12 БИЛЕТ

ДУ на многообразиях

$\dot{x} = F(x,t) \qquad x \in M$

$x : I \longrightarrow M \qquad \dot{x}$ – касательный вектор
$\;\;\;\subset \mathbb{R}$

<u>Опр.</u> $\{ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ или $\to \mathbb{R}^n \}$ – гладкие кривые

$\gamma(0) = p$ – фикс.

$$\gamma \sim \hat{\gamma} : \operatorname{dist}(\gamma(t), \hat{\gamma}(t)) = \bar{o}(t), \quad t \to 0$$

Эквив-ть путей не зависит от карты

<u>Лемма.</u> Пусть $(y_1, \dots, y_n)$ – лок. система координат в окр. $p \in \mathbb{R}^n$

- $y = y(x)$ определена в окр. p
- y гладко (хотя бы C^1) зависит от x
- $\det \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x=p} \neq 0$

Тогда если $\gamma, \hat{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, то

$$\operatorname{dist}(\gamma(t), \hat{\gamma}(t)) \to 0 \Leftrightarrow \operatorname{dist}(y(\gamma(t)), y(\hat{\gamma}(t))) \to 0$$

бла-бла-бла . . . .

Касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ в точке

$$\left\{ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \begin{matrix} M \\ \mathbb{R}^n \end{matrix} \text{ — гладкие} \right\} \Big/ \sim \;= T_p \begin{cases} M \\ \mathbb{R}^n \end{cases}$$
$\gamma(0) = p$

<u>Лемма</u> Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — локальн. с. к. в окрестности p

Тогда $\varphi : T_p \begin{cases} M \\ \mathbb{R}^n \end{cases} \to \mathbb{R}^n$

$$[\gamma] \mapsto \left(\left.\frac{d x_1(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}, \dots \left.\frac{d x_n(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} \right)$$

φ — биекция, причём если $(y_1, \dots, y_n)$ — другая система коорд., ψ — соответствующее отображение, то

$\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — изоморфизм векторных пр-в

($\simeq 30$ минута лекции 1.10.20)

связь касательных пр-в и ДУ

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

$$f : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \bigsqcup_{p} T_pM = TM$$

КАСАТЕЛЬНОЕ
РАССЛОЕНИЕ
(МНОГООБРАЗИЕ
РАЗМЕРНОСТИ 2n)

$$f(p,t) \in T_pM \iff f(\cdot, t) \text{ — СЕЧЕНИЕ } TM$$

M

$$x : I \longrightarrow M$$

$$\dot{x}(t) \in T_{x(t)}M$$

КАСАТЕЛЬНЫЙ ВЕКТОР К МНОГООБРАЗИЮ
В Т. $x(t)$

$$\dot{x}(t) = [\gamma(s) = x(t+s),\ s \in (-\varepsilon, \varepsilon)]$$