Алгебра
1 курс
2019 – 2020
Владислав Мозговой

23 июня 2020 г.

1

Пример

Условие
Рассмотрим циклические группы C_2 и C_3 поряков 2 и 3, состоящие из элементов $\{1, a\}$ $(a^2 = 1)$ и $\{1, b, b^2\}$ $(b^3 = 1)$ соответственно. Зададим их полупрямое произведения $3 \circ 2$, построенное по автоморфизму ϕ порядка 2 группы C_3, которое переводит $b \mapsto b^{-1}$, как множество произведений $\{b^j a^i \mid 0 \leqslant j < 3,\ 0 \leqslant i < 1\}$ со следующим правилом умножения:

$$(b^j a^i) \cdot (b^k a^l) := b^j (a^i b^k a^{-i}) a^i a^l = b^j \varphi^i (b^k) a^{i+l} = b^{j+(-1)^i k} a^{i+l}$$

Покажите, что умножение ассоциативно и задает группу, изоморфную группе перестановок S_3

Решение

$$((b^j a^i)(b^k a^l))(b^p a^q) = (b^{j+(-1)^i k} a^{i+l})(b^p a^q) = (b^{j+(-1)^i k+(-1)^{i+l} p} a^{i+l+q})$$
$$(b^j a^i)((b^k a^l)(b^p a^q)) = (b^j a^i)(b^{k+(-1)^l p} a^{l+q}) = (b^{j+(-1)^i k+(-1)^i(-1)^l p} a^{i+l+q})$$

Рассмотрим

$$C_2 = \{1, a\} \simeq \{e, (12)\} \quad \text{вместо } (12) \text{ можно взять } (23) \text{ или } (31)$$
$$C_3 = \{1, b, b^2\} \simeq \{e, (123), (132)\}$$
$$S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (132)\}$$

Если $i = 0$ то $(b^j a^0)(b^k a^l) = (b^{j+k} a^l)$ что соответствует $(123)^j (123)^k (12)^l = (123)^{j+k} (12)^l$
Если $i = 1$ то $(123)^j (12)(123)^k (12)^l = (123)^{j-k} (12)^{1+l}$

Задача

А

Условие
Вычислите порядок числа 2 в группе обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/(631\mathbb{Z})^\times$

Решение
Заметим, что $\text{ord}(2) = n,\ \phi(631) = 630,\ \frac{\phi(631)}{n} \in \mathbb{N}$
Тогда $\text{ord}(2) = 2^{x_1} 3^{x_2} 5^{x_3} 7^{x_4},\ \text{ord}(2) \leqslant 630,\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0$
Тогда можно рассматривать 2 в степенях вида $2^{x_1} 3^{x_2} 5^{x_3} 7^{x_4}$, и тогда $\text{ord}(2) = 45$, так как это наименьшая степень подобного вида, при которой $2^n = 1 \bmod 631$

Б

Условие
Найдите автоморфизм порядка 7, у циклической группы порядка 631

Решение

$$F:\ \mathbb{Z}_7^\times \hookrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_{631}^\times)$$
$$F^7: b \to b^\alpha \to b^{\alpha^2} \to \ldots \to b^{\alpha^7} = b \bmod (631) \ \Leftrightarrow\ \alpha^7 = 1 \bmod (631)$$
$$\alpha = 1,\ 21,\ 133,\ 269,\ 427,\ 441,\ 601$$

Автоморфизмы порядка 7: $b \to b^\alpha,\ \alpha = 1,\ 21,\ 133,\ 269,\ 427,\ 441,\ 601$

в

Условие
Опишите какую-нибудь неабелеву группу G, построенную, как полупрямое произведение двух циклических групп порядков 7 и 631. Точнее опишите какое-нибудь правило умножения на множестве пар

$$\{b^j a^i \mid 0 \leqslant j < 631,\ 0 \leqslant i < 7\}$$

которое задаст структуру группы

Решение
Зададим полупрямое произведение, построенное по автоморфизму из прошлого пункта задачи, тогда:

$$(b^j a^i)(b^k a^l) = b^j (a^i b^k a^{-i}) a^i a^l = b^{j+(21)^i k} a^{i+l}$$

Тогда заметим, что:

1.
$$((b^j a^i)(b^k a^l))(b^m a^n) = (b^{j+(21)^i k} a^{i+l})(b^m a^n) = b^{j+(21)^i k+(21)^{i+l} m} a^{i+l+m}$$
$$(b^j a^i)((b^k a^l)(b^m a^n)) = (b^j a^i)(b^{k+(21)^l m} a^{l+n}) = b^{j+(21)^i k+(21)^{i+l} m} a^{i+l+m}$$

2.
$$b^0 a^0 = 1$$

3.
$$(b^j a^i)^{-1} = (b^{-j(21)^{7-i}} a^{7-i})$$
$$(b^j a^i)^{-1} (b^{-j(21)^{7-i}} a^{7-i}) = b^{j+(21)^i (-j)(21)^{7-i}} a^7 = b^{j-j(21)^7} = b^{j-j} = 1$$

Откуда группа неабелева

г

Условие
Вычислите порядок коммутанта группы G

Решение
$G = Z_{631} \rtimes Z_7$
$a^{-1} b a = b^{21}$
Коммутатор $[b,a] = b^{-1} a^{-1} b a = b^{20}$, то есть циклическая подгруппа $\langle b^{20} \rangle \in [G,G]$

$$(b^j a^i)((b^{20})^n)(b^{-j(21)^{7-i}} a^{7-i}) = (b^{j+20n} a^i)(b^{-j(21)^{7-i}} a^{7-i}) = b^{j+20n+(21)^7(-j)} a^7 = b^{20n} \in \langle b^{20} \rangle$$

в $G/\langle b^{20} \rangle$: $[b,a]\langle b^{20} \rangle = b^{20}\langle b^{20} \rangle = \langle b^{20} \rangle$, откуда $[G,G] \subset \langle b^{20} \rangle \Leftrightarrow [G,G] = \langle b^{20} \rangle$
Тогда порядок $[G,G] = \frac{631}{\gcd(631,20)} = 631$

Коммутатор имеет вид:

$$[b^j a^i, b^k a^l] = (b^j a^i)(b^k a^l)((b^k a^l)(b^j a^i))^{-1} =$$
$$(b^{j+(21)^i k} a^{l+i})(b^{k+(21)^l j} a^{i+l})^{-1} = (b^{j+(21)^i k} a^{i+l})(b^{(-k-(21)^l j)(21)^{7-i-j}} a^{7-i-l}) =$$
$$b^{j+(21)^i k+(21)^{i+l}(-k-(21)^l j)(21)^{7-i-j}} a^7 = b^{j+(21)^i k+(21)^7(-k-(21)^l j)} = b^{j+(21)^i k-k-(21)^l j-j} a^0$$

Д

Условие
Сколько классов сопряженности в группе G и каковы их порядки?

Решение
Рассмотрим класс сопряженности элеммента $b^k a^l$:

$$(b^i a^j)(b^k a^l)(b^{-j(21)^{7-i}} a^{7-i}) = b^{j+(21)^i k - j(21)^l a^l} = b^k(b^{j+(21)^i k-(21)^l j-k} a^0) a^l$$

Тогда все классы сопряженности равномощны $[G, G]$, так как $|H| = |gH| \quad \forall g \in G$
Откуда порядок всех классов сопряженности равен 631

Е

Условие
Для каждого возможного порядка класса сопряженности опишите представителей в каком-нибудь одном классе с данным порядком

Решение

2

А

Условие
Для каждого простого делителя p числа 790 опишите возможное количество силовских p-подгрупп

Решение
$790 = 2 \cdot 5 \cdot 79$

1.
$$
\begin{aligned}
&p = 2: \quad 790 = 2 \cdot 395 \\
&n = 1 \mod (2) \\
&790 = 2 \cdot 395 \;\Rightarrow\; n_2 \mid (1 \cdot 5 \cdot 79) \;\Rightarrow\; n_2 = 1, 5, 79
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
&p = 5: \quad 790 = 5 \cdot 158 \\
&n = 1 \mod (5) \\
&790 = 5 \cdot 158 \;\Rightarrow\; n_5 \mid (1 \cdot 2 \cdot 79) \;\Rightarrow\; n_5 = 1
\end{aligned}
$$

3.
$$
\begin{aligned}
&p = 79: \quad 790 = 2 \cdot 5 \\
&n = 1 \mod (79) \\
&790 = 79 \cdot 10 \;\Rightarrow\; n_{79} \mid (1 \cdot 2 \cdot 5) \;\Rightarrow\; n_{79} = 1
\end{aligned}
$$

Б

Условие
Докажите, что группа порядка 790 разрешима

Решение
Докажем более сильно утверждение – что группа порядка pqr $(p < q < r)$ разрешима
Пусть $n_p,\ n_q,\ n_r$ – количество Силовских подгрупп
$p \in \mathbb{P},\ m \in \mathbb{N},\ (p, m) = 1,\ |G| = pm$. Тогда в группе G элементов с $ord = p$ хотя бы $n_p(p-1)$.
Все группы Силова порядка p сопряжены, различны и циклические.
Тогда:

$$
\begin{aligned}
&n_q(q-1) + n_r(r-1) \leqslant pqr - 1 \\
&(1 + ra) \mid pqr \\
&n_r = 1, p, q, pq \\
&a \geqslant 1,\ \text{откуда } n_r = 1, pq \\
&\text{аналогично} n_q = 1, pr
\end{aligned}
$$

Тогда если $n_q \neq 1$:

$$n_q(q-r)+n_r(r-1) \geqslant r(q-1)+pq(r-1) = pqr + r(q-1) - pq$$

$$r(q-1) = rq - r = pq - p + rq - r - pq + p = p(q-1) + (r-p)(q-1) \geqslant$$
$$\geqslant p(q-1) + 2(q-1) > p(q-1) + p = pq \Rightarrow r(q-1) > pq$$

$$pqr + r(q-1) - pq > pqr \quad \text{противоречие, откуда } n_r = 1,\ n_q = 1$$

Если $n_r = 1$, то существует одна силовская подгруппа порядка r, она нормальна в G
Подгруппа порядка pq, $p < q$ имеет одну нормальную силовскую подгруппу порядка q ($(1+kq) \mid pq \Leftrightarrow k = 0$). Факторгруппа группы порядка pq по нормальной подгруппе порядка q имеет порядок p, обе группы разрешимы.

Докажем, что подгруппа порядка pq разрешима
Q – силовская q-подгруппа в G, $|Q| = q$, все силовские q-подгруппы сопряжены с ней.
$Nq = 1,\ g^{-1}Qg = Q, \quad \forall g \in G \Rightarrow Q \lhd G$, тогда $Q,\ G/Q$ – циклические $\Rightarrow G$ разрешима, иначе в любой силовской q-подгруппе найдется $q-1$ элемент порядка $q \Rightarrow |G| \geqslant Nq(q-1) \geqslant (q+1)(q-1) > pq$ –противчоречие

Подгруппа порядка r и pq разрешима, тогда группа pqr разрешима

Если $nq = 1$, то существует одна силовская подгруппа порядка q, нормальная в G, факторгруппа G по ней имеет порядок pr. Подгруппы q и pr аналогично разрешимы, откуда и pqr разрешима

В

Условие
Выпишите простые группы, которые входят в разложение Жордана-Гёльдера группы порядка 790.

Решение
$G_5 \lhd G,\ G_{79} \lhd G$
$G_5 \cap G_{79} = \{e\}$ у всех других элементов G_5 порядок 5, у G_{79} – порядок 79 $\Rightarrow G_5 \cdot G_{79} = G_5 \times G_{79}$, так как если $g_1 \in G_5,\ g_2 \in G_{79},\ g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = e$
$g_1 \in G_5,\ g_2 \in G_{79} \Rightarrow \forall g \in G \quad g g_1 g_2 g^{-1} = g g_1 g^{-1} \cdot g g_2 g^{-1} \in G_5 G_{79} \Rightarrow G_5 G_{79}$ – нормальная подгруппа
$G_5 \cdot G_{79} \hookrightarrow G \rightarrow G/_{G_5 \cdot G_{79}} = C_2$ – абелева группа
$G_5 \cdot G_{79} \rhd G_{79} \rhd e$, причем $G_5 \cdot G_{79}/G_{79} = C_5,\ G_{79/e} = G_{79}$
Получим композиционные факторы: C_2, C_5, C_{79} – они абелевы $\Rightarrow$ композиционный ряд.

Г

Условие
Приведите примеры по крайней мере 3 неизоморфных (поясните, почему) некоммутативных групп порядка 790.

Решение

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5 \cdot \mathbb{Z}_{79}):$

$\phi_{a,b}: \ (x,y) \mapsto (ax, by)$

$\Phi = \begin{cases} 0 \mapsto 0 \ \mathrm{id} \\ 1 \mapsto b \ \phi(a,b) \end{cases}$

$1+1=0 \ \Rightarrow \ \phi_{a,b}^2 = \mathrm{id} \ \Rightarrow \ \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ \begin{cases} |a| = 1 \\ |b| = 1 \end{cases}$

1. $a = 1, \ b = 1$
   $\phi_{a,b} = \mathrm{id} \ \Rightarrow \ \Phi$ – тривиален $\Rightarrow \ G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{79}$ – абелева
2. $a = 1, \ b = -1$
   $\Phi_1: \ 1 \mapsto (\phi(x,y) = (x-y))$
   Умножение на $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{79}) \times \mathbb{Z}_2$, заданная $\Phi:$

   $$((a_1,b_1),c_1) \cdot ((a_2,b_2),c_2) = ((a_1,b_1)(a_2 + (-1)^{c_1} b_2), c_1 + c_2) = ((a_1 + a_2, b_1 + (-1)^{c_1} b_2), c_1 + c_2) =$$
3. $a = -1, \ b = -1$
   $\Phi_2: \ 1 \mapsto (\phi: \ (a,b) \mapsto (-a, b))$
   $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{79}) \times \mathbb{Z}_2$
   $((a_1,b_1),c_1)((a_2,b_2),c_2) = ((a_1 + (-1)^{c_1} a_2, b_2 + (-1)^{c_1} b_2), c_1 + c_2)$

Д

Условие
Для каждой группы из вашего списка выпишите количество силовских подгрупп и сравните результат со своим ответом на первый пункт.

Решение

Е

Условие
Опишите с точностью до изоморфизма все группы порядка 790.

Решение

3

Задача 1

А

Условие
Выпишите какой-нибудь композиционный ряд группы

$$G = D_{119} \times D_{117} \times \mathrm{S}_4$$

Решение

$$D_{119} \simeq \mathbb{Z}_{119} \times \mathbb{Z}_2$$
$$119 = 17 \cdot 7$$
$$\mathbb{Z}_{119} \simeq \mathbb{Z}_{17} \cdot \mathbb{Z}_7$$

$$D_{117} \simeq \mathbb{Z}_{117} \times \mathbb{Z}_2$$
$$117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$$
$$\mathbb{Z}_{117} \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{13}$$

$$G = D_{119} \times D_{117} \times S_4 \supset \mathbb{Z}_{119} \times D_{117} \times S_4 \supset \mathbb{Z}_{17} \times D_{117} \times S_4 \supset D_{117} \times S_4 \supset$$
$$\supset \mathbb{Z}_{117} \times S_4 \supset \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_3 \times S_4 \supset \mathbb{Z}_{13} \times S_4 \supset S_4 \supset A_4 \supset V_4 \supset \mathbb{Z}_2 \supset \{e\}$$

Б

Условие
Опишите композиционные факторы в этом ряду

Решение

1. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
5. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
6. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
7. $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
8. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

В

Условие
Верно ли, что группа G разрешима?
Решение
Заметим, что группы: $\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_7,\ \mathbb{Z}_{13},\ \mathbb{Z}_{17}$ абелевы $\Leftrightarrow G$ – разрешима

Задача 2

Рассмотрим группу $H \subset S_{75}$, состоящую из перестановок чисел от 1 до 75, сохраняющих отношение сравнимости по модулю 5. То есть

$$\sigma \in H \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall i, j \sigma(i) - \sigma(j) \equiv i - j \mod (5)$$

и рассмотрим её подгруппу $K \subset H \subset S_{75}$, состоящую из таких перестановок сохраняющих остаток числа по модулю 5. То есть,

$$\sigma \in K \Leftrightarrow \forall i \equiv \sigma(i) \bmod 5$$

г

Условие
Покажите, что K – нормальная подгруппа группы H и вычислите порядки групп K и H;
Решение
Существует 5 классов эквивалентности:

1. $K_1 = \{1, 6, \dots, 71\}$ – остаток 1
2. $K_2 = \{2, 7, \dots, 72\}$ – остаток 2
3. $K_3 = \{3, 8, \dots, 73\}$ – остаток 3
4. $K_4 = \{4, 9, \dots, 74\}$ – остаток 4
5. $K_5 = \{5, 10, \dots, 75\}$ – остаток 0

Если i, j принадлежат одному классу эквивалентности, то $G(i) - G(j) \equiv 0$. Значит они переходят только в тот же класс эквивалентности, откуда следует, что H представляет классы целиком
K переставляет элементы внутри классов эквивалентности
Докажем, что $K \triangleright H: \quad h \in H \quad h^{-1}Kh = K$

1. h меняет классы местами
2. h^{-1} возвращает классы на свои первоначальные места. Если K не действует на рассматриваемый класс, то элементы вернутся на свои места, если K действует на класс, то элементы в классе будут переставлены каким-то образом
3. K преставляет элементы внутри класса

$\Rightarrow$ все классы на своих местах, но в одном из них элементы переставлены. $\Rightarrow\ K \triangleright H$
Найдем $|K|$: в классе 15! элементов, классов 5 $\Rightarrow |K| = (15!)^3$

д

Условие
Предъявите подгруппу $L \subset H$, такую что группа H представляется как полупрямое произведение $L \ltimes K$.
Решение
$l_1, l_2 \in L$ и $k_1, k_2 \in K$
Зададим операцию на полупрямом произведении: $(l_1k_1)(l_2k_2) = (l_1l_2, x) \quad x \cdot l_1l_2 = k_1l_1k_2l_2 \quad x = k_1l_1k_2l_1^{-1} \ \Rightarrow\ (l_1k_1)(l_2k_2) = (l_1l_2, k_1l_1k_2l_1^{-1})$

E

Условие
Опишите композиционные факторы группы H
Решение

$$H = L \ltimes K \supset A_5 \ltimes K \supset K = S_{15} \times S_{15} \times S_{15} \times S_{15} \times S_{15} \supset A_{15} \times S_{15} \times S_{15} \times S_{15} \times S_{15} \supset$$
$$\supset S_{15} \times S_{15} \times S_{15} \times S_{15} \supset A_{15} \times S_{15} \times S_{15} \times S_{15} \supset S_{15} \times S_{15} \times S_{15} \supset A_{15} \times S_{15} \times S_{15} \supset$$
$$\supset S_{15} \times S_{15} \supset A_{15} \times S_{15} \supset S_{15} \supset A_{15} \supset \{e\}$$

Факторы:

1. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
4. A_{15}
5. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
6. A_{15}
7. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
8. A_{15}
9. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
10. A_{15}
11. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
12. A_{15}
13. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

простые (так как A_n простая при $n \geqslant 5$)

4

Задача 1

Условие
Вычислите количество различных гомоморфизмов из циклической группы порядка $2^4 \cdot 43^3 \cdot 31^2$ в циклическую группу порядка $43^{11} \cdot 31^4 \cdot 3$
Решение
$\gcd(2^4 \cdot 43^3 \cdot 31^2, 43^{11} \cdot 31^4 \cdot 3) = 43^3 \cdot 31^2$
Ответ: $43^3 \cdot 31^2$

Задача 2

Условие
Вычислите количество различных гомоморфизмов из абелевой группы $\mathbb{Z}/\left((43^{11} \cdot 31^4)\,\mathbb{Z}\right) \oplus \mathbb{Z}/\left((43 \cdot 31^2)\,\mathbb{Z}\right)$ в абелеву группу $\mathbb{Z}/\left(43^3\mathbb{Z}\right) \oplus \mathbb{Z}/\left((2^4 \cdot 43^{11} \cdot 31)\,\mathbb{Z}\right)$
Решение
$\gcd(\mathbb{Z}/\left((43^{11} \cdot 31^4)\,\mathbb{Z}\right),\ \mathbb{Z}/\left(43^3\mathbb{Z}\right)) = 43^3$
$\gcd(\mathbb{Z}/\left((43 \cdot 31^2)\,\mathbb{Z}\right),\ \mathbb{Z}/\left((2^4 \cdot 43^{11} \cdot 31)\,\mathbb{Z}\right)) = 43 \cdot 31$
Откуда общее число $43^3 \cdot 43 \cdot 31 = 43^4 \cdot 31$
Ответ: $43^4 \cdot 31$

Задача 3

Вычислите порядок группы автоморфизмов абелевой группы G

А

Условие
$G := \mathbb{Z}/(43\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/(31 \cdot 3\mathbb{Z})$

Решение
$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{p/\mathbb{Z}}) = \mathbb{F}_p^* \simeq \mathbb{Z}/_{(p-1)\mathbb{Z}}$
$(43-1) \cdot ((31-1)(3-1)) = 42 \cdot 30 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Б

Условие
$G := \mathbb{Z}/((43 \cdot 31)\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/((43 \cdot 3)\mathbb{Z})$

Решение
$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\mathbb{Z}}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{p_1^{n_1}\mathbb{Z}}) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{p_2^{n_2}\mathbb{Z}})$
$\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{43\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{43\mathbb{Z}}) \oplus \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{31\mathbb{Z}}) \oplus \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}})$
Ответ: $(43^2-1)(43^2-43) \cdot (31-1) \cdot (3-1) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 43$

В

Условие
$G := \mathbb{Z}/\left((43^3)\,\mathbb{Z}\right) \oplus \mathbb{Z}/\left((43^3)\,\mathbb{Z}\right)$

Решение
$\mathrm{Aut}(G) = GL_2(\mathbb{F}_{43^3}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{43^3}^2)$
Ответ: $(43^3-1)(43^3-43) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 43$

5

Задача 1

Пусть G – факторгруппа свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^4$ по подгруппе порождённой строками матрицы

$$\begin{bmatrix} -130 & 245 & 0 & 120 \\ -10 & 5 & 0 & 0 \\ 60 & -80 & 20 & -60 \\ -60 & 120 & 0 & 60 \end{bmatrix}$$

А

Условие
Разложите G в прямую сумму циклических

Решение
$A = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$

$$\begin{bmatrix} -130 & 245 & 0 & 120 \\ -10 & 5 & 0 & 0 \\ 60 & -80 & 20 & -60 \\ -60 & 120 & 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -130 & 245 & 0 & 120 \\ -10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ -60 & 120 & 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 0 & 120 \\ -10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}$$

$A \simeq \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2 0 \oplus \mathbb{Z}_6 0 \oplus \mathbb{Z}$

Б

Условие
Разложите G в прямую сумму примарных циклически

Решение
$A \simeq \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{5^3}$

В

Условие
Чему равен максимальный возможный порядок её элементов

Решение
Рассмотрим элементы вида $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$
Пусть $A' = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2 0 \oplus \mathbb{Z}_6 0$
Тогда порядок элемента $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ в A равен порядку элемента $[\alpha, \beta, \gamma]$ в A'
$[\alpha, \beta, \gamma]$ – НОК порядков α в $\mathbb{Z}_5$, β в $\mathbb{Z}_{20}$, γ в $\mathbb{Z}_{60}$, откуда максимальный порядок элемента это 60, такой порядок достигается у $[1, 1, 1]$

г

Условие
Вычислите порядок элемента $[-132 \quad 248 \quad 1 \quad 120]$ в группе G

Решение

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ -132 & 248 & 1 & 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 2 & 248 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Порядок $[-132 \quad 248 \quad 1 \quad 120]$: $\#(2)$ в $\mathbb{Z}_5$, $\#(1)$ в $\mathbb{Z}_{20}$, $\#(0)$ в $\mathbb{Z}_{60}$, откуда:

Задача 3

Теория
Напомним, что цепным комплексом абелевых групп называется набор абелевых групп C_n и отображений $d_n : \ C_n \to C_{n-1}$, таких что композиция $d_n \circ d_{n+1} = 0$ для любого n. Для удобства комплекс обозначают $(C\bullet, d\bullet)$ или записывают в виде цепочки отображений:

$$\ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_n+1} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$$

n-мерной группой гомологий H_n называется фактор-группа $\ker(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$. Гомологиями комплекса $(C\bullet, d\bullet)$ называется набор всех групп гомологий $(H\bullet)$.
Условие
Вычислите гомологии комплекса

$$0 \to \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^4 \to 0$$

где отображение d задано матрицей

$$\begin{bmatrix} 14 & -14 & 0 \\ 14 & 126 & 140 \\ 28 & -308 & -266 \\ 0 & -140 & -98 \end{bmatrix}$$

Решение

$$d = \begin{bmatrix} 14 & -14 & 0 \\ 14 & 126 & 140 \\ 28 & -308 & -266 \\ 0 & -140 & -98 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 14 & -14 & 14 \\ 14 & 126 & 14 \\ 28 & -308 & 42 \\ 0 & -140 & 42 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 14 & -14 & 14 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & -336 & 14 \\ 0 & -140 & 42 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & -336 & 14 \\ 0 & -140 & 42 \end{bmatrix} \to$$
$$\begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & -56 & 14 \\ 0 & 0 & 42 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & -56 & 14 \\ 0 & -168 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & -56 & 14 \\ 0 & -28 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\ker d \cong 14\mathbb{Z} \oplus 28\mathbb{Z} \oplus 14\mathbb{Z}$$
$$\mathrm{im}\, d \cong \mathbb{Z}^3/_{\ker d} = 14\mathbb{Z} \oplus 14\mathbb{Z} \oplus 28\mathbb{Z}$$
$$\ker d_0 = \mathbb{Z}^4, \quad \mathrm{im}\, d_1 = \mathbb{Z}^3$$

Ответ:

$$H_0 = \ker d_0/\mathrm{im}\, d = \mathbb{Z}^4/\Big(\mathbb{Z}_{14} \oplus \mathbb{Z}_{14} \oplus \mathbb{Z}_{28}\Big)$$
$$H_1 = \ker d/\mathrm{im}\, d_1 = \Big(14\mathbb{Z} \oplus 14\mathbb{Z} \oplus 28\mathbb{Z}\Big)/\mathbb{Z}^3$$

6

Задача 1

Условие
Найдите наибольший общий делитель следующих многочленов с коэффициентами в поле $\mathbb{F}^2$:
$f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x$ и $g(x) = x^7 + x^6 + x^2 + x + 1$
Решение
По алгоритму евклида:

$$\gcd(x^7 + x^6 + x^2 + x + 1, x^6 + x^5 + x^4 + x) = \gcd(x^6 + x^5 + x^4 + x, x^5 + x + 1) =$$
$$\gcd(x^5 + x + 1, x^4 + x^2 + x + 1) = \gcd(x^4 + x^2 + x + 1, x^3 + x^2 + 1) = x^3 + x^2 + 1$$
$$g(x) = (x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x + 1)$$
$$f(x) = (x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x)$$

Задача 2

Условие
Разложите пространство $V := \mathbb{F}_2[x]/(f(x))$ в прямую сумму двух $3 - x$ мерных подпространств, инвариантных относительно умножения на x
Решение

$$V = \mathbb{F}_2[x]/_{f(x)} = \mathbb{F}_2[x]/_{x^3+x} \oplus \mathbb{F}_2[x]/_{x^3+x^2+1}$$

Элементы $\mathbb{F}_2[x]/_{x^3+x^2+1}$: $0, 1, x, x + 1, x^2, x^2 + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1$
$\phi(\alpha) = x\alpha$
$x(x^2 + 1) \equiv x^2 + x + 1 \bmod (x^3 + x^2 + 1)$
$x(x^2 + x + 1) \equiv x + 1 \bmod (x^3 + x^2 + 1)$
аналогично элементы $\mathbb{F}_2[x]/_{x^3+x}$: $0, 1, \ldots$
$\phi(\beta) = x\beta$
Пространство инвариантно

Задача 3

Условие
Вычислите матрицу и характеристический многочлен в каждом из этих 3-мерных подпространств, выбрав подходящий базис в V, такой что первые 3 базисных вектора порождают первое подпространство, а последние 3 – второе. Укажите этот базис явно
Решение
Базис в $\mathbb{F}_2[x]/_{x^3+x^2+1}$:

$$a_1 = x^3 + x^2 + 1$$
$$a_2 = x(x^3 + x^2 + 1)$$
$$a_3 = x^2(x^3 + x^2 + 1)$$

Так как $x(e_1) = x^6 + x^5 + x^3 = x^5 + x^4 + x^2 = e_3$
Базис в $\mathbb{F}_2[x]/_{x^3+x}$:

$$a_1 = x^3 + x$$
$$a_2 = x(x^3 + x)$$
$$a_3 = x^2(x^3 + x)$$

Так как $x(e_1) = x^6 + x^4 = x^5 + x^3 = e_3$

Тогда получается матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Многочлены для $\mathbb{F}_2[x]/_{x^3+x}$:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 1$$

Многочлены для $\mathbb{F}_2[x]/_{x^3+x^2+1}$:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) + 1 = -\lambda^3 + \lambda^2 + 1$$

Задача 4

Условие
Вычислите количество подпространств в $\mathbb{F}_2[x]/(g(x))$ инвариантных относительно умножения на x. Нульмерное подпространство и всё пространство также считаются подпространствами
Решение
$|\mathbb{F}_2/_{g(x)}| = \det(A) \cdot \det(B) = (-\lambda^3 + \lambda^2 + 1)$
$\lambda =$, других вещественных корней нет $\Rightarrow$ существет инвариантное пространство

Задача 5

Условие
Тот же вопрос о количестве x-инвариантных подпространств в пространстве $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$
Решение
Количество инвариантных подпространств равно количеству собственных значений матрицы оператора
$|\mathbb{F}_2/_{f(x)}| = \det(A) \cdot \det(B) = (-\lambda^3 + 1)(-\lambda^3 + \lambda^2 + 1)$
$\lambda = 1$, других вещественных корней нет $\Rightarrow$ существет $1 + 2 = 3$ инвариантных пространства

Задача 6

Условие
Тот же вопрос о количестве x-инвариантных подпространств в пространстве $\mathbb{F}_2[x]/(f(x)) \oplus \mathbb{F}_2[x]/(g(x))$
Решение

$|\mathbb{F}_2/_{f(x)}| \cdot |\mathbb{F}_2/_{g(x)}| =$
$\lambda =$, других вещественных корней нет $\Rightarrow$ существет инвариантное пространство

7

Задача 1

A

Условие
Найдите жорданову форму и жорданов базис матрицы

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Решение

$$|A - \lambda E| = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 & 2 \\ -3 & -\lambda & 8 \\ 1 & -1 & -6-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 33\lambda - 36 = -(\lambda+3)^2(\lambda+4) = 0$$

$$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -4$$

Тогда жорданова форма это

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем жорданов базис

$$\ker(A+4E) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A+3E) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A+3E)^2$$

$$(A+3E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ -3x_1 + 3x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 0 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда жорданов базис это

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Б

Условие
Опишите все A-инвариантные подпространства в C^3
Решение
Так как имеется 2 линейно независимых собственныз вектора, то A-инвариантные подпространства состоят из линейной комбинации этих векторов и подпространства A:
$\{c_1V_1\}, \{c_2V_2\}, \{c_1V_1 + c_2V_2\}, \{A\}, \{0\} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Задача 2

Рассмотрим блочную матрицу

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

А

Условие
Найдите все инвариантные подпространства размерности 3 соответствующего оператора

Решение
Рассмотрим матрицу:

$$F = A \oplus B$$

$$F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пространство V_1 называется инвариантным, если $F(V_1) \subset V_1$, v – собственный вектор, если $Fv = \lambda_1 v \ \Rightarrow FV \in V_1$
Инвариантные подпространства – $\{\sum x_i v_i\}$, где v_i – собственный, $x_i \in k$
Найдем собственные векторы

1.
$$A : \begin{pmatrix} 7-\lambda & 9 \\ -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2$$
$$\lambda_1 = 1$$
$$\begin{pmatrix} 7-\lambda & 9 \\ -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = (2 \quad 3)$$
$$V_1 = (-3 \quad 2)$$

2.

$$B: \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так как имеется всего 2 собственных вектора, то не существует инвариантных пространств размерности 3 помимо B

Б

Условие
Докажите, что множество операторов, коммутирующих с данным, образует векторное пространство и найдите его размерность

Решение
Так как $F = A \oplus B$, то рассмотрим A и B отдельно

$$AC = CA$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7a+9c & 7b+9d \\ -4a-5c & -4b-5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a-4b & 9a-5b \\ 7c-4d & 9c-5d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7a+9c = 7a-4b \\ 7b+9d = 9a-5b \\ -4a-5c = 7c-4d \\ -4b-5d = 9c-5d \end{cases} \qquad \begin{cases} 9c = -4b \\ 13b+9d = 9a \\ -4a = 13c-4d \\ -4b = 9c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9c = -4b \\ 13b+9d = 9a \\ -4a = -4b+4c-4d \end{cases} \qquad \begin{cases} 9c = -4b \\ b+d = a+c \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(13c-4d) & -\frac{1}{4}9c \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4d-13c & -9c \\ c & d \end{pmatrix}$$

Рассмотрим векторное пространство X_1, где $D \in X_1$ имеет вид C. Проверим, что $\alpha D + \beta E \in X_1$

$$\alpha \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4d_1-13c_1 & -9c_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \beta \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4d_1-13c_1 & -9c_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \alpha(4d_1-13c_1)+\beta(4d_2-13c_2) & -9(\alpha c_1+\beta c_2) \\ \alpha c_1+\beta c_2 & \alpha d_1+\beta d_2 \end{pmatrix}$$

Пусть

$$\alpha c_1 + \beta c_2 = c'$$
$$\alpha d_1 + \beta d_2 = d'$$

Тогда

$$\alpha D+\beta E=$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\alpha(4d_1-13c_1)+\beta(4d_2-13c_2) & -9(\alpha c_1+\beta c_2)\\ \alpha c_1+\beta c_2 & \alpha d_1+\beta d_2\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4d'-13c' & -9c'\\ c' & d'\end{pmatrix}\in X_1$$

Следовательно множество операторов, комутирующих с A является векторным пространством

Если матрицы в B и A' имеют общую систему собстенных векторов, то $A'B=BA'$
Так как $A'=HD_1H^{-1},\ B=HD_2H^{-1}$ то

$$A'B=HD_1H^{-1}HD_2H^{-1}=HD_1D_2H^{-1}$$
$$BA'=HD_2H^{-2}HD_1H^{-1}=HD_2D_1H^{-1}$$

Найдем собственные векторы B

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$(B-\lambda E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1 & | & 1\\ 1 & 1 & 0 & | & -1\\ -1 & -1 & 0 & | & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & | & 0\\ 1 & 1 & 0 & | & -1\end{pmatrix}$$

у B только 1 собственный вектор

Задача 3

Условие

Вычислите след оператора $A^4-3A^3-2A^2+A$, где A – оператор, заданный матрицей

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Решение

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & 2 \\ 11 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & 2 \\ 11 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 7 \\ 27 & 1 & 17 \\ 8 & 13 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 7 \\ 27 & 1 & 17 \\ 8 & 13 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -15 & 6 \\ 42 & 43 & -24 \\ -45 & -3 & 31 \end{pmatrix}$$

$$A^4 - 3A^3 - 2A^2 + A =$$

$$\begin{pmatrix} -8 & -15 & 6 \\ 42 & 43 & -24 \\ -45 & -3 & 31 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -9 & -1 & 7 \\ 27 & 1 & 17 \\ 8 & 13 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & 2 \\ 11 & 3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & -17 & -16 \\ -36 & 53 & 26 \\ -89 & -47 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 18 & -17 & -16 \\ -36 & 53 & 26 \\ -89 & -47 & 47 \end{pmatrix} = 18 + 53 + 47 = 118$$

Задача 4

А

Условие
Приведите матрицу

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

над полем F_5 к нормальной фробениусовой форме
Решение

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda & 4 \\ 4 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 17\lambda + 9 \underset{5}{\equiv} 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 2(\lambda+1)(2\lambda^2 - \lambda + 2)$$

Б

Условие
Вычислите количество B-инвариантных подпространств в F_5
Решение
Так как различным собственным числам $\lambda_1 \neq \lambda_3$ соответствует $v_1 \neq v_3$, то количество инвариантных подпространств:
$\{c_1V_1\}, \{c_3V_3\}, \{c_1V_1 + c_3V_3\}, \{B\}, \{0\}$
То есть 5

Задача 1

А

Условие
Проверьте,что 3 – является собственным значением матрицы

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

и найдите оставшиеся собственные значения этой матрицы.

Решение

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 & -3 \\ -2 & -2-\lambda & 3 \\ -3 & 3 & -3-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= -\lambda^3 - 7\lambda^2 + 6\lambda + 72 = -(\lambda - 3)(\lambda + 4)(\lambda + 6)$$
$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = -6$$

собственные значения A это $3, -4, -6$

Б

Условие
Найдите собственные векторы матрицы А

Решение

1. $\lambda = 3$

$$(A - \lambda E)X = (A - 3E)X = \begin{pmatrix} -2-3 & -2 & -3 \\ -2 & -2-3 & 3 \\ -3 & 3 & -3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$$
$$\det \begin{pmatrix} -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 \end{pmatrix} = 0$$
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda = -4$

$$(A - \lambda E)X = (A + 4E)X = \begin{pmatrix} -2+4 & -2 & -3 \\ -2 & -2+4 & 3 \\ -3 & 3 & -3+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. $\lambda = -6$

$$(A - \lambda E)X = (A + 6E)X = \begin{pmatrix} -2+6 & -2 & -3 \\ -2 & -2+6 & 3 \\ -3 & 3 & -3+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

в

Условие

Выпишите ортогональную замену переменных, приводящую квадратичную форму

$$-2x^2 - 4xy - 6xz - 2y^2 + 6yz - 3z^2$$

к главным осям (т.е. к виду $\sum a_i x_i^2$)

Решение

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \frac{(1,-1,-1)}{|(1,-1,-1)|} = \frac{(1,-1,-1)}{\sqrt{3}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$e_2 = \frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$$

$$e_3 = \frac{(1,-1,2)}{|(1,-1,2)|} = \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{0}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Задача 2

A

Условие
Предьявите базис в $\mathbb{R}^3$, в котором пара квадратичных форм

$$Q_1(x, y, z) := x(x + 2z) + y(y - z) + z(2x - y + 6z)$$
$$Q_2(x, y, z) := -7x^2 - 10xy - 28xz + 17y^2 - 92yz + 44z^2$$

одновременно приводятся к сумме квадратов $a_i x^2 + b_i y^2 + c_i z^2$ $(i = 1; 2)$. Выпишите получившиеся формы в новом базисе.

Решение

$$Q_1 :$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$
$$Q_2 :$$
$$\begin{pmatrix} -7 & -5 & -14 \\ -5 & 17 & -46 \\ -14 & -46 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q_2 - \lambda Q_1) = 0$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} -7 & -5 & -14 \\ -5 & 17 & -46 \\ -14 & -46 & 44 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & -5 & -14-2\lambda \\ -5 & 17-\lambda & -46+\lambda \\ -14-2\lambda & -46+\lambda & 44-6\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= -\lambda^3 + 27\lambda^2 + 360\lambda - 1296 = -(\lambda - 3)(\lambda + 12)(\lambda - 36)$$
$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = -12$$
$$\lambda_3 = 36$$

1. $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} -7-\lambda & -5 & -14-2\lambda \\ -5 & 17-\lambda & -46+\lambda \\ -14-2\lambda & -46+\lambda & 44-6\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-3 & -5 & -14-6 \\ -5 & 17-3 & -46+3 \\ -14-6 & -46+3 & 44-18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -10 & -5 & -20 \\ -5 & 14 & -43 \\ -20 & -43 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10x_1 - 5x_2 - 20x_3 \\ -5x_1 14x_2 - 43x_3 \\ -20x_1 - 43x_2 + 26x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda_2 = -12$

$$\begin{pmatrix} -7-\lambda & -5 & -14-2\lambda \\ -5 & 17-\lambda & -46+\lambda \\ -14-2\lambda & -46+\lambda & 44-6\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+12 & -5 & -14+24 \\ -5 & 17+12 & -46-12 \\ -14+24 & -46-12 & 44+72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 \\ -5 & 29 & -58 \\ 10 & -58 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 \\ -5x_1 + 29x_2 - 58x_3 \\ 10x_1 - 58x_2 + 116x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. $\lambda_3 = 36$

$$\begin{pmatrix} -7-\lambda & -5 & -14-2\lambda \\ -5 & 17-\lambda & -46+\lambda \\ -14-2\lambda & -46+\lambda & 44-6\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-36 & -5 & -14-72 \\ -5 & 17-36 & -46+36 \\ -14-72 & -46+36 & 44-216 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -43 & -5 & -86 \\ -5 & -19 & -10 \\ -86 & -10 & -172 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} & \frac{0}{\sqrt{2^2+1^2}} & \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} & \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} & \frac{0}{\sqrt{2^2+1^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} & \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} & \frac{-1}{\sqrt{2^2+1^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Б

Условие

Вычислите корни кубического многочлена

$$f(t) := \det\left(t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & -5 & -14 \\ -5 & 17 & -46 \\ -14 & -46 & 44 \end{bmatrix} \right)$$

Решение

$$f(t) := \det\left(t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & -5 & -14 \\ -5 & 17 & -46 \\ -14 & -46 & 44 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\det \begin{pmatrix} t-7 & -5 & 2t-14 \\ -5 & t+17 & -t-46 \\ 2t-14 & -t-46 & 6t+44 \end{pmatrix} =$$

$$t^3 + 27t^2 - 360t - 1296 = (t+3)(t-12)(t+36)$$

$$t_1 = -3,\ t_2 = 12,\ t_3 = -36$$

Задача 1

Условие

Дана операция $A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Найдите $\mathrm{tr}(A^{-2})$

Решение

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A_+^T = -1 \cdot A_+^T = -A_+^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{tr}(A^{-2}) = (-1)^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17$

Задача 2

Известно, что суммы i-тых степеней корней многочлена $f(x)$ третьей степени $3, 3$ и 3 для $i = 1, 2, 4$ соответственно

А

Условие
Найдите $f(x)$

Решение

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 3$$
$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (x_1 + x_2 + x_3)^4 - 6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2$$
$$-4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_2^3) + 4(x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 = 3$$

$$3^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 3$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^4 - 6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2$$
$$-4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_2^3) + 4(x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 = 3$$
$$(x_1 + x_2 + x_3)^4 - 6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2$$
$$-4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)) + 4(x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 = 3$$
$$3^4 - 6 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot x_1x_2x_3 = 3$$
$$81 - 54 - 36 + 12x_1x_2x_3 = 3$$
$$12x_1x_2x_3 = 12$$
$$x_1x_2x_3 = 1$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

Б

Условие
Найдите суммы 5-ых степеней корней многочлена $f(x)$

Решение

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$
$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = (x_1 + x_2 + x_3)^5 - 5(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$
$$-20x_1x_2x_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 15(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_1x_2x_3 - 10(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2)$$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 =$$
$$(x_1 + x_2 + x_3)^5 - 5((x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 3x_1x_2x_3)\cdot$$
$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 20x_1x_2x_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$
$$-15((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3))x_1x_2x_3$$
$$-10(x_1 + x_2 + x_3)((x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3))$$

$$1^5 + 1^5 + 1^5 = 3$$

Задача 3

A

Условие
Пусть многочлены $A(x), B(x)$ – многочлены с коэффициентами в поле, со страшим коэффициентом 1, и пусть $Q(x)$ – остаток от деления $B(x)$ на $A(X)$. Покажите что результанты многочленов $A(x)$ и $B(x)$ и многочленов $A(x)$ и $Q(x)$ совпадают.

Решение

$$A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1$$
$$B(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1$$
$$Q(x) = x^k + q_{k-1}x^{k-1} + \ldots + q_1$$
$$B = AS + Q \quad S \text{ – какой-то многочлен}$$
$$S(x) = x^l + s_{l-1}x^{l-1} + \ldots + a_1$$

$$AS = S_0A + S_1xA + \ldots + x^lA$$

При умножении A на x_i коэффициенты будут смещаться на i так как

$$x^iA = x^{n+i} + a_{n-1+i}x^{n-1+i} + \ldots + a_{0+i}x^i$$

Следовательно домножение A на x^i происходит элементарное преобразование строк, а следовательно дискриминант не изменяется.
Откуда следует, что так как $-SA + B$ – результат элементарных преобразований, то

$$R(A, B) = R(-SA + B, B) = R(Q, B)$$

Б

Условие

Вычислите дискриминант многочлена $x^8 + ax + b$ и выясните при каких $a, b \in \mathbb{F}_7$ многочлен $x^8 + ax + b$ делится на квадрат неприводимого многочлена над $\mathbb{F}_7$?

Решение

$$f'(x) = 8x^7 + a$$
$$D = a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (a_i - a_j)^2$$
$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D$$

$$R(f,f') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 8^8 b^7 - 7^7 a^8$$

$$D = \frac{R(f,f')}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0} = \frac{8^8 b^7 - 7^7 a^8}{(-1)^{\frac{8(8-1)}{2}} \cdot 1} = 8^8 b^7 - 7^7 a^8$$

Рассмотрим неприводимый многочлен $A = x^n + a_{n-1}x^n + \ldots + a_0,\ \forall i:\ a_i \in \mathbb{F}_7$. По основной теореме алгебры он имеет минимум один корень над $\mathbb{C}$, тогда $A = \prod_{i=1}(x - x_i)^{k_i},\ A^2 = \prod_{i=1}(x - x_i)^{2k_i}$, то есть имеет кратные корни. Следовательно если $x^8 + ax + b$ делится на A^2, то $D(A) = 0$. $D(A) = 8^8 b^7 - 7^7 a^8 \equiv 6b^7 = 0$, а следовательно $b = 0$, a – любое.