ТФКП
2 курс
Домашнее задание

Владислав Мозговой
1789769386

29 марта 2021 г.

Домашнее задание 3

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_5$.

(0) При каких комплексных значениях a, b, $c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = az + b\overline{z} + z^2 + c$ имеет комплексную производную в точке $z = 0$?

(1) При каких комплексных значениях a, b, $c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = az + b\overline{z} + c$ является евклидовой изометрией?

(2) Покажите, что функция $f : re^{i\phi} \mapsto re^{2i\phi}$ не является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(3) При каких вещественных значениях параметров a, $b \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x + iy) = ax^2 + by^2 + ixy$$

голоморфна на всем $\mathbb{C}$?

(4) При каких комплексных значениях $a, b, c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = a\,\mathrm{Re} z + b\,\mathrm{Im} z + c\,z\overline{z}$ имеет комплексную производную в точке $z = 0$?

(5) Покажите что функция $f : re^{i\phi} \mapsto e^{i\phi}$ не является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(6) При каких вещественных значениях параметров a, $b \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x, y) = x^3 - axy^2 + i(bx^2y - y^3)$$

голоморфна на всем $\mathbb{C}$?

(7) При каких комплексных значениях a, b, $c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = e^{ia}\overline{z} + b|z|^2 + c$ является евклидовой изометрией?

(8) Покажите что функция $f : re^{i\phi} \mapsto r^2e^{i\phi}$ не является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(9) При каких вещественных значениях параметров a, $b \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x, y) = e^x \cos y + ay + ibe^x \sin y + ix$$

голоморфна на всем $\mathbb{C}$?

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_6$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Полный прообраз множества $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 2\}$ при отображении $f(z) = z^2 - \frac{1}{2}$ связен.

(1) Существует голоморфное отображение $f : X \to \mathbb{C}$, такое, что $f(z)^2 = z$ для всех $z \in X$. Здесь $X = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x + y^2 > 0\}$.

(2) Преобразование (взаимно-однозначное отображение) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, переводящее любую окружность в окружность, обязательно голоморфно.

(3) Существует несвязное открытое множество, переводимое отображением $f(z) = z^3$ в связное.

(4) Существует голоморфное отображение $f : X \to \mathbb{C}$, такое, что $f(z)^3 = z$ для всех $z \in X$. Здесь $X = \{z \mid |z| > 2\}$.

(5) Полный прообраз множества $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)^2 + 4\mathrm{Im}(z)^2 > 1\}$ при отображении $f(z) = z^2 - \frac{1}{2}$ связен.

(6) Существует голоморфная функция $f : X \to \mathbb{C}$, такая, что $e^{f(z)} = z$. Здесь $X = \{z = x + iy \mid y > x^3 - 1\}$.

(7) Существует непрерывная функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, такая, что $f(z)^2 - 1 = z$.

(8) Существует только одна непрерывная функция $f : \mathbb{C} \backslash [-1, 1] \to \mathbb{C}$, такая, что $f(z^2) = z^2 - 1$ и $\mathrm{Im}(f(i)) > 0$.

(9) Множество голоморфных функций $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ со свойством $e^{f(z)} = z + 2$ бесконечно. Здесь $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_2 + a_7$. Являются ли указанные ниже функции $u(x, y)$ гармоническими? Если да, то найдите гармонически сопряженные функции.

(0) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.
(1) $u(x, y) = e^x \cos y$.
(2) $u(x, y) = -2\sin(xy)\cos(xy)e^{x^2-y^2}$
(3) $u(x, y) = x + y$.
(4) $u(x, y) = e^x(x\cos y - y \sin y)$.
(5) $u(x, y) = e^{x^3-3y^2x}(\cos 3yx^2 \cos y^3 + \sin 3yx^2 \sin y^3)$.
(6) $u(x, y) = e^{2x}\cos 2y + e^x \cos y$.
(7) $u(x, y) = e^{-y}\cos x + 3x$.
(8) $u(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x$.

(9) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x - y$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_1 + a_8$. Может ли непостоянная голоморфная функция $f : U \to \mathbb{C}$ (где $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое подмножество) удовлетворять следующим условиям. Строго обоснуйте ответ.

(0) Функция $|f(z)|$ постоянна.
(1) Функция $\mathrm{Re}(f(z))$ постоянна.
(2) Функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f(z) = \overline{f(z)}$ для всех z.
(3) Функция $\arg f(z)$ постоянна.
(4) $\mathrm{Re} f(z) = -\mathrm{Im} f(\overline{z})$ для всех z.
(5) Разность $\mathrm{Re} f(z) - \mathrm{Im} f(z)$ постоянна.
(6) Разность $\arg f(z) - |f(z)|$ постоянна.
(7) Произведение $(\mathrm{Re}\, f(z))(\mathrm{Im}\, f(z))$ постоянно.
(8) Произведение $\arg(f(z))|f(z)|$ постоянно.
(9) Сумма $f(z) + \overline{z}^2$ постоянна.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_9$.

(0) Выпишите уравнения Коши–Римана в полярных координатах.

(1) Пусть $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ — рациональная функция от $z = x+iy$. Докажите, что функцию f можно следующим образом восстановить по функции u:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0).$$

(2) Найдите размерность пространства гармонических однородных кубических многочленов от x и y.

(3) Известно, что функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ голоморфна. Докажите, что функция $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ тоже голоморфна.

(4) Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция. Являются ли гармоническими функции $u(x, -y)$ и $u(x^2 - y^2, 2xy)$?

(5) Докажите, что отображение, осуществляемое голоморфной функцией, имеет неотрицательный якобиан. Как этот якобиан связан с комплексной производной?

(6) Докажите, что если гармоническая функция u от x и y записана как функция от комплексной переменной $z = x + iy$, то она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

(7) Приведите пример функции, удовлетворяющей условию Коши–Римана в точке 0, но не имеющей комплексной производной в этой точке.

(8) Найдите гармоническую функцию $u(x,y)$ на $\mathbb{C}$, такую, что
$$u(\cos t, \sin t) = \cos^2 t.$$

(9) Опишите геометрический смысл условия
$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| > \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|.$$

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_4 + a_5 = 7 + 6 = 3 \mod 10$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = ax^2 + by^2 + ixy$$
$$u(x,y) = ax^2 + b^2y \qquad v(x,y) = xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2by$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

Каждая голоморфная функция удовлетворяет условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Откуда

$$2ax = x \qquad 2by = -y$$
$$a = \frac{1}{2} \qquad b = -\frac{1}{2}$$

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_3 + a_6 = 9 + 9 = 8 \mod 10$

$$f:\ \mathbb{C}\backslash[-1,1] \to \mathbb{C}$$
$$f:\ x+iy \to u(x,y) + iv(x,y)$$
$$f(z^2) = z^2 - 1 \qquad f(x^2 + 2ixy - y^2) = (x^2 - y^2 - 1) + i(2xy)$$
$$f((x^2 - y^2) + i(2xy)) = (\Re(z^2) - 1) + i(\Im(z^2))$$

Утверждение: $\forall\ z = a + bi\ \exists!$ пара $x, y : \begin{cases} a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \end{cases}$ и $\Im(f(i)) > 0\ b > 0$

Решим систему

$$a = \frac{b^2}{4y^2} - y^2$$
$$4y^4 + 4ay^2 - b^2 = 0$$
$$D = 16a^2 + 16b^2 = 16|z|^2$$
$$y^2 = \frac{-4a \pm 4|z|}{8} = \frac{-a \pm |z|}{2}$$
$$b > 0 \Rightarrow |z| > a$$
$$y = \sqrt{\frac{-a + |z|}{2}} \qquad x = \frac{b}{\sqrt{2(|z| - a)}}$$

Однозначно восстановили отображение $f:\ a + bi \mapsto a - 1 + ib$ оно единственно

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_2 + a_7 = 8 + 3 = 1 \mod 10$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos(y) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x\cos(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin(y) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x\cos(y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x\cos(y) - e^x\cos(y) = 0$$

Следовательно $e^x \cos(y)$ – гармоническая

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin(y) = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$v(x,y) = -e^x \cos(y) + \phi(x)$$
$$e^x \cos(y) = e^x \cos(y) - \phi'(x)$$
$$v(x,y) = -e^x \cos(y) + c$$

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_1 + a_8 = 7 + 8 = 5 \mod 10$
Докажем более общий факт, что если $a\Re(f(z)) + b\Im(f(z)) = c$ при $a^2 + b^2 \neq 0$, то f – константа

$$\Re(f) = u(x,y) \qquad \Im(f) = v(x,y)$$
$$au(x,y) + bv(x,y) = c$$
$$au_x + bv_x = 0 \quad au_y + bv_y = 0 \quad \text{диффиринцирование с обеих сторон}$$
$$au_x - bu_y = 0 \quad au_y + bu_x = 0 \quad \text{условия Коши-Римана}$$
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$
$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$v_x = v_y = 0 \quad \text{то есть фугкция константа}$$

Задача 5

Необходимо решить задачу $a_0 + a_9 = 1 + 6 = 7 \mod 10$
Рассмотрим $f(z) = \sqrt{|xy|}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$$

Соответственно условие Коши-Римана выполнено в $z = 0$, так как $0 = 0,\ 0 = 0$. Тогда если f дифференцируемо, то $f'(0) = 0$, но если рассмотреть $x = y$, то есть $z = x + ix$, то

$$\frac{f(x+ix)}{x+ix} = \frac{x}{x+ix} = \frac{1}{1+i}$$

То есть $f'(0) \neq 0$, противоречие, а следовательно f не дифференцируема в 0