№4 $\vec{F} = (\rho f(\varphi),\ g(\rho)\cos^3\varphi)$

$\partial_\varphi F_\rho = \partial_\rho (\rho F_\varphi)$

$\partial_\varphi f(\varphi) = \cos^3\varphi\, g(\rho) + \partial_\rho g \cdot \rho \cos^3\varphi = \cos^3\varphi \left(g + \frac{dg}{d\rho}\rho \right)$

$\frac{df}{d\varphi} = k\cos^3\varphi;\ \frac{dg}{d\rho}\cdot\rho = k$

$f(\varphi) = k\int \cos^3\varphi\, d\varphi = k\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} + c\right)$

$g(\rho)\cdot\rho = k\int 1\, d\rho = k\rho + c \Rightarrow g = k + \frac{c}{\rho}$

$F_\rho = k\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} + c_1\right)\rho,\quad F_\varphi = \left(k + \frac{c_2}{\rho}\right)\cos^3\varphi$

чтобы не было сингулярности, $c_2 = 0$

б) $\vec{\nabla} = (\partial_\rho, \frac{1}{\rho}\partial_\varphi)$

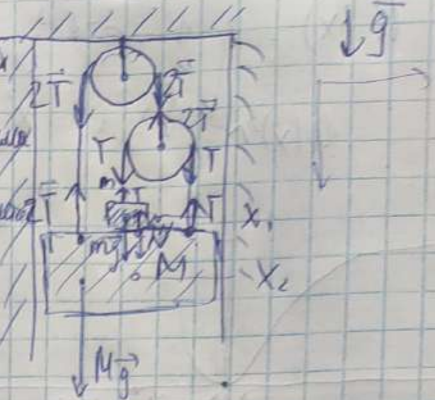
$-\partial_\rho U = k\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} + c_1\right)\rho \Rightarrow U = -k\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} + c_1\right)\frac{\rho^2}{2} - c(\varphi)$

$-\frac{1}{\rho}\partial_\varphi U = -\frac{1}{\rho}\left(\left(-k\cos\varphi - \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{3}\right)\frac{\rho^2}{2} + c_\varphi'(\varphi)\right) = k\cos^3\varphi + \frac{c_2}{\rho}\cos^3\varphi$

...

№ 1 $\begin{cases} m\ddot{x}_1 = mg - T - N \\ M\ddot{x}_2 = Mg - 3T + N \end{cases}$

Число степеней свободы − 1
x_1 и x_2 зависимы
по нити
восстанавливаем положение системы



а) В состоянии покоя

$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$+\begin{array}{l} mg = T + N \\ Mg = 3T - N \end{array}$$

$(M+m)g = 4T \Rightarrow M = \frac{4T}{g} - m$ грузик m не двигается при условии $T < mg$ (т.к. $N \geq 0$)

$\frac{(M+m)g}{4} < mg$ $Mg < 3mg$ $M < 3m$

б) $\frac{M}{2}\ddot{x}_1 = \frac{M}{2}g - T - N$ $x_1 = x_2 + c$ (расстояние между центрами блоков)

$M\ddot{x}_2 = Mg - 3T + N$ $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = x$

$\begin{cases} \frac{Mx}{2} = \frac{M}{2}g - T - N \\ Mx = Mg - 3T + N \end{cases}$ $Mg - 3T + N = Mg - 2T - 2N$

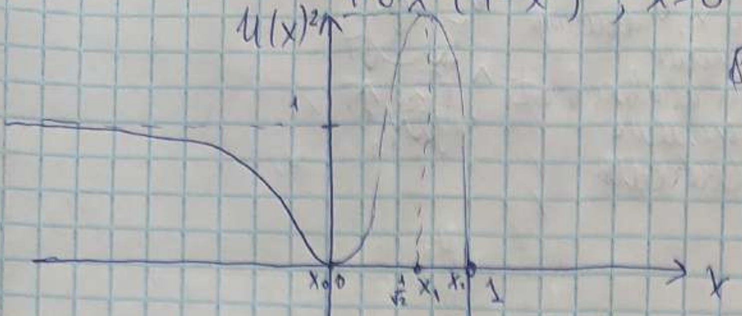
$3N = T$

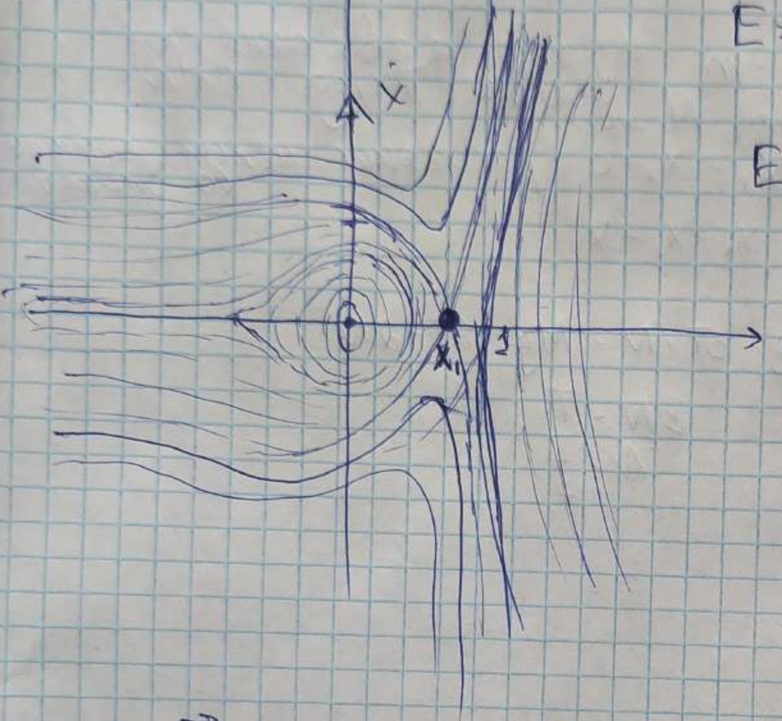
$N = \frac{T}{3}$

№ 2 $U(x) = \begin{cases} 1 - e^{-8x^2}, & x \le 0 \\ 8x^2(1-x^2), & x > 0 \end{cases}$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$$

$$(8x^2 - 8x^4)' = 16x - 32x^3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$





E = 0 : • — 2 кривые

E = 1 : — 2 кривые

E = 2 — 5 кривых

№ 3 $\vec{F} = (2xy + y,\ -2\alpha yz + x^2 + x,\ \alpha z - y^2)$

б) Потенциальность $\vec{F}$: $\begin{cases} \partial_x F_y = \partial_y F_x \\ \partial_y F_z = \partial_z F_y \\ \partial_z F_x = \partial_x F_z \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} 2x+1 = 2x+1 \\ -2y = -2\alpha y \\ 0 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{\alpha = 1}$

$\partial_x U = -F_x = -2xy - y \Rightarrow U = -x^2 y - yx + C_1(y,z)$

$\partial_y U = -F_y = 2yz - x^2 - x \qquad -x^2 - x + C'_{1y} = 2yz - x^2 - x \quad C_1 = y^2 z + C_2(z)$

$\partial_z U = -F_z = y^2 - z \qquad y^2 + C_2' = y^2 - z \quad C_2' = -z \quad C_2 = -\frac{z^2}{2} + c$

$U(x,y,z) = -x^2 y - yx + y^2 z - \frac{z^2}{2} + c \qquad c$ − const

а) $x = y,\ z = y^2 \qquad (t, t, t^2) \qquad d\vec{r} = (dt, dt, 2t\,dt)$

от $(0,0,0)$ до $(1,1,1)$ $\quad A_\gamma = \int_0^1 ((2xy + y)dt + (-2\alpha yz + x^2 + x)dt + 2t(\alpha z - y^2)dt)$

$= \int_0^1 (2t^2 + t - 2\alpha t^3 + t^2 + t + 2t^3\alpha - 2t^3)dt = \int_0^1 (3t^2 + 2t - 2t^3)dt = t^3 + t^2 - \frac{t^4}{2}\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{2}$