1.09.20

Введение в теорию представлений.

Дан объект X, G, $\mathrm{Sym}\,X$
(гр. симметрий)

Для каких объектов $G < \mathrm{Sym}\,X$

Опр. Линейное представление группы G – это $\rho: G \to GL(V)$

$$\rho(g) \to [\rho(g)]$$
$$G \to GL(m, k)$$

Примеры. • $G = \mathbb{Z}_2$ на матричном языке $GL(1,k) = k^*$

Комплексное представление группы $\mathbb{Z}_2$ (запустить в группу $\mathbb{Z}_2^*$ = вещ. матриц
||
осуществить гомоморфизм . . .)

• Вещественное представление

$$\rho(x+y)=\rho(x)\rho(y)$$

$$\rho: x \to e^{\alpha x} \in \mathbb{R}^*$$

- $\mathbb{R}^*$ несвязна

$$\rho(x)=|x|^s,\ s\in\mathbb{R}$$

- $\rho(x)=\operatorname{sign} x$
- $\rho(x)=\operatorname{sign}|x|$
- Пример n-мерного представления

$$\mathbb{R}\to GL(n,\mathbb{R})$$

$$\rho(x)=e^{Ax} \quad A\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

- n-мерное комплексное представл. группы $\mathbb{Z}$

достаточно ук-ть, куда перех. 1

$$\rho(1)=A$$

$$\rho(n)=\rho(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n})=A^n$$

$$\begin{tikzcd} & \rho_1(1)=A_1 \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & \\ & \rho_2(1)=A_2 \end{tikzcd}$$

$\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow \exists$ матрица T: $A_1 = T^{-1} A_2 T$

Эквивалентные представления

$\rho_1 : G \to GL(V_1)$

$\rho_2 : G \to GL(V_2)$

Опр. Представления ρ_1 и ρ_2 эквивалентны, если $\exists$ такой изоморфизм $\varphi : V_1 \to V_2$, что диаграмма коммутативна

$$\rho_2 \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\varphi"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

После выбора базиса

$$[\rho_2] \circ [\varphi] = [\varphi] \circ [\rho_1]$$

Теорема. $g \in G$

Каждое n-мерное представл. группы $\mathbb{Z}$ с точностью до эквивалентности нумеруются

$$\left(\sum n_{ij} \lambda_{ij}\right)$$

Если G — произвольная группа, то трудно, но

G — топ. гр. Ли

а) $|G| < \infty$

Есть хорошая теория

G — топологич. ком. группа

Пример. Комплексное представление группы $\mathbb{Z} \bmod n = \mathbb{Z}_n$

$\rho(1) = A$

Если для группы $\mathbb{Z}$ A м.б. любой, то для $\mathbb{Z}_n$ $A^n = E$

$$\Downarrow \text{ ЖНФ}$$

A - диагональна

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i = \sqrt[n]{1}$$

Простая конструкция

$$\rho_1 : G \to GL(V_1)$$
$$\rho_2 : G \to GL(V_2)$$

Прямая сумма представлений

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2)$$

На языке матриц:

$$[\rho_1(g)] = \square_{n_1 \times n_1}$$

$$n_1 = \dim V_1$$
$$n_2 = \dim V_2$$

$$[\rho_2(g)] = \square_{n_2 \times n_2}$$

$$[\rho_1 \oplus \rho_2] \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} [\rho_1 g] & 0 \\ \hline 0 & [\rho_2 g] \end{array}\right)_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$$

Подпредставление

$$\rho : G \to GL(V)$$

$W < V$ — подпространство в V, векторное

G-инвариантно

$$G(W) = W$$

$\rho(g)\big|_W$ — лин. оператор на подпр-ве W, т.е. элемент группы $GL(W)$

$$g \longmapsto \rho(g)\big| \subset GL(W)$$

подпредставление

и

G-инвар. пр-во

Неприводимое представление

$$\rho: G \to GL(V)$$

называется неприводимым, если $\nexists$ G-инвар. подпр-в, отличных от $\{0\}$ и V.

Вполне приводимое представление

Представление $\rho: G \to GL(V)$ наз. вполне приводимым, если ρ есть прямая сумма неприводимых представлений.

Ещё один пример

- $G = S_3$ $\quad 1\ 2\ 3 \quad \sigma \quad \rho(\sigma)$

$$\rho(\sigma)(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

$$W_{const} = \{(x, x, x)\}$$

$$W_0 = \{(x_1, x_2, x_3)\} \mid \sum x_i = 0\}$$

$$S_3 = W_{const} \oplus W_0$$

$$(1, 2, 9) = (4, 4, 4) + (-3, -2, 5)$$

Лекция 2 08.09.20

Алгебра

$$\rho : G \to GL(V)$$

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$$

Тривиальное представление $\rho(g) = id$

$id(v) = v,\ v \in V$

- $G : V$ $\rho(g)v \approx gv$
- G – инвар. подпр-во
  $W < V,\ G(W) = W$ обозн. W_G
- неприводимое представление $G : V$
  [группа G в пр-ве V]

  $$\{0\} \leq W_G \leq V \Rightarrow \left[\begin{array}{l} W_G = \{0\} \\ W_G = V \end{array} \right.$$

- вполне приводимое представление
  $G : V$, если $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$
  $G : V_i$ – неприводимое

II Опр. $G : V$ вполне приводимо, если
$\forall\ W_G \leq V\ \exists\ W_G'$ – инвариантное дополн.

$$V = W_G \oplus W_G'$$

Теорема. Два определения вполне приводимости эквивалентны.

Д-во: 2 опр. $\longrightarrow$ 1 опр.

индукция по $\dim V$

$G : V$ если V неприводимо, то доказывать нечего.

В противном случае $\exists\ 0 < W_G < V$ и $V = W_G \oplus W_G'$

База инд.: одномерное пр-во

$\dim W_G < \dim V \Rightarrow W_G = T_1 \oplus \ldots \oplus T_s$

$\dim W_G' < \dim V \Rightarrow W_G' = S_1 \oplus \ldots \oplus S_m$

$G_i T_i$ и $G_i S_j$ неприводим. $\Rightarrow$

$V = T_1 \oplus \ldots \oplus T_s \oplus S_1 \oplus \ldots \oplus S_m$ ∎

1 опр. $\longrightarrow$ 2 опр.

$G : V$ Дано: $V = T_1 \oplus \ldots \oplus T_s$

$\{0\} < W_G < V$

Цель: построить W_G'

Конструкция

W_G $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $T_1, \dots, T_s$

1 Шаг. (*) $W_G \cap T_{i_1} = \{0\}$ Тогда рассмотрим сумму $W_G + T_{i_1}$. При условии (*) она будет прямой.

2 Шаг. Из оставшихся T выберем T_{i_2} такое, что $(W_G \oplus T_{i_1}) \cap T_{i_2} = 0$

(Его может не быть, тогда наша „игра" закончится)

$\vdots$

Игра заканчивается выбором такого подпр-ва:

$$W_G \oplus T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_k}$$

это подпр-во G-инвариантно

Утв. 1 Σ двух G-инвар. подпр-в G-инварианта и $U_G \cap Z_G$ — G-инвар.

Утв. 2 $W_G \oplus T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_k} = V$

◁ Пусть T_j осталось после окончания этой игры. Тогда рассмотрим

$$T_j \cap (W_G \oplus T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_k}) \neq \{0\}$$

пересечение 2х G-инвар. подпр-в G-инвариантно ⇒

T_j – неприводимо и G-инвар. ⇒ $T_j = 0$ или $T_j \subset W_G$

нет м.б.

$$\Downarrow$$

$$T_j \cap (W_G \oplus T_{i_1} \oplus \ldots \oplus T_{i_k}) = T_j$$

$$\Downarrow$$

$$T_j \subset W_G \oplus T_{i_1} \oplus \ldots \oplus T_{i_k}$$

$$\Downarrow$$

любое из оставшихся множеств $\subset W_G \oplus T_{i_1} \oplus \ldots \oplus T_{i_k}$

$$\Downarrow$$

$$W_G \oplus T_{i_1} \oplus \ldots \oplus T_{i_k} = V$$

■

Унитарные представления.

Опр. $G : V$ над полем $\mathbb{C}$ наз. унитарным, если в пр-ве $V_{\mathbb{C}}$ $\exists$ эрмитово скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$, инвариантное относительно операторов $\rho(G)$

$$\langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in V \text{ и } \forall g \in G$$

Опр. Эрмитово скалярное произведение:

$$\langle x_1+x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \qquad (x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x,y)$$

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$

$$\langle x, x\rangle > 0 \text{ если } x \neq 0$$

Пример. $\mathbb{C}^n$ базис $(1, 0, \dots, 0)$ ... $(0, 0, \dots, 1)$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

Тогда $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + \dots + x_n\overline{y_n}$

Мини-теорема. Унитарное представление вполне приводимо.

Док-во: Пусть $G : V_G$ – унитарное представл. и пусть $W_G < V$

$$W_G' = W^{\perp}$$

$\bullet\ V = W_G \oplus W_?^{\perp}$ (теорема из лин. алгебры)

Док-ть: если $w' \in W^{\perp}$, то и $gw' \in W^{\perp}$

Итак, дано $\langle w, w'\rangle = 0 \quad \forall w \in W$

$$\langle w, gw'\rangle \overset{?}{=} 0$$

$$\langle w, gw' \rangle = \langle g^{-1}w, g^{-1}(gw') \rangle = \langle \underset{\underset{W_G}{\cap}}{g^{-1}w}, w' \rangle = 0$$

ТАК КАК $g^{-1} \in G$

$$\Rightarrow gw' \in W^{\perp} \Rightarrow G(W^{\perp}) = W^{\perp}$$

Теорема. $|G| < \infty$ $G : V_{\mathbb{C}}$

Тогда в пр-ве представлений можно выбрать G-инвар. эрмитово скалярное произведение $\langle \, , \, \rangle$

Док-во: Идея (главная) усреднение по группе

$$\overline{H}^t = H, \quad H > 0 \ (\text{т.е. все главные миноры } \Delta > 0)$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{x}^t H y \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Возьмём какое-нибудь эрмитово скалярное пр-ие $\langle \, , \, \rangle$

$$H(x,y) = \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle \qquad x, y \in V$$

Утв. 1. $H(x,y)$ – эрмитово скаляр. пр-ие

2. $H(x,y)$ – G-инвариантно

◀ $H(x_1 + x_2, y) = \sum_{g \in G} \langle g(x_1 + x_2), y \rangle = \sum_{g \in G} \langle gx_1 + gx_2, y \rangle =$

$$= \sum_g \langle g x_1, y\rangle + \sum_g \langle g x_2, y\rangle = H(x_1,y) + H(x_2,y)$$

$$H(x,y) = \overline{H(y,x)}$$ (проверить самостоят.)

$$H(x,x) = \sum \langle gx, gx\rangle \underset{gx\neq 0}{>} 0$$ (каждое слагаемое >0)

2. $g_0 \in G$

$$H(g_0 x, g_0 y) = H(x,y)$$

$$\sum_{g\in G} \langle g g_0 x, g g_0 y\rangle \underset{g' = g g_0}{=\!=} \sum_{g'\in G} \langle g' x, g' y\rangle = H(x,y)$$

Если g пробегает группу G, то и g_0 проб. гр. G

$\blacksquare$

Вывод: Любое комплексное линейное (конечномерное) представление конечной группы G вполне приводимо.

$G : V \Rightarrow G : V$ – унитарное $\Rightarrow W_G < V$
есть $W_G^{\perp}$ дополнение $\Rightarrow$ вполне приводимо

ЛЕКЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ 15.09.20

РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$|G|<\infty \qquad \mathcal{F} = k[G]$ — k-значные функции на группе G

$$\mathcal{F} = \{f(g)\}$$

$\mathcal{F}$ — конечномерное векторное простр. над полем k

$$f_1(g)+f_2(g)$$

$$\lambda f(g) \qquad \lambda \in k \qquad \dim \mathcal{F} = |G|$$

естеств. базис

$$\delta_g = \begin{cases} 1 & \text{в точке } g \\ 0 & G-\{g\} \end{cases}$$

$$f = \sum_{g\in G} f(g)\,\delta_g$$

значения ф-ции
||
координаты

левый сдвиг

$$L_{g_0}: g \to g_0 g$$

Возникает представление группы G в простр. $\mathcal{F} = k[G]$

$$L_g(\delta_{g_0}) = \delta_{g g_0}$$

$$L_{gg'} = L_g L_{g'}$$

$\triangleleft$ $L_{gg'}(\delta_{g_0}) = \delta_{(gg')g_0} = \delta_{g(g'g_0)} =$

$= L_g(\delta_{g'g_0}) = L_g(L_{g'}\delta_{g_0})$

Опр. Левое регулярное представление L_g $\underline{\underline{L}}(g)$ || предст. в пространстве функций

Аналогично правое регулярное представление

$$R_{g_0}: g \to g g_0^{-1}$$

(если написать gg_0, то не будет действия)

$$R_g \delta_{g_0} = \delta_{g_0 g^{-1}}$$

$\boxed{\dim L(g) = |G|}$

Упр. $\{f(g)\}$ – координаты ф-ции f в базисе δ_g. Координаты меняются так

$$(L_g f)(g_0) = f(g^{-1} g_0) \quad !!$$

$$L_g(\delta_{g_0}) = \delta_{g g_0}$$

Общая идея.

$G : X \qquad x \to gx$

$$(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

$$ex = x, \ e \in G$$

Пример. $G = S_4 = \mathrm{Aut}\Big($  $\Big)$

$G : \mathcal{F}(X)$

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x)$$

если было бы написано g, то не выполнялось:

$$\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$$

ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$\rho : V$ $\quad V^\vee = \left\{ \begin{array}{c} \text{пр-во лин.} \\ \text{функционалов} \\ \text{на } V \end{array} \right\}$

$\rho^\vee$ — ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ρ

$$\rho^\vee(g)(l(v)) = l(g^{-1}v)$$

$\triangleleft$ $l(v_1+v_2) = l(v_1) + l(v_2)$

$l(\lambda v) = \lambda l(v)$

$$l(g^{-1}(v_1+v_2)) = l(g^{-1}v_1) + l(g^{-1}v_2)$$

ЛЕММА ШУРА — ЭТО НАШЕ ВСЁ.

- СПЛЕТАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

$G_{\rho_1} : V_1$ $\qquad G_{\rho_2} : V_2$

$\varphi : V_1 \to V_2$

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$$

ИНТЕРЕСУЕТ МНОЖЕСТВО ВСЕХ СПЛЕТАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ (ПРЕДСТАВЛ. $G_{\rho_1} : V_1$ И $G_{\rho_2} : V_2$) $\quad \mathrm{Hom}^G(V_1, V_2)$

- Нулевой оператор всегда сплетающий
- $Hom^G(V_1, V_2)$ — линейное пр-во над полем k

$\boxed{V_i \text{ — лин. } k\text{-простр.}}$

◁ $\varphi_1 : V_1 \to V_2$

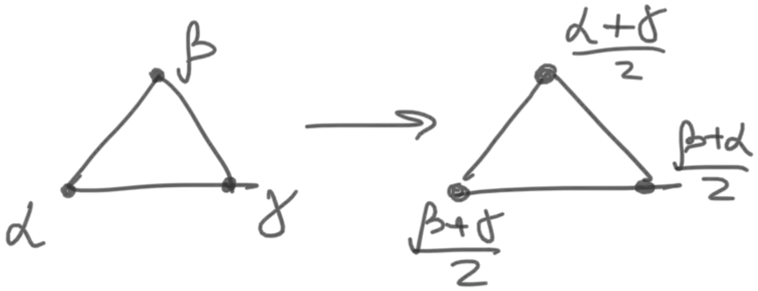
$\varphi_2 : V_1 \to V_2$ $\quad \boxed{\varphi_1 + \varphi_2 : V_1 \to V_2}$

Пусть φ_1, φ_2 — сплетающие. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \rho_1 &= \rho_2 \circ \varphi_1 \\ \varphi_2 \circ \rho_1 &= \rho_2 \circ \varphi_2 \end{aligned} \Rightarrow (\varphi_1 + \varphi_2) \circ \rho_1 = \varphi_1 \circ \rho_1 + \varphi_2 \circ \rho_1 = \rho_1 \circ \varphi_1 + \rho_2 \circ \varphi_2 = \rho_2 \circ (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$\dim Hom^G(V_1, V_2) = c(V_1, V_2)$ — число сплетений

Пример. $\mathbb{Z}_3$



$\mathcal{F}(\Delta)$

φ — усреднение (уср)

$\varphi \in Hom(\mathcal{F}(\Delta), \mathcal{F}(\Delta))$

поворот ∘ уср = уср ∘ поворот

Теорема Шура 1.

над полем $\mathbb{C}$

Пусть $G : V$ — неприводимое комплексное представление. Тогда $Hom^G(V, V)$ состоит из скалярных операторов.

$G : V$ $\quad \varphi : V \to V$

$$g \circ \varphi = \varphi \circ g \quad \forall g \in G$$

Тогда $\varphi = \lambda E$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$\triangleleft$ $\varphi : V_{\mathbb{C}}$ $\quad$ пусть λ — собств. знач-ие оператора φ

$$E_\lambda = \{ v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v \}$$

- E_λ — G-инвариантно (следует из $g \circ \varphi = \varphi \circ g$)

$\triangleleft$ $v \in E_\lambda$ $\quad \varphi(v) = \lambda v$

$$\varphi(gv) = g(\varphi v) = g(\lambda v) = \lambda(gv)$$

$\Downarrow$ в силу неприводимости $V_{\mathbb{C}}$

$$V_{\mathbb{C}} = E_\lambda \quad \varphi(v) = \lambda v$$

$\blacksquare$

над полем $\mathbb{C}$

Теорема Шура 2.

первая часть верна над $\forall$ полем

- $G : V$ $G : W$ – два неприводимых представления

Тогда $Hom^G(V, W) = \begin{cases} \{0\}, \text{ если } V \not\sim W \\ \dim Hom^G(V, W) = 1, \text{ если } V \sim W \end{cases}$

пусть $V \not\sim W$ (не эквив.)

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi \qquad \varphi : V \to W$$

покажем, что φ – нулевой

$\ker\varphi \in V$ $\quad$ $\ker\varphi$ – G-инвариантно, если $v \in \ker\varphi$

$Im\,\varphi \in W$

$$(\rho_1(g)v) \in \ker\varphi$$

$$\varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_1(g)v \in \ker\varphi$$

аналогично доказывается, что образ $Im\,\varphi$ – G-инвариантен (упр.)

$\circ\ \ker\varphi = \begin{cases} 0 \\ V \end{cases}$ $\qquad \operatorname{Im}\varphi = \begin{cases} 0 \\ W \end{cases}$

(т.к. $G : V$ – неприводимо)

Пусть $\ker\varphi = 0$
$\operatorname{Im}\varphi = W$ $\Rightarrow \varphi : V \to W$ изоморфизм

$\varphi \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \varphi$

не подходит

Остаётся $\ker\varphi = V$, ч.т.д. $\blacksquare$

Теперь рассмотрим $V \sim W$

$\varphi : V \to W$ изоморфизм

$\varphi \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \varphi$

Пусть ψ – любой другой сплетающий оператор

$$\varphi : V \underset{\varphi^{-1}}{\overset{}{\rightleftarrows}} W$$

$$\psi : V \to W$$

<u>Упр.</u> Композиция сплетающих есть сплетающий

$$\varphi^{-1} \circ \psi : V \longrightarrow V$$

СПЛЕТ. ОПЕРАТОР ИЗ V В V:

$$\varphi^{-1} \circ \psi \in \mathrm{Hom}^G(V, V)$$

ПО Т. ШУРА I: $\varphi^{-1} \circ \psi = \lambda E$

$\psi = \lambda \varphi \Rightarrow$ ПРОСТРАНСТВО ОДНОМЕРНО

$\blacksquare$

ЛЕКЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ

22.09.20

- ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПО ЦВЕТАМ
- G $\quad |G| < \infty$ $\quad$ ПОЛЕ $k = \mathbb{C}$
- V^G $\quad G \cdot V$ $\quad V_G$ – ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
- ЦВЕТ:

  НЕПРИВОД. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАЗБИВАЮТСЯ НА КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

  КАЖДЫЙ КЛАСС ОКРАШЕН В СВОЙ ЦВЕТ

ПАВЕЛ

$$V^G = W_1^G \oplus W_2^G \oplus \ldots \oplus \underbrace{W_s^G}_{\text{ПОДПРЕДСТАВЛ-ИЕ}}$$

ПЁТР

$$V^G = V_1^G \oplus V_2^G \oplus \ldots \oplus V_s^G$$

ИНДЕКСЫ РАВНЫ (=s), Т.К. МОЖНО ВЫРОВНЯТЬ, ДОБАВИВ ПУСТЫЕ ПОДПР.

Посчитаем цвета в подпредставл.

цвет

	T_1	T_2	T_3	T_4
Пётр	3	1	5	0
Павел	3	0	4	1

кол-во представл. этого цвета в разложении Петра

Вывод 1: V_i и W_j разные.

1. Это бывает! (зависит от выбора базиса)

Пример $V = id$ (тожд. представ)

Вывод 2: кратность цветов не совпадает

2. Этого не бывает!

Теорема. Кратность вхождения цвета в представление VG не зависит от способа его разложения на неприводимые.

(аналог: разложение абелевой гр.)

Лемма 1. Функтор $\mathrm{Hom}(V, W)$ билинеен.

- V, W — лин. простр-ва

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \left\{ \begin{array}{l} \text{простр-во линейных отображений} \\ \varphi : V \to W \end{array} \right.$$

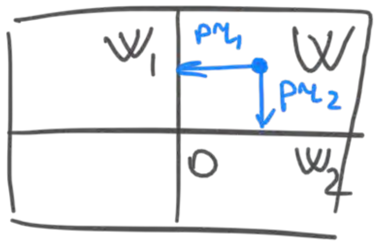
Билинейность:

$$\mathrm{Hom}(V, W_1 \oplus W_2) = \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}(V, W_2)$$

$$\mathrm{Hom}(V_1 \oplus V_2, W) = \mathrm{Hom}(V_1, W) \oplus \mathrm{Hom}(V_2, W)$$

Док-во:

$\varphi : V \longrightarrow$



$$\begin{tikzcd} & pr_1 \circ \varphi \\ \varphi \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & pr_2 \circ \varphi \end{tikzcd}$$

проекция = лин. преобразование
$\Downarrow$
$pr_1 \circ \varphi$ лин.

$$\varphi \longrightarrow \underset{\mathrm{Hom}(V, W_1)}{\underset{\cap}{pr_1 \circ \varphi}}, \quad \underset{\mathrm{Hom}(V, W_2)}{\underset{\cap}{pr_2 \circ \varphi}}$$

⇒ оператор раскладывается в прямую сумму инвар. подпр-в

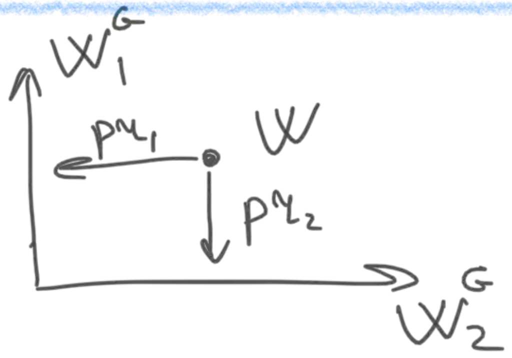
хочу рассмотреть $Hom(V^G, W_1^G \oplus W_2^G)$

$$\underbrace{Hom_G(V, W)}_{\text{пр-во сплетающих операторов}} = \begin{cases} \text{простр-во линейных отображений} \\ \varphi : V \to W, \quad \varphi \circ g = g \circ \varphi \end{cases}$$

Лемма 2. Функтор $Hom_G(V, W)$ билинеен.

Д-во: то же, что и в лемме 1. Остаётся проверить, что $pr_1 \circ \varphi$ и $pr_2 \circ \varphi$ — сплетающие

Лемма.



W^G

Тогда проектирование pr_1 (на W_1^G) — сплетающий оператор

ДОК-ВО: $W = W_1 \oplus W_2 = (pr_1 W) + (pr_2 W)$

ВОЗЬМЁМ $w \in W$

ТАК КАК $W^G = W_1^G \oplus W_2^G$, ТО

$$gw = gw_1 \oplus gw_2$$

$$pr_1(gw) = gw_1 = g \circ pr_1(w)$$

$$\overset{\shortparallel}{(pr_1 \circ g) w} \quad \Rightarrow \text{СПЛЕТАЮЩИЙ} \quad \square$$

ДОК-ВО ТЕОРЕМЫ О ЦВЕТАХ

$$V^G = V_1^G \oplus V_2^G \oplus \ldots \oplus V_s^G$$

$$T \to \underbrace{T^G}_{\text{ПРОСТРАНСТВО НЕПРИВОДИМОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЦВЕТА } T}$$

$$\mathrm{Hom}_G(T^G, V^G) = \mathrm{Hom}_G\left(T^G, \bigoplus_{i=1}^{s} V_i^G\right) =$$

$$\underset{\text{БИЛИН.}}{=} \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Hom}(T^G, V_i^G)$$

$$\underbrace{\dim \mathrm{Hom}_G}_{\text{число сплетения}}(T^G, V^G) = \sum_{i=1}^{s} \dim \mathrm{Hom}_G(T^G, V_i^G)$$

Если V_i имеет цвет, отличный от цвета T, то по лемме Шура

$$\dim \mathrm{Hom}_G(T^G, V_i^G) = 0$$

Если цвета совпадают, то

$$\dim \mathrm{Hom}_G(T^G, V_i^G) = 1$$

Утв. Кратность вхождения неприводимого представления T^G (цвет T) в пространстве V^G равна

$$\dim \mathrm{Hom}_G(T^G, V^G) = \underbrace{C}_{\text{число сплетения}}(T^G, V^G)$$

Кратность не зависит от разложения пр-ва $V^G \Rightarrow$ $\blacksquare$

L_g — левое регулярное представление

$$G : \mathbb{C}[G] \qquad \delta_g$$

$$L_{g_0}(\delta_g) = \delta_{g_0 g}$$

Теорема. T^G — неприводимое предст. Тогда

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], T^G) = \dim T^G$$

Следствие: В левом регулярном представлении присутствуют неприводимые представ-ия всех цветов с кратностью, равной размерности неприводимого представления.

$$L_g = \bigoplus (\dim T_i^G) T^G$$

Важное наблюдение

$$\dim L_g = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = |G|$$

$$\dim L_g = \dim \bigoplus (\dim T_i^G)\, T^G = \sum n_i^2$$

где $n_i = \dim T_i^G$ $\quad$ i пробегает мн-во всех неприводим. пр-ий

$$\boxed{|G| = \sum n_i^2}$$

Док-во: $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], T^G)$

$$\varphi \circ g = g \circ \varphi$$

$$\varphi : \mathbb{C}[G] \longrightarrow T^G$$

$$\varphi(\delta_g) = \varphi(L_g \delta_e) \stackrel{!}{=} g\,\varphi(\delta_e) \quad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\delta_e) &= t_e \\ \varphi(\delta_g) &= g(t_e) \end{aligned}\right\}$$

т.е. φ полностью восстанавливается, если известно, куда он переводит базисный вектор δ_e

$$\varphi(f(g)) = \varphi\Big(\sum_{g\in G} f(g)\,\delta_g\Big) = \sum_{g\in G} f(g)\,\varphi(\delta_g) =$$

$$= \sum f(g)\, g\, \overbrace{\varphi(\delta_e)}^{t_e \in T^G} = \sum_{g\in G} f(g)\, g(t_e) \quad (**)$$

Формула $\forall$ вектора t_e задаёт сплетающий оператор (проверить самостоятельно)

Итак, $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], T^G) \overset{\text{изоморфно}}{\simeq} T^G$

$$\varphi \longrightarrow \varphi(\delta_e)$$

$$\mathbb{C}[G] = \oplus\, k_i T_i^G$$

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], T^G) = \mathrm{Hom}_G(\oplus\, k_i T_i^G, T^G) =$$

$$= \oplus\, \underbrace{\mathrm{Hom}_G(T_i^G, T_j^G)}_{\dim \mathrm{Hom}_G(T_i^G, T^G)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \dim \mathrm{Hom}_G(T_i, T_j) = k_i$$ — кратность вхождения T_i в левое регул. представ-ие $=$

$$= \dim_{\mathbb{C}} T_j^G$$ // по л. Шура \\

ЛЕКЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ 01.10.20

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ $U \otimes V$

- U и V — конечномерные вект. пр-ва над полем K

$U \square V$ — лин. пространство, сост. из формальных лин. комбинаций

$$\sum_{i=1}^{N} c_i (u_i, v_i) \qquad u_i \in U,\ v_i \in V,\ c_i \in K$$

$$\{c_1(u_1,v_1)+c_2(u_2,v_2)+\dots+c_k(u_k,v_k)\}$$

- Сложение = это приписывание одной ф. лин. комб. к другой (справа

$$\{c_1(u_1,v_1)+c_2(u_2,v_2)\}+\{c_3(u_3,v_3)+c_4(u_4,v_4)\}=$$
$$=c_1(u_1,v_1)+c_2(u_2,v_2)+c_3(u_3,v_3)+c_4(u_4,v_4)$$

- Умнож. на эл-т поля K

$$\lambda(c_1(u_1,v_1)+\dots+c_k(u_k,v_k))=\lambda c_1(u_1,v_1)+\dots+\lambda c_k(u_k,v_k)$$

Выполняются все аксиомы вект. пр-ва

- $U \circ V < U \square V$

Опр. $U \square V$ — лин. пр-во, порожденное всеми парами вида (u, v) $u \in U$, $v \in V$

$$U \circ V = \{(u_1+u_2, v) - (u_1, v) - (u_2, v),$$
$$(u_1, v_1+v_2) - (u, v_1) - (u, v_2),\ k(u,v) - (ku, v),$$
$$k(u,v) - (u, kv)\}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $$U \square V / U \circ V \simeq U \otimes V$$

$$\overline{(u,v)} = u \otimes v$$

$U \otimes V$ – это линейное пространство.
Это пространство состоит из конечных лин. комбинаций вида $\sum c_i (u_i \otimes v_i)$
(мы перешли от векторов к классам)

Для этих лин. комбинаций выполнено:

- $(u_1+u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v$
- $u \otimes (v_1+v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2$
- $k(u \otimes v) = ku \otimes v = u \otimes kv$

Прим. $u \otimes v \neq v \otimes u$!

Пример. $(2u_1+3u_2)\otimes(v_1-v_2)=$

$$= 2(u_1\otimes v_1)+3(u_2\otimes v_1)-2(u_1\otimes v_2)-3(u_2\otimes v_2)$$

$$u=\sum a_i u_i \qquad v=\sum b_j v_j \Rightarrow$$

$$u\otimes v=\sum_i\sum_j a_i b_j\, u_i\otimes v_j$$

БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ $U\otimes V$

Теорема. Пусть $\{e_1,\dots,e_n\}$ – базис в U

$\{f_1,\dots,f_n\}$ – базис в V

Тогда $\underbrace{\{e_i\otimes f_j\}}_{mn\text{ штук}}$ – базис в $U\otimes V$

$i=1,\dots,n$

$j=1,\dots,m$

Следствие. $\dim(U\otimes V)=\dim U\cdot\dim V$

Док-во: докажем утверждения

1. Лин. оболочка $\mathcal{L}\{e_i\otimes f_j\}=U\otimes V$
2. $\{e_i\otimes f_j\}$ – лин. независимы

1: $w \in U \otimes V$, $w = \sum a_i (u_i \otimes v_i)$

т.к. каждый вектор представим в виде

$\Rightarrow$ достатачточно док-ть, что векторы такого вида $\in \mathcal{L}\{e_i \otimes f_j\}$

$$u = \sum u_i e_i$$
$$v = \sum v_j f_j \Rightarrow u \otimes v = \sum \sum u_i v_j (e_i \otimes f_j) \Rightarrow$$

доказано.

2: докажем, что векторы л.н.з.

Шаг 1. $e_1 \otimes f_1$

Возьмём лин. α-функционал

$\alpha(e_1) = 1$

$\alpha(e_k) = 0$, $k \neq 1$

V

$\beta \in V^*$

$\beta(f_1) = 1$

$\beta(f_k) = 0$, $k \neq 1$

Наша цель:

$$\underset{(e_p \otimes f_q)}{L(e_1 \otimes f_1)} = \begin{cases} 1, & (p,q) = (0,0) \\ \text{иначе } 0 \end{cases}$$

Определим L на $U \square V$

(*) $L\left(\sum c_i (u_i, v_i)\right) \overset{\text{опр.}}{=} \sum c_i \alpha(u_i) \beta(v_i) \in K$

Пример: $2(u_1,v_1)+\{3(u_2,v_2)+6(u_3,v_3)\}=$

$$L_{(s_1)}=2\alpha(u_1)\beta(v_1)$$

$$L_{(s_2)}=3\alpha(u_2)\beta(v_2)+6\alpha(u_3)\beta(v_3)$$

Общие вещи: $l: W\to K$

$T<W$

$l(W/T)$

чтобы выполн. $l(w+T)=l(w)$, нужно

$\boxed{l|_T=0}$ тогда докажем

(*) $L|_{u\circ v}=0$

Покажем, что $L((u_1+u_2,v)-(u_1,v)-(u_2,v))=0$

$\alpha(u_1+u_2)\beta(v)-\alpha(u_1)\beta(v)-\alpha(u_2)\beta(v)=0,$

т.к. $\alpha(u_1+u_2)\beta(v) = \alpha(u_1)\beta(v)+\alpha(u_2)\beta(v)$

$\Rightarrow L_0$ продолжается до лин. функционала на тензорном произведении

$U \square V / _{U \circ V} = U \otimes V$ и вычисл. по ф-ле

$$L\left(\sum c_i (u_i \otimes v_i)\right) = \sum c_i \alpha(u_i) \beta(v_i)$$

3: $L(e_p \otimes f_q) = \alpha(e_p) \beta(f_q) = 1$

только если $p = q = 1$

$$\sum_{p,q} \alpha_{pq} (e_p \otimes f_q) = 0 \qquad \alpha_{pq} \neq 0$$

$$L\left(\sum a_{pq} (e_p \otimes f_q)\right) = \sum a_{pq} L\left((e_p \otimes f_q)\right) =$$

$$= \sum a_{pq} \delta_p^1 \delta_q^1 = a_{11}$$

$a_{11} = 0 \Rightarrow$ доказано $\square$

Мечта (точнее теорема)

$$P_n = \{ p(x), \deg p \leq n \}$$

$$Q_m = \{ q(y), \deg q \leq m \}$$

$$P_n \otimes Q_m = K[x, y]$$

т.е. $x^i \otimes y^j \rightsquigarrow x^i y^j$ – изоморфизм

ИЗ ТЕОРЕМЫ О БАЗИСЕ СЛЕДУЕТ

$$\dim(U\otimes V) = \dim U \dim V$$

ЕСТЕСТВЕННОСТЬ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВ-ИЯ

U, V

$U\oplus V$

$U\otimes V$

ТЕОРЕМА 1 (БЕЗ Д-ВА)

$$\boxed{(U\oplus V)\otimes W = U\otimes W \oplus V\otimes W}$$

АССОЦ. ТЕНЗ. УМНОЖ-ИЯ $U\otimes V\otimes W$

$$(U\otimes V)\otimes W \simeq U\otimes (V\otimes W)$$

$$\sum c_i (u_i, v_i, w_i)$$

$$(u_1+u_2, v, w) - (u_1, v, w) - (u_2, v, w)$$

И ТАК ПО КАЖДОМУ АРГУМЕНТУ

Утв. $U\otimes V \simeq V\otimes U$ ИЗОМОРФНО НЕ ЗНАЧИТ ТОЖДЕСТВЕННО

$u\otimes v \to v\otimes u$ — ИЗОМОРФИЗМ

АЛГЕБРА ЛЕКЦИЯ 08.10.20

Полезная лемма

Любой тензор w из $U\otimes V$ однозначно записывается в виде

$$w = e_1\otimes v_1 + \ldots + e_n\otimes v_n \quad \text{где } v_i\in V$$

Док-во: $$\sum_{i,j} c_{ij}\, e_i\otimes f_j = \sum_{i=1}^{n} e_i\otimes \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_j\right)}_{v_i} = \sum_i e_i\otimes v_i \quad \square$$

Пример 1. • $P_n(x)\otimes_{\mathbb{R}} P_m(y)\simeq P_{m+n}(x,y)$

конструкция

канонически изоморфно, т.е. не зависит от выбора базиса

$p\in P_n(x)$ $\quad q\in P_m(y)$

$$\varphi: p(x)\otimes q(y)\longmapsto p(x)q(y)\in P_{m+n}(x,y)$$

продолжим по линейности, т.е.

$$\varphi(w)=\varphi\left(\sum p_i(x)\otimes q_i(y)\right)=\sum p_i(x)q_i(y)$$

$$\overset{\text{Л,ч}}{(p_1(x)+p_2(x))\otimes q(y)} = \overset{\text{П,ч}}{p_1(x)\otimes q(y)+p_2(x)\otimes q(y)}$$

$$\varphi(\text{Л,ч}) = (p_1(x)+p_2(x))\,q(y) \Rightarrow \text{корректно опр.}$$

$$\parallel$$

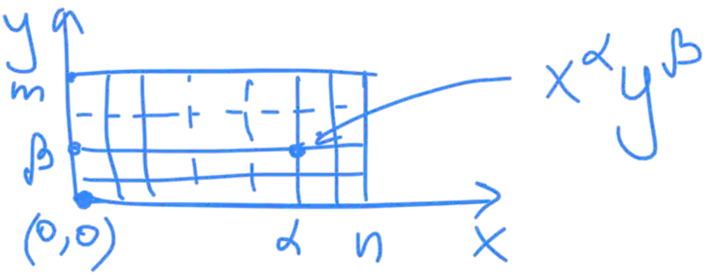
$$\varphi(\text{П,ч}) = p_1(x)q(y)+p_2(x)q(y)$$

Утв. • φ есть отображение на

$$x^2\otimes y + x\otimes y^5 + 1\otimes y^6 \longmapsto x^2y + y^5x + y^6$$

• $\dim P_n \otimes P_m = (n+1)(m+1)$

• $\dim P_{m+n}(x,y)$



целых точек $= (n+1)(m+1)$

φ отобр. на $\Rightarrow$ по т. о лин. отображ. φ – изоморфизм

Пример 2.

V^* – двойств. к V

Теорема.

$$U\otimes V^* \simeq \left\{\begin{array}{c}\text{пространство лин. отображ.}\\ V \longrightarrow U\\ \text{над полем } k\end{array}\right\} = \mathrm{Hom}_k(V,U)$$

$\dim = mn$ $\qquad\qquad$ $\dim = mn$

Док-во:

Будем использовать св-во лин. отобр.: если $\ker\varphi = 0$, то φ – изоморфизм

Конструкция

$$u\otimes l \longmapsto A_{u\otimes l}(v)=l(v)u$$

$u\in U$
$l\in V^*$

Продолжим по линейности

$$\varphi(w)=\varphi\left(\sum u_i\otimes l_i\right)=A_w=\sum A_{u_i\otimes l_i}$$

Проверка соотношений:

$$(u_1+u_2)\otimes l=u_1\otimes l+u_2\otimes l$$

$l(v)u_1$ $\quad$ $l(v)u_2$

$A(v)=l(v)(u_1+u_2)$

$\Rightarrow$ корректно определено

Теперь докажем, что $\ker\varphi=\{0\}$

$w\in U\otimes V^*$ $\quad A_w(v)=0$

$v\in V$

По полезной лемме

$w=e_1\otimes l_1+\ldots+e_n\otimes l_n$ $\quad$ l_i – однозначно опр. эл-ты пр-ва V^*

$$A_w=\sum_{i=1}^{n}A_{e_i\otimes l_i} \qquad A_w(v)=\sum l_i(v)e_i$$

Если $w\in\ker\varphi$, то $A_w(v)=0\Rightarrow l_i(v)=0\ \forall v\Rightarrow$
$\Rightarrow l_i=0\Rightarrow w=e_1\otimes 0+\ldots+e_n\otimes 0=0$

$\square$

Теорема (самост.)

$$U^* \otimes V^* = \left\{ \begin{array}{c}\text{пр-во билин. отображений} \\ U \times V \to k\end{array} \right\}$$

$$B(u, v) \in k$$

$$B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v)$$

$$B(\lambda v, \mu v) = \lambda \mu B(v, u)$$

$$(U \otimes V)^* = U^* \otimes V^*$$

$$U \otimes V = \left\{ \begin{array}{c}\text{простр. билин. отображ.} \\ U \times V \to k\end{array} \right\}^*$$

Тензорное произведение лин. операторов

$A : U \to U \qquad A \in \mathrm{Hom}(U, U)$

$B : V \to V \qquad B \in \mathrm{Hom}(V, V)$

$$(A \otimes B) : u \otimes v = Au \otimes Bv$$

А дальше по линейности, и, честное слово, я проверил соотношения!

$$A \otimes B \in \mathrm{Hom}(U, U) \otimes \mathrm{Hom}(V, V)$$

Матрица оператора $A\otimes B$ в базисе $\{e_i\otimes f_j\}$

Дана м-ца опер. A в базисе $\{e_i\}$ и

м-ца опер. B в базисе $\{f_j\}$

$$(A\otimes B)(e_i\otimes f_j)=Ae_i\otimes Bf_j=$$

$$=\left(\sum_{p=1}^{n} a_{ip}e_p\right)\otimes\left(\sum_{l=1}^{m} b_{jl}f_l\right)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{ip}b_{jl}(e_p\otimes f_l)$$

То, какое место займут эл-ты матрицы, зависит от того, каким образом упорядочены базисы

Обычно использ. лексикогр. порядок

$e_1\otimes f_1,\dots e_1\otimes f_m, e_2\otimes f_1,\dots,e_2\otimes f_m,\dots,e_n\otimes f_m$

$\boxed{\text{Пример.}}$

$A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$

базисы

e_1, e_2

f_1, f_2

$$\underset{4\times 4}{A\otimes B}=\left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad}^{a_{11}B}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad}^{a_{12}B}} \\ 2&0&6&0\\1&3&3&9\\ \hline 0&0&2&0\\0&0&1&3 \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad}_{a_{21}B}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad}_{a_{22}B}}\end{array}\right)$$

Теорема. $\operatorname{tr}(A\otimes B)=\operatorname{tr}A\,\operatorname{tr}B$

$$\det(A\otimes B)=(\det A)^m(\det B)^n$$

Тензорное произведение абелевых групп

S, T — абел. группы

(s,t) $\qquad m_i\in\mathbb{Z}$

$$S\square T=\underbrace{\sum m_i(s_i,t_i)}_{\text{конечная сумма}}$$

$$S\square T\,/\,S\circ T$$

$$\overline{(s,t)}=s\otimes t \qquad S\circ T=\begin{cases}(s_1+s_2,t)-(s_1,t)-(s_2,t)\\(s,t_1+t_2)-(s,t_1)-(s,t_2)\\m(s,t)-(ms,t)-(s,mt)\end{cases}$$

В случае вект. пр-в мы умножаем на число из поля $(\mathbb{R},\mathbb{C})$, а здесь умнож. на $\mathbb{Z}$ числа.

Пример. $\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_3=\{0\}$

$$1\cdot(a\otimes b)=(2k+3l)(a\otimes b)=$$

$$2k+3l=1 \qquad =k(2a\otimes b)+l(a\otimes 3b)=0$$

$$\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}_{(m,n)} \qquad (m,n)=\text{НОД}$$

ЛЕКЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ

13.10.20

$A: V^n \qquad B: W^m$

$(A \otimes B): (V \otimes W)$

ТЕОРЕМА. $\operatorname{tr}(A\otimes B) = \operatorname{tr}A \cdot \operatorname{tr}B$

$\det(A\otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$

ДОК-ВО: $e = (e_1, \dots, e_n)$ – БАЗИС A

$f = (f_1, \dots, f_m)$ – БАЗИС B

ПО ТЕОРЕМЕ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ, $\exists$ ТАКИЕ БАЗИСЫ e И f, ЧТО

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad B_f = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr} A_e = \sum \lambda_i \qquad \operatorname{tr} B_f = \sum \mu_j$

$\det A = \prod \lambda_i \qquad \det B = \prod \mu_j$

ПОЛУЧАЕМ ТРЕУГОЛЬНУЮ МАТРИЦУ $A \otimes B$ С $\lambda_i \mu_j$ НА ДИАГОНАЛИ:

$$(A\otimes B)_{e\otimes f} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 B_f} & & & * \\ & \boxed{\lambda_2 B_f} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\lambda_n B_f} \end{pmatrix}$$

ОСТАЛЬНОЕ — АРИФМЕТИКА

ВАЖНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

G $\qquad \rho: G \to GL(V)$

$\qquad \tau: G \to GL(W)$

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ 2х ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ρ И τ ГРУППЫ G

$$(\rho\otimes\tau)(g)(v\otimes w) = \rho(g)v\otimes\tau(g)w$$

$$v\in U,\ w\in W$$

А НА ОСТАЛЬНЫХ ТЕНЗОРАХ ПО ЛИНЕЙНОСТИ

Пример. S_3 $\quad \mathbb{1}, sign, T_2$ ← двум. предст.

всего 3 неприв. предст., т.к. $1^2+1^2+2^2=|S_3|^2$

$$T_2 \otimes T_2 = \mathbb{1} \oplus sign \oplus T_2$$

Действие симметрической группы $S_k : V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{k}$

$\sum v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_k \quad v_i \in V$

Теорема-определение. Группа $S_k : V^{\otimes k}$ естественно действует на пространство $V^{\otimes k}$. Это действие линейно (т.е. возникает представление симметрической группы S_k в $V^{\otimes k}$)

Д-во: $\sigma \in S_k$

$$\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_k) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(k)}$$

а дальше по линейности

Пример: $v_1' + v_1'' \otimes v = v_1' \otimes v + v_1'' \otimes w$

Симметрические и кососимметрические тензоры.

Тензор $w \in V^{\otimes k}$ наз. симметрическим (кососимметрическим), если

$$\sigma w = w \quad (\sigma(w) = (\operatorname{sign}\sigma)\, w)$$

$$\sigma \in S_k$$

Примеры. $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1$ — сим,

$v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$ — кососим.

$S(V^{\otimes k})$ — подпр. сим. тензоров

$A(V^{\otimes k})$ — подпр. кососим. тензоров

Симметризатор и альтернатор.

P_+ P_-

$$P_+(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \ldots v_{\sigma(k)}$$

т.е. P_+ может взять $\forall$ тензор и превратить его в симметрический

$$P_-(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sign}\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(k)}$$

Аналогично — в кососимметрический

$$P_+(v_1\otimes v_2)=\frac{1}{2}(v_1\otimes v_2+v_2\otimes v_1)$$
$$P_-(v_1\otimes v_2)=\frac{1}{2}(v_1\otimes v_2-v_2\otimes v_1)$$

Теорема о P_+ и P_-

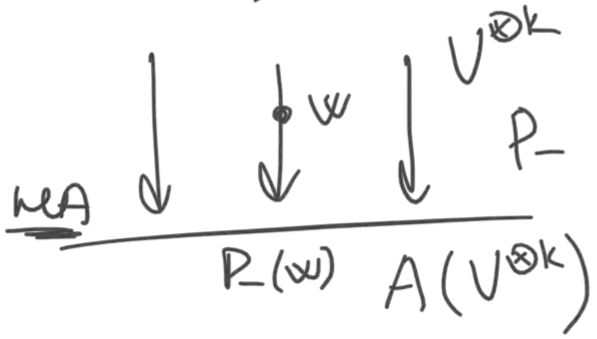
$$P_+ : V^{\otimes k}\longrightarrow S(V^{\otimes k})$$
$$P_- : V^{\otimes k}\longrightarrow A(V^{\otimes k})$$

$$P_+\big|_{S(V^{\otimes k})}=id$$ (если применить P_+ к сим. тензору, то ничего не изм.)

$$P_-\big|_{A(V^{\otimes k})}=id$$

Эти операторы — проекторы, т.к.

$$P_\pm^2=P_\pm$$



Док-во: базисы в $A(V^{\otimes k})$ и $S(V^{\otimes k})$

$e=(e_1,\dots,e_n)$

$$V^{\otimes k}=e^{\otimes k}=\{e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_k}\}$$

$w\in V^{\otimes k}$ $\qquad 1\le i_1\le n \qquad 1\le i_k\le n$

$$w = \sum c^{i_1,\dots,i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$$

$$P_- w = c^{i_1,\dots i_k} P_-(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})$$

$\triangle$

ЛЕММА (ПРОСТАЯ)

$$P_-(e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}) = (\operatorname{sign}\sigma) P_-(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})$$

Д-ВО: ПРОСТО РАСПИСАТЬ

НАБЛ. 1 $\quad P_- e_1 \otimes e_1 \otimes \dots = 0$

ЕСЛИ 2 БАЗИСНЫХ ВЕКТОРА $e_{i_1} = e_{i_2}$,

ТО $P_-(\quad) = 0 \Rightarrow$ ДОСТАТОЧНО

РАССМОТРЕТЬ УПОР. НАБОР $e_1 \otimes e_2 \otimes \dots \otimes e_k$

$$P_- w = c^{i_1,\dots,i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$$

$$1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$$

Теорема. $P_-(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_k})$ – это базис $A(V^{\otimes k})$

$1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n$

Д-во: нужно док-ть, что они ЛНЗ (было в прошлой лекции)

$$P_-(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_k})=e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$$

$$P_-(v_1\otimes\ldots\otimes v_k)=v_1\wedge v_2\wedge\ldots\wedge v_k$$

k-вектор

Подведём итоги: $\dim V=3$

Пример

$A(V^{\otimes 2})=\Lambda^2 V$ – внешняя степень пр-ва V

$$e_{12}(e_1\wedge e_2)+e_{23}(e_2\wedge e_3)+e_{13}(e_1\wedge e_3)$$

$(e_1+e_2\wedge e_3)=e_1\wedge e_3+e_2\wedge e_3$ – билинейность

Пример $\dim A(V^{\otimes 2}) = \dim \Lambda^2 V = 3$

$$\dim A(V^{\otimes 3}) = \dim \Lambda^3 V$$
$$\shortparallel$$
$$1$$

$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3}$

$1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 3 \Rightarrow \exists\, 1$ базисный вектор $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$

В общем случае $\dim V = n$

$$\dim \Lambda^n V = n$$

$$\langle e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \rangle$$

Нахождение $\Lambda^k V$ — комбинаторная задача

$\{1, \ldots, n\}$

$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$

$$\dim A(V^{\otimes k}) = \dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$$

если $\dim V = n$

Если $k > n$ то $\dim \Lambda^k V = 0$

ЛЕКЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ

27.10.20

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА $T(V)$

$S(V)$

АЛГЕБРА Grassman $= A(V)$

$$T(V) = K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \ldots$$

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{n}$$

ПР-ВО ТЕНЗОРОВ ВАЛЕНТНОСТИ n

$$w = (w_1 \otimes \ldots \otimes w_s) \in V^{\otimes s}$$

$$v = (v_1 \otimes \ldots \otimes v_l) \in V^{\otimes l}$$

Опр. $w \otimes v = w_1 \otimes \ldots \otimes w_s \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_l$

$\cap$

$V^{\otimes(s+l)}$

$V^{\otimes n} \supset S^n(V)$ симметрич.

$\cup$

$A^n(V)$

кососимметрич.

P_+, P_-

$$S(V) = K \oplus \underset{\overset{\shortparallel}{S^1(V)}}{V} \oplus S^2(V) \oplus S^3(V) \oplus \ldots \oplus S^n(V)$$

коммутатив.,
ассоциатив.,
бесконечно-
мерная

Умножение $\alpha \otimes \beta$

$\dim V = 4$ $\quad v_1, v_2, v_3, v_4$

$\alpha \in S^p(V)$ $\qquad \beta \in S^q(V)$

<u>пример:</u> $\alpha = v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \in S^2(V)$

$\beta = v_3 \otimes v_4 + v_4 \otimes v_3 \in S^2(V)$

<u>Опр.</u> Произведение тензоров в симметрич. алгебре

$$P_+(\alpha \otimes \beta) = \alpha \circ \beta$$

$n = \dim V$

$$A(V) = K \oplus V \oplus A^2(V) \oplus A^3(V) \oplus \ldots \oplus A^n(V)$$

$$Gr(V) = \Lambda^0 V \oplus \Lambda V \oplus \Lambda^2 V \oplus \ldots \oplus \Lambda^3 V \oplus \ldots \oplus \Lambda^n V + \{0\}$$

$\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$

$\dim \Lambda^n V = 1$

при $k > n$ $\dim \Lambda^k V = 0$

$\Longrightarrow$ $\dim A(V) = \dim Gr(V) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$\alpha \in \Lambda^p V$

$\beta \in \Lambda^q V$

$$P_-(\alpha \otimes \beta) = \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} V$$

<u>Пример.</u> $\alpha = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$

$\beta = \alpha$

$$\alpha \wedge \alpha = (v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4)(v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4) =$$

$$= \underbrace{v_1 \wedge v_2 \wedge v_1 \wedge v_2}_{0} + v_3 \wedge v_4 \wedge v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4 =$$

$$= \Sigma\, v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4$$

$\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_s \in \Lambda^s V$

$\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_t \in \Lambda^t V$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\overset{ч}{\deg}\alpha \deg \beta}\, \beta \wedge \alpha$$

Теория характеров.

$k = \mathbb{C} \quad |G| < \infty$

$$\rho : G \to GL(V)$$

Характер представления

$$\chi_\rho(g) \in \mathbb{C}[G]$$

$$\chi_\rho(g) = tr(\rho(g))$$

не зависит от матричной реализации

Большая теорема

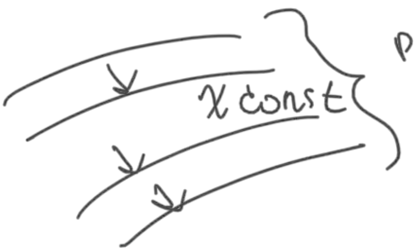
Характер $\chi_\rho(g)$ определяет представление ρ с точностью до изоморфизма

Простые свойства характера

- $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$

Вывод: характер – это ф-ция на группе, постоянная на классе сопряженных элементов

$\square$ $\operatorname{tr} \rho(hgh^{-1}) = \operatorname{tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) =$
$= \operatorname{tr}(\rho(g)) = \chi(g)$ $\square$



расслоение на классы сопряженности

- $\chi(1) = \dim V$
- $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$

$\triangleright$ Группа конечная $\Rightarrow g^N = 1$ для нек. $N \Rightarrow$ собств. знач-ия оператора $\rho(g)$ суть корни $\sqrt[N]{1}$ — $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$
$n = \dim V$

$$\operatorname{tr} \rho(g) = \sum e_i$$
$$\rho(g^{-1}) = \rho^{-1}(g)$$
$$\operatorname{tr} \rho(g^{-1}) = \sum e_i^{-1} = \sum \overline{e_i} = \overline{\operatorname{tr} \rho(g)} \quad \triangleleft$$

- $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$
- $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$

(из прошлой лекции)

Теорема (техническая) об ортогональности характеров

(теорема-обещание)

$$\mathbb{C}[G] = \{f(g)\}$$

В $\mathbb{C}$ введём эрмитово скалярное произведение

$$\langle f_1(g), f_2(g)\rangle = \frac{1}{|G|}\sum \overline{f_1}(g)\, f_2(g)$$

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$$

Формулировка. 1) Если представл-ие $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ неприводимо, то $\|\chi_\rho\|^2 = 1$

2) Если представления ρ_1 и ρ_2 неприводимы и неизоморфны, то

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}\rangle = 0$$

СЛЕДСТВИЕ 1

Кратность вхождения неприводимого представления ρ_1 в разложение на неприводимые представления ρ равна

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_\rho \rangle$$

$\square$ $\rho = \bigoplus n_i \rho_i = n_1\rho_1 + \ldots + n_s \rho_s$

где $\rho_1, \ldots, \rho_s$ — все неприводимые представления гр. G

n_i — кратность представления

$$\chi_\rho = \sum n_i \chi_{\rho_i} = n_1 \chi_{\rho_1} + \ldots$$

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_\rho \rangle = \sum_{i=1}^{s} n_i \langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_i} \rangle \underset{\text{обещанию}}{\overset{\text{по теореме}}{=\!=}} n_1 \|\chi_{\rho_1}\|^2 = n_1$$

СЛЕДСТВИЕ 2 (большая теорема)

Два представления α и β изоморфны $\Longleftrightarrow$ $\chi_\alpha = \chi_\beta$

$\blacktriangleright$ Если $\alpha \sim \beta$, то понятно (т.к. $\exists$ базис, при кот. матричные реализации одинаковые) в другую сторону: $\chi_\alpha = \chi_\beta$

$\alpha = \oplus m_i \rho_i$

$\beta = \oplus k_i \rho_i$

по 1 следствию $m_i = \langle \chi_{\rho_i}, \chi_\alpha \rangle$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\parallel}{k_i = \langle \chi_{\rho_i}, \chi_\beta \rangle}$

$\Rightarrow m_i = k_i \Rightarrow \alpha$ и β изоморфны ◀

СЛЕДСТВИЕ 3

Кратность вхождения тривиального представления в представление ρ

$$\chi_1(g) \equiv 1$$

$$\underbrace{\langle \chi_1, \chi_\rho \rangle}_{= n_1} = \frac{1}{|G|} \sum 1 \cdot \chi_\rho(g) = \underbrace{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)}_{= 1}$$

СЛЕДСТВИЕ 4

Критерий неприводимости

ρ неприводимо $\Leftrightarrow \|\chi_\rho\|^2 = 1$

Теория Галуа

ЛЕКЦИЯ АЛГЕБРА

03.11.20

$\|\chi_\rho(g)\| = 1 \Leftrightarrow \rho$ неприводимо

$\triangleright$ $\rho = \bigoplus n_\alpha \rho_\alpha$ — ρ_α — неприв. представление G

$\chi_\rho = \sum n_\alpha \chi_{\rho_\alpha}$ — n_α — кратность вхождения

$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum n_\alpha^2 = 1$

$\Downarrow$

$n_{\alpha_i} = 1$ остальные $= 0$

$\Rightarrow \rho = \rho_\alpha$ — неприводимое $\triangleleft$

В другую сторону: прошлая лекция

Теорема (обещание)

$\rho_V : V$ — $\rho_W : W$

$V \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ — $W \langle f_1, \dots, f_m \rangle$

$\langle f_i, f_j \rangle = 0$

$\langle f_i, f_i \rangle = 1$

Эрмитово скалярное произв-ие:

$$\langle \lambda x, y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$$

$$\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

$$Ae_i = \sum a_{ji} e_j \qquad \boxed{a_{ji} = \langle e_j, Ae_i\rangle}$$

ф-ла в ортонорм. базисе

$$\operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii} = \sum_i \langle e_i, Ae_i\rangle \qquad (*)$$

Что нужно док-ть:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_v(g)}\,\chi_w(g) = \begin{cases} 0, & \rho_v \nsim \rho_w \\ 1, & \rho_v \sim \rho_w \\ & v = w \end{cases}$$

неприводимы

Учитывая $(*)$

$$\overline{\chi_v(g)} = \chi_v(g^{-1}) = \sum_i \langle e_i, \rho_v(g^{-1}) e_i\rangle$$

$$\chi_w(g) = \sum_j \langle f_j, \rho_w(g) f_j\rangle$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_i \sum_j \sum_G \langle e_i, \rho_v(g^{-1}) e_i\rangle \langle f_j, \rho_w(g) f_j\rangle = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$A: V \to W \qquad \rho_v, \rho_w \text{ — неприв. представл-ия}$$

$C: V \to W$

$$C(v) = \sum_{g \in G} \rho_W(g) \circ A \circ \rho_V(g^{-1})(v)$$

Лемма. Оператор $C: V \to W$ сплетающий

$$C\rho_V = \rho_W C$$

$\triangleright$ Ручками $\triangleleft$

По лемме Шура
$$C = \begin{cases} 0, & \rho_V \not\sim \rho_W \\ \lambda E, & \text{если } \rho_V = \rho_W \\ & V = W \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr} A \cdot |G|}{\dim V}$$ (задача №3)

Старт

Вычисления

A - любой! $\quad A: V \to W$

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & \dots & e_i & \dots & e_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Лемма $\quad A_{ji}(v) = \langle e_i, v \rangle f_j$

$$C(v) = \sum \rho_w(g) \{ \langle e_i, v \rangle f_j \}$$

$$C_{ji}(v) = \sum \rho_w(g)\, A\, \rho_v(g^{-1})(v) =$$

$$= \sum_{g \in G} \rho_w(g) \left(\langle e_i, \rho_v(g^{-1}) v \rangle f_j \right) \Rightarrow$$

$$C_{ji}(v) = \sum_{g \in G} \langle e_i, \rho_v(g^{-1}) v \rangle \rho_w(g) f_j$$

1 Случай $\rho_v \not\cong \rho_w \Rightarrow C_{ji}(v)$ – нулевой

$$\Rightarrow C_{ji}(e_i) = \sum_{g \in G} \langle e_i, \rho_v(g^{-1}) e_i \rangle \rho_w(g) f_j = 0$$

Умножим скалярно на f_j

$$\sum_{g \in G} \langle e_i, \rho_v(g^{-1}) e_i \rangle \langle f_j, \rho_w(g) f_j \rangle = 0$$

$\forall i, j \Rightarrow$

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \sum_j \sum_G \langle e_i, \rho_v(g^{-1}) e_i \rangle \langle f_j, \rho_w(g) f_j \rangle = 0$$

Случай 2

$V = W \qquad e_i = f_i$

$$C_{ji}(v) = \sum_{g\in G} \langle e_i, \rho_V(g^{-1})v\rangle \rho_W(g) f_j \Rightarrow$$

$$C_{ji} = \sum_{g} \langle e_i, \rho_V(g^{-1})v\rangle \rho(g) e_j = \frac{\operatorname{tr} A_{ij} |G|}{\dim V} E$$

а) $i \neq j$ $\quad C_{ji} = 0$ $\quad$ т.к. $A_{ij} = j\begin{pmatrix} 0 & \overset{i}{1} & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Если $i \neq j$, то $\operatorname{tr} A_{ij} = 0$

б) $i = j$ $\quad C_{ji} = \frac{|G|}{\dim V} E$

$$\operatorname{tr} C_{ji} = |G| \Rightarrow$$

$$\operatorname{tr} C_{ji} = \sum_{i} \sum_{g} \langle e_i, \rho(g^{-1}) e_i\rangle \langle e_i, \rho(g) e_i\rangle = |G|$$

Теперь

$$\frac{1}{|G|} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{G} \langle e_i, \rho_V(g^{-1}) e_i\rangle \langle f_j, \rho_W(g) f_j\rangle = 1$$

Теорема о полноте характеров

- $\mathbb{C}[G]$

$$\mathbb{C}[G] \supset Z[G] = \{ f \in \mathbb{C}[G] \mid \underset{g,h \in G}{f(hgh^{-1})} = f(g) \}$$

Такие функции называют центральными

Лемма $\dim_{\mathbb{C}} Z[G] = \{$ числу классов сопряжённых эл-ов группы $G \}$

- $\chi_\rho \in Z[G]$

Формулировка

Характеры неприводимых представлений образуют базис пространства $Z[G]$

то есть $f \in Z[G]$ $\quad f = \sum a_\rho \chi_\rho$

ρ – неприводимое. предст. гр. G $\quad a_\rho \in \mathbb{C}$

Следствие

Число неприводимых представлений конечной группы равно числу классов сопряжённых элементов

▷ $\chi_\alpha \perp \chi_\beta$ α, β неприводим. представления

$$\alpha \nsim \beta$$

$\Rightarrow \{\chi_\rho\}$ — ρ неприводим. представл.

Эта система л.н.з.

$\Rightarrow$ они образуют базис $\Rightarrow$ ◁

Док-во теоремы

∘ $\{\chi_\rho\}$ — лнз, т.к. попарно ортогональны

Предположим, что их

$$\mathcal{L}\{\chi_\rho\}_{\rho\text{-неприв.}} \lneq Z[G]$$

$$\mathcal{L}^\perp \neq 0 \Rightarrow \langle f, \chi_\rho \rangle = 0$$

любому непр. характеру непр. представления

$$f \neq 0$$

$\Rightarrow \langle f, \chi_\rho \rangle = 0$ характеру $\forall$ представл.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \mathcal{L}^\perp & \\ \hline & \mathcal{L} \\ \hline\end{array}$$

Важная конструкция

$$C = \sum_g \overline{f(g)}\,\rho(g) \qquad f \in Z[G]$$

ρ - неприв. представление

Лемма Оператор C коммутирует с операторами $\rho(h)$ $h \in G$

$$\rho(h)\,C\,\rho(h^{-1}) = \sum_g \overline{f(g)}\,\rho(hgh^{-1}) =$$

$$= \sum_g \overline{f(hgh^{-1})}\,\rho(hgh^{-1}) = C$$

ЛЕКЦИЯ АЛГЕБРА

10.11.20

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ХАРАКТЕРОВ

$$Z[G] < \mathbb{C}[G] = \{ f(g) \mid f(hgh^{-1}) = f(g),\ g, h \in G \}$$

o.α = ρ − непр. пре~~д~~ставление, то по л. Шура $S_\rho = \lambda E$

$$\operatorname{tr} S_\rho = \sum_{g \in G} \overline{f}(g) \chi_\rho = \lambda \dim \rho \Rightarrow \lambda = 0$$

Лемма $S_\rho = 0$, если $\rho \in \operatorname{Irr} G$

Опр. $\rho_1 \otimes \rho_2 : G_1 \times G_2 \to GL(V_1 \otimes V_2)$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g_1)v_1 \otimes \rho_2(g_2)v_2$$

по линейности с проверкой корректности

ТЕОРЕМА

Если ρ_i $i=1,2 \in \mathrm{Irr}\, G_i$ $i=1,2$, то

$\rho_1 \otimes \rho_2$

Лекция по алгебре

17.11.20

Алгебраические числа

- Под числом подразумевается комплексное число
  Числовое поле $P \subset \mathbb{C}$!

Главное опр Число α наз. алгебраическим над полем P, если оно является корнем ненулевого многочлена из $P[x]$
Иначе α наз трансцендентным над P

Пример Если $P = \mathbb{Q}$, то алг. над $\mathbb{Q}$ числа наз. просто алгебр.

$\sqrt{2}$ $\qquad x^2 - 2$

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ — алгебраическое, т.к.

$$(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = (x+\sqrt{2})^2 - 3$$
$$(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3}) = (x-\sqrt{2})^2 - 3$$

$$(x^2+2\sqrt{2}x-1)(x^2-2\sqrt{2}x-1) = (x^2-1)^2 - 8x^2 = \underline{x^4 - 10x^2 + 1}$$

неприводим над $\mathbb{Q}$

Опр P^{alg} — множество всех алгебраических чисел над полем P!

Множество алгебраических чисел счётно

π — трансц., e — трансц.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^{n!}} \text{ — трансц.} \quad k \geqslant 2 \quad k \in \mathbb{N}$$

„но это немножко не мой бизнес"

Минимальный многочлен и
степень алгебраического числа
(над полем P)

$\alpha \in P^{alg}$

$$I_\alpha = \{ f \in P[x] \mid f(\alpha) = 0 \}$$

идеал в кольце многочленов $P[x]$!
(по опр. идеала)

$\forall$ идеал в $P[X]$ явл. главным

$\Rightarrow (f_\alpha) = I_\alpha$

Опр f_α — минимальный мн-н алг. числа α
$P = \mathbb{Q}$

Примеры $\quad f_{\sqrt{2}} = x^2 - 2$

$$f_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = x^4 - 10x^2 + 1 \quad (?)$$

Опр Степень алг. числа $\alpha = \deg f_\alpha$

$\deg \sqrt{2} = 2 \qquad \deg(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 4$

$\deg \sqrt[3]{1} < 2 \qquad 1 \qquad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$

ЗАМЕЧАНИЕ
- Минимальный многочлен по определению неприводим
- У минимального многочлена все корни простые

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЗАМЫКАНИЕ ЧИСЛОВОГО ПОЛЯ P

ТЕОРЕМА

$\alpha \in P^{alg}$, $\beta \in P^{alg}$ тогда $\alpha \pm \beta,\ \alpha\beta,\ \frac{1}{\alpha} \in P^{alg}$

▷ $\frac{1}{\alpha}$: Пусть f_α – мин. многочлен, тогда $p_0 \neq 0$

$$f_\alpha(\alpha) = p_n\alpha^n + p_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + p_0 = 0$$

$$\frac{f_\alpha(\alpha)}{\alpha^n} = p_n + p_{n-1}\frac{1}{\alpha} + \ldots + p_0\frac{1}{\alpha^n} = 0$$

$$g = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n \in P[x] \qquad g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in P^{alg}$$

$\alpha + \beta$: f_α $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots \alpha_t$ – его корни

g_β $\beta_1 = \beta$ $\beta_1, \ldots, \beta_s$

$$A[x] = \prod_{\substack{i=1,\ldots,t \\ j=1,\ldots,s}} (x - \alpha_i - \beta_j)$$

В примере было

$f_{\sqrt{2}} = x^2 - 2$

$\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

$g_{\sqrt{3}} = x^2 - 3$

$\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

Утв $A[x] \in P[x]$

$A[x]$ — симметрич. (от перестановки α_i, β_j ничего не изм.)

Дважды применяем Т. о симметрич. многочленах и получаем док-во утв.

Аналогично $B[x] = \prod\limits_{\substack{i=1,\dots t\\ j=1,\dots s}} (x - \alpha_i\beta_j) \in P[x]$

Среди $\alpha_i + \beta_j$ и $\alpha_i\beta_j$ есть $\alpha+\beta$ и $\alpha\beta \Rightarrow$ ◭

Опр $\mathbb{C} \supseteq P^{alg} = \{$Алг. замыкание поля $P\}$

Пример

$\boxed{1}$ $P = \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}^{alg} = \mathbb{C} \qquad z \in \mathbb{C}$

т.к. $T^2 - \underbrace{(z+\bar{z})}_{\in\mathbb{R}}T + \underbrace{z\bar{z}}_{\in\mathbb{R}} = 0$

$\boxed{2}$ $P = \mathbb{Q}$ $\qquad$ (замечание: $P^{alg} := \overline{P}$)

$\mathbb{Q}^{alg} = \overline{\mathbb{Q}}$

$\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{C}$ (т.к., например, $\pi \in \mathbb{C}$)

$P \longrightarrow \overline{P}$ Корень $\forall$ многочлена с коэф. из поля $\overline{P}$ лежит в поле $\overline{P}$

Задачи на „подумать":

- $\xi = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ Как устроен f_ξ — мин. многочлен над $\mathbb{Q}$?
- $\cos\frac{2\pi}{5}$ $\qquad g_{\cos\frac{2\pi}{5}} = \,?$ над $\mathbb{Q}$

Конечные расширения числовых полей

Не путать подполе с подпольем!

Опр Поле $L \supset P$ наз. расширением поля P

$\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$

Замечание 1 $L \supset P_{\text{поле}}$, то поле L можно рассматривать как векторное пр-во над полем P

Пример $\mathbb{C}$ — это векторное пр-во над $\mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ $\quad z = a \cdot 1 + i \cdot b$

$a, b \in \mathbb{R}$

$1, i$ — базис $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$!

Опр $L \supset P$ является конечным расширением поля P, если $\dim_P L < \infty$

1) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ $\quad \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$

2) $\mathbb{C} \supset \mathbb{Q}$ $\quad \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

Пример $\{a + b\sqrt{2}\}$ $\quad a, b \in \mathbb{Q}$

Такие числа образуют поле

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{\underbrace{a^2-2b^2 \neq 0}_{\text{т.к. } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

Это поле — расширение поля $\mathbb{Q}$ степени 2

$L \supset \mathbb{Q}$

$\dim_{\mathbb{Q}} L = 2$ $\qquad \{1, \sqrt{2}\}$

∘ Степень расширения $= \dim_P L = K \neq \infty$

Пример Расширения поля $\mathbb{Q}$ степени 3

$\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\}$ $\qquad a, b, c \in \mathbb{Q}$

$\dfrac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}}$ $\qquad \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ — базис над $\mathbb{Q}$

Общие свойства конечных расширений

1 $L \supset P$ $\quad L|P$ — конечное расширение

Тогда $L \subset P^{alg}$

▷ По опр., $\dim_P L = N < \infty$

Возьмём $l \in L$ и рассмотрим его степени

$1, l, l^2, \ldots, l^M, \ldots$

т.к. $\dim_P L = N$

все эл-ты поля L $\quad 1, l, l^2, \ldots, l^{N-1}$ линейно независимы, а

$\{1, l, \ldots, l^N\}$ — лин. зависимое сем-во в вект. простр. L

$p_i \in P$ $\qquad p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot l + \ldots + p_N l^N = 0$ $\qquad p_0 \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ мн-н $\quad f(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_N x^n$

$f(l) = 0 \Rightarrow l \in P^{alg}$ ◁

(обратное утв. неверно)

$\overset{\mathbb{Q}}{\cap}$

Пример башни

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}\} \quad a, b \in \mathbb{Q}$

След. этаж $\quad (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3}) \quad \{p + \sqrt{3}\, q\} \quad p, q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

2

2

4

$\sqrt{3} \notin (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3})$, т.к. иначе

высота башни и степень расширения

$\sqrt{3} = c + d\sqrt{2}$

$3 = c^2 + 2cd\sqrt{2} + 2d^2$ и $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

ЛЕКЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ

24.11.20

$$\begin{array}{c} L \\ \cup \\ K \\ \cup \\ P \end{array} \text{ — башня конечных расширений}$$

$$\dim_P L = \dim_P K \cdot \dim_K L$$

$$L|P = K|P \cdot L|K$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_s$ — базис L над K

$\omega_1, \dots, \omega_t$ — базис K над P

$$l \in L$$

$$l = \sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i \qquad k_i \in K$$

$$k_i = \sum_{j=1}^{t} p_{ij} \omega_j$$

$$l = \sum_{i,j} p_{ij} \overbrace{(\alpha_i \omega_j)}^{\in L} \qquad p_{ij} \in P$$

$$\{\alpha_i \omega_j\} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, s \\ j = 1, \dots, t \end{array}$$

Докажем, что они л.н.з.

- $\{\alpha_i w_j\}$ над полем P

Предположим обратное

$$\sum_{i,j} c_{ij}\alpha_i w_j = 0 \qquad c_{ij}\in P$$

$$c_{11}\neq 0$$

$$\sum_i \Big(\underbrace{\sum_j c_{ij} w_j}_{\in K}\Big)\alpha_i = 0 \quad \text{тогда}$$

$$\sum_i c_{ij}\alpha_i = 0$$

для всех i

$\Downarrow$

$c_{ij}=0$
для всех j

противоречие $\Longleftarrow$

Простые расширения

$\mathbb{Q}\subset\overline{\mathbb{Q}}$

Кронекер

① P $\qquad$ α — алгебра над P, $\alpha\notin P$

Присоединим число α к полю P. Это значит, что мы хотим рассмотреть такое наименьшее поле, которое содержит α, все эл-ты P и все, что можно из этого набора получить операциями $+, -, \times, /$

1. Это поле $P(\alpha)$ должно содержать все числа вида $g(\alpha)$, где $g \in P[x]$

Утв. Все числа вида $g(\alpha)$, $g \in P[x]$ сами образуют кольцо!

▷ $g_1(\alpha) + g_2(\alpha) = (g_1 + g_2)(\alpha)$

$g_1(\alpha) g_2(\alpha) = (g_1 g_2)(\alpha)$

Теорема Кронекера Кольцо $\{g(\alpha)\} = P[\alpha]$ является полем $P(\alpha)$

$$P \subset P(\alpha)$$

▷ α $f(\alpha)$ – минимальный многочлен α над P

$$f_\alpha(\alpha) = 0$$

Структура кольца $P[\alpha]$

Возьмем $\forall$ многочлен $g(x) \in P[x]$

$\deg g(x) \geq \deg f_\alpha(x)$

$$g(x) = f_\alpha(x) q(x) + r(x) \qquad \deg r(x) < \deg f_\alpha(x)$$

$$\boxed{g(\alpha) = r(\alpha)}$$

$$P[\alpha] = \{p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 + \dots + p_{n-1}\alpha^{n-1}\}$$

где $n = \deg \alpha = \deg f_\alpha$

Комментарий Представление в виде единственно

$$r_1(\alpha) = r_2(\alpha)$$

$$\deg r_1 < \deg f_\alpha$$
$$\deg r_2 < \deg f_\alpha$$

$$(r_1 - r_2)(\alpha) = 0$$

$$\deg(r_1 - r_2) < \deg f_\alpha \Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow$$
$$r_1 = r_2$$

минимальный

Существование обратного эл-та

$$g(x) \in P[x] \quad \deg g(x) < \deg f_\alpha$$

$$(g(\alpha))^{-1} - ?$$

а f_α неприводим

$$\Rightarrow (g(x), f_\alpha) = 1$$

$$g(x)A(x) + B(x)f_\alpha(x) = 1$$
$$\deg A(x) < \deg f_\alpha$$

$$g(\alpha)A(\alpha) + B(\alpha)f_\alpha(\alpha) = 1$$

$$g(\alpha)\,A(\alpha)=1$$

$$\left(g(\alpha)\right)^{-1}=\left(A(\alpha)\right)$$ Сухой остаток

Итак, $P[\alpha]$ – поле и его устройство таково

$$P(\alpha)=\left\{\begin{matrix} p_0+p_1\alpha+\ldots+p_{n-1}\alpha^{n-1} \\ \text{где } p_i\in P,\ n=\deg f_\alpha \end{matrix}\right\}$$

и базис $P(\alpha)|_{\varphi}$ $\{1,\alpha,\ldots,\alpha^{n-1}\}$

Примеры простых расширений

1) $\mathbb{Q}$ $\alpha=\sqrt{7}\notin\mathbb{Q}$

$f_\alpha=x^2-7$ ← мин. многочлен

$$\mathbb{Q}(\sqrt{7})=\{p_0+p_1\sqrt{7}\}$$ по т. Кронекера

2) $\mathbb{Q}$ $\alpha=\sqrt[3]{2}\notin\mathbb{Q}$ $f_\alpha=x^3-2$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})=\{p_0+p_1\sqrt[3]{2}+p_2(\sqrt[3]{2})^2\}$$

$p_i\in\mathbb{Q}$

$$\{1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\}\subset\overline{\mathbb{Q}}\ (?)$$

③ $\alpha = \sqrt[3]{2}\,\omega$ $\quad \alpha \notin \mathbb{Q}$ $\quad \omega \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\omega) = \{p_0 + p_1 \sqrt[3]{2}\,\omega + p_2 \sqrt[3]{4}\,\omega^2\}$$

расширение поля $\mathbb{Q}$ степени 3

Примеры ② и ③ отличаются — это 2 расширения, построенные по разным корням ур-ия $\boxed{x^3-2=0}$

④ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\omega^2)$

Картинка

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[d, dash, "2"] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dr, dash, "3"'] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\omega) \arrow[d, dash, "3"] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\omega^2) \arrow[dl, dash, "3"] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

В этом поле лежат все корни ур-ия $x^3-2=0$

степень расширения

x^3-2 — непр. над $\mathbb{Q}$

$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\,\omega, \sqrt[3]{2}\,\omega^2 \qquad \omega^3 = 1$

$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

$\omega \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

$P = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

Каков минимальный мн-н ω над полем P?

$$(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))(\omega) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$$

$g(x) = x^3 - 1 \qquad \omega^3 - 1 = 0$

$$f_\omega = x^2 + x + 1 \subset P[x]$$

$p_0 + p_1 \omega \qquad p_i \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

$$(q_0 + q_1\sqrt[3]{2} + q_2\sqrt[3]{4}) + (q_0' + q_1'\sqrt[3]{2} + q_2'\sqrt[3]{4})\omega$$

Лекция по алгебре

01.12.20

Поле разложения многочлена

$f \in P[x]$ $\qquad L/P \qquad L$ содержит все корни f

α — корень многочлена P

- $\alpha \notin P$

$P_1 = P[\alpha] \qquad \alpha$ — alg над $P \qquad P \subset P_1$

P_1 / P — конечное расширение

$$f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x) \qquad f_1(x) \in P_1[x]$$

$f_1 \qquad \alpha_1 \notin P_1$

$P_2 = P_1[\alpha]$

$\vdots$

L — конечное расширение, содержащее все корни f

Опр Поле разложения — это наименьшее подполе поля $\mathbb{C}$, содержащее все корни f

Ясно, что в поле разложения

$$f = a_0 (x - \alpha)^{k_1} \dots (x - \alpha_s)^{k_s}$$

$P = \mathbb{Q}$

Пример • $f = (x^2-2)(x^2-3) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$

РАСШИРЕНИЕ СТЕПЕНИ 4 (min многочлен)

• $f = x^3 - 2$ $P = \mathbb{Q}$ $P = \mathbb{Q}$

$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2$ $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

ПОЛЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ОБЯЗАТЕЛЬНО СОДЕРЖИТ

$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega \Longrightarrow$ СОДЕРЖИТ ω

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) = \underbrace{(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))}_{= P_1}(\omega)$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \xrightarrow{\deg 3} \mathbb{Q} \qquad \{q_0 + q_1\sqrt[3]{2} + q_2\sqrt[3]{4}\}$$

$P \subset \mathbb{R}$

$L = P_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(\omega)$

Посмотрим на мин. многочлен ω над полем $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

g_ω $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

с коэфф. из поля P_1

$x^2 + x + 1$

$\Rightarrow g_\omega \mid x^2 + x + 1$ над полем P_1

$\Downarrow$

$\deg g_\omega = X - \beta \qquad \beta \in P_1$

НО ТОГДА X^2+X+1 ИМЕЕТ ВЕЩ. КОРЕНЬ β, НО ЭТО НЕ ТАК $\Rightarrow$

$$g_\omega = X^2+X+1 \Longrightarrow P_2 = \beta_1 + \beta_2\omega$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\omega \arrow[d, dash, "2"] \arrow[dd, dash, bend right, "6"'] \\ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[d, dash, "3"] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

$\beta_1 \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = P_1$

$\beta_2 \in$

РАСШ. СТ. 2

СЛЕДСТВИЕ 1 $\deg\left(\text{поля разложения многочлена } f\right) \leq (\deg f)!$

(ВОПРОС: ПОЧЕМУ (СМ. КОНСТРУКЦИЮ „ШАГ ЗА ШАГОМ")

СЛЕДСТВИЕ 2 $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_sX^s \quad a_s \in \overline{P}$

КОЭФФ. a_i — alg НАД ПОЛЕМ P

ТОГДА $\forall$ КОРЕНЬ f ЯВЛЯЕТСЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ НАД P ЧИСЛОМ

$$\triangleleft\ \underbrace{P \subseteq P[a_0] \subseteq P[a_0, a_1] \subseteq \ldots \subseteq P[a_0, \ldots, a_s]}_{\text{КОНЕЧНАЯ БАШНЯ}} = \tilde{P} \subset \tilde{P}[\beta]$$

$\beta \in \mathrm{Roots}(F)$

$\tilde{P}[\beta]$ – конечное расширение

$\Downarrow$

β – alg над P (по теореме о конечных расширениях)

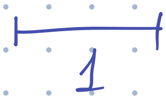
Следствие 3 $\mathbb{C} \supset P$ $\overline{P}$ – алг. замыкание P в $\mathbb{C}$

Если $f \in P[x]$, то $\mathrm{Roots}\, f \in \overline{P}$!

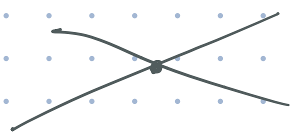
Приложение (Э.Б. Винберга)

Построение циркулем и линейкой

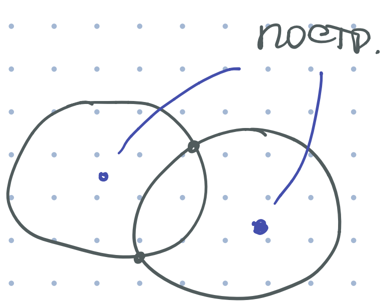
• Длина (отрезок данной длины) наз. **конструктивной**, если её можно построить с помощью конечной послед. операций



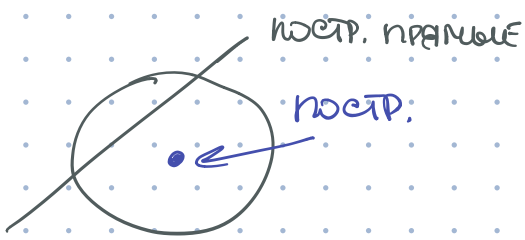
Умеем

1) 

т. $\cap$ 2х прямых, проход. через уже постр. точки

2) 

с центрами в уже постр. точках и радиусами уже постр. длин

3) 

Теорема*

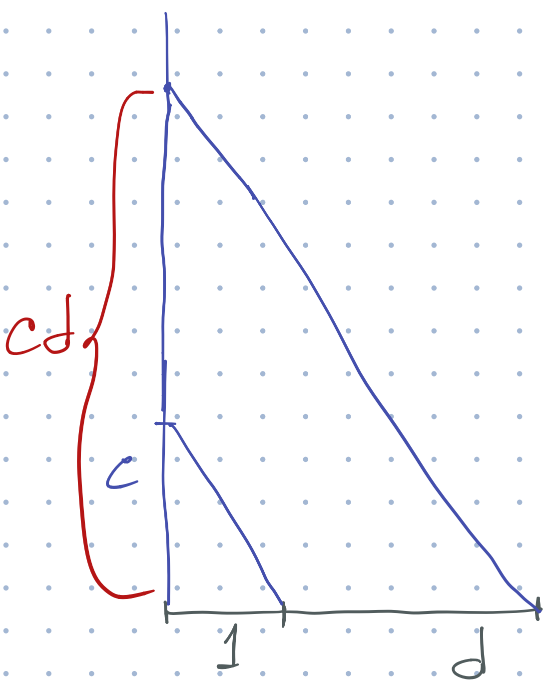
Конструктивные длины образуют поле. Это поле содержит $\mathbb{Q}$

Д: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ $\Rightarrow$ можно пос-ить $\forall$ длину $= r \in \mathbb{Q}$

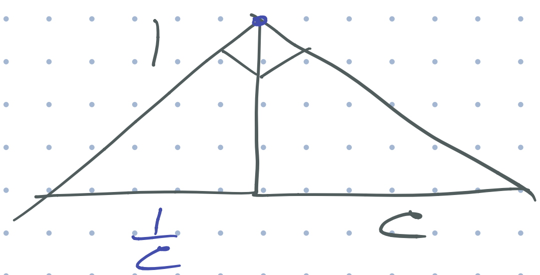
Если c, d — конструктивны, то
$c \pm d$, cd, c^{-1} — конструктивны
$\sqrt{c}$ — конструктивны, если $c > 0$

Как построить cd?

Зам. Умеем: через точку проводить прямую $\perp$ данной $\Rightarrow$ умеем через точку проводить пр., $\parallel$ данной



Строим $\frac{1}{c}$

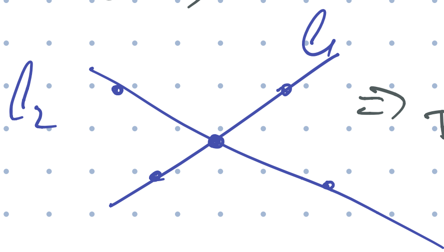


уч. Киселёва
Геометрия

1) L_1 и L_2

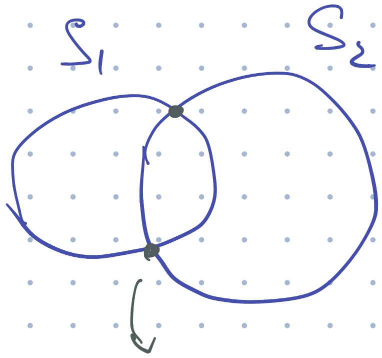
$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad i = 1, 2$$

$$a_i, b_i, c_i \in F$$



$\Rightarrow$ координаты т. пересеч. $\in F$

2)



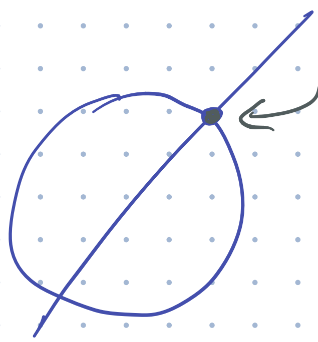
$$(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 = c_i^2 \qquad i = 1, 2$$

$$a_i, b_i, c_i \in F$$

координаты $\notin F$, но $\in$ в квадратичном расширении $F(\sqrt{e})$

$e > 0$

3)



$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = c_1^2$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$A, B, C, a_1, b_1, c_1 \in F$$

Теорема

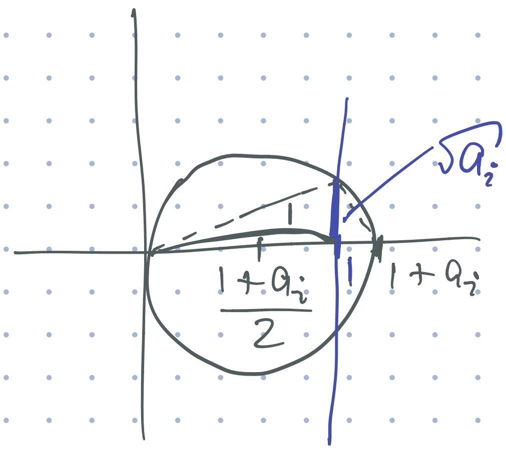
Длина α конструктивна тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n})$ $a_i > 0$

$$a_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_{i-1}})$$

$\Rightarrow$ $\forall$ конструктивная длина лежит в таком подполе (по 1), 2), 3))

Пусть $a_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{i-1}})$ — конструктивно

Нужно показать, что $\sqrt{a_i}$ — конструктивен



Длина α конструируема $\Leftrightarrow$ $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_r})$

$a_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{i-1}})$

$$\mathbb{Q} \subset \underbrace{\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2})}_{\text{ст. } 2}$$

$$\deg(L \mid \mathbb{Q}) = 2^k$$

$$\mathbb{Q}[\alpha] \subseteq L$$

$$\deg(\mathbb{Q}[\alpha] \mid \mathbb{Q}) \mid 2^k$$

$$\Downarrow$$

$$\deg(\mathbb{Q}[\alpha] \mid \mathbb{Q}) = 2^N \,!$$

Если длина α констр., то

$$\deg(\mathbb{Q}(\alpha)\,|\,\mathbb{Q}) = 2^N$$

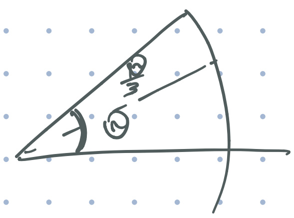
1. x^3-2

$\sqrt[3]{2}$ не констр., т.к.

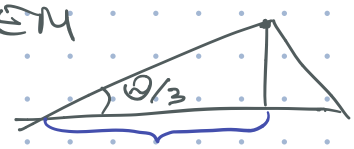
$$\deg(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\,|\,\mathbb{Q}) = 3$$

$$2^N \nmid 3$$

2. Трисекция угла



нельзя т.к. иначе можем



$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$\theta = 3\alpha = 60^\circ \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

неприводим над $\mathbb{Q}$

$\gamma = \cos 20^\circ$ — его корень

это число не конструированно, т.к.

$[\mathbb{Q}(\gamma)\,|\,\mathbb{Q}] = 3 \qquad 2^N \mid 3$!

расширение

Лекция Алгебра

Интерпретация теоремы Кронекера

- $P \subset \mathbb{C}$
- $P[x]$ $\quad f \in P[x]$ неприводимый

  $I_f = (f)$ – простой $\quad P[x]/_{I_f}$ – область целостности

  $P[x]/_{I_f} \cong$ „абстрактное поле", сод. поле P
- $\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad f(\alpha) = 0$

  $P[x]/_{I_f}$ естественно изоморфно числовому полю $P(\alpha)$

$\triangleleft$ $g(x) \pmod f \longmapsto g(\alpha) \in \mathbb{C}$

$\bar{x} \equiv x \pmod f$ $\quad \bar{x}$ – образ x в фактор кольце $P[x]/_{I_f}$

$\varphi(\bar{x}) \Longrightarrow$

$P[x]/_{I_f} \xrightarrow{\varphi_\alpha} P(\alpha)$ $\quad \mathbb{C}$

φ_α – изоморфизм

$f(x) \quad \alpha=\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$

(если $f(x)$ сепарабелен и неприводим, то все его корни различны, а их число равно $\deg f$)

<u>Замечание</u> Если $\operatorname{char} P = 0$ или $(\operatorname{char} P, \deg f) = 1$, то неприводим. мн-н $f(x)$ имеет столько различных корней, какова его степень

$$
\begin{tikzcd}
 & P(\alpha)\subset\mathbb{C} \\
P[x]/I_f \arrow[ur, "\varphi_\alpha=\varphi_{\alpha_1}"] \arrow[r, "\varphi_{\alpha_2}"] \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[ddr] & P(\alpha_2) \\
 & P(\alpha_i) \\
 & P(\alpha_s)
\end{tikzcd}
$$

$|\operatorname{Hom}(P[x]/I, \mathbb{C})| = |$число различных корней $f|$

$\mathrm{Hom}_P(P(\alpha), \mathbb{C}) = \mathrm{Mon}(P(\alpha), \mathbb{C})$ (вложение т.е. нет ядра)

множество гомоморфизмов поля $P(\alpha)$ в $\mathbb{C}$, которые тождественны на P!

Теорема

$\exists$ биекция между множествами

$$\mathrm{Hom}_P(P(\alpha), \mathbb{C}) \rightleftarrows \text{корни } f \; \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_s\} \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

$\triangleleft$ $P(\alpha)$

$\cup$

$\{g(\alpha)\}$ $\deg g < \deg f$

$\varphi \in \mathrm{Hom}_P(P(\alpha), \mathbb{C})$ полностью определяются тем, куда он переводит α

$$\varphi(g(\alpha)) = g(\varphi(\alpha))$$

т.к. $\varphi(\alpha) \longmapsto \alpha_i$, ведь $f(\alpha) = 0 \Rightarrow$

$$\varphi(f(\alpha)) = f(\varphi(\alpha)) = 0$$

$\varphi(\alpha)$ из списка (корни f)

$\varphi_1 = id$

$\varphi(\alpha) = \alpha_1 = \alpha$!

$\triangleright$

Примеры • $Hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\sqrt{2}, \mathbb{C})$

$f \quad x^2 - 2 \qquad \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

Ответ: $id: a + b\sqrt{2} \mapsto a + b\sqrt{2} \qquad a, b \in \mathbb{Q}$

$\sigma: a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$

$\sigma^2 = id$

• $Hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{C}) \qquad x^3 - 2$

вещ. число

$\sqrt[3]{2} = \alpha = \alpha_1$

$\sqrt[3]{2}\,\omega$

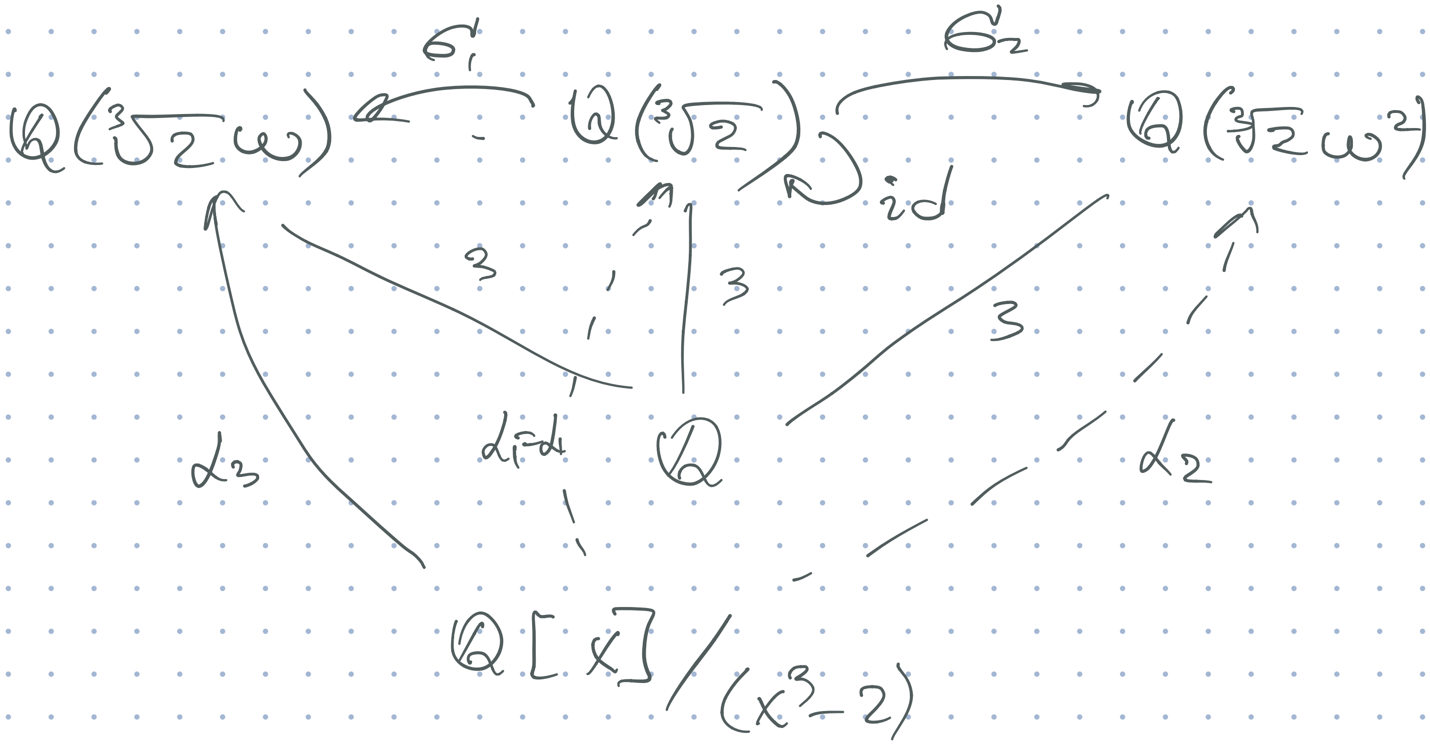
$\sqrt[3]{2}\,\omega^2$

$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{ r_0 + r_1\sqrt[3]{2} + r_2\sqrt[3]{4} \}$

$id = r_0 + r_1\sqrt[3]{2} + r_2\sqrt[3]{4} \longrightarrow r_0 + r_1\sqrt[3]{2} \longrightarrow r_2\sqrt[3]{4}$

Картинка



Общая задача

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, dash] & & L \arrow[dl, dash] \\ & P & \end{tikzcd}$$

$Hom_P(M, L) = \{$ мн-во всех мономорфизмов поля M в поле L, тождественных на P $\}$

Что можно сказать об

$Aut_P L = Hom_P(L, L)$ (задача: понять, что $Aut_P L$ — группа!)

Опр. $Aut_P L = Gal_P L$

Примеры • $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \{id\}$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{C}) = \{id, \sigma_1, \sigma_2\}$

$\Rightarrow x^3 - 2$ РАЗРЕШИМО В РАДИКАЛАХ

• $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega), \mathbb{C})$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(\omega)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[d, dash, "3"] \\
\mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\omega, \mathbb{C})$

$x^2 + x + 1$

$\alpha_0 \quad id \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2} \\ \omega \to \omega \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha_0' \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2} \\ \omega \to \omega^2 \end{pmatrix}$

$\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}\,\omega$

$\alpha_1 \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}\,\omega \\ \omega \to \omega \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha_1' = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}\,\omega \\ \omega \to \omega^2 \end{pmatrix}$

$$\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}\,\omega^2$$

$$\alpha_2 \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}\,\omega^2 \\ \omega \to \omega \end{pmatrix} \qquad \alpha_2' \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}\,\omega^2 \\ \omega \to \omega^2 \end{pmatrix}$$

сопряжённый

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[3]{2}, \omega) = \{\alpha_0, \alpha_0', \alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \alpha_2'\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)\ \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\ \omega), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega))$$

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega))$$

НЕАБЕЛЕВА ГР. ИЗ 6и ЭЛ-ОВ ТОЛЬКО ОДНА – S_3

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)) \simeq S_3$$

Большая картинка

$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ — поле разлож. мн-на $x^3 - 2$ над $\mathbb{Q}$

$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2$

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dash, "2"] \arrow[dd, dash, bend right=60, "6"'] \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[d, dash, "3"] \\
\mathbb{Q}
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} L = S_3$

$|S_3| = 6$

f — непр. над $\mathbb{Q}$

$f(x) = 0$ решить в радикалах

Ур-ие разрешимо в радикалах

$\Updownarrow$

$\mathrm{Gal}(L_f)$ — разрешимая группа