Лекция 12 — 16.04.21

Были склейки $2n$-угольников (ориентируемые склейки)

Всего склеек: $(2n-1)!!$

$$T_n(N) = \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{склейкам}}} N^{\#\text{вершин}} =$$

(N - счетчик, который отвечает за род пов-ти)

кол-во вершин нашей склейки

$$= \sum_{g=0}^{\infty} \varepsilon_g(n)\, N^{n+1-2g}$$

$$T(N,s) = 1+2Ns+2s\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(N)}{(2n-1)!!}\, s^n = \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^N$$

- $$\frac{1}{const}\int_{\mathcal{H}_{N\times N}} Tr\left(H^{2n}\right) e^{-Tr(H^2)} \prod d h_{ii} \prod_{i<j} d\,Re\,h_{ij}\, d\,Im\,h_{ij} = \langle Tr\, H^{2n}\rangle$$

$\dim \mathcal{H}_{N\times N} = N^2$

$\mathcal{H}_{N\times N}$ — пр-во эрмитовых матриц $H=\overline{H}^T$

$2n$

- Хотим $\langle 1\rangle = 1$ — отсюда найдем $\frac{1}{const}$.

$$\int_{\mathcal{H}_{N\times N}} 1\cdot e^{-\sum h_{ii}^2 - \sum_{i<j}\left(2(Re\,h_{ij})^2+2(Im\,h_{ij})^2\right)}\, dh\ldots =$$

$$= \left(\sqrt{\pi}\right)^N \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\pi}\right)\right)^{\frac{N(N-1)}{2}\cdot 2} = \left(\sqrt{\pi}\right)^{N^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{N(N-1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{const} = \frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\left(\sqrt{\pi}\right)^{N^2}}}$$

$$\langle Tr(H^{2n})\rangle = \sum_{1\le i_1,\ ,i_{2n}\le N} \langle h_{i_1i_2} h_{i_2i_3}\dots h_{i_{2n}i_1}\rangle$$

– на одной линии один индекс

$i_2 = i_2 \quad i_1 = i_3$ – на рисунке

$$\langle \ \dots\dots \ \rangle = \sum \langle hh\rangle \langle hh\rangle \dots \langle hh\rangle$$

(по формуле Вика)

соединению двух линий соотв. произведение двух h

$\langle h_{ii}^2\rangle = \frac{1}{2}$ (посчитали на прошлой лекции

$\langle h_{ij}h_{ji}\rangle = \frac{1}{2}$

$\langle h_{ij}h_{ji}\rangle = \langle (Re\, h_{ij})^2 + (Im\, h_{ij})^2\rangle =$

$h_{ij} = \overline{h_{ji}}$ (т.к. эрмитова матрица)

$= \langle (Re\, h_{ij})^2\rangle + \langle (Im\, h_{ij})^2\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int x^2 e^{-2x^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

У нас есть звезда. Мы как-то заклеиваем ленточки. Индексы бегают только по краям ленточек

Получается, что

$$\boxed{\langle \mathrm{Tr}(H^{2n}) \rangle = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{склейкам}}} \frac{N^{\#\text{граней}}}{2^n} = \frac{T_n(N)}{2^n}}$$

Хотим показать: $\dfrac{T_n(N)}{(2n-1)!!}$ – многочлен

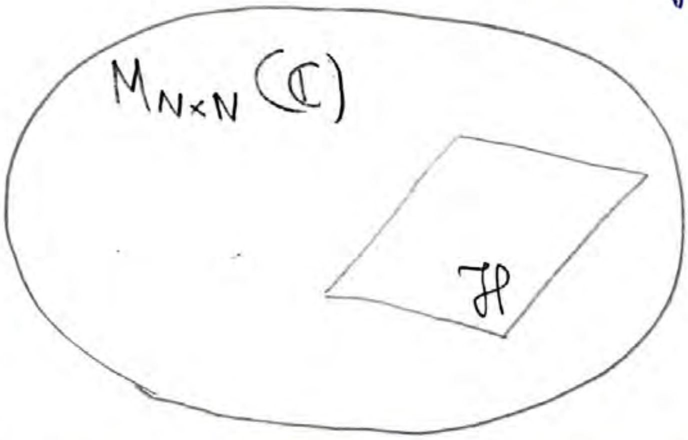
Для этого поймем как $\langle \mathrm{Tr}(H^{2n}) \rangle$ зависит от n.

- На эрмитову матрицу можно смотреть так

$H = U^{-1} \Lambda U$, Λ – диагональная матрица

U – унитарная матрица

$\overline{U}^T U = E$



- Мера внутри $\mathcal{H}$: мера на диаг. матрицах +

+ мера на унитарной группе

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{H}} = \int_{\substack{\text{диаг.}\\\text{матр}}} + \int_{\substack{\text{унит.}\\\text{гр.}}}$$ – будем доказывать

- Если H – эрмитова, то $U^{-1} H U$ – тоже эрмитова:

$$\left(\overline{U^{-1} H U}\right)^T = \overline{U}^T \overline{H}^T \left(\overline{U}^T\right)^T$$

• $\mathrm{Tr}(U^{-1} H U) = \mathrm{Tr}(U U^{-1} H) = \mathrm{Tr}(H)$

присоединенное действие

$e^{-(\mathrm{Tr}\, H^2)}$ — инвариантна относительно действия группы (действуем так $H \mapsto U H U^{-1}$)

Как перевести

$$\prod dh_{ii} \prod d\,\mathrm{Re}\,h_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\,h_{ij}$$

в другие координаты?

G — матрица Грама для касательных векторов

$x_1 \dots x_n$ — коорд, связанные с касат векторами

Мера такая: $\sqrt{\det G}\; dx_1 \dots dx_n$.

В других координатах: $\sqrt{\det \tilde{G}}\; dy_1 \dots dy_n$.

$M \in M_n$

$$M = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$ — комплексная матрица

$$dM = d\begin{pmatrix} a_{11}+ib_{11} & \dots & a_{1n}+ib_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1}+ib_{n1} & & a_{nn}+ib_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадр. форма на дифференциалах выглядит так

$$(dx_{ii})^2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(если пр-во плоское)}$$

матрица Грама

$$\boxed{tr\left((dM)\overset{\overline{dM}^T}{\overset{\shortparallel}{(dM)^+}}\right) = \sum_{1 \le i,j \le N} (da_{ij})^2 + (db_{ij})^2}$$

это будет нашей квадратичной формой

Как эта квадр. форма выглядит на $\mathcal{H}$?

$H \in \mathcal{H}$

$$tr((dH)(dH)^+) = \sum\left((dx_{ii})^2 + 2(da_{ij})^2 + 2(db_{ij})^2\right)$$

Раньше мы интегрировали по всем координатам

$$\prod dh_{ii}\, d\,\mathrm{Re}\, h_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\, h_{ij}$$

Но сейчас, если взять диагональную меру из большого пр-ва, то она получится не такой – надо домножить на $\sqrt{\text{определитель матрицы}}$, получившейся из квадратичной формы:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 \ddots & \\ 0 & & & & & 2 \end{pmatrix} = 2^{N(N-1)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ домножаем на $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$.

Т.е. интегрируем по мере

$$2^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod dh_{ii}\, d\,\mathrm{Re}\, h_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\, h_{ij}.$$

По новой мере:

- $$\int_{\mathcal{H}_{N\times N}} 1 \cdot e^{-\left(\sum h_{ii}^2 + 2\sum_{i<j}\left((\mathrm{Re}\, h_{ij})^2 + (\mathrm{Im}\, h_{ij})^2\right)\right)} 2^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod dh_{ii}\, d\,\mathrm{Re}\, h_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\, h_{ij} =$$

$$= (\sqrt{\pi})^N \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right)^{N(N-1)} (\sqrt{2})^{N(N-1)} = (\sqrt{\pi})^{N^2}$$

- $$\underbrace{\langle h_{ij}, h_{ji}\rangle}_{} \;\; (\sqrt{\pi})^{-N^2} \int_{\mathcal{H}} \underbrace{h_{ij} h_{ji}}_{(a_{ij})^2 \text{ - т.к. матрица эрмитова}} e^{-\sum_{i<j}(h_{ii}^2 + 2|h_{ij}|)} (\sqrt{2})^{N(N-1)} \prod dh_{ii}\, d\,\mathrm{Re}\, h_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\, h_{ij} =$$

$h_{ij} = a_{ij} + ib_{ij} \in \mathbb{C}$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int 2 a^2 e^{-2a^2} \sqrt{2}\, da = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{\langle Tr(H^{2n}) \rangle}{2^{const}} = \underbrace{\int\limits_{\mathcal{U}_N}}_{\substack{\text{объем унитарной} \\ \text{группы } V(\mathcal{U}_N)}} \text{что-то} \cdot d \ldots *$$

$\uparrow$
унитарная
группа

$(H \in \mathcal{H}_{N \times N})$

опр-тель
Вандермонта

$$* \int\limits_{\mathbb{R}^N} Tr(\Lambda^2) \det{}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{N-1} & \lambda_N \\ \vdots & & & & \\ \lambda_1^{N-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix} d\lambda_1 \ldots d\lambda_N$$

Λ - диаг. матр с собств. значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$

$Tr(\Lambda^2) = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_N^2$

$\uparrow$
это будем
доказывать

Эта мера, которую мы обсуждаем инвариантна относительно действие группы и разбивается на две независимые меры.