Лекция 2

Формулировка

$$(*)\begin{cases}\dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = 0\end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$F: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $D = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\varepsilon}(x_0) \subset \Omega$; $\|F\|_{C^0(D)} \leq M$

1. F - непр.
2. F - липшицева по x (т.е $\forall$ $(t,x),(t,y) \subset D$
   $|F(t,x) - F(t,y)| \leq L|x-y|$ / $F \in C^0$

Тогда $\exists\ \tau = \tau(\delta, \varepsilon, L, M)$, что задача Коши $(*)$ имеет единств. решение на $[t_0-\tau, t_0+\tau]$

Лемма: X - решение $(*)$ $\Leftrightarrow$ X - непр X - решение $X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds$.

Д-во: • X - решение $\Rightarrow$ X - дифференцируема $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\dot{x}$ - непрерывна~~ $\Rightarrow$ $F(s, x(s))$ - непр $\Rightarrow$ $X \in C^1$

$$x_0 \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds = x_0 \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\,ds = x(t)$$

• X - решение $x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds$

X - непр $\Rightarrow$ $F(s, x(s))$ - непр $\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = F(t, x(t))$

$X(t) = x_0 + \int \ldots\ x_0$.

$\square$

Принцип сжимающих отображений

Пусть (X, ρ) - полное метр. пр-во

$f: X \to X$

$\exists q < 1$, $\forall x, y \in X$ $\rho(f(x), f(y)) \leq q\,\rho(x,y)$

Тогда $\exists!\ z \in X$: $f(z) = z$

Д-во: Очевидно: возьмем $x, f(x), f^2(x), \ldots$ фундаментальна $\to$ сходится к непод.

Сканировано с CamScanner

Решение $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,(x(s))\,ds$

$E = \{ x : \overset{I}{[t_0-\tau, t_0+\tau]} \to B_\varepsilon(x_0$ - непр$\}$

$E \subset C^0(\overset{I}{[x_0-\tau, x_0+\tau]} \to \mathbb{R}^n)$, E замкн. в C^0

$\Rightarrow E$ - полное метрическое пр-во

$\tau < \delta$ $\boxed{\text{У1}}$

$\tau < \frac{\varepsilon}{M}$ - усл 2

$\tau \le \frac{1}{2L}$ $\boxed{\text{усл 3}}$

$\varphi : E \to E$

$\varphi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds.$

<u>Знаем:</u> $\boxed{\text{У1}}$

1) $\varphi(x)$ - определено

2) $\varphi(x)$ - непрерывная ф-я

$\cap$

$C^0([x_0-\tau, x_0+\tau] \to \mathbb{R}^n)$

3) $\forall t \in \overline{B}_\tau(t_0)$

$\varphi(x)(t) \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)$

<u>Д-во:</u>

$|\varphi(x)(t) - x_0| = |\int F(s(x(s))\,ds| \le \int_{t_0}^{t} |F(s,x(s))ds| \le$

$\le M \cdot |t_0 - t| \le M \cdot \tau \underset{\text{усл.2}}{\le} \varepsilon$

4) φ сжимает с $q = 1/2$

$|\varphi(x)(t) - \varphi(\tilde{x})(t)| = |\int_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds - \int_{t_0}^{t} F(s, x(s)\,ds| \le$ липшетц/x_n

$\le \int_{t_0}^{t} L \underbrace{|x(s) - \tilde{x}(s)|}_{\le \|x-\tilde{x}\|} ds \le L\,|t - t_0| \cdot \|x - \tilde{x}\| \le L\,\tau \cdot \|x - \tilde{x}\|.$

$\Rightarrow |\varphi(x)(t) - \varphi(\tilde{x})(t)| \le L\tau\,\|x - \tilde{x}\| \underset{\text{усл 3}}{\le} 1/2$

Сканировано с CamScanner

Получили, что если условие 1–3 выполнены, то
$\exists!\ x \in E_I$: x – решение $(**)$ – ~~инт~~ инт. уравнение.
(по принципу сжимающих отображений

II часть формулировки теоремы:

Если $\tilde{x}: J \to \mathbb{R}^n$ – решение $(*)$, то $x|_{I \cap J} = \tilde{x}|_{I \cap J}$

Доказательство II части:

Пусть K – отрезок в $I \cap J$

~~Тогда $\tilde{x}|_K$ – решение задачи Коши~~

Тогда если x – неподв. точка $\Phi(x)$ $[t_0-\tau, t_0+\tau]$

то $x|_K$, $\tilde{x}|_K$ – решения задачи Коши на K

$\Rightarrow$ по (1) для Φ_K $x|_K = \tilde{x}|_K$
единственности неподв. точки.

Совпадают на любом подотрезке $\Rightarrow$ совпадают везде.

$\square$

Задача Коши с параметром:

$\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases} (*_\lambda)$$ F – непр. по совокупности аргументов

$x(t, \lambda)$ – решение $(*_\lambda)$

Сканировано с CamScanner

Теорема (Локальная непрерывная зависимость от параметра)

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$$

$F: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$

$x_0 : \square \to \mathbb{R}^n$

1) $D = \overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\varepsilon(x_0^{(\lambda_0)}) + \overline{B}_\xi(\lambda_0) \subset \Omega$

$\forall \lambda \in B_\xi(\lambda_0)$ $\quad x_0(\lambda) \in \overline{B}_{\varepsilon/2}(x_0(\lambda_0))$.

2) $F \in C(D)$, $x_0 \in C(\overline{B}_\xi(\lambda_0))$

$\|F\|_{C(D)} \le M$. (непр $\Rightarrow$ ограничено)

3) F – липшицева по x на D.

$|F(t,x,\lambda) - F(t,y,\lambda)| \le L|x-y|$

Тогда:

(0) $(*_\lambda)$ имеет решение x на некотором интервале $B_\tau(t_0)$

$\tau = \tau(\delta, \varepsilon/2, L, M)$

из теоремы о $\exists!$

(1) $x_\lambda \in C^0(B_\tau(t_0) \to \mathbb{R}^n)$; $\lambda \to x_\lambda$ – непр. на $\overline{B}_\xi(\lambda_0)$

Эквив!

(1)' $x(\lambda,t) := x_\lambda(t)$

$x \in C(\underbrace{\overline{B}_\xi(\lambda_0) \times \overline{B}_\tau(t_0)}_{\Delta})$

Сканировано с CamScanner

Д-во: экв-ти

(1) $\Rightarrow$ (1)'

(t,λ) $\forall \varepsilon_0$ $\exists \alpha>0$

1) $\forall \lambda' \in B_\alpha(\lambda)$ $\|x_\lambda - x_{\lambda'}\| \le \varepsilon/2$

2) $\forall \varepsilon>0$ $\exists \beta>0: \forall t' \in B_\beta(t)$ $|x_\lambda(t) - x_\lambda(t')| < \varepsilon/2$

Тогда $\forall \lambda' \in B_\alpha(\lambda)$, $t' \in B_\beta(\lambda)$ $|x_\lambda(t) - x_{\lambda'}(t')| \le |x_\lambda(t) - x_\lambda(t')| + |x_\lambda(t') - x_{\lambda'}(t')| < \varepsilon$

(1) $\Rightarrow$ (1)'

x - непр на $\Delta \Rightarrow x$ равн. непр на Δ

$\forall \varepsilon$ $\exists \gamma>0$

$\forall \lambda, \lambda' : |\lambda - \lambda'| \le \gamma \Rightarrow \forall t$ $|x(t,\lambda) - x(t,\lambda')| \le \varepsilon$

$\forall \lambda, \lambda'$ $|\lambda-\lambda'| < \gamma(\varepsilon)$

$\|x_\lambda - x_{\lambda'}\|_{C^0(B_\tau(t_0))} \le \varepsilon$

Доказательство самой теоремы:

$E = \{x : \overline{B}_\tau(t_0) \to \overline{B}_\varepsilon(x_0) - \text{непр}\}$

$\Phi_\lambda : E \to E$

$\Phi_\lambda(x)(t) = x_0(\lambda) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), \lambda)\, ds$

Неподв точка Φ_λ = реш $(*_\lambda)$, т.е. x_λ

Принцип сжимающих отображений с параметром

$\varphi : \Lambda \times X \to X$ $\qquad \varphi(\lambda, x) = \varphi_\lambda(x)$

X – полное метрическое

Λ – метр.

1) φ – непр.

2) $\exists q_0 < 1$ $\forall \lambda \in \Lambda$ $\varphi_\lambda(x)$ - сжимает с коэфф q_0

$\forall x, y \in X$ $\quad \rho(\varphi_\lambda(x), \varphi_\lambda(y)) \le q_0\, \rho(x, y)$

Тогда если $z(\lambda)$ - неподв точка φ, то $z : \Lambda \to X$ - непр.

__Д-во:__

Докажем, что z непр в λ_0.

$z_0 = z(\lambda_0)$

$z_0,\ \varphi_\lambda(z_0),\ \varphi_\lambda^2(z_0) \dots$

$\rho(z_0, \varphi_\lambda(z_0)) = \rho(\varphi_{\lambda_0}(z_0), \varphi_\lambda(z_0))$

$\exists U \ni \lambda_0 : \forall \lambda \in U \quad \rho(\varphi_{\lambda_0}(z_0), \varphi_\lambda(z_0)) \le \varepsilon$.

$$\underbrace{z_0 \quad \varphi_\lambda(z_0)}_{\le \varepsilon} \quad \underbrace{\varphi_\lambda(z_0) \quad \varphi_\lambda^2(z_0)}_{\le q\varepsilon} \quad \underbrace{\varphi_\lambda^2(z_0) \quad \dots}_{\le q^2\varepsilon}$$

$\Rightarrow \rho(\varphi_\lambda^n(z_0), \varphi_\lambda^m(z_0)) \le \varepsilon \sum\limits_{k=n}^{m-1} q_0^k \le \dfrac{\varepsilon q^n}{1-q}$

$\varphi_\lambda^m(z_0) \xrightarrow{m\to\infty} z(\lambda)$

$\Rightarrow \rho(\varphi_\lambda^n(z_0), z(\lambda)) \le \dfrac{\varepsilon q^n}{1-q}$ $\qquad$ | перейти к пределу $m \to \infty$)

$\underline{n=0}$ $\quad \rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) \le \dfrac{\varepsilon}{1-q}$. $\to$ доказано $\qquad \square$

Потом докажем. φ-непр.

Сканировано с CamScanner