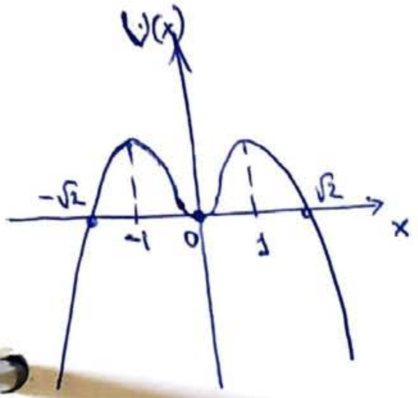
Разбор пятиминутки Держись !!

02.02.21

$U(x) = 2x^2 - x^4$, $m=2$

Фазовый портрет - зависимость $\dot{x}(x)$

(1) $\ddot{x} + 2x - 2x^3 = 0 \longleftarrow m\ddot{x} = F = -U'(x)$



$$\ddot{x} + 2x - 2x^3 = 0 \iff \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + 2x^3 \end{cases} \quad (1')$$

$(0,0), (1,0), (-1,0)$

$\uparrow$

точки покоя

$\Downarrow$

стационарные реш-ия

$x=0,\ x=1,\ x=-1$

Линеаризуем в окр-ти особых точек

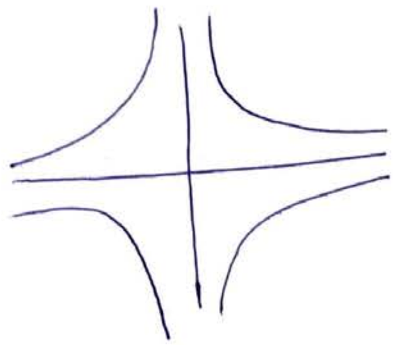
$(\pm 1, 0)$ $\dot{x} = y$

$\dot{y} = -2(x \mp 1) + 2(x \mp 1)^3 = 4x + \underbrace{2x^3 \mp 6x^2}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A_{\pm 1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A_{\pm 1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{\pm} = \lambda^2 - 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$ седло

неуст.



$(0,0)$
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

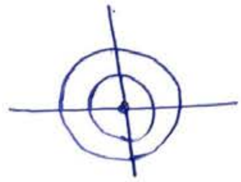
$\chi_0 = \lambda^2 + 2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$

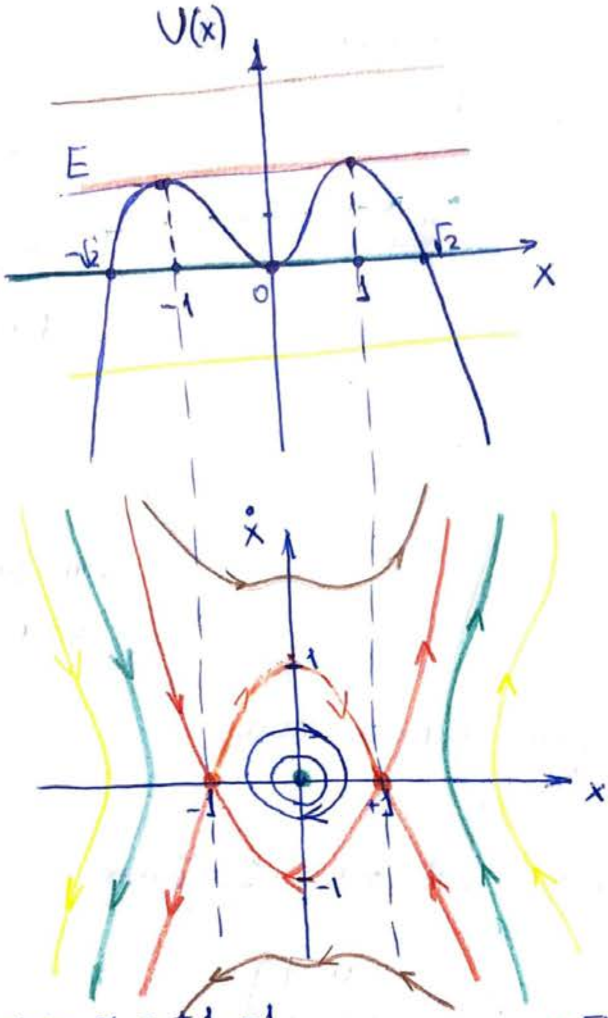
Real $\lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow$ лин. приближ. недостаточно, чтобы ответить на вопрос об устойчивости.

$\ddot{x} + 2x - 2x^3 = 0 \ |\cdot \dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + x^2 - \frac{x^4}{2}\right) = 0 \Rightarrow E(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + 2x^2 - x^4$$ - инвариант эволюции

$E|_{(0,0)} \simeq \dot{x}^2 + 2$





- $E = 1 \Leftrightarrow x = +1, -1$

$U'(x) = 4(x - x^3) = 0$

$x = 0,\ x = \pm 1$

$U(x_0) = E = 1$

$\dot{x}^2 + 2x^2 - x^4 = 1$

$\dot{x}^2 = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$

$\dot{x} = x^2 - 1$

$\dot{x} = -x^2 + 1$

- $E = 0$

$\dot{x}^2 + 2x^2 - x^4 = 0$

$E = 0 \Rightarrow$ 3 фазовые кр.

$E = -1 \Rightarrow$ 2 фазовые кр

$E = 1/2 \Rightarrow$ 3 фазовые кр.

$E = 1 \Rightarrow$ 8 фазовых кр.

$E = 2 \Rightarrow$ 2 фазовые кр.