

Лекция 18. Теорема Римана.

Теория функций комплексного переменного

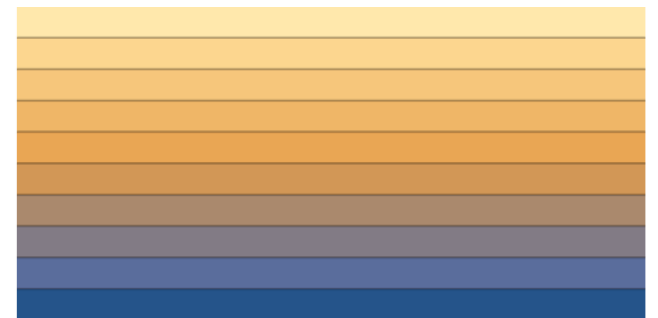
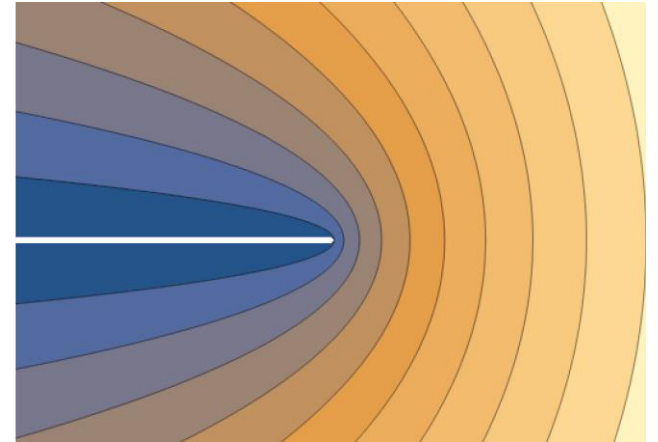
Теорема Римана об отображении

Теорема 12.1 (теорема Римана об отображении). Если $U \subset \mathbb{C}$ — односвязное открытое множество, отличное от всего \mathbb{C} , то U изоморфно единичному кругу $D = \{z : |z| < 1\}$.

- Множества \mathbb{C} и \mathbb{D} конформно неизоморфны.
- Следствие теоремы Римана: любое открытое односвязное подмножество плоскости **гомеоморфно** диску.
- Если U не односвязно, то U негомеоморфно, а значит, и неизоморфно, диску.

Шаг 1: конформное вложение $U \hookrightarrow \mathbb{D}$

- Пусть $c \in \mathbb{C} \setminus U$. Рассмотрим $f_0(z) = \sqrt{z - c}$ и $W = f_0(U)$.
- Имеем $W \cap -W = \emptyset$.
- Выберем открытый диск в $-W$ и отобразим его в $\{|z| > 1\}$.
- Получим **конформное вложение** $f_1: U \rightarrow \mathbb{D}$.
- Пусть \mathcal{F} – множество всех таких вложений. Доказано, что $\mathcal{F} \neq \emptyset$.



Шаг 2: оптимизационная задача

- Фиксируем $a \in U$. Рассмотрим такую функцию $f \in \mathcal{F}$, для которой
$$\|f'(a)\| = \sup_{g \in \mathcal{F}} \|g'(a)\|$$

(норма берется в метрике Пуанкаре).

- Если $f(U) \neq \mathbb{D}$, то $\exists b \in \mathbb{D}: b \notin f(U)$. Будем считать, что $b = 0$.
- Положим $g(z) = \sqrt{f(z)}$. Тогда $\|g'(a)\| > \|f'(a)\|$ по лемме Шварца (теореме Пика), противоречие.
- Таким образом, f – обратимое голоморфное вложение, а значит, конформный изоморфизм.

Шаг 3: существование оптимального отображения

- Семейство \mathcal{F} равномерно непрерывно:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \text{dist}(x, y) < \delta \implies \text{dist}(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
- Метрику Пуанкаре можно заменить евклидовой, так как
$$\text{dist}(z, w) \geq |z - w|$$
- Рассмотрим последовательность $f_n \in \mathcal{F}$, такую, что $\|f'_n(a)\| \rightarrow \sup_{g \in \mathcal{F}} \|g'(a)\|$.
- По теореме Арцела-Асколи, для каждого компакта $K \subset U$ существует подпоследовательность f_{n_m} , равномерно сходящаяся на K .

Теорема Арцела-Асколи

Теорема 12.12 (теорема Арцелá—Асколи). Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, и пусть \mathcal{S} — семейство комплекснозначных непрерывных функций на K , удовлетворяющее следующим условиям:

(1) существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для всех $f \in \mathcal{S}$ и $x \in K$;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|z_1 - z_2| \leq \delta$, где $z_1, z_2 \in K$, следует неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \varepsilon$ для всех $f \in \mathcal{S}$.

Тогда любая последовательность функций из \mathcal{S} содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на K .

Завершение доказательства

- Диагональным методом получаем последовательность $g_n \in \mathcal{F}$, равномерно сходящуюся на компактах и такую, что $\|g'_n(a)\| \rightarrow \sup_{g \in \mathcal{F}} \|g'(a)\|$.
- Предел $f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ является голоморфной функцией (теорема Мореры).
- Также f является вложением (принцип аргумента).

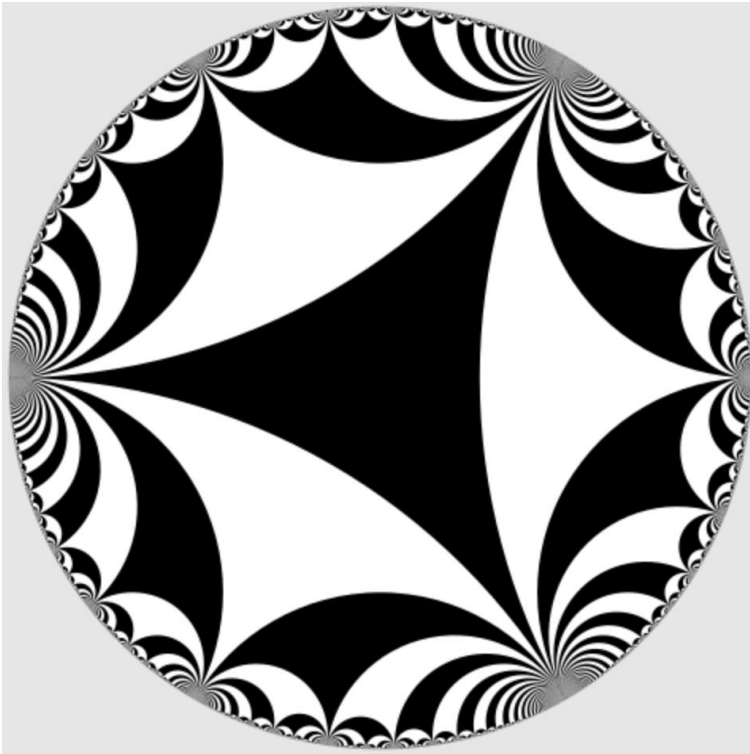
Бернхард Риман (1826 – 1866)

- Немецкий математик, механик и физик.
- Член Берлинской и Парижской академий, Лондонского королевского общества.
- Комплексный анализ, дифференциальная геометрия, математическая физика, арифметика, топология.



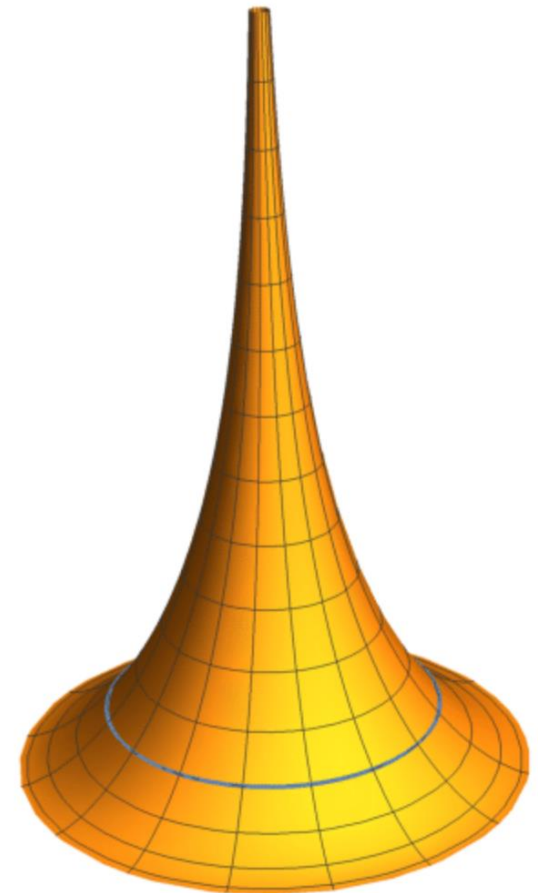
Теорема об униформизации

Теорема. Пусть $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ открыто, причем $|\overline{\mathbb{C}} \setminus V| > 2$. Существует голоморфное накрытие $\pi: \mathbb{D} \rightarrow V$.



Метрика Пуанкаре на $V \subset \overline{\mathbb{C}}$, $|\overline{\mathbb{C}} \setminus V| > 2$

- Голоморфное накрытие $\pi: \mathbb{D} \rightarrow V$ позволяет перенести метрику Пуанкаре на V :
 $\|\pi_*(v)\| := \|v\|$.
- Таким образом, можно говорить про длины кривых и т.д.
- Голоморфное отображение $f: V \rightarrow V$ является либо локальной изометрией, либо сжатием в метрике Пуанкаре.
- Проколы выглядят (относительно метрики Пуанкаре) как каспы.



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Дж. Милнор, «Голоморфная динамика», РиХД 2000.
- <https://wikipedia.org>
- <https://mathworld.wolfram.com/>



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ