Лекция 16. Принцип максимума.

Теория функций комплексного переменного

Принцип максимума

Предложение 9.11 (принцип максимума модуля). *Если функция f голоморфна и не является постоянной на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, то функция $z \mapsto |f(z)|$ ни в одной точке U не может иметь локального максимума.*

- В доказательстве используется принцип сохранения области.
- Также нужно утверждение о том, что непостоянная на U функция не может быть постоянной ни в какой малой окрестности точки из U (здесь важна связность!).

Лемма Шварца

Предложение 9.13 (лемма Шварца). *Пусть* $D = \{z : |z| < 1\}$ *— единичный круг и* $f : D \to D$ *— голоморфное отображение, для которого* $f(0) = 0$. *Тогда:*

(1) $|f(z)| \leqslant |z|$ *для всех* $z \in D$;

(2) $|f'(0)| \leqslant 1$;

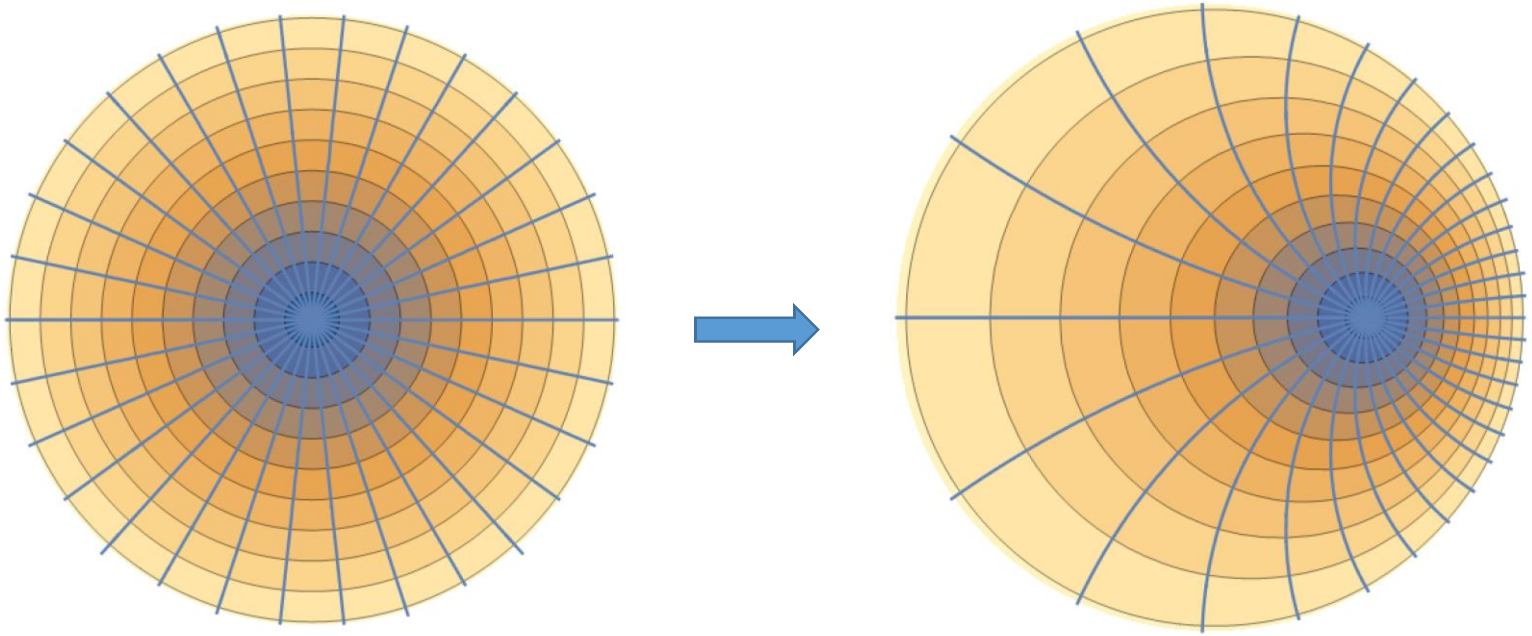
(3) *если в неравенстве* (1) (*хотя бы для одного* $z \neq 0$) *или в неравенстве* (2) *достигается равенство, то существует такое* $\theta \in \mathbb{R}$, *что* $f(z) = e^{i\theta} z$ *для всех* $z \in D$.

- Рассмотрим функцию $g(z) = f(z)/z$ и применим к ней принцип максимума.

Конформные автоморфизмы диска

Предложение 9.14. *Всякий конформный автоморфизм круга* $D = \{z : |z| < 1\}$ *является дробно-линейным.*

- Дробно-линейные автоморфизмы диска уже были описаны (напоминание на след. слайде).



Автоморфизмы диска

Предложение 3.5. *Дробно-линейные автоморфизмы единичного круга $U = \{z : |z| < 1\}$ суть отображения вида*

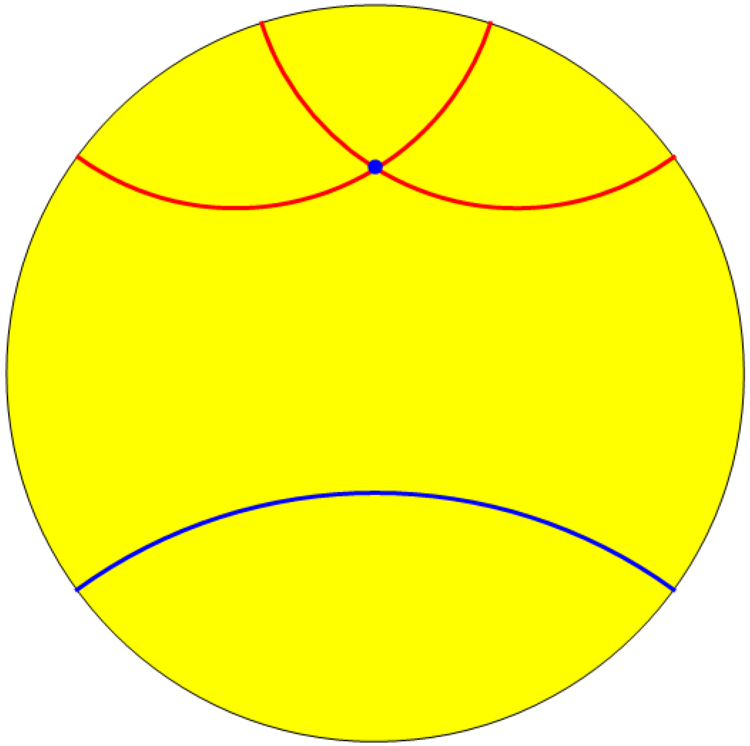
$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbb{R},\ |a| < 1, \tag{3.2}$$

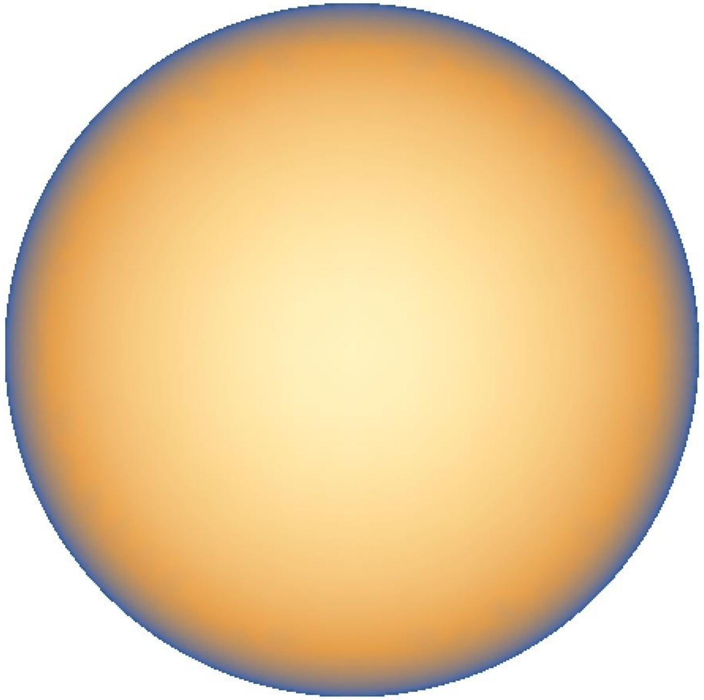
и только они.

- Если точка a переходит в 0, то симметричная к a относительно $\mathbb{S}$ точка $\frac{1}{\bar{a}}$ переходит в симметричную к 0 точку ∞.

Метрика Пуанкаре в диске $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$





Метрика Пуанкаре и голоморфные эндоморфизмы диска

- Любой автоморфизм диска сохраняет метрику Пуанкаре, т.е. сохраняет нормы векторов и длины кривых.
- Пусть $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – произвольное голоморфное отображение, не обязательно автоморфизм.
- Тогда $\forall$ касательного вектора v к $\mathbb{D}$ имеем $\|df(v)\| \leq \|v\|$ (норма берется относительно метрики Пуанкаре).
- Следовательно, длины кривых не могут увеличиваться.
- Если $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, то f строго сжимает нормы векторов и длины.

Теорема Пика

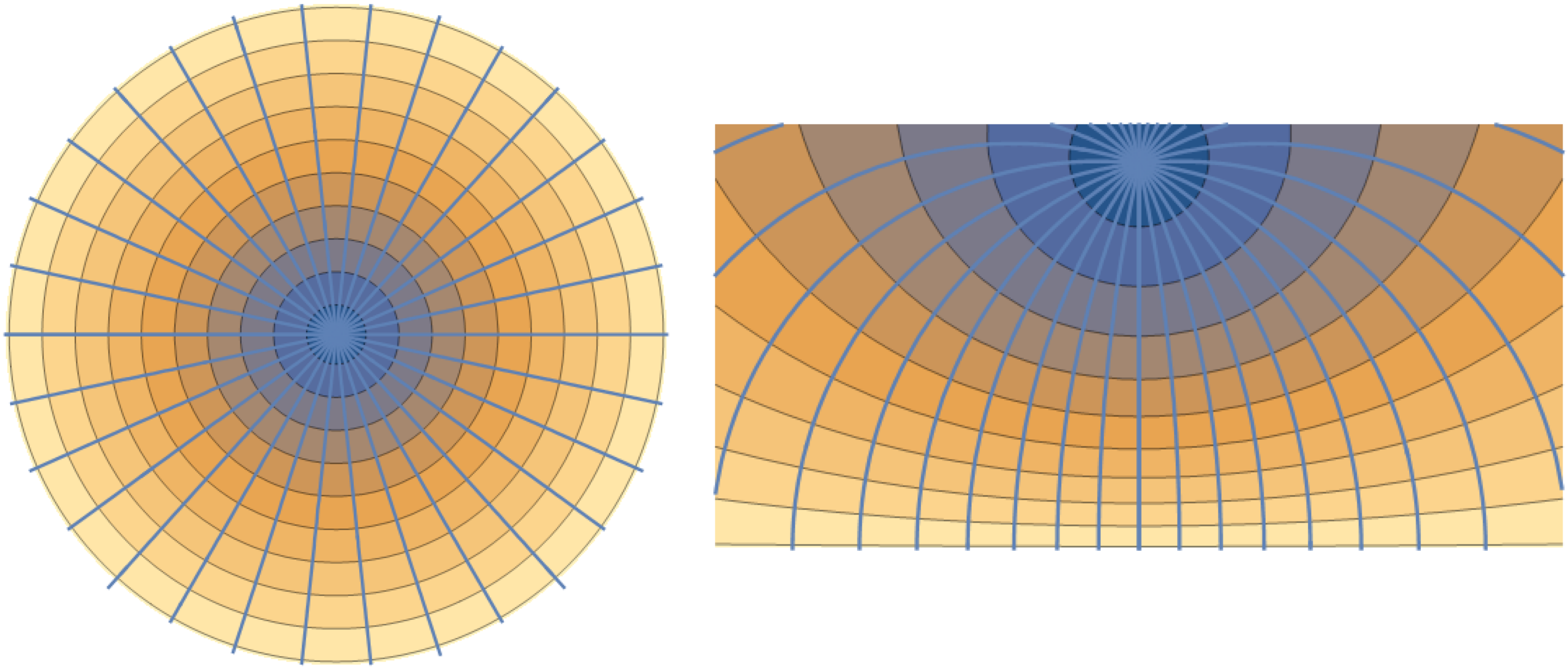
Теорема. *Пусть $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – произвольное голоморфное отображение. Тогда $\forall\, x, y \in \mathbb{D}$ $\operatorname{dist}\big(f(x), f(y)\big) \leq \operatorname{dist}(x, y)$. Равенство возможно только если f – автоморфизм.*

Следствие. Любое семейство $\mathcal{F}$ голоморфных отображений $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ равностепенно непрерывно:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall f \in \mathcal{F} \quad \operatorname{dist}(x, y) < \delta \;\Longrightarrow\; \operatorname{dist}\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

При фиксированном x это верно и в сферической или евклидовой метрике.

Изоморфизм $f(z) = i\frac{1-z}{1+z}$ между $\mathbb{D}$ и $\mathbb{H}$



Автоморфизмы верхней полуплоскости

Предложение 3.4. *Дробно-линейные автоморфизмы верхней полуплоскости $H = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ суть отображения вида*

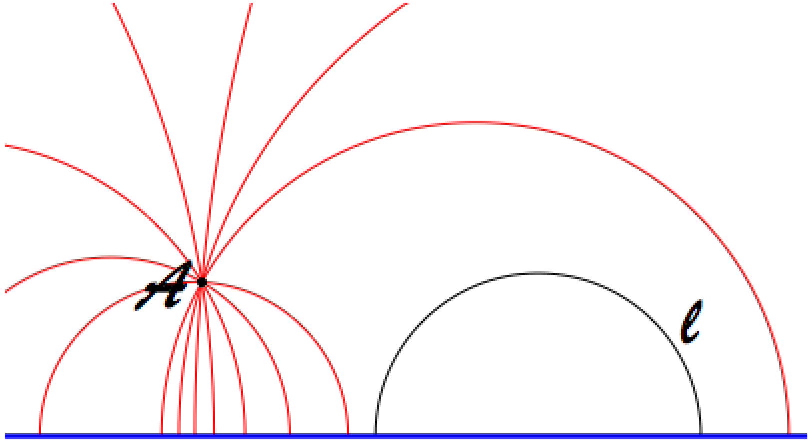
$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Группа дробно-линейных автоморфизмов верхней полуплоскости изоморфна $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$, где $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ — группа вещественных матриц с определителем 1, а I — единичная матрица.

Ключевая идея: если $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, то $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Если $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$, то $f(i) \in \mathbb{R}$.

Метрика Пуанкаре в полуплоскости

- Метрика Пуанкаре $ds^2 = \frac{|dz|^2}{(\mathrm{Im}\, z)^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.
- Геодезические (кривые, являющиеся кратчайшими путями между любыми парами своих достаточно близких точек) – дуги окружностей, перпендикулярных вещественной прямой.



$$\operatorname{dist}(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}{2y_1y_2}\right)$$
$$= 2\operatorname{arsinh}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}{y_1y_2}}$$
$$= 2\ln\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2+y_1)^2}}{2\sqrt{y_1y_2}},$$

$$\operatorname{dist}(AB) = \left|\ln\left(\frac{|BA_\infty||AB_\infty|}{|AA_\infty||BB_\infty|}\right)\right|.$$

Николай Иванович Лобачевский (1792-1856)

- Выдающийся математик и деятель образования.
- Ректор Казанского университета.
- «Коперник геометрии».
- *Геометрия Лобачевского* = абсолютная геометрия + отрицание пятого постулата.

Где родился Лобачевский

Эудженио Бельтрами (1835 – 1900)

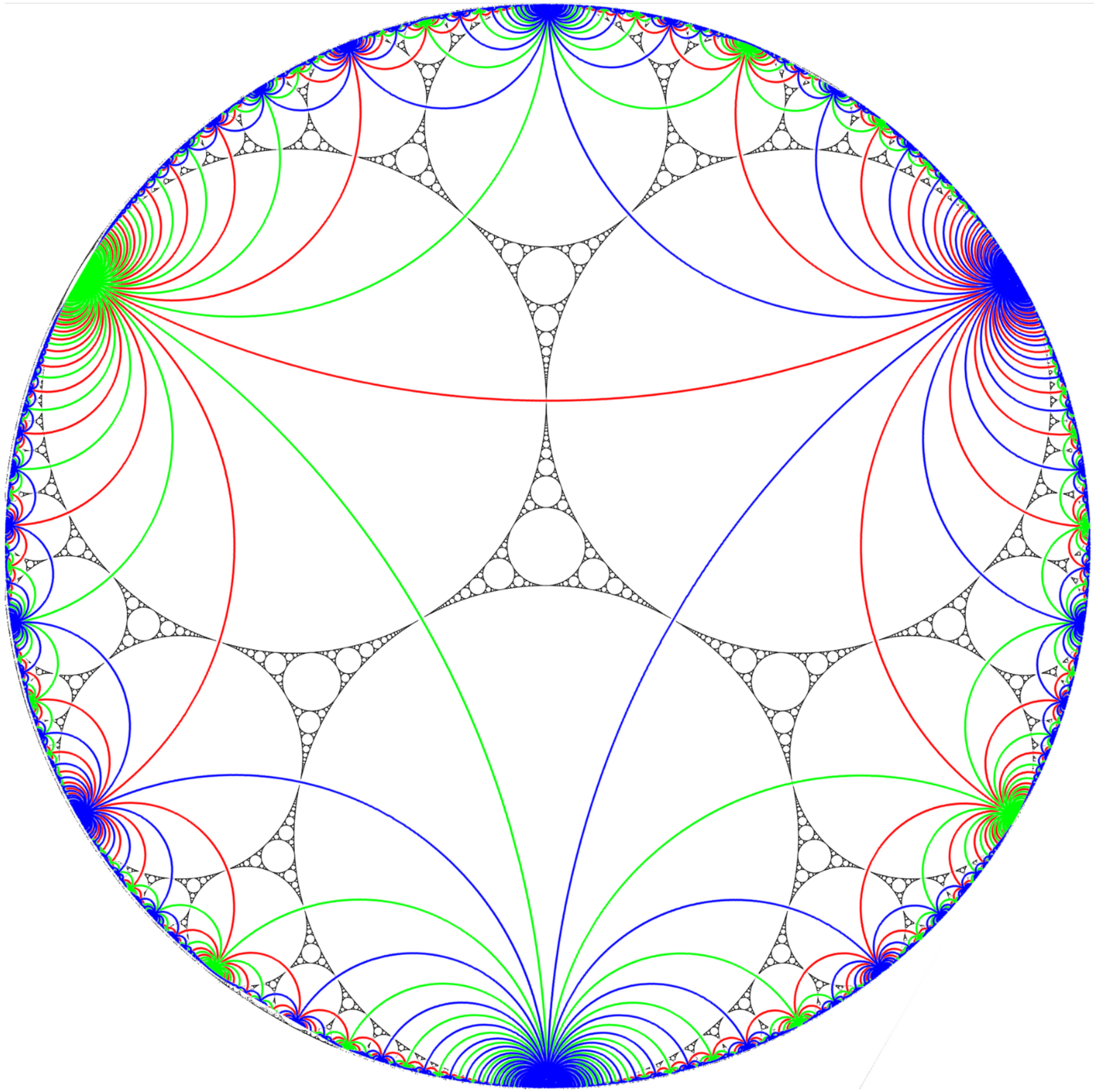
Итальянский математик, известный своими работами по дифференциальной геометрии и математической физике. Сыграл значительную роль в признании неевклидовой геометрии.

Анри Пуанкаре (1854 – 1912)

- Французский математик, механик, физик, астроном и философ.
- Глава Парижской академии наук, член Французской академии и ещё более 30 академий мира, в т.ч. член-корреспондент Петербургской академии наук.
- Топология, качественная теория ДУ, небесная механика, автоморфные функции (в т.ч. связь с неевклидовой геометрией).

Замечательные кривые на плоскости Лобачевского

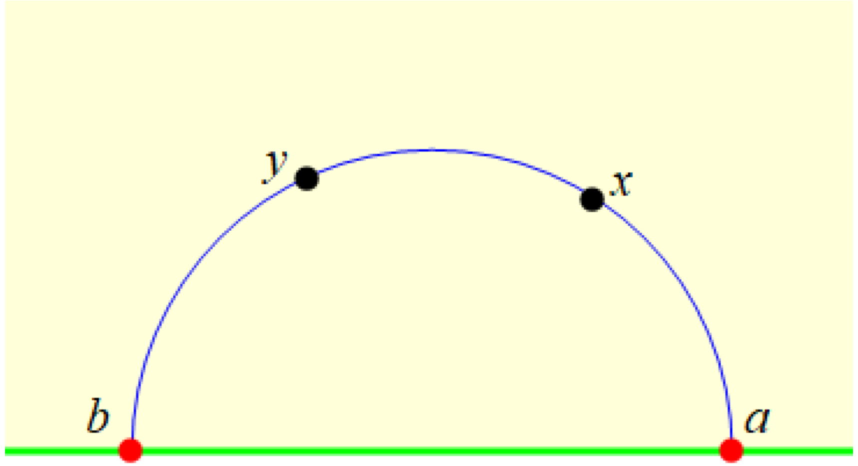
- Прямые
- Окружности
- Эквидистанты (на фиксированном расстоянии от прямой).
- Орициклы (предельное положение окружности).
- *Через 3 различные точки можно провести прямую, окружность, орицикл или эквидистанту.*



Двойное отношение $(z_1, z_2; z_3, z_4) = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$.

- Инвариантно при действии дробно-линейных преобразований.
- Вещественно, если z_1, z_2, z_3, z_4 принадлежат одной обобщенной окружности.
- Если геодезическая xy (в $\mathbb{H}$) пересекает абсолют $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в точках a, b, то

$$\operatorname{dist}(x, y) = \log |(a, b; x, y)|.$$

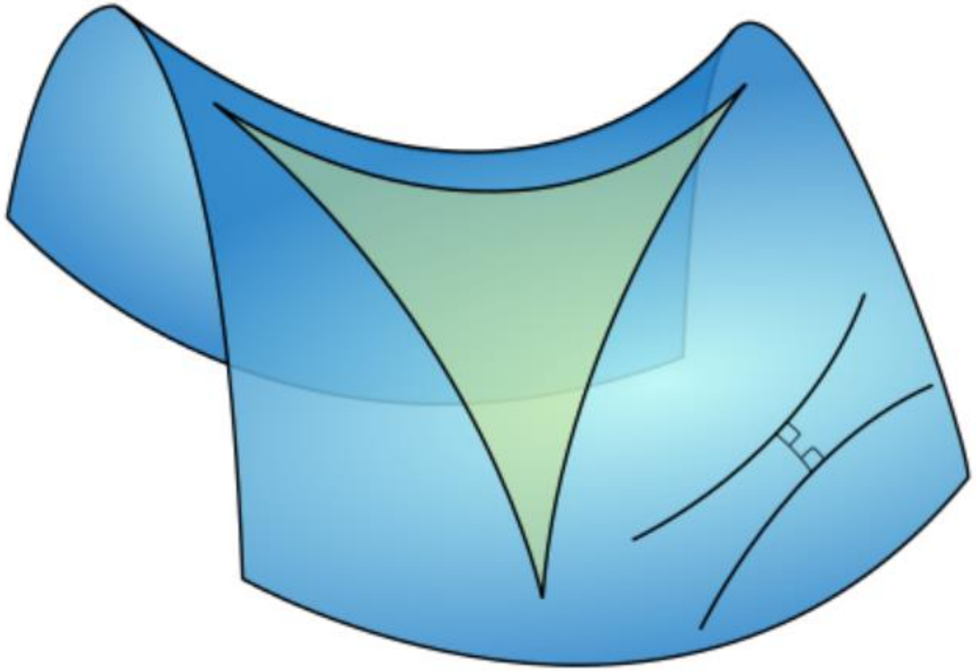


Классификация автоморфизмов $\mathbb{H}$

- Собственные числа матрицы $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ удовлетворяют характеристическому уравнению $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\,\lambda + 1 = 0$
- Следовательно,
$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4}}{2}.$$
- Пусть $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ – конформный автоморфизм с матрицей A.
- Если $|\mathrm{tr}(A)| < 2$, то f эллиптический.
- Если $|\mathrm{tr}(A)| = 2$, то f параболический.
- Если $|\mathrm{tr}(A)| > 2$, то f гиперболический.

Карл Фридрих Гаусс (1777 — 1855)

- Открыл неевклидову геометрию, но ничего не опубликовал на эту тему.
- Ввел понятие кривизны поверхности.



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ