Домашняя работа.

№1.

$K_1 = K_4 = 3K$ $K_2 = K_3 = 2K$
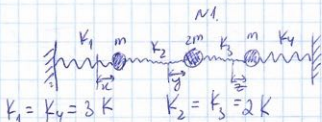
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -K_1 x - K_2(x-y) = x(-K_1-K_2) + y \cdot K_2 \\ 2m\ddot{y} = K_2(x-y) - K_3(y-z) = x \cdot K_2 + y \cdot (-K_2-K_3) + z \cdot K_3 \\ m\ddot{z} = K_3(y-z) - K_4 z = y \cdot K_3 + z \cdot (-K_3-K_4) \end{cases}$$

$$\ddot{X} = -AX$$

$$A = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 5K & -2K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -2K & 5K \end{pmatrix} = \frac{K}{m}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 41\lambda - 30 = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda - 6) = 0$$
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 6$$

$\Rightarrow$ собств знач A: $\frac{K}{m}, \frac{5K}{m}, \frac{6K}{m}$; $\omega_1^2 = \frac{K}{m}, \omega_2^2 = \frac{5K}{m}, \omega_3^2 = \frac{6K}{m}$

$A - \lambda_1 E$:
$$\begin{pmatrix} \frac{4K}{m} & -\frac{2K}{m} & 0 \\ -\frac{K}{m} & \frac{K}{m} & -\frac{K}{m} \\ 0 & -\frac{2K}{m} & \frac{4K}{m} \end{pmatrix} = \frac{K}{m}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

собств вектор: $(1, 2, 1)$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

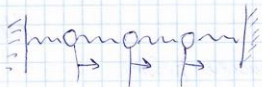2 лин. нез-м стр $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A - \lambda_2 E$: $\frac{K}{m}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ собств вектор: $(1, 0, -1)$

$A - \lambda_3 E$: $\frac{K}{m}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

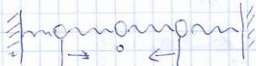$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ собств вектор: $(2, -1, 2)$

$\psi_1 = (1, 2, 1)$ [spring diagram] $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\psi_2 = (1, 0, -1)$ [spring diagram] $\omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{m}}$ норм. частот
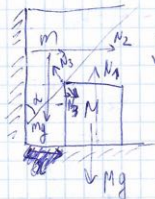
$\psi_3 = (2, -1, 2)$ [spring diagram] $\omega_3 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$

$\psi_i \cos \omega_i t$, $\psi_i \sin \omega_i t$ $i = 1, 2, 3$ нормальные моды

N 2.

$$\begin{cases} M\ddot{x} = N_3 \cos\alpha \quad \dots \dots \\ M\ddot{y} = N_1 - Mg - N_3 \sin\alpha \quad \dots \dots ! \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = N_2 - N_3 \cos\alpha \\ m\ddot{y} = N_3 \sin\alpha - mg \end{cases}$$

число степеней свободы: 1

\# степ свободы =
= \#ур-ий ур-ий Ньютона –
– \# нез. сил р-ций = 4 – 3 = 1

$m\ddot{x}$ $N_2 = N_3 \cos\alpha = M\ddot{x}$

$N_1 = Mg + N_3 \sin\alpha$

$\ddot{x} = \frac{N_3 \cos\alpha}{M}$ $N_3 = \frac{M\ddot{x}}{\cos\alpha}$

$\ddot{y} = \frac{N_3 \sin\alpha - mg}{m} = \frac{N_1 - Mg - mg}{m}$

$\ddot{y} = \frac{\frac{M\ddot{x}}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha - mg}{m} = \frac{M\ddot{x} \cdot tg\alpha - mg}{m}$

$tg\alpha = \frac{x}{y}$

$\ddot{x} =$

$\ddot{x} -$

$m\ddot{y} -$

$-(1-s)$

$N3.$

$\vec{N}$; $\vec{T}$; $\downarrow \vec{g}$; $\uparrow y$; $|\vec{F}_{тр}| = k \cdot |\vec{N}|$

$\vec{F}_{тр}$; M ; $\vec{T}$

y ; $\downarrow \vec{m}\vec{g}$; x

$\uparrow \vec{T}$; m ; $\downarrow m\vec{g}$; $|\vec{m}| = |\vec{T}|$

чел свобод =
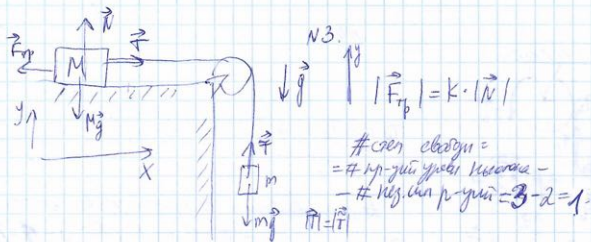= # кр-дит угол кьютна –
– # нез. сил р-ний = 3 – 2 = 1

число степеней свободы: 1

(1) $\{ M\ddot{x} = T - F_{тр} = T - k \cdot N$

(2) $\{ M\ddot{y} = N - Mg = 0 \qquad N = Mg$

(3) $m\ddot{y} = -mg + T$

$\ddot{x} = -\ddot{y}$ нить нерастяжима $\quad x + y = c$; $\ddot{x} + \ddot{y} = 0$

(1)+(3) ~~$M(\ddot{x} - \ddot{y}) = -mg - kN$~~
~~$2M\ddot{x} = mg - kMg$~~
~~$\ddot{x} = \ddot{y} = \dfrac{g(m - kM)}{2M}$~~

(1)-(3) $M\ddot{x} - m\ddot{y} = -kN + mg$

$M\ddot{x} + m\ddot{x} = -kN + mg$

$\ddot{x}(M + m) = -kN + mg$

$\ddot{x} = \dfrac{-kN + mg}{M + m} = \dfrac{-kMg + mg}{M + m}$

$\ddot{y} = \dfrac{kN - mg}{M + m} = \dfrac{kMg - mg}{M + m}$
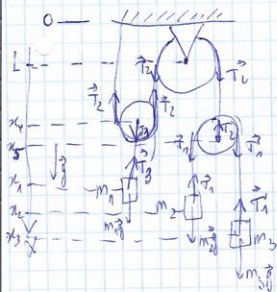
А если кирпич не движется:

$T = F_{тр}$ $\qquad F_{тр} \leq \mu N$

$T = mg$ $\qquad mg \leq \mu Mg \Rightarrow \underline{m \leq M\mu}$
$\qquad\qquad\qquad$ при таком условии
$\qquad\qquad\qquad$ кирпич не движ.

$$T_3 = 2T_2 = 4T_1$$
$$T_2 = 2T_1$$

\# степ свободы = \# кр-урий уравн. Ньютона —
— \# независим р-урий = 3 − 1 = 2

$$|\vec{T_1}| = |\vec{T_1'}|$$

$$\ell_1 = x_3 - x_5 + \pi R_1 + x_2 - x_5 + x_1 - x_4$$

$$\ell_2 = x_5 - L + \pi R_2 + x_4 - L + \pi R_3 + x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = const \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = const$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 + \dot{x}_4 + 2\dot{x}_4 = 0$$
$$2x_4 + x_5 = const \qquad \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 + 3\ddot{x}_4 = 0$$
$$2\dot{x}_4 = -\dot{x}_5$$

$$x_4 - x_4 = const \quad \dot{x}_1 - \dot{x}_4 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{4\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 0}$$

$$\begin{cases} m_3\ddot{x}_3 = m_3 g - T_2\sqrt{2} \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T_2/2 \\ m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - 2T_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}_3 = g - \dfrac{T_2}{2m_3} \\ \ddot{x}_2 = g - \dfrac{T_2}{2m_2} \\ \ddot{x}_1 = g - \dfrac{2T_2}{m_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\left(g - \dfrac{2T_2}{m_1}\right) + g - \dfrac{T_2}{2m_2} + g - \dfrac{T_2}{2m_3} = 0$$

$$6g = \dfrac{8T_2}{m_1} + \dfrac{T_2}{2m_2} + \dfrac{T_2}{2m_3} \quad \Rightarrow T_2 = \dfrac{6g}{\dfrac{8}{m_1} + \dfrac{1}{2m_2} + \dfrac{1}{2m_3}} \cdot \dfrac{m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 m_3} = \dfrac{12g m_1 m_2 m_3}{16 m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2}$$

$$\ddot{x}_1 = g - \dfrac{24 m_2 m_3 g}{16 m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2} = \dfrac{16 m_2 m_3 g + m_1 m_3 g + m_1 m_2 g - 24 m_2 m_3 g}{16 m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2} =$$
$$= \dfrac{-8 m_2 m_3 g + m_1 m_3 g + m_1 m_2 g}{16 m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2}$$

$$\ddot{x}_2 = g - \dfrac{6 m_1 m_3 g}{16 m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2} = \dfrac{16 m_2 m_3 g + m_1 m_3 g + m_1 m_2 g - 6 m_1 m_3 g}{16 m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2} =$$
$$= \dfrac{16 m_2 m_3 g - 5 m_1 m_3 g + m_1 m_2 g}{16 m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2}$$

$$\ddot{x}_3 = g - \dfrac{6 m_1 m_2 g}{16 m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2} = \dfrac{16 m_2 m_3 g + m_1 m_3 g - 5 m_1 m_2 g}{16 m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2}$$
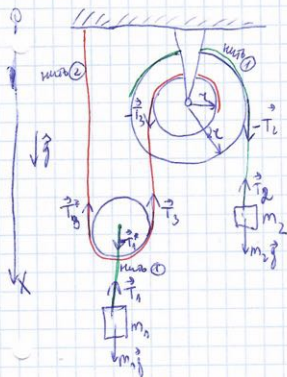
степеней свободы = # ур-ий уравн Ньют-
- # нез сил р-ций = $2 - 1 = 1$

$$\circledast \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T_2 \end{cases}$$

$$T_1 = 2 T_3$$

т.к радиум r и $2r$, $T_3 = 2 T_2$

$$\Rightarrow T_1 = 4 T_2$$

Пусть катушка повернулась по часовой стрелке на угол φ

$$\Delta \ell_{\text{нить}①} = 2 r \varphi$$
$$\Delta \ell_{\text{нить}②} = r \varphi$$

$$\begin{cases} 2x_1 + r\varphi = const \\ x_2 - 2r\varphi = const \end{cases} \quad \begin{cases} 2\dot{x}_1 + r\dot{\varphi} = 0 \\ \dot{x}_2 - 2r\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r\dot{\varphi} = -2\dot{x}_1 \\ r\dot{\varphi} = \dfrac{\dot{x}_2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2\dot{x}_1 = \frac{\dot{x}_2}{2} \qquad \dot{x}_2 + 4\dot{x}_1 = 0$$

$$\ddot{x}_2 = -4\ddot{x}_1$$

$$\Rightarrow \circledast \begin{cases} m_2 \cdot (-4\ddot{x}_1) = m_2 g - T_1/4 \\ m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T_1 \end{cases}$$

$$- \begin{cases} -16 m_2 \ddot{x}_1 = 4m_2 g - T_1 \\ 4 m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T_1 \end{cases}$$

$$-16 m_2 \ddot{x}_1 - 4 m_1 \ddot{x}_1 = g(4m_2 - m_1)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{g(4m_2 - m_1)}{-m_1 - 16m_2} = \frac{g(m_1 - 4m_2)}{m_1 + 16m_2}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{-4g(m_1 - 4m_2)}{m_1 + 16m_2}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad tg\Theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\quad tg\varphi = \frac{y}{x}$

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\Theta, \vec{e}_\varphi) = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)\begin{pmatrix} \sin\Theta\cos\varphi & \cos\Theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\Theta\sin\varphi & \cos\Theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{\vec{e}}_r = (\vec{e}_x \cdot \sin\Theta\cdot\cos\varphi + \vec{e}_y\cdot\sin\Theta\cdot\sin\varphi + \vec{e}_z\cdot\cos\Theta)' =$

$= \vec{e}_x \cdot \cos\Theta\cdot\dot\Theta\cdot\cos\varphi + \vec{e}_x \cdot\sin\Theta(-\sin\varphi)\cdot\dot\varphi + \vec{e}_y\cdot\cos\Theta\cdot\dot\Theta\cdot\sin\varphi +$
$+ \vec{e}_y\cdot\sin\Theta\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi + \vec{e}_z(-\sin\Theta)\cdot\dot\Theta =$

$= \dot\Theta(\vec{e}_x\cdot\cos\Theta\cos\varphi + \vec{e}_y\cos\Theta\sin\varphi - \vec{e}_z\sin\Theta) +$
$+ \dot\varphi(-\vec{e}_x\sin\Theta\sin\varphi + \vec{e}_y\sin\Theta\cdot\cos\varphi) =$

$= \dot\Theta\cdot\vec{e}_\Theta + \dot\varphi\cdot\vec{e}_\varphi\sin\Theta$

$\dot{\vec{e}}_\Theta = (\vec{e}_x\cdot\cos\Theta\cos\varphi + \vec{e}_y\cos\Theta\sin\varphi - \vec{e}_z\cdot\sin\Theta)' =$

$= \vec{e}_x\cdot(-\sin\Theta)\cdot\dot\Theta\cdot\cos\varphi + \vec{e}_x\cdot\cos\Theta\cdot(-\sin\varphi)\cdot\dot\varphi +$
$+ \vec{e}_y\cdot(-\sin\Theta)\cdot\dot\Theta\cdot\sin\varphi + \vec{e}_y\cdot\cos\Theta\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi - \vec{e}_z\cdot\cos\Theta\cdot\dot\Theta =$

$= \dot\Theta(-\vec{e}_x\cdot\sin\Theta\cdot\cos\varphi - \vec{e}_y\sin\Theta\sin\varphi - \vec{e}_z\cos\Theta) +$
$+ \dot\varphi(-\vec{e}_x\cos\Theta\sin\varphi + \vec{e}_y\cos\Theta\cos\varphi) =$

$= \dot\Theta\cdot(-\vec{e}_r) + \dot\varphi\cdot(\cos\Theta)\cdot\vec{e}_\varphi = -\dot\Theta\cdot\vec{e}_r + \dot\varphi\cdot\cos\Theta\cdot\vec{e}_\varphi$

$\dot{\vec{e}}_\varphi = (-\vec{e}_x\sin\varphi + \vec{e}_y\cdot\cos\varphi)' = -\vec{e}_x\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi - \vec{e}_y\cdot\sin\varphi\cdot\dot\varphi =$
$= -\dot\varphi(\vec{e}_x\cdot\cos\varphi + \vec{e}_y\cdot\sin\varphi) = -\dot\varphi(\vec{e}_x\cos\varphi(\sin^2\Theta + \cos^2\Theta) + \vec{e}_y\sin\varphi(\sin^2\Theta+\cos^2\Theta))$
$\overset{(*)}{=} -\dot\varphi(\vec{e}_x\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\Theta + \vec{e}_y\cdot\sin^2\Theta\cdot\sin\varphi + \vec{e}_z\cdot\cos\Theta\sin\Theta +$
$+ \vec{e}_x\cdot\cos^2\Theta\cos\varphi + \vec{e}_y\cos^2\Theta\sin\varphi - \vec{e}_z\cdot\sin\Theta\cos\Theta) =$

$= -\dot\varphi\cdot(\vec{e}_r\cdot\sin\Theta + \vec{e}_\Theta\cdot\cos\Theta).$

$\vec{r} = r\cdot\vec{e}_r$
$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\cdot\vec{e}_r + r\cdot\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r(\dot\Theta\cdot\vec{e}_\Theta + \dot\varphi\cdot\vec{e}_\varphi\cdot\sin\Theta) =$
$= \dot{r}\cdot\vec{e}_r + r\cdot\dot\Theta\cdot\vec{e}_\Theta + r\dot\varphi\cdot\sin\Theta\cdot\vec{e}_\varphi$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\dot{r}\cdot\vec{e_r} + r\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\theta} + r\cdot\dot{\varphi}\sin\theta\cdot\vec{e_\varphi}\right)' =$$

$$= \ddot{r}\cdot\vec{e_r} + \dot{r}\cdot\dot{\vec{e_r}} + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\cdot\vec{e_\theta} + r\cdot\dot{\theta}\dot{\vec{e_\theta}} +$$

$$+ \dot{r}\cdot\dot{\varphi}\sin\theta\cdot\vec{e_\varphi} + r\cdot\ddot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\vec{e_\varphi} + r\dot{\varphi}\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\varphi} + r\cdot\dot{\varphi}\sin\theta\cdot\dot{\vec{e_\varphi}} =$$

$$= \ddot{r}\cdot\vec{e_r} + \dot{r}\left(\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\cdot\vec{e_\varphi}\right) + r\cdot\ddot{\theta}\cdot\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\cdot\left(-\dot{\theta}\cdot\vec{e_r} + \dot{\varphi}\cos\theta\cdot\vec{e_\varphi}\right) +$$

$$+ \dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\vec{e_\varphi} + r\cdot\ddot{\varphi}\sin\theta\cdot\vec{e_\varphi} + r\dot{\varphi}\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\varphi} +$$

$$+ r\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot(-\dot{\varphi})\left(\vec{e_r}\cdot\sin\theta + \vec{e_\theta}\cdot\cos\theta\right) =$$

$$= \vec{e_r}\left(\ddot{r} - r\cdot(\dot{\theta})^2 - r\cdot\dot{\varphi}^2\sin\theta\right) + \vec{e_\theta}\left(\dot{r}\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta} - r\cdot\dot{\varphi}^2\sin\theta\cdot\cos\theta\right) +$$

$$+ \vec{e_\varphi}\left(\underline{\dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\theta} + r\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\theta + \underline{\dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\theta} + r\ddot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\varphi}\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta\right) =$$

$$= \vec{e_r}\left(\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2 - r\cdot\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \vec{e_\theta}\left(2\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta} - r\cdot\dot{\varphi}^2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\right) +$$

$$+ \vec{e_\varphi}\left(2\dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\theta + 2r\dot{\theta}\cdot\dot{\varphi}\cos\theta + r\cdot\ddot{\varphi}\cdot\sin\theta\right)$$

На $\mathbb{R}^3$ без оси Z переход к сферическим координатам несингулярен, т.к. переход к сферическим координатам называется несингулярным в точке, где якобиан замены координат отличен от 0.