# Листок 2. Многообразия (ориентируемость, касательное пространство)
## Гладкие многообразия
*Крайний срок сдачи 20.10.2020*

Задачи со звездочками можно сдавать и после дедлайна.

**1.** Можно ли на границе единичного квадрата ввести (а) структуру гладкого многообразия? (б) структуру подмногообразия $\mathbb{R}^2$?

**2.** Рассмотрим пространства $n \times n$-матриц с нормой $|A|^2 = \sum_{i,j} |a_i^j|^2$. Покажите, что следующие группы $G$ являются гладкими многообразиями и опишите касательные пространство к группам $G$ в их матричных единицах, если (а) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$; (б) $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$; (а) $G = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$; (б) $G = \mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$.

**3.** Покажите, что $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ как многообразие диффеоморфно полноторию.

**4.** (а) Постройте атлас $\mathbb{R}P^2$ и покажите, что оно неориентируемо.
(б) Постройте атласы $\mathbb{R}P^n$. При каких $n$ эти многообразия являются ориентируемыми, а при каких нет?

**5.** Пусть отображение $F : S^n \to \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее каждой точке сферы $S^n$ проходящую через неё и начало координат прямую в $\mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что отображение $F$ — гладкое, $dF$ — невырожден во всех точках.

**6.** (а) Докажите, что лист Мёбиуса и бутылка Клейна — неориентируемые многообразия. (б)* Докажите, что двумерное многообразие тогда и только тогда ориентируемо, когда не содержит в себе лист Мёбиуса.

**7.** Докажите, что гладкие структуры на множестве $M$ совпадают тогда и только тогда, когда пространства гладких функций на этих многообразиях совпадают.

**8.** (а) Приведите пример погружения многообразия в $\mathbb{R}^n$, взаимно однозначного с образом, но не являющегося вложением. (б) Пусть $f : N \to M$ — гладкое отображение одного многообразия в другое. Если существует такое подмногообразие $(L, g)$ многообразия $M$, что $f(N) \subset g(L)$, то существует единственное отображение $h : N \to L$ такое, что $g \circ h = f$. Всегда ли отображение $h$ является гладким (непрерывным)? Приведите контрпример, если он существует. *(В этом случае говорят, что отображение $f$ пропускается через подмногообразие $(L, g)$.)*

**9.** * Введите структуру гладкого многообразия на $TM$ и $T^*M$. Являются ли они ориентируемыми?

**10.** * Докажите, что компактное $n$-мерное многобразие с краем $M$ может быть вложено в евклидово полупространство $H^N = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{N-1}$ при достаточно большом $N$ так, что образ $\partial M$ лежит в пространстве $x^1 = 0$.

# Решения

## Задача 1

(а) На границе квадрата существует структура гладкого многообразия.
Так как квадрат $M$ – 2-мерное гладкое многообразие, то край $\partial M$ – 1-мерное гладкое многообразие без края
Заметим что можно посмотроить отображение квадрата в окружность

$$f:(x,y)\to\left(x\sqrt{1-\frac{y^2}{2}},y\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\right)$$

И окружности в квадрат

$$g:(x,y)\to$$
$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+x^2-y^2+2x\sqrt{2}})-\frac{1}{2}\sqrt{2+x^2-y^2-2x\sqrt{2}},\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2+y^2+2y\sqrt{2}})-\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2+y^2-2y\sqrt{2}}\right)$$

Осталось заметить, что $f\circ g=\mathrm{id}_1$ и $g\circ f=\mathrm{id}_2$, а следовательно мы можем взять карты из окружности и отобразить их в квадрат.

(б) Пусть $X=\{(x,y):\ \max(|x|,|y|)=1\}$ – квадрат, предположим что это подмногообразие $\mathbb{R}^2$. Пусть $v$ – его вершина (любая), тогда касательное пространство к $X$ в $v$ должно иметь размерность 1, но $T_vX$ имеет размерность 0 – противоречие.

Подмногообразие размерности 0 – дискретно, а размерности 2 – локально открыто, но так как $X$ не является ни тем, ни другим, то оно имеет размерность 1.
Гладкая кривая на $X$, проходящая через $v$ при $t=0$, должна иметь 0 производную в $t=0$.

## Задача 2

(а) $G=GL_n(\mathbb{R})$, атлас $(G,\varphi=\det)$
$GL_n(\mathbb{R})$ – открытое множество в $\mathbb{R}^{n^2}$, так как дополнение при непрерывном отображении $\det: G\to\mathbb{R}$ замкнуто
Прообраз $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (то есть $G$) открыт в $\mathbb{R}^{n^2}$, следовательно $G$ – многообразие

Гладким путем из точки $p$ называется гладкое отображение $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M,\quad \gamma(0)=p$
Пути эквивалентны, если $\frac{d}{dt}\varphi(\gamma_1(t))|_{t=1}=\frac{d}{dt}\varphi(\gamma_2(t))|_{t=0}$

Касательное пространство к $G$ в $E$:
$A\in T_EG\ \leftrightarrow \exists$ гладкое отображение $\gamma:(\varepsilon,\varepsilon)\to G$, $\gamma(0)=E,\ \dot\gamma(0)=A$
Проверим, что подходит $\gamma(t)=E+tA$

$$\det E=1\neq 0\ \to\exists\varepsilon>0:\ \sqrt{\sum||b_{ij}||^2}=||B||<\varepsilon\quad\det(B+E)\neq 0$$
$$\forall A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})\quad\exists\delta>0:\ \forall t\in(-\delta,\delta):\ \det(E+tA)\neq 0$$
$$\gamma(-\varepsilon,\varepsilon)\in G$$

(б) $SL_n(\mathbb{R})=\{A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})\mid \det A=1\}$
Покажем, что $SL_n(\mathbb{R})$ – подмногообразие $\mathbb{R}^n$. Знаем, что $M\subset\mathbb{R}^n$ размерности $k$, если $M$ локально задано в виде нулей гладкой функции $F$, ранга $n-k$
Пусть $G:\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}: A\mapsto\det A-1$. Тогда $SL_n(\mathbb{R})=\{A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})=\{A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})\mid G(A)=0\}\}$, $\dim(SL_n(\mathbb{R}))=n^2-1$, следовательно нужно показать, что ранг $J_G=n^2-n^2+1=1$

$$J_G=\begin{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial x_{1\ 1}}\\ \vdots\\ \frac{\partial G}{\partial x_{n\ n}}\end{pmatrix}$$

Эта матрица ранга 1 или 0 (если $J_G=0$). Докажем, что $J_G\neq 0$, то есть все частные производные ненулевые
$\det A=\sum\limits_{n=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i\ 1}M_{i\ 1}$ – разложим по первому столбцу.

Рассмотрим $(-1)^{i+1}M_{i\ 1}$, $M_{i\ 1}$ – определитель матрицы, полученной вычеркиванием $i$ строки и 1 столбца, пусть $J_G = 0$, то есть все частные производные нулевые, тогда миноры нулевые, в следовательно $\det A = 0$, но $\det A = 1$.
В индуцированной топологии из $\mathbb{R}^n$ подмногообразие является многообразием по определению.

Касательное пространство:

$$\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to SL_n(\mathbb{R})$$
$$\gamma(t) = E + \dot\gamma t + \overline{\overline{o}}(t)$$
$$1 = \det\gamma(t) = \det(E + \dot\gamma(0)t + \overline{\overline{o}}(t)) = \det(E + t\dot\gamma + \overline{\overline{o}}(t)) =$$
$$= 1 + t\frac{d}{dt}(\det(E + t\dot\gamma(0))) + \overline{\overline{o}}(t) = 1 + t\cdot\operatorname{tr}\dot\gamma(0) + \overline{\overline{o}}$$
$$\sum_{i,j}\frac{\partial\det}{\partial a_{ij}}|_E\dot\gamma(0)_{ij} = \sum_{i,j}A_{ij}|_E\dot\gamma(0)_{ij} = \sum\delta_{ij}\dot\gamma(0)_{ij} = \sum_i\dot\gamma(0)_{ii} = \operatorname{tr}\dot\gamma(0) \quad (A_{ij} \text{ – алгебраическх дополнений})$$
$$t\cdot\operatorname{tr}\dot\gamma(0) + \overline{\overline{o}} = 0$$
$$\operatorname{tr}\dot\gamma(0) = 0$$
$$T_ESL_n(\mathbb{R}) \subset \{\text{матрицы}A|\ \operatorname{tr}A = 0\}, \text{ но размерность этих множеств: } n^2 - 1$$
$$T_ESL_n(\mathbb{R}) = \{\text{матрицы с нулевым следом}\}$$

(в) $SO_n(\mathbb{R}) : AA^t = E$
Аналогично прошлому пункту покажем, что $O_n(\mathbb{R})$ – подмногообразие $\mathbb{R}^{n^2}$ (функция, нулями которой является $O_n(\mathbb{R})$, – $F(A) = A^tA - E$). Рассмотрим $\{A|\ \det A > 0,\ A \in O_n(\mathbb{R})\}$ – это $SO_n(\mathbb{R})$, открыто в $O_n(\mathbb{R})$, следовательно многообразие

$$\gamma(t) = (-\varepsilon, \varepsilon) \to SO_n(\mathbb{R})$$
$$\gamma(t) = E + \dot\gamma t + \overline{\overline{o}}(t)$$
$$(\gamma(t))^t = E + (\dot\gamma(0))^t t + \overline{\overline{o}}(t)$$
$$(E + \dot\gamma(0)t + \overline{\overline{o}})(E + (\dot\gamma)^t t + \overline{\overline{o}}(t)) = E + \dot\gamma(0)t + (\dot\gamma(0))^t t + \overline{\overline{o}}(t) = E$$
$$\dot\gamma(0)t + (\dot\gamma(0))^t t + \overline{\overline{o}}(t) = 0$$
$$\dot\gamma(0) = -(\dot\gamma(0))^t$$
$$T_ESO_n(\mathbb{R}) \text{ – кососимметричные матрицы}$$

(г) $SU_n(\mathbb{C}) :\ AA^\star = A^\star A = E,\ A^\star = \overline{A^t}$ Аналогично прошлому пункту это многообразие

$$(E + \dot\gamma t + \overline{\overline{o}}(t))(E + \overline{(\dot\gamma(0))^t}t + \overline{\overline{o}}(t)) = E + \dot\gamma(0)t + \overline{(\dot\gamma(0))^t}t + \overline{\overline{o}}(t) = E$$
$$\dot\gamma(0) = -\overline{(\dot\gamma(0))^t}$$

Следовательно $T_ESU_n(\mathbb{C})$ – косоэрмитовы матрицы

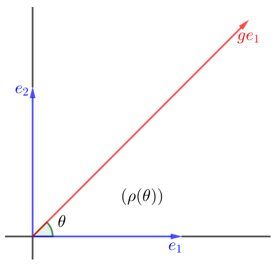
## Задача 3

$K \times A \times N \to SL(2,\mathbb{R})$ – непрерывно и сюръективно

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\}$$
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} : \ r > 0 \right\}$$
$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Теорема:
$\forall g \in SL(2,\mathbb{R}) \ \exists! \ k \in K, a \in A, n \in N : \ g = kan$

Рассмотрим базис $(e_1, e_2)$ плоскости $\mathbb{R}^2$
$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad - bc = 1)$ тогда $ge_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ и $ge_2 = \begin{pmatrix} b & d \end{pmatrix}$ – тоже базис, так как лнз
$|g| = 1 > 0$, а следовательно ориентация $ge_1, ge_2$ та же, следовательно и у $\rho_{-\theta}(ge_1), \rho_{-\theta}(ge_2)$ та же, откуда




$\rho_\theta(ge_2)$ в верхней полуплоскости.
Если $\rho_{-\theta}(ge_1) \in [Ox)$, то $\rho_{-\theta}(ge_1) = le_1$
$l$ – длина $\rho_{-\theta}(ge_1)$, то есть $l = \sqrt{a^2 + c^2}$
Умножение на $\begin{pmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ даст $\rho_{-\theta}(ge_1) \to e_1$, так как

$$\rho_{-\theta}(ge_1) = \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} = 1 > 0$, следовательно вектор $\begin{pmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \rho_{-\theta}(ge_2)$ снова лежит в верхней полуплоскости
$s(e_1, e_2) = 1, \ s(ge_1, ge_2) = 1$ так как $|g| = 1, \ s(\rho_{-\theta}(ge_1), \rho_{-\theta}(ge_2)) = 1$ (поворот)

$$s(\begin{pmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \rho_{-\theta}(ge_1), \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \rho_{-\theta}(ge_2)) = s(e_1, \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \rho_{-\theta}(ge_2)) = 1$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \rho_{-\theta}(ge_2) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Осталось перевести $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ в $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ так что $e_1$ останется на месте.

$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

Откуда получаем

$$\begin{pmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{e} & 0\\ 0 & e\end{pmatrix}\rho_{-\theta}g = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$g = (\rho_{-\theta})^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{l} & 0\\ 0 & l\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \rho_\theta\begin{pmatrix}l & 0\\ 0 & \frac{1}{l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Откуда

$$g = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l & 0\\ 0 & \frac{1}{l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Проверим что представление единственно

$$\begin{pmatrix}l\cos(\theta) & xl\cos(\theta) - \frac{1}{l}\sin(\theta)\\ l\sin(\theta) & xl\sin(\theta) + \frac{1}{l}\cos(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$a^2 + c^2 = l^2\cos^2\theta + l^2\sin^2\theta$$

$$l = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{l}$$

$$\sin(\theta) = \frac{c}{l}$$

$$\begin{cases} xl\frac{a}{l} - \frac{1}{l}\frac{c}{l} = b\\ xl\frac{c}{l} + \frac{1}{l}\frac{a}{l} = d\end{cases}$$

$$\begin{cases} ax = \frac{bl^2 + c}{l^2}\\ cx = \frac{dl^2 - a}{l^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{b(a^2+c^2)+c}{(a^2+c^2)a}\\ x = \frac{d(a^2+c^2)-a}{(a^2+c^2)c}\end{cases}$$

$$ad - bc = 1$$

$$bc^2 + c = c(bc+1) = cad$$

$$x = \frac{a^2b + cad}{a(a^2+c^2)} = \frac{ab+cd}{a^2+c^2}$$

Заметим, что $a^2 + c^2 \neq 0$ так как $a \neq 0$ или $c \neq 0$, а следовательно $x$ однозначно определен.

$K \times A \times N$ диффеоморфно $SL(2, \mathbb{R})$

$$f : K \times A \times N \to SL(2, \mathbb{R})$$

$$f : (k, a, n) \to kan$$

По теореме $f$ биективно и $\exists f^{-1}$

$$k(g) = \begin{pmatrix}\frac{a}{l(g)} & -\frac{c}{l(g)}\\ \frac{c}{l(g)} & \frac{a}{l(g)}\end{pmatrix}$$

$$a(g) = \begin{pmatrix}l(g) & 0\\ 0 & \frac{1}{l(g)}\end{pmatrix}$$

$$n(g) = \begin{pmatrix}1 & \frac{ab+cd}{a^2+c^2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$K \simeq S^1$ так как определяется углом $\theta$
$A \simeq \mathbb{R}_{>0} \simeq \mathbb{R}$ определяется числом $l > 0$
$N \simeq \mathbb{R}$ определяется числом $x$
Следовательно $SL(2, \mathbb{R}) \simeq S^1 \times \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2 \simeq D^1$

$$(x, y) \to (\frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}})$$

Тогда $SL(2, \mathbb{R}) \simeq S^1 \times D^1$ – полноторий

## Задача 4

(а) Зададим структуру гладкого многообразия на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Будем представлять ее как множество прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через начало координат. Каждая прямая определена вектором с координатами $(x, y, z)$ (и пропорциональные вектора задают одну и ту же прямую). Рассмотрим атлас из 3 карт $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3)$, где $U_1 = \{(x, y, z) \| \ x \neq 0\}, U_2 = \{(x, y, z) \| \ y \neq 0\}, U_3 = \{(x, y, z) \| \ z \neq 0\}, \varphi_1(x, y, z) = (\frac{y}{x}, \frac{z}{x}), \varphi_2(x, y, z) = (\frac{x}{y}, \frac{z}{y}), \varphi_3(x, y, z) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Тогда можно заметить, что полученное множество прямых можно рассматривать как диск с отождествленными диаметрально противоположными точками, тогда, если взять диаметр полученного диска и рассмотреть какую-то его окрестность, то полученное множество будет летой мебиуса, а она неориентируема.

(б)

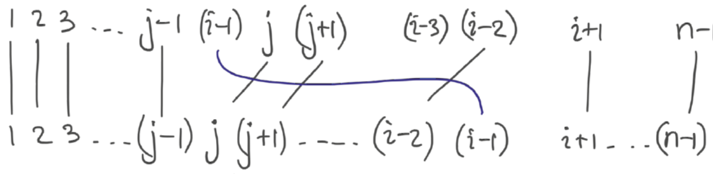
$$\mathbb{R}P^n : (x_0, \ldots, x_n) \sim (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \quad \forall \lambda \neq 0$$
$$U_i = \{(x_0, \ldots, x_n) | \ x_i \neq 0\} \quad i = 0, \ldots, n$$
$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \ (x_0, \ldots, x_n) \to \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

Пусть $a = (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

$$\varphi_i^{-1}(a) = (a_0, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$
$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(a) = \left(\frac{a_0}{a_j}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_j}, \frac{1}{a_j}, \frac{a_{i+1}}{a_j}, \ldots, \frac{a_{j-1}}{a_j}, \frac{a_{j+1}}{a_j}, \ldots, \frac{a_n}{a_j}\right) \text{ – диффеоморфизм}$$

Посчитаем якобиан

$$J_{ij} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{a_j} & 0 & 0 & -\frac{a_0}{a_j^2} & 0 & & & & & 0 \\
0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & & & & & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{a_j} & -\frac{a_{j-1}}{a_j^2} & 0 & & & & & 0 \\
0 & & 0 & -\frac{a_{j+1}}{a_j^2} & \frac{1}{a_j} & 0 & & & & 0 \\
0 & & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 & & & 0 \\
0 & & 0 & -\frac{a_{i-1}}{a_j^2} & 0 & 0 & \frac{1}{a_j} & 0 & & 0 \\
0 & & 0 & -\frac{1}{a_j^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & & 0 & -\frac{a_{i+1}}{a_j^2} & 0 & & 0 & \frac{1}{a_j} & 0 & 0 \\
0 & & 0 & \vdots & 0 & & & 0 & \ddots & 0 \\
0 & & 0 & -\frac{a_n}{a_j^2} & 0 & & & & 0 & \frac{1}{a_j}
\end{pmatrix}$$
$$\det(J_{ij}) = -\frac{1}{a_j^n}(-1)^{i-j} = (-1)^{|i-j|-1} \cdot -\frac{1}{a_j^{n+1}} = (-1)^{|i-j|}\frac{1}{a_j^{n+1}}$$




$|i - 1 - j + 1|$ пересечение
$\tilde{U_i} = \{(x_0 : \ldots : x_n) | \ \frac{x_{i+1}}{x_i} < 0\}$
Рассмотрим цепочку $\tilde{U_0}, \ldots, \tilde{U_n}$

$$\tilde{U_i} \cap \tilde{U}_{i+1} = \left\{(x_0 : \ldots : x_n) | \ \frac{x_{i+1}}{x_i} < 0, \ \frac{x_{i+2}}{x_{i+1}} < 0\right\}$$

Следовательно $x_i, x_{i+2}$ одного знака, а $x_{i+1}$ – другого

По аналогии с 4(a)

$$\varphi_{01} : (x_0, \dots, x_n) \to (1, x_0, \dots, x_n) \to \left(\frac{1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \quad (x_0 < 0)$$

$$|J_{01}| = (-1)\frac{1}{x_0^{n+1}} > 0$$

$$\varphi_{12} : (x_0, \dots, x_n) \to (x_0, 1, x_1, \dots, x_n) \to \left(\frac{x_0}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) \quad (x_1 < 0)$$

$$|J_{12}| = (-1)\frac{1}{x_1^{n+1}} > 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{n0} : (x_0, \dots, x_n) \to (x_0, \dots, x_n, 1) \to \left(\frac{x_0}{x_n}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) \quad (x_n > 0)$$

$$|J_{n0}| = (-1)\frac{1}{x_n^{n+1}} < 0$$

Следовательно цепочка карт противоречива для четного $n$

Докажем, что $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо для нечетного $n$
Заменим $(U_i, \varphi_i)$ на $(U_i, \tilde{\varphi}_i)$ для четных $i$

$$\tilde{\varphi}_i : (x_0 : \dots : x_n) \to (-\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$$

$$\tilde{\varphi}_i{}^{-1} : (*a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Тогда у $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ поменяется знак, если $i, j$ разной четости

$$|J_{ij}| = (-1)^{|i-j|}\frac{1}{x_j^{n+1}}$$

Если $i, j$ одной четности, то $(-1)^{|i-j|} = 1$ и $|J_{ij}| > 0$
Если $i, j$ разной четности, то $(-1)^{|i-j|+1} = 1$ и $|J_{ij}| > 0$
Следовательно атлас ориентирующий для нечетного $n$

## Задача 5

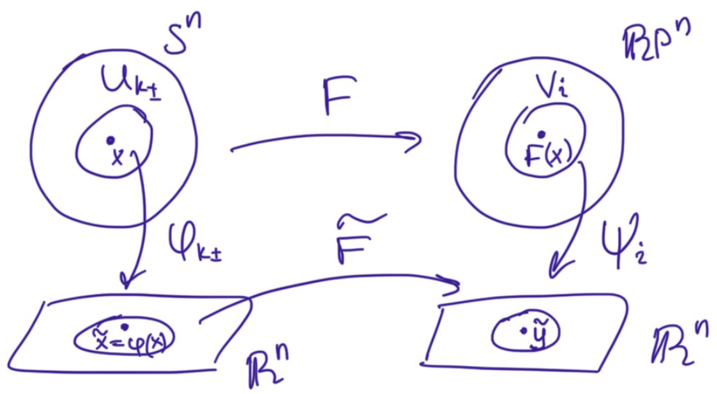
$F : S^n \to \mathbb{R}P^n \quad (x_0, \dots, x_n) \to (x_0 : \dots : x_n)$
Атла*с на $S^n$:

$$(U_{K+}, \varphi_{K+}) : U_{K+} = \{x \in S^n | \ X_K > 0\}$$

$$\varphi_{K+}(x) = (x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$$(U_{K-}, \varphi_{K-}) : U_{K-} = \{x \in S^n | x_K < 0\}, \ \varphi_{K-}(x) = \varphi_{K+}(x)$$

Атлас на $\mathbb{R}P^n$:




$$(V_i, \psi_i) : \ V_i = \{x \in \mathbb{R}P^n | \ x_i \neq 0\}$$

$$\psi_i(x) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

$$\tilde{F} = \psi_i \circ F \circ \varphi_{K\pm}^{-1}$$

Пусть $i \neq k$, тогда

$$\varphi_{K\pm}^{-1}(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_k, \pm\sqrt{1 - ||\tilde{x}||^2}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$$\tilde{F}(\tilde{x}) = (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_{k-1}}{x_i}, \frac{\pm\sqrt{1 - ||\tilde{x}||^2}}{x_i}, \frac{x_{k+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) = \tilde{y}$$

$$\tilde{F}^{-1}(\tilde{y}) =$$

$$\left(\pm\frac{y_0}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}, \dots, \pm\frac{y_{i-1}}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}, \pm\frac{y_{i+1}}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}, \dots, \pm\frac{y_{k-1}}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}, \pm\frac{y_{k+1}}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}, \dots, \pm\frac{y_n}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}\right)$$

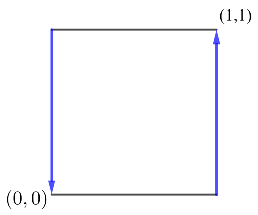
Пусть $i = k$, тогда

$$\tilde{F}(\tilde{x}) = \left(\pm\frac{x_0}{\sqrt{1 - ||\tilde{x}||^2}}, \dots, \pm\frac{x_{k-1}}{\sqrt{1 - ||\tilde{x}||^2}}, \pm\frac{x_{k+1}}{\sqrt{1 - ||\tilde{x}||^2}}, \dots, \pm\frac{x_n}{\sqrt{1 - ||\tilde{x}||^2}}\right) = \tilde{y}$$

$$\tilde{F}^{-1}(\tilde{y}) = \left(\pm\frac{y_0}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}, \dots, \pm\frac{y_{k-1}}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}, \pm\frac{y_{k+1}}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}, \dots, \pm\frac{y_n}{\sqrt{1 + ||\tilde{y}||^2}}\right)$$

Оба отображения гладкие и биективные, следовательно $\tilde{F}$ – диффеоморфизм
В стандартном базисе $dF = J_{\tilde{F}}$, следовательно $F$ – гладкое и $dF$ невырожден во всех точках

Задача 6



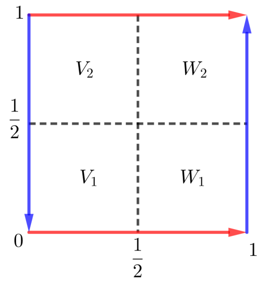

(a)

$$U_1 = (0,1)\times(0,1) \quad \varphi_1 = \mathrm{id}$$
$$U_2 = \left[0,\frac{1}{2}\right)\times(0,1) \quad \varphi_2 = \mathrm{id}$$
$$U_3 = \left[\frac{1}{2},1\right]\times(0,1) \quad \varphi_3 = (x-1, 1-y)$$
$$U_4 = U_2 \sqcup U_3 \quad \varphi_4|_{U_2} = \varphi_2 \quad \varphi_4|_{U_3} = \varphi_3$$

Рассмотрим последовательность $U_1, U_2, U_3, U_4$

$$\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \mathrm{id} \quad |J_{12}| > 0$$
$$\varphi_{24} = \varphi_4 \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_4 = \varphi_1 \quad |J_{24}| > 0 \quad \text{так как } \varphi_{24} \text{ действует на } U_4 \cap U_2 = U_2$$
$$\varphi_{42} = \varphi_3 \circ \varphi_4^{-1} = \varphi_3 \circ \varphi_3^{-1} = \mathrm{id} \quad |J_{43}| > 0$$
$$\varphi_{31} = \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$$
$$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(x,y) = \varphi_1(x+1, 1-y) = (x+1, 1-y)$$
$$|J_{31}| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} < 0$$

Следовательно цепочка карт противоречива




(1)

$$U_1 = (0,1)\times(0,1) \quad \varphi = \mathrm{id}$$
$$V_1 = \left[0,\frac{1}{2}\right)\times\left[0,\frac{1}{2}\right)$$
$$V_2 = \left[0,\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2},1\right]$$

(2)

$$U_2 = V_1 \cup V_2$$
$$\varphi_2|_{V_1} = (x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2})$$
$$\varphi_2|_{V_2} = (x+\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2})$$
$$W_1 = \left(\frac{1}{2},1\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right)$$
$$W_2 = \left(\frac{1}{2},1\right]\times\left(\frac{1}{2},1\right]$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&U_3 = W_1 \cup W_2 \\
&\varphi_3|_{W_1} = (x - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - y) \\
&\varphi_3|_{W_2} = (x - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - y)
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&U_4 = U_2 \cup U_3 \\
&\varphi_4|_{U_2} = \varphi_2 \\
&\varphi_4|_{U_3} = \varphi_3
\end{aligned}
$$

Рассмотрим цепочку $U_1, U_2, U_4, U_3$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \quad |J_1 2| > 0 \\
&\varphi_{24} = \varphi_4 \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} = \mathrm{id} \quad |J_{24}| > 0 \\
&\varphi_{43} = \varphi_3 \circ \varphi_4^{-1} = \varphi_3^{-1} \circ \varphi_3 = \mathrm{id} \quad |J_{43}| > 0 \\
&\varphi_{31} = \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} = \varphi_3^{-1} \text{ на } U_1 \cap U_3 : \\
&\varphi_3^{-1} = (x + \frac{1}{2}, -y + \frac{1}{2}) \quad |J_{31}| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}
$$

Цепочка карт противоречива

(б)*

## Задача 7

Лемма из лекции:
$F : M \to N$ – диффеоморфизм, следовательно $C(M) \to C(N)$ – изоморфизм.
Зададим на $M$ разные гладкие структуры и перепишем лемму в виде $F : M \to M$ – диффеоморфизм, следовательно $C(M)$ на обеих структурах – одно и то же.
Докажем в обратную сторону. На первой структуре введем карты $(U, \varphi)$, на второй $(V, \psi)$

$$
\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "f"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\hat{f}"] \arrow[dl, "F"'] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

Пусть $\tilde{f}$ отдает $i$ координату, это гладкое отображение. Тогда $f := \tilde{f} \circ \varphi$ – гладкое в 1й структуре, но тогда и во второй тоже гладкое, а следовательно $\exists$ гладкое $\hat{f} : f = \hat{f} \circ \psi$.
Тогда $\hat{f} = \tilde{f} \circ F$, так как $\tilde{f}$ – взятие $i$-й координаты, то $\hat{f} = F^i$ – $i$-я координата $F$, а следовательно $F^i$ – гладкое. Проделав такое со всеми координатами, получим, что $F$ – гладкое, аналогично $F^{-1}$ тоже гладкое.
$F = \varphi \circ \psi^{-1}$, $\varphi, \psi$ – гомео., откуда $F$ – биекция, а следовательно и диффеоморфизм, откуда следует, что карты согласованы и гладкие структуры совпадают.

## Задача 8

(а) Рассмотрим кривую

$$
\begin{aligned}
&\beta : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \\
&\beta(t) = (\sin 2t, \sin t)
\end{aligned}
$$

Ее же можно также задать как

$$x^2 = 4y^2(1 - y^2)$$

Тогда заметим, что $\beta$ – инъективное погружение, так как $\beta'(t) \neq (0, 0)$
По определению функция является вложением, если выполнены следующие факты:

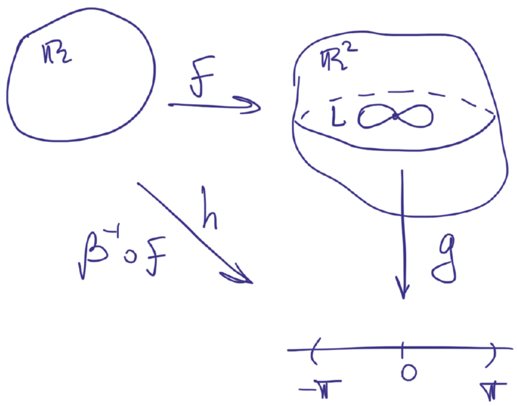
(1) функция инъективна

(2) является погружением

(3) гомео на образ в индуцированной топологии

Теперь заметим, что $\beta((-\pi,\pi))$ – компактно в $\mathbb{R}^2$, а $(-\pi,\pi)$ не является компактом, следовательно условие (3) не выполнено

(б) Рассмотрим $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ – гладкое, $f(t) = (\sin 2t, \sin t)$
$L = \beta^{-1}(-\pi,\pi)$ – подмногообразие $\mathbb{R}^2$ с топологией и гладкой структурой индуцированной $\beta^{-1}$.
$f(\mathbb{R}) \subset \beta(L)$ $\beta \circ f(t)$ не является непрерывной в $t = \pi$




Задача 9*

Задача 10*