1 Лист 1

Задача 1.1. Завершите доказательство эквивалентности двух определений цепей маркова.

Доказательство. (Def 1) Случайные величины $\xi_0, \ldots, x_T$ образуют марковскую цепь с переходными вероятностями $p_k(i,j)$, если $\forall k \geqslant 1$ выполнено

(a)

$$\mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_0 = i_0) = \mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}) \quad \forall i_0, \ldots, i_k \in X$$
$$\mathbb{P}(\xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_0 = i_0) \neq 0$$

(b)

$$\mathbb{P}(\xi_k = j \mid \xi_{k-1} = i) = p_k(i,j)$$

(Def 2) Последовательность $\xi_0, \ldots, x_T$ образуют марковскую цепь с переходными вероятностями $p_k(i,j)$, если

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_T = i_T) = p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0, i_1) \ldots p_T(i_{T-1}, i_T) \quad \forall 1 \leqslant i_1, \ldots, i_T \leqslant L$$
$$p^{(0)}_{i_0} = p(\xi_0 = i_0)$$

То есть необходимо доказать равносильнось следующих утверждений:

(1)

$$\mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_0 = i_0) = \mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1})$$

(2)

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_T = i_T) = p_k(i,j)$$

И требуется доказать

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_T = i_T) = \mathbb{P}(\xi_0 = i_0) p_1(i_0, i_1) \ldots p_T(i_{T-1}, i_T)$$

Из (2):

$$\begin{aligned}
&p_1(i_0, i_1) = \mathbb{P}(\xi_1 = i_1 \mid \xi_0 = i_0) \\
&p_2(i_1, i_2) = \mathbb{P}(\xi_2 = i_2 \mid \xi_1 = i_1) \\
&\vdots \\
&p_T(i_{T-1}, i_T) = \mathbb{P}(\xi_T = i_T \mid \xi_{T-1} = i_{T-1}) \\
&\mathbb{P}(\xi_0 = i_0)\mathbb{P}(\xi_1 = i_1 \mid \xi_0 = i_0) = \mathbb{P}(\xi_0 = i_0 \cap \xi_1 = i_1) := \mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1)
\end{aligned}$$

Будем сворачивать $\mathbb{P}(\xi_0 = i_0) p_1(i_0, i_1) \ldots p_T(i_{T-1}, i_T)$, на k шаге будет

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_k = i_k)\mathbb{P}(\xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_k = i_k) \\
&= \mathbb{P}(\xi_0 = i_0, x_1 = i_1, \ldots, \xi_k = i_k)\mathbb{P}(\xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_k = i_k, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_0 = i_0) \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=0}^{k+1} (\xi_j = i_j)\Big) \\
&:= \mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_{k+1} = i_{k+1})
\end{aligned}$$

Следовательно все свернется и получится формула, которую нужно доказать □

Задача 1.2. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \ldots, \xi_T$ образует марковскую цепь со множеством состояний X. Докажите, что для любого n и любых множеств $A \subset X \times \ldots \times X$ ($T-n$ раз), $C \subset X \times \ldots \times X$ ($n-1$ раз) и любого $a \in X$ выполнено

$$\mathbb{P}\left((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid \xi_n = a, (\xi_{n-1}, \ldots, \xi_0) \in C\right) = \mathbb{P}\left((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid \xi_n = a\right)$$

В частности, $\mathbb{P}\left(\xi_{n+k} = i \mid \xi_n = j, (\xi_{n-1}, \ldots, \xi_0) \in C\right) = \mathbb{P}\left(\xi_{n+k} = i \mid \xi_n = j\right)$.

Доказательство.

$$\mathbb{P}((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid \xi_n = a, (\xi_{n-1}, \ldots, \xi_0) \in C)$$
$$= \mathbb{P}((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid \xi_n = a)$$

Поскольку $\xi_0, \ldots, \xi_T$ образуют цепь маркова, то по оопределению выполнено

$$X = (x_1, \ldots, x_k) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\xi_a = x_i) = 1$$

Расмотрим цепь

$$\mathbb{P}((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid \xi_n = a, \xi_{n-1} = (x_1, \ldots, x_k))$$

И распишем по ξ_{n-1}

$$\mathbb{P}((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid \xi_n = a, \xi_{n-1} = (x_1, \ldots, x_k))$$
$$= \mathbb{P}((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid \xi_n = a, \xi_{n-1} = x_1) + \mathbb{P}((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid \xi_n = a, \xi_{n-1} = x_2) + \ldots + \mathbb{P}((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid$$

Аналогично для

$$\mathbb{P}((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid \xi_n = a, (\xi_{n-1}, \ldots, \xi_0) \in C) = \mathbb{P}((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A \mid \xi_n = a)$$

□

Задача 1.3. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ образует МЦ. Рассмотрим биекцию $f : X \mapsto X$. Верно ли, что последовательность $f(\xi_0), f(\xi_1), \ldots$ образует МЦ? А если не предполагать биективности f? Если ответ отрищательный привести контрпример.

Доказательство. Пусть матрица переходов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{P}(\xi_3 = 3 \mid \xi_0 = 2, \xi_1 = 3, \xi_2 = 1) = \mathbb{P}(\xi_3 = 3 \mid \xi_2 = 1) = 0$$
$$\mathbb{P}(\xi_2 = 1 \mid \xi_0 = 3, \xi_1 = 2) = \mathbb{P}(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 2)$$
$$f : (1, 2, 3) \mapsto (1, 1, 1)$$
$$\mathbb{P}(\xi_2 = 1 \mid \xi_0 = 1 \xi_1 = 1) = \frac{1}{3^3}$$
$$\mathbb{P}(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(\xi_2 = 1 \cap \xi_1 = 1)}{\mathbb{P}(x_1 = 1)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

□

Задача 1.4. Небезызвестно, что математические способности нередко передаются от тестя к зятю. Предположим, что 80% зятьев выпускников матфака также заканчивают матфак, а остальные - мех-мат, 40% зятьев выпускников мех-мата заканчивают мех-мат, а остальные поровну распределяются между матфаком и истфаком; зятья выпускников истфака же распределяются так: 70% заканчивают истфак, 20% - матфак и 10% мех-мат.

(1) Придумайте марковскую цепь, описывающую данный процесс.

(2) Найдите вероятность того, что зять зятя выпускника матфака закончит матфак.

(3) Найдите ту же вероятность для модифицированной цепи, в которой зять выпускника матфака всегда идет на матфак.

Доказательство. (1) Событие A_{ij} - зять выпускника i заканчивает j, исход - последовательность людей заканчивается на каком-то факультете, матрица переходов выглядит следующим образом (1 - матфак, 2 - мехмат, 3 истфак)

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

(2) Возведем матрицу выше в квадрат и рассмотрим значения A_{11}

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.24 & 0.06 \\ 0.42 & 0.25 & 0.33 \\ 0.33 & 0.15 & 0.52 \end{pmatrix}$$

То есть вероятность 70%

(3) Возведем новую матрицу в квадрат и рассмотрим значения A_{11}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.48 & 0.19 & 0.33 \\ 0.37 & 0.11 & 0.52 \end{pmatrix}$$

То есть вероятность 100%

□

2 Лист 2

Задача 2.1. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(а) квадратная $n \times n$ матрица A стохастическая

(б) $Af \geqslant 0$ для всех неотрицательных векторов-столбцов.
$A1 = 1$, где $1 = (1, \dots, 1)^t$, а t обозначает транспонирование

(в) Если A вектор-строка μ распределение, то μA тоже распределение

Доказательство. (а ⇒ б) очевидно

(а ⇒ в)

$$\mu = (x_1, \dots, x_k) \qquad \sum x_i = 1$$

$$\mu A = (x_1, \dots, x_k) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1k} & & a_{kk} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i a_{1i}, \sum_{i=1}^{k} x_i a_{2i}, \dots, \sum_{i=1}^{k} x_i a_{ki} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_{1i} + \sum_{i=1}^{k} x_i a_{2i} + \ldots + \sum_{i=1}^{k} x_i a_{ki} = x_1(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{k1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{k2}) + \ldots + x_k(a_{1k} + a_2$$

(в ⇒ а) Пусть $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ji}$, тогда

$$\begin{cases} \sum\limits_i a_i x_i = 1 \\ \sum\limits_i x_i = 1 \end{cases}$$

Пусть $\mu_1 = (1, 0, \dots, 0)$, по условию $\mu_1 A$ тоже распределение, откуда $\sum \alpha_i x_i = \alpha_1 \cdot 1 = 1$ и $\alpha_1 = a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{k1} = 1$. Аналогично $\mu_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mu_k = (0, \dots, 0, 1)$, то есть $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 1$ и матрица A – стохастическая

(б ⇒ в)

$$Af \geqslant 0, f \geqslant 0$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1k} & & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{i1} \\ \vdots \\ \sum a_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Откуда $\sum a_{i1} = \ldots = \sum a_{ik} = 1$

$\square$

Задача 2.2. Докажите, что произведение стохастических матриц одинакового размера также является стохастической матрицей

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} = 1 = \sum_{i=1}^{n} B_{ji}$$

Тогда для строк

$$\sum_{i=1}^{n} (AB)_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ki} \right) \right) = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} = 1$$

Аналогично для столбцов $\square$

Задача 2.3.

Доказательство. $\square$

Задача 2.4.

Доказательство. (а)

$$p^{(2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{36} & \frac{11}{24} & \frac{17}{72} \end{pmatrix}$$

(б)

$$p^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{11}{36} & \frac{11}{24} & \frac{17}{72} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{24} & \frac{11}{48} & \frac{11}{48} \end{pmatrix}$$

$$p_2^{(3)} = \frac{13}{48}$$

$$p^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{18} & \frac{1}{4} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(\xi_1 = 3, \xi_3 = 2) = p_3^{(1)} p_2^{(3)} = \frac{13}{48} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5 \cdot 13}{2^6 \cdot 3^3}$$

$\square$

Задача 2.5.

Доказательство. Заметим, что вероятность перейти из состояния i в $i+1$ равна $\frac{m-i}{m}$ и вероятность остаться в том же состоянии $\frac{i}{m}$, в другие состояния из состояния i он перейти не может.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[r_m] = \mathbb{E}[\{\min n : \varepsilon_n = m\}] \\
&= \sum_{i=1}^{m} i \cdot \left(\frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \ldots \cdot \frac{m-i+1}{m}\right) \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{m-1}{m} + 3 \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} + \ldots \\
&= 1 + \frac{2(m-1)!}{m(m-2)!} + \frac{3(m-1)!}{m^2(m-3)!} + \ldots + \frac{m(m-1)!}{m^{i-1}(m-i)!} \\
&= (m-1)! \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{m^{j-1}(m-j)!}
\end{aligned}$$

□

3 Лист 3

Задача 3.1.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\varepsilon_{n+1} = i_{n+1} |\ \varepsilon_n = i_n, \ldots, \varepsilon_0 = i_0) = \mathbb{P}(\varepsilon_{n+1} = i_{n+1} |\ \varepsilon_n = i_n) \\
&\varepsilon_{n+1} = \eta_n^1 + \ldots + \eta_n^{\varepsilon_n} \\
&\mathbb{P}(\varepsilon_{n+1} = i_{n+1} |\ \varepsilon_n = i_n, \ldots, \varepsilon_0 = i_0) = \mathbb{P}(\eta_n^1 + \ldots + \eta_n^{\varepsilon_n} = i_{n+1} |\ \varepsilon_n = i_n, \ldots, \varepsilon_0 = i_0) = \mathbb{P}(\eta_n^1 + \ldots + \eta_n^{i_n} = i_{n+1} |\ \varepsilon_n =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\eta_n^i = 2) = p \\
&\mathbb{P}(\eta_n^i = 0) = 1 - p \\
&\text{найти: } \mathbb{P}(\varepsilon_{k+1} = m |\ \varepsilon_k = n) \\
&\varepsilon_{k+1} = \eta_k^1 + \ldots + \eta_k^n
\end{aligned}$$

m либо нечетное, либо четное $m > 2n$, иначе $\binom{n}{\frac{m}{2}}$ – количество способов расставить $\frac{m}{2}$ чисел на n мест, тогда

$$\mathbb{P}(\varepsilon_{k+1} = m |\ \varepsilon_k = n) = \binom{n}{\frac{m}{2}} p^{\frac{m}{2}} (1-p)^{n-\frac{m}{2}}$$

□

Задача 3.2.

Доказательство. Заметим что в стратегии колиной мамы мы ставим одну и ту же сумму, введем обозначение $P_{i\ m}(N)$ – что Коля, начиная с i рублями, действуя по маминой m стратегии, дойдет до $N = 800$ рублей. По определению $P_{0\ m}(N) = 0,\ P_{N\ m}(N) = 1$. Заметим, что $P_{i\ m} = 0.4 \cdot P_{i+100\ m} + 0.6 \cdot P_{i-100\ m}$, это можно записать как

$$\begin{aligned}
&0.4 \cdot P_{i\ m} + 0.6 \cdot P_{i\ m} = 0.4 \cdot P_{i+100\ m} + 0.6 \cdot P_{i-100\ m} \\
&\Leftrightarrow P_{i+100\ m} - P_{i\ m} = \frac{0.6}{0.4}(P_{i\ m} - P_{i-100\ m})
\end{aligned}$$

тогда так как

$$P_{200\ m} - P_{100\ m} = \frac{0.6}{0.4}(P_{100\ m} - P_{0\ m}) = \frac{0.6}{0.4} P_{100\ m}$$

то

$$\begin{aligned}
&P_{i+100\ m} - P_{i\ m} = \left(\frac{0.6}{0.4}\right)^i P_{1\ m} \\
&P_{i+100\ m} - P_{1\ m} = \sum_{k=1}^{i} (P_{k+100\ m} - P_{k\ m}) = \sum_{k=1}^{i} \left(\frac{0.6}{0.4}\right)^k P_{100\ m}
\end{aligned}$$

и общая формула

$$P_{i+100\ m} = P_{100\ m} \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{0.6}{0.4}\right)^k$$

Воспользуемся тем, что $P_{N\ m} = 1$

$$1 = P_{N\ m} = P_{100\ m} \cdot \frac{1-\left(\frac{0.6}{0.4}\right)^N}{1-\frac{0.6}{0.4}}$$

$$P_{100\ m} = \frac{1-\frac{0.6}{0.4}}{1-\left(\frac{0.6}{0.4}\right)^N}$$

$$P_{i\ m} = \frac{1-\left(\frac{0.6}{0.4}\right)^i}{1-\left(\frac{0.6}{0.4}\right)^N}$$

То есть при 300 руб вероятность

$$P_{300\ m} = \frac{1-\left(\frac{0.6}{0.4}\right)^3}{1-\left(\frac{0.6}{0.4}\right)^8} = \frac{608}{6305}$$

Рассмотрим теперь стратегию колиного папы, введем обозначение $P_{i\ f}(N)$ по аналогии с прошлым пунктом. Составим уравнение, аналогичное прошлому пункту, исходя из данной стратегии

$$P_{i\ f} = \begin{cases} 0.4 \cdot P_{N\ f} + 0.6 \cdot P_{2i-N\ f} & i \in [\frac{N}{2}, N] \\ 0.4 \cdot P_{2i\ f} + 0.6 \cdot P_{0\ f} & i \in [0, \frac{N}{2}] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0.4 + 0.6 \cdot P_{2i-N\ f} & i \in [\frac{N}{2}, N] \\ 0.4 \cdot P_{2i\ f} & i \in [0, \frac{N}{2}] \end{cases}$$

Заметим, что $P_{N/2\ f} = 0.4 \cdot P_{N\ f} + 0.6 \cdot P_{0\ f} = 0.4$ То есть при 300 руб вероятность

$$P_{300\ f} = 0.4 \cdot P_{600\ f} + 0.6 \cdot P_{0\ f}$$

$$= 0.4 \cdot (0.4 \cdot P_{800\ f} + 0.6 \cdot P_{400\ f}) + 0.6 \cdot P_{0\ f}$$

$$= 0.4 \cdot (0.4 \cdot 1 + 0.6 \cdot 0.4) + 0.6 \cdot 0 = 0.4 \cdot 0.64 = 0.256 = \frac{32}{125}$$

И так как $\frac{32}{125} > \frac{608}{6305}$, то стратегия колиного отца лучше □

4 Лист 4

Задача 4.1.

Доказательство. $\mathbb{P}(\text{утром}) = \frac{1}{20}$, $\mathbb{P}(\text{вечером}) = \frac{1}{5}$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^{n} \eta_j \qquad \eta_j = \begin{cases} 1, & p \\ -1, & q \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\varepsilon_{n+1} = -1 |\ \varepsilon_n = 0, \ldots, \varepsilon_0 = 2) = \mathbb{P}(\varepsilon_{n+1} = -1 |\ \varepsilon_n = 0) = \frac{1}{20}$$

$$\mathbb{P}(\varepsilon_{k+1} = 5 |\ \varepsilon_k = 4, \ldots, \varepsilon_0 = 2) = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(\varepsilon_{n+1} = -1 |\ \varepsilon_n = 0) + \mathbb{P}(\varepsilon_{k+1} = 5 |\ \varepsilon_k = 4) = \frac{1}{4}$$

□

Задача 4.2.

Доказательство. Пусть x_n – вероятность того, что на шаге n господин N вылечится, тогда $x_{n+1} = \frac{1}{10}(1 + 7x_n + 2x_n^2)$ и по условию $x_0 = 0$, также веронятность что рано или поздно N вылечится равна корню $x = \frac{1}{10}(1 + 7x + 2x^2)$, то есть $\frac{1}{2}$ □

Задача 4.3.

Доказательство. □

5 Лист 5

Задача 5.1.

Доказательство. (a) - нет, (b) - да, в 5 степени, (c) - нет, (d) - нет □

Задача 5.2. Верно ли, что всякая марковская цепь с конечным числом состояний, имеющая единственное стационарное состояние, эргодична? Если да - докажите, если нет - приведите контрпример.

Доказательство. Цепь эргодична: $\exists! \pi,\ p^{(n)} \to \pi, \quad p^{(n)} = p^{(0)}\Pi^n$
$\exists! \pi$ - стационарное состояние: $\pi\Pi = \pi$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$y_A = t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$$
$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \to \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$\Rightarrow \exists!$ стационарное состояние
но $p^{(n)}$ не сходится, а следовательно цепь не эргодична □

Задача 5.3. Рассмотрим случайное блуждание на множестве состояний $\{1, \dots, L\}$, заданное веролтностями перехода $p_{u+1} = p$ и $p_{u-1} = 1 - p$ пля $2 \le i \le L - 1, p_{12} = a$, $p_{11} = 1 - a$ и $p_{LL-1} = b, p_{LL} = 1 - b$ д.ля каких-нибудь $0 < p < 1$ и $0 < a, b \le 1, a$ д.ля оста.пных i, j вынолнено $p_{ij} = 0$

(а) Докажите, что соответствующая матрица переходнљх веролтностей перемешивает тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из неравенств $a < 1$ и.ш $b < 1$.

(б) Найдите все пары $0 < a, b \le 1$, при которых случайное блуждание эргодично при произвольном $0 < p < 1$

(в) Для произвольных a, b, p удовлетворяющих $0 < a, b \le 1$ и $0 < p < 1$ найдите стационарное состояние. Единственно ли оно? Нашлись ли такие a, b, p при которых есть стационарное состояние единственно, а эргодичности нет?

Доказательство. (а) ($\Leftarrow$): можем отсидеться в 1 или L нужное число шагов

($\Rightarrow$): Если $a = 1 = b$, то каждый шаг меняет четность (так как идем в соседнюю), то есть не перемешивающая

(б)

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & 1-p & 0 & \dots & & \\ a & 0 & 1-p & 0 & & \\ 0 & p & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & p & \ddots & & \\ & & & & 0 & b \\ 0 & & & & p & 1-b \end{pmatrix}$$

$p = (p_{1]\dots p_L})$

$pP = ((1-a)p_1 + ap_2, (1-p)p_1 + pp_3, \dots, bp_{L_1} + (1-b)p_L)$

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & b \\ p & 1-b \end{pmatrix} = -pb$$

$$\det A_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1-p & 0 \\ p & 0 & b \\ 0 & p & 1-b \end{pmatrix} = -(1-p)p(1-b)$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1-p & 0 & \dots & & \\ p & 0 & 1-p & \dots & & \\ 0 & & 0 & 1-p & \dots & \\ \vdots & & p & & & \\ & & & & & b \\ 0 & & & & p & 1-b \end{pmatrix} = (1-a) \cdot \det A_{l-1} - (1-p) \cdot a \cdot \det A_{l-2}$$

Пусть L - четное, преставим его в виде $L = 2k+2$

$$\det A_{2k+1} = (-p(1-p)) \cdot \det A_{2k-1} = (-p(1-p))^{k-1} \cdot \det A_3$$
$$= (-1)^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{k-1} \cdot -(1-p)p(1-b)$$
$$= (-1)^k p^k (1-p)^k (1-b)$$

$$\det A_{2k} = (-1)p(1-p) \cdot A_{2k-2} = (-1)^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{k-1} \cdot \det A_2$$
$$= (-1)^k p^k (1-p)^{k-1} b$$

$$\det P = (1-a)(-1)^k p^k (1-p)^k (1-b) - (1-p)a(-1)^k p^k (1-p)^{k-1} b$$
$$= (-1)^k p^k (1-p)^k ((1-a)(1-b) - ab) = (-1)^k p^k (1-p)^k (1-a-b)$$

Пусть L - нечетное, преставим его в виде $L = 2k+1$

$$\det A_{2k} = (-1)^k p^k (1-p^{k-1}) b$$
$$\det A_{2k-1} = (-1)^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{k-1} (1-b)$$
$$(1-a)\det A_{2k} - (1-p)a \det A_{2k-1}$$
$$= (1-a)(-1)^k p^k (1-p)^{k-1} b - (1-p)a(-1)^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{k-1} (1-b)$$
$$= p^{k-1} (-1)^k (1-p)^{k-1} \left((1-a)bp + (1-p)a(1-b)\right)$$
$$= p^{k-1} (-1)^k (1-p)^{k-1} (bp - abp + a - ap - ab + apb)$$
$$= p^{k-1} (-1)^k (1-p)^{k-1} (p(b-a) + a - ab)$$

$\det \neq 0$, $a \neq 1$ или $b \neq 1$, тогда $\exists!$ π - собств (из системы уравнений), то есть мы попали в условия эргодической теоремы

det $= 0$, следовательно существует более одного собвтсвенного вектора и цепь не эргодична
$a = b = 1 \ \Rightarrow$ при неч $d = 0$
$a = b = 1$ - эргодичности нет, так как зависит от начального состояния (чет/нечет)

(в)

□

Задача 5.4.

Доказательство. (а) Пусть ξ_n обозначает число шаров в первом ящике после n вытаскиваний. Случайные величины ξ_n можно постронть следующим образом: ξ_0 - задано, а

$$\xi_{n+1}(\omega) = \xi_n(\omega) + \eta_{n+1}^{\xi_n(\omega)}(\omega)$$

где случайные величины η_j^m определены для $0 \le m \le N$ и всех $j \ge 1$[1], независимы друг от друга и от ξ_0, и распределены следующим образом:

$$\mathbb{P}\left(\eta_{n+1}^m = 1\right) = 1 - m/N \text{ and } \mathbb{P}\left(\eta_{n+1}^m = -1\right) = m/N$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi_n + \eta_{n+1}^{\xi_n} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(i_n + \eta_{n+1}^{i_n} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\eta_{n+1}^{i_n} = i_{n+1} - i_n\right)
\end{aligned}$$

так как $\eta_{n+1}^{i_n}$ не зависит от ξ_0 и η_j^m с $j \le n$, а значнт, по построению ξ_k, и от ξ_k с $k \le n$ (так как ξ_k строятся через ξ_0 и η_j^m с $j \le n$). Здесь мы предполагали, что $\mathbb{P}\left(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0\right) \neq 0$. Совершенно ан алогично находим, что

$$\mathbb{P}\left(\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n\right) = \mathbb{P}\left(\eta_{n+1}^{i_n} = i_{n+1} - i_n\right)$$

Последнне две формулы влекут, что последовательность ξ_n образует марковскую цепь. Чтобы най ти переходные вероятности, достаточно вычислить пх правую часть, что делается тривиально из определения случайных величин η_j^m; мы находим переходные вероятности как на приложенной ниже картинке. Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
1/N & 0 & 1 - 1/N & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 2/N & 0 & 1 - 2/N & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

где первая строк а соответствует состоянию 0, а последняя - состоянию N

(б) По определению, стацион арное состояния π является левым собственным вектором матрицы Π с собственным значением единица:

$$\pi\Pi = \pi$$

Запишем явно полученную систему уравнений :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_1}{N} &= \pi_0 \\
\frac{\pi - 1}{N} + \frac{2}{N}\pi_2 &= \pi_1 \\
\frac{N - k + 1}{N} + \frac{3}{N}\pi_3 &= \pi_2 \\
\frac{k+1}{N}\pi_{k+1} &= \pi_k \\
\frac{\pi_{N-1}}{N} &= \pi_N
\end{aligned}$$

Последовательно выражаем π_j через π_0 н находим $\pi_1 = N\pi_0, \pi_2 = \frac{N(N-1)}{2}\pi_0, \dots$ Замеч аем закономерность $\pi_j = C_N^j \pi_0$, верность которой легко проверяется по индукции для всех j. Последнее уравнение до сих пор не использовалось, подставляем полу ченный результат в него:

$$\frac{C_N^{N-1}}{N}\pi_0 = C_N^N \pi_0$$

ч то верно при любом π_0. Зн ачение π_0 н аходим из условия $\sum_j \pi_j = 1$. Так к ак $\sum_j C_N^j = 2^N$, получ аем $\pi_0 = 2^{-N}$. Итого,

$$\pi_j = \frac{C_N^j}{2^N}$$

Стационарное состояние единственно, так как решение системы линейных уравнений выше - единственно.

(в) Нет. Если бы МПВ перемешивала, то существовало бы такое k, что переходные вероятности $p_{ij}^{(k)}$ за k шагов положительны для любых i, j. Одн ако, $p_{00}^{(k)}$ может быть положительно лишь в том случае, если k - четно, а $p_{01}^{(k)}$ может быть положительно лишь в случае, когда k-нечетно (смотри н а граф цепи!)

(г) Нет. Если бы МЦ была бы эргодична, то переходные вероятности $p_{ij}^{(k)}$ сходились бы при $k \to \infty$ к компонентам стацион арного состояния π_j, независимо от i. Но $p_{00}^{(k)}$ может быть положительно лишь в том случае, если k-четно, и поэтому не может сходиться к $\pi_0 = 2^{-N}$ (на самом деле, здесь распределенне в определенном смысле таки приближается к π, но сходиться не может).

□

Задача 5.5. Рассмотрим (однородную) МЦ $\xi_0, \xi_1, \dots$ с конечным множеством состояний $\{1, \dots, L\}$, $L \geq 2$, такую что $p_{11} = 1$. Допустим, что для каждого состояния $2 \leq i \leq L$ существует $k_i \geq 1$, такое что $p_{i1}^{(k_i)} > 0$ - вероятность перейти из состояния i в состояние 1 за k_i шагов положительна.

(а) Покажите, что МПВ такой МЦ не может быть перемешиваюшей.

(б) Докажите, что последовательность $\left(p_{i1}^{(m)}\right)_{m \geq 0}$ не убывает.

(в) Покажите, что $\mathbb{P}\left(\xi_{mk} \neq 1\right) \leq (1-\delta)^m$ для любого $m \geq 1$, где $k = \max_i k_i$, а $\delta = \min_i p_{i1}^{(k_i)} > 0$

(г) Покажите, что $\mathbb{P}\left(\exists k \geq 0 : \xi_n = 1 \forall n \geq k\right) = 1$ (т.е. с вероятностью единица мы приезжаем в состояние 1 и там живем.)

(д) Покажите, что такая МЦ эргодична и $\pi = (1, 0, \dots, 0)$ - ее единственное стационарное состояние.

Доказательство. (а) Не является перемешивающей так как невозможно покинуть вершину 1

(б) $\left(p_{i1}^{(m)}\right)_{m \geq 0}$ - не убывает: $P(\{$добрались за n шагов$\}) = P(\{$добрались за n-1 шаг$\}) + P(\{$первый раз попали на ша
$P(\{n-1$ шаг$\})$

(в) $m = 1$, $P(\{$попали изначально находясь в точке $i\}) \geq p_i^{(k_i)}$ (потому что на k_i шагу попали с такой вероятностью и не вышли)
$P(\{$не попали, изначально находяст в $i\}) \leq 1 - p_i^{k^i} \leq 1 - \delta \quad \forall i$, тогда $P(\{\xi_k \neq 1\}) \leq 1 - \delta$
Шаг:
Пусть верно для всех меньших, докажем для m

$$P(\xi_{mk} \neq 1) \leq P(\xi_{(m-1)k} \neq 1) \cdot P(\eta_k \neq 1) \leq (1-\delta)^{m-1}(1-\delta)$$

$P(\xi_{(m-1)k} \neq 1)$ - Независимые события поскольку η_k - МЦ, зависящая только от ξ_k, а не от происходящего
$P(\eta_k \neq 1)$ - где η_k - см. величины для той же самой МЦ, но с начальным распределением $\xi_{(m-1)k}$
То есть "Продублировали цепь" $\Rightarrow$ все независимо и можно рассматривать произведение

(г) $\mathbb{P}(\exists k \geq 0 : \epsilon_n = 1 \ \forall n \geq k) = 1$: по пункту (В) (д) Все стационарные состояния сходятся к одному $\mathbb{P}(\xi_{mk} \neq 1) \leq (1-\delta)^m = 1-\Gamma$, следовательно выглядит так: $(\Gamma, p_2, \ldots, p_n)$ где $\sum \Gamma + p_2 + \ldots + p_n = 1$, то есть $p_2 \ldots p_n < 1 - \Gamma = (1-\delta)^m$ и $p_i \to 0\ \forall i$, то есть все сходится к $(1, 0, 0, \ldots)$.

Допустим есть еще какой-то стационарный вектор вида $(p_1, p_2, \ldots)$, будем рассматривать его как начальное распредление, тогда мы снова придем в $(1, 0, 0, \ldots)$

□

Задача 5.6.

Доказательство. □

6 Лист 6

Задача 6.1. Рассмотрим однородную марковскую цепь $\xi_0, \xi_1, \ldots$ с вероятностями перехода (p_{ij}) и момент остановки τ. Докажите сильиое марковское свойство (strong Markov property):

$$\mathbb{P}\left(\xi_{\tau+1} = j \mid \xi_\tau = i, (\xi_{\tau-1}, \ldots, \xi_0) \in B_{<\tau}, \tau < \infty\right) = \mathbb{P}\left(\xi_{\tau+1} = j \mid \xi_\tau = i, \tau < \infty\right) = p_{ij}$$

для всех i, j и произвольного набора множеств $B_{<n} \subset X^{\times n}, n \geqslant 1$.

Let $\{X_n\}$ be a homogeneous Markov chain with a transition probability matrix $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$ and let τ be a stopping time with respect to $\{X_n\}$. Then for any integer k,

$$P\left(X_{\tau+k} = j \mid X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell\right) = P\left(X_k = j \mid X_0 = i\right) = p_{ij}^{(k)}$$

and

$$P\left(X_{\tau+k} = j \mid X_\tau = i\right) = P\left(X_k = j \mid X_0 = i\right) = p_{ij}^{(k)}$$

Доказательство. We first prove the first equality.

$$\begin{aligned}
P\left(X_{\tau+k} = j \mid X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell\right) &= \frac{P\left(X_{\tau+k} = j, X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell\right)}{P\left(X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell\right)} \\
&= \frac{\sum_{r=1}^\infty P\left(X_{\tau+k} = j, X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell, \tau = r\right)}{P\left(X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell\right)}
\end{aligned}$$

Now, because τ is a stopping time, the event $\{\tau = r\}$ can be expressed as $X_0, \cdots, X_r$ so the Markov property implies

$$P\left(X_{\tau+k} = j \mid X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell, \tau = r\right) = P\left(X_{\tau+k} = j, X_\tau = i\right) = p_{ij}^{(k)}$$

Therefore, equation becomes

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{\tau+k} = j \mid X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell\right) \\
&= \frac{\sum_{r=1}^\infty P\left(X_{\tau+k} = j, X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell, \tau = r\right)}{P\left(X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell\right)} \\
&= \sum_{r=1}^\infty P\left(X_{\tau+k} = j \mid X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell, \tau = r\right) \\
&\quad \cdot P\left(X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell, \tau = r\right) \\
&= \frac{\sum_{r=1}^\infty p_{ij}^{(k)} P\left(X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell, \tau = r\right)}{P\left(X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell\right)} \\
&= p_{ij}^{(k)} \frac{\sum_{r=1}^\infty P\left(X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell, \tau = r\right)}{P\left(X_\tau = i, 0 \leq \ell < \tau, X_\ell = i_\ell\right)} \\
&= p_{ij}^{(k)}
\end{aligned}$$

The second equality follows simply from the first equality:

$$
\begin{aligned}
P\left(X_{\tau+k}=j \mid X_{\tau}=i\right) & =\frac{\sum_{r=1}^{\infty} P\left(X_{\tau+k}=j \mid X_{r}=i, \tau=r\right) P\left(X_{r}=i, \tau=r\right)}{P\left(X_{\tau}=i\right)} \\
& =p_{ij}^{(k)} \frac{\sum_{r=1}^{\infty} P\left(X_{r}=i, \tau=r\right)}{P\left(X_{\tau}=i\right)} \\
& =p_{ij}^{(k)}
\end{aligned}
$$

□

Задача 6.2. Рассмотрим экспоненциально эргодическую марковскую цепь с множеством значений $X=\{1,2,\ldots\}$ и стационарным состоянием π. Допустим, что $\pi_1>0$ Рассмотрим следуюшую последовательность моментов остановки:

$$
\tau_1=\{\inf k \geqslant 0: \xi_k=1\}, \quad \tau_n=\{\inf k>\tau_{n-1}: \xi_k=1\}, \quad n \geqslant 2
$$

где $\inf \emptyset:=\infty$. Таким образом, τ_n - n-ый момент попадания процесса в состояние 1.

(а) Докажите, что пля каждого начального распределения $p^{(0)}$ верно $\mathbb{E}\left(\tau_1\right)^r<\infty$ для любого $r \geq 0$ (говорят, что случайная величина τ_1 имеет коиечиые момеиmal. Как следствие, покажите, что при каждом начальном распределении $p^{(0)}$ имеем $\mathbb{P}\left(\tau_1<\infty\right)=1$

(б) Докажите, что случайные величины τ_1 и $\tau_2-\tau_1$ независимы, а если начальное распределение удовлетворяет $p_1^{(0)}=1$ (то есть, в начальный момент времени мы сидим в состоянии 1), то они одинаково распределены. Выведите отсода, что, В частности, $\mathbb{E}\left(\tau_2\right)^r<\infty \forall r>0$

(в) Рассуждая аналогично, докажите, что $\tau_1, \tau_2-\tau_1, \tau_3-\tau_2, \ldots$ последовательность независимых случайных величин. Покажите, что эти случайные величины, кроме τ_1, имеют одинаковое распределение, а в случае, когда $p_1^{(0)}=1$, и τ_1 имеет то же распределение. Покажите, что, в частности, $\mathbb{E}\left(\tau_n\right)^r<\infty \forall r>0$

(г) Докажите, что $\tau_n / n \rightarrow \mathbb{E}\left(\tau_2-\tau_1\right)$ при $n \rightarrow \infty$, п.н.

(д) Сфорулируем эту задачу сейчас, а сделать ее нужсно будет после того, как обсудим ЗБЧ: Докажите, что $\mathbb{E}\left(\tau_2-\tau_1\right)=\left(\pi_1\right)^{-1}$.

Доказательство. (а)

(б)

(в)

(г)

(д)

□

7 Лист 7

Задача 7.1. Привести пример МЦ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, такой что она не эргодична, но для нее выполнен ЗБЧ.

Доказательство. □

Задача 7.2. Привести пример МI $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, такой что для нее не выполнен ЗБЧ. То есть, существует функция f, дия которой предел последовательности $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\xi_k\right)$ по вероятности либо не существует, либо зависит от начального условия.

Доказательство. □

Задача 7.3. Компания "Рога и Копыта"плохо пережила карантин и стала выплачивать дивиденды своим акционерам нерегулярно. Н если в данном месяце она не выплатила дивиденды, то в следующем месяце она их не выплатит с вероятностью 0.6. Но если дивиденды были выплачены, то в следующем месяце они будут выплачены с вероятностью 0.9. При условии, что компания не оправится от карантина в течение достаточно д.ительного времени, какой процент от максимально возможного числа дивидендных вып.лат за этот период стоит ожидать получить ее акционерам?

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.9a + 0.4b = a \\ 0.1a + 0.6b = b \end{cases} \qquad \begin{cases} -a + 4b = 0a - 4b = 0 \end{cases} \qquad a = 4b$$

Так как $a + b = 1$, то $a = 0.8,\ b = 0.2$, то есть дидвиденды 80% □

Задача 7.4. Докажите, что $\mathbb{E}\left(\tau_2 - \tau_1\right) = \left(\pi_1\right)^{-1}$.

Доказательство. □