Вариант 3

Мезговой Владислав

№1

найдем минимальный многочлен α

$$\frac{x^{11}-1}{x-1} = x^{10}+\ldots+x+1$$

и минимальный многочлен $1-\alpha$

$$\frac{(1-x)^{11}-1}{(1-x)-1} = \frac{(1-x)^{11}-1}{-x} = (1-x)^{10}+\ldots+(1-x)+1$$

найдем свободный член в $x=0$

$$(1-0)^{10}+\ldots+1 = 11$$

это и есть норма

Ответ: 11

№2

~~Так как~~ x^5+x^3+1

Заметим, что $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^k}$, то есть $\mathbb{F}_2$ может лежать только в $\mathbb{F}_{2^k}$

Также заметим что $|Gal(L|k)| = deg(L|k)$

Заметим, что x^5+x^3+1 является неприводимым над $\mathbb{Z}_2$

Найдем его поле разложения

(x^5+x^3+1)

то есть оно лежит в $\mathbb{F}_{16}$ так как в нем должно быть ≥ 5 элементов, а следовательно поле разложения x^5+x^3+1 и есть $\mathbb{F}$, то есть содержит 16 элементов

Ответ: 16

№3

Перенумеруем корни, чтобы

(24957681)(3) стал (12345678)(9) = A

и тогда (27) будет (15) = B

заметим что можно получить еще 2 цикла длины 4

и 4 транспозиции следующим образом:

$A^{-n} B A^{n}$ и получить (15), (48), (37), (26)

Далее заметим что группа Галуа неприводимого многочлена транзитивна и есть перестановка, перемещающая элемент 9

Рассмотрим минимальный из этих циклов, в нем нет пар 1,5; 4,8; 3,7; 2,6 так как при их наличии его композиция с транспозициями разваливалась бы на циклы, тогда в нем не более 5 элементов (9 и ещё какие-то ≤ 4)

- если элемента 2, то порождается S_9
- если >2, то мы можем рассмотреть его композицию со всеми транспозициями и увеличить его длину (на 1 за счёт каждой транспозиции), так мы получим длину $2a-1$ (если изначальная длина была a) и $2a-1 \in [5,9]$

Тогда $Gal_{\mathbb{F}_2} L$ содержит подгруппы S_b, $b \in [5,9]$
то есть $Gal_{\mathbb{F}_2} L$ неразрешима так как там есть S_5
а следовательно и $P(x)$ неразрешимо.