Содержание

1

1.1 ОДУ и его решение

Равенство вида $F(y^{(n)}, ..., y'', y', y, x) = 0$, где F — непрерывная по совокупности аргументов функция со значениями в $\mathbb{R}^k$, y — k-мерная вектор-функция с значениями в $\mathbb{R}^k$.

Решением ОДУ называется $y\colon I \to \mathbb{R}^k$, дифференцируемая нужное число раз и при подстановке в уравнение дающая тождество.

1.2 Сведение ОДУ высокого порядка к первого порядка

$$\begin{cases} F(y'_{n-1}, y_{n-1}, ..., y_1, y_0, x) = 0, \\ y'_{n-2} = y_{n-1}, \\ \vdots \\ y'_1 = y_2, \\ y'_0 = y_1. \end{cases}$$

y_0 — решение $F(y^{(n)}, ..., y', y, x) = 0 \Rightarrow (y_0, y_1 = y'_0, ..., y_{n-1} = y_0^{(n-1)})$ — решение системы.

► y_0 — решение $F(y^{(n)}, ..., y', y, x) = 0 \Rightarrow y = y_0$, тогда $y_1 = y'_0, ..., y_{n-1} = y_0^{(n-1)}$. Значит, $y'_{n-1} = y_0^{(n)}$. Тогда первое уравнение системы имеет вид $F(y_0^{(n)}, y_0^{(n-1)}, ..., y'_0, y_0, x) = 0$, чьим решением является y_0. ◄

1.3 Задача Коши для уравнений первого и высших порядков

- Первый порядок: $\begin{cases} y' = f(y, x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$ y — решение уравнения в первой строчке.
- Высший порядок: $\begin{cases} y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, ..., y', y, x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$ y — решение уравнения в первой строчке.

1.4 Задача Коши с параметром

$\begin{cases} y'(x) = f(y, x, \lambda), \\ y(x_0) = y_0(\lambda), \end{cases}$ для высшего порядка аналогично.

1.5 НЕТ Сведение ее к задаче Коши, где параметр входит только в начальное условие

2 ГОТОВО

2.1 Теорема локального существования и единственности задачи Коши (формулировка)

$F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ открыто, такова, что

1) F непрерывна,

2) F липшицева по x: $\exists L > 0$, т.ч. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$, т.ч. $(x,t),(y,t) \in \Omega$, выполнено $|F(x,t) - F(y,t)| \leq L|x-y|$.

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $(x_0, t_0) \in \Omega$. Тогда

1) $\exists I \subset \mathbb{R}, t_0 \in I, x\colon I \to \mathbb{R}^n$, являющаяся решением задачи Коши $\dot{x}(t) = F(x,t), x(t_0) = x_0$,

2) если $\hat{x}\colon J \to \mathbb{R}^n$ — решение этой задачи Коши, то $x(t) = \hat{x}(t)\ \forall t \in I \cap J$.

2.2 Сведение к эквивалентному интегральному уравнению

Задача Коши: $\begin{cases} \dot{x} = F(x,t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$. Покажем, что x — решение задачи Коши $\Leftrightarrow$ x — решение $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(x(\tau), \tau) d\tau$ (считаем x непрерывным).

► • x — решение задачи Коши. Значит (или из условия), x непрерывно. Т.к. F непрерывно, $t \mapsto F(x(t), t)$ непрерывно как композиция непрерывных функций. Значит, $\dot{x} = F(x,t)$ непрерывно. Тогда проинтегрируем от t_0 до t обе части: $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} F(x(\tau), \tau) d\tau$.

• x — решение интегрального уравнения. x непрерывно $\Rightarrow F(x(\tau), \tau)$ непрерывно. Тогда продифференцируем по t — верхнему пределу интегрирования — обе части интегрального уравнения. По теореме Барроу производная определенного интеграла от непрерывной функции по его переменному верхнему пределу существует и равна подынтегральной функции от верхнего предела: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = F(x(t), t)$. Начальное условие тоже выполнено: $x(t_0) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_0} (...) = x_0$. ◄

2.3 Примеры уравнений, когда единственность отсутствует

1. $\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x^{\frac{2}{3}}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$ — задача Коши. Два ее решения: $x_1(t) = t^3, x_2(t) = 0$. Пример связан с недифференцируемостью правой части.

2. $x : J \to \mathbb{R}^d$ — решение задачи Коши. $I \subset J$ — интервал, $t_0 \in I$. $x|_I : I \to \mathbb{R}^d$ — также решение задачи Коши.

3

3.1 Теорема локального существования и единственности задачи Коши (формулировка)

$F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ открыто, такова, что

1) F непрерывна,

2) F липшицева по x: $\exists L > 0$, т.ч. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$, т.ч. $(x,t),(y,t) \in \Omega$, выполнено $|F(x,t) - F(y,t)| \le L|x-y|$.

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $(x_0,t_0) \in \Omega$. Тогда

1) $\exists I \subset \mathbb{R}, t_0 \in I, x\colon I \to \mathbb{R}^n$, являющаяся решением задачи Коши $\dot{x}(t) = F(x,t), x(t_0) = x_0$,

2) если $\hat{x}\colon J \to \mathbb{R}^n$ — решение этой задачи Коши, то $x(t) = \hat{x}(t)\ \forall t \in I \cap J$.

3.2 НЕТ СУЩЕСТВОВАНИЯ Существование и единственность решений соответствующего интегрального уравнения

Задача Коши: $\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. Соответствующее интегральное уравнение: $y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, t(\tau))d\tau$.

Единственность. Если $f(t,y)$ непрерывна по t и y и удовлетворяет условию Липшица по y: $\exists N > 0$, т.ч. $|(f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le N|y_1 - y_2|\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$, т.ч. $(t,y_1),(t,y_2) \in \Omega$, то решение интегрального уравнения единственно.

► Пусть интегральное уравнение имеет решения $y_1(t), y_2(t)$. Тогда
$$\begin{cases} U(t) = y_1(t) - y_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau)))d\tau, \\ U(t_0) = 0. \end{cases}$$

Известно, что модуль интеграла не превосходит интеграл модуля: $|U(\tau)| = |\int\limits_{t_0}^{t} (f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau)))d\tau| \le \int\limits_{t_0}^{t} (|f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))|)d\tau$.

Из условия Липшица: $|f(\tau, y_1) - f(\tau, y_2)| \le N|y_1(t) - y_2(t)| = N(U(\tau))$. Тогда $|U(\tau)| \le \int\limits_{t_0}^{t} (|f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))|)d\tau \le N \int_{t_0}^{t} |U(\tau)|d\tau$.

Лемма Гроноулла-Беллмана. Если непрерывная функция $Z(t)$ удовлетворяет $0 \le Z(t) \le k\int_{t_0}^{t} Z(\tau)d\tau + g(t)(*)$, где $k = const, t \ge t_0$, то $0 \le Z(t) \le k\int_{t_0}^{t} g(t)e^{k(t-\tau)}d\tau d\tau + g(t)$. Докажем позже.

Т.к. $N = const, g(t) = 0$, по этой лемме у нас $0 \le |U(\tau)| \le 0 \Rightarrow U(\tau) = 0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t)$. **Доказано**.

Теперь **докажем лемму**. Пусть $R(t) = \int_{t_0}^t Z(\tau)d\tau, R(t_0) = 0, R' = Z(t)$. Подставим в $(*)$, получим $0 \leq R'(t) \leq kR(t) + g(t)$.

Тогда $R'(t) - kR(t) \leq g(t)$. Т.к. $(e^{-kt})' = e^{-kt} \cdot -k$, то $(R(t)e^{-kt})' = R'(t)e^{-kt} - kR(t)e^{-kt}$, это неравенство имеет вид $(R(t)e^{-kt})'e^{kt} \leq g(t)$ или $(R(t)e^{-kt})' \leq g(t)e^{-kt}$. Зная, что $g(t_0) = 0$, проинтегрируем неравенство: $R(t)e^{-kt} \leq \int_{t_0}^t g(\tau)e^{-k\tau}d\tau$, т.е. $R(t) \leq \int\limits_{t_0}^t g(\tau)e^{k(t-\tau)}d\tau$.

Тогда из $0 \leq R'(t) \leq kR(t) + g(t)$ и того, что $R(t) = \int_{t_0}^t Z(t)d\tau$, получим $0 \leq Z(t) \leq k\int_{t_0}^t g(\tau)e^{k(t-\tau)}d\tau + g(t)$. ◀

Существование. Если $f(t,y)$ непрерывна по t, y и удовлетворяет условию Липшица по y, то решение уравнения существует в интервале $t_0 - M < t < t_0 + M,\ |f| < M$.

4 ГОТОВО

4.1 Теорема о локальной непрерывной зависимости решений задачи Коши от параметром

см следующую стр

Теорема 2.1.4. *Пусть функция $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1+m}$ открыто (координаты в этом $\mathbb{R}^{n+1+m}$ мы будем обозначать $(x_1, \ldots, x_n, t, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$), удовлетворяет следующим условиям:*

- *F непрерывна,*
- *F липшицева по x: существует $L > 0$, такое что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R}^m$, для которых $(x, t, \lambda), (y, t, \lambda) \in \Omega$, выполнено $|F(x, t, \lambda) - F(y, t, \lambda)| \le L|x - y|$.*

Пусть также дана непрерывная функция $x_0\colon \Lambda \to \mathbb{R}^n$, где $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ открыто.

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_0 \in \Lambda$, таковы, что $(x_0(\lambda), t_0, \lambda) \in \Omega$. Тогда

- *существует интервал $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, открытое множество $V \subset \Lambda$, $\lambda_0 \in \Lambda$, и функция $x\colon I \times V \to \mathbb{R}^n$, являющаяся решением задачи Коши*

$$\dot{x}(t, \lambda) = F(x, t, \lambda), \quad x(t_0) = x_0(\lambda);$$

- *если $\hat{x}\colon J \to \mathbb{R}^n$ — решение этой задачи Коши при некотором $\hat{\lambda} \in V$, то $x(t, \hat{\lambda}) = \hat{x}(t)$ при всех $t \in I \cap J$.*

Доказательство. 1. Как уже говорилось, рассмотрим отображение Φ_λ, определённое формулой (2.1.4). В качестве пространства, где «живут» функции x, рассмотрим

$$E_{I,\varepsilon} = \{x\colon \overline{I} \to B_\varepsilon(x_0(\lambda_0)) \mid x \text{ непрерывна}\};$$

параметр $\varepsilon > 0$ и интервал $I \ni t_0$ мы выберем ниже. По известной теореме из курса анализа пространство $C(\overline{I} \to \mathbb{R}^n)$ с нормой $\|x\| = \sup_{t\in\overline{I}} |x(t)|$ будет полно; тогда полно и $E_{I,\varepsilon}$ как его замкнутое подмножество.

2. Перейдём к доказательству того, что к $\Phi_\lambda\colon E_{I,\varepsilon} \to E_{I,\varepsilon}$ применима параметрическая версия принципа сжимающих отображений. По ходу дела мы сформулируем некоторые условия на ε и I, а также $V \ni \lambda_0$, их совместность мы проверим далее.

2а. Нам нужно, чтобы Φ_λ было корректно определено. Для этого выберем такие $\varepsilon_0 > 0$, $I_0 \ni t_0$, $V_0 \subset \lambda$, что $\overline{B}_{\varepsilon_0}(x_0(\lambda_0)) \times \overline{I_0} \times \overline{V}_0 \subset \Omega$. Тогда при

$$\varepsilon \le \varepsilon_0, \quad I \subset I_0, \quad V \subset V_0$$

для любого $\lambda \in V$ и любой $x \in E_{I,\varepsilon}$ выражение $F(x(\tau), \tau, \lambda)$, $\tau \in I$, будет корректно определено, то есть Φ_λ будет определено.

2б. Проверим, что $\Phi\colon E_{I,\varepsilon} \times V \to C(\overline{I} \to \mathbb{R}^n)$ будет непрерывно. Действительно, F непрерывна на компакте $\overline{B}_{\varepsilon_0}(x_0(\lambda_0)) \times \overline{I_0} \times \overline{V}_0$, а значит, равномерно непрерывна на нём. В частности, для любого γ существует $\delta_1(\gamma)$, что если $|\lambda - \hat{\lambda}| < \delta_1$ и $|y - \hat{y}| \le \delta_1$, то $|F(y, t, \lambda) - F(\hat{y}, t, \hat{\lambda})| < \gamma$. Аналогично, (равномерная) непрерывность x_0 на $\overline{V}_0$ даёт, что для любого γ существует $\delta_2(\gamma)$, что если $|\lambda - \hat{\lambda}| < \delta_2$, то $|x_0(\lambda) - x_0(\hat{\lambda})| < \gamma$. Наконец, положим $\delta(\gamma) = \min(\delta_1(\gamma), \delta_2(\gamma))$.

Возьмём $x, \hat{x} \in E_{I,\varepsilon}$, $\|x - \hat{x}\| < \delta = \delta(\gamma)$ и $\lambda, \hat{\lambda} \in \overline{V}_0$, $|\lambda - \hat{\lambda}| < \delta$, тогда

$$|\Phi(x, \lambda)(t) - \Phi(\hat{x}, \hat{\lambda})(t)| \le |x_0(\lambda) - x_0(\hat{\lambda})| + \int_{t_0}^{t} |F(x(\tau), \tau, \lambda) - F(\hat{x}(\tau), \tau, \lambda)|\, d\tau \le \gamma + |t - t_0| \cdot \gamma.$$

Итак, $\|\Phi(x, \lambda) - \Phi(\hat{x}, \hat{\lambda})\|_{C(\overline{I}\to\mathbb{R}^n)} \le (1 + \mu)\gamma$, где $\mu = \max_{t\in\overline{I}} |t - t_0|$ — максимальное отклонение точек I от t_0. Значит, отображение Φ непрерывно.

2в. Далее, нам нужно, чтобы $\Phi(E_{I,\varepsilon} \times V) \subset E_{I,\varepsilon}$. Мы потребуем даже больше: $\Phi(E_{I,\varepsilon} \times V) \subset E_{I,5\varepsilon/6}$, причины для этого станут ясны ниже (см. п. 4). Оценим $\Phi(x, \lambda)$ следующим образом:

$$|\Phi(x, \lambda)(t) - x_0(\lambda_0)| \le |x_0(\lambda) - x_0(\lambda_0)| + \int_{t_0}^{t} |F(x(\tau), \tau, \lambda)|\, d\tau.$$

Первое слагаемое будет меньше $\varepsilon/2$, если $\lambda \in V_1(\varepsilon)$, где $V_1(\varepsilon) = V_0 \cap B_{\delta_2(\varepsilon/2)}(\lambda_0)$. Для оценки второго слагаемого положим

$$M = \max\{|F(x, t, \lambda)|, (x, t, \lambda) \in \overline{B}_{\varepsilon_0}(x_0(\lambda_0)) \times \overline{I_0} \times \overline{V}_0\}.$$

Тогда второе слагаемое не превосходит μM и будет меньше $\varepsilon/3$ при $\mu M < \varepsilon/3$. Итак, мы требуем

$$V \subset V_1(\varepsilon), \quad I \subset \left(t_0 - \frac{\varepsilon}{3M}, t_0 + \frac{\varepsilon}{3M}\right).$$

2г. Наконец, требуется, чтобы Φ_λ сжимало, например, с коэффициентом $q = 1/2$. Возьмём $x, \hat{x} \in E_{I,\varepsilon}$, $\lambda \in V$. Тогда

$$|\Phi_\lambda(x) - \Phi_\lambda(\hat{x})| \leq \int_{t_0}^{t} |F(x(\tau), \tau, \lambda) - F(\hat{x}(\tau), \tau, \lambda)|\, d\tau \leq \int_{t_0}^{t} L|x(\tau) - \hat{x}(\tau)|\, d\tau \leq L|t_0 - t| \cdot \|x - \hat{x}\|.$$

Следовательно, Φ_λ сжимает с коэффициентом $L\mu \leq L\varepsilon/3M$ и мы требуем, что

$$\frac{L\varepsilon}{3M} < \frac{1}{2}.$$

3. Выбор ε, I и V осуществляется теперь в таком порядке: сначала выберем $\varepsilon = \min(\varepsilon_0, 3M/2L)$, затем выберем $V = V_0 \cap V_1(\varepsilon)$ и $I \subset I_0 \cap (t_0 - \varepsilon/3M, t_0 + \varepsilon/3M)$.

Применяя принцип сжимающих отрезков с параметром, мы заключаем, что при $\lambda \in V$ существует решение $x(t, \lambda) = x_\lambda(t)$ задачи Коши, определённое на отрезке $\overline{I}$. При этом отображение $\lambda \mapsto x_\lambda$ из V в $E_{I,\varepsilon} \subset C(\overline{I} \to \mathbb{R}^n)$ непрерывно. Но это значит, что $x\colon \overline{I} \times V \to \mathbb{R}^n$ непрерывно,[1] и первый пункт теоремы доказан.

[1]Приведём доказательство этого факта. Пусть $(t, \lambda) \in \overline{I} \times V$. Для $\varepsilon > 0$ найдём такую окрестность $V_\varepsilon \ni \lambda$, что при $\hat{\lambda} \in V_\varepsilon$ верно $\|x_\lambda - x_{\hat{\lambda}}\| < \varepsilon/2$ (это непрерывность $\lambda \mapsto x_\lambda$). С другой стороны, из непрерывности x_λ следует, что при $\hat{t} \in B_\delta(t)$ верно $|x_\lambda(t) - x_\lambda(\hat{t})| < \varepsilon/2$. Тогда при $(\hat{t}, \hat{\lambda}) \in B_\delta(t) \times V_\varepsilon$ получаем

$$|x(t, \lambda) - x(\hat{t}, \hat{\lambda})| \leq |x(t, \lambda) - x(\hat{t}, \lambda)| + |x(\hat{t}, \lambda) - x(\hat{t}, \hat{\lambda})| \leq \varepsilon/2 + \|x_\lambda - x_{\hat{\lambda}}\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

4. Для доказательства единственности заметим, что, как видно из описанной в п. 3 процедуры выбора параметров, интервал I всегда можно укорачивать, не нарушая требования, перечисленные в пп. 2а–г. В частности, можно было бы воспользоваться единственностью неподвижной точки у сжимающего отображения Φ_λ на $E_{I \cap J, \varepsilon}$ (или, точнее, $E_{I \cap J', \varepsilon}$, где $J' \Subset J$ — нам нужно, чтобы $\hat{x}$ было определено на замыкании рассматриваемого интервала). Однако мы не знаем, что $\hat{x}|_{\overline{I \cap J'}}$ лежит в $E_{I \cap J', \varepsilon}$. Поэтому это рассуждение требует следующей доработки.

Итак, пусть $J' \Subset J$ и $\hat{x}|_{\overline{I \cap J'}} \notin E_{I \cap J', \varepsilon}$. С другой стороны, $|\hat{x}(t_0) - x_0(\lambda_0)| = |x_0(\hat{\lambda}) - x_0(\lambda_0)| \leq \varepsilon/2$ (поскольку $V \subset V_1(\varepsilon)$). Значит, существует интервал $K \subset I \cap J'$, $t_0 \in K$, такой что $\hat{x}|_{\overline{K}} \in E_{K,\varepsilon} \setminus E_{K, 5\varepsilon/6}$ (проверьте!). Тогда $\hat{x}|_{\overline{K}}$ — неподвижная точка $\Phi_\lambda\colon E_{K,\varepsilon} \to E_{K,\varepsilon}$, однако $\Phi_\lambda(E_{K,\varepsilon}) \subset E_{K, 5\varepsilon/6}$ (см. п. 2в), т. е. $\hat{x}|_{\overline{K}} = \Phi_\lambda(\hat{x}|_{\overline{K}}) \in E_{K, 5\varepsilon/6}$.

Таким образом, $|\hat{x}(t) - x_0(\lambda_0)| \leq \varepsilon$ при $t \in \overline{I \cap J'}$. Как уже говорилось, в этом случае $x|_{\overline{I \cap J'}}$ и $\hat{x}|_{\overline{I \cap J'}}$ будут неподвижными точками $\Phi_\lambda\colon E_{I \cap J', \varepsilon} \to E_{I \cap J', \varepsilon}$, а значит, совпадут. Поскольку $J' \Subset J$ произвольно, $x(t) = \hat{x}(t)$ при всех $t \in I \cap J$. $\square$

Замечание. Пусть F в этих теоремах — C^1-гладкая функция на Ω (или хотя бы F'_x непрерывна на Ω) и $\Omega' \Subset \Omega$. Тогда, как следует из доказательства теоремы, длину отрезка I можно взять одной и той же для всех $(x_0(\lambda), t_0, \lambda) \in \Omega'$.

Действительно, $\overline{\Omega'}$ — компакт, поэтому непрерывная функция $\rho(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ достигает на нём минимума β. Пусть Ω'' — $\beta/2$-окрестность Ω'. Тогда $\Omega'' \Subset \Omega$. Множество $\overline{B}_{\varepsilon_0}(x_0(\lambda_0)) \times \overline{I_0} \times \overline{V}_0$ в п. 2а будем выбирать так, чтобы оно лежало не только в Ω, но и в $\overline{\Omega''}$, при этом его размеры отделены снизу от нуля (нужно вырезать «кубик» в шарике радиуса $\beta/2$). В последующих пунктах для определения L и M нужны значения $\sup |F|$ и $\sup \|F'_x\|$ по этому «кубику», но их можно заменить теми же супремумами по всему компакту $\overline{\Omega''}$.

Это замечание понадобится нам далее, при обсуждении продолжимости решений.

Теорема. **(Принцип сжимающих отображений с параметром)** Пусть $\Phi : X \times \Lambda \to X$ – непрерывное отображение, где X, Λ – метрические пространства, причём X полно. Пусть существует такое $q < 1$, что при всех $x, y \in X$ и всех $\lambda \in \Lambda$ верно (каждая фундаментальная последовательность сходится)

$$\rho(\Phi(x, \lambda), \Phi(y, \lambda)) \le q\rho(x, y).$$

Будем обозначать $\Phi_\lambda(x) = \Phi(x, \lambda)$. Тогда если $z(\lambda)$ – неподвижная точка отображения Φ_λ, то $z : \Lambda \to X$ непрерывна.

Доказательство. Напомним схему доказательства обычного принципа сжимающих отображений. Если $\Psi : X \to X$ сжимает с коэффициентом q, то возьмём любую точку y_0 и положим $y_n = \Psi^n(y_0)$. Тогда $\rho(y_n, y_{n+1}) \le q^n \rho(y_0, \Psi(y_0))$, откуда

= p(Ψ^n (y0), Ψ^n(Ψ(y0))) <= qp(Ψ^(n - 1) (y0), Ψ^(n - 1) (y0)) <= ... <= q^n p(y0, Ψ(y0))

$$\rho(y_n, y_m) \le \sum_{k=\min(n,m)}^{\infty} q^n \rho(y_0, \Psi(y_0)) = q^{\min(m,n)} \frac{\rho(y_0, \Psi(y_0))}{1-q}.$$

по нер-ву треуг

т.к. q < 1, при достаточно большом m или n эта величина сколь угодно мала

Поэтому y_n фундаментальна, а значит, имеет предел y.

Заметим, что если в последней оценке мы перейдём к пределу при $n \to \infty$ и положим $m = 0$, то получим

$$\rho(y_0, y) \le \frac{\rho(y_0, \Psi(y_0))}{1-q}.$$

Неформально говоря, это неравенство означает, что если y_0 «почти неподвижна» (мало смещается под действием Ψ), то она достаточно близка к «настоящей» неподвижной точке y.

Применим это соображение к нашей ситуации. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda, z_0 = z(\lambda_0)$. Тогда при $\lambda \in \Lambda$ будем строить $z(\lambda)$, итерируя точку z_0. Из оценки на $\rho(y_0,y)$ получим, что

$$\rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) = \rho(z_0, z(\lambda)) \le \frac{\rho(z_0, \Phi(z_0, \lambda))}{1-q} = \frac{\rho(\Phi(z_0, \lambda_0), \Phi(z_0, \lambda))}{1-q}.$$

В силу непрерывности Φ мы можем для любого ε выбрать такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $\rho(\Phi(z_0, \lambda_0), \Phi(z_0, \lambda)) < \varepsilon(1-q)$ при $\rho(\lambda, \lambda_0) < \delta$, а тогда при $\rho(\lambda, \lambda_0) < \delta$ будет верно и $\rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) < \varepsilon$. □

4.2 Принцип сжимающих отображений с параметром

5

5.1 Глобальная единственность решений ОДУ

Глобальная теорема о единственности. Запишем задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

$$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d, \Omega \subset \mathbb{R}^{1+d} \text{ — открыто},$$

$$f, f'_x \in C(\Omega)$$

Тогда если

$$x^{(1)}\colon I^{(1)} \to \mathbb{R}^d, x^{(2)}\colon I^{(2)} \to \mathbb{R}^d \text{ — решения задачи Коши, то } x^{(1)}|_{I^{(1)} \cap I^{(2)}} \equiv x^{(2)}|_{I^{(1)} \cap I^{(2)}}.$$

► Рассмотрим $\{t \geq t_0 : x^{(1)}|_{[t_0,t]} = x^{(2)}|_{[t_0,t]}\} = A$. Считаем, что $x^{(1)}, x^{(2)}$ определены на всем $[t_0, t_1]$. Хотим показать, что $A = I^{(1)} \cap I^{(2)}$.

(1) $t_0 \in A$ (помним, что $x(t_0) = x_0$),

(2) $t \in A \Rightarrow \forall t' \in [t_0, t] \quad t' \in A$ (если решения совпали на каком-то отрезке, то и на его подотрезке тоже).

Из этих наблюдений сделаем вывод, что A может иметь один из следующих видов:

1) $A = [t_0, +\infty)$. Значит, решения совпадают от t_0 вправо $\Rightarrow I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ имеют вид $I^{(1)} = (..., +\infty), I^{(2)} = (..., +\infty)$. Значит, $x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$ при $t \in [t_0, +\infty)$.

2) $A = [t_0, \tau), \tau \in \mathbb{R}$. Если $\sup I^{(1)} = \tau$ или $\sup I^{(2)} = \tau$, то при $t \geq t_0$ доказали, а при $t < t_0$ аналогично.

Теперь пусть τ — не максимум какого-либо интервала $I^{(1)}$ или $I^{(2)}$. Значит, τ лежит в каждом из интервалов (если бы не лежала, то не было бы ограничений $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ на $[t_0, t]$). Раз каждая функция $x^{(1)}, x^{(2)}$ непрерывна, то $x^{(1)}(\tau) = \lim\limits_{t \to \tau - 0} x^{(1)}(t) = \lim\limits_{t \to \tau - 0} x^{(2)}(t) = x^{(2)}(t)$. Выходит, $\tau \in A$. Но мы сказали, что $\tau \notin A$.

3) $A = [t_0, \tau], \tau \in \mathbb{R}$. $x^{(1)}, x^{(2)}$ — решения задачи Коши, тогда $x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$ при $t \in \overline{B}_\delta(x)$ по локальной теореме о существовании и единственности $\Rightarrow [t_0, t + \delta) \subset A$. Противоречие. ◄

5.2 Продолжение решений ОДУ

Определение. Решение $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ — непродолжимо, если не существует решения $\hat{x}\colon J \to \mathbb{R}^n$, $I \subset J\colon \hat{x}|_I = x$.

Теорема. Всякое решение продолжается до непродолжимого, если верна теорема о существовании и единственности, т.е. $f, f'_x \in C$.

► 1) Пусть X — множество всех решений задачи Коши. Рассмотрим $J = \bigcup\limits_{(x I \to \mathbb{R}^n) \in X} I$, J — открытое множество, интервал.

Если $t \in J$, то $t \in I$ для $(x\colon I \to \mathbb{R}^n) \in X$. Тогда $[t_0, t] \subset I$, т.е. $[t_0, t_1] \subset J$. Следовательно, $J = (\inf J, \sup J)$.

2) Определим $\overline{x} : J \to \mathbb{R}^n$ так: $\overline{x}(t) = x(t)$, если $(x\colon I \underset{t \in I}{\to} \mathbb{R}^n) \in X$ (т.е. любое решение, у которого t входит в область определения $\overline{x}$). Корректность: $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ — два решения, $t \in I_1 \cap I_2$. Из глобальной теоремы о единственности $x_1|_{I_1 \cap I_2} = x_2|_{I_1 \cap I_2}$ получаем, что $x_1(t) = x_2(t)$.

3) $\overline{x} \in X$ — покажем, что x — решение. Если $t \in J$, то $\exists (x : I \to \mathbb{R}^n) \in X$, $t \in I$. Тогда $B_\delta(t) \subset I$ (I — открытое множество). Тогда $\overline{x}|_{B_\delta(t)} = x|_{B_\delta(t)}$. Раз функции совпали в маленькой окрестности, то у них одинаковые производные: $\dfrac{d\overline{x}}{dt}(t) = \dfrac{dx}{dt}(t)$. Т.к. x — решение, $\dfrac{dx}{dt}(t) = \dot{x}(t) = f(t, x(t)) = f(t, \overline{x}(t)), \overline{x}(t_0) = x_0$.

4) $\overline{x}$ непродолжимо. Пусть нет: тогда $\exists (\tilde{x}\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n) \in X$, $\tilde{I} \supset I$. Но J — это объединение всех областей определения, т.е. $\tilde{I} \subset J$. Противоречие. ◄

5.3 (НЕТ) Максимальный интервал продолжимости решения

5.4 Пример уравнения, где решение определено не на всем интервале времени, где определена правая часть

Решением уравнения $\dot{x} = x^2 + 1$ является $x(t) = tg(t)$. Но тангенс не определен в точках $\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, а правая часть уравнения определена на всех x.

6

6.1 НЕ ЗАПИСАЛА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Глобальная непрерывная зависимость решений ДУ от параметров

$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda), \\ x(t) = x_0(\lambda), \end{cases}$ $(*)$. x_{λ_0} — решение $(*_{\lambda_0})$ (т.е. при $\lambda = \lambda_0$), $x_{\lambda_0} : I \to \mathbb{R}^n$, где I — отрезок (взяли на решении-интервале отрезок). $F, F'_x \in C(\Omega)$. Тогда $\exists U \ni \lambda_0$,

(1) $\forall \lambda \in U$ решение $x_\lambda(*_\lambda)$ существует на I (и единственно по глобальной теореме о существовании и единственности)Ю

(2) $x(\lambda, t) = x_\lambda(t)$, x непрерывно на $U \times I$.

доказательство во второй лекции на 17:22

6.2 (надо еще раз переварить) Теорема о продолжении решения до границы компакта

Пусть $f, f'_x \in C(\Omega), K \subset \Omega$ — компакт, $(t_0, x_0) \in \Omega, x : J \to \mathbb{R}^n$ — непродолжимое решение задачи Коши $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t) = x \end{cases}$ $(\#)$. Тогда существует $t_0 < T < \sup J$, т.ч. $(t, x(t)) \notin K$ при $t \in (T, \sup J)$.

► 1) Если $\sup J = \infty$, то $T = \max(t \mid (t, x) \in K)$ (максимум существует, т.к. компакт ограничен, а $x(t)$ непрерывен).

2) Если $\sup J = t_+ \in \mathbb{R}$

Напомним теорему о существовании и единственности. Если $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$, то решение задачи Коши $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(\tilde{t}) = \tilde{x}, \end{cases}$ определено на $B_\tau(\tilde{t})$, $\tau = \tau(\varepsilon, \delta, M, L)$, где M и L находятся так: $B = \overline{B_\delta}(\tilde{t}) \times \overline{B_\varepsilon}(\tilde{x}) \subset \Omega, \sup\limits_B |f| \le M, \sup\limits_B |f'_x| \le L$.

Пусть $\rho = \min\limits_K (dist((t, x), \mathbb{R}^n \backslash \Omega))$. Эта функция положительная, т.к. для каждой точки из компакта мы можем взять шарик положительного радиуса внутри Ω, значит, расстояние до точки вне Ω будет не меньше этого радиуса.

Рассмотрим $\tilde{K} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : dist((t, x), K) \le \rho/2\}$ — множество достаточно близких к компакту точек. Оно замкнуто, т.к. это множество, где непрерывная функция принимает значения из замкнутого множества. $\tilde{K} \subset \Omega$: если точка из $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ находится на расстоянии до K, меньшим $rho/2$, т.е. расстояние от K до этой точки не больше $\rho/2$, т.е. расстояние между K и $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ не больше $\rho/2$ (т.к. расстояние между множествами — inf расстояний точек множеств, т.е. оно не больше расстояния между нашей точкой и K), т.е. $\rho \le \rho/2$, что неправда. $\tilde{K}$ ограничено, т.к. $K \subset B_R$ (K компакт в $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ ограничен) $\Rightarrow \tilde{K} \subset B_{R+\rho/2}$, т.к. по определению $\tilde{K}$ расстояние от любой его точки до компакта не больше $\rho/2$. Значит, $\tilde{K}$ — компакт.

Пусть $\varepsilon = \delta = \rho/4$. Тогда $\forall(\tilde{t}, \tilde{x}) \in K$ верно, что $B = \overline{B}_\delta(\tilde{t}) \times \overline{B}_\varepsilon(\tilde{x}) \subset \tilde{K}$, т.к., если возьмем шарик с радиусом $\rho/2$ в центре с $(\tilde{t}, \tilde{x})$, все точки внутри шарика будут на расстоянии $\leq \rho/2 \Rightarrow$ их расстояние до K не превосходит $\rho/2 \Rightarrow$ они в $\tilde{K}$ по определению. Поэтому произведение окрестностей радиусов, не превосходящих $\rho/2$, также лежит в $\tilde{K}$. Значит, $\sup\limits_B |f| \leq \sup\limits_{\tilde{K}} |f| := M$, аналогично для $|f'_x|$ назовем L точную грань. Тогда для теоремы о существовании и единственность $\tau = \tau_K$ можно считать одинаковым для всех точек компакта.

Положим $T = t_+ - \tau_K$. Если $\exists t \in (T, t_+)$, т.ч. $(\hat{t}, x(\hat{t})) \in K$, то задача Коши $\begin{cases} \dot{y} = f(t, y), \\ y(\hat{t}) = x(\hat{t}), \end{cases}$ $(*)$ имеет решение $y\colon B_{\tau_K}(\hat{t}) \to \mathbb{R}^n$. С другой стороны, x — тоже решение задачи Коши $(*)$.

Тогда существует непродолжимое решение $(*)$ — $\overline{y}$, т.ч. $\overline{y}(t_0) = x(t_0) = x_0$, т.к. оно продолжает $x, \Rightarrow \overline{y}$ — решение задачи Коши $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ для $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Тогда $\overline{x}$ — непродолжимое для этой задачи Коши — то есть непродолжимое решение $\overline{y}$.

$\overline{y}$ определено при $t = t_+$ и равно $y(t_+)$, определенное, т.к. $y\colon B_{\tau_K}(\hat{t}) \ni t_+$, а $\overline{x}$ — непродолжимое решение задачи Коши на Ω — не определено при $t = t_+$ (потому что $t_+ = \sup J$, J — это интервал $\Rightarrow$ не содержит свой sup $\Rightarrow$ не содержит t_+, а непродолжимое решение определено на J). Противоречие с тем, что $\overline{x}$ — продолжение $\overline{y}$. ◄

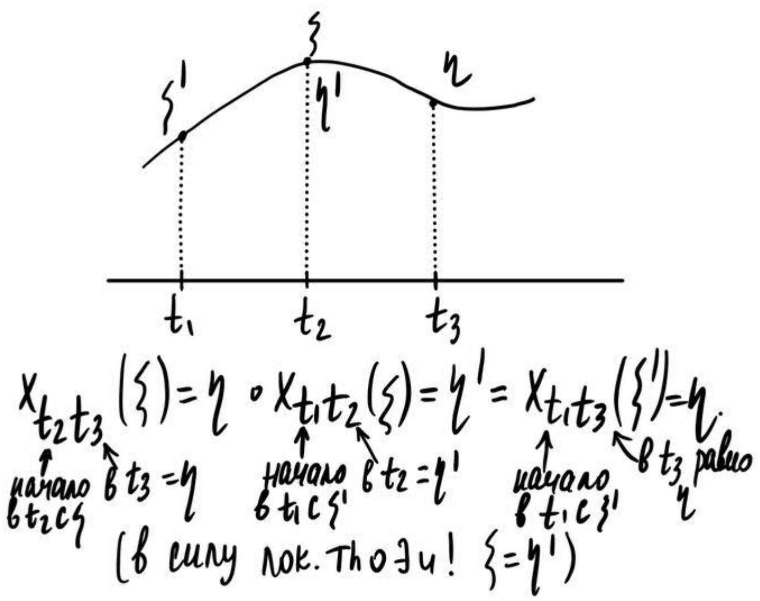
7 ГОТОВО

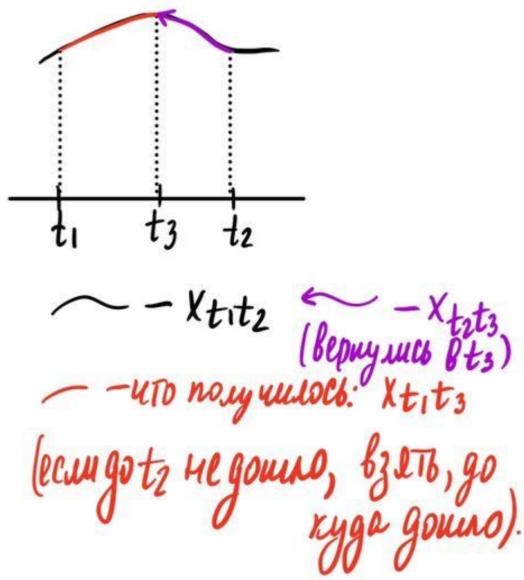
7.1 Оператор коши ДУ и его свойства

$\dot{x} = F(t,x), F, F'_x \in C(\Omega)$. Отображение $x_{t_0t_1}(\xi) = \nu$, если решение задачи Коши $\begin{cases} \dot{x} = F(t,x), \\ x(t_0) = \xi \end{cases}$ равно ν при $t = t_1$.

(1) $x_{tt} = \mathrm{id}$,

(2) $x_{t_2t_3} \circ x_{t_1t_2} = x_{t_1t_3}$ (если t_2 между t_1 и t_3, то области определения совпадают, иначе — на пересечении областей определения).





(3) $x_{ts}^{-1} = x_{st}$ (из (2): $x_{ts} \circ x_{st} = x_{ss} = \mathrm{id} \Rightarrow x_{ts}^{-1} = x_{st}$.

(4) $x_{ts}(y)$ непрерывно по (t,s,y),

(5) x_{ts} — гомеоморфизм.

Доказательство (4): $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = y \end{cases}$. Пусть $z(s) = x(t_0+s)$, тогда $\begin{cases} \frac{dz}{ds}(s) = \dot{x}(t_0+s) = f(t_0+s, x(t_0+ \\ z(0) = y. \end{cases}$

Тогда задача Коши переписывается так: $\begin{cases} \frac{dz}{ds} f(t_0+s, z), \\ z(0) = y. \end{cases}$ Это задача Коши с параметром (t_0, y). Т.к. f непрерывна по совокупности аргументов, тогда и от параметров $\frac{dz}{ds}$ зависит непрерывно (композиция непрерывных функций). То есть $z_{t_0,y}(s)$ непрерывно по совокупности аргументов (решение задачи Коши). Тогда $x_{t_0,t_1}(y) = z_{t_0,y}(t_1 - t_0)$ непрерывно.

Доказательство (5): x_{ts} определено на открытом (открытом из глобальной теоремы о непрерывной зависимости) $A_{ts} \subset \mathbb{R}^n$. $B_{ts} = x_{ts}(A_{ts}) = A_{st}$ (было начало в s, перевелось в начало в t, было с концом в t, перевелось с концом в s, стало начало в t и конец в s), $x_{ts} : A_{ts} \to A_{st}, x_{st} : A_{st} \to A_{ts}$, x_{ts}, x_{st} — непрерывны.

7.2 Автономные ДУ

Нет зависимости от времени: $\dot{x} = f(x)$.

7.3 Сдвиг по времени переводит решения в себя

Если x — решение автономного ДУ, то $\hat{x} = x(t + a)$ — тоже: $\dot{\hat{x}}(t) = \dot{x}(t + a) = f(x(t + a)) = f(x(t + a)) = f(\hat{x}(t))$.

7.4 Преобразования потока автономного ДУ и их свойства

Преобразования потока автономного ДУ — это $g^t = x_{0,t}$.

(1) $g^0 = \mathrm{id}$,

(2) $g^{t+s} = g^t \circ g^s = x_{0t} \circ x_{0s} =$ сдвиг x_{0t} на $s = x_{s,t+s} \circ x_{0,s} = x_{0,t+s} = g^{t+s}$,

(3) $g^{-t} = (g^t)^{-1}$,

(4) $g^t(x)$ непрерывно по (t, x),

(5) g^t — гомеоморфизм.