

Вариант 2.

1. Материальная точка движется вдоль прямой $O\vec{x}$ в поле потенциальной силы, потенциальная энергия $U(x)$ которой дается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} e^{-x^2} - 1 & x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x^2(x-3) & x > 0. \end{cases}$$

- а) Нарисуйте фазовый портрет этой механической системы.
- б) Укажите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям энергии $E = -1$, $E = 1/2$ и $E = 0$.

2. Компоненты силы \vec{F} заданы в полярных координатах (ρ, ϕ) на плоскости \mathbb{R}^2 следующими выражениями:

$$F_\rho = \rho(\rho + 1)f(\phi), \quad F_\phi = g(\rho) \cos \phi \sin^3 \phi,$$

где $f(\phi)$ и $g(\rho)$ некоторые дифференцируемые функции своих аргументов.

- а) Определите наиболее общий вид функций $f(\phi)$ и $g(\rho)$, при которых сила \vec{F} не имеет сингулярности в начале координат и потенциальна на всей плоскости.
- б) Найдите вид соответствующей потенциальной энергии $U(\rho, \phi)$.

3. Тележка массы M_1 может без трения двигаться по прямой по поверхности горизонтального стола. На тележке шарнирно закреплен жесткий невесомый стержень длины $2l$, который может свободно вращаться в вертикальной плоскости, параллельной линии движения тележки. Шарнирное крепление расположено в геометрическом центре стержня. На концах стержня закреплены одинаковые точечные массы m . Невесомая нерастяжимая нить, перекинута через невесомый блок, соединяет тележку с грузом M_2 , который движется вдоль вертикальной прямой. Система находится в однородном постоянном поле тяжести \vec{g} , направленном вертикально вниз (см. рисунок).

- а) Определите число степеней свободы системы.
- б) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте Лагранжиан системы.
- в) Выпишите формулы для всех сохраняющихся величин (интегралов движения), которые имеются в данной системе.

