

## Логика и алгоритмы 2021. Задачи для семинара 6.

1. Рассмотрим сигнатуру элементарной геометрии, содержащую предикатные символы  $B$  (3-местный),  $\cong$  (4-местный) и  $=$  (2-местный).  $\cong(x, y, z, t)$  записывается как  $xy \cong zt$ . Запишите следующие высказывания в виде формул в этой сигнатуре:
  - а) Треугольник  $xyz$  равносторонний.
  - б) Прямые  $xy, zt$  параллельны.
  - в) Прямые  $xy, zt$  перпендикулярны.
  - г) Угол  $\angle xyz$  равен  $60^\circ$ .
2. Рассмотрим сигнатуру, содержащую предикатные символы  $T, \Pi$  (одноместные) и  $\in, =, \perp$  (двуместные).  $T(x), \Pi(x)$  читаются соответственно как « $x$  — точка», « $x$  — прямая», а  $\in, =, \perp$  — соответственно как «принадлежит», «равно» и «перпендикулярно». Запишите следующие высказывания в виде формул в этой сигнатуре:
  - а) Прямые  $x, y$  параллельны.
  - б) Через любые две различные точки проходит единственная прямая.
  - в)  $x, y, z$  — вершины треугольника.
3. Докажите, что объединение, пересечение и разность двух определимых множеств есть определимое множество.
4. Выразите следующие множества и предикаты в данных моделях:
  - а)  $\{0\}, \{1\}, x = y$  в  $(\mathbb{N}, <)$ ,
  - б)  $x = y, x = y + 1$  в  $(\mathbb{Z}, <)$ ,
  - в)  $x = 0, x = -y$  в  $(\mathbb{Z}, +, =)$ .
5. Пусть  $A$  — произвольное множество. Рассмотрим модель  $(P(A), =, \cap, \cup)$ , где « $=$ » — предикат равенства,  $\cap$  и  $\cup$ , соответственно, пересечение и объединение множеств. Запишите формулу, говорящую, что
  - а)  $x \subseteq y$ ;
  - б)  $x$  — одноэлементное множество;
  - в)  $x$  — двухэлементное множество.
6. Общезначимы ли следующие формулы? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.
  - а)  $\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ ;
  - б)  $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$ .