$$\langle \mathrm{Tr}(Z^4)\,\mathrm{Tr}Z\;\mathrm{Tr}((Z^+)^3)\;\mathrm{Tr}((Z^+)^2)\rangle = F(N)$$

⓪ Посчитаем $\langle (a^2+b^2)^2\rangle$ и $\langle (a^2+b^2)^3\rangle$.

$$\langle (a^2+b^2)^2\rangle = \langle a^4+2a^2b^2+b^4\rangle = 2\langle a^4\rangle + 2\langle a^2\rangle\langle b^2\rangle =$$

$$= \frac{3!!}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3!!}{4} = \frac{3+3+2}{4} = 2$$

$$\langle (a^2+b^2)^3\rangle = \langle a^6\rangle\cdot 2 + 2\cdot 3\langle a^4b^2\rangle = 2\cdot\frac{5!!}{2^3} + 3\cdot 2\cdot\frac{3!!}{2^2}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot 5 + 6\cdot 3}{8} = \frac{15+9}{4} = 6.$$

① $B = 2+2 = 4$

$P = \frac{1}{2}(4+1+3+2) = 5$

$B - P + \Gamma = 2-2g \Rightarrow \Gamma = 3-2g \Rightarrow$ либо $g=0,\ \Gamma=3$

либо $g=1,\ \Gamma=1$

$$\Rightarrow F(N) = 4\cdot 1\cdot 3\cdot 2\,(aN+bN^3) = 24(aN+bN^3)$$

② При $N=1$.

$z_{11} = a+ib$

$$\langle (a+ib)^5(a-ib)^5\rangle = \langle (a^2+b^2)^5\rangle = \langle a^{10}+5a^8b^2+10a^6b^4+10a^4b^6 +$$

$$+5a^4b^6+b^{10}\rangle = 2\langle a^{10}\rangle + 10\langle a^8b^2\rangle + 20\langle a^6b^4\rangle =$$

$$= 2\,\frac{9!!}{2^5} + 10\,\frac{7!!}{2^4}\cdot\frac{1}{2} + 20\cdot\frac{5!!}{2^3}\cdot\frac{3!!}{2^2} = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{32} + \frac{10\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{32} + \frac{20\cdot 3\cdot 5\cdot 3}{32} = 120.$$

$$\Rightarrow F(1) = 24(a+b) = 120 \Rightarrow a+b = 5.$$

③ При $N=2$.

$$\langle \mathrm{Tr}(Z^4)\,\mathrm{Tr}Z\;\mathrm{Tr}((Z^+)^3)\;\mathrm{Tr}((Z^+)^2)\rangle =$$

$$= \sum \langle Z_{i_1i_2}Z_{i_2i_3}Z_{i_3i_4}Z_{i_4i_1}Z_{i_5i_5}\,Z^+_{j_1j_2}Z^+_{j_2j_3}Z^+_{j_3j_1}\,Z^+_{k_1k_2}Z^+_{k_2k_1}\rangle$$

а) $i_1 = \ldots = i_5 = j_1 = \ldots = j_3 = k_1 = k_2 = 1$ или 2

Дает вклад в сумму: $2 \langle (Z_{11} \bar{Z}_{11})^5 \rangle = 2 \cdot 120 = 240$

б) Одна двойка или одна единица

Число способов выбрать подж. j,k	$\langle \ldots \rangle$	i_1	i_2	i_2	i_3	i_3	i_4	i_4	i_1	i_5	i_5
5	6	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1
5	6	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1
5	6	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1
5	6	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1
0	24	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2

$$
\begin{array}{l|ccccc}
 & Z^+_{j_1 j_2} & Z^+_{j_2 j_3} & Z^+_{j_3 j_1} & Z^+_{k_1 k_2} & Z^+_{k_2 k_1} \\
\hline
 & 11 & 12 & 21 & 11 & 11 \\
3\text{сп} & \cdots & 11 & \cdots & 11 & 11 \\
 & \cdots & \cdots & 11 & 11 & 11 \\
\hline
2\text{сп} & 11 & 11 & 11 & 12 & 21 \\
 & 11 & 11 & 11 & 21 & 12
\end{array}
\Rightarrow 5\text{сп.}
$$

Вклад в сумму: $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 = 24 \cdot 10$

то же самое для 1

в) Две двойки или две единицы

Число способов выбр. подходящие j, k	$\langle \ldots \rangle$	i_1	i_2	i_2	i_3	i_3	i_4	i_4	i_1	i_5	i_5
3	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1	1
3	2	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1
3	2	2	1	1	1	1	2	2	2	1	1
6	4	2	1	1	2	2	1	1	2	1	1
6	4	1	2	2	1	1	2	2	1	1	1
3	2	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2
3	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2
3	2	1	2	2	1	1	1	1	1	2	2
3	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2

Дает вклад: $2 \cdot (6 \cdot 8 + 24 \cdot 2) = 8 \cdot 24$

то же можно сделать для двух единиц

Итого:

$$\left\langle \sum_{\substack{1 \le i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 \le 2 \\ 1 \le j_1 j_2 j_3 k_1 k_2 \le 2}} Z_{i_1 i_2} Z_{i_2 i_3} Z_{i_3 i_4} Z_{i_4 i_1} Z_{i_5 i_5} Z^{+}_{j_1 j_2} Z^{+}_{j_2 j_3} Z^{+}_{j_3 j_1} Z^{+}_{k_1 k_2} Z^{+}_{k_2 k_1} \right\rangle =$$

$$= 24(10 + 10 + 8) = 24 \cdot 28$$

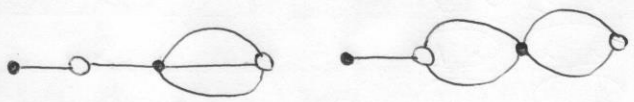
4) $F(N) = 24(aN + bN^3)$

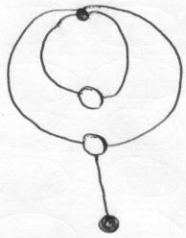
$$\begin{cases} F(1) = 24(a+b) = 120 \\ F(2) = 24(2a + 8b) = 24 \cdot 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a + 4b = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(N) = 24(2N + 3N^3)}$$

5

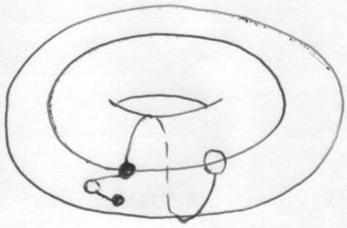
Детские рисунки на сфере ($g=0$)

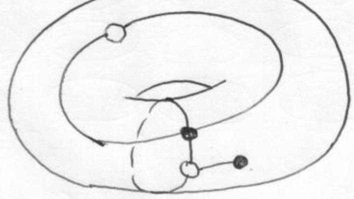




3 грани

Детские рисунки на торе ($g=1$)





1 грань

Т.к. при автоморфизме вершина может перейти только в вершину того же цвета и валентности, то $|Aut(D)|=1$ для всех дет. рисунков.

$$F(N)=24\left(N^1\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)+N^3\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\right)=24(2N+3N^3).$$