Математический анализ
1 курс
Экзамен
Ю.М. Бурман

Содержание

1 Задачи для подготовки к экзамену

1.1

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \exp(-x) = 0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \exp(x) = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+0} x^a (\ln x)^b = 0$ при $a > 0$

4. $\lim\limits_{x\to+0} x^a (\ln x)^b = 0$ при $a < 0$

5. $\lim\limits_{0\to+\infty} x^x = \lim\limits_{0\to+\infty} \exp(x \ln x)$

   пусть $t = -\ln x$

   $\Rightarrow$

   $x = e^{-t} \Rightarrow x\ln x = e^{-t}(-t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{-t}{1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{-t}{\frac{1}{t} + 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots} = 0$

   $\lim\limits_{x\to+0} \exp(x\ln x) = \exp(0) = 1$

6. $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x - 1} = 1$

1.2

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{1/x}}{\exp(1/x^2)}$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} x^{\frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}}{\exp(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2})} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}}{\exp \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{\infty^2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\log(x^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x\to+\infty} \exp\frac{\log(x)}{x} =$$

$$\exp \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = \exp(0) = 1$$

2. $\lim\limits_{x\to+0} \ln x \cdot x^{x^x}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{2^n}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2^n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2^n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^{n^2}}{n! \cdot 2^{n+1^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2(n+1)-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (n!)^{1/n}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} (n!)^{1/n^2}$

1.3

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{\arcsin x - \arctan x}$

   по Лопиталю

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+1)(\cos(x)-\frac{1}{\cos(x)^2})}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} = -1\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}(x^2+1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\frac{1}{\cos(x)^2}}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} =$$
$$-1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\frac{1}{\cos(x)^2}}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^3-1}{\cos(x)^2\big(-1-x^2+\sqrt{1-x^2}\big)} =$$
$$-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^3-1}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^3-1}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} =$$
$$-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2(\cos(x)^3-1)}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^3-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} =$$
$$-\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^3-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{x\to 0}-\frac{3\cos(x)^2\sin(x)}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} =$$
$$-1\cdot-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos(x)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} =$$
$$-1\cdot-\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-1-x^2+\sqrt{1-x^2}} =$$
$$\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}\right)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}\right)} =$$
$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1-x^2}+1)}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1-x^2}+1)}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1}} =$$
$$\frac{3}{2}\cdot-\frac{1}{1-(-\frac{1}{1+1})} = \frac{3}{2}\cdot-\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{3}{2}\cdot-\frac{2}{3} = -1$$

   второй вариант решения

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$
$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

   Подставим это в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\tan(x)}{\arcsin(x)-\arctan(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots-(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\dots)}{x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\dots-(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots)} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x-\frac{3x^3}{3!}+x^5(\dots)}{x-x+\frac{3x^3}{3!}+x^5(\dots)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{3!}+x^2(\dots)}{\frac{3}{3!}+x^2(\dots)} = -1$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(\sin x)-\exp(\tan x)}{\ln(1+\sin x)-\ln(1+\tan x)}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\sin x}{\ln\tan x}$

   по Лопиталю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{\frac{1}{\cos(x)^2}}{\tan(x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\tan(x)}{\sin(x)\frac{1}{\cos(x)^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^3\tan(x)}{\sin(x)} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^3\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^2\sin(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\cos(x)^2 = 1$$

второй вариант решения

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Подставим это в предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(\tan(x))} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)}{\ln(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots)}{\ln(x(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \dots)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x) + \ln(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots)}{\ln(x) + \ln(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \dots)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + (x-1)) + \ln(1 + (-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots))}{\ln(1 + (x-1)) + \ln(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \dots)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots) - \frac{(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots)^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots)^3}{3} - \dots)}{x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \dots - \frac{(\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \dots)^2}{2} + \frac{(\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \dots)^3}{3} - \dots)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + x^2(\dots)}{x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + x^2(\dots)} =$$
$$\frac{-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 1$$

1.4

1. $f(x) = \exp(\frac{1}{x}) - \frac{2}{\pi}\arctan(x),\ a = +\infty$

$$f(x) = \exp(\frac{1}{x}) - \frac{2}{\pi}\arctan(x)$$
$$\frac{1}{x} = t \Leftrightarrow t \to 0$$
$$\exp(t) - \frac{2\pi}{\pi 2} = \exp(x) - 1$$
$$\exp(t) = 1 + t + \mathrm{o}(t^2)$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^\alpha}(1 + t + o(t^2) - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$
$$\alpha > 1,\ \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{\alpha-1}} = \infty$$
$$\alpha < 1,\ \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{\alpha-1}} = 0$$

2. $f(x)$ наименьший положительный корень $\tan(t) = (1+x)t, a = +0$

3.

$$f(x) = \sin(\tan x) - \tan(\sin x),\ \ a = 0$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

$$\lim_{x\to a} x^a \Big(\sin(\tan x) - \tan(\sin x)\Big) =$$
$$\lim_{x\to a} x^a \Big(\sin(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots) - \tan(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)\Big) =$$
$$\lim_{x\to a} x^a \Bigg(\Big((x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots) - \frac{(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots)^3}{3!} + \frac{(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots)^5}{5!} - \dots\Big) -$$
$$\Big((x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots) + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)^3}{3} + \frac{2(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)^5}{15} + \dots\Big)\Bigg) =$$
$$\lim_{x\to a} x^a \Bigg(\Big(x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 - \dots\Big) - \Big(x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{107}{5040}x^7 - \dots\Big)\Bigg) =$$
$$\lim_{x\to a} x^a (\frac{107}{5040}x^7 - \frac{55}{1008}x^7 + \dots) =$$
$$\lim_{x\to a} x^a (-\frac{1}{30}x^7 + \dots) =$$
$$\lim_{x\to a} x^{7+a} (-\frac{1}{30} + \dots)$$

$$\alpha > -7: \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha(\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))) = 0$$
$$\alpha = -7: \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha(\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))) = -\frac{1}{30}$$
$$\alpha < -7: \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha(\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))) = \infty$$

4.

$$y^2 = R^2 - 2Rr + r^2 - r^2 = 1 - 2r$$
$$y = r \cdot \tan(\frac{x}{2})$$

Приравняем: $r^2 \cdot \tan^2(\frac{x}{2}) + 2r - 1 = 0$

$$r = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}}{\tan^2(\frac{x}{2})}$$
$$f(x) = \pi r^2 = \pi \frac{1 - 2\sqrt{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} + 1 + \tan^2(\frac{x}{2})}{\tan^4(\frac{x}{2})}$$
$$\tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} + \dots$$
$$\sqrt{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} = 1 + \frac{x^2}{8} + \frac{5x^4}{384} + \dots$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \pi \lim_{x\to 0} r \lim_{x\to 0} r = \frac{\pi}{4}$$
$$\lim_{x\to 0} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to 0} x^\alpha \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha > 0 \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha \frac{\pi}{4} = 0$$
$$\alpha < 0 \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha \frac{\pi}{4} = +\infty$$
$$\alpha = 0 \quad \lim_{x\to 0} x^0 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

5.

$$h(x) = x^2$$
$$h'(x) = 2x$$
$$2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0x - x_0^2$$
$$\tan(\phi) = 2x_0$$
$$4x_0^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2(\phi)} \quad \cos^2(\phi) = \frac{1}{4x_0^2 + 1}$$
$$\sin^2(\phi) = \frac{4x_0^2}{4x_0^2 + 1}$$
$$\sin(\phi) = \frac{2x_0}{\sqrt{4x_0^2 + 1}}$$

$$f(x) = \frac{2x_0^3}{\sqrt{4x_0^2 + 1}} = \frac{2x^3}{\sqrt{4x_0^2 + 1}}$$
$$\alpha > -3 \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha \frac{2x^3}{\sqrt{4x^2 + 1}} = 0$$
$$\alpha < -3 \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha \frac{2x^3}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\sqrt{4x^2 + 1}x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}x^{-\alpha-3}} = \infty$$
$$\alpha = -3 \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^3\sqrt{4x^2 + 1}} = 2$$

6.

1.5

1.

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\Big)$$
$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a-x} = -\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a^3}x^2 + \dots\Big) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k}x^{k-1}$$

откуда

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\Big) = \frac{1}{3}\Big(- \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1^k}x^{k-1}\Big) + -\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(-2)^k}x^{k-1}\Big)\Big) =$$
$$\frac{1}{3}\Big(- \Big(1 + x + x^2 + \dots\Big) + -\Big(- \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}x + -\frac{1}{2^3}x^2 + \dots\Big)\Big) =$$
$$\frac{1}{3}\Big(- 1 - x - x^2 + \dots + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}x + \frac{1}{2^3}x^2 + \dots\Big)\Big) =$$
$$\frac{1}{3}\Big(- \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}x^2 - \frac{15}{16}x^3 - \dots\Big) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 - \dots = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k + (-1)^k}{2^k}x^{k-1}$$

2.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 2} =$$
$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \dots =$$
$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots =$$
$$\frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{4}}{1!}x + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}x^2 + \frac{\frac{9}{8}}{3!}x^3 + \frac{-\frac{3}{4}}{4!}x^4 + \dots =$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3 - \frac{1}{32}x^4 + \dots$$

3.

$$\begin{aligned}
&f(x)=\sin^3 x=\frac{1}{4}\Big(3\sin(x)-\sin(3x)\Big)=\\
&\frac{1}{4}\Big(3(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots)-((3x)-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}-\ldots)\Big)=\\
&\frac{1}{4}\Big((3x-\frac{3}{3!}x^3+\frac{3}{5!}x^5-\ldots)-((3x)-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}-\ldots)\Big)=\\
&\frac{1}{4}\Big(x^3-\frac{1}{2}x^5+\frac{13}{120}x^7-\ldots\Big)=\\
&-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k(3^{2k}-1)}{(2k+1)!}x^{2k+1}
\end{aligned}$$

1.6

Формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

При $x_0=0$ Формула Маклорена:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

У четной функции все производные нечетного порядка являются нечетными функциями, откуда они $=0$ в точке $x=0$
Аналогично у нечетной функции все произведения четного порядка $=0$, в точке $x=0$

1. f и g - нечетные бесконечно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$, причём $f'(0)=g'(0)=1$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(g(x))-g(f(x))}{x^6}=0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{f(g(x))-g(f(x))}{x^6}=0\quad f'(0)=g'(0)=1\\
&f(g(x))=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}g(x)+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}g^3(x)+\ldots\\
&f(g(x))-g(f(x))=\Big(f(0)+g(x)+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}g^3+\ldots\Big)-\Big(g(0)+f(x)+\frac{g^{(3)}(0)}{3!}f^3+\ldots\Big)=\\
&\Big(\frac{g^{(3)}}{3!}x^3+\frac{g^{(5)}}{5!}x^5+\ldots+\frac{f^3(0)}{3!}(g(0)+x+\frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3+\ldots)^3+\frac{f^5(0)}{5!}(g(0)+x\ldots)^5+\ldots\Big)-\\
&\Big(\frac{f^{(3)}}{3!}x^3+\frac{f^{(5)}}{5!}x^5+\ldots+\frac{g^3(0)}{3!}(f(0)+x+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\ldots)^3+\frac{g^5(0)}{5!}(f(0)+x\ldots)^5+\ldots\Big)
\end{aligned}$$

Так как $f(x),g(x)$ – нечетные функции, то $f(0)=g(0)=0$

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{g^{(5)}(0)}{5!}x^5+\ldots+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\ldots+\frac{g^{(3)}(0)f^{(3)}(0)}{3!3!}x^6\Big)-\\
&\Big(\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\ldots+\frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{g^{(5)}(0)}{5!}x^5+\ldots+\frac{g^{(3)}(0)f^{(3)}(0)}{3!3!}x^6\Big)=0
\end{aligned}$$

Под $''\ldots''$ записаны многочлены степени >6
Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(g(x))-g(f(x))}{x^6}=0$$

2. f и g - бесконечно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$, причём $f(0)=g(0)=0$ и $f'(0)=g'(0)=1$.

Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(g(x))-g(f(x))}{x^3}=0$

$$f(g(x))-g(f(x))=f(0)+g(0)+x+\frac{g^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dots$$
$$+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}\Big(g(0)+x+\frac{g^{(2)}(0)}{2!}x^2+\dots\Big)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}\Big(g(0)+x+\frac{g^{(2)}(0)}{2!}x^2+\dots\Big)^3+\dots$$
$$-g(0)-f(0)-x-\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2-\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3-\dots$$
$$-\frac{g^{(2)}(0)}{2!}\Big(f(0)+x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\dots\Big)^2-\frac{g^{(3)}(0)}{3!}\Big(f(0)+x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\dots\Big)^3-\dots=$$
$$\frac{g^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(2)}(0)g^{(2)}(0)}{2!2!}x^3+\dots$$
$$+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3-\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2-\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3-\dots-\frac{g^{(2)}(0)}{2!}x^2-\frac{g^{(2)}(0)f^{(3)}(0)}{2!2!}x^3-\dots-\frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3=0$$
$$\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(g(x))-g(f(x))}{x^3}=0$$

3. f и g - четные бесконечно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$, причём $f''(0)=g''(0)=2$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(g(x))-g(f(x))}{x^7}=0$

1.7

1. Найдите $f^{(2020)}(0)$, если $f(x)=\sin(x^{20}+x^{2000})$

$$f(x)=\sin(x^{20}+x^{2000})=x^{20}+x^{2000}-\frac{(x^{20}+x^{2000})^3}{3!}+\frac{(x^{20}+x^{2000})^5}{5!}-\dots$$

$f^{(2020)}(\alpha)=0$ при $\alpha=n\cdot x^{(2020)}$
$2020=20\cdot 101$ Тогда найдем знак у $\frac{101+1}{2}=51$ члена ряда.

$$\frac{(x^{20}+x^{2000})^{101}}{101!}=\frac{x^{2020}}{101!}+\dots$$
$$f^{(2020)}(\frac{x^{2020}}{101!})=\frac{2020!}{101!}$$
$$f^{(2020)}(0)=\frac{2020!}{101!}$$

2. Найдите $f^{(4)}(0)$, если $f(x)=\frac{1}{t^3-t^2+1}$

3. Найдите $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, если $f(x)$ - наименьший неотрицательный корень уравнения $xt^3-3t+x=0$

1.8

1.

$$y\to x$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

$$y\to\frac{x}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{2}}=2$$

Следовательно предела не существует.

2.

3.

$$y \to x$$
$$\lim_{x\to 0} 2x\ln(\sqrt{2}x) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\sqrt{2}x)')}{(\frac{1}{2x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{2(-\frac{1}{4x^2})} = 0$$
$$y \to 2x$$
$$\lim_{x\to 0} 2x\ln(\sqrt{5}x) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\sqrt{5}x)')}{(\frac{1}{2x})'} = 0$$

Следовательно, предел равен 0

4.

$$y \to x$$
$$\lim_{x\to 0} 2x^2\ln(\sqrt{2}x) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\sqrt{2}x)')}{(\frac{1}{2x^2})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{2(-\frac{1}{x^3})} = 0$$
$$y \to 2x$$
$$\lim_{x\to 0} 2x^2\ln(\sqrt{5}x) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\sqrt{5}x)')}{(\frac{1}{2x^2})'} = 0$$

Следовательно, предел равен 0

5.

$$y \to x$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$y \to 2x$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\sqrt{5}x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Следовательно предела не существует.

6.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x)+\sin(y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})}{\frac{x+y}{2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos(\frac{x-y}{2}) = 1$$

7.

1.9

1. $A = \{x^2 + ax \mid x \in (-1;1)\}$
   $y = x^2 + ax$ Рассмотрим два диапазона:

   $x_0 \in (-1;1)$

   $$x_0 \in [-1;1)$$
   $$a \in [0;2) \Rightarrow \inf A = -\frac{a^2}{4}$$
   $$\sup A = y(1) = 1 + a$$
   $$x_0 \in (0;1) \Rightarrow a \in (-2;0) \quad \inf A = -\frac{a^2}{4}$$
   $$\sup A = y(-1) = 1 - a$$

$x_0 \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$$x_0 \in (-\infty, -1] \Rightarrow a \in [2, +\infty]$$
$$\inf A = y(-1) = 1 - a$$
$$\sup A = y(1) = 1 + a$$
$$x_0 \in [1, +\infty) \Rightarrow a \in [-\infty, -2]$$
$$\inf A = y(1) = 1 + a$$
$$\sup A = y(-1) = 1 - a$$

Ответ:

при $a \in (-\infty, -2]$
$$\inf A = 1 + a$$
$$\sup A = 1 - a$$
при $a \in [2, +\infty)$
$$\inf A = 1 - a$$
$$\sup A = 1 + a$$
при $a \in (-2, 0)$
$$\inf A = \frac{a^2}{4}$$
$$\sup A = 1 + a$$
при $a \in [0, 2)$
$$\inf A = -\frac{a^2}{4}$$
$$\sup A = 1 + a$$

2. $A = \{t \sin(t) \mid -a < t < a\}$

3. $A = \{\frac{\sin(x)}{x} \mid x > 0\}$

$$y = \frac{\sin(x)}{x} \qquad y' = -\frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{\cos(x)}{x} = 0$$

НАйдем mf$A$, так как при $x > \frac{3\pi}{2}$: $\sin(x) \in [-1; 1]$, а знаменатель будет увеличиваться ($\frac{\sin(x)}{x} \to 0$), то mf$A \neq y(x)$ при $x > \frac{3\pi}{2}$ и $\sup A \neq y(x)$ при $x > \frac{\pi}{2}$.
Тогда рассмотрим функцию при $x \in (0; \frac{3\pi}{2})$
$\sup A = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\inf A = \frac{\sin(\arctan(x)+\pi)}{\arctan(x)+\pi}$ при $x = \tan(x)$ и $x = \arctan(x) + \pi$

1.10

1. $x^4 + px + 1 = 0$
Сделаем замену
$$x^4 = -px - 1$$
$$y_1 = x^4, \ y_2 = -px - 1$$
Тогда уравнение касательной
$$y_0 = 4x_0^3(x - x_0) + x_0^4 = -px - 1$$
$$\begin{cases} 4x_0^3 = -p \\ -3x_0^4 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p = \mp\frac{4}{3^{\frac{3}{4}}} \\ x = \pm\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}} \end{cases}$$
Тогда:
При $p \in (-\frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}; \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}})$ – 0 решений
При $p = -\frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}; \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$ – 1 решение
При остальных p существует 2 решения

2. $x^3 + px + q = 0$

3. $x^5 + px^3 + q = 0$

4. $\ln(x) = a\sqrt{x}$

$$y = \ln(x) - a\sqrt{x} = 0$$
$$y' = \frac{1}{x} - \frac{a}{\sqrt{x}} = 0$$
$$1 - a\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{x^2}$$

$a > 0$

крит. точка $x = \dfrac{1}{a^2}$

2 решения $y\dfrac{1}{a^2} > 0$

$$-\ln a^2 - a \cdot \frac{1}{a} > 0$$
$$2\ln a + 1 < 0$$
$$\ln a < -\frac{1}{2}$$
$$a < e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

1 решение $y\dfrac{1}{a^2} \leqslant 0$

$$a \geqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$a \leqslant 0$

критических точек нет, следовательно функция монотонно возрастает, то есть есть ровно одно решение

Ответ:

1 решение $a \in (-\infty, 0] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$

2 решение $a \in \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

1.11

Сколько касательных к графику функции f проходит через точку (a, b) на плоскости?

1. Касательных к графику функции f существует столько же, сколько различных решений имеет уравнение $b = f(x) + f'(x)(a - x)$.

2.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$y = x_0^3 - 3x_0 + (3x_0^2 - 3)(x - x_0) = -2x_0^3 + 3x_0^2 x - 3x$$
$$-3 = -2x_0^3 + 3x_0^2 - 3$$
$$2x_0^3 - 3x_0^2 = 0$$
$$x_0 = 0 \quad x_0 = \frac{3}{2}$$

Две касательных.

3.

$$f'(x) = \ln(x) + 1$$
$$y = x_0 \ln(x_0) + (\ln(x_0) + 1)(x - x_0) = x\ln(x_0) + x - x_0$$
$$x_0 = 1$$

Одна касательная.

1.12

Вычислите с точностью до двух знаков после точки

1. $\sin(\cos\frac{1}{10})$
   Разложим в ряд Тейлора:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

   Подставим:

$$\cos(\frac{1}{10}) = 1 - 0,04 + 0,0024 - 0,00072 + \dots \approx 1 - 0,04 + 0,0024 - 0,00072 \approx 0,96128$$
$$\sin(0,96128) = 0,96128 - \frac{0,96128^3}{3!} + \frac{0,96128^5}{5!} - \dots \approx 0,96128 - \frac{0,96128^3}{3!} + \frac{0,96128^5}{5!} \approx 0,82$$

2. $\cos(\ln\frac{11}{10})$
   Разложим в ряд Тейлора:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

   Подставим:

$$\ln(1.1) = \ln(1+0.1) = 0.1 - \frac{0.1^2}{2!} + \frac{0.1^3}{3!} + \dots = 0.1 - \frac{0.1^2}{2!} + \frac{0.1^3}{3!} = 0.095$$
$$\cos(0.095) = 0.095 - \frac{0.095^2}{2!} + \frac{0.095^4}{4!} - \frac{0.095^6}{6!} + \dots = 0.095 - \frac{0.095^2}{2!} + \frac{0.095^4}{4!} - \frac{0.095^6}{6!} = 0.9955$$

1.13

Вычислите $\exp(x)$, где

1. $x = 2$
   Разложим в ряд Тейлора:
   $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$
   Подставим соответствующие значения:

$$\exp(2) = 1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \dots \approx 1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^8}{8!} = 7.39$$

2. $x = \frac{5}{2}$

$$\exp(\frac{5}{2}) = 1 + \frac{5}{2} + \frac{\frac{5}{2}^2}{2} + \dots \approx 1 + \frac{5}{2} + \frac{\frac{5}{2}^2}{2} + \dots + \frac{\frac{5}{2}^{10}}{10!} \approx 12.18$$

3. $x = 4$

$$\exp(4) = 1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \dots \approx 1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \dots + \frac{4^{16}}{16!} \approx 54.59$$