2к

Мат. Анализ. Семинар №14

Комплексная форма рядов Фурье

① Свёртка функций.

Заданы комплекснозначные функции $f(x), g(x) \in L_1(-\pi, \pi; \mathbb{C})$, 2π - периодические.

<u>Определение</u>. Свёрткой функций f и g называется функция:

$$f * g(x) = F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy$$

<u>Задача 1</u>. Если $f, g \in L_1(-\pi, \pi)$, то $f * g \in L_1(-\pi, \pi)$

<u>Решение</u>: Заметим, что определен абсолютно сходящийся двойной интеграл.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy\,dx,$$

поскольку, по теореме Фубини, существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|\cdot|g(x)|\,dy\,dx$$

<u>Свойства свёртки</u>:

1) <u>симметричность</u>: $f * g = g * f$.

Сделаем замену $x-y=z$

$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g(x-y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(z)f(x-z)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)f(x-y)dy=g*f(x).$$

2) $\underline{\text{линейность}}$ $(f_1+f_2)*g=f_1*g+f_2*g.$

3) $f*1\!\!1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)dy=C\cdot 1\!\!1,\quad C=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)dy.$

<u>Задача 2</u>. Найти свертку $\sin nx*\cos mx$

<u>Решение</u>:

$$\sin nx*\cos mx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin ny\cos m(x-y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin ny\cdot\cos my\cdot\cos nx+\sin ny\sin my\cdot\sin nx)dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big\{\cos nx\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin ny\cdot\cos my\,dy}_{=0}+\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}\sin ny\cdot\sin my\,dy\Big\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}\sin ny\cdot\sin my\,dy=\begin{cases}0 & n\neq m.\\ \frac{\sin nx}{2} & n=m.\end{cases}$$

Аналогично: $\sin nx*\sin mx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \frac{\cos nx}{2}, & n=m\end{cases}$

$$\cos nx*\cos mx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \frac{\cos nx}{2}, & n=m.\end{cases}$$

Операция свертки сильно отличается от операции обычного умножения.

<u>Задача 3</u> Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют ряды Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$$

Найти ряд Фурье свертки $f*g$

$$f*g \sim \sum s_n e^{inx}. \quad s_n = ?$$

<u>Решение:</u>

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y)\,dy\right\} e^{-inx}\,dx =$$

(меняем порядок интегрирования)

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) e^{-inx}\,dx\right\} dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left\{\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-inx}\,dx\right\} dy =$$

Во внутреннем интеграле делаем замену переменных: $x-y=z$, $x=y+z$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \int_{-\pi-y}^{-\pi+y} g(z)\, e^{-in(z+y)}\, dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} g(z)\, e^{-inz}\, dz\right\} dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)\, e^{-inz}\, dz\right) =$$

$= c_n \cdot d_n.$

<u>Ответ</u>: $\boxed{s_n = c_n \cdot d_n.}$

<u>Задача 4</u>. Пусть $f, g \in L_2(-\pi, \pi)$. Верно ли, что $f * g \in L_2(-\pi, \pi)$?

<u>Решение</u>: Верно!

Рассмотрим c_n и d_n — коэффициенты Фурье функций f и g. В силу равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$, $\|g\|^2 = \sum |d_n|^2 < \infty$.

Рассмотрим s_n — коэфф. Фурье $f * g$.

$\boxed{\text{По з/3}}$ $s_n = c_n \cdot d_n$, $|s_n|^2 = |c_n|^2 \cdot |d_n|^2 \le |c_n|^4 + |d_n|^4$

Ряды $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^4$ и $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^4$ сходятся, т.к. $|c_n|^4 \le |c_n|^2$, $|d_n|^4 \le |d_n|^4$ при $n \gg 1$.

(т. Рисса-Фишера)

Следовательно $\{S_n\} \in l_2$ и ему соответствует функция $F(x) \in L_2(-\pi, \pi)$.

В силу единственности коэффициентов Фурье: $F(x) \equiv f * g$, т.е. $f * g \in L_2(-\pi, \pi)$

Обсудим вопрос существования элементов „единица" для операции свертки.

т.е. $e(x)$: $\quad f * e = e * f = f$

Существуют или нет?

<u>Задача 5</u>. Существует ли „единица"?

<u>Решение</u>: Ответ: НЕТ!

Действительно, если $f \in L_1(-\pi, \pi)$, $e \in L_1$, то $f \sim \{c_n\}$, $e \sim \{e_n\}$ - коэф. Фурье

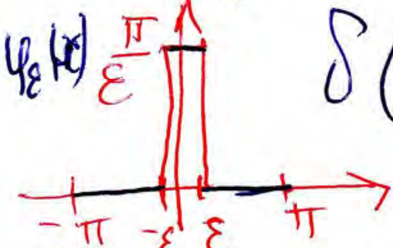
$$f * e = f \Rightarrow c_n e_n = c_n \Rightarrow e_n = 1 \ \forall n$$

<u>Вопрос</u>: Существует ли функция $e \in L_1(-\pi,\pi)$ для которой коэф. Фурье $e_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Если $e \in L_2$ то это <u>нет</u>! т.к. $|e_n| \to 0$.

То же верно и для функций из L_1 $|e_n| \to 0$, т.е. таких функций нет (Лемма Римана).

На самом деле такая „единица" есть!
Однако в более широком классе объектов, чем даже функции!
В классе обобщенных функций.
δ-функция Дирака:



$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 2k\pi \\ 0, & x \neq 2k\pi \end{cases} \qquad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x)\,dx = 2\pi}$$

В классе обобщенных функций допускаются интегралы с функциями из $C[-\pi,\pi]$,

т.е. $$\boxed{(\delta, f) = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) f(x)\,dx = f(0)\,2\pi}$$

тогда $$\delta * f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(y) f(\underbrace{x-y}_{x-y=0})\,dy = \frac{f(x)}{2\pi}\,2\pi = f(x)$$

т.е. $\delta * f(x) = f(x)$, т.е. $\boxed{\underset{\text{единица}}{e(x)} = \delta(x)}$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases} \quad (2\pi\text{-периодич.})$$

$$\varphi_\varepsilon(x) \longrightarrow \delta(x) \quad (\varepsilon \to 0)$$

В пространстве обобщенных функций

Покажем, что $\varphi_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ $(\varepsilon \to 0)$ в классе обобщенных функций, т.е. $\forall f \in C[-\pi,\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \varphi_\varepsilon(x)\,dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\delta(x)\,dx = 2\pi f(0)$$

Действительно

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\varphi_\varepsilon(x)\,dx = \frac{\pi}{\varepsilon}\cdot\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,dx$$

Пусть $f(x) \in C[-\pi,\pi]$. Тогда по теореме о среднем значении: $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists\ y_\varepsilon \in (-\varepsilon, \varepsilon):\ \frac{1}{2\varepsilon}\cdot\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,dx = f(y_\varepsilon)$$

т.е. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\varphi_\varepsilon(x)\,dx = 2\pi f(y_\varepsilon) \to 2\pi f(0)$

при $\varepsilon \to 0$ $f(y_\varepsilon) \to 2\pi f(0)$

$$\| \qquad\qquad \| $$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x)\cdot f(x)\,dx$$

Значит $\varphi_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ $(\varepsilon \to 0)$ в классе обобщенных функций

Найдём коэффициенты Фурье $\varphi_\varepsilon(x)$.

$$c_n^\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_\varepsilon(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\pi}{\varepsilon}\cdot e^{-inx}dx =$$

$(n\neq 0)$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\cdot\left.\frac{e^{-inx}}{-in}\right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon in}\left(\frac{e^{-in\varepsilon}-e^{in\varepsilon}}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{1}{n\varepsilon^2}\cdot\frac{e^{in\varepsilon}-e^{-in\varepsilon}}{2i} = \frac{\sin n\varepsilon}{n\cdot\varepsilon^2},$$

$$\boxed{c_0^\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_\varepsilon dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{\varepsilon}\cdot 2\varepsilon = 1}$$

$$\varphi_n^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\sin n\varepsilon}{n}\cdot e^{inx}+1$$

$$\|\varphi_n^\varepsilon\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(x)|^2dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^2dx = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^2\cdot 2\varepsilon = \frac{2\pi^2}{\varepsilon} \to \infty.$$

„Коэффициенты Фурье" δ-функции

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot e^{in\cdot 0} = 1.$$

Значит: $\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$ – ряд

расходится в обычном смысле, но сходится в смысле обобщённых функций,

т.е. $S_N(x) = \sum_{|n|\le N} e^{inx} \longrightarrow \delta(x),\ N\to\infty).$

Теорема: $\forall f \in C[-\pi, \pi]$, $\exists f'_л(0), \exists f'_п(0)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \cdot f(x)\, dx \to 2\pi f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) f(x)\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \cdot f(x)\, dx = \sum_{|n| \le N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{inx}\, dx =$$

$$= 2\pi \sum_{|n| \le N} c_{-n} = 2\pi \sum_{|n| \le N} c_n =$$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot e^{-inx} \Rightarrow f(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n$$

Следовательно $\sum_{|n| \le N} c_n \to f(0)$ $\left(\begin{matrix} f \in C(0) \\ \exists f'_л, f'_п \end{matrix} \right)$

т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \cdot f(x)\, dx \to 2\pi f(0)$, $N \to \infty$)

т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) f(x) dx \to \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) f(x)\, dx$

Значит: $S_N(x) \to \delta(x)$

$S_N(x) = \sum_{|n| \le N} e^{inx}$ — хорошая, потому что это ядро Дирихле!

формула: $S_N(x) = \dfrac{\sin \frac{2N+1}{2} x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

График ядра Дирихле: