Мезенцев Владимир

~~[illegible]~~

	0	1	2	3	4
$H_k(S^4)$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
$H^k(S^4)$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

	0	1	2	3	4
$H_k(S^2\times S^2)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}^2$	0	$\mathbb{Z}$
$H^k(S^2\times S^2)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}^2$	0	$\mathbb{Z}$

	0	1	2	3	4
$H_k(\mathbb{C}P^2)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$H^k(\mathbb{C}P^2)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$

Если f - непрерывное степени 1, то f^* в старших - умножение на 1

Рассмотрим $f_{12}: X_1 \to X_2$, тогда $f_{21}^*: \mathbb{Z} \to 0$

пусть a, b, ab - образующие X_2, тогда

$f_{21}^*: \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ (в старших когомологиях), но $(ab) \to 0 \Rightarrow$ такого отобр. нет

Рассмотрим $f_{21}: X_2 \to X_1$; $f_{21}^*: 0 \to \mathbb{Z}$, такого отображения нет

Если a - образующая ~~X_3, то~~ $H^*(\mathbb{C}P^2)$, то $(a)^2$ - обр. группы

Заметим что f_{23} индуцирует гомоморфизм когомол. $H(\mathbb{C}P^2) \to H(S^2\times S^2)$

Пусть образующие $H^*(S^2\times S^2)$ - $(c), (d), (c)\cdot(d)$ - образ. группы

пусть (a) переходит в $x(c)+y(d)$, то есть нужно найти x, y: $(xc+yd)^2 = 2cd$ то есть при $c^2 = d^2 = 0$

Тогда рассмотрим существование отображений f_{ij}

~~f_{11}: да, возьмем тождественное~~ ~~f_{21}: [illegible]~~

$\boxed{f_{12}:}$ нет, доказано выше

$\boxed{f_{13}:}$ нет, т.к. оно индуцирует гомоморфизм $X_3 \to X_1$, а он зануляет (a), то есть и $(a)^2$

~~[illegible]~~

f

№4 (продолжение)

$\boxed{p_{11}:}$ рассмотрим полярные координаты

$x_1 = \cos\varphi_1$
$x_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2$
$x_3 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3$
$x_4 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \cos\varphi_4$
$x_5 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 \cos\varphi_5$

то есть $(x_1, \dots, x_5) \to (\varphi_1, \dots, \varphi_4)$
тогда заметим что $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \to (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, k\varphi_4)$ имеет степень k, аналогичным образом можно получить степень 2

$\boxed{p_{33}:}$ необходимо найти автоморфизм CP^2 степени 2
Рассмотрим 1 во 2м когомол., если умножить на себя, то это будет 1 в 4когомол.
Пусть f - степень 2, тогда f^* переводит 1 из 4класса в 2 из 4класса
Рассмотрим куда может перейти 1 из 2класса - во что-то, что в квадрате даёт 2 из 4класса, но такого не бывает

$\boxed{p_{12}:}$ Введем полярные координаты на $S^2 \times S^2$

то есть $x_1 = \sin\varphi_1 \cos\theta_1$ $\quad x_2 = \sin\varphi_2 \cos\theta_2$
$y_1 = \sin\varphi_1 \sin\theta_1$ $\quad y_2 = \sin\varphi_2 \sin\theta_2$
$z_1 = \cos\varphi_1$ $\quad z_2 = \cos\varphi_2$

и $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \to (\varphi_1, \theta_1, \varphi_2, \theta_2)$, $(\varphi_1, \theta_1, \varphi_2, \theta_2) \to (\varphi_1, n\theta_1, \varphi_2, m\theta_2)$
имеет степень n·m

то есть при n=1, m=2 степень 2

$\boxed{p_{13}:}$ ~~отрезок~~

рассмотрим

$(x:y), (z:t) \to (xz : yt : xt+yz)$
отображение корректное (и в (0:0:0) ничего не переходит)

степень - 2

$(z:1), (w:1) \to (zw : 1 : z+w)$
$\begin{cases} zw = a \\ z+w = b \end{cases}$ имеет 2 корня

f_{21}: существует отображение ~~из~~ $2\to 1$ степени 1
т.к. мы можем перевести шапку R^4 в $S^4/_{\xi\cdot\xi}$, а все остальное X_2 перевести в $\xi\cdot\xi$, тогда мы можем применить к этому f_{11} и получить f_{21} 2 степени

f_{31}: аналогично f_{21} – рассмотрим отображение R^4 в $S^4/_{\xi\cdot\xi}$, всё остальное в $\xi\cdot\xi$, потом применяем f_{11} и таким образом получаем f_{31} 2 степени

f_{32}: заметим что $c^2=0$ (т.к. $c^2=d^2=0$), но тогда (c) не может перейти в (a), так как $a^2\neq 0$

~~f_{22}~~

Ответ: f_{11} – можно, есть пример f_{21} – можно, есть пример f_{31}: можно, есть
f_{12} – нельзя f_{22} – можно, есть f_{32}: ~~можно~~ нельзя
f_{13} – нельзя f_{23} – можно, есть f_{33}: нельзя

№5

$f = x+y+z+w$

$x^4+y^4+z^4+w^4=1$

$x^3+y^3+z^3+w^3=0$

будем рассматривать x, y как функции от z, w

Тогда

$$\begin{cases} x^4(z,w)+y^4(z,w)+z^4+w^4=1 \\ x^3(z,w)+y^3(z,w)+z^3+w^3=0 \end{cases}$$

Тогда

$$\partial_z\left(x^3(z,w)+y^3(z,w)+z^3+w^3\right)=0$$

и

$$3x^2(z,w)\cdot\partial_z\left(x(z,w)\right)+3y^2(z,w)\,\partial_z\left(y(z,w)\right)+3z^2=0$$

$$4x^3(z,w)\,\partial_z\left(x(z,w)\right)+4y^3(z,w)\,\partial_z\left(y(z,w)\right)+4z^3=0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial y}{\partial z}+1=0 \\ x^2\frac{\partial x}{\partial z}+y^2\frac{\partial y}{\partial z}+z^2=0 \\ x^3\frac{\partial x}{\partial z}+y^3\frac{\partial y}{\partial z}+z^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2\left(1+\frac{\partial y}{\partial z}\right)+y^2\frac{\partial y}{\partial z}+z^2=0 \\ -x^3\left(1+\frac{\partial y}{\partial z}\right)+y^3\frac{\partial y}{\partial z}+z^3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{z^2-x^2}{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=-1-\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{y^2-x^2-z^2+x^2}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{y^2-z^2}{x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{x^2-z^2}{x^2-y^2}} \\ \cancel{z^3-x^3-\frac{(x-z)(x+z)(x^2+xy+y^2)}{x+y}=0} \end{cases}$$

$$\cancel{(z^3-x^3)(x+y)-(x-z)(x+z)(x^2+xy+y^2)}$$

$$x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)=0$$

$$(x-y)(x-z)(y-z)(xy+xz+yz)=0$$

Для ω аналогично

$$(x\cancel{+}y)(x-\omega)(y-\omega)(xy+x\omega+y\omega)=0$$

Тогда
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=z\\ y=z\\ xy+\cancel{x}z+yz=0 \Leftrightarrow xy+(x+y)z=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-xy}{x+y}\end{cases}\\ \begin{cases} x=\omega\\ y=\omega\\ xy+x\omega+y\omega=0 \Leftrightarrow \omega=\dfrac{-xy}{x+y}\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим все варианты:

1) $x=z=\omega$

$$\begin{cases}3x^3+y^3=0\\ 3x^4+y^4=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3=-3x^3\\ 3x^4+y^4=3x^4+(y^3)^{\frac{4}{3}}=3x^4+(-3x^3)^{\frac{4}{3}}=\cancel{3x}\ x^4\left(3+(-3)^{\frac{4}{3}}\right)=1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ есть 2 точки максимума и 2 минимума

2) $\cancel{x}\, y=z=\omega$
аналогично (+ 2 max и 2 min)

3) $y=\omega \quad x=z$

$$\begin{cases}x^3+y^3=0\\ 2x^4+2y^4=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-y\\ x^4+y^4=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ (x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{array}\right.$$

то есть 2 седловые

4) $y=z \quad x=\omega$ аналогично (+2 седловые)

5) $z=\frac{xy}{x+y} \quad x=\omega \Rightarrow$

$$\begin{cases}\left(\frac{xy}{x+y}\right)^3+2x^3+y^3=0\\ \left(\frac{xy}{x+y}\right)^4+2x^4+y^4=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^3\left(\frac{y^3}{(x+y)^3}+2\right)+y^3=0\\ x^4\left(\frac{y^4}{(x+y)^4}+2\right)+y^4=1\end{cases}$$

2 седловые, 1 max, 1 min

6) ~~аналогично~~ $z=\frac{xy}{x+y} \quad y=\omega$
7) $\omega=\frac{xy}{x+y} \quad x=z$
8) $\omega=\frac{xy}{x+y} \quad y=z$

аналогичны ~~(+3 седловые)~~

9) $\omega=\frac{xy}{x+y} \quad z=\frac{xy}{x+y}$ 0

$$\begin{cases}2\left(\frac{xy}{x+y}\right)^3+x^3+y^3=0\\ 2\left(\frac{xy}{x+y}\right)^4+x^4+y^4=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^3\left(\frac{2y^3}{(x+y)^3}+1\right)+y^3=0\\ x^4\left(\frac{2y^4}{(x+y)^4}+1\right)+y^4=1\end{cases}$$ – нет решений

Ответ: 8 max, 8 min, 12 седл.

$2-2g=2+2=4$ – род

~~Ответ: 8 max, 8 min, 24 седловых~~