

Избранные главы дискретной математики. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно посылать вашему учебному ассистенту (его адрес сообщен всем записанным на этот НИС на корпоративную почту), до 24:00 четверга перед следующим занятием.

Задание с 8 занятия.

- (1) На множестве булевых векторов имеется естественное отношение частичного порядка: если $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, то будем говорить, что $a < b$, если $\forall i$ выполнено неравенство $a_i \leq b_i$. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной, если из $a < b$ следует, что $f(a) \leq f(b)$.

Докажите, что булева функция монотонна тогда и только тогда, когда в ее сокращенной ДНФ нет отрицаний.

- (2) Докажите, что для монотонной булевой функции сокращенная ДНФ является единственной тупиковой.
- (3) На множестве \mathcal{M}_n булевых функций от n переменных можно ввести отношение частичного порядка: будем говорить, что $f < g$, если $f(x) \leq g(x) \forall x \in \{0, 1\}^n$. Покажите, что в ЧУМе \mathcal{M}_n любые два элемента f, g имеют единственный максимум и единственный минимум¹, т.е. существует единственная монотонная функция $\varphi = \max(f, g) \in \mathcal{M}_n$ и единственная монотонная функция $\psi = \min(f, g) \in \mathcal{M}_n$, так что если $h_1 > f$ и $h_1 > g$, то $h_1 > \varphi$, и если $h_2 < f$ и $h_2 < g$, то $h_2 < \psi$. Как выразить эти φ и ψ с помощью операций булевой алгебры через f и g ? Перечислите все монотонные функции от 2 переменных и нарисуйте диаграмму Хассе для ЧУМа \mathcal{M}_2 .
- (4) Задачи 3, 4 и 5 из задания 4 остаются актуальными (и можно присылать их решения!) до тех пор, пока мы на одном из следующих занятий их не обсудим.

¹ЧУМ, обладающий таким свойством, называется **решеткой** — к сожалению, слово "решетка" используется в математике в нескольких совершенно разных смыслах.