

Матанализ  
2 курс  
Задачи

17 декабря 2022 г.

Листок 3.

1. Найти интеграл от  $|x|^p$  по половине единичного шара в  $\mathbb{R}^3$  при тех  $p$ , для которых он конечен.
2. Найти интеграл функции  $|\sin(x - y)|$  по квадрату  $[0, \pi]^2$ .
3. Выяснить, при каких  $\alpha \in \mathbb{R}$  функция  $(\sin |x|)^\alpha$  на  $\mathbb{R}^n$  интегрируема по множеству  $\{x: |x| \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ .
4. (а) Вычислить интеграл функции  $x^2 y^2$  по кругу радиуса  $\pi$  с центром в нуле. (б) Вычислить интеграл функции  $x^2 + y^2$  по множеству  $|x| + |y| \leq 1$ .
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y^2 = 2px$ ,  $y^2 = 2qx$ ,  $x^2 = 2ry$ ,  $x^2 = 2sy$ , где  $0 < p < q$ ,  $0 < r < s$ .
6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $z = xy$ ,  $x + y + z = 1$ ,  $z = 0$ .
7. Найти интеграл от функции  $\sqrt{x^2 + y^2}$  по области в  $\mathbb{R}^3$ , ограниченной поверхностями  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z = 1$ .
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $z = 6 - x^2 - y^2$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
9. Выяснить, интегрируемо ли преобразование Фурье индикатора квадрата  $[0, 1]^2$  в  $\mathbb{R}^2$ .
10. Пусть  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейный оператор,  $e_1, \dots, e_n$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что мера параллелепипеда, порожденного векторами  $Ae_1, \dots, Ae_n$ , равна  $|\det(A^* A)|^{1/2}$ , а также  $|\det G|^{1/2}$ , где  $G$  — матрица Грама с элементами  $\langle Ae_i, Ae_j \rangle$ .

## Решения

### Задача 1

По 5 задаче 2 листка:  $\alpha > -3$

Перейдем в сферические координаты

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) & \theta \in [0, \pi] \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) & \varphi \in [0, 2\pi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$
$$|J| = r^2 \sin(\theta)$$
$$|x| = \sqrt{r^2 (\sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \cos^2(\theta))} = r$$
$$\int_{r \leq 1} r^\alpha r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = \int_{r \leq 1} r^{\alpha+2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$
$$\left( \frac{1}{\alpha+3} r^{\alpha+3} \Big|_0^1 \right) \left( -\cos(\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \left( \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{\alpha+3} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{\alpha+3}$$

### Задача 2

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |\sin(x-y)| dx dy = 2\pi$$
$$\int_0^\pi |\sin(x-y)| dx = \int_0^\pi (\sin(x)) dx = \cos(x) \Big|_0^\pi = 2$$

Так как период  $|\sin(x)| = \pi$ , то интеграл по отрезку длиной  $\pi$  равен  $\forall \text{const} = y$

$$\int_0^\pi |\sin(x-y)| = \int_0^\pi \sin(x) dx$$
$$\int_0^\pi 2 dy = 2y \Big|_0^\pi = 2\pi$$

### Задача 3

Перейдем в сферические координаты

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta_1) \\ x_2 = r \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-1}) \\ x_n = r \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-1}) \end{cases} \quad \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in [0, \pi] \quad \theta_{n-1} \in [0, 2\pi)$$
$$|J| = r^{n-1} f(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$$
$$u = \{x : r \leq 1, \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta_{n-1} \in [0, \pi]\}$$
$$\int_u (\sin(r))^\alpha r^{n-1} f(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$
$$(\sin(r))^\alpha r^{n-1} = \left( r - \frac{r^3}{3!} + \dots \right)^\alpha r^{n-1} = r^{\alpha+n-1} + \dots$$

$r \leq 1$  тогда если  $\int r^{\alpha+n-1} dr < \infty$  то  $(\sin r)^\alpha < \infty$  и  $\alpha + n - 1 > -1$ , то есть  $\alpha > -n$

# Задача 4

(a)

$$f(x, y) = x^2 y^2$$

$$\begin{cases} x = r \sin(\varphi) \\ y = r \cos(\varphi) \end{cases} \quad |J| = r$$

Перейдем от двойного интеграла к повторному

$$S = \iint_U x^2 y^2 dx dy =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \cos(\varphi)^2 r^2 \sin(\varphi)^2 r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)^2 \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^\pi =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\pi^6}{6} \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)^2 d\varphi = \frac{\pi^6}{6} \left( \frac{1}{8} \varphi - \frac{\sin(4\varphi)}{32} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^7}{24}$$

(b)

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$$

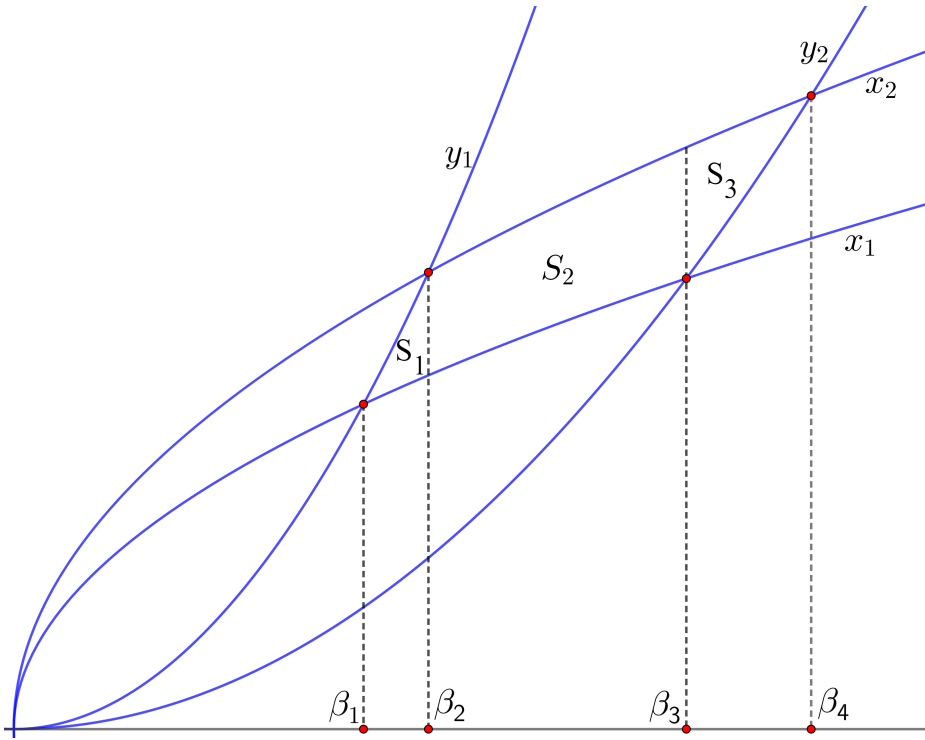
$$\iint_S (x^2 + y^2) dx dy = 4 \iint_{\substack{x, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} (x^2 + y^2) dx dy =$$

$$4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy = 4 \int_0^1 dx \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} =$$

$$4 \int_0^1 \left( x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = 4 \int_0^1 \left( x^2 - x^3 + \frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) dx =$$

$$4 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = \frac{2}{3}$$

# Задача 5



Заметим что рассматриваемая фигура – четырехвершинник, сторонами которого являются параболы. Тогда мы можем заметить, что его вершины – точки пересечения парабол, то есть

$$\begin{cases} y^2 = 2ax \\ x^2 = 2by \end{cases} \quad (x, y) = \left( 2\sqrt[3]{ab^2}, 2\sqrt[3]{a^2b} \right)$$

То есть вершины это  $\alpha_1 = \left( 2\sqrt[3]{pr^2}, 2\sqrt[3]{p^2r} \right)$ ,  $\alpha_3 = \left( 2\sqrt[3]{ps^2}, 2\sqrt[3]{p^2s} \right)$ ,  $\alpha_2 = \left( 2\sqrt[3]{qr^2}, 2\sqrt[3]{q^2r} \right)$ ,  $\alpha_4 = \left( 2\sqrt[3]{qs^2}, 2\sqrt[3]{q^2s} \right)$ . Тогда

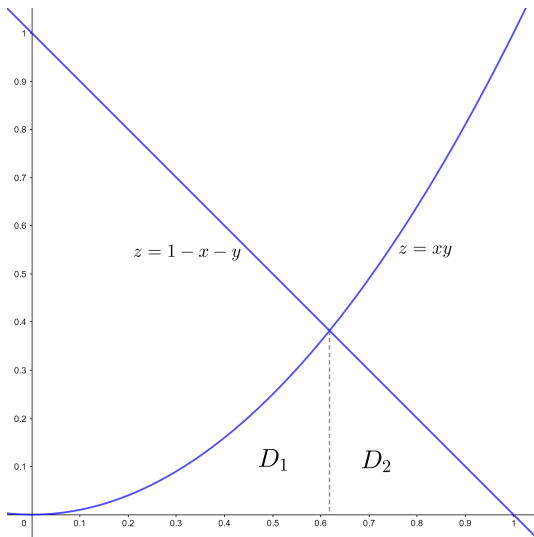
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{x_1}^{y_1} dy dx = \int_{2\sqrt[3]{pr^2}}^{2\sqrt[3]{qr^2}} \int_{\sqrt{2px}}^{\frac{x^2}{2r}} dy dx = \\ &= \int_{2\sqrt[3]{pr^2}}^{2\sqrt[3]{qr^2}} \left( \frac{x^2}{2r} - \sqrt{2px} \right) dx = \left( \frac{x^3}{6r} - \frac{2}{3}x\sqrt{2px} \right) \Big|_{2\sqrt[3]{pr^2}}^{2\sqrt[3]{qr^2}} = \\ &= \frac{4}{3}r(q-p) - \frac{8}{3}r\sqrt{pq} + \frac{8}{3}pr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\beta_2}^{\beta_3} \int_{x_1}^{x_2} dy dx = \int_{2\sqrt[3]{qr^2}}^{2\sqrt[3]{ps^2}} \int_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2qx}} dy dx = \\ &= \int_{2\sqrt[3]{qr^2}}^{2\sqrt[3]{ps^2}} \left( \sqrt{2qx} - \sqrt{2px} \right) dx = \frac{2}{3} \left( \sqrt{2qx^3} - \sqrt{2px^3} \right) \Big|_{2\sqrt[3]{qr^2}}^{2\sqrt[3]{ps^2}} = \frac{8}{3} (s\sqrt{pq} - ps - qr + r\sqrt{pq}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_{\beta_3}^{\beta_4} \int_{y_2}^{x_2} dy dx = \int_{2\sqrt[3]{ps^2}}^{2\sqrt[3]{qs^2}} \left( \sqrt{2qx} - \frac{x^2}{2s} \right) dx = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2qx^3} - \frac{x^3}{6s} \Big|_{2\sqrt[3]{ps^2}}^{2\sqrt[3]{qs^2}} = \frac{8}{3} (s\sqrt{pq} - \sqrt{qps^2}) - \frac{4}{3} (qs - ps) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= \frac{4}{3}r(q-p) - \frac{8}{3}r\sqrt{pq} + \frac{8}{3}pr + \frac{8}{3}(s\sqrt{pq} - ps - qr + r\sqrt{pq}) + \frac{8}{3}(qs - s\sqrt{qp}) - \frac{4}{3}(qs - ps) = \\ &= -\frac{4}{3}rq + \frac{4}{3}pr - \frac{4}{3}ps + \frac{4}{3}qs = \frac{4}{3}(q-p)(s-r) \end{aligned}$$

## Задача 6



Найдем точки пересечения

$$\begin{cases} z = xy \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad x + y + xy = 1 \quad y = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad x + y = 1$$

Тогда

$$V = D_1 + D_2 = \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz + \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} dy \int_0^{xy} dz =$$

$$\int_0^1 \left( y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} dx + \int_0^1 \left( \frac{1}{2}xy^2 \right) \Big|_0^{\frac{1-x}{1+x}} dx =$$

$$\int_0^1 \left( 1-x - \frac{1-x}{1+x} - x(1-x) + x \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^2 \right) dx + \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} \right) dx$$

Заметим что

$$-\frac{(1-x)}{(1+x)}(1-x) + (1-x)(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 \left( \frac{1}{(1+x)^2} - 1 \right) =$$

$$(1-x)^2 \left( -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \right) = (1-x)^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}(1+x)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{(1-x)^2 x^2}{2(1+x)^2}$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2 x^2}{2(1+x)^2} dx + \int_0^1 \frac{(1-x)^2 x}{2(1+x)^2} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^2 (x+1) dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2 x}{1+x} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left( x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{x+1} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 4\ln(x+1) \right) \Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - 4\ln(2) \right) =$$

$$\frac{17}{12} - 2\ln(2)$$

## Задача 7

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} \quad x^2 + y^2 = 1$$

Перейдем к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\phi) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow f = \rho, \quad z^2 = \rho^2, \quad z = 1 \Rightarrow \rho \in [0, 1], \quad z \in [0, 1]$$

Тогда

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\rho) \rho d\rho d\phi dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^z d\phi dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{z^3}{3} d\phi dz \\ &= \int_0^1 \frac{2\pi}{3} z^3 dz \\ &= \left. \frac{\pi z^4}{6} \right|_0^1 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

## Задача 8

Рассмотрим точки пересечения:  $6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) = (2, 2)$ , обозначим  $x^2 + y^2 = r^2$ , тогда

$$6 - r^2 = r \quad r^2 + r - 6 = 0 \quad r_1 = 2, \quad r_2 = -3$$

Тогда  $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = 2$ .

Перейдем к цилиндрическим координатам  $x^2 + y^2 = r^2$  и  $dx dy dz = r dr d\phi dz$  и

$$\begin{aligned} V &= \iiint_U r dr d\phi dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_r^{6-r^2} r d\phi dz dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left. rz \right|_r^{6-r^2} d\phi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (6r - r^3 - r^2) d\phi dz \\ &= \int_0^2 2\pi(6r - r^3 - r^2) dr \\ &= 2\pi \left( 3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= 2\pi \left( 12 - 4 - \frac{8}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \pi \end{aligned}$$

## Задача 9

$$\begin{aligned}
 \hat{I}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(xu+yv)} I dx dy = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyv} I_2 dy \int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} I_1 dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{-iyv} dy \int_0^1 e^{-ixu} dx \\
 \int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} I_1 &= \int_0^1 e^{-ixu} I_1 dx \quad \text{так как на остальных интервалах функция зануляется} \\
 \int_{\mathbb{R}^2} \hat{I} du dv &= \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 e^{-iyv} dy \right) dv \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 e^{-ixu} dx \right) du \\
 \left. \frac{e^{-ixu}}{-iu} \right|_0^1 &= \frac{i}{u} (e^{-iu} + 1) \\
 \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{i}{u} + i \frac{e^{-iu}}{u} \right) du &= i \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iu}}{u} du \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} + i \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(u)}{u} du \right)
 \end{aligned}$$

Заметим что факту существования этого интеграла равносильно тому, что  $\frac{\sin(u)}{u}$  и  $\frac{du}{u} + \frac{\cos(u)}{u} du$  интегрируемы  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$  интегрируема  $\Leftrightarrow \left| \frac{\sin(x)}{x} \right|$  интегрируема (по Лебегу)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx &= \int_{-\infty}^0 \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \int_{-\infty}^0 -\frac{|\sin(x)|}{x} dx + \int_0^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin(x)|}{x} dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi(n+1)}^{-\pi n} -\frac{|\sin(x)|}{x} dx = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x - \pi n)|}{(x - \pi n) + \pi n} d(x - \pi n) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} -\frac{|\sin(x + \pi(n+1))|}{(x + \pi(n+1)) - \pi(n+1)} d(x + \pi(n+1)) = \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x - \pi n)|}{(n+1)\pi} d(x - \pi n) = \\
 &= 2 \int_0^{\pi} |\sin(x - \pi n)| d(x - \pi n) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(n+1)} = 2 \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty
 \end{aligned}$$

TL;DR

Можно прочесть про интеграл Дирихле, он не является абсолютно сходящимся, а следовательно  $\left| \frac{\sin(x)}{x} \right|$  не интегрируется по Лебегу

Значит  $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \infty$ , то есть  $\int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 e^{-iux} dx \right) du$  не существует, а следовательно и интеграл преобразования Фурье тоже не существует

## Задача 10

Объем параллелепипеда, натянутого на векторы  $x_1, \dots, x_n$  — определитель матрицы с соответствующими столбцами. Теперь посмотрим на меру. У единичного параллелепипеда это 1, а теперь мы проводим замену переменных, домножая их на A. Тогда подынтегральное выражение домножится на матрицу перехода, то есть на A и мера будет равна  $|\det(A^* A)|^{\frac{1}{2}}$ . Определитель транспонированной матрицы равен определителю обычной матрицы, а матрица Грама это произведение обычной с транспонированной, откуда  $A^* A = G$  и  $|\det G|^{\frac{1}{2}} = |\det A^* A|^{\frac{1}{2}}$ .