Задачи для подготовки к контрольной № 3

ПК3⋄1. Найдите вектор скорости линии пересечения плоскостей

$$9x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \quad \text{и} \quad 4x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 9$$

и какую-нибудь точку на этой линии.

ответ: вектор скорости: $(38, 76, 38)$, точка: $(0, -\frac{17}{38}, -\frac{47}{38})$.

ПК3⋄2. Напишите уравнение плоскости в $\mathbb{Q}^3$, проходящей через точку $(3, -9, 7)$ параллельно векторам $(5, 6, 0)$ и $(-3, 14, -10)$.

ответ: $-60x_1 + 50x_2 + 88x_3 = -14$.

ПК3⋄3. Напишите уравнение плоскости в $\mathbb{Q}^3$, проходящей через точки $(5, -9, -2)$, $(4, -3, 6)$, $(4, 2, 4)$.

ответ: $-52x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -232$.

ПК3⋄4. Вычислите **а)** $\det\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **б)** $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

ответ: в (а) 486, в (б) 220.

ПК3⋄5. Найдите **а)** $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & -5 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ **б)** $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

ответ: в (а) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, в (б) $\begin{pmatrix} \frac{17}{140} & \frac{1}{70} & -\frac{1}{14} \\ \frac{19}{140} & -\frac{3}{70} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$, в (в) $\begin{pmatrix} \frac{5}{33} & \frac{5}{33} & -\frac{4}{33} \\ \frac{5}{11} & -\frac{1}{22} & -\frac{4}{11} \\ -\frac{6}{11} & -\frac{1}{22} & \frac{7}{11} \end{pmatrix}$.

ПК3⋄6. Найдите собственные числа, укажите какие-нибудь базисы в собственных и корневых подпространствах и выясните, диагонализуемы ли линейные операторы $\mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, заданные в стандартном базисе матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 13 & 75 & -21 \\ -16 & -108 & 31 \\ -48 & -330 & 95 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -7 & 6 & -5 \\ 6 & -11 & 7 \\ 12 & -16 & 11 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ответ: В базисах из столбцов матриц

$$(а) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ -3 & 12 & -2 \end{pmatrix}, \quad (б) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 7 & -6 \end{pmatrix}, \quad (в) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad (г) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

операторы имеют матрицы

$$(а) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (б) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (в) \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (г) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ПК3⋄7. Напишите такую вещественную 2×2 матрицу A, что

а) $A^5 = \begin{pmatrix} -31 & -16 \\ 56 & 29 \end{pmatrix}$ **б)** $A^4 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **в)** $A^3 = \begin{pmatrix} -128 & 25 \\ -650 & 127 \end{pmatrix}$ **г)** $A^2 = \begin{pmatrix} -18 & -5 \\ 80 & 22 \end{pmatrix}$.

ответ: в (а) собственые числа: 1, -3, интерполяционный многочлен $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt[5]{-3}}{4} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt[5]{-3}}{4}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} -7 + 8\sqrt[5]{-3} & -4 + 4\sqrt[5]{-3} \\ 14 - 14\sqrt[5]{-3} & 8 - 7\sqrt[5]{-3} \end{pmatrix},$$

в (б) двукратное собственное число 1, интерполяционный многочлен $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

в (в) собственые числа: -3, 2, интерполяционный многочлен $\frac{3\sqrt[3]{2}}{5} + \frac{2\sqrt[3]{-3}}{5} + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{5} - \frac{\sqrt[3]{-3}}{5}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} -25\sqrt[3]{2} + 26\sqrt[3]{-3} & 5\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{-3} \\ -130\sqrt[3]{2} + 130\sqrt[3]{-3} & 26\sqrt[3]{2} - 25\sqrt[3]{-3} \end{pmatrix}.$$

в (г) двукратное собственное число 2, интерполяционный многочлен $\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & -\frac{5\sqrt{2}}{4} \\ 20\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

ПК3◇8. Над полем $\mathbb{Q}$ найдите минимальные многочлен матриц

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

и выясните, диагонализуемы ли эти матрицы.

ответ: в (а) $t^3+t^2-t-1 = (t-1)(t+1)^2$, в (б) $t^3-5t^2+8t-4 = (t-2)^2(t-1)$, в (в) $t^3-4t^2+5t-2 = (t-2)(t-1)^2$, в (г) $t^3 - t^2 - 4t + 4 = (t-2)(t-1)(t+2)$.

Задачи для подготовки к контрольной 3

ПК3 1

Запишем систему уравнений и решим ее методом Крамера:

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x_1 - 5x_2 = 1 - x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 9 + 8x_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 38,$$

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 1 - x_3 & -5 \\ 8x_3 + 9 & 2 \end{pmatrix} = 38x_3 + 47,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 9 & 1 - x_3 \\ 4 & 8x_3 + 9 \end{pmatrix} = 76x_3 + 77$$

$$x_1 = x_3 + \frac{47}{38}$$

$$x_2 = 2x_3 + \frac{77}{38}$$

Рассмотрим две произвольные точки на полученной прямой: $A = \left(0, -\frac{17}{38}, -\frac{47}{38}\right)$ и $B = \left(\frac{47}{38}, \frac{77}{38}, 0\right)$ (можно проверить, что точки действительно лежат на прямой, подставив в полученное выше условие на x_1, x_2 и x_3). Тогда можно найти вектор скорости: $w = A - B = \left(-\frac{47}{38}, -\frac{94}{38}, -\frac{47}{38}\right)$.

ПК3 2

Запишем уравнение плоскости через определитель:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_2 + 9 & x_3 - 7 \\ 5 & 6 & 0 \\ -3 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$
$$= -60x_1 + 180 + 50x_2 + 450 + 70x_3 - 490 + 18x_3 - 126$$
$$= -60x_1 + 50x_2 + 88x_3 + 14 = 0$$

Тогда итоговое уравнение: $-60x + 50y + 88z = -14$.

ПК3 3

Запишем уравнение плоскости через определитель:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 5 & x_2 + 9 & x_3 + 2 \\ -1 & 6 & 8 \\ -1 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= 36x_1 - 180 - 88x_1 + 440 - 8x_2 - 72 + 6x_2 + 54 + 6x_3 + 12 - 11x_3 - 22$$
$$= -52x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 232 = 0$$

Тогда итоговое уравнение: $-52x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -232$

ПКЗ 4

$$\det\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0 & 2\\ -3 & -3 & 4 & 0\\ 3 & -3 & -5 & 0\\ -3 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix} = -4\cdot\det\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix}-3 & -3 & 4\\ 3 & -3 & -5\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix} = 324+162=486$$

$$\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 0 & 1 & 4 & 0\\ -4 & 0 & -5 & 0\end{pmatrix} = 4\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix} = 80+60+80=220$$

ПКЗ 5

(А) Найдем транспонированную матрицу миноров и определитель исходной матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}15 & 30 & 12\\ -3 & -6 & 0\\ 20 & 36 & 12\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}15 & -3 & 20\\ 30 & -6 & 36\\ 12 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}6 & -3 & -1\\ -6 & 5 & -5\\ -6 & 3 & 0\end{pmatrix} = 90-90+18-30=-12$$

Тогда обратная матрица:

$$\begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{3}\\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

(Б) Найдем транспонированную матрицу миноров и определитель исходной матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-17 & -19 & -28\\ -2 & 6 & -28\\ 10 & -30 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}-17 & -2 & 10\\ -19 & 6 & -30\\ -28 & -28 & 0\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}6 & 2 & 0\\ -6 & -2 & 5\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix} = -12-90+12-50=-140$$

Тогда обратная матрица:

$$\begin{pmatrix}\frac{17}{140} & \frac{1}{70} & -\frac{1}{14}\\ \frac{19}{140} & -\frac{3}{70} & \frac{3}{14}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0\end{pmatrix}$$

(В) Найдем транспонированную матрицу миноров и определитель исходной матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-10 & -30 & 36\\ -10 & 3 & 3\\ 8 & 24 & -42\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}-10 & -10 & 8\\ -30 & 3 & 24\\ 36 & 3 & -42\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}3 & 6 & 4\\ 6 & -2 & 0\\ 3 & 5 & 5\end{pmatrix} = -30-180+24+120=-66$$

Тогда обратная матрица:

$$\begin{pmatrix}-\frac{5}{33} & \frac{5}{33} & -\frac{4}{33}\\ \frac{5}{11} & -\frac{1}{22} & -\frac{4}{11}\\ -\frac{6}{11} & -\frac{1}{22} & \frac{7}{11}\end{pmatrix}$$

ПКЗ 6

(А) Найдем собственные числа оператора:

$$\det\begin{pmatrix} t-13 & -75 & 21 \\ 16 & t+108 & -31 \\ 48 & 330 & t-95 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow t^3 - 95t^2 - 13t^2 + 108t^2 - 1404t + 1235t - 10260t + 133380 + 10230t-$

$132990 + 111600 + 1200t - 114000 + 110880 - 1008t - 108864$

$= t^3 - 7t + 6 = 0$

Тогда можно написать характеристический многочлен, собственные числа - это его корни:

$$\chi(t) = t^3 - 7t + 6 = (t-1)(t-2)(t+3)$$

Найдем собственные подпространства, базисы в них - решения однородных систем уравнений:

$$V_1 : \begin{pmatrix} -12 & -75 & 21 \\ 16 & 109 & -31 \\ 48 & 330 & -94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -75 & 21 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & 30 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{3} \\ x_2 = \frac{x_3}{3} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Базис V_1: $(-1, 1, 3)$

$$V_2 : \begin{pmatrix} -11 & -75 & 21 \\ 16 & 110 & -31 \\ 48 & 330 & -93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -75 & 21 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 0 & -\frac{33}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3x_3}{2} \\ x_2 = \frac{x_3}{2} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Базис V_2: $(-3, 1, 2)$

$$V_{-3} : \begin{pmatrix} -16 & -75 & 21 \\ 16 & 105 & -31 \\ 48 & 330 & -98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 75 & -21 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{4} \\ x_2 = \frac{x_3}{3} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Базис V_{-3}: $(-3, 4, 12)$
Так как размерности всех собственных подпространств совпадают с кратностью корней характеристического многочлена, оператор диагонализуем.
Так как все корни имеют кратность 1, корневые подпространства совпадают с собственными, базисы можно взять те же.

(Б) Найдем собственные числа оператора:

$$\det\begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ -2 & t+1 & -1 \\ 7 & 2 & t+5 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \det = t^3 + t^2 + 5t^2 + 5t + 2t - 2t - 10 + 7 + 7t + 7 + 4$

$= t^3 + 6t^2 + 12t + 8 = 0$

Тогда можно написать характеристический многочлен, собственные числа - это его корни:

$$\chi(t) = t^3 + 6t^2 + 12t + 8 = (t+2)^3$$

Найдем собственные подпространства, базисы в них - решения однородных систем уравнений:

$$V_{-2} : \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -3x_2 \end{cases}$$

Базис V_{-2}: $(1, 1, -3)$
$\dim(V_{-2}) = 1$, а кратность корня равна 3, из чего следует, что оператор не диагонализуем.
Найдем корневое подпространство V'_{-2} и базис в нем:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Кратность корня всегда равна размерности корневого подпространства, поэтому базис V'_{-2}: $(-2,-2,7)$, $(1,1,-3)$, $(1,2,-6)$

(В) Найдем собственные числа оператора:

$$\det\begin{pmatrix} t+7 & -6 & 5 \\ -6 & t+11 & -7 \\ -12 & 16 & t-11 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \det = t^3+7t^2+11t^2-11t^2-121t-77t+77t-847+112t+784-504-36t+396+60t+660-480$$
$$= t^3+7t^2+15t+9=0$$

Тогда можно написать характеристический многочлен, собственные числа - это его корни:

$$\chi(t) = t^3+7t^2+15t+9 = (t+1)(t+3)^2$$

Найдем собственные подпространства, базисы в них - решения однородных систем уравнений:

$$V_{-1}: \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -6 & 10 & -7 \\ -12 & 16 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{3} \\ x_2 = \frac{x_3}{2} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Базис V_{-1}: $(-2,3,6)$

$$V_{-3}: \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -6 & 8 & -7 \\ -12 & 16 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{2} \\ x_2 = \frac{x_3}{2} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Базис V_{-3}: $(-1,1,2)$
$\dim(V_{-3}) = 1$, а кратность корня равна 2, из чего следует, что оператор не диагонализуем.
Кратность одного из корней равна 1, поэтому для него корневое подпространство совпадает с собственным. Для $t=-3$ найдем корневое подпространство:

$$V'_{-3}: \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -6 & 8 & -7 \\ -12 & 16 & -14 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -8 & 8 & -8 \\ 12 & -12 & 12 \\ 24 & -24 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Базис в V'_{-3}: $(-1,1,2)$, $(3,-2,-5)$

(Г) Найдем собственные числа оператора:

$$\det\begin{pmatrix} t-1 & 1 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ -1 & -1 & t-2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow \det = t^3-t^2-4t^2-2t^2+8t+4t+2t-8+2t-4$$
$$= t^3-7t^2+16t-12=0$$

Тогда можно написать характеристический многочлен, собственные числа - это его корни:

$$\chi = t^3-7t^2+16t-12 = (t-3)(t-2)^2$$

Найдем собственные подпространства, базисы в них - решения однородных систем уравнений:

$$V_3: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_2}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \frac{x_2}{2} \end{cases}$$

Базис в V_3: $(-1,2,1)$

$$V_2: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Базис в V_2: $(1,-1,1)$, $(-2,2,-1)$
Так как размерности всех собственных подпространств совпадают с кратностью корней характеристического многочлена, оператор диагонализуем.
Кратность одного из корней равна 1, поэтому для него корневое подпространство совпадает с собственным. Для $t=2$ найдем корневое подпространство:

$$V_2' : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Базис V_2': $(1,-1,1)$, $(-2,2,-1)$

ПКЗ 7

(A)

$$A^5 = \begin{pmatrix} -31 & -16 \\ 56 & 29 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^2 - tr(A)t + \det(A)t = t^2 + 2t - 3 = (t+3)(t-1)$$
$$\sqrt[5]{A} = \alpha A + \beta E$$

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta = -\sqrt[5]{3} \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt[5]{3}+1}{4} \\ \beta = \frac{3-\sqrt[5]{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\sqrt[5]{A} = \frac{\sqrt[5]{3}+1}{4}A + \frac{3-\sqrt[5]{3}}{4}E = \begin{pmatrix} -8\sqrt[5]{3} - 7 & -4\sqrt[5]{3} - 4 \\ 14\sqrt[5]{3} + 14 & 7\sqrt[5]{3} + 8 \end{pmatrix}$$

(Б)

$$A^4 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$
$$\sqrt[4]{A} = \alpha A + \beta E = p(A) \Rightarrow p(t) = \alpha t + \beta$$

$$\begin{cases} p(t) = \sqrt[4]{t} \\ p'(t) = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{3}{4} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt[4]{A} = \frac{A}{4} + \frac{3E}{4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(В)

$$A^3 = \begin{pmatrix} -128 & 25 \\ -650 & 127 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^2 - tr(A)t + \det(A)t = t^2 + t - 6 = (t+3)(t-2)$$
$$\sqrt[3]{A} = \alpha A + \beta E$$

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta = -\sqrt[3]{3} \\ 2\alpha + \beta = \sqrt[3]{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{5} \\ \beta = \frac{3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}}{5} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{5}A + \frac{3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}}{5}E = \begin{pmatrix} -25\sqrt[3]{2} - 26\sqrt[3]{3} & 5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3} \\ -130\sqrt[3]{2} - 130\sqrt[3]{3} & 26\sqrt[3]{2} + 25\sqrt[3]{3} \end{pmatrix}$$

(Г)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -18 & -5 \\ 80 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$
$$\sqrt{A} = \alpha A + \beta E = p(A) \Rightarrow p(t) = \alpha t + \beta$$

$$\begin{cases} p(t) = \sqrt{t} \\ p'(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = \sqrt{2} \\ \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt{A} = \frac{A}{2\sqrt{2}} + \frac{E}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & -\frac{5\sqrt{2}}{4} \\ 20\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ПКЗ 8

(А) Найдем характеристический многочлен данного оператора:

$$\chi(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t+2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & t \end{pmatrix} = (t-1)(t^3+t^2-t-1) = t^4 - 2t^2 + 1 = (t-1)^2(t+1)^2$$

Минимальный многочлен $\mu(t) = \frac{(-1)^4 \chi(t)}{D}$, D - это НОД миноров матрицы оператора. Тогда можно найти все миноры:

$$\Delta_1 = \Delta_6 = t^3 + t^2 - t - 1 = (t+1)^2(t-1)$$
$$\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_7 = \Delta_8 = \Delta_{10} = \Delta_{14} = 0$$
$$\Delta_9 = 2t^2 - 2 = 2(t+1)(t-1)$$
$$\Delta_{11} = t^3 - 2t^2 + t = t(t-1)^2$$
$$\Delta_{12} = -t^2 + 2t - 1 = -(t-1)^2$$
$$\Delta_{13} = 2 - 2t^2 = -2(t-1)(t+1)$$
$$\Delta_{15} = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$
$$\Delta_{16} = t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$$

Их НОД равен $(t-1)$, тогда $\mu(t) = \frac{(t-1)^2(t+1)^2}{(t-1)} = (t+1)^2(t-1)$

(Б) Найдем характеристический многочлен данного оператора:

$$\chi(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & t-1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & t-3 \end{pmatrix} = t^4 - 6t^3 + 13t^2 - 12t + 4 = (t-1)^2(t-2)^2$$

Найдем все миноры:

$$\Delta_1 = \Delta_6 = t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t-1)(t-2)^2$$
$$\Delta_2 = \Delta_5 = \Delta_9 = \Delta_{10} = \Delta_{13} = \Delta_{14} = 0$$
$$\Delta_3 = \Delta_7 = \Delta_{15} = -t^2 + 2t - 1 = -(t-1)^2$$
$$\Delta_4 = \Delta_8 = 2t^2 - 5t + 3 = (t-1)(2t-3)$$
$$\Delta_{11} = t^3 - 5t^2 + 7t - 3 = (t-3)(t-1)^2$$
$$\Delta_{12} = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$
$$\Delta_{16} = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3$$

Их НОД равен $(t-1)$, тогда $\mu(t) = \frac{(t-1)^2(t-2)^2}{(t-1)} = (t-2)^2(t-1)$

(В) Найдем характеристический многочлен данного оператора:

$$\chi(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & t-3 \end{pmatrix} = t^4 - 6t^3 + 13t^2 - 12t + 4 = (t-1)^2(t-2)^2$$

Найдем все миноры:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = \Delta_6 = \Delta_{11} = t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t-1)(t-2)^2 \\
&\Delta_2 = t - 2 \\
&\Delta_3 = -t + 2 = -(t-2) \\
&\Delta_4 = t^2 - 2t = t(t-2) \\
&\Delta_5 = \Delta_9 = \Delta_{13} = 0 \\
&\Delta_7 = \Delta_{10} = \Delta_{12} = \Delta_{14} = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) \\
&\Delta_8 = \Delta_{15} = -t^2 + 3t - 2 = -(t-1)(t-2) \\
&\Delta_{16} = t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2)
\end{aligned}$$

Их НОД равен $(t-2)$, тогда $\mu(t) = \frac{(t-1)^2(t-2)^2}{(t-2)} = (t-1)^2(t-2)$

(Г) Найдем характеристический многочлен данного оператора:

$$\chi(t) = \det \begin{pmatrix} t+2 & 3 & -3 & -3 \\ -4 & t-6 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & t & 1 \\ -3 & -3 & 3 & t+2 \end{pmatrix} = t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 8t - 4 = (t-1)^2(t-2)(t+2)$$

Характеристический многочлен делит минимальный, при этом все собственные числа оператора являются корнями минимального многочлена. Из этого следует, что единственный возможный в данном случае минимальный многочлен: $(t-1)(t-2)(t+2)$. Минимальный многочлен аннулирует оператор, то есть нужно проверить, что при подстановке матрицы получится 0:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -12 & -12 \\ -12 & -12 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, $(t-1)(t-2)(t+2)$ - аннулирующий многочлен оператора минимальной степени, то есть это и есть искомый минимальный многочлен $\mu(t)$.