Мезловой
Владислав

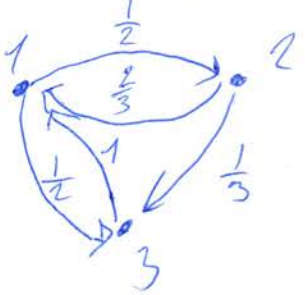
№ 1

а) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица переходных вероятностей

$$P^{(2)}: \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

в) да, достаточно рассмотреть рисунок и понять, что в 4 степени она перемешивающая



б) $$(a\ b\ c) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a\ b\ c)$$

то есть $\begin{cases} \frac{2}{3}b + c = a \\ \frac{1}{2}a = b \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = c \end{cases} \Rightarrow (a\ b\ c) = (a\ \ \frac{1}{2}a\ \ \frac{2}{3}a)$

и стационарное состояние $\left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right)$

№2

Мозговой Владислав

а) вероятность того, что у ониха всегда будут кактусы это 1 - "вероятность того, что кактусов у него не останется", то есть

$f(z) = \frac{1}{5}z^0 + \frac{1}{5}z^1 + \frac{3}{5}z^2$

т.е. $z = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}z + \frac{3}{5}z^2 \Rightarrow 5z = 1 + z + 3z^2 \Rightarrow 3z^2 - 4z + 1 = 0$

$(3z-1)(z-1) = 0$, корни $z = \frac{1}{3}, 1$

то есть он останется без кактусов с вероятностью $\frac{1}{3}$

то есть они будут всегда с $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

б) среднее число кактусов равно при 1 в начале

$m = \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{7}{5}$

то есть на n год при 2 кактусах изначально будет

$m_n = 2\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^n$ кактусов

№4

а) $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_T)$ - МЦ, переходные вер-ти

пусть $P = \{\xi_{k-1} = a_{k-1}, \dots, \xi_0 = a_0\}$, $N = \{\xi_k = a_k\}$, $F = \{\xi_T = a_T, \dots, \xi_{k+1} = a_{k+1}\}$

Тогда определение МЦ записывается в виде $P(F|NP) = P(F|N)$

откуда $P(FP|N) = P(F|N)P(P|N)$, обозначим это как (*),

то есть при фиксированном N, F и P независимы

№4 (продолжение)

осталось заметить, что

$$P\{\xi_{k+1}=a_{k+1}\mid \xi_k=a_k,\dots,\xi_0=a_0\}=$$

$$=\sum P\{\xi_T=a^*_T,\dots,\xi_{k+2}=a^*_{k+2},\xi_{k+1}=a_{k+1}\mid \xi_k=a_k,\dots,\xi_0=a_0\}=$$

$$=\sum_* \frac{P(F^*\cap P)}{P(PN)}=\sum_* \frac{P(F^*P\mid N)P(N)}{P(PN)}=\sum_* \frac{P(F^*\mid N)P(P\mid N)P(N)}{P(PN)}=$$

$$=\sum_* P(F^*\mid N)=P\{\xi_{k+1}=a_{k+1}\mid \xi_k=a_k\}$$

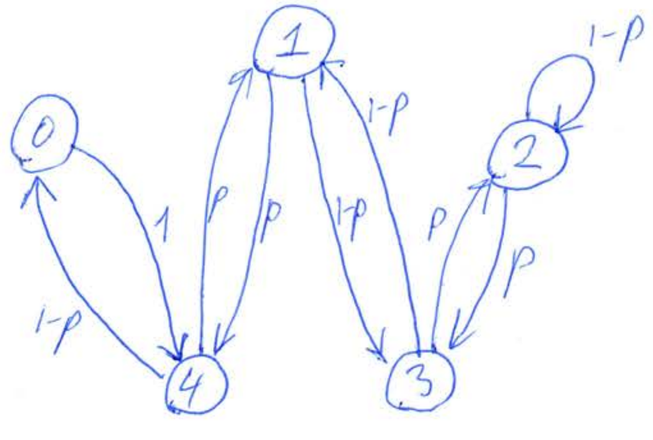
суммирование идет по $(a^*_T,\dots,a^*_{k+2})$, то есть для

$\xi_T,\dots,\xi_0$ выполнено $(*)$, то есть последовательность — МЦ

№3

Мозговой Владислав

Состояние - число зонтов там, где мы находимся
а) то есть граф имеет вид

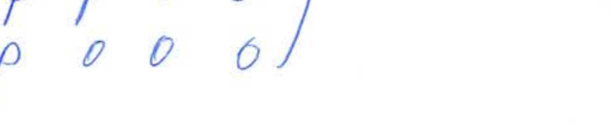


б) и матрица имеет вид, заметим, что она перемешивающаяся в 8 степени

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в) то есть мы промокаем только попадая в состояние 0 с вероятностью p (иначе мы можем дойти с $1-p$ до места с 4 зонтами)

Заметим, что так как она перемешивающаяся в 8 степени, то в среднем ~~за день мы промокаем~~ мы можем рассмотреть происходящее, как блуждание по графу



и промокание - то, что мы дойдем из крайней правой вершины в крайнюю левую, после чего промокли с вероятностью p

то есть день это $\frac{1}{(1-p)^2 p^3}$