№1

а) собственные значения $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}$, $k = 1, 2, \ldots$

собств. ф-ии $Y_k(x) = \sin(\mu_k x)$, $\mu_k = k\pi/l$

б) $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}$

$Y_k(x) = \cos(\mu_k x)$ $k = 0, 1, 2, \ldots$
$\mu_k = k\pi/l$

с) Если $\lambda > 0$

- общее решение $Y(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}$
- с учётом $y(0) = y'(l) = 0$ имеем: (1)

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}l} - c_2\sqrt{\lambda}\, e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_1\sqrt{\lambda}\left(e^{\sqrt{\lambda}l} + e^{-\sqrt{\lambda}l}\right) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

Если $\lambda = 0$

- общее решение $Y(x) = c_1 + c_2 x$
- с учётом (1) $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ $\Rightarrow Y(x) \equiv 0$.

Если $\lambda < 0$ $\lambda = -\mu^2$

- общ. решение $Y(x) = c_1 \cdot \sin(\mu x) + c_2\cos(\mu x)$
- с учётом (1) $\begin{cases} c_2 = 0 \\ \mu c_1 \cos(\mu l) = 0 \end{cases}$

Потребуем $\cos(\mu l) = 0$, т.е. $\mu = \frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi}{l}$, $k = 0, 1, \ldots$

Собств. значения $\lambda_k = -\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)^2\pi^2}{l^2}$

Собств. ф-ии $Y_k(x) = \sin(\mu_k x)$, где $\mu_k = \frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi}{l}$, $k = 0, 1, \ldots$

d) $y'(0) = y(l) = 0$ (2)

Если $\lambda > 0$ $Y(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x}$

с учётом (2): $\begin{cases} c_1\sqrt{\lambda} - c_2\sqrt{\lambda} = 0 \\ c_1\cdot e^{\sqrt{\lambda}\ell} + c_2\cdot e^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_1(e^{\sqrt{\lambda}\ell} + e^{-\sqrt{\lambda}\ell}) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

<u>Если $\lambda = 0$</u> $\quad Y(x) = c_1 + c_2 x$

с учётом (2): $\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$

<u>Если $\lambda < 0$</u> $\quad Y(x) = c_1\sin(\mu x) + c_2\cdot\cos\mu x$

с учётом (2): $\begin{cases} \mu c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ c_2\cos(\mu\ell) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \mu = \frac{(\frac{1}{2}+k)\pi}{\ell} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Собств. значения $\quad \lambda_k = -\frac{(\frac{1}{2}+k)^2\pi^2}{\ell^2} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Собств. ф-ии: $\quad Y_k(x) = \cos(\mu_k x) \quad \mu_k = \frac{(\frac{1}{2}+k)\pi}{\ell}$

№3

а) $y = x$

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(kx)\,dx = \frac{-2}{k\pi}\int_0^\pi x\,d(\cos(kx)) = \frac{-2}{k\pi}\,x\cos(kx)\Big|_0^\pi + \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(kx)$$

б) $y = 1$

в) $y = x(2\pi - x)$

$$\|Y_k\|^2 = \int_0^\pi \sin^2\left(\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\right)dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos((1+2k)x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4k}\sin((1+k\cdot 2)x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet\ c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(2\pi - x)\sin\left(\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\right)dx = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\pi x\sin\left(\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\right)dx}_{I_1} -$$

$$- \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin\left(\left(\tfrac{1}{2}+k\right)x\right)dx}_{I_2}$$

• $I_1 = -\frac{4}{(\frac{1}{2}+k)} \int\limits_0^\pi x \, d\left(\cos\left((\tfrac{1}{2}+k)x\right)\right) = -\frac{4}{\frac{1}{2}+k} \underbrace{x \cos(\tfrac{1}{2}+k)x \Big|_0^\pi}_{\overset{\parallel}{0}} +$

$+ \frac{4}{\frac{1}{2}+k} \int\limits_0^\pi \cos(\tfrac{1}{2}+k)x \, dx = \frac{4}{(\frac{1}{2}+k)^2} \sin(\tfrac{1}{2}+k)x \Big|_0^\pi = \frac{4}{(\frac{1}{2}+k)^2}(-1)^k = \frac{16(-1)^k}{(2k+1)^2}$

• $I_2 = -\frac{2}{(\frac{1}{2}+k)\pi} \int\limits_0^\pi x^2 \, d\left(\cos(\tfrac{1}{2}+k)x\right) =$

$= \underbrace{-\frac{2}{\pi(\frac{1}{2}+k)} x^2 \cos(\tfrac{1}{2}+k)x \Big|_0^\pi}_{0} + \frac{2 \cdot 2}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2} \int\limits_0^\pi x \, d\left(\sin(\tfrac{1}{2}+k)x\right) =$

$= \frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2} x \cdot \sin(\tfrac{1}{2}+k)x \Big|_0^\pi - \frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2} \int\limits_0^\pi \sin(\tfrac{1}{2}+k)x \, dx =$

$= \frac{4\pi}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2}(-1)^n + \frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^3} \cos(\tfrac{1}{2}+k)x \Big|_0^\pi = \frac{16\pi(2k+1)(-1)^n - 32}{\pi(1+2k)^3}$

• $c_k = I_1 - I_2 = \frac{32}{\pi(2k+1)^3}$

$y \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{32}{\pi(2k+1)^3} \sin\left((\tfrac{1}{2}+k)x\right)$

2) $y = x^2 - \pi^2$

• $\| Y_k \|^2 = \int\limits_0^\pi \cos^2\left((\tfrac{1}{2}+k)x\right) dx = \int\limits_0^\pi \frac{1}{2} + \frac{\cos(1+2k)x}{2} \, dx =$

$= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2(1+2k)} \underbrace{\sin(1+2k)x \Big|_0^\pi}_{0} = \frac{\pi}{2}$

• $c_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi (x^2 - \pi^2) \cos(\tfrac{1}{2}+k)x \, dx = \frac{2}{\pi(\frac{1}{2}+k)} \int\limits_0^\pi x^2 \, d\left(\sin(\tfrac{1}{2}+k)x\right) - 2\pi \int\limits_0^\pi \cos(\tfrac{1}{2}+k)x \, dx =$

$= \frac{2}{\pi(\frac{1}{2}+k)} x^2 \sin(\tfrac{1}{2}+k)x \Big|_0^\pi + \frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2} \int\limits_0^\pi x \, d\left(\cos(\tfrac{1}{2}+k)x\right) - \frac{2\pi}{\frac{1}{2}+k} \sin(\tfrac{1}{2}+k)x \Big|_0^\pi =$

$$= \frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2}\, x\cdot\cos(\tfrac{1}{2}+k)x \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^2}\int_0^{\pi}\cos(\tfrac{1}{2}+k)x\,dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi(\frac{1}{2}+k)^3}\sin(\tfrac{1}{2}+k)x\Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(\frac{1}{2}+k)^3} = \frac{32(-1)^{k+1}}{\pi(1+2k)^3}.$$

$$y \simeq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{32(-1)^{k+1}}{\pi(1+2k)^3}\cos((\tfrac{1}{2}+k)x)$$

№2 Система b) – известная полная ортогон. система на $[0,\ell]$; $\|Y_0\|=\sqrt{\ell}$, $\|Y_k\|=\sqrt{\frac{\ell}{2}}$

Система a) – известная полная ортогон. система на $[0,\ell]$; $\|Y_k\|=\sqrt{\frac{\ell}{2}}$

a) · ортогональность

$m\neq n$ c) $$\int_0^{\ell}\sin\frac{(\frac{1}{2}+m)\pi x}{\ell}\cdot\sin\frac{(\frac{1}{2}+n)\pi x}{\ell}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{\ell} - \cos\frac{(1+m+n)\pi x}{\ell}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{(m-n)\pi x}{\ell}}{\frac{(m-n)\pi}{\ell}}\Big|_0^{\ell} - \frac{\sin\frac{(1+m+n)\pi x}{\ell}}{\frac{(1+m+n)\pi}{\ell}}\Big|_0^{\ell}\right] = 0$$

$m\neq n$ d) $$\int_0^{\ell}\cos\frac{(\frac{1}{2}+m)\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{(\frac{1}{2}+n)\pi x}{\ell}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{\ell} + \cos\frac{(1+m+n)\pi x}{\ell}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{(m-n)\pi x}{\ell}}{\frac{(m-n)\pi}{\ell}}\Big|_0^{\ell} + \frac{\sin\frac{(1+m+n)\pi x}{\ell}}{\frac{(1+m+n)\pi}{\ell}}\Big|_0^{\ell}\right] = 0$$

Ортогональность системы c) видна ещё из того, что ф-ии

$$Y_k = \sin\frac{(\frac{1}{2}+k)\pi x}{\ell} = \sin\frac{(1+2k)\pi x}{2\ell} \text{ — часть системы } \sin\frac{k\pi x}{2\ell},$$

при этом $Y_k(x) = Y_k(2\ell - x)$; следовательно,

$$\int_0^{2\ell} Y_m(x)\cdot Y_n(x)\,dx = 2\int_0^{\ell} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx$$

$$\begin{cases} 0, & \text{если } m\neq n \\ \ell, & \text{если } m=n\end{cases} \Rightarrow \quad Y_m \perp Y_n \text{ на } [0,\ell] \quad (m\neq n) \text{ и } \|Y_k\| = \sqrt{\frac{\ell}{2}} \text{ на } [0,\ell].$$

Аналогично для системы d):

$$Y_k = \cos\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{\ell} = \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2\ell} \text{ — часть системы } \cos\frac{k\pi x}{2\ell},$$

при этом $Y_k(x) = -Y_k(2\ell-x)$; следовательно,

$$\int_0^{2\ell} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx = \int_0^{\ell} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx - \int_{\ell}^{0} Y_m(2\ell-y)\,Y_n(2\ell-y)\,d(2\ell-y) =$$

$$= \int_0^{\ell} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx + \int_0^{\ell} Y_m(y)\,Y_n(y)\,dy = 2\int_0^{\ell} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx,$$

и поскольку $\displaystyle\int_0^{2\ell} Y_m(x)\,Y_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m\neq n \\ \ell, & \text{если } m=n>0 \end{cases}$, то

на $[0,\ell]$ $Y_m \perp Y_n$ и $\|Y_k\| = \sqrt{\dfrac{\ell}{2}}$.

• <u>нули</u>

a) $\sin\dfrac{k\pi x}{\ell} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{m}{k}\ell$, $m\in\mathbb{Z}$; на $(0,\ell)$ $(k-1)$ нулей

b) $\cos\dfrac{k\pi x}{\ell} = 0 \Rightarrow \dfrac{(1+2m)\ell}{2k}$, $m\in\mathbb{Z}$; на $(0,\ell)$ k нулей

c) $\sin\dfrac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{\ell} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2m\ell}{1+2k}$, $m\in\mathbb{Z}$; на $(0,\ell)$ k нулей

d) $\cos\dfrac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{\ell} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1+2m}{1+2k}\ell$, $m\in\mathbb{Z}$; на $(0,\ell)$ k нулей

б) <u>Полнота</u>

c) Для полноты системы c) достаточно, чтобы не существовало ненулевого элемента из $L_2[0,\ell]$, ортогонального всем элементам системы c).

Пусть $f(x)\in L_2[0,\ell]$ и $\displaystyle\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{\ell}\,dx = 0 \quad \forall k$ (3)

Наша цель — показать, что $f(x)$ эквивалентна 0.

Определим $\tilde{f}$ на $[0,2l]$:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x \in [0,l] \\ f(2l-x), & x \in (l,2l] \end{cases}$$

Найдём коэффициенты Фурье $\tilde{f}(x)$ на $[0,2l]$ по системе $\sin\frac{k\pi x}{2l}$

• <u>для чётных синусов</u>

$$l \cdot C_{2k} = \int_0^{2l} \tilde{f}(x)\sin\frac{2k\pi x}{2l}\,dx = \int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \underbrace{\int_l^{2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx}_{\text{поскольку}} = 0$$

$x = 2l - m$

$$-\int_l^0 f(2l-m)\sin\left(2k\pi - \frac{k\pi m}{l}\right)dm = -\int_0^l f(m)\sin\left(\frac{k\pi m}{l}\right)dm$$

• <u>для нечётных</u>

$$l \cdot C_{2k+1} = \int_0^l f(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} + \int_l^0 f(2l-m)\sin\left((2k+1)\pi - \frac{(2k+1)\pi m}{2l}\right)d(2l-m)$$

$$= \int_0^l f(x)\sin\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{l}dx + \int_0^l f(m)\sin\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi m}{l}\,dm = 0$$

(Каждое слагаемое равно нулю по предположению (3))

Поскольку система $\left\{\sin\frac{k\pi x}{2l}\right\}$ полна в $L_2[0,2l]$, то $\tilde{f} = 0$

$\Rightarrow \tilde{f}\big|_{[0,l]}$ тоже эквивалентна нулю.

d) Аналогично.

Предполагаем $f(x) \in L_2[0,l]$ и $\int_0^l f(x)\cos\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{l}dx = 0 \quad \forall k$

Определим $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,l] \\ -f(2l-x), & x \in (l,2l] \end{cases}$

• <u>$l \cdot C_{2k}$</u> $= \int_0^l f(x)\cos\frac{2k\pi x}{2l}\,dx + \int_l^0 f(2l-m)\cos\left(2k\pi - \frac{k\pi m}{l}\right)d(2l-m) =$

$$= \int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx - \int_0^l f(m)\cos\frac{k\pi m}{l}\,dm = 0$$

$$\underline{\cdot\, l\cdot C_{2k+1}} = \int_0^l f(x)\cos\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi x}{l}\,dx + \int_l^0 f(2l-m)\cos\left[(1+2k)\pi - \frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi m}{l}\right]d(2l-m)$$

$$= 0 + \underbrace{\int_0^l f(m)\cos\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi m}{l}\,dm}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{по предположению.}} = 0.$$

№4.

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u$

Разделяем переменные $u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$, тогда

$X''Y+Y''X=\lambda X\cdot Y$ или $\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=\lambda$ ← умеем решать

$X(x)=\sin(\mu_k x)$ $\quad \mu_k=\frac{k\pi}{a}$ $\quad k=1,2,\dots$

$Y(y)=\sin(\xi_l y)$ $\quad \xi_l=\frac{l\pi}{b}$ $\quad l=1,2,\dots$

Собственные ф-ции $u_{kl}(x,y)=\sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right)\left(\sin\frac{\pi l}{b}y\right)$

собственные значения $\lambda=-\frac{\pi^2k^2}{a^2}-\frac{\pi^2l^2}{b^2}$

б) Если $a=b=1$, то $\lambda=-\pi^2(k^2+l^2)$.

Количество повторений одного и того же значения λ — количество собственных ф-ций для данного λ, т.е. количество способов представить n как упорядоченную сумму двух квадратов натуральных чисел. (обозначим $S(n)$).

Разложим n в произведение простых $n=2^e p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r}q_1^{f_1}\cdots q_s^{f_s}$,

$p_i\equiv 1 \pmod 4$

$q_i\equiv 3 \pmod 4$

тогда $S(n)=(e_1+1)(e_2+1)\dots(e_r+1)$, при этом $f_i\equiv 0 \pmod 2$,

иначе $S(n)=0$;

т.е. многократные собств. значения возможны.