Мат. Анализ. Семинар №10

Напомним, что евклидово пространство (или даже метрическое пр-во) называется сепарабельным, если оно содержит счетное всюду плотное множество.

Задача 1. Если евклидово пространство E сепарабельно, то в нем существует ортонормированный базис.

Решение. Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ — счетное всюду плотное множество в E. Выберем из него линейно независимую систему векторов $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$. Тогда, очевидно, линейная оболочка $\mathcal{L}(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ будет совпадать с линейной оболочкой $\mathcal{L}(\psi_1, \ldots \psi_n \ldots)$ и, следовательно, будет плотна в E. Применим к системе $\{f_n\}$ процесс ортогонализации и получим ортогональную (или ортонормированную) систему $\{\varphi_n\}$. Тогда, очевидно, это будет базисом в E.

Напомним, что в евклидовом (и тем более, в гильбертовом) пространстве любой ортонормированный базис $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет равенству Парсеваля:

$$\forall f \in E \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \text{ где } c_k = (f, \varphi_k).$$

Задача 2. Если $\{\varphi_n\}$ - ортонорм. базис в пространстве E, то любой вектор $f \in E$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

Решение: Если векторы f и g имеют одинаковые коэффициенты Фурье

$$(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n) \quad \forall n \in N$$

тогда вектор $f-g$ имеет нулевые коэффициенты Фурье и, следовательно, по равенству Парсеваля $\|f-g\|^2 = 0 \Rightarrow f = g$

Задача 3. Если $\{\varphi_n\}$ - ортонорм. базис в пр-ве E, то для любых векторов f и g справедливо равенство Парсеваля для их скалярного произведения:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k, \quad a_k = (f, \varphi_k), \quad b_k = (g, \varphi_k),$$

причем этот ряд сходится абсолютно.

Решение. В любом евклидовом пр-ве выполнено тождество

$$(f, g) = \frac{1}{2}\left(\|f+g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right)$$

Коэффициентами Фурье $f+g$ будут $a_k + b_k$. Следовательно, в силу равенства Парсеваля для нормы:

$$(f, g) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2 - a_k^2 - b_k^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$$

Абсолютная сходимость последнего ряда вытекает из очевидного неравенства

$$|a_k \cdot b_k| \leq \frac{1}{2}\left[a_k^2 + b_k^2\right]$$

и из признака Вейерштрасса абсолютной сходимости ряда.

Пусть теперь $\{\varphi_k\}$ - произвольная ортонормированная система в евклидовом пространстве. Пусть заданы вещественные числа $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Вопрос: когда эти числа являются коэффициентами Фурье некоторого вектора из E?

Задача 4. (Необходимое условие)
Если $\{C_k\}$ – коэффициенты Фурье некоторого вектора $f \in E$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \infty .$$

Решение. Вытекает из неравенства Бесселя, которое справедливо для любой ортонормированной системы в любом евклидовом пространстве:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leq \|f\|^2 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Оказывается, что в полном евклидовом пространстве (т.е. в гильбертовом пр-ве) это условие является и достаточным:

Задача 5. (Теорема Рисса – Фишера)
Пусть $\{\varphi_n\}$ – ортонормированная система (не обязательно базис) в полном евклидовом пространстве E. Пусть числа $\{C_n\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 < \infty \quad (\text{ряд сходится})$$

Тогда $\exists!$ вектор $f \in E$ такой, что

$$C_n = (f, \varphi_n),\ n = 1, 2, \ldots; \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = \|f\|^2 .$$

Решение. Положим $f_n=\sum_{k=1}^{n} c_k\cdot\varphi_k$. (*)
Тогда, по теореме Пифагора
$$\|f_{n+p}-f_n\|^2=\|c_{n+1}\varphi_{n+1}+\dots+c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2=$$
$$=\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2\,\|\varphi_k\|^2=\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$
Поэтому, из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ следует, что $\{f_n\}$ фундаментальна в E, и тогда, в силу полноты E, она имеет предел $f\in E$: $\|f_n-f\|_E\to 0$ $(n\to\infty)$.
Найдем коэффициенты Фурье вектора f:
$$(f,\varphi_k)=(f_n,\varphi_k)+(f-f_n,\varphi_k)$$
Тогда при $n\geq k$ первое слагаемое равно $(f_n,\varphi_k)=c_k$ (см. (*)), а второе слагаемое стремится к нулю, т.к.
$$|(f-f_n,\varphi_k)|\leq\|f-f_n\|\cdot\|\varphi_k\|=\|f-f_n\|\to 0$$
Следовательно, $(f,\varphi_k)=c_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$.
Кроме того, по построению $\|f-f_n\|\to 0$ и тогда $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2$ $(\|f_n\|^2\to\|f\|^2)$,
т.к. $\|f_n\|^2=\sum_{k=1}^{n}c_k^2$.

Мы доказали существование вектора $f \in E$, для которого $(f, \varphi_k) = c_k$ и $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$, причем $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k = f_n \to f$ в E.

Но тогда такой вектор f единственен, поскольку предел, если существует, то он единственен.

Задача 6. Пусть E – полное евклидово пр-во. Ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ является базисом в E если, и только если, не существует вектора, ортогонального всем векторам системы $\{\varphi_n\}$.

Решение: Пусть $\{\varphi_n\}$ – базис и $f \in E$, f – ортогонален всем φ_n, т.е. $c_n = (f, \varphi_n) = 0$. Тогда из равенства Парсеваля получаем:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Обратно: Пусть $\{\varphi_n\}$ не базис. Тогда найдется вектор, для которого не выполнено равенство Парсеваля: $g \neq 0$, $\|g\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$, $c_k = (g, \varphi_k)$

по теореме Рисса – Фишера $\exists f \in E$: $(f, \varphi_k) = c_k$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$

Но тогда $(f-g, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (g, \varphi_k) = c_k - c_k = 0$

т.е. $f - g \perp \varphi_k \ \forall k \in \mathbb{N}$;

Из неравенства $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|g\|^2$

заключаем, что $f \neq g$, т.е. $f - g \neq 0$, и

причем $f - g$ - ортогонален всем $\{\varphi_k\}$.

Задача 7. E - евклидово пространство

a) Пусть числа $\{c_n\}$: $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Могут ли $\{c_n\}$ являться коэффициентами Фурье некоторого вектора $f \in E$?

б) Пусть $\{c_n\}$ - коэфф. Фурье. Верно ли, что $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$?

Решение: а) могут, если E - полное.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ - сходится, то $c_n \to 0$.

Поэтому $c_n^2 < |c_n|$, если n - достаточно велико.

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ - сходится.

По теореме Рисса-Фишера, найдется f, для которого $\{c_k\}$ - коэфф. Фурье.

б) Не верно.

Пример: $E = \ell_2$, $f = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots)$

$\varphi_n = e_n = (0 \ldots 1\ 0 \ldots)$

тогда $c_n = \frac{1}{n}$, Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится.

---

② Изоморфизм гильбертовых пространств.

Напомним, что бесконечномерное евклидово пространство называется гильбертовым, если оно полное. Чаще всего рассматриваются сепарабельные гильбертовы пространства. Примерами таких пространств служат пространства $\ell_2 = \{x = (x_1, x_2 \ldots x_n \ldots), \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$.

$L_2(a,b) = \{f(t) - \text{функ. на } (a,b), \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty\}$.

Определение: Два евклидовых пространства E и E^* называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое сохраняет линейную структуру и скалярное произведение: т.е, если $x \leftrightarrow x^*$, $y \leftrightarrow y^*$, $x, y \in E$; $x^*, y^* \in E^*$

то $x + y \leftrightarrow x^* + y^*$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x^*$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$(x, y)_E = (x^*, y^*)_{E^*}.$$

Известно, что $\forall$ два конечномерных евклидова пр-ва изоморфны между собой.

Если пространства имеют бесконечную размерность, то они не обязательно изоморфны. Пример: l_2 не изоморфно $C_2[a, b]$ – пр-во непрерывных функций со скалярным произведением $\int\limits_a^b f(t)g(t)dt$.

Почему? l_2 – полное, а $C_2[a, b]$ – нет!

Однако, если пространства полные и сепарабельные, то это так.

Задача 8. Любые два сепарабельных пространства гильбертовых пространства изоморфны между собой.

Решение: Покажем, что любое сепараб. гильб. пр-во H изоморфно пр-ву l_2. Выберем в H ортонормированный базис. Это возможно, т.к. H сепарабельно. Поставим в соответствие $\forall$ вектору $f \in H$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{c_n\}$, $c_n = (f, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. В силу равенства Парсеваля $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \{c_n\} \in l_2$. Обратно, если $\{c_n\} \in l_2$, то $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ и по теореме Рисса-Фишера найдется единственный $\exists$ элемент $f \in H$, имеющий коэффициенты $\{c_n\}$.

Если теперь $f \leftrightarrow (c_1, c_2 \dots c_n, \dots)$

$$g \leftrightarrow (d_1, d_2, \dots d_n, \dots)$$

тогда

$$f+g \leftrightarrow (c_1+d_1, \dots c_n+d_n, \dots)$$

$$\lambda f \leftrightarrow (\lambda c_1, \dots \lambda c_n, \dots)$$

Проверим сохранение скалярного произведения: $(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$.

Это равенство Парсеваля для скалярного произведения (Задача 3)

Следовательно, все сепараб. гильб. пр-ва изоморфны между собой и в качестве их представителя можно рассматривать пространство l_2.

Задача 9. Привести пример несепарабельного гильбертова пр-ва, которое не изоморфно l_2.

Решение: Рассмотрим пространство функций $f(t)$, $t \in [0,1]$, которые принимают не более чем счетное множество ненулевых значений, причем $\sum\limits_{x \in [0,1]} f(x)^2 < \infty$

$\# \{ f(t) \neq 0 \}$ – конечно или счетно.

Скалярное произведение:

$$(f,g) = \sum_{x \in [0,1]} f(x) \cdot g(x).$$

В этой сумме не более чем счетное число слагаемых и она сходится.

Проверьте, что это пр-во не сепарабельное, полное. Оно не изоморфно l_2.