Избранные главы дискретной математики. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно посылать вашему учебному ассистенту (его адрес сообщен всем записанным на этот НИС на корпоративную почту), до 24:00 четверга перед следующим занятием.

Задание с 6 занятия.

(1) На занятии мы определили ДНФ как дизъюнкцию различных мономов вида

$$M = t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k} \bar{t}_{j_1} \bar{t}_{j_2} \dots \bar{t}_{j_m},$$

в каждом из которых все индексы $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2 \dots, j_m$ разные. Мы также ввели на множестве всех таких мономов отношение частичного порядка: если $M' = t_{p_1} t_{p_2} \dots t_{p_l} \bar{t}_{q_1} \bar{t}_{q_2} \dots \bar{t}_{q_s}$ — другой такой моном, то мы говорим, что $M < M'$, если $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ и $\{j_1, j_2, \dots, j_m\} \subset \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$. Далее это отношение частичного порядка распространяется на ДНФ: если $F = M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_k$ и и $F' = M_1' \vee M_2' \vee \dots \vee M_l'$ две ДНФ, то мы будем говорить, что $F < F'$, если $k \le l$ и среди мономов формулы F' можно найти такие различные мономы $M_{i_1}', \dots, M_{i_k}'$, что $M_s < M_{i_s}'$ при всех s от 1 до k.

Для данной булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ рассмотрим множество $\mathcal{D}_f$ всех задающих ее ДНФ, и множество $\mathcal{M}_f$, состоящее из всех мономов, входящих хотя бы в одну ДНФ из $\mathcal{D}_f$ — эти множества являются ЧУМами (=частично упорядоченными множествами) относительно введенных нами отношений частичного порядка. Докажите, что в записи любой ДНФ, являющейся минимальным элементом[1] ЧУМа $\mathcal{D}_f$ (такие ДНФ называются *тупиковыми* ДНФ для функции f) участвуют только такие мономы, которые являются минимальными элементами ЧУМа $\mathcal{M}_f$.

(2) На занятии мы выяснили равносильность задачи представления булевой функции с помощью ДНФ и задачи покрытия носителя этой функции на булевом кубе гранями, являющимися носителями мономов. Для функции из второй задачи[2] задания 5 нарисуйте ее носитель и его покрытия, отвечающие двум приведенным в этой задаче ДНФ, а также покрытие, отвечающее вычисленной за занятии совершенной ДНФ для этой функции.

(3) Задачи 3, 4 и 5 из задания 4 остаются актуальными (и можно присылать их решения!) до тех пор, пока мы на одном из следующих занятий их не обсудим.

---

[1]Напомним, что $a \in X$ называется **минимальным элементом** ЧУМа X, если из того, что $x < a$ ($x \in X$) следует, что $x = a$.

[2]ВНИМАНИЕ: вторая ДНФ в этой задаче первоначально была в листке написана с опечаткой, которая сейчас исправлена; на занятии задача была сформулирована правильно.