Семинар 6.

Задача 1. 1) Докажите, что если A_1 и B_1 - две различные фиксированные точки на конике, построенной по Штейнеру посредством проективного соответствия между двумя пучками прямых с центрами A и B на C, отличными от A_1 и B_1, то отображение $f : \check{A}_1 \to \check{B}_1 : \ A_1X \mapsto B_1X, \quad X \in C$, является проективным.
2) Докажите, что произвольная прямая на проективной плоскости пересекает конику по Штейнеру не более, чем в двух точках.
3) Назовем касательной прямой в точке $x \in X$ к конике X по Штейнеру такую прямую l в плоскости, которая имеет с X единственную общую точку x. Докажите, что если коника по Штейнеру X получается посредством проективного отображения $f : \ \check{A} \to \check{B}$, то прямые $l = f(AB)$ и $m = f^{-1}(BA)$ - касательные к конике X в точках A и B соответственно.

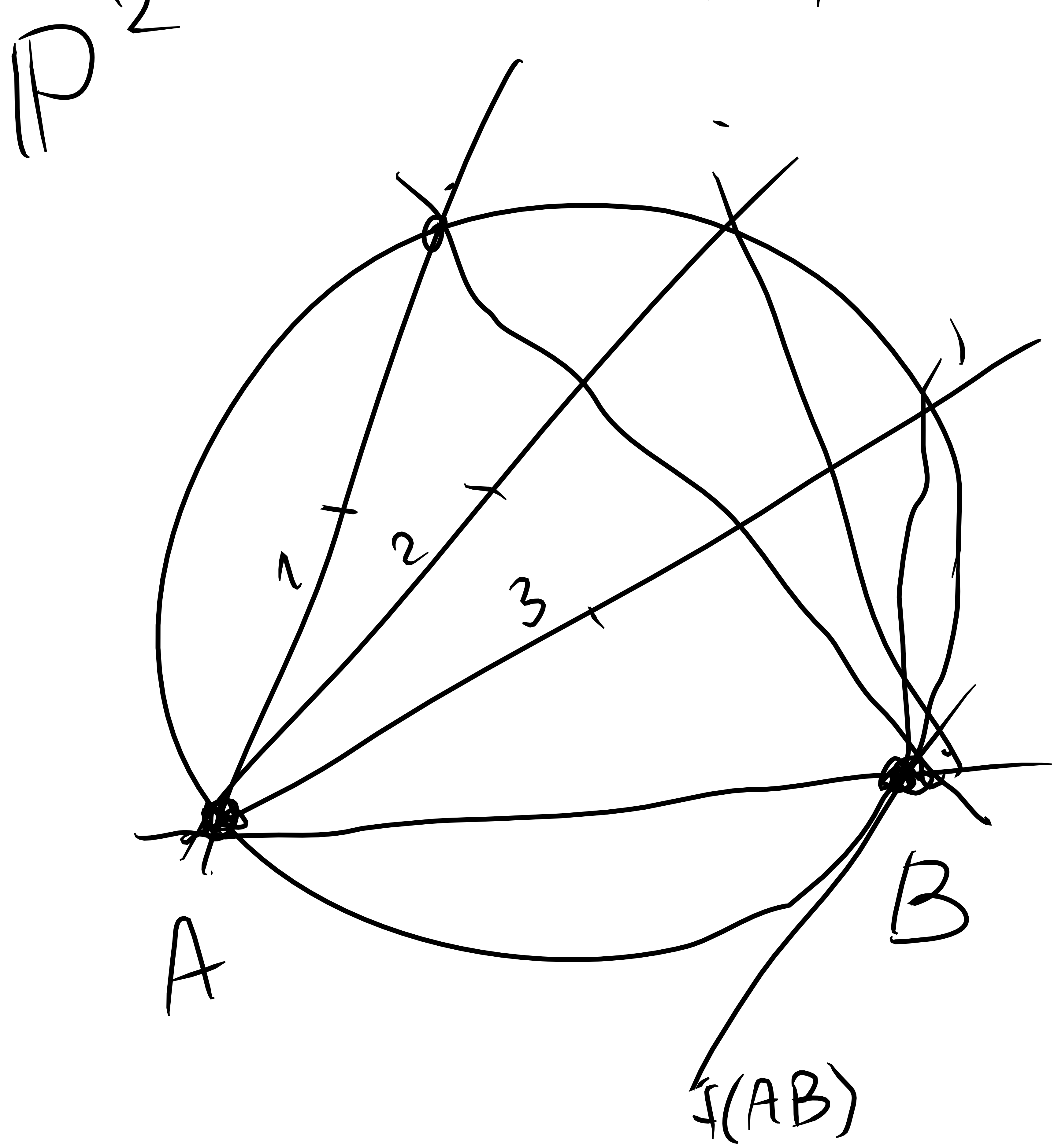
Задача 2. 1) Докажите, что любая невырожденная коника C по Штейнеру задается однородным уравнением степени 2 в однородных координатах $(x_0 : x_1 \ : x_2)$ в $\mathbb{P}^2$. (Для вырожденной коники C по Штейнеру аналогичное утверждение прямо следует из ответа в задаче 3.3 к семинару 5.)
2) (Обратная задача.) Докажите, что если кривая C задается однородным уравнением степени 2 в однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\mathbb{P}^2$ и не содержит прямых, то C является коникой по Штейнеру, то есть если A и B — две различные точки кривой C, то существует отображение $f : \check{A} \to \check{B}$, заданное тем, что $AX \mapsto BX$, где $X \in C$, является проективным.

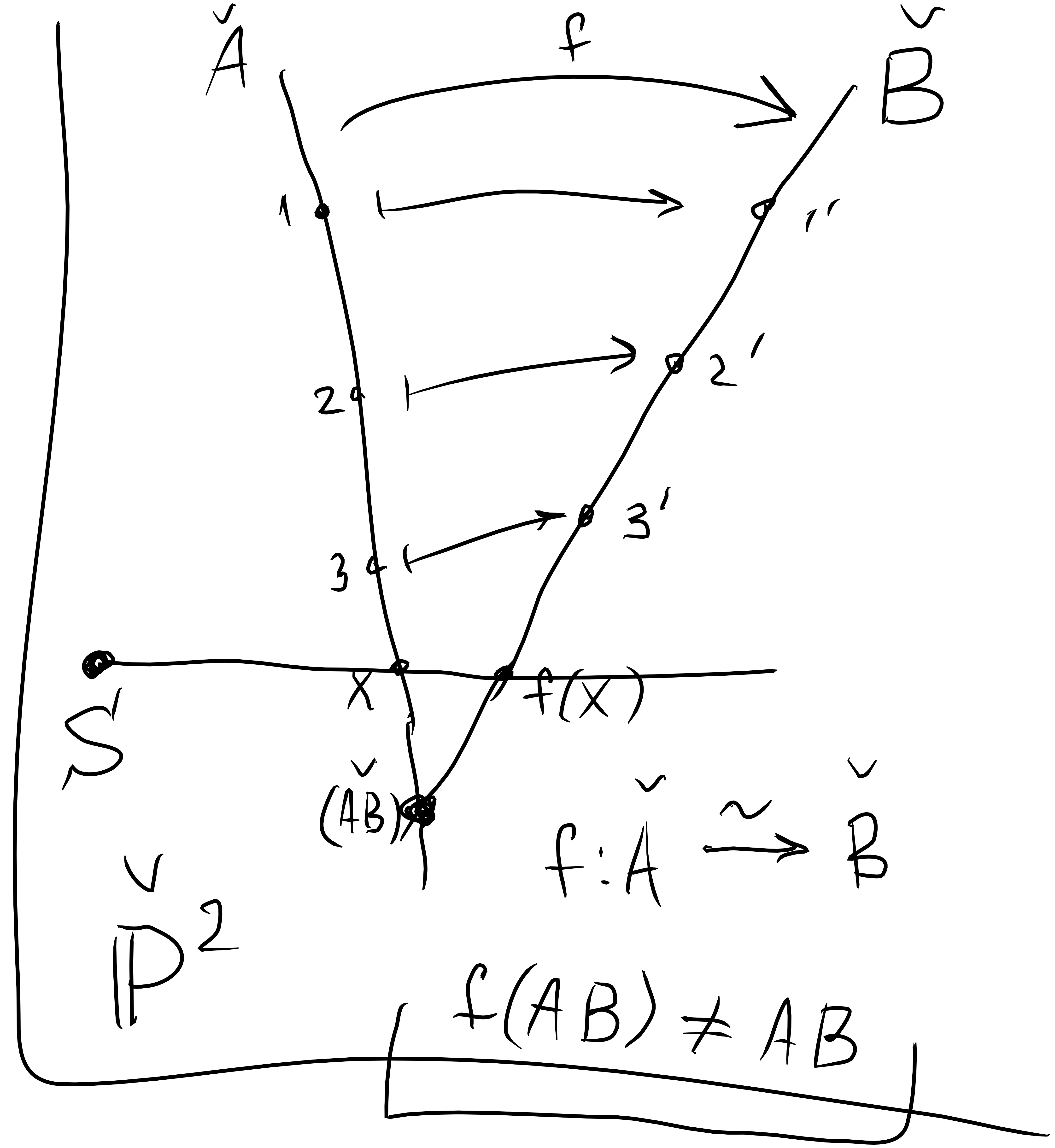
Задача 3. Докажите, что любая невырожденная коника C по Штейнеру задается как множество таких точек $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\mathbb{P}^2$, что $x_0 = F_0(t_0 : t_1), \ \ x_1 = F_1(t_0 : t_1)$, $x_2 = F_2(t_0 : t_1)$,где F_0, F_1, F_2 — однородные формы степени 2 от однородных координат $(t_0 : t_1)$ на некоторой проективной прямой, не имеющие общего делителя. (Подсказка: в качестве $(t_0 : t_1)$ удобно взять координаты на прямой $\check{A}$, где $A \in C$.)
Замечание: в аффинных координатах $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$, $t = t_1/t_0$, эти формулы превращаются в параметризацию кривой C рациональными функциями от t: $x = f_1(t)/f_0(t)$, $y = f_2(t)/f_0(t)$, где $f_i(t)$ — многочлены степени не выше второй (и не все линейные), не имеющие общего корня.

Задача 4. 1) Докажите, что в условиях предыдущей задачи отображение $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, сопоставляющее $(t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1$ точку $F_0(t_0 : t_1) : F_1(t_0 : t_1) : F_2(t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^{\,2}$, является биекцией между $\mathbb{P}^1$ и C.
2) Докажите, что, наоборот, если кривая C допускает параметризацию $x_i = F_i(t_0 : t_1)$ из предыдущей задачи, то она является коникой по Штейнеру.
Указание: в задачах 3 и 4.2) удобно выбрать проективные координаты так, чтобы точки A и B имели координаты $(0 : 0 : 1)$ и $(0 : 1 : 0)$.

Задача 5. (Теорема Безу для коники) Докажите, что если на проективной плоскости кривая X степени d (т.е. заданная однородным уравнением степени d) имеет с коникой C более $2d$ общих точек, то $C \subset X$. (*Указание*: воспользуйтесь задачей 3.)

$$C = \bigcup_{a \in \check{A}} a \cap f(a)$$





$$f(AB) = AB \Longrightarrow a \cap f(a) \in \check{S} \Rightarrow C = \check{S}$$

$$\Downarrow$$

$$C = \check{S} \cup (AB)$$

$$(AB) \cap (AB) = (AB)$$