

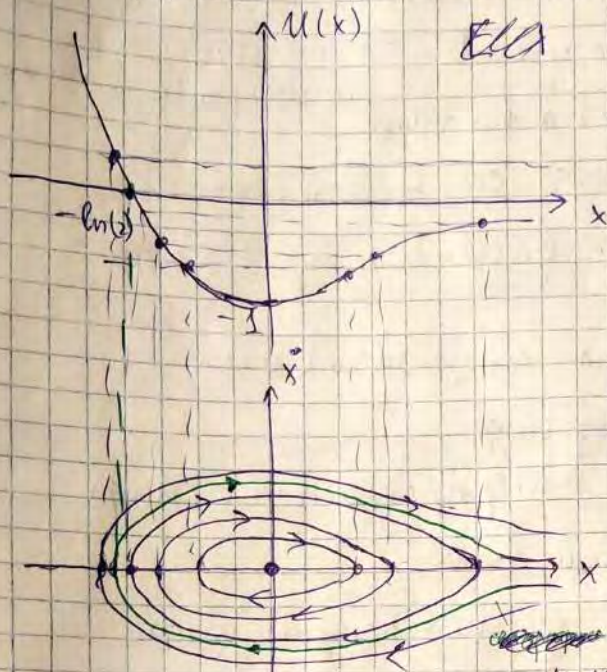
Механика. Домашнее задание №2. Вружина Ксения

№1 $U(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$

$U(x) = 0 \Rightarrow e^{-2x} = 2e^{-x} \Rightarrow x = -\ln(2)$

$U'(x) = 0 \Rightarrow -2e^{-2x} + 2e^{-x} = 0$
 $x = 0$

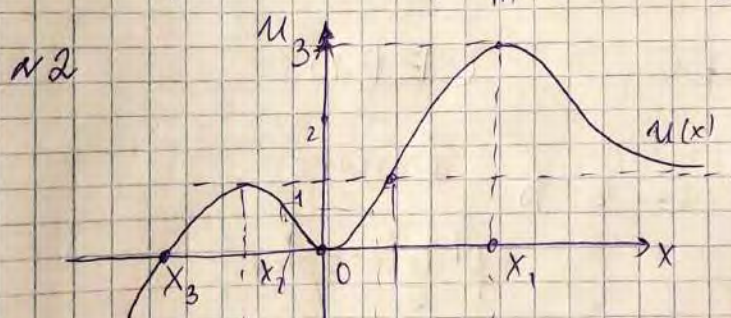
$U(0) = -1$ - минимум



в точке 0 - минимум \Rightarrow фокус на фазовом портрете
Если $E < -1$, то нет кривых
При $-1 < E < 0$ - замкнутые траектории типа эллипс (несимметричное) вокруг фокуса
При $E > 0$ траектория размазывается

и уходит на $+\infty$ по x .

и при $E = 0$ $\dot{x} = \sqrt{\frac{2E U(x)}{m}}$ на $+\infty$ или стремится к $\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$



$E = 0, 1, 2, 3$

в 0 - точка локального минимума (фокус)

В x_1 и x_3 - точки локального максимума - седловые точки

1) $E = 0$ - фокус и траектории всего 2 штуки слева

2) $E < 1$ точка x_2 , зеленые

сепаратрисы, соответствующие

точке x_2 (всего 3 штуки - эллипс и две ветви от "ка" безопределенности) - 4 линии

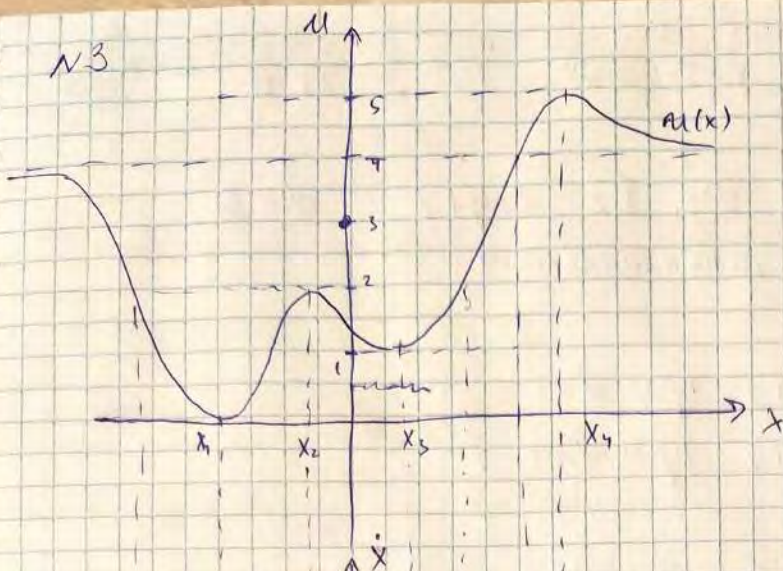
3) $E = 2$ траектории над первой сепаратрисой (слева, справа) параболы на боку (с ассиметричностью, но факту не параболы, но это они ассиметричны) справа, всего 2 штуки

4) $E = 3$ x_1 и 4 части зеленой сепаратрисы

Если $E > 3$, то по одной траектории снизу и сверху.

E	0	1	2	3
кол-во	2	4	2	5

N3



$$E = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

x_1, x_3 - точки локального минимума - фокусы

x_2, x_4 - точки локального максимума - седловые точки

При $E < 0$ нет траекторий

При $E = 0$ - x_1 - 1 точка

При $0 < E < 1$ - огиба "эллипс"

При $E = 1$ - "эллипс" и x_3 - 2 траектории

При $1 < E < 2$ - два "эллипса"

При $E = 2$ - сепаратриса "восьмерка" - зеленый, 3 траектории - x_2 и C, D

При $2 < E < 4$ (в т.ч. $E = 3$) - одна траектория - ~~с~~ восьмерка, до слева уходит один край - ~~4~~
 своей дуге и траектория без конца

При $E = 4$ - траектория совмещается
 параметризуется

При $4 < E < 5$ справа появляется траектория справа - парабола - две траектории

При $E = 5$ - сепаратриса - x_4 и 4 траектории желтой - Батлук

При $E > 5$ - две траектории сверху и снизу

E	0	1	2	3	4	5
#	1	2	3	1	1	5

N4
$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x) = \text{const}, \quad \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}$$

Перепишем уравнение:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (U(x_0) - U(x))}} = \int dt$$

Заметим, что в выражении $U(x_0) - U(x)$ в окрестности x_0 первые два коэффициента ряда Тейлора уравниваются $\Rightarrow U(x_0) - U(x) \sim O(x^2) \Rightarrow$

интеграл справа по окрестности x_0 бесконечный (т.к. интеграл $\int_0^\infty \frac{1}{x-x_0}$ бесконечен, а наш делится на константу)

$$t_1 - t_2 = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (U(x_0) - U(x))}} = \infty \Rightarrow$$
 При движении по сепаратрисе частица никогда не достигнет положения неустойчивого равновесия,

$$\sim 5 \text{ Заметим, что } t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}} = \frac{m}{2} \cdot 2 \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}}{dE(t)} dx = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{dE(t)} dt.$$

$$\approx m \cdot \frac{dS}{dE} - \text{получили}$$

$$\sim 6 \quad F_x = yz - x, \quad F_y = xz - y, \quad F_z = \alpha xy + z \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Необходимые условия потенциальности:

$$\partial_y F_x = z = \partial_x F_y$$

$$\partial_z F_x = y = \alpha y = \partial_x F_z \quad \text{при } \alpha = 1 \quad \} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\partial_z F_y = x = \alpha x = \partial_y F_z \quad \text{при } \alpha = 1$$

$$\partial_x U(x, y, z) = x - yz$$

$$U = \frac{x^2}{2} - xyz + C_1(y, z)$$

$$y - xz = \partial_y U = -xz + \partial_y C_1(y, z)$$

$$C_1(y, z) = \frac{y^2}{2} + C_2(z) \quad U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xyz + C_2(z)$$

$$-z - xy = \partial_z U = -xy + C_2'(z)$$

$$C_2(z) = -\frac{z^2}{2} + C$$

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2} - xyz + C$$

$$\text{б) } \gamma: x^2 + y^2 = 1, z = 0 \quad \text{или } M_1(1, 0, 0) \text{ и } M_2(0, 1, 0)$$

$$\vec{r}_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$d\vec{r}_1 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$A_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} (\vec{F}, d\vec{r}_1) = \int_0^{\pi/2} ((yz - x)(-\sin \varphi d\varphi) + (xz - y)(\cos \varphi d\varphi) + 0) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos \varphi (-\sin \varphi) + -2 \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi (1 - 2) d\varphi =$$

$$= \frac{1-2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2}{2} (-\cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} + \cos 2\varphi \Big|_0^0) = \frac{1-2}{4} \cdot 2 = \frac{1-2}{2}$$

$$\text{вв) } x^2 + y^2 = 1, z = 2\varphi/\pi, \text{ где } \varphi = y/x \quad M_1(1, 0, 0), M_2(0, 1, 1)$$

$$\vec{r}_2 = (\cos \varphi, \sin \varphi, \frac{2\varphi}{\pi}) \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$d\vec{r}_2 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, \frac{2}{\pi} d\varphi)$$

$$A_{\gamma_2} = \int_{\gamma_2} (\vec{F}, d\vec{r}_2) = \int_0^{\pi/2} ((yz - x)(-\sin \varphi d\varphi) + (xz - y)\cos \varphi d\varphi +$$

$$+ (\alpha xy + z) \frac{2}{\pi} d\varphi) = \int_0^{\pi/2} (\frac{2\varphi}{\pi} \sin \varphi - \cos \varphi)(-\sin \varphi) + (\frac{2\varphi}{\pi} \cos \varphi - \sin \varphi) \cos \varphi +$$

$$+ (\alpha \sin \varphi \cos \varphi + \frac{2\varphi}{\pi}) \cdot \frac{2}{\pi} d\varphi = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi \sin 2\varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi \cos^2 \varphi d\varphi -$$

$$\begin{aligned}
 & - \alpha \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha-1}{\pi} \right), \text{ r.r.} \\
 & \int_0^{\pi/2} \varphi \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 0^2 \right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \\
 & \int_0^{\pi/2} \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{\pi/2} \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \varphi d\varphi - \int_0^{\pi/2} \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\varphi^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \\
 & \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Ответ: $1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha-1}{\pi}$

№7 $y = \frac{x^2 - \alpha^2}{2}$

$\vec{F}_{\text{гип}} = -k\rho \vec{e}_\rho, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

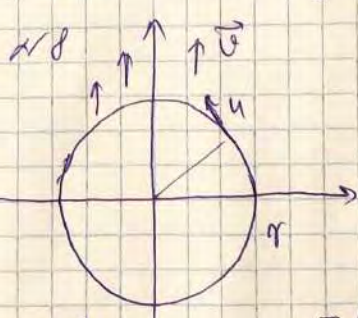
В полярных координатах ~~(\rho, \varphi)~~

~~параметризуем~~ $\vec{r} = (x, \frac{x^2 - \alpha^2}{2})$, $x \in [0, \alpha]$, $d\vec{r} = (1, x)$

$\vec{e}_\rho = (\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}) \Rightarrow \vec{F}_{\text{гип}} = -k\rho (\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}) = -k(x, y)$

$A_g = \int_{\gamma} (\vec{F}_{\text{гип}}, d\vec{r}) = -k \int_0^\alpha (x + xy) dx = -k \int_0^\alpha (x(1 + \frac{x^2 - \alpha^2}{2})) dx =$
 $= -k \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^\alpha + \frac{x^4}{8} \Big|_0^\alpha - \frac{\alpha^2 x^2}{4} \Big|_0^\alpha \right) = -k \frac{4\alpha^4 + \alpha^4 - 2\alpha^4}{8} = -k \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{8} \right)$

Если $x=0$, то $\rho = \frac{\alpha^2}{2}$, если $y=0$, $x=\alpha$, $\rho=\alpha$



$\vec{F} = k(\vec{u} - \vec{v})$, $\vec{v} = (0, \alpha t^2)$

Параметризуем $\gamma(t) = (\cos(\frac{u}{R}t), \sin(\frac{u}{R}t))$, $t \in [0, \frac{2\pi R}{u}]$

$(\vec{F}, d\vec{r}) = k(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} dt) = (ku^2 - k(\vec{v}, \vec{u})) dt =$

$= ku^2 - k(0, \alpha t^2), (-u \sin(\frac{u}{R}t), u \cos(\frac{u}{R}t)) dt =$

$= (ku^2 - kau t^2 \cos(\frac{u}{R}t)) dt$

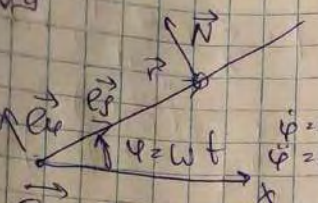
$\int_0^{\frac{2\pi R}{u}} (ku^2 - kau t^2 \cos(\frac{u}{R}t)) dt = ku^2 \frac{2\pi R}{u} - kau \left(\frac{R}{u} \right)^3 \int_0^{\frac{2\pi R}{u}} \left(\frac{u}{R}t \right)^2 \cos(\frac{u}{R}t) d\frac{u}{R}t =$
 $= (2\pi Rk)u - kaR^3 \cdot \frac{1}{u^2} \cdot 4\pi$

$A_g(u) = (2\pi Rk)u - (4\pi kaR^3) \cdot \frac{1}{u^2}$

$A_g'(u) = 2\pi Rk - 8\pi kaR^3 \cdot \frac{1}{u^3}$

$u_{\min} = \sqrt[3]{\frac{8\pi kaR^3}{2\pi Rk}} = \sqrt[3]{4aR^2}$

2.9



$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} (-\dot{\varphi} \vec{e}_r) =$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{e}_r (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\varphi (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi})$$

$$\vec{e}_r : m (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = 0$$

$$\vec{e}_\varphi : m (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) = N$$

$$\ddot{r} = r \dot{\varphi}^2 \rightarrow r(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

$$r(0) = a \quad \dot{r}(0) = 0$$

$$c_1 + c_2 = a \quad \omega c_1 e^0 - \omega c_2 e^0 = 0$$

$$c_1 = c_2 = \frac{a}{2}$$

$$r(t) = \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

$$\dot{r}(t) = \frac{a\omega}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

$$\vec{N} = (0, m (2 (\frac{a\omega}{2} e^{\omega t} - \frac{a\omega}{2} e^{-\omega t}) \omega + 0) = 10, m a \omega^2 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}))$$

$$d\vec{r} = (\dot{r} dt, r \omega dt)$$

$$A_N = \int_0^T m a \omega^2 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) r(t) \omega dt = \int_0^T \frac{m a \omega^3}{2} (e^{2\omega t} - e^{-2\omega t}) dt =$$

$$= \frac{m a^2 \omega^2}{2} \frac{1}{2\omega} (e^{2\omega T} - 1 + e^{-2\omega T} - 1) = \frac{m a^2 \omega^2}{4} (e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} - 2)$$

$$\delta) T_{\text{kin}} = \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$$

$$\Delta T = T_{\text{kin}}(T) - T_{\text{kin}}(0) = \frac{m a^2 \omega^2}{8} (e^{2\omega T} - 2 + e^{-2\omega T} + e^{2\omega T} + 2 + e^{-2\omega T}) =$$

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2(0) + r^2(0) \omega^2) = \frac{m a^2 \omega^2}{4} (e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} - 2) = A_N$$