НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

КУРСЫ И СЕМИНАРЫ ПО ВЫБОРУ ПРЕДЛАГАЕМЫЕ В 2023/24 УЧЕБНОМ ГОДУ СТУДЕНТАМ ФАКУЛЬТЕТА МАТЕМАТИКИ

МОСКВА

9 июня 2023 г.

Содержание

Курсы на выбор студентов

Все занятия на факультете математики формально делятся на «курсы», «семинары» и «проекты». Деление вызвано имеющимися в НИУ ВШЭ ограничениями на число занятий каждого типа с одной стороны и число студентов на этих занятиях с другой. Уточнять, сколько курсов, семинаров и проектов может быть в Вашем учебном плане, следует в учебной части. Обратите внимание, что формальный статус «курса», «семинара» или «проекта» может не иметь никакого отношения к стилю проведения занятий. О реальном соотношении лекций, упражнений, докладов участников и т. п. и их влиянии на итоговую отметку читайте на странице с аннотацией предмета.

В представленных ниже таблицах **толстым шрифтом** набраны «толстые» предметы с нагрузкой две пары в неделю и оцениваемые в 6 кредитов за семестр[1]. Остальные, «тонкие» предметы идут одну пару в неделю и оцениваются в 3 кредита за семестр. Английское название предмета всегда означает, что он преподаётся на английском языке. У некоторых таких занятий кроме английской аннотации имеется ещё и русская, к ней ведёт отдельная гиперссылка. По уровню предполагаемой от участников предварительной подготовки занятия делятся на *начальные*[2], не слишком опирающиеся на другие курсы, и специальные[3], рассчитанные на тех, кто уже что-то знает в данной области. Пометка типа «2+» означает, что занятия ориентированы[4] на студентов второго года обучения и старше.

Эпитеты «простой» и «трудный» добавлены по просьбам студентов и выражают субъективную оценку[5] усилий, которые придётся приложить для освоения предмета. Эта характеристика не имеет чёткого формального определения и мало коррелирует с тем, на студентов какого года рассчитан курс, а также является ли он начальным или более продвинутым в той или иной линейке курсов. Бывают как «трудные» занятия для начинающих, вполне доступные первокурсникам, так и «простые» спецкурсы, предполагающие владение материалом первых трёх лет бакалавриата.

Эпитеты «дистанционный» и «аудиторный» означают, что вне зависимости от пожеланий участников все занятия и контрольные мероприятия будут проходить только дистанционно (online) или только в аудиториях факультета (offline), если последнее не будет противоречить противоэпидемическим нормам. Отсутствие эпитетов «дистанционный» или «аудиторный» означает, что организаторы занятий в принципе готовы на любую — как дистанционную, так и аудиторную — форму проведения занятий.

Эпитет «межкампусный» означает, что в занятиях могут принимать участие студенты не московских кампусов НИУ ВШЭ. Как это будет реализовано технически, пока не вполне понятно, однако «межкампусность» курса никак не коррелирует с тем, в какой форме — аудиторной или дистанционной — будут проводиться занятия.

[1] Если «толстый» предмет продолжается меньше семестра (например один модуль), то он, как правило, оценивается в 3 кредита, однако возможны исключения — уточняйте это на странице с описанием курса. Обязательные «толстые» семестровые курсы магистратуры, взятые студентами бакалавриата в качестве спецкурсов, дают 5 кредитов.

[2] Названия этих занятий набраны в оглавлении *курсивом*.

[3] Названия таких занятий набраны в оглавлении прямым шрифтом.

[4] По мнению организаторов и академического руководства учебных программ. Это мнение имеет рекомендательный характер и не означает никаких формальных ограничений на выбор данного предмета студентами младших курсов.

[5] Основанную на мнениях студентов прошлых лет, организаторов занятий и академического руководства программ.

Курсы начального уровня

Пререквизиты к этим курсам не выходят за рамки первых двух лет бакалавриата. Они рекомендуются студентам младших курсов[1] как введения в те разделы математики, где планируется дальнейшая специализация, а также старшекурсникам, желающим расширить математический кругозор в областях, выходящих за рамки выбранной специализации. В «Содержании» на стр. 1 – 5 ссылки на описания курсов начального уровня набраны *курсивом*.

ЗАНЯТИЯ, ДОСТУПНЫЕ ПЕРВОКУРСНИКАМ

ОСЕНЬ	ВЕСНА
∘ Основные понятия матемтаики, простой аудит. НИС 1 +, С. М. Львовский, Ю. М. Бурман.	∘ Геометрия и группы, простой межкампусный дист. НИС 1 +, О. В. Шварцман.
∘ Проективная алгебраическая геометрия 1, простой межкампусный аудит. НИС 1 +, А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин.	∘ Проективная алгебраическая геометрия 2, простой межкампусный аудит. НИС 1 +, А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин.
	∘ **Introduction to commutative algebra, advanced inter-campus offline course 1 +, V. S. Zhgoon, описание на русском.**
	∘ Конечные кольца: многочлены и коды, простой межкампусный дист. НИС 1 +, В. А. Гриценко.
∘ Combinatorics of invariants, simple inter-campus offline RS 1 +, M. E. Kazarian, S. K. Lando.	∘ Combinatorics of invariants, simple inter-campus offline RS 1 +, M. E. Kazarian, S. K. Lando.
	∘ Избранные главы дискретной математики, простой межкампусный аудит. НИС 1 +, И. В. Артамкин.
∘ Геометрия и динамика, простой межкампусный аудит. НИС 1 +, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский.	∘ Геометрия и динамика, простой межкампусный аудит. НИС 1 +, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский.
	∘ Математика физических явлений, простой аудит. курс 1 +, П. И. Арсеев.

[1] В частности, большинство этих курсов подойдут второкурсникам в качестве «антимайноров».

ОСЕНЬ

∘ Современные проблемы математической логики, трудный межкампусный дист. НИС 2+, Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов.

∘ **Геометрическое введение в алгебраическую геометрию, простой межкампусный аудит. курс 2+, И. В. Артамкин.**

∘ p-adic numbers, simple inter-campus offline course 2+, M. V. Finkelberg.

∘ **Introduction to algebriac numbers and class field theory, advanced inter-campus offline course 2+, V. S. Zhgoon, описание на русском.**

∘ **Введение в теорию Галуа, трудный межкампусный аудит. курс 2+, А. М. Левин.**

∘ **An introduction to cohomology theory, simple inter-campus offline course 2+, A. G. Gorinov, описание на русском.**

∘ **Теория Кодирования как введение в Алгебру и Арифметику, простой межкампусный аудит. НИС 2+, В. А. Гриценко.**

∘ Markov Chains, simple inter-campus offline course 2+, A. Dymov, описание на русском.

∘ Introduction to Ergodic Theory, simple inter-campus offline course 2+, M. L. Blank.

∘ Cluster Poisson Varieties, simple inter-campus offline RS 2+, V. G. Gorbounov, описание на русском.

∘ Complex networks, simple inter-campus offline RS 2+, V. G. Gorbounov, описание на русском.

∘ **Функциональный интеграл: Стохастические процессы и Основы Квантовой Механики, простой межкампусный аудит. НИС 2+, А. Г. Семёнов.**

ВЕСНА

∘ Современные проблемы математической логики, трудный межкампусный дист. НИС 2+, Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов.

∘ **Введение в теорию чисел, простой межкампусный аудит. курс 2+, В. А. Кириченко, В. С. Болбочан.**

∘ **Symmetric functions and Young diagrams, simple inter-campus offline course 2+, M. V. Finkelberg.**

∘ **Introduction to category theory and homological algebra, simple inter-campus offline course 2+, A. B. Pavlov.**

∘ **Introduction to Riemann surfaces, simple inter-campus offline course 2+, A. Yu. Buryak, описание на русском.**

∘ Топологические теории простых особенностей, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. А. Басалаев.

∘ **Noncommutative algebra, simple offline course 2+, M. Z. Rovinsky.**

∘ Многогранники и выпуклая геометрия, простой межкампусный дист. НИС 2+, А. И. Эстеров.

∘ **Линейное программирование, простой межкампусный дист. курс 2+, Е. О. Степанов.**

∘ **Преобразование Фурье и его использование: примеры дискретные и непрерывные, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. В. Хохлов.**

∘ **Topological data analysis, advanced inter-campus offline RS 2+, V. G. Gorbounov, описание на русском.**

∘ Математика процессов в ранней вселенной. Задачи гравитации, простой межкампусный аудит. НИС 2+, К. П. Зыбин.

∘ **Элементы стохастической динамики, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. С. Ильин.**

Специальные курсы и семинары

Эти занятия предназначены для более глубокого изучения тех разделов, по которым планируется дальнейшая специализация. В «Содержании» на стр. 1 – 5 они набраны прямым шрифтом.

ГОДОВЫЕ СТУДЕНЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ СЕМИНАРЫ

ОСЕНЬ

- Теория представлений, трудный межкампусный дист. НИС 3+, Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников.
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.
- Динамические системы, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.
- Геометрия дифференциальных уравнений: проблема Римана, простой аудит. НИС 3+, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.
- Representations and probability, advanced inter-campus offline RS 3+, A. Dymov, A. V. Klimenko, описание на русском.
- Stochastic analysis and its applications in economics, advanced inter-campus online RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.

ВЕСНА

- Теория представлений, трудный межкампусный дист. НИС 3+, Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников.
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.
- Динамические системы, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.
- Геометрия дифференциальных уравнений: изомонодромные деформации, простой межкампусный аудит. курс 3+, В. А. Побережный, И. В. Вьюгин.
- Representations and probability, advanced inter-campus offline RS 3+, A. Dymov, A. V. Klimenko, описание на русском.
- Stochastic analysis and its applications in economics, advanced inter-campus online RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.

СПЕЦКУРСЫ (НАЧАЛО)

ОСЕНЬ

- Введение в теорию моделей, простой межкампусный дист. курс 3+, В. Б. Шехтман.
- **Введение в теорию пучков, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. С. Тихомиров.**
- **Analytic number theory, simple inter-campus offline course 3+, A. B. Kalmynin, описание на русском.**
- **Homological methods in commutative algebra, advanced inter-campus offline course 3+, A. B. Pavlov.**
- **Алгебраическая геометрия (схемы, пучки, когомологии), трудный межкампусный аудит. курс 3+, Е. Ю. Америк.**
- **Комплексная геометрия, трудный межкампусный аудит. курс 3+, П. С. Осипов.**
- **Введение в дифференциальную геометрию, простой аудит. курс 3+, П. Е. Пушкарь.**
- **Введение в теорию минимальных подмногообразий, трудный межкампусный аудит. курс 3+, В. О. Медведев.**
- Особые точки комплексных гиперповерхностей, трудный межкампусный аудит. курс 3+, С. М. Гусейн-Заде.

ВЕСНА

- Введение в категорную логику, простой межкампусный аудит. курс 3+, Д. С. Шамканов.
- **Алгоритмы как математическое исследование, простой аудит. курс 3+, Д .А. Шмелькин.**
- **Toric Varieties, simple inter-campus offline course 3+, K. G. Kuyumzhiyan, описание на русском.**
- **An introduction to Goodwillie calculus, advanced inter-campus offline RS 3+, A. G. Gorinov, описание на русском.**
- K3 surfaces, advanced inter-campus offline course 3+, L. A. Guseva, описание на русском.
- **Комплексная геометрия, трудный межкампусный аудит. курс 3+, П. С. Осипов.**
- **Теория Морса, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Пенской.**
- **Analysis of several complex variables, simple inter-campus offline course 3+, A. A. Glutsyuk, A. S. Golota, описание на русском.**
- **Modern dynamical systems, advanced inter-campus online course 3+, A. S. Skripchenko, S. K. Lando.**

ОСЕНЬ

◦ **Representations of finite groups, advanced inter-campus offline course 3+, G. I. Olshanski, описание на русском.**

◦ **Группы и алгебры Ли, простой межкампусный аудит. курс 3+, А. И. Ильин.**

◦ Topological Vector Spaces, advanced inter-campus offline course 3+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском.

◦ **Введение в функциональный анализ, простой межкампусный аудит. курс 3+, С. В. Шапошников.**

◦ **Уравнения в частных производных, простой межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Колесников.**

◦ **Calculus of Variations, advanced inter-campus offline course 3+, M. Mariani, описание на русском.**

◦ Discrete Optimization and Integer Programming, simple inter-campus offline course 3+, A. N. Lavrov, D. I. Arkhipov, описание на русском.

◦ **Математическая физика для математиков, трудный межкампусный аудит. НИС 4+, А. С. Лосев.**

◦ **Гамильтонова механика, простой межкампусный аудит. курс 3+, В. А. Побережный.**

◦ **Математические основы квантовой механики, простой межкампусный аудит. курс 3+, П. А. Сапонов, П. Н. Пятов.**

◦ **Statistical Mechanics, simple inter-campus offline course 4+, M. Mariani, C. Bernardin.**

◦ **Integrable quantum field theory, advanced inter-campus offline RS 4+, Mikhail Alfimov, описание на русском.**

◦ **Introduction to topological recursion, simple inter-campus online course 3+, B. S. Bychkov, P. I. Dunin–Barkowski, описание на русском.**

ВЕСНА

◦ Introduction to the theory of random processes, simple inter-campus offline course 3+, M. L. Blank, описание на русском.

◦ **Structure theory of Lie algebras, advanced inter-campus offline course 3+, F. V. Uvarov, описание на русском.**

◦ Discrete integrable equations and their reductions, advanced inter-campus offline RS 4+, A. K. Pogrebkov, описание на русском.

◦ C^*-algebras and compact quantum groups, advanced inter-campus offline course 3+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском.

◦ **Функциональный анализ, трудный межкампусный аудит. курс 3+, С. В. Шапошников.**

◦ Пространства Соболева в вероятности и геометрии, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Колесников.

◦ Аналитическая теория дифференциальных уравнений, простой межкампусный аудит. курс 3+, Ю. С. Ильяшенко.

◦ Основные приложения математики, простой межкампусный дист. НИС 3+, С. М. Львовский, Ю. М. Бурман.

◦ **Telecom mathematics, simple inter-campus offline course 3+, D. S. Minenkov, описание на русском.**

◦ **Непараметрика и избранные сюжеты статистики, простой межкампусный аудит. НИС 3+, И. А. Самойленко.**

◦ **Математическая физика для математиков, трудный межкампусный аудит. НИС 4+, А. С. Лосев.**

◦ **Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые системы, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. М. Поволоцкий.**

◦ **Классическая теория поля, трудный аудит. курс 3+, П. И. Арсеев, П. А. Сапонов.**

◦ **Введение в квантовую теорию поля, простой межкампусный аудит. курс 3+, П. И. Дунин–Барковский, В. В. Лосяков.**

◦ **Integrable quantum field theory, advanced inter-campus offline RS 4+, Mikhail Alfimov, описание на русском.**

◦ **Группа кос, квантовые группы и приложения, простой межкампусный аудит. курс 3+, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.**

Курсы МИАН

В Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН (МИАН) реализуется научно-образовательная программа МЦМУ МИАН (НОЦ МИАН). Её целью является подготовка сильных студентов, желающих заниматься математикой и физикой на профессиональном уровне. Ведущие учёные читают специальные курсы и ведут исследовательские семинары по основным математическим и физическим дисциплинам. Занятия проходят в вечернее время в здании МИАН, как правило, начиная с 18^{00}. Экзамены принимаются после окончания каждого семестра. Студенты и аспиранты математического факультета НИУ ВШЭ могут включать курсы и семинары НОЦ МИАН в свой ИУП. Каждый сданный *курс* НОЦ МИАН оценивается в 5 кредитов, каждый сданный *семинар* — в 4 кредита. Расписание НОЦ МИАН в осеннем семестре см. на www.mi-ras.ru/index.php?c=noc2324_1.

Курсы от Huawei R&D

Эти курсы читаются представителями Huawei R&D. Они входят в число математических предметов и могут без ограничений включаться в ИУП студентами всех бакалаврских и магистерских программ факультета математики.

Курсы Huawei R&D

осень	весна
◦ Discrete Optimization and Integer Programming, simple inter-campus offline course 3+, A. N. Lavrov, D. I. Arkhipov, описание на русском.	◦ **Алгоритмы как математическое исследование, простой аудит. курс 3+, Д .А. Шмелькин.** ◦ **Telecom mathematics, simple inter-campus offline course 3+, D. S. Minenkov, описание на русском.**

Нематематические курсы, читаемые на факультете математики

Эти курсы читаются представителями других факультетов НИУ ВШЭ и предназначены тем, кто хочет изучить те или иные области за пределами математики. Курсы программирования на Python, эконометрики и машинного обучения не учитываются в ограничении на суммарное число нематематических курсов в ИУП. Все остальные курсы учитываются в этом ограничении наравне с курсами, читаемыми на других факультетах ВШЭ.

курсы, читаемые представителями других факультетов

осень	весна
	◦ Непараметрика и избранные сюжеты статистики, простой межкампусный аудит. НИС 3+, И. А. Самойленко.

Рекомендуемые линейки курсов

В этом разделе курсы собраны в «линейки», рекомендуемые для специализации в той или иной области. Между линейками есть значительные пересечения, и взаимная зависимость курсов далеко не линейна. Логическая взаимосвязь предметов уточняется в предваряющих таблицы пояснениях. Всем, кто только выбирает себе направления будущей специализации, рекомендуется начинать с посещения занятий, доступных первокурсникам.

Алгебра и теория чисел

Курсы по теории чисел мало зависят друг от друга и мало пересекаются по содержанию, их можно брать в произвольном порядке и количестве в зависимости от интересов и уровня алгебраической подготовки. Студентам, слабо владеющим алгеброй в объёме первого курса (первокурсникам, а также второкурсникам, которым плохо давалась алгебра на первом курсе) рекомендуется начинать с курсов «Введение в теорию чисел» и «Конечные кольца: коды и многочлены». Студентам, хорошо освоившим алгебру в объёме первого курса, можно сразу браться за курсы «Теория кодирования как введение в алгебру и арифметику», «Introduction to algebraic number theory», «Analytic number theory» и «p-adic numbers» — в зависимости от своих интересов.

Курсы «Introduction to Galois theory» и «Некоммутативная алгебра» являются прямым продолжением обязательного трёхсеместрового курса алгебры и могут быть объединены под общим названием «Алгебра – 4». Они рекомендуются всем, кто хочет поднять свою алгебраическую культуру на уровень чуть выше начального.

Курс «Symmetric functions and Young diagrams» мало зависит от чего бы то ни было, но крайне важен для тех, кто будет заниматься комбинаторикой, теорией представлений, а также исчислительной геометрией и топологией (теория пересечений, характеристические классы и т. п.)

Курсы «Introduction to commutative algebra», «Introduction to category theory and homological algebra» и «Homological methods in commutative algebra» рассчитаны на студентов, хорошо освоивших алгебру в объёме первых трёх семестров. Первые два мало зависят друг от друга и являются пререквизитами к более продвинутым курсам по алгебраической и диофантовой геометрии — студентам, специализирующимся в алгебре и её приложениях к арифметике, геометрии и топологии, рекомендуется взять их в любом удобном порядке. Третий курс линейки предполагает владение первыми двумя.

осень	весна
∘ **Введение в теорию Галуа, трудный межкампусный аудит. курс 2+, А. М. Левин.**	∘ **Noncommutative algebra, simple offline course 2+, M. Z. Rovinsky.**
∘ **Теория Кодирования как введение в Алгебру и Арифметику, простой межкампусный аудит. НИС 2+, В. А. Гриценко.**	∘ Конечные кольца: многочлены и коды, простой межкампусный дист. НИС 1+, В. А. Гриценко.
∘ **Analytic number theory, simple inter-campus offline course 3+, A. B. Kalmynin, описание на русском.**	∘ **Введение в теорию чисел, простой межкампусный аудит. курс 2+, В. А. Кириченко, В. С. Болбочан.**
∘ **Introduction to algebriac numbers and class field theory, advanced inter-campus offline course 2+, V. S. Zhgoon, описание на русском.**	∘ **Introduction to commutative algebra, advanced inter-campus offline course 1+, V. S. Zhgoon, описание на русском.**
∘ p-adic numbers, simple inter-campus offline course 2+, M. V. Finkelberg.	∘ **Symmetric functions and Young diagrams, simple inter-campus offline course 2+, M. V. Finkelberg.**
∘ **Homological methods in commutative algebra, advanced inter-campus offline course 3+, A. B. Pavlov.**	∘ **Introduction to category theory and homological algebra, simple inter-campus offline course 2+, A. B. Pavlov.**

Алгебраическая геометрия

В этой линейке три основных курса — ежегодный семестровый курс «Геометрическое введение в алгебраическую геометрию» и читаемые раз в два-три года годовые или трёхмодульные курсы «Алгебраическая геометрия» (теория схем) и «Комплексная геометрия» (келеровы многообразия и теория Ходжа). Для понимания первого из них достаточно 1-го года бакалавриата, второго — первый из курсов, а также коммутативная алгебра, теория пучков, теория категорий и гомологическая алгебра, третьего — основы алгебраической топологии, дифференциальной геометрии, теории пучков, гомологической алгебры, функционального анализа (эллиптические операторы) и ТФКП.

Курсы по римановым поверхностям и по теории Галуа посвящены двум центральным математическим сюжетам, исследование которых во многом и привело к созданию современной алгебраической геометрии. Оба сюжета до сих пор актуальны, и знакомство с ними полезно для понимания как теории схем, так и аналитической геометрии. Курс «Торические многообразия» посвящён важному классу многообразий, схемное описание и алгебро-геометрические свойства которых переговариваются на языке целочисленной выпуклой геометрии. Сейчас это основной источник явных примеров в алгебраической геометрии и самый мощный инструмент исследования многогранников.

Курс «Гомологические методы коммутативной алгебры» пригодится при специализации по схемной алгебраической геометрии, алгебраической теории чисел и геометрической теории представлений. Курс «К3 поверхности» использует теорию схем и комплексную геометрию для описания важного класса алгебраических поверхностей. Достаточно сказать, что полный локальный инвариант четырёхмерного (псевдо)риманового многообразия, в котором мы живём — это вещественная поверхность К3.

Основными семинарами для студентов, специализирующихся в алгебраической геометрии, являются «Геометрические структуры на многообразиях» и научный семинар лаборатории Алгебраической Геометрии[1]. Первокурсникам, только выбирающим себе направления дальнейшей специализации, для знакомства с областью можно посоветовать семинар «Проективная алгебраическая геометрия».

ОСЕНЬ

- Проективная алгебраическая геометрия 1, простой межкампусный аудит. НИС 1+, А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин.
- **Геометрическое введение в алгебраическую геометрию, простой межкампусный аудит. курс 2+, И. В. Артамкин.**
- **Introduction to sheaves, advanced inter-campus offline course 3+, A. S. Tikhomirov, описание на русском.**
- **Introduction to the Galois theory, advanced inter-campus offline course 2+, A. M. Levin, описание на русском.**
- **Алгебраическая геометрия (схемы, пучки, когомологии), трудный межкампусный аудит. курс 3+, Е. Ю. Америк.**
- **Комплексная геометрия, трудный межкампусный аудит. курс 3+, П. С. Осипов.**

ВЕСНА

- Проективная алгебраическая геометрия 2, простой межкампусный аудит. НИС 1+, А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин.
- **Introduction to commutative algebra, advanced inter-campus offline course 1+, V. S. Zhgoon, описание на русском.**
- **Introduction to category theory and homological algebra, simple inter-campus offline course 2+, A. B. Pavlov.**
- **Introduction to Riemann surfaces, simple inter-campus offline course 2+, A. Yu. Buryak, описание на русском.**
- **Toric Varieties, simple inter-campus offline course 3+, K. G. Kuyumzhiyan, описание на русском.**
- **Комплексная геометрия, трудный межкампусный аудит. курс 3+, П. С. Осипов.**
- K3 surfaces, advanced inter-campus offline course 3+, L. A. Guseva, описание на русском.

[1] Последний — как и все «взрослые» научные семинары — не даёт кредитов.

Анализ

Курс «Введение в функциональный анализ» является пререквизитом к очень многим курсам, причём не только этой линейки, и его настоятельно рекомендуется взять прямо в первом семестре 3-го курса. Курс «Functional Analysis 2» сложнее, но его тоже стоит попробовать взять на 3-м курсе. Двухсеместровый курс анализа пригодится в занятиях случайными процессами и эргодической теорией, уравнениями в частных производных и задачами оптимизации (включая прикладные), дифференциальной и аналитической (понимаемой как раздел алгебраической) геометрией.

Курс уравнений в частных производных, хотя формально и не опирается на курс функционального анализа, будет проще освоить студентам, уже знакомым хотя бы с первым его семестром. Более «практической» стороне анализа (пространствам обобщённых функций, асимптотическим оценкам и использованию всей этой техники в самых разных задачах) посвящены курсы «Прикладные методы анализа» и «Асимптотические методы», эти курсы будут полезны для специализирующихся в математической физике, уравнениях с частными производными и различных разделах динамических систем.

Остальные курсы и НИСы посвящены более специальным (часто новым) разделам анализа. Если вы не занимаетесь именно этими разделами, они могут оказаться полезными для расширения математического кругозора. С той же целью стоит изучить базовые курсы из вероятностной линейки.

ОСЕНЬ

- **Введение в функциональный анализ, простой межкампусный аудит. курс 3+, С. В. Шапошников.**
- **Calculus of Variations, advanced inter-campus offline course 3+, M. Mariani, описание на русском.**
- **Уравнения в частных производных, простой межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Колесников.**
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.
- Topological Vector Spaces, advanced inter-campus offline course 3+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском.
- Особые точки комплексных гиперповерхностей, трудный межкампусный аудит. курс 3+, С. М. Гусейн-Заде.

ВЕСНА

- **Функциональный анализ, трудный межкампусный аудит. курс 3+, С. В. Шапошников.**
- **Линейное программирование, простой межкампусный дист. курс 2+, Е. О. Степанов.**
- **Преобразование Фурье и его использование: примеры дискретные и непрерывные, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. В. Хохлов.**
- Пространства Соболева в вероятности и геометрии, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Колесников.
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.
- C^*-algebras and compact quantum groups, advanced inter-campus offline course 3+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском.
- **Analysis of several complex variables, simple inter-campus offline course 3+, A. A. Glutsyuk, A. S. Golota, описание на русском.**

Вероятность и стохастическая динамика

Младшекурсникам, интересующимся этими областями, будет полезно начать с НИС «Геометрия и динамика», в котором разбираются различные сюжеты, относящиеся к регулярной и хаотической динамике, теории вероятностей и т. д. Курс «Цепи Маркова» также доступен начиная со 2 курса (до обязательного курса теории вероятностей) — в нём можно на простом, но очень важном (в том числе в приложениях) примере познакомиться с центральными понятиями теории случайных процессов.

Есть два разных способа смотреть на случайность в математике: теория случайных процессов (более вероятностный взгляд) и эргодическая теория (более динамический). Чтобы уметь пользоваться обоими подходами, мы советуем освоить оба базовых курса, «Введение в теорию случайных процессов» и «Введение в эргодическую теорию». Изучать их можно в любом порядке, однако мы настоятельно рекомендуем параллельно (или раньше) изучить курс функционального анализа, хотя бы его первый семестр: он служит математической основой этих дисциплин. Курс «Элементы стохастической динамики» — более элементарное введение в теорию случайных процессов, с фокусом на стохастических дифференциальных уравнениях.

Продвинутые семинары «Представления и вероятность» и «Стохастический анализ и приложения в экономике» и курс «Случайные матрицы… » нацелены на студентов старших курсов, специализирующихся в стохастике. Курс «Финансовая математика» также требует предварительного знакомства с курсом случайных процессов.

Студентам, интересующимся в основном приложениями теории вероятностей, в качестве минимальной теоретической базы в случайных процессах мы советуем курсы «Цепи Маркова» и «Элементы стохастической динамики». Также мы им советуем курс «Математическая статистика и анализ данных», сочетающий теоретические вопросы математической статистики с задачами практического анализа данных.

ОСЕНЬ	ВЕСНА
◦ Геометрия и динамика, простой межкампусный аудит. НИС 1+, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский.	◦ Геометрия и динамика, простой межкампусный аудит. НИС 1+, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский.
◦ Representations and probability, advanced inter-campus offline RS 3+, A. Dymov, A. V. Klimenko, описание на русском.	◦ Representations and probability, advanced inter-campus offline RS 3+, A. Dymov, A. V. Klimenko, описание на русском.
◦ Markov Chains, simple inter-campus offline course 2+, A. Dymov, описание на русском.	◦ Пространства Соболева в вероятности и геометрии, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Колесников.
◦ Introduction to Ergodic Theory, simple inter-campus offline course 2+, M. L. Blank, описание на русском.	◦ Introduction to the theory of random processes, simple inter-campus offline course 3+, M. L. Blank, описание на русском.
◦ **Statistical Mechanics, simple inter-campus offline course 4+, M. Mariani, C. Bernardin.**	◦ **Элементы стохастической динамики, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. С. Ильин.** ◦ **Telecom mathematics, simple inter-campus offline course 3+, D. S. Minenkov, описание на русском.** ◦ **Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые системы, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. М. Поволоцкий.**
◦ Complex networks, simple inter-campus offline RS 2+, V. G. Gorbounov, описание на русском.	◦ **Modern dynamical systems, advanced inter-campus online course 3+, A. S. Skripchenko, S. K. Lando, описание на русском.**
◦ Stochastic analysis and its applications in economics, advanced inter-campus online RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.	◦ Stochastic analysis and its applications in economics, advanced inter-campus online RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.

Дифференциальная геометрия и топология

Людям доступны два способа думать о математике — язык формул и язык геометрии и топологии. Первый по сути своей конечен, второй — неисчерпаем. Многие курсы этого раздела необходимы для понимания большинства других линеек курсов. Первокурсники могут познакомиться с предметом на семинарах «Основные понятия математики» и «Геометрия и группы». Элементарный курс «Многогранники и выпуклая геометрия» является дружелюбным введением в одну из самых фундаментальных областей классической геометрии, используемую повсеместно — от комбинаторики до алгебраической геометрии. Вводный курс по римановым поверхностям посвящён одному из узловых сюжетов современной математики, своего рода «точке ветвления», из которой в XIX – XX веках выросли целые науки: алгебраическая геометрия, топология, ТФКП... Вводный курс по теории пучков является перереквизитом ко многим продвинутым курсам по геометрии и топологии.

Дифференциально-геометрическая линейка состоит из курсов «Введение в дифференциальную геометрию», «Теория Морса», «Введение в теорию минимальных многообразий», «Комплексная геометрия». Первый из курсов служит пререквизитом ко всем остальным, последние два курса независимы. Курс по теории Морса является мостиком между дифференциальной геометрией и топологией. Топологическая линейка представлена курсами «An introduction to cohomology theory» и «An introduction to Goodwillie calculus» (теория гомологий и более продвинутая гомотопическая топология).

Курсы «Топологические теории простых особенностей» и «Особые точки комплексных гиперповерхностей» посвящены приложениям дифференциальной геометрии и топологии к теории особенностей дифференцируемых отображений. Первый из этих курсов совершенно элементарный и более алгебраический, второй более глубокий и требует владения основами дифференциальной геометрии и теории гомологий.

Курсы А. Ю. Пирковского посвящены некоммутативным обобщениям геометрических представлений о многообразиях средствами функционального анализа и требуют соответствующих аналитических пререквизитов.

Курсы В. Г. Горбунова посвящены приложениям топологических идей к прикладным задачам анализа больших данных и невероятно популярной в последние годы теории кластерных алгебр.

Осень

- Основные понятия матемтаики, простой аудит. НИС 1+, С. М. Львовский, Ю. М. Бурман.
- **Введение в дифференциальную геометрию, простой аудит. курс 3+, П. Е. Пушкарь.**
- **Введение в теорию минимальных подмногообразий, трудный межкампусный аудит. курс 3+, В. О. Медведев.**
- **Введение в теорию пучков, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. С. Тихомиров.**
- **An introduction to cohomology theory, simple inter-campus offline course 2+, A. G. Gorinov, описание на русском.**
- Особые точки комплексных гиперповерхностей, трудный межкампусный аудит. курс 3+, С. М. Гусейн-Заде.
- **Комплексная геометрия, трудный межкампусный аудит. курс 3+, П. С. Осипов.**
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.
- Cluster Poisson Varieties, simple inter-campus offline RS 2+, V. G. Gorbounov, описание на русском.

Весна

- Геометрия и группы, простой межкампусный дист. НИС 1+, О. В. Шварцман.
- **Introduction to Riemann surfaces, simple inter-campus offline course 2+, A. Yu. Buryak, описание на русском.**
- Многогранники и выпуклая геометрия, простой межкампусный дист. НИС 2+, А. И. Эстеров.
- **Теория Морса, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Пенской.**
- **An introduction to Goodwillie calculus, advanced inter-campus offline RS 3+, A. G. Gorinov, описание на русском.**
- Топологические теории простых особенностей, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. А. Басалаев.
- **Комплексная геометрия, трудный межкампусный аудит. курс 3+, П. С. Осипов.**
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.
- **Topological data analysis, advanced inter-campus offline RS 2+, V. G. Gorbounov, описание на русском.**

Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы

ОСЕНЬ

◦ **Уравнения в частных производных, простой межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Колесников.**
◦ **Гамильтонова механика, простой межкампусный аудит. курс 3+, В. А. Побережный.**

◦ Геометрия дифференциальных уравнений: проблема Римана, простой аудит. НИС 3+, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.
◦ Геометрия и динамика, простой межкампусный аудит. НИС 1+, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский.
◦ Динамические системы, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.
◦ Introduction to Ergodic Theory, simple inter-campus offline course 2+, M. L. Blank, описание на русском.

ВЕСНА

◦ Аналитическая теория дифференциальных уравнений, простой межкампусный аудит. курс 3+, Ю. С. Ильяшенко.
◦ Discrete integrable equations and their reductions, advanced inter-campus offline RS 4+, A. K. Pogrebkov, описание на русском.
◦ Геометрия дифференциальных уравнений: изомонодромные деформации, простой межкампусный аудит. курс 3+, В. А. Побережный, И. В. Вьюгин.
◦ Геометрия и динамика, простой межкампусный аудит. НИС 1+, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский.
◦ Динамические системы, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.
◦ **Modern dynamical systems, advanced inter-campus online course 3+, A. S. Skripchenko, S. K. Lando, описание на русском.**

Инварианты и представления

ОСЕНЬ

◦ **Введение в теорию Галуа, трудный межкампусный аудит. курс 2+, А. М. Левин.**
◦ **Representations of finite groups, advanced inter-campus offline course 3+, G. I. Olshanski, описание на русском.**
◦ **Группы и алгебры Ли, простой межкампусный аудит. курс 3+, А. И. Ильин.**

◦ Representations and probability, advanced inter-campus offline RS 3+, A. Dymov, A. V. Klimenko, описание на русском.
◦ Теория представлений, трудный межкампусный дист. НИС 3+, Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников.

ВЕСНА

◦ **Noncommutative algebra, simple offline course 2+, M. Z. Rovinsky.**
◦ **Symmetric functions and Young diagrams, simple inter-campus offline course 2+, M. V. Finkelberg.**

◦ **Structure theory of Lie algebras, advanced inter-campus offline course 3+, F. V. Uvarov, описание на русском.**
◦ Representations and probability, advanced inter-campus offline RS 3+, A. Dymov, A. V. Klimenko, описание на русском.
◦ Теория представлений, трудный межкампусный дист. НИС 3+, Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников.

Комбинаторика и маломерная топология

Все курсы линейки можно брать независимо друг от друга. Курсы «Инварианты графов, узлов и вложенных графов» и «Symmetric functions» предполагают владение алгеброй в объёме первого курса и владение дискретной математикой в объёме первых двух курсов или в объёме онлайн-курса Е. Ю. Смирнова «Introduction to enumerative combinatorics», однако можно попробовать взять эти курсы параллельно с освоением необходимых пререквизитов. Для курсов «Cluster Poisson varieties» и «Representations of $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$» требуется хорошее знание алгебры в объёме первых трёх семестров. Для курсов «Инварианты графов, узлов и вложенных графов» и «Cluster Poisson varieties» кроме алгебры потребуется топология в объёме первого курса. Основным студенческим научным семинаром по комбинаторике и маломерной топологии является «Combinatorics of invariants». Участие в нём не предполагает серьёзной предварительной подготовки: каждый студент при желании сможет найти себе приемлемую по уровню тему для доклада.

ОСЕНЬ

- **Introduction to topological recursion, simple inter-campus online course 3+, B. S. Bychkov, P. I. Dunin–Barkowski, описание на русском.**
- Cluster Poisson Varieties, simple inter-campus offline RS 2+, V. G. Gorbounov, описание на русском.
- Combinatorics of invariants, simple inter-campus offline RS 1+, M. E. Kazarian, S. K. Lando, описание на русском.

ВЕСНА

- **Symmetric functions and Young diagrams, simple inter-campus offline course 2+, M. V. Finkelberg.**
- Combinatorics of invariants, simple inter-campus offline RS 1+, M. E. Kazarian, S. K. Lando, описание на русском.

Логика

ОСЕНЬ

- Введение в теорию моделей, простой межкампусный дист. курс 3+, В. Б. Шехтман.
- Современные проблемы математической логики, трудный межкампусный дист. НИС 2+, Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов.

ВЕСНА

- Введение в категорную логику, простой межкампусный аудит. курс 3+, Д. С. Шамканов.
- Современные проблемы математической логики, трудный межкампусный дист. НИС 2+, Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов.

Матфизика

Это не совсем «линейка», а скорее «дерево» из четырёх ветвей. Основная состоит из базовых курсов, входящих в образовательный минимум любого физика-теоретика: «Математика физических явлений», «Гамильтонова механика», «Квантовая механика», «Классическая теория поля», «Квантовая теория поля» и «Функциональный интеграл». Семинар «Математика физических явлений» адресован младшекурсникам, которые хотят познакомиться с физикой, научиться понимать её язык и свободно переводить с него на язык математики и обратно. Остальные курсы желательно изучать именно в той последовательности, как они написаны, хотя готовность (а главное — способность) освоить три-четыре ключевых идеи предыдущих курсов, в принципе, позволяет на ходу впрыгнуть в любой вагон этого поезда.

Курсы «Прикладные методы анализа», «Асимптотические методы» и «Discrete Integrable Equations And Their Reductions» посвящены важнейшим аналитическим инструментам (обобщённые функции, преобразования Фурье и Лапласа, асимптотические и разностные методы) практического решения разнообразных уравнений, возникающих не только в математической физике, но и в чистой математике.

Курсы «Случайные матрицы» и «Стохастическая динамика» — это чисто математические курсы, посвящённые избранным задачам стохастической динамики — разделу теории вероятностей, тесно связанному со статистической физикой.

Четвёртая группа курсов посвящена связи математической физики с теорией представлений. Годовой семинар А. Литвинова имеет дело с довольно продвинутым алгебраическим аппаратом (алгебры Вирасоро, вертексные алгебры и т. п.) и его приложениями в конформной теории поля. Семинар «Группа кос, квантовые группы и приложения» использует более простой алгебраический аппарат (алгебры Хопфа, квантовые группы), пришедший из интегрируемых моделей статистической физики.

ОСЕНЬ

- **Гамильтонова механика, простой межкампусный аудит. курс 3 +, В. А. Побережный.**
- **Математические основы квантовой механики, простой межкампусный аудит. курс 3 +, П. А. Сапонов, П. Н. Пятов.**
- **Математическая физика для математиков, трудный межкампусный аудит. НИС 4 +, А. С. Лосев.**
- **Introduction to topological recursion, simple inter-campus online course 3 +, B. S. Bychkov, P. I. Dunin–Barkowski, описание на русском.**
- Геометрия дифференциальных уравнений: проблема Римана, простой аудит. НИС 3 +, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.
- **Statistical Mechanics, simple inter-campus offline course 4 +, M. Mariani, C. Bernardin.**
- **Функциональный интеграл: Стохастические процессы и Основы Квантовой Механики, простой межкампусный аудит. НИС 2 +, А. Г. Семёнов.**
- **Integrable quantum field theory, advanced inter-campus offline RS 4 +, Mikhail Alfimov, описание на русском.**

ВЕСНА

- Математика физических явлений, простой аудит. курс 1 +, П. И. Арсеев.
- **Классическая теория поля, трудный аудит. курс 3 +, П. И. Арсеев, П. А. Сапонов.**
- **Математическая физика для математиков, трудный межкампусный аудит. НИС 4 +, А. С. Лосев.**
- **Введение в квантовую теорию поля, простой межкампусный аудит. курс 3 +, П. И. Дунин–Барковский, В. В. Лосяков.**
- Discrete integrable equations and their reductions, advanced inter-campus offline RS 4 +, A. K. Pogrebkov, описание на русском.
- **Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые системы, трудный межкампусный аудит. курс 3 +, А. М. Поволоцкий.**
- Математика процессов в ранней вселенной. Задачи гравитации, простой межкампусный аудит. НИС 2 +, К. П. Зыбин.
- **Integrable quantum field theory, advanced inter-campus offline RS 4 +, Mikhail Alfimov, описание на русском.**

Прикладная математика

Студенты, увлёкшиеся приложениями математики, могут включить в свой ИУП перечисленные ниже курсы. Между ними нет чётких логических зависимостей.

ОСЕНЬ

- **Calculus of Variations, advanced inter-campus offline course 3+, M. Mariani, описание на русском.**
- **Теория Кодирования как введение в Алгебру и Арифметику, простой межкампусный аудит. НИС 2+, В. А. Гриценко.**
- Complex networks, simple inter-campus offline RS 2+, V. G. Gorbounov, описание на русском.
- Discrete Optimization and Integer Programming, simple inter-campus offline course 3+, A. N. Lavrov, D. I. Arkhipov, описание на русском.
- Stochastic analysis and its applications in economics, advanced inter-campus online RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.

ВЕСНА

- Основные приложения математики, простой межкампусный дист. НИС 3+, С. М. Львовский, Ю. М. Бурман.
- Конечные кольца: многочлены и коды, простой межкампусный дист. НИС 1+, В. А. Гриценко.
- Избранные главы дискретной математики, простой межкампусный аудит. НИС 1+, И. В. Артамкин.
- **Алгоритмы как математическое исследование, простой аудит. курс 3+, Д .А. Шмелькин.**
- **Telecom mathematics, simple inter-campus offline course 3+, D. S. Minenkov, описание на русском.**
- **Topological data analysis, advanced inter-campus offline RS 2+, V. G. Gorbounov, описание на русском.**
- **Преобразование Фурье и его использование: примеры дискретные и непрерывные, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. В. Хохлов.**
- **Элементы стохастической динамики, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. С. Ильин.**
- Stochastic analysis and its applications in economics, advanced inter-campus online RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.
- **Непараметрика и избранные сюжеты статистики, простой межкампусный аудит. НИС 3+, И. А. Самойленко.**

Статистическая информация о курсах

в настоящей момент в книге курсов имеется	осенью	весной
всего	44	52
курсов	27	31
НИСов	17	21
проектов	0	0
толстых	24	27
тонких	20	25
на русском	25	32
на английском	19	20
из них с русским описанием	14	15
для первого курса	4	8
для первого-второго курсов	16	21
для третьего курса и старше	28	31
субъективно простых	25	30
субъективно трудных	19	22
межкампусных	41	48
дистанционных	5	9
аудиторных	39	43
нематематических	0	0

Описания курсов на русском

Кроме курсов, читаемых по-русски, в этом разделе имеются русские описания некоторых курсов, читаемых по-английски. Это отмечается сразу под названием курса, следом за указанием его статуса и целевой аудитории.

C^*-алгебры и компактные квантовые группы
трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Пирковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Теория C^*-алгебр — алгебраическое направление в функциональном анализе, которое возникло в 1940-х гг. в основополагающих работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка и за прошедшее с тех пор время превратилось в чрезвычайно глубокую и разветвленную математическую дисциплину. C^*-алгебра — это $\mathbb{C}$-алгебра, снабженная нормой и инволюцией, которые удовлетворяют некоторым аксиомам согласованности. Базовые примеры C^*-алгебр — алгебра $C(X)$ непрерывных функций на компактном топологическом пространстве X и алгебра $\mathcal{B}(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H. Эти примеры «универсальны» благодаря следующим теоремам Гельфанда–Наймарка: (1) каждая коммутативная C^*-алгебра с единицей изоморфна $C(X)$ для некоторого компакта X, и (2) каждая C^*-алгебра изометрически вкладывается в $\mathcal{B}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H. Первая теорема Гельфанда–Наймарка (утверждение (1) выше) лежит в фундаменте некоммутативной геометрии (в смысле А. Конна) и теории компактных квантовых групп.

Теория компактных квантовых групп была создана в основном С. Л. Вороновичем в 1980-х–1990-х гг. Грубо говоря, компактная квантовая группа — это «деформация» алгебры непрерывных функций на компактной топологической группе. Таким образом, согласно известной поговорке, квантовые группы не являются «ни квантовыми, ни группами». В теории Вороновича компактная квантовая группа — это C^*-алгебра, снабженная дополнительной структурой (коумножением), удовлетворяющей некоторым естественным аксиомам. Подход к квантовым группам, опирающийся на C^*-алгебры, тесно связан с более известным алгебраическим подходом посредством двойственности, вещественных форм и C^*-пополнений, но в общем случае между ними нет взаимно однозначного соответствия. Многие классические результаты теории компактных групп (существование и единственность меры Хаара, полная приводимость унитарных представлений, теорема Петера–Вейля, двойственность Таннаки–Крейна и т.п.) имеют естественные «квантовые» аналоги. Теория компактных квантовых групп — лишь небольшая часть намного более общей (и намного более трудной) теории локально компактных квантовых групп, разработанной Й. Кустермансом и С. Ваасом в начале 2000-х гг. В настоящее время эта наука является одной из наиболее популярных и активно развивающихся областей теории операторных алгебр.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Теория интеграла Лебега и основы функционального анализа. Полезным будет также некоторое знакомство с теорией представлений компактных (или хотя бы конечных) групп.

ПРОГРАММА:

1. C^*-алгебры. Основные примеры. Коммутативные C^*-алгебры и первая теорема Гельфанда-Наймарка. Функциональное исчисление в C^*-алгебрах.

2. Положительные элементы в C^*-алгебрах. Представления C^*-алгебр. Положительные функционалы и ГНС-конструкция. Вторая теорема Гельфанда-Наймарка.

3. Тензорные произведения C^*-алгебр. C^*-оболочки.
4. Компактные квантовые группы. Примеры (квантовая SU(n), квантовая SO(n), свободная унитарная и свободная ортогональная квантовые группы). Коммутативные компактные квантовые группы.
5. Состояние Хаара.
6. Унитарные копредставления. Разложение на неприводимые.
7. Соотношения ортогональности. Подалгебра Хопфа матричных элементов.
8. Двойственность Таннаки-Крейна (если позволит время).

УЧЕБНИКИ:

1. Дж. Мёрфи. C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
2. S. Neshveyev, L. Tuset. Compact quantum groups and their representation categories. SMF, 2013.
3. K. R. Davidson. C^*-algebras by example. AMS, 1996.
4. B. Blackadar. Operator algebras. Springer, 2006.
5. Ж. Диксмье. C^*-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
6. А. Я. Хелемский. Банаховы и полинормированные алгебры. М.: Наука, 1989.
7. M. Takesaki. Theory of operator algebras. Springer, 2002 (vol. I), 2003 (vols. II and III).
8. T. Timmermann. An invitation to quantum groups and duality. EMS, 2008.
9. A. Klimyk, K. Schmudgen. Quantum groups and their representations. Springer, 1997.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка = оценка за экзамен

Письменный домашний экзамен будет проведен в конце семестра и будет состоять из 7 задач. На решение отводится приблизительно 10 дней.

Алгебраическая геометрия (схемы, пучки, когомологии)
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Е. Ю. Америк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: модули 1 – 3 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Цель курса — познакомить слушателя с аппаратом алгебраической геометрии: схемы, пучки, когомологии.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: очень желательно знакомство с коммутативной алгеброй в объёме Атьи – Макдональда примерно.

ПРОГРАММА: Аффинные схемы: повторение коммутативной алгебры. Пучки. Понятие схемы. как пример. Многочлен Гильберта, теорема Безу. Общие свойства схем и их морфизмов (целостность, условия конечности, отделимость, собственность). Размерность, неособость. Когерентные пучки на аффинной и проективной схеме. Обратимые пучки и группа Пикара. Обратимые пучки и отображения в проективное пространство. Обильность и очень обильность. Когомологии пучков. Когомологии Чеха, вычисление для проективного пространства. Теоремы конечности и обращения в нуль. Плоские морфизмы, плоские семейства и многочлен Гильберта. Теорема Римана – Роха для кривых.

УЧЕБНИКИ: Манин. «Введение в теорию схем и квантовые группы». Хартсхорн. «Алгебраическая геометрия».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: половина оценки дз, половина экзамен.

Алгоритмы как математическое исследование
простой аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Д .А. Шмелькин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Слово Алгоритм часто оказывается мостом между программированием и математикой. Мы расскажем о том, в чём заключается и как оценивается эффективность алгоритмов. С одной стороны, алгоритмы оцениваются по своей асимптотической сложности. С другой стороны, мы уделим должное внимание структурам данных, выбор которых существенно влияет на сложность алгоритмов. Курс в основном посвящён полиномиальным алгоритмам, однако мы покажем, какие методы применимы (в некотором приближённом смысле, конечно) к NP-трудным задачам, которые и встречаются чаще всего на практике. Участники получат опыт практической реализации алгоритмов в виде программ: без этой работы было бы слишком трудно по настоящему понять алгоритмы. Курс будет иллюстрирован примерами, как из учебников, так и из практики. Замечание: Студенты матфака имеют широкие возможности выбора курсов, в частности на других факультетах ВШЭ и в ШАД имеются глубокие многосеместровые курсы по Алгоритмам. Выбирая между этими возможностями следует иметь в виду, что наша цель состоит прежде всего в том, чтобы за ограниченное время показать математику в алгоритмах, используя минимальный багаж программирования, что удобно для тех, кто пока ещё присматривается к компьютерным наукам.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: В части математических знаний, минимальные требования довольно просты, и в основном требуют только базовой математики в рамках программы «Матфак: предисловие». Важно, что участники должны быть готовы к тому, что им придётся писать программы на языке `Python`, а ещё лучше на `C++`. При этом требования к знанию языка невелики, и всё чего не хватает можно выучить в процессе решения задач. Очевидно, что для того чтобы писать программы, необходим доступ к компьютеру, в идеале — собственный ноутбук, с которым можно работать на практическом занятии.

ПРОГРАММА:

- Начальные примеры алгоритмических задач. Понятие сложности алгоритма и сложности задачи. Нижние оценки сложности алгоритмов. Навыки: алгоритмы на множествах чисел, оценка их сложности.

- Стандартные структуры данных: массив, стек, очередь, список, дерево, хэш таблица. Навыки: умение программировать некоторые методы структур данных и выбирать подходящую структуру для задачи.

- Неориентированные графы и их обходы. Поиск в ширину и его применения (поиск связных компонент и минимального покрывающего дерева графа, поиск кратчайших путей, обобщения). Навык: умение решать алгоритмические задачи на графах методом построения структуры данных и поиска в ширину.

- Ориентированные графы и порядки на множествах. Поиск в глубину. Топологическая сортировка, поиск сильно связных компонент, перечисление всех ориентированных циклов. Навык: построение полных порядков из предпорядка.

- Потоки на графах. Алгоритмы поиска максимального потока и минимального разреза. Многопродуктовые потоки, алгоритмы поиска максимального конкурентного потока. Навык: решение задач методом построения и максимизации потока на графе.

- Жадные алгоритмы и их применимость. Матроиды и субмодулярные функции. Примеры (минимальное покрывающее дерево, упаковка рюкзака, оптимальное расписание, покраски графов). Навык: умение видеть задачи, допускающие точные жадные алгоритмы.

- Практикум по работе с NP-трудными задачами оптимизации включая эвристические алгоритмы поиска решения, приближённые алгоритмы с оценками близости к оптимуму, полный перебор и его ускорения, такие как Метод ветвей и границ. . Каждому студенту будет выдана задача для всестороннего анализа и отчёта.

УЧЕБНИКИ:

- Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест « Алгоритмы: построение и анализ», пер. под ред. А.Шеня. М.: МЦНМО, 2001.

- С. Дасгупта, Х. Пападимитриу, У. Вазирани «Алгоритмы», пер. под ред. А. Шеня. М.: МЦНМО, 2014.

- Б. Корте, Й. Фиген, «Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы», пер. М. Бабенко. М.: МЦНМО, 2015.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка складывается из 3 составляющих. 50% составит оценка за выполнение периодически анонсируемых упражнений по решению задач, в том числе на программирование и финального практикума; 20% - оценка за решение контрольной письменной работы в конце третьего модуля; 30% - оценка за решение письменной экзаменационной работы в конце курса

КОММЕНТАРИЙ: Для меня оптимально готовить все материалы на английском, но читать лекции и вести упражнения на русском. Первое позволяет переиспользовать материалы в многоязычной аудитории, а второе сильно увеличивает контакт со слушателями.

Аналитическая теория дифференциальных уравнений
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Ю. С. Ильяшенко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Аналитическая теория дифференциальных уравнений - это теория уравнений с аналитической правой частью и их аналитических решений. Ньютон искал решения дифференциальных уравнений в виде сходящихся степенных рядов. Пуанкаре открыл теорию нормальных форм, которая отвечает на вопрос: к какому простейшему виду можно привести дифференциальное уравнение в окрестности особой точки. Эта теория оказалась очень полезной для решения глобальных задач линейной теории, например, проблемы Римана - Гильберта, положительное решение которой нашел Племель в 1908 году (оно оказалось ошибочным), а отрицательное Болибрух в 1989. Петровский и Ландис заложили основы геометрической теории дифференциальных уравнений в комплексной области, одновременно близкие и далекие от аналогичной вешественной теории. Все эти направления продолжают развиваться и сейчас. Об этом развитии ””от Ромула до наших дней”” и будет рассказано в спецкурсе.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Обязательные курсы матанализа, ТФКП и дифференциальных уравнений

ПРОГРАММА:

- Азы многомерного комплексного анализа.
- Теорема существования и единственности голоморфных решений.
- Области Пуанкаре и Зигеля.
- Теорема Пуанкаре об аналитичнской эквивалентности уравнения своей линейной части.
- Малые знаменатели и теорема Зигеля.
- Параболическая особая точка одномерного отображения. Модули Экаля - Воронина.
- Резонансные нормальные формы. Теорема Брюно.
- Нормальные формы особых точек фуксовых линейных уравнений и систем.
- Иррегулярные особые точки. Теоремы о секториальной нормализации. Операторы Стокса.
- Проблема Римана - Гильберта. Достаточные условия разрешимости.
- Проблема Римана - Гильберта. Неразрешимость: пример Болибруха.
- Геометричексие свойства дифференциальных уравнений. Слоения на аналитические кривые в комплексной проективной плоскости.
- Теорема Худай - Веренова о плотности.
- Абсолютная негрубость.
- Уравнение Риккати и непродолжимость голономии.
- Счетность числа комплексных предельных циклов.

УЧЕБНИКИ: Ю.С. Ильяшенко, С.Ю. Яковенко, Аналитическая теория дифференциальных уравнений, МЦНМО, 2013

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0,4 — посещаемость, 0,3 — коллоквиум в 3 модуле, 0,4 — экзамен в 4 модуле. Экзамен и коллоквиум в основном по теории с небольшим количеством задач на понимание теории.

КОММЕНТАРИЙ: Заполнил А. Клименко по материалам Ю.С. Ильяшенко (у него были технические сложности с отправкой гугл-формы)

Аналитическая теория чисел
простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Б. Калмынин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Аналитическая теория чисел — это раздел теории чисел, который изучает количественные аспекты различных объектов арифметического происхождения при помощи аналитических методов. Данный подход оказывается особенно полезным, если алгебраическая или геометрическая структура изучаемого объекта неясна или устроена сложно. В этом курсе мы обсудим доказательства таких классических фактов, как асимптотический закон распределения простых чисел и теорема Дирихле о простых в арифметических прогрессиях, а также научимся использовать свойства дзета-функции Римана и круговой метод, поймём, почему каждое достаточно большое нечётное число есть сумма трёх простых. Кроме того, мы обсудим приложения этих результатов к вопросам равномерного распределения и статистике квадратичных вычетов

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Комплексный анализ (основные свойства голоморфных функций, интегральная формула Коши, принцип максимума, теорема Вейерштрасса о целых функциях), Анализ (””O”” большое и ””o”” малое, интегрирование по частям, ряды Фурье, преобразование Фурье), Алгебра (основная теорема арифметики)

ПРОГРАММА: 1. Суммирование по частям, средние арифметических функций: количество делителей, функция Эйлера, суммы делителей. Мультипликативная свертка, функции Мёбиуса, Лиувилля и Мангольдта, ряды Дирихле. *Теорема Эрдёша-Каца. 2. Дзета-функция и её функциональное уравнение, распределение простых чисел. Проблема круга Гаусса, проблема делителей Дирихле. *Формула Вороного, пара слов о модулярных формах. 3. Характеры Дирихле и их L-функции, теорема Зигеля-Вальфиша. Статистические свойства квадратичных вычетов и некоторые другие следствия обобщенной гипотезы Римана. *Арифметика квадратичных полей. 4. Теория равномерного распределения, суммы Вейля. Приложение к границам нулей дзета-функции, простые числа в коротких интервалах. *Нормальные числа и эргодическая теория. 5. Асимптотическая формула для числа разбиений. Проблема Варинга. Теорема Виноградова о суммах трёх простых чисел. *Арифметические прогрессии, состоящие из простых чисел.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: min(10,0.54*P + 0.6*E), где P — доля решенных задач из листков, а E — оценка за экзамен.

КОММЕНТАРИЙ: Планирую провести ””толстый курс””, семинаристом хочу поставить П.А. Кучерявого.

Вариационное исчисление
трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Мариани.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс дает экскурс в теорию вариационного исчисления и оптимизации. Первая часть курса посвящена прямым методам, и основные инструменты теории. Вторая часть курса посвящена современной теории с акцентом на многомерные и бесконечномерные задачи.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Дополнительных реквизитов не требуется. Но студенты должны помнить занятия первых двух курсы. В частности, теория меры (теория интегрирования, сходимость), функциональные пространства, основные дифференциальные уравнения (корректная задача) и базовая дифференциальная геометрия.

ПРОГРАММА:

- Классические задачи и предварительные сведения. [GF]
- Классические методы: уравнения Эйлера-Лагранжа, оптимальное управление, гамильтонов подход, вязкостные решения, приложения.[D,F]
- Прямые методы: основы теории, эллиптические задачи (существование, уникальность, регулярность), новый взгляд на Эйлера-Лагранжа, ослабление интегральные функционалы, приложения в большой размерности. [S]
- Стабильность и прочность. [B]

УЧЕБНИКИ:

- **[D]** Bernard Dacorogna; Introduction to the calculus of variations; Imperial College Press, 3rd ed (2014).
- **[GF]** Israel M. Gelfand, Sergey V. Fomin; Calculus of Variations; Dover (1963).
- **[S]** Michael Struwe; Variational Methods; Springer (2008).
- **[F]** A.Fathi, Draft 2005, http://baladi.perso.math.cnrs.fr/fathidea.pdf
- **[B]** A.Braides, Gamma-convergence for Beginners (2002).

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0,3$ контроль-1 $+$ $0,3$ контроль-2 $+$ $0,4$ устный экзамен $+$ $0,1$ бонус

Бонусный балл — это то, что вы получаете, решая упражнения дома и в классе. Все частичные оценки 0-10

КОММЕНТАРИЙ: Depending on the number and interests of students, one of the following topic can be addressed in some additional lectures: minimal surfaces, homogenization, fastest descent methods.

Введение в теорию Галуа
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. М. Левин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория Галуа исследует корни многочленов и их симметрии в в терминах групп Галуа. Являясь алгебраическим партнером фундаментальной группы в топологии, группа Галуа играет существенную роль в алгебраической геометрии и теории чисел.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Теория групп (включая нормальные подгруппы и факторгруппы), теория коммутативных колец (включая идеалы, факторкольца и поля) Линейная алгебра

ПРОГРАММА:

- Обзор полиномиальных колец и более общих колец главных идеалов
- Алгебраические и трансцендентные расширения
- Поля разложения многочленов и группа Галуа. Нормальные расширения
- Основная теорема теории Галуа
- Вычисление группы Галуа

УЧЕБНИКИ:

- **[W]** Ван дер Варден «Алгебра» Глава 8
- **[FDF]** Luís Finotti, Textbook D. Dummit, R. Foote, Abstract Algebra. (n.d.). Math 551: Modern Algebra I – Fall 2007. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&site=eds-live&db=edsbas&AN=edsbas.1CEBE666
- **[P]** М. М. Постников «Теория Галуа»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $\min(150, H + E) / 15$, где H и E суть процентные доли решённых домашних и экзаменационных задач от общего числа заданных обязательных задач, вычисленные по формуле $100 *$ [число всех (включая необязательные) решённых задач]:[число заданных обязательных задач]. Обратите внимание, что это отношение может быть больше 100. Таким образом, для получения оценки 10 достаточно решить 75% обязательных домашних и 75% обязательных экзаменационных задач, или другим способом набрать сумму $H + E = 150$. При наборе меньшей суммы оценка уменьшается линейно и вычисляется по стандартным правилам округления.

КОММЕНТАРИЙ: Курс был заказан факультетом, но формат его не был оговорен, готов к обсуждениям и улучшениям

Введение в дифференциальную геометрию
простой аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: П. Е. Пушкарь.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс служит введением в основные темы дифференциальной геометрии: симплектическую и контактную геометрии, теорию аффинных связностей на многообразиях, римановы многообразия, геодезические.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартные курсы линейной алгебры, дифференциальных уравнений и анализа на многообразиях.

ПРОГРАММА:

- Симплектические и контактные структуры. Теоремы Дарбу.
- Симплектические и контактные многообразия. Примеры. Лагранжевы и лежандровы многообразия.
- Гамильтоновы поля и их контактные аналоги. Редукции.
- Лагранжев грассманиан, индекс Маслова и теоремы Штурма.
- Гипотеза Арнольда.
- Связности.
- Параллельный перенос. Кривизна.
- Аффинные связности.
- Введение в характеристические классы.
- Римановы многообразия, связность Леви – Чевита.
- Тензор кривизны Римана.
- Геодезические. Теорема Хопфа – Ринова.
- Формулы первой и второй вариации. Якобиевы поля и сопряженные точки.

УЧЕБНИКИ:

[AG] В.И. Арнольд, А.Б. Гивенталь «Симплектическая геометрия»

[M] Дж. Милнор «Теория Морса»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.5 ∗ листки с задачами + 0.5 ∗ экзамен

КОММЕНТАРИЙ: помогать вести курс будет В. Медведев.

Введение в исчисление Гудвилли
трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Г. Горинов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: По гладкой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно построить ее ряд Тейлора в нуле. Его однородные компоненты – однородные полиномы, коэффициенты которых выражаются через производные f в нуле. Более того, при некоторых условиях на $f, x \in \mathbb{R}^n$ и k значение полинома Тейлора степени k в x достаточно хорошо приближает $f(x)$. Удивительно, но у всех этих утверждений есть аналоги для функторов из некоторой подкатегории топологических пространств в топологические пространства, удовлетворяющих некоторым не слишком обременительным условиям. Например, линейной аппроксимацией функтора вложений в данное многообразие M оказывается функтор погружений в M.

Эти явления описывает исчисление Гудвилли. Наша цель состоит в том, чтобы подробно разобрать несколько примеров, в первую очередь функтор вложений, и затем обсудить общий формализм, который за ними стоит.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Алгебраическая топология в объеме первых трех глав Хатчера или первых двух глав Фоменко-Фукса. При необходимости мы напомним все, что нам будет нужно.

ПРОГРАММА:

- Напоминания о пределах, копределах и модельных категориях. Гомотопические пределы и копределы.
- Кубические пространства и тотальные слои.
- Полиномиальные функторы.
- Башня Гудвилли-Тейлора.
- Сходимость для пространств вложений.
- Исчисление Гудвилли и теория гомотопий.
- Приложения к пространствам узклов.
- Приложения к алгебраической K-теории.
- Общая точка зрения на исчисление Гудвилли.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% доклад, 50% записки в Латехе

Введение в категорную логику
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Д. С. Шамканов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Категорная логика рождается в 60-е годы XX века благодаря исследованиям Уильяма Ловера, в трудах которого базовые логические понятия получают категорную интерпретацию. Вместе с тем, скоро становится понятно, что фундаментальные категорные объекты, в свою очередь, могут пониматься, как логические теории (над различными системами типов). Открывая текущую версию статьи "Categorical logic" в Encyclopedia of Mathematics (https://encyclopediaofmath.org/), мы встречаем смелый тезис о том, что теория категорий и логика в своей основе — это одно и то же. В нашем курсе мы дадим краткое введение в так называемую категорную теорию моделей. Мы сосредоточимся на эквациональной логике и логике предикатов первого порядка и рассмотрим различные типы категорий, возникающих при изучении данных логических систем.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Для освоения данного курса необходимы знание основ логики и теории множеств в рамках обязательного курса «Логика и алгоритмы» или любого другого логического курса: «Элементы математической логики», «Введение в теорию моделей» и др. Знакомство с основными понятиями теории категорий в объёме курса «Категории и универсальная алгебра» или любого другого курса, связанного с теорией категорий, желательно, но не является обязательным.

ПРОГРАММА:

- Эквациональные теории и их модели в категориях с конечными произведениями. Синтаксическая категория эквациональной теории и двойственность Ловера.
- Сопряженность и кванторы. Условия Бека-Шевалле. Регулярные и гейтинговы категории. Алгебра подобъектов в гейтинговой категории.
- Многосортная интуиционистская логика первого порядка и её синтаксическая категория. Полнота относительно функториальной семантики.
- Категории функторов. Предпучки, пучки и гейтинговозначные множества.
- Теорема Барра о представлении малой регулярной категории. Семантика Крипке-Жуаяля. Полнота интуиционистской логики предикатов относительно данной семантики.
- Покрытие Диаконеску и предпучки Крипке.

УЧЕБНИКИ:

- **[М]** С. Маклейн. Категории для работающего математика.
- **[Г]** Р. Голдблатт. Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983.
- **[AB]** S. Awodey, A. Bauer. Introduction to Categorical Logic. Lecture notes. https://github.com/awodey/CatLogNotes.
- **[MM]** S. Mac Lane, I. Moerdijk. Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory.
- **[TvD]** A. Troelstra, D. van Dalen. Constructivism in Mathematics, Vol 2.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Накопленная оценка (Н) равна средней оценке за домашние задания. Если она не меньше 8, то она совпадает с итоговой и студент освобождается от экзамена. Иначе, итоговая оценка равна 0.7 * Н + 0.4 * К, где К — оценка за экзамен в форме коллоквиума.

Введение в квантовую теорию поля
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: В. В. Лосяков, П. И. Дунин–Барковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Как известно, современная теория фундаментальной физики («стандартная модель физики элементарных частиц») представляет из себя квантовую теорию поля (КТП). Помимо этой центральной роли в современной физике, квантовая теория поля также имеет множество применений в чистой математике (например, из нее пришли т.н. квантовые инварианты узлов и инварианты Громова – Виттена симплектических многообразий). «Обычная» квантовая механика занимается системами с фиксированным числом частиц. В КТП объектами изучения являются поля (не в смысле «поле комплексных чисел», а в смысле «электромагнитное поле»), элементарные возмущения которых являются аналогами квантовомеханических частиц, но могут появляться и исчезать («рождаться» и «умирать»); при этом число степеней свободы оказывается бесконечным.

В рамках данного курса будут «с нуля» введены базовые понятия КТП. Будет определено пространство Фока и формализм операторов на нем, а также формализм «континуального интеграла». Главным рассматриваемым примером будет квантовая теория скалярного поля. Скалярное поле в физической терминологии — поле, которое на классическом уровне определяется одним числом в каждой точке (т. е., фактически, его состояние в данный момент времени — это просто числовая функция на пространстве), в отличие от векторного поля (примером которого, в частности, является электромагнитное поле). В реальном мире в фундаментальной физике (стандартной модели физики элементарных частиц) скалярным полем является только поле, соответствующее бозону Хиггса. Однако рассмотрение квантовой теории скалярного поля (даже в отдельности, и более простой, чем для поля Хиггса) в любом случае очень полезно, поскольку позволяет познакомиться с аппаратом и явлениями КТП на более простом примере, чем, например, векторные поля. В курсе будет рассмотрена «теория возмущений» (то есть, фактически, способ вычислений первых порядков малости в разложении по малому параметру) для скалярного поля и описаны способы вычисления различных вероятностей событий с частицами. Используемый математический аппарат будет включать в себя гильбертовы пространства и операторы на них, обобщенные функции (необходимый материал будет напомнен). Всем объектам будут даны строгие определения.

Предварительное знание курсов классической механики, классической теории поля и квантовой механики не предполагается, хотя, конечно, не помешает (но все необходимые элементы этих курсов будут рассказаны во всех подробностях).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Базовые курсы анализа (первого и второго курсов), алгебры (первого курса), геометрии (в части линейной алгебры) и ТФКП.

ПРОГРАММА:

- Квантовая система из многих тождественных частиц. Гильбертово пространство, наблюдаемые, гамильтониан, операторы рождения и уничтожения. Бозоны и фермионы.
- Когерентные состояния. Коммутационные и антикоммутационные соотношения.
- Континуальный (фейнмановский) интеграл.
- Квантовая теория скалярного поля.
- Квантование спинорного поля.
- S-матрица для скалярного поля. Теория возмущений. Диаграммы Фейнмана.
- Расходимости и регуляризации.
- Перенормировки в КТП на примере скалярного поля.

УЧЕБНИКИ:

- М. Пескин, Д. Шредер. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001.
- А.С. Шварц. Математические основы квантовой теории поля. Москва: Атомиздат, 1975.
- В. Н. Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Москва: Атомиздат, 1976.
- Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Москва: Наука, 1984.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка вычисляется по формуле $\min(0.3\cdot(H_1+H_2+H_3)+0.2\cdot E, 10)$ с округлением по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх), где H_1, H_2, H_3 — отнормированные на 10 баллов (можно получить и больше 10 баллов) оценки за три домашних задания, а E — оценка за устный неблокирующий коллоквиум в конце курса.

Введение в коммутативную алгебру
трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 1-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. С. Жгун.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Классическая алгебраическая геометрия изучает геометрию множества решений полиномиальных уравнений. В простейшей ситуации коэффициенты полиномиального уравнения принадлежат алгебраически замкнутому полю. Рассмотрение полиномиальных уравнений с коэффициентами в разных кольцах, таких как, например, кольцо целых в полях алгебраических чисел, приводит к вопросам и задачам современной алгебраической геометрии и современной алгебраической теории чисел.

Коммутативная алгебра является удачным инструментом, помогающим при ответах на простейшие вопросы о множествах решений системы полиномиальных уравнений, таких как конечная порождённость системы, существования решения в подходящем расширении, вычислении размерности и количества неприводимых компонент, а также в вопросах гладкости.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартный курса алгебры бакалавриата

ПРОГРАММА:

- Кольца, алгебры, идеалы, модули.
- Нётеровы кольца.
- Факториальные кольца. Кольца и модули частных. Локализация.
- Целая зависимость и лемма Нётер о нормализации. Теоремы о спуске и подъёме.
- Тензорное произведение. Плоские, проективные и инъективные модули.
- Теорема Гильберта о нулях. Спектр кольца.
- Размерность Крулля и степень трансцендентности. Теорема Крулля о главном идеале.
- Примарное разложение.
- Кольца дискретного нормирования и дедекиндовы области.
- Теория размерности нетеровых колец.
- Функция Гильберта. Кратности.
- Комплекс Кошуля.
- Свободные резольвенты и регулярные кольца

УЧЕБНИКИ:

- M. Reid, «Undergraduate commutative algebra», Vol. 29. Cambridge University Press, 1995.
- М. Атья, И. Макдональд. «Введение в коммутативную алгебру», Мир, Москва (1972)
- G. Kemper. «A course in commutative algebra», Vol. 256. Springer Science & Business Media, 2010.
- D. Eisenbud. «Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry», New York, NY: Springer Verlag, 1999.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0,3 (решение задач из листков) + 0,7 (итоговый устный экзамен)

Введение в римановы поверхности
простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Буряк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Римановой поверхностью называется гладкое двумерное многообразие (поверхность) с заданной комплексной структурой. Замечательным образом, теория римановых поверхностей сочетает в себе обилие красивых результатов вместе с доступностью доказательств, особенно в сравнении с теорией комплексных многообразий большей размерности. Основным техническим инструментов у нас будет теория когомологий пучков, которую мы аккуратно построим, не предполагая никаких предварительных знаний. Основной целью курса является вывод теоремы Римана – Роха, двойственности Серра, а также теоремы Абеля.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Теория функций одной комплексной переменной, основы топологии (в объёме первого курса), основы теории гладких многообразий (включая дифференциальные формы и формулу Стокса).

ПРОГРАММА:

1. Понятие римановой поверхности, каноническое разложение касательного пространства, а также пространства дифференциальных форм.

2. Понятие пучка.

3. Когомологии пучков.

4. Теорема конечности, род римановой поверхности.

5. Дивизоры на римановой поверхности.

6. Теорема Римана – Роха.

7. Двойственность Серра.

8*. Теорема Абеля.

УЧЕБНИКИ: О. Форстер. Римановы поверхности.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Работа на семинаре 3, первая контрольная 3, вторая контрольная 3, экзамен 5. Если суммарная оценка превышает 10, до результат уменьшается до 10.

Введение в теорию алгебраических чисел и полей классов
трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. С. Жгун.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Алгебраическая теория чисел — классическая область математики, сформировавшаяся в ходе исследования решений диофантовых уравнений, а также благодаря попыткам доказать теорему Ферма. Сейчас это обширная классическая область лежащая в основании Арифметической геометрии. В этом курсе мы напомним основы теории Галуа, рассмотрим так называемую теорию ветвления, докажем основные теоремы о структуре идеалов (разложения на простые идеалы), докажем теорему Дирихле о структуре S-единиц, теорему о конечности группы классов. Мы осветим очень важную аналогию между теорией алгебраических чисел и теорией алгебраических кривых над конечными полями.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: бакалавриат стандартный курс алгебры

ПРОГРАММА:

1. Теория Галуа и конечные поля. Основные факты из теории Галуа. Структура конечных полей. Уравнения над конечными полями. Квадратичный закон взаимности.

2. p-адические числа. Сравнения и p-адические числа. Лемма Гензеля. Теорема Островского.

3. Квадратичные формы. Представление чисел квадратичными формами над $\mathbb{Q}_p$ и над $\mathbb{Q}$. Теорема Минковского – Хассе.

4. Поля алгебраических чисел. Дедекиндовы кольца. Разложение на простые идеалы. Модули над Дедекиндовыми кольцами.

5. Норма и след. Ветвление, дискриминант, дифферента.

6. Адели и идели.

7. Группа классов идеалов. Теорема конечности. Константа Минковского.

8. Теорема Дирихле о S-единицах.

9. Циклотомические поля.

УЧЕБНИКИ:

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1985.

2. Вейль А. Основы теории чисел. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

3. Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

4. Ленг С. Алгебраические числа. — М.: Мир, 1972.

5. Манин Ю. И., Панчишкин А. А. Введение в современную теорию чисел. — М.: МЦНМО, 2009.

6. Серр Ж.-П. Курс арифметики. — М.: Мир, 1972.

7. Касселс Д., Фрелих А.(ред.), Алгебраическая теория чисел. — 1969.

8. Serre J. P. Local fields. — Springer, 2013. — Т. 67.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0,7 (final exam) + 0,3 (problem sheets)

Введение в теорию когомологий
простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Г. Горинов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Одна из основных целей алгебраической топологии состоит в том, чтобы ответить на вопрос, являются ли два пространства гомеоморфными или гомотопически эквивалентными. В полной общности эта цель недостижима, но при попытках различить гомотопически неэквивалентные пространства были открыты гомотопические инварианты пространств: гомотопически неэквивалентные пространства имеют разные инварианты, но обратное, вообще говоря, неверно. Одним из самых простых, но в то же время содержательных инвариантов являются классические группы гомологий и кольца когомологий. Их основным свойствам и применениям и будет посвящен курс.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Алгебра и топология 1 года. Желательно, но необязательно знать гладкие многообразия.

ПРОГРАММА:

- Введение. Симплициальные гомологии.
- Базовая гомологическая алгебра: точные последовательности, комплексы, лемма о 5 гомоморфизмах, цепная гомотопия.
- Гомотопическая инвариантность, вырезание и Майер-Виеторис.
- Сингулярные гомологии.
- CW-комплексы и клеточные гомологии.
- Гомологии и когомологии с коэффициентами. Теоремы об универсальных коэффициентах.
- Изоморфизмы Кюннета.
- Умножения. Топологические многообразия и двойственность Пуанкаре.
- Теоремы Лефшеца. Вклад невырожденной неподвижной точки в случае многообразий.
- Векторные расслоения и характеристические классы.
- (*) Гомотопические группы. Теоремы Уайтхеда и Гуревича.
- (*) Пространства Эйленберга-МакЛейна и башни Постникова.
- (*) Когомологические операции.

УЧЕБНИКИ: А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс, Курс гомотопической топологии.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 100% экзамен

КОММЕНТАРИЙ: Курс является промежуточным между топологией 1 года и более продвинутыми сюжетами. В прошлых инкарнациях курса ощутимую часть занимали доказательства гомотопической инвариантности, вырезания и т.д. В этот раз я планирую детали оставить для самостоятельного изучения, а освободившееся время посвятить харклассам и одному или нескольким сюжетам со звездочкой.

Введение в теорию минимальных подмногообразий
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. О. Медведев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория минимальных подмногообразий является сердцем геометрического анализа, разделом математики, занимающимся, грубо говоря, изучением связи между геометрией, топологией и анализом на римановом многообразии. Подмногообразие риманова многообразия называется минимальным, если оно является критической точкой функционала объёма. Простейшим примером минимальных подмногообразий являются геодезические. В свойствах минимальных подмногообразий зашита информация об объемлющем римановом многообразии, поэтому анализируя их, можно понять как устроено объемлющее многообразие (его топология геометрические свойства). Последнее имеет элегантные приложения например к топологии и теории относительности. Целью курса является систематическое введение в современную теорию минимальных подмногообразий, что в принципе позволит студентам начать свои исследования в этой области или применить полученные знания к своей области исследований.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Дифференциальная геометрия, топология, математический анализ, комплексный анализ, весьма полезно знакомство с теорией дифференциальных уравнений с частными производными

ПРОГРАММА: I. Основные сведения из римановой геометрии и теории уравнений с частными производными: тензор Римана, тензор Риччи, скалярная кривизна, средняя кривизна, уравнение Гаусса, конформные метрики, дифференциальные уравнения в частных производных на римановых многообразиях, слабые и сильные решения, соболевские пространства на римановых многообразиях и их вложения, эллиптическая регулярность, неравенство Гарнака, спектр замкнутого риманова многообразия.

II. Начала теории минимальных подмногообразий: функционал объёма vs функционал энергии, первая вариация функционала объёма, гармонические отображения, минимальные подмногообразия евклидова пространства, гауссово отображение, представление Вейерштрасса, задача Бьёрлинга, концы минимальных поверхностей, минимальные графики, теорема Бернштейна, основные сведения о задаче Плато, минимальные подмногообразия стандартных сфер, теорема Такахаши.

III. Теория устойчивости минимальных подмногообразий: вторая вариация функционала объёма, оператор устойчивости Якоби, индекс Морса минимального подмногообразия, теорема Фишер-Колбри об индексе минимальных гиперповерхностей, теорема Шейна-Яу об устойчивой минимальной гиперповерхности, теорема Фишер-Колбри-Шейна, теорема Барбосы-до Кармо об устойчивых областях, минимальные подмногообразия с концами, теорема Ченга-Тыска, устойчивые конусы и их приложения, индекс минимальных подмногообразий в евклидовых пространствах и сферах, теорема Урбано, обзор новейших результатов по теории устойчивости.

IV. Минимальные подмногообразия высшей коразмерности: специальные лагранжевы подмногообразия, минмиальные подмногообразия кэлеровых многообразий, теорема Бернштейна в высшей коразмерности, калибрации.

V. Минимальные подмногообразия со свободной границей: общие свойства минимальных подмногообразий со свободной границей, минимальные подмногообразия со свободной границей в евклидовых шарах и их индекс.

VI. Краткий обзор приложений теории минимальных подмногообразий: спектральная геометрия, гипотеза Уиллмора, теорема о положительной массе, задача Ямабе, неравенство Пенроуза.

УЧЕБНИКИ: Y. Xin. Minimal Submanifolds and Related Topics

T.Colding, W. P. Minicozzi II. A Cours in Minimal Surfaces

Topics on Minimal Surfaces by R. Schoen

J.Jost. Riemannian Geometry and Geometric Analysis

R. Schoen and S.-T. Yau. Lectures on Differential Geometry

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка за курс вычисляется по формуле: 0,4К + 0,6Э, где К - оценка за промежуточную контрольную (максимум 10), Э - оценка за экзамен (максимум 10). Округление в меньшую сторону. Все контрольные мероприятия проводятся в формате ""домашний экзамен"".

Введение в теорию моделей
простой межкампусный дистанционный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. Б. Шехтман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Теория моделей — быстро прогрессирующая область, на стыке математической логики, алгебры и других дисциплин: теории алгоритмов, теории множеств, теории категорий, теории игр. Она изучает связь между математическими структурами и их формальными теориями. Методы теории моделей применяются для решения трудных проблем, например, проблемы континуума или проблемы Уайтхеда. Цель курса — знакомство с основными понятиями и методами теории моделей.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Логика и алгоритмы (1 модуль), основы алгебры, основные понятия топологии.

ПРОГРАММА: Теории и модели. Полнота и компактность. Элементарные расширения. Опускание типов. Модельная полнота. Элиминация кванторов. Ультрапроизведения. Насыщенные модели. Категоричность.

УЧЕБНИКИ:

- Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей. М. Наука, 1982.
- Бруно Пуаза. Курс теории моделей. https://www.math.wisc.edu/~lempp/poizat/poizat1251.html.
- W. Hodges. Model theory. CUP, 1993
- D. Marker. Model theory. Springer, 2002.
- Д. Кейслер, Ч. Чэн. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Накопленная оценка = (число решённых задач) $\times$ 10 / 12. Если эта оценка не менее 8, она равна итоговой. Иначе: итоговая оценка = (число решённых задач) $\times$ 0.75 + оценка за экзамен $\times$ 0.5. Округление до ближайшего целого.

КОММЕНТАРИЙ: Курс доступен студентам, начиная со 2 курса, а также продвинутым первокурсникам (в виде исключения).

Введение в теорию пучков
трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Тихомиров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Пучки являются центральным объектом во многих областях математики. Знакомство с теорией пучков необходимо для изучения алгебраической геометрии, топологии и других дисциплин. Целью курса является знакомство с основными определениями теории пучков, примерами пучков, а также с необходимы инструментами из теории категорий и гомологической алгебры.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Необходимо владение первыми тремя семестрам обязательных курсов алгебры, анализа, геометрии и топологии. Очень желательно знакомство с основами гомологической алгебры.

ПРОГРАММА:
1. Пучки на топологических пространствах, определения и примеры.
2. Элементы теории категорий и гомологической алгебры.
3. (Квази)когерентные пучки на афинных схемах.
4. Когомологии Чеха.
5. Вялые, тонкие и мягкие пучки, вялые резольвенты.
6. Спектральные последовательности и теорема ДеРама.

УЧЕБНИКИ:

1. Stacks project: https://stacks.math.columbia.edu/
2. Р. Хартсхорн. Алгебраическая геометрия. М., Мир, 1981.
3. С. Маклейн. Категории для работающего математика. М., Физматлит, 2004.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка вычисляется по формуле $\min(100, 0.5H + 0.6E)/10$, где H — процентные доли решенных домашних задач и коротких контрольных, проводимых на семинаре, и E — письменного домашнего экзамена.

Введение в теорию случайных процессов
простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Л. Бланк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Курс является продолжением стандартного курса по теории вероятностей (связанного в основном с комбинаторикой) и предназначен для первоначального ознакомления с теорией случайных процессов. Уделяется особое внимание связи этой теории с функциональным анализом и общей теорией меры. Курс ориентирован на бакалавров 2 – 4 курса, магистрантов и аспирантов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курсы анализа и теории вероятностей

ПРОГРАММА:

- Понятие случайного процесса.
- Элементы случайного анализа.
- Корреляционная теория случайных процессов.
- Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем.
- Винеровский и пуассоновский процессы.
- Стохастический интеграл. Формула Ито.
- (Суб/супер)мартингалы.
- Инфинитезимальный оператор полугруппы.
- Стохастическая устойчивость динамических систем.
- Большие уклонения в марковских процессах и хаотической динамике.
- Нелинейные марковские процессы.

УЧЕБНИКИ:

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- А. Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. Физматлит, 1996
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.
- Б. Оксендаль. Стохастические дифференциальные уравнения, Москва, 2003.
- А. Н. Ширяев. Вероятность, 2 т. МЦНМО, 2007.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (Накопленная оценка) + 0.6 (Экзамен), накопленная оценка определяется контрольными, сдачей листков и работой на лекциях и семинарах. Округление в большую сторону.

Введение в теорию чисел
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Кириченко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Натуральные числа — естественный, интересный и сложный для изучения объект. Теория чисел — одна из самых древних областей математики, и стороннему наблюдателю она может показаться набором отдельных сюжетов из разных опер. В курсе мы изучим основные задачи и методы теории чисел с акцентом на внутреннюю цельность и логику этой области и её связи с другими областями. Курс поможет подготовиться к более продвинутым спецкурсам алгебраической направленности.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: алгебра и геометрия первого курса бакалавриата.

ПРОГРАММА:

- Простые числа, конечные поля, квадратичный закон взаимности.
- Целочисленные квадратичные формы, кольца целых квадратичных числовых полей.
- Дзета-функция, L-функции, теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях.
- Модулярная группа, эллиптические кривые, модулярные функции.

УЧЕБНИКИ:

- **[G]** К.-Ф. Гаусс, «Арифметические исследования».
- **[S]** Ж.-П. Серр, «Курс арифметики».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 30% ДЗ + 30% К + 40% Э, где ДЗ — средняя оценка за домашние задания, К — оценка за контрольную в конце 3 модуля, Э — оценка за письменный экзамен.

Введение в топологическую рекурсию

простой межкампусный дистанционный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше

(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Б. С. Бычков, П. И. Дунин–Барковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Топологическая рекурсия (ТР) это универсальное рекуррентное соотношение, которое удивительным образом появляется в огромном количестве задач перечислительной геометрии: от комбинаторики вложенных графов, до случайных матриц, инвариантов Громова-Виттена, чисел Гурвица, инвариантов узлов и интегрируемых систем. Мы начнём с истоков ТР в теории матричных моделей и через большое число примеров дойдем до современного понимания ТР в теории обобщенных чисел Гурвица. По пути будут обсуждаться связи ТР с интегрируемыми иерархиями и комбинаторикой вложенных графов. Если позволит время, то мы расскажем про примеры и приложения ТР в когомологических теориях поля.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Комплексный анализ, топология, алгебра в объеме обязательных курсов 1-2 курса

ПРОГРАММА:

- Классическое определение ТР Чехова–Эйнара–Орантена;
- ТР в матричных моделях;
- ТР в перечислении карт и гиперкарт (вложенных графов);
- ТР в перечислении чисел Гурвица;
- Гипергеометрическая тау функция иерархии Кадомцева–Петвиашвили;
- Пузырьковая ТР;
- * ТР и когомологические теории поля, конструкция Гивенталя–Телемана.

УЧЕБНИКИ: Огромное число статьей за авторством: Л. Чехов, Б. Эйнар, Н. Орантен, П. Норбури, С. Шадрин, Г. Боро, А. Александров и других.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 4 домашних задания по 1 баллу, экзамен 6 баллов.

Введение в функциональный анализ
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. В. Шапошников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс функционального анализа посвящен широкому кругу идей и методов современной математики. В курсе будут рассмотрены метрические и нормированные пространства, понятие полноты и теорема Бэра, компактные пространства и их свойства, линейные функционалы и отделимость выпуклых множеств, линейные операторы, элементы спектральной теории.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: владение материалом курсов математического анализа и линейной алгебры

ПРОГРАММА:

1. Метрические и нормированные пространства. Эквивалентность метрик и норм.
2. Полные пространства. Теорема Бэра. Теорема о сжимающем отображении.
3. Компакты и их свойства. Теорема Стоуна – Вейерштрасса.
4. Критерий Хаусдорфа. Теорема Арцела – Асколи.
5. Линейные функционалы. Теорема Хана – Банаха.
6. Сопряженное пространство. Слабая и $*$-слабая топология.
7. Гильбертово пространство. Теорема Рисса. Ряды Фурье.
8. Линейные непрерывные операторы. Теорема Банаха – Штейнгауза.
9. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
10. Спектр линейного оператора и его свойства. Резольвента.
11. Компактный оператор и его спектр. Альтернатива Фредгольма.
12. Спектр самосопряженного оператора. Теорема Гильберта – Шмидта.

УЧЕБНИКИ:

1. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.-Ижевск: РХД, 2009.
2. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу, МЦМНО, 2017.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006.
5. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу, МЦНМО, 2004.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Курс включает лекции и семинары. На семинарах выдаются листки с задачами, часть из которых разбирается на семинаре, а часть является домашним заданием. Оценка за курс складывается из оценки за экзамен и накопленной оценки по формуле 0.5*(Накопленная оценка) + 0.5*(Экзамен), а накопленная оценка складывается из оценки за выполнение домашних заданий и оценки за работу на семинаре по формуле 0.6*(домашнее задание) + 0.4*(работа на семинарах). Все формы контроля оцениваются от 0 до 10 баллов.

Введение в эргодическую теорию
простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Л. Бланк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Можно ли отличить детерминированную хаотическую динамику от чисто случайной и имеет ли этот вопрос смысл? Влияет ли необратимость динамики на качественные характеристики процесса? Эргодическая теория изучает эти и другие статистические свойства динамических систем. Интерес к этой проблематике связан с тем, что «типичные» детерминированные динамические системы (например, дифференциальные уравнения) демонстрируют хаотическое поведение: их траектории выглядят как реализации случайных процессов. Мы начнем с классических результатов Пуанкаре, Биркгофа, Хинчина, Колмогорова и дойдем до современных постановок (в том числе и нерешенных) задач. Курс является вводным и ориентирован на бакалавров 2–4 курса, магистрантов и аспирантов. Естественным его продолжением является сколковский курс «Динамика и эргодическая теория».

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартный двухгодовой курс математического анализа.

ПРОГРАММА:

1. Динамические системы: траектории, инвариантные множества, простые и странные аттракторы и их классификация, хаотичность.
2. Топологические свойства измеримой динамики.
3. Действие в пространстве мер, понятие трансфер-оператора, инвариантные меры. Сравнение со случайными марковскими процессами.
4. Эргодичность, теорема Биркгофа, перемешивание, ЦПТ. Меры Синая – Боуэна – Рюэлля и естественные/наблюдаемые меры.
5. Основные эргодические конструкции: прямые и косые произведения, производное и интегральное отображения, естественное расширение и проблема необратимости.
6. Эргодический подход к задачам теории чисел.
7. Энтропия: метрический и топологический подходы.
8. Операторный формализм. Спектральная теория динамических систем. Банаховы пространства мер, случайные возмущения.
9. Многокомпонентные системы: синхронизация и фазовые переходы.
10. Математические основания численного моделирования хаотической динамики.

УЧЕБНИКИ:

1. М. Бланк. «Устойчивость и локализация в хаотической динамике», МЦНМО, Москва, 2001.
2. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. «Эргодическая теория», Наука, Москва, 1980.
3. A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (Накопленная оценка) + 0.6 (Экзамен). Накопленная оценка определяется контрольными, сдачей листков и работой на лекциях и семинарах. Округление в большую сторону.

Гамильтонова механика
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: В. А. Побережный, А. А. Басалаев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс гамильтоновой механики относится к базовым фундаментальным матфизическим курсам и направлен на знакомство слушателей с современным взглядом на основы теории интегрируемых систем и математической физики. Курс рассчитан на старших студентов бакалавриата и студентов магистратуры, освоение его программы даёт возможность в дальнейшем изучать более продвинутые курсы связанные с математической физикой. Математический аппарат современной теории гамильтоновых систем включает в себя методы теории дифференциальных уравнений и динамических систем, групп и алгебр Ли и их представлений, симплектической и пуассоновой геометрии, анализа на многобразиях и многих других. Приобретение практических навыков применения методов и конструкций этих разделов математики, умение их сочетать для решения задач механики является одной из целей данного курса. Курс может быть рекомендован не только студентам, собирающимся продолжить свою обучение на программе «Математика и математическая физика», но и планирующим специализироваться в чистой математике или её приложениях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы бакалавриата первых двух лет: анализ, анализ на многообразиях, дифференциальные уравнения. Знакомство с лагранжевой механикой желательно, но не критично. Физический бэкграунд не требуется.

ПРОГРАММА:

- Ньютонов формализм: напоминание, симметрии, геометрия.
- Лагранжев формализм: принцип наименьшего действия, симметрии, законы сохранения.
- Гамильтонов формализм: канонические преобразования, симметрии, интегрируемость по Лиувиллю – Арнольду, уравнения Гамильтона – Якоби, разделение переменных.
- Симплектические и пуассоновы структуры: теорема Дарбу, системы на алгебрах Ли, коприсоединённое действие, скобка Кириллова – Костанта, отображение момента.
- Представление Лакса.

УЧЕБНИКИ:

- В. И. Арнольд «Математические методы классической механики», 3-е изд. М. : Наука, 1989
- А. М. Переломов, «Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли» М. : Наука, 1990
- Д. тер Хаар, «Основы гамильтоновой механики» М. : Наука, 1974

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: (сумма оценок за две контрольные)/4 + (оценка за экзамен)/2 с округлением до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: И. В. Артамкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: модули 1 – 3 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Алгебраическая геометрия изучает фигуры, локально устроенные как множество решений системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве, и служит мостом между точным, но скудным языком алгебраических формул и бесконечно богатым, но трудно выражаемым в словах миром геометрических образов. Поэтому алгебраическая геометрия занимает центральное место в самых разных областях математики и математической физики, являясь наиболее эффективным и красивым инструментом для установления нетривиальных связей между кажущимися далёкими друг от друга явлениями. Настоящий курс является геометрическим введением в предмет и знакомит слушателей с фундаментальными геометрическими фигурами и конструкциями, а также современной алгеброй, которая за ними стоит.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (алгебра, анализ, геометрия, топология).

ПРОГРАММА:

- Проективные пространства и проективные квадрики. Пространства квадрик. Прямые, коники, PGL (2), кривые Веронезе, рациональные кривые. Плоские кубические кривые.
- Многообразия Грассмана, Веронезе и Сегре. Проективные морфизмы, связанные с тензорной алгеброй.
- Доза коммутативной алгебры: целые элементы в расширениях колец, строение конечно порождённых алгебр над полем, базисы трансцендентности, теоремы Гильберта о нулях и базисе идеала.
- Словарик «Коммутативная алгебра – Аффинная алгебраическая геометрия». Спектры, гомоморфизмы поднятия, топология Зарисского, геометрические свойства гомоморфизмов алгебр.
- Алгебраические многообразия. Отделимость. Свойства проективных многообразий, собственность. Рациональные функции и рациональные морфизмы.
- Размерность. Размерности подмногообразий и слоёв морфизмов. Вычисление размерностей проективных многообразий.
- Векторные расслоения и пучки их сечений. Векторные расслоения на проективной прямой. Линейные системы, обратимые пучки и дивизоры, группа Пикара.
- Если позволит время: (ко)касательные и (ко)нормальные пространства и конусы, гладкость, раздутие. Точная последовательность Эйлера на грассманиане.

УЧЕБНИКИ:

- А. Л. Городенцев, Алгебра – 2.
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.
- А. Л. Городенцев. Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/giag_ru/giag.pdf.
- А. Л. Городенцев. Algebraic Geometry. A Start Up Course, М., МЦНМО, 2006,
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/tot-2006.ps.gz
- Дж. Харрис, Алгебраическая геометрия. Начальный курс, «МЦНМО».
- И. Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии. МЦНМО, 2007.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка $=5\cdot$(доля решенных задач из листков) $+\ 5\cdot$(доля решенных задач из итогового письменного экзамена)

Геометрия дифференциальных уравнений: изомонодромные деформации
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: В. А. Побережный, И. В. Вьюгин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Монодромия, или ветвление решений является важным специфическим явлением присущим комплексным дифференциальным уравнениям. Хотя область обратных задач монодромии формально относится к аналитической теории дифференциальных уравнений, в ней ярко проявляются и тесно взаимодействуют методы и подходы геометрии, алгебры и анализа. В конце XX века обнаружилось, что понятие изомонодромности или сохранения монодромии тесно связано с интергрируемостью, или, в каком-то смысле разрешимостью многих актуальных задач физики и математики, а уравнения, описывающие изомонодромные деформации помимо интересного математического содержания имеют многочисленные приложения в самых разных областях математики и математической физики.

В рамках курса мы рассмотрим введение в теорию изомонодромных деформаций, и обсудим её связи с симплектической геометрией, трансцендентами Пенлеве, и теорией интегрируемых систем.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы комплексного анализа и анализа на многообразиях. Посещение осенней части курса геометрии дифференциальных уравнений полезно, но необязательно.

ПРОГРАММА:

- Монодромия комплексных дифференциальных уравнений и проблема Римана ([B])
- Изомонодромность и интегрируемость ([B],[M])
- Изомонодромные деформации и уравнения Пенлеве ([M],[H])
- Симплектическая геометрия изомонодромных деформаций ([H])

УЧЕБНИКИ:

- **[B]** Болибрух А.А., «Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений»
- **[H]** Nigel Hitchin, «Geometrical aspects of Schlesinger's equation»,
- **[M]** Bernard Malgrange, «Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется как полусумма оценок за листок и устного экзамена с округлением вверх.

Геометрия дифференциальных уравнений: проблема Римана
простой аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Курс-семинар посвящен основам аналитической теории дифференциальных уравнений, локальной и глобальной (на многообразии) теории систем линейных дифференциальных уравнений с комплексным временем. Мы обсудим проблему Римана-Гильберта и её взаимосвязи с задачами математической физики. Использующиеся конструкции и подходы, как правило, имеют видимый геометрический смысл. В рамках семинара возможны доклады участников.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы линейной алгебры, дифференциальных уравнений, комплексного анализа и гладких многообразий.

ПРОГРАММА:

- Специфика комплексных дифуров: метод мажорант, теорема существования и единственности. ([G])
- Регулярные особенности линейных дифференциальных уравнений, разложение Левеля. ([B])
- Фуксовы и регулярные дифференциальные уравнения, соотношение Фукса. ([B],[IY])
- Гипергеометрическое уравнение. ([B])
- Иррегулярная особая точке. Явление Стокса. ([IY])
- Расслоения и связности на римановых поверхностях. Полустабильные расслоения. ([B],[HV])
- Мероморфные связности. ([Bo])
- Проблема Римана-Гильберта. ([B],[IY])

УЧЕБНИКИ:

- **[B]** А. А. Болибрух, «Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений», М.: МЦНМО, 2009.
- **[IY]** Ю. С. Ильяшенко, С. Ю. Яковенко, «Аналитическая теория дифференциальных уравнений», М.: МЦНМО, 2013.
- **[G]** В. В. Голубев, «Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений», Гостехтеоретиздат, 1950.
- **[HV]** H. Esnault, E. Viehweg «Semistable bundles on curves and irreducible representations of fundamental proup», Arxiv:math/9808001.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: При условии работы во время семинара оценка выставляется пропорционально числу сданных задач листка. Возможно повысить оценку или сдать НИС по результатам докладов.

КОММЕНТАРИЙ: Заказан магистерской программой ””Математическая физика””

Геометрия и группы
простой межкампусный дистанционный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: О. В. Шварцман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Этот традиционный НИС , в основном рассчитанный на первокурсников, будет посвящен избранным вопросам геометрии и арифметики бинарных квадратичных форм с рациональными коэффициентами. В первую очередь, нас будут интересовать глубокие и красивые связи теории бинарных квадратичных форм с арифметикой и геометрией квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первые полгода бакалавриата (курсы алгебры и геометрии)

ПРОГРАММА:

- Бинарные формы над полем рациональных чисел, эквивалентность бинарных форм.
- Бинарные формы с целыми коэффициентами. Представление чисел бинарными квадратичными формами. Группа целочисленных автоморфизмов бинарной формы с целыми коэффициентами.Теория приведения бинарных квадратичных форм и цепные дроби.
- Квадратичные поля. Кольцо целых квадратичного поля. Группа единиц и теорема Дирихле.Решетки, идеалы, порядки. Соответствие между решетками и квадратичными формами. Группа классов идеалов и группа классов бинарных квадратичных форм.

УЧЕБНИКИ:

- Э. Б. Винберг. Курс алгебры.
- З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. Теория чисел.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Планируется провести две контрольные и итоговый экзамен. Накопленная оценка равна полусумме оценок за две контрольные. Итоговая оценка равна полусумме накопленной оценки и оценки за экзамен. Округление происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Геометрия и динамика
простой межкампусный аудиторный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Мы предполагаем рассказать слушателям о понятиях, методах и результатах из различных разделов геометрии, динамики и смежных областей. При этом нередко соображения из одной области будут использоваться в работе с объектами другой природы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Семинар рассчитан на студентов 1–2 курса бакалавриата: изложение опирается только на изученный к данному моменту материал обязательных предметов 1 курса.

ПРОГРАММА: НИС состоит из почти независимых блоков в 1–3 занятия. Вот некоторые из тем, запланированные на этот год.

- Символическое кодирование: связь отображения $x \mapsto 2x$ на единичном отрезке с подбрасыванием монетки; как построить обратимую непрерывную динамическую систему с похожим поведением?
- Энтропия динамической системы: как измерить «случайность» поведения системы?
- Геометрическая теория групп: сколько разных элементов можно получить произведениями n образующих группы и при чём здесь случайные блуждания?
- Самоподобие в математике: зоопарк динамических фракталов
- Символические динамические системы и способы их визуализации
- Униформизация поверхностей (геометрический и вычислительные подходы)
- Геометрия классических групп
- Элементы алгебраической комбинаторики

УЧЕБНИКИ:

- А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.:МЦНМО, 2005.
- С. Табачников. Геометрия и биллиарды. Библиотека журнала «Реальная и хаотическая динамика»,М.-Ижевск, 2011.
- Э. Артин. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.
- Дж. Милнор. Комплексная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Семестр разбивается на тематические блоки, каждый из которых оценивается отдельно оценкой O_k. Итоговая оценка равна $\min(10, \sum_k O_k)$ (максимальное значение суммы составляет примерно 12). Каждая из оценок O_k есть сумма оценки за проверочную работу в конце блока и за соответствующую часть экзамена (с ограничением на суммарное число набранных баллов). Задачи экзамена сдаются в письменном виде с последующим устным обсуждением. Также предусмотрено выставление оценки за доклад на семинаре.

КОММЕНТАРИЙ: Нужно добавить третьего руководителя В. А. Тиморин- В.А. Тиморин

Группа кос, квантовые группы и приложения
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: В этом курсе мы обсудим несколько тем из теории групп кос и теории квантовых групп, в которых возникает и применяется R-матрица — один из наиболее популярных объектов современной математической физики. R-матрица в узком понимании этого термина — это решение (кубического матричного) уравнения Янга-Бакстера, известного также как соотношение кос. Сферы применения R-матриц очень разнообразны — от теории квантовых групп и инвариантов узлов до исследований точно решаемых моделей квантовой механики, стохастических процессов и статистической физики. Сперва мы познакомим слушателей с алгебраическими структурами, порождающими R-матрицы — группой кос и алгебрами Гекке, подробно обсудим теорию представлений алгебр Гекке в подходе Вершика-Окунькова. Затем рассмотрим R-матричные представления группы кос, разовьем R-матричную технику и применим ее к построению инвариантов зацеплений. Возникновение и применение R-матриц в теории квазитреугольных алгебр Хопфа (квантовых групп) обсудим во второй части курса. Мы применим R-матрицы из первой части в построении квантовых матричных алгебр и докажем структурные результаты об этих алгебрах (аналоги теоремы Гамильтона-Кэли, описание центра и коммутативных подалгебр). Если останется время, построим конечномерные разложимые представления семейства квантовых матричных алгебр, связанных с уравнением отражения; рассмотрим модели квантовых спиновых цепочек Гейзенберга.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Для понимания курса требуется знание оснований алгебры, теории групп и теории представлений в рамках программы первых 2-х курсов матфака. Все необходимые сведения по теории групп, ассоциативных алгебр, алгебр Ли, а также алгебр Хопфа будут напоминаться в процессе занятий. Курс рассчитан на студентов 3-4 курса и магистрантов, но подойдет и сильным второкурсникам.

ПРОГРАММА:

- Группа кос B_n, ее геометрическое и алгебраическое представления. Конечномерная фактор-алгебра $\mathbb{C}[B_n]$ – алгебра Гекке, классификация ее неприводимых представления в духе Вершика-Окунькова.
- R-матричные представления группы кос, R-след и их применения в построении инвариантов зацеплений.
- Коммутативная алгебра с пуассоновой структурой и ее квантование. Квантование алгебр функций на линейных группах Ли — RTT-алгебры. Приложение этих алгебр в построении трансфер-матриц и изучении интегралов движения квантовых спиновых цепочек Гейзенберга.
- Квантование алгебры функций на двойственном пространстве к алгебре Ли $gl(n)$ — универсальная обертывающая алгебра $U(gl(n))$. Квадратичная скобка Пуассона на алгебре функций на $gl(n)^*$ и ее квантование — алгебра уравнения отражений.
- Квантовые матричные алгебры. Квантовая версия теоремы Гамильтона-Кэли. Построение коммутативных подалгебр (подалгебр Бете). Конечномерные разложимые представления алгебр уравнения отражений.

УЧЕБНИКИ:

- O. Ogievetsky, P. Pyatov, «Lecture on Hecke algebras». Preprint CPT-2000/P.40762.

- J. S. Birman and T. E. Brendle, «Braids: a Survey», arXiv:math/0409205[math.RT]. In: «Handbook of Knot Theory», edited by: W. Menasco and M. Thistlethwaite, Elsevier B. V. 20053.

- Кассель К., «Квантовые группы», Фазис, 1999.

- A. Klimyk, K. Schmuedgen, «Quantum groups and their representations», Springer, 1997.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: По каждой теме курса будет выдаваться листок с задачами. Задания листков оцениваются по 10-балльной шкале. Для получения оценки 10 достаточно решить примерно 80% задач листка. Накопленная оценка $O_{\text{накоп}}$ — среднее арифметическое оценок за все листки. Если $O_{\text{накоп}} \geq 7$, итоговая оценка $O_{\text{итог}}$ получается округлением $O_{\text{накоп}}$ до целого по обычному правилу. В случае, если $O_{\text{накоп}} < 7$, студент должен сдать экзамен, при этом итоговая оценка определяется по формуле $O_{\text{итог}} = 0.5(O_{\text{накоп}} + O_{\text{экз}})$.

КОММЕНТАРИЙ: Первую часть курса ведет П.Пятов, вторую - П.Сапонов. Просьба опубликовать аннотацию курса в книге анонсов без изменений, или согласовать редакторскую правку с руководителями курса.

Группы и алгебры Ли
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. И. Ильин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Группы и алгебры Ли и их представления являются важнейшим инструментом в таких, казалось бы далеких друг от друга областях математики как алгебраическая топология, алгебраическая и дифференциальная геометрия, динамические системы и математическая физика. Данный курс является базовым курсом теории групп и алгебр Ли. Основные результаты курса:

- Теоремы о соответствии между группами и алгебрами Ли (три теоремы Ли). Эквивалетность категорий связных односвязных групп Ли и алгебр Ли. Эквивалентность категорий представлений связной односвязной группы Ли и соответствующей алгебры Ли.
- Классификация представлений алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.
- Описание центра универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}_n)$. Теорема Хариш – Чандры.
- Формула Вейля для характеров представлений $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Линейная алгебра, многомерный анализ, дифференциальная геометрия (многообразия, подмногообразия, касательные пространства, векторные поля, дифференциальные формы), топология (общая топология, фунадаментальная группа, накрытия, локально-тривальные расслоения), теоремы существования и единственности для ОДУ. При этом необходимые определения и теоремы будут формулироваться.

ПРОГРАММА:

1. Определение вещественных и комплексных групп Ли. Примеры матричных групп. Подгруппы Ли, гомоморфизмы. Действия групп Ли на многообразиях.
2. Фактор-группы, однородные пространства, ядра и образы гомоморфизмов, орбиты и стабилизаторы. Виртуальные подгруппы Ли.
3. Алгебры Ли: определение, гомоморфизмы. Касательное пространство в единице к группе Ли является алгеброй Ли. Присоединённые представления Ad и ad. Примеры алгебр Ли, алгебры Ли векторных полей.
4. Экспоненциальное отображение, функториальность. Классификация одномерных и абелевых групп Ли.
5. Универсальное накрытие группы Ли, фундаментальныя группа, примеры накрытий.
6. Три теоремы Ли, эквивалентосноть категорий связных односвязных групп Ли и алгебр Ли.
7. Представления групп и алгебр Ли, эквивалетность категорий конечномерных представлений связной односвязной группы Ли и соответствующей алгебры Ли.
8. Универсальная обёртывающая алгебра, теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта.
9. Конечномерные представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Теорема Жордана – Гёльдера, вполне приводимость, классификация. Характеры.
10. Представления $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$: вполне приводимость и классификация. Модули Верма.
11. Центр универсальной обёртывающей $U(\mathfrak{gl}_n)$, гомоморфизм Хариш – Чандры.
12. Характеры представлений $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, формула Вейля для характера.
13. Представления компактных групп Ли, теорема Петера – Вейля.

УЧЕБНИКИ:

- Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик *Основы теории групп Ли. Группы и алгебры Ли – 1.*
- Alexander Kirillov Jr. *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras.*
- Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.*
- У. Фултон, Дж. Харрис, *Теория представлений. Начальный курс.*

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $0.25\,(M_1 + M_2 + S + L)$, где M_1 — оценка за контрольную работу в середине семестра, M_2 — оценка за экзамен в конце курса, S — оценка за работу на семинарах, L — оценка за листки.

Динамические системы
трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар посвящён теории динамических систем в ее разных аспектах: многомерные динамические системы и хаос, теория аттракторов, дифференциальные уравнения на плоскости, комплексные дифференциальные уравнения, теория бифуркаций. Семинар преследует две цели: научить младших участников азам перечисленных теорий; вовлечь всех участников в современные исследования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория функций комплексного переменного в объёме обязательных курсов бакалавриата.

ПРОГРАММА: Мозаика из перечисленных выше теорий.

УЧЕБНИКИ:

- Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.
- Арнольд В. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений.
- Ильяшенко Ю., Ли Вейгу. Нелокальные бифуркации.
- Ильяшенко Ю., Яковенко С. Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 40% за посещение, 20% за активность, 40% за один доклад в году.

КОММЕНТАРИЙ: Заполнил А. Клименко по просьбе Ю.С. Ильяшенко

Дискретная оптимизация и целочисленное линейное программирование

простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше

(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А .Н. Лавров, Д. И. Архипов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Каждый из нас постоянно составляет расписания. Мы оптимизируем своё время: составляем планы на выходные, выбираем оптимальный маршрут чтобы добраться от одной станции метро до другой. Сложно ли составить расписание для факультета или спортивной лиги, учитывая множество требований и пожеланий? А если речь идёт об оптимизации работы дата-центра с тысячами серверов, морского порта или железнодорожной сети крупной страны? В рамках курса мы сформулируем, какие вызовы стоят перед математиками в условиях современного мира, когда размер данных, влияющих на принятие решений растёт быстрее вычислительных возможностей. После прохождения курса вы научитесь строить математические модели оптимизационных задач разной сложности и решать их с помощью солверов, основанных на методах целочисленного и линейного программирования. Курс не ограничивается практикой решения задач, вас ждёт знакомство с базовыми понятиями и классическими алгоритмами методов оптимизации, а также основные аспекты теории, лежащей в основах программного обеспечения, помогающего принимать решения в современном мире.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Строгие ограничения на пройденные ранее курсы отсутствуют. Желательно прохождение курса «Линейное программирование» (https://math.hse.ru/lin_progr_kolesn2122)

ПРОГРАММА:

- Задачи безусловной и условной оптимизации. Метод множителей Лагранжа.
- Численные методы оптимизации. Градиентный спуск. Метод Ньютона.
- Элементы теории сложности. Отношение классов P и NP.
- Линейное программирование. Симплекс-метод.
- Теория двойственности. Условия оптимальности и двойственность в задачах линейного программирования.
- Целые точки многогранников. Целочисленное линейное программирование. Унимодулярные матрицы. Метод ветвей и границ. Метод секущих плоскостей.
- Постановка и решение задач с использованием MILP-солверов.
- Эффективность MILP-солверов на примере графовых задач. Поиск кратчайшего пути, нахождение минимального остовного дерева в графе.
- Программирование в ограничениях.

УЧЕБНИКИ:

- **[STF]** А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров «Курс методов оптимизации».
- **[S]** А. Схрейвер «Теория линейного и целочисленного программирования».
- **[KV]** Б. Корте, Й. Фиген «Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы».
- **[SI]** И. Сигал, А. Иванова «Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0.5H + 0.5E$, где H и E – оценки по 10-бальной шкале за домашние задания и экзамен соответственно.

КОММЕНТАРИЙ: Курс от Huawei R&D

Дискретные интегрируемые уравнения и их редукции.
трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 4-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. К. Погребков.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Создание и развитие теории интегрируемых уравнений является одним из главных достижений математической физики осени прошлого века. Идеи и результаты этой теории проникают во многие разделы современной математики: от теории струн до теории римановых поверхностей. В настоящее время существенное внимание уделяется теории дискретных интегрируемых уравнений. В этих лекциях будет представлен общий подход к построению и исследованию таких уравнений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы ВШЭ по математическому анализу

ПРОГРАММА: Коммутаторные тождества на ассоциативных алгебрах; $\bar{\partial}$-задача и операторы одевания; Пары Лакса; Разностное уравнение Хироты (HDE); Высшие аналоги HDE; Прямое и обратное преобразование рассеяния для HDE; Солитонные решения; Двумерные редукции, их интегрируемость; Дисперсионное соотношение и интегралы движения; Другие иерархии HDE дискретных интегрируемых уравнений.

УЧЕБНИКИ: Ф.Калоджеро, А. Дегасперис «Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений». М., Мир, 1985

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка вычисляется как 0,5 (совокупная оценка) + 0,5 (итоговая оценка за экзамен) (если не указано иное, все оценки округляются до ближайшего целого числа (полуцелые числа округляются в большую сторону). Совокупная оценка пропорциональна количеству решенных задач, так что 10 соответствует 75% всех задач + бонусы для активных участников.

Избранные главы дискретной математики
простой межкампусный аудиторный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: И. В. Артамкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Под дискретной математикой в нашей стране обычно понимают собрание разрозненных математических сюжетов, оказавшихся полезными в информатике или смежных прикладных областях. Некоторые из этих сюжетов входят в обязательные курсы математической логики и дискретной математики, читаемые в бакалавриате. На нашем семинаре обсуждаются не вошедшие в эти курсы конструкции, имеющие, тем не менее, заметное значение как в математике, так и в приложениях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

- Булевы функции и теорема Поста о функциональной полноте. Эта теорема даёт эффективный ответ на следующий вопрос: можно ли любую булеву функцию (от любого числа переменных) выразить с помощью операции композиции через заданный набор функций. Удивительно, что на такой вопрос имеется простой и содержательный ответ, позволяющий, например, придумать функцию от двух переменных, через которую можно выразить любую функцию.

- Конечные поля. Теорема о том, что мультипликативная группа конечного поля является циклической, позволяет строить длинные периодические последовательности, повсеместно используемые в радиолокации, системах опознавания «свой-чужой» и т.д.

- Теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке в транспортной сети. Речь идет о такой задаче: имеется некоторая сеть дорог (трубопроводов), соединяющих пункты А и Б. У каждой дороги (трубы) есть своя максимальная пропускная способность — наибольшее число автомобилей (баррелей нефти) которые могут пройти по этой дороге (трубе) за час. Требуется организовать движение (перекачку нефти) таким образом, чтобы общее число автомобилей (баррелей нефти), попадающее за час из А в Б, было максимально возможным. Оказывается, многие важные результаты и алгоритмы теории графов, как прикладные, так и чисто математические, связаны с этим кругом идей.

УЧЕБНИКИ:

1. Ф. Харири. Теория графов. М.: УРСС, 2003.

2. В. В. Белов, Е. М. Воробьев, В. Е. Шаталов. Теория графов. М.: Высш. школа, 1976.

3. М. Свами, К. Тхулалираман. Графы, сети и алгоритмы. М: Мир, 1984.

4. А. И. Кострикин. Основы алгебры.

5. Барти, Биркгоф. Современная прикладная алгебра. М. 1976.

6. А. И. Сирота, Ю. И. Худак. Основы дискретной математики. Ч. 1. М. 2010.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка совпадает с накопленной. Основу накопленной оценки составляет индивидуальное письменное домашнее задание, оцениваемое от 0 до 7; оценка 6 или 7 за вовремя сданное задание может быть повышена за счет дополнительных баллов, начисляемых за рассказ решений задач на семинаре (от 0,5 до 1 балла за задачу в зависимости от ее сложности) и за аудиторную контрольную работу.

Интегрируемая квантовая теория поля
трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 4-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Н. Алфимов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Данный курс организован в форме еженедельных семинаров, где мы собираемся обсуждать интегрируемые структуры, возникающие в квантовой теории поля. Эти структуры сейчас встречаются во многих примерах, таких как сигма-модели, суперсимметричных калибровочных теориях, теориях струн, калибровочно/струнных дуальностях, амплитудах рассеяния и корреляционных функциях и так далее. В качестве педагогических примеров, решаемых методом анзатца Бете, будут рассмотрены модель Бозе газа и модель главного кирального поля в первой части курса вместе с основами AdS/CFT соответствия для случая четырёхмерной суперконформной калибровочной теории. Во второй части курса будет дано введение в приложения теории интегрируемых систем к изучению спектра $N=4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса и дуальной ей теории суперструн на $AdS_5 \times S^5$ бэкграунде, а также изучены интегрируемые деформации сигма-моделей. Курс предназначен для аспирантов и магистрантов. Постдоки и студенты бакалавриата тоже могут посещать данный курс.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Базовые знания квантовой теории поля. Некоторое знакомство с конформной теорией поля и теорией струн желательно, но не необходимо.

ПРОГРАММА:

- Вывод S-матрицы суперструнной сигма-модели на $AdS_5 \times S^5$ из алгебры Замолодчикова-Фаддеева.
- Уравнения Бете для XXX спиновой цепочки Гейзенберга (однопетлевой спектр аномальных размерностей локальных операторов в SU(2) секторе $N=4$ SYM). Асимптотические уравнения Бете для спектра N-4 SYM. Уравнения термодинамического анзатца Бете (TBA) для спектра $N=4$ SYM.
- Соответствующие уравнения Хироты и вронскианное решение этих уравнений.
- Вывод AdS/CFT Квантовой Спектральной Кривой для $AdS_5 \times S^5$ теории суперструн и $N=4$ SYM.
- Непертурбативные характеристики траекторий операторов в $N=4$ SYM.
- Интегрируемые деформации O(N) сигма-моделей. q-деформированная S-матрица. Eta-деформированная $AdS_5 \times S^5$ теория суперструн и её S-матрица.
- Уравнения Бете для спектра модели Бозе газа и их термодинамический предел. Уравнения термодинамического анзатца Бете (TBA) для модели Бозе газа.
- Асимптотический анзатц Бете для спектра модели главного кирального поля и их термодинамический предел. Уравнения термодинамического анзатца Бете для модели главного кирального поля.
- Вронскианное рещение уравнений Хироты.
- Струнный бэкграунд $AdS_5 \times S^5$ как решение уравнений супергравитации.
- Классическая интегрируемость модели главного кирального поля и $AdS_5 \times S^5$ суперструнной сигма-модели.

УЧЕБНИКИ:

- Ahn, C., Nepomechie, R. I. (2010). Review of AdS/CFT Integrability, Chapter III.2: Exact world-sheet S-matrix. https://doi.org/10.1007/s11005-011-0478-
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2011). Solving the AdS/CFT Y-system. https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)02
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2013). Quantum spectral curve for AdS_5/CFT_4. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.01160
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2014). Quantum spectral curve for arbitrary state/operator in $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$. https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)18
- Minahan, J. A., Zarembo, K. (2002). The Bethe-Ansatz for N = 4 Super Yang-Mills. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2003/03/01
- V. A. Fateev, A. V. Litvinov. (2018). Integrability, duality and sigma models. Journal of High Energy Physics, 2018(11), 1–29. https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)20
- A. V. Litvinov, L. A. Spodyneiko. (2018). On dual description of the deformed O(N) sigma model. Journal of High Energy Physics, 2018(11), 1–29. https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)13
- Rej, A. (2009). Integrability and the AdS/CFT correspondence. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/25/25400
- Gromov, N. (2017). Introduction to the Spectrum of N = 4 SYM and the Quantum Spectral Curve.
- Gromov, N., Kazakov, V., Vieira, P. (2008). Finite Volume Spectrum of 2D Field Theories from Hirota Dynamics. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/12/06
- Gromov, N., Kazakov, V., Sakai, K., Vieira, P. (2006). Strings as Multi-Particle States of Quantum Sigma-Models. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.11.01
- Korepin, V. E., Izergin, A. G., Bogoliubov, N. M. (1993). Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.
- Tseytlin, A. A. (2010). Review of AdS/CFT Integrability, Chapter II.1: Classical $AdS5 \times S5$ string solutions.
- Kazakov, V. (2018). Quantum Spectral Curve of γ-twisted $N = 4$ SYM theory and fishnet CFT. https://doi.org/10.1142/S0129055X1840010

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Устный доклад на семинаре*0.7 + Участие в дискуссии на семинаре*0.3

К3 ПОВЕРХНОСТИ
трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Л. А. Гусева.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Поверхности типа К3 являются важным и интересным классом алгебраических (а также комплексно-аналитических) поверхностей. Техники, используемые для изучения их геометрии, включают теорию Ходжа, решетки, а также гомологическую алгебру. Одной из важнейших теорем о поверхностях типа К3 является теорема Торелли, согласно которой две К3 поверхности изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их периоды. Имеется также версия теоремы Торелли для производных категорий когерентных пучков на К3 поверхностях. В этом курсе мы обсудим теорему Торелли, а также ее производную версию для поверхностей типа К3.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Алгебраическая геометрия: примерное представление о главах II, III учебника Хартсхорна или курс https://math.hse.ru/courses/647329835.html. Гомологическая алгебра: желательно знать, что такое триангулированная категория (главы III книги Гельфанд, Манин, «Методы гомологической алгебры» более, чем достаточно). Комплексная геометрия: студентам, имеющим представление о теории Ходжа, будет проще следить за содержанием курса, но все необходимые определения я дам (всё, что может пригодится в курсе, и гораздо больше написано в I и II частях первого тома книги К. Вуазен «Теория Ходжа и комплексная алгебраическая геометрия»).

ПРОГРАММА:

- вычисление основных инвариантов К3 поверхностей, примеры К3 поверхностей
- теорема Торелли для К3-поверхностей
- теорема Торелли для производных категорий К3-поверхностей

УЧЕБНИКИ:

- D. Huybrechts, «Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry».
- D. Huybrechts, «Lectures on K3 surfaces».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговый домашний экзамен, за который можно получить 15 баллов. Таким образом, для получения оценки 10 достаточно решить 75% обязательных экзаменационных задач. При наборе меньшей суммы оценка уменьшается линейно и вычисляется по стандартным правилам округления.

Классическая теория поля
трудный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: П. И. Арсеев, П. А. Сапонов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс «Классическая теория поля» является следующим после курса по механике в программе «Математическая физика». Понимание классической теории поля является необходимым для дальнейшего изучения квантовой теории поля, общей теории относительности, теории струн и т.д. Поскольку известный нам мир и существующие в нем поля обладают симметрией, известной, как релятивистская инвариантность, обсуждаются группа Лоренца (Пуанкаре) и построение действия, инвариантного относительно этой группы. В первую очередь мы рассмотрим разные формулировки уравнений электродинамики, как наиболее разработанный и «практичный» пример теории поля, однако, потом обсудим и другие примеры: скалярное поле, спинорное поле и соответствующие уравнения поля. В конце поговорим о некоторых нетривиальных решениях уравнений на экстремум действия в лагранжевой формулировке некоторых простых классических полевых теорий.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Помимо знания матанализа и основ дифференциальных уравнений, желательно знание лагранжевой механики, основ теории групп и алгебр Ли и их представлений.

ПРОГРАММА:

- Специальная теория относительности. Постоянство скорости света в различных системах отсчета — физическая основа преобразований Лоренца. Пространство Минковского и группа Лоренца.
- Лагранжиан частицы, инвариантный относительно группы Лоренца — релятивистское действие свободной частицы. 4-х вектора, преобразование различных физических величин при переходе от одной системы отсчета к другой- действие группы Лоренца (Пуанкаре).
- Напоминание: Лагранжев подход в механике, уравнения Эйлера – Лагранжа. Законы сохранения, как следствие некоторых симметрийных свойств Лагранжиана .
- Лагранжиан частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем. Векторный и скалярный потенциал, как компоненты 4-х вектора Уравнения движения частицы во внешних полях.
- Напоминание основ электродинамики: уравнения Максвелла, их дифференциальная и интегральная формулировка.
- Уравнения электромагнитных волн в терминах потенциалов и полей, их Лоренц-инвариантность..
- Расширение Лагранжева подхода для описания полей: что такое Лагранжиан поля (а не частицы), уравнения Эйлера – Лагранжа для полей. Простой вид Лагранжиана электромагнитного поля через напряженности поля.
- Построение Лоренц инвариантного лагранжиана через тензор электромагнитного поля. Полный Лагранжиан электромагнитного поля - возможность вывода уравнений электродинамики из новых принципов.
- Действие для электромагнтного поля и уравнения Максвелла (записанные через тензора поля) как уравнения Эйлера – Лагранжа.
- Инварианты, законы сохранения. Теорема Нетер. Калибровочная инвариантность. Нарушение Лоренц-инвариантности выбором калибровки.

- ∘ Различные решения «уравнений движения» электромагнитного поля (они же уравнения Максвелла). Функция источника (Грина) для скалярного потенциала в электростатике и для векторного потенциала. Запаздывающие потенциалы, излучение волн.

- ∘ Другие примеры релятивистски инвариантных уравнений для полей. О представлениях группы вращения, Лоренца. Скалярное поле — уравнение Клейна – Гордона. Спинорные представления. Уравнение Дирака как классическое полевое уравнение.

- ∘ Появление нетривиальных решений в уравнениях на экстремум действия в лагранжевой формулировке ряда классических полевых теорий. Скалярные ϕ^4 и sin-Гордон.

- ∗ Нелинейная O(3)-модель

- ∗ Понятие о полях Янга – Миллса: пример более сложной калибровочной симметрии.

УЧЕБНИКИ: Л.Ландау, Е.Лифшиц, «Теория поля», Курс теоретической физики, т. 2.Москва, Физматлит, 2003.
К.Ициксон, Ж-Б.Зюбер, «Квантовая теория поля» т.1,Москва ,Мир,1984
Р.Раджараман Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля . Москва, Мир, 1985
Морс Ф.М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, Том 1, Москва, ИздИностр Лит 1958
Дж.Джексон, «Классическая электродинамика», Москва, Мир, 1965.
Тамм И.Е. Основы теории электричества — М.: Гос.изд.технико-теоретической литературы. 1956
Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс, «Электродинамика. Фейнмановские лекции пофизике», т.6, Москва, Мир, 1977.
Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1977
В.С.Владимиров, «Обобщенные функции в математической физике»,Москва, Наука, 1979.
В.С.Владимиров, «Уравнения математической физики», Москва, Наука,1981.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: За семестр предполагается решение студентами 4-х листков с задачами, проведение 1 контрольной работы и сдача экзамена.
Оценка за листки L от 0 до 10
Оценка за контрольную работу K от 0 до 10
Накопленная оценка $N = (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + K * 1.2)/4.5)$
Если накопленная оценка больше 8 (без округления) студент получает автомат за экзамен.
В случае сдачи экзамена с оценкой E от 0 до 10 итоговая оценка определяется по формуле: $N*0.4+E*0.6$

Кластерные Пуассоновы многообразия
простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. Г. Горбунов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Кластерные многообразия, введенные Фоминым и Зелевинским, представляют собой коммутативные кольца с единицей и без делителей нуля, снабженные выделенным семейством образующих (кластерных переменных), сгруппированных в подмножества (кластеры) одинаковой мощности, связанные специального вида преобразованиями (кластерными преобразованиями). Первоначально они вводились для комбинаторного объяснения полной положительности в теории полупростых групп Ли (для GL_n это явление было впервые отмечено Гантмахером и Крейном), но впослелствии теория кластерных алгебр стремительно набрала популярность из-за обнаруженных связей с широким кругом дисциплин, включая теорию представлений колчанов, конечномерные алгебры и категоризацию, дискретные динамические системы, пространства и высшие пространства Тейхмюллера, комбинаторику и комбинаторные многогранники, коммутативную и некоммутативную алгебраическую геометрию, проективные конфигурации и их тропические аналоги, инварианты Дональдсона–Томаса и стабильность по Бриджеланду, пуассонову геометрию и интегрируемые системы. Цель курса — дать введение в теорию кластерных многообразий Пуассона.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Курсы алгебры и топологии.

ПРОГРАММА:

1. Идея положительного объекта в математике. Положительные матрицы как основной пример. Теорема Уитни о конусе положительных матриц.
2. Положительность в смысле Люстига. Положительность в группе унипотентных матриц как основной пример. Клетки Брюа.
3. Кластерные координаты на кольце рациональных функций на унипотентной группе и координаты Плюккера. Определение кластерного многообразия.
4. Структура кластерного многообразия на кольце функций на многообразии Грассмана.
5. Пуассоновы структуры, совместимые со структурой кластерного многообразия.
6. Пуассонова кластерная структура на многообразии Грассмана.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Экзамен будет состоять из доклада на тему связанную с темой курса.

Комбинаторика инвариантов

простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 1-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: М. Э. Казарян, С. К. Ландо.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Этот студенческий исследовательский семинар посвящен инвариантам комбинаторных объектов различной природы. Обсуждаемые на нем темы включают инварианты конечного типа узлов, инварианты графов, матроидов, дельта-матроидов, интегрируемые системы и их комбинаторные решения. Изучаются алгебры Хопфа разнообразных комбинаторных объектов. Участники семинара делают доклады по недавним исследовательским статьям и рассказывают о своих собственных результатах.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: отсутствуют.

ПРОГРАММА:

1. Узлы и их инварианты
2. Диаграммы узлов и хордовые диаграммы
3. 4-членные соотношения для хордовых диаграмм, графов и дельта-матроидов
4. Весовые системы
5. Построение весовых систем по алгебрам Ли
6. Алгебры Хопфа графов, хордовых диаграмм и дельта-матроидов
7. Комбинаторные решения интегрируемых иерархий
8. Гомологии Хованова

УЧЕБНИКИ:

1. S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy. CDBook. CUP, 2012.
2. S. Lando, A. Zvonkin. Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004. (А. К. Звонкин, С. К. Ландо, Графы на поверхностях и их приложения, М.: МЦНМО, 2010)

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Для получения оценки за семинар необходимо участвовать в нем на регулярной основе. Однако просто участие не позволяет получить оценку выше 8 баллов. Для получения более высокой оценки необходимо сделать доклад по недавней исследовательской статье или по своим собственным результатам.

Комплексная геометрия
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: П. С. Осипов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Комплексная геометрия изучает комплексно аналитические многообразия и голоморфные векторные расслоения. Будучи тесно связанной с дифференциальной и алгебраической геометрией, алгебраической топологией, геометрическим анализом и математической физикой, комплексная геометрия является красивой, привлекательной и стремительно развивающейся областью в самом центре современной математики. Этот курс является фундаментом для дальнейшего самостоятельного изучения комплексной геометрии по предлагаемой ниже литературе.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Курс требует знания анализа на многообразиях (дифференциальные формы, теорема Стокса, векторные расслоения), комплексного анализа (ряд Тейлора, теоремы Коши), и алгебраической топологии (когомологии Де Рама, двойственность Пуанкаре). Знание базовых понятий дифференциальной геометрии (метрики, связности, кручения, кривизны) желательно, но коротко я о них расскажу.

ПРОГРАММА:

- Основы многомерного комплексного анализа.
- Почти комплексные структуры и комплексные структуры , теорема Ньюландера – Ниренберга.
- Кэлеровы многообразия, связности Леви – Чивита и Черна.
- Пучки и их когомологии.
- Голоморфные расслоения, дивизоры, классы черна.
- Гармонические формы и когомологии, двойственность Серра, разложение Ходжа.
- Теоремы Кодаира и Римана Роха.
- Абелевы многообразия, якобиан, отображение Альбенезе.
- Теорема Калаби – Яу, многообразие Калаби – Яу, деформации комплексных структур.
- Теория морса на аффинных многообразиях, теорема Лефшеца о гиперплоских сечениях.

УЧЕБНИКИ:

- **[B]** D. Huybrechts, «Complex Geometry — An Introduction» .
- **[B]** П. Гриффитс, Дж. Харрис,«Принципы алгебраической геометрии» в 2-х томах.
- **[B]** К. Вуазен, «Теория Ходжа и комплексная алгебраическая геометрия» в 2-х томах.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка равна среднему арифметическому оценки за листки и оценки за экзамен. Активно работающим на семинарах студентам оценка дополнительно будет повышена на 1 или 2 балла.

Конечные кольца: многочлены и коды
простой межкампусный дистанционный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Гриценко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: В курсе планируется изучение алгебраических структур на примере задач теории кодирования над кольцами. Линейный код в обычной теории кодирования является подпространством векторного пространства над конечным полем. В контексте данного курса линейный код есть специальный модуль над конечным кольцом. Переход от полей к кольцам (например, от конечного поля из двух элементов к кольцу вычетов по модулю 4) радикально меняет инструментарий теории и позволяет иначе взглянуть на базисные алгебраические конструкции. Как построить теорию деления многочленов над кольцами вычетов по модулю 4 (или степени простого числа? Какие идеалы возникают в кольце многочленов, которое не является в данном случае кольцом главных идеалов? Слушатели смогут познакомиться с техникой примарных идеалов, подъемом Гензеля, кольцами Галуа и их обобщениями, новыми проблемами и выбрать ознакомительные или более творческие индивидуальные проекты по алгебре или по теории кодирования в том числе и алгоритмической направленности. Всячески приветствуется использование в работе компьютерных средств типа PARI или Macoulay для исследования многочленов над конечными полями, кольцами вычетов и p-адическими полями.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Знакомство только с базисными понятиями алгебры такими как поля, многочлены, конечномерные векторные пространства, кольца, идеалы, фактор-кольца, модули. Доступен для всех, начиная со студентов первого курса.

ПРОГРАММА:

- Конечные кольца, примеры конечных колец, классификация конечных колец малых порядков, нильпотенты, кольца Галуа, кольцо многочленов над кольцом вычетов по модулю m.
- Простые и максимальные идеалы, нильрадикал кольца, примарные идеалы.
- Нильрадикал и группа обратимых элементов кольца многочленов над конечным кольцом. Редукция любого многочлена к унитарному.
- Базисные неприводимые многочлены по модулю p^n, где p простое.
- Радикал примарного идеала, операции с примарными идеалами, неприводимые многочлены и примарные идеалы в кольце многочленов над конечным кольцом.
- Подъем Гензеля и примарное разложения многочлена по модулю p^n. Подъем Гензеля многочлена над полем из двух элементов до многочлена по модулю 4.
- Теория делимости в кольце многочленов над кольцом вычетов по модулю p^n.
- Критерии неприводимости многочленов над кольцом вычетов по модулю p^n.
- Кольца Галуа. Теория делимости в кольце многочленов над кольцом Галуа.
- Конечные кольца, на которые можно обобщить теорию делимости многочленов. Реферативные проекты.
- Примитивный корень степени m из единицы над конечным полем. Разложение кругового многочлена над конечным полем.
- Изучение разложения многочлена $x^m - 1$ на множители по модулю p^n. Случай хорошей редукции. Индивидуальная лабораторная работа.
- Изучение разложения многочлена $x^m - 1$ на множители по модулю p^n. Случаи плохой и очень плохой редукции. Творческие проекты.

УЧЕБНИКИ:

[K] M. R. Kibler, «Galois Fields and Galois Rings Made Easy» Elsevier, 2017.

[BF] G. Bini, F. Flamini, « Finite commutative rings and their applications», Springer 2002.

[HP] W.C. Huffman, V. Pless, «Fundamentals of Error-Correcting Codes», Chapter 12. Codes over $\mathbb{Z}_4$. Cambridge University Press 2003.

[SAS] Min J. Shi, A. Alahmadi, P. Solé, «Codes and Rings. Theory and Practice», Elsevier, 2017.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.3*Оценка за практическую работу по курсу (решение задач) + 0.5*оценки за лабораторную работу или рабочий проект + 0.2*Устный коллоквиум. Если индивидуальная работа оценена в 10 баллов, то устный коллоквиум не является необходимым.

Линейное программирование
простой межкампусный дистанционный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Колесников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Линейное программирование — раздел теории оптимизации, посвящённый отысканию экстремумов линейных функций на выпуклых множествах (как конечномерных, так и бесконечномерных). Линейное программирование зародилось как прикладная дисциплина, с приложениями (в первую очередь) к экономике, но оно имеет глубокие связи со многими задачами анализа, геометрии, дискретной математики, а также численными методами и алгоритмами. Настоящий курс представляет собой введение в линейное программирование и его многочисленные приложения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ и линейная алгебра в объёме первого курса.

ПРОГРАММА:

1. Линейное программирование. Постановка задачи и базовые свойства.
2. Классические задачи линейного программирования (задача о диете, транспортная задача и др.).
3. Элементы выпуклого анализа. Теорема Каратеодори, теорема об отделимости.
4. Выпуклые многогранники. Крайние точки. Теорема Бирхгофа о бистохастических матрицах.
5. Теорема о минимаксе.
6. Двойственность в линейном программировании.
7. Другие приложения минимакса. Двудольные графы (теоремы Кёнига, Холла). Игры с нулевой суммой.
8. Симплекс-метод.
9. Другие алгоритмы (обзорно).
10. Транспортные потоки в сетях. Теорема Форда – Фалькерсона.
11. Целочисленное линейное программирование.
12. Общая теорема о минимаксе*.
13. Непрерывная транспортная задача*. Метрика Канторовича – Рубинштейна*.

УЧЕБНИКИ: Основные учебники:

1. Evar D. Nering and Albert W. Tucker[1]. Linear Programs and Related Problems. (1993).
2. Robert J. Vanderbei. Linear Programming. Foundations and Extensions. (2001).
3. Пападимитроу Х., Стайглиц К., Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. 1982.

Дополнительное чтение

1. Lovasz L., Plummer M., Matching theory. (1985)
2. Villani C., Topics in optimal transportation (2003).
3. Циглер Г., Выпуклые многогранники. МЦНМО (2014).

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_W._Tucker

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В течение семестра студентам предлагается решать задачи из четырех листков. Экзамен состоит из двухчасовой контрольной работы с пятью задачами (по 2 балла за каждую). Окончательная оценка вычисляется по следующей формуле $E \cdot 0.4 + H \cdot 0.06$, где E — оценка за письменный экзамен (по 10-балльной шкале), а H — процент правильно решённых задач в течение семестра (округленный в сторону увеличения до числа, делящегося на 10). Для студентов, посещавших лекции в течение семестра, округление итоговой оценки производится в большую сторону, для посетивших менее половины лекций — в меньшую.

КОММЕНТАРИЙ: Для понимания некоторых (немногих) сюжетов курса желательно (но необязательно) знакомство с функциональным анализом.

Математика в беспроводных сетях
простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Д. С. Миненков.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: В каждом телефоне и ноутбуке есть радиомодуль. Про его работу пишут статьи в IEEE и создают программы магистратуры. Причём до недавних пор развитие систем связи обусловливалось физикой и технологиями, а сейчас на первый план выходят алгоритмы и математика. Мы покажем, как фундаментальная математика (в частности, неконструктивные теоремы существования) приносит непосредственную пользу. На примере реально возникающих задач беспроводной связи мы продемонстрируем особенности исследований в IT и R&D.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Материал обязательных курсов по линейной алгебре и анализу. Знание базовых понятий из теории вероятности (математическое ожидание, функция распределения). Владение каким-либо языком программирования (Python) хотя бы на начальном уровне приветствуется.

ПРОГРАММА:

1. Непрерывная оптимизация (выпуклая оптимизация, двойственная задача, современные методы).

2. Теория массового обслуживания (многокритериальная оптимизация: эффективность и справедливость, пакетный трафик, марковские цепи).

3. Напоминания из линейной алгебры и эрмитовой геометрии.

4. Методы обработки радиосигнала (передача, приём направленного сигнала).

5. Управление радио-ресурсами (частота, время, пространство).

УЧЕБНИКИ:

1. J. Nocedal and S. Wright, Numerical Optimization, 1999, Springer, New York.

2. Mor Harchol – Balter, Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action, 2013, Cambridge University Press.

3. Emil Björnson, Jakob Hoydis, and Luca Sanguinetti, Massive MIMO networks: Spectral, energy, and hardware efficiency, 2017, Foundations and Trends in Signal Processing, 11(3-4) 154–655.

4. M. J. Neely, Stochastic Network Optimization, 2010, University of Southern California.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка формируется из нескольких частей: текущая работа (60%), которая предусматривает сдачу листков, для наиболее заинтересованных возможно проведение индивдуального проекта, а также промежуточкая контрольная (10%) и экзамен (30%).

КОММЕНТАРИЙ: Курс от Huawei R&D

Математика процессов в ранней вселенной. Задачи гравитации
простой межкампусный аудиторный НИС для 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: К. П. Зыбин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: В курсе предполагается изложить современное состояние знаний о Вселенной. Будет обсуждаться: динамика «темной материи», приводящая к возникновению нелинейных структур, будет изложена теория инфляции вселенной, рассмотрена теория генерации спектра первичных флуктуаций.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ, дифференциальные уравнения, ТФКП.

ПРОГРАММА:

1. Однородная и изотропная вселенная
2. Горячая вселенная, краткая тепловая история.
3. Процессы образования первичного состава химических элементов
4. Неоднородности во вселенной, теория гравитационной неустойчивости
5. Теория инфляции
6. Возникновение первичных флуктуаций

УЧЕБНИКИ:
V. Mukhanov. Physical Foundations of Cosmology. Cambridge, http://www.cambridge.org/9780521563987.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.5 (доклад + работа на семинаре) + 0.5 (экзамен), округляется до ближайшего целого, полуцелые значения округляются вверх.

Математика физических явлений
простой аудиторный курс для студентов 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: П. И. Арсеев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Это курс о связи реальных физических явлений с математическими методами их описания и о появлении новых математических структур из законов физики, в первую очередь механики, электростатики и электродинамики. В курсе обсуждаются такие вещи, как второй закон Ньютона и Лагранжев формализм, движение «по прямой» на криволинейной поверхности, поведение гироскопа, эквивалентность закона Кулона теореме Гаусса и т. д.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: желательно знание основ матанализа и понимание простых дифференциальных уравнений. Занятия рассчитаны скорее на студентов 2–3 курсов бакалавриата, но и подготовленные первокурсники не должны встретить серьёзных трудностей.

ПРОГРАММА:

1. Механика
   - Второй закон Ньютона — основа описания классического движения. Примеры динамики. Законы сохранения из уравнений движения.
   - От законов Ньютона к лагранжевой формулировке. Принцип наименьшего действия. Законы сохранения с точки зрения лагранжевого подхода.
   - «Свободное» движение в криволинейном пространстве. Движение по сфере и поверхностям вращения. Описание с помощью метрики.
   - Движение быстро вращающихся тел. Нетривиальность их свободного движения. «Антиинтуитивное» поведение гироскопа.
2. Электростатика
   - Закон Кулона как прямое следствие эксперимента. Понятие потока векторного поля. Эквивалентность теоремы Гаусса «экспериментальной» формулировке закона Кулона. Дивергенция векторного поля, дифференциальная формулировка закона Кулона. Уравнения Лапласа и Пуассона.
   - Решение задач электростатики с помощью теоремы Гаусса. Поле заряженных плоскостей и стержней. Понятие о двумерной и одномерной электростатике и специфических «законах Кулона». Заряды над поверхностью металла.
   - Электрическое поле в диэлектриках. Поверхностные заряды и граничные условия для электрического поля в неоднородной системе. Метод зарядов изображений — физическое решение задачи о нахождении решения дифференциального уравнения с граничными условиями.
3. Электродинамика
   - Взаимодействие токов. Экспериментальные законы Эрстеда и Ампера. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Сила Лоренца. Движение частицы в магнитном поле.
   - Понятие векторного потенциала. Ротор векторного поля, формула Стокса. Свойства векторного потенциала, сравнение со скалярным потенциалом. Дифференциальная формулировка законов электромагнетизма при условии стационарности токов.
   - Лагранжиан частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем.

- Закон Фарадея, его интегральная и дифференциальная формулировки. Система уравнений Максвелла. Еще раз их физический смысл и математическая формулировка. Полный Лагранжиан электромагнитного поля — возможность вывода уравнений электродинамики из новых принципов.
- Уравнения электромагнитных волн из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны в среде. Граничные условия на поверхности раздела двух сред.
- Отражение от поверхности раздела двух сред. Два метода решения задачи об отражении от плоскопараллельной пластины. Поверхностные волны.
- Волноводы и резонаторы. Дискретные частоты собственных колебаний — путь к описанию полей как набора осцилляторов.

УЧЕБНИКИ:

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике — М.: Мир, 1967
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики — М.: Физматлит, 1974
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика — М.: Физматлит, 2004
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества — М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: студенты сдают задачи по двум спискам и отвечают на дополнительные вопросы. Начисление баллов следующее:

- N_1, от 0 до 10, за сданные в третьем модуле задачи
- Q_1, от 0 до 5, за ответы на дополнительные вопросы в третьем модуле
- N_2, от 0 до 10, за сданные в четвёртом модуле задачи
- Q_2, от 0 до 5, за ответы на дополнительные вопросы в четвёртом модуле
- W, от 0 до 5, за работу на занятиях.

Итоговая оценка $S = (N_1 + N_2 + Q_1 + Q_2 + W)/3$. Округление по стандартным правилам.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Математическая физика для математиков
трудный межкампусный аудиторный НИС для 4-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Лосев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Математическая физика возникла в начале 20 века, первой работой по математической физике можно считать работу Калузы 1919 года. В ней показано, что теория пятимерной гравитации на пространстве, являющемся произведением четырехмерного пространства и окружности, приводит к объединению гравитации и электромагнетизма в четырехмерном пространстве-времени. Хотя такую теорию никак нельзя считать реалистической, поскольку массы заряженных частиц оказываются пропорциональны зарядам, и в этой теории возникают элементарные частицы, зарядами которых являются все целые числа (чего не наблюдается на эксперименте), построение такой теории открыло новое направление в науке на стыке физики и математики. Объектами изучения этой науки являются теории примерно в том же смысле, в котором объектами изучения в геометрии являются пространства. В некотором смысле понятие теории расширяет понятие пространства, так как теория это пространство, снабженное дополнительной структурой. Вопрос о том, какую в точности структуру следует рассмотреть в наибольшей общности, является до некоторой степени открытым, но хорошим приближением к правильному ответу следует считать определение квантовой теории поля как симметричного моноидального функтора из категории оснащенных кобордизмов в тензорную алгебру (Квантовая теория поля по Дираку – Сигалу). Целью курса будет показать, как стартуя с Ньютоновской физики (ее предварительное знание не требуется) можно через понятие принципа экстремального действия и фейнмановского функционального интеграла дойти до формулировок типа Дирака-Сигала и рассмотреть простейшие содержательные примеры таких теорий. Мы четко будем отделять математические утверждения от мотивирующих их идей. По ходу изложения мы затронем основные идеи Стандартной модели физики элементарных частиц. связанной с гравитацией — теории, описывающей реальный мир. После прохождения этого курса в следующем учебном году (2024/2025) мы рассмотрим приложения квантовой теории поля к математике (суперсимметричные теории, топологические теории, конформные теории и зеркальная симметрия), а также основные идеи теории струн и М-теории. В этом более продвинутом курсе мы обсудим как идеи математической физики приводят к гипотезам, которые можно строго доказать методами классической математики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Знакомство с дифференциальной геометрией в рамках стандартного курса анализа на многообразиях и знакомство с теорией групп и алгебр Ли. Желательно, но не обязательно знание функтора между алгебрами и аффинными многообразиями.

ПРОГРАММА:

- Механика Ньютона и понятие материальной точки
- Движение системы со связями и алгебраическая геометрия
- Множители Лагранжа, фазовое пространство, уравнения Гамильтона и теорема Нетер
- Принцип экстремального действия и уравнения Гамильтона
- Уравнения Гамильтона и некоммутативные ассоциативные алгебры — первое проявление квантовой механики
- Движение цепочки осцилляторов, звук и симметрии Лоренца
- Движение частиц в Лоренцевом пространстве-времени, их энергия и импульс, невозможность движения быстрее скорости света

- Цепочка осцилляторов как простейшее (скалярное) поле, принцип экстремального действия для поля
- Алгебро-геометрический функтор между алгебрами и афинными многообразиями
- Расширение алгебро-геометрического функтора на супермногообразия, суперматематика, интеграл Березина
- Дифференциальные формы как функции на супермногообразии, звездочка Ходжа как нечетное преобразование Фурье
- Вещественная теория Ходжа (комплексная теория Ходжа*) и действие для p-форм
- Уравнения Максвелла как $d{*}dA = 0$ и электромагнитная дуальность в разных размерностях.
- Электро-магнитная дуальность в размерности 3 — теория эфира, заряженная частица как вихрь в двойственной теории.
- Теория гравитации в формализме Эйнштейна – Картана
- Работа Калузы 1919 года — рождение математической физики.
- Квантовая механика по Дираку
- Квантовая механика по Фейнману, свободная частица
- Гармонический осциллятор в квантовой механике, его описание по Дираку и по Фейнману, «предсказание» формулы суммирования Пуассона как парадигма получения математических утверждений из физических идей.
- Фермионный осциллятор и функциональный интеграл Фейнмана – Березина
- Описание свободных полей в формализме функционального интеграла, статсумма на торе и предсказание математической формулы
- Частицы как кванты полей, завершение анализа работы Калузы
- Качественная история физики элементарных частиц — от атома к кваркам и лептонам
- Клиффордова алгебра, спиноры и спин или — что вращается в электроне
- Эффект Хиггса
- Фейнмановская теория возмущений, диаграммы Фейнмана, расходимости и теория струн
- Фейнмановская комбинаторика и гипотеза Якобиана — мистическая связь
- Кобордизмы и аксиоматика Дирака – Сигала
- Гауссова модель и Т-дуальность — квантовая версия электро-магнитной дуальности

УЧЕБНИКИ:

- В.И. Арнольд, Математические методы классической механики
- Р.Фейнман , А.Хибс , Квантовая механика и интегралы по траекториям
- И. Нейман, Математические основы квантовой механики
- И.И. Бернштейн, Д.А.Лейтес, В.Н. Шандлер, Семинар по суперсимметриям, Т.1.
- Квантовые поля и струны: курс для математиков, тома 1,2

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.5*Результат сдачи листков + 0.25*Индивидуальный письменный экзамен + 0.25*Устный экзамен.

Математические основы квантовой механики
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: П. А. Сапонов, П. Н. Пятов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Это — не требующее серьезной физической подготовки введение в квантовую механику для студентов-математиков. При моделировании квантовых явлений мы будем привлекать в качестве аргументов внутреннюю логику и естественность математических конструкций. Модели квантовой механики служили и продолжают служить источником вдохновения во многих разделах современной математики: функциональном анализе, теории представлений групп и алгебр Ли, деформационном и геометрическом квантовании, теории квантовых групп и др. Квантовая механика является важнейшим инструментом исследования явлений микромира и в настоящее время входит в обязательный образовательный минимум физиков-теоретиков и специалистов по математической физике.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Курс рассчитан на студентов 3–4 года бакалавриата и магистрантов, не имеющих физического образования. Специальных знаний по физике не требуется, хотя знакомство с механикой и классической теорией поля облегчит восприятие материала.

Необходимая математическая подготовка (в объеме базовых курсов 1-го и 2-го года бакалавриата):

- Лагранжева механика: конфигурационное и фазовое пространство механической модели, лагранжиан, уравнения Эйлера-Лагранжа, принцип наименьшего действия.

- Линейная алгебра: векторные пространства, скалярное произведение, линейные операторы, их собственные значения и собственные вектора.

- Теория вероятностей и математическая статистика: случайная величина, функция распределения, плотность вероятности, статистические моменты случайной величины (среднее, дисперсия и т. п.).

- Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.

- Математический анализ (вещественный и комплексный), в основном теория интегрирования (обычные и кратные интегралы) и преобразование Фурье.

Желательная дополнительная математическая подготовка:

- Знакомство с азами теории групп и алгебр Ли и их конечномерными матричными представлениями (хотя бы на примерах групп SU_2 и SO_3), базовые сведения о симметрической группе.

- Некоторые понятия функционального анализа: гильбертово пространство, линейные операторы в гильбертовом пространстве, эрмитовы и самосопряжённые операторы.

- Понятие об обобщённых функциях на пространстве финитных основных функций и пространстве быстроубывающих функций (пространстве Шварца), производная и преобразование Фурье обобщённой функции, дельта-функция Дирака и ее регуляризации.

При необходимости математические понятия (особенно из раздела дополнительной математической подготовки) будут напоминаться и вводиться на лекциях.

ПРОГРАММА:

1. Краткий обзор основных физических проблем, приведших к возникновению квантовой механики. Гамильтонов формализм классической механики, фазовое пространство состояний механической системы и пуассонова структура на нем.

2. Основные понятия квантовой механики. Гильбертово пространство состояний квантовой системы, спектры самосопряженных операторов как множество значений квантовых наблюдаемых, статистическая интерпретация. Элементы теории обобщенных функций. Уравнения движения квантовой системы в представлениях Шредингера и Гейзенберга.

3. Гармонический осциллятор, его координатное представление и полиномы Эрмита. Алгебра операторов рождения и уничтожения и представление осциллятора в пространстве Фока. Общая теория одномерного движения.

4. Трехмерное движение в центральном поле. Модель атома водорода. Сферические функции, полиномы Лаггера.

5. Группы симметрий квантово-механических систем и их представления в пространстве состояний, законы сохранения и интегралы движения. Угловой момент в квантовой механике. Спин квантовой частицы. Конечномерные представления алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$.

6. Симметрическая группа и теория тождественных частиц. Статистики Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака, типы симметрий векторов состояний и диаграммы Юнга. Принцип запрета Паули и объяснение периодического закона Менделеева.

7. Интегрируемые модели квантовой механики: спиновые цепочки, понятие об алгебраическом анзаце Бете.

8. Релятивистская квантовая механика. Уравнение Дирака и квантование свободного фотонного поля.

УЧЕБНИКИ:

1. Л.Д. Фаддеев, О.А. Якубовский, «Лекции по квантовой механике для студентов-математиков», Издательство ЛГУ, 1980.

2. Brian C. Hall, «Quantum Theory for Mathematicians», Graduate Texts in Mathematics 267, Springer 2013.

3. В.В. Балашов, В.К. Долинов, «Курс квантовой механики», изд. РХД, Москва-Ижевск, 2001.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: оценка за курс = $0.6\cdot$«накопленная оценка»$+0.4\cdot$«оценка за экзамен». Здесь «оценка за экзамен» — целое число от 0 до 10, а «накопленная оценка» вычисляется по результатам решения задач из листков по формуле $100\,S/(9\,M)$, где S — фактически набранное количество баллов за решения задач, а M — максимально возможное число баллов за верное решение всех задач из всех листков. Обратите внимание, что накопленная оценка может быть больше 10 баллов. Если (до округления) она не менее 8 баллов, студент получает автомат за курс с этой оценкой. Округление в итоговой формуле происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Многогранники и выпуклая геометрия
простой межкампусный дистанционный НИС для 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. И. Эстеров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 3-й модуль 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 2 кредита.

ОПИСАНИЕ: Многогранники и свойства выпуклости играют важную роль почти во всех разделах математики и её приложений. Мы изучим геометрические и алгебраические аспекты выпуклой геометрии и увидим, почему многогранники оказываются важны в самых разных областях, от комбинаторики до теории чисел. Чтобы иметь возможность увидеть панораму в целом, мы постараемся не углубляться в детали отдельных важнейших разделов, таких как группы Коксетера, тропическая геометрия или линейное программирование — им у нас на факультете посвящены специальные курсы. Материал курса будет доступен и актуален для всех студентов от второкурсников бакалавриата до магистрантов, успешно освоивших первые обязательные курсы алгебры и геометрии.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Обязательные курсы геометрия-1 и алгебра-1 (можно слушать параллельно с алгеброй-1 на 2 курсе бакалавриата ВШЭ-ЦПМ). В первую очередь линейная алгебра и алгебра вокруг алгоритма Евклида.

ПРОГРАММА: Аффинное пространство, выпуклые тела и оболочки Опорные плоскости, отделимость, многогранники, грани Аддитивные меры: объем, эйлерова характеристика Целочисленные многогранники: полином Эрхарта, цепные дроби, геометрия чисел Минковского В зависимости от времени и интересов слушателей, в конце семестра планируется знакомство с более продвинутыми сюжетами, а также с открытыми задачами по изученным темам.

УЧЕБНИКИ: Первое представление о предмете можно составить по ёмким, но сжатым русскоязычным введениям (1-4). В более доступной и развернутой форме материал изложен в англоязычных учебниках (5-8).

1. А. Л. Городенцев, «Геометрия», лекции 8-9,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/list.html,
«Линейная алгебра и геометрия», тема 12,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/list.html

2. Т. Е. Панов, «Геометрия», глава 5,
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching/panov-geometry.pdf

3. В. М. Тихомиров, «Выпуклый анализ и его приложения»,
https://www.mccme.ru/free-books/dubna/tich.pdf

4. В. А. Тиморин, «Комбинаторика выпуклых многогранников»,
https://www.mccme.ru/free-books/dubna/timorin.pdf

5. A. Brondsted, «An Introduction to Convex Polytopes»,
https://books.google.ru/books?id=7PXxBwAAQBAJ&printsec=frontcover

6. C. Haase, B. Nill, A. Paffenholz, «Lecture Notes on Lattice Polytopes»,
https://polymake.org/polytopes/paffenholz/data/preprints/ln_lattice_polytopes.pdf

7. M. Beck, S. Robins, «Computing the Continuous Discretely»
http://math.sfsu.edu/beck/papers/noprint.pdf

8. G. Ziegler, «Lectures on Polytopes»,
https://books.google.ru/books?id=xd25TXSSUcgC&printsec=frontcover

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Формы работы: в первой части курса в лекционной форме будет дано введение в предмет (без сложных доказательств, но с примерами), в сопровождении домашних задач. Затем слушатели, лучше всего решившие домашние задачи, будут приглашены сделать доклады с более детальным разбором методов и доказательств, более продвинутыми сюжетами и т.д. Тем, кто не делал доклады, в конце курса будет предложена письменная работа. Итоговая оценка = 0.5 ДЗ +0.5 [доклад или письменная работа]

КОММЕНТАРИЙ: По уровню это должно быть доступно всем нормальным второкурсникам и сильным первокурсникам. По формату – смесь спецкурса и ниса.

Непараметрика и избранные сюжеты статистики
простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: И. А. Самойленко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: В практических задачах часто возникают ситуации, когда распределение и зависимость данных неизвестны. В таком случае на помощь приходят непараметрические методы статистики, базовое представление о которых будет дано в этом курсе. Также планируются лекции приглашённых специалистов, применяющих такие статистические методы на практике (социологи, медицинские статистики, аналитики, специалисты по психометрии). Эти лекции будут занимать дополнительную пару сразу после базовой или же замещать её, и о каждой такой лекций будет сообщено заранее.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: дискретная математика, линейная алгебра и геометрия, математический анализ, теория вероятностей, математическая статистика.

ПРОГРАММА:

1. Задача о дихотомических данных: биномиальный критерий.
2. Одновыборочная задача о положении (сдвиге): анализ повторных наблюдений с помощью знаковых рангов (свободный от распределения критерий знаковых рангов Уилкоксона), анализ повторных парных наблюдений с помощью знаков (свободный от распределения критерий знаков Фишера), анализ данных одной выборки.
3. Двухвыборочная задача о положении (сдвиге): свободный от распределения критерий знаковых ранговых сумм Уилкоксона, оценка Ходжес – Лемана.
4. Двухвыборочная задача о рассеянии (масштабе): свободные от распределения ранговый критерий Ансари – Брэдли и критерий Мазеса.
5. Критерии согласия: χ^2, Колмогорова – Смирнова, Шапиро – Уилка.
6. Однофакторный дисперсионный анализ: свободные от распределения критериии Краскела – Уоллиса, Джонкхиера, Терпстра.
7. Двухфакторный дисперсионный анализ: свободные от распределения критерии Фридмана, Кендала и Бэбингтона Смита, свободные от распределения критерии для альтернатив с упорядочиванием Пейджа.
8. Задача о независимости: свободный от распределения критерий независимости Кендала.
9. Если успеем — анализ выживаемости и др.

УЧЕБНИКИ:

1. М. Холландер, Д. Вульф. Непараметрические Методы Статистики. 1983. (Перевод с английского Д. С. Шмерлинга.)
2. M. Hollander, A. Douglas, D. Wolfe, E. Chicken. Nonparametric Statistical Methods. Third Edition. 2014.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $\min(10;\ 0.5\cdot \text{ДЗ} + 0.3\cdot \text{ЭК} + 0.3\cdot \text{ИР} + 0.1\cdot \text{АР})$, где

- ДЗ — домашние задания (листки)
- ЭК — экзамен
- ИР — индивидуальная работа
- АР — аудиторная работа.

Задания, сданные в течение недели после установленного срока, оцениваются с коэффициентом 0.8, а сданные ещё позже — с коэффициентом 0.4. Если $(0.4\cdot \text{ДЗ} + 0.4\cdot \text{ИР} + 0.2\cdot \text{АР}) \geqslant 8$, то можно зачесть себе именно эту оценку и не ходить на экзамен.

Основные понятия матемтаики
простой аудиторный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Это семинар для первокурсников, посвящённый тому, как «работает» математика. Мы будем обсуждать темы из самых разных областей — анализа, геометрии, алгебры, комбинаторики, теории чисел и т.п. Доклад по теме длится одно занятие, в редких случаях — два. В первом семестре некоторые доклады делают руководители семинара, некоторые — слушатели, некоторые — приглашённые докладчики. Во втором семестре все доклады делают слушатели; как правило, тема доклада связана с темой курсовой работы. Семинар позволит участникам ещё раз ощутить красоту и разнообразие математики; в первом семестре он также может помочь в выборе темы и руководителя курсовой работы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА: Некоторые темы, обсуждаемые на семинаре (это заведомо не полный список, он может варьироваться от года к году):

- Разрезание четырехмерного куба трехмерной пилой: что получится в сечении?
- Квадратичный закон взаимности: квадратные корни по модулю простого числа.
- Как решать кубические уравнения и почему этого никогда не делают.
- Парадокс Банаха – Тарского: разрезание шара на конечное число кусков, из которых можно сложить четыре шара такого же радиуса.
- Теорема Эрроу о диктаторе (невозможность идеальной системы голосования по нескольким кандидатурам) и нестандартный анализ (в котором есть бесконечно малые числа).
- Пентагональное тождество Эйлера.
- Три взаимосвязанных теоремы из топологии: теорема Брауэра о неподвижной точке, основная теорема алгебры и теорема о причесывании ежа.

УЧЕБНИКИ: Р. Курант, Г. Роббинс, «Что такое математика», М., МЦНМО, 2000, http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.pdf. Также по каждой из тем есть своя литература.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В первом семестре оценка зависит от того, делал ли участник семинара доклад и от результата заключительной контрольной работы. Если участник семинара сделал успешный доклад, то он получает итоговую оценку 10 баллов и не должен писать заключительную контрольную. Если участник семинара доклада не сделал или доклад был очень неудачным, то итоговая оценка за семинар равна оценке за заключительную контрольную. Во втором семестре каждый участник должен сделать доклад и оценка за курс равна оценке за доклад.

КОММЕНТАРИЙ: Семинар проводится ежегодно с момента основания факультета и предназначен исключительно для студентов первого курса бакалавриата. Студенты остальных курсов не смогут получить за этот семинар никаких кредитов. В первом семестре участвовать в семинаре могут все желающие первокурсники математических и родственных специальностей (в том числе из других кампусов ВШЭ). Во втором семестре участвовать в семинаре можно только с разрешения его руководителей. Доклады происходят главным образом по-русски, но несколько докладов на английском вполне может быть.

Основные приложения математики
простой межкампусный дистанционный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Где применяется математика, кроме самой математики?

- в физике
- в экономике
- в лингвистике
- в статистике
- в информатике
- в биологии

и это далеко не полный список! На нашем семинаре докладчики — специалисты в вышеперечисленных областях — расскажут о математических методах исследования, о применяемых моделях и как получать с их помощью выводы. Мы будем обсуждать математические проблемы, но не будем избегать и пограничных между математикой и предметной областью вопросов: как найти хорошее математическое описание проблемы? как проверить, соответствуют ли выводы действительности? Наша тема — взаимодействие математики и реальности.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы первого года бакалавриата (анализ, алгебра, геометрия). Основная предполагаемая аудитория семинара — второкурсники.

ПРОГРАММА: Мы рассмотрим математические модели в таких областях, как

- физика (механика, электродинамика, квантовая теория)
- экономика
- лингвистика
- статистика (и анализ больших массивов данных)
- информатика (теория сложности, криптография)
- биология

и других. Доклады на семинаре будут делать приглашенные докладчики — специалисты в соответствующих предметных областях. Точные темы докладов будут определяться их пожеланиями.

УЧЕБНИКИ: Ввиду того, что доклады на семинаре имеют отношения к различным и мало связанным между собой областям знания, невозможно заранее предложить список литературы. Мы будем просить каждого докладчика рекомендовать книги и статьи для тех, кого заинтересовала тема доклада.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка равна оценке, полученной на устном экзамене. Для проведения устного экзамена студент беседует с одним из докладчиков, выступавших на семинаре в этом семестре (по собственному выбору, с согласия докладчика); беседа может включать решение задач и/или обсуждение предметной области. Результат беседы оценивается докладчиком по 10-балльной шкале.

КОММЕНТАРИЙ: Семинар впервые проводился весной 2021 г. Состав докладчиков каждый год разный. Занятия проводится онлайн. Участие студентов из других кампусов вполне возможно, но могут возникнуть трудности при выводе итоговой оценки: некоторые из докладчиков предпочитают личное (а не дистанционное) общение, так что получить у них зачет студенты из других кампусов не смогут.

ОСОБЫЕ ТОЧКИ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. М. Гусейн-Заде.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Изучение критических точек функций и особых точек соответствующих гиперповерхностей играет важную роль в ряде разделов математики и математической физики. Классификации критических точек функций и их инварианты оказываются связанными со многими понятиями анализа, алгебры и топологии — например, с классификацией алгебр Ли и групп, порождённых отражениями. Целью курса является описание начала классификации критических точек функций и связанных с ними топологических инвариантов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Помимо обязательных курсов первого и второго годов (в основном — анализ многих переменных и линейная алгебра) предполагается знание основ теории гомологий и локально тривиальных расслоений.

ПРОГРАММА:

- Критические точки функций и их классификация
- Лемма Морса и стабильная эквивалентность критических точек.
- Конечная определенность критических точек, модальность.
- Классификация простых (ноль-модальных) критических точек (ADE классификация).
- Слой Милнора и расслоение Милнора.
- Теорема Милнора о букете сфер.
- Форма пересечений и оператор вариации особенности.
- Формула Пикара – Лефшеца и группа монодромии особенности.
- Форма пересечений для функций двух переменных.

УЧЕБНИКИ:

[1] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, «Особенности дифференцируемых отображений», тома I и II.

[2] Дж. Милнор, «Особые точки комплексных гиперповерхностей».

[3] В. И. Арнольд, В. А. Васильев, В. В. Горюнов, О. В. Ляшко, «Теория особенностей» (ВИНИТИ, Динамические системы VI).

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Сумма баллов за решение задач в течение курса и баллов за экзамен (поровну).

Представления и вероятность
трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. Дымов, А. В. Клименко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар в основном предназначен для студентов 3-4 курса бакалавриата, магистрантов и аспирантов. Тематика семинара объединяет современные результаты в области вероятности и случайных процессов, динамических систем, представлений, а также служащих для них основной более старые сюжеты в этих областях. Мы предполагаем, что старшие участники, специализирующиеся по тематике семинара, выступят на нём с докладом.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы математического анализа (включая теорию меры) и теории вероятностей. Знание основ функционального анализа и случайных процессов (в объёме первой части соответствующих курсов матфака) будет полезно (но не необходимо) в осеннем семестре, а знание алгебры (теории представлений в объёме стандартного курса алгебры матфака) — в весеннем. Семестры можно включать в учебный план независимо друг от друга. Предполагается, что осенью занятия будут проходить в МИАН (ул. Губкина, 8), а весной — на матфаке.

ПРОГРАММА: Ниже представлен примерный список тем, которые предполагается обсуждать на семинаре. Подчеркнем, что не все из упомянутых сюжетов будут затронуты, и наоборот, будет затронут ряд не упомянутых сюжетов. Мы предполагаем, что большинство семинаров будут заняты докладами студентов на различные темы, большая часть которых, но не все, будет связанна с представлениями и вероятностью. В осеннем семестре семинар в основном будут вести А. Дымов, А. Клименко и М. Мариани, в то время как весенний семестр по большей части берет на себя Г. Ольшанский.

Ориентировочные темы осеннего семестра:

- Случайные динамические системы и их поведение на больших временах
- Винеровский хаос и нормальная аппроксимация
- Детерминантные случайные точечные процессы
- Теория потенциала для цепей Маркова на пространствах общего вида: формулы представления и приложения
- Экспоненциально растущие группы: свободные, гиперболические, марковские, фуксовы и др. Эргодическая теория их действий

Ориентировочные темы весеннего семестра:

- Классическая теория представлений
- Представления бесконечномерных групп и операторные алгебры
- Связь с алгебраической комбинаторикой (симметрическими функциями), квантовыми группами, классическим анализом и теорией вероятностей

УЧЕБНИКИ:

- I.I. И.И. Гихман, А.В. Скороход. «Введение в теорию случайных процессов».
- S. Janson, «Gaussian Hilbert spaces».
- I. Nourdin, G. Peccati, «Normal approximations with Malliavin calculus».
- A. Bovier, F. DenHollander, «Metastability, A Potential-Theoretic Approach».
- I. Seo, «Generalized Dirichlet and Thomson Principles and Their Applications». https://arxiv.org/abs/2102.05538
- P. Etingof et al. «Introduction to representation theory».
- A. Borodin and G. Olshanski, «Representations of the infinite symmetric group».
- P.-L. Meliot, «Representation theory of symmetric groups».
- H. Weyl, «The classical groups: their invariants and representations».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Участники могут сделать доклад на семинаре (такой доклад обычно оценивается в 6-8 баллов итоговой оценки), или/и решать задачи экзамена. Список задач выдаётся для решения примерно за неделю до экзамена. На экзамене студент обсуждает свои решения с преподавателем. Формула для вычисления оценки за экзамен указывается в списке задач к нему.

КОММЕНТАРИЙ: Руководители семинара: А. Дымов, А. Клименко, М. Мариани, Г. Ольшанский. Не из ВШЭ: А. Буфетов.

Представления конечных групп
трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Г. И. Ольшанский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория представлений применяется во многих разделах математики (алгебра, топология, алгебраические группы, группы и алгебры Ли, квантовые группы, алгебраическая теория чисел, комбинаторика, теория вероятностей, ...), равно как и математической физики. Поэтому владение базисной техникой теории представлений необходимо математикам различных специальностей. Цель курса — дать введение в теорию представлений на материале конечных групп. Особое внимание будет уделено представлениям симметрических групп.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Алгебра и линейная алгебра (в объеме обязательных курсов первых двух лет)

ПРОГРАММА:

- Напоминание основ из курса алгебры: групповая алгебра конечной группы, неприводимые представления, лемма Шура, характеры, соотношения ортогональности, теорема Машке, теорема Бернсайда
- Представления конечных абелевых групп, двойственность для конечных абелевых групп, преобразование Фурье, бирегулярное представление
- Сплетающие операторы, индуцированные представления, двойственность Фробениуса
- Машина Макки, проективные представления, накрытия над симметрическими группами
- Функциональное уравнение для характеров, пары Гельфанда, сферические функции, связь с ортогональными многочленами
- Представления симметрических групп: различные подходы к классификации и построению неприводимых представлений
- Если позволит время: представления основной серии для группы $\mathrm{GL}(N)$ над конечным полем, алгебра Гекке, теория Хариш – Чандры
- Планируется продолжение курса во втором семестре в рамках семинара «Представления и вероятность»

УЧЕБНИКИ:

- С.Ленг. Алгебра. Гл. XVIII (Представления конечных групп)
- Э.Б.Винберг. Линейные представления групп.
- П.Этингоф и др. Введение в теорию представлений.
- Ж.-П.Серр. Линейные представления конечных групп.
- А.А.Кириллов. Элементы теории представлений.
- Ч.Кэртис и И.Райнер. Теория представления конечных групп и ассоциативных алгебр.

- B.E.Sagan. The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.
- T.Ceccherini-Silberstein, F.Scarabotti, F.Tolli. Harmonic fnalysis on finite groups: Representation theory, Gelfand pairs and Markov chains. Cambridge Univ. Press. 2008.
- T.Ceccherini-Silberstein, F.Scarabotti, F.Tolli. Representation theory of the symmetric groups: The Okounkov–Vershik approach, character formulas, and partition algebras. Cambridge Univ. Press. 2010
- P.-L. Meliot. Representation theory of symmetric groups. 2017.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Будет указано позже на сайте Сколтеха

КОММЕНТАРИЙ: Это курс Сколтеха.

Преобразование Фурье и его использование: примеры дискретные и непрерывные
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Хохлов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 3-й модуль 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Традиционно в курсе математического анализа упоминают о рядах Фурье и интеграле Фурье. Множество рассуждений математической физики опирается на спектральные методы, которые также относятся к Фурье анализу. При этом вычислительные методы широко используют дискретное преобразование Фурье, без быстрой версии которого было бы немыслмо обрабатывать данные линий связи и вообще развивать цифровые форматы сигналов. В курсе будет показана связь разных версий преобразования Фурье и конкретные примеры их использования в самых разных задачах: от быстрого перемножения чисел в процессоре компьютера до томографии.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы линейной алгебры и математического анализа (интегрирование и дифференциирование). Умение пользоваться языком Python для решения задач вычисления (написать короткий скрипт, построить график)

ПРОГРАММА:

- Оператор сдвига и его конечномерная модель, дифференцирование в дискретном времени и круговые частоты.
- Предельные переходы от дискретного случая к непрерывному с точки зрения «инженерного подхода», альясинг и связь с привычными из анализа формулами Фурье.
- Предельные переходы с точки зрения математика, теорема Котельникова – Шеннона. Области определения преобразования Фурье.
- Основные формулы в разных случаях преобразования Фурье. Теоремы и их использование
- Быстрое преобразование Фурье и его возможные обобщения.
- Структура абелевых групп и их связь с временной и спектральной областями преобразования Фурье Характеры и двойственность.
- Обобщения формул и обобщенные функции (краткое введение).
- Приложения: Цифровая обработка сигналов и изображений, фильтры, эффект Гиббса.
- Приложения: Томография и преобразование Радона.
- Приложения: Связь преобразования Фурье и численного интегрирования.
- Приложения: Связь преобразования Фурье и алгоритмов быстрого умножения.
- Приложения: Преобразование Фурье и версии соотношения неопределенности.

УЧЕБНИКИ: https://candes.su.domains/teaching/math262/Lectures/.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка пропорциональна проценту решенных задач в итоговой контрольной работе. Задачи потребуют знания основных определений из курса и умения написать несложный скрипт на Python отвечающий текстовой формулировке о свойствах сигнала или изображения.

Проективная алгебраическая геометрия 1
простой межкампусный аудиторный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: В течение последних полувека алгебраическая геометрия оказалась в фокусе всей современной математики, и за это время развились мощнейшие технические методы, обеспечившие колоссальное продвижение алгебраической геометрии. Это бурное развитие имело и оборотную сторону, поскольку современные абстрактные методы в значительной мере вытеснили из поля зрения прозрачные геометрические основания этой науки. Эти основания по-прежнему остаются основным объектом исследования, источником всех интуиций в алгебраической геометрии, и потому очень важны. Задача семинара — рассказать о геометрических истоках алгебраической геометрии. Поэтому семинар рассчитан как на студентов-младшекурсников, имеющих совсем элементарный начальный уровень, так и на студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов, которые уже имеют серьезную техническую базу в алгебраической геометрии (однако, и для них знакомство с наглядными геометрическими картинками несомненно будет полезно).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Знание алгебры и геометрии в объеме стандартного курса средней школы

ПРОГРАММА: 1. Первоначальные свойства проективного пространства; классические задачи проективной геометрии, связанные с теоремами Дезарга, Паппа, Паскаля, Брианшона. 2. Коники на проективной плоскости. Пространство коник, поверхность Веронезе и кубический симметроид в пространстве коник, их интерпретация в терминах семейств коник. 3. Интерпретация евклидовой и других геометрий в терминах проективной геометрии; задачи евклидовой, решаемые средствами проективной геометрии. 4. Геометрия кривых на проективной плоскости, теорема Безу, индексы пересечения плоских кривых, правила Цейтена.

УЧЕБНИКИ: Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. МЦНМО, 2007. Электронная версия: ЭБС Лань, https://e.lanbook.com/book/9441.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Накопленная оценка есть среднее арифметическое двух оценок за активность в 1 и 2 модулях, округление в пользу студента. Оценка за активность выставляются с учетом выступлений на семинаре, решения домашних задачи, участия в обсуждении. Для тех, у кого накопленная оценка не менее 6, она совпадает с итоговой. Для тех, у кого накопленная оценка F получается меньше 6, итоговая оценка равна оценке E за заключительную очную контрольную работу, которая будет проводиться в конце семестра только для этой категории слушателей. Оценка E за контрольную находится по формуле: E= MIN(6,F/2 + 6.(число решенных задач в контрольной / общее число задач в контрольной)). Таким образом, максимальная оценка E за контрольную 6 баллов. Итоговый экзамен не планируется.

Проективная алгебраическая геометрия 2
простой межкампусный аудиторный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: В течение последних полувека алгебраическая геометрия оказалась в фокусе всей современной математики, и за это время развились мощнейшие технические методы, обеспечившие колоссальное продвижение алгебраической геометрии. Это бурное развитие имело и оборотную сторону, поскольку современные абстрактные методы в значительной мере вытеснили из поля зрения прозрачные геометрические основания этой науки. Эти основания по-прежнему остаются основным объектом исследования, источником всех интуиций в алгебраической геометрии, и потому очень важны. Задача семинара - рассказать о геометрических истоках алгебраической геометрии. Поэтому семинар рассчитан как на студентов-младшекурсников, имеющих совсем элементарный начальный уровень, так и на студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов, которые уже имеют серьезную техническую базу в алгебраической геометрии (однако, и для них знакомство с наглядными геометрическими картинками несомненно будет полезно).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Знание алгебры и геометрии в объёме стандартного курса средней школы

ПРОГРАММА: 1. Полярное отображение, особенности двойственной проективной кривой, формулы Плюккера для кривой с простейшими особенностями, применение гессиана кривой к исследованию ее свойств, доказательство принципа двойственности. 2. Общие свойства линейных рядов. Примеры линейных рядов на плоскости: отображение плоскости линейными рядами кубик, поверхности дель Пеццо, исследование конфигураций прямых на поверхностях дель Пеццо через базисные точки линейных рядов, аналог конструкции Штейнера для кубических поверхностей. 3. Применение линейных рядов к описанию раздутий плоскости в конечном множестве точек; примеры: поверхности дель Пеццо. 4. Общие, симметрические и антисимметрические детерминантали в проективном пространстве, многообразия Веронезе как симметрические детерминантали минимального ранга, многообразия Сегре как общие детерминантали минимального ранга , проективная конструкция многообразий Сегре, детерминантали высших рангов как многообразия хорд, норммногообразия, их проективная конструкция, гиперквадрики. 5. Грассманианы как антисимметрические детерминантали минимального ранга, плюккерово вложение, внутренняя геометрия грассманианов: прямые на грассманианах как базы пучков линейных подпространств, многообразия флагов как графики инциденции. 6. Пространственные конфигурации прямых: четверки прямых на квадрике, системы прямых на кубических поверхностях, ассоциированные пятерки прямых в четырехмерном проективном пространстве.

УЧЕБНИКИ: Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии - Московский центр непрерывного математического образования - 2007 - ISBN: 978-5-94057-085-1 - Текст электронный // ЭБС Лань - URL: https://e.lanbook.com/book/9441

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Накопленная оценка есть среднее арифметическое двух оценок за активность в 3 и 4 модулях, округление в пользу студента. Оценка за активность выставляются с учетом выступлений на семинаре, решения домашних задачи, участия в обсуждении. Для тех, у кого накопленная оценка не менее 6, она совпадает с итоговой. Для тех, у кого накопленная оценка F получается меньше 6, итоговая оценка равна оценке E за заключительную очную контрольную работу, которая будет проводиться в конце семестра только для этой категории слушателей. Оценка E за контрольную находится по формуле: E= MIN(6,F/2 + 6.(число решенных задач в контрольной / общее число задач в контрольной)). Таким образом, максимальная оценка E за контрольную 6 баллов. Итоговый экзамен не планируется.

Пространства Соболева в вероятности и геометрии
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Колесников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: В курсе мы обсудим неравенства Соболева и их связь с геометрическими задачами (изопериметрические неравенства, теория Брунна-Минковского, выпуклая геометрия, уравнение Монжа-Ампера) и вероятностью (гауссовы распределения, неравенства концентрации, стохастическая динамика и сходимость к равновесию). В курсе будут представлены как классические факты и задачи, так и их современное развитие, включая некоторые открытые вопросы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ, теория вероятностей, знакомство с основами стохастики (или марковскими цепями). Желательно (но необязательно) знакомство с УрЧП, римановой геометрией и функциональным анализом.

ПРОГРАММА:

1. Евклидово изопериметрическое неравенство и неравенство Брунна–Минковского. Различные методы доказательств. Транспортный метод. Неравенство Судакова–Цирельсона.
2. Задача Монжа–Канторовича и оптимальная транспортировка. Задача Минковского и уравнение Монжа-Ампера. Пространства Соболева, классические неравенства Соболева.
3. Метод полугрупп. Гауссовские меры и классические гауссовские неравенства (логарифмическое неравенство Соболева). Гауссова концентрация.
4. Полугруппа теплопроводности и пространства Соболева на многообразиях. Тензор Риччи и соболевские неравенства на многообразиях.
5. Гамма-исчисление. Логарифмически вогнутые меры. Неравенства концентрации. Связь с изопериметрическими задачами.
6. Открытые проблемы выпуклого анализа и недавние достижения. Метод стохастической локализации.
7. Другие смежные задачи (информационные неравенства, анализ на многообразиях, варианты задачи Минковского)

УЧЕБНИКИ:

- Богачев В.И., Колесников А.В., Шапошников С.В. Задачи Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки, 2023
- Bakry D., Gentil I., Ledoux M. Analysis and geometry of Markov diffusion operators. Springer, Berlin, 2013
- Ledoux M. The concentration of measure phenomenon. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2001
- Villani C. Topics in optimal transportation. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2003
- Artstein-Avidan S., Giannopoulos A., Milman V.D. Asymptotic geometric analysis. Part I. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка ставится на основе устной беседы с обсуждениям задач из заданного списка.

Сложные сети

простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. Г. Горбунов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Теория сложных сетей — обширная наука, изучающая графы и их эволюцию. Модели сложных сетей используются во многих областях человеческого знания(экономике, биологии, социологии и т. д.). В этом курсе мы планируем обсудить основные существующие способы анализа статических и динамических свойств сложных сетей. В начале курса мы обсудим основные определения и модели, которые используются при изучении сложных сетей, затем будут разобраны избранные сюжеты из различных областей этой науки: от статических свойств, до коллективной динамики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: От слушателей желательно минимальное понимание курсов теории вероятностей, математического анализа, линейной алгебры и дифференциальных уравнений. Хотя необходимые понятия будут вводиться по ходу повествования, владение этими дисциплинами существенно упростит понимание происходящего.

ПРОГРАММА:

1. Введение. Основные структуры сложных сетей и их определения(степень вершины, центральности, мотивы, структуры сообществ, спектр графа)

2. Топологические свойства реальных сетей

3. Основные модели сложных сетей

4. Статическая и динамическая устойчивость

5. Процессы распространения в сетях

6. Синхронизация и коллективная динамика, основная функция устойчивости

7. Алгоритмы по поиску структур сообществ

8. Любые другие темы по желанию слушаетелей, которые успеем затронуть

УЧЕБНИКИ:

1. Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., Hwang, D. U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. Physics reports, 424(4-5), 175-308.

2. Chung F. et al. Complex graphs and networks. – American Mathematical Soc., 2006. – No. 107.

3. Newman, M. E. (2003). The structure and function of complex networks. SIAM review, 45(2), 167-256.

4. Харари, Фрэнк. Теория графов. (1973): 274

5. Дополнительные статьи необходимые для лучшего понимания обсуждаемых тем будут выданы слушателям в процессе прохождения курса

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Каждому слушателю, записанному на НИС, необходимо сделать доклад, который будет формировать оценку за прохождение этого курса.

Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые системы
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. М. Поволоцкий.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: В последние годы обнаружились неожиданные связи между, на первый взгляд, совершенно разными задачами математики и физики. С математической стороны это комбинаторные и вероятностные задачи о системах с большим числом степеней свободы: описание собственных значений матриц со случайными элементами, статистика случайных диаграмм Юнга, замощение различных областей плоскости доминошками или ромбиками, перечисление непересекающихся путей на решётках. С физической стороны это задачи о распространении границ разделов между средами, потоках взаимодействующих частиц, полимерах в неупорядоченных средах и т. д. Ключевое явление здесь — «интегрируемость», влекущая множество красивых и точных математических результатов, столь же общезначимых, как закон больших чисел или центральная предельная теорема. Рассматривая наши случайные системы издалека, мы обнаруживаем, что они имеют совершенно неслучайные предельные формы, случайные отклонения от которых описываются небольшим числом универсальных вероятностных распределений, совершенно не зависящих от деталей исходных систем. Слушатели познакомятся с очерченным кругом вопросов и узнают о последних достижениях в этой области.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ, линейная алгебра, теория функций комплексного переменного, теория вероятности.

ПРОГРАММА:

1. Распределение собственных значений вигнеровских матриц. Полукруглый закон Вигнера. Метод моментов.
2. Распределение собственных значений ковариционных выборочных матриц. Закон Пастура – Марченко. Метод распределения Стильтьеса.
3. Инвариантные матричные ансамбли.
4. Основы теории детерминантных процессов.
5. Определители Фредгольма.
6. Метод ортогональных многочленов.
7. Универсальные распределения: процессы синус, Эйри и Бесселя. Распределения Трейси Уидома.
8. Построение корреляционных ядер в ортогональном и симплектическом ансамблях.
9. Теорема Карлина – Макгрегора. Построение расширенных процессов в задачах о непересекающихся броуновских мостах.
10. Одна задача с разными лицами: рост поверхностей, частицы с отталкиванием, задача о времени перколяции последнего достижения и задача о максимальной возрастающей подпоследовательности случайной перестановки. Соответсвие Робинсона – Шенстеда – Кнута.
11. Теорема Гесселя – Виенно о непересекающихся путях. Подсчет пар таблиц Юнга и процесс Шура.

УЧЕБНИКИ:

- М. Л. Мехта. Случайные матрицы.
- P. J. Forrester. Log-gases and random matrices.
- A. Guionnet, G. W. Anderson O. Zeitouni. An Introduction to Random Matrices.
- G. Blower. Random matrices: High dimensional phenomena.
- A. Borodin, V. Gorin. Lectures on integrable probability.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:

КОММЕНТАРИЙ: Раньше курс заказывался программой матфизики.

Современные динамические системы
трудный межкампусный дистанционный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. С. Скрипченко, С. К. Ландо.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс посвящен обзору ключевых результатов из динамических систем, которые были получены в последние 30 лет, причем в фокусе - задачи, которые пришли из соседних разделов математики (алгебраической геометрии, теории чисел, топологии) и оказались решены динамическими методами или, наоборот, возникли в динамике, но потребовали для своего решения привлечения инструментов из других областей - комбинаторики, теории вероятностей и др. Мы планируем начать с простых и понятных примеров и дойти до знакомства с достаточно свежими работами ряда выдающихся математиков (А. Авилы, М. Мирзахани, Г. Маргулиса и других).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Теория меры, базовая топология, аналитическая геометрия

ПРОГРАММА: 1. Введение: знакомство с понятием динамических систем, примеры. Минимальность, эргодичность, инвариантные меры. 2. Динамика и геометрия: введение в гиперболическую геометрию, геодезический поток на поверхностях и его эргодические и динамические свойства. 3. Динамика и топология; перекладывания отрезков, измеримые слоения с особенностями на поверхностях и бильярды в рациональных многоугольниках. 4. Динамика и теория чисел: введение в однородную динамику. Гипотеза Оппенхайма и результаты Маргулиса.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 7 баллов за доклад + 4 листочка по 3 балла каждый. Можно выбрать один из двух форматов. Оценка = min (устная презентация + листочки, 10)

КОММЕНТАРИЙ: Курс Сколтеха

Современные проблемы математической логики
трудный межкампусный дистанционный НИС для 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Математическая логика представляет собой широкий спектр дисциплин, движимых интересом к основаниям математики, а также множеством различных приложений в таких областях как информатика, лингвистика и философия. Данный научно-исследовательский семинар призван познакомить слушателей с различными задачами и проблемами современной математической логики, показать как классические результаты, так и продвижения последнего времени в данной области. Семинар рассчитан на студентов второго курса и старше, но в нем также могут принять участия особо заинтересованные первокурсники.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Знание основ логики и теории множеств в рамках обязательного курса «Логика и алгоритмы» или любого другого логического курса: «Элементы математической логики», «Введение в теорию моделей» и др.

ПРОГРАММА: Доклады на семинаре будут касаться таких тем как модальная логика, теория доказательств, лямбда-исчисление, теория индуктивных определений, семантика компьютерных языков и т. п. Возможные темы докладов:

- эпистемические логики,
- циклические выводы в модальной мю-логике,
- формальная арифметика и вторая теорема Гёделя о неполноте,
- логика доказуемости,
- генценовское доказательство непротиворечивости формальной арифметики,
- теоремы Шаврукова об алгебрах доказуемости формальных теорий,
- интуиционистская логика,
- теоремы Руитенбурга для интуиционистской логики,
- игровая семантика для модальной логики Гжегорчика,
- теорема Зиглера о неразрешимости некоторых теорий полей,
- элементы теории типов,
- циклические и нефундированные выводы в арифметике Пеано.

УЧЕБНИКИ:

- Справочная книга по математической логике. Ред. Дж. Барвайс.
- Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов (в трех частях).
- С.П. Одинцов, С.О. Сперанский, С.А. Дробышевич. Введение в неклассические логики. Учебное пособие.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка совпадает с накопленной. Если участник сделал доклад, то его накопленная оценка — 10. Если нет — оценка равна оценке за итоговый коллоквиум.

Стохастический анализ и его применения в экономике

трудный межкампусный дистанционный НИС на английском языке для 3-го курса и старше

(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. В. Колесников, В. Д. Конаков.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: На семинаре будут обсуждаться темы, связанные с вероятностными идеями в анализе, в частности, стохастический и бесконечномерный анализ. Из основных приложений планируется обсудить базовые финансовые экономические модели. Основные темы: меры на бесконечномерных пространствах, гауссовские меры, винеровский процесс, стохастические дифференциальные уравнения, диффузии, элементы теории пространств Соболева, исчисление Маллявэна, выпуклая геометрия и вероятность (некоторые открытые проблемы), стохастический анализ на многообразиях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ, дифференциальные уравнения и основы теории вероятностей. Желательно знакомство с основами функционального анализа.

ПРОГРАММА:

- Перенос массы, задача Монжа–Канторовича;
- дискретизация и аппроксимация стохастических дифференциальных уравнений;
- модели, построенные на основе процессов Леви;
- теория информации и формула Тьюринга;
- моделирование экстремальных событий в страховании и финансах;
- непараметрические и полупараметрические статистические модели;
- стохастическое моделирование в физике (модели со случайными энергетическими уровнями), биологии (модели деления клеток) и в других естественных науках.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Студенты должны сделать доклад на семинаре, оценка за который совпадает с оценкой за курс.

Структурная теория алгебр Ли
трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Ф. В. Уваров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Данный курс является продолжением курса «Группы и алгебры Ли», читающегося в осеннем семестре. Одна из целей курса — обобщить результаты теории представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, обсуждавшиеся в осеннем курсе, на произвольную простую алгебру Ли. Для этого мы изучим структурную теорию алгебр Ли, в частности обсудим один из красивейших сюжетов в математике — классификацию полупростых комплексных алгебр Ли.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Группы и алгебры Ли

ПРОГРАММА:

- Абелевы, нильпотентные и разрешимые алгебры Ли.
- Инвариантные билинейные формы, форма Киллинга. Свойства полупростых алгебр, операторы Казимира. Теорема о полной приводимости представлений для полупростых алгебр Ли.
- Картановские подалгебры, картановское разложение, системы корней, отражения. Поляризации, простые корни, решётки корней и весов. Камеры Вейля, простые отражения и длина элементов группы Вейля.
- Приведённое разложение, матрица Картана, диаграмма Дынкина, теорема классификации.
- Представления со старшим весом. Модули Верма. Характеры представлений. Многообразия флагов. Резольвента Бернштейна – Гельфанда – Гельфанда. Характеры и размерности неприводимых представлений.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $\min(10, 0.6S + 0.6E)$, где S - оценка за семинары из 10, E - оценка за финальный экзамен из 10.

Теория Кодирования как введение в Алгебру и Арифметику
простой межкампусный аудиторный НИС для 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Гриценко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория кодирование возникла в 50-е годы XX века. Первые ее задачи состояли в изучении линейного векторного пространства над простейшим полем из двух элементов как метрического пространства. Для построения подпространств с очень специальными метрическими свойствами — кодов — используются различные алгебраические и геометрические методы. Задачи теория кодирования, совершенно естественные по формулировкам, дают новую базу для изучения важнейших алгебраических и геометрических структур. Например, структура корней многочленов над конечными полями (один из основных вопросов теории Галуа) отвечает за существование эффективных циклических кодов. Двойственность линейных пространств сводится к парам двойственных кодов. Геометрические структуры (конечные проективные пространства, лагранжианы бинарного и тернарного векторных пространств) отвечают за автодуальные и совершенные коды. Группы автоморфизмов кодов — это основные конечные простые группы. Цель нашего курса в том, чтобы освоить основные алгебраические конструкции (поля, кольца, модули, фактор-кольца) на примере внешних для алгебры задач теории кодирования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Знакомство только с основными понятиями алгебры такими как конечномерные векторные пространства, кольца, фактор-кольца, поля, многочлены. Доступен для всех, начиная с мотивированных студентов первого курса.

ПРОГРАММА:

1) Бинарное векторное пространство как метрическое пространство, метрика Хэмминга, Разбиение на шары как примеры простейших кодов. Автоморфизмы бинарного метрического пространства.

2) Примеры кодов, линейные коды, совершенные коды.

3) Вопрос «Как задать линейный код?» и двойственность линейных пространств. Двойственность и классический метод Гаусса (в полном объеме) над полем из двух элементов. Автодуальные коды.

4) Конечная проективная плоскость Фано. Конечные геометрии (нерешенные проблемы). Совершенный код Хэмминга. Группа автоморфизмов кода Хэмминга — следующая после A_5 некоммутативная простая группа.

5) Описание метрической характеристики линейного кода методами линейной алгебры. Бесконечная серия кодов Хэмминга.

6) Фактор-кольцо по модулю многочлена x^n-1 и циклические коды длины n. Что есть обобщения кольца вычетов по модулю степени простого числа? Конечные кольца Галуа.

7) Неприводимые многочлены над конечным полем. Как их описать?

8) Как ведет себя классический круговой многочлен Φ_n над конечным поле? Автоморфизм Фробениуса. Циклотомические орбиты и один из основных результатов теории Галуа над конечным полем (конструктивное доказательство).

9) Определитель Вандермонда как основной инструмент оценки минимальной длины циклического кода.

10) Неожиданности теории конечных колец: задание идеалов идемпотентами.

11) Арифметика квадратичных вычетов, идемпотенты в кольцах Галуа и вычетно-квадратичные коды.

12) Совершенный бинарный код Голея, его структура и свойства. Системы Штайнера и алгебраическая комбинаторика. Группа автоморфизмов кода Голея и исключительные конечные простые группу.

УЧЕБНИКИ:

- **[L]** J.H. van Lint, «Introduction to coding theory» Gr. Texts in Mathem., Vol. 86, 1999.
- **[B]** Simeon Ball, «A Course in Algebraic Error-Correcting Codes» Compact Textbooks in Mathematics, Springer, 2020.
- **[K]** M. R. Kibler, «Galois Fields and Galois Rings Made Easy» Elsevier, 2017.
- **[E]** Noam D. Elkies, «Lattices, Linear Codes, and Invariants» Part I. II, Notices of the AMS vol 47 (2000), N 10–11.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле: 0.4*Индивидуальные лабораторные работы + 0.3*Индивидуальное письменное решение дополнительных задач + 0.3*Устный коллоквиум. Если индивидуальная работа дает больше 10 баллов, то устный коллоквиум не является необходимым.

Теория Морса

трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Пенской.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория Морса — предложенная изначально Марстоном Морсом теория, связывающая алгебро-топологические свойства многообразий и поведение гладких функций на нём в критических точках, которая получила потом значительное развитие и в других контестах. В курсе будет рассмотрена классическая теория, ее приложение к геодезическим на римановых многообразиях и ее обобщения, например, на функции Морса-Ботта.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Анализ на многообразиях, дифференциальная геометрия (связность Леви-Чивиты, геодезические, тензор кривизны Римана), основы алгебраической топологии (группы гомологий и когомологий).

ПРОГРАММА:

- Основы классической теории Морса [M].
- Приложения теории Морса к пространству путей на римановых многообразиях [M].
- Функции Морса-Ботта [L].
- Различные приложения и обобщения [L].

УЧЕБНИКИ:

- **[M]** Дж. Милнор, «Теория Морса».
- **[L]** L. Nicolaescu, «An Invitation to Morse Theory».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 4*оценка за контрольную + 1*оценка за работу на семинарах + 5*экзамен

КОММЕНТАРИЙ: Данный курс является важной частью геометрического и топологического образования, и, в общем-то, должен обязательно читаться раз в 2-3 года, чтобы интересующиеся студенты матфака могли его за годы обучения прослушать.

Теория представлений
трудный межкампусный дистанционный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар посвящён разбору разных сюжетов из теории представлений полупростых алгебр Ли, алгебры Вирасоро, аффинных алгебр Каца – Муди, квантовых групп и родственных им алгебр. Представления перечисленных алгебр играют центральную роль в конформной теории поля, интегрируемых системах, перечислительной геометрии, маломерной топологии и других разделах математики. Предполагается, что каждый участник семинара какую-то часть программы разберёт самостоятельно и расскажет на семинаре.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартные курсы алгебры, топологии и групп и алгебр Ли.

ПРОГРАММА:

- Представления полной линейной группы: двойственность Шура – Вейля.
- Тензорная категория представлений полной линейной группы.
- Алгебра $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ и ее представления.
- Приложения квантовой группы к инвариантам узлов и зацеплений.
- Пространство Фока как представление алгебры Гейзенберга и Вирасоро.
- Аффинные алгебры Каца – Муди и их представления.
- Конструкция Шугавары.
- Фьюжн-произведение.

Более конкретный список тем зависит от возможностей участников.

УЧЕБНИКИ: по личной договорённости.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0,8 *$ (участие) $+ 0,2 *$ (доклад).

Топологические векторные пространства
трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Пирковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Функциональный анализ в его традиционном понимании имеет дело преимущественно с банаховыми и, в частности, гильбертовыми пространствами. Однако многие классические векторные пространства обладают естественными топологиями, которые не задаются нормой. Таковы, например, многие пространства гладких, голоморфных и обобщенных функций. Теория топологических векторных пространств — наука о пространствах именно такого рода. Ее расцвет приходится на 1950-е гг., однако и сейчас (вопреки расхожему мнению, происходящему из не вполне компетентных источников) она продолжает развиваться — уже не столько в плане абстрактной теории, сколько в направлении приложений к дифференциальным операторам и комплексной аналитической геометрии.

В курсе предполагается познакомиться с основами теории топологических векторных пространств (с акцентом на тензорных произведениях и ядерных пространствах) и обсудить некоторые ее приложения к обобщенным функциям (теорема Шварца о ядре) и/или к комплексной аналитической геометрии (теорема конечности Картана-Серра).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Желательно знакомство с основными фактами функционального анализа (банаховы и гильбертовы пространства, ограниченные линейные операторы).

ПРОГРАММА:

1. **Основные понятия и примеры.** Топологические векторные пространства. Полунормы и локально выпуклые пространства. Непрерывные линейные операторы. Критерии нормируемости и метризуемости. Полнота. Примеры: пространства непрерывных, гладких, голоморфных функций, пространство Шварца.

2. **Конструкции.** Факторпространства, произведения, копроизведения, обратные и прямые пределы, пополнения, топологические тензорные произведения.

3. **Линейные операторы.** Борнологические и бочечные пространства. Равностепенная непрерывность. Теоремы Банаха–Штейнгауза, Банаха об открытом отображении, Банаха–Алаоглу–Бурбаки.

4. **Двойственность.** Дуальные пары и слабые топологии. Теорема о биполяре. Теорема Макки–Аренса. Топология Макки, сильная топология. Рефлексивность. Связь свойств оператора со свойствами его сопряженного.

5. **Тензорные произведения и ядерные пространства.** Ядерные операторы. Ядерные пространства и их свойства. Примеры ядерных пространств. Характеризация ядерных пространств в терминах тензорных произведений.

6. **Приложения.** Пространства обобщенных функций. Теорема Шварца о ядре. Когерентные аналитические пучки. Теорема конечности Картана–Серра.

УЧЕБНИКИ:

1. В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, В. И. Соболев. Топологические векторные пространства и их приложения. М.-Ижевск, РХД, 2012.

2. Х. Шефер. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.

3. А. Робертсон, В. Робертсон. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

4. R. Meise, D. Vogt. Introduction to Functional Analysis. Clarendon Press, Oxford, 1997.

5. F. Treves. Topological Vector Spaces, Distributions, and Kernels. Academic Press, New York–London, 1967.

6. H. Jarchow. Locally convex spaces. Teubner, Stuttgart, 1981.

7. G. K"othe. Topological Vector Spaces. Vol I, Springer, 1969; Vol. II, Springer, 1979.

8. A. Grothendieck. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 1955, no. 16A.

9. R. Douady. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. In: “Quelques problèmes de modules” (Sém. Géom. Anal. École Norm. Sup., Paris, 1971–1972), pp. 7–32. Asterisque, No. 16, Soc. Math. France, Paris, 1974.

10. L. Schwartz. Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1978.

11. J. Eschmeier, M. Putinar. Spectral decompositions and analytic sheaves. Clarendon Press, Oxford, 1996.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка = оценка за экзамен

Письменный домашний экзамен будет проведен в конце семестра и будет состоять из 7 задач. На решение отводится приблизительно 10 дней.

Топологические теории простых особенностей
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. А. Басалаев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Всякому многочлену $f(x_1, \ldots, x_N)$, такому, что все частные производные зануляются лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_N = 0$, можно сопоставить богатые алгебраические и геометрические структуры. А именно локальную алгебру особенности, являющуюся фробениусовой алгеброй; пространство деформаций особенности, параметризующее также целое семейство фробениусовых алгебр; невырожденную билинейную форму на векторах пространства деформаций; алгебраическую решетку Брискорна со свяностью Саито. Эти, вообще говоря, разные данные могут быть собраны вместе в структуры называемые, в зависимости от контекста, топологическими теориями особенности f, или же теорией Саито особенности f, или же структурой Дубровина-Фробениуса особенности f. Такие структуры находят свое первичное применение в зеркальной симметрии, так как именно на языке этих структур зеркальная симметрия и формулируется. В данном курсе будут подробно рассмотрены все описанные выше ингридиенты для примера многочленов f, задающих, так называемые, простые особенности. То есть, $f = x_1^n$ или $f = x_1^n + x_1 x_2^2$, и т.д..

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курсы геометрии, алгебры и анализа за первый год

ПРОГРАММА: 1. Локальная алгебра особенности. Спаривание Пуанкаре. Невырожденность, разные формулировки. 2. Фробениусовы алгебры. Разные определения, эквивалентность. Разнообразные примеры. Потенциал фробениусовой алгебры. 3. Комплекс Кошуля, когомологическая реализация локальной алгебры. 4. Деформации особенностей. Пространство деформаций. Умножение на касательном пространстве. Продолжение спаривания Пуанкаре на данные касательные пространства. Проблема потенциальности данного умножения. 5. Модальность особенности через пространство деформаций. 6. Пополненная решетка Брискорна. Связность Саито на ней в алгебраической формулировке. Её плоскость и тривиализация. 7. Примитивная форма Саито и обратные подпространства. Когомологическая реализация решетки Брискорна. 8. Пертрубативный вывод потенциала умножения на пространстве деформаций, и также примитивной формы Саито.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: min(15, К + Е), где К - суммарная оценка за контрольные работы, Е - оценка за экзамен

Топологический анализ данных
трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. Г. Горбунов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Топологический анализ данных (TDS) - это область, которая находится на пересечении анализа данных, алгебраической топологии, вычислительной геометрии, информатики, статистики и других смежных областей. Основной целью TDA является использование идей и результатов геометрии и топологии для разработки инструментов для изучения качественных особенностей данных. Для достижения этой цели нужны точные определения качественных признаков, инструменты для их вычисления на практике и некоторые гарантии надежности этих функций. Одним из способов устранения всех трех точек является метод в TDA, называемый персистеных гомологий (PH). Этот метод привлекателен для приложений, потому что он основан на алгебраической топологии, которая дает хорошо понятную теоретическую основу для изучения качественных особенностей данных со сложной структурой, вычисляется с помощью линейной алгебры и надежна по отношению к небольшим возмущениям во входных данных.

В курсе мы обсудим связи PH с другими новыми интересными областями, а именно с гомологией пути и случайными графами.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Базовая алгебра, линейная алгебра, топология в объеме первого курса

ПРОГРАММА: симплициальные комплексы и симплициальные гомологии, персистентные гомологии, стабильность персистентных гомологий. Приложение персистентных гомологий включая путевые гомологии и случайные графы.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка будет выставляться на основании доклада по исследовательской статье

Торические многообразия
простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: К. Г. Куюмжиян.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Существует замечательный способ построения алгебраических многообразий по выпуклым многогранникам. Многообразия, которые возникают таким образом, называются *торическими*. Из самого простого многогранника – стандартного симплекса – при этом получается проективное пространство. Ключевые алгебро-геометрические свойства торических многообразий можно переговорить в терминах комбинаторно-геометрических свойств их многогранников, что делает большую часть алгебро-геометрических инвариантов торических многообразий явно вычислимыми, а сами торические многообразия — основным и незаменимым полигоном для проверки алгебро-геометрических гипотез, поиска примеров и контрпримеров и т. д..

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Для понимания первой половины курса нужны основы выпуклой геометрии и коммутативной алгебры, а также понятия аффинного и проективного алгебраического многообразия. Для понимания второй половины курса желательно иметь представление о дивизорах и действии алгебраических алгебраических групп на алгебраических многообразиях. При этом никакого глубокого знания алгебраической геометрии от слушателей не предполагается, все необходимые факты и определения будут напоминаться.

ПРОГРАММА:

- Необходимые сведения из выпуклой геометрии: конусы, веера, опорные гиперплоскости, лемма Гордана.
- Необходимые сведения из алгебраической геометрии: определение (аффинного) алгебраического многообразия, нормальность и гладкость.
- Построение аффинного торического многообразия по рациональному полиэдральному конусу. Критерий гладкости. Морфизмы торических многообразий с точки зрения полиэдральных конусов.
- Построение торического многообразия по вееру и проективного торического многообразия по многограннику. Торические морфизмы.
- Соответствие между орбитами действия тора на данном торическом многообразии и конусами веера, соответствующего данному многообразию (Orbit-Cone Correspondence).
- Дивизоры на торических многообразиях. Группы классов дивизоров.
- Целочисленные кусочно-линейные функции на веере торического многообразия. Соответствие между дивизорами Картье и кусочно-линейными функциями.
- Обильные и очень обильные дивизоры на торических многообразиях. Численно эффективные дивизоры.
- Конусы Nef и Мори для заданного торического многообразия.

УЧЕБНИКИ:

- D. Cox, J. Little, H. Schenck. Toric varieties. GTM 124, AMS, 2011.
- W. Fulton. Introduction to toric varieties. Ann of Mathematics Studies 131, Princeton University Press, 1993.
- В. И. Данилов. Геометрия торических многообразий. УМН 33:2(200), 1978, с. 85-–134.
- T. Oda. Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties. Results in Mathematics and Related Areas (3) 15, Springer-Verlag 1988.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.6 листки, 0.4 экзамен

КОММЕНТАРИЙ: Курс должен быть толстый, а не тонкий, поскольку подразумевает сдачу листков и проработку большого объёма материала.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Колесников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Уравнения в частных производных — чрезвычайно важный раздел современной математики, имеющее глубокие связи как с физическими и техническими приложениями, так и с многочисленными теоретическими направлениями, включающими функциональный анализ, геометрию, теорию вероятностей и случайные процессы, комплексный анализ и многие другие. Знакомство с идеями и методами УрЧП составляет необходимую часть современного математического образования. В курсе мы обсудим классические линейные уравнения (транспортное, волновое, уравнения Лапласа и теплопроводности), примеры явных решений, понятия фундаментальных и слабых решений, приложения анализа Фурье, важные технические приемы (принцип максимума, интегральные оценки), вариационный подход и основы теории пространств Соболева.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, линейная алгебра

ПРОГРАММА:

1. Физические задачи и УрЧП. Примеры классических уравнений.
2. УрЧП первого порядка. Метод характеристик. Транспортное уравнение.
3. Уравнение Лапласа. Фундаментальные решения, формулы Грина. Принцип максимума. Энергетический функционал.
4. Волновое уравнение. Формула Даламбера. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Распространение волн.
5. Уравнение теплопроводности (диффузии). Броуновское движение.
6. Методы теории Фурье в УрЧП. Волновое уравнение, уравнение теплопроводности.
7. Пространства Соболева и Гёльдера. Слабые производные, приближения гладкими функциями. Неравенства Соболева.
8. Вариационный метод решения. Теоремы существования. Спектр оператора Лапласа. Регулярность и понятие априорной оценки (обзорно).
9. Некоторые нелинейные УрЧП (Гамильтона-Якоби, эйконала, Монжа-Ампера) (обзорно)

УЧЕБНИКИ: Л. К. Эванс, «Уравнения с частными производными», Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003 В. С. Владимиров, «Уравнения математической физики», М.: Наука, 1988 В. С. Шубин, «Лекции об уравнениях математической физики», М.: МЦНМО, 2003 О. А. Олейник, «Лекции об уравнениях с частными производными», М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010 «Сборник задач по уравнениям с частными производными», Под ред. Шамаева А.С. – М.:БИНОМ, 2005 Н.В. Крылов Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера, Новосибирск: Научная книга, 1998

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Порядок оценивания: Средняя оценка за 2 контрольных работы дает накопленную оценку, которая может стать итоговой в пределах 8 баллов без сдачи экзамена. Для получения итоговой оценки больше 8 баллов необходимо иметь накопленную оценку не менее 8 баллов и сдать устный экзамен, со-стоящий из 2 теоретических вопросов и решения задач. Итоговая оценка при этом равна средней между накопленной и экзаменационной оценкой. Переписывание контрольных работ не предусмотрено.В случае, если число слушателей курса мало, контрольные могут быть заменены на устные коллоквиумы по согласованию со студентами и преподавателем

”

Функции многих комплексных переменных
простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. А. Глуцюк, А. С. Голота.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ:

Многомерный комплексный анализ не входит в обычную университетскую программу. В то же время он входит в необходимый минимум для исследований во многих областях современной математики, таких как алгебраическая геометрия, комплексная динамика, теория особенностей, дифференциальные уравнения... С одной стороны, голоморфные функции многих комплексных переменных разделяют много основных свойств функций одной переменной. С другой стороны, в их теории возникают новые явления аналитического продолжения. Например, они не могут иметь ни изолированных особенностей, ни компактных подмножеств особых точек. всякое комплексное векторное пространство размерности не ниже двух содержит собственную область, биголоморфно эквивалентную объемлющему пространству (область Фату – Бибербаха). Теория голоморфной выпуклости и многообразий Штейна вместе с основами теории пучков позволяют доказать важные теоремы о продолжении и об аппроксимации. Принцип GAGA в алгебраической геометрии утверждает, что всякий аналитический объект на комплексном проективном многообразии алгебраичен. В курсе будут представлены вышеупомянутые темы, включая основы теории аналитических множеств, биголоморфные автоморфизмы и введение в комплексную динамику.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ, линейная алгебра, ТФКП

ПРОГРАММА:

- Основные свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Теорема Хартогса и другие теоремы о стирании особенностей.
- Теория аналитических множеств, многочлены Вейерштрасса, введение в комплексную алгебраическую геометрию.
- Обобщённый принцип максимума, лемма Шварца, неравенство Коши, автоморфизмы, комплексная динамика, теоремы о линеаризации, области Фату–Бибербаха.
- Области голоморфности, голоморфная выпуклость, Леви выпуклость и псевдовыпуклость, форма Леви, оболочки голоморфности, римановы области.
- Когомологии Дольбо, лемма Пуанкаре, проблемы Кузена, когомологии с коэффициентами в пучке.
- Многообразия Штейна, когерентные аналитические пучки, теоремы о продолжении и об аппроксимации, теоремы Картана А и Б (без доказательства).

УЧЕБНИКИ:

- gunning Ганнинг, Росси, Аналитические функции многих комплексных переменных
- shabat Шабат. Введение в комплексный анализ. Часть 2: функции многих комплексных переменных

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.3 x exam + 0.7 x (problem tasks and seminars)

”

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. В. Шапошников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс функционального анализа в весеннем семестре продолжает курс осеннего семестра. Будут рассмотрены следующие темы: спектральная теория ограниченных операторов, полинормированные пространства и обобщенные функции, преобразование Фурье, пространства Соболева, неограниченные операторы и полугруппы операторов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ, линейная алгебра, теория меры и интеграл Лебега, введение в функциональный анализ

ПРОГРАММА:

- Самосопряженные операторы. Непрерывные функции от самосопряженного оператора.
- Унитарная эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию.
- Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере.
- Полинормированные пространства. Метризуемость и нормируемость топологии таких пространств. Линейные непрерывные функционалы.
- Пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ и сходимость в них. Пространства обобщенных функций.
- Обобщенная производная. Свёртка интегрируемых и обобщенных функций. Фундаментальное решение дифференциального оператора.
- Преобразование Фурье функций из $\mathcal{S}$. Преобразование Фурье функций из $L^2(\mathbb{R})$. Спектр преобразования Фурье.
- Преобразование Фурье обобщенных функций. Существование фундаментального решения.
- Пространства Соболева. Описание через преобразование Фурье. Теоремы вложения.
- Неограниченные операторы. Расширения симметричных операторов.
- Полугруппа операторов. Теорема Стоуна. Теорема Хилле–Иосиды.
- Банаховы алгебры. Теорема Гельфанда–Наймарка.

УЧЕБНИКИ:

- Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.-Ижевск: РХД, 2009.
- Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу, МЦМНО, 2017.
- Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
- Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006.
- Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу, МЦНМО, 2004.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка за курс складывается из оценки за экзамен и накопленной оценки по формуле 0.5*(Накопленная оценка) + 0.5*(Экзамен), а накопленная оценка складывается из оценки за выполнение домашних заданий и оценки за коллоквиум по формуле 0.6*(домашнее задание) + 0.4*(коллоквиум
Все формы контроля оцениваются от 0 до 10 баллов.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Пирковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Студенты, участвующие в семинаре, делают доклады по функционально-аналитическим аспектам некоммутативной геометрии. Доклады, относящиеся к некоммутативной алгебраической геометрии или к «чистому» функциональному анализу (предпочтительно с алгебраическим или геометрическим ароматом), также приветствуются. Темы для докладов обычно берутся из литературы, но иногда участники рассказывают о своих собственных результатах. Время от времени с докладами выступают руководитель семинара и приглашенные докладчики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Участники семинара должны знать основы алгебры и функционального анализа (в объёме стандартных вводных курсов матфака ВШЭ) и любить какую-нибудь разновидность геометрии или топологии.

ПРОГРАММА:

УЧЕБНИКИ: 1. A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.

2. A. Connes, M. Marcolli. Noncommutative geometry, quantum fields and motives. AMS, 2008.

3. L. L. Vaksman. Quantum bounded symmetric domains. AMS, 2010.

4. M. A. Rieffel. Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^d$. Mem. Amer. Math. Soc. 106 (1993), no. 506.

5. J. Cuntz, R. Meyer, J. Rosenberg. Topological and bivariant K-theory. Birkh”auser, 2007.

6. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov. Foundations of free noncommutative function theory. AMS, 2014.

7. M. Kashiwara, P. Schapira. Deformation quantization modules. Astérisque No. 345 (2012).

8. K. A. Brown, K. R. Goodearl. Lectures on algebraic quantum groups. Birkh”auser, 2002.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Для получения положительной оценки достаточно сделать хотя бы один доклад на семинаре. Оценка будет зависеть от качества доклада.

Функциональный интеграл: Стохастические процессы и Основы Квантовой Механики

простой межкампусный аудиторный НИС для 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Г. Семёнов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Одним из мощнейших методов современной теоретической физики является метод функционального интегрирования или, интегрирования по траекториям. Основы данного подхода были заложены Н. Винером ещё в начале XX века, однако наибольшую известность он получил после того, как Р. Фейнман применил данный подход в квантовой механике. В настоящее время функциональный интеграл нашел своё применение в теории случайных процессов, физике полимеров, квантовой и статистической механике и даже в финансовой математике. Несмотря на то, что в ряде случаев его применимость математически строго пока не доказана, данный метод позволяет с удивительным изяществом получать точные и приближённые решения различных интересных задач. Курс посвящён основам данного подхода и его приложениям к теории случайных процессов и квантовой механике. В первой части курса на примере стохастических дифференциальных уравнений будут рассказаны основные идеи данного подхода, а так же различные способы точного и приближённого вычисления функциональных интегралов. Далее в рамках курса будут рассмотрены основные идеи квантовой механики, причем будет рассмотрен как операторный подход, так и подход с использованием функционального интегрирования. Будет продемонстрировано, что с точки зрения формализма описание случайных процессов и описание квантовомеханических систем весьма похоже. Это позволит сделать ряд интересных наблюдений, таких как, например, аналогию между суперсимметричной квантовой механикой и диффузией частицы во внешнем потенциале. В заключительной части курса, в зависимости от интересов аудитории, будет рассказано о различных применениях метода функционального интегрирования, таких как физика полимеров, финансовая математика и др. При наличии времени будет дан обзор более продвинутых сюжетов в данной области, в том числе, интегрирование по грассмановым переменным, вычисление функциональных детерминантов операторов и др.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: базовые курсы анализа, теории вероятностей, ТФКП, классической механики, дифф. уравнений. Желательно, но не обязательно: классическая теория поля, статистическая механика.

ПРОГРАММА:

- Стохастические дифференциальные уравнения и случайные процессы. Производящий функционал. Марковский (δ-коррелированный) и Гауссов случайные процессы.
- Вероятность перехода и ее представление в виде функционального интеграла. Вычисление простейших функциональных интегралов.
- Вывод уравнения Фоккера – Планка. Некоторые свойства его решений.
- Гауссовы функциональные интегралы и теорема Гельфанда – Яглома.
- Приближенное вычисление некоторых функциональных интегралов.
- Основные идеи квантовой механики. Интеграл по траекториям и амплитуда перехода.
- Операторный подход в квантовой механике. Гильбертово пространство состояний и канонические коммутационные соотношения.
- Эволюция состояний в квантовой теории и уравнение Шредингера. Собственные состояния Гамильтониана.

- Наблюдаемые в квантовой теории. Процедура измерения и редукция состояний.
- Вывод представления для амплитуды перехода квантовомеханической частицы в виде функционального интеграла из операторного подхода.
- Операторный подход в теории случайных процессов. Упорядочение операторов. Символ оператора.
- Сходство и различие между уравнениями Фоккера – Планка и Шредингера. Суперсимметричная квантовая механика.
- Приближенные методы квантовой механики. Формула Ван – Флека и ее интерпретация в терминах классической механики.
- Применение функционального интеграла в физике полимеров и финансовой математике. Дальнейшее развитие идей. (При наличии времени и желания слушателей)

УЧЕБНИКИ:

- Chaichian M., Demichev A. Path integrals in physics. Vol. 1: Stochastic processes and quantum mechanics. 2001.
- Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А., Лекции по квантовой механике для студентов математиков. 1980.
- Kleinert H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. 2004.
- Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. 1976.
- Семенов А.Г. О случайном блуждании «пьяной компании». Теор. и математ. физика Т. 187 No. 2 с. 350 – 359, 2016.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка равна $0.7H + 0.3E$, где H — средняя оценка по всем домашним контрольным в семестре, а E — оценка за экзамен. Округление в меньшую сторону, но на экзамене есть возможность для повышения оценки путём обсуждения и решения задач.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика». Тем ни менее, он достаточно прост и может быть освоен студентами начиная с третьего курса бакалавриата. А некоторые продвинутые студенты смогут освоить его и на втором курсе.

Цепи Маркова

простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше

(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Дымов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2023/24 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Простейший случайный процесс — последовательность независимых событий. Область применения таких процессов весьма ограничена, так как на практике события обычно оказываются зависимыми. Марковские цепи — простейшие случайные процессы, состоящие из последовательных зависимых событий, в которых следующее событие зависит только от предыдущего, но не зависит от событий, произошедших еще раньше. Другими словами, «будущее зависит только от настоящего, но не зависит от прошлого». Цепи Маркова имеют глубокую и красивую, но в то же время достаточно простую математику. Благодаря своей удивительной эффективности в приложениях к задачам из различных областей — математики, физики, компьютерных наук, биологии, экономики и др. — они составляют, возможно, самый важный класс случайных процессов. Курс является введением в теорию марковских цепей. Мы обсудим их наиболее важные свойства и некоторые известные приложения. Главным образом мы будет говорить о простейших марковских цепях — имеющих конечное число состояний.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Базовые курсы анализа и линейной алгебры первого года обучения. Курс теории вероятностей желателен, но не обязателен: для тех, кто его не проходил, все (довольно скромные) необходимые сведения будут сообщены на первых двух-трех лекциях, однако вам будет тяжелее, чем тем, кто проходил курс ТВ.

ПРОГРАММА:

- Цепи Маркова с не более чем счетным числом состояний.
- Стохастические матрицы и их свойства.
- Матрица переходных вероятностей. Формула распределения цепи на n-ом шаге. Однородные цепи Маркова.
- Цепь Маркова за n шагов и ее переходные вероятности. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
- Примеры цепей Маркова: случайные блуждания, модель Гальтона-Ватсона, PageRank.
- Вероятность вымирания в модели Гальтона-Ватсона.
- Стационарные распределения цепей Маркова. Их существование для случая конечного числа состояний.
- Перемешивающие матрицы переходных вероятностей. Эргодическая теорема для цепей Маркова с конечным числом состояний.
- Закон больших чисел: классический и для цепей Маркова.
- Теорема Перрона-Фробениуса.
- Алгоритм Метрополиса-Гастингса. Расшифровка текстов.
- Топология цепей Маркова с конечным числом состояний.

УЧЕБНИКИ:

- А.Н. Ширяев, «Вероятность».
- Л.Б. Коралов, Я.Г. Синай, «Теория вероятностей и случайных процессов».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $(C + E)/2$, где C обозначает накопленную оценку, а E обозначает оценку за экзамен.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс пора постепенно начинать передавать кому-нибудь еще. Я хочу спросить Мауро Мариани не заинтересован ли он прочитать этот курс через год. Если заинтересован – в ближайший год я бы хотел сделать его в своим помощником, чтобы дальше передать курс было проще.

Элементы стохастической динамики
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Ильин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2023/24 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Стохастические динамические системы возникают в самых разных областях—от теоретической физики и астрофизики до экономики и финансовой математики. Слушатели познакомятся с основными идеями и понятиями этой науки, а также освоят минимальный набор инструментов для решения конкретных задач. Изложение будет вестись на относительно элементарном языке корреляционных функций и их производящих функционалов. Мы начнём с обсуждения элементарных понятий: непрерывных случайных величин, плотности вероятности, статистических моментов, характеристических функций и связных моментов (куммулянтов) случайных векторов. Эти понятия в дальнейшем позволят нам легко и изящно изложить закон больших чисел, ЦПТ и принципы больших отклонений. Далее мы обсудим что такое корреляционное время, корреляционный масштаб и несобственные дельта-процессы. Подробно изучим Пуассоновский и Гауссовский случайные процессы, теорему Вика, принципы расщепления корреляций, закон больших чисел и ЦПТ для случайных процессов с конечным корреляционным временем. Далее рассмотрим стохастические дифференциальные уравнения с аддитивным шумом (диффузия) и мультипликативным шумом (системы с перемежаемостью). Такие уравнения встречаются во многих областях теоретической физики, экономики и финансовой математики, и составляют базу для интуитивного понимания процессов в более сложных нелинейных стохастических системах. В качестве интересного примера, мы обсудим парадоксальное поведение статистических моментов в системах с мультипликативным шумом, таких как, например, стохастические потоки и поясним значение редких «катастрофических» событий для жизни таких систем. Далее мы рассмотрим формализм Фейнмана-Каца, который позволяет просто и изящно исследовать решения параболических дифференциальных уравнений в частных производных с помощью континуального интегрирования по мере Винера. Этот формализм считается некоторыми авторами «главным аналитическим результатом 20 века», поэтому знакомство с ним важно для каждого культурного математика. В процессе изучения этого формализма мы разберем теорию интегралов Ито и Стратоновича и научимся оперировать с разным порядком пределов в СДУ. В заключении курса мы обсудим чрезвычайно красивую теорию континуальных произведений случайных матриц. Эти произведения естественным образом возникают при решении линейных матричных стохастических уравнений с мультипликативным шумом и используются в теории турбулентного транспорта, стохастической гидродинамике, метеорологии, экономике и других разделах естествознания.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: линейная алгебра, анализ, основы теории вероятностей

ПРОГРАММА:

- Случайные векторы, моменты, куммулянты, производящие функции.
- Гауссовы случайные векторы.
- Закон больших чисел, центральная предельная теорема, принцип больших отклонений, перемежаемость.
- Некоммутативный закон больших чисел. Произведение случайных матриц. Стохастические интегралы движения.
- Случайные процессы и поля, Корреляционные функции, Связные Корреляционные Функции, Производящие функционалы.
- Одноточечная и двухточечная статистика, корреляционное время. Дельта процессы. Пуассоновский процесс.

- Гауссовы случайные процессы и поля, теорема Вика.
- Закон больших чисел, центральная предельная теорема, принцип больших отклонений для случайных процессов.
- Стохастические дифференциальные уравнения. Мультипликативный и аддитивный шум. Диффузия. Перемежаемость. Уравнение Ланжевена. Процесс Винера.
- Формализм Фейнмана-Каца. Стохастические Интегралы Ито и Стратоновича.
- Дискретные и континуальные произведения случайных матриц. Индексы Ляпунова. Матричные стохастические уравнения с мультипликативным шумом.

УЧЕБНИКИ:

- **[B]** В. Кляцкин, « Динамика стохастических систем » .
- **[GM]** Б. Оксендаль « Стохастические дифференциальные уравнения »

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:

- $S \in [0,5]$ – оценка за сдачу листков, вещественное число между 0 и 5,
- $C \in [0,5]$ – оценка за самостоятельные работы на семинарах (проводимые раз в несколько занятий), вещественное число между 0 и 5,
- $E \in [0,5]$ – оценка за устный экзамен, вещественное число между 0 и 5.

Полная оценка вычисляется по следующей формуле:

$$\min(10, \lceil S + C + E \rceil),$$

где $\lceil\rceil$ соответствует округлению вверх. Если для какого-то студента до финального экзамена выполняется условие $\min(10, \lceil S + C \rceil \geq 8$, то данный студент может получить эту оценку автоматом и не идти на экзамен.

Course descriptions in English

Listed in this section are the courses that will be given in English if required (e.g., if some students do not understand Russian). All these courses will be equipped with printed matter in English.

C^*-algebras and compact quantum groups
advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. Yu. Pirkovskii.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The C^*-algebra theory is an algebraic branch of functional analysis. It appeared in the 1940ies in the foundational papers of I. M. Gelfand and M. A. Naimark, and has evolved into an extremely deep, multi-branch mathematical discipline since then. A C^*-algebra is a $\mathbb{C}$-algebra equipped with a norm and an involution satisfying some compatibility axioms. The basic examples are the algebra $C(X)$ of continuous functions on a compact topological space X and the algebra $\mathcal{B}(H)$ of bounded linear operators on a Hilbert space H. These examples are "universal" due to the following Gelfand-Naimark Theorems: (1) each commutative C^*-algebra with identity is isomorphic to $C(X)$ for some X, and (2) each C^*-algebra can be isometrically embedded into $\mathcal{B}(H)$ for some H. The 1st Gelfand-Naimark Theorem (statement (1) above) lies at the foundation of noncommutative geometry (à la A. Connes) and the theory of compact quantum groups.

The theory of compact quantum groups was created mostly by S. L. Woronowicz in the 1980ies-1990ies. Loosely speaking, a compact quantum group is a "deformation" of the algebra of continuous functions on a compact topological group. Thus, according to the well-known saying, quantum groups are "neither quantum, nor groups". In Woronowicz's theory, a compact quantum group is a C^*-algebra endowed with an additional structure (comultiplication) satisfying some natural axioms. The C^*-algebra approach to quantum groups is closely related to the more popular algebraic approach via duality, real forms and C^*-completions, but in general there is no 1–1 correspondence between them. Many classical results of the theory of compact groups (the existence and uniqueness of the Haar measure, the complete reducibility of unitary representations, the Peter-Weyl theorem, the Tannaka-Krein duality, etc.) have natural "quantum" analogs. The theory of compact quantum groups is only a part of a much more general (and much more difficult) theory of locally compact quantum groups developed by J. Kustermans and S. Vaes in the early 2000ies. Nowadays, this is one of the most popular and actively developing fields of operator algebra theory.

PREREQUISITES: The Lebesgue integration theory and the basics of functional analysis. Some knowledge of the representation theory of compact (or at least finite) groups will also be helpful.

SYLLABUS:

1. C^*-algebras. Basic examples. Commutative C^*-algebras and the 1st Gelfand-Naimark Theorem. The functional calculus in C^*-algebras.
2. Positive elements in C^*-algebras. Representations of C^*-algebras. Positive functionals and the GNS construction. The 2nd Gelfand-Naimark Theorem.
3. Tensor products of C^*-algebras. C^*-envelopes.
4. Compact quantum groups. Examples (the quantum SU(n), the quantum SO(n), the free unitary and free orthogonal quantum groups). Commutative compact quantum groups.
5. The Haar state.
6. Unitary corepresentations. Decomposing into irreducibles.
7. The orthogonality relations. The Hopf subalgebra of matrix elements.
8. The Tannaka-Krein duality (if time permits).

TEXTBOOKS:

1. G. J. Murphy. C^*-algebras and operator theory. Academic Press, 1990.
2. S. Neshveyev, L. Tuset. Compact quantum groups and their representation categories. SMF, 2013.
3. K. R. Davidson. C^*-algebras by example. AMS, 1996.
4. B. Blackadar. Operator algebras. Springer, 2006.
5. J. Dixmier. C^*-algebras and their representations. North-Holland, 1977.
6. A. Ya. Helemskii. Banach and locally convex algebras. Oxford, 1993.
7. M. Takesaki. Theory of operator algebras. Springer, 2002 (vol. I), 2003 (vols. II and III).
8. T. Timmermann. An invitation to quantum groups and duality. EMS, 2008.
9. A. Klimyk, K. Schmudgen. Quantum groups and their representations. Springer, 1997.

GRADING RULES: Total grade = exam grade

The written take-home exam will be given at the end of the term and will consist of 7 problems. You will have appr. 10 days to solve the problems.

An introduction to cohomology theory
simple inter-campus offline course for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. G. Gorinov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: One of the main goals of algebraic topology is to determine whether two given spaces are homeomorphic or homotopy equivalent. This goal is not achievable in full generality, but when attempting to tell apart spaces which are not homotopy equivalent people discovered homotopy invariants: homotopy non-equivalent spaces have non-isomorphic invariants, but the converse is in general not true. One of the simplest but meaningful invariants are classical homology groups and cohomology rings. The basic properties and applications of these are the subject of the course.

PREREQUISITES: 1st year algebra and topology. Smooth manifolds would be useful but are not strictly necessary.

SYLLABUS:

- Introduction. Simplicial homology.
- Basic homological algebra: exact sequences, complexes, 5-lemma, chain homotopy.
- Homotopy invariance, excision and Mayer-Vietoris.
- Singular homology.
- CW-complexes and cellular homology.
- Homology and cohomology with coefficients. The universal coefficient theorems.
- The K"unneth isomorphisms.
- Cup and cap products. Topological manifolds and the Poincaré duality.
- Lefschetz theorems. The contribution of a nondegenerate fixed point in the manifold case.
- Vector bundles and characteristic classes.
- (*) Homotopy groups. Whitehead's and Hurewicz's theorems.
- (*) Eilenberg-MacLane spaces and Postnikov towers.
- (*) Cohomology operations.

TEXTBOOKS: A. Hatcher, Algebraic topology; A. Hatcher, Vector bundles and K-theory.

GRADING RULES: 100% final exam

An introduction to Goodwillie calculus

advanced inter-campus offline seminar for 3$^{\text{rd}}$ year students and higher

(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. G. Gorinov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Given a smooth function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, one can construct its Taylor series at the origin. The homogeneous components of the series are homogeneous polynomials with coefficients obtained by taking the derivatives of f at 0. Moreover, under some assumptions on $f, x \in \mathbb{R}^n$ and k the value of the degree k Taylor polynomial at x approximates $f(x)$ reasonably well. Remarkably, under some hypotheses which are not too restrictive, all these statements have analogues for functors from (certain subcategories of) topological spaces to topological spaces. For example, the linear approximation of the functor of embeddings in a given manifold M turns out to be the functor of immersions in M.

These phenomena are described by the Goodwillie calculus. Our goal is to understand several examples in some detail with a focus on the embedding functor, and then to discuss the general formalism behind these constructions.

PREREQUISITES: Algebraic topology as covered in the first three chapters of Hatcher, or the first two chapters of Fomenko-Fuchs. We will review some or all of the prerequisites if necessary.

SYLLABUS:

- Reminder on limits and colimits and model categories. Homotopy limits and colimits.
- Cubical spaces and total fibres.
- Polynomial functors.
- Goodwillie-Taylor tower.
- Convergence for spaces of embeddings.
- Goodwillie calculus and homotopy theory.
- Applications to spaces of knots.
- Applications to algebraic K-theory.
- A general viewpoint on the Goodwillie calculus.

TEXTBOOKS: G. Arone, M. Ching, Goodwillie calculus, https://arxiv.org/abs/1902.00803; T. Goodwillie, J. Klein and M. Weiss, Spaces of smooth embeddings, disjunction, and surgery; N. Kuhn, Goodwillie towers and chromatic homotopy: an overview, https://arxiv.org/abs/math/0410342; B. Munson, Introduction to the manifold calculus of Goodwillie-Weiss, https://arxiv.org/abs/1005.1698; B. Munson, I. Volic, Cubical homotopy theory; M. Weiss, Calculus of embeddings

GRADING RULES: 50% talk; 50% notes in LaTeX

Analysis of several complex variables
simple inter-campus offline course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: A. A. Glutsyuk, A. S. Golota.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Analysis of several complex variables is not studied in the usual university program. At the same time it is a necessary pre-requisite to study many important domains of contemporary mathematics such as algebraic geometry, complex dynamics, singularity theory, differential equations etc. While holomorphic functions of several complex variables share many basic properties of functions of one variable, new phenomena of analytic extention occurs. For example, they can have neither isolated singularities, nor compact sets of singularities. Each complex space of dimension at least two contains a proper domain that is biholomorphically equivalent to the ambient space (Fatou–Bieberbach domain). Theory of holomorphic convexity and Stein manifolds together with basic sheave theory allow to prove important extension and approximation theorems. The GAGA principle in algebraic geometry says that every analytic object on a complex projective algebraic manifold is algebraic. The cours will cover the above mentioned topics, including basic analytic set theory, biholomorphic automorphisms and introduction to complex dynamics.

PREREQUISITES: Analysis, linear algebra, analytic functions of one complex variable

SYLLABUS:

- Basic properties of holomorphic functions of several complex variables. Hartogs and other erasing singularity theorems.
- Analytic set theory, Wejerstrass polynomials, introduction to complex algebraic geometry.
- Generalized Maximum Principle, Schwarz Lemma, Cauchy Inequality, automorphisms, complex dynamics, linearization theorems and Fatou–Bieberbach domains.
- Domains of holomorphy, holomorphic convexity, Levi- and pseudo-convexity, Levi form. Envelopes of holomorphy, Riemann domains.
- Dolbeault cohomology, Poincare lemma, Cousin problems, Sheaf cohomology.
- Stein manifolds, coherent analytic sheaves, extension and approximation theorems, Cartan A and B Theorems (without proofs).

TEXTBOOKS:

- gunning Gunning, Rossi, Analytic functions of several complex variables.
- shabat Shabat. Introduction to complex analysis. Part 2: functions of several complex variables.

GRADING RULES: 0.3 x exam + 0.7 x (problem tasks and seminars)

Analytic number theory
simple inter-campus offline course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. B. Kalmynin.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Analytic number theory is an area of number theory studying qunatitative aspects of various arithmetical objects by analytic methods. This approach turns out to be especially useful when the algebraic or geometric structure of the object is unclear or complicated. In this course, we are going to discuss proofs of some classical facts, such as the Prime Number Theorem and Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions, learn how to use properties of Riemann zeta-function and the circle method, and figure out why every large enough odd number is a sum of three primes. Furthermore, we will discuss applications of these results to the problems of uniform distribution and statistics of quadratic residues.

PREREQUISITES: Complex analysis (basic properties of holomorphic functions, Cauchy's integral formula, Maximum modulus principle, Weierstrass factorization theorem), Analysis (big O notation, integration by parts, Fourier series and Fourier transform), Algebra (fundamental theorem of arithmetic)

SYLLABUS: 1. Summation by parts, averages of arithmetic functions: divisor function, Euler's totient function, divisor sums. Multiplicative convolution, Möbius function, Liouville function, von Mangoldt function, Dirichlet series. *Erdős-Kac theorem. 2. Zeta-function and its functional equation, distribution of primes. Gauss circle problem, Dirichlet divisor problem. *Voronoi formula, a few words on modular forms. 3. Dirichlet characters and their L-functions, Siegel-Walfisz theorem. Statistical properties of quadratic residues and some other consequences of Generalized Riemann Hypothesis. *Arithmetic of quadratic fields. 4. Uniform distribution theory, Weyl sums. Application to zero-free regions of zeta-function, primes in short intervals. *Normal numbers and ergodic theory. 5. Asymptotics of partition function. Waring's problem. Vinogradov's three primes theorem. *Arithmetic progressions of primes.

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: min(10,0.54*P + 0.6*E), where P is the proportion of solved problems from problem sets and E is the grade for the exam

COMMENTS: Планирую провести ””толстый курс””, семинаристом хочу поставить П.А. Кучерявого.

Calculus of Variations
advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: M. Mariani.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The course provides an introduction to the theory of calculus of variations and optimization. The first part of the course concerns direct methods, providing the mathematical tools for the theory. The second part of the course is devoted to the modern theory with a focus on high-dimensional and infinite-dimensional problems. The course gives an introduction to the theory of calculus of variations and optimization. The first part of the course concerns direct methods, providing the mathematical tools for the theory. The second part of the course is devoted to the modern theory with a focus on high-dimensional and infinite-dimensional problems.

PREREQUISITES: No advanced prerequisites are needed. But students should be well familiar with the concepts of the first two years, and may want to review some measure theory (integration theory, convergence), functional spaces (пространства Лебега, пополнение, компактность), differential equations (well-posedness) and some basic differential geometry.

SYLLABUS:

- Historical model problems and preliminaries. [GF]
- Classical methods: Euler-Lagrange equations, optimal control, the Hamiltonian approach, viscosity solutions, applications.[D,F]
- Direct methods: basic theory, elliptic problems (existence, uniqueness, regularity), Euler-Lagrange revisited, relaxation of integral functionals, applications in high dimension. [S]
- Stability and robustness. [B]

TEXTBOOKS:

- **[D]** Bernard Dacorogna; Introduction to the calculus of variations; Imperial College Press, 3rd ed (2014).
- **[GF]** Israel M. Gelfand, Sergey V. Fomin; Calculus of Variations; Dover (1963).
- **[S]** Michael Struwe; Variational Methods; Springer (2008).
- **[F]** A.Fathi, Draft 2005, http://baladi.perso.math.cnrs.fr/fathidea.pdf
- **[B]** A.Braides, Gamma-convergence for Beginners (2002).

GRADING RULES: 0.3 control-1 + 0.3 control-2 + 0.4 oral exam + 0.1 bonus. The bonus score is what you get solving exercises at home and in class. All grades range in 0-10.

COMMENTS: Depending on the number and interests of students, one of the following topic can be addressed in some additional lectures: minimal surfaces, homogenization, fastest descent methods.

Cluster Poisson Varieties
simple inter-campus offline seminar for 2nd year students and higher

TEACHER: V. G. Gorbounov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Cluster varieties introduced by Fomin and Zelevinsky are commutative rings with unit and no zero divisors equipped with a distinguished family of generators (cluster variables) grouped in overlapping subsets (clusters) of the same cardinality connected by exchange relations. Originally they were introduced in an attempt to create an algebraic and combinatorial framework for the study total positivity in semisimple groups. In the case of GL_n the notion of total positivity coincides with the classical one, first introduced by Gantmakher and Krein. Since then, the theory of cluster algebras has witnessed a spectacular growth due to the many links that have been discovered with a wide range of subjects including representation theory of quivers and finite-dimensional algebras and categorification; discrete dynamical systems based on rational recurrences; Teichmuller and higher Teichmuller spaces; combinatorics and the study of combinatorial polyhedra; commutative and non-commutative algebraic geometry, projective configurations and their tropical analogues, the study of stability conditions in the sense of Bridgeland, Donaldson – Thomas invariants; Poisson geometry and theory of integrable systems. The purpose of the course is to give an introduction to the theory of cluster poisson varieties.

PREREQUISITES: Courses in algebra and topology.

SYLLABUS:

1. Totally positive matrices. Whitney theorem. Fekete criteria.
2. Bruhat cells. Symmetric group and the length function.
3. Bruhat cells in the unipotent group and its positive parametrization.
4. Matrix product as a concatenation of graphs. Planar networks. Lindstrom – Gessel – Viennot lemma.
5. The cluster algebra structure on the unipotent group and the Plucker relations.
6. The new positivity criteria defined by the cluster algebra structure.
7. Examples of the cluster algebra structure in geometry.
8. Poisson algebras. Poisson algebra structure on the matrix group.
9. Poisson structure on the set of networks.
10. Custer Poisson algebras.

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: The exam will consists of a presentation of a topic from the course.

Combinatorics of invariants
simple inter-campus offline seminar for 1^{st} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: M. E. Kazarian, S. K. Lando.

LEARNING LOAD: two terms of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: This students' research seminar is devoted to combinatorial problems arising in knot theory. The topics include finite order knot invariants, graph invariants, matroids, delta-matroids, integrable systems and their combinatorial solutions. Hopf algebras of various combinatorial species are studied. Seminar's participants give talks following resent research papers in the area and explaining results of their own.

PREREQUISITES: no.

SYLLABUS:

1. Knots and their invariants.
2. Knot diagrams and chord diagrams.
3. 4-term relations for chord diagrams, graphs, and delta-matroids.
4. Weight systems.
5. Constructing weight systems from Lie algebras.
6. Hopf algebras of graphs, chord diagrams and delta-matroids.
7. Combinatorial solutions to integrable hierarchies.
8. Khovanov homology.

TEXTBOOKS:

1. S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy. CDBook. CUP, 2012.
2. S. Lando, A. Zvonkin. Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004.

GRADING RULES: Regular participation in the seminar is necessary for marking. However, the participation only can not contribute more than 8 points. For getting a higher score, you have to give a talk either on resent actual papers or on your own results in scientific directions of the seminar.

Complex networks
simple inter-campus offline seminar for 2^{nd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: V. G. Gorbounov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Complex network theory is a vast science that studies graphs and their evolution. Complex network models are used in many areas of human knowledge (economics, biology, sociology, etc.). In this course, we plan to discuss the main existing methods for analyzing the static and dynamic properties of complex networks. At the beginning of the course, we will discuss the main definitions and models that are used in the study of complex networks, then selected subjects from various areas of this science will be analyzed: from static properties to collective dynamics.

PREREQUISITES: The prerequisites include a minimum understanding of courses in probability theory, mathematical analysis, linear algebra, and differential equations. Although the necessary concepts will be introduced as the story progresses, mastering these disciplines will greatly simplify the understanding of what is happening.

SYLLABUS:

1. Introduction. Basic structures of complex networks and their definitions (vertex degree, centrality, motives, community structures, graph spectrum)

2. Topological properties of real networks

3. Basic models of complex networks

4. Static and dynamic stability

5. Propagation processes in networks

6. Synchronization and collective dynamics, the main function of sustainability

7. Algorithms for searching for community structures

8. Any other topics at the request of the listeners that we have time to touch on

TEXTBOOKS:

1. Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., Hwang, D. U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. Physics reports, 424(4-5), 175-308.

2. Chung F. et al. Complex graphs and networks. – American Mathematical Soc., 2006. – No. 107.

3. Newman, M. E. (2003). The structure and function of complex networks. SIAM review, 45(2), 167-256.

4. Харари, Фрэнк. Теория графов. 1973: 274 5.

GRADING RULES: Each student enrolled in the NIS must make a report that will form an assessment for completing this course.

Discrete integrable equations and their reductions
advanced inter-campus offline seminar for 4th year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. K. Pogrebkov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Creation and development of the theory of integrable equations is one of main achievements of the mathematical physics of the fall of the previous century. Ideas and results of this theory penetrate in many branches of the modern mathematics: from string theory to the theory of Riemann surfaces. Nowdays essential attention is attracted to the theory of discrete integrable equations. In this lectures a generic approach to construction and investigation of such equations will be presented.

PREREQUISITES: The standard HSE curses of mathematical analysis

SYLLABUS: Commutator identities on associative algebras; d-bar problem and dressing operators; Lax pairs; Hirota difference equation (HDE); Higher analogs of HDE; Direct and the Inverse scattering transform for the HDE; Soliton solutions; Two-dimensional reductions, their integrability; Dispersion relation and integrals of motion; Other hierarchies of the discrete integrable equations.

TEXTBOOKS: F.Calogero and A.Degasperis, "Spectral transform and solitons: Tools to solve and investigate nonlinear evolution equations", vol. 1, N.-Holland, Amsterdam, 1982

GRADING RULES: The final grade is computed as 0,5(cumulative grade) + 0,5(final exam grade) (Unless stated otherwise, all grades are rounded to the nearest integer (half-integers are rounded upwards). The cumulative grade is proportional to the number of problems solved so that 10 corresponds to 75% of all problems + bonuses for active participants.

Discrete Optimization and Integer Programming
simple inter-campus offline course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: A. N. Lavrov, D. I. Arkhipov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Each of us constantly makes schedules. We optimize our time: make plans for the weekend, choose the best route to get from one metro station to another. Is it difficult to create a schedule for a faculty or a sports league, given the many requirements and wishes? And what about optimization of the data center with thousands of servers, a seaport or a railway network of a large country? In this course we will formulate what challenges mathematicians face in the modern world, when the size of data that influences decision-making is growing faster than computing capabilities. After completing the course you will learn how to build mathematical models of optimization problems of varying complexity and solve them using solvers based on integer and linear programming methods. The course is not limited to the practice of problem solving, you will get acquainted with the basic concepts and classical algorithms of optimization methods, as well as the main aspects of the theory underlying the software that helps to make decisions in the modern world.

PREREQUISITES: There are no strict restrictions on previously completed courses.

SYLLABUS:

- Problems of unconditional and conditional optimization. Method of Lagrange multipliers.
- Numerical optimization methods. Gradient descent. Newton's method.
- Basics of complexity theory. Relation of classes P and NP.
- Linear programming. Simplex method.
- Theory of duality. Optimality Conditions and Duality in Problems of Linear Programming.
- Integer points of polyhedra. Integer linear programming. Unimodular matrices. The branch and bound method. Cutting-plane method.
- Statement and solution of problems using MILP-solvers.
- Efficiency of MILP-solvers for some graph theory problems. Shortest path problem. Minimum spanning tree.
- Constraint programming.

TEXTBOOKS:

- **[KV]** B. Korte, J. Vygen, «Combinatorial Optimization. Theory and Algorithms».
- **[SCO]** A. Schriver «Combinatorial Optimization».
- **[SLP]** A. Schriver «Theory of Linear and Integer Programming».
- **[W]** L. Wolsey «Integer Programming».
- **[JL]** M. Junger, T.M. Liebling et al. «50 Years of Integer Programming 1958-2008: From the Early Years to the State-of-the-Art».

GRADING RULES: $0.5H + 0.5E$, where H and E are marks on a 10-point scale for homework and an exam respectively.

COMMENTS: Курс от Huawei R&D

Homological methods in commutative algebra
advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher

TEACHER: A. B. Pavlov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The course is devoted to methods and results of commutative algebra that are beyond the basic commutative algebra course. The first part of the course covers more classical results. We start with regular sequences, depths, and Koszul complexes. We prove the main results about Cohen – Macaulaev, Gorenstein and complete intersection rings and look at examples of such rings in singularity theory and invariant theory. The second part of the course is devoted to local cohomology, local Grothendieck duality and geometric applications. The results of the first and second parts have a large number of applications in algebraic geometry. The last part of the course will be an introduction to Gorenstein's homological algebra. It turns out that some of the classical results (such as the Serre criterion for regularity, the Auslander-Buchsbaum formula) have an analogue for Gorenstein rings. We will discuss the concepts of G-class, Gorenstein projective/injective/flat modules, G-dimension (analogous to the projective module dimension for the Gorenstein case). Auslander – Bridger formula and Auslander – Buchweitz approximation.

PREREQUISITES: category theory and homological algebra (complexes, resolutions, derived functors, Ext, Tor, spectral sequences), commutative algebra (localizations, integral extensions, dimensions of local noetherian rings).

SYLLABUS: Regular sequences, depth, Koszul complex. Auslander-Buchsbaum formula.

Cohen – Macaulay rings. Gorenstein rings. Complete Intersection rings.

Local cohomology. Local duality. Connections with sheaf cohomology. The Hartshorne-Lichtenbaum vanishing theorem. Connectedness.

Gorenstein homological algebra. G-class. Gorenstein projective/injective/flat modules. G-dimension. Auslander-Bridger formula. Auslander-Buchweitz approximation.

TEXTBOOKS: H. Matsumura Commutative Ring Theory W. Bruns, H. Herzog Cohen-Macaulay Rings S. Iyengar et al. Twenty-four hours of local cohomology G. Leuschke, R, Wiegand Cohen-Macaulay representations Y. Yoshino Maximal Cohen-Macalay modules over Cohen-Macalay rings Iacob Gorenstein Homological Algebra L. W. Christensen, Gorenstein Dimensions

GRADING RULES: 4 assignments, 25% each

Integrable quantum field theory

advanced inter-campus offline seminar for 4th year students and higher

(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: Mikhail Alfimov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: This course is organized in the form of weekly seminars, where we are going to discuss the integrability structures appearing in quantum field theory. These structures nowadays are present in numerous examples, such as sigma models, supersymmetric gauge theories, string theories, gauge/string dualities, scattering amplitudes and correlation functions etc. As pedagogical examples of the integrable systems solved by the Bethe Ansatz method Bose gas and Principal Chiral Field models will be considered in the first part of the course together with the foundations of the AdS/CFT correspondence for the case of 4-dimensional superconformal gauge theory. In the second part of the course there will be given an introduction into the applications of the theory of integrable systems to the study of the spectrum of N = 4 supersymmetric Yang-Mills theory and dual superstring theory on the $AdS_5 \times S^5$ background and we will study integrable deformations of sigma models. The course is intended for PhD and Master students. Postdocs and Bachelor students are also welcome.

PREREQUISITES: Basic knowledge of quantum field theory. Some acquaintance with conformal field theory and string theory would be helpful, but not necessary.

SYLLABUS:

- Derivation of the S-matrix for the superstring sigma model on $AdS_5 \times S^5$ from Zamolodchikov-Faddeev algebra.
- Bethe equations for the XXX Heisenberg spin chain (1-loop spectrum of anomalous dimensions of the local operators in the SU(2) sector of N = 4 SYM). Asymptotic Bethe equations for the spectrum of N-4 SYM. Thermodynamic Bethe ansatz (TBA) equations for the spectrum of N = 4 SYM.
- The corresponding Hirota equations and wronskian solution of these equations.
- Derivation of AdS/CFT Quantum Spectral Curve for $AdS_5 \times S^5$ superstring theory and N = 4 SYM.
- Non-perturbative characteristics of the operator trajectories in the N = 4 SYM.
- Integrable deformations of the O(N) sigma models. q-deformed S-matrix. Eta-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring theory and its S-matrix.
- Bethe equations for the spectrum of the Bose gas model and their thermodynamic limit. Thermodynamic Bethe Ansatz (TBA) equations for the Bose gas model.
- Asymptotic Bethe Ansatz for the spectrum of the PCF model and their thermodynamic limit. Thermodynamic Bethe Ansatz equations for the PCF.
- Wronskian solution of the Hirota equations.
- String background $AdS_5 \times S^5$ as a solution of supergravity equations.
- Classical integrability of the PCF model and $AdS_5 \times S^5$ superstring sigma model.

TEXTBOOKS:

- Ahn, C., Nepomechie, R. I. (2010). Review of AdS/CFT Integrability, Chapter III.2: Exact world-sheet S-matrix. https://doi.org/10.1007/s11005-011-0478-
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2011). Solving the AdS/CFT Y-system. https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)02
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2013). Quantum spectral curve for AdS_5/CFT_4. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.01160
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2014). Quantum spectral curve for arbitrary state/operator in $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$. https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)18
- Minahan, J. A., Zarembo, K. (2002). The Bethe-Ansatz for N = 4 Super Yang-Mills. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2003/03/01
- V. A. Fateev, A. V. Litvinov. (2018). Integrability, duality and sigma models. Journal of High Energy Physics, 2018(11), 1–29. https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)20
- A. V. Litvinov, L. A. Spodyneiko. (2018). On dual description of the deformed O(N) sigma model. Journal of High Energy Physics, 2018(11), 1–29. https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)13
- **[R]** Rej, A. (2009). Integrability and the AdS/CFT correspondence. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/25/25400
- Gromov, N. (2017). Introduction to the Spectrum of $\mathcal{N} = 4$ SYM and the Quantum Spectral Curve.
- Gromov, N., Kazakov, V., Vieira, P. (2008). Finite Volume Spectrum of 2D Field Theories from Hirota Dynamics. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/12/06
- Gromov, N., Kazakov, V., Sakai, K., Vieira, P. (2006). Strings as Multi-Particle States of Quantum Sigma-Models. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.11.01
- Korepin, V. E., Izergin, A. G., Bogoliubov, N. M. (1993). Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.
- Tseytlin, A. A. (2010). Review of AdS/CFT Integrability, Chapter II.1: Classical $AdS5 \times S5$ string solutions.
- Kazakov, V. (2018). Quantum Spectral Curve of γ-twisted $N = 4$ SYM theory and fishnet CFT. https://doi.org/10.1142/S0129055X1840010

GRADING RULES: Giving talk at the seminar 0.7 + Taking part in the discussion at the seminar 0.3

Introduction to algebriac numbers and class field theory
advanced inter-campus offline course for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: V. S. Zhgoon.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Algebraic number theory is a classical field of mathematics, formed during the study of solutions of Diophantine equations, as well as through attempts to prove Fermat's theorem. Now it is a vast classical field which form the basis of Arithmetic Geometry. In this course we will recall the basics of Galois theory, consider the so-called ramification theory, prove the main theorems about the structure of ideals (decompositions into prime ideals), prove Dirichlet's theorem about the structure of S-units, the finiteness theorem of a class group. We will highlight a very important analogy between the theory of algebraic numbers and the theory of algebraic curves over finite fields.

PREREQUISITES: basic algebra course

SYLLABUS:

1. Galois theory and finite fields. Basic facts from Galois theory. The structure of finite fields. Equations over finite fields. The quadratic law of reciprocity.

2. p-adic numbers. Hensel's lemma. Ostrovsky's theorem.

3. Quadratic forms. Representation of numbers by quadratic forms over $\mathbb{Q}_p$ and over $\mathbb{Q}$. The Minkowski–Hasse theorem.

4. Fields of algebraic numbers. Dedekind rings. Decomposition into prime ideals. Modules over Dedekind rings.

5. Norm and trace. Branching, discriminant, differential.

6. Adeles and ideles.

7. A group of classes of ideals. The finiteness theorem. Minkowski constant.

8. Dirichlet's theorem on S-units.

9. Cyclotomic fields.

TEXTBOOKS:

1. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. Theory of numbers. — M.: Nauka, 1985.

2. Weil A. fundamentals of the theory of numbers. — M.: editorial URSS, 2004.

3. Lang, S. Algebra. — M.: Mir, 1968.

4. Lang, S. Algebraic numbers. — M.: Mir, 1972.

5. Manin, Y. I., Panchishkin A. A. Introduction to modern number theory. — M.: mtsnmo, 2009.

6. Serre, J.-P. a Course in arithmetic. — M.: Mir, 1972.

7. D. Cassels, A. Frohlich(ed.), Algebraic number theory. — 1969.

8. J. P. Serre, Local fields. — Springer, 2013. — V. 67.

GRADING RULES: 0,7 (final exam) + 0,3 (problem sheets)

Introduction to category theory and homological algebra
simple inter-campus offline course for 2nd year students and higher

TEACHER: A. B. Pavlov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: This is an introductory course in category theory and homological algebra. In the first part we cover basics of the category theory with main focus on universal construction (limits and colimits). The category theory is a universal mathematical language that has applications in many areas on mathematics, it allows us to illustrate all definition and theorems with examples from algebra, topology and geometry. After this focus on the categories that resemble categories of modules (abelian categories) and develop resolutions of objects in such categories. Using resolutions we define derived functors. The second half of the course is about general properties and examples of derived functors.

PREREQUISITES: First year algebra and topology.

SYLLABUS:

Categories and Functors.

Adjoint Functors.

Limits and Colimits.

Additive and Abelian Categories.

Complexes and Categories of Complexes.

Derived Functors Tor and Ext over a Ring.

Homological Dimensions.

Spectral Sequences.

Group (co)homology (and, if time permits, (co)homology of Lie Algebras).

TEXTBOOKS: S. Mac Lane: Categories for Working Mathematicians, 2nd ed., 1997. C. Weibel: An Introduction to Homological Algebra, 1994.

GRADING RULES: $0.1S + 0.2Q + 0.3M + 0.4F$, where S is grade for participation in tutorials, Q is quiz grade for 4 one-hour long quizzes, M is the midterm grade, F is final exam grade.

Introduction to commutative algebra
advanced inter-campus offline course for 1^{st} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: V. S. Zhgoon.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: At its most basic level, algebraic geometry is the study of the geometry of solution sets of polynomial systems of equations. Classically, the coefficients of the polynomial equations are assumed to lie in an algebraically closed field. Considering more general coefficient rings, in particular rings of integers in number fields, one arrives at modern algebraic geometry and algebraic number theory. Commutative algebra provides the tools for answering basic questions about solutions sets of polynomial systems, such as finite generation of the system, existence of solutions in some extension of the coefficient ring, dimension and irreducible components, and smoothness and singularities.

PREREQUISITES: basic course of algebra

SYLLABUS:

- Rings, algebras, ideals and modules
- Noetherian rings
- Unique factorization domains
- Rings and modules of fractions. Localisation.
- Integral dependence and Noether's normalization theorem
- The going-up and going-down theorems
- Tensor product. Flat, projective and injective modules
- Hilbert Nullstellensatz
- The spectrum of the ring
- Krull dimension and transcendence degree. Krull principal ideal theorem.
- Primary decomposition
- Discrete valuation rings and Dedekind domains
- Dimension theory for noetherian rings
- Hilbert series. Multiplicity.
- Koszul complex.
- Free resolutions and regular rings.

TEXTBOOKS:

- M. Reid, «Undergraduate commutative algebra.» Vol. 29. Cambridge University Press, 1995.
- M. Atiyah, «Introduction to commutative algebra.» Vol. 361. Westview press, 1994. 121
- G. Kemper. «A course in commutative algebra.» Vol. 256. Springer Science & Business Media, 2010.
- D. Eisenbud. «Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry.» Springer, 1999.

GRADING RULES: 0,70(final exam) + 0,30(problem sheets)

Introduction to Ergodic Theory
simple inter-campus offline course for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: M. L. Blank.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION:

DESCRIPTION: Is it possible to distinguish deterministic chaotic dynamics from a purely random and whether this question makes sense? Does irreversibility influence qualitative characteristics of the process? Ergodic theory studies these and other statistical properties of dynamical systems. Interest in this subject stems from the fact that «typical» deterministic dynamical systems (eg, differential equations) exhibit chaotic behavior: their trajectories look similar to the implementation of random processes. We begin with the classical results by Poincare, Birkhoff, Khinchin, Kolmogorov, and get to modern productions (including yet unresolved) problems. This is an introductory course designed for 2 – 4 year's bachelors and graduate students. Prior knowledge except for the course in mathematical analysis is not required (although it is desirable).

PREREQUISITES: calculus.

SYLLABUS:

- Dynamical systems: trajectories, invariant sets, simple and strange attractors and their classification, randomness.
- The action in the space of measures, transfer operator, invariant measures. Comparison with Markov chains.
- Ergodicity, Birkhoff ergodic theorem, mixing, CLT. Sinai – Bowen – Ruelle measures and natural / observable measures.
- Basic ergodic structures: direct and skew products, Poincare and integral maps, a natural extension and the problem of irreversibility.
- Ergodic approach to number theoretical problems.
- Entropy: metric and topological approaches.
- Operator formalism. Spectral theory of dynamical systems. Banach space of measures, random perturbations.
- Multicomponent systems: synchronization and phase transitions.
- Mathematical foundations of numerical simulations.

TEXTBOOKS: A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.

GRADING RULES: 0.4 (Cumulative assessment) + 0.6 (Exam). The cumulative assessment is determined by control, delivery of sheets and work at lectures and seminars. Round up.

Introduction to Riemann surfaces

simple inter-campus offline course for 2^{nd} year students and higher

(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. Yu. Buryak.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: A Riemann surface is a two-dimensional manifold (surface) with a given complex structure. Remarkably, the theory of Riemann surfaces is full of beautiful results and at the same time the proofs do not require a lot of prior knowledge, particularly comparing with the theory of complex manifolds of higher dimension. Sheaf cohomology will be the main technical tool for us, and we will carefully derive all the necessary results from it. The main goal of the course is to derive the Riemann – Roch theorem, the Serre duality, and the Abel theorem.

PREREQUISITES: The theory of functions of one complex variable, basics of topology (in the amount of the 1st course), basics of the theory of smooth manifolds (including differential forms and Stokes' theorem)

SYLLABUS:

1. The notion of a Riemann surface, the canonical decomposition of the tangent bundle and of the space of differential forms.
2. The notion of a sheaf.
3. Cohomology of sheaves.
4. Finiteness theorem, the genus of a Riemann surface.
5. Divisors on a Riemann surface.
6. The Riemann – Roch theorem.
7. The Serre duality.

8*. The Abel theorem.

TEXTBOOKS: O. Forster. Lectures on Riemann surfaces.

GRADING RULES: Work in exercise classes 3, first test 3, second test 3, exam 5. In the result is greater than 10, then it is decreased to 10.

INTRODUCTION TO THE THEORY OF RANDOM PROCESSES

simple inter-campus offline course for 3rd year students and higher

(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: M. L. Blank.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The course is a continuation of the standard course in probability theory (associated mainly with combinatorics) and is intended for an initial introduction to the theory of random processes. Special attention is paid to the connection of this theory with functional analysis and the general measure theory. The course is aimed at bachelors 2–4 courses, undergraduates and graduate students.

PREREQUISITES: calculus, probability theory

SYLLABUS:

- The concept of a random process.
- Elements of random analysis.
- Correlation theory of random processes.
- Markov processes with discrete and continuous time.
- Wiener and Poisson processes.
- Stochastic integral. Ito's formula.
- (sub/super) martingales.
- Infinitesimal semigroup operator.
- Stochastic stability of dynamical systems.
- Large deviations in Markov processes and chaotic dynamics.
- Nonlinear Markov processes.

TEXTBOOKS:

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.

GRADING RULES: 0.4 (cumulative assessment) + 0.6 (exam). The cumulative assessment is determined by control, delivery of sheets and work at lectures and seminars. Round up.

INTRODUCTION TO TOPOLOGICAL RECURSION
simple inter-campus online course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: B. S. Bychkov, P. I. Dunin–Barkowski.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Topological recursion (TR) is a remarkable universal recursive procedure that has been found in many enumerative geometry problems, from combinatorics of maps, to random matrices, Gromov-Witten invariants, Hurwitz numbers, knot polynomials and integrable systems. We start with TR in the theory of matrix models and through the bunch of examples come to the current understanding of TR in the theory of generalized Hurwitz numbers. We will discuss connections of TR with integrable hierarchies and embedded graphs. If time permits we consider examples and applications of TR in cohomology field theories.

PREREQUISITES: Complex analysis, Topology, Algebra (standard 1-2 year courses)

SYLLABUS:

- Chekhov–Eynard–Orantin definition of TR;
- TR in matrix models;
- TR in the enumerations of maps and hypermaps (embedded graphs);
- TR in the enumeration of Hurwitz numebrs;
- Hypergeometric KP tau function;
- Blobbed TR;
- * TR and cohomological gield theories, Givental–Teleman construction.

TEXTBOOKS: Huge amount of papers by L. Chekhov, B. Eynard, N. Orantin, P, Norbury, S. Shadrin, G. Borot, A. Alexandrov and many others

GRADING RULES: 4 homeworks (1 point each), exam (6 points)

COMMENTS: Курс не заказывался.

K3 SURFACES
advanced inter-campus offline course for 3^{rd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: L. A. Guseva.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: K3 surfaces have been extensively studied during the last decades of the previous century. The techniques used to understand their geometry include Hodge theory, lattice theory and homological algebra. One of the landmarks in the theory of K3 surfaces is the global Torelli theorem, asserting that two K3 surfaces are isomorphic if and only if they have isomorphic periods. There is also a derived version of the global Torelli theorem proved by Mukai and Orlov. In this course we will discuss the global Torelli theorem as well as its derived version.

PREREQUISITES: Chapters II, III of Algebraic Geometry by R. Hartshorne, or https://math.hse.ru/courses/647329835.html. It also benefits to know about triangulated categories (e.g. Gelfand, Manin, «Methods of Homological Algebra», Ch. III) and Hodge theory (e.g. C. Voisin, «Hodge theory and complex algebraic geometry 1», Parts I, II), but it is not strictly necessary; the minimal set of definitions and main theorems will be given during the course.

SYLLABUS:

- computation of classical numerical invariants of K3 surfaces, examples of K3 surfaces
- Torelli theorem for K3 surfaces
- Torelli theorem for derived categories of K3 surfaces

TEXTBOOKS:

- D. Huybrechts, «Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry».
- D. Huybrechts, «Lectures on K3 surfaces».

GRADING RULES: There will be the final take-home exam. The maximum exam grade is 15/10, so it suffices to solve 75% of all exam problems to get 10/10 in the class. Otherwise, the grade for the class will be calculated linearly according to the exam grade and it will be rounded to the nearest integer.

Markov Chains
simple inter-campus offline course for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. Dymov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The simplest random process is a sequence of independent events. The scope of such processes is limited, since in practice the events usually are not independent. Markov chains are the simplest random processes formed by sequences of dependent events: given an event, it is assumed that the next event depends only on the given one, but does not depend on the previous events. In other words, ""future depends only on the present, but does not depend on the past."" Markov chains have deep and beautiful but rather simple mathematics. Due to their amazing efficiency in applications to problems from various fields – mathematics, physics, computer science, biology, economics, etc. – they are known as probably the most important class of random processes. The present course is an introduction to the theory of Markov chains. We will discuss their most important properties and some of their applications. Mostly we will concern the simplest Markov chains, i.e. those with finite number of states.

PREREQUISITES: Basic courses of analysis and linear algebra of the first year of education. A probability theory course is desirable, but not mandatory: the necessary (rather modest) probabilistic background will be provided in the first two-three lectures. But of course, the course will be harder for those who have not taken the probability theory course.

SYLLABUS:

- Markov chains with at most countable state space.
- Stochastic matrices and their properties.
- Transition probability matrix. Formula for a distribution of the chain at the n-th step. Homogeneous Markov chains.
- Markov chain in n steps and its transition probabilities. Kolmogorov-Chapman equation.
- Examples of Markov chains: random walks, Galton-Watson model, PageRank.
- Extinction probability in the Galton-Watson model.
- Stationary distributions of Markov chains. Their existence for the case of finite state space.
- Mixing transition probability matrices. Ergodic theorem for Markov chains with finite number of states.
- Law of large numbers: classical and for Markov chains.
- Perron-Frobenius theorem.
- Metropolis-Hastings algorithm. Text decryption.
- Topology of Markov chains with finite number of states.

TEXTBOOKS:

- A.N. Shiryaev, «Probability».
- L.B. Koralov, Ya.G. Sinai, «Theory of probability and random processes».

GRADING RULES: (C + E)□2, where C denotes the current grade and E denotes the exam grade.

COMMENTS: Этот курс пора постепенно начинать передавать кому-нибудь еще. Я хочу спросить Мауро Мариани не заинтересован ли он прочитать этот курс через год. Если заинтересован – в ближайший год я бы хотел сделать его в своим помощником, чтобы дальше передать курс было проще.

Modern dynamical systems
advanced inter-campus online course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: A. S. Skripchenko, S. K. Lando.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Dynamical systems in our course will be presented mainly not as an independent branch of mathematics, but as a very powerful tool that can be applied in geometry, topology, probability, number theory and physics. We start with some explicit and introductory plots and complete with recent advances by many outstanding mathematicians, including A. Avila, M. Mirzakhani, G. Margulis and others.

PREREQUISITES: measure theory; topology, analytic geometry

SYLLABUS: 1. Introduction: basic definitions, minimality, ergodicity, invariant measures, elementary examples. 2. Dynamics and geometry: introduction to hyperbolic geometry, dynamical and ergodic properties of geodesic flow on surfaces 3. Dynamics and topology: interval exchange transformations, measured foliations on surfaces and billiards in rational polygons; 4. Dynamics and number theory: introduction to homogeneous dynamics, Margulis work on Oppenheimer conjecture.

TEXTBOOKS: 1. S. Katok, Fuchsian groups, University of Chicago Press, Chicago and London (Russian translation Faktorial Press 2002), Ya. Sinai, Introduction to Ergodic theory, Princeton University Press 1977

GRADING RULES: Oral presentation (7 scores) Written homeworks (4 assignments, 3 score each) Score = min (10, Oral presentation + written homeworks)

COMMENTS: Курс Сколтеха

Noncommutative algebra
simple offline course for 2nd year students and higher

TEACHER: M. Z. Rovinsky.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Associative rings and modules over them appear naturally in all domains of Mathematics. The goal of this course is to present some basic results on rings and modules, as well as to discuss several interesting examples and applications.

PREREQUISITES: A standard first-year graduate course in abstract algebra including basic group theory and linear algebra.

SYLLABUS:

- Basic notions and examples of rings and modules
- Simple modules and Schur's lemma
- Semisimple modules and Jacobson's density theorem
- Artinian and noetherian conditions
- Jordan–H"older theorem
- Krull–Remak–Schmidt theorem
- Applications to the Galois (and non-Galois) theory
- Wedderburn–Artin theorem
- Applications to the representation theory of finite groups
- Categoies of modules and their equivalences
- Simple and semisimple rings and Brauer groups

TEXTBOOKS:

- K.R. Goodearl, R.B.Warfield, Jr., An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings, 2nd edition, London Mathematical Society Student Texts, vol. 61, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- I.N. Herstein, Noncommutative Rings, 1968, 2014.
- I.Bucur, A.Deleanu, Introduction to the theory of categories and functors, Wiley & Sons.

GRADING RULES: min[10,20/3((ratio of solved problem of the problem sets) + (ratio of solved problem of the final exam))]. A half-integer grade is rounded to the bigger nearest integer, another fractional grade is rounded to the nearest integer.

P-ADIC NUMBERS
simple inter-campus offline course for 2^{nd} year students and higher

TEACHER: M. V. Finkelberg.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: p-adic numbers were discovered by Hensel at the turn of 20-th century as an alternative to the classical real analysis in order to solve number theoretic problems. The development of p-adic analysis allowed Dwork to prove the first Weil conjecture on the number of solutions of algebraic equations over finite fields in 1960's. The goal of the course is to understand this proof and to learn the basics of p-adic analysis.

PREREQUISITES: the standard courses in algebra, calculus, and combinatorics for the 1st year students, and the Galois theory.

SYLLABUS:

- Metrics on the field of rational numbers.
- p-adic numbers.
- Hilbert symbol.
- Quadratic forms over p-adic fields.
- Minkowski – Hasse theorem.
- Algebraic closure of p-adic field.
- Tate field.
- Artin – Hasse exponent.
- Newton polygons.
- ζ-functions.
- Rationality of ζ-function.

TEXTBOOKS:

[K] N. Koblitz, «p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions».

[C] J. P. Serre, «Cours d'arithmetique».

GRADING RULES: 1/10 of the total percentage of completely solved exercises (assigned weekly)

Representations and probability
advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: A. Dymov, A. V. Klimenko.

LEARNING LOAD: two terms of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: The seminar is mostly aimed to 3-4th year bachelor students, as well as master and PhD students. Senior participants are expected to deliver a talk on the seminar. The seminar topics are the mix of modern results in areas related to probability theory, random processes, dynamical systems, representations, and older areas, which are prerequisites to the former, as well as keep their own value

PREREQUISITES: Standard courses of calculus (including measure theory) and probability. Basic courses on functional analysis and random processes will be helpful but by no means required for the fall semester, while algebra (representations theory) will be useful for the spring semester. Semesters of the seminar can be taken independently. We plan to hold seminar meetings at the Steklov Mathematical Institute in the fall semester and at HSE Math Dept. in the spring semester.

SYLLABUS: Below we present a list of tentative topics for the seminar. We emphasize that not all of them will be discussed, and vice versa, some other topics certainly will be included. We plan that most of the talks will be delivered by students and will be devoted to various topics related but not limited to representations and probability. In the fall semester, the seminar will be mainly conducted by A. Dymov, A. Klimenko and M. Mariani, while the spring semester will be mostly taken by G. Olshanski.

Tentative topics for fall semester:

- Random dynamical systems and their large time behaviour
- Wiener chaos and normal approximation
- Determinantal random point processes
- Potential theory for Markov chains on generic spaces: representation formulas and applications
- Exponentially growing groups: free, hyperbolic, Markov, Fuchsian, etc. Ergodic theory of their actions

Tentative topics for spring semester:

- Classical representation theory
- Representations of infinite-dimensional groups and operator algebras
- Connections with algebraic combinatorics (symmetric functions), quantum groups, classical analysis, and probability theory

TEXTBOOKS:

- I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, «Introduction to the theory of random processes».
- S. Janson, «Gaussian Hilbert spaces».
- I. Nourdin, G. Peccati, «Normal approximations with Malliavin calculus».
- A. Bovier, F. DenHollander, «Metastability, A Potential-Theoretic Approach».

- I. Seo, «Generalized Dirichlet and Thomson Principles and Their Applications». https://arxiv.org/abs/2102.0553
- P. Etingof et al. «Introduction to representation theory».
- A. Borodin and G. Olshanski, «Representations of the infinite symmetric group».
- P.-L. Meliot, «Representation theory of symmetric groups».
- H. Weyl, «The classical groups: their invariants and representations».

GRADING RULES: Participants can either make a talk during the semester (this is usually graded with a mark 6-8) or/and solve the problems of the final exam. The problems list is given to the students approximately a week before the exam, and on the exam a student discusses the solutions that he/she obtained. Formula for calculating the final grade for the exam is provided along with the problems list.

COMMENTS: Руководители семинара: А. Дымов, А. Клименко, М. Мариани, Г. Ольшанский. Не из ВШЭ: А. Буфетов.

Representations of finite groups

advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher

(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: G. I. Olshanski.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Representation theory is used in many areas of mathematics (algebra, topology, algebraic groups, Lie groups and Lie algebras, quantum groups, algebraic number theory, combinatorics, probability theory, ...), as well as in mathematical physics. Therefore, mastering the basic technique of representation theory is necessary for mathematicians of various specialties. The aim of the course is to give an introduction to representation theory on the material of finite groups. Particular attention will be paid to representations of the symmetric groups.

PREREQUISITES: Algebra and linear algebra (compulsory courses of the first two years)

SYLLABUS:

- Reminder of the basics from the algebra course: group algebra of a finite group, irreducible representations, Schur's lemma, characters, orthogonality relations, Maschke's theorem, Burnside's theorem
- Representations of finite Abelian groups, duality for finite Abelian groups, Fourier transform, biregular representation
- Intertwining operators, induced representations, Frobenius duality
- Mackey machine, projective representations, coverings over symmetric groups
- Functional equation for characters, Gelfand pairs, spherical functions, connection with orthogonal polynomials
- Representations of the symmetric groups: various approaches to the classification and construction of irreducible representations
- If time permits: principal series representations for the group GL(N) over a finite field, Hecke algebra, Harish-Chandra theory
- It is planned to continue the course in the second semester within the framework of the seminar «Representations and Probability»

TEXTBOOKS:

- B.E.Sagan. The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.
- T.Ceccherini-Silberstein, F.Scarabotti, F.Tolli. Harmonic fnalysis on finite groups. Representation theory, Gelfand pairs and Markov chains. Cambridge Univ. Press. 2008.
- T.Ceccherini-Silberstein, F.Scarabotti, F.Tolli. Representation theory of the symmetric groups. The Okounkov–Vershik approach, character formulas, and partition algebras Cambridge Univ. Press. 2010
- P.-L. Meliot. Representation theory of symmetric groups. 2017.

GRADING RULES: Будет указано позже на сайте Сколтеха

COMMENTS: This is a SkolTech course.

Statistical Mechanics
simple inter-campus offline course for 4^{th} year students and higher

TEACHERS: M. Mariani, C. Bernardin.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: In the XX century, statistical mechanics has been formalized mathematically into a theory that has become a main source of mathematical tools for the theory of dynamical systems, statistics, and also applied sciences. The course provides an introduction to the mathematical theory of Statistical Mechanics through its most influential models.

PREREQUISITES: Measure theory (from the class of Mathematical Analysis), Probability theory.

SYLLABUS:

- Motivations and outreach. Why statistical mechanics? [R]
- Weiss model and Ising models. [FV]
- Statistical mechanics of lattice systems, and Gibbs measures. [FV]
- Infinite volume and phase transitions.
- Spin systems and Mermin-Wagner theorems. [FV]
- Disordered models. [B]
- The Gaussian free field. [FV]

TEXTBOOKS:

- S.Freidli, Y.Velenik, Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction (2017).
- A.Bovier, Statistical Mechanics of Disordered Systems (2006).
- D.Ruelle, Chance and Chaos (1993).

GRADING RULES: 0.1 assignments + 0.35 intermediate colloquium + 0.55 final exam

COMMENTS: Мариани — 1-й модуль, Бернардан — 2-й модуль

Stochastic analysis and its applications in economics
advanced inter-campus online seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov.

LEARNING LOAD: two terms of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: This seminar will cover a wide range of problems related to stochastics. The aim of this seminar is to present new developments in this field and to give students an opportunity to learn some modern concepts of stochastic analysis. Special attention will be paid to applications of stochastic models in economics and finance. The talks will be given by the members of the laboratory of stochastic analysis and its applications (lsa.hse.ru), the guests of the laboratory, the stuff of the faculty of mathematics, as well as by students and postdocs.

PREREQUISITES: Some knowledge in the mathematical analysis, probability theory, stochastic processes is expected.

SYLLABUS:

- Transportation theory, Monge – Kantorovich problem;
- discretization and approximation schemes for stochastic differential equations;
- Levy-based models motivated by economical problems;
- information theory and Turing's formula;
- semimartingales and applications to the financial mathematics;
- modelling extremal events for insurance and finance;
- non- and semi-parametric statistical models;
- stochastic modelling in physics (random energy model), biology (cell-growth model) and other natural sciences.

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: Students should make a presentation on the seminar, and will get a mark for it.

”

Structure theory of Lie algebras
advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: F. V. Uvarov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: This course is a continuation of the course ””Lie groups and Lie algebras”” given in Fall. One of the goals of the course is to generalize results of the representation theory of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ to an arbitrary simple Lie algebra. For this we will study the structure theory of Lie algebras, in particular, we will discuss one of the most beautiful topics in mathematics - the classification of semisimple Lie algebras.

PREREQUISITES: Lie groups and Lie algebras

SYLLABUS:

- Abelian, nilpotent and solvable Lie algebras.
- Invariant bilinear forms, Killing form. Semi-simple Lie algebras, complete reducibility.
- Cartan subalgebras and Cartan decomposition. Root systems and reflections. Polarization, simple roots, root and weight lattices. Weyl chambers, Weyl groups and simple reflections.
- Reduced expressions, Cartan matrices, Dynkin diagrams, classification theorem
- Highest weight modules. Verma modules. Characters of representations. Flag manfolds. Bernstein – Gelfand – Gelfand resolution. Characters of irreducible representations.

TEXTBOOKS:

- A.Kirillov, Jr., An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras.
- J.-P. Serre, Lie Algebras and Lie Groups.

GRADING RULES: $\min(10, 0.6S + 0.6E)$, where S is the grade for seminars out of 10, and E is the grade for the final exam out of 10.

”

Symmetric functions and Young diagrams
simple inter-campus offline course for 2nd year students and higher

TEACHER: M. V. Finkelberg.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The main goal will be to study Schur functions, Hall-Littlewood functions and Macdonald polynomials, their combinatorial and representation-theoretic meaning.

PREREQUISITES: Basic algebra and analysis

SYLLABUS:

- Partitions
- Symmetric functions ring
- Schur functions
- Orthogonality
- Polynomial functors
- Hall algebra
- Hall polynomials
- Hall-Littlewood functions
- Green functions
- Macdonald polynomials

TEXTBOOKS:

- **[M]** I. G. Macdonald, «Symmetric functions and Hall polynomials».
- **[F]** W. Fulton, «Young tableaux with applications to representation theory and geometry».

GRADING RULES: 1/10 of the total percentage of completely solved exercises (assigned weekly)

TELECOM MATHEMATICS
simple inter-campus offline course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: D. S. Minenkov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Almost every modern device has a baseband radio processor. Its performance is the object of numerous IEEE papers and master's programs. Until recently, progress in telecom was achieved mainly due to physics and technologies, but now mathematics and algorithms become the main source of improvements. We aim to show how fundamental mathematics (incl. non-constructive theorems of existence) can be beneficial for practical needs. IT and R&D research specifics will be demonstrated while studying telecom problems that arise in real life.

PREREQUISITES: Linear algebra and analysis. Basics of probability theory (expectation, distribution). Programming is a bonus.

SYLLABUS:

1. Continuous optimization (convex optimization, duality, modern approaches).
2. Queueing theory (multi-criterial approach: optimality and fairness, packet traffic, Markov chains).
3. Linear algebra and Hermit geometry (reminder).
4. Signal processing methods (beamforming and equalization).
5. Radio resource management (time-frequency-space).

TEXTBOOKS:

1. J. Nocedal and S. Wright, Numerical Optimization, 1999, Springer, New York.
2. Mor Harchol – Balter, Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action, 2013, Cambridge University Press.
3. Emil Björnson, Jakob Hoydis, and Luca Sanguinetti. Massive MIMO networks: Spectral, energy, and hardware efficiency, 2017, Foundations and Trends in Signal Processing, 11(3-4) 154–655.
4. M. J. Neely, Stochastic Network Optimization, 2010, University of Southern California.

GRADING RULES: The final mark is composed of the following factors: working during the semester, which includes problem sheets and/or completing individual research project for those interested (60%); midterm test (10%); final exam (30%).

COMMENTS: Курс от Huawei R&D

Topological data analysis
advanced inter-campus offline seminar for 2^{nd} year students and higher

TEACHER: V. G. Gorbounov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Topological Data Analysis (TDA) is a field that lies at the intersection of data analysis, algebraic topology, computational geometry, computer science, statistics, and other related areas. The main goal of TDA is to use ideas and results from geometry and topology to develop tools for studying qualitative features of data. To achieve this goal, one needs precise definitions of qualitative features, tools to compute them in practice, and some guaranteeabout the robustness of those features. One way to address all three points is a method in TDA called persistent homology (PH). This method is appealing for applications because it is based on algebraic topology, which gives a well-understood theoretical framework to study qualitative features of data with complex structure, is computable via linear algebra, and is robust with respect to small perturbations in input data.

PREREQUISITES: Courses in algebra, topology and topology of smooth manifolds

SYLLABUS:

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: There are will be 3 tests and a final exam. They contribute to the course Mark 50% and 50% respectively.

Topological Vector Spaces
advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. Yu. Pirkovskii.

LEARNING LOAD: Fall term of 2023/24 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The traditional functional analysis deals mostly with Banach spaces and, in particular, Hilbert spaces. However, many classical vector spaces have canonical topologies that cannot be determined by a single norm. For example, many spaces of smooth functions, holomorphic functions, and distributions belong to the above class. Such spaces are the subject of the theory of topological vector spaces. Although the golden age of topological vector spaces was in the 1950ies, their theory is still evolving nowadays, contrary to a stereotyped view coming from incompetent sources. The current development of topological vector spaces is directed not so much towards general theory as towards applications in PDEs and in complex analytic geometry.

We plan to discuss the basics of the theory of topological vector spaces (with an emphasis on tensor products and nuclear spaces), including some applications to distributions (the Schwartz Kernel Theorem) and/or complex analytic geometry (the Cartan-Serre Finiteness Theorem).

PREREQUISITES: Basic functional analysis (Banach and Hilbert spaces, bounded linear operators).

SYLLABUS:

1. **Basic notions and examples.** Topological vector spaces. Seminorms and locally convex spaces. Continuous linear maps. Normability and metrizability criteria. Completeness. Examples: spaces of continuous, smooth, holomorphic functions, the Schwartz space.
2. **Constructions.** Quotients, products, coproducts, inverse and direct limits, completions, topological tensor products.
3. **Linear maps.** Bornological and barrelled spaces. Equicontinuity. The Banach-Steinhaus theorem, the Open Mapping theorem, the Banach-Alaoglu-Bourbaki theorem.
4. **Duality.** Dual pairs and weak topologies. The Bipolar theorem. The Mackey-Arens theorem. The Mackey topology, the strong topology. Reflexivity. Relations between properties of linear maps and their duals.
5. **Tensor products and nuclear spaces.** Nuclear maps. Nuclear spaces and their properties. Examples of nuclear spaces. A characterization of nuclear spaces in terms of tensor products.
6. **Applications.** Spaces of distributions. The Schwartz Kernel Theorem. Coherent analytic sheaves. The Cartan-Serre finiteness theorem.

TEXTBOOKS:

1. V. I. Bogachev, O. G. Smolyanov. Topological vector spaces. Springer, 2017.
2. H. H. Schaefer. Topological vector spaces. Springer, 1971.
3. A. P. Robertson, W. Robertson. Topological vector spaces. Cambridge, 1964.
4. R. Meise, D. Vogt. Introduction to Functional Analysis. Clarendon Press, Oxford, 1997.
5. F. Treves. Topological Vector Spaces, Distributions, and Kernels. Academic Press, New York–London, 1967.

6. H. Jarchow. Locally convex spaces. Teubner, Stuttgart, 1981.

7. G. Köthe. Topological Vector Spaces. Vol I, Springer, 1969; Vol. II, Springer, 1979.

8. A. Grothendieck. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 1955, no. 16A.

9. R. Douady. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. In: "Quelques problèmes de modules" (Sém. Géom. Anal. École Norm. Sup., Paris, 1971–1972), pp. 7–32. Asterisque, No. 16, Soc. Math. France, Paris, 1974.

10. L. Schwartz. Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1978.

11. J. Eschmeier, M. Putinar. Spectral decompositions and analytic sheaves. Clarendon Press, Oxford, 1996.

GRADING RULES: Total grade = exam grade

The written take-home exam will be given at the end of the term and will consist of 7 problems. You will have appr. 10 days to solve the problems.

Toric Varieties
simple inter-campus offline course for 3$^{\text{rd}}$ year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: K. G. Kuyumzhiyan.

LEARNING LOAD: Spring term of 2023/24 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Given a convex polytope, there is a way to construct an algebraic variety starting from this polytope. The obtained varieties are called *toric*. For example, from a simplex of dimension n we obtain the projective space $\mathbb{P}^n$. The most important algebro-geometric properties of toric varieties can be expressed in terms of combinatorial properties of their polytopes, so many algebraic and geometric invariants of toric varieties can be easily computed. So toric varieties serve as test varieties for different algebro-geometric hypotheses, become examples and counterexamples etc.333

PREREQUISITES: In the first half of the course, we need Convex Geometry, Commutative Algebra, and basic properties of affine and projective algebraic varieties. In the second half, some more advanced notions from algebraic geometry are required, such as divisors and algebraic group actions. However, a deep knowledge of Algebraic Geometry is not assumed, and all necessary things will be precisely formulated and either proven or provided with explicit references to textbooks.

SYLLABUS:

- Convex geometry: cones, fans, supporting hyperplanes, Gordan's lemma.
- Basic facts from Algebraic Geometry: the definition of an affine algebraic variety, normal and smooth algebraic varieties.
- Affine toric varieties. Their construction from rational polyhedral cones. Smoothness criterion. Morphisms of affine toric varieties in terms of polyhedral cones.
- Toric varieties constructed from fans. Projective toric varieties constructed from polytopes. Toric morphisms.
- Bijection between torus orbits of a given toric variety and cones of the corresponding fan (Orbit-Cone Correspondence).
- Divisors on Toric Varieties. Divisor Class Groups.
- Support functions on fans of toric varieties. Correspondence between Cartier divisors and support functions.
- Ample and very ample divisors on toric varieties. Numerically effective divisors.
- The Nef and Mori cones.

TEXTBOOKS:

- D. Cox, J. Little, H. Schenck. Toric varieties. GTM 124, AMS, 2011.
- W. Fulton. Introduction to toric varieties. Ann of Mathematics Studies 131, Princeton University Press, 1993.
- T. Oda. Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties. Results in Mathematics and Related Areas (3) 15, Springer-Verlag 1988.

GRADING RULES: 0.6 problem sets, 0.4 final exam