Мат. анализ. к2. Семинар №1

Ряды Фурье, коэффициенты Фурье.

1) Тригонометрический ряд Фурье.

Задана функция $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$.
Необходимо представить её в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Справа стоит ряд Фурье функции $f(x)$.
Числа a_n, $n = 0, 1, \ldots$, b_n, $n = 1, 2, \ldots$
называются коэффициентами Фурье.
Задача состоит в нахождении коэффициентов Фурье для заданной ф-ции $f(x)$.

Тригонометрическая система

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots$

Опр1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными, если $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx = 0$.

Опр2. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ортогональной, если любые две функции ортогональны между собой.

Задача 1. Доказать, что тригонометрическая система является ортогональной.

Решение:
1) Проверим, что ф-я 1 ортогональна всем остальным косинусам и синусам:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\left(\sin nx - \sin(-nx)\right) = 0$$

Аналогично $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

2) Проверим ортогональность косинусов.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\, dx = 0 + 0 = 0$$

(Воспользовались пунктом 1) и $n \neq m$).

Аналогично при $n \neq m$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x - \sin(n-m)x]\, dx = 0$$

(В последнем допускается $n = m$).

Задача 2. Найти следующие интегралы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx.$$

Решение:

1) $\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi$ (очевидно).

Для остальных воспользуемся

2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx + \cos(n-n)x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 0 + \frac{2\pi}{2} = \pi$$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(0\cdot x) - \cos(2n x)]dx = \pi$

<u>Ответ:</u> $\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$; $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx = \pi$

Вернемся к задаче нахождения коэффициентов Фурье заданной функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx\right].$$

Воспользуемся задачами 1 и 2 и проинтегрируем левую и правую часть по x (формально, не заботясь о сходимости)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = a_0 \pi$$

Получили: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Теперь умножим равенство на $\cos nx$ и проинтегрируем по $[-\pi, \pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos nx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cdot \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cdot \cos nx\, dx\right].$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx = a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi \cdot a_n$$

Получаем: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\, dx$, $n=1,2,\ldots$

Аналогично: умножаем на $\sin nx$ и $\int_{-\pi}^{\pi}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\sin nx\, dx + b_n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin nx\, dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\, dx = \pi\cdot b_n$$

Получаем: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\, dx$, $n=1,2,\ldots$

В результате получаем формулы для вычисления коэффициентов Фурье:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\, dx, \quad n=1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\, dx, \quad n=1,2,\ldots \end{aligned}}$$

Формулу для a_0 можно объединить с a_n, при $n=0$, т.к. $\cos(0\cdot x)=1$.

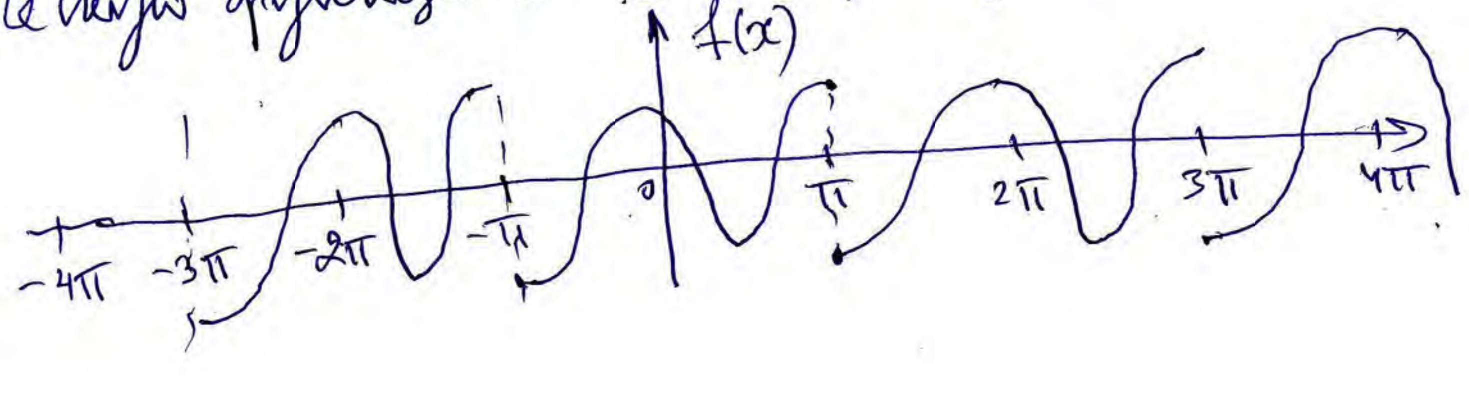
Задача 3. Доказать, что если функция $f(x)$ является а) четной, то все $b_n = 0$, $n=1,2.$ б) нечетной, то все $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$

Решение: а) если $f(x)$ четная, то под интегралом стоит функ. $f(x) \cdot \sin nx$, которая нечетна, т.е. интеграл по $[-\pi, \pi]$ – равен 0.

б) если $f(x)$ нечетная, то под интегралом стоит $f(x) \cdot \cos nx$, которая нечетна, т.е. интеграл равен нулю, $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$

Мы пока оставим в стороне вопрос: в каком смысле понимать равенство функции её ряду Фурье, как ряд сходится и т.д. Это важные вопросы, будут разбираться на лекциях и семинарах позже.

Замечание: Функции $\cos nx$ и $\sin nx$ определены при всех $x \in \mathbb{R}$ и являются периодическими функциями с периодом 2π. Поэтому, ряд Фурье представляет периодическую функцию с периодом 2π.



Задача 4. Разложить в ряд Фурье функцию:

$f(x) = x \;, \; x \in [-\pi, \pi]$.

Решение: Функция $f(x)$ нечетная, поэтому

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\cos nx\,dx = 0 . \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos x}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\,2\pi\cos n\pi = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} .$$

Искомый ряд Фурье:

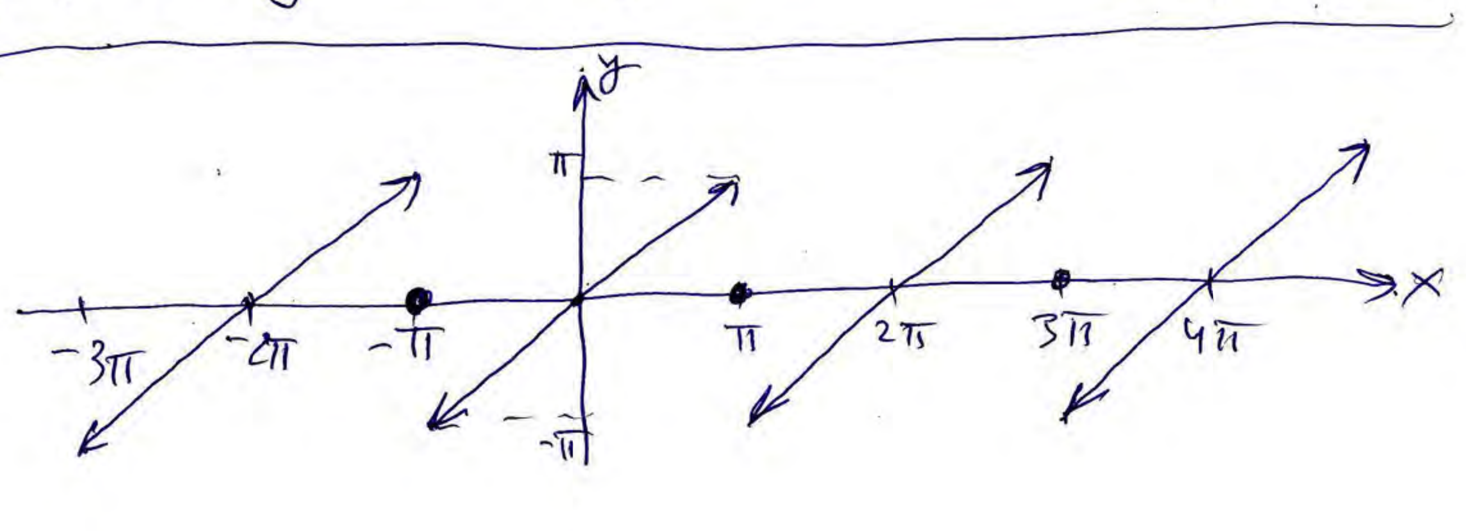
$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

Вопросы: 1) К чему относится ряд Фурье при $x \in \mathbb{R},\ x \notin [-\pi, \pi]$?

2) Почему сходится этот ряд?

3) К чему он сходится в точках $x = \pm\pi; \pm 3\pi$; $x = 0, \pm 2\pi, \ldots$



Задача 5. Найти коэффициенты Фурье функции:

$f(x) = x^2, \; x \in [-\pi, \pi]$.

Решение:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi n} x^2 \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = 0 + \left(\frac{2}{\pi n^2} x \cdot \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \cos n \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = 0 \quad \text{(нечетная ф-я).}$$

Ответ: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx =$

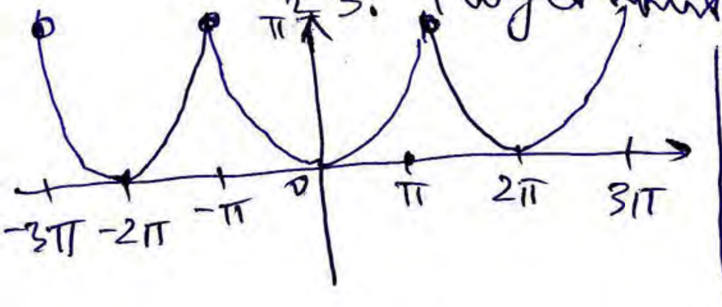
$$= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx.$$

Вопросы: 1. Почему сходится этот ряд?

2. К чему сходится при $x \in \mathbb{R}$?

3. Подставить $x = 0$; $x = \pi$



$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Задача 6. Найти ряды Фурье следующих функций:

а) $\sin^2 x$; б) $\cos^2 x$; в) $\cos^3 x$; г) $\sin^4 x$

Решение: Не надо вычислять интегралы. Воспользоваться следующими тригонометрическими формулами.

а) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

т.е. $a_0 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, остальные a_n и все b_n равны 0.

б) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

в) $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) =$

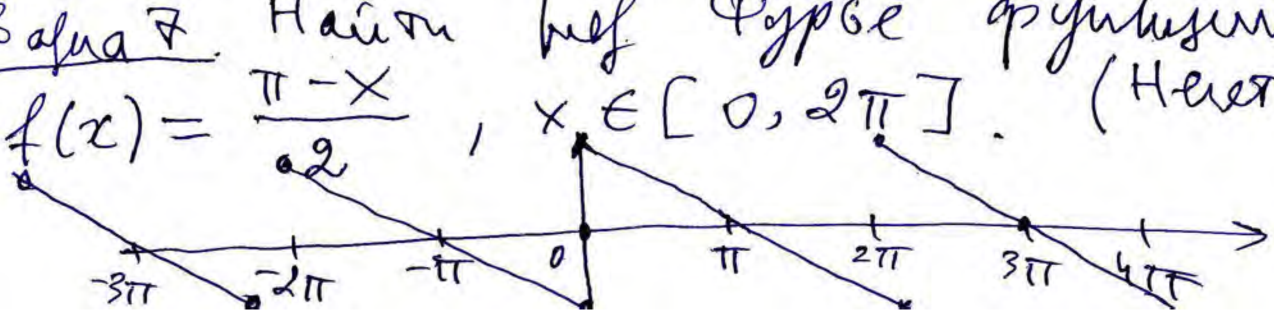
$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x)\right)$

$= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$ $\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)}$

г) $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

Задача 7. Найти ряд Фурье функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$. (Нечетная)



Решение: $a_n = 0$, т.к. $f(x)$ нечетная.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

(т.к. подинтегральная функция является периодической с периодом 2π, то интегралы одинаковы по любому отрезку длины 2π.

$$b_n = \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\,d\cos nx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\,\frac{\pi - x}{2}\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx}_{=0} = \frac{1}{n}$$

Ответ: $\dfrac{\pi - x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

Вопросы: 1) Почему сходится при любом x?

2) Подставить $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

при $x = 0$: $\frac{\pi}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$?! Не сходится к $f(x)$! (точка разрыва).

при $x = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}$

$\sin\frac{\pi n}{2} = 0$ при четных n, а в нечетных $n = 2k+1$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{(-1)^k}$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Получили ряд Лейбница.

Еще раз рассмотрим ряд:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Подставим в него вместо $x \to 2x$ и разделим на 2:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}, \quad x \in [0, \pi]$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad x \in [0, \pi]$$

Вычтем из второго первый ряд:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}. \quad x \in [0, \pi]$$

При $x \in [-\pi, 0]$: Ряд $= -\frac{\pi}{4}$