ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Непрерывность отображения в точке. Предел.

Текст, написанный мелким шрифтом, разбирать не обязательно.

1. Множества и отображения Мы будем предполагать, что читателю знакомы основные термины теории множеств: множество, подмножество, объединение, пересечение, дополнение (разность множеств). Напомним, что *отображением* $f : A \to B$ множества A в множество B называют любое правило, сопоставляющее каждому элементу $a \in A$ множества A элемент множества B, обозначаемый $f(a) \in B$.

Если множество B состоит из чисел (вещественных, целых, комплексных и т.д.), то отображение $f : A \to B$ обычно называют функцией (вещественнозначной, целозначной и т.п.), определенной на множестве A. Если множество A тоже состоит из вещественных чисел (т.е. $A = \mathbb{R}$ или хотя бы $A \subset \mathbb{R}$), то говорят о функции одной вещественной переменной (во втором случае — определенной на подмножестве A множества вещественных чисел).

Символом $\mathbb{N}$ обозначают множество натуральных чисел: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Отображение $f : \mathbb{N} \to B$ называют *последовательностью* (B-значной), и вместо $f(1), f(2), \dots$ часто пишут $f_1, f_2, \dots$. Последовательность с числовыми значениями является функцией действительной переменной (определенной только в целых положительных точках), поскольку $\mathbb{N}$ — подмножество $\mathbb{R}$.

2. Непрерывность

Определение 1. *Окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}$ называется интервал $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число (иногда говорят ε-окрестность).

Определение 2. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, и $f : A \to \mathbb{R}$ — функция одной действительной переменной с действительными значениямм; пусть $a \in A$. Говорят, что f *непрерывна в точке* a, если для всякой окрестности U точки $f(a) \in \mathbb{R}$ существует окрестность V точки $a \in \mathbb{R}$, обладающая таким свойством: если $x \in V \cap A$, то $f(x) \in U$.

Пример 1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задается формулой $f(x) = x^2$ для всех $x \in \mathbb{R}$; пусть a — произвольная точка. Докажем, что f непрерывна в a.

Предположим вначале, что $a > 0$. Окрестность U точки $f(a)$ это интервал $(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Возьмем у точки a окрестность $V = (a-\delta, a+\delta)$, где δ — произвольное число, удовлетворяющее одновременно двум неравенствам: $0 < \delta < \varepsilon/(4a)$ и $0 < \delta < a$ — понятно, что такое существует. Тогда если $x \in V$, то $f(x) = x^2 < (a+\delta)^2 = a^2 + 2a\delta + \delta^2 < a^2 + 2a\cdot\varepsilon/(4a) + a\cdot\varepsilon/(4a) = a^2 + 3\varepsilon/4 < a^2+\varepsilon$ и $f(x) = x^2 > (a-\delta)^2 = a^2 - 2a\delta + \delta^2 > a^2 - 2a\delta = a^2 - 2a\cdot\varepsilon/(4a) = a^2 - \varepsilon/2 > a^2 - \varepsilon$, то есть $f(x) \in (a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon) = U$.

Тем самым доказано, что функция f непрерывна в произвольной точке $a > 0$. В остальных точках она тоже непрерывна — убедитесь в этом самостоятельно для $a < 0$ (это практически так же, как для $a > 0$) для $a = 0$ (тут по-другому, но еще проще).

Пример 2. Изменим теперь слегка функцию f, полагая $f(0) = 1$, но $f(x) = x^2$ при всех $x \neq 0$. В произвольной точке $a \neq 0$ отображение по-прежнему непрерывно (докажите!); покажем, что в точке $a = 0$ это неверно. Действительно, рассмотрим окрестность $U = (1/2, 3/2)$ точки $f(0) = 1$, и пусть $V = (-\delta, \delta)$ — произвольная окрестность точки 0. Независимо от δ, множество V содержит точку x такую, что $0 < x < 1/2$. Тогда $f(x) < 1/4$, так что $f(x) \notin U$. Таким образом, для окрестности U точки $f(0)$ подобрать окрестность V точки 0 с необходимым свойством невозможно, и функция f не является непрерывной в точке $a = 0$ (как говорят, разрывна в точке 0).

Пример 3. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — последовательность с действительными значениями, и пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную окрестность $U = (f(n)-\varepsilon, f(n)+\varepsilon)$ точки $f(n) \in \mathbb{R}$ и положим по определению $V = (n-1/2, n+1/2)$. Множество V — окрестность точки n, причем пересечение $\mathbb{N} \cap V$ — множество, состоящее из единственной точки, n. Таким образом если $x \in \mathbb{N} \cap V$, то $x = n$, и $f(x) = f(n) \in U$ (независимо от ε, то есть от выбора окрестности U!). Тем самым доказано, что f непрерывна в точке n — то есть, любая последовательность непрерывна в любой точке. Именно поэтому понятие непрерывности для последовательностей обычно не рассматривают.

Обобщение этого примера: точка $a \in A \subset \mathbb{R}$ называется изолированной, если существует такая ее окрестность $V \subset \mathbb{R}$, что пересечение $V \cap A$ состоит из ровно одной точки — самой a. (Например, любая точка множества $\mathbb{N}$ — изолированная.) Тогда любая функция $f : A \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a.

Пусть теперь A, B, C — множества, и заданы два отображения: $f : A \to B$ и $g : B \to C$. В этом случае определена их композиция $g \circ f : A \to C$: если $a \in A$, то $(g \circ f)(a) \in C$ равен, по определению, $g(f(a))$.

Предложение 1. *Если $A, B, C \subset \mathbb{R}$, функция f непрерывна в точке $a \in A$, а функция g непрерывна в точке $f(a) \in B$, то функция $g \circ f$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность точки $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Поскольку g непрерывна в точке $f(a)$, существует окрестность W точки $f(a)$ такая, что если $y \in B \cap W$, то $g(y) \in U$. Но функция f непрерывна в точке a, поэтому найдется окрестность V точки a такая, что если $x \in V$, то $f(x) \in W$. Следовательно, если $x \in V$, то $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in U$, что и означает непрерывность. $\square$

3. Предел

Определение 3. *Пределом* отображения $f : A \to B$ в точке a (обозначение $\lim_{x \to a} f(x)$) называется значение, которое отображение f должно принимать в точке a (при неизменных значениях во всех остальных точках), чтобы стать в этой точке непрерывным. Иными словами, число u есть $\lim_{x \to a} f(x)$, если функция $\tilde{f} : A \cup \{a\} \to B \cup \{u\}$, заданная формулой $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, x \neq a, \\ u, & x = a \end{cases}$, непрерывна в точке a.

Замечание. Отметим, что отображение f могло быть и не определено в точке a (т.е. не обязательно $a \in A$). Если все же $a \in A$, то из определения вытекает, что существование и значение предела $\lim_{x \to a} f(x)$ не зависит от значения $f(a)$, а только от значений f в остальных точках.

Назовем *проколотой окрестностью* точки a множество $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, где $U_\varepsilon(a)$ — окрестность точки a.

Лемма 1. *Пусть $f : A \to B$ — отображение. Равенство $u = \lim_{x \to a} f(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой окрестности U точки u существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(a)$ точки a такая, что если $x \in A \cap \overset{\circ}{V}(a)$, то $f(x) \in U$.*

Доказательство леммы очевидно; лемма при необходимости может служить определением предела.

Пример 4. Из примера 1 вытекает, что $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$ для любого $a \in \mathbb{R}$. По аналогии с примером 2 можно доказать (проделайте!), что никакое число, кроме a^2, нужным пределом не является.

Пример 5. Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Тогда предел $\lim_{x \to 0} f(x)$ не существует. Действительно, пусть он равен u. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что окрестность $U = (u - \varepsilon, u + \varepsilon)$ не содержит либо 0, либо 1, либо обоих чисел. Пусть $\overset{\circ}{V} = (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ — проколотая окрестность точки $a = 0$ (из леммы 1). Независимо от $\delta > 0$, множество $\overset{\circ}{V}$ содержит как положительные, так и отрицательные числа. Иными словами, существуют $p, q \in \overset{\circ}{V}$ такие, что $f(p) = 0$ и $f(q) = 1$. Но тогда либо $f(p) \notin U$, либо $f(q) \notin U$, либо и то, и другое. Это противоречит выбору окрестности $\overset{\circ}{V}$.

Упражнение. Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции действительного переменного; известно, что $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\lim_{y \to b} g(y) = c$. Обязательно ли верно, что $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$?

Ответ. Нет. Приведите контрпример и сравните его с доказательством предложения 1.

ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Единственность предела. Обобщение понятия окрестности: бесконечности и $\mathbb{R}^n$.

1. Единственность предела Пусть $A \subset \mathbb{R}$ (т.е. A — какое-то множество, состоящее из действительных чисел). Напомним, что точка $a \in A$ называется изолированной, если существует ее окрестность $U_\varepsilon(a)$ такая, что пересечение множеств $U_\varepsilon(a) \cap A$ содержит единственный элемент — саму точку a. Иными словами, точка $a \in A$ *не является* изолированной тогда и только тогда, когда для любой проколотой окрестности $\mathring{V}(a)$ пересечение $\mathring{V}(a) \cap A \neq \varnothing$ — иными словами, найдется $b \in V \cap A$ такое, что $b \neq a$.

Предложение 1. *Пусть $f : A \to B$ — отображение, и точка $a \in A$ не является изолированной. Тогда если предел $\lim_{x\to a} f(x)$ существует, то он единственный.*

Доказательство. Пусть это не так, и существуют два предела, $u_1 \neq u_2$. Это означает, что функции $g_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ u_1, & x = a \end{cases}$ и $g_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ u_2, & x = a \end{cases}$ обе непрерывны. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ такое, чтобы окрестность $U_1 = (u_1 - \varepsilon, u_1 + \varepsilon)$ точки u_1 и окрестность $U_2 = (u_2 - \varepsilon, u_2 + \varepsilon)$ точки u_2 не пересекались, и пусть $V_1 = (a - \delta_1, a + \delta_1)$, $V_2 = (a - \delta_2, a + \delta_2)$ — окрестности точки a, о которых идет речь в определении непрерывности функций g_1 и g_2 соответственно. Без ограничения общности $\delta_1 < \delta_2$, так что $V_1 \subset V_2$. Поскольку точка a не изолированная, существует число $b \in V_1 \cap A$ такое, что $b \neq a$. Тогда $g_1(b) \in U_1$ и $g_2(b) \in U_2$. Но $g_1(b) = f(b) = g_2(b)$ (поскольку $b \neq a$ — во всех точках, кроме a функции g_1 и g_2 совпадают с функцией f и друг с другом), и таким образом $f(b) \in U_1 \cap U_2$, что противоречит тому, что эти окрестности не пересекаются. □

Следствие 1 (предложения 1). *Пусть точка $a \in A$ не является изолированной. Тогда отображение $f : A \to B$ непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.*

Предложение 2 ("лемма о двух полицейских"). *Если $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ — три функции, причем $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = u$ и $f(x) \le g(x) \le h(x)$ при x, принадлежащем некоторой окрестности точки a, то $\lim_{x\to a} g(x) = u$.*

Доказательство. Пусть $U = (u-\varepsilon, u+\varepsilon)$ — окрестность точки u. Согласно определению предела, существует окрестность $V_1 = (a-\delta_1, a+\delta_1)$ точки a такая, что если $x \in V_1$ (то есть $|x - a| < \delta_1$), то $f(x) \in U$. Аналогично, существует окрестность $V_2 = (a-\delta_2, a+\delta_2)$ точки a такая, что если $x \in V_2$ (то есть $|x - a| < \delta_2$), то $h(x) \in U$. Выберем меньшее из чисел δ_1, δ_2 — пусть это δ_1. Тогда $V_1 \subset V_2$, то есть если $x \in V_1$, то x принадлежит обеим окрестностям и, следовательно, $f(x), h(x) \in U$. Последнее включение означает, что $u-\varepsilon < f(x) < h(x) < u+\varepsilon$, а поскольку $f(x) \le g(x) \le h(x)$ — также и $u - \varepsilon < g(x) < u + \varepsilon$, то есть $g(x) \in U$. Тем самым найдена окрестность точки a (это V_1) такая, что если x ей принадлежит, то $g(x) \in U$. (Если $\delta_2 \le \delta_1$, то такой окрестнотью будет, наоборот, V_2.)

Это и означает, что $\lim_{x\to a} g(x) = u$. □

Пример 1. Пусть $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $f(x) = \sin 1/x$ при $x \neq 0$. Тогда предел $\lim_{x\to 0} f(x)$ не существует. Действительно, произвольная проколотая окрестность $\mathring{V} = (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ точки 0 содержит как точку вида $p = 1/(2\pi n + \pi/2)$, так и точку вида $q = 1/(2\pi n - \pi/2)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, для этого нужно только, чтобы $1/(2\pi n - \pi/2) < \delta$, то есть $n > (1/\delta + \pi/2)/(2\pi)$, а целое число с таким свойством всегда существует. Но тогда $f(p) = 1$ и $f(q) = -1$; дальнейшее рассуждение такое же, как в лекции 1.

2. Обобщение понятия окрестности: бесконечности Рассмотрим множество $\overline{\mathbb{R}}$, состоящее из всех действительных чисел и еще двух элементов, обозначаемых $+\infty$ и $-\infty$. Окрестностями действительных чисел в $\overline{\mathbb{R}}$ мы будем называть то же, что и раньше, а окрестностями $+\infty$ и $-\infty$ будут называться множества $U_c(+\infty) = (c, +\infty] = \{+\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > c\}$ и $U_c(-\infty) = [-\infty, c) = \{-\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}$. После того, как определены окрестности, определения непрерывного в точке a отображения и определение предела получают смысл для отображений $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, где $A \subset \overline{\mathbb{R}}$,

Пример 2. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — последовательность, заданная формулой $f(n) = 1/n$; покажем, что $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$.

Пусть $V_\varepsilon = (-\varepsilon, +\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ — окрестность точки 0. Рассмотрим проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}_{1/\varepsilon} = (1/\varepsilon, +\infty) \subset \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ точки $+\infty$. Пусть $n \in U_{1/\varepsilon} \cap A$, то есть n — натуральное число, для которого $n > 1/\varepsilon$. Тогда $0 \le f(n) = 1/n < \varepsilon$, так что $f(n) \in V_\varepsilon$, так что утверждение о пределе доказано.

Задача. Определим отображение $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ формулой $f(x) = 1/x^2$ при $x \neq 0$. Докажите, что $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Рассмотрим теперь множество $\widetilde{\mathbb{R}}$, состоящее из всех действительных чисел и еще одного элемента, ∞ ("бесконечность без знака"). Окрестности действительных чисел — те же, что в $\mathbb{R}$ и в $\overline{\mathbb{R}}$ (интервалы с центром в соответствующей точке); окрестностями же элемента ∞ будем называть множества $U_c = \{\infty\} \cup (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$ для всех $c > 0$. Теперь у нас определено понятие непрерывности (и предела) для отображений $f : A \to B$, где A — либо подмножество $\overline{\mathbb{R}}$, либо подмножество $\widetilde{\mathbb{R}}$ (в частности, возможно $A \subset \mathbb{R}$, поскольку $\mathbb{R}$ — подмножество и $\overline{\mathbb{R}}$, и $\widetilde{\mathbb{R}}$ одновременно).

Пример 3. Пусть $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ — функция, определенная формулой $f(x) = 1/x$ (на самом деле все значения f — действительные числа, но $\mathbb{R} \subset \widetilde{\mathbb{R}}$, так что f можно рассматривать как отображение со значениями в $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Докажем, что $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. Действительно, пусть U_c — произвольная окрестность точки ∞. Возьмем проколотую окрестность $V = (-\delta, 0) \cup (0, \delta) \subset \mathbb{R}$, где $\delta > 0$ — произвольное число, для которого $\delta < 1/c$ (при $c > 0$ такое обязательно существует — например, $\delta = 1/(2c)$). Если теперь $x \in V \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, то либо $x > 0$ — тогда $f(x) > c$, либо $x < 0$ — тогда $f(x) < -c$. В обоих случаях $f(x) \in U_c$.

Рассмотрим теперь ту же f как отображение $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ и покажем, что в этом случае $\lim_{x\to 0} f(x)$ не существует. Сначала докажем, что $\lim_{x\to 0} f(x) \neq +\infty$. Для этого возьмем окрестность $U_c(+\infty) = (c, +\infty]$ точки $+\infty$ для произвольного $c > 0$, и пусть $\overset{\circ}{V} = (-\delta, 0) \cup (0, +\delta) \subset \mathbb{R}$ — проколотая окрестность точки 0. Эта проколотая окрестность обязательно содержит число $x < 0$ (например, $x = -\delta/2$), для которого $f(x) < 0$ и, следовательно, $f(x) \notin U_c(+\infty)$. Аналогично доказывается, что предел не может быть равен $-\infty$.

Пусть теперь $\lim_{x\to 0} f(x) = c \in \mathbb{R}$ и $U = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ — окрестность точки c. Произвольная проколотая окрестность $V = (-\delta, 0) \cup (0, +\delta)$ точки 0 содержит точку $x \in V \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ такую, что $x < 1/(c + \varepsilon)$. Тогда $f(x) > c + \varepsilon$, так что $f(x) \notin U$. Следовательно, c пределом не является, так что предела не существует.

3. Обобщение понятия окрестности: плоскость Координатная плоскость $\mathbb{R}^2$ — множество, элементами которой являются упорядоченные пары (x, y) действительных чисел. Отображения $f : A \to \mathbb{R}$, где $A \subset \mathbb{R}^2$, называют функциями двух действительных переменных: на самом деле, это отображение сопоставляет число $f((x, y)) \in \mathbb{R}$ точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ координатной плоскости — то есть, двум действительным числам x и y; для удобства убирают одну пару скобок и пишут $f(x, y)$.

Отображение $g : A \to \mathbb{R}^2$, где $A \subset \mathbb{R}$, сопоставляет каждому действительному числу $t \in A$ точку $g(t) \in \mathbb{R}^2$ координатной плоскости. Такое отображение называется вектор-функцией (двумерной) одной действительной переменной или (параметризованной) кривой на плоскости. Точка $g(t)$ имеет координаты, зависящие от t: $g(t) = (x(t), y(t))$; тем самым x и y являются отображениями $A \to \mathbb{R}$, то есть обычными функциями одной переменной. Тем самым, вектор-функция это просто пара обыкновенных функций.

Назовем окрестностью точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ множество $U_{t,s}(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in U_t(a), y \in U_s(b)\}$, то есть $U_{t,s}(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a - t < x < a + t, b - s < y < b + s\}$. Геометрически $U_{t,s}(a, b)$ — прямоугольник (без сторон, только внутренность) со сторонами, параллельными осям координат. Понятие окрестности позволяет определить непрерывность отображений $f : A \to B$, где $B = \mathbb{R}^2$ или одно из множеств, рассмотренных ранее ($\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\widetilde{\mathbb{R}}$), а A — подмножество $\mathbb{R}^2$ (или, опять-таки, подмножество $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ или $\widetilde{\mathbb{R}}$) — иными словами, непрерывность функций двух переменных, а также вектор-функций одной или двух переменных.

Пример 4. Рассмотрим функцию двух переменных $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданную формулой $\alpha(x, y) = x + y$. Докажем, что она непрерывна в произвольной точке $a = (p, q)$. Для этого рассмотрим произвольную окрестность $U = (p + q - \varepsilon, p + q + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ точки $\alpha(p, q) = p + q$, и пусть $V = (p - \varepsilon/2, p + \varepsilon/2) \times (q - \varepsilon/2, q + \varepsilon/2) \subset \mathbb{R}^2$ — окрестность точки $a = (p, q) \in \mathbb{R}^2$. Если $z = (x, y) \in V$, то $p - \varepsilon/2 < x < p + \varepsilon/2$ и $q - \varepsilon/2 < y < q + \varepsilon/2$, откуда вытекает, что $p + q - \varepsilon < x + y = \alpha(z) < p + q + \varepsilon$, то есть $\alpha(z) \in U$. Это доказывает непрерывность.

Пример 5 (аналогичный примеру 4). Докажем непрерывность функции двух переменных $\mu(x, y) = xy$ в произвольной точке $a = (p, q)$. Предположим, что $p, q > 0$, остальные случаи — упражнение. Как и раньше, рассмотрим произвольную окрестность $U = (pq - \varepsilon.pq + \varepsilon)$, и пусть $V = (p - \delta_1, p + \delta_1) \times (q - \delta_2, q + \delta_2)$, где δ_1 — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \varepsilon/(4q)$, $\delta_1 < 1$ и $\delta_1 < \varepsilon/2$, а δ_2 — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \varepsilon/(4p)$, $\delta_2 < 1$ и $\delta_2 < \varepsilon/2$. Тогда для всякого $z = (x, y) \in V$ получим $\mu(z) = xy < (p + \delta_1)(q + \delta_2) = pq + q\delta_1 + p\delta_2 + \delta_1\delta_2 < pq + q \cdot \varepsilon/(4q) + p \cdot \varepsilon/(4p) + \delta_1 < pq + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = pq + \varepsilon$ и $f(z) = xy > (p - \delta_1)(q - \delta_2) = pq - q\delta_1 - p\delta_2 + \delta_1\delta_2 > pq - q\delta_1 - p\delta_2 > pq - q \cdot \varepsilon/(4a) - p \cdot \varepsilon/(4p) = pq - \varepsilon/2 > pq - \varepsilon$, так что $\mu(z) \in U$. Тем самым непрерывность доказана.

Понятие окрестности очевидным образом переносится (уточните, как именно!) на множество (n-мерное вещественное пространство) $\mathbb{R}^n$ с произвольным $n \ge 1$, элементами которого являются упорядоченные наборы $(x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел.

ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Топологическое пространство. Интеграл Римана.

1. Хаусдорфовы топологические пространства. В лекциях 1 и 2 мы определили непрерывность (и пределы) отображений между несколькими различными объектами: подмножествами $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^n$. Все эти определения похожи друг на друга; более того, понятно, что действуя аналогичным образом, мы можем определить непрерывность и других отображений (например, из/в $\overline{\mathbb{R}}^n$ и т.п.). Возникает подозрение, что все это частные случаи одного и того же понятия. Хаусдорфово топологическое пространство — та естественная "среда", в котором определена непрерывность отображения и предел.

Чтобы задать *хаусдорфово топологическое пространство*, необходимо зафиксировать множество X (элементы которого называются точками; например, $X = \mathbb{R}$ и точки — действительные числа) и для каждой точки $a \in X$ зафиксировать набор подмножеств $U \subset X$ множества X, называемых окрестностями точки a (например, окрестность точки — действительного числа $a \in \mathbb{R}$ — это интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ с центром в этой точке). При этом предполагается, что точки и окрестности обладают следующими простыми свойствами:

1) Любая окрестность точки a содержит точку a.
2) У любой точки $a \in X$ есть хотя бы одна окрестность.
3) Если U_1 и U_2 — окрестности (возможно, разных точек), и $a \in U_1 \cap U_2$, то существует окрестность U точки a такая, что $U \subset U_1 \cap U_2$.
4) Если $a_1, a_2 \in X$ — различные точки, то существуют окрестность U_1 точки a_1 и окрестность U_2 точки a_2, не имеющие общих точек: $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Нетрудно проверить (проделайте!), что $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\widetilde{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{R}^n$ с окрестностями, определенными в лекциях 1 и 2, — хаусдорфовы топологические пространства.

Определение отображения, непрерывного в точке, и определение предела можно теперь перенести безо всяких изменений на случай отображений $f : A \to Y$, где Y — какое-нибудь хаусдорфово топологическое пространство, а A — подмножество произвольного хаусдорфова топологического пространства X (вообще говоря, отличного от Y).

Упражнение 1. Сформулируйте это определение и проверьте, что предложение 1 лекции 1 (о непрерывности композиции) верно вместе с доказательством для произвольных отображений $f : A \to Y$.

Предложение 2 лекции 1, версия для хаусдорфовых топологических пространств. *Пусть X, B — хаусдорфовы топологические пространства, $A \subset X$, $f : A \to B$ — отображение и $a \in X$. Предположим, что точка $a \in A$ не изолирована в множестве $A \cup \{a\} \subset X$: для любой окрестности $V \subset X$ точки a найдется точка $b \in V \cap A \setminus \{a\}$ (иными словами, $b \in V$ такое, что $b \in A$ и $b \neq a$).*

Тогда если предел $\lim_{x\to a} f(x) \in B$ существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть это не так: $u_1, u_2 \in B$ — пределы, и $u_1 \neq u_2$. По свойству 4 из определения хаусдорфова топологического пространства вытекает, что у u_1, u_2 имеются непересекающиеся окрестности U_1, U_2. По определению предела существуют окрестности V_1, V_2 точки a такие, что если $x \in \overset{\circ}{V_1}$, то $f(x) \in U_1$, а если $x \in \overset{\circ}{V_2}$, то $f(x) \in U_2$.

Согласно свойству 3 из определения хаусдорфова топологического пространства, точка $a \in X$ обладает окрестностью V такой, что $V \subset V_1 \cap V_2$. По условию теоремы точка a не изолирована в $A \cup \{a\}$ — следовательно, существует точка $x \in V \cap A$, отличная от a. Но тогда $x \in \overset{\circ}{V_1}$ и $x \in \overset{\circ}{V_2}$, откуда вытекает, что $f(x) \in U_1$ и $f(x) \in U_2$ одновременно. Это противоречит тому, что окрестности U_1 и U_2 не пересекаются. □

2. Произведения топологических пространств. Вектор-функции и функции многих переменных. Пусть X и Y — два топологических пространства. Напомним, что декартовым произведением $X \times Y$ (как множеств) называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$. Например, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ — (координатная) плоскость. Отображение $f : X \times Y \to Z$ называют (если Z — множество чисел) функцией двух переменных (первая из X, вторая из Y) — в точности как для отображений $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Аналогично определяется декартово произведение любого конечного числа (трех и более) множеств и функция трех и более переменных.

Существует стандартный способ наделить $X \times Y$ структурой топологического пространства:

Определение 1. Для всех $a \in X$, $b \in Y$ окрестностью точки $(a,b) \in X \times Y$ называется множество $U(a) \times V(b) = \{(x,y) \mid x \in U(a), y \in V(b)\}$, где $U(a) \subset X$ и $V(b) \subset Y$ — произвольные окрестности точек a и b соответственно.

Нетрудно проверить (проделайте!), что таким образом действительно определено топологическое пространство. Структуру топологического пространства на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ мы определяли именно таким образом: $U_{p,q}(a,b) = U_p(a) \times U_q(b) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Аналогично определяется структура топологического пространства на декартовом произведении любого конечного числа топологических пространств — например, на $\mathbb{R}^n$.

Отображение $f : X \to Y \times Z$ сопоставляет каждому элементу $a \in X$ пару элементов $(g(a), h(a))$, где $g(a) \in Y$ и $h(a) \in Z$. Таким образом, отображение $f : X \to Y \times Z$ — не что иное как пара отображений $g : X \to Y$ и $h : X \to Z$. Аналогично, отображение множества A в произведение n пространств — просто набор отображений из A в каждое из пространств в отдельности. Отображения $f : A \to \mathbb{R}^n$ называются n-мерными вектор-функциями (определенными на множестве A).

Предложение 1. *Пусть X, B, C — хаусдорфовы топологические пространства и $A \subset X$. Тогда вектор-функция $f = (g,h) : A \to B \times C$ непрерывна в точке $a \in A$ тогда и только тогда, когда оба отображения g, h непрерывны в точке a.*

Доказательство. "Тогда": предположим, что g и h — отображения, непрерывные в точке $a \in A$, и пусть $V \times W$ — окрестность точки $f(a) = (g(a), h(a)) \in B \times C$; здесь $V \subset B$ и $W \subset C$ — окрестности точек $b \in B$ и $c \in C$ соответственно. В силу непрерывности g существует такая окрестность $U_1 \subset X$ точки a, что если $x \in U_1 \cap A$, то $g(x) \in V$. Аналогично, в силу непрерывности h существует такая окрестность $U_2 \subset X$ той же точки a, что если $x \in U_2 \cap A$, то $h(x) \in W$. Теперь $a \in U_1 \cap U_2$; по определению топологического пространства существует окрестность $U \subset U_1 \cap U_2$ точки a. Если $x \in U \cap A$, то условия $g(x) \in V$ и $h(x) \in W$ выполнены одновременно, что и означает $f(x) \in V \times W$. Тем самым непрерывность f в точке a доказана.

"Только тогда": предположим, что f — непрерывная вектор-функция, и пусть $V \subset B$ и $W \subset C$ — произвольные окрестности точек $g(a) \in B$ и $h(a) \in C$ соответственно. Тогда $V \times W \subset B \times C$ — окрестность точки $f(a) = (g(a), h(a))$. В силу непрерывности f найдется окрестность $U \subset X$ точки a такая, что если $x \in U \cap A$, то $f(x) = (g(x), h(x)) \in V \times W$, что означает $g(x) \in V$ и $h(x) \in W$. Тем самым доказана непрерывность в точке a функций g и h (окрестность U одна и та же для обеих). □

Следствие 1. *Если функции $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ и $f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $a \in A_1 \cap A_2$, то функции $f_1 + f_2 : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}$ и $f_1 f_2 : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}$ также непрерывны в точке a.*

Доказательство. Согласно предложению 1, отображение $F = (f_1, f_2) : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}^2$ непрерывно в точке a. Согласно предложению 1 лекции 1 и примеру 4 лекции 2, функция $f_1 + f_2 = \alpha \circ F$ (напомним, что α — "функция сложения": $\alpha(x,y) = x + y$) непрерывна в той же точке. Согласно предложению 1 лекции 1 и примеру 5 лекции 2, функция $f_1 f_2 = \mu \circ F$ также непрерывна в точке a (μ — "функция умножения": $\mu(x,y) = xy$). □

Упражнение 2. Если вы не разбирали доказательство мелким шрифтом предложения 1, то проверьте самостоятельно (непосредственно по определению), что сумма и произведение непрерывных функций непрерывны.

Следствие 2 (следствия 1)**.** *Если $\lim_{x \to a} f_1(x) = u_1$ и $\lim_{x \to a} f_2(x) = u_2$, то $\lim_{x \to a}(f_1(x) + f_2(x)) = u_1 + u_2$ и $\lim_{x \to a} f_1(x) f_2(x) = u_1 u_2$. Короче (но менее точно): предел суммы равен сумме пределов, предел произведения равен произведению пределов.*

Упражнение 3. Сформулируйте самостоятельно и докажите аналогичное утверждение про предел разности и частного.

Упражнение 4. Как обобщить результаты следствия 2 и упражнения 3 на случай, когда один или оба предела бесконечны?

3. Пространство разбиений и интеграл Римана. Вот еще один полезный пример хаусдорфова топологического пространства: это множество $\mathfrak{I}[0,1]$, элементами которого являются всевозможные возрастающие конечные последовательности $X = (x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{2N-1} < x_{2N} = 1)$ (для всех натуральных N; иногда они называются разбиениями отрезка $[0,1]$), а также дополнительный элемент ∞ ("идеальное разбиение"). Окрестностью произвольной последовательности X будем называть просто множество $\{X\}$ (тем самым это изолированная точка), а окрестностью ∞ называется множество $U_\varepsilon(\infty)$ (где $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число), состоящее из ∞ и всех последовательностей (разбиений) $X = (x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{2N-1} < x_{2N} = 1)$, для которых разность между любыми двумя последовательными членами меньше ε: $x_{i+1} - x_i < \varepsilon \ \forall i = 0, \ldots, 2N-1$.

Пример 1. Пусть $N : \mathfrak{I}[0,1] \setminus \{\infty\} \to \mathbb{N}$ — функция, значение которой на разбиении $X = (x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{2N-1} < x_{2N} = 1)$ равно N. Очевидно, что если $X \in U_\varepsilon(\infty)$, то выполнено неравенство $N(X) \geq 1/(2\varepsilon)$.

Отсюда по лемме о двух полицейских (почему она верна для функций на пространстве $\mathfrak{I}[0,1]$?) вытекает, что $\lim_{X\to\infty} N(X) = +\infty$.

Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, а $X \in \mathfrak{I}[0,1]$ — разбиение (но не ∞). Обозначим $I(f,X)$ следующее выражение, называемое суммой Римана:

$$I(f,X) = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{2i+1})(x_{2i+2} - x_{2i}).$$

Предел $\lim_{X\to\infty} I(f,X)$ (если он существует, конечно — это зависит от функции f) называется интегралом (Римана) от функции f по отрезку $[0,1]$ и обозначается $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Если функция f положительна во всех точках, то $I(f,X)$ — площадь "ступенчатой фигуры" — объединения прямоугольников Π_i, $i = 0,\ldots,N-1$, где прямоугольник Π_i ограничен слева и справа вертикальными прямыми $x = x_{2i}$ и $x = x_{2i+2}$ (и тем самым его ширина равна $x_{2i+2} - x_{2i}$, снизу — осью абсцисс $y = 0$, а сверху — горизонтальной прямой $y = f(x_{2i+1})$ (т.е. его высота равна $f(x_{2i+1})$). Когда разбиение X стремится к ∞, ступенчатая фигура становится все более и более похожа на криволинейную фигуру $\Gamma_f = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y, 0 \le y \le f(x)\}$ — множество точек между осью абсцисс и графиком функции f. Тем самым, неформально говоря, $\int_0^1 f(x)\,dx$ для таких функций f — площадь фигуры Γ_f.

Пусть, например, $f(x) = x$. Тогда $I(f,X) = \sum_{i=0}^{N-1} x_{2i+1}(x_{2i+2} - x_{2i})$. Для вычисления предела сделаем такой трюк:

$$I(f,X) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{2i+1} - \frac{x_{2i+2}+x_{2i}}{2})(x_{2i+2} - x_{2i}) + \frac{x_{2i+2}+x_{2i}}{2}(x_{2i+2} - x_{2i}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(x_{2i+2}^2 - x_{2i}^2) + \sum_{i=0}^{N-1}(x_{2i+1} - \frac{x_{2i+2}+x_{2i}}{2})(x_{2i+2} - x_{2i})$$

Первое слагаемое равно $\frac{1}{2}(x_{2N} - x_0) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$. Пусть теперь $X \in U_\varepsilon$; тогда для всякого i имеем $\left|x_{2i+1} - \frac{x_{2i+2}+x_{2i}}{2}\right| < \varepsilon$ (докажите!). Обозначим L второе слагаемое в сумме. Для любого количества слагаемых модуль их суммы не превосходит суммы их модулей, откуда вытекает, что

$$|L| \le \sum_{i=0}^{N-1}\left|x_{2i+1} - \frac{x_{2i+2}+x_{2i}}{2}\right|(x_{2i+2} - x_{2i}) \le \varepsilon\sum_{i=0}^{N-1}(x_{2i+2} - x_{2i}) = \varepsilon(x_{2N} - x_0) = \varepsilon.$$

Следовательно, если $X \in U_\varepsilon(\infty)$, то $-\varepsilon < L < \varepsilon$, откуда $I(f,X) \in (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$. По определению получается, что $\int_0^1 x\,dx = \lim_{X\to\infty} I(f,X) = \frac{1}{2}$.

ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Точная верхняя грань. Определение действительного числа.

1. Точные верхние и нижние грани В этом разделе мы будем работать с множеством $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Мы будем считать, что $-\infty < a < +\infty$ для любого действительного числа $a \in \mathbb{R}$; неравенства между действительными числами — как обычно.

Определение 1. Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ (т.е. X — множество действительных чисел плюс, возможно, элементы $+\infty$ и $-\infty$). Говорят, что элемент $M \in \overline{\mathbb{R}}$ ограничивает множество X сверху, если $a \le M$ для всякого $a \in X$.

Очевидно, каждое множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено сверху элементом $M = +\infty$. Если множество X ограничено сверху *действительным числом* (и, следовательно, само состоит из действительных чисел и, возможно, $-\infty$), то оно называется ограниченным сверху.

Аналогично определяется число, ограничивающее множество снизу, и множество, ограниченное снизу. Множество называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу; такое множество состоит только из действительных чисел.

Пример 1. Отрезок $[0,1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$ ограничен сверху числом 1 (или любым числом, бо́льшим 1), а снизу — числом 0 (или любым числом, меньшим 0) — тем самым это ограниченное множество. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел ограничено сверху $+\infty$, снизу — $-\infty$, и только ими.

Определение 2. Наименьший элемент $M \in \overline{\mathbb{R}}$, ограничивающий сверху непустое множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, называется *точной верхней гранью* множества X (обозначение: $M = \sup X$). Иными словами, элемент $M \in \overline{\mathbb{R}}$ называется точной верхней гранью X, если он ограничивает множество X сверху, но ни один элемент $m \in \overline{\mathbb{R}}$, меньший M, этим свойством не обладает: , $\forall a \in X\, a \le M$, но $\forall m < M \exists b \in X\, b > m$.

Аналогично определяется понятие точной нижней грани (обозначение: $\inf X$).

Пример 2. $1 = \sup[0,1]$. Действительно, если $a \in [0,1]$, то $a \le 1$ — следовательно, 1 ограничивает отрезок сверху. С другой сторон, если $m < 1$, то m не ограничивает отрезок сверху, т.к. $1 \in [0,1]$.

Аналогично доказывается равенство $0 = \inf[0,1]$.

Обобщением примера 2 является следующее очевидное замечание:

Предложение 1. *Если множество X содержит наибольший элемент, то он является его точной верхней гранью. Обратно, если $M \stackrel{def}{=} \sup X \in X$, то M — наибольший элемент множества X.*

Однако точная верхняя грань может и не принадлежать множеству (тогда, согласно предложению 1, множество не имеет наибольшего элемента):

Пример 3. Пусть $X = (0,1) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Тогда $1 = \sup X$: ясно, что число 1 ограничивает $(0,1)$ сверху. Если $0 < m < 1$, то существует $a \in (0,1)$ такое, что $a > m$ — например, $a = (1+m)/2$. Число $m \le 0$, очевидно, также не ограничивает интервал сверху. Также верно равенство $0 = \inf(0,1)$, доказательство аналогично.

Если теперь $X = (0,1) \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ — множество рациональных чисел (чисел вида m/n, где m, n — натуральные числа), лежащих на интервале $(0,1)$, то также верны равенства $\sup X = 1$ и $\inf X = 0$. Действительно, 1 ограничивает X сверху, поскольку $X \subset (0,1)$. Пусть $m < 1$; для доказательства того, что m не ограничивает X сверху, требуется доказать, что на интервале $(m,1)$ имеется по крайней мере одно рациональное число. Для доказательства рассмотрим последовательность (арифметическую прогрессию) $0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$, где n — натуральное число, большее $1/(1-m)$. Прогрессия состоит из рациональных чисел; шаг ее равен $1/n < 1-m$, а длина интервала $(m,1)$ равна $1-m$ — следовательно, по крайней мере один член прогрессии принадлежит интервалу.

Пример 4. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ — возрастающая функция, т.е. функция, обладающая таким свойством: если $x \le y$ и $x, y \in A$, то $f(x) \le f(y)$. Пусть $M = \sup F$, где $F = \{f(x) \mid x \in A\}$ (множество значений функции f). Докажем тогда, что $M = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Предположим вначале, что $M \in \mathbb{R}$. Пусть $U_\varepsilon(M) = (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$ — окрестность M. Число $M - \varepsilon < M = \sup F$ по определению точной верхней грани не ограничивает сверху множество F — то есть существует элемент $y \in F$ такой, что $y > M - \varepsilon$.

По определению множества F должно быть $y = f(c)$ для некоторого $c \in A$. Поскольку функция f — возрастающая, при $x > c$, $x \in A$, получается $f(x) > f(c) > M - \varepsilon$. В то же время M ограничивает множество F сверху, так что $f(x) \le M < M + \varepsilon$. Тем самым при $x \in U_c(+\infty) \cap A = (c, +\infty) \cap A$ имеем $f(x) \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon) = U_\varepsilon(M)$. Это и означает, что $M = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Доказательство в случае, когда $M = +\infty$, остается в качестве упражнения. Еще одно упражнение — доказать обратное утверждение: если f — возрастающая функция и $M = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, то $M = \sup F$, где $F = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Теорема 1. *Всякое подмножество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ имеет точную верхнюю грань, причем ровно одну.*

Доказательство. Докажем вначале единственность. Пусть $M_1 = \sup X$ и $M_2 = \sup X$. Если M_1 и M_2 не равны, то одно из них меньше другого; например, $M_1 < M_2$. Поскольку M_2 — точная верхняя грань множества X, то M_1 не ограничивает X сверху. Но тогда M_1 само не может быть точной верхней гранью.

При доказательстве существования разберем два случая: существует *действительное* число L, ограничивающее множество X сверху, и такого числа не существует. Во втором случае имеем $\sup X = +\infty$: действительно, $+\infty$ ограничивает $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ сверху (поскольку оно ограничивает сверху все $\overline{\mathbb{R}}$), а если $m < +\infty$, то m — действительное число (или $-\infty$) и, по предположению, X сверху не ограничивает.

В первом же случае мы сталкиваемся с принципиальной трудностью: а что такое действительное число? До сих пор отсутствие формального определения нам не мешало: мы пользовались только некоторыми свойствами действительных чисел (например, правилом сложения неравенств) — поэтому чем бы ни были действительные числа, наши доказательства правильны, коль скоро эти свойства выполнены. Но теперь ситуация иная: нужно доказать *существование* действительного числа, не имея никакой конструкции для него. Для этого требуется определение.

Доказательство теоремы прервано, закончим позднее... □

2. Действительные числа Действительным числом называется выражение $a_0.a_1a_2\ldots$, состоящее из целого числа $a_0 \in \mathbb{Z}$ и бесконечной последовательности элементов $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ (цифр); при этом считается, что если $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 9$, но $a_n \ne 9$ (или $n = 0$), то действительное число $a_0.a_1a_2\ldots a_n99\ldots$ это то же самое, что $a_0.a_1a_2\ldots(a_n + 1)\,00\ldots$. Число $a_0 \in \mathbb{Z}$ называется целой частью действительного числа; число $0.a_1a_2\ldots$ — его дробной частью. Множество всех действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

Если $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$, то цифры a_{n+1} и следующие обычно не пишут; такое называется конечной десятичной дробью.

Отметим, что приведенное выше определение действительного числа совпадает со стандартной записью его в виде бесконечной десятичной дроби только для неотрицательных чисел. Для представления отрицательных чисел мы берем отрицательное $a_0 \in \{-1, -2, \ldots\}$, а дробную часть считаем положительной: то, что обычно обозначается $-0.120\ldots$, мы обозначаем $(-1).8800\ldots$. Это позволяет, во-первых, не хранить отдельно знак числа (он определяется знаком целой части), а во-вторых, облегчает определение сравнения чисел:

Определение 3. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$: $x = a_0.a_1a_2\ldots$ и $y = b_0.b_1b_2\ldots$, и пусть $x \ne y$. Говорят, что число x меньше числа y (обозначение $x < y$), если существует такое $n \ge 0$, что $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$, но $a_n < b_n$.

Запись $x \le y$ означает, что $x < y$ или $x = y$.

Свойства действительных чисел и их сравнения будут разобраны в следующей лекции.

ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Действительные числа (продолжение).

Предложение 1. *1) Если одно из чисел x, y, или оба, — конечные десятичные дроби, то результат сравенения не зависит от того, какое из двух представлений (с периодом 0 или с периодом 9) выбрано.*

2) Если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \neq y$, то обязательно либо $x < y$, либо $y < x$, но не одновременно.

3) Если $x < y < z$, то $x < z$.

Доказательство. Свойство 3: пусть $x = a_0.a_1a_2\dots, y = b_0.b_1b_2\dots, z = c_0.c_1c_2\dots$. Неравенство $x < y$ означает, что $a_n < b_n$, но $a_i = b_i$ при $i < n$; неравенство $y < z$ — что $b_m < c_m$, но $b_i = c_i$ при $i < m$. Пусть k — меньшее из чисел n, m. Тогда $a_i = b_i = c_i$ при $i < k$, но либо $a_k < b_k \le c_k$ (если $k = n$), либо $a_k \le b_k < c_k$ (если $k = m$); в обоих случаях $a_k < c_k$. Тем самым доказано, что $x < z$.

Свойство 1: пусть $y = b_0.b_1b_2\dots$ и $a_0.a_1\dots a_{n-1}a_n99\dots < y$. Это означает, что $b_i = a_i$ при $i = 0, \dots, k$, но $a_{k+1} < b_{k+1}$. Тогда $k \le n-1$: действительно, если $k \ge n$, то $a_{k+1} = 9$ не может быть меньше b_{k+1}. Но в этом случае одновременно и $a_0.a_1\dots a_{n-1}(a_n+1)00\dots$ — неравенства не меняются. Обратное утверждение (если $a_0.a_1\dots a_{n-1}(a_n+1)00\dots < y$, то $a_0.a_1\dots a_{n-1}a_n99\dots < y$) доказывается аналогично. Также аналогично доказывается утверждение, где двумя записями обладает y, а не x.

Свойство 2 очевидно. □

Доказательство теоремы 1 лекции 4 (окончание). Пусть теперь множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху числом $L \in \mathbb{R}$; тогда множество $A_0 \subset \mathbb{Z}$, элементами которого являются *целые части* всех чисел из X, ограничено сверху тем же L. Следовательно, в A_0 имеется наибольшее число; обозначим его a_0. Также обозначим $X_0 \subset X$ множество всех элементов X, целая часть которых равна a_0.

Пусть теперь $A_1 \subset \{0, 1, \dots, 9\}$ — множество *первых цифр* всех чисел $x \in X_0$. Это множество конечное, так что в нем есть наибольший элемент; обозначим его a_1. Кроме того, обозначим $X_1 \subset X_0$ множество всех элементов $x \in X_0$, у которых первая цифра равна a_1 (то есть множество всех элементов $x \in X$, у которых стандартная запись начинается с $a_0.a_1$, а дальше что угодно).

Продолжая этот процесс, получим на n-ом шаге целое число a_0 и набор цифр $a_1 \dots a_n$, а также непустое множество X_n, состоящее из всех элементов $x \in X$, начинающихся с $a_0.a_1\dots a_n$. Теперь мы можем сделать очередной шаг: A_{n+1} — множество $(n+1)$-ых цифр всех элементов $x \in X_n$; a_{n+1} — наибольший элемент (конечного) множества A_{n+1}, и X_{n+1} — множество тех $x \in X_n$, у которых $(n+1)$-я цифра равна a_{n+1}. Очевидно, $X_{n+1} \subset X_n$ и непусто.

Тем самым получается действительное число $\alpha = a_0.a_1a_2\dots \in \mathbb{R}$. Докажем, что $\alpha = \sup X$.

Действительно, пусть $x \in X$. Если $x \in X_n$ для всех n, то $x = \alpha$. В противном случае пусть m — наименьшее натуральное число такое, что $x \notin X_m$. Тогда $x \in X_{m-1}$, что означает, что десятичная запись x начинается на $a_0.a_1\dots a_{m-1}$ и, следовательно, m-я цифра x не превосходит a_m. Но поскольку $x \notin X_m$, эта цифра не может равняться a_m — следовательно, она строго меньше a_m, откуда вытекает, что $x < \alpha$. Таким образом, в любом случае $x \le \alpha$, что означает, что α ограничивает множество X сверху.

Пусть теперь $\beta < \alpha$; десятичная запись $\beta = b_0.b_1b_2\dots$, и пусть k — наименьшее натуральное число такое, что $b_k < a_k$; предыдущие цифры β такие же, как у α: $b_0 = a_0, b_1 = a_1, \dots, b_{k-1} = a_{k-1}$. Множество $X_k \subset X$ непусто и состоит из всех элементов $x \in X$, десятичная запись которых начинается на $a_0.a_1\dots a_k$. Для любого из чисел $x \in X_k$ имеем $\beta < x$, так что число β не ограничивает множество X сверху. Тем самым $\alpha = \sup X$.

Тем самым доказано, что у любого множества точная верхняя грань существует. □

Пример 1. Пусть функция f с вещественными значениями определена на отрезке: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и монотонно возрастает на нем: если $x, y \in [a, b]$ и $x \le y$, то $f(x) \le f(y)$. Тогда предел $\lim_{x\to b} f(x)$ существует и равен $M = \sup f([a, b)) = \sup\{f(x) \mid a \le x < b\}$.

Для доказательства заметим вначале, что множество $f([a, b))$ ограничено сверху числом $f(b)$ (в силу монотонного возрастания) и, следовательно, имеет точную верхнюю грань — действительное число M. Пусть $U_\varepsilon(M) = (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ — произвольная окрестность точки M. Согласно определению точной верхней грани существует число $t \in f([a, b))$ такое, что $t > M - \varepsilon$; по определению множества $f([a, b))$ имеем $t = f(u)$ для некоторого $u \in [a, b)$. Пусть $V = (u, 2b - u)$ — окрестность точки b; в силу монотонного возрастания и определения точной верхней грани имеем $M - \varepsilon < t < f(x) < M < M + \varepsilon$, то есть $f(x) \in U$ при всех $x \in V \cap [a, b) = (u, b)$. Тем самым доказано утверждение про предел.

Часто это утверждение встречается в такой форме: пусть f монотонно возрастает и определена на некотором интервале, включающем точки a и b (например, на всем $\mathbb{R}$). Тогда утверждение применимо к функции $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, которая является *ограничением* функции f на этот отрезок (т.е. $g(x) = f(x)$ при всех $x \in [a, b]$, а вне отрезка функция g не определена). Тогда $\lim_{x\to b} g(x)$ называется пределом функции f в точке b слева и обозначается $\lim_{x\to b-0} f(x)$; как доказано выше, он существует. Заметим, что предел $\lim_{x\to b} f(x)$ может и не существовать — мы это уже видели на примере (монотонно возрастающей) функции $\theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$.

Аналогично определяется предел справа.

Пример 2. Утверждение, аналогичное примеру 1: пусть $x_1, x_2, \dots$ — монотонно возрастающая последовательность действительных чисел, множество значений которой ограничено сверху. Тогда $\lim_{n\to\infty} x_n$ существует и равен точной верхней грани упомянутого множества значений. Доказательство практически не отличается от примера 1; подробности — упражнение.

Определим теперь сложение и умножение действительных чисел и докажем, что они обладают всем известными свойствами. Мы будем считать, что определение и свойства сложения и умножения конечных десятичных дробей нам известны (продумайте, как они все-таки определяются и доказываются! особое внимание обратите на отрицательные числа).

Пусть $x, y \in \mathbb{R}$; обозначим x_n, y_n конечные десятичные дроби, полученные обрезанием x и y на n-ой цифре.

Определение 1. $x + y \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x_n + y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(нетрудно видеть, что множество $\{x_n + y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху — докажите! — так что точная верхняя грань является действительным числом, а не равна $+\infty$).

Пусть $x = a_0.a_1a_2\dots$. Тогда противоположным к x назовем число $-x \stackrel{\text{def}}{=} b_0.b_1b_2\dots$, где $b_0 = -a_0 - 1$, а $b_i = 9 - a_i$ для любого $i \geq 1$. Очевидно, $-(-x) = x$.

Лемма 1. *1) $x > 0$ тогда и только тогда, когда $-x < 0$.*
2) $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Число $y = -x$ — единственное, обладающее свойством $x + y = y + x = 0$.
3) $x < y$ тогда и только тогда, когда $y + (-x) > 0$.

Доказательство леммы — упражнение.

Определение 2. Если $x, y > 0$, то $xy \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x_n y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Если одно или два числа x, y отрицательны, то произведение xy определяется по стандартному правилу знаков (например, $xy = -(x(-y))$, если $y < 0 < x$).

Теорема 1. *Сложение, умножение и сравнение действительных чисел обладают следующими свойствами:*
1) $x + y = y + x$,
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
3) $x + 0 = x$,
4) $xy = yx$,
5) $x(yz) = (xy)z$,
6) $x \cdot 1 = x$,
7) $x(y + z) = xy + xz$,
8) $\forall x \neq 0 \exists y : xy = 1$.
9) Если $x, y > 0$, то $x + y > 0$, $xy > 0$.

ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Действительные числа (окончание). Принцип вложенных отрезков. Теорема о промежуточном значении.

1. Доказательство теоремы 1 лекции 5

1. Пункт 4. Пусть вначале $x, y > 0$, и пусть x_n, y_n — десятичные приближения (с точностью до n-го знака) чисел x и y. Из правила "умножения столбиком" выводится индукцией по числу знаков (проделайте!), что $x_n y_n = y_n x_n$ Тогда $xy = \sup_n(x_n y_n) = \sup_n(y_n x_n) = yx$. Если $x < 0$, $y > 0$, то $-x > 0$ и $xy = -((-x)y) = -(y(-x)) = yx$; остальные комбинации знаков рассматриваются так же.

Аналогично (даже проще) доказывается пункт 1.

2. Пункт 5. Аналогично пункту 4, достаточно доказать равенство при $x, y, z > 0$. Из правила умножения столбиком вытекает, что у чисел $(xy)_n$ и $x_n y_n$ целая часть и первые n цифр дробной части сопадают. Тогда у чисел $x_n(yz)_n$ и $x_n(y_n z_n)$ также совпадают первые n цифр. Но $x_n(y_n z_n) = (x_n y_n)z_n$ (индукция по n — проделайте!), откуда вытекает, что у $x_n(yz)_n$ и $(xy)_n z_n$ первые n цифр тоже одинаковые. Отсюда вытекает, что $x(yz) = \sup_n x_n(yz)_n = \sup_n(xy)_n z_n = (xy)z$.

Аналогично доказываются пункты 2 и 7.

3. Пункты 3, 6 и 9 очевидны.

4. Пункт 8 Ясно, что достаточно доказать утверждение при $x > 0$. Пусть целая часть числа x содержит k знаков (то есть $10^{k-1} \le x < 10^k$). Тогда у числа $x/10^{n+k}$ первые n знаков после точки равны нулю. Это означает, что в арифметической прогрессии $a_{jn} = jx/10^{n+k}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, найдется число, большее или равное 1 и меньшее, чем $1 + 1/10^n$. Обозначим это число $b_n = j_n x/10^{n+k}$. С другой стороны, для любого $p > 0$ имеем $1 \le b_{n+p} = j_{n+p}x/10^{n+p+k} < 1+1/10^{n+p} < 1+1/10^n$, откуда $|b_n - b_{n+p}| = |x(j_n/10^{n+k} - j_{n+p}/10^{n+k+p})|\, 1/10^n$. Поскольку $x \ge 10^{k-1}$, первые $n + k - 1$ знаков чисел $y_n \overset{\text{def}}{=} j_n/10^{n+k}$ и $y_{n+p} \overset{\text{def}}{=} j_{n+p}/10^{n+k+p}$ совпадают при любом p. Тем самым десятичные знаки в последовательности $y_1, y_2, \dots$ стабилизируются (n-й знак перестает меняться после $(n - k + 1)$-го члена), из чего вытекает (почему?), что эта последовательность имеет предел y.

Имеем $1 \le y_n x \le 1 + 1/10^n$, откуда $1 \le yx \le 1 + 1/10^n$ для любого n, что возможно только при $yx = 1$.

2. Принцип вложенных отрезков

Теорема 1. *Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ — вложенные друг в друга отрезки действительной прямой. Тогда их пересечение $\bigcap_n [a_n, b_n] \ne \varnothing$ — иными словами, существует точка x, принадлежащая всем отрезкам. Если $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, то эта точка единственная, и $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Пример 1. Если заменить отрезки интервалами или даже полуинтервалами, то теорема будет неверна: $\bigcap_n (0, 1/n] = \varnothing$. Также не годятся полуинтервалы с бесконечным концом (лучи): $\bigcap_n [n, +\infty) = \varnothing$. А вот отрезки с бесконечными концами удовлетворяют теореме: $\bigcap_n [n, +\infty] = \{+\infty\}$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим точки $A \overset{\text{def}}{=} \sup\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ и $B \overset{\text{def}}{=} \inf\{b_n \mid n = 1, 2, \dots\}$. Поскольку отрезки вложены, их левые концы образуют возрастающую последовательность: $a_1 \le a_2 \le \dots$, а правые — убывающую: $b_1 \ge b_2 \ge \dots$. Тем самым для любых n и k имеем: если $k \ge n$, то $a_n \le a_k \le b_k$, а если $k \le n$, то $a_n \le b_n \le b_k$ — в любом случае получается, что любой элемент a_n меньше любого элемента b_k. Отсюда вытекает, что $a_n \le A \le B \le b_k$ при всех n и k (и, в частности, A и B — действительные числа, а не бесконечности). Следовательно, если $x \in [A, B]$, то $a_n \le x \le b_n$ для всех n — то есть $x \in \bigcap_n [a_n, b_n]$.

Доказательство второго утверждения — упражнение. □

3. Теорема о промежуточном значении

Теорема 2. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, и пусть $C \in [f(a), f(b)]$ (или $[f(b), f(a)]$). Тогда существует точка $x \in [a, b]$ (возможно, не единственная), для которой $f(x) = C$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и для всякого $t \in [a,b]$ имеет место либо неравенство $f(t) < C$, либо неравенство $f(t) > C$. Предположим для определенности, что $f(a) < f(b)$ (и, следовательно, $f(a) < C < f(b)$); обратный случай разбирается аналогично.

Обозначим $a_0 = a$, $b_0 = b$, и пусть $c_1 = (a_0 + b_0)/2$. Если $f(c_1) < C$, то положим $a_1 = c_1, b_1 = b_0$, а если $f(c_1) > C$, то наоборот: $a_1 = a_0$, $b_1 = c_1$. Затем положим $c_2 = (a_1 + b_1)/2$ и проделаем ту же процедуру, определив a_2 и b_2, и т.д. В результате получится последовательность вложенных отрезков $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$, для которой $f(a_n) < C < f(b_n)$ для всех n. Длина n-го отрезка $b_n - a_n = (b-a)/2^n \to 0$ при $n \to +\infty$, откуда по теореме 1 существует и единственна точка x такая, что $\{x\} = \bigcap_n [a_n, b_n]$ и $x = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

В силу непрерывности функции f имеем $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ и $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$. Из первого равенства и неравенства $f(a_n) < C$ вытекает, что $f(x) \le C$, а из второго, аналогично, — что $f(x) \ge C$. Но это возможно только при $f(x) = C$, что противоречит предположению, что такого не бывает. $\square$

Пример 2. Пусть $a > 0$. Докажем, что существует и единственно число $\sqrt{a} > 0$ такое, что $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, и что если $a > 1$, то $1 < \sqrt{a} < a$, а если $0 < a < 1$, то $a < \sqrt{a} < 1$.

Пусть вначале $a > 1$ (второй случай — упражнение); рассмотрим отрезок $[1, a]$. Функция $f(x) = x^2$ принимает на левом конце отрезка значение $f(1) = 1 < a$, а на правом $f(a) = a^2 > a$. По теореме 2 существует $x \in [1, a]$ такое, что $x^2 = a$. В силу монотонности функции f такая точка единственна: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, так что только одно из двух значений может быть a.

ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Фундаментальные отображения.

Определение 1. Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, $f : A \to \mathbb{R}$ — функция. Определим функцию $F : (A \setminus \{a\})^2 \to \mathbb{R}$ формулой $F(x, y) = f(x) - f(y)$. Функция f называется фундаментальной в точке $a \in X$, если $\lim_{(x,y)\to(a,a)} F(x, y) = 0$.

Теорема 1. *Предел* $L \stackrel{def}{=} \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ *существует тогда и только тогда, когда* f *фундаментальна в точке* a.

Замечание. Обратим внимание, что предел здесь — действительное число, а с бесконечным пределом теорема неверна. Действительно, $\lim_{x\to 0} 1/x = \infty$, но отображение $f(x) = 1/x$ в точке $a = 0$ не фундаментально. Действительно, если бы имело место равенство $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 0$, то функцию $F(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ можно было бы продолжить в точку $(0, 0)$, полагая $F(0, 0) = 0$, и она была бы непрерывной в этой точке. Тогда по теореме о непрерывности композиции для произвольных непрерывных функций $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $p(0) = q(0) = 0$, функция $F(p(t), q(t))$ была бы непрерывна в точке $t = 0$ (и принимала там значение 0). Но $F(t, 2t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t} \not\to 0$ при $t \to 0$.

Доказательство. Пусть вначале $L = \lim_{x\to a} f(x)$. Положим по определению $f(a) = L$ — на существование и значение предела функции f это не влияет (значение в точке не влияет на предел в этой точке), а на фундаментальность, т.е. равенство нулю предела функции F — также не влияет, поскольку F не определена, если хотя бы один из аргументов равен a. Теперь функция f непрерывна в точке a.

Отображение $p_1 : X \times X \to X$, заданное формулой $p_1(x, y) = x$, непрерывно во всех точках (проверьте!). То же самое верно для отображения $p_2(x, y) = y$. Тогда функция $g_1 \stackrel{\text{def}}{=} f \circ p_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ задана формулой $g_1(x, y) = f(x)$; она непрерывна в точке (a, a) как композиция непрерывных отображений. Отсюда вытекает равенство $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x) = \lim_{(x,y)\to(a,a)} g_1(x, y) = g_1(a, a) = f(a) = L$. Аналогично доказывается, что $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x) = L$. Но тогда $\lim_{(x,y)\to(a,a)} F(x, y) = L - L = 0$.

Обратно, пусть функция f фундаментальна в точке a. Зафиксируем $\varepsilon > 0$; тогда существуют окрестности U_1, U_2 точки a такие, что если $(x, y) \in U_1 \times U_2$ (то есть $x \in U_1$, $y \in U_2$), то $-\varepsilon < f(x) - f(y) < \varepsilon$. По определению топологического пространства существует окрестность U точки a, содержащаяся в $U_1 \cap U_2$. Окрестности U_1, U_2 можно заменить на любые их под-окрестности — в частности, на U — без нарушения неравенства. То есть получается, что если $x, y \in U$, то $-\varepsilon < f(x) - f(y) < \varepsilon$.

Для каждой окрестности $V \subseteq U$ точки a положим по определению $S(V) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in V} f(x)$. (Заметим, что $S(V) \in \mathbb{R}$, а не равно $+\infty$ — докажите!) После этого положим по определению $L = \inf\{S(V) \mid V \subseteq U$— произвольная окрестность точки $a\}$. По определению точной нижней грани это означает, в частности, что существует окрестность $V \subseteq U$ точки a такая, что $L \le S(V) \le L + \varepsilon$. Если теперь $x \in V$, то тем самым $x \in U$ и, следовательно, $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$ для всех $y \in U$ — в частности, для всех $y \in V$. Беря в этом неравенстве точную верхнюю грань по y, получим $f(x) - \varepsilon \le S(V) \le f(x) + \varepsilon$, то есть $S(V) - \varepsilon \le f(x) \le S(V) + \varepsilon$; но правое неравенство на самом деле можно усилить, поскольку $S(V)$ — точная верхняя грань: $S(V) - \varepsilon \le f(x) \le S(V)$. Отсюда и из неравенства $L \le S(V) \le L + \varepsilon$ (см. выше) вытекает, что $L - \varepsilon \le f(x) \le L + \varepsilon$ для произвольного $x \in V$. Следовательно, $L = \lim_{x\to a} f(x)$. □

Фундаментальными бывают не только функции: если $f : A \to \mathbb{R}^n$, где $A \subset X$, то понятие фундаментальности в точке $a \in X$ определяется так же, как для функций ($f(x) - f(y)$ определено, если $f(x), f(y) \in \mathbb{R}^n$!).

Следствие 1. *Отображение* $f : A \to \mathbb{R}^n$, *где* $A \subset X$, *фундаментально в точке* $a \in X$ *тогда и только тогда, когда предел* $L \stackrel{def}{=} \lim_{x\to a} f(x)$ *существует.*

Доказательство. Отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$ представляет собой набор функций $(f_1, \dots, f_n)$, где $f_i : A \to \mathbb{R}$ для всех i. Структура топологического пространства в декартовом произведении такова, что $\lim_{x\to a} f(x) = (\lim_{x\to a} f_1(x), \dots, \lim_{x\to a} f_1(x))$. Вычитание векторов $f(x) - f(y)$ также производится покомпонентно. Отсюда вытекает, что отображение f фундаментально в точке a тогда и только тогда, когда в точке a фундаментальны все функции $f_1, \dots, f_n$, и сходится к $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to a} f_i(x) = L_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Осталось применить теорему 1. □

Пример 1 (задача 5 листка 1). Пусть q — комплексное число; рассмотрим последовательность $a_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \in \mathbb{C}$. Тем самым a — отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$; нас интересует, существует ли (и чему равен) предел $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим несколько случаев.

1. $|q| < 1$. Пусть $q^n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Имеют место неравенства $0 \le |x_n|, |y_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |q^n| = |q|^n$; при этом известно, что $\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ (это предел последовательности *действительных* чисел). По лемме о двух полицейских получаем, что $\lim_{n\to+\infty} |x_n| = 0 = \lim_{n\to+\infty} |y_n|$ и, следовательно, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} y_n$ (докажите!). Из определения сходимости в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ получаем, что $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ и, следовательно, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$.

2. $|q| > 1$. Рассмотрим множество $\widetilde{\mathbb{C}}$, состоящее из $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ и еще одной точки ∞. Введем в $\widetilde{\mathbb{C}}$ структуру топологического пространства, взяв в качестве окрестностей ∞ множества $U_R(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$. Нетрудно проверить (проделайте! это очень похоже на $\widetilde{\mathbb{R}}$), что $\widetilde{\mathbb{C}}$ — хаусдорфово топологическое пространство.

Лемма. *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ и $a \in X$. Для функции (комплекснозначной) $f : A \to \widetilde{\mathbb{C}}$ предел $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ (второй предел это предел обычной, действительнозначной, функции в пространстве $\overline{\mathbb{R}}$).*

Доказательство. Оба утверждения про пределы означают, что $\forall R > 0 \exists U(a) \forall z \in U(a) \cap A : |f(x)| > R$ ($U(a) \subset X$ — окрестность точки a). □

Поскольку $|q| > 1$, имеем $\lim_{n\to+\infty} |q|^n = +\infty$. Для любых комплексных чисел $z, w \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство $|z + w| \ge |z| - |w|$ (проверьте!) — следовательно, $|a_n| = \left|\frac{q^n}{1-q} + \frac{-1}{1-q}\right| \ge \left|\frac{q^n}{1-q}\right| - \frac{1}{|1-q|} = \frac{|q|^n}{|1-q|} - \frac{1}{|1-q|}$. Тем самым $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, и из леммы вытекает, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3. $|q| = 1$. Здесь есть два подслучая: $q = 1$ и $q \ne 1$. Если $q = 1$, то, очевидно, $a_n = n$ (формула $a_n = \frac{1-q^n}{1-q}$ здесь неприменима), откуда $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \in \widetilde{\mathbb{C}}$ (или $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$). Если же $q \ne 1$, то $|q^n| = |q|^n = 1$ при любом n, откуда вытекает неравенство $|1 - q^n| \le |1| + |q^n| = 2$ и, следовательно, $|a_n| = \frac{|1-q^n|}{|1-q|} \le \frac{2}{|1-q|}$. Тем самым последовательность a_n ограничена, так что $\lim_{n\to+\infty} a_n \ne \infty$.

Покажем, что никакое комплексное число также не является пределом a_n (и тем самым эта последовательность предела не имеет). Действительно, если $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{C}$, то последовательность a_n должна быть фундаментальной по следствию 1: $\lim_{(p,q)\to(\infty,\infty)} a_p - a_q = 0$. Из теоремы о непрерывности композиции вытекает, что если p_n, q_n — две последовательности натуральных чисел, для которых $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, то $\lim_{n\to+\infty} a_{p_n} - a_{q_n} = 0$. Возьмем $p_n = n + 1$, $q_n = n$ — для них пределы равны $+\infty$. Но, с другой стороны, докажем, что $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} - a_n = \lim_{n\to+\infty} q^n$ не равен нулю (на самом деле он не существует, но нам это неважно). Действительно, пусть $q^n = x_n + iy_n$. Если $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n$. Тогда существует c такое, что при $n > c$ выполнены неравенства $|x_n| < 1/2$ и $|y_n| < 1/2$. Но при таких n имеем $|q^n|^2 = |x_n|^2 + |y_n|^2 < 1/2$, что противоречит равенству $|q^n| = |q|^n = 1$ для любого n. Тем самым последовательность a_n не фундаментальна и, следовательно, не сходится.

ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Экспонента.

Пусть $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$ — последовательность векторов (иными словами, $u_0, u_1, \dots \in \mathbb{R}^m$). *Рядом* с общим членом u_k называется последовательность $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$, где $a_n = u_0 + \dots + u_n$. Предел $\lim_{n\to+\infty} a_n$ называется суммой ряда; если он лежит в $\mathbb{R}^m$ (а не равен ∞), то ряд называется сходящимся. Ряд обычно обозначается $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$; его сумма (неудобно, но традиционно) обозначается так же.

Пусть $x \in \mathbb{C}$; обозначим $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$.

Теорема 1. *Для любого $x \in \mathbb{C}$ этот ряд сходится.*

Сумма этого ряда называается экспонентой.

Доказательство. Пусть вначале $x \geq 0$ — вещественное неотрицательное число. Последовательность $a_n(x)$ в этом случае принимает вещественные значения и возрастает, так что для доказательства теоремы в этом случае достаточно доказать, что множество ее значений ограничено сверху.

Лемма 1. *Для всякого $y > 0$ предел $\lim_{n\to\infty} \frac{y^n}{n!} = 0$.*

Доказательство леммы. Пусть $C = [y]$ (целая часть) и $n > C$. Тогда $0 < \frac{y^n}{n!} < \frac{y}{1} \dots \frac{y}{C} \frac{y}{C+1} \dots \frac{y}{n} \leq y^C \cdot \frac{y}{n} = y^{C+1} \frac{1}{n}$. Последовательность в правой части стремится к нулю при $n \to \infty$ (напомним, что y^{C+1} зависит только от y, а от n не зависит), тем самым утверждение леммы вытекает из леммы о двух полицейских. $\square$

(Продолжение доказательства теоремы для $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) Применим утверждение леммы к $y = 2x$. Получим, что $\frac{2^n x^n}{n!} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, существует такое натуральное N, что при $n > N$ имеет место неравенство $\frac{2^n x^n}{n!} < 1$, то есть $\frac{x^n}{n!} < 1/2^n$. Отсюда вытекает, что $a_n = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{2^k!} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + 1$ — тем самым ограниченность и сходимость последовательности доказана.

Пусть теперь $x \in \mathbb{C}$ — произвольное комплексное число.

Вначале — важное замечание про вектор-функции:

Лемма 2. *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, $a \in X$, $L \in \mathbb{R}^m$, а $f : A \to \mathbb{R}^m$ — отображение. Тогда $\lim_{x\to a} f(x) = L$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$.*

Заметим, что первый предел это предел вектор-функции $A \to \mathbb{R}^m$, а второй — предел функции $A \to \mathbb{R}$.

Доказательство. "Только тогда". Пусть $\lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$, где $L = (L_1, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность U точки a такая, что если $x \in U \setminus \{a\}$, то $f(x) \in B_\varepsilon(L) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x - L| < \varepsilon\}$. Множество $B_\varepsilon(L) \subset L$ — шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром L. Рассмотрим произвольную окрестность $V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}(L) = \{y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid |y_1 - L_1| < \varepsilon_1, \dots, |y_m - L_m| < \varepsilon_m\} \subset \mathbb{R}^m$ точки $L \in \mathbb{R}^m$, и пусть $\varepsilon > 0$ — число, меньшее всех $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$. Тогда если $y = (y_1, \dots, y_m) \in B_\varepsilon(L)$, то для произвольного $i = 1, \dots, m$ получаем $|y_i - L_i| = \sqrt{|y_i - L_i|^2} \leq \sqrt{|y_1 - L_1|^2 + \dots + |y_m - L_m|^2} = |y - L| < \varepsilon < \varepsilon_i$, откуда $B_\varepsilon(L) \subset V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}(L)$. Выберем окрестность $U(a)$ по числу ε, как указано выше, тогда для всякого $x \in U(a)$, $x \neq a$, получим $f(x) \in B_\varepsilon(L)$, откуда $f(x) \in V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}$. По определению это означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

"Тогда": пусть $\lim_{x\to a} f(x) = L$, то есть для всех $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ найдется окрестность $U(a)$ такая, что если $x \in U(a) \setminus \{a\}$, то $f(x) \in V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}$ (обозначения те же, что и в случае "только тогда"). По аналогии с предыдущим случаем видно, что достаточно для всякого $\varepsilon > 0$ найти $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ такие, что $V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m} \subset B_\varepsilon(L)$. Возьмем $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_m = \varepsilon/m$. Тогда если $y = (y_1, \dots, y_m) \in V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}$, то для всех $i = 1, \dots, m$ имеет место неравенство $|y_i - L_i| < \varepsilon_i = \varepsilon/m$, откуда $|y - L| = \sqrt{|y_1 - L_1|^2 + \dots + |y_m - L_m|^2} \leq \sqrt{m \cdot \varepsilon^2/m^2} = \varepsilon/\sqrt{m} < \varepsilon$, то есть $y \in B_\varepsilon(L)$ — следовательно, $V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m} \subset B_\varepsilon(L)$, как и требовалось. Дальнейшее рассуждение — как в предыдущем случае. $\square$

Следствие 1. *Вектор-функция $f : A \to \mathbb{R}^n$, где $A \subset X$, фундаментальна в точке $a \in X$, если и только если $\lim_{(x,y)\to(a,a)} |f(x) - f(y)| = 0$.*

Доказательство. Доказательство получается применением леммы 2 к отображению (вектор-функции) $F : A \times A \to \mathbb{R}^m$, заданному формулой $F(x, y) = f(x) - f(y)$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$ — последовательность векторов; рассмотрим последовательность чисел $|u_0|, |u_1|, \dots \in \mathbb{R}$. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ сходится (имеет предел, отличный от $+\infty$), то и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится.*

(В этом случае говорят, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *абсолютно сходится*, и лемма формулируется "если ряд абсолютно сходится, то он сходится".)

Доказательство. Положим $a_n = u_0 + \dots + u_n \in \mathbb{R}^m$ и $c_n = |u_0| + \dots + |u_n| \in \mathbb{R}$. Поскольку c_n сходится, она фундаментальна в точке ∞: $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}(c_m - c_n) = 0$. Согласно лемме 2, $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} |c_m - c_n| = 0$. Предположим, что $m \le n$ (обратный случай разбирается так же), тогд $0 \le |a_n - a_m| = |u_{m+1} + \dots + u_n| \le |u_{m+1}| + \dots + |u_n| = |c_n - c_m|$. По лемме о двух полицейских $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} |a_n - a_m| = 0$, и в силу леммы 2, послеовательность a_n фундаментальна — таким образом, сходится. $\square$

(Продолжение доказательства теоремы 1) Теорема для произвольного $x \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ непосредственно вытекает из леммы 3: $\left|\frac{x^k}{k!}\right| = \frac{|x|^k}{k!}$, но $|x|$ — положительное действительное число, так что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ сходится по доказанному ранее. $\square$

Произведением рядов $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, где $u_n, v_n \in \mathbb{C}$, называется ряд $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$, где $w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Теорема 2. *Если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, и $A, B \in \mathbb{C}$ — их суммы, то их произведение — сходящийся ряд с суммой AB.*

Доказательство. Положим $a_n \stackrel{\text{def}}{=} u_0 + \dots + u_n$, $b_n \stackrel{\text{def}}{=} v_0 + \dots + v_n$, так что $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Последовательности a_n и b_n фундаментальны (поскольку сходятся); согласно следствию 1, $\lim_{(m,n)\to(+\infty,+\infty)} |a_n - a_m| = \lim_{(m,n)\to(+\infty,+\infty)} |b_n - b_m| = 0$. Следовательно, существует N такое, что при $n > m > N$ выполнены неравенства $|a_n - a_m| = |u_{m+1} + \dots + u_n| < \varepsilon$, $|b_n - b_m| = |v_{m+1} + \dots + v_n| < \varepsilon$. В силу абсолютной сходимости рядов существует константа $C > 0$ такая, что $|u_0| + \dots + |u_n| < C$, $|v_0| + \dots + |v_n| < C$ для любого n.

Положим $c_n = w_0 + \dots + w_n = \sum_{k+l\le n} u_k w_l$. Пусть $n > 2N+1$, так что $[n/2] > N$ и $n - [n/2] > N$. Тогда $c_n - a_{[n/2]} b_{n-[n/2]} = P + Q$, где $P = \sum_{l\ge[n/2]} \sum_{k\le n-l} u_k v_l$ и $Q = \sum_{k\ge N-[n/2]} \sum_{l\le n-k} u_k v_l$. Имеем $|P| \le |u_0(v_{[n/2]} + \dots + v_n) + u_1(v_{[n/2]} + \dots + v_{n-1}) + \dots + u_{n-[n/2]} v_{[n/2]}| \le |u_0|\,|v_{[n/2]} + \dots + v_n| + \dots + |u_{n-[n/2]}|\,|v_{[n/2]}| \le \varepsilon(|u_0| + \dots + |u_{n-[n/2]}| < C\varepsilon$ и аналогично $|Q| < C\varepsilon$, откуда $|c_n - a_{[n/2]} b_{n-[n/2]}| < 2C\varepsilon$.

Из теоремы о пределе произведения и леммы 2 следует, что $\lim_{n\to\infty} |a_{[n/2]} b_{n-[n/2]} - AB| = 0$. Следовательно, существует $N' > 2N+1$ такое, что если $n > N'$, то $|a_{[n/2]} b_{n-[n/2]} - AB| < \varepsilon$. Следовательно, для таких n получаем $|c_n - AB| < \varepsilon(2C+1)$, откуда $\lim_{n\to\infty} c_n = AN$ по лемме 2 $\square$

Следствие 2. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *для всех* $x, y \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $u_k = \frac{x^k}{k!}$, $v_k = \frac{y^k}{k!}$, тогда $w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n$. $\square$

ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Свойства элементарных функций.

Предложение 1. *Для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство* $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

Доказательство. Очевидно, $\frac{\exp(x)-1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m\to\infty} E_m(x)$, то есть $E_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{(k+1)!} = 1 + \frac{x}{2} + \dots + \frac{x^m}{(m+1)!}$. Для произвольного m имеем $|E_m(x) - 1| = \left|\frac{x}{2} + \dots + \frac{x^m}{(m+1)!}\right| \le \frac{|x|}{2} + \dots + \frac{|x|^m}{(m+1)!} \le |x| + |x|^2 + \dots + |x|^m \le \frac{|x|}{1-|x|}$ при $|x| < 1$. Следовательно, при $|x| < 1$ выполнено неравенство $|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1| \le \frac{|x|}{1-|x|}$ (почему?). По лемме о двух полицейских $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$, как и утверждает предложение. □

Следствие 1. *Функция* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *непрерывна в любой точке* $a \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть вначале $a = 0$. Имеем $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1 + \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1 + 0 \cdot 1$ (по предложению 1) $= 1 = \exp(0)$ — непрерывность доказана.

Для произвольного a получим $\lim_{x\to a} \exp(x) = \lim_{y\to 0} \exp(a + y) = \lim_{y\to 0} \exp(a) \exp(x)$ (по следствию 2 лекции 8) $= \exp(a) \lim_{y\to 0} \exp(x) = \exp(a)$ по доказанному выше. □

Предложение 2. *Функция* $\exp(x)$ *при* $x \in \mathbb{R}$ *строго возрастает. Ее множество значений состоит из всех положительных чисел.*

Доказательство. Из следствия 2 лекции 8 вытекает, что $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \exp(-x)$, то есть $\exp(-x) = 1/\exp(x)$. Из этого, в частности следует, что $\exp(x) \ne 0$ (и даже при всех $x \in \mathbb{C}$).

Пусть теперь $x \in \mathbb{R}$. Из того же следствия 2 лекции 8 вытекает, что $\exp(x) = \exp(x/2+x/2) = \exp(x/2)^2 > 0$ — то есть на вещественной оси функция принимает только положительные значения.

Очевидно, что $\exp(x) > 1+x$ при $x > 0$ (почему?), откуда $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ по лемме о двух полицейских. Из доказанного ранее следует, что $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{y\to+\infty} \exp(-y) = \lim_{y\to+\infty} 1/\exp(y) = 0$. Тем самым среди значений exp на действительной оси есть сколь угодно большие и сколь угодно близкие к нулю положительные числа. Из теоремы о промежуточном значении вытекает (как?), что функция принимает все значения $y \in (0, +\infty)$.

Если $y > x$, то $\exp(y) = \exp(x) \exp(y - x) > \exp(x)(1 + y - x) > \exp(x)$, откуда вытекает строгая монотонность функции exp на действительной оси. □

Следствие 2. *Существует функция* $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *обратная к* $\exp$ *на действительной оси:* $\ln \exp(x) = x$ *и* $\exp(\ln y) = y$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Согласно предложению 2, для всякого $y \in (0, +\infty)$ существует единственное число $x \in \mathbb{R}$, для которого $y = \exp(x)$ (существование доказано, а единственность следует из строгой монотонности). Положим $\ln y = x$ по определению. □

Следствие 3. *1)* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ *для всех* $x, y > 0$.

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Пункт 1 вытекает из следствия 2 из лекции 8, а пункт 2 — из предложения 1.

Следствие 4 (следствия 3)**.** *Функция* $\ln$ *непрерывна во всех точках* $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть вначале $a = 1$. Тогда $\lim_{x\to 1} \ln x = \lim_{y\to 0} \ln(1+y) = \lim_{y\to 0} y \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 0 \cdot 1 = 0 = \ln 1$.

Для произвольного $a > 0$ имеем: $\lim_{x\to a} \ln x = \lim_{y\to 1} \ln(ay) = \lim_{y\to 1}(\ln a + \ln y) = \ln a + \lim_{y\to 1} \ln y = \ln a$ по доказанному выше. □

Пусть $a > 0$ — положительное действительно число, $b \in \mathbb{C}$ — произвольное комплексное число. Положим по определению $a^b \stackrel{\text{def}}{=} \exp(b \ln a)$; выражение называется степенью с основанием a и показателем b. В частности, если $e \stackrel{\text{def}}{=} \exp(1)$ (это традиционное обозначение; вычисления показывают, что $e \approx 2.718$), то $\exp(x) = e^x$.

Предложение 3. *Степерь обладает следующими свойствами:*

1) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

2) $(a^b)^c = a^{bc}$.

3) *Если* n *— целое положительное число, то* $a^n = a \cdot \dots \cdot a$ *(*n *сомножителей), а* $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Доказательство. $a^{b+c} = \exp((b+c)\ln a) = \exp(b\ln a)\exp(c\ln a) = a^b a^c$.

$(a^b)^c = \exp(c\ln(a^b)) = \exp(c\ln\exp(b\ln a)) = \exp(bc\ln a) = a^{bc}$.

$a^n = a^{1+\dots+1}$ (n слагаемых) $= a^1 \cdot \dots \cdot a^1$ (n сомножителей) $= a \cdot \dots \cdot a$.

$(a^{1/n})^n = a^{n\cdot 1/n} = a^1 = a$, откуда $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. □

Лемма 1. *Для произвольного* $z \in \mathbb{C}$ *выполнено равенство* $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ *(черта означает комплексное сопряжение).*

Доказательство — упражнение.

Определим функции синус и косинус равенствами $\cos x = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$, $\sin x = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$. Отсюда немедленно вытекает равенство $\exp(ix) = \cos x + i\sin x$.

Предложение 4. 1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

2) *Если* $x \in \mathbb{R}$, *то* $\cos x, \sin x \in \mathbb{R}$, *при этом* $\cos x$ *— вещественная часть* $\exp(ix)$, *а* $\sin x$ *— мнимая. При этом* $-1 \le \cos x, \sin x \le 1$.

3) *Для всех* $x, y \in \mathbb{C}$ *имеют место равенства* $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$ *и* $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$.

4) *Если* $x, y \in \mathbb{R}$, *то модуль комплексного числа* $\exp(x+iy)$ *равен* $\exp(x)$.

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Из определения синуса и косинуса немедленно следует, что косинус — четная функция, а синус — нечетная: $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$. Теперь $1 = \exp(ix)\exp(-ix) = (\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x$. Если $x \in \mathbb{R}$, то $\overline{\cos x} = \frac{1}{2}(\overline{\exp(ix)} + \overline{\exp(ix)}) = \frac{1}{2}(\exp(\overline{ix}) + \exp(\overline{-ix}))$ (по лемме 1 $= \frac{1}{2}(\exp(-ix) + \exp(ix)) = \cos x$, откуда $\cos x \in \mathbb{R}$; для синуса аналогично. Но тогда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \le 1$, так что $-1 \le \cos x \le 1$, и, опять-таки, аналогично для синуса. Теперь из равенства $\exp(ix) = \cos x + i\sin x$ вытекает, что $\cos x = \operatorname{Re}\exp(ix)$ и $\sin x = \operatorname{Im}\exp(ix)$.

Для произвольных $x, y \in \mathbb{C}$ получим $\cos(x+y) + i\sin(x+y) = \exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy) = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\cos x\sin y + \sin x\cos y)$ и, аналогично, $\cos(x+y) - i\sin(x+y) = \exp(-i(x+y)) = (\cos x\cos y - \sin x \sin y) - i(\cos x\sin y + \sin x\cos y)$. Отсюда вытекают формулы сложения для синуса и косинуса.

При $x, y \in \mathbb{R}$ получаем $\exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy)$ и $\overline{\exp(x+iy)} = \exp(\overline{x+iy}) = \exp(x-iy) = \exp(x)\exp(-iy)$, откуда $|\exp(x+iy)|^2 = \exp(x+iy)\overline{\exp(x+iy)} = \exp(x)^2\exp(iy)\exp(-iy) = \exp(x)^2$, откуда $|\exp(x+iy)| = \exp(x)$ (оба числа положительные).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2i}\lim_{x\to 0}\frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{x} = \frac{1}{2i}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\exp(ix)-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\exp(-ix)-1}{x}\right) =$$
$$\frac{1}{2i}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\exp(y)-1}{-iy} - \lim_{y\to 0}\frac{\exp(y)-1}{iy}\right) = \frac{1}{2i}\cdot 2i \cdot \lim_{y\to 0}\frac{\exp(y)-1}{y} = 1.$$

$1 - \cos x = 1 - \cos(x/2 + x/2) = \cos^2(x/2) + \sin^2(x/2) - \cos^2(x/2) + \sin^2(x/2) = 2\sin^2(x/2)$, откуда $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. □

Предложение 5. 1) *Множеством значений* $\{\exp(ix) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *функции* $\exp$ *на мнимой оси является окружность* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

2) *Существует число* $\pi > 0$ *такое, что* $\sin \pi n = 0$ *и* $\cos\pi(n + 1/2) = 0$ *при всех целых* n. *Число* 2π *является периодом синуса и косинуса, а число* $2\pi i$ *— периодом экспоненты.*

Доказательство. Возьмем $x \in \mathbb{R}$ такой, что $\sin x \overset{\text{def}}{=} y > 0$ (почему такой существует?); тогда $\sin(-x) = -y$. По теореме о промежуточном значении (а синус — функция, непрерывная во всех точках, поскольку $\exp(x)$ непрерывна) на отрезке $[-x, x]$ синус принимает все значения из отрезка $[-y, y]$. Поскольку $|\exp(it)| = 1$ в силу пункта 4 предложения 4, для каждой точки $z \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — дуга окружности, концы которой имеют ординату y и $-y$, существует $t \in [-x, x]$ такое, что $\exp(it) = z$.

Умножение на z представляет собой поворот на угол, равный аргументу z. С другой стороны, если $w = \exp(is)$, то $wz = \exp(is)\exp(it) = \exp(i(s+t))$. Отсюда следует, что если точка окружности может попасть на дугу $\mathcal{A}$, сделав несколько поворотов на угол $\arg z$, то она также принадлежит образу $\{\exp(ix) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Но таким свойством обладают *все* точки окружности.

Тем самым утверждение про образ доказано и, следовательно, существует число $\pi > 0$ такое, что $\sin\pi = 0$ и $\cos\pi = -1$. Отсюда вытекает, что $\sin(x+\pi) = \sin x\cos\pi + \cos x \sin\pi = -\sin x$ и, в частности, $\sin n\pi = 0$ при всяком $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $\sin(x + 2\pi) = -\sin(x+\pi) = \sin x$, так что 2π является периодом синуса;

для косинуса аналогично. Отсюда вытекает, что $\exp(2\pi i) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$, откуда $\exp(x + 2\pi i) = \exp(x)\exp(2\pi i) = \exp(x)$, то есть $2\pi i$ — период экспоненты. $\square$

ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Открытые и замкнутые множества.

Подмножество топологического пространства $A \subset X$ называется *открытым*, если оно пусто или является объединением окрестностей (в конечном или бесконечном числе); подмножество называется *замкнутым*, если дополнение к нему $X \setminus A$ открыто.

Лемма 1. *Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда оно либо пусто, либо для всякой точки $a \in A$ имеется окрестность $U(a)$ этой точки такая, что $U(a) \subseteq A$.*

Доказательство. Если множество A обладает указанным свойством, то оно (если не пусто) является объединением указанных окрестностей $U(a)$, где a пробегает *все* точки множества A. Действительно, $U(a) \subseteq A$ для любой $a \in A$, откуда $\bigcup_{a\in A} U(a) \subseteq A$. С другой стороны произвольная точка $a \in U(a) \subset \bigcup_{a\in A} U(a)$, откуда $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U(a)$. Тем самым $\bigcup_{a\in A} U(a) = A$.

Обратно, пусть $A = \bigcup_\alpha U(b_\alpha)$, где b_α — какие-то точки; здесь индекс α пробегает произвольное множество — конечное или бесконечное. Пусть $a \in A$; тогда $a \in U(b_\alpha)$ для некоторого α. Тогда $a \in U(b_\alpha) \cap U(b_\alpha)$, и по определению топологического пространства существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $U(a) \subseteq U(b_\alpha) \subseteq A$, что и требовалось. □

Пример 1. $X \subset X$ для произвольного топологического пространства X открыто. Действительно, по определению топологического пространства для всякой точки $a \in X$ существует окрестность $U(a) \subseteq X$.

Пример 2. Луч $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$ — открытое подмножество: $(c, +\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty}(c+n, c+n+2)$, а интервал $(c+n, c+n+2)$ — 1-окрестность точки $c+n+1$.

Пример 3. Пусть $r > 0$ и $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$; шар $B_r(a) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1-a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2\}$ — открытое множество. Действительно, пусть $x \in B_r(a)$; возьмем $0 < \varepsilon < \frac{r^2 - ((x_1-a_1)^2 + \dots + (x_n-a_n)^2)}{3r}$, отсюда, в частности, следует, что $\varepsilon < r/3 < r$. Тогда если $y = (y_1, \dots, y_n) \in U_{\varepsilon,\dots,\varepsilon}(x)$, то есть $|y_i - x_i| < \varepsilon$ для всякого $i = 1, \dots, n$, то

$$\begin{aligned}(y_1-a_1)^2 + \dots + (y_n-a_n)^2 &= (y_1 - x_1 + x_1 - a_1)^2 + \dots + (y_n - x_n + x_n - a_n)^2 = \\ = (x_1-a_1)^2 + \dots + (x_n-a_n)^2 &+ (y_1-a_1)^2 + \dots + (y_n-a_n)^2 + 2(x_1-a_1)(y_1-a_1) + \dots + 2(x_n-a_n)(y_n-a_n) \le \\ &\le (x_1-a_1)^2 + \dots + (x_n-a_n)^2 + n\varepsilon^2 + 2nr\varepsilon < (x_1-a_1)^2 + \dots + (x_n-a_n)^2 + 3nr\varepsilon < r^2,\end{aligned}$$

то есть $y \in B_r(a)$. Следовательно, $U_{\varepsilon,\dots,\varepsilon}(x) \subset B_r(a)$, и шар открыт.

Теорема 1. *Объединение открытых множеств (в любом количестве, в том числе бесконечном) открыто. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Доказательство. Объединение: пусть $V_\alpha \subset X$ — открытые множества, то есть объединения окрестностей; здесь индекс α пробегает некоторое множество — конечное или бесконечное. Тогда $\bigcup_\alpha V_\alpha$ — также объединение окрестностей: нужно взять все окрестности, объединением которых получается каждое из V_α.

Пересечение: пусть сначала открытых множеств два: V_1 и V_2. Если $V_1 \cap V_2$ пусто, то оно открыто по определению; иначе пусть $a \in V_1 \cap V_2$. По определению топологического пространства существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $U(a) \subset V_1 \cap V_2$. По лемме 1 множество $V_1 \cap V_2$ открыто. Пусть теперь $V_1, \dots, V_n \subset X$ открыты, и для любого набора из $(n-1)$ открытых множеств доказано, что их пересечение открыто. Тогда $V_1 \cap \dots \cap V_n = (V_1 \cap \dots \cap V_{n-1}) \cap V_n$ — пересечение двух открытых множеств и, следовательно, открыто. □

Напомним, что множество $A \subset X$ замкнуто, если его дополнение $X \setminus A$ открыто. Как нетрудно видеть, дополнение к объединению (в том числе бесконечному) множеств — пересечение дополнений к ним, а дополнение к пересечению — объединение дополнений: $X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha)$ и $X \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha)$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает

Теорема 1 (для замкнутых множеств)**.** *Пересечение замкнутых множеств (в любом количестве, в том числе бесконечном) замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Пример 4. $X \subset X$ всегда замкнуто, поскольку $X \setminus X = \varnothing$ открыто.

Пример 5. Состоящее из одной (любой) точки множество $A = \{a\} \subset X$ замкнуто в любом хаусдорфовом топологическом пространстве. Действительно, $b \in X \setminus A$ означает $b \neq a$; по определению хаусдорфового пространства существуют окрестности U точки b и V точки a такие, что $U \cap V = \varnothing$. Поскольку $a \in V$, имеем $a \notin U$, то есть $U \subset X \setminus A$. По лемме 1 множество $X \setminus A$ открыто, то есть A замкнуто.

Пример 6. Луч $[c. + \infty) \subset \mathbb{R}$ замкнут, поскольку его дополнение $\mathbb{R} \setminus [c. + \infty) = (-\infty, c)$ открыто — аналогично примеру 2. Открытым луч $[c. + \infty)$ не является, поскольку содержит точку c, но не содержит никакой ее окрестности. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ также замкнут, поскольку $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ открыто по теореме 1.

ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Замкнутое множество и предельные точки.

Напомним, что подмножество топологического пространства $A \subset X$ замкнуто, если его дополнение $X \setminus A$ открыто.

Пример 1. Пусть $K \subset [0,1]$ — множество чисел, которые можно записать бесконечной троичной дробью, не содержащей единиц (т.е. $1/3 = 0,100\dots = 0.022\dots \in K$, поскольку вторая запись не содержит единиц). Докажем, что K замкнуто. Дополнение $[0,1] \setminus K$ состоит из чисел $x = 0.x_1x_2\dots$, любая запись которых в виде троичной дроби содержит 1. Это означает, что найдется разряд, в котором стоит 1, а после него не следует период из нулей или двоек. Иными словами, существуют $n > m$ такие, что $x_m = x_n = 1$. Тогда все числа окрестности $(x - 1/3^n, x + 1/3^n)$ точки x содержат единицу в разряде m и, следовательно, лежат в $[0,1] \setminus K$, которое тем самым открыто.

Назовем точку $a \in X$ *предельной точкой* множества $A \subset X$, если любая окрестность $U(a)$ точки a содержит по крайней мере одну точку $b \in A$, отличную от a ($a \in A$ не обязательно, но возможно). Иными словами, точка a предельная, если она не является изолированной в множестве $A \cup \{a\}$.

Предложение 1. *Если $u : \mathbb{N} \to A \subset X$ — последовательность, $a = \lim_{n\to+\infty} u_n$ и $u_n \neq a$ ни при каком n, то a — предельная точка множества A. Если $X = \mathbb{R}^n$, то верно и обратное: если точка a — предельная для множества $A \subset \mathbb{R}^n$, то существует последовательность $u : \mathbb{N} \to A \setminus \{a\}$ с пределом a.*

Доказательство. Пусть $u : \mathbb{N} \to A$ — последовательность. Произвольная окрестность точки $a \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} u_n$ содержит как минимум одну точку $u_n \in A$ (на самом деле — точки u_n при всех $n > N$, где N зависит от окрестности; правда, не факт, что они все различны...). Поскольку $u_n \neq a$, любая окрестность a пересекается с $A \setminus \{a\}$ — то есть точка a предельная.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ — предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Следовательно, окрестность $U_{1/k,\dots,1/k}(a)$ пересекается с A. Выберем произвольную точку $u_k = (u_{1k}, \dots, u_{nk}) \in U_{1/k,\dots,1/k}(a) \cap A$; тогда $a_i - 1/k < u_{ik} < a_i + 1/k$ для всех $i = 1, \dots, n$. По лемме о двух полицейских $\lim_{k\to\infty} u_{ik} = a_i$ для всех i, что и означает $\lim_{k\to\infty} u_k = a$. □

Еще пример предельной точки:

Пример 2. Если точная верхняя грань $b = \sup A$ множества $A \subset \mathbb{R}$ — действительное число (не $+\infty$, то есть множество A ограничено) и не принадлежит A, то она является предельной точкой A. Действительно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует элемент $a \in A$ такой, что $a > b - \varepsilon$. Следовательно, интервал $U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ имеет общую точку с множеством A, причем это не b, поскольку $b \notin A$. Тем самым b — предельная точка A. Разумеется, то же самое верно для точной нижней грани.

Теорема 1. *Множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Доказательство. Пусть A замкнуто, и a — предельная точка a. Если $a \notin A$, то $a \in X \setminus A$. Множество $X \setminus A$ открыто и, следовательно, содержит некоторую окрестность $U(a)$ точки a. Но по определению предельной точки окрестность $U(a)$ должна пересекаться с A и, следовательно, не может лежать в $X \setminus A$. Противоречие доказывает, что $a \in A$.

Обратно, пусть A содержит все свои предельные точки. Пусть $b \in X \setminus A$ (то есть $b \notin A$). Тогда b не является предельной точкой A и, следовательно, существует окрестность $U(b)$ такая, что $U(b) \cap (A \setminus \{b\}) = U(b) \cap A = \varnothing$. Следовательно, $U(b) \subset X \setminus A$, и $X \setminus A$ открыто по лемме 1 лекции 10. □

Следствие 1. *Ограниченное замкнутое множество имеет наибольший и наименьший элементы.*

Доказательство. Поскольку A ограничено, $b \stackrel{\text{def}}{=} \sup A$ — действительное число. Если $b \notin A$, то в силу примера 2 b — предельная точка A. Поскольку A замкнуто, $b \in A$ по теореме 1 — противоречие. Значит, $b = \sup A \in A$, что и означает, что b — наибольший элемент множества A. Для наименьшего элемента аналогично. □

Теорема 2. *Пусть X, Y — топологические пространства, $A \subset Y$, а $f : X \to Y$ — отображение, непрерывное во всех точках X. Тогда*

1) Если A открыто, то прообраз $f^{-1}(A) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ открыт.
2) Если A замкнуто, то прообраз $f^{-1}(A)$ замкнут.

Доказательство. Пусть вначале $A = U(a)$ — окрестность точки $a \in Y$, и пусть $b \in f^{-1}(U(a))$, то есть $f(b) \in U(a)$. По определению топологического пространства существует окрестность V точки $f(b)$ такая, что $V \subset U(a)$. Поскольку f непрерывно в точке b, существует окрестность W точки b такая, что $f(W) \subset V \subset U(a)$, откуда $W \subset f^{-1}(U(a))$. Согласно лемме 1 лекции 10, множество $f^{-1}(U(a))$ открыто.

Пусть теперь A открыто: $A = \bigcup_\alpha U(a_\alpha)$ — объединение окрестностей точек a_α. Тогда $f^{-1}(A) = \bigcup_\alpha f^{-1}(U(a_\alpha))$ — объединение открытых множеств, которое открыто по теореме 1 лекции 10.

Пусть теперь A замкнуто, то есть $Y \setminus A$ открыто. Тогда $f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)$ (докажите!) замкнуто, поскольку $f^{-1}(Y \setminus A)$ — прообраз открытого множества и, следовательно, открыт. $\square$

ЛЕКЦИЯ 12

Краткое содержание. Компакты. Компактность отрезка и параллелепипеда.

Подмножество $A \subset X$ топологического пространства называется компактным, если оно обладает следующим свойством: если $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все множества U_α открыты, а индекс α пробегает любое множество (возможно, бесконечное, причем любой мощности), то найдется *конечный* набор индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такой, что $A \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$.

Теорема 1. *Отрезок* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *— компакт.*

Пример 1. Луч $[c, +\infty) \subset \mathbb{R}$ — не компакт. Действительно, $[c, +\infty) \subset \bigcup_{n=1}^\infty (c+n-1, c+n+1)$. Однако объединение конечного числа интервалов (вида $(c+n-1, c+n+1)$ или любых других) — ограниченное множество, которое не может содержать луч.

Интервал $(0, 1)$ также не является компактом. Действительно, $(0, 1) \subseteq \bigcup_{n=2}^\infty (1/n, 1)$. При этом все интервалы $(1/n, 1)$ вложены друг в друга: $(1/2, 1) \subset (1/3, 1) \subset \dots$, поэтому объединение конечного числа интервалов $\bigcup_{i=1}^N (1/n_i, 1)$ равно самому большому из них, $(1/n, 1)$, где $n = \max(n_1, \dots, n_N)$. Тем самым это объединение не содержит $(0, 1)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $[a, b] \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все $U_\alpha \subset \mathbb{R}$ открыты, и предположим, что отрезок нельзя покрыть конечным набором множеств U_α. Разделим отрезок $[a, b]$ на две половины: $[a, (a+b)/2]$ и $[(a+b)/2, b]$. По крайней мере одну из этих половин нельзя покрыть конечным набором U_α (иначе объединение двух покрытий будет конечным покрытием $[a, b]$); обозначим ее $[a_1, b_1]$ и опять разделим пополам. По крайней мере одну из этих половин нельзя покрыть конечным набором U_α; обозначим ее $[a_2, b_2]$ и продолжим процесс. Таким образом получается последовательность вложенных отрезков $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$, никакой из которых не покрывается конечным набором U_α. Длина $[a_n, b_n]$ равна $(b-a)/2^n$ и стремится к нулю при $n \to \infty$; отсюда вытекает, что отрезки имеют единственную общую точку $t \in [a, b]$.

Точка t покрыта каким-то из множеств U_α: $t \in U_{\alpha_0}$. Поскольку U_{α_0} открыто, существует интервал $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$. Возьмем n такое, что $(b-a)/2^n < \varepsilon$. Поскольку $t \in [a_n, b_n]$, получим $[a_n, b_n] \subset (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$; но это противоречит тому, что $[a_n, b_n]$ не покрывается конечным набором множеств U_α. $\square$

Теорема 2. *Для любых* $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$ *параллелепипед* $\Pi = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \le x_1 \le b_1, \dots, a_n \le x_n \le b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *— компакт.*

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 1, только делить нужно пареллелепипед каждый раз на 2^n частей — пополам по каждому измерению. Подробное доказательство — упражнение.

ЛЕКЦИЯ 13

Краткое содержание. Общие свойства компактов. Описание компактов в $\mathbb{R}^n$.

Свойства компектных подмножеств произвольного хаусдорфова топологического пространства:

Теорема 1. *1) Всякое компактное множество в хаусдорфовом топологическом пространстве замкнуто.*
2) Если $A \subset X$ компактно, а $B \subset A$ замкнуто, то B компактно.
3) Если $A \subset X$ компактно, а $f : A \to Y$ — отображение, непрерывное во всех точках, то $f(A) \subset Y$ компактно (и, в частности, замкнуто).

Доказательство. Свойство 1. Пусть X — хаусдорфово пространство, $A \subset X$ компактно. Для любых точек $a \in A$ и $b \in X \setminus A$ существуют непересекающиеся окрестности $U_{ab}(a) \subset X$ и $V_{ab}(b) \subset X$ (обе окрестности, в прнципе, зависят и от a, и от b). Зафиксируем $b \in X \setminus A$. Поскольку $a \in U_{ab}(a)$, имеем $A \subset \bigcup_{a\in A} U_{ab}(a)$. Поскольку все $U_{ab}(a)$ открыты, а A компактно, найдется *конечный* набор точек $a_1, \dots, a_N \in A$ таких, что $A \subset U_{a_1b}(a_1) \cup \dots \cup U_{a_Nb}(a_N)$. Тогда пересечение $W(b) \stackrel{\text{def}}{=} V_{a_1b}(b) \cap \dots \cap V_{a_Nb}(b)$ открыто (пересечение конечного числа открытых множеств), содержит b (поскольку все $V_{a_ib}(b)$ содержат) и не пересекается с $U_{a_1b}(a_1) \cup \dots \cup U_{a_Nb}(a_N)$ (поскольку $V_{a_ib}(b)$ не пересекается с $U_{a_ib}(a)$). Следовательно, $W(b)$ не пересекается с A, то есть целиком лежит в $X \setminus A$. Поскольку $b \in X \setminus A$ — произвольная точка, получим $X \setminus A = \bigcup_{b\in X\setminus\{a\}} W(b)$ — открытое множество. По определению, это означает, что A замкнуто.

Свойство 2. Пусть A компактно, а $B \subset A$ замкнуто. Пусть $B \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все $U_\alpha \subset X$ открыты. Тогда $A \subset (X \setminus B) \cup \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все множества открыты. Поскольку A компактно, существует конечный набор $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$ такой, что $A \subset (X \setminus B) \cup (U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N})$, откуда $B \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N})$. Следовательно, B компактно.

Свойство 3. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, $A \subset X$ — компакт, и $f(A) \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все $U_\alpha \subset Y$ открыты. Тогда $A \subset \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$. Поскольку f непрерывно, все $f^{-1}(U_\alpha) \subset X$ открыты. Поскольку A компактно, существует конечный набор $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$ такой, что $A \subset f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\alpha_N})$. Но тогда $f(A) \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$, и компактность $f(A)$ доказана. $\square$

Свойства компактных множеств в $\mathbb{R}^n$:

Теорема 2. *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Тогда согласно теореме 1 оно замкнуто. Пусть $B_r(0) \subset \mathbb{R}^b$ — шар радиуса $r > 0$ (без границы) с центром в начале координат. Тогда $\bigcup_{r>0} B_r(0) = \mathbb{R}^n$ и, следовательно, $A \subset \bigcup_{r>0} B_r(0)$. Согласно примеру 1 лекции 11, шар $B_r(0)$ открыт. Из компактности A вытекает, что существует конечный набор чисел $r_1 < r_2 < \dots < r_N$ такой, что $A \subset B_{r_1}(0) \cup \dots \cup B_{r_N}(0) = B_{r_N}(0)$. Но это и означает, что множество A ограничено.

Обратно, пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто и ограничено. Тогда существует параллелепипед $\Pi = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ такой, что $A \subset \Pi$ (докажите!). Поскольку Π — компакт (теорема 2 лекции 12), а A замкнуто, A — компакт по теореме 1. $\square$

Следствие 1. *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ — компакт, $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная Функция. Тогда функция f на A ограничена и достигает своего максимума и минимума. Иными словами, существует точка $x^* \in A$ такая, что $f(x^*) \ge f(x)$ для всякой точки $x \in A$ (и аналогично для минимума).*

Доказательство. Образ $f(A) \subset \mathbb{R}$ — компакт по свойству 3 из теоремы 1. Следовательно, по теореме 2 он ограничен, и точная верхняя грань $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup f(A)$ — действительное число (а не $+\infty$). Если $M \notin f(A)$, то M является предельной точкой $f(A)$ (пример 2 из лекции 11). Поскольку $f(A)$ замкнуто по теореме 1 (или 2), оно содержит все свои предельные точки, включая M. Тем самым существует $x^* \in A$ такая, что $f(x^*) = M = \max f(A) \ge f(x)$ для всякого $x \in A$. $\square$

Пример 1. Множество $\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \ge 0, x_1 + \dots + x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Действительно, если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$, то $0 \le x_1, \dots, x_n \le 1$, откуда вытекает, что Δ_n ограничено. С другой стороны, $\Delta_n = A_1 \cap \dots \cap A_n \cap B$, где $A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \ge 0\} = p_i^{-1}([0, +\infty))$ при $i = 1, \dots, n$ и $B = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 1\} = q^{-1}(\{1\})$, где $p_i(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$ и $q(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. Все функции p_i и q

непрерывны, множества $[0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ и $\{1\} \subset \mathbb{R}$ замкнуы, так что все $A_i \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ замкнуты по теореме 2 лекции 11. Отсюда вытекает, что их пересечение Δ_n замкнуто и, следовательно, компактно.

Функция $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная равенством $h(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$, непрерывна. Согласно следствию 1, существует точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \Delta_n$ такая, что $h(x^*) \geq h(x)$ для всякой точки $x \in \Delta^n$. Предположим, что $x_i^* > x_j^*$ для некоторых $1 \leq i, j \leq n$, и рассмотрим $x = (x_1, \dots, x_n)$, для которой $x_i = x_j = (x_i^* + x_j^*)/2$ и $x_k = x_k^*$ для всех $k \neq i, j$. Как нетрудно убедиться, $x \in \Delta_n$. С другой стороны, имеет место неравенство $0 < \left(\frac{x_i^* - x_j^*}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_i^* + x_j^*}{2}\right)^2 - x_j^* x_j^*$, откуда вытекает (почему?), что $h(x^*) < h(x)$. Это противоречит выбору x^* как точки, в которой h достигает максимума. Тем самым i и j не существуют, то есть $x_1^* = \dots = x_n^* = 1/n$.

Пусть теперь $y_1, \dots, y_n \geq 0$ и хотя бы одна из них отлична от нуля. Положим $x_i = y_i/(y_1 + \dots + y_n)$ для всех $i = 1, \dots, n$; тогда $(x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$. Согласно доказанному выше, $h(x) \leq h(1/n, \dots, 1/n) = 1/n^n$, то есть $\frac{y_1 \dots y_n}{(y_1 + \dots + y_n)^n} \leq \frac{1}{n^n}$. Перенося сумму в числитель и извлекая корень n-ой степени, получим $\sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$ — классическое неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

ЛЕКЦИЯ 14

Краткое содержание. Производные. Теоремы о промежуточной точке (Ферма, Ролля и Лагранжа).

Определение 1. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ — отображение (вектор-функция одной переменной), $a \in \mathbb{R}$. Вектор $f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$ называется производной вектор-функции f в точке a.

Пусть теперь $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ (вектор-функция k действительных переменных). Зафиксируем точку $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. Для произвольного $i = 1, \dots, k$ можно рассмотреть вектор-функцию одной переменной $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, заданную формулой $f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_k)$. Производная $f_i'(a_i) \in \mathbb{R}^n$ называется частной производной f по i-му аргументу в точке a и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Заметим, что буква “$x$” в последнем обозначении — условность, означает “i-й аргумент”, можно заменить любой другой буквой — важен только индекс i.

Пример 1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — экспонента: $f(x) = \exp(x)$. Тогда $f'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(a+t)-\exp(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(a)(\exp(t)-1)}{t} = \exp(a) \lim_{t\to 0} \frac{\exp(t)-1}{t} = \exp(a)$. Иными словами, производная функции exp в точке a равна ее значению в той же точке.

Теорема 1. *Если вектор-функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ имеет производную в точке a, то f непрерывна в этой точке.*

Доказательство. $\lim_{t\to 0}(f(a+t) - f(a)) = \lim_{t\to 0} t \cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} = 0 \cdot f'(a) = 0$, что и означает непрерывность. □

Пример 2. Не всякая функция, непрерывная в точке a, имеет в этой точке производную. Например, $f(t) = |t|$, очевидно, непрерывна в $a = 0$ (как и во всех остальных точках). Однако $\frac{f(t)-f(0)}{t} = \frac{|t|}{t} = 1$ при $t > 0$ и -1 при $t < 0$, так что $f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t}$ не существует.

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ и $f : A \to \mathbb{R}$. Точка $c \in A$ называется точкой локального минимума функции f, если существует окрестность U точки c такая, что $f(c) \le f(x)$ для любой точки $x \in U$.

Теорема 2 (теорема Ферма)**.** *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ — функция, и $c \in A$ — точка локального минимума и существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A$. Если $f'(c)$ существует, то $f'(c) = 0$*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать (почему?), что c — точка минимума функции на интервале $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Пусть $g(t) = \frac{f(c+t)-f(c)}{t}$ при $t \ne 0$. Предел $f'(c) = \lim_{t\to 0} g(t)$ равен (почему?) пределам $\lim_{t\to +0} g(t)$ и $\lim_{t\to -0} g(t)$. В силу выбора точки c имеем $g(t) \ge 0$ при $t > 0$ и $g(t) \le 0$ при $t < 0$. Отсюда $\lim_{t\to +0} g(t) \ge 0$ и $\lim_{t\to -0} g(t) \le 0$, то есть $f'(c) = \lim_{t\to 0} g(t) = 0$. □

Такое же утверждение верно, если c — точка локального максимума.

Следствие 1 (теорема Ролля)**.** *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция, дифференцируемая (имеющая производную) во всех точках и такая, что $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Отрезок $[a, b]$ — компакт, а функция f непрерывна по теореме 1. Тем самым имеются точки $c_1, c_2 \in [a, b]$, в которых функция f достигает наибольшего и наименьшего значения. Если f — константа, то $f'(c) = 0$ для всех $c \in (a, b)$. В противном случае, ввиду того что $f(a) = f(b)$, хотя бы одна из точек c_1, c_2 лежит на интервале (a, b). Она является точкой локального максимума или минимума, поэтому к ней применима теорема 2. □

Следствие 2 (следствия 1 — теорема Лагранжа)**.** *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(t) + \frac{t-b}{b-a} f(a) + \frac{a-t}{b-a} f(b)$. Тогда φ дифференцируема во всех точках интервала (a, b) (поскольку f дифференцируема). С другой стороны, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, так что к φ применимо следствие 1: существует $c \in (a, b)$ такое, что $0 = \varphi'(c) = f'(c) + \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$. □

Часто вместо $c \in [a, b]$ пишут $c = a + \theta(b - a)$, где $0 \le \theta \le 1$.

Следствие 3 (следствия 2)**.** *Дифференцируемая функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(c) \ge 0$ при всех $c \in [a, b]$.*

Доказательство. Пусть f возрастает: $f(x) \geq f(y)$ при всех $x \geq y$. Тогда для всех $c \in [a,b]$ и всех t таких, что $t \neq 0$ и $c+t \in [a,b]$ имеем $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(c+t)-f(c)}{t} \geq 0$. Тогда $f'(c) = \lim_{t\to 0} g(t) \geq 0$.

Обратно, пусть $f'(c) \geq 0$ при всех $c \in [a,b]$, и пусть $x \geq y$. Тогда, согласно следствию 2, существует $c \in [y,x]$ такое, что $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) \geq 0$. □

Следствие 4. *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, $f'(a) = A$ и $f'(b) = B$. Тогда для каждого $C \in [A,B]$ существует $c \in [a,b]$ такое, что $f'(c) = C$.*

Доказательство. Если $C = A$ или $C = B$, то утверждение очевидно; пусть $A < C < B$ (мы предпологаем, что $A < B$; если наоборот, то рассуждения аналогичные).

Рассмотрим вспомогательную функцию $h(t) = f(t) - Ct$. Тогда $h'(a) = A - C < 0$ и $h'(b) = B - C > 0$. Докажем, что a — точка локального максимума функции h. Действительно, если это не так, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $t, 0 < t < \varepsilon$, такое что $f(a+t) > f(a)$. Для таких точек t имеем $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} \geq 0$, откуда вытекает $f'(a) = \lim_{t\to 0} g(t) \geq 0$ — противоречие. Аналогично доказывается, что b — точка локального максимума.

Функция h дифференцируема и, следовательно, непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$. Отрезок — компакт, поэтому существует точка $c \in [a,b]$, в которой функция h достигает своего наименьшего значения. Поскольку a, b — точки локального максимума, $c \neq a, b$. Отсюда по теореме Ферма получим $h'(c) = 0$, то есть $f'(c) = C$. □

Иными словами, функция f' — производная функции f — удовлетворяет теореме о промежуточном значении. Как известно, этой теореме удовлетворяют все непрерывные функции; производная, однако, не обязана быть непрерывной:

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(t) = \begin{cases} t^2 \sin(1/t), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$. При $t \neq 0$ имеем $f'(t) = 2t\sin(1/t) - \cos(1/t)$, а при $t = 0$ имеем $f'(0) = \lim_{t\to 0} t\sin(1/t) = 0$ (поскольку $-|t| \leq t\sin(1/t) \leq |t|$, а $\lim_{t\to 0} |t| = 0$ — применяем лемму о двух полицейских). Таким образом, $f'(t)$ существует при всех t.

Имеем $\lim_{t\to 0} 2t\sin(1/t) = 0$, как уже доказывали. В то же время $\lim_{t\to 0}\cos(1/t)$ не существует, т.к. $\lim_{n\to\infty} 1/(n\pi) = 0$, но $\lim_{n\to\infty}\cos(1/(1/n\pi)) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует. Следовательно, $\lim_{t\to 0} f'(t)$ также не существует, то есть функция f' в точке 0 разрывна.

ЛЕКЦИЯ 15

Краткое содержание. Производная композиции. Примеры вычисления производных.

Теорема 1. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : A \to \mathbb{R}^k$ — вектор-функция, дифференцируемая в точке $b \in A$. Пусть $B \subset \mathbb{R}^k$ — множество, содержащее окрестность $U \subset B$ точки $\varphi(b)$. Пусть $f : B \to \mathbb{R}$ — функция k переменных, имеющая в любой точке $x \in U$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial y_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_k}(x)$, зависящие от x непрерывно в точке $\varphi(b)$. Тогда функция $g \stackrel{def}{=} f \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет производную в точке b и эта производная равна $g'(b) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_i}(\varphi(v))\varphi_i'(b)$.*

Доказательство. Обозначим $v_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_1(b), \dots, \varphi_i(b), \varphi_{i+1}(b+t), \dots, \varphi_n(b+t))$; здесь $0 \le i \le k$, в частности, $v_0(t) = \varphi(b+t)$ и $v_k(t) = \varphi(b)$ (не зависит от t). По теореме 1 лекции 14 функции $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ непрерывны в точке b — следовательно, все вектор-функции v_i непрерывны в точке 0. Поскольку $v_i(0) = \varphi(b) = a$ для всех i, получим, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $v_i(t) \in U$ при любом i и $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Теперь имеем $g(b+t) - g(b) = f(v_0(t)) - f(v_k(t)) = (f(v_0(t)) - f(v_1(t))) + (f(v_1(t)) - f(v_2(t))) + \dots + (f(v_{k-1}(t)) - f(v_k(t)))$. По теореме Лагранжа (следствие 2 лекции 14) существуют функции $\theta_1, \dots, \theta_k : \mathbb{R} \to [0, 1]$ такие, что $f(v_{i-1}(t)) - f(v_i(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(v_i(t) + \theta_i(t)(v_i(t) - v_{i-1}(t)))(\varphi_i(b+t) - \varphi_i(b))$. Поскольку функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ непрерывны, $\lim_{t\to 0} v_i(t) = \varphi(b)$ и $0 \le \theta_i(t) \le 1$ при всех i, получаем

$$g'(b) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(b+t) - g(b)) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigl(\lim_{t\to 0} v_i(t) + \theta_i(t)(v_i(t) - v_{i-1}(t))\bigr) \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_i(b+t) - \varphi_i(b)}{t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(b))\varphi_1'(b) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(b))\varphi_k'(b),$$

что и требовалось. □

Примеры применения теоремы 1:

Пример 1. Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции, дифференцируемые в точке $b \in \mathbb{R}$. Тогда очевидно, что отображение $f \oplus g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $(f \oplus g)(t) = (f(t), g(t))$, имеет производную в точке b, и она равна $(f'(b), g'(b))$.

Отображение, равное $S(x, y) = x + y$, имеет частные производные по обеим переменным, и обе они равны 1 во всех точках (почему?). Тогда $f + g = (f \oplus g) \circ S$, и из теоремы 1 вытекает, что $(f + g)'(b) = f'(b) + g'(b)$.

Аналогично, если $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задана формулой $M(x, y) = xy$, тогда $\frac{\partial M}{\partial x} = y$ и $\frac{\partial M}{\partial y} = x$. Тогда $fg = (f \oplus g) \circ M$, откуда по теореме 1 получаем $(fg)'(b) = f'(b)g(b) + f(b)g'(b)$

Задача. Докажите следующее утверждение: пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $f, g : A \to \mathbb{C}$ — дифференцируемые комплекснозначные функции. Тогда $(fg)'(b) = f'(b)g(b) + f(b)g'(b)$ для всякого $b \in A$.

Пример 2. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция, заданная формулой $f(x) = \exp(\lambda x)$. Тогда $f'(b) = \lim_{t\to 0}(\exp(\lambda(b+t)) - \exp(\lambda b))/t = \lambda \exp(\lambda b) \lim_{t\to 0}(\exp(\lambda t) - 1)/(\lambda t)$ (случай $\lambda = 0$ разберите самостоятельно...). Пусть $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ — функция, заданная формулой $g(z) = (\exp(z) - 1)/z$. Как доказывалось ранее, $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$; доопределим функцию g, полагая $g(0) = 1$ — тогда g будет непрерывна в нуле. По теореме о непрерывности композиции функция $g \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, где $\varphi(t) = \lambda t$, непрерывна в нуле, откуда $\lim_{t\to 0}(\exp(\lambda t) - 1)/(\lambda t) = 1$ и $f'(b) = \lambda \exp(\lambda b)$.

Так, например, $\cos x = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$, откуда $\cos' x = \frac{1}{2}(\exp'(ix) \cdot i + \exp'(-ix) \cdot (-i)) = -\frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix)) = -\sin x$ по формуле примера 1 лекции 14.

Пример 3. Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$ и $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ — строго монотонная (возрастающая или убывающая) непрерывная функция, Если $A = \inf\{f(t) \mid t \in (a, b)\}$ и $B = \sup\{f(t) \mid t \in (a, b)\}$, то по теореме о промежуточном значении $f((a, b)) = (A, B)$, и существует функция $g : (A, B) \to \mathbb{R}$, обратная к f. Тогда $f \circ g = \mathrm{id}$, откуда вытекает, что $(f \circ g)'(p) = 1$ для всех $p \in (A, B)$. По теореме 1 получаем $f'(g(p))g'(p) = 1$, то есть $g'(p) = 1/f'(g(p))$. Например, $(\ln x)'(p) = 1/\exp(\ln p) = 1/p$.

Пример 4. $x^a = \exp(a \ln x)$, откуда $(x^a)' = \exp'(a \ln x) \cdot (a \ln x)' = ax^a/x = ax^{a-1}$. Здесь $a \in \mathbb{R}$ произвольно, а производная, как и функция, определена при всех $x > 0$. Также $a^x = \exp(x \ln a)$, откуда $(a^x)' = \exp'(x \ln a) \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a$. Здесь a — произвольное положительное число, а функция и производная (отличающаяся от нее множителем) определены при всех $x \in \mathbb{R}$.

ЛЕКЦИЯ 16

Краткое содержание. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть f — дифференцируемая вектор-функция одной переменной. Ее производная $f'(x)$ зависит от точки x, так что тоже представляет собой вектор-функцию одной переменной. Ее производная (если существует) называется второй производной функции f и обозначается $f''(x)$. Аналогично определяется третья $f'''(x)$, четвертая $f^{IV}(x)$ и т.д. производная, и (по индукции) производная n-го порядка $f^{(n)}(x)$ при любом натуральном n. Нулевой производной считается сама функция: $f^{(0)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$.

Обозначение. Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция, $g : A \to \mathbb{R}$ — функция, $a \in X$. Запись $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ означает $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (имеется в виду нулевой вектор $0 \in \mathbb{R}^n$). В частности, $f(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Записи типа "$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$" используются как сокращение от "$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \omega(x)$, где $\omega(x) = o(x)$ при $x \to 0$".

Пример 1. Определение $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ эквивалентно $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ при $x \to a$.

Теорема 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $a > 0$ и $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая производные во всех точках до порядка n включительно. Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + o(x^n)$ при $x \to 0$. Обратно, если f имеет производные до порядка n включительно и $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$, то $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$ для всех $k = 0, \dots, n$.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения нам понадобятся две леммы:

Лемма 1. *Для всякого $k \in \mathbb{R}$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $(x^k)^{(m)} = k(k-1)\dots(k-m+1)x^{k-m}$. Если $k \in \mathbb{N}$ и $m > k$, то $(x^k)^{(m)} = 0$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 2. *Пусть $a > 0$ и $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая производные во всех точках до порядка n включительно, причем $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$. Тогда $f(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$.*

Доказательство леммы 2. Индукция по n: база $n = 1$ — определение производной (ср. пример 1). Пусть теперь для производных порядка $n-1$ лемма доказана. Функция $g(x) = f'(x)$ удовлетворяет условиям леммы порядка $n-1$ — следовательно, $g(x) = o(x^{n-1})$ при $x \to 0$. По теореме Лагранжа $f(x) = g(\xi)x$ для некоторого $\xi(x)$, $0 \le \xi(x) \le x$. Тогда $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{g(\xi(x)}{x^{n-1}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{g(\xi(x)}{\xi(x)^{n-1}} \cdot \left(\frac{\xi(x)}{x}\right)^{n-1} \right)$. Первый сомножитель здесь стремится к нулю по предположению индукции, второй не превосходит 1 по модулю. Следовательно, предел равен 0 и шаг индукции выполнен. □

Пусть теперь f — функция, имеющая n производных на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда для функции $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ имеем $g^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{k=m}^n \frac{1}{(n-m)!} f^{(k+m)}(0)x^{n-m}$. При подстановке $x = 0$ не обращается в нуль только первый член суммы (при $k = m$), откуда $g^{(m)}(0) = f^{(m)}(0) - f^{(m)}(0) = 0$. Следовательно, g удовлетворяет условиям леммы 2, так что $g(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$ — первое утверждение доказано.

Второе утверждение теоремы вытекает из леммы:

Лемма 3. *Если P — многочлен степени не выше n и $P(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$, то все коэффициенты многочлена P равны нулю.*

Доказательство леммы 3. Пусть $P(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n$, и пусть $k \le n$ — наименьшее число, для которого $p_k \ne 0$. Если $k = n$, то $\lim_{x\to 0} P(x)/x^n = p_n \ne 0$. Если $k < n$, то $\lim_{x\to 0} P(x)/x^k = p_k \ne 0$, откуда $\lim_{x\to 0} P(x)/x^n = \lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{x^k} \frac{1}{x^{n-k}} = \infty$. В обоих случаях предел не равен нулю, что противоречит условиям леммы. □

Следствие 1 (леммы 3). *Если многочлен (с действительными или комплексными коэффициентами) равен нулю при всех действительных значениях переменной, то все его коэффициенты равны нулю.*

Действительно, в этом случае $P(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$ для любого n.

Пусть теперь f имеет производные до порядка n включительно и $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$. Согласно доказанному выше первому утверждению теоремы, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$, откуда $\sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!} - a_k \right) x^k = o(x^n)$. Из леммы 3 вытекает теперь, что $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ для всех $k = 0, \dots, n$. □

Пример 2. Как известно, $\exp'(x) = \exp(x)$, откуда $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$ для любого n, и $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$. Следовательно, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots + x^n/n! + o(x^n)$ при $x \to 0$ для любого n. Отсюда $\cos x = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix)) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(i^k + (-i)^k)x^k + o(x^n)$. Очевидно, $i^k + (-i)^k = 0$ при нечетном k и $i^{2m} + (-i)^{2m} = 2(-1)^m$ при четном $k = 2m$. Отсюда получается $\cos x = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots + (-1)^n x^{2n}/(2n)! + o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$ для любого n. Аналогично, $\sin x = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - x^3/6 + x^5/120 - \dots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)! + o(x^{2n+2})$ при $x \to 0$ для любого n.

Пример 3. Пусть $u(x) = x^k$ при $k \in \mathbb{Z}$ (включая случай $k < 0$!). Тогда $u(x) = \exp(k \ln x)$, откуда $u'(x) = \exp(k\ln x) \cdot k \ln' x = kx^k/x = kx^{k-1}$. По индукции получаем $(x^k)^{(n)} = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$ для всех целых k и целых неотрицательных n.

$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, откуда $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)\cdot\dots\cdot(-n)(1+x)^{-(n+1)} = (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}$. Следовательно, $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(0) = (-1)^n n!$, откуда $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ при $x \to 0$ для любого n.

Пример 4. Пусть f имеет производные до n-го порядка включительно, и $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ при $x \to 0$. Согласно теореме 1 (второе утверждение), $a_k = f^{(k)}(0)k!$. Тогда $g^{(k)}(0) = f^{(k+1)}(0) = (k+1)a_{k+1}$. Отсюда и из первого утверждения теоремы 1 получаем $g'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g^{(k)}(0)/k! x^k + o(x^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k + o(x^{n-1}) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$ для произвольного n при $x \to 0$.

Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$, тогда $g(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Согласно примеру 3, $g(x) = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$ для всех n при $x \to 0$. Тогда $\operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - \dots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1) + o(x^{2n+2})$ для всех n при $x \to 0$.

Пример 5. В этом примере все пределы берутся при $x \to 0$. Согласно примеру 2, $\exp(x) = 1+x+x^2/2+o(x^2) = 1+x+o(x)$ и $\cos x = 1-x^2/2+o(x^3)$. Тогда $\cos(\exp(x)-1) = \cos(x+x^2/2+o(x^2)) = 1-(x+x^2/2+o(x^2))^2/2 + o((x+x^2/2+o(x^2))^3) = 1 - x^2/2 - x^3/2 + o(x^3)$, а $\exp(\cos(x)-1) = \exp(-x^2/2+o(x^3)) = 1 - x^2/2 + o(x^3) + o(-x^2/2+o(x^3)) = 1 - x^2/2 + o(x^3)$. Отсюда вытекает, что $\cos(\exp(x)-1) - \exp(\cos(x)-1) = -x^3/2 + o(x^3)$, то есть $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\exp(x)-1)-\exp(\cos(x)-1)}{x^3} = -1/2$.