Сладкий коллок ♡.

1 билет. Векторные поля на многобразии и их скобка Ли (коммутатор). Основные свойства коммутатора

Определение 1.1. Векторным полем на многообразии называется сечение касательного расслоения.

Определение 1.2. *Коммутатором* или *скобкой Ли* векторных полей X и Y называется
$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Предложение 1.1. Координатная запись. Коммутатор векторных полей $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_n \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ и $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} b_n \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ — тоже векторное поле, причем
$$[X,Y] = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i,j} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Доказательство. $X(Y(f)) = X(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial \left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i} = \sum\limits_{i,j} a_i \dfrac{\partial b_j}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j} + \sum\limits_{i,j} a_i b_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Аналогично получается, что $Y(X(f)) = \sum\limits_{i,j} b_i \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j} + \sum\limits_{i,j} a_i b_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Что и требовалось.

□

Предложение 1.2. Свойства коммутатора. (1) $[X,Y] = -[Y,X]$.

(2) Пусть f, g — гладкие функции. $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

(3) *Тождество Якоби:* $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$.

Доказательство. **(1)** Это очевидно.

(2) Запишем в координатах: $[fX, gY] = \sum\limits_{i,j} (fa_i) \dfrac{\partial(gb_j)}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j} - \sum\limits_{i,j} (gb_i) \dfrac{\partial(fa_j)}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j} =$

$= fg[X,Y] + \sum\limits_{i,j} (fa_i) b_j \dfrac{\partial(g)}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j} - \sum\limits_{i,j} (gb_i) a_j \dfrac{\partial(f)}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j} = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$

(3) $[X,Y] = \sum\limits_j \left(\sum\limits_i a_i \dfrac{\partial b_j}{\partial x_i}\right) \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j} - \sum\limits_j \left(\sum\limits_i b_i \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Пусть $Z = \sum\limits_k c_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

Тогда $[[X,Y],Z] = \sum\limits_k \left(\sum\limits_j \left(\sum\limits_i a_i \dfrac{\partial b_j}{\partial x_i}\right) \cdot \dfrac{\partial c_k}{\partial x_j} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_k} - \sum\limits_j \left(\sum\limits_i b_i \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \cdot \dfrac{\partial c_k}{\partial x_j} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_k}\right) +$

$$+ \sum_k \left(\sum_j c_k \frac{\partial \left(\sum\limits_i a_i \dfrac{\partial b_j}{\partial x_i}\right)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_j c_k \frac{\partial \left(\sum\limits_i b_i \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

На этом месте нужно поверить, что все сойдется.

□

2 билет. Поток векторного поля и локальная однопараметрическая группа преобразований

Определение 2.1. *Интегральной кривой* векторного поля X называется такое отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$, что $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$.

Определение 2.2. *Потоком* X_t векторного поля X называется отображение, которое действует по следующему правилу: $X_t(p) = \gamma_p(t)$, где $\gamma(0) = p$.

Замечание 2.1. Локально поток определен.

Лемма 2.1. Пусть X — гладкое векторное поле на многообразии $\mathcal{M}$. Тогда для любой точки $p \in \mathcal{M}$ существуют такие $a(p), b(p) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и гладкая кривая $\gamma_p : (a(p), b(p)) \to \mathcal{M}$, что

(1) $0 \in (a(p), b(p))$ и $\gamma_p(0) = p$;

(2) γ_p — интегральная кривая;

(3) если для некоторой $\hat{\gamma} : (c,d) \to \mathcal{M}$ выполнены условия **(1)** и **(2)**, то $(c,d) \subset (a(p), b(p))$ и $\gamma_p(t)|_{(c,d)} = \hat{\gamma}(t)$.

Доказательство. **(1)** и **(2)** — следствия теоремы о существовании.

Далее, если через точку проходт 2 интегральных кривых, то на пересечении областей определения они по теореме о единственности совпадают. Тогда можно объединить все решения.

□

Предложение 2.1. Это локальный диффеоморфизм, и семейство $\{X_t\}$ обладает структурой группы.

Доказательство. Это свойства **(4)** и **(5)** из леммы.

□

3 билет. Множество D_t, на котором определён поток векторного поля, свойства множества D_t, поток векторного поля на компактном многообразии

Определение 3.1. $D_t = \{p \in \mathcal{M} \mid t \in (a(p), b(p))\}$.

Лемма 3.1. **(1)** Для любой точки $p \in \mathcal{M}$ существуют такие окрестность $V \ni p$ и $\varepsilon > 0$, что отображение $(t, q) \mapsto X_t(q)$ определено на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ и является гладким.

(2) D_t — открыто.

(3) $\bigcup\limits_{t>0} D_t = \mathcal{M}$.

(4) $X_t(D_t) : D(t) \to D_{-t}$ — диффеоморфизм и X_{-t} — обратный к нему.

(5) $X_s \circ X_t = X_{t+s}$ в области, где все определено.

(1) В теореме о существовании и единственности выбор V и ε в маленькой окрестности точки p один и тот же. Таким образом, они действительно существуют. Такое отображение является гладким по теореме о гладкой зависимости от начальных условий.

(2) Следствие теоремы о глобальной непрерывной зависимости от параметра: зафиксируем точку p и рассмотрим соответствующую ей интегральную кривую, определённую на интервале $(a(p), b(p))$. Тогда для любого $[c, d] \subset (a(p), b(p))$ существует окрестность точки p, для любой точки которой интегральная кривая продолжается на отрезок $[c, d]$.

(3) Любую точку что-то покрывает, да.

(4) Отрезок $[0, t]$ компактен, значит, Тогда интегральную кривую можно покрыть конечным числом окрестностей (по пункту **(1)**), на которых отображение X_ε — гладкое. Тогда X_t — их композиция. Отображение X_t взаимно однозначное, а X_{-t} — его обратное, причем для него утверждение про гладкость справедливо аналогично. Таким образом, X_t действительно диффеоморфизм.

(5) Очевидно.

Доказательство. □

Следствие 3.1. Если $\mathcal{M}$ компактно, интегральные кривые определены для всех t.

Доказательство. Из компактности следует, что $D_t = \mathcal{M}$ для некоторого t. Такое t —едино для всего многообразия, поэтому каждое решение можно продолжить на t, потом еще на t...

□

4 билет. Построение стандартных финитных функций: бесконечно гладкой функции с компактным носителем от одной и нескольких переменных, функции с компактным носителем, принимающей значение 1 на кубе

Определение 4.1. *Носителем* функции $\psi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ называется

$$supp(\psi) := \overline{\{x \in \mathcal{M} \mid \psi(x) \neq 0\}}.$$

Построение f, g, h, H и игры с ними.

$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \leqslant 0, \\ e^{-1/x}, & \text{иначе} \end{cases}$. Нетрудно заметить, что $f(t) \in C^\infty$.

Пусть $g(t) = \dfrac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$.

$h(t) = g(t+2)g(2-t)$. Тут у нас получилась *шапочка* длины 2 с центром в 0.

Вот так можно менять длину и центр: $h_{x_1,\varepsilon} = h\left(\dfrac{t - x_1}{\varepsilon}\right)$.

А так можно добавлять переменные: $H_{x,\varepsilon}(u) = \prod\limits_{i=1}^{n} h_{x_i,\varepsilon}(u_i)$.

5 билет. Гладкое разбиение единицы на многообразии, подчинённое покрытию

Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие многообразия $\mathcal{M}$.

Определение 5.1. Набор C^∞ – функций $\psi_\beta(x) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ называется *гладким разбиением единицы*, если

(1) $\psi_\beta(x) \geqslant 0$, $x \in \mathcal{M}$;

(2) для любой точки $x \in \mathcal{M}$ существует такая окрестность $V \ni x$, что $V \cap supp(\psi_\beta) \neq \varnothing$ лишь для конечного числа β.

(3) $\sum_\beta \psi_\beta \equiv 1$, $x \in \mathcal{M}$.

Разбиение единицы называется *подчиненным покрытию*, если носитель каждой функции целиком содержится в некотором U_α.

Теорема 5.1. Пусть $\mathcal{M}$ — гладкое компактное многообразие, а $\mathcal{A} = \{(U_{\alpha,\varphi_\alpha}), \alpha \in A\}$ — его атлас. Тогда существует гладкое разбиение единицы $\{\psi_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$, подчиненное атласу.

Доказательство. Для любой точки $p \in \mathcal{M}$, $p \in U_\alpha$ выберем такое $\varepsilon(p)$, что замыкание квадрата со стороной $4\varepsilon(p)$ лежит в $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Назовем этот квадрат $K_{2\varepsilon}(p)$. Рассмотрим атлас с картами, которые являются прообразами $K_\varepsilon(p)$ и ограничениями старых функций. Из компактности $\mathcal{M}$ следует, что из этого нового атласа можно выбрать конечное подпокрытие из m карт. Тогда определим $\hat{\psi}_i$ на i-ой карте как прообраз $H_{x,\varepsilon(p)}(u)$. Осталось усреднить это дело: $\psi_i = \dfrac{\hat{\psi}_i}{\sum\limits_{j=1}^{m} \hat{\psi}_j}$

□

6 билет. Вложение, погружение и подмногообразие (определения и примеры)

Пусть $f : \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ — гладкое.

Определение 6.1. (1) f — *погружение*, если $df|_p$ невырождено (имеет ранг m) для любой точки $p \in \mathcal{M}$.

(2) $(\mathcal{M}, f)$ — *подмногообразие в* $\mathcal{N}$, если f — инъективное погружение.

(3) f — *вложение*, когда $(f, \mathcal{M})$ подмногообразие, причем f — гомеоморфизм $f : \mathcal{M} \to f(\mathcal{M})$.

7 билет. Вложение компактного многообразия в евклидово пространство достаточно большой размерности

Теорема 7.1. Любое компактное гладкое многообразие можно вложить в евклидово пространство большой размерности.

Доказательство. Рассмотрим атлас, построенный при доказательстве разбиения 1. Отобразим тогда

$$f : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}^{mn+m},\ p \mapsto (\hat{\psi}_1(p) \cdot \varphi_1(p), \dots, \hat{\psi}_m(p) \cdot \varphi_m(p), \hat{\psi}_1(p), \dots, \hat{\psi}_m(p)).$$

φ_i — функция, ограниченная на i-ый квадрат. Почему все работает? Почти все точки разделятся благодаря последним m координатам. Не разделятся только те, которые одновременно лежат или не лежат в прообразах каждого из квадратов. Но тогда эти точки разделит гомеоморфизм φ_i, где i — номер карты, где они лежат (а такая есть).

Осталось проверить невырожденность дифференциала. По построению $\hat{\psi}_i$ для данной точки p найдется такое $\hat{\psi}_k$, что $\hat{\psi}_k(x) = 1$ для всех $x \in V_\varepsilon(p)$ (ε очень маленькое). Тогда в этой окрестности отображение $\hat{\psi}_k\varphi_k$ тождественно, следовательно, ранг всего отображения n.

□

8 и 9 билеты. Тензоры и внешние формы. Тензорные поля и дифференциальные формы на многообразии. Определение и основные свойства внешнего дифференцирования дифференциальных форм. Дифференциальные k-формы на многообразии. Определение через расслоения или в координатах. Отображения перехода в координатах

Ну не смогла я эти вопросы правильно разделить.

Пусть V и W — векторные пространства, $P(V, W)$ — пространство конечных линейных комбинаций пар (v, w), где $v \in V$, $w \in W$. Пусть $N(V, W)$ — подпространство $P(V, W)$, порожденное всеми элементами вида:

(1) $(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w)$;
(2) $(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2)$;
(3) $(\alpha v,w)-\alpha(v,w)$;
(4) $(v,\alpha w)-\alpha(v,w)$.

Определение 8.1. Назовем *тензорным произведением* пространств V и W пространство

$$V\otimes W=P(V,W)/N(V,W).$$

Замечание 8.1. Если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — базис V, а $\eta_1,\ldots,\eta_m$ — базис W, то тензоры $\xi_i\otimes\eta_j$ образуют базис пространства $V\otimes W$.

Определение 8.2. *Внешним произведением* $\Lambda_k(V)$ назовем пространство $\Lambda_k(V)=T_{k,0}(V)/S_k(V)=V^{\otimes k}/S_k(V)$, где $S_k(V)\subset T_{k,0}$ — пространство тензоров, которые не меняются при перестановке кааординат.

Замечание 8.2. $v\wedge w=v\otimes w-w\otimes v$.

Определение 8.3. *Дифференциальной формой* размерности k на многообразии называется сечение k-ой внешней степени кокасательного расслоения $(T^*\mathcal{M})^{\wedge k}$.

Замечание 8.3. Когда мы живем внутри карты и есть координаты, то форму можно задавать привычным способом.

Лемма 8.1. Форма $\omega=\sum\limits_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant n}a_{i_1,\ldots,i_k}dy_{i_1}\wedge\ldots\wedge dy_{i_k}$, заданная в некоторой карте, при замене координат принимает вид

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant n}a_{i_1,\ldots,i_k}(y(x))\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_k\leqslant n}\Delta^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k}dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dy_{j_k},$$

где $\Delta^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k}$ — минор матрицы $J^T(y)$ (снизу — строчки, сверху — столбики).

Доказательство. По линейности достаточно доказать для одного из мономов. Тут уже совсем очевидно: $dy_i\mapsto\sum\limits_j\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}dx_j$. Если перемножить эти суммы, как раз миноры и вылезут.

□

Замечание 8.4. Тут можно дать еще одно определении формы: набор форм в каждой карте, на которых отображение перехода действует правильно (=как в лемме).

Замечание 8.5. Свойства. (1) $(\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)$;
(2) $(\omega_1+\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1\wedge\omega_3+\omega_2\wedge\omega_3$;
(3) $\omega_1\wedge\omega_2=(-1)^{dim(\omega_1)}\omega_2\wedge\omega_1$;
(4) все линейно.

Определение 8.4. *Внешним дифференцированием* называется такая линейная операция $d:\Lambda^k(\mathcal{M})\to\Lambda^{k+1}(\mathcal{M})$, которую можно задать в координатах (корректность потом) следующим образом:

$$d : \alpha(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Лемма 8.2. Корректность определения. Внешнее дифференцирование не зависит от выбора координат.

Доказательство. Тут нужно по-честному написать. Появятся миноры на единичку большей размерности, которые равны сумме старых миноров с некоторыми коэффициентами.

□

Замечание 8.6. (1) $d^2\omega = 0$;
(2) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{dim(\omega_1)} \omega_1 \wedge d\omega_2$.

10 билет. Производная Ли от векторного поля, от формы. Их основные свойства (доказательство только для элементарных)

Определение 10.1. *Производной Ли* векторного поля Y вдоль потока поля X называется

$$L_X Y = \lim_{t \to 0+} \frac{dX_{-t}(Y_{X_t(p)}) - Y_p}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} dX_{-t}(Y_{X_t(p)}).$$

Определение 10.2. *Производной Ли* от формы ω вдоль потока поля X называется

$$L_X \omega = \lim_{t \to 0+} \frac{X_t^*(\omega_{X_t(p)}) - \omega}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X_t^*(\omega_{X_t(p)}).$$

Обозначение 10.1. $\iota_v \omega$ — подстановка в форму вектора v в качестве 1 координаты, $\iota_X \omega$ — подстановка в каждой точке своего вектора — векторного поля в этой точке.

Лемма 10.1. Свойства. (1) $L_X f = X^f$, $f \in C^\infty$;
(2) $L_X \omega = \iota_X d\omega + d\iota_X \omega$ — это называется *тождество Картана*;
(3) $dL_X \omega = L_X d\omega$;
(4) $L_X Y = [X, Y]$;
(5) $d\omega(X, Y) = L_X \omega(Y) - L_Y \omega(X) + \omega([X, Y])$.

Доказательство. **(1)** Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(u) \dfrac{\partial}{\partial u_i}$. $L_X f = \dfrac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(X_t(p)) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \ldots, \right.$
$\left. \begin{pmatrix} a_1(p) \\ \ldots \\ a_n(p) \end{pmatrix} \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(p) \dfrac{\partial f}{\partial u_i} = X^f$.

(2) Докажем по индукции по размерности формы n. База $n = 0$ доказана/. Докажем для $n = 1$. Мы всегда буде доказывать для одночлена, поскольку все вокруг линейно. $L_X(du_1)(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (X_t)^*(du_1)(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} du_1(dX_t(u)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_i} v_i$, где $\varphi_i(u)$ — координаты потока, второе равенство верно по определению обратного отображения в кокасательных пространствах. Продолжаем равенство: $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_1}{\partial u_i} v_i =$
$= da_1(v)$.

Переход. Для производной Ли выполнено правило Лейбница. Пусть форма $\omega = u \wedge v$, форма u имеет размерность k . $L_X\omega = L_X u \wedge v + u \wedge L_X v = (\iota_X du + d\iota_X u) \wedge v + u \wedge (\iota_X dv + d\iota_X v)$. С другой строны, нам хочется проверить, что это $\iota_X d(u \wedge v) + d\iota_X(u \wedge v) = \iota_X(du \wedge v + (-1)^k u \wedge dv) + d(\iota_X u \wedge v + (-1)^k u \wedge \iota_X v) = \iota_X du \wedge v + (-1)^{k-1} du \wedge \iota_X v + (-1)^k \iota_X(u) \wedge dv + u \wedge \iota_X dv + d\iota_X u \wedge v + (-1)^{k-1}\iota_X u \wedge dv + (-1)^k du \wedge \iota_X v + u \wedge d\iota_X v$. Что и требовалось.

(3), (5) Производную Ли просто невозможно хорошо считать по определению. Если мы знаем тождество Картана, то можно. Кстати, так доказываются многие другие свойства (конечно, можно делать это и независимо, но это малоприятно), нужно еще немножко поработать ручками и поприменять тождество.

(4) Ну это нужно в координатах записать.

□

11 билет. Интегрирование дифференциальных форм в области $\mathbb{R}^n$ и на многообразии

Определение 11.1. Пусть $\mathcal{M}^n$ — многообразие с атласом (U, φ), состоящим из одной карты, форма $\omega = a(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ задана в нектороых координатах этой карты. Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \omega = \int\limits_{\varphi(\mathcal{M})} a(x)dx_1 \ldots dx_n.$$

Лемма 11.1. Корректность. Определение интеграла не зависит от от выбора координат.

Доказательство. При замене координат подынтегральное выражение домножится на якобиан, что согласуется с заменой координат в $\mathbb{R}^n$.

□

Замечание 11.1. На этом шаге мы пользуемся ориентируемостью, потому что в матанской формуле у определителя есть модуль.

Определение 11.2. Пусть ω — финитная форма (носитель компактен) на многообразии $\mathcal{M}^n$ с ориентирующим атласом $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha\})$. Пусть $(U_i, \varphi_i)_{i=1}^m$ —

набор карт, покрывающих носитель, а ψ_i — разбиение 1, подчиненное этому покрытию. Интегралом от формы в этом случае называется

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \omega = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{U_i} \psi_i \omega.$$

Лемма 11.2. Корректность. Интеграл не зависит от выбора ориентирующего атласа и разбиения единицы.

Доказательство. Пусть есть два разных атласа и подчиненные им разбиения (все, зависящее от второго атласа, ходит в шапочках).

Определим разбиение $\psi_{ij}(p) = \psi_i(p)\hat{\psi}_j(p)$. Заметим, что оно подчинено сразу двум атласам. Тогда

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{U_i} \psi_i \omega = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\hat{m}} \int\limits_{U_i \cap \hat{U}_j} \psi_{ij} \omega = \hat{\int\limits_{\mathcal{M}}} \omega.$$

□

12 билет. Формула Стокса

Формула Стокса. Пусть $\mathcal{M}^n$ — ориентируемое гладкое многообразие с краем (возможно, пустым). $\omega \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{M})$. Тогда

$$\int\limits_{\delta\mathcal{M}} \omega = (-1)^n \int\limits_{\mathcal{M}} d\omega.$$

Доказательство. По определению интеграла достаточно доказывать для одной карты и для монома, поскольку все линейно. Есть два случая:

(1) $k < n$ и $\omega = f(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$. Тогда ограничение формы на $\delta\mathcal{M}$ равно 0, поскольку x_r и dx_r равны 0 на $\delta\mathcal{M}$. Таким образом, левая часть равна 0. С другой стороны,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = (-1)^{k-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Но если проинтегрировать сначала по x_k, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = f(x_1, \ldots, x_n) \Big|_{x_k=-\infty}^{x_k=\infty} = 0,$$

поскольку носитель формы лежит в некоторой ограниченной области.

(2) $\omega = f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$.

$$\int\limits_{\delta\mathcal{M}} \omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}.$$

С другой стороны, $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = (-1)^{n-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_r$.

Проинтегрируем по x_n :

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = f(x) \,\Big|_{x_n=0}^{x_n=\infty} = -f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Переходя к повторному интегралу, получаем то, что нужно.

$\square$

13 билет. Двумерные и трёхмерные следствия из формулы Стокса (формулы Грина, Гаусса–Остроградского и трёхмерная формула Стокса)

Формула Грина. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей, P, Q — гладкие на $\bar{D}$. Тогда

$$\int\limits_{\delta\bar{D}} (Pdx + Qdy) = \int\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Формула Гаусса-Остроградского. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей, P, Q, R — гладкие на $\bar{D}$. Тогда

$$\int\limits_{\delta\bar{D}} (Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) = -\int\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Классический Стокс. Пусть S — ориентированння кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$ с краем, $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ — гладкая 1-форма. Тогда

$$\int\limits_{\delta S} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy\right)$$

14 билет. Когомологии де Рама. Определение, когомологии окружности

Определение 14.1. Пространство *замкнутых* форм:

$$Z^k(\mathcal{M}) = \{\omega \in \Lambda^k(\mathcal{M}) \mid d\omega = 0\}.$$

Определение 14.2. Пространство *точных* форм:

$$B^k(\mathcal{M}) = \{\omega \in \Lambda^k(\mathcal{M}) \mid \exists \eta \in \Lambda^{k-1}(\mathcal{M}), \text{ что } d\eta = \omega\}.$$

Замечание 14.1. Поскольку $d^2 = 0$, $B^k \subset Z^k$.

Определение 14.3. Пространством k-ых *когомологий де Рама* называется фактор-пространство $H^k(\mathcal{M}) = Z^k(\mathcal{M})/B^k(\mathcal{M})$.

Замечание 14.2. Считать когомологии по определению я не очень хочу, но разок надо.

Когомологии окружности. $H_0(S^1) = \mathbb{R}$, $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

Доказательство. Очевидно, что $H^0(S^1) = \mathbb{R}$, потому что окружность связна. Осталось найти $H^1(S^1)$, потому что больше ничего нет. Заметим, что $H^1(S^1) = \Lambda^1(S^1)/B^1(S^1)$. По формуле Стокса для любой формы $d\nu = \omega \in B^1(S^1)$ выполнено

$$0 = \int\limits_{\varnothing} \nu = \int\limits_{S^1} \omega.$$

Верно и обратное: формы с нулевым интегралом — точные. Для этого достаточно построить прообраз такой формы при внешнем дифференцировании. Введем на окружности координаты: $f(t) = e^{2\pi i t}$. Определим $\nu = \int\limits_0^t \omega$. Это определение корректно, потому что интеграл от формы нулевой.

Таким образом, у всех форм из класса эквивалентности при факторизации одинаковый интеграл, следовательно, $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

$\square$

15 билет. Сопряжённое отображение: действие на дифференциальных формах

Напоминание. Для отображения гладких многообразий $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ мы определяли дифференциал df (действует на векторах) и сопряженное отображение $f^* : T^*\mathcal{N} \to T^*\mathcal{M}$ (оно действует так: $f^*(\tau)(v) = \tau(df(v))$).

Таким образом, можно определить действие f^* на формах покомпонентно.

16 билет. Коммутирование сопряжённого отображения на формах и внешнего дифференциала

Лемма 16.1. f^* и d коммутируют: $df^*\omega = f^*d\omega$.

Доказательство. Докажем это по частям.

(1) $w = g(y)$. $df^*(g) = d(g(f(x))) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i$. С другой стороны, $f^*(dg) = f^*(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j} dy_j) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i$.

(2) $\omega = dy_1$. $df^*(dy_1)d(df_1) = 0 = f^*(d^2 y_1)$. Аналогичное верно для любого внешнего одночлена.

(3) Пусть теперь $\omega = a(y)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k$. $df^*(a(y)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k) = d(a(f(x))df_1 \wedge \ldots \wedge df_k)$. С другой стороны, $f^*d(a(y)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k) = f^*(da(y)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k) = d(a(f(x))df_1 \wedge \ldots \wedge df_k)$. Последнее из равенств честное по первым двум пунктам.

□

17 билет. Сопряжённое отображение: действие на пространствах когомологий

Теорема 17.1. Гладкое отображение порождает гомоморфизм в когомологиях.

Доказательство. Достаточно доказать, что: **(1)** $f^* : Z^k(\mathcal{N}) \to Z^k(\mathcal{M})$ (тогда отображение бьет куда надо), **(2)** $f^* : B^k(\mathcal{N}) \to B^k(\mathcal{M})$ (тогда оно корректно определено на классах эквивалентности).

(1) Пусть $\omega \in Z^k(\mathcal{N})$. Это значит, что $d\omega = 0$, тогда $df^*\omega = f^*d\omega = 0$, следовательно, $f^*\omega \in Z^k(\mathcal{M})$.

(2) Пусть $\omega \in B^k(\mathcal{N})$. Это значит, что $\omega = d\eta$, тогда $f^*\omega = f^*d\eta = df^*\eta$, следовательно, $f^*\omega \in B^k(\mathcal{M})$.

□

18 билет. Сопряжённые отображение на когомологиях де Рама совпадают для гомотопных отображений. Изоморфизм пространств когомологий де Рама гомотопически эквивалентных многообразий

Определение 18.1. Два отображения $f_{0,1} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называются *гладко гомотопными*, если существует такое гладкое $F : \mathcal{M} \times [0,1] \to \mathcal{N}$, что $F(p,0) = f_0(p)$ и $F(p,1) = f_1(p)$. Это обозначается так: $f_0 \sim f_1$.

Определение 18.2. Два пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют такие $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и $g : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, что $f \circ g \sim id_{\mathcal{N}}$ и $g \circ f \sim id_{\mathcal{M}}$.

Зададим линейный оператор $K : \Lambda^{k+1}(\mathcal{M} \times I) \to \Lambda^k(M)$ на мономах:

$$K(a(x,t)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k+1}}) = 0,$$

$$K(a(x,t)dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = \left(\int\limits_0^1 a(x,t)dt\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Определим *срезки* $j_i : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times [0,1] : j_i(p) = (p, i)$.

Суперлемма. Пусть $\omega \in \Lambda^{k+1}(\mathcal{M} \times I)$. Тогда $K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^*\omega - j_0^*\omega$.

Доказательство. Все линейно, поэтому будем доказывать для мономов. Они бывают двух типов.

(1) $\omega = a(x,t)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k+1}}$. Тогда $K\omega = 0$, $K(d\omega) = K\left(\frac{\partial a}{\partial t}dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k+1}}\right)$
$= \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}dt\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k+1}} = (a(x,1) - a(x,0))dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k+1}} = j_1^*\omega - j_0^*\omega$.
Что и требовалось.

(2) $\omega = a(x,t)dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$. Заметим, что $j_1^*\omega = j_0^*\omega = 0$.

$K(d\omega) = -K(\sum\limits_{i_0} \frac{\partial a}{\partial x_{i_0}} dt \wedge dx_{i_0} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = -\sum\limits_{i_0} \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial a}{\partial x_{i_0}} dt\right) dx_{i_0} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$.

$d(K\omega) = d\left(\left(\int\limits_0^1 a(x,t)dt\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\right) = \sum\limits_{i_0} \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} \left(\int\limits_0^1 a(x,t)dt\right) dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$. Сошлось!

□

Предложение 18.1. Гомотопные отображения на многообразиях порождают одинаковые на когомологиях де Рама сопряженные.

Доказательство. По определению существует гомотопия $F : \mathcal{M} \times [0,1] \to \mathcal{N}$. Пусть $\omega \in Z^k(\mathcal{N})$. Мы хотим доказать, что $[f_0^*(\omega)] = [f_1^*(\omega)]$, что равносильно $f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) \in B^k(\mathcal{M})$. По уже доказанному $\Omega = F^*(\omega)$ — замкнутая. Применим суперлемму: $dK\Omega = Kd\Omega + dK\Omega = j_1^*\Omega - j_0^*\Omega = (Fj_1)^*(\omega) - (Fj_0)^*(\omega) = f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega)$ — точная форма.

□

Следствие 18.1. Если пространства гомотопически эквивалентны, то их когомологии совпадают.

Доказательство. $f \circ g \sim id_{\mathcal{N}}$, следовательно, в пространстве когомологий $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = id_{\mathcal{N}}^*$. Таким образом, когомологии изоморфны по определению изоморфизма.

□

19 билет. Лемма Пуанкаре

Лемма Пуанкаре. Когомологии стягиваемого пространства такие же, как и у точки (а у нее почти все нулевые, только $H^0(pt) = \mathbb{R}$).

Доказательство. Это слабая версия предыдущего следствия. $\square$

20 билет. Сингулярные гомологии (определение, формулировки теорем де Рама)

Δ_k будем обозначать стандартный симплес на $k+1$ вершине. Все его вершины всегда пронумерованы.

Замечание 20.1. На лекции почему-то вместо симплексов были кубы, наверное, чтобы легче было потом считать интегралы. Тут все будет про симплексы.

Определение 20.1. *k-цепью* называется произвольное гладкое отображение $\psi : \Delta_k \to \mathcal{M}$.

Определение 20.2. *Группой сингулярных k-цепей $C_k(\mathcal{M})$* называется свободная абелева группа, образующие которой находятся во взаимно однозначном соответствии с цепями.

Определение 20.3. Граничный гомоморфизм

$$\delta\psi = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \psi \circ \rho_{k,i},$$

где $\rho_{k,i} : \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ — совмещение Δ_{k-1} с гранью, не содержащую i-ую вершину, с сохранением порядка в нумерации.

Замечание 20.2. У нас появился цепной комплес: C_k — абелевы группы, δ — гомоморфизм.

Определение 20.4. *Сингулярными гомологиями* называются гомологии (которые определим в следующем билете) такого комплекса.

Замечание 20.3. Чтобы эта штука была комплексом, нужно проверить, что $\delta^2 = 0$. Действительно, посмотрим на коэффициент при грани, которая получается выкидыванием i, j. Без ограничения общности $i < j$. Тогда, если выкинуть сначала i, потом j, вылезет коэффициент $(-1)^i \cdot (-1)^{j-1}$, ведь нумерация сдвинулась. А если их выкидывать в другом порядке, вылезет коэффициент $(-1)^j \cdot (-1)^i$, поскольку нумерация до j-ого номера не сдвинулась.

Теорема де Рама. $H^k(\mathcal{M})$ и $H_k(\mathcal{M})$ можно спарить и это спаривание будет невырождено. Будем спаривать так:

$$(\omega, c) \mapsto \int_c \omega = \sum_I \alpha_i \int_{\Delta_k} \psi_i^* \omega,$$

где $c = \sum_I \alpha_i \psi_i$.

21 билет. Точные последовательности, определение и простейшие примеры. Цепной (коцепной) комплекс. Определение гомологий (когомологий) комплекса

Определение 21.1. *Точной последовательностью* называется последовательность абелевых групп(векторных пространств, модулей, алгебр) и гомоморфизмов $f_i : M_{i-1} \to M_i$

$$\ldots \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \ldots,$$

если $im(f_i) = ker(f_{i+1})$.

Пример 21.1. $0 \to M \xrightarrow{g} M'$ точна тогда и только тогда, когда g инъективен.

Пример 21.2. $M \xrightarrow{f} M' \to 0$ точна тогда и только тогда, когда f сюръективен.

Пример 21.3. $0 \to M' \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M'' \to 0$ точна тогда и только тогда, когда g инъективен, f сюръективен и $im(g) = ker(f)$. Такая последовательность называется *короткой точной последовательностью.*

Пример 21.4. $0 \to M \xrightarrow{f} M' \to 0$ точна тогда и только тогда, когда f — изоморфизм.

Определение 21.2. *Цепной комплекс* — последовательность векторных пространств (или абелевых групп) и гомоморфизмов

$$0 \leftarrow C_0 \xleftarrow{\gamma_1} C_1 \xleftarrow{\gamma_2} \ldots = C_*$$

таких, что $B_k = Im(\gamma_{k+1}) \subset ker(\gamma_k) = Z_k$.

Замечание 21.1. Когда говорят, что комплекс *коцепной*, имеют в виду, что стрелки направлены в другую сторону. *Но я до сих пор не уверена в этом.*

Определение 21.3. k-ыми *гомологиями* цепного комплеса называется $H_k(C_*) = Z_k/B_k$.

Замечание 21.2. Когда комплекс коцепной, то же самое называется когомологиями и индекс пишется сверху H^k.

22 билет. Теорема о длинной точной последовательности когомологий (формулировка с объяснением всех отображений)

Теорема 22.1. Пусть дана коммутативная диаграмма, строчки которой — цепные комплексы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ соответственно, а столбцы, кроме, возможно, первого (на картинке он скорее (-1)-ый), — короткие точные последовательности.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \dots & \\
0 \arrow[r] & \tilde{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & A_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "h_0"] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "h_1"] & \dots \arrow[r] & {} \\
0 \arrow[r] & \tilde{B} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "l"] & B_0 \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, "l_0"] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "l_1"] & \dots \arrow[r] & {} \\
0 \arrow[r] & \tilde{C} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & C_0 \arrow[r, "\gamma_0"] \arrow[d] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & {} \\
 & 0 & 0 & 0 & \dots &
\end{tikzcd}$$

Тогда существуют такие граничные гомоморфизмы, что длинная последовательность

$$0 \to H_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\hat{h}_0} H_0(\mathcal{B}) \xrightarrow{\hat{l}_0} H_0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\hat{\delta}_0} H_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\hat{h_1}} H_1(\mathcal{B}) \xrightarrow{\hat{l}_1} H_1(\mathcal{C}) \xrightarrow{\hat{\delta}_1} H_2(\mathcal{A}) \to$$

— точна.

Доказательство. Достаточно описать построение всех гомоморфизмов. Точность — упражнение, которое рано или поздно должен сделать каждый. *Хотя и гомоморфизмы проще самому придумать, чем прочитать.*

(1) Построим $\hat{h}_k$. Хотелось бы, чтобы это было просто ограничение h_k. Для этого достаточно проверить, что образ переходит в образ, а ядро — в ядро. Первое (как и второе) очевидно: если у элемента есть прообраз, то в силу коммутативности можно обойти квадратик в другую сторону.

(2) $\hat{l}_k$ получается аналогично ограничением l_k.

(3) Построим $\hat{\delta}_k : H^k(\mathcal{C}) \to H^{k+1}(\mathcal{A})$. Тут нужно пройти по трем самым естественным уже нарисованным стрелочкам. Выберем $c \in Z^k(\mathcal{C})$. Отображение l_k сюръективно из точности, следовательно, существует такое $b \in B_k$, что $l_k(b) = c$. Поскольку строчки — цепные комплексы, то $\gamma_k(c) = 0$. $\beta_k(b) \in B_{k+1}$, поэтому из коммутативности диаграммы и точности столбика следует, что $\beta_k(b) \in \ker(l_{k+1}) = im(h(k+1))$. Кроме того, h_{k+1} — инъективно, поэтому существует и единственное такое $a \in A_{k+1}$, что $h_{k+1}(a) = \beta_k(b)$. Определим $\hat{\delta}_k[c] = [a]$. Мы помним, что была свобода в красных буквах.

Мы почти все сделали. Осталось доказать несколько вещей:

(a) $a \in Z^{k+1}(\mathcal{A})$. Действительно, $\beta_{k+1}(\beta_k(b)) = 0$ по определению комплекса. Тогда из коммутативности $h_{k+2}(\alpha_{k+1}(a)) = 0$, но h_{k+2} инъективно, поэтому $\alpha_{k+1}(a) = 0$.

(b) Класс $[a]$ не зависит от выбора прообраза b. Для этого достаточно доказать, что если $b' \in ker(l_k) = im(h_k)$, то $a' \in im(\alpha_k)$. Действительно, тогда найдется такое a^*, что $h_k(a^*) = b'$. Но тогда $a' = \alpha_k(a^*)$, что и требовалось.

(c) Класс $[a]$ не зависит от выбора представителя . Для этого достаточно показать, что если $c' \in im(\gamma_{k-1})$, то соотетствующий ему прообраз $b^* \in im(\beta_{k-1})$. Действительно, существует такое $c^* \in C_{k-1}$, что $\gamma_{k-1}(c^*)$. В силу точности у c^* существует прообраз $b'' \in B_{k-1}$. Уже по доказанному в пункте **(b)** класс $[a]$ не зависит от выбора прообраза во второй строке, значит, можно считать, что $l_k(b^*) = c'$.

Замечание, которое нужно увидеть перед тем, как посмотреть на диаграмму. Формально она ни в коем случае не коммутативна. Смотреть на нее надо слоями (каждый из которых по-честному коммутативен): **черный слой** — доказательство пункта **(a)** и построение, **зеленый слой** — доказательство **(b)**, **синий слой** — доказательство **(c)**.

$$\begin{tikzcd}
 & a^* \arrow[r, "\alpha_k"] \arrow[d, "h_k"] & a+\alpha_k(a^*) \arrow[r, "\alpha_{k+1}"] \arrow[d, "h_{k+1}"] & \alpha_{k+1}(a) = 0 \arrow[d, "h_{k+2}"] \\
b'' \arrow[r, "\beta_{k-1}"] \arrow[d, "l_{k-1}"] & b^*+b+b' \arrow[r, "\beta_k"] \arrow[d, "l_k"] & \beta_k(b) = h_{k+1}(a) \arrow[r, "\beta_{k+1}"] \arrow[d, "l_{k+1}"] & 0 \\
c^* \arrow[r, "\gamma_{k-1}"] & c'+c = l_k(b) \arrow[r, "\gamma_k"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\square$

23 билет. Точность короткой последовательности Майера–Вьеториса

Пусть гладкое компактное многообразие представлено в виде объединения двух открытых подмножеств $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \bigcup \mathcal{M}_2$ и $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1 \bigcap \mathcal{M}_2$. Естественное отображение $\mathcal{M}_1 \bigsqcup \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}$ порождает гомоморфизмы $h_k : \Lambda^k(\mathcal{M}) \to \Lambda^k(\mathcal{M}_1) \bigoplus \Lambda^k($

Естественные покоординатные вложения $\hat{l}_i : \mathcal{N} \to \mathcal{M}_1 \bigsqcup \mathcal{M}_2$ порождают отображения k-форм — l_k^1, l_k^2. Тогда $l_k = l_k^2 - l_k^1$.

Таким образом, получилась последовательность:

$$0 \to \Lambda^k(\mathcal{M}) \xrightarrow{h_k} \Lambda^k(\mathcal{M}_1) \bigoplus \Lambda^k(\mathcal{M}_2) \xrightarrow{l_k} \Lambda^k(N) \to 0.$$

Эта последовательность называется *короткой точной последовательностью Майера-Вьеториса.*

Теорема 23.1. Короткая точная последовательность Майера-Вьеториса точна на самом деле.

Доказательство. Нужно проверить точность в трех членах.

(1) Иньективность h_k. Пусть $h_k(\omega) = 0$. Тогда эта форма нулевая на каждой компоненте, значит, на всем многообразии.

(2) Точность во втором члене. Образ h_k состоит из тех форм, которые совпадают на пересечении. С другой стороны, ровно эти формы и зануляет l_k. Таким образом, $im(h_k) = ker(l_k)$

(3) Сюрьективность l_k. Рассмотрим некоторую форму $\nu \in \Lambda^k(\mathcal{N})$. Было бы неплохо показать, что у нее есть прообраз. Рассмотрим разбиение единицы ρ_1, ρ_2, подчиненное покрытию $\mathcal{M}_1 \bigcup \mathcal{M}_2$. Тогда форма $(-\rho_2\nu) \bigoplus \rho_1\nu$ — нужный прообраз.

□

24 билет. Длинная точная последовательность Майера–Вьеториса. Её применение для вычисления когомологий окружности или любого другого нестягиваемого многообразия

Совмещая теорему 23.1 и теорему 22.1, мы получаем *длинную точную последовательность Майера-Вьеториса*:

$$0 \to H^0(\mathcal{M}) \xrightarrow{\hat{h}_0} H^0(\mathcal{M}_1)\oplus H^0(\mathcal{M}_2) \xrightarrow{\hat{l}_0} H^0(\mathcal{N}) \xrightarrow{\hat{\delta}_0} H^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{\hat{h_1}} H^1(\mathcal{M}_1)\oplus H^1(\mathcal{M}_2)\dots$$