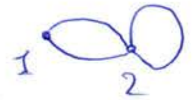
Графы

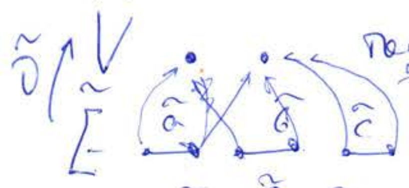
Комбинаторный граф: V - вершины, E - рёбра

$\partial: E \to V\times V$ - отображение примыкания рёбер к вершинам

Пример: $V=\{1,2\}$, $E=\{a,b,c\}$, $\partial: a\mapsto(1,2),\ b\mapsto(1,2),\ c\mapsto(2,2)$



Топологический граф: подклейка набора рёбер $I_i \cong [0,1]$ к набору вершин $v\in V$ по отображениям примыкания $\partial I_i \to V$



топологическое пространство (с дискр. топологией)

топологическое пр-во ($\sqcup$ отрезков)

$\tilde a \cong \tilde b \cong \tilde c \cong [0,1]$

Подклейка $\tilde E$ к $\tilde V$ по $\tilde\partial$

Склейка

$\sim$ - отношение эквивалентности на мн-ве X

$[x]$ - класс экв. точки $x\in X$

$X/\sim$ - мн-во классов эквивалентности (фактор-множество)

$X\to X/\sim$ - отобр. факторизации

T - топология на $X \mapsto$ фактор-топология на $X/\sim$ - максимальная, при которой отобр. факторизации непрерывно

$U\subset X/\sim$ - открыто в $\tilde T \Leftrightarrow \pi^{-1}(U)\in T$ открыто!

Если выбрали фактор-топологию, что π - непр. $\Rightarrow \pi$ - склейка

π - склейка $\pi: (X_1,T_1)\to(X_2,T_2)$ если можно на X_1 выбрать $\sim$, при факторизации по $\sim$ получим (X_2,T_2)

Пример: $X=(-1,1)$ отождествим все точки $(-1,0)$ и все точки $[0,1)$

$a\sim b \Leftrightarrow sign(a)=sign(b)$ 2 точки, 2 класса $\sim$ p_- и p_+

Фактор-топология:

$\pi^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ - открыто $\Rightarrow \in\tilde T$

$\pi^{-1}(p_-)=(-1,0)$ - открыто $\Rightarrow \in \tilde T$

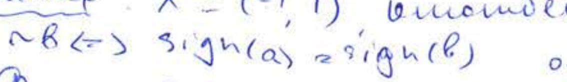
$\pi^{-1}(p_+)=[0,1)$ - не откр. $\Rightarrow \notin \tilde T_\sim$

$\pi^{-1}(p_-,p_+)$ = всё пр-во, откр. $\Rightarrow \in\tilde T$

Фактор-топология не хаусдорфова! Чтобы сделать хаусдорфовой, надо добавить p_+, но тогда π не непр.:

$\pi(\lim -\frac{1}{n})\neq\lim\pi(-\frac{1}{n})$* *секвенциальная непрерывность

Как найти склейку?



Пусть угадали непр. отображение (X,T) в хаусдорфово топологическое пространство Y, которое реализует $\sim$ (прообраз слой = класса экв.)

Если (X,T) - компактно, тогда $(X,T)\to Y$ - его склейка по $\sim$

Пример: $\exp 2\pi i t: [0,1]\to\{z \mid |z|=1\}=S^1$ склеивает 0 и 1

отрезок - компакт, окр. - хаусдорфова $\Rightarrow$ окр. - склейка

Пример для хаусдорфовости вне из интервал

Пример для компактности: возьмём $[0,1)$, $\sim$ - трив. (стр. 2)

$[0,1)/_\sim \simeq [0,1)$, но полуинтервал - не компакт

Универсальное свойство склейки и коммутативные диаграммы:

Пусть $\sim$ - отн. экв. на X, непр. $X \to Y$ переводит каждый класс эквивалентности в точку, т.е. раскладывается в композицию. $X \to X/_\sim \to Y$

Теорема: $X/_\sim \to Y$ - непрерывно.

Пример: биекция $\exp 2\pi i t : [0,1) \to S^1$ не склейка, хотя $id : [0,1) \to [0,1)$ раскладывается в композицию $[0,1) \to S^1 \to [0,1)$. Второе отображение разрывно.

Доказательство: комм. диаграмма $f = h \circ g$

h - непр.?

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ h^{-1}(U) \subset X/_\sim \arrow[r, dashed, "h"'] & Y \supset U \end{tikzcd}$$

Рассм. U-откр. в образе и рассм. $h^{-1}(U)$, тогда должно быть открыто.

$h^{-1}(U)$ - откр. $\Leftrightarrow$ $g^{-1}(h^{-1}(U))$ открыто по опр. фактор-топологии

$g^{-1}(h^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$, но f по условию непр. $\Rightarrow$ $f^{-1}(U)$ - открыто. $\Rightarrow$ ▲

Склейка (2 опр.) - сюръекция $X \to Z$, которая удовл. Универсальному свойству: если непр. $X \to Y$ переводит каждый класс эк. в точку, то $X \to Y$ раскладывается в композицию непрерывных $X \to Z \to Y$

В качестве Z можно взять $X/_\sim$!

Докажем, что другого Z не бывает (склейка единственна). Применим: пусть есть отобр. $X \to Z_1$ и $X \to Z_2$, оба удовл. унив. свойству. Каждое из этих отобр. и унив. св-ву другого.

$X \to Z_1 \to Z_2$, $X \to Z_2 \to Z_1$ Комм. диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Z_1 \arrow[r, shift left, "h_1"] & Z_2 \arrow[l, shift left, "h_2"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} f = h_2 \circ g \\ g = h_1 \circ f \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f = h_2 \circ h_1 \circ f \Rightarrow h_2 \circ h_1 = Id \\ g = h_1 \circ h_2 \circ g \Rightarrow h_1 \circ h_2 = Id \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow Z_1 \text{ гомеоморфен } Z_2$$

~~если сюръекция $[0,1)$, ... S^1~~

Теорема: любое непр. отобр. - композиция склейки и инъекции

$X \to X/_\sim \to Y$, $f : X \to Y$

Доказательство: Определим $\sim$ как слои отобр. f. $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Как мн-ва: $X \xrightarrow{\text{сюр.}} X/_\sim \xrightarrow{\text{инъ.}} Y$

при этом $X \to X/_\sim$ склейка, $X/_\sim \to Y$ - непр. по универсальному свойству, инъективно по множествам.

Доказательство старой теоремы: сюръективное непр. отобр. из компакта в хаусд. пр-во - склейка.

$f : X \to Y$ раскладываем в композицию

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

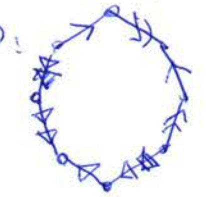
$X/_\sim$ - сюръекция иначе не покрывается весь Y $\Rightarrow$ $X/_\sim \to Y$ - биекция, образ компакта - компакт $\Rightarrow$ $X/_\sim$ - компакт

Взаимно-однозначное отоб. из компакта в хаусдорфово - гомеоморфизм $\Rightarrow$ $X/_\sim \simeq Y \Rightarrow X \to Y$ - склейка.

Многообразие (стр 3)

Определение: n-мерное топологическое многообразие - хаусдорфово т. пр-во со счётной базой, у которого каждая точка обладает окрестностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$.

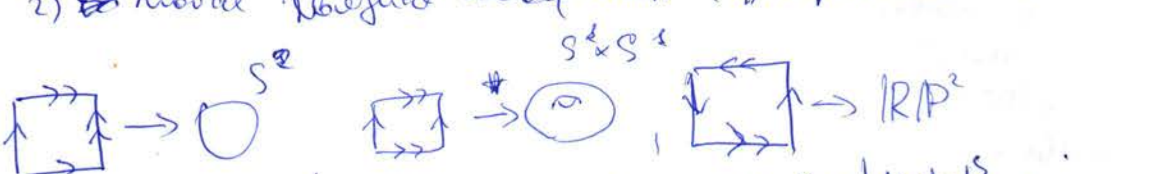
Пример: окружность, опр. по аргументу гомеоморфно $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^n$, сфера n-мерная, проективное пространство, гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$

P: 

Два отобр. отрезка! 

$\sim$ на P: $x_1 \sim x_2$ если лежат на рёбрах с одинаковыми стрелками и $x_1 \mapsto x_2$

1) Если стрелки „хорошо" расставлены, то это многообразие
2) любая двумерная поверхность (# торов или $\mathbb{R}P^2$ или сфера)



* $\boxed{(s,t)}$ $[0,1]\times[0,1] \to \{z \mid |z|=1\}\times\{w \mid |w|=1\}$, - склейка по $\pm t$ со страницы 1

$(s,t) \mapsto (\exp 2\pi i s, \exp 2\pi i t)$ $\Rightarrow$ $\exp 2\pi i s = \exp 2\pi i s'$ $\Rightarrow$ s и s' отл. на целое число

(s',t') Аналогично с t и t'! Это то нужное нам отн. экв.

0 и 1 либо равны,

$(0,t)\sim(1,t)$, аналог. со 2 координатой.

Определение: 1) $S^2/(x\sim -x)$, x и -x - антиподальные точки S^2

2) Пусть $\sim$ - отношение на $(\mathbb{R}^3/0)$, классы экв. - прямые через 0.

1) $\sim$ 2)? гомеоморфизм. Оно биекция?

Отображение: прямую пересекаем со сферой. классы экв. - лучи из 0.

Схема доказательства: $\approx$ - отношение экв., класс экв. - лучи из 0, берём точку фактор-пр-ва (луч) и её со сферой. Результат - двумерная сфера, → композиция склеек - склейка. Это гомеоморфизм.

Сравним: $\mathbb{R}^3/0 \to (\mathbb{R}^3/0)/\sim$ и $(\mathbb{R}^3/0)/\approx \to S^2 \to S^2/(x\sim -x)$ склейка. Классы одинаковые $\Rightarrow$ склейки одни и те же $\Rightarrow$ результат один (прообраз x, -x - два луча = прямая через 0)

Аффинная карта: плоскость $L \not\ni 0$ и отобр. $(p\in L)\mapsto$ прямая $(0,p)$,

$\mathbb{R}P^2$ покрывается 3 картами, например $\{x,y,z=1\}$

Определение: склейка L_1, L_2 и L_3 (карт) по экв. $L_i \ni p \sim q \in L_j \Leftrightarrow p, q$ и 0 на одной прямой.

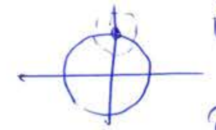
Схема доказательства:
1) $L_i \to \mathbb{R}P^2$ - откр. отобр. → Доказательство того, что оно экв. опр. выше
2) откр. отобр. - отобр. склейки. Применяем к $L_1\sqcup L_2\sqcup L_3 \to \mathbb{R}P^2$

$\mathbb{R}P^2 \simeq (L_1\sqcup L_2\sqcup L_3)/\sim$

~~Опр~~ Гладкое многообразие

Замкнутое $V\subset\mathbb{R}^n$ - гладкое разм. k в x, если есть $\exists$ окр. $U \ni x$, в которой:
1) Определён диффеоморфизм $V\to\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^n$
2) V задаётся n-k уравнениями, $f_1=\dots=f_{n-k}=0$, f_i - гладкие, дифференциалы ЛНЗ
3) V параметризуется отобр. $(\mathbb{R}^k,0)\to(\mathbb{R}^n,x)$, дифф. в 0 не вырожден.

Пример: $x^2+y^2=1$



1) U – верхняя полуплоскость (полоса) (стр. 4)

$U\to\mathbb{R}^2$ $(x,y)\mapsto(x,\ y-\sqrt{1-x^2})$

Диффеоморфизм, т.к. дифференциал $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

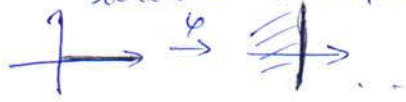
2) $f_1=0$, $f_1(x,y)=y-\sqrt{1-x^2}$ $df\neq 0$ $(0,1)$

3) $\varphi(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$ $d\varphi'=(0,1)$

(повторить в матане)

Отступление

① напр. $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}_+\overset{?}{\cong}\mathbb{R}^2$ Зададим φ так, что $\varphi(z_1)=z_2$, причем $|z_1|=|z_2|$, $\arg(z_2)=\frac{\pi+\alpha}{2}$, $\alpha=\arg(z_1)$



Гомеоморфизм дисков переводит граничную точку в граничную?

Есть ли непр. отобр., тождеств. на границе диска?

Гомеоморфны ли сфера и тор?

Пути и их семейства.

Путь – непр. отобр. $[0,1]\to X$

Семейство путей – $\varphi_t:[0,1]\to X$ для $t\in[0,1]$ $\quad t\in[0,1]$, $s\in[0,1]$ $\quad (s,t)\mapsto x\in X$, $\varphi_t(s)$

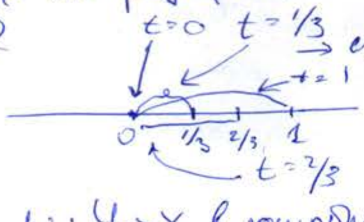
t – номер отображения, s – число на отрезке $\quad [0,1]^2\to X$ развертка

Семейство непр., если непр. его развертка.

Пример $\varphi_t(s,t)=st$, $X=\mathbb{R}$

$\varphi:[0,1]^2\to\mathbb{R}$

$\varphi_t(s)=\varphi(s,t)=s\cdot t$



Гомотопии

Гомотопия отображения $\varphi_0:Y\to X$ в отображение $\varphi_1:Y\to X$ – это непрерывное отображение: $\varphi_t:Y\to X:\ t\in[0,1]$

$\varphi:Y\times[0,1]\to X$, т.ч. $\varphi(\cdot,0)=\varphi_0(\cdot)$, $\varphi(\cdot,1)=\varphi_1(\cdot)$

Члены гомотопии – все члены семейства отображений $\varphi_t:Y\to X$, $y\mapsto\varphi(y,t)$

Параметр t – „время" $=[0,1]$

Пример: Путь – гомотопия точки

$*\times[0,1]\to Y$, $\varphi(*,0)=a$, $\varphi(*,1)=b$

Теорема: любой путь гомотопен тривиальному?

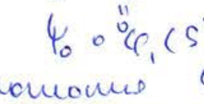
Линейная гомотопия: $\varphi_t:[0,1]\to[0,1]$ $\varphi_t(s)=st$ $\quad \psi_0:[0,1]\to X$ (путь), $\psi_1:[0,1]\to *$ (трив. путь), $[0,1]\to\psi_0(0)$

$[0,1]\xrightarrow{\varphi_t}[0,1]\xrightarrow{\psi_0}X$ $\quad \psi_0\circ\varphi_t:[0,1]\to X$

$\psi_0\circ\varphi_0(s):\ \psi_0(s\cdot 0)=\psi_0(0)$ – точка в X

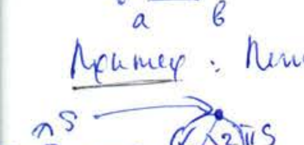
$\psi_0\circ\varphi_1(s):\ \psi_0(s\cdot 1)=\psi_0(s)$, т.е. $\psi_0\circ\varphi_t$ – гомотопия между ψ_0 и ψ_1

Гомотопия отрезка $Y=[a,b]$ пунктированная, $[a,b]\times[0,1]\to X$, если её концы не зависят от t: $\varphi_t(a)=\varphi(a,t)$, $\varphi_t(b)=\varphi(b,t)$



X отрезок $[a,1]\to\varphi_t(a)$, $[b,1]\to\varphi_t(b)$

Пример: Петля $\gamma:[0,1]\to S^1$, $\gamma(s)=\exp 2\pi i s$ не гомотопна тривиальной?



$z\in\mathbb{C}$, $|z|=1$

$\gamma(1)=e^{2\pi i}=1$

$\gamma(0)=1$

γ гомотопен тривиальному пути по доказанному выше

$\deg(\gamma)=1$, у тождеств. степень равна 0

она сохраняется $\Rightarrow$ не гомотопны

Гомотопность – отношение эквивалентности

$\varphi_0 : X \to Y \quad \varphi_0 \sim \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 \sim \varphi_0$ ②

$\varphi_1 : X \to Y \quad \varphi_0 \sim \varphi_0$ ①

$\varphi_0 \sim \varphi_1, \varphi_1 \sim \varphi_2 \Rightarrow \varphi_0 \sim \varphi_2$ ③

① $\varphi(x,0) = \varphi_0(x)$ Определим $\varphi(x,t) = \varphi_0(x)$

$\varphi(x,1) = \varphi_0(x)$.

② $\varphi(x,0) = \varphi_0(x)$ $\Gamma(x,t)$ – изначальная гомотопия, $\Gamma(x,1-t)$ – новая

$\varphi(x,1) = \varphi_1(x)$

③ $\exists \varphi : X \times [0,1] \to X \quad \exists \delta : X \times [0,1] \to X$

$\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \quad \delta(x,0) = \varphi_1(x)$

$\varphi(x,1) = \varphi_1(x) \quad \delta(x,0) = \varphi_2(x)$

определим $j : X \times [0,\frac{1}{2}] \to X \times [0,1]$, $j(x,t) = (x,2t)$

$k : X \times [\frac{1}{2};1] \to X \times [0,1]$, $k(x,t) = (x,2t-1)$

$\sigma(x,t) = \begin{cases} \varphi \circ j(x,t) \mid t \le \frac{1}{2} \\ \delta \circ k(x,t) \mid t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ определено корр., т.к. $t = 1/2$

$\varphi \circ j(x,t) = \varphi_1(x) = \delta \circ k(x,t)$

докажем гомотопность φ_0 и φ_2: 1) $t=0$ $\sigma(x,0) = \varphi \circ j(x,0) = \varphi(x,0) = \varphi_0(x)$

2) $t=1$ $\sigma(x,1) = \delta \circ k(x,1) = \delta(x,1) = \varphi_2(x)$

3) согласовна на $t = 1/2$

4) непрерывно на верхней и нижней полови-

нах.

<u>Лемма о склейке</u>: $X = U \cup V$ U и V оба замкн. / откр.

$\Rightarrow X \xrightarrow{h} Y$ f, g непр. и согласованы

$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in U \\ g(x) & x \in V \end{cases}$ – непрерывно. если подмножество полностью в U или V очевидно, если не полностью, то по согласованности

<u>Пример для леммы о склейке</u>, U – откр., V – замкн.

$U [^1_{1/2}$ – замкнуто $\to 1$ очев. согласовано разрывно в т. $1/2$

$V [^{1/2}_0$ – открыто в топологии отрезка $\to 0$

Произведение путей

<u>Произведение путей</u> σ из a в b и δ из b в $c \in Y$ – это путь $\sigma \cdot \delta$, опреде-

лённый как $[0, 1/2] \xrightarrow[s=2t]{\text{лин.}} [0,1] \xrightarrow{\sigma} Y$ согласовано в $1/2$

$[1/2, 1] \xrightarrow[s=2t-1]{\text{лин.}} [0,1] \xrightarrow{\delta} Y$

$\alpha \cdot (\beta \cdot \sigma)$ не равно $(\alpha \cdot \beta) \cdot \sigma$, но гомотопно

$[0,1]$ $\alpha \cdot (\beta \cdot \sigma)$ $a=0$, $d=1$, $b = 1/2$, $c = 3/4$ $\quad a = 0$; $d = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$ путь $(\alpha \cdot \beta) \cdot \sigma$

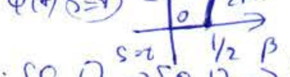
Факт* $\alpha \cdot \beta \ne \beta \cdot \alpha$

Примеры: нейтральный, обратный пути

$[0,1] \to a \in Y$

α – нейтр. элемент группы

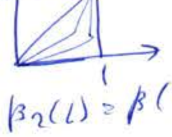
Утв. $\alpha \cdot \beta \sim \beta$ 1) $\alpha \cdot \beta = [0,1] \to [0,1]$



$t \le 1/2$ $\alpha \cdot \beta = \alpha(2t) = a = \beta(0)$

$t \ge 1/2$ $\alpha \cdot \beta(t) = \beta(2t-1) = \sigma(t)$

2) $\beta : [0,1] \to [0,1] \to Y$



$\varphi_\tau(t) = \tau t + (1-\tau)\varphi(t)$

$\beta_\tau(t) = \beta \circ \varphi_\tau(t)$

$\beta_\tau(0) = \beta(\varphi_\tau(0)) = \beta(0) = a$, $\beta_\tau(1) = \beta(1) = b$ $\to$ пунктирование

$\overline{\beta(t) : [0,1] \to Y} \quad \beta^{-1}$

Определение обратного к β наз. путь: $\beta^{-1}(t) = \beta(1-t)$

Утверждение: $\beta^{-1}\cdot\beta \sim Id$

Фундаментальная группа

Y - пространство с отмеченной точкой $* \in Y$

Фундаментальная группа $\pi_1(Y,*)$ - множество классов эквивалентности (по гомотопности) с операцией произведения

Это отобр. - топологический инвариант

Пример: $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Выпуклое мн-во в $\mathbb{R}^n$: точки a и $b \in C \Rightarrow [a,b] \subset C$

Звездно-выпуклое в $\mathbb{R}^n$: если $\forall a \in C$ $[0,a] \in C$  - звездно выпуклое, но не выпуклое мн-во

Пример 2 В (звездно) выпуклом мн-ве $C \subset \mathbb{R}^n$ любая петля γ с началом в 0 стягиваема линейной (!) гомотопией $\gamma_t(s) = t\cdot\gamma(s)$ $\gamma_1(s) = \gamma(s)$ $\gamma_0(s) = 0$

$\gamma(s) \in C \Rightarrow \gamma_t(s) \in C$ отр. из 0 в $\gamma(s) \in C$. Отр. $= t\cdot\gamma(s)$, $t \in [0,1]$

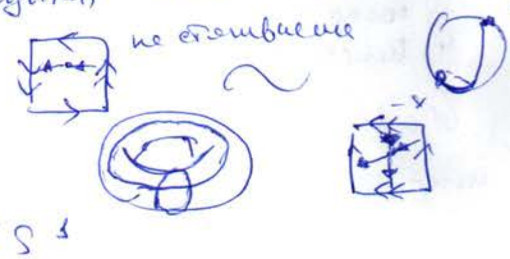
группа состоит из 1 класса экв. Такое мн-во односвязно

$\pi_1(S^2) = 0$, т.е. $\forall$ любая петля стягивается в точку

 $a \notin$ пути, спроецируем сферу из a на плоскость, путь на плоскости (она выпукла) стягиваем. (если точка a есть!)

$\pi(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$0, \alpha$

 не стягивается

$S^2/_{x\sim -x}$ путь (отобр. склейки) петля

$\pi_1(\text{тора}) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Степень петли в S^1

$S^1 = \{z \mid |z| = 1\} \in \mathbb{C}$

$\gamma: [0,1] \to S^1$ - петля с началом в $1 \in S^1$

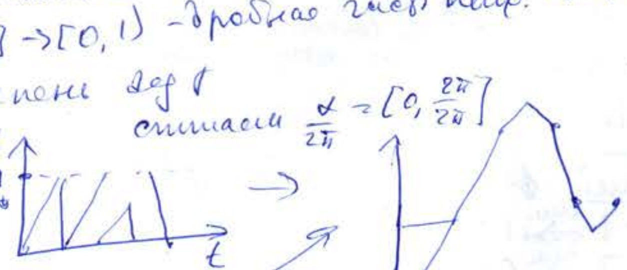
Функция $\frac{1}{2\pi i}\arg\gamma: [0,1] \to [0,1)$ - дробная часть непр. поднятия $\tilde{f}: [0,1] \to \mathbb{R}$

Число $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) \in \mathbb{Z}$ - степень $\deg\gamma$

Петля: $\gamma: [0,1] \to S^1$

$\gamma(0) = \gamma(1) = 1$

сжимаем $\frac{\alpha}{2\pi} = [0, \frac{2\pi}{2\pi}]$



Поднятие: склейка "этой" разрывной функции в непрерывную

1) непр., 2) дробная часть - γ

Поднятие одной петли отл. на целое число.

В примере на рисунке $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = 1$

$\gamma \mapsto \deg\gamma \in \mathbb{Z}$, корректное соответствие

Свойства и примеры степени: Dиспр. (все подняти отл. на целое число 2) не меняется при гомотопиях (гомотопия путей порождает гомотопию поднятий) $\gamma \sim \gamma' \Rightarrow \tilde{f} \sim \tilde{f}' \Rightarrow \gamma \mapsto \deg\gamma'$

3) deg - гомоморфизм. $\deg(\delta\gamma) = \deg\delta\,\deg\gamma$ $\tilde{\delta}$ и $\tilde{f}$ - поднятия, $\widetilde{\delta\gamma} = \tilde{\delta}\tilde{f}$

4) Эпиморфизм: степени мн. петли $\gamma_k(s) = \exp 2\pi i k s$, $k \in \mathbb{Z}$ (много раз обвили в окружность)

5) Любая петля гомотопна петлей $\Rightarrow$ мономорфизм.

$\ker\deg = 0$: $\gamma \to 0 \Rightarrow \tilde{f}$  $\tilde{f}_s(t) = st$

Значит, степень - изоморфизм.

(стр. 7)

Поднятие

Поднятие отобр. $f: X \to Y$ вдоль $p: \tilde{Y} \to Y$

не всегда есть

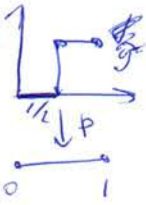
$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{Y} \\ & \overset{\tilde{f}}{\nearrow} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$\tilde{f}$ делает коммутативной диаграмму

Пример: поднятие пути в S^1

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \overset{\tilde{f}}{\nearrow} & \downarrow \exp 2\pi i y \\ [0,1] & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

непр. функция, $\frac{\arg f(t)}{2\pi} = \{\tilde{f}(t)\}$



$f(t) = t$ пусть поднятие есть $\tilde{f}(t) = (t, 0)$ $t < 1/2$, $(t,y) \in \tilde{Y}$, $\downarrow p$, $f(t) = t$

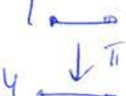
Тогда $\tilde{f}$ разрывна в $1/2$, $t > 1/2$, $\tilde{f}(t) = (t, 1)$, предела нет.

Вертикальная стрелка — пример накрытия

Накрытие

Тривиальное накрытие — отображение $p: X \to Y$ над открытым $U \subset X$, если прообраз $p^{-1}(U)$ распадается на открытые части (листы) $\sqcup_\alpha V_\alpha$, на которых $p: V_\alpha \to U$ — гомеоморфизм

Пример



Экв. определение: $X \simeq Y \times$ (дискр. пр-во) $\to Y$

Пример: ① $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — не накрытие

$\mathbb{R} \times \{y_0\}$ прообраз — не открытое в $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ не накрытие

② $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

не трив. накр.: $\mathbb{R} = \sqcup_\alpha V_\alpha \xrightarrow{p} \mathbb{R} = Y$ $\mathbb{R}$ — связно $\Rightarrow$ не бывает дизъюнктного объед. открытых $\Rightarrow$ один „кусок" открытый, само $\mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ не гомео, y — а нет прообраза

③ $p: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ — трив. накрытие над интервалом, $I \not\ni 0$

$0 \notin I \Rightarrow p$ трив. накр. над I: 1) $I \subset (-\infty, 0) \Rightarrow p^{-1}(I) = \varnothing$

2) $\subset (0, +\infty)$ $I = (a, b)$ $p^{-1}(I) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \sqcup (\sqrt{a}, \sqrt{b})$ $x \mapsto x^2$ ограничение гомеоморфизм

Отображение $p: X \to Y$ — накрытие, если у каждой точки $y \in Y$ есть окрестность U_y, над которой оно — трив. накрытие.

X — тотальное пр-во, Y — база, $p^{-1}(y)$ — слой,

Такая окрестность называется тривиализующей

Пример Тривиальное накрытие

$$p_n \quad S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^n} S^1$$

накрытие

Возьмём всю окр. без 1.

Доказательство: прообраз $p_n^{-1}(U)$ — всей окр. без корней из единицы $\Rightarrow$ разбивается в дизъюнктное объед. открытых дуг, отобр. гомеоморфно.

Пример $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ — накрытие

$\{x, -x\} \in U_{(x,-x)}$ окр. — вся сфера — экватор, содержащий x и $-x$

Доказательство

$U_{(x,-x)} = p(V)$, $V = p^{-1}(U_{\{x,-x\}})$ U — открыт как образ V по опр. отождеств. склейки

$U = V_x \sqcup V_{-x} \to U_{\{x,-x\}}$ — склейка $\tilde{x} \sim -\tilde{x}$

$D \sqcup D$ склеим диск, получим D.

Единственность поднятия

Поднятие отображения $f: Z \to Y$ вдоль отобр. p $X \to Y$ — такое, когда диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

* **Теорема**: Если p — накрытие, а Z связно, то поднятие определяется образом одной точки $\tilde{f}_1(z_0) = \tilde{f}_2(z_0) \Rightarrow \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ z_0 \in Z \arrow[ur, "\tilde{f}_1"] \arrow[ur, "\tilde{f}_2"'] \arrow[r, "f"'] & Y \ni y_0 = f(z_0) \end{tikzcd}$$

$x_0 = p(x_0) = y_0$, $= \tilde{f}_1(z_0) = p(\tilde{f}_1)(z_0) = f(z_0)$

$F = p^{-1}(y_0)$ $\tilde{f}_1$ z_0 переводит в одну из точек слоя

$\tilde{f}_2(z_0) \to x_2$

$x_1 = x_2 \Rightarrow \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$

Сначала примеры и следствие:

Пример $[0,1] \xrightarrow{f} S^1$ все поднятия имеют вид $\tilde{f}_k = \tilde{f}(t) + k$

$\uparrow exp$ $\mathbb{R}$

$\tilde{f}_k$ одн. опр. $\tilde{f}_k(0) = \underbrace{\tilde{f}_k(0) + k}_{F = exp^{-1} f(0)}$ поднятия нумеруются точками слоя

Точки слоя $\leftrightarrow$ поднятия f

Следствие: ① $\tilde{f} \nearrow X$, $\downarrow p$, $F = f^{-1}(y_0)$

$[0,1] \xrightarrow{f} Y \ni y_0 : f(0)$ $\Rightarrow \forall$ точки слоя $x_0 \in F$ $\exists$ не более 1 поднятия $\tilde{f}$ ~~...~~ с началом в x_0

② Произведение поднятий = поднятие произведения

$X \ni x_1, x_2, x_3$ $\begin{cases} f \to 0, 1 \to y_1, y_2 \\ \delta \to 0, 1 \to y_2, y_3 \end{cases}$ $\begin{cases} \tilde{f}: 0, 1 \to x_1, x_2 \\ \tilde{\delta}: 0, 1 \to x_2, x_3 \end{cases}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $\tilde{f}, \tilde{\delta}$ — поднятие; поднятие $\tilde{f} \cdot \tilde{\delta}$ с началом в x_1 $\exists$!

$Y \ni y_1, y_2, y_3$ $\tilde{f} \cdot \tilde{\delta}$ определено, как и $\tilde{f}, \tilde{\delta}$

$\forall t \in [0, 1/2]$ $\tilde{f} \cdot \tilde{\delta}(t) = \tilde{f}(2t)$

$p(\ldots) = p(\ldots) = f(2t) = f \cdot \delta(t)$

Удовл. опр. поднятия $\Rightarrow$ если $\exists$, то совпадает с указанным по теореме выше

$\forall t \in [1/2, 0]$ — // —

* Доказательство теоремы

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}_1, \tilde{f}_2"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

$Z_= : \{z \mid \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}$

$Z_{\neq} : \{z \mid \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)\}$

Если оба открыты, то одно пустое, другое — всё $\Rightarrow$ нет промеж. вариантов

$z \in Z_= \mapsto$ трив. окрестность $U \ni f(z) \Rightarrow W \subset Z_=$, $W \ni z$

$V_\alpha \ni \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$

$\downarrow p$ гомео. нек. окр. $\quad \downarrow$

$z \in \underbrace{\tilde{f}_1^{-1} V_\alpha \cap \tilde{f}_2^{-1} V_\alpha}_{W\text{ — откр. как пересечение}} \to U \ni f(z)$

$z \in Z_{\neq} \mapsto$ трив. окр. $U \ni f(z) \Rightarrow W \subset Z_{\neq}$

Аналогично $V_\beta \ni \tilde{f}_2(z)$, $\downarrow H$

$V_\alpha \cap V_\beta$, $W \subset Z_{\neq}$, $\tilde{f}_2$, $\tilde{f}_1 \to V_\alpha \ni \tilde{f}_1(z)$

$z \in \underbrace{\tilde{f}_1^{-1} V_\alpha \cap \tilde{f}_2^{-1} V_\beta}_{W} \to U \ni f(z) \in Y$

Автоморфизмы накрытий

Автоморфизм накрытия — гомеоморфизм $X \xrightarrow{f} X$, сохраняющий слои

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \downarrow \exp \\ S^1 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

$p(x) = p(f(x)) \Rightarrow f(F) = F$

$F = p^{-1}(y)$

Замечание 1 Автоморфизмы обр. группу (композиция автоморфизмов — автоморфизм)

Группа и переносов — группа $\mathbb{Z}$ ($\mathrm{Aut}\,\exp = \mathbb{Z}$, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$)

Замечание 2 Автоморфизм p — поднятие p вдоль p

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

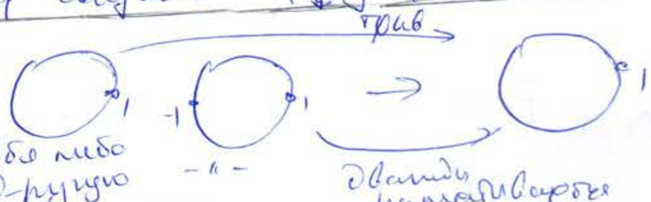
X — связно $\Rightarrow$ автоморфизм однозначно опр. образом одной точки

Следствие: Для пунктированного накрытия $p:(X,*)\to(Y,\bullet)$ $f\in \mathrm{Aut}_p \mapsto f(*)$ это вложение группы Aut_p в слой $p^{-1}(\bullet)$

Если $\mathrm{Aut}_p \leftrightarrow$ слой, накрытие регулярное (пример — накр. опр.)

Пример: трив. накрытие Aut_p — перестановка порядка произвольного мн-в, нерегулярное, $|S_3| = 6$, а слой из 3 точек

Пример связного нерегулярного накрытия



друг в друга

нельзя, т.к. степени разные

Добавим такие опр. ещё раз, склейка тотального $\to$ склейку база тоже накрытие (склеиваем точки слоя). $\mathrm{Aut}_2 \subset \mathrm{Aut}_p \cap \mathrm{Aut}_q$

* Склейка связн, любой автоморф. тривиален.

Поднятие в тривиальное накрытие

Пусть накрытие $p:(X,*)\to(Y,\bullet)$ распадается на листы $X_\alpha \overset{p}{\cong} Y$

Теорема: такое поднятие всегда есть

$j\circ q\circ f: Z \to \bullet \to * \to * = \tilde f$ если Z — связно, $\tilde f$ единственно

$$\begin{tikzcd} & (X,*) \supset (X_\alpha,*) \arrow[d, "p"] \\ (Z,z) \arrow[ur, "\tilde f"] \arrow[r, "f"'] & (Y,\bullet) \end{tikzcd}$$

$(X_\alpha,*) \underset{p}{\overset{\cong}{\to}} (Y,\bullet)$, q

Лемма: Пусть отрезок покрыт V_α откр. $\Rightarrow \exists$ разбиение отр. числами $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$ в котором подотрезок $[s_i, s_{i+1}] \in V_\alpha$

Теорема: дано накрытие $p:(X,*)\to(Y,\bullet)$ и путь $f:[0,1]\to Y$ с началом $f(0) = \bullet$. Тогда $\exists$ поднятие $\tilde f$ с началом $\tilde f(0) = *$

$$\begin{tikzcd} & X \ni * \arrow[d, "p"] \\ 0\in[0,1] \arrow[ur, "\tilde f"] \arrow[r, "f"'] & Y \ni \bullet \end{tikzcd}$$

Доказательство:

1) Найдём $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$, т.ч. $\gamma[s_i, s_{i+1}]$ содержится в трив. окр.

- Для каждого $t \in [0,1]$ опр. $V_t \ni t$ как γ^{-1} (трив. окр. $\gamma(t)$)

Смотрим прообраз трив. окр., он открыт $\subset V_t$

- V_t обр. покрытие
- по лемме Лебега до замыкания покрытия $[s_i, s_{i+1}]$ $\quad \gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset$ в трив. окр.

2) Поднимаем $\gamma_1 = \gamma|[s_0, s_1]$ до $\tilde{\gamma}_1$ с началом в $*$ и с концом в $*_1$

Аналог. дальше

Непр. по лемме о склейке, поднятие единственно, т.к. опр. сводей

Поднятие гомотопии

Дано накрытие $p: X \to Y$, отобр. $f: Z \to Y$ тогда его поднятие $\tilde{f}: Z \to X$ и гомотопия $\Gamma: Z \times [0,1] \to Y$, $\Gamma(z, 0) = f(z)$, ов. гомотопией поднятие

Сущ. поднятие гомотопии $\tilde{\Gamma}: Z \times [0,1] \to X$,

$\tilde{\Gamma}(z, 0) = \tilde{f}(z)$

Если $Z = \{z\}$, теорема о поднятии пути

Следствие: Если пути γ_1 и γ_2 в Y пунит. гомотопны, то их поднятия с общим началом тоже (для док-ва надо поднять гомотопию)

$\Gamma: [0,1]^2 \to Y$ ($Z \xrightarrow{\text{отр.}}$)

$\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$

$\Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$

$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma: Z \times [0,1] \to Y \\ \tilde{\gamma}_0: Z \to X \end{array} \right.$ $\underset{\text{Th о поднятии гомотопии}}{\Rightarrow}$ $\tilde{\Gamma}: Z \times [0,1] \to X$

$\tilde{\Gamma}(t, 0) = \tilde{\gamma}_0(t)$

1) Γ — пунит. $\gamma_1(0) = \gamma_0(0) = \circ$

$\forall s\ \Gamma(0, s) = \circ$

$\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\Gamma}(0, s) \in p^{-1}(\circ)$ дискр.

$\quad = \tilde{\Gamma}(0, 1)$

$\tilde{\Gamma}(\cdot, 1): [0,1] \to X$ — поднятие γ_1 начало в $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0)$ $\Big\} \Rightarrow \tilde{\Gamma}(t, 1) = \tilde{\gamma}_1(t)$

$\tilde{\Gamma}$ — гомотопия $\tilde{\gamma}_0$ и $\tilde{\gamma}_1$

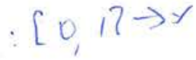
пунит. — очевидно

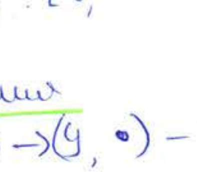
Монодромия

$p: (X, *) \to (Y, \circ)$ — пунктированное накрытие. $F = p^{-1}(\circ)$ — слой

Монодромия петли γ в Y — отображение $m_\gamma: F \to F$ по правилу $x \mapsto$ его конец $\tilde{\gamma}(1)$ поднятие петли γ, которое начинается в x ($\tilde{\gamma}: [0,1] \to X$, $\tilde{\gamma}(0) = x$)

пример: $\mathbb{R} \to S^1$, $\mathbb{R}^2 \to T^2$, $S^2 \to \mathbb{R}P^2$

$X = \mathbb{R}$  $F = \mathbb{Z}$

$Y = S^1$ 

$m_\gamma: F \to F$, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$k \mapsto k+1$

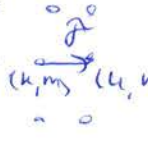
Для обратной петли $k \mapsto k-1$

Для трив. петли — m_γ тривиально

$T = S^1 \times S^1$, $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2 \to (S^1)^2$ 

$\cup$

$\mathbb{Z}^2$ $\quad$ $(1,1)$



$(k, m) \mapsto (k, m+1)$

$\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$

у $\gamma_{\delta}^{2,3}$ на 2 вправо, на 3 вверх

$S^2 \to \mathbb{R}P^2$ $\quad \gamma:[0,1]\to S^2 \to \mathbb{R}P^2$ $\quad \gamma_0(0)$ – петля

$\{x,-x\} \ni y$ $\quad x, -x$

$m_{\gamma_0}: x \mapsto -x$

монодромия меняет точки местами

Связь монодромии с фундаментальной группой

$x \mapsto \tilde{\gamma} \mapsto$ конец $\tilde{\gamma}$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] & \supset F \circlearrowleft m_\gamma \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & Y \ni \bullet & \end{tikzcd}$$

Свойства:

① Две петли γ, δ

$m_\delta \circ m_\gamma = m_{\gamma\delta}$ (произв. поднятий = поднятие произведения)

$m_{\gamma\delta}(x) = \underset{\text{нач. в } x}{\widetilde{\gamma\delta}}(1) = (\underset{\gamma \cdot \delta}{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}})(1) = m_\delta(m_\gamma(x))$

конец $\tilde{\gamma}$ = начало $\tilde{\delta}$

② Если 2 петли пут. гомотопны $\Rightarrow m_\gamma = m_\delta$

$\gamma \sim \delta \Rightarrow \tilde{\gamma} \sim \tilde{\delta} \Rightarrow$ конечные точки равны

③ $m_\gamma: F \to F$ вз. однозначно, т.е. эл. группы перестановок $\mathrm{Aut}(F)$

$\gamma \to m_\gamma$ и $\gamma^{-1} \mapsto m_{\gamma^{-1}}$ $\quad m_\gamma \circ m_{\gamma^{-1}}: F \to F$

$m_{\gamma\cdot\gamma^{-1}} = m_{id} = id$

④ $\pi_1(Y) \to \mathrm{Aut}(F)$, $[\gamma] \to m_\gamma$ – гомоморфизм. (св-ва выше)

Это – Действие монодромии. Его образ – группа монодромии $M_p < \mathrm{Aut}\, F$

Примеры ① $\pi_1(S^1) = (\gamma^k, k\in\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$

$\mathbb{R} \to S^1$ $\quad F = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ $\quad M_p \simeq \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

② $S^1 \xrightarrow{z^n} S^1$ $\quad \pi_1(S^1) = \gamma^k, k\in\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(F)$

$F = \{\sqrt[n]{1}\}$ $\quad m_{\gamma^n} = id$

γ^n – подн. γ петл.

$\ker = n\mathbb{Z}$, $M_\gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Классификация накрытий

Дано линейно связное локально односвязное $Y \ni \bullet$ и действие $m: \pi_1(Y,\bullet)$ на мн-ве A. $(\pi_1(Y,\bullet) \to \mathrm{Aut}(A))$

Сколько $\exists$ накрытий $p: X \to Y$ со слоем $p^{-1}(\bullet) =: F \simeq A$, для которых действие монодромии $\pi_1(Y) \to \mathrm{Aut}(F) \simeq \mathrm{Aut}(A)$ равно m?

Теорема: 1) $\exists$ и единственно с точностью до изоморфизма

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{гомео}"', "?"] \arrow[dr, "p_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

$m_1: \pi_1(Y,\bullet) \to \mathrm{Aut}(A_1) \iff A_1 \simeq A_2$

$m_2: \pi_2(Y,\bullet) \to \mathrm{Aut}(A_2)$

$\Rightarrow$ накрытия $\simeq$, если действия $\simeq$

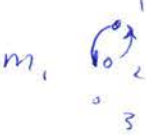
Пример: $Y = S^1 \ni 1$ $\quad \pi_1(S^1,\bullet) \to \mathrm{Aut}\, A$ $\quad A = \{1,\dots,n\}$ $\mathrm{Aut}\, A = S_n$

$\mathbb{Z} = \langle\gamma\rangle$ $\quad m(\gamma) \in \mathrm{Aut}\, A$ $\quad \langle\gamma\rangle\ \mathbb{Z} \to S_n$

$m(\gamma) \in S_n$

$m_1 \simeq m_2$?

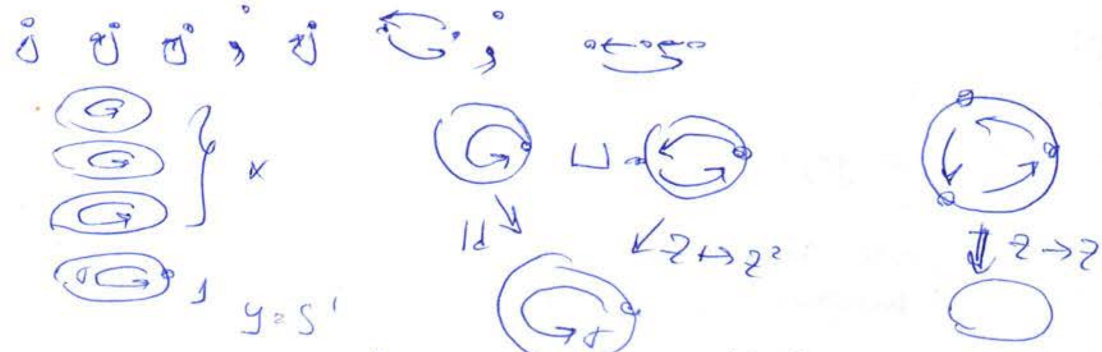
$\mathbb{Z} \xrightarrow{m_1} Aut\{1,\dots,n\}$
$\mathbb{Z} \xrightarrow{m_2} Aut\{1,\dots,n\}$ цикл. тип $m_1(\gamma)$ = цикл. типу $m_2(\gamma)$

Пример: $A=\{1,2,3\}$ m_1  , m_2  $1\to 2$, $2\to 3$, $3\to 1$

Накрытие над S^1 $\leftrightarrow$ цикл. типы перестановок $\{1,\dots n\}$

$X \to S^1$  перестановки

Пример:



Автоморфизмы универсального накрытия

Накрытие $p: X\to Y$ универсальное, если X односвязно и локально связно

$\mathbb{R}\to S^1$ - универсальное, $S^1\to S^1$ - не универсальное, $\mathbb{R}^2\to T^2$ - универсальное, $S^2\to \mathbb{R}P^2$ - универсально

$\boxed{\text{Фундаментальная группа сферы равна 0!}}$

Теорема ① Для универсального накрытия $\pi_1(Y)\hookrightarrow Aut(F)$ - вложение. т.е. группа монодромии изоморфна $\pi_1(Y)$
Т.е. группа монодромии универсального накрытия изоморфна $\pi_1(Y)$.
② Группа автоморфизмов универсального накрытия в слое $F := p^{-1}(\bullet)$
Изоморфизм зависит от $\bullet\in Y$ и $*\in X$

$$\pi_1(Y,\bullet) \overset{а)}{\longleftrightarrow} F \overset{б)}{\longleftrightarrow} Aut\, p$$

а) $\gamma\in\pi_1(Y,\bullet)\mapsto$ точка $*_\gamma\in F$ - конец поднятия $\tilde\gamma$ с началом в $*$

б) Автоморфизм $f\in Aut\, p\mapsto$ точка $f(*)\in F$.

Примеры:

① $\mathbb{R}\to S^1$ $\pi_1(S^1)\to Aut(F)$, $F=\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ над S^1. Автоморфизмы: $f_k(x)=x+k$, $k\in\mathbb{Z}$

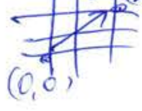
$\pi_1(S^1)\simeq\mathbb{Z}=\langle\gamma\rangle$

f одн. переводит 0 в целую точку в слое, $Aut=\mathbb{Z}$ (пар. переносы на целые числа)

$\pi_1(S^1)\hookrightarrow Aut(F)$, $\gamma^k\mapsto(\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ x\mapsto x+k)$ $\qquad$ $\pi_1(S^1)\to\mathbb{Z}^1\leftarrow Aut(F)$, $\gamma^k\mapsto k\leftarrow f_k$

② Фундаментальная группа тора (важно!)

$\pi_1(T^2)=?$ $\mathbb{R}^2\to T^2$



перенос на v - автоморфизм
Других нет, т.к. Aut однозначно опр. по образу точки

$Aut_p \simeq$ пары целых чисел, $\mathbb{Z}^2$

Для $\mathbb{R}P^2$ $\quad S^n \xrightarrow{} \mathbb{R}P^n$ $\quad Aut_p$ $\quad Id: S^n \to S^n$

$\pi_1(S^n) = 0$ $\qquad ant: S^n \to S^n$ (гомео)

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ $\qquad x \to -x$

Других нет, слой — пара точек $\begin{matrix} x \to x \\ x \to -x \end{matrix}$ $\quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Замечание: помимо выделенной точки есть другие, на них Aut действует так же как монодромия, если π_1 коммутативна, иначе это неверно.

Фундаментальная группа букета окружностей

B — топологический граф (B — букет окружностей) с одной вершиной и n ребрами $\gamma_i: [0,1] \to B$

Произведение петель $\in \pi_1(B)$

Произведение, содержащее $\gamma \cdot \gamma^{-1}$ или $\gamma^{-1}\gamma$ — приводимое, удаление $\gamma^{-1}\gamma / \gamma\gamma^{-1}$ — приведение

Свободная группа $\langle \gamma_1, \dots \gamma_n \rangle$ — группа, эл-ты которой — непр. слова, операция — приведение конкатенации

слово $\mapsto$ произведение ребер — гомоморфизм $*_i \langle \gamma_i \rangle \to \pi_1(B)$

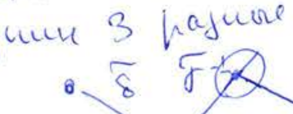
Теорема: Это изоморфизм: все петли в B гомотопны неприводимым словам, разные непр. слова не гомотопны.

Утв. в $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ $\quad \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} \neq e$

Док-во Рассм. гомоморфизм $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \to S_3$ по У.С. $\quad \gamma_1 \to (1,2)$, $\gamma_2 \to (2,3)$ дальше очевидно

Универсальное накрытие букета

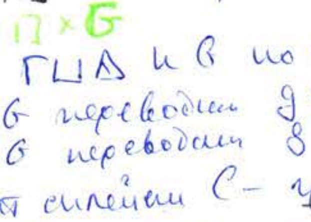
Пусть B — букет 2 окр., точка $\bullet \in B$ и ребра γ и $\delta: [0,1] \to B$



Никакие не может быть в локальном пр-ве, т.к. получилась бы нестягиваемая петля $\Rightarrow$ накрытие не универсальное

Аналогично с γ.

Получим 3 разные вершины



можно продолжать до бесконечности

$(G := \langle \gamma, \delta \rangle)$

дискр. топ. пр-во

$\Delta = [0,1] \times G \quad \partial\Gamma, \partial\Delta$ — концы

$\Gamma = [0,1] \times G$

Подклеим $\Gamma \sqcup \Delta$ к G по отображениям

$\partial\Gamma \to G$ переводит $g \times \{0\} \mapsto g$, $\quad g \times \{1\} \mapsto g \cdot \gamma$

$\partial\Delta \to G$ переводит $g \times \{0\} \mapsto g$, $\quad g \times \{1\} \mapsto g \cdot \delta$

Результат склейки C — граф Кэли группы G

Теорема 1 Граф C односвязен (любая петля стягиваема)

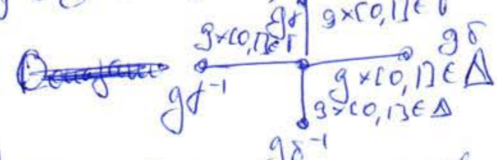
Отображение $C \xrightarrow{p} B$ определим на Γ как проекцию $G \times [0,1] \to [0,1] \to B$

и на Δ как продукт $G\times[0,1]\to[0,1]\xrightarrow{\sigma}B$ (стр. 14)

Теорема 2 $C\xrightarrow{p}B$ - накрытие и $\mathrm{Aut}_p=G$

Следствие $\pi_1(B)=G$

$g\in G=\langle\sigma,\delta\rangle$, $|g|$ - длина несократимого слова



Лемма В C нет циклов

Пусть есть $g_1-g_2-\dots-g_n$ $|g_1|,\dots|g_n|$

Переупорядочим цикл, чтобы начинался со слова min длины

g_1 и g_2 соединены ребром $\Rightarrow g_2=g_1\cdot\left[\begin{smallmatrix}\sigma\\ \sigma^{-1}\\ \delta\\ \delta^{-1}\end{smallmatrix}\right.\Rightarrow$ $|g_2|=k-1$ - невозможно, всегда выбрали самое короткое; $|g_2|=k+1$

$g_3=g_2\cdot\left[\begin{smallmatrix}\sigma\\ \sigma^{-1}\\ \delta\\ \delta^{-1}\end{smallmatrix}\right.$ $g_3\neq g_1$ $|g_3|=\left[\begin{smallmatrix}k+1\\ k-1\end{smallmatrix}\right.$ нельзя, т.к.

Получаем, что длина всегда увеличивается $\Rightarrow$ ↯

$\forall\alpha:[0,1]\to C$ - стягиваема?

ребра + вершины

$\alpha\in$ конечному подграфу C

S_g - звезда вершины, открытое мн-во

$C=\bigcup_{g\in G}S_g$ открытые окрестности вершин

$\alpha[0,1]\subset C$ - компакт, покрыт $\bigcup S_g$ $\alpha[0,1]\subset S_{g_1},\dots S_{g_n}\Rightarrow$ содержится в конечном подграфе $\Rightarrow$ ∀ легко стягивается ⇒ C

Сод. в кон. подграфе без циклов ⇒ дерево ⇒ тоже стягиваем

Группа автоморфизмов универсального накрытия букета окружностей

Напоминание теоремы 2

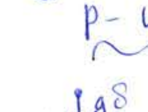
Для $\bullet\in B$ тривиализующая окрестность $B\setminus\{\sigma(1/2),\delta(1/2)\}$

Для остальных – $\sigma((0,1))$ или $\delta((0,1))$ – половина петли, которая её содержит

$$\begin{tikzcd} G \sqcup (\Gamma = G\times[0,1]) \sqcup (\Delta = G\times[0,1]) \arrow[d] \\ C \arrow[d, "p"] \\ B \end{tikzcd}$$

$g\in G$

p - накрытие



U_g - окр.

$U_g\xrightarrow{p}B\setminus\{\sigma(\frac12),\delta(\frac12)\}$ непр., обратное тоже ⇒ гомеоморфизм.

Аналогично с σ

Автоморфизм p

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr] & \Gamma \arrow[d] & \Delta \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Определим $G\to G: g'\mapsto gg'$
$\Gamma\to\Gamma: g'\times[0,1]\mapsto(gg')\times[0,1]$
$\Delta\to\Delta$: -//-

∃ отображение накрывающее ℓ $C \to C$ (лемма о Синейко)

f_g°: ~~...~~, f_g^{Γ}, f_g^{Δ}

Почему домножаем слева?

$(g'\gamma^{-1})g \times \{1\} \overset{?}{\sim} g'g$ не обязательно эквивалентно

$g'g\gamma^{-1}\times\{1\}$ (группа некоммутативна)

Значит, f_g — гомеоморфизм (есть обратный, $gg^{-1}x = ex$), сохраняющий слои $\Rightarrow f_g \in Aut_p$

$f_g(e) = ge = g \in G$

1) $g_1 \neq g_2 \Rightarrow f_{g_1} \neq f_{g_2}$

т.е. если отображаем элементы в автоморфизмы, получаем инъекцию

2) Других автоморфизмов нет, т.к. если бы он существовал

$f \in Aut_p \Rightarrow f(e) = g \in G$, но тогда $f = f_g$, т.к. автоморфизм однозначно определяется по одной точке $\Rightarrow G = Aut_p = \pi_1(B)$

Аналогично для большего числа образующих.

Разница между автоморфизмами и монодромией

Монодромия: $\pi_1(B) \to Aut(G)$

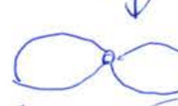
$m_\gamma: G \to G$

поднятие с началом в e заканчивается в γ

$e \mapsto \gamma$, $\delta \mapsto \delta\gamma$ и т.д.

бесконечное дерево C

$p \downarrow$



$\overset{Aut_p}{f_\gamma}(g) = \gamma g$ переводит соединение ребром вершины в соединение.

Этот пример — различие монодромии и автоморфизма, монодромия хуже, т.к. не продолжается на ребра

Индуцированное отображение π_1

Пусть $f: (X, *) \to (Y, \circ)$ непр.

Индуцированное отображение $f_*: \pi_1(X, *) \to \pi_1(Y, \circ)$, $f_*\gamma: [0,1] \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} Y$

переводит петлю $\gamma: [0,1] \to X$ в петлю $f_*\gamma$

Лемма: ① Определение корректно: $\gamma \sim \delta \Rightarrow f_*\gamma \sim f_*\delta$

$f\circ\gamma \sim f\circ\delta$ композиция гомотопных гомотопна

② Это гомоморфизм групп: $f_*(\delta\gamma) = f_*(\delta) f_*(\gamma)$

$$f\circ\delta\gamma(t) = \begin{cases} \underbrace{f\circ\delta(2t)}_{f_*\delta}, & t \le 1/2 \\ \underbrace{f\circ\gamma(2t-1)}_{f_*\gamma}, & t \ge 1/2 \end{cases}$$

③ $f \sim g \Rightarrow f_* = g_*$

$\forall \gamma$ $f_*\gamma \sim g_*\gamma \Rightarrow$ один эл-т в фундаментальной группе Y (т.к. элементы — классы эквивалентности)

$f\circ\gamma \sim g\circ\gamma$

④ $g_* \circ f_* = (g\circ f)_*$ $\quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$\forall \gamma: [0,1] \to X$

$g\circ(f\circ\gamma) = (g\circ f)\circ\gamma$ ассоциативность композиции

Пример: $f: S^1 \to S^1$ индуцирует $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ — умножение на $\deg f$

(сопоставлении петле элемента ф. группы S^1 — вроде степени этой петли)

$\deg f := \deg f\circ\gamma$

Категории (наверно было надо...)

Категория C 1) набор объектов $ob(C)$
2) $\forall a$ и $b \in ob(C)$ — набор морфизмов $hom(a,b)$
3) $\forall$ морфизмов $f \in hom(a,b)$ и $g \in hom(b,c)$ — композиция $g \circ f$ из $hom(a,c)$, т.ч. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
4) $\forall$ любого объекта a — тожд. морфизм Id_a из $hom(a,a)$, т.ч. $Id_a \circ f = f$ и $g \circ id_a = g$ $\forall f$ и g

Примеры: Set (множества), Grp (группы), Top (топологические пр-ва), Top* (пунктированные топ. пр-ва), отношение порядка, [redacted] мн-во путей в топологическом пр-ве.

Функторы

Функтор F из категории C в категорию D — отображение, отправляющее каждый объект a в объект $F(a)$, каждый морфизм $f: a \to b$ в морфизм $F(f): F(a) \to F(b)$, т.ч. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ и $F(id_a) = Id_{F(a)}$

Примеры: Set $\to$ Set; Grp $\to$ Set, Top $\to$ Hom (отобр. в класс гомотопности)

$S \to 2^S$ $\quad f: S_1 \to S_2$ $\quad F(f): 2^{S_1} \to 2^{S_2}$, $A \mapsto f(A)$, $A \subset S_1$, $f(A) \subset S_2$

Когда каждому пунктированному пр-ву сопоставляем его фунд. гр. $\Rightarrow$

Функтор из Hom* $\to$ Grp

Морфизм: $((X,*) \xrightarrow{f} (Y,\bullet)) \to (\pi_1(X,*) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y,\bullet))$

Фундаментальная группа (не) зависит от выделенной точки

Если в разных компонентах связности, то вообще, очевидно, нет

Дано: $*$ и $\bullet \in X$, образы при $f: X \to Y$

Как связаны:

① $\pi_1(X,*)$ и $\pi_1(X,\bullet)$

② $f_*: \pi_1(X,*) \to \pi_1(Y,*)$ и $f_*: \pi_1(X,\bullet) \to \pi_1(Y,\bullet)$

Если $*$ и $\bullet$ связаны путем $\alpha: [0,1] \to X$, то:

Определение $i_\alpha: \pi_1(X,\bullet) \to \pi_1(X,*)$ переводит γ с нач. в $\bullet$ в петлю $\alpha^{-1}\gamma\alpha^{-1}$ с началом $*$.

$*$ α $\bullet$ γ $\alpha^{-1}\gamma\alpha$

Теорема i_α — изоморфизм групп

Д-во: 1) Гомоморфизм $i_\alpha(\gamma\delta) = (i_\alpha\gamma) \cdot (i_\alpha\delta)$

$\alpha^{-1}(\gamma\delta)\alpha) = \alpha^{-1}\gamma\cancel{\alpha\alpha^{-1}}\delta\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\gamma\delta\alpha$

2) $\circ \xrightarrow{\beta} * \xrightarrow{\alpha} \bullet$ $\quad (\beta\alpha)^{-1}\gamma(\beta\alpha)^{-1} \underset{\text{верно}}{=} \beta(\alpha\gamma\alpha^{-1})\beta^{-1}$

$i_{\beta\alpha} = i_\alpha \circ i_\beta$ $\quad \Rightarrow$ есть обратное $\Rightarrow$ изоморфизм

3) $i_\alpha: \pi_1(X,\circ) \to \pi_1(X,*)$

i_α^{-1} $\quad i_\alpha \cdot i_{\alpha^{-1}} = i_{\alpha\alpha^{-1}} = i_e = Id$

Пример $\pi_1(S^1,1)$ и $\pi_1(S^1,z_0) \simeq \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ $\quad i_\alpha\gamma = \alpha\gamma\alpha^{-1}$ $\quad \gamma$

$\deg \alpha\gamma\alpha^{-1} \longleftrightarrow \deg \gamma$

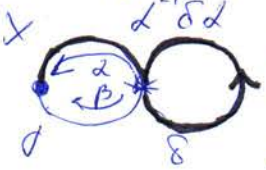
$\widetilde{\alpha\gamma\alpha^{-1}}(1) - \widetilde{\alpha\gamma\alpha^{-1}}(0)$ $\quad \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$

$(\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)) + (\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)) + (\underbrace{\tilde{\alpha}^{-1}(1)}_{=\tilde{\alpha}(0)} - \underbrace{\tilde{\alpha}^{-1}(0)}_{=\tilde{\alpha}(1)}) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$

Значит, числа равны

i_α не зависит от α!

Пример (букет 2 окружностей)



$i_\alpha : \pi_1(X,\circ) \to \pi_1(X,*)$

i_β : —''—

$\delta \neq \gamma^{-1}\delta\gamma \Rightarrow$ отобр. разные

$i_\alpha(\alpha^{-1}\delta\alpha) = \delta$

$i_\beta(\alpha^{-1}\delta\alpha) = \underbrace{\beta\alpha^{-1}}_{\gamma^{-1}}\delta\underbrace{\alpha\beta^{-1}}_{\gamma} = \gamma^{-1}\delta\gamma$

$i_\alpha(\rho) = \gamma^{-1} i_\beta(\rho)\gamma$

не равны, но сопряжены

Теорема ① Коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,\circ) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "i_\alpha", "\wr"'] & \pi_1(Y,\circ) \arrow[d, "i_{f_*\alpha}", "\wr"'] \\ \pi_1(X,*) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(Y,*) \end{tikzcd}$$

② Если гомотопия F между f и $g: X\to Y$ не фиксирована, т.е. образ точки $*\in X$ описывает при ней путь $\alpha(t) = F(*,t)$ в Y, то $f_* = i_\alpha \circ g_*$

$F : X\times[0,1] \to Y$

$F(*,t)$

$F_t : X \to Y$ $\begin{cases} F_0 = f \\ F_1 = g \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,*) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y,f(*)) \\ & \pi_1(Y,g(*)) \arrow[u, "i_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

$\alpha(0) = f(*)$

$\alpha(1) = g(*)$

Определим:

$[0,1] \underset{f\circ\gamma}{\overset{\alpha\circ g\circ\gamma\,\alpha^{-1}}{\rightrightarrows}} Y$ | $G(s,t)$, $G : [0,1]\times[0,1] \to Y$

$\alpha_{t_0}(s) = \alpha(t_0\cdot s)$

$\alpha_{t_0} : [0,1] \to Y$

лин. гомотопия

$\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_0 = [0,1]$

$G_{t_0} = \alpha_{t_0}\cdot(F_{t_0 *}\gamma)\cdot\alpha_{t_0}^{-1}$ нужная гомотопия

непрерывное отобр.,

$G_1 = \alpha_1\cdot(F_1\gamma)\alpha_1^{-1} = \alpha(g_*(\gamma))\alpha^{-1} = i_\alpha g_*(\alpha)$

$G_0 = \alpha_0\cdot(F_0\gamma)\alpha_0^{-1} = F_{0*}\gamma = f_*\gamma$ — фиксированная гомотопия

Частный случай: $g : X \to X$, $= \mathrm{Id}$

$f_* \cong$ изоморфизм

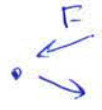
если сохр. выд. точку — то же самое; если не сохр. — ~~гомо~~ изоморфно

Гомотопическая эквивалентность

Пространства гомотопически эквивалентны ($X\sim Y$), если $\exists\ X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$, т.ч. $g\circ f \sim \mathrm{id}$ и $f\circ g \sim \mathrm{id}$

Теорема: если $X\sim Y$, то $\pi_1(X) \cong \pi_2(Y)$

$(f\circ g)\sim \mathrm{Id} \Rightarrow (f\circ g)_* = \mathrm{id}_* \Rightarrow f_*\circ g_* = \mathrm{id}$



$g(\bullet) = 0$

$f([0,1]) = \bullet$

1) $f\circ g : \bullet\to\bullet \sim \mathrm{id}$

2) $g\circ f : [0,1] \mapsto \{0\}$, $F_t(x) = tx$, $t_0 = 0 = g\circ f$, $t_1 = 1 = \mathrm{id}$

$\overset{?}{\mathrm{id}}(X) = X$

Пример: Любое выпуклое множество $\sim$ точке.

$\{0\} \underset{g(0)=0\in C}{\overset{f}{\leftrightarrows}} C$

$g\circ f = \{0\} \sim \mathrm{id}$

$f\circ g : C \mapsto \{0\}$

$F_t(x) = \underbrace{t\cdot x}_{\text{в отр. из 0 и } x} \in C \quad \forall t\in[0,1]$

$F_0(x) = 0 = f\circ g$

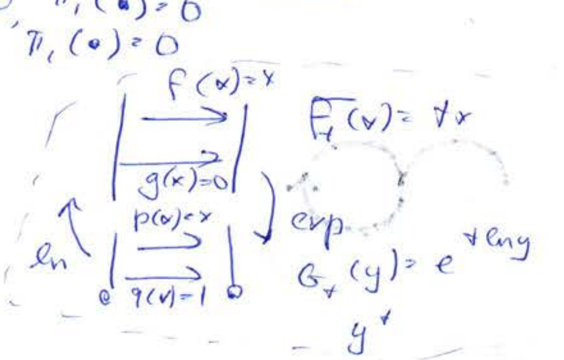
$F_1(x) = x = \mathrm{id}$

Пространства, гомотопически эквивалентные точке, называются стягиваемыми.

Окружность не стягиваема, т.к. $\pi_1(S^1) \neq 0$, $\pi_1(\bullet) = 0$
Сфера тоже не стягиваема, но $\pi_1(S^2) = \pi_1(\bullet) = 0$

$\mathbb{C} \setminus 0 \sim S^1$ $\quad f \circ g = \frac{z}{|z|} = id \sim id$ $\quad g \circ f = \frac{z}{|z|} \sim id(z) = z$

$f: S^1 \to \mathbb{C} \setminus 0$
$\quad z \to z$
$g: \mathbb{C} \setminus 0 \to S^1$
$\quad z \to z/|z|$



$H_t(z)$ (модуль: $|z|^t$, аргумент: $\arg(z)$) $= |z|^t \exp(2\pi i \arg(z))$

Гомотопическая экв. с вложением называется деформационной ретракцией

Фундаментальная группа произведения

Теорема $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_2(Y)$. Изоморфизм задается соответствием $\gamma \mapsto (p_*\gamma, q_*\gamma)$, где $X \times Y \xrightarrow{p} X$ и $X \times Y \xrightarrow{q} Y$ - проекции

Примеры $\pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}^2$ — тор T^2

$\mathbb{R}^2 \setminus 0 \simeq \mathbb{R}_+ \times S^1 \quad \pi_1 = \pi_1(0, +\infty) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ($\pi_1(0,+\infty) = \{1\}$, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$)

$z \cdot \exp_{2\pi i}(\psi, \varphi)$

$\pi_1(S^1 \times S^2) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^2) = \{1\} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

Доказательство: $\forall$ пары петель $\gamma: [0,1] \to X$ и $\delta: [0,1] \to Y$ образ $\gamma \times \delta: [0,1] \to X \times Y$

$p_*(\gamma \times \delta)$ $\quad [0,1] \xrightarrow{\gamma \times \delta} X \times Y \xrightarrow{p} X$ Аналогично с q_*
$q_*(\gamma \times \delta)$ $\quad t \mapsto (\gamma(t), \delta(t)) \mapsto \gamma(t)$, композиция p_*

Сюръективно

Инъективность: $[\alpha] \xmapsto{(p_*, q_*)} ([\gamma][\delta]) \Rightarrow [\alpha] = 0$ в $\pi_1(X \times Y)$

$[\gamma] = 0$ в $\pi_1(X)$, $[\delta] = 0$ в $\pi_1(Y)$ (ядро нулевое)

$[\gamma] = 0 \Rightarrow \Gamma: [0,1]^2 \to X$, аналог. с δ. $\quad \Gamma \times \Delta_0 = \alpha$, $\quad \Gamma \times \Delta_1 = id$

$\Gamma \times \Delta: [0,1]^2 \to X \times Y$
$\quad (t, s) \mapsto \Gamma(t,s) \times \Delta(t,s) \Rightarrow \alpha$ гомотопна *

Фундаментальная группа объединения

Теорема: Пусть X покрыто парой открытых подмножеств $U_\alpha \xrightarrow{j^\alpha} X$, т.ч. $U_1 \cap U_2$ лин. связно. Тогда $\pi_1(U_\alpha) \xrightarrow{j^\alpha_*} \pi_1(X)$ порождают $\pi_1(X)$

Пример: $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad \mathbb{Z} \to \{0\}$ - не инъекция

$S^2 \ni x_+, x_-$ $\quad S^2 \setminus x_-$ - открытые, $U_1 \cap U_2$ лин. связно
$\quad S^2 \setminus x_+$ ($\cong \{1\}$, $\cong \{1\}$)

$\pi_1(S^2)$ порождается $\pi_1(U_1)$ и $\pi_1(U_2)$

Доказательство. Пусть $\gamma: [0,1] \to X$ - петля с началом в $* \in U_1 \cap U_2$. Разложим в произведение петель в U_α.

$\gamma^{-1}(U_1)$ и $\gamma^{-1}(U_2)$ - найдётся набор интервалов, покрывающих X. Можем разбить на меньшие отрезки (уже делали так раньше)

$\gamma[\alpha_i, \alpha_{i+1}] \subset U_\alpha \Rightarrow \gamma = \gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n$ - пути

Считаем, что γ_i и γ_{i+1} в разных U_α, иначе можно заменить на произведение

$\Rightarrow *_i := f(\alpha_i) =$ конец $\gamma_i =$ начало $\gamma_{i+1} \in U_1 \cap U_2$

$U_1 \cap U_2$ лин. связен $\Rightarrow$ есть путь из точки, в которой мы считаем все фундаментальные группы $*$ в $*_i$

$\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n = \gamma_1 \beta_1^{-1} \beta_1 \gamma_2 \beta_2 \beta^2 \dots$

β_i — пути из $*_i$ в $*$

Повторение алгебра

Абелева группа $\Leftrightarrow ghg^{-1}h^{-1} = e$ $(g+h-g-h=0)$

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, свободная абелева группа $\langle e_1, e_2 \dots \rangle$ — это конечные суммы $\sum_{\in \mathbb{Z}} c_i e_i$.

$\forall G$ аб. $\exists F \langle e_1, \dots e_n\rangle$ — своб. и $F \xrightarrow[\text{сюр}]{\varphi} G$: т.е. $\forall g \in G$ $g = \sum c_i \varphi(e_i)$

$F \xrightarrow[\text{сюр}]{\varphi} G$ $G = F/\ker \varphi$ $f_j = \sum c_i^j e_i$ копредставление: $G = \langle e_1, e_2 \dots \mid \sum c_i^j e_i \dots \rangle$

$\langle e_1, e_2 \dots \rangle$ $\langle f_1, f_2 \dots \rangle$

$G_1 \oplus G_2 = \{ g_1 + g_2 \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2 \}$ $(g_1+g_2) + (g_1'+g_2') = (g_1+g_1') + (g_2+g_2')$

$G_1 = \langle E \mid F \rangle$, $G_2 = \langle E' , F' \rangle \Rightarrow G_1 \oplus G_2 = \langle E, E' \mid F, F' \rangle$

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "g_1 \mapsto g_1 + 0"] \arrow[dr, "f_1"'] & G_1 \oplus G_2 \arrow[d] & G_2 \arrow[l] \arrow[dl, "f_2"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

$(f_1 \oplus f_2)(g_1 + g_2) = f_1(g_1) + f_2(g_2)$, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$

Теперь не абелевы

G: $gh \ne hg$, $ghg^{-1}h^{-1} \ne e$ $\quad S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

Свободная группа $\langle p_1, p_2 \dots \rangle$ операция: конкатенация + приведение

$\downarrow$ $p_1 p_2^3 p_1 \cdot p_1^{-4} p_2^5 \sim p_1 p_2^3 p_1^{-3} p_2^5$,

π_1 — группа букета окружностей.

$\forall G \; \exists F \xrightarrow[\text{сюр}]{\varphi} G$ $\quad \langle p_1, p_2 \rangle \mapsto S_3$ $\quad p_1 \to \langle 12 \rangle$, $p_2 \to \langle 13 \rangle$

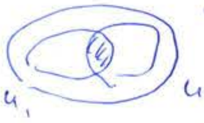
$\forall g = \varphi(p_{i_1}^{a_1} p_{i_2}^{a_2} \dots) = \varphi(p_{i_1})^{a_1} \cdot \varphi(p_{i_2})^{a_2} \dots$

$G = F/\ker\varphi$ копредставление аналогично с абелевыми группами

Для S_3: $\langle p_1, p_2 \mid p_1^2, p_2^2, (p_1 p_2)^3 \rangle$

Свободное произведение G_1 и G_2: $G_1 * G_2 := \{$приведенные слова из алфавитов $G_1, G_2\}$

Приведение: удаление e, $x_i x_{i+1} \in G_{1,2} \Rightarrow$ вместо произв. пишем одно, равное их произведению. Операция — все из конкатенация и приведение



$\pi_1(U_1)$ и $\pi_1(U_2)$ порождают $\pi_1(X)$

γ представляется как произв. $\gamma \Rightarrow$ эл-т свободного произведения

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[dl] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\ G_2 \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & G_1 * G_2 \arrow[dr, "f_1 * f_2"] & \\ & & H \end{tikzcd}$$

$x_1, x_2, x_3 \dots$, $x_1 \in G_{1,2}$, $x_2 \in G_{2,1}$, $x_3 \in G_{1,2}$

$\underbrace{f_1(x_1)}_{\in H} \cdot \underbrace{f_2(x_2)}_{\in H} \cdot \underbrace{f_1(x_3)}_{\in H} \dots = f_1 * f_2$

Коммутант группы $G \supset G'$ — подгруппа, порождённая коммутаторами

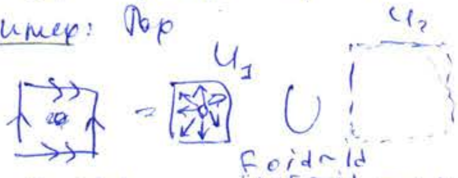
$G \xrightarrow{\varphi} H$ (абелева) $\Rightarrow \ker\varphi \supset G'$, т.е. образ любого $ghg^{-1}h^{-1} = e$

Фактор G/G' — абелева, это наз. абелианизацию

Переформулировка теоремы о фундаментальной группе объединения

Теорема. X покрыто U_1, U_2 откр., j^1 и j^2 — вложения, тогда гомоморфизм $j^1_* * j^2_* : \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \to \pi_1(X)$ сюръективен.

Пример: Тор



, пересечение линейно связно

$f\circ id \sim id$
$id \circ f \sim id$ $\quad F_t(x) = tx + (1-t)f(x)$

$\pi_1(U_1)$

F деформационной ретракции f-непр.

Группа ретракта — свободная, т.к. букет 2 окружностей

$\pi_1(U_2) = 0$ (очевидно)

$U_1 \cap U_2 \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{Z} = \langle\alpha\rangle$

$\pi_1(U_1) * \underset{e}{\pi_1(U_2)} \to \pi_1(T^2) \Rightarrow \pi_1(U_1) \to \pi_1(T^2)$

$\overset{\mathbb{Z}}{\langle\alpha\rangle} * \overset{\mathbb{Z}}{\langle\beta\rangle} = \langle\alpha,\beta\rangle \xrightarrow[\text{много эл-тов}]{\text{сюр.}} \overset{\mathbb{Z}}{\langle\alpha\rangle} \times \overset{\mathbb{Z}}{\langle\beta\rangle}$ переходят в 0 (коммутаторы) $\Rightarrow$ не инъективно.

Теорема Зейферта – Ван Кампена

X покрыто парой открытых подмножеств, $U_1 \cap U_2 = V$ — лин. связно, как найти $\pi_1(X)$?

Надо найти ядро сюръекции.

Пример $\alpha_1\alpha_2^{-1} \in \ker j^1_* * j^2_*$ в след. случае:

$\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \ni \alpha_1\alpha_2$, $\quad \alpha \xmapsto{i_2} \alpha_2$, $\quad \alpha \xmapsto{i_1} \alpha_1$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(V) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, "f_*"] & \pi_1(U_2) \arrow[d, "j^2_*"] \\
\pi_1(U_1) \arrow[r, "j^1_*"] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

$j^1_* * j^2_*(\alpha_1\alpha_2^{-1}) =$
$= j^1_*(\alpha_1)\, j^2_*(\alpha_2^{-1}) =$
$= j^1_*(\alpha_1)\, j^2_*(\alpha_2)^{-1} =$
$= j^1_*(i_1(\alpha))\, j^2_*(i_2(\alpha))^{-1} = f_*(\alpha) f_*(\alpha)^{-1} = e$

Теорема: $\ker j^1_* * j^2_*$ это норм. подгруппа порождено такими элементами.

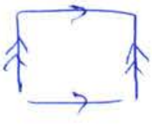
Для тора:

$\langle\alpha\rangle * \langle\beta\rangle \xrightarrow{\text{сюр.}} \pi_1(T^2)$

$\alpha \mapsto \{e\}$

$\alpha_1 \in \langle\alpha\rangle * \langle\beta\rangle$

$\alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1} \in \ker \Rightarrow$ порождено α_1



$$\begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, dashed, "i"] & \pi_1(U_2) \arrow[d, "i^2"] \arrow[ddr, bend left, "j^2_*"] & \\ \pi_1(U_1) \arrow[r, "i^1"'] \arrow[drr, bend right, "j^1_*"'] & \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \arrow[dr, "j^1_* * j^2_*"] & \\ & & \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

i не входит в комм. диаграмму

$$i(\gamma) = i^1 i_1(\gamma) \cdot i^2 i_2(\gamma)^{-1}$$

$i\pi_1(V)$ + нормализация:

$$\pi_1(X) = \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \,/\, \text{по норм. } \pi_1(V)$$

Фундаментальные группы поверхностей

Сфера с ручками — склейка правильного n-угольника. Аналогично или в случае с тором вынимаем точку в середине и граница, $\pi_1 = \langle \gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2, \ldots, \gamma_g, \delta_g \rangle$ фундаментальные группы U_1: букет из окружностей (если ручек g), U_2: $\{e\}$, $\pi_1(U_1 \cap U_2) = \langle \alpha \rangle$

$$\langle \gamma_1, \delta_1, \ldots, \gamma_g, \delta_g \rangle \xrightarrow{\text{эпи}} \pi_1(S)$$

Порождающие ядра: $\langle \gamma_1 \delta_1 \gamma_1^{-1} \delta_1^{-1} \gamma_2 \delta_2 \gamma_2^{-1} \delta_2^{-1} \ldots \rangle$

Абелианизация и 1-мерные гомологии

$$\pi_1(S) = \langle \gamma_1, \delta_1, \ldots \gamma_g, \delta_g \mid \prod_{i=1}^{g} \gamma_i \delta_i \gamma_i^{-1} \delta_i^{-1} \rangle$$

$$g_1 \neq g_2 \Rightarrow \pi_1(S_{g_1}) \not\cong \pi_1(S_{g_2}) \Rightarrow S_{g_1} \not\cong S_{g_2}$$

$\pi_1(S_{g_1})/_{\text{комм.}} \not\cong \pi_1(S_{g_2})/_{\text{комм.}}$ где элементы, они комм.

Комм. группа порожденная теми же, $\sum_{i=1}^{g} \gamma_i + \delta_i - \gamma_i - \delta_i \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Аналог. с $\mathbb{Z}^{2g_2}$, если $g_1 \neq g_2$, то $\mathbb{Z}^{2g_1} \not\cong \mathbb{Z}^{2g_2}$

Классификация накрытий (доказательство)

Пусть Y — линейно связное локально односвязное пространство. Тогда каждое действие m группы $\pi_1(Y, \bullet)$ на мн-ве A изоморфно действию монодромии m_p некоторого накрытия $p: X \to Y$ на слое $F = p^{-1}(\bullet)$. Т.е.:

1) $\exists$ накрытие $p: X \to Y$
2) $\exists$ взаимно-однозн. соотв. $A \to F$, т.ч.:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, \bullet) \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "m_p"] & \\ \mathrm{Aut}\, A \arrow[rr] & & \mathrm{Aut}\, F \end{tikzcd}$$

Монодромия композиции

Если накрытие разлагается в композицию двух, то его монодромия индуцирует монодромию $m_\gamma: \tilde F \to \tilde F$ вдоль каждой петли $\gamma \in \pi_1(Y, \bullet)$ индуцирует монодромию второго $m_\gamma: F \to F$: если $x_1 \overset{m_\gamma}{\mapsto} x_2$, то $\varphi(x_1) \overset{m_\gamma}{\mapsto} \varphi(x_2)$

$$\begin{tikzcd} \tilde F := \tilde p^{-1}(\bullet) \arrow[d] & \subset & \tilde X \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\tilde p"] & \\ F := p^{-1}(\bullet) & \subset & X \arrow[r, "p"] & Y \ni \bullet \end{tikzcd}$$

Доказательство:

Дано: поднятие $\tilde\gamma$ петли $\gamma \in \pi_1(Y, \bullet)$ из $x_1 \in \tilde F$ ведет в $x_2 \in \tilde F$

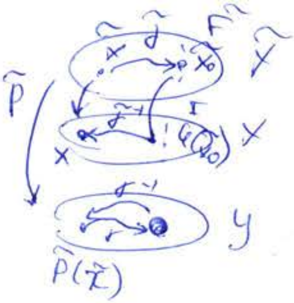
Хотим: поднятие петли $\gamma \in \pi_1(Y, \bullet)$ из $\varphi(x_1) \in F$ ведет в $\varphi(x_2) \in F$

поднятие γ из $\varphi(x_1)$ — это $\varphi_* \tilde\gamma$, φ_* — индуцированное отображение

Th Y — локально лин. св. пр-во. Если монодромия $m_\gamma: \tilde F \to \tilde F$ накрытия $\tilde p: \tilde X \to \tilde Y$ индуцирует монодромию $m_\gamma: F \to F$ накрытия $p: X \to Y \Rightarrow \exists$ отобр. $\tilde F \overset{\varphi}{\to} F$, т.ч. $x_1 \overset{m_\gamma}{\mapsto} x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \overset{m_\gamma}{\mapsto} \varphi(x_2)$

$$\begin{tikzcd} \tilde F \subset \tilde X \arrow[dr] & \\ F \subset X \arrow[r] & Y \ni \bullet \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \tilde F \in \hat X \arrow[r, "\hat p"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, dashed] & Y \\ F \subset X \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$



Если поменять γ на δ, все образы при построениях будут другими, но конечная точка не зависит от выбора δ, ведь если будем поднимать δ из y $\Rightarrow$ конечная т. поднятия не совп. с предыдущей

$\gamma^{-1}\delta$ $\hat{x}_0 \to \hat{x}_1$, но $\varphi(\hat{x}_0) \neq \varphi(\hat{x}_1)$

Расширим отображение φ слоя до $\hat X \to X$, переводя конец соединения пути $\gamma: [0,1] \to Y$ с нач. в $z \in F$ в конец поднятия γ с началом $\varphi(z) \in F$. Док. $X \to \hat X$ — непр.?

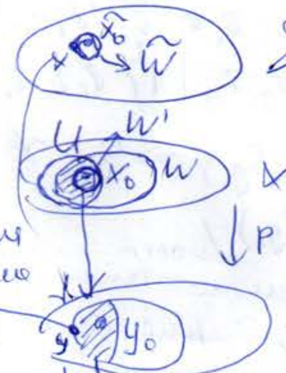
$$\begin{tikzcd} \tilde F \subset \hat X \arrow[r, "\hat p"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, dashed] & Y \\ F \subset X \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Дано: $\hat{x}_0 \in \hat{X}_0$, $\varphi(\hat{x}_0) \to x_0$, $U \ni \varphi(\hat{x}_0)$

Хотим окр. $\hat{W} \ni \hat{x}_0$, т.ч. $\varphi^{-1}(U) \supset W$

1) Строим $\hat{W}$

2) Доказываем корректность



Y — локально лин. связна

V — откр. окр. трив., лин. связн.

пересечение трив. окр. p и $\hat p$

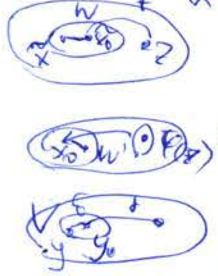
уменьшим до лин. св.

$W' \subset U$, $x_0 \in W'$

$\hat{W} \ni \hat{x}_0$

Докажем, что $\varphi: \hat{W} \to W'$

$\hat{x}_0 \to \hat{x}_0$ — конец поднятий пути $y \in V$



$\hat{x}_0 \xrightarrow{\tilde\delta} \hat{x}$

$*$ –"–

$\gamma\delta$ из $\bullet$ в y поднимем

$\exists\, \tilde\delta$ из z в $\hat{x} \in \hat{W}$

δ' из $\varphi(z)$ в $x \in W'$ по постр. в W'

$\Downarrow$ по опр. φ $W' \ni x =! \varphi(\hat{x})$