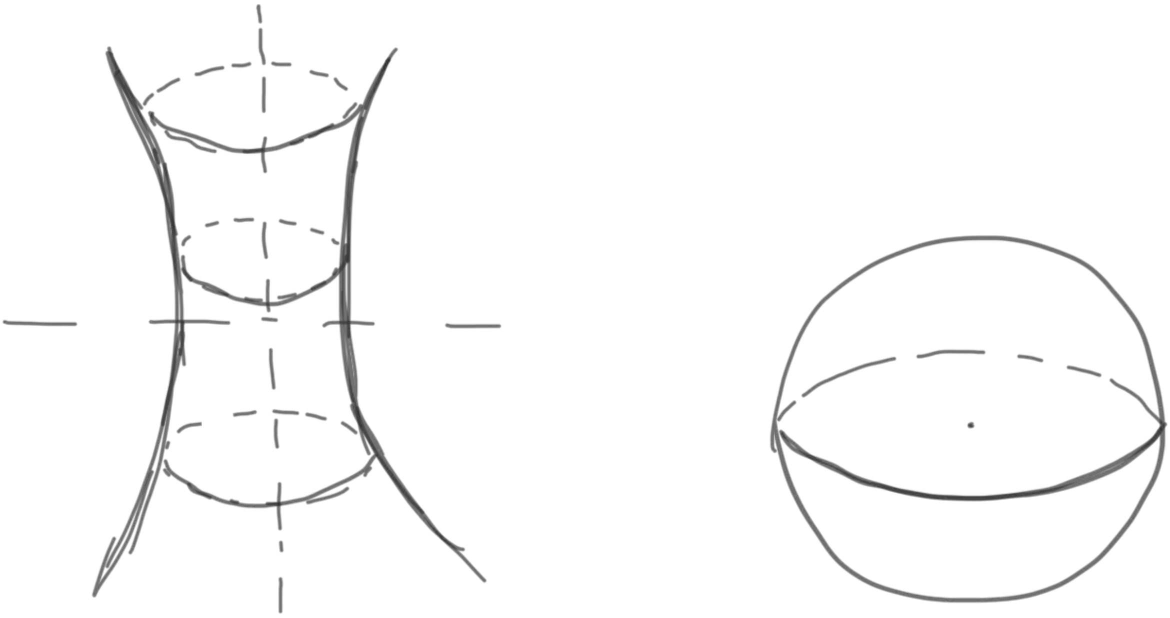
01.09.20

ММС Гладкие многообразия



1. Классическая дифференциальная геометрия
2. Анализ на многообразиях
3. Риманова геометрия

Гладкое многообразие

M – множество

Опр. Пусть $\mathcal{T}$ – сем-во подмножеств удовл. условиям

1) $\varnothing, M \in \mathcal{T}$

2) $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \tau$, $U_i \in \tau \ \forall i$

3) $\bigcap_{i=1} U_i \in \tau$, $U_i \in \tau \ \forall i$

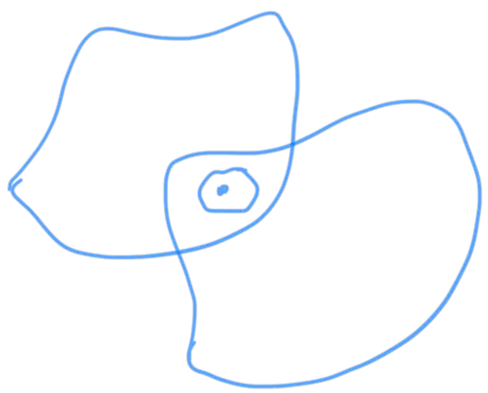
тогда τ наз. топологией на M

(M, τ), а U_i наз. открытыми мн-ми

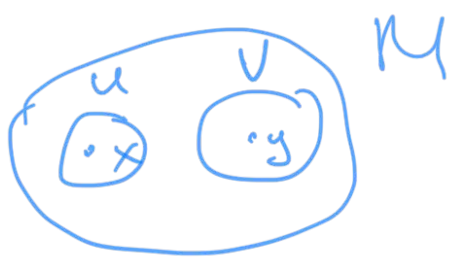
• пример

Топология в $\mathbb{R}^n$ сост. из мн-в $U \in \mathbb{R}^n$ т.ч. вместе с $\forall x \in U$

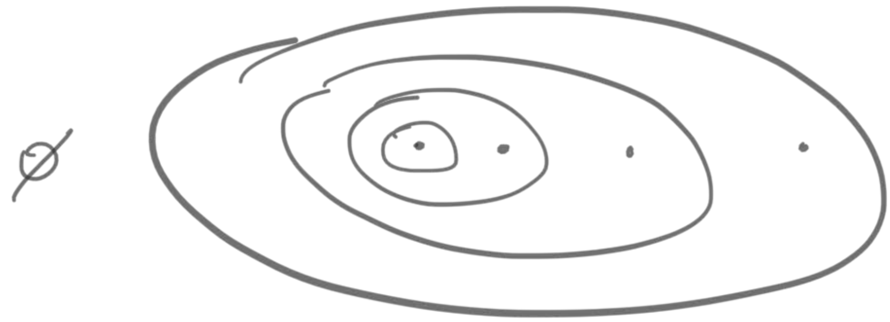
$\exists \varepsilon > 0 \quad \delta_\varepsilon(x) \subset U$



Опр. Топология τ на M наз. хаусдорфовой, если $\forall x, y \in M$ $\exists U, V \in \tau$, $x \in U$, $y \in V \mid U \cap V = \varnothing$



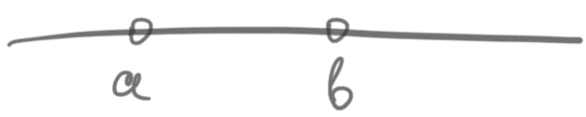
Не хаусдорфова топология:



Опр. Базой топологии на τ наз. сем-во подмн-в $\{U_\alpha\} \subset \tau$, что $\forall\, U \in \tau$ можно представить в виде $U = \bigcup U_\alpha$

Опр. Если в базе β топологии τ не более чем счётное мн-во эл-ов, то β наз. счётной базой

Пример: счётная база прямой:



$\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ (рацио-нальные)

несчётная база прямой:

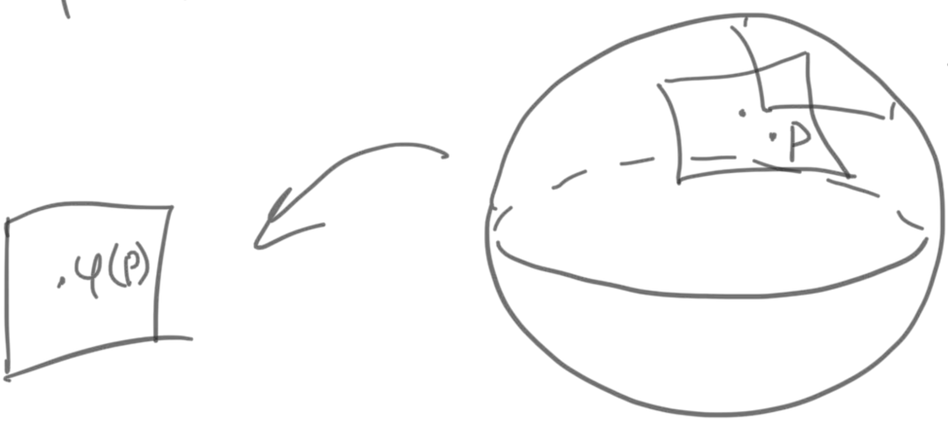
$(a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}$

Опр. Топологическое многообразие M называется хаусдорфово топ. пр-во (M, τ) со счётной базой, т.ч. $\forall p \in M$ $\exists U \in \tau$ $p \in U$ и гомеоморфизм на образ

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$$

$$\varphi : U \to \varphi(U)$$

с некот. откр. подмн-вом $\varphi(U)$ пр-ва $\mathbb{R}^n$



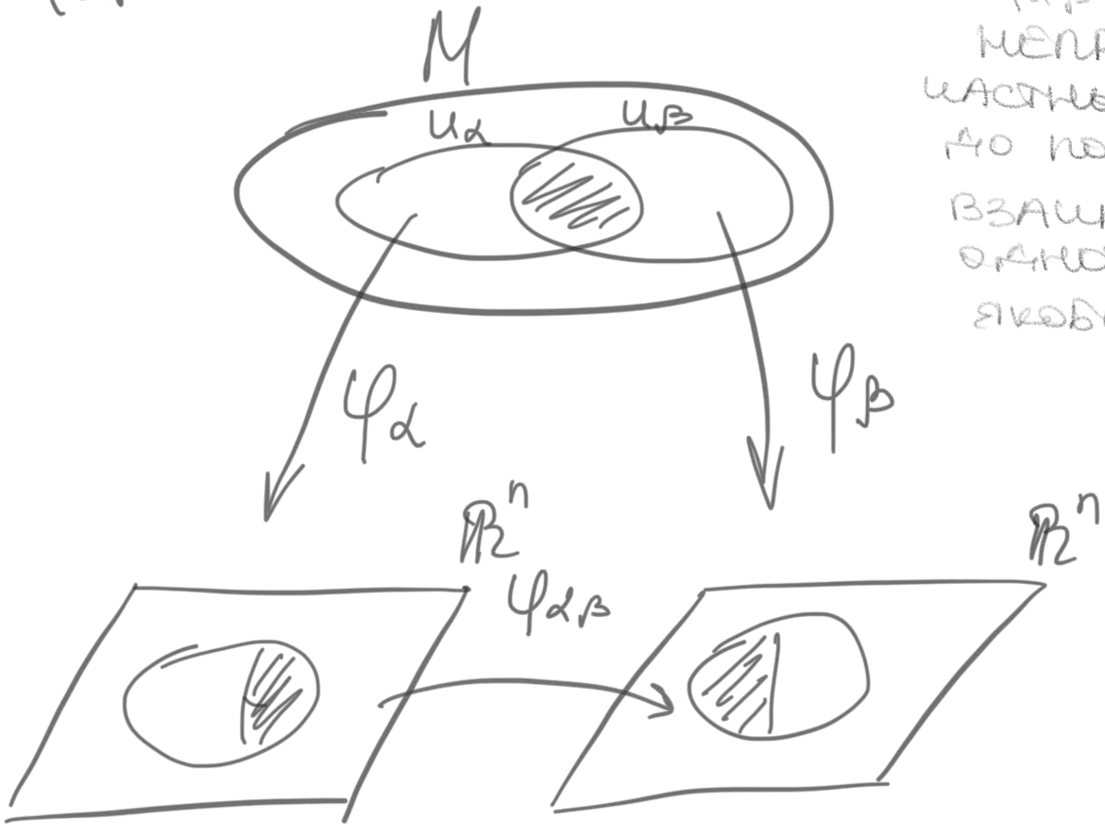
Опр. Картой многообразия (M, τ) наз. гомеоморфизм

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n, \quad U \subset M$$

Опр. Атласом назовём набор карт, покрывающих всё многообразие

Опр. Две карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ наз. C^k-согл., если ~~отображение~~ $\varphi_{\alpha\beta}$ — C^k-диффеоморфизм

$\varphi_{\alpha\beta}$ имеет непрерывные частные произв. до порядка k, взаимно однозначно и якобиан $J \neq 0$



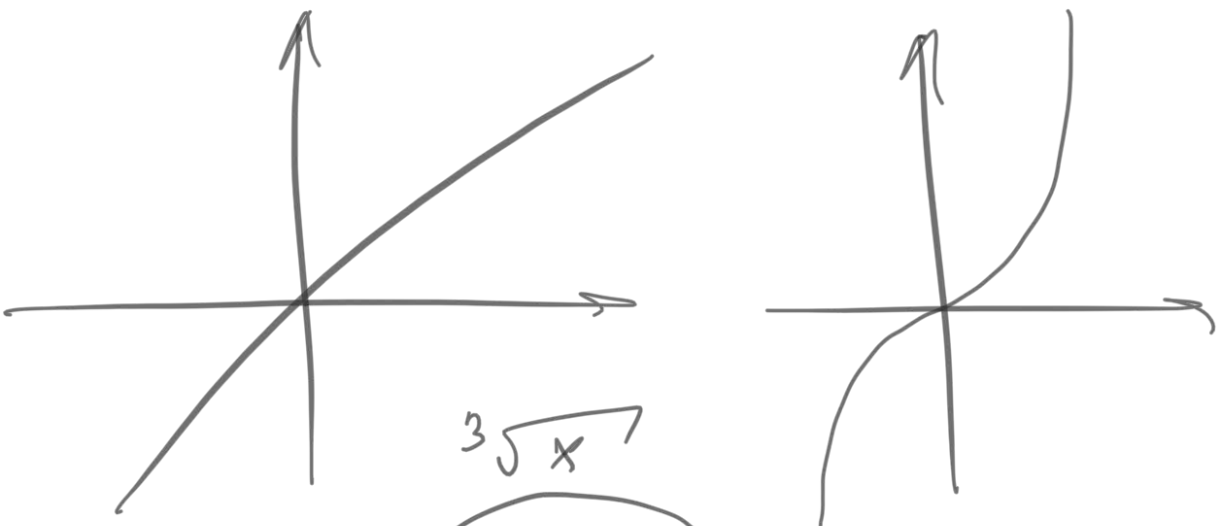
$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ | отобр. $\mathbb{R}^n$ в область $\mathbb{R}^n$
$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

Опр. **Атласом** наз C^k-многообразие, если он состоит из попарно C^k-согласованных карт.

Опр. **C^k-гладкое многообразие** наз. хаусдорфово топ. пр-во со счетной базой, на котором задан хотя бы 1 C^k-гладкий атлас.

Опр. C^k-атласы A, A' наз. C^k-эквив., если $A \cup A'$ тоже является C^k-атласом

Опр. Класс эквив. C^k-атласов наз. гладкой C^k-структурой

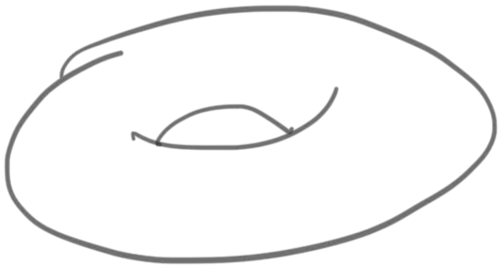


$$\varphi_1: x \to x \quad \underset{x^3}{\overset{\sqrt[3]{x}}{\leftrightarrows}} \quad \varphi_2: x \to x^3$$

$\varphi_2''(x) = 6x$
вырождена

якобиан в 0 $= 0 \Rightarrow$ обратное отображ. к φ_2 не дифф. $\Rightarrow$ φ_1 и φ_2 разные многообр.

МНОГООБРАЗИЯ ДИФФЕОМОРФНЫ, НО ОНИ РАЗНЫЕ



Опр. КАРТОЙ МНОГООБРАЗИЯ С КРАЕМ НАЗ. ГОМЕОМОРФИЗМ

$$\varphi: U \to H^n$$

$$H^n = (-\infty; 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$$

(ЯКОБИАН $\neq 0$ $\forall$ ТОЧКАХ, ТОГДА C^k СОГЛАСОВАНО)

Семинар

1.09.20

Окружность нельзя покрыть 1 картой

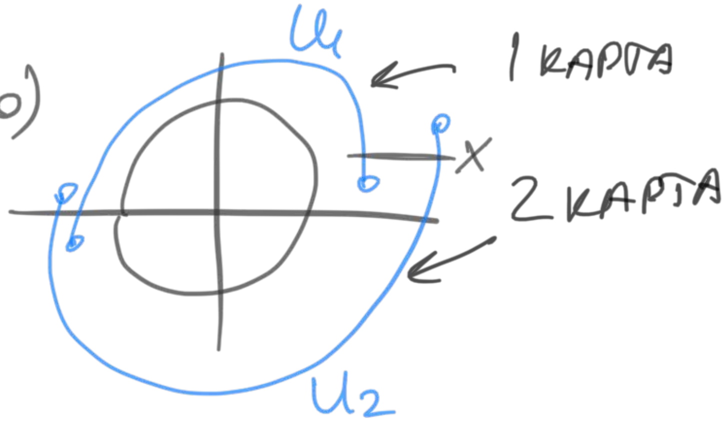
(по определению карты)

$\pi^*(S^1) \neq \pi^*(\mathbb{R})$

$x \in U_1$

$\Uparrow$

U_2



$U_1 \cap U_2 \neq \varnothing \qquad \varphi_{U_2}^{-1} \circ \varphi_{U_1} : V_1 \to V_2$

Аналитическая ф-ия — бесконечно дифференцируема и ряд Тейлора сходится к исходной ф-ии.

У угла 1 карта

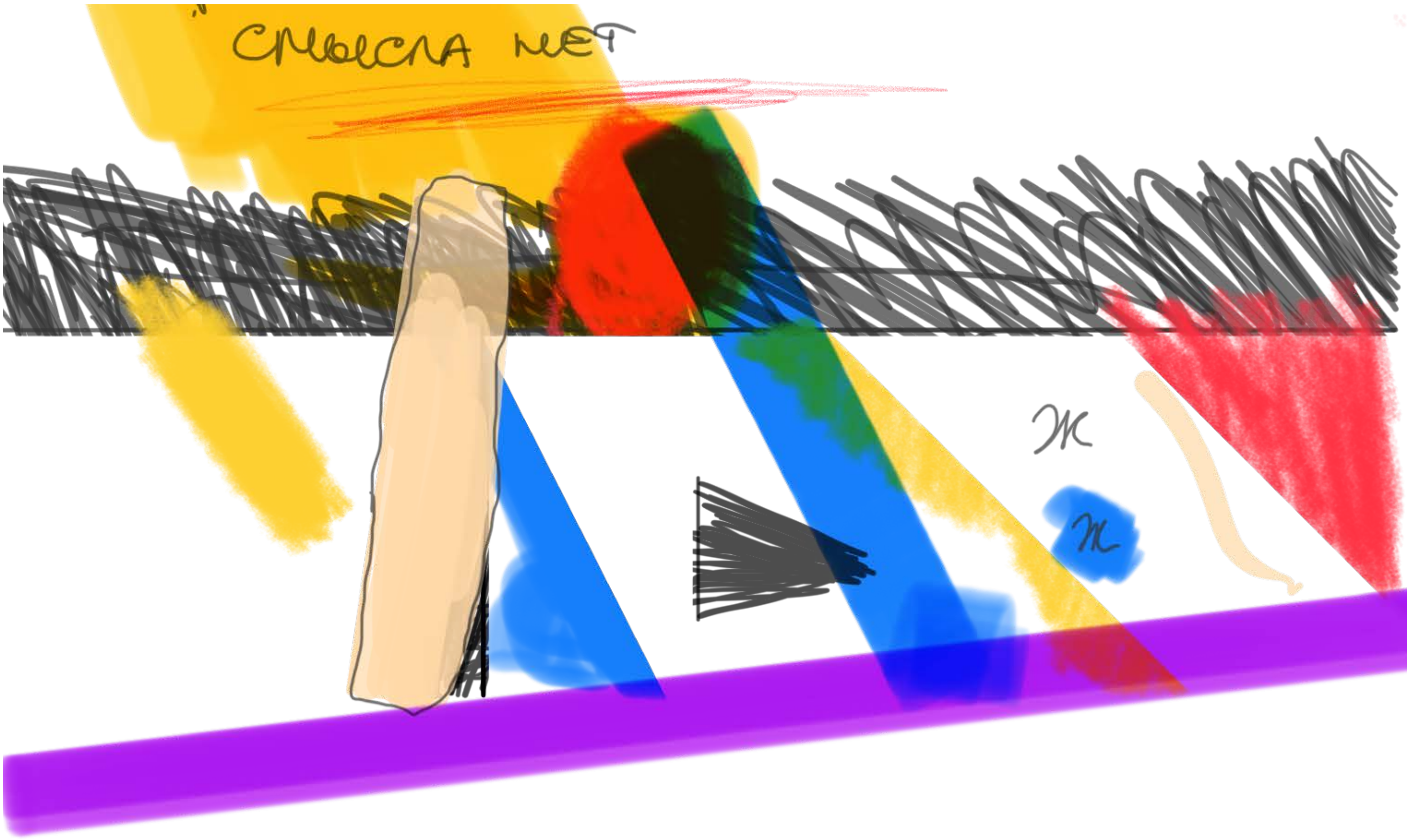
$x \to (x, |x|)$ (интервал)

$\Downarrow$

гладкое многообр.

(после того, как атлас задан, можно определить, гладкое многообр. или нет)

до этого говорить о гладкости


смысла нет
ж
ж