2 к

Мат. Анализ. Семинар №15.

Сходимость рядов Фурье в точке

Пусть $f(x) \in L_1(-\pi, \pi; \mathbb{C})$. Рассмотрим коэффициент Фурье $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$.

Этот интеграл определен $\forall f \in L_1(-\pi,\pi;\mathbb{C})$.

<u>Задача 1</u>. Доказать, что $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

<u>Решение</u>: Воспользуемся леммой Римана

<u>Лемма 1 (Риман)</u> Если функция $\varphi \in L_1(a,b)$ то

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_a^b \varphi(x)\sin px\, dx = 0,$$

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_a^b \varphi(x)\cos px\, dx = 0$$

<u>Доказательство</u>: Пусть $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая ф-ция, $\varphi \in C^1[a,b]$. Тогда, интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\sin px\, dx = -\frac{1}{p}\int\limits_a^b \varphi(x)\, d\cos px\, dx =$$

$$= -\frac{1}{p}\varphi(x)\cos px\Big|_a^b + \frac{1}{p}\int\limits_a^b \varphi'(x)\cos px\, dx =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\varphi(a)\cos pa - \varphi(b)\cos pb\right) + \frac{1}{p}\int\limits_a^b \varphi'(x)\cos px)\, dx$$

Все члены стремятся к нулю при $p \to \infty$ т.к. $\varphi \in C^1[a,b]$

Пусть теперь $\varphi \in L_1(a,b)$. Напомним, что множество $C^1[a,b]$ плотно в $L_1(a,b)$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi_\varepsilon \in C^1[a,b]$:

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin px\, dx\right| \le \left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\sin px\, dx\right| + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\sin px\, dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|\, dx + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\sin px\, dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\sin px\, dx\right|$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $p \to \infty$, т.е. $\exists P:\ \forall p > P$

$$\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\sin px\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно $\left|\int_a^b \varphi(x)\sin px\, dx\right| < \varepsilon$, т.е.

$$\int_a^b \varphi(x)\sin px\, dx \to 0 \quad (p \to \infty).$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_a^b \varphi(x)\cos px\, dx \to 0 \ (p \to \infty).$$

Тогда, по формуле Эйлера,

$$\int_a^b f(x) e^{-inx}\, dx = \int_a^b f(x)\cos nx\, dx - i\int_a^b f(x)\sin nx\, dx \to 0$$

$$(n \to \infty).$$

Пусть $f \in L_1(-\pi,\pi)$, $f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$

где $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$ – коэфф. Фурье

Рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$:

$S_n(x) = \sum_{|k|\le n} c_k \cdot e^{ikx} = \sum_{|k|\le n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} =$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2\pi}\left[\sum_{|k|\le n} e^{ik(x-t)}\right]dt =$

<u>Лемма 2:</u> $\sum_{|k|\le n} e^{ik\cdot a} = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}$

<u>Доказательство:</u> Обозначим $e^{ia} = p$

$\sum_{|k|\le n} e^{ika} = \sum_{|k|\le n} p^k = p^{-n} + p^{-n+1} + \ldots + p^{n-1} + p^n =$

$= p^{-n}(1 + p + \ldots + p^{2n-1} + p^{2n}) = p^{-n}\cdot\frac{p^{2n+1}-1}{p-1} = \frac{p^{n+1}-p^{-n}}{p-1} =$

$= \frac{e^{i(n+1)a} - e^{-ina}}{e^{ia}-1} = \frac{e^{i\left(\frac{2n+1}{2}\right)a} - e^{-i\left(\frac{2n+1}{2}\right)a}}{e^{\frac{ia}{2}} - e^{-\frac{ia}{2}}} =$

Разделим на $e^{\frac{ia}{2}}$

$= \frac{\left(e^{i\left(\frac{2n+1}{2}\right)a} - e^{-i\left(\frac{2n+1}{2}\right)a}\right)/2i}{\left(e^{\frac{ia}{2}} - e^{-\frac{ia}{2}}\right)/2i} = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}$.

Формула Эйлера

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt=2\,(f*D_n)(x)$$

где $D_n(x)=\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$ ядро Дирихле

интеграл Дирихле

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt. \quad (1)$$

Сделаем замену $t-x=z$. Функция — 2π-периодическая. Получаем:

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z)\,D_n(z)\,dz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\,D_n(z)\,dz$$

Заметим, что $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\,dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{|k|\le n} e^{ikz}\,dz=1$

поэтому разность $S_n(x)-f(x)$ можно записать:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+z)-f(x)\right]D_n(z)\,dz \quad (2)$$

Сумма ряда Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\cdot e^{inx}$ совпадает с пределом интеграла Дирихле (1) при $n\to\infty$ (в смысле главного значения)

Задача 2. (Принцип локализации).

Сходимость ряда Фурье, т.е. стремление к нулю правой части (2), и сумма ряда Фурье в точке x, т.е. предел интеграла Дирихле (1) при $n\to\infty$, зависит лишь от значений функции f в любой, сколь угодно малой окрестности $U_\delta(x)$.

Решение: Из леммы Римана следует, что $\forall\delta>0$

$$\int\limits_{\delta<|z|<\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz \to 0; \quad (n\to\infty)$$

$$\int\limits_{\delta<|z|<\pi}\left(f(x+z)-f(x)\right)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

Поскольку функции $\frac{f(x+z)}{2\sin\frac{z}{2}}$, $\frac{f(x+z)-f(x)}{2\sin\frac{z}{2}}$ являются интегрируемыми на $[-\pi,\delta]$ и $]\delta,\pi]$.

Поэтому, сходимость (1) и (2) (к нулю) определяется исключительно значениями функции f в $U_\delta(x)=(x-\delta,x+\delta)$, т.е. выполняется принцип локализации.

Значит, если две функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0, то они имеют одинаковые суммы рядов Фурье, которые сходятся или расходится одновременно.

Теорема 1 Пусть $f \in L_1(-\pi,\pi)$ и в точке $x \in [-\pi,\pi]$ выполнено условие Дини: $\exists\, \delta > 0$:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z)-f(x)}{z} \right| dz < \infty.$$

Тогда $S_n(x) \to f(x)$ $(n\to\infty)$.

Док-во: Запишем (2) в виде:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}}_{= \varphi(z)} \sin\frac{2n+1}{2} z\, dz$$

Тогда функция $\varphi(z) = \dfrac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\dfrac{z}{2\sin\frac{z}{2}} \in L_1(-\pi,\pi)$

т.к. $\dfrac{z}{2\sin\frac{z}{2}} \to 1$ $(z\to 0)$. Тогда по лемме Римана

$S_n(x) - f(x) \to 0$ $(n\to\infty)$.

Теорема 2. Пусть $f \in L_1(-\pi,\pi)$ и в т. $x \in [-\pi,\pi]$ выполнено обобщенное условие Дини: $\exists\, \delta > 0$

$$\int_{-\delta}^{0} \left| \frac{f(x+z)-f(x-0)}{z} \right| dz < \infty, \quad \int_{0}^{\delta} \left| \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z} \right| dz < \infty$$

где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ - левый и правый пределы функц. f в т. x, тогда

$$S_n(x) \to \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \quad (n\to\infty).$$

Доказательство. Ядро Дирихле $D_n(z)$ – четная функция, поэтому

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}dz=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}dz$$

Поэтому:

$$S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x+z)-f(x-0)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}dz+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+z)-f(x+0)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz$$

Опять, в силу леммы Римана, оба этих интеграла стремятся к нулю.

Следствие 1. Пусть $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$. Ряд Фурье $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx}$ сходится в каждой точке $x\in[-\pi,\pi]$, в которой функция f имеет левую и правую производные $f'_л(x)$, $f'_п(x)$ (В таких точках функция $f(x)$ имеет разрыв 1-го рода, т.е. $\exists\ f(x-0), f(x+0)$).
В этих точках сумма ряда Фурье равна $f(x)$, если x – точка непрерывности и $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, если x – точка разрыва.

Следствие 2. Если $f(x)\in C^1[-\pi,\pi]$ и является 2π-периодической функцией, то $(f(-\pi)=f(\pi))$

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx}$$

Разберем задачи из домашнего задания

Задача 1. Пусть $f, g \in L_2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ имеют коэффициенты Фурье $c_n(f)$ и $c_n(g)$. Найти коэффициенты Фурье $c_n(f \cdot g)$.

Решение. Из неравенства $|f(x) \cdot g(x)| \le \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right)$ следует, что $f(x) \cdot g(x) \in L_1(-\pi, \pi; \mathbb{C})$. Поэтому определены коэффициенты Фурье:

$$c_n(f \cdot g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \cdot e^{-int} \, dt$$

Напомним определение свертки:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \cdot g(x-t) \, dt.$$

Рассмотрим функции $\boxed{g_k(x) = g(-x) \cdot e^{ikx}}$.

Пусть $F_k(x) = (f * g_k)(x)$.

Было доказано, что $c_n(F_k) = c_n(f) \cdot c_n(g_k)$.

Заметим, что $c_n(g_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) e^{ikt} \cdot e^{-int} \, dt =$

$t \to -t$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-i(k-n)t} \, dt = c_{k-n}(g).$$

Следовательно: $c_n(F_k) = c_n(f) \cdot c_{k-n}(g)$.

Заметим, что $F_k(0)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\cdot e^{-ikt}\,dt = c_k(f\cdot g)$

С другой стороны $F_k(0)$ равно ряду Фурье функции $F_k(x)$ в т. $x=0$, т.е.

$$F_k(0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F_k)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\cdot c_{k-n}(g).$$

Следовательно: $c_k(f\cdot g)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\cdot c_{k-n}(g)$

Поменяем k и n:

Ответ: $c_n(f\cdot g)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\cdot c_{n-k}(g)$.

Замечание: Воспользовались сходимостью ряда Фурье функции $F_k(x)$ в точке $x=0$.

Задача 2. Пусть $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$. Найти ряд Фурье функции Стеклова $f_h(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$ (предполагается, что f — 2π-периодична)

Решение: Замена: $t=x+z$, $z=t-x$

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(x+z)\,dz$$

Тогда:

$$c_n(f_h)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_h(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(x+z)\,dz\right)e^{-inx}\,dx=$$

Меняем порядок интегрирования:

$$= \frac{1}{2\pi 2h}\int_{-h}^{h}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)e^{-inx}\,dx\right)dz =$$

Делаем во внутреннем интеграле замену $\boxed{y = x+z}$

$x = y - z$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+z}^{\pi+z} f(y)e^{-in(y-z)}\,dy\right)dz =$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e^{inz}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+z}^{\pi+z} f(y)e^{-iny}\,dy\right)dz =$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e^{inz}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right)dz =$$

(Воспользовались 2π-периодичностью $f(y)e^{-iny}$)

$$= c_n(f)\cdot\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e^{inz}\,dz = c_n(f)\cdot\frac{1}{2h}\,\frac{e^{inz}}{in}\Big|_{-h}^{h} =$$

$$= c_n(f)\,\frac{1}{nh}\cdot\left(\frac{e^{inh}-e^{-inh}}{2i}\right) = c_n(f)\cdot\frac{\sin nh}{nh}$$

<u>Ответ:</u> $\boxed{c_n(f_h) = c_n(f)\cdot\frac{\sin nh}{nh}}$

<u>Второе решение</u> (неформальное)

Пусть $f(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ (ряд Фурье)

Проинтегрируем по x: $[x-h,\, x+h]$

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{int} \Big) dt = \frac{1}{2h} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_{x-h}^{x+h} e^{int}\, dt =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \frac{1}{2h} \left(\frac{e^{int}}{in} \Big|_{x-h}^{x+h} \right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \frac{1}{2h} \cdot \frac{e^{in(x+h)} - e^{in(x-h)}}{in} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{e^{inx}}{n} \left(\frac{e^{inh} - e^{-inh}}{2i} \right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{\sin nh}{nh} \cdot e^{inx}$$

Ответ: $c_n(f_h) = c_n \cdot \frac{\sin nh}{nh}$.

Неформальное решение задачи 1.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\cdot e^{inx}$

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\cdot e^{inx}.$$

Тогда

$$f(x)\cdot g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \times \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g) e^{inx} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\, c_{n-k}(g) \right) e^{inx}$$

Ответ: $c_n(f\cdot g) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\cdot c_{n-k}(g)$.

Обоснование: $S_N(f) = \sum\limits_{|k|\le N} c_k(f) e^{inx}$

$$S_N(g) = \sum_{|k|\le N} c_k(g)\cdot e^{inx}.$$

Тогда $S_N(f) \to f$ в $L_2(-\pi,\pi)$

$S_N(g) \to g$ в $L_2(-\pi,\pi)$.

Утв: $S_N(f)\, S_N(g) \to f\cdot g$ в $L_1(-\pi,\pi)$.

Док-во: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_N(f)\cdot S_N(g) - f\cdot g|\, dx \le$

$$\le \left| \int_{-\pi}^{\pi} S_N(f) \left(S_N(g) - g \right) dx \right| + \left| \int \left(S_N(f) - f \right) g \right| dx \le$$

$$\le \|S_N(f)\|_{L_2} \cdot \|S_N(g)-g\|_{L_2} + \|S_N(f)-f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2} \le$$

т.к. $S_N(f) \to f$ в L_2, то $\|S_N(f)\|$ – огранич.

$$\le C \cdot \|S_N(g)-g\|_{L_2} + \|S_N(f)-f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2} \to 0$$
$$(N \to \infty).$$

Осталось проверить, что $S_N(f) \cdot S_N(g)$ – это куски ряда Фурье соотв. функции

$$S_N(f) \cdot S_N(g) = \sum_{|k| \le N} c_k(f) e^{ikx} \times \sum_{|n| \le N} c_n(g) e^{inx} =$$

$$= \sum_{\substack{|k| \le N \\ |n| \le N}} c_k(f) \cdot c_n(g) \cdot e^{i(k+n)x} =$$

$$= \sum_{|m| \le N} \Big(\sum_{\substack{k+n=m \\ |k|<N \\ |n|<N}} c_k(f) \cdot c_n(g) \Big) e^{imx} =$$

$$= \sum_{|m| \le N} \Big(\sum_{\substack{|k|<N \\ |m-k|<N}} c_k(f) \cdot c_{m-k} \Big) e^{imx} \xrightarrow{L_1}$$

$$\to \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Big(\underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \cdot c_{m-k}}_{= c_m(f \cdot g)} \Big) e^{imx}$$