06.04.2021 Механика 2021 =1=

Семинар №12

① Напоминание о вариации.

Пусть $S[y] = \int_a^b L(x, y, y', y'', \ldots)\, dx$

Тогда вариация этого функционала:

$$\delta S[y] = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial L}{\partial y''}\delta y'' + \ldots\right) dx$$

Дальше нужно интегрированием по частям перебросить производные с вариации δy на коэффициенты. В ходе этой процедуры появятся внеинтегральные слагаемые. Они дают необходимые граничные условия, если вариация δy не до конца фиксирована в точках a и b.

Например:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\, dx = \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y\, dx$$

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y''}\,\delta y''\,dx = \frac{\partial L}{\partial y''}\,\delta y'\Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\right)\delta y'\,dx =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial y''}\,\delta y'\Big|_a^b - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\delta y\Big|_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\delta y\,dx$$

и так далее.

И если, например, $y'(a)$ — <u>не фиксировано</u>, то $\delta y'(a)$ может принимать <u>любое значение</u>. Внеинтегральное слагаемое

$$\frac{\partial L}{\partial y''}\,\delta y'\Big|_a^b = \frac{\partial L}{\partial y''}\Big|_{x=b}\delta y(b) - \frac{\partial L}{\partial y''}\Big|_{x=a}\underline{\underline{\delta y(a)}}$$

тоже будет принимать любое значение, если только $\frac{\partial L}{\partial y''}\Big|_{x=a} \neq 0$.

Поскольку мы требуем $\delta S = 0$ для $\forall$ вариации $\delta y(x)$, то если $y'(a)$ не фиксировано, мы обязаны требовать $\frac{\partial L}{\partial y''}\Big|_{x=a} = 0$ — это граничное условие для уравнение Эйлера – Лагранжа.

Пример 1.

$$S[y] = 2y^2(\pi) + \int_0^\pi \left((y')^2 - y^2 + 3y\cos 2x\right)dx$$

$$\delta S = 4y(\pi)\,\delta y(\pi) + \int_0^\pi \left(\underline{2y'\delta y'} - 2y\delta y + 3\delta y\cos 2x\right)dx =$$

перебрасываем производн.

$$= \underline{4y(\pi)\,\delta y(\pi) + 2y'\delta y\Big|_0^\pi} + \int_0^\pi \left(3\cos 2x - 2y - 2y''\right)\cdot\delta y\, dx$$

Пространство функций с фиксированным значением в 0: $y(0) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \delta y(0) = 0$. Для точки $x = \pi$:

$$\left(4y(\pi) + 2y'(\pi)\right)\delta y(\pi) = 0$$

$\forall\, \delta y(\pi) \Rightarrow$

$\underline{2y(\pi) + y'(\pi) = 0}$ – второе граничное условие.

Задача для экстремали:

$$\boxed{\begin{aligned} & y'' + y = \tfrac{3}{2}\cos 2x \\ & y(0) = 0 \qquad 2y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{aligned}}$$

ФСР однородного уравнения: $\cos x$ и $\sin x$.

Для поиска <u>частного</u> решения заметим, что $\cos 2x = \frac{1}{2}(e^{2ix}+e^{-2ix})$ и $\pm 2i$ – <u>не корень</u> характеристического полинома. Поэтому частное решение можно искать в виде:

$$y_r(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$y_r'' + y_r = -3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \frac{3}{2}\cos 2x$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = 0.$$

Общее решение:

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Граничные условия дают систему:

$$\left.\begin{aligned} y(0)=0 &\Rightarrow C_1 - \frac{1}{2} = 0 \\ 2y(\pi)+y'(\pi)=0 &\Rightarrow -2C_1 - C_2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \quad C_2 = -2 \Rightarrow \text{Ответ:}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}\cos x - 2\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x}$$

Пример 2. Точечная частица массы m скользит по поверхности, заданной соотношением:

$$z = \frac{1}{2(x^2+y^2)},$$

где x, y и z — декартовы прямоугольные координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Частица соединена с началом координат невесомой пружиной, потенциальная энергия деформации которой задается формулой:

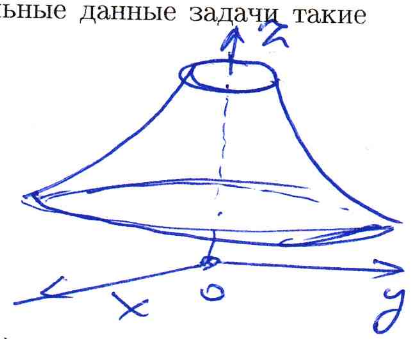
$$U(l) = \frac{kl^2}{2},$$

где l — длина пружины, k — коэффициент ее упругости.

а) Составьте лагранжиан этой механической системы и выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа.

б) Приведите формулы для всех интегралов движения (законов сохранения).

в) Убедитесь, что уравнения движения допускают стационарные решения, отвечающие постоянному значению z, и найдите, при каких условиях на начальные данные задачи такие решения существуют.



Решение.
а) В цилиндрических координатах:

$$z = \frac{1}{2\rho^2} \quad \Rightarrow \quad z' = -\frac{\rho'}{\rho^3},$$

где штрих обозначает производную по времени. Лагранжиан:

$$L = \frac{m}{2}\left(\rho'^2\left(1+\rho^{-6}\right) + \rho^2\phi'^2\right) - \frac{k}{2}\left(\rho^2 + \frac{1}{4\rho^4}\right)$$

б) Законов сохранения два: компонента момента вдоль оси Oz и полная энергия системы:

$$J = m\rho^2\phi', \qquad E = \frac{m}{2}\left(\rho'^2\left(1+\rho^{-6}\right) + \rho^2\phi'^2\right) + \frac{k}{2}\left(\rho^2 + \frac{1}{4\rho^4}\right).$$

в) Постоянное $z = z_0$ отвечает постоянному $\rho = \rho_0$. Уравнение движения по ρ:

$$\frac{d}{dt}\left(m\rho'\left(1+\rho^{-6}\right)\right) + m\left(3\rho'^2\rho^{-7} - \rho\phi'^2\right) + k\rho\left(1 - \frac{1}{2\rho^6}\right) = 0$$

при постоянном $\rho = \rho_0$ (с учетом того, что $\rho > 0$ всегда) сводится к равенству:

$$\phi_0'^2 = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{1}{2\rho_0^6}\right).$$

Из этого уравнения видно, что стационарные движения возможны при $\rho_0 \geq 1/\sqrt[6]{2}$, что соответсвует высотам по z в интервале $0 < z_0 \leq 1/\sqrt[3]{4}$. Точка $\rho_0 = 1/\sqrt[6]{2}$ отвечает минимуму эффективной энергии и соответствует состоянию покоя, когда $\phi' = 0$. При этом пружина ортогональна касательной плоскости к поверхности движения на соответствующей высоте $z_0 = 1/\sqrt[3]{4}$ и натяжение пружины в точности компенсируется силой реакции поверхности.

В другую сторону: стационарные решения вобще возможны при квадрате угловой скорости вращения не выше отношения k/m:

$$\phi'^2 < \frac{k}{m}.$$