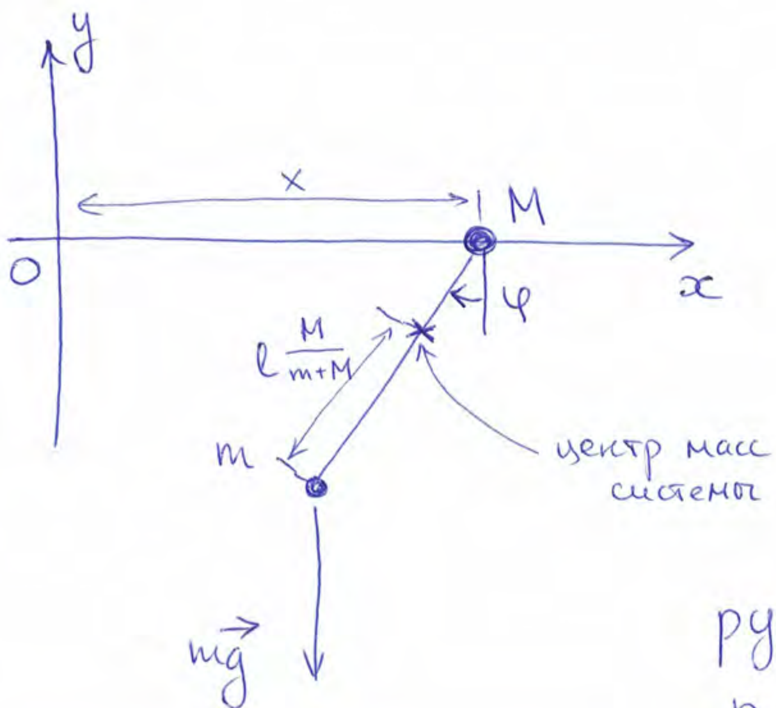
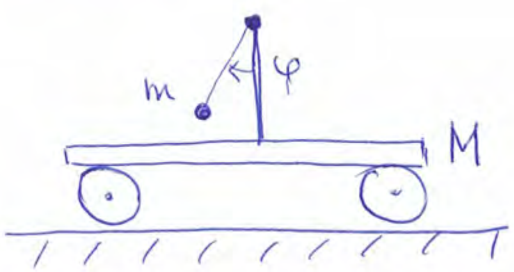
Примеры исследования лагранжевых механических систем.
Отделение движения центра масс. Законы сохранения.
Исследование стационарных траекторий

1 Эллиптический маятник



Две массы m и M соединены (невесомым, нерастяжимым) стержнем длины l. M может свободно перемещаться вдоль оси $O\vec{x}$, m вращается вокруг M в плоскости xOy. Вдоль оси $O\vec{y}$ вниз действует однородная сила тяжести с ускорением $\vec{g}$.

Аналог:



Число степеней свободы системы – 2

Координаты – x – позиция массы M по оси $O\vec{x}$, φ угол отклонения стержня от оси $\vec{Oy}$.

Конфигурационное пространство системы: $\mathbb{R}^1 \times S^1$.

$x \in (-\infty, +\infty)$; $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left\{ \left((x + l\sin\varphi)^{\cdot}\right)^2 + \left((-l\cos\varphi)^{\cdot}\right)^2 \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{T = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + ml\cos\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2}$$

Квадратичная форма скоростей $\dot{x}, \dot{\varphi}$, но недиагональная.

Потенциальная энергия:

$$\boxed{U = -mgl\cos\varphi}$$

Выбранные координаты не оптимальны, поскольку кин. энергия T в них не является диагональной квадратичной формой скоростей.

Вспомним, что в задаче 2-х тел (лекция 3) и в примере 1 лекции 5 (стр 5) мы переходили в систему центра масс. Это стоит делать всегда, когда набор взаимодействующих частиц (составных частей системы) движется без ограничений в пространстве

Отступление о системе центра масс.

Теорема о центре масс:

Если система состоит из набора частиц $m_i, \vec{r}_i \}_{i=1\dots n}$, движущихся без внешних ограничений, то выбирая в качестве новых координат

$$\boxed{\vec{R} := \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$ — координаты центра масс системы

и

$$\boxed{\vec{s}_i := \vec{r}_i - \vec{R}}$$ — координаты частиц в системе центра масс,

получаем выражение для кинетической энергии системы

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} = \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{\vec{s}}_i^{\,2}}{2}},$$

где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — масса всей системы; $\vec{s}_i$ — не являются линейно независимыми: $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{s}_i = 0$.

Этот переход $\vec{r}_i \mapsto \vec{R}, \vec{s}_i$ полезен, когда потенциальная энергия взаимодействия частиц $\vec{r}_i$ (или жесткие связи между ними) зависит только от их положения друг относительно друга

В нашем примере удобно использовать координату центра масс системы по оси $O\vec{x}$:

$$\boxed{X = \frac{Mx + m(x + l\sin\varphi)}{M+m}}$$

Заменив $x \mapsto X$ получаем (проверьте):

$$\boxed{T = \frac{m+M}{2}\dot{X}^2 + \frac{ml^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2}$$

форма кин. энергии диагонализовалась

Лагранжиан:

$$\boxed{L = T - U = \frac{m+M}{2}\dot{X}^2 + \frac{ml^2}{2}\left(1 \;\; \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа

а) по переменной X:

$$L_X := \frac{d}{dt}\left((m+M)\dot{X}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(m+M)\dot{X} = \mathrm{const}}$$

закон сохранения импульса системы вдоль оси $\overrightarrow{Ox}$.

б) по переменной φ:

$$\boxed{L_\varphi := ml^2\frac{d}{dt}\left(\left(1 \;\; \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}\right) - \frac{ml^2}{2}\frac{m}{m+M}\dot{\varphi}^2\sin(2\varphi) + mgl\sin\varphi = 0}$$

Это уравнение сложное, вместо него лучше анализировать закон сохранения энергии, а из этого уравнения лишь извлечь информацию о стационарном по φ решении:

$$\varphi = \varphi_0 = const$$

$$L_\varphi \Big|_{\substack{\varphi=\varphi_0 \\ \dot\varphi=\ddot\varphi=0}} = mgl\sin\varphi_0 = 0$$ $\Rightarrow$ имеется лишь две стационарных траектории $\boxed{\varphi = 0}$ и $\boxed{\varphi = \pi}$

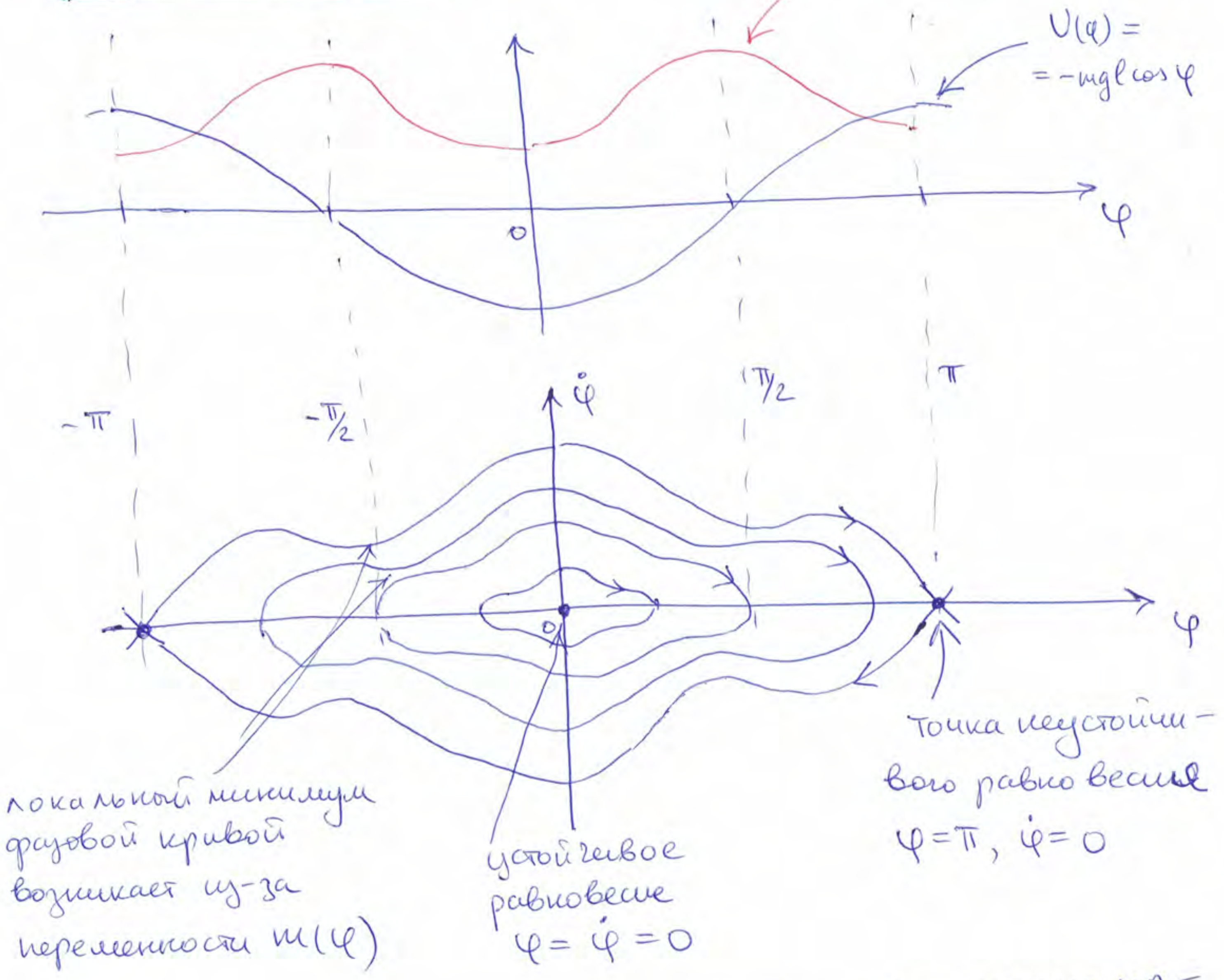
Т.к. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, имеем закон сохранения энергии:

$E = T + U = const$. Исключим из него кин. энергию движения центра масс по оси $\vec{Ox}$ (всё равно она – константа)

$$\mathcal{E} = E - \frac{m+M}{2}\dot{X}^2 = \boxed{\frac{ml^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot\varphi^2 - mgl\cos\varphi}$$

Это эффективная одномерная система, похожая на математический маятник, но только с переменной массой. $\boxed{m(\varphi) = m\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)}$

Фазовый портрет:



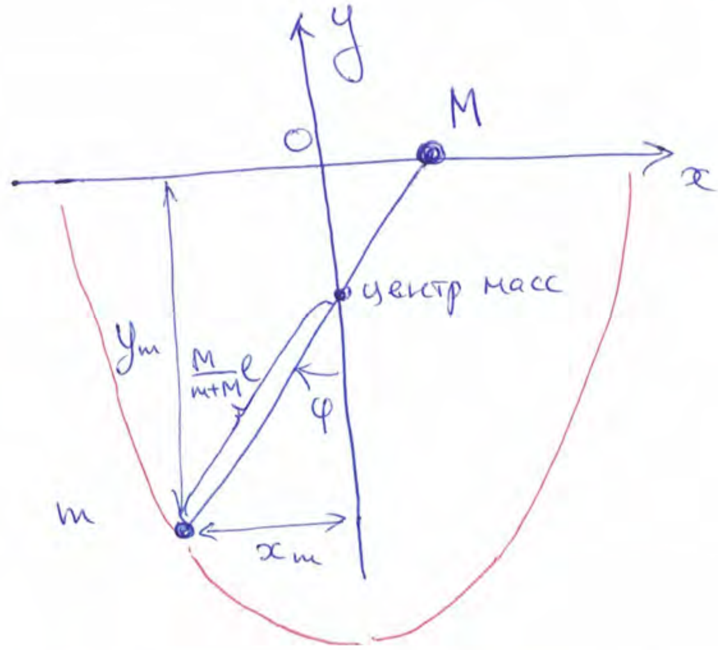
Точки равновесия – это те самые две стационарных (по φ) траектории движения, что мы получили на стр 5

В заключение объясним название маятника: если перейти в систему центра масс (только) по оси $\vec{Ox}$, то координаты массы m – (x_m, y_m) имеют вид (см. Рис.)

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{M}{m+M}\, l \sin\varphi \\ y_m = -l\cos\varphi \end{cases}$$

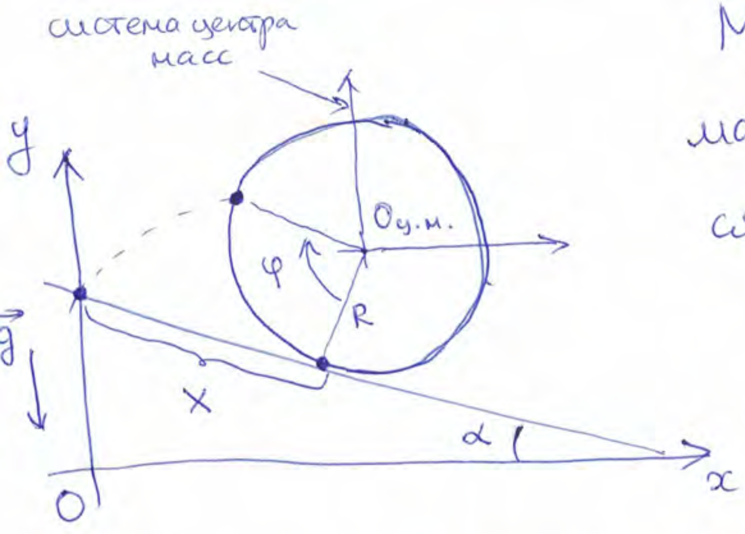
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{x_m^2}{\left(\frac{M}{m+M}l\right)^2} + \frac{y_m^2}{l^2} = 1}$$



Частица m движется в этой системе по эллипсу с большой полуосью l и малой полуосью $\frac{M}{m+M}l$.

2 Колесо, скатывающееся по наклонной плоскости.



Массивный однородный обод массы M и радиуса R скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости.

Угол наклона плоскости к горизонтали – α.

Вдоль оси $\vec{Oy}$ вниз действует однородная сила тяжести с ускорением $\vec{g}$.

Для подсчета кинетической энергии системы удобно перейти в систему центра масс. Её начало расположено в центре обода (следствие его однородности), а оси сонаправлены осям исходной ИСО (так определяется система центра масс).

По теореме о центре масс (см. стр 10)

$$T = T_{\substack{\text{центра}\\ \text{масс}}} + T_{\substack{\text{относительного}\\ \text{движения}}}$$

У нас $T_{ц.м.} = M\dfrac{\dot{x}^2}{2}$ (см. Рис.)

$$T_{\text{отн. движ}} = M\frac{(R\dot{\varphi})^2}{2}$$

это потому, что все точки обода вертятся вокруг центра масс по окружности радиуса R с угловой скоростью $\dot{\varphi}$.

В системе действует сила трения покоя (нет проскальзывания), которая обеспечивает связь x и φ:

$$\boxed{x = R\varphi + \text{const}}$$

С учётом связи получаем:

$$\boxed{T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{M\dot{x}^2}{2} = M\dot{x}^2}$$

Потенциальная энергия однородного обода в поле тяжести

$$\boxed{U = Mg\, y_{\substack{\text{центра}\\ \text{масс}}} = -Mg\, x \sin\alpha + \text{const}}$$

Лагранжиан системы:

$$\boxed{L = M\dot{x}^2 + mgx\sin\alpha}$$

Уравнение Э.–Л.

$$L_x : = 2M\ddot{x} - mg\sin\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{g}{2}\sin\alpha}$$

Это ускорение в 2 раза ниже, чем было бы у обода, скатывающегося по наклонной плоскости без трения. Это эффект силы трения покоя — единственной силы трения, для которой подходит лагранжев формализм.

Эта сила трения просто "убивает" степени свободы. У нашего обода – одна степень свободы, а у скользящего обода их было бы две.