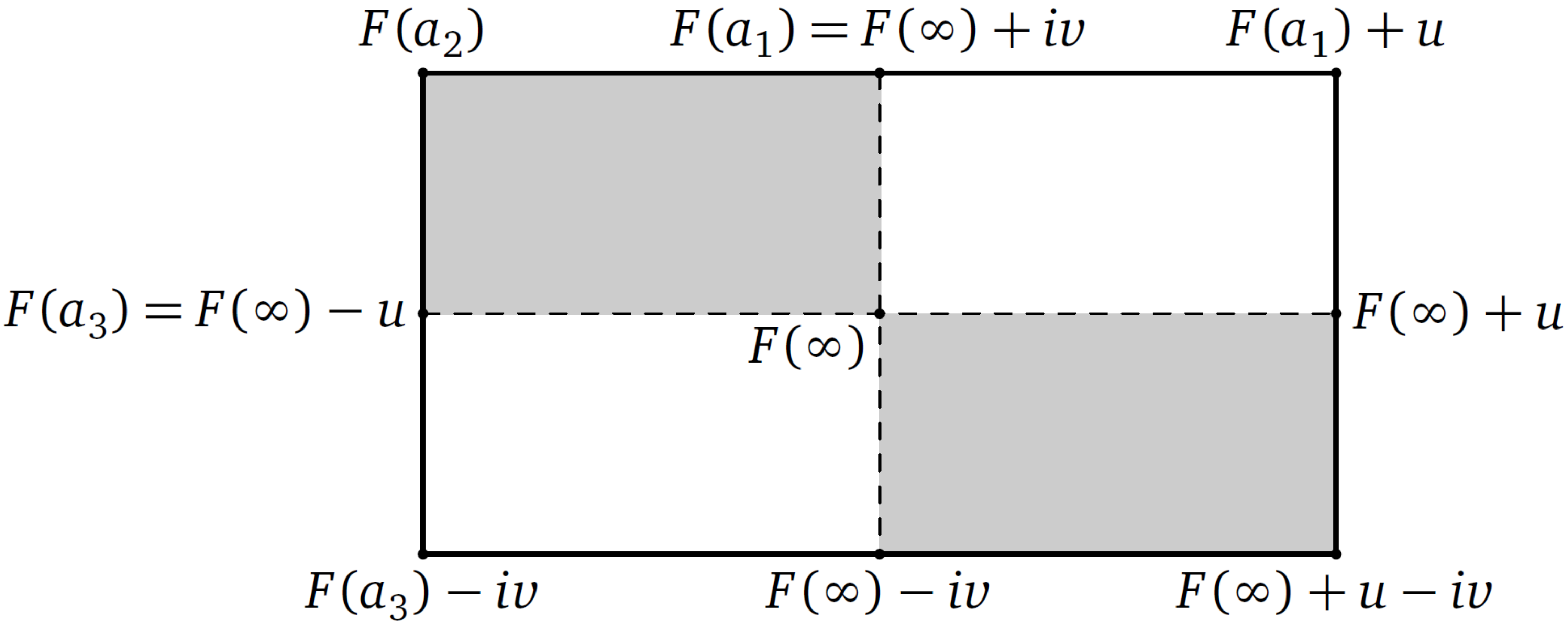
(1) *Функция* G *дважды периодична с периодами* $2u$ *и* $2iv$: *имеем* $G(z+2mu+2inv) = G(z)$ *для всякого* z *и всяких* $m, n \in \mathbb{Z}$.

(2) *Если* p — *любая из вершин прямоугольника* Π, *то* $G(p-z) = G(p+z)$ *для всех* z.

(3) *Функция* G *имеет полюсы порядка* 2 *в точках* $F(\infty) + mu + nv$ *для всех* $m, n \in \mathbb{Z}$, *а других полюсов не имеет.*

(4) *Если* p — *вершина прямоугольника* Π, *отличная от* $F(\infty)$, *то во всех точках* $p + mu + inv$, $m, n \in \mathbb{Z}$, *функция* G *разветвлена с индексом* 2; *во всех других точках, где она голоморфна, функция* G *неразветвлена.*

Замощение плоскости прямоугольниками



Эллиптические функции

Определение 11.9. *Решеткой* в $\mathbb{C}$ называется подгруппа по сложению $\Gamma \subset \mathbb{C}$, порожденная двумя образующими $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, линейно независимыми над $\mathbb{R}$.

Иными словами, $\Gamma = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, где ω_1 и ω_2 — ненулевые комплексные числа, отношение которых не лежит в $\mathbb{R}$.

Определение 11.10. *Эллиптической функцией* относительно решетки $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется мероморфная функция f на $\mathbb{C}$, для которой $f(z+u) = f(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$ и $u \in \Gamma$.

- Построенная выше функция G доставляет пример эллиптической функции. Она получена обращением эллиптического интеграла.

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- https://wikipedia.org
- https://mathworld.wolfram.com/

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 18. Теорема Римана.

Теория функций комплексного переменного

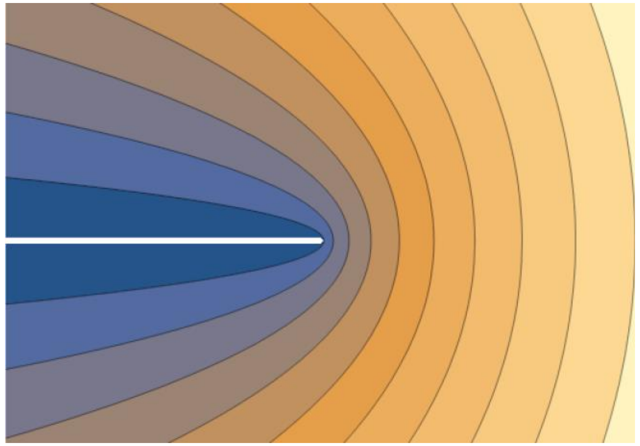
Теорема Римана об отображении

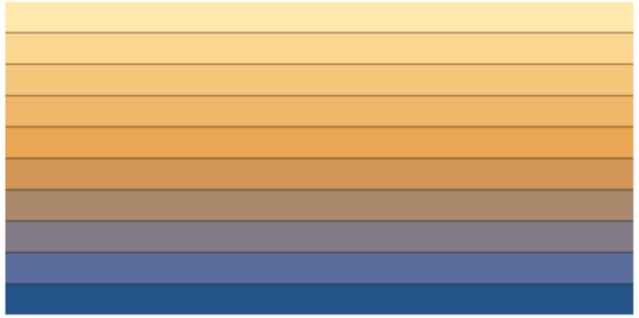
Теорема 12.1 (теорема Римана об отображении). *Если $U \subset \mathbb{C}$ — односвязное открытое множество, отличное от всего $\mathbb{C}$, то U изоморфно единичному кругу $D = \{z : |z| < 1\}$.*

- Множества $\mathbb{C}$ и $\mathbb{D}$ конформно неизоморфны.
- Следствие теоремы Римана: любое открытое односвязное подмножество плоскости гомеоморфно диску.
- Если U не односвязно, то U негомеоморфно, а значит, и неизоморфно, диску.

Шаг 1: конформное вложение $U \hookrightarrow \mathbb{D}$

- Пусть $c \in \mathbb{C} \setminus U$. Рассмотрим $f_0(z) = \sqrt{z-c}$ и $W = f_0(U)$.
- Имеем $W \cap -W = \emptyset$.
- Выберем открытый диск в $-W$ и отобразим его в $\{|z| > 1\}$.
- Получим конформное вложение $f_1 \colon U \to \mathbb{D}$.
- Пусть $\mathcal{F}$ – множество всех таких вложений. Доказано, что $\mathcal{F} \neq \emptyset$.





Шаг 2: оптимизационная задача

- Фиксируем $a \in U$. Рассмотрим такую функцию $f \in \mathcal{F}$, для которой
$$\|f'(a)\| = \sup_{g \in \mathcal{F}} \|g'(a)\|$$
(норма берется в метрике Пуанкаре).
- Если $f(U) \neq \mathbb{D}$, то $\exists\, b \in \mathbb{D}$: $b \notin f(U)$. Будем считать, что $b = 0$.
- Положим $g(z) = \sqrt{f(z)}$. Тогда $\|g'(a)\| > \|f'(a)\|$ по лемме Шварца (теореме Пика), противоречие.
- Таким образом, f – обратимое голоморфное вложение, а значит, конформный изоморфизм.

Шаг 3: существование оптимального отображения

- Семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно:
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall f \in \mathcal{F}\ \ \ \mathrm{dist}(x, y) < \delta\ \Longrightarrow \mathrm{dist}\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$
- Метрику Пуанкаре можно заменить евклидовой, так как
$$\mathrm{dist}(z, w) \geq |z - w|$$
- Рассмотрим последовательность $f_n \in \mathcal{F}$, такую, что $\|f_n'(a)\| \to \sup_{g \in \mathcal{F}} \|g'(a)\|$.
- По теореме Арцела-Асколи, для каждого компакта $K \subset U$ существует подпоследовательность f_{n_m}, равномерно сходящаяся на K.

Теорема Арцела-Асколи

Теорема 12.12 (теорема Арцела́—Асколи). *Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, и пусть $\mathscr{S}$ — семейство комплекснозначных непрерывных функций на K, удовлетворяющее следующим условиям:*

(1) *существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $f \in \mathscr{S}$ и $x \in K$;*

(2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|z_1 - z_2| \leqslant \delta$, где $z_1, z_2 \in K$, следует неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant \varepsilon$ для всех $f \in \mathscr{S}$.*

Тогда любая последовательность функций из $\mathscr{S}$ содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на K.

Завершение доказательства

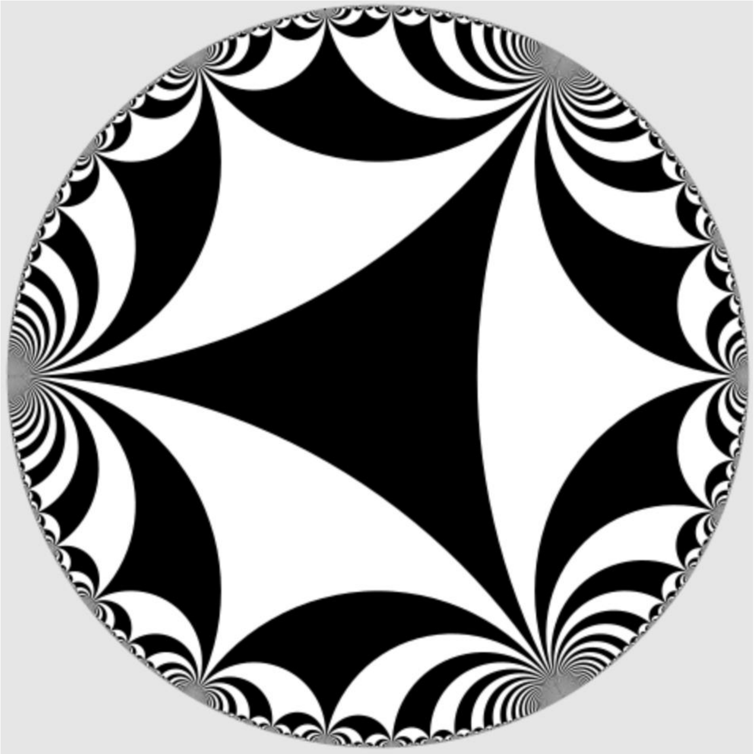
- Диагональным методом получаем последовательность $g_n \in \mathcal{F}$, равномерно сходящуюся на компактах и такую, что $\|g_n'(a)\| \to \sup\limits_{g \in \mathcal{F}} \|g'(a)\|$.
- Предел $f = \lim\limits_{n \to \infty} g_n$ является голоморфной функцией (теорема Мореры).
- Также f является вложением (принцип аргумента).

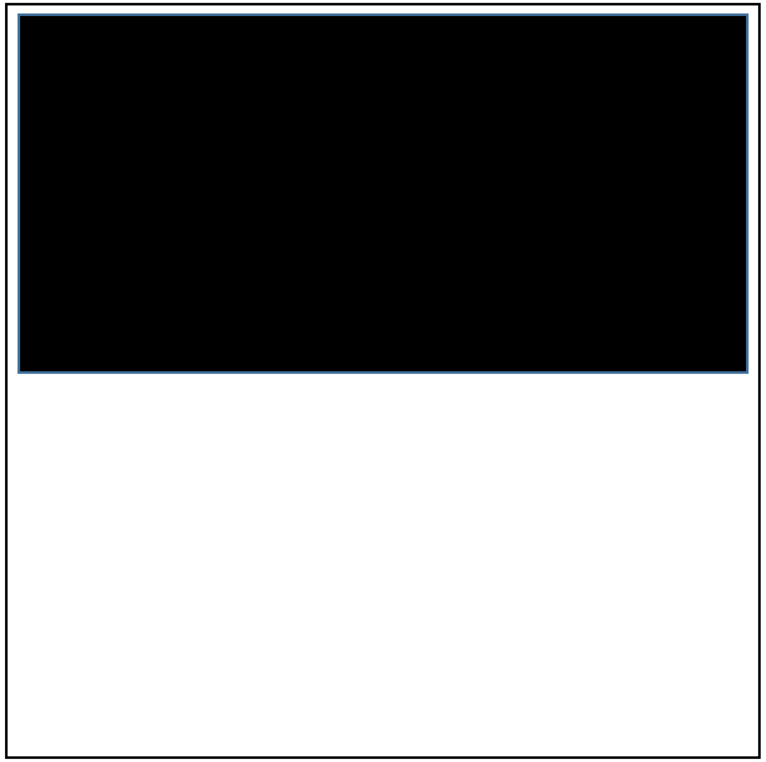
Бернхард Риман (1826 – 1866)

- Немецкий математик, механик и физик.
- Член Берлинской и Парижской академий, Лондонского королевского общества.
- Комплексный анализ, дифференциальная геометрия, математическая физика, арифметика, топология.

Теорема об униформизации

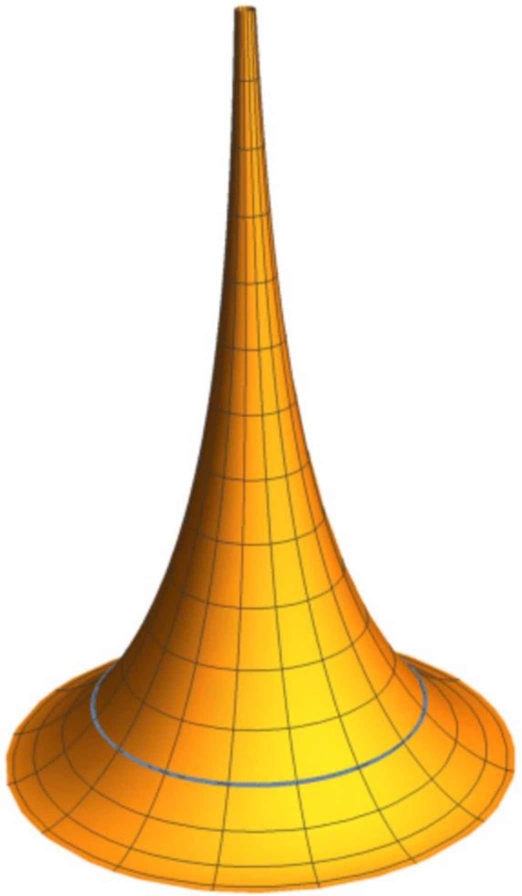
Теорема. *Пусть* $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ *открыто, причем* $\left|\overline{\mathbb{C}} \setminus V\right| > 2$. *Существует голоморфное накрытие* $\pi\colon \mathbb{D} \to V$.





Метрика Пуанкаре на $V \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\left|\overline{\mathbb{C}} \setminus V\right| > 2$

- Голоморфное накрытие $\pi: \mathbb{D} \to V$ позволяет перенести метрику Пуанкаре на V: $\|\pi_*(v)\| \coloneqq \|v\|$.
- Таким образом, можно говорить про длины кривых и т.д.
- Голоморфное отображение $f: V \to V$ является либо локальной изометрией, либо сжатием в метрике Пуанкаре.
- Проколы выглядят (относительно метрики Пуанкаре) как каспы.



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Дж. Милнор, «Голоморфная динамика», РиХД 2000.
- https://wikipedia.org
- https://mathworld.wolfram.com/

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

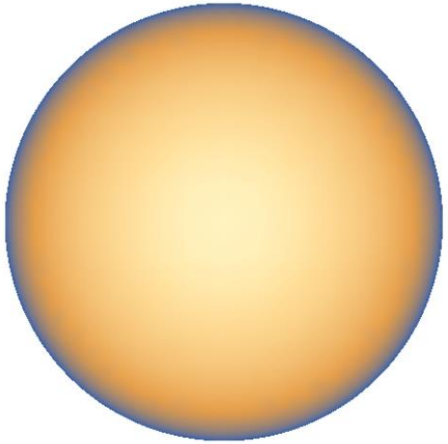
Лекция 19. Теоремы Пикара.

Теория функций комплексного переменного

Гиперболическая метрика

Определение 12.18. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Для всякой точки $a \in U$ обозначим через $\Psi_U(a)$ верхнюю грань чисел $|\psi'(0)|$ для всевозможных голоморфных отображений $\psi\colon D_1 = D \to U$, для которых $\psi(0) = a$. Тогда число $\rho_U(a) = 1/\Psi_U(a)$ называется *плотностью гиперболической метрики* на множестве U в точке a. (Мы не исключаем случая $\Psi_U(a) = +\infty$; тогда $\rho_U(a) = 0$.)

- Если $U = \mathbb{D}$, то $\rho_U(0) = 1$. Следовательно, гиперболическая метрика совпадает с $\rho_U(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$.



Гиперболическая длина

Предложение 12.19. *Если $U \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, отличная от $\mathbb{C}$, то для $a \in U$ имеем $\rho_U(a) = |F'(a)|$, где $F: U \to D$ — конформное отображение, переводящее точку a в нуль.*

Предложение 12.21. *Если $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость, то для всякой $a \in H$ имеем $\rho_H(a) = 1/(2 \operatorname{Im} a)$.*

Определение 12.22. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — область, и пусть $\gamma: [p;q] \to$ $\to U$ — кусочно гладкий путь. Тогда *гиперболической длиной* пути γ называется число

$$\text{h-length}_U(\gamma) = \int_\gamma \rho_U(z)\,|dz|. \tag{12.11}$$

Голоморфные отображения сжимают гиперболическую метрику

Предложение 12.23. *Пусть $U, V \subset \mathbb{C}$ — связные открытые множества, и пусть $f: U \to V$ — голоморфное отображение.*

(1) *Для всякой $a \in U$ имеем $\rho_V(f(a)) \cdot |f'(a)| \leqslant \rho_U(a)$.*

(2) *Для всякого кусочно гладкого пути $\gamma: [p; q] \to U$ имеем*

$$\text{h-length}_V(f \circ \gamma) \leqslant \text{h-length}_U(\gamma).$$

Следствие 12.24. *Если $V \subset U$ — связные открытые подмножества в $\mathbb{C}$, то $\rho_V(a) \geqslant \rho_U(a)$ для всякой точки $a \in V$.*

Следствие 12.25. *Если $f: U \to V$ — конформный изоморфизм, то:*

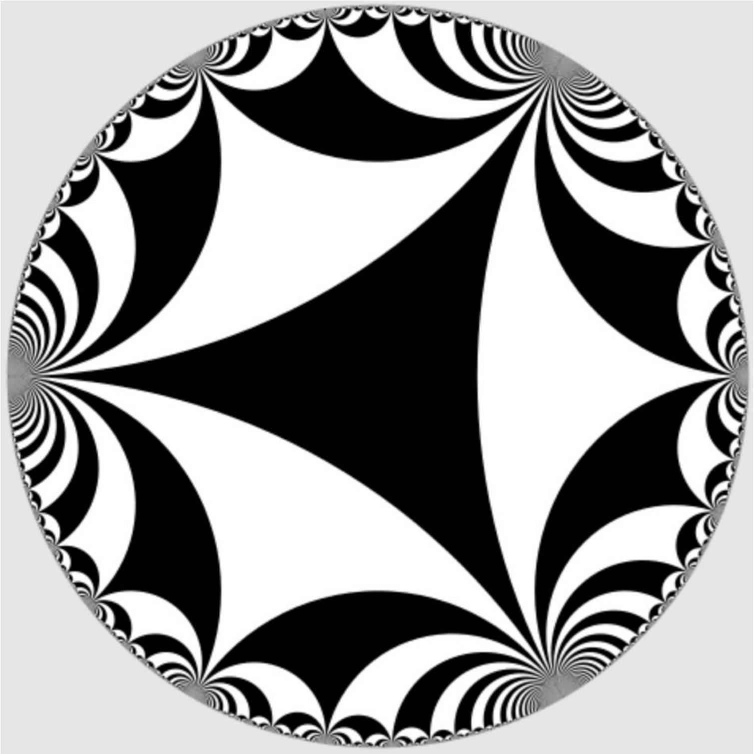
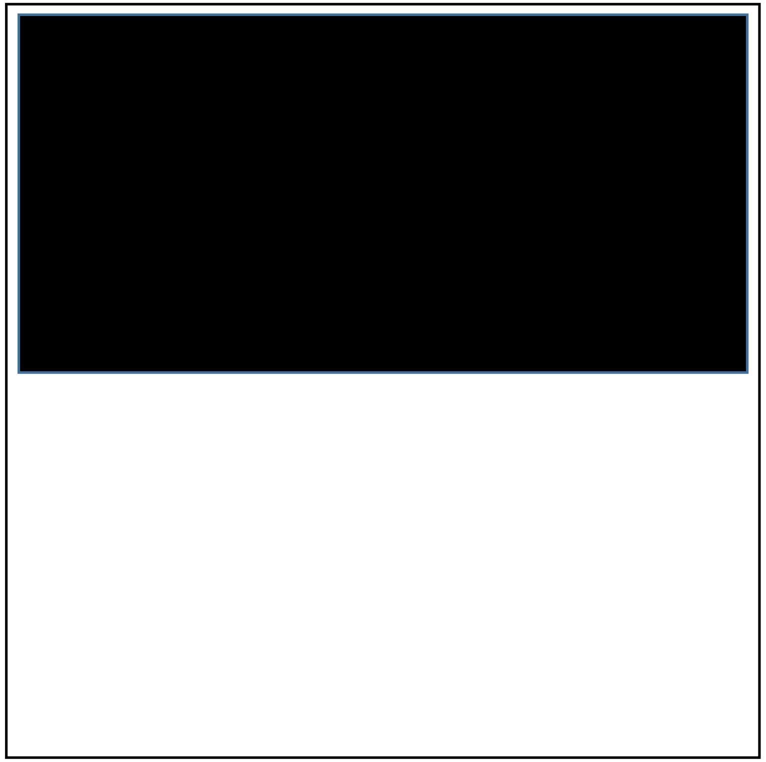
(1) *для всякой $a \in U$ имеем $\rho_V(f(a)) = \rho_U(a)/|f'(a)|$;*

(2) *если $\gamma: [p; q] \to U$ — кусочно гладкий путь, то*

$$\text{h-length}_V(f \circ \gamma) = \text{h-length}_U(\gamma).$$

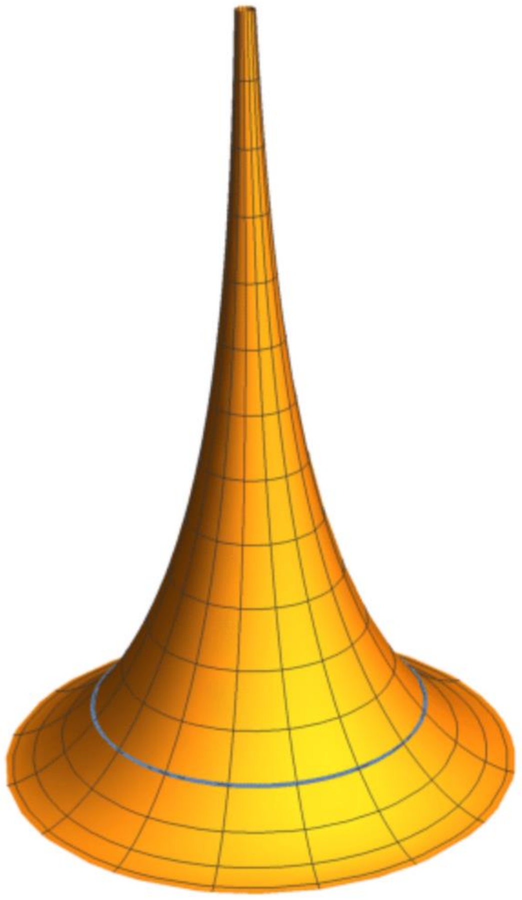
Теорема об униформизации

Теорема. *Пусть $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ открыто, причем $\left|\overline{\mathbb{C}} \setminus V\right| > 2$. Существует голоморфное накрытие $\pi\colon \mathbb{D} \to V$.*

Метрика Пуанкаре на $V \subset \overline{\mathbb{C}}, \left|\overline{\mathbb{C}} \setminus V\right| > 2$

- Голоморфное накрытие $\pi\colon \mathbb{D} \to V$ позволяет перенести метрику Пуанкаре на V: $\|\pi_*(v)\| \coloneqq \|v\|$.
- Это и есть *гиперболическая метрика*, т.к. любое голоморфное отображение $f\colon \mathbb{D} \to V$ имеет вид $f = \pi \circ g$ для некоторого голоморфного $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.
- Проколы выглядят (относительно метрики Пуанкаре) как каспы.

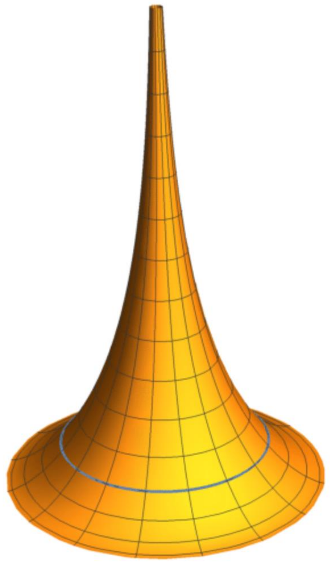


Гиперболическая метрика около проколов

Предложение 12.26. *Пусть* $D^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ — *проколотый единичный диск. Тогда для всякой* $a \in D^*$ *имеем*

$$\rho_{D^*}(a) = 1/(2|a|\ln(1/|a|)).$$

- Можно показать, что вблизи любой проколотой точки гиперболическая метрика выглядит так (с точностью до умножения на функцию, ограниченную сверху и снизу двумя положительными константами). Частный случай этого утверждения – **теорема Ландау** из учебника.
- В частности, площадь проколотой окрестности конечна!



Малая и большая теоремы Пикара

Малая теорема Пикара. *Областью значений целой функции, отличной от константы, является вся комплексная плоскость, за исключением, быть может, лишь одной точки*.

Доказательство. Пусть $f: \mathbb{C} \to V$ целая, $|\mathbb{C} \setminus V| > 1$. Поднимем на универсальное накрытие: $g: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$.

Большая теорема Пикара. *Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $U(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и имеет в точке z_0 существенную особенность. Тогда f принимает в $U(z_0)$ все значения, кроме, быть может, одного, бесконечное число раз.*

Идея доказательства: метрика Пуанкаре.

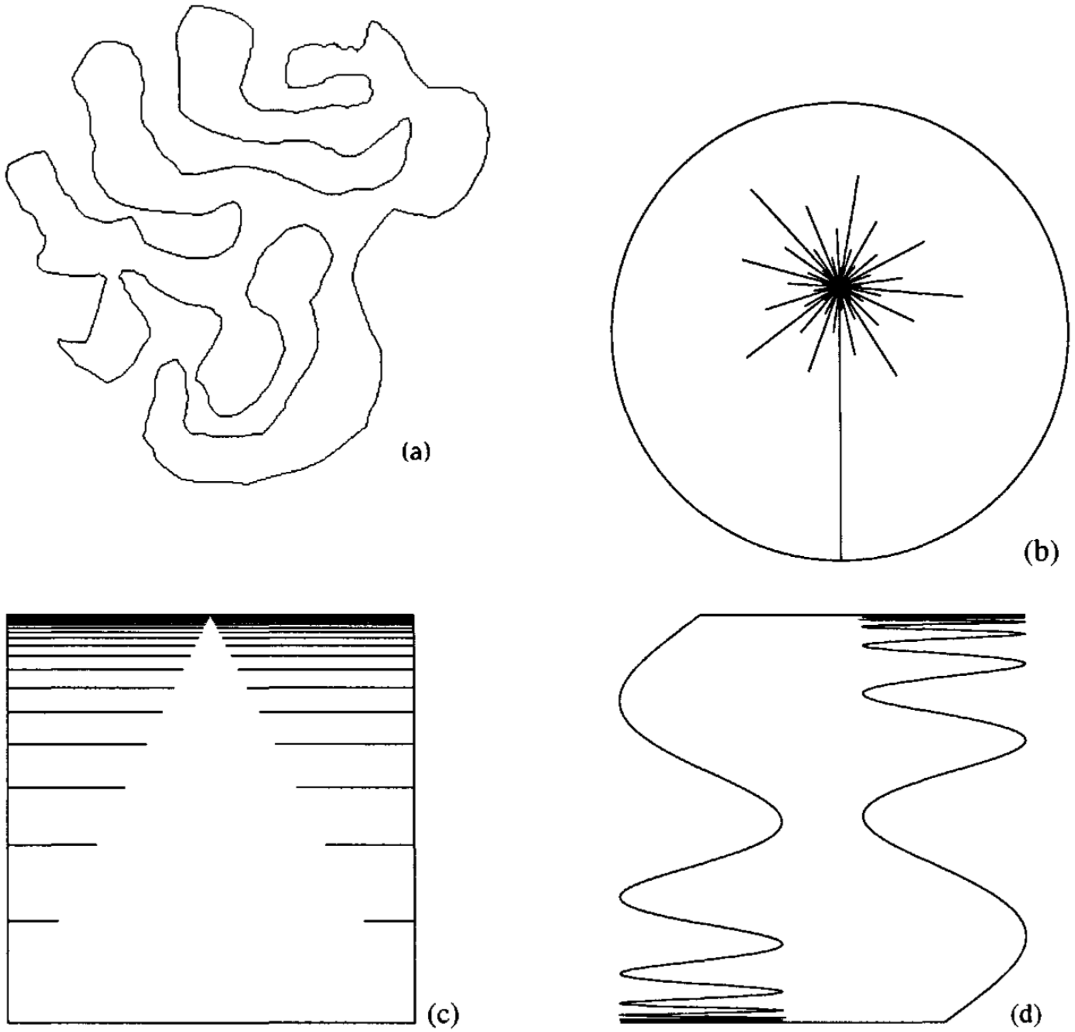
Эмиль Пикар (1856 – 1941)

- Член (с 1910 – президент) Парижской академии наук, член французской академии, член-корр Петербургской АН, почетный член АН СССР, иностранный член АН США, член Лондонского королевского общества.
- Руководил ICM в 1908 (Рим) и 1920 (Страсбург).

Принцип соответствия границ

- Пусть $U \subset \mathbb{C}$ – открытая односвязная область, $U \neq \mathbb{C}$.
- Рассмотрим конформный изоморфизм $\phi\colon \mathbb{D} \to U$ (отображение Римана).
- **Вопрос**. *Существует ли непрерывное продолжение $\overline{\phi}\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{U}$?*
- Не всегда. Пример: $U = \{x + iy |\ y > \sin(1/x)\}$.
- **Теорема Каратеодори**. *Отображение Римана допускает непрерывное отображение на границу тогда и только тогда, когда ∂U локально связна*.
- В частности, это так, если граница ∂U кусочно гладкая.

Границы четырех односвязных областей



Неравенство длина-площадь

- Пусть $\rho(z)|dz|$ – конформная метрика на $I^2 = I \times I,\ I = [0,1]$.
- Площадь квадрата и длина горизонтального отрезка:

$$\mathcal{A} = \int\int_{I^2} \rho(x+iy)^2\, dx\, dy, \quad L(y) = \int_{x\in I} \rho(x+iy)\, dx.$$

17.1. Лемма. Неравенство длин–площадей. *Если площадь $\mathcal{A}$ конечна, то длина $L(y)$ конечна для почти всех значений $y \in I$, и выполняется неравенство*

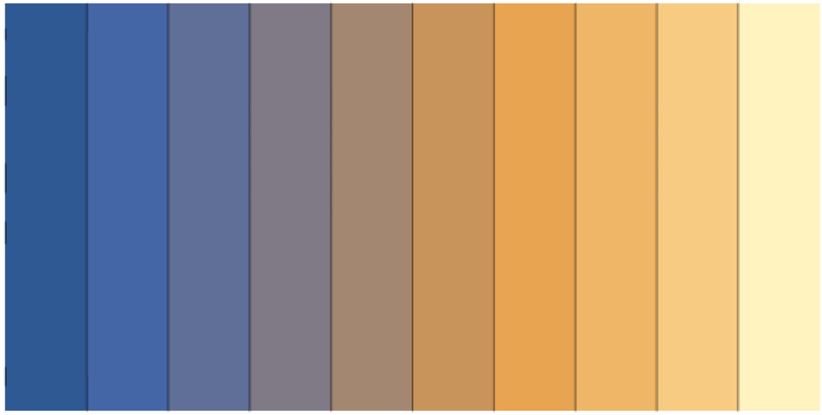
$$\frac{1}{\delta}\int\limits_I (L(y))^2 dy \leqslant \mathcal{A}. \qquad (17:1)$$

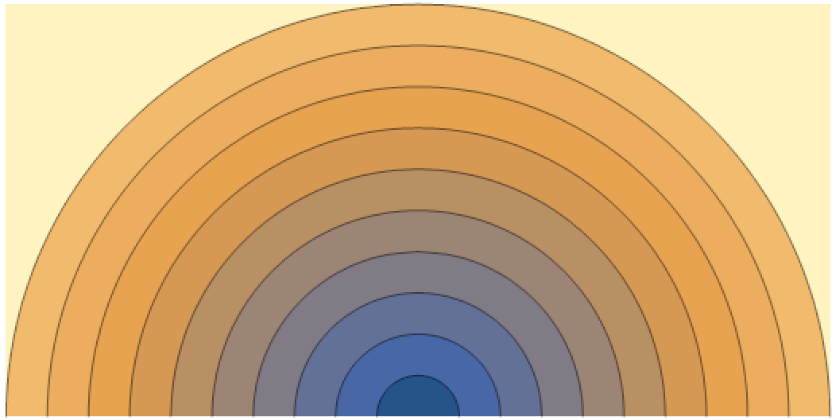
Выбор конформной метрики

- Рассмотрим конформный изоморфизм $f: \mathbb{H} \to U$, где U – область с «хорошей границей».
- Метрика на полуполосе
$$\{x + iy \in \mathbb{C} |\ x < -M, y \in [0, \pi]\}$$

индуцируется голоморфным отображением $g(u) = f(e^u)$.

- Относительно этой метрики площадь полуполосы конечна.
- Значит, короткие вертикальные отрезки встречаются сколь угодно далеко слева.





В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Дж. Милнор, «Голоморфная динамика», РиХД 2000.
- https://wikipedia.org
- https://mathworld.wolfram.com/

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

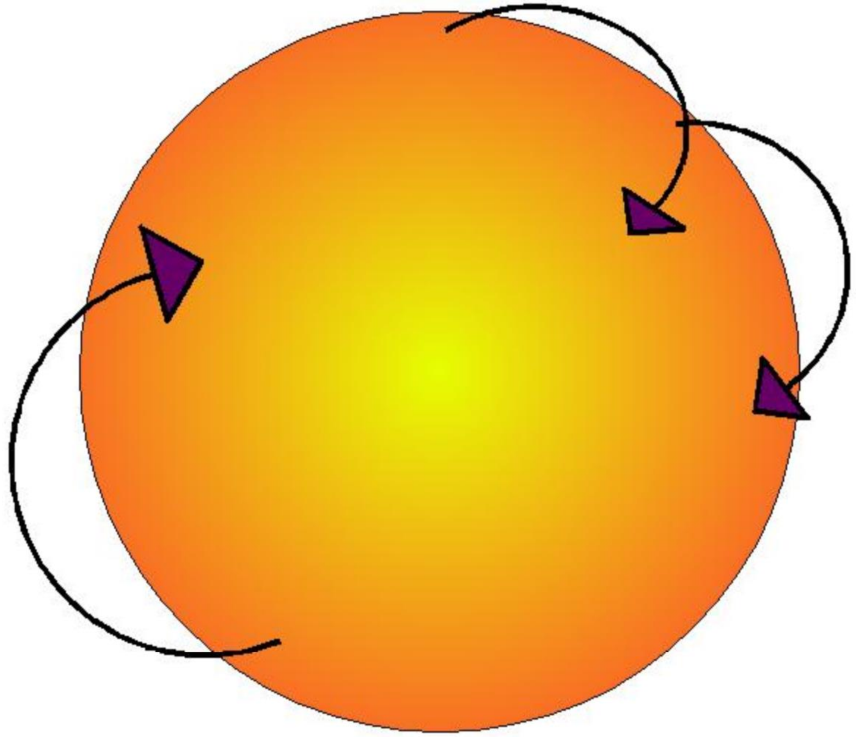
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 20. Эллиптические функции

Теория функций комплексного переменного

Что такое рациональная функция над $\mathbb{C}$

- Отношение двух многочленов с комплексными коэффициентами.
- Элемент расширения $\mathbb{C}(x)$, полученного присоединением к полю $\mathbb{C}$ трансцендентного элемента x.
- Мероморфная функция $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.
- Голоморфное отображение из сферы Римана в себя.



Степень рациональной функции

- Степень рациональной функции $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ определяется как $d = \deg(f) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- У f конечное число ($\leq 2d - 2$) критических точек и критических значений.
- Если c не является критическим значением, то $|f^{-1}(c)| = d$.
- Гомоморфизм $f_*: \pi_2(\mathbb{S}^2) \to \pi_2(\mathbb{S}^2)$ является умножением на d.

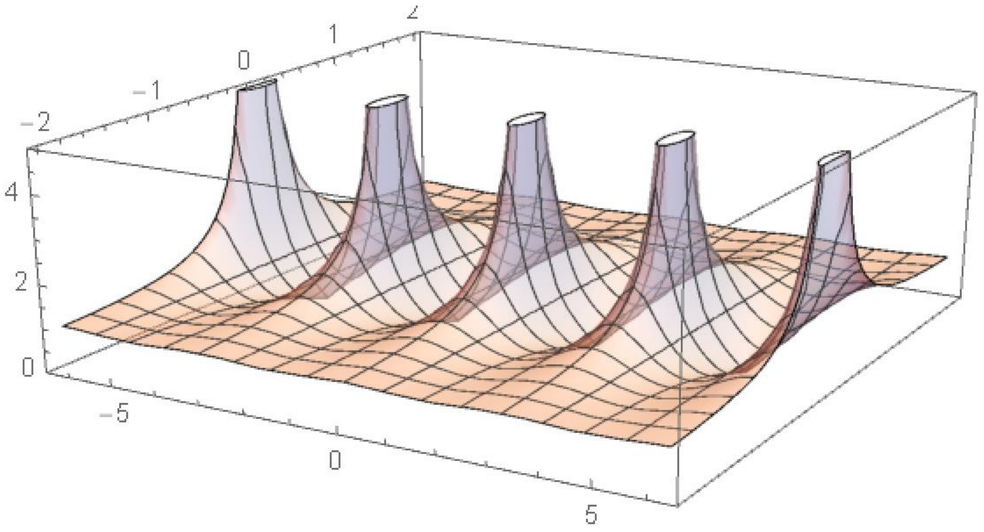
Функция с полюсами во всех $n \in \mathbb{Z}$

- Наивная идея – рассмотреть сумму ряда $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}.$
- Но этот ряд не является абсолютно сходящимся: $\left|\frac{1}{z-n}\right| \geqslant \frac{1}{2n}$
- Поэтому рассмотрим поправленный ряд $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$
- Производная функции f является четной функцией периода 1: $f'(z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$
- Отсюда можно вывести, что сама функция f нечетная периода 1. $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}.$

$$f(1/2) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4}-n^2} = 2 - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 2 - 2\cdot 1 = 0.$$

Полученная функция совпадает с $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$

- Полюсы в тех же точках.
- Достаточно доказать, что разность ограниченна.
- Следствия: разложения для котангенса.



$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \left(\frac{1}{z-\pi n} - \frac{1}{\pi n} \right),$$

$$\frac{2z}{z^2-\pi^2 n^2} = -\frac{2z}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{1}{1 - z^2/(\pi^2 n^2)} = -\frac{2z}{\pi^2 n^2}\left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2} + \frac{z^4}{\pi^4 n^4} + \ldots\right) =$$
$$= -\frac{2z}{\pi^2 n^2} - \frac{2z^3}{\pi^4 n^4} - \frac{2z^5}{\pi^6 n^6} - \ldots \qquad (11.7)$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2},$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - 2\left(\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}{\pi^2} z + \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}}{\pi^4} z^3 + \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}}{\pi^6} z^5 + \ldots \right).$$

Числа Бернулли B_n и формула Эйлера-Маклорена

- Экспоненциальная производящая функция $\frac{z}{e^z - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$
- Оператор $D: f \mapsto f'$. Далее проделаем формальные манипуляции.
- По формуле Тейлора, $f(x+a) = \sum \frac{a^n D^n f(x)}{n!} = e^{aD} f.$
- Таким образом,

$$f(x) + f(x+1) + \cdots + f(x+n) + \cdots = \left(\sum e^{nD}\right) f = \frac{1}{1 - e^D} f.$$

- Теперь, если $F(x) = \int_x^\infty f(t)dt$, то сумма в левой части равна

$$\frac{D}{e^D - 1} F = F + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} D^n F.$$

Разложение Лорана для котангенса

n	1	2	4	6	8	10	12
B_n	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$

Предложение 11.7. *Ряд Лорана для функции $z \mapsto \operatorname{ctg} z$ в нуле имеет вид*

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} z^{2m-1}.$$

Предложение 11.8. *Для всякого натурального m имеем*

$$1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \ldots + \frac{1}{n^{2m}} + \ldots = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1} B_{2m} \pi^{2m}}{(2m)!}.$$

В частности, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ и т. д.

Эллиптические функции

Определение 11.9. *Решеткой* в $\mathbb{C}$ называется подгруппа по сложению $\Gamma \subset \mathbb{C}$, порожденная двумя образующими $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, линейно независимыми над $\mathbb{R}$.

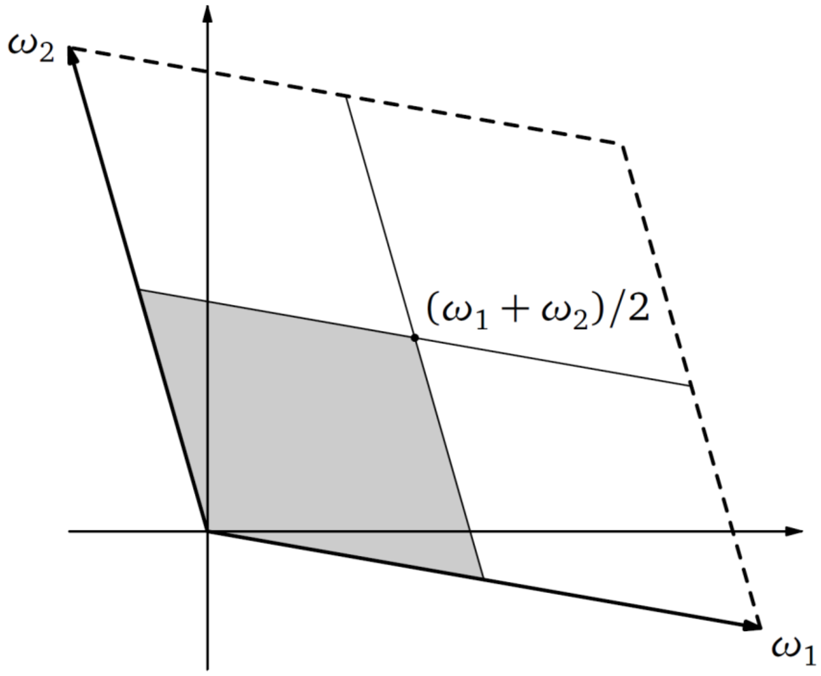
Иными словами, $\Gamma = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, где ω_1 и ω_2 — ненулевые комплексные числа, отношение которых не лежит в $\mathbb{R}$.

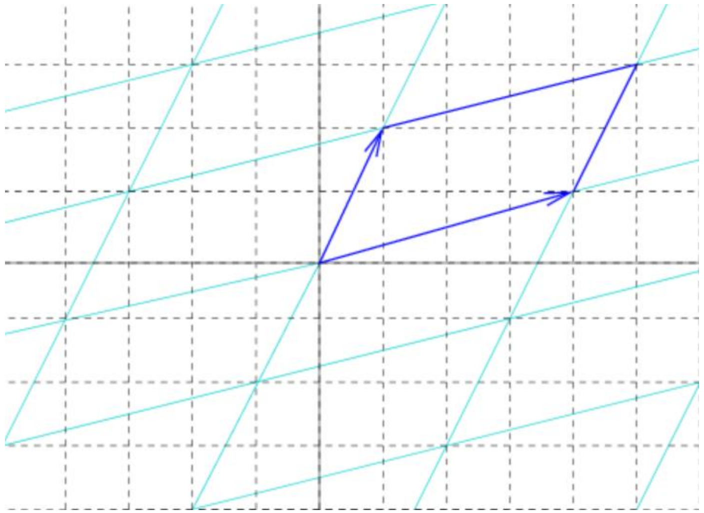
Определение 11.10. *Эллиптической функцией* относительно решетки $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется мероморфная функция f на $\mathbb{C}$, для которой $f(z+u) = f(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$ и $u \in \Gamma$.

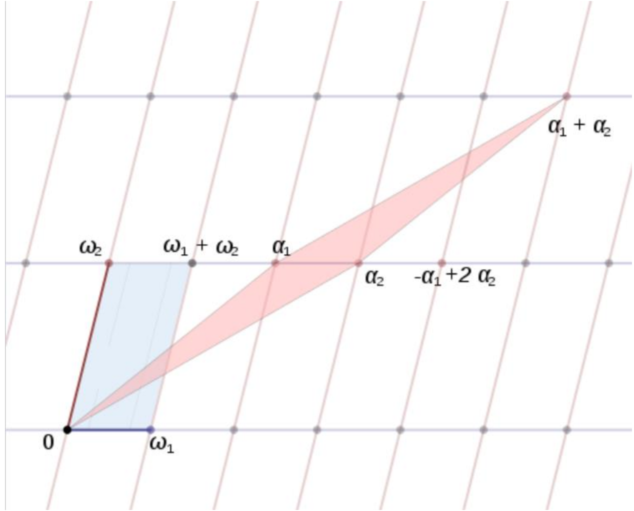
- Построенная выше функция G доставляет пример эллиптической функции. Она получена обращением эллиптического интеграла.

Фундаментальный параллелограмм

Определение 11.11. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — решетка с образующими ω_1 и ω_2. *Фундаментальным параллелограммом* этой решетки называется всякое множество вида $\{a + s\omega_1 + t\omega_2\}$, где $a \in \mathbb{C}$ фиксировано, а s и t — произвольные действительные числа из интервала $[0; 1)$.







Свойства эллиптических функций

Предложение 11.12. *Если эллиптическая функция не имеет полюсов, то она постоянна.*

Предложение 11.13. *Пусть f — эллиптическая функция относительно решетки Γ, и пусть Π — какой-нибудь фундаментальный параллелограмм относительно этой решетки. Тогда сумма кратностей нулей и полюсов функции f, содержащихся в Π, равна нулю (кратность полюса считаем отрицательной).*

$$\sum_{z\in\Pi} \operatorname{ord}_z(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Функция Вейерштрасса

Предложение-определение 11.15. Ряд

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{u\in\Gamma}{}' \left(\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} \right) \tag{11.10}$$

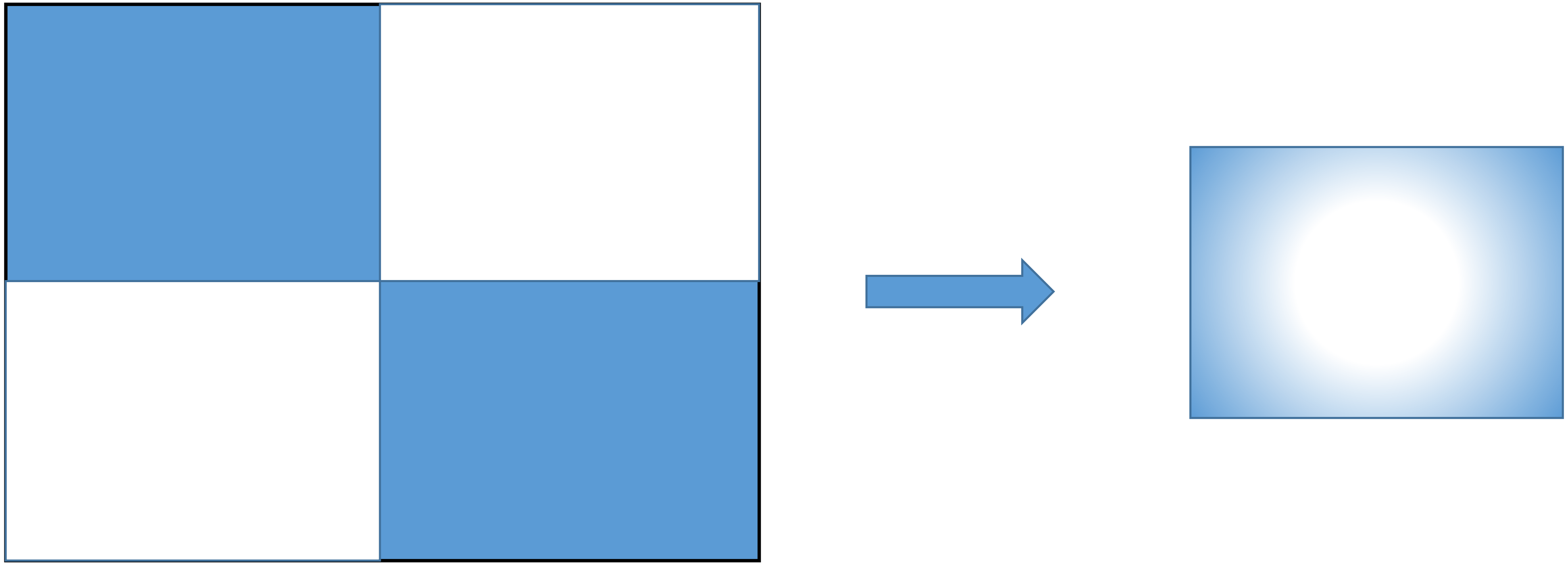
сходится в $\mathbb{C}$ равномерно на компактах к мероморфной функции в смысле определения 11.1. Сумма этого ряда обозначается $\wp(z)$ и называется *$\wp$-функцией Вейерштрасса*.

- Функция $\wp$ является четной эллиптической функцией с двойным полюсом в каждом фундаментальном параллелограмме.

$$\wp'(z) = -2\sum_{u\in\Gamma} \frac{1}{(z-u)^3}. \qquad \wp\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega_1}{2} + \omega_1\right) = \wp\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) + C$$

Как из тора сделать сферу

- Если в торе $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ склеить все пары противоположных точек x и $-x$, то полученное факторпространство гомеоморфно $\mathbb{S}^2$.



ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ