(Билет 1)

Отобр. $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ голоморфно, если оно класса $C^1$ (как ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n \to {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^m$) и $df$ явл. линейным в каждой точке

$\mathbb{C}^n$ $f = (f_1, \dots f_m)$

$f_i$ удовл. усл. Коши – Римана по каждой переменной $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ u - вещ. v - мним.

Аналоги с $\mathbb{R}^n$

① Композиция гол. отобр. голоморфна

$d(f\circ g) = \underbrace{(df)(g)}_{\mathbb{C}\text{-лин}} \cdot \overset{\to \mathbb{C}\text{-лин}}{dg}$ – $\mathbb{C}$-лин.

② Если $a$ – не крит. точка гол. отобр. $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, то в окр. $f(a)$ $\exists$ и голоморфно $f^{-1}$

Если $\det df(a) \neq 0$ то в окр. $f(a)$ $\exists f^{-1} \in C^1({}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n, {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n)$. При этом $(df^{-1})(b) = (\underbrace{df(f^{-1}(b))}_{\mathbb{C}\text{-лин}})^{-1}$

③ Пусть $f$ – гол. в $\mathbb{C}^{n+1} \ni (z,t)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}$. Р-м. интеграл Коши $F(z,t) = \int_{[z_0,t]} f(z,\tau)\,d\tau$. Если $f$ гол., то $F$ тоже

$\frac{\partial F}{\partial t} = f$, $dF \overset{\nearrow \text{вещ. th}}{=} \int_{[t_0,t]} d(f(z,\tau))\,d\tau$ – $C$-лин.

Полидиск — прямое произв. дисков (Билет 2)

Пусть $D_j$ — диск с границей $\gamma_j$ ($\circlearrowleft$)

Если $f$ гол. в $D$ и непр. вплоть до границы $\gamma = \partial D$,

то $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$

① Если $f$ — гол. в полидиске $D_1 \times \ldots \times D_n$ и непр. вплоть до границы, то $f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma_1\times\ldots\times\gamma_n} \frac{f(\xi)d\xi_1\ldots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1)\ldots(\xi_n - z_n)}$ инт. ф-ла Коши для пр. вплоть непр.

$\gamma_j = \gamma_j(t_j) \xrightarrow[\gamma_j]{} \circlearrowleft$ Остов полидиска — $\gamma_1 \times \ldots \times \gamma_n$

$d\xi_j = \dot\gamma_j \, dt_j$

$\int\limits_{\gamma_1\times\ldots\times\gamma_n} -\shortparallel- d\xi_1 \ldots d\xi_n = \int -\shortparallel- (\dot\gamma_1(t_1)\ldots\dot\gamma_n(t_n))\, dt_1 \ldots dt_n$

Д-во База индукции $n=1$ — изв. теорема

переход $n=2$

$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} f(\xi_1, z_2)\frac{d\xi_1}{\xi_1 - z_1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)} =$

по т. Фубини (фикс. $z_2$; фикс. $\xi_1$)

$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_1\times\gamma_2} f(\xi_1, \xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)}$

② Принцип Вейерштрасса

Равн. предел голом. отобр. голоморфен

$f_m \rightrightarrows f$ в полидиске (на остове границы)

$f_m(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_1\times\gamma_2}\frac{f_m(\xi)d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\frac{f(\xi)d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)}$ голом. т.к. голом. по пред. т-ы.

Билет 3

1) Функция, голоморфная в окр. выколотой точки $a$ голом. продолжаема в $a$

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{f(\zeta)\, d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}$$ - голом. по $z$ в полидиске

Докажем, что $F = f$: рассм. $z = (z_1, z_2)$, $z_2 \neq a_2$

В т. $z$ $f(z) = F(z)$

$F$ непр. продолж. на $\{z_2 = a_2\} \Rightarrow F$ прод. $f$.

~~2) Функция, голом. в окр. ... голом. продолжаема в ...~~

Пр-во ф-ций $A(\Delta)$, $\Delta$ полидиск, $A(\Delta)$ - пр-во функций, гол. в $\Delta$ и непр. на $\bar{\Delta}$ с sup нормой $\|f\| = \max_{\bar{\Delta}} |f|$

2) Пр-во $A(\Delta)$ полно по т. Вейерштрасса

---

Теор. сущ. и ед. и голом. зав. от н.у.:

$\dot{z} = f(t, z)$, $(t, z) \in \Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $f$ - гол. в $\Omega$

Задача Коши: $\underset{\text{ур.}}{\dot{\varphi}(t, z) \equiv f(t, \varphi(t, z))}$, $\underset{\text{н.у.}}{\varphi(t_0, z) = z}$ (1)

Зад. Коши имеет ед. реш., гол. по $t, z$

Оператор Пикара $P(\varphi)(t, z) = z + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau, z))\, d\tau$ (2)

Ищем $\varphi$: $\varphi = P\varphi$ (3)

Предл. (3)$\Leftrightarrow$(1)

(1)$\Rightarrow$(3) - формула Ньютона - Лейбница

(3)$\Rightarrow$(1) - диф. интеграла Коши по верхнему пределу

Пусть $\Delta$ - полидиск радиуса $\varepsilon$ с центром $(t_0, z_0)$. Пусть есть полидиск радиуса $\varepsilon$ с центром $(t_0, z_0)$.

Пусть есть полидиск $\Delta_\varepsilon$, образ $(t, z) \mapsto (t, \varphi(t, z)) \in \Omega$. Тогда $P_\varphi$ опр. и $P_\varphi \in A(\Delta)$ (по Th гол. инт. по пар.)

$\varphi: \Delta_\varepsilon \to \mathbb{C}^n$ $\qquad \max|f| \le L_0$, $\max_k \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \le L_1$

$M = \{\varphi \in A(\Delta_\varepsilon) \mid |\varphi(t, z) - z| \le |t - t_0| L_0\}$ $\quad$ $k$ - коорд.

Лемма пр-во $M$ полно в sup-норме, $P$ опр. при мал. $\varepsilon$

Д-во. $M$ замкн. в $A(\Delta_\varepsilon) \Rightarrow M$ полно

$(t, \varphi(t, z))$ уходят от $(t_0, z_0)$ на порядок $\varepsilon \Rightarrow$ при малых $\varepsilon$ $P$ опр.

Лемма. $PM \subset M$

$|(P\varphi)(t, z) - z| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau, z))\, d\tau\right| \le L_0 |t - t_0|$ $\quad$ опр. инт.

Лемма $P$ - сжим. на $M$ $\qquad \max_k \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \le L_1$

$\|P\varphi - P\psi\| = \max \left|\int_{t_0}^{t} [f(\tau, \varphi(\tau, z)) - f(\tau, \psi(\tau, z))]\, d\tau\right|$ $\qquad \Downarrow$

$\le \underset{<1}{\varepsilon L_1} \|\varphi - \psi\| \Rightarrow P$ сжим. $\qquad$ Th Лагранжа

Имеем ед. неподв. точку. $\qquad Lip_z f \le L_1$

Когда вект. поле в окр. особой точки (Билет 4)
эквив. своей лин. части?

$\binom{x}{v} \xrightarrow{H} \binom{w}{H(x)}$ $H$ - диффеом. $w(H(x)) = \frac{\partial H}{\partial x} v(x)$ $v(x) = Ax$ - лин., $w(x) = Ax + f(x)$, $f(0) = 0$, $\frac{df}{dx}(0) = 0$

$\frac{\partial H}{\partial x} A = (A+f) \circ H = AH + f \circ H$

$H = Id + h$, $h(0) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial x}(0) = 0$, $h$ - неизв.

$\frac{\partial H}{\partial x} = E + \frac{\partial h}{\partial x}$, $A + \frac{\partial h}{\partial x} A = \cancel{A} + Ah + f \circ (Id + h)$

$\frac{\partial h}{\partial x} A - Ah = f \circ (Id + h)$ - функц. у-ние ; $\frac{\partial h}{\partial x} A - Ah = f$ - гом. у-ние

Пусть $A$ - диагонализуем (матр. диаг.)

Решение гомологического у-ния: $\frac{\partial h}{\partial x} A - Ah = f$

$\lambda \in \mathbb{C}^n$ - резонансный, если $\exists s \in \{1, \dots n\}$ и $k \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $|k| = \sum_{s=1}^{n} k_s > 1$, т.ч.

$\underbrace{(\lambda, k) - \lambda_s}_{} = 0$ - рез. соотн.

Лемма Если $A = \mathrm{diag}\,\lambda$, $\lambda$ - не рез., то у-ние разр.

Оператор $Ad\,A: h \to [\frac{\partial h}{\partial x} A - Ah]$ - лин. с собств. вект. $z^k e_s =$
$= z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to s$ и с.з. $(\lambda, k) - \lambda_s$

$\frac{\partial h}{\partial z} = z^k \begin{pmatrix} 0 \\ k_1/z_1 \dots k_n/z_n \\ 0 \end{pmatrix} s$ $\quad$ $\frac{\partial h}{\partial z} Az = (\dots) \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \lambda_n z_n \end{pmatrix} = z^k (\lambda_s k_s) e_s$

$Ad\,A(z^k e_s) = ((\lambda, k) - \lambda_s) z^k e_s$

Билет 5

Область Пуанкаре ($P$) — $\lambda \in$ ей, если $0 \notin \operatorname{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Область Зигеля ($S$) — $\lambda \in$ ей, если $0 \in \operatorname{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

**Лемма** В $P$ каждому $\lambda$ соотв. лишь конечное число резонансов

**Д-во** $\lambda_j \in \mathbb{R}$

$\max_j \lambda_j \le (k, \lambda_j)$, $\lambda_j > 0$ $\qquad |k| \le \dfrac{\max \lambda_j}{\min \lambda_j}$

$(k, \lambda_j) \ge |k| \cdot \max_j \lambda_j$

**Лемма** Если $\lambda \in S$, то либо $\lambda$ — рез., либо $\lambda_j - (\lambda, k)$ не отдел. от $0$

**Д-во** Пусть есть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: $0 \in \operatorname{int} \operatorname{conv}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

Р-рим мн-во $(k, \lambda)$. Оно соотв. орбите сдвига тора*

$\mathbb{C} / \mathbb{Z}\lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\lambda_2 \quad k\lambda_3$

Нет рез. $\Rightarrow (k, \lambda) \ne 0$

$(k, \lambda)$ и $(l, \lambda)$ близки $\Rightarrow (k - l, \lambda)$ близко к $0$

$\lambda_j - [(k, \lambda) + \lambda_j]$ мало $\Rightarrow$ есть мал. знам.

* сдвиги тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ $\qquad$ сдвиг $f: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$

$x \mapsto x + w$, $w = (w_1, w_2)$

**Th** Орб. сдв. плотна $\Leftrightarrow k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 \ne 0 \ \forall k_i$

Двиг. с большими простр. попадаю в окр. точки

$(k - l) w \pmod{\mathbb{Z}^2}$

$w'_j = s w_j - k_j \qquad (?)$

$\dfrac{s w_1 - k_1}{s w_2 - k_2} \notin \mathbb{Q}$

резонансные с.з. — есть соотн. Билет 6

$\lambda_s = (m,\lambda)$, $m=(m_1,\dots,m_n)$, $m_i\ge 0$, $\sum\ge 2$

**Теорема** Если собств. числа матрицы $A$ нерезонансны, то у-ние $\dot x = Ax+\dots$ формальной заменой переменных $x=y+\dots$ приводится к линейному уравнению $\dot y = Ay$

Вывод гомологического уравнения. *

Пусть $h$ — векторный многочлен (векторное поле с компонентами-многочленами) от $y$ порядка $r\ge 2$ и $h(0)=h'(0)=0$

**Лемма.** $\dot y = Ay$ при замене $x=y+h(y)$ превращается в $\dot x = Ax + v(x)+\dots$, где $v(x) = \frac{\partial h}{\partial x}Ax - Ah(x)$

$$\dot x = \left(E+\frac{\partial h}{\partial y}\right)Ay = \left(E+\frac{\partial h}{\partial y}\right)A(x-h(x)+\dots) = Ax + \overbrace{\left[\frac{\partial h}{\partial x}Ax - Ah(x)\right]}^{\text{скобка Пуассона}}+\dots$$

$L$ — оператор, приводит поле в скобку Пуассона $Ax$ с

$$Lh = \frac{\partial h}{\partial x}Ax - Ah(x)$$

Гомологическое у-ние: $L\overset{\text{неизв}}{h} = \overset{\text{изв.}}{v}$

$L$ — из форм. вект. полей в себя. Однор. вектор-полином на пр-ве инвариантно.

**Лемма*** Если $A$ диагональный, то и $L$ ~~диагональный~~ на пр-ве однородных вектор многочленов диагональный. С.в. $L$ — вектор одночлены $x^m e_s$, $Lx^m e_s = [(m,\lambda)-\lambda_s]x^m e_s$

Д-во $h = x^m e_s$ у $\frac{\partial h}{\partial x}Ax$ отлична от 0 только $s$-компонента, она равна $\frac{\partial x^m}{\partial x}Ax = \sum \frac{m_i}{x_i}x^m\lambda_i x_i = (m,\lambda)x^m$. Но $Ah(x) = \lambda_s h(x)$.

Если все с.з. $L$ — не 0, то он обратим

Д-во теоремы Пуанкаре: Пусть исх. у-ние $\dot x = Ax + v_r(x)+\dots$

---

$v_r$ — члены степени $r$ ($r\ge 2$)

Решим $Lh_r = v_r$. Сделаем подстановку $x = y+h_r(y)$ — убрали члены степени $r$ исходного у-ния

Исходное у-ние примет вид $\dot y = Ay + w_{r+1}(y)+\dots$

Продолжая подстановки, убираем степени $r, s, \dots$ Произведение замен стабилизируется в классе форм. рядов, т.к. члены любой фикс. степени, начиная с нек. места, не меняются. Предельная подстановка дает $\dot y = Ay$

* Если с.з. $A$ нерезон., то $Lh=v$ разрешимо в классе форм. степ. рядов $h$ $\forall$ форм. вект. поля $v$ без свободного члена и лин. части в 0.

Если рез. пор. $k$, то гом. у-ние разрешимо $\forall$ однор. вектор-многочл. $v$ степени $k$ в классе однор. вектор-многочл. степ. $k$.

7 Билет

Пусть набор с.з. $\lambda=(\lambda_1,\dots\lambda_n)$ оператора $A$ резонансный. Пусть $e_s$ — вектор собств. базиса, $x_i$ — коорд. в базисе $e_i$. $x^m = x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}$ — моном отн. $x_i$;

$x^m e_s$ резонансный, если $\lambda_s = (m,\lambda)$, $|m|\geq 2$

для $\lambda_1 = 2\lambda_2$ — $x_2^2 e_1$, для $\lambda_1+\lambda_2=0$ — все $(x_1 x_2)^k x_s e_s$

Теорема Пуанкаре-Дюлака.

Рассмотрим дифур $V(x) = Ax+\dots$ $y = Ax+\dots$

<u>Теорема</u> При помощи форм. замены $x=y+\dots$ ур-ие можно привести к каноническому виду $\dot y = Ay + w(y)$, где все мономы ряда $w$ резонансны.

<u>Д-во</u>: Будем убирать нелин. члены. Слагаемые с нерезонансными гом. уравнения $Lh = v_2$ относ. однородного вектор-многочлена $h$ степени 2, равной порядку резонан-ся. Уберем только не члены, нелин. мономы. Представим в ~~сум~~ виде суммы вектор-одночленов: если $v$ и $h$

$v=\sum v_{m,s}x^m e_s$, $h=\sum h_{m,s}x^m e_s$, положим $h_{m,s} = \frac{v_{m,s}}{(m,\lambda)-\lambda_s}$ для $m,s$, где знам. не 0. Так определим поле $h$.

Сделаем замену $x=y+h(y)$. Уберутся все степени 2, кроме резонансных, они не изм. Ур-ие примет вид $\dot y = Ay + w_2(y)+\dots$, где $w_2$ — только резонансные.

Далее действуем аналогично теореме Пуанкаре. Ур-ие, не меняется: $w_2$ не влияют на гомолог. При $y=z+g_s(z)$ $\dot y = Ay+w_2(y)+\dots+w_s(y)+\dots$ при замене становится $\dot z = Az + w_2(z)+\dots+w_{s-1}(z)+[w_s(z)-(Lg_s)(z)]+\dots$. Так убираем слабые члены $w_2$ с $g_s$ степени $s+1$. Так убираем все нерезонансные, д-во заканчивается аналог. ~~Т~~ Пуанкаре.

Билет 8

Формулировка Росток аналит. векторного поля в особой точке с линейн. частью типа Пуанкаре аналит. экв. своей рез. норм. форме

Пусть $A+P$ - рез н. ф, $A$ - лин, $P$ - полином из рез. ...

Полином. заменой приводим лин. росток $j_0^{\,1}P=0$ к виду:
$\underbrace{A+P+f}_{V}$, где $j_0^{\,N}f=0$ и нет рез членов ст. выше $N$
нет рез. членов

У-ние $\frac{\partial h}{\partial z}A-Ah=f$ реш., $j_0^{\,N}h=0$. Оператор $L: F\to h$ огр. в точн. норме (ищем замену $H=Id+h$, кот. превр. $A+P$ в $V$)

$$\frac{\partial H}{\partial z}(A+P)=(A+P+f)\circ H\ ;\ \left(E+\frac{\partial h}{\partial z}\right)(A+P)=(A+P+f)\circ(Id+h)$$

$$A+\frac{\partial h}{\partial z}A+P+\frac{\partial h}{\partial z}P=A+Ah+(P+f)\circ(Id+h)+P-P$$

$$ad_z h=-\frac{\partial h}{\partial z}P+[-P+(P+f)\circ(Id+h)]\in B_\rho$$ → пр-во ростов вект. полей, голом. в $B_\rho$, нач. с $j_0^{\,N}$

$\Phi h$, $\Phi$ - сильно сжимающий.

Если бы $ad_A h=\Phi h$, $h\mapsto L\Phi h$ - сильно сжим при малом $\rho$

Имеем $ad_A h=\Phi h-\frac{\partial h}{\partial z}P$

$(ad_A)^{-1}=L\Rightarrow L\Phi$ - сильно сжим.

$h\mapsto\frac{\partial h}{\partial z}P$ - не сильно сжим., но $h\mapsto L\frac{\partial h}{\partial z}P$ - с.с., т.к.

$$L:\sum f_{k_s}z^k e_s\mapsto\sum\frac{f_{k_s}}{(k,\lambda)-\lambda_s}z^k e_s\ ;\ h\mapsto\frac{\partial h}{\partial z},\ h_{k_s}\mapsto k_s\cdot h_{k_s}$$

$$L:\frac{k_s\cdot h_{k_s}}{(k,\lambda)-\lambda_s}$$

Формулировка ~~Резонанс. векторного поля в нер. Диофантовой~~ ~~нн. гашение~~ ~~экв. лин.~~ (Билет 10 или 9?)

$\dot z = Az + f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $A - \operatorname{diag} \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$ (1)

Опр. $\lambda$-диофантов, если $|(k, \lambda) - \lambda_j| \geq \frac{C}{|k|^d}$ $\exists C>0$, $d \in \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k|>1$, $j \in \{1, \dots n\}$

Для диофантова $\lambda$ (1) анал. эквивалентно своей лин. части.

Д-во (схема) Метод посл. приближений

$Az + f(z)$ — нех. вект. поле (1) Функц. у-ние: $\frac{\partial H}{\partial z}(f(z) + Az) = A \cdot H$

$H(z) = id + h(z) \equiv z + h(z)$

Гомолог. у-ние: $\frac{\partial h}{\partial z} A - Ah + f = 0$

Решение гомологического уравнения $\nearrow$ Берем $h$ и $\overset{\text{замену}}{H = id + h}$.

Один шаг метода посл. прибл.

и улучшаем векторное поле

$\frac{\partial H}{\partial z}(A + f) = (A + \tilde f) \cdot H$, $\tilde f$ лучше $f$ $\quad (\tilde f = [\frac{\partial H}{\partial z}(A+f)] \circ H^{-1} - A$

Далее по индукции

База: $f_0 = f$, $h_0 = L f_0$

$f_1$ — это $\tilde f$ с $H = H_0 = id + h_0$

Теорема Пайшуля $\lambda$-гомологический инвариант

Шаг: Пусть $f_k$ дано, $h_k = L f_k$

$H_k = id + h_k$, $f_{k+1} = \tilde f$, где $f = f_k$, $H = H_k$ $\Delta$

~~Есл~~ Если $f \in A(\Delta_\varepsilon)$, $\varepsilon$ — мало

$f_k \rightrightarrows 0$ в $\Delta_{\varepsilon/2}$

$H_n \circ H_{n-1} \circ \dots \circ H_0 \rightrightarrows H \in A(\Delta_{\varepsilon/2})$

При $n \to \infty$ получаем нет рез функциональное уравнение

Решение гомологического уравнения $f = \sum f_{k_j} z^k e_j$, $h = \sum h_{k_j} z^k e_j$

$h_{k_j} = \frac{f_{k_j}}{(\lambda, k) - \lambda_j}$ $\quad$ г. рад. поли-диска $\quad \|h\|_{2e^{-\delta}} \leq \sum |h_{k_j}| 2^{|k|} (e^{-\delta})^{|k|} \leq \sum \frac{\|f\|_2 \, 2^{|k|} e^{-\delta|k|}}{2^{|k|} \cdot C} |k|^d =$

Оценка Коши $\quad$ $\delta$-зазор между двумя полидисками $\quad = \|f\|_2 \sum \frac{e^{-\delta|k|}}{C} |k|^d$

$|f_{k_j}| \leq \frac{\|f\|_2}{2^{|k|}}$

$|(\lambda, k) - \lambda_j|^{-1} \leq \frac{|k|^d}{C}$

$\|h\|_{re^{-\delta}} \le \frac{\|f\|_2}{\delta^\alpha}$ для $\alpha>0$

$f_k$ - невязки!
$h_k$ - поправки!

Заметим, что при $r>2\delta$ зазор между полудисками

$r(1-e^{-\delta})>\delta^2$ при $r>2\delta$

## Порядок операторов

Оператор первого порядка $\mathcal{L}$ с const $\alpha$ и $\beta$, если выполн.

$\|\mathcal{L}f\|_{re^{-\delta}} \le \frac{\|f\|_2}{\delta^\alpha}$ при $\|f\|\le\delta^\beta$

Оператор второго порядка $\mathcal{L}$ если $\|f\|_{re} \sim \|f\|_2^2$ для первого порядка

Лемма 1 реш. гом. у-ния — оператор I порядка

Лемма 2 переход к след. невязке — оператор II порядка

Сходимость из Л 1,2 следует сходимость метода посл. приближ.

Сходимость $f_k\to 0$: $\delta_0=\frac{r}{2}$, $\delta_{k+1}=\delta_k^{3/2}$, $f\rightsquigarrow\tilde{f}: \Phi$

$\|\Phi f\|_{re^{-\delta}} \le \frac{\|f\|_2^2}{\delta^\alpha}$ при $\|f\|_2\le\delta^\beta$

$f_{k+1}=\Phi f_k$, $r_{k+1}=r_k e^{-\delta_k}$

$\|f_{k+1}\|\le\delta_{k+1}^\beta$, если $\|f_k\|_{r_k} \overset{?}{\le} \delta_k^\beta$

$\|f_{k+1}\|_{r_{k+1}} \le \frac{\|f_k\|_{r_k}^2}{\delta_k^\alpha} \overset{\text{инд.}}{\le} \delta_k^{\beta-\alpha} = \delta_{k+1}^{\frac{2}{3}(\beta-\alpha)} \overset{?}{\le} \delta_{k+1}^\beta$

$\frac{2}{3}(\beta-\alpha)\ge\beta$? $\quad 2\beta-2\alpha\ge3\beta$, $\beta\ge2\alpha$

~~Анализ~~ Доказательство формулы след. невязки с исп. формулы решения гом. у-ния.

* Коэф. ряда в реш. гом. у-ния делим на $\lambda_j-(k,\lambda)$ — малые знаменатели