Логика, Теория множеств ZF с Аксиомой выбора.

1 Лекция 1 (01.11.2021)

2 Лекция 2 (01.12.2021)

3 Лекция 3 (01.19.2021)

Идея: n – {натуральные числа, меньшие n}

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{0\} = \{\emptyset\},\ 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Обозначения: $0 := \emptyset$. $x + 1 = S(x) := x \cup \{x\}$

Определение 3.1. Множество Y называется *индуктивным*, если $0 \in Y$, $\forall x : (x \in Y \to x + 1 \in Y)$

Определение 3.2. Наименьшее по включению (- наименьшее) индуктивное множество называется множеством натуральных чисел и обозначается $\mathbb{N}$

Утверждение такое множество существует

Принцип математической индукции. Дано некоторое множество A. Если $0 \in A$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \in A \to n + 1 \in A)$, то $n + 1 \in A$

Обозначение $x < y \ :\Leftrightarrow\ x \in y$

Принцип порядковой индукции. Дано некоторое множество A. Если $\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n\ m \in A \to n \in A)$, то $\mathbb{N} \subset A$

Определение 3.3. Линейно упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, если любое его непустое подмножество Y имеет наименьший элемент (обозначается $\min Y$)

Лемма 3.1. Отношение $<$ на $\mathbb{N}$ линейно упорядочивает $\mathbb{N}$. Более того, этот порядок является полным

Замечание

Поскольку $x < y + 1 \ \Leftrightarrow\ x < y$ или $x = y$, для любого натурального n, число $n + 1$ является непосредственно следующим за n в смысле порядка $<$

Определение 3.4. Последовательность элементов множества A – это функция $\mathbb{N} \to A$

О рекурсии. Пусть Y – некое множество $y_0 \in Y$ и $h : Y \to Y$ – любая функция. Тогда существует единственная функция $f : \mathbb{N} \to Y$, удовлетворяющая для всех $n \in \mathbb{N}$ условию

$$\begin{cases} f(0) = y_0 \\ f(n+1) = h(f(n)) \end{cases}$$

Лемма 3.2.

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n = 0 \vee \exists m \in \mathbb{N}\ n = m+1)$$

Доказательство. Даны множество Y, элемент $y_0 \in Y$ и функция $h : Y \to Y$. Пусть F – множество всех функций $g :\ m \to Y,\ m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям на $\operatorname{dom} g$

Любые две функции $g_0, g_1 \in F$ совпадают на пересечении своих областей определения. В противном случае рассмотрим минимальный $k \in \mathbb{N}$ такой, что $g_0(k) \neq g_1(k)$. Поскольку $g_0(0) = y_0 = g_1(0)$, имеем $k \neq 0$. Следовательно $k = s+1$, причем $g_0(s) = g_1(s)$, поскольку k – минимальный. Отсюда $g_0(k) = g_0(s+1) = h(g_0(s)) = h(g_1(s)) = g_1(s+1) = g_1(k)$, противоречие □

Определение 3.5. Соотв $R \subset A \times B$ функционально, если $\forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B\ ((a, b_1) \in R \wedge (a, b_2) \in R\ \Leftrightarrow\ b_1 = b_2)$

Каждая $g : m \to Y$ есть подмножество $m \times Y \subset \mathbb{N} \times Y$. Рассмотрим множество $f := \bigcup F \subset \mathbb{N} \times Y$ и докажем, что f является искомой функцией $\mathbb{N} \to Y$

Отношение $f = \bigcup F$ функционально, поскольку любые два элемента совпадают на общей области определения. Свойства (1) очевидно выполняются для f

Докажем тотальность, рассуждая от противного. Рассмотрим минимальное k такое, что $k \notin \operatorname{dom} f$. Имеем $f : k \to Y$. Можно продолжить f до функции $f_0 : k+1 \to Y$, определив $f_0(k) := y_0$, если $k = 0$ и $f_0(k) := h(f(s))$, если $k = s+1$. Очевидно, что $f_0 \in F$, поэтому $k \in \operatorname{dom} f$, противоречие. Тем самым доказано существование f

Единственность f, как в рассуждении выше, легко следует по принципу наименьшего числа

Теорема доказана

Определение 3.6. Пусть $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $s(n) = n+1$. Сложение $(+)$ определяется как (единственная) функция $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая рекурсивным условием для всех $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ m + s(n) = s(m+n) \end{cases}$$

Также заметим, что

$$m + n \neq m \oplus n$$
$$l = m\ \{k \in \mathbb{N} \mid m + k \neq m \oplus k\}$$
$$l = 0 \;\Leftrightarrow\; m + 0 = m = m \oplus 0$$
$$l = s(t) = t + 1 \;\Leftrightarrow m + l = m + s(t) = s(m + t) = s(m \oplus t) = m \oplus s(t) = m \oplus l$$

Определение 3.7. Умножение $(\cdot)$ определяется как (единственная) функция $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая рекурсивным условиям для всех $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot s(n) = m \cdot n + m \end{cases}$$

<u>Доказательство существования функции сложения</u>
Рассмотрим функцию $H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такую, что $H(G) = s \circ G$. По теореме о рекурсии существует функция $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} F(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \\ F(n+1) = H(F(n)) \end{cases}$$

Положим $m + n = F(n)(m)$, тогда

$$\begin{aligned} m + 0 &= F(0)(m) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}(m) = m \\ m + s(n) &= F(s(n))(m) \\ &= F(n+1)(m) \\ &= H(F(n))(m) \\ &= (s \circ F(n))(m) \\ &= s(F(n)(m)) \\ &= s(m + n) \end{aligned}$$

<u>Идея</u>: целое число можно представить разностью двух натуральных числе $m - n$. При этом некоторые пары задают одно и то же число

Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ можно ввести, как фактормножество $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \backslash =_{\mathbb{Z}}$, где отношение эквивалентности $=_{\mathbb{Z}}$ задается следующим образом:

$$(m_1, n_1) =_{\mathbb{Z}} (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 + n_2 = n_1 + m_2$$

<u>Идея</u>: рациональное число $q = \frac{m}{n}$ можно рассматривать как пары (m, n), где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Однако, некоторые пары задают одно и то же рациональное

число.

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ можно ввести, как фактормножество $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \backslash \{0\})) \backslash =_{\mathbb{Q}}$, где отношение эквивалентности $=_{\mathbb{Q}}$ задается следующим образом:

$$(m_1, n_1) =_{\mathbb{Z}} (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 n_2 = n_1 m_2$$

Простые свойства вполне упорядоченных множеств:
1) всякое непустое вполне упорядоченное множество имеет наименьший элемент
2) всякий отличный от наибольшего элемент $x \in X$ имеет непосредственного последователя, то есть $\exists y \in X \ \forall z \in X \ (x < z \to y \leqslant z)$
3) всякое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань

Лемма 3.3. Даны вполне упорядоченное множеств $(X, <)$ и функция $f : X \to X$, сохраняющая порядок. Тогда $x \leqslant f(x)$ для любого $x \in X$

Доказательство. Предположим, что $Y = \{x \in X \mid f(x) < x\}$ не является пустым, и рассмотрим $a = \min Y$. Имеем $f(a) < a$, поскольку $a \in Y$. Следовательно $f(f(a)) < f(a)$ по монотонности f. Тогда $f(a) \in Y$ и $f(a) < a$, что противоречит минимальности a. Заключаем, что Y пусто. □

Определение 3.8. Начальным отрезком множества $(X, <)$ называется такое подмножество $Y \subset X$, для которого

$$\forall x, y \in X \ (y < x \land x \in Y \Rightarrow y \in Y)$$

Обозначение
Для $a \in X$ обозначим $[0, a) = \{x \in X \mid x < a\}$ Наблюдение
Любой собственный начальный отрезок $(X, <)$ имеет вид $[0, a)$ для некоторого $a \in X$

Лемма 3.4. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому собственному начальному отрезку

Доказательство. Допустим, что существуют собственный начальный отрезок $Y \subset X$ и изоморфизм $f : X \to Y$. Рассмотрим $a \in X \backslash Y$. Имеем $f(a) < a$, поскольку $a \notin Y$, $f(a) \in Y$ и Y – начальный отрезок X. Противоречие с предыдущей леммой. □

Кантор. Для любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого

Доказательство. Возьмем два вполне упорядоченных множества A, B, рассмотрим $R = \{(x, y) \in A \times B \mid [0, x)_A \cong [0, y)_B\}$. Соответствие R функционально и инъективно, то есть является биекцией из $\operatorname{dom} R$ в $\operatorname{ran} R$ □

4 Лекция 4 (01.25.2021)

Кантор Для любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого

Доказательство. Возьмем два вполне упорядоченных множества A, B. Рассмотрим $R = \{(x, y) \in A \times B \mid [0, x)_A \cong [0, y)_B\}$.
Проверим инъективность соответствия R, если $(x_1, y), (x_2, y) \in R$ то $[0, x_1)_A \cong [0, y)_B \cong [0, x_2)$. Так как ни одно из множеств не может являтся собственным начальным отрезком другого, то $x_1 \not<_A x_2,\ x_2 \not< x_1$, откуда $x_1 = x_2$
Аналогично проверяется функциональность соответсвия R

Множество $\operatorname{dom} R$ является начальным отрезком A. Действительно, если $x <_A x'$ и $x' \in \operatorname{dom} R$, то $[0, x)_A \subset [0, x')_A$ и существует изоморфизм $g : [0, x')_A \to [0, y')_B$. Ограничение изоморфизма g на $[0, x)_A - [0, x)_A \cong [0, g(x))_B$, тогда $(x, g(x)) \in R$ и $x \in \operatorname{dom} R$

Соответсвие R сохраняет порядок, так как если $x <_A x',\ (x, y) \in R,\ (x', y') \in R,\ y <_B y'$, иначе $[0, x')_A$ изоморфен своему начальному отрезку нало

Аналогично $\operatorname{ran} R = \{y \in B \mid \exists x \in A (x, y) \in R\}$ является начальным отрезком в B, и отношение R^{-1} сохраняет порядок

Получается что R – изоморфизм из $\operatorname{dom} R$ в $\operatorname{ran} R$, проверим что $\operatorname{dom} R = A,\ \operatorname{ran} R = B$
Если это не так, рассмотрим $x_0 = \min(A \setminus \operatorname{dom} R)$ и $y_0 = \min(B \setminus \operatorname{ran} R)$, тогда $\operatorname{dom} R = [0, x_0)_A,\ \operatorname{ran} R = [0, y_0)_B$ и $(x_0, y_0) \in R$ – противоречие □

Идея: трансфинитно продолжим ряд натуральных чисел так, чтобы всякий член ряда был равен множеству предшествующих членов ряда

Обозначение: $x + 1 := x \cap \{x\}$
Определение 4.1. Множество T называется транзитивным, если $\bigcup T \subset T$, или экваивалентно $\forall x, y\ (x \in y \in T \to x \in T)$

Определение 4.2. Ординал – транзитивное множество, все элементы которого также транзитивны
Лемма 4.1. Всякий элемент ориданала – ординал

Доказательство. Пусть α – ординал, то есть транзитивное множество, каждый элемент которого транзитивен
Тогда $\beta \subset \alpha$ в силу транзитивности, тогда каждый элемент β транзитивен и сам тоже транзитивен, а следовательно он ординал $\square$

Лемма 4.2. Для любых ординалов α, β, γ имеем $\alpha \notin \alpha$, $\alpha \in \gamma$ если $\alpha \in \beta$, $\beta \in \gamma$

Доказательство. Предположим что $\alpha \in \alpha$ и рассмотрим $\{\alpha\}$. В нем по аксиоме регулярности должен найтись элемент без α, но такого нет

Рассмотрим ординалы α, β, γ, тогда $\alpha \in \beta \in \gamma$ и по транзитивности $\alpha \in \gamma$ $\square$

Лемма 4.3. всякое непустое множество ординалов X содержит $\in$-минимальный элемент

Доказательство. Через аксиому регулярности $\square$

Лемма 4.4. Для любых ординалов α, β верно, что $\alpha \in \beta$, или $\alpha = \beta$, или $\beta \in \alpha$

Доказательство. Допустим, что это не так, то есть существует ординал α, который несравним с некоторым ординалом.
Рассмотрим ординал $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ и его подмножество X, состоящее из тех элементов, которые несравнимы с некоторым ординалом. По предыдущей лемме множество X содержит минимальный α_0 элемент

Пусть β – некоторый ординал, с которым несравним α_0, рассмотрим $\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$ и его подмножество Y, состоящее из тех элементов, которые насравнимы с ординалом α_0. По лемме Y содержит минимальный β_0, проверим что $\alpha_0 = \beta_0$

Установим вкоючение α_0 в β_0, если $\gamma \in \alpha_0$, $\gamma \in \alpha + 1$ и $\gamma \notin X$, тогда так как α_0 минимальный, то γ сравним со всеми ординалами, а тогда $\gamma \in \beta_0$, так как иначе $\beta_0 \in \alpha_0$, и это противоречие

Установим включение β_0 в α_0. Если $\delta \in \beta_0$, то $\delta \in \beta + 1$, тогда δ сравним с α_0 и $\delta \in \alpha_0$, так как иначе будет противоречие с несравнимостью α_0 и β_0 $\square$

Обозначение $x < y :\Leftrightarrow x \in y$

Лемма 4.5. Класс всех ординалов линейно упорядочен через $<$, а также всякое непустое множество содержит $<$-наименьший элемент

Замечание 4.1. Любой ординал α сам как множество вполне упорядочен с помощью $<$ и является начальным отрезком в классе всех ординалов

Трансфинитная индукция Пусть φ – некоторое свойство множеств. Допустим что для всякого ординала α имеет место $\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta) \to \varphi(\alpha)$. Тогда для всех ординалов γ верно $\varphi(\gamma)$

Доказательство. Допустим, что $\varphi(\gamma)$ не выполнено для некоторого ординала γ. Рассмотрим подмножество X множества $\gamma+1 = \gamma \cup \{\gamma\}$, состоящее из ординалов, которые не удовлетворяют свойству φ. Поскольку множество X непусто, оно содержит $<$-минимальный элемент α. Получаем, что $\varphi(\alpha)$ верно, поскольку $\varphi(\beta)$ верно для любого $\beta < \alpha$, противоречие ☐

парадокс Бурали-Форти 1897 Класс всех ординалов не является множеством

Доказательство. Допустим, что существует O, которое в точности содержит все ординалы
Тогда O является транзитивным множеством транзитивных множетсв, то есть ординалом
Следовательно множество $O \in O$, что противоречит иррефлексивности $\in$. ☐

Утверждение
Каждое натуральное число и все множество $\mathbb{N}$ – ординалы

Схема аксиом подстановки
Пусть свойство $\varphi(x, y)$ – такое, что для любого множества x найдется не более одного множества y, для которого $\varphi(x, y)$. Тогда для любого X найдется множество $Y = \{u \mid \exists x \in X \ \varphi(x, y)\}$

Кантор Пусть $(X, <)$ – вполне упорядоченное множество. Тогда существуе единственный ординал α, изоморфный множеству $(X, <)$

Доказательство. Рассмотрим свойство $\varphi(x, y) : \ x \in X, \ y$ – ординал, и $[0, x)_X \cong y$.
Видим, что для любого множества x найдется не более одного множества y, для которого имеет место $\varphi(x, y)$.
По аксиоме подстановки найдется множество $Y = \{y \mid \exists x \in X \ \varphi(x, y)\}$, содержащее те и только те ординалы, которые изоморфны собственным начальным отрезкам $(X, <)$.

Поскольку не существует множества всех ординалов, то найдется ординал α, не лежащий в Y

По теореме Кантора о сравнении вполне упорядоченных множеств, множество $(X, <)$ изоморфно некоторому начальному отрезку α. поскольку α и все его собственные начальные отрезки являются ординалами, получаем, что $(X, <)$ изоморфно ординалу

Единственность следует из того, что для двух различных ординалов, один является собственным начальным отрезком другого. Следовательно разные ординалы неизоморфны как вполне упорядоченные множества. □

Определение 4.3. Ординал α называется порядковым типом вполне упорядоченного множества $(X, <)$, если он изоморфен $(X, <)$.

Лемма 4.6. Всякий ординал α либо имеет вид $\beta+1$ для некоторого ординала β, либо равен объединению всех предшествующих ординалов $\bigcup\alpha$

Замечание 4.2. ординалы вида $\beta+1$ называются ординалами-последвателями; се остальные ординалы, кроме 0, называются предельными.

5 Лекция 5 (01.26.2021)

Определение 5.1. Ординал – транзитивное множество, все элементы которого транзитивны

Обозначение: $x < y \Leftrightarrow x \in y$

Лемма 5.1. Класс всех ординалов линейно упорядочен с помощью $<$. Более того, всякое множество содержит $<$-наименьший элемент

Определение 5.2. Ординалы вида $\beta+1$ называются ординалами-последователями. Все остальные ординалы, кроме 0, называются предельными

Замечание 5.1. Не существует ординала γ такого, что $\alpha < \gamma < \alpha + 1$

Определение 5.3. Пусть ζ – некоторый ординал. Множество g называется ζ-последовательностью, если $g : \zeta \to X$ для некоторого X.
Такие последовательности также обозначают $(X_\nu)_{\nu<\zeta}$

Определение 5.4. Пусть $\varphi(x, y)$ – некоторое свойство множеств, причем для любой трансинитной последовательности x существует не более одного множества y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$
Будем говорить, что трансинитная последовательность g (длины ζ) удовлетворяет рекурсивному условию, заданному φ, если для всякого ординала $\nu < \zeta$ имеет место $\varphi(g \uparrow_\nu, g(\nu))$

Лемма 5.2. Пусть $\varphi(x, y)$ – некоторое свойство множеств, причем для любой трансинитной последовательности x существует не более одного множества y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$
Тогда выполнено следующее:
1) либо для любого ординала α существует единственная α-последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ
2) либо существует единственная трансфинитная последовательность g, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ, для которой не существует такого y, что $\varphi(g, y)$

Доказательство. Будем говорить, что трансинитная последовательность g (длины ζ) удовлетворяет рекурсивному условию, если для всякого ординала $\nu < \zeta$ имеет место $\varphi(g\uparrow_\nu, g(\nu))$

Любые две трансинитные последовательности g_1, g_2 удовлетворяющие рекурсивному условию, совпадают на пересечении своих областей определения. В противном случае рассмотрим $\in$-минимальный ординал λ такой, что $g_1(\lambda) \neq g_2(\lambda)$. В силу минимальности λ получаем, что $g\uparrow_\lambda$

Предположим, что не для всякого ординала α существует α - последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию. Рассмотрим минимальный ординал λ, для которого не существует соответствующей λ-последовательности

Видим, что $\lambda \neq 0$. Проверим, что λ не является предельным ординалом. Рассмотрим условие $\psi(u, v)$: u – ординал, v – u-последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию.

Для всякого u существует не более одного v такого, что верно $\psi(u, v)$. По акиоме подстановки существует множество $V = \{v \mid \exists u \in \lambda\ \psi(u, v)\}$. Тогда $\bigcup V$ – λ-последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию. Противоречие.

Следовательно $\lambda = \lambda_0 + 1$ для некоторого ординала λ_0. По минимальности λ, найдется λ_0-последовательность g, удовлетворяющая рекурсивному условию. Видим, что не существует такого y, что □

Цермело Для всякого множества X существует бинарное отношение $<$ на X такое, что $(X, <)$ – вполне упорядоченное множество

Доказательство. Пусть f – функция выбора на семействе всех непустых подмножеств X. Такая функция существует по аксиоме выбора.

Назовем трансфинитную последовательность g хорошей, если $\operatorname{ran} g \subset X$ и $g(a) \neq g(b)$ для любых $a \neq b$ из $\operatorname{dom} g$. Другими словами, хорошая последовательность – трансфинитная последовательность из различных элементов X.

Рассмотрим условие $\varphi(x, y)$: x – хорошая трансфинитная последовательность, для которой $X \setminus \operatorname{ran} x \neq \emptyset$ и $y = f(X \setminus \operatorname{ran} x)$

Видим, что для любой трансфинитной последовательности x существует не более одного множества y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$

Мы находимся в условиях теоремы о трансфинитной рекурсии. Заметим, что любая трансфинитная последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ, является хорошей

Допустим, что для любого ординала α существует единственная α-последовательнос удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ.

Придем к противоречию, рассмотрев условие $\psi(c, d) :\ c \in X,\ d$ – ординал, и для некоторой трансифнитной последовательности g, удовлетворяющей рекурсивному условию, $g(d) = c$

Видим, что для любого множества c существует не более одного множества d, удовлетворяющего условию $\psi(c, d)$. По аксиоме подстановки существует множество $D = \{d \mid \exists c \in X\ \ \psi(c, d)\}$. В нашем предположении D является множеством всех ординалов, но такое множество не существует.

Следовательно, существует трансфинитная последовательность g, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ, которую нельзя продолжить, то есть не существует такого y, что $\varphi(g, y)$

Поскольку g является хорошей и ее нельзя продолжить, то $X \setminus \operatorname{ran} g = \emptyset$. Другими словами, g является биекцией из некоторого ординала α в X. Тогда полный порядок на X определяется как $\{(a, b) \in X \times X \mid g^{-1}(a) \in g^{-1}(b)\}$ $\square$

Определение 5.5. Кардинал – это такой ординал, который неравномощен накакому меньшему ординалу

Лемма 5.3. Для любого множества A существует единственный кардинал, который равномощен A.

Доказательство. $(A, <) \cong \alpha$, рассмотрим ординалы, равномощные α : $K = \min\{\beta \leqslant \alpha \mid \beta \sim \alpha \sim A\}$ (тогда K – кардинал и он единственен по определению). $\square$

Определение 5.6. Кардинал k называется мощностью множества A, если он равномощен A

Лемма 5.4. Любые два множества A, B сравнимы по мощности, то есть $A \lesssim B$ или $B \lesssim A$

6 Лекция 6 (02.02.2021)

Определение 6.1. Множество g называется трансфинитнй последовательностью, если $g :\ \zeta \to X$ для некоторого ординала ζ и некоторого множества X

Лемма 6.1. Пусть $\varphi(x, y)$ – некоторое свойство множеств, причем для любой трансфинитной последовательности x существует не более одного y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$

Тогда выполнено следующее: 1) либо для любого ординала

Цорн Пусть $(P, <)$ – частично упорядоченное множество, в котором всякая цепь имеет верхнюю грань. Тогда $(P, <)$ содержит максимальный элемент

Доказательство. Пусть f – функция выбора на семействе всех непустых подмножеств P, она существует по аксиоме выбора

Назовем трансинитную последовательность g хорошей, если $\operatorname{ran} g \subset P$ и $g(a) < g(b)$ для любых $a < b \in \operatorname{dom} g$

Определение 6.2. Назовем строгой верхней грань. множества $A \subset P$ такой элемент $z \in P$, что $a < z$ для любого $a \in A$. Через $b(A)$ обозначим множество всех строгих верхних граней A

Рассмотрим условие $\varphi(x, y)$: x – хорошая трансфинитная последовательность, для которой $b(\operatorname{ran} x) \neq \varnothing$, и $y = f(b(\operatorname{ran} x))$

Видим, что для любой трансинитной последовательноти x существует не более одного множества y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$

Допустим, что для любого ординала α существует единственная α-последовательнос удовлетворяющая φ

Придем к противоречию, рассмотрев условие $\psi(c, d)$: $c \in P$, d – ординал, и для некоторой трансфинитной последовательности g, удовлетворяющей рекурсивному условию, $g(d) = c$

Видим, что для любого множества c существуею не более одного множества d, удовлетворяющего $\psi(c, d)$. По аксиоме подстановки существует множество $D = \{d \mid \exists c \in P \ \psi(c, d)\}$. В нашем предположении D является множеством всех ординалов, противоречие.

Следовательно существует такая последовательность g, удовлетворяющая φ, которую нельзя продолжить, то есть нет такого y, что $\varphi(g, y)$

Поскольку g является хорошей и g нельзя продолжить, получаем, что $b(\operatorname{ran} g) = \varnothing$. Кроме того, $\operatorname{ran} g$ является цепью в P. Замечаем, что a (верхнаяя грань для $\operatorname{ran} g$) – искомый максимальный элемент P, поскольку иначе $b(\operatorname{ran} g) \neq \varnothing$ и g можно было бы продолжить $\square$

Кантора-Бернштейна Если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$, то $A \sim B$

Замечание 6.1. 1) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество

2) Мощность бесконечного множества не меняется при объединении с конечным

3) $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{0, 1\} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(m_1, m_2) < (n_1, n_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \max\{m_1, m_2\} < \max\{n_1, n_2\} \\ \max\{m_1, m_2\} = \max\{n_1, n_2\} \text{ и } m_1 < n_1 \\ \max\{m_1, m_2\} = \max\{n_1, n_2\} \text{ и } m_1 = n_1,\ m_2 < n_2 \end{cases}$$

Лемма 6.2. Если множество A бесконечно, то $A \sim A \times \{0, 1\}$

Доказателььство. Рассмотрим P, состоящее из пар вида (B, f), где B – бесконченое подмножество, $f : \ B \to B \times 2$ – биекция. Зададим на P частичный порядок

$$(B_1, f_1) \leqslant (B_2, f_2) \leftrightarrow B_1 \subset B_2,\ f_1 = f_2 \restriction_{B_1}$$

Пусть C – произвольная цепь в P является верхней гранью C. Проверим, что P непусто. Бескончное множество A содержит счетное подмножество D. Поскольку D счетно, ято существует биекция $g : \ D \to D \times 2$. Получаем, что пара $(D, g) \in P$ и является верхней гранью C.

Предположим что $C \neq \varnothing$
Рассмотрим $D = \bigcup\{B \mid \exists f \ (B, f) \in C\}$, то есть объединение всех первых компнент элементов C, и $g = \bigcup\{f \mid \exists B \ (B, f) \in C\}$, то есть объединение всех вторых компонент

Соответствие $g \subset D \times (D \times 2)$ функционально в силу того, что все вторын компоненты элеметов C попарно совпадают на общих областях определения. Очевидно, что g тотально, а следовательно g – функция.

Функция g инъективна: для различных $d_1, d_2 \in D$ возьмем большее из множеств, которым принадлежат d_1 и d_2. На нем g является инъекцией по предположению

Кроме того, g – сюръекция, для любой пары возьмем $(d, i) \in D \times 2$ возьмем множество B из которого произошло d и вспомним, что мы имели взаимно однознечное соответствие между ним и $B \times 2$

Мы нахлдимся в условиях леммы Цорна и знаем, что P содержит максимальный элемент (E, h)

Рассмотрим дополнение E до A. Если множество $A \backslash E$ конечно, то $A = (A \backslash E) \cup E \sim E$. Получим $A \sim E \sim E \times 2 \sim A \times 2$, все доказано.

Если множество $A \backslash E$ бесконечно, то оно содержит счетное подмножество E'. Кроме того, существует биекция $h' : \ E' \to E' \times 2$

Тогда $h \cup h'$ – биекция из $E \cup E'$ в $(E \cup E') \times 2 = E \times 2 \cup E' \times 2$. Полчим пару $(E \cup E', h \cup h')$ из P, которая больше пары (E, h), что противоречит максимальности (E, h), этот случай невозможен. □

Лемма 6.3. Объединение двух бесконечных множеств A и B равномощно большему из них

Доказательство. Поскольку любые два множества сравнимы по мощности, можно считать без ограничения общености, что $A \lesssim B$. Тогда $B \lesssim A \cup B \lesssim B \times \{0, 1\} \sim B$ По теореме кантора-Бернштейна получаем что $B \sim A \cup B$ $\square$

Лемма 6.4. Если A бесконечно, то $A \sim A \times A$

Доказательство. Рассмотрим множество P, состоящее из пар вида (B, f), где B – бесконечное подмножество A, $f : B \to B \times B$ – биекция. Зададим на P частичный порядок

$$(B_1, f_1) \leqslant (B_2, f_2) \Leftrightarrow B_1 \subset B_2,\ f_1 = f_2 \upharpoonright_{B_1}$$

Пусть C – произвольная цепь в P. Убедимся что C имеет верхнюю грань (D, g) Если $C = \varnothing$, то любой элемент P является верхней гранью C. Проверим, что P непусто. Бесконченое множество A содержит счетное подмножество D. Поскльку D счетно, существует биекция $g : D \to D \times D$. Получаем, что пара $(D, g) \in P$ и является верхней гранью C.

Теперь предположим, что $C \neq \varnothing$
Рассмотрим $D = \bigcup\{B \mid \exists f\ (B, f) \in C\}$, то есть объединение всех первыъ компонент элементов C, и $g = \bigcup\{f \mid \exists B\ (B, f) \in C\}$, то есть объединение всех вторых компонент.

Как и предыдущем доказательстве, замечаем, что соответствие $g \subset D \times (D \times D)$ является функцией.

Функция g инъективна: для различных $d_1, d_2 \in D$ возьмем большее из множеств, которым принадлежат d_1, d_2, на нем g является индукцией по предположению

Кроме того, g является сюръекцией: для люой пары $(d_1, d_2) \in D \times D$ возьмем множества B_1, B_2, из которых произошли d_1, d_2 выберем из этих множеств большее и вспомним, что мы имели взаимно однозначное соответствие между ним и его квадратом

Мы находимся в условиях леммы Цорна и знаем, что P содержит максимальный элемент (E, h).

Рассмотрим дополнение E до A. Если $A \backslash E \lesssim E$, то $A = (A \backslash E) \cup E \lesssim E$. Получаем, что $A \sim E \sim E \times E \sim A \times A$ и все доказано.

Если $E \lesssim A \backslash E$, то $A \backslash E$ содержит подмножество E', которое равномощно E.

Если $E \lesssim A \backslash E$, то $A \backslash E$ содержит подмножество E', которое равномощно E.

Биекцию h из E в $E \times E$ можно продолжить до биекции из $E \cup E'$ в $S = (E \cup E') \times (E \cup E')$, поскольку $E' \sim S \backslash (E \times E)$, действительно

$$S \backslash (E \times E) = (E \times E') \cup (E' \times E') \cup (E' \times E) \sim E \times E \sim E \sim E'$$

Получаем пару из P, которая больше пары (E, h), что противоречит максимальности (E, h). Таким образом, этот случай невозможен. □

Замечание 6.2. Если множество A бесконечно, то множество всех последовательностей длины $n > 0$, составленных из элементов A, равномощно A, то есть $A^n \sim A$

Замечание 6.3. Если множество A бесконечно, то множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов A, равноможно A, то есть $A^* \sim A$

Доказательство.

$$A* = \bigcup \{A^n \mid n \in \mathbb{N}\} \sim A \times \mathbb{N} \sim A$$

□

7 Лекция 7 (02.08.2021)

Определение 7.1. множество называется транзитивным, если $\cup T \subset T$

Лемма 7.1. У каждого множества есть транзитивное замыкание

Доказательство. Определим по трансфинитной рекурсии последовательность множеств g такую, что $g(0) = X,\ g(n+1) = \cup g(n)$. Действительно, рассмотрим условие $\varphi(x, y):\ x$ – конечная последовательность и

$$y = \begin{cases} X, \text{ если } \operatorname{dom} x = 0 \\ \cup x(n), \text{ если } \operatorname{dom} x = n + 1 \end{cases}$$

Последовательность g получается, как единственная непродолжаемая трансинитная последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ. Положим $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g(n) = \bigcup \operatorname{ran} g$. Очевидно, что T – транзитивное и $X \subset T$. Проверим, что T является $\subset$-наименьшим из таких множеств.
Предположим, что $X \subset S$ для некоторого транзитивного множества S

Имеем $g(0) = X \subset S$. Кроме того, если $g(m) \subset S$, то $g(m+1) = \bigcup g(m) \subset \bigcup S \subset S$

По принципу математической индукции получаем, что $g(m) \subset S$ для любого $m \in \mathbb{N}$

Следовательно, $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g(n) \subset S$. Доказали, что T является $\subset$-наименьшим из транзитивных множеств, содержащих X в качестве подмножества $\square$

Лемма 7.2. Объединение семейства транзитивных – транзитивно

Лемма 7.3. Пусть X – транзитивно, тогда $X \subset P(X)$ и $P(X)$ транзитивно

Доказательство. Проверим, что $X \subset P(X)$. Если $x \in X$, то $x \subset X$ по транзитивности X. Следовательно $x \in P(X)$

Проверим транзитивность $P(X)$. Если $y \in P(X)$, то $y \subset X \subset P(X)$. Следовательно, $P(X)$ является транзитивным множеством. $\square$

Иерархия фон Неймана По трансфинитной рекурсии для каждого ординала ξ определим множество $\mathbb{V}_\xi$ так, что $\mathbb{V}_0 = \varnothing, \quad \mathbb{V}_{\eta+1} = P(\mathbb{V}_\eta), \quad \mathbb{V}_\lambda = \bigcup_{\eta<\lambda} \mathbb{V}_\eta$ Действительно, рассмотрим условие $\varphi(x,y):\ x$ – трансинитная последовательность и

$$y = \begin{cases} \varnothing, \text{ if } \operatorname{dom} x = 0 \\ P(x(\eta)), \text{ if } \operatorname{dom} x = \eta + 1 \\ \cup \operatorname{ran} x \end{cases}$$

Видим, что для любой трансфинитной последовательности x существует ровно одно множество y, удовлетворяющего $\varphi(x,y)$. Мы находимся в условиях теоремы о трансфинитной рекурсии

Получаем, что для любого ординала α существует единственная трансинитная последовательность длины α, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ

В силу единственности получающиеся трансинитные последовательности продолжают одна другую.

Множество $\mathbb{V}_\xi$ определяется, как член с номером ξ для некоторой (или любой достаточно длинной) трансфинитной последовательности, удовлетвряющей рекурсивному условию

Так определенный бесконечный ряд множеств $\mathbb{V}_\xi$ называется иерархией фон Неймана

$$\mathbb{V}_0 = \varnothing \mathbb{V}_1 = \{\varnothing\} \mathbb{V}_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \dots$$

Лемма 7.4. Для любых ординалов α, β имеет место следующее: $\mathbb{V}_\alpha$ транзитивно, $\mathbb{V}_\beta \subset \mathbb{V}_\alpha$, если $\beta < \alpha$

Доказательство. Оба пункта получаются трансинитой индукцией по ординалу α. Разберем первый пункт

Рассмотрим ординал α такой, что для всех $\gamma < \alpha$ множество $\mathbb{V}_{gamma}$ транзитивно. Если $\alpha = 0$, то $\mathbb{V}_0 = \varnothing$ является транзитивным.

Если $\alpha = \alpha_0 + 1$ для некоторого α_0, то $\mathbb{V}_\alpha = P(\mathbb{V}_{\alpha_0})$. Поскольку $\mathbb{V}_{\alpha_0}$ транзитивно по предположению, монжесьвл $\mathbb{V}_\alpha$ транзитивно.

Если α – предельный ординал, то $\mathbb{V}_\alpha$ является объединением транзитивных множеств, и, следовательно транзитивно.

По индукции заключаем, что $\mathbb{V}_\alpha$ транзитивно для любого α.

Чтобы получить утверждение второго пункта, надо индукцией по α доказать, что для всех α верно $\forall \beta < \alpha \quad \mathbb{V}_\beta \subset \mathbb{V}_\alpha$. □

$\in$-индукция Пусть φ – некоторое свойство множеств, тогда

$$\forall x\ (\forall y \in x\ \varphi(y) \to \varphi(x)) \to \forall x \varphi(x)$$

Доказательство. Допустим, что $\varphi(x)$ не выполнено для некоторого множества x и $\forall a\ (\forall b \in a\ \varphi(b) \to \varphi(a))$

Рассмотрим подмножество Z множества $T = TC(\{x\})$, состоящее из множеств, которые не удовлетворяют свойству φ.

Видим, что множество Z непусто. Тогда по аксиоме регулярности оно содержит элемент z такой, что $z \cup Z = \varnothing$

В силу транзитивности множества T, все элементы множества z лежат в T (и не лежат в Z). Получаем, что $\varphi(z)$ верно, поскольку $\varphi(y)$ верно для любого $y \in z$. Проиворечие. □

Лемма 7.5. Для всякого множества x существует ординал α такой, что $x \in \mathbb{V}_\alpha$

Доказательство. Рассмотрим свойство φ: существует ординал α такой, что $x \in \mathbb{V}_\alpha$

Предположим, что нам дано множество y, все элементы которого обладают свойством φ, то есть $\forall z \in y\ \varphi(z)$

Теперь рассмотрим условие $\psi(c, d) :\ d$ – наименьший ординал, для которого $c \in \mathbb{V}_d$. Заметим, что для любого элемента z множества y существует такой ординал β, что выполнено $\psi(z, \beta)$

Кроме того, для любого множества c существуе не более одного мнодества d, удволетворяющего условию $\psi(c,d)$. По аксиоме подстановки существуе множество $D = \{d \mid \exists c \in y\ \psi(c,d)\}$

Видим, что D – это множество ординалов. Возьмем точную верхнюю грань $\sup D$ всех элементов множества D. Получаем, что $y \subset \mathbb{V}_{\sup D}$, а потому $y \in \mathbb{V}_{\sup D+1}$. Следовательно, имеет место $\varphi(y)$

Согласно принципу $\in$-индукции $\varphi(x)$ верно для любого множества x $\square$

Определение 7.2. Рангом множества x по фон Нейману незывается наименьший ординал α, для которого $x \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$, или, что эквивалентно, $x \subset \mathbb{V}_{\alpha}$.
анный ординал обозначается $\operatorname{rnk} x$

Лемма 7.6. $\forall x:\ x \notin \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} x}$

Доказательство. Предположим, что $x \in \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} x}$ для некоторого ординала β, то по определению ранга $\operatorname{rnk} x = \beta+1$ для некотрого ординала β, то по определению ранга x $\leqslant \beta$. Противоречие.

Осталось рассмотреть случай, когда $\operatorname{rnk} x$ – предельный ординал. В этом случае

$$\mathbb{V}_{\operatorname{rnk} x} = \bigcup_{\gamma < \operatorname{rnk} x} \mathbb{V}_{\gamma}$$

Видим, что $x \in \mathbb{V}_{\gamma}$ для некоторого $\gamma < \operatorname{rnk} x$, $x \in \mathbb{V}_{\gamma} \subset \mathbb{V}_{\gamma+1}$ и $\operatorname{rnk} x \leqslant \gamma$. Противоречие. $\square$

Лемма 7.7. Для любого множества x ранг $\operatorname{rnk} x = \sup\{\operatorname{rnk} y + 1 \mid y \in x\}$

Доказательство. Во-первых

$$\forall y \in x \quad y \in \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} y+1} x \subset \bigcup_{y \in x} \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} y+1} \subset \mathbb{V}_{\sup\{\operatorname{rnk} y+1 \ \mid\ y \in x\}}$$

Получаем $\operatorname{rnk} x \leqslant \sup\{\operatorname{rnk} y + 1 \mid y \in x\}$

Теперь проверим, что $\operatorname{rnk} y+1 \leqslant \operatorname{rnk} x$ для любого $y \in x$. Если $\operatorname{rnk} x < \operatorname{rnk} y+1$, то $\operatorname{rnk} x < \operatorname{rnk} y$ и

$$y \in x \subset \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} x} \subset \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} y}$$

Что противоречит предыдущей лемме

Следовательно, $\operatorname{rnk} y + 1 \leqslant \operatorname{rnk} x$ для любого $y \in x$, и

$$\sup\{\operatorname{rnk} y + 1 \mid y \in x\} \leqslant \operatorname{rnk} x$$

$\square$

Логика, Предикаты.

8 Лекция 8 (02.09.2021)

Философские вопросы математики:
1) Что значит доказать теорему?
2) Что значит дать определение понятию?
3) Правомерно ли рассуждать об актуально бесконечных множествах?
4) Когда говорим об истинности и доказуемости, имеются ли ввиду одно и то же?
5) Противоречива ли математика? Возможно ли установить непротиворечивость?

Направения Философии математики: Логицизм (Фреге, Рассел, Уайтхед), Интуиционизм (Брауэр, Вейль), Формализм (Гильберт), Платонизм (Гедель) и т.д. Подробнее в: С.Клини – “Введение в математику”

Фксиоматический аетод Гильберта предполагает явную формулировку всех предположений теории и допускает лишь чисто логические выводы из этих посылок.

Логический вывод может быть записан в символьном виде, что превращает его в вычислительный процесс. Это привело к созданию формальных аксиоматических теорий.

Компьютерные реализации: Coq, HOL, Mizar

Программа Гильберта:
1) Формализовать математику (теорию множеств) в рамках аксиоматической теории T
2) Формальные доказательства в T представляют собой конечные объекты (строки символов), строящиеся по вполне определенным правилам
3) Из следует проанализировать элементарными комбинаторными средствами и установить, что противоречие в T не доказуемо
4) Тем самым мы сведем использование теоретико-множественных методов к заведомо надежным элементарным методам

Математическая логика – построение и исследование формальных языков математическими методами.
Метаязык (описывание объекта), Метатеория (теория в рамках которой мы рассуждаем об исследуемой теории), Синтаксис (правила построения выражений), Семантика (значение/смысл выражений)

Предикаты и функции

Пусть M – непустое множество

Определение 8.1. n-арный предикат на M: функция $Q: M^n \to \{0,1\}$ (Интуитивно: $Q(x_1, \ldots, x_n)$ есть высказывание, зависящее от выбора параметров $x_1, \ldots, x_n \in M$. Предикаты можно также понимать как n-арные отношения на M, то есть подмножества M^n)

Определение 8.2. n-арная функция на M: функция $f: M^n \to M$

Определение 8.3. константа: элемент M

Определение 8.4. Сигнатурой называется некоторая совокупность имен функций, предикатов и констант. Сигнатура Σ задается:
Pred_Σ предикатные символы
Func_Σ функциональные символы
Const_Σ символы констант
Функция валентности $\mathrm{Pred}_\Sigma \cup \mathrm{Func}_\Sigma \to \mathbb{N} \backslash \{0\}$

Определение 8.5. Модель сигнатуры Σ есть непустое множество M вместе с отображением, сопоставляющим:
Каждому $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$ некоторый предикат P на M той же валентности
Каждому $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$ функцию f_M на M той же валентности
Каждому $c \in \mathrm{Const}_\Sigma$ константу $c_M \in M$.

Синтаксис Логики первого порядка

Алфавит $\mathcal{L}_\Sigma$ содержит:
Символы сигнатуры: Σ
Свободные переменные: $\mathrm{FrVar} = \{a_0, a_1, \ldots\}$
Связанные переменные: $\mathrm{BdVar} = \{v_0, v_1, \ldots\}$
Булевы связки: $\to, \neg, \wedge, \vee$;
Кванторы $\forall$, $\exists$
Знаки пунктуации: $\ll (\gg$, $\ll) \gg$, $\ll, \gg$

Определение 8.6. Множество термов Tm_Σ есть наименьшее множество, замкнутое относительно следующих двух правил:
1) Свободные переменные и константы суть термы 2) Если $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$ валентности n и $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ есть терм

Определение 8.7. Множество формул Fm_Σ есть наименьшее множество, замкнутое относительно следующих правил:
Если $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$ валентности n и $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ есть формула (называемая атомарной формулой)
Если A, B – формулы, то формулыми являются $(A \to B)$, $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$
Если A – формула, и a – свободная переменная, то для любой связанной переменной x, не входящей в A, выражения $(\forall x\ A[a \backslash x])$ и $(\exists x\ A[a \backslash x])$ – формулы ($A[a \backslash x]$ – замена a на x).

9 Лекция 9 (02.16.2021)

Определение 9.1. Пусть A – замкнутая флома сигнатуры $\Sigma(M)$. Отношение $M \vDash A$ формула А истинна в модели М определяется индукцией по построению А

$$M \vDash P(t_1, \ldots, t_n) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} P_M\left((t_1)_M, \ldots, (t_n)_M\right) = 1, \text{ если}$$
$$A = P(t_1, \ldots, t_n) - \text{ атомарная формула;}$$

Стандартные определения для булевых связок

$$M \vDash (B \to C) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (M \nvDash B \text{ или } M \vDash C)$$
$$M \vDash \neg B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} M \nvDash B \ ;$$
$$M \vDash (A \wedge B) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (M \vDash A \text{ и } M \vDash B)$$
$$M \vDash (A \vee B) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (M \vDash A \text{ или } M \vDash B)$$

Кванторы

$$M \vDash (\forall x A[a/x]) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{ для всех } c \in M M \vDash A[a/\underline{c}]$$
$$M \vDash (\exists x A[a/x]) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{ существует } c \in M M \vDash A[a/\underline{c}]$$

Нельзя говорить об истинности или ложности незамкнутых формул, поскольку их истинностные значения зависят от выбора значений параметров – входящих в формулу свободныз переменных
Пример: формула $a + 1 = b$ в стандартной модели арифметики может быть как истинной, так и ложной

Сокращение: вместо

$$\underset{\chi}{M} \vDash A\left[a_1/\underline{c}_1, \ldots a_n/\underline{c}_n\right]$$

пишут

$$M \models A\left[a_1/c_1, \ldots a_n/c_n\right]$$

или даже

$$M \models A\left[c_1, \ldots c_n\right]$$

Пример.
В модели $(\mathbb{N}; =, S, +, \cdot, 0)$ истинна формула

$$\exists x, y, z(\neg x = 0 \wedge \neg y = 0 \wedge x \cdot x + y \cdot y = z \cdot z)$$

и ложна формула

$$\exists x, y, z(\neg x = 0 \wedge \neg y = 0 \wedge x \cdot x \cdot x + y \cdot y \cdot y = z \cdot z \cdot z)$$

Пример
В модели $\left(\mathbb{R}^2; =, \cong, B\right)$ истинна формула

$$\forall x, y, y', z\left(B(x, y, z) \wedge B\left(x, y', z\right) \rightarrow B\left(x, y, y'\right) \vee B\left(x, y', y\right)\right)$$

Эта же формула верна и в модели $\left(H^2; =, \cong, \right)$. B).

Любая формула A от свободных переменных $b_1, \ldots, b_n$ определяет n -местный предикат A_M в модели M :

$$A_M\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 1 \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} M \vDash A\left[b_1/x_1, \ldots, b_n/x_n\right]$$

Пример.
В модели $(\mathbb{N}; =, +)$ формула $\exists x(x + x = a)$ определяет предикат «а чётно», т.е. множество чётных чисел.

Определение 9.2. Предикат $P\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ называется определимым в модели $(M; \Sigma)$, если $P = A_M$ для некоторой формулы A языка $\mathcal{L}_\Sigma$.

Определение 9.3. Функция f называется определимой в модели M, если определим её график, то есть предикат $G_f\left(x_1, \ldots, x_n, y\right) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = y$

Пример. В модели $(\mathbb{Z}; \leqslant)$ предикат $b = a + 1$ определим формулой

$$\neg b \leqslant a \wedge \forall x(x \leqslant a \vee b \leqslant x)$$

Следовательно, функция $s(x) \rightleftharpoons x + 1$ определима в $(\mathbb{Z}; \leqslant)$.

Определим следующие предикаты в $\left(\mathbb{R}^2; =, \cong, B\right)$

$$\text{o } a \neq b \rightleftharpoons \neg a = b$$

$c \in ab$ «с лежит на прямой ab»

$$c \in ab \rightleftharpoons (B(c, a, b) \vee B(a, c, b) \vee B(a, b, c))$$

$ab \| cd$ «прямые а ab и cd параллельны»

$$ab \| cd \rightleftharpoons a \neq b \wedge c \neq d \wedge \neg \exists x(x \in ab \wedge x \in cd)$$

«Через точку z вне прямой xy можно провести не более одной прямой, параллельной данной.»

$$\forall x, y, z\,(x \neq y \wedge \neg z \in xy \to \forall u, v\,(zu \| xy \wedge zv \| xy \to v \in zu))$$

Верно в $\mathbb{R}^2$, но не в H^2.

Определение 9.4. Формула $A\,(b_1, \ldots, b_n)$ сигнатуры $\sum$ выполнима в модели (M, Σ), если для некоторых констант $c_1, \ldots, c_n \in M$ предложение $A\,[b_1/\underline{c}_1, \ldots, b_n/\underline{c}_n]$ (сигнатуры $\Sigma(M)$) истинно. Формула A сигнатуры $\sum$ выполнима, если она выполнима в некоторой модели (M, Σ).

Определение 9.5. Формула A общезначима (тождественно истинна), если $\neg A$ не выполнима

Определение 9.6. Формула A тождественно ложна, если A не выполнима.

Пример.

Формулы $P(a) \vee \neg P(a), \exists x \forall y A(x, y) \to \forall y \exists x A(x, y)$ общезначимы. Формула $P\,(a_0) \to P\,(a_1)$ выполнима, но не общезначима.

Общезначимые формулы представляют собой универсальные законы логики, истинные вне зависимости от предметной области и интерпретации входящих в них предикатных символов.

Логическое следование утверждения B из утверждений $A_1, \ldots, A_n$ сводится к проверке общезначимости формулы $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$

Entscheidungsproblem: найти алгоритм, определяющий по данной формуле A, общезначима ли она. Гильберт считал этот вопрос важнейшей математической проблемой.

- Пропозициональные переменные: $\mathrm{Var} = \{P_0, P_1, \ldots\}$.
- Связки: $\neg, \wedge, \vee, \to$; константы $\perp$ (ложь), $\top$(истина).
- Формулы F_m строятся по правилам:

(1) Если $P \in \mathrm{Var}$ или $P \in \{\top, \perp\}$, то P – формула;

(2) Если A и B - формулы, то $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B)$, $(A \to B)$ – формулы.

- F_m есть наименьшее множество, удовлетворяющее условиям 1 и 2.

Лемма 9.1. Любая формула F, отличная от переменной или константы, однозначно представляется в виде $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ или $(\neg A)$ для некоторых формул A, B.

Доказательство. Соображения баланса скобок в формуле. □

Определение 9.7. - A и B называются непосредственными подформулами F;
- G - подформула F, если $G \overset{\circ}{=} F$или G - подформула одной из непосредственных подформул F.

- Опускаем внешние скобки;
- Приоритет связок: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$; $\neg P \wedge Q \rightarrow R$читается как $(((\neg P) \wedge Q) \rightarrow R)$
- Кратные $\wedge$ и $\vee$ ассоциируем влево: $A \wedge B \wedge C$ читается как $((A \wedge B) \wedge C)$.

Определение 9.8. Истинностные значения: $\mathbb{B} \rightleftharpoons \{\text{Л}, \text{И}\} \rightleftharpoons \{0,1\}$.
Булевы функции: $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$.

Функции $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ принято задавать таблицами истинности вида

x_1	x_2	$\ldots$
0	0	$\ldots$
0	0	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	1	$\ldots$

В такой таблице 2^n строк

Определение 9.9. Оценка переменных: функция $f : \mathrm{Var} \rightarrow \mathbb{B}$. Любая оценка продолжается естественным образом до отображения $f : F_m \rightarrow \mathbb{B}$.

Определение 9.10. $f(A) =$ значение формул A при оценке f. Определяется индукцией по построению А:

Значение $f(A)$ определяется индукцией по построению A :

$$\begin{aligned}
&f(\top) = 1; f(\bot) = 0 \\
&f(\neg A) = 1 - f(A) \\
&f(A \wedge B) = \min(f(A), f(B)) \\
&f(A \vee B) = \max(f(A), f(B)) \\
&f(A \rightarrow B) = \max(1 - f(A), f(B))
\end{aligned}$$

В частности, $f(A \rightarrow B) = 1 \Longleftrightarrow f(A) \leqslant f(B)$

Лемма 9.2. Пусть $\mathrm{Var} = \{P_1, \ldots, P_n\}$
Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между оценками $f : \mathrm{Var} \rightarrow \mathbb{B}$ и наборами $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$.

$$f \longmapsto (f(P_1), \ldots, f(P_{\mathfrak{q}})) \in \mathbb{B}^n$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f_{\vec{x}}$, где оценка $f_{\vec{x}}$ определена таблицей

P_1	P_2	$\ldots$	P_n
x_1	x_2	$\ldots$	x_n

Определение 9.11. Таблица истинности формулы A от n переменных есть булева функция $\varphi_A : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ такая, что

$$\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A)$$

для всех $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$

Лемма 9.3. Для любой функции $\varphi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ найдётся такая формула A от n переменных, что $\varphi = \varphi_A$ При этом можно считать, что A содержит лишь связки $\neg$ и $\vee$.

Доказательство. Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, \text{ если } x = \text{И} \\ \neg P, \text{ если } x = \text{Л} \end{cases}$$

Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i}$$

где $\bigwedge_{j=1}^{m} B_j \rightleftharpoons ((B_1 \wedge B_2) \wedge \cdots \wedge B_m)$
 меем: для любой оценки f

$$f\left(A_{\vec{x}}\right) = \text{И} \Longleftrightarrow f = f_{\vec{x}}$$

Пусть список $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ исчерпывает все $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$ для которых $\varphi(\vec{x}) = h$, то есть

$$\varphi(\vec{x}) = \text{И} \Longleftrightarrow \exists j \vec{x} = \vec{x}_j$$

Положим

$$A \rightleftharpoons \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists j \ f_{\vec{x}}\left(A_{\vec{x}_j}\right) = \text{И} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists j \ \vec{x} = \vec{x}_j \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = \text{И} \end{aligned}$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$ $\square$

Определение 9.12. Формула A выполнима, если $\exists f : f(A) = \text{И}$.
Определение 9.13. Формула A - тавтология, если $\forall f : f(A) = \text{И}$.
Определение 9.14. Формула A - тождественно ложна, если $\forall f : f(A) = \text{Л}$.

Лемма 9.4. Следующие условия равносильны.
(1) Формула A тождественно ложна.
(2) Формула A не выполнима.
(3 Формула $\neg A$ - тавтология.
Пример:
$\neg(P \to P)$ тождественно ложна (и не выполнима); $P \to P$ тавтология; $P \to Q$ выполнима, но не тавтология.

10 Лекция 10 (02.22.2021)

Определение 10.1. Формула $A\,(b_1, \ldots, b_n)$ сигнатуры $\sum$ общезначима, если для любой модели $(M; \Sigma)$ и любых констант $c_1, \ldots, c_n \in M$ $M \vDash A\,[b_1/\underline{c}_1, \ldots, b_n/\underline{c}_n]$
Определение 10.2. Формулы A и B сигнатуры $\sum$ равносильны (обозначение $A \equiv B$), если в любой модели $(M; \Sigma)$ они определяют один и тот же предикат, то есть если $A_M = B_M$.
Утверждение.
$A \equiv B \iff$ формула $A \leftrightarrow B$ общезначима.
$A \leftrightarrow B$ есть сокращение для $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Равносильности логики высказываний

$$
\begin{array}{rl|rl}
A \wedge B & \equiv B \wedge A & A \vee B & \equiv B \vee A \\
A \wedge (B \wedge C) & \equiv (A \wedge B) \wedge C & A \vee (B \vee C) & \equiv (A \vee B) \vee C \\
A \wedge A & \equiv A & A \vee A & \equiv A \\
A \wedge (B \vee C) & \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & A \vee (B \wedge C) & \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\
A \vee (A \wedge B) & \equiv A & A \wedge (A \vee B) & \equiv A \\
\neg(A \wedge B) & \equiv \neg A \vee \neg B & \neg(A \vee B) & \equiv \neg A \wedge \neg B \\
\bot & \equiv A \wedge \neg A & T & \equiv A \vee \neg A \\
\neg\neg A & \equiv A & A \to B & \equiv \neg A \vee B
\end{array}
$$

Кванторы

$$\forall x A[a/x] \equiv \forall y A[a/y]$$
$$\exists x A[a/x] \equiv \exists y A[a/y]$$
$$(\forall x A[a/x] \vee B) \equiv \forall x (A[a/x] \vee B)$$
$$(\exists x A[a/x] \vee B) \equiv \exists x (A[a/x] \vee B)$$
$$(\forall x A[a/x] \wedge B) \equiv \forall x (A[a/x] \wedge B)$$
$$(\exists x A[a/x] \wedge B) \equiv \exists x (A[a/x] \wedge B)$$
$$\neg \forall x A[a/x] \equiv \exists x \neg A[a/x]$$
$$\neg \exists x A[a/x] \equiv \forall x \neg A[a/x]$$

Стандартные факты:
(1) Допустимость правил подстановки и замены подформулы на эквивалентную
(2) Переименование связанных переменных
(3) Теорема о предварённой нормальной форме

(1) Обогатим язык логики первого порядка пропозициональными переменными. Можно считать переменную P нульместным предикатным символом
(2) Распространим на расширенный язык все синтаксические понятия, включая понятие формулы.
(3) Пропозициональные переменные считаются атомарными формулами.

Определение 10.3. $C[P/A]$ означает результат замены всех вхождений P в формулу C на формулу A. (т

Замечание.
$C[P/A]$ не всегда является формулой. Если $C = \forall x(Q(x) \wedge P)$ и $A = \exists x R(x)$, то $C[P/A] = \forall x(Q(x) \wedge \exists x R(x))$

Лемма 10.1. $C[P/A]$ - формула, если и только если любое вхождение P в формулу C не находится в области действия квантора по переменной $x \in \mathrm{BdVar}$, входящей в A.

Определение 10.4. Говорим, что разрешена подстановка формулы A вместо P в C, если выполнено условие предыдущей леммы.

Лемма 10.2. Если $A \equiv B$ и пазрешена подстановка формул A, B вместо P в C, то $C[P/A] \equiv C[P/B]$

Доказательство. индукция по построению формулы C. Шаг индукции на основе леммы:

Лемма 10.3. Если $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$, то
(1) ($A \wedge B \equiv A' \wedge B', \quad A \vee B \equiv A' \vee B', \quad \neg A \equiv \neg A'$,

(2) $\forall \times A[a/x] \equiv \forall \times A'[a/x]$ (если x не входит в A и A')
(3) ($\exists x A[a/x] \equiv \exists x A'[a/x]$ (если x не входит в A и A'). $\square$

(1) Пропозициональная переменная P в модели M интерпретируется как логическая константа, то есть P_M is $\mathbb{B}$.
(2) Считается $M \models P_M$, если $P_M =$ И и $M \not\models P_M$, если $P_M =$ Л.
(3) Понятие общезначимой формулы распространяется на формулы расширенного языка.

Лемма 10.4. Пусть формула A общезначима и разрешена подстановка формулы C вместо P в A, тогда общезначима формула $A[P/C]$

Доказательство. (1) Допустим, $M \not\models f(A[P/C])$ при некоторой оценке f.
(2) Расширим M до модели (M, P) сигнатуры с переменной $P : P_M =$ И $\Longleftrightarrow M \vDash f(C)$
(3) Индукцией по построению формулы B проверим, что

$$(M, P) \vDash B \Longleftrightarrow M \vDash B[P/C]$$

для любой замкнутой формулы B, в которую разрешена подстановка C вместо P.
(4) Отсюда получаем $(M, P) \not\models f(A)$. $\square$

Замечание 10.1. Если $A \equiv B$ и разрешена подстановка C вместо P в A и B, то $A[P/C] \equiv B[P/C]$

Лемма 10.5. Пусть $y \in \mathrm{BdVar}$ не входит в формулу B. Тогда $B[x/y]$ есть формула и $B[x/y] \equiv B$.

Доказательство. Применяем индукцию по числу вхождений кванторов по переменной $\times$ в B. Каждая подформула $\forall \times C[a/x]$ или $\exists \times C[a/x]$ заменяется на эквивалентную $\forall y C[a/y]$ или $\exists y C[a/y]$. $\square$

Определение 10.5. Формула А называется предварённой, если А имеет вид $\mathrm{Q}x_1\mathrm{Q}x_2 \ldots \mathrm{Q}x_n A_0 \left[b_1/x_1, \ldots, b_n/x_n\right]$, где Q означает квантор $\forall$ или $\exists$, а формула A_0 бескванторная.

Лемма 10.6. Для каждой формулы A можно указать эквивалентную ей предварённую формулу A' от тех же свободных переменных.

Доказательство. Последовательно выносим кванторы наружу, используя основные эквивалентности и леммы о замене связанных переменных и о подстановке. Разбор алгоритма на семинарских занятиях. $\square$

Определение 10.6. Теорией сигнатуры $\sum$ называем произвольное множество T замкнутых формул языка $\mathcal{L}_\Sigma$. Элементы $A \in T$ называем нелогическими аксиомами T.

Пример.

Теория отношения эквивалентности:
(1) $\forall x R(x,x)$
(2) $\forall x, y(R(x,y) \to R(y,x))$
(3) $\forall x, y, z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$

Пример

Модель $(M;<)$ есть строгий частичный порядок, если в $(M;<)$ истинны следующие предложения:
(1) $\forall x, y, z(x < y \wedge y < z \to x < z)$
(2) $\forall x \neg x < x$

Пример

Простой граф - это модель вида $(V;E)$, где $E-$ бинарный предикат смежности, причём отношение E симметрично и иррефлексивно:
(1) $\forall x \neg E(x,x)$
(2) $\forall x, y(E(x,y) \to E(y,x))$

Пример.

$(M;=,\cdot,1)$ есть группа, если M есть модель следующей теории (при условии, что '=' в M понимается как равенство):
(1) $\forall x, y, z \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(2) $\forall x(1 \cdot x = x \wedge x \cdot 1 = x)$
(3) $\forall x \exists y(x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1)$

Пусть Σ - сигнатура, содержащая выделенный предикатный символ $=$

Определение 10.7. Нормальной моделью называем модель $(M;\Sigma)$, в которой $=$ интерпретируется как равенство $\{\langle x,x\rangle\chi \mid x \in M\}$.

Определение 10.8. Аксиомы равенства для Σ - универсальные замыкания следующих формул:
(1) аксиомы отношения эквивалентности для $=$
(2)
$$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n \to (P(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow P(b_1, \ldots, b_n))$$
(3)
$$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n \to (f(a_1, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_n))$$

для всех $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$ and $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$

Предложение.
Если (M; Σ) - нормальная модель, то в M истинны все аксиомы равенства.

Определение 10.9. Теорией с равенством называем теорию сигнатуры $\sum$ с равенством, содержащую все аксиомы равенства.

Лемма 10.7. Пусть T - теория с равенством. Если T выполнима, то T имеет нормальную модель.

Доказательство. Пусть $M \vDash T$. Предикат $=_M$ есть отношение эквивалентности на M. Положим $M' \rightleftharpoons M/=_M$ - множество классов эквивалентности и $\varphi : M \to M'$ сопоставляет любому $x \in M$ его класс $\varphi(x) \in M'$
Интерпретируем предикатные и функц. символы в M' :

$$P_{M'}\left(\varphi\left(x_1\right)^{\{\mathfrak{m}_2} \ldots, \varphi\left(x_n\right)\right) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} P_M\left(x_1, \ldots, x_n\right) f_{M'}\left(\varphi\left(x_1\right), \ldots, \varphi\left(x_n\right)\right) := \varphi\left(f_M\left(x_1, \ldots,\right.\right.$$

В силу аксиом равенства в M, определение корректно и M' – нормальная модель. Индукцией по построению формулы A проверяем

$$M \vDash A\left[x_1, \ldots, x_n\right] \Longleftrightarrow M' \vDash A\left[\varphi\left(x_1\right), \ldots, \varphi\left(x_n\right)\right]$$

Отсюда следует $M' \vDash T$. □

Формальная арифметика Пеано
Сигнатура $\Sigma = \{0, S, +, \cdot, =\}$
(1) аксиомы равенства для Σ
(2) $\neg S(a) = 0, \quad S(a) = S(b) \to a = b$
(3) $a + 0 = a, \quad a + S(b) = S(a + b)$
(4) $a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot S(b) = a \cdot b + a$
(5) (Схема аксиом индукции) $A[a/0] \wedge \forall x(A[a/x] \to A[a/S(x)]) \to \forall x A[a/x]$ для любой формулы A.

Теория множеств ZFC
Сигнатура $\Sigma = \{=, \in\}$
(1) (Аксиомы равенства)
(2) (Экстенсинальность) $a = b \leftrightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$
(3) (Пара) $\exists z \forall x(x \in z \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$

(4) (Объединение) $\exists z \forall x(x \in z \leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in a))$
(5) (Степень) $\exists z \forall x(x \in z \leftrightarrow \forall y(y \in x \rightarrow y \in a))$
(6) (Схема выделения) $\exists z \forall x(x \in Z \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi[b/x]))$ для всех формул φ сигнатуры Σ
(7) (Бесконечность) $\exists z(\varnothing \in z \wedge \forall x(x \in z \rightarrow x \cup \{x\} \in z))$
(8) (Регулярность) $\exists z(z \in a \wedge \forall x(x \in a \rightarrow x \notin z))$
(9) (Схема подстановки)
(10) (Аксиома выбора)

Аксиоматика Тарского:
G1. $ab \cong ba$
G2. $ab \cong pq \wedge ab \cong rs \rightarrow pq \cong rs$
G3. $ab \cong cc \rightarrow a = b$
G4. $Babd \wedge Bbcd \rightarrow Babc$
G5. $\exists x(Bqax \wedge ax \cong bc)$ G6. $(a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \cong a'b' \wedge bc \cong b'c' \wedge ad \cong a'd' \wedge bd \cong b'd') \rightarrow cd \cong c'd'$ (Аналог равенства треугольников)
G7. (аксиома Паша)
$Bapc \wedge Bqcb \rightarrow \exists x(\mathrm{Baxq} \wedge Bbpx)$
G8. $\exists x, y, z(\neg Bxyz \wedge \neg Byzx \wedge \neg Bzxy)$
G9. $(\dim \leqslant 2)$ $(p_1 \neq p_2 \wedge ap_1 \cong ap_2 \wedge bp_1 \cong bp_2 \wedge cp_1 \cong cp_2) \rightarrow a \in bc$
G10. (аксиома Евклида)
G11. (схема аксиом непрерывности)

$$\begin{aligned}\exists u \forall x, y(C[a/x] \wedge D[a/y] \rightarrow Buxy) \rightarrow \\ \exists v \forall x, y'(C[a/x] \wedge D[a/y] \rightarrow Bxvy)\end{aligned}$$

Здесь x, y, u, v не входят в C, D.
G11'. (аксиома непрерывности 2-го порядка)

$$\begin{aligned}\forall X, Y(\exists u \forall x, y(x \in X \wedge y \in Y \rightarrow Buxy) \rightarrow \\ \exists v \forall x, y\,(x \in X' \wedge y \in Y \rightarrow Bxvy))\end{aligned}$$

Тарксого о полноте Для любого предложения A языка элементарной геометрии, если $\left(\mathbb{R}^2; =, B, \cong\right) \vDash A$, то A логически следует из аксиом $G1 - G11$

Лемма 10.8. Существует алгоритм проверки формулы A на выполнимость в $\mathbb{R}^2$

11 Лекция 11 (03.01.2021)

Исчисление предикатов сигнатуры $\sum$ задаётся след. аксиомами и правилами вывода.

Аксиомы:
А1. Подстановочные примеры тавтологий,
А2. $\forall x A[a/x] \to A[a/t]$
А3. $A[a/t] \to \exists x A[a/x]$

Подстановочным примером тавтологии A мы называем результат замены всех пропозициональных переменных A на некоторые формулы сигнатуры $\sum$.

Пример:
$B \vee \neg B$, где $B-$ любая формула. В А2 и АЗ A - любая формула сигнатуры $\sum$ и $t-$ любой терм ($\times$ не входит в A).

Правила вывода:
R1. $\frac{A \quad A \to B}{B}$ (modus ponens)
R2. $\frac{A \to B}{A \to \forall x B[a/x]}$
R3. $\frac{B \to A}{\exists x B[a/x] \to A}$

Здесь а не входит в A(и x не входит в B).
Правила R2 и R3 называются правилами Бернайса.

Определение 11.1. Выводом в исчислении предикатов называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода R_1, R_2, R_3

Пример $\forall x A[A/x] \to A \qquad (A2)$
$\forall x A[A/x] \to \forall y A[a/y] \qquad (R2)$

Определение 11.2. Формула A называется выводимой в исчислении предикатов или теоремой исчисления предиеатов если существует вывод, в котором последняя формула есть A

Определение 11.3. Вывод в теории T называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо приндлежит множеству T, либо является логической аксиомой вида A_1, A_2, A_3, либо получается из предыдущих формул по одному из правил R_1, R_2, R_3

Определение 11.4. Формула A называется выводимой (доказуемой) в теории T или теоремой T (обозначение $T \vdash A$), если существует вывод в T, в котором последняя формула есть A.

Определение 11.5. Формула $\mid A$ опровержима в T, если $T \vdash \neg A$.

Определение 11.6. Формула A независима от T, если $T \not\models A$ и $T \not\vdash A$.

Если $T \subseteq U$ и $T \vdash A$, то $U \vdash A$ (монотонность)
Если $T \vdash A$, то существует такое конечное множество $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \vdash A$ (компактность)
Если $T \vdash A$ и для каждой аксиомы $B \in T$ имеет место $U \vdash B$, то $U \vdash A$ (транзитивность)

Определение 11.7. Теорией сигнатуры $\sum$ называем произвольно множество T замкнутых формул языка $\zeta_{\sum}$. Теорию $T \cup \{A\}$ обозначают также T, A или $T + A$

Лемма 11.1. Для любой теории T и любой замкнутой формулы A

$$T, A \vdash B \Leftrightarrow T \vdash A \to B$$

Доказательство. Индукция по длине вывода $T, A \vdash B$
Если B является логической аксиомой или $B \in T$, то в T выводимо:

$$\begin{array}{ll} B & \\ B \to (A \to B) & \text{(тавтология)} \\ A \to B & \text{(MP)} \end{array}$$

Если $A = B$, то используем $A \to A$

Пусть B получена из C и $C \to B$ по modus ponens. Имеем $T \vdash (A \to C)$ и ${}_{\chi}T \vdash (A \to (C \to B))$ по предположению индукции. Соединяем эти два вывода и достраиваем так:

$$\begin{array}{ll} (A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B)) & \text{(тавтология)} \\ (A \to C) \to (A \to B) & \text{(MP)} \\ A \to B & \text{(MP)} \end{array}$$

Допустим $B = (C \to \forall \times D[a/x])$ получена из $C \to D$ по $R2$. По пр. индукции

$$T \vdash A \to (C \to D)$$

Надо построить вывод

$$T \vdash A \to (C \to \forall x D[a/x])$$

Достраиваем вывод $A \to (C \to D)$ в T :

$$\begin{array}{ll} A \to (C \to D) & \\ (A \to (C \to ID)) \to (A \wedge C \to D) & \text{(тавтология)} \\ (A \wedge C) \to D & \text{(MP)} \\ (A \wedge C) \to \forall \times D[a/x] & \text{(R2, } A \text{ замкнута)} \end{array}$$

$$A \to (C \to \forall \times D[a/x])$$

(аналогично)
Правило $R3$ рассматривается аналогично. □

Определение 11.8. Теория T противоречива, если существует A такая, что $T \vdash A$ и $T \vdash \neg A$. В противном случае теория T называется непротиворечивой.
Замечание 11.1. $T \cup \{A\}$ противоречива $\Leftrightarrow T \vdash \neg A$.

О корректности Если $M \models T$ и $T \vdash A$, то $M \models A$

Доказательство. Индукция по длине вывода A в T □

Замечание 11.2. Если $\vdash A$, то A общезначима.
Замечание 11.3. Если теория T имеет модель, то T непротиворечива
Замечание 11.4. Следующие теории непротиворечивы:
Исчесление предикатов(пустая теория)
Теория групп
Элементарная геометрия
Формальная арифметика
Замечание 11.5. Если существует модель M теории T для которой $M \not\models A$, то $T \not\models A$
Пример
Модель Пуанкаре H^2 показывает, что аксиома Евклида независима от остальных аксиом элементарной геометрии.
Геделя о полноте (1) Всякая непротиворечивая теория T выполнима, то есть имеет модель $M \vDash T$.
(2) Если $T \not\vdash$A, то найдётся модель $M \vDash T$ для которой $M \not\models A$
Покажем равносильность этих утверждений.
$(1 \Rightarrow 2)$: Если $T \not\models A$, то $T \cup \{\neg A\}$ непротиворечива. Действительно, если $T, \neg A$ противоречива, то $T \vdash \neg\neg A$, а Значит $T \vdash A$(используем тавтологию $\neg\neg A \to A$). Следовательно, $T \cup \{\neg A\}$ имеет модель M.
$(2 \Rightarrow 1)$: Пусть T непротиворечива. Возьмём $A = (B \wedge \neg B)$. Тогда $T \not\models$ A, следовательно у теории T дблжна быть модель (опровергающая A).

Геделя-Мальцева о компактности Теория T выполнима $\Longleftrightarrow$ любое конечное подмножество $T_0 \subseteq T$ выполнимо.

Доказательство. Если T невыполнима, то существует вывод противоречия в T, использующий лишь конечное число аксиом T. □

Пример.
Пусть $(\mathbb{N}; =, S, +, \cdot, 0)$ - стандартная модель арифметики и Th $(\mathbb{N})$ есть множество всех истинных в $\mathbb{N}$ предложенiй. Добавим к сигнатуре новую константу с и рассмотрим теорию

$$T \rightleftharpoons Th(\mathbb{N}) \cup \{\neg c = 0, \neg c = S0, \neg c = SS0, \ldots\}$$

Терм $\bar{n} \rightleftharpoons SS \ldots S0(n$ раз $)$ называем нумералом. Нумераль служат именами натуральных чисел.

Лемма 11.2. Каждая конечная подтеория $T_0 \subseteq T$ выполнима. Доказательство. T_0 содержит лишь конечное число аксиом вида $c \neq \bar{n}_1, \ldots, c \neq \bar{n}_k$. Интерпретируем константу с в стандартной модели как любое число $m > n_1, \ldots, n_k$.

По теореме о компактности существует (нормальная) модель $M \vDash$ T. Модель M обладает следующими свойствами:
- $\mathbb{N}$ изоморфна начальному сегменту M; вложение $\mathbb{N} \rightarrow M$ задаётся функцией $\varphi : n \longmapsto \bar{n}_M$.
- $M \vDash Th(\mathbb{N})$
- $M \not\vDash \mathbb{N}$, в частности $c_M \in M$ есть «бесконечно большое число», поскольку c_M отлично от всякого $n \in \mathbb{N}$.

Следовательно, те же аксиомы выполнены и в М. Поэтому предикат $<_M$ на M представляет собой строгий линейный порядок с наименьшим элементом 0. При этом каждый элемент имеет последователя, и каждый элемент, кроме 0, имеет непосредственного предшественника.

Доказательство. Если $G_1 < G_2$, возьмём чётные $x_1 \in G_1$ и $x_2 \in G_2$ и рассмотрим $y = (x_1 + x_2)/2($ функция $g(x) = x/2$ определима в $\mathbb{N}$, а значит и в M). Если $y \in G_1$, то $(x_1 + x_2)/2 = x_1 + \bar{n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ Тогда $2x_1 + 2\bar{n} = x_1 + x_2$, откуда $x_1 + 2\bar{n} = x_2$, то есть $x_2 \in G_1$ Аналогично показываем $y \notin G_2$. $\square$

Логика, Теория моделей.

12 Лекция 12 (03.09.2021)

Определение 12.1. Пусть T – теория, A – замкнутая формула в ее сигнатуре. A логически следует из T (обозначение: $T \vDash A$), если любая модель теории T является моделью формулы A.

о корректности для исчисления предикатов Если $T \vdash A$, то $T \vDash A$.

Гёделя о полноте для исчисления предикатов Если $T \vDash A$, то $T \vdash A$.

Версия для теорий с равенством:

$T \vdash A$ означает выводимость с использованием аксиом равенства. $T \vDash A$ означает логическое следование на нормальных моделях.

Определение 12.2. Пусть M, M' – модели сигнатуры Ω. Отображение носителей $\alpha : M \longrightarrow M'$ называется изоморфизмом M на M', если

- α – биекция,
- $\alpha\left(c_M\right) = c_{M'}$ для всех констант $c($ из $\Omega)$
- $\alpha\left(f_M\left(m_1, \ldots, m_k\right)\right) = f_{M'}\left(\alpha\left(m_1\right), \ldots, \alpha\left(m_k\right)\right)$ для любого k -местного функционального символа f и $m_1, \ldots, m_k \in M$,
- $P_M\left(m_1, \ldots, m_k\right) = P_{M'}\left(\alpha\left(m_1\right), \ldots, \alpha\left(m_k\right)\right)$ для любого k -местного предикатного символа P и $m_1, \ldots, m_k \in M$. Запись $\alpha : M \cong M'$ означает, что α – изоморфизм M на M'.

Лемма 12.1. (1) Если $\alpha : M \cong M'$ и $\beta : M' \cong M''$, то $\beta\alpha : M \cong M''$.
(2) Если $\alpha : M \cong M'$, то $\alpha^{-1} : M' \cong M$.

Определение 12.3. Модели M, M' называются изоморфными (обозначение: $M \cong M'$) если существует изоморфизм $\alpha : M \cong M'$.. $\cong$ задает отношение эквивалентности на классе всех моделей данной сигнатуры.

Определение 12.4. Терм, оцененный в M, – это замкнутый терм расширенной сигнатуры $\Omega(M)$. Из обычного терма $t\left(a_1, \ldots, a_n\right)$, получаются оцененные термы

$$t\left(m_1, \ldots, m_n\right) := t\left[a_1, \ldots, a_n / \underline{m_1}, \ldots, m_n\right]$$

$|r|_M$ - значение оцененного терма r в модели M; это элемент из M.

Определение 12.5. Формула, оцененная в M, - это замкнутая формула сигнатуры $\Omega(M), |A|_M$ – значение оцененной формулы A в M (0 или 1)

Пусть M, M' – модели сигнатуры $\Omega, \alpha : M \cong M'$. Для терма t, оцененного в M, обозначим через $\alpha \cdot t$ терм, полученный заменой всех констант m из M на их образы $\alpha(m)$. (Формально $\alpha \cdot t$ определяется по индукции) – Аналогично по формуле A, оцененной в M, строится формула $\alpha \cdot A$, оцененная в M'.

Лемма 12.2. Пусть M, M'– модели сигнатуры $\Omega, \alpha : M \cong M'$.

- Если $t-$ терм, оцененный в M, то $|\alpha \cdot t|_{M'} = \alpha\left(|t|_M\right)$.
- Если $A-$ формула, оцененная в M, то $|\alpha \cdot A|_{M'} = |A|_M$ Определение

Пусть $M-$ модель сигнатуры Ω. Элементарная теория модели M - это множество всех замкнутых формул сигнатуры Ω, которые истинны в M.

$$Th(M) := \{A \mid M \vDash A\}$$

Модели M_1, M_2 одной сигнатуры называются элементарно эквивалентными, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы, т.е. $Th\left(M_1\right) = Th\left(M_2\right)$; обозначение: $M_1 \equiv M_2$.

13 Лекция 13 (03.1.2021)

Все сигнатуры с равенством, все модели нормальные.

Определение 13.1. Теория сильно категорична, если все ее модели изоморфны.
Теория конечно аксиоматизируема, если она эквивалентна конечной теории.

Лемма 13.1. Пусть Ω - конечная сигнатура, M - конечная модель Ω. Тогда
- $Th(M)$ конечно аксиоматизируема.
- $Th(M)$ сильно категорична.

Доказательство. Пусть M - конечная модель конечной сигнатуры Ω. Строим формулу A_M, которая полностью описывает M.
Пусть $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Положим

$$A_M := \exists x_1 \ldots \exists x_n B_M(x_1, \ldots, x_n)$$

где

$$\begin{gathered} B_M(a_1, \ldots, a_n) := \bigwedge\nolimits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i \neq a_j) \wedge \forall y \bigvee\nolimits_{i=1}^{n} (y = a_i) \wedge \\ \bigwedge \{c = a_i \mid c \in \text{ Const }_\Omega, M \vDash c = m_i\} \wedge \\ \bigwedge \{f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = a_j \mid f \in Fun_\Omega, M \vDash f(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) = m_j\} \wedge \\ \bigwedge \{P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \mid P \in \text{Pred}_\Omega, M \vDash P(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\} \wedge \\ \bigwedge \{\neg P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \mid P \in \text{Pred}_\Omega, M \vDash \neg P(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\} \end{gathered}$$

□

Лемма 13.2. Для модели M' сигнатуры Ω

$$M' \vDash A_M \Leftrightarrow M' \cong M$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Проверяем $M \vDash A_M$, это следует из $M \vDash B_M(m_1, \ldots, m_n)$.
($\Rightarrow$) Предположим, что $M' \vDash A_M$ и построим изоморфизм M на M'
По определению истинности, найдутся $m'_1, \ldots, m'_n \in M'$, для которых

$$M' \vDash B_M(m'_1, \ldots, m'_n)$$

Докажем, что отображение φ, переводящее каждый m_i в m'_i - искомый изоморфизм □

Доказательство. Окончание доказательства теоремы.
Заметим: $Th(M) \sim \{A_M\}$. 1. По лемме 1.7 $A_M \in Th(M)$ и значит,

$$M' \vDash Th(M) \Rightarrow M' \vDash A_M$$

2. Обратно, если $M' \vDash A_M$, то по лемме 1.7, $M' \cong M$. И тогда $M' \vDash Th(M)$ □

$Th(M)$ сильно категорична, т.к. эквивалентная ей теория $\{A_M\}$ сильно категорична по лемме

Замечание 13.1. Если $M-$ конечная модель и $M' \equiv M$, то $M' \cong M$.

Доказательство. Если $M' \equiv M$, то $M' \vDash Th(M)$. Тогда, по теореме 1.6, $M' \cong M$ $\square$

k -местный предикат на множестве $M-$ это отображение $\gamma : M^k \longrightarrow \{0,1\}$
k -местное отношение на множестве $M-$ это множество $R \subset M^k$.
Рассмотрим формулу $A(\vec{b})$, где $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ .k -местный предикат, определимый формулой $A(\vec{b})$ в модели $M,-$ это $A_M : M^k \longrightarrow \{0,1\}$ такое, что для всех $m_1, \ldots, m_k$

$$A_M(m_1, \ldots, m_k) = |A(m_1, \ldots, m_k)|_M$$

Лемма 13.3. Пусть $\alpha-$ автоморфизм модели, $A(b_1, \ldots, b_k)-$ формула в ее сигнатуре. Тогда для всех $m_1, \ldots, m_k \in M$

$$A_M(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k)) = A_M(m_1, \ldots, m_k)$$

В сокращенной записи:

$$A_M(\alpha\vec{m}) = A_M(\vec{m})$$

Таким образом, определимый в M предикат инвариантен при всех автоморфизмах M

14 Лекция 14 (03.22.2021)

Определение 14.1. Пусть M, M' - модели сигнатуры Ω. $M'-$ подмодель M, если
- $M' \subset M$ как множество,
- $c_M = c_{M'}$ для всех $c \in \mathrm{Const}_{\Omega}$,
- $f_M(m_1, \ldots, m_k) = f_{M'}(m_1, \ldots, m_k)$ для всех k -местных $f \in \mathrm{Fun}_{\Omega}$ и $m_1, \ldots, m_k \in M'$,
- $P_M(m_1, \ldots, m_k) = P_{M'}(m_1, \ldots, m_k)$ для всех k -местных $P \in \mathrm{Pred}_{\Omega}$ и $m_1, \ldots, m_k \in M'$.

Обозначение подмодели: $M' \subset M$.

Определение 14.2. Подмодель $M' \subset M-$ элементарная, если

$$M' \vDash A(m_1, \ldots, m_k) \Leftrightarrow M \vDash A(m_1, \ldots, m_k)$$

для любой формулы $A(a_1, \ldots, a_k)$ и $m_1, \ldots, m_k \in M'$. (Тогда, в частности, $M' \equiv M$.) Обозначение элементарной подмодели: $M' \prec M$.

Мощность сигнатуры Ω

$$|\Omega| := | \text{ Const }_\Omega \cup \text{ Fun }_\Omega \cup \text{Pred}_\Omega \; |$$

Лёвенгейм - Сколем - Тарский Для любой модели M сигнатуры Ω существует $M' \prec M$ такая, что

$$|M'| \leqslant \max\left(|\Omega|, \aleph_0\right)$$

Определение. Зафиксируем модель M и $m_0 \in M$. Для каждой формулы $\exists x A(x, \vec{a})$, где $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – список свободных переменных, и для каждого $\vec{m} \in M^k$ положим

$$S_{\exists x A(x, \vec{m})} := \begin{cases} \{e \in M \mid M \vDash A(e, \vec{m})\}, & \text{если это множество непусто;} \\ m_0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция выбора для семейства множеств $\left(S_{\exists x A(x, \vec{m})}\right)_{\vec{m} \in M^k}$ называется сколемовской функцией для формулы $\exists x A(x, \vec{a})$ и обозначается $s_{\exists x A(x, \vec{a})}$ (или короче: $s_{\exists x A}$) . (Случай $k = 0$ тоже включается; тогда просто берем $s_{\exists x A} \in M$.) Таким образом:

$$s_{\exists x A}(\vec{m}) \in S_{\exists x A(x, \vec{m})}$$

и тогда

$$M \vDash A\left(s_{\exists x A}(\vec{m}), \vec{m}\right)$$

если

$$M \vDash \exists x A(x, \vec{m})$$

Доказательство. Пусть $M_0 := \{m_0\}$ (это множество, еще не модель). По рекурсии строим счетную последовательность множеств $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \ldots$ Их объединение даст M'.

$M_{n+1} := M_n \cup \left\{s_{\exists x A(x, \vec{a})}\left[M_n^k\right] \mid \exists x A(x, \vec{a}) \in Fm\right\}$,
($Fm -$ множество всех формул нашей сигнатуры).
$M' := \bigcup_n M_n$(как множество).

Его можно превратить в модель $M' \subset M$, положив - $M' \vDash P(\vec{m}) \Leftrightarrow M \vDash P(\vec{m})$,
- $c_{M'} = s_{\exists x}(x = c)$
- $f_{M'}(\vec{m}) = s_{\exists x (x = f(\vec{a}))}(\vec{m})$.
Доказываем, что $M' \prec M-$ искомая. □

15 Лекция 15 (03.23.2021)

Определение 15.1. Фильтр на множестве $I-$ это непустое $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ со свойствами $\bullet X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F} \bullet X \in \mathcal{F} \& X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$ Фильтр $\mathcal{F}$ собственный, если $\varnothing \notin \mathcal{F}$ Ультрафильтр - максимальный по включению собственный фильтр.

Лемма 15.1. Свойства ультрафильтров:
- $X \in \mathcal{F} \& Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F}$
- $X \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow (I \backslash X) \in \mathcal{F}$

Лемма 15.2. Любой собственный фильтр можно расширить до ультрафильтра,

Определение 15.2. Фильтр $\mathcal{F}$ главный, если $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$.

Лемма 15.3. Ультрафильтр $\mathcal{U}$ главный, если и только если существует конечное $J \in \mathcal{U}$.

Определение 15.3. Пусть задан ультрафильтр $\mathcal{U}$ на I. Рассмотрим свойства элементов I (одноместные предикаты). Свойство Φ верно почти всегда (относительно $\mathcal{U}$), если

$$\{i \mid \Phi(i)\} \in \mathcal{U}$$

Обозначение: $\forall^{\infty} i \Phi(i)$.

Лемма 15.4. Свойства квантора $\forall^{\infty}$.
- $\forall^{\infty} i(\Phi(i) \wedge \Psi(i)) \Leftrightarrow \forall^{\infty} i \Phi(i) \wedge \forall^{\infty} i \Psi(i)$
- $\forall^{\infty} i \neg \Phi(i) \Leftrightarrow \neg \forall^{\infty} i \Phi(i)$.

Лемма 15.5. Пусть $(M_i)_{i \in I}-$ семейство моделей сигнатуры $\Omega, \mathcal{U}$ ультрафильтр на I. Тогда

$$\alpha \approx_{\mathcal{U}} \beta := \forall^{\infty} i\left(\alpha_i = \beta_i\right)$$

задает отношение эквивалентности на множестве $\prod M_i$.

Класс элемента $(\alpha_i)_{i \in I}$ обозначается $[\alpha_i]_{i \in I}$.

Определение 15.4. Пусть $(M_i)_{i \in I}-$ семейство моделей сигнатуры Ω. $\mathcal{U}-$ ультрафильтр на I. Ультрапроизведение семейства $(M_i)_{i \in I}$ по ультрафильтру $\mathcal{U}$ задается следующим образом. - Носитель M это $\prod_{i \in I} M_i / \approx_{\mathcal{U}}$. $c_M := [c_{M_i}]_{i \in I}$ $f_M\left(\left[m_i^1\right], \ldots,\left[m_i^k\right]\right) := \left[f_{M_i}\left(m_i^1, \ldots, m_i^k\right)\right]$ $M \vDash P\left(\left[m_i^1\right], \ldots,\left[m_i^k\right]\right) \Leftrightarrow \forall^{\infty} i M_i \vDash P\left(m_i^1, \ldots, m_i^k\right)$ Обозначение: $\prod_{\mathcal{U}} M_i$.

Лось

$$\prod_{\mathcal{U}} M_i \vDash A\left(\left[m_i^1\right], \ldots,\left[m_i^k\right]\right) \Leftrightarrow \forall^{\infty} i M_i \vDash A\left(m_i^1, \ldots, m_i^k\right)$$

16 Лекция 16 (04.05.2021)

Гёделя - Мальцева Пусть $T-$ теория в некоторой сигнатуре. Если каждое конечное подмножество T выполнимо, то T выполнима.

Доказательство. Рассмотрим

$$I := \{S \subset T \mid I \text{ конечно } \}\ .$$

Для каждого $S \in I$ существует модель $M_S \vDash S$.
Для $A \in T$ пусть

$$J_A := \{S \in I \mid A \in S\}$$

□

Лемма 16.1. Существует ультрафильтр на I, содержащий все J_A.

Доказательство. $J_{A_1} \cap \ldots \cap J_{A_k} \neq \varnothing$, т.к. содержит $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Поэтому найдется фильтр, содержащий все такие пересечения. Пусть $\mathcal{U}$ содержит все J_A для $A \in T$. Тогда

$$\prod_{\mathcal{U}} M_S \vDash T.$$

Действительно,

$$J_A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall^{\infty} S A \in S\ .$$

Тогда

$$\forall^{\infty} S M_S \vDash A$$

По теореме Лося,

$$\prod_{\mathcal{U}} M_S \vDash A.$$

□

Лемма 16.2. Если теория имеет конечные модели неограниченной мощности, то она имеет и бесконечную модель.

Лёвенгейма - Сколема о подъеме Если теория в сигнатуре Ω имеет бесконечную модель, то она имеет модели любой бесконечной мощности $k \geqslant |\Omega|$.

17 Лекция 21 (04.27.2021)

Рассматриваем модели в конечной сигнатуре Ω без функциональных символов. Игра Эренфойхта $G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$ длины n на моделях M, M' с начальной позицией $(\mathrm{m}, \mathrm{m}')$, где $\mathrm{m} \in M^k,\ \mathrm{m}' \in M'^k$ для некоторого k описывается правилами:
- Ходы делаются поочередно, первый ход делает $\forall$, каждый игрок делает n ходов.
- Ход $\forall-$ это пара (M, l), где $l \in M$ или (M', l'). Ответный ход $\exists-$ в другой модели.
- Партия- последовательность ходов по этим правилам. Законченная партия - длины 2n. Последняа позиция $p(\pi)$ в партии π определяется по рекурсии:
$p() = (\mathbf{m}, \mathbf{m}')$. Если $p(\pi) = (\mathbf{d}, \mathbf{e})$, то

$$p(\pi, (M, l)) = (\mathrm{d}l, \mathbf{e}), p(\pi, (M', l')) = (\mathbf{d}, \mathbf{e}l')$$

- $\exists$ выигрывает законченную партию π, если $p(\pi)$ задает частичный изоморфизм.

Частичный изоморфизм: $M, \mathbf{m} \equiv_0 M', \mathbf{m}'$, если

$$M \vDash A(\mathbf{m}) \Leftrightarrow M' \vDash A(\mathbf{m}')$$

для любой простой атомарной $A(\mathbf{a})$. Простые атомарные формулы:

$$a_i = a_j, a_i = c, P(a_1, \ldots, a_n)$$

Определение 17.1. Стратегия для $\exists$. σ: партии нечетной длины $< 2n \longrightarrow$ допустимые ходы Партия $\pi = \chi_1, \ldots, \chi_{2n}$ согласована с σ, если

$$\forall p < n \chi_{2p} = \sigma(\chi_1, \ldots, \chi_{2p-1})$$

σ - выигрышная для $\exists$, если для любой партии π, согласованной с σ, π выиграна $\exists$

Определение 17.2. Игровая эквивалентность $(M,\ \mathrm{m}) \approx_n (M', \mathrm{m}')$, если $\exists$ имеет выигрышную стратегию в $G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$.

Лемма 17.1. $\approx_n$ задает отношение эквивалентности.

Лемма 17.2. (Индуктивное определение $\approx_n$) $(M, \mathbf{m}) \approx_{n+1} (M', \mathbf{m}') \Leftrightarrow \begin{cases} \forall d \in M \exists \\ \forall d' \in M' \end{cases}$

Определение 17.3. $q(A)-$ кванторная глубина формулы A определяется по рекурсии:
$q(A) = 0$ для атомарной A,
$q(\neg A) = q(A)$

$q(A * B) = \max(q(A), q(B))$, где $*$ - бинарная связка,
$q(\forall x A[a\backslash x]) = q(\exists x A[a\backslash x]) = q(A) + 1$.

Определение 17.4. Формульная эквивалентность $(M, \mathbf{m}) \equiv_n (M', \mathbf{m}')$, если для любой простой формулы $A(\mathbf{a})$, где $q(A) \leqslant n$

$$M \vDash A(\mathbf{m}) \Leftrightarrow M' \vDash A\left(\mathbf{m}'\right)$$

Эренфойхта - Фраиссе

$$(M, \mathbf{m}) \approx_n (M', \mathbf{m}') \Leftrightarrow (M, \mathbf{m}) \equiv_n (M', \mathbf{m}').$$

Замечание 17.1.

$$M \equiv M' \Leftrightarrow \forall n M \approx_n M'.$$

Рассмотрим сигнатуру Ω_1 с 1-местными предикатами и равенством.

Определение 17.5. Замкнутая формула A финитно выполнима, если она имеет конечную модель

Лёвенгейм, 1915 Всякая выполнимая формула A сигнатуры Ω_1 выполнима в модели мощности $\leqslant 2^k \cdot n$, где $n = q(A)$(для простой A), $k-$ число предикатных символов в A.

Замечание 17.2. Конечный спектр формулы в Ω_1 не может быть равен $2\mathbf{N}$.

Определение 17.6. Бесконечная игра Эренфойхта $G_\omega\left(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}'\right)$ задается теми же правилами, что $G_n\left(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}'\right)$, с отличиями:
число ходов бесконечно,
бесконечная партия выиграна $\exists$, если выигран любой ее начальный отрезок четной длины.

Игровая эквивалентность $M \approx_\omega M'$ определяется соответственно.

Лемма 17.3. Для счетных моделей сигнатуры Ω

$$M \approx_\omega M' \Leftrightarrow M \cong M'$$

Кантор Теория $DLO_\leftrightarrow$ счетно категорична.