ЛИнЕЙноЕ проГрАММИроВАнИЕ

А.В. Колесников

Содержание

1. Линейное программирование. Классические задачи линейного программирования. Полиэдры и метод исключения переменных.

1.1. **Постановка задачи.** Задача линейного програмирования: поиск максимума (минимума) линейной функции на множестве, заданном системой линейных ограничений (равенств или неравенств).

Пример 1.1. *([5])*

$$x + y \to \min$$

Функция $x+y$ называется **целевой** *(objective function).*

$$x + 2y \geq 3$$

$$2x + y \geq 5$$

$$y \geq 0$$

Точка (x, y), удовлетворяющая системе неравенств выше, называется **допустимой** *(feasible). Система неравенств задает* **полиэдр**.

Минимум целевой функции достигается в одной из вершин полиэдра $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}), (3, 0)$. Непосредственно проверяется, что решением является точка $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$.

1.2. **Классические задачи линейного программирования.**

Пример 1.2. Задача о диете. *Дано m видов пищи $F_1, \cdots, F_m$, каждый вид содержит n питательных веществ $N_1, \cdots, N_n$. Пусть c_j — необходимая дневная порция j-го вещества, b_i — цена за единицу F_i, a_{ij} — количество N_j в F_i.*

Пусть y_i — дневное количество приобретаемого F_i. Надо составить рацион с минимальными затратами, покрывающий необходимую дневную порцию. Формальная постановка:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i y_i \to \min$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} y_k \geq c_j,$$

$$y_k \geq 0, \ 1 \leq k \leq m.$$

Пример 1.3. Транспортная задача. *Имеется n пунктов производства P_i и m пунктов назначения M_j некоторого товара. Стоимость перевозки единицы товара из P_i в M_j равна c_{ij}. Пункт P_i обладает s_i единицами этого товара, а пункт M_j нуждается в r_j единицах. Необходимо минимизировать общую стоимость перевозки*

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{j} x_{ij} \leq s_i,$$

$$\sum_{i} x_{ij} \geq r_j,$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Пример 1.4. The Activity Analysis Problem. *Имеется n различных видов деятельности A_j, практикуемых в некоторой компании, и m ресурсов, необходимых для этих видов деятельности (время, материальные ресурсы и пр.). Пусть ресурс R_i доступен в количестве b_i. Пусть также ресурс R_i используется в количестве a_{ij} в деятельности A_j на единицу интенсивности. Соответственно, c_j — общая ценость для компании от оперирования единицей интенсивности A_j, а x_j — количество таких единиц.*

Необходимо максимизировать

$$\sum_j c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i,$$

$$x_j \geq 0.$$

Пример 1.5. Задача оптимального назначения. *Дано: I людей, способных совершить J работ. Ценность j-й работы, совершаемой i-ом человеком равна a_{ij}. Надо распределить работы между людьми, чтобы максимизировать ценность.*

$$\sum_{ij} a_{ij} x_{ij} \to \max$$

$$\sum_i x_{ij} \leq 1,$$

$$\sum_j x_{ij} \leq 1,$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Пример 1.6. Задача коммивояжера. *Дан полный граф K_n с n вершинами, в котором задана длина l_i каждого ребра. Путь, обходящий все вершины по одному разу, мы будем называть маршрутом. Необходимо найти кратчайший маршрут в графе.*

Произвольный маршрут коммивояжера можно рассматривать как подмножество ребер графа. Любое подмножество ребер можно представить как подмножество множества $\{0,1\}^{\binom{n}{2}} \subset \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$, где $0/1$ указывает на принадлежность ребра маршруту. В $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ рассмотрим многогранник коммивояжера Q, определяемый как выпуклая оболочка точек $\{0,1\}^{\binom{n}{2}}$, которые являются маршрутом. Вершины многогранника находятся в однозначном соответствии со всеми маршрутами на графе. Рассмотрим теперь линейную функцию в $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$:

$$l(x) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} l_i x_i.$$

Максимум l достигается в точности в одной из вершин многогранника. Поэтому задача коммервояжера сводится к задаче линейного программирования.

Далее неравенство $a \leq b$, где $a, b \in \mathbb{R}^n$ понимается покоординатно :

$$a_i \leq b_i, \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Определение 1.7. Стандартная форма задачи линейного программирования на максимум. *Переменная x принадлежит пространству $\mathbb{R}^n$. Задан вектор $c \in \mathbb{R}^n$, линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и вектор $b \in \mathbb{R}^m$. Изучается задача*

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max .$$

при ограничениях

$$Ax \le b,$$
$$x_i \ge 0,\ \forall 1 \le i \le n.$$

Стандартная форма задачи линейного программирования на минимум. *В тех же обозначениях, что и выше, изучается задача*

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min .$$

при ограничениях

$$Ax \ge b,$$
$$x_i \ge 0,\ \forall 1 \le i \le n.$$

1.3. **Элементы теории многогранников.** Материал: [3], Глава 0.

Определение 1.8. Выпуклое множество. *Множество M называется выпуклым, если для всех $x, y \in M$ и $0 \le \lambda \le 1$ выполнено $(1-\lambda)x + \lambda y \in M$.*

Определение 1.9. Выпуклая оболочка. *Выпуклой оболочкой*

$$\mathrm{conv}(M)$$

множества M называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих M.

Определение 1.10. Полиэдр. *Полиэдром называется пересечение конечного числа замкнутых полупространств. $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ — матрица, $z \in \mathbb{R}^m$*

$$P = P(A, z) = \{x \in \mathbb{R}^d\colon Ax \le z\}.$$

Ниже даны два определения многогранника (мы увидим, что они эквивалентны).

Определение 1.11. Многогранник 1. *Многогранником называется ограниченный полиэдр.*

Определение 1.12. Многогранник 2. *Многогранником называется выпуклая оболочка конечного числа точек.*

Определение 1.13. Грани многранника. *Гранью многогранника называется такое пересечение многогранника с гиперплоскостью, при котором он весь полностью лежит в одном из замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью.*

Вершины, ребра и гиперграни считаются гранями, а также сам многогранник и пустое множество.

Определение 1.14. Конус. *Множество, содержащее с любым конечным набором точек $\{x_i\} \subset M$ все их линейные комбинации $t_1x_1 + \dots + t_nx_n, t_i \ge 0$ с неотрицательными коэффициентами, называется конусом.*

Определение 1.15. Коническая оболочка. *Конической оболочкой*

$$\mathrm{cone}(M)$$

множества M называется пересечение всех конусов, содержащих M.

Следующий результат дает точное описание проекции полиэдра.

Теорема 1.16. (Метод Фурье-Моцкина исключения переменных.) *Пусть $P = P(A,z) \subset \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$, $z \in \mathbb{R}^m$ и пусть выбрано число $k \leq d$. Построим матрицу $A^{/k} \subset \mathbb{R}^{n'\times d}$, строками которой являются*

- *строки $\mathbf{a}_i$ матрицы A, для которых $a_{ik} = 0$*
- *суммы $a_{ik}\mathbf{a}_j + (-a_{jk})\mathbf{a}_i$ для всех пар i,j, для которых $a_{ik} > 0, a_{jk} < 0$,*

и пусть $z^{/k} \in \mathbb{R}^{m'}$ — соответствующий вектор-столбец с коэффициентами

- *z_i для всех i, для которых $a_{ik} = 0$, и*
- *$a_{ik}z_j + (-a_{jk})z_i$ для всех пар i,j, для которых $a_{ik} > 0, a_{jk} < 0$.*

Тогда
$$proj_k(P) = P(A^{/k}, z^{/k}) \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x_k = 0\}.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{P}_k$ — множество, полученное умножением $proj_k(P)$ на k-ю ось координат. Так как P описывается системой неравенств $\mathbf{a}_i x \leq z_i$, очевидно, те строки $\mathbf{a}_i$ матрицы A, которые не содержат переменной x_k (т.е. $a_{ik} = 0$), описывают также ограничения для множества $\tilde{P}_k$.

Рассмотрим теперь пару строк $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$, где $a_{ik} > 0$, $a_{jk} < 0$. Запишем ограничения $\leq z_i$, $\langle \mathbf{a}_j, x\rangle \leq z_j$ в виде
$$x_k \leq \frac{1}{a_{ik}}\Big(z_i + a_{ik}x_k - \langle \mathbf{a}_i, x\rangle\Big) \tag{1}$$
$$x_k \geq \frac{1}{-a_{jk}}\Big(-a_{jk}x_k + \langle \mathbf{a}_j, x\rangle - z_j\Big). \tag{2}$$
Заметим, что правые части обоих неравенств не содержат переменную x_k. Точка $\hat{x}_k = (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n)$ тогда и только тогда принадлежит $proj_k(P)$, когда найдется такое число x_k, что $\hat{x}_k, x_k$ удовлетворяют неравенствам (1), (2) для всех i,j со свойствами $a_{ik} > 0, a_{jk} < 0$. Для существования такого x_k необходимо и достаточно, чтобы для всех таких пар i,j было выполнено неравенство
$$\frac{1}{-a_{jk}}\Big(-a_{jk}x_k + \langle \mathbf{a}_j, x\rangle - z_j\Big) \leq \frac{1}{a_{ik}}\Big(z_i + a_{ik}x_k - \langle \mathbf{a}_i, x\rangle\Big).$$
Последнее эквивалентно неравенству
$$a_{ik}\langle \mathbf{a}_j, x\rangle + (-a_{jk})\langle \mathbf{a}_i, x\rangle \leq a_{ik}z_j + (-a_{jk})z_i. \tag{3}$$
Таким образом, системы неравенств (3) задают множество $\tilde{P}_k$. Теорема доказана. □

Следствие 1.17. *Проекцией полиэдра является полиэдр.*

Примеры взяты из
http://www.cs.cmu.edu/ odonnell/toolkit13/lecture13-anonymous.pdf
http://community.wvu.edu/ krsubramani/courses/sp01/approx/qen/n2.pdf

Пример 1.18. *Рассмотрим систему неравенств с 3 переменными и 5 ограничениями:*
$$\begin{cases} x - 5y + 2z \geq 7, \\ 3x - 2y - 6z \geq -12, \\ -2x + 5y - 4z \geq -10, \\ -3x + 6y - 3z \geq -9, \\ -10y + z \geq -15. \end{cases}$$

Проверим, что данная система имеет решение, используя элиминацию Фурье-Моцкина.

Первым шагом исключим переменную x. Для этого умножим каждое неравенство на положительный коэффициент, чтобы коэффициент при x в каждом неравенстве оказался равен -1, 1 или 0. Получим следующую эквивалентную систему неравенств:

$$\begin{cases} x - 5y + 2z \geq 7, \\ x - \frac{2}{3}y - 2z \geq -4, \\ -x + \frac{5}{2}y - 2z \geq -5, \\ -x + 2y - z \geq -3, \\ -10y + z \geq -15. \end{cases}$$

После этого запишем неравенства в виде $x \geq c_i y + d_i z + e_i$ или $x \leq c_i y + d_i z + e_i$ в зависимости от того, равен коэффициент перед x 1 или -1:

$$\begin{cases} x \geq 5y - 2z + 7, \\ x \geq \frac{2}{3}y + 2z - 4, \\ x \leq \frac{5}{2}y - 2z + 5, \\ x \leq 2y - z + 3, \\ -10y + z \geq -15. \end{cases}$$

Для каждой пары неравенств вида $x \geq c_i y + d_i z + e_i$ и $x \leq c_j y + d_j z + e_j$ мы получаем ограничение $c_j y + d_j z + e_j \geq c_i y + d_i z + e_i$, не содержащее x. Все такие ограничения, а также исходные неравенства, не содержащие x, задают проекцию многогранника допустимых решений на плоскость переменных y и z:

$$\begin{cases} \frac{5}{2}y - 2z + 5 \geq 5y - 2z + 7, \\ 2y - z + 3 \geq 5y - 2z + 7, \\ \frac{5}{2}y - 2z + 5 \geq \frac{2}{3}y + 2z - 4, \\ 2y - z + 3 \geq \frac{2}{3}y + 2z - 4, \\ -10y + z \geq -15. \end{cases}$$

Теперь исключим переменную z. Система неравенств выше эквивалентна следующей (порядок неравенств сохранен):

$$\begin{cases} \frac{5}{2}y \leq -2, \\ z \geq 3y + 4, \\ z \leq \frac{11}{24}y + \frac{9}{4}, \\ z \leq \frac{4}{9}y + \frac{7}{3}, \\ z \geq 10y - 15. \end{cases}$$

После исключения переменной z получаем проекцию многогранника на ось Oy:

$$\begin{cases} \frac{5}{2}y \leq -2, \\ \frac{11}{24}y + \frac{9}{4} \geq 3y + 4, \\ \frac{4}{9}y + \frac{7}{3} \geq 3y + 4, \\ \frac{11}{24}y + \frac{9}{4} \geq 10y - 15, \\ \frac{4}{9}y + \frac{7}{3} \geq 10y - 15, \end{cases} \iff \begin{cases} y \leq -\frac{4}{5}, \\ y \leq -\frac{42}{61}, \\ y \leq -\frac{15}{23}, \\ y \leq \frac{414}{229}, \\ y \leq \frac{78}{43}, \end{cases} \iff y \leq -\frac{4}{5}.$$

Проекция многогранника – непустое множество, а значит система неравенств имеет решение.

Пример 1.19. *Решите задачу линейного программирования методом Фурье-Моцкина.*

$$\begin{aligned} 2x+3y \to \max, \\ x-2y \leq 4, \\ 2x+y \leq 18, \\ y \leq 10, \\ x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Указание: введите дополнительную переменную z *и ограничение* $z \leq 2x+3y$*. После этого найдите проекцию многогранника*

$$\begin{cases} z \leq 2x+3y, \\ x-2y \leq 4, \\ 2x+y \leq 18, \\ y \leq 10, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

на ось Oz*. Максимальное значение* z *на данной проекции и будет ответом в исходной задаче. Сначала исключим переменную* x*:*

$$\begin{cases} z \leq 2x+3y, \\ x-2y \leq 4, \\ 2x+y \leq 18, \\ y \leq 10, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ x \leq 2y+4, \\ x \leq -\frac{1}{2}y+9, \\ y \leq 10, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2y+4 \geq 0, \\ -\frac{1}{2}y+9 \geq 0, \\ 2y+4 \geq -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ -\frac{1}{2}y+9 \geq -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ y \leq 10, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2y+4 \geq -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ -\frac{1}{2}y+9 \geq -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ y \leq 10, \\ y \geq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{7}z-\frac{8}{7}, \\ y \geq \frac{1}{2}z-9, \\ y \leq 10, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Исключим переменную y*:*

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{7}z-\frac{8}{7}, \\ y \geq \frac{1}{2}z-9, \\ y \leq 10, \\ y \geq 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10 \geq \frac{1}{7}z-\frac{8}{7}, \\ 10 \geq \frac{1}{2}z-9, \\ 10 \geq 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z \leq 78, \\ z \leq 38, \end{cases} \Longleftrightarrow z \leq 38.$$

Следовательно, 38 – максимальное значение целевой функции.

2. Многранники, полиэдры, конусы. Теорема о линейных неравенствах. Лемма Фаркаша.

Определение 2.1. Сумма Минковского. *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — два множества. Их суммой Минковского $A+B$ называется множество*

$$A + B = \{x + y,\ x \in A, y \in B\}.$$

Пример 2.2. *Найдите суммы Минковского следующих множеств:*

- $A = \{x \in [0,1], y = 0\} \subset \mathbb{R}^2, A = B$
- $A = \{x \in [0,1], y = 0\} \subset \mathbb{R}^2,\ A = \{y \in [0,1], x = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
- $A = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2, B = \{x^2 + y^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема 2.3. *Пусть $V = \{v_1, \cdots, v_k\}$, $Y = \{y_1, \cdots, y_m\}$ — конечные множества. Если множество M является суммой Минковского*

$$M = \mathrm{cone}(Y) + \mathrm{conv}(V), \tag{4}$$

то оно является полиэдром.

Доказательство. Множество M является проекцией множества

$$M' = \Big\{(x,t,s) : x = \sum_{i=1}^{k} t_i v_i + \sum_{i=1}^{m} s_j y_j,\ v_i \in V, y_j \in Y, t_i \ge 0, s_j \ge 0, \sum_{i=1}^{k} t_i = 1\Big\} \subset \mathbb{R}^{n+m+k}.$$

Результат следует из того, что M', очевидно, полиэдр, и из того, что проекция полиэдра является полиэдром. $\square$

Отступление: теория смешанных объемов.

Следующий фундаментальный результат получен Минковским. Он лежит в основе теории смешаных объемов, богатой результатами и важной теории, оказавшей большое влияние на математику двадцатого века. С этой ней можно познакомиться по книге Р. Шнайдера "Выпуклые тела: теория Брунна–Минковского".

Теорема 2.4. *Пусть $K_1, \cdots, K_n$ — непустые компактные выпуклые тела. Тогда имеет место представление*

$$\mathrm{Vol}(t_1 K_1 + t_2 K_2 + \cdots + t_n K_n) = \sum_{i_1, \cdots i_n = 1}^{n} V(K_{t_1}, \cdots, K_{t_n}) t_{i_1} \cdots t_{i_n}$$

для всех $t_i \ge 0$, где величины $V(K_{t_1}, \cdots, K_{t_n})$ называются смешанными объемами $K_{t_1}, \cdots, K_{t_n}$.

Лемма 2.5. *Пусть C — полиэдральный конус, т.е. конус вида*

$$C = P(A, 0).$$

Тогда $C = \mathrm{cone}(V)$ для некоторого конечного множества V.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a_i}$ — строки матрицы A. Рассмотрим конус $C' = \mathrm{cone}(\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n})$. Так как каждый конечнопорожденный конус является полиэдром, то

$$C' = \{x : \langle b_1, x\rangle \le 0, \cdots, \langle b_m, x\rangle \le 0\}$$

для некоторого набора векторов $\{b_1, \cdots, b_m\}$. Докажем, что C совпадает с

$$\mathrm{cone}(b_1, \cdots b_m).$$

Действительно, поскольку $\langle b_i, \mathbf{a_j}\rangle \le 0$, то $b_i \in C$ для любого i, следовательно

$$\mathrm{cone}(b_1, \cdots b_m) \subset C.$$

Пусть $y \notin \operatorname{cone}(b_1, \cdots b_m), y \in C$. Так как $\operatorname{cone}(b_1, \cdots b_m)$ является полиэдром $P(A', 0)$, то найдется такая строка ω матрицы A', что $\langle b_i, \omega\rangle \leq 0$ и $\langle \omega, y\rangle > 0$. Но тогда $\omega \in C' = \operatorname{cone}(\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n})$ и $\langle \omega, x\rangle \leq 0$ для всех $x \in C$, что противоречит условию $\langle \omega, y\rangle > 0$. □

Теорема 2.6. *Любой полиэдр представляется в виде (4).*

Доказательство. Рассмотрим полиэдр $P = P(A, z)$. По предыдущей лемме полиэдральный конус

$$K = \{(x, \lambda) : x \in \mathbb{R}^n, \lambda \geq 0, Ax - \lambda z \leq 0\}.$$

порожден конечным набором векторов $(b_i, \lambda_i), 1 \leq i \leq m$. Без ограничения общности считаем, что $\lambda_i \in \{0, 1\}$. Положим

$$Q = \operatorname{conv}(b_i : \lambda_i = 1),$$
$$C = \operatorname{cone}(b_i : \lambda_i = 0).$$

Очевидно, $x \in P$ тогда и только тогда, когда $(x, 1) \in K$, т.е.

$$(x, 1) \in \operatorname{cone}((b_1, \lambda_1), \cdots, (b_m, \lambda_m)).$$

Следовательно, $P = Q + C$. □

Следствие 2.7. *Два определения многогранника равносильны, т.е. множество ограниченных полиэдров совпадает со множеством выпуклых оболочек конечного числа точек.*

Теорема 2.8. (Основная теорема о линейных неравенствах). *Пусть $a_1, \cdots, a_m, b$ — векторы в $\mathbb{R}^n$. Имеет место следующая альтернатива.*

(1) *Вектор b является неотрицательной линейной комбинацией*

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \;\; \lambda_i \geq 0$$

некоторого множества линейно независимых векторов из $\{a_1, \cdots, a_m\}$

(2) *Найдется такая гиперплоскость $\{x : \langle c, x\rangle = 0\}, c \in \mathbb{R}^n$, содержащая $t - 1$ линейно независимых векторов из $\{a_1, \cdots, a_m\}$, где $t = \operatorname{rank}\{a_1, \cdots, a_m, b\}$, что*

$$\langle c, b\rangle < 0, \;\; \langle c, a_i\rangle \geq 0, \;\; \forall\; 1 \leq i \leq m.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\{a_1, \cdots, a_m\}$ порождают все линейное пространство $\mathbb{R}^n$. Заметим, что условия (1) и (2) исключают друг друга. Действительно, пусть выполнено соотношение

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \;\; \lambda_i \geq 0.$$

Возьмем скалярное произведение с c. Получим

$$\langle c, b\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle c, a_i\rangle.$$

Очевидно, это противоречит (2).

Покажем, что по крайней мере одно из условий (1), (2) выполнено. Выберем базис $D_1 = \{a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\}$ в $\{a_1, \cdots, a_m\}$ и применим следующий итеративный процесс.

(1) Разложим b по базису $\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\}$. Если все коэффициенты в разложении неотрицательны, то мы в ситуации (1).

(2) В противном случае выберем наименьшее k среди $\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\}$ с отрицательным коэффициентом λ_k. Пусть $\{x \colon \langle c, x\rangle = 0\}$ — гиперплоскость, содержащая $\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\} \setminus a_k$, при этом $\langle c, a_k\rangle = 1$ (отсюда следует, что $\langle c, b\rangle = \lambda_k < 0$).

(3) Если $\langle c, a_i\rangle \geq 0$ для всех $1 \leq i \leq m$, то выполнено (2).

(4) Если нет, то выберем наименьшее s, для которого $\langle c, a_s\rangle < 0$. И заменим D_1 на $D_2 = D_1 \setminus \{a_k\} \cup \{a_s\}$. Очевидно, D_2 — новый базис. Начнем итерацию снова.

Достаточно доказать, что процесс остановится. Если это не так, то из конечности множества базисов вытекает, что

$$D_a = D_b$$

для некоторых $a < b$.

Пусть r — максимальный из номеров $\{1, \cdots, m\}$, для которого вектор a_r выводился из какого-либо из множеств $D_a, \cdots, D_{b-1}$ на шаге (4). Пусть это множество D_p. С другой стороны, так как $D_a = D_b$, то этот вектор вводился в некоторое множество D_q, $p < q$. Таким образом,

$$D_p \cap \{a_{r+1}, \cdots, a_m\} = D_q \cap \{a_{r+1}, \cdots, a_m\}. \tag{5}$$

Разложим b по базису $D_p = \{a_{j_1}, \cdots, a_{j_n}\}$

$$b = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j_k} a_{j_k}.$$

и умножим на вектор c_q из пункта (2) итерации D_q. Тогда, с одной стороны, по построению $\langle c_q, b\rangle < 0$. С другой стороны, это противоречит тому, что $\lambda_{j_k}\langle c_q, a_{j_k}\rangle \geq 0$ для всех $1 \leq k \leq n$. Докажем последнее утверждение.

Действительно, так как a_r выводится из D_p, то $\lambda_{i_j} \geq 0$ для всех $i_j < r$. Кроме того, так как a_r вводится в D_q, то $\langle c_q, a_{i_j}\rangle > 0$. Поэтому $\lambda_{i_j}\langle c_q, a_{i_j}\rangle \geq 0$ для всех $i_j < r$.

По тем же соображениям $\lambda_{i_j} < 0$, $\langle c_q, a_{i_j}\rangle < 0$, если $i_j = r$.

Если $i_j > r$, то $\langle c_q, a_{i_j}\rangle = 0$ в силу (2) и (5). □

Следствие 2.9. (Теорема Каратеодори) *Если $C = \mathrm{cone}(X)$ для некоторого множества $X \subset \mathbb{R}^n$, то для любого $x \in X$ найдутся такие линейно независимые векторы $x_1, \cdots, x_m$, что $x \in \mathrm{cone}(x_1, \cdots, x_m)$*

Лемма 2.10. (Лемма Фаркаша 1) *Пусть $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$. Существование неотрицательного $x \geq 0$ решения уравнения $Ax = b$ равносильно тому, что $\langle y, b\rangle \geq 0$ для любого вектора y, удовлетворяющего условию $A^T y \geq 0$.*

Доказательство. Для доказательства необходимости умножим соотношение $Ax = b$ скалярно на y. Получаем

$$\langle y, b\rangle = \langle y, Ax\rangle = \langle A^T y, x\rangle \geq 0.$$

Докажем достаточность от противного. Пусть не существует $x \geq 0$, для которого $Ax = b$ имеет решение. Это значит, что b не принадлежит конусу $\mathrm{cone}(\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n})$, где $\mathbf{a_i}$ — столбцы матрицы A. Но тогда по теореме 2.8 существует y со свойством $\langle y, b\rangle < 0$, при этом $A^T y \geq 0$. □

Замечание 2.11. *Геометрически лемма Фаркаша означает, что если b не принадлежит конусу, порожденному $\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n}$, то существует гиперплоскость, отделяющая b от этого конуса. Здесь имеется связь с теоремой Хана–Банаха, которую мы обсудим позже.*

Следствие 2.12. (Лемма Фаркаша 2). *Разрешимость системы линейных неравенств $Ax \leq b$ эквивалентно тому, что $\langle b, y\rangle \geq 0$ для любого $y \geq 0$ со свойством $A^T y = 0$.*

Доказательство. Если существует x со свойством $Ax \leq b$, то умножая неравенство на $y \geq 0$ со свойством $A^T y = 0$, легко получаем $\langle b, y\rangle \geq 0$.

Для доказательства в обратную сторону рассмотрим матрицу A' размера $3n \times m$

$$A' = [IA - A].$$

Множество векторов y со свойством $(A')^T y \geq 0$ очевидно, удовлетворяет соотношению $y \geq 0$ и $A^T y = 0$. Поэтому в силу предыдущей версии леммы Фаркаша уравнение $A'x' = b$ имеет решение x' в неотрицательных переменных

$$x' = (x_1, x_2, x_3),\ x_i \in \mathbb{R}^n,\ x_i \geq 0.$$

Это значит

$$b = x_1 + A(x_2 - x_3) \geq A(x_2 - x_3).$$

Вектор $x_2 - x_3$ является искомым решением. □

Замечание 2.13. *Доказательство леммы Фаркаша методом исключения переменных можно найти в* [3] *(параграф 1.4.).*

3. Приложения леммы Фаркаша: Теорема Хана–Банаха об отделимости и теорема Хелли для многогранников.

Мы обсудим связь леммы Фаркаша с некоторыми классическими результатами выпуклого анализа. Одним из таких результатов является теорема Хана–Банаха. Ее геометрический вариант известен как теорема об отделимости, которую мы выведем (в частном случае многогранников) из леммы Фаркаша в конечномерном случае.

Теорема 3.1. Теорема об отделимости для многогранников. *Пусть A, B — многогранники, которые не пересекаются. Тогда существует такая аффинная функция l, что $l_A \geq 1$, $l_B \leq -1$.*

Доказательство. Так как многогранники являются выпуклыми оболочками конечного числа точек

$$A = \mathrm{conv}(a_1, \cdots, a_m),\ B = \mathrm{conv}(b_1, \cdots, b_k),$$

то задача сводится к решению системы аффинных неравенств

$$l(a_i) \geq 1,\ l(b_j) \leq -1,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq k$$

относительно l. Из леммы Фаркаша следует, что если система аффинных неравенств $L_i(x) \geq 0$ не имеет решения, то существуют такие неотрицательные числа q_i, что $\sum_i q_i L_i = -1$ (докажите!). Отсюда следует, что если решения не существует,то для некоторых неотрицательных чисел q_i, r_j со свойствами

$$\sum_{i=1}^{m} q_i(l(a_i) - 1) + \sum_{j=1}^{k} r_j(-l(b_j) - 1) = -1$$

для всех l. В частности, отсюда сразу вытекает (если взять за l произвольную константу), что

$$\sum_i q_i = \sum_j r_j = \frac{1}{2}.$$

В силу произвольности l

$$\sum_{i=1}^{m} 2q_i a_i = \sum_{j=1}^{k} 2r_j b_j.$$

Но левая часть принадлежит A, а правая B. Мы получаем, что пересечение A и B непусто. $\square$

Теорема 3.2. Теорема об отделимости: общий случай. *Пусть A, B — компактные выпуклые тела, которые не пересекаются. Тогда существует такая аффинная функция l, что $l_A \geq 1$, $l_B \leq -1$.*

Теорема 3.3. (Теорема Хелли) *Пусть $B_1, \cdots, B_m \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые тела, $m > n$. Если любые $n+1$ из этих тел имеют непустое пересечение, то все тела имеют общую точку.*

Доказательство. Ограничимся случаем полиэдров. Так как каждый полиэдр является пересечением конечного числа полупространств, то теорему достаточно доказывать для случая, когда тела являются полупространствами. В этом случае пустота пересечения B_i эквивалентна тому, что соответствующая система линейных неравенств

$$\langle l_i, x \rangle \geq c_i$$

не имеет решения. В этом случае в силу варианта леммы Фаркаша (см. доказательство предыдущей теоремы) вектор $(0, 0, \cdots, 0, -1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами векторов (l_i, c_i). В силу теоремы Каратеодори существует не более чем $n+1$ векторов из этого набора, для которых некоторая линейная комбинацией с неотрицательными коэффициентами равна $(0, 0, \cdots, 0, -1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Применяя опять лемму Фаркаша, получаем, что пересечение соответствующих полупространств пусто. $\square$

4. Двойственность в линейном программировании.

Рассмотрим следующий пример

$$x_1 + x_2 \to \max$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

Очевидно, линейная комбинация трех последних неравенств с неотрицательными коэффициентами y_1, y_2, y_3 приводит к следующему неравенству

$$(y_1 + 4y_2 - y_3)x_1 + (2y_1 + 2y_2 + y_3)x_2 \leq 4y_1 + 12y_2 + y_3.$$

Будем подбирать y_i таким образом, чтобы коэффициенты при x_i мажорировали коэффициенты целевой функции $x_1 + x_2$:

$$1 \leq y_1 + 4y_2 - y_3$$

$$1 \leq 2y_1 + 2y_2 + y_3.$$

При этих условиях мы получим

$$x_1 + x_2 \leq (y_1 + 4y_2 - y_3)x_1 + (2y_1 + 2y_2 + y_3)x_2 \leq 4y_1 + 12y_2 + y_3.$$

Таким образом, с исходной задачей естественно связана другая задача линейного программирования

$$4y_1 + 12y_2 + y_3 \to \min$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1$$

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1.$$

Из выкладок легко следует следующее наблюдение: **значение целевой функции в задаче на максимум в любой допустимой точке** x **никогда не превосходит значение целевой функции в задаче на минимум в любой допустимой точке** y.

В частности, **если на некоторых допустимых точках** x^*, y^* **значения целевых функций совпадают, то** x^*, y^* **являются решениями**.

Исходная задача легко решается вручную: $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$. Значение целевой функции равно $\frac{10}{3}$. В задаче на минимум точка

$$y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{1}{6},\ y_3 = 0$$

является допустимой и значение целевой функции равно $\frac{10}{3}$. Следовательно, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0)$ является решением.

Этот пример показывает, что с задачей линейного программирования (**прямая задача**)

$$\langle c, x\rangle \to \max$$

$$Ax \leq b,\ x \geq 0$$

естественно связана (**двойственная задача**)

$$\langle b, y\rangle \to \min$$

$$A^T y \geq c,\ y \geq 0.$$

Обобщая рассуждения выше мы легко получаем следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть x^*, y^* — допустимые точки в прямой и двойственной задачах линейного программирования. Тогда*

$$\langle c, x^*\rangle \leq \langle b, y^*\rangle.$$

Если

$$\langle c, x^*\rangle = \langle b, y^*\rangle,$$

то x^*, y^* — решения прямой и двойственной задачи линейного программирования.

Таким образом, для прямой и двойственной задачи линейного программирования выполнено сооотношение

$$\sup_{Ax\leq b,\ x\geq 0} \langle c, x\rangle \leq \inf_{A^T y\geq c,\ y\geq 0} \langle b, y\rangle.$$

Оказывается, что при широких предположениях имеет место точное равенство.

Лемма 4.2. *Имеет место равенство*

$$\max_{\{Ax\leq b\}} \langle c, x\rangle = \min_{\{A^T y = c, y\geq 0\}} \langle b, y\rangle$$

если множества $\{Ax \leq b\}$, $\{A^T y = c, y \geq 0\}$ непусты.

Доказательство. Стандартным образом доказывается, что $\max \le \min$.

Для доказательства обратного неравенства надо доказать существование x и $y \ge 0$ со свойствами
$$Ax \le b,\ y \ge 0,\ A^T y = c,\ \langle c, x\rangle \ge \langle b, y\rangle.$$
Это эквивалентно условиям
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -c & b \\ 0 & A^T \\ 0 & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ c \\ -c \end{pmatrix}$$
В силу леммы Фаркаша эти условия эквивалентны тому, что для переменных
$$u \ge 0, \lambda \ge 0, v \ge 0, \omega \ge 0,$$
удовлетворяющих условиям
$$A^T u - \lambda c = 0,$$
$$\lambda b + A(v - \omega) \ge 0,$$
выполнено
$$\langle u, b\rangle + \langle c, v - \omega\rangle \ge 0.$$
Действительно, если $\lambda > 0$, то
$$\langle u, b\rangle = \lambda^{-1}\lambda\langle u, b\rangle \ge \lambda^{-1}\langle A(\omega - v), u\rangle = \langle \omega - v, c\rangle.$$
Если $\lambda = 0$, то в силу существования x_0, y_0 со свойством
$$Ax_0 \le b,\ y_0 \ge 0,\ A^T y_0 = c$$
получаем
$$\langle u, b\rangle \ge \langle u, Ax_0\rangle = 0 \ge \langle A(\omega - v), y_0\rangle = \langle c, \omega - v\rangle.$$
□

Теорема 4.3. *Пусть множества допустимых значений обеих задач*
$$\{Ax \le b, x \ge 0\},\ \{A^T y \ge c, y \ge 0\}$$
непусты. Тогда
$$\max_{\{Ax \le b, x \ge 0\}} \langle c, x\rangle = \min_{\{A^T y \ge c, y \ge 0\}} \langle b, y\rangle.$$

Доказательство. Заметим, что условия $Ax \le b, x \ge 0$ эквивалентны условиям
$$\begin{pmatrix} -I \\ A \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$
В силу предыдущей леммы
$$\max_{\{Ax \le b, x \ge 0\}} \langle c, x\rangle = \min_{\{v \ge 0, y \ge 0, -v + A^T y = c\}} \langle b, y\rangle = \min_{\{y \ge 0, A^T y \ge c\}} \langle b, y\rangle.$$
□

Таким образом, для пары двойственных задач выполнены следующие взаимоисключающие возможности.

- Обе задачи допустимы, тогда существуют решения обеих задач, значения задач конечны и равны.
- Обе задачи недопустимы. Например,
$$A = 0,\ b = (-1, \cdots, -1),\ c = (1, \cdots, 1).$$

- Одна из задач допустима, а другая нет. Тогда допустимая задача неограничена. Докажем это для задачи в форме леммы 4.2 (для доказательства этого факта в стандартной форме надо воспользоваться аргументами теоремы 4.3). Итак, надо доказать, что если $Ax_0 \leq b$ для некоторого x_0 и не существует неотрицательного y со свойством $A^T y = c$, то
$$\max_{\{Ax \leq b\}} \langle c, x \rangle = +\infty.$$
Действительно, из леммы Фаркаша следует, что существует y^* со свойствами $\langle y^*, c \rangle < 0$, $Ay^* \geq 0$. Но тогда
$$\sup_{t>0} \langle c, x_0 - ty^* \rangle = +\infty,$$
при этом $A(x_0 - ty^*) \leq b$.

5. Симплекс-метод

Симплекс-метод — наиболее известный алгоритм по решению задачи линейного программирования. Он был придуман Данцигом в 40-х годах. Геометрически суть симплекс-метода состоит в следующем: находится вершина многогранника, а далее выбирается соседняя вершина, на которой значение целевой функции больше. Так продолжается до тех пор, пока не найдется точка максимума.

Ниже мы опишем алгебраическое изложение симплекс-метода, следуя [5].

Сопоставим стандартной задаче ЛП
$$\langle c, x \rangle \to \max, \ Ax \leq b, \ x \geq 0$$
следующую сводную таблицу.

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_m	a_{n1}	a_{2n}	$\cdots$	a_{mn}	b_n
	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_m$	0

Таблица задает связь между переменными $x \geq 0$, $y \geq 0$:
$$x_j = \sum_i a_{ij} y_i - c_j.$$

Замечание 5.1. *Пусть $b \geq 0, c \leq 0$. Тогда, очевидно, $x = 0$ является решением.*

Симплекс-метод сводит стандартную задачу к этому случаю путем последовательных преобразований, в которых переменные y и x меняются местами.

Случай 1. Пусть $b \geq 0$.

Рассмотрим пример:
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \to \min$$
$$-y_2 + 2y_3 \geq 1$$
$$y_1 + y_3 \geq 1$$
$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

	x_1	x_2	x_3	
y_1	0	1	2	3
y_2	-1	0	3	2
y_3	2	1	1	1
	-1	-1	-2	0

Правило 1 : Выберем любой столбец отрицательнымпоследним элементом, пусть это будет столбец j_0 с $-c_{j_0} < 0$. Среди всех i, для которых $a_{i,j_0} > 0$, выберем такой индекс i_0, что отношение $b_i/a_{i,j_0}$ наименьшее (если таких несколько, выберем одно из них). Далее перепишем зависимость между переменными так, чтобы x_{i_0} оказалась в числе переменных слева, а y_{j_0} сверху (pivot a_{i_0,j_0}).

В рассматриваемом примере возьмем второй столбец и третью строку. В зависимости

$$x_1 = -y_2 + 2y_3 - 1$$

$$x_2 = y_1 + y_3 - 1$$

$$x_3 = 2y_1 + 3y_2 + y_3 - 2$$

Выразим y_3 через x_2 и остальные переменные

$$y_3 = -y_1 + x_2 + 1$$

Получим

$$x_1 = -2y_1 - y_2 + 2x_2 + 1$$

$$x_3 = y_1 + 3y_2 + x_2 - 1$$

Выразим через переменные y_1, y_2, x_2 функцию стоимости в двойственной задаче

$$3y_1 + 2y_2 + y_3 = 2y_1 + 2y_2 + x_2 + 1$$

	x_1	y_3	x_3	
y_1	-2	-1	1	2
y_2	-1	0	3	2
x_2	2	1	1	1
	1	1	-1	1

Свойства преобразования 1: 1) Сохраняется неотрицательность b, 2) значение в правом нижнем углу не убывает, 3) Если преобразование невозможно применить, то прямая задача неограничена.

Применяя последовательно это преобразование и пользуясь тем, что количество сводных таблиц конечно, мы видим, что есть две возможности: 1) зацикливание (при этом значение в правом нижнем углу не растет), 2) в какой-то момент все значения c_j оказываются отрицательными. В этом случае значение задачи оказывается равным числу в правом нижнем углу. Решение задачи на минимум получается, если мы положим те y_i, которые находятся в левой части, нулями, а те y_i, которые наверху, соответствующими значениями в последней строке. Решение задачи на максимум получается, если положить x_j в верхней части нулями, а в левой части соответсвующими значениями в последнем столбце.

Проделав еще раз это преобразование, получаем

	x_1	y_3	x_3	
y_1	-2	-1	1	2
y_2	-1	0	3	2
x_2	2	1	1	1
	1	1	-1	1

	x_1	y_3	y_2	
y_1	-5/3	-1	-1/3	2/3
x_3	-1/3	0	1/3	2/3
x_2	7/3	1	-1/3	1/3
	4/3	1	1/3	5/3

Решение

$$x = (0, 1/3, 2/3)$$

$$y = (0, 1/3, 1)$$

Значение задачи $= 5/3$.

Правило 2. Пусть некоторые b_i отрицательны. Возьмем первое отрицательное значение b_i, пусть это будет $b_k < 0$. Найдем какое нибудь отрицательное значение в столбце k, например $a_{k,j_0} < 0$. Сравним $b_k/a_{k,j_0}$ и $b_i/a_{i,j_0}$, для которых $b_i \geq 0$ и $a_{i,j_0} > 0$, и выберем такое i_0, для которого это соотношение наименьшее (i_0 может быть равным k). Далее перепишем зависимость между переменными так, чтобы x_{i_0} оказалась в числе переменных слева, а y_{j_0} сверху (pivot a_{i_0,j_0}).

Свойства преобразования 2: 1) Те компоненты вектора b которые были неотрицательны, сохраняют свою неотрицательность, 2) значение b_k не убывает, 3) Если преобразование невозможно применить, то прямая задача недопустима.

Последовательно применяя это преобразование, добиваемся того, что вектор b становится неотрицательным. Далее переходим к правилу 1.

Рассмотрим пример:

$$3y_1 - 2y_2 + 5y_3 \to \min$$

$$-y_2 + 2y_3 \geq 1$$

$$y_1 + y_3 \geq 1$$

$$2y_1 - 3y_2 + 7y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

	x_1	x_2	x_3	
y_1	0	1	2	3
y_2	-1	0	-3	-2
y_3	2	1	7	5
	-1	-1	-5	0

Поменяв местами переменные x_1 и y_2, получаем следующую таблицу.

	y_2	x_2	x_3	
y_1	0	1	2	3
x_1	-1	0	3	2
y_3	2	1	1	1
	-1	-1	-2	2

Задача идентична предыдущему примеру. Решая ее, получаем $x = (0, 1/3, 2/3), y = (0, 1/3, 1)$.

6. Грани и вершины полиэдров.

Материал: [2], глава 8.

Пусть задан полиэдр $\{x : Ax \leq b\}$.

Определение 6.1. *Неявное равенство: неравенство $\langle \alpha, x\rangle \leq \beta$ в системе $\{x : Ax \leq b\}$ называется неявным равенством, если $\langle \alpha, x\rangle = \beta$ для любого решения x системы $\{x : Ax \leq b\}$.*

В системе неравенств $\{x : Ax \leq b\}$ можно выделить подсистему неявных равенств
$$\{x : A^{=}x = b^{=}\}.$$
Оставшиеся неравенства будем обозначать следующим образом:
$$\{x : A^{+}x \leq b^{+}\}.$$

Определение 6.2. *Ограничение $\langle \alpha_i, x\rangle \leq \beta_i$ в системе неравенств $Ax \leq b$ называется избыточным, если оно следует из оставшихся ограничений. Если их нет, то система неравенств называется неприводимой (не избыточной).*

Заметим, что путем удаления избыточных неравенств любую сиситему можно сделать не избыточной.

Напомним, что грань — это пересечение полиэдра с опорной гиперплоскостью.

Теорема 6.3. *Непустое множество F является гранью тогда и только тогда, когда*
$$F = \{x \in P : A'x = b'\}$$
для некоторой подсистемы $\{x : A`x \leq b`\}$ системы $Ax \leq b$.

Доказательство. Путь $F = \{x \in P : \langle c, x\rangle = \delta\}$ для некоторой опорной гиперплоскости $\langle c, x\rangle = \delta$. Здесь $\delta = \max\{\langle c, x\rangle | Ax \leq b\}$. В силу теоремы о двойственности
$$\delta = \min\{\langle b, y\rangle | A^T y = c, y \geq 0\},$$
причем минимум достигается на некотором векторе y_0. Пусть $\{x : A^{-}x \leq b^{-}\}$ — подсистема неравенств, соответствующая положительным компонентам y_0. Тогда $F = \{x \in P : A'x = b'\}$, потому что для $x \in P$ имеем: $\langle c, x\rangle = \delta$ выполнено тогда и только тогда, когда $\langle b, y_0\rangle = \langle A^T y_0, x\rangle$, а последнее равносильно $A'x = b'$. Таким образом, любая грань представила в виде $F = \{x \in P : A'x = b'\}$.

Наоборот, любое множество вида $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ является множеством достижения $\max\{\langle c, x\rangle | x \in P\}$, при c, равном сумме строк A'. □

Замечание 6.4. *Если F — грань P, то F также является полиэдром, а его грани являются гранями P.*

Определение 6.5. *Гипергранью (фасетой) полиэдра P называется максимальная по включению, отличная от P грань.*

Теорема 6.6. *Если система неравенств $A^{+}x \leq b^{+}$ не содержит избыточных неравенств для $Ax \leq b$, тогда существует взаимно однозначное отображение между гипергранями P*
$$F_i = \big\{x : \langle \alpha_i, x\rangle = \beta_i\big\} \tag{6}$$
и неравенствами $\langle \alpha_i, x\rangle \leq \beta_i$ в $A^{+}x \leq b^{+}$.

Доказательство. Докажем, что каждая гипергрань F допускает представление (6). Действительно, пусть F задается некоторой подсистемой $A'x \leq b'$ системы $A^{+}x \leq b^{+}$. Пусть $\langle \alpha_i, x\rangle \leq \beta_i$ — некоторое неравенство этой системы. Тогда грань $F' = \big\{x : \langle \alpha_i, x\rangle = \beta_i\big\}$ удовлетворяет условию $F \subset F'$, при этом неравенство $\langle \alpha_i, x\rangle \leq \beta_i$ не является неявным равенством. Следовательно $F' \neq P$. В силу того, что F — гипергрань, получаем $F = F'$.

Докажем теперь, что любое представление (6) задает некоторую гипергрань F'. Пусть $A'x \leq b'$ — система оставшихся неравенств. Для доказательства, что F' — гипергрань, достаточно доказать, что найдется такой вектор x_0, что $A^{=}x_0 = b^{=}$, $\langle \alpha_i, x_0\rangle = \beta_i$ и $A'x_0 < b'$. Действительно, из определения неявных равенств следует, что существует вектор x_1, для которого $A^{=}x_1 = b^{=}, A^{+}x_1 < b^{+}$. Поскольку $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i$ не является избыточным неравенством в $Ax \le b$, существует вектор x_2, удовлетворяющий системе $A^{=}x_2 = b^{=}, A'x_2 \le b', \langle \alpha_i, x_2\rangle > \beta_i$. Тогда в качестве x_0 можно взять выпуклую комбинацию x_1, x_2. □

Определение 6.7. *Размерность полиэдра равна размерности его аффинной оболочки.*

Замечание 6.8. *Размерность P равна n минус ранг матрицы $A^{=}$.*

Следствие 6.9. *Размерность любой гиперграни на единицу меньше размерности P.*

Доказательство. При доказательстве можно считать систему $Ax \le b$ не избыточной. Рассмотрим гипергрань $F = \{x \in P : \langle \alpha_i, x\rangle = \beta_i\}$, где $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i$ — неравенство из $A^{+}x \le b^{+}$. Поскольку система $Ax \le b$ не избыточна, единственными неявными равенствами системы $Ax \le b, \langle \alpha_i, x\rangle \ge \beta_i$ будут равенства $A^{=}x = b^{=}, \langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i, \langle \alpha_i, x\rangle \ge \beta_i$. Действительно, если из $Ax \le b$, $\langle \alpha_i, x\rangle \ge \beta_i$ следует $\langle \alpha_j, x\rangle = \beta_j$ для некоторого неравенства $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_j$, то $F \subset \{x \in P : \langle \alpha_i, x\rangle = \beta_j\}$. Поскольку оба множества— гиперграни, то по предыдущей теореме неравенство $\langle \alpha_j, x\rangle \le \beta_j$ должно совпадать с $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i$. Следовательно, размерность F равна n - ранг матрицы $[A, a_i]$, т.е., на единицу меньше размерности P. □

Определение 6.10. *Грань называется минимальной, если она не содержит никакие другие грани.*

Замечание 6.11. *Из замечания 6.4 следует, что грань F является минимальной, тогда и только тогда, когда она является аффинным подпространсвом.*

Теорема 6.12. *Множество F является минимальной гранью тогда и только тогда, когда $\emptyset \ne F \subset P$ и*

$$F = \{x : A'x = b'\}$$

для некоторой подсистемы $A'x \le b'$ из $Ax \le b$.

Доказательство. Если грань F допускает такое представление, то она является афинным подпространством и, следовательно, минимальной гранью.

Обратно, пусть F — минимальная грань. Она допускает представление

$$F = \{x : A''x \le b'', A'x = b'\},$$

где $A''x \le b'', A'x \le b'$ — некоторые подсистемы системы $Ax \le b$. Выберем A'' минимально возможной. Тогда все неравенства $A''x \le b''$ будут неизбыточными в системе $\{x : A''x \le b'', A'x = b'\}$. Поскольку F не имеет граней, система $\{x : A''x \le b''\}$ должна быть пустой. □

Следствие 6.13. *Каждая вершина задается n линейно независимыми уравнениями из системы $Ax = b$.*

7. Теория графов и теорема Бирхгофа.

Определение 7.1. *Матрица a_{ij} называется бистохастической, если она удовлетворяет соотношениям.*

$$\sum_i a_{ij} = 1$$

$$\sum_j a_{ij} = 1$$
$$a_{ij} \geq 0.$$

Теорема 7.2. (Теорема Бирхгофа) *Матрица является бистохастической тогда и тошлько тогда, когда она является выпуклой комбинацией перестановочных матриц.*

Доказательство. Очевидно, любая выпуклая комбинация перестановочных матриц бистохастична.

Докажем обратное. Применим индукцию по n. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ многогранник P. Достаточно доказать, что любая вершина из P представляется выпуклой комбинацией перестановочных матриц. Пусть A — вершина в P, тогда n^2 линейно независимых ограничений обращаются в точке A в равенство. Поскольку первые $2n$ ограничений линейно зависимы, то по крайней мере $n^2 - 2n + 1$ элементов a_{ij} равны нулю. Отсюда следует, что в A имеется строка с $n-1$ нулями и одной единицей. Без ограничения общности можно считать, что $a_{11} = 1$, а все остальные элементы в первом столбце и первой строке — нулевые. Удалив из матрицы первую строку и первый столбец, получим бистохастическую матрицу порядка $(n-1)\times(n-1)$, являющуюся по предположению индукции выпуклой комбинацией перестановочных матриц. То же самое верно и для A. □

Отступление. Теорема Крейна–Мильмана. Теорема де Финетти. Крайние точки бистохастичесих мер.

Рассмотрим так называемый двудольный граф, состоящий из конечных множеств X, Y (вершин). Каждая пара вершин может быть связана ребром, но может быть и не связана. Двудольный граф удобно представлять себе как матрицу размера $n\times m$, где $n = \mathrm{card(X)}$, $m = \mathrm{card(Y)}$, каждая строчка соответствует некоторому элементу X, а каждый столбец соответствует некоторому элементу Y. Если элементы связаны ребром, то в соответствующий элемент матрицы равен 1, в противном случае матричный элемент равен 0.

Вершинным покрытием графа называется такое множество C некоторых вершин X и Y, что всякое ребро имеет хотя бы одну вершину в C. Наименьшим вершинным покрытием называется вершинное покрытие наименьшей возможной мощности (оно может быть неединственным). Паросочетанием в графе называется множество ребер, не имеющих общих конечных вершин. Паросочетание с максимально возможным количеством ребер называется наибольшим.

Теорема 7.3. (Кёниг) *Число ребер в наибольшем паросочетании двудольного графа равно числу вершин в наименьшем вершинном покрытии.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что X, Y содержат одинаковое число элементов, равное n (если это не так, то можно дополнить меньшее множество элементами, не связанными ребрами с элементами другого множества). На пространстве $X\times Y$ рассмотрим функцию стоимости c, равную 1, если элементы связаны ребром, и 0, если не связаны. Рассмотрим транспортную задачу

$$\sum c(x_i, y_i)\pi_{ij} \to \max \tag{7}$$
$$\sum_i \pi_{ij} = 1, \ \sum_j \pi_{ij} = 1, \pi_{ij} \geq 0.$$

В силу теоремы о двойственности значение задачи равно

$$J = \min_{c_{ij} \le u_i + v_j} \big(\sum_i u_i + \sum_j v_j \big).$$

Покажем, что без ограничения общности можно считать далее, что $0 \le u_i, v_j \le 1$. Действительно, так как $u_i + v_j \ge 0$ для всех i, j, то $\min_i u_i + \min_j v_j \ge 0$. Пусть для определенности $a = \min u_i \ge 0$. Тогда $\widetilde{u}_i = u_i - a, \widetilde{v}_j = v_j + a$ — неотрицательные наборы чисел, удовлетворяющие нужному ограничению. Так как $c_{i,j} \le 1$, то отсюда следует, что все $\min\{\widetilde{u}_i, 1\}, \min\{\widetilde{v}_j, 1\}$ тоже удовлетворяют нужному ограничению.

Пусть M — число вершин в наименьшем вершинном покрытии. По определению $M = \inf_{c_{ij} \le \widehat{u}_i + \widehat{v}_j} \big(\sum_i \widehat{u}_i + \sum_j \widehat{v}_j \big)$ при дополнительном предположении, что $\widehat{u}_i, \widehat{v}_j \in \{0, 1\}$. Отсюда следует, что $J \le M$. Пусть $0 \le t \le 1$. Положим $u_{t,i} = I_{\{u_i \ge t\}}, v_{t,j} = I_{\{v_j \ge 1-t\}}$. Ясно, что $u_{t,i} + v_{t,j} \ge c_{ij}$, поэтому

$$M \le \sum_i u_{t,i} + \sum_j v_{t,j}.$$

Проинтегрировав обе части равенства по t, из соотношений

$$\int_0^1 u_{t,i}\, dt = u_i, \quad \int_0^1 v_{t,j}\, dt = v_j$$

получим равенство $M \le \sum_i u_i + \sum_j v_j = J$. Поэтому $J = M$ и

$$M = \max \sum_{i,j} c_{ij} \pi_{ij},$$

где максимум берется по всем бистохастическим матрицам. По теореме Бирхгофа все бистохастические матрицы представляются в виде выпуклых комбинаций перестановочных матриц. Но тогда существует перестановочная матрица, на которой достигается максимум функционала (7), равный, как мы убедились, величине M. Из определения функционала (7) и перестановочности матрицы следует, что его значение равно в точности числу ребер в наибольшем паросочетании. □

Следствие 7.4. Теорема Холла (теорема о свадьбах). *Если в двудольном графе с равномощными долями для любого положительного k любые k элементов первой из долей связаны по крайней мере с k жлементами другой, то вершины разбиваются на пары смежных (т.е., соединенных одним ребром).*

Покажем теперь, что теорема Бирхгофа следует из теоремы Холла.

Теорема 7.5. (Теорема Бирхгофа) *Матрица является бистохастической, если она является выпуклой комбинацией перестановочных матриц.*

Доказательство. Нарисуем поверх бистохастической матрицы таблицу $n \times n$. Отметим в ней клетки, соответствующие ненулевым элементам матрицы и отождествим полученную таблицу с двудольным графом с равными долями (если в матрице элемент отмечен, то это значит, что соответствующие элементы долей связаны ребром). Проверим, что для этого графа выполнено условие леммы Холла. Будем доказывать от противного. Если в k столбцах отмеченные клетки принадлежат меньше, чем k строкам, то сумма элементов в этих строках не меньше, чем в отмеченных клетках на пересечении упомянутых строк и столбцов. А эти отмеченные клетки содержат всю сумму чисел в k столбцах. Но суммы чисел во всех рядах одинаковы. Получаем противоречие. Тогда в силу леммы Холла есть n отмеченных клеток, никакие две из которых не лежат в одном ряду. Им соответствует какая-то перестановочная матрица A. Пусть минимальное число в отмеченных клетках равно a. Тогда, если мы нашу матрицу уменьшим на aA, то получим матрицу, у которой по-прежнему сумма чисел во всех рядах одинакова, а все числа неотрицательны, но при этом нулевых чисел больше. Проделав эту процедуру несколько раз мы придём к нулевой матрице. Таким образом, мы смогли разложить бистохастическую матрицу в линейную комбинацию перестановочных с положительными коэффициентами. При этом очевидно, что сумма коэффициентов равна 1, так как в каждой бистохастической матрице сумма элементов равна n, то есть это выпуклая комбинация. □

8. Теорема Форда-Фалькерсона

[материал: [1], [2]].

Определение 8.1. *Граф G называется ориентированным, если для каждого ребра указано направление, т.е., начальная и конечная вершина.*

Обозначение:

$$e = (u, v)$$

обозначает вершину e с началом u и концом v.

Определение 8.2. *Граф G называется взвешенным, если для каждого ребра e дано неотрицательное число $w(e)$, называемое весом или пропускной способностью.*

Далее, G — взвешенный ориентированный граф с двумя выделенными несмежными вершинами s (источник), t (сток).

Определение 8.3. *Потоком на G называется такая функция f на множестве ребер $E(G)$, что*

$$0 \le f(e) \le w(e)$$

и для любой вершины $v \neq s, v \neq t$ "дивергенция" потока в вершине v равна нулю

$$\Delta(v) = \sum_{u \in G, e=(u,v) \in G} f(e) - \sum_{u \in G, e=(v,u) \in G} f(e) = 0.$$

Величина

$$\Delta(t) = \sum_{u \in G, e=(u,t) \in G} f(e) - \sum_{u \in G, e=(t,u) \in G} f(e)$$

называется величиной потока. Нетрудно доказать, что

$$\Delta(s) = -\Delta(t).$$

Определение 8.4. *Разрезом называется такое разбиение вершин на два множества S, T, что $s \in S$, $t \in T$.*

Пропускная способность разреза: сумма пропускных способностей всех его ребер, направленных их S в T.

Лемма 8.5.

$$\Delta(t) = \sum_{u \in S, v \in T, e=(u,v) \in G} f(e) - \sum_{u \in S, v \in T, e=(v,u) \in G} f(e)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Delta(t) = -\Delta(s) &= \sum_{u\in G, e=(s,u)\in G} f(e) - \sum_{u\in G, e=(u,s)\in G} f(e) \\
&= \sum_{u\in G, e=(s,u)\in G} f(e) - \sum_{u\in G, e=(u,s)\in G} f(e) + \sum_{a\in S\setminus s}\Big(\sum_{\omega} f(a,\omega) - \sum_{v} f(v,a)\Big) \\
&= \sum_{a\in S}\Big(\sum_{\omega} f(a,\omega) - \sum_{v} f(v,a)\Big) \\
&= \sum_{a\in S}\sum_{\omega\in S} f(a,\omega) + \sum_{a\in S}\sum_{\omega\in T} f(a,\omega) - \sum_{a\in S}\sum_{v\in S} f(v,a) - \sum_{a\in S}\sum_{v\in T} f(v,a) \\
&= \sum_{a\in S}\sum_{\omega\in T} f(a,\omega) - \sum_{a\in S}\sum_{v\in T} f(v,a).
\end{aligned}$$

□

Далее мы будем использовать теорему о двойственности в форме леммы 4.2 : задача

$$\langle c, x\rangle \to \max$$
$$Ax \le b$$

двойственна задаче

$$\langle b, y\rangle \to \min,$$
$$y \ge 0$$
$$A^T y = c.$$

Нам понадобится **условие дополняющей нежёсткости**: если x, y — решения прямой и двойственной задач, то выполнено соотношение

$$\langle y, b - Ax\rangle = 0.$$

В частности, значения двойственных переменных y_j, соответствующих индексам j со свойством $b_j - (Ax)_j > 0$ равны нулю.

Теорема 8.6. *Максимальная величина потока в графе равна минимальной пропускной способности разреза.*

Доказательство. Из леммы 8.5 следует, что

$$\Delta(t) \le \sum_{u\in S, v\in T, e=(u,v)\in G} f(e).$$

Сформулируем задачу о максимальном потоке в виде задачи линейного программирования. Введем дополнительное ребро с неограниченной пропускной способностью из t в s и продолжим f так, чтобы в расширенном графе было выполнено $f((t,s)) = \Delta(t)$, т.е., все дивергенции были бы равны нулю. Введем дополнительные неотрицательные переменные $s(e)$ со свойством $f(e) + s(e) = w(e)$. Получаем задачу в виде

$$-f((t,s)) \to \min$$
$$f \ge 0,\ s \ge 0$$
$$Af = 0,$$
$$f(e) + s(e) = w(e),\ e \in G.$$

Матрица $A(e,v), e \in E(G), v \in G$ — матрица инциденций рёбер и вершин: $A_{(e,v)} = 1$, если v — начало ребра e, $A_{(e,v)} = -1$, если v — конец ребра e, $A_{(e,v)} = 0$ в противном случае.

Запишем двойственную задачу.

$$\sum_{(u,v)\in e} w(e) y_{(u,v)} \to \min$$

$$z_s - z_t \le -1$$

$$y_{(u,v)} + z_v - z_u \le 0, (u,v) = e \in G$$

$$y_{(u,v)} \le 0, (u,v) = e \in G.$$

Добавление числа к переменным z_v не меняет задачи, поэтому полагаем $z_t = 1$.

Пусть (f^*, s^*), (y^*, z^*) — оптимальные решения прямой и двойственной задач соответственно,

$$T = \{v : z_v \ge 1\}, S = V(G) \setminus T.$$

Если $e = (u,v), u \in T, v \in S$, то $z_u - z_v < 0$, $y^*_{(u,v)} < 0$, поэтому из условия дополняющей нежёсткости получаем, что $s^*((u,v)) = 0, f^*((u,v)) = w((u,v))$.

Если $e = (u,v), u \in S, v \in T$, то $z_u - z_v > 0$, следовательно $y_{(u,v)} + z_v - z_u \le 0$ и Для ребра (u,v) разреза $(S,T), v \in T, u \in S$, выполнено Для ребра $(v,u), v \in T, s \in S$ имеем $z_u - z_v > 0$, поэтомуиз условия дополняющей нежёсткости получаем, что $f^*((v,u)) = 0$. Применяя лемму 8.5, получаем искомый результат. □

Настоящая задача имеет целочисленное решение, если пропускные способности ребер целые.

Определение 8.7. *Матрица A называется абсолютно унимодулярной, если все ее миноры равны* 0, 1 *или* -1.

Из формул Крамера и следствия 6.13 вытекает теорема о целочисленности вершин.

Теорема 8.8. *Пусть A — абсолютно унимодулярная матрица, b — целочисленный вектор, а полиэдр задаётся неравенствами $x \ge 0$ и $Ax \le b$. Тогда вершины имеют целочисленные координаты.*

Лемма 8.9. *Пусть в каждом столбце матрицы ровно два ненулевых элемнента* 1 *и* -1. *Тогда она является абсолютно унимодулярной.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку минора. База индукции очевидна.

Шаг индукции: рассмотрим минор M размера $k \times k$, предполагая, что все миноры меньшего размера равны 0, 1 или -1. Если в M есть нулевой столбец, то $M = 0$. Если в некотором столбце минора ровно одна единица или минус единица, то разложим минор по этому столбцу и получим с некоторым знаком минор меньшего размера. Если в каждом столбце минора есть и $+1$ и -1, то сумма строк минора есть нулевая строка и он равен 0. □

Следствие 8.10. *Если пропускные способности графа целые, то решение задачи о максимальном потоке является целым.*

Внимание. Настоящие следствие не является прямым следствием теоремы 8.8, потому что ограничения задачи о максимальном потоке не описываются только абсолютно унимодулярной матрицей A. Тем не менее, модифицируя рассуждение теоремы 8.8, можно доказать предыдущее следствие.

Следующий результат теории графов является следствием теоремы Форда–Фалькерсона и теоремы 8.8.

Теорема 8.11. *(Теорема Менгера). Пусть G — ориентированный граф с несмежными вершинами s, t. Тогда максимальное количество путей, не имеющих общих ребер, идущих их s в t, равно числу минимальному числу ребер, которые надо удалить, чтобы s и t не были связаны ни одним путем.*

9. Теорема о минимаксе и элементы теории игр

материал: [6], [4].

Рассматривается конечная матричная игра двух игроков с нулевой суммой. Последнее означает, что дана конечная $m \times n$ матрица $A = (a_{ij})$. Первый игрок выбирает ряд, в второй игрок выбирает столбец. Элемент на пересечении выигрыш первого игрока (и проигрыш второго). Помимо детерминированного выбора (чистые стратегии) рассматриваются еще так называемые смешанные стратегии. Это когда выбор первым игроком i-го ряда делается с вероятностью p_i, аналогично второй игрок выбирает с вероятностью q_j.

Пример 9.1. *Пример: (Четный/нечетный). Два игрока выбирают независимо друг от друга число из множества $\{1, 2\}$. Если сумма нечетна, по первый игрок выигрывает количество долларов, равное этой сумме (а второй, соответственно, проигрывает). Ести четна, то второй игрок выигрывает количество долларов, равное этой сумме.*

Можно непосредственно убедиться (сделайте это!), что если первый выбирает 1 с вероятностью 7/12 и 2 с вероятностью 5/12, то независимо от того, как играет второй, его средний выигрыш равен 1/12. Точно также, если второй игрок выберет такую же стратегию, его средний проигрыш равен 1/12. Поэтому описанная стратегия игры оптимальна.

В случае, когда матрица игры обладает седловой точкой $a_{i_0 j_0}$, в которой $a_{i_0 j_0}$ является минимумом в ряду i_0 и максимумом в ряду j_0, то оптимальной является чистая стратегия выбора первым игроком строки i_0, а вторым игроком столбца j_0. В случае, когда седловой точки нет, оптимальной оказывается некоторая смешанная стратегия, называемая минимаксной. Ее существование следует из принципа двойственности для конечномерной задачи линейного программирования. Через p, q будут обозначатся всевозможные вероятностные векторы смешанных стратегий для первого и, соответственно, второго игрока.

Теорема 9.2. *(фон Нейман) Если игра игра двух игроков с нулевой суммой конечна, то существует величина V, называемая стоимостью игры, для которой выполнено равенство*

$$V = \min_q \max_i \sum_j q_j a_{ij} = \max_p \min_j \sum_i p_i a_{ij}$$

Векторы p, q соответствуют смешанным минимаксным стратегиям.

Общая теорема о минимаксе (см. [4]).

Теорема 9.3. *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, Y — произвольное множество в линейном пространстве, $f : X \times Y \to (-\infty, +\infty]$, полунепрерывная снизу по x для каждого y, выпуклая по x, вогнутая по y.*

Тогда

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y).$$

Список литературы

[1] Вялый М.Н., Линейные неравенства и комбинаторика
[2] Схрейвер А., Теория целочисленного и линейного программирования.
[3] Циглер Г., Теория многогранников.
[4] Adams D.R. and Hedberg L.I., Function spaces and potential theory
[5] Ferguson S.T. Linear programming. A Concise Introduction.
[6] Ferguson S.T. Game theory.
[7] Vanderbrei R.J., Linear Programming: Foundations and Extensions.