Лекция по гладким

29.10.20

Гладкое разбиение единицы

$f: M \to \mathbb{R}$

Опр. Носителем функции f наз.

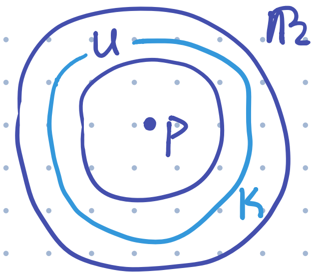
$$\operatorname{supp} f = \{p \in M \mid f(p) \neq 0\}$$

Если $\operatorname{supp} f$ — компакт, то функция f наз. финитной

Опр. M — гладкое многообразие, $K \subset M$

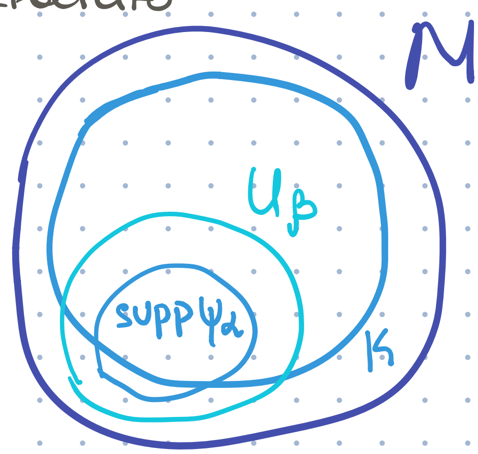
Говорят, что набор функций $\{\psi_\alpha\}$ наз. гладким разбиением 1, если выполн. св-ва:

1) $\forall \alpha \quad 0 \leq \psi_\alpha(p) \leq 1, \quad p \in M$
2) $\forall p \in M \ \exists$ окр-ть $U \ni p$ т.ч. в U лишь конечное число функций ψ_α принимают ненулевые значения
3) $\sum\limits_\alpha \psi_\alpha(p) = 1 \quad p \in K \quad \psi_\alpha$ — гладкие функции



Опр. Пусть $\mathcal{E} = \{\psi_\alpha\}$ — разбиение 1, $K \subset \bigcup\limits_\beta U_\beta$

Разбиение наз. подчиненным покрытию $\{U_\beta\}$, если $\forall \psi_\alpha \ \exists U_\beta : \operatorname{supp} \psi_\alpha \subset U_\beta$



Пример: $f: M \to \mathbb{R}$

$$f(p) = \sum_\alpha (\psi_\alpha(p) f(p))$$

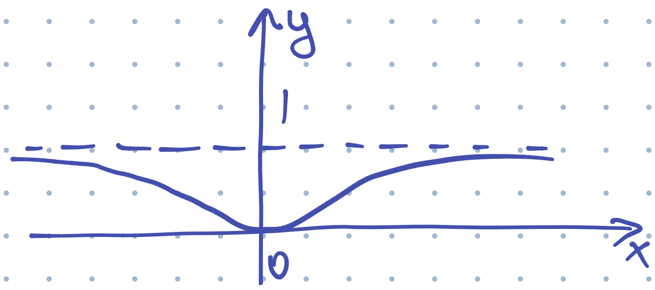
Теорема

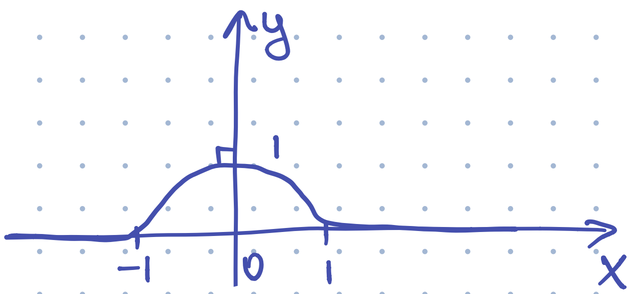
Пусть M – гладкое многообразие, $K \subset M$ компакт, $\{U_\alpha\}$ – покрытие K открытыми мн-вами. Тогда на K $\exists$ гладкое разбиение 1 $\{\psi_\beta\}$, подчинённое покрытию $\{U_\alpha\}$

Построение финитных функций

1) $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Эта ф-ия C_∞-гладкая

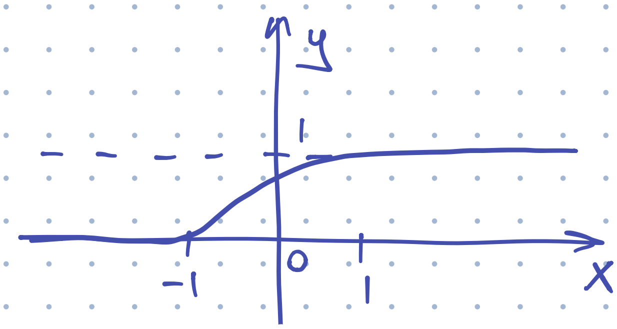


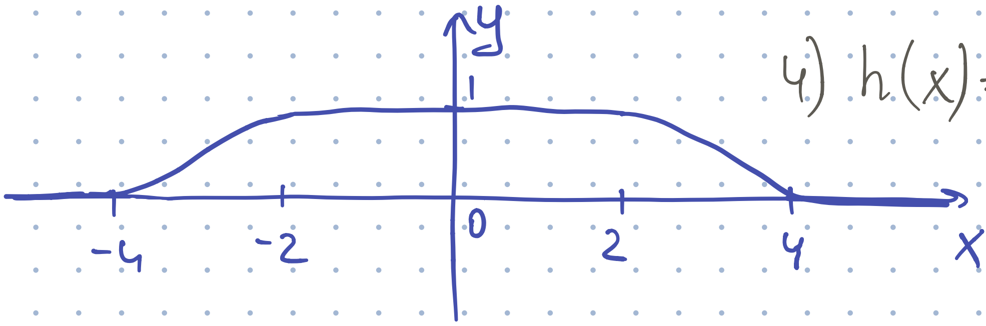


2) $G(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^2} e^{-(x+1)^2} & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

„шляпа"

3) $F(x) = \dfrac{\int_{-\infty}^{x} G(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\,dt}$



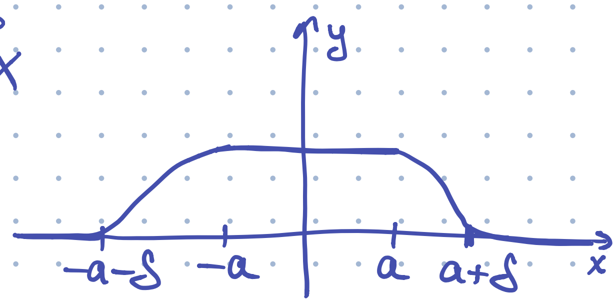


4) $h(x) = F(x+3) + F(-x-3) - 1$

5) $h_N(x) = F(x+N) + F(-x-N) - 1$

$\tilde{h}(x) = h_N\left(\frac{x}{2\delta}\right)$

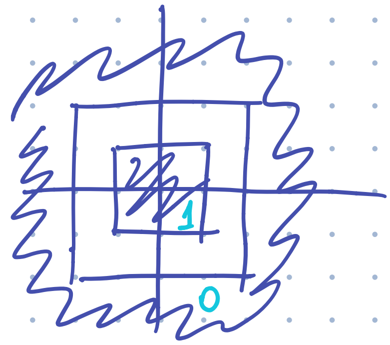
тогда $h_{a,\delta} := h_{a\delta+1}\left(\frac{x}{2\delta}\right)$



$a = \dfrac{N-1}{\delta}$

В многомерном случае

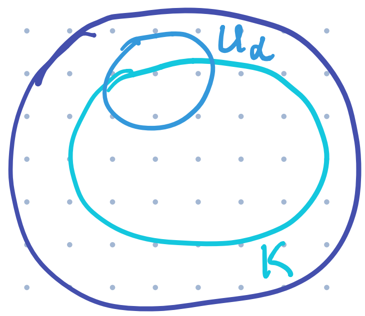
$$H_{a,\delta}=\prod_{i=1}^{n} h_{a,\delta}(x^i) \qquad x=(x^1,\dots,x^n)$$

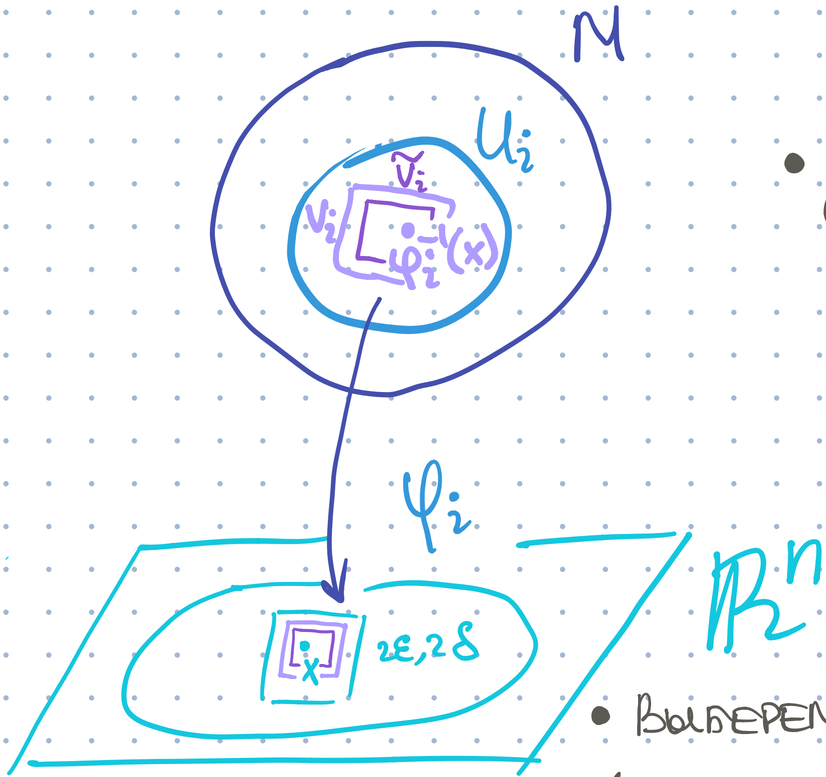


Доказательство теоремы

▷ $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset K$

Выберем из $\{U_\alpha\}$ конечное подпокрытие K $\qquad K\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_i$





- Для $\forall$ точки $x\in\varphi_i(U_i)$ $(i=1,\dots,m)$ рассмотрим куб C_x с центром в x и стороной $2\varepsilon+2\delta$, который $C_{x,\varepsilon+\delta}\subset\varphi_i(U_i)$

- Рассмотрим $V_{i,x}=\varphi_i^{-1}(C^i_{x,\varepsilon+\delta})$
  $\tilde{V}_{i,x}=\varphi_i^{-1}(C^i_{x,\varepsilon})$

- Выберем из $\tilde{V}_{i,x}$ такой поднабор (конечный) $\tilde{V}_j$ $(j=1,\dots,l)$, что $K\subset\bigcup_{j=1}^{l}\tilde{V}_j$ (выбрали конечное подпокрытие в компакте)

- Новое покрытие K картами $\qquad V_{i,x}=\varphi_i^{-1}(C^i_{x,\varepsilon+\delta})$ и $\tilde{V}_{i,x}=\varphi_i^{-1}(C^i_{x,\varepsilon})$

$$\tilde{\psi}_j(p)=\begin{cases}H_{\varepsilon,\delta}(\varphi_j(p)-x_j), & p\in V_j\\ 0, & p\notin V_j\end{cases}$$

$\forall p \in K \ \exists \tilde{\psi}_j$ т.ч. $\tilde{\psi}_j(p) = 1$

бесконечно гладкие

- Нужно, чтобы было выполнено $\sum_j \tilde{\psi}_j(p) = 1$

Определим $\psi_j(p) = \dfrac{\tilde{\psi}_j(p)}{\sum_{j=1}^{l} \tilde{\psi}_j(p)}$ и получим требуемое

- Если K — не всё многообразие, то

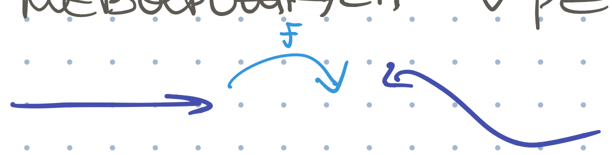
$$\psi_1(p) = \tilde{\psi}_1(p)$$
$$\psi_2(p) = \tilde{\psi}_2(p)\,(1 - \tilde{\psi}_1(p))$$
$$\vdots$$
$$\psi_l(p) = \tilde{\psi}_l(p)\,(1 - \tilde{\psi}_1(p)) \cdot \ldots \cdot (1 - \tilde{\psi}_{l-1}(p))$$
$$1 - \sum_{j=1}^{l} \psi_j(p) = (1 - \tilde{\psi}_1(p)) \ldots (1 - \tilde{\psi}_l(p)) \equiv 0$$

$p \in K$

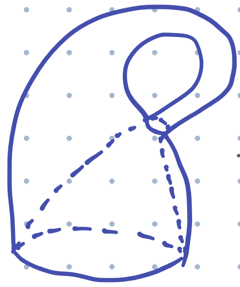
т.к. минимум 1 скобка $= 0$

Вложение многообразия в евклидово пространство

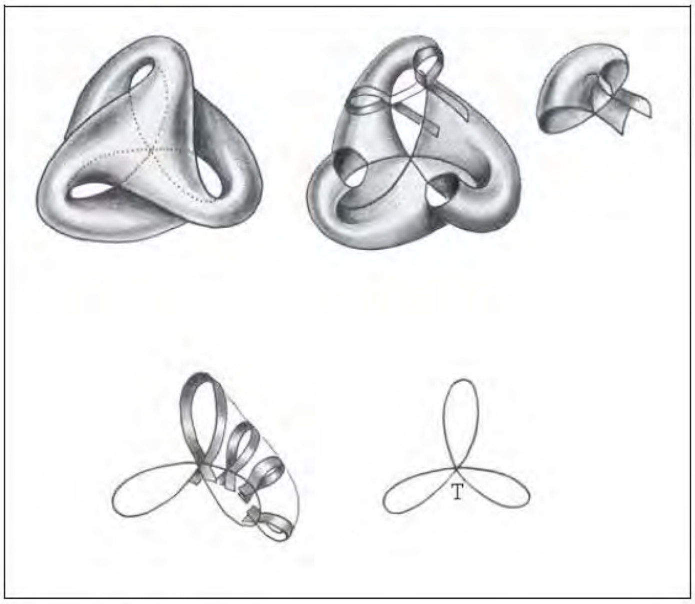
Опр. Гладкое отображ-ие $f: M \to N$ наз. погружением, если $df|_p$ невырожден $\forall p \in M$



погр., но не взаимно однозначно с образом



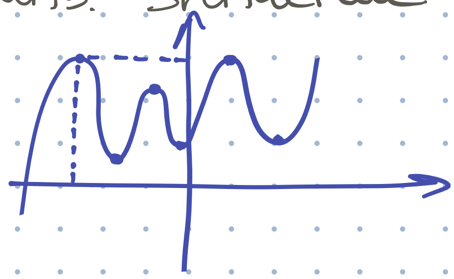
— не регулярная поверхность, т.к. $\exists$ самопересечение, но явл. погружением в $\mathbb{R}^3$



Поверхность Боя — погружение $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$

Опр. Точка $p \in M$ наз. критической т. отображения f, если $df|_p$ — вырожден

Опр. Критическим значением f наз. значение ф-цией в критической точке

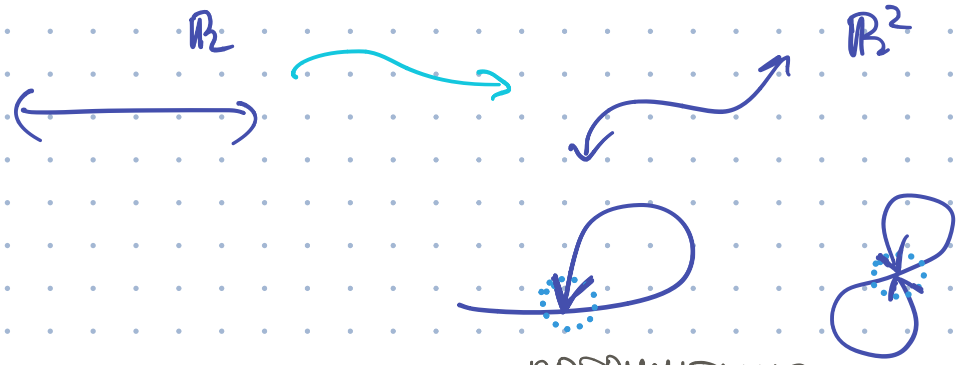


Теорема Сарда У гладкого отображения $f: M \to N$ множество критических значений имеет меру 0

Опр. Пара (L, f) т.ч. $f: L \to M$ называется подмногообразием, если f — инъективное погружение (вз. однознач. с образом)

Опр. $f: M \to N$ наз. вложением, если это инъективное погружение, которое также явл. гомеоморфизмом на образ в индуцированной топологии

Примеры



погружения, но не гомеом. в индуц. топ-ии (не вложения)

Теорема Уитни (сильная)

Любое многообразие M размерности n может быть вложено в $\mathbb{R}^{2n}$

Теорема Уитни (слабая)

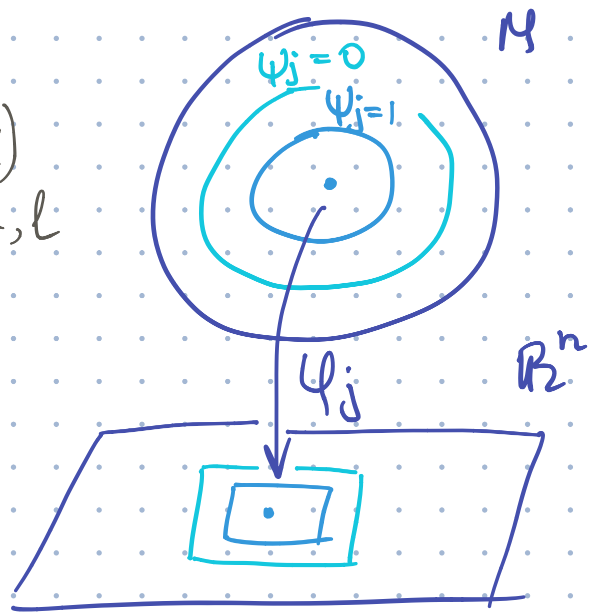
Любое компактное многообразие может быть вложено в $\mathbb{R}^N$ для достаточно большого N

▷ M — комп. многообр. Рассмотрим атлас

$\mathcal{A}=\{(V_j,\varphi_j)\ \ j=1,\dots,l\}$ т.ч.

$\varphi_j(V_j)=(-\varepsilon_j-\delta_j,\varepsilon_j+\delta_j)^n$, $\psi_j(x)$

$j=1,\dots,l$



$$\tilde{\varphi}_j(p)=\begin{cases}\varphi_j(p), & p\in V_j\\ 0, & p\notin V_j\end{cases}$$

$$F: p \longrightarrow \left(\tilde{\varphi}_1(p)\psi_1(p),\dots,\tilde{\varphi}_l(p)\psi_l(p),\ \psi_1(p),\dots,\psi_l(p)\right)\in\mathbb{R}^{n\cdot l+l}$$

- dF — невырожден (т.е. ранг в каждой т. максимален $(=n)$)

  т.к. в некоторой окрестности $\forall$ т. $p \in M$

  $\exists\, \psi_j \equiv 1$

- Проверим, что отображение взаимно однозначно с образом

  Если $p_1, p_2 \in V_j$ $\psi_j(p_1) = \psi_j(p_2)$, то $\varphi_j(p_1) \neq \varphi_j(p_2)$

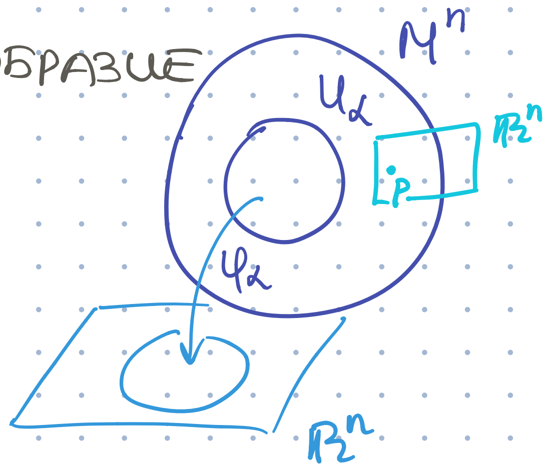
  Если $p_1, p_2 \notin V_j$, то $\psi_j(p) \neq \psi_j(p_2)$ ◭

06.11.20

Лекция по гладким

Векторные поля на многообразии

Атлас на TM



M — n-мерное гладкое многообразие

$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$

$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$

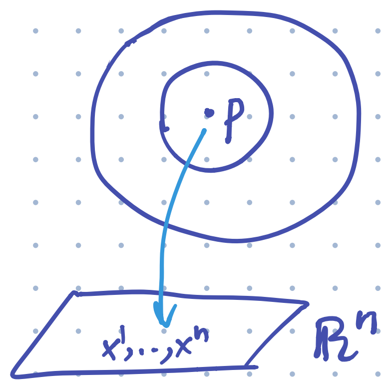
Пусть $\tilde{\mathcal{A}}$ — атлас TM. Определим

$\tilde{U}_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_pM \ni (p, v)$ $p \in U_\alpha$, $v \in T_pM$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} : \underline{(p, v) \longmapsto (\varphi_\alpha(p)}, \underline{dx^1(v), \dots, dx^n(v))}, \quad \varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$$

(U, φ) — карта на M, $x^1, \dots, x^n$ — координаты

$x^i(p) = \varphi^i_\alpha(p)$



$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ $\frac{\partial}{\partial x^i} = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$

Двойственный к $\frac{\partial}{\partial x^i}$ базис —

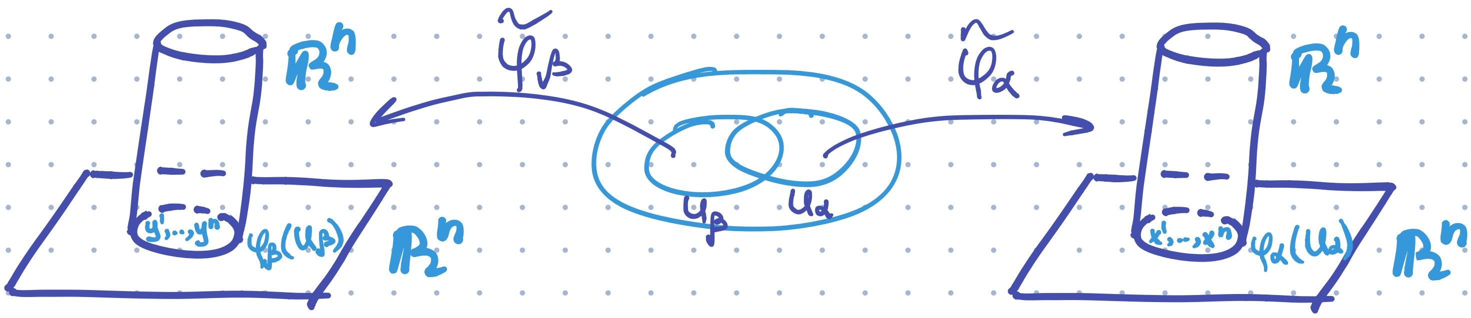
T_p^*M обозн. $dx^1, \dots, dx^n$

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

например $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$dx^i(v) = v^i$ — взятие i-той координаты

Отображение перехода



$$\frac{\partial}{\partial x^i} \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^j_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$y^j = \varphi^j_{\alpha\beta}(x) \Rightarrow$$

Тогда $\underset{x}{v^\alpha} \xrightarrow{\text{в координатах}} \underset{y}{v^\beta} = \sum_{i=1}^{n} v^i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^j_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j} =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots \frac{\partial}{\partial y^n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi^n_{\alpha\beta}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \varphi^n_{\alpha\beta}}{\partial x^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} : (x, v_\alpha) \longmapsto (\varphi_{\alpha\beta}(x), J(\varphi_{\alpha\beta})\, v_\alpha)$$

Касательное расслоение.

$$(E = TM,\ B = M,\ \pi)$$

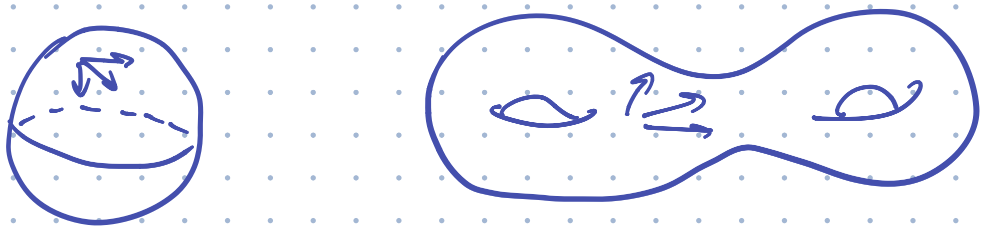
$$\pi : (p, v) \longmapsto p$$

Опр. **Сечением** векторного расслоения наз. такое отображение $s : B \to E$ т.ч. $\pi \circ s = id$

$$X : M \to TM \qquad X : p \mapsto (p, v)$$

Сечение $s: B \to E$ вект. рассл. наз. C^k-гладким, если отображение s C^k-гладкое

Опр. Гладким векторным полем над M наз. гладкое сечение касательного расслоения к M



Векторное поле (координатное опр.)

M – многообр. $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ – атлас на M

Рассм. карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ с коорд. $(x^1, \dots, x^n) = \varphi_\alpha(p)$

В каждом T_pM, $p \in U_\alpha$ базис T_pM: $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$

$$X\Big|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad a_i(x) = a_i(\varphi_\alpha(p)) = dx^i(X(p))$$

гл. функции

Опр. (коорд.) Векторным полем на M наз. такой набор $X_\alpha = \sum_{i=1}^n a_i^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ для каждой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ атласа $\mathcal{A}$, т.ч. при $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ $X_\beta = J(\varphi_{\alpha\beta}) X_\alpha$

$$\begin{pmatrix} a_1^\beta(\varphi_\beta(p)) \\ \vdots \\ a_n^\beta(\varphi_\beta(p)) \end{pmatrix} = J(\varphi_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} a_1^\alpha(\varphi_\alpha(p)) \\ \vdots \\ a_n^\alpha(\varphi_\alpha(p)) \end{pmatrix}$$

<u>Замечание.</u> Вект. поле на M является дифференциальным оператором на $C^\infty(M)$

$f: M \to \mathbb{R}$ $\quad X(f) \in C^\infty(M)$
$f \in C^\infty(M)$

Свойства векторных полей

1) Вект. поля на M образуют линейное пр-во $Vect(M)$
$X, Y \in Vect(M) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha X + \beta Y \in Vect(M)$

2) $X \in Vect(M),\ f \in C^\infty(M) \Rightarrow f \cdot X \in Vect(M)$

3) Вект. поля явл. дифференцированием на пр-ве C^∞

Коммутатор (скобка Ли)

Опр. Коммутатором (скобкой Ли) двух векторных полей $X, Y \in Vect(M)$ наз. оператор $[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$
$f \in C^\infty(M)$

Теорема

Коммутатор векторных полей явл. векторным полем

▷ Рассмотрим карту (U, φ) на M. В ней

$$X = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad Y = \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

По определению

$$X(Yf) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i(x) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b_j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + b_j(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)$$

Аналогично

$$Y(Xf) = \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + a_i(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)$$

$$[X,Y] = X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_j(x) \frac{\partial b_i}{\partial x^j} - b_j(x) \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} f$$

2 порядок дифференц. сохр. => векторное поле

Свойства коммутаторов

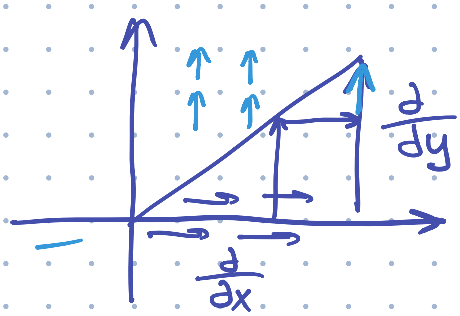
- $[X,X]=0$
- $[X,Y] = -[Y,X]$ — антикоммутативность
- $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X,Z] + \beta[Y,Z]$ — линейность

Примеры 1) $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$

2) $\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}\right] f =$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial f}{\partial y}\right) - x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}$

постоянное единичное поля



Теорема (св-ва коммутатора)

1) $[\ ,\ ]$ — линеен
2) $[\ ,\ ]$ — антикоммутативен $\quad [X,Y] = -[Y,X]$
3) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$
(тождество Якоби)

Соотв. $Vect(M)$ с опер. $[\ ,\ ]$ явл. алгеброй Ли на $\mathbb{R}$

3) 1), 2) ДОКАЗАНИ

3) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$

- $[x,[y,z]] = x(yz-zy) - (yz-zy)x$
- $[y,[z,x]] = y(zx-xz) - (zx-xz)y$
- $[z,[x,y]] = z(xy-yx) - (xy-yx)z$

Лекция по гладким

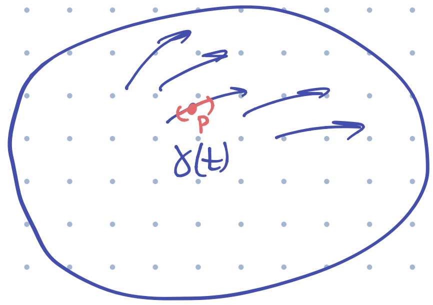
08.11.20

Поток векторного поля

M – гладкое многообразие, $X \in Vect(M)$

Опр Кривая $\gamma(t)$ на M наз. **интегральной кривой (траекторией)** вект. поля X, если $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$ $(*)$

В карте (U, φ) на M с коорд. $x^1, \dots, x^n$ $\quad X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$



$\dot\gamma^i = a_i(\gamma(t))$ $\quad i = 1, \dots, n$

сист. $(*)$ в коорд.

т.е. производная кривой = векторному полю

Теорема о $\exists$ и $!$ решений сист. ОДУ

утверждает, что $\exists\ (\alpha, \beta) \ni t_0$ и $!$ кривая

$\gamma : (\alpha, \beta) \to M$

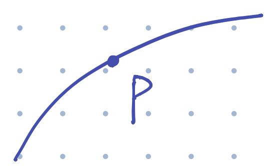
$\gamma(t_0) = p$, что $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$

Лемма (прямое следствие из теоремы)

$X \in Vect(M)$. Тогда $\forall p \in M\ \exists\ a(p), b(p) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ и гл. кривая $\gamma_p : (a(p), b(p)) \to M$, т.ч.

1) $0 \in (a(p), b(p))$, $\gamma_p(0) = p$

2) γ_p – инт. кривая поля X



3) если $\nu : (c, d) \to M$ – гл. кривая, для которой выполнены усл. 1) и 2), то $(c, d) \in (a(p), b(p))$ и

$\nu(t) = \gamma(t) \quad t \in (c, d)$

▷ Из теор. ∃ и ! реш-ий следует, что ∃ инт. кривая

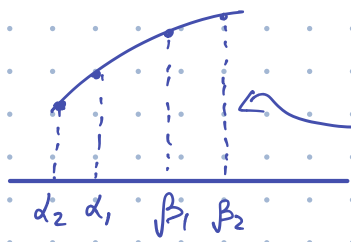
$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, $\gamma(0)=p$

Рассмотрим все такие интервалы (α,β), что ∃ инт. кривая

X $\quad \gamma_{\alpha\beta}:(\alpha,\beta)\to M$

$a(p)=\inf(\{\alpha\})$

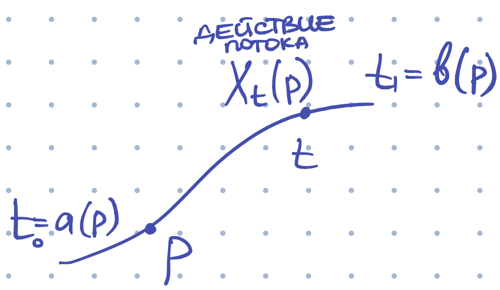
$b(p)=\sup(\{\beta\})$



т.к. кривая !, то можем продолжить α_1 до α_2, β_1 до β_2 ◁

Область определения потока

$$D_t=\{p\in M \mid t\in(a(p),b(p))\}$$



Опр. Действием потока $X_t: D_t\to M$ наз. отображение $X_t: p\mapsto \gamma_p(t)$, $p\in D_t$

11 лекция
2:00:00

Теорема

1) $\forall p\in M$ ∃ откр. окр-ть $V\ni p$ и $\varepsilon>0$, что отображение $(t,p)\longmapsto X_t(p)$ определено на $(-\varepsilon,\varepsilon)\times V$ и явл. гладким отображением из $(-\varepsilon,\varepsilon)\times V$ в M

2) D_t – открыто $\forall t$

3) $\bigcup\limits_{t>0} D_t = M$

4) $X_t: D_t\to D_{-t}$ диффеоморфизм и X_{-t} – обр. диффеом.

5) $s,t\in\mathbb{R}$ область определения $X_s\cdot X_t$ содержится в обл. опр. X_{s+t} и совпадает с ней если $ts\geq 0$

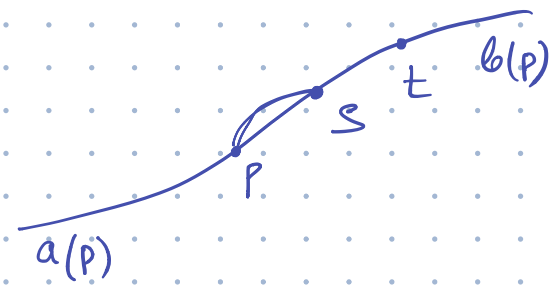
и $X_s\cdot X_t = X_{s+t}$

1) Следствие из теор. о гладкой зависимости решений сист. $\dot{\gamma}_p(t) = X(\gamma_p(t))$ от начальных условий

5) Если $t, s > 0$

То область определения

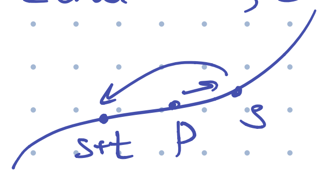
$X_s X_t \overset{?}{-} D_{s+t}$



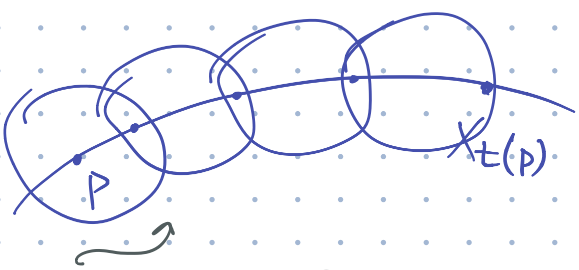
Если $s>0, t<0$, то:

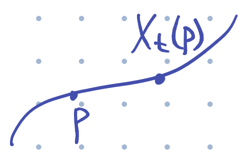
$X_s X_t \; ? \; D_s \cap D_{s+t}$

Если $s>0, t<0$, то



4) $X_t : D_t \longrightarrow D_{-t}$ — взаимно однознач. отображение





можем покрыть конечным числом карт

$X_t = X_{t_k} \circ \dots \circ X_{t_1}, \quad t_1 + \dots + t_k = t$

По теореме о гл. зависимости реш-ий от нач. условий каждое из отобр X_{t_i} явл. гладким и обратимым

2) D_t — открыто

По пункту (4) X_t явл. локальным диффеомор-физмом окр-ти p на окр-ти $X_t(p)$

3) Очевидно

Опр Если $D_t = M$, то действие потока наз. полным

Замечание Если $\exists t$, что $D_t = M$, то $\forall t$ $D_t = M$

Пример • $X = \frac{\partial}{\partial x}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$$X_t(x) = x + t$$

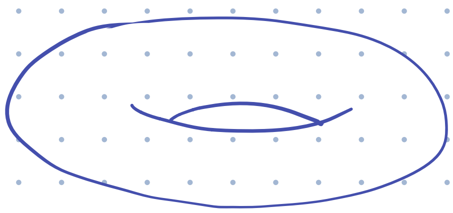
$\gamma(t) = 1 \qquad \gamma(t) = t + c$

полное действие, т.к. действие = сдвиг прямой

• то ~~не~~ действие, но $x \in \text{Int}$ или $x \in \mathbb{R} \setminus \{pt\}$

Теорема

Действие потока на компактном многообр. всегда полное



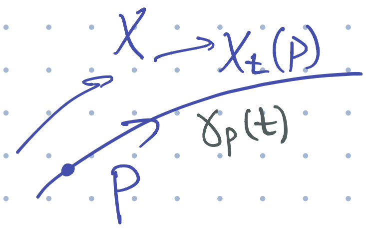
Лекция по гладким

12.11.20

Производная Ли векторного поля

<u>Опр</u> **Производной Ли** функции $f: M \to \mathbb{R}$ вдоль векторного поля X называется

$$(L_X f)_p = \lim_{t\to 0} \frac{f(X_t(p)) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(X_t(p))$$



$\gamma_p(t)$

$\gamma_p(0)=p$

<u>Замечание</u> $L_X f = Xf$

применение верт. поля к ф-ции

$$(L_X f)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(X_t(p)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma_p(t)) =$$

По опр. $X_t(p) = \gamma_p(t)$ (прошлая лекция)

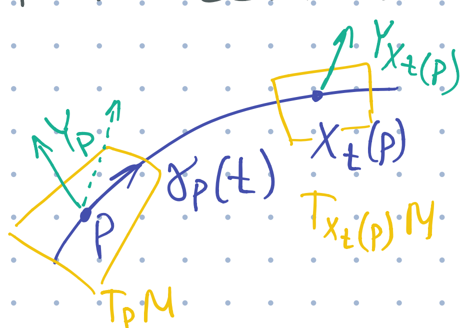
$$= \sum_{i=1} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi(p))\, \dot{\gamma}_p^i(0) = Xf$$

в карте (U,φ) с коорд. $x^1,\dots,x^n$

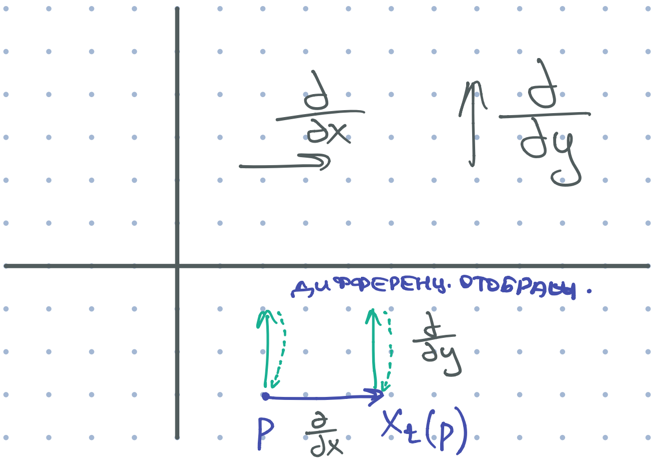
<u>Опр</u> **Производной Ли** верт. поля Y по верт. полю X называется

$$(L_X Y)_p f = \lim_{t\to 0} \frac{dX_{-t}(Y_{X_t(p)})(f) - Y_p(f)}{t}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} dX_{-t}(Y_{X_t(p)})$$



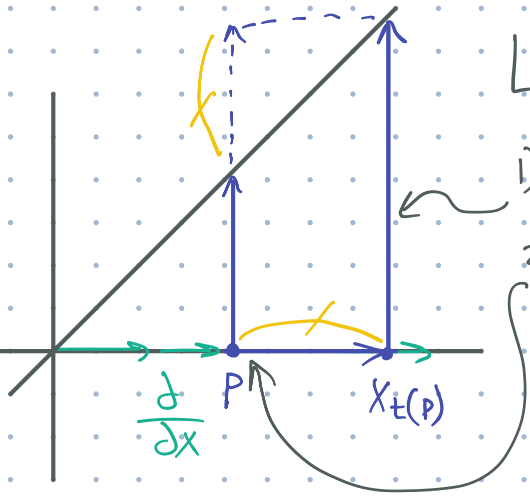
хотим $Y_{X_t(p)}$ вычесть из Y_p, но они лежат в разных касат. пр-вах $\Rightarrow$ перенесём $Y_{X_t(p)}$ и воспользуемся преобразованием потока



Поток этого поля: сдвиг влево или вверх

$$L_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$L_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = 0$$



$$L_{\frac{\partial}{\partial x}} x\frac{\partial}{\partial y} = ?$$

1) берем вектор
2) передвигаем
3) вычитаем и делим на t

$\Rightarrow$ производная Ли

$$L_{\frac{\partial}{\partial x}} x\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}$$

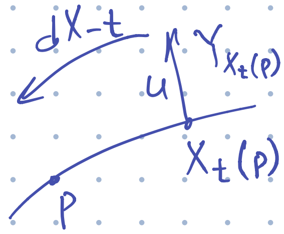
Из прошлой лекции $\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}$

Теорема

$X, Y \in Vect(M)$, тогда $L_X Y = [X, Y]$

$\triangleright$ $= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[Y_{X_t(p)}(f\circ X_{-t})\right]$

(≈30:00)



Пусть $H: U \to \mathbb{R}$

$U \subset \mathbb{R}^2$ — окр-ть $(0,0)$

$H(t,u) = f(X_{-t}(Y_u(X_t(p))))$

$$Y_{X_t(p)}(f\circ X_{-t}) = L_{Y_{X_t(p)}}(f\circ X_{-t}) = \frac{d}{du}\Big|_{u=0} f\circ X_{-t}\left(y_{X_t(p)}\right)_u =$$

$$= \frac{d}{du}\Big|_{u=0}\left(f\circ X_{-t}\circ Y_u\circ X_t(p)\right) = \frac{\partial H}{\partial x^2}(t,0)$$

$$(L_X Y)_p f = \frac{\partial^2 H}{\partial x^1 \partial x^2}(0,0)$$

$$K(t,u,s) = f(X_s(Y_u(X_t(p)))),\quad H(t,u) = K(t,u,-t)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^1\partial x^2} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^1 \partial x^2}(0,0,0) - \frac{\partial^2 K}{\partial x^2 \partial x^3}(0,0,0) =$$

$$K(t,u,0) = f(Y_u(X_t(p)))$$

$$\frac{\partial K}{\partial x^2}(t,0,0) = Y_{X_t(p)} \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial x^1\partial x^2}(0,0,0) = X_p(Yf)$$

$$K(0,u,s) = f(X_s(Y_u(p)))$$

$$\frac{\partial K}{\partial x^3}(0,u,0)\; X f(Y_u(p)) \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2\partial x^3}(0,0,0) = Y_p(Xf)$$

$$\Downarrow Y$$

$$= \underline{X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [X,Y]f}$$

$\triangle$

ЛЕКЦИЯ ГЛАДКИЕ

13.11.20

ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

V, W — ВЕКТ. ПР-ВА НАД $\mathbb{R}$

$P(V, W)$ — ВЕКТ. ПР-ВО, ПОРОЖД. ПАРАМИ (v, w) $v \in V$, $w \in W$

$\alpha \in P(V, W)$, Т.Е. $\alpha = a \sum\limits_{i=1}^{m} (v_i, w_i)$ $v_i \in V$, $w_i \in V$, $a \in K$

$N(V, W) \subset P(V, W)$

ПОДПР-ВО, ПОРОЖД. ВЕКТОРАМИ ВИДА:

$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2 - w)$

$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$

$(\alpha v, w) - \alpha (v, w)$

$(v, \alpha w) - \alpha (v, w)$

Опр. ТЕНЗОРНЫМ ПРОИЗВ. ПР-В V И W НАЗ.

$$V \otimes W = P(V, W) / N(V, W)$$

$e_1, \dots, e_n$ — БАЗИС V

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ — БАЗИС W

КЛАСС ЭКВИВ-ТИ ЭЛ-ТА (v, w) ОБОЗН. $v \otimes w$

$\tau \in V \otimes W$ $\quad \tau = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \tau_{ij} \underbrace{e_i \otimes e_j}$ БАЗИС $V \otimes W$

$\Rightarrow \dim V\otimes W = \dim V \dim W$

Тензорная алгебра $T_k^l(V)$

V – вект. пр-во $\quad V^*$ – сопр. пр-во

$$T_k^l = \underbrace{V\otimes V\otimes\ldots\otimes V}_{k}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{l}$$

Эл-ты $T_k^l(V)$ наз. тензорами типа (k,l)

$$T(V) = \sum_{k,l\geq 0} T_k^l(V)$$

$$(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes \underbrace{e_{i_k}}_{\in V}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes \underbrace{e^{j_l}}_{\in V^*})(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_m}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_n})$$

– тензор типа T_{l+n}^{k+m}

$$T_{0,k}(V) = \underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{k \text{ раз}}$$

$$\tau = \sum_{i_1,\ldots i_k=1}^{n} \tau_{i_1,\ldots i_k} e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_k}$$

Опр. $\tau(v_1,\ldots,v_k) := \sum_{i_1,\ldots i_k=1}^{n} \tau_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1}(v_1)\ldots e^{i_k}(v_k)$

полилинейная ф-ия

$$A: V \underset{A^*}{\rightleftarrows} V$$

$$A^* = (A^T)^{-1}$$

$$A^*\tau := \sum_{i_1,\ldots i_k=1}^{n} \tau_{i_1,\ldots,i_k} A^* e^{i_1}\otimes\ldots\otimes A^* e^{i_k}$$

Отображение $A^*: T_{0,k}(V) \to T_{0,k}(V)$ — лин. отобр.

$$A^*(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}) = (A^* e^{i_1}) \otimes \ldots \otimes (A^* e^{i_k})$$

Внешняя алгебра

$$C(V) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{0,k}(V)$$

$I(V)$ — двусторонний идеал, порождённый тензором вида $v \otimes v$

Опр. Внешней алгеброй наз. фактор

$$\Lambda^*(V) = C(V) / I(V)$$

$$I \ni (v+w) \otimes (v+w) = v \otimes v + w \otimes w + \underbrace{(v \otimes w + w \otimes v)}_{\in I(V)}$$

т.е. $v \otimes w \sim -w \otimes v$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ тензоры из $\Lambda(V)$ — кососимметричные

Опр. k-той внешней степенью пр-ва V^* наз.

$$\Lambda^k(V) = T_{0,k}(V) \cap \Lambda(V), \qquad \Lambda^0(V) = \mathbb{R}$$

$$\Lambda(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V) \qquad \Lambda^1(V) = V^*$$

Опр. Обозначим через $\pi^1 \wedge \ldots \wedge \pi^k$ класс эквив. тензора $k!\, \pi^1 \otimes \ldots \otimes \pi^k$ во внешней степени $\Lambda^k(V)$ $\pi^i \in V^*$

$$\pi^1 \wedge \ldots \wedge \pi^k = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\operatorname{sgn} \pi} \pi^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \pi^{\sigma(k)}$$

$$e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_k} \sim \frac{1}{k!}\, e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$$

порождают $\Lambda^k(V)$

$$v\wedge w = v\otimes w - w\otimes v$$

Базис $\Lambda^k(V)$ состоит из форм $e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$, $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$

$\dim\Lambda^k(V)=C_n^k$

$$\dim\Lambda^k(V)=C_n^k$$
$$\dim\Lambda(V)=2^n$$

$A^*: V^*\to V^*$ $\quad e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$ — базис $\Lambda^k(V)$, $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$

$$A^\wedge:\Lambda^k(V)\to\Lambda^k(V)$$

$$A^\wedge(e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}) = A^*e^{i_1}\wedge\ldots\wedge A^*e^{i_k} =$$

$$e^{i_1} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \qquad A^*e^{i_1} = \begin{array}{c} j_1 \\ \vdots \\ j_k\end{array}\begin{pmatrix} & \overset{i_1}{\vdots} & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j}\, e^j$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i_1,j_1} e^{j_1}\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j_k=1}^{n} a_{i_k,j_k} e^{j_k}\Big) =$$

$$= \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n}\ \sum_{\sigma\in S_k} \underbrace{(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\, a_{i_1,\sigma(j_1)}\cdot\ldots\cdot a_{i_k,\sigma(j_k)}}_{\Delta^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}}\; e^{j_1}\wedge\ldots\wedge e^{j_k}$$

Внешняя степень как полилинейная функция

$$e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}(v_1,\ldots,v_k)=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}e^{i_{\sigma(1)}}\otimes\ldots\otimes e^{i_{\sigma(k)}}(v_1,\ldots,v_k)=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}v_1^{i_{\sigma(1)}}\ldots v_k^{i_{\sigma(k)}}=\begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \ldots & v_k^{i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_i^{i_k} & \ldots & v_k^{i_k}\end{vmatrix}$$

$$v_i=\begin{pmatrix} v_i^1 \\ \vdots \\ v_i^n\end{pmatrix}$$

$$\pi^1\wedge\ldots\wedge\pi^k=\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\pi^{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes\pi^{\sigma(k)}$$

Дифференциальные формы на многообразии

M — C^∞-многообр. (U,φ) — карта с коорд. $x^1,\ldots,x^n$

$p\in U$ T_p^*M

$$\Lambda^k(T_pM)=\Lambda_k(T_p^*M)$$

базис T_p^*M составляют $dx^1,\ldots,dx^n$

$\omega\in\Lambda^k(T_pM)$

$$\omega=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}a_{i_1,\ldots i_k}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$ — вид ω в координатах

Опр. Внешняя форма ● наз. **C^∞-диф. формой**, заданной в карте (U,φ) на M, если $a_{i_1,\ldots i_k}(x)$ — C^∞-гладкие функции

Опр. Дифференциальной k-формой $\omega \in \Omega^k(M)$ на многообразии M с атласом $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ наз. набор k-форм $\{\omega^\alpha\}$, опред. в каждой карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ соответств., которые переходят друг в друга под действием отображения, индуц. отобр. $\varphi^*_{\alpha\beta}$

$$(\varphi^*_{\alpha\beta})^\wedge \omega_\beta = \omega_\alpha, \quad p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

Опр. Дифференциальной k-формой на многообразии M наз. C^∞-гладкое сечение k-й внешней степени расслоения T^*M

$$\Lambda^k(T^*M) \qquad (\omega\text{-сеч-ие } \Lambda^k(T^*M))$$

Физическая интерпретация дифф. форм в $\mathbb{R}^3$

0-форма: просто ф-ия

1-форма: $\omega = F^1(x)\,dx^1 + F^2(x)\,dx^2 + F^3(x)\,dx^3$

$$\omega(v) = F^1(x)v^1 + F^2(x)v^2 + F^3(x)v^3 = (\vec{F}, \vec{v})$$

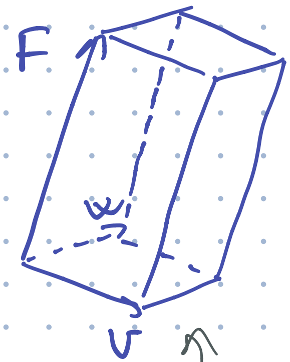
интеграл кривой
работа силы при
перемещении точки

2-форма

$$\omega = F^1 dx^2 \wedge dx^3 + F^2 dx^3 \wedge dx^1 + F^3 dx^1 \wedge dx^2$$

$$\omega(v,w) = F^1 \begin{vmatrix} v^2 & v^3 \\ w^2 & w^3 \end{vmatrix} + F^2 \begin{vmatrix} v^3 & v^1 \\ w^3 & w^1 \end{vmatrix} + F^3 \begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} F^1 & F^2 & F^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}$$ — объём нек. парал.



Если F - поток жидкости, то этот парал-д — V жидкости, который успевает протечь за единицу времени

3-форма

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$ — форма объёма

$$\omega(v,w,u) = \begin{vmatrix} v^1 & w^1 & u^1 \\ v^2 & w^2 & u^2 \\ v^3 & w^3 & u^3 \end{vmatrix}$$

Лекция гладкие

26.11.20

Внешняя производная

Опр. Внешней производной (внешним дифференциалом) формы $\omega \in \Omega^k(M)$ наз. линейный оператор $d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, удовл. св-вам:

1) $d: \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ совп. с обычным df, $f \in \Omega^0(M)$

0-форма=функция

2) $d(\omega^{k_1} \wedge \omega^{k_2}) = d\omega^{k_1} \wedge \omega^{k_2} + (-1)^{k_1} \omega^{k_1} \wedge d\omega^{k_2}$

$\omega^{k_1} \in \Omega^{k_1}(M)$, $\omega^{k_2} \in \Omega^{k_2}(M)$

3) $d^2\omega = d \circ d\omega = 0$

Внешняя производная в координатах

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1, \ldots, i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

$$d\omega = \sum d\left(a_{i_1, \ldots, i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) =$$

$$= \sum da_{i_1, \ldots, i_k}(x)\, x^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} + \sum a_{i_1, \ldots, i_k}(x)\, \underbrace{d(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k})}_{=0 \text{ по 3му св-ву}} =$$

$$= \sum da_{i_1, \ldots, i_k}(x)\, x^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Лемма Дифференциал $\mathcal{d}$ удовл. св-вам (1)-(3)

$$\mathcal{d}(a(x)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}) = da(x)\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

▷ 1) $\mathcal{d}\, a(x) = da(x)$ — дифф-циал функции

2) $\omega^{k_1} = a(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k_1}}$

$\omega^{k_2} = b(x)\,dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_{k_2}}$

$$\mathcal{d}(\omega^{k_1}\wedge\omega^{k_2}) =$$

$$= \mathcal{d}(a(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k_1}})\wedge(b(x)\,dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_{k_2}}) =$$

$$= \mathcal{d}(a(x)b(x)\underbrace{dx^{i_1}\wedge\ldots dx^{i_{k_1}}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_{k_2}}}) =$$

$$= d(a(x)b(x))\wedge \underline{\qquad} = (da(x))b(x) + a(x)\,db(x))\wedge\underline{\qquad} =$$

$$= \underbrace{(da(x)\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k_1}})}_{d\omega^{k_1}}\wedge(b(x)\underline{\qquad}) +$$

$$+ (-1)^{k_1}\omega^{k_1}\wedge \underbrace{d(b(x))\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_k}}_{d\omega^{k_2}} =$$

$$= d\omega^{k_1}\wedge\omega^{k_2} + (-1)^{k_1}\omega^{k_1}\wedge d\omega^{k_2}$$

3) Проверим на ~~каждом~~ мономе:

$$\omega = a(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

$$d\omega = d(a(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}) = da(x)\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial x^i}dx^i}_{da(x)}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

$$d^2\omega = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial a}{\partial x^i}\right)\wedge dx^i \wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} = 0$$

$dx^j\wedge dx^i - dx^i \wedge dx^j = 0 \Rightarrow$

◁

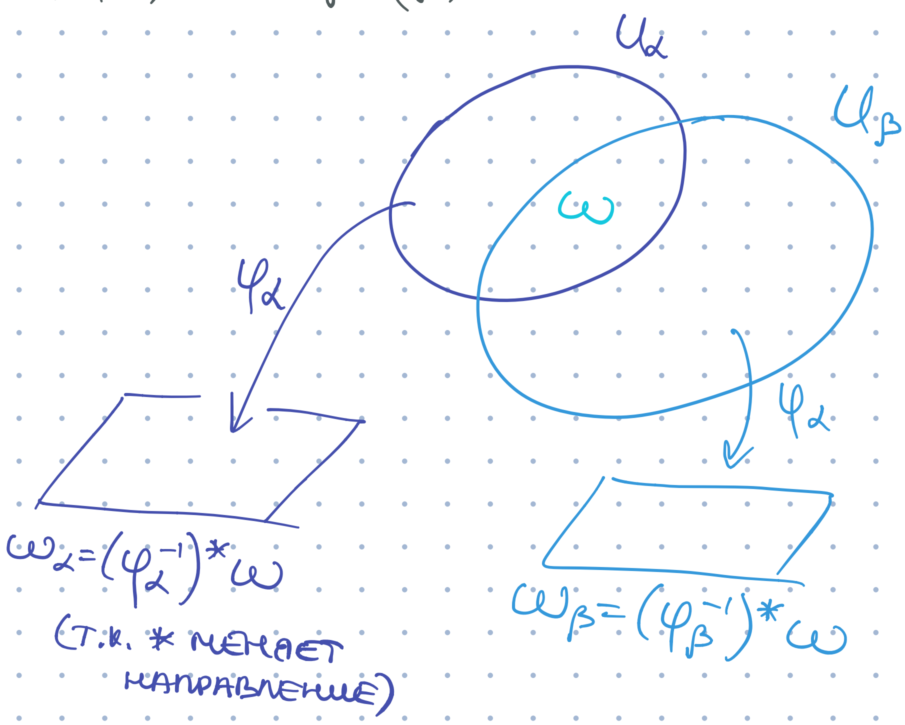
M – многообразие $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) – карты

и $U_\alpha \cap U_\beta$

По опр. $\varphi_{\alpha\beta}^* \omega_\beta = \omega_\alpha$

$\Downarrow$

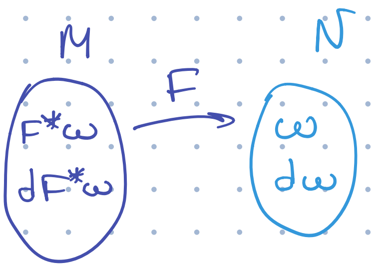
$\varphi_{\alpha\beta}^* d\omega_\beta = d\omega_\alpha$



Лемма $\omega_\alpha = (\varphi_\alpha^{-1})^*\omega$, $\omega_\beta = (\varphi_\beta^{-1})^*\omega$, $\Rightarrow$

$\varphi_{\alpha\beta}^* d\omega_\beta = d\omega_\alpha$

▷



Пример 1) $\omega = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$

$d\omega = \frac{1}{2}(dx\wedge dy - dy\wedge dx) = dx\wedge dy$

2) $d(x\,dy) = dx\wedge dy$

<u>Замечание</u> $\omega^k \in \Omega^k(M),\ \omega^l \in \Omega^l(M) \Rightarrow$

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl}\,\omega^l \wedge \omega^k$$

▷ Проверим для мономов

$\omega^k = a(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$

$\omega^l = b(x)\,dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}$

$\omega^k\wedge\omega^l = a(x)b(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l} =$

$k\cdot l$ транспозиций $\Rightarrow$

$= (-1)^{kl}\,\omega^l\wedge\omega^k$

Подстановка вектора в форму

$\omega = a(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} =$

$$= a(x)\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\,dx^{i_{\sigma(1)}}\otimes\ldots\otimes dx^{i_{\sigma(k)}}$$

$$i_v\,\omega := a(x)\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\,dx^{i_{\sigma(1)}}(v)\,dx^{\sigma(2)}\otimes\ldots\otimes dx^{\sigma(k)} =$$

т.е. подставили вектор в первую ф-ию $\Rightarrow$ $k-1$ кососим. ф-ия

$$= a(x)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\,v^{i_j}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge \widehat{dx^{i_j}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n} \in \Omega^{k-1}(M)$$

эл-т с номером i_j

т.е. этого монома нет

Лекция гладкие

27.11.20

Интегрирование диф. форм по многообразию

Опр. Носителем формы ω наз.

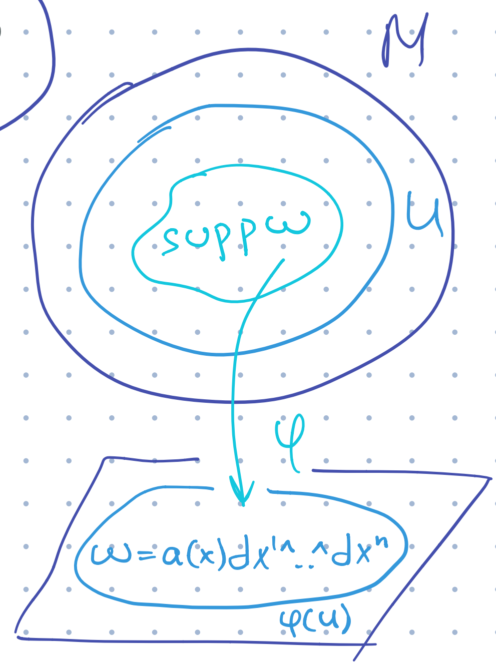
$$\operatorname{supp}\omega = \overline{\{p \in M \mid \omega|_p \neq 0\}}$$

Если $\operatorname{supp}\omega$ — компакт, то ω наз. финитной формой

M — n-мерное ориентированное многообр.
(U, φ) — карта ориент. атласа с координатами $x^1, \dots, x^n$

Опр. Интегралом финитной формы $\omega \in \Omega^n(M)$ такой, что $\operatorname{supp}\omega \subset U$ наз.
$(\omega = a(x)\,dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$

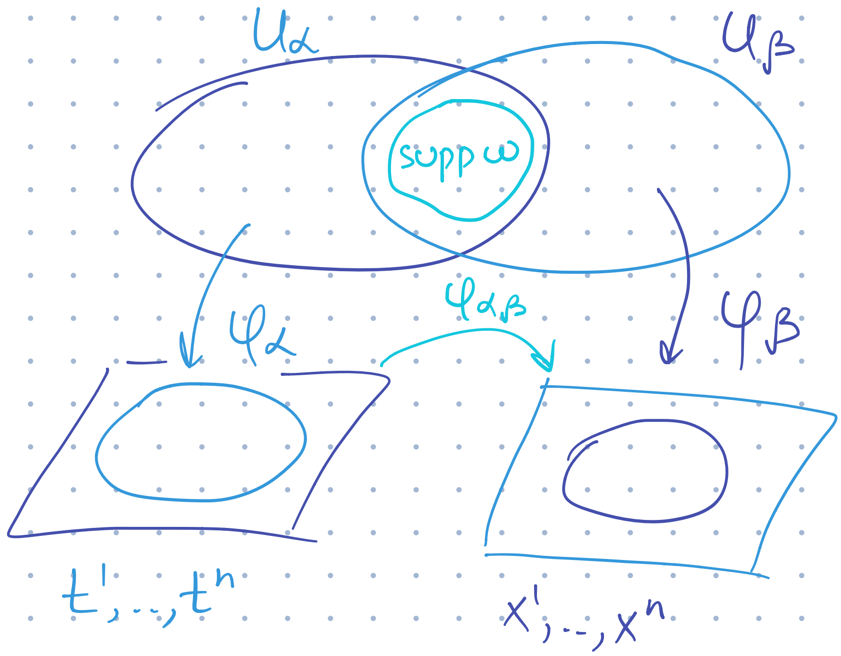
$$\boxed{\int_M \omega := \int_{\varphi(U)} a(x)\, dx^1 \dots dx^n}$$



Докажем корректность

Лемма $\int_M \omega$ не зависит от выбора ориентирующей карты (U, φ), т.ч. $\operatorname{supp}\omega \subset U$

▷ $X=\varphi_{\alpha\beta}(t)$



$$\int\limits_M \omega = \int\limits_{\varphi_\beta(U_\beta)} a(x)\,dx^1\dots dx^n \overset{?}{=} \int\limits_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} a(\varphi_{\alpha\beta}(t))\,J(\varphi_{\alpha\beta}(t)\,dt^1\dots dt^n$$

С одной стороны, (U_β,φ_β):

$$\omega = a(x)\,dx^1\wedge\dots dx^n = a(\varphi_{\alpha\beta}(t))\,d\varphi^1_{\alpha\beta}(t)\wedge\dots\wedge d\varphi^n_{\alpha\beta}(t)$$

$$\varphi^*_{\alpha\beta}(a(x)dx^1\wedge\dots\wedge dx^n) = a(\varphi_{\alpha\beta}(t))\,d\varphi^1_{\alpha\beta}(t)\wedge\dots\wedge d\varphi^n_{\alpha\beta}(t) =$$

$$d\varphi^1_{\alpha\beta}(t)\wedge\dots\wedge d\varphi^n_{\alpha\beta}(t) = \det J(\varphi_{\alpha\beta}(t))\,dt^1\wedge\dots\wedge dt^n$$

$$dx^i \longmapsto d\varphi^i_{\alpha\beta}(t) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial\varphi^i_{\alpha\beta}}{\partial t^l}\,\partial t^l$$

$$= \int\limits_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} a(\varphi_{\alpha\beta}(t))\,J(\varphi_{\alpha\beta}(t)\,dt^1\dots dt^n$$

◁

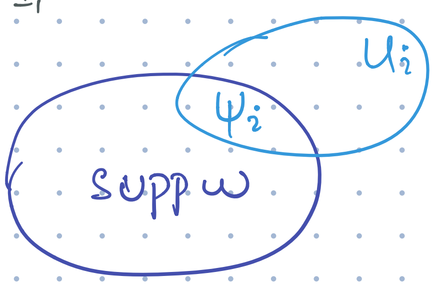
Пусть ω — финитная n-форма на n-мерном ориент. многообразии M

Рассмотрим конечное покрытие $\operatorname{supp}\omega$ картами $i=1,\dots,m$ ориентирующего атласа.

т.к. компакт

Рассмотрим гладкое разбиение 1 ψ_i $i=1..m$ на $\operatorname{supp}\omega$, подчиненное покрытию

$$\bigcup_{i=1}^{m} U_i \supset \operatorname{supp}\omega$$



т.е. $\sum_{i=1}^{n} \psi_i(p)=1$

$p\in \operatorname{supp}\omega$

$\operatorname{supp}\psi_i \subset U_i$

Опр. Интегралом от финитной n-формы ω по m-мерному ориентир. многообр. M наз.

$$\boxed{\int_M \omega := \sum_{i=1}^{n} \int_M \psi_i \omega}$$

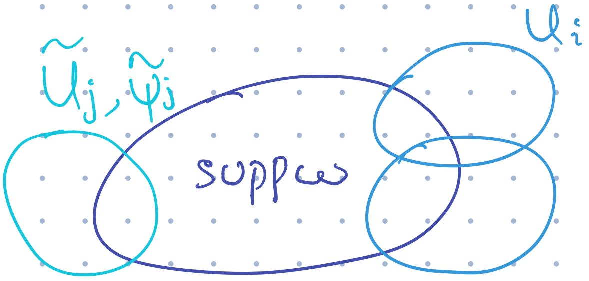
$\operatorname{supp}(\psi_i\omega) \subset U_i$

интегралы определены с помощью карт (U_i, φ_i)

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \omega$$

Лемма (корректность) Пусть карты $(U_i, \varphi_i)_{i=1,..,m}$ покрывают носитель ω и карты $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i=1,..,l}$ тоже покрывают $\operatorname{supp}\omega$ и тоже $\in$ ориент. атласу;

ψ_i $i=1,..,m$ — разбиение 1, подчинённое $(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)_{j=1,..,l}$



Тогда интегралы, опр. с помощью этих покрытий, совпадают

Δ

$$\int\limits_M \omega = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_M \psi_i \omega = \sum_{i=1}^{m} \int \sum_{j=1}^{l} (\psi_i \tilde{\psi}_j \omega) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} \int \omega_{ij} =$$

с помощью (U_i, φ_i, ψ_i)

на носителе формы $=1 \Rightarrow$ можем так умножить

Форма $\omega_{ij} = \psi_i \tilde{\psi}_j \omega$

$\operatorname{supp}\omega_{ij} \subset U_i \cap \tilde{U}_j$

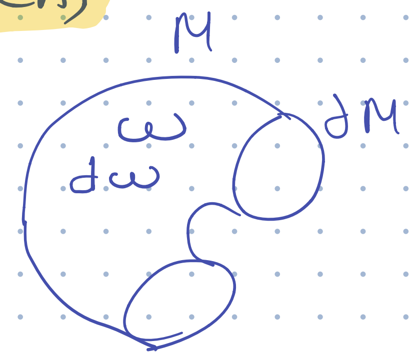
Интеграл $\int \omega_{ij}$ не зависит от выбора координат (U_i, φ_i) и $(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)$

$$= \sum_{j=1}^{l} \int \tilde{\psi}_j \underbrace{\sum_{i=1} \psi_i \omega_{ij}}_{\shortparallel} = \sum_{j=1} \tilde{\psi}_j \omega := \int\limits_M \omega$$

с помощью $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i, \tilde{\psi}_j)$

Δ

Теорема (Формула Стокса)



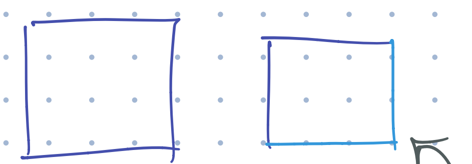
M — n-мерное, компактное, ориентир. многообразие с краем ∂M

ω — $(n-1)$-форма на M

Тогда $\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega$, где ориентации M и ∂M берутся согласованными

Следствие Если $\partial M = \varnothing \Rightarrow \int\limits_M d\omega = 0$

▷ M — комп. Выберем такой конечный ориентир. атлас $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\ i=1,\dots,m\}$ т.ч. $\varphi_i(U_i) = (0,1)^n$ или $\varphi_i(U_i) = (0,1] \times (0,1)^{n-1}$



Вокруг каждой точки взяли по карте, M — компакт $\Rightarrow$ такой атлас можно найти

Пусть ψ_i $i=1,\dots,m$ — разбиение 1, подчин. атласу $\mathcal{A}$

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \psi_i \omega \qquad \omega_i = \psi_i \omega$$

Достаточно док-ть ф-лу Стокса $\forall \omega_i$

Докажем ф-лу Стокса для $\omega = \omega_i$

$\varphi(U) = (0,1)^n$ или $(0,1] \times (0,1)^{n-1}$ $\quad \operatorname{supp}\omega \subset (U, \varphi)$

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

$$\int_M d\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int \frac{\partial a_j}{\partial x^j}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \underset{\text{инт. в одной карте}}{\overset{\text{по опр.}}{=\!=}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_{\varphi(U)} \frac{\partial a_j}{\partial x^j}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n-1\text{ шт.}} \left(\int_0^1 \frac{\partial a_j}{\partial x^j}\, dx^j \right) \underbrace{dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n}_{\text{без } dx^j} =$$

$\Delta = a(x^1, \ldots x^{j-1}, 1, x^{j+1}, \ldots, x^n) - a(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^n)$ (ф-ла Ньютона-Лейб.)

Если $\varphi(U) = (0,1)$, то $\Delta = 0$

Если $\varphi(U) = (0,1] \times (0,1)^{n-1}$

и $j \neq 1$ $\quad \Delta = 0$ $\Rightarrow \Delta \neq 0$ только если $\varphi(U) = (0,1] \times (0,1)^{n-1}$ и $j = 1$

$$\int_M d\omega = \int_{\varphi(U)} \frac{\partial a_j}{\partial x^1}\, dx^1 \ldots dx^j = \underbrace{\int_0^1 \int_0^1}_{n-1\text{ шт.}} a(1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \ldots dx^n =$$

$$\underset{\text{интеграл по границе}}{\overset{\text{по опр.}}{=\!=}} \int_{\partial M} \omega$$

$\lhd$

Формула Ньютона-Лейбница

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ω 0-форма

$$dF = f(x)\,dx$$

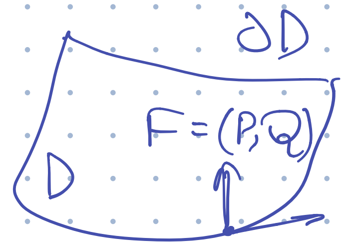
Лекция Гладкие дополнение 1

22.12.20

Формула Грина

D - область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ - гладкие ф-ции на $\overline{D}$



Тогда

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy := \int\limits_{\partial D} (\vec{F}, \vec{\gamma})\,dt$$

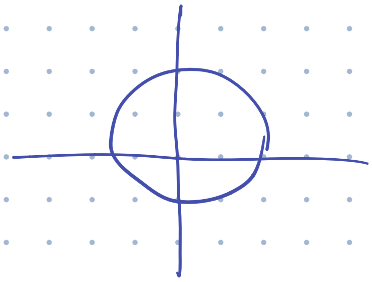
Док-во вкратце:

$$\omega = P\,dx + Q\,dy$$

$$\int\limits_{\partial D} \omega = \int\limits_{D} d\omega$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$t \mapsto (\cos t, \sin t)$



$d(x\,dy) = dx \wedge dy$

$$\int_D dx \wedge dy = \int_{\partial D} \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi = \pi$$

Формула Гаусса – Остроградского

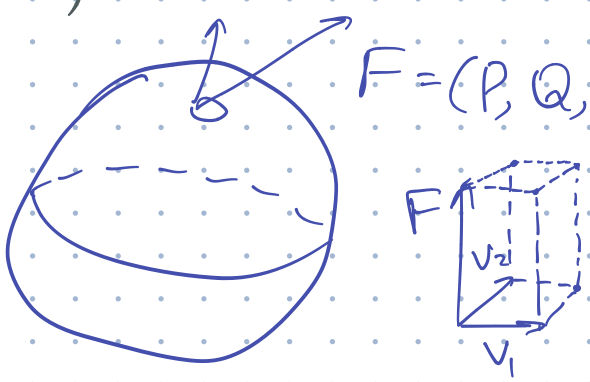
D – компактная область с кусочно гладкой границей P, Q, R – ф-ции на $\bar{D}$. Тогда

$$\iiint_D \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div} F} dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{\partial D} P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy =$$

$\vec{F} = (P, Q, R)$

$$= \int_{\partial D} (\vec{F}, \vec{n})\,dS$$



$F = (P, Q, R)$

$$d\omega = \operatorname{div} \vec{F}\, dx \wedge dy \wedge dz$$

Формула Стокса

S — ориентир. кусочно гладкая поверхность в $\mathbb{R}^2$ с кусочно гл. границей ∂S. Тогда

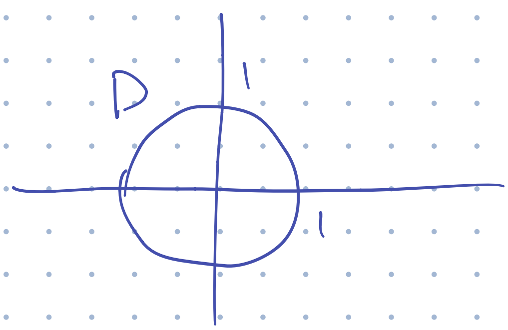
$$\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Дополнение 2

Пример $\omega = \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$

$$d\omega = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dx \wedge dy =$$

$= 0 \Rightarrow$ ф-ла замкнута



$$\int_{\partial D} \omega \overset{?}{=} \int_D d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin\varphi\, d\cos\varphi + \cos\varphi\, d\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} d\varphi$$

$x = \cos\varphi$
$y = \sin\varphi$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \Rightarrow \int_{\partial D} \omega \neq \int_D d\omega$$

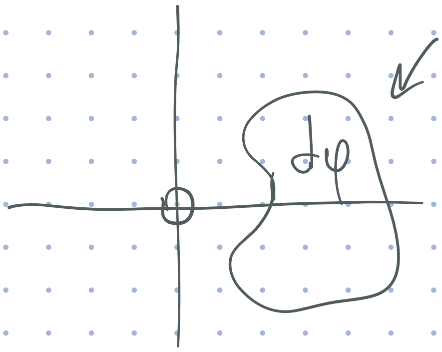
ТАК КАК 1-ФОРМА $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, А Ф-ЛА СТОКСА ВЕРНА ТОЛЬКО ДЛЯ КОМПАКТОВ

ЗАМЕНА $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$$d\varphi = d\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)dy$$

$$\omega = d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}dx + \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}dy = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$



стягиваемо ⇒ ω замкнута

Предл. $H^k(M)=0 \quad k>\dim M$

$$H^0(M)=Z^0(M)=\mathbb{R}^{\#\text{связности компонент}}$$

По т. Пуанкаре ($\forall$ замкнутая форма на стягиваемом многообразии явл. точной)

$$H^0(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}$$

точка

$$H^0(S^1)=\mathbb{R}$$

$$H^1(S^1)=\mathbb{R}$$

$$\omega=f(\varphi)\,d\varphi=dF(\varphi)$$

$$\int f(\varphi)\,d\varphi=F(2\pi)-F(0)=0$$

ЛЕКЦИЯ ГЛАДКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

04.12.20

M — гл. многообр. $\Omega^k(M)$ — пр-во k форм на M

$f: M \to N$

$f^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ ← гомоморфизм дифференц. форм

$x^1, \dots, x^n$ — коорд. на M

$y^1, \dots, y^n$ — коорд. на N

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} a_{i_1, \dots, i_k}(y)\, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$$

$$y^s = f^s(x)$$

$$f^*\left(a_{i_1, \dots, i_k}(y)\, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}\right)$$

$$\left(a_{i_1, \dots, i_k}(f(x))\right) df^{i_1}(x) \wedge \dots \wedge df^{i_k}(x)$$

Лемма Линейные операторы d и f^* коммутируют

$$d f^* \omega = f^* d\omega \qquad f: M \to N, \quad \omega \in \Omega^k(N)$$

$\triangle$ $x^1, \dots, x^m$ — коорд. на M

$y^1, \dots, y^n$ — коорд. на N

$a(y) \in \Omega^0(N)$ Проверим на 0-форме (ф-ции)

$$f^*(da) = f^*\left(\sum_i \frac{\partial a}{\partial y_i} dy_i\right) = \sum_i \frac{\partial a}{\partial y^i}(f(x)) \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$$

С другой стороны,

$$d(f^*(a(y))) = da(f(x)) = \frac{\partial a}{\partial y^i} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$$

диф. композиции отобр.

$$d f^*(dy^s) \overset{?}{=} f^* d^2 y^s = 0$$

$$d f^*(dy^s) = d(df^s) = 0 \Rightarrow$$

$$d f^*(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = d(df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}) = 0$$

Докажем теперь для произвольной формы

$$f^*\left(d\left(a_{i_1,\dots,i_k}(y)\,dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_k}\right)\right)=$$

$$=f^*\left(da_{i_1,\dots,i_k}(y)\,dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_k}\right)=$$

$$=f^*\left(da_{i_1,\dots,i_k}(y)\right)\wedge f^*\left(dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_k}\right)=$$

$$=df^*\left(a_{i_1,\dots,i_k}(y)\,dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_k}\right)+$$

$$+f^*\left(a_{i_1,\dots,i_k}\right)\underbrace{d\left(dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_k}\right)}_{=0}=$$

$$=df^*\left(a_{i_1,\dots,i_k}(y)\,dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_k}\right) \qquad \triangleleft$$

Замкнутые и точные формы

Опр. Назовём форму $\omega\in\Omega^k(M)$ замкнутой, если $d\omega=0$

$$Z^k(M)=\{\omega\in\Omega^k(M)\mid d\omega=0\}$$

Назовём $\omega\in\Omega^k(M)$ точной, если $\exists\,\alpha\in\Omega^{k-1}(M)$, что $\omega=d\alpha$

$$B^k(M)=\{\omega\in\Omega^k(M)\mid\exists\,\alpha\in\Omega^{k-1}(M)\mid d\alpha=\omega\}$$

$d\circ d\omega \equiv 0$

$\omega = d\alpha$ $\Longrightarrow$ $B^k(M) \subset Z^k(M)$

$d\omega = d\circ d\alpha \equiv 0$

А верно ли обратное?

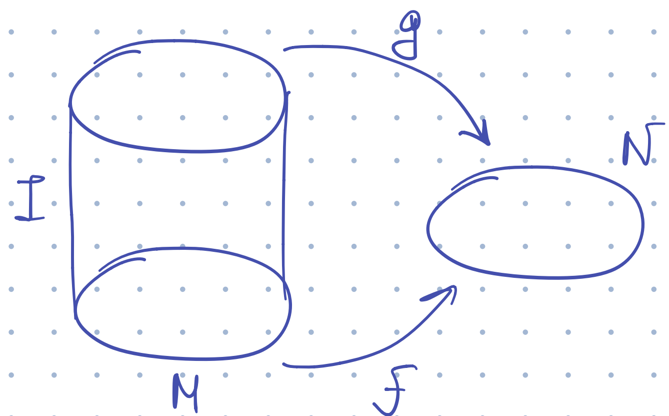
Опр. Пространство k-х когомологий де Рама многообразия M наз.

$$H^k(M) = Z^k(M) / B^k(M)$$

Опр. Отображения $f: M \to N$ и $g: M \to N$ наз. гладко гомотопными, если

$\exists\ F: M \times I \to N$ — гладкое, $F(p,0) = f(p)$
$I = [0,1]$ $F(p,1) = g(p)$

Опр. Многообразие M наз. стягиваемым, если $id_M \sim f: M \to p \in M$



Пример $\mathbb{R}^n$ стягиваемо

$p = (x^1, \dots, x^n)$

$F(x^1,\dots,x^n,t)=(x^1t,\dots,x^nt)$ — гладкое

$F(x,0)=0$

$F(x,1)=x=id_{\mathbb{R}^n}$

Опр. Многообразия M и N наз. (гладко) гомотопически эквивалентными, если $\exists$ гладкие $f: M\to N$ и $g: N\to M$ т.ч. $f\circ g\sim id_N$ и $g\circ f\sim id_M$

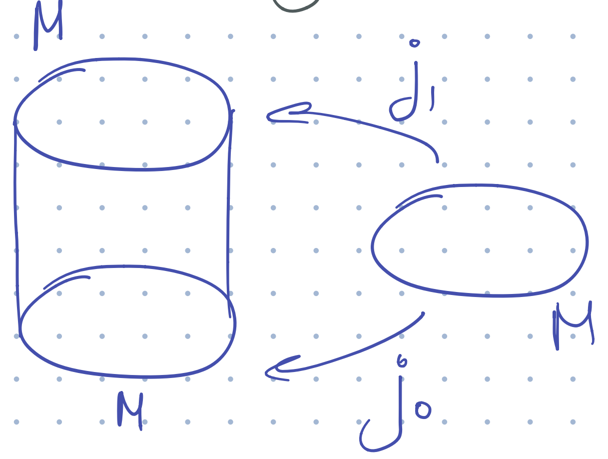
Теорема (Пуанкаре)

Замкнутая форма на стягиваемом многообразии является точной

$\triangleright$ M — многообр.

$M\times I$ $\quad j_{0,1}: M\to M\times I$ $\quad j_0: p\mapsto(p,0)$

$j_1: p\mapsto(p,1)$



Построим оператор $K: \Omega^{k+1}(M\times I)\to\Omega^k(M)$

K - линеен $\Rightarrow$ достаточно определить на разложимых формах

$\omega = a(x,t)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k+1}}$ либо

$\omega = a(x,t)\,dt\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$

$K\left(a(x,t)\,dx^{i_1}\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}\right) = 0$

$K\left(a(x,t)\,dt\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\right) :=$

$= \int_0^1 \left(a(x,t)\,dt\right) dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(M)$

Лемма $K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^*\omega - j_0^*\omega$,

$\omega\in\Omega^{k+1}(M\times I)$

▷ Проверим это соотношение на разложимых формах

$\omega = a(x,t)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k+1}}$

$K\omega = 0 \Rightarrow d(K\omega) = 0$

$d\omega = \frac{da}{dt}\,dt\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k+1}} + [\text{члены без } dt]$

$$K\omega = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}\,dt\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}} =$$

$$= \big(a(x,1) - a(x,0)\big)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}} = j_1^* \omega - j_0^* \omega$$

2) $\omega = a(x,t)\,dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$

$$j_0^* \omega = j_1 \omega = 0$$

$$K(d\omega) = K\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dt \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dt\right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

$$d(K\omega) = d\left(\int_0^1 a(x,t)\,dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\int_0^1 a(x,t)\,dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial a(x,t)}{\partial x^i}\, dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \Rightarrow$$

$$K(d\omega) + d(K\omega) = 0 \quad \triangleleft$$

Продолжение док-ва теоремы:

ω – замкн. $d\omega = 0$ $\quad \omega \in \Omega^{k+1}(M \times I)$

$$d(K\omega) = j_1^*\omega - j_0^*\omega$$

$\eta \in \Omega^{k+1}(M)$ $\qquad F: M \times I \to M$

$F(p,0) = p_0$ (пр-во стягиваемо)

$F(p,1) = p$

$\exists\ \omega = F^*\eta \in \Omega^{k+1}(M \times I)$

Если $d\eta = 0$, то $d\omega = dF^*\eta = F^*d\eta = 0$

$\Rightarrow$ форма замкнута $\Rightarrow$ применяем лемму

По лемме $d(K\omega) = j_1 F^*\eta - j_2 F^*\eta = \eta - 0 = \eta$

Для η $\exists$ форма $\alpha = K(F^*\eta)$, т.ч. $\eta = d\alpha$