Образцы задач, которые могут быть на коллоквиуме

Задача 1. Нетождественое аффинное преобразование коммутирует со всеми сдвигами. Верно ли, что тогда и само оно — сдвиг?

Задача 2. Верно ли, что любые три различные параллельные прямые на аффинной плоскости можно перевести аффинным преобразованием в любые три другие различные параллельные прямые? Если да — докажите, если нет — приведите контрпример.

Задача 3. Напишите направляющие векторы биссектрис углов, возникающих при пересечении прямых $2x - y = 5$ и $3y + x = 2$ на евклидовой координатной плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача 4. Покажите, что в счётномерном пространстве всякое подпространство конечномерно или счётномерно, а всякое несчётное множество векторов линейно зависимо.

Задача 5. Во время своего нашумевшего тура по зазеркалью Алиса сходила на экскурсию по трёхмерной поверхности четырёхмерного куба (которая, как известно, представляет собою набор обычных трёхмерных кубических комнат, причём в каждой из шести стен каждой из комнат имеется дверь в одну из соседних комнат). В ходе экскурсии Алиса покидала каждую комнату через дверь в той стене, что **а)** противоположна **б)** находится по левую руку от той стены, через которую она вошла. В скольких комнатах она в итоге побывала?

Задача 6. В четырёхмерном аффинном пространстве заданы непересекающиеся двумерная плоскость $\Pi = q + U$ и прямая ℓ с вектором скорости $v \notin U$. Заметают ли прямые (ab) с $a \in \ell$, $b \in \Pi$ всё пространство?

Задача 7. Обозначим через A, B, C, D, E концы стандартных базисных векторов в $\mathbb{R}^5$, а через X — середину отрезка, соединяющего центры треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$. Проходящая через X прямая YZ имеет точку Y на прямой AE, а точку Z — в плоскости BCD. Найдите $\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{YZ}$.

Задача 8. Пусть точка P лежит строго внутри[1] невырожденного симплекса $ABCDE \subset \mathbb{R}^4$. Можно ли провести через P

- **а)** двумерную плоскость, не пересекающую ни одной прямой, проходящей через какие-нибудь две вершины симплекса $ABCDE$
- **б)** двумерную плоскость, не пересекающую ни одной двумерной плоскости, проходящей через какие-нибудь три вершины симплекса $ABCDE$
- **в)** прямую, не пересекающую ни одной двумерной плоскости, проходящей через какие-нибудь три вершины симплекса $ABCDE$?

Задача 9. В векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$ задан конечный набор двумерных векторных подпространств. Всегда ли найдётся двумерное подпространство, трансверсальное ко всем подпространствам из заданного набора?

Задача 10. Сколько прямых в n-мерном аффинном пространстве над полем из q элементов? А сколько (невырожденных) треугольников на плоскости? А сколько плоскостей в m-мерном аффинном пространстве?

Задача 11. Может ли поле из 27 элементов содержать подполе из 9 элементов ?

Задача 12. Может ли двумерное векторное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа прямых? Более общие вопросы: может ли векторное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа векторных подпространств

[1] Т. е. является барицентрической комбинацией точек A, B, C, D, E со строго положительными весами.

коразмерности 1? А конечного числа подпространств произвольных положительных коразмерностей?

Задача 13. Векторное подпространство $V \subset \Bbbk[x]$ содержит многочлены каждой из степеней от нуля до m. Верно ли, что оно содержит все многочлены степени $\leqslant m$?

Задача 14. Пусть $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ — два поля, и $\mathbb{F}$ — конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$. Верно ли, что любой элемент поля $\mathbb{F}$ является корнем некоторого многочлена из $\Bbbk[x]$?

Задача 15. Дано $m+1$ попарно разных чисел $a_0, a_1, \dots, a_m \in \Bbbk$. Постройте в пространстве многочленов степени $\leqslant m$ и коэффициентами из $\Bbbk$ такой базис, в котором координатами многочлена f являются а) значения f в точках a_i б) значения f и его первых m производных в точке a_0. Много ли существует таких базисов?

Задача 16. Покажите, что множество 2^M всех подмножеств данного множества M образует векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2) = \{0, 1\}$ относительно операций

$$X + Y \overset{\text{def}}{=} (X \cup Y) \smallsetminus (X \cap Y), \quad 1 \cdot X \overset{\text{def}}{=} X \quad \text{и} \quad 0 \cdot X \overset{\text{def}}{=} \varnothing .$$

В предположении, что множество M конечно, постройте в пространстве 2^M какой-нибудь базис и найдите $\dim 2^M$. Всякое ли семейство таких подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n \subset M$, что $X_i \not\subset \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu$ при всех $i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$, линейно независимо?

Задача 17. Покажите, что для любых пяти различных точек на координатной плоскости $\Bbbk^2$ существует кривая второй степени[2], проходящая через эти пять точек.

Задача 18. Квадратная вещественная матрица называется *бистохастической*, если сумма элементов в каждой её строке и каждом её столбце равна единице. Верно ли, что

а) произведение бистохастических матриц всегда является бистохастической матрицей?

б) для любой бистохастической матрицы A матрица $E - A$ необратима?

Задача 19. Имеется 7 одинаковых банок, каждая из которых на 9/10 заполнена краской одного из семи цветов радуги, в разных банках — разные цвета. Можно ли, переливая краску из банки в банку и равномерно размешивая содержимое после каждого переливания, получить хотя бы в одной из банок колер, где все семь цветов представлены в равной пропорции?

Задача 20. Пусть квадратная матрица A такова, что $A^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Верно ли, что матрица $E + A$ всегда обратима?

[2] Т. е. фигура, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, где $f \in \Bbbk[x, y]$ — многочлен степени 2.