Литература. 05.09.20

1) В.И. Арнольд „Обыкновенные Д.У".
2) Буфетов, Гончарук „Обыкн. Д.У".
3) Хартман „О.Д.У"
4) В.И. Арнольд „Доп. главы О.Д.У"

$y: \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{I}} \to \mathbb{R}^d$, $F: \underset{\mathbb{R}^{1+d(n+1)}}{\underset{\cap}{\Omega}} \to \mathbb{R}^d$ – непрер.

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ $(*)$, $x \in \mathbb{R}$ – обыкновенное Д.У. поряд. n

$F\left(x, \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{0d} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{1d} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{nd} \end{pmatrix}\right) = 0$ (Ordinary Diff Eq ODE)

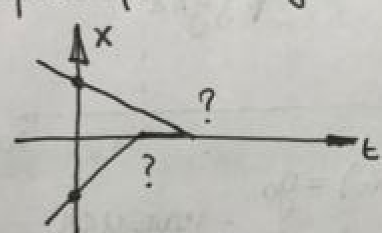
$y: \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{\Omega}} \to \mathbb{R}^d$

$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x^j}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^i \partial x^j} \dots\right) = 0$

$U(x,t)$ $\quad U_{xx} = U_{tt}$

$y'(t) = y(t-1)$ – ур-ие с запаздыванием

Пример. $\dot{x} = -\mathrm{sgn}\, x + 0{,}1$ (если F не явл. непрер)



<u>Опр.</u> Решение ур-ие $(*)$ – это $y: I \to \mathbb{R}^d$, т.ч.

$\exists\, y', \dots, y^{(n)}: I \to \mathbb{R}^d$,

$(*)$ обращ. в тождественное при подстановке.

$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$

$y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = 0$ $(**)$ $\Rightarrow$ ОДУ разреш-ся отн. старш. произв. по теор. о неявной ф-ции.

Если $\left|\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right| \neq 0$, то $(*)$ лок. экв. $(**)$ (по теор. о неявн. ф-ии)

$\begin{pmatrix} x_{n1} \\ \vdots \\ x_{nd} \end{pmatrix} = \varphi\left(x, \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0d} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{n-1\,1} \\ \vdots \\ x_{n-1\,d} \end{pmatrix}\right)$ $\quad \varphi: \underset{\mathbb{R}^{1+nd}}{\overset{\cap}{U}} \to \mathbb{R}^d$

$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n2}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{nd}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_d}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial F_d}{\partial x_{n2}} & \dots & \frac{\partial F_d}{\partial x_{nd}} \end{vmatrix} \neq 0$

Сведение к системе 1го порядка

$$\#\begin{cases} z_0(x) = y(x) \\ z_1(x) = y'(x) \\ \dots\dots \\ z_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{n-1}' = \varphi(x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \\ z_{n-2}' = z_{n-1} \\ \dots\dots \\ z_0' = z_1 \end{cases} \quad (***)$$

Лемма.

① Если $y: I \to \mathbb{R}^d$ – реш. $(**)$, то набор

$$(z_0 = y, z_1 = y', \dots, z_{n-1} = y^{(n-1)})$$

– решение $(***)$.

② Пусть $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ – реш-ие $(***)$. Тогда $y = z_0$ – реш-ие $(**)$ и верны ф-лы $(\#)$.

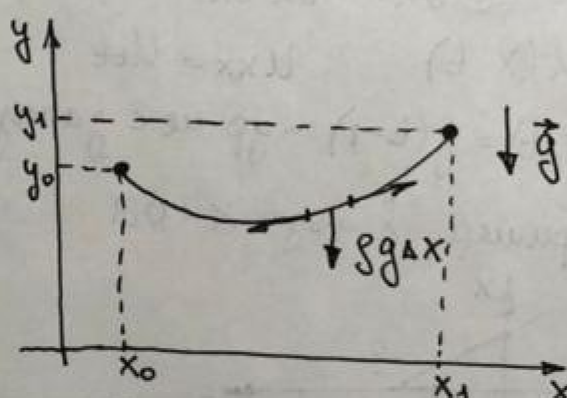
$\dot{x} = x$, $x(1) = 2$

$x = Ce^t$, $C \in \mathbb{R}$ – задача Коши. Реш-ие: $x = \left(\frac{2}{e}\right)e^t$

Задача Коши. $x(t): \underset{\mathbb{R}}{\overset{}{I}} \to \mathbb{R}^d$, $I \subset \mathbb{R}$

$$(\star)\quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}^d$$

$f: \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$



$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases} \text{– нач. усл.}$$

$(***)$

$$\begin{cases} z_0(x_0) = \hat{z}_0 \\ z_1(x_0) = \hat{z}_1 \\ \dots\dots \\ z_{n-1}(x_0) = \hat{z}_{n-1} \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$(**)$

$$\begin{cases} y(x_0) = \hat{z}_0 \\ y'(x_0) = \hat{z}_1 \\ \dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \hat{z}_{n-1} \end{cases}$$

Существование и единственность реш-ий задачи Коши.

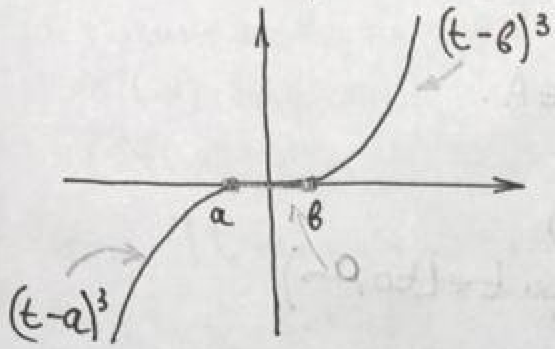
$f: \underset{\mathbb{R}^{d+1}}{\underset{\cap}{\Omega}} \to \mathbb{R}^d$

Пример неединственности

$x(t) = t^3 \Rightarrow x' = 3t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = 3x^{2/3} = 3t^2$

$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1(t) = t^3 \\ x_2(t) = 0 \end{array} \right.$

$x = (t-a)^3$ – реш-ие $\boxed{\dot{x} = 3x^{2/3}}$



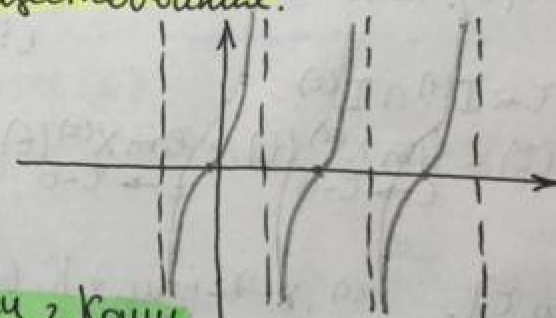
$x: J \to \mathbb{R}^d$ – реш. $(\star)$

$I \subset J$, $t_0 \in I$. $x|_I : I \to \mathbb{R}^d$ – реш. $(\star)$ } второй „источник неединств-ти"

Ограниченный интервал существования.

$\underbrace{\dot{x} = x^2+1}_{\text{опр. при всех } x \text{ и } t} \xrightarrow{\text{угадываем}} x(t) = tg(t-c)$

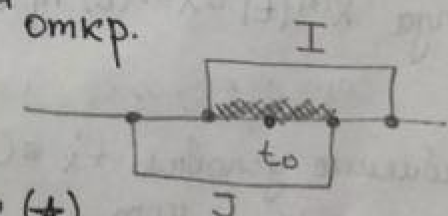
$\underbrace{t \in [c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}]}_{\text{реш. опр-но не при всех } t}$



Лок. теор. о сущ-ии и единств-ти з. Коши.

$(\star) \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $f: \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ откр.

$\boxed{\begin{array}{l} (t_0, x_0) \in \Omega \\ f, f'_x \in C(\Omega) \end{array}}$



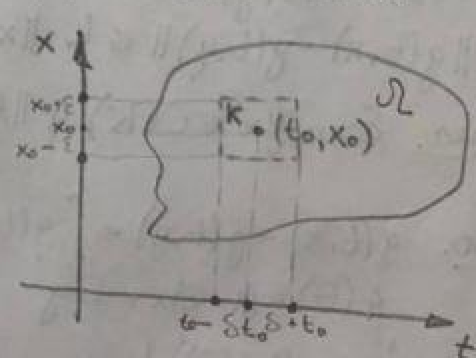
Тогда 1) $\exists x: I \to \mathbb{R}^d$, $t_0 \in I$, – реш-ие $(\star)$.

2) Если $\tilde{x}: \underset{\text{отрезок}}{J} \to \mathbb{R}^d$ – реш-ие $(\star)$, то $x|_{I \cap J} = \tilde{x}|_{I \cap J}$

▨ : $\exists\, \delta, \varepsilon > 0 : \underbrace{\overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\varepsilon(x_0)}_{K} \subset \Omega$

$f \in C(K) \Rightarrow \sup\limits_K |f| \le M$

$f'_x \in C(K) \Rightarrow \sup\limits_K |f'| \le L$



◍ : $\exists\, I = [x_0 - \tau, x_0 + \tau]$

$\tau = \tau(\varepsilon, \delta, M, L)$

$\exists x: I \to \mathbb{R}^d$ ...

Сл-ие.

Как из лок. реш-я на отр-ке строится глобальное реш-е?

Теорема. (глобальная т. единств-ти)

Рассм (★), ▨. Тогда если $x^{(1)} : I^{(1)} \to \mathbb{R}^d$, $x^{(2)} : I^{(2)} \to \mathbb{R}^d$ – реш. этой з. К., (отрезки или интервалы или лучи)

то $x^{(1)}\big|_{I^{(1)} \cap I^{(2)}} \equiv x^{(2)}\big|_{I^{(1)} \cap I^{(2)}}$ (!). Т.е. реш-я $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ совп. не только в маленькой окр-ти t_0, но и на пересечении областей определения

Д-во. ▷ f: откр $\to \mathbb{R}^d$; $(t_0, x_0) \in$ откр $\Rightarrow \exists$ окр $\ni (t_0,x_0) \subset \Omega$

Рассмотрим $\{t \geq t_0 : x^{(1)}\big|_{[t_0,t]} = x^{(2)}\big|_{[t_0,t]}\} = A$

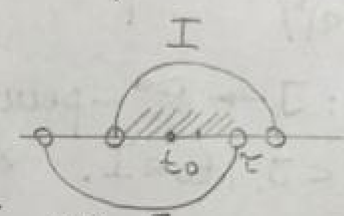
① $t_0 \in A$.

② Если $t \in A$, то $\forall t' \in [t_0, t]$, $t' \in A$.

③ • $A = [t_0, +\infty)$: $I^{(1)} = (\dots, +\infty)$
$I^{(2)} = (\dots, +\infty)$
$x^{(1)}(t) = x^{2}(t)$ при $t \in [t_0, +\infty)$

(1) • $A = [t_0, \tau)$
(2) • $A = [t_0, \tau]$ $\quad \tau \in \mathbb{R}$

(1) Пусть



• $A = [t_0, \tau)$. Если $\sup I^{(1)} = \tau$ или $\sup I^{(2)} = \tau$, то (!) верно при $t \geq t_0$.

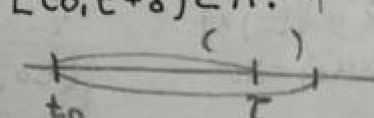
Пусть $\tau \in I^{(1)} \cap I^{(2)}$

$$x^{(1)}(\tau) = \lim_{t \to \tau - 0} x^{(1)}(t) = \lim_{t \to \tau - 0} x^{(2)}(t) = x^{(2)}(\tau).$$ Вывод: $\tau \in A$. – противоречие

(2) Пусть

• $A = [t_0, \tau]$. $x^{(1)}, x^{(2)}$ – реш. з. К. (★'): $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(\tau) = x^{(1)}(\tau) (= x^{(2)}(\tau)) \end{cases}$

Тогда $x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$ при $t \in \overline{B}_\delta(\tau)$. Вывод: $[t_0, t+\delta) \subset A$. – противореч.



◁

про лок. теор. сущ. и ед-ти

Ослабление условия $f'_x \in C(K)$.

Пусть $g: K \to \mathbb{R}^m$, где $K = \overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\varepsilon(x_0)$ – липшицева по x
$\exists L : \forall (t,x), (t,y) \in K$.
$$\|g(t,x) - g(t,y)\| \leq L \cdot \|x - y\|.$$

Лемма. Если $g_x' \in C(K)$ и $\|g'_x\|_{C(K)} \leq L$, то g липшицева по x (с этой константой L).

▷ Д-во. $g(t,x) - g(t,y) = g(t, \xi(1)) - g(t, \xi(0)) = \left| \int_0^1 \frac{\partial g(t, \xi(\theta))}{\partial \theta} d\theta \right|$ (и)

$\xi(\theta) = (1-\theta)x + \theta y$ $\quad$ ф-ла Ньютона-Лейбница

$$(и) \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial g(t, \xi(\theta))}{\partial \theta} \right| d\theta = \int_0^1 \Big| dg\big|_{\xi(\theta)} \underbrace{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)}_{(y-x)} \Big| d\theta \leq \int_0^1 \underbrace{\| dg_x|_{\xi(\theta)} \|}_{\sup g_x'} \cdot |y-x| d\theta \leq$$

произв. композиции

$$= |y-x| \int_0^1 |dg_{\xi(\theta)}| d\theta$$

$$\leq \|g_x\|_{C(K)} \cdot |y-x|. \ ◁$$

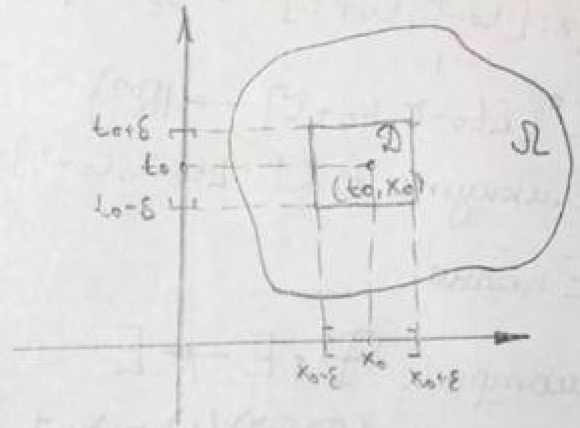
$$\frac{dg}{d\xi(\theta)} = dg_x$$

Теорема

11.09.20 Часть 1.

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (*)$$

$$F: \underset{\mathbb{R}^{1+n}}{\overset{\cap}{\Omega}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$



(1) $\mathcal{D} = \overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$

(2) $F \in C(\mathcal{D})$ $(\|F_{\mathcal{D}}\| \le M)$

(3) F липшецева по x на $\mathcal{D}$

$\forall (t,x), (t,y) \in \mathcal{D}$

$|F(t,x) - F(t,y)| \le L|x-y|$

Тогда $\exists \tau = \tau(\delta, \varepsilon, L, M)$: з. Коши $(*)$ имеет ! реш. на $[t_0-\tau, t_0+\tau]$

Лемма. x - реш. $(*) \Leftrightarrow$ x - реш. $(**)$ (x - непр. ф-ия)

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds} \quad (**)$$

$\triangleright$

Д-во леммы. 1) x - реш. з. Коши $(*)$

Тогда x дифф $\Rightarrow$ x непр $\Rightarrow F(s,x(s))$ непр (композиц. непрер.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in C^1$.

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,x(s))\,ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\,ds = x_0 + x(t) - \overbrace{x(t_0)}^{x_0} = x(t)$$

2) x - реш $(**)$

x - непр. $\Rightarrow F(s, x(s))$ непр. (интеграл от непрер ф-ии можно д-ть)

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t))$$

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} F(s, x(s))\,ds = x_0.$$

$\triangle$

Принцип сжимающих отображений.

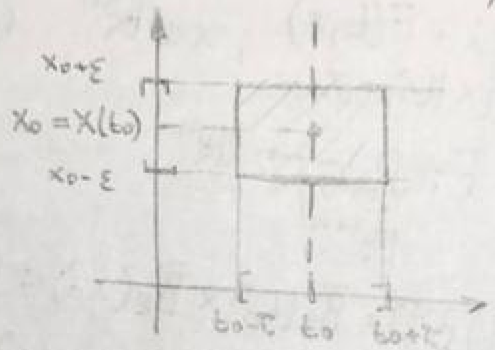
Пусть (X, ρ) - полное метрич. пр-во.

$f: X \to X$ и $\exists q < 1$ $\forall x, y \in X$ $\rho(f(x), f(y)) \le q\,\rho(x,y)$.

Тогда $\exists!\, z \in X : f(z) = z$.

Д-во теор. $\tau \leq \delta$. (y_1) $\quad \tau \leq \frac{\varepsilon}{M}$ (y_2) (что такое M написано ниже)

$E = \{x : [t_0-\tau, t_0+\tau] \to \overline{B}_\varepsilon(x_0)$ - непр. $\}$



$E \subset \underset{\text{непрер. ф-ии}}{C^0}([t_0-\tau, t_0+\tau] \to \mathbb{R}^n)$

E - замкнуто в $C^0([t_0-\tau, t_0+\tau] \to \mathbb{R}^n)$

почему E замкнуто?

$\Rightarrow$ E полно

Рассмотрим $\Phi : E \to E$

$$(\Phi(x))(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds$$

1) $\Phi(x)$ опр. (y_1)

2) $\Phi(x) \in C^0([t_0-\tau, t_0+\tau])$ (интеграл от непр. ф-ии непр.)

3) $\forall t \in \overline{B}_\tau(t_0)$ $\quad (\Phi(x))(t) \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)$

◁ Д-во 3). $|\Phi(x)(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds\right| \leq M|t_0 - t| \leq M\tau \overset{(y_2)}{\leq} \varepsilon$

Значит, действительно $\Phi : E \to E$. ▷

4) Φ сжимает с $q = \frac{1}{2}$.

◁ Д-во 4). $|\Phi(x)(t) - \Phi(\tilde{x})(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (F(s, x(s)) - F(s, \tilde{x}(s)))\,ds\right| \leq$

$\leq \int_{t_0}^{t} |F(s, x(s)) - F(s, \tilde{x}(s))|\,ds \underset{\text{липшицевость}}{\leq} \int_{t_0}^{t} L \underbrace{|x(s) - \tilde{x}(s)|}_{\leq \|x - \tilde{x}\|}\,ds \leq$

на $[t_0, t]$ (?)

$\leq L|t_0 - t| \cdot \|x - \tilde{x}\| \leq L\tau\|x - \tilde{x}\|$.

$|\Phi(x) - \Phi(\tilde{x})| \leq L\tau\|x - \tilde{x}\|$

Возьмем $\tau \leq \frac{1}{2L}$ (y_3)

$(y_3) \Rightarrow |\Phi(x) - \Phi(\tilde{x})| \leq L \cdot \frac{1}{2L}\|x - \tilde{x}\| = \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|$. ▷

Во время лекции было введено исправленное обозначение:

$E_I = \{x : I \to \overline{B}_\varepsilon(x_0)$ - непр.$\}$,

$I \subseteq [t_0-\tau, t_0+\tau]$ - отрезок,

$E \subset C^0(I \to \mathbb{R}^n)$.

Все доказанное после переобознач. осталось верным.

Если $y(1) - y(3)$ вып., то $\exists!\ x \in E_I$: x - реш $(**)$

(по пр-пу сжим. отобр.) Итак, существование доказано. 1

Вторая часть формулировки теоремы:

② Если $\tilde{x}: J \to \mathbb{R}^n$ – реш $(*)$, то $x|_{I\cap J} = \tilde{x}|_{I\cap J}$.

Пусть K – отрезок в $I \cap J$. (любой отрезок)

Тогда если x – неподв. точка $\Phi_{[t_0-\tau,\, t_0+\tau]}$, то $x|_K$ и $\tilde{x}|_K$ – реш-я з. Коши на K. (по ① для Φ_K).

Следовательно, $x|_{I\cap J} = \tilde{x}|_{I\cap J}$.

Задача Коши с параметром.

$\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$

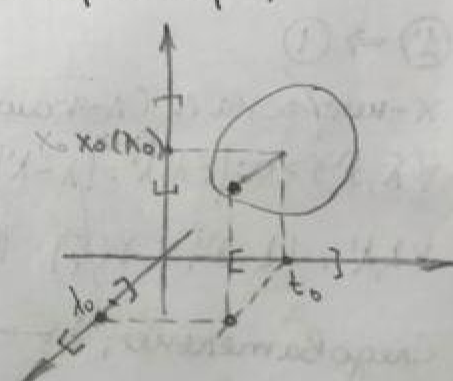
$$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases} \qquad (*_\lambda)$$

$x(t,\lambda)$ – реш-ие $(*_\lambda)$

Теорема (лок. непрер. зависимость от параметра)

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases} \qquad (*_\lambda)$$

$F: \underset{\mathbb{R}^{1+n+m}}{\Omega \subset} \to \mathbb{R}^n$; $\quad x_0: \underset{\mathbb{R}^m}{\Xi \subset} \to \mathbb{R}^n$



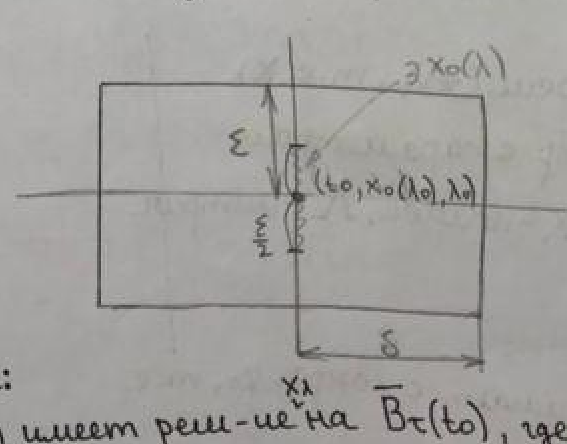
1) $D = \overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\varepsilon(x_0(\lambda_0)) \times \overline{B}_\varrho(\lambda_0) \subset \Omega$

$\forall \lambda \in \overline{B}_\varrho(\lambda_0) \quad x_0(\lambda) \in \overline{B}_{\varepsilon/2}(x_0(\lambda_0))$

2) $F \in C(D)$, $x_0 \in C(\overline{B}_\varrho(\lambda_0))$, $\|F\|_{C(D)} \le M$.

3) F липш. по x на D

$\forall (t,x,\lambda), (t,y,\lambda) \in D \quad |F(t,x,\lambda) - F(t,y,\lambda)| \le L|x-y|$



Тогда:

⓪ $(*_\lambda)$ имеет реш-ие x_λ на $\overline{B}_\tau(t_0)$, где $\tau(\delta, \frac{\varepsilon}{2}, L, M)$ ← у т. ∃!

① $x_\lambda \in C^0(\overline{B}_\tau(t_0) \to \mathbb{R}^n)$

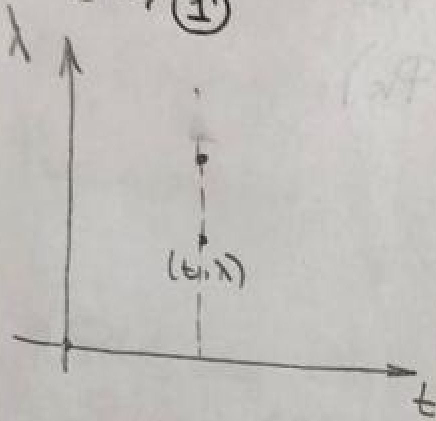
$\lambda \mapsto x_\lambda$ непр. на $\overline{B}_\varrho(\lambda_0)$.

Обозн. (1') $x(\lambda,t) := x_\lambda(t)$

$$x \in C(\underbrace{\bar B_\varsigma(\lambda_0) \times \bar B_\tau(t_0)}_{\Delta}).$$

Д-во экв-ти.

▷ (1) ⇒ (1')



$\forall \xi\ \exists \alpha > 0:$

1) $\forall \lambda' \in B_\alpha(\lambda)\quad \|x_\lambda - x_{\lambda'}\| \le \xi/2$

(т.к. $\lambda \mapsto x_\lambda$ непр. на $\bar B_\varsigma(\lambda_0)$)

2) $\forall \xi > 0\ \exists \beta > 0: \forall t' \in B_\beta(t)$

$|x_\lambda(t) - x_\lambda(t')| \le \xi/2$

(т.к. сама ф-ия x_λ непрер)

Тогда $\forall \lambda' \in B_\alpha(\lambda)$

$\forall t' \in B_\beta(t)$ $\quad |x_\lambda(t) - x_{\lambda'}(t')| \le |x_\lambda(t) - x_\lambda(t')| + |x_\lambda(t') - x_{\lambda'}(t')| \le$

$\le \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi$

(1') ⇒ (1)

x – непрер. на Δ (Δ – компакт) ⇒ x равномерно непрер.

$\forall \xi\ \exists \gamma > 0: (\forall \lambda, \lambda': |\lambda - \lambda'| \le \gamma \Rightarrow \forall t\quad |x(\underline{t,\lambda}) - x(\underline{t,\lambda'})| \le \xi)$. вообще $\forall t$?

$\forall \lambda, \lambda': |\lambda - \lambda'| \le \gamma(\xi)\quad \|x_\lambda - x_{\lambda'}\|_{C^0(B_\tau(t_0))} \le \xi$

Следовательно, $\lambda \mapsto x_\lambda$ непрер.

◀ ◁

Д-во теоремы.

$E = \{\ x: \bar B_\tau(t_0) \to \bar B_\varepsilon(x_0)$ – непр. $\}$? $\quad (x)\ \bar B_\tau(t_0) \to \bar B_\varepsilon(x_0)$ – непр $| \forall \lambda \in \bar B_{\varepsilon_1}(\lambda_0) \}$

$\Phi_\lambda : E \to E$

$(\Phi_\lambda x)(t) = x_0(\lambda) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), \lambda)\, ds$

Неподв. точка Φ_λ = реш. $(*_\lambda)$, т.е. x_λ

Принцип сжимающих отобр. с параметром.

$\Phi: \Lambda \times X \to X$, где X – полное, Λ – метрич.

Обозн. $\Phi(\lambda, x) = \Phi_\lambda(x)$

1) Φ непр.

2) $\exists q_0 < 1\ \forall \lambda \in \Lambda\ \Phi_\lambda$ сжимает с коэфф. q_0, т.е.

$\forall x, y \in X\quad \rho(\Phi_\lambda(x), \Phi_\lambda(y)) \le q_0 \rho(x, y).$

Тогда если $z(\lambda)$ – неподв. т-ка Φ_λ, то $z: \Lambda \to X$ непр.

Д-во принципа.

▽ Д-ем, что z непрер. в $\lambda_0 \in \Lambda$.

$z_0 = z(\lambda_0)$

$\le \varepsilon$ $\quad \le q_0 \varepsilon$ $\quad \le q_0^2 \varepsilon$ $\quad \dots$

Рассмотрим $z_0, \Phi_\lambda(z_0), \Phi_\lambda^2(z_0), \dots$

$$\rho(z_0, \Phi_\lambda(z_0)) = \rho(\Phi_{\lambda_0}(z_0), \Phi_\lambda(z_0))$$

т.к. z_0 - неподв. точка для Φ_{λ_0}

Воспользуемся непр. Φ:

$\exists\, U \ni \lambda_0 : \forall \lambda \in U \quad \rho(\Phi_{\lambda_0}(z_0), \Phi_\lambda(z_0)) \le \varepsilon.$

$$\rho(\Phi_\lambda^n(z_0), \Phi_\lambda^m(z_0)) \le \varepsilon \sum_{k=n}^{m-1} q_0^k \le \frac{\varepsilon q_0^n}{1-q} \quad (\square)$$

$n \le m$

$\{\Phi_\lambda^n(z_0)\}$ – фунд. посл-ть в полном пр-ве $\Rightarrow$ сх-ся

$\Phi_\lambda^m(z_0) \xrightarrow{m\to\infty} z(\lambda)$

$\rho(\Phi_\lambda^n(z_0), z(\lambda)) \le \frac{\varepsilon q^n}{1-q}$ (перешли к пределу в $\square$)

$n=0$ $\quad \rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) \le \frac{\varepsilon}{1-q} \leftarrow$ при $\lambda \in U$.

Т.е. непрер. доказана. $\quad$ Часть 2 $\quad \Delta$

1) $\Phi_\lambda : E \to E$, непр, сжимает с коэфф $1/2$ - дословно из доказа теор. о сущ-ии и единственности.

2) Φ непрер.

$$|(\Phi(\lambda, x) - \Phi(\tilde\lambda, \tilde x)|(t) = |x_0(\lambda) + \int_{t_0}^t F(s, x(s), \lambda)\, ds -$$

$$- x_0(\tilde\lambda) - \int_{t_0}^t F(s, \tilde x(s), \tilde\lambda)\, ds| \le$$

$$\le |x_0(\lambda) - x_0(\tilde\lambda)| + \int_{t_0}^t |F(s, x(s), \lambda) - F(s, \tilde x(s), \tilde\lambda)|\, ds \le$$

$$\le |x_0(\lambda) - x_0(\tilde\lambda)| + \int_{t_0}^t |F(s, x(s), \lambda) - F(s, \tilde x(s), \lambda)|\, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^t |F(s, \tilde x(s), \lambda) - F(s, \tilde x(s), \tilde\lambda)|\, ds \le \dots$$

$\forall \xi\ \exists \alpha : |\lambda - \tilde\lambda| < \alpha \Rightarrow |x_0(\lambda) - x_0(\tilde\lambda)| < \xi/3$

$\forall \xi\ \exists \beta : |\lambda - \tilde\lambda| < \beta \Rightarrow |F(t, x, \lambda) - F(t, x, \tilde\lambda)| < \xi \quad \forall t, x$

$$\dots \le \xi/3 + L\|x - \tilde x\| |t - t_0| + \xi |t - t_0| \le \xi\left(\tfrac{1}{3} + \tau\right) + L\tau \|x - \tilde x\| \le \xi\left(\tfrac{1}{3} + \tau + L\tau\right)$$

▲

Теорема. (глобальная независимость от параметра)

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases} \quad (*_\lambda).$$

$F, F'_x \in C(\Omega)$ Ω откр

x_{λ_0} – реш. $(*_{\lambda_0})$

$x_{\lambda_0}: I \to \mathbb{R}^n$

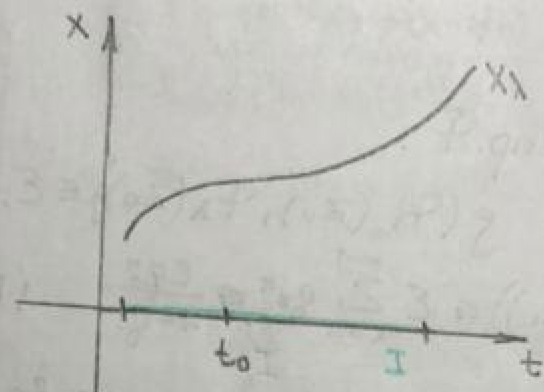
I – отрезок

Тогда $\exists\, U \ni \lambda_0$:

1) $\forall \lambda \in U$ реш-ие $(*_\lambda)$ сущ. на I (и единственно)

2) $x(\lambda, t) = x_\lambda(t)$

x непрер. на $U \times I$.



параметр λ здесь подразумевается

▷ **Д-во.**

$K = \{(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0),\ t \in I\}$ – график непрер. ф-ии на компакте $\Rightarrow$

$\Rightarrow K$ – компакт. в $\mathbb{R}^3$

граница обл-ти Ω

$\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) = \alpha > 0$

Т.к. $\operatorname{dist}(\underset{K}{\underset{\cap}{x}}, \partial\Omega)$ – непрер. ф-ия (липшицева) Ω – откр

Непрер. ф-ия на компакте достигает своего min.

Фиксируем $\varepsilon = \delta = \varsigma = \alpha/4$.

$\forall (\hat{t}, \hat{x}, \hat{\lambda}) \in K$

$\overline{B}_\delta(\hat{t}) \times \overline{B}_\varepsilon(\hat{x}) \times \overline{B}_\varsigma(\hat{\lambda}) \subset \Omega$

$\{(t, x, \lambda) : \operatorname{dist}((t, x, \lambda), K) \leq \frac{3\alpha}{4}\} = \hat{K}$ – замкн., огр. подмн-во Ω

$\hat{K}$ – компакт (замкн., огр.)

$\hat{K} \subset \Omega$ $\Rightarrow \|F\|_{C^0(\hat{K})} \leq M$

$\|F'_x\|_{C^0(\hat{K})} \leq L$

!

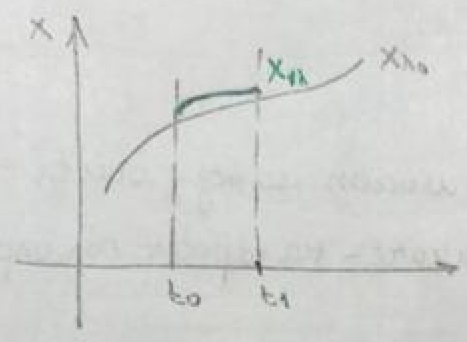
Вывод: $\tau = \tau(\delta, \varepsilon, L, M)$ можно выбрать одним и тем же для всех точек $\hat{K}$.

Рассмотрим

$\{\min I = t_{-\ell} < t_{-\ell+1} < \ldots < t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \max I\}$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F(t, x_i, \lambda) \\ x_i(t_{i-1}, \lambda) = \begin{cases} x_{i-1}(t_{i-1}, \lambda) & i \geq 2 \\ x_0(\lambda), & i = 1 \end{cases} \end{cases} \quad (\#_i)$$

$(\#_1)$ – задача Коши с н.у. $x_1(t_0) = x_0(\lambda)$.



При $\lambda \in U_1 \ni \lambda_0$

x_1 опр. на $[t_0, t_1]$

(и даже немножко шире)

$x_1(t_1, \lambda)$ непр. по λ

$x_1(t_1, \lambda_0) = x_{\lambda_0}(t_1)$

$(\#_2)$ $\quad x_2(t_1, \lambda) = x_1(t_1, \lambda)$

Реш. при $\lambda \in U_2^{\ni \lambda_0}$ опр. и непр. на $[t_1, t_2]$

$x_2(t_2, \lambda)$ непр. по λ

$x_2(t_2, \lambda_0) = x_{\lambda_0}(t_2)$

$x_{1,\lambda}$ и $x_{2,\lambda}$ – реш-е $(\#_2) \Rightarrow x_{1,\lambda} = x_{2,\lambda}$ на пересеч. обл. опр-е.

$x(t) = x_i(t)$, если $x_i(t)$ определено и $t \in \left(\frac{t_{i-1} + t_{i-2}}{2}, \frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)$

$x(t)$ определено на $[t_0, \max I]$.

Аналогично для $t \in [\min I, t_0]$.

Осталось проверить, что $\hat{x}(t, \lambda)$ – реш. задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = F(t, \hat{x}, \lambda) \\ \hat{x}(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$$

<u>Ур-ие.</u> $\forall t \quad \exists (t-\beta, t+\beta)$

$$\hat{x}\big|_{(t-\beta, t+\beta)} = \hat{x}_i\big|\ldots$$

x_i удовл. ур-ию в $t \Rightarrow \hat{x}$ тоже

<u>Н.у.</u> $\hat{x}(t_0) = x_1(t_0) = x_0(\lambda)$

Покажем, что $\hat{x}(t,\lambda)$ непрер.

Возьмём $\tilde{t} \in [t_i, t_{i+1}]$ $i \geq 0$

Локально $\hat{x} = x_i$, а x_i непр-но по (t,λ). $\triangle$

Операторы Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \qquad F, F'_x \in C(\Omega) \\ X_{t_0,t_1}(\xi) = \eta \text{, если реш-ие з.К. } \begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = \xi \end{cases} \text{ равно } \eta \text{ при } t = t_1. \end{cases}$$

Свойства

1) $X_{tt} = id$

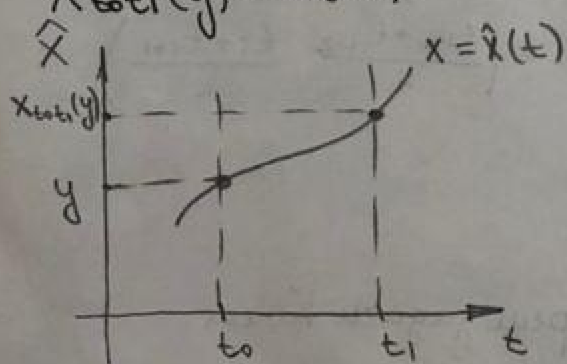
2) $X_{t_2t_3} \circ X_{t_1t_2} = X_{t_1t_3}$, если t_2 лежит между t_1 и t_3 – обл-ти опр-ий совпадают, иначе – на пересеч. обл. опр.

3) $X^{-1}_{ts} = X_{st}$

$\dot{x} = f(t,x)$ 24.09.20

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = y \end{cases} \longleftarrow \hat{x} \text{ – её решение}$$

$X_{t_0t_1}(y) = \hat{x}(t_1)$ $\qquad X_{t_0t_1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t_0) \longmapsto \hat{x}(t_1)$



1) $X_{tt} = id$
2) $X_{t_2t_3} \cdot X_{t_1t_2} = X_{t_1t_3}$
3) $X^{-1}_{ts} = X_{st}$
4) $X_{ts}(y)$ непр по (t,s,y)

Лемма. $\dot{x} = f(t,x,\lambda)$, f – непр.

$X^{\lambda}_{t_0,t_1}$ – его оператор Коши

Тогда $X^{\lambda}_{t_0,t_1}(y)$ непр. по (y, t_0, t_1, λ)

$\triangledown$ Д-во. $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = y \end{cases}$ $(*)$ $\iff$ $\begin{cases} \frac{dz}{ds} = f(t_0+s, z(s), \lambda) \\ z(0) = y \end{cases}$ $(**)$

$z(s) = x(t_0+s)$

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds}(s) = \dot{x}(t_0+s) = f(t_0+s, x(t_0+s), \lambda) = f(t_0+s, z(s), \lambda) \\ z(0) = y \end{cases}$$

(**) – з. Коши с параметром (λ, t_0, y)

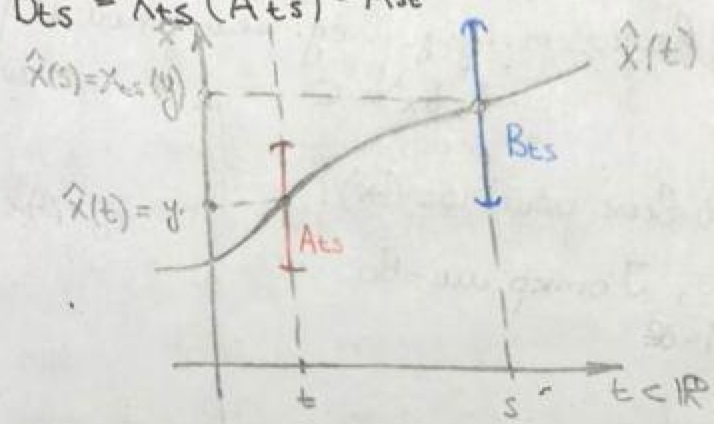
$Z_{\lambda, t_0, y}(s)$ – непр. по (λ, t_0, y) (т.к. X непр)

$X^{\lambda}_{t_0 t_1}(y) = Z_{\lambda, t_0, y}(t_1 - t_0) \Rightarrow X^{\lambda}_{t_0 t_1}(y)$ непр. по (y, t_0, t_1, λ) Δ

5) X_{ts} определено на $A_{ts} \subset \mathbb{R}^n$

откр. (по теор о глоб. незав-ти от параметра)

$B_{ts} = X_{ts}(A_{ts}) = A_{st}$



$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = y \end{cases}$ меняем

$\hat{x}$ – реш-ие

$X_{t_0 t_1}(y) = \hat{x}(t_1)$

$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_1) = X_{t_0 t_1}(y) \end{cases}$

$X_{ts} : A_{ts} \to A_{st}$

$X_{st} : A_{st} \to A_{ts}$

Вывод: X_{st} – гомеоморфизм.

Автономные Д.У. – нет зав-ти от времени.

$\dot{x} = f(x)$ (#)

Лемма. Если x – реш-ие (#), то $\hat{x}(t) = x(t+a)$ – тоже реш (#) $\forall a \in \mathbb{R}$.

▷ Д-во. $\dot{\hat{x}}(t) = \dot{x}(t+a) = f(x(t+a)) = f(\hat{x}(t))$ Δ

Следствие. Для автономных Д.У.

$X_{t_0, t_1}(y) = X_{t_0+a, t_1+a}(y)$

$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = y \end{cases}$ $x(t_1) = X_{t_0 t_1}(y)$

$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0 + a) = y \end{cases}$ $x(t_1 + a) = X_{t_0+a, t_1+a}(y)$

Опр. Преобразование потока авт. Д.У. – это $g^t = X_{0,t}$

Св-ва. 1) $g^0 = id$

$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = y \end{cases} \Rightarrow \hat{x}(s) = X_{0s}(y)$

2) $g^{t+s} = g^t \circ g^s$ сдвиг на s

$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = X_{0s}(y) \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}(t) = X_{0t}(X_{0s}(y))$

$g^t \circ g^s = X_{0,t} \circ X_{0,s} = X_{s, t+s} \circ X_{0,s} = X_{0, t+s} = g^{t+s}$

3) $g^{-t} = (g^t)^{-1}$

4) $g^t(x)$ непр по (t, x)

5) g^t – гомеоморфизм

Опр. $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (*)

Реш (*) $x: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{интервал}}}{I} \to \mathbb{R}^n$ – непродолжимо:

не сущ. реш-ие $\hat{x}: J \to \mathbb{R}^n$, $I \subsetneq J$, $\hat{x}|_I = x$

Теорема. Всякое решение продолжается до непродолжимого. (Если верна т. сущ. и ед. реш. з. Коши: $f, f'_x \in C$)

Д-во. Пусть $\mathfrak{X}$ – мн-во всех реш-ий (*).

1) Рассмотрим $J = \bigcup\limits_{(x: I \to \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{X}} I$, J откр мн-во.

J – интервал. Вот почему:

Если $t \in J$, то $t \in I$ для $(x: I \to \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{X}$

Тогда $[t_0, t] \subset I$, т.е. $[t_0, t] \subset J$

Следовательно, $J = (\inf J, \sup J)$.

2) Определим $\bar{x}: J \to \mathbb{R}^n$

$\bar{x}(t) = x(t)$, если $\underset{t \in I}{(x: I \to \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{X}}$

Корректность: $\left.\begin{matrix} x_1: I_1 \to \mathbb{R}^n \\ x_2: I_2 \to \mathbb{R}^n \end{matrix}\right\} \in \mathfrak{X}$

$t \in I_1 \cap I_2$

$x_1(t) \overset{?}{=} x_2(t)$. Следует из глобальной ед-ти: $x_1|_{I_1 \cap I_2} = x_2|_{I_1 \cap I_2}$

3) $\bar{x} \in \mathfrak{X}$:

Если $t \in J$, то $\exists (x: I \to \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{X}, t \in I$.

Тогда $B_\delta(t) \subset I$.

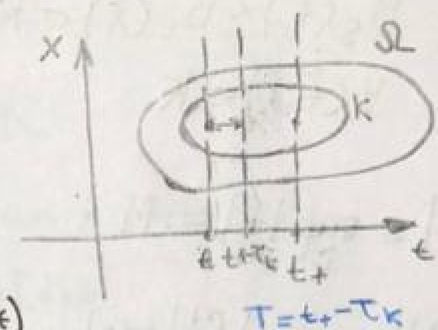
$\bar{x}|_{B_\delta(t)} = x|_{B_\delta(t)}$

$\frac{d\bar{x}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) = f(t, \bar{x}(t))$. $\bar{x}(t_0) = x_0$

4) $\bar{x}$ непродолжимо. Иначе $\exists \tilde{x}: \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$, причем $\tilde{I} \supsetneq J$ – противоречие.

Теорема (о продолжимости реш-ия до границы компакта) за границу

$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (*) $\quad f: \Omega \to \mathbb{R}^n$



Пусть $f, f'_x \in C(\Omega)$

$K \subset \Omega$ – компакт

$(t_0, x_0) \in \Omega$

$x: J \to \mathbb{R}^n$ – непродолж. реш-ие (*)

$\exists T: t_0 < T < \sup J, (t, x(t)) \notin K$ при $t \in (T, \sup J)$

(если $\sup J = \infty$, то $T \in \mathbb{R}$)

Д-во. 1) $\sup J = +\infty$ – очевидно

$T = \max(t \mid (t,x) \in K)$

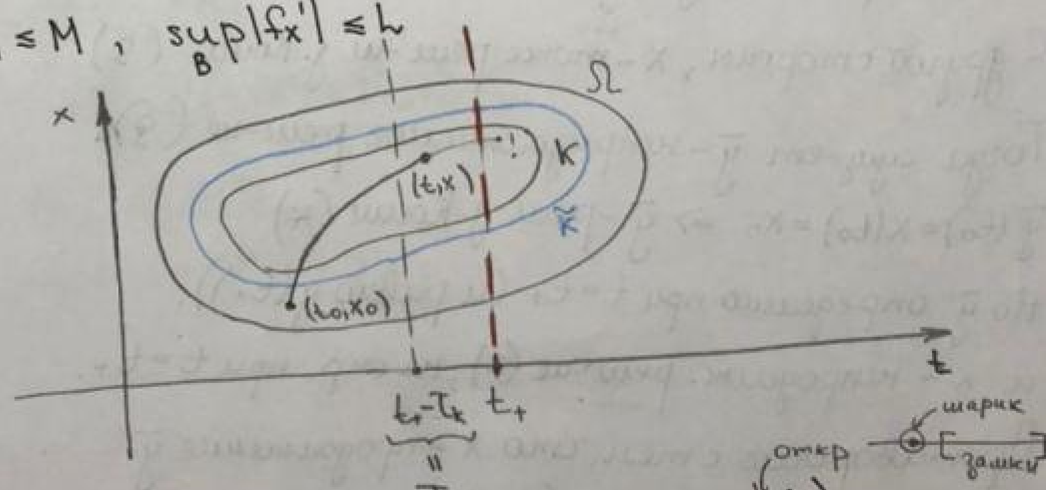
2) $\sup J = t_+ \in \mathbb{R}$

Если $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$, тогда реш-ие з. Коши $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(\tilde{t}) = \tilde{x} \end{cases}$

опр. на $B_\tau(t_0)$, где $\underline{\tau = \tau(\varepsilon, \delta, M, L)}$ (одно и то же на всем компакте K; τ_K)

$\underbrace{\overline{B}_\delta(\tilde{t}) \times \overline{B}_\varepsilon(\tilde{x})}_{B} \subset \Omega$

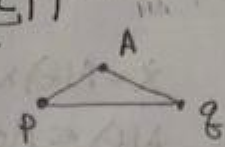
$\sup_B |f| \le M, \quad \sup_B |f'_x| \le L$



3) Рассмотрим $\rho = \min\limits_K (\underbrace{\text{dist}((t,x)}_{\text{непр. ф-ия}}, \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega}_{\text{замкн.}}))$ на комп.

Почему dist непрер?

$\text{dist}(p, A) \le \text{dist}(q, A) + \text{dist}(p, q)$



$\inf\limits_{x \in A} \text{dist}(p, x) \le \inf\limits_{x \in A} \text{dist}(q, x) + \text{dist}(p, q)$

$\text{dist}(q, A) - \text{dist}(p, q) \le \text{dist}(p, A) \le \text{dist}(q, A) + \text{dist}(p, q) \Rightarrow$ dist непрер.

Значит, $\rho > 0$.

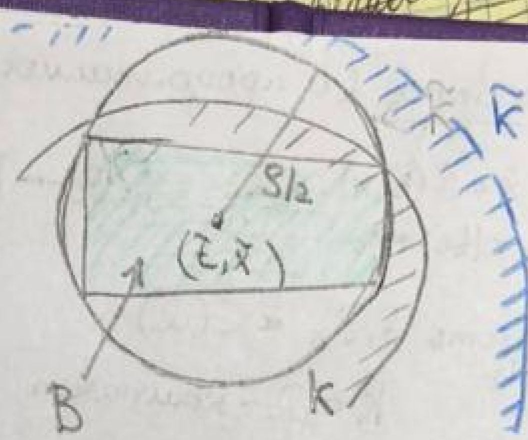
Тогда $\tilde{K} = \{(t,x) : \text{dist}((t,x), K) \le \frac{\rho}{2}\}$ – замкн. $\subset \Omega$

$\tilde{K}$ огр ($K \subset B_R(0,0) \Rightarrow \tilde{K} \subset B_{R+\rho/2}(0,0)$)

Значит, $\tilde{K}$ – компакт

4) Положим $\varepsilon = \delta = S/4$.

Тогда $\underline{\overline{B}_\delta(\tilde{t}) \times \overline{B}_\varepsilon(\tilde{x}) \subset \tilde{K}}$ $\forall (\tilde{t}, \tilde{x}) \in K$



$\sup\limits_B |f| \leq \sup\limits_{\tilde{K}} |f| =: M$

$\sup\limits_B |f'_x| \leq \sup\limits_{\tilde{K}} |f'_x| =: L$

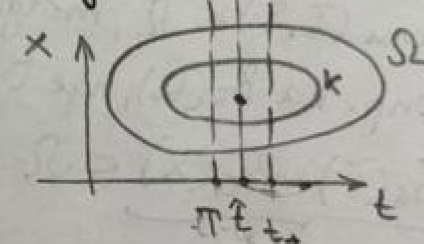
Итак, $\tau = \tau_K$ можно считать одинаковым $\forall (\tilde{t}, \tilde{x}) \in \tilde{K}$.

(т.к. $\tau = \tau(\varepsilon, \delta, M, L)$)

5) Положим $T = t_+ - \tau_K$.

Если $(\hat{t}, x(\hat{t})) \in K$, где $\hat{t} \in (T, t_+)$, то з. Коши

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, t) \\ y(\hat{t}) = x(\hat{t}) \end{cases} \quad (\S)$$



Имеет реш-ие $y : B_{\tau_K}(\hat{t}) \to \mathbb{R}^n$.

$\overset{t_+}{\in}$

С другой стороны, x — тоже реш-ие з. Коши $(\S)$

Тогда сущ-ет $\overline{y}$ — непродолжимое реш-ие $(\S)$.

$\overline{y}(t_0) = x(t_0) = x_0 \Rightarrow \overline{y}$ — реш з. Коши $(*)$

Но $\overline{y}$ определено при $t = t_+$ (и равно $y(t_+)$),

а x — непродолж. реш-ие $(*)$, не опр. при $t = t_+$.

Противоречие с тем, что x — продолжение $\overline{y}$. ▲

Линейные ДУ.

$\dot{x} = A(t)x + b(t)$

$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$ $\quad A(t) \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$

$x \in \mathbb{R}^n \quad b : I \to \mathbb{R}^n$

$A, b \in C(I)$, I - интервал

Тогда выполнены усл. т $\exists$ и ед-ти

$f'_x = A$

<u>Теорема.</u> Пусть $A, b \in C(I)$. Тогда все реш-ия $\underline{\dot{x} = A(t)x + b(t)}$ продолжаются на весь I.

Д-во. 1) Пусть $[\alpha,\beta] \subset I$.

Рассмотрим $x(t)$-реш. и $x(\alpha)$ определено.

Д-ем: x опр-но на всем $[\alpha,\beta]$.

(Устремляя $\beta \to \sup I$, получим требуемое)

2) $\|A(t)\| \leq M \quad |b(t)| \leq B \quad \forall t \in [\alpha,\beta]$

$\forall u \quad |Au| \leq M|u|$

$$M = \max_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ t\in[\alpha,\beta]}} |a_{ij}(t)|\, n$$

Любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

$\|Au\|_2 \leq \tilde{M}\|u\|_2$

↑

евклидова норма

$$\frac{d}{dt}(\|x\|^2) = \frac{d}{dt}(\langle x,x\rangle) = 2\langle x,\dot{x}\rangle \leq 2\|x\|(\|Ax+b\|) \leq$$

$$\leq 2\|x\|(\tilde{M}\|x\| + B)$$

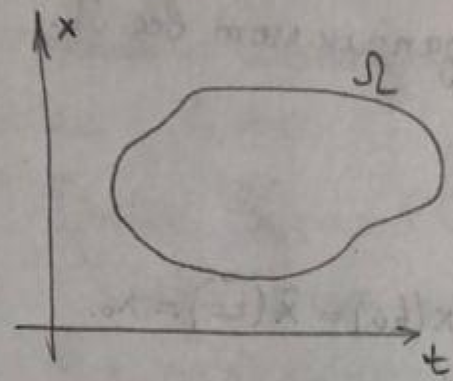
$$\frac{d}{dt}(\|x\|) = \frac{1}{2\|x\|}\frac{d}{dt}(\|x\|^2) \leq \tilde{M}\|x\| + B.$$

Пусть $R(t) = \|x(t)\|$,

$S(t) = e^{-(\tilde{M}+1)t} R(t)$

$\dot{x} = f(t, x)$ (*)

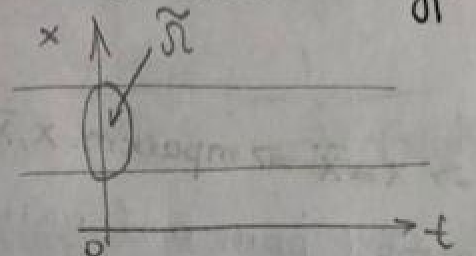
25.09.20.



$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Ω – расширенное фазовое пр-во.

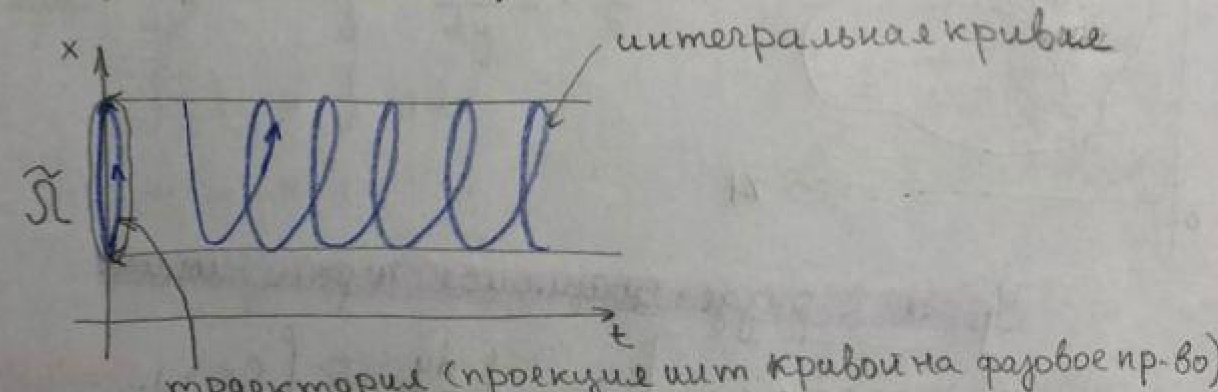
Для автономного ур-ия: $\dot{x} = f(x)$ $\quad f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$

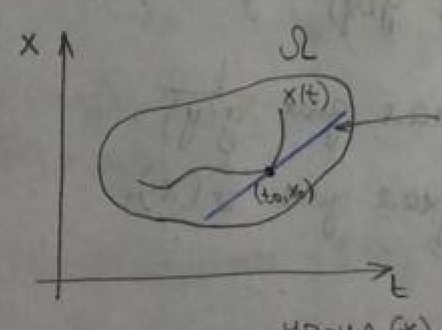


$\Omega = \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$, $\tilde{\Omega}$ – фазовое пр-во.

Пусть $x(t)$ – реш-ие $\dot{x} = f(t, x)$

Кривая $\{(t, x(t))\}$ – интегральная кривая.





$x - x_0 = f(t_0, x_0)(t - t_0)$ (**)

Поле направлений: для каждой точки Ω задана прямая, проходящ. через неё.

Предложение. Интегральные кривые = кривые, касающиеся прямых (**) в каждой своей точке

▷ Д-во. Касат. вектор к интегр. кривой $(1, \underset{f_1(t_0, x_0)}{\underset{\shortparallel}{\dot{x}_1(t_0)}}, \dots, \underset{f_n(t_0, x_n)}{\underset{\shortparallel}{\dot{x}_n(t_0)}}) =$

= касат. вектор к (**).

◁

Лемма. Пусть $f \in C^1(\tilde{\Omega})$.

Тогда траектории $\dot{x} = f(x)$ не пересек. и заполняют все $\tilde{\Omega}$.

▷ Д-во. Вторая часть очевидна.

Д-ем первую часть.

макс. непродолжимые

Пусть $x, \tilde{x}$ - реш-ие $\dot{x} = f(x)$, т.ч. $x(t_0) = \tilde{x}(\tilde{t_0}) = x_0$.

сдвигуем $\tilde{x}$

Тогда $\overline{x}(t) = \tilde{x}(t - t_0 + \tilde{t_0})$.

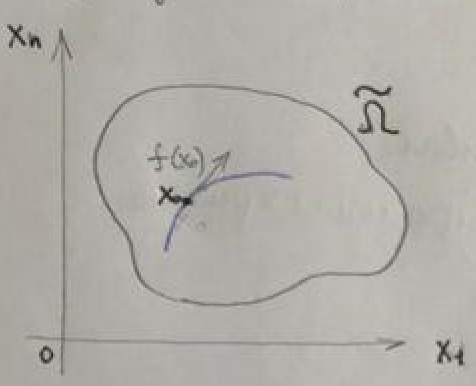
$\overline{x}$ - тоже реш-ие $\dot{x} = f(x)$

$\overline{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$

(по теор. сущ. и ед-ти)

Т.е. $x, \overline{x}$ - решение одной з. Коши. $\Rightarrow x \equiv \overline{x} \Rightarrow$ траект. $x, \overline{x}$ совп.

Но траектории $\overline{x}$ и $\tilde{x}$ совп. по постр. (время отвечает за сдвиг по кривой, проекция не зависит от времени) ◁



Вект. поле: в каждой точке задан вектор.

Ур-я с разделяющимися переменными

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)} \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Пусть $G(y)$ - первообразная для $\frac{1}{g(y)}$,

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$.

Тогда $G(y) = F(x) + C$.

Рассмотрим $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$,

$\frac{dx}{dy} = G(x,y)$, $G = \frac{1}{F}$, если $\begin{cases} F \text{ опр.} \\ F \neq 0 \end{cases}$

Пример: $F = \frac{y}{x}$, $G = \frac{x}{y}$.

Теорема. Интегральная кривая $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ через (x_0,y_0) локально совпадает с инт. кривой $\frac{dx}{dy}=G(x,y)$ через (x_0,y_0), если $F,G\neq 0$.

▷ Д-во. Пусть $F(x_0,y_0)>0$.

Тогда $\exists$ окр-ть, где $F>0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}>0 \quad \forall x\in B_\delta(x_0)$, т.е. $y(x)$ монот. возр. в $B_\delta(x_0)$, и там есть обр. ф-ия $x(y)$.

$$\frac{dx(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}(x(y))}=\frac{1}{F(x(y),y)}=G(x(y),y).$$

◁

Обобщенное реш-ие $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ $(\#1)$, $\frac{dx}{dy}=G(x,y)$ $(\#2)$ — кривая на пл-ти (x,y), которая в окр. (x_0,y_0), т.ч. $F(x_0,y_0)\neq 0$ — график реш-ия $y=y(x)$ ур-ия $(\#1)$

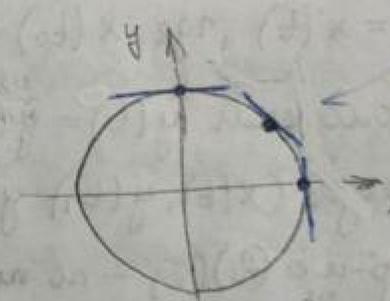
$G(x_0,y_0)\neq 0$ — график реш-ия $x=x(y)$ ур-ия $(\#2)$?

Пример. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ $\quad \frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$

$\int y\,dy=\int -x\,dx$

$y^2=-x^2+C$

$x^2+y^2=C$



Теорема. $\frac{dy}{dx}=\frac{\Phi(x,y)}{\Psi(x,y)}$, $\Phi,\Psi\in C$ $\left(\frac{dx}{dy}=\frac{\Psi(x,y)}{\Phi(x,y)}\right)$ (1)

$$\begin{cases}\dot{x}=\Psi(x,y)\\ \dot{y}=\Phi(x,y).\end{cases} \quad (2)$$

Тогда в области $\{(\Phi,\Psi)\neq(0,0)\}$ обобщенное реш-ие (1) = траектория (2).

▷ Д-во. Для определенности пусть $\Psi(x_0,y_0)\neq 0$.

Пусть $\underbrace{(x(t),y(t))}_{\in C^1}$ — реш. (2): $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$.

$\dot{x}(t_0)=\Psi(x_0,y_0)\neq 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t}\neq 0$

По теор. о неявной ф-ии локально $t=t(x)$ — обр. ф-ия.

$$\frac{dt}{dx}(\hat{x})=\frac{1}{\dot{x}(t(\hat{x}))}=\frac{1}{\Psi(\hat{x},y(t(\hat{x})))}$$

Рассмотрим ф-ию $y(t(x))$.

$$\frac{dy(t(x))}{dx}(\hat{x}) = \frac{dy}{dt}(t(\hat{x}))\frac{dt}{dx}(\hat{x}) = \frac{\Phi(x(t(\hat{x})), y(t(\hat{x})))}{\Psi(x(t(\hat{x})), y(t(\hat{x})))} =$$

$$= \frac{\Phi(\hat{x}, y(t(\hat{x})))}{\Psi(\hat{x}, y(t(\hat{x})))}.$$

Вывод. $y(x) := y(t(x))$ удовл. (1) (локально)

Пусть $y(x)$ - реш-ие (1).

$$\dot{x}(t) = \Psi(x(t), y(x(t))) \quad (3)$$

Это автономное ур-ие на прямой

$$\dot{x} = F(x).$$

Значит, это ур-ие имеет реш. (см. след. лекции)

$x = x(t)$, где $x(t_0) = x_0$.

Положим $y(t) = y(x(t))$.

Тогда $(x(t), y(t))$ удовл-ют (2):

1^e ур-ие (2) – по постр. $x(t)$ (см(3)).

2^e ур-ие (2):

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\dot{x} = \frac{\Phi(x(t), y(t))}{\Psi(x(t), y(t))}\cdot\Psi(x(t), y(t)) = \Phi(x(t), y(t)) \quad \triangle$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) = \frac{g(y)}{1/f(x)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = g(y) \\ \dot{x} = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$$

Автономные ДУ на прямой.

$\dot{x} = f(x),\ f \in C(I),\ I \subset \mathbb{R}$ $(\star)$

Предложение. $f(x_0) = 0 \Rightarrow x \equiv x_0$ – реш $(\star)$

Пусть $f(x_0) \neq 0$.

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)}$ (лок. эквив.)

$t(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)} + t_0$ (4) – реш-ие ур-ия $y' = \varphi(x)$ – это $y = \int \varphi(x)\,dx$

$x(t)$ – обратная ф-ия.

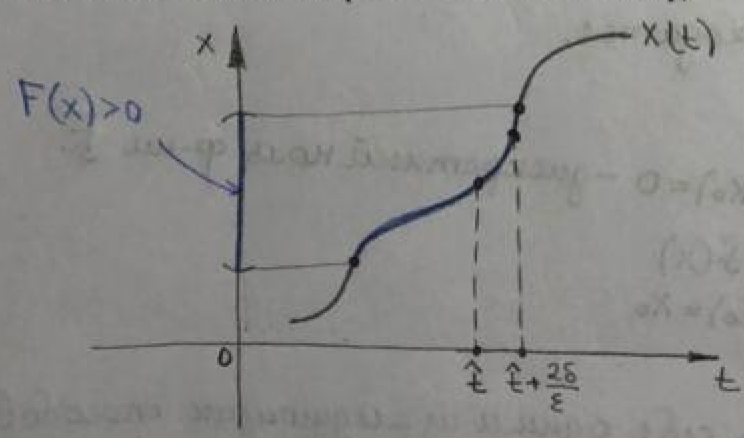
локально

Мы хотим получить аналогичные глобальные представления.

(4) $\Leftrightarrow t(x) = F(x) + C$, где F – фиксир. первообр. для $\frac{1}{f(x)}$.

Пусть $x(t)$ – реш-ие; $F(x,t) > 0$ при $t \in (t_0, t_1) \Rightarrow \dot{x}(t) > 0$ $t \in (t_0, t_1)$

$x: (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ обратима, и обр. ф-ия локально есть $t(x) = F(x) + C$, т.е. функция $t(x) - F(x)$ лок. постоянна $\Rightarrow$ глоб. пост.



Предложение. Если $F|_J > 0$, $x(t_0) \in J$, то либо $\exists T: x(T) = \sup J$, либо $x(t)$ опр. на $(t_0, +\infty)$ и $x(t) \xrightarrow{t \to \infty} \sup J$

Д-во:

(т.о продолж. до границы компакта) + (надо исключить $x(t) \xrightarrow{t \to +\infty} a < \sup J$)

$F(a)>0$

$F(x)\geqslant\varepsilon>0$ при $x\in B_\delta(a)$

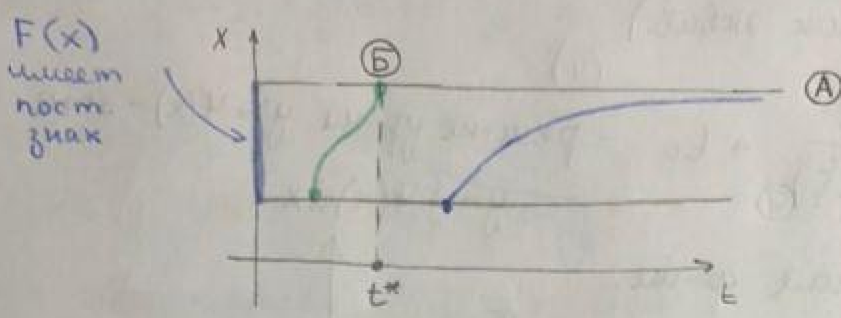
Если $x(\hat t)\in B_\delta(a)$, то $x\left(\hat t+\frac{2\delta}{\varepsilon}\right)>a$, т.к.

$$x\left(\hat t+\frac{2\delta}{\varepsilon}\right)=x(\hat t)+\frac{2\delta}{\varepsilon}\dot x(\hat t)\quad\text{(теор. Лагранжа)}$$

$$\geqslant$$

$$(a-\delta)+2\delta>a.$$

Δ



Когда имеют место А и Б?

А $x\longrightarrow\sup J$

$t\longrightarrow+\infty$

$$t=F(x)+C=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{f(\xi)}+C$$

А $\Longleftrightarrow\displaystyle\int_{\sup J+\varepsilon}^{\sup J}\frac{d\xi}{f(\xi)}$ расходится.

Б $x\to\sup J$ $t\to t^*$

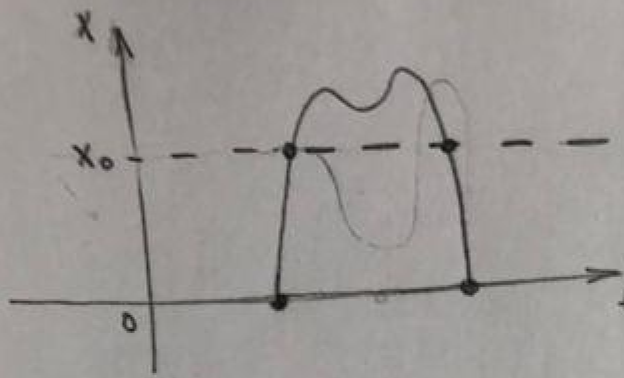
Б $\Longleftrightarrow\displaystyle\int_{\sup J-\varepsilon}^{\sup J}\frac{d\xi}{f(\xi)}$ сходится.

Теорема. Пусть $f(x_0)=0$ – дискретный ноль ф-ии f.

Тогда решение $\begin{cases}\dot x=f(x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$

справа от t_0 ведет себе одним из следующих способов:

1) $x\equiv x_0$
2) $x=x_0$ на $[t_0,T]$, $x(t)>x_0$ при $t\in(T,T+\varepsilon)$
3) $x=x_0$, $t\in[t_0,T]$, $x(t)<x_0$ при $t\in(T,T+\varepsilon)$



Причем 2) возможно только если

а) $f(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0+\delta)$

б) $$\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{d\xi}{f(\xi)} < \infty$$ (сходится)

<u>Предложение.</u> Если $f \in C^1$, то возможно только (A), т.е.

$$\int\limits_{x_0}^{x_0\pm\varepsilon} \frac{d\xi}{|f(\xi)|} \geqslant \int\limits_{x_0}^{x_0\pm\varepsilon} \frac{d\xi}{C|\xi - x_0|} = +\infty$$

$\triangleright$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$|f(x)| \leq C|x-x_0|$$ $\triangleleft$

$t = F(x) + C \qquad t = G(y) + D$

$|f(x)| \leq C|x-x_0|$ Δ

$t = F(x) + C \qquad t = G(y) + D$

ДУ на многообразиях.

01.10.20.

$\dot{x} = f(x,t), \ x \in M.$

$x: \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{I}} \longrightarrow M$

$\dot{x}$ - касат. вектор

<u>Опр.</u> $\{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{гладкие}}}{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \mid \gamma(0) = p\} = T_p M$

о-малое от t

$\gamma \sim \hat{\gamma} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \underset{(U,\varphi)}{dist}(\gamma(t), \hat{\gamma}(t)) = o(t) \quad t \to 0 \qquad (\#)$

(расстояние мерим в карте (U,φ))

Лемма. Если (U, φ), (V, ψ) – две карты, содержащие p, то (#) для них экв-но.

$\triangleright$ Пусть $(y_1, \dots, y_n)$ – лок. сист. коорд. в окр. $p \in \mathbb{R}^N$, т.е.

- $y = y(x)$ опр. в окр. p;
- y гладко зависит от p (хотя бы C^1-гладко);
- $\det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x=p} \neq 0$.

Тогда если $\gamma, \hat\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, то

$$\operatorname{dist}(\gamma(t), \hat\gamma(t)) \to 0 \iff \operatorname{dist}(y(\gamma(t)), y(\hat\gamma(t))) \to 0. \quad (!)$$

Замечание. По теор. о неявной ф-ции $x = x(y)$ $\left(\begin{matrix}\text{лок.} \\ \text{в окр-ти} \\ \text{т. } p\end{matrix}\right)$

$$\delta(t) = y(\gamma(t)), \quad \hat\delta(t) = y(\hat\gamma(t))$$

(!) имеет вид $\operatorname{dist}(x(\delta(t)), x(\hat\delta(t))) \to 0 \iff$

$\iff \operatorname{dist}(\delta(t), \hat\delta(t)) \to 0.$

Итак, дост. док-ть ($\Rightarrow$) в (!).

$y = y(x)$ – гладкая (C^1)

Тогда $\exists\, \overline{B}_\varepsilon(p)$, $\exists M : \forall x \in \overline{B}_\varepsilon(p)$ $\left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M$.

$\hat x \in \overline{B}_\varepsilon(p)$

$$y_i(x) - y_i(\hat x) = \sum_j (x_j - \hat x_j) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Big|_{\theta_i x + (1-\theta_i)\hat x}.$$

$x \in \overline{B}_\varepsilon(p)$

применим теор. Лагранжа к ф-ции

$$J(\theta) = y_i(\theta x + (1-\theta)\hat x)$$

$$|y_i(x) - y_i(\hat x)| \leq M \sum |x_j - \hat x_j|$$

$$\|y(x) - y(\hat x)\| \leq \sqrt{n}\, M \sum |x_j - \hat x_j|, \quad n \text{ – число координат.}$$

$$\sum |x_j - \hat x_j| \cdot 1 \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_j |x_j - \hat x_j|^2}$$

$$\|y(x) - y(\hat x)\| \leq n \cdot M \, \|x - \hat x\|.$$

Т.е. наша лок. сист. коорд. задает липшицеву ф-цию.

$\text{dist}(y(\gamma(t)), y(\hat{\gamma}(t))) \leq L \cdot \text{dist}(\gamma(t), \hat{\gamma}(t)) = o(t), t \to 0.$

Таким образом, мы док-ли, что построенное отн. экв-ти не зав от коорд (от карты) Δ

Лемма. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ - лок. сист. коорд в окр. p.

Тогда отображение

$$\varphi : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^n, \; [\gamma] \xmapsto{\varphi} \left(\frac{dx_1(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0}, \dots, \frac{dx_n(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} \right)$$

- это биекция. Причем, если $(y_1, \dots, y_n)$ - другая с.к., ψ - соотв. отобр., то

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

- изоморфизм вект. пр-в.

(Эта лемма говорит, что T_pM - векторное пр-во)

$\triangleright$ 1) φ корректно опр-но.

$$|x(\gamma(t)) - x(\hat{\gamma}(t))| = \sum_i |x_i(t) - \tilde{x}_i(t)|^2 =$$

Разложим в ряд Тейлора

$$= \sum_i |p_i + v_i t + o(t) - p_i - \hat{v}_i t + o(t)|^2 =$$

$$= \left(\sum_i (v_i - \hat{v}_i)^2 \right) t^2 + o(t^2).$$

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| = \sqrt{\|v - \hat{v}\|^2 t^2 + o(t^2)} = \|v - \hat{v}\| \, |t| \sqrt{1 + o(1)} = \quad (1)$$

$$= \|v - \hat{v}\| \, |t| + o(t).$$

2) Что мы теперь видим?

- Если $\|x(t) - \hat{x}(t)\| = o(t)$, то отсюда $\|v - \hat{v}\| = 0$ (т.е. $v = \hat{v}$)

Это корректность

- Если $\varphi(\gamma) = v \neq \hat{v} = \varphi(\hat{\gamma})$, то из (1)

$\|x(\gamma(t)) - x(\hat{\gamma}(t))\| \neq o(t) \Rightarrow \gamma \nsim \hat{\gamma}$ (инъективность)

3) Сюръективность.

Рассмотрим γ, задаваемую $x_i(\gamma(t)) = p_i + v_i t$

Тогда $\varphi(\gamma) = (v_1, \dots, v_n)$

Мы доказали биективность.

4) Линейность $\psi\circ\varphi^{-1}: v \mapsto Jv$

$$\left.\frac{dy(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dy(x(\gamma(t)))}{dt}\right|_{t=0} = \sum_j \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|_{x=x(p)} \cdot \frac{dx_j(\gamma(t))}{dt}$$

здесь y как коорд. для данной т. кривой

здесь ф-ция, которая коорд. по x переводит в коорд. по y

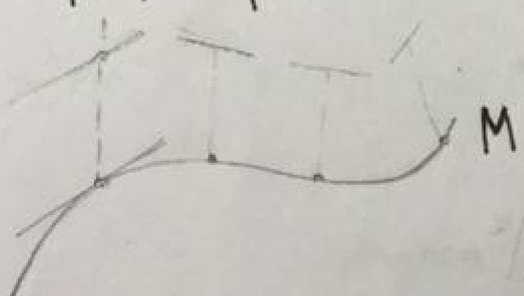
$$J = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

$\triangle$

$\dot{x}(t) = f(x(t),t)$

$f: M\times\mathbb{R} \to \bigsqcup_p T_pM = TM$ - касательное расслоение.

$f(p,t)\in T_pM \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(\cdot,t)$ - сечение TM.

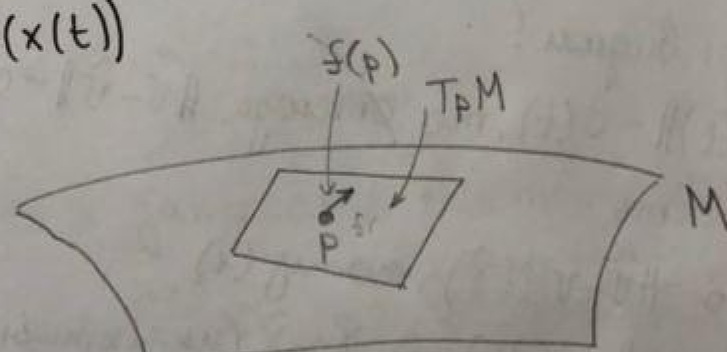


$x: I\to M$

$\dot{x}(t)\in T_{x(t)}$ $\quad \dot{x}(t) = [\gamma(s) = x(t+s),\ s\in(-\varepsilon,\varepsilon)]$

Автономные ДУ на многообразиях.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$



<u>Опр.</u> **Векторное поле** на многообразии – это отобр-ие

$$v: M\to \bigsqcup_p T_pM,$$

т.ч. $v(p)\in T_pM \quad \forall p$.

Векторное поле наз-ся непр/гладким, если в любой лок. сист. коорд. $(x_1, \dots, x_n)$ ф-ции $\varphi_{\cdot}(v(\cdot)): U \to \mathbb{R}^n$ непр-ны/гладк.

опр-на в лемме

Лемма. Если $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ - две лок. сист. коорд. в окр. p, то непр./гладкость $\varphi_{\cdot}(v(\cdot))$ в т. p эквивалентна таковой для $\psi_{\cdot}(v(\cdot))$.

$\triangledown$ $\xi: U \to \mathbb{R}^n$ - соотв. с.к. $(x_1, \dots, x_n)$

$\eta: V \to \mathbb{R}^n$ - соотв. с.к. $(y_1, \dots, y_n)$

$(v_1(x), \dots, v_n(x))^T = \varphi_{\xi^{-1}(x)}(v(\xi^{-1}(x))$

$(u_1(y), \dots, \ (y))^T = \psi_{\eta^{-1}(y)}(v(\eta^{-1}(y))$

$u(y(x)) = J(x)v(x)$, $J(x) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_x$

J - гладкая, $y(x)$ - C^∞-гладкая замена. $\triangle$

Нотация Эйнштейна.

$(x^1, \dots, x^n)$ - сист. коорд (лок)

$(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ - другая лок. с.к.

γ: $x^i = x^i(t)$ - кривая

$[\gamma]$: $v^i = \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0}$

Как записать векторное поле в другой с.к.?

$$v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i \xrightarrow{\text{подразумевается}} \sum_i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i$$