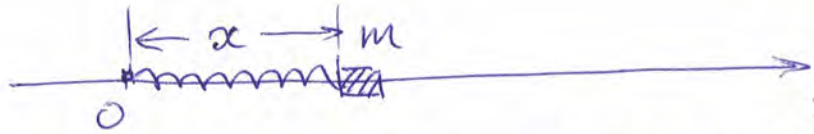
Семинар 2

Тренируемся в построении фазовых портретов для систем с одной степенью свободы.

Пример 1 Гармонический осциллятор

— это грузик m на пружинке с идеальной силой упругости $F_{упр.} = -kx$, k - коэффициент упругости



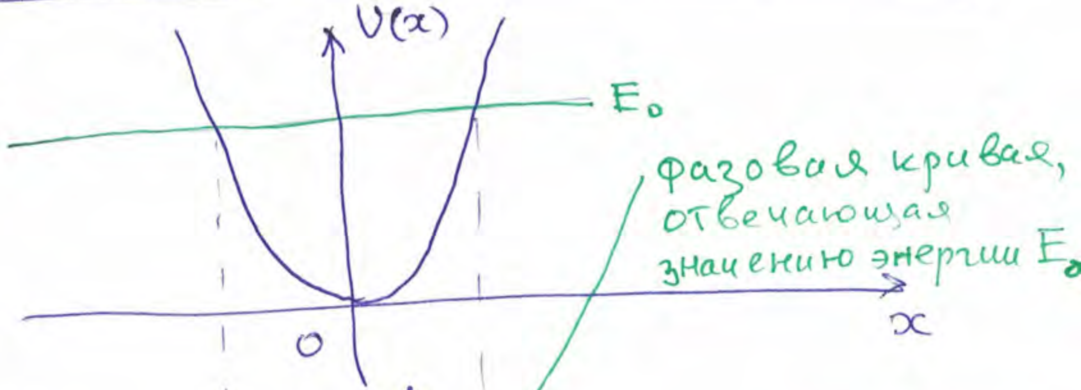
Потенциальная энергия силы упругости:

$$U(x) = -\int F_{упр}(x)\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

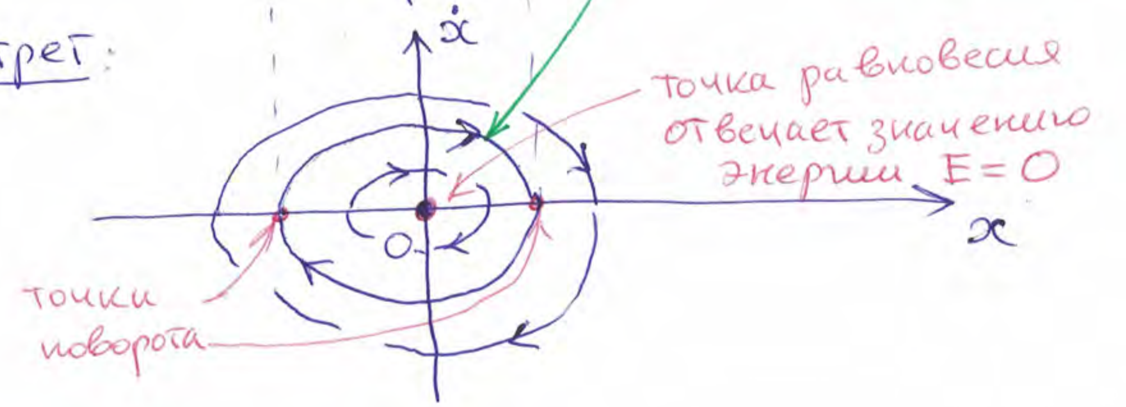
Закон сохранения энергии имеет вид:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

График $U(x)$:



Фазовый портрет:



Удобно рисовать фазовый портрет под графиком потенциальной энергии $U(x)$ (см. рис. вверху).

Комментарии к рисунку:

1) Точка покоя $x=0$ и $\dot{x}=0$ отвечает точке минимума потенциальной энергии:

$$U'(0)=0 \quad U''(0)>0$$

Это особая точка фазового портрета типа "центр".

Эта точка – отдельная фазовая траектория.

2) Остальные фазовые кривые – эллипсы

$$const = E_0 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

Точки $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2E_0}{k}}$ на этих фазовых кривых являются точками поворота ($U(x_{1,2})=E_0$)

3) Каждая фазовая кривая имеет свои минимум и максимум $\dot{x}_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{E_0}{2m}}$ в точке $x=0$ минимума потенциальной энергии $U(x)$

4) Точное общее решение уравнения движения гармонического осциллятора $m\ddot{x} = F_{упр}$ имеет вид:

$$\boxed{x(t) = X_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \varphi_0\right)}$$

Здесь φ_0 и $X_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$ определяются начальными данными задачи. Период обращения по фазовой кривой:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{U''(0)}{m}}}, \qquad (*)$$

что согласуется с общей теорией (см. стр 5 лекций). В случае произвольного потенциала $U(x)$ в окрестности его минимума x_0: $U'(x_0)=0$, $U''(x_0)>0$, формула $(*)$ выполняется приближённо. Докажем её.

Пусть $x = x_0 + \Delta x$ — точка в малой окрестности x_0. Движение происходит по фазовой кривой отвечающей значению энергии $E = U(x_0) + \Delta E$ немного большему $U(x_0)$. В терминах переменной Δx закон сохранения энергии системы имеет вид:

$$U(x_0 + \Delta x) + \frac{m\Delta\dot{x}^2}{2} = E = U(x_0) + \Delta E$$

Разлагая $U(x)$ в окрестности x_0 до 2 порядка по Δx имеем:

$$\frac{U''(x_0)\Delta x^2}{2} + \frac{m\Delta\dot{x}^2}{2} = \Delta E + O((\Delta x)^2)$$

Приближённое решение этого дифура:

$$\Delta x(t) \cong X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}\, t \quad \varphi_0\right),$$

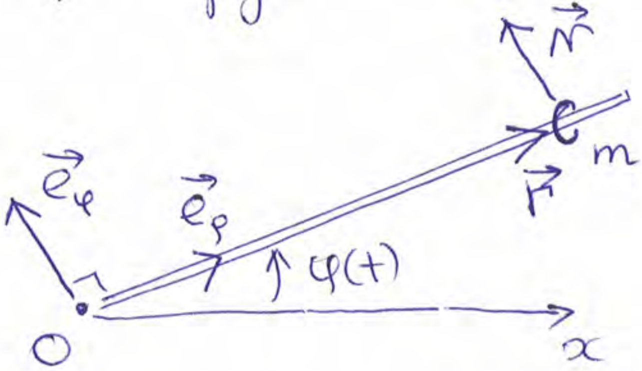
откуда имеем

$$\boxed{T \cong \frac{2\pi}{\omega}, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}}$$

Пример 2: Гармонический осциллятор

"вверх тормашками", то есть система с потенциалом $U(x) \sim -x^2$.

Предъявим физическую реализацию этой системы. Это бусинка на вращающемся в плоскости жестком, невесомом, гладком (нет трения) стержне. Стержень закреплен в начале координат ИСО (инерциальной системы отсчёта), вращается под действием внешней силы. Угол поворота стержня – известная функция времени $\varphi(t)$. Масса бусинки – m.



Уравнение Ньютона для бусинки

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{N},$$

где $\vec{N}$ – сила реакции стержня, $\vec{N} \perp \vec{r}$ (трения нет).

Удобно уравнение Ньютона переписать в полярной системе координат:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho , \quad \vec{N} = N \cdot \vec{e}_\varphi ,$$

где ρ и N – величины векторов $\vec{r}$ и $\vec{N}$.

Вычисляем:
$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$
$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Уравнения Ньютона в полярных координатах:

$$\vec{e}_\rho: \quad m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = 0$$

$$\vec{e}_\varphi: \quad m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = N$$

Первое уравнение служит для определения закона движения бусинки по стержню: $\rho(t)$ ($\varphi(t)$ нам известна).

Второе уравнение позволяет затем вычислить силу реакции стержня $N(t)$.

Бусинка движется по закону:

$$\boxed{\ddot{\rho} = \rho\dot{\varphi}^2}$$

Если теперь выбрать закон равномерного вращения стержня $\varphi = \omega t$, то

$$\boxed{\ddot{\rho} = \omega^2\rho}$$

Потенциальная энергия этой силы $U(\rho) = -\dfrac{\omega^2\rho^2}{2}$.

Это и есть осциллятор "вверх тормашками".

Закон сохранения энергии в этой системе имеет вид

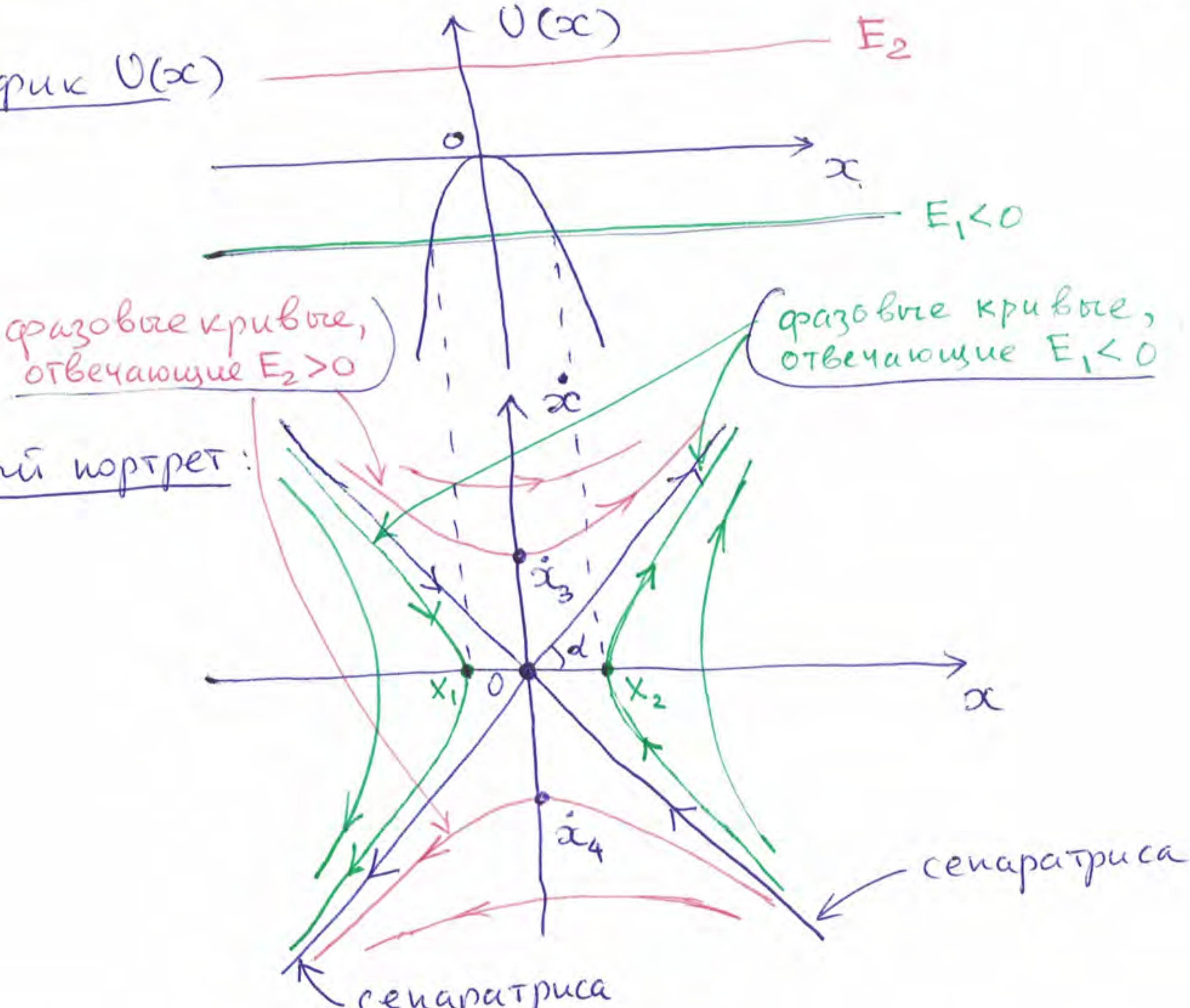
$$\boxed{E = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2}}$$

тут мы заменили обозначение переменной $\rho \mapsto x$.

Фазовый портрет системы:

График $U(x)$

Фазовый портрет:



Комментарии к фазовому портрету

1) При энергии $E=0$ движение системы происходит по сепаратрисам

$$\boxed{\dot x = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{m}}\,x} \qquad (**)$$

Точка неустойчивого равновесия $x=0$ (локальный максимум $U(x)$), $\dot x = 0$, лежит в перекрестье сепаратрис.

Она сама является фазовой траекторией.

И она разбивает сепаратрисы на компоненты связности — 4 луча. Это — еще 4 фазовых траектории. С одной на другую "перепрыгнуть"

нельзя. Въехать по югу в точку неустой- (7)
чивого равновесия $x = \dot{x} = 0$ за конечное время
нельзя. Всего имеем <u>5 разных фазовых</u>
<u>траекторий</u>, отвечающих значению энергии
$E = 0$.

2) При энергии $E_1 < 0$ движение системы происходит по гиперболе (см. рис.). Таких гипербол – <u>2 штуки</u>. Каждая из гипербол имеет точку поворота $x_{1,2}$: $U(x_{1,2}) = E_1$. Движение по каждой фазовой кривой происходит на полупрямой $x < x_1$ ($x > x_2$).

3) При энергии $E_2 > 0$ движение тоже происходит по <u>2-м гиперболам</u> (см. рис.). Однако это движение не ограничено по переменной x. Зато у этих двух фазовых кривых есть точки минимума/максимума – $\dot{x}_3 / \dot{x}_4$. Этот экстремум скорости случается ровно над точкой локального экстремума $x = 0$ потенциальной энергии.

4) Вернёмся к сепаратрисам: из формулы (**) стр. 6 заключаем, что для угла α их наклона

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{m}} = \pm \sqrt{-\frac{U''(0)}{m}}},$$ что

согласуется с общей теорией (см. стр. 5 лекции).

Уравнения движения осциллятора "вверх тормашками" решаются явно:

а) Решение для $E>0$ (не общее)

$$\boxed{x(t) = \pm\sqrt{\frac{m}{\omega^2}}\,\dot{x}_0\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{m}}\,t\right)}$$

с начальными условиями $x(0)=0$ $\dot{x}(0)=$

б) Решение для $E<0$ (не общее)

$$\boxed{x(t) = \pm\, x_0\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{m}}\,t\right)}$$ с начальными условиями $x(0)=\pm x_0$, $\dot{x}(0)=0$.

в) Решение для $E=0$ – сепаратрисы

$$\boxed{x(t) = x_0\, e^{\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{m}}\,t}}$$

Как видим, движение по сепаратрисе в бесконечность ($\pm\infty$), либо в точку неустойчивого равновесия ($x=0$) происходит <u>бесконечно долго</u>.

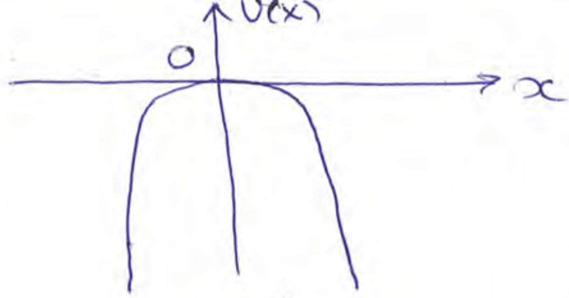
<u>Пример 3</u> Обсудим "нехороший" случай, когда $U''=0$ в точке экстремума. Например

$$U(x) = -x^4$$

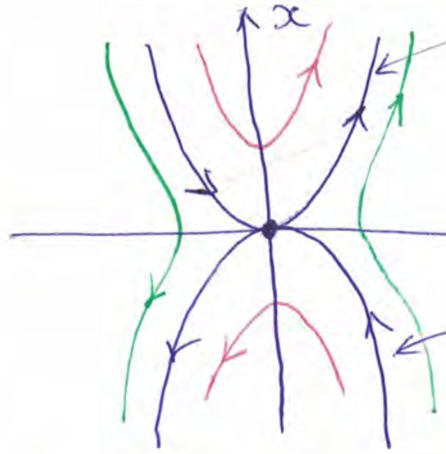
Закон сохранение энергии:

$$\boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2} - x^4 = E}$$

График $U(x)$



Фазовый портрет:



Особая точка $x = \dot{x} = 0$ (экстремум $U(x)$ при $x=0$) не классифицируется, поскольку $U''(0) = 0$.

Но задача может быть решена явно.

Сепаратрисы $\boxed{\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,x^2}$ (при $E=0$) — это параболы. Угол их наклона к оси $O\vec{x}$ в точке неустойчивого равновесия $x = \dot{x} = 0$ — нулевой.

Закон движения по сепаратрисе:

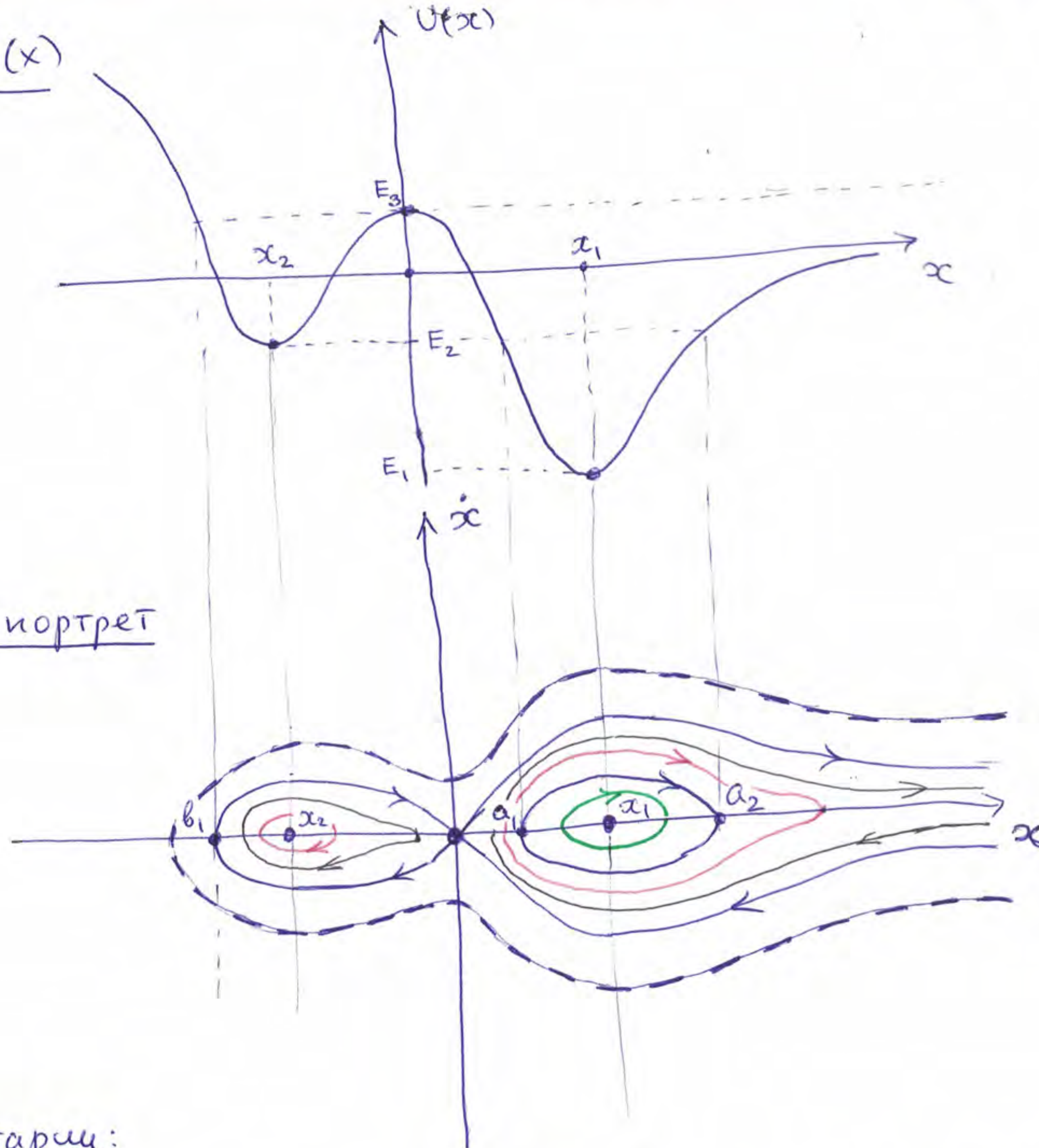
$$\boxed{\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x(0)} \mp \sqrt{\frac{2}{m}}\,t}$$

Видно, что за конечное время $t = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{x(0)}$ частица может уйти на бесконечность.

А вот в точку неустойчивого равновесия частица движется всё равно бесконечно долго.

Пример 4 Типичный фазовый портрет.

График U(x)



Фазовый портрет

Комментарии:

1) $U(x)$ имеет локальные минимумы в т. x_1 и x_2 — это позиции устойчивого равновесия

$E_1 = U(x_1)$ — глобальный минимум $U(x)$. Этому уровню энергии соответствует 1 фазовая траектория — точка устойчивого равновесия в x_1.

$E_2 = U(x_2)$ — не глобальный минимум. Помимо фазовой траектории — точки устойчивого равновесия в x_2, этому уровню энергии соответствует еще

Замкнутая фазовая траектория, окружающая точку равновесия x_1. Это – кривая с точками поворота a_1 и a_2.
Всего для E_2 – две фазовых траектории.

2) $U(x)$ имеет локальный максимум при $x=0$ $U(0)=E_3$. Этому уровню энергии соответствует сепаратриса, имеющая точку поворота b_1 слева и не ограниченная справа.
Точкой неустойчивого равновесия $x=\dot{x}=0$ сепаратриса бъется на 3 компоненты связности. Всего для уровне энергии E_3 имеем 4 фазовых траектории (дуги и точку неустойчивого равновесия

3) При значениях энергии E: $E_1 < E < E_2$ имеем одну замкнутую фазовую траекторию, обворачивающуюся вокруг x_1 (зелёная на портрете)

4) При E: $E_2 < E < 0$ имеем 2 замкнутых фазовых траектории, оборачивающиеся вокруг x_1 и x_2 (красные на портрете)

5) При E: $0 < E < E_3$ правая из этих двух траекторий размыкается и уходит на $+\infty$ по x. Это, т.к. $E=0$ – горизонтальная асимптота графика $U(x)$. Всё равно фазовых кривых – 2. (чёрные на портрете).

6) При E: $E > E_3$. две кривых "склеиваются в одну. Она ограничена слева и не ограничена справа. (синяя на портрете со штрихами).