Лекция 4. Условия Коши-Римана

Теория функций комплексного переменного

Уравнения Коши-Римана

$$f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y). \tag{2.4}$$

Предложение 2.14. *Если отображение f, задаваемое формулой* (2.4), *является комплексно дифференцируемым в некоторой точке, то в этой точке имеем*

$$\begin{aligned} \partial u/\partial x &= \partial v/\partial y, \\ \partial u/\partial y &= -\partial v/\partial x. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Если отображение f (или, равносильно, функции u и v) принадлежит классу C^1, то f голоморфно на U тогда и только тогда, когда всюду на U выполняются соотношения (2.5).

Кто придумал условия Коши-Римана

*) Уравнения (8) получены в связи с гидродинамическими задачами Даламбером (1752) и Эйлером (1755); в 1777 г. Эйлер вновь получает эти уравнения в связи с рассмотрением интегралов от функции комплексного переменного. Однако их принято называть условиями Коши — Римана.

Закон Стиглера об эпонимии — эмпирическое наблюдение, описанное профессором статистики Стивеном Стиглером в 1980 г. В простейшей формулировке он гласит: **«Никакое научное открытие не было названо в честь первооткрывателя»**. Сам Стиглер считал, что первооткрывателем закона был Роберт Мертон, таким образом, закон Стиглера применим к самому себе.

В России этот закон называют принципом В.И. Арнольда.

Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783)

Французский учёный-энциклопедист. Широко известен как философ, математик и механик.

Член Парижской академии наук (1740), Французской Академии (1754), Лондонского королевского общества (1748), Петербургской академии наук (1764) и других академий.

Леонард Эйлер (1707-1783)

Базель – Санкт-Петербург –
Потсдам – Санкт-Петербург

Полное собрание сочинений Эйлера, издаваемое с 1909 года издательством Birkhauser, до сих пор не завершено; планировался выпуск 75 томов, из них вышло 73

Смысл условий Коши-Римана

- Функция имеет комплексную производную если она имеет вещественный дифференциал, который совпадает с оператором умножения на комплексное число.
- Матрица такого дифференциала (линейного отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$) имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$.
- Голоморфная функция с ненулевой производной сохраняет углы между кривыми.
- В частности, декартова координатная сетка отображается в некоторую ортогональную сетку кривых.

Альтернативная формулировка условий Коши-Римана

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{2.8}$$

Предложение-определение 2.20. Если f вещественно дифференцируема в точке $a \in U$, то ее вещественная производная в этой точке имеет вид

$$h \mapsto \frac{\partial f}{\partial z} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \bar{h}$$

Предложение 2.21. *Функция f комплексно дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда $(\partial f/\partial \bar{z})(a) = 0$.*

Если функция f принадлежит классу C^1, то она голоморфна в U в том и только том случае, когда $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ всюду на U.

Уравнение Лапласа

- Пусть $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет условиям Коши-Римана. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

- Функции u, v называются гармонически сопряженными гармоническими функциями.

Задача: найти гармонически сопряженную

- … функцию к функции $u(x, y) = y^2 - x^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v = -2xy + \phi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad v = -2xy + \psi(y)$$

Течение идеальной жидкости («сухой воды»)

- Поле скоростей не зависит от времени.
- Движение без трения, вихрей, сжатия или растяжения.
- Сохранение площади: $$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$
- Отсутствие (микро)вихрей: $$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$
- При этих условиях можно ввести «потенциалы» φ, ψ, такие, что

$$v_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Комплексный потенциал

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

- Комплексная производная: $\Omega'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y} = v_1 - iv_2$
- Как восстановить скорость: $\overline{\Omega'(z)} = \partial\phi/\partial x + i\partial\phi/\partial y = v_1 + iv_2$
- Равномерный поток определяется комплексным потенциалом вида $\Omega(z) = az, a \neq 0$.
- Обтекание круга: $\Omega(z) = v_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$

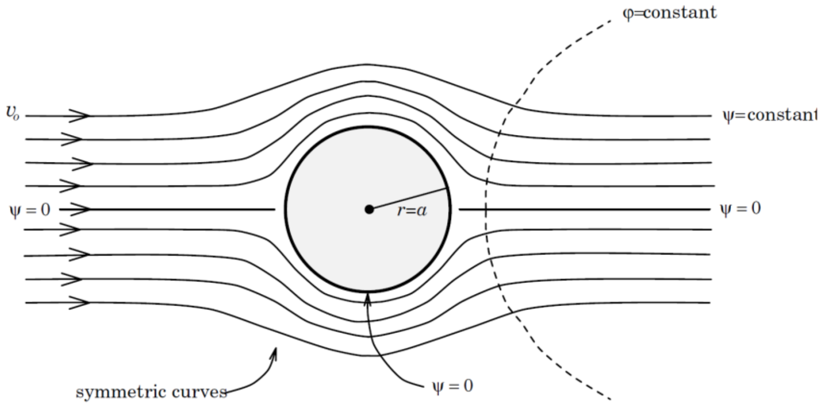
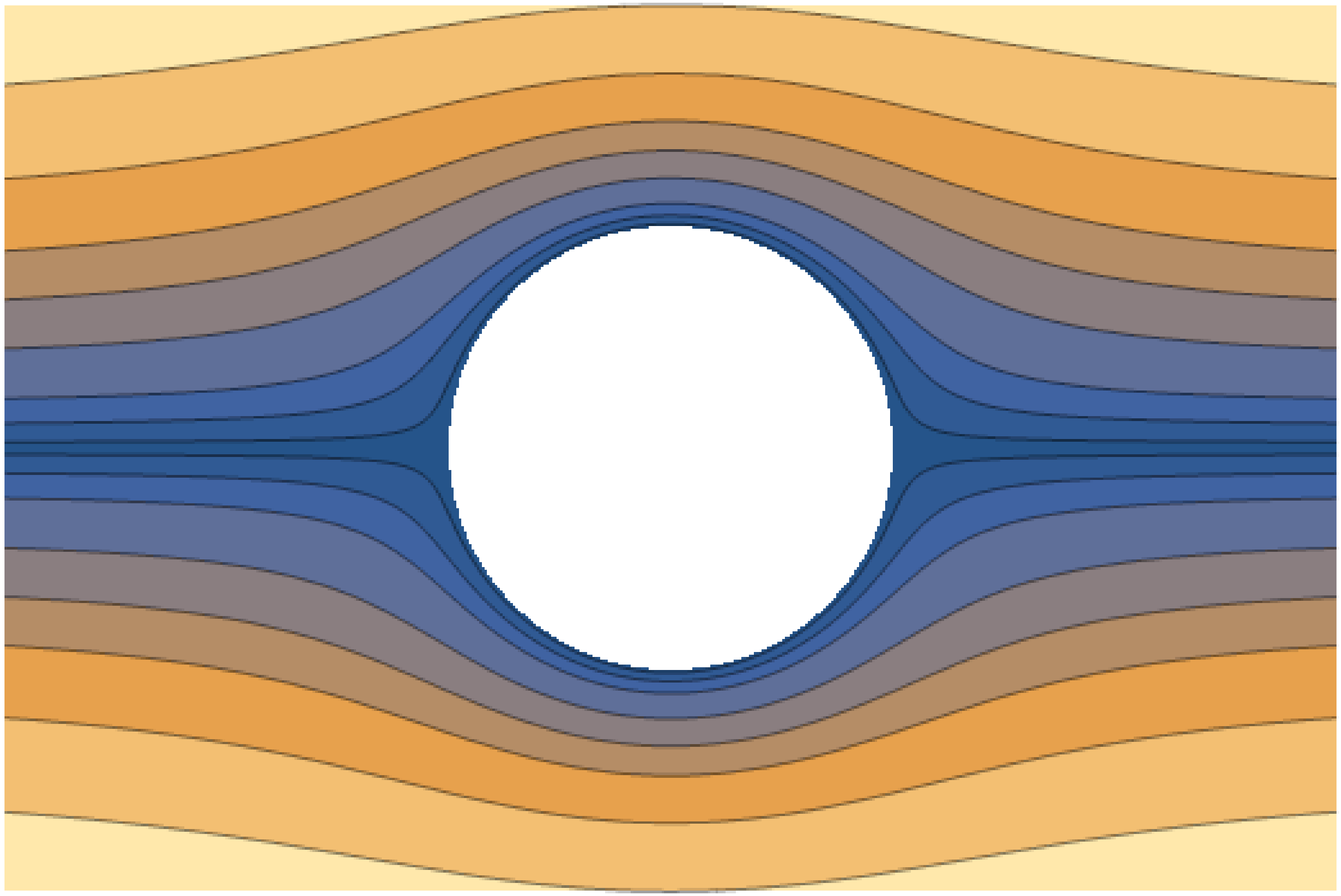


Fig. 2.1.2. Flow around a circular barrier

Обтекание круга



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- Wolfram Mathematica
- https://Wikipedia.org
- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- M.J. Ablowitz, A.S. Fokas, “Complex variables: introduction and applications”. Cambridge University Press.

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ