СЕМИНАР ПО МАТАНУ

26.10.20

$X, \mathcal{A}, \mu$ $\quad f: X \to \mathbb{R}$ – измер.

$\int_X f d\mu$ $\quad$ простые ф-ии $\quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i I_{A_i}(x)$

$c_i \in \mathbb{R}$ $\quad A_i \in \mathcal{A}$

$$\Downarrow$$

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A)$$

Критерий интегрируемости по Лебегу

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ пусть $f: X \to \mathbb{R}$ измер.

Тогда f – интегр. $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \mu(\{x : n \leq f(x) \leq n+1\} < \infty$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : |f(x)| \geq n\}) < \infty$$

$\boxed{1}$

При каких α ф-ия $|\cos x|^\alpha$ интегрируема на $[0, 2\pi]$?

$\alpha \geq 0 \quad \lambda(\{x : |\cos x|^\alpha \geq n\}$ ограничена $\Rightarrow$ интегр.

$\alpha < 0 \quad \lambda(\{x : |\cos x| \leq n^{\frac{1}{\alpha}}\}$

$c\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq |\cos x| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| \leq \left|\frac{\pi}{2} - x\right| \Rightarrow$

$|\cos x|$ интегр. на $[0, \pi] \Leftrightarrow \left|\frac{\pi}{2} - x\right|^\alpha$ интегр. на $[0, \pi]$

$$\lambda\left(\{x\in(0,\pi] : |\tfrac{\pi}{2}-x|<n^{\frac{1}{\alpha}}\}\right)$$

$$\sum\lambda\left(\{x\in(0,\pi] : |\tfrac{\pi}{2}-x|<n^{\frac{1}{\alpha}}\}\right)=\sum 2n^{\frac{1}{\alpha}}<\infty$$

т.е. при $\frac{1}{\alpha}<-1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha>-1}$

Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ интегр. по Риману $\Rightarrow f$ интегр. по Лебегу и интегралы Римана и Лебега равны

Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ — абсолютно несобств. интеграл по Риману $\Rightarrow f$ интегр. по Лебегу

Если $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ — несобств. интеграл, но $|f|$ не интегр. $\Rightarrow f$ не интегр. по Лебегу

$\boxed{\text{II способ:}}$

$$\int_0^{\pi}|\cos x|^{\alpha}dx\le C\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}$$ — несобств. интеграл при $\alpha>-1$

$\Rightarrow$ интегр. по Лебегу

Пусть $\alpha<-1$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi}|\cos x|^{\alpha}dx$$ — интегр. по Риману и Лебегу

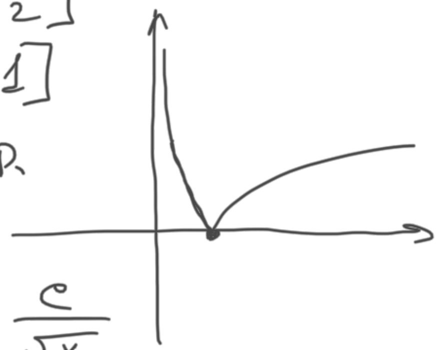
Если бы $|\cos x|^{\alpha}$ была интегр. по Лебегу, то

$$\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi}|\cos x|^{\alpha}d\mu(x)\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos x|^{\alpha}dx$$

$$\sup \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} |\cos x|^\alpha dx = \infty$$ т.ч. $(\cos x)^\alpha$ не несобств. интеграл

$\boxed{2}$

$|\ln x|^\alpha$ инт. на а) $[0, \frac{1}{2}]$ б) $[0, 1]$



а) $\alpha \le 0$ ограничено $\Rightarrow$ интегр.

$\alpha > 0$

$\lambda(\{x : |\ln x|^\alpha \ge n\}$

$|\ln x|^\alpha \le \frac{c}{\sqrt{x}}$

$\downarrow$

x^α интегр. на $\alpha > -1$

$\Rightarrow$ $|\ln x|^\alpha$ интегр. на $[0, \frac{1}{2}]$ $\forall \alpha$

б) $[0, 1]$ при $\alpha \ge 0$ интегр.

при $\alpha < 0$ (в окр 1)

$$c(x-1)^\alpha \le |\ln x|^\alpha = |\ln(1+y)|^\alpha \le y^\alpha \le |x-1|^\alpha$$

$y < 0$

$|\ln x|^\alpha$ интегр. на $[0, 1] \Leftrightarrow |x-1|^\alpha$ интегр. на $[0, 1]$

$\Updownarrow$

$\alpha > -1$