Гладкие многообразия. (2020)

1 Лекция (01.09.20)

Определение 1.1. Пусть M – множество, τ – семейство подмножеств, удовлетворяющее условиям: **(1)** $\varnothing,\ M \in \tau$ **(2)** $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \tau,\ U_i \in \tau\ \forall i$ **(3)** $\bigcap_{i=1}^{\alpha} U_i \in \tau,\ U_i \in \tau\ \forall i$ тогда τ называется *топологией* на M: (M, τ), а U_i называют открытыми множествами

Определение 1.2. Топология τ на M называется *хаусдорфовой*, если $\forall x, y \in M\ \exists u, v \in \tau,\ x \in U,\ y \in V \mid U \cap V = \varnothing$

Определение 1.3. *Базой* топологии на τ называется семейство подмножеств $\{U_\alpha\} \subset \tau$ такое, что $\forall U \in \tau$ можно представить в виде $U = \bigcup U_\alpha$

Определение 1.4. Если в базе β топологии τ не более чем счетное множество элементов, то β называется *счетной базой*

Определение 1.5. *Топологическим многообразием* M называется хаусдорфово топологическое пространство (M, τ) со счетной базой, такое что $\forall p \in M\ \exists U \in \tau\ p \in U$ и гомеоморфизм на образ $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ с некоторым открытым подмножеством $\varphi(U)$ пространства $\mathbb{R}^n$

Определение 1.6. *Картой* многообразия (M, τ) называется гомеоморфизм $\varphi : U \to \mathbb{R}^n,\ U \subset M$

Определение 1.7. *Атласом* назовем набор карт, покрывающих все многообразие

Определение 1.8. Две карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha),\ (U_\beta, \varphi_\beta)$ называется *C^k-согласованной*, если отображение $\varphi_{\alpha\beta}$ – C^k-диффеоморфизм. ($\varphi_{\alpha\beta}$ имеет непрерывные частные производные до порядка k, взаимно однозначно и якобиан $J \neq 0$) $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \mid \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

Определение 1.9. Атлас называется *C^k-гладким*, если он состоит из попарно C^k-согласованных карт

Определение 1.10. *C^k-гладкое многообразие* называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, на котором задан хотя бы 1 C^k-гладкий атлас

Определение 1.11. C^k-атласы A, A' называются *C^k-эквивалентными*, если $A \cup A'$ тоже является C^k-атласом

Определение 1.12. Класс эквивалентности C^k-атласов называется *гладкой C^k-структурой*

Определение 1.13. *Картой многообразия с краем* называется гомеоморфизм $\varphi : U \to H^n \quad H^n = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ ($J \neq 0$ во всех точках, тогда C^k-согласовано)

2 Лекция (10.09.20)

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис в $\mathbb{R}^n$, скалярное произведение $(v, w) = \sum\limits_i v_i w_i$ и $||v|| = \sqrt{(v^1)^2 + \ldots + (v^n)^2}$

Определение 2.1. *гладкой/непрерывной параметризованной кривой* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ называется гладкое отображение

Определение 2.2. *точкой параметризованной кривой* называется пара $(\gamma(t), t)$

Определение 2.3. Гладкая кривая $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ называется *регулярной*, если $\forall t \int I \ \forall ||\gamma'(t)|| \neq 0$, а в граничных точках промежутка I существуют отличные от нуля пределы производной.

$$t \to (\cos t, \sin t), \ t \in [0, 2\pi]$$

$$t \to (\cos 2t, \sin 2t), \ t \in [0, \pi]$$

Образы одинаковые, но кривые разные

Определение 2.4. Параметризованные кривые $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ и $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ называются *эквивалентными*. $\exists \varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$, так что $\exists \varphi^{-1} \mid \varphi, \varphi^{-1}$ – гладкие и $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t)), \ t \in [a_1, b_1]$

Определение 2.5. Класс эквивалентности кривых называется *непараметризованной кривой*, представители этого класса называются *параметризацией кривой*

Определение 2.6. *Длиной* регулярной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ называется $l(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)|| dt$ где $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}(t) = (\dot{\gamma}^1(t), \dots, \dot{\gamma}^n(t))$

Лемма 2.1. Длина непараметризованной кривой не зависит от выбора параметризации

Доказательство.

$$\gamma_1 : [a_1, b_1] \to R^n \quad \gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$$

$$\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2] \quad t \in [a_1, b_2] \quad \tau = \varphi(t) \in [a_2, b_2]$$

$$l(\gamma_1) = \int_{a_1}^{b_1} ||\dot{\gamma}_1(t)||\, dt = \int_{a_1}^{b_1} \left|\left| \frac{d\gamma_2(\varphi(t))}{dt} \right|\right| dt = \int_{a_1}^{b_1} \left|\left| \frac{d\gamma_2(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right|\right| dt = (\star)$$

Предположим, что $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, тогда

$$(\star) = \int_{a_1}^{b_1} \left|\left| \frac{d\gamma_2(t)}{d\tau} \right|\right| \frac{d\varphi}{dt} dt = \int_{a_2}^{b_2} \left|\left| \frac{d\gamma_2}{d\tau} \right|\right| d\tau = l(\gamma_2)$$

□

Определение 2.7. Параметризация $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется *натуральной* (s-натуральная параметризация), если длина любого участка кривой $\gamma_{a,x} : s \mapsto \gamma(s),\ s \in [a,x]$ равна $l(\gamma_{a,x}) = x - a$

Лемма 2.2. На регулярной кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ существует натуральная параметризация

Доказательство.

$$\gamma : t \to \gamma(t) \qquad t \in [a,b] \qquad \varphi : [a,b] \to [0, l(\gamma)]$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left|\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|\right| \qquad \varphi(t) = \int_0^\tau \left|\left|\frac{d\gamma}{dt}dt\right|\right| \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = ||\dot{\gamma}(\tau)|| \qquad s = \varphi(t)$$

$$l(\gamma_{a,x}) = \int_a^x ||\dot{\gamma}_{a,x}(t)||dt \qquad \frac{d\varphi(t)}{dt} = ||\dot{\gamma}(t)|| \qquad dt = \frac{d\varphi(t)}{||\gamma(t)||} \qquad \left|\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|\right| = 1$$

$$\left|\left|\frac{\gamma(\varphi^{-1}(s))}{ds}\right|\right| = \left|\left|\frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{d\varphi^{-1}(s)}{ds}\right|\right| = \left|\left|\frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\varphi}{ds}}\right|\right| = 1 = x - a$$

□

Кривые в $\mathbb{R}^2$ $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, где s – натуральный параметр, $v = \frac{d\gamma}{ds},\ ||v|| = 1$ $\frac{d(v,v)}{ds} = (v'(s), v(s)) + (v(s), v'(s)) = 2(v'(s), v(s)) = 0$, откуда $v(s) \perp v'(s)$

Определение 2.8. *Кривизной* регулярной кривой называется $k := ||v'(s)||,\ R = \frac{1}{k}$ – радиус кривизны кривой

Формулы Френе в $\mathbb{R}^2$.

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, s-натуральная параметризация в точке $(\gamma(s), s)$, выберем базис v, n такой, что $v = \gamma'(s), n \perp v,\ ||n|| = 1$, базис v, n положительно ориентирован

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$v \perp v'(s),\ n \perp n'(s)$$

$$\frac{dv}{ds} = \alpha(s)n \qquad \frac{dn}{ds} = \beta(s)v$$

Покажем, чему равны $\alpha(s)$ и $\beta(s)$

$$\frac{d(v,n)}{ds} = (v', n) + (v, n') = 0 \qquad \alpha(s) = -\beta(s) = k(s)$$

□

3 Лекция (14.09.20)

Теорема о неявной функции $F : U \times V \to \mathbb{R} \qquad U, V \subset \mathbb{R}$ точка $(x_0, y_0) \in U \times V,\ F(x_0, y_0) = 0$ Если $F : U \times V \to \mathbb{R}$ – гладкое, $(x_0, y_0) \in U \times V$ и $\frac{dF}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$ Тогда существует такая окрестность W, точки (x_0, y_0), окрестность $U_0 \subset U$ и функция $f : U_0 \to \mathbb{R}$, такая что $(x, y) \in W,\ F(x, y) \ \Leftrightarrow x \in U_0,\ y = f(x)$ Иными словами множество нулей этого отображения представляется графиком функции

- $$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \frac{dF}{dy}(x_0, y_0) = 2y = 0$$

  В окружности $\forall (x_0, y_0) \quad y \neq 0$ и $y = f(x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, аналогично $x = \pm\sqrt{y^2 - 1}$

- к функции $F = xy$ применить теорему о неявной функции нельзя

Построим атлас для окружности

- Верхняя полуокружность $\varphi_{\text{в}} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$ и $\varphi_{\text{в}} : U_{\text{в}} \to \mathbb{R}$
- Правая полуокружность $\varphi_{\text{п}} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$ и $\varphi_{\text{п}} : U_{\text{п}} \to \mathbb{R}$
- Нижняя полуокружность $\varphi_{\text{н}} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y < 0\}$ и $\varphi_{\text{н}} : U_{\text{н}} \to \mathbb{R}$
- Левая полуокружность $\varphi_{\text{л}} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x < 0\}$ и $\varphi_{\text{л}} : U_{\text{л}} \to \mathbb{R}$

Заметим что $\varphi_{\text{вп}} = \varphi_{\text{п}} \circ \varphi_{\text{в}}^{-1} :\ x \to \sqrt{1 - x^2}$, отображение невырождено $\frac{d\varphi_{\text{вп}}}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$, аналогично для других карт

Лемма 3.1. Если у любой точки p множества $M \subset \mathbb{R}^2$ выполнено условие теоремы о неявной функции, то на этом множестве M в индуцированной топологии существует структура гладкого многообразия

Многомерный случай теоремы о неявной функции называется *тоерме о неявном отображении* Пусть $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$ – гладкое отображение $U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m,\ F(x_0, y_0) = 0,\ x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n),\ y_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^n)$ Если

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1}(x_0, y_0) & \ldots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n}(x_0, y_0) \vdots & & \vdots \frac{\partial F^m}{\partial y^1}(x_0, y_0) & \ldots & \frac{\partial F^m}{\partial y^n}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

То существует окрестность $W_0 \subset U \times W$, окрестность $U_0 \subset U$ и $f : U_0 \to \mathbb{R}^m$, такое что $F(x, y) = 0,\ (x, y) \in W \ \Leftrightarrow\ y^1 = f^1(x), \ldots, y^m = f^m(x)$

Определение 3.1. *Производная отображения, заданного неявно*:

$$f'(x) = -F'_y(x, f(x))^{-1} F'_x(x, f(x))$$

В многомерном случае $F'_x(\dots)$ – матрица Якоби

Определение 3.2. *Регулярной поверхностью* $M \subset \mathbb{R}^N$ называют такое множество M, к которому в окрестности каждой точки применима теорема о неявном отображении при подходящей перенумеровке координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \notin S^2$, следовательно S^2 регулярная поверхность

Лемма 3.2. Следующие определения регулярной поверхности эквивалентны

(1) $M \subset \mathbb{R}^N$, к которому в окрестности каждой точки применима теорема о неявном отображении при подходящей перенумеровке координат

(2) M локально в окрестности любой своей точки представляется графиком

$$y^1 = f^1(x), \dots, y^m = f^m(x),\ x = (x^1, \dots, x^m)$$

(3) M локально определяется как образ отображения $r : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ и векторы $\frac{\partial r}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x^m}$ линейно независимы

Доказательство.

- $(1 \to 2)$ по теореме о неявном отображении
- $(2 \to 1)$ $F(x, y) = f^i(x) - y^i$, применяем теорему о неявном отображении, так как $J \neq 0$
- $(2 \to 3)$ Если представляется графиком, то можно рассмотреть $x \mapsto (x, f(x))$
- $(3 \to 2)$ $r : U \to \mathbb{R}^{n+m}$, $\frac{\partial r}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x^n}$ – линейно независимы в (x_0)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial r^{n+m}}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial r^1}{\partial x^n} & \dots & \frac{\partial r^{n+m}}{\partial x^1} \end{pmatrix}$$

Строки линейно независимы, тогда выберем из $\frac{\partial r}{\partial x^i}$ линейно независимые столбцы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r^{i_1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial r^{i_1}}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial r^{i_n}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial r^{i_n}}{\partial x^1} \end{vmatrix}$$

По теореме об обратной функции отображение обратимо $x^1, \dots, x^n \mapsto r^1, \dots, r^{n+m}$ и $r^i = y^i$ $y^{i_1}, \dots, y^{i_n} \mapsto y^1, \dots, y^n$

□

Следствие *тоерема об обратной функции* $f : U \to \mathbb{R}^n, x_0 \in U$ и якобиан $\neq 0$, тогда существует окрестность $V : f(x_0) \in V$ и отображение $g : V \to \mathbb{R}^n$, такое что $g \circ f(y) = y,\ y \in V$

4 Лекция (15.09.20)

Определение 4.1. *Ориентация многообразия* в $\mathbb{R}^n$ определяется репером

$$\begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{vmatrix} > 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 & \vdots & v_1^n \end{pmatrix}$$

M – многообразие $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$
Определение 4.2. Карты *согласованы*, если

$$\det J(\varphi_{\alpha\beta}) > 0 \qquad x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

Определение 4.3. Атлас $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ называется *ориентирующим*, если все его карты согласованы.

Определение 4.4. Многообразие M называется *ориентируемым*, если на нем существует хотя бы один ориентирующий атлас

Определение 4.5. Ориентирующие атласы A и A' многообразия M называются *эквивалентными*, если $A \cup A'$ – ориентирующий атлас

Пример 2 карты $S^1 \backslash N$ и $S^1 \backslash S$

$$\triangle ANO \sim \triangle SDO \qquad \frac{AO}{SO} = \frac{NO}{DO} \qquad AO \cdot DO = r^2$$

$$\varphi_{NS} : x \to \varphi(x) \quad x \cdot \varphi(x) = r^2 = 1$$

Посмотрим будет ли атлас $(U_N, \varphi_N),\ (U_s, \varphi_s)$ ориентируемым

$$\varphi_{NS}(x) = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \varphi'_{NS}(x) = -\frac{1}{x^2} \quad J < 0$$

Следовательно Атлас не ориентирующий, но если заменить (U_N, φ_N) на $(U_N, -\varphi_N)$, тогда $J > 0$

$$\varphi_N : (x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2) \qquad -\varphi_N : (x_1, y_1) \mapsto (-x_2, y_2)$$

Замечание Для карты (U, φ) существует антиподальная карта $(U, \tilde{\varphi})$

$$\tilde{\varphi}(p) = (-\varphi^1(p), \varphi^2(p), \dots, \varphi^n(p)) \qquad \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (-x^1, \dots, x^n)$$

$$\det J(\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Лемма 4.1. У связанного ориентированного многообразия существует ровно 2 различных ориентации

Доказательство. M – связанное многообразие, $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\},\ \mathcal{A}' = \{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ – два ориентированного атласа Рассмотрим антиподальный атлас $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$ Покажем, что $A' \sim A$ или $A' \sim \tilde{A}$, $p \in U_\alpha \cap U'_\beta$. Пусть $\det J(\varphi'_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p)) > 0$ Так как атласы ориентирующие, то переход между картами таких атласов имеет положительный в точке p якобиан, следовательно для любой другой пары карт в точке $p \in M:\ J > 0$ Обозначим через M^+ множество точек $p \in M$ таких, что якобиан отображения перехода между картами атласов A и A' положителен

M^+ – открыто, замкнуто и $M^+ \neq \varnothing$ так как M связно, то существует только 2 открытых и замкнутых подмножества – $\varnothing$; M, откуда $M^+ = M$ и $\tilde{A} = A$, аналогично с $\det J < 0$ $\square$

Критерий ориентируемости многообразия

Определение 4.6. *Цепочкой* карт называется последовательность карт: $(U_1, \varphi_1), \dots$ такое что $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing \quad i = 1, \dots, k-1$

Определение 4.7. Назовем цепочкой карт (U_i, φ_i) *противоречивой*, если

$$\begin{cases} J(\varphi_{i,i+1}(x)) > 0 \quad \forall x \in \varphi_i(U_i \cap U_{i+1}),\ U_1 \cap U_k \neq \varnothing \\ \exists x \in \varphi_k(U_1 \cap U_k) \mid \det J(\varphi_k(x)) < 0 \end{cases}$$

Лемма 4.2. Многообразие M не ориентируемо $\Leftrightarrow$ на M существует противоречивая цепочка карт

Доказательство. Рассмотрим связную компоненту отдельно $(1 \to 2)$ Карта задаёт ориентирующий атлас, следовательно она согласована либо с $\mathcal{A}$, либо с $\mathcal{A}'$, затем проведем аналогичные рассуждения для следующей карты $(2 \to 1)$ На M существует атлас, состоящий из конечного или счетного числа карт

Многообразие – топологическое пространство со счетной базой, то есть вместо карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \quad U_\alpha = \bigcup_\beta U_\beta)$ рассмотреть набор карты $(V_\beta, \varphi_\alpha\Big|_{V_\beta})_{\beta\in B}$ Множества V_β могут участвовать в атласе много раз, тогда выберем их по одному разу Пусть $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ – атлас из конечного или счетного числа карт $(U_1, \varphi_1), (U_i, \varphi_i) \quad U_1 \cap U_i \neq \varnothing$

Если $|J(\varphi_{1i}(p))| > 0 \quad \forall p \in U_1 \cap U_i$, то добавим к (U_1, φ_1) карту $(U_i . \varphi_i)$

Если $|J(\varphi_{1i}(p))| < 0$, то добавим антиподальную к (U_i, φ_i)

Если $U_+ : |J| > 0,]$ $U_- : |J| < 0$, то рассмотрим цепочку карт (U_1, φ_1), (U_+, φ_1), $(U_i, \varphi$
она противоречива, следовательно такого не может быть

Таким образом продолжим соединять карты дальше Мы переберем все карты, так как на многообразии существует регулярная кривая, являющаяся образом отрезка при непрерывном отображении Эта кривая – компакт, а следовательно ее можно покрыть конечным числом карт $\square$

5 Лекция (28.09.20)

6 Лекция (29.09.20)

7 Лекция (12.10.20)

8 Лекция (13.10.20)

9 Лекция (29.10.20)

10 Лекция (06.11.20)

11 Лекция (08.11.20)

12 Лекция (12.11.20)

13 Лекция (13.11.20)

14 Лекция (26.11.20)

15 Лекция (27.11.20)

16 Лекция (04.12.20)