Лекция 15. Локальные свойства голоморфных функций.

Теория функций комплексного переменного

Принцип сохранения области

Принципом сохранения области называется следующий факт.

Теорема 9.1. *Пусть* $U \subset \mathbb{C}$ — *связное открытое множество и* $f : U \to \mathbb{C}$ — *голоморфная функция, не являющаяся постоянной. Тогда для всякого открытого подмножества* $V \subset U$ *его образ* $f(V) \subset \mathbb{C}$ *также открыт.*

Отображения, переводящие открытые множества в открытые, в топологии называют открытыми. Таким образом, принцип сохранения области гласит, что отличное от константы голоморфное отображение, определенное на связном открытом множестве, является открытым.

- Отличие от вещественного случая! (пример: $f(x) = x^2$).

Доказательство

- Пусть $a \in U$, $f(z) = b + (z-a)^k g(z),\ k = \operatorname{ord}_a(f-b)$.
- Образ маленькой окружности $\{|z-a| = \varepsilon\}$ обходит k раз вокруг точки $b = f(a)$.
- Этот же образ окружности обходит k раз вокруг точек c, близких к точке b.
- Значит, уравнение $f(z) = c$ имеет $k > 0$ решений в диске $\{|z-a| < \varepsilon\}$, с учетом кратностей.

Теорема об обратной функции

Предложение 9.2 (теорема об обратной функции). *Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, и пусть $f'(a) \neq 0$ в точке $a \in \mathbb{C}$. Тогда существуют такие открытые множества $U_1 \ni a$ и $V_1 \ni f(a)$, что $f(U_1) = V_1$ и f индуцирует биекцию U_1 на V_1, причем обратное отображение $f^{-1}\colon V_1 \to U_1$ также голоморфно.*

- Достаточно, чтобы жорданова кривая ∂U_1 отображалась в жорданову кривую ∂U_2 взаимно однозначно с сохранением ориентации. (По принципу аргумента).

Соответствующая вещественная теорема

Замечание 9.3. Предложение 9.2 немедленно следует из «теоремы об обратной функции» вещественного анализа (см. [1, гл. VIII, § 6]): в самом деле, голоморфные функции автоматически непрерывно дифференцируемы, а производная f в точке a (см. раздел 1.5) есть умножение на ненулевое комплексное число, что является обратимым линейным оператором. Так как я стремился минимизировать предварительные сведения из анализа многих переменных, необходимые для чтения книги, у нас приведено независимое доказательство.

- Все же есть упрощение: в комплексном анализе не надо требовать непрерывности производной!

Индекс ветвления

- Пусть $a \in U$, $f(z) = b + (z-a)^k g(z),\ k = \operatorname{ord}_a(f-b)$.
- Число k называется индексом ветвления функции f в точке a.
- При $k > 1$ точка a называется критической точкой.
- Другими словами, $f'(a) = 0$.
- Но это аналитическое условие эквивалентно топологическому!

Свойства индекса ветвления

Предложение 9.5. *Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a и ни в какой ее окрестности не является константой. Положим $f(a) = b$, и пусть*

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

— разложение f в степенной ряд в окрестности точки a. Тогда следующие три числа совпадают:

(1) *индекс ветвления функции f в точке a*;

(2) $\min\{k > 0 : c_k \neq 0\}$;

(3) $\min\{k > 0 : f^{(k)}(a) \neq 0\}$.

Поведение функции в окрестности критической точки

Предложение 9.7. *Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a и ни в какой ее окрестности не является константой. Положим $f(a) = b$, и пусть индекс ветвления функции f в точке a равен k. Тогда существуют такие окрестности $U \ni a$ и $V \ni b$, что $f(U) = V$, всякая точка $b' \in V$, кроме b, имеет ровно k прообразов в U (относительно отображения f), а у точки b в множестве U есть только один прообраз — точка a.*

- Мы уже фактически доказали это утверждение, когда доказывали принцип сохранения области.

Более сильное утверждение

Предложение 9.8. *Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a и ни в какой ее окрестности не является константой. Положим $f(a) = b$, и пусть индекс ветвления функции f в точке a равен k. Тогда существуют окрестности $U \ni a$ и $V \ni b$, для которых $f(U) = V$, и такие конформные изоморфизмы $\alpha \colon U \to U'$, $\beta \colon V \to V'$, где V и V' — открытые круги с центром в нуле, что $\alpha(a) = 0$, $\beta(b) = 0$ и $\beta(f(z)) = (\alpha(z))^k$ для всех $z \in U$.*

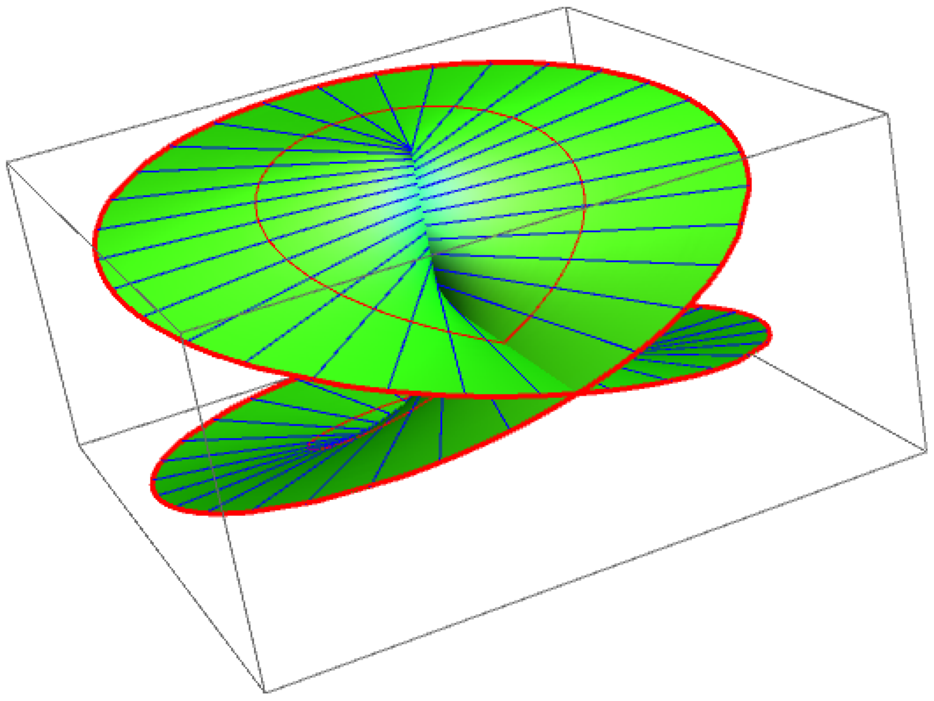
- Другими словами, можно так выбрать голоморфные координаты в образе или в прообразе, чтобы отображение записывалось формулой $g(z) = z^k$.

Набросок доказательства

- $f(z) = b + (z-a)^k g(z)$ вблизи точки a,
- $g(z) = h(z)^k$,
- $f(z) - b = \big((z-a)h(z)\big)^k$,
- Положим $\alpha(z) = (z-a)h(z),\ \beta(w) = w - b$.

Разветвленные накрытия сферы

- Рассмотрим непрерывное отображение $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$.
- Пусть $\forall a \in \mathbb{S}^2 \ \exists\, k \in \mathbb{Z}_{>0}$, окрестности U, V точек $a, b = f(a)$ и гомеоморфные вложения $\alpha\colon U \to \mathbb{C}$, $\beta\colon V \to \mathbb{C}$, такие, что $\beta\big(f(z)\big) = \big(\alpha(z)\big)^k$ для всех $z \in U$.
- Тогда f называется разветвленным накрытием.
- Пример: любая рациональная функция.



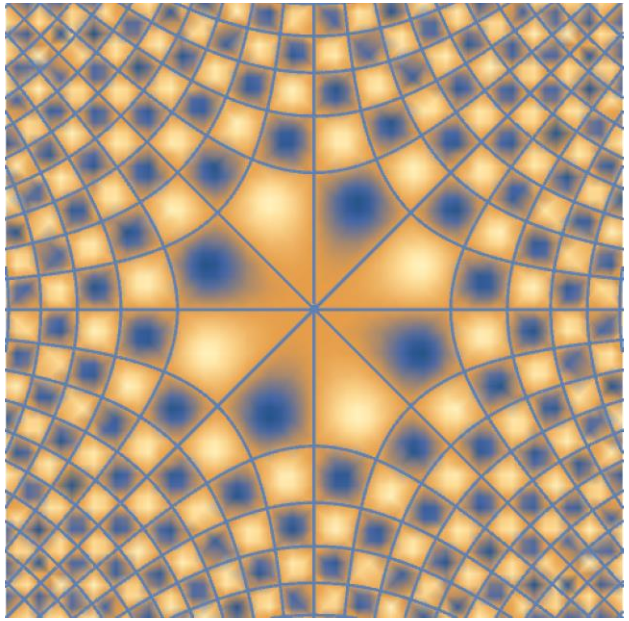
Голоморфная биекция биголоморфна

Предложение 9.9. *Пусть* $f\colon U \to V$ *— голоморфное и биективное отображение между двумя открытыми подмножествами комплексной плоскости. Тогда производная отображения* f *не обращается в нуль нигде на* U *и обратное отображение* $f^{-1}\colon V \to U$ *также голоморфно.*

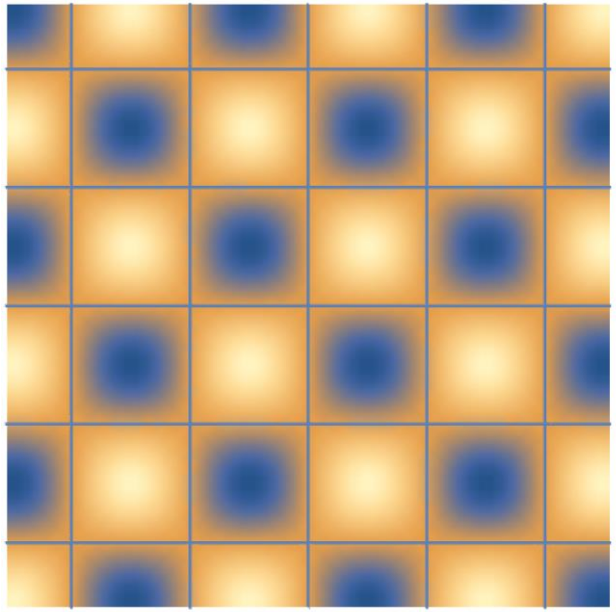
- В самом деле, f не может быть инъекцией ни в какой окрестности критической точки (согласно локальному описанию, данному выше).

Что голоморфное отображение делает с углами

Предложение 9.10. *Пусть функция f голоморфна в точке a и имеет в этой точке индекс ветвления k. Если γ_1 и γ_2 — гладкие кривые, выходящие из точки a и образующие угол φ, то угол между кривыми $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$ в точке $f(a)$ равен $k\varphi$.*



$f(z) = z^2$



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ