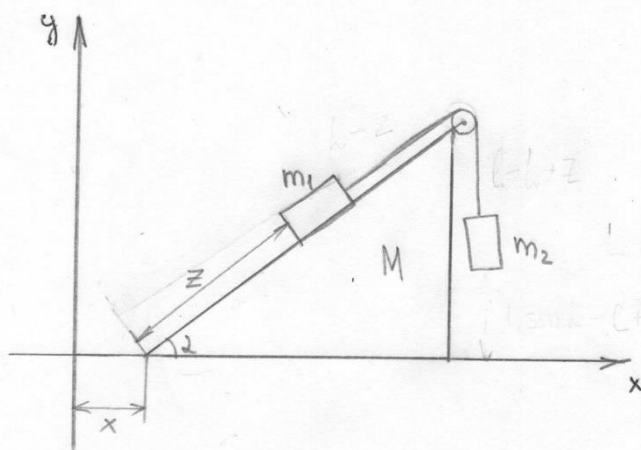


①



• # степеней свободы = 2

Выберем в качестве обобщ. координат x, z .

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + (\dot{z} \sin \alpha)^2) + \frac{m_1}{2} ((\dot{x} + \dot{z} \cos \alpha)^2 + (\dot{z} \sin \alpha)^2) \\ U &= m_1 g z \sin \alpha - m_2 g z \end{aligned} \right. \quad (1)$$

(Функция U определена с точностью до аддитивной константы)

Координата центра масс по оси Ox :

$$x_0 = \frac{Mx + m_1(x + z \cos \alpha) + m_2 x}{M + m_1 + m_2} \quad (2)$$

Координата центра масс по оси Oz :

$$z_0 = \frac{m_1 z - m_2 z \sin \alpha}{M + m_1 + m_2} \quad (3)$$

Выразим из (2), (3) x и z через x_0, z_0 и подставим в (2)

$$(3) \Rightarrow Z = \frac{Z_0 (M + m_1 + m_2)}{m_1 - m_2 \sin d}$$

$$(2) \Rightarrow X = X_0 - \frac{m_1 Z \cos d}{M + m_1 + m_2} =$$

$$= X_0 - \frac{m_1 \cos d}{M + m_1 + m_2} \cdot \frac{Z_0 (M + m_1 + m_2)}{m_1 - m_2 \sin d} = X_0 - Z_0 \frac{m_1 \cos d}{m_1 - m_2 \sin d}$$

$$T = \frac{M \dot{X}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{X}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{Z}^2 \sin^2 d}{2} + \frac{m_1 \dot{Z}^2 \sin^2 d}{2} + \frac{m_1 \dot{X}^2}{2} + \frac{m_1 \dot{Z}^2 \cos^2 d}{2} +$$

$$+ m_1 \dot{X} \dot{Z} \cos d = \dot{X}^2 \left(\frac{M + m_1 + m_2}{2} \right) + \dot{Z}^2 \left(\frac{m_2 \sin^2 d + m_1}{2} \right) +$$

$$+ m_1 \dot{X} \dot{Z} \cos d = \dot{X}_0^2 \left(\frac{M + m_1 + m_2}{2} \right) +$$

$$+ \dot{Z}_0^2 \frac{(M + m_1 + m_2)^2}{2(m_1 - m_2 \sin d)^2} \left(m_2 \sin^2 d + m_1 - \frac{m_1^2 \cos^2 d}{M + m_1 + m_2} \right)$$

$$U = Z g (m_1 \sin d - m_2) = Z_0 g \frac{(M + m_1 + m_2)(m_1 \sin d - m_2)}{m_1 - m_2 \sin d}$$

Лагранжиан системы:

$$L = T - U = \dot{X}_0^2 \left(\frac{M + m_1 + m_2}{2} \right) + \dot{Z}_0^2 \frac{(M + m_1 + m_2)^2}{2(m_1 - m_2 \sin d)^2} \left(m_2 \sin^2 d + m_1 - \frac{m_1^2 \cos^2 d}{M + m_1 + m_2} \right) - Z_0 g \frac{(M + m_1 + m_2)(m_1 \sin d - m_2)}{m_1 - m_2 \sin d}$$

Уравнение Эйлера - Лагранжа

$$L_{x_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_0} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_0 (M + m_1 + m_2) \right) = 0$$

\Rightarrow закон сохранения проекции импульса центра масс системы на ось $O\vec{x}$:

$$P_{x_0} = (M + m_1 + m_2) \dot{x}_0 = \text{const}$$

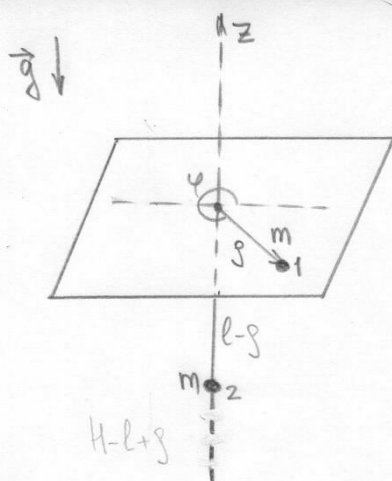
$$L_{z_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_0} = \frac{d}{dt} \left(\dot{z}_0 \left(\frac{M + m_1 + m_2}{m_1 - m_2 \sin d} \right)^2 (m_2 \sin^2 d + m_1 - \frac{m_1^2 \cos^2 d}{M + m_1 + m_2}) \right) - g \frac{(M + m_1 + m_2)(m_1 \sin d - m_2)}{m_1 - m_2 \sin d} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_0 = \frac{g (M + m_1 + m_2)(m_1 \sin d - m_2)(m_1 - m_2 \sin d)}{(M + m_1 + m_2)^2 (m_2 \sin^2 d + m_1 - \frac{m_1^2 \cos^2 d}{M + m_1 + m_2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_0 = \frac{g (m_1 \sin d - m_2)(m_1 - m_2 \sin d)}{(m_2 \sin^2 d + m_1)(M + m_1 + m_2) - m_1^2 \cos^2 d}$$

Заметим, что $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ выполняется закон сохранения энергии.

2



степеней свободы = 2

В качестве обобщенных координат выберем g и φ .
(полярные координаты частицы 1 в горизонтальной пл-ти).
Пусть длина нити равна l .

$$T = \frac{m}{2} (\dot{g}^2 + g^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2} \dot{g}^2$$

$$U = mgg$$

(U определена с точностью до аддитивной константы)

Лагранжиан системы:

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{g}^2 + g^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2} \dot{g}^2 - mgg$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$L_g = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}} \right) - \frac{\partial L}{\partial g} = \frac{d}{dt} (2m\dot{g}) - mg\dot{\varphi}^2 + mg =$$

$$= 2m\ddot{g} - mg\dot{\varphi}^2 + mg = 0$$

$$L_{\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (m g^2 \dot{\varphi}) = m g^2 \ddot{\varphi} + 2 m g \dot{g} \dot{\varphi} = 0 \quad (*)$$

Координата частицы 2 - это $(l-g)$, то есть

решение стационарно по координате частицы 2 при $g = \text{const}$

Тогда из ур-ий Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} -m g \dot{\varphi}^2 + m g = 0 \\ m g^2 \ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g \dot{\varphi}^2 = g \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{g} \Rightarrow \varphi(t) = \pm \sqrt{\frac{g}{g}} t + \varphi_0, \varphi_0 = \text{const}$$

$$m g^2 \dot{\varphi} = \mathcal{I}, \text{ где } \mathcal{I} = \text{const}$$

$$\mathcal{I}^2 = m^2 g^4 \cdot \frac{g}{g} = m^2 g^3 g$$

Заметим, что $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ выполняется закон сохранения энергии:

$$\frac{m}{2} (\dot{g}^2 + g^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2} \dot{g}^2 + m g g = \text{const}.$$

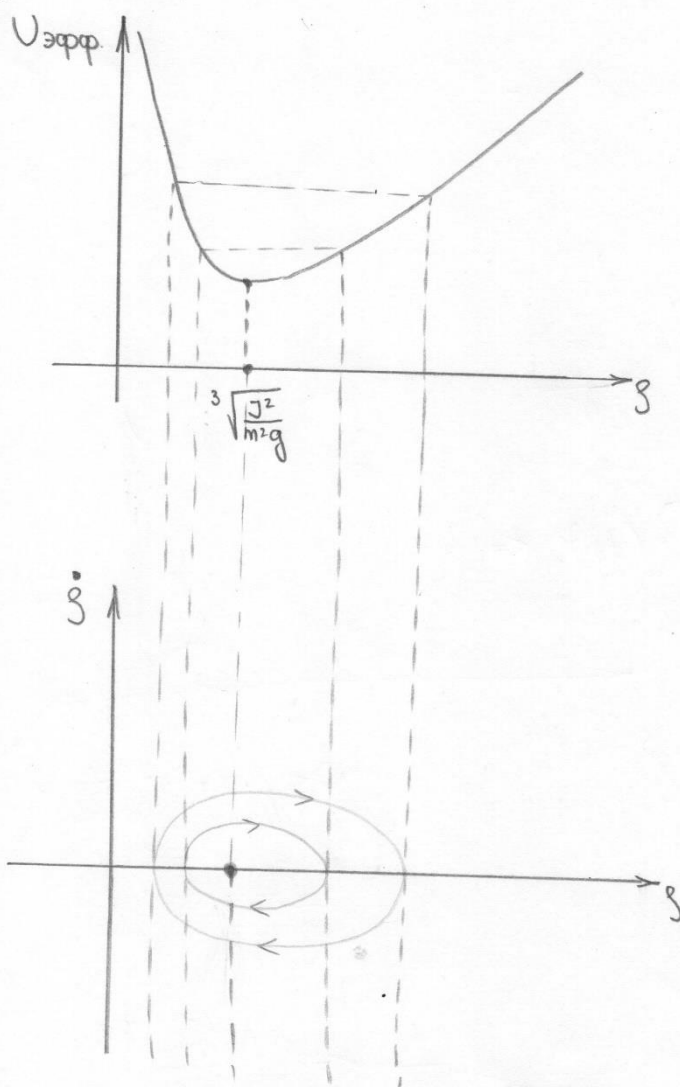
$$\text{Из } (*) \text{ следует, что } m g^2 \dot{\varphi} = \mathcal{I} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\mathcal{I}}{m g^2}$$

Подставив $\dot{\varphi} = \frac{\mathcal{I}}{m g^2}$ в З.С.Э:

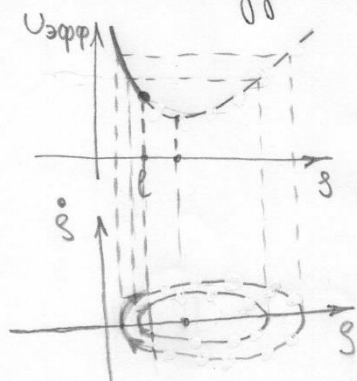
$$\frac{m}{2} \left(\dot{g}^2 + g^2 \cdot \frac{\mathcal{I}^2}{m^2 g^4} \right) + \frac{m}{2} \dot{g}^2 + m g g = \text{const}$$

$$\underbrace{m \dot{g}^2}_{T_{\text{эфф}}(\dot{g})} + \underbrace{\frac{\mathcal{I}^2}{2m g^2} + m g g}_{U_{\text{эфф}}(g)} = \text{const}$$

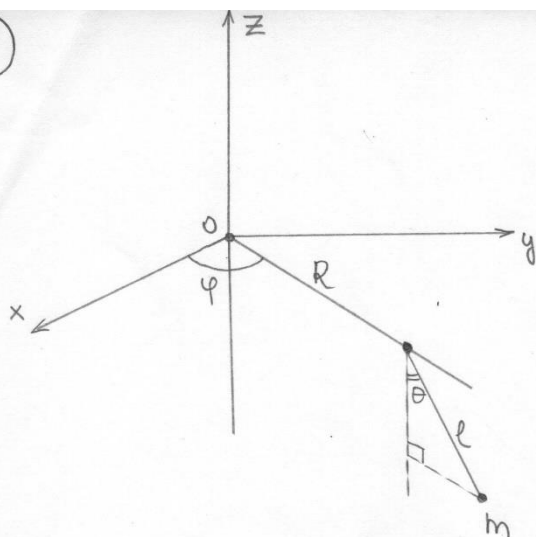
Фазовый портрет эффективной системы.



Заметим, что если $l < \sqrt[3]{\frac{J^2}{m^2 g}}$, то положение равновесия не будет.



3



$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\theta \in [-\pi, \pi)$$

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi (R + l \sin \theta) \\ y &= \sin \varphi (R + l \sin \theta) \\ z &= -l \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ U &= mgz \end{aligned} \quad (2)$$

Подставим (1) в (2) и получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} ((R + l \sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\theta}^2) \\ U &= -mg l \cos \theta \end{aligned}$$

Лагранжиан системы:

$$L = T - U = \frac{m}{2} ((R + l \sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\theta}^2) + mg l \cos \theta$$

Уравнение Эйлера - Лагранжа:

$$L_\varphi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (m \dot{\varphi} (R + l \sin \theta)^2) = m \ddot{\varphi} (R + l \sin \theta)^2 + m \dot{\varphi} \cdot 2(R + l \sin \theta) \cos \theta \dot{\theta} =$$

$$= m \ddot{\varphi} (R + l \sin \theta)^2 + 2m \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta (R + l \sin \theta) = 0$$

$$L_\theta = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial t} (m \dot{\theta} l^2) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m}{2} (R + l \sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \theta \right)$$

$$= m l^2 \ddot{\theta} - m (R + l \sin \theta) l \cos \theta \dot{\varphi}^2 + mgl \sin \theta = 0$$

Решение стационарное по θ : $\theta = \theta_0 = \text{const}$.

$$L_\varphi = 0 \Rightarrow m \ddot{\varphi} (R + l \sin \theta_0)^2 = 0 \Rightarrow m \dot{\varphi} (R + l \sin \theta_0)^2 = J = \text{const.} \quad (3)$$

$$L_\theta = 0 \Rightarrow -m \dot{\varphi}^2 (R + l \sin \theta_0) l \cos \theta_0 + mgl \sin \theta_0 = 0 \quad (4)$$

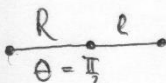
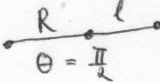
$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g \tan \theta_0}{R + l \sin \theta_0}$$

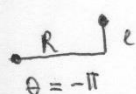
Сначала рассмотрим особые случаи.

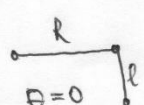
Если $\cos \theta = 0$, то из (4) $\sin \theta = 0$ - противоречие.

Если $\sin \theta = 0$, то из (4) либо $\cos \theta = 0$ - противоречие; либо $\dot{\varphi} = 0$,

т.е. $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$. Это соответствует тому, что конфигурации

 и  невозможны, а конфигурации



и  возможны при равномерном вращении.

Пусть меняет $\sin \theta$, $\cos \theta = 0$, т.е. $\theta \neq 0, -\pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

Если $R + l \sin \theta = 0$, то $\psi(\cdot) \sin \theta = 0$, поэтому пусть $R + l \sin \theta \neq 0$

Тогда (3) $\Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

(4) $\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{g \operatorname{tg} \theta}{R + l \sin \theta} \quad (5)$

Рассмотрим (5).

1) Если $R > l$, то $R + l \sin \theta > 0 \quad \forall \theta \Rightarrow$ необходимо,

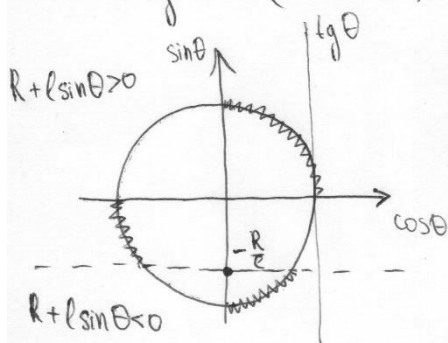
чтобы $\operatorname{tg} \theta > 0$, т.е. $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (-\pi, -\frac{\pi}{2})$.

В этом случае $\varphi = \omega t + \varphi_0$, где $\omega = \pm \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \theta}{R + l \sin \theta}}$, $\varphi_0 = \text{const.}$

2) Если $R < l$, то существует $\tilde{\theta}$, т.е. $\sin \tilde{\theta} = -\frac{R}{l}$

(а именно $\tilde{\theta} = -\arcsin \frac{R}{l}$). Тогда необходимо, чтобы

$\operatorname{tg} \theta$ и $(R + l \sin \theta)$ были одного знака.



Значит,

$$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (-1, \tilde{\theta}) \cup (-\pi, -\pi - \tilde{\theta}).$$

б) $\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ выполняется 3.С.Э.: $\varepsilon = T + U = \text{const}$

$$\varepsilon = \frac{m}{2} (R + l \sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \text{const} (*)$$

Из ур-ие Эйлера-Лагранжа $L_{\varphi} = 0$, учитывая, что $\frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0$,

получаем $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial \dot{\varphi}} = \gamma = \text{const}$

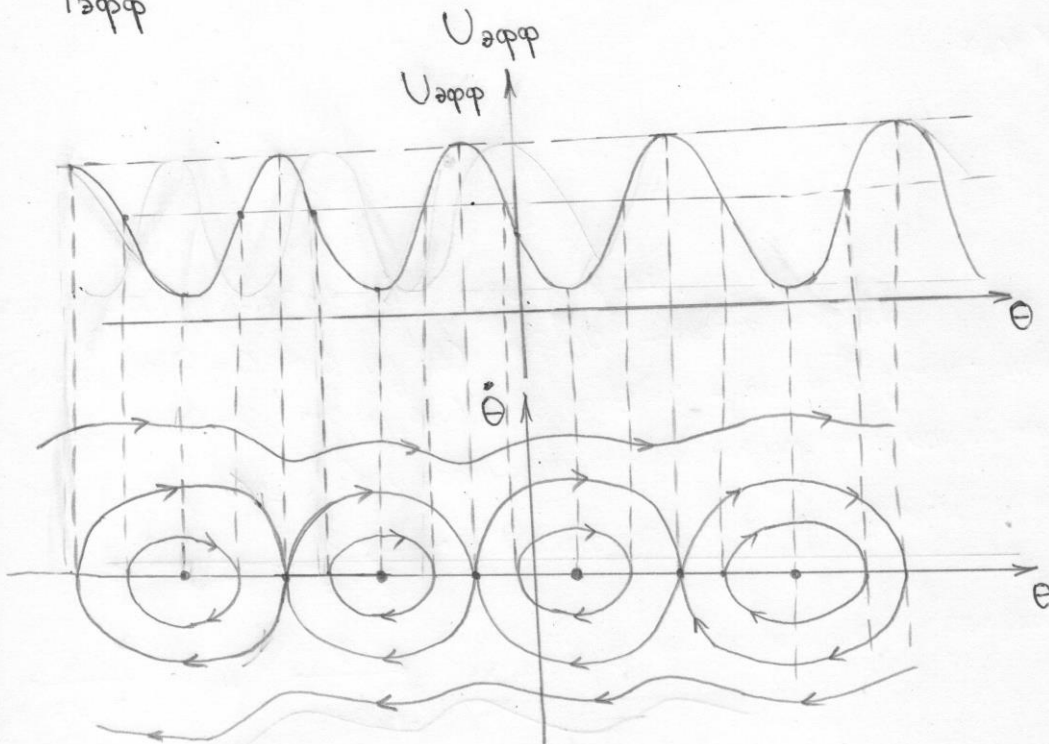
$$m(R + l \sin \theta)^2 \dot{\varphi} = \gamma$$

\Downarrow

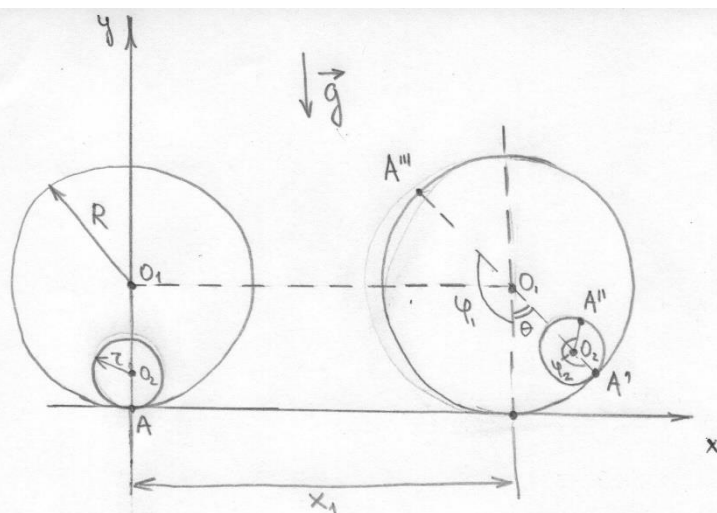
$$\dot{\varphi} = \frac{\gamma}{m(R + l \sin \theta)^2} \quad (**)$$

Подставим (**) в (*)

$$\underbrace{\frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2}_{T_{\theta\varphi\varphi}} + \underbrace{\frac{m}{2} (R + l \sin \theta)^2 \frac{\gamma^2}{m^2 (R + l \sin \theta)^4} - mgl \cos \theta}_{U_{\theta\varphi\varphi}} = \text{const}$$



4



Система имеет две степени свободы: φ_1 и θ .

Пусть θ - угол между направлением вектора \vec{g} и направлением луча O_1O_2 , φ_1 - угол вращения цилиндра R , φ_2 - угол вращения цилиндра r .

Координаты центра масс цилиндра R :

$$\begin{cases} x_1 = R\varphi_1 \\ y_1 = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = R\dot{\varphi}_1 \\ \dot{y}_1 = 0 \end{cases}$$

Координаты центра масс цилиндра r :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + (R-r)\sin\theta \\ y_2 = R - (R-r)\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = R\dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}(R-r)\cos\theta \\ \dot{y}_2 = \dot{\theta}(R-r)\sin\theta \end{cases}$$

Связь между φ_2 и θ

$$r\varphi_2 = R(\varphi_1 + \theta) \Rightarrow \varphi_2 = \frac{R}{r}(\varphi_1 + \theta) \Rightarrow \varphi_2 - \theta = \frac{R}{r}(\varphi_1 + (1 - \frac{r}{R})\theta)$$

Кинетическая энергия T_1 цилиндра R

$$T_1 = \frac{M}{2}(R\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{MR^2\dot{\varphi}_1^2}{2} = MR^2\dot{\varphi}_1^2$$

Кинетическая энергия T_2 цилиндра τ

$$T_2 = \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{I_2 (\dot{\psi}^2 - \dot{\theta}^2)}{2} =$$
$$= \frac{m}{2} ((R\dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}(R-\tau)\cos\theta)^2 + \dot{\theta}^2(R-\tau)^2\sin^2\theta) +$$
$$+ \frac{m\tau^2}{2} \left(\frac{R}{\tau} (\dot{\varphi}_1 + (1 - \frac{\tau}{R})\dot{\theta}) \right)^2$$

Введем обозначение $a := R - \tau$.

$$R^2\dot{\varphi}_1^2 + 2Ra\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 + a^2\dot{\theta}^2$$

$$T_2 = \frac{m}{2} (R^2\dot{\varphi}_1^2 + 2Ra\dot{\varphi}_1\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2a^2) + \frac{m}{2} (R\dot{\varphi}_1 + a\dot{\theta})^2 =$$
$$= mR^2\dot{\varphi}_1^2 + mRa(\cos\theta + 1)\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\theta}^2$$

$$T = T_1 + T_2$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \parallel T &= MR^2\dot{\varphi}_1^2 + mR^2\dot{\varphi}_1^2 + mRa(\cos\theta + 1)\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\theta}^2 \\ \parallel U &= -mga\cos\theta \end{aligned}$$

а) Лагранжиан системы

$$L = T - U = MR^2\dot{\varphi}_1^2 + mR^2\dot{\varphi}_1^2 + mRa(\cos\theta + 1)\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$$

б) Найдём интегралы движения.

Ур-ие Эйлера - Лагранжа

$$L_{\varphi_1} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = J = \text{const}$$

" 0

$$2(m+M)R^2 \ddot{\varphi}_1 + mR(R-r)(\cos\theta + 1)\ddot{\theta} = \mathcal{J} \quad (*)$$

Заметим, что $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ выполняется 3.С.Э: $\mathcal{E} = T + U = \text{const}$

Таким образом, в системе два интеграла движения:

$$\mathcal{J} = 2(m+M)R^2 \dot{\varphi}_1 + mRa(\cos\theta + 1)\dot{\theta}$$

$$\mathcal{E} = (m+M)R^2 \dot{\varphi}_1^2 + mRa(\cos\theta + 1)\dot{\varphi}_1\dot{\theta} + ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta$$

б) Найдем угловую частоту малых колебаний системы
вблизи положения равновесия

$$\theta(t) = \varepsilon \sin \omega t, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad \text{Найдем: } \omega.$$

$$\text{Ур-е Эйлера-Лагранжа: } \mathcal{L}_\theta = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (mRa(\cos\theta + 1)\dot{\varphi}_1 + 2ma^2\dot{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (mRa\cos\theta\dot{\varphi}_1\dot{\theta} + mga\cos\theta) \\ &= mRa(\cos\theta + 1)\ddot{\varphi}_1 - \cancel{mRa\dot{\varphi}_1\sin\theta\dot{\theta}} + 2ma^2\ddot{\theta} + \\ &+ \cancel{mRa\sin\theta\dot{\varphi}_1\dot{\theta}} + mga\sin\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(\cos\theta + 1)\ddot{\varphi}_1 + 2a\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \quad (**)$$

Из ур-е (*) следует, что

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\mathcal{J} - mRa(\cos\theta + 1)\dot{\theta}}{2(m+M)R^2}$$

$$\text{Введем обозначение: } \omega_0 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{J}}{(m+M)R^2},$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{ma}{(m+M)R}.$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1 = \omega_0 - A(\cos\theta + 1)\dot{\theta}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = A(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta}(\cos\theta + 1))$$

Подставим в урав. (**):

$$R(\cos\theta + 1)A(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta}(\cos\theta + 1)) + 2a\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

$$\text{Заметим, что } \ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \quad \dot{\theta}^2 = \varepsilon^2\omega^2 - \omega^2\theta^2 = \omega^2(\varepsilon^2 - \theta^2)$$

$$\sin\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1.$$

$$\ddot{\theta}(-(\cos\theta + 1)^2 AR + 2a) + \dot{\theta}^2 AR \sin\theta(\cos\theta + 1) + g\sin\theta = 0$$

$$-\omega^2(-4AR + 2a) + \omega^2(\varepsilon^2 - \theta^2)AR \cdot 2 + g\theta = 0$$

Учтем, что $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$-\omega^2(-4AR + 2a) = -g$$

$$\omega^2 = \frac{g}{2a - 4AR} = \frac{g}{2a - 4 \cdot \frac{1}{2} \frac{ma}{(m+M)} R} = \frac{g}{2a - 2 \frac{ma}{m+M}} =$$

$$= \frac{g}{2a(1 - \frac{m}{m+M})} = \frac{g(m+M)}{2(R-z)M}$$

$$\Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{g(m+M)}{2(R-z)M}}$$