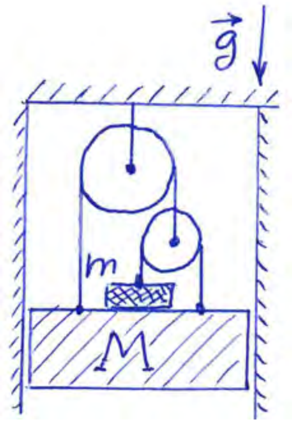
1 2021 Вариант 1

Задача 1.1. Кабина лифта массы M может без трения двигаться в вертикальном направлении в лифтовой шахте. Кабина соединена с потолком шахты системой блоков (см. рис. 1). Груз m может свободно двигаться в вертикальном направлении. Все нити невесомы, нерастяжимы и всегда натянуты (не сминаются). Массой блоков и трением в осях можно пренебречь.

(а) При каких значениях масс m и M кабина лифта может находиться в состоянии покоя?

(б) Найдите величину силы реакции N, действующей на груз со стороны кабины лифта, при $m = M/2$.



Доказательство.

(а)

$$\begin{aligned}
&\ddot{x_1} = \ddot{x_2} = 0 \\
&mg = T + N \\
&Mg = 3T - N \\
&(M + m)\, g = 4T \Rightarrow M = \frac{4T}{g} - m
\end{aligned}$$

Груз не двигается при $\frac{(M+m)g}{4} < mg$ то есть $M < 3m$

(б)

$$\begin{aligned}
&\frac{M}{2}\ddot{x_1} = \frac{M}{2}g - T - N \\
&M\ddot{x_2} = Mg - 3T + N \\
&\begin{cases} \frac{Mx}{2} = \frac{M}{2}g - T - N & \ddot{x_1} = \ddot{x_2} = x \\ Mx = Mg - 3T + N \end{cases} \\
&\Rightarrow 3N = T \\
&N = \frac{T}{3}
\end{aligned}$$

□

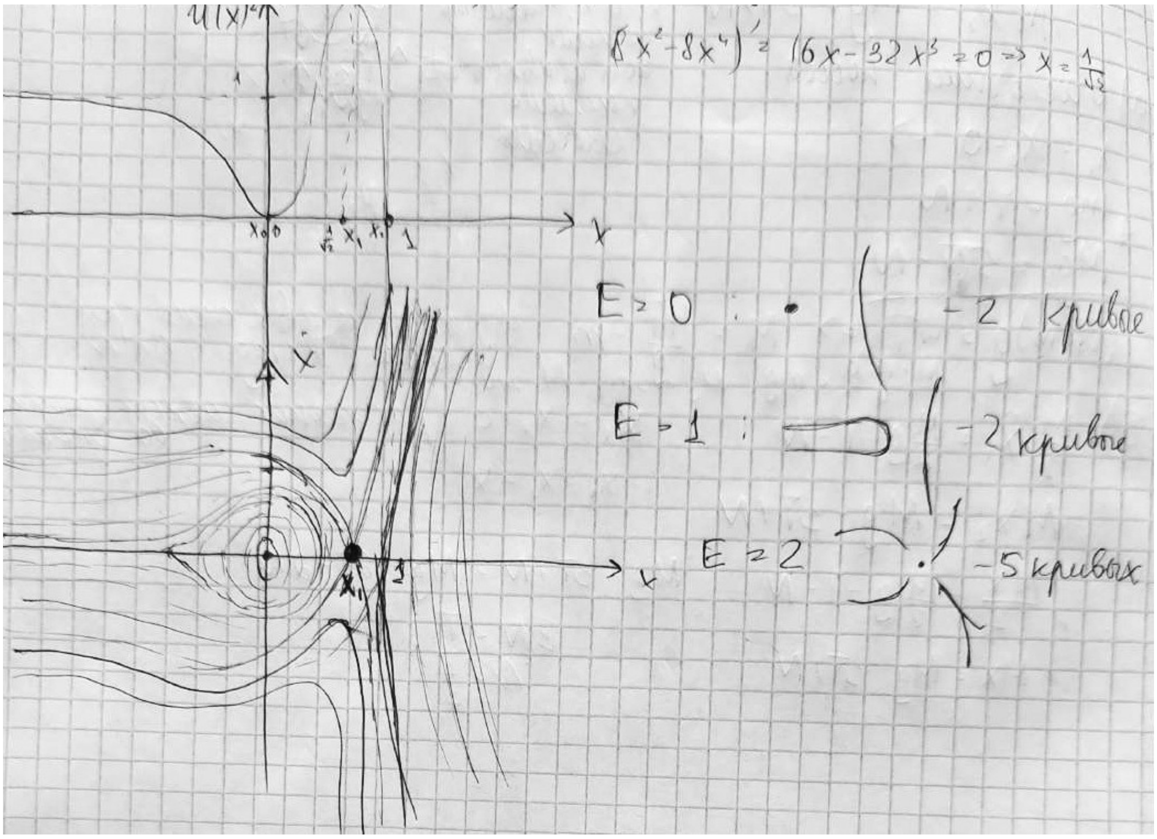
Задача 1.2. Материальная точка движется вдоль прямой Ox в поле потенциальной силы, потенциальная энергия $U(x)$ которой дается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} 1 - e^{-8x^2} & x \leq 0 \\ 8x^2\left(1 - x^2\right) & x > 0 \end{cases}$$

(а) Нарисуйте качественный фазовый портрет этой одномерной механической системы.

(б) Укажите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям полной механической энергии $E = 0, E = 1$ и $E = 2$.

Доказательство. (а)



(б)

E	0	1	2
Num	2	2	5

□

Задача 1.3. Силовое поле $\vec{F}$ задано в декартовых прямоугольных координатах (x, y, z) пространства $\mathbb{R}^3$ следующими выражениями своих компонент:

$$F_x = 2xy + y, \quad F_y = -2\alpha yz + x^2 + x, \quad F_z = \alpha z - y^2$$

где $\alpha-$ вещественный числовой параметр.

(а) Найдите работу силы $\vec{F}$ вдоль отрезка кривой, заданной уравнениями

$$x = y, \quad z = y^2$$

от начальной точки $(0, 0, 0)$ до конечной точки $(1, 1, 1)$.

(б) Определите значение параметра α, при котором сила $\vec{F}$ потенциальна, и найдите выражение для соответствующей потенциальной энергии $U(x, y, z)$.

Доказательство.

(а)

$$
\begin{aligned}
&d_{\vec{r}} = (dt, dt, 2tdt) \\
&A = \int\limits_0^1 \left((2xy + y)\, dt + \left(-2\alpha yz + x^2 + x\right) dt + 2t \left(\alpha z - y^2\right) dt\right) \\
&= \int\limits_0^1 \left(2t^2 + t^2 - 2\alpha t^3 + t^2 + t + 2t^3\alpha - 2t^3\right) dt \\
&= \int\limits_0^1 \left(3t^2 + 2t - 2t^3\right) dt = t^3 + t^2 - \frac{t^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(б)

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \partial_x F_y = \partial_y F_x \\ \partial_y F_z = \partial_z F_y \\ \partial_z F_x = \partial_x F_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 2x + 1 \\ -2y = -2\alpha y \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1 \\
&\partial_x U = -F_x = -2xy - y \Leftrightarrow U = -x^2 y - yx + c_1(y, z) \\
&\partial_y U = -F_y = 2yz - x^2 - x \Leftrightarrow -x^2 - x + c'_{1y} = 2yz - x^2 - x \qquad c_1 = y^2 z + c_2(z) \\
&\partial_z U = -F_z = y^2 - z \Leftrightarrow y^2 + c'_2 = y^2 - z \qquad c'_2 = -z \quad c_2 = -\frac{z^2}{2} + c \\
&U(x, y, z) = -x^2 y - yx + y^2 z - \frac{z^2}{2} + c
\end{aligned}
$$

□

Задача 1.4. Компоненты силы $\vec{F}$ заданы в полярных координатах (ρ, ϕ) пространства $\mathbb{R}^2$ следующими выражениями:

$$F_\rho = \rho f(\phi), \quad F_\phi = g(\rho) \cos^3 \phi$$

где $f(\phi)$ и $g(\rho)$ некоторые дифференцируемые функции своих аргументов.

(а) Определите наиболее общий вид функций $f(\phi)$ и $g(\rho)$, при которых сила $\vec{F}$ потенциальна и не имеет сингулярности в начале координат $\rho = 0$.

(б) Найдите вид соответствующей потенциальной энергии $U(\rho, \phi)$.

Доказательство.

(а)

$$
\begin{aligned}
&\partial_\phi F_p = \partial_\rho (\rho F_\phi) \\
&\partial_\phi f(\phi) = \cos^3 \phi g(\rho) + \partial_\rho y \rho \cos^3 \phi = \cos^3 \phi \left(g + \frac{\partial g}{\partial \rho}\rho\right) \\
&\frac{df}{d\phi} = k \cos^3 \phi \qquad \frac{dg}{d\rho} p = k \\
&f(\phi) = k \int \cos^3 \phi d\phi = k \left(\sin \phi - \frac{\sin^3 \phi}{3} + c\right) \\
&g(\rho)\rho = k \int 1 d\rho = kp + c \Rightarrow g = k + \frac{c}{p} \\
&F_\rho = k \left(\sin \phi - \frac{\sin^3 \phi}{3} + c_1\right) \rho, \qquad F_\phi = \left(k + \frac{c_2}{p}\right) \cos^3 \phi \qquad c_2 = 0
\end{aligned}
$$

(б)

$$
\begin{aligned}
&\nabla = \left(\partial\rho, \frac{1}{\rho}\partial\phi\right)\\
&-\partial_\rho U = K\left(\sin\phi - \frac{\sin^3\phi}{3} + c_1\right)\rho\\
&U = -k\left(\sin\phi - \frac{\sin^3\phi}{3} + c_1\right)\frac{\rho^2}{2} - c(\phi)\\
&-\frac{1}{\rho}\partial_\phi U = -\frac{1}{\rho}\left(\left(-k\cos\phi - \frac{\sin^2\phi\cos\phi}{3}\right)f^2 + c(\phi)\right) = k\cos^3\phi + \frac{c_2}{\rho}\cos^3\phi
\end{aligned}
$$

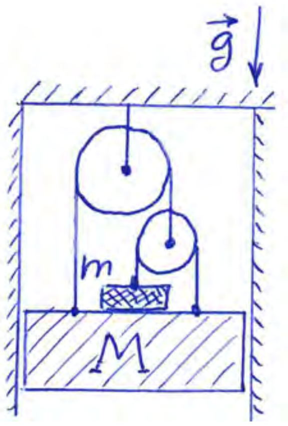
$\square$

2 2021 Вариант 2

Задача 2.1. Кабина лифта массы M может без трения двигаться в вертикальном направлении в лифтовой шахте. Кабина соединена с потолком шахты системой блоков (см. рис. 1). Груз m может свободно двигаться в вертикальном направлении. Все нити невесомы, нерастяжимы и всегда натянуты (не сминаются). Массой блоков и трением в осях можно пренебречь.

(а) При каких значениях масс m и M кабина лифта может находиться в состоянии покоя?

(б) Найдите величину силы реакции N, действующей на груз со стороны кабины лифта, при $m = M$.



Доказательство.

(а)

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$$
$$mg = T + N$$
$$Mg = 3T - N$$
$$(M + m)\, g = 4T \Rightarrow M = \frac{4T}{g} - m$$

Груз не двигается при $\frac{(M+m)g}{4} < mg$ то есть $M < 3m$

(б)

$$m = M \qquad \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$$
$$\begin{cases} m\ddot{x}_2 = mg - N - T \\ m\ddot{x}_1 = mg + N - 3T \end{cases}$$
$$-2N + 2T = 0 \Rightarrow N = T$$

□

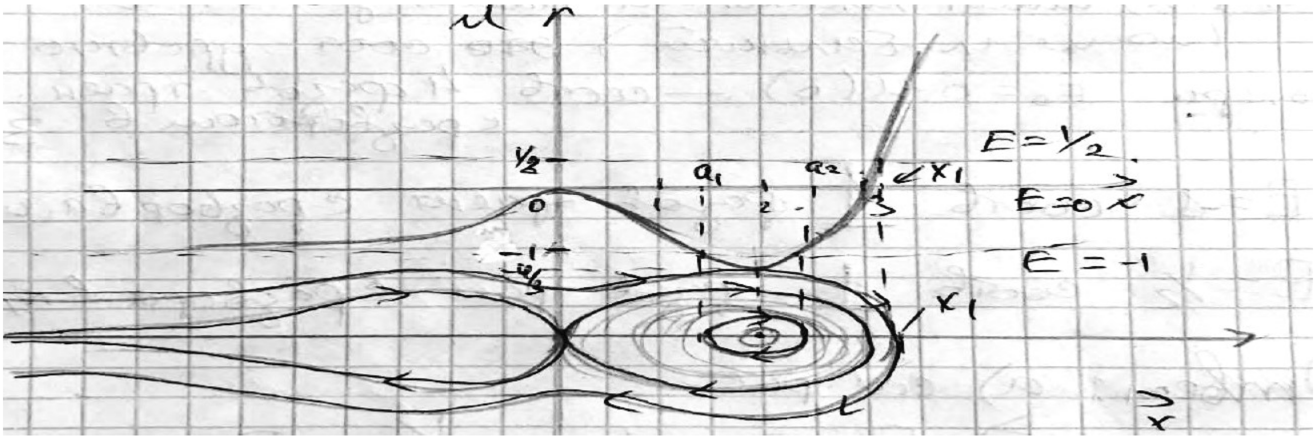
Задача 2.2. Материальная точка движется вдоль прямой Ox в поле потенциальной силы, потенциальная энергия $U(x)$ которой дается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} e^{-x^2} - 1 & x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x^2\,(x - 3) & x > 0 \end{cases}$$

(а) Нарисуйте качественный фазовый портрет этой одномерной механической системы.

(б) Укажите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям полной механической энергии $E = -1, E = 1/2$ и $E = 0$.

Доказательство. (а)



(б)

E	-1	1/2	0
Num	1	1	4

□

Задача 2.3. Силовое поле $\vec{F}$ задано в декартовых прямоугольных координатах (x, y, z) пространства $\mathbb{R}^3$ следующими выражениями своих компонент:

$$F_x = yz - y^2 + \alpha z, \quad F_y = xz - 2\alpha xy, \quad F_z = xy + \alpha x + z$$

где $\alpha-$ вещественный числовой параметр.

(а) Найдите работу силы $\vec{F}$ вдоль отрезка кривой, заданной уравнениями

$$x = y^2, \quad z = y$$

от начальной точки $(0, 0, 0)$ до конечной точки $(1, 1, 1)$.

(б) Определите значение параметра α, при котором сила $\vec{F}$ потенциальна, и найдите выражение для соответствующей потенциальной энергии $U(x, y, z)$.

Доказательство.

(а)

$$d_{\vec{r}} = (2tdt, dt, dt)$$

$$A = \int\limits_0^1 \left(2t\left(yz - y^2 + \alpha z\right)dt + (xz - 2\alpha xy)\,dt + (xy + \alpha x + z)\,dt\right)$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2t\left(t^2 - t^2 + \alpha t\right) + \left(t^3 - 2\alpha t^3\right) + \left(t^3 + \alpha t^2 + t\right)\right)dt$$

$$= \int\limits_0^1 \left(3\alpha t^2 + 2\,(1-\alpha)\,t^3 + t\right)dt = \alpha t^3 + \frac{(1-\alpha)\,t^4}{2} + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \alpha + \frac{(1-\alpha)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2+\alpha}{2}$$

(б)

$$\begin{cases} \partial_x F_y = \partial_y F_x \\ \partial_y F_z = \partial_z F_y \\ \partial_z F_x = \partial_x F_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2\alpha y = z - 2y \\ y + \alpha = y + \alpha \\ x = x \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$dU = -\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = -\left(yz - y^2 + z\right)dx - (xz - 2xy)\,dy - (xy + x + z)\,dz = -d\left(yzx - y^2x + zx + \frac{z^2}{2}\right)$$

$$U = -xyz + y^2x - zx - \frac{z^2}{2} + c$$

□

Задача 2.4. Компоненты силы $\vec{F}$ заданы в полярных координатах (ρ, ϕ) пространства $\mathbb{R}^2$ следующими выражениями:

$$F_\rho = \rho(\rho+1)f(\phi), \quad F_\phi = g(\rho)\cos\phi\sin^3\phi$$

где $f(\phi)$ и $g(\rho)$ некоторые дифференцируемые функции своих аргументов.

(а) Определите наиболее общий вид функций $f(\phi)$ и $g(\rho)$, при которых сила $\vec{F}$ потенциальна и не имеет сингулярности в начале координат $\rho = 0$.

(б) Найдите вид соответствующей потенциальной энергии $U(\rho, \phi)$.

Доказательство.

(а)

$$\begin{aligned}
&\rho(\rho+1)\, f'(\phi) = \partial_\phi F_p = \partial_\rho(\rho F_\phi) = \cos\phi\sin^3\phi\,(g(\rho) + \rho g'(\rho)) \\
&f'(\phi) = A\cos\phi\sin^3\phi \qquad A\cdot B = 1 \\
&\rho(\rho+1) = B\,(g(\rho) + \rho g'(\rho)) \\
&f(\phi) = A\left(\frac{\sin^4\phi}{4} + c_1\right) \\
&g(\rho) = \frac{c_2}{\rho} + \frac{\rho^2}{3B} + \frac{\rho}{2B} \\
&F_\rho = A\rho\,(\rho+1)\left(\frac{\sin^4\phi}{4} + c_1\right) \\
&F_\phi = \left(\frac{c_2}{\rho} + \frac{\rho^2 A}{3\rho} + \frac{\rho A}{2}\right)\cos\phi\sin^3\phi = A\rho\left(\frac{\rho}{3} + \frac{1}{2}\right)\cos\phi\sin^3\phi
\end{aligned}$$

(б)

$$\begin{aligned}
&-\partial_\rho U = F_\rho = A\rho\,(\rho+1)\left(\frac{\sin^4\phi}{4} + c_1\right) \\
&-U = A\left(\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^2}{2}\right)\left(\frac{\sin^4\phi}{4} + c_1\right) + f(\phi) \\
&A\left(\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^2}{2}\right)\sin^3\phi\cos\phi + f'(\phi) = -\partial_\phi U = \rho F_\phi = A\rho^2\left(\frac{\rho}{3} + \frac{1}{2}\right)\cos\phi\sin^3\phi \qquad f'(\phi) = 0 \\
&U = -A\rho^2\left(\frac{\rho}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sin^4\phi}{4} + c_1\right) + c_2
\end{aligned}$$

□

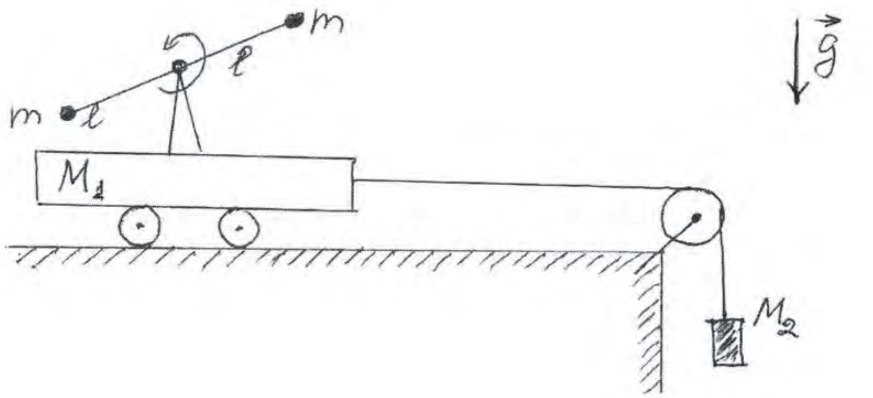
3 2022 (оба варианта)

Задача 3.1. Тележка массы M_1 может без трения двигаться по прямой по поверхности горизонтального стола. На тележке шарнирно закреплен жесткий невесомый стержень длины $2l$, который может свободно вращаться в вертикальной плоскости, параллельной линии движения тележки. Шарнирное крепление расположено в геометрическом центре стержня. На концах стержня закреплеты одишаковые точечные массы m. Невесомая нерастяжимая нить, перекинутая через невесомый блок, соединяет тележку с грузом M_2, который двигается вдоль вертикальной прямой. Система находится в однородном постоянном поле тяжести $\vec{g}$, направленном вертикально вниз (см. рисунок).

(а) Определите число степеней свободы системы.

(б) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте Лагранжиан системы.

(в) Выпишите формулы для всех сохраняющихся величин (интегралов движения), которые имеются в данной системе.



Доказательство.

(а) Заметим что система задается 2 координатами - углом стержня ϕ и положением тележки по оси Ox (или груза по оси Oy, в силу нерастяжимости нити эти два параметра эквивалентны).

(б), (в)

$$\begin{cases} T = M_2 g \\ N = 2mg \\ M_1 g = N_1 + N_2 \\ N_1 = N_2 \end{cases}$$

□

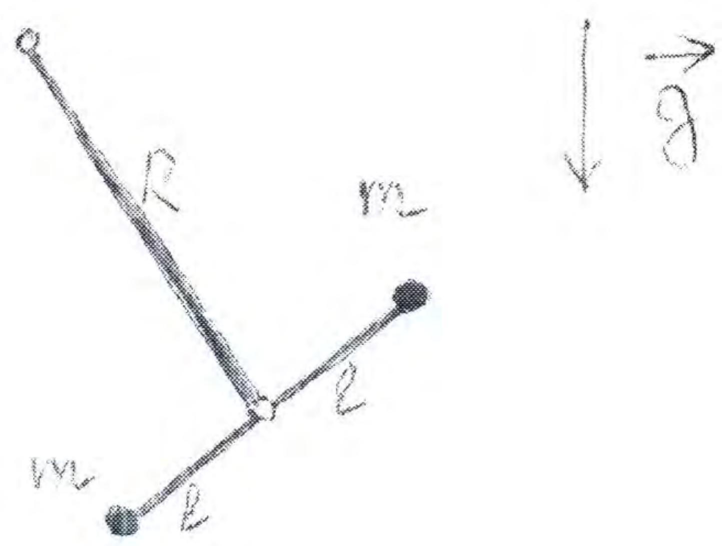
4 2023 (2 Вариант)

Задача 4.1. Один конец жесткого невесомого стержня длины R закреплен так, что он может свободно вращаться вокруг него в вертикальной плоскости. На другом его конце шарнирно закреплен второй жесткий невесомый стержень длины $2l$. Шарнирное крепление расположено посередине второго стержны, и он может вращаться вокрут крепления в той же вертикальной плоскости. На кощцах вгорого стержня закреплены одинаковые точечные массы m. Система находигся в однородном постоянном поде тяжести с ускорением свободного надения $\vec{g}$, направленным вертикально вниз (см. рисунок). Трение отсутствует.

(а) Определите число степеней свободы системы.

(б) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте Лагранжиан системы.

(в) Выпишите выражения для всех законов сохранения (интегралов движения), которые имеются в данной системе.



Доказательство.

(а) Система полностью задается 2 углами ϕ (один из стержней с Oy), θ (угол между стержнями)

(б) c - центр масс

$$T = T_c + T_o$$
$$T_c = \frac{m}{2} R\dot{\phi}^2$$
$$T_o = 2 \cdot \frac{m}{2} l\dot{\theta}^2$$
$$T = m(\frac{1}{2} R\dot{\phi}^2 + l\dot{\theta}^2) = \frac{m}{2}(R\dot{\phi}^2 + 2l\dot{\theta}^2)$$
$$U = -mgy_1 - mgy_2 = -mg(R\cos\phi - h) - mg(R\cos\phi + h) = -2mgR\cos\phi$$
$$L = T - U = \frac{m}{2}(R\dot{\phi}^2 - 2l\dot{\theta}^2) + 2mgR\cos\phi$$

(в) ЗСЭ т.к. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$T - U = \text{const} \Leftrightarrow \frac{m}{2}(R\dot{\phi}^2 - 2l\dot{\theta}^2) + 2mgR\cos\phi = \text{const}$$

ЗС обобщенного импульса для координаты θ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2ml\dot{\theta} = I = \text{const}$$

□