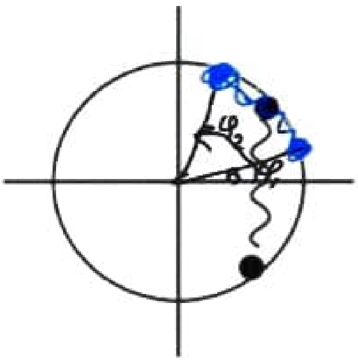
(1)

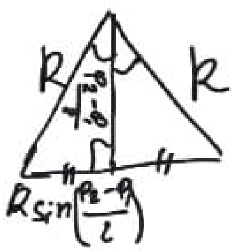


1. Составить лагранжево описание (в угловых переменных) двух частиц массы m, свободно движущихся по окружности радиуса R и связанных пружиной произвольной длины l (в нерастянутом состоянии). Пружина соединяет частицы по прямой, а не по окружности (Рис.1). Исследовать уравнения движения при разном соотношении между R и l: $R >> l$ и $R << l$.

Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} = T - U$$

T — кинетическая энергия; U — потенциальная энергия



$$T = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} = \frac{m \dot{\varphi}_1^2 R^2}{2} + \frac{m \dot{\varphi}_2^2 R^2}{2}$$

$$U = \frac{k \Delta x^2}{2} = \frac{k\left(l - 2R\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\right)^2}{2}$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m \dot{\varphi}_1^2 R^2}{2} + \frac{m \dot{\varphi}_2^2 R^2}{2} - \frac{k}{2}\left(l - 2R\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\right)^2$$

Принцип наименьшего действия:

$$\varphi_1: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_1} = -kR\left(l\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) - R\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{\varphi}_1 R^2\right) = mR^2\ddot{\varphi}_1$$

$$kR^2\sin(\varphi_2-\varphi_1) - kRl\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) = mR^2\ddot{\varphi}_1$$

$$\varphi_2: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_2} = klR\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) - kR^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{\varphi}_2 R^2\right) = m\ddot{\varphi}_2 R^2$$

$$klR\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) - kR^2\sin(\varphi_2-\varphi_1) = m\ddot{\varphi}_2 R^2$$

$\boxed{R << \ell}$ $\Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$ малый угол $\Rightarrow \cos\frac{\varphi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}_{1}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}}$$

$$\ddot{\varphi} = 2\frac{k\ell}{mR}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) - 2\frac{k}{m}(\pi - \varphi)$$

$$\ddot{\varphi} = \varphi\left(-\frac{k\ell}{mR} + 2\frac{k}{m}\right) + \frac{k\ell\pi}{mR} - \frac{2k}{m}\pi$$

$$\ddot{\varphi} + \varphi\left(\frac{k\ell}{mR} - 2\frac{k}{m}\right) = \frac{k\ell\pi}{mR} - \frac{2k\pi}{m}$$

1) $\ddot{\varphi} + \varphi\left(\frac{k\ell}{mR} - \frac{2k}{m}\right) = 0 \Rightarrow$ Хар. ур-ние: $\lambda^2 + \left(\frac{k\ell}{mR} - \frac{2k}{m}\right) = 0$

$\lambda^2 + \frac{k}{mR}(\ell - 2R) = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{mR}(\ell-2R)}\, i$

$$\varphi = \varphi(0)\cos\sqrt{\frac{k}{mR}(\ell-2R)}\,t + \dot{\varphi}(0)\sin\sqrt{\frac{k}{mR}(\ell-2R)}\,t$$

2) $\varphi = a$

$$a\left(\frac{k\ell}{mR} - \frac{2k}{m}\right) = \pi\left(\frac{k\ell}{mR} - \frac{2k}{m}\right)$$

$$a = \pi$$

Общее решение:

$$\varphi = \varphi(0)\cos\sqrt{\frac{k}{mR}(\ell-2R)}\,t + \dot{\varphi}(0)\sin\sqrt{\frac{k}{mR}(\ell-2R)}\,t + \pi$$

(1) + (2): $\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = 0$

$(\varphi_1 + \varphi_2)^{\cdot\cdot} = 0$

$(\varphi_1 + \varphi_2)^{\cdot} = \dot{\varphi}(0)$

$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t \quad (4)$

(3) и (4): $\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi \end{cases}$

(3) + (4): $\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t + \varphi_0\cos\sqrt{\frac{k}{mR}(\ell-2R)}\,t + \dot{\varphi}(0)\sin\sqrt{\frac{k}{mR}(\ell-2R)}\right.$

(3) − (4): $\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t - \varphi_0\cos\sqrt{\frac{k}{mR}(\ell-2R)}\,t - \dot{\varphi}(0)\sin\sqrt{\frac{k}{mR}(\ell-2R)} - \pi\right.$

$$-\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \frac{k}{m}\sin(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{kl}{mR}\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) & (1) \\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{kl}{mR}\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) - \frac{k}{m}\sin(\varphi_2-\varphi_1) & (2) \end{cases}$$

$$(\varphi_2-\varphi_1)^{\cdot\cdot} = 2\frac{kl}{mR}\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) - 2\frac{k}{m}\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\varphi_2-\varphi_1 = \varphi \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi} = 2\frac{kl}{mR}\cos\frac{\varphi}{2} - 2\frac{k}{m}\sin\varphi$$

$\boxed{R >> l}$ $\Rightarrow$ $\frac{\varphi}{2}$ малый угол $\Rightarrow$ $\sin\varphi = 2\underbrace{\sin\frac{\varphi}{2}}_{\frac{\varphi}{2}}\underbrace{\cos\frac{\varphi}{2}}_{1} \approx \varphi$

$\cos\frac{\varphi}{2} \approx 1$

$$\ddot{\varphi} = 2\frac{kl}{mR} - 2\frac{k}{m}\cdot\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{k}{m}\varphi = 2\frac{kl}{mR}$$

1) $\ddot{\varphi} + 2\frac{k}{m}\varphi = 0 \Rightarrow$ характ. ур-ние: $\lambda^2 + 2\frac{k}{m} = 0$

$\lambda^2 = -2\frac{k}{m}$

$\lambda = \pm\sqrt{2\frac{k}{m}}\, i$

$$\varphi = \varphi(0)\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t + \dot{\varphi}(0)\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t$$

2) $\varphi = a$

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{k}{m}\varphi = 2\frac{kl}{mR}$$

$$2\frac{k}{m}a = 2\frac{kl}{mR}$$

$$a = \frac{l}{R}$$

$\Rightarrow$ Общее решение:

$$\varphi = \varphi(0)\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t + \dot{\varphi}(0)\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t + \frac{l}{R}$$

(1) + (2): $\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = 0$

$$(\varphi_1+\varphi_2)^{\cdot\cdot} = 0$$

$$(\varphi_1+\varphi_2)^{\cdot} = \dot{\varphi}(0)$$

$$\varphi_1+\varphi_2 = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)\,t \quad (4)$$

(3) и (4): $\begin{cases} \varphi_1+\varphi_2 = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)\,t \\ \varphi_1-\varphi_2 = \varphi \end{cases}$

(2) $z = \frac{1}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2$

В цилиндрических координатах:

$$T_{кин} = \frac{m}{2}(\dot r^2 + \dot z^2 + r^2\dot\varphi^2) = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + \frac{\dot r^2}{r^4} + r^2\dot\varphi^2\right)$$

$$U = 0$$

$$L = T_{кин} - U \Rightarrow \boxed{L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + \frac{\dot r^2}{r^4} + r^2\dot\varphi^2\right)}$$

Ур-ия Эйлера-Лагранжа

1) $L_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = \frac{m}{2}\left(2\dot r + \frac{2\dot r}{r^4}\right) = m\dot r\left(1 + \frac{1}{r^4}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = m\ddot r\left(1 + \frac{1}{r^4}\right) - 4m\dot r\frac{\dot r}{r^5} = m\ddot r\left(1+\frac{1}{r^4}\right) - 4m\frac{\dot r^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{m}{2}\left(-4\frac{\dot r^2}{r^5} + 2r\dot\varphi^2\right) = -2m\frac{\dot r^2}{r^5} + mr\dot\varphi^2$$

$$\Rightarrow m\ddot r\left(1+\frac{1}{r^4}\right) - 2m\frac{\dot r^2}{r^5} - mr\dot\varphi^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot r\left(1+\frac{1}{r^4}\right) - 2\frac{\dot r^2}{r^5} - r\dot\varphi^2 = 0}$$

2) $L_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{m}{2} r^2 \cdot 2\dot\varphi = mr^2\dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = mr^2\ddot\varphi + m2r\dot r\dot\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2\ddot\varphi + 2r\dot r\dot\varphi = 0}$$

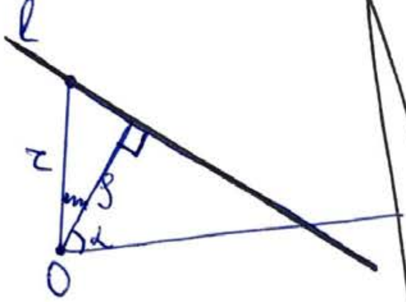
Уравнение „прямой". $r(\varphi)$ (при $v^2 = \mathrm{const}$)

$$v^2 = \mathrm{const} \Rightarrow \begin{cases} \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \frac{\dot r^2}{r^4} = C_1 & (1) \\ r^2\dot\varphi = C_2 & (2) \end{cases} \Rightarrow \dot\varphi = \frac{C_2}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot r^2 + \frac{C_2^2}{r^2} + \frac{\dot r^2}{r^4} = C_1 \Rightarrow \dot r = r\sqrt{\frac{C_1r^2 - C_2^2}{r^4+1}} \Rightarrow \frac{\dot r}{\dot\varphi} = \frac{r^3}{C_2}\sqrt{\frac{C_1r^2 - C_2^2}{r^4+1}}$$

$$\boxed{\frac{dr}{d\varphi} = r\sqrt{\frac{\frac{r^2}{a^2} - 1}{1 + \frac{1}{r^4}}}}\quad , \text{где} \quad a = \frac{c_1}{\sqrt{c_2}}$$



Ур-ие прямой в полярных координатах:

$$r\cos(\varphi - \alpha) = \rho \Rightarrow r = \frac{\rho}{\cos(\varphi-\alpha)}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \rho\,\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos^2(\varphi-\alpha)} = \cancel{\rho}\,\frac{\frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{r}}{\frac{\rho^{\cancel{2}}}{r^2}} =$$

$$= r\sqrt{\frac{r^2}{\rho^2} - 1} \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{d\varphi} = r\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}}$$

При больших r: $r \to \infty \Rightarrow \frac{1}{r^4} \to 0$

$\frac{dr}{d\varphi} = r\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}$ – совпадает с ур-ием прямой в полярных координатах

Вблизи точки поворота по r: $r \to a$

$$\frac{dr}{d\varphi} = 0 \leftarrow$$

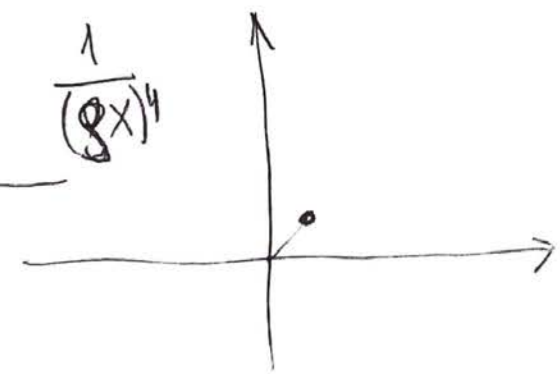
$$(2) \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{c_2}{r^2} = \frac{c_2}{a^2} = \frac{c_2^2}{c_1} \Rightarrow \varphi(t) = \frac{c_2^2}{c_1}t + c_0 \quad \text{при } r(t) \to a.$$

$\dot{\varphi} \to 0$

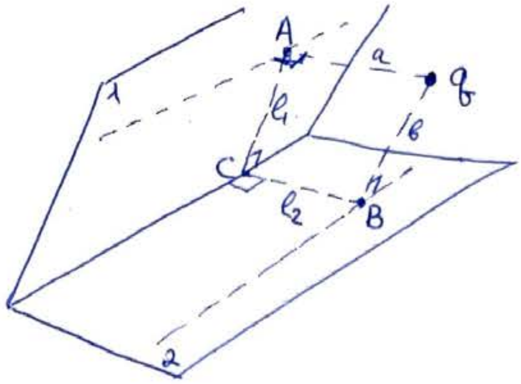
$$x = \int^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x\rho}\right)^4}}{x\rho\sqrt{x^2-1}}\,dx \qquad \rho x \quad \rho^1$$

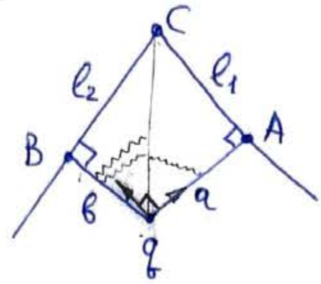
$$\frac{1}{(\rho x)^4}$$

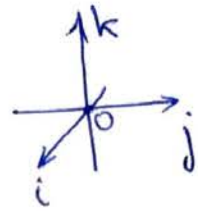
$$\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(\rho x)^4}}}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \qquad \sqrt{}$$



3

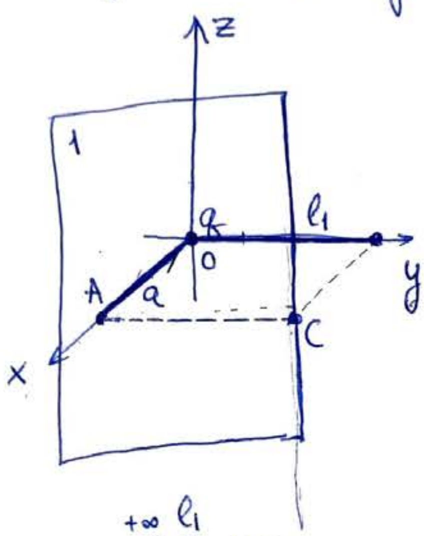






$$\vec{E} = \frac{q}{r^2}\left(\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{r}\right), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \;; \; d\vec{S} = \vec{i}\, dy\, dz$$

$$(\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{q}{r^3}\, x\, dy\, dz = \frac{qa}{r^3}\, dy\, dz$$



$$x = a$$
$$-\infty < y \le l_1$$
$$-\infty < z < +\infty$$

$$\Phi_1 = \oint\limits_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{l_1} \frac{qa}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dy\, dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+(a^2+y^2))^{3/2}} = \frac{z}{(a^2+y^2)\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \left(\frac{1}{a^2+y^2} + \frac{1}{a^2+y^2}\right) = \frac{2}{a^2+y^2}$$

$$\int_{-\infty}^{l_1} \frac{dy}{a^2+y^2} = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{a}\right)}{a}\Bigg|_{-\infty}^{l_1} = \frac{\operatorname{arctg}\frac{l_1}{a} + \frac{\pi}{2}}{a}$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = 2qa \cdot \frac{1}{a}\left(\operatorname{arctg}\frac{l_1}{a} + \frac{\pi}{2}\right) = q\pi + 2q \operatorname{arctg}\frac{l_1}{a}$$

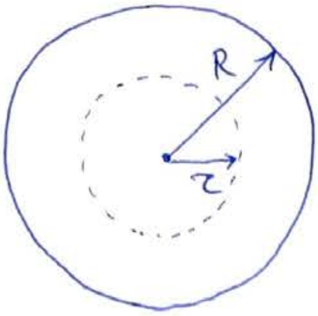
Аналогично $\Phi_2 = q\pi + 2q \operatorname{arctg}\frac{l_2}{b}$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2q\pi + 2q\left(\operatorname{arctg}\frac{l_2}{b} + \operatorname{arctg}\frac{l_1}{a}\right) = 2q(\pi + \alpha),$$

где $\alpha = \angle AqB$.

(4) $\rho(r) = 4\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$, $E(r) = ?$

1) Шар



• $q(\tilde{r}) = \int\limits_0^{\tilde{r}} \rho(r)\, dV(r) = \begin{Bmatrix} V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ dV(r) = 4\pi r^2 dr \end{Bmatrix}$

$= \int\limits_0^{\tilde{r}} 4\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot 4\pi r^2 dr = 16\pi\rho_0 \int\limits_0^{\tilde{r}} r^2\left(1-\frac{r}{R}\right)dr$

$\Rightarrow q(\tilde{r}) = 16\pi\rho_0\left(\frac{\tilde{r}^3}{3} - \frac{\tilde{r}^4}{4R}\right)$

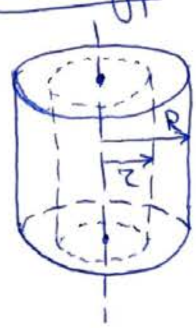
• По ф-ле Гаусса:

$\oint(\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi q$

$\oint(\vec{E}(r), d\vec{S}) = E(r)\, S(r) \underset{}{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\cos\alpha}}} = 4\pi q(r) \Rightarrow$

$\Rightarrow E(r) = \cancel{4\pi}\cdot \frac{16\pi\rho_0 r^{\cancel{3}}\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R}\right)}{\cancel{4}\cancel{\pi}\cancel{r^2}} = 16\pi\rho_0 r\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R}\right)$

2) Цилиндр.



• $q(\tilde{r}) = \int\limits_0^{\tilde{r}} 4\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right) d(\pi r^2 h) =$

$= 8\rho_0 h\pi \int\limits_0^{\tilde{r}} \left(1-\frac{r}{R}\right) r\, dr \Rightarrow$

$\Rightarrow q(\tilde{r}) = 8\pi\rho_0 h\left(\frac{\tilde{r}^2}{2} - \frac{\tilde{r}^3}{3R}\right)$

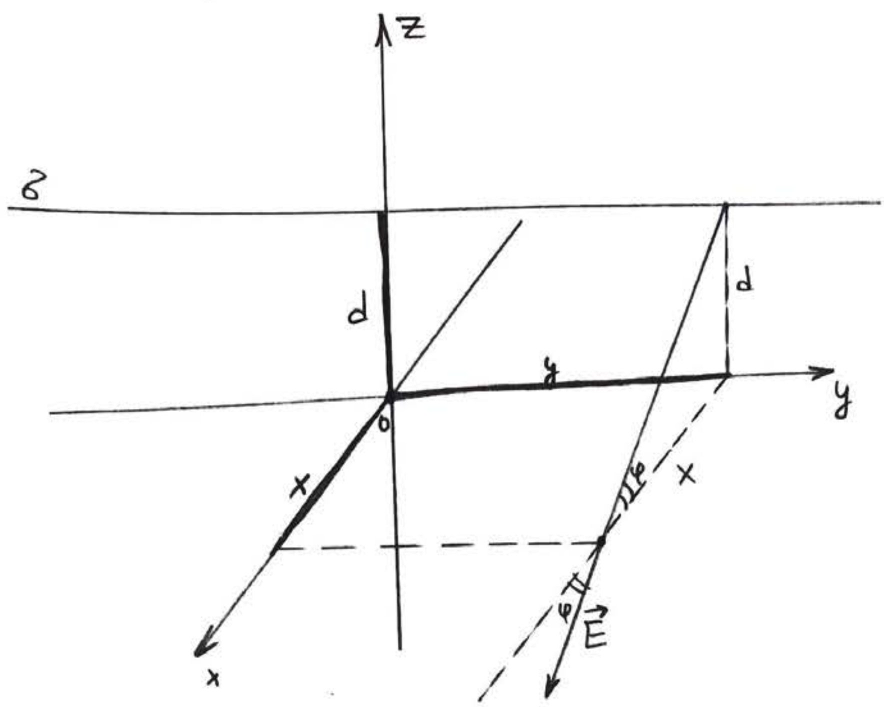
• По ф-ле Гаусса:

$\oint(\vec{E}(r), d\vec{S}) = E(r)\, S_{\text{бок. пов-ти}}(r) = 4\pi q(r) \Rightarrow$

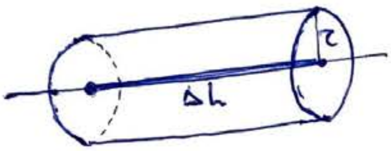
$\Rightarrow E(r) = \overset{2}{\cancel{4\pi}} \frac{8\pi\rho_0 \cancel{h} r^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3R}\right)}{\cancel{2\pi}\cancel{r}\cancel{h}} = 16\pi\rho_0 r\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3R}\right)$

⑤

$\sigma^*(x,y) = ?$



1) По ф-ле Гаусса $\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = 4\pi q = 4\pi \Delta l \sigma$



$$E(r) \cdot 2\pi r \Delta l = 4\pi \Delta l \sigma$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{4\pi\sigma}{2\pi r} = \frac{2\sigma}{r}$$

2) Согласно методу отображений равна сумме напряженностей нити и виртуальной нити, положение которой является зеркальным относительно пл-ти, а удельный заряд имеет ту же пл-ть, но противопол. знака

$$\cancel{\Delta S} \cdot 2E\cos\varphi = 4\pi\sigma^*(x,y)\cancel{\Delta S}$$

$$\sigma^*(x,y) = \frac{2E\cos\varphi}{4\pi} = \frac{4\sigma\cos\varphi}{4\pi\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{\sigma d}{\pi(x^2+d^2)}$$

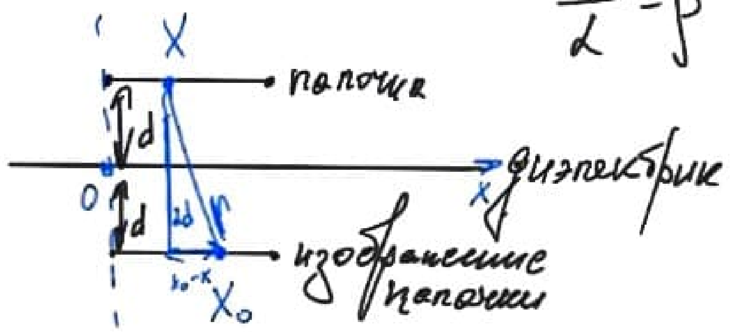
3) Полный заряд на пов-ти на единицу длины нити

$$\int_0^1\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^*(x)\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{\sigma d}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+d^2} dy = \int_0^1 \frac{\sigma \cancel{d}}{\cancel{\pi}} \cancel{\pi} \cdot \frac{1}{\cancel{d}} dy = \sigma$$

(6) **6.** Написать выражение для силы, с которой равномерно заряженная палочка заданной длины L, полным зарядом Q и пренебрежимо малого диаметра, расположенная горизонтально поверхности на расстоянии d от нее, притягивается к поверхности диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε

$$\frac{Q}{L} = \rho$$

Заряд у палочки и у изобр. одинаковый



$$\rho_0 L = \rho L \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

$$\rho_0 = \rho \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

$$F = \int_0^L \int_0^L \frac{k \rho_0 dx_0 \rho dx \cdot \sin\alpha}{r^2} = \int_0^L dx \int_0^L \frac{k \rho^2 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}{(2d)^2 + (x_0 - x)^2} \cdot \frac{2d \cdot dx_0}{\sqrt{(2d)^2 + (x_0 - x)^2}}$$

$$= \frac{k Q^2 \cdot (1-\varepsilon) \cdot 2d}{L^2 \cdot (1+\varepsilon)} \int_0^L dx \int_0^L \frac{1}{\left((2d)^2 + (x_0 - x)^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx_0 =$$

$$t = x_0 - x$$
$$dt = dx_0$$

$$= \frac{k Q^2 (1-\varepsilon) \cdot 2d}{L^2 \cdot (1+\varepsilon)} \int_0^L dx \int_{x}^{L+x} \frac{1}{\left((2d)^2 + t^2\right)^{\frac{3}{2}}} dt =$$

$$= \frac{k Q^2 (1-\varepsilon) \cdot 2d}{L^2 (1+\varepsilon)} \int_0^L dx \left(\frac{x_0 - x}{(2d)^2 \cdot \sqrt{(2d)^2 + (x_0 - x)^2}} \Bigg|_0^L \right) =$$

$$= \frac{k Q^2}{L^2} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot 2d \cdot \frac{1}{4d^2} \int_0^L \left(\frac{L - x}{\sqrt{(2d)^2 + (L-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{(2d)^2 + x^2}} \right) dx$$

$$u = L - x$$
$$du = -dx$$

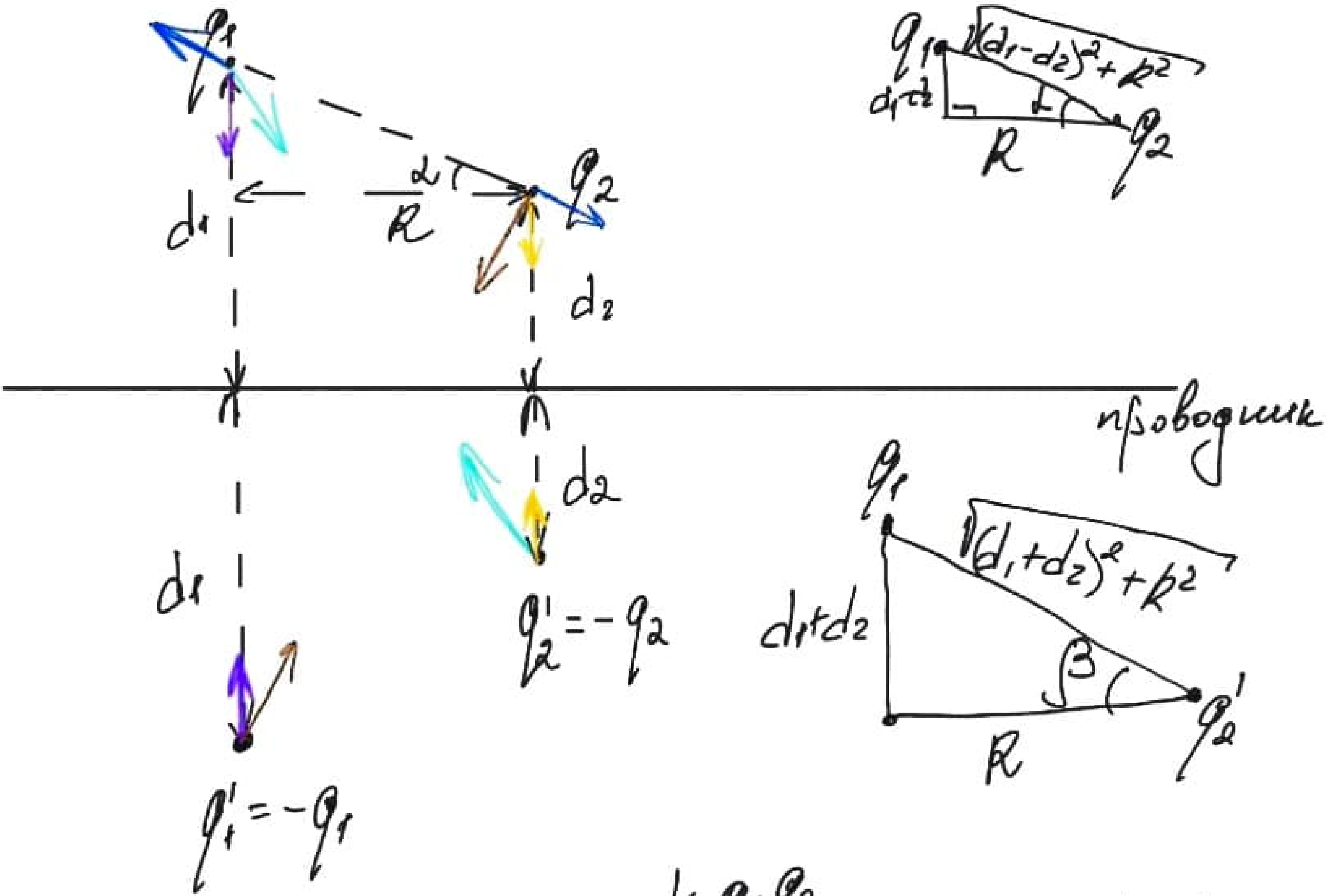
$$= \frac{k Q^2}{L^2} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{2d} \left(\int_L^0 \left(\frac{-u}{\sqrt{(2d)^2 + u^2}} du \right) + \sqrt{(2d)^2 + x^2} \Bigg|_0^L \right) =$$

$$= \frac{k Q^2}{L^2} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{2d} \left(-\sqrt{(2d)^2 + (L-x)^2} \Bigg|_0^L + \sqrt{(2d)^2 + x^2} \Bigg|_0^L \right) =$$

$$= \frac{k Q^2}{L^2} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{2d} \left(-2d + \sqrt{(2d)^2 + L^2} + \sqrt{(2d)^2 + L^2} - 2d \right) =$$

$$= \frac{k Q^2}{L^2} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{2d} \left(\sqrt{4d^2 + L^2} - 4d \right)$$

⑦ 7. Над плоской поверхностью проводника на расстоянии d_1 и d_2 от нее расположены два заряда q_1 и q_2 . Расстояние между зарядами в плоскости поверхности R . Определить силу, действующую на каждый заряд в направлении вдоль плоскости поверхности (Зависимость сил от R).



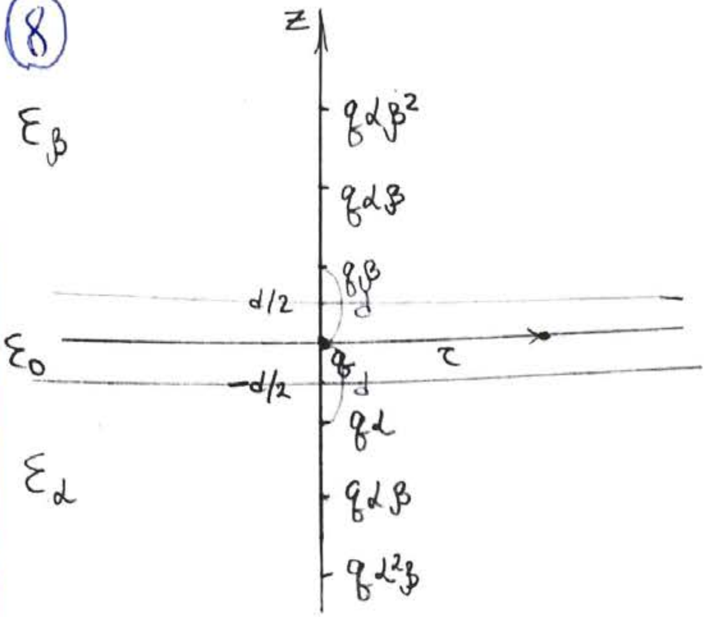
$$q_1: \quad \underbrace{\underset{q_1q_2}{F_K} + \underset{q_1q_1'}{F_K} + \underset{q_1q_2'}{F_K}}_{\text{проекция на ось проводника}} = \frac{kq_1q_2}{\sqrt{(d_1-d_2)^2+R^2}}\cdot\cos\alpha +$$

$$+\frac{kq_1q_1'}{2d_1}\cdot\cos 90^\circ + \frac{kq_1q_2'}{\sqrt{(d_1+d_2)^2+R^2}}\cdot\cos\beta =$$

$$= \frac{kq_1q_2}{\sqrt{(d_1-d_2)^2+R^2}}\cdot\frac{R}{\sqrt{(d_1-d_2)^2+R^2}} - \frac{kq_1q_2}{\sqrt{(d_1+d_2)^2+R^2}}\cdot\frac{R}{\sqrt{(d_1+d_2)^2+R^2}}$$

$$= kq_1q_2R\left(\frac{1}{(d_1-d_2)^2+R^2} - \frac{1}{(d_1+d_2)^2+R^2}\right)$$ для q_2 все симметрично, значения такие же

(8)



Дано:

$\varepsilon_\alpha \to \infty$

$\varepsilon_\beta = \varepsilon$

$\varepsilon_0 = 1$

$q,\ d$

Найти: $\varphi(\tau)$

1) $\alpha = \dfrac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_0 + \varepsilon_\alpha} = \dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$

$\beta = \dfrac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\beta}{\varepsilon_0 + \varepsilon_\beta} \xrightarrow[\varepsilon_\beta \to \infty]{} -1$

2) $$\varphi(\tau) = \frac{q}{\varepsilon_0 \tau} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q\alpha^n\beta^{n-1}}{\varepsilon_0 R_{2n-1}} + \frac{q\alpha^n\beta^n}{\varepsilon_0 R_{2n}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q\alpha^{n-1}\beta^n}{\varepsilon_0 R_{2n-1}} + \frac{q\alpha^n\beta^n}{\varepsilon_0 R_{2n}}\right),$$

где $R_n = \sqrt{(nd)^2 + \tau^2}$, $\varepsilon_0 = 1$

$$\Rightarrow \varphi(\tau) = \frac{q}{\tau} + q\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n\beta^{n-1}}{R_{2n-1}} + \frac{\alpha^{n-1}\beta^n}{R_{2n-1}} + \frac{2\alpha^n\beta^n}{R_{2n}}\right) =$$

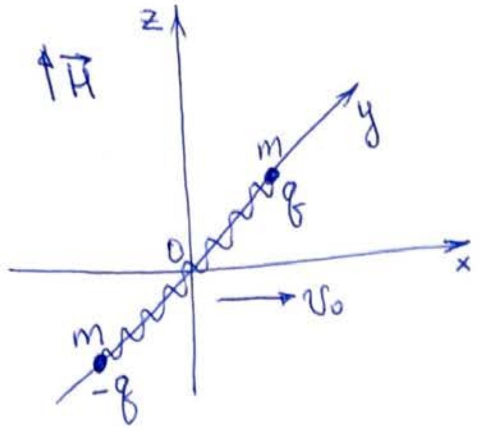
$$= \frac{q}{\tau} + q\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\beta^{n-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{R_{2n-1}} + \frac{2\alpha\beta}{R_{2n}}\right)$$

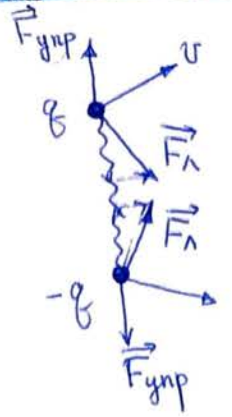
$$\alpha + \beta = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} - 1 = -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$\alpha\beta = \frac{\varepsilon - 1}{1+\varepsilon}$$

$$\varphi(\tau) = \frac{q}{\tau} + q\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1-\varepsilon)^{n-1}}{(1+\varepsilon)^n}\left(\frac{-2\varepsilon}{\sqrt{((2n-1)d)^2+\tau^2}} + \frac{2(\varepsilon-1)}{\sqrt{(2nd)^2+\tau^2}}\right)$$

9



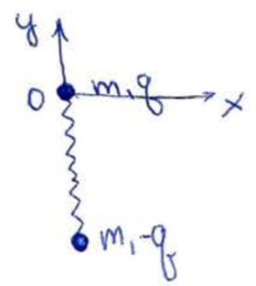


Так как все симметрично относительно Ozx вращения нет, сила упр. направлена вдоль Oy (вдоль пружины).

Достаточно решить ур-ие движения частицы m, q.

$$\vec{F}_\Lambda = \frac{q}{c}\left[\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\H\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\dot{y}H\\ -\dot{x}H\\ 0\end{pmatrix}\cdot\frac{q}{c}$$

$t=0$



$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{qH}{c}\dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{qH}{c}\dot{x} - k(2y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{qH}{mc}\dot{y} \quad (1) \\ \ddot{y} = -\frac{qH}{mc}\dot{x} - \frac{2k}{m}y \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{x} - \frac{qH}{mc}y\right) = 0 \Leftrightarrow \dot{x} - \frac{qH}{mc}y = C,\ C = \text{const}.$$

При $t=0$ $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = 0 \Rightarrow C = v_0$.

Следовательно, $\boxed{\dot{x} = \frac{qH}{mc}y + v_0}$ $\xrightarrow[\text{в (2)}]{\text{подставим}}$ $\ddot{y} = -\left(\frac{qH}{mc}\right)^2 y - \frac{2k}{m}y - \frac{qH}{mc}v_0$

$$\ddot{y} = -\left(\left(\frac{qH}{mc}\right)^2 + \frac{2k}{m}\right)y - \frac{qH}{mc}v_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{\frac{qH}{mc}v_0}{\left(\frac{qH}{mc}\right)^2 + \frac{2k}{m}} + C_2\sin\left(\sqrt{\left(\frac{qH}{mc}\right)^2 + \frac{2k}{m}}\,t\right) + C_1\cos\left(\sqrt{\left(\frac{qH}{mc}\right)^2 + \frac{2k}{m}}\cdot t\right)$$

$$y(0) = -\frac{qHmcv_0}{(qH)^2+2kmc^2} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{qHmcv_0}{(qH)^2+2kmc^2}$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Таким образом,

$$\boxed{y(t) = +\frac{qHmcv_0}{(qH)^2+2kmc^2}\left(\cos\left(\sqrt{\left(\frac{qH}{mc}\right)^2+\frac{2k}{m}}\,t\right)-1\right)}$$

Найдем $x(t)$.

$$\dot{x} = \frac{qH}{mc}y + v_0 = \frac{(qH)^2 v_0}{(qH)^2+2kmc^2}\left(\cos\left(\sqrt{\left(\frac{qH}{mc}\right)^2+\frac{2k}{m}}\,t\right)-1\right)+v_0$$

$$\boxed{x(t) = \frac{(qH)^2 v_0 mc}{((qH)^2+2kmc^2)^{3/2}}\sin\left(\sqrt{\left(\frac{qH}{mc}\right)^2+\frac{2k}{m}}\,t\right) + t\cdot\frac{2kmc^2 v_0}{(qH)^2+2kmc^2}}$$

Значит,
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{(qH)^2 v_0 mc}{((qH)^2+2kmc^2)^{3/2}}\sin\left(t\sqrt{\left(\dfrac{qH}{mc}\right)^2+\dfrac{2k}{m}}\right) + t\,\dfrac{2kmc^2 v_0}{(qH)^2+2kmc^2} \\ y(t) = \dfrac{qHmcv_0}{(qH)^2+2kmc^2}\left(\cos\left(t\sqrt{\left(\dfrac{qH}{mc}\right)^2+\dfrac{2k}{m}}\right)-1\right) \end{cases}$$

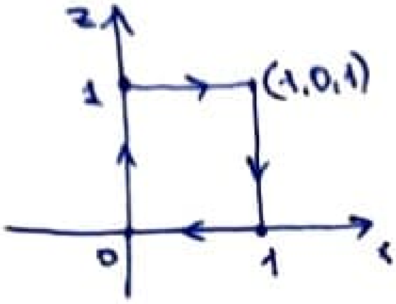
(10) a) $v(z) = v_0 z$

$$\vec{v}(z) = v_0 z \hat{x}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = [\nabla \times \vec{v}] = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{v} = (0, v_0, 0)}$$

$$\oint \vec{v}\, d\vec{l} = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{v} \cdot d\vec{S}$$



$$\vec{l}(t) = \begin{cases} \hat{z} + t\hat{x}, & t \in [0,1] \\ \hat{z} + \hat{x} - (t-1)\hat{z}, & t \in [1,2] \\ \hat{x} - \hat{x}(t-2), & t \in [2,3] \\ \hat{z}(t-3), & t \in [3,4] \end{cases}$$

$$\vec{l}'(t) = \begin{cases} \hat{x} \\ -\hat{z} \\ -\hat{x} \\ \hat{z} \end{cases}$$

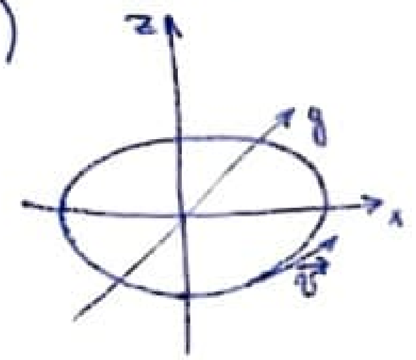
$$\vec{v}(\vec{l}(t)) = \begin{cases} v_0 \hat{x} \\ v_0 (2-t)\hat{x} \\ 0 \\ v_0 (t-3)\hat{x} \end{cases}$$

$$\oint\limits_C \vec{v}\, d\vec{l} = \int_0^4 \vec{v}(\vec{l})\, \vec{l}'(t)\, dt = \int_0^1 v_0\, dt + \int_1^2 0 + 0 + 0 = v_0$$

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{v}\, d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 v_0 \hat{y}\, \hat{y}\, dx\, dz = v_0$$

Значит, $\oint\limits_C \vec{v}\, d\vec{l} = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{v}\, d\vec{S} = v_0.$

б)

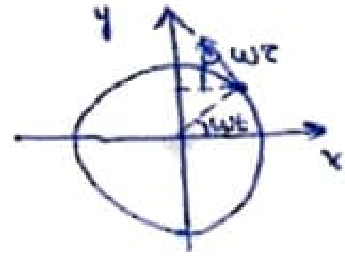


$$v = \omega r$$

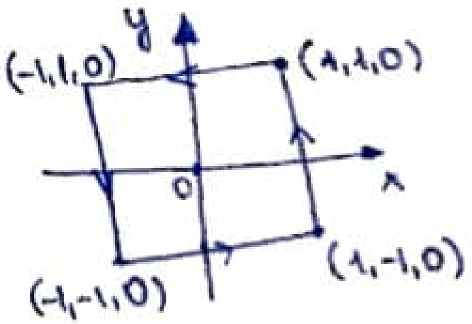
$$v_x = -\omega \underbrace{r \sin\omega t}_{y} = -\omega y$$

$$v_y = \omega \underbrace{r \cos\omega t}_{x} = \omega x$$

$$\vec{v} = -\omega y\,\hat{x} + \omega x\,\hat{y}$$



$$\text{rot}\,\vec{v} = (0, 0, \omega+\omega) = (0, 0, 2\omega) \Rightarrow \boxed{\text{rot}\,\vec{v} = (0, 0, 2\omega)}$$



$$\vec{l}(t) = \begin{cases} \hat{x} - \hat{y} + \hat{y}\,t, & t \in [0,2] \\ \hat{x} + \hat{y} - \hat{x}(t-2), & t \in [2,4] \\ -\hat{x} + \hat{y} - \hat{y}(t-4), & t \in [4,6] \\ -\hat{x} - \hat{y} + \hat{x}(t-6), & t \in [6,8] \end{cases}$$

$$\vec{l}'(t) = \begin{cases} \hat{y}, & t \in [0,2] \\ -\hat{x}, & t \in [2,4] \\ -\hat{y}, & t \in [4,6] \\ \hat{x}, & t \in [6,8] \end{cases}$$

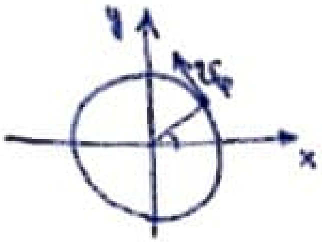
$$\vec{v}(\vec{l}(t)) = \begin{cases} -\omega(t-1)\hat{x} + \omega\hat{y} \\ -\omega\hat{x} + \omega(3-t)\hat{y} \\ -\omega(5-t)\hat{x} + \omega(-1)\hat{y} \\ -\omega(-1)\hat{x} + \omega(t-7)\hat{y} \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{v}\,d\vec{l} = \int_0^8 \vec{v}(\vec{l}(t))\cdot\vec{l}'(t)\,dt = \int_0^2 \omega\,dt + \int_2^4 \omega\,dt + \int_4^6 \omega\,dt + \int_6^8 \omega\,dt = 8\omega$$

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{v}\,d\vec{S} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2\omega\,\hat{z}\hat{z}\,dx\,dy = 2\omega\cdot 2\cdot 2 = 8\omega$$

Значит, $\oint_C \vec{v}\,d\vec{l} = \iint_S \text{rot}\,\vec{v}\,d\vec{S} = 8\omega.$

c) $v_\varphi = \frac{k}{r}$ $\qquad v_x = -\frac{ky}{x^2+y^2}$, $v_y = \frac{kx}{x^2+y^2}$, $v_z = 0$



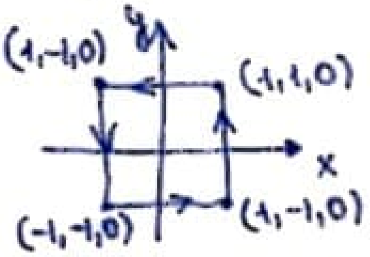
$$\vec{v} = -\frac{ky}{x^2+y^2}\hat{x} + \frac{kx}{x^2+y^2}\hat{y}$$

$$\text{rot}\,\vec{v} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x}\frac{kx}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{ky}{x^2+y^2}\right) = (0,0,0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\rightarrow \boxed{\text{rot}\,\vec{v} = (0,0,0)}$$

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{v}\,d\vec{S} = 0$$

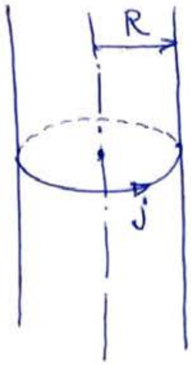


$$\vec{v}(\vec{l}) = \begin{cases} -k\frac{(t-1)}{1+(t-1)^2}\hat{x} + k\frac{1}{1+(t-1)^2}\hat{y} \\ -k\frac{1}{1+(3-t)^2}\hat{x} + k\frac{3-t}{1+(3-t)^2}\hat{y} \\ -k\frac{(5-t)}{1+(5-t)^2}\hat{x} + k\frac{-1}{1+(5-t)^2}\hat{y} \\ -k\frac{-1}{1+(t-7)^2}\hat{x} + k\frac{t-7}{1+(t-7)^2}\hat{y} \end{cases}$$

$$\oint_c \vec{v}\,d\vec{l} = \int_0^8 \vec{v}(\vec{l})\cdot\vec{l}'(t)\,dt =$$

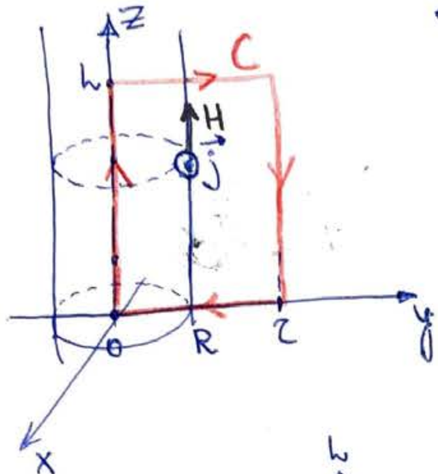
$$= \underbrace{k\int_0^2 \frac{dt}{1+(t-1)^2}}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{k\int_2^4 \frac{dt}{1+(3-t)^2}}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{k\int_4^6 \frac{dt}{1+(5-t)^2}}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{k\int_6^8 \frac{dt}{1+(t-7)^2}}_{\frac{\pi}{2}} = 2\pi k$$

$$\vec{l}(t) = \begin{cases} \hat{x} + \hat{y}(t-1), & t\in[0,2] \\ \hat{x}(3-t) + \hat{y} & \\ -\hat{x} + \hat{y}(5-t) & \\ \hat{x}(t-7) - \hat{y}, & t\in[6,8] \end{cases} \qquad \vec{l}'(t) = \begin{cases} \hat{y}, & t\in[0,2] \\ -\hat{x}, & t\in[2,4] \\ -\hat{y}, & t\in[4,6] \\ \hat{x}, & t\in[6,8] \end{cases}$$

(11) 

$H(r), A(r) = ?$

1. Рассмотрим интеграл $\oint \vec H d\vec l$ по контуру C.



$r > R$

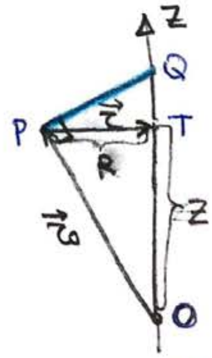
$$\oint_C \vec H d\vec l = \frac{4\pi}{c} J = \frac{4\pi}{c}\int j(y)\, dS = \frac{4\pi}{c}\int_0^r\int_0^h j\, dy\, dz$$

$$= \frac{4\pi}{c} h \int_0^r j(y)\, dy = \frac{4\pi}{c} j\cdot h$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec H\cdot d\vec l = \frac{4\pi}{c} j h$$

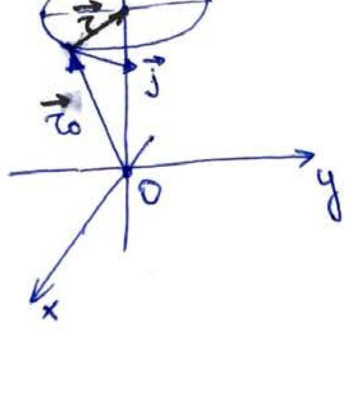
$$\oint_C \underbrace{\vec H\cdot d\vec l}_{= H dl\cos\varphi} = \int_0^h H(0)\, dz + \underbrace{(-1)}_{\cos\varphi}\int_0^h H(r)\, dz = hH(0) - H(r)\cdot h$$

Следовательно, $\boxed{H(0) - H(r) = \frac{4\pi}{c} j}$



$QT = \hat z \frac{a^2}{z}$

2. Посчитаем $H(0)$.



$$r_0 = \sqrt{R^2+z^2}$$

$$\hat r_0 = \frac{z\hat z - R\hat r}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$dl = Rd\Phi$

$$dH = \frac{1}{c r_0^2}[\hat j \times \hat r_0]\, j R d\Phi$$

$$[\hat j\times\hat r_0] = \frac{R\hat r + \hat z \frac{R^2}{z}}{\sqrt{R^2+\frac{R^4}{z^2}}} = \frac{z\hat r + R\hat z}{\sqrt{z^2+R^2}} =$$

$$= \frac{z\hat r + R\hat z}{r_0}$$

$\Rightarrow$ по закону Био-Савара-Лапласа

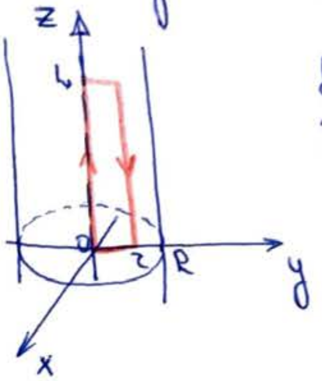
$$\vec{dH} = \frac{1}{c} \frac{z\hat r + R\hat z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\, j R d\Phi$$

(из-за симметричности в сумме останется только компонента по $\hat z$)

$$H(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{j}{c}\,\frac{R\,dz}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,dR\varphi = \frac{jR^2}{c}\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{R^2} = \frac{4\pi}{c}j$$

Значит, $\frac{4\pi}{c}j - H(r) = \frac{4\pi}{c}j \Rightarrow \boxed{H(r) = 0 \text{ при } r > R}$

3. Найдем $H(r)$ при $r < R$

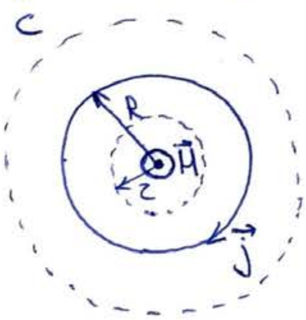


$$\oint\limits_C \vec{H}\,\vec{dl} = 0 = (H(0) - H(r))\,L = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} H(0) = H(r) \\ \text{при } r < R \end{array}}$$

Таким образом, $H(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{c}j & \text{при } r < R \\ 0 & \text{при } r > R \end{cases}$

$\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

4. $\oint\limits_C \vec{A}\,\vec{dl} = \int H\,dS$. Обозначим $\gamma(r)$ - окр-ть радиуса r



При $r < R$:

$$\oint\limits_{\gamma(r)} \vec{A}\,\vec{dl} = 2\pi r\cdot A = \int H\,dS = \frac{4\pi}{c}j\,\pi r^2 \Rightarrow$$

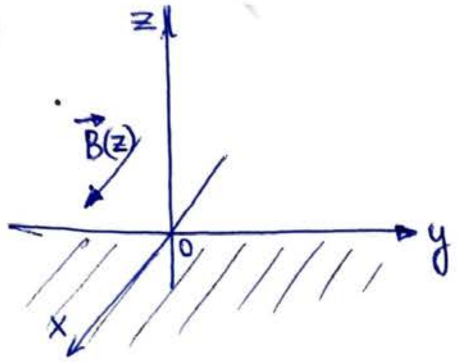
$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{2\pi j}{c}r \text{ при } r < R}$$

При $r > R$:

$$\oint\limits_{\gamma(r)} \vec{A}\,\vec{dl} = 2\pi r\cdot A = \int H\,dS = \frac{4\pi}{c}j\,\pi R^2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{2\pi R^2 j}{cr} \text{ при } r > R}$$

Таким образом, $A(r) = \begin{cases} \frac{2\pi j}{c}r & \text{при } r < R \\ \frac{2\pi R^2 j}{c}\cdot\frac{1}{r} & \text{при } r > R \end{cases}$

(12)



$$\vec{B} = B(z)\,\hat{x} \qquad \vec{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\vec{A}$$

$$\vec{B}(0) = B_0\,\hat{x} \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

1) Определить закон изменения магн. поля вглубь сверхпроводника;

2) Найти направление и пространственное распределение тока, текущего в сверхпроводн

1) $\vec{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\vec{A} \xrightarrow{\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \vec{\nabla}\times\vec{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\vec{H}$

Ур-ие Максвелла: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{H}$

Следовательно, $\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{H}}_{-\Delta\vec{H}} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\cdot\frac{4\pi}{c}\vec{H} = -\frac{1}{\lambda^2}\vec{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta\vec{H} = +\frac{1}{\lambda^2}\vec{H}$, $\vec{H} = H(z)\,\hat{x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = +\frac{1}{\lambda^2}H} \Rightarrow$

$\Rightarrow H(z) = c_1 e^{\frac{z}{\lambda}} + c_2 e^{-\frac{z}{\lambda}}$, $c_1 = 0$, $c_2 = H_0 \Rightarrow H(z) = H_0 e^{-\frac{z}{\lambda}}$

Ответ: $\vec{H}(z) = H_0 e^{-\frac{z}{\lambda}}\,\hat{x}$.

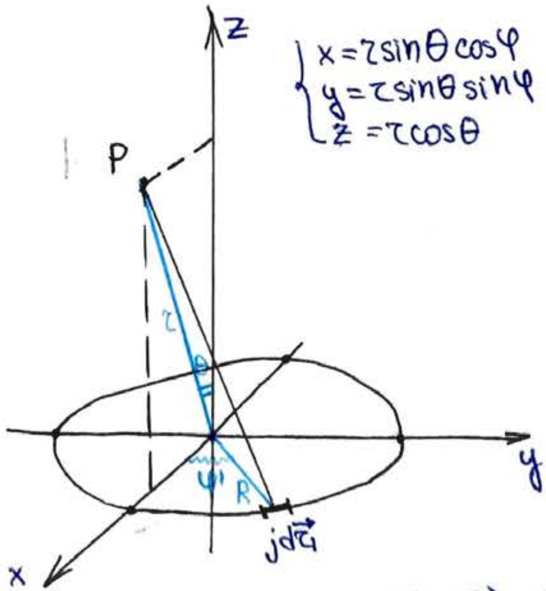
2) $\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{H}$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \left[\vec{\nabla}\times H_0 e^{-\frac{z}{\lambda}}\hat{x}\right] = \begin{pmatrix} \partial_y H_z - \partial_z H_y \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\lambda}H_0 e^{-\frac{z}{\lambda}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)H_0 e^{-\frac{z}{\lambda}}\,\hat{y} = -\frac{c}{4\pi\lambda}H_0 e^{-\frac{z}{\lambda}}\,\hat{y}$$

Ответ: $\vec{j}(z) = -\frac{c}{4\pi\lambda}H_0 e^{-\frac{z}{\lambda}}\,\hat{y}$.

(13)



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

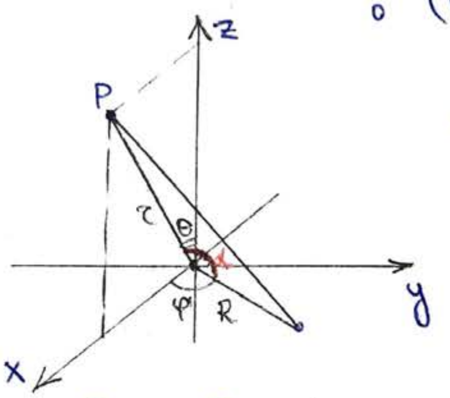
Благодаря симметрии, достаточно посчитать $\vec{A}$ в произвольной точке P, лежащей в пл-ти xOz.

В сферических координатах $P = (r, \theta, \varphi = 0)$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\oint \frac{\vec{j}(\vec{r}_1)\, d\vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

$$d\vec{r}_1 = (-\sin\varphi' e_x + \cos\varphi' e_y)\, d\varphi' R$$

$$\vec{A}(r) = \frac{1}{c} j \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin\varphi' e_x + \cos\varphi' e_y)\, R\, d\varphi'}{(R^2 + r^2 - 2Rr\sin\theta\cos\varphi')^{1/2}}$$



$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos\varphi' + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin\varphi' \cos\frac{\pi}{2} =$$

угол между xOz и xOy

$$= \sin\theta\cos\varphi'$$

Для $\theta \ll 1$ имеем

$$(R^2 + r^2 - 2Rr\sin\theta\cos\varphi')^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}}\left(1 - \frac{2Rr\cos\varphi'}{R^2 + r^2}\sin\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}}\left(1 + \frac{Rr}{R^2 + r^2}\sin\theta\cos\varphi'\right)$$

Следовательно,

$$A_y = \frac{jR}{c}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'\, d\varphi'}{(R^2 + r^2 - 2Rr\sin\theta\cos\varphi')^{1/2}} = \frac{jR}{c}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi' + \frac{Rr}{R^2 + r^2}\sin\theta\cos^2\varphi'\right) d\varphi' * \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

$A_y = A_\varphi$

$$= \frac{jR}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}}\frac{Rr}{R^2 + r^2}\sin\theta\cdot\pi = \frac{\pi}{c}\cdot\frac{jR^2 r\sin\theta}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$A_x = -\frac{jR}{c}\int_0^{2\pi}\left(\sin\varphi' + \frac{Rr}{R^2 + r^2}\sin\theta\cos\varphi'\sin\varphi'\right) d\varphi' = 0$$

Таким образом, $\boxed{A_\varphi(r, \theta) = \frac{\pi}{c}\frac{jR^2 r\sin\theta}{(R^2 + r^2)^{3/2}}}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\, A_\varphi \end{vmatrix} =$$

↑ в сферических координатах

$$= \frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] + \frac{\hat{\theta}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] +$$

$$+ \frac{\hat{\varphi}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta)\,\hat{r} -$$

$$- \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\,\hat{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) = \frac{\pi j R^2 r}{c(R^2+r^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta) = \frac{\pi j R^2 \cancel{r}}{c(R^2+r^2)^{3/2}}\, 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) = \frac{\pi j R^2 \sin\theta}{c}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2}{(R^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\pi j R^2 \sin\theta}{c}\frac{2R^2 r - r^3}{(R^2+r^2)^{5/2}}$$

Следовательно,

$$\vec{B} = \frac{2\pi j R^2 \cos\theta}{c(R^2+r^2)^{3/2}}\,\hat{r} - \frac{(2R^2-r^2)\pi j R^2 \sin\theta}{c(R^2+r^2)^{5/2}}\,\hat{\theta}$$

При $\theta = 0$ получаем

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2\pi j R^2}{c(R^2+r^2)^{3/2}}\,\hat{r}}$$