

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1. ВАРИАНТ 1. 12.11.2021

Во время работы пользоваться ничем нельзя: ни конспектами, ни записанными решениями домашних заданий, ни телефонами, ни друзьями. Ссылаться на результаты из лекций — можно. Ссылаться на домашние задачи — нельзя.

Оценка = $\min(\text{набранное}, 10)$.

1. (1+1+1) Пусть марковская цепь задана рисунком из письма.
 - (а) Выпишите матрицу переходных вероятностей и найдите $p^{(2)}$ — распределение вероятностей на втором шаге, при условии, что начальное распределение имеет вид $p^{(0)} = (1/2, 1/2, 0)$.
 - (б) Найдите стационарное состояние марковской цепи. Единственно ли оно?
 - (в) Перемешивает ли эта марковская цепь?
2. (1+1) Ежик любит кактусы. Каждый год с каждым кактусом ежика (независимо от других кактусов) может произойти следующее: с вероятностью $1/5$ он умирает; с вероятностью $3/5$ он не умирает и ежик его разделяет два кактуса; с вероятностью $1/5$ с кактусом не происходит ничего.
 - а) Вычислите вероятность того, что ежик никогда не останется без кактусов, если вначале у него было 2 кактуса.
 - б) Найдите среднее число кактусов в конце n -ого года.
3. (0.5+1+2) У вас есть 4 зонта. Часть из них — дома, а часть — на работе. Каждое утро вы идете из дома на работу. Если идет дождь, то вы берете с собой зонт. Аналогично, каждый вечер вы идете с работы домой, и если идет дождь, берете зонт. Если же дождя нет, то зонт вы никогда с собой не берете. Если идет дождь, а там, где вы находитесь, зонта нет, то вы идете без зонта и промокаете. Вероятность дождя что утром, что вечером равна $0 < p < 1$.
 - а) Нарисуйте граф соответствующей марковской цепи и выпишите матрицу переходных вероятностей (состояние марковской цепи = число зонтов в том месте, где вы сейчас находитесь, то есть множество состояний = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$).
 - б) Перемешивает ли эта марковская цепь?
 - в) На какой день (в среднем) вам стоит ожидать, что вы промокнете?
4. (1.5 + 1.5) Пусть последовательность случайных величин ξ_0, \dots, ξ_T образует однородную марковскую цепь (вообще говоря, неоднородную) с переходными вероятностями p_{ij} .
 - а) Докажите, что последовательность ξ_T, \dots, ξ_0 образует марковскую цепь и вычислите ее переходные вероятности. Всегда ли полученная марковская цепь является однородной?
 - б) Придумайте условие на начальное распределение $p^{(0)}$ случайной величины ξ_0 , такое чтобы "обращенная" марковская цепь ξ_T, \dots, ξ_0 была однородной.