ТФКП
2 курс
Домашнее задание

Владислав Мозговой
1789769386

29 марта 2021 г.

Домашнее задание 1

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано. За каждую решенную задачу можно получить до 10 баллов. Последняя задача (предполагающая устную сдачу) — бонусная. Для того, чтобы получить максимальную оценку за курс, не обязательно решать бонусные задачи.

Вычисления с комплексными числами.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_1 + a_2$. Найдите вещественную и мнимую части комплексных чисел (параметр k предполагается натуральным числом).

(0) $(5+i)(3+5i)/2e^{\pi i/4}$;
(1) $(1+i)^5/(1-i)^3$;
(2) i^{4k+1};
(3) $(1+i)^{4k}$;
(4) $(1+i\sqrt{3})^{6k+5}$;
(5) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12k+6}$;
(6) $\frac{(1+i\sqrt{3})^{6k}}{(1+i)^{12k}}$;
(7) $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$;
(8) $2e^{\frac{\pi i}{3}}$;
(9) $e^{\frac{11\pi i}{6}}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $3a_3 + 7a_4$. Найдите модуль и аргумент комплексных чисел (параметр α предполагается вещественным числом):

(0) α;
(1) $i\alpha$;
(2) $(-2-2i)e^{\alpha}$;
(3) $(1+i\sqrt{3})e^{\alpha}$;
(4) $3+4i$;
(5) $\sin\alpha + i\cos\alpha$;
(6) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$;
(7) $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$;
(8) $\frac{e^{i\alpha}-1}{e^{i\alpha}+1}$;
(9) $(1+i)^{10}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $2a_6 + a_7$. Воспользуйтесь формулой Муавра.

(0) Выразите $\sin 4x$ как многочлен от $\sin x$ и $\cos x$.

(1) Выразите $\cos 5x$ как многочлен от $\sin x$ и $\cos x$.

(2) Выразите $\operatorname{tg} 3x$ как рациональную функцию от $\operatorname{tg} x$.

(3) Выразите $\operatorname{tg} 4x$ как рациональную функцию от $\operatorname{tg} x$.

(4) Выразите $\sin^4 \varphi$ через первые степени синусов и косинусов от кратных аргументов.

(5) Выразите $\cos^5 \varphi$ через первые степени синусов и косинусов от кратных аргументов.

(6) Вычислите $z^3 + \frac{1}{z^3}$, если $z + \frac{1}{z} = a$. Здесь значение a предполагается известным.

(7) Вычислите $z^4 + \frac{1}{z^4}$, если $z + \frac{1}{z} = a$. Здесь значение a предполагается известным.

(8) Представьте $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin(n-1)x$ в виде рациональной функции от $\sin x$, $\cos x$, $\sin nx$ и $\cos nx$.

(9) Представьте $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(n-1)x$ в виде рациональной функции от $\sin x$, $\cos x$, $\sin nx$ и $\cos nx$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_8 + a_9$. Найдите все комплексные значения z, удовлетворяющие выписанному уравнению (явно выразить вещественную и мнимую части).

(0) $\cos(z) = 2$;
(1) $z^2 = 5 - 12i$;
(2) $e^z = i$;
(3) $z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i = 0$;
(4) $z^3 = i$;
(5) $\overline{z} = z^3$;
(6) $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$;
(7) $z^4 + 4 = 0$;
(8) $(z + i)^4 = (z - i)^4$;
(9) $z^4 + (z - 4)^4 = 32$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_9$.

(0) Рассмотрим четырехугольник, описанный вокруг окружности $\{|z| = 1\}$ (т.е. такой четырехугольник, стороны которого касаются окружности). Докажите с использованием комплексный чисел, что прямая, соединяющая середины диагоналей этого четырехугольника, проходит через центр окружности.

(1) Пусть a, b, c, d — четыре различные точки на единичной окружности. Докажите, что точка пересечения прямых ab и cd задается формулой

$$\frac{(\overline{a}+\overline{b})-(\overline{c}+\overline{d})}{\overline{ab}-\overline{cd}}.$$

(2) Пусть a и b — точки на единичной окружности $|z| = 1$, а точка c — точка пересечения касательных к единичной окружности в точках a и b. Докажите, что число c является гармоническим средним чисел a and b, то есть

$$c^{-1} = \frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}.$$

(3) Докажите, что неотрицательный вещественный многочлен от одной переменной можно представить как сумму квадратов двух вещественных многочленов.

(4) Найдите сумму квадратов длин всех диагоналей правильного 7-угольника.

(5) Докажите, что комплексные числа a, b, c представляют вершины равностороннего треугольника тогда и только тогда, когда

$$a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ac.$$

(6) Пусть a, b — комплексные числа, представляющие вершины квадрата. Найдите остальные вершины (при всех возможных расположениях квадрата).

(7) Пусть a, b, c, d — комплексные числа, такие, что $c^2 = a$ и $d^2 = b$. Докажите, что

$$(|c+d|+|c-d|)^2 = 2(|a|+|b|+|a-b|).$$

(8) Можно ли ввести на комплексных числах отношение порядка $>$, согласованное со сложением и умножением? (Последнее означает, что для всех $a, b, c \in \mathbb{C}$

- из $a > b$ следует $a+c > b+c$;
- из $a > 0$ и $b > 0$ следует, что $ab > 0$.)

(9) Из вершины 0 треугольника $0ab$ на сторону ab (или ее продолжение) опущена высота. Выразите основание высоты через a и b.

Решения

Задача 1

необходимо решить пункт под номером $7 + 8 = 5 \mod 10$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12k+6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{2} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{-2i} = -\frac{1+\sqrt{3}i}{i} = i - \sqrt{3}$$

$$\left(1^2+\sqrt{3}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \sin(\theta) = \frac{1}{2},\ \cos(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow\ \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12k+6} = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12k} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{6} = (-64)^k \cdot 8i = (-1)^k 2^{6k+3} i$$

Задача 2

необходимо решить пункт под номером $3 \cdot 9 + 7 \cdot 7 = 6 \mod 10$

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{1+i\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})}}{1-i\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})}} = \frac{1+\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}}{1-\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}} = \frac{\frac{(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}}{\frac{(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})-(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}} = \frac{(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})}{(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})-(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})} =$$

$$\frac{2e^{i\alpha}}{2e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha} = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

$$\mathrm{mod}(e^{2i\alpha}) = 1 \qquad \arg(e^{2i\alpha}) = 2\alpha$$

Задача 3

необходимо решить пункт под номером $2 \cdot 9 + 3 = 1 \mod 10$

$$\cos(5x) + i\sin(5x) = (\cos(x) + i\sin(x))^5 =$$

$$\cos(x)^5 - 10\sin(x)^2\cos(x)^3 + 5\sin(x)^4\cos(x) + i(\sin(x)^5 - 10\sin(x)^3\cos(x)^2 + 5\sin(x)\cos(x)^4) =$$

$$\cos(x)^5 - 10(1-\cos(x)^2)\cos(x)^3 + 5(1-\cos(x)^2)^2\cos(x) +$$
$$i(\sin(x)^5 - 10\sin(x)^3(1-\sin(x)^2) + 5\sin(x)(1-\sin(x)^2)^2) =$$

$$16\cos(x)^5 - 20\cos(x)^3 + 5\cos(x) + i(16\sin(x)^5 - 20\sin(x)^3 + 5\sin(x))$$
$$\cos(5x) = 16\cos(x)^5 - 20\cos(x)^3 + 5\cos(x)$$

Задача 4

необходимо решить пункт под номером $8 + 6 = 4 \mod 10$

$$z^3 = i$$
$$z^3 - i = 0$$
$$z^3 + i^3 = 0$$
$$(z+i)(z^2 - iz - 1) = 0$$
$$z_1 = -i,\ z_2 = \frac{1}{2}(i-\sqrt{3}),\ z_3 = \frac{1}{2}(i+\sqrt{3})$$

Задача 5

необходимо решить пункт под номером $7+6=3 \mod 10$
Заметим что многочлен $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = Aq_1(x)\dots q_k(x)(x-x_1)^{n_1}\dots(x-x_r)^{n_r}(x-y_1)^{m_1}\dots(x-y_s)^{m_s}$, где q_i – квадратные многочлены без вещественных корней, n_i – четные степени (пусть $n_i = 2d_i$), m_i – нечетные степени, а также $A \neq 0$. Заметим что так как $f(x) \geqslant 0$, то $m_i = 0$, а следовательно $f(x) = Aq_1(x)\dots q_k(x)(x-x_1)^{n_1}\dots(x-x_r)^{n_r}$, если в таком разложении какие-то q_i отрицательны при всех x, вынесем -1 из них в A, тогда получим $f(x) = \tilde{A}\tilde{q}_1(x)\dots\tilde{q}_k(x)(x-x_1)^{n_1}\dots(x-x_r)^{n_r}$. Так как $\tilde{q}_i > 0$, то $(x-x_i)^{n_r} \geqslant 0$ для всех x, тогда также $\tilde{A} > 0$. Тогда можно представить $\tilde{q}_i$ как сумму 2 кадваратов*, а также заметить, что $(x-x_i)^{n_i} = ((x-x_i)^{d_i})^2$.
Осталось заметить, что если $A(x) = a_1(x)^2 + a_2(x)^2$ и $B(x) = b_1(x)^2 + b_2(x)^2$, то

$$\begin{aligned}
&A(x)B(x) = a_1(x)^2b_1(x)^2 + a_1(x)^2b_2(x)^2 + a_2(x)^2b_1(x)^2 + a_2(x)^2b_2(x)^2 \\
&= (a_1(x)^2b_1(x)^2 + 2a_1(x)a_2(x)b_1(x)b_2(x) + a_2(x)^2b_2(x)^2) + (a_1(x)^2b_1(x)^2 - 2a_1(x)a_2(x)b_1(x)b_2(x) + a_2(x)^2b_2(x)^2) \\
&= (a_1(x)b_1(x) + a_2(x)b_2(x))^2 + (a_1(x)b_1(x) - a_2(x)b_2(x))^2
\end{aligned}$$

То есть произведение сумм квадратов можно представить в виде суммы квадратов, а следовательно, представив $f(x)$ в виде суммы квадратов, мы разбили $f(x)$ на сумму квадратов.
Осталось представить $\tilde{q}_i$ в виде суммы квадратов – пусть $\tilde{q}_i = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, тогда

$$\begin{aligned}
&a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= \left(\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c\right) \\
&= \left(\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
\end{aligned}$$

Таким образом мы представили все элементы разложения в виде сумм квадратов, а, следовательно, показали что любой неотрицательный вещественный многочлен от одной переменной можно представить в виде суммы двух квадратов