Домашнее задание 3

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_5$.

(0) При каких комплексных значениях a, b, $c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = az + b\overline{z} + z^2 + c$ имеет комплексную производную в точке $z = 0$?

(1) При каких комплексных значениях a, b, $c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = az + b\overline{z} + c$ является евклидовой изометрией?

(2) Покажите, что функция $f : re^{i\phi} \mapsto re^{2i\phi}$ не является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(3) При каких вещественных значениях параметров a, $b \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x + iy) = ax^2 + by^2 + ixy$$

голоморфна на всем $\mathbb{C}$?

(4) При каких комплексных значениях $a, b, c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = a\,\mathrm{Re}z + b\,\mathrm{Im}z + c\,z\overline{z}$ имеет комплексную производную в точке $z = 0$?

(5) Покажите что функция $f : re^{i\phi} \mapsto e^{i\phi}$ не является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(6) При каких вещественных значениях параметров a, $b \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x, y) = x^3 - axy^2 + i(bx^2y - y^3)$$

голоморфна на всем $\mathbb{C}$?

(7) При каких комплексных значениях a, b, $c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = e^{ia}\overline{z} + b|z|^2 + c$ является евклидовой изометрией?

(8) Покажите что функция $f : re^{i\phi} \mapsto r^2e^{i\phi}$ не является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(9) При каких вещественных значениях параметров a, $b \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x, y) = e^x \cos y + ay + ibe^x \sin y + ix$$

голоморфна на всем $\mathbb{C}$?

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_6$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Полный прообраз множества $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 2\}$ при отображении $f(z) = z^2 - \frac{1}{2}$ связен.

(1) Существует голоморфное отображение $f : X \to \mathbb{C}$, такое, что $f(z)^2 = z$ для всех $z \in X$. Здесь $X = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x + y^2 > 0\}$.

(2) Преобразование (взаимно-однозначное отображение) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, переводящее любую окружность в окружность, обязательно голоморфно.

(3) Существует несвязное открытое множество, переводимое отображением $f(z) = z^3$ в связное.

(4) Существует голоморфное отображение $f : X \to \mathbb{C}$, такое, что $f(z)^3 = z$ для всех $z \in X$. Здесь $X = \{z \mid |z| > 2\}$.

(5) Полный прообраз множества $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)^2 + 4\mathrm{Im}(z)^2 > 1\}$ при отображении $f(z) = z^2 - \frac{1}{2}$ связен.

(6) Существует голоморфная функция $f : X \to \mathbb{C}$, такая, что $e^{f(z)} = z$. Здесь $X = \{z = x + iy \mid y > x^3 - 1\}$.

(7) Существует непрерывная функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, такая, что $f(z)^2 - 1 = z$.

(8) Существует только одна непрерывная функция $f : \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{C}$, такая, что $f(z^2) = z^2 - 1$ и $\mathrm{Im}(f(i)) > 0$.

(9) Множество голоморфных функций $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ со свойством $e^{f(z)} = z + 2$ бесконечно. Здесь $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_2 + a_7$. Являются ли указанные ниже функции $u(x, y)$ гармоническими? Если да, то найдите гармонически сопряженные функции.

(0) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.
(1) $u(x, y) = e^x \cos y$.
(2) $u(x, y) = -2 \sin(xy) \cos(xy) e^{x^2 - y^2}$
(3) $u(x, y) = x + y$.
(4) $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$.
(5) $u(x, y) = e^{x^3 - 3y^2 x} (\cos 3yx^2 \cos y^3 + \sin 3yx^2 \sin y^3)$.
(6) $u(x, y) = e^{2x} \cos 2y + e^x \cos y$.
(7) $u(x, y) = e^{-y} \cos x + 3x$.
(8) $u(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x$.

(9) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x - y$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_1 + a_8$. Может ли непостоянная голоморфная функция $f : U \to \mathbb{C}$ (где $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое подмножество) удовлетворять следующим условиям. Строго обоснуйте ответ.

(0) Функция $|f(z)|$ постоянна.
(1) Функция $\mathrm{Re}(f(z))$ постоянна.
(2) Функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f(z) = \overline{f(z)}$ для всех z.
(3) Функция $\arg f(z)$ постоянна.
(4) $\mathrm{Re} f(z) = -\mathrm{Im} f(\overline{z})$ для всех z.
(5) Разность $\mathrm{Re} f(z) - \mathrm{Im} f(z)$ постоянна.
(6) Разность $\arg f(z) - |f(z)|$ постоянна.
(7) Произведение $(\mathrm{Re}\, f(z))(\mathrm{Im}\, f(z))$ постоянно.
(8) Произведение $\arg(f(z))|f(z)|$ постоянно.
(9) Сумма $f(z) + \overline{z}^2$ постоянна.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_9$.

(0) Выпишите уравнения Коши–Римана в полярных координатах.

(1) Пусть $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ — рациональная функция от $z = x+iy$. Докажите, что функцию f можно следующим образом восстановить по функции u:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0).$$

(2) Найдите размерность пространства гармонических однородных кубических многочленов от x и y.

(3) Известно, что функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ голоморфна. Докажите, что функция $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ тоже голоморфна.

(4) Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция. Являются ли гармоническими функции $u(x, -y)$ и $u(x^2 - y^2, 2xy)$?

(5) Докажите, что отображение, осуществляемое голоморфной функцией, имеет неотрицательный якобиан. Как этот якобиан связан с комплексной производной?

(6) Докажите, что если гармоническая функция u от x и y записана как функция от комплексной переменной $z = x + iy$, то она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

(7) Приведите пример функции, удовлетворяющей условию Коши–Римана в точке 0, но не имеющей комплексной производной в этой точке.

(8) Найдите гармоническую функцию $u(x, y)$ на $\mathbb{C}$, такую, что

$$u(\cos t, \sin t) = \cos^2 t.$$

(9) Опишите геометрический смысл условия

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| > \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|.$$