# Дискретная математика
# первый модуль 1 курса
# Задачи

И.В.Артамкин

11 октября 2021 г.

# Содержание

# 1 Листок 4

## 1.1 1

Сопоставим тройке чисел $(a;b;c)$ числу $\frac{(\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}+b+c-1)(\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}+b+c)}{2}+c$.
Заметим, что отображение $(a;b) \to \frac{(a+b-1)(a+b)}{2}+b$ – биекция, так как для фиксированного $a+b$ выражение принимает значения от $(1+2+...+(b-1))+1$ до $(1+2+...+(b-1))+b$. Если $a_2+b_2 > a_1+b_1$, то очевидно, что образ $(a_2;b_2) >$ образа $(a_1;b_1)$.

Так мы сопоставляем каждой тройке $(a;b;c)$ пару $(\frac{(a+b-1)(a+b)}{2}+b;c)$, а каждой такой паре - число $\frac{(\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}+b+c-1)(\frac{(a+}{2}$
$c$.

## 1.2 2

Заметим, что отрезок $[0,1]$ равномощен прямой с дополнительной точкой $I$(это можно доказать через проецированиае отрезка на прямую, тогда $0 \to 0$, $1 \to \infty$ $(\mathrm{I}) = \infty)$. Заметим, что каждая прямая пересекает каждую ось (если нет, считаем, что проходит через $I$) в какой то точке. Таким образом, прямая задаётся парой расширенных вещественных чисел, кроме $(I;I)$ (что равномощно $R^2$), при этом любой паре можно сопоставить прямую (проходящие через соотв. 2 точки). Покажем, что $R^2$ равномощно $R$: считаем $R$ – последовательностью счётной длины из 0 и 1. Заметим, что каждой паре $(r_1;r_2)$, где $r_1 = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...]$, $r_2 = [b_1,\ b_2,\ b_3,\ ...]$ можем сопоставить $r_3 = [a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ ...]$. При этом аналогично можно сопоставить каждому $r_3$ пару $(r_1;r_2)$. Откуда множество прямых равномощно $R$.

## 1.3 3

A)
Рассмотрим одноэлементные подмножества, заметим что если рассмотреть два одноэлементных множества, то можно однозначно определить отношение элементов из этих множеств(т.е. что единственный элемент множества $A$ больше единственного элемента множества $B$). Тогда сопоставим одноэлементному множеству с наименьшим элементом первое простое число(т.е. 2), следующему по величине элемента множеству сопоставим следующее простое число(т.е. 3) и т.д. Так мы сопоставили одноэлементные множества простым числам. Далее рассмотрим множество из $n$ элементов(пусть это $\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$) Рассмотрим одноэлементные множества с этими элементами, пусть они сопоставлены числам $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$, тогда сопоставим множеству $\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ число $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$. Очевидно, что разным множества сопоставлены разные числа(так как если двум множества сопоставлено одно и то же число, то элементы этих множест совпали). Так мы показали, что множество всех конечных подмножеств равномощно $\mathbb{N}$, т.е. множество всех конечных подмножеств счетно, что и требовалось доказать.
B)
Сопоставим каждой последовательности из задачи (множество $A$) паре 2 конечных последовательностей: предпериод и сам период (множество $B$). Заметим, что $A \leqslant B$. При этом $A \geqslant C$, где $C$ м ножество из пункта $a$. (а именно можем сопоставить каждому множеству из $C$ последовательность упорядоченно записанных элементов, после которой идёт период из 1). При этом $B = D^2$, где $D$ – множество конечных последовательностей натуральных чисел. Покажем, что $D$ – счётно. Заметим, что $D$ – объединение счётного количества счётного количества конечных множеств, а именно: множеств последовательностей фиксированной длины с фиксированной суммой. Откуда $D$ – счётно $\Rightarrow B$ счётно, при этои $C$ тоже счётно, откуда $A$ – счётно

## 1.4 4

Заметим, что если корней(алгебраических чисел) конечное количество, то трансцендентных континуум, так как всего чисел континуум.
Заметим, что алгебраические числа – подмножество описываемых чисел, то есть тех, которым можно сопоставить хотя бы одну конечную строку символов, которая бы "означала"это число.
Докажем, что множество описываемых чисел счётно:
Заметим, что их "меньше"чем возможных конечных последовательностей из конечного набора символов, что очевидно счётно, но любое рациональное число можно обозначить/описать(записав '$p/q$'). При этом алгебраических хотя бы счётно, так как все рациональные числа - алгебраические (являются корнями уравнений вида $x - \alpha = 0$). Откуда алгебраических чисел счётно.

## 1.5 5

A)

B)
Заметим, что последовательностей из действительных чисел столько же, сколько последовательностей из

наборов 0 и 1. Докажем, что последовательностей из наборов 0 и 1 столько же, сколько и наборов 0 и 1: Пусть $a_{i\ j}$ – $j$-тый символ $i$-той последовательности. Тогда сопоставим последовательности из бесконечных наборов следующую последовательность: $\{a_{1\ 1},\ a_{1\ 2},\ a_{2\ 1},\ a_{1\ 3},\ a_{2\ 2},\ a_{3\ 1},\ ...\}$, то есть будем последовательно записывать символы с фиксированной суммой индексов. Заметим, что если взять 2 различные последовательности наборов, то у них будут различные образы, при этом любая последовательность из 0 и 1 имеет прообраз. Так мы доказали, что последовательностей действительных континуум.
C)
Заметим, что отображений столько же, сколько и последовательностей из натуральных чисел. (сопоставляем отображению последовательность такую, что на $i$-той позиции - образ $i$). Заметим, что таких последовательностей столько же, сколько счётных последовательностей из 0 и 1, а именно запишем число $n$ в виде $n-1$ подряд идущих единиц, и разделим числа между собой нулями$(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ \rightarrow\ 0010110111011110...)$.
D)

## 1.6 6

A)
Предположим есть биекция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (сопоставляющаяя $i$ функцию $f_i(x)$ ). Тогда рассмотрим следующий элемент из $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: каждому $i$ сопоставим $1 + f_i(i)$. Заметим, что этот элемент из $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ не имеет прообраза, откуда следует, что биекции нет.
B*)

C*)

## 1.7 7*

Если одна из частей квадрата содержит отрезок, то можно воспользоваться теоремой Кантора-Бернштейна. Допустим первая часть не содержит отрезков, тогда в каждом горизонтальном сечении квадрата есть точка второй части, тогда с помощью аксиомы выбора во второй части можно найти подмножество, равномощное отрезку – после чего снова можно сослаться на теорему Кантора – Бернштейна.

## 1.8 8*

Заметим, что если $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ равномощно $2^{\mathbb{R}}$ , то $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ равномощно $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ и $2^{\mathbb{R}}$.
Заметим, что множество $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ можно разбить на континуальное количество счётных множеств, а именно: фактор-множество отношения эквивалентности: $a \blacklozenge b \ \Leftrightarrow\ (a-b) \in \mathbb{Z}$. Теперь покажем, что $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\ \sim\ 2^{\mathbb{R}}$. Это эквивалентно $[0,\ 1)^{[0,\ 1)}\ \sim\ 2^{\mathbb{R}}$. Рассмотрим $X$ принадлежащий первому множеству, оно - множество пар $(i,\ a_i)$, где $i$ принадлежит отрезку $[0,\ 1)$. Теперь скажем, что если есть пара $(x,\ a_x)$, то представим $a_x$ в виде последовательности 0 и 1, и классу эквивалентности $x$ сопоставим нули и единицы соответсвенно их позиции. Таким образом показана биекция $[0,\ 1)^{[0,\ 1)}\ \rightarrow\ 2^{\mathbb{R}}$, что и требовалось.

## 1.9 9

A)
Заметим, что выполнены рефлексивность (то есть существует тождественная биекция), симметричность (если есть биекция, то есть и обратная биекция) и транзитивность (если есть биекция из $A$ в $B$: $a_i \rightarrow b_i$ и есть биекция из $B$ в $C$: $b_i \rightarrow c_i$, то есть биекция из $A$ в $C$: $a_i \rightarrow c_i$.
B)
Рассмотрим множество из двух элементов: $[a, b]$. Тогда $[a] \prec [b]$ и $[b] \prec [a]$ но $[a] \neq [b]$.
C)
Заметим, что если между $a$ и $b$ есть биекция, то есть и инъекция, откуда любые 2 элемента из одного класса эквивалентности "равны"с точки зрения $\prec$. Если же биекции нет, но есть инъекция (без ограничения общности инъекция $a \rightarrow b$), то для любых элементов $a_i$ из $A$ (класс эквивалентности $a \in A$) и $b_j$ из $B$ верно, что есть инъекция $a_i \rightarrow b_j$ $(a_i\ \in\ a;\ b\ \in\ b_j)$.
Проверим, что это отношение частичного порядка:
Рефлексивность (наличие тождественной биекции доказывает рефлексивность)
Антисимметричность (если есть инъекция из $c \in C$ в $d \in D$ и наоборот, то из Т. Кантора-Бернштейна следует, что есть биекция, то есть $d \in C$)
Транзитивность (переносится из основного отношения, то есть, если $\overline{\prec}$ обладает транзитивностью, то и $\prec$ обладает транзитивностью).

### 1.10 10

Теорема Кантора-Бернштейна утверждает, что если существуют инъективные отображения $f : A \to B$ и $g : B \to A$, то $|A| = |B|$
Докажем это.
Пусть $f : A \to A_2$ биекция и $A_3 = f(A_1) \subset A_2$, $A_4 = f(A_2) \subset A_3$ и т.д. Тогда мы получили систему из множеств: $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ...$
В которой $A_{2n}$ есть результат n-кратного применения отображения f к множеству $A_0$, а $A_{2n+1}$ есть результат n-кратного применения отображения f к множеству $A_1$.
Представим множество $A_0$ в виде объединения непересекающихся слоев $C_k = A_k \backslash A_{k+1}$ с центром в $C = \bigcap\limits_k A_k$
Так как $f(C) = C_2$, $f(C_2) = C_4$ и т.д. то $C$, $C_2$, $C_4$, ... равномощны(так как $f$ биекция)
Поэтому мы можем построить биекцию между множествами $A_0$ и $A_1$:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup ... \cup C \\
A_1 &= \phantom{C_0 \cup{}} C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup ... \cup C \\
A_1 &= \phantom{C_0 \cup{}} C_1 \cup C_0 \cup C_3 \cup C_2 \cup ... \cup C
\end{aligned}
$$

Если элемент $a$ множества $A$ принадлежит слою с четным номером($a \in C_{2k}$), сопоставим ему элемент $f(a)$, если же элемент $a$ в слое с нечетным номером или в сердцевине($a \in C_{2k+1}$), то оставим его на месте (поставив ему в соответствие его же, но как элемент множества $A_1$). Тогда множества $A = A_0$ и $A_1$ равномощны.

### 1.11 11

Заметим, что не меньше, так как есть биекция из наборов принадлежащих $2^M$($2^M$ мы считаем набором из 0 и 1, где мы ставим 1, если рассматриваемый элемент принадлежит подмножеству $M$, и 0, если не принадлежит), содержащих ровно одну 1 в $M$.
Покажем, что нет биекции из $M$ в $2^M$. Предположим, что есть(назовем ее $f$). Тогда рассмотрим следующий набор(назовем его $m$) из $2^M$: $i$-тый элемент противоположен $i$-тому элементу образа $i$ (где $i \in M$). Заметим, что у этого набора нет прообраза (по построению для каждого i-элемента верно, что $m \neq f(i)$). Откуда следует, что мощность $2^M$ больше $M$.

### 1.12 12**