Логика и алгоритмы

Задачи семинаров 4-5

Теорема 0.1 (Цермело)**.** *Для любого множества X существует отношение $<\subset X \times X$, которое является полным порядком на X.*

Теорема 0.2 (лемма Цорна)**.** *Пусть $(P,<)$ — частично упорядоченное множество, в котором всякая цепь имеет верхнюю грань. Тогда $(P,<)$ содержит максимальный элемент.*

1. Докажите, что всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.

2. Докажите, что если A — бесконечное множество, B — не более чем счетное (т.е. конечное или счетное) множество, то $A \cup B \sim A$.

3. Выведите аксиому выбора из леммы Цорна и из теоремы Цермело (в теории множеств Цермело-Френкеля без аксиомы выбора).

4. С помощью леммы Цорна докажите, что всякая цепь в частично упорядоченном множестве содержится в максимальной (по включению).

5. Докажите, что любой частичный порядок на множестве X можно продолжить до линейного. (Отношение R_2 *продолжает* R_1, если $R_1 \subset R_2$.)

6. Докажите теорему Гамеля о том, что в любом векторном пространстве существует базис.

7. Проверьте, что все базисы имеют одинаковую мощность.

8. Какую мощность будет иметь базис в случае векторного пространства $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$?

9. Докажите, что существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отличная от линейной и удовлетворяющая тождеству $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Может ли такая функция иметь предел в точке $x = 0$?

10. Докажите, что между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ существует биекция, сохраняющая операцию сложения, то есть аддитивные группы $(\mathbb{C}, +)$ и $(\mathbb{R}, +)$ изоморфны. (Вместо $\mathbb{C}$ можно взять аддитивную группу n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$.)

11. Докажите, что существует подмножество $\mathbb{R}^2$, которое пересекается с каждой прямой на плоскости ровно по двум точкам.