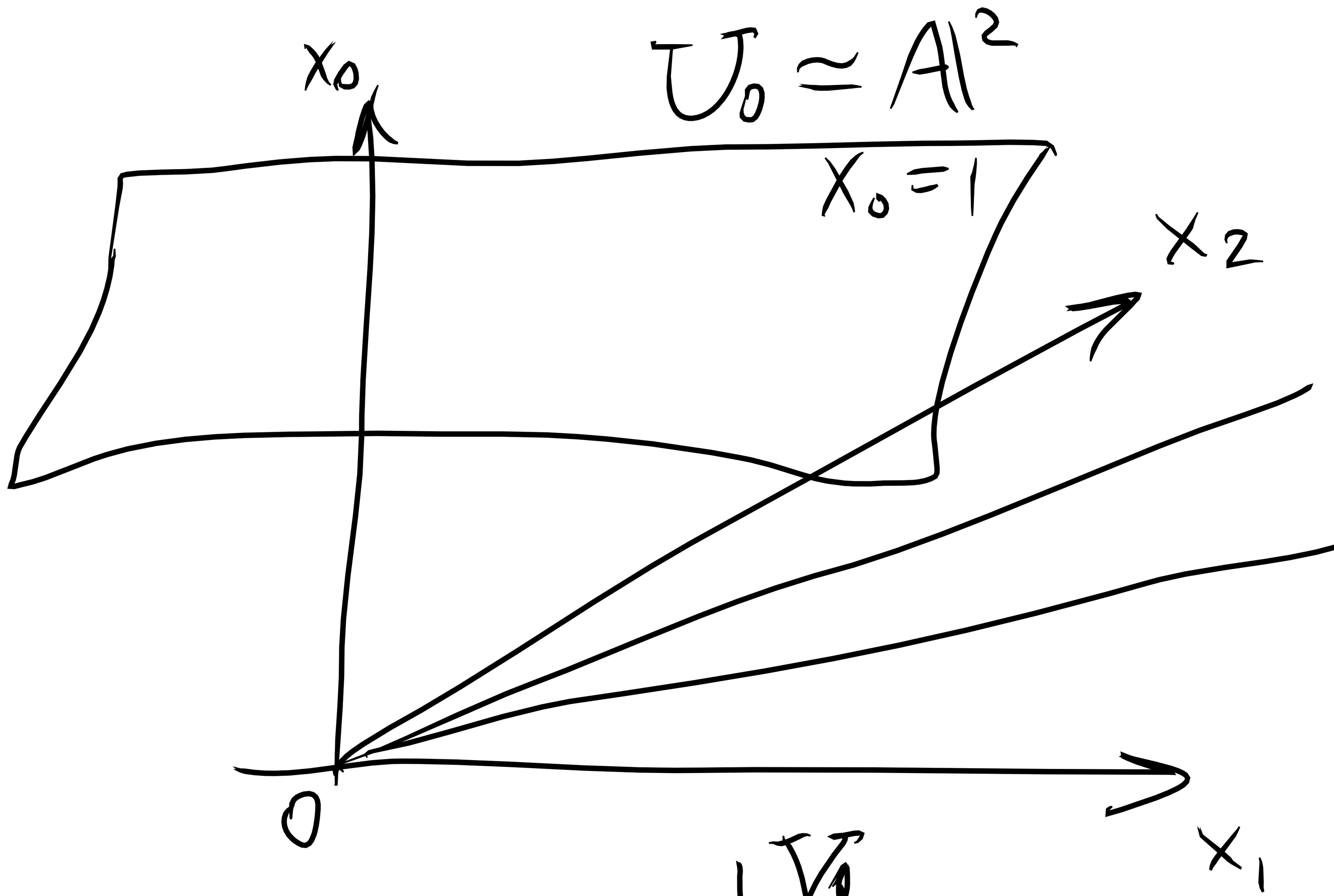
Семинар 1.

Задача 1. В вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x_1, x_2, x_3 в стандартном базисе рассмотрим аффинные плоскости (экраны) $U_1 = \{x_1 = 1\}$ и $U_2 = \{x_2 = 1\}$. В плоскости U_1 в качестве координат естественно взять координаты x_2 и x_3, а в плоскости U_2 - координаты x_1 и x_3. Эти плоскости U_1 и U_2, как мы знаем, являются картами для проективной плоскости $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. Поэтому любое множество $M \subset \mathbb{P}^2$, задаваемое в карте U_1 каким-то уравнением, будет в карте U_2 также задаваться некоторым уравнением. Возьмем в карте U_1 множества, задаваемые уравнениями:
а) $ax_2 + bx_3 + c = 0$, где $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (уравнение прямой),
б) $x_2^2 + x_3^2 = 1$ (уравнение окружности),
в) $x_2^2 - x_3^2 = 1$ (уравнение гиперболы),
г) $x_2 = x_3^2$ (уравнение параболы).
Найдите уравнения этих кривых в координатах x_1 и x_3 в карте U_2. Уравнениями каких кривых они являются?

Задача 2. Пусть $f : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}'^1$ - проективное отображение. Сколькими парами соответственных точек это отображение определяется однозначно?

$\Bbbk$



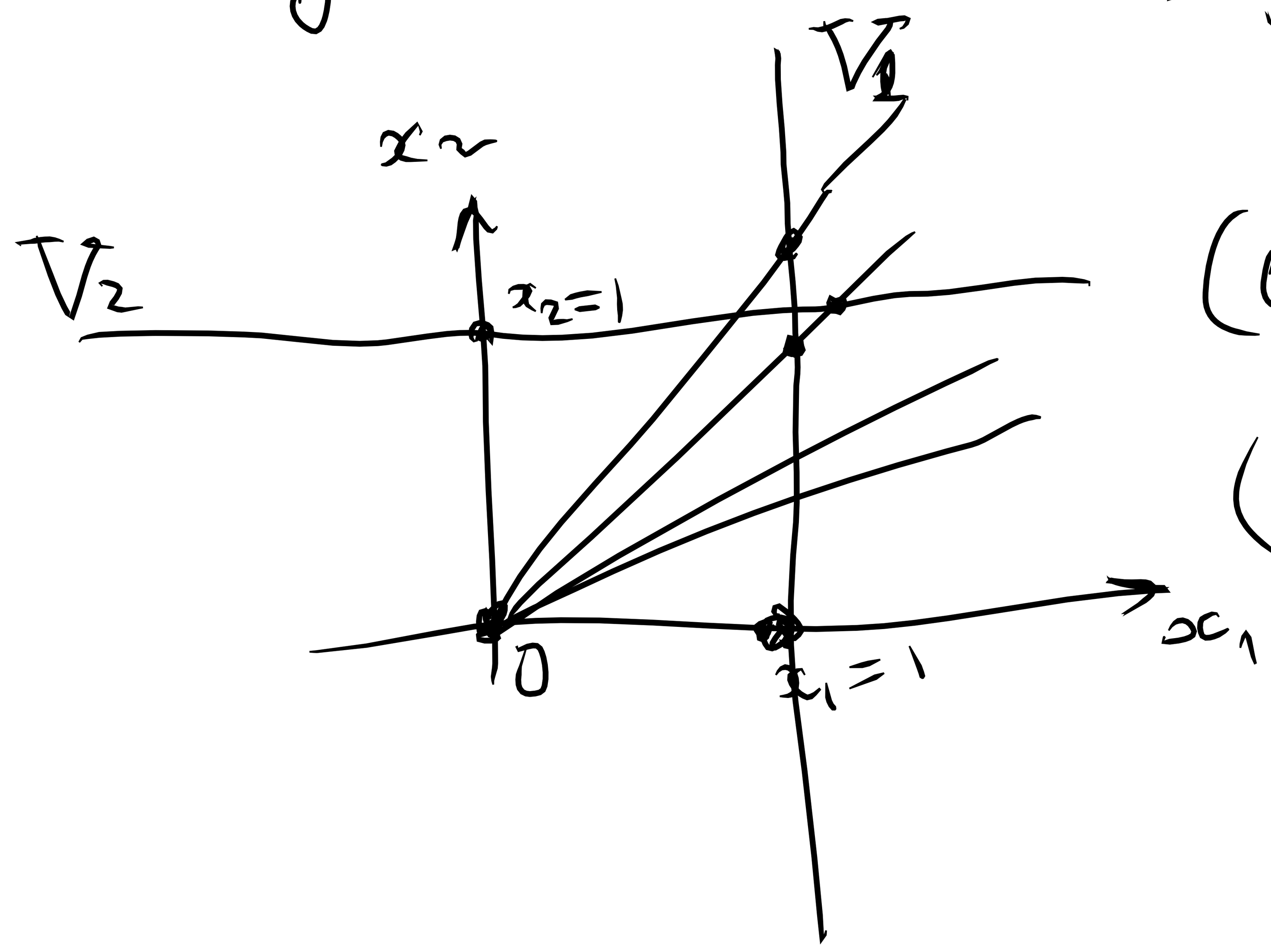
$$\mathbb{P}^2 = U_0 \cup \underbrace{\{\text{все гориз. прямые}\}}_{} \quad (= \mathbb{P}^1)$$

$$\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$$

$$\mathbb{P}^2 = U_0 \sqcup \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{P}^1$$

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1_{(x_0)}$ — проект. прямая беск. удаленная по отнош. к афф. карте U_0

$\mathbb{P}^1_\infty$



$$(0 : 1 : x_2) \in V_1 \simeq \mathbb{A}^1$$

$$(0 : x_1 : 1) \in V_2 \simeq \mathbb{A}^2$$

$\mathbb{P}^1 = V_1 \cup V_2$ проективная прямая

$$\mathbb{P}^1 = \underset{\mathbb{A}^1}{V_1} \sqcup \underset{\mathbb{A}^0 = \{pt\}}{\mathbb{P}^0}$$

$\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$ — афф. стратификация $\mathbb{P}^2$

$$\mathbb{P}^n = U \sqcup \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1} = \dots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$$

$$U = \{x_0 \neq 0\} = \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right), \quad \frac{x_1}{x_0} = y_1, \dots, \frac{x_n}{x_0} = y_n$$

$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n)$ $\forall \lambda \in \Bbbk$, $\lambda \neq 0$

$(\overset{\neq}{0} : \dots : x_n)$

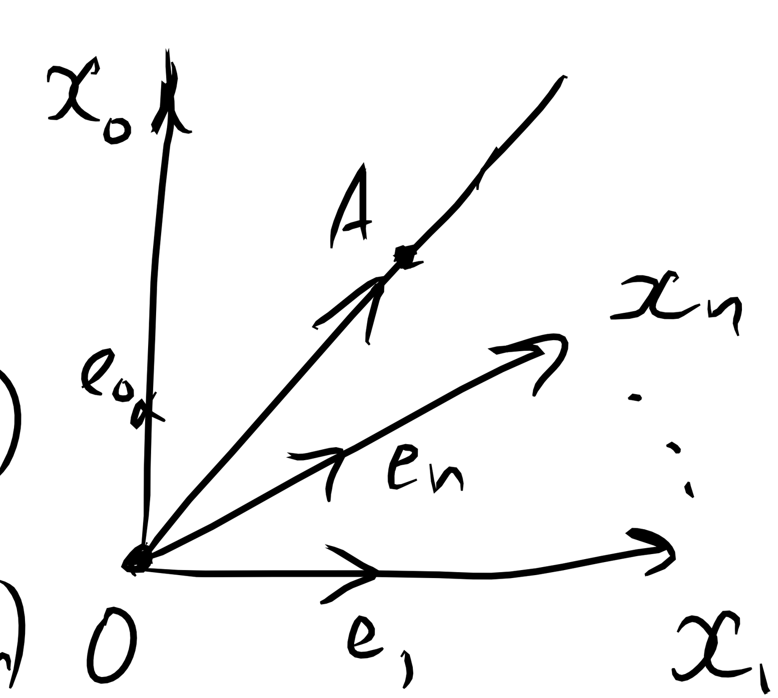
astikhomirov@mail.ru

$\mathbb{P}^n = G(1, n+1)$ $\quad G(k, n)$

грассманиан

$G(2,4)$

$V \simeq \mathbb{A}^{n+1} \ni (x_0, \dots, x_n)$



$0 \neq v = 0A$ вектор в пр-ве (векторном) над $\Bbbk$ $\quad V = V^{n+1}$

$(e) = (e_0, \dots, e_n)$

$e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$

$\mathbb{P}^n = \{$все прямые через $0\} = \{$все 1-мерные подпр-ва в пр-ве $V^{n+1}\}$

$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V^{n+1})$

проективизация вект. пр-ва V

$\underset{\Bbbk}{P(V)}$ $\quad \underset{k}{V}$

$\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \Bbbk\}$ — 1-мерное подпр-во в V натянутое

$v \neq 0$