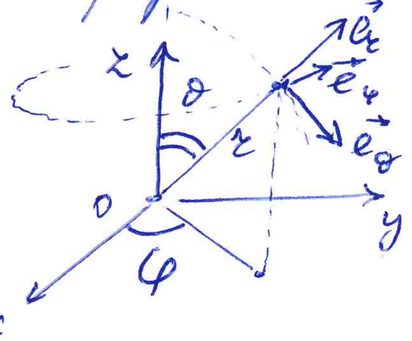
16.02.2021 | Механика - 2021

Семинар № 6

Рассмотрим примеры на применение условий потенциальности сил в криволинейных координатах.

Пример 1

Компоненты силы $\vec{F}$ в $\mathbb{R}^3$ заданы в сферических координатах



$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$F_r = r^{\alpha+1} \sin\theta \, e^{\cos\varphi}$$

$$F_\theta = \cos(\alpha\theta)\, e^{\cos\varphi}$$

$$F_\varphi = -\sin\varphi \, e^{\cos\varphi}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ — параметр

а) Найти, при каком значении параметра α сила $\vec{F}$ потенциальна, найти соответствующий потенциал $U(r, \theta, \varphi)$.

б) Найти работу потенциальной силы $\vec{F}$ при перемещении из точки $A(0,0,0)$ в точку $B(1,1,0)$.

Подберите α так, чтобы выпол- =2=
нялись необходимые условия потенци-
альности:

(i) $$\frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\vartheta\right)$$

(ii) $$\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\vartheta F_\varphi\right)$$

(iii) $$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(rF_\vartheta\right) = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(r\sin\vartheta F_\varphi\right)$$

Подставляя данные в условии выраже-
ние для компонент F_r, F_ϑ и F_φ,
получаем такие условия:

(i) $$\partial_\vartheta F_r = r^{\alpha+1}\cos\vartheta\, e^{\cos\varphi}$$

$$\partial_r\left(rF_\vartheta\right) = \cos(\alpha\vartheta)\, e^{\cos\varphi}))$$

Равенство этих частных производных
обеспечивается при $\underline{\alpha = -1}$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Не смотря на то, что параметр
α найден на первом же шагу,
необходимо проверить все три условия
потенциальности, чтобы убедиться в их
непротиворечивости (т.е., в том, что
$\alpha = -1$ подходит и для других условий).

(ii) $\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = r^{\alpha+1}\sin\theta(-\sin\varphi)e^{\cos\varphi}$

$\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta F_\varphi) = -\sin\theta\sin\varphi\, e^{\cos\varphi}$)) $\Rightarrow$ $\underline{\alpha = -1}$

(iii) $\partial_\varphi F_\theta = \cos(\alpha\theta)(-\sin\varphi)e^{\cos\varphi}$

$\partial_\theta(\sin\theta F_\varphi) = -\cos\theta\sin\varphi\, e^{\cos\varphi}$)) $\Rightarrow$ $\underline{\alpha = \pm 1}$

Здесь возникло 2 значения α (т.к. $\cos\theta$ - чётная функция), но значение $\alpha = 1$ не подходит для (i) и (ii).

Итак, при $\boxed{\alpha = -1}$ выполнены необх. условия потенциальности. В силу леммы Пуанкаре, сила будет потенциальна в любой области $\mathbb{R}^3$, не содержащей ~~...~~ точек оси Oz.

Найдём потенциал $U(r, \theta, \varphi)$ (при $\alpha = -1$)

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = F_r = \sin\theta e^{\cos\varphi}$$

$$U = -r\sin\theta e^{\cos\varphi} + \Phi(\theta, \varphi)$$

$\forall$ гладкая функция

$$-\frac{\partial U}{\partial \theta} = r F_\theta = r\cos\theta e^{\cos\varphi}$$

$$\parallel\ r\cos\theta e^{\cos\varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \Phi = \Phi(\varphi)$$

функция только координаты φ.

$$-\frac{\partial u}{\partial \varphi} = r\sin\theta\, F_\varphi = -r\sin\theta \sin\varphi\, e^{\cos\varphi}$$

$$= -r\sin\theta\sin\varphi\, e^{\cos\varphi} + \frac{\partial \Phi(\varphi)}{\partial \varphi} \Rightarrow \Phi(\varphi) = const$$

Ответ: $\boxed{U(r,\theta,\varphi) = -r\sin\theta\, e^{\cos\varphi} + C}$

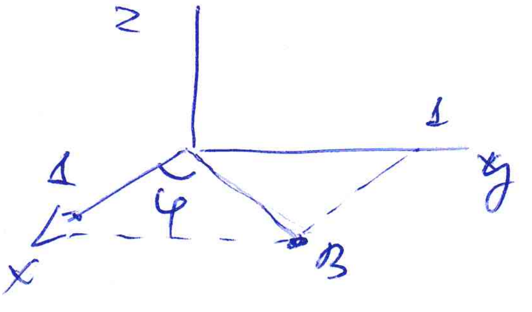
C — $\forall$ константа.

Обратите внимание, что полученная ф-ция 2π-периодична по φ, а $\Rightarrow$ работа силы $\vec{F}$ по $\forall$ замкнутому контуру вокруг оси Oz равна 0 и сила $\vec{F}$ потенциальна во всём R^3.

б). Работа силы из т. A в т. B:

$$A_{A\to B} = U(A) - U(B).$$

Здесь только нужно аккуратно перевести декартовы координаты точки B в сферические:



$$x_B = y_B = 1 \quad z_B = 0$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$U(A) = C$$

$$U(B) = -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}\exp\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + C =$$

$$= -\sqrt{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \boxed{A_{A\to B} = \sqrt{2}\, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}.$$

Пример 2. Этот пример показывает, что условия потенциальности достаточно ограничительные.

Пусть $\vec{F}$ задана в сферических координатах:

$$\begin{cases} F_r = r^{\alpha} \sin\vartheta \, X(\varphi) \\ F_\vartheta = f(r)\, Y(\vartheta) \sin^2\varphi \\ F_\varphi = Z(r, \varphi). \end{cases}$$

Здесь α – вещественный параметр, $X(\varphi)$, $Y(\vartheta)$ и $f(r)$ – произвольные гладкие в $\mathbb{R}^3/Oz$ функции.

Про гладкую функцию $Z(r, \varphi)$ дополнительно известно, что при удалении вдоль луча $x=y$, $z=0$ на ∞, она ведёт себя асимптотически как $1/r^2$.

Нужно найти, при каких α, X, Y, Z и f сила $\vec{F}$ будет потенциальной.

Требуем выполнения необходимых условий потенциальности: =6=

(i) $\partial_\vartheta F_r = \partial_r (r F_\vartheta)$

$$r^\alpha \cos\vartheta\, \overset{\Downarrow}{X}(\varphi) = (r f(r))' \, Y(\vartheta) \sin^2\varphi$$

Перепишем это равенство, разделив переменные:

$$\frac{\cos\vartheta}{Y(\vartheta)} \cdot \frac{X(\varphi)}{\sin^2\varphi} = \frac{(r f(r))'}{r^\alpha} = C_1 . \quad (*)$$

Величина C_1 может быть только константой в силу независимости координат r, ϑ и φ.

По аналогичной причине из $(*)$ вытекают равенства:

$$\frac{\cos\vartheta}{Y(\vartheta)} = \frac{1}{C_2} \qquad \frac{X(\varphi)}{\sin^2\varphi} = C_3 \quad , \text{ где}$$

Удобно так обозначить

C_2 и C_3 — константы и $\boxed{C_3 = C_1 \cdot C_2}$ — из $(*)$.

Итак: $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}(r f(r)) = C_1 r^\alpha \\ Y(\vartheta) = C_2 \cos\vartheta \\ X(\varphi) = C_1 \cdot C_2 \sin^2\varphi \end{cases}$$

Для функции $f(r)$ получаем $=7=$ обыкновенное дифф. уравнение, которое легко решается в общем виде:

$$f(r) = \frac{1}{r}\left(C_1 \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} + D\right),$$

где D – еще одна произвольная константа интегрирования.

(iii) Поскольку F_φ не зависит от ϑ условие $\partial_\varphi F_\vartheta = \partial_\vartheta(\sin\vartheta F_\varphi)$ даёт равенство:

$$f(r)Y(\vartheta)\sin(2\varphi) = \cos\vartheta\, Z(r,\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(r,\varphi) = f(r)\frac{Y(\vartheta)}{\cos\vartheta}\sin(2\varphi) = C_2 f(r)\sin(2\varphi) =$$

$$= \frac{C_2}{r}\left(C_1 \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} + D\right)\sin 2\varphi$$

Зам. Зависимость от координаты ϑ – ушла в силу предыдущих рассмотрений. Если бы этого не случилось, то ф-ция $Z(r,\varphi)$ должна была оказаться зависящей от ϑ и мы пришли бы к противоречию (т.е. сила $\vec{F}$ не была бы потенциальной при $\forall$ выборе параметров задачи).

Проверим (ii): $\partial_\varphi F_r = \partial_r(r\sin\theta F_\varphi) \equiv 0$ — выполняется тождественно.

И, наконец, воспользуемся асимптотикой $Z(r,\varphi)$. Луч $x=y,\ z=0$ отвечает $\varphi=\pi/4$

$$Z\Big|_{\varphi=\pi/4} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{r^2}, \text{ т. е.}$$

$$\left(C_1C_2\frac{r^\alpha}{\alpha+1}+\frac{C_2D}{r}\right)\xrightarrow{r\to\infty}\frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{D=0},\quad \underline{\alpha=-2},\quad \underline{C_1C_2=-1}.$$

В итоге:
$$\begin{cases} F_r = -r^{-2}\sin\theta\sin^2\varphi \\ F_\theta = r^{-2}\cos\theta\sin^2\varphi \\ F_\varphi = r^{-2}\sin 2\varphi \end{cases}$$

Нетрудно найти потенциал $U(r,\theta,\varphi)$:

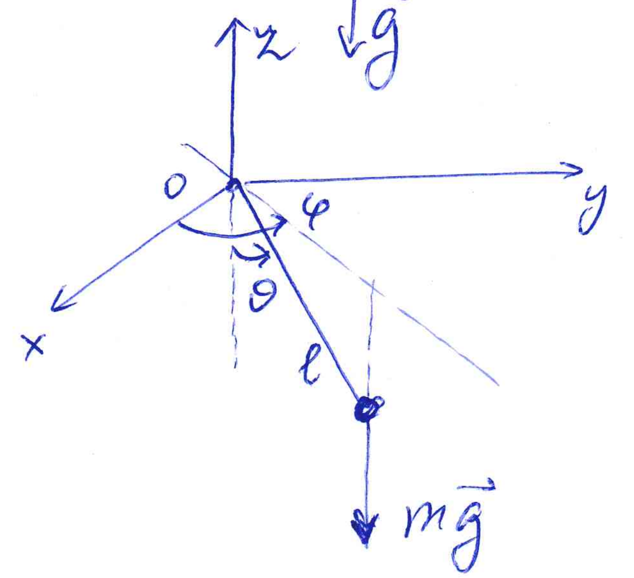
$$\boxed{U(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{r}\sin\theta\sin^2\varphi}$$

Опять получилась 2π-периодическая ф-ция по $\varphi \Rightarrow \vec{F}$ — потенциальная сила в $\mathbb{R}^3/0$.

Пример 3. Пример построения лагранжева описания системы со связью.

Сферический маятник

(Частица на сфере в $\mathbb{R}^3$).



Зам. Угол θ удобно отсчитывать от отрицательного направления оси OZ.

l - невесомый стержень.

Частица m имеет 2 степени свободы, описываемые 2 независимыми координатами θ и φ.

$$\left.\begin{aligned} x &= l\sin\theta\cos\varphi \\ y &= l\sin\theta\sin\varphi \\ z &= -l\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$

Знак важен для потенц. энергии

$$U = mgz = -mgl\cos\theta$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta \,-$$

– не зависит от φ (только от $\dot{\varphi}$).

Уравнение движения по φ:

$$L_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = \frac{d}{dt}\left(m l^2 \dot\varphi \sin^2\vartheta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m l^2 \dot\varphi \sin^2\vartheta = J = \mathrm{Const}} \quad (\star)$$

Это закон сохранения проекции момента импульса на ось Oz.

Уравнение движения по ϑ:

$$L_\vartheta = m l^2 \ddot\vartheta - m l^2 \dot\varphi^2 \sin\vartheta \cos\vartheta + m g l \sin\vartheta = 0$$

Есть частное стационарное по ϑ (т.е. $\vartheta_0 = \mathrm{const}$) решение:

$$\sin\vartheta_0 \left(\frac{g}{l} - \dot\varphi^2 \cos\vartheta_0\right) = 0$$

Если $\vartheta_0 \neq 0$, то получаем связь угловой скорости $\dot\varphi$ и стационарного угла ϑ_0: $\dot\varphi^2 = \dfrac{g}{l\cos\vartheta_0}$

Общее решение уравнения $L_\vartheta = 0$ =11= искать неудобно.

Воспользуемся законом сохранения энергии

$$E = T + U = \frac{ml^2\dot{\vartheta}^2}{2} + \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta - mgl\cos\vartheta.$$

Подставив скора $\dot{\varphi}$ из закона сохранения (*), можно построить фазовый портрет полученной эффективной одномерной системы и убедиться, что стационарное решение устойчиво.