Лекция 8

- Теорема о нулях

$K \subset P$ Система решается в P

$\models ACF$ $\Rightarrow$ решается в K

Опр Алгебраическое мн-во $X \subset K^n$

$$X = \{ \bar{m} \in K^n \mid \bigwedge_{i=1}^{r} f_i(\bar{m}) = 0 \}$$

$f_i \in K[\bar{t}]$ $\quad \bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$

X_1, X_2 - алгебр

$\Rightarrow X_1 \cap X_2, X_1 \cup X_2$ - алгебр.

$f(\bar{m}) = 0 \vee g(\bar{m}) = 0 \leftrightarrow fg(\bar{m}) = 0$

Конструктивное - булева комб. алгебраич.

$(X_1 \setminus Y_1) \cup (X_2 \setminus Y_2) \cup \dots$

Опр $X \subset K^n$ определимо над K, если сущ. формула $A(\bar{b}, \bar{a})$

$$X = \{\bar{m} \in K^n \mid K \models A(\bar{k}, \bar{m})\}$$

$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$

$\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$

$\mathbb{C}$ $\{(m_1, m_2) \mid m_1 \cdot i + m_2^2 = 0$

Теорема 8.1 $K \models ACF$.

$X \subset K^n$ конструктивно $\iff$ X определимо над K

$\Rightarrow$ очев.

$\Leftarrow$ $X = \{\bar{m} \mid K \models A(\bar{k}, \bar{m})\} = \{\bar{m} \mid K \models B(\bar{k}, \bar{m})\}$

$ACF \vdash A \leftrightarrow B$ бескв.
$\quad$ B - атом $\Rightarrow$ B задает алг. мн-во

$0, 1, +, -, \cdot, =$

$t(\bar{b}, \bar{a}) = r(\bar{b}, \bar{a})$ $\qquad t^2 + t^2$

$t(\bar{b}, \bar{a}) - r(\bar{b}, \bar{a}) = 0$ $\qquad 2t^2$

$p(\bar{b}, \bar{a}) = 0 \qquad p \in \mathbb{Z}[\bar{t}, \bar{u}]$

$\mathbb{R} \qquad \{x \mid \exists y \ x = y^2\} \qquad \{x \mid x > 0\}$

Опр полином. отображение $F : K^n \to K^r$

$F = (F_1, \ldots, F_r)$

$F_r \in K[t_1, \ldots, t_n]$

Теорема 8.2 (Шевалле)

Полином. образ констр. м-ва над $K \models ACF$ — конструктивное м-во.

$$X = \{\bar{m} \mid K \models \Phi(\bar{m})\}$$

$$F = (F_1, \ldots, F_2)$$

$$F[X] = \{(F_1(\bar{m}), \ldots, F_2(\bar{m})) \mid \bar{m} \in X\} =$$

$$= \{\bar{d} \in K^2 \mid \exists \bar{m} \in X \, (d_1 = F_1(\bar{m}) \wedge \ldots \wedge d_2 = F_2(\bar{m}))\}$$

$$= \{\bar{d} \mid K \models \exists \bar{x} \, (\Phi(\bar{x}) \wedge d_1 = F_1(\bar{x}) \wedge \ldots \wedge d_2 = F_2(\bar{x}))\}$$

определимо

$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, -, =, <)$

Опр Полуалгебр. мн-во над $\mathbb{R}$

$$\left\{ \bar{m} \;\middle|\; \bigwedge_i f_i(\bar{m}) = 0 \wedge \bigwedge_j g_i(\bar{m}) > 0 \right\}$$

$f(\bar{m}) \neq g(\bar{m})$ $\qquad$ $f(\bar{m}) < g(\bar{m})$

<u>Теорема Тарского - Зайденберга</u> $Th(\mathbb{R})$ элиминирует кванторы

Примит. формула $\quad p_i(x,\bar a)>0 \quad p_i(x,\bar a)=0 \quad p_i \in \mathbb{Z}[t,\bar u]$

$$B(\bar a) = \exists x \bigwedge_i B_i(x,\bar a)$$

B_i - атом или отриц. атом.

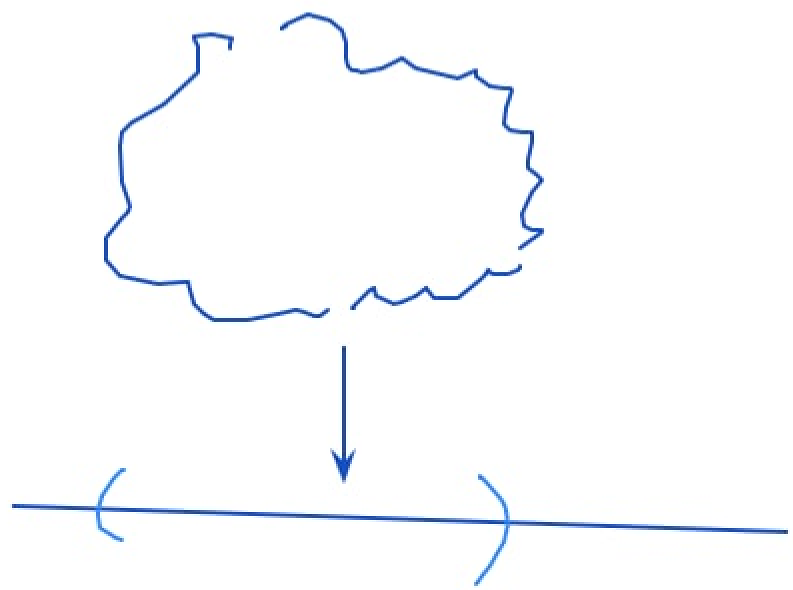
B_i задает полуалг. м-во

$$\mathbb{R} \models B(\bar a) \leftrightarrow B'(\bar a)$$

$B'(\bar a)$ — бесквант.

Проекция полуалг. м-ва

— полуалг.



$x\cdot y-1=0$

$x=y^2$

$p(x,\bar a)=0$

>0

$\mathbb{R} \models \exists x \quad ax^2+bx+c>0$

Верещагин, Шень (Ан. А. Мучник)

$\leftrightarrow \quad a>0 \lor a<0 \land D \geqslant 0 \lor a=0 \land \ldots$

Опр Знаковая диаграмма

$q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{R}[t]$

$\alpha_1 < \ldots < \alpha_m$ — корни $q_1 \ldots q_k$

$2m+1$

	$(-\infty,\alpha_1)$	α_1	(α_1,α_2)	$\alpha_2 \ldots$	α_m	$(\alpha_m,+\infty)$
q_1	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
	$\ldots$					
q_k						

$p_i(t, \bar{u}) = p_{i\bar{u}}(t)$ $\mathbb{Z}[\bar{u}][t] \cong \mathbb{Z}[\bar{u}, t]$

При разных знач $\bar{u}$ получаются полиномы из $\mathbb{R}[t]$

$\bar{c} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow p_{i\bar{c}}(t) \in \mathbb{R}[t]$

$\Delta_{\bar{c}}$ – знаковая диагр. $p_{1\bar{c}}, \dots, p_{k\bar{c}}$

Число столбцов $\leq 2N+1$, где $N = \sum \deg p_{i\bar{c}}$

$$\deg p_{i\bar{c}} = \deg_t p_i$$

$\mathbb{R}^m$ разбивается $\bigcup_{i=1}^{s} \Gamma_i$

внутри Γ_i значения $B(\bar{u})$ не мен.

$$\{\bar{c} \mid \mathbb{R} \models B(\bar{c})\} = \bigcup_i \{\Gamma_i \mid \Gamma_i \models B\}$$

Основная лемма Γ_i полуалгебр.

Преобразования м-ва полиномов

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}$

1. Удаление старшего члена

$c_{n-1} x^{n-1} + \ldots$

2. старший коэф. a_n

3. $\frac{\partial}{\partial x}$

4. $\widetilde{\mathrm{rest}}(f, g) = \mathrm{rest}(f a_n^M, g)$ a_n - старший коэф.

K-кольцо $\frac{f}{g}$ $\frac{f a_n^M}{g} = h + \frac{r}{g}$ $\deg r < \deg g$