1 ДЗ 2

Задача 1.1. Постройте конечный морфизм из гиперболы в прямую: представьте $k[X,Y]/(XY-1)$ как целое расширение $k[T]$ для некоторого T.

Доказательство. $\square$

Задача 1.2.

(а) Докажите, что спектр произведения двух колец несвязен.

(б) обратно, докажите, что если спектр A несвязен, то $A \cong B \times C$.

Доказательство.

(a) Идеал $R_1 \times R_2$ имеет вид $I_1 \times I_2$, где I_1 - идеал R_1, а I_2 - идеал R_2. Пусть $P_1 \times P_2$ - простой идеал $R_1 \times R_2$. Тогда факторкольцо $R_1/P_1 \times R_2/P_1$ должно быть областью целостности, но произведение двух областей целостности не является областью целостности. Поэтому либо P_1, либо P_2 является простым идеалом, а другой равен соответствующему ему кольцу.

(b) Для начала докажем этот факт в предположении что нет нильпотентов. Поскольку $\mathrm{Spec}(R) = X \sqcup Y$, то $X \cap Y = \emptyset$ и $X \cup Y = \mathrm{Spec}(R)$. Из замкнутости X и Y получим $X = V(I)$ и $Y = V(J)$ для идеалов I и J в R. Следовательно

$$X \cap Y = V(I) \cap V(J) = V(I+J) = \emptyset = V(R)$$

и

$$X \cup Y = V(I) \cup V(J) = V(IJ) = \mathrm{Spec}(R) = V(0)$$

Тогда $I + J = R$. Теперь мы можем применить китайскую теорему об остатках, чтобы увидеть

$$R/(IJ) \cong R/I \times R/J$$

Если в R нет нильпотентных элементов, то $\sqrt{0} = (0)$ и, следовательно, $IJ = 0$, то

$$R/(0) \cong R \cong R/I \times R/J$$

Вернемся к основной задаче Если $\mathrm{Spec}(R)$ несвязно, то $\mathrm{Spec}(R/\sqrt{0})$ также несвязно. Поскольку каждый нильпотент в $\sqrt{R}$ отображается в 0 в $R/\sqrt{0}$, кольцо $R/\sqrt{0}$ не содержит нильпотентов. Применяя вышедоказанный факт к $R/\sqrt{0}$, получаем $R/\sqrt{0} = S \times T$ для некоторых колец S и T. Поскольку $R/\sqrt{0}$ — произведение колец, оно содержит нетривиальные идемпотенты. R содержит нетривиальные идемпотенты если $R/\sqrt{0}$ содержит нетривиальные идемпотенты, поэтому $R = S' \times T'$ также является произведением колец.

$\square$

Задача 1.3. Выведите из предыдущей задачи формулу для размерности произведения колец.

Доказательство. $\dim(R \times S)$ - максимум R и S. Заметим, что все идеалы $R \times S$ имеют вид $I \times J$, где $I \subset R, J \subset S$ - идеалы (если (a,b) в идеале, то $(a,0)$ и $(b,0)$ тоже при умножении на $(1,0)$ и $(0,1)$).
При этом простые идеалы $R \times S$ имеют вид $R \times P$ или $Q \times S$, где $P \subset S, Q \subset R$ простые. Если $I \times J$ - простые, то $(1,0)(0,1) = (0,0)$ находится в идеале, поэтому либо I или J содержит 1. То есть другой должен быть простым.
Любая цепочка простых идеалов в $R \times S$ возникает либо из цепочки простых идеалов в R, либо из S. Самая длинная цепочка произведения получается из самой длинной цепочки в R или S (в зависимости от того, какая цепочка длиннее), поэтому $\dim(R \times S) = \max(\dim(R), \dim(S))$. $\square$

Задача 1.4.

(а) Докажите, что если элемент f обращается в нуль на неприводимой компоненте $\operatorname{Spec}(A)$, то он является делителем нуля, и что для A без нильпотентов верно и обратное.

(б) Постройте пример, показывающий, что в общем случае обратное неверно.

Доказательство.

(а) Предположим, что f обращается в нуль на неприводимой компоненте $\operatorname{Spec}(A)$. Тогда существует минимальный простой идеал $\mathfrak{p}$ группы A такой, что $f \in \mathfrak{p}$. Поскольку $\mathfrak{p}$ минимален, он содержится в каждом простом идеале A, поэтому множество $D(f) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{q}\}$ пуст. В силу основного свойства открытого покрытия аффинных схем это означает, что f нильпотент, т.е. существует некоторое целое положительное число n такое, что $f^n = 0$. Тогда f — делитель нуля.

Предположим, что A не имеет нильпотентнов и f делитель нуля. Тогда существует ненулевой элемент $g \in A$ такой, что $fg = 0$. Рассмотрим множество $V(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid f \in \mathfrak{p}\}$. Это замкнутое подмножество $\operatorname{Spec}(A)$, и оно непусто, так как содержит идеал $\operatorname{Ann}(g) = \{a \in A \mid ag = 0\}$, которое является простым, поскольку $A/\operatorname{Ann}(g)$ - область целостности (являющаяся подкольцом поля частных A/gA). Более того, $V(f)$ неприводимо, поскольку если бы это было объединение двух собственных замкнутых подмножеств, скажем $V(f) = V(I) \cup V(J)$ для некоторых идеалов I и J A, то $(I+J)/fA = (I/fA + J/fA)/fA = (0/fA + 0/fA)/fA = 0/fA$, откуда следует что $I + J = fA$, что противоречит тому, что f необратим. Следовательно, $V(f)$ - неприводимая компонента $\operatorname{Spec}(A)$, и f на ней обращается в нуль.

(б) Рассмотрим $A = k[x,y](x^2, xy)$. Тогда $Nil(A) = (x)$ — простое число, поэтому $Spec(A)$ неприводимо. Но y — делитель нуля, который не является нильпотентом.

□

Задача 1.5.

(а) Пусть A - k-алгебра, конечно порожденная как k-модуль (говорят, что A конечная k-алгебра). Докажите, что любой простой идеал в ней максимален, и что максимальных идеалов конечное число (здесь можно воспользоваться подходящей версией китайской теоремы об остатках).

(б) Пусть теперь A произвольно, а кольцо B конечная A-алгебра. Докажите, что все слои отображения $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$, индуцированного естественным гомоморфизмом из A в B - конечные множества (сначала докажите конечность прообраза максимального идеала в A, потом общий случай локализацией).

Доказательство.

(а) Начнем с максимальности. Рассмотрим нетривиальный простой идеал $\mathfrak{p}$ группы R. Если $x \notin \mathfrak{p}$ фиксирован, то с учетом $\mathrm{mod}\mathfrak{p}$ сокращений $1, x, \ldots, x^{\dim_K(R)} = x^m$ имеем линейную зависимость по конечномерности R. А поскольку $R/\mathfrak{p}$ - область целостности, мы знаем, что это алгебраическое соотношение

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m$$

$c_0 \neq 0$, иначе $\bar{x} \in R/\mathfrak{p}$ был бы делителем нуля, так что $\bar{1} \in R/\mathfrak{p}$ удовлетворяет

$$\bar{1} = c_0^{-1}\left(-c_m \bar{x}^m - \ldots - c_1 \bar{x}\right)$$

проверим существование обратного для $x \bmod \mathfrak{p}$, поскольку

$$\bar{1} = \bar{x} \cdot \left(-c_0^{-1}\left(c_m \bar{x}^{m-1} + c_{m-1}\bar{x}^{m-2} + \ldots + c_2 \bar{x} + c_1\right)\right)$$

Если существует не более $\dim_K(R)$ простых идеалов, доказательство окончено, поэтому предположим противное. Возьмем коллекцию $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$, состоящую из $n = \dim_K(R) + 1$ различных простых идеалов R. Поскольку все простые идеалы максимальны, $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = R$, когда $i \neq j$. Тогда мы можем найти $x_1, \ldots, x_n$ такие, что

$$x_k \equiv \delta_{ik} \mod \mathfrak{p}_i, \quad 1 \leq k \leq n$$

x_i покрывает факторную K-алгебру

$$R/\left(\mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n\right) \cong R/\mathfrak{p}_1 \oplus \ldots \oplus R/\mathfrak{p}_n$$

рассматривается как векторное пространство, имеющее размерность не менее $\dim_K(R)+1$, а это означает, что существует сюръективный гомоморфизм K-алгебры из $K^m \to K^M$ для некоторого $m < M$. Однако гомоморфизмы алгебр также являются линейными отображениями, а это означает, что у нас есть векторное пространство меньшей размерности, отображаемое в пространство более высокой размерности. Следовательно, существует не более $\dim_K(R)$ простых идеалов, т.е. конечное число.

(б) Докажем несколько вспомогательных теорем (Atiyah, 5.13) Пусть G — конечная группа автоморфизмов кольца A, и пусть A^G подкольцо G-инвариантов, то есть всех $x \in A$ таких, что $\sigma(x) = x$ для всех $\sigma \in G$. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал A^G, и пусть P — множество простых идеалов A, сужение которых равно p. Докажите, что G действует транзитивно на P. В частности, P конечен.

Пусть $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in P$ и пусть $x \in \mathfrak{p}_1$. Затем,

$$\prod_{\sigma \in G} \sigma(x) \in \left(\mathfrak{p}_1 \cap A^G\right) = \mathfrak{p},$$

поскольку $id \in G$ и $\prod_\sigma \sigma(x)$ инвариантен относительно G, следовательно, $\sigma(x) \in \mathfrak{p}_2$ для некоторого $\sigma \in G$. Поэтому,

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq \bigcup_{\sigma \in G} \sigma\left(\mathfrak{p}_2\right),$$

откуда следует, что $\mathfrak{p}_1 \subseteq \sigma\left(\mathfrak{p}_2\right)$ для некоторого $\sigma \in G$ (поскольку $\sigma\left(\mathfrak{p}_2\right)$ являются простыми). Но поскольку A является целым по A^G (согласно предыдущему упражнению) и $\mathfrak{p}_1, \sigma\left(\mathfrak{p}_2\right)$ оба сужаются до $\mathfrak{p}$, они должны совпадать. Это означает, что G действует точно, как и хотелось. В частности, множество идеалов, стягивающихся к $\mathfrak{p}$, конечно.

(Atiyah, 5.14) Пусть A — целозамкнутая область, K — её поле частных и L — конечное нормальное сепарабельное расширение K. Пусть G — группа Галуа L над K и B — целое замыкание A в L. Докажите, что $\sigma(B) = B$ для всех $\sigma \in G$ и что $A = B^a$.

Прежде всего заметим, что G — конечная группа (ее порядок равен степени расширения L/K). Очевидно, что $B \subseteq \sigma(B)$, поскольку $id \in G$. Обратно, если $b \in B$, то $\sigma(b) \in B$, поскольку $\sigma(b) \in L$ обязательно цело над A (поскольку это тождество на K, по определению группы Галуа). Следовательно, $\sigma(B) = B$. Теперь очевидно, что $A \subseteq B^G$, и если $b \in B^G$, то b удовлетворяет следующему моническому многочлену от $K[x]$:

$$\prod_{\sigma \in G} (x - \sigma(b)),$$

откуда следует, что b является целым в K над A, отсюда $B^G \subseteq A$, следовательно, два множества равны, как и хотелось.

Основная задача (Atiyah, 5.15) Рассмотрим 2 случая. Если L — сепарабельное расширение над K, то мы можем вложить его в конечное нормальное сепарабельное расширение N поля K. В этом случае из $K \subseteq L \subseteq N$ мы получаем простые идеалы $\mathfrak{q}$ из B, которые сужаются до $\mathfrak{p}$ в $B^G = A$ (последнее равенство верно в силу (5.14)), конечного в силу (5.13). В случае, когда L неотделима над K, то любой идеал $\mathfrak{q}$ из B такой, что $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ фактически равен множеству $\left\{x \in B : x^{p^m} \in \mathfrak{p} \text{для некоторого} m \geq 0\right\}$. Поскольку $\mathfrak{q}$ в этом случае определена однозначно, мы видим, что индуцированное отображение биективно. Следовательно, все слои имеют один элемент.

$\square$

Задача 1.6. Опишите минимальные простые идеалы кольца $k[x,y,z]/(xy,xz)$. Покажите, что в этом кольце есть максимальные идеалы разной высоты.

Доказательство. Минимальные простые идеалы кольца $k[x,y,z]/(xy,xz)$ — это (x,y) и (x,z)
Рассмотрим идеалы $m_1 = (X-1, Y, Z)$ и $m_2 = (X, Y-1, Z)$. Заметим, что идеалы максимальны в силу соответствия идеалов из R и идеалов из $\mathbb{C}[X,Y,Z]$, содержащих (XY, XZ). Кроме того, заметим, что

$(XY, XZ) = (X) \cap (Y, Z)$ в кольце $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ и, следовательно, каждый простой идеал R соответствует простому идеалу в $\mathbb{C}[X, Y, Z]$, содержащему (X) или (Y, Z).

Рассмотрим цепочку простых идеалов $\mathfrak{m}_1 = (X - 1, Y, Z) \supsetneq (Y, Z)$. Каждый простой идеал $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_1$ должен содержать (Y, Z), поскольку $X \notin \mathfrak{m}_1$. Более того, между $\mathfrak{m}_1$ и (Y, Z) не существует простого идеала, поскольку каждый $f \in \mathfrak{m}_1 \backslash (Y, Z)$ должен делиться на $(X - 1)$, скажем $f = a(X - 1)$ для некоторого $a \in R \backslash (Y, Z)$. Если $(X - 1)$ содержится в идеале, то всё готово, если нет, то $a \in \mathfrak{m}_1$ и можно использовать индукцию по степени. Следовательно, цепочка максимальна, $\mathrm{ht}\,(m_1) = 1$.

Рассмотрим цепочку простых идеалов $\mathrm{m}_2 = (X, Y - 1, Z) \supsetneq (X, Z) \supsetneq (X)$. Делаем вывод, что $\mathrm{ht}\,(\mathrm{m}_2) \geqslant 2$. Поскольку $Y \notin \mathrm{m}_2$, заключаем, что каждый простой идеал R, содержащийся в $\mathfrak{m}_2$, соответствует простому идеалу в $\mathbb{C}[X, Y, Z]$, который содержит X. Таким образом, $\mathrm{ht}\,(\mathfrak{m}_2) \leqslant \dim(R/(X)) = \dim(\mathbb{C}[Y, Z]) = 2$. Следовательно, $\mathrm{ht}\,(\mathfrak{m}_2) = 2$.

Так мы нашли 2 максимальных идеала разной высоты $\square$