Линейная алгебра и геометрия

1 курс

Экзамен

А.Л. Городенцев

# Содержание

# 1 Задачи для подготовки к экзамену

## 1.1

Найдите вектор скорости линии пересечения плоскостей $9x_1 - 5x_2 + x_3 = 1$ и $4x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 9$ и какую-нибудь точку на этой линии.
Найдем пересечения этих плоскостей:

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -8 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 17 & -17 \\ 4 & 2 & -8 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 17 & -17 \\ 0 & 38 & -76 & 77 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 17 & -17 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{77}{38} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{47}{38} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{77}{38} \end{array}\right)$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + \frac{47}{38} \\ x_2 = 2x_3 + \frac{77}{38} \end{cases}$$

Два частных решения: $\left(\frac{47}{38},\ \frac{77}{38},\ 0\right)$, $\left(\frac{85}{38},\ \frac{153}{38},\ 1\right)$. Прямая пересечения плоскостей: $\dfrac{x - \frac{47}{38}}{1} = \dfrac{y - \frac{77}{38}}{2} = \dfrac{z}{1}$.
Тогда также частное решение: $(0, -\frac{17}{38}, -\frac{47}{38})$, направляющий вектор: $(1, 2, 1) \sim (38, 76, 38)$.

**Ответ:** (38, 76, 38), $(0, -\frac{17}{38}, -\frac{47}{38})$

## 1.2

Напишите уравнение плоскости в $\mathbb{Q}^3$, проходящей через точку $(3, -9, 7)$ параллельно векторам $(5, 6, 0)$ и $(-3, 14, -10)$

Пусть $V_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix}, M = (3, -9, 7)$
Тогда

$$\begin{vmatrix} x_1 - 3 & 5 & -3 \\ x_2 + 9 & 6 & 14 \\ x_3 - 7 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим по первому столбцу:

$$(-1)^{1+1} \cdot (x_1 - 3) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 14 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot (x_2 + 9) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot (x_3 - 7) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}$$
$$= (x_1 - 3) \cdot (-60) - (x_2 + 9) \cdot (-50) + (x_3 - 7) \cdot 88$$
$$= -60x_1 + 180 + 50x_2 + 450 + 88x_3 - 616 = -60x_1 + 50x_2 + 88x_3 - 14$$

Так как вычисленный определитель равен нулю, $-60x_1 + 50x_2 + 88x_3 - 14 = 0$, то есть $-60x_1 + 50x_2 + 88x_3 = 14$
**Ответ:** $-60x_1 + 50x_2 + 88x_3 = 14$

## 1.3

Напишите уравнение плоскости в $\mathbb{Q}^3$, проходящей через точки $(5,-9,-2)$, $(4,-3,6)$, $(4,2,4)$.

Рассмотрим векторы

$$V_1 = \begin{pmatrix} x-5 \\ x+9 \\ x+2 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 4-5 \\ -3-(-9) \\ 6-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 2-(-9) \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Задача равносильна предыдущей для данных векторов.

Тогда

$$\begin{vmatrix} x_1-5 & -1 & -1 \\ x_2+9 & 6 & 11 \\ x_3+2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим по первому столбцу:

$$(-1)^{1+1}(x_1-5)\begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(x_2+9)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(x_3+2)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

То есть $-52(x_1-5) - 2(x_2+9) - 5(x_3+2) = 0$. Значит, $-52x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -232$

**Ответ:** $-52x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -232$.

## 1.4

1.

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -3 & -5 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{2} \end{vmatrix} = -4 \cdot (-3) \cdot (-9) \cdot \frac{-9}{2} = 486$$

2.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 0 & -3 & -10 \\ 0 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & -10 \end{vmatrix} = -4(-40-15) = -4 \cdot (-55) = -220$$

**Ответ:** а) -232, б) -220.

## 1.5

Во всех пунктах будем пользоваться тем, что $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_\phi^T$, где $A_\phi^T$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы $A$.

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & -5 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ найти $A^{-1}$.
   1. Найдем определитель матрицы $A$:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & -5 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

2. Найдем матрицу миноров:

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \qquad \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -30 \qquad \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 12$$
$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 20 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = -36 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 12$$

Тогда

$$M = \begin{vmatrix} 15 & -30 & 12 \\ 3 & -6 & 0 \\ 20 & -36 & 12 \end{vmatrix}$$

3. Найдем матрицу алгебраических дополнений $A_\phi$ :
Домножим элементы $M$ на $(-1)^{i+j}$

$$A_\phi = \begin{vmatrix} 15 & 30 & 12 \\ -3 & -6 & 0 \\ 20 & 36 & 12 \end{vmatrix}$$

4. Найдем матрицу алгебраических дополнений $A_\phi^T$ :

$$A_\phi^T = \begin{vmatrix} 15 & -3 & 20 \\ 30 & -6 & 36 \\ 12 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

5. Вспомним, что

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_\phi^T = -\frac{1}{12} \begin{vmatrix} 15 & -3 & 20 \\ 30 & -6 & 36 \\ 12 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2.

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Найдем $|A|$:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -50 - 15 \cdot 6 = -140$$

2. Найдем матрицу миноров:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -17 \qquad \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 19 \qquad \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -28$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 28$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 30 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Запишем матрицу:

$$M = \begin{vmatrix} -17 & 19 & -28 \\ 2 & 6 & 28 \\ 10 & 30 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Теперь запишем матрицу алгебраических дополнений:

$$A_\phi = \begin{vmatrix} -17 & -19 & -28 \\ -2 & 6 & -28 \\ 10 & -30 & 0 \end{vmatrix}$$

Где каждый элемент умножили на $(-1)^{i+j}$

4. Транспонируем полученную матрицу:

$$A_\phi^T = \begin{vmatrix} -17 & -2 & 10 \\ -19 & 6 & -30 \\ -28 & -28 & 0 \end{vmatrix}$$

5.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_\phi^T = -\frac{1}{140} \cdot \begin{vmatrix} -17 & -2 & 10 \\ -19 & 6 & -30 \\ -28 & -28 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{17}{140} & -\frac{1}{70} & \frac{1}{14} \\ -\frac{19}{140} & \frac{3}{70} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{vmatrix}$$

3.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

1. Найдем определитель $A$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & -14 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -14 & -8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(-14-8) = -66$$

2. Найдем матрицу миноров:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 30 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 36$$
$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 10 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3$$
$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -42$$

Тогда

$$M = \begin{vmatrix} -10 & 30 & 36 \\ 10 & 3 & -3 \\ 8 & -24 & -42 \end{vmatrix}$$

3. Найдем матрицу алгебраических дополнений:

$$A_\phi = \begin{vmatrix} -10 & -30 & 36 \\ -10 & 3 & 3 \\ 8 & 24 & -42 \end{vmatrix}$$

4. Транспонируем полученную матрицу:

$$A_\phi^T = \begin{vmatrix} -10 & -10 & 8 \\ -30 & 3 & 24 \\ 36 & 3 & -42 \end{vmatrix}$$

5. Вычисляем

$$\frac{1}{|A|}A_\phi^T = -\frac{1}{66}\begin{vmatrix}-10 & -10 & 8\\ -30 & 3 & 24\\ 36 & 3 & -42\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{5}{33} & \frac{5}{33} & -\frac{4}{33}\\ \frac{5}{11} & -\frac{1}{22} & -\frac{4}{11}\\ -\frac{6}{11} & -\frac{1}{22} & \frac{7}{11}\end{vmatrix}$$

**Ответ:**

а) $\begin{vmatrix}-\frac{5}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{3}\\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -3\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}-\frac{17}{140} & -\frac{1}{70} & \frac{1}{14}\\ -\frac{19}{140} & \frac{3}{70} & -\frac{3}{14}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0\end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix}\frac{5}{33} & \frac{5}{33} & -\frac{4}{33}\\ \frac{5}{11} & -\frac{1}{22} & -\frac{4}{11}\\ -\frac{6}{11} & -\frac{1}{22} & \frac{7}{11}\end{vmatrix}$

## 1.6

Найдите собственные числа, укажите какие-нибудь базисы в собственных и корневых подпространствах и выясните, диагонализуемы ли линейные операторы $\mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, заданные в стандартном базисе матрицами:

1.

$$\begin{vmatrix}13 & 75 & -21\\ -16 & -108 & 31\\ -48 & -330 & 95\end{vmatrix}$$

1. Собственные числа:
Найдем характеристический многочлен:

$$|\lambda E - A| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}13 & 75 & -21\\ -16 & -108 & 31\\ -48 & -330 & 95\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda - 13 & -75 & 21\\ 16 & \lambda + 108 & -31\\ 48 & 330 & \lambda - 95\end{vmatrix} = 0$$

Преобразуем определитель:

$$\begin{vmatrix}\lambda - 13 & -75 & 21\\ 16 & \lambda + 108 & -31\\ 0 & 6 - 3\lambda & \lambda - 2\end{vmatrix} = 0$$

Раскроем по первому столбцу:

$$(\lambda - 13)\begin{vmatrix}\lambda + 108 & -31\\ 6 - 3\lambda & \lambda - 2\end{vmatrix} - 16\begin{vmatrix}-75 & 21\\ 6 - 3\lambda & \lambda - 2\end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 13)((\lambda + 108)(\lambda - 2) + 31(6 - 3\lambda)) - 16(-75\lambda + 150 - 126 + 63\lambda) = 0$$

то есть

$$(\lambda - 13)(\lambda^2 + 13\lambda - 30) + 192\lambda - 384 =$$
$$\lambda^3 + 13\lambda^2 - 30\lambda - 13\lambda^2 - 169\lambda + 390 + 192\lambda - 384 =$$
$$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 2$

2. Найдем собственные векторы. Для этого будем подставлять найденные значения $\lambda_i$ в $(A - \lambda E)x = 0$.

(a) $\lambda = 1$

$$\begin{vmatrix}12 & 75 & -21\\ -16 & -109 & 31\\ -48 & -330 & 94\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}12 & 75 & -21\\ 0 & -9 & 3\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}12 & 75 & -21\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & -1 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}$$

Получается, $x_1 = -\frac{1}{3}x_3$, $x_2 = \frac{1}{3}x_3$, где $x_3$ – свободная переменная.

Тогда собственный вектор $\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}$

(b) $\lambda = -3$

$$\begin{vmatrix} 16 & 75 & -21 \\ -16 & -105 & 31 \\ -48 & -330 & 98 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 16 & 75 & -21 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 16 & 75 & -21 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 16 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

Таким образом, $x_1 = -\frac{1}{4}x_3$, $x_2 = \frac{1}{3}x_3$, где $x_3$ – свободная переменная.

Тогда собственный вектор $\begin{vmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \end{vmatrix}$

(c) $\lambda = 2$

$$\begin{vmatrix} 11 & 75 & -21 \\ -16 & -110 & 31 \\ -48 & -330 & 93 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 11 & 75 & -21 \\ -16 & -110 & 31 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 11 & 75 & -21 \\ -16 & -110 & 31 \end{vmatrix} \to$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{75}{11} & -\frac{21}{11} \\ 0 & \frac{-10}{11} & \frac{5}{11} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 11 & 75 & -21 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 11 & 0 & \frac{33}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Таким образом, $x_1 = -\frac{3}{2}x_3$, $x_2 = \frac{1}{2}x_3$, а $x_3$ – свободная переменная.

Тогда собственный вектор, например, $\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix}$

## 1.7

Напишите такую вещественную $2 \times 2$ матрицу $A$, что

1.

$$A^5 = \begin{vmatrix} -31 & -16 \\ 56 & 29 \end{vmatrix}$$

1. Характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} t+31 & -16 \\ 56 & t-29 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -3, t = 1$$

2. $\sqrt[5]{A^5} = aA + bE$, где $at + b$ в точках $-3,\ 1$ принимает те же значения, что и в $\sqrt[5]{t}$ :

$$\begin{cases} -3a + b = -\sqrt[5]{3} \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -\sqrt[5]{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt[5]{3}+1}{4} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -\sqrt[5]{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3-\sqrt[5]{3}}{4}$$

3. Помним, что $\sqrt[5]{A^5} = aA + bE$, то есть искомая матрица:

$$\sqrt[5]{A^5} = \frac{\sqrt[5]{3}+1}{4}\begin{vmatrix} -31 & -16 \\ 56 & 29 \end{vmatrix} + \frac{3-\sqrt[5]{3}}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{-31\sqrt[5]{3}-31}{4} & -4\sqrt[5]{3}-4 \\ 14\sqrt[5]{3}+14 & \frac{29\sqrt[5]{3}+29}{4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{3-\sqrt[5]{3}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt[5]{3}}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8\sqrt[5]{3}-7 & -4\sqrt[5]{3}-4 \\ 14\sqrt[5]{3}+14 & 7\sqrt[5]{3}+8 \end{vmatrix}$$

2.

$$A^4 = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

1. Характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} t+3 & 4 \\ -4 & t-5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 5t - 15 + 16 = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

2. $\sqrt[4]{A^4} = aE + b$, где $at + b$ принимает в $t = 1$ то же значение, что и в $\sqrt[4]{A^4}$ :

$a + b = 1$.

Так как 1 – двукратное собственное число, рассмотрим производные от обеих частей равенства $at+b = \sqrt[4]{t}$ : $t = 1$ также должен быть удовлетворять этому равенству. Получается, $a = \frac{1}{4}\sqrt[3]{t} \overset{t=1}{=} \frac{1}{4}$.

$a = \frac{1}{4}$. Из $a + b = 1$ имеем $b = \frac{3}{4}$. Таким образом, $aA + bE = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}E$, то есть

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \frac{3}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & -1 \\ 1 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.

$$A^3 = \begin{vmatrix} -128 & 25 \\ -650 & 127 \end{vmatrix}$$

1. Характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} t+128 & -25 \\ -650 & t-127 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 128t - 127t - 127 \cdot 128 - 650 \cdot 25 = t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -3, t = 2$$

2. $\sqrt[3]{A^3} = aA + bE$, где $at + b$ принимает в $t = -3, t = 2$ те же значения, что и в $\sqrt[3]{t}$.

$$\begin{cases} -3a + b = \sqrt[3]{-3}, \\ 2a + b = \sqrt[3]{2}; \end{cases}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt[3]{-3} & 1 \\ \sqrt[3]{2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-3}}{5} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} -3 & \sqrt[3]{3} \\ 2 & \sqrt[3]{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{-3}}{5}$$

Тогда

$$aA + bE = \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-3}}{5}\begin{vmatrix} -128 & 25 \\ -650 & 127 \end{vmatrix} + \frac{3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{-3}}{5}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -128\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-3}}{5} & 25\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-3}}{5} \\ -650\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-3}}{5} & 127\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-3}}{5} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{-3}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{-3}}{5} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -25\sqrt[3]{2} + 26\sqrt[3]{-3} & 5\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{-3} \\ -130\sqrt[3]{2} + 130\sqrt[3]{-3} & 26\sqrt[3]{2} - 25\sqrt[3]{-3} \end{vmatrix}$$

4.

$$A^2 = \begin{vmatrix} -18 & -5 \\ 80 & 22 \end{vmatrix}$$

1. Характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} t+18 & 5 \\ -80 & t-22 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 18t - 22t - 22 \cdot 18 + 5 \cdot 80 = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

2. $\sqrt{A^2} = aA^2 + bE$, где $at+b$ принимает то же значение, что и $\sqrt{t}$, в $t=2$. $t=2$ – двукратное собственное число, значит, если мы возьмем производную от обеих частей равенства $at+b=\sqrt{t}$, $t=2$ по-прежнему будет ему удовлетворять. Запишем это:

$$\begin{cases} 2a+b=\sqrt{2} \\ a=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Получается, $a=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}}A^2+\frac{1}{\sqrt{2}}E=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{vmatrix}-18 & -5 \\ 80 & 22\end{vmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-\dfrac{9}{\sqrt{2}} & -\dfrac{5}{2\sqrt{2}} \\ \dfrac{40}{\sqrt{2}} & \frac{11}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{8}{\sqrt{2}} & -\dfrac{5}{2\sqrt{2}} \\ \dfrac{40}{\sqrt{2}} & \dfrac{12}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4\sqrt{2} & -\dfrac{5\sqrt{2}}{4} \\ 20\sqrt{2} & 6\sqrt{2}\end{vmatrix}$$

**Ответ.**

а) $\begin{vmatrix}-8\sqrt[5]{3}-7 & -4\sqrt[5]{3}-4 \\ 14\sqrt[5]{3}+14 & 7\sqrt[5]{3}+8\end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix}0 & -1 \\ 1 & 2\end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix}-25\sqrt[3]{2}+26\sqrt[3]{-3} & 5\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{-3} \\ -130\sqrt[3]{2}+130\sqrt[3]{-3} & 26\sqrt[3]{2}-25\sqrt[3]{-3}\end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix}-4\sqrt{2} & -\dfrac{5\sqrt{2}}{4} \\ 20\sqrt{2} & 6\sqrt{2}\end{vmatrix}$

## 1.8

Над полем $\mathbb{Q}$ найдите минимальные многочлены следующих матриц и выясните, диагонализуемы ли они.
**Способ:**
берем удобный вектор $\to$ применяем оператор $\to \ldots \to$ линейная зависимость между $e,\ F_v,\ F_v^2,\ \ldots \to$ проверяем: $\nu_{F,\ v}(F)=0$?

- $=0: \nu_F(t)=\nu_{F,\ V}(t)$ – минимальный многочлен;
- $\neq 0:$ повторить процедуру на $\operatorname{im}\ \nu_{F,\ v}(F)$. Тогда $\nu_F(t)=\nu_{F,v}(t)\cdot\ldots$

а)

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$e_3=\begin{vmatrix}0 \\ 0 \\ 1 \\ 0\end{vmatrix}$ – прообраз $v=\begin{vmatrix}2 \\ 0 \\ -2 \\ 1\end{vmatrix}$. Применяем $F_{e_3}$ еще раз: умножаем исходную матрицу на $F_{e_3}$

$$F_{e_3}^2=\begin{vmatrix}0 \\ 0 \\ 3 \\ -2\end{vmatrix} \qquad F_{e_3}^3=\begin{vmatrix}2 \\ 0 \\ -4 \\ 3\end{vmatrix}$$

Параллельно записываем по столбцам матрицы $e_3,\ F_{e_3},\ F_{e_3}^2,\ F_{e_3}^3$, чтобы увидеть линейную зависимость. Видим, что $F_{e_3}^3$ линейно выражается через другие столбцы матрицы

$$\begin{vmatrix}0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3\end{vmatrix}$$

Мы ищем линейную зависимость: ищем $\nu_{F,v}$, его коэффициенты – коэффициенты линейной зависимости между записанными векторами.
Заметим, что

$$F_{e_3}^3 - F_{e_3} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{vmatrix} = -F_{e_3}^2 + e_3 \quad \Leftrightarrow \quad F_{e_3}^3 = -F_{e_3}^2 + F_{e_3} + e_3 \quad \Leftrightarrow \quad F_{e_3}^3 + F_{e_3}^2 - F_{e_3} - e_3$$

Таким образом, мы нашли многочлен: $t^3 + t^2 - t - 1$
Единственный способ проверить минимальность: подставить в многочлен $F$. Найденный многочлен аннулирует прообраз третьего вектора (так как мы брали его), а также первого и второго, так как делится на $t-1$, ведь $\nu_F(t) = \underset{v \in V}{\text{НОК}} \nu_{F,\,v}(t)$, а для первого и второго столбца $F_{e_1} - e_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, F_{e_2} - e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, то есть аннулирующий многочлен для них – $t - 1$
Поэтому нам остается проверить, что многочлен аннулирует прообраз четвертого вектора, то есть проделать все то же самое для него.

$$e_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad F_{e_4} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad F_{e_4}^2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \quad F_{e_4}^3 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Заметим, что $F_{e_4}^3 + F_{e_4}^2 - F_{e_4} - e_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$. Значит, многочлен аннулирует и прообраз четвертого вектора.
Таким образом, $t^3 + t^2 - t - 1$.

**б)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Возьмем

$$e_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad F_{e_1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} \quad F_{e_1}^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -7 \end{vmatrix} \quad F_{e_1}^3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -12 \\ -19 \end{vmatrix}$$

Параллельно записываем вычисленные значения по столбцам матрицы:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -12 \\ 1 & -2 & -7 & -19 \end{vmatrix}$$

Если векторы линейно зависимы (это нужно проверять после вычисления каждого нового применения оператора), то

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -12 \\ 1 & -2 & -7 & -19 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -12 \\ -2 & -7 & -19 \end{vmatrix} = -4 \quad \lambda_1 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -12 \\ 1 & -7 & -19 \end{vmatrix} = -8$$

Аналогично, закрыв третий и четвертый столбцы с знаками $+$ и $-$ соответственно, вычисляем $\lambda_3 = 5, \lambda_4 = 1$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -12 \\ 1 & -2 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -11 \\ 0 & -1 & -12 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 11 \qquad -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Получили, что $-8F_{e_1} + 11F_{e_1}^2 - 3F_{e_1}^3 = 0$. Значит, многочлен – $-3t^3 + 11t^2 - 8t$.
*не сходится ответ*