Механика 2021

Контрольная работа 1

Вариант 2.

1. Кабина лифта массы M может без трения двигаться в вертикальном направлении в лифтовой шахте. Кабина соединена с потолком шахты системой блоков (см. рис. 1). Груз m может свободно двигаться в вертикальном направлении. Все нити невесомы, нерастяжимы и всегда натянуты (не сминаются). Массой блоков и трением в осях можно пренебречь.

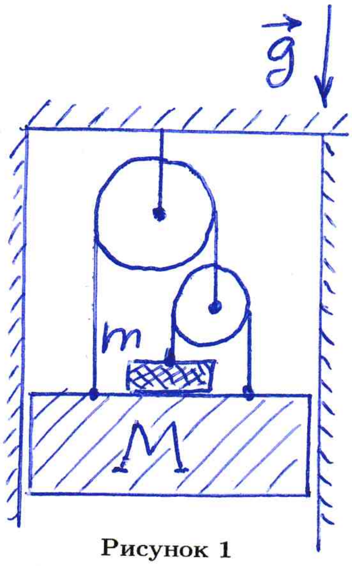

Рисунок 1

а) При каких значениях масс m и M кабина лифта может находиться в состоянии покоя?

б) Найдите величину силы реакции N, действующей на груз со стороны кабины лифта, при $m = M$.

2. Материальная точка движется вдоль прямой Ox в поле потенциальной силы, потенциальная энергия $U(x)$ которой дается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} e^{-x^2} - 1 & x \le 0 \\ \frac{1}{3}x^2(x-3) & x > 0. \end{cases}$$

а) Нарисуйте качественный фазовый портрет этой одномерной механической системы.

б) Укажите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям полной механической энергии $E = -1$, $E = 1/2$ и $E = 0$.

3. Силовое поле $\vec{F}$ задано в декартовых прямоугольных координатах (x, y, z) пространства $\mathbb{R}^3$ следующими выражениями своих компонент:

$$F_x = yz - y^2 + \alpha z, \qquad F_y = xz - 2\alpha xy, \qquad F_z = xy + \alpha x + z,$$

где α — вещественный числовой параметр.

а) Найдите работу силы $\vec{F}$ вдоль отрезка кривой, заданной уравнениями

$$x = y^2, \quad z = y$$

от начальной точки $(0, 0, 0)$ до конечной точки $(1, 1, 1)$.

б) Определите значение параметра α, при котором сила $\vec{F}$ потенциальна, и найдите выражение для соответствующей потенциальной энергии $U(x, y, z)$.

4. Компоненты силы $\vec{F}$ заданы в полярных координатах (ρ, ϕ) пространства $\mathbb{R}^2$ следующими выражениями:

$$F_\rho = \rho(\rho + 1)f(\phi), \qquad F_\phi = g(\rho)\cos\phi\sin^3\phi,$$

где $f(\phi)$ и $g(\rho)$ некоторые дифференцируемые функции своих аргументов.

а) Определите наиболее общий вид функций $f(\phi)$ и $g(\rho)$, при которых сила $\vec{F}$ потенциальна и не имеет сингулярности в начале координат $\rho = 0$.

б) Найдите вид соответствующей потенциальной энергии $U(\rho, \phi)$.