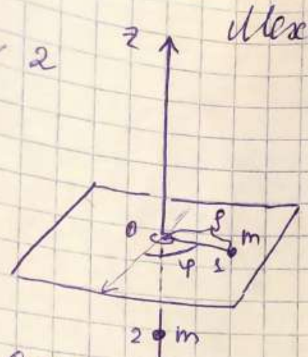
№ 2

Механика. Домашнее задание № 4. Струкиной Ксении



Введем цилиндрические координаты.
Пусть у первого тела координаты ρ и φ, длина всей нити l, тогда оставшаяся часть от O до 2 тела − $l-\rho$, но z−координата отрицательна, поэтому равна $\rho - l$. Остальные нулевые.
У нашей системы 2 степени свободы − ρ и φ, по ним однозначно задается положение тел.

$$T = \frac{m}{2}(\dot\rho^2+\dot\varphi^2\rho^2) + \frac{m}{2}\dot\rho^2 \qquad U = (\rho - l)mg = \rho mg - const$$

Лагранжиан

$$L = T - U = m\dot\rho^2 + \frac{m\dot\varphi^2\rho^2}{2} - \rho mg + const = m\dot\rho^2 + \frac{m\dot\varphi^2\rho^2}{2} - (\rho - l)mg$$

Ур. Эйлера-Лагранжа: ЗСИ:

$$L_\varphi = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\varphi}}_{0} = \frac{d}{dt}(m\dot\varphi\rho^2) = 0 \Rightarrow m\dot\varphi\rho^2 = const = J$$

$$m\cdot 2\rho\dot\rho\dot\varphi + \rho^2 m\ddot\varphi = 0 \qquad 2m\ddot\rho - m\dot\varphi^2\rho + mg = 0$$

$$L_\rho = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial L}{\partial\rho} = \frac{d}{dt}(2m\dot\rho) + m\dot\varphi^2\rho + mg = 0 \text{ при } \rho - l = const$$

$$mg = m\dot\varphi^2\rho_0 \Leftarrow \rho_0 = \rho = const,\ \dot\rho = 0$$

$$L_\varphi = m\rho_0^2\ddot\varphi = 0 \Rightarrow m\rho_0^2\dot\varphi = C = const \quad \boxed{\rho_0 = \frac{g}{\dot\varphi^2}} \quad \boxed{\dot\varphi^2 = \frac{g}{\rho_0}}$$

$$\boxed{\dot\varphi = \frac{C}{m\rho_0^2}}$$

Значит, стационарные траектории при условии $\rho = const$, $\dot\varphi = const$.

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ − лагранжиан явно не зависит от t, значит, выполнен ЗСЭ: $E = T + U$

$$E = m\dot\rho^2 + \frac{m\dot\varphi^2\rho^2}{2} + (\rho - l)mg = const$$

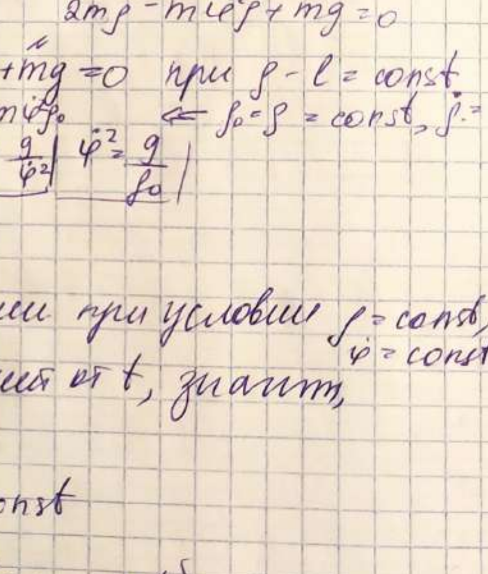
$$m\dot\rho^2 + \frac{m\dot\varphi^2\rho^2}{2} + \rho mg = const \quad (lmg = const)$$

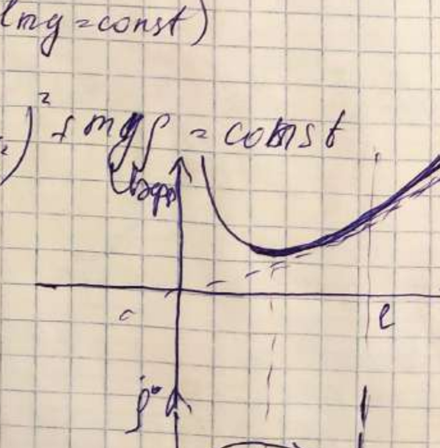
Подставим $\dot\varphi$: $m\dot\rho^2 + \frac{m\rho^2}{2}\cdot\left(\frac{C}{m\rho_0^2}\right)^2 + mg\rho = const$

$\frac{C^2}{2m\rho^2}$

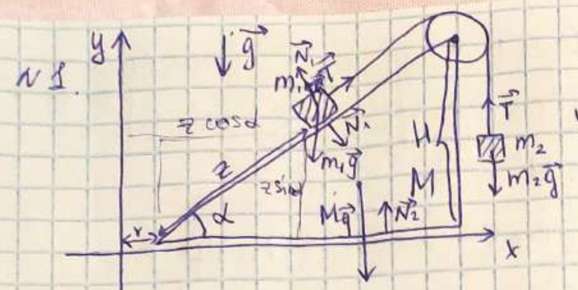
$T_{эфф}(\dot\rho) = m\dot\rho^2$

$U_{эфф}(\rho) = \frac{C^2}{2m\rho^2} + mg\rho$





№1.



Заметим, что система однозначно фиксируется координатами угла клина и расстоянием от него до первого бруска ~~...~~ $\Rightarrow$ 2 степени свободы

Пусть l – длина нити

Пусть L – длина „гипотенузы" клина, тогда её проекция $\sqrt{L^2-H^2}$

$X_{m_2} = X + \sqrt{L^2-H^2} + c$ c-const – расстояние от клина до грузика $(X+\sqrt{L^2-H^2}+c)^{\cdot} = \dot X$

$y_{m_2} = H - (l - (L-z)) = H + L - l - z$ $(H+L-l-z)^{\cdot} = -\dot z$

$X_{m_1} = X + z\cos\alpha$ $y_{m_1} = z\cdot\sin\alpha$

$$(*)\ T = \frac{M\cdot\dot X^2}{2} + m_1\frac{\left((\dot X+\dot z\cos\alpha)^2 + (\dot z\sin\alpha)^2\right)}{2} + \frac{m_2}{2}(\dot X^2+\dot z^2)$$

Рассмотрим в системе ц. масс. по оси x: X

$$X = \frac{Mx + m_1(z\cos\alpha + x) + m_2(x + L\cos\alpha)}{m_1+m_2+M};\quad \dot X = \frac{M\dot x + m_1(\dot x + \dot z\cos\alpha) + m_2\dot x}{M+m_1+m_2} =$$

$$= \dot x + \frac{m_1\dot z\cos\alpha}{m_1+m_2+M} \Rightarrow \dot x = \dot X - \frac{m_1\dot z\cos\alpha}{M+m_1+m_2}$$

~~В (*):~~ $\cancel{\frac{M}{2}\left(\dot X - \frac{m_1\dot z\cos\alpha}{M+m_1+m_2}\right)^2 + \frac{M+m_1+m_2}{2}\left(\dot X^2 - \frac{2\dot X m_1\dot z\cos\alpha}{M+m_1+m_2} + \frac{m_1^2\dot z^2\cos^2\alpha}{(M+m_1+m_2)^2}\right)}$

$$T = \frac{M}{2}\left(\dot X^2 - \frac{2\dot X m_1\dot z\cos\alpha}{M+m_1+m_2} + \frac{m_1^2\cdot\dot z^2\cos^2\alpha}{(M+m_1+m_2)^2}\right) + \frac{m_1}{2}\left(\dot z^2\cos^2\alpha + \dot z^2\sin^2\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\dot X^2 - \frac{2\dot X m_1\dot z\cos\alpha}{M+m_1+m_2} + \frac{m_1^2\dot z^2\cos^2\alpha}{(M+m_1+m_2)^2}\right) + 2\dot z\cos\alpha\left(\dot X - \frac{m_1\dot z\cos\alpha}{M+m_1+m_2}\right)\right) +$$

$$+ \frac{m_2}{2}\left(\dot X^2 - \frac{2\dot X m_1\dot z\cos\alpha}{M+m_1+m_2} + \frac{m_1^2\dot z^2\cos^2\alpha}{(M+m_1+m_2)^2} + \dot z^2\right) = \frac{M+m_1+m_2}{2}\dot X^2 + \dot X\underbrace{\left(\frac{Mm_1\dot z\cos\alpha}{M+m_1+m_2} + \frac{m_1^2\dot z\cos\alpha}{M+m_1+m_2} - m_1\dot z\cos\alpha + \frac{m_2m_1\dot z\cos\alpha}{M+m_2+m_3}\right)}_{0} +$$

$$+ \frac{m_1}{2}\left(\frac{Mm_1\dot z^2\cos^2\alpha}{(M+m_1+m_2)^2} + \dot z^2 + \frac{m_1^2\dot z^2\cos^2\alpha}{(M+m_1+m_2)^2} - \frac{2\dot z^2\cos^2\alpha\cdot m_1}{M+m_1+m_2} + \frac{m_2\dot z^2 m_1\cos^2\alpha}{(M+m_1+m_2)^2}\right) + \frac{m_2}{2}\dot z^2 = \dot X^2\frac{M+m_1+m_2}{2} + \frac{m_2\dot z^2}{2} +$$

$$+ \frac{m_1\left(Mm_1\dot z^2\cos^2\alpha + m_1^2\dot z^2\cos^2\alpha + m_2m_1\dot z^2\cos^2\alpha - (M+m_1+m_2)2\dot z^2\cos^2\alpha\, m_1\right)}{2(M+m_1+m_2)^2} + \frac{m_1}{2}\dot z^2 =$$

$$\frac{m_1}{2}\dot z^2\left((M+m_2+m_1)m_1(\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1)\right) \ \frac{\sin^2\alpha(M+m_1+m_2)m_1^2}{2}$$

$$= \dot X^2\frac{M+m_1+m_2}{2} + \frac{m_2\dot z^2}{2} - \frac{m_1(m_1\dot z^2\cos^2\alpha)}{2(M+m_1+m_2)} + \frac{m_1\cdot\dot z^2(M+m_1+m_2)}{2(M+m_1+m_2)} -$$

$$= \dot X^2\frac{(M+m_2+m_1)}{2} + \frac{m_2\dot z^2}{2} + \frac{\dot z^2\cdot m_1(\sin^2\alpha\, m_1 + M + m_2)}{2(M+m_1+m_2)}$$

$$U = m_2 g\left(H - l + \frac{H}{\sin\alpha} - z\right) + m_1 g z\sin\alpha$$

$$L = T - U = \dot{x}^2\left(\frac{M + m_1 + m_2}{2}\right) + \frac{m_2 \dot{z}^2}{2} + \frac{m_1 \dot{z}^2 (m_1 \sin^2\alpha + M + m_2)}{2(M + m_1 + m_2)} -$$

$$- m_2 g\left(H - l + \frac{H}{\sin\alpha} - z\right) + m_1 g z \sin\alpha$$

Ур-ия Эйлера-Лагранжа:

$$L_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(m_2 \cdot \dot{z} + \frac{m_1 \dot{z}(m_1 \sin^2\alpha + M + m_2)}{M + m_1 + m_2}\right) + m_1 g \sin\alpha - m_2 g =$$

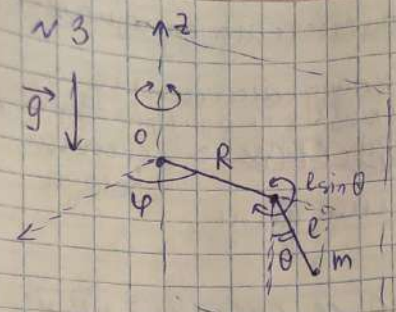
$$= \ddot{z}\left(m_2 + \frac{m_1 (m_1 \sin^2\alpha + M + m_2)}{M + m_1 + m_2}\right) - m_2 g + m_1 g \sin\alpha = 0$$

$$L_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}}_{0} = \frac{d}{dt}\left((M + m_1 + m_2)\dot{x}\right) = \ddot{x}(M + m_1 + m_2) = 0$$

Т.к. $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, то выполнен ЗСИ: $\dot{x}(M + m_1 + m_2) = const$

Т.к. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то также выполн ЗСЭ: $E = T + U$

№3



$\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\pi, \pi)$ – 2 степени свободы

$x_m = (R + l\sin\theta)\cos\varphi$ $\quad y_m = (R + l\sin\theta)\sin\varphi$

$z_m = -l\cos\theta$

$\dot x = l\cos\theta\cdot\dot\theta\cos\varphi - (R + l\sin\theta)\sin\varphi\cdot\dot\varphi$

$\dot y = (R + l\sin\theta)\cos\varphi\cdot\dot\varphi + l\cos\theta\,\dot\theta\sin\varphi$

$\dot z = l\sin\theta\cdot\dot\theta$

$$T = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) =$$

$$= \frac{m}{2}\Big(l^2\cos^2\theta\cdot\dot\theta^2\cos^2\varphi + (R + l\sin\theta)^2\sin^2\varphi\cdot\dot\varphi^2 - 2l\cos\theta\,\dot\theta\cos\varphi\sin\varphi\cdot\dot\varphi(R + l\sin\theta) +$$

$$+ l^2\cos^2\theta\cdot\dot\theta^2\sin^2\varphi + (R + l\sin\theta)^2\cos^2\varphi\cdot\dot\varphi^2 + 2l\cos\theta\,\dot\theta\cos\varphi\cdot\dot\varphi\sin\varphi(R + l\sin\theta) +$$

$$+ l^2\sin^2\theta\cdot\dot\theta^2\Big) = \frac{m}{2}\Big(\underbrace{l^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2}_{+\,l^2\sin^2\theta\cdot\dot\theta^2} + (R + l\sin\theta)^2\cdot\dot\varphi^2\Big) = \frac{m}{2}\big(l^2\dot\theta^2 + (R + l\sin\theta)^2\cdot\dot\varphi^2\big)$$

$U = -mgl\cos\theta$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\big(l^2\dot\theta^2 + (R + l\sin\theta)^2\dot\varphi^2\big) + mgl\cos\theta$$

Ур. Эйл.-Лагр.: $L_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) - \underset{0}{\frac{\partial L}{\partial\varphi}} = \frac{d}{dt}\big(m(R + l\sin\theta)^2\cdot\dot\varphi\big) = 0$

Т.к. $\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$, то вытекает ЗСИ: $m\dot\varphi(R + l\sin\theta)^2 = c = \text{const}$

$$\dot\varphi = \frac{c}{m(R + l\sin\theta)^2}$$

$$L_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot\theta) + \sin\theta\,mgl - mRl\cos\theta\cdot\dot\varphi^2 - \frac{m}{2}\dot\varphi^2 l^2 2\sin 2\theta) = 0$$

$$ml^2\ddot\theta - mRl\cos\theta\cdot\dot\varphi^2 - ml^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot\varphi^2 + mgl\sin\underset{(t)}{\theta} = 0 \qquad | : ml\cdot(-1)$$

Стационарное решение по $\theta = \theta_0 = \text{const}$

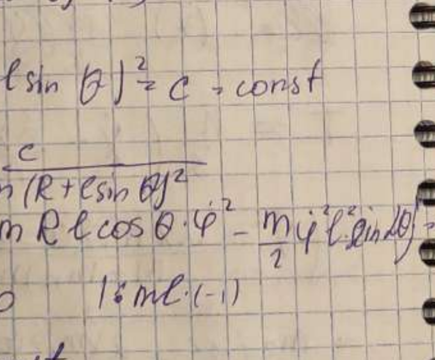
$R\cos\theta_0\dot\varphi^2 + l\sin\theta_0\cos\theta_0\cdot\dot\varphi^2 - g\sin\theta_0 = 0$ – если рассмотреть как кв. ур-ие, то

$$\dot\varphi^2 = \frac{g\sin\theta_0}{R\cos\theta_0 + l\sin\theta_0\cos\theta_0}$$

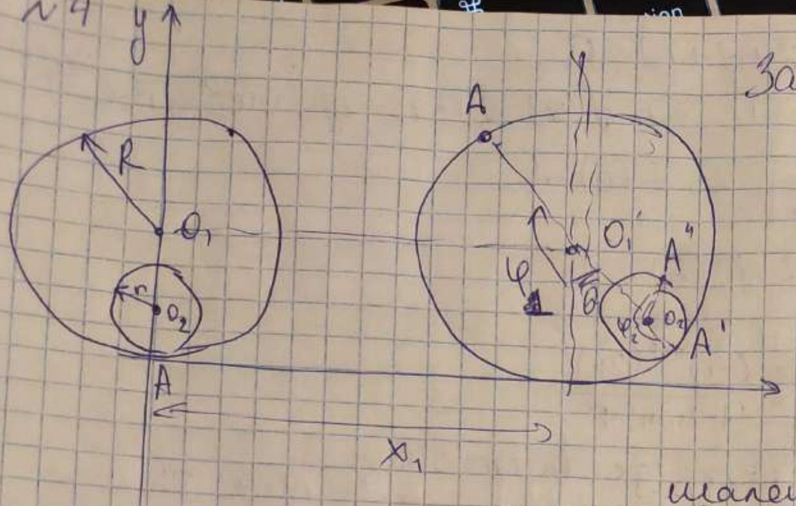
$D = l^2\sin\theta_0^2\cos^2\theta_0 + 4Rg\cos\theta_0\sin\theta_0$ даст 0, 1 или 2 решения при соответствующих значениях

L не зависит от $t \Rightarrow$ ЗСЭ – $E = T + U = \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}(R + l\sin\theta)^2\dot\varphi^2 - mgl\cos\theta =$

$$= \underbrace{\frac{m}{2}l^2\dot\theta^2}_{T_{эфф}(\dot\theta)} + \underbrace{\frac{m}{2}(R + l\sin\theta)^2\frac{c^2}{m^2(R + l\sin\theta)^4} - mgl\cos\theta}_{U_{эфф}(\theta)} = \text{const}$$



№4



Заметим, что система имеет 2 степени свободы: по φ_1 и θ картинка однозначно восстанавливается

Центр мас цилиндра R с радиусом R.

$x_1 = R\varphi_1 \Rightarrow R\dot{\varphi}_1 = \dot{x}_1$

$y_1 = R \qquad \dot{y}_1 = 0$

маленького:

$x_2 = x_1 + (R-r)\sin\theta \qquad \dot{x}_2 = R\dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}(R-r)\cos\theta$

$y_2 = R - (R-r)\cos\theta \Rightarrow \dot{y}_2 = \dot{\theta}(R-r)\sin\theta$

При этом $r\varphi_2 = R(\varphi_1+\theta) \Rightarrow \varphi_2 = \frac{R(\varphi_1+\theta)}{r} \Rightarrow \varphi_2 - \theta = \frac{R}{r}\left(\varphi_1 + \left(1-\frac{r}{R}\right)\theta\right)$

Кин. энергия T_1 большого цилиндра: $T_1 = \frac{M}{2}(R\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{MR^2\dot{\varphi}_1^2}{2} = MR^2\dot{\varphi}_1^2$

маленького: $T_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{I_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\theta})^2}{2} = \frac{m}{2}\left((R\dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}(R-r)\cos\theta\right)^2 +$

$+ \frac{m}{2}\left(\dot{\theta}^2(R-r)^2\sin^2\theta\right) + \frac{mr^2}{2}\left(\frac{R}{2}\left(\dot{\varphi}_1 + \left(1-\frac{r}{R}\right)\dot{\theta}\right)\right)^2$

$T = T_1 + T_2$

$T = MR^2\dot{\varphi}_1^2 + mR^2\dot{\varphi}_1^2 + mR(R-r)(\cos\theta+1)\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 + m(R-r)^2\dot{\theta}^2$

$U = -mg(R-r)\cos\theta$

Пусть $a = R-r$

Лагранжиан: $L = T - U = R^2M\dot{\varphi}_1^2 + mR^2\dot{\varphi}_1^2 + mRa(\cos\theta+1)\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$

Ур Эйл-Лагр: $L_{\varphi_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\varphi_1}}_{0} = \frac{d}{dt}\left(2(M+m)R^2\dot{\varphi}_1 + mR(R-r)(\cos\theta+1)\dot{\theta}\right) = 0$

$\Rightarrow$ ЗСИ: $\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} = J = const$

Также L явно не зависит от t $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right) \Rightarrow$ ЗСЭ $E = T+U = const$

Т.е. $J = 2(M+m)R^2\dot{\varphi}_1 + mRa(\cos\theta+1)\dot{\theta}$

$E = (M+m)R^2\dot{\varphi}_1^2 + mRa(\cos\theta+1)\dot{\varphi}_1\dot{\theta} + ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta$

б) $\theta(t) = \varepsilon\sin\omega t,\ \varepsilon\to 0$

$L_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 = \frac{d}{dt}\left(mRa(\cos\theta+1)\dot{\varphi}_1 + 2ma^2\dot{\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} =$

$= mRa(\cos\theta+1)\ddot{\varphi}_1 - mRa\dot{\varphi}_1\sin\theta\cdot\dot{\theta} + 2ma^2\ddot{\theta} + mRa\sin\theta\dot{\varphi}_1\dot{\theta} + mga\sin\theta = 0$

Значит, $R(\cos\theta+1)\ddot{\varphi}_1 + 2a\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

Из ЗСМ $\dot{\varphi}_1 = \dfrac{J - mRa(\cos\theta+1)\dot{\theta}}{2(m+M)R^2}$

Пусть $\omega_0 = \dfrac{J}{2(m+M)R^2}$, $A = \dfrac{ma}{2(m+M)R}$

Тогда $\dot{\varphi}_1 = \omega_0 - A(\cos\theta+1)\dot{\theta}$

$\ddot{\varphi}_1 = A(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}(\cos\theta+1))$

Подставим последнее сюда

$R(\cos\theta+1)A(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}(\cos\theta+1)) + g\sin\theta + 2a\ddot{\theta} = 0$

$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$, $\dot{\theta}^2 = \varepsilon^2\omega^2 - \omega^2\theta^2 = \omega^2(\varepsilon^2 - \theta^2)$ $\sin\theta \approx \theta$ и $\cos\theta \approx 1$

$\varepsilon \to 0$: $-\omega^2(-4AR + 2a) = -g$

$\omega^2 = \dfrac{g}{2a - 4AR} = \dfrac{g}{2a - 2\frac{ma}{M+m}} = \dfrac{g(M+m)}{2(R-r)M}$

Тогда $\omega = \pm\sqrt{\dfrac{g(M+m)}{2(R-r)M}}$