Топология
1 курс 2 семестр
Задачи

А.Ю. Пирковский

Содержание

1 Листок 1

Задача 1

Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство. Всегда ли верно, что $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ для любых $A, B \subset X$ (черта означает замыкание)?

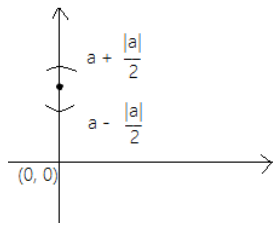
▶
Пусть $A = (-1, 0) \quad B = (0, 1)$, тогда $\overline{A \cap B} = \varnothing$, $\overline{A} = [-1, 0] \quad \overline{B} = [0, 1]$ тогда $\overline{A} \cap \overline{B} = 0$

$*$ Верно отношение: $A \cap B \subset A,\ A \cap B \subset B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A},\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
Ответ: нет.

Задача 2

Снабдим пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ топологией произведения (она же – топология поточечной сходимости). Найдите замыкание в $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ множества всех многочленов без свободного члена.

▶
Топология поточечной сходимости на $\mathbb{R}$ – это топология, предбаза которой – образ множества $\sigma(X, I) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall I \subset \mathbb{R}$.



$\{f \mid f(0) = 0\}$ $A = \{$многочлены без свободного члена$\}$.

1. Докажем, что ничего, кроме функций, проходящих через $(0, 0)$, не лежит в замыкании A.
Рассмотрим произвольную функцию f, такую что $f(0) \neq 0$, и найдем ее окрестность, в которой нет точек из A. Без ограничения общности скажем, что $f(0) = a$, и зададим $I = (a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2})$, тогда в $\sigma(0, I)$ не лежит ни одного элемента из A, что равносильно тому, что $f \notin \overline{A}$, что и требовалось доказать

2. Докажем, что все функции проходят через $(0, 0)$ лежат в $\overline{A}$. f – произвольная функция, такая что $f(0) = 0$. Рассмотрим ее произвольную окрестность. Помимо условия в нуле у функции есть еще конечное множество точек с условием.
Тогда пусть есть $\sigma_i(x_i, I_i)$ $i = 1, ..., n$. Выберем в каждом I_i по точке. Получим набор из $n+1$ различной точки. Тогда составим по этим точкам интерполяционный многочлен Лагранжа. Известно, что он степени не выше n. $\Rightarrow$ в любой точке окрестности функции f мы нашли точку из A. Значит, f – предельная точка A. $\Rightarrow f \in \overline{A}$. Что и требовалось доказать

Ответ. Замыкание – все функции, проходящие через (0, 0).

Задача 3

Пусть X и Y – топологические пространства, причем Y хаусдорфово, и пусть $f: X \to Y$ – непрерывное отображение. Докажите, что его график (т.е. множество $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$) замкнут в $X \times Y$

▶
Рассмотрим предельную точку графика, пусть это (x_0, y_0). Предположим, что график не содержит предел (x_0, y_0). Пусть $f(x_0) = y_1$, где $y_1 \neq y_0$. Тогда для y_1, y_0 существуют непересекающиеся окрестности.
Так как отобраение непрерывно, то

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta:\ x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ f(x_0) \in (y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon)$$

По определению предельной точки окрестности, для любой окрестности (x_0, y_0) существует хотя бы 1 точка из множества. Откуда в пересечении окрестностей еть точка из множества $\Rightarrow$ противоречие. Тогда график содержит эту предельную точку, аналогично доказывается содержание и всех остальных точек.

Задача 4

Пусть A и B – замкнутые подмножества топологического пространства X, причем $A \cup B$ и $A \cap B$ связны. Докажите, что A и B связны. Верно ли это, если не требовать замкнутости A и B?

►
Докажем от противного:
Пусть A несвязно, тогда $A = A_1 \cup A_2$, где A_1, A_2 непустые и замкнутые множества.
1) $A_1 \cap B \neq \varnothing$ и $A_2 \cap B \neq \varnothing$
Тогда рассмотрим $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) = A \cup B$ – связно по условию. Тогда $(A_1 \cap B)$, $(A_2 \cap B)$ замкнуты (как пересечения замкнутых), откуда связное множество разбито на два непересекающихся замкнутых подмножества.

2) $A_1 \cap B \neq \varnothing$ и $A_2 \cap B = \varnothing$
$(A_1 \cup A_2) \cup B = A_2 \cup (A_1 \cup B)$ тогда $(A_1 \cup B)$ и A_2 замкнуты

3) $A_1 \cap B = \varnothing$ и $A_2 \cap B = \varnothing$
не может быть, так как $A \cup B$ связно

В случае когда A и/или B незамкнуто, есть контрпример: $A = [1, 2]$, $B = [0, 1) \cup [2, 3]$, $A \cap B = \{2\}$ и $A \cup B = [0, 3]$

Задача 5

Пусть X, Y, Z – топологические пространства, причем Y компактно, и пусть $f : X \times Y \to Z$ – непрерывное отображение.
Докажите, что для любого открытого множества $W \subset Z$ множество $M = \{x \in X \ \forall y \in Y : \ f(x, y) \in W\}$ открыто в X.

►
$x_0 \in M \ \forall y_i : \ f(x_0, y_i) \in W$
Так как Y – компактен, то для окретсностей y_i, назовем их U_i, выполнено: $\exists n : U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n \supset Y$.
Рассмотрим окрестность $(x_0, y_i) : \ V_i$ так как f непрерывно, W открыто, то $f(V_i) \subset W$
$V_i = S_i \times U_i$, где S_i – окрестность x_i и $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n$, так как $S_1 \cap \ldots \cap S_n$ – пересечение конечного числа открытых множеств, то S открыто.
Тогда $(x_0, y) \in (S, U)$, тогда заметим, что $f(S, U) \subset W$ (по построению), тогда множество из (x_0, y) – открыто, откуда открыто и M, что и требовалось.

2 Листок 2

Задача 1

Условие
Пусть $X = [0,1) \cup [2,3) \cup \{4\}$ (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$). Существует ли подмножество $Y \subset \mathbb{R}$, которому гомеоморфна одноточечная компактификация X_+ пространства X? Существует ли локально компактное пространство, не гомеоморфное X, одноточечная компактификация которого гомеоморфна X_+?

Решение
Рассмотрим $Y = [0,2] \cup \{4\}$
Отображение $f:\ X_+ \to Y$

$$f(x) = \begin{cases} x: \quad x \in [0,1) \cap \{4\} \\ 4 - x: \quad x \in [2,3) \\ 1: \quad x = \infty \end{cases}$$

Для любого открытого $U \subset Y,\ 1 \notin U: \quad f^{-1}(U)$ – соотв. открыто в $X\ \Rightarrow$ открыто в X_+
Рассмотрим $U \subset Y \quad f^{-1}(U) = (\alpha, 1) \cup (4-\beta, 3) \cup \{\infty\}$ где $\alpha \in [0,1)\,,\ \beta \in (1,2]\,,\ 1 \in (\alpha,\beta) = U$
Тогда $X_+/f^{-1}(U) = X/f^{-1}(U) = [0,\alpha] \cup [\beta, 2] \cup \{4\}$ – ограничен и замкнут $\Rightarrow$ компакт $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$ открыто в топологии X_+
Обратно аналогично $\Rightarrow f$ – гомеоморфизм

Локально компактное пространство $Z \simeq X,\ Z_+ \simeq X_+,\ Z = [0,1) \cup \{4\}$ или $Z = [0,1]$

Задача 2

Условие
Постройте гомеоморфизм между $[0,1]/\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ и $[0,1]$

Решение
Универсальное свойство факторпространств: Y – топологическое протранство, $f: X \to Y$ – непрерывное отображение, построенное на классах эквивалентности, то есть $x \sim y\ \Rightarrow\ f(x) = f(y)$
Тогда $\exists!$ непрерывное отображение $\tilde{f}$, делающее эту диаграмму коммутативной

$$f(x) = \begin{cases} x, \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{3}, \quad x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ x - \frac{1}{3}, \quad x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & {[0,\frac{2}{3}]} \\ {[0,1]/_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \exists! \tilde{f}$ непрерывна: $x \sim y\ \Rightarrow$ одноэлементные $\to$ одноэлементные, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ склеивается в 1 точку(*)
Универсальное свойство выполняется. Тогда известно, что:

1. $\tilde{f}$ – сюръекция $\Leftrightarrow\ f$ – сюръекция
2. $\tilde{f}$ – инъекция $\Leftrightarrow\ \forall x, y \in X \quad x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ (показано ранее в (*) $\Rightarrow$ инъекция)

f – сюръекция:
$\forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \quad f(x) = x$ – на $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ сюръекция,
$x = \frac{1}{3}: \quad f([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) = \frac{1}{3}$ – $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ сюръекция,
$\forall x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]: \quad f(x + \frac{1}{3}) = x$ – $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ сюръекция
Откуда следует что f – сюръекция $\Rightarrow\ \tilde{f}$ – сюръекция
То есть $\tilde{f}$ – инъекция и сюръекция
Если $[0,1]$ компактно(а это так, так как это отрезок), а $[0, \frac{2}{3}]$ хаусдорфово, то $\tilde{f}$ – гомеоморфизм
$[0, \frac{2}{3}]$ хаусдорфово, так как

1. для $a, b:\ a < b,\ a \neq 0,\ b \neq \frac{2}{3},\ \varepsilon = b - a$ искомые окрестности: $(0, a + \frac{\varepsilon}{2}), (b - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{2}{3})$
2. для $a, b:\ a < b,\ b \neq \frac{2}{3},\ a = 0:\ \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right), (\frac{\varepsilon}{2}, b)$

3. для $a, b:\ a < b,\ a \neq 0,\ b = \frac{2}{3},\ \varepsilon = b - a:\ (0, a + \frac{\varepsilon}{2}), (b - \frac{\varepsilon}{2}), \big(b - \frac{\varepsilon}{2}\big]$
4. для $a, b:\ a = 0,\ b = \frac{2}{3}:\ \big[0, \frac{1}{6}\big), \big(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\big)$

Откуда $\tilde{f}$ – гомеоморфизм

$[0, \frac{2}{3}] \simeq [0, 1]:\ x \to \frac{3}{2}x$ – непрерывно, $f^{-1}(x) = \frac{2}{3}$ следовательно это биекция, откуда $[0, 1]/\big[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\big]$ и $[0, 1]$, что и требовалось доказать

Задача 3

Условие
Пусть $D = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| \leqslant 1\}$. Введем на D следующее отношение эквивалентности: $z \sim w$ тогда и только тогда, когда $z = i^k w$ для некоторого $k \in Z$. Докажите, что факторпространство $D/\sim$ гомеоморфно D.

Решение

$$z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$$
$$i = |i|(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$$
$$w = |w|(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_{z_1} + \varphi_{z_2}) + i\sin(\varphi_{z_1} + \varphi_{z_2}))$$
$$|z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = |w|(\cos(\beta + \frac{\pi k}{2}) + i\sin(\beta + \frac{\pi k}{2}))$$
$z \sim w$ что то же самое, что и поворот z на $\frac{\pi}{2}$

$$f: D \to D$$
$$f(z) = z^4$$
$z \sim w\ \Rightarrow f(z) = f(w)$непрерывно на классах эквивалентности

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & D \\ D/_\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\exists!$ отображение $\tilde{f} \mid \tilde{f} \circ g = f$ (из теоремы)
Докажем несколько фактов:

1. f – сюръекция, так как $\forall c \in D \quad f^{-1} = |c|^{\frac{1}{4}}(\cos(\frac{\alpha+2\pi k}{4}) + i\sin(\frac{\alpha+2\pi k}{4})) = |c|^{\frac{1}{4}}(\cos(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi k}{2}) + i\sin(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi k}{2}))$
   $c = |c|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$
   $\cos(\alpha) \in [-1, 1] \qquad \sin(\alpha) \in [-1, 1] \qquad \cos(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi k}{2}) \in [-1, 1] \qquad \sin(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi k}{4}) \in [-1, 1]$
   $\tilde{f}(D/_\sim) = \tilde{f}(q(x)) = f(x)$, откуда $\tilde{f}$ – сюръекция
2. $\forall x, y \in D \quad x \sim y$ и $f(x) = f(y)$ (условия эквивалентны)
   так как при $x \not\sim z$
   $|x|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \neq |z|(\cos(\beta + \frac{\pi k}{2}) + i\sin(\beta + \frac{\pi k}{2})) \quad \Rightarrow \quad |x|^4(\cos(\varphi\alpha) + i\sin(\varphi\alpha)) \neq |z|^4(\cos(\varphi\beta) + i\sin(\phi\beta) + i\sin(\varphi\beta)) \qquad f(x) \neq f(z)$
   Откуда следует что:
   $\tilde{(f)}$ – инъекция(каждый класс эквивалентности перешел в разные элементы)
   $\tilde{(f)}$ – непрерывная биекция
3. D – компактно (так как замкнуто и ограничено в метрическом пространстве) и хаусдорфово (так как у $x_0 \neq y_0 \quad \exists$ непересекающиеся окрестности: $|x - x_0| < r_1, \quad |y - y_0| < r_2$)

Откуда следует что $\tilde{f}$ – гомеоморфизм

Задача 4

Условие

Пусть X – подмножество в произведении $\{0,1\}^S$ несчетного семейства двоеточий $\{0,1\}$, состоящее из всех тех элементов, у которых не более чем счетное число координат отличны от нуля. (Пространство $\{0,1\}$ здесь снабжается дискретной топологией, а пространство $\{0,1\}^S$ – топологией произведения, или, что то же самое, топологией поточечной сходимости.) Докажите, что X секвенциально компактно, но не замкнуто в $\{0,1\}^S$ и потому не компактно.

Решение

Для начала, попытаемся понять, что из себя представляет топология произведения или топология поточечной сходимости. База в топологии произведения – произведение открытых множеств, на счетном числе которых стоят открытые множества из X_i, а на остальных - X_j. (тоже проверяем определение)

В нашей задаче мы можем рассмотреть такие элементы из базы, на счетном числе которых стоят 1, на остальных – двоеточия $\{0,1\}$

Что такое окрестность элемента a? Это какое-то открытое множество из базы, то есть окрестность на счетном числе координат принимает такие же значения, как и a, а в остальных $\{0,1\}$.

Пусть X не замкнуто. Рассмотрим дополнение к X – последовательности из несчетного числа 0 и 1. окрестности элементов из дополнения к X могут быть такими: счетное количество 1 и на остальных координатах $\{0,1\}$. То есть окрестности дополнения пересекаются с X. Следовательно дополнение к X не является открытым множеством, откуда X не замкнуто.

Теперь мы докажем, что у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. Предленьная точка: существует номер начиная с которого все члены последовательности лежат в рассмтриваемой окрестности.

Задача 5

Условие

Пусть X – произведение континуального семейства двоеточий. Заметим, что X компактно в силу теоремы Тихонова. Покажите, что X не является секвенциально компактным.

Решение

X – компактно и не секвенц. $X = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots$ компактно, Найдем последовательность у которой нет сходящейся подпоследовательности

Построим биекцию между континуальным семейством двоеточий и континуумом последовательностей из 0 и 1.

Построим последовательность в X:

a_1 – первая координата последовательности(которая соответствует 0 или 1), a_2 – вторая координата, и так далее

Тогда, выбрав последовательность, мы выбрали номера координат последовательностей, которые однозначно соответствуют $\{0,1\}$

Следовательно найдется такой элемент a_m, что $a_m = 010101\dots \Rightarrow$ подпоследовательность не сходится

То есть $\forall a_i\ \exists$ набор из 0 и 1 не имеющий предела

3 Листок 3

Задача 1

А

Условие
Докажите, что M гомеоморфно ленте Мебиуса и гомотопически эквивалентно окружности.

Решение
Сперва докажем гомотопическую эквивалентность ленты Мебиуса и S^1, а потом гомеоморфизм M и ленты Мебиуса.

Ленту Мебиуса можно представить как квадрат $[0,1] \times [0,1]$, определенный на концах $0 \times [0,1]$ и $1 \times [0,1]$ как $(0,x) \sim (1,1-x)$. Теперь мы можем сжимать эту группу, чтобы получить круг. Таким образом, имеется деформационный ретракт $f_t: \ M_0 \to M_0, \ t \in I$, где M_0 – лента Мебиуса, такой что f_0 – тождественное отображение на M_0, $f_1(M_0) = S^1$ и $f_t(s) = s$ для всех $s \in S^1$ и $t \in I$.
Пусть теперь $g: \ S^1 \to M_0$ – отображение вложения. Пусть $h: \ M_0 \to S^1$ – такое отображение, что $h = f_1$. Тогда $h \circ g = \mathrm{id}_{S^1}$ и $f_0 \simeq f_1, \ f_1 \simeq f_0$. Заметим, что $f_1: \ M_0 \to M_0$ эквивалентно $g \circ h: \ M_0 \to M_0$. Тогда, у нас есть $g \circ h \simeq f_0$ – тождественное отображение на M_0. Откуда $M_0 \simeq S_1$ по определению.

Теперь построим гомеоморфизм между M и лентой Мебиуса
Заметим, что M это RP2 с дыркой, так как RP2 мы можем определить как множество всех прямых, проходящих через $(0,0,0)$, тогда строится биекция прямых с поверхностью сферы(так как прямая задается по точке пересечения со сферой), а дыркой является шапка, срезанная ограничением $z \leqslant \frac{1}{2}$, тогда необходимо доказать гомеоморфность RP2 с дыркой и ленты мебиуса.

1) А.Л.Городенцев – "Линейная алгебра и геометрия" , 2020, 17 лекция, стр. 203

2) Докажем более общий случай $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}P^{n-1}$ определим функцию $i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}P^n$ определенную как $i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [1, x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Тогда образ $i(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{R}P^n$

$$\{[0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}\} \cong \mathbb{R}P^{n-1}$$

Тогда в нашем случае $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}P^1$, где $\mathbb{R}P^1$ уже определен как S^1. Теперь рассмотрим круги, заданные $[1, r\cos\phi, r\sin\phi]$. Предположим $r \to \infty$, круг удвоит покрытие $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$. Это дает необходимое разложение

$$\mathbb{R}P^2 = \{[1, r\cos\phi, r\sin\phi] | 0 \leq r \leq 1 \text{ и } \phi \in [0, 2\pi)\}$$
$$\cup \{[r, \cos\phi, \sin\phi] | 0 \leq r \leq 1 \text{ и } \phi \in [0, 2\pi)\}$$

Где два компонента отождествляются с закрытым диском D^2 и лентой Мебиуса M, с общей границей S^1.

Б

Условие
Пусть $\iota: M \to \mathbb{R}P^2$ тавтологическое вложение ($l(a) = a \in \mathbb{R}P^2$ для всякой точки $a \in M \subset \mathbb{R}P^2$). Вычислите гомоморфизм групп $\iota_*: \pi_1(M) \to \pi_1\left(\mathbb{R}P^2\right)$ (т.е. сначала найдите группу $\pi_1(M)$; группа $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ вычислялась на лекциях. После этого для каждого элемента $x \in \pi_1(M)$ укажите явно элемент $\iota_*(x) \in \pi_1\left(\mathbb{R}P^2\right)$.

Решение

Найдем фундаментальную группу M. M гомеоморфно ленте Мебиуса M_0.
рассмотрим M_0. так как средняя линия ленты мебиуса – строгий деформационный ретракт (мы это доказывали в 1а, но можно привести еще одно доказательство*), а деформационная ретрация является гомотопической эквивалентностью (так как по определению p: $X \to A$, in: $A \to X$, in $\cdot$ p $\sim \mathrm{id}_x$ (гомотопно)), то $\pi_1(M_0) \sim \pi_1(S^1) \sim \mathbb{Z}$. Получаем отображение $f: \ Z \to Z/2Z, \ f(2x) = 0, \ f(2x+1) = 1$

$(\star)$
Докажем, что средняя линия L ленты Мёбиуса M_0 является её строгим деформационным ретрактом. Геометричесое рассуждение очевидно: в качестве h_t можно взять сжатие с коэффициентом $1-t$ ленты Мёбиуса по направлению к ее средней линии. Таким образом h_0 тождественно, а h_1 отображает M_0 в L. Выпишем формулы, так как M_0 – факторпространство квадрата, то рассмотрим гомотопию

$$H: \ I \times I \times I \to I \times I: \ (u, v, t) \to (u, (1-t)v + \frac{t}{2})$$

При этом

$$\forall I \quad H(u, \frac{1}{2}, t) = (u, \frac{1}{2})$$

И так как

$$(1-t)v + \frac{t}{2} + (1-t)(1-v) + \frac{t}{2} = 1$$

То эта гомотопия выдерживает факторизацию, порождая гомотопию

$$h: \ M_0 \times I \to M_0$$

Имеем

$$H(u, v, 0) = (u, v)$$

Откуда

$$h_0 = \mathrm{id}_{M_0}$$

$$H_1(u, v) = (u, \frac{1}{2})$$

$(\star)$
Чтобы доказать что средняя линия ленты мебиуса это деформационный ретракт ленты мебиуса, определим fundamental square как $[0,1] \times [0,1]$ со сторонами $\{0\} \times [0,1]$ и $\{1\} \times [0,1]$ соединенными: $(0,t) \sim (1, 1-t)$

Построим деформационный ретракт этого квадрата на интервал $[0,1] \times \{\frac{1}{2}\}$ через отображение $F((x,y),t) = (x, \frac{t}{2} + (1-t)y)$. Тогда $[0,1] \times \{\frac{1}{2}\}/(0, \frac{1}{2}) \sim (1, \frac{1}{2}) \cong S^1$

Задача 2

А

Условие
Топологическое пространство $Y_3 \overset{\text{def}}{=} \left\{ (u_1, u_2, u_3), u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^2 | u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq u_1 \right\}$. На нем действует группа перестановок S_3: если $\sigma \in S_3$ перестановка чисел $1, 2, 3$, то отображение $R_\sigma: \ Y_3 \to Y_3$ определено формулой $R_\sigma(u_1, u_2, u_3) \overset{\text{def}}{=} \left(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, u_{\sigma(3)} \right)$. Пусть X_3 – фактор Y_3 по действию группы (две тройки $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in Y_3$ эквивалентны, если отличаются только порядком точек). Докажите, что отображение проекции $p: Y_3 \to X_3$ – накрытие.
Решение
Определение накрытия:
$p: Y_3 \to X_3$ непрерывно, сюръективно и $\forall \ V \in X_3 \ \exists v \in V$ – окрестеность, такая что $p^{-1}(U)$ представляется в виде U непересекающихся открытых множеств V_α, каждое из кторых гомеоморфно отображению на U

$$Y_3 = \{(u_1, u_2, u_3) \mid u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R} \mid u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq u_1\}$$

окрестность элемента $u \in Y_3: \ U = U_1 \times U_2 \times U_3, \ u_i \in U_i$
Так как $\mathbb{R}^2$ – хаусдорфово, то для $u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq u_1$ существуют непересекающиеся окрестности U_1, U_2, U_3
Теперь рассмотрим $p^{-1}(v) = (v_1, v_2, v_3), \ V = (v_1, v_2, v_3)$ с точностью до перестановки, то есть $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k \neq i}}^{3} V_i \times V_j \times V_k$ – непересекающиеся открытые множества из Y_3, тогда p является накрытием по определению

Б

Условие
Пусть $u \in Y_3$ – какая-то точка, и $v \overset{\text{def}}{=} p(u) \in X_3$. Рассмотрим петлю $\gamma: [0,1] \to X_3$ такую, что $\gamma(0) = \gamma(1) = v$, и пусть $\Gamma: [0,1] \to Y_3$ – ее поднятие с начальной точкой $\Gamma(0) = u$. Обозначим $\sigma \in S_3$ перестановку, для которой $\Gamma(1) = R_\sigma(u)$. Докажите, что соответствие $\gamma \mapsto \sigma^{-1}$ – гомоморфизм групп $\pi_1(X_3, v) \to S_3$.

Решение

$$u \in Y_3$$
$$\Gamma(0) = u$$
$$\Gamma(1) = \mathbb{R}_\sigma(u)$$
$$v = p(u) \in X_3$$
$$\gamma(0) = \gamma(1) = v$$

Лемма о накрывающем пути:
$\forall$ пути $s : I \to X_3$, начинающемся в v,
$\exists!$ путь $\tilde{s} : I \to Y_3$, начинающийся в u и накрывающий s
То есть

$$\begin{tikzcd} Y_3 \arrow[d, "p"'] & {[0,1]} \arrow[l, "\Gamma"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ X_3 & \end{tikzcd}$$

$$\exists\ \tilde{s} : I \to X_3 \quad \gamma(0) = \gamma(1) = v \quad \exists!\ \Gamma : I \to Y_3 \mid \Gamma(0) = u$$

Следовательно $\pi_1(X_3, v)$ состоит из петель γ_i, которым однозначно соответствуют $\sigma_i \Rightarrow$ соответствуют σ_i^{-1}
(так как $\forall\ \sigma_i\ \exists!\ \sigma_i^{-1} \mid \sigma_i \cdot \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \cdot \sigma_i = \mathrm{id}$)

$$\pi_1(X_3, v) \xrightarrow{f} S_3$$
$$\gamma \xrightarrow{f} \sigma^{-1}$$
$$f(\gamma_i) = f(p(R_{\sigma_i}(u))) = \sigma_i^{-1}$$
$$f(\gamma_1) \cdot f(\gamma_2) = f(p(R_{\sigma_1}(u))) \cdot f(p(R_{\sigma_2}(u))) = fp(u_{\sigma_1(1)}, u_{\sigma_1(2)}, u_{\sigma_1(3)}) \times fp(u_{\sigma_2(1)}, u_{\sigma_2(2)}, u_{\sigma_2(3)}) = (1)$$

Так как $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = p(R_{\sigma_1}(u) \cdot R_{\sigma_2}(u))$ то

$$(1) = fp(u_{\sigma_2\sigma_1(1)}, u_{\sigma_2\sigma_1(2)}, u_{\sigma_2\sigma_1(3)}) = fp(R_{\sigma_2\sigma_1}(u)) = (\sigma_2\sigma_1)^{-1} = \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$$

То есть это гомоморфизм, что и требовалось доказать.

B

Условие
Докажите, что группа $\pi_1(X_3, v)$ некоммутативна

Решение
рассмотрим перестановки $\sigma_1 = (1,3)(2),\ \sigma_2 = (3,1,2)$
Тогда

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (12)(3)$$
$$\sigma_2 \cdot \sigma_1 = (123)$$
$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \neq \sigma_2 \cdot \sigma_1$$
$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 \neq \gamma_2 \cdot \gamma_1$$

Откуда следует что группа $\pi_1(X_3, v)$ некоммутативна