ЛЕКЦИЯ 1

Одним из самых интересных и важных вопросов классической алгебраической геометрии издавна считается вопрос о кривых различного рода (в частности, рациональных) на алгебраических многообразиях. Однако до недавнего времени не было систематического подхода к его решению.

Новую жизнь в него вдохнула относительно недавно появившаяся наука — зеркальная симметрия. Пришедшая из физики, она очень быстро стала достоянием математики. Ей стали заниматься такие известные люди, как Л. Борисов, А. Гивенталь, В. Голышев, Н. Громов, Б. Дубровин, М. Концевич, Ю. Манин, В. Никулин, Д. Орлов, А. Тюрин, B. Siebert, C. Vafa, D. Morrison, E. Witten, S-T. Yau и многие другие.

Для начала дадим "грубое" геометрическое определение инвариантов Громова–Виттена.

Определение 1. Пусть X — алгебраическое многообразие, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — циклы на нем. *Примарным n-точечным инвариантом (корреляторoм) Громова–Виттена рода g, соответствующим классу гомологий $\beta \in H_2(X)$*, называется число, равное количеству кривых рода g, пересекающих общих представителей классов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, если оно конечно, и нулю в противном случае. При этом кривые, пересекающие цикл в разных точках, считаются *разными*. Это число обозначается как $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle_\beta^g$.

Замечание 2. В дальнейшем, пока мы не определим инварианты Громова–Виттена в общем случае, мы будем опускать слово "примарные". Кроме того мы будем одинаково обозначать циклы и двойственные к ним классы когомологий.

Пример 3. Как известно, на многообразиях Фано всегда есть рациональные кривые (в частности, это кривые, лежащие на экстремальных лучах конуса Мори). Более того, на гладком проективном многообразии Фано X через каждую точку проходит рациональная кривая D, такая, что

$$D \cdot (-K_X) \leqslant 1 + \dim X.$$

Доказательство этого факта непросто; единственное известное на данный момент использует редукцию в характеристику p.

Поэтому среди инвариантов рода ноль для многообразий Фано есть ненулевые (какие?).

На гладких трехмерных многообразиях Фано индекса 1 прямые (относительно антиканонического вложения) заметают поверхность (так называемую поверхность Фано). Поэтому если l — класс прямой на таком многообразии X, а $H = -K_X$, то единственные ненулевые инварианты рода ноль для l — это инварианты типа $\langle H^2, H, \ldots, H \rangle_l^0$; число $\langle H^2 \rangle_l^0$ равно степени поверхности Фано. На многообразиях большего индекса прямых "больше". Например, несложно убедиться, что на общей кубике в $\mathbb{P}^4$ через общую точку проходит шесть прямых. Это значит, что относительно обычного вложения этой кубики во введенных выше обозначениях $\langle H^3 \rangle_l^0 = 6$.

Вообще, знаменитая теорема Шокурова о существовании прямой на трехмерном многообразии Фано индекса 1 легла в основу классификации Исковских многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$.

Вопрос о рациональных кривых на многообразиях является центральным в программе Мори. Например, рациональные кривые заметают исключительные сечения стягиваний и расслоений Мори. Именно поиск таких кривых занимает центральное место в этой программе; до появления теоремы о конусе деформация кривых с отщеплением рациональных компонент была единственным подходом в этой теории.

В качестве примера можно рассмотреть следующее предложение.

Предложение 4. *Для трехмерного (и n-мерного по модулю программы Мори) многообразия с "хорошими" (например, терминальными) особенностями унилинейчатость (то есть то, что через общую точку проходит рациональная кривая) эквивалентна тому, что кодаирова размерность такого многообразия равна* $-\infty$.

Упражнение 5 (для тех, кто знаком с программой Мори). *Докажите (по модулю программы Мори), что многообразие с кодаировой размерностью* $-\infty$ *унилинейчато.*

Пример 6. Рассмотрим проективное многообразие Калаби–Яу X размерности n и степени k. Рассмотрим сечение этого многообразия линейным пространством коразмерности $n-1$; пусть H — гиперплоское сечение. Тогда, по формуле присоединения, канонический класс получившейся кривой C равен $(n-1)H$. Количество точек такого дивизора равно $(n-1)H\cdot[C]=(n-1)H\cdot H^{n-1}\cdot[X]=(n-1)\cdot k$. Если g — род кривой C, то количество точек канонического дивизора равно $2g-2$. Итак, $2g-2=k\cdot(n-1)$ и $g=k\cdot(n-1)/2+1$. Значит, какой-то инвариант Громова–Виттена рода $k\cdot(n-1)/2+1$ не равен нулю.

Предложение 7. *Пусть* X *— абелево многообразие. Тогда все его инварианты Громова–Виттена рода ноль равны нулю.*

Доказательство. Действительно, это эквивалентно тому, что на многообразии X нет рациональных кривых. Пусть $C\subset X$ — рациональная кривая, t — локальная координата на ней. Распространим 1–форму dt на всю кривую с помощью групповой операции. Тогда мы получим всюду определенную дифференциальную форму на рациональной кривой. Противоречие. $\square$

Пример 8. На очень общей[1] поверхности в $\mathbb{P}^3$ степени пять и больше нет рациональных и эллиптических кривых. Это значит, что инварианты Громова–Виттена рода ноль и один для таких поверхностей равны нулю.

Более того, верен следующий факт: любое подмногообразие очень общей гиперповерхности степени $2n$ или больше в $\mathbb{P}^n$ является многообразием общего типа. Отсюда, в частности, следует, что на такой гиперповерхности не лежит рациональных и эллиптических кривых.

Упражнение 9. *Приведите пример семейства гладких многообразий максимальной кодаировой размерности, на каждом из которых лежит бесконечное число рациональных кривых.*

Вопрос о рациональных кривых на многообразиях подчинен общему принципу: чем "более общего" типа многообразие, тем "меньше" на нем рациональных кривых. Это обуславливается, в частности, тем, что на таких многообразиях существует

[1] То есть на поверхности, соответствующей точке дополнения к счетному числу подмногообразий в пространстве модулей.

“достаточно много” дифференциальных 1-форм, чтобы найти такую, которая ненулевым образом ограничивается на рациональную кривую, так что получится, что если такая кривая существует, то на ней есть всюду определенная дифференциальная форма, чего быть не может. Однако чем больше род кривой, тем больше таких кривых на многообразиях.

В связи с вышесказанным представляют интерес не только заметно более легко считающиеся и представляющие геометрический интерес инварианты Громова–Виттена рода ноль, но и инварианты большего рода.

Замечание 10. В дальнейшем, если это не оговорено особо, мы будем рассматривать инварианты *рода ноль*, то есть соответствующие рациональным кривым, и обозначать их просто $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle_\beta$.

Кроме того, мы будем рассматривать инварианты Громова–Виттена только для гладких многообразий с неотрицательным антиканоническим классом (причины этого мы поймем чуть позже). Стандартной моделью для многообразий Фано будет считаться *антиканоническая*; термины “прямые”, “коники” и т. д. будут употребляться относительно именно этого вложения.

Инварианты Громова–Виттена обладают некоторыми свойствами, напрямую следующими из их определения. В дальнейшем, когда будем давать аксиоматическое определение инвариантов, мы возьмем эти свойства за *аксиомы*.

Рассмотрим три самых очевидных свойства. Пусть X — гладкое многообразие.

- Аксиома дивизора.

  Пусть $\gamma_1 \in H_{\dim X-2}(X)$ — дивизор, $n \geqslant 3$. Тогда
  $$\langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle_\beta = (\gamma_1 \cdot \beta) \langle \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle_\beta,$$
  за исключением случая $\beta = 0$ и $n = 3$. В этом случае $\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle_0 = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot [X]$.
- Аксиома фундаментального класса.

  Пусть $\mathbf{1}$ — фундаментальный класс X.

  Определение 11. Инвариант Громова–Виттена называется *базовым*, если он имеет вид
  $$\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle_\beta, \quad \langle \gamma \rangle_\beta^1, \ \textit{или}\ \langle \mathbf{1} \rangle_\beta^g, \ g \geqslant 2.$$
  В противном случае инвариант называется *новым*.

  Пусть $\langle \mathbf{1}, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle_\beta$ — новый инвариант. Тогда
  $$\langle \mathbf{1}, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle_\beta = \langle \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle_\beta.$$
  Для базового класса имеем
  $$\begin{cases} \langle \mathbf{1}, \gamma_2, \gamma_3 \rangle_0 = \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot [X] & \text{если } \beta = 0, \\ 0 & \text{если } \beta \neq 0. \end{cases}$$
- Отображение в точку.

  Пусть $\beta = 0$ и $g = 0$. Тогда
  $$\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle_\beta = \gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n \cdot [X].$$

Одним из самых важных типов инвариантов Громова–Виттена являются *трехточечные* (то есть для $n = 3$) корреляторы (все остальные инварианты через них выражаются). Их можно “паковать” в так называемое кольцо квантовых когомологий.

Определение 12. Рассмотрим конечно порожденную алгебру A над полем K; пусть $e_1, \ldots, e_m$ — ее базис как линейного пространства. Построим *деформированную алгебру* A_q следующим образом. Элементами A_q будут многочлены (или формальные ряды) от переменной $q = (q_1, \ldots, q_r)$ с коэффициентами из кольца A. Умножение будет задаваться равенствами

$$e_i \circ e_j = \sum_d a_d(e_i, e_j, e_k) e_k q^d,$$

где $a_d(e_i, e_j, e_k) \in K$ — некоторые коэффициенты; умножение произвольных элементов A_q задается с помощью этих равенств по мультипликативности.

Замечание 13. Разумеется, коэффициенты $a_d(e_i, e_j, e_k)$ могут быть не любыми. Во-первых, ясно, что для того, чтобы произведение двух элементов кольца было конечным, надо, чтобы при больших d коэффициенты $a_d(e_i, e_j, e_k)$ были равны нулю. Во-вторых, на них нужно наложить некоторые соотношения; это необходимо для того, чтобы алгебра A_q была ассоциативной. Наука, которая изучает подобные деформированные алгебры, называется *деформационным квантованием.*

Выражение "деформированная алгебра" не случайно. Действительно, если положить $q = 0$, то мы получим исходную алгебру.

Определение 14. *Кольцом квантовых когомологий* $QH(X)$ многообразия X называется деформация кольца когомологий $H(X)$, в котором переменная $q = (q_1, \ldots, q_r)$ задается базисом $q_1, \ldots, q_r$ кольца $H_2(X)$, а в качестве структурных коэффициентов взяты трехточечные инварианты Громова–Виттена: $a_d(\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k) = \langle \gamma_i, \gamma_j, \hat{\gamma}_k \rangle_\beta$, где $\beta = \sum d_i q_i$.

Замечание 15. То, что трехточечные инварианты удовлетворяют соотношениям ассоциативности (то есть так называемым WDVV–уравнениям) — сложная теорема.

Таким образом, знание трехточечных корреляторов эквивалентно знанию кольца квантовых когомологий. Заметим также, что по аксиоме дивизора мы можем представить одно- и двухточечные инварианты как частный случай трехточечных; в кольце квантовых когомологий они будут соответствовать разложению произведения двух дивизоров и умножения на дивизор соответственно.

ЛЕКЦИИ 2, 3 и 4

На этих лекциях мы изучим кольцо квантовых когомологий грассманианов.

Для описания этого кольца нам понадобится следующая замечательная теорема.

Теорема 1 (Siebert, Tian). *Пусть кольцо когомологий многообразия X имеет вид*

$$H^*(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[Z_1,\dots,Z_k]/\langle R_1,\dots,R_l\rangle,$$

где $Z_1,\dots,Z_k$ — образующие, а $R_1,\dots,R_l$ — соотношения. Тогда кольцо квантовых когомологий X равно

$$H^*(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[Z_1,\dots,Z_k,q]/\langle R_1^*,\dots,R_l^*\rangle,$$

где $R_1^*,\dots,R_l^*$ — те же самые соотношения, но вычисленные с помощью квантового умножения.

В качестве примера непосредственно найдем кольцо квантовых когомологий проективного пространства.

Пример 2. Кольцо когомологий $\mathbb{P}^n$ порождено классами H^i, где $H = c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ — класс, двойственный гиперплоскости. Ясно, что единственный ненулевой инвариант Громова–Виттена вида $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,,H\rangle_\beta$ — это $\langle H^n,H^n,H\rangle_l = 1$, где $l = H^{n-1}$ — класс прямой. Действительно, по аксиоме дивизора такой инвариант пропорционален двухточечному. И для того, чтобы кривых, пересекающих два цикла, было конечное число, необходимо, чтобы эти циклы были двумя точками, а кривая — прямой; тогда соответствующий инвариант равен 1.

Кольцо когомологий $\mathbb{P}^n$ равно $\mathbb{Z}[H]/H^{n+1}$. Как мы убедились, $H^i\circ H = H^{i+1}$, если $i<n$. Значит, $H^{\circ(n-1)} = H^{n-1}$. Далее, $H^n\circ H = 0 + 1\cdot q$. Отсюда

$$QH(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H,q]/\langle H^{\circ(n+1)} - q\rangle.$$

Для начала напомним, как описывается кольцо когомологий грассманиана.

Пусть $E = \mathbb{C}^n$, грассманиан $G = G(l,E)$ — многообразие l-мерных подпространств в E и $k = n-l$. Зафиксируем полный флаг $F_\bullet = \{\mathrm{pt} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n = E\}$. Рассмотрим *разбиение* $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_l \geqslant 0)$, $\lambda_1 \leqslant k$.

Определение 3. *Циклом (клеткой) Шуберта на G относительно флага $F_\bullet$* называется многообразие

$$\Omega_\lambda(F_\bullet) = \{V\in G \,|\, \dim(V\cap F_{k+i-\lambda_i}) \geqslant i \ \forall\ 1\leqslant i\leqslant l\}.$$

Комплексной коразмерностью цикла Шуберта является *вес его разбиения* $|\lambda| = \sum\lambda_i$. *Циклом (клеткой) Шуберта* Ω_λ называется когомологический класс цикла $\Omega_\lambda(F_\bullet)$ относительно произвольного флага $F_\bullet$.

Замечание 4. Легко видеть, что этот класс не зависит от выбора флага (так как любой флаг можно перевести в любой другой действием $GL_n(E)$), так что определение корректно.

Циклы Шуберта образуют клеточное разбиение грассманиана; более того, они образуют свободный базис (как линейного пространства) его группы когомологий.

Пусть $\hat{\lambda} = (k - \lambda_l, \ldots, k - \lambda_1)$. Цикл $\Omega_{\hat{\lambda}}$ называется циклом, *двойственным* к Ω_λ. Это название обусловлено тем, что $\Omega_\lambda \cdot \Omega_\mu = \delta^{\lambda}_{\hat{\mu}} \cdot [\mathrm{pt}]$.

Циклы Шуберта принято нумеровать *диаграммами Юнга* размером $l \times k$, соответствующими их разбиениям.

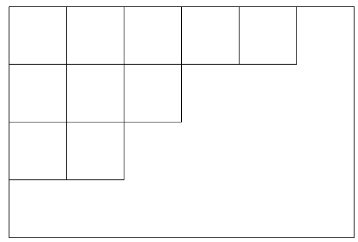

FIGURE 1. Диаграмма Юнга для разбиения (5,3,2,0) на G(4,10)

В такой интерпретации двойственный цикл имеет в качестве диаграммы *дополнение* к диаграмме исходного цикла.

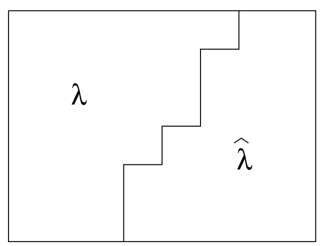

FIGURE 2. Диаграмма Юнга для разбиения $\hat{\lambda}$, двойственного к разбиению λ

Произведение циклов Шуберта в общем виде задается как

$$\Omega_\gamma \cdot \Omega\mu = \sum \langle \lambda, \mu, \hat{\nu} \rangle_0 \Omega_\nu.$$

Коэффициенты $\langle \lambda, \mu, \hat{\nu} \rangle_0$ — это количество точек пересечения Ω_λ, Ω_μ и $\Omega_{\hat{\nu}}$ (это непосредственно проверяется домножением на $\Omega_{\hat{\nu}}$). То есть, по аксиоме отображения в точку, это просто инварианты Громова–Виттена для класса точки для соответствующих многообразий.

Можно проверить, что кольцо когомологий грассманиана можно задать следующим образом.

Пусть S — тавтологическое расслоение, а Q — тавтологическое факторрасслоение. Несложно убедиться, что

$$\sigma_i := \Omega_{(i)} = c_i(Q).$$

Перейдя к двойственному грассманиану, получим

$$c_i := \Omega_{(1)^i} = c_i(S^*).$$

Упражнение 5. *Проверьте это.*

Классы σ_i называются *специальными классами Шуберта.* Для умножения на них используется *формула Пьери*

$$\Omega_\lambda \cdot \sigma_p = \sum \Omega_\mu,$$

где $|\mu| = |\lambda| + p$ и $k \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \ldots \geqslant \mu_l \geqslant \lambda_l$. В терминах диаграмм Юнга эта формула интерпретируется следующим образом: чтобы умножить клетку Шуберта на специальный класс σ_p, надо в ее диаграмму добавить p клеток так, чтобы никакие две из них не попали в один столбец.

Для умножения же произвольных классов пользуются их разложением по специальным классам с помощью следующей *формулы Джамбелли.* Положим (формально) $\sigma_i := 0$ для $i < 0$ или $i > k$. Тогда

$$\Omega_\lambda = \det(\sigma_{\lambda_i + j - i})_{1 \leqslant i,j \leqslant l}.$$

Так как ранг S^* равен l, то при $l < i \leqslant n$ имеем

$$c_i = \det(1 + i - j)_{1 \leqslant i,j \leqslant l} = 0. \tag{$\bigstar$}$$

Задача 6. *Докажите, что это единственные соотношения в кольце когомологий грассманиана.*

Таким образом, имеем

$$H^*(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_k]/\langle c_{l+1}, \ldots, c_n \rangle. \tag{$\bullet$}$$

Для того, чтобы найти, как соотношения ($\bigstar$) записываются относительно квантового умножения, мы докажем квантовый аналог формулы Пьери.

Для начала зафиксируем обозначения. Так как $H_2(G, \mathbb{Z})$ порождено классом $\Omega_{(k)^{l-1},k-1}$, то класс кривой β на G определяется ее *степенью* $\deg \beta = \beta \cdot \Omega_1$ в плюккеровом вложении (Ω_1 — класс гиперплоскости в нем). Поэтому мы будем писать

$$\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle_{\deg \beta} := \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle_\beta.$$

Назовем *степенью отображения* $f : \mathbb{P}^1 \to G$ степень его образа (другими словами, $\deg f = \deg f^* \Omega_1$). Мы будем отождествлять кривую на грассманиане с таким отображением (единственным с точностью до автоморфизмов кривой). Кроме того, обозначим $\sigma_\lambda := \Omega_\lambda \otimes 1$. Для удобства квантовое умножение будем обозначать просто "$\cdot$".

Теорема 7 (Квантовая формула Пьери, Бертрам). *Если λ содержится в прямоугольнике $l \times k$, а $p \leqslant k$, то*

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_p = \sum \sigma_\mu + q \sum \sigma_\nu,$$

где суммы берутся по всем μ, таким, что $|\mu| = |\lambda| + p$ и $k \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \ldots \geqslant \mu_l \geqslant \lambda_l$, и по всем ν, таким, что $|\nu| = |\lambda| + p - n$ и $\lambda_1 - 1 \geqslant \nu_1 \geqslant \lambda_2 - 1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_l - 1 \geqslant \nu_l \geqslant 0$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся две следующие леммы.

Определение 8. Пусть $Y \subset G(l, E)$ — подмногообразие грассманиана. *Ядром* Y называется пересечение линейных пространств в E, соответствующих точкам Y. *Линейной оболочкой* Y называется минимальное линейное пространство в E, содержащее все линейные пространства, соответствующие точкам Y.

Лемма 9. *Пусть C — рациональная кривая степени d на G. Тогда ядро C имеет размерность не меньше $l-d$, а линейная оболочка имеет размерность не больше $l+d$.*

Доказательство. Пусть C — образ отображения $f : \mathbb{P}^1 \to G$ степени d. Тогда обратный образ тавтологического расслоения равен $f^*S = \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i)$ для некоторых коэффициентов $a_i \geqslant 0$, таких, что $\sum a_i = d$, а f задается вложением $\bigoplus_{i=1}^l \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i) \subset E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Это значит, что точка p отображается в слой над p этого расслоения. В координатах это можно записать следующим образом. Если $(s:t)$ — координаты на $\mathbb{P}^1$, то базисом $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i))$ являются функции $\{s^j t^{a_i-j}\}_{0\leqslant j\leqslant a_i}$, так что отображения $O_{\mathbb{P}^1}(-a_i) \to E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ в этом базисе задаются как

$$\sum_{j=0}^{a_j} \alpha_j s^{-j} t^{j-a_i} \mapsto \sum_{j=0}^{a_j} v_j^{(i)} \otimes \alpha_j$$

для некоторых векторов $v_j^{(i)}$ (которые зависят от выбора изоморфизма f^*S и $\bigoplus_{i=1}^l \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i)$). Линейная оболочка C — это линейная оболочка множества $\{v_j^{(i)}\}$ размерности не больше $\sum(a_i+1) = l+d$. С другой стороны, по крайней мере $l-d$ из чисел a_i равны нулю, так что ядро C содержит линейное пространство, порожденное векторами $v_0^{(i)}$ и имеет размерность не меньше $l-d$.

$\square$

Замечание 10. Вообще, рациональные кривые степени d, участвующие в определении инвариантов Громова–Виттена, имеют ядро размерности *ровно* $l-d$ и линейную оболочку размерности *ровно* $l+d$.

Пусть λ — разбиение, а d — неотрицательное число. Тогда $\check{\lambda}$ будет обозначать разбиение, полученное удалением d левых колонок диаграммы Юнга для λ. Другими словами, $\check{\lambda}_i = \max(\lambda_i - d, 0)$.

Лемма 11. *Пусть $C \subset G$ — рациональная кривая степени $d \leqslant k$. Пусть $W \subset E$ — линейное пространство размерности $l+d$, содержащее линейную оболочку C. Тогда если λ — такое разбиение, что $C \cap \Omega_\lambda(F_\bullet) \neq \emptyset$, то W лежит в клетке Шуберта $\Omega_{\check{\lambda}}(F_\bullet)$ в $G(l+d, E)$.*

Доказательство. Пусть $V \in C \cap \Omega_\lambda(F_\bullet)$. Тогда, так как $V \subset W$, то из условий в определении клеток Шуберта для V следует, что $\dim(W \cap F_{k+i-\lambda_i}) \geqslant i$ для всех i. Это и есть определение того, что W лежит в $\Omega_{\check{\lambda}}(F_\bullet)$. $\square$

С помощью этих двух лемм мы докажем квантовую формулу Пьери.

Доказательство квантовой формулы Пьери. Первое слагаемое в правой части формулы — это правая часть обычной формулы Пьери. Для удобства мы переформулируем ее следующим образом. Пусть α и β — такие разбиения, что $|\alpha|+|\beta|+p = lk$. Тогда

$$\langle \Omega_\alpha, \Omega_\beta, \Omega_p \rangle_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_i+\beta_j \geqslant k \text{ для } i+j=l \text{ и } \alpha_i+\beta_j \leqslant k \text{ для } i+j=l+1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что кольцо квантовых когомологий грассманиана градуировано, причем степень q равна n. Это, в частности, значит, что для того, чтобы инвариант Громова–Виттена, отвечающий кривым степени d, не был равен нулю, необходимо, чтобы $|\alpha|+|\beta|+p=lk+dn$. Пусть C — кривая степени $d\geqslant 1$ на G, пересекающая $\Omega_\alpha(F_\bullet)$, $\Omega_\beta(G_\bullet)$ и $\Omega_p(H_\bullet)$ ($F_\bullet$, $G_\bullet$ и $H_\bullet$ — общие флаги). По лемме 9 существует подпространство $W\subset E$ размерности $l+d$, содержащее линейную оболочку C. По лемме 11 $W\subset\Omega_{\check\alpha}\cap\Omega_{\check\beta}\cap\Omega_{\check p}$, где $\check\alpha$ и $\check\beta$ получены удалением левых d колонок, а $\check p=\max(p-d,0)$. Так как флаги выбраны общими, то $|\check\alpha|+|\check\beta|+\check p\leqslant(l+d)(k-d)$. Кроме того,

$$|\check\alpha|+|\check\beta|+\check p\geqslant|\alpha|+|\beta|-2ld+p-d=(l+d)(k-d)+d^2-d.$$

Поэтому $d=1$ и $\alpha_l\geqslant 1$, $\beta_l\geqslant 1$. Таким образом, квантовая формула Пьери эквивалентна тому, что если $|\alpha|+|\beta|+p$, то

$$\langle\Omega_\alpha,\Omega_\beta,\Omega_p\rangle_1=\begin{cases}1 & \text{если } \alpha_i+\beta_j\geqslant k+1 \text{ для } i+j=l+1\\ & \qquad\text{и } \alpha_i+\beta_j\leqslant k \text{ для } i+j=l+2,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Другими словами, нам необходимо показать, что $\langle\Omega_\alpha,\Omega_\beta,\Omega_p\rangle_1=\langle\Omega_{\check\alpha},\Omega_{\check\beta},\Omega_{\check p}\rangle_0$, где в правой части стоит коэффициент классической формулы Пьери в $G(l+1,E)$.

Если $\langle\Omega_{\check\alpha},\Omega_{\check\beta},\Omega_{\check p}\rangle_0=0$, то описанного выше W не существует, а, значит, не существует и кривой C, так что $\langle\Omega_\alpha,\Omega_\beta,\Omega_p\rangle_1=0$. С другой стороны, если $\langle\Omega_{\check\alpha},\Omega_{\check\beta},\Omega_{\check p}\rangle_0=1$, то существует единственное подпространство $W\subset X$ размерности $l+1$, содержащееся в $\Omega_{\check\alpha}\cap\Omega_{\check\beta}\cap\Omega_{\check p}$. Так как флаги общие, то W лежит во внутренности каждой клетки Шуберта. Другими словами, в их определении знаки $\geqslant$ можно заменить на $=$; в частности, это означает, что пространства $V_1=W\cap F_{n-\alpha_l}$ и $V_2=W\cap G_{n-\beta_l}$ имеют размерность l. Заметим, что $V_1\in\Omega_\alpha(F_\bullet)$ и $V_2\in\Omega_\beta(G_\bullet)$. Так как $\Omega_\alpha(F_\bullet)$ и $\Omega_\beta(G_\bullet)$ не пересекаются (по соображениям размерности), то $V_1\neq V_2$, так что $S=V_1\cap V_2$ имеет размерность $l-1$. Значит, единственная прямая, пересекающая клетки Шуберта для α, β и p — это прямая $\mathbb{P}(W/C)$, состоящая из l-мерных пространств между S и W (которая, очевидно, пересекает Ω_p). $\square$

Следствие 12. *Если $|\lambda|+p<n$, то $\sigma_\lambda\cdot\sigma_p=\Omega_\lambda\cdot\Omega_p$, то есть квантовое произведение в этом случае совпадает с обычным.*

И вот, наконец, все готово для описания кольца квантовых когомологий грассманиана.

Теорема 13. *Кольцо квантовых когомологий грассманиана $G=G(l,E)$, $E=\mathbb{C}^n$ представляется в виде*

$$QH^*(G)=\mathbb{Z}[\sigma_1,\ldots,\sigma_k,q]/\langle c_{l+1},\ldots,c_{n-1},c_n+(-1)^kq\rangle,$$

где $k=n-l$ и $c_\alpha=\det(\sigma_{1+j-i})_{1\leqslant i,j\leqslant\alpha}$.

Доказательство. Воспользуемся представлением ($\bullet$). По теореме Зиберта–Тяна нам необходимо вычислить c_i с помощью квантового умножения. Для этого заметим, что, по следствию 12, в вычислении определителей c_α квантовое умножение будет совпадать с обычным для $\alpha<n$. Далее, для того, чтобы вычислить c_n, заметим, что $Q\otimes S=1$ (напомним, что S — тавтологическое расслоение, а Q — тавтологическое факторрасслоение), так что $c_n(Q\otimes S)=0$. В терминах клеток Шуберта это означает, что

$$c_n-\sigma_1c_{n-1}+\ldots+(-1)^k\sigma_kc_l=0.$$

Поэтому $c_n=(-1)^k\sigma_kc_l=(-1)^k\sigma_k\sigma_{(1)^l}$. По квантовой формуле Пьери получаем $\sigma_k\sigma_{(1)^l}=q$. $\square$

Упражнение 14. *Докажите* квантовую формулу Джамбелли*: если разбиение* λ *содержится в прямоугольнике* $l \times k$, *то* $\sigma_\lambda = \det(\sigma_{\lambda_i+j-i})_{1\leqslant i,j\leqslant l}$ *(ср. с классической формулой Джамбелли).*

ЛЕКЦИИ 5 и 6

Цель этих лекций — дать слушателю представление о зеркальной симметрии. Для начала, однако, дадим новое определение инвариантов Громова–Виттена.

Определение 1. Пусть X — проективное алгебраическое многообразие. Пусть $M_n(X,\beta)$ — пространство отображений $f:\mathbb{P}^1_n \to X$, такое, что $f_*[\mathbb{P}^1_n]=\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})$ ($\mathbb{P}^1_n$ здесь означает проективную прямую с n отмеченными точками, а отображения берутся по модулю группы автоморфизмов). Построим компактификацию этого пространства следующим образом. Рассмотрим наборы $(f,C,\{p_i\})$, где C — кривая арифметического рода ноль (связная, но, возможно, приводимая) самое большее с простыми двойными точками в качестве особенностей, $\{p_i\}$ — различные гладкие точки на C, а $f:C\to X$ отображение, такое, что $f[C]=\beta$, а f имеет лишь конечную группу автоморфизмов (или, другими словами, на каждой стягиваемой компоненте C лежит как минимум три отмеченные или особые точки). Такие наборы называются *стабильными отображениями.* Мы будем отождествлять отображения $(f,C,\{p_i\})$ и $(f',C',\{p_i'\})$, если существует отображение $h:C\to C'$, такое, что $h(p_i)=p_i'$ и $f=f'\circ h$. *Пространством модулей отображений* рациональных кривых класса $\beta\in H_2(X)$ с n отмеченными точками $\bar{M}_n(X,\beta)$ называется множество таких наборов. Общей точкой этого стека является отображение $\mathbb{P}^1\to X$, на границе эти отображения вырождаются в отображения приводимых кривых.

Мы дадим определение инвариантов Громова–Виттена в терминах теории пересечений на стеках $\bar{M}_n(X,\beta)$, которую можно ввести благодаря тому, что локально они являются фактором гладкого многообразия по конечной группе. Однако эти стеки не всегда имеют ожидаемую размерность, и чтобы корректно оперировать с произведениями когомологических циклов на них, необходимо ввести *виртуальный фундаментальный класс* $[\bar{M}_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}$ виртуальной размерности $\operatorname{vdim}\bar{M}_n(X,\beta)=\dim X-\deg_{K_X}\beta+n-3$ (его конструкцию можно найти в книге Манина “Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей”, VI–1.1).

Определение 2. Рассмотрим отображения $ev_i:\bar{M}_n(X,\beta)\to X$, $ev_i(C;p_1,\ldots,p_n,f)=f(p_i)$ и классы когомологий $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\in H^*(X)$. Пусть $\beta\in H_2(X)$. Тогда *примарный инвариант Громова–Виттена*, соответствующий этому набору, равен

$$\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_n\rangle_\beta := ev_1^*(\gamma_1)\cdot\ldots\cdot ev_n^*(\gamma_n)\cdot[\bar{M}_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}},$$

если $\sum\operatorname{codim}\gamma_i=\operatorname{vdim}\bar{M}_n(X,\beta)$, и 0 иначе. (Мы будем его также обозначать как $I^X_\beta(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$.)

Это определение согласуется с “наивным” определением, данным нами в первой лекции. Используя его, можно показать, что трехточечные инварианты корректно задают кольцо квантовых когомологий.

Пространства $\bar{M}_n(X,\beta)$ построены для многих многообразий (по сути, его построение и есть определение инвариантов Громова–Виттена). Такое построение есть важная часть теории зеркальной симметрии. Новое определение более правильно, хотя оно кажется и менее общим, чем первое, так как только для определенных таким образом инвариантов можно построить кольцо квантовых когомологий. В последнее время деятельность многих ученых направлена на то, чтобы обобщить его на случай особых многообразий и стеков.

Определение 3. Рассмотрим многообразие X. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^l$ — базис в $H^2(X,\mathbb{Z})$, а $q=(q_1,\ldots,q_l)$ — формальная переменная в кольце квантовых когомологий. Положим (формально) $q_i=e^{t_i}$ и рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial t_i}S = p_i\circ S, \quad i=1,\ldots,l$$

на некоторую функцию $S(t_1,\ldots,t_l)$ со значениями в $H^*(X,\mathbb{C})$. Эти уравнения называется *дифференциальными уравнениями квантовых когомологий* или *QH^*-уравнениями.* Обычно вместо системы уравнений рассматривают одно, эквивалентное этой системе (как плоской связности в тривиальном расслоении).

Определение 4. Рассмотрим расслоение $Y\to Z$, дифференциальную форму ω на каждом слое, гладко зависящую от координат на базе, а также цикл γ на слое, непрерывно зависящий от базы. Рассмотрим функцию (возможно, многозначную)

$$\Phi=\int_\gamma \omega$$

в окрестности некоторой точки на базе. Она зависит от локальных координат $t_1,\ldots,t_l$ на базе. *Уравнением Пикара–Фукса* для этого расслоения называется дифференциальное уравнение (симметричное для мондромии), которому удовлетворяет такая функция. Обычно это уравнение пишут относительно дифференциального оператора $D=t\frac{d}{dt}$. Также говорят, что уравнение Пикара–Фукса сопоставляется не семейству, а одному соответствующему универсальному многообразию.

Гипотеза Зеркальной Симметрии 5 (частный вариант). *Дифференциальное уравнение квантовых когомологий для многообразия Калаби–Яу соответствует (в некотором смысле) уравнению Пикара–Фукса другого многообразия Калаби–Яу, и наоборот.*

Эта гипотеза позволяет интерпретировать симплектические свойства многообразия в терминах алгебро–геометрических свойств зеркального многообразия, и наоборот.

Теория зеркальной симметрии развивалась сначала для многообразий Калаби–Яу. Однако потом ее стали обобщать на больший класс многообразий, в частности, на многообразия Фано. Поэтому гипотезу Зеркальной Симметрии можно записать в более общем виде.

Гипотеза Зеркальной Симметрии 6 (обобщенный вариант). *Дифференциальное уравнение квантовых когомологий для некоторого класса многообразий соответствуют (в некотором смысле) уравнению Пикара–Фукса другого класса многообразий, и наоборот.*

Пример 7. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^n$. Для него $H^2(\mathbb{P}^n)=\mathbb{Z}H$. Разложив функцию S по степеням H как $S=S_0(t)H^n+S_1(t)H^{n-1}+\ldots+S_n(t)1$ и учитывая, что $H\circ H^i=H^{i+1}$, если $i<n$, и $H\circ H^n=q$, легко убедиться, что дифференциальное уравнение квантовых когомологий $\mathbb{P}^n$ сводится к уравнению

$$(\frac{d}{dt})^{n+1}S_0=qS_0,$$

или $L_{HQ}\Phi = 0$, где $L_{HQ} = (d/dt)^n - e^t$. Его решением будет ряд

$$I^{\mathbb{P}^n} = \sum \frac{q^d}{(d!)^{n+1}},$$

определяющий, как мы позже увидим, кольцо квантовых когомологий $\mathbb{P}^n$. Этому уравнению соответствует уравнение $L_{PF}\Phi = 0$, где $L_{PF} = D^n - z$, а $D = z\frac{d}{dz}$.

Пример 8. Вообще, гиперповерхности $X_l \subset \mathbb{P}^n$ степени $l < n$ соответствует квантовое дифференциальное уравнение вида $L_{QH}\Phi = 0$, где

$$L_{QH} = (\frac{d}{dt})^n - e^t(\frac{d}{dt} + 1)\dots(\frac{d}{dt} + l - 1).$$

Его решением будет ряд

$$I^{X_l} = \sum \frac{(ld!)}{(d!)^{n+1}} q^d,$$

а соответствующее уравнение Пикара–Фукса будет иметь вид $L_{PF}\Phi = 0$, где

$$L_{PF} = (D)^n - lz(lD + 1)\dots(lD + l - 1),$$

а $D = z\frac{d}{dz}$.

Эти соотношения можно получить воспользовавшись квантовой теоремой Лефшеца.

Пример 9. Для гиперповерхностей индекса один уравнение Пикара–Фукса будет иметь такой же вид, как и для большего индекса, а квантовое дифференциальное уравнение будет выглядеть уже по-другому. Однако мы рассмотрим другой пример — трехмерную квинтику (то есть многообразие Калаби–Яу).

А именно, уравнение Пикара–Фукса, согласно рассмотренным уже примерам, будет иметь вид

$$(z\frac{d}{dz})^4 I(z) = 5z(5z\frac{d}{dz} + 1)\dots(5z\frac{d}{dz} + 4)I(z).$$

Это уравнение будет уравнением Пикара–Фукса в окрестности точки $z = 0$ для фундаментального цикла семейства многообразий

$$Y_z = \{(x_0, \dots, x_4) \in \mathbb{C}^5 \,|\, \prod_{i=0}^{4} x_i = z \text{и} \sum_{i=0}^{4} x_i = 1\}$$

и дифференциальной формы

$$\frac{\bigwedge_{i=0}^4 dx_i}{d(\prod_{i=0}^4 x_i) \wedge d(\sum_{i=0}^4 x_i)}.$$

Компактифицируем семейство Y_z и разрешим его особенности. Мы получим семейство гладких трехмерных многообразий Калаби–Яу, на которое можно распространить нашу 3-форму. Это семейство называется зеркальным для гладкой квинтики в $\mathbb{P}^4$.

Решением уравнения Пикара–Фукса (инвариантным относительно монодромии) будет ряд

$$I_0(z) = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(5d)!}{(d!)^5} z^d.$$

Рассмотрим ряд I_1, являющийся решением уравнения Пикара–Фукса вида $I_0 \log z + \psi(z)$, где $\psi(0) = 0$. Положим $q = \exp(\frac{I_1}{I_0})$. Тогда гипотеза Зеркальной Симметрии утверждает, что для квантового дифференциального уравнения

$$F(q) = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d d^3 \frac{q^d}{1 - q^d}$$

(где n_d — число рациональных кривых степени d, лежащих на квинтике) выполнено равенство

$$F(q)(\frac{dq}{q})^3 = \frac{5}{(1 - 5^5 z) I_0^2(z)} (\frac{dz}{z})^3.$$

Таким образом можно по индукции найти числа n_d.

Последовательность примеров наглядно демонстрирует путь нарастания сложности зеркальной симметрии при уменьшении индекса гиперповерхности. Если в случае индекса два и больше дифференциальные уравнения зеркальной симметрии совпадают с уравнениями Пикара–Фукса для зеркального уравнения (с точностью до переобозначения переменной), то в случае индекса один приходится вводить дополнительный множитель, а для многообразий Калаби–Яу соответствие имеет довольно сложный вид.

Зеркальная симметрия — бурно развивающаяся и очень популярная в последнее десятилетие область науки.

Основными проблемами в ней являются следующие:

- Научиться находить зеркальные расслоения для многообразий. Какими свойствами они должны обладать?
- Определить инварианты Громова–Виттена для как можно большего класса объектов: особых многообразий, орбиобразий, стеков, семейств многообразий.
- Обобщить квантовую теорему Лефшеца (интерпретирующую инварианты Громова–Виттена гиперповерхности в терминах инвариантов объемлющего пространства) на случай сечений когерентных пучков.
- Доказать гипотезу Зеркальной Симметрии для как можно большего класса многообразий.

Гипотеза Зеркальной Симметрии имеет много разных формулировок. Мы намеренно не привели наиболее распространенную (с использованием так называемой категории Фукаи) так как она до сих пор не имеет четкой формулировки и более или менее стройной системы обоснованных утверждений.

Приведем некоторые из них.

Топологический вариант: Для n-мерного многообразия Калаби–Яу X существует такое n-мерное многообразие Калаби–Яу Y, что

$$h^{i,j}(X) = h^{n-i,j}(Y).$$

Вариант квантового гиперплоского сечения, теорема: Пусть $Y \subset X$ — полное пересечение. Тогда квантовое дифференциальное уравнение для Y получается из уравнения для X путем введения простого поправочного члена.