

## Задание на 5-мин семинара №15 Механика 2022

Вычислите скобку Пуассона следующих функций на  $T^*\mathbb{R}^3$ :

$$\{M_i, (\vec{x} \cdot \vec{a})(\vec{p} \cdot \vec{b})\},$$

где  $M_i$  —  $i$ -я компонента углового момента  $\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p}$  в декартовых координатах,  $(\vec{x} \cdot \vec{a}) := x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$  — линейная форма с *постоянными* коэффициентами  $a_i$  и аналогично для  $(\vec{x} \cdot \vec{b})$ . Компоненты радиус-вектора и импульса  $x_i$  и  $p_i$  — канонически сопряженные переменные:

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

**Решение.** Пользуемся правилом Лейбница для произведения  $(\vec{x} \cdot \vec{a})(\vec{p} \cdot \vec{b})$  (по всем повторяющимся индексам проводится суммирование):

$$\{M_i, (\vec{x} \cdot \vec{a})(\vec{p} \cdot \vec{b})\} = \{M_i, x_j\}a_j(\vec{p} \cdot \vec{b}) + (\vec{x} \cdot \vec{a})\{M_i, p_j\}b_j = \varepsilon_{ijk}x_k a_j(\vec{p} \cdot \vec{b}) + (\vec{x} \cdot \vec{a})\varepsilon_{ijk}p_k b_j$$

$$\{M_i, (\vec{x} \cdot \vec{a})(\vec{p} \cdot \vec{b})\} = (\vec{p} \cdot \vec{b})[\vec{a} \times \vec{x}]_i + (\vec{x} \cdot \vec{a})[\vec{b} \times \vec{p}]_i.$$