1 Листок 1

1.1 Задача 1

Если множество точек отрезка несчетно, значит, для любой последовательности чисел можно найти число, которое в ней не содержится. Рассмотрим какую-то последовательность чисел и по ней построим число, в ней не лежащее. Разделим отрезок на три равные части и рассмотрим ту, в которой не содержится перво число нашей последовательности. Ту часть снова разделим на три части и на этот раз посмотрим, какая из них не содержит второй элемент последовательности. Продолжая строить таким образом, мы получим систему вложенных отрезков, которая по лемме "сходится"в точку. Число, соответствующее данной точке, не будет принадлежать первоначальной последовательности.

1.2 Задача 2

Сопоставим каждому интервалу рациональное число. Так как интервалы непересекающиеся, это будет взаимно-однозначное соответствие. Но то множество рациональных чисел, которое мы выбрали для соответствия с интервалами, является подмножеством $\mathbb{Q}$. Значит, что множество таких интервалов не более, чем счетно.

1.3 Задача 3

(1) Пусть множество A/B не открыто. Тогда существует точка, которая входит в него без некоторой окрестности. При этом она входит в множество A без окрестности, следовательно, A - не открыто, это приводит нас к противоречию.

(2) Пусть множество B/A не замкнуто. Тогда его дополнение не открыто, то есть в нем есть точка, лежащая в нем без окрестности. Но при этом A является дополнением, то есть A - не открыто, следовательно, противоречие.

1.4 Задача 4

Допустим это возможно, тогда рассмотрим один из интервалов, входящий в открытое множество – пусть это (a_1, b_1) и рассматриваемый интервал (a, b), заметим что сумма всех остальных интервалов (открытых множеств) – $(a, b)/(a_1, b_1) = (a, a_1] \cup [b_1, b)$, однако это множество является суммой открытых множеств. Противоречие, так как сумма открытых множеств является открытым множеством, однако в нашем множестве есть пределы a_1, b_1.

1.5 Задача 5

(1) $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$

(2) множество A нигде не плотно

(3) замыкание множества A нигде не плотно

1.6 Задача 6

Множество плотно, если на любом его интервале в любом подинтервале есть точки из данного множества. Рассмотрим произвольный интервал в Канторовом множестве (это множество задается путем бесконечного деления отрезка на три части и удалением на каждом таком шаге среднего из трех отрезков). Рассмотрим процесс деления отрезка на три части с самого начала. Разделим на три части первый раз и посмотрим, в какую часть из 3 попал выбранный интервал. Если он попал сразу в 2 или 3 части, можно выбрать интервал, который будет являться пересечением выбранного и вырезанного из середины на первом шаге, тогда этот подинтервал не будет иметь в себе точек данного множества. В противном случае (если выбранный интервал полностью оказался в первой или последней трети отрезка), продолжим операцию на той части отрезка. Получим систему вложенных интервалов. Пересечение системы таких интервалов - пустое множество, а тот интервал, который мы выбрали изначально, не является пустым множеством. Значит, по-любому на каком-то из шагов выбранный интервал пересечется с "вырезанным"центром интервала.

1.7 Задача 7

1.8 Задача 8

Раскрасим все левые концы отрезков в красный цвет, а правые - в синий. Заметим, что существует точка, лежащая между этими множествами. Если такой точки нет, значит, что какая-то синяя точка лежит левее красной, а значит, что те два отрезка, которым эти точки не принадлежат, не пересекаются, что противоречит условию. Значит, в любом случае такая "разделяющая"точка найдется, при этом она точно будет принадлежать пересечению всех отрезков.
PS если красная точка совпадает с синей и при этом является разделяющей означает, что у всех отрезков будет только одна точка пересечения, но оно все еще будет непустым, что удовлетворяет нашему условию.

1.9 Задача 9

1.10 Задача 10

Для вещественного x, для каждого $m \in [1, N+1]$, выберем $n = n_m$ такое что $mx - n_m \in [0,1)$ – дробная часть mx. $N+1$ способ выбора m порождает $N+1$ число вида $mx-n$ на интервале $[0,1)$. Разделим интервал на N частей длины $\frac{1}{N}$ каждая, по принципу Дирихле, какой-то из них содержит $m_1x - n_1$ и $m_2x - n_2$ для некоторых $1 \leqslant m_2 < m_1 \leqslant N+1$, тогда

$$\frac{1}{N} \geqslant |(m_1x - n_1) - (m_2x - n_2)| = |(m_1 - m_2)x - (n_1 - n_2)|$$

Тогда $1 \leqslant q = m_1 - m_2 \leqslant N$ и $p = n_1 - n_2$, задает $|qx - p| < \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{q}$, разделив все на $\frac{1}{q}$

1.11 Задача 11

Если a, b из условия - целые:
Заметим, что и при сложении, и при возведении в квадрат, и при домножении на константу все числа вида $a + b\sqrt{2}$ по прежнему остаются числами такого вида. Тогда рассмотрим число $-1 + \sqrt{2}$. Оно подходит под наше условие, при этом оно меньше 1. Значит, если мы возведем его в квадрат достаточно большое количество раз, мы получим очень маленькое число, удовлетворяющее нашему условию. Далее для любого сколь угодно малого интервала на прямой мы сможем найти достаточно малую степень $-1 + \sqrt{2}$ такую, что если умножить данное число на какое-то целое, мы попадем в этот интервал.

Если a, b из условия - рациональные:
Плотное множество = в любом интервале есть точка этого множества.
Выбор $a + b\sqrt{2}$ по интервалу:
Выбираем любое рациональное число a на заданном интервале. Берем любой $b \in \mathbb{Q}$ и смотрим, является ли число $a + b\sqrt{2}$ элементом множества точек данного интервала. Если не является, уменьшаем b в 2 раза, и повторяем действие. Если рассматривать полученные $b\sqrt{2}$ как систему вложенных отрезков, их пересечение - точка, а выбранный интервал конечен, значит, на каком-то из шагов $b\sqrt{2}$ станет достаточно маленьким, чтобы $a + b\sqrt{2}$ лежало в нужном интервале.
Выбор интервала по $a + b\sqrt{2}$:
Выбираем 2 произвольных рациональных числа на прямой, одно из которых больше, а другое меньше заданного, и берем интервал, включающий их.

1.12 Задача 12

$2^{1/2} + 3^{1/3}$ Пусть это число представим в виде $\frac{p}{q}$:

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} = \frac{p}{q} \qquad \sqrt[3]{3} = \frac{p}{q} - \sqrt{2}$$

Возведем в куб:

$$3 = \frac{p^3}{q^3} - 3\sqrt{2}\frac{p^2}{q^2} + 6\frac{p}{q} - 2\sqrt{2} \qquad \sqrt{2}\left(3\frac{p^2}{q^2} + 2\right) = \frac{p^3}{q^3} - 6\frac{p}{q} - 3 \qquad \sqrt{2} = \frac{\frac{p^3}{q^3} + 6\frac{p}{q} - 3}{3\frac{p^2}{q^2} + 2}$$

И числитель, и знаменатель этой дроби рациональны, а значит, рационален и $\sqrt{2}$. Значит, мы пришли к противоречию, а значит, изначально данное в условии число иррационально.