Контрольная работа Струкинов Ксения

№4 $Q = p^\alpha e^{\beta q}$; $P = q^{2\alpha-\beta} + \ln p + e^{-q}$

а) Преобразование $q,p \to Q,P$ — каноническое, если

$\{p,p\} = \{q,q\} = 0 \longrightarrow \{P,P\}_{p,q} = \{Q,Q\}_{p,q} = 0$

$\{q,p\} = 1 \qquad \{Q,P\}_{p,q} = 1$

$\{Q,Q\} = \{p^\alpha e^{\beta q}, p^\alpha e^{\beta q}\} = \alpha p^{\alpha-1} e^{\beta q} \{p,q\} p^\alpha \cdot \beta \cdot e^{\beta q} +$
$+ \{q,p\} \cdot p^\alpha \cdot e^{\beta q} \cdot \beta \cdot \alpha \cdot p^{\alpha-1} \cdot e^{\beta q} = 0$

$\{P,P\} = \{q^{2\alpha-\beta} + \ln p + e^{-q}, q^{2\alpha-\beta} + \ln p + e^{-q}\} =$ остальные слагаемые будут содержать $\{p,p\}$ и $\{q,q\}$

$= \{q^{2\alpha-\beta}, \ln p\} + \{\ln p, e^{-q}\} + \{\ln p, q^{2\alpha-\beta}\} + \{e^{-q}, \ln p\} = 0$

$\{Q,P\} = \{p^\alpha e^{\beta q}, q^{2\alpha-\beta} + \ln p + e^{-q}\} =$
$= \{p^\alpha e^{\beta q}, q^{2\alpha-\beta}\} + \{p^\alpha e^{\beta q}, \ln p\} + \{p^\alpha e^{\beta q}, e^{-q}\} =$
$= e^{\beta q} \cdot \alpha p^{\alpha-1} \{p,q\} \cdot (2\alpha-\beta) q^{2\alpha-\beta-1} + p^\alpha \cdot \beta \cdot e^{\beta q} \{q,p\} \cdot \frac{1}{p} +$
$+ p^{\alpha-1} \alpha \{p,q\} (-e^{-q}) e^{\beta q} = 1$

$\{q,p\} \cdot \left(\alpha \cdot e^{\beta q} \cdot p^{\alpha-1} (\beta-2\alpha) \cdot q^{2\alpha-\beta-1} + p^{\alpha-1} \cdot \beta \cdot e^{\beta q} + \alpha \cdot p^{\alpha-1} e^{-q} e^{\beta q}\right) = 1$

$1 \cdot e^{\beta q} \cdot p^{\alpha-1} \left(\alpha(\beta-2\alpha) q^{2\alpha-\beta-1} + \beta + \alpha e^{-q}\right) = 1$

Т.к. это тождество (должно быть), то как функция от p — это 1, => $p^{\alpha-1} = 1$, => $\alpha = 1$

$e^{\beta q}\left((\beta-2) q^{1-\beta} + \beta + e^{-q}\right) = 1$

$(\beta-2) q^{1-\beta} + \beta + e^{-q} = e^{-\beta q}$ — как функция от q:

$q^{1-\beta} = 1$ (~~левая час~~ правая часть от q не зависит) =>

$\beta = 1$: $-1 + 1 + e^{-q} = e^{-q}$ — верно!

Значит, $\underline{(\alpha, \beta) = (1, 1)}$.

б) Производящая функция канонического преобразования вида $\Phi(p, Q)$ – это производящая функция третьего рода $F_3(p, Q)$.

Для $(\alpha, \beta) = (1, 1)$

$$Q = pe^{q}, \quad P = q + \ln p + e^{-q}.$$

Для производящей функции третьего рода:

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$$

$$Q = pe^{q} \Rightarrow q = \ln\left(\frac{Q}{p}\right) = \ln Q - \ln p$$

$$P = \ln\left(\frac{Q}{p}\right) + \ln p + e^{-\ln\left(\frac{Q}{p}\right)} = \ln Q + \frac{p}{Q}$$

$$q = \ln\frac{Q}{p}, \quad P = \ln Q + \frac{p}{Q}$$

$$\ln\frac{Q}{p} = q = -\frac{\partial F_3(p, Q)}{\partial p} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F_3(p, Q)}{\partial p} = -\ln Q + \ln p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_3(p, Q) = -p\ln Q + \int \ln p \, dp =$$

$$= -p\ln Q + p\ln p - p + f(Q)$$

$$\ln Q + \frac{p}{Q} = P = -\frac{\partial F_3(p, Q)}{\partial Q} =$$

$$\frac{p}{Q} + \frac{\partial f(Q)}{\partial Q} \Rightarrow \frac{\partial f(Q)}{\partial Q} = \ln Q \Rightarrow$$

$$f(Q) = -Q + Q\ln Q + c, \quad c - \mathrm{const}$$

Значит, $F_3(p, Q) = -p\ln Q + p\ln p - p - Q + Q\ln Q + c$

№ 1 а) $\{(\vec{r}_a)_i, (\vec{p}_b)_j\} = \delta_{ab}\delta_{ij}$, $\{(\vec{r}_a)_i, (\vec{r}_b)_j\} = \{(\vec{p}_a)_i, (\vec{p}_b)_j\} = 0$
$\forall a, b = 1, 2$
$\forall i, j = 1, 2, 3$

$\{(\vec{r}_1, \vec{p}_2), (\vec{r}_2, \vec{p}_1)\} = \{r_{11}p_{21} + r_{12}p_{22} + r_{13}p_{23}, r_{21}p_{11} + r_{22}p_{12} + r_{23}p_{13}\} =$
$= \{r_{11}p_{21}, r_{21}, p_{11}\} + \{r_{12}p_{22}, r_{22}p_{12}\} + \{r_{13}p_{23}, r_{23}p_{13}\}$ - остальные слагаемые занулятся, т.к. либо $a \neq b$, либо $i \neq j$

$\{p_{21}, r_{21}\}r_{11}p_{11} + r_{21}p_{21}\{r_{11}, p_{11}\} + r_{12}p_{12}\{p_{22}, r_{22}\} + p_{22}r_{22}\{r_{12}, p_{12}\} +$
$+ \{r_{13}, p_{13}\}p_{23}r_{23} + \{p_{23}, r_{23}\}r_{13}p_{13} = -r_{11}p_{11} + r_{21}p_{21} - r_{12}p_{12} + p_{22}r_{22} +$
$+ r_{13}p_{13} - p_{23}r_{23}$

б) $\{(\vec{r}_1, \vec{p}_2), [\vec{r}_2 \times \vec{p}_1]\} = \{r_{11}p_{21} + r_{12}p_{22} + r_{13}p_{23}, \varepsilon_{ijk}r_{2j}p_{1k}\} =$
$1x = 1k$ или $2x = 2j$
$= \{r_{1x}p_{2x}, \varepsilon_{ijk}r_{2j}p_{1k}\} = \{r_{1k}p_{2k}, \varepsilon_{ijk}r_{2j}p_{1k}\} + \{r_{1j}p_{2j}, \varepsilon_{ijk}r_{2j}p_{1k}\} =$
$= \varepsilon_{ijk}(\{r_{1k}, p_{1k}\}p_{2k}r_{2j} + r_{1j}p_{1k}\{p_{2j}, r_{2j}\}) =$
$= \varepsilon_{ijk}(p_{2k}r_{2j} - r_{1j}p_{1k}) = [\vec{r}_2 \times \vec{p}_2]_i - [\vec{r}_1 \times \vec{p}_1]_i$

Значит, $\{(\vec{r}_1, \vec{p}_2), [\vec{r}_2 \times \vec{p}_1]\} = [\vec{r}_2 \times \vec{p}_2] - [\vec{r}_1 \times \vec{p}_1]$

№ 2 $\quad L = \frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2} + \frac{e}{2c}(\vec{B}, [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}])$

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \qquad L = \frac{m(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 + \dot{\vec{r}}_3)^2}{2} + \frac{e}{2c}(\vec{B}, \varepsilon_{ijk}\vec{r}_j \cdot \dot{\vec{r}}_k)$

$p_s = m\dot{r}_s + \frac{e}{2c}(\vec{B}, \varepsilon_{ijs}\vec{r}_j \cdot \dot{\vec{r}}_s)$

$H = \dot{r}p - L = \dot{r}_i(m\dot{r}_s + \frac{e}{2c}(\vec{B}, \varepsilon_{ijs}\vec{r}_j \cdot \dot{\vec{r}}_s) -$
$- \frac{m(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 + \dot{\vec{r}}_3)^2}{2} + \frac{e}{2c}(\vec{B}, \varepsilon_{ijk}\vec{r}_j \cdot \dot{\vec{r}}_k)$

№ 3 а) $\vec{r}(0) = \vec{r}$, $\vec{p}(0) = \vec{p}_0$

$T_{кин} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$, $U = mgx$ $\quad (\vec{x} = \vec{r})$

$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mgx$

$H = \dot{x}p - L$

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$

$H = \underbrace{\frac{p^2}{m}}_{\frac{p}{m} \cdot p} - \left(\frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 - mgx\right) = \frac{p^2}{2m} + mgx$

$\dot{x} = \frac{p}{m}$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -mg \Rightarrow p(t) = -mgt + \vec{p}_0$

$\frac{1}{m}(-mgt + p_0) = -gt + \frac{p_0}{m} = \dot{x}$

Значит, $x(t) = r(t) = -g\frac{t^2}{2} + \frac{p_0}{m}t + r$

(Для удобства и понятности переобозначила $\vec{p}(0) = \vec{p}_0$, иначе всё смешалось. Вроде бы с r такого удалось избежать (везде писала „x"))

б) $\{r_i, p_j\} = \delta_{ij}$, $\{r_i, r_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -mg$, $\dot{x} = \frac{p}{m}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_{1,2} = 0$