

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №1**

1. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Счётные множества. Объединение счётного множества счётных множеств счётно. Теорема Кантора: множество всех подмножеств множества  $X$  неравномощно  $X$ . Несчётность множества вещественных чисел. Аксиома выбора, лемма Цорна, их эквивалентность (без доказательства).
2. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычеты и коэффициенты ряда Лорана.
3. В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  найдите расстояние от начала координат до аффиной гиперплоскости, заданной уравнением  $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 1$ .

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №2**

1. Производящие функции. Линейные рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции. Формула Бине для чисел Фибоначчи.
2. Теорема Коши об интеграле голоморфной функции по замкнутому контуру. Интегральная формула Коши.
3. Существует ли матрица, характеристический многочлен к которой равен  $\chi$ , а минимальный  $\mu$ , где

(a)  $\chi(\lambda) = (\lambda^6 - 1), \mu(\lambda) = (\lambda^3 - 1)$

(b)  $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3, \mu(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

(c)  $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda - 2)^5, \mu(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3?$

Если да, то приведите пример такой матрицы. Если нет, докажите.

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ"

\_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №3**

1. Производящие функции. Линейные рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции. Формула Бине для чисел Фибоначчи.
2. Конструкция интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (все без доказательств). Неравенство Чебышёва (с доказательством).
3. Изоморфны ли группы  $\mathbb{Q}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$  ( $\mathbb{H}$  — тело кватернионов) и группа диэдра  $D_4$  (т.е. группа симметрий квадрата)?

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №4**

1. Вероятностное пространство. Условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса. Независимость событий. Случайные величины. Функция распределения, плотность. Дискретные и непрерывные случайные величины. Математическое ожидание. Дисперсия.
2. Общее решение линейных диофантовых уравнений, теорема Сильвестра о линейных комбинациях натуральных чисел с неотрицательными коэффициентами, пифагоровы тройки, существование и структура решений уравнения Пелля.
3. Вычислите интеграл. Контур обходится один раз в положительном направлении (против часовой стрелки)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"

УТВЕРЖДАЮ  
Академический совет  
ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ"  
протокол № 9 от "09" июня 2021 г.

## Междисциплинарный экзамен по направлению 01.03.01 "Математика"

### Билет №5

1. Виды сходимости последовательностей случайных величин: почти наверное, по вероятности, по распределению. Закон больших чисел (с доказательством). Усиленный закон больших чисел (формулировка).
2. Коммутативные кольца. Примеры колец. Кольца вычетов. Малая теорема Ферма.
3. Вычислите интеграл

$$\int \int_{x^2+y^2 \leq a^2} \cos(x^2 + y^2) dx dy, \quad \text{где } a > 0$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №6**

1. Характеристические функции. Выражение сходимости по распределению в терминах характеристических функций (без доказательства). Центральная предельная теорема (формулировка, сведение к предельной теореме для характеристических функций).
2. Конечные поля. Примеры. Цикличность мультипликативной группы конечного поля.
3. Приведите к дизъюнктивной нормальной форме следующую формулу:

$$(((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vee ((r \rightarrow p) \rightarrow (p \vee q))).$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"

УТВЕРЖДАЮ  
Академический совет  
ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ"  
протокол № 9 от "09" июня 2021 г.

## Междисциплинарный экзамен по направлению 01.03.01 "Математика"

### Билет №7

1. Предел функции, непрерывность, теорема о промежуточном значении непрерывной функции, равномерная непрерывность непрерывной функции на отрезке.
2. Характеристический и минимальный многочлены линейного оператора, теорема Гамильтона–Кэли.
3. Вычислите несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №8**

1. Сходимость числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов (сходимость абсолютно сходящегося ряда, перестановка членов). Признаки сходимости Д'Аламбера и Коши. Условно сходящиеся ряды. Примеры условно сходящихся рядов.
2. Фундаментальная группа топологического пространства. Ее вычисление для окружности  $S^1$  и сферы  $S^2$ .
3. Выясните, является ли полной система булевых функций

$$\{\neg x, (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x), 0, 1, x + y + z\}$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня



**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №9**

1. Методы решения дифференциальных уравнений: решение уравнений с разделяющимися переменными, метод вариации постоянных для линейных неоднородных уравнения первого порядка, однородные уравнения.
2. Евклидово кольцо. Примеры: кольцо целых чисел, кольцо целых комплексных (гауссовых) чисел, кольцо многочленов над полем. Алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя двух элементов евклидова кольца. Факториальность евклидова кольца.
3. Докажите, что симметрическая группа  $S_n$  порождается двумя элементами.

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №10**

1. Формула Тейлора для функции одного переменного. Формы остаточного члена.
2. Производящие функции. Линейные рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции. Формула Бине для чисел Фибоначчи.
3. Найдите жорданову нормальную форму оператора на  $\mathbb{R}^4$ , заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №11**

1. Векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, теорема о ранге матрицы. Определитель матрицы и его свойства. Разложение по строке и столбцу. Определитель произведения матриц.
2. Метрические пространства. Примеры. Открытые множества в метрических пространствах. Структура открытых множеств в  $\mathbb{R}$ . Топологические пространства. Замкнутые множества; замыкание множества. Непрерывные отображения топологических пространств.
3. Вычислите несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №12**

1. Векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, теорема о ранге матрицы. Определитель матрицы и его свойства. Разложение по строке и столбцу. Определитель произведения матриц.
2. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения и его решения. Задача Коши и теорема о существовании и единственности ее решения (без доказательства). Приближение решения задачи Коши итерациями Пикара.
3. Дано натуральное число  $k > 1$ . Докажите, что для любых натуральных  $m, n$  справедливо

$$\text{НОД}(k^m - 1, k^n - 1) = k^{\text{НОД}(m, n)} - 1$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №13**

1. Несобственные интегралы, признаки сходимости несобственных интегралов.  
Сходимость интегралов  $\int_0^1 x^\alpha dx$  и  $\int_1^\infty x^\alpha dx$
2. Теорема Минковского о выпуклом теле, теорема Кронекера, теорема Вейля о равномерном распределении  $n\alpha$  (без доказательства).
3. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = x \sin x$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №14**

1. Область сходимости степенного ряда с комплексными коэффициентами. Разложение функции, голоморфной в круге, в ряд Тейлора. Интегральная формула для коэффициентов ряда Тейлора.
2. Связность и линейная связность топологического пространства. Связность отрезка. Пример связного нелинейно-связного множества.
3. Существует ли вещественная  $3 \times 3$  матрица  $A$ , удовлетворяющая уравнению

$$A^2 + A + 7I = 0?$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №15**

1. Евклидовы линейные пространства. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогонализация Грама–Шмидта.
2. Дифференцирование функций одного комплексного переменного. Голоморфные функции, условия Коши–Римана, Примеры голоморфных функций. Голоморфность элементарных функций.
3. Найдите производящую функцию последовательности, заданной начальными условиями и рекуррентным соотношением

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} \quad (n > 1)$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №16**

1. Экстремумы и выпуклость функций одного переменного. Исследование функции на экстремумы и выпуклость с помощью производных.
2. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Формулы Крамера. Теорема Кронекера-Капелли.
3. Решите дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня



**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №17**

1. Группы, подгруппы, смежные классы, формула Лагранжа для числа смежных классов.
2. Дифференцируемые функции одного переменного. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа о конечном приращении.
3. Вычислите интеграл. Контур обходится один раз в положительном направлении (против часовой стрелки).

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz.$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"

УТВЕРЖДАЮ  
Академический совет  
ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ"  
протокол № 9 от "09" июня 2021 г.

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №18**

1. Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы, факторгруппы. Теорема о гомоморфизмах групп.
2. Экстремумы функций нескольких переменных, условные экстремумы, множители Лагранжа.
3. Рассмотрим множество всех нестрого убывающих последовательностей натуральных чисел. Является ли данное множество счётным, континуальным или оно имеет иную мощность?

Академический руководитель  
ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №19**

1. Евклидово кольцо. Примеры: кольцо целых чисел, кольцо целых комплексных (гауссовых) чисел, кольцо многочленов над полем. Алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя двух элементов евклидова кольца. Факториальность евклидова кольца.
2. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычеты и коэффициенты ряда Лорана.
3. Найдите  $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{24} \partial y^{26}}(0,0)$  для  $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ .

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня

**Междисциплинарный экзамен  
по направлению 01.03.01 "Математика"**

**Билет №20**

1. Теорема Вильсона, малая теорема Ферма, существование примитивного вычета (первообразного корня) по простому модулю, квадратичные вычеты, символ Лежандра и его свойства, квадратичный закон взаимности Гаусса (б/д).
2. Полные метрические пространства. Примеры. Полнота пространства  $C[a, b]$  непрерывных функций на отрезке. Существование неподвижной точки у сжимающего отображения полного метрического пространства в себя.
3. Решите дифференциальное уравнение

$$y' = (1 + y^2) \cos x$$

Академический руководитель

ОП "Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ" \_\_\_\_\_ Н.В.Походня