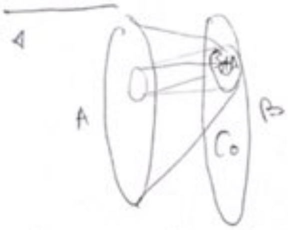
① **Опр1** Два мн-ва н-ся равномощными, если ∃ биекция
Опр2 $A \geq B$, если $B \cong$ подмн-ву A

Т.К-Б Если $A \geq B$, $B \geq A$, то $|A| = |B|$.

Δ



$f: A \to B$, $g: B \to A$ – инъекции

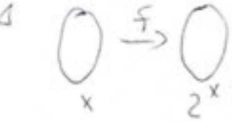
$C_0 = B \setminus f(A)$ $\quad C_{n+1} = g(f(C_n))$

$C = \cup C_i$ $\quad h(x) = \begin{cases} g(x) & x \in C \\ f^{-1}(x) & x \notin C \end{cases}$ □

Опр3 Мн-во н-ся счётным, если оно изоморфно мн-ву $\mathbb{N}$

Т. Кантора $2^X \not\cong X$

Δ



$R = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ $\quad B = X \setminus R$

$f^{-1}(B)$ не может быть ни синей, ни красной □

Пр1 Несчетность $\mathbb{R}$ □

Δ Док. несчётность отрезка. Юзаем диаг. метод Кантора

Аксиома выбора $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, I - мн-во. Тогда $\exists f: \{\{U_\alpha\}\} \to \cup U_\alpha$
т.ч. $f(\{U_\alpha\}) \in U_\alpha$.

Лемма Цорна пусть A - ЧУМ, у любой цепи (все эл-ты сравнимы) существует верхняя грань (элемент, не меньший всей цепи).
Тогда в A есть макс. эл-т.

② **Опр1** $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - посл-ть. Произв. ф-я - это форм. степенной ряд.

$$a_0 + a_1 t + a_n t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

Пусть a_n - лин. рекурента $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \ldots + c_k a_n$

$(a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k + \ldots)(1 - c_1 t - \ldots - c_k t^k) = P(t) + \ldots$, $\deg P \leq k$

Пр $\sum a_i t^i = \dfrac{P(t)}{1 - c_1 t - \ldots}$.

Пр. (Ф-ла Бине) $(f_0 + f_1 t + f_2 t^2)(1 - t - t^2) = f_0 + (f_1 - f_0)t = 1$. Тогда $\dfrac{1}{(1-t-t^2)}$ - пр. ф-я □

③ Есть переменные p_i и значки $(,), \wedge, \vee, \neg, \to, \leftarrow, T, \perp$
p - ф-ла, $\perp, T$ - ф-ла, $(\neg\Phi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\varphi \leftarrow \psi$
По оценкам пропозициональных пер опр-я оценка ф-лы.

Булева ф-я $F(p_1 \ldots p_N) \to \{0, 1\}$

Опр1 Две ф-лы эквивалентны $(\varphi \sim \psi)$, если $\varphi(p_1 \ldots p_N) = \psi(p_1 \ldots p_N)$ $\forall$ оценки

Опр2 Ф-ла тавтология, если $\forall$ оценки $\varphi = 0$

Опр3 Ф-ла выполнима, если $\exists$ оценка $\psi(p_1 \ldots p_n) = 0$

Т. о дизъюнктивной Н.Ф. $\forall$ ф-ю можно пр. в виде $(\wedge)\vee(\wedge)\vee(\wedge)$ –

4) Опр 1 Ф-я н-ся полилинейной, если она линейна по каждому эл-ту

Опр 2 Опр-ль матрицы $n \times n$ – это полилинейная кососимм. Ф-я от V_1

n-переменных, для кот. $F(E) = 1$

Зам для поле хар. 2 лучше сказать, что $F(.\ x, ..\ x ..) = 0$

Зам Опр-ль матрицы ЛНЗ ~~нельзя~~ не равен 0.

Пр Опр $\det(AB) = \det A \det B$

$\triangleleft$ $P_B(A) = \det(AB)$ - полилин. ф-я. $\Rightarrow$ $P_B(A) = \det A \cdot P_B(E) = \det A \det B$

Ф-ла Крамера
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ где } \det A \neq 0$$

$\triangleleft$ $x_i := \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ \dots & & \dots \end{vmatrix}}{\det A} = X_i$ проверим, что это решение.

$$\begin{vmatrix} \boxed{A} & \begin{matrix} b_1 \\ b_n \end{matrix} \\ a_{11} \quad a_{1n} & 0 \end{vmatrix} = a_{ik} \cdot X_i \cdot (-1)^{n+k+1} \cdot (-1)^{k+n+1} + \det A = a_{ik} \cdot X_i - \det A \cdot b_1$$ $\square$

5) Опр 1 В.п. над $\mathbb{K}$ – это мн-во, для кот. опр + и $\cdot \mathbb{K}$, если выполн.

1) $a \cdot (bv) = (ab) v$ 2) $a(u+v) = au + av$ 3) это аб. группа по +.

4) $(a+b)u = au + bu$

Опр 2 $f: V_1 \to V_2$ – линейно, если $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$.

Опр 3 $\langle v_i \rangle$ – ЛНЗ, если $\forall$ нет. комбинации $\neq 0$.

Опр 4 Базис – ЛНЗ система, порождающая все пр-во.

Пр В любом В.п. $\exists$ базис $\square$

$\triangleleft$ Уорна лемма

Т (о ранге матрицы) Ранг по столбцам = рангу по столбцам.

6) Опр 1. Хар. мн-н матрицы $\chi_A(t) = \det(tI - A)$

Корр-то для оператора $\det(tI - C^{-1}AC) = \det C^{-1}\det(Ct - AC) = \det C^{-1}\det(tI - A)\det C =$
$= \det(tI - A)$

Опр 2. Мин. многочлен оператора – мин. мн, обнуляющий оператор m_A

Т. Гамильтона - Кэли $\chi_A \vdots m_A$

$\triangleleft$ $\Omega = It - A$, Ω^* - сопр матрица (из миноров) $\Omega^* \underbrace{\Omega e}_{0} = \Omega^*(0) = 0$ $\square$

(7) Опр 1 Корневое подпр-во оператора A — это подпространство $W_\lambda \subset V$, для которого $\forall v \in W_\lambda \ \exists k \in \mathbb{N} \quad (A - \lambda E)^k(v) = 0$
(λ - собств. значение опер-ра A)

Т. (о ЖНФ) Если χ_P раскладывается на лин. мн-ли, то $\exists$ базис, в котором оп-р P записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \ \lambda_1 \ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

Δ Лемма. Пусть A - КГИ, M - к.п. модуль над B, тогда

$$M = A^k \times A/_{(\lambda_1)} \times A/_{(\lambda_2)} \times \ldots \times A/_{\lambda_n}, \text{ где } \lambda_1 \vdots \lambda_2 \vdots \ldots \vdots \lambda_n$$

или $M = A^k \times A/_{(p_{s_1}^{k_1})} \times \ldots \times A/_{(p_{s_l}^{k_l})}$, где p_i - простые, набор (p_s, k_s) опр. однозначно.

V - модуль над $\mathbb{k}$, заведем на V стр-ру модуля над $\mathbb{k}[x]$ ($v \cdot x = P(v)$). По лемме $V = \mathbb{k}[x]/_{(x-a_1)^{k_1}} \times \ldots \times \mathbb{k}[x]/_{(x-a_l)^{k_l}}$ (свободной части нет)

Пусть $W_{a_s} = \mathbb{k}[x]/_{(x-a_s)^{k_s}}$. Выберем в W_{a_s} базис $\underset{e_{k_s}}{1}, \underset{e_{k_s-1}}{(x-a_s)}, \ldots \underset{e_1}{(x-a_s)^{k_s-1}}$

$$x(x-a_s)^{k_s-1} = (x-a_s)^{k_s} + a_s(x-a_s)^{k_s-1} = a_s(x-a_s)^{k_s-1}$$

$$x(x-a_s)^{k_s-i} = (x-a_s)^{k_s-i+1} + a_s(x-a_s)^{k_s-i} \Rightarrow \begin{cases} xe_1 = a_s e_1 \\ xe^i = e^{i-1} + a_s e^i \end{cases}$$

Тогда опр-р $P = x$ в базисе $e_1, \ldots e_{k_s}$ запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \ddots \ 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$, что и хотелось.

(8) Опр 1 Билинейная форма $\beta : V \times V \to \mathbb{k}$ - это форма, линейная по двум аргументам.

Опр 2 Квадр. форма $\alpha : V \to \mathbb{k}$, - это отображение, для которого $\exists$ билинейная симметрическая форма β : $\beta(x,x) = \alpha(x)$.

Опр 3 Кв. форма α н-ся положительно определенной, если $\forall x \in V$. $\alpha(x) > 0$.

Закон инерции. Если привести форму к диагональному виду, полученная сигнатура (p_+, p_-, n) не зависит от способа приведения. (p_+ - кол-во 1, p_- - кол-во -1, n - кол-во 0 на диаг.)

Δ Заметим, что n опр. однозначно (это коранг квадр билин формы)

p_+ - это р-ть макс. пр-ва, на кот. форма положительно определена $\square$

(9) <u>Опр 1</u> Евклидово пр-во – это векторное пр-во, на котором опр-но скалярное пр-е $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to k$:

(1) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – билинейная симм. форма

(2) $\langle x,x\rangle \geq 0$, причем $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$.

<u>КБШ</u> $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$.

$\triangleleft$ $\langle x+ty, x+ty\rangle \geq 0$

$\langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + t^2\langle y,y\rangle \Rightarrow \frac{D}{4} = \langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$ □

<u>Нер-во $\triangle$</u> $\sqrt{\langle x+y,x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}$

$\triangleleft \Leftrightarrow 2\langle x,y\rangle \leq 2\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$ – КБШ □

<u>Ортогонализация Г-Ш</u> Пусть есть базис $v_1 \ldots v_n$. Его можно тривиальными преобр-ями привести к ортонорм. виду.

<u>Шаг 1</u> $e_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$

<u>Шаг 2</u> $f_2 = v_2 - (v_2,e_1)e_1 \qquad e_2 = \frac{f_2}{|f_2|}$

<u>Шаг 3</u> $f_3 = v_3 - (v_3,e_1)e_1 - (v_3,e_2)e_2 \qquad e_3 = \frac{f_3}{|f_3|}$

...

<u>Пр 1</u> (о разложении в $\oplus$) пусть $W\subset V$. Тогда $\dim W^\perp + \dim W = \dim V$
($W^\perp$ - ортог. доп-е)

и любой вектор $v\in V$ одн-но пр-ся в виде $v = w + w^\perp$, где $w\in W$, $w^\perp \in W^\perp$.

$\triangleleft$ Равенство сл-ет из орт-ии Грама-Шмидта (отсюда же следует, что представление $v = w+w^\perp$ существует)

Оно единственно: $w + w^\perp = w' + w'^\perp \Leftrightarrow w - w' = w'^\perp - w^\perp \in W\cap W^\perp = 0$. □

(10) <u>Опр 1</u> A $_{V\to V}$ <u>самосопр.</u>, если $\langle A(v), u\rangle = \langle v, A(u)\rangle$

В ортог. базисе $A = A^T$.

<u>Лемма</u> У любого лин. оп-ра A есть 1-мерное или 2-мерное инвариантное подпр.

$\triangleleft$ Рассмотрим для некоторого $v\in V$ векторы $v, A(v), A(A(v)) \ldots A^n(v)$, $n = \dim V$.

Они ЛЗ $\Rightarrow \exists a_i$ $(A^k + a_1 A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_k)v = 0$

Мн-н $t^k + a_1 t^{k-1} + \ldots + a_k$ р-ся на мн-ли, будем их посл-но применять к V. Когда-то будет $0 \Rightarrow \exists$ мн 1 или 2 степени, обнуляющий нек. вектор w.

1) $(t-b)w = 0 \Rightarrow b$ – собств. зн-е, w – собств. в-р.

2) $(t^2+bt+c)w = 0$ Тогда $\langle w, Aw\rangle$ - инвариантно □

<u>Пр</u> ~~...~~ (диагонализуемость) Самосопр. оператор A диагонализуем.

$\triangleleft$ • Применим лемму, предположим, нашлось инв. 2-мерное подпр-во $W\subset V$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$ - матрица $A|_W$ $\quad \chi_A = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2) \quad D = (a+c)^2 - 4ac + 4b^2 \geq 0 \Rightarrow$

χ_A р-ся на мн-ли $\Rightarrow \exists$ инв 1-мерное подпр-во

• w - собств. в-р A. $v\in w^\perp$ $0 = \langle A(w), v\rangle = \langle w, A(v)\rangle \Rightarrow A(w^\perp) \subset w^\perp$ □

и т.д.

Опр2 Ортогональный оператор - это оператор T, для кот. $\underset{\langle u, v\rangle}{\overset{\langle T(u), T(v)\rangle}{\|}}$

Или, что то же самое $TT^T = 1$

Пр2. Кв. форму можно привести к ~~орт~~ диаг. виду ортог. преобр.

◁ Пусть Q - матрица кв. формы, мы хотим найти орт. T:

$TQT^T = $ диаг

Q - самосопр. как оператор $\exists X: XQX^{-1}$ - диаг.

$X^{-1} = X^T$, что и хотелось □

(11) Опр1 Эрмитовым скалярным пр-ем на компл. век. пр-ве н-се полуторалинейная форма (линейная по 1 аргументу $\alpha(x, ay+bz) = \bar{a}\alpha(x,y) + b\alpha(x,z)$) для которой $\langle \overline{x,y}\rangle = \langle y,x\rangle$, $\langle x,x\rangle \ge 0$, причем $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

~~Опр2 Самосопр. оператором А~~

Опр2 Унитарный оператор - это оператор на эрм. пр-ве, для которого $\langle U(u), U(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ $\forall u, v$.

Пр1 Сопр. опер-р диагонализуем

◁ аналогично (и даже проще) □

Пр2 собств. зн-я сопр. оп-ра вещественны.

◁ $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad (Ae_i, e_i) = (e_i, Ae_i)$ $\quad$ я гений

$\lambda_i \delta_{ij} = \bar{\lambda}_i \delta_{ij} \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$ □

Пр3 У унит. оп-ра существует диаг. форма, причем $|\lambda_i| = 1$.

◁ Собств. в-р $\exists$, поэтому диаг. форма $\exists$ по индукции (ортогональное доп-е инвариантно).

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad \langle Ae_i, Ae_i\rangle = \lambda_i \bar{\lambda}_i$ что и требовалось.

$\langle e_i, e_i\rangle = 1$

Сл-е1 Собств. в-ры с разными λ: ортогональны.

(12) Опр1 Афф. пр-во $A = \mathbb{A}(V)$ над векторным пр-вом V - это мн-во $\mathbb{A}$ с операцией $A \times A \to V$ $(p, q \mapsto \overrightarrow{pq})$ со след. св-вами:

(1) $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.

(2) при фикс. $p \in A$ от-ие $A \to V$, $q \mapsto \overrightarrow{pq}$ - биекция

Опр 2. Отобр-е $f: A_1 \to A_2$ н-ся аффинным, если $\forall a_1 \in A_1$
$\qquad\qquad\quad V_1 \quad V_2$
$\exists d_{a_1}: V_1 \to V_2$ — линейно.

Пр 1 Афф. от-е $A_1 \to A_2$ задается $\dim V_1 + 1$ точкой (общего положения) □

◁ очев

(13) Опр 1 Для векторного пр-ва V, проект. простр-во $\mathbb{P}(V)$ — это мн-во 1-мерных подпр-в.

Опр 2 $f: \mathbb{P}(V_1) \to \mathbb{P}(V_2)$ н-ся проективным, если $\exists g: V_1 \to V_2$, индуцирующее f.

Пр 1 Проект. отобр-е f задается образами $\dim V_1 + 1$ точки общ. пол-я (и образа точки) $\mathbb{P}(V_1)$

◁ $\dim V_1 = n$ Рассм. $e_1, \dots e_{n+1} \in V_1$, ассоц. с данными точками

$g(e_i) = \lambda_i v_i \qquad e_1, \dots e_n$ — ЛНЗ $\Rightarrow$ $v_1, \dots v_n$ — ЛНЗ

$$v_{n+1} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$e_{n+1} = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n \qquad \lambda_{n+1} v_{n+1} = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

$$(a_1 : \dots : a_n) = (b_1 : \dots : b_n)$$ □

(14) Опр 1 Квадрика — нули ур-я 2-го порядка.

Пр 1 Квадрики в аффинном пр-ве над $\mathbb{R}$ бывают вырожденные (пер. прямые, сдв. пара $\parallel$ прямых, прямая) и невырожденные (эллипс, гипербола, парабола), точка, мнимый эллипс.

◁ Приводим к форме $\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_k^2 + x_{k+1} + \dots + x_l = c$

Для $\mathbb{R}^2$: $x_1^2 + x_2^2 = c$ ($c>0$ эллипс, $c=0$ точка, $c<0$ мнимый эллипс), $x_1^2 - x_2^2 = c \neq 0$ гипербола, $x_1^2 + x_2 = 0$ парабола, $x_1^2 - x_2^2 = 0$ пара прямых

$x_1^2 = c$

$c<0$: $\varnothing$; $c>0$: 2 пар. $\parallel$ прямые; $c=0$: сдв. прямые □

Пр 2 Квадрики над $\mathbb{C}$: мнимый эллипс = эллипс = гипербола, парабола, точка = пара прямых, парал. прямые, сдв. прямые.

Пр 3 В проект. случае над $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix} \text{ пустая} \sim \text{эллипс} \qquad \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix} \text{ — невыр. коника}$$

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix} \text{ точка} \qquad \begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix} \text{ — 2 прямые} \qquad \begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix} \text{ — сдв. прямые.}$$

Пр 4 В проект. сл-е над $\mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} \text{ — невыр.} \qquad \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix} \text{ — 2 прямые} \qquad \begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix} \text{ — сдв. прямая}$$

(15) Опр1 Группа - это мн-во G с операцией $\cdot$ так, что
(1) $\forall g \; \exists e \in G: \; eg = ge = g$
(2) $\forall g \; \exists g^{-1}: \; gg^{-1} = g^{-1}g = e$
(3) $\forall g_1 g_2 g_3 \quad (g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$

Опр2 Подгруппа H группы G это подмножество, замкнутое отн. операций взятия обр эл-та и $\cdot$.

Опр3 Смежным классом эл-та $g \in G$ н-ся мн-во $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ (правый) или $gH = \{gh \mid h \in H\}$ (левый)

Зам Классы смежности либо совпадают, либо пер-ся.

Т(Лагранж) # классов см-ти $= \dfrac{|G|}{|H|}$ для конечной G.

◁ в каждом классе смежности $|H|$ эл-ов □

(16) Опр1 $\varphi: G \to H$ - гомоморфизм групп - это отобр-е, уважающее оп-и.

Зам Нейтральный переходит в нейтральный, обратный в обратный.

Опр2 $H \triangleleft G$ - нормальная подгруппа, если $ghg^{-1} \in H \;\; \forall g \forall H$.
(аналогично $gH = Hg$)

Опр3 $H \triangleleft G$ мн-во классов смежности $G/_H$ н-ся фактор-группой.

Зам Это группа: $g_1 H \cdot g_2 H = g_1 g_2 H$ $\left(\begin{array}{l} g_1 h_1 \cdot g_2 h_2 = g_1 g_2 h \\ g_2^{-1} h g_2 h_2 \overset{\exists}{=} h \; \text{- корректность} \end{array} \right)$

$\boxed{\text{Т}}$ (О строении гомоморфизма) $G \to H$ φ - гомоморфизм $\operatorname{im}\varphi \overset{\subset H}{\cong} G/\ker\varphi$

◁ Заметим, что $\ker\varphi$ - подгруппа. Более того, она является нормальной.
$\varphi(g) = e$, $\varphi(g_1 g g_1^{-1}) = \varphi(g_1) \cdot \varphi^{-1}(g_1) = e.$
$G/\ker\varphi \to \operatorname{im}\varphi$
$g\ker\varphi \to \varphi(g\ker\varphi)$ - зададим гомом-м так.

$\boxed{\text{Т}}$ (О классификации конеч. абел. групп) $A = \mathbb{Z}^r \bigoplus_i \mathbb{Z}/_{p_i^{\alpha_i}}$.

(17) Опр1 $a \,\vdots\, b \Leftrightarrow \exists c \;\; a = bc$

Опр2 Кольцо н-ся евклидовым (тут нет делителей 0), если на нем $\exists$ норма $|\cdot|: A \to \mathbb{N}_0$, для кот. выполнено:
1) $|ab| \geq |a|$ для $b \neq 0$.
2) $\forall a, b^{\neq 0} \; \exists d, r: \; a = bd + r, \;\; |b| > |r|$

Опр3 Нетривиально эл-т неприводим, если $\exists\, c, b: \;\; a = bc$, b, c необратимы.

Опр4 НОД(a, b) - наибольший делитель — тот, который делится на все общие дел-ли

Зам Он существует по алг. Евклида.

Лемма1 Если $ab \,\vdots\, p$ (p - неприводим) $\Rightarrow a \,\vdots\, p, \; b \,\vdots\, p$

◁ Пусть $a \not\vdots\, p \Rightarrow (a, p) = 1 \quad ax + py = 1$ для нек. $x, y \quad \Rightarrow \underset{\vdots p}{abx} + \underset{\vdots p}{pyb} = b \Rightarrow b \,\vdots\, p.$ □

Лемма2 Если $|ab| = |a|$, то b обратим

◁ Поделим a на ab $\quad a = ab \cdot q + r \quad r = a(1 - qb) \quad |r| < |a| \Rightarrow qb = 1 \Rightarrow$

T (осн. т. арифметики) разложение любого эл-та на простые $\exists$ и опр-ся ~~нер~~-кой и домн-ем на обратимый.

$\triangleleft$ Сущ-е из Леммы 2 дальше инд-я по # мн-лей. $\square$

(18) Опр1 A - комм. кольцо - группа по +, моноид по $\cdot$ и $ab=ba$ $a(b+c)=ab+ac$.

Опр2 Поле - это комм. кольцо с обр. эл-ом по $\cdot$ и $1\neq 0$.

Поле и ~~Кор~~ кольца вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $k[x]/f(x)$. Можно ещё по идеалу брать.

Пр Мульт. группа конечного поля F циклична. $K\subset F^{\times}$

$\triangleleft$ Лемма $\operatorname{ord} a = n$ $\operatorname{ord} b = m$ $(m,n)=1 \Rightarrow \operatorname{ord} ab = mn$ $\square$

$\triangleleft$ $(ab)^k=1$ $(ab)^{mk}=1 \Rightarrow k \vdots m$ аналог $k \vdots m$.

Пусть a - эл-т макс. порядка $\operatorname{ord} a < K^{*} \Rightarrow m \vdots \operatorname{ord} b$ $\forall b \Rightarrow \forall$ эл-т корень $x^m-1 \Rightarrow m=\operatorname{ord} K$. $\square$

(19) Опр1 Топ. пр-во X это пр-во с топологией т.е $\exists$ семейство подмн $\{U_\alpha\}=S$

1) $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in S$
2) $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in S$
3) $\varnothing, X \in S$

Опр2 Точка $x\in Y\subset X$ - внутр. точка Y, если $\exists U\subset Y$ - откр: $x\in U$.

Опр3 Точка $x\in$ ~~…~~ н-ся граничной для Y, если она не явл. внутр ни для Y, ни для $X\setminus Y$.

Опр4 $\overline{Y}$ н-ся замыканием Y, если $\overline{Y} = \bigcap_{\substack{Z\supset Y \\ \text{замкн.}}} Z$,

экв. $Y \cup \{\text{замкн. } Y\} = \overline{Y}$

Опр5 Непр. отобр-е топ. пр-в - это от-е топ. пр-в $f: X\to Y$, для которого $\forall \underset{\text{откр}}{U\subset Y}$ $\underset{\text{откр}}{f^{-1}(U)\subset X}$.

Опр6 Метр. пр-во - это пр-во, для кот. есть метрика:

1) ~~…~~ $\rho(a,b) < \rho(a,c)+\rho(c,b)$
2) $\rho(a,b)=\rho(b,a)$
3) $\rho(a,a)=0$.

Зам Метр. пр-во опр-ет ест. топологию.

Пр Откр. мн-во на $\mathbb{R}$ - дизъюнктное объединение интервалов

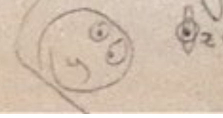
$\triangleleft$ у каждой точки $\exists$ макс. окр-ть, их счётно.

(20) Опр Комп. пр-во - это пр-во, для любого покрытия которого $\exists$ кон. подп-е

Зам Непр. обр. компакта - компакт.

Замкнутое подмн-во компакта - компакт.

Пр ~~Комп. подмн~~-во хаусдорфова пр-ва замкнуто.

$\triangleleft$  Расс. покрытие Y окр-тями, кот. выбираем по хаусд. для точки z, возьмём кон. подп-е, пересечём.

Пр: $f: X \to Y$ - непр. X - комп. Y - хаусд. $\Rightarrow f$ - замкнуто.

◁ $f(X) \subset Y$ - компакт в хаусд $\Rightarrow$ замкнут □

Кр. компактности в $\mathbb{R}^n$ $X \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow X$ замкнуто и огр.

◁ $\Rightarrow$ очев компактно и огр

$\Leftarrow$ Дост. для куба, в кубе делим пополам □

(21) Опр 1 Пр-во X н-ся связным, если не сущ- $U_1 \sqcup U_2 = X$ (откр)

Опр 2 Пр-во X н-ся лин. связным, если $\forall x, y\ \exists f: [0,1] \to X$ непр, $f(0)=x$, $f(1)=y$

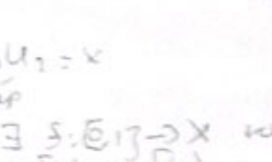
Пр X - линсв $\Rightarrow X$ - связность

◁ Докажем для отрезка. пусть $[0,1] = U_1 \sqcup U_2$

Пусть x - гр. точка интервала $U_1 \Rightarrow$ она сод в интервале $U_2 \Rightarrow$ пер-е □

Этого дост. для произв. X

Контрпример $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на $x \in (0,1)$ - лин. связно



$\overline{f(x)}$ - связно как замыкание связного.

(22) Опр 1 Метр. пр-во н-ся полным, если $\forall$ фунд. п-ть сх-ся.

Пр $(C[a,b], \sup|\cdot|)$ полно.

◁ $B[a,b]$ - полно. $\{f_n\}$ - ф.п. $f(x) := \lim f_n(x)$ $f(x)$ - огр.

$\forall \varepsilon\ \exists N: \forall m, n > N$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \xrightarrow{n \to \infty} |f(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$

$f(x) = f_m + \underbrace{(f - f_m)}_{\varepsilon}$ $\Rightarrow f$ - предел $\{f_n\}$.

Покажем, что $C[a,b]$ замкнуто в $B[a,b]$, пусть $f_i \in C[a,b]$, $f_i \rightrightarrows f \in B[a,b]$

$|f(x) - f(y)| = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(y)) + (f_n(y) - y) < 3\varepsilon$ □

Зафикс. $\varepsilon \rightsquigarrow \exists N$. $n, m > N$. Потом выб. δ-окр-ть x

Т (о сжим. отобр-ии) $\rho(f(x), f(y)) \le q\, \rho(x,y)$, $q < 1$ $\Rightarrow \exists!$ неп. точка. (полное)

◁ Если неп точка $\exists$, то она ед.

Рассм. п-ть $x_n = f^n(x)$. $\rho|f^n(x), f^{n+k}(x)| \le q^n \rho(x, f^k(x)) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n$ - фунд $\Rightarrow x_n \to y$. Прим. f сохр-ет пределы. $\Rightarrow f(y) = y$ □

(23) Опр 1 Пусть X-топ. пр-во, $a \in X$. $f: [0,1] \to X$, $f(0) = f(1) = a$ - непр.

$f_0 \sim f_1$ гомотопически экв-ны, если есть $F: [0,1] \times [0,1] \to X$ непр. $F(0,t) = f_0(t)$, $F(1,t) = f_1(t)$

$f(s,0) = f(s,1) = a$.

Опр 2 Мн-во под петель в a с точностью до $\sim$ н-ся гомотоп. группой.

Зам Умн-е опр-но корректно. Проверим, что $f \circ \bar{f} = id = \bar{g} \circ f$

$g \circ f = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2-2t) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ $F(s,t) = \begin{cases} f(2ts) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(s(2-2t)) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \Rightarrow g \circ f \sim id$

Пр 1 $(\pi_1(S^1) = \mathbb{Z})$

◁ $\mathbb{R} \to S^1$ $f: [0,1] \to S^1$ - наша петля. Покажем, что её можно поднять в $\mathbb{R}$

$t \to e^{2\pi i t}$ f - равн. непр. разобьем $[0,1]$ на отрезки, кот от-ся на дуги $< \varepsilon$,

каждую поднимем, складывая конст. $\sim$ получим f' - подъем

Если $f_1 \sim f_2$, то подъемы $f_1' \sim f_2'$ (нет. целые точки не двигаются)

Обратно тоже верно □

Пр ($\pi_0(S^2) = 0$)

◁  $f: [0,1] \to S^2$. Если $f(t)$ не сод. нек. точку S^2, сделаем стереогр. пр-ю и победим.
Если $f(t)$ содержит все точки, разобьем на ε-отрезки, □
и продеформируем

(24) <u>Опр 1</u> Предел ф-ции в точке x - A - $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ |f(x_0) - A| < \varepsilon$ для $|x - x_0| < \delta$.

<u>Опр 2</u> Ф-я f <u>непр.</u> в точке x, если предел в точке $\exists$ и равен $f(x)$.

$\boxed{T}$ <u>(о промеж. зн-ии)</u> Пусть $f(x_0) = a$, $f(x_1) = b$. $\Rightarrow \forall c \in [a, b]\ \exists x \in [x_0, x_1] : f(x) = c$
<u>f - непр</u>. □

◁ делим пополам.

$\boxed{T}$ (о равн. непр-ти). Равн. ф-я: Непр. ф-я из компакта ← равн. непр.

◁ Пусть x_n, y_n - пары для $\delta = \frac{1}{n}$ для фикс ε, для кот. ломается ус-е равн. непр.
Выберем подп-ть $x_{n_k} \to x$, правый конец удобнее лежать в δ-окр x при больших n !
левый конец

(25) <u>Опр 1</u> П-ть $\{x_n\} \to x$ - <u>сходится</u>, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |x_n - x| < \varepsilon$ $N < n$.

<u>Опр 2</u> Ряд $\sum_1^\infty a_n$ <u>сх-ся</u>, если $b_n = \sum_1^n a_k$ сх-ся.

<u>Критерий Коши</u> Фунд. п-ть $\Leftrightarrow$ п-ть сх-ся. □

◁ Фунд. п-ть ограничена $\Rightarrow \exists$ сх. подп-ть $x_{n_i} \to x$, тогда и $x_n \to x$

<u>Св-ва абс. сх. рядов</u> • абс. сх. ряд сходится $\sum_1^N |a_n| - \sum_1^{N+k} |a_n| = \sum_{N+1}^{N+k} |a_n| \geq |\sum_{N+1}^{N+k} a_n|$.
$\wedge|$ ε
• $\sum$ абс. сх. ряда $= \sum$ пол $- \sum$ отр.

<u>Признак сх-ти Коши</u> $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ - существует и $< 1 \Rightarrow$ сх-ся,
$\overset{\shortparallel}{q_0}$ $> 1 \Rightarrow$ расх-ся.

◁ ~~Пусть~~ Пусть $a_n \geq 0$ ~~$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = A$ ...~~

Лемма Пусть $\frac{a_n}{b_n} \to c \neq 0 \Rightarrow a_n$ сх-ся $\Leftrightarrow b_n$ - сх-ся.

~~Пусть $b_k = (\lim \sqrt[n]{|a_n|})^k = q^k$~~ $\frac{q^k}{b_k} = \left(\frac{\sqrt[k]{a_k}}{q}\right)^k$ Пусть $q_0 > 0$

Выберем q: $q_0 < q < 1$ $\sqrt[n]{a_n} < q_n \Rightarrow a_n < q^n$ $\sum q^k$ - сх-ся $\Rightarrow \sum a_k$ сх-ся □

Случай $q > 1$ аналогичен

<u>Контрпример</u> • $\sum \frac{1}{n}$ - р-ся $\lim = 1$
• $\sum \frac{1}{n^2}$ - сх-ся $\lim = 1$

<u>Признак сх-ти Даламбера</u> $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q_0$ $q_0 < 1$ - сх-ся
$q_0 > 1$ - расх-ся

◁ $q_0 < q < 1$ $a_{n+1} < q a_n$ для больших n и геом. пр-я □

<u>Опр</u> <u>Условно сх. ряд</u> - сх. ряд, но не абсолютно

$\boxed{T1}$ В абс. сх ряде члены можно переставлять с сохр-ем предела.
◁ Дост-то для $a_n > 0$. Все суммы $\leq A$. И сл-но в точности A,
потому что существует обратная перестановка. □

$\boxed{T}$ (Римана) Если ряд сх-ся условно

◁ Будем прибавлять полож. и отр по очереди до перескока □

(26) Опр 1 Ф-я f дифф-ма в x_0 $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h)$

Пр 1 (Необходимое у-е экстремума ф-ии) на $[a,b]$ $f'(x_0)=0$.

◁ Пусть $f'(x_0)$ макс $\Rightarrow f(x_0+h)-f(x_0)\leq 0 \Rightarrow f'(x_0)=0$ (иначе у h можно выбра[ть] знак

$\boxed{T}$ (Ролля) $f(a)=f(b)$, f-непр и f' сущ-ет $\Rightarrow \exists c\in[a,b]$ $f'(c)=0$. □

◁ На отр-ке сущ-ет макс. и мин

$\boxed{T}$ (Лагранжа) $\exists_x$ $f(b)-f(a)=f'(x)(b-a)$ □

◁ Сводим к Роллю, вычитаем ур-е прямой

(27) Опр1 $f(x_1,\dots x_n)$ производная f по v и-ся $\partial_v f=\lim \frac{f(x+vt)-f(x)}{t}$.

Опр2 Градиент ф-ии $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

Опр3 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ его дифференциал A: $F(x+h)-F(x)=Ah+o(|h|)$

$\boxed{T}$ (О произв. сл. ф-ии) $\underset{(x_1,\dots x_m)}{F}: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $G\ \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$.

Дифференциал композиции равен композиции дифф-в

◁ $F\circ G(y+h)-F\circ G(y)=F\left(G(y)+\underbrace{B(h)+o(h)}_{\text{приращ}}\right)-F\circ G(y)=F\circ G(y)+A\left(B(h)+o(h)\right)+o(Bh+o(h))-F\circ G(y)=ABh+o(h)$ □

Пр Если дифф-л F сущ-ет то A - якобиан.

◁ пусть $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. Для $h=(t,\dots 0)$ $F(x+h)-F(x)=Ah+o(h)$

$A^i=\frac{\partial F}{\partial x^i}$ $A=(A^1,\dots A^m)$ □

Для $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ покоординатно.

(28) $\boxed{T}$ (о неявной ф-ии) $\underset{(x,y)\to z}{\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^n}$ Пусть 1) $F(x_0,y_0)=0$ 2) $\exists$ (в окр-ти (x_0,y_0)) DF и непрерывна 3) $\det\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\neq 0$ Тогда $\exists f:\underset{k\text{-вект}}{\mathbb{R}^k}\to\underset{n\text{-вект}}{\mathbb{R}^n}$, для кот $F(f(y),y)=0$, более того, f-непр. и дифф.

$\boxed{T}$ (Об обратной ф-ии) $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ Пусть в V_x окр-ти нек. точки существует невыр. диф-л DF. Тогда $\exists G\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, для кот $F(G(y))=y$ $\forall y$ из хорошей окр-ти.

◁ $H:\mathbb{R}^{n+n}\to\mathbb{R}^n$

$H(y,x)=F(y)-x$. Применим т. об обр ф-ии для $(y,F(y))\Rightarrow$

$\exists G$ $H(G(x),x)=0$. Что и требовалось. □

Пр Дифф-л неявной и обратной ф-ии.

◁ Неявная $F(f(x),x)=0$ по т. опр. сл ф-ии $\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}=0$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}}$$

Обратная $\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial G}{\partial x}=I$ $\frac{\partial G}{\partial x}=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}$ □

(29) Рассм. разбиение $[a,b]$ с диам $\leq \delta \Rightarrow \underset{\text{суммы Дарбу}}{\Sigma_{max} - \Sigma_{min}} \leq \varepsilon \cdot |a-b|$

Рассм. посл-ть разбиений с диам $\to 0$,

Интеграл = предел верхних сумм = предел нижних сумм.

опр-е по Гейне

Опр (по Коши) $\exists A : \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall$ п-ти с диам $\leq \delta \; |\Sigma .. - A| < \varepsilon$.

Зам Опр-я эквивалентны.

Осн. св-ва
- линейность.
- аддитивность
- полож. для полож. ф-ий.

Ф-ла Ньютона - Лейбница $F(b) - F(a) = \int_a^b f$.

$\triangleleft$ $F(1) - F(0) = F(1) - F(\frac{n-1}{n}) + F(\frac{n-1}{n}) - F(\frac{n-2}{n}) + \ldots - F(0) =$
$= \frac{1}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_n)) \to \int_0^1 f(x)\,dx$.

Пр Сущ-е первообр для непр. ф-ии f - непр. $\Rightarrow \exists F$ - первообр

$\triangleleft$ Определим $F(x) = \int^x f(t)\,dt$ $\quad F'(x) = \lim \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = \lim \frac{\int_x^{x+\delta} f(t)\,dt}{\delta} =$
$= f(x)$ $\quad \int_x^{x+\delta} \frac{f(t) - f(x)}{\delta} < \delta\varepsilon$ (из равн. непр) $\square$

(30) $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt = -\int_a^x f'(t)(x-t)'\,dt = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(x-t)\,dt =$
$= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\int_a^x f''((x-t)^2)'\,dt = \ldots = \sum_1^n \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_a^x f^{n+1}(t)(x-t)^n\,dt}_{r_n \text{ - ост. член в интегральной форме.}}$

$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{n+1}(t)(x-t)^n\,dt \overset{\text{(теорема о среднем)}}{=} \frac{1}{n!} f^{n+1}(\xi)\int_a^x (x-t)^n\,dt =$
$= \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)(x-a)^{n+1}$. - ост. член в форме Лагранжа.

$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{n+1}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{n+1}(\xi)(\xi - t)}{n!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt =$
$= \frac{f^{n+1}(\xi)(\xi - t)}{n\, n!}(x-a)^n$. - ост. член в форме Коши.

$\left|\frac{1}{(x-a)^n}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\boxed{(x-t)^n}\,dt\right| \leq \int_a^x |f^{(n+1)}(t)|\,dt \xrightarrow[x \to a]{} 0$

(31) Опр1 f н-ся выпуклой вверх (вниз), если её подграфик (надграфик) выпуклый.

Пр1 Пусть f выпукла вниз, тогда $f' \uparrow$ (если существует). Верно и обратно.

◁ $x_2 > x > x_1$

$$\underset{(*)}{\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

$$\downarrow x \to x_1 \qquad\qquad \downarrow x \to x_2$$

$$f'(x_1) \quad < \quad f'(x_2)$$

Обратно. (*) верно по Лагранжу $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

$f(x) \le \frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}$ – у-е выпуклости. □

Пр2 Пусть f выпукла вниз, тогда $f'' \ge 0$ (если существует)

Пр3 Пусть $f \in C^2[a,b]$ $f'(x_0)=0$ $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ – лок. минимум.

◁ $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + o((x-x_0)^2)$

$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) > 0$ □

(32) Пр1 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathrm{grad} f(x_0) = 0$ Hess f – пол. опр. $\Rightarrow x_0$ – лок. минимум $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$

◁ $f(x_0+h) = f(x_0) + \mathrm{grad} f(x_0) \cdot h^T + h \,\mathrm{Hess} f\, h^T + o(|h|^2)$

$f(x_0+h) - f(x_0) = h \,\mathrm{Hess} f\, h^T + o(|h|^2) > 0$ □

Опр1 Пусть $F_1, \dots F_m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – ф-ии, задающие мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{rk}\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = m$)

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ н-ся условным экстремумом для X в $\mathbb{R}^n$, если это экстремум $f|_X$.

$\lambda \in \mathbb{R}^m$

$L(x,\lambda) = f(x) - \sum \lambda_i F_i(x)$ – ф-я Лагранжа

$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$ – метод множ. Лагранжа. (для $x_0 = (0,\dots 0)$)

Пр2 (Необх. признак усл. экстр.) Необходимо, чтобы $TX_{x_0} \subset TN_{x_0}$, где

$N = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0)\}$

◁ Пусть $\xi \in TX_{x_0}$. $x(t) \in X$ – кривая, $x(0)=x_0$, $x'(0)=\xi \Rightarrow$

$(f(x(t)))'|_{t=0} = 0$ $f'(x_0)\cdot\xi = \mathrm{grad}(x_0)\cdot(\xi)^T$

1) $\mathrm{grad}(x_0) \ne 0$ $TN_{x_0} = \{\frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = c\} \Rightarrow \xi \in TN_{x_0}$

2) $\mathrm{grad}(x_0) = 0 \Rightarrow TN_{x_0} = \mathbb{R}^n$ □

(33) Делаем всё аналогично, разбиваем на паралл. диам. $\le \varepsilon$, делаем всё то же самое.

Пр $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - непр. Тогда $\int\limits_{\square} F\,dV = \iiint\ldots F\,dx_1 dx_2\ldots$

◁ ~~Для~~ $I = [a,b]\times[c,d]$

$$J = \int\limits_I f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = J_1$$

Зафикс $\varepsilon > 0$. Пусть τ_x - р-е $[a,b]$, τ_y - р-е $[c,d]$ такие, что на $\Delta_i^x\times\Delta_j^y$ колебание f на пр-и $< \frac{\varepsilon}{|b-a||c-d|}$

Выберем на $\Delta_i^x\times\Delta_j^y$ точку $(\xi_i;\eta_j)$

$$S = \sum_{i,j} f(\xi_i,\eta_j)\,|\Delta_i^x|\cdot|\Delta_j^y| = \sum_i |\Delta_i^x| \sum_j \int\limits_{\Delta_j^y} f(\xi_i,\eta_j)\,dy =$$

$$= \sum |\Delta_i^x| \left(\int\limits_c^d f(\xi_i,y)\,dy + A_1 \right) = J_1 + A_1$$

$$|A_1| \le \sum_i |\Delta_i^x| \sum_j \int\limits_{\Delta_j^y} |f(\xi_i;\eta_j) - f(\xi_i;y)|\,dy \le \sum |\Delta_i^x| \frac{\varepsilon}{|b-a|} = \varepsilon$$ □

(34) Опр 1 Пусть $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ - непр. $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ - непр дифф.

$$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \int\limits_a^b f(r(t))\,|r'(t)|\,dt = \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt.$$

интеграл первого рода

Опр 2 $$\int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz := \int\limits_a^b (F,r')\,dt = \int\limits_a^b (Px' + Qy' + Rz')\,dt$$

интеграл второго рода.

Опр 3 Длина - инт-л первого рода для $f=1$

Опр 4 Работа переменной силы (P,Q,R) при дв-ии точки по п - это инт-л 2 рода.

Ф-ла Стокса $\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_M d\omega$ для гладкого, ориент, комп. мн-я с краем.

Ф-ла Грина U ∂-кус гл. пров. кривое $P,Q:\overline{U}\to\mathbb{R}$

$$\int\limits_{\partial U} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(35) Опр 1 Алгебра - такое подмн-во ..., ...
1) $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B, \mathcal{F} \setminus A \in \mathcal{F}$.
2) $\varnothing, \mathcal{F} \in \mathcal{F}$.
Опр 2 σ-Алгебра — это алгебра, в которой $\bigcup A_i \in \mathcal{F}$ $\forall A_i$.
Опр 3 Мера Лебега это ф-я $\mu: \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$, для кот.
1) $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (для сч. тоже)
2) при пар. переносе мера сохр-ся.
Пример неизм. мн-ва на $[0,1]$ рассм S такое, что для $\forall r \in [0,1]$ $\{r + \mathbb{Q}\} \cap S$ состоит ровно из 1 точки. Параллельно перенесем S на все $q \in \mathbb{Q}$. $\Rightarrow \mu(S)$ не опр.
(36) Опр 1. Ф-ия измерима, если прообраз ~~открытого~~ $\forall$ борелевского измерим
Опр 2 Интеграл Лебега. Определим для простых ф-ий. абсол. сх.
Любую ф-ю можно приблизить (равномерно) простыми.
предел по прибл. простым назовем инт-ом самой ф-ии
Св-ва 1) лин-ть, адд.
2) мажорант. признак.
Нер-во Чебышева $\frac{1}{\varepsilon} \int_A |f(x)| dx \geq \mu(\underbrace{|f(x)| \geq \varepsilon}_{S})$
Δ $\int_A |f(x)| dx = \int_S + \int_{A \setminus S} \geq \mu(S)\,\varepsilon$. □
Предельный переход под знаком интеграла f_i - посл-ть ф-ий
$f_i \xrightarrow{\mu} f$, $|f_i| \overset{a.e.}{\leq} g \Rightarrow |f| \overset{a.e.}{\leq} g$ и $\int f_i d\mu \to \int f d\mu$.
(37) Опр 1 Поточечная сх-ть $f_n \to f$ $\forall x$ $f_n(x) \to f(x)$
Опр 2. Равн. сх-ть $f_n \rightrightarrows f$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0$ $|f_n - f| < \varepsilon$.
~~Равн~~
Непр. предела равн. сх. непр. ф-ий $f_n^{\text{непр}} \rightrightarrows f \Rightarrow f$ - непр.
Δ $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon$
для больших n $|f(x) - f_n(x)|, |f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, а f_n - непр,
поэтому для $|x-y| < \delta$ $|f_n(x) - f_n(y)| < \delta$ □

(38) <u>Опр</u> Несобств. инт-л $\int\limits_a^{\infty} = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A$ с особ-ю в т. ∞.

<u>Признаки сх-ти</u> • мажорантный признак

• пусть f монотонна $\downarrow$ на $[0,\infty)$ $\sum\limits_0^{\infty} f(n)$ сх $\Leftrightarrow \int\limits^{\infty} f(x)dx$

• <u>Дирихле</u> $\exists g : [0,\infty) \in C$, f монотонна и стр. к 0. $G(u) \overset{\circ}{=} \int\limits_0^u g(t)\,dt$ - огр.

тогда $\int fg$ инт.

$\triangle$ <u>Ф-ла Бонне</u> $\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(t)\,dt$ (f монот. g б.)

$$\int\limits_M^{M+N} f(t)g(t)\,dt = f(M)\underbrace{\int\limits_M^{M+\xi} g(t)\,dt}_{<2C}$$ для больших M $f(M) < \frac{\varepsilon}{2C}$. $\square$

• Абель f монотонна $\downarrow$, $\lim\limits_{u\to\infty} G(u)$ сущ-ет.

$\triangle$ Тоже ф-ла Бонне, только теперь $f(M)$ огр $\int\limits_M^{M+\xi} \to 0$. $\square$

• $\int\limits_0^1 x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$ $\quad \int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_0^1 = \infty$

(39) <u>Опр1.</u> $\Gamma_n(x) = \dfrac{(n-1)!\, n^x}{\prod\limits_0^{n-1}(x+k)}$

Раскроем скобки... $x\Gamma_n(x) = \prod\limits_1^{n-1} \dfrac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}$

$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod\limits_1^{\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}$ сх-се пот. сх-се ряд из $\ln$:

$$\sum \ln\left(\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}\right) = \sum\left(x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = \sum O\left(\frac{1}{k^2}\right) < \infty.$$

<u>Осн. функц. р-во</u> • $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

<u>Р-во:</u> • $\Gamma(n+1) = n!$

<u>Ф-ла доп-я</u> • $\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

<u>Первый инт-л Эйлера</u> $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} y^{x-1}e^{-y}dy$ $x > 0$

<u>Бэта-ф-я</u> $B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ $\alpha,\beta > 0$ - <u>II инт-л Эйлера</u>

<u>Св-ва</u> • $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

• $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta)$

• $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$

(40) Опр1 Норм. пространство н-ся банаховым, если оно полно.

Опр2 Полное евкл. пр-во (беск. мерное) н-ся гильбертовым.

Опр3 Замкнутое подпр-во – лин. пр-во, замкнутое в топологии метрики

Опр4 Орт. доп-е $V^{\perp} \subset W$ пр-ва $V \subset W$ – мн-во орт. век-ов

- $V^{\perp}$ – век. подпр-во
- $V^{\perp}$ – замкнуто. Пусть $f_n \to f$ $(f_n, v) = 0$ $\forall v \in V$ $\Rightarrow (f, v) = 0$

нер-во $(\cdot,\cdot)$: $x_1, \dots x_n \to x$, $y_1 \dots y_n \to y$ $(x,y) - (x_n, y_n) = (x,y) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x_n, y_n) =$

$= (x, y - y_n) + (x - x_n, y_n) \le \underbrace{|x|}_{конст} \underbrace{|y - y_n|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|y_n|}_{огр} \underbrace{|x - x_n|}_{<\varepsilon} < \varepsilon$

~~$(x,x) - (x_n, x_n) = x$~~, $y_n = (y_n - y) + y \Rightarrow |y_n| < |y| + |y_n - y|$.

Опр5 Ортог. сист. – набор попарно $\perp$ в-ов

Опр6 Базис – набор в-ов, таких, что $\{e_\alpha\}$ $\forall v \in W$

Пр1 В орт. сеп. пр-ве всякая орт. система $\le$ счетна.

◁ Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ – норм. система $\Rightarrow \|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2}$ $B(\varphi_\alpha, \frac{1}{2})$ не пересек. $\Rightarrow$ шаров не более, чем счетно. □

L_2, ℓ^2 – гильбертовы ℓ^p, L_p – банаховы

Бессель φ_i – о/н базис $f \in W$ $c_k = (f, \varphi_k)$ коэф. Фурье f.

$f = \sum c_i \varphi_i$ Тогда $|f|^2 \ge \sum |c_i|^2$.

◁ $|f - \sum_1^n a_i \varphi_i|$ док, что min д-ся при $a_i = c_i$

$\left((f - \sum a_i \varphi_i), (f - \sum a_i \varphi_i)\right) = (f, f) + \sum a_i^2 - 2 \sum a_i (f, \varphi_i) =$

$= |f|^2 + \sum a_i^2 - 2 \sum a_i c_i = |f|^2 + \sum (a_i - c_i)^2 - \sum c_i^2 \ge 0$ □

Если р-во, то оно н-ся р-ом Парсеваля

Опр7 Замкн. сист. – вып-ся р-во Парсеваля.

Пр2 В гильб. системах полнота $\Leftrightarrow$ замкн.

◁ полнота $\Rightarrow$ замкн. очев.
замкн. $\Rightarrow$ полнота тоже очев.

Т (Рисса-Фишера) $c_1, \dots c_n$ т.ч. $\sum c_i^2 < \infty$. Тогда ~~в полном~~ в гильб. W $\exists f$, коэф. Фурье которого – c_i

◁ $f_n = \sum_1^n c_i \varphi_i$ док. что f_n – фунд.

$|f_{n+k} - f_n| = \sum_{n+1}^{n+k} c_i^2 < \varepsilon \Rightarrow f_n \to f$.

$(f, \varphi_n) = (f - f_N, \varphi_n) + (f_N, \varphi_n) = \underbrace{(f - f_N, \varphi_n)}_{<\varepsilon} + c_n$. □

$\boxed{1}$ Любые два гильб. пр-ва изоморфны между собой.
◁ ортогонализуем, попарно отправим □

(41) Рассм. $L_2=[-\pi,\pi]$ $1, \cos nx, \sin nx.$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx + \cos 0 \, dx = \frac{\sin 2nx}{4n}\Big| + \frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(n+m)x - \cos(n-m)x\right)dx = 0.$$

Сходимость в ср. кв. $f\in L_2$ c_k – коэф. Фурье. тогда ряд Фурье сх-ся к f

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + \sum b_n \sin nx$$

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(t)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt\right]dt =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum \cos k(t-x)\right]dt \ \ominus$$

Восп. ф-ой $\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}$

$$\ominus\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt \underset{t=x+z}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\underbrace{\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}}_{\text{ядро Дирихле}}dz$$ – инт-л Дирихле

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) - f(x)\cdot D_n(z)\,dz =$$

Лемма Римана. Если φ суммируема на $[a,b]$, то $\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx = 0.$

◁ • Пусть φ - непр. дифф ($\varphi\in C^1$) $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx = -\varphi(x)\frac{\cos px}{p}\Big|_a^b + \int \varphi'(x)\frac{\cos px}{p}dx = O\left(\frac{1}{p}\right) \to 0$

$\leq c$, $\leq \frac{2}{p}$, $\leq \frac{c|a-b|}{p}$

• $\varphi\in L_1$ произвольная прибл. равн. непр

(ПЛАН: приблизить непр → приблизить кус-лин → приблизить дифф.)

Пусть φ_ε: $\displaystyle\int_{[a,b]} |\varphi - \varphi_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx\right| \leq \left|\int_a^b (\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x))\sin px\,dx\right| + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\sin px\,dx\right| \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon \sin px\,dx\right| \to 0$$ □

Дост. у-е поточ. сх-ти. Пусть для $x\in[-\pi,\pi]$ вып-но у-е: $\exists\delta>0$ для кот.
$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x+z) - f(x)}{z}\,dz < \infty$$

Тогда $S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(x+z) - f(x)}{z}$ $S_n(x)\to f(x)$.

$$◁\ S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{f(x+z) - f(x)}{z}\cdot\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}}_{\text{инт.}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}z\,dz \xrightarrow[\text{лемма Римана}]{} 0$$ □

Равн. предел непр. ф-ий – непр. φ-я обозн. => φ-я должна быть непр.

Дост. у-е равн. сх-ти f 2π-периодична, непр, $f'(x) \in L_2(-\pi,\pi)$.

Тогда $S_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$.

Δ a_n' и b_n' – коэф. Фурье.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{f(x)}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{b_n'}{n}, n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = -\frac{f(x)}{\pi}\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{a_n'}{n}, n \neq 0.$$

$$\sum (a_n')^2 + (b_n')^2 < \infty,\ \sum \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \sum \frac{|b_n'|}{n} + \frac{|a_n'|}{n} \text{ сх-ся} \Rightarrow$$

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum (|a_n| + |b_n|) = \frac{|a_0|}{2} + \sum \frac{|a_n'| + |b_n'|}{n} < \infty$$

мажоранта S_n

$\Downarrow$

S_n равн. сх-ся к непр φ.

f и φ имеют один. ряд Фурье.

$S_n \to f$ (по Дини)

$S_n \rightrightarrows \varphi$ $\Rightarrow f = \varphi$.

$\square$

Вейерштрасс Можно мн-ми

Δ Расширяем инт-л, делаем периодичной. приближаем C^1, приближаем S_n, каждый $\cos nx$, $\sin nx$ приближаем. $\square$

(42) $F(y^{(n)}, \dots y', x) = 0$ – ОДУ порядка n (можно свести к системе 1 порядка

$x^{(n)} = F$

Задача Коши $\begin{cases} x' = F(x,t) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$ (*)

Т. о сущ. и единств-ти $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$, где $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1+m}$ открыто (в коорд. $(x_1 \dots x_n, t, \lambda \dots \lambda_m)$)

F непрерывна и липшицева по x с коэф. $q < 1$. (и непр, з-ти от пар)

$x_0 : \Lambda \to \mathbb{R}^n$, где $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ открыто. $\forall$ $(x_0(\lambda), t_0, \lambda) \in \Omega$, $\lambda_0 < \Lambda$

1) $\exists$ $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $V \subset \Lambda$ откр. и ф-я

(42) $(*)\ x^{(n)} = F(t, x, x', \ldots x^{(n-1)})$ – ДУ n-ого порядка.
$F: \Omega \to \mathbb{R}^m$ – непр. Ω откр. $\subset \mathbb{R}^{1+nm}$. Решение – это ф-я $x: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, $\exists\, x^{(n)} \ldots x'$, вып. $(*)$.

Переход от Ду n-ого порядка к системе 1-го порядка: $\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-2} = x_{n-1} \\ \dot{x}_{n-1} = F(t, x_0, \ldots x_{n-1}) \end{cases}$

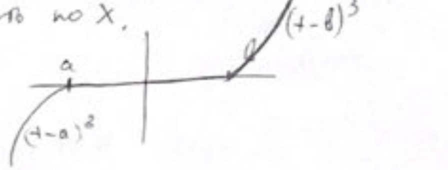
Задача Коши $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$ $(**)$ $(t_0, \xi_0) \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$

(для системы будет больше нач. у-й)

Теор о $\exists!$ Р-я Пусть $f, f'_x \in C(\Omega)$, Тогда
1) $\exists\, J_{\delta t_0} \subset \mathbb{R}$: $\exists\, x: J \to \mathbb{R}^m$ реш. $(**)$
2) $\forall\, J_{\delta t_0}$ р-я $\forall \hat{x}: J \to \mathbb{R}^m (**)$: $\hat{x}|_{I \cap J} = x|_{I \cap J}$.

Зам У-е на произв. можно заменить на липшицевость по x. не лип.

Пример не единств. $x = (t-c)^3$ $\dot{x} = 3(t-c)^2 = 3x^{\frac{2}{3}}$



Преобр. Пикара $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\, ds$ $x(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$
переход от диф. ур. к инт. ур.

$x_0 = \xi_0$, $x_j(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{j-1}(s))\, ds$ $\Phi(x) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$
итерации Пикара

В мал. окр-ти $\Phi(x)$ сжим $\Rightarrow$ $x_j \to x$ – неп. точка $\Phi(x) = x$. это и будет р-е

(43) Опр 1 Лин о.д.у $\dot{x} = A(t)x$ $*$; $A: I \to Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$ – непр.
Лин неодн. д.у $\dot{x} = A(t)x + B(t)$ $**$ $B: J \to \mathbb{C}^n$ – непр.

Теор Если $A, B \in C(I)$, то $\forall t_0 \in I$, $\xi_0 \in \mathbb{C}^n$, з-задача Коши $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$ имеет р-е на всем I. (и единств.)

Сл-е 1 Решения $\dot{x} = A(t)x$ – В.П $\mathcal{X}$ причем р-ти n (изомо-н с $\mathbb{C}^n$ по нач. у-ю)
Сл-е 2 Фунд. с. реш (ФСР) – базис $\mathcal{X}$, Φ, МР – фунд матр. реш $(x_1\ x_2 \ldots x_n) = M$
$\exists t_0: (x_1(t_0) \ldots x_n(t_0))$ – базис $\mathbb{C}^n$ $\Rightarrow$ $x_1 \ldots x_n$ – б-с $\mathcal{X}$ $\Rightarrow \forall t_1$ $(x_1(t_1) \ldots x_n(t_1))$ – б-с $\mathbb{C}^n$
Сл-е 3 Если $M = (x_1 \ldots x_n)$, то $\dot{M} = AM$.
Сл 4 ~~Пусть M – ФМР~~ $M = (x_1, \ldots x_n)$. $\exists t_0: \det M(t_0) \neq 0 \Rightarrow M$ – ФМР $\forall t_1$
Сл 5 Пусть M – ФМР, тогда $\tilde{M}$ – ФМР $\Leftrightarrow \exists\, C \in GL_n(\mathbb{C})$ $\tilde{M} = MC$.

Опр 2 Пусть $x_1 \ldots x_n$ – век. ф-ии $: J \to \mathbb{R}^n$ $W(t) = \det(x_1 \ldots x_n)$
опр-ль Вронского

Св-ва 1. $W(t_0) \neq 0 \Rightarrow x_1 \ldots x_n$ – ЛНЗ. Обратно верно для р-ий ЛДУ, но не в общ. сл.
2. Ф-ла Лиувилля-Остр. $W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds\right)$ $(*)$

$\triangleleft$ (Лиувилль-Остр) (*) $\Leftarrow \dot W(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot W(t)$.
Действ., если x_i - не базис, то $0=0$. Иначе
$\dot W \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \ln W(t) = \operatorname{tr} A(t) \Leftrightarrow \ln W(t) \underset{\text{идиот.}}{=} \ln W(t_0) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds$

Понимаем, что $\dot W(t) = \operatorname{tr}(A(t)) \cdot W(t)$.
Лемма M - ФМР $M(t_0) = E$, $W(t) = \det M(t)$. Тогда $\frac{dW}{dt}(t_0) = \operatorname{tr} A(t_0)$
$\triangleleft$ $M(t) = E + A(t_0)(t-t_0) + o(|t-t_0|)$
$W(t) = E + \operatorname{tr} A(t_0) + o(|t-t_0|)$ что и требовалось. $\square$
Общ. сл. $\bar{\text{и}}$ $M(t)$ - ФМР $\tilde M(t) = M(t) M^{-1}(t_0)$ - ФМР $\Rightarrow \tilde M(t_0) = E$
$\tilde W(t) = \frac{W(t)}{W(t_0)} \xRightarrow{\text{лемма}} \dot{\tilde W}(t_0) = \operatorname{tr} A(t_0) = \frac{\dot W(t)}{W(t_0)}$ что и тред. $\square$

Метод вариации постоянных. Пусть M - Ф.М.Р. (*) (все р-я одн)
Будем искать р-я (**) (неодн) в виде $x(t) = M(t) \cdot c(t)$
$\dot M c + M \dot c = A M c + b$
$\overset{\shortparallel}{AMc}$
$M \dot c = b \rightsquigarrow \dot c = M^{-1} b$ - инт-ем.
В частн. р-я ** - афф. пр-во, ассоц. с $\mathcal{X}$.

(44) $\dot x = Ax$, A - постоянная матрица. Хотим научиться решать
Опр 1 Экспонента от матрицы $e^A = \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$.
$\boxed{\text{Теор}}$ 1) $\sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$ сх-ся
2) $e^{At} = \sum \frac{A^k t^k}{k!}$ $R_{cx} = \infty$.
3) $\frac{d}{dt}(e^{At}) = A e^{At} = e^{At} A$.
$\triangleleft$ Введем операторную норму $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$. Важное св-во $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
Ряд сх-ся абсолютно: $\left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!} \rightsquigarrow$ обычная эксп.
по мажор. признаку имеем (1)
(2) $[\![A]\!] = \max|a_{ij}| \leq k \|A\|$ (все нормы эквив)
Тогда $\sum \frac{[\![A^n]\!]}{n!} < \infty$
$\sum \frac{|(A^n t^n)_{ij}|}{n!}$ (сжаторит) Поэтому $\sum \left|\left(\frac{A^n t^n}{n!}\right)_{ij}\right| \leq \sum [\![\frac{A^n t^n}{n!}]\!] \leq k \sum \frac{\|A^n\| |t|^n}{n!} < \infty$
$R_{cx} = \infty$.
(3) $\frac{d}{dt}(e^{At}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = A e^{At} = e^{At} A$
$\square$

Св-ва 1) $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ $e^{At}=\left(\begin{array}{c|c} e^{A_1 t} & 0 \\ \hline 0 & e^{A_2 t}\end{array}\right)$

2) $B=C^{-1}AC$ $e^{Bt}=C^{-1}e^{At}C$

3) Если $AB=BA$, то $e^{A+B}=e^A e^B$

$\triangleleft$ $e^{A+B}=\sum\frac{(A+B)^n}{n!}=\sum_n\sum_{k+l=n}\frac{A^kB^l\binom{n}{k}}{n!}=\sum\sum\frac{A^kB^l}{k!\,l!}=e^Ae^B$ $\square$

Лемма $M=e^{At}$ – ФМР для $\dot{x}=Ax$, причем для $M(0)=E$.

$\triangleleft$ $\dot{M}=\frac{d}{dt}(e^{At})=Ae^{At}=AM \Rightarrow M$ – ФМР $\square$

Сл-е x – р-е $\dot{x}=Ax \Leftrightarrow x(t)=e^{At}x_0$.

Как искать эксп? $A=C^{-1}JC$, J = ЖНФ.

$$\exp\left(t\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & 1 & \\ 0 & & \lambda & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}\right)=\exp\left(t\lambda E+t\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \ddots\\ & & & \end{pmatrix}}^{m}}_{P}\right)=e^{t\lambda E}\cdot e^{t\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ & 0 & \ddots \\ & & 0\end{pmatrix}}=$$

$$=e^{t\lambda}E\left(E+tP+\frac{t^2P^2}{2}+\dots\frac{t^{m-1}P^{m-1}}{(m-1)!}\right)=\begin{pmatrix}e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \dots\\ & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \dots\\ & & e^{t\lambda} & \vdots\\ 0 & & & \ddots\end{pmatrix}$$

Качественное поведение траектории для лин. систем с пост. коэф. р-ла 2.

$\dot{x}=Ax$ $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ а) $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$
б) $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ – сопр.

2б) $A\sim\begin{pmatrix}\alpha+i\beta & 0\\ 0 & \alpha-i\beta\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$ $\beta\neq 0$.

2а) $\begin{cases}\dot{y}_1=\lambda_1 y_1\\ \dot{y}_2=\lambda_2 y_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=c_1e^{\lambda_1 t}\\ y_2=c_2e^{\lambda_2 t}\end{cases}$

$\lambda_1>\lambda_2>0$

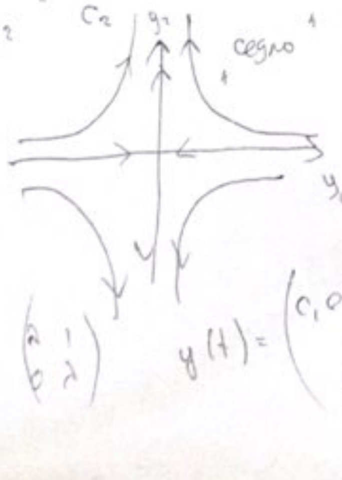
$\frac{y_1}{y_2}=\frac{c_1}{c_2}\cdot e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$

"неустр. узел"

$y_2=c\,y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

$\lambda_1>0>\lambda_2$

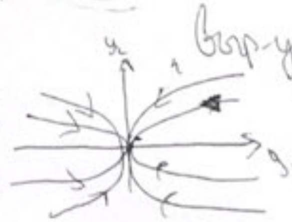
$\frac{y_1}{y_2}=\frac{c_1}{c_2}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$



"седло"

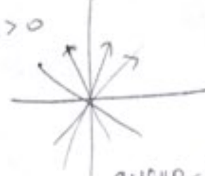
$\lambda_1<\lambda_2<0$

$\frac{y_1}{y_2}=\frac{c_1}{c_2}\cdot e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$



"Уст-узел"

$\lambda_1=\lambda_2>0$

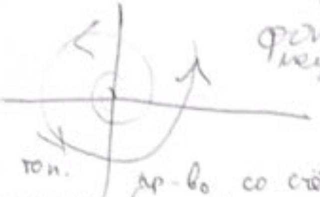


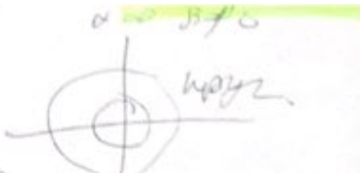
"дикр-узел"

1) $A\sim\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ $y(t)=\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t}\\ c_2e^{\lambda t}\end{pmatrix}$

вырожд. узел

2d) $y = A\begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta(t-t_0) \\ e^{\alpha t}\sin\beta(t-t_0)\end{pmatrix}$





(45) Опр1 Гладкое мн-е M – хаусд. топ. пр-во со счётной базой с атласом A. Атлас – покрытие мн-я картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\varphi_\alpha : U \to \mathbb{R}^n$ – гомеом-м, и они н-ся C^k-согл, если $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ – C^k-дифф.

Опр2 Атлас н-ся ориентирующим, если якобианы всех композиций $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ положит.

Опр3 Мн-е ориентируемо, если $\exists$ ориент. атлас.

Пр1 Существует ровно 2 кл. экв. ориент. атласов на связном мн-ии.

◁ M_+, M_- – мн-ва точек, где попарные якобианы >0, <0. $M_+ \sqcup M_- = M \Rightarrow$ M_+ или $M_- = M$.

Два несовп. атласа можно получить сменой знака 1 коорд. ▷

Пр2 Край ориент. мн-я ориентируем и имеет согл. ориентацию.

T (критерий ориент.) M ориент $\Leftrightarrow$ не сущ. прот. цепочки

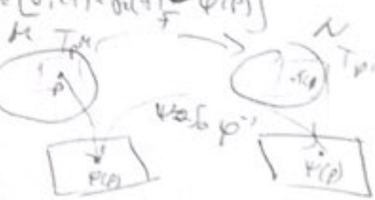
◁ M-ориент. В любой согл. цепочке соседние карты совпадают из ор. атласа $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ все цепочка согл. с одним атласом. □

Не сущ. $U_1, \pm U_2, \pm U_3 \ldots$ Каждый раз все хорошо.

(46) Опр1 T_pM – кас. пр-во к M в p – это множество кривых с точностью до класса экв. $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ – гладкий путь $\gamma(0) = p$, $\left.\frac{d\varphi(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}$ – класс экв. пути

Зам Эквив-ть не зависит от выбора карт. $\gamma_\beta(t) = \varphi_{\alpha\beta}\gamma_\alpha \Rightarrow \dot\gamma_\beta(0) = J_{\alpha\beta}(0)\dot\gamma_\alpha(0)$

Стр-ра В.П. $kv = k[\gamma(t)] = [\gamma(kt)]$ $v_1 + v_2 = [\gamma_1] + [\gamma_2] = [\gamma_1(t) + \gamma_2(t) - \varphi(p)]$ согл. с картой.



Опр2 $f : M \to N$ – гладкое, если $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ гладкое

Дифф-л $df[\gamma_p(t)] = [f(\gamma_p(t))]$

Опр3 Вект. поле – сечение касат. р-я – мн-во $\{(p, v) \mid v \in T_pM\}$, $\pi : TM \to M$ с атласом $\tilde U_\alpha = \pi^{-1}U_\alpha$, $\tilde\varphi_{\alpha\beta}(u^1, \ldots u^n, v^1, \ldots v^n) = (\varphi_{\alpha\beta}, J(\varphi_{\alpha\beta})v)$

Опр4 Дифф-л $D_x(f) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} x^i = \frac{d}{dt} f(\gamma_p(t))$.

Опр5 $X : F_u \to \mathbb{R}$: $X(f + g) = X(f) + X(g)$, $X(kf) = kX(f)$, $X(fg) = Xf\,g(p) + f(p)X(g)$ дифференцирование в точке p. Мн-во дифф $Diff_p$. Это В.П.

$F : T_p \xrightarrow{\sim} Diff_p$
$X \to X(f) = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))(0)$.

(47) $f: M \to N$

ω — k-форма на N, $f^*\omega$ — k-форма на M $f^*\omega(d\xi_1,\dots,d\xi_k) = \omega(dv_1,\dots$

Св-ва:

$d\omega = d(\sum f_s dx_{s_1}\wedge\dots\wedge dx_{s_k}) = \sum \frac{\partial f_s}{\partial x_i} dx^i \wedge dx_{s_1}\wedge\dots\wedge dx_{s_k}$.

$f dx^1\wedge\dots\wedge dx^n \to f \det \frac{\partial x^i}{\partial \tilde x_j} d\tilde x^1\wedge\dots\wedge d\tilde x^n$

$d(\omega^n\wedge\omega^m) = d\omega^n\wedge\omega^m + (-1)^n \omega^n \wedge d\omega^m$

(48) 1) $\omega\in\Omega^k$ точная, если $\exists\, \alpha \in \Omega^{k-1}: \omega = d\alpha$ $\quad B^k \quad\quad B^k\subset Z^k$

2) $\omega\in\Omega^k$ — замкнутая, если $d\omega=0$. $\quad Z^k$

$H^k = Z^k/B^k$ — когомологии де Рама

Лемма Пуанкаре: Если M — стяг. $H^k(M)=0$, $H^0(M)=\mathbb{R}$.

△ $\omega_k\in\Omega^k(M) \to \Omega\in\Omega^k(M\times[0,1])$: $\Omega = \omega_{k-1}\wedge dt + \omega_k$, где

$\omega_{k-1} = a_{i_1\dots i_{k-1}} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{k-1}}$, $\omega = b_{i_1\dots i_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$

Положим $D\Omega = D(\omega_{n-1}\wedge dt) = \int \omega_{n-1}\, dt = \left(\int_0^1 a_{i_1\dots i_{n-1}}(x,t)\,dt\right)\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{n-1}}$

Лемма 1. $Dd\Omega - dD\Omega = (-1)^n(\Omega|_{x,1} - \Omega|_{x,0})$

△ $dD\Omega = d\left(\int_0^1 a_{i_1\dots i_{n-1}}\,dt\right)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{n-1}} = \left(\int \frac{\partial a_{i_1\dots i_{n-1}}(x,t)\,dt}{\partial x^i}\right)dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{n-1}}$

$Dd\Omega = D(d\omega_{n-1}\wedge dt) + Dd\omega_n = dD\Omega + Dd\omega_n$

$Dd\Omega - dD\Omega = Dd\omega_n = D\left(\frac{\partial b_{i_1\dots i_n}}{\partial t}dt\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_n}\right) = (-1)^n\left(\int\frac{\partial b_{i_1\dots}}{\partial t}dt\right)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_n} =$

$= (-1)^n\left(b_{i_1\dots i_n}(x,1) - b_{i_1\dots}(x,0)\right)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_n} = (-1)^n(\omega_n|_{x,1} - \omega_n|_{x,0}) = \Omega|_{x,1} - \Omega|_{x,0}$ □

Лемма 2 $df^* = f^*d$

△ $f: \underset{(x)}{M}\to \underset{(y)}{N}$ $\quad f^*(dy^s) = \frac{\partial f^s}{\partial x^i}dx^i \quad df^*(dy^s) = \frac{\partial^2 f^s}{\partial x^t\partial x^i}dx^t\wedge dx^i = 0$

$df^*(dy^{s_1}\wedge\dots\wedge dy^{s_n}) = 0$ (аналог.)

$\Downarrow$

$d\left(f^*(a_{s_1\dots s_n}(y))\,dy^{s_1}\wedge\dots\wedge dy^{s_k}\right) = d(a_{s_1\dots s_n}(f(x)))\wedge f^*(dy^{s_1}\wedge\dots\wedge dy^{s_k})$

$d(a_{s_1\dots s_n}(y))\,dy^{s_1}\wedge\dots\wedge dy^{s_k} = f^*(da_{s_1\dots s_n}(y))\wedge f^*(dy^{s_1}\wedge\dots\wedge dy^{s_k})$.

Поэтому дост. проверить для ф-ций $a: N\to\mathbb{R}$ $\quad f^*da(x) = df^*a$

$f^*a(x) = a(f(x)) \Rightarrow df^*a = \frac{\partial a}{\partial y^j}\frac{\partial f^j}{\partial x^i}dx^i$

$f^*da = f^*\left(\frac{\partial a}{\partial y^j}dy^j\right) = \frac{\partial a}{\partial y^j}\frac{\partial f^j}{\partial x^i}dx^i$

□