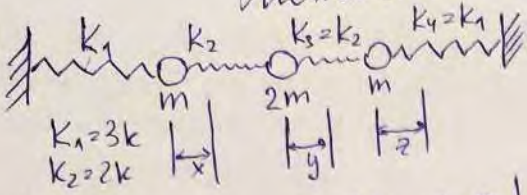
Механика. Домашнее задание № 1

Стружкиной Ксении

1) 

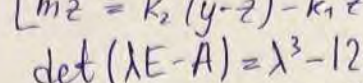
Составим систему уравнений Ньютона:

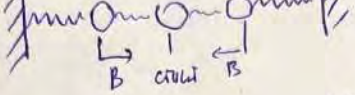
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k_1 x - k_2(x-y) \\ 2m\ddot{y} = k_2(x-y) - k_2(y-z) \\ m\ddot{z} = k_2(y-z) - k_1 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{5kx}{m} + \frac{2ky}{m} \\ \ddot{y} = \frac{kx}{m} - \frac{2ky}{m} + \frac{kz}{m} \\ \ddot{z} = \frac{2ky}{m} - \frac{5kz}{m} \end{cases}$$

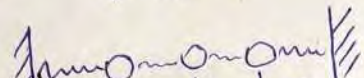
$\ddot{X} = -AX \quad A = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 12\lambda^2\omega^2 + 41\lambda\omega^4 - 30\omega^6 = (\lambda - \omega^2)(\lambda - 5\omega^2)(\lambda - 6\omega^2) \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$

$\lambda_1 = \omega^2;\ \lambda_2 = 5\omega^2;\ \lambda_3 = 6\omega^2$ – все собственные значения больше 0! (хорошо)

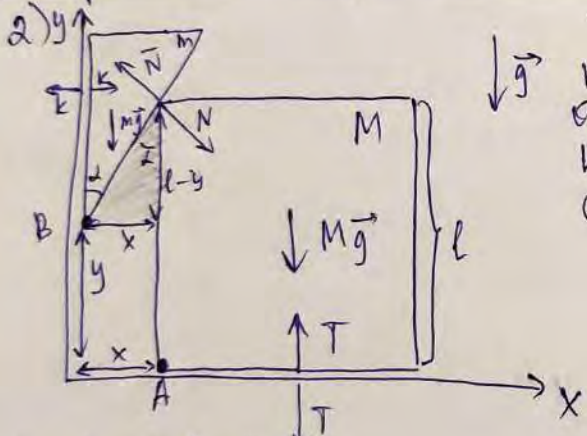
1. $A - \omega^2 E: \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – нормальная частота

2. $A - 5\omega^2 E: \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  $\omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{m}}$ – нормальная частота

3. $A - 6\omega^2 E: \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  $\omega_3 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$ – нормальная частота

Нормальные моды: $v_i \cos\omega_i t,\ v_i \sin\omega_i t$ – где $i \in \{1, 2, 3\}$

---

2) 

Заметим, что система задается по точкам A и B, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с длинами X и Y, которые, в свою очередь, связаны соотношением $ctg\alpha = \frac{l-y}{x}$, где l – сторона квадрата (серый Δ)

$x\,ctg\alpha = l - y \Rightarrow \boxed{y = l - x\,ctg\alpha}$, $l = const$, $ctg\alpha = const$

Значит, у системы 1 степень свободы.

Система уравнений:

куб: $\begin{cases} M\ddot{x} = N\cos\alpha \quad (1) \\ M\ddot{y} = Mg + N\sin\alpha - T = 0 \quad (2) \end{cases}$ (поскольку тут 0, значит не важно)

Брусок: $\begin{cases} m\ddot{x} = k - N\sin\cos\alpha = 0 \quad (3) \\ m\ddot{y} = -mg + N\sin\alpha \quad (4) \end{cases}$

$y = l - x\,ctg\alpha$

$\ddot{y} = -\ddot{x}\,ctg\alpha \quad (*)$

$(*)$ и (4): $m\ddot{y} = -m\ddot{x}\,ctg\alpha = mg + N\sin\alpha$

(1): $-\frac{mN\cos\alpha\,ctg\alpha}{M} \Rightarrow N\left(\frac{\sin\alpha M + m\cos\alpha\,ctg\alpha}{M}\right) = mg$

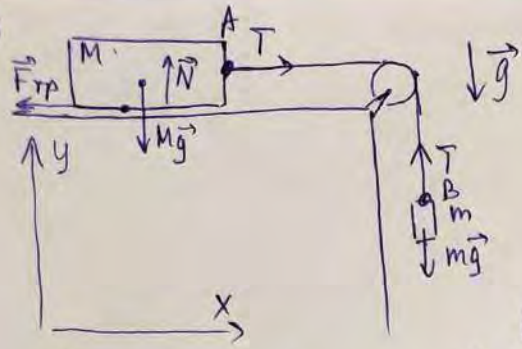
$N = \frac{Mmg}{\sin\alpha M + m\cos\alpha\,ctg\alpha}$

$\ddot{x} \overset{(1)}{=} \frac{N\cos\alpha}{M} = \frac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha M + m\cos\alpha\,ctg\alpha} = \frac{mg}{tg\alpha M + m\,ctg\alpha}$

$\ddot{y} \overset{(4)}{=} -g + \frac{N\sin\alpha}{m} = -g + \frac{Mg\sin\alpha}{\sin\alpha M + m\cos\alpha\,ctg\alpha} = -g + \frac{Mg}{M + m\,ctg^2\alpha} = \frac{-mg\,ctg^2\alpha}{M + m\,ctg^2\alpha}$ – знак минус – это хорошо

Ответ: $\ddot{x} = \frac{mg}{tg\alpha M + m\,ctg\alpha}$; $\ddot{y} = \frac{-mg\,ctg^2\alpha}{M + m\,ctg^2\alpha}$

3)



$|\vec{F}_{тр}| = k|\vec{N}|$

Поскольку длина нити постоянна, то по координате точки A определяется координата точки B $\Rightarrow$ 1 степень свободы (по точкам A и B определяется положение)

Система уравнений Ньютона:

$$\begin{cases} M\ddot{x} = T - F_{тр} \\ M\ddot{y} = N - Mg = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = T - mg \end{cases}$$

$$T - F_{тр} = M\ddot{x} \overset{(*)}{=} -M\ddot{y} = -\frac{M}{m}T + Mg$$

$$F_{тр} = kN = kMg$$

$$T = \frac{(k+1)Mg}{1+\frac{M}{m}}$$

(*) $\ddot{x} = -\ddot{y}$ как раз в силу постоянной длины нити

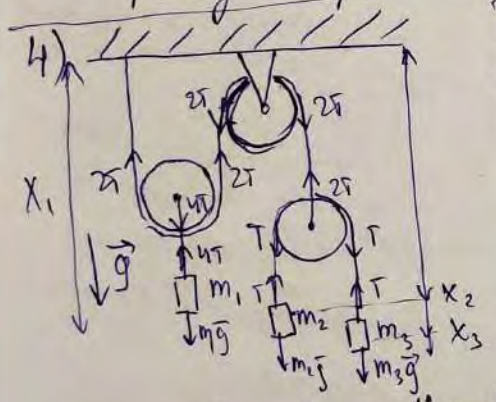
$$\ddot{x} = \frac{T}{M} - kg = \frac{(k+1)g}{1+\frac{M}{m}} - kg = \frac{mg - kgM}{m+M}$$

$$\ddot{y} = \frac{M}{m+M}(k+1)g - g = \frac{Mkg - mg}{m+M}$$

Поскольку $F_{тр}$ не может двигать груз назад, то настоящее ускорение $= \max(\ddot{x}, 0)$ и $\min(0, \ddot{y})$

$T = mg \quad F_{тр} \le kN \quad m \le Mk$ – при таком условии конструкция стабильна.

4)



Поскольку X_2 зависит от X_3 (нить постоянна), а по X_1, X_2 и X_3 задается конструкция, то число степеней свободы – 2.

Более того, по правилу моментов, у координат соотношение: $4X_1 + X_2 + X_3 = \text{const}$

$4\dot{X}_1 + \dot{X}_2 + \dot{X}_3 = 0$

Система уравнений:

$$\begin{cases} -4T + m_1 g = m_1 \ddot{X}_1 & (1) \\ -T + m_2 g = m_2 \ddot{X}_2 & (2) \\ -T + m_3 g = m_3 \ddot{X}_3 & (3) \end{cases}$$

Из (3) $T = m_3(g - \ddot{X}_3)$, тогда

$$\begin{cases} 4m_3(\ddot{X}_3 - g) = m_1\ddot{X}_1 - m_1 g \\ m_3(\ddot{X}_3 - g) = m_2\ddot{X}_2 - m_2 g \end{cases}$$

$$4\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2 + \ddot{X}_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4m_3(-4\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2 - g) = m_1\ddot{X}_1 - m_1 g \\ m_3(-4\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2 - g) = m_2\ddot{X}_2 - m_2 g \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{X}_1(16m_3 + m_1) = m_1 g - 4m_3\ddot{X}_2 - 4m_3 g \\ \ddot{X}_2(m_2 + m_3) = m_2 g - m_3 g - 4m_3\ddot{X}_1 \end{cases} \Rightarrow (16m_3 + m_1)\ddot{X}_1 = (m_1 - 4m_3)g - \frac{4m_3(m_2 g - m_3 g - 4m_3\ddot{X}_1)}{m_2 + m_3}$$

$$\ddot{X}_1\left((16m_3 + m_1)(m_2 + m_3) - 16m_3^2\right) = (m_1 - 4m_3)g - \frac{4m_3(m_2 g - m_3 g)}{m_2 + m_3}$$

$$\ddot{X}_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 8m_3 m_2}{16m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3}\, g$$

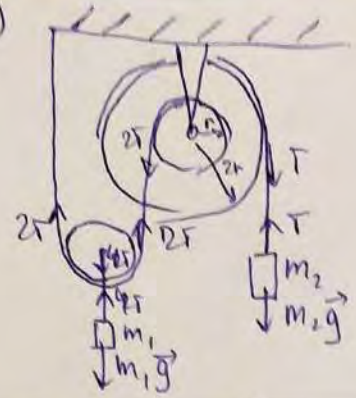
$$\ddot{X}_2 = (m_2 - m_3)g - 4m_3\left(\frac{m_1(m_2 + m_3) - 8m_2 m_3}{16m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}\right)g = \frac{}{m_2 + m_3} = \frac{}{2 \text{ (знаменатель)}}$$

$$= -\frac{4m_1 m_3 g}{2} + \frac{32m_3^2 m_2 + 16m_2^2 m_3 - 16m_2 m_3^2 + m_1 m_2^2 + m_1 m_2 m_3 - m_1 m_2 m_3 - m_3^2 m}{2(m_2 + m_3)} \cdot g =$$

$$= \frac{-4m_1 m_3 + 16m_2 m_3 + m_1(m_2 - m_3)}{2} g = \frac{16m_2 m_3 + m_1 m_2 - 5m_1 m_3}{16m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}\, g = \ddot{X}_2$$

$$4\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2 + \ddot{X}_3 = 0 \Rightarrow \ddot{X}_3 = \frac{16m_2 m_3 + m_1 m_3 - 5m_1 m_2}{16m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}\, g$$

5)



По правилу моментов: $4x_1 + x_2 = const$

Число степеней свободы – 1.

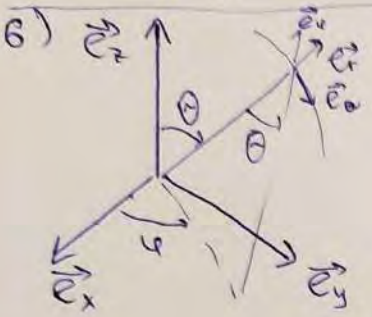
$4x_1 + x_2 = 0 \quad 4\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 \quad (+) \quad \cdot 16 m_2 \ddot{x}_1$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - 4T \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T \mid \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \overset{(*)}{m_1\ddot{x}_1 - 4m_2\ddot{x}_1 = m_1 g - 4m_2 g}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - 4m_2}{16m_2 + m_1} g$$

$$\ddot{x}_2 \overset{(+)}{=} -4\ddot{x}_1 = \frac{16m_2 - 4m_1}{16m_2 + m_1} g$$

6)



$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$tg\varphi = \frac{y}{x} \quad tg\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \vec{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_z \cos\theta \\ \vec{e}_\theta = \vec{e}_x \cos\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \cos\theta\sin\varphi - \vec{e}_z \sin\theta \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi \end{cases}$$

$\dot{\vec{e}}_r = \vec{e}_x(\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta} - \sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}) + \vec{e}_y(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi) +$

$+ \vec{e}_z(-\sin\theta\cdot\dot{\theta}) = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\cdot\vec{e}_\varphi\cdot\dot{\varphi}$

$\dot{\vec{e}}_\theta = \vec{e}_x(-\dot{\theta}\sin\theta\cdot\cos\varphi - \dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi) + \vec{e}_y(-\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta) +$

$+ \vec{e}_z(-\dot{\theta}\cos\theta) = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi$

$\dot{\vec{e}}_\varphi = \vec{e}_x(-\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}) + \vec{e}_y(-\dot{\varphi}\sin\varphi) = (-\sin\theta\vec{e}_r - \cos\theta\vec{e}_\theta)\cdot\dot{\varphi}$

$\dot{\vec{r}} = (r\vec{e}_r)' = \dot{r}\vec{e}_r + r\cdot\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_\varphi\cdot\dot{\varphi})$

$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e}_r + 2\dot{r}(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_\varphi\cdot\dot{\varphi}) + r(\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_\varphi\dot{\varphi} + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi -$

$- \dot{\theta}^2\vec{e}_r + \dot{\varphi}\sin\theta(-\sin\theta\vec{e}_r - \cos\theta\vec{e}_\theta)\dot{\varphi}) = \vec{e}_r(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\cdot r) +$

$+ \vec{e}_\theta(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta r) + \vec{e}_\varphi(2\dot{r}\sin\theta\cdot\dot{\varphi} + r\cdot\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta r)$

На $\mathbb{R}^3$ без оси z ~~перехода~~ якобиан перехода отличен от 0, $\Rightarrow$ переход к сферическим будет нетривиальным.