Числа Гурвица

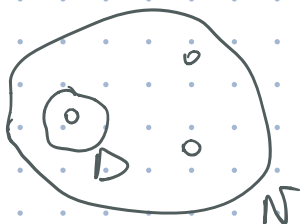В прошлый раз — неразв. накрытие

Главный пример $z \mapsto z^n$

проколотый диск
у точки y_0 n прообразов

расположены в верш.
правильного n-угольника

Обход вокруг прокола — поворот n-угольника на $\frac{2\pi}{n} \iff$ циклическая перестановка прообразов y_0

Разветвленное накрытие

$p: M \to N$ накрытие N — поверхность с проколами

Ограничение p на D (прокол) имеет вид $z \mapsto z^{n_i}$

Пример Разветвл. накрытие явл. накрытием, только если все $n_i = 1$

n_i — ДЛИНЫ ЦИКЛОВ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПЕРЕСТАНОВОК

Формула Римана-Гурвица

$p: M \to N$

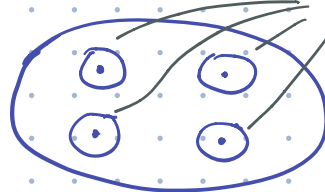$$\chi(M) = n \cdot (\chi(N) - k) + m_1 + \dots + m_k$$

СТЕПЕНЬ (ЧИСЛО ЛИСТОВ НАКРЫТИЯ)

КОЛ-ВО ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ

КОЛ-ВО ЦИКЛОВ В ЭТИХ ТОЧКАХ ВЕТВЛЕНИЯ

$N = N_A \cup N_B$

N_A — ОБЪЕД. ЗАМКНУТЫХ ДИСКОВ

N_B — ВСЁ ОСТАЛЬНОЕ

○ $\chi(N) = \chi(N_A) + \chi(N_B) - \chi(N_A \cap N_B) = \chi(N_A) + \chi(N_B)$

ОКР-ТИ $\Rightarrow 0$

АНАЛОГИЧНО $M = M_A \cup M_B$ $\qquad \chi(M) = \chi(M_A) + \chi(M_B)$

○ $\chi(M_B) = n \chi(N_B)$ — ПО УТВ. ДЛЯ НЕРАЗВЕТВЛЁННЫХ НАКРЫТИЙ

$$\chi(M) - \chi(M_A) = n \left(\chi(N) - \chi(N_A) \right)$$
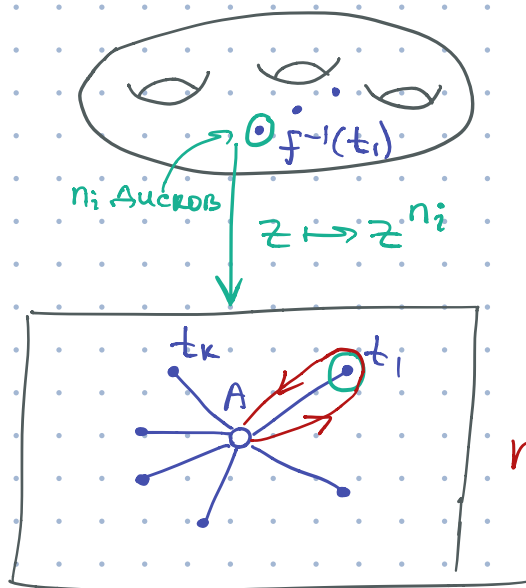
N_A — k КРУГОВ $\Rightarrow \chi(N_A) = k$

$\boxed{2 - 2g = n(2 - k) + \sum_{i=1}^{k} m_i}$

$M_A = m_1 + \dots + m_k$ КРУГОВ $\Rightarrow$

$$\chi(M_A) = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

$$|f^{-1}(t_1)| < n$$

$$|f^{-1}(A)| = n$$

S^2 СФЕРА

$$n = n_1 + \dots + n_{m_1}$$

• — ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ

0 — ОБЩАЯ ТОЧКА

НАД ТОЧКОЙ t_1 m_1 ДИСКОВ И В КАЖДОМ ДИСКЕ ОТОБР. ИМЕЕТ ВИД

$$z \longrightarrow z^{n_i}$$

$$i = 1, \dots, m_1$$

С ТОЧНОСТЬЮ ДО СОХРАНЯЮЩЕГО ОРИЕНТАЦИЮ ГОМЕОМОРФИЗМА

ЗАДАЧА Сколько классов изоморфизма накрытий поверхности рода g сферу S^2 с ветвлениями в данных точках $t_1, \dots, t_k$ с данными ветвления, т.е. знаем перестановки $N^1, \dots, N^k$

Каждое накрытие считаем с весом

Опр.
$$h_{k, N^1, \dots, N^k} = \sum_{f: M \to S^2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}\, f|}$$

Пример $\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1 = id$

ПРОСТОЕ ЧИСЛО ГУРВИЦА $\quad \sigma = \tau_m \circ \ldots \circ \tau_1$

$\mathcal{N}$ – ЦИКЛ. ТИП

Т.Е. У НАС $\boxed{m+1}$ ТОЧКА ВЕТВЛЕНИЯ

Т.К. $\tau_m \circ \ldots \circ \tau_1 \circ \sigma^{-1} = id$

↖ ТАКОЙ ЖЕ
ЦИКЛ. ТИП.

$\mathcal{N}^1 = \mathcal{N}, \quad \mathcal{N}^2 = \ldots = \mathcal{N}^{m+1}$ ТРАНСПОЗИЦИИ

(КАЖДАЯ ПЕРЕСТАНОВКА ОТВЕЧАЕТ ТОЧКЕ
ВЕТВЛЕНИЯ)

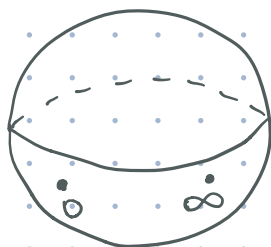НЕСВЯЗНОЕ ЧИСЛО ГУРВИЦА ОЗН., ЧТО У НАС

НЕСВЯЗНОЕ НАКРЫТИЕ

$n-1 \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$
$\quad\quad\quad \# \mathcal{N}_{..}$
$\quad\quad\quad \# \mathcal{N}_2$
$\quad\quad\quad \# \mathcal{N}_1$

$\underbrace{\overset{1}{\cdot} \ldots \overset{m}{\cdot}}_{m \text{ ШТУК}} \quad \overset{m+1}{\cdot}$

ПРИМЕР $\quad z \to z^2$

У ТОЧЕК $\neq 0, \infty$
2 ПРООБРАЗА

У 0 И ∞ 1 ПРООБРАЗ

$2 - 2g = 2(\underbrace{2 - 2 \cdot 0 - 2}_{\chi(S^2)}) + 1 + 1$
$\quad\quad\quad\quad \overset{\|}{k} \quad \overset{\|}{m_1} \quad \overset{\|}{m_2}$

$\underset{g}{\Downarrow}$

$g = 0$

$$h_{1,2'} = \frac{1}{2}$$

$$\underset{m}{\parallel} \quad \underset{N}{\shortmid\shortmid}$$

↖ 2 АВТОМОРФИЗМА

Пример (детские рисунки)

$$\rho_0 \circ \rho_{\bullet} \circ \rho_\infty = id$$

ПРООБРАЗ