Логика и алгоритмы, весна 2019.
Задачи для семинара N 4.

1. Докажите, что следующие теории не являются счетно категоричными:

   (a) $Th(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}})$;

   (b) $Th(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}, =_{\mathbb{Z}})$;

   (c) $Th(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}}, =_{\mathbb{Z}})$.

2. Теории называются *эквивалентными*, если их множества теорем совпадают. Сколько попарно не эквивалентных полных расширений имеет теория плотных линейных порядков в сигнатуре $\{<, =\}$?

3. Докажите, что теория DLO неограниченных плотных линейных порядков не категорична в мощности континуум.

4. (a) Пусть k — несчетный кардинал (т.е. вполне упорядоченное множество, у которого все собственные начальные отрезки имеют меньшую мощность), $^*k$ — противоположный порядок. Докажите, что лексикографические произведения $(\mathbb{Q}, <) \cdot k$ и $(\mathbb{Q}, <) \cdot (^*k)$ не изоморфны.

   (b) Докажите, что теория DLO неограниченных плотных линейных порядков не категорична ни в какой несчетной мощности (используйте теорему Zermelo).

5. Докажите, что не существует теории в сигнатуре колец, модели которой — в точности поля конечной характеристики.

6. (a) Докажите, что нестандартная модель арифметики разбивается на *галактики*: внутри галактик расстояние конечно, а между галактиками бесконечно (точное определение давалось в лекциях).

   (b) Докажите, что все галактики как упорядоченные множества изоморфны $\mathbb{Z}$.

   (c) Докажите, что упорядоченное множество удаленных галактик (т.е. отличных от первой) неограниченно вверх и вниз.

   (d) Докажите, что упорядоченное множество всех галактик плотно.

7. (теорема Эрбрана) Если $\vdash \exists x\, A(x)$, где A — бескванторная формула, то найдётся конечная последовательность термов $t_1, \dots, t_n$, такая что $\vdash A(t_1) \vee \dots \vee A(t_n)$. *Указание.* Рассуждайте от противного и воспользуйтесь теоремой о компактности.

8. Применив теорему о компактности докажите, что любой частичный порядок можно дополнить до линейного.

9. Применив теорему о компактности докажите, что если данным конечным набором типов плиток можно замостить сколько угодно большой квадрат, то можно замостить и всю плоскость. Плитки считать квадратными с разноцветными сторонами. Прикладывать плитки можно только если совпадают цвета.

10. Применив теорему о компактности докажите, что для бесконечных графов двудольность эквивалентна отсутствию нечетных простых циклов.