2К Мат Анализ. Семинар № 12

Тригонометрические системы

Рассмотрим пространство $L_2(X, d\mu)$ (вещественные случаи). Это пространство является евклидовым. Скалярное произведение в нем:

$$(f, g) = \int_X f(x) g(x)\, d\mu.$$

Обычно, $X \subset \mathbb{R}^n$, $d\mu$ – мера Лебега на X.

Например: $X = [a, b]$, $[-\pi, \pi]$, $[0, \pi]$.

Тогда $L_2(X, \mu)$ – полное сепарабельное пространство, т.е. оно гильбертово. В нем имеются ортогональные семейства, которые можно строить методом ортогонализации. Пусть $\{\varphi_n\}$ – ортогональная система в $L_2(X, d\mu)$. Тогда $\forall f \in L_2(X, d\mu)$ можно рассмотреть коэффициенты Фурье и построить ряд Фурье:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \varphi_n \quad (*)$$

где $c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_X f(x) \varphi_n(x)\, dx$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_X \varphi_n(x)^2\, dx$$

Ряд (*) сходится в пространстве $L_2(X, d\mu)$,

т.е. $\|f - S_n\|_{L_2} = \left(\int\limits_X |f(x) - S_n(x)|^2 d\mu\right)^{1/2} \to 0$

где $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ – част. сумма р. Ф.

Выполнено равенство Парсеваля:

$$\int\limits_X f(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 \cdot c_n^2 .$$

---

① Тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье

Рассмотрим пр-во $L_2(-\pi, \pi)$.

Тригонометрическая система:

$1, \cos nx, \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots$

Она ортогональна в $L_2(-\pi, \pi)$ (проверим)

Не нормированная, её можно нормировать

$\|1\|^2_{L_2} = 2\pi$; $\|\cos nx\|^2_{L_2} = \|\sin nx\|^2_{L_2} = \pi$.

Пусть $f \in L_2(-\pi, \pi)$.

Её коэффициенты Фурье по триг. системе принято обозначать

$\frac{a_0}{2}, a_n, b_n$, т.е.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Ряд Фурье: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx$.

Ряд сходится к $f(x)$ в норме $L_2(-\pi,\pi)$.

(говорят: сходится в среднеквадратичном)

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\cdot\sin kx$$

$$\|f - S_n\|^2_{L_2} = \|f\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \to 0$$

(следует из полноты триг. системы (теорема Вейерштрасса).

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Как по коэффициентам Фурье восстановить функцию?

Пусть даны числа a_0, a_n, b_n: $\sum_{n=1}^{\infty} a_k^2 + b_n^2 < \infty$.

Тогда по теореме Рисса–Фишера ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

сходится (в $L_2(-\pi,\pi)$) к некоторой функции $f(x)\in L_2(-\pi,\pi)$, для которой это её коэффициенты Фурье. (единственной).

② Проблема Лузина. Ряд Фурье сходится в $L_2(-\pi,\pi)$. Тогда $\exists$ подпоследовательность n_k: $S_{n_k}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{l=1}^{n_k} a_l \cos lx + b_l \sin lx$

что $S_{n_k}(x) \xrightarrow{п.в.} f(x)$.

Николай Лузин (1915): Доказать, что ряд Фурье функции $f(x) \in L_2(-\pi,\pi)$ сходится почти всюду. Решена в 1966 г шведским математиком Леннартом Карлесоном.

Аналогично строятся триг. ряды Фурье в пространстве $L_2(-l,l)$.

Если $f(t) \in L_2(-l,l)$, сделать замену $x = \frac{\pi}{l} \cdot t$.

$f^*(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right) \Rightarrow f^* \in L_2(-\pi,\pi)$.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi}{l}nt\,dt, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi}{l}nt\,dt, \quad n = 1,2\ldots$$

Ряд Фурье на отрезке $[-l,l]$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi}{l}kt + b_k \sin\frac{\pi}{l}kt$$

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

Пример 1. $f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi]$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right.$$

Ряд сходится в $L_2(-\pi, \pi)$. (почти всюду)

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

т.е. $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Пример 2. $f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = 0.$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos x - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} + \ldots\right.$$

Сходится равномерно $(f(-\pi) = f(\pi))$

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}, \quad \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

③ Тригонометрические системы на $[0,\pi]$

I) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ | $\|1\|^2=\pi$, $\|\cos nx\|^2=\frac{\pi}{2}$

II) $\sin x, \sin 2x, \ldots$ | $\|\sin nx\|^2=\frac{\pi}{2}$

Ортогональность проверяется. Полнота каждой из них следует из полноты триг. системы $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ на $[-\pi,\pi]$.

Формулы коэффициентов Фурье:

Наприр. для $\{\sin nx\}$, $f(x)\in L_2(0,\pi)$.

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$$

Равенство Парсеваля: $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)^2dx=\sum_{n=1}^\infty C_n^2$

Аналогично для $\{1, \cos nx\}$.

④ Тригонометрические ряды в комплексной форме.

Рассмотрим ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

Воспользуемся формулами Эйлера

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2};\quad \sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty\left[a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right]=$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - i b_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-inx} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}, \text{ где}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2}.$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}}$$

Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме. Пространство $L_2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ – эрмитово пр-во. Эрмитово произведение:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

Ортогональная система: $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$

Проверим ортогональность: $n \neq m$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot \overline{e^{imx}}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\, dx =$$

$$= \frac{e^{i(n-m)x}}{n-m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{n-m} = 0.$$

при $n = m$.

$$\|e^{inx}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-inx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

Ряд Фурье по системе $\{e^{inx}\}$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Полнота системы $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ вытекает из полноты системы $\{1, \cos nx, \sin nx\}$, т.к. ряд по косинусам и синусам сходится в L_2.

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Для эрмитова произведения:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)}\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}$$

<u>Замечание</u> Если $f(x) \in L_2(-\pi, \pi; \mathbb{R})$ — вещественная функция, то

$$c_{-n} = \overline{c_n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x) e^{-inx}}\, dx =$$

$$= \overline{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx\right)} = \overline{c_n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично строятся комплексные ряды Фурье в пространстве $L_2(-l, l, \mathbb{C})$.
Заменить e^{inx} на $e^{i\frac{\pi}{l}nx}$,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{\pi}{l}nx}, \quad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{\pi}{l}nx}\,dx$$

Задача 1. Переписать ряд Фурье для функции x и x^2, $x\in[-\pi,\pi]$ в комплексной форме.

Решение:

1) $$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{in}e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{in}e^{-inx} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{(-1)^{n+1}}{in}e^{inx}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{in}, & n\neq 0. \end{cases}$$

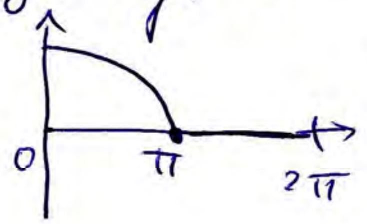
2) $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}e^{-inx} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{2(-1)^n}{n^2}e^{inx}.$$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{3}, & n = 0 \\ \dfrac{2(-1)^n}{n^2}, & n\neq 0. \end{cases}$$

Задача 2. Разложить в компл. ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{x}{2}, & x \in [0;\pi] \\ 0 & x \in [-\pi, 2\pi] \end{cases}$$



Решение:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\, e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}}}{2}\, e^{-inx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{-i(n-\frac{1}{2})x}+e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-i(n-\frac{1}{2})x}}{-2i(n-\frac{1}{2})} + \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{-2i(n+\frac{1}{2})} \Bigg|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{e^{-i(n-\frac{1}{2})\pi}}{1-2n} - \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\pi}}{1+2n} - \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) =$$

$$\boxed{e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i, \quad e^{-in\pi} = (-1)^n}$$

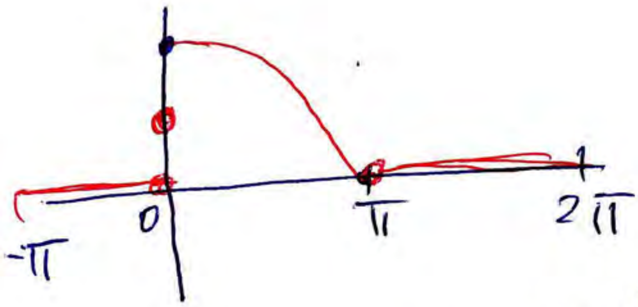
$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{i(-1)^n}{1-2n} + \frac{i(-1)^n}{1+2n} - \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{i(-1)^n \cdot 2}{1-4n^2} - \frac{4n}{1-4n^2} \right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n + 2ni}{1-4n^2} \right)$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n + 2ni}{1-4n^2} \right), \qquad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n + 2ni}{1-4n^2}\, e^{inx}$$

$$0 \le x \le \pi$$

$$0 = \text{—} \parallel \text{—} \quad \pi < x \le 2\pi$$



$$f(\pi) = 0$$

$$\frac{f(\pi) + f(0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n + 2ni}{1 - 4n^2} = \frac{1}{2} + i \cdot 0.$$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2}; \quad 0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2n}{1 - 4n^2}$$

(Суммы понимаются как $\lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} (\ )$).