

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1. Предварительные сведения	8
1.1. Абсолютная и равномерная сходимость	10
1.2. Открытость, замкнутость, компактность, связность	11
1.3. Степенные ряды	15
1.4. Экспонента	16
1.5. Сведения из анализа функций многих переменных	17
1.6. Дробно-линейные отображения	19
Упражнения	22
Глава 2. Производные	25
2.1. Обратные функции, корни, логарифмы	28
2.2. Уравнения Коши—Римана	31
Упражнения	35
Глава 3. Практикум по конформным отображениям	37
3.1. Дробно-линейные отображения	37
3.2. Более сложные отображения	42
Упражнения	46
Глава 4. Интегралы	48
4.1. Основные определения	48
4.2. Индекс кривой относительно точки	54
Упражнения	58
Глава 5. Теорема Коши и ее следствия	61
5.1. Теорема Коши	61
5.2. Формула Коши и аналитичность голоморфных функций	70
5.3. Бесконечная и почленная дифференцируемость	73
Упражнения	80
Глава 6. Гомотопии и аналитическое продолжение	83
6.1. Гомотопии путей	83
6.2. Аналитическое продолжение	88

6.3. Снова теорема Коши	96
6.4. Снова индексы кривых	98
Упражнения	100
Глава 7. Ряды Лорана и особые точки	103
7.1. Кратность нуля	103
7.2. Ряды Лорана	104
7.3. Изолированные особые точки	108
7.4. Точка ∞ как изолированная особенность	113
Упражнения	117
Глава 8. Вычеты	119
8.1. Основные определения	119
8.2. Принцип аргумента	120
8.3. Вычисление интегралов	127
Упражнения	144
Глава 9. Локальные свойства голоморфных функций	148
9.1. Принцип сохранения области	148
9.2. Ветвление	150
9.3. Принцип максимума модуля и его следствия	154
9.4. Теорема Блоха	157
Упражнения	159
Глава 10. Конформные отображения. Часть 1	162
10.1. Голоморфные функции на подмножествах сферы Римана	162
10.2. Принцип симметрии	165
10.3. Отображение верхней полуплоскости на прямоугольник	169
10.4. Принцип соответствия границ	179
10.5. Квазиконформные отображения	186
Упражнения	190
Глава 11. Бесконечные суммы и произведения	193
11.1. Представление котангенса в виде бесконечной суммы	193
11.2. Эллиптические функции	199
11.3. Бесконечные произведения	207
11.4. Теоремы Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса	211
11.5. Произведения Бляшке	217
Упражнения	220
Глава 12. Конформные отображения. Часть 2	222
12.1. Теорема Римана: план доказательства	222
12.2. Теорема Римана об отображении: обоснования	225

12.3. Формула Кристоффеля—Шварца	231
12.4. Гиперболическая метрика	237
Упражнения	246
Глава 13. Кое-что о римановых поверхностях	248
13.1. Определения, простейшие примеры, общие факты	248
13.2. Риманова поверхность алгебраической функции	257
13.3. Род; формула Римана—Гурвица	264
13.4. Дифференциальные формы и вычеты	274
13.5. О теореме существования Римана	283
13.6. О поле мероморфных функций	287
13.7. О теореме Римана—Роха	289
13.8. О теореме Абеля	293
Упражнения	298
Предметный указатель	301
Литература	304

Предисловие

Эта книга — учебник, предназначенный для студентов, изучающих теорию функций комплексного переменного с самого начала. В ней отражен многолетний авторский опыт преподавания комплексного анализа на факультете математики Высшей школы экономики (НИУ ВШЭ) и в программе «Math in Moscow» (совместный проект НИУ ВШЭ и НМУ).

Основное (и, по существу, единственное) требование к читателю — хорошее владение «обычным» анализом: если читатель уверенно себя чувствует с равномерной сходимостью и с такими понятиями, как открытость, замкнутость и компактность применительно к подмножествам плоскости, то все остальное приложится. В первой главе, в числе прочего, перечислены без доказательства те факты из анализа, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. В качестве руководства по математическому анализу, которым можно пользоваться для справок и для заполнения пробелов в подготовке, я рекомендую неоднократно переиздававшийся двухтомник В. А. Зорича [1, 2].

Заключительная глава 13, посвященная римановым поверхностям, требует несколько большего объема предварительных знаний, чем основная часть книги. Я исходил из того, что параллельно с комплексным анализом обычно изучают и такие предметы, как математический анализ для многих вещественных переменных, в том числе анализ на многообразиях, а также начала топологии (по крайней мере, так делается на факультете математики НИУ ВШЭ). Что конкретно требуется дополнительно знать для понимания этой главы, сказано в ее начале.

Каждая глава заканчивается набором упражнений, как теоретического, так и вычислительного характера. Даже если их достаточно для того, чтобы помочь читателю освоить материал, преподавателю для построения курса, со всеми контрольными, зачетами и прочим, их заведомо не хватит: задачника по теории функций комплексного переменного эта книга не заменит. Таких задачников на русском языке много, и можно пользоваться практически любым: во всех

имеется достаточное количество упражнений на отработку вычислительных навыков, специфичных для комплексного анализа.

Я стремился излагать материал строго, но все же не допуская того, чтобы обсуждение оснований затмило основной предмет книги. Насколько мне удалось соблюсти необходимый баланс — судить читателю. Я также всячески избегал введения абстрактных понятий в тех случаях, когда материал книги не давал возможности продемонстрировать, как эти понятия реально «работают». Поэтому, скажем, в книге есть определение квазиконформного отображения, но нет определения пучка.

Способ изложения «гомотопической» версии теоремы Коши я позаимствовал из одного из не переведенных на русский язык учебников С. Ленга [3]. Обоснование разложения котангенса в бесконечную сумму взято из другого зарубежного учебника [4]. Доказательство теоремы Вейерштрасса о голоморфной функции с предписанными нулями взято из учебника Б. В. Шабата [5]. В изложении теорем Блоха и Ландау я в основном следую учебнику И. И. Привалова [6]; надеюсь, впрочем, что дорога к большой теореме Пикара у меня получилась короче, чем у Привалова.

Своим названием эта книга обязана тому несколько странному обстоятельству, что целый ряд важных теорем комплексного анализа принято называть принципами (читатель может в этом убедиться, заглянув в предметный указатель).

Я благодарен А. В. Забродину и В. А. Побережному, с которыми мы несколько лет вели семинары по комплексному анализу на матфаке ВШЭ: и содержание, и — в меньшей степени — стиль этих семинаров подвинули меня на то, чтобы взамен прежнего пособия по комплексному анализу написать совершенно новую книгу.

Я благодарен Алексею Пенскому, взявшему на себя труд по ознакомлению с рукописью и ее рецензированию, Владимиру Медведеву, внимательно прочитавшему первую версию текста и нашедшему множество ошибок и неточностей, Татьяне Коробковой за вдумчивое и содержательное редактирование и Виктору Шувалову за верстку. За все оставшиеся в тексте недостатки отвечаю только я.

Наконец, моя огромная благодарность — Вике, Яше и Марку, которые мне все время мешали, все время помогали и без которых этой книги бы не было и в помине.

С. Львовский

Глава 1

Предварительные сведения

В этой вводной главе собран материал, необходимый для дальнейшего, но к собственно комплексному анализу все же не относящийся. Чтобы проверить, в какой степени вы владеете необходимыми предварительными сведениями, можно заглянуть в упражнения в конце главы.

Если $z = x + iy$ — комплексное число ($x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$), то x называется *действительной частью* (синоним: вещественная часть) числа z , а y — его *мнимой частью*. Обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Комплексное число z изображается на плоскости в виде точки с координатами $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$; соответственно, мы будем отождествлять множество всех комплексных чисел (обозначаемое \mathbb{C}) с координатной плоскостью; плоскость, точки которой рассматриваются как комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*.

Если z — комплексное число, то его *модулем* называется расстояние от z (точнее, от соответствующей точки на комплексной плоскости — далее мы таких уточнений делать не будем) до нуля (т. е. начала координат): $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Из неравенства треугольника вытекает, что $|z + w| \leq |z| + |w|$. Расстояние между комплексными числами z и w равно $|z - w|$.

Ось Ox на комплексной плоскости называется *действительной осью*, а ось Oy — *мнимой осью*. Если $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, то *аргументом* комплексного числа z называется угол между положительным направлением действительной оси и вектором, соединяющим 0 и z (так что, например, $\pi/4$ является аргументом числа $1 + i$). Аргумент комплексного числа z обозначается $\arg z$.

Аргумент комплексного числа определен не однозначно, а с точностью до прибавления целого кратного 2π : например, утверждения $\arg(1 + i) = \pi/4$ и $\arg(1 + i) = -7\pi/4$ верны в равной мере. Если $|z| = r \neq 0$ и $\arg z = \varphi$, то

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.1)$$

Запись (1.1) называется *тригонометрической формой* комплексного числа z . При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Если $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, то число $x - iy$, называемое *сопряженным* к z , обозначается \bar{z} . Точки z и \bar{z} симметричны относительно действительной оси, и $z\bar{z} = |z|^2$.

Пределы функций комплексного переменного и пределы последовательностей комплексных чисел определяются так же, как в вещественном случае. Например, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b$ означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $0 < |z - a| < \delta$ вытекает $|f(z) - b| < \varepsilon$. В комплексном случае также верны теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного, а также критерий Коши сходимости («последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна»).

Запись $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ означает $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ (и аналогично с пределами последовательностей); $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = b$ означает «для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $M > 0$, что из неравенства $|z| > M$ вытекает $|f(z) - b| < \varepsilon$ ».

Производные и интегралы от функций комплексного переменного — дело тонкое (этому предмету посвящена вся книга), а вот с комплекснозначными функциями действительного переменного никаких неожиданностей не происходит. Именно, если f — функция с комплексными значениями, определенная на интервале (действительной) числовой оси, и если $f(x) = u(x) + iv(x)$ (u и v вещественны), то ее производная есть

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = u'(a) + iv'(a);$$

для производных таких функций выполняются все элементарные свойства производных от функций с действительными значениями (производная суммы, произведения и разности, производная сложной функции, где «внутренняя» функция принимает действительные значения), с теми же доказательствами. Интеграл от такой функции f определяется по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx;$$

можно также определить его с помощью интегральных сумм Римана (или как интеграл Лебега, коль на то пошло). Как и в случае

функций с действительными значениями, выполнено неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx; \quad (1.2)$$

для доказательства достаточно применить к суммам Римана неравенство «модуль суммы не превосходит суммы модулей» и перейти к пределу.

1.1. Абсолютная и равномерная сходимость

Пусть X — произвольное множество (вы ничего не потеряете, если будете считать X подмножеством комплексной плоскости) и $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — счетное семейство ограниченных функций на X со значениями в \mathbb{C} .

Определение 1.1. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно и равномерно на X , если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x)|$.

Предложение 1.2 (мажорантный признак Вейерштрасса). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — ряд из ограниченных функций на множестве X . Если существует такое натуральное N , что $\sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq a_n$ для всех $n \geq N$, и если при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно и равномерно.

См. [2, гл. XVI, § 2].

Предложение 1.3. Если ряд из ограниченных функций $\sum f_n$ сходится на X абсолютно и равномерно, то он сходится на X равномерно. Более того, ряд, полученный из ряда $\sum f_n$ любой перестановкой слагаемых, также сходится на X абсолютно и равномерно, причем к той же функции.

Для случая рядов с постоянными членами см. [1, гл. V, § 5, утв. 4]; дополнения к доказательству, необходимые для случая функциональных рядов, внесите самостоятельно.

Пусть на множестве X задано семейство ограниченных функций $\{f_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$, занумерованное двумя натуральными индексами. Тогда формальная сумма $\sum_{m,n \in \mathbb{N}} f_{m,n}$ называется двойным рядом. Говорят, что двойной ряд сходится абсолютно и равномерно, если он так сходится при какой-нибудь (а тем самым, ввиду предложения 1.3, и при любой) нумерации слагаемых.

Предложение 1.4. Пусть $\{f_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ — семейство ограниченных функций на множестве X . Тогда следующие два утверждения равносильны.

(1) Двойной ряд $\sum_{m,n} f_{m,n}$ сходится абсолютно и равномерно.

(2) Для каждого $m \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_{m,n}$ абсолютно и равномерно сходится, и если обозначить сумму этого ряда через f_m , то ряд $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ также абсолютно и равномерно сходится.

Более того, если выполняются равносильные утверждения (1) и (2), то сумма двойного ряда $\sum_{m,n \in \mathbb{N}} f_{m,n}$ совпадает с суммой ряда $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$.

Читателю предлагается либо доказать эти утверждения самостоятельно, либо найти доказательства в литературе, либо, наконец, модифицировать должным образом доказательства соответствующих фактов для рядов с постоянными членами (это в учебниках встречается чаще).

1.2. Открытость, замкнутость, компактность, связность

В этом разделе речь пойдет о подмножествах евклидова пространства \mathbb{R}^n для произвольного n , но в приложениях у нас главным образом будут встречаться случаи $n = 2$ (комплексная плоскость \mathbb{C} , отождествляемая с \mathbb{R}^2) и $n = 1$ (вещественная прямая). Если $v \in \mathbb{R}^n$, то через $|v|$ обозначается евклидова норма (корень из суммы квадратов координат). Расстояние между точками $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ равно $|v_1 - v_2|$. Если $n = 2$ и мы отождествляем обычным образом \mathbb{R}^2 с \mathbb{C} , то $|v|$ — модуль комплексного числа.

Напомним, что ε -окрестность точки $a \in \mathbb{R}^n$ называется множеством

$$\{z \in \mathbb{R}^n : |z - a| < \varepsilon\}$$

(подразумевается, что ε — положительное действительное число).

Определение 1.5. Подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если вместе с каждой точкой $a \in U$ оно содержит и ее ε -окрестность для некоторого ε .

Определение 1.6. Подмножество $F \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus F$ открыто.

Предложение 1.7. (1) Объединение любого семейства открытых множеств открыто. Пересечение любого конечного семейства открытых множеств открыто.

(2) Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Объединение любого конечного семейства замкнутых множеств замкнуто. \square

Предложение 1.8. Подмножество $F \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно обладает следующим свойством: если $\{a_k\}$ — последовательность точек множества F и если $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$, то $a \in F$.

(Предел последовательности в \mathbb{R}^n определяется так же, как в \mathbb{C} : $a_k \rightarrow a$, если $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - a| = 0$.)

Определение 1.9. Замыканием подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих X .

Предложение 1.10. Замыкание подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ совпадает с множеством пределов сходящихся последовательностей $\{a_k\}$, у которых все a_k лежат в X . \square

Замыкание множества X обозначается \bar{X} .

Определение 1.11. Внутренностью подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется множество таких точек $a \in X$, что некоторая ε -окрестность точки a содержится в X . Внутренность множества X обозначается $\text{Int}(X)$.

Внутренность множества X совпадает с объединением всех открытых множеств, содержащихся в X , а также с дополнением к замыканию множества $\mathbb{R}^n \setminus X$.

Определение 1.12. Подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется компактным, или просто компактом, если оно замкнуто и ограничено.

Предложение 1.13. Следующие три условия эквивалентны:

- (1) подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно;
- (2) у всякой последовательности точек $a_m \in K$ существует подпоследовательность $\{a_{m_k}\}$, для которой предел $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{m_k}$ существует и лежит в K ;
- (3) для всякого семейства открытых множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, обладающего тем свойством, что $K \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha$, существует такой конечный набор $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in I$, что

$$K \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_l}.$$

Семейство множеств $\{U_\alpha\}$, удовлетворяющее условию (3) предложения, называют открытым покрытием множества K , а само

условие (3) кратко формулируют так: «из всякого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие».

По поводу всего сказанного выше в этом разделе см. [1, гл. 7, § 1].

Предложение 1.14. *Если $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, то всякая непрерывная функция $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ достигает на K наибольшего и наименьшего значений.*

См. [1, гл. 7, § 1].

Наконец, нам понадобится понятие связности. Для экономии места определим его только для открытых множеств (в других ситуациях оно нам не встретится).

Определение 1.15. Открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется связным, если оно не является несвязным.

Предложение 1.16. *Открытое подмножество в \mathbb{R} связно тогда и только тогда, когда оно является интервалом $(a; b)$, где a и b — действительные числа, $+\infty$ или $-\infty$.*

Связные открытые подмножества в \mathbb{R}^n , где $n > 1$, так просто охарактеризовать нельзя, но один важный критерий связности мы сформулируем и докажем.

Предложение 1.17. *Открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ связно тогда и только тогда, когда для любых двух точек $a, b \in U$ существует непрерывное отображение $\gamma: [0; 1] \rightarrow U$, для которого*

$$\gamma(0) = a, \quad \gamma(1) = b.$$

Иными словами, открытое подмножество плоскости связно тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить кривой.

Доказательство. Пусть любые две точки открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ можно соединить кривой; покажем, что U связно. Рассуждая от противного, предположим, что $U = U_1 \cup U_2$, где U_1 и U_2 открыты, непусты и не пересекаются. Выберем точки $a \in U_1$, $b \in U_2$, и пусть $\gamma: [0; 1] \rightarrow U$ — кривая, соединяющая a и b ($\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$). Определим функцию $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ так: $f(t) = 1$, если $\gamma(t) \in U_1$, и $f(t) = 2$, если $\gamma(t) \in U_2$. Покажем, что функция f непрерывна. Если, скажем, $\gamma(t) \in U_1$, то для некоторого $\eta > 0$ существует η -окрестность $V \ni \gamma(t)$, лежащая в U_1 (см. определение 1.5), так что ввиду непрерывности отображения γ найдется такое $\delta > 0$, что из $|t' - t| < \delta$ вытекает, что $\gamma(t') \in V \subset U_1$. Отсюда $f(t') = f(t) = 1$; в частности,

для всякого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|t' - t| < \delta \Rightarrow \gamma(t') = \gamma(t) = 1 \Rightarrow |f(t') - f(t)| = 0 < \varepsilon,$$

что доказывает непрерывность функции f . Так как функция на отрезке, принимающая значения 1 и 2 только их, непрерывной быть не может, мы получили искомое противоречие.

Обратно, пусть U связно; покажем, что любые две его точки можно соединить кривой. Выберем произвольную точку $a \in U$; достаточно показать, что ее можно соединить кривой с любой точкой $b \in U$. Для этого положим

$$U_1 = \{z \in U : a \text{ и } z \text{ можно соединить кривой}\},$$

$$U_2 = U \setminus U_1.$$

Покажем, что U_1 и U_2 открыты. В самом деле, если $z \in U_1$, т. е. a можно соединить кривой с точкой z , то a можно соединить кривой и с любой точкой из ε -окрестности точки z , содержащейся в U (рис. 1.1), так что эта окрестность содержится в U_1 ; мы показали, что U_1 открыто. Если, с другой стороны, $z \in U_2$, т. е. z нельзя соединить кривой с точкой a , то и любую точку из ε -окрестности $V \ni z$, содержащейся в U , также нельзя соединить с a : в противном случае кривую, соединяющую a с точкой $z' \in V$, можно было бы продолжить отрезком от z' до z . Значит, $V \subset U_2$ и U_2 также открыто. Осталось заметить, что $U_1 \ni a$ (точку a можно соединить с собой с помощью «кривой» — постоянного отображения), так что U_1 непусто; так как U связно, получаем, что $U_2 = \emptyset$, $U = U_1$ и точку a можно соединить кривой с любой точкой из U , что и требовалось. \square

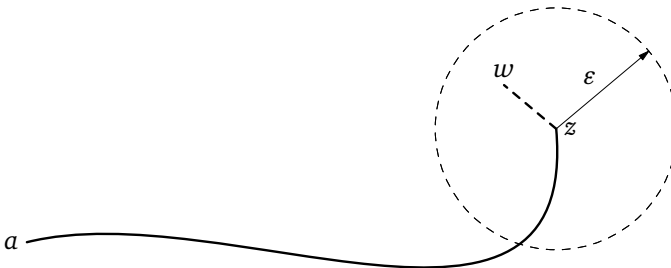


Рис. 1.1. К доказательству предложения 1.17

Отмечу еще, что в комплексном анализе связные открытые подмножества в \mathbb{C} часто называют *областями*.

1.3. Степенные ряды

Рассмотрим степенной ряд

$$c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + c_n(z - a)^n + \dots \quad (1.3)$$

(все коэффициенты c_j и число a — комплексные числа, переменная z также предполагается комплексной).

Предложение 1.18. (1) Существует $R \in [0; +\infty]$ с тем свойством, что ряд (1.3) абсолютно сходится при $|z - a| < R$ и расходится (общий член не стремится к нулю) при $|z - a| > R$.

(2) Имеем

$$R = 1 / \limsup \sqrt[n]{|c_n|}. \quad (1.4)$$

В формуле (1.4) подразумевается, что $1/(+\infty) = 0$, $1/0 = +\infty$. Эта формула называется *формулой Коши—Адамара*, а «число» R из этой формулы называется *радиусом сходимости* ряда (1.3). (Кавычки — потому что R может быть равно бесконечности.)

По поводу формулы Коши—Адамара см. [1, гл. V, § 5].

Если R — радиус сходимости ряда (1.3), то множество

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$$

называется *кругом сходимости* этого ряда (если $R = +\infty$, то круг сходимости — вся комплексная плоскость).

Предложение 1.19. Ряд (1.3) сходится абсолютно и равномерно на каждом компактном подмножестве своего круга сходимости.

Отметим, что на всем круге сходимости степенной ряд во многих интересных случаях сходится неравномерно. Вообще, равномерная сходимость на любом компакте, содержащемся в данном открытом множестве U (но не обязательно на всем U), — типичная ситуация для комплексного анализа.

Доказательство. Пусть радиус сходимости равен $R > 0$, и пусть компакт K содержится в круге сходимости. Непрерывная функция $z \mapsto |z - a|$ достигает на K наибольшего значения; обозначим его r . Имеем $r < R$ и

$$K \subset \bar{D}_r = \{z : |z - a| \leq r\}.$$

Выберем действительное число r' , для которого $r < r' < R$, и число z_0 , для которого $|z_0 - a| = r'$. Ввиду предложения 1.18 ряд (1.3) абсолютно сходится при $z = z_0$, т. е. сходится ряд $\sum |c_n| r'^n$; в частности, члены этого ряда ограничены, т. е. существует такая константа $C > 0$, что

$$|c_n| r'^n \leq C \Leftrightarrow |c_n| \leq \frac{C}{r'^n} \quad \text{при всех } n.$$

Если теперь $z \in \bar{D}_r$, т. е. $|z - a| \leq r$, то

$$|c_n(z - a)^n| \leq |c_n|r^n = |c_n|r'^n \left(\frac{r}{r'}\right)^n \leq C \left(\frac{r}{r'}\right)^n.$$

Стало быть, на множестве \bar{D}_r члены ряда (1.3) равномерно ограничены членами сходящейся геометрической прогрессии $C \cdot \sum (r/r')^m$, так что на \bar{D}_r наш степенной ряд сходится равномерно по мажорантному признаку (предложение 1.2). \square

Следствие 1.20. *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией от z на его круге сходимости.*

Доказательство. В самом деле, в терминах предыдущего доказательства достаточно проверить, что функция непрерывна на каждом \bar{D}_r для $0 < r < R$, но последнее очевидно ввиду равномерной сходимости. \square

1.4. Экспонента

Предложение-определение 1.21. Для всякого $z \in \mathbb{C}$ ряд

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (1.5)$$

абсолютно сходится. Его сумма обозначается e^z или $\exp(z)$, а функция $z \mapsto e^z$ называется *экспоненциальной функцией* или *экспонентой*.

Абсолютная сходимость ряда (1.5) при любом z хорошо известна (она следует, например, из признака Даламбера). Так как ряд имеет бесконечный радиус сходимости, экспонента непрерывна на всем \mathbb{C} . Если $z \in \mathbb{R}$, то, разумеется, экспонента от z равна e^z в привычном смысле.

Отметим, что мы сейчас не определяем функцию $z \mapsto a^z$ ни для какого a , отличного от e .

Если в формуле (1.5) положить $z = i\varphi$, где $\varphi \in \mathbb{R}$, то получим известную формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; \quad (1.6)$$

стало быть, $e^{i\varphi}$ имеет модуль 1 и аргумент φ , а комплексное число с модулем r и аргументом φ можно записать в виде $re^{i\varphi}$.

Если подставить $-\varphi$ вместо φ в (1.6), а затем сложить и вычесть получающиеся равенства, получим известные формулы для синуса и косинуса:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (1.7)$$

Вот основное свойство экспоненты.

Предложение 1.22. Для любых $z, w \in \mathbb{C}$ имеем $e^{z+w} = e^z e^w$.

Набросок доказательства. Как известно (см. [1, гл. V, § 5, утв. 5]), если $a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$ и $b_0 + b_1 + \dots + b_n + \dots$ — абсолютно сходящиеся ряды с суммами A и B соответственно, то ряд

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) + \dots$$

также абсолютно сходится, причем его сумма равна AB . Применяя это утверждение к рядам (1.5) для e^z и e^w , получаем, что предложение будет следовать из выполнения равенств

$$1 \cdot \frac{w^n}{n!} + \frac{z}{1!} \cdot \frac{w^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z^2}{2!} \cdot \frac{w^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{z^n}{n!} \cdot 1 = \frac{(z+w)^n}{n!},$$

а это не что иное, как формула бинома Ньютона для $(z+w)^n$. \square

Из формулы Эйлера вытекает, что $e^{2\pi i} = 1$; после этого из предложения 1.22 следует, что $e^{z+2\pi i} = e^z$ для всех z . Иными словами, экспонента — периодическая функция с периодом $2\pi i$.

1.5. Сведения из анализа функций многих переменных

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение. Отображение F называется *дифференцируемым* или, для ясности, *вещественно дифференцируемым* в точке $a \in U$, если существует такое линейное отображение $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, что

$$F(a+h) - F(a) = L(h) + \varphi(h), \quad \text{где } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\varphi(h)|}{|h|} = 0.$$

См. [1, гл. VIII, § 2].

Отображение L мы будем называть *производной* (мы иногда будем для ясности называть его *вещественной производной*) отображения F в точке a (в [1, 2] используется термин «дифференциал»).

Если отображение F задается формулой

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

и если все частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ существуют и непрерывны на всем U (в этом случае F называется *отображением класса C^1*), то F вещественно дифференцируемо в каждой точке $a \in U$ и его производная как линейное отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m задается матрицей $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$. Эта матрица называется *якобиевой матрицей* отображения;

если $m = n$ (т. е. якобиева матрица квадратная), то ее определитель называется *якобианом* отображения F (в данной точке).

В большей части книги вышеупомянутые результаты будут применяться для случая, когда $m = n = 2$ и $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n = \mathbb{C}$, а евклидова норма — не что иное, как модуль комплексного числа.

Нам еще понадобятся некоторые сведения о площади (она же мера) открытых множеств на плоскости. Так как знакомство с мерой и интегралом Лебега в этой книге не предполагается, мы примем в этом месте следующий подход. Напомним, что *носителем* функции $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется замыкание множества тех точек, в которых она отлична от нуля. Если $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция с компактным носителем, то под интегралом $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx$ будем

понимать интеграл от функции φ по какому-нибудь параллелепипеду, содержащему ее носитель (см. [2, гл. XI, § 1, опр. 7]).

Определение 1.23. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. *Разбиением единицы с компактными носителями на U* называется счетное семейство непрерывных функций $\{\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow [0; +\infty)\}$ со следующими свойствами:

- (1) носитель каждой функции φ_i компактен и содержится в U ;
- (2) у каждой точки $x \in U$ есть такая ε -окрестность $V \ni x$, $V \subset U$, что лишь носители конечного числа функций φ_i имеют непустое пересечение с V ;
- (3) для каждой точки $x \in U$ имеем $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ (ввиду условия (2) эта сумма конечна).

Ср. с [2, гл. XV, § 2, опр. 18].

Определение 1.24. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $h: U \rightarrow [0; +\infty)$ — непрерывная функция. *Интегралом* функции h по множеству U будем называть число

$$\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} h \cdot \varphi_i dx_1 \dots dx_n, \quad (1.8)$$

где $\{\varphi_i\}$ — какое-нибудь разбиение единицы с компактными носителями на U (если ряд в левой части (1.8) расходится, будем считать, что интеграл равен $+\infty$).

Можно (и нетрудно) проверить, что от выбора разбиения единицы интеграл не зависит.

Определение 1.25. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. *Мерой* множества U называется интеграл $\mu(U) = \int_U 1 dx_1 \dots dx_n$ (неотрицательное число или $+\infty$).

Если множество U ограничено, то его мера конечна.

Если U и V — открытые подмножества в \mathbb{R}^n , то диффеоморфизмом между U и V называется биективное отображение $F: U \rightarrow V$ класса C^1 , обратное к которому тоже принадлежит классу C^1 .

Предложение 1.26. Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества и $F: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм класса C^1 . Тогда

$$\mu(V) = \int_U |J(F)(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n,$$

где $|J(F)(x_1, \dots, x_n)|$ — определитель якобиевой матрицы отображения F в точке x_1, \dots, x_n .

Это предложение выводится из формулы замены переменной в интеграле [2, гл. XI, § 5, теор. 1].

1.6. Дробно-линейные отображения

Определение 1.27. Пусть a, b, c, d — комплексные числа, для которых матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ невырождена. Тогда отображение из \mathbb{C} в \mathbb{C} , заданное формулой

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.9)$$

называется *дробно-линейным*.

Условие невырожденности матрицы гарантирует, что числитель не пропорционален знаменателю, т. е. наше отображение не является постоянным.

В определении 1.27 присутствует (сознательная) небрежность: если $c \neq 0$, то при $z = -d/c$ знаменатель обращается в нуль и отображение (1.9) не определено, так что, строго говоря, нельзя его называть отображением из \mathbb{C} в \mathbb{C} . Чтобы не делать всякий раз таких оговорок, удобно поступать следующим образом. Рассмотрим множество $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, где ∞ — символ (называемый, натурально, «бесконечность»), правила обращения с которым мы сейчас опишем.

Во-первых, мы полагаем $a \pm \infty = \infty$ и $a/\infty = 0$ для любого комплексного числа a , а также $a \cdot \infty = \infty$ и $a/0 = \infty$ для любого ненулевого комплексного числа a (выражения $0 \cdot \infty$, $\infty \pm \infty$ и $0/0$ по-прежнему не определены).

Во-вторых, если $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ — дробно-линейное отображение, то положим

$$f(\infty) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \frac{a}{c}.$$

Если принять такие соглашения, то всякое дробно-линейное отображение становится взаимно однозначным отображением $\bar{\mathbb{C}}$ на себя.

Множество $\bar{\mathbb{C}}$ называется *расширенной комплексной плоскостью* или *сферой Римана*.

Множества вида $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ мы будем рассматривать как «проколотые окрестности бесконечности» на сфере Римана, а те же множества, к которым добавлена точка ∞ , — как просто окрестности бесконечности (без прокола). Для читателя, знающего соответствующие определения, добавлю, что такое определение окрестностей бесконечности задает на $\bar{\mathbb{C}}$ структуру топологического пространства, гомеоморфного двумерной сфере (см. гл. 13).

Основное свойство дробно-линейных отображений состоит в том, что они переводят прямые и окружности в прямые и окружности. Точнее говоря, для всякой прямой $\ell \subset \mathbb{C}$ множество $\ell \cup \{\infty\} \subset \bar{\mathbb{C}}$ будем называть «прямой на сфере Римана» (это замыкание множества $\ell \subset \mathbb{C}$ относительно упомянутой выше топологии на $\bar{\mathbb{C}}$). Под окружностью на сфере Римана будем понимать обычную окружность в \mathbb{C} (окружность — множество ограниченное, оно «в бесконечность не уходит», так что добавлять к нему точку ∞ незачем). Введем теперь следующий термин.

Определение 1.28. *Обобщенной окружностью¹ называется подмножество в $\bar{\mathbb{C}}$, являющееся либо прямой на сфере Римана, либо окружностью.*

Предложение 1.29. *Всякое дробно-линейное преобразование переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности.*

Доказательство. Легко видеть, что всякое дробно-линейное преобразование $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ представимо в виде композиции преобразований вида $z \mapsto Az$ ($A \neq 0$), $z \mapsto z + B$ и $z \mapsto 1/z$ (для доказательства достаточно поделить многочлен $az + b$ на $cz + d$ с остатком). Преобразования первых двух видов (подобия и параллельные переносы) переводят прямые в прямые, а окружности — в окружности, так что надо только разобраться с $1/z$.

Лемма 1.30. *Уравнение всякой обобщенной окружности можно записать в виде*

$$pz\bar{z} + Az + \bar{A}\bar{z} + q = 0, \quad \text{где } A \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Доказательство леммы. Пусть прямая $\ell \subset \mathbb{C}$ задана уравнением $px + qy + r = 0$ ($p, q, r \in \mathbb{R}$). Подставляя $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$,

¹Б. В. Шабат в лекциях для школьников говорил «окружность в широком смысле слова».

получаем, что уравнение прямой ℓ имеет вид

$$\frac{p - iq}{2}z + \frac{p + iq}{2}\bar{z} + r = 0,$$

или, обозначая $(p - iq)/2 = A$,

$$Az + \bar{A}\bar{z} + r = 0, \quad \text{где } A \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}.$$

Аналогично, уравнение всякой окружности на плоскости имеет вид

$$p(x^2 + y^2) + qx + ry + s = 0, \quad \text{где } p, q, r, s \in \mathbb{R}.$$

Подставляя $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$, получаем уравнение

$$pz\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + s \quad (B \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{R}),$$

и это также уравнение вида (1.10) □

Возвращаясь к действию преобразования $z \mapsto 1/z$ на обобщенные окружности, заметим, что если $w = 1/z$, то $z = 1/w$; подставляя $1/w$ вместо z в уравнение (1.10), получаем уравнение на w , также имеющее вид (1.10), и все доказано. □

Предложение 1.31. Пусть $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ — две тройки различных точек на сфере Римана. Тогда существует и единственное дробно-линейное отображение, переводящее каждое a_i в соответствующее b_i .

Набросок доказательства. Проверим это утверждение для случая, когда $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = \infty$ и все a_j конечны (остальное оставляется читателю в качестве упражнения).

Если дробно-линейное отображение $z \mapsto (pz + q)/(rz + s)$ переводит a_1 в 0 и a_3 в ∞ , то $pz + q$ должно обращаться в нуль при $z = a_1$, а $rz + s$ должно обращаться в нуль при $z = a_3$. Следовательно, наше отображение можно переписать в виде

$$f(z) = c \frac{z - a_1}{z - a_3}, \quad c \neq 0;$$

условием $f(a_2) = 1$ коэффициент c определяется однозначно. □

Важным свойством дробно-линейных отображений является их *конформность*: дробно-линейные отображения сохраняют углы между кривыми. Ниже в этом разделе нам понадобится сохранение углов между окружностями (обобщенными), которое можно установить совсем элементарными методами, но давайте все же отложим доказательство сохранения углов до гл. 2, где оно будет выведено из более общего факта; там же будет дано и общее определение конформного отображения.

Нам еще понадобится понятие симметрии относительно окружности.

Определение 1.32. Пусть $C \subset \bar{\mathbb{C}}$ — обобщенная окружность. Говорят, что точки $p_1, p_2 \in \bar{\mathbb{C}}$ симметричны относительно C , если они не лежат на C , но всякая обобщенная окружность, проходящая через p_1 и p_2 , ортогональна к C .

Если точка p лежит на C , то она считается симметричной самой себе.

Если C — прямая, то симметрия относительно C в смысле определения 1.32 равносильна симметрии в обычном понимании (см. рис. 1.2).

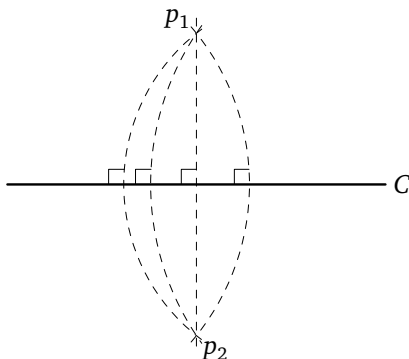


Рис. 1.2. Симметрия относительно прямой с точки зрения определения 1.32

Предложение 1.33. Для всякой обобщенной окружности C и всякой точки $p \in \bar{\mathbb{C}}$ существует и единственна точка, симметричная точке p относительно C .

Доказательство. Если точки p и p' симметричны относительно C и если $A: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ — дробно-линейное преобразование, то (ввиду определения 1.32 и сохранения углов) точки $A(p)$ и $A(p')$ симметричны относительно $A(C)$, и обратно. Если теперь применить дробно-линейное преобразование, переводящее C в прямую, то вопрос сведется к существованию и единственности точки, симметричной относительно прямой. \square

Упражнения

1.1. Представьте число $-1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

1.2. Упростите выражение $(-\sqrt{3} - i)^{2017}$.

1.3. Пусть ζ_1, \dots, ζ_n — все корни уравнения $z^n = 1$, где n — натуральное число. Найдите сумму

$$\zeta_1^k + \zeta_2^k + \dots + \zeta_n^k$$

для каждого $k \in \mathbb{Z}$.

1.4. (а) Найдите (изобразите на плоскости) образы прямых, заданных условиями $\operatorname{Re} z = 1/2$, $\operatorname{Re} z = 1$ и $\operatorname{Re} z = 3/2$, при отображении $z \mapsto z^2$; как называются эти кривые?

(б) Тот же вопрос про прямые $\operatorname{Re} z = -1/2$, $\operatorname{Re} z = -1$ и $\operatorname{Re} z = -3/2$ (прежде чем начинать вычисления, подумайте, стоит ли это делать).

(в) Тот же вопрос про прямые $\operatorname{Im} z = 1/2$, $\operatorname{Im} z = 1$ и $\operatorname{Im} z = 3/2$ (и то же предупреждение).

1.5. Докажите «до эпсилон-дельта», что равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ равносильно тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} a$.

1.6. Для каждого из следующих подмножеств в \mathbb{C} укажите, являются они открытыми, замкнутыми или ни теми, ни другими.

(а) $\{z: \operatorname{Re}(z) > 2, \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$.

(б) $\{z = x + iy: \sin x + \cos y > 2017\}$.

(в) $\{z: \operatorname{Im}(z) \geq 1, \operatorname{Re}(z) \geq -1\}$.

(г) Множество $z \in \mathbb{C}$, для которых либо $\operatorname{Im} z \neq 0$, либо $\operatorname{Im} z = 0$ и $\operatorname{Re} z$ рационально.

1.7. Пусть U, V — открытые подмножества в \mathbb{C} и $f: U \rightarrow V$ — отображение. Докажите, что f непрерывно в смысле «эпсилон-дельта» тогда и только тогда, когда для всякого открытого подмножества $V_1 \subset V$ множество $f^{-1}(V_1)$ также открыто.

1.8. Пусть U, V — открытые подмножества в \mathbb{C} и $f: U \rightarrow V$ — непрерывное и биективное отображение, для которого обратное отображение $f^{-1}: V \rightarrow U$ тоже непрерывно (такие отображения называются *гомеоморфизмами*). Пусть $b \in V$ и φ — функция, определенная на некоторой проколотой окрестности точки b . Докажите, что

$$\lim_{w \rightarrow b} \varphi(w) = \lim_{z \rightarrow f^{-1}(b)} \varphi(f(z)).$$

1.9. Докажите, что всякое открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ можно представить в виде объединения попарно непересекающихся связанных открытых подмножеств. (Указание. Назовем точки эквивалентными, если их можно соединить путем.)

Открытые подмножества в U , о которых идет речь в этой задаче, называются его *компонентами связности*.

1.10. Пусть отрезок $[a; b] \subset \mathbb{R}$ содержится в объединении (возможно, бесконечном) открытых интервалов $I_j \subset \mathbb{R}$. Покажите, что существуют такие числа $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$, что всякий отрезок $[a_k; a_{k+1}]$ целиком содержится хотя бы в одном из I_j .

1.11. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ открыто и $K \subset U$ — компактное множество. Докажите, что

$$\inf_{\substack{z \in K \\ w \in \mathbb{C} \setminus U}} |z - w| > 0.$$

1.12. Найдите радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}$.

1.13. Ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

сходится для каждого $x \in \mathbb{R}$. Является ли эта сходимость равномерной на \mathbb{R} ?

1.14. Пусть $e^{z+T} = e^z$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Покажите, что $T = 2\pi i n$ для некоторого целого n .

1.15. Найдите образы вертикальных и горизонтальных прямых при отображении $z \mapsto e^z$.

1.16. Пусть $f: z \mapsto \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ и $g: z \mapsto \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$ — дробно-линейные отображения. Покажите, что их композиция $g \circ f$ есть дробно-линейное отображение вида $z \mapsto \frac{a_3 + b_3}{c_3 z + d_3}$, где

$$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

1.17. Заполните пробелы, оставшиеся в доказательстве предложения 1.31.

1.18. Покажите, что всякая последовательность точек на сфере Римана содержит подпоследовательность, сходящуюся к комплексному числу или к ∞ .

1.19. Пусть C — окружность радиуса R с центром в нуле. Покажите, что точка, симметричная точке z относительно окружности C , есть R^2/\bar{z} .

1.20. Покажите, что композиция двух симметрий относительно обобщенных окружностей является дробно-линейным преобразованием.

Глава 2

Производные от функций комплексного переменного

Комплексный анализ начинается со следующего определения.

Определение 2.1. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество. Функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ называется *комплексно дифференцируемой* в точке $a \in U$, если существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (2.1)$$

Если предел (2.1) существует, он называется *производной* функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

Пример 2.2. Если n — натуральное число, то хорошо знакомое читателю вычисление показывает, что комплексная производная функции $f(z) = z^n$ в точке a существует и равна na^{n-1} ; как водится, кратко это записывается так: $(z^n)' = nz^{n-1}$.

Несмотря на дословное совпадение определений, смысл комплексной дифференцируемости совершенно не такой, как у привычной с первого курса дифференцируемости функции одного действительного переменного. Отличиям, если угодно, посвящена вся книга, а пока что сформулируем несколько свойств комплексной производной, полностью аналогичных соответствующим свойствам производных от функций действительного переменного. Доказательств мы не приводим, так как они слово в слово совпадают с известными читателю доказательствами из курса анализа.

Предложение 2.3. Если функция f комплексно дифференцируема в точке $a \in \mathbb{C}$, то она непрерывна в этой точке.

Предложение 2.4. Если функции f и g комплексно дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{C}$, то таковы же и функции $f + g$, $f - g$ и fg , причем

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a), \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Если, кроме того, $g(a) \neq 0$, то и функция f/g комплексно дифференцируема в этой точке, причем

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Следующее предложение (формула для производной сложной функции) тоже доказывается по существу так же, как в вещественном случае, но для него я доказательство на всякий случай приведу.

Предложение 2.5. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — функция, для которой $f(U) \subset V$, где $V \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ — еще одна функция. Если функция f комплексно дифференцируема в точке $a \in U$ и функция g комплексно дифференцируема в точке $f(a)$, то композиция $g \circ f$ комплексно дифференцируема в точке a , причем $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h, \\ \psi(k) &= g(f(a)+k) - g(f(a)) - g'(f(a)) \cdot k.\end{aligned}$$

Ввиду определения производной имеем $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h)/h = 0$, $\lim_{k \rightarrow 0} \psi(k)/k = 0$. Полагая $\omega(k) = \sup_{0 < h \leq k} |\psi(h)/h|$, второе соотношение можно переписать так: существует определенная на некотором отрезке $[0; \varepsilon_0]$ монотонно убывающая и стремящаяся к нулю функция ω , для которой $|\psi(k)| \leq \omega(k)|k|$ при $|k| \leq \varepsilon_0$.

Запишем теперь равенство

$$\begin{aligned}g(f(a+h)) - g(f(a)) &= g(f(a) + f'(a) \cdot h + \varphi(h)) - g(f(a)) = \\ &= g'(f(a)) \cdot (f'(a) \cdot h + \varphi(h)) + \psi(f'(a) \cdot h + \varphi(h));\end{aligned}$$

из него вытекает, что

$$\begin{aligned}\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} - g'(f(a)) \cdot f'(a) &= \\ &= g'(f(a)) \cdot \frac{\varphi(h)}{h} + \frac{\psi(f'(a) \cdot h + \varphi(h))}{h}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Для доказательства предложения нам надо убедиться, что правая часть равенства (2.2) стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Для первого слагаемого это очевидно; что касается второго слагаемого, заметим, что из $\lim_{h \rightarrow 0} (\varphi(h)/h) = 0$ вытекает существование таких констант $C > 0$, $\delta > 0$, что $|f'(a) \cdot h + \varphi(h)| \leq Ch$ при $|h| \leq \delta$ (иными словами, $f'(a) \cdot h + \varphi(h) = O(|h|)$). Теперь при всех достаточно малых h

имеем

$$|\psi(f'(a) \cdot h + \varphi(h))| \leq \omega(|f'(a) \cdot h + \varphi(h)|) |f'(a) \cdot h + \varphi(h)| \leq \leq \omega(C|h|) \cdot C|h|;$$

поделив на $|h|$, получаем, что

$$\left| \frac{\psi(f'(a) \cdot h + \varphi(h))}{h} \right| \leq C \cdot \omega(C|h|) \rightarrow 0,$$

что и требовалось. \square

Теперь дадим основное определение комплексного анализа.

Определение 2.6. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ называется *голоморфной на U* , если она комплексно дифференцируема в каждой точке $a \in U$.

Из определений и предложения 2.4 немедленно вытекает, что каждый многочлен голоморфен на всем \mathbb{C} , а каждая рациональная функция (отношение двух многочленов) голоморфна на всем \mathbb{C} , кроме нулей знаменателя.

Вот еще один важный пример голоморфной функции.

Предложение 2.7. Функция $z \mapsto e^z$ голоморфна на всем \mathbb{C} ; при этом ее производная в точке a равна e^a . Иными словами, $(e^z)' = e^z$.

Доказательство. Ввиду предложения 1.22 имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^a \cdot e^h - e^a}{h} = e^a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Стало быть, для доказательства предложения нам достаточно установить равенство $\lim_{h \rightarrow 0} (e^h - 1)/h = 1$. Заметим, что при всяком $h \neq 0$ имеем

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots + \frac{h^n}{(n+1)!} + \dots \quad (2.3)$$

Так как ряд в правой части (2.3) сходится при любом h , его радиус сходимости бесконечен; значит, ввиду следствия 1.20 он сходится к функции, непрерывной на всем \mathbb{C} . В частности, предел этой функции при $h \rightarrow 0$ равен ее значению в нуле, то есть единице. Это нам и требовалось. \square

Определим теперь синус и косинус от произвольного комплексного числа.

Определение 2.8. Для произвольного $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Формулы (1.7) показывают, что если $z \in \mathbb{R}$, то $\cos z$ и $\sin z$ в смысле определения 2.8 совпадают с обычными синусом и косинусом.

Предложение 2.9. *Функции синус и косинус голоморфны на всей комплексной плоскости; при этом $(\sin z)' = \cos z$ и $(\cos z)' = -\sin z$.*

Доказательство. Это немедленно следует из предложения 2.7 и правила дифференцирования сложной функции. \square

Из определения 2.8 и ряда для экспоненты немедленно вытекает, что функции синус и косинус допускают следующие разложения в степенные ряды (при всех z):

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots\end{aligned}$$

2.1. Обратные функции, корни, логарифмы

Обсудим теперь, как обстоят дела с производной обратной функции.

Предложение 2.10. *Пусть $U, V \subset \mathbb{C}$ — открытые подмножества, и пусть $f: U \rightarrow V$ — биективное отображение со следующими свойствами:*

- (1) f — голоморфная функция на U ;
- (2) производная функции f не обращается в нуль ни в одной точке множества U ;
- (3) обратное отображение $g = f^{-1}: V \rightarrow U$ непрерывно.

Тогда обратное отображение $g: V \rightarrow U$ — голоморфная функция на V и для всякой точки $b \in V$ имеем $g'(b) = 1/f'(g(b))$.

Замечание 2.11. На самом деле верно гораздо более сильное утверждение: из голоморфности и биективности отображения f условия (2) и (3) следуют автоматически. Мы установим это в главе 9.

Доказательство. Пользуясь результатом упражнения 1.8, имеем

$$\begin{aligned}\lim_{w \rightarrow b} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} &= \lim_{z \rightarrow f^{-1}(b)} \frac{g(f(z)) - g(b)}{f(z) - b} = \\ &= \lim_{z \rightarrow g(b)} \frac{z - g(b)}{f(z) - f(g(b))} = \frac{1}{f'(g(b))}. \quad \square\end{aligned}$$

Применим доказанное предложение к делу: попробуем определить на комплексных числах логарифм — функцию, обратную к экспоненте. Поскольку $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ отлично от нуля при любом z , логарифмы можно надеяться определить только для ненулевых чисел. Итак, пусть $z = re^{i\varphi}$, $r \neq 0$. Логарифмом числа z естественно назы-

вать такое число $w = x + iy$, что $z = e^w = e^x \cdot e^{iy}$. Сравнивая модули, получаем, что $x = \operatorname{Re} w$ определено однозначно: $x = \ln |z|$ (логарифм действительного числа в привычном смысле), а вот мнимая часть определена уже неоднозначно: $y = \varphi$ подойдет, но с тем же успехом подойдет и $y = \varphi + 2\pi n$ для всякого целого n ; если мы хотим определить логарифм как функцию, то надо каким-то образом выбрать для аргумента одно из этих значений.

На всем $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, однако, не удастся определить логарифм даже как непрерывную функцию. В самом деле, пусть $\ln 1 = 0$ (мы могли бы начать и с любого другого значения). Тогда, если мы хотим непрерывности, для малых $\varepsilon > 0$ надо считать, что $\ln e^{i\varepsilon} = i\varepsilon$; продолжая в том же духе, получаем, что при $0 \leq t < 2\pi$ должно быть $\ln e^{it} = it$, но тогда по непрерывности получаем, что $\ln 1 = \ln e^{2\pi i} = 2\pi i \neq 0$ — противоречие.

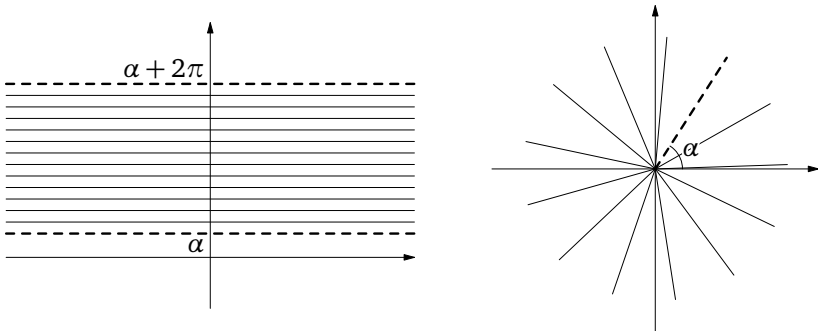


Рис. 2.1. Экспонента задает биекцию между полосой высоты 2π и комплексной плоскостью, разрезанной вдоль луча. Горизонтальные прямые на левом рисунке переходят в лучи на правом рисунке. Пунктирные линии в множества не входят.

Итак, на всем $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ определить логарифм не удастся; тем не менее его можно определить на различных меньших открытых множествах. Полное описание таких «хороших» множеств мы получим в гл. 6, а пока что ограничимся следующим. Пусть $\ell_\alpha = \{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, — луч, выходящий из начала координат под углом α к действительной оси. Положим $V_\alpha = \mathbb{C} \setminus \ell_\alpha$ и $U_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$. Тогда голоморфная функция $z \mapsto e^z$ задает биекцию из U_α в V_α (рис. 2.1), и производная этой функции нигде не обращается в нуль. Впрочем, вместо U_α можно было бы рассмотреть полосу $\{z \in \mathbb{C} : \alpha + 2\pi n < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi(n+1)\}$ для произвольного $n \in \mathbb{Z}$: на

нем экспонента точно так же индуцирует биекцию на свой образ. Применяя теперь предложение 2.10, получаем следующее.

Предложение 2.12. *На множестве V_α , получаемом удалением из комплексной плоскости луча, выходящего из нуля под углом α к действительной оси, можно для каждого целого n определить голоморфную функцию \ln по формуле*

$$\ln(re^{it}) = \ln r + it, \quad \alpha + 2\pi n < t < \alpha + 2\pi(n+1).$$

Имеем $e^{\ln z} = z$ и $(\ln z)' = 1/z$.

Любая из голоморфных функций, о которых идет речь в предложении 2.12, называется *однозначной ветвью логарифма*. Разные ветви логарифма отличаются прибавлением константы (а именно, $2\pi ik$ для некоторого целого k); поэтому чтобы понять, о какой из ветвей идет речь, достаточно зафиксировать значение логарифма в какой-то одной точке.

С функцией «корень степени n » ситуация очень похожая. Во-первых, ни на каком открытом множестве, содержащем нуль, нельзя определить $\sqrt[n]{\cdot}$ как голоморфную (а на самом деле и непрерывную) функцию (см. задачу 2.9 по поводу более простого голоморфного случая). Во-вторых, если $z = re^{i\varphi}$, то $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\varphi/n}$, но выбор φ неоднозначен, и значение корня зависит от этого выбора: если w_0 — один из корней n -й степени из $z \neq 0$, то, по мере прибавления кратных 2π к аргументу z , будет оказываться, что корнем являются также $w_0 e^{2\pi i/n}$, $w_0 e^{4\pi i/n}$, ..., $w_0 e^{2\pi i(n-1)/n}$ (далее значения будут повторяться). На всем $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ определить однозначную функцию «корень степени n » также нельзя, но ее можно определить на комплексной плоскости с разрезом по лучу, выходящему из нуля.

Предложение 2.13. *Пусть $n > 1$ — натуральное число, и пусть через V_α , где $\alpha \in \mathbb{R}$, обозначено то же открытое множество, что в предложении 2.12. Тогда для каждого целого $k \in [0; n-1]$ можно определить на V_α голоморфную функцию $\sqrt[n]{z}$ по формуле*

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k)/n}, \quad \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi.$$

Имеем $(\sqrt[n]{z})^n = z$, $(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}}$.

Это предложение также напрямую следует из предложения 2.10; в качестве открытого множества U_α , которое отображение $z \mapsto z^n$ биективно отображает на V_α , надо выбрать сектор

$$\left\{ re^{i\varphi} : \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} < \varphi < \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi}{n} \right\}$$

(рис. 2.2).

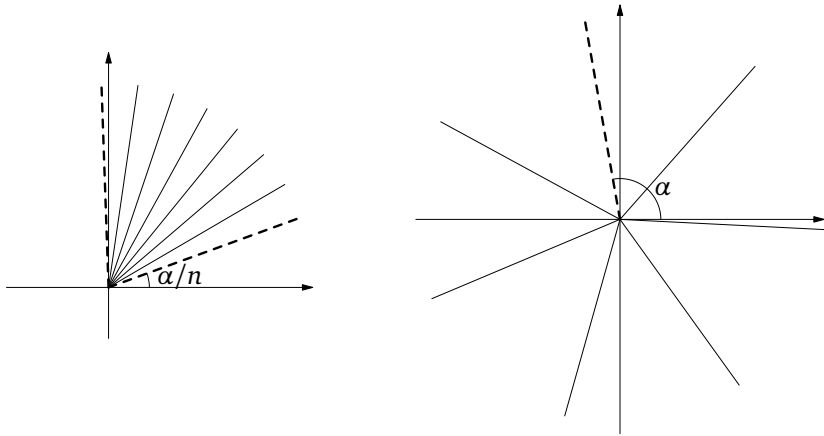


Рис. 2.2. Отображение $z \mapsto z^n$ (в нашем случае $n = 5$) переводит открытый сектор раствором $2\pi/n$ в плоскость с разрезом по лучу. Лучи, выходящие из нуля, переходят в лучи, выходящие из нуля.

Однозначная ветвь корня, как и однозначная ветвь логарифма, также полностью определяется значением функции в одной точке.

2.2. Уравнения Коши—Римана

Посмотрим на комплексную дифференцируемость с другой стороны. Если временно закрыть глаза на то, что комплексные числа можно умножать, то комплексная плоскость \mathbb{C} будет неотличима от \mathbb{R}^2 , а функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, где U — открытое множество, неотличима от отображения $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Если положить $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, то функция f запишется в виде

$$f: x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y). \quad (2.4)$$

Предложение 2.14. Если отображение f , задаваемое формулой (2.4), является комплексно дифференцируемым в некоторой точке, то в этой точке имеем

$$\begin{aligned} \partial u / \partial x &= \partial v / \partial y, \\ \partial u / \partial y &= -\partial v / \partial x. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если отображение f (или, равносильно, функции u и v) принадлежит классу C^1 , то f голоморфно на U тогда и только тогда, когда всюду на U выполняются соотношения (2.5).

Доказательство. Как мы выяснили при доказательстве предложения 2.5, функция f комплексно дифференцируема в точке a с производной, равной c , тогда и только тогда, когда

$$f(a+h) - f(a) = c \cdot h + \varphi(h), \quad \text{где } \lim_{h \rightarrow 0} |\varphi(h)|/|h| = 0.$$

Стало быть, комплексная дифференцируемость равносильна тому, что f вещественно дифференцируема (см. раздел 1.5) и ее производная как линейное отображение из \mathbb{C} в \mathbb{C} имеет вид $z \mapsto cz$ для некоторого комплексного числа c . Поскольку матрица линейного оператора «умножение на комплексное число $p + qi$ » (в базисе из 1 и i) имеет вид $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$, а якобиева матрица отображения (2.4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{pmatrix},$$

предложение следует с очевидностью. \square

Соотношения (2.5) называются *уравнениями Коши—Римана* (или соотношениями Коши—Римана).

Из описанной выше связи комплексной и вещественной производных вытекает важное свойство голоморфных функций: они сохраняют углы между кривыми (там, где производная не обращается в нуль).

Для начала дадим приличествующие случаю определения. Пусть $[A; B] \subset \mathbb{R}$ — отрезок.

Определение 2.15. *Гладким путем* на комплексной плоскости называется отображение $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$, являющееся непрерывно дифференцируемым на $[A; B]$ (в том числе имеющим односторонние производные в концах отрезка).

Гладкий путь $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ называется *гладкой кривой*, если отображение γ является взаимно однозначным на свой образ и $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in [A; B]$. Образ $\gamma([A; B])$ также иногда называется *гладкой кривой*.

Определение 2.16. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — гладкий путь. Его *вектором скорости* в точке $t_0 \in [A; B]$ называется комплексное число

$$v = \gamma'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}.$$

Предложение 2.17. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Если для точки $a \in U$ имеем $f'(a) \neq 0$, то угол между любыми двумя кривыми, проходящими

через точку a , равен углу между их образами относительно отображения f .

Здесь под углом между кривыми γ_1 и γ_2 , проходящими через a , понимается угол между их касательными векторами (векторами скорости) γ'_1 и γ'_2 в точке a .

Доказательство. Как было сказано выше, вещественная производная функции f в точке a — оператор умножения на ненулевое комплексное число $f'(a)$, а умножение на комплексное число, будучи преобразованием подобия, углы сохраняет.

Для читателя, который еще недостаточно освоился с производными функций нескольких переменных, приведем более конкретное рассуждение. Если кривая, проходящая через точку a , параметризована по правилу $t \mapsto \gamma(t)$, где γ — гладкое отображение, определенное на интервале $(-\varepsilon; \varepsilon)$, $\gamma(0) = a$, то касательный вектор к этой кривой в точке a есть $\gamma'(0)$. Образ этой кривой при отображении f параметризуется по правилу $t \mapsto f(\gamma(t))$, так что касательный вектор к образу кривой есть

$$(f(\gamma(t)))'(0) = f'(\gamma(0))\gamma'(0) = f'(a)\gamma'(0)$$

(предложение 2.5 остается в силе и доказывается дословно так же в случае, когда «внутренняя» функция — гладкое отображение в \mathbb{C} из интервала на действительной оси). Стало быть, касательная к кривой — образу γ получается из касательной к самой γ поворотом на угол $\arg(f'(a))$, так что угол между касательными к двум кривым не меняется. \square

Если $f'(a) = 0$, то угол между кривыми, проходящими через a , уже не сохраняется: например, голоморфное отображение $z \mapsto z^2$ переводит пару из «положительных» лучей на действительной и мнимой осях (исходящих из точки 0) в пару из «положительного» и «отрицательного» луча на действительной оси (см. также рис. 2.2). Тем не менее в этом случае угол между кривыми меняется контролируемым образом, и в дальнейшем мы выясним, как именно.

В связи со свойством сохранения углов уместно дать следующее определение.

Определение 2.18. Пусть $U, V \subset \mathbb{C}$ — открытые множества. Отображение $f: U \rightarrow V$ называется *конформным*, если оно голоморфно и биективно.

Как мы отмечали выше (см. замечание 2.11), из этого условия вытекает, что производная отображения f нигде не обращается в нуль, а обратное отображение $f^{-1}: V \rightarrow U$ также голоморфно (хотя доказать это прямо сейчас мы не можем).

Слово «конформный» происходит от латинского слова, означающего «имеющий ту же форму» — видимо, потому, что инфинитезимально¹ такие отображения являются преобразованиями подобия.

Существует еще один способ записать уравнения Коши—Римана, отличный от системы (2.5). Чтобы его описать, заметим для начала, что производная всякого вещественно дифференцируемого отображения $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ является отображением $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющим условию *вещественной линейности*: для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ имеем

$$L(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda L(z_1) + \mu L(z_2).$$

Предложение 2.19. *Отображение $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является вещественно-линейным тогда и только тогда, когда существуют такие $A, B \in \mathbb{C}$, что*

$$L(z) = Az + B\bar{z} \quad (2.6)$$

для всякого z .

Доказательство. Вещественная линейность отображения, заданного формулой (2.6), очевидна. Обратно, если отображение $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ вещественно-линейно, то при отождествлении комплексных чисел $z = x + iy$ с вещественными вектор-столбцами $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ это отображение имеет вид

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Подставляя в эту формулу $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$, получаем, что $L(x + iy) = L(z) = Az + B\bar{z}$, где

$$A = \frac{a + d + i(c - b)}{2}, \quad B = \frac{a - d + i(b + c)}{2}. \quad \square \quad (2.7)$$

Условимся, что нам даны открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ и функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ (никакие другие открытые множества и функции нам до конца раздела не встретятся).

Предложение-определение 2.20. Если f вещественно дифференцируема в точке $a \in U$, то ее вещественная производная в этой точке имеет вид

$$h \mapsto \frac{\partial f}{\partial z} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \bar{h}$$

¹Когда говорят «отображение обладает каким-то свойством инфинитезимально», это обычно означает, что таким свойством обладает его производная.

(все частные производные берутся в точке a), где

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (2.8)$$

Доказательство. Если записать $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, то вещественная производная функции f есть оператор умножения матрицы

$$\begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{pmatrix}$$

на вектор-столбец. Теперь все следует из формул (2.7). \square

Формулы (2.8) являются определениями операций (дифференциальных операторов) $\partial / \partial z$ и $\partial / \partial \bar{z}$.

Теперь можно дать обещанную переформулировку уравнений Коши—Римана.

Предложение 2.21. *Функция f комплексно дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда $(\partial f / \partial \bar{z})(a) = 0$.*

Если функция f принадлежит классу C^1 , то она голоморфна в U в том и только том случае, когда $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ всюду на U .

Доказательство. В самом деле, отображение вида (2.6) является умножением на комплексное число тогда и только тогда, когда $B = 0$; в нашем случае $B = \partial f / \partial \bar{z}$. \square

Уравнение $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ также называется уравнением Коши—Римана. Оно полностью эквивалентно системе (2.5), но не бесполезно: многие важные формулы выглядят много проще и естественней при использовании $\partial f / \partial z$ и $\partial f / \partial \bar{z}$. Некоторые примеры можно найти в задачах в конце главы, а также в гл. 10.

Упражнения

2.1. Нарисуйте образы лучей, выходящих из нуля, при отображении $z \mapsto e^z$.

2.2. Покажите, что функция $f(z) = \bar{z}$ не является комплексно дифференцируемой ни в одной точке.

2.3. В каких точках комплексно дифференцируема функция $f(z) = |z|^2$?

2.4. Покажите, что функция

$$f: re^{i\varphi} \mapsto re^{2i\varphi}$$

не является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.5. Покажите, что синус и косинус — периодические функции с периодом 2π (т. е. что $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ и $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ для всякого $z \in \mathbb{C}$).

2.6. Верно ли, что для всякого $z \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство $|\sin z| \leq 1$?

2.7. Докажите следующие тождества (для произвольных комплексных z и w):

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1;$$

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w;$$

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

Подразумевается, что вы сделаете эту задачу, исходя из определения 2.8. В главе 5 мы увидим, как доказать эти тождества в одну строчку без всяких вычислений.

2.8. Решите в \mathbb{C} простейшие тригонометрические уравнения: $\sin z = 0$, $\cos z = -1$ и пр.

2.9. Пусть $n > 1$ — натуральное число и U — открытое множество, содержащее 0. Покажите, что на U не существует голоморфной функции «корень n -ой степени», т. е. голоморфной функции f , удовлетворяющей тождеству $(f(z))^n = z$.

2.10. Для каких вещественных a и b функция

$$f(x + iy) = ax^2 + by^2 + ixy$$

голоморфна на всем \mathbb{C} ?

2.11. Пусть функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна и удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{Im} f(z) = -\operatorname{Re} f(z)$$

для всех z . Докажите, что f — константа.

2.12. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — функция класса C^1 .

(а) Покажите, что если f голоморфна, то ее якобиан (определитель матрицы Якоби) в точке $a \in U$ равен $|f'(a)|^2$.

(б) Покажите, что в общем случае якобиан отображения f в точке a равен

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(a) \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) \right|^2.$$

(Указание. См. формулы (2.7).)

Глава 3

Практикум по конформным отображениям

В этой главе нет ни сложных определений, ни глубоких теорем: ее основная цель — дать примеры явного (т. е. с помощью элементарных функций) построения конформного отображения между данными открытыми подмножествами комплексной плоскости, чтобы читатель смог лучше почувствовать геометрический смысл элементарных функций комплексного переменного.

Определение 3.1. Если между открытыми множествами $U, V \subset \mathbb{C}$ существует конформное отображение, говорят, что эти два множества *конформно изоморфны* (или даже просто: *изоморфны*).

Конформное отображение открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ на себя называется *конформным автоморфизмом* множества U .

Конформное отображение между двумя данными открытыми множествами существует нередко, но не всегда, а когда оно существует, далеко не всегда можно его выразить через элементарные функции. Поучимся делать то небольшое, что сделать можно.

3.1. Дробно-линейные отображения

Пример 3.2. Посмотрим, во что единичная окружность (окружность радиуса 1 с центром в нуле) переходит при дробно-линейном отображении $z \mapsto (z - 1)/(z + 1)$.

Пусть точка z лежит на единичной окружности. По известной теореме планиметрии («вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой») треугольник, образованный точками 1, z и -1 , прямоугольный (рис. 3.1), так что если z лежит на единичной окружности и в верхней полуплоскости, то аргумент отношения $(z - 1)/(z + 1)$ равен $\pi/2$ (а если в нижней, то аргумент того же числа равен $-\pi/2$); в любом случае $(z - 1)/(z + 1)$ лежит на мнимой оси. Ста-

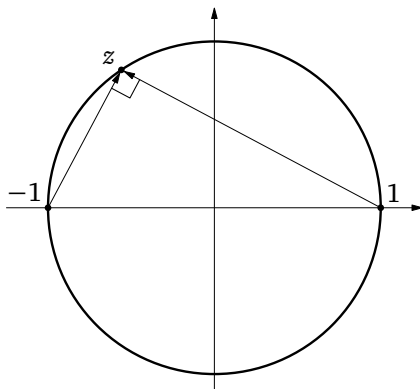


Рис. 3.1. Отображение $z \mapsto (z - 1)/(z + 1)$ переводит единичную окружность в мнимую ось

ло быть, преобразование $z \mapsto (z - 1)/(z + 1)$ переводит единичную окружность в мнимую ось.

Поскольку дробно-линейные преобразования — непрерывные и взаимно однозначные отображения сферы Римана в себя, единичный круг, то есть множество $\{z: |z| < 1\}$, переводится тем же отображением в одну из двух полуплоскостей, на которые мнимая ось разбивает комплексную плоскость. Чтоб выяснить, в какую именно, достаточно посмотреть на образ одной точки. Точка 0 переходит в точку $(0 - 1)/(0 + 1) = -1$, лежащую в левой полуплоскости $\{z: \operatorname{Re} z < 0\}$; если еще умножить на $-i$ (т. е. повернуть на 90° по часовой стрелке), то левая полуплоскость перейдет в верхнюю. Окончательно получаем следующее утверждение.

Отображение $z \mapsto i(1 - z)/(1 + z)$ осуществляет конформное отображение единичного круга $\{z: |z| < 1\}$ на верхнюю полуплоскость $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$.

Построенное нами дробно-линейное отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость отнюдь не единственно (вскоре мы выясним, до какой степени не единственно).

Пример 3.3. Построим теперь, напротив, конформное отображение верхней полуплоскости на единичный круг. Можно, конечно, построить одно из соответствующих дробно-линейных отображений, обратив отображение из примера 3.2: записать уравнение $z = i(1 - w)/(1 + w)$ и разрешить его относительно w . Приятнее, однако, построить и это отображение геометрически.

Именно, заметим, что действительная ось состоит из точек, равноудаленных от i и $-i$, т. е. если $\operatorname{Im} z = 0$, то $|z - i| = |z + i|$, или

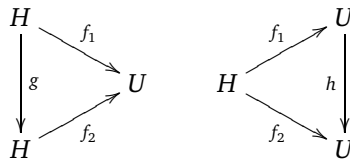
$$\left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1.$$

Это значит, что отображение $z \mapsto (z - i)/(z + i)$ отображает действительную ось на единичную окружность (точка $\infty \in \mathbb{C}$ переходит в 1). Стало быть, верхнюю полуплоскость оно отображает то ли на внутренность окружности (круг $\{z: |z| < 1\}$), то ли на ее внешность $\{z: |z| > 1\}$. Легко видеть, что из этих двух возможностей реализуется первая: например, из верхней полуплоскости ничего не переходит в бесконечность; в нижней полуплоскости, напротив, в бесконечность переходит точка $-i$. Другой вариант — заметить, что точка i , лежащая в верхней полуплоскости, переходит в точку 0, лежащую внутри единичной окружности. Подытожим.

Отображение $z \mapsto (z - i)/(z + i)$ осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости $H = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $U = \{z: |z| < 1\}$.

Подчеркнем, что это дробно-линейное отображение верхней полуплоскости на единичный круг также не является единственным.

Давайте, собственно говоря, разберемся с этой неединственностью. Если $f_1, f_2: H \rightarrow U$ — два изоморфизма, то $f_1 = f_2 \circ g$, где $g = f_2^{-1} \circ f_1$ — дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости H , а также $f_2 = h \circ f_1$, где $h = f_1 \circ f_2^{-1}$ — дробно-линейный автоморфизм единичного круга U .



Таким образом, чтобы выяснить, до какой степени не единственны дробно-линейные изоморфизмы между единичным кругом и верхней полуплоскостью, надо описать дробно-линейные автоморфизмы этих множеств.

Предложение 3.4. Дробно-линейные автоморфизмы верхней полуплоскости $H = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ суть отображения вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = 1.$$

Группа дробно-линейных автоморфизмов верхней полуплоскости изоморфна $SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$, где $SL_2(\mathbb{R})$ — группа вещественных матриц с определителем 1, а I — единичная матрица.

Доказательство. Дробно-линейное отображение является автоморфизмом H , если оно переводит ее границу (т. е. вещественную ось) в себя и хотя бы одну точку из H — в точку из H . Из доказательства предложения 1.31 ясно, что дробно-линейное отображение переводит вещественные числа в вещественные тогда и только тогда, когда его можно записать в виде $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ с вещественными a, b, c и d ; всякое такое дробно-линейное отображение переводит H либо в себя, либо в нижнюю полуплоскость. Чтобы различить эти два случая, посмотрим на мнимую часть образа точки $i \in H$:

$$\operatorname{Im} \frac{ai + b}{ci + d} = \operatorname{Im} \frac{(ai + b)(-ci + d)}{c^2 + d^2} = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.$$

Правая часть положительна тогда и только тогда, когда определитель матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ положителен; если умножить все элементы матрицы на вещественное число $\lambda \neq 0$, то дробно-линейное отображение, соответствующее матрице, не изменится, а определитель умножится на λ^2 , так что всякую матрицу с положительным определителем можно с помощью такого умножения превратить в матрицу с определителем 1; этим доказано первое утверждение.

Для доказательства второго напомним, что композиции дробно-линейных отображений соответствует умножение матриц (см. задачу 1.16); легко видеть, что матрица соответствует тождественному дробно-линейному отображению тогда и только тогда, когда она кратна единичной, и что в $SL_2(\mathbb{R})$ единичной матрице кратны только I и $-I$; это доказывает второе утверждение. \square

Описание дробно-линейных автоморфизмов единичного круга можно было бы в принципе получить из предложения 3.4: если $\varphi: H \rightarrow U$ — дробно-линейный автоморфизм, то всякий автоморфизм круга U имеет вид $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, где f — автоморфизм верхней полуплоскости (см. диаграмму (3.1)).

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & U \\ \downarrow f & & \downarrow \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \\ H & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array} \quad (3.1)$$

Однако получить четкое описание на таком пути не столь просто: удобнее описывать автоморфизмы круга независимо от автоморфизмов полуплоскости.

Предложение 3.5. *Дробно-линейные автоморфизмы единичного круга $U = \{z: |z| < 1\}$ суть отображения вида*

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1, \quad (3.2)$$

и только они.

Доказательство. Покажем сначала, что всякое отображение вида (3.2) является автоморфизмом круга. Поскольку умножение на $e^{i\theta}$, где $\theta \in \mathbb{R}$, задает поворот относительно точки 0, достаточно для отображения $z \mapsto (z-a)/(1-\bar{a}z)$ проверить, что оно переводит единичную окружность в себя и какую-нибудь точку единичного круга — в точку единичного круга. Второе видно сразу, поскольку точку a , лежащую в единичном круге, отображение переводит в нуль. Что же до первого, то пусть z лежит на единичной окружности, т. е. $|z| = 1$; тогда $z^{-1} = \bar{z}$. Теперь имеем

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = |z| \cdot \left| \frac{1-az^{-1}}{1-\bar{a}z} \right| = \left| \frac{1-a\bar{z}}{1-\bar{a}z} \right| = \left| \frac{1-a\bar{z}}{1-a\bar{z}} \right| = 1,$$

поскольку модули сопряженных чисел равны.

Обратно, пусть $f: U \rightarrow U$ — дробно-линейный автоморфизм, и пусть точка $a \in U$ при этом автоморфизме переходит в нуль. Тогда точка $1/\bar{a}$, симметричная ей относительно единичной окружности (см. задачу 1.19), переходит в точку, симметричную точке 0 относительно единичной окружности, т. е. в точку ∞ (мы сейчас рассматриваем f как отображение из $\bar{\mathbb{C}}$ в себя). Стало быть, отображение имеет вид

$$f(z) = c \cdot \frac{z-a}{z-1/\bar{a}} = c_1 \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad c_1 = -c\bar{a}.$$

В силу сделанных выше вычислений имеем

$$|z| = 1 \Rightarrow \left| c_1 \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = |c_1|,$$

и так как f — автоморфизм единичного круга, имеем $|f(z)| = 1$ при $|z| = 1$, откуда $|c_1| = 1$, так что $c_1 = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Стало быть, f имеет вид (3.1), и доказательство закончено. \square

В дальнейшем мы докажем, что вообще все конформные автоморфизмы верхней полуплоскости и единичного круга обязательно дробно-линейны и тем самым имеют вид, описанный в предложениях 3.4 и 3.5.

3.2. Более сложные отображения

Если подключить отображения, отличные от дробно-линейных, то запас множеств, которые можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость с помощью элементарных функций, расширится.

Некоторые конформные отображения, не являющиеся дробно-линейными, мы уже знаем. Например, на рис. 2.1 мы видели, как отображение $z \mapsto e^z$ задает конформную биекцию между горизонтальной полосой высоты 2π и комплексной плоскостью, разрезанной по лучу; если рассмотреть полосу высоты $\varphi < 2\pi$, то эта же функция задаст конформное отображение между полосой $U_1 = \{z: \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + \varphi\}$ и углом $U_2 = \{z: \alpha < \arg z < \alpha + \varphi\}$ (в самом деле, если $z = x + iy$, где x произвольно и $\alpha < y < \alpha + \varphi$, то $e^z = e^x e^{iy}$, где $|z| = e^x$ — произвольное положительное число, а $\arg e^z = y$ заключен между α и $\alpha + \varphi$). В частности, если $\varphi = \pi$, то отображение $z \mapsto e^z$ задает конформное отображение горизонтальной полосы $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на верхнюю полуплоскость («угол величиной π ») $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$. Конформные отображения на верхнюю полуплоскость других полос можно получить, подвергнув предварительно заданную полосу параллельному переносу (прибавление константы), повороту и гомотетии с центром в нуле (умножение на константу).

Далее, на верхнюю полуплоскость можно отобразить внутренность любого угла: если, например, величина этого угла равна π/a , а вершина расположена в нуле, то отображение $z \mapsto z^a = e^{a \ln z}$ переведет этот угол в полуплоскость (а если мы хотим, чтоб полуплоскость была именно верхней, ее, возможно, придется повернуть, т. е. умножить на комплексное число с подходящим аргументом).

Вот несколько менее тривиальный пример.

Пример 3.6. Отобразим на верхнюю полуплоскость полуокруг $U = \{z: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ (рис. 3.2a). Границы этого множества состоят из прямой и полуокружности. Идея состоит в том, чтобы для начала «выпрямить» криволинейную часть границы. Для такого выпрямления подойдет дробно-линейное преобразование, переводящее какую-нибудь точку окружности в бесконечность. Чтобы при этом прямолинейная часть границы осталась прямолинейной, а не перешла в окружность, выберем переходящую в бесконечность точку так, чтобы она лежала и на прямолинейной части границы. Таких точек две: 1 и -1 ; для определенности возьмем точку 1, а в

качестве дробно-линейного отображения выберем

$$z \mapsto z_1 = \frac{1}{z-1}$$

(подошло бы и любое другое дробно-линейное преобразование, у которого знаменатель обращается в нуль в точке 1). При этом преобразовании отрезок $[-1; 1]$ на вещественной оси переходит в луч $(-\infty; -1/2]$. Полуокружность $\{e^{it} : 0 \leq t \leq \pi\}$ переходит, очевидно, в подмножество прямой (так как 1 переходит в ∞); ясно, что это луч, выходящий из точки $-1/2$; ввиду сохранения углов при дробно-линейных отображениях этот луч перпендикулярен образу отрезка $[-1; 1]$, так что он направлен вертикально. Чтобы понять, вертикально вверх или вертикально вниз, можно проследить за ориентацией угла: если смотреть из вершины (точка -1), то поворот по кратчайшему направлению от прямолинейного до дугообразного участка границы идет против часовой стрелки, и это направление должно сохраниться после конформного отображения. Впрочем, чтобы не запутаться, проще найти образ еще одной точки на дуге. Легко видеть, что точка i переходит в точку $(-1-i)/2$, лежащую в нижней полуплоскости. Стало быть, образ полуокружности — луч, идущий из точки $-1/2$ вертикально вниз, а весь полуокруг переходит во внутренность прямого угла с вершиной в точке $-1/2$ (см. рис. 3.2б).

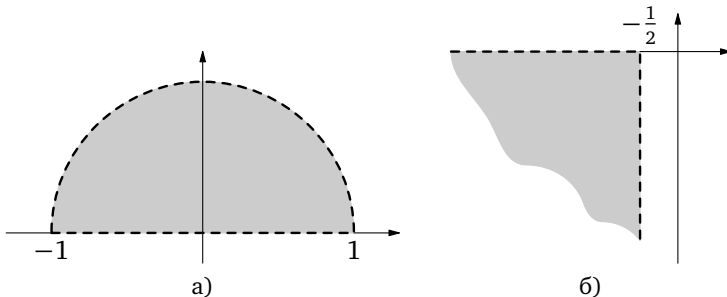


Рис. 3.2. Отображение $z \mapsto z_1 = \frac{1}{z-1}$ переводит полуокруг (а) во внутренность прямого угла (б)

Дальнейшее просто: прямой угол отображением $z_1 \mapsto z_1 + \frac{1}{2}$ сдвинем так, чтоб его вершина попала в нуль, и после этого возведение в квадрат переведет его в верхнюю полуплоскость (см. рис. 3.3).

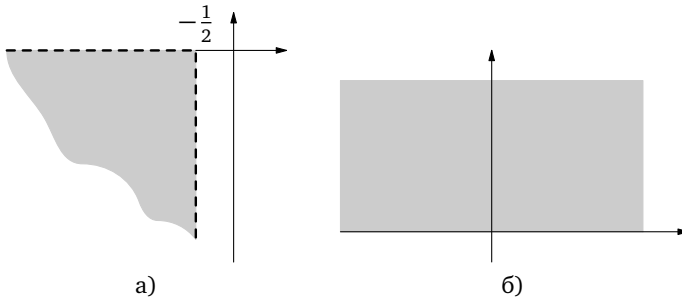


Рис. 3.3. Отображение $z_1 \mapsto z_2 = \left(z_1 + \frac{1}{2}\right)^2$ переводит внутренность прямого угла (а) в верхнюю полуплоскость (б)

Собирая все вместе, получаем, что конформное отображение полукруга на полуплоскость задается формулой

$$z \mapsto \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

Коэффициент $\frac{1}{4}$ можно, конечно, отбросить.

Пример 3.7. Посмотрим, как отображение $f: z \mapsto z + \frac{1}{z}$ действует на множество $U = \{z: |z| > 1\}$ (внешность единичного круга).

Равенство $a = f(z)$ означает, что z является корнем квадратного уравнения

$$z^2 - az + 1 = 0. \quad (3.3)$$

По теореме Виета произведение двух корней этого уравнения равно 1, так что если один из них по модулю меньше единицы, то другой — больше единицы. Стало быть, единственный случай, когда точка $a \in \mathbb{C}$ не является образом точки из внешности единичного круга, — это когда оба корня уравнения (3.3) равны по модулю единице. Так как при этом их произведение равно 1, эти корни имеют вид $e^{\pm i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, так что, опять-таки по теореме Виета,

$$a = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $a = 2 \cos \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда a вещественно и $-2 \leq a \leq 2$, получаем, что образом внешности единичного круга при отображении f является $\mathbb{C} \setminus [-2; 2]$ — комплексная плоскость с удаленным отрезком $[-2; 2]$ на вещественной оси. Поскольку при $a \notin [-2; 2]$ ровно один из корней уравнения (3.3) лежит

во внешности единичного круга, приходим к следующему выводу: функция $f(z) = z + \frac{1}{z}$ задает конформное отображение между внешностью единичного круга и комплексной плоскостью, из которой удален отрезок $[-2; 2]$ на вещественной оси.

Функцию f , о которой шла речь в этом примере, в литературе по прикладной математике называют *функцией Жуковского* (Joukowski transform).

Пример 3.8. Пусть $U = \{z: \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ (полуполоса, рис. 3.4а). Отобразим U на верхнюю полуплоскость. Если применить экспоненту, как и при отображении целой полосы, то отображение $z \mapsto z_1 = e^{\pi z}$ отобразит U не на всю верхнюю полуплоскость, но на ее часть, состоящую из чисел с модулем, большим единицы (так как $\operatorname{Re}(\pi z) > 0$, имеем $|e^{\pi z}| > 1$, см. рис. 3.4). Полученную полуплоскость с полукруглой выемкой можно уже отобразить на верхнюю полуплоскость, спрямив круговую часть границы, как в примере 3.6. Можно, однако, воспользоваться и готовой формулой: легко видеть, что функция Жуковского $z_1 \mapsto z_2 = z_1 + (1/z_1)$ отображает точки, лежащие в верхней полуплоскости и вне единичного круга, в верхнюю полуплоскость, так что она задает конформное отображение полуплоскости с выемкой на полуплоскость. Беря композицию двух отображений, получаем, что отображение

$$z \mapsto e^{\pi z} + e^{-\pi z} = 2 \cos \pi iz$$

отображает полуполосу на верхнюю полуплоскость. Коэффициент 2 перед косинусом можно, разумеется, отбросить.

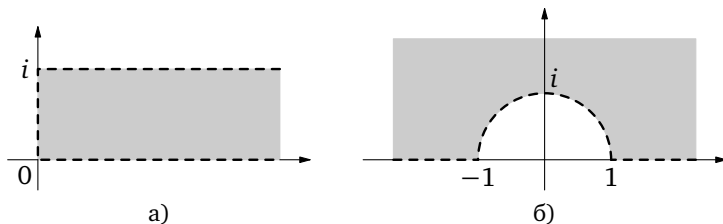


Рис. 3.4. Отображение $z \mapsto z_1 = e^{\pi z}$ переводит полуполосу (а) в верхнюю полуплоскость с выемкой (б)

Приведем, наконец, пример конформного отображения «области с разрезом» — открытого множества, из которого удалены какие-то отрезки прямых или дуги окружностей.

Пример 3.9. Пусть $U = \{z: \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{it: 0 < t \leq 1\}$, то есть верхняя полуплоскость, из которой удален отрезок, соединяющий точки 0 и i (рис. 3.5а).



Рис. 3.5. Отображение $z \mapsto z_1 = z^2$ переводит полуплоскость с разрезом по отрезку $[0; i]$ (а) в плоскость с разрезом по лучу $[-1; +\infty)$ (б)

Чтобы конформно отобразить U на верхнюю полуплоскость, мы (частично) спрямим ее границу, применив отображение $z \mapsto z_1 = z^2$. При этом отрезок, соединяющий точки 0 и i , перейдет в отрезок $[-1; 0]$ на действительной оси, лучи $(-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$ «схлопнутся» в луч $[0; +\infty)$ (эти отрезок и луч не будут входить в образ множества U), и в итоге получится плоскость, из которой удален луч $[-1; +\infty)$ (в классической терминологии — плоскость с разрезом по лучу, рис. 3.5б). Теперь все просто. Если применить преобразование $z_1 \mapsto z_2 = z_1 + 1$, то плоскость с разрезом по лучу $[-1; +\infty)$ перейдет в плоскость с разрезом по лучу $[0; +\infty)$, а ее можно перевести в верхнюю полуплоскость с помощью отображения $z_2 \mapsto z_3 = \sqrt{z_2}$. Собирая все вместе, получаем, что открытое множество U конформно отображается на верхнюю полуплоскость с помощью функции $z \mapsto \sqrt{z^2 + 1}$.

Надо еще только указать, какой из «ветвей» квадратного корня мы пользуемся. Поскольку квадратный корень был нам нужен, чтобы перевести $\mathbb{C} \setminus [0; +\infty)$ в верхнюю, а не нижнюю полуплоскость, это, очевидно, та ветвь, для которой $\sqrt{-1} = i$ (а не $-i$).

Упражнения

3.1. Найдите и изобразите на комплексной плоскости образ прямой $\{z: \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1\}$ при отображении $z \mapsto 1/z$.

3.2. То же для прямой $\{z: \operatorname{Re}(z) = -1\}$ и отображения $z \mapsto z/(z-2)$.

3.3. Найдите и изобразите на комплексной плоскости образ множества $\{z: \operatorname{Im}(z) < 0, |z| < 2\}$ при отображении $z \mapsto z^2$.

3.4. Постройте конформный автоморфизм единичного круга $U = \{z: |z| < 1\}$, переводящий $1/2$ в $2/3$.

3.5. Постройте конформный автоморфизм множества

$$U = \{z: \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\},$$

переводящий точку $1 + i$ в $1 + i\sqrt{3}$.

Для каждого из перечисленных ниже открытых множеств построьте его конформное отображение на верхнюю полуплоскость.

3.6. $U = \{z: 1 < \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) < 2\}$.

3.7. $U = \{z: (\operatorname{Re} z)^2 \leq (\operatorname{Im} z/2)^2 - 1\}$ (указание: см. задачу 1.4).

3.8. $U = \left\{z: |z - \sqrt{3}| > 2, \left|z - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| < 1\right\}$.

3.9. $U = D \setminus [0; 1]$ (здесь $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг, $[0; 1]$ — отрезок на действительной оси между точками 0 и 1).

3.10. $U = D \setminus [1/2; 1]$ (здесь $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг, $[1/2; 1]$ — отрезок на действительной оси между точками $1/2$ и 1).

3.11. $U = \mathbb{C} \setminus \{it: t \in \mathbb{R}, t \geq 1\}$.

3.12. $U = \mathbb{C} \setminus ((-\infty; -1] \cup [1; +\infty))$ (здесь $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ — лучи на действительной оси).

3.13. $U = \{z: \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\} \setminus \{t + \pi i/2: 0 \leq t \leq 1\}$ (полуполоса с разрезом).

3.14. $U = H \cup D$, где $H = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость, $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг.

3.15. $U = \{z: \operatorname{Re} z < (\operatorname{Im} z)^2, \operatorname{Im} z > 0\}$.

3.16. Покажите, что отображение $z \mapsto z + (1/z)$ переводит окружности с центром в нуле (и радиусом, отличным от единицы) в эллипсы с фокусами в точках 2 и -2 .

3.17. Во что отображение $z \mapsto z + (1/z)$ переводит лучи с началом в нуле?

3.18. Постройте конформное отображение множества

$$V = \left\{z: \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{b^2} > 1\right\}, \quad a, b > 0$$

(внешность эллипса) на множество $W = \{z: |z| > 1\}$ (внешность единичного круга).

Глава 4

Интегралы от функций комплексного переменного

4.1. Основные определения

В комплексном анализе в первую очередь интегрируют функции по путям. В этом курсе я не буду стремиться определить интегралы в максимальной общности: для наших скромных целей вполне хватит интегралов по кусочно гладким путям. Мы минимально обобщим определение 2.15.

Определение 4.1. Непрерывное отображение $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$, где $[A; B] \subset \mathbb{R}$ — отрезок, называется *кусочно гладким путем* на комплексной плоскости, если существует такое конечное разбиение $A = A_0 < A_1 < \dots < A_n = B$, что ограничение γ на каждый отрезок $[A_j; A_{j+1}]$ является гладким путем.

В частности, у кусочно гладкого пути в каждой точке должны существовать односторонние производные. В дальнейшем слово «путь» будет всегда означать «кусочно гладкий путь», если явно не оговорено противное.

Определение 4.2. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь и f — непрерывная функция с комплексными значениями, определенная на множестве $\gamma([A; B]) \subset \mathbb{C}$ (или на некотором открытом множестве, содержащем $\gamma([A; B])$). Тогда *интегралом* f по γ называется число

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_A^B f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

(Мотивировка: если $z = \gamma(t)$, то $dz = \gamma'(t) dt$, как в формуле для замены переменной.)

В определении 4.2 участвует параметризация пути, но, как показывает следующее предложение, зависимость от выбора параметризации невелика.

Предложение 4.3. Пусть выполнены условия определения 4.2 и $\varphi: [A_1; B_1] \rightarrow [A; B]$ — биективная дифференцируемая функция со всюду положительной производной. Тогда

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Если производная функции φ всюду отрицательна, то

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Доказательство. Это непосредственно следует из формулы замены переменной в определенном интеграле. Например, для случая, когда φ монотонно возрастает, т.е. $\varphi(A_1) = A$ и $\varphi(B_1) = B$, имеем

$$\begin{aligned} \int_A^B f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt &= \int_{A_1}^{B_1} f(\gamma(\varphi(u))) \gamma'(\varphi(u)) \varphi'(u) du \\ &= \int_{A_1}^{B_1} f(\gamma \circ \varphi(u)) (\gamma \circ \varphi)'(u) du \end{aligned}$$

(по формуле производной сложной функции для $\gamma \circ \varphi$). \square

В свете только что доказанного дадим еще одно определение.

Определение 4.4. Кусочно гладкой кривой называется подмножество в \mathbb{C} , имеющее вид $\gamma([A; B])$, где $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь, отображение γ взаимно однозначно на свой образ и $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in [A; B]$, кроме, возможно, конечного числа.

Следующее соглашение общепринято в текстах по комплексному анализу.

Соглашение 4.5. Если $\gamma \subset \mathbb{C}$ — кусочно гладкая кривая, то под интегралом $\int_{\gamma} f(z) dz$ понимается интеграл по кусочно гладкому

пути, параметризующему кривую γ , с любой биективной кусочно гладкой параметризацией. Ввиду предложения 4.3 значение такого интеграла определено однозначно с точностью до знака. Если на кривой задано направление, то интеграл определен однозначно.

В случае, когда направление на кривой не очевидно из контекста, оно будет явно указываться.

Еще два замечания касаются интегралов по замкнутым кривым. Во-первых, если $\gamma \subset \mathbb{C}$ — замкнутая кусочно гладкая кривая (или $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь, для которого $\gamma(A) = \gamma(B)$),

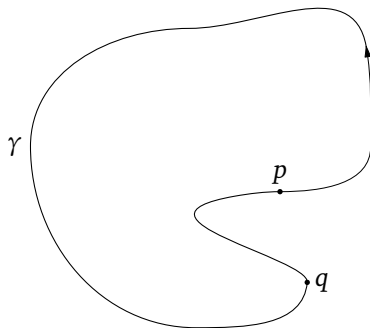


Рис. 4.1. Интеграл по замкнутому пути не зависит от выбора начальной точки

то интеграл по γ (с выбранным направлением обхода) не зависит не только от параметризации, но и от выбора начальной (она же конечная) точки на кривой, то есть точки $\gamma(A) = \gamma(B)$. Например, если на рис. 4.1 выбрать начальную точку p и направление обхода «против часовой стрелки», то интеграл по кривой γ будет равен сумме «интеграл от p до q плюс интеграл от q до p », а при выборе начальной точки q (и того же направления обхода) интеграл по γ будет равен сумме «интеграл от q до p плюс интеграл от p до q » — от перемены мест слагаемых сумма не меняется!

Во-вторых, для замкнутых несамопересекающихся кривых на плоскости направление обхода «против часовой стрелки» мы будем называть *положительным*, а противоположное направление — *отрицательным*. Если направление обхода не указано явно, мы будем подразумевать, что оно положительное.

Замечание 4.6. Педантичный читатель может заметить, что математического понятия «часовая стрелка» не существует, так что понятие «положительное направление обхода» осталось неопределенным. В оправдание скажу, что строгое определение ориентации замкнутой кривой и — главное — использование такого определения в доказательствах требуют достаточно серьезного углубления в топологию, что в начальном курсе неуместно.

Скажу все же, что замкнутая несамопересекающаяся кривая ориентирована положительно, если индекс ее относительно любой точки плоскости, не лежащей на ней, равен 0 или 1 (см. раздел. 4.2).

Приведем теперь один пример вычисления интеграла функции по кривой, чрезвычайно важный для дальнейшего.

Пример 4.7. Если γ — окружность радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{C}$, ориентированная положительно (т. е. против часовой стрелки), то

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

В самом деле, параметризуем окружность так: $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0; 2\pi]$. Теперь имеем:

$$\begin{aligned} z = \gamma(t) &= a + re^{it}; & dz &= \gamma'(t) dt = ire^{it} dt; \\ \frac{dz}{z-a} &= \frac{ire^{it} dt}{re^{it}} = i dt; & \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} &= \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

Для интегралов по кривым верен аналог формулы Ньютона—Лейбница.

Определение 4.8. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Будем говорить, что функция $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ является *первообразной* для функции f , если она голоморфна в U и $F'(z) = f(z)$ для всякого $z \in U$.

Замечание 4.9. Условие непрерывности функции f является излишним: в главе 5 мы увидим, что если у функции комплексного переменного есть первообразная, то эта функция не просто непрерывна, но даже голоморфна!

Предложение 4.10. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и пусть $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция, имеющая в U первообразную F . Если γ — путь в U , соединяющий точки $p \in U$ и $q \in U$, то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(q) - F(p).$$

Доказательство. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow U$ — путь, для которого $\gamma(A) = p$, $\gamma(B) = q$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_A^B F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \\ &= \int_A^B \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(t)) \Big|_A^B = F(\gamma(B)) - F(\gamma(A)) = F(q) - F(p). \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 4.11. Если функция f , определенная на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, имеет на этом множестве первообразную, то

интеграл от F по любому замкнутому пути, лежащему в U , равен нулю.

В частности, так как любой многочлен имеет, очевидно, первообразную (также являющуюся многочленом), интеграл от любого многочлена по любому замкнутому контуру равен нулю. Также равен нулю интеграл от $(z - a)^n$ по замкнутому контуру¹, если n — целое число, отличное от -1 . При $n = -1$ это уже не так, как показывает пример 4.7.

Еще одно следствие из формулы Ньютона—Лейбница обобщает результат, хорошо известный из начального курса анализа.

Следствие 4.12. Если f — голоморфная функция на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ и если $f'(z) = 0$ для всех $z \in U$, то f постоянна.

Доказательство. Любые две точки $a, b \in U$ можно соединить непрерывным путем γ ; более того, нетрудно видеть, что этот путь можно сделать кусочно гладким (см. задачу 4.9 ниже). Теперь имеем

$$f(b) - f(a) = \int_{\gamma} f'(z) dz = \int_{\gamma} 0 \cdot dz = 0,$$

и все доказано. □

Теперь давайте сформулируем и докажем несколько несложных чисто технических утверждений про интегралы от функций комплексного переменного — чтобы не отвлекаться на них в более серьезных ситуациях.

Предложение 4.13. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь, и пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, определенных и непрерывных на $\gamma([A; B])$, равномерно сходящаяся на $\gamma([A; B])$ к функции f . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Доказательство. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к f на $\gamma([A; B])$, то последовательность $\{f_n(\gamma(t))\}$ сходится равномерно к $f(\gamma(t))$ на $[A; B]$. Так как γ — кусочно гладкое отображение, функция $\gamma'(t)$ ограничена, так что последовательность $\{f_n(\gamma(t))\gamma'(t)\}$ равномерно сходится к $f(\gamma(t))\gamma'(t)$. Значит, эту последовательность можно почленно интегрировать по отрезку $[A; B]$, что и требовалось. □

¹При $n < 0$ не проходящему через a .

Для следующего утверждения нам понадобится понятие длины кривой (точнее, пути). Так как к максимальной общности мы в этом месте стремиться не будем, сгодится самое примитивное определение: длина — интеграл от скорости по времени. Аккуратно эта мысль выражается следующим образом.

Определение 4.14. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь. Тогда его *длиной* называется число

$$\text{length}(\gamma) = \int_A^B |\gamma'(t)| dt.$$

Легко видеть (см. предложение 4.3), что длина пути не меняется при монотонной замене параметризации, причем на сей раз, из-за наличия знака модуля в определении, монотонно убывающая замена тоже подходит. Не будем оформлять это утверждение в виде предложения с номером.

Мы будем говорить также и о длинах кривых; при этом кривые будут подразумеваться параметризованными в соответствии с соглашением 4.5 (об ориентации кривой тут опять-таки заботиться не надо).

Предложение 4.15. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь, и пусть f — функция, определенная и непрерывная на $\gamma([A; B])$. Тогда

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma([A; B])} |f(z)| \cdot \text{length}(\gamma). \quad (4.1)$$

Доказательство. Обозначая через M верхнюю грань значений f на $\gamma([A; B])$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_A^B f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_A^B |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \leq \int_A^B M |\gamma'(t)| dt = M \cdot \text{length}(\gamma), \end{aligned}$$

что и требовалось (мы воспользовались неравенством (1.2)). \square

В некоторых случаях грубой оценки (4.1) недостаточно. Оценка более точная использует еще одно понятие интеграла по кривой.

Определение 4.16. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь и f — непрерывная функция с комплексными значениями, определенная на множестве $\gamma([A; B]) \subset \mathbb{C}$. Тогда *интегралом от f по диф-*

ферициалу дуги γ называется число

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_A^B f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Например, $\int_{\gamma} |dz|$ — не что иное, как длина пути γ .

Предложение 4.17. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь, и пусть f — функция, определенная и непрерывная на $\gamma([A; B])$. Тогда

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

Это очевидно из определения 4.16 и неравенства (1.2).

4.2. Индекс кривой относительно точки

В этом разделе мы полностью решим вопрос с интегралом от $dz/(z-a)$ по замкнутым путям. Как мы увидим, этот интеграл имеет ясный геометрический смысл.

Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — замкнутый кусочно гладкий путь на комплексной плоскости (замкнутость означает, что $\gamma(A) = \gamma(B)$), и пусть a — точка на плоскости, через которую этот путь не проходит. Неформально говоря, индекс γ относительно a — это число оборотов, которые γ делает вокруг этой точки.

Вот более аккуратное, но по-прежнему неформальное, определение индекса.

Пусть γ — замкнутый путь на комплексной плоскости, не проходящий через точку $a \in \mathbb{C}$. Рассмотрим радиус-вектор, указывающий из a на точки γ ; по мере движения точки по пути будем следить, сколько полных оборотов этот радиус-вектор сделает. *Индексом пути γ относительно точки a* будем называть общее число оборотов радиус-вектора с учетом знака: каждый полный оборот в положительном направлении (против часовой стрелки) считается за +1, каждый полный оборот в отрицательном направлении считается за −1. Индекс пути γ относительно точки a обозначается $\text{Ind}_a \gamma$.

Мы будем говорить также и об *индексе замкнутой кривой* — подразумевая, что на кривой задано направление обхода, и имея в виду соглашение 4.5.

На рис. 4.2 приведено несколько примеров.

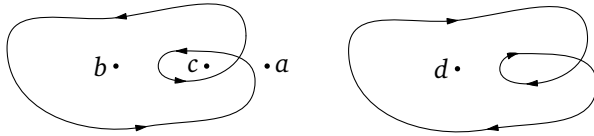


Рис. 4.2. Левая кривая имеет индекс 0 относительно точки a , индекс 1 относительно точки b и индекс 2 относительно точки c ; правая кривая имеет индекс -1 относительно точки d

Теперь дадим строгое определение индекса. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.18. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь, и пусть a — точка на комплексной плоскости, через которую он не проходит. Тогда найдутся кусочно гладкие функции $r, \varphi: [A; B] \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $\gamma(t) = a + r(t)e^{i\varphi(t)}$.

Доказательство. Про функцию r долго думать не приходится: если требуемые r и φ существуют, то с неизбежностью $r(t) = |\gamma(t) - a|$, и именно так мы $r(t)$ и определим. Займемся функцией φ . Как и в предыдущей главе, обозначим через $\ell_\alpha = \{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$ луч, выходящий из точки 0 под углом α к положительному направлению действительной оси, и положим $V_\alpha = \mathbb{C} \setminus \ell_\alpha$ (плоскость с разрезом по лучу ℓ_α). Для каждого целого k на V_α определена гладкая функция $\arg: V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, ставящая в соответствие комплексному числу $z \in V_\alpha$ его аргумент $\arg z$, удовлетворяющий неравенствам

$$\alpha + 2\pi k < \arg z < \alpha + 2\pi(k + 1).$$

Так как отображение $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывно, каждая точка $t \in [A; B]$ содержится в таком открытом интервале I , что $\gamma(I \cap [A; B]) \subset V_\alpha$ для некоторого α . Тогда из компактности отрезка $[A; B]$ вытекает, что у него есть такое разбиение $A = A_0 < A_1 < \dots < A_n = B$, что для каждого k , $0 \leq k \leq n - 1$, отрезок $[A_k; A_{k+1}]$ содержится хотя бы в одном таком I (см. задачу 1.10). Значит, для каждого k найдется такое α_k , что $\gamma(t) - a \in V_{\alpha_k}$ для всякого $t \in [A_k; A_{k+1}]$.

Теперь построим искомую функцию φ следующим образом. Сначала выберем произвольно какую-нибудь из функций \arg на V_{α_0} (обозначим ее для определенности \arg_0) и положим

$$\varphi(t) = \arg_0(\gamma(t) - a)$$

для $t \in [A_0; A_1]$. Поскольку $\varphi(A_1)$ — аргумент числа $\gamma(A_1) - a$, можно выбрать такую из функций \arg на V_{α_1} (обозначим ее для опреде-

ленности \arg_1), что $\arg_1(\gamma(A_1) - a) = \varphi(A_1)$. Положим

$$\varphi(t) = \begin{cases} \arg_0(\gamma(t) - a), & t \in [A_0; A_1], \\ \arg_1(\gamma(t) - a), & t \in [A_1; A_2]. \end{cases}$$

Теперь, когда функция φ определена на отрезке $[A_0; A_2]$, выберем на множестве V_{α_2} функцию \arg_2 , для которой $\arg_2(\gamma(A_2) - a) = \varphi(A_2)$, с ее помощью распространим φ на отрезок $[A_2; A_3]$ и т. д. Продолжая в том же духе, за конечное число шагов мы определим функцию φ на всем отрезке $[A; B]$. \square

Заметим, что функция φ определена неоднозначно: заведомо можно заменить $\varphi(t)$ на $\varphi(t) + 2\pi n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Интуитивно ясно, что других неоднозначностей быть и не должно, но мы этого пока не доказали (см. задачу 4.13).

Предложение-определение 4.19. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — замкнутый путь, не проходящий через точку $a \in \mathbb{C}$. Если записать $\gamma(t) = a + r(t)e^{i\varphi(t)}$, где $r, \varphi: [A; B] \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно гладкие функции (такое представление возможно ввиду леммы 4.18), то отношение

$$\text{Ind}_a \gamma = \frac{\varphi(B) - \varphi(A)}{2\pi}$$

является целым числом, не зависящим от выбора функции φ . Это число называется *индексом пути γ относительно точки a* . Более того, имеет место равенство

$$\text{Ind}_a \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Так как и $\varphi(B)$, и $\varphi(A)$ являются аргументом одного и того же комплексного числа $\gamma(B) - a = \gamma(A) - a$, разность $\varphi(B) - \varphi(A)$ является целочисленным кратным 2π . Стало быть, индекс является целым числом. Для доказательства независимости от выбора функции φ достаточно проверить тождество (4.2). Сделаем это. Коль скоро $z = \gamma(t) = a + r(t)e^{i\varphi(t)}$, имеем

$$dz = (r(t)e^{i\varphi(t)})' dt = r'(t)e^{i\varphi(t)} dt + ir(t)e^{i\varphi(t)} \varphi'(t) dt,$$

откуда

$$\frac{dz}{z - a} = \frac{r'(t)}{r(t)} dt + i\varphi'(t) dt$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} &= \int_A^B \frac{r'(t)}{r(t)} dt + i \int_A^B \varphi'(t) dt = \ln r(t) \Big|_A^B + i \varphi(t) \Big|_A^B = \\ &= \ln r(B) - \ln r(A) + i(\varphi(B) - \varphi(A)) = 2\pi i \cdot \frac{\varphi(B) - \varphi(A)}{2\pi} \end{aligned}$$

($r(B) = r(A) = |\gamma(A) - a|$, \ln в данном случае — обычный логарифм от положительного числа). Все доказано. \square

Интуитивно ясно, что если зафиксировать путь γ и непрерывно варьировать точку a , чтобы она при этом не пересекала γ , то индекс γ относительно a меняться не должен. Дадим строгое доказательство.

Предложение 4.20. Если $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — замкнутый путь, то индекс $\text{Ind}_a \gamma$ один и тот же для всех точек a , лежащих в одном и том же связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C} \setminus \gamma([A; B])$.

Доказательство. Начнем с леммы.

Лемма 4.21. Если $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, принимающая только целые значения, то f постоянна.

Доказательство леммы. Пусть $a, b \in U$. Так как U связно, существует непрерывный путь $\gamma: [A; B] \rightarrow U$, для которого $\gamma(A) = a$, $\gamma(B) = b$. Так как f — непрерывная функция, композиция $f \circ \gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{R}$ также непрерывна, а так как эта непрерывная функция принимает только целые значения, она постоянна (например, по теореме о промежуточном значении). Следовательно, $f(a) = f(\gamma(A)) = f(\gamma(B)) = f(b)$ и все доказано. \square

Ввиду доказанной леммы нам достаточно проверить, что функция $a \mapsto \text{Ind}_a \gamma$ непрерывна на $\mathbb{C} \setminus \gamma([A; B])$. Чтобы в этом убедиться, предположим, что $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([A; B])$. Покажем, что тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z - a_n} = \frac{1}{z - a} \quad \text{равномерно на } \gamma([A; B]).$$

Для этого положим $c = \inf_{z \in \gamma([A; B])} |z - a|$; коль скоро a не лежит на кривой $\gamma([A; B])$, имеем $c > 0$ (ср. с задачей 1.11). При всех достаточно больших n имеем $|a_n - a| < c/2$, так что $|z - a_n| \geq c/2$ при всех z на кривой и при всех достаточно больших n . Теперь имеем

$$\left| \frac{1}{z - a_n} - \frac{1}{z - a} \right| = \frac{|a_n - a|}{|z - a| \cdot |z - a_n|} \leq \left(\frac{2}{c} \right)^2 |a_n - a|,$$

откуда искомая равномерная сходимости очевидна. Стало быть, по предложению 4.13 имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z - a_n} \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z - a};$$

ввиду формулы (4.2) это и есть искомая непрерывная зависимость индекса от точки. \square

Существует еще одно интуитивно ясное утверждение про индекс: индекс замкнутой кривой относительно точки a не меняется, если непрерывно деформировать эту кривую так, чтобы она в процессе деформации не задевала точку a . Строгое доказательство этого утверждения будет дано, когда в нашем распоряжении будет строгое определение непрерывной деформации кривой.

Упражнения

Найдите интегралы в задачах 4.1—4.7.

4.1. $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, где γ — отрезок, соединяющий точки 0 и $1 + i$ (направление — от 0 к $1 + i$).

4.2. $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, где γ — окружность с центром 1 и радиусом 2, ориентированная против часовой стрелки. (Если вы знакомы с формулой Стокса, то эту задачу можно сделать в уме, если нет, то придется немного повывислять.)

4.3. $\int_{\gamma} \sin z dz$, где γ — объединение отрезка, соединяющего точку 1 с точкой $3 + i\sqrt{7}$, и отрезка, соединяющего точку $3 + i\sqrt{7}$ с точкой $1 + i$ (с указанной ориентацией).

4.4. $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z+1)^2}$, где γ — треугольник с вершинами $1 - i$, $-i$ и -2 (направление обхода — против часовой стрелки).

4.5. $\int_{\gamma} \frac{z^2 - 3z + 4}{z(z-2)^2} dz$, где γ — окружность с уравнением $|z| = 3$ (направление обхода — против часовой стрелки).

4.6. $\int_{[1; 2i]} \frac{dz}{z}$, где $[1; 2i]$ — отрезок, соединяющий точки 1 и $2i$.

4.7. $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, где γ — путь, изображенный на рис. 4.3. Достаточно ли в задаче данных для получения ответа?

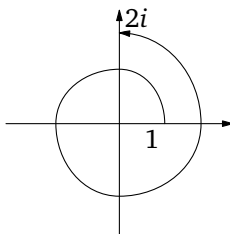


Рис. 4.3. К задаче 4.7

4.8. Покажите, что интеграл от непрерывной функции f по кусочно гладкой кривой γ можно определить в духе «интеграла Римана». Именно, если кривая γ соединяет точки a и b , то назовем разбиением этой кривой последовательность лежащих на ней точек $z_0 = a, z_1, \dots, z_n = b$ (точки идут последовательно, в направлении, заданном ориентацией кривой). Интегральной суммой, соответствующей разбиению, назовем сумму $\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)(z_{i+1} - z_i)$. Покажите, что интеграл $\int_{\gamma} f(z) dz$ равен пределу интегральных сумм по множеству всех разбиений при стремлении к нулю величины $\max_i |z_{i+1} - z_i|$.

4.9. Покажите, что если $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество, то любые две его точки можно соединить кусочно гладким путем, лежащим в U . (Указание. Действуйте так же, как в доказательстве импликации «только тогда» в предложении 1.17.)

4.10. Дайте строгое доказательство того факта, что не существует функции логарифм, определенной на всем $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Подробнее: не существует голоморфной функции $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющей тождеству $e^{f(z)} = z$.

4.11. Кривая γ на рис. 4.4а разбивает плоскость на связные открытые множества. Для каждого из них найдите $\text{Ind}_a \gamma$, где a — точка из этого множества.

4.12. Тот же вопрос, что в предыдущем упражнении, для кривой на рис. 4.4б.

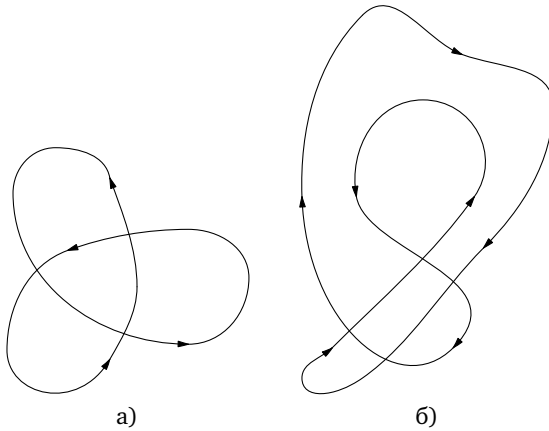


Рис. 4.4.

4.13. Докажите, что функция φ , существование которой утверждается леммой 4.18, определена однозначно с точностью до прибавления константы вида $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

4.14. Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ — кусочно гладкая замкнутая кривая с заданной ориентацией (см. соглашение 4.5), и пусть $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Предположим, что существует луч $\ell \subset \mathbb{C}$ с началом в a , обладающий следующими свойствами:

- (1) пересечение $\ell \cap \gamma$ конечно;
- (2) точки пересечения ℓ и γ не являются точками излома для γ ;
- (3) в каждой точке пересечения ℓ и γ касательный вектор к γ неколлинеарен лучу ℓ (как говорят, « ℓ и γ пересекаются трансверсально»).

Сопоставим теперь каждой точке пересечения $p \in \ell \cap \gamma$ кратность $+1$, если отношение комплексных чисел

$$\frac{(\text{касательный вектор к } \gamma \text{ в точке } p)}{(\text{направляющий вектор луча } \ell)}$$

лежит в верхней полуплоскости, и кратность -1 , если это отношение лежит в нижней полуплоскости (лежать на вещественной оси оно не может ввиду трансверсальности).

Покажите, что индекс $\text{Ind}_a \gamma$ равен сумме кратностей всех точек из $\ell \cap \gamma$.

4.15*. Попробуйте обобщить результат задачи 4.14 на случай, когда кривой γ разрешается касаться луча ℓ (возможно, при некоторых ограничениях на характер касания).

Глава 5

Теорема Коши и ее следствия

В предыдущей главе мы видели, что интеграл от голоморфной функции по замкнутому контуру нередко оказывается равен нулю. Сейчас мы исследуем это явление более или менее систематически, и исследование это заведет нас весьма далеко.

5.1. Теорема Коши

Перед тем как отправляться в путь, условимся, что под треугольником на плоскости мы понимаем замкнутое подмножество плоскости, состоящее из его внутренности, сторон и вершин. Если $\Delta \subset \mathbb{C}$ — треугольник, то его *границей* мы будем называть замкнутую ломаную, составленную из трех сторон, обходимых в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки). Границу треугольника Δ мы будем обозначать $\partial\Delta$.

Теорема 5.1 (теорема Коши, версия 1). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция и $\Delta \subset U$ — треугольник. Тогда $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\Delta \subset \mathbb{C}$ — вообще произвольный треугольник и $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольная непрерывная функция. Разделим Δ средними линиями на четыре равных треугольника $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ и Δ_d (рис. 5.1). Тогда

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_a} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_b} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_c} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_d} f(z) dz. \quad (5.1)$$

Для доказательства этого соотношения достаточно взглянуть на рис. 5.1: интегралы по сторонам маленьких треугольников, лежащих внутри Δ , взаимно уничтожаются, а интегралы по остальным сторонам складываются в интеграл по границе Δ .

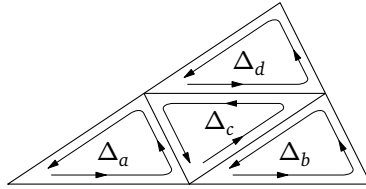


Рис. 5.1. Если границы всех треугольников ориентированы одинаково, то интеграл по большому треугольнику равен сумме интегралов по четырем маленьким

Пусть теперь f и Δ обозначают то же, что в условии теоремы. Будем рассуждать от противного. Предположим, что интеграл от f по границе треугольника Δ отличен от нуля; положим

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = C > 0.$$

Разделим Δ средними линиями на четыре треугольника; тогда из формулы (5.1) вытекает, что среди этих четырех меньших треугольников есть хотя бы один (обозначим его Δ_1), для которого

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{C}{4}. \quad (5.2)$$

В самом деле, иначе в правой части (5.1) модули всех слагаемых будут строго меньше, чем $C/4$, и тогда модуль их суммы будет строго меньше C вопреки нашему определению этого числа.

Треугольник Δ_1 также разделим средними линиями на четыре треугольника; неравенство (5.2) и то же рассуждение, что выше, показывает, что интеграл от f по границе хотя бы одного из этих треугольников по модулю не меньше, чем $(C/4)/4 = C/4^2$; выберем какой-нибудь из таких треугольников и обозначим его Δ_2 . Треугольник Δ_2 опять разделим средними линиями на четыре треугольника и т. д. В итоге мы получим последовательность вложенных друг в друга треугольников

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots,$$

в которой Δ_n подобен треугольнику Δ с коэффициентом подобия $1/2^n$ и при этом

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{C}{4^n}. \quad (5.3)$$

Легко видеть, что существует (и единственна, но это нам не требуется) точка $a \in U$, лежащая во всех Δ_n : например, можно заметить, что последовательность вершин всех этих треугольников является фундаментальной, и взять в качестве a ее предел.

Обозначим периметр исходного треугольника Δ через p ; тогда периметр треугольника Δ_n равен $p/2^n$. Теперь вспомним, что функция f голоморфна на U и, в частности, имеет производную в точке a . Эту мысль можно выразить следующим образом. Определим функцию φ из соотношения

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \varphi(z).$$

Тогда существуют такое число $\varepsilon > 0$ и такая возрастающая функция $\omega: (0; \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, что $|\varphi(z)| \leq \omega(|z - a|)|z - a|$ при $0 < |z - a| < \varepsilon$ — см. доказательство предложения 2.5; достаточно положить

$$\omega(t) = \sup_{0 < |z - a| \leq t} \frac{|\varphi(z)|}{|z - a|}.$$

Заметим, что функция $z \mapsto f(a) + f'(a)(z - a)$, будучи линейной, имеет первообразную в U , так что интеграл от нее по границе любого треугольника равен нулю. Стало быть, $\int_{\partial \Delta_n} f(z) dz = \int_{\partial \Delta_n} \varphi(z) dz$; интеграл же в правой части мы оценим следующим образом. Если n столь велико, что Δ_n содержится в ε -окрестности точки a , то $|z - a| \leq p/2^n$ для всякой $z \in \Delta_n$ (расстояние между двумя точками в треугольнике не превосходит его максимальной стороны, и тем более периметра). Поэтому

$$|\varphi(z)| \leq \omega(|z - a|)|z - a| \leq \omega\left(\frac{p}{2^n}\right) \cdot \frac{p}{2^n}$$

для всякого $z \in \Delta_n$. Учитывая, что периметр треугольника Δ_n равен $p/2^n$, получаем из предложения 4.15, что

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial \Delta_n} \varphi(z) dz \right| \leq \omega\left(\frac{p}{2^n}\right) \cdot \frac{p}{2^n} \cdot \frac{p}{2^n} = \omega\left(\frac{p}{2^n}\right) \cdot \frac{p^2}{4^n};$$

сопоставляя это с неравенством (5.3), получаем, что

$$\frac{C}{4^n} \leq \omega\left(\frac{p}{2^n}\right) \cdot \frac{p^2}{4^n} \Rightarrow \omega\left(\frac{p}{2^n}\right) \geq \frac{C}{p^2}$$

при всех достаточно больших n . Это противоречит тому, что $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, и полученное противоречие доказывает теорему. \square

Доказав теорему, попробуем ее обобщить.

Напомним, что подмножество плоскости называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками оно содержит и отрезок, их соединяющий. Для обобщения теоремы Коши нам понадобится

Предложение 5.2. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — выпуклое открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Тогда для f существует первообразная, т. е. функция $F: U \rightarrow \mathbb{C}$, для которой $F'(a) = f(a)$ при всех $a \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Условимся о таком обозначении: если $a, b \in U$, то через $[a; b]$ будем обозначать отрезок, соединяющий a и b , ориентированный в направлении от a к b .

Выберем раз и навсегда точку $z_0 \in U$ и определим функцию $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле $F(z) = \int_{[z_0; z]} f(t) dt$ (правая часть определена, так как отрезок $[z_0; z]$ содержится в U). Покажем, что функция F — искомая.

Пусть $a \in U$, $a + h \in U$. Обозначим через Δ треугольник с вершинами z_0 , a и $a + h$; ввиду выпуклости он содержится в U . По теореме Коши тогда имеем

$$\int_{\partial \Delta} f(t) dt = \int_{[z_0; a]} f(t) dt + \int_{[a; a+h]} f(t) dt + \int_{[a+h; z_0]} f(t) dt,$$

откуда

$$F(a+h) - F(a) = - \int_{[a+h; z_0]} f(t) dt - \int_{[z_0; a]} f(t) dt = \int_{[a; a+h]} f(t) dt.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{[a; a+h]} f(t) dt &= \int_{[a; a+h]} f(a) dt + \int_{[a; a+h]} (f(t) - f(a)) dt = \\ &= f(a) \cdot h + \int_{[a; a+h]} (f(t) - f(a)) dt. \end{aligned}$$

Теперь, пользуясь оценкой для интеграла из предложения 4.15, получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} - f(a) \right| &= \frac{\left| \int_{[a; a+h]} (f(t) - f(a)) dt \right|}{|h|} \leq \\ &\leq \frac{|h| \cdot \sup_{t \in [a; a+h]} |f(t) - f(a)|}{|h|} = \sup_{t \in [a; a+h]} |f(t) - f(a)|. \end{aligned}$$

Поскольку функция f , будучи голоморфной, непрерывна, правая часть стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, так что производная функции F в точке a существует и равна $f(a)$, что и требовалось. \square

Теорема 5.3 (теорема Коши, версия 2). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — выпуклое открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Тогда:

(а) интеграл от f по любому замкнутому пути, лежащему в U , равен нулю;

(б) если $p, q \in U$ — две точки, а γ_1 и γ_2 — два пути в U , соединяющие точки p и q , то интегралы от функции f по γ_1 и γ_2 совпадают.

Доказательство. По предложению 5.2 функция f имеет первообразную в U ; теперь все вытекает из следствия 4.11 и предложения 4.10. \square

Перейдем теперь от выпуклых открытых множеств к более широкому классу.

«Теорема» 5.4 (теорема Коши, версия 3). Предположим, что $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$.

(а) Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \subset U$ — замкнутые несамопересекающиеся и не пересекающиеся друг с другом кривые, ориентированные положительно (против часовой стрелки). Если часть плоскости, заключенная между γ_1 и γ_2 , целиком содержится в U , то $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$.

(б) Пусть γ_1 и γ_2 — две кривые в U , соединяющие точки $p \in U$ и $q \in U$. Если часть плоскости, заключенная между γ_1 и γ_2 , целиком содержится в U , то $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$.

«Доказательство». В любом из двух случаев разобьем часть плоскости между γ_1 и γ_2 на конечное число частей, каждая из которых содержится в открытом круге, который, в свою очередь, содержится в U (рис. 5.2), и ориентируем границу каждой из этих частей в положительном направлении. Если обозначить эти границы через μ_1, \dots, μ_n , то по теореме 5.3

$$\int_{\mu_1} f dz = \dots = \int_{\mu_n} f dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f dz + \dots + \int_{\gamma_2} f dz = 0. \quad (5.4)$$

При сложении интегралов в правой части интегралы по участкам границ, лежащим внутри области между γ_1 и γ_2 , сократятся (ср. с доказательством теоремы Коши для треугольника). Интегралы же по участкам границ, лежащих на кривых γ_1 и γ_2 , сложатся в интеграл по γ_1 плюс интеграл по γ_2 , но со знаками: в случае (а) внешняя кривая будет ориентирована против часовой стрелки, как в усло-

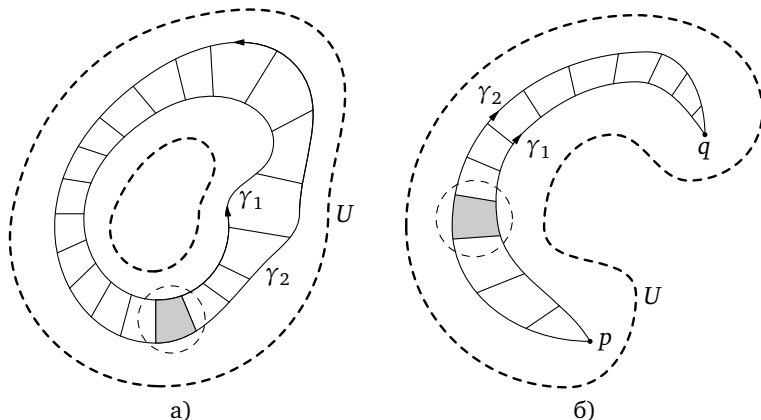


Рис. 5.2. (а) Замкнутые кривые γ_1 и γ_2 ориентированы положительно; (б) кривые γ_1 и γ_2 соединяют точки p и q . Жирным пунктиром обозначена граница области U . Часть плоскости между γ_1 и γ_2 разбита отрезками на «малые» части; одна из этих частей заштрихована, и изображен содержащий ее круг, который, в свою очередь, содержится в U .

вии теоремы, а внутренняя — по часовой, так что сумма интегралов в (5.4), равная нулю, будет также равна разности интеграла от $f dz$ по γ_1 и интеграла от $f dz$ по γ_2 ; в случае (б) на одной из кривых получится исходная ориентация от p до q , а на другой — противоположная исходной ориентация от q до p . Значит, правая часть в (5.4) также будет равна разности интегралов по γ_1 и γ_2 . В обоих случаях выходит, что разность интегралов по γ_1 и γ_2 равна нулю, что нам и требовалось. \square

Выше мы поставили слова «теорема» и «доказательство» в кавычки по очевидной причине: понятия «часть плоскости, заключенная между данными кривыми» мы не определяли, и придать ему точный математический смысл не так просто. Наиболее общей из корректных формулировок было бы, видимо, «кривые γ_1 и γ_2 гомологичны как 1-цепи в U », но определения, леммы и прочее, необходимые при таком подходе, заняли бы непозволительно много места.

Поэтому теорему 5.4 следует, строго говоря, рассматривать как рецепт для построения корректных доказательств. Именно, в каждом случае, когда нам захочется доказать, что интегралы от данной голоморфной функции по двум кривым равны, надо разбить часть плоскости между ними на достаточно маленькие куски и повторить «доказательство» применительно не к абстрактным μ_1, \dots, μ_n , а к

границам этих кусков. Более того, эти разбиение и доказательство принято не записывать в явном виде, а проводить в уме.

В главе 6 мы докажем (уже без кавычек) еще одну версию теоремы Коши. Именно, мы определим гомотопии путей и докажем, что $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$, если γ_1 и γ_2 гомотопны (это условие сильнее гомологичности, так что максимально общего результата при этом все же не получится).

Вот несколько типичных примеров применения «теоремы» 5.4. Все они будут в дальнейшем неоднократно применяться, первый из них — прямо в следующем разделе.

Пример 5.5. Пусть U — открытое множество, содержащее замкнутый диск $\bar{D} = \{z: |z - z_0| \leq r\}$, $D = \{z: |z - z_0| < r\}$ — внутренность диска \bar{D} , a — точка, лежащая в D . Если теперь функция φ голоморфна на $U \setminus \{a\}$, то

$$\int_{\partial D} \varphi(z) dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \varphi(z) dz,$$

где ∂D (граница диска D) — окружность $\{z: |z - z_0| = r\}$, обе окружности ориентированы в положительном направлении и число ε столь мало, что окружность $\{z: |z - a| = \varepsilon\}$ содержится во внутренней части диска \bar{D} .

В самом деле, это вытекает из теоремы 5.4: часть плоскости, заключенная между большей и меньшей окружностями, целиком содержится в U .

Пример 5.5 можно различными способами варьировать. Например, ясно, что диск \bar{D} можно заменить на полукруг, прямоугольник или что-нибудь еще в этом роде. Обобщая в другом направлении, заметим, что можно вообще не упоминать о множестве U , а вместо этого потребовать лишь, чтоб функция φ была непрерывна на $\bar{D} \setminus \{a\}$ и голоморфна на $D \setminus \{a\}$. В самом деле, из сказанного выше явствует, что

$$\int_{|z-z_0|=r-\delta} \varphi(z) dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \varphi(z) dz \quad \text{для всех достаточно малых } \delta > 0,$$

и остается заметить, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|z-z_0|=r-\delta} \varphi(z) dz = \int_{|z-z_0|=r} \varphi(z) dz$$

ввиду непрерывности функции φ на границе диска.

Пример 5.6. Пусть $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — часть комплексной плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кусочно гладкой кривой γ (кривая γ входит в \bar{U}); положим $\text{Int}(\bar{U}) = U$. (Если вы устали от нестрогих формулировок, считайте, что \bar{U} — замкнутый диск, γ — ограничивающая его окружность и U — внутренность диска \bar{U} .) Предположим, что $a_1, \dots, a_n \in U$, а функция f непрерывна на множестве $\bar{U} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ и голоморфна на множестве $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Окружим каждую точку a_j окружностью радиуса $\varepsilon_j > 0$ таким образом, чтобы все эти окружности лежали в U и попарно не пересекались. Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{|z-a_1|=\varepsilon_1} f(z) dz + \dots + \int_{|z-a_n|=\varepsilon_n} f(z) dz, \quad (5.5)$$

где подразумевается, что все кривые ориентированы положительно.

Формально говоря, равенство (5.5) из теоремы 5.4 не следует, но оно также устанавливается по рецепту, приведенному в «доказательстве» этой теоремы. Именно, если разрезать часть плоскости между кривой γ и окружностями радиусов $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ на достаточно маленькие части (настолько маленькие, чтоб интеграл от $f(z) dz$ по границе каждой из них равнялся нулю), то, как и ранее, при суммировании этих интегралов получится интеграл по γ , проходимой в положительном направлении, плюс сумма интегралов по n окружностям, проходимым в отрицательном направлении. См. рис. 5.3.

Пример 5.7. Положим

$$\bar{U} = \{z: r \leq |z - z_0| \leq R\},$$

$$U = \{z: r < |z - z_0| < R\},$$

где $0 < r < R$. Пусть $a \in U$, и пусть $\varphi: \bar{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ — функция, непрерывная на $\bar{U} \setminus \{a\}$ и голоморфная на $U \setminus \{a\}$. Если $\varepsilon > 0$ настолько мало, что замкнутый диск радиуса ε с центром в a лежит в U , то

$$\int_{|z-z_0|=R} \varphi(z) dz - \int_{|z-z_0|=r} \varphi(z) dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \varphi(z) dz,$$

где все три окружности ориентированы положительно.

Эта формула доказывается так же, как формула (5.5) из примера 5.6, если обозначить через γ окружность радиуса R с центром в z_0 и положить $a_1 = a$, $a_2 = z_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = r$. См. рис. 5.4.

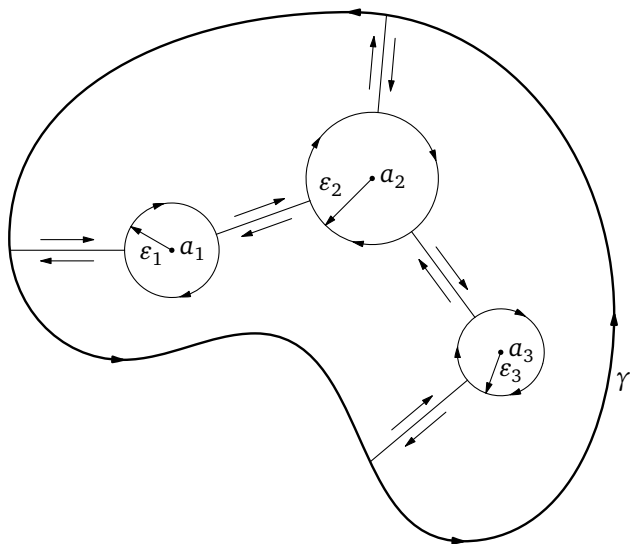


Рис. 5.3.

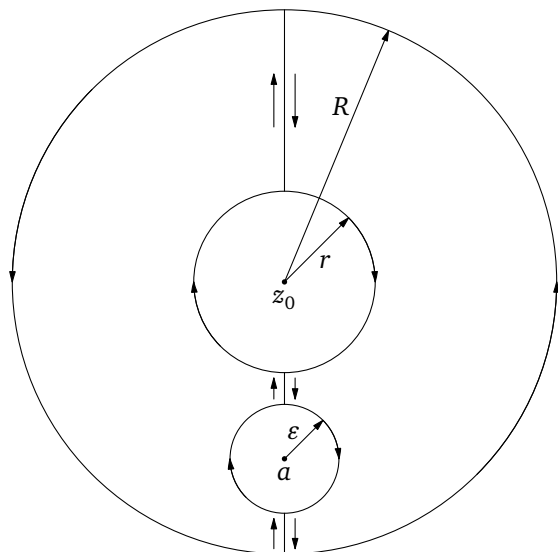


Рис. 5.4.

5.2. Формула Коши и аналитичность голоморфных функций

На теореме, которую мы сейчас докажем, основано очень многое в комплексном анализе.

Теорема 5.8 (формула Коши). Пусть $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — часть комплексной плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой γ (кривая γ входит в \bar{U}); положим $\text{Int}(\bar{U}) = U$. Если функция $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на \bar{U} и голоморфна в U , то для всякого $a \in U$ выполнено равенство

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - a}, \quad (5.6)$$

где кривая γ ориентирована в положительном направлении.

Если вас шокирует встречающееся в условии понятие «часть плоскости, ограниченная кривой», можно и эту формулировку рассматривать как средство получения строгих утверждений для каждой конкретной кривой γ , которая нам понадобится (полукруга, прямоугольника и т. д.).

Прежде чем доказывать формулу Коши, давайте осознаем ее смысл: из формулы явствует, что все значения голоморфной функции внутри замкнутого контура полностью предопределены, коль скоро мы знаем ее значения на самом контуре. Излишне объяснять, что у гладких (даже бесконечно гладких) функций все не так: мы всегда можем так «пошевелить» гладкую функцию на сколь угодно малом подмножестве области определения, что она при этом останется гладкой.

Это одно из проявлений того эффекта, с которым мы будем встречаться и далее: голоморфная функция является чрезвычайно жестким объектом.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что замкнутый диск $\{z: |z - a| \leq \varepsilon\}$ содержится в U ; обозначим его границу через $\gamma_\varepsilon = \{z: |z - a| = \varepsilon\}$. Из теоремы Коши, примененной к голоморфной на $U \setminus \{a\}$ функции $z \mapsto f(z)/(z - a)$, вытекает, что

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - a} = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) dz}{z - a} \quad (5.7)$$

(см. пример 5.5 и обсуждение после него). Поэтому нам достаточно доказать равенство

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) dz}{z - a} = 2\pi i f(a); \quad (5.8)$$

заметим для дальнейшего, что из формулы (5.7) (или прямо из теоремы Коши в форме 5.4) вытекает, что интеграл в левой части (5.8) не зависит от ε .

Так как функция f имеет в точке a комплексную производную, можно записать соотношения

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \varphi(z),$$

$$\left| \frac{\varphi(z)}{z - a} \right| \leq \omega(|z - a|), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0 \quad (5.9)$$

(см. доказательства теоремы 5.1 и предложения 2.5). Следовательно,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) dz}{z - a} = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(a) dz}{z - a} + \int_{\gamma_\varepsilon} f'(a) dz + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(z) dz}{z - a}. \quad (5.10)$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно $2\pi i f(a)$ (см. пример 4.7), а второе равно нулю, так как это интеграл от константы по замкнутому контуру. Стало быть, для доказательства теоремы нам надо доказать, что и третье слагаемое в правой части (5.10) равно нулю; для этого оценим его, пользуясь предложением 4.15 и неравенством (5.9):

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(z) dz}{z - a} \right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot \sup_{|z-a|=\varepsilon} \left| \frac{\varphi(z)}{z - a} \right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot \omega(\varepsilon);$$

поскольку левая часть этого неравенства, как мы отмечали, не зависит от ε , а правая часть стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, левая часть должна быть равна нулю, что и завершает доказательство. \square

Сейчас мы выведем первое из важных следствий формулы Коши. Сначала определение.

Определение 5.9. Функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, называется *аналитической*, если для всякой точки $a \in U$ существует такой открытый диск $D = \{z: |z - a| < r\} \subset U$ с центром в a , что для всех $z \in D$ функция f представляется в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a)^n + \dots \quad (5.11)$$

Поскольку в силу предложения 1.19 ряд (5.11) сходится равномерно на каждом компактном подмножестве в D , а его частичные суммы непрерывны, получаем, что всякая аналитическая функция непрерывна.

Предложение 5.10. *Всякая голоморфная функция аналитична.*

Доказательство. Пусть функция f голоморфна на $U \subset \mathbb{C}$, и пусть $a \in U$. Тогда для некоторого $r > 0$ замкнутый диск $\bar{D} = \{z: |z - a| \leq r\}$

содержится в U . Пусть $z \in \text{Int}(\bar{D})$. В силу формулы Коши, примененной к диску \bar{D} и точке $z \in \text{Int}(\bar{D})$, имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (5.12)$$

Для всякого ζ , лежащего на границе диска \bar{D} (обозначим ее ∂D), дробь $1/(\zeta - z)$ можно разложить в сумму геометрической прогрессии

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}. \quad (5.13)$$

При этом, поскольку для $\zeta \in \partial D$ имеем $|\zeta - a| = r$, n -й член ряда (5.12) можно оценить так:

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| = \frac{1}{|\zeta - a|} \left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right|^n \leq \frac{1}{r} \cdot \left| \frac{z-a}{r} \right|^n.$$

Поскольку $|(z-a)/r| < 1$, в правой части стоит сходящаяся геометрическая прогрессия с членами, не зависящими от ζ ; стало быть, ряд (5.13) (при фиксированном z) равномерно по ζ сходится на окружности $\{\zeta: |\zeta - a| = r\}$. Если умножить обе части разложения (5.13) на $f(\zeta)$, то получится разложение

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}. \quad (5.14)$$

Так как функция f на этой окружности ограничена, а ряд в правой части (5.13) сходится равномерно по $\zeta \in \partial D$, ряд в правой части (5.14) также сходится равномерно, и его можно почленно проинтегрировать (по ζ) по ∂D . Умножая еще на $1/2\pi i$, получаем, что

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left((z-a)^n \cdot \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}. \quad (5.16)$$

Доказательство закончено. \square

Следствие 5.11 (из доказательства). *Всякая функция, голоморфная на открытом круге $D \subset \mathbb{C}$ с центром в точке a , представляется в этом круге в виде суммы степенного ряда $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - a)^j$, абсолютно и равномерно сходящегося на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$.*

Итак, мы установили, что всякая голоморфная функция является аналитической. Верно и обратное утверждение: всякая аналитическая функция является голоморфной. Это гораздо более простой факт, чем предложение 5.10, его можно доказать совершенно элементарными рассуждениями, пользуясь свойствами двойных рядов (предложение 1.4; см. также [1, гл. V, § 5]). Мы докажем голоморфность аналитических функций в следующем разделе, пользуясь тем же «методом контурного интегрирования», с помощью которого мы доказали предложение 5.10.

5.3. Бесконечная дифференцируемость. Почленная дифференцируемость

Продолжим выводить важные следствия из формулы Коши.

Теорема 5.12. *Пусть $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — часть комплексной плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой γ (кривая γ входит в \bar{U}); положим $\text{Int}(\bar{U}) = U$. Если функция $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на \bar{U} и голоморфна в U , то она имеет во внутренней области D производные любого порядка; эти производные также голоморфны и задаются формулами*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \quad (5.17)$$

Доказательство. При $n = 0$ формула (5.17) — не что иное, как обычная формула Коши (5.6). Далее, легко видеть, что формула (5.17) для $n + 1$ получается из формулы (5.17) для n дифференцированием по z под знаком интеграла. Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что такое дифференцирование законно.

Зафиксируем натуральное $n \geq 0$ и точку $z \in U$, после чего положим $\Phi_n(\zeta, z) = f(\zeta)/(\zeta - z)^{n+1}$. Если мы проверим, что «разностное отношение» $(\Phi_n(\zeta, z+h) - \Phi_n(\zeta, z))/h$ сходится равномерно по $\zeta \in \gamma$ при $h \rightarrow 0$, то, интегрируя (по ζ) по кривой γ соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi_n(\zeta, z+h) - \Phi_n(\zeta, z)}{h} = (n+1)\Phi_{n+1}(\zeta, z) \quad (5.18)$$

(что возможно ввиду равномерной сходимости), мы получим, что

$$\frac{d}{dz} \left(\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \right) = (n+1) \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+2}},$$

и теорема будет доказана.

Осталось проверить, что сходимость в (5.18) равномерна по $\zeta \in \gamma$. Это доказывается с помощью скучных, но бесхитростных вычислений. Именно, раскладывая $(\zeta - z - h)^{n+1} = ((\zeta - z) - h)^{n+1}$ по биному Ньютона и приводя к общему знаменателю, получаем, что

$$\frac{\Phi_n(\zeta, z+h) - \Phi_n(\zeta, z)}{h} = f(\zeta) \cdot G(\zeta, z, h),$$

где

$$G(\zeta, z, h) = \frac{n+1}{(\zeta - z - h)^{n+1}(\zeta - z)} - \frac{\binom{n+1}{2}h(\zeta - z)^{n-1} - \binom{n+1}{3}h^2(\zeta - z)^{n-2} + \dots \pm h^n}{(\zeta - z - h)^{n+1}(\zeta - z)^{n+1}}. \quad (5.19)$$

Поскольку $f(\zeta)$ ограничено на γ ввиду непрерывности функции f , нам достаточно показать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} G(\zeta, z, h) = \frac{n+1}{(\zeta - z)^{n+2}} \quad \text{равномерно по } \zeta \in \gamma.$$

Заметим, что, поскольку z не лежит на кривой γ и $\gamma \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество, существует такая константа $c > 0$, что $|\zeta - z| > c$ для всех $\zeta \in \gamma$; значит, $|\zeta - z - h| > c/2$ для всех $\zeta \in \gamma$ и всех достаточно малых h . Теперь из неравенства

$$\left| \frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right| = \left| \frac{h}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)} \right| \leq \frac{|h|}{c \cdot c/2},$$

выполняющегося при всех достаточно малых h , следует, что дробь $1/(\zeta - z - h)$ равномерно стремится к $1/(\zeta - z)$; стало быть, из ограниченности отношения $(n+1)/(\zeta - z)$ и правила «предел произведения равен произведению пределов» вытекает, что первое слагаемое в правой части (5.19) равномерно стремится к искомому выражению $(n+1)/(\zeta - z)^{n+2}$. Осталось проверить, что второе слагаемое в правой части (5.19) равномерно стремится к нулю. Это следует из того, что в нем знаменатель ограничен снизу по модулю строго положительной (для всех достаточно малых h) константой $c^{2n+2}/2^{n+1}$, а каждое слагаемое в числителе ограничено сверху по модулю выражением вида $\text{const} \cdot |h|^k$, где $k \geq 1$. \square

Следствие 5.13 (из теоремы). *Всякая голоморфная функция «бесконечно комплексно дифференцируема»: если функция f голоморфна на открытом множестве U , то и функция $z \mapsto f'(z)$ голоморфна на том же множестве.*

Следствие 5.14 (из доказательства). *Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ — кусочно гладкая кривая и $f: \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Тогда функция*

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \gamma$; ее n -я производная равна

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Доказательство. В доказательстве теоремы 5.12 использовались только значения функции f на кривой γ и ее непрерывность на γ , так что рассуждение из этого доказательства проходит без изменений. \square

Еще одно следствие теоремы 5.12 можно рассматривать как обращение теоремы Коши для треугольника.

Предложение 5.15 (теорема Мореры). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Если непрерывная функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ обладает тем свойством, что $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ для всякого треугольника $\Delta \subset U$, то f голоморфна на U .*

Доказательство. Поскольку комплексная дифференцируемость или недифференцируемость функции в данной точке $a \in U$ зависит только от ее поведения в произвольно малой окрестности этой точки, достаточно установить, что голоморфно ограничение функции f на произвольный открытый круг, содержащийся в U . Стало быть, без ограничения общности можно считать, что U — открытый круг. Теперь будем действовать так же, как в доказательстве предложения 5.2. Именно, выберем раз и навсегда точку $z_0 \in U$ и положим $F(z) = \int_{[z_0; z]} f(t) dt$ для всякого $z \in U$ (через $[z_0; z]$ обозначен отрезок).

Тем же рассуждением, что в доказательстве предложения 5.2, устанавливаем, что $F'(z) = f(z)$ для всех z (в этом рассуждении используется только непрерывность функции f и тот факт, что интеграл от f по границе любого треугольника равен нулю). Итак, f — производная голоморфной функции F , а мы только что установили, что производная голоморфной функции также голоморфна. \square

Как известно, равномерно сходящиеся ряды (или, что равносильно, последовательности) из гладких (даже бесконечно дифференцируемых) функций действительного переменного почленно дифференцировать можно не всегда, а суммой равномерно сходящегося ряда из бесконечно дифференцируемых на отрезке функций может быть любая непрерывная функция, даже нигде не дифференцируемая. Сейчас мы увидим, что с голоморфными функциями таких безобразий не бывает.

Предложение 5.16. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — ряд из голоморфных на U функций, равномерно сходящийся на всяком компактном подмножестве $K \subset U$. Тогда сумма этого ряда (обозначим ее $f(z)$) — голоморфная функция на U , и имеет место равенство $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$, причем ряд в правой части также равномерно сходится на всяком компактном подмножестве $K \subset U$.

Доказательство. Из равномерной сходимости ряда на каждом компакте, содержащемся в U , вытекает, что функция f — сумма ряда — по крайней мере непрерывна. Если теперь $\Delta \subset U$ — произвольный треугольник, то ряд $\sum f_n$ равномерно сходится на его границе $\partial\Delta$, так как она компактна. Стало быть, из первой версии теоремы Коши вытекает, что

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0,$$

так что функция f удовлетворяет условиям теоремы Мореры и тем самым голоморфна.

Для доказательства равномерной сходимости ряда из производных на любом компакте $K \subset U$ поступим следующим образом. Пусть подмножество $K \subset U$ компактно. Каждая точка $a \in K$ содержится в каком-то замкнутом круге $\bar{D}_a \subset U$. Внутренности этих кругов покрывают K , и из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие; тем более K содержится в объединении конечного числа замкнутых кругов, содержащихся в U . Из равномерной сходимости на каждом из этих кругов будет следовать (ввиду конечности покрытия) равномерная сходимость на всем K .

Пусть теперь $\bar{D} = \{z: |z - a| \leq r\}$ — замкнутый круг радиуса r , содержащийся в U . Тогда для некоторого $r_1 > r$ замкнутый круг $\bar{D}_1 = \{z: |z - a| \leq r_1\}$ также содержится в U . Обозначим через $S_n = \sum_{j=1}^n f_n$

частичную сумму ряда $\sum f_n$, а через γ — границу большего круга \bar{D}_1 ; тогда для всякого $z \in \bar{D}$ в силу формулы (5.17) получаем:

$$f'(z) - S'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f(\zeta) - S_n(\zeta)) d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Так как при $z \in \bar{D}$ и $\zeta \in \gamma$ имеем $|\zeta - z| \geq r_1 - r$, получаем, оценивая интеграл по предложению 4.15, что для всякого $z \in \bar{D}$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |f'(z) - S'_n(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sup_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta) - S_n(\zeta)|}{(r_1 - r)^2} \cdot \text{length}(\gamma) = \\ &= \text{const} \cdot \sup_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta) - S_n(\zeta)|. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Так как $\sum f_n$ сходится к f равномерно на компактном множестве γ , правая часть в (5.20) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Значит, $\sum f'_n$ сходится к f' равномерно на \bar{D} , чего мы и хотели. \square

Теперь мы можем систематизировать и дополнить то, что мы знаем про взаимоотношение понятий «голоморфная функция» и «аналитическая функция».

Предложение 5.17. *Функция комплексного переменного аналитична тогда и только тогда, когда она голоморфна. Если функция f голоморфна в открытом круге $\{z: |z - a| < r\}$, то в этом круге она представляется в виде суммы следующего степенного ряда:*

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \dots \quad (5.21)$$

Разложение (5.21) называется, как и в вещественном случае, рядом Тейлора.

Доказательство. Всякая голоморфная функция аналитична по предложению 5.10. Чтобы доказать обратное, вспомним, что аналитическая функция в окрестности любой точки представляется в виде суммы сходящегося степенного ряда. Так как степенной ряд равномерно сходится на каждом компакте, содержащемся в его круге сходимости (предложение 1.19), голоморфность аналитических функций вытекает теперь из предложения 5.16, поскольку многочлены голоморфны.

Тот факт, что функция, голоморфная в круге с центром a , представляется в этом круге в виде суммы ряда по степеням $(z - a)$, установлен в процессе доказательства предложения 5.10. Наконец, выражения для коэффициентов ряда (5.21) можно получить по меньшей

мере двумя способами. Во-первых, можно заметить, что коэффициент при $(z - a)^n$ в формуле (5.15) ровно в $n!$ раз меньше, чем выражение для $f^{(n)}(a)$ из формулы (5.17). Во-вторых, можно заметить, что ввиду предложения 5.16 и равномерной сходимости степенных рядов на компактах разложение

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + c_n(z - a)^n + \dots,$$

существование которого утверждается предложением 5.10, можно неограниченное число раз дифференцировать; поэтому можно воспользоваться тем же рассуждением, которое (неформально) проводят в курсах математического анализа при угадывании выражения для коэффициентов ряда Тейлора: подставив $z = a$, получить, что $c_0 = f(a)$, затем почленно продифференцировать и подставить $z = a$ (получится, что $c_1 = f'(a)$) и т. д. \square

Из наших рассмотрений вытекают полезные верхние оценки для коэффициентов ряда Тейлора голоморфной функции, называемые неравенствами Коши.

Предложение 5.18 (неравенства Коши). Пусть функция f , голоморфная в круге $D = \{z: |z - a| < R\}$, разлагается в этом круге в степенной ряд

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a)^n + \dots$$

Тогда для всякого n имеем

$$|c_n| \leq \frac{\sup_{z \in D} |f(z)|}{R^n}. \quad (5.22)$$

(Разумеется, эти неравенства информативны, только если функция f ограничена в D .)

Доказательство. Положим $\sup_{z \in D} |f(z)| = M$. Если $M = +\infty$, то доказывать нечего, так что можно считать, что M конечно. Выберем число $\varepsilon > 0$. Ввиду формулы (5.16) имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R-\varepsilon} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

откуда ввиду неравенства (4.1) имеем

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{(R - \varepsilon)^{n+1}} \cdot 2\pi(R - \varepsilon) = \frac{M}{(R - \varepsilon)^n}.$$

Устремляя ε к нулю, получаем искомые неравенства. \square

У предложения 5.17 есть также важное «качественное» следствие.

Следствие 5.19. Если функция f голоморфна в окрестности точки a и при этом $f(a) = 0$, то либо f тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки a , либо в некоторой проколотой окрестности точки a функция f в нуль не обращается.

Доказательство. Если все коэффициенты ряда Тейлора для f в точке a обращаются в нуль, то f тождественно равна нулю в окрестности точки f . В противном случае разложение для f имеет вид

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots + c_n(z-a)^n + \dots,$$

где $k > 0$, $c_k \neq 0$ и ряд сходится в некотором круге D с центром в a . Если положить

$$g(z) = c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots + c_{k+n}(z-a)^n + \dots,$$

то, поскольку ряд в правой части также сходится в D , функция g корректно определена в круге D и является в нем голоморфной, а тем самым и непрерывной. Так как $g(a) = c_k \neq 0$, ввиду непрерывности существует окрестность $V \ni a$, на которой g не обращается в нуль. Следовательно, функция $f(z) = (z-a)^k g(z)$ не обращается в нуль нигде на $V \setminus \{a\}$, что и требовалось. \square

У следствия 5.19 есть важный глобальный аналог, называемый теоремой единственности или принципом аналитического продолжения.

Предложение 5.20. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество, и пусть $S \subset U$ — подмножество, имеющее в U предельную точку. Если $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфные функции, совпадающие на подмножестве $S \subset U$, то $f(z) = g(z)$ для всех $z \in U$.

Доказательство. Положим $f(z) - g(z) = \varphi(z)$. Нам дано, что $\varphi(z) = 0$ для всех $z \in S$, а надо доказать, что $\varphi(z) = 0$ для всех $z \in U$.

Пусть $a \in U$ — предельная точка множества S . По непрерывности имеем $\varphi(a) = 0$, и теперь следствие 5.19 показывает, что функция φ тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки a . Обозначим теперь через Z множество точек из U , в которых и сама функция φ , и ее производные всех порядков обращаются в нуль. Из сказанного выше следует, что $Z \ni a$, так что Z непусто. Далее, множество Z открыто: если $b \in Z$, то все коэффициенты ряда Тейлора для φ в точке b равны нулю, так что в некоторой окрестности точки b функция φ тождественно равна нулю, и эта окрестность, очевидно, лежит в Z . Наконец, множество $U \setminus Z$ также открыто. В самом деле, если $b \in U \setminus Z$, то $\varphi^{(k)}(b) \neq 0$ для некоторого k ; так как k -я производная голоморфной функции также голоморфна, она, в частности, и непрерывна, так что $\varphi^{(k)}$ не обращается в нуль на некото-

рой окрестности $V \ni b$, откуда $V \subset U \setminus Z$. Итак, множество U является объединением двух непересекающихся открытых подмножеств Z и $U \setminus Z$. Так как U связно, одно из этих множеств пусто, а другое совпадает со всем U . Поскольку $Z \neq \emptyset$, имеем $Z = U$, то есть функция φ тождественно равна нулю. \square

Разумеется, предложение 5.20 не выполняется для несвязного U . Если, например, $U = U_0 \cup U_1$, где множества U_0 и U_1 открыты и не пересекаются, то достаточно рассмотреть функцию $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, тождественно равную нулю, и функцию g , равную нулю на U_0 и единице на U_1 . Условие, что предельная точка множества Z лежит именно в U , отбросить также нельзя (см. упражнения).

В качестве первого приложения предложения 5.20 объясним, как с его помощью без всяких вычислений доказать стандартные тригонометрические тождества для функций комплексного переменного (ср. с задачей 2.7). Пусть, например, нам надо доказать тождество $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Положим $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$, $g(z) = 1$; обе эти функции голоморфны на всем \mathbb{C} , и они совпадают на подмножестве $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ в силу того, что мы знаем из курса анализа. Стало быть, f и g удовлетворяют условиям предложения 5.20, так что $f(z) = g(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Для доказательства тождеств, в которых участвует более одной переменной, надо произнести чуть больше слов. Например, чтобы без вычислений проверить, что

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \quad (5.23)$$

можно сначала для любого фиксированного $z \in \mathbb{R}$ рассмотреть левую и правую части (5.23) как голоморфные функции от w ; так как при всех $w \in \mathbb{R}$ они равны, принцип аналитического продолжения показывает, что они равны и при всех $w \in \mathbb{C}$. Тем самым тождество (5.23) проверено для всех $z \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$. Теперь для каждого $w \in \mathbb{C}$ рассмотрим левую и правую часть (5.23) как голоморфные функции от z ; мы уже знаем, что они совпадают для всех $z \in \mathbb{R}$, значит, они совпадают и для всех $z \in \mathbb{C}$.

Упражнения

5.1. Если f и g — непрерывные функции на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^2$ и $\gamma: [p; q] \rightarrow U$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ — кусочно-гладкий путь, то полагают

$$\int_{\gamma} (f dx + g dy) = \int_p^q (f(\gamma(t))x'(t) + g(\gamma(t))y'(t)) dt.$$

Пусть теперь f и g дифференцируемы в каждой точке U в смысле раздела 1.5 и при этом $\partial f/\partial y = \partial g/\partial x$ тождественно на U . Имитируя доказательство теоремы 5.1, покажите, что если $\Delta \subset U$ — треугольник, то $\int_{\partial\Delta} (f dx + g dy) = 0$.

(Непрерывность частных производных не предполагается, так что формулой Грина воспользоваться не выйдет!)

5.2. Пусть U , f и g такие же, как в предыдущей задаче, но при этом U выпукло. Покажите, что существует функция $F: U \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\partial F/\partial x = f$, $\partial F/\partial y = g$.

5.3. (а) Предположим, что функция f голоморфна на открытом множестве, содержащем замкнутый диск $\{z: |z - a| \leq r\}$. Докажите, что значение функции f в центре диска равно среднему арифметическому ее значений на границе:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

(Указание: формула Коши.)

(б) В тех же условиях покажите, что $f(a)$ равно среднему арифметическому значений функции в круге:

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\{z: |z-a| \leq r\}} f(x + iy) dx dy.$$

5.4. Положим

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Покажите, что функция f голоморфна на всем \mathbb{C} .

Для каждой из следующих функций найдите ее представление в виде степенного ряда.

5.5. $f(z) = \cos^2 z$ в окрестности нуля.

5.6. $f(z) = z/(z-1)^2$ в окрестности нуля.

5.7. $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ в окрестности нуля (используется ветвь логарифма, для которой $\ln 1 = 0$).

5.8. $f(z) = z/(z^2 + 2z + 5)$ в окрестности точки $z = -1$.

5.9. Найдите до слагаемого с z^4 включительно разложение функции $f(z) = \sqrt{\cos z}$ в окрестности нуля. Выбрана ветвь квадратного корня, для которой $\sqrt{1} = 1$.

5.10. Найдите $f'''(0)$, если $f(z) = e^{\sin z}$ (попытайтесь найти более разумное решение, чем с помощью формулы производной сложной функции).

5.11. Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a . Докажите, что для нее верна «формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано»: для всякого натурального n выполнено соотношение

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + o((z-a)^n).$$

5.12. Существует ли функция f , голоморфная в единичном круге, не равная тождественно нулю и удовлетворяющая условию $f(1 - 1/n) = 0$ для всех натуральных $n \geq 2$?

5.13. Существует ли функция f , голоморфная в единичном круге и удовлетворяющая условию $f(1/n) = (-1)^n/n^2$ для всех натуральных $n \geq 2$?

5.14. Функция f голоморфна в единичном круге $\{z: |z| < 1\}$; известно, что для всякого натурального $n \geq 2$ выполнено равенство $f(1/n) = (2n+1)/(3n+1)$. Чему может быть равно $f(3/4)$?

5.15. Докажите, что не существует голоморфной в единичном круге $\{z: |z| < 1\}$ функции f , для которой $f(1/n) = (2+n)/(3+n)$ для всякого натурального $n \geq 2$.

5.16. Пусть $\bar{D} = \{z: |z| \leq 1\}$ — замкнутый единичный диск и $\partial D = \{z: |z| = 1\}$ — единичная окружность. Верно ли, что всякую непрерывную функцию $f: \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ можно продолжить до функции, непрерывной на всем \bar{D} и голоморфной в его внутренности?

5.17. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое и связное множество, и пусть $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфные функции, не равные тождественно нулю. Покажите, что их произведение fg также не равно тождественно нулю.

5.18. Пусть опять $\bar{D} = \{z: |z| \leq 1\}$ — замкнутый единичный диск и $\partial D = \{z: |z| = 1\}$ — единичная окружность, а функция f непрерывна на \bar{D} и голоморфна в его внутренности. Покажите, что если f тождественно равна нулю на некоторой дуге в ∂D , то она тождественно равна нулю всюду. (Указание. Конечным числом сдвигов данной дуги можно покрыть всю окружность.)

Глава 6

Гомотопии и аналитическое продолжение

6.1. Гомотопии путей

Мы уже упоминали, что интеграл от голоморфной функции по пути, соединяющему две данные точки, не меняется при деформации этого пути, если в процессе деформации путь не выходит из области определения функции. В этой главе мы, помимо прочего, строго докажем это утверждение. Начнем с того, что аккуратно определим, что такое деформация пути.

До сих пор мы в основном имели дело с кусочно гладкими путями, но в этой главе нам понадобятся произвольные непрерывные пути (т. е. непрерывные отображения отрезков в комплексную плоскость). В случае, когда путь должен быть именно кусочно гладким, мы будем это отдельно оговаривать.

Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и пусть $\gamma_0, \gamma_1: [A; B] \rightarrow U$ — два непрерывных пути, соединяющих точки $p \in U$ и $q \in U$ (иными словами, $\gamma_0(A) = \gamma_1(A) = p$ и $\gamma_0(B) = \gamma_1(B) = q$). Будем считать, что γ_0 и γ_1 можно продеформировать друг в друга, если пути γ_0 и γ_1 можно включить в семейство $\{\gamma_s\}$ для всех действительных $s \in [0; 1]$. Надо только каким-то образом объяснить, что значит, что деформация путей непрерывна. Для этого положим $F(t, s) = \gamma_s(t)$; тогда F — отображение из прямоугольника $[A; B] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$ в U , где

$$[A; B] \times [0; 1] = \{(t, s): A \leq t \leq B, 0 \leq s \leq 1\}.$$

В качестве определения непрерывности деформации мы потребуем, чтобы отображение F было непрерывно. Мы пришли к следующему определению.

Определение 6.1. Пусть $\gamma_0, \gamma_1: [A; B] \rightarrow U$ — непрерывные пути в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, соединяющие точки p и q . Говорят,

что пути γ_0 и γ_1 *гомотопны*, если существует такое непрерывное отображение $F: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow U$, что $F(t, 0) = \gamma_0(t)$ и $F(t, 1) = \gamma_1(t)$ для всех $t \in [A; B]$, а также $F(A, s) = p$ и $F(B, s) = q$ для всех $s \in [0; 1]$.

Отображение F называется *гомотопией*, соединяющей пути γ_0 и γ_1 .

Условие « $F(A, s) = p$ и $F(B, s) = q$ для всех s » означает, что каждый из «промежуточных» путей $\gamma_s: t \mapsto F(t, s)$ также соединяет точки p и q . Все это проиллюстрировано рис. 6.1.

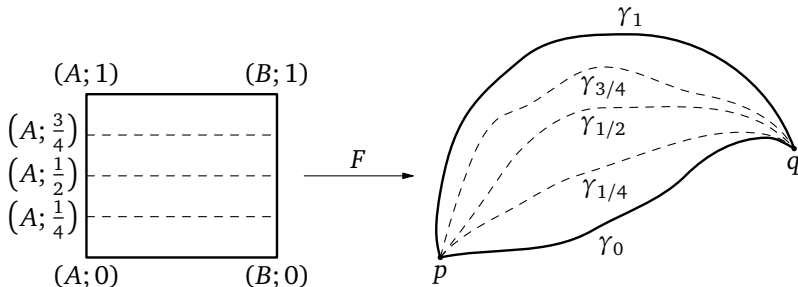


Рис. 6.1. Гомотопия между путями γ_0 и γ_1 , соединяющими точки p и q

Гомотопию из определения 6.1 мы будем иногда называть *гомотопией с закрепленными концами*.

Можно определить гомотопию и для замкнутых путей.

Определение 6.2. Пусть $\gamma_0, \gamma_1: [A; B] \rightarrow U$ — непрерывные замкнутые пути в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Говорят, что пути γ_0 и γ_1 *гомотопны*, если существует такое непрерывное отображение $F: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow U$, что $F(t, 0) = \gamma_0(t)$ и $F(t, 1) = \gamma_1(t)$ для всех $t \in [A; B]$, а также $F(A, s) = F(B, s)$ для всех $s \in [0; 1]$.

Отображение F называется *гомотопией* (точнее — гомотопией между замкнутыми путями), соединяющей пути γ_0 и γ_1 .

Условие « $F(A, s) = F(B, s)$ для всех s » означает, конечно, что все пути γ_s замкнуты.

Примеры негомотопных путей мы приведем немного позже — например, окажется, что два замкнутых кусочно гладких пути в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ гомотопны тогда и только тогда, когда совпадают их индексы относительно нуля. Сейчас мы рассмотрим простой, но важный пример ситуации, когда гомотопность имеет место.

Предложение 6.3. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — выпуклое открытое множество, и пусть $\gamma_0, \gamma_1: [A; B] \rightarrow U$ — либо два пути в U , соединяющие

одну и ту же пару точек p и q , либо два замкнутых пути. Тогда γ_0 и γ_1 гомотопны: в первом случае как пути, соединяющие p и q , во втором случае как замкнутые пути.

Доказательство. В обоих случаях искомую гомотопию

$$F: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow U$$

зададим формулой $F(t, s) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$. Поскольку множество точек вида $(1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$, $s \in [0; 1]$, есть не что иное, как отрезок с концами в точках $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$, а множество U по условию выпукло, имеем $F([A; B] \times [0; 1]) \subset U$, так что F — действительно отображение в U . Если γ_0 и γ_1 — замкнутые пути, то $\gamma_0(A) = \gamma_0(B)$ и $\gamma_1(A) = \gamma_1(B)$, откуда $F(A, s) = F(B, s)$ для всех s . Если γ_0 и γ_1 соединяют точки p и q , то $F(A, s) = (1 - s)p + sq = p$ для любого s , и аналогично для $F(B, s)$. Стало быть, в обоих случаях F является искомой гомотопией. \square

Гомотопия, построенная в этом доказательстве, называется *линейной гомотопией*.

Если между двумя кусочно гладкими путями $\gamma_0, \gamma_1: [A; B] \rightarrow U$ существует гомотопия $F: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow U$, то «промежуточные» пути $\gamma_s: t \mapsto F(t, s)$, будучи непрерывными, могут быть, вообще говоря, сколь угодно негладкими — хоть кривыми Пеано! Оказывается, однако, что если между кусочно гладкими путями на открытом множестве существует хоть какая-то гомотопия, то между ними можно построить и такую гомотопию, чтобы все промежуточные кривые также являлись кусочно гладкими. Сейчас мы докажем это (и даже более сильное) утверждение. Далее оно нам понадобится в разделе 6.3.

Лемма 6.4 (об улучшении гомотопии). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, и пусть $\gamma_0, \gamma_1: [A; B] \rightarrow U$ — два кусочно гладких пути, которые либо соединяют одну и ту же пару точек p и q , либо оба являются замкнутыми. Если γ_0 и γ_1 гомотопны (как пути с закрепленными концами — в первом случае, как замкнутые пути — во втором), то между ними существует такая гомотопия $G: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow U$ (также являющаяся в первом случае гомотопией путей с закрепленными концами, а во втором — гомотопией замкнутых путей), что для всякого $s \in [0; 1]$ путь $\gamma_s: [A; B] \rightarrow U$, $\gamma_s(t) = G(t, s)$, является кусочно гладким, а также для всякого $t \in [A; B]$ путь $\mu_t: [0; 1] \rightarrow U$, $\mu_t(s) = G(t, s)$, является кусочно гладким.

В доказательстве этой леммы (и не только в нем) нам понадобится один общеполитический факт; начнем с того, что сформулируем его и докажем.

Предложение 6.5 (лемма о лебеговом числе). Пусть $K \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ — компактное множество, и пусть $\{V_\alpha\}$ — такое семейство открытых подмножеств в \mathbb{C} , что $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что ε -окрестность каждой точки $z \in K$ целиком содержится в каком-то из множеств V_α .

В этой лемме компактное подмножество $K \subset \mathbb{C}$ можно заменить на компактное подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ с произвольным n , или даже на произвольное компактное метрическое пространство (и его открытое покрытие). Доказательство в этих более общих случаях дословно совпадает с тем, что мы приведем ниже. *Лебеговым числом*, соответствующим открытому покрытию $\{V_\alpha\}$, мы будем называть всякое $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условиям предложения.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Если лебегова числа для покрытия $\{V_\alpha\}$ не существует, то, в частности, на его роль не годится и никакое $1/n$, где n натуральное. Стало быть, для всякого натурального n существует такое $z_n \in K$, что $(1/n)$ -окрестность точки z_n не содержится ни в одном V_α . Так как K — компакт, у последовательности $\{z_n\}$ есть подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $z \in K$. Так как множества V_α покрывают все K , точка z содержится в каком-то множестве V_β ; поскольку V_β открыто, существует такое $\delta > 0$, что δ -окрестность точки z содержится в V_β . Пусть теперь k настолько велико, что $1/n_k < \delta/2$ и $|z_{n_k} - z| < \delta/2$. Из неравенства треугольника и неравенства $|z_{n_k} - z| < \delta/2$ ясно, что $(\delta/2)$ -окрестность точки z_{n_k} содержится в δ -окрестности точки z и тем самым в множестве V_β ; поскольку $1/n_k < \delta/2$, тем более $(1/n_k)$ -окрестность точки z_{n_k} содержится в V_β — противоречие. \square

Доказательство леммы 6.4. Пусть $F: [A; B] \times [0; 1]$ — гомотопия, устанавливающая гомотопность путей γ_0 и γ_1 . Поскольку U открыто, а отображение F непрерывно, для всякой точки $p \in [A; B] \times [0; 1]$ найдется такое открытое множество $V_p \subset \mathbb{R}^2$, содержащее p , что $F(V_p)$ содержится в некотором открытом круге $U_p \subset U$, содержащем $F(p)$. Применим к компактному множеству $[A; B] \times [0; 1] \subset \bigcup_p V_p$ лемму о лебеговом числе (предложение 6.5), и пусть ε — лебегово число, соответствующее покрытию множествами V_p . Разобьем теперь прямоугольник $[A; B] \times [0; 1]$ линиями, параллельными осям координат, на прямоугольники с диаметром, меньшим ε . Подробнее, выберем числа $A = t_0 < t_1 < \dots < t_m = B$ и $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ таким образом, чтоб диагональ каждого из прямоугольников

$$P_{jk} := [t_j, t_{j+1}] \times [s_k, s_{k+1}] = \{(t, s) : t_j \leq t \leq t_{j+1}, s_k \leq s \leq s_{k+1}\}$$

была меньше ε . По построению, для любых j и k множество $F(\Pi_{jk})$ содержится в открытом круге, который, в свою очередь, содержится в U . Поэтому для любых точек $p, q \in \Pi_{jk}$ отрезок, соединяющий $F(p)$ и $F(q)$, также содержится в U — этим наблюдением мы будем постоянно пользоваться.

Теперь будем строить искомую гомотопию G . Во-первых, мы обязаны положить $G(t, 0) = \gamma_0(t) = F(t, 0)$ и $G(t, 1) = \gamma_1(t) = F(t, 1)$ — тут у нас выбора нет. На втором шаге мы определим $G(t, s_k)$ для всех $t \in [A; B]$ и всех k , $0 < k < n$ (неравенства строгие, поскольку $G(t, s_0) = G(t, 0)$ и $G(t, s_n) = G(t, 1)$ уже заданы и трогать их мы не можем). Содержательно это означает, что каждый из путей

$$\gamma_{s_k} : t \mapsto F(t, s_k),$$

про который мы можем гарантировать только то, что он непрерывен, мы заменим на ломаную. Конкретно это делается таким образом: во-первых, полагаем $G(t_j, s_k) = F(t_j, s_k)$ (иными словами, «внутренние» вершины прямоугольников, на которые разбит большой прямоугольник $[A; B] \times [0; 1]$, отображаются отображением G в те же точки, что и раньше), а если $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, то

$$G(t, s_k) = F(t_j, s_k) + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} (F(t_{j+1}, s_k) - F(t_j, s_k)); \quad (6.1)$$

иными словами, когда t возрастает от t_j до t_{j+1} , точка $F(t, s_j)$ равномерно движется по прямой от $F(t_j, s_k)$ до $F(t_{j+1}, s_k)$. Поскольку, как мы отмечали выше, отрезок, соединяющий образы любых точек прямоугольника Π_{jk} , лежит в U , все точки $G(t, s_k)$ действительно лежат в U .

Остается определить $G(t, s)$ для s , отличных от точек раздела s_0, \dots, s_n . Для этого мы воспользуемся конструкцией линейной гомотопии. Именно, если $s_k \leq s \leq s_{k+1}$, а $t \in [A; B]$ произвольно, положим

$$G(t, s) = G(t, s_k) + \frac{s - s_k}{s_{k+1} - s_k} (G(t, s_{k+1}) - G(t, s_k)). \quad (6.2)$$

Опять-таки, когда s возрастает от s_k до s_{k+1} , точка $G(t, s)$ равномерно движется по прямой от $G(t, s_k)$ до $G(t, s_{k+1})$. Определенные так точки $G(t, s)$ действительно лежат в U по той же причине, что и выше.

Непрерывность определенного таким образом отображения G очевидна. Проверим кусочную гладкость отображений $t \mapsto G(t, s)$ для каждого фиксированного $s \in [0; 1]$. При $s = s_0 = 0$ или $s = s_n = 1$ эти отображения совпадают с γ_0 или γ_1 и тем самым кусочно глад-

ки по условию. При $s = s_k$, $0 < k < m$, эти отображения задаются формулами (6.1) и тем самым кусочно гладки (и даже кусочно линейны); наконец, если s отлично от всех s_j , то эти отображения, как явствует из формулы (6.2), являются линейными комбинациями двух кусочно гладких и тем самым также кусочно гладки.

Кусочная гладкость отображений $s \mapsto G(t, s)$ для каждого фиксированного $t \in [A; B]$ проверяется совершенно аналогично, и даже проще: из формулы (6.2) явствует, что вообще все эти отображения кусочно линейны. Наконец, из построения ясно, что отображение G является гомотопией с закрепленными концами (соответственно, гомотопией замкнутых путей), если таково отображение F . Все доказано. \square

6.2. Аналитическое продолжение

В гл. 2 мы обнаружили, что если бы была непрерывная функция \ln , для которой $\ln 1 = 0$, то, рассматривая значения $\ln(e^{it})$ при $t \in [0; 2\pi]$, из непрерывности мы получили бы, что $\ln 1$ должно равняться не 0, а $2\pi i$. Сейчас мы рассмотрим такого рода эффекты более систематически. Начнем с важного абстрактного определения.

Для данной точки $p \in \mathbb{C}$ рассмотрим множество всех пар (U, f) , где $U \ni p$ — окрестность и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Пары (U_1, f_1) и (U_2, f_2) будем называть эквивалентными, если функции f_1 и f_2 совпадают на некоторой окрестности точки p .

Определение 6.6. Ростками голоморфных функций в точке p называются классы эквивалентности пар (U, f) относительно этого отношения эквивалентности; класс эквивалентности пары (U, f) называется *ростком функции f в точке p* .

Множество ростков голоморфных функций в точке p обозначается \mathcal{O}_p .

Говоря неформально, росток функции в точке p — это функция, определенная в какой-то окрестности этой точки, для которой мы не интересуемся ничем, кроме поведения функции в сколь угодно малых окрестностях точки p .

Определение ростка, полностью аналогичное определению 6.6, можно дать и для других классов функций: гладких, непрерывных, даже для абсолютно произвольных функций (в некоторых ситуациях и это бывает полезно). В силу специфики голоморфных функций, однако, для их ростков есть простое явное описание.

Предложение 6.7. *Существует естественное взаимно однозначное соответствие между ростками голоморфных функций в точке*

$p \in \mathbb{C}$ и степенными рядами вида $\sum c_k(z-p)^k$ с положительным радиусом сходимости.

Доказательство. Это всего лишь утверждение о том, что функция голоморфна тогда и только тогда, когда она аналитична: если две голоморфные функции совпадают в окрестности p , то степенной ряд в p у них один и тот же, так как его коэффициенты выражаются через производные функции в точке p — таким путем ростку сопоставляется сходящийся степенной ряд. Обратно, всякий степенной ряд с положительным радиусом сходимости задает на своем круге сходимости голоморфную функцию, и теперь можно рассмотреть ее росток. \square

Определение 6.8. Множество всех ростков голоморфных функций в точке $p \in \mathbb{C}$ называется *локальным кольцом* голоморфных функций и обозначается \mathcal{O}_p .

Объединение множеств \mathcal{O}_p по всем $p \in \mathbb{C}$ обозначается \mathcal{O} .

Множество \mathcal{O}_p называется *кольцом*, потому что на его элементах легко определить сложение и умножение, удовлетворяющие всем аксиомам кольца (но мы, как правило, будем рассматривать всевозможные \mathcal{O}_p исключительно как множества).

В определении множества \mathcal{O} подразумевается, что подмножества $\mathcal{O}_p \subset \mathcal{O}$ при разных p не пересекаются. Более аккуратно говоря,

$$\mathcal{O} = \{(p, f) : p \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{O}_p\}.$$

Определение 6.9. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Подмножество $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, состоящее из ростков функции f во всевозможных точках $p \in U$, называется *окрестностью* в \mathcal{O} . Если $f \in \mathcal{O}$ и $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ — окрестность, содержащая f , то говорят, что \mathcal{U} — *окрестность ростка* f .

Замечание 6.10. Для знакомых с соответствующими определениями отмечу, что окрестности в \mathcal{O} , определенные выше, задают на \mathcal{O} базу топологии (и даже хаусдорфовой топологии — в последнем опять проявляется специфика голоморфных функций). Множество \mathcal{O} с этой топологией называется «пучок голоморфных функций на \mathbb{C} ». Техника пучков в этой книге не используется, так что далее на эту тему я распространяться не буду.

Отображение $\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$, ставящее в соответствие ростку $f \in \mathcal{O}_p$ точку $p \in \mathbb{C}$, по свойствам похоже на накрытие, и читатель, с накрытиями знакомый, найдет в формулировках и доказательствах предложений 6.14 и 6.15 ниже много общего с известными «теоремой о накрывающих путях» и «теоремой о накрывающей гомотопии». Но накрытием указанное отображение все же не является (это всего лишь

локальный гомеоморфизм), так что вывести эти результаты, просто сославшись на соответствующие факты о накрытиях, не получится.

Теперь все готово для того, чтобы дать определение аналитического продолжения.

Определение 6.11. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывный путь на комплексной плоскости (случай $\gamma(A) = \gamma(B)$ не исключается). Положим $\gamma(A) = p$, $\gamma(B) = q$, и пусть $f \in \mathcal{O}_p$. Аналитическим продолжением ростка f вдоль пути γ называется отображение $\Gamma: [A; B] \rightarrow \mathcal{O}$ со следующими свойствами:

- (1) $\Gamma(t) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ для всякого $t \in [A; B]$;
- (2) отображение Γ «непрерывно» в следующем смысле: если $t \in [A; B]$ и $\mathcal{U} \ni \Gamma(t)$ — окрестность ростка $\Gamma(t) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ в смысле определения 6.9, то существует такое $\delta > 0$, что из $|t' - t| < \delta$ следует включение $\Gamma(t') \in \mathcal{U}$.

Если Γ — аналитическое продолжение ростка $f \in \mathcal{O}_p$, то росток $\Gamma(B) \in \mathcal{O}_q$ называется *результатом аналитического продолжения ростка f вдоль пути γ* .

Разумеется, неправда, что всякий росток можно аналитически продолжить вдоль всякого пути (см. задачу 6.1).

Приведенное выше определение аналитического продолжения выглядит, в силу своей абстрактности, неприменимым на практике. У него, однако, есть элементарная и «практичная» переформулировка.

Предложение 6.12. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывный путь на комплексной плоскости. Положим $\gamma(A) = p$, $\gamma(B) = q$, и пусть f — росток голоморфной функции в точке p , а g — росток голоморфной функции в точке q . Тогда следующие два условия эквивалентны.

(1) Росток g — результат аналитического продолжения ростка f вдоль пути γ .

(2) Существует разбиение отрезка $[A; B]$ вида $A = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = B$, открытые подмножества $U_1, \dots, U_n \subset \mathbb{C}$ и голоморфные функции $f_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}$ со следующими свойствами:

- (а) $\gamma([t_j; t_{j+1}]) \subset U_j$ для всех j ;
- (б) на всяком пересечении $U_j \cap U_{j+1}$ функции f_j и f_{j+1} совпадают;
- (в) росток функции f_1 в точке p есть f , росток функции f_n в точке q есть g .

Выражаясь несколько менее аккуратно, можно сказать, что предложение 6.12 утверждает следующее: аналитическое продолжение ростка f в росток g вдоль кривой γ всегда можно получить, покрыв кривую γ цепочкой открытых множеств с голоморфными функциями на них, согласующимися на пересечениях.

Доказательство. Докажем сначала импликацию $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $\Gamma: [A; B] \rightarrow \mathcal{O}$ — отображение, задающее аналитическое продолжение f в g вдоль γ . Для всякого $t \in [A; B]$ рассмотрим росток $\Gamma(t) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$. Росток $\Gamma(t)$ задается какой-то голоморфной функцией f_t на открытом множестве $U_t \ni \gamma(t)$; уменьшив, если нужно, множество U_t , можем считать, что это открытый круг с центром в $\gamma(t)$ — на росток это не повлияет. Пусть теперь $\mathcal{U}_t \subset \mathcal{O}$ — множество ростков функции f_t во всех точках круга U_t . Множество \mathcal{U}_t представляет собой окрестность ростка $\Gamma(t)$ в смысле определения 6.9; поэтому, в силу «непрерывности» отображения Γ , существует окрестность $V_t \ni t$, $V_t \subset [A; B]$, для которой $\Gamma(V_t) \subset \mathcal{U}_t$.

Выбирая конечное подпокрытие из покрытия отрезка этими V_t , получаем разбиение $A = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = B$ и набор окрестностей $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n \subset \mathcal{O}$, для которых $\Gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset \mathcal{U}_j$, а сама \mathcal{U}_j — множество ростков голоморфной функции $f_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}$ во всех точках открытого круга $U_j \supset [t_j, t_{j+1}]$. Из последнего замечания, в частности, явствует, что $f = \Gamma(t_1) = \Gamma(A)$ — росток функции f_1 в точке $p = \gamma(A)$ и, аналогично, $g = \Gamma(B)$ — росток функции f_n в точке $q = \Gamma(B)$. Тем самым мы проверили выполнение условий (а) и (в); для проверки условия (б) заметим, что в точке $\gamma(t_{j+1})$ ростки функций f_j и f_{j+1} совпадают (с ростком $\Gamma(t_{j+1}) \in \mathcal{O}_{\gamma(t_{j+1})}$), так что функции $f_j, f_{j+1}: U_j \cap U_{j+1} \rightarrow \mathbb{C}$ совпадают на некоторой окрестности точки $\gamma(t_{j+1}) \in U_j \cap U_{j+1}$. Поскольку U_j и U_{j+1} — круги, пересечение $U_j \cap U_{j+1}$ выпукло и тем самым связно (всякие две точки можно соединить отрезком). Стало быть, по принципу аналитического продолжения f_j совпадает с f_{j+1} на $U_j \cap U_{j+1}$ и условие (б) также выполнено. Мы доказали импликацию $(1) \Rightarrow (2)$.

Импликация $(2) \Rightarrow (1)$ проверяется быстрее. Именно, пусть нам даны t_j , U_j и f_j , удовлетворяющие условиям (а), (б) и (в). Построим отображение $\Gamma: [A; B] \rightarrow \mathcal{O}$, положив

$$\Gamma(t) = (\text{росток функции } f_j \text{ в точке } \gamma(t)), \quad \text{если } t \in [t_j; t_{j+1}].$$

Заметим, что это определение корректно: если t принадлежит двум соседним отрезкам разбиения, т. е. если $t = t_j$ для некоторого j , то, коль скоро функции f_{j-1} и f_j совпадают на $U_{j-1} \cap U_j \ni \gamma(t_j)$, их ростки в точке $\gamma(t_j)$ одинаковы. Остается проверить «непрерывность» отображения Γ в смысле определения 6.11. Для этого предположим, что $t \in [t_j; t_{j+1}]$, и пусть $\mathcal{U} \ni \Gamma(t)$ — окрестность в \mathcal{O} . Если \mathcal{U} — множество ростков функции $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ во всех точках открытого множества $U \subset \mathbb{C}$, то, поскольку $\mathcal{U} \ni \Gamma(t)$, росток функции f в точке $\Gamma(t)$ совпадает с ростком функции f_j в той же точке; стало быть, су-

существует открытый круг $D \ni \Gamma(t)$, $D \subset U \cap U_j$, на котором функции f и f_j совпадают. Если теперь $\delta > 0$ столь мало, что из $|t' - t| < \delta$ вытекает, что $\gamma(t') \in U$, то при всех t' , лежащих в δ -окрестности точки t , росток $\Gamma(t') \in \mathcal{O}_{\gamma(t')}$ есть росток функции f_j , она же f , так что $\Gamma(t') \in \mathcal{U}$. Все доказано. \square

Предложение 6.12 показывает, что мы уже знакомы с различными примерами аналитического продолжения вдоль пути. Например, если ветвь логарифма, определенную в окрестности точки 1 и заданную условием $\ln(1) = 0$, подвергнуть аналитическому продолжению вдоль окружности $\{z: |z| = 1\}$, ориентированной против часовой стрелки, то получится ветвь логарифма, определенная в окрестности точки 1, для которой $\ln(1) = 2\pi i$. Множества U_i и функции f_i можно выбрать, скажем, так:

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0], & f_1(z) &= \ln z, & \operatorname{Im} f(z) &\in (-\pi; \pi); \\ U_2 &= \mathbb{C} \setminus [0; +\infty), & f_2(z) &= \ln z, & \operatorname{Im} f(z) &\in (0; 2\pi); \\ U_3 &= U_1, & f_3(z) &= \ln z, & \operatorname{Im} f(z) &\in (\pi; 3\pi). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно установить, что всякий росток функций $\ln z$ и $\sqrt[n]{z}$ для натурального n (естественно, в точке, отличной от нуля) допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути, не проходящего через нуль. Более того, если f — голоморфная функция на открытом множестве U , то всякий росток функций $\ln f$ или $\sqrt[n]{f}$ допускает аналитическое продолжение по любому пути, не проходящему через точки, где f обращается в нуль.

Вот еще одно почти очевидное, но полезное следствие предложения 6.12.

Следствие 6.13. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывный путь, соединяющий точки p и q , вдоль которого возможно аналитическое продолжение ростка $f \in \mathcal{O}_p$ в росток $g \in \mathcal{O}_q$. Если V — открытое множество, содержащее $\gamma([A; B])$, и $\varphi: V \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, то вдоль γ возможно аналитическое продолжение ростка $\varphi \circ f$ в росток $\varphi \circ g$.

(Что такое композиция функции с ростком, читатель поймет самостоятельно.)

Доказательство. В самом деле, если аналитическое продолжение f в g осуществляется посредством открытых множеств U_j и функций f_j , то продолжение $\varphi \circ f$ в $\varphi \circ g$ получается с помощью открытых множеств $U_j \cap V$ и функций $\varphi \circ f_j$. \square

Докажем теперь два общих факта про аналитическое продолжение.

Предложение 6.14. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывный путь на комплексной плоскости, соединяющий точки $p = \gamma(A)$ и $q = \gamma(B)$. Если аналитическое продолжение ростка $f \in \mathcal{O}_p$ вдоль пути γ существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть $\Gamma, \Gamma_1: [A; B] \rightarrow \mathcal{O}$ — два аналитических продолжения ростка f вдоль пути γ ; мы покажем, что $\Gamma(t) = \Gamma_1(t)$ для всех $t \in [A; B]$, что теореме, очевидно, и докажет.

Для этого обозначим через $E \subset [A; B]$ множество таких значений параметра C , $A < C \leq B$, что $\Gamma(t) = \Gamma_1(t)$ при всех $t \in [A; C]$; в условии сказано, что $E \ni A$, а нам надо показать, что $E = [A; B]$.

Покажем сначала, что если $t_0 \in E$, $t_0 < C$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $t_0 + \varepsilon \in E$. В самом деле, пусть $\Gamma(t_0) = \Gamma_1(t_0)$ — росток функции $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ в точке $\gamma(t_0) \in U$. Обозначим через \mathcal{U} множество ростков функции f во всех точках множества U ; ввиду «непрерывности» отображений Γ и Γ_1 существует такое $\delta > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$ имеем $\Gamma(t) \in \mathcal{U}$, $\Gamma_1(t) \in \mathcal{U}$. Поскольку по определению множества \mathcal{U} и аналитического продолжения как $\Gamma(t)$, так и $\Gamma_1(t)$ является ростком функции f в точке $\gamma(t)$, получаем $[t_0; t_0 + \delta) \subset E$, так что, скажем, $t_0 + \delta/2 \in E$.

Покажем теперь, что $\sup E \in E$. В самом деле, по определению множества E имеем $t \in E \Rightarrow [A; t] \subset E$.

Положим теперь $\sup E = t_0$; если $t_0 \notin E$, то из сказанного выше вытекает, что $[A; t_0) \subset E$. Пусть $\Gamma(t_0)$ и $\Gamma_1(t_0)$ — ростки в точке $\gamma(t_0)$ функций f и f_1 соответственно; не ограничивая общности, можно считать, что и f , и f_1 определены на одном и том же открытом круге $U \ni \gamma(t_0)$ (вместо круга подошло бы любое связное открытое множество). Обозначим через \mathcal{U} множество ростков функции f во всех точках U , а через \mathcal{U}_1 — множество ростков функции f_1 во всех точках U . Ввиду «непрерывности» отображений Γ и Γ_1 существует такое $\delta > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$ имеем $\Gamma(t) \in \mathcal{U}$, $\Gamma_1(t) \in \mathcal{U}_1$. Так как $t_0 = \sup E$, существует $t_1 \in E$, для которого $t_1 < t$ и $|t_1 - t| < \delta$. Тогда

$$\Gamma(t) = \Gamma_1(t) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_1.$$

Следовательно, ростки функций f и f_1 в точке $\gamma(t_1) \in U$ совпадают — они оба равны $\Gamma(t) = \Gamma_1(t)$. Иными словами, $f = f_1$ на некоторой окрестности точки $\gamma(t)$, содержащейся в U ; ввиду связности множества U и принципа аналитического продолжения имеем $f = f_1$ на U ; в частности, ростки функций f и f_1 в точке $\gamma(t_0)$ совпадают, так что $\Gamma(t_0) = \Gamma_1(t_0)$; поскольку $[A; t_0) \subset E$, получаем, что $t_0 \in E$.

Итак, множество E обладает следующими свойствами: если $t \in E$, то $[A; t] \subset E$; если $t < B$ лежит в E , то и некоторая окрест-

ность точки t лежит в E ; $\sup E \in E$. Из этих трех свойств очевидно, что $E = [A; B]$, и все доказано. \square

Второе свойство аналитического продолжения касается продолжений одного и того же ростка вдоль гомотопных путей.

Предложение 6.15. Пусть $F: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — гомотопия с закрепленными концами путей, соединяющих точки p и q , так что $F(A, s) = p$ для всех $s \in [0; 1]$ и $F(B, s) = q$ для всех $s \in [0; 1]$. Пусть $f \in \mathcal{O}_p$ — росток голоморфной функции в точке p , и предположим, что f допускает аналитическое продолжение вдоль каждого промежуточного пути $\gamma_s: t \mapsto F(t, s)$.

Тогда результаты аналитических продолжений ростка f вдоль всех путей γ_s (в частности, вдоль путей γ_0 и γ_1) совпадают.

Предложение 6.15 называется теоремой о монодромии, хотя, возможно, правильнее было бы назвать его теоремой об отсутствии монодромии. Дело в том, что о монодромии чаще всего говорят в ситуации, когда «переносы» чего-то вдоль двух негомотопных путей (в нашем случае «что-то» — ростки голоморфных функций) приводят к двум разным результатам.

Доказательство. Пусть в результате аналитического продолжения ростка f вдоль пути γ_s , $s \in [0; 1]$, получается росток $g \in \mathcal{O}_q$. Покажем, что в этом случае существует такое $\varepsilon_s > 0$, что для всякого s_1 , $|s_1 - s| < \varepsilon_s$, в результате аналитического продолжения f вдоль γ_{s_1} также получится g . Поскольку в силу компактности отрезка (известной под названием «лемма Гейне—Бореля») отрезок $[0; 1]$ можно покрыть конечным числом ε_s -окрестностей точек $s \in [0; 1]$, т. е. конечным числом интервалов, в пределах каждого из которых результат аналитического продолжения ростка f не меняется, отсюда явствует, что этот результат один и тот же для всех s .

Теперь докажем сформулированное выше утверждение про γ_s . По предложению 6.12 существуют разбиение $A = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = B$, открытые множества U_1, \dots, U_n , для которых $U_j \supset \gamma_s([t_j; t_{j+1}])$, и голоморфные функции $f_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}$, для которых f_j и f_{j+1} совпадают на $U_j \cap U_{j+1}$, f — росток функции f_1 в точке $p = F(0, s)$ и g — росток функции g_n в точке $q = F(1, s)$. Покажем, что для каждого j , $1 \leq j \leq n$, найдется такое $\delta_j > 0$, что $\gamma_{s'}([t_j; t_{j+1}]) \subset U_j$, как только $|s' - s| < \delta_j$. Это доказывается стандартным рассуждением с использованием компактности. Именно, обозначим прямоугольник $[A; B] \times [0; 1]$ через Π . Поскольку отображение $F: \Pi \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывно и образ отрезка, соединяющего (t_j, s) и (t_{j+1}, s) , содержится в открытом множестве U_j , для каждой точки $(t, s) \in \Pi \subset \mathbb{R}^2$,

$t_j \leq t \leq t_{j+1}$, существует такой открытый круг $D_t \subset \mathbb{R}^2$ с центром в точке (t, s) , что $F(D_t) \subset U_j$. Ввиду компактности отрезков, соединяющий (t_j, s) и (t_{j+1}, s) , содержится в объединении конечного числа таких кругов $D_1 \cup \dots \cup D_m$; следовательно, существует такое $\delta_j > 0$, что прямоугольник $[A; B] \times [s - \delta_j; s + \delta_j]$ содержится в объединении кругов D_j , так что $F([A; B] \times [s - \delta_j; s + \delta_j]) \subset U_j$. Проведем эту конструкцию для каждого j , $1 \leq j \leq n$, и положим $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Если теперь $|s' - s| < \delta$, то при $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $1 \leq k \leq n$, имеем $\gamma_{s'}(t) = F(t, s) \in U_k$, так что набор открытых множеств U_1, \dots, U_n и функций f_1, \dots, f_n задает аналитическое продолжение f (ростка функции f_1 в точке p) в g (росток функции g_1 в точке q) вдоль кривой $\gamma_{s'}$. Иными словами, результат продолжения f вдоль $\gamma_{s'}$ один и тот же при всех s' , лежащих в δ -окрестности точки s , — именно этого нам и недоставало, чтоб завершить доказательство предложения. \square

Полезное применение теоремы о монодромии — результат о построении голоморфных функций на односвязных множествах. Сначала дадим определение.

Определение 6.16. Открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ называется *односвязным*, если выполняются следующие два условия:

- (1) U связно;
- (2) если $p, q \in U$ и если $\gamma_0, \gamma_1: [A; B] \rightarrow U$ — два пути, соединяющие p и q , пути γ_0 и γ_1 гомотопны с закрепленными концами.

Конструкция линейной гомотопии показывает, что всякое выпуклое открытое множество односвязно. Далее, если между открытыми множествами U_1 и U_2 существует «гомеоморфизм» $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ (то есть непрерывное биективное отображение, обратное к которому также непрерывно) и одно из этих множество односвязно, то односвязно и другое: если $F: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow U_1$ — гомотопия между путями γ_0 и γ_1 в U_1 , то $\varphi \circ F$ — гомотопия между путями $\varphi \circ \gamma_1$ и $\varphi \circ \gamma_2$ в U_2 .

Предложение 6.17. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — односвязное открытое множество, $p \in U$ и $f \in \mathcal{O}_p$ — росток голоморфной функции в точке p . Если росток f допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути в U , то существует единственная голоморфная функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, росток которой в точке p совпадает с f .

Доказательство. Для всякой точки $q \in U$ соединим p и q путем γ и проведем аналитическое продолжение f вдоль пути γ . Ввиду теоремы о монодромии и односвязности множества U результат от выбора пути не зависит; за $f(q)$ примем значение полученного ростка в точке q . Голоморфность функции f очевидна из построения, а

ее единственность вытекает из связности множества U и принципа аналитического продолжения. \square

6.3. Снова теорема Коши

Вернемся еще один (и последний) раз к теореме Коши. Теперь мы готовы, наконец, аккуратно сформулировать, что означает утверждение «интеграл от голоморфной функции не меняется при деформации пути», и это утверждение доказать.

Теорема 6.18 (теорема Коши, версия 4). Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Предположим, что $\gamma_0, \gamma_1: [A; B] \rightarrow U$ — кусочно гладкие пути, причем либо пути γ_0 и γ_1 соединяют одну и ту же пару точек $p, q \in U$, либо оба эти пути замкнутые. Если γ_0 и γ_1 гомотопны (в первом случае — с закрепленными концами, во втором случае — как замкнутые пути), то $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$.

Доказательство. Ввиду леммы 6.4 (об улучшении гомотопии) можно считать, что гомотопия $F: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow U$, задающая гомотопность γ_0 и γ_1 , обладает следующими свойствами: каждый путь $\gamma_s: t \mapsto F(t, s)$, $s \in [0; 1]$, является кусочно гладким, и каждый путь $s \mapsto F(t, s)$, $t \in [A; B]$, также является кусочно гладким. Обозначим прямоугольник $[A; B] \times [0; 1]$ через $\Pi \subset \mathbb{R}^2$, и пусть $\mu: [P; Q] \rightarrow \partial\Pi$, где $[P; Q] \subset \mathbb{R}$ — некоторый отрезок, — биективная кусочно линейная параметризация границы прямоугольника Π , при которой она обходится против часовой стрелки. Ввиду свойств, которыми обладает гомотопия F , композиция $F \circ \mu: [P; Q] \rightarrow U$ является кусочно гладким путем в U . Я утверждаю, что

$$\int_{F \circ \mu} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz. \quad (6.3)$$

В самом деле, ограничение $F \circ \mu$ на нижнее основание прямоугольника Π (т. е. на $[A; B] \times \{0\}$) — не что иное, как путь γ_0 (с линейной возрастающей заменой параметризации), так что интеграл от $f(z) dz$ по этой части пути $F \circ \mu$ равен $\int_{\gamma_0} f(z) dz$. Аналогично,

интеграл от $f(z) dz$ по ограничению на верхнее основание прямоугольника равен $-\int_{\gamma_1} f(z) dz$, так как этот участок пути $F \circ \mu$ есть путь γ_1 , проходимый в обратном направлении (формально гово-

ря, это путь γ_1 с линейной убывающей заменой параметризации). Чтобы установить равенство (6.3), остается проверить, что сумма интегралов по участкам пути $F \circ \mu$, соответствующим боковым сторонам прямоугольника, равна нулю. В случае, когда F — гомотопия с закрепленными концами, это верно даже для каждого из слагаемых по отдельности: F отображает каждую из боковых сторон в точку, так что ограничения $F \circ \mu$ на боковые стороны — «постоянные» пути, интегралы по которым всегда равны нулю. Если же F — гомотопия замкнутых путей, то $F(0, s) = F(1, s)$ для любого $s \in [0; 1]$, так что два участка $F \circ \mu$, соответствующие боковым сторонам, — это один и тот же путь, но проходимый в противоположных направлениях; интегралы от одной и той же функции по некоторому пути и по тому же пути, проходимому в обратном порядке, в сумме дают нуль.

Итак, мы установили равенство (6.3); стало быть, для доказательства теоремы нам достаточно проверить, что левая часть этого равенства равна нулю. Для этого заметим, что ввиду непрерывности отображения F для каждой точки $x \in \Pi$ существует такая ее окрестность $V_x \ni x$, $V_x \subset \mathbb{R}^2$, что $F(V_x \cap \Pi)$ содержится в некотором открытом круге $D_x \subset U$. По предложению 6.5 у покрытия $\Pi \subset \bigcup_x V_x$

существует «лебегово число» $\varepsilon > 0$, обладающее тем свойством, что ε -окрестность всякой точки $y \in \Pi$ содержится в некотором V_x . Разобьем теперь прямоугольник Π с помощью отрезков, параллельных его сторонам, на конечное число прямоугольников, диаметры которых меньше ε . Если Π' — любой из таких маленьких прямоугольников, то Π' содержится в ε -окрестности какой-то¹ своей вершины и тем самым в какой-то из окрестностей V_x ; следовательно, $F(\Pi')$ содержится в каком-то открытом круге D_x , который, в свою очередь, содержится в U . Пусть $\mu': [P'; Q'] \rightarrow \partial\Pi'$ — биективная кусочно линейная параметризация границы прямоугольника Π' с положительным направлением обхода. Поскольку гомотопия F является «улучшенной», композиция $F \circ \mu'$ — замкнутый кусочно линейный путь, так что интеграл $\int_{F \circ \mu'} f(z) dz$ корректно определен. Поскольку образ

этого пути лежит в открытом круге $D_x \subset U$, имеем $\int_{F \circ \mu'} f(z) dz = 0$ по

теореме 5.3 (интеграл по замкнутому пути от функции, голоморфной на выпуклом множестве, равен нулю). Просуммируем теперь

¹Любой, разумеется, но это неважно.

интегралы $\int_{F \circ \mu'} f(z) dz$ по всем маленьким прямоугольникам P' . По доказанному каждое из слагаемых равно нулю; с другой стороны, сумма этих интегралов равна $\int_{F \circ \mu} f(z) dz$: интеграл по каждой из сторон маленьких прямоугольников, лежащих строго внутри Π , встречается в сумме дважды и с противоположными знаками, а интегралы по участкам путей, соответствующим остальным сторонам, складываются в интеграл по $F \circ \mu$. Стало быть, левая сторона в (6.3) равна нулю и теорема доказана. \square

6.4. Снова индексы кривых

В качестве применения всего вышеизложенного мы получим (в простейшем из нетривиальных случаев) гомотопическую классификацию замкнутых путей.

Определение 6.19. Пусть $a \in \mathbb{C}$, и пусть $0 \leq r < R \leq +\infty$. Кольцом с центром a на комплексной плоскости называется множество $\{z: r < |z - a| < R\}$.

В частности, кольцом считается и плоскость без точки, и круг с выколотым центром, и дополнение к замкнутому кругу.

Предложение 6.20. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — кольцо с центром в a , и пусть γ_0 и γ_1 — кусочно гладкие замкнутые пути в U . Тогда следующие два утверждения равносильны:

- (1) γ_0 и γ_1 гомотопны как замкнутые пути;
- (2) $\text{Ind}_a \gamma_0 = \text{Ind}_a \gamma_1$.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2) следует из четвертой версии теоремы Коши (теорема 6.18) и определения индекса кривой через интеграл: если γ_0 и γ_1 гомотопны, то

$$\text{Ind}_a \gamma_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - a} = \text{Ind}_a \gamma_1.$$

Для доказательства импликации (2) \Rightarrow (1) положим

$$\tilde{U} = \{z: \ln r < \text{Re } z < \ln R\}$$

(подразумевается, что $\ln 0 = -\infty$, $\ln(+\infty) = +\infty$.) Отображение $z \mapsto a + e^z$ отображает \tilde{U} на кольцо U .

Ввиду леммы 4.18 существуют такие кусочно гладкие функции $\varphi_0, \varphi_1: [A; B] \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\gamma_0(t) = a + |\gamma_0(t) - a|e^{i\varphi_0(t)}, \quad \gamma_1(t) = a + |\gamma_1(t) - a|e^{i\varphi_1(t)}.$$

Положим теперь

$$\tilde{\gamma}_0(t) = \ln |\gamma_0(t) - a| + i\varphi_0(t), \quad \tilde{\gamma}_1(t) = \ln |\gamma_1(t) - a| + i\varphi_1(t).$$

Между путями $\tilde{\gamma}_0$ и $\tilde{\gamma}_1$ в выпуклом открытом множестве U можно построить линейную гомотопию $\tilde{F}: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow \tilde{U}$ следующим образом:

$$\tilde{F}: (t, s) \mapsto (1 - s)\tilde{\gamma}_0(t) + s\tilde{\gamma}_1(t).$$

Если теперь положить $F(t, s) = a + e^{\tilde{F}(t, s)}$, то получится гомотопия путей в U , для которой $F(t, 0) = \gamma_0(t)$, $F(t, 1) = \gamma_1(t)$. Такая конструкция возможна и для совершенно произвольных путей γ_0 и γ_1 в U , но если γ_0 и γ_1 замкнуты, а их индексы совпадают, то F оказывается гомотопией замкнутых путей. В самом деле, если $\text{Ind}_a \gamma_0 = \text{Ind}_a \gamma_1 = n$, то ввиду предложения 4.19 имеем $\varphi_0(B) - \varphi_0(A) = \varphi_1(B) - \varphi_1(A) = 2\pi n$, так что для всякого $s \in [0; 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{F}(1, s) - \tilde{F}(0, s) &= (1 - s)(\tilde{\gamma}_0(1) - \tilde{\gamma}_0(0)) + s(\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}_1(0)) = \\ &= (1 - s)2\pi in + s \cdot 2\pi in = 2\pi in, \end{aligned}$$

откуда $F(1, s) = F(0, s)$. Значит, F задает гомотопию γ_0 и γ_1 как замкнутых путей, и все доказано. \square

Для круга, проколотого не обязательно в центре, гомотопический класс замкнутого пути также полностью определяется его индексом.

Предложение 6.21. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — открытый круг, и пусть $a \in D$. Если γ_0 и γ_1 — два замкнутых кусочно гладких пути в $D \setminus \{a\}$, то они гомотопны как замкнутые пути тогда и только тогда, когда $\text{Ind}_a \gamma_0 = \text{Ind}_a \gamma_1$.

Доказательство. То, что индексы у гомотопных путей совпадают, по-прежнему следует из нашей последней версии теоремы Коши (теорема 6.18). Обратно, пусть $\text{Ind}_a \gamma_0 = \text{Ind}_a \gamma_1$; покажем, что эти замкнутые пути гомотопны. Для этого выберем какой-нибудь замкнутый круг $D' \subset D$ с центром в точке a . Если подвергнуть γ_0 и γ_1 гомотетии с центром a и подходящим коэффициентом $k \in (0; 1)$, то получатся замкнутые пути γ'_0 и γ'_1 , лежащие в $D' \setminus \{a\}$. Легко видеть, что γ_0 и γ'_0 , а также γ_1 и γ'_1 гомотопны как замкнутые пути: например, гомотопию между γ_0 и γ'_0 можно задать формулой

$$(t, s) \mapsto a + (1 - s + sk)(\gamma_0(t) - a)$$

(все промежуточные кривые гомотетичны γ_0 , коэффициент гомотетии равномерно убывает от 1 до k). Стало быть,

$$\text{Ind}_a \gamma'_0 = \text{Ind}_a \gamma_0 = \text{Ind}_a \gamma_1 = \text{Ind}_a \gamma'_1,$$

так что по предложению 6.20 пути γ'_0 и γ'_1 гомотопны в $D' \setminus \{a\}$ и тем более в $D \setminus \{a\}$. Так как отношение гомотопности транзитивно (см. задачу 6.5), γ_0 и γ_1 также гомотопны в $D \setminus \{a\}$, что и требовалось. \square

Замечание 6.22. В предложении 6.21 можно заменить круг D на произвольное односвязное открытое множество.

А вот обобщить это предложение в другом направлении не получается: если выколоть из круга точки a_1, \dots, a_k , где $k > 1$, то гомотопический класс замкнутого пути γ в $D \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ не определяется индексами γ относительно точек a_1, \dots, a_k : всегда можно найти негомотопные замкнутые пути γ_0 и γ_1 , для которых $\text{Ind}_{a_j} \gamma_0 = \text{Ind}_{a_j} \gamma_1$ при $1 \leq j \leq k$. См. пример на рис. 6.2.

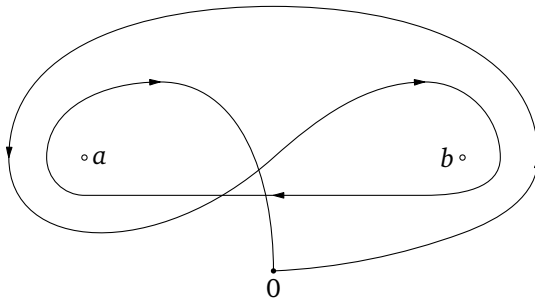


Рис. 6.2. Замкнутый путь, выходящий из нуля, имеет индекс 0 относительно точки a и индекс 0 относительно точки b — так же, как «постоянный путь», сводящийся к одной точке. Тем не менее в $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ стянуть этот путь в точку нельзя.

Упражнения

6.1. Докажите, что следующие ростки голоморфных функций не допускают аналитического продолжения вдоль отрезка $[-1; 1]$ с направлением от 1 к -1 :

- (а) росток функции $1/z$ в точке 1;
- (б) росток функции \sqrt{z} в точке 1, $\sqrt{1} = 1$.

6.2. В окрестности точки $z = 4$ выбрана однозначная ветвь функции $f(z) = \sqrt{z^2 + 9}$, для которой $f(4) = 5$. Эту функцию подвергли аналитическому продолжению в точку $z = -4$ вдоль следующих путей:

- (а) полуокружность $|z| = 4$, $\text{Im } z > 0$;

(б) полуокружность $|z| = 4$, $\operatorname{Im} z < 0$;

(в) отрезок $[-4; 4]$.

Для каждого из этих случаев укажите, чему равно $f(-4)$.

6.3. На открытом множестве U , изображенном на рис. 6.3, выбрана однозначная ветвь функции \ln , для которой $\ln 1 = 0$. Чему равно $\ln(3i)$?

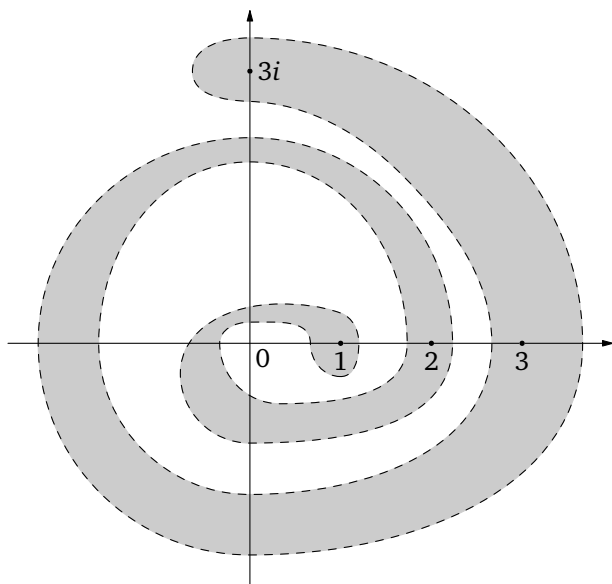


Рис. 6.3. $\ln 1 = 0$; $\ln(3i) = ?$

6.4. Рассмотрим в точке 0 росток функции $f(z) = \sqrt{(z-1)(z-2)}$, для которого $f(0) = 0$.

(а) Опишите результат аналитического продолжения этого ростка вдоль замкнутой кривой γ на рис. 6.4.

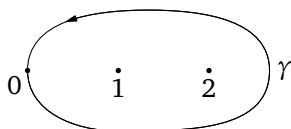


Рис. 6.4.

(б) Найдите значение интеграла $\int_{\gamma} \sqrt{(z-1)(z-2)} dz$.

В пункте (б) интеграл следует понимать как «интеграл Римана» из задачи 4.8: в процессе аналитического продолжения f вдоль γ значение функции f в каждой точке кривой однозначно определено. В дальнейшем вы научитесь находить такие интегралы легко и быстро, но сейчас придется немного «поработать руками».

6.5. Покажите, что отношение гомотопности является отношением эквивалентности на множестве всех путей в U , соединяющих заданные точки p и q .

6.6. Докажите, что любой непрерывный путь в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ гомотопен кусочно гладкому и, более того, кусочно линейному (подразумевается гомотопия с закрепленными концами).

6.7. Докажите, что теорема 6.15 перестает быть верной, даже если вдоль только одного из промежуточных путей γ_s аналитическое продолжение невозможно.

6.8. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — открытый круг, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция и γ — замкнутый кусочно линейный путь в D . Покажите, что для всякой точки $a \in D$, не лежащей на γ , выполнено равенство

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i \cdot \text{Ind}_a \gamma \cdot f(a).$$

6.9. (М. А. Евдокимов) Профессор математики взял веревку подлиннее, прикрепил ее к картине и повесил картину на два гвоздя так, что она висит, но если выдернуть любой гвоздь, то картина упадет. Сможете ли вы сделать то же самое?

Глава 7

Ряды Лорана и изолированные особые точки

7.1. Кратность нуля

Пусть функция f голоморфна в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и при этом $f(a) = 0$. Из принципа аналитического продолжения в его простейшем виде (следствие 5.19) вытекает, что либо функция f тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки a , либо, напротив, что в некоторой окрестности точки a функция f нигде, кроме самой точки a , в нуль не обращается. В первом случае разговаривать особо не о чем, поэтому будем считать, что имеет место случай второй.

Определение 7.1. Будем говорить, что голоморфная функция f имеет в точке $a \in \mathbb{C}$ *изолированный нуль*, если f голоморфна в окрестности точки a , $f(a) = 0$ и при этом существует окрестность точки a , в которой f нигде, кроме самой точки a , в нуль не обращается.

Часто вместо «изолированный нуль» для краткости говорят просто «нуль».

Предложение 7.2. Пусть голоморфная функция f имеет в точке $a \in \mathbb{C}$ изолированный нуль, и пусть k — натуральное число. Тогда следующие условия эквивалентны.

(1) Существует такая функция g , голоморфная в окрестности точки a , что $g(a) \neq 0$ и $f(z) = (z - a)^k g(z)$.

(2) Ряд Тейлора для f в точке a имеет вид

$$f(z) = c_k(z - a)^k + c_{k+1}(z - a)^{k+1} + \dots, \quad (7.1)$$

где $c_k \neq 0$.

(3) $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$.

Натуральное число k с такими свойствами всегда существует.

Доказательство. (1) \Leftrightarrow (2). Если ряд Тейлора для g имеет вид

$$g(z) = b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \dots,$$

то

$$f(z) = (z - a)^k g(z) = b_0(z - a)^k + b_1(z - a)^{k+1} + \dots,$$

причем $b_0 = g(a) \neq 0$.

Обратно, если ряд Тейлора для f имеет вид (7.1), то ряд

$$c_k + c_{k+1}(z - a) + c_{k+2}(z - a)^2 + \dots$$

имеет тот же радиус сходимости, что ряд (7.1), и тем самым сходится к голоморфной функции g , для которой $g(0) = c_k \neq 0$.

(2) \Leftrightarrow (3). Немедленно следует из того, что коэффициент при $(z - a)^n$ в разложении для f равен $f^{(n)}(a)/n!$.

Наконец, если числа k , удовлетворяющего эквивалентным условиям (1)—(3), не существует, то ряд Тейлора для f есть тождественный нуль и f тождественно равна нулю в окрестности точки a , что противоречит условию. \square

Определение 7.3. Число k , удовлетворяющее эквивалентным условиям (1)—(3) из предложения 7.2, называется *кратностью нуля a функции f* . Обозначение: $\text{ord}_a f$. Если $f(a) \neq 0$, полагаем $\text{ord}_a f = 0$. Можно также говорить не «кратность нуля», а «порядок нуля»: эти два словосочетания являются синонимами.

Определение 7.4. Если функция f , голоморфная в окрестности точки a , имеет в этой точке изолированный нуль кратности 1, говорят, что f имеет *простой нуль* в этой точке.

Предложение 7.5. Если функции f_1 и f_2 голоморфны в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и не являются тождественным нулем ни в какой ее окрестности, то $\text{ord}_a(f_1 f_2) = \text{ord}_a(f_1) + \text{ord}_a(f_2)$.

Доказательство. Это сразу следует из условия (1) в предложении 7.2: если $f_1(z) = (z - a)^{k_1} g_1(z)$, $f_2(z) = (z - a)^{k_2} g_2(z)$, где $g_1(a) \neq 0$, $g_2(a) \neq 0$, то $f_1 f_2 = (z - a)^{k_1 + k_2} g_1 g_2$ и функция $g_1 g_2$ не имеет нуля в точке a . \square

7.2. Ряды Лорана

Как мы знаем, функция, голоморфная в открытом круге с центром в a , единственным образом представляется в виде ряда по неотрицательным степеням $z - a$. Нам понадобится небольшое обобщение этого результата: оказывается, функция, голоморфная в кольце с центром a (см. определение 6.19), представляется в виде ряда по положительным и отрицательным степеням $z - a$.

Предложение 7.6. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$, и пусть f — функция, голоморфная в кольце $U = \{z: r < |z - a| < R\}$. Тогда всюду на U имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (7.2)$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset U$, а его коэффициенты вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) (z - a)^{-n-1} dz, \quad (7.3)$$

где γ — любая лежащая в U положительно ориентированная окружность с центром в a (или, если угодно, любой замкнутый путь в U , имеющий индекс 1 относительно точки a).

Разложение (7.2), сходящееся равномерно на компактах в U , единственно.

Ряд вида (7.2), представляющий голоморфную функцию в кольце, называется рядом Лорана.

Доказательство. Начнем с единственности. Если γ — замкнутый путь в U , имеющий индекс 1 относительно точки a , то $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$, и $\int_{\gamma} (z - a)^k dz = 0$ при $k \neq -1$, так как $(z - a)^k$ при этом имеет первообразную. Для данного $k \in \mathbb{Z}$ умножим обе части разложения (7.2) на $(z - a)^{-k-1}$; поскольку ряд равномерно сходится на любом компакте в U и, в частности, на кривой, соответствующей пути γ , разложение (7.2), умноженное на $(z - a)^{-k-1}$, можно почленно проинтегрировать; ввиду сказанного выше после интегрирования получаем равенство $2\pi i c_k = \int_{\gamma} f(z) (z - a)^{-k-1} dz$, доказывающее единственность.

Теперь докажем существование. Прежде всего заметим, что ввиду предложения 6.20 все замкнутые пути в U , имеющие индекс 1 относительно точки a , гомотопны друг другу, так что по теореме 6.18 левая часть формулы (7.3) действительно не зависит от выбора пути γ . Пусть теперь $z \in U$; выберем такие числа r' и R' , что $r < r' < |z - a| < R' < R$, обозначим через U' кольцо $\{z: r' < |z - a| < R'\}$, а через γ_1 и γ_2 — его граничные окружности $z: |z - a| = r'$ и $z: |z - a| = R'$ соответственно. Ориентируем γ_1 и γ_2 в положительном направлении (против часовой стрелки). Если $\varepsilon > 0$ настолько мало, что окружность с центром z и радиусом ε содер-

жится в U' , то из формулы Коши, примененной к этой окружности, и примера 5.7 вытекает, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (7.4)$$

Преобразуем оба интеграла в правой части. С интегралом по γ_2 мы будем действовать дословно так же, как при доказательстве предложения 5.10: разложим $\frac{1}{\zeta - z}$ в геометрическую прогрессию, помножим на $f(\zeta) d\zeta$ и почленно проинтегрируем по γ_2 . Не повторяя выкладок, сразу запишем ответ:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (7.5)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}. \quad (7.6)$$

Чтобы преобразовать интеграл по γ_1 , заметим, что если $\zeta \in \gamma_1$, а $z \in U'$, то $|\zeta - a| < |z - a|$. Поэтому дробь $\frac{1}{\zeta - z}$ можно разложить в геометрическую прогрессию следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} = \\ &= -\left(\frac{1}{z - a} + \frac{\zeta - a}{(z - a)^2} + \dots + \frac{(\zeta - a)^k}{(z - a)^{k+1}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Если $\zeta \in \gamma_1$, то

$$\left| \frac{(\zeta - a)^k}{(z - a)^{k+1}} \right| = \frac{1}{|z - a|} \cdot \left(\frac{r'}{|z - a|} \right)^k \leq \frac{1}{r'} \left(\frac{r'}{|z - a|} \right)^k,$$

так что геометрическая прогрессия в скобках сходится на γ_1 равномерно по ζ . После умножения на ограниченную функцию $f(\zeta)$ равномерность не нарушится. Умножая на $f(\zeta) d\zeta$ и почленно интегрируя, получаем, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - a)^{-k-1}, \quad (7.7)$$

где

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta) (\zeta - a)^k d\zeta. \quad (7.8)$$

Сопоставляя равенства (7.5)—(7.8) с выражением (7.4) для функции f , получаем, что для $f(z)$ имеет место разложение (7.2). Осталось проверить равномерную сходимость на компактах в U . Для этого заметим, что ряд (7.5) равномерно сходится даже на всех компактах, лежащих в круге $\{z: |z - a| < R'\}$, поскольку этот степенной ряд сходится в каждой точке этого круга. Что же до ряда (7.7), то, делая замену $1/(z - a) = t$, получаем, что степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$

сходится в каждой точке круга $\{t: |t| < 1/r'\}$, так что он сходится равномерно на компактах, лежащих в этом круге; следовательно, исходный ряд (7.7) сходится равномерно даже на каждом компакте, лежащем в множестве $\{z: |z - a| > r'\}$, и тем более на каждом компакте в U' . Остается заметить, что всякий компакт $K \subset U$ содержится в открытом кольце $\{z: r' < |z - a| < R'\}$, $r < r' < R' < R$, для подходящих r' и R' . \square

Для нас будет особенно интересен случай, когда внутренний радиус кольца равен нулю, т. е. кольцо является проколотым диском: $U = \{z: 0 < |z - a| < R\}$. В этом случае принята следующая терминология.

Определение 7.7. Если голоморфная функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ представляется рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

то его часть, содержащая $z - a$ в неотрицательных степенях, т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$, называется *правильной частью* ряда Лорана, а ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$, состоящий из членов ряда Лорана с $z - a$ в отрицательных степенях, называется его *главной частью*.

Слово «главная» выбрано не случайно: как мы увидим в следующем разделе, именно в главной части содержится самая интересная информация о поведении функции f .

Заметим, что главная и правильная часть ряда Лорана сходятся по отдельности (это вытекает из абсолютной сходимости или напрямую из доказательства предложения 7.6). Стало быть, радиус сходимости правильной части ряда Лорана (для функции, голоморфной в проколотом круге радиуса R) не меньше, чем R , и правильная часть сходится к функции, которая голоморфна во всем круге, включая выколотую точку. С другой стороны, главная часть $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - a)^{-n}$

(для ряда Лорана голоморфной функции в проколотом круге) сходится для z , сколь угодно близких к a . Обозначая $t = (z - a)^{-1}$, получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} t^n$ сходится при сколь угодно больших $|t|$; значит, он имеет бесконечный радиус сходимости и тем самым сходится к функции, голоморфной на всем \mathbb{C} .

Определение 7.8. Функция, голоморфная на всем \mathbb{C} , называется *целой функцией*.

Итоги нашего обсуждения можно сформулировать так.

Следствие 7.9. Пусть $D = \{z: |z - a| < R\}$ — открытый круг в комплексной плоскости. Всякую голоморфную функцию $f: D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ можно представить в виде $f(z) = \varphi(z) + \psi(1/(z - a))$, где φ — функция, голоморфная на всем D , а ψ — целая функция.

7.3. Изолированные особые точки

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности точки a — в классических текстах точку a в этой ситуации называли *изолированной особой точкой* для функции f . В этом разделе мы изучим поведение такой функции при z , стремящемся к a . Как мы увидим, на это поведение имеются определенные ограничения.

Изолированные особенности классифицируются в соответствии с тем, какой вид имеет главная часть ряда Лорана. Начнем со случая, когда главная часть является тождественным нулем. Этот случай характеризуется следующим образом.

Предложение 7.10 (теорема Римана об устранимой особенности). Пусть $D = \{z: |z - a| < r\}$, и пусть $f: D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Тогда следующие три условия эквивалентны.

(1) Функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a (возможно, меньшей, чем $D \setminus \{a\}$).

(2) Функция f продолжается до голоморфной функции на всем D .

(3) Главная часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности точки a является тождественным нулем (иными словами, коэффициенты ряда Лорана при отрицательных степенях $z - a$ равны нулю).

Определение 7.11. Если у функции f , голоморфной на $D \setminus \{a\}$, главная часть ряда Лорана является тождественным нулем, говорят, что f имеет *устранимую особенность* в точке a .

Согласно предложению 7.10, если f имеет устранимую особенность, то она удовлетворяет всем эквивалентным условиям (1)—(3) из этого предложения.

Доказательство предложения 7.10. (1) \Rightarrow (3). Пусть $|f(z)| \leq C$ при $0 < |z - a| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Если разложение Лорана для f в $D \setminus \{a\}$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

то согласно формулам (7.3), имеем, для любого натурального $n > 0$,

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) (z - a)^{n-1} dz,$$

где γ — произвольная окружность с центром в a . Выберем в качестве γ окружность радиуса $\delta < \varepsilon$. Тогда, оценивая интеграл по γ с помощью предложения 4.15 и принимая во внимание, что при $z \in \gamma$ имеем $|f(z)| \leq C$ и $|z - a| = \delta$, имеем

$$|c_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot C \cdot \delta^{n-1} \cdot 2\pi\delta = C\delta^n.$$

Устремляя теперь δ к нулю, получаем, что $c_{-n} = 0$ при $n > 0$, т. е. что ряд Лорана не содержит слагаемых с отрицательными степенями $z - a$.

(3) \Rightarrow (2). Мы уже обсуждали это в конце предыдущего раздела: если ряд Лорана состоит только из правильной части, то он является обычным степенным рядом, сходящимся всюду в круге D ; тем самым он задает голоморфную в D функцию, совпадающую с f на $D \setminus \{a\}$.

(2) \Rightarrow (1). По условию функция f продолжается до функции, голоморфной в точке a , а голоморфная функция, будучи непрерывной, ограничена в некоторой окрестности любой точки из своей области определения. \square

Второй случай — когда главная часть ряда Лорана присутствует, но содержит лишь конечное число членов. Как это отражается на поведении функции, описано в следующем предложении.

Предложение 7.12. Пусть $D = \{z : |z - a| < r\}$, и пусть $f : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Тогда следующие четыре условия эквивалентны.

(1) Особенность в точке a не является устранимой, но при этом существуют такие константы $N > 0$ и $C > 0$, что $|f(z)| \leq C|z - a|^{-N}$ для всех z из некоторой проколотой окрестности точки a (возможной, меньшей, чем $D \setminus \{a\}$). Короче это условие можно выразить так: $|f(z)| = O(|z - a|^{-N})$ при $z \rightarrow a$.

(2) Существуют такая голоморфная функция $g: D \rightarrow \mathbb{C}$, $g(a) \neq 0$, и такое натуральное число $n > 0$, что $f(z) = g(z)/(z-a)^n$ всюду на $D \setminus \{a\}$.

(3) Главная часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности точки a не является тождественным нулем, но содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.

(4) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

Напомним, что запись $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ означает, что $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$.

Определение 7.13. Если у голоморфной функции f на $D \setminus \{a\}$ главная часть ряда Лорана не является тождественным нулем, но содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых, говорят, что f имеет полюс в точке a .

Согласно предложению 7.12, если f имеет полюс, то она удовлетворяет всем эквивалентным условиям (1)—(4) из этого предложения.

Частичное доказательство предложения 7.12. Мы пока что докажем эквивалентность условий (1)—(3) и то, что они влекут условие (4). Оставшуюся импликацию (4) \Rightarrow (3) мы установим чуть позже.

(1) \Rightarrow (2). Пусть выполнено условие (1); выберем какое-нибудь натуральное число $k \geq N$ и положим $h(z) = (z-a)^k f(z)$. Тогда функция h голоморфна в $D \setminus \{a\}$ и ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a . Стало быть, по теореме Римана об устранимой особенности (предложение 7.10) h продолжается до голоморфной функции на всем D . Положим $m = \text{ord}_a h \geq 0$, тогда $h(z) = (z-a)^m g(z)$, где g голоморфна в D и $g(a) \neq 0$. Если $m \geq k$, то $f(z) = (z-a)^{m-k} g(z)$ — функция, продолжающаяся до голоморфной на всем D , в противоречие с тем, что особенность не является устранимой. Значит, $k > m$ и $f(z) = g(z)/(z-a)^{k-m}$, где g голоморфна в a и $k-m > 0$. Стало быть, выполняется условие (2).

(2) \Rightarrow (1). С очевидностью следует из того, что функция g , будучи голоморфной в точке a , ограничена в некоторой ее окрестности: $|g(z)| \leq C$ при $|z-a| < \varepsilon$.

(2) \Rightarrow (3). Если разложение g в степенной ряд имеет вид $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_m (z-a)^m$, то $c_0 = g(a) \neq 0$. Следовательно, ряд Лорана для f имеет вид

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n} = \frac{c_0}{(z-a)^n} + \frac{c_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{n-1}}{z-a} + (\text{правильная часть}),$$

что и требовалось.

(3) \Rightarrow (2). Рассуждение аналогично: если c_{-n} , где $n > 0$, — ненулевой коэффициент ряда Лорана для f с наименьшим номером, то функция $g(z) = (z - a)^n f(z)$ не имеет в своем лорановском разложении слагаемых с отрицательными степенями $z - a$ и тем самым голоморфна на всем D ; при этом $g(0) = c_{-n} \neq 0$.

(2) \Rightarrow (4). Очевидно. \square

Полус — часто встречающаяся изолированная особенность, так что поговорим о полюсах чуть подробнее.

Определение 7.14. Пусть функция f , определенная в проколотой окрестности точки a , имеет вид $f(z) = g(z)/(z - a)^n$, где $n > 0$ — натуральное число, а g — функция, голоморфная в окрестности точки a , для которой $g(a) \neq 0$. В такой ситуации говорят, что f имеет полюс порядка n в точке a . Иногда (и это более правильно!) в этой ситуации говорят также «полюс порядка $-n$ ». Вместо «порядок полюса» говорят еще «кратность полюса».

Обозначение 7.15. Если функция f , голоморфная в проколотой окрестности точки a , имеет вид $f(z) = (z - a)^m g(z)$, где $m \in \mathbb{Z}$, а g — голоморфная функция в окрестности точки a , для которой $g(a) \neq 0$, будем писать $\text{ord}_a(f) = m$.

Если f имеет в a устранимую особенность, то $\text{ord}_a f$ в смысле этого обозначения, очевидно, совпадает с $\text{ord}_a f$ в смысле определения 7.3.

Предложение 7.16. Если функции f_1 и f_2 , голоморфные в проколотой окрестности точки a , имеют в ней устранимую особенность или полюс и при этом ни одна из этих функций не является тождественным нулем в окрестности a , то отношение f_1/f_2 также имеет в точке a устранимую особенность или полюс. При этом

$$\text{ord}_a(f_1/f_2) = \text{ord}_a(f_1) - \text{ord}_a(f_2).$$

Доказательство. Если $f_1(z) = (z - a)^{n_1} g_1(z)$, $f_2(z) = (z - a)^{n_2} g_2(z)$, где функции g_1 и g_2 голоморфны и не обращаются в нуль в точке a , то $f_1(z)/f_2(z) = (z - a)^{n_1 - n_2} (g_1(z)/g_2(z))$; при $n_1 \geq n_2$ у этой функции имеется устранимая особенность, при $n_1 < n_2$ — полюс, и в любом случае $\text{ord}_a(f_1/f_2) = n_1 - n_2 = \text{ord}_a(f_1) - \text{ord}_a(f_2)$. \square

Наконец, введем еще один полезный термин.

Определение 7.17. Если функция f имеет в точке a полюс порядка 1 (равносильно: если $\text{ord}_a f = -1$), говорят, что f имеет в этой точке простой полюс.

Кроме случаев, когда главная часть отсутствует или конечна, возможен еще случай, когда она бесконечна. Вот как ведет себя функция в такой ситуации.

Предложение 7.18. Пусть $D = \{z : |z - a| < r\}$, и пусть $f : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Тогда следующие два условия эквивалентны.

(1) Главная часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности точки a содержит бесконечно много ненулевых слагаемых.

(2) Для всякого $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ существует такая последовательность точек $z_n \in D \setminus \{a\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = c$.

Определение 7.19. Если у голоморфной функции f на $D \setminus \{a\}$ главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много ненулевых слагаемых, то говорят, что f имеет существенную особенность в точке a .

Согласно предложению 7.18, если f имеет существенную особенность, то она удовлетворяет и условию (2) из этого предложения.

Доказательство предложения 7.18. (1) \Rightarrow (2). Для $c = \infty$ это доказывается следующим образом. Если последовательности $z_n \rightarrow a$, для которой $f(z_n) \rightarrow \infty$, не существует, то функция f ограничена при $0 < |z - a| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, так что особенность устранимая по предложению 7.10 и главная часть ряда Лорана нулевая вопреки условию (1) — противоречие. Стало быть, предел ∞ получить можно.

Если $c \in \mathbb{C}$ конечно и не существует последовательности $z_n \rightarrow a$, для которой $f(z_n) \rightarrow c$, то найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что $|f(z) - c| \geq \delta$ при $0 < |z - a| < \varepsilon$. Стало быть, функция $g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$ ограничена по модулю числом $1/\delta$ при $0 < |z - a| < \varepsilon$ и тем самым имеет устранимую особенность в точке a . Так как $f(z) = c + \frac{1}{g(z)}$, из предложения 7.16 следует, что f имеет в точке a устранимую особенность или полюс — противоречие.

(2) \Rightarrow (1). От противного, если f имеет устранимую особенность или полюс, то ввиду предложения 7.10 и уже доказанной части предложения 7.12 существует конечный или бесконечный предел $f(z)$ при $z \rightarrow a$, что противоречит условию (2). \square

Поскольку главная часть ряда Лорана может быть либо тождественно нулевой, либо ненулевой, но конечной, либо бесконечной, никаких случаев, кроме устранимой особенности, полюса или существенной особенности, встретиться не может, а сами эти три случая являются взаимоисключающими.

Отметим еще резкое отличие существенной особенности от устранимой особенности или полюса: в двух последних случаях существует предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ (конечный или бесконечный), в то время

как при существенной особенности предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ не существует в максимально сильном смысле.

Теперь нам ничего не стоит завершить доказательство предложения 7.12.

Завершение доказательства предложения 7.12. Нам осталось проверить, что из условия (4) этого предложения ($\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$) вытекает, что функция f имеет в точке a полюс. И действительно, устранимой особенностью точка a быть не может, поскольку ввиду наличия бесконечного предела эта функция ни в какой окрестности точки a не ограничена, а существенной особенностью в точке a также быть не может, так как в противном случае функция f не имела бы вообще никакого предела при $z \rightarrow a$. \square

Мы уже сказали, что предложение 7.10 называется теоремой Римана об устранимой особенности. У предложения 7.12 специального названия нет, зато у предложения 7.18 названий сразу много. В Германии его называют теоремой Вейерштрасса, в Италии — теоремой Казорати или Казорати—Вейерштрасса, во Франции и в англоязычных странах название «теорема Казорати—Вейерштрасса» также весьма популярно, а в России это предложение называют теоремой Сохоцкого. Мы с вами также будем придерживаться этого названия.

В заключение отметим, что теорема Сохоцкого допускает весьма серьезное усиление: мало того что при стремлении к существенной особой точке можно получить любой предел — так называемая большая теорема Пикара гласит, что в любой проколотой окрестности существенно особой точки голоморфная функция принимает все значения, кроме, быть может, одного! Мы докажем эту теорему в гл. 12.

7.4. Точка ∞ как изолированная особенность

Разумеется, точка ∞ на сфере Римана $\bar{\mathbb{C}}$ комплексным числом не является, но вполне имеет смысл определить ее проколотые окрестности и, по аналогии с рассмотрениями из предыдущего раздела, изучать поведение голоморфных функций в этих проколотых окрестностях.

Определим понятие, которое уже немного обсуждалось в разделе 1.6.

Определение 7.20. *Проколотой окрестностью бесконечности* называется множество вида $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, где $R \in \mathbb{R}$.

Для работы с функциями комплексной переменной z в проколотой окрестности бесконечности применяют замену переменной $t = 1/z$.

Определение 7.21. Пусть f — функция, голоморфная в проколотой окрестности бесконечности. Говорят, что f имеет в бесконечности устранимую особенность (полюс, существенную особенность соответственно), если такого же типа особенность имеет в нуле функция $t \mapsto f(1/t)$.

Согласно результатам предыдущего раздела, характер особенности функции $t \mapsto f(1/t)$ определяется ее рядом Лорана в нуле. Возвращаясь от переменной t к переменной z , получаем следующие определения и утверждения.

Определение 7.22. Правильной частью ряда Лорана функции, голоморфной в проколотой окрестности бесконечности, называется сумма его членов с неположительными степенями переменной. Главной частью ряда Лорана функции, голоморфной в проколотой окрестности бесконечности, называется сумма его членов с положительными степенями переменной.

Предложение 7.23. Функция f , голоморфная в проколотой окрестности бесконечности, имеет в бесконечности устранимую особенность тогда и только тогда, когда она ограничена в некоторой (возможно, меньшей) проколотой окрестности бесконечности. Равносильные условия: существует конечный предел $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z)$; главная часть ряда Лорана для f в бесконечности равна нулю.

Функция f , голоморфная в некоторой проколотой окрестности бесконечности, имеет в бесконечности полюс тогда и только тогда, когда f не имеет там устранимой особенности и $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \rightarrow \infty$ для некоторого $N > 0$. Равносильные условия: $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \infty$; главная часть ряда Лорана для f в бесконечности содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых, но не является тождественным нулем.

Функция f , голоморфная в некоторой проколотой окрестности бесконечности, имеет в бесконечности существенную особенность тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана для f в бесконечности содержит бесконечное число ненулевых слагаемых. \square

Доказывать это предложение нет нужды: утверждения из его первого и второго абзацев получаются из предложений 7.10 и 7.12 заменой $t = 1/z$, а утверждение из третьего абзаца является тавтологией; переформулируйте теорему Сохоцкого для случая существенной особенности самостоятельно.

Выпишем некоторые следствия уже доказанных утверждений применительно к особенностям в бесконечности.

Напомним, что целая функция — это функция, голоморфная на всем \mathbb{C} .

Предложение 7.24 (теорема Лиувилля). *Если f — целая функция и $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \rightarrow \infty$ для некоторого $N > 0$, то f — многочлен степени не выше N .*

Напомним, что в данном случае $|f(z)| = O(|z|^N)$ означает, что существуют такие $C > 0$ и $M > 0$, что $|f(z)| \leq C|z|^N$ при $|z| \geq M$.

Доказательство. Из условия и предложения 7.12 (а также его доказательства) явствует, что главная часть ряда Лорана функции $t \mapsto f(1/t)$ содержит лишь слагаемые со степенью t не ниже $-N$, так что степенной ряд для $z \mapsto f(z)$ содержит лишь слагаемые, в которые z входит со степенью не выше N . Это и означает, что f — многочлен степени не выше N . \square

Следствие 7.25. *Если целая функция ограничена, то она является константой.*

Это вытекает из предложения 7.24, если положить в нем $N = 0$. Читателю, который сочтет такое рассуждение жульническим, предлагается применить теорему Римана об устранимой особенности к функции $t \mapsto f(1/t)$.

Иногда теоремой Лиувилля называют не предложение 7.24, а логически более слабое следствие 7.25.

Функции, у которых все изолированные особые точки «не хуже» полюсов, заслуживают отдельного термина.

Определение 7.26. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Мероморфной функцией на U называется голоморфная функция $f: U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$, где $S \subset U$ — подмножество, не имеющее в U предельных точек, обладающее следующим свойством: в каждой точке $s \in S$ функция f имеет полюс или устранимую особенность.

Предложение 7.27. *Если $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество, а f и g — голоморфные функции на U , не являющиеся тождественным нулем, то отношение f/g является мероморфной функцией на U .*

Доказательство. Пусть $S = \{z \in U: g(z) = 0\}$. Так как g не есть тождественный нуль, S не имеет предельных точек в U ; в точках, не лежащих в S , функция f/g голоморфна, а в каждой точке $s \in S$ она имеет изолированную особенность ввиду предложения 7.16. \square

На самом деле верно и обратное утверждение: всякая мероморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ является отношением двух голоморфных. Однако же доказать это утверждение не так про-

сто (мы это сделаем в гл. 11), и при этом в более общих ситуациях (для римановых поверхностей) оно верно не всегда.

Определение 7.28. *Функция, мероморфная в бесконечности, — это функция, голоморфная в некоторой проколотой окрестности бесконечности и имеющая в бесконечности полюс (в смысле определения 7.21).*

В заключение этой главы опишем функции, мероморфные на всей сфере Римана.

Предложение 7.29. *Функции, мероморфные на всей сфере Римана $\bar{\mathbb{C}}$, суть рациональные функции и только они.*

К условию этого предложения нужны некоторые пояснения. Во-первых, рациональная функция — не что иное, как отношение двух многочленов. Во-вторых, подразумевается, что подмножество $S \subset \bar{\mathbb{C}}$ из определения мероморфной функции не имеет предельных точек на всей $\bar{\mathbb{C}}$, а это равносильно тому, что оно конечно (если S содержит произвольно большие по модулю комплексные числа, то ∞ будет его предельной точкой, а если комплексные числа из S ограничены по модулю, то S обязано быть конечным, иначе найдется предельная точка в «конечной» части $\bar{\mathbb{C}}$).

Доказательство. Легко видеть, что всякая рациональная функция f мероморфна на $\bar{\mathbb{C}}$: в конечных точках это очевидно, и если $f = g/h$, где g и h — многочлены степеней m и n соответственно, то $|f(z)| = O(|z|^{m-n})$ при $|z| \rightarrow \infty$, так что в бесконечности f также имеет полюс или устранимую особенность.

Обратно, пусть f — мероморфная функция на $\bar{\mathbb{C}}$. Для каждой точки $a \in S$ обозначим через f_a главную часть функции f в точке a . Поскольку все особенности f — полюсы или устранимые, для каждого конечного a (т. е. $a \in \mathbb{C}$) эта главная часть — тождественный нуль или конечная сумма вида $c_1/(z-a) + \dots + c_m/(z-a)^m$, т. е. рациональная функция. Для точки ∞ главная часть — тоже конечная сумма вида $b_1z + \dots + b_kz^k$ (или тождественный нуль), т. е. многочлен. Так как S конечно, можно построить сумму всех главных частей в точках из S — это рациональная функция, обозначим ее φ . Разность $f - \varphi$ не имеет полюсов или существенных особенностей ни на \mathbb{C} , ни в бесконечности. Значит, это целая функция, причем, поскольку в бесконечности у нее устранимая особенность, она ограничена на некоторой проколотой окрестности бесконечности $\{z: |z| > R\}$. Так как на круге $\{z: |z| \leq R\}$ эта разность тоже ограничена ввиду непрерывности, целая функция $f - \varphi$ ограничена на всем \mathbb{C} и тем самым является константой. Итак, $f(z) = \varphi(z) + \text{const}$. Поскольку φ — рациональная функция от z , такова же и f . \square

Нетрудно заметить, что разложение рациональной функции в сумму константы и конечного числа главных частей, которое мы получили в доказательстве, — не что иное, как разложение рациональной функции на простейшие дроби.

Упражнения

7.1. Найдите все нули (с указанием кратности) для следующих функций:

(а) $f(z) = \sin z$; (б) $f(z) = z \sin z$; (в) $f(z) = \sin^3 z$; (г) $f(z) = \sin(z^3)$.

7.2. Для каждой из следующих функций найдите все их изолированные особенности и укажите тип этих особенностей (устраняемая, полюс, существенная). Для особенностей, являющихся полюсами, укажите порядок соответствующих полюсов.

(а) $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 4)^2}$; (б) $f(z) = \frac{z}{\sin(z^2)}$; (в) $f(z) = e^{\operatorname{tg} z}$.

7.3. Докажите, что любой росток функции $f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ (в точке, отличной от нуля) продолжается до целой функции, и найдите все нули этой функции с указанием кратности.

7.4. Существует ли функция f , голоморфная в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$ и удовлетворяющая условию $|z|^{5/3} \leq |f(z)| \leq |z|^{4/3}$ для всех $z \in D$?

7.5. Разложите функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ в ряд Лорана:

(а) в кольце $\{z: 0 < |z| < 1\}$; (б) в кольце $\{z: |z| > 1\}$.

7.6. Разложите функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана:

(а) в круге $\{z: |z| < 1\}$;

(б) в кольце $\{z: 1 < |z| < 2\}$;

(в) в кольце $\{z: |z| > 2\}$.

7.7. Пусть a и b — два различных ненулевых комплексных числа.

(а) Докажите, что функция $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ имеет однозначную ветвь в бесконечном кольце $\{z: |z| > \max(|a|, |b|)\}$; найдите коэффициенты при z^2 и z^{-2} в ее ряде Лорана в этом кольце.

(б) Те же вопросы про функцию $f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}$.

7.8. В свете пункта (а) предыдущей задачи попробуйте найти более экономное решение задачи 6.4б (возможно, вам понадобятся какие-то другие коэффициенты ряда Лорана).

7.9. Пусть f голоморфна в проколотом круге $D^* = \{z: 0 < |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| \leq 1/|z|^{\sqrt{7}}$ для всех $z \in D^*$. Что можно сказать об изолированной особенности функции f в нуле?

7.10. Пусть f голоморфна в проколотом круге $D^* = \{z: 0 < |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| \leq 1 + \ln(1/|z|)$ для всех $z \in D^*$. Что можно сказать об изолированной особенности функции f в нуле?

7.11. Пусть f голоморфна в проколотом круге $D^* = \{z: 0 < |z| < 1\}$, и при этом $\operatorname{Re} f(z) > 0$ для всех $z \in D^*$.

(а) Может ли f иметь в точке 0 существенную особенность?

(б) Может ли f иметь в точке 0 полюс?

7.12. Пусть f голоморфна в проколотом круге $D^* = \{z: 0 < |z| < 1\}$, и при этом $f(z) \notin [0; +\infty) \subset \mathbb{R}$ для всех $z \in D^*$. Что можно сказать об изолированной особенности функции f в точке 0?

Глава 8

Вычеты

8.1. Основные определения

В этой главе мы продолжим выводить следствия из теоремы Коши. Начнем с невинно выглядящего, но чрезвычайно важного определения.

Определение 8.1. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $U = \{z: 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ точки $a \in \mathbb{C}$. *Вычетом* функции f в точке a называется число

$$\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz,$$

где γ — произвольная замкнутая кусочно гладкая кривая в U , имеющая индекс 1 относительно точки a .

От выбора кривой γ вычет не зависит ввиду предложения 6.21.

Из определения ясно, что если в точке a у функции имеется устранимая особенность, то вычет в этой точке нулевой.

Вычислять вычеты удобно с использованием следующего факта.

Предложение 8.2. Если f — голоморфная функция в проколотой окрестности точки a , то вычет $\operatorname{Res}_a f(z)$ равен коэффициенту при $(z - a)^{-1}$ в лорановском разложении функции f в точке a .

Доказательство. Если записать ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

и почленно проинтегрировать по замкнутой кривой γ , $\operatorname{Ind}_a \gamma = 1$, то интегралы от всех слагаемых, кроме $c_{-1}(z - a)^{-1}$, обратятся в нуль, а интеграл от этого последнего будет равен $2\pi i c_{-1}$. \square

Теперь докажем простое, но полезное предложение.

Предложение 8.3. Пусть $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — замкнутое подмножество комплексной плоскости, ограниченное замкнутой несамопересекающейся кусочно гладкой кривой γ (кривая γ входит в \bar{U}); положим

$\text{Int}(\bar{U}) = U$. Предположим, что $a_1, \dots, a_n \in U$, а функция f непрерывна на $\bar{U} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ и голоморфна на открытом множестве $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{a_k} f(z),$$

где подразумевается, что γ ориентирована положительно.

К этому предложению полностью применимы те же оговорки, что сделаны после теоремы 5.4: у нас нет общего определения понятия «часть плоскости, ограниченная кривой», так что если хочется быть абсолютно строгим, следует рассматривать предложение 8.3 как рецепт для построения строгих утверждений про каждую конкретную кривую (окружность, граница полукруга, прямоугольник и т. п.).

Доказательство. Как и в примере 5.6, окружим каждую точку a_j окружностью радиуса $\varepsilon_j > 0$ таким образом, чтобы все эти окружности лежали в U и попарно не пересекались. Тогда, согласно формуле (5.5), $\int_{\gamma} f(z) dz$ равен сумме интегралов по (ориентированным положительно) окружностям с центрами a_k и радиусами ε_k ; по определению, интеграл по k -й такой окружности равен $2\pi i \text{Res}_{a_k} f(z)$. \square

Вся оставшаяся часть этой главы будет посвящена приложениям предложения 8.3.

8.2. Принцип аргумента

Вот первый пример вычисления вычета.

Лемма 8.4 (о логарифмическом вычете). Пусть функция f либо голоморфна в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и не является тождественным нулем ни в какой окрестности этой точки, либо голоморфна в некоторой проколотой окрестности точки a и имеет в этой точке полюс. Тогда функция f'/f имеет в точке a либо устранимую особенность, либо простой полюс, и при этом $\text{Res}_a(f'(z)/f(z)) = \text{ord}_a(f)$.

Доказательство. Если $\text{ord}_a(f) = k$, то в некоторой (проколотой) окрестности точки a имеем $f(z) = (z - a)^k g(z)$, где g голоморфна в окрестности точки a и $g(a) \neq 0$. Прямое вычисление показывает, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z - a)^{k-1} g(z) + (z - a)^k g'(z)}{(z - a)^k g(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Второе слагаемое в правой части — голоморфная в точке a функция, на вычет не влияющая, а вычет от первого слагаемого равен k в силу предложения 8.2. \square

Замечание 8.5. Отношение f'/f называется *логарифмической производной* функции f , поскольку в окрестности точки, где f голоморфна и не обращается в нуль, определена функция $\ln f$ и f'/f совпадает с ее производной. Логарифмическая производная корректно определена и там, где $\ln f$ не определен как однозначная голоморфная функция: в результате аналитического продолжения $\ln f$ вдоль замкнутого пути к этой функции может в худшем случае прибавиться константа ($2\pi i k$, где $k \in \mathbb{Z}$), так что после дифференцирования неоднозначность пропадает.

Вычет логарифмической производной функции f называется *логарифмическим вычетом*.

Из простой леммы 8.4 в сочетании с еще более простым предложением 8.3 вытекает красивый результат, называемый принципом аргумента. Неформально он звучит так: если функция f мероморфна в области, ограниченной замкнутой несамопересекающейся кривой, и непрерывна на ее границе, то количество оборотов, которое образ границы области делает вокруг нуля, равно количеству нулей функции f в этой области минус количество полюсов (считаемых с кратностями). Если же выражаться аккуратно, то формулировка с неизбежностью станет длиннее.

Теорема 8.6 (принцип аргумента). Пусть $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — замкнутое подмножество комплексной плоскости, ограниченное замкнутой несамопересекающейся кусочно гладкой кривой γ (кривая γ входит в \bar{U}); положим $\text{Int}(\bar{U}) = U$. Предположим, что нам дано конечное подмножество $S \subset U$ и функция $f: \bar{U} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ со следующими свойствами:

(1) f можно продолжить до функции, голоморфной в $U' \setminus S$, где $U' \supset U$ — некоторое открытое множество (неформально эту мысль иногда выражают так: f голоморфна в $U \setminus S$ и аналитична на границе U);

(2) f не имеет существенных особенностей в точках множества S ;

(3) f не обращается в нуль на γ .

Если теперь снабдить γ биективной параметризацией, относительно которой она будет ориентирована в положительном направлении, то будет выполнено равенство

$$\sum_{a \in U} \text{ord}_a(f) = \text{Ind}_0(f \circ \gamma). \quad (8.1)$$

В левой части (8.1) стоит сумма по всем точкам U , но в реальности это конечная сумма целых чисел, так как $\text{ord}_z(f)$ отлично от нуля, только если z — нуль или полюс для f ; полюсов у f конечное количество по условию, и из условия вытекает, что нулей тоже конечное число (см. ниже). Заметим также, что из условия (1) вытекает, что если γ — кусочно гладкая кривая, то такова же и будет $f \circ \gamma$.

Доказательство. Заметим, что f имеет в U не более чем конечное число нулей. В самом деле, если нулей в U бесконечно много, то они должны иметь предельную точку где-то в \bar{U} . Если эта предельная точка лежит в U , то f — тождественный нуль на $U \setminus S$ и тем самым, ввиду непрерывности, f тождественно равна нулю и на γ , что противоречит условию (3); если же предельная точка нулей лежит на γ , то f обращается в нуль в этой точке, что также противоречит условию (3).

Теперь доказательство получается прямым вычислением. Именно, если рассматривать γ не как подмножество в \mathbb{C} , а как биективную на свой образ параметризацию $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$, относительно которой граница области U положительно ориентирована, то имеем

$$\begin{aligned} \text{Ind}_0(f \circ \gamma) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_A^B \frac{\frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))}{f(\gamma(t))} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_A^B \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_{a \in U} \text{Res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{a \in U} \text{ord}_a(f), \quad (8.2) \end{aligned}$$

что и требовалось. \square

Версия принципа аргумента, которую мы только что доказали, — не самая сильная из возможных. Вот более точное утверждение.

Теорема 8.7 (усиленный принцип аргумента). *Теорема 8.6 остается верной, если заменить условие (1) на следующее более слабое условие:*

(1') *функция f непрерывна в $\bar{U} \setminus S$ и голоморфна в $U \setminus S$.*

Замечание 8.8. Формулировка этой теоремы нуждается в комментариях. Во-первых, доказательства усиленного принципа аргумента мы не приводим. Во-вторых, с его формулировкой тоже не все просто. Именно, если мы требуем от функции f на границе только непрерывности, то и про замкнутый путь $f \circ \gamma$ мы не сможем

гарантировать, что он кусочно гладкий: из условия вытекает лишь его непрерывность. Поэтому может возникнуть вопрос про правую часть формулы (8.1), так как индексы мы определяли только для кусочно гладких кривых.

Все эти трудности преодолимы. Индексы можно определить и для произвольных непрерывных замкнутых путей, заменив всюду в той части предложения 4.19, которая относится к определению, слова «кусочно гладкий» на «непрерывный». Формула (4.2), с помощью которой мы проверяли корректность этого определения, для произвольного непрерывного пути смысла уже не имеет, но эту корректность можно установить и более элементарными средствами, непосредственно проверив, что, в терминах леммы 4.18, разность $\varphi(B) - \varphi(A)$ не зависит от выбора функции φ .

После того как определены индексы для произвольных непрерывных путей, усиленный принцип аргумента можно вывести (с использованием чуть большей дозы топологии, чем в основной части нашего курса) из локальных свойств голоморфных (и мероморфных) функций, о которых пойдет речь в следующей главе.

Можно также свести теорему 8.7 к строго доказанной у нас теореме 8.6 следующим образом. Заметим, что количество нулей и полюсов функции f в множестве U конечно — это устанавливается так же, как в доказательстве теоремы 8.6, с тем дополнением, что если бы последовательность полюсов стремилась к точке, лежащей на границе, то функцию f невозможно было бы непрерывно продолжить в эту точку. Следовательно, существует замкнутая несамопересекающаяся кусочно гладкая кривая $\gamma_1 \subset U$, близкая к γ и заключающая в себе все нули и полюсы функции f . Теперь применим теорему 8.6 к кривой γ_1 и заметим, что из того, что γ_1 достаточно близка к γ , вытекает, что эти кривые гомотопны — это доказывается рассуждениями, аналогичными использованным в лемме об улучшении гомотопии (лемма 6.4), — так что гомотопны и композиции $f \circ \gamma_1$ и $f \circ \gamma$, а значит, их индексы относительно нуля равны.

В дальнейшем я буду приводить формулировки следствий принципа аргумента, основывающиеся именно на его усиленном варианте, но в тех случаях, когда из принципа аргумента выводится что-то серьезное, нам, как правило, будет достаточно его более слабой версии — теоремы 8.6, которую мы доказали полностью. Впрочем, по крайней мере один раз нам потребуется принцип аргумента именно в его усиленном варианте.

Наряду с геометрической (а точнее говоря, топологической) формулировкой принципа аргумента, приведенной в теореме 8.6,

полезно выделить и его аналитическую формулировку — через интегралы.

Следствие 8.9. *В условиях теоремы 8.6 имеем*

$$\sum_{z \in U} \text{ord}_z(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Доказательство. Это утверждение содержится в цепочке равенств (8.2). \square

Особенно любопытные следствия из принципа аргумента получаются, когда функция f полюсов не имеет.

Следствие 8.10. *Пусть $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — замкнутое подмножество комплексной плоскости, ограниченное замкнутой несамопересекающейся кусочно гладкой кривой γ (кривая γ входит в \bar{U}); положим $\text{Int}(\bar{U}) = U$. Предположим, что функция $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ продолжается до функции, голоморфной на некотором открытом множестве $U' \supset \bar{U}$ (более сильный вариант: f непрерывна на \bar{U} и голоморфна на U), и не является константой.*

Снабдим γ биективной параметризацией, относительно которой она будет ориентирована в положительном направлении.

Если теперь точка $a \in \mathbb{C}$ не лежит на $f(\gamma)$, то a лежит в $f(U)$ в том и только том случае, когда $\text{Ind}_a(f \circ \gamma) \neq 0$; более того, индекс $\text{Ind}_a(f \circ \gamma)$ равен сумме кратностей нулей функции $f(z) - a$ (по всем точкам из U).

Доказательство. Достаточно применить принцип аргумента к функции $z \mapsto f(z) - a$. \square

Из этого, в свою очередь, вытекает, что конформность отображения, задаваемого голоморфной функцией, можно установить, зная только поведение функции на границе отображаемой области. Вот точная формулировка (с теми же оговорками, что и к формулировке предложения 8.3).

Предложение 8.11. *Пусть \bar{U} и \bar{U}' — замкнутые и ограниченные подмножества в \mathbb{C} , ограниченные замкнутыми несамопересекающимися кусочно гладкими кривыми γ и γ' . Обозначим внутренности множеств \bar{U} и \bar{U}' через U и U' соответственно.*

Пусть теперь $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывное отображение со следующими свойствами:

- (1) f голоморфно на U ;
- (2) f индуцирует биекцию между γ и γ' , причем если снабдить кривую γ биективной кусочно гладкой параметризацией, ориентирующей ее в положительном направлении, то индуцированная с по-

мощью f параметризация на γ также будет ориентировать ее в положительном направлении.

Тогда $f(U)$ содержится в U' и ограничение $f|_U: U \rightarrow U'$ является конформным отображением.

Доказательство. Если точка a лежит вне \bar{U}' , то замкнутая кривая γ' имеет относительно нее нулевой индекс (по поводу понятий «вне» и «внутри» см. обсуждение на с. 66). Поэтому ввиду следствия 8.10 точка a не лежит в $f(U)$; мы показали, что $f(U) \subset \bar{U}'$.

Пусть теперь точка a лежит на кривой γ' ; покажем, что и в этом случае $a \notin f(U)$. В самом деле, рассуждая от противного, предположим, что $a = f(b)$, $b \in U$. Так как из непрерывности и условия $f(\gamma) = \gamma'$ явствует, что f не может быть константой на U , принцип аналитического продолжения показывает, что существует замкнутый круг $\Delta \subset U$ с центром в b , на границе которого f не принимает значения a . Если обозначить через μ граничную окружность круга Δ (ориентированную положительно и соответствующим образом параметризованную), то следствие 8.10 показывает, что $\text{Ind}_a(f \circ \mu) > 0$. Так как $f(\mu)$ — компактное и тем самым замкнутое подмножество в \mathbb{C} , у точки a существует окрестность $V \ni a$, содержащаяся в той же компоненте связности $\mathbb{C} \setminus f(\mu)$, что и a ; по предложению 4.20 для всякой точки $a' \in V$ имеем $\text{Ind}_{a'}(f \circ \mu) = \text{Ind}_a(f \circ \mu) > 0$, так что $a' \in f(U)$ по следствию 8.10. Это, однако, невозможно: так как a лежит на границе области U' , в любой ее окрестности есть точки, лежащие вне кривой γ' , а такие точки, как мы выяснили выше, в $f(U)$ лежать не могут.

Значит, $f(U) \subset U'$. Пусть теперь $a \in U'$ — произвольная точка. Так как f индуцирует биекцию γ на γ' , а кривую γ мы снабдили биективной параметризацией, имеем $\text{Ind}_a(f \circ \gamma) = 1$. Поэтому из следствия 8.10 вытекает, что уравнение $f(z) = a$ имеет на U решение, причем ровно одно (и даже с учетом кратностей). Стало быть, f , будучи голоморфным на U , индуцирует биекцию между U и U' , что и требовалось. \square

Следствие 8.10 можно применять для нахождения количества нулей функции в данной области. При этом оказывается полезным следующий трюк, позволяющий иногда упростить нахождение индекса.

Предложение 8.12 (теорема Руше). Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — замкнутый непрерывный путь, и пусть $|\gamma|$ — множество $\gamma([A; B]) \subset \mathbb{C}$. Предположим, что $f, g: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывные отображения, причем для всякого $z \in |\gamma|$ имеем $f(z) \neq 0$ и $|f(z)| > |g(z)|$. Тогда $\text{Ind}_0(f \circ \gamma) = \text{Ind}_0((f + g) \circ \gamma)$.

Здесь под $(f + g) \circ \gamma$ понимается путь, заданный формулой $t \mapsto f(\gamma(t)) + g(\gamma(t))$.

Доказательство. Так как для всякого $z \in |\gamma|$ имеем $|f(z)| > |g(z)|$, получаем, что $f(z) + g(z) \neq 0$. Таким образом, через нуль не проходит не только $f \circ \gamma$, что прямо дано в условии, но и путь $(f + g) \circ \gamma$. Теперь определим гомотопию $F: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле $F(t, s) = f(\gamma(t)) + sg(\gamma(t))$. Поскольку для любых $t \in [A; B]$ и $s \in [0; 1]$ имеем

$$|sg(\gamma(t))| = s|g(\gamma(t))| \leq |g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))|,$$

получаем, что $f(\gamma(t)) + sg(\gamma(t)) \neq 0$. Стало быть, F — гомотопия замкнутых путей в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поскольку $F(t, 0) = F(\gamma(t))$ и $F(t, 1) = f(\gamma(t)) + g(\gamma(t))$, получаем, что $f \circ \gamma$ и $(f + g) \circ \gamma$ гомотопны как замкнутые пути в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; следовательно, их индексы равны. \square

Хорошая иллюстрация того, как работает теорема Руше, — доказательство «основной теоремы алгебры».

Предложение 8.13. *Многочлен степени n от одной переменной с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учетом кратности.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что старший коэффициент многочлена равен единице. Пусть многочлен имеет вид

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0.$$

Поскольку, очевидно, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} (P(z)/z^n) = 1$, существует такое $R > 0$, что при всех $|z| \geq R$ отношение $|P(z) - z^n|/|z^n|$ не превосходит, скажем, $1/2$. В частности, при всех $|z| \geq R$ имеем $|P(z) - z^n| < |z^n|$; так как $P(z) = z^n + (P(z) - z^n)$, отсюда, в частности, следует, что при $|z| \geq R$ имеем $|P(z)| > 0$, так что вне круга $\{z: |z| < R\}$ корней у многочлена P заведомо нет.

Остается подсчитать корни многочлена внутри этого круга. Для этого положим $f(z) = z^n$, $g(z) = P(z) - z^n$ и обозначим через γ окружность радиуса R с центром в нуле, параметризованную стандартным образом (однократный обход в положительном направлении). Так как всюду на этой окружности имеем $|f(z)| > |g(z)|$, по теореме Руше имеем

$$\text{Ind}_0(P \circ \gamma) = \text{Ind}_0((f + g) \circ \gamma) = \text{Ind}_0(f \circ \gamma).$$

Так как $f(z) = z^n$, индекс в правой части равен n . Применяя теперь следствие 8.10 к многочлену P и окружности γ , получаем, что внутри

круга радиуса R многочлен P имеет n нулей с учетом кратности. Все доказано. \square

8.3. Вычисление интегралов

Мы уже видели, как с помощью вычетов находить индексы кривых. Другое, несколько неожиданное, применение вычетов — вычисление интегралов (несобственных и не только). Никакой общей теории тут нет: в этом разделе вам будет продемонстрирован ряд искусственных приемов, порой весьма красивых.

Начнем с того, что попрактикуемся в вычислении вычетов.

Пример 8.14. Найдем $\text{Res}_1 \frac{e^z}{z^3 - 1}$. Так как в данном случае функция имеет в точке 1 простой полюс, можно поступить следующим образом. Записав ее ряд Лорана

$$\frac{e^z}{z^3 - 1} = \frac{c_{-1}}{z - 1} + c_0 + \dots,$$

видим, что

$$\text{Res}_1 \frac{e^z}{z^3 - 1} = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{e^z}{z^3 - 1} = \frac{e^z}{z^2 + z + 1} \Big|_{z=1} = \frac{e}{3}.$$

Выделим прием, использовавшийся в этом вычислении, в отдельное предложение.

Предложение 8.15. Если функции f и g голоморфны в окрестности точки a и при этом g имеет в точке a простой нуль, то

$$\text{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}. \quad (8.3)$$

Доказательство. Из условия явствует, что функция f/g имеет в точке a простой полюс (или вовсе устранимую особенность). Поэтому можно действовать так же, как в примере 8.14:

$$\begin{aligned} \text{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)(z - a)}{g(z) - g(a)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \left(f(z) \Big/ \frac{g(z) - g(a)}{z - a} \right) = \frac{f(a)}{g'(a)}. \quad \square \end{aligned}$$

Если функция имеет полюс более высокого порядка, то найти вычет тоже нетрудно.

Пример 8.16. Найдем $\text{Res}_1 \frac{1}{(z^2 - 1)^2}$. Порядок полюса на сей раз равен 2; выпишем ряд Лорана в точке 1, в которой нам надо найти

вычет, и умножим обе части на $(z - 1)^2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2 - 1)^2} &= \frac{c_{-2}}{(z - 1)^2} + \frac{c_{-1}}{z - 1} + c_0 + \dots, \\ \frac{(z - 1)^2}{(z^2 - 1)^2} &= c_{-2} + c_{-1}(z - 1) + c_0(z - 1)^2 + \dots, \\ \frac{1}{(z + 1)^2} &= c_{-2} + c_{-1}(z - 1) + c_0(z - 1)^2 + \dots\end{aligned}$$

Стало быть, искомый вычет, т. е. c_{-1} , равен производной от функции $1/(z + 1)^2$ в точке 1:

$$\operatorname{Res}_1 \frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + 1)^2} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{4}.$$

Для случая полюса порядка больше единицы также можно записать формулу, аналогичную формуле (8.3), но она получается более громоздкой; вам предлагается ее вывести в задаче 8.3. Те, кому эту формулу запоминать не хочется, могут каждый раз действовать по образцу разобранный только что примера.

Перейдем теперь непосредственно к интегралам.

Пример 8.17. Найдём интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} dx}{x^2 + 1},$$

где t вещественно.

Предположим для начала, что $t > 0$. Рассмотрим замкнутую кривую, представляющую собой границу полукруга большого радиуса R с центром в нуле, лежащего в верхней полуплоскости (необходимо, чтобы выполнялось неравенство $R > 1$, а далее мы устремим R к бесконечности; см. рис. 8.1а). Обозначим эту границу, снабжённую положительной ориентацией, через Γ_R и найдём интеграл $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{itz} dz}{z^2 + 1}$.

Функция $e^{itz}/(z^2 + 1)$ голоморфна внутри контура Γ_R всюду, кроме точки i , где она имеет простой полюс. Из формулы (8.3) получаем, что

$$\operatorname{Res}_i \frac{e^{itz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{it \cdot i}}{2i} = \frac{-ie^{-t}}{2}.$$

Следовательно, по предложению 8.3 имеем

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{itz} dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \frac{-ie^{-t}}{2} = \frac{\pi}{e^t}.$$

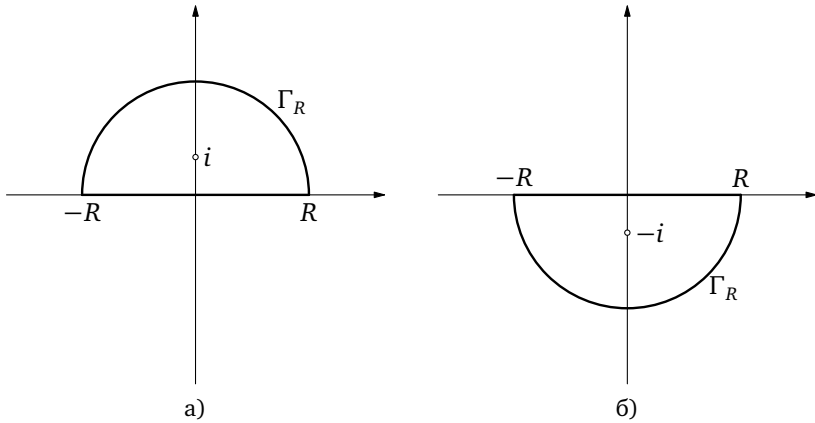


Рис. 8.1.

Теперь разобьем интеграл по замкнутому контуру Γ_R в сумму двух интегралов: интеграла по отрезку $[-R; R]$ (ориентированному в направлении от $-R$ к R) и интеграла по полуокружности радиуса R с центром в нуле, ориентированной в направлении от R к $-R$ — обозначим эту полуокружность через γ_R . Принимая во внимание, что интеграл от $\frac{e^{itz}}{z^2 + 1}$ по отрезку $[-R; R]$ — не что иное, как $\int_{-R}^R (e^{itx}/(x^2 + 1)) dx$, можно записать равенство

$$\int_{-R}^R \frac{e^{itx}}{x^2 + 1} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{itz}}{z^2 + 1} dz = \frac{\pi}{e^t}. \quad (8.4)$$

Устремим теперь R к бесконечности. Первое слагаемое в левой части (8.4) будет при этом стремиться к искомому интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2 + 1} dx$.

Покажем, что второе слагаемое в левой части (8.4) стремится к нулю. В самом деле, пользуясь оценкой (4.1), получаем, что

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{itz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \pi R \sup_{z \in \gamma_R} \frac{|e^{itz}|}{|z^2 + 1|}. \quad (8.5)$$

Если $z \in \gamma_R$, т. е. $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, то $|e^{itz}| = e^{-Rt \sin \varphi} \leq 1$ (в этом месте мы использовали, что $t \geq 0$), а $|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$. Следовательно, правая часть неравенства не превосходит

$\pi R/(R^2 - 1)$, что стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Значит,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{itz} dz}{z^2 + 1} = 0,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{e^t} \quad \text{при } t \geq 0.$$

Отметим, кстати, что, хотя в данном случае сходимость несобственного интеграла очевидна, мы могли бы в принципе вывести ее из равенства (8.4), перенеся второе слагаемое в правую часть и устремив R к бесконечности.

Осталось разобрать случай, когда $t < 0$. В этом случае интегрирование по контуру Γ_R нам не поможет, поскольку при z , лежащем «высоко» в верхней полуплоскости, $|e^{itz}|$ будет экспоненциально велик и второе слагаемое в (8.4) не будет стремиться к нулю. Поэтому мы рассмотрим контур Γ'_R , представляющий собой положительно ориентированную границу полукруга радиуса R с центром в нуле, лежащего в нижней полуплоскости (рис. 8.16). Тут важно не запутаться в знаках: если Γ'_R ориентирована положительно, то интеграл по участку этой кривой, лежащей на действительной оси, представляет собой интеграл от R до $-R$. Вычисляя с помощью вычетов интеграл по Γ'_R от $e^{itz} dz/(z^2 + 1)$, получаем, что он равен $-\pi e^t$. Если обозначить через γ'_R часть окружности радиуса R с центром в нуле, лежащую в нижней полуплоскости, то получим, что

$$-\int_{-R}^R \frac{e^{itx} dx}{x^2 + 1} + \int_{\gamma'_R} \frac{e^{itz} dz}{z^2 + 1} = -\pi e^t. \quad (8.6)$$

Так как $t < 0$, имеем $|e^{itz}| \leq 1$ для z , лежащих в нижней полуплоскости, так что второе слагаемое в (8.6) опять не превосходит по модулю $1/(R^2 - 1)$ и тем самым стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$; переходя к пределу, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} dx}{x^2 + 1} = \pi e^t \quad \text{при } t < 0.$$

Можно и объединить эти две формулы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{e^{|t|}} \quad \text{при } t \in \mathbb{R}.$$

Пример 8.18. Найдём теперь интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx) dx}{x^2 + 1},$$

где t опять вещественно.

Всю основную работу мы уже сделали в предыдущем примере: поскольку $\cos(tx) = \operatorname{Re} e^{itx}$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx) dx}{x^2 + 1} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} dx}{x^2 + 1} = \operatorname{Re} \left(\frac{\pi}{e^{|t|}} \right) = \frac{\pi}{e^{|t|}}.$$

Если бы мы попытались найти этот интеграл непосредственно с помощью вычетов, интегрируя по границам полукругов, как в предыдущем примере, то у нас бы ничего не вышло. В самом деле, $\cos(tz) = (e^{itz} + e^{-itz})/2$; второе слагаемое мешает оценить сверху интеграл по полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости, а первое слагаемое точно так же мешает оценить интеграл по полуокружности, лежащей в нижней полуплоскости!

Мораль: иногда для вычисления интеграла с помощью вычетов надо не сразу аналитически продолжать подынтегральное выражение в комплексную плоскость, как мы это сделали в примере 8.17, но предварительно представить его в виде действительной или мнимой части подходящей голоморфной функции.

Посмотрим еще раз на пример 8.17. Прием, который мы в нем использовали, работает для любых интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

где $t \in \mathbb{R}$, а P и Q — многочлены, но при условии, что у Q нет вещественных корней и, самое главное, $\deg Q - \deg P \geq 2$: в противном случае метод из этого примера не дает возможности доказать, что интеграл по дуге радиуса R стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Однако же при $\deg Q - \deg P = 1$ тоже можно кое-что сделать (если $\deg Q \leq \deg P$, то по понятным причинам надеяться не на что). Основной трюк удобно выделить в отдельную лемму. См. определение 4.16 по поводу интеграла по дифференциалу дуги, участвующего в формулировке этой леммы.

Лемма 8.19 (К. Жордан). Обозначим через $\gamma_R = \{z: |z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ полуокружность радиуса R с центром в нуле, лежащую в верхней полуплоскости. Тогда для всякого $a > 0$ существует такая констан-

та C , зависящая только от a , что

$$\int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| \leq C$$

для всех $R > 0$.

Доказательство. Параметризуем полуокружность γ_R стандартным образом: $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; \pi]$. Тогда $dz = iRe^{i\varphi} d\varphi$, $|dz| = R d\varphi$, откуда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| &= \int_0^\pi R |e^{ia(R \cos \varphi + iR \sin \varphi)}| d\varphi = \int_0^\pi R e^{-aR \sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \quad (8.7) \end{aligned}$$

(последнее равенство выполняется из-за симметрии $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$).

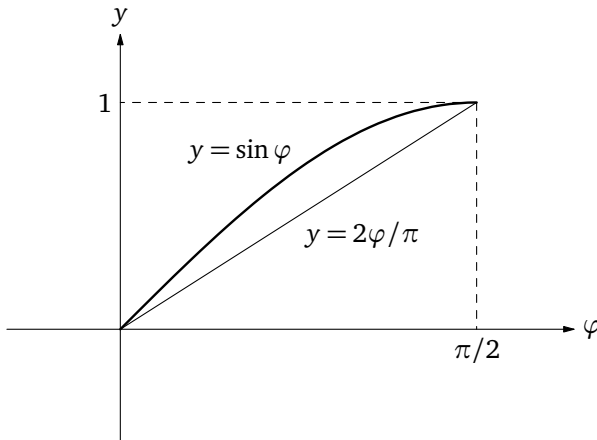


Рис. 8.2.

Теперь заметим, что, поскольку функция синус выпукла вверх на отрезке $[0; \pi/2]$, для $\varphi \in [0; \pi/2]$ имеем $\sin \varphi \geq 2\varphi/\pi$ (рис. 8.2). Поэтому цепочку равенств (8.7) можно продолжить так:

$$\int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| = 2R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leq 2R \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\varphi/\pi} d\varphi = \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR}) \leq \frac{\pi}{a}.$$

Остается положить $C = \pi/a$. □

Пример 8.20. Теперь, вооружившись леммой Жордана, разберем пример ее применения. Давайте найдем интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + 1}$.

Первый шаг будет такой же, как в примере 8.18: поскольку при $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\frac{x \sin x}{x^2 + 1} = \operatorname{Im} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1},$$

будем искать интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix} \, dx}{x^2 + 1}$, а затем возьмем от него мнимую часть. Рассмотрим все тот же контур Γ_R — положительно ориентированную границу полукруга $\{z : |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ($R > 1$). Из предложения 8.3 имеем

$$\int_{\Gamma_R} \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{z e^{iz}}{z^2 + 1} \right) = \frac{\pi i}{e}.$$

Если, как и в лемме Жордана, через γ_R обозначить полуокружность $\{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, то имеем

$$\int_{-R}^R \frac{x e^{ix} \, dx}{x^2 + 1} + \int_{\gamma_R} \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2 + 1} = \frac{\pi i}{e}, \quad (8.8)$$

и искомый интеграл будет найден, как только мы установим, что интеграл по γ_R стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. На сей раз оценка из предложения 4.15 для этого недостаточна, но можно воспользоваться более точной оценкой из предложения 4.17. Именно, из указанного предложения вытекает, что

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2 + 1} \right| \leq \int_{\gamma_R} \left| \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2 + 1} \right| \leq \sup_{z \in \gamma_R} \left| \frac{z}{z^2 + 1} \right| \cdot \int_{\gamma_R} |e^{iz}| |dz|.$$

В правой части первый сомножитель не превосходит $R/(R^2 - 1)$, а второй по лемме Жордана не превосходит некоторой константы C , не зависящей от R . Поэтому имеем (при всех $R > 1$)

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{CR}{R^2 - 1},$$

так как правая часть стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, это же верно и про левую часть, так что стремление к нулю второго слагаемого

в левой части (8.8) установлено. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2 + 1} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{xe^{ix} dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi i}{e},$$

откуда, беря мнимую часть, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{e}.$$

В связи с этим вычислением следует отметить одну тонкость. Как известно, по определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_A^B f(x) dx,$$

где A и B стремятся к $-\infty$ и ∞ независимо друг от друга, в то время как мы до сих пор устанавливали существование (и находили значение)

пределов вида $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$. В двух первых примерах, в кото-

рых модуль подынтегрального выражения убывал квадратично, это было несущественно, так как интегралы сходились абсолютно, но в данном примере абсолютной сходимости нет, так что сходимость

интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 1}$ необходимо проверять отдельно. Этот инте-

грал действительно сходится, как можно установить, например, с помощью признака Абеля—Якоби (см. [1, гл. VI, § 5]; в данном случае можно непосредственно установить эту сходимость с помощью интегрирования по частям).

Предел $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$, если он существует, называется *главным значением* несобственного интеграла. Вообще, если, скажем, функция f определена на всем \mathbb{R} , кроме точки a , то главным значением интеграла от f с пределами от $-\infty$ до ∞ называется следующий предел (если он существует):

$$\text{V. p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x) dx + \int_{a+\varepsilon}^R f(x) dx \right).$$

Иными словами, окрестности всех точек, где функция не определена, включая бесконечность, берутся обязательно симметричными.

Заодно мы ввели и обозначение: V. p. перед знаком интеграла (сокращение от французского *valeur principale*) как раз и означает, что интеграл понимается в смысле главного значения. Иногда еще вместо V. p. пишут P. v. (сокращение от английского *principal value*).

Если интеграл сходится в обычном смысле, то он, разумеется, сходится (к тому же числу) и в смысле главного значения. Обратное совершенно неверно: например, V. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0$. Вычеты хорошо приспособлены именно к нахождению интегралов в смысле главного значения.

Пример 8.21. Оценку, необходимую для вычисления интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2 + 1}$ из примера 8.20, можно провести и не пользуясь леммой Жордана. Именно, для доказательства того, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz} dz}{z^2 + 1} = 0,$$

где по-прежнему γ_R — полуокружность $\{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, разобьем γ_R на две части:

$$\gamma_{1,R} = \{z: |z| = R, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \sqrt{R}\},$$

$$\gamma_{2,R} = \{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq \sqrt{R}\}$$

Имеем

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz} dz}{z^2 + 1} = \int_{\gamma_{1,R}} \frac{ze^{iz} dz}{z^2 + 1} + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{ze^{iz} dz}{z^2 + 1}. \quad (8.9)$$

Обозначим первое слагаемое в правой части через I_1 , а второе через I_2 (таким образом, I_1 — сумма интегралов по двум дугам). Теперь оценим I_1 и I_2 по отдельности.

Как мы уже отмечали, если $z \in \gamma_R$, то $\left| \frac{z}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{R}{R^2 - 1}$; кроме того, для всех z из верхней полуплоскости имеем $|e^{iz}| \leq 1$. Оценим теперь интеграл $I_1(R)$. Так как $\gamma_{1,R}$ представляет собой объединение двух дуг с угловой мерой $\arcsin(\sqrt{R}/R)$ каждая (рис. 8.3), суммарная длина этих дуг равна $2R \arcsin(1/\sqrt{R})$. Поэтому из элементарной оценки (8.9) вытекает, что

$$|I_1| \leq \frac{R}{R^2 - 1} \cdot 2R \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right);$$

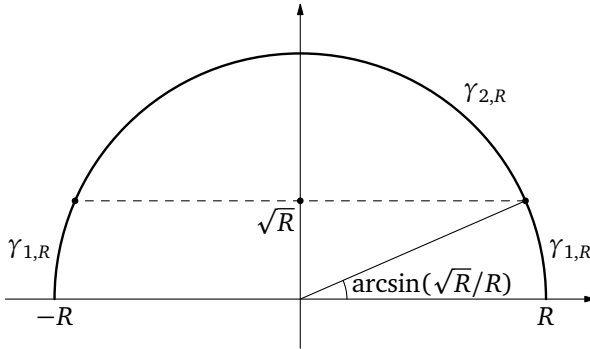


Рис. 8.3.

правая часть, очевидно, стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$, так что и $I_1(R)$ стремится к нулю.

Для оценки $I_2(R)$ заметим, что если $\operatorname{Im} z \geq \sqrt{R}$, то $|e^{iz}| \leq e^{-\sqrt{R}}$. Снова применяя неравенство (8.9), получаем, что

$$|I_2(R)| \leq e^{-\sqrt{R}} \cdot \frac{R}{R^2 - 1} \cdot \operatorname{length}(\gamma_{2,R}) \leq \frac{Re^{-\sqrt{R}}}{R^2 - 1} \cdot \pi R,$$

и правая часть также стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$. Значит, стремится к нулю и левая часть (8.9), что и требовалось.

В этом рассуждении вместо \sqrt{R} можно было использовать R^α для любого $\alpha \in (0; 1)$. Можно было также вместо границы полукруга интегрировать, скажем, по границе прямоугольника с вершинами $-R$, R , $R + iR$ и $-R + iR$.

Пример 8.22. Найдем теперь интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x}$. Сама функция $\sin z/z$ является целой, так что буквально к ней вычеты применять бессмысленно, но мы можем заметить, что $\frac{\sin x}{x} = \operatorname{Im} \frac{e^{ix}}{x}$ при $x \in \mathbb{R}$, так что можно попробовать найти интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} \, dx}{x}$. Правда, функция e^{iz}/z имеет полюс прямо на действительной оси, так что воспользоваться полукруглым контуром напрямую не получится. Будем поэтому интегрировать $\frac{e^{iz} \, dz}{z}$ по контуру $\gamma_{R,\varepsilon}$, изображенно-му на рис. 8.4. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8.23 (о дробном вычете). Пусть голоморфная функция f имеет простой полюс в точке a , и предположим, что зафиксирова-

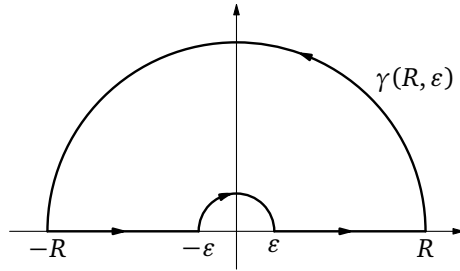


Рис. 8.4.

ны лучи ℓ_1 и ℓ_2 , выходящие из точки a . Для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ обозначим через γ_ε дугу окружности радиуса ε с центром в точке a , заключенную между лучами ℓ_1 и ℓ_2 и ориентированную против часовой стрелки. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \alpha i \cdot \text{Res}_a(f(z)),$$

где α — угол между лучами ℓ_1 и ℓ_2 (выраженный в радианах).

Доказательство. Пусть $\text{Res}_a(f(z)) = c$. Так как полюс в точке a простой, имеем

$$f(z) = \frac{c}{z-a} + g(z),$$

где функция g голоморфна (и тем самым ограничена) в окрестности точки a . Непосредственное вычисление показывает, что $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{c dz}{z-a} = \alpha i \cdot c$ (независимо от ε); интеграл же от $g(z) dz$ стремится к нулю: если $|g(z)| \leq M$ в окрестности точки a , то

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} g(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma_\varepsilon} |g(z)| \cdot \text{length}(\gamma_\varepsilon) \leq M \alpha \varepsilon \rightarrow 0.$$

Все доказано. \square

Вернемся к интегралу от $e^{ix} dx/x$ и контуру $\gamma_{R,\varepsilon}$ (рис. 8.4). Поскольку внутри этого контура особых точек у функции e^{iz}/z нет, имеем $\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{e^{iz} dz}{z} = 0$. Следовательно, если обозначить через γ_R дугу полуокружности радиуса R с направлением от R к $-R$, а через γ_ε —

дугу полуокружности радиуса ε с направлением от $-\varepsilon$ к ε , то имеем

$$0 = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix} dx}{x} + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz} dz}{z} + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} dx}{x} + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{z}.$$

Устремим теперь ε к нулю, а R к $+\infty$. Интеграл по γ_R в правой части будет стремиться к нулю — это выводится из леммы Жордана (лемма 8.19) точно так же, как мы это делали в примере 8.20. Интеграл по γ_ε стремится к $-\pi i \cdot \operatorname{Res}_0 \frac{e^{iz}}{z} = -\pi i$ ввиду леммы о дробном вычете 8.23 (знак минус — потому что ориентация дуги γ_ε отрицательная). Переходя к пределу, получаем, что

$$\text{V. p. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x} - \pi i = 0;$$

беря мнимую часть, находим отсюда, что

$$\text{V. p. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \quad (8.10)$$

Осталось заметить, что интеграл в левой части (8.10) сходится (это опять выводится из признака Абеля—Якоби или попросту интегрированием по частям), так что искомый интеграл в обычном смысле также равен π .

Пример 8.24. Вычеты полезны не только для нахождения несобственных интегралов. Давайте для разнообразия найдем интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}. \quad (8.11)$$

В каждом учебнике математического анализа объясняется, как выразить неопределенный интеграл от такого рода функции (рационального выражения от синуса и косинуса) через элементарные функции. Однако же использование вычетов позволяет получить результат много быстрее и проще¹.

Чтобы вычислить наш интеграл, представим его в виде интеграла от голоморфной функции по единичной окружности γ , параметризованной стандартным образом: $z = e^{ix}$, $x \in [0; 2\pi]$. Тогда имеем

$$dz = ie^{ix} dx = iz dx, \quad dx = \frac{dz}{iz}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2};$$

¹Разумеется, о соревновании с программами наподобие Mathematica или Maple речь не идет.

подставляя эти выражения в (8.11), получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_{\gamma} \frac{dz/iz}{2 + (z + z^{-1})/2} = -2i \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}.$$

Функция $1/(z^2 + 4z + 1)$ имеет в единичном круге единственный простой полюс в точке $-2 + \sqrt{3}$; ее вычет в этой точке равен, согласно формуле (8.3),

$$\frac{1}{2z + 4} \Big|_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6};$$

следовательно, искомый интеграл равен $-2i \cdot 2\pi i (\sqrt{3}/6) = 2\pi\sqrt{3}/3$.

Пример 8.25. Иногда перед тем, как находить сумму вычетов, полезно заменить z на $1/z$. Попробуем, например, найти интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{z^6 dz}{z^7 + z + 1} \quad (\text{ориентация окружности положительная}).$$

Для начала заметим, что при $|z| \geq 2$ выполнено неравенство $|z|^7 > |z + 1|$, так что все корни знаменателя (и тем самым все полюсы подынтегрального выражения) лежат внутри круга $\{z: |z| < 2\}$. Так как найти полюсы в явном виде возможным не представляется, сделаем замену переменной $z = 1/w$. Имеем

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{dw}{w^2}, \\ \frac{z^6}{z^7 + z + 1} &= \frac{w}{1 + w^6 + w^7}, \\ \frac{z^6 dz}{z^7 + z + 1} &= -\frac{dw}{w(1 + w^6 + w^7)}. \end{aligned}$$

Когда z описывает против часовой стрелки окружность $\{z: |z| = 2\}$, переменная $w = 1/z$ описывает окружность $\{w: |w| = 1/2\}$, но по часовой стрелке! Поэтому получаем окончательно

$$\int_{|z|=2} \frac{z^6 dz}{z^7 + z + 1} = - \int_{|w|=1/2} \left(-\frac{dw}{w(1 + w^6 + w^7)} \right) = \int_{|w|=1/2} \frac{dw}{w(1 + w^6 + w^7)},$$

где окружность радиуса $1/2$ ориентирована в положительном направлении. Теперь подынтегральное выражение не имеет полюсов внутри круга радиуса $1/2$ с центром в нуле, кроме простого полюса в точке 0 . Легко видеть, что вычет в этом полюсе равен 1 , так что искомый интеграл равен $2\pi i$.

Вернемся к несобственным интегралам. В заключение разберем два примера с участием корней и логарифмов — функций, которые в комплексной плоскости требуют осторожного обращения.

Пример 8.26. Найдем $\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + 4}$ (под логарифмом тут понимается «обычный» логарифм из курса математического анализа). Легко видеть, что этот интеграл абсолютно сходится; впрочем, мы установим его сходимости в процессе вычисления.

Чтобы вычислить наш интеграл, рассмотрим контур (обозначим его $\Gamma_{R,\varepsilon,\delta}$) на рис. 8.5, где оба горизонтальных участка отстоят от вещественной оси на расстояние $\delta > 0$. Проинтегрируем по $\Gamma_{R,\varepsilon,\delta}$ функцию $\frac{\ln z}{z^2 + 4}$, где под $\ln z$ понимается ветвь функции \ln на множестве $\mathbb{C} \setminus [0; +\infty)$, для которой $\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$, $0 < \varphi < 2\pi$. При уменьшении δ интеграл $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon,\delta}} \frac{\ln z dz}{z^2 + 4}$ не меняется; если устремить δ к нулю, то и верхний, и нижний горизонтальные участки будут стремиться к отрезку $[\varepsilon; R]$ на действительной оси; при этом интеграл по верхнему горизонтальному участку будет стремиться к $\int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x dx}{x^2 + 4}$,

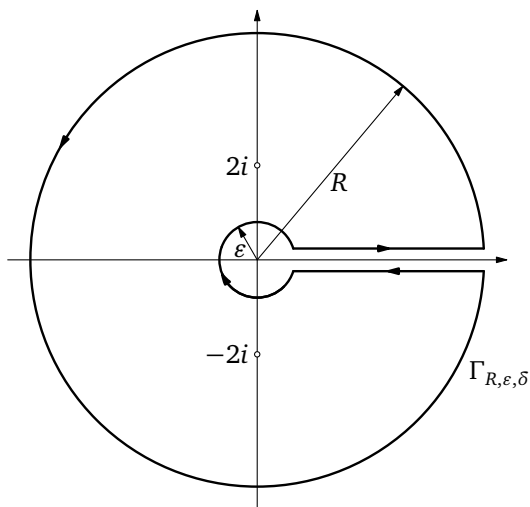


Рис. 8.5.

а по нижнему — к $-\int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x + 2\pi i}{x^2 + 4} dx$: когда число z из нижней полу-
 плоскости стремится к действительной оси, мнимая часть $\ln z$ (для
 выбранной нами ветви логарифма) стремится к $2\pi i$, а знак минус
 перед интегралом получается из-за того, что нижний горизонталь-
 ный участок проходимся в «отрицательном» направлении, от боль-
 ших значений действительной части к меньшим¹.

В итоге, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получаем следующее ра-
 венство:

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon,\delta}} \frac{\ln z dz}{z^2 + 4} = \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x dx}{x^2 + 4} + \int_{|z|=R} \frac{\ln z dz}{z^2 + 4} - \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x + 2\pi i}{x^2 + 4} dx + \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\ln z dz}{z^2 + 4}. \quad (8.12)$$

Интеграл в левой части (8.12) находится с помощью вычетов:
 функция $\ln z/(z^2 + 4)$ имеет простые полюсы в точках $\pm 2i$, так что,
 находя вычеты по формуле (8.3), получаем, что

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon,\delta}} \frac{\ln z dz}{z^2 + 4} = 2\pi i \left(\frac{\ln(2i)}{2 \cdot 2i} + \frac{\ln(-2i)}{2 \cdot (-2i)} \right) = -\frac{\pi^2 i}{2}.$$

Устремим теперь ε к нулю, а R к бесконечности. При этом оба инте-
 грала по окружностям в правой части (8.12) будут стремиться к ну-
 лю. В самом деле, при $|z| = R$ имеем $|\ln z| = |\ln R + i \arg z| \leq \ln R + 2\pi$
 и $|z^2 + 4| \geq R^2 - 4$, так что

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{\ln z dz}{z^2 + 4} \right| \leq \frac{\ln R + 2\pi}{R^2 - 4} \cdot 2\pi R \rightarrow 0,$$

а при $|z| = \varepsilon$ имеем $|\ln z| \leq |\ln \varepsilon| + 2\pi$, $|1/(z^2 + 4)| \leq \text{const}$, так что

$$\left| \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\ln z dz}{z^2 + 4} \right| \leq \text{const}(|\ln \varepsilon| + 2\pi) \cdot 2\pi \varepsilon \rightarrow 0.$$

Стало быть, переходя в (8.12) к пределу, имеем, учитывая найденное
 с помощью вычетов значение для левой части,

$$-\frac{\pi^2 i}{2} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2 + 4} - \frac{\ln x + 2\pi i}{x^2 + 4} \right) dx,$$

¹Классики комплексного анализа к столь утомительным разъяснениям не прибе-
 гали. В первой половине XX века в этом месте написали бы, что мы разрежали плос-
 кость по лучу $[0; +\infty)$, выбрали на этой разрезанной плоскости такую-то ветвь логарифма
 и что на верхнем берегу разреза логарифм — это просто $\ln x$, а на нижнем он
 равен $\ln x + 2\pi i$. Такое изложение менее строго, но, пожалуй, более понятно.

откуда, упрощая, получаем, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{\pi}{4}.$$

Это чистая правда, но это не то, что нам нужно! Чтобы получить то, что нужно, проинтегрируем по тому же контуру функцию $\frac{(\ln z)^2}{z^2 + 4}$ вместо напрашивавшейся $\frac{\ln z}{z^2 + 4}$ (ветвь логарифма — та же). Интегралы по окружностям радиусов ε и R по-прежнему стремятся к нулю, что устанавливается с помощью аналогичных оценок, так что в итоге получаем, что

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon,\delta}} \frac{(\ln z)^2}{z^2 + 4} dz = \int_0^{\infty} \left(\frac{(\ln x)^2}{x^2 + 4} - \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{x^2 + 4} \right) dx. \quad (8.13)$$

Левая часть снова находится с помощью вычетов:

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon,\delta}} \frac{(\ln z)^2}{z^2 + 4} dz = 2\pi i \left(\frac{(\ln z)^2}{2z} \Big|_{z=2i} + \frac{(\ln z)^2}{2z} \Big|_{z=-2i} \right) = \pi^2(1 - i \ln 2).$$

Теперь, упрощая правую часть (8.13), получаем уравнение

$$\pi^2(1 - i \ln 2) = 4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + 4} + 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

Подставляя найденное по ходу дела значение $\int_0^{\infty} dx/(x^2 + 4)$ (или просто выделяя мнимую часть), находим окончательно, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + 4} = -\frac{\pi \ln 2}{4}.$$

Пример 8.27. Найдем $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$. Для этого нам понадо-

бится функция $\sqrt{z(1-z)}$. Заметим для начала, что росток этой функции в точке, не лежащей на отрезке $[0; 1]$ вещественной оси, продолжается до голоморфной функции на всем $\mathbb{C} \setminus [0; 1]$. В самом деле, замкнутый путь в $\mathbb{C} \setminus [0; 1]$, имеющий индекс 1 относительно точки 0, имеет тот же индекс и относительно точки 1, как это следует из предложения 4.20. Поэтому если аналитически продол-

жить вдоль такого пути ростки функций \sqrt{z} и $\sqrt{1-z}$, то каждый из них умножится на -1 , а их произведение тем самым останется прежним. Поскольку всякий замкнутый путь в $\mathbb{C} \setminus [0; 1]$ гомотопен проходимой несколько раз окружности, обходящей вокруг отрезка $[0; 1]$ (это нетрудно строго доказать и еще проще в это поверить), получаем, что росток функции $\sqrt{z(1-z)}$ продолжается в $\mathbb{C} \setminus [0; 1]$ до голоморфной функции. Мы выберем ту из ее ветвей, для которой значения на верхнем берегу разреза по отрезку $[0; 1]$ положительны (более формально: положителен предел при стремлении z из верхней полуплоскости к точке на $(0; 1)$ вдоль вертикальной прямой). Рассмотрим теперь контур на рис. 8.6 — обозначим его $\gamma_{\varepsilon, \delta}$, где δ — расстояние от горизонтальных участков до вещественной оси.

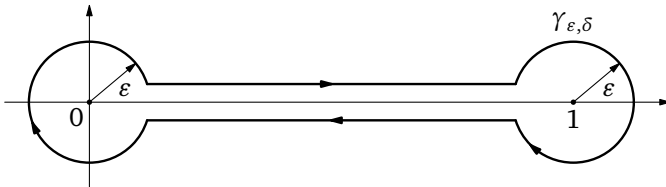


Рис. 8.6.

Как и в предыдущем примере, интеграл от $\sqrt{z(1-z)}$ по данному контуру не меняется при стремлении δ к нулю. На верхнем берегу разреза $\sqrt{z(1-z)}$ равно положительному значению квадратного корня, на нижнем — отрицательному; учитывая, что, кроме того, нижний берег проходится от больших чисел к меньшим, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\varepsilon, \delta}} \sqrt{z(1-z)} dz &= 2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{x(1-x)} dx + \\ &+ \int_{|z|=\varepsilon} \sqrt{z(1-z)} dz + \int_{|z-1|=\varepsilon} \sqrt{z(1-z)} dz. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Второе и третье слагаемое в правой части с очевидностью стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Стало быть, переходя в (8.14) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma_{\varepsilon, \delta}} \sqrt{z(1-z)} dz.$$

Осталось найти интеграл в правой части. Ясно, что путь $\gamma_{\varepsilon, \delta}$ гомотопен в $\mathbb{C} \setminus [0; 1]$ окружности радиуса $R > 1$ с центром в нуле, проходящей в отрицательном направлении. Поэтому, почленно интегрируя лорановское разложение

$$\sqrt{z(1-z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

в проколотой окрестности бесконечности, получаем, что

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, \delta}} \sqrt{z(1-z)} dz = -2\pi i c_{-1}.$$

Чтобы найти c_{-1} , запишем

$$\sqrt{z(1-z)} = \pm iz \cdot \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{1/2}$$

(знак плюс или минус зависит от выбора ветви). При $|z| > 1$ правая часть раскладывается по формуле бинома Ньютона, откуда получаем

$$\sqrt{z(1-z)} = \pm iz \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots \right),$$

так что $c_{-1} = \pm i/8$ и

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{1}{2} \cdot (-2\pi i c_{-1}) = \pm \frac{\pi}{8}.$$

Так как функция $\sqrt{x(1-x)}$ неотрицательна на $[0; 1]$, знак должен быть плюс, а не минус, откуда окончательно находим, что искомый интеграл равен $\pi/8$.

Упражнения

8.1. Для каждой из следующих функций найдите ее вычеты во всех изолированных особенностях:

- (а) $\operatorname{tg} z$; (б) $\frac{1}{z^3 + z}$; (в) $\frac{e^z}{z^2 - 4}$; (г) $z^3 \cos \frac{1}{z+1}$; (д) $\sin z \sin \frac{1}{z}$;
(е) $\sin \frac{z}{z+1}$.

8.2. А теперь найдите вычеты (опять во всех изолированных особенностях) для таких функций:

- (а) $\frac{1}{z^3 + z^2}$; (б) $\frac{z^2}{(z^2 - 1)^2}$; (в) $\frac{e^z}{z^2(z^2 + 1)}$; (г) $\frac{1}{z \sin^2 z}$;
(д) $\frac{1}{\sin^{2016} z}$; (е) $\operatorname{tg}^3 z$.

8.3. Пусть функции f и g голоморфны в точке a , причем $\text{ord}_a g = n$. Докажите, что

$$\text{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = (n-1)! \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{(z-a)^n f(z)}{g(z)}.$$

8.4. Найдите значение интеграла

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z \, dz}{3z^2 - 10z + 3}$$

(предполагается, что единичная окружность положительно ориентирована).

8.5. Функция f непрерывна в единичном круге $\{z: |z| \leq 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Докажите, что эллипс, ориентированный отрицательно, образом положительно ориентированной единичной окружности при отображении f быть не может.

8.6. (а) Пусть функция f непрерывна в замкнутом единичном круге $\bar{U} = \{z: |z| \leq 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Может ли в этой ситуации образ единичной окружности быть «восьмеркой», изображенной на рис. 8.7 (стрелки указывают направление обхода, индуцированное обходом единичной окружности в положительном направлении)?

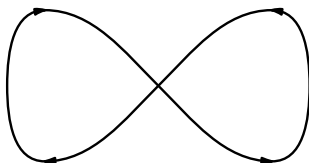


Рис. 8.7.

(б) Тот же вопрос, что в пункте (а), но на сей раз направление обхода (и количество обходов) «восьмерки» нам не задано: дано только, что она как множество является образом граничной окружности.

8.7. Функция f непрерывна в единичном круге $\bar{U} = \{z: |z| \leq 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Положим $\partial D = \{z: |z| = 1\}$. Докажите, что если $f(\partial D) \subset \partial D$ и f не является константой, то $f(\partial D) = \partial D$.

8.8. Сколько корней (с учетом кратности) имеет в единичном круге $\{z: |z| < 1\}$ многочлен $z^7 + 3z + 1$?

8.9. Сколько нулей (с учетом кратности) имеет в единичном круге $\{z: |z| < 1\}$ функция $f(z) = 2z^3 + e^z + 1$?

Найдите следующие интегралы.

8.10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$

8.11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$

8.12. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{100} + 1}.$ (Указание. Можно проинтегрировать по границе

полукруга, а затем просуммировать 50 вычетов, но, возможно, вам больше понравится контур, изображенный на рис. 8.8, — по крайней мере, внутри него находится всего один полюс!)

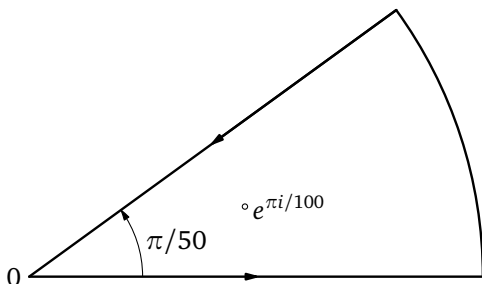


Рис. 8.8.

8.13. $\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos x}{2 - \sin x} dx.$

8.14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1 + x^4} dx \quad (t \in \mathbb{R}).$

8.15. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 2x + 2} dx.$

8.16. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(n + \frac{1}{2})x}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx$ для произвольного натурального n .

8.17. V. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x} dx.$

8.18. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ (окружность ориентирована положительно).

8.19. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

8.20. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x} \cdot (1+x^2)}.$

8.21. Найдите все натуральные n , для которых $\int_{|z|=2} \frac{z^n dz}{z^{10}-1} \neq 0.$

8.22. Пусть f — функция, голоморфная на всем \mathbb{C} , кроме конечного количества изолированных особенностей. Докажите, что

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}_a(f(z)) = c_{-1},$$

где c_{-1} — коэффициент при z^{-1} в ряде Лорана для f в проколотовой окрестности бесконечности.

Число $-c_{-1}$ (обратите внимание на знак) называется *вычетом в бесконечности* для $f(z)$. Приняв такую терминологию, результат этой задачи сформулируем следующим образом: если f имеет лишь конечное число изолированных особенностей, то сумма всех вычетов от $f(z)$, включая вычет в бесконечности, равна нулю. Мы еще встретимся с вычетом в бесконечности в гл. 13.

8.23. Пусть P — многочлен степени $n > 1$ без кратных корней; обозначим его корни через a_1, \dots, a_n . Докажите, что если k — целое число, $0 \leq k \leq n-2$, то

$$\frac{a_1^k}{P'(a_1)} + \dots + \frac{a_n^k}{P'(a_n)} = 0.$$

8.24. Пусть $F(x) = P(x)/Q(x)$ — рациональная функция, где P и Q — многочлены с вещественными коэффициентами, $\deg P < \deg Q$ и у многочлена Q все корни вещественны и различны. Докажите, что

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 0.$$

8.25. Пусть D — открытый круг, $a_1, \dots, a_n \in U$, пусть f — голоморфная функция на $D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, и пусть γ — замкнутая кусочно гладкая кривая в $D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Покажите, что

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Ind}_{a_k} \gamma \cdot \operatorname{Res}_{a_k} f(z).$$

Глава 9

Локальные свойства голоморфных функций

9.1. Принцип сохранения области

Принципом сохранения области называется следующий факт.

Теорема 9.1. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, не являющаяся постоянной. Тогда для всякого открытого подмножества $V \subset U$ его образ $f(V) \subset \mathbb{C}$ также открыт.

Отображения, переводящие открытые множества в открытые, в топологии называют открытыми. Таким образом, принцип сохранения области гласит, что отличное от константы голоморфное отображение, определенное на связном открытом множестве, является открытым.

Для функций действительного переменного аналог принципа сохранения области, как показывают простейшие примеры, места не имеет. Например, «максимально хорошая» функция $f: x \mapsto x^2$, рассматриваемая как функция из \mathbb{R} в \mathbb{R} , переводит открытый интервал $(-1; 1) \subset \mathbb{R}$ в интервал $[0; 1) \subset \mathbb{R}$, открытым не являющийся.

Доказательство. Рассуждение из этого доказательства уже использовалось в главе 8. Итак, пусть $a \in V \subset U$, где $V \subset U$ открыто, и пусть $b = f(a)$. Нам надо показать, что некоторая δ -окрестность точки b содержится в $f(V)$. Заметим, что множество $f^{-1}(b) \subset U$ не имеет предельных точек в U : в противном случае из принципа аналитического продолжения вытекало бы, что функция f тождественно равна b , хотя нам дано, что константой эта функция не является. Следовательно, существует такое $\varepsilon > 0$, что замкнутый круг $\bar{D} = \{z: |z - a| \leq \varepsilon\}$ содержится в $V \subset U$ и при этом $f^{-1}(b) \cap \bar{D} = \{a\}$. Обозначим через $\gamma = \{z: |z - a| = r\}$ границу этого круга. Мы снабдим ее стандартной параметризацией $t \mapsto a + re^{it}$, $t \in [0; 2\pi]$, ориентирующей γ положительно. Далее мы одной буквой γ будем обо-

значать и кривую как подмножество в \mathbb{C} , и замкнутый путь, ориентированный, как указано выше, так что, например, в обозначении $f(\gamma)$ имеется в виду образ множества, а в обозначении $f \circ \gamma$ — замкнутый путь.

Поскольку $f(\gamma) \not\ni b$, но при этом $f(a) = b$, принцип аргумента (точнее, следствие 8.10) показывает, что $\text{Ind}_b(f \circ \gamma) > 0$. Поскольку $\gamma \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество, его образ $f(\gamma)$ замкнут в \mathbb{C} . Так как $b \notin f(\gamma)$, существует такое $\delta > 0$, что δ -окрестность точки b (обозначим эту окрестность V_δ) не пересекается с $f(\gamma)$. По предложению 4.20 для всякой точки $b' \in V_\delta$ имеем

$$\text{Ind}_{b'}(f \circ \gamma) = \text{Ind}_b(f \circ \gamma) > 0;$$

применяя опять принцип аргумента, получаем, что $b' = f(a')$ для некоторой $a' \in \bar{D}$. Значит, $V_\delta \subset f(V)$, и все доказано. \square

Если приглядеться к доказательству теоремы 9.1 повнимательнее, то из него можно извлечь важную дополнительную информацию.

Предложение 9.2 (теорема об обратной функции). Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, и пусть $f'(a) \neq 0$ в точке $a \in \mathbb{C}$. Тогда существуют такие открытые множества $U_1 \ni a$ и $V_1 \ni f(a)$, что $f(U_1) = V_1$ и f индуцирует биекцию U_1 на V_1 , причем обратное отображение $f^{-1}: V_1 \rightarrow U_1$ также голоморфно.

Доказательство. Положим $f(a) = b$. Как и в доказательстве теоремы 9.1, получаем, что существует замкнутый круг

$$\bar{D} = \{z: |z - a| \leq \varepsilon\},$$

$\bar{D} \subset U$, на котором f не принимает значение b нигде, кроме точки a (поскольку $f'(a) \neq 0$, f не является константой ни в какой окрестности точки a , так что существование такого \bar{D} вытекает из следствия 5.19). Обозначим границу этого круга через γ ; будем считать, что γ параметризована так же, как в доказательстве теоремы 9.1.

Поскольку $f'(a) \neq 0$, функция $z \mapsto f(z) - b$ имеет в точке a простой нуль; других нулей на множестве \bar{D} она не имеет по построению. Поэтому из следствия 8.10 вытекает, что $\text{Ind}_b(f \circ \gamma) = 1$. Пусть $V' \ni b$ — δ -окрестность точки b (для некоторого $\delta > 0$), не пересекающаяся с $f(\gamma)$. Для всякого $b' \in V'$ имеем, как и выше, $\text{Ind}_{b'}(f \circ \gamma) = \text{Ind}_b(f \circ \gamma) = 1$. Поэтому то же следствие 8.10 показывает, что существует единственное a' , $|a' - a| < \varepsilon$, для которого $f(a') = b'$. Положим теперь

$$U' = f^{-1}(V') \cap \{z: |z - a| < \varepsilon\}.$$

Очевидно, U_1 открыто и f отображает U_1 биективно на V_1 . Далее, пусть $U_1 \subset U'$, $U_1 \ni a$ — открытое подмножество, на котором f' не обращается в нуль, и пусть $V_1 = f(U_1)$. В силу уже доказанного функция f биективно отображает U_1 на V_1 , и $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in U_1$ по построению; далее, обратное отображение $f^{-1}: V_1 \rightarrow U_1$ непрерывно: чтобы это установить, надо проверить, что если $W \subset U_1$ — открытое подмножество, то $(f^{-1})^{-1}(W) \subset V_1$ также открыто, но

$$(f^{-1})^{-1}(W) = f(W),$$

а $f(W)$ открыто по принципу сохранения области. Значит, ограничение f на U_1 , биективно отображающее U_1 на V_1 , удовлетворяет всем условиям предложения 2.10, так что обратное отображение $f^{-1}: V_1 \rightarrow U_1$ голоморфно, что и требовалось. \square

Замечание 9.3. Предложение 9.2 немедленно следует из «теоремы об обратной функции» вещественного анализа (см. [1, гл. VIII, § 6]): в самом деле, голоморфные функции автоматически непрерывно дифференцируемы, а производная f в точке a (см. раздел 1.5) есть умножение на ненулевое комплексное число, что является обратимым линейным оператором. Так как я стремился минимизировать предварительные сведения из анализа многих переменных, необходимые для чтения книги, у нас приведено независимое доказательство.

Ключевое место в этом доказательстве — использование принципа аргумента, т. е. топологическое рассуждение. Аналогичные топологические соображения позволяют доказать теорему об обратной функции для отображений из (открытого подмножества) \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n для произвольного n , но в учебниках такое изложение не встречается: понятия, необходимые для проведения топологического доказательства в размерности выше 2, изучаются позже, чем анализ многих переменных.

9.2. Ветвление

Мы выяснили, как ведет себя голоморфная функция вблизи точки, в которой ее производная не обращается в нуль. Случай, когда производная равна нулю, также поддается полному анализу.

Определение 9.4. Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a и ни в какой ее окрестности не является константой. Положим $f(a) = b$. Тогда *индексом ветвления* функции f в точке a называется кратность нуля функции $z \mapsto f(z) - b$ в точке a .

Предложение 9.5. Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a и ни в какой ее окрестности не является константой. Положим $f(a) = b$, и пусть

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a)^n + \dots$$

— разложение f в степенной ряд в окрестности точки a . Тогда следующие три числа совпадают:

- (1) индекс ветвления функции f в точке a ;
- (2) $\min\{k > 0: c_k \neq 0\}$;
- (3) $\min\{k > 0: f^{(k)}(a) \neq 0\}$.

Это немедленно следует из предложения 7.2, примененного к функции $z \mapsto f(z) - b$.

Из предложения 9.5 сразу видно, что индекс ветвления — обобщение понятия «кратность нуля»:

Следствие 9.6. Если голоморфная функция f имеет в точке a изолированный нуль, то ее индекс ветвления в точке a равен $\text{ord}_a(f)$.

Ясно, что индекс ветвления в точке a равен 1 тогда и только тогда, когда $f'(a) \neq 0$. Если индекс ветвления функции f в точке a больше единицы, то говорят, что a — точка ветвления функции f . Иногда вместо «точка ветвления» говорят «критическая точка».

Понятие индекса ветвления позволяет дать описание поведения голоморфной функции в точке, где ее производная обращается в нуль.

Предложение 9.7. Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a и ни в какой ее окрестности не является константой. Положим $f(a) = b$, и пусть индекс ветвления функции f в точке a равен k . Тогда существуют такие окрестности $U \ni a$ и $V \ni b$, что $f(U) = V$, всякая точка $b' \in V$, кроме b , имеет ровно k прообразов в U (относительно отображения f), а у точки b в множестве U есть только один прообраз — точка a .

Предложение 9.7, в свою очередь, вытекает из следующего более точного результата. Неформально выражаясь, он гласит, что в окрестности точки ветвления порядка k голоморфная функция выглядит как отображение $z \mapsto z^k$ в окрестности нуля.

Предложение 9.8. Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a и ни в какой ее окрестности не является константой. Положим $f(a) = b$, и пусть индекс ветвления функции f в точке a равен k . Тогда существуют окрестности $U \ni a$ и $V \ni b$, для которых $f(U) = V$, и такие конформные изоморфизмы $\alpha: U \rightarrow U'$, $\beta: V \rightarrow V'$, где U и V' — открытые круги с центром в нуле, что $\alpha(a) = 0$, $\beta(b) = 0$ и $\beta(f(z)) = (\alpha(z))^k$ для всех $z \in U$.

Основную часть предложения 9.8 можно выразить в виде следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha} & U' \\ f \downarrow & & \downarrow w \mapsto w^k \\ V & \xrightarrow{\beta} & V'. \end{array}$$

Доказательство. Поскольку функция $z \mapsto f(z) - b$ имеет в точке a нуль порядка k , можно записать тождество $f(z) = b + (z - a)^k g(z)$, где g голоморфна в окрестности точки a и $g(a) \neq 0$. Так как $g(a) \neq 0$, в некоторой окрестности точки $g(a)$ определена ветвь функции $z \mapsto \sqrt[k]{z}$; стало быть, в некоторой окрестности $U_1 \ni a$ определена функция $h(z) = \sqrt[k]{g(z)}$, для которой $(h(z))^k = g(z)$. Положим $\alpha(z) = (z - a)h(z)$; тогда функция α определена на той же окрестности U_1 и $f(z) = b + \alpha(z)^k$. Так как $\alpha'(a) \neq 0$, предложение 9.2 показывает, что функция α отображает некоторую окрестность точки a конформно на ее образ.

Положим еще $\beta(w) = w - b$: то, что эта функция конформно отображает окрестность (любую) точки b на ее образ, совсем очевидно. Тождество $\beta(f(z)) = (\alpha(z))^k$ ясно из построения. Выберем теперь $\varepsilon > 0$ и положим $U_\varepsilon = \{z: |z| < \varepsilon\}$, $U = \alpha^{-1}(U_\varepsilon)$. Если ε был выбран достаточно малым, то из сказанного выше явствует, что $\alpha: U \rightarrow U_\varepsilon$ — голоморфная биекция. Если положить, в очевидных обозначениях, $V = \beta^{-1}(U_{\varepsilon^k})$, $U' = U_\varepsilon$, $V' = U_{\varepsilon^k}$, то все требуемое будет построено. \square

Теперь мы можем выполнить обещание, данное в главе 2 (замечание 2.11).

Предложение 9.9. Пусть $f: U \rightarrow V$ — голоморфное и биективное отображение между двумя открытыми подмножествами комплексной плоскости. Тогда производная отображения f не обращается в нуль нигде на U и обратное отображение $f^{-1}: V \rightarrow U$ также голоморфно.

Доказательство. Из предложения 9.7 следует, что если f' обращается в нуль хотя бы в одной точке, то f не может быть взаимно однозначным. Значит, производная отображения f нигде не обращается в нуль. Теперь из предложения 9.2 вытекает, что для всякой точки $a \in U$ существуют такие окрестности $U_1 \ni a$, $V_1 \ni f(a)$, что f индуцирует биекцию U_1 на V_1 , а обратное отображение f^{-1} голоморфно на V_1 . Тем самым f^{-1} голоморфно в окрестности любой точки множества V , т. е. голоморфно всюду на V . \square

Из доказанного, в частности, следует, что отображение, обратное к конформному, также голоморфно и что открытые подмножества $U, V \subset \mathbb{C}$ конформно изоморфны тогда и только тогда, когда между ними существуют взаимно обратные голоморфные отображения $f: U \rightarrow V$ и $g: V \rightarrow U$. Отметим также, что в свете доказанного предложения можно переформулировать определение конформного изоморфизма между открытыми множествами $U, V \subset \mathbb{C}$ (определение 3.1) следующим образом: U и V конформно изоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие голоморфные отображения $f: U \rightarrow V$ и $g: V \rightarrow U$, что обе композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ суть тождественные отображения. Это согласуется с трактовкой термина «изоморфизм», принятой в других математических теориях.

Из главы 2 мы помним, что голоморфное отображение сохраняет углы между гладкими кривыми в точке, где его производная не обращается в нуль. Теперь мы можем выяснить, что происходит с этим углами в точках, где производная равна нулю. Оказывается, углы умножаются на индекс ветвления.

Предложение 9.10. Пусть функция f голоморфна в точке a и имеет в этой точке индекс ветвления k . Если γ_1 и γ_2 — гладкие кривые, выходящие из точки a и образующие угол φ , то угол между кривыми $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$ в точке $f(a)$ равен $k\varphi$.

Доказательство. Применим к функции f и точке a предложение 9.8. Так как отображения α и β , будучи конформными, углы сохраняют, для доказательства нам достаточно установить, что отображение $z \mapsto z^k$ умножает на k углы между кривыми, проходящими через нуль.

Итак, пусть $f: z \mapsto z^k$. Достаточно показать, что если касательная в нуле к гладкой кривой γ образует угол φ с действительной осью

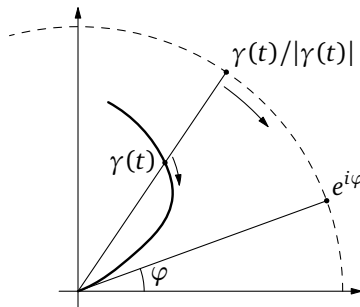


Рис. 9.1.

(точнее, с ее положительным направлением), то касательная к кривой $f \circ \gamma$, где $f: z \rightarrow z^k$, образует с действительной осью угол $k\varphi$. Для этого, в свою очередь, заметим, что касательная в нуле к кривой γ образует с действительной осью угол φ тогда и только тогда, когда $\lim_{t \rightarrow 0} (\gamma(t)/|\gamma(t)|) = e^{i\varphi}$ (касательная — предельное положение секущей: см. рис. 9.1). Коль скоро $(f \circ \gamma)(t) = (\gamma(t))^k$, имеем тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \gamma)(t)}{|(f \circ \gamma)(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma(t)^k}{|\gamma(t)^k|} \right) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} \right)^k = e^{ik\varphi},$$

что и требовалось. \square

9.3. Принцип максимума модуля и его следствия

Рассмотрим функцию $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$, определенную на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Говорят, что функция f имеет *локальный максимум* в точке $a \in U$, если существует такое открытое множество $V \ni a$, $V \subset U$, что $\varphi(a) \geq \varphi(z)$ для всех $z \in U$. Локальный минимум определяется аналогично.

Обратите внимание, что, согласно нашим определениям, локальные максимум и минимум — экстремумы нестрогие.

Предложение 9.11 (принцип максимума модуля). *Если функция f голоморфна и не является постоянной на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, то функция $z \mapsto |f(z)|$ ни в одной точке U не может иметь локального максимума.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что в некоторой точке $a \in U$ достигается локальный максимум функции $|f(z)|$. Тогда существует открытое подмножество $V \subset U$, $V \ni a$, на котором $|f(a)|$ не меньше любого $|f(z)|$ для $z \in V$. По принципу сохранения области множество $f(V)$ открыто в \mathbb{C} , так что $f(V)$ содержит некоторый открытый круг D с центром в $f(a)$. Однако во всяком открытом круге на плоскости существует точка, более удаленная от начала координат, чем его центр. Так как $D \subset f(V)$, эта точка есть $f(b)$ для некоторого $b \in V$, так что $|f(b)| > |f(a)|$ — противоречие. \square

Вот другой вариант принципа максимума модуля. Я позволю себе не повторять стандартных оговорок о статусе утверждений, содержащих словосочетание «часть плоскости, ограниченная кривой».

Предложение 9.12. *Пусть $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — замкнутое и ограниченное подмножество комплексной плоскости, ограниченное конечным числом кусочно гладких кривых, и пусть $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функ-*

ция, голоморфная в его внутренности. Если внутренность U связна, а f не является константой, то наибольшее значение функции $z \mapsto |f(z)|$ достигается на границе множества \bar{U} , но не в его внутренности.

Доказательство. Так как \bar{U} замкнуто и ограничено, а функция $z \mapsto |f(z)|$ непрерывна, где-то это наибольшее значение достигаться должно, и при этом во внутренней точке множества \bar{U} оно достигаться не может ввиду предложения 9.11. \square

Сейчас мы выведем из принципа максимума модуля так называемую лемму Шварца. Она производит впечатление довольно частного результата, но у нее есть важные следствия.

Предложение 9.13 (лемма Шварца). Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг и $f: D \rightarrow D$ — голоморфное отображение, для которого $f(0) = 0$. Тогда:

(1) $|f(z)| \leq |z|$ для всех $z \in D$;

(2) $|f'(0)| \leq 1$;

(3) если в неравенстве (1) (хотя бы для одного $z \neq 0$) или в неравенстве (2) достигается равенство, то существует такое $\theta \in \mathbb{R}$, что $f(z) = e^{i\theta} z$ для всех $z \in D$.

Утверждение (2) в этом предложении вытекает, конечно, из неравенств Коши (5.22), но для доказательства леммы Шварца в полном объеме нужны более тонкие соображения.

Доказательство. Так как $f(0) = 0$, функция $g(z) = f(z)/z$ продолжается до функции, голоморфной на всем D , причем $g(0) = f'(0)$. Для всякого положительного $r < 1$ рассмотрим замкнутый круг $\bar{D}_r = \{z: |z| \leq r\} \subset D$. Согласно предложению 9.12 максимум модуля функции g на круге \bar{D}_r достигается на его границе. Так как $|f(z)| < 1$ для всех $z \in D$ и $|z| = r$ для всех z на границе круга \bar{D}_r , имеем $|g(z)| < 1/r$ для всех $z \in \bar{D}_r$. Теперь, находя для всякого $z \in D$ такое r , что $|z| < r < 1$, и устремляя r к единице, получаем, что $|g(z)| \leq 1$ для всякого $z \in D$. Если $z \neq 0$, это означает, что $|f(z)| \leq |z|$, а если $z = 0$, это означает, что $|f'(0)| \leq 1$. Тем самым утверждения (1) и (2) доказаны. Если $|f'(0)| = 1$ или $|f(z)| = |z|$ для некоторого $z \in D \setminus \{0\}$, то это означает, что $|g(z)| = 1$ для некоторого $z \in D$; значит, в этой точке $|g(z)|$ достигает наибольшего значения, так что по предложению 9.11 функция g постоянна на D , $g(z) = c$ для всех z , и при этом $|c| = 1$, т. е. $c = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Этим доказано утверждение (3). \square

Вот первое из обещанных важных следствий леммы Шварца. Второе (и более серьезное) мы рассмотрим в гл. 12.

Предложение 9.14. Всякий конформный автоморфизм круга $D = \{z: |z| < 1\}$ является дробно-линейным.

Напомним, что все дробно-линейные автоморфизмы диска мы описали в предложении 3.5.

Доказательство. Пусть $f: D \rightarrow D$ — конформный автоморфизм, для которого $f(0) = a \in D$. Как мы знаем (см. предложение 3.5), дробно-линейное отображение

$$g: z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

является дробно-линейным автоморфизмом D ; тогда отображение $\varphi = g \circ f$ — также конформный автоморфизм D , причем $\varphi(0) = 0$. Если мы установим, что отображение φ дробно-линейно, то и отображение $f = g^{-1} \circ \varphi$ будет дробно-линейно и предложение будет доказано. Мы покажем даже, что φ — поворот относительно центра диска.

В самом деле, отображение $\varphi: D \rightarrow D$ удовлетворяет условиям леммы Шварца, так что $|\varphi(z)| \leq |z|$ для всех z . Обратное отображение $\varphi^{-1}: D \rightarrow D$ также удовлетворяет условиям леммы Шварца; следовательно, для всякого $z \in D$ имеем

$$|z| = |\varphi^{-1}(\varphi(z))| \leq |\varphi(z)|.$$

Сопоставляя эти два неравенства, получаем, что $|\varphi(z)| = |z|$ для всех z , откуда по лемме Шварца имеем $\varphi(z) = e^{i\theta} z$ для всех z , где $\theta \in \mathbb{R}$. Значит, φ — действительно поворот и предложение доказано. \square

Следствие 9.15. *Всякий конформный автоморфизм верхней полуплоскости является дробно-линейным.*

Как вы помните, дробно-линейные автоморфизмы верхней полуплоскости мы тоже описывали (предложение 3.4).

Доказательство. Пусть $\varphi: H \rightarrow U$ — какой-нибудь дробно-линейный изоморфизм между верхней полуплоскостью H и единичным кругом U (см. главу 3). Если $f: H \rightarrow H$ — конформный автоморфизм, то $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}: U \rightarrow U$ — конформный автоморфизм единичного круга U (см. диаграмму):

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & U \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ H & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array}$$

По предложению 9.14 автоморфизм g является дробно-линейным; следовательно, автоморфизм $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ также является дробно-линейным как композиция трех дробно-линейных отображений. \square

9.4. Теорема Блоха

В этом разделе мы докажем «количественную версию» принципа сохранения области.

Именно, этот принцип (теорема 9.1) утверждает, в частности, что образ связного открытого множества при отличном от константы голоморфном отображении обязательно содержит открытые круги. Если в процессе доказательства этой теоремы уделить должное внимание количественным вопросам, то можно получить информацию о радиусах таких кругов. Начнем со следующего результата.

Предложение 9.16. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытый круг радиуса R с центром в точке z_0 , и пусть $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Предположим, что $|f'(z_0)| = a \neq 0$ и что $\sup_{z \in U} |f(z) - f(z_0)| \leq M < +\infty$.

Тогда множество $f(U)$ содержит открытый круг с центром в точке $f(z_0)$ и радиусом $a^2 R^2 / 9M$. Более того, некоторая окрестность точки z_0 отображается на этот круг (с помощью функции f) биективно.

В этом предложении существенен не множитель 9 в знаменателе (как мы увидим, он заведомо не является оптимальным), а то обстоятельство, что, во-первых, радиус круга, заведомо содержащегося в $f(U)$, не меньше константы, зависящей только от $f'(z_0)$, $\sup |f(z)|$ и радиуса R круга U , и, во-вторых, что эта константа пропорциональна квадрату $|f'(z_0)|$ и квадрату R и обратно пропорциональна M .

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $z_0 = 0$ и $f(z_0) = 0$, что мы и будем далее предполагать. План доказательства будет следующим. Мы найдем такое число ρ , $0 < \rho < R$, что при $|z| = \rho$ имеем $|f(z)| \geq c$, где $c > 0$ — некоторая константа, зависящая от a , R и M . Тогда из принципа аргумента вытекает, что $f(U) \supset \{z: |z| < c\}$: если γ_ρ — окружность радиуса ρ , ориентированная положительным образом, то $\text{Ind}_0(f \circ \gamma_\rho) > 0$, так как $f(0) > 0$, и $\text{Ind}_w(f \circ \gamma_\rho) = \text{Ind}_0(f \circ \gamma_\rho)$, как только $|w| < c$, в силу предложения 4.20, поскольку круг радиуса c с центром в нуле не пересекается с $f(\gamma_\rho)$.

Проведем этот план в жизнь. Если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ — разложение функции f в степенной ряд в круге U , то $|a_1| = a$ по условию и $|a_n| \leq M/R^n$ для всех n ввиду неравенств Коши (5.22). Если теперь $|z| = r$, где $0 < r < R$, то имеем

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |a_1 z| - |a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots| = ar - |a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots| \geq \\ &\geq ar - (|a_2| r^2 + |a_3| r^3 + \dots) \geq ar - \left(\frac{M}{R^2} r^2 + \frac{M}{R^3} r^3 + \dots \right) = ar - \frac{Mr^2/R^2}{1 - (r/R)}. \end{aligned}$$

Стандартное вычисление показывает, что наибольшее значение функции

$$r \mapsto ar - \frac{Mr^2/R^2}{1 - (r/R)}$$

на отрезке $(0; R)$ достигается при $r = R\left(1 - \sqrt{\frac{M}{aR + M}}\right)$ и равно $c = (\sqrt{M + aR} - \sqrt{M})^2$. Для дальнейшего удобно с уменьшить (мы стремимся не к точности оценки, но к простоте формулы), пользуясь тем, что ввиду неравенств Коши имеем $aR \leq M$:

$$(\sqrt{M + aR} - \sqrt{M})^2 = \frac{a^2 R^2}{(\sqrt{M + aR} + \sqrt{M})^2} \geq \frac{a^2 R^2}{(\sqrt{2M} + \sqrt{M})^2} > \frac{a^2 R^2}{9M}.$$

Итак, при $|z| = R\left(1 - \sqrt{\frac{M}{aR + M}}\right)$ имеем $|f(z)| > a^2 R^2 / (9M)$, так что круг радиуса $a^2 R^2 / (9M)$ с центром в нуле содержится в $f(U)$, что и утверждалось. \square

В доказанном нами предложении существенно, что нижняя оценка на радиус содержащегося в $f(U)$ круга зависит от максимума модуля f . Оказывается, от этой зависимости можно избавиться. Соответствующий результат называется теоремой Блоха.

Теорема 9.17 (теорема Блоха). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытый круг радиуса R с центром в точке z_0 . Если $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, для которой $|f'(z_0)| = a > 0$, то множество $f(U) \subset \mathbb{C}$ содержит открытый круг радиуса $aR/40$. Более того, некоторое открытое подмножество в U отображается на этот круг (с помощью функции f) биективно.

По-прежнему несущественно, что числовой множитель равен именно $1/40$, и по-прежнему эта оценка заведомо неоптимальна (кстати, оптимальная оценка неизвестна и по сей день). Существенно, во-первых, что оценка зависит только от производной в центре и от радиуса круга, но не от функции f , а во-вторых, как именно она зависит от $f'(z_0)$ и R .

Доказательство. Мы применим предложение 9.16 к ограничению функции f на подходящий открытый круг $U_{b,\rho} = \{z: |z - b| < \rho\}$, содержащийся в U . При этом хочется, чтобы произведение $|f'(b)| \cdot \rho$ было побольше, а $\sup_{z \in U_{b,\rho}} |f(z) - f(b)|$ — поменьше. Рассмотрим сначала

случай, когда производная функции f продолжается как непрерывная функция на замыкание круга U . Если для всякого $r \in [0; R]$ положить

$$h(r) = (R - r) \sup_{|z - z_0| \leq r} |f'(z)|,$$

то функция h , очевидно, непрерывна на отрезке $[0; R]$, причем $h(0) = aR$ и $h(R) = 0$. Положим $r_0 = \max\{r: h(r) = aR\}$; ясно, что такое $r_0 < R$ существует и что $h(r) < aR$ при $r > r_0$. Пусть еще b — точка в круге с центром a и радиусом r_0 , в которой $|f'(z)|$ достигает максимума; ввиду принципа максимума модуля можно считать, что b лежит на границе этого круга, т. е. $|b - z_0| = r_0$; так как $h(r_0) = aR$, получаем, что $|f'(b)| = aR/(R - r_0)$. Положим теперь $\rho = (R - r_0)/2$. Тогда круг $U_{b,\rho}$ содержится в круге радиуса $(R + r_0)/2$; следовательно, при $\zeta \in U_{b,\rho}$ имеем

$$|f'(\zeta)| \leq \sup_{|z - z_0| \leq (R + r_0)/2} |f'(z)| = \frac{h(R + r_0/2)}{(R - r_0)/2} \leq \frac{aR}{(R - r_0)/2}, \quad (9.1)$$

поскольку $h(r) < aR$ при $r > r_0$. Теперь для всякого $z \in U_{b,\rho}$ имеем (ниже через $[z_0; z]$ обозначен отрезок, соединяющий z_0 и z):

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \int_{[z_0; z]} f'(\zeta) d\zeta \right| \leq |z - z_0| \cdot \sup_{\zeta \in U_{b,\rho}} |f'(\zeta)| \leq \\ &\leq |z - z_0| \cdot \frac{aR}{(R - r_0)/2} \leq \frac{R - r_0}{2} \cdot \frac{aR}{(R - r_0)/2} = aR \end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством (9.1)). Если теперь применить предложение 9.16 к ограничению функции f на круг $U_{b,\rho}$, то получим, что $f(U_{b,\rho})$ содержит круг с центром в точке $f(b)$ и радиусом

$$\frac{|f'(b)| \cdot \rho}{9 \sup_{z \in U_{b,\rho}} |f(z) - f(z_0)|} \geq \frac{(aR/(R - r_0))^2 ((R - r_0)/2)^2}{9aR} \geq \frac{aR}{36}$$

(причем некоторая окрестность точки b отображается на этот круг биективно). Так как $aR/36 > aR/40$, мы доказали теорему Блоха для случая, когда f' непрерывно продолжается на замыкание круга радиуса R с центром z_0 . В общем случае ограничим функцию f на круг радиуса $R(1 - \varepsilon)$ с центром в z_0 , где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Так как f' непрерывно продолжается на замыкание этого меньшего круга, получаем, что $f(U)$ содержит круг радиуса $aR(1 - \varepsilon)/36$, что при достаточно малых ε больше, чем $aR/40$. \square

Упражнения

9.1. (а) Пусть функция f непрерывна в круге $\bar{D} = \{z: |z| \leq 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Может ли образ единичной окружности $\bar{D} = \{z: |z| = 1\}$ при отображении f быть множеством, обозна-

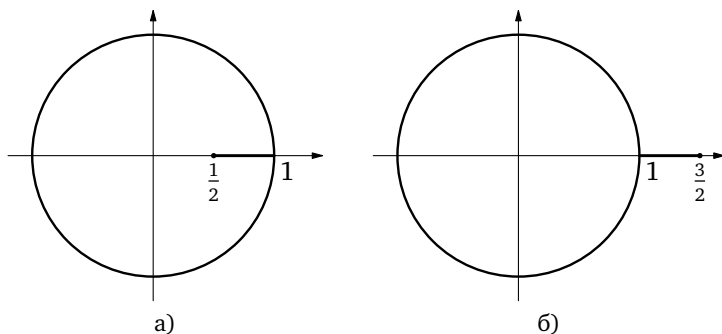


Рис. 9.2.

ченным жирными линиями на рис. 9.2а (объединение окружности и отрезка)?

(б) Тот же вопрос для рис. 9.2б.

9.2. Докажите, что всякий конформный автоморфизм комплексной плоскости имеет вид $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$. (Указание. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — такой автоморфизм. Для начала покажите, что у f в бесконечности нет существенной особенности.)

9.3. Пусть функция f голоморфна и взаимно однозначна в некоторой проколотой окрестности точки a .

(а) Докажите, что f не может иметь в точке a существенной особенности.

(б) Если f имеет в точке a полюс, что можно сказать о его порядке?

9.4. Пусть функция f голоморфна и не является постоянной на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Покажите, что если f не имеет нулей в U , то функция $z \mapsto |f(z)|$ не может иметь в U локального минимума.

9.5. Пусть f — целая функция, не являющаяся постоянной. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Докажите, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} M(r) = +\infty$.

9.6. Точки P_1, \dots, P_n лежат вне круга с центром в точке O . Докажите, что на границе круга существует точка, для которой произведение расстояний до точек P_1, \dots, P_n больше, чем $OP_1 \cdot \dots \cdot OP_n$, а также точка, для которой это произведение меньше, чем $OP_1 \cdot \dots \cdot OP_n$.

9.7. Докажите, что не существует конформного изоморфизма между открытыми множествами $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2017\}$. (Указание. См. задачу 9.3.)

9.8. Пусть P — многочлен степени n от одной переменной с комплексными коэффициентами. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)|$. Докажите, что функция $r \mapsto M(r)/r^n$ монотонно убывает на $(0; +\infty)$.

9.9. Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг и $f: D \rightarrow D$ — голоморфное отображение, для которого $f(0) = f'(0) = 0$. Докажите, что $|f(z)| \leq |z|^2$ для всех $z \in D$.

9.10. Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг. Изоморфны ли открытые множества $D \setminus \{0, 1/2\}$ и $D \setminus \{0, 1/3\}$?

9.11. Докажите, что проколотый диск $\Delta^* = \{z: 0 < |z| < 1\}$ не изоморфен кольцу $A = \{z: a < |z| < b\}$ ($0 < a < b < \infty$).

9.12. Пусть $H = \{z: \operatorname{Im}(z) > 0\}$ и $f: H \rightarrow H$ — голоморфное отображение, для которого $f(i) = i$. Докажите, что $|f'(i)| \leq 1$. (Указание. Отобразите H на единичный круг и воспользуйтесь леммой Шварца.)

9.13. Пусть $D = \{z: D \rightarrow D\}$ — единичный круг и $f: D \rightarrow D$ — голоморфное отображение, для которого $f(1/2) = 2/3$. Какое максимальное значение может принимать $|f'(1/2)|$ для таких отображений? (Указание. И тут можно свести задачу к лемме Шварца.)

9.14. Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг. Существует ли голоморфное отображение $f: D \rightarrow D$, для которого $f(0) = 1/2$ и $f(1/2) = 7/8$?

9.15. Пусть функция f , не являющаяся константой, непрерывна в замкнутом единичном круге $\bar{D} = \{z: |z| \leq 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Предположим, что $|f(z)| = 1$ всякий раз, как только $|z| = 1$. Докажите, что f имеет нуль во внутренности круга \bar{D} .

9.16. Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг и $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ — ограниченная голоморфная функция, для которой $f'(0) = 0$ и $f''(0) \neq 0$. Покажите, что существует такая константа c , зависящая только от $a = |f''(0)|$ и $M = \sup_{z \in U} |f(z)|$, что $f(U)$ содержит круг радиуса c .

Глава 10

Конформные отображения. Часть 1

10.1. Голоморфные функции на подмножествах сферы Римана

Приступая к более серьезному изучению конформных отображений, нам надо будет научиться работать с функциями на открытых подмножествах сферы Римана так же уверенно, как мы это делаем с функциями на открытых подмножествах в \mathbb{C} .

Начнем с того, что официально определим, что такое открытое подмножество в $\bar{\mathbb{C}}$ (указания на это в тексте уже встречались, но давайте расставим все точки над i).

Нет нужды напоминать, что такое ε -окрестность точки в \mathbb{C} ; всякую такую ε -окрестность можно рассматривать и как подмножество в $\bar{\mathbb{C}}$, что мы и будем делать. Пусть теперь $R > 0$; тогда R -окрестностью точки ∞ будем называть множество

$$\{z \in \mathbb{C}: |z| > R\} \cup \{\infty\} \subset \bar{\mathbb{C}}.$$

Если удалить из этого множества точку ∞ , то получится проколота окрестность бесконечности, с которой мы знакомы по гл. 7.

(Хочу подчеркнуть, что если ε -окрестность точки $a \in \mathbb{C}$ определяется как множество точек, отстоящих от a на расстояние меньше ε , то ни о каких «расстояниях до бесконечности» речь не идет и измерять расстояния на сфере Римана мы не будем.)

Далее, пусть $X \subset \bar{\mathbb{C}}$; точка $p \in X$ называется *внутренней* для этого множества, если существует содержащееся в X множество $V \ni p$, являющееся ее ε -окрестностью, если $p \neq \infty$, или ее R -окрестностью, если $p = \infty$. Подмножество $X \subset \bar{\mathbb{C}}$ называется *открытым*, если всякая его точка является внутренней.

Если $X \subset \mathbb{C} \subset \bar{\mathbb{C}}$, то это определение открытого множества согласуется с данным нами в главе 1.

На открытых подмножествах сферы Римана можно определить голоморфные функции.

Определение 10.1. Пусть $X \subset \bar{\mathbb{C}}$ — открытое множество, содержащее ∞ . Функция $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ называется *голоморфной в окрестности бесконечности*, если функция $g: t \mapsto f(1/t)$ продолжается до функции, голоморфной в окрестности нуля.

Легко видеть, что это условие равносильно тому, что f имеет в бесконечности устранимую особенность в смысле определения 7.21. В текстах, посвященных римановым поверхностям, говорят, что функция $t = 1/z$ является «локальной координатой» в окрестности точки ∞ (см. гл. 13).

Определение 10.2. Пусть $X \subset \bar{\mathbb{C}}$ — открытое множество. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ называется *голоморфной на X* , если она голоморфна в некоторой (ε - или R -) окрестности всякой точки $p \in X$.

Если $X \not\ni \infty$, это определение, разумеется, равносильно привычному.

Давайте теперь обсудим, что из известного нам о голоморфных функциях распространяется на голоморфные функции в смысле определения 10.2. Начнем с того, что для функции f , голоморфной в окрестности бесконечности, мы не определяем ее производную в точке ∞ . Многое же другое допускает естественное обобщение. Например, полностью распространяется вся теория изолированных особенностей — эти вопросы мы уже разобрали в разделе 7.4. Добавим только, что функция имеет в бесконечности нуль порядка $k > 0$ тогда и только тогда, когда ее лорановское разложение в проколотой окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z) = \frac{c_k}{z^k} + \frac{c_{k+1}}{z^{k+1}} + \dots,$$

где $c_k \neq 0$: достаточно посмотреть, что получится при замене $z = 1/t$. Точно так же сохраняет смысл понятие точки ветвления и предложение 9.7.

Коль скоро для функций на произвольных открытых подмножествах в $\bar{\mathbb{C}}$ определено, что такое полюс, в этой ситуации корректно определены и мероморфные функции. Замечательно, что всякую мероморфную функцию можно рассматривать как голоморфное отображение со значениями в $\bar{\mathbb{C}}$. Именно, вне полюсов это даже голоморфное отображение со значениями в $\mathbb{C} \subset \bar{\mathbb{C}}$, а если функция f имеет полюс в точке $a \in \bar{\mathbb{C}}$, то в некоторой проколотой окрестности этой точки она голоморфна и $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Положим $f(a) = \infty$. Если рассмотреть в окрестности точки a вместо функции $w = f(z)$ функцию $t = 1/w = 1/f(z)$, то получится, что «локальная координата» в бесконечности, т. е. $1/w$, является голоморфной функцией от z

(поскольку функция $1/f$ имеет в точке a устранимую особенность со значением 0). Это и будет означать, что доопределенная указанным выше образом мероморфная функция является голоморфным отображением в $\bar{\mathbb{C}}$.

В частности, всякое дробно-линейное отображение и — шире — всякая рациональная функция есть голоморфное отображение из $\bar{\mathbb{C}}$ в $\bar{\mathbb{C}}$.

Если функция имеет в точке a не полюс, а существенную особенность, то доопределить ее как голоморфное (да хотя бы и непрерывное) отображение в $\bar{\mathbb{C}}$ невозможно — это запрещает теорема Сохоцкого.

Для голоморфных функций на открытых подмножествах в $\bar{\mathbb{C}}$ по-прежнему имеет место принцип сохранения области (теорема 9.1) и принцип аналитического продолжения (предложение 5.20). Чтобы распространить эти результаты на подмножества в $\bar{\mathbb{C}}$, для принципа сохранения области достаточно рассмотреть поведение функции в окрестности бесконечности, а для принципа аналитического продолжения — случай, когда ∞ является предельной точкой нулей. В обоих случаях дело решается заменой $z = 1/t$; подробности — упражнение для читателя. По-прежнему верно и то, что взаимно однозначное голоморфное отображение является конформным изоморфизмом (еще одно упражнение). Точно так же на \mathbb{C} распространяется понятие аналитического продолжения вдоль пути и теорема о монодромии.

А вот принцип аргумента на случай функций на подмножествах в $\bar{\mathbb{C}}$ так просто распространить не удастся. Причина тут в том, что невозможно осмысленно определить индекс замкнутого пути в $\bar{\mathbb{C}}$ относительно точки: если γ — замкнутый путь и $a \in \bar{\mathbb{C}}$ — точка, через которую γ не проходит, то γ всегда можно стянуть в точку, не задевая точки a (см. план доказательства этого факта в задаче 10.4); поскольку индекс кривой не должен меняться при ее деформации, получается, что индекс любой кривой относительно любой точки равен нулю — толку от такого «инварианта» будет немного! В тех случаях, когда нам понадобится применить принцип аргумента к подмножествам в $\bar{\mathbb{C}}$, содержащим точку ∞ , мы будем с помощью дробно-линейных отображений сводить задачу к ситуации, когда все происходит исключительно в \mathbb{C} . В частности, такое рассуждение будет использовано ниже в разделе 10.3.

В заключение этого раздела давайте докажем хотя бы один результат про комплексный анализ на $\bar{\mathbb{C}}$ (еще несколько примеров см. в упражнениях).

Предложение 10.3. *Всякая функция, голоморфная на всей сфере Римана, является постоянной.*

Доказательство. Я приведу доказательство, использующее минимум топологических понятий. Итак, пусть $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Так как функция f непрерывна в точке ∞ , она ограничена в некоторой ее окрестности, а значит — и на некотором множестве вида $\{z \in \mathbb{C}: |z| > R\}$. Для всякого $R_1 > R$ замкнутый круг $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq R_1\}$ компактен, так что непрерывная функция $z \mapsto |f(z)|$ на нем ограничена. Значит, функция f ограничена на всем \mathbb{C} и тем самым, будучи голоморфной, равна константе по теореме Лиувилля (следствие 7.25); по непрерывности, $f(\infty)$ равно той же константе. \square

10.2. Принцип симметрии

Принцип симметрии — это геометрическая конструкция, позволяющая в некоторых ситуациях предсказать существование аналитического продолжения и, более того, это продолжение описать. Начнем с обозначений.

В разделе 1.6 было введено понятие симметрии относительно окружности или прямой на сфере Римана (определение 1.32). Если $C \subset \bar{\mathbb{C}}$ — такая «обобщенная окружность», то симметрию относительно нее мы будем обозначать $S_C: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$.

Вот первый и самый слабый вариант принципа симметрии, в котором, собственно говоря, и аналитического продолжения еще нет.

Предложение 10.4. *Пусть $C \subset \bar{\mathbb{C}}$ — обобщенная окружность (окружность или прямая), и пусть $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ — открытое множество, для которого $U \cap C = \emptyset$ и $U \cap S_C(U) = \emptyset$.*

Если $f: U \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ — голоморфное отображение, то отображение $\tilde{f}: S_C(U) \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, заданное формулой

$$\tilde{f}(z) = S_C(f(S_C(z))),$$

также голоморфно.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда C — это действительная ось (плюс точка ∞ , разумеется). Тогда $\tilde{f}(z) = f(\bar{z})$. Если f — отображение со значениями в \mathbb{C} (т. е. f не имеет полюсов), то функция \tilde{f} также голоморфна: если, например, в окрестности точки $a \in U$ имеем разложение в степенной ряд

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots,$$

то в окрестности точки $\bar{a} = S_C(a)$ имеем

$$\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1(z - \bar{a}) + \bar{c}_2(z - \bar{a})^2 + \dots,$$

т. е. \tilde{f} в окрестности любой точки $S_C(U)$ представима в виде суммы степенного ряда и тем самым голоморфна. Для функции с полюсами достаточно заметить, что если a — полюс для функции f , то по построению $\lim_{z \rightarrow \bar{a}} \tilde{f}(z) = \infty$, так что \bar{a} — полюс для \tilde{f} .

В общем случае пусть $\varphi: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ — дробно-линейное отображение, переводящее C в действительную ось; положим $V = \varphi^{-1}(U)$ и $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$; это также голоморфное отображение из V в $\bar{\mathbb{C}}$. Поскольку, как мы знаем, дробно-линейные отображения сохраняют симметрию точек относительно обобщенной окружности, имеем $\varphi(S_C(z)) = \overline{\varphi(z)}$ для всех z ; кроме того, если обозначить через V' открытое множество, получаемое из V симметрией относительно действительной оси, то $V \cap V' = \emptyset$ и ни V , ни V' с действительной осью не пересекаются. По доказанному выше функция $\tilde{g}(z) = \overline{g(\bar{z})}$ голоморфна (со значениями в $\bar{\mathbb{C}}$) на V' . Если обозначить отображение $z \mapsto \bar{z}$ через Conj , то можно переписать тождество $\varphi(S_C(z)) = \overline{\varphi(z)}$ в виде $\varphi \circ S_C \circ \varphi^{-1} = \text{Conj}$, откуда

$$\varphi \circ \tilde{g} \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ (\text{Conj} \circ g \circ \text{Conj}) \circ \varphi^{-1} = S_C \circ f \circ S_C = \tilde{f};$$

так как дробно-линейные отображения φ и φ^{-1} голоморфны, отображение \tilde{f} также голоморфно. \square

А теперь давайте сформулируем и докажем основную версию принципа симметрии. Я не буду очередной раз повторять предположения относительно формулировок теорем, в которых участвуют кусочно гладкие кривые, являющиеся границами областей, — см. замечания после доказательства теоремы 5.4.

Предложение 10.5 (принцип симметрии). Пусть $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ — открытое и связное множество и $f: U \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ — голоморфное отображение. Предположим следующее:

(1) граница области U содержит подмножество γ , являющееся открытой дугой или открытым интервалом на обобщенной окружности (окружности или прямой) $C \subset \bar{\mathbb{C}}$;

(2) отображение f продолжается до непрерывного отображения $F: U \cup \gamma \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$;

(3) множество $F(\gamma)$ содержится в некоторой обобщенной окружности $C' \subset \bar{\mathbb{C}}$;

(4) $U \cap S_C(U) = \emptyset$.

Определим отображение $\tilde{f}: U \cup \gamma \cup S_C(U) \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ следующим образом:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in U; \\ F(z), & z \in \gamma; \\ S_{C'}(f(S_C(z))), & z \in S_C(U). \end{cases}$$

Тогда отображение \tilde{f} является голоморфным.

Доказательство. Непрерывность функции \tilde{f} очевидна из построения. Если $a \in S_C(U)$, то голоморфность \tilde{f} в окрестности точки a была нами установлена в предложении 10.4. Остается проверить, что \tilde{f} голоморфна в окрестности всякой точки $a \in \gamma$.

Пусть сначала C и C' совпадают с действительной осью, и пусть \tilde{f} конечна на γ (т. е. $f(\gamma) \subset \mathbb{C} \subset \bar{\mathbb{C}}$). Тогда, чтобы установить голоморфность функции \tilde{f} в окрестности точки $a \in C$, ввиду теоремы Мореры достаточно проверить, что у точки a есть такая окрестность $V \subset U \cup \gamma \cup S_C(U)$, что $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$ для всякого треугольника

$\Delta \subset V$. Если этот треугольник целиком содержится в U или $S_C(U)$, это обращение в нуль следует из теоремы Коши и доказанного выше. Если Δ пересекается и с областью U , и с ее отражением, то действительная ось C разрезает его на треугольник и четырехугольник (или на два треугольника, один из которых лежит в $U \cup \gamma$, а другой — в $S_C(U) \cup \gamma$). Интеграл по границе каждого из них (ориентированной в положительном направлении) равен нулю по теореме Коши, так как функция \tilde{f} непрерывна на γ ; сумма же этих двух интегралов равна интегралу по границе треугольника Δ , так что и этот интеграл равен нулю. Тем самым мы доказали предложение для случая, когда C и C' совпадают с действительной осью, а функция f не имеет полюсов.

Если $f(z)$ стремится к бесконечности при стремлении $z \in U$ к некоторой точке $a \in \gamma$, то заметим, что функция $1/f$, непрерывно продолженная на γ , конечна в окрестности точки a и при этом, коль скоро $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$, имеем $\overline{(1/f)(z)} = 1/\overline{f(\bar{z})}$; применяя к $1/f$ то же рассуждение с теоремой Мореры, получаем, что функция $1/\tilde{f}$ голоморфна в окрестности точки a и имеет в этой точке нуль. Тем самым функция \tilde{f} имеет в точке a полюс и является, в окрестности этой точки, голоморфным отображением в $\bar{\mathbb{C}}$. Итак, предложение доказано для случая, когда $C = C'$ — действительная ось.

Общий случай сводится к разобранному выше с помощью дробно-линейных отображений, как в доказательстве предложения 10.4.

Именно, если ℓ — действительная ось и если $\varphi, \psi: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ — дробно-линейные отображения, для которых $\varphi(\ell) = C$, $\psi(C') = \ell$, то отображение $g = \psi \circ f \circ \varphi$ удовлетворяет условию предложения для случая $C = C' = \ell$; по тем же соображениям, что в доказательстве предложения 10.4, имеем $\tilde{g} = \psi \circ \tilde{f} \circ \varphi$; поскольку по уже доказанному отображение \tilde{g} голоморфно, таково же и $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ \tilde{g} \circ \varphi^{-1}$. \square

Следствие 10.6. Пусть $V \subset \bar{\mathbb{C}}$ — открытое и связное множество и $f: V \rightarrow V'$ — конформный изоморфизм. Предположим, что:

(1) граница области V содержит подмножество γ , являющееся открытой дугой или открытым интервалом на обобщенной окружности $C \subset \bar{\mathbb{C}}$, а граница области V' содержит подмножество γ' , являющееся открытой дугой или открытым интервалом на обобщенной окружности $C' \subset \bar{\mathbb{C}}$;

(2) отображение f продолжается до непрерывного и биективного отображения $F: V \cup \gamma \rightarrow V' \cup \gamma'$;

(3) $V \cap S_C(V) = \emptyset$.

Тогда отображение \tilde{f} , определенное по правилу

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in V; \\ F(z), & z \in \gamma; \\ S_{C'}(f(S_C(z))), & z \in S_C(V), \end{cases}$$

задает конформный изоморфизм между областями $V \cup \gamma \cup S_C(V)$ и $V' \cup \gamma' \cup S_{C'}(V')$.

В самом деле, из предложения 10.5 следует все, кроме биективности отображения \tilde{f} , но эта последняя вытекает из данной в условии биективности отображения f .

Отметим еще, что в большинстве интересных случаев много усилий на проверку условия (2) тратить не приходится: как мы увидим в разделе 10.4, конформный изоморфизм между областями с «хорошими» границами продолжается до непрерывной биекции их границ.

Следствие 10.6 помогает при построении конформных отображений.

Пример 10.7. Положим $U = \mathbb{C} \setminus ((-\infty; 0] \cup [-i; i])$ (см. рис. 10.1). Найдем конформное отображение области U на верхнюю полуплоскость.

В примере 3.9 мы видели, что отображение $f: z \mapsto \sqrt{z^2 + 1}$, где $\sqrt{-1} = i$, задает конформное отображение открытого множества $V = \{z: \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0; i]$ на верхнюю полуплоскость $H = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ (мы изменили обозначения по сравнению с гл. 3). Легко видеть,

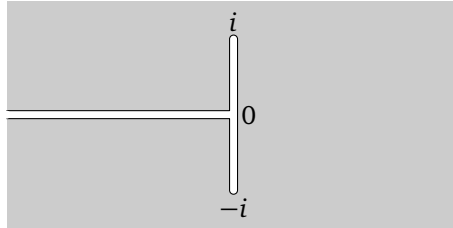


Рис. 10.1.

что отображение f непрерывно продолжается до биекции между $(0; +\infty)$ и $(1; +\infty)$. Если в следствии 10.6 положить $V' = H$, $C = C' = (-\infty; +\infty)$ (действительная ось), $\gamma = (0; +\infty)$, $\gamma' = (1; +\infty)$, то все условия следствия будут выполнены. Поскольку $V \cup \gamma \cup S_C(V) = U$ и $V' \cup \gamma' \cup S_{C'}(V') = \mathbb{C} \setminus (-\infty; 1]$, следствие показывает, что отображение f продолжается до изоморфизма между областью U и множеством $\mathbb{C} \setminus (-\infty; 1]$. Поскольку отображение $w \mapsto i\sqrt{w-1}$, где $\sqrt{1} = 1$, конформно отображает $\mathbb{C} \setminus (-\infty; 1]$ на верхнюю полуплоскость, получаем, беря композицию, что формула

$$z \mapsto i\sqrt{\sqrt{z^2+1}-1}$$

задает конформное отображение области U на верхнюю полуплоскость. Здесь у внутреннего квадратного корня выбрана ветвь, для которой $\sqrt{-1} = i$, а у внешнего — та, для которой $\sqrt{1} = 1$.

10.3. Отображение верхней полуплоскости на прямоугольник

Весь этот раздел будет посвящен разбору одного важного примера.

Пусть $a_1 < a_2 < a_3$ — действительные числа; верхнюю полуплоскость, как водится, обозначим через $H = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$. Зафиксируем до конца раздела действительное число z_0 , отличное от всех a_j (последнее на самом деле не важно), и определим функцию $F: H \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}}. \quad (10.1)$$

Эта формула нуждается в комментариях. Во-первых, под $\int_{z_0}^z$ мы понимаем интеграл по какому-нибудь пути в верхней полуплоскости, идущему из z_0 в z . Поскольку H выпукла, все такие пути гомотопны друг другу, так что по теореме Коши такой интеграл от выбора пути не зависит. Во-вторых, необходимо зафиксировать ветвь квадратного корня. Мы выберем ее следующим образом: $\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$ будем понимать как произведение $\sqrt{z-a_j}$ по j от 1 до 3, а для каждого $\sqrt{z-a_j}$ выберем такую ветвь, что если $z \in \mathbb{R}$ и $z > a_j$, то $\sqrt{z-a_j} > 0$. С этими уточнениями функция F очевидным образом голоморфна на H : ее производной будет выбранная нами ветвь функции $\sqrt{\prod(z-a_j)}$.

Определив функцию F , исследуем ее. Обозначим через $\ell \subset \bar{\mathbb{C}}$ обобщенную окружность, соответствующую действительной оси. Иными словами, ℓ состоит из всех точек действительной оси и точки ∞ ; объединение $H \cup \ell$ является замыканием H в $\bar{\mathbb{C}}$; соответственно, будем его обозначать через \bar{H} .

Предложение 10.8. *Функция F , заданная формулой (10.1), продолжается до непрерывной функции на $H \cup \ell$ со значениями в \mathbb{C} (а не просто в $\bar{\mathbb{C}}$).*

Доказательство. Для начала заметим, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} dx / \sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}$ сходится, причем абсолютно: в самом деле, подынтегральное выражение при $|x| \rightarrow \infty$ есть $O(1/x^{3/2})$, а при $x \rightarrow a_j$ — $O(|x-a_j|^{-1/2})$, так что интеграл сходится по признаку сравнения. Следовательно, сходится и интеграл от $dx / \sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}$ по любому интервалу действительной оси; отсюда легко видеть, что для всякого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in H}} F(z) = \int_{z_0}^x dx / \sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}, \text{ и мы получили непрерыв-$$

ное продолжение функции F на объединение H и действительной оси. Теперь покажем, что существует непрерывное продолжение и в точку ∞ . Для этого, очевидно, достаточно установить, что существует конечный предел $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z)$. Ввиду критерия Коши для этого

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}}$$

достаточно установить, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $R > 0$, что если $|z_1|, |z_2| > R$, то $|F(z_1) - F(z_2)| \leq \varepsilon$. И действительно, пусть $|z_1| > R$, $|z_2| > R$ и $z_1, z_2 \in H$; не ограничивая общности, можно счи-

тать, что $|z_2| \geq |z_1|$. Заметим, что точки z_1 и z_2 можно соединить путем, лежащим в множестве $\{z: |z| > R, \operatorname{Im} z > 0\}$ и состоящим из двух участков: прямолинейный участок γ_1 лежит на луче, выходящем из нуля, а участок γ_2 — на дуге окружности радиуса $|z_2|$ (см. рис. 10.2).

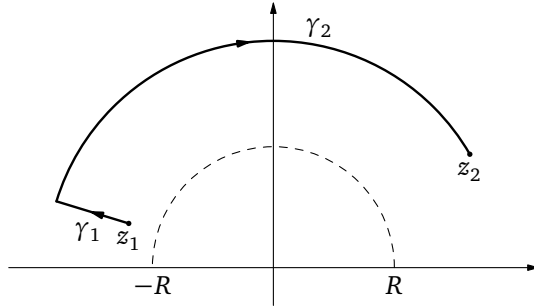


Рис. 10.2.

Обозначая через $\gamma_1 + \gamma_2$ путь «сначала γ_1 , затем γ_2 », имеем

$$\begin{aligned}
 |F(z_1) - F(z_2)| &= \left| \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}} \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}} \right| + \\
 &\quad + \left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}} \right|. \quad (10.2)
 \end{aligned}$$

Очевидно, существует такая константа $C > 0$, что при достаточно больших $|z|$ имеем

$$\left| \frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}} \right| \leq \frac{C}{|z|^{3/2}}. \quad (10.3)$$

Теперь оценим оба слагаемых в правой части (10.2). Первое слагаемое (модуль интеграла по γ_1) оценим с помощью предложения 4.17: если параметризовать γ_1 по формуле $z = tz_1/|z_1|$, $|z_1| \leq t \leq |z_2|$, то $|dz| = dt$ и ввиду (10.3) имеем

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}} \right| \leq \int_{|z_1|}^{|z_2|} \frac{C}{t^{3/2}} dt \leq \frac{2C}{\sqrt{|z_1|}} \leq \frac{2C}{\sqrt{R}}.$$

Второе слагаемое в (10.2) достаточно оценить с помощью более грубого неравенства из предложения 4.15:

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}} \right| \leq \frac{C}{R^{3/2}} \cdot \text{length}(\gamma_2) \leq \frac{C \cdot \pi R}{R^{3/2}} = \frac{\pi C}{\sqrt{R}}.$$

В итоге получаем, что при $|z_1| > R$, $|z_2| > R$ выполнено неравенство

$$|F(z_1) - F(z_2)| \leq \frac{2C}{\sqrt{R}} + \frac{\pi C}{\sqrt{R}};$$

так как правая часть стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$, условия критерия Коши выполняются и конечный предел $\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \text{Im } z \geq 0}} F(z)$ существует.

Это последнее, что мы должны были проверить для доказательства предложения. \square

С этого момента мы будем обозначать через F непрерывное продолжение голоморфной функции F на \bar{H} , существование которого установлено в только что доказанном предложении 10.8; напомним, что $\bar{H} \ni \infty$.

Заметим, что при изменении z_0 («нижнего предела интегрирования») в формуле (10.1) функция F изменится на константу, что на ее качественное поведение не повлияет. Давайте считать, что z_0 лежит на действительной оси левее a_1 — наименьшего корня знаменателя в (10.1).

Предложение 10.9. *Функция F переводит кривую $\ell \subset \bar{\mathbb{C}}$ (действительную ось с добавленной точкой ∞) в границу прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Когда ℓ однократно обходится в направлении слева направо, граница прямоугольника также однократно обходится в положительном направлении.*

Доказательство. Из нашего выбора ветвей квадратного корня вытекает, что при $t \in \mathbb{R}$ о подынтегральном выражении можно сказать следующее:

t	$(-\infty; a_1)$	$(a_1; a_2)$	$(a_2; a_3)$	$(a_3; +\infty)$
$\frac{1}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}}$	$i\alpha, \alpha > 0$	< 0	$i\alpha, \alpha < 0$	> 0

Так как $F(z_0) = 0$, таблица показывает, что при $x \in (z_0; a_1]$ значение интеграла (т. е. функции $F(x)$) является чисто мнимым числом с положительной мнимой частью и при возрастании x от z_0 до a_1 эта мнимая часть монотонно возрастает. Таким образом, отрезок $[z_0; a_1]$, ориентированный слева направо, переходит в вертикальный отрезок, ориентированный снизу вверх и проходимый, разуме-

ется, один раз (а также лежащий на мнимой оси, но это малосущественно).

Что же, однако, произойдет, когда x , продолжая движение в положительном направлении по действительной оси, перейдет через точку a_1 ? Если $a_1 < t < a_2$, то, согласно таблице, подынтегральное выражение $1/\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}$ действительно и отрицательно в верхней полуплоскости, так что при $x \in [a_1; a_2]$ имеем

$$F(x) = F(a_1) - \int_{a_1}^x \frac{dt}{\sqrt{|(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)|}}.$$

Отсюда вытекает, что при возрастании x от a_1 до a_2 образ действительной оси при отображении F заворачивает налево под углом 90° и движется в отрицательном направлении по горизонтальному отрезку, пока не доберется до $F(a_2)$.

Пойдем дальше. Если $a_2 < t < a_3$, то приведенная выше таблица гласит, что подынтегральное выражение чисто мнимое с отрицательной мнимой частью, так что при $x \in [a_2; a_3]$ имеем

$$F(x) = F(a_2) - i \cdot \int_{a_2}^x \frac{dt}{\sqrt{|(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)|}},$$

т. е. образ данного отрезка действительной оси идет опять вертикально, но в отрицательном направлении. Образ действительной оси еще раз повернул на 90° влево.

Совершенно аналогично показывается, что при $x > a_3$ выполняно равенство

$$F(x) = F(a_3) + \int_{a_3}^x \frac{dt}{\sqrt{|(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)|}}.$$

Иными словами, наша ломаная еще раз поворачивает налево на 90° (и идет горизонтально в положительном направлении). Поскольку

интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}}$ абсолютно сходится, образом

бесконечного интервала $(a_3; +\infty)$ будет конечный интервал; правый конец этого интервала — не что иное, как $F(\infty)$. Напомним, что на сфере Римана $+\infty$ и $-\infty$ не различаются и что, согласно предложению 10.8, $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)$ (оба этих предела равны $F(\infty)$).

Если проходить обобщенную прямую ℓ в том направлении, в котором это делаем мы, то после точки ∞ идет интервал $(-\infty; z_0]$.

На этом интервале подынтегральное выражение также чисто мнимом с положительной мнимой частью, так что после $F(\infty)$ образ действительной оси снова идет вертикально вверх, поскольку при $x \leq z_0 < a_1$ имеем

$$F(x) = F(\infty) + i \cdot \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{|(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)|}}.$$

Итак, образ интервала $(-\infty; a_1]$ — вертикальный отрезок, заканчивается этот вертикальный отрезок в той же точке $F(z_0)$, с которой мы начинали. В итоге получаем, что образ действительной оси с добавленной точкой ∞ — прямоугольник со сторонами, параллельными осям, что и утверждалось. См. рис. 10.3. \square

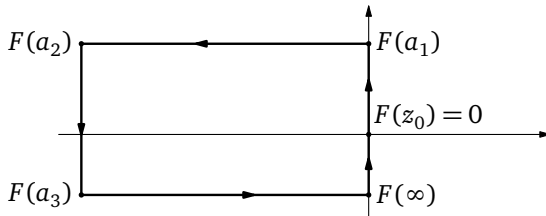


Рис. 10.3.

Заметим, что из того, что ломаная $F(\ell)$ замкнулась и стала прямоугольником, вытекает, что противоположные стороны этого прямоугольника равны. Длины этих сторон суть некоторые интегралы от $1/\sqrt{|(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)|}$ по (конечным или бесконечным) интервалам с концами в точках a_j и/или $\pm\infty$, так что в качестве побочного продукта мы получили два тождества с определенными интегралами. Впрочем, эти тождества очень просто получить и непосредственно (см. задачу 10.8).

Предложение 10.10. *Функция F , определенная выше, осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность прямоугольника со сторонами, параллельными осям. При этом отображение F продолжается до непрерывной биекции между $\bar{H} = H \cup \ell$ и замыканием прямоугольника; точки a_1, a_2, a_3 и ∞ переходят в вершины прямоугольника.*

Доказательство. Рассмотрим какое-нибудь дробно-линейное отображение $\varphi: D \rightarrow H$, переводящее единичный круг $D = \{z: |z| < 1\}$ в верхнюю полуплоскость. Это отображение непрерывно продолжа-

ется на границы, и из предложения 10.9 вытекает, что при отображении $F \circ \varphi$ граница круга D , проходимая в положительном направлении, взаимно однозначно отображается на границу прямоугольника, проходимую в положительном направлении. Теперь из предложения 8.11 следует, что $F \circ \varphi : D \rightarrow F(\varphi(D))$ — конформное отображение; значит, и $F : H \rightarrow D$ — конформное отображение. Сразу сослаться на предложение 8.11 было нельзя, так как H не является ограниченным множеством с кусочно гладкой границей. \square

Отметим, что версия предложения 8.11, которой мы воспользовались, опирается на принцип аргумента в его усиленном варианте (предложение 8.7), и обойтись полностью доказанной в курсе, но более слабой теоремой 8.6 нельзя: функция F не продолжается до голоморфной функции на открытом множестве, содержащем \bar{H} : в противном случае до голоморфной на этом открытом множестве функции продолжалась бы и ее производная

$$F'(z) = \frac{1}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)}},$$

а ее нельзя продолжить в окрестность любой из точек a_j даже как непрерывную функцию. См. замечание 8.8.

Введем теперь некоторые обозначения. Прямоугольник $F(H)$ обозначим через Π , а его замыкание — через $\bar{\Pi}$. Далее, длину его горизонтальной (параллельной действительной оси) стороны обозначим через u , а длину его вертикальной стороны обозначим через v . Обозначим через $G = F^{-1} : \Pi \rightarrow H$ отображение, обратное к F ; это также конформное отображение.

Предложение 10.11. *Голоморфное отображение $G : \Pi \rightarrow H$ продолжается до функции, мероморфной на всем \mathbb{C} . Эта продолженная функция G обладает следующими свойствами.*

(1) *Функция G дважды периодична с периодами $2u$ и $2iv$: имеем $G(z + 2tu + 2inv) = G(z)$ для всякого z и всяких $t, n \in \mathbb{Z}$.*

(2) *Если p — любая из вершин прямоугольника Π , то $G(p - z) = G(p + z)$ для всех z .*

(3) *Функция G имеет полюсы порядка 2 в точках $F(\infty) + tu + nv$ для всех $t, n \in \mathbb{Z}$, а других полюсов не имеет.*

(4) *Если p — вершина прямоугольника Π , отличная от $F(\infty)$, то во всех точках $p + tu + inv$, $t, n \in \mathbb{Z}$, функция G разветвлена с индексом 2; во всех других точках, где она голоморфна, функция G неразветвлена.*

Доказательство. В силу предложения 10.10 функция G продолжается до непрерывной биекции из $\bar{\Pi}$ в $\bar{H} = H \cup \ell$. Рассмотрим теперь

любую сторону прямоугольника Π ; пусть она лежит на прямой λ . Так как эта сторона переходит в интервал на действительной оси, мы можем применить принцип симметрии в форме следствия 10.6: продолжим G до голоморфной функции на $\Pi \cup S_\lambda(\Pi) \cup (\lambda \cap \bar{\Pi})$ (будем обозначать ее также G) по правилу $G(S_\lambda(z)) = \overline{G(z)}$, где S_λ — симметрия относительно прямой λ . Отметим, что продолженное отображение G непрерывно (как отображение в \mathbb{C}) продолжается на границу прямоугольника $S_\lambda(\Pi)$ и что всякая сторона этого нового прямоугольника также отображается на интервал на действительной оси.

Далее, рассмотрим любую из «неиспользованных» сторон прямоугольника Π или любую из сторон прямоугольника $S_\lambda(\Pi)$, кроме той, что лежит на прямой λ , и применим принцип симметрии к этой стороне — в результате G продолжится на еще один прямоугольник, конгруэнтный исходному прямоугольнику Π . Поскольку, последовательно отражая прямоугольник относительно его сторон, можно замостить всю плоскость (без перекрытий) прямоугольниками, конгруэнтными прямоугольнику Π , можно, итерируя эту конструкцию, продолжить G до функции, голоморфной на всей плоскости, кроме, возможно, вершин прямоугольников замощения, т. е. точек вида $p + tu + inv$, где p — вершина прямоугольника Π и $t, n \in \mathbb{Z}$. Покажем теперь, что G продолжается до функции, мероморфной на всем \mathbb{C} . В самом деле, по построению G — непрерывное отображение из \mathbb{C} в $\bar{\mathbb{C}}$. Если теперь a — вершина какого-то прямоугольника замощения, которую G переводит не в бесконечность, то G ограничена в окрестности точки a , так что по теореме Римана об устранимой особенности G голоморфно продолжается в точку a ; если же $G(a) = \infty$, то $\lim_{z \rightarrow a} |G(z)| = +\infty$, так что G имеет в точке a полюс.

Лемма 10.12. Пусть λ — прямая, на которой лежит какая-то из сторон какого-то из прямоугольников замощения. Тогда для всякой точки z имеем $G(S_\lambda(z)) = \overline{G(z)}$.

Доказательство леммы. Если $z \in \lambda$, то по построению $F(z)$ лежит на действительной оси и тем самым совпадает со своим сопряженным. Если $z \notin \lambda$, рассмотрим ограничение G на ту из полуплоскостей относительно прямой λ , в которой лежит точка z , и применим к этому ограничению и прямой λ принцип симметрии. В результате G продолжится до голоморфной функции \tilde{G} в противоположную полуплоскость, и будет выполнено тождество $\tilde{G}(S_\lambda(z)) = \overline{G(z)}$. Поскольку \tilde{G} совпадает с G в исходной полуплоскости, а множество $\mathbb{C} \setminus \{a + tu + inv\}$ связно, принцип аналити-

ческого продолжения показывает, что $\tilde{G} = G$ всюду, чем искомое тождество и доказано. \square

Теперь мы можем проверить свойства (1)—(4).

Пусть λ и μ — прямые, на которых лежат две вертикальные стороны прямоугольника Π . Для всякого z имеем, очевидно, $S_\mu(S_\lambda(z)) = z + 2u$ (композиция симметрий относительно параллельных прямых — параллельный перенос). Поэтому

$$G(z + 2u) = G(S_\mu(S_\lambda(z))) = \overline{G(S_\lambda(z))} = \overline{\overline{G(z)}} = G(z).$$

Аналогично проверяется, что $2iv$ — также период функции G . Этим доказано утверждение (1).

Далее, если p — любая вершина прямоугольника Π (и более того, любая вершина любого прямоугольника замощения) и $z \in \mathbb{C}$, то точки $p + z$ и $p - z$ центрально-симметричны относительно точки p ; обозначая через λ и μ прямые, на которых лежат стороны прямоугольника, содержащие точку p , имеем $S_\mu(S_\lambda(p + z)) = p - z$ (композиция симметрий относительно перпендикулярных прямых — центральная симметрия). Поэтому

$$G(p - z) = G(S_\mu(S_\lambda(p + z))) = \overline{G(S_\lambda(p + z))} = \overline{\overline{G(p + z)}} = G(p + z).$$

Этим доказано утверждение (2).

Чтобы перечислить все полюсы функции G , достаточно, ввиду ее периодичности с периодами $2u$ и $2iv$, найти ее полюсы в каком-нибудь прямоугольнике со сторонами $2u$ и $2v$, параллельными осям. Возьмем в качестве такового большой прямоугольник на рис. 10.4. Ввиду леммы 10.12 (или, если угодно, по построению) в этом прямоугольнике полюс есть только в точке $F(\infty)$; значит, остальные

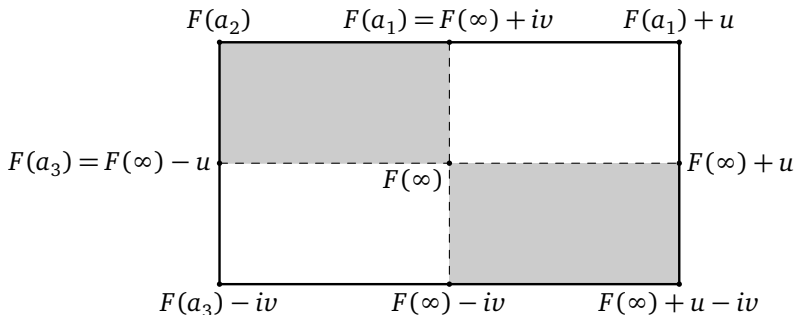


Рис. 10.4.

полюсы есть в точках вида $F(\infty) + 2mu + 2inv$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, и только в них. Чтобы доказать утверждение (3), остается проверить, что эти полюсы имеют порядок 2. Опять-таки ввиду периодичности достаточно установить это для полюса в точке $F(\infty)$. Заметим, что функция G имеет в этой точке полюс порядка 2 тогда и только тогда, когда функция $z \mapsto 1/G(z)$ имеет в этой точке нуль порядка 2, или, что равносильно (поскольку нуль она там имеет заведомо), функция $z \mapsto 1/G(z)$ имеет в точке $F(\infty)$ индекс ветвления 2. Чтобы в этом убедиться, посмотрим еще раз на рис. 10.4. Каждый из серых прямоугольников конформно отображается функцией G на верхнюю полуплоскость, каждый из белых — на нижнюю, и при этом образы точек, центрально-симметричных относительно $F(\infty)$, совпадают. Так как взятие обратного от комплексного числа — операция взаимно однозначная, функция $z \mapsto 1/G(z)$ конформно отображает каждый серый прямоугольник на нижнюю полуплоскость, а каждый белый — на верхнюю. Следовательно, функция $z \mapsto 1/G(z)$ в окрестности точки $z = F(\infty)$ удовлетворяет условиям предложения 9.7 при $k = 2$ и тем самым имеет в этой точке индекс ветвления 2; стало быть, порядок полюса функции G в точке $F(\infty)$ равен 2, и этим завершается доказательство утверждения (3).

Чтобы доказать утверждение (4), заметим, во-первых, что если точка z не лежит на стороне или в вершине какого-либо из прямоугольников разбиения, то она лежит внутри одного из таких прямоугольников, но каждый из таких прямоугольников конформно отображается функцией G на верхнюю или нижнюю полуплоскость, так что функция G в этой точке неразветвлена. Если z лежит на стороне, но не в вершине одного из прямоугольников, то прямоугольник по одну сторону от точки z конформно отображается функцией G на верхнюю полуплоскость, а прямоугольник по другую сторону от нее конформно отображается на нижнюю полуплоскость; значит, в некоторой окрестности точки z функция G взаимно однозначна на свой образ, так что в точке z она опять-таки неразветвлена. Наконец, если z — вершина одного из прямоугольников или, что равносильно, $z = F(\infty) + mu + inv$, $m, n \in \mathbb{Z}$, то то же самое рассуждение с использованием предложения 9.7, что и выше, показывает, что индекс ветвления функции f в точке z равен 2. Этим завершается доказательство утверждения (4) и всего предложения. \square

Мероморфные на \mathbb{C} функции, имеющие два (линейно независимых над \mathbb{R}) периода, называются *эллиптическими функциями*. Мы с ними (в том числе и с функцией G) еще встретимся.

10.4. Принцип соответствия границ

Основной результат этого раздела гласит, что во многих случаях конформное отображение между двумя ограниченными областями в \mathbb{C} продолжается до непрерывного и взаимно однозначного отображения между их замыканиями. В частности, это означает, что при этом получается непрерывное и взаимно однозначное отображение между границами этих областей — отсюда и слова «соответствие границ».

Для совершенно произвольных областей соответствие границ места иметь не может по очевидным причинам. Например, если $U = \{z: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ — полукруг, а V — единичный круг, из которого удален интервал $[0; 1]$ на действительной оси, то отображение $f: z \mapsto z^2$ конформно отображает U в V , но соответствия границ не дает. В самом деле, непрерывное продолжение отображения на \bar{U} , очевидно, существует и единственно (и задается той же формулой $z \mapsto z^2$), но на границе оно биекцией уже не является, так как «склеивает» точки x и $-x$, где $x \in (0; 1) \subset \mathbb{R}$. Обратное отображение $f^{-1}: V \rightarrow U$ также конформно, но его невозможно даже непрерывно продолжить на границу.

Поэтому в формулировке принципа соответствия границ необходимо на отображаемые области какие-то ограничения. Мы докажем эту теорему в предположении, что обе области ограничены кусочно гладкими кривыми. Это условие можно серьезно ослабить, можно также развить формализм, позволяющий обобщить принцип соответствия границ на более сложно устроенные открытые множества, но все эти непростые вопросы мы обойдем стороной.

Далее, даже если граница кусочно гладкая, условие конформности отображения отбросить нельзя. Пусть, например,

$$K = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$$

— квадрат и

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z\}$$

— треугольник. Отображение $f: K \rightarrow \Delta$, заданное формулой $x + iy \mapsto x + ixy$, не являющееся, разумеется, голоморфным, является тем не менее гладкой биекцией (класса C^∞), обратная к которой тоже гладка класса C^∞ , но до непрерывной биекции замыканий она не продолжается: ее непрерывное продолжение на замкнутый квадрат \bar{K} (задаваемое той же формулой) отображает в точку 0 целую сторону квадрата $\{it: 0 \leq t \leq 1\}$.

После всех этих предупреждений сформулируем, наконец, положительный результат.

Теорема 10.13 (принцип соответствия границ). Пусть $U, V \subset \mathbb{C}$ — ограниченные области с кусочно гладкой границей, и пусть $f: U \rightarrow V$ — конформный изоморфизм. Тогда f продолжается до непрерывной биекции $\tilde{f}: \bar{U} \rightarrow \bar{V}$.

Доказательство теоремы 10.13 — дело небыстрое. Мы начнем с трех лемм — двух простых и одной посложнее.

Лемма 10.14. Пусть $U \subset \mathbb{C}$, и пусть $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывное отображение. Если f равномерно непрерывно на U , то оно продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f}: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$, причем единственным образом.

Набросок доказательства. Единственность продолжения следует из того, что если $a \in \bar{U} \setminus U$ и $a = \lim z_n$, $z_n \in U$, то $\tilde{f}(a)$ должно равняться $\lim \tilde{f}(z_n) = \lim f(z_n)$. Если отображение f равномерно непрерывно, то его можно продолжить на \bar{U} следующим образом. Если a и $\{z_n\}$ — те же, что выше, то последовательность $\{z_n\}$, будучи сходящейся, фундаментальна; тогда из равномерной непрерывности вытекает, что и последовательность $\{f(z_n)\}$ фундаментальна и тем самым сходится. Положим теперь $\tilde{f}(a) = \lim f(z_n)$.

Приличествующие случаю проверки оставляются читателю. \square

Лемма 10.15. Пусть $[a; b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок и $h: [a; b] \rightarrow [0; +\infty)$ — непрерывная функция. Тогда

$$\int_a^b (h(x))^2 dx \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b h(x) dx \right)^2.$$

Доказательство. Это неравенство получается возведением в квадрат из непрерывной версии неравенства между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{\int_a^b (h(x))^2 dx}{b-a}} \geq \frac{\int_a^b h(x) dx}{b-a}.$$

Можно также применить неравенство Коши—Буняковского к функции h и функции, тождественно равной 1. \square

Следующая лемма интуитивно довольно очевидна, но ее аккуратное доказательство требует некоторой работы.

Лемма 10.16. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество с кусочно гладкой границей, и пусть $a \in \bar{U} \setminus U$ — точка границы. Тогда суще-

существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого r , $0 < r < \varepsilon$, выполнены следующие утверждения.

(1) Пересечение окружности $\{z: |z - a| = r\}$ с множеством U представляет собой дугу.

(2) Пересечение $\{z: |z - a| < r\} \cap U$ связно.

Доказательство. Докажем сначала утверждение (1). Пересечение границы области U и круга достаточно малого радиуса с центром в точке a представляет собой объединение двух дуг гладких (класса C^1) кривых, выходящих из точки a . Здесь C^1 означает, что касательная к кривой непрерывно зависит от точки. Если a — гладкая точка границы, то касательные в точке a к обеим дугам совпадают.

Нам достаточно показать, что для всех достаточно малых r окружность $\gamma_{a,r} = \{z: |z - a| = r\}$ пересекается с каждой из этих дуг в одной точке, причем трансверсально (т. е. у двух пересекающихся кривых касательные в точке пересечения различны) — см. рис. 10.5.

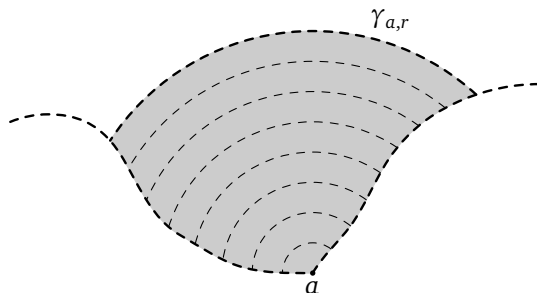


Рис. 10.5. Серым цветом обозначено пересечение области U и круга радиуса r с центром в точке a . Пунктиром обозначены пересечения U с окружностями меньшего радиуса.

Докажем это утверждение. Для этого заметим, что, не ограничивая общности, можно считать, что a — начало координат и что дуга с началом в a есть график непрерывно дифференцируемой функции (действительного переменного) $y = h(x)$, $0 \leq x \leq x_0$, для которой $h(0) = h'(0) = 0$. Зададимся каким-нибудь маленьким положительным углом θ (например, вполне хватит $\theta = \pi/10$). Тогда ввиду того, что $h'(0) = 0$ и функция $x \mapsto h'(x)$ непрерывна, существует такое $\varepsilon > 0$, что при $0 < x < \varepsilon$ выполнены следующие условия:

(а) график функции $y = h(x)$ лежит внутри угла, образованного двумя лучами, выходящим из начала координат и образующими с осью абсцисс углы $\pm\theta$;

(б) касательная к любой точке графика функции h с абсциссой $x \in (0; \varepsilon)$ образует с осью абсцисс угол, лежащий в промежутке $[-\theta; \theta]$.

Покажем, что при всяком $r \in (0; \varepsilon)$ окружность радиуса r с центром в начале координат пересекается с графиком функции h ровно в одной точке, причем трансверсально. Существование хотя бы одной точки пересечения очевидно из утверждения (а). Из этого же утверждения очевидно, что абсцисса любой точки пересечения лежит на отрезке $[r \cos \theta; r]$; так как касательная к окружности в точке с такой абсциссой образует с осью абсцисс угол, лежащий в промежутке $[\pi/2 - \theta; \pi/2 + \theta]$, из утверждения (б) следует, что в такой точке пересечения касательная к окружности не может совпасть с касательной к графику, так что всякое пересечение окружности и графика автоматически трансверсально. Установим, наконец, единственность точки пересечения. Если таких точек больше одной, обозначим две из них через P_1 и P_2 ; по теореме Ролля на графике функции h найдется точка, касательная в которой параллельна прямой P_1P_2 . Поскольку точки P_1 и P_2 лежат на дуге, изображенной на рис. 10.6, угол между прямой P_1P_2 и осью абсцисс лежит в промежутке $[\pi/2 - \theta; \pi/2 + \theta]$; как мы уже отмечали выше, касательная к нашему графику такой угол с осью абсцисс образовывать не может, так что утверждение (1) доказано.

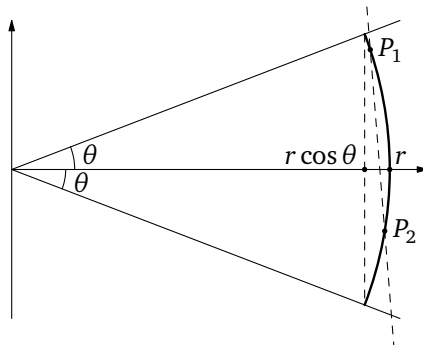


Рис. 10.6.

Докажем утверждение (2). Предположим для этого, что $0 < r < \varepsilon$, где ε то же, что в доказательстве утверждения (1). Мы покажем, что тогда множество $W = \{z: |z - a| < r\} \cap U$ связно. Рассуждая от противного, пусть $S = W_1 \cup W_2$, где W_1 и W_2 открыты, непусты и не пересека-

ются. Для всякого ρ , $0 < \rho < \varepsilon$, множество $\gamma_{a,\rho} = \{z: |z - a| = \rho\} \cap U$ является, ввиду утверждения (1), открытой дугой окружности; так как такие дуги связны, дуга $\gamma_{a,\rho}$ целиком содержится в W_1 или W_2 . Положим $I_k = \{\rho \in (0; \varepsilon): \gamma_{a,\rho} \subset W_k\}$ для $k = 1, 2$. В силу сказанного выше имеем $(0; \varepsilon) = I_1 \cup I_2$, и при этом $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Заметим, что множества I_1 и I_2 открыты на числовой прямой. В самом деле, если, скажем, $\rho \in I_1$, то имеем $z \in W_1$ для всякого $z \in \gamma_{a,\rho}$. Так как $W_1 \subset \mathbb{C}$ открыто, некоторая δ -окрестность точки z (обозначим эту окрестность через U_δ) содержится в W_1 . Поскольку, очевидно, $U_\delta \cap \gamma_{a,\rho'} \neq \emptyset$ при $|\rho' - \rho| < \delta$, для таких ρ имеем $\gamma_{a,\rho'} \subset W_1$, так что $\rho' \in I_1$, что и доказывает открытость. Поскольку интервалы на числовой прямой связны, отсюда вытекает, что I_1 или I_2 совпадает с $(0; \varepsilon)$, т. е. W_1 или W_2 совпадает с W . Все доказано. \square

Доказательство теоремы 10.13. Заметим, что нам достаточно доказать, что всякий конформный изоморфизм между ограниченными областями с кусочно гладкой границей равномерно непрерывен. В самом деле, если это утверждение доказано и если $f: U \rightarrow V$ — такой изоморфизм, то по лемме 10.14 он единственным образом продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f}: \bar{U} \rightarrow \bar{V}$, а обратный изоморфизм $g: V \rightarrow U$ — до непрерывного отображения $\tilde{g}: \bar{V} \rightarrow \bar{U}$, причем в силу единственности таких продолжений композиции $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ и $\tilde{g} \circ \tilde{f}$, продолжающие тождественные отображения на V и U , являются тождественными.

Доказывать равномерную непрерывность конформного изоморфизма $f: U \rightarrow V$ будем от противного. Именно, если равномерной непрерывности нет, то в U существуют такие последовательности точек $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |z'_n - z''_n| = 0$, но при этом $|f(z'_n) - f(z''_n)| \geq c$ для всех n и некоторого $c > 0$. Поскольку наши области ограничены, можно, выбирая подпоследовательности, добиться того, что $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$ будут сходиться (к одной и той же точке, поскольку расстояния между ними стремятся к нулю), а затем, еще раз выбирая подпоследовательности, — что будут сходиться (к точкам, находящимся на расстоянии не менее c) также последовательности $\{f(z'_n)\}$ и $\{f(z''_n)\}$. Поскольку и f , и обратное к нему отображение $g: V \rightarrow U$ являются непрерывными биекциями, общий предел последовательностей $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$ лежит на границе U , а пределы последовательностей $\{f(z'_n)\}$ и $\{f(z''_n)\}$ лежат на границе V .

Положим $\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z''_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = b'$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n) = b''$, и для всякой $z \in \mathbb{C}$ будем обозначать ее ε -окрестность через $U_\varepsilon(z)$. Применяя лемму 10.16 к точке a на границе области U , можно найти такие

ε , ε' и ε'' , что окрестности $U_\varepsilon(a)$, $U_{\varepsilon'}(b')$ и $U_{\varepsilon''}(b'')$ обладают свойствами, указанными в этой лемме. Уменьшая, если нужно, ε' и ε'' , можно добиться того, что

$$\inf_{\substack{w' \in U_{\varepsilon'}(b') \\ w'' \in U_{\varepsilon''}(b'')}} |f(w') - f(w'')| = \delta > 0 \quad (10.4)$$

и что $g(V \cup U_{\varepsilon'}(b')) \subset U \cap U_\varepsilon(a)$, $g(V \cup U_{\varepsilon''}(b'')) \subset U \cap U_\varepsilon(a)$ (напомним, что $g: V \rightarrow U$ — конформный изоморфизм, обратный к f). Наконец, отбросив в последовательностях $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$ конечное число членов, можно добиться того, что все z'_n и z''_n лежат в $U_\varepsilon(a)$, все $f(z'_n)$ лежат в $U_{\varepsilon'}(b')$, а все $f(z''_n)$ лежат в $U_{\varepsilon''}(b'')$, что мы и будем далее предполагать.

Поскольку открытое множество $U_{\varepsilon'}(b') \cap V$ связно, существует непрерывный путь $\gamma': [0; +\infty) \rightarrow U_{\varepsilon'}(b') \cap V$, проходящий через все точки $f(z'_n)$. В самом деле, пусть непрерывный путь γ' на участке $t \in [0; 1]$ соединяет $f(z'_1)$ и $f(z'_2)$, на участке $t \in [1; 2]$ — $f(z'_2)$ и $f(z'_3)$ и т. д. Аналогично построим путь $\gamma'': [0; +\infty) \rightarrow U_{\varepsilon''}(b'') \cap V$, проходящий через все $f(z''_j)$. Положим $\mu' = g \circ \gamma'$, $\mu'' = g \circ \gamma''$. Путь μ' (соответственно μ'') лежит в $U_\varepsilon(a) \cap U$ и проходит через все точки z'_k (соответственно z''_k).

Заметим теперь, что поскольку якобиан отображения f в точке z равен $|f'(z)|^2$ (см. задачу 2.12), имеем

$$S(f(U_\varepsilon(a) \cap U)) = \iint_{U_\varepsilon(a) \cap U} |f'(x + iy)|^2 dx dy, \quad (10.5)$$

где через S обозначена площадь. Напомним, что, ввиду нашего выбора числа ε , для всякого $r \in (0; \varepsilon)$ пересечение $\{z: |z - a| = r\} \cap U$ является дугой окружности; обозначим аргументы концов этой дуги через $\theta_1(r)$ и $\theta_2(r)$. Теперь можно переписать интеграл в правой части (10.5) в полярных координатах (r, φ) :

$$S(f(U_\varepsilon(a) \cap U)) = \int_0^\varepsilon dr \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)|^2 r d\varphi, \quad (10.6)$$

где $z = re^{i\varphi}$.

Поскольку путь μ' проходит через все точки z'_n , путь μ'' проходит через все точки z''_n , и при этом последовательности $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$ стремятся к a , для всех достаточно малых r (скажем, при всех $r \leq r_0$) окружность радиуса r с центром в точке a пересечется и с путем μ' ,

и с путем μ'' . Иными словами, на дуге $\gamma_{a,r} = \{z: |z - a| = r\} \cap U$ найдется точка $re^{i\theta'(r)}$, которую отображение f переводит в точку на пути γ' , и точка $re^{i\theta''(r)}$, которую отображение f переводит в точку на пути γ'' . Теперь оценим снизу «внутренний» интеграл в правой части (10.6), пользуясь леммой 10.15:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)|^2 r d\varphi &\geq \int_{\theta'(r)}^{\theta''(r)} |f'(z)|^2 r d\varphi \geq \\ &\geq \frac{1}{\theta'(r) - \theta''(r)} \left(\int_{\theta'(r)}^{\theta''(r)} |f'(z)| r d\varphi \right)^2 \geq \frac{1}{2\pi r} \left(\int_{\theta'(r)}^{\theta''(r)} |f'(z)| r d\varphi \right)^2 \quad (10.7) \end{aligned}$$

(при $r \leq r_0$).

На дуге $\gamma_{a,r}$ имеем $r d\varphi = |dz|$, так что интеграл $\int_{\theta'(r)}^{\theta''(r)} |f'(z)| r d\varphi$ равен длине образа участка этой дуги, расположенного между точками $re^{i\theta'(r)}$ и $re^{i\theta''(r)}$, при отображении f . Данный образ представляет собой кривую в V , соединяющую точки $f(re^{i\theta'(r)})$ и $f(re^{i\theta''(r)})$. Так как первая из этих точек лежит в $U_{\varepsilon'}(b')$, а вторая — в $U_{\varepsilon''}(b'')$ (напомним, что через эти точки проходят пути γ' и γ'' соответственно), расстояние между точками $f(re^{i\theta'(r)})$ и $f(re^{i\theta''(r)})$ не меньше δ , где δ — константа в правой части неравенства (10.4). Тем более длина любой кривой, соединяющей точки $f(re^{i\theta'(r)})$ и $f(re^{i\theta''(r)})$, не меньше δ . Стало быть, правая часть в (10.7) не меньше, чем $\delta^2/2\pi r$. Подставляя эту оценку в правую часть (10.6), получаем следующее:

$$S(f(U_{\varepsilon}(a) \cap U)) \geq \int_0^{r_0} dr \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)|^2 r d\varphi \geq \int_0^{r_0} \frac{\delta^2}{2\pi r} dr.$$

Интеграл в правой части этого неравенства равен $+\infty$, так что площадь открытого множества $f(U_{\varepsilon}(a) \cap U)$ бесконечна. Это, однако, несовместимо с условием, поскольку множество $f(U_{\varepsilon}(a) \cap U) \subset V$ ограничено, так как по условию ограничено множество V . Полученное противоречие доказывает, наконец, принцип соответствия границ. \square

Читателю, добравшемуся до этого места, я рекомендую теперь вернуться к примеру в начале этого раздела (конформный изоморфизм между полукругом и кругом с разрезом) и продумать все причины, по которым наше доказательство теоремы 10.13 для указанного примера не проходит.

Трюк, использованный в приведенном выше доказательстве (нижняя оценка для площади образа через нижние оценки для длин дуг, использующая неравенство из леммы 10.15), называется *принципом длины и площади*.

10.5. Квазиконформные отображения

После того как масса усилий была потрачена на доказательство принципа соответствия границ, хочется разобраться, до какой степени существенно весьма жесткое условие голоморфности отображения f . Мы уже знаем, что совсем без него обойтись нельзя; сейчас мы увидим, что его можно значительно ослабить.

Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — функция класса C^1 . Предположим дополнительно, что якобиан f всюду положителен (в таких случаях говорят еще, что f *сохраняет ориентацию*).

Для каждой точки $a \in U$ определена вещественная производная $f'(a): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, являющаяся вещественно-линейным отображением. Отображение $f'(a)$ переводит окружности в эллипсы.

Будем называть *коэффициентом растяжения* эллипса отношение его большой полуоси к малой.

Определение 10.17. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — отображение класса C^1 со всюду положительным якобианом. Отображение f называется *квазиконформным*, если существует такая константа $C > 0$, что коэффициенты растяжения эллипсов, в которые переводятся окружности отображениями $f'(a): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ для всевозможных $a \in U$, не превосходят C .

Если все коэффициенты растяжения, о которых идет речь в этом определении, равняются единице, то все отображения $f'(a)$ переводят окружности в окружности и тем самым являются композициями поворотов и гомотетий; это означает, что отображение f является голоморфным. Коэффициент растяжения измеряет отклонение отображения f от голоморфности (в данной точке). Квазиконформность отображения означает, что голоморфным ему разрешается не быть, но отклоняться от голоморфности оно может не до бесконечности.

Если вещественно-линейное отображение $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ переводит окружности в эллипсы с коэффициентом растяжения C , то очевидно, что обратное отображение L^{-1} переводит окружности в эллипсы с тем же коэффициентом растяжения. Поэтому если $f: U \rightarrow V$ — квазиконформный диффеоморфизм между двумя открытыми под-

множествами в \mathbb{C} , то обратный к нему диффеоморфизм $f^{-1}: V \rightarrow U$ тоже является квазиконформным.

Определение 10.17 можно выразить на языке формул. Для этого подсчитаем коэффициент растяжения.

Предложение 10.18. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — отображение класса C^1 со всюду положительным якобианом. Если $a \in \mathbb{C}$, то коэффициент растяжения эллипсов, в которые отображение $f'(a): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ переводит окружности, равен

$$\frac{1 + \left| \frac{(\partial f / \partial \bar{z})(a)}{(\partial f / \partial z)(a)} \right|}{1 - \left| \frac{(\partial f / \partial \bar{z})(a)}{(\partial f / \partial z)(a)} \right|}.$$

Доказательство. Это утверждение из линейной алгебры. Именно, как мы знаем, отображение $f'(a)$ задается формулой

$$h \mapsto Ah + B\bar{h}, \quad A = \frac{\partial f}{\partial z}(a), \quad B = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a).$$

Образом окружности $\{e^{i\varphi}: \varphi \in \mathbb{R}\}$ является эллипс с центром в нуле, и его полуоси суть точки этого эллипса (т.е. точки вида $Ae^{i\varphi} + B\bar{e}^{-i\varphi}$) с максимальным и минимальным модулем. Удобнее вместо самого модуля рассматривать его квадрат. Поскольку

$$\begin{aligned} |Ae^{i\varphi} + B\bar{e}^{-i\varphi}|^2 &= (Ae^{i\varphi} + B\bar{e}^{-i\varphi})(\bar{A}e^{-i\varphi} + \bar{B}e^{i\varphi}) = \\ &= |A|^2 + |B|^2 + A\bar{B}e^{2i\varphi} + \overline{A\bar{B}e^{2i\varphi}} = |A|^2 + |B|^2 + 2\operatorname{Re}(A\bar{B}e^{2i\varphi}), \end{aligned}$$

наибольшее и наименьшее значения левой части (при фиксированных A и B и меняющемся $\varphi \in \mathbb{R}$) равны $|A|^2 + |B|^2 \pm 2|A\bar{B}| = |A|^2 + |B|^2 \pm 2|A| \cdot |B|$. Так как якобиан отображения f в точке a равен $|A|^2 - |B|^2$ (см. задачу 2.12), имеем $|A| > |B|$; поэтому, извлекая корень, получаем, что большая и малая полуоси равны $|A| \pm |B|$, а коэффициент растяжения равен тем самым

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{1 + \frac{B}{A}}{1 - \frac{B}{A}},$$

что и утверждалось. \square

Теперь сразу получается аналитическая формулировка определения квазиконформности.

Предложение 10.19. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — отображение класса C^1 со всюду положительным якобианом. Отображение f квазиконформно тогда и только тогда, когда существует такая константа $\mu < 1$, что $|(\partial f / \partial \bar{z}) / (\partial f / \partial z)| \leq \mu$ всюду на U .

Доказательство. Обозначим отношение $|(\partial f/\partial \bar{z})/(\partial f/\partial z)|$ через $\beta < 1$; наше утверждение немедленно следует из предложения 10.18 ввиду соотношения

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} \leq C \Leftrightarrow \beta \leq \frac{C-1}{C+1}. \quad \square$$

Обещанное обобщение принципа соответствия границ выглядит следующим образом.

Теорема 10.20. Пусть $U, V \subset \mathbb{C}$ — ограниченные области с кусочно линейной границей и $f: U \rightarrow V$ — квазиконформный диффеоморфизм класса C^1 . Тогда f продолжается до непрерывной биекции $\tilde{f}: \bar{U} \rightarrow \bar{V}$.

Доказательство. Будем действовать аналогично доказательству теоремы 10.13 (принципа соответствия границ для конформных отображений), только надо будет чуть аккуратнее проводить оценки.

До формулы (10.5) два доказательства вообще дословно совпадают. Вместо (10.5), ввиду формулы для якобиана из задачи 2.12б, запишем следующее (сохраняя обозначения из доказательства «конформной» версии теоремы):

$$S(f(U_\varepsilon(a) \cap U)) = \iint_{U_\varepsilon(a) \cap U} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right) dx dy. \quad (10.8)$$

По условию, $|\partial f/\partial \bar{z}| \leq \mu |\partial f/\partial z|$ при всех $z \in U$ для некоторой константы $\mu \in [0; 1)$. Поэтому

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \geq (1 - \mu^2) \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2$$

и из (10.8) вытекает следующее неравенство:

$$S(f(U_\varepsilon(a) \cap U)) \geq (1 - \mu^2) \iint_{U_\varepsilon(a) \cap U} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 dx dy.$$

Переписывая, как и раньше, интеграл в правой части этого неравенства в полярных координатах и оценивая снизу интегралы от $|\partial f/\partial z|^2$ по дугам с помощью леммы 10.15, получаем следующее:

$$S(f(U_\varepsilon(a) \cap U)) \geq (1 - \mu^2) \int_0^\varepsilon \frac{dr}{2\pi r} \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| r d\varphi \right)^2 \quad (10.9)$$

($\theta_1(r)$ и $\theta_2(r)$ означают то же, что на с. 184). Поскольку левая часть этого неравенства, будучи площадью ограниченного множества, конечна, для получения нужного нам противоречия достаточно доказать, что все интегралы в скобках в правой части (10.9) ограничены снизу одним и тем же положительным числом.

Чтобы это установить, заметим, что если $\gamma: [p; q] \rightarrow U$ — произвольный кусочно гладкий путь, то, учитывая, что $|\partial f / \partial \bar{z}| < |\partial f / \partial z|$ всюду на U (поскольку якобиан отображения f всюду положителен), получаем следующее:

$$\begin{aligned} \text{length}(f \circ \gamma) &= \int_p^q \left| \frac{d(f(\gamma(t)))}{dt} \right| dt = \\ &= \int_p^q \left| \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)} \right| dt \leq \\ &\leq \int_p^q \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) \right| \right) |\gamma'(t)| dt \leq 2 \int_p^q \left| \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \right| \cdot |\gamma'(t)| dt = \\ &= 2 \int_\gamma \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| |dz|, \end{aligned}$$

то есть

$$\int_\gamma \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| |dz| \geq \frac{1}{2} \text{length}(f \circ \gamma). \quad (10.10)$$

На дуге радиуса r с центром в точке a и параметризацией $\varphi \mapsto a + re^{i\varphi}$ имеем $|dz| = r d\varphi$. Если теперь $\theta'(r)$ и $\theta''(r)$ обозначают то же, что на с. 185, то ввиду (10.10) имеем

$$\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| r d\varphi \geq \int_{\theta'(r)}^{\theta''(r)} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| r d\varphi \geq \frac{1}{2} \text{length}(f \circ \gamma),$$

где γ — дуга окружности радиуса r с центром в точке a , заключенная между точками $a + re^{i\theta'(r)}$ и $a + re^{i\theta''(r)}$. Так как длина образа этой дуги γ не меньше положительной константы δ из неравенства (10.4), получаем, что все интегралы в скобках в (10.9) не меньше $\delta/2 > 0$, из чего вытекает бесконечность правой части в (10.9). Получилось нужное нам противоречие. \square

Упражнения

10.1. Покажите, что если подмножество $S \subset \bar{\mathbb{C}}$ не имеет предельных точек, то оно конечно.

10.2. Докажите, что функция, мероморфная на всей сфере Римана, является рациональной функцией (т. е. отношением двух многочленов).

10.3. Докажите, что всякий конформный автоморфизм сферы Римана является дробно-линейным отображением.

10.4. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ — замкнутый путь (непрерывный), и пусть $a \in \bar{\mathbb{C}}$ — точка, через которую γ не проходит. Покажите, что существует гомотопия замкнутых путей $\Gamma: [A; B] \times [0; 1] \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, для которой $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$, $\Gamma(t, 1)$ — постоянное отображение и $\Gamma(t, s) \neq a$ при любых t и s . (Указание. Если $a = \infty$, это совсем легко. В общем случае путь $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ — дробно-линейное отображение, переводящее a в ∞ ; постройте сначала искомую гомотопию для $f \circ \gamma$.)

10.5. Пусть $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ — связанное открытое множество, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, C и C' — обобщенные окружности. Предположим, что $f(U \cap C) \subset C'$. Докажите, что $f(S_C(z)) = S_{C'}(f(z))$, как только z и $S_C(z)$ лежат в U . Здесь S_C — симметрия относительно обобщенной окружности C .

10.6. Пусть $U = \{z: -1 < \operatorname{Im} z < 1\} \setminus [1; +\infty)$ (из полосы удален луч на действительной оси). Найдите конформное отображение области U на верхнюю полуплоскость. (Указание. Сначала, руководствуясь образцами из гл. 3, отобразите на верхнюю полуплоскость полосу $\{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$; принцип симметрии показывает, что это отображение продолжается до отображения U на плоскость с разрезом.)

10.7. (а) Пусть $U = \{z: \operatorname{Im} z > 0, 1 < |z| < 2\}$ — полукольцо и $H = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость. Докажите, что если $f: U \rightarrow H$ — конформное отображение области U на H , то f продолжается до голоморфной функции $F: H \rightarrow \mathbb{C}$.

(б) Можно ли отображение F из предыдущего пункта продолжить до функции, голоморфной на всем \mathbb{C} ?

(То, что конформное отображение из U в H действительно существует, будет следовать из теоремы, которую мы докажем в гл. 12.)

10.8. Пусть $a_1 < a_2 < a_3$ — действительные числа. Не пользуясь комплексными числами, покажите, что

$$\int_{-\infty}^{a_1} \frac{dt}{\sqrt{|(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)|}} = \int_{a_2}^{a_3} \frac{dt}{\sqrt{|(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)|}}.$$

10.9. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ — действительные числа, $z_0 \in \mathbb{R}$, H — верхняя полуплоскость. Определим функцию $F: H \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}}.$$

Докажите, что F осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на свой образ, и опишите этот образ.

10.10. Постройте конформное отображение верхней полуплоскости на правильный треугольник.

10.11. Существует ли конформное отображение между внутренностью квадрата и внутренностью прямоугольника с отношением сторон $1:2$, которое при соответствии границ переводит вершины в вершины? (Указание. Принцип симметрии.)

10.12. Существует ли конформное отображение между внутренностью правильного треугольника и внутренностью равнобедренного прямоугольного треугольника, которое при соответствии границ переводит вершины в вершины? (Указание. Не спешите с ответом!)

10.13. Рассмотрим кольца

$$U_1 = \{z: r_1 < |z| < R_1\} \quad \text{и} \quad U_2 = \{z: r_2 < |z| < R_2\}.$$

Докажите, что U_1 и U_2 конформно изоморфны тогда и только тогда, когда $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

10.14. Пусть

$$K = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < 1\},$$

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z\}.$$

Покажите непосредственно (не апеллируя к принципу соответствия границ), что отображение $K \rightarrow \Delta$, заданное формулой

$$x + iy \mapsto x + ixy,$$

не является квазиконформным.

10.15. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — отображение класса C^1 с положительным якобианом. Вещественная производная отображения f переводит окружности в эллипсы. Выразите через $\partial f / \partial \bar{z}$ и $\partial f / \partial z$ угол между действительной осью и большой полуосью эллипса, соответствующего точке a .

10.16. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытый сектор с вершиной в нуле; выберем в нем раз и навсегда непрерывную ветвь аргумента, обозначаемого через φ .

(а) Является ли квазиконформным отображение $U \rightarrow U$, заданное формулой $re^{i\varphi} \mapsto r^2e^{i\varphi}$?

(б) Тот же вопрос про отображение $re^{i\varphi} \mapsto r^3e^{i\varphi/r}$.

(в) То же про отображение $re^{i\varphi} \mapsto re^{2i\varphi}$.

(Указание. Во всех трех случаях ответ можно получить без вычислений.)

10.17. Докажите, что не существует квазиконформного диффеоморфизма из \mathbb{C} на единичный круг $D = \{z: |z| < 1\}$. (Указание. Принцип длины и площади. Начните с того, что докажите этим методом отсутствие конформного изоморфизма.)

Глава 11

Бесконечные суммы и произведения

11.1. Представление котангенса в виде бесконечной суммы

Представьте себе, что мы захотели построить мероморфную функцию на \mathbb{C} , которая в каждой целой точке вещественной прямой имеет полюс с вычетом 1, а других полюсов не имеет. Читатель, знакомый с тригонометрией, может сразу назвать один из возможных ответов, но давайте сделаем вид, что с тригонометрией мы не знакомы, и попробуем решить эту задачу «с нуля». Результаты, которые мы при этом получим, любопытны сами по себе, а также послужат разминкой перед более сложными конструкциями из следующих разделов.

Обозначим искомую функцию через f . В каждой точке $n \in \mathbb{Z}$ главная часть этой функции должна иметь вид $1/(z - n)$. Самая наивная попытка — взять и сложить все главные части:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - n}. \quad (11.1)$$

Увы, этот ряд не является абсолютно сходящимся, поскольку для фиксированного z и всех достаточно больших n имеем

$$\left| \frac{1}{z - n} \right| \geq \frac{1}{2n}$$

(а если не требовать абсолютной сходимости, то непонятно, в каком порядке складывать члены ряда, проиндексированные всеми целыми числами).

Прежде чем объяснять, как эту наивную идею спасти, давайте дадим аккуратное определение сходимости ряда из мероморфных функций.

Определение 11.1. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $\sum f_j$ — ряд из функций, голоморфных на U за возможным исключением изолированных особенностей. Будем говорить, что этот ряд *равно-*

мерно сходится на компактах в U , если для всякого компактного подмножества $K \subset U$ выполнены два следующих условия:

(1) не более чем конечное число функций f_j имеет особенность на K ;

(2) ряд из функций f_j , не имеющих особенностей на K , сходится на K абсолютно и равномерно.

Из этого определения ясно, что сумма ряда из мероморфных функций, равномерно сходящегося на компактах, — также мероморфная функция, множество полюсов которой содержится в множестве полюсов всех функций f_j (если какие-то главные части сокращаются, то множество полюсов функции f может оказаться строго меньше, чем объединение множеств полюсов всех f_j).

Теперь вернемся к расходящемуся ряду (11.1). Попробуем в нем улучшить сходимостъ следующим образом: добавить к каждому его члену голоморфное слагаемое (что не повлияет на полюсы) таким образом, чтобы после этого члены ряда убывали побыстрее. В данном случае это улучшение достигается совсем простыми средствами: к каждому $1/(z - n)$ (для ненулевого n) мы прибавим $1/n$. В следующем предложении мы используем такое (широко распространенное) соглашение: знак \sum' означает, что мы суммируем по всем значениям параметра, кроме нуля. Например, $\sum'_{n \in \mathbb{Z}}$ означает суммирование по всем ненулевым целым числам.

Предложение 11.2. Ряд

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) \quad (11.2)$$

абсолютно и равномерно сходится на компактах в \mathbb{C} к некоторой мероморфной функции.

Доказательство. Если $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, то $|z| \leq C$ для всех $z \in K$, где C — некоторая константа. Для $z \in K$ и достаточно большого $|n|$ имеем

$$\left| \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right| = \frac{|z|}{|n^2 - nz|} \leq \frac{C}{n^2|1 - z/n|} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

так что ряд сходится абсолютно и равномерно на K . \square

Из доказанного очевидно, что функция f имеет простой полюс с вычетом 1 в каждой целой точке, а других полюсов не имеет. Выясним ее дальнейшие свойства.

Предложение 11.3. Функция f , заданная формулой (11.2), является нечетной и периодической с периодом 1.

Доказательство. Нечетность очевидна ввиду возможности переставлять слагаемые в абсолютно сходящемся ряде. Чтобы устано-

вить периодичность, найдем производную функции f . Так как равномерно сходящийся на компактах ряд из голоморфных функций можно почленно дифференцировать, получаем, что

$$f'(z) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Ряд в правой части абсолютно и равномерно сходится на компактах, поскольку при ограниченном $|z|$ имеем $|1/(z-n)^2| = O(1/n^2)$. При замене z на $z+1$ в ряде для f' происходит лишь перестановка слагаемых, так что, по крайней мере, $f'(z+1) = f'(z)$ для всех z . Стало быть, функция $z \mapsto f(z+1) - f(z)$ имеет нулевую производную на связном множестве $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, так что она постоянна (см. следствие 4.12). Значит, $f(z+1) = f(z) + c$, где c — некоторая константа. Остается установить, что $c = 0$. Для этого найдем $f(1/2)$. Сгруппируем в ряде (11.2) слагаемые с n и $-n$; получится разложение

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \quad (11.3)$$

Подставляя в него $z = 1/2$, получаем:

$$\begin{aligned} f(1/2) &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4} - n^2} = 2 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \\ &= 2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 2 - 2 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Значит, $f(1/2) = 0$, откуда в силу нечетности и $f(-1/2) = 0$, так что $c = f(-1/2 + 1) - f(-1/2) = 0$, и периодичность функции f также доказана. \square

Кроме функции f , заданной как сумма ряда, можно и с ходу назвать мероморфную функцию с периодом 1 и простыми полюсами с вычетом 1 во всех целых точках: это функция $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$. Сейчас мы покажем, что эти функции совпадают.

Предложение 11.4. Функция $f(z)$, заданная формулой (11.2), совпадает с $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$.

Доказательство. Нам будет удобнее сравнивать не сами функции $f(z)$ и $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$, а их производные. Как мы видели в доказательстве предложения 11.3, $f'(z) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$, где ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах. Также очевидно, что $(\pi \operatorname{ctg}(\pi z))' = -\pi^2 / \sin^2(\pi z)$.

Рассмотрим функцию $g(z) = f'(z) - (\pi \operatorname{ctg}(\pi z))'$. Легко видеть, что как у уменьшаемого, так и у вычитаемого полюсы имеются

только в целых точках и главная часть в точке $n \in \mathbb{Z}$ имеет вид $-1/(z - n)^2$. Следовательно, функция g — целая. Так как уменьшаемое и вычитаемое имеют период 1, функция g также имеет период 1. Мы сейчас, покажем, что g — константа, для чего, в силу теоремы Лиувилля, достаточно показать, что она ограничена; в силу периодичности, достаточно установить ее ограниченность в полосе $\{z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$.

Зададимся каким-нибудь числом $\varepsilon > 0$. Целая функция g ограничена на прямоугольнике $\{z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |\operatorname{Im} z| \leq \varepsilon\}$ в силу его компактности. Остается проверить, что g ограничена также на множестве $\{z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |\operatorname{Im} z| \geq \varepsilon\}$. Мы покажем, что на этом множестве ограничены даже функции $f'(z)$ и $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ по отдельности. Поскольку, очевидно, $f'(\bar{z}) = \overline{f'(z)}$ и $\pi^2/\sin^2(\pi \bar{z}) = \overline{\pi^2/\sin^2(\pi z)}$, достаточно установить эту ограниченность на полуполосе

$$\Pi = \{z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z \geq \varepsilon\}.$$

Покажем, что на множестве Π функция f ограничена. В самом деле, при $|n| \geq 2$ и $\operatorname{Re} z \in [0; 1]$ имеем

$$\left| \frac{1}{(z - n)^2} \right| / \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{|1 - z/n|^2} \leq \frac{1}{(1 - \operatorname{Re} z/n)^2} \leq \frac{1}{(1 - 1/2)^2} = 4; \quad (11.4)$$

так как сумма остальных трех слагаемых $\frac{1}{(z - 1)^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{(z + 1)^2}$ на множестве Π , очевидно, ограничена, а ряд $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2}} (1/n^2)$, очевидно, сходится, искомая ограниченность функции f' на множестве Π вытекает из неравенства (11.4).

Для доказательства того, что на множестве Π ограничена функция $\pi^2/\sin^2(\pi z)$, достаточно доказать, что при $x \in [0; 1]$ имеем $\lim_{y \rightarrow +\infty} |\sin \pi(x + iy)| = +\infty$, причем сходимость равномерна по $x \in [0; 1]$; это, в свою очередь, вытекает из того, что

$$|\sin(\pi(x + iy))| = \frac{|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y|}{2} \geq \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Итак, разность $f'(z) - (\pi \operatorname{ctg}(\pi z))'$ является ограниченной целой функцией и тем самым константой. Следовательно, разность $h(z) = f(z) - \pi \operatorname{ctg}(\pi z)$, производная которой является константой, является функцией вида $z \mapsto az + b$. Поскольку функция h , будучи разностью двух функций с периодом 1, также имеет период 1, получаем, что $a = 0$ и тем самым h — константа. Поскольку функции $f(z)$ и $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ нечетные, их разность $h(z)$ также нечетная. Однако

же нечетная функция, являющаяся константой, есть тождественный нуль, так что $f(z) - \pi \operatorname{ctg}(\pi z) = 0$ для всех z , что и утверждалось. \square

Подставляя в наши разложения z/π вместо z и деля на π , получаем

Следствие 11.5. *Имеют место разложения*

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z - \pi n} - \frac{1}{\pi n} \right), \quad (11.5)$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2}, \quad (11.6)$$

где оба ряда сходятся абсолютно и равномерно на компактах. \square

В разложении (11.6) все слагаемые под знаком суммы голоморфны в круге $\{z: |z| < \pi\}$ и легко разлагаются в этом круге в степенной ряд. Давайте попробуем выписать эти разложения.

Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2} &= -\frac{2z}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{1}{1 - z^2/(\pi^2 n^2)} = -\frac{2z}{\pi^2 n^2} \left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2} + \frac{z^4}{\pi^4 n^4} + \dots \right) = \\ &= -\frac{2z}{\pi^2 n^2} - \frac{2z^3}{\pi^4 n^4} - \frac{2z^5}{\pi^6 n^6} - \dots \end{aligned} \quad (11.7)$$

(при $|z| < \pi$). Подставляя эти разложения в (11.6) и приводя подобные (последнее законно ввиду того, что и ряд в (11.6), и разложение (11.7) абсолютно сходятся), получаем такое выражение для ряда Лорана котангенса в нуле:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} z^5 + \dots \right). \quad (11.8)$$

Если теперь получить разложение для котангенса прямо из определения $\operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$, то ясно, что число π в таком разложении участвовать не будет, так что можно надеяться получить какие-нибудь интересные тождества, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z . Так оно в итоге и получится, но на этом пути нас подстерегает одна трудность: для коэффициентов ряда Лорана котангенса нет формул, выражающих эти коэффициенты через простые арифметические функции вроде степеней, факториалов или биномиальных коэффициентов. Тем не менее эта последовательность коэффициентов и связанные с ней встречаются в математике довольно часто, так что для одной из последовательностей этого семейства выделено специальное определение и обозначение.

Рассмотрим функцию $f(z) = z/(e^z - 1)$, имеющую, очевидно, устранимую особенность в нуле. Пусть n — натуральное.

Определение 11.6. Значение $f^{(n)}(0)$ называется *числом Бернулли* с номером n и обозначается B_n .

Иными словами, числа Бернулли определяются из формулы

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Числа Бернулли с малыми номерами несложно найти вручную. Например, легко видеть, что $B_1 = -1/2$; далее, не столь заметно с первого взгляда, но легко проверяется, что функция $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1} - (-z/2)$ является четной, откуда вытекает, что числа Бернулли с нечетными номерами, кроме B_1 , равны нулю. Несколько первых чисел Бернулли приведены в таблице:

n	1	2	4	6	8	10	12
B_n	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$

Предложение 11.7. Ряд Лорана для функции $z \mapsto \operatorname{ctg} z$ в нуле имеет вид

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} z^{2m-1}.$$

Доказательство. Это делается прямым вычислением, в котором мы учли, что $B_1 = -1/2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} z &= i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{2i}{2iz} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2iz)^n \right) = \\ &= \frac{1}{z} - \frac{2^2 B_2}{2!} z + \frac{2^4 B_4}{4!} z^3 - \frac{2^6 B_6}{6!} z^5 + \dots \quad \square \end{aligned}$$

Сопоставляя разложение (11.8) с разложением из предложения 11.7, получаем следующий результат.

Предложение 11.8. Для всякого натурального m имеем

$$1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \dots + \frac{1}{n^{2m}} + \dots = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1} B_{2m} \pi^{2m}}{(2m)!}.$$

В частности, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ и т. д.

Стоит отметить, что про суммы $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^k)$ при нечетных k («значения дзета-функции Римана в положительных нечетных числах»)

известно гораздо меньше: например, лишь в конце 70-х годов XX века было доказано, что число $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^3)$ иррационально.

11.2. Эллиптические функции

В предыдущем разделе мы построили «с нуля» периодическую мероморфную функцию. Сейчас мы займемся функциями комплексного переменного, имеющими два периода. Один пример такой функции мы уже видели: это рассматривавшаяся в разделе 10.3 функция, конформно отображающая прямоугольник на верхнюю полуплоскость.

Определение 11.9. Решеткой в \mathbb{C} называется подгруппа по сложению $\Gamma \subset \mathbb{C}$, порожденная двумя образующими $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, линейно независимыми над \mathbb{R} .

Иными словами, $\Gamma = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, где ω_1 и ω_2 — ненулевые комплексные числа, отношение которых не лежит в \mathbb{R} .

Определение 11.10. Эллиптической функцией относительно решетки $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется мероморфная функция f на \mathbb{C} , для которой $f(z + u) = f(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$ и $u \in \Gamma$.

Если решетка Γ порождена числами ω_1 и ω_2 , то эллиптическая функция — это мероморфная функция, имеющая периоды ω_1 и ω_2 . Если решетка, относительно которой данная функция периодична, ясна из контекста, мы будем говорить просто «эллиптическая функция».

Определение 11.11. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — решетка с образующими ω_1 и ω_2 . Фундаментальным параллелограммом этой решетки называется всякое множество вида $\{a + s\omega_1 + t\omega_2\}$, где $a \in \mathbb{C}$ фиксировано, а s и t — произвольные действительные числа из интервала $[0; 1)$.

Подчеркнем, что согласно этому определению фундаментальный параллелограмм решетки далеко не единственен: он зависит и от выбора начальной точки a , и от выбора базиса решетки (чисел ω_1 и ω_2). Если Π — какой-нибудь фундаментальный параллелограмм решетки Γ , то \mathbb{C} представляется в виде объединения множеств $\Pi + u$ (сдвигов Π на вектор u), где $u \in \Gamma$, причем для разных u множества $\Pi + u$ не пересекаются.

Фундаментальный параллелограмм содержит ровно по одному представителю каждого класса смежности \mathbb{C} (как аддитивной группы) по Γ . Поэтому для функции, эллиптической относительно Γ , и ω_1 , и ω_2 являются периодами. Все значения, которые принимает эта функция, она принимает уже на фундаментальном параллело-

грамме. Точно так же «периодичны» ее полюсы: если эллиптическая функция имеет полюс в точке a , то она имеет полюс и во всех точках $a + u$, $u \in \Gamma$, с главными частями, отличающимися от главной части в точке a только сдвигом аргумента.

Сначала рассмотрим некоторые общие свойства эллиптических функций.

Предложение 11.12. *Если эллиптическая функция не имеет полюсов, то она постоянна.*

Доказательство. Эллиптическая функция принимает все свои значения уже на фундаментальном параллелограмме. Так как фундаментальный параллелограмм ограничен, а эллиптическая функция без полюсов непрерывна, ее значения ограничены на фундаментальном параллелограмме и тем самым на всем \mathbb{C} . По теореме Лиувилля всякая ограниченная целая функция постоянна. \square

Предложение 11.13. *Пусть f — эллиптическая функция относительно решетки Γ , и пусть Π — какой-нибудь фундаментальный параллелограмм относительно этой решетки. Тогда сумма кратностей нулей и полюсов функции f , содержащихся в Π , равна нулю (кратность полюса считаем отрицательной).*

Доказательство. Поскольку от выбора фундаментального параллелограмма это утверждение не зависит, можно считать, сдвинув при необходимости Π , что на его границе ни полюсов, ни нулей функции f нет. Если обозначить положительно ориентированную границу параллелограмма Π через γ , то по следствию 8.9 имеем

$$\sum_{z \in \Pi} \text{ord}_z(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (11.9)$$

Функция f'/f , очевидно, также эллиптическая относительно решетки Γ , и из этого вытекает, что интеграл от $(f'(z)/f(z)) dz$ по границе параллелограмма Π равен нулю: значения функции f'/f на противоположных сторонах совпадают ввиду периодичности, а проходятся эти стороны в противоположном порядке. Поэтому в (11.9) интегралы по противоположным сторонам параллелограмма сокращаются и правая часть равна нулю, так что равна нулю и левая часть, что и утверждалось. \square

Теперь давайте строить примеры эллиптических функций. Мы будем действовать, как в предыдущем разделе. Пока речь шла о функциях с одним периодом, мы смогли даже построить функцию с ровно одним и притом простым полюсом (с точностью до периода, разумеется). Можно ли так сделать в случае, когда периодов два, вы

узнаете, решив задачу 11.4, а сейчас начнем сразу же с функций с двойным полюсом.

Лемма 11.14. Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — решетка и $\alpha \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum'_{u \in \Gamma} \frac{1}{|u|^\alpha}$ сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leq 2$.

Напомним, что \sum' означает суммирование по всем элементам, кроме нуля.

Доказательство. Пусть $\alpha > 2$. Выберем в решетке базис $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$, для каждого $u \in \Gamma$ положим

$$\Pi_u = \{u + s\omega_1 + t\omega_2 : s, t \in [0; 1)\}$$

и определим функцию h на \mathbb{C} так: $h(z) = 1/|z|^\alpha$, если $z \in \Pi_u$; при $z \in \Pi_0$ положим $h(z) = 0$ (можно было бы выбрать и любую другую константу). Ряд $\sum'_{u \in \Gamma} (1/|u|^\alpha)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\iint_{|z| \geq 1} h(z) dx dy$. Поскольку, очевидно,

существует такая константа $C > 0$, что $h(z) \leq C/|z|^\alpha$, а интеграл $\iint_{|z| \geq 1} dx dy / |z|^\alpha$ при $\alpha > 2$ сходится (что проверяется переходом к по-

лярным координатам), ряд $\sum' (1/|u|^\alpha)$ также сходится. Для $\alpha \leq 2$ рассуждение аналогично. \square

Предложение-определение 11.15. Ряд

$$\frac{1}{z^2} + \sum'_{u \in \Gamma} \left(\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} \right) \quad (11.10)$$

сходится в \mathbb{C} равномерно на компактах к мероморфной функции в смысле определения 11.1. Сумма этого ряда обозначается $\wp(z)$ и называется \wp -функцией Вейерштрасса.

Доказательство. Если $|z| \leq C$ и, скажем, $|u| \geq 2C$, то $|z - 2u| \leq 3|u|$ и $|z - u| \geq |u|/2$, откуда

$$\left| \frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} \right| = \frac{|z| \cdot |z - 2u|}{|u|^2 \cdot |z - u|^2} \leq \frac{12C}{|u|^3},$$

так что из леммы 11.14 и мажорантного признака Вейерштрасса (предложение 1.2) вытекает, что при $|z| \leq C$ ряд (11.10) сходится абсолютно и равномерно по z . Так как компактные множества ограничены, все доказано. \square

Из определения ясно, что функция \wp имеет полюс кратности 2 с главной частью $1/(z-u)^2$ в каждой точке $u \in \Gamma$, а других полюсов не имеет.

Предложение 11.16. \wp -функция Вейерштрасса, заданная формулой (11.10), является четной функцией, а также эллиптической относительно решетки Γ .

Доказательство. Четность функции \wp очевидна из определения и абсолютной сходимости ряда (11.10).

Почленно дифференцируя разложение (11.10), получаем, что

$$\wp'(z) = -2 \sum_{u \in \Gamma} \frac{1}{(z-u)^3}.$$

Так как члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять, имеем $\wp'(z+u) = \wp'(z)$ для всякого $u \in \Gamma$, так что \wp' — эллиптическая функция. Если $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ — базис решетки Γ , то отсюда вытекает, что, скажем, $\wp(z + \omega_1) = \wp(z) + C$ при всех z для некоторой константы C . Ввиду четности функции \wp имеем

$$\wp\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega_1}{2} + \omega_1\right) = \wp\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) + C,$$

откуда $C = 0$ и ω_1 — период функции \wp . Точно так же показывается, что и ω_2 — период, так что \wp — эллиптическая функция относительно решетки Γ . \square

Функция котангенс, которую мы в предыдущем разделе также представили в виде бесконечной суммы дробей, удовлетворяет, как легко видеть, дифференциальному уравнению $(\operatorname{ctg} z)' = -(\operatorname{ctg} z)^2 - 1$. Для функции \wp существует дифференциальное уравнение такого же типа, но более интересное. Чтобы его записать, нам потребуется небольшая подготовка.

Пусть опять $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ — базис в решетке Γ ; положим $e_1 = \wp(\omega_1/2)$, $e_2 = \wp((\omega_1 + \omega_2)/2)$, $e_3 = \wp(\omega_2/2)$. (Числа $\omega_1/2$, $(\omega_1 + \omega_2)/2$ и $\omega_2/2$ представляют все элементы порядка 2 в факторгруппе \mathbb{C}/Γ .)

Предложение 11.17. Функции \wp и \wp' связаны тождеством

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3). \quad (11.11)$$

Доказательство. Чтоб доказать тождество (11.11), достаточно установить, что его левая и правая части суть эллиптические функции относительно Γ с одинаковым набором нулей и полюсов (считая кратности) и одинаковой главной частью в нуле.

В соответствии с этим планом заметим, что периодичность относительно Γ обеих частей (11.11) очевидна. Далее, сравнивать нули и полюсы достаточно на каком-нибудь фундаментальном параллелограмме; выберем в качестве такового параллелограмм с вершинами 0 , ω_1 , $\omega_1 + \omega_2$ и ω_2 . В этом параллелограмме функция \wp (а тем самым и любая $\wp - e_j$) имеет полюс только в нуле, с главной частью

$1/z^2$, так что функция \wp' также имеет полюс только в нуле, с главной частью $-2/z^3$. Следовательно, левая и правая часть (11.11) имеют в фундаментальном параллелограмме полюсы только в нуле, обе — с главной частью $4/z^6$.

Осталось сравнить нули. Поскольку каждая из точек e_j , $1 \leq j \leq 3$, имеет порядок 2 в группе \mathbb{C}/Γ , а функция \wp четная, каждая из функций $\wp - e_1$, $\wp - e_2$ и $\wp - e_3$ имеет нуль порядка по крайней мере 2 в точках $\omega_1/2$, $(\omega_1 + \omega_2)/2$ и $\omega_2/2$ соответственно. В самом деле, поскольку, например, $\omega_1/2 \equiv -\omega_2/2 \pmod{\Gamma}$, а функция \wp четная, имеем

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2} + z\right) = \wp\left(-\frac{\omega_1}{2} - z\right) = \wp\left(-\frac{\omega_1}{2} - z + \omega_1\right) = \wp\left(\frac{\omega_1}{2} - z\right),$$

так что в разложении \wp в степенной ряд в точке $\omega_1/2$ присутствуют только члены в четных степенях, и при этом, по самому определению числа e_1 , функция $\wp - e_1$ имеет в точке $\omega_1/2$ нуль. Поскольку для функций $\wp - e_j$ сумма кратностей всех полюсов в фундаментальном параллелограмме равна 2, как и для самой функции \wp , предложение 11.13 показывает, что никаких нулей, кроме указанных, у функций $\wp - e_j$ в фундаментальном параллелограмме нет, и кратности их равны именно 2. Так как функция $\wp - e_j$ в соответствующей точке порядка 2 имеет нуль второго порядка, функция $\wp' = (\wp - e_j)'$ в каждой из точек $\omega_1/2$, $(\omega_1 + \omega_2)/2$ и $\omega_2/2$ имеет простой нуль, а функция $(\wp')^2$, соответственно, имеет в каждой из этих точек нуль порядка 2. С другой стороны, у функции $(\wp')^2$ в фундаментальном параллелограмме имеется ровно один полюс (в нуле), и он имеет кратность 6. Применяя еще раз предложение 11.13, получаем, что никаких других нулей у левой части (11.11) нет. Стало быть, у левой и правой частей (11.11) совпадают не только полюсы, но и нули, а совпадение главных частей в нуле мы проверили в начале рассуждения. Тем самым доказательство закончено. \square

Следствие 11.18 (из доказательства). *Если \wp — функция Вейерштрасса относительно решетки с базисом $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$, то \wp имеет точки ветвления порядка 2 в точках $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ и $(\omega_1 + \omega_2)/2$, а других точек ветвления не имеет.*

Правую часть уравнения (11.11) можно переписать в более явном виде. Для этого, как и в предыдущем разделе, нам понадобится выписать максимально явно ряд Лорана для функции \wp в нуле.

Определение 11.19. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — решетка и $k \geq 2$ — целое число. Ряд $\sum'_{u \in \Gamma} (1/u^{2k})$ называется *рядом Эйзенштейна*. Сумма этого ряда обозначается G_k .

Заметим, что ряды Эйзенштейна абсолютно сходятся ввиду леммы 11.14. Если $k \geq 3$ — нечетное число, то ряд $\sum' (1/u^k)$ также абсолютно сходится, но его сумма равна нулю, так как $1/u^k$ сокращается с $1/(-u)^k$.

Предложение 11.20. Ряд Лорана в нуле для \wp -функции Вейерштрасса имеет вид

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_2 z^2 + 5G_3 z^4 + 7G_4 z^6 + \dots = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)G_{k+1} z^{2k}. \quad (11.12)$$

Доказательство. Положим $r = \min_{u \in \Gamma \setminus \{0\}} |u|$. В круге $\{z: |z| < r\}$ каждое слагаемое в ряде (11.10) разлагается в степенной ряд следующим образом:

$$\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{1-(z/u)} \right)^2 = \frac{2z}{u^3} + \frac{3z^2}{u^4} + \frac{4z^3}{u^5} + \dots$$

Просуммируем эти разложения, сгруппировав слагаемые с одинаковыми степенями z (это возможно ввиду абсолютной сходимости — см. предложение 1.4). Коэффициент при z^m будет иметь вид $(m+1) \sum' (1/u^{m+2})$. Если m нечетно, то этот коэффициент будет равен нулю ввиду замечания выше, а если $m = 2k$ четно, то коэффициент будет равен $(2k+1)G_{k+1}$. Чтобы получился ряд Лорана, остается не забыть слагаемое $\frac{1}{z^2}$. \square

Предложение 11.21. \wp -функция Вейерштрасса удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - 60G_2\wp(z) - 140G_3,$$

где G_2 и G_3 — ряды Эйзенштейна.

Доказательство. Подставим разложение (11.12) в формулу (11.11):

$$\begin{aligned} \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6G_2 z + 20G_3 z^3 + \dots, \\ (\wp'(z))^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{24G_2}{z^2} - 80G_3 + \dots, \\ \wp(z) - e_i &= \frac{1}{z^2} - e_i + 3G_2 z^2 + 5G_3 z^4 + \dots, \\ 4 \prod_i (\wp(z) - e_i) &= \frac{4}{z^6} - \frac{4(e_1 + e_2 + e_3)}{z^4} + \\ &\quad + \frac{4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) + 36G_2}{z^2} + \\ &\quad + (-4e_1 e_2 e_3 - 24G_2(e_1 + e_2 + e_3) + 60G_3) + \dots \end{aligned} \quad (11.14)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в (11.13) и (11.14), получаем последовательно:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad 4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3) = -60G_2, \quad 4e_1e_2e_3 = 140G_3. \quad (11.15)$$

Раскрывая скобки в правой части (11.11) и подставляя из (11.15), получаем искомое соотношение. \square

Следствие 11.22 (из доказательства). Если \wp — функция Вейерштрасса, соответствующая решетке с базисом $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$, то

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = 0.$$

Доказательство. Это соотношение $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ в (11.15). \square

Эллиптическая функция, которую мы построили в разделе 10.3, похожа по внешним признакам на функцию Вейерштрасса: у нее тоже ровно один полюс второго порядка в фундаментальном параллелограмме (в данном случае это прямоугольник), а других полюсов нет. Сейчас мы увидим, что она не только похожа на функцию \wp , но и несложно выражается через нее.

Напомним, что именно мы сделали в предыдущей главе. Если $a_1 < a_2 < a_3$ — три действительных числа, то мы определили функцию F , заданную на верхней полуплоскости формулой

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}}, \quad (11.16)$$

где $z_0 \in \mathbb{R}$ фиксировано, и установили, что F задает конформное отображение верхней полуплоскости H на прямоугольник Π со сторонами

$$u = \int_{a_1}^{a_2} \frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}}, \quad v = \int_{a_2}^{a_3} \frac{dt}{\sqrt{|(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)|}} \quad (11.17)$$

(сторона u параллельна действительной оси). Мы установили, что обратное отображение $G: \Pi \rightarrow H$ продолжается до функции, эллиптической относительно решетки Γ с базисом $\langle 2u, 2iv \rangle$, имеющей полюсы кратности 2 в точках $F(\infty) + 2mu + 2niv$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Положим $V(z) = G(z + F(\infty))$, где

$$F(\infty) = \int_{z_0}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}},$$

$$\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} = \prod_{j=1}^3 \sqrt{z-a_j}$$

и у каждого $\sqrt{z - a_j}$ выбрана такая ветвь, что $\sqrt{t - a_j} > 0$ при $t \in \mathbb{R}$, $t > a_j$. Если обозначить теперь через Γ решетку с базисом $\langle 2u, 2iv \rangle$, то V — эллиптическая функция относительно Γ с полюсами порядка 2 в точках решетки и более нигде.

Так как функция G обратна к функции F , из формулы (11.16) и правила дифференцирования обратной функции вытекает, что

$$(G'(z))^2 = (G(z) - a_1)(G(z) - a_2)(G(z) - a_3),$$

откуда и

$$(V'(z))^2 = (V(z) - a_1)(V(z) - a_2)(V(z) - a_3). \quad (11.18)$$

Пусть теперь \wp — функция Вейерштрасса относительно решетки Γ с базисом $\langle 2u, 2iv \rangle$. Заметим, что функции V' и \wp' — эллиптические функции относительно Γ с одинаковым набором нулей и полюсов (с учетом кратностей). В самом деле, функция \wp' имеет полюсы порядка 3 в точках решетки и более нигде, а также нули порядка 1 в точках u , iv , $u + iv$ и сравнимых с ними по модулю Γ — это вытекает из следствия 11.18, если вспомнить, что точки ветвления порядка k для функции f — то же, что нули порядка $k - 1$ для ее производной f' . Утверждение же о точках ветвления функции $V(z) = G(z + F(\infty))$ вытекает из предложения 10.11. Теперь то же соображение, что в доказательстве предложения 11.17, показывает, что существует такая ненулевая константа α , что $V' = \alpha\wp'$; стало быть, существуют такие константы $\alpha \neq 0$ и β , что $V = \alpha\wp + \beta$. Чтобы найти α и β , подставим это выражение для V в (11.18). Получится следующее:

$$(\wp')^2 = 4\alpha\left(\wp + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{a_1}{\alpha}\right)\left(\wp + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{a_2}{\alpha}\right)\left(\wp + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{a_3}{\alpha}\right).$$

Сравнивая правую часть этого тождества с правой частью (11.11), рассматриваемой как многочлен от \wp' , получаем, сопоставляя корни, что $\frac{\beta - a_1}{\alpha}$, $\frac{\beta - a_2}{\alpha}$ и $\frac{\beta - a_3}{\alpha}$ суть e_1 , e_2 и e_3 (в каком-то порядке). Так как $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ (см. тождества (11.15)), получаем отсюда, складывая корни, что $\beta = (a_1 + a_2 + a_3)/3$. Сопоставляя же коэффициенты при $(\wp')^3$ в правых частях, находим, что $\alpha = 1$. Мы нашли выражение функции V , а тем самым и функции $G(z) = V(z - F(\infty))$, через функцию \wp . Подведем итоги наших изысканий.

Предложение 11.23. Пусть $a_1 < a_2 < a_3$ — три действительных числа. Если зафиксировать еще какое-то $z_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотреть функцию $F: H \rightarrow \mathbb{C}$ (H — верхняя полуплоскость), заданную форму-

лой (10.1), то функция G , обратная к функции F , задается формулой

$$G(z) = \wp(z - C) + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},$$

где \wp — функция Вейерштрасса относительно решетки с базисом $\langle 2u, 2iv \rangle$, числа u и v задаются формулами (11.17) и

$$C = \int_{z_0}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)}}.$$

11.3. Бесконечные произведения

Бесконечные произведения — это аналог рядов, в котором сложение заменено на умножение. Свойства рядов и бесконечных произведений очень похожи, но важно отметить некоторые отличия.

Определение 11.24. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность *ненулевых* комплексных чисел. Говорят, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к числу a , если $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k$ и при этом $a \neq 0$.

Условие $a \neq 0$ в определении накладывается, чтобы избежать утомительных оговорок в дальнейших формулировках, например, в таком очевидном предложении:

Предложение 11.25. Если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Нам понадобятся бесконечные произведения не столько чисел, сколько функций. Будем пока что предполагать, что функции-сомножители в бесконечном произведении нигде не обращаются в нуль и что в определение равномерной сходимости бесконечного произведения входит условие, что предельная функция также нигде не обращается в нуль.

Предложение 11.26. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность ограниченных комплекснозначных функций на некотором множестве X . Предположим также, что функции $1 + u_n$ нигде на X не обращаются в нуль и что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ равномерно сходится на X . Тогда бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ также равномерно сходится на X .

Доказательство. Из равномерной сходимости ряда $\sum |u_n|$ вытекает, что последовательность $\{|u_n|\}$ равномерно сходится к нулю. Отбрасывая, если нужно, конечное число сомножителей в про-

изведении $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ (что на сходимость не повлияет, так как сомножители нигде не обращаются в нуль), можно считать, что $\sup_{x \in X} |u_n(x)| \leq 1/2$ для всякого n (вместо $1/2$ подойдет любое положительное число, меньшее единицы). Тем самым все числа $1 + u_n(x)$ лежат в правой полуплоскости $H = \{z: \operatorname{Re}(z) > 0\}$, в которой определена непрерывная функция \arg , ставящая в соответствие комплексному числу его аргумент, лежащий в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Чтобы доказать равномерную сходимость произведения $\prod (1 + u_n)$, достаточно проверить, что равномерно сходятся произведение $\prod |1 + u_n|$ и ряд $\sum \arg(1 + u_n)$.

Равномерная сходимость произведения $\prod |1 + u_n|$ равносильна равномерной сходимости ряда $\sum \ln |1 + u_n|$, а этот последний ряд сходится, и даже абсолютно. В самом деле, существует, очевидно, такая константа $C > 0$, что $|\ln(1 + a)| \leq C|a|$ при $-1/2 \leq a \leq 1/2$; так как $1 - |u_k(x)| \leq |1 + u_k(x)| \leq 1 + |u_k(x)|$ и $|u_k(x)| \leq 1/2$ для всех $x \in X$, имеем $|\ln |1 + u_k(x)|| \leq C|u_k(x)|$, так что ряд $\sum \ln |1 + u_k|$ равномерно сходится по признаку сравнения.

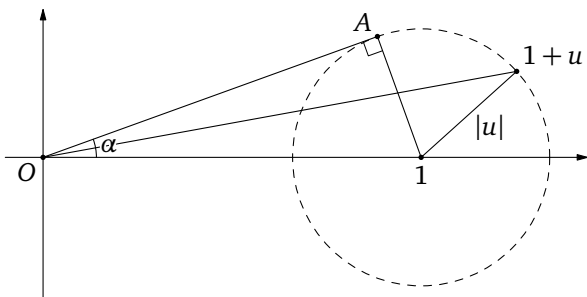


Рис. 11.1. $|\arg(1 + u)| \leq \alpha = \arcsin |u|$

Чтобы установить равномерную сходимость ряда $\sum \arg(1 + u_n)$, заметим, что (при $|u| < 1$) $|\arg(1 + u)| \leq \arcsin |u|$ (см. рис. 11.1); так как $\arcsin t/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, равномерная сходимость ряда $\sum \arg(1 + u_n)$ следует из равномерной сходимости ряда $\sum |u_n|$. \square

Следствие 11.27 (из доказательства). Пусть, в условиях предложения 11.26, $\sup |u_j(x)| < 1$ для всех j . Если определить функцию \ln на правой полуплоскости по правилу $\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, то ряды $\sum \ln(1 + u_k)$ и $\sum |\ln(1 + u_k)|$ равномерно сходятся на X . Если, кроме того, значения всех частичных произве-

дений $\prod_{j=1}^n (1 + u_j)$ лежат в правой полуплоскости, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + u_k) = \ln \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k).$$

Доказательство. В самом деле, мы установили, что абсолютно сходятся ряды из действительных и мнимых частей $\ln(1 + u_k)$. Второе утверждение следует из того, что если числа a_1, \dots, a_n и их произведение $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ лежат в правой полуплоскости, то $\ln a = \ln a_1 + \dots + \ln a_n$. \square

До сих пор у нас шла речь о бесконечных произведениях функций, не обращающихся в нуль. Далее нам понадобятся произведения голоморфных функций, нули имеющих. Чтобы определить их бесконечные произведения, нам понадобятся дополнительные оговорки, аналогичные тем, что сделаны в определении бесконечной суммы функций с изолированными особенностями (определение 11.1).

Определение 11.28. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество и $\prod f_j$ — ряд из функций, голоморфных на U , ни одна из которых не является тождественным нулем. Будем говорить, что этот ряд *равномерно сходится на компактах в U* , если для всякого компактного подмножества $K \subset U$ выполнены два следующих условия:

- (1) не более чем конечное число функций f_j имеет нуль на K ;
- (2) бесконечное произведение функций f_j , не имеющих нулей на K , равномерно сходится на K .

Ясно, что если $\prod f_j$ удовлетворяет этому определению, то функция $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n f_j(z)$ голоморфна на U и ее множество нулей есть объединение множеств нулей функций f_j , с соответствующими кратностями.

В качестве примера попробуем представить в виде бесконечного произведения функцию синус (по аналогии с тем, как в начале этой главы мы представили в виде бесконечной суммы функцию котангенс). Легко видеть, что все нули функции \sin суть простые нули в точках πn , $n \in \mathbb{Z}$, поэтому первое, что приходит в голову — попытаться представить синус в виде произведения линейных множителей с нулями в этих точках. Произведение $\prod (z - \pi n)$, разумеется, расходится. Выглядящее более цивилизованно произведение $z \cdot \prod' \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right)$ (\prod' , подобно \sum' , означает «произведение по всем индексам, кроме нуля») также абсолютно сходящимся не является: $\ln(1 - (z/n))$ асимптотически эквивалентно $|z/n|$, а гармонический

ряд расходится. Следующая попытка — сгруппировать сомножители с n и $-n$. Удивительным образом она приводит не только к сходящемуся произведению, но и прямо к цели.

Предложение 11.29. *Бесконечное произведение*

$$z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

сходится в \mathbb{C} равномерно на компактах к $\sin z$.

Доказательство. Утверждение о сходимости очевидно ввиду предложения 11.26, так что $f(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$ — целая функция с простыми нулями в точках πn . Чтобы установить, что она совпадает с синусом, достаточно, в силу принципа аналитического продолжения, показать, что эти две функции совпадают в некоторой проколотой окрестности нуля. Нам будет удобнее доказывать, что в такой окрестности совпадают целые функции $\sin z/z$ и $g(z) = f(z)/z$. Для этого, в свою очередь, мы сравним логарифмические производные этих функций. Напомню, что логарифмическая производная голоморфной функции φ , не обращающейся в нуль, есть $(\ln \varphi)' = \varphi'/\varphi$; ясно, что логарифмическая производная не зависит от выбора ветви логарифма и что логарифмическая производная произведения равна сумме логарифмических производных.

В частности, логарифмическая производная функции $\sin z/z$ равна, очевидно,

$$(\ln \sin z)' - (\ln z)' = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}.$$

Что же до логарифмической производной функции

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

то в достаточно малой окрестности нуля имеем ввиду следствия 11.27 равенство

$$\ln g(z) = \ln\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{z^2}{2^2 \pi^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{z^2}{3^2 \pi^2}\right) + \dots, \quad (11.19)$$

где ряд сходится абсолютно. Если разложить все слагаемые в правой части (11.19), пользуясь формулой

$$\ln(1 - t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \dots - \frac{t^n}{n} - \dots, \quad (11.20)$$

(ряд абсолютно сходится при $|t| < 1$), то мы получим, что

$$\begin{aligned} \ln g(z) = & \left(-\frac{z^2}{\pi^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^4}{\pi^4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z^6}{\pi^6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^8}{\pi^8} - \dots \right) + \\ & + \left(-\frac{z^2}{2^2 \pi^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^4}{2^4 \pi^4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^6 z^6}{2^6 \pi^6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^8}{2^8 \pi^8} - \dots \right) + \\ & + \left(-\frac{z^2}{3^2 \pi^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^4}{3^4 \pi^4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z^6}{3^6 \pi^6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^8}{3^8 \pi^8} - \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

Перегруппировав слагаемые (что законно ввиду предложения 1.4), получаем, что в разложении $g(z)$ коэффициент при z^{2m} , где $m \in \mathbb{N}$, равен

$$\frac{1}{m\pi^{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^m \frac{2^{2m-1} B_{2m}}{m \cdot (2m)!},$$

где B_{2m} — число Бернулли (мы воспользовались предложением 11.8). Дифференцируя, получаем, что

$$(\ln g(z))' = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m 2m \cdot \frac{2^{2m-1} B_{2m}}{m \cdot (2m)!} \cdot z^{2m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \cdot z^{2m-1},$$

и это совпадает с разложением для $\operatorname{ctg} z - (1/z)$, получаемым из формулы (11.7). Стало быть, логарифмические производные функций $g(z)$ и $\sin z/z$ совпадают; тем самым их логарифмы отличаются на константу, так что существует такая константа C , что $g(z) = C \sin z/z$. Сравнивая значения в нуле, получаем, что $C = 1$. Следовательно, $f(z) = \sin z$ и все доказано. \square

11.4. Теоремы Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса

В трех предыдущих разделах мы, с помощью бесконечных сумм и бесконечных произведений, «вручную» строили мероморфные (соответственно, голоморфные) функции с некоторыми конкретными наборами полюсов (соответственно нулей). Сейчас мы увидим, что для любого предписанного набора изолированных нулей или полюсов существует мероморфная (или, соответственно, голоморфная) функция ровно с такими полюсами или нулями.

Мы начнем с ситуации, когда заданы полюсы. Как вы сейчас увидите, можно задавать не просто полюсы с кратностями, но даже и главные части в этих полюсах. Более того, наряду с полюсами можно допустить и существенные особенности.

Определение 11.30. Главной частью в точке $a \in \mathbb{C}$ называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{-n}$, сходящийся в некоторой проколотой окрестности точки a (ср. определение 7.7).

Из общих свойств степенных рядов очевидно, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^{-n}$$

— главная часть, то радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n$ бесконечен, так что можно также определить главную часть в точке a как функцию вида $h(1/(z - a))$, где h — целая функция (обращающаяся в нуль в нуле, так как в ряде для h нет свободного члена).

Теорема 11.31 (теорема Миттаг-Леффлера). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и пусть $S \subset U$ — подмножество без предельных точек в U . Предположим, что для всякой точки $a \in S$ задана главная часть φ_a в этой точке. Тогда существует функция, голоморфная на $U \setminus S$, у которой главная часть ряда Лорана в каждой точке $a \in S$ совпадает с φ_a .

Для доказательства теоремы хочется определить искомую функцию f просто как сумму заданных главных частей, но мы уже знаем из примеров, что такой ряд не обязан сходиться. В разделах 10.1 и 10.2 нам удавалось обеспечить сходимость ряда из главных частей, вычитая из них подходящие константы, но в общем случае этого мало: для улучшения сходимости мы будем вычитать функции, голоморфные на U (и не обязательно постоянные). Как мы увидим, на роль этих «поправочных» голоморфных функций подойдут либо многочлены, либо рациональные функции с полюсами вне U .

Начнем с леммы, в которой речь идет как раз о выборе этих «поправочных» функций.

Лемма 11.32. Пусть $a, b \in \mathbb{C}$ — две различные точки, и пусть φ — главная часть в a , имеющая вид $\varphi(z) = h(1/(z - a))$, где h — целая функция. Тогда для всякого $r > |a - b|$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такая рациональная функция R , имеющая полюс разве что в точке b , что $|\varphi(z) - R(z)| \leq \varepsilon$ для всякого z , лежащего вне круга радиуса r с центром в точке b .

Доказательство. Положим $w = 1/(z - b)$; тогда, как легко видеть,

$$\frac{1}{z - a} = \frac{w}{1 + (b - a)w},$$

так что $\varphi(z) = h\left(\frac{w}{1 + (b - a)w}\right)$. Функция $w \mapsto h\left(\frac{w}{1 + (b - a)w}\right)$ голоморфна в круге $\{w: |w| < 1/|b - a|\}$, так что на любом замкнутом круге с центром в нуле и радиусом, строго меньшим, чем $1/|b - a|$,

она может с любой точностью быть приближена частичной суммой своего степенного ряда. Положим $\rho = 1/r$; тогда $\rho < 1/|b - a|$. Если P — такая частичная сумма степенного ряда для $h\left(\frac{w}{1 + (b - a)w}\right)$ в нуле, что

$$\left| h\left(\frac{w}{1 + (b - a)w}\right) - P(w) \right| \leq \varepsilon \quad \text{при } |w| \leq \rho,$$

то, подставляя $w = 1/(z - b)$, получаем, что

$$\left| \varphi(z) - P\left(\frac{1}{z - b}\right) \right| \leq \varepsilon \quad \text{при } |z - b| \geq \frac{1}{\rho} = r.$$

Остается положить $R(z) = P(1/(z - b))$. □

Доказательство теоремы Миттаг-Леффлера. Покажем для начала, что существует последовательность компактных подмножеств $K_j \subset U$ (для всех целых $j \geq 1$) и голоморфных в U функций R_j (для всех целых $j \geq 2$) со следующими свойствами:

$$(1) K_j \subset \text{Int } K_{j+1} \text{ для всех } j, \text{ и при этом } \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = U;$$

$$(2) \text{ если при каждом } j > 1 \text{ положить } \psi_j = \sum_{a \in S \cap (K_{j+1} \setminus K_j)} \varphi_a \text{ (эта сум-}$$

ма конечна, так как множество S , не имеющее предельных точек в U , может иметь лишь конечное число точек в компакте $K_j \subset U$), то $\sup_{z \in K_{j-1}} |\psi_j(z) - R_j(z)| \leq 1/2^j$.

В самом деле, если $U = \mathbb{C}$, то в качестве K_n выберем замкнутый круг радиуса n с центром в нуле, а если $U \neq \mathbb{C}$, то положим

$$K_n = \left\{ z \in U : \inf_{w \in \mathbb{C} \setminus U} |z - w| \geq \frac{1}{n} \text{ и } |z| \leq n \right\}. \quad (11.21)$$

Легко видеть (проверьте!), что множества K_n обладают требуемыми свойствами. Чтобы выбрать функцию f_j , предположим, что множество $S \cap (K_{j+1} \setminus K_j)$ состоит из m точек. Для всякой $a \in S \cap (K_{j+1} \setminus K_j)$ верно как минимум одно из двух следующих утверждений: либо $\inf_{w \in \mathbb{C} \setminus U} |a - w| < 1/j$, либо $|a| > j$. В первом случае существует точка $b \in \mathbb{C} \setminus U$, для которой $|a - b| < 1/j$, а с другой стороны, для всех $z \in K_{j-1}$ имеем $|z - b| \geq 1/(j - 1) > 1/j$; применяя к главной части φ_a и точкам a и b лемму 11.32, в которой мы положим $\varepsilon = 1/(m \cdot 2^j)$ и $r = 1/(j - 1)$, найдем функцию R_a , голоморфную на $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ (и тем более в U), для которой $|\varphi_a(z) - R_a(z)| \leq 1/(m \cdot 2^j)$, как только $|z - b| \geq 1/(j - 1)$, и тем более при всех $z \in K_{j-1}$. Во вто-

ром случае заметим, что функция φ_a голоморфна в окрестности замкнутого диска с центром в нуле и радиусом j ; разлагая ее в нуле в ряд Тейлора, получим, что существует многочлен R_a , для которого $|\varphi_a(z) - R_a(z)| \leq 1/(m \cdot 2^j)$, как только $|z| \leq j$, и тем более при всех $z \in K_{j-1}$. Если теперь положить $R_j = \sum_{a \in S \cap (K_{j+1} \setminus K_j)} R_a$, то получим,

что функция R_j голоморфна на U и $\sup_{z \in K_{j-1}} |\psi_j(z) - R_j(z)| \leq 1/2^j$.

Положим еще $\psi_1 = \sum_{a \in K_1} \varphi_a$ и рассмотрим ряд

$$\psi_1 + \sum_{m=2}^{\infty} (\psi_m - R_m). \quad (11.22)$$

Покажем, что он равномерно сходится на компактах в U . В самом деле, из того, что $\bigcup K_j = U$ и $K_j \subset \text{Int}(K_{j+1})$, вытекает, что всякий компакт $K \subset \mathbb{C}$ содержится в конечном объединении нескольких вложенных друг в друга открытых множеств $\text{Int}(K_j)$, а тем самым и в некотором K_n . Все члены ряда (11.22), начиная с $(\psi_{n+1} - R_{n+1})$, не имеют особых точек на K_n (тем самым и на K), а максимумы их модуля на K_n (тем самым и на K) ограничены сверху сходящимся рядом $1/2^n + 1/2^{n+1} + \dots$. Тем самым ряд (11.22) сходится в \mathbb{C} равномерно на компактах в смысле определения 11.1; очевидно, его предел — функция с изолированными особенностями на S , имеющая главную часть φ_a в каждой точке $a \in S$. \square

Для последующих ссылок выделим результат, полученный в процессе доказательства теоремы.

Следствие 11.33 (лемма о компактном исчерпывании). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Тогда существует такая последовательность компактных подмножеств $K_j \subset U$, $j \in \mathbb{N}$, что $K_j \subset \text{Int}(K_{j+1})$ для всех j и $\bigcup_j K_j = U$.

При этом всякий компакт $K \subset U$ содержится в каком-то из K_j .

Подобно тому как бесконечные суммы позволяют построить функцию с предписанными главными частями, бесконечные произведения позволяют построить функцию с предписанными нулями. В доказательстве нижеследующей теоремы используется способ улучшения сходимости, с которым мы пока не встречались.

Теорема 11.34 (теорема Вейерштрасса). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $S \subset \mathbb{C}$ — подмножество без предельных точек в U , и пусть для каждого $a \in S$ задано целое положительное число n_a . Тогда существует функция f , голоморфная на U , имеющая в каждой точке $a \in S$ нуль порядка n_a , а других нулей не имеющая.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $0 \notin S$: уж если мы смогли построить функцию, имеющую нули с предписанными кратностями в заданных точках, отличных от нуля, то, умножив ее на z^k для подходящего k , мы получим заодно и нуль нужной кратности в нуле.

Имея в виду, что $0 \notin S$, рассмотрим семейство вложенных друг в друга компактных подмножеств $K_n \subset U$, определенных, как и в доказательстве теоремы Миттаг-Леффлера, формулой (11.21). Теперь для каждой точки $a \in S$, кроме точек, лежащих в K_1 , определим голоморфную на U функцию φ_a следующим образом. Пусть $a \in K_j$, но $a \notin K_{j-1}$, где $j > 1$, — коль скоро $a \notin K_1$, такое j существует. Поскольку $a \notin K_{j-1}$, получаем, что либо $|a| > j - 1$, либо найдется точка $b \notin U$, для которой $|a - b| > 1/(j - 1)$. В первом случае положим $\varphi_a = z/a$, во втором случае положим $\varphi_a = (a - b)/(z - b)$.

Лемма 11.35. Пусть $a \in S$, $a \in K_j \setminus K_{j-1}$, и пусть φ_a — функция, определенная выше. Тогда:

(1) $1 - \varphi_a$ — голоморфная функция на U , имеющая ровно один, и притом простой, нуль в точке a ;

(2) существует такая константа $c < 1$, что

$$\sup_{z \in K_{j-1}} |\varphi_j(z)| \leq c.$$

Доказательство леммы. Утверждение (1) очевидно. Что до утверждения (2), то если $|a| > j - 1$, то $\varphi_a(z) = z/a$ и можно положить $c = (j - 1)/|a|$, а если $|a| \leq j - 1$, но $|a - b| < 1/(j - 1)$, то можно положить $c = \frac{|a - b|}{1/(j - 1)}$. \square

Теперь расположим элементы множества S , кроме лежащих в K_1 , в последовательность $\{a_j\}$ таким образом, чтобы в ней сначала шли все точки, лежащие в K_1 (их конечное число, поскольку K_1 компактно, а множество S не имеет предельных точек в U), затем — все точки, лежащие в $K_2 \setminus K_1$, и т. д.; точки $a \in S$, для которых $n_a > 1$, повторим в последовательности n_a раз. Если бы бесконечное произведение $\prod_m (1 - \varphi_{a_m})$ равномерно сходилась на компактах в U , то, умножив его на конечное произведение $\prod_{a \in K_1 \cap S} (z - a)^{n_a}$, мы получи-

ли бы искомую функцию. Поскольку, однако, такая сходимостъ не гарантирована, мы улучшим сходимостъ следующим образом. При $|t| < 1$ корректно определена функция $t \mapsto \ln(1 - t)$, задающаяся рядом (11.20). Мы умножим каждую $(1 - \varphi_{a_m})$ на e^{-p_m} , где p_m — подходящий начальный отрезок ряда, полученного подстановкой φ_{a_m} вместо t в разложении (11.20).

Конкретно, если $a_m \in K_j \setminus K_{j-1}$ и $\sup_{z \in K_{j-1}} |\varphi_{a_m}(z)| \leq c < 1$, то выберем такое натуральное число n , что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{c^k}{k} \leq \frac{1}{2^n}$$

(оно найдется ввиду сходимости при $|c| < 1$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c^k/k$), и положим

$$p_m(z) = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\varphi_{a_m}(z))^k}{k};$$

тогда имеем

$$\begin{aligned} \sup_{z \in K_{j-1}} |\ln(1 - \varphi_{a_m}(z)) - p_m(z)| &= \\ &= \sup_{z \in K_{j-1}} \left| \frac{(\varphi_{a_m}(z))^n}{n} + \frac{(\varphi_{a_m}(z))^{n+1}}{n+1} + \dots \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{c^k}{k} \leq \frac{1}{2^n}; \end{aligned}$$

следовательно, ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} (\ln(1 - \varphi_{a_m}(z)) - p_m(z))$$

равномерно сходится на компактах в U (поскольку каждый компакт содержится в каком-то K_j). Беря экспоненты от его частичных сумм,

получаем, что бесконечное произведение $\prod_{m=1}^{\infty} (1 - \varphi_{a_m}(z))e^{-p_m(z)}$ также равномерно сходится на компактах в U ; умножая это произведение на $\prod_{a \in S \cap K_1} (z - a)^{n_a}$, получаем искомую функцию. \square

Сформулируем два простых следствия из теоремы Вейерштрасса.

Следствие 11.36. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $S \subset \mathbb{C}$ — подмножество без предельных точек в U , и пусть для каждого $a \in S$ задано целое число n_a . Тогда существует мероморфная на U функция f , для которой $\text{ord}_a(f) = n_a$ для всякого $a \in S$ и $\text{ord}_a(f) = 0$ для всякого $a \notin S$.

Для доказательства надо построить по теореме Вейерштрасса голоморфную функцию с нулями порядка n_a для всех $n_a > 0$ и голоморфную функцию с нулями порядка $-n_a$ для всех $n_a < 0$, а затем поделить одну на другую.

Следствие 11.37. Всякая мероморфная функция на открытом подмножестве в \mathbb{C} является отношением двух функций, голоморфных на этом множестве.

Для доказательства достаточно построить голоморфную функцию f , нули которой скомпенсируют полюсы данной мероморфной функции g , и заметить, что произведение fg голоморфно.

11.5. Произведения Бляшке

Теорема Вейерштрасса показывает, что нули (с кратностями) для голоморфной функции можно задавать произвольно. Если, однако, наложить на функцию дополнительные ограничения, то ситуация становится более интересной. Я приведу пример того, какие результаты при этом могут получаться.

Предложение 11.38. Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

(1) существует (не являющаяся тождественным нулем) ограниченная голоморфная функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ с множеством нулей $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;

(2) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)$, в котором каждое слагаемое повторяется столько раз, какова кратность соответствующего нуля.

Доказательство импликации (1) \Rightarrow (2). Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — ограниченная голоморфная функция с последовательностью нулей $\{a_n\}$, где каждый нуль повторяется столько раз, какова его кратность. Если f имеет в нуле нуль порядка $k > 0$, то, заменяя функцию $f(z)$ на $f(z)/z^k$, мы по-прежнему получим ограниченную голоморфную функцию, но без нуля в нуле, причем ряды вида $\sum (1 - |a_j|)$ для этих двух функций сходятся или расходятся одновременно. Начиная с этого места будем считать, что $f(0) \neq 0$.

Так как у вещественных рядов с положительными членами сходимость от перестановки членов не зависит, можно считать, что нули a_j упорядочены в порядке (нестрогого) возрастания их модулей. Далее, так как $\lim_{x \rightarrow 0} |\ln(1 - x)|/|x| = 1$, сходимость ряда $\sum (1 - |a_n|)$

равносильна сходимости ряда с отрицательными членами $\sum \ln |a_n|$, а сходимость этого последнего равносильна тому, что последовательность экспонент от его частичных сумм сходится к конечному и ненулевому пределу — иными словами, тому, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится к конечному ненулевому пределу. Так

как последовательность частичных произведений $|a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|$ монотонно убывает, для этого достаточно показать, что она ограничена снизу положительной константой.

Пусть $\sup_{z \in U} |f(z)| = C < +\infty$. Мы покажем, что

$$\prod_{j=1}^n |a_j| \geq \frac{|f(0)|}{C} \quad \text{для всех } n. \quad (11.23)$$

В самом деле, для всякого натурального n рассмотрим функцию

$$g(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$$

(такие функции называются *конечными произведениями Бляшке*). Ввиду предложения 3.5 функция g голоморфна на круге D , продолжается до непрерывной функции на его замыкании \bar{D} и $|g(z)| = 1$ при $|z| = 1$. Я утверждаю, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \inf_{\theta \in [0; 2\pi]} |g(re^{i\theta})| = 1. \quad (11.24)$$

В самом деле, непрерывная функция $z \mapsto |g(z)|$ равномерно непрерывна на компактном множестве \bar{D} . Принимая во внимание, что $|g(e^{i\theta})| = 1$ для всякого $\theta \in [0; 2\pi]$, получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $r \in [1 - \delta; 1]$, то

$$1 - \varepsilon \leq |g(re^{i\theta})| \leq 1 + \varepsilon \quad \text{при } \theta \in [0; 2\pi]$$

(ввиду принципа максимума модуля тут можно заменить $1 + \varepsilon$ на 1, но это несущественно). Беря нижнюю грань по $\theta \in [0; 2\pi]$, получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $r \in [1 - \delta; 1]$, то $\inf_{\theta \in [0; 2\pi]} |g(re^{i\theta})| - 1 \leq \varepsilon$. Это и есть соотношение (11.24).

Положим теперь $h(z) = f(z)/g(z)$. По построению это голоморфная функция на D . Пусть $\max(|a_1|, \dots, |a_n|) < r < 1$. Из принципа максимума модуля (предложение 9.12) и того, что $|f(z)| \leq C$ при всех z , вытекает, что

$$\frac{|f(0)|}{|a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|} = |h(0)| \leq \sup_{|z|=r} |h(z)| \leq \frac{C}{\inf_{|z|=r} |g(z)|};$$

переходя к пределу при $r \rightarrow 1$, получаем ввиду (11.24), что

$$\frac{|f(0)|}{|a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|} \leq C,$$

что равносильно неравенству (11.23). \square

Для доказательства обратного утверждения — что из сходимости ряда $\sum (1 - |a_j|)$ вытекает существование ограниченной голоморфной функции с нулями a_j — потребуется более серьезное использование бесконечных произведений.

Доказательство импликации (2) \Rightarrow (1) в предложении 11.38. Нам надо доказать, что если $\{a_n\}$ — последовательность точек в единичном круге $U = \{z: |z| < 1\}$, для которой $\sum_n (1 - |a_n|) < +\infty$, то существует голоморфная на U и ограниченная функция f , множество нулей которой совпадает с множеством чисел a_n , причем кратность каждого нуля равна количеству его вхождений в последовательность $\{a_n\}$.

Для начала отметим, что каждое число встречается в последовательности $\{a_n\}$ не более чем конечное число раз — иначе ряд $\sum (1 - |a_n|)$ будет расходящимся. (По той же причине у последовательности $\{a_n\}$ нет предельных точек в U .) В частности, в этой последовательности лишь конечное число нулей, и, не ограничивая общности, можно считать, что нулей в ней вообще нет: в самом деле, если мы уже построили ограниченную голоморфную функцию с нулями в заданных точках, кроме точки 0, то всегда можно умножить ее на z^k и получить ограниченную же голоморфную функцию, имеющую дополнительно в нуле нуль порядка k .

Рассмотрим теперь бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} e^{-i \arg a_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n}; \quad (11.25)$$

такие произведения называются *произведениями Бляшке*. Его n -й сомножитель — автоморфизм единичного круга, переводящий a_n в 0, а 0 — в $|a_n|$, так что этот сомножитель ограничен по модулю единицей и имеет на U единственный (причем простой) нуль в точке a_n , а все частичные произведения в (11.25) ограничены по модулю единицей. Поэтому если мы покажем, что произведение (11.25) равномерно сходится на компактах в U , то функция, к которой оно сходится, будет искомой ограниченной голоморфной функцией с нулями в точках a_n . Чтобы установить эту сходимоть, заметим, что достаточно установить равномерную сходимоть на круге $D_r = \{z: |z| \leq r\}$ для всякого $r \in (0; 1)$. Легко видеть, что

$$1 - \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n} = (1 - |a_n|) \cdot \frac{a_n + |a_n|z}{a_n - |a_n|^2 z} = (1 - |a_n|) \frac{1 + (|a_n|/a_n)z}{1 - \bar{a}_n |a_n|z}.$$

Если $|z| \leq r$, то модуль числителя дроби в правой части не больше $1 + r$, а модуль знаменателя дроби в правой части не меньше $1 - r$, так что при $z \in D_r$ имеем

$$\left| 1 - \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n} \right| \leq \frac{1+r}{1-r} (1 - |a_n|).$$

Так как ряд $\sum (1 - |a_n|)$ сходится по условию, бесконечное произведение (11.25) равномерно сходится на каждом D_r , $0 < r < 1$, ввиду предложения 11.26. Это завершает доказательство. \square

Упражнения

11.1. Для функции $f(z) = 1/\sin z$ получите представление в виде суммы рациональных функций с полюсами в точках πn , $n \in \mathbb{Z}$.

11.2. Покажите, что знаки чисел Бернулли с четными номерами чередуются.

11.3. Найдите общую формулу для коэффициентов разложения функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ в степенной ряд в нуле (в формуле будут участвовать числа Бернулли).

11.4. Существует ли эллиптическая функция, имеющая в фундаментальном параллелограмме ровно один полюс, и притом простой? (Указание. Посмотрите на вычет.)

11.5. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — решетка с базисом $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ и \wp — ее функция Вейерштрасса. Покажите, что значения функции \wp в точках $\omega_1/2$, $(\omega_1 + \omega_2)/2$ и $\omega_2/2$ различны. (Указание. Воспользуйтесь предложением 11.13.)

11.6. Докажите, что функция Вейерштрасса отображает «четвертинку» фундаментального параллелограмма решетки (обозначена серым цветом на рис. 11.2) конформно на свой образ. (Указание. Выведите из четности функции \wp , что ее значения в точках, симметричных относительно центра фундаментального параллелограмма, совпадают.)

11.7. Выразите ряд Эйзенштейна G_4 через G_2 и G_3 .

11.8. Докажите, что каждый ряд Эйзенштейна G_k , где $k > 3$, выражается в виде (не зависящего от решетки) многочлена от G_2 и G_3 .

11.9. Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$ и f — функция, голоморфная на \bar{D} и непрерывная в его внутренности. Покажите, что если $|f(z)| = 1$ всюду на границе D , то либо f — константа, либо

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z},$$

где $\theta \in \mathbb{R}$ и $|a_j| < 1$ для всех j (такие функции тоже называют конечными произведениями Бляшке).

11.10. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность точек в верхней полуплоскости. Найдите необходимое и достаточное условие того, что

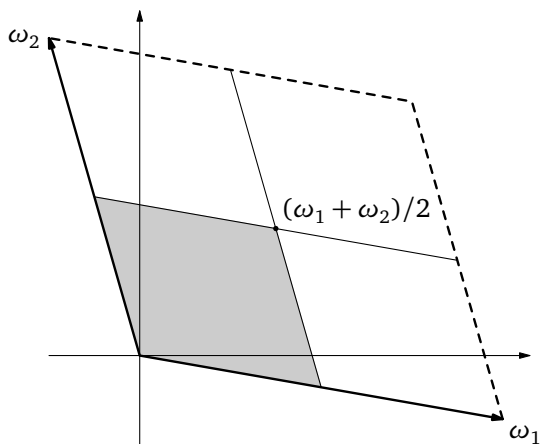


Рис. 11.2.

$\{a_n\}$ совпадает с набором нулей ограниченной голоморфной функции на верхней полуплоскости (если какое-то число встречается в последовательности k раз, соответствующий нуль должен иметь кратность k).

Глава 12

Конформные отображения. Часть 2

12.1. Теорема Римана об отображении: формулировка и план доказательства

Два первых раздела этой главы будут посвящены доказательству следующего важного факта.

Теорема 12.1 (теорема Римана об отображении). *Если $U \subset \mathbb{C}$ — односвязное открытое множество, отличное от всего \mathbb{C} , то U изоморфно единичному кругу $D = \{z: |z| < 1\}$.*

К этой формулировке необходимы некоторые комментарии. Во-первых, \mathbb{C} и U конформно неизоморфны: в силу теоремы Лиувилля всякое голоморфное отображение из \mathbb{C} в U , будучи ограниченной целой функцией, постоянно.

Для начала, давайте обсудим, что происходит с неодносвязными открытыми множествами. Будем говорить, что открытые множества $U_1 \subset \mathbb{C}$ и $U_2 \subset \mathbb{C}$ *гомеоморфны*, если между ними существует биективное непрерывное отображение, обратное к которому тоже непрерывно (это частный случай понятия гомеоморфизма топологических пространств), так что если два открытых множества не гомеоморфны, то они и подавно конформно неизоморфны. Поэтому вопрос о конформной изоморфности имеет смысл ставить только для гомеоморфных областей. Как показывает теорема Римана, в односвязном случае наличие гомеоморфных, но неизоморфных множеств — единичное исключение; в неодносвязном случае, однако, все обстоит совершенно иначе. Примеры гомеоморфных, но неизоморфных неодносвязных открытых множеств уже встречались в задачах к предыдущим главам (см. задачи 9.7, 9.10, 9.11, 10.13), и вообще в неодносвязном случае наличие гомеоморфных, но неизоморфных открытых множеств — скорее правило, чем исключение.

Займемся теперь доказательством теоремы Римана. Первые его шаги совсем простые.

Предложение 12.2. *Всякое односвязное открытое подмножество $U \subset \mathbb{C}$, отличное от всего \mathbb{C} , изоморфно ограниченному открытому множеству.*

Доказательство. Так как $U \neq \mathbb{C}$, существует точка $a \in \mathbb{C} \setminus U$. Так как U односвязно, ввиду предложения 6.17 на нем существует голоморфная функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, являющаяся однозначной ветвью функции $\sqrt{z-a}$. Функция f задает конформное отображение множества U на его образ $V = f(U)$: в самом деле, так как $f(z)^2 + a = z$ для всякого $z \in U$, из $f(z_1) = f(z_2)$ вытекает, что $z_1 = z_2$. Далее, если положить $-W = \{-w: w \in W\}$, то $W \cap -W = \emptyset$. В самом деле, рассуждая от противного, если $w \in W \cap (-W)$, то $w \neq 0$ (так как $W \not\equiv 0$) и имеем $w = f(z_1)$, $-w = f(z_2)$, где $z_1, z_2 \in U$, $z_1 \neq z_2$; с другой стороны, однако, $z_1 = w^2 + a = (-w)^2 + a = z_2$ — противоречие.

Открытое множество $-W$, не пересекающееся с W , содержит замкнутый круг вида $\Delta = \{z: |z-b| \leq \varepsilon\}$. Так как $\Delta \cap W = \emptyset$, отображение $w \mapsto 1/(w-b)$ задает конформное отображение W на область, содержащуюся в круге с центром в нуле и радиусом $1/\varepsilon$; стало быть, W изоморфно ограниченному множеству, и, с другой стороны, W изоморфно U . \square

Всякое ограниченное открытое множество можно отображением вида $z \mapsto az + b$ перевести в подмножество единичного круга $D = \{z: |z| < 1\}$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $U \subset D$, что мы и будем делать.

Зафиксируем до конца доказательства какую-нибудь точку $a \in U$.

Обозначение 12.3. Через \mathcal{S} обозначим множество голоморфных инъективных отображений $f: U \rightarrow D$, для которых $|f'(a)| \geq 1$.

Ключевая лемма 12.4. *Существует отображение $f \in \mathcal{S}$, для которого число $|f'(a)|$ наибольшее.*

Заметим, что множество \mathcal{S} непусто: поскольку $U \subset D$, в него заведомо входит отображение $z \mapsto z$.

Доказательству ключевой леммы будет посвящен весь следующий раздел. Пока что мы расскажем, как из нее выводится теорема Римана.

Предложение 12.5. *Если для отображения $f \in \mathcal{S}$ число $|f'(a)|$ максимально, то f задает конформный изоморфизм U на D .*

Доказательство. Будем называть оптимальным отображение $f \in \mathcal{S}$ (т. е. голоморфное инъективное отображение из U в D), для которого $|f'(a)|$ максимально. По самому определению у оптимального отображения заведомо $|f'(a)| \geq 1$. Нам достаточно показать, что для оптимального отображения f имеем $f(U) = D$.

Чтобы это установить, отметим сначала, что если f оптимально, то $f(a) = 0$. Именно, рассуждая от противного, если $f(a) = b \neq 0$, то отображение f можно «улучшить» следующим образом. Пусть $\varphi: U \rightarrow U$ — автоморфизм, заданный формулой $\varphi(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$. Я утверждаю, что тогда $|(\varphi \circ f)'(a)| > |f'(a)|$. В самом деле, по формуле производной сложной функции имеем

$$|(\varphi \circ f)'(a)| = |f'(a)| \cdot |\varphi'(f(a))| = |f'(a)| \cdot |\varphi'(b)|,$$

и при этом

$$\varphi'(z) = \frac{1 - \bar{b}z + \bar{b}(z-b)}{(1 - \bar{b}z)^2} = \frac{1 - |b|^2}{(1 - \bar{b}z)^2}, \quad |\varphi'(b)| = \frac{1}{1 - |b|^2} > 1.$$

Стало быть, $|(\varphi \circ f)'(a)| > |f'(a)|$, что невозможно ввиду оптимальности f — противоречие.

Итак, $f(a) = 0$. Чтобы установить, что $f(U) = D$, предположим, рассуждая от противного, что нашлось число $b \in D \setminus f(U)$; так как $f(a) = 0$, $b \neq 0$. Мы покажем, что и в этом случае f можно «улучшить». На сей раз это будет сделано в три этапа. Во-первых, рассмотрим все тот же автоморфизм $\varphi: U \rightarrow U$, заданный формулой $\varphi(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$, и положим $\varphi_1 = \varphi \circ f$; так как отображение f не принимало значения b , отображение $\varphi \circ f$ не принимает значения $\varphi(b) = 0$. Далее, положим $V = (\varphi \circ f)(U)$; отображение $\varphi \circ f$ задает конформный изоморфизм U на V , и поскольку U односвязно, множество V также односвязно. Так как к тому же V не содержит нуля, на V определена ветвь функции \sqrt{z} — обозначим эту ветвь через g . Как и выше в доказательстве предложения 12.2, мы видим, что $g: V \rightarrow g(V)$ — конформное отображение V на его образ, содержащийся в U , а $g \circ \varphi \circ f$ — конформное отображение U на его образ, содержащийся в U .

Заметим, что $\varphi(0) = -b$, так что $(g \circ \varphi)(0) = g(-b) = \sqrt{-b}$ (мы не уточняем, какое это из двух возможных значений квадратного корня, так как для дальнейшего это несущественно). Скомпонуем теперь $g \circ \varphi$ с еще одним автоморфизмом круга φ_1 , переводящим $\sqrt{-b}$ в нуль:

$$\varphi_1(z) = \frac{z - \sqrt{-b}}{1 - \overline{\sqrt{-b}} \cdot z}.$$

Именно, положим $f_1 = \varphi_1 \circ g \circ \varphi \circ f$. Это тоже инъективное голоморфное отображение из U в D , и я утверждаю, что $|f_1'(a)| > |f'(a)|$.

В самом деле, по формуле производной сложной функции имеем

$$\begin{aligned} |f'_1(a)| &= |f'(a)| \cdot |\varphi'(f(a))| \cdot |g'(\varphi(f(a)))| \cdot |\varphi'_1(g(\varphi(f(a))))| = \\ &= |f'(a)| \cdot |\varphi'(0)| \cdot |g'(-b)| \cdot |\varphi'_1(\sqrt{-b})|. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Прямым вычислением, аналогичным проведенному выше, устанавливается, что $|\varphi'(0)| = 1 - |b|^2$ и

$$|\varphi_1(\sqrt{-b})| = \frac{1}{1 - |\sqrt{-b}|^2} = \frac{1}{1 - (\sqrt{|b|})^2} = \frac{1}{1 - |b|}.$$

Наконец, из формулы для производной обратной функции ясно, что для любой ветви функции \sqrt{z} имеем $(\sqrt{z})' = 1/(2\sqrt{z})$, откуда $|g'(-b)| = |1/(2\sqrt{-b})| = 1/(2\sqrt{|b|})$. Отсюда и из (12.1) имеем

$$\frac{|f'_1(a)|}{|f'(a)|} = \frac{1 - |b|^2}{2\sqrt{|b|}(1 - |b|)} = \frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} > 1$$

ввиду неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Значит, $|f'_1(a)| > |f_1(a)|$ в противоречие с оптимальностью функции f . Это противоречие доказывает, что $f(U) = D$, так что f задает конформный изоморфизм между U и D . \square

Если позволить себе немного демагогии, то можно сказать, что вышеприведенное доказательство существования конформного отображения U на D конструктивно. В самом деле, оно задает следующий «алгоритм»: начать с вложения U в D ; если оно не является изоморфизмом, улучшить отображение, сначала переслав $f(a)$ в нуль, а затем применив два дробно-линейных отображения и квадратный корень; если образ улучшенного отображения не совпадает со всем D , улучшить его снова и т. д.

Итак, нам осталось только доказать ключевую лемму 12.4.

12.2. Теорема Римана об отображении: обоснования

Чтобы доказать ключевую лемму, нам придется развить целую теорию.

Обозначение 12.6. Пусть U — открытое подмножество в \mathbb{C} (произвольное). Через $H(U)$ будем обозначать множество всех голоморфных функций на U .

Определение 12.7. Подмножество $\mathcal{F} \subset H(U)$ будем называть *замкнутым*, если для всякой последовательности функций $f_n \in \mathcal{F}$, равномерно сходящейся на компактах в U к некоторой функции f , имеем $f \in \mathcal{F}$.

Подмножество $\mathcal{F} \subset H(U)$ будем называть *компактным*, если у всякой последовательности функций $f_n \in \mathcal{F}$ существует подпоследовательность, равномерно сходящаяся на компактах в U к функции $f \in \mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F} \subset H(U)$ и $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ — отображение, то Φ называется *непрерывным*, если для всякой последовательности функций $f_n \in \mathcal{F}$, равномерно сходящейся на компактах в U к функции $f \in \mathcal{F}$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f_n) = \Phi(f).$$

Например, если $a \in U$, то отображения $f \mapsto f(a)$ и $f \mapsto f'(a)$ непрерывны на $H(U)$: первое очевидно, а второе следует из предложения 5.16.

Замечание 12.8 (для знакомых с топологией). Легко видеть, что множество $H(U)$ вместе с определенным выше набором замкнутых множеств является топологическим пространством. Можно проверить, что эту топологию на $H(U)$ можно задать некоторой метрикой и что стандартные определения непрерывности и компактности равносильны данным нами. Мы ничем из этого пользоваться не будем, а все необходимые рассуждения проведем непосредственно.

В доказательствах двух следующих предложений воспроизводятся стандартные рассуждения, большинству читателей, вероятно, знакомые.

Предложение 12.9. Если подмножество $\mathcal{F} \subset H(U)$ компактно, а его подмножество $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ замкнуто, то и подмножество $\mathcal{F}_1 \subset H(U)$ компактно.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций из $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$. Так как \mathcal{F} компактно, у нее есть сходящаяся (равномерно на компактах в U) подпоследовательность, а так как $\mathcal{F}_1 \subset H(U)$ замкнуто, предел этой подпоследовательности лежит в \mathcal{F}_1 . \square

Предложение 12.10. Пусть $\mathcal{F} \subset H(U)$ — компактное подмножество и $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение. Тогда отображение Φ достигает на \mathcal{F} наибольшего значения для некоторой функции $f \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Сначала покажем, что функция Φ ограничена. В самом деле, если это не так, то существует подпоследовательность $\{f_{n_k} = g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, для которой $\Phi(g_k) \geq k$. Так как \mathcal{F} компактно, у последовательности $\{g_k\}$ существует подпоследовательность $\{g_{k_r}\}$, сходящаяся к некоторой функции $g \in \mathcal{F}$; ввиду непрерывности Φ имеем $\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(g_{k_r}) = \Phi(g)$, а это невозможно, так как $\Phi(g)$ — вещественное число, но $\lim \Phi(g_{k_r}) = +\infty$.

Коль скоро функция Φ ограничена на \mathcal{F} , положим $M = \sup_{f \in \mathcal{F}} \Phi(f) < +\infty$. Существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}$, для которой $\lim \Phi(f_n) = M$. Выделяя из нее сходящуюся подпоследовательность $f_{n_k} = g_k$, где $\lim g_k = g \in \mathcal{F}$, получаем ввиду непрерывности, что $\Phi(g) = \lim \Phi(g_k) = M$, так что максимум для Φ достигается на функции $g \in \mathcal{F}$. \square

Вот необходимый нам результат о компактности подмножеств в $H(U)$.

Теорема 12.11 (теорема Монтеля). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $M > 0$. Тогда множество $\{f \in H(U) : \sup_{z \in U} |f(z)| \leq M\}$ компактно в $H(U)$.

В любом доказательстве теоремы Монтеля приходится выбирать равномерно сходящиеся подпоследовательности из данной последовательности функций. Возможность такого выбора основывается на следующем общеприменимом результате.

Теорема 12.12 (теорема Арцелá—Асколи). Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, и пусть \mathcal{S} — семейство комплекснозначных непрерывных функций на K , удовлетворяющее следующим условиям:

(1) существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для всех $f \in \mathcal{S}$ и $x \in K$;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|z_1 - z_2| \leq \delta$, где $z_1, z_2 \in K$, следует неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \varepsilon$ для всех $f \in \mathcal{S}$.

Тогда любая последовательность функций из \mathcal{S} содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на K .

Условие (1) называется равномерной ограниченностью семейства функций, а условие (2) — равностепенной непрерывностью.

Теорема Арцелá—Асколи остается верной при замене K на произвольное компактное метрическое пространство.

Доказательство этой теоремы я опущу; оно приводится в достаточно подробных учебниках анализа — см., например, [2, гл. XVI, § 4]). Вы можете доказать теорему Арцелá—Асколи и самостоятельно. Возможный план: сначала вывести из компактности, что существует счетное подмножество $S \subset K$, для которого $\bar{S} = K$, затем вывести из равномерной ограниченности, что в любой последовательности функций $\{f_n\}$ из \mathcal{S} есть подпоследовательность $\{g_k\}$, сходящаяся в каждой точке множества S , и наконец, из равностепенной непрерывности (и компактности) получить, что если последовательность функций из \mathcal{S} сходится в каждой точке S , то она равномерно сходится на всем K .

Основную часть доказательства теоремы Монтеля мы оформим в виде следующей леммы.

Лемма 12.13. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и пусть $\Delta = \{z: |z - a| \leq r\}$ — замкнутый круг, содержащийся в U . Если $\{f_n\}$ — равномерно ограниченная последовательность функций, голоморфных на U (это означает, что существует такое $M > 0$, что $|f_n(z)| \leq M$ для любого $z \in U$ и любого n), то у последовательности $\{f_n\}$ есть подпоследовательность, равномерно сходящаяся на Δ .

Доказательство. Очевидно, существует такое число $r' > r$, что круг $\{z: |z - a| \leq r'\}$ также содержится в U . Если f — голоморфная функция на U и $\sup_{z \in U} |f(z)| \leq M$, то, ввиду формулы (5.17), для всякого $z \in \Delta$ имеем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \quad (12.2)$$

Поскольку при $|\zeta - a| = r'$ и $|z - a| \leq r$ имеем $|\zeta - z| \geq r' - r$ и $|f(z)| \leq M$, из (12.2) и предложения 4.15 вытекает, что

$$|f'(z)| \leq C = \frac{Mr'}{(r' - r)^2} \quad \text{при } z \in \Delta.$$

Следовательно, при $z_1, z_2 \in \Delta$ имеем

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f'(\zeta) d\zeta \right| \leq C|z_1 - z_2|, \quad (12.3)$$

где через $[z_1, z_2]$ обозначен отрезок, соединяющий z_1 и z_2 .

Если теперь обозначить через \mathcal{F} семейство функций на Δ , являющихся ограничениями голоморфных функций $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, для которых $\sup_{z \in U} |f(z)| \leq M$, то это семейство удовлетворяет условиям теоремы Арцела—Асколи: по построению все функции этого семейства равномерно ограничены по модулю числом M , а равномерная непрерывность вытекает из того, что если $z_1, z_2 \in \Delta$ и $|z_1 - z_2| \leq \varepsilon/C$, то ввиду неравенства (12.3) имеем $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \varepsilon$ для всякой $f \in \mathcal{F}$. Теперь утверждение о существовании подпоследовательности, равномерно сходящейся на Δ , очевидно. \square

Теперь можно доказать и саму теорему Монтеля. Всю содержательную работу мы уже провели, остаются несложные манипуляции.

Доказательство теоремы 12.11. Пусть $\{f_n\}$ — произвольная последовательность голоморфных функций на U , ограниченных по модулю числом M . Для доказательства теоремы Монтеля нам на-

до установить, что у $\{f_n\}$ есть подпоследовательность, равномерно сходящаяся на компактах в U .

Докажем сначала более слабое утверждение: если $K \subset U$ — произвольный компакт, то в последовательности $\{f_n\}$ найдется подпоследовательность, равномерно сходящаяся на K . В самом деле, компакт K содержится в объединении конечного числа замкнутых дисков $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, лежащих в U . В силу леммы 12.13 из последовательности $\{f_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на Δ_1 , из нее — подпоследовательность, равномерно сходящуюся на Δ_2 , и т. д. На заключительном n -м шаге мы получим подпоследовательность исходной последовательности, равномерно сходящуюся на каждом диске Δ_j , $1 \leq j \leq n$. Следовательно, эта подпоследовательность будет равномерно сходиться на их объединении $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$. Так как $K \subset \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$, она и подавно будет сходиться на K .

Пусть теперь $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, где все K_j компактны и $K_j \subset \text{Int}(K_{j+1})$ для всех j . Так как при этом всякий компакт $K \subset U$ содержится в каком-то из K_j (см. лемму 11.33), последовательность функций равномерно сходится на компактах в U тогда и только тогда, когда она равномерно сходится на каждом K_j .

Ввиду доказанного выше из нашей последовательности $\{f_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся на K_1 подпоследовательность f_{11}, f_{12}, \dots ; из последовательности $\{f_{12}, f_{13}, \dots\}$ (обратите внимание, что f_{11} в нее не входит!) можно выбрать равномерно сходящуюся на K_2 подпоследовательность f_{21}, f_{22}, \dots ; из последовательности $\{f_{23}, f_{24}, \dots\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на K_3 , и т. д.: каждая последовательность $\{f_{(m+1),j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится на K_{m+1} и является подпоследовательностью в $\{f_{mj}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Тогда диагональная последовательность f_{11}, f_{22}, \dots равномерно сходится на каждом K_m , поскольку начиная с f_{mm} она является подпоследовательностью в равномерно сходящейся на K_m последовательности $\{f_{mj}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Это завершает доказательство теоремы Монтеля. \square

Вернемся теперь к ключевой лемме. Пусть D — единичный круг, $U \subset D$ — ограниченная односвязная область, $a \in U$, \mathcal{S} — множество инъективных голоморфных отображений $f: U \rightarrow D$ и \mathcal{F} — множество голоморфных функций f на U , для которых $\sup_{z \in U} |f(z)| \leq 1$. По

теореме Монтеля множество \mathcal{F} компактно; поэтому если мы покажем, что \mathcal{S} замкнуто в \mathcal{F} , то получим, что \mathcal{S} также компактно

(по предложению 12.9), и тогда ключевая лемма будет следовать из предложения 12.10.

Предложение 12.14. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество и $\{f_n\}$ — последовательность инъективных голоморфных функций на U . Если эта последовательность сходится равномерно на компактах в U к функции f , не являющейся постоянной, то функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ также инъективна.

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что $f(a) = f(b)$, где $a, b \in U$, $a \neq b$. Так как U связно, точки a и b можно соединить ломаной, лежащей в U (чтобы это доказать, можно сначала соединить a и b произвольной непрерывной кривой, а затем заменить ее на ломаную, как в доказательстве леммы 6.4 об улучшении гомотопии); более того, эту ломаную можно сделать несамопересекающейся. Теперь для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ объединение кругов радиуса ε с центрами во всевозможных точках ломаной — область с кусочно гладкой границей (эта граница состоит из отрезков прямых и дуг окружностей). Обозначим полученную область через V_ε , а ее границу через γ_ε (см. рис. 12.1).

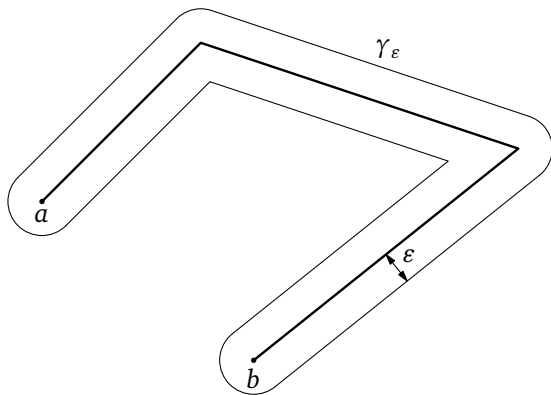


Рис. 12.1.

Положим $f(a) = f(b) = v$. Поскольку функция f голоморфна и не является постоянной на U , а множество U связно, множество $f^{-1}(v)$ не имеет предельных точек в U . Поэтому при всех достаточно малых ε на кривой γ_ε нет точек, в которых f принимает значение v . Так как $f_n \rightarrow f$ равномерно на γ_ε , для всех достаточно больших n имеем $f_n(z) \neq v$ для всех $z \in \gamma_\varepsilon$. Поскольку также $f'_n \rightarrow f'$ равномерно

но на γ_ε , имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z) - v} = \frac{f'(z)}{f(z) - v} \quad \text{равномерно на } \gamma_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f'_n(z) dz}{f_n(z) - v} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f'(z) dz}{f(z) - v}. \quad (12.4)$$

Поскольку $f(a) = f(b) = v$, функция $f - v$ имеет в области V_ε не менее двух нулей, так что по следствию 8.9 правая часть в (12.4) — целое число, не меньшее 2. С другой стороны, так как все функции f_n инъективны, функции $f_n - v$ даже во всем U могут иметь не более одного нуля, причем кратности 1, так что все члены последовательности в левой части (12.4) равны 0 или 1. Получаем противоречие. \square

Завершение доказательства ключевой леммы. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций из \mathcal{S} , равномерно сходящаяся на компактах в U к функции f . Так как $|f'_n(a)| \geq 1$ для всех n , имеем $|f'(a)| \geq 1$, так что f непостоянна, а стало быть, по предложению 12.14, функция f также инъективна. Очевидно, что $|f(z)| \leq 1$ для всех $z \in U$; так как f не является постоянной, $|f(z)|$ никогда не может равняться единице ввиду принципа сохранения области. Тем самым $f(U) \subset D$ и $f \in \mathcal{S}$, так что множество \mathcal{S} замкнуто в \mathcal{F} , что и оставалось установить. \square

Мы показали, что функция, конформно отображающая U на D , максимизирует значение $|f'(a)|$ при некоторых дополнительных условиях (инъективность). На самом деле можно показать (см. задачу 12.3), что (если $U \neq \mathbb{C}$ — односвязная область и $a \in U$) отображение $f: U \rightarrow D$, максимизирующее $|f'(a)|$ без дополнительных условий, также является конформным изоморфизмом.

12.3. Формула Кристоффеля—Шварца

В главе 10 мы видели, что с помощью интегралов наподобие (10.1) можно задавать конформное отображение полуплоскости на некоторые прямоугольники. Сейчас мы покажем, что конформное отображение верхней полуплоскости вообще на любой многоугольник также задается интегралом такого типа.

Всюду в этом разделе через $H = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ будет обозначаться верхняя полуплоскость.

Теорема 12.15 (теорема Кристоффеля—Шварца). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — область, являющаяся внутренностью многоугольника $A_1 A_2 \dots A_n$ (многоугольник предполагается ограниченным и несамопересекающимся, но не предполагается выпуклым). Обозначим угол при вершине A_j этого многоугольника через $\pi\alpha_j$, $0 < \alpha_j < 2$.

Пусть $f: H \rightarrow U$ — конформный изоморфизм. Если при соответствии границ вершинам A_1, \dots, A_n отвечают точки a_1, \dots, a_n , лежащие на действительной оси (а не точка ∞), то существуют такие константы C_1 и C_2 , что отображение f имеет вид

$$f(z) = C_1 \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot \dots \cdot (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_2. \quad (12.5)$$

Если же при соответствии границ вершинам A_1, \dots, A_{n-1} отвечают точки a_1, \dots, a_{n-1} на действительной оси, а вершине A_n соответствует точка ∞ , то существуют такие константы C_1 и C_2 , что отображение f имеет вид

$$f(z) = C_1 \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot \dots \cdot (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + C_2. \quad (12.6)$$

К формулировке этой теоремы необходим комментарий. Во-первых, конформное отображение $f: H \rightarrow U$ всегда существует по теореме Римана 12.1. Далее, в формулах (12.5) и (12.6) интегралы берутся по произвольному пути, лежащему в верхней полуплоскости, от z_0 до z , где z_0 — произвольная точка на верхней полуплоскости (или даже на действительной оси — см. раздел 10.3); при изменении z_0 к интегралу прибавляется константа, которая в любом случае поглощается неопределенной постоянной C_2 , так что на вид формул смена начальной точки z_0 не повлияет. Наконец, $(z - a_j)^{\alpha_j - 1}$ понимается как $e^{(\alpha_j - 1) \ln(z - a_j)}$, где $\ln(z - a_j)$ — какая-нибудь из однозначных ветвей логарифма в верхней полуплоскости. При выборе другой ветви подынтегральное выражение и сам интеграл умножатся на $e^{2\pi i k(\alpha_j - 1)}$, и этот множитель поглотится неопределенной постоянной C_1 , так что на вид формул смена ветвей логарифма опять же не повлияет.

Вся оставшаяся часть этого раздела будет посвящена доказательству теоремы 12.15. Мы начнем со случая, когда вершина A_n соответствует точке ∞ — общий случай будет только проще.

Условимся в первую очередь об обозначениях. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$. Положим

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и $a_n = \infty$. Продолжение f до непрерывной биекции из $H \cup \bar{\mathbb{R}}$ в \bar{U} будем обозначать через $\tilde{f}: H \cup \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{U}$. Наконец, нижнюю полуплоскость будем обозначать через $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Заметим теперь, что к отображению $f: H \rightarrow U$ можно применить принцип симметрии (предложение 10.5) следующим образом. Если выбрать произвольный интервал $(a_j, a_{j+1}) \subset \bar{\mathbb{R}}$ (случай $j = n$ не исключается: в этом случае полагаем $a_{j+1} = a_1, A_{j+1} = A_1$), то отображение $F: H \cup (a_j, a_{j+1}) \cup L \rightarrow \mathbb{C}$, заданное формулой

$$F(z) = \begin{cases} \tilde{f}(z), & z \in H \cup (a_j, a_{j+1}), \\ S_{A_j A_{j+1}}(f(\bar{z})), & z \in L \end{cases}$$

(через $S_{A_j A_{j+1}}$ обозначена симметрия относительно прямой $A_j A_{j+1}$), является голоморфным, причем функция F неразветвлена всюду на $H \cup (a_j, a_{j+1}) \cup L$. Тем самым, голоморфная функция f допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути, у которого пересечение с действительной осью содержится в каком-то из интервалов (a_j, a_{j+1}) .

Поскольку ограничение функции F на нижнюю полуплоскость L задает, очевидно, конформный изоморфизм между L и многоугольником, симметричным исходному относительно действительной оси, получаем, что ограничение F на L также допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути, у которого пересечение с действительной осью содержится в каком-то из интервалов (a_j, a_{j+1}) . Компонуя эти аналитические продолжения, получаем, что функция f допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути в \mathbb{C} , не проходящего через точки a_1, \dots, a_{n-1} , причем любой росток, получающийся в результате такого отображения, является ростком функции с ненулевой производной (см. следствие 10.6).

Как может измениться росток функции f в точке верхней полуплоскости после аналитического продолжения вдоль замкнутого пути? Легко видеть, что всякий замкнутый путь в $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ гомотопен кусочно линейному (см. задачу 6.6), причем этот кусочно линейный путь можно, очевидно, выбрать так, чтоб ни одно звено замкнутой ломаной не лежало на действительной оси. Тогда этот замкнутый путь будет пересекать действительную ось четное число раз. Каждые два последовательные пересечения действительной оси (скажем, на интервалах (a_k, a_{k+1}) и (a_j, a_{j+1})) соответствуют тому, что росток функции f перейдет в росток функции

$$z \mapsto S_{A_k, A_{k+1}}(S_{A_j, A_{j+1}}(f(\bar{z}))) = S_{A_k, A_{k+1}}(S_{A_j, A_{j+1}}(f(z))).$$

Однако же, как известно, композиция симметрий относительно двух прямых есть поворот или параллельный перенос. Значит, росток f переходит в росток $Af + B$, где A и B — константы, $A \neq 0$ (и даже $|A| = 1$, но это неважно). Так как всякий росток функции f в верхней полуплоскости аналитически продолжается вдоль любого пути, не проходящего через a_1, \dots, a_{n-1} , и так как

$$\frac{(Af + B)''}{(Af + B)'} = \frac{f''}{f'},$$

получаем, что функция f''/f' продолжается до голоморфной функции на $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$.

Лемма 12.16. В каждой из изолированных особенностей a_j , $1 \leq j \leq n-1$, у функции f''/f' имеется простой полюс с вычетом $\alpha_j - 1$.

Доказательство. Пусть, как и выше, \tilde{f} — непрерывное продолжение f на $H \cup \mathbb{R}$. Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отображение \tilde{f} переводит множество $U_\varepsilon = \{z : |z - a_j| < \varepsilon, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ в окрестность вершины A_j в замыкании многоугольника U (рис. 12.2).

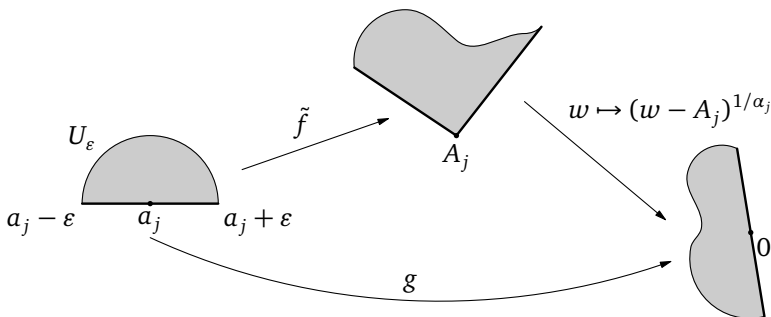


Рис. 12.2.

На угле, полученном из угла $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ параллельным переносом вершины A_j в нуль, выберем какую-нибудь ветвь функции \ln и рассмотрим на $U_\varepsilon \setminus \{a_j\}$ функцию

$$g: z \mapsto (\tilde{f}(z) - A_j)^{1/\alpha_j} := e^{\ln(\tilde{f}(z) - A_j)/\alpha_j}. \quad (12.7)$$

Функция g голоморфна на $\operatorname{Int}(U_\varepsilon)$, непрерывно продолжается на $U_\varepsilon \setminus \{a_j\}$, задает конформный изоморфизм $\operatorname{Int}(U_\varepsilon)$ на его образ, а также непрерывную биекцию множества $(a_j - \varepsilon, a_j) \cup (a_j, a_j + \varepsilon)$ на некоторую проколотую окрестность нуля на прямой, проходящей через нуль. По принципу симметрии функция g аналитически продолжается до голоморфной функции, определенной в проколотой

окрестности точки a_j и удовлетворяющей соотношению $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$. Следовательно, продолженная функция g ограничена в проколотой окрестности точки a_j и тем самым продолжается в нее голоморфно, причем так, что $g(a_j) = 0$; так как по построению в некоторой проколотой окрестности точки a_j функция g взаимно однозначна на свой образ, она неразветвлена в точке a_j , то есть $g(z) = (z - a_j)h(z)$, где h голоморфна в точке a_j и $h(a_j) = 0$. Теперь имеем (все вычисления относятся к ограничению на открытое множество, на котором соответствующие логарифмы корректно определены; на всю область определения тождество, которое мы получим, распространяется ввиду принципа аналитического продолжения):

$$\begin{aligned} f(z) &= A_j + (g(z))^{\alpha_j}; \\ f'(z) &= \alpha_j (g(z))^{\alpha_j-1} g'(z); \\ \ln f'(z) &= \ln \alpha_j + (\alpha_j - 1) \ln g(z) + \ln g'(z); \\ \frac{f''(z)}{f'(z)} &= (\ln f'(z))' = (\alpha_j - 1) \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{g''(z)}{g'(z)}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Поскольку функция g имеет в точке a_j простой нуль, функция g'/g имеет в точке a_j простой полюс с вычетом 1, а функция g' не обращается в нуль в a_j . Поэтому второе слагаемое в (12.8) голоморфно в точке a_j , первое же слагаемое имеет в этой точке простой полюс с вычетом $\alpha_j - 1$. Значит, и функция f''/f' имеет в точке a_j такой же полюс, что и доказывает лемму. \square

Разобравшись с изолированными особенностями функции f''/f' , выясним ее поведение в бесконечности.

Лемма 12.17. $\lim_{|z| \rightarrow \infty} (f''(z)/f'(z)) = 0$.

Доказательство. Мы будем действовать так же, как в доказательстве предыдущей леммы. Именно, коль скоро $\tilde{f}(\infty) = A_n$ и угол при вершине A_n равен $\pi\alpha_n$, положим $g(z) = (f(z) - A_n)^{1/\alpha_n}$. Как и выше, функция g конформно отображает «полуокрестность бесконечности» вида $\{z: |z| > R, \operatorname{Im} z > 0\}$, где R — достаточно большое число, на «полуокрестность нуля» (пересечение окрестности нуля с верхней полуплоскостью). Как и выше, аналитическое продолжение с использованием принципа симметрии показывает, что g — голоморфная и инъективная функция на некоторой проколотой окрестности бесконечности, причем $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$. Поэтому ряд Лорана для g в окрестности бесконечности имеет вид

$$g(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots, \quad c_1 \neq 0. \quad (12.9)$$

Как и выше, получаем тождество

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = (\alpha_j - 1) \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{g''(z)}{g'(z)}; \quad (12.10)$$

поскольку из (12.9) следует, что

$$g'(z) = -\frac{c_{-1}}{z^2} + \dots, \quad g''(z) = \frac{2c_{-1}}{z^3} + \dots,$$

оба слагаемых в правой части (12.10) стремятся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, что и доказывает лемму. \square

Из лемм 12.16 и 12.17 следует, что функция

$$h(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}$$

является целой функцией, стремящейся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$; тогда из теоремы Лиувилля вытекает, что h — константа и тем самым тождественный нуль, так что

$$(\ln f'(z))' = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}$$

(мы опять выписываем тождество на открытом множестве, где логарифм корректно определен, а тождество, которое получится, распространим на всю область определения по принципу аналитического продолжения). Теперь последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \ln f'(z) &= \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j - 1) \ln(z - a_j) + C_0; \\ f'(z) &= e^{C_0} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1}; \\ f(z) &= C_1 \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot \dots \cdot (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + C_2, \end{aligned}$$

где $C_1 = e^{C_0}$; это и есть та формула, которую мы хотели получить.

Осталось разобрать случай, когда точка $\tilde{f}(\infty)$ лежит на стороне треугольника, а не в вершине. Для него доказательство, до леммы 12.16 включительно, проходит дословно так же, и мы получаем, что функция f''/f' продолжается до функции, голоморфной на всем \mathbb{C} , за исключением простых полюсов в a_1, \dots, a_n с вычетами $(\alpha_1 - 1), \dots, (\alpha_n - 1)$. Чтобы показать, что $\lim_{|z| \rightarrow \infty} (f''(z)/f'(z)) = 0$,

положим $A_{n+1} = \tilde{f}(\infty)$ и повторим доказательство леммы 12.17, считая, что многоугольник имеет в точке A_{n+1} фиктивную вершину с

углом π . Доказательство проходит так же, с тем упрощением, что теперь нет нужды возводить в степень $1/\alpha_{n+1} = 1$ и можно применять принцип симметрии к самой функции f . Завершение доказательства проходит без изменений.

Теорема 12.15 тем самым доказана.

12.4. Гиперболическая метрика

В этом разделе мы выясним подлинный смысл леммы Шварца.

Условимся о таких обозначениях: открытый круг радиуса R с центром в нуле будем обозначать D_R . Вместо D_1 будем писать просто D .

Определение 12.18. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Для всякой точки $a \in U$ обозначим через $\Psi_U(a)$ верхнюю грань чисел $|\psi'(0)|$ для всевозможных голоморфных отображений $\psi: D_1 = D \rightarrow U$, для которых $\psi(0) = a$. Тогда число $\rho_U(a) = 1/\Psi_U(a)$ называется *плотностью гиперболической метрики* на множестве U в точке a . (Мы не исключаем случая $\Psi_U(a) = +\infty$; тогда $\rho_U(a) = 0$.)

Ясно, что $\rho_{\mathbb{C}}(a) = 0$ для любого $a \in \mathbb{C}$: в самом деле, для любого $R > 0$ отображение $D \rightarrow \mathbb{C}$, заданное формулой $z \mapsto a + Rz$, имеет производную R в нуле!

Однако же тождественно равная нулю плотность гиперболической метрики — исключение, а не правило. Через некоторое время мы докажем, что для большинства областей в \mathbb{C} она всюду положительна, а пока что приведем первый позитивный пример.

Предложение 12.19. Если $U \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, отличная от \mathbb{C} , то для $a \in U$ имеем $\rho_U(a) = |F'(a)|$, где $F: U \rightarrow D$ — конформное отображение, переводящее точку a в нуль.

Доказательство. Отображение F , разумеется, существует по теореме Римана. Если $\psi: D \rightarrow U$ — голоморфное отображение, для которого $\psi(0) = a$, то $(F \circ \psi)(D) \subset D$ и $(F \circ \psi)(0) = 0$; лемма Шварца показывает, что $|(F \circ \psi)'(0)| \leq 1$, причем равенство достигается, когда $F \circ \psi$ — конформный автоморфизм круга D . Поскольку $(F \circ \psi)'(0) = F'(a)\psi'(0)$, получаем, что $1/|\psi'(0)| \leq |F'(a)|$, причем равенство достигается, так как если положить $\psi = F^{-1}$, то $F \circ \psi: D \rightarrow D$ будет не просто конформным автоморфизмом, но даже тождественным отображением. \square

Для особо популярных односвязных областей имеет смысл явно выписать формулы для плотности гиперболической метрики.

Предложение 12.20. Если $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг, то для всякой $a \in D$ имеем $\rho_D(a) = 1/(1 - |a|^2)$.

Доказательство. Достаточно посчитать производную в точке a для автоморфизма $\varphi(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$, переводящего a в нуль. \square

Вычислить плотность гиперболической метрики на верхней полуплоскости предоставляется читателю в качестве упражнения; мы только зафиксируем ответ.

Предложение 12.21. Если $H = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость, то для всякой $a \in H$ имеем $\rho_H(a) = 1/(2 \operatorname{Im} a)$.

Определение 12.22. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — область, и пусть $\gamma: [p; q] \rightarrow U$ — кусочно гладкий путь. Тогда гиперболической длиной пути γ называется число

$$\text{h-length}_U(\gamma) = \int_{\gamma} \rho_U(z) |dz|. \quad (12.11)$$

(Это определение не исключает, что гиперболическая длина пути может оказаться равной нулю; можно показать, что интеграл в правой части (12.11) всегда существует.)

Основное свойство гиперболической метрики состоит в том, что при голоморфных отображениях гиперболические длины не увеличиваются.

Предложение 12.23. Пусть $U, V \subset \mathbb{C}$ — связные открытые множества, и пусть $f: U \rightarrow V$ — голоморфное отображение.

(1) Для всякой $a \in U$ имеем $\rho_V(f(a)) \cdot |f'(a)| \leq \rho_U(a)$.

(2) Для всякого кусочно гладкого пути $\gamma: [p; q] \rightarrow U$ имеем

$$\text{h-length}_V(f \circ \gamma) \leq \text{h-length}_U(\gamma).$$

Доказательство. Утверждение (2) с очевидностью вытекает из утверждения (1) и формулы замены переменной в определенном интеграле. Чтобы доказать утверждение (1), заметим сначала, что если $f'(a) = 0$, то доказывать нечего. Если же $f'(a) \neq 0$ и $\psi: D \rightarrow U$ — голоморфное отображение, для которого $\psi(0) = a$, то $f \circ \psi: D \rightarrow V$ — голоморфное отображение, для которого $(f \circ \psi)(0) = f(a)$. Тем самым имеем

$$\rho_V(f(a)) \leq \frac{1}{|(f \circ \psi)'(0)|} = \frac{1}{|\psi'(0)|} \cdot \frac{1}{|f'(a)|};$$

беря в знаменателе верхнюю грань по всем $\psi: D \rightarrow U$, для которых $\psi(0) = a$, получаем, что $\rho_V(f(a)) \leq \rho_U(a)/|f'(a)|$; остается избавиться от знаменателя. \square

Следствие 12.24. Если $V \subset U$ — связные открытые подмножества в \mathbb{C} , то $\rho_V(a) \geq \rho_U(a)$ для всякой точки $a \in V$.

Доказательство. Применить предложение 12.23(1) к вложению $V \hookrightarrow U$. \square

Следствие 12.25. Если $f: U \rightarrow V$ — конформный изоморфизм, то:

(1) для всякой $a \in U$ имеем $\rho_V(f(a)) = \rho_U(a)/|f'(a)|$;

(2) если $\gamma: [p; q] \rightarrow U$ — кусочно гладкий путь, то

$$\text{h-length}_V(f \circ \gamma) = \text{h-length}_U(\gamma).$$

(Иными словами, конформные изоморфизмы сохраняют гиперболические длины.)

Доказательство. Применить предложение 12.23 к отображениям f и f^{-1} . \square

Определения 12.18 и 12.22, возможно, красивы, но, честно говоря, пока мы работаем только с односвязными областями, особого смысла в понятии гиперболической длины нет: про оценки модуля производной отображений из D в D нам все говорит уже лемма Шварца (если привлечь к делу конформные автоморфизмы круга — см. задачу 9.13), а если заменить круг на произвольную односвязную область, то достаточно предварительно конформно отобразить ее на круг — собственно, именно в этом и состоит содержание предложения 12.19. Чтобы оправдать введение понятия гиперболической метрики, нужно научиться работать с ней на неодносвязных множествах. Вот первый шаг в этом направлении.

Предложение 12.26. Пусть $D^* = \{z: 0 < |z| < 1\}$ — проколотый единичный диск. Тогда для всякой $a \in D^*$ имеем

$$\rho_{D^*}(a) = 1/(2|a| \ln(1/|a|)).$$

Доказательство. Пусть $\psi: D \rightarrow D^*$ — голоморфное отображение, для которого $\psi(0) = a$. Так как f не принимает значения 0, любой росток функции $z \mapsto \ln \psi(z)$ допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути в D , а так как круг D односвязен, результат этого аналитического продолжения зависит только от начальной и конечной точек пути. Поэтому на D определена однозначная ветвь функции $\ln \circ \psi$; следовательно, если обозначить через $H = \{z: \text{Im } z > 0\}$ верхнюю полуплоскость, то существует такое голоморфное отображение $h: D \rightarrow H$, что $\psi(z) = e^{ih(z)}$ и $h(0) = b$, где $e^{ib} = a$. Имеем $\psi'(0) = ie^{ib} \cdot h'(0) = iah'(0)$, откуда

$$\frac{1}{|\psi'(0)|} = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|h'(0)|}$$

и

$$\rho_{D^*}(a) = \sup_{\substack{\psi: D \rightarrow D^* \\ \psi(0)=a}} \frac{1}{|\psi'(0)|} = \frac{1}{|a|} \cdot \sup_{\substack{h: D \rightarrow H \\ h(0)=b}} \frac{1}{|h'(0)|} = \frac{\rho_H(b)}{|a|}.$$

Осталось вспомнить, что $\rho_H(b) = 1/(2 \operatorname{Im} b)$ (предложение 12.21) и что если $e^{ib} = a$, то $\operatorname{Im} b = -\ln |a| = \ln(1/|a|)$. \square

В идеале хотелось бы аналогичным образом найти плотность гиперболической метрики и для произвольной неодносвязной области $U \subset \mathbb{C}$. Для этого было бы достаточно найти аналог экспоненты — неразветвленное и сюръективное голоморфное отображение $F: H \rightarrow U$, обладающее тем свойством, что любой росток обратного отображения F^{-1} допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути в U . Из существования такого отображения, в частности, сразу бы вытекало, что плотность гиперболической метрики на U всюду положительна (и равна отношению плотности гиперболической метрики на H и модуля производной отображения F).

Можно доказать, что искомое отображение F действительно существует, если только дополнение $\mathbb{C} \setminus U$ содержит не менее двух точек — в этом состоит содержание так называемой теоремы Пуанкаре—Кёбе об униформизации¹. Доказательство теоремы об униформизации выходит за рамки этой книги. Те свойства гиперболической метрики, которые понадобятся нам в дальнейшем, мы установим более старомодным методом, принадлежащим Эдмунду Ландау. Именно, мы установим хорошие свойства гиперболической метрики для «крайнего» случая, когда дополнение к области U состоит из двух точек.

Теорема 12.27 (теорема Ландау). Пусть $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$ — две различные точки, и пусть $U = \mathbb{C} \setminus \{p_1, p_2\}$. Тогда $\rho_U(a) > 0$ для всех $a \in U$. Более того, существуют такие положительные константы C и M , что при $a \in U$ и $|a| \geq M$ выполняется неравенство

$$|\rho_U(a)| \geq C/(|a| \ln |a|).$$

Доказательство. Поскольку множества $\mathbb{C} \setminus \{p_1, p_2\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ переводятся друг в друга линейным преобразованием и поскольку, согласно следствию 12.25, при линейном автоморфизме плотность гиперболической метрики умножается на положительную константу, достаточно доказать теорему для случая $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, что мы и будем далее предполагать.

Начнем с совершенно элементарной леммы, доказательство которой оставляется читателю.

¹Отображение $F: H \rightarrow U$, существование которого утверждается теоремой — не что иное, как универсальное накрытие области U ; содержательная часть теоремы Пуанкаре—Кёбе состоит в том, что при указанных выше условиях это универсальное накрытие изоморфно верхней полуплоскости.

Лемма 12.28. Если $\sqrt{w} - \sqrt{w-1} = t$, где $t \neq 0$, то $w = ((t^2 + 1)/2t)^2$; в частности, если

$$\sqrt{w} - \sqrt{w-1} = \sqrt{n} \pm \sqrt{n-1},$$

то $w = n$.

Здесь под \sqrt{w} (соответственно, $\sqrt{w-1}$) понимается какое-нибудь комплексное число, квадрат которого равен w (соответственно, $w-1$). \square

Рассмотрим теперь точку $a \in U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, и пусть $f: D \rightarrow U$ — голоморфное отображение, для которого $f(0) = a$ и $f'(0) \neq 0$ (такое всегда существует — если U содержит круг радиуса ε с центром в a , можно положить $f(z) = a + \varepsilon z$). Чтобы получить нижнюю оценку на плотность гиперболической метрики в точке a , нам надо оценить сверху $|f'(0)|$. Это делается следующим образом.

Так как функция f не принимает в D значения 0, а круг D односвязен, на U определена голоморфная функция $z \mapsto \ln f(z)$. Мы выберем ветвь логарифма таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\operatorname{Im} \ln f(0) = \operatorname{Im} \ln a \in [0; 2\pi]. \quad (12.12)$$

Функция $\ln f(z)$ не принимает в D ни значения 0, ни значения $2\pi i$ (если $\ln f(z)$ равно какому-нибудь из этих чисел, то $f(z) = 1$, что невозможно, так как $f(U) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$). Стало быть, на D определены функции $z \mapsto \sqrt{\ln f(z)/2\pi i}$ и $z \mapsto \sqrt{(\ln f(z)/2\pi i) - 1}$. Для всякого $z \in D$ значения этих функций в точке z различны (если они совпадают, то $f(z) = f(z) - 1$, что нелепо), так что их разность не обращается в нуль на D ; стало быть, на D определена функция

$$z \mapsto F(z) = \ln \left(\sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i} - 1} \right).$$

Покажем, что функция $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ не принимает значений вида $\pm \ln(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + 2\pi i k$ для $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ (логарифм здесь понимается в элементарном смысле: как действительное число, экспонента которого равна данному). В самом деле, если

$$F(z) = \pm \ln(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + 2\pi i k,$$

то

$$\sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i} - 1} = \sqrt{n} \mp \sqrt{n-1},$$

откуда по лемме 12.28 имеем $\ln f(z) = 2\pi i n$ и $f(z) = 1$, что невозможно.

«Запрещенные точки» $\pm \ln(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + 2\pi i k$ лежат на горизонтальных прямых $\{z: \operatorname{Im} z = 2\pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = -\infty$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \ln(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})) = 0,$$

на каждой из этих прямых вещественные части запрещенных точек (как положительные, так и отрицательные) могут быть сколь угодно большими по модулю, а расстояния между соседними запрещенными точками ограничены сверху. Следовательно, существует такое число $\rho > 0$, что каждый открытый круг радиуса ρ и выше содержит хотя бы одну запрещенную точку. Применяя теперь к функции F теорему Блоха (теорема 9.17), получаем, что $F(D)$ содержит открытый круг радиуса $|F'(0)|/40$. Поскольку $F(D)$ запрещенных точек содержать не может, получаем, что $|F'(0)|/40 \leq \rho$, откуда $|F'(0)| \leq 40\rho$. Из леммы 12.28 вытекает, что если $u = F(z)$, то $f(z) = G(u)$, где $G(u) = e^{-\frac{\pi i}{2}(e^{2u} + e^{-2u})}$. Из формулы для производной сложной функции получаем, что $|f'(0)| = |F'(0)| \cdot |G'(F(0))|$, откуда $|f'(0)| \leq 40\rho |G'(F(0))|$. Остается оценить сверху $|G'(F(0))|$. Заметим для этого, что $G'(u) = -\pi i G(u)(e^{2u} - e^{-2u})$; поскольку $G(F(0)) = f(0) = a$, отсюда получаем, что

$$|G'(F(0))| = \pi |G(F(0))| \cdot |e^{2F(0)} - e^{-2F(0)}| = \pi |a| \cdot |e^{2F(0)} - e^{-2F(0)}|. \quad (12.13)$$

Поскольку

$$e^{2F(0)} = \left(\sqrt{\frac{\ln a}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\ln a}{2\pi i} - 1} \right)^2,$$

имеем

$$\begin{aligned} e^{2F(0)} - e^{-2F(0)} &= \\ &= \left(\sqrt{\frac{\ln a}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\ln a}{2\pi i} - 1} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\ln a}{2\pi i}} + \sqrt{\frac{\ln a}{2\pi i} - 1} \right)^2 = \\ &= -4\sqrt{\frac{\ln a}{2\pi i}} \sqrt{\frac{\ln a}{2\pi i} - 1}. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Ввиду соотношения (12.12) имеем $|(\ln a)/2\pi i| \leq (|\ln |a|| + 2\pi)/2\pi < < |\ln |a|| + 7$ (к точности констант в оценках мы не стремимся), $|(\ln a)/2\pi i - 1| < |\ln |a|| + 8$, так что модуль правой части в (12.14) не превосходит $4\sqrt{(|\ln |a|| + 7)(|\ln |a|| + 8)}$ и из (12.13) получаем, что

$$|G'(F(0))| \leq 4\pi |a| \sqrt{(|\ln |a|| + 7)(|\ln |a|| + 8)},$$

откуда $|f'(0)| \leq 160\rho\pi|a|\sqrt{(|\ln|a|| + 7)(|\ln|a|| + 8)}$ и

$$\rho_V(a) \geq \frac{1}{|f'(0)|} \geq \frac{1}{160\rho\pi|a|\sqrt{(|\ln|a|| + 7)(|\ln|a|| + 8)}}.$$

Правая часть этого неравенства всегда положительна, что доказывает первое утверждение теоремы, и при этом ясно, что при всех a , достаточно больших по модулю, она не меньше $C/(|a|\ln|a|)$ для некоторой положительной константы C . Этим доказано и второе утверждение. \square

Следствие 12.29. Пусть $V \subset \mathbb{C}$ — такая область, что $\mathbb{C} \setminus V$ содержит хотя бы две различные точки. Тогда $\rho_V(a) > 0$ для всех $a \in V$.

Доказательство. Если $\mathbb{C} \setminus V$ содержит две различные точки p_1 и p_2 , то, полагая $U = \mathbb{C} \setminus \{p_1, p_2\}$ и замечая, что $V \subset U$, для всякой $a \in V$ имеем, ввиду следствия 12.24, $\rho_V(a) \geq \rho_U(a) > 0$. \square

Для полноценной работы с гиперболической метрикой следствия 12.29 недостаточно: помимо положительности, необходимо еще установить, что гиперболическая метрика полна (для областей, на которых она не является тождественным нулем, разумеется). Этим мы заниматься не будем (маленький шаг в этом направлении можно сделать, решив задачу 12.9); вместо этого мы выведем два любопытных следствия из того, что мы узнали о плотности гиперболической метрики на плоскости без двух точек (т. е. из теоремы Ландау).

Один результат получается совсем просто.

Предложение 12.30 (малая теорема Пикара). *Непостоянная целая функция принимает все значения, кроме, быть может, одного.*

Доказательство. Если целая функция f не принимает значений p_1 и p_2 , то, полагая $U = \mathbb{C} \setminus \{p_1, p_2\}$, получаем из предложения 12.23, что $\rho_U(f(a))|f'(a)| \leq \rho_{\mathbb{C}}(a)$. Так как $\rho_{\mathbb{C}}(a) = 0$ (плотность гиперболической метрики на \mathbb{C} — тождественный нуль), а $\rho_U(a) > 0$ по теореме Ландау, получаем, что $|f'(a)| = 0$. Так как производная функции f всюду равна нулю, эта функция постоянна. \square

А теперь докажем серьезное усиление малой теоремы Пикара; в процессе доказательства нам придется применить все, что мы узнали о гиперболической метрике.

Теорема 12.31 (большая теорема Пикара). *В проколотой окрестности существенно особой точки голоморфная функция принимает все значения, кроме, быть может, одного.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что функция в проколотой окрестности существенно особой точки не принимает как минимум двух значений.

Не ограничивая общности, можно считать, что существенно особая точка расположена в нуле и что ее проколота окрестность имеет вид $D^* = \{z: 0 < |z| < 1\}$ — общий случай сводится к этому линейной заменой переменной. Если функция f не принимает в D^* значений p_1 и p_2 , будем ее рассматривать как голоморфное отображение из D^* в $U = \mathbb{C} \setminus \{p_1, p_2\}$. По теореме Ландау существуют такие числа $C > 0$ и $M > 0$, что $\rho_U(a) \geq C/(|a| \ln |a|)$, как только $|a| \geq M$.

Лемма 12.32. Пусть γ — кусочно гладкий путь в U , проходящий через точку с модулем не больше M и точку с модулем $L > M$. Тогда

$$\text{h-length}_U(\gamma) \geq C \int_M^L \frac{dx}{x \ln x}.$$

Доказательство леммы. Достаточно доказать это неравенство для участка пути, начинающегося в точке с модулем M и заканчивающегося в точке с модулем L . Пусть параметризация этого участка имеет вид $\gamma: [p; q] \rightarrow U$, $|\gamma(p)| = M$, $|\gamma(q)| = L$. Заметим, что $|d\gamma(t)/dt| \geq d(|\gamma(t)|)/dt$. В самом деле, это следует из того, что

$$(|\gamma|)' = |(\sqrt{(\gamma, \gamma)})'| = \left| \frac{(\gamma, \gamma')}{\sqrt{(\gamma, \gamma)}} \right| = |\gamma'| \cdot |\cos \varphi| \leq |\gamma'|$$

(здесь (\cdot, \cdot) — скалярное произведение, а φ — угол между векторами γ и γ'); можно также просто посмотреть на рис. 12.3. Теперь имеем

$$\text{h-length}_U(\gamma) = \int_p^q \rho_U(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \geq C \int_p^q \frac{(|\gamma(t)|)' dt}{|\gamma(t)| \ln |\gamma(t)|} = C \int_M^L \frac{dx}{x \ln x},$$

что и утверждалось. \square

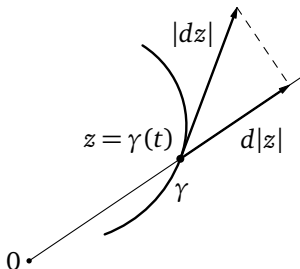


Рис. 12.3. $|dz| \geq d|z|$

По теореме Сохоцкого существует такая последовательность комплексных чисел $z_n \in D^*$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$ (вместо нуля в качестве предела сходилась бы любое число, по модулю меньшее M , а при минимальном изменении рассуждения — и вообще любой конечный предел). Положим $|z_n| = r_n$; можно считать, что последовательность $\{r_n\}$ будет монотонно убывающей, что мы и будем далее предполагать.

В силу предложения 12.26 гиперболическая длина окружности $\{z: |z| = r\} \subset D^*$ (относительно гиперболической метрики на D^*) равна

$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{2|z| \ln(1/|z|)} = \frac{2\pi r}{2r \ln(1/r)} = \frac{\pi}{|\ln r|};$$

следовательно, эта длина стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. В частности, если $\gamma_n = \{z \in D^*: |z| = r_n = |z_n|\}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{h-length}_{D^*}(\gamma_n) = 0.$$

Отсюда и из предложения 12.23 вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{h-length}_U(f(\gamma_n)) = 0;$$

в частности, гиперболические длины всех $f(\gamma_n)$ ограничены.

Я утверждаю, что существует такое $R > 0$, что (для достаточно больших n) все кривые $f(\gamma_n)$ содержатся в круге радиуса R с центром в нуле. В самом деле, для всех достаточно больших n имеем $|f(z_n)| \leq M$. Если $L_n = \sup_{z \in \gamma_n} |f(z)|$ и $L_n > M$, то в силу леммы 12.32 имеем

$$\text{h-length}(f(\gamma_n)) \geq C \int_M^{L_n} \frac{dx}{x \ln x}.$$

Так как интеграл $\int_M^\infty dx/(x \ln x)$ расходится, из ограниченности последовательности $\{\text{h-length}(f(\gamma_n))\}$ вытекает ограниченность последовательности $\{L_n\}$. Теперь можно положить $R = \sup_n L_n$.

Итак, для всех достаточно больших n имеем $|f(z)| \leq R$, как только $|z| = r_n$. По принципу максимума модуля, примененному к кольцам $\{z: r_{n+1} \leq |z| \leq r_n\}$, отсюда вытекает, что $|f(z)| \leq R$, как только $r_{n+1} \leq |z| \leq r_n$, а значит (поскольку $r_n = |z_n| \rightarrow 0$), и для всех z , достаточно близких к нулю. Стало быть, по теореме Римана особенность функции f в нуле устранима — противоречие! \square

Упражнения

12.1. Покажите, что комплексная плоскость и единичный диск гомеоморфны. (Указание. См. рис. 12.4.)

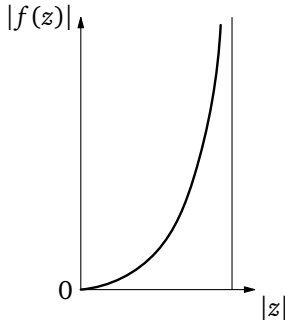


Рис. 12.4.

12.2. Покажите, что открытые множества $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $D \setminus \{0\}$ конформно неизоморфны (D — единичный круг).

12.3. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — односвязное открытое множество, отличное от \mathbb{C} , и пусть $a \in U$. Через $D = \{z: |z| < 1\}$ обозначим единичный круг.

Покажите, что существует голоморфное отображение $f: U \rightarrow D$, для которого $|f'(a)|$ максимально среди всех голоморфных отображений из U в D (мы не предполагаем инъективности!), и что такое отображение является конформным изоморфизмом из U в D .

12.4. Существует ли функция f , голоморфная в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$, для которой

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D} \operatorname{Re} f(z) &= 1, & \inf_{z \in D} \operatorname{Re} f(z) &= -1, \\ \sup_{z \in D} \operatorname{Im} f(z) &= 2017, & \inf_{z \in D} \operatorname{Im} f(z) &= -2017? \end{aligned}$$

12.5. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$ — два пятиугольника на плоскости с соответственно равными углами (т. е. $\angle A_j = \angle B_j$ для всех j). Предположим, что между этими пятиугольниками существует конформный изоморфизм, который при соответствии границ переводит вершину в вершину. Докажите, что в этом случае наши пятиугольники подобны.

12.6. Покажите, что плотность гиперболической метрики на открытом подмножестве $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$ тождественно равна нулю.

12.7. Найдите плотность гиперболической метрики на кольце $\{z: r < |z| < R\}$.

12.8. Пусть $U \subset \mathbb{C}$, $U \neq \mathbb{C}$, — открытое множество. Покажите, что для всякой точки $a \in U$ имеем $\rho_U(a) \leq 1/\text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus U)$ (здесь $\text{dist}(a, X) = \inf_{b \in X} |a - b|$ — расстояние от точки a до множества X).

12.9. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — область, для которой $\mathbb{C} \setminus U$ содержит не менее двух точек, и пусть $\{a_n\}$ — последовательность точек области U , сходящаяся к точке на границе U . Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_U(a_n) = +\infty$. Докажите это утверждение:

(а) для случая, когда $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ (если $a_n \rightarrow 0$, это следует из нашего доказательства теоремы Ландау, если $a_n \rightarrow 1$, воспользуйтесь подходящим автоморфизмом области U);

(б) для произвольной U (воспользуйтесь следствием 12.24).

12.10. Покажите, что голоморфная функция в проколотой окрестности существенно особой точки принимает все значения, кроме, быть может, одного, бесконечно много раз.

Предметный указатель

ε -окрестность 11

\wp -функция Вейерштрасса 201

аналитическое продолжение 90

— — единственность 93

аффинная кривая 252

берег разреза 141

бесконечное произведение 207

вектор скорости 32

вещественная производная 17

— часть 8

внутренность 12

выпуклое множество 64

вычет 119, 282

— в бесконечности 147

— дробный 136

гиперболическая длина 238

главная часть 211, 289

главное значение 134

голоморфная форма 274

гомеоморфизм 23, 95

гомотопия 84

— линейная 85

— между замкнутыми путями 84

— с закрепленными концами 84

гомотопные пути 84

граница треугольника 61

действительная ось 8

— часть 8

дивизор 293

— главный 294

— степень 294

диффеоморфизм 19

дифференциал 275

— логарифмический 283

длина пути 53

— — гиперболическая 238

задача Миттаг-Леффлера 290

замыкание 12

изолированная особая точка 108

изолированный нуль 103

— — кратность см. кратность

нуля

индекс ветвления 150, 266

— кривой относительно точки 54

— пути относительно точки 54,
56

интеграл голоморфной формы

по пути 280

— по кусочно гладкой кривой 49

— по дифференциалу дуги 54

— функции по пути 48

кольцо 98

компакт 12

комплексная плоскость 8

— — расширенная 20

компоненты связности 23

конформно изоморфные

множества 37

конформное отображение 21

конформный автоморфизм 37

координатная окрестность 249

коэффициент растяжения 186
 кратность нуля 104
 критическая точка 151, 267
 критическое значение 267
 круг сходимости 15

лебегово число 86
 лемма Жордана 131
 — о компактном исчерпывании 214
 — о лебеговом числе 86
 — об улучшении гомотопии 85
 — Шварца 155
 логарифм 30
 — однозначная ветвь 30
 локальная карта 249
 — координата 249
 локальное кольцо 89

мера 18
 мероморфная форма 274
 мнимая ось 8
 — часть 8
 множество замкнутое 11
 — — в пространстве голоморфных функций 225
 — компактное 12
 — — в пространстве голоморфных функций 226
 — несвязное 13
 — открытое 11
 — — на сфере Римана 162
 — — односвязное 95
 — связное 13
 модуль 8

неравенства Коши 78
 носитель функции 18

область 14
 обобщенная окружность 20
 окрестность бесконечности 162
 — — проколота 113
 — ростка 89
 открытое покрытие 12

отображение вещественно дифференцируемое 17
 — вещественно-линейное 34
 — дробно-линейное 19
 — квазиконформное 186
 — класса класса C^1 17
 — конформное 33
 — — верхней полуплоскости на единичный круг 39
 — — единичного круга на верхнюю полуплоскость 38
 — — полосы на верхнюю полуплоскость 42
 — сохраняющее ориентацию 186

первообразная 51
 плотность гиперболической метрики 237
 положительное направление обхода 50
 полюс 110
 — в бесконечности 114
 — простой 111
 порядок полюса 111
 предел 9
 принцип аналитического продолжения 79, 254
 — аргумента 121
 — — усиленный 122
 — длины и площади 186
 — максимума модуля 154
 — симметрии 165, 166, 168
 — соответствия границ 180, 188
 — сохранения области 148, 265
 произведение Бляшке 219
 — — конечное 218
 производная 25
 — логарифмическая 121
 простой нуль 104
 путь гладкий 32
 — кусочно гладкий 48

равномерная ограниченность 227

равностепенная непрерывность 227
радиус сходимости 15
разбиение единицы 18
разветвленное накрытие 270
решетка 199
риманова поверхность 249
род римановой поверхности 264
росток 88
— функции в точке 88
ряд двойной 10
— Лорана 105
— — главная часть 107, 114
— — правильная часть 107, 114
— Тейлора 77
— Эйзенштейна 203

симметрия относительно
 обобщенной окружности 22
степень отображения 270
существенная особенность 112
— — в бесконечности 114
сфера Римана 20

теорема Блоха 158
— Вейерштрасса о функции с
 заданными нулями 214
— Коши «гомологическая»
 версия 65
— — гомотопическая версия 96
— — для выпуклых множеств 65
— — для треугольника 61
— Кристоффеля—Шварца 232
— Ландау 240
— Миттаг-Леффлера 212, 293
— Монтеля 227
— о монодромии 94
— о неявной функции 252
— об обратной функции 149
— Пикара большая 113, 243
— — малая 243
— Пуанкаре—Кёбе 240

— Римана о существовании
 алгебраической функции 284
— — об отображении 222
— — об устранимой
 особенности 108
— Римана—Роха 291
— Руше 125
— Сохоцкого 112, 113
точка ветвления 151, 266, 267
трансверсальность 60

уравнения Коши—Римана 32, 35
устраняемая особенность 108
— — в бесконечности 114

формула Коши 70
— Коши—Адамара 15
— Кристоффеля—Шварца 232
— Римана—Гурвица 272
— Эйлера 16
фундаментальный
 параллелограмм 199
функция аналитическая 71
— голоморфная 27, 163
— — в бесконечности 163
— — на римановой поверхности
 249
— Жуковского 45
— комплексно
 дифференцируемая 25
— мероморфная 115, 252
— — в бесконечности 116
— целая 108
— эллиптическая 178, 199

числа Бернулли 198

эйлерова характеристика 271
экспонента 16
эллиптическая кривая 253

якобиан 18
якобиева матрица 17

Литература

- [1] В. А. Зорич. Математический анализ. Часть I. М.: МЦНМО, 2017.
- [2] В. А. Зорич. Математический анализ. Часть II. М.: МЦНМО, 2017.
- [3] S. Lang. Complex Analysis. New York: Springer, 1999.
- [4] T. W. Gamelin. Complex analysis. New York: Springer, 2001.
- [5] Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного. М.: Наука, 1985.
- [6] И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. Л.: ГТТИ, 1948.