Экзамен. 25.12 Струихиной Ксении

№1 а) Поскольку эйлерова характеристика - гомотопический инвариант, то у нашего пространства она такая же, как у сферы (мы можем стянуть $\mathbb{R}^3 \setminus B(1)$ на границу $B(1)$ $\Rightarrow$

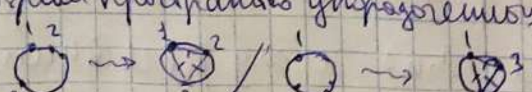
$\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B(1)} = 2$

б) Покажем гомотопию: стянем каждую окружность линейно в окружность с центром в центре сферы (рассматриваем окружности, которые лежат в параллельных плоскостях).

Тогда мы стянули наше пространство гомотопией на проективную плоскость. (каждая центральная окружность задается прямой, проходящей через центр ~~окружности~~).

$\chi(\mathbb{R}P^2) = 1 \Rightarrow \chi_{пр\text{-}ва} = 1$.

в) Рассмотрим накрытие нашего пространством упорядоченных точек. Такое накрытие, очевидно, локально тривиально. Любое клеточное разбиение базы можно поднять до клеточного разбиения накрывающего пространства, сделав необходимое количество копий клеток. Тогда эйлер. хар-ка изменится в число слоёв раз. Рассмотрим пространство упорядоченных троек. Оно стягивается в 2 окружности:



(равносторонние, «1» на месте)

Тогда все пространство стягивается на подпространство, состоящее из троек, образующих равносторонние треугольники. Это две окружности. Их эйлерова характеристика 0. Поэтому и у изначального пространства тоже (0 : 6 = 0). Ответ: 0.

№3а) Рассмотрим наше отображение в карте $z=1$.
$x = a+bi$, $y = c+di$ $f:(a,b,c,d) \to (a,-b,c,-d)$. Тогда
матрица Якоби f: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det M = 1$.

Поскольку мера рассматриваемого множества ненулевая, то это точки общего положения. Поскольку у каждой точки один прообраз, то степень отображения равна 1.

б) Аналогично предыдущему пункту, можно рассмотреть карту $w=1$. тогда $f:(x,y,z) \to (x^3, y^3, z^3)$.

$J = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 \end{pmatrix}$ $|J| = 27x^2y^2z^2 \geq 0$. И вновь у каждой точки у нас один прообраз $\Rightarrow$ степень отображения равна 1.

№2а) $\mathbb{Z}_p$; $[0,1]\times S^2 / \{0\}\times\{x\} \sim \{1\}\times\{-x\}$

Рассмотрим клеточное разбиение нашего пространства, $x \in S^2$

$\{x\}$, $\{x\}\times(0,1)$, $S^2\setminus\{x\}$, $(S^2\setminus\{x\})\times(0,1)$ $\Rightarrow$ цепной комплекс

$0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_p \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_p \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_p \xleftarrow{2} \mathbb{Z}_p \leftarrow 0$ $\mathbb{Z}_p \xleftarrow{2} \mathbb{Z}_p$ – т.к. у антиподального отображения степень -1.

Тогда

k	0	1	2	3
H_k	$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}_p$	0	0

б) Клеточное разбиение сохраним из пункта а).
Цепной комплекс:

$0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_p \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_p \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_p \xleftarrow{2} \mathbb{Z}_p \leftarrow 0$

Тогда $H_0 = H_1 = H_2 = H_3 = \mathbb{Z}_p$

№3в) Посмотрим на количество прообразов у точки: это равносильно числу решений уравнения $\frac{f(z) - xg(z)}{g(z)} = 0$
Поскольку $(f,g)=1$, то у неособой точки корней в $\mathbb{C}$ – ровно максимальная степень многочленов f и g
$\deg f = m$, $\deg g = n$, $\Rightarrow$ прообразов $\max(m,n)$. Каждый многочлен
все прообразы с полож. знаком
сохраняет ориентацию $\Rightarrow$ степень отображения = max (

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z & 2w \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 & 3w^2 \end{pmatrix}$$

не макс ранг в т.: $x=y=z=w \in$ поверхности

№4. $f = x+y+z+w$

$x^2+y^2+z^2+w^2=1 \qquad x^3+y^3+z^3+w^3=0$

Можем воспринимать x и y как функции от z и w. ~~тогда~~ Точка критическая,

$$\begin{cases} x^2(z,w)+y^2(z,w)+z^2+w^2=1 \\ x^3(z,w)+y^3(z,w)+z^3+w^3=0 \end{cases}$$

тогда $\partial_z(x^2(z,w)+y^2(z,w)+z^2+w^2)=0$

тогда $2x(z,w)\cdot\partial_z(x(z,w)) + 2y(z,w)\,\partial_z(x(z,w)) + 2z = 0$

Аналогично со вторым равенством: $3x^2(z,w)\cdot\partial_z(x(z,w)) + 3y^2(z,w)\,\partial_z(y(z,w)) + 3z^2=0$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial z} + 1 = 0 \\ x\frac{\partial x}{\partial z} + y\frac{\partial y}{\partial z} + z = 0 \\ x^2\frac{\partial x}{\partial z} + y^2\frac{\partial y}{\partial z} + z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x\left(1+\frac{\partial y}{\partial z}\right) + y\frac{\partial y}{\partial z} + z = 0 \\ -x^2\left(1+\frac{\partial y}{\partial z}\right) + y^2\frac{\partial y}{\partial z} + z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{z-x}{y-x} = \frac{\partial y}{\partial z} \\ z^2-x^2-\frac{(z-x)(y^2-x^2)}{(y-x)} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$z^2-x^2-(z-x)(y+x)=0 \quad (z-x)(z-y)=0$

Для w аналогично. $\Rightarrow$ ~~или~~ $x=z$ или $y=z$ и $w=z$ или $w=z$

1 случай) $z=x=w \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+y^2=1 \\ 3x^3+y^3=0 \end{cases} \quad y=-\sqrt[3]{3}\,x \Rightarrow 3x^2+3^{\frac{2}{3}}x^2=1 \Rightarrow$

$x = \pm\left(3+3^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = z = w$

$y = \mp\left(3+3^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ 1 точка ~~ми~~ минимума и 1 макс.

2 случай) ~~x=z~~ $y=w$, $y=z$ – аналогично первому:

1 точка минимума и 1 максимума

3) $y=w$, $x=z \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2} \\ x^3+y^3=0 \Rightarrow x=-y \end{cases} \quad x^2=\frac{1}{4} \quad x=\pm\frac{1}{2} \quad y=\mp\frac{1}{2}=w$

$x = z$

2 точки „+", 2 точки „–" $\Rightarrow$ 2 седловые точки

4) ~~x~~ $y=z$, $w=x$ – аналогично третьему;

2 седловые точки.

Итого: 4 седловые точки, по 2 максимума и минимума

$\chi = 2-4+2=0=2-2g$, где g – род поверхности, $\Rightarrow$

род $g=1$.