Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 2

16 марта 2021

Теория конечной модели

Все сигнатуры с равенством, все модели нормальные.

Определения

- Теория сильно категорична, если все ее модели изоморфны.
- Теория конечно аксиоматизируема, если она эквивалентна конечной теории.

Теорема 1.6

Пусть Ω - конечная сигнатура, M — конечная модель Ω. Тогда

- $Th(M)$ конечно аксиоматизируема.
- $Th(M)$ сильно категорична.

Доказательство теоремы.

Пусть M — конечная модель конечной сигнатуры Ω.
Строим формулу A_M, которая полностью описывает M.

Теория конечной модели

Пусть $M = \{m_1, \dots, m_n\}$. Положим

$$A_M := \exists x_1 \dots \exists x_n B_M(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$B_M(a_1, \dots, a_n) := \bigwedge_{1 \le i < j \le n} (a_i \neq a_j) \wedge \forall y \bigvee_{i=1}^{n} (y = a_i) \wedge$$

$$\bigwedge \{c = a_i \mid c \in Const_\Omega,\ M \vDash c = m_i\} \wedge$$

$$\bigwedge \{f(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = a_j \mid f \in Fun_\Omega,\ M \vDash f(m_{i_1}, \dots, m_{i_k}) = m_j\} \wedge$$

$$\bigwedge \{P(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \mid P \in Pred_\Omega,\ M \vDash P(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})\} \wedge$$

$$\bigwedge \{\neg P(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \mid P \in Pred_\Omega,\ M \vDash \neg P(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})\}.$$

Лемма 1.7. Для модели M' сигнатуры Ω

$$M' \vDash A_M \Leftrightarrow M' \cong M.$$

Теория конечной модели

Доказательство леммы.
(⇐) Проверяем $M \vDash A_M$, это следует из $M \vDash B_M(m_1, \ldots, m_n)$.

(⇒) Предположим, что $M' \vDash A_M$ и построим изоморфизм M на M'.
По определению истинности, найдутся $m'_1, \ldots, m'_n \in M'$, для которых

$$M' \vDash B_M(m'_1, \ldots, m'_n).$$

Докажем, что отображение φ, переводящее каждый m_i в m'_i — искомый изоморфизм.

Окончание доказательства теоремы.
Заметим: $Th(M) \sim \{A_M\}$.
1. По лемме 1.7
$A_M \in Th(M)$ и значит,

$$M' \vDash Th(M) \Rightarrow M' \vDash A_M.$$

2. Обратно, если $M' \vDash A_M$, то по лемме 1.7, $M' \cong M$. И тогда $M' \vDash Th(M)$.

Теория конечной модели

$Th(M)$ сильно категорична, т.к. эквивалентная ей теория $\{A_M\}$ сильно категорична по лемме 1.7.

Следствие 2.1.
Если M — конечная модель и $M' \equiv M$, то $M' \cong M$.
Доказательство. Если $M' \equiv M$, то $M' \vDash Th(M)$. Тогда, по теореме 1.6, $M' \cong M$.

Определимость и автоморфизмы

k-местный предикат на множестве M — это отображение $\gamma : M^k \longrightarrow \{0, 1\}$.
k-местное отношение на множестве M — это множество $R \subset M^k$.

Рассмотрим формулу $A(\overrightarrow{b})$, где $\overrightarrow{b} = (b_1, \dots, b_k)$. *$k$-местный предикат, определимый формулой $A(\overrightarrow{b})$ в модели M,* — это $A_M : M^k \longrightarrow \{0, 1\}$ такое, что для всех $m_1, \dots, m_k$

$$A_M(m_1, \dots, m_k) = |A(m_1, \dots, m_k)|_M.$$

Теорема 2.2
Пусть α — автоморфизм модели , $A(b_1, \dots, b_k)$ — формула в ее сигнатуре. Тогда для всех $m_1, \dots, m_k \in M$

$$A_M(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) = A_M(m_1, \dots, m_k).$$

В сокращенной записи:

$$A_M(\alpha\overrightarrow{m}) = A_M(\overrightarrow{m}).$$

Таким образом, определимый в M предикат инвариантен при всех автоморфизмах M.