Матанализ
2 курс
Задачи

6 сентября 2021 г.

Листок 2.

1. Привести пример неборелевской функции f на отрезке, для которой все множества $f^{-1}(c)$ борелевские.

2. Привести пример двух измеримых по Лебегу функций на отрезке, композиция которых неизмерима.

3. Функция f измерима по Лебегу на отрезке $[0,1]$, функция $g\colon [0,1] \to [0,1]$ непрерывна. Верно ли, что измерима композиция $f \circ g$?

4. Выяснить, при каких α и β функция $(\sin x)^\alpha x^\beta$ интегрируема по Лебегу на $[0,1]$.

5. При каких α функция $|x|^\alpha$ интегрируема по шару с центром в нуле в $\mathbb{R}^n$?

6. Измеримые по Лебегу функции $f_n \geq 0$ на отрезке сходятся почти всюду к нулю. Верно ли, что интегралы от $f_n e^{-f_n}$ стремятся к нулю?

7. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 (\sin\sin\sin t)^n\,dt\right)^{1/n}.$$

8. Функция f на $[0,1]\times[0,1]$ такова, что все функции $x \mapsto f(x,t)$ интегрируемы, а все функции $t \mapsto f(x,t)$ непрерывны. Доказать, что функция

$$t \mapsto \int_0^1 f(x,t)\,dx$$

является борелевской.

9. Непрерывные функции f_n на отрезке сходятся поточечно к нулю, а интегралы от f_n^2 равномерно ограничены. Доказать, что интегралы от f_n стремятся к нулю.

10. Доказать, что если две вероятностные борелевские меры на прямой приписывают равные интегралы каждой ограниченной непрерывной функции, то они равны.

Решения

Задача 1

Рассмотрим $f : [0,1] \to [0,2]$ и

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in V \\ x+1 & x \notin V \end{cases}$$

Где V – множество Витали, тогда

$$f(c) = \begin{cases} c & c \in V \\ c-1 & c \notin V \end{cases}$$

И $f^{-1}(c)$ борелевское множество
$f(x)$ измерима относительно $B(\mathbb{R})$, если $f^{-1}(B) \in B(\mathbb{R})$ для любого борелевского B
При $B = [0,1]$, $f^{-1}(B) = V$, следовательно f – неборелевская функция

Задача 2

Пусть $\varphi(x)$ – Канторова лестница, $\psi(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + x)$, $\psi : [0,1] \to [0,1]$ – взаимно однозначная функция, непрерывна и монотонно возрастает, следовательно она измерима по Лебегу и существует обратное отображение с такими же свойствами, а K – Канторово множество.

$$\mu(K) = 0, \ \mu([0,1] \backslash K) = 1$$

$$\mu(\psi([a_1, a_2])) = \mu\left(\frac{\varphi(a_1, a_2) + (a_1, a_2)}{2}\right) = \mu\left(\frac{(a_1, a_2)}{2}\right)$$

$$\mu(\psi(K)) = \mu(\psi([0,1])) - \mu(\psi([0,1]\backslash K)) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Так как $\mu(\psi(K)) \neq 0$, то существует неизмеримое множество $M \subset \psi(K)$

$$\psi^{-1}(M) \subset K$$

$$\mu(K) = 0$$

Следовательно $\psi^{-1}(M)$ измеримо по Лебегу
Пусть $N = \psi^{-1}(M)$, тогда рассмотрим $I_N(\psi^{-1}(x))$, оно неизмеримо, так как $(I_N \circ \psi^{-1})(1) = \psi(I_N^{-1}(1)) = \psi(N) = M$ – неизмеримо

Задача 3

Неверно. Пусть $f(x)$ – Канторова лестница, измерима по Лебегу на $[0,1]$, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+x)$, $g : [0,1] \to [0,1]$ – непрерывна и монотонно возрастает, тогда $f \circ g$ неизмерима по 2 задаче.

Задача 4

Необходимо и достаточно показать сходимость интеграла как несобственного интеграла Римана $\int_0^\varepsilon x^\beta (\sin x)^\alpha + \int_\varepsilon^1 x^\beta (\sin x)^\alpha \quad \forall \varepsilon \in [0,1]$ вторая часть интегрируема так как непрерывна. Тогда заметим, что $(\sin x)^\alpha x^\beta = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha x^{\alpha+\beta}$ и $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, поэтому необходим и достаточен факт того, что $x^{\alpha+\beta}$ интегрируема, а это выполнено при $\alpha + \beta > -1$

Задача 5

Заметим, что при $\alpha \geqslant 0$, $|x|^\alpha$ непрерывна и ограничена на шаре, поэтому интегрируема.
$\int_{B_r(0)} |x|^\alpha d\mu$ существует $\leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(x : \ |x|^\alpha \geqslant n)$ сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(x : |x|^\alpha \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x : \frac{1}{|x|^{-\alpha}} \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x : |x|^{-\alpha} \leqslant \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x : |x| \leqslant \left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{k}{\alpha}} c$$

Так как объем шара радиуса r это $r^k c$, где c – объем единичного шара
То есть интегрируемость равносильна сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{k}{\alpha}}$, то есть $-\frac{k}{\alpha} > 1 \Leftrightarrow k > -\alpha$

Задача 6

Заметим, что $f_n \to 0$, $e^{f_n} \to 1$, следовательно $\frac{f_n}{e^{f_n}} \to 0$ почти всюду поточечно.
Тогда заметим, что

$$\frac{f_n(x)}{e^{f_n(x)}} = \frac{f_n(x)}{1 + f_n(x) + \frac{f_n^2(x)}{2} + \dots} \leqslant \frac{f_n(x)}{f_n(x)} = 1$$

Функция $\Phi \cong 1$ интегрируема на отрезке, следовательно Φ – интегрирующая мажоранта.
По теореме Лебега о мажорированной сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} \int_x f_n e^{-f_n} = 0$

Задача 7

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 (\sin\sin\sin t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}}$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} ||f||_n = ||f||_\infty$ на $X : \mu(x) = 1$
Для начала, покажем что $||f||_p$ возрастает, запишем неравенство Гельдера:

$$\int_x |fg| d\mu \leqslant (\int_x |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_x |g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}$$
$$f \in l^p(\mu)$$
$$g \in l^g(\mu)$$
$$p \in (1, \infty)$$
$$q = \frac{p}{p-1}$$

По определению $||h||_n = \int(|h|^n d\mu)^{\frac{1}{n}}$, то есть

$$||fg||_1 \leqslant ||f||_p ||g||_q$$
$$|||f|^n \cdot 1||_1 \leqslant |||f|^n||_p \cdot ||1||_q$$
$$\int_x |f|^n d\mu \leqslant (\int_x |f|^{np} d\mu)^{\frac{1}{p}}$$
$$(\int_x |f|^n d\mu)^{\frac{1}{n}} \leqslant (\int_x |f|^{np} d\mu)^{\frac{1}{np}}$$

То есть $||f||_n \leqslant ||f||_{np}$, откуда следует, что при $k \geqslant n :\ ||f||_k \geqslant ||f||_n$

Теперь покажем, что $||f||_p \leqslant ||f||_\infty$
$(\int_x |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int |f| d\mu$ – неравенство Йенсена, из определения интеграла Лебега следует, что

$$|\int_x f d\mu| \leqslant \sup_x |f(x)| \mu(x) = \sup_x |f(x)|$$
$$(\int_x |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sup_x |f(x)|$$
$$||f||_\infty = \inf\{c \geqslant 0 :\ |f(x)| \leqslant c \text{ п.в. на } x\}$$
$$(\int_x |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = ||f||_p \leqslant ||f||_\infty = \sup_x |f(x)|$$
$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p \leqslant ||f||_\infty$$

Предположим, что $\lim\limits_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty - \varepsilon$
Обозначим $A = \{x :\ |f| \geqslant ||f||_\infty - \varepsilon\}$

Пусть $\mu(A) = 0$

$$||f||_p = (\int_x |f|^p)^{\frac{1}{p}} = (\int_{x/A} (||f||_\infty - \varepsilon)^p)^{\frac{1}{p}} = ||f||_\infty - \varepsilon$$

Следовательно $\mu(A) > 0$

$$\int_A |f|^p d\mu(A) > \int_A (||f||_\infty - \varepsilon)^p d\mu(A) = (||f||_\infty - \varepsilon)^p \mu(A)$$
$$(\mu(A))^{\frac{1}{p}} (||f||_\infty) < ||f||_p$$

$p \to +\infty$, следовательно $||f||_\infty - \varepsilon < \lim\limits_{p\to\infty} ||f||_p$ противоречие
Следовательно

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty \text{ на } X : \mu(x) = 1$$
$$f = \sin\sin\sin t \qquad X = [0, 1]$$
$$\lim_{n\to\infty} (\int_0^1 (\sin\sin\sin t)^n dt)^{\frac{1}{n}} = \sin\sin\sin 1$$

Задача 8

Пусть $f_n(x,t) := \min(f(x,t), n)$

(1) Рассмотрим $x \to f_n(x,t)$

$$\varphi(x) = c_1 I_{A_1}(x) + \ldots + c_m I_{A_m}(x) - \text{простая}, \ \leqslant f$$
$$A = \{x \in [0,1] \mid f(x,t) > n\}$$
$$f_n(A,t) = n, \ f_n([0,1]\backslash A, t) = f([0,1]\backslash A, t)$$
$$\varphi_n(x) = c_1 \cdot I_{A_1\backslash A}(x) + \ldots + c_m I_{A_m\backslash A}(x) + n I_A(x)$$
$$\varphi_n(A) = n, \ \varphi_n([0,1]\backslash A) = \varphi(x)$$
$$\int_{[0,1]} \varphi_n d\mu = \int_A \varphi_n d\mu + \int_{[0,1]\backslash A} \varphi_n d\mu = n\mu(A) + \int_{[0,1]\backslash A} \varphi d\mu$$

$\sup \int \varphi$ конечен, следовательно $\sup \int \varphi_n$ тоже, откуда $x \to f_n(x,t)$ интегрируемо

(2) Рассмотрим $t \to f_n(x,t)$
Если $f_n(x,t) < n$, то $f_n(x,t) = f(x,t)$. Так как $t \to f(x,t)$ непрерывно, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ s \in (t-\delta, t+\delta) \quad f(x,s) \in (f(x,s) - \varepsilon, f(x,t) + \varepsilon)$$

При ε, таком что $f(x,t) + \varepsilon < n, \ f_n(x,s) = f(x,s) \ \forall s \in (t-\delta, t+\delta)$
Если $f_n(x,t) = n$, то $f(x,t) \geqslant$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ s \in (t-\delta, t+\delta) \quad f(x,s) \in (f(x,s) - \varepsilon, f(x,t) + \varepsilon)$$

При этом, если $f(x,s) \geqslant n$, то $f_n(x,s) = n$, иначе $f_n(x,s) = f(x,s)$. То есть $f_n(x,s)$ всегда попадает в $[f(x,t) - \varepsilon, n]$. То есть $f_n(x,s)$ попадает в $(n - \varepsilon, n + \varepsilon)$, а следовательно $t \to f_n(x,t)$ непрерывно

(3) Покажем, что $t \to \int_0^1 f_n(x,t)dx$ непрерывно, для этого докажем секвенциальную непрерывность.
Из $t_k \to t_0$ следует что $f_n(x,t_k) \to f_n(x,t_0)$, так как f_n непрерывно по t
Тогда по теореме Лебега о мажорирующей сходимости:

$$\int_0^1 f_n(x,t_0) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x,t_k)$$
$$\int_0^1 f_n(x,t_k) \to \int_0^1 f_n(x,t_0)$$

(4) Значит $t \to \int_0^1 f_n(x,t)$ – борелевская, следовательно $t \to \lim \int f_n(x,t)$ тоже борелевская
По теореме Лебега $\int_0^1 f_n(x,t) = \lim \int f_n(x,t)$, то есть $t \to \int_0^1 f(x,t)dx$ – борелевская.

Задача 9

$f_n \to 0$ поточечно, f_n непрерывно, следовательно по теореме Егорова $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E: \ \mu(E) < \varepsilon, \ f_n \rightrightarrows 0$ на $(X \backslash E)$
(*) Заметим, что на E сходимость равномерная по условию $\exists M > 0: \ \forall n \ \int_X f_n^2 d\mu \leqslant M$

$$\int_X f_n = \int_E f_n + \int_{X \backslash E} f_n$$

$$\int_E f_n = \int_X I_E f_n \leqslant \left(\int_X I_E^2)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\int_X f_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\mu(E) \cdot M)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\varepsilon M)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_E f_n \to 0$$

$$\int_{X \backslash E} f_n \to 0 \text{ так как } (*)$$

$$\int_X f_n \to 0$$

Задача 10

Вспомним задачу 9 из прошлого листка, она говорит о том, что если две борелевские меры принимают одинаковые значения на отрезках отрезка $[0,1]$, то они равны, то есть мы хотим показать, что в нашей задаче мера на каждом отрезке равна, чтобы воспользоваться 9 задачей.
Заметим, что если функция ограничена и непрерывна, то она измерима.

$$\int_x f d\mu = \sup_{\varphi} \int_x \varphi d\mu$$

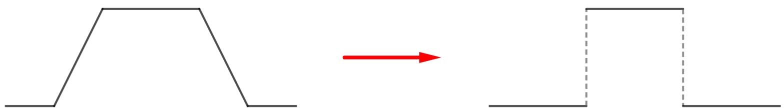
φ – простые функции $\varphi(x) = c_1 I_{A_1}(x) + \dots c_n I_{A_n}(x)$

$$\int_x \varphi d\mu = \int \sum_{i=1}^{\infty} c_i I_{A_i}(x) d\mu$$

Тогда достаточно доказать, что

$$\int I_{A_i}(x) d\mu_1 = \int I_{A_i}(x) d\mu_2 \qquad \forall A_i = [a,b]$$

Для каждого индикатора построим последовательность непрерывных ограниченных функций



Тогда

$$\int I_{A_i} d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_x f_n d\mu_1$$

Так как f_i непрерывна и ограничена, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_x f_n d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_x f_n d\mu_2 = \int I_{A_i} d\mu_2$$

$$\int I_{A_i}(x) d\mu_1 = \int I_{A_i}(x) d\mu_2$$