① $$S[y(x)] = \int_0^1 \overbrace{\left((y''(x))^2 + 5(y'(x))^2 + 4y^2(x)\right)}^{L(y,y',y'')} dx$$

$$y(x) \in C^\infty[0,1], \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = -3$$

а) Найти экстремаль $S[y(x)]$

$$\delta S[\delta y(x)] = \int_0^1 \left(8y(x) - \frac{d}{dx}(10y'(x)) + \frac{d^2}{dx^2}(2y''(x))\right)\delta y(x)dx$$

$$+ 2y''(x)\delta y'(x)\Big|_0^1 + (10y'(x) - 2y'''(x))\delta y(x)\Big|_0^1 =$$

$$= \int_0^1 (2y^{(4)}(x) - 10y''(x) + 8y(x))\delta y(x)dx + 2y''(x)\delta y'(x)\Big|_0^1 +$$

$$+ (10y'(x) - 2y'''(x))\delta y(x)\Big|_0^1$$

Экстремаль функционала уд-ет уравнению

$$y^{(4)}(x) - 5y''(x) + 4y(x) = 0 \quad (*)$$

с граничными условиями

$$y(1) = -3, \quad y'(0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y''}\Big|_{x=1} = 0$$

Решим ур-ие (*). $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2-1)(\lambda^2-4)$

$$\Rightarrow y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$$

$$y(1) = c_1 e + \frac{c_2}{e} + c_3 e^2 + \frac{c_4}{e^2} = -3 \qquad (1)$$

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x} - 2c_4 e^{-2x}$$

$$y'(0) = c_1 - c_2 + 2c_3 - 2c_4 = 0 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\bigg|_{x=0} = 10y'(x) - 2y'''(x)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow y'''(x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$y''(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x} + 4c_4 e^{-2x}$$

$$y'''(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 8c_3 e^{2x} - 8c_4 e^{-2x}$$

$$y'''(0) = c_1 - c_2 + 8c_3 - 8c_4 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y''}\bigg|_{x=1} = 2y''(1) = 0 \Leftrightarrow y''(1) = 0$$

$$y''(1) = c_1 e + \frac{c_2}{e} + 4c_3 e^2 + \frac{4c_4}{e^2} = 0 \qquad (4)$$

Из ур-ий (1), (2), (3), (4) получаем

$$c_1 = c_2 = \frac{-4}{e + e^{-1}}, \quad c_3 = c_4 = \frac{1}{e^2 + e^{-2}}$$

Значит,

$$\boxed{y(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^2 + e^{-2}} - \frac{4(e^x + e^{-x})}{e + e^{-1}}}$$

б) Найти экстремаль $F[y(x)] = S[y(x)] + 6y'(1)$

По условию $y'(0) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F[y(x)] = \int_0^1 \left((y''(x))^2 + 5(y'(x))^2 + 4y^2(x) + 6y''(x)\right)dx$$

$$\delta F[\delta y(x)] = \int_0^1 \left(2y^{(4)}(x) - 10y''(x) + 8y(x)\right)\delta y(x)\,dx +$$

$$+ (2y''(x)+6)\,\delta y'(x)\Big|_0^1 + (10y'(x) - 2y'''(x))\,\delta y(x)\Big|_0^1$$

Экстремаль функционала $F[y(x)]$ уд-ет ур-ию (*) с граничными условиями:

$$y(1) = -3, \quad y'(0) = 0$$

$$10y'(0) - 2y'''(0) = 0 \Rightarrow y'''(0) = 0$$

$$2y''(1) + 6 = 0 \Rightarrow y''(1) = -3$$

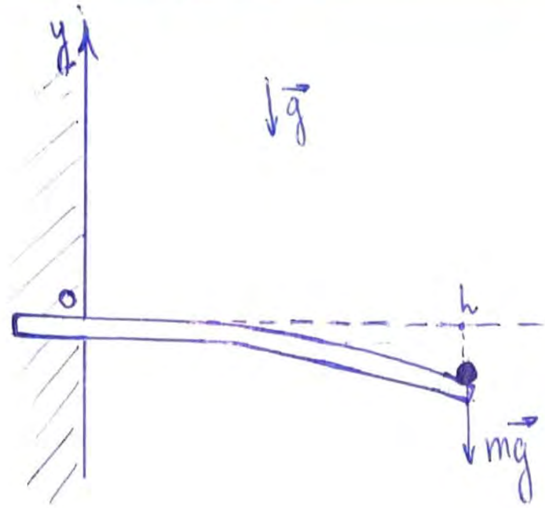
$$y''(1) = c_1 e + \frac{c_2}{e} + 4c_3 e^2 + \frac{4c_4}{e^2} = -3 \quad (4б)$$

Из ур-ий (1), (2), (3), (4б) получаем

$$c_1 = c_2 = -\frac{3}{e+e^{-1}}, \quad c_3 = c_4 = 0.$$

Значит, $\boxed{y(x) = -\dfrac{3(e^x + e^{-x})}{e+e^{-1}}}$

2



L – длина балки

$\frac{k(y'')^2}{2}$ – потенциальная энергия упругой деформации.

Кинетической энергии у балки нет, поэтому принцип наименьшего действия утверждает, что балка принимает конфигурацию, в которой её потенциальная энергия принимает экстремум.

$$\delta U_{тяж} = mg\, y(L)$$

$$\delta U_{упр} = \frac{k}{2}(y'')^2\, dx$$

Функционал потенциальной энергии балки имеет вид:

$$U[y(x)] = \int_0^L \left(mg\, y(L) + \frac{k}{2}(y''(x))^2 dx\right) =$$

$$= \int_0^L \left(mg\, y'(x) + \frac{k}{2}(y''(x))^2 dx\right., \text{ так как } y(0)=0.$$

$$\delta U[\delta y(x)] = \int_0^L k y^{(4)}(x)\, \delta y(x)\, dx + k y'' \delta y'(x)\Big|_0^L +$$

$$+ (mg - k y''')\, \delta y(x)\Big|_0^L$$

Экстремаль функционала $\delta U[\delta y(x)]$ уд-ет ур-ию

$$k y^{(4)}(x) = 0 \quad (*)$$

с граничными условиями

$y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y''(h)=0, \quad y'''(h)=\frac{mg}{k}$; так как

$$k\,y''(x)\Big|_{x=h}=0 \Rightarrow y''(h)=0$$

$$mg-k\,y'''(x)\Big|_{x=h}=0 \Rightarrow y'''(h)=\frac{mg}{k}$$

Реш-ие ур-ия (*)

$$y(x)=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4.$$

$$y(0)=C_4=0$$

$$y'(0)=3C_1x^2+2C_2x+C_3\Big|_{x=0}=C_3=0$$

$$y''(h)=6C_1x+2C_2\Big|_{x=h}=6C_1h+2C_2=0$$

$$y'''(h)=6C_1\Big|_{x=h}=6C_1=\frac{mg}{k}$$

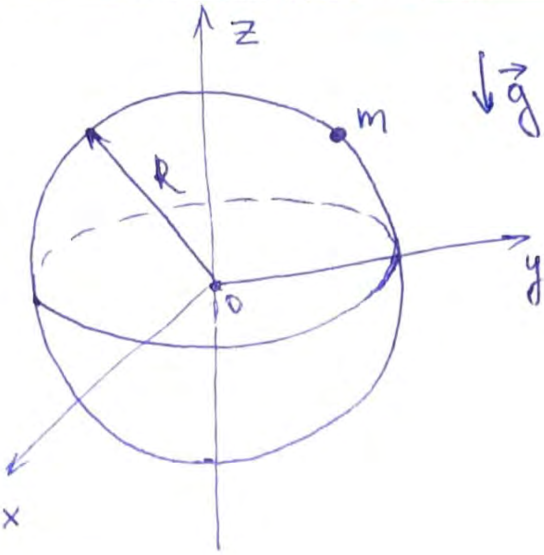
Откуда

$$C_1=\frac{mg}{6k}, \quad C_2=-\frac{mgh}{2k}, \quad C_3=C_4=0.$$

Значит,

$$\boxed{y(x)=\frac{mg}{6k}x^3-\frac{mgh}{2k}x^2}$$

(3)



$\downarrow \vec{g}$ Найти: $\vec{N}$

$$T_{кин} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2}, \quad U = gz$$

Общая энергия: $E = T_{кин} + U = \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} + gz$

Лагранжиан: $L = T_{кин} - U = \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - gz$.

$\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ выполняется З.С.Э

Рассмотрим систему с лагранжианом

$\mathcal{L} = L - \lambda f(\vec{r})$, где $f(\vec{r}) = R^2 - \vec{r}^2 = 0$,

т.е. $\mathcal{L} = \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - gz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$.

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$\mathcal{L}_x: \quad \ddot{x} - 2\lambda x = 0$

$\mathcal{L}_y: \quad \ddot{y} - 2\lambda y = 0$

$\mathcal{L}_z: \quad \ddot{z} - 2\lambda z + g = 0$

Найдем λ.

$$x\mathcal{L}_x + y\mathcal{L}_y + z\mathcal{L}_z = x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} - 2\lambda\overbrace{(x^2+y^2+z^2)}^{R^2} + gz = 0$$

$$2(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \ddot{f}(\vec{r}) = 0$$

$$\Rightarrow x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = -2E + 2gz$$

Таким образом,

$$2\lambda R^2 = gz - 2E + 2gz \Rightarrow \lambda = \frac{3gz-2E}{2R^2}$$

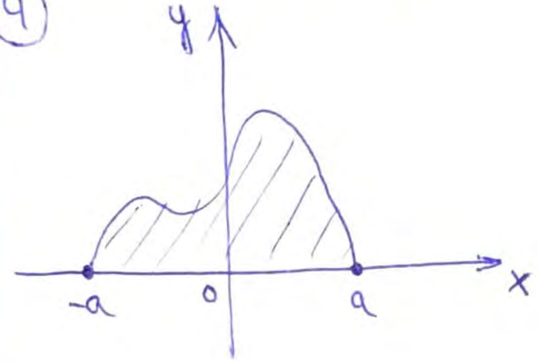
Значит,

$$\vec{N} = \left(\lambda\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}, \lambda\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}, \lambda\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}\right) =$$

$$= 2\lambda(x,y,z) = \frac{3gz-2E}{R^2}(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{N} = \frac{3gz-2E}{R^2}(x,y,z)}$$

④



$y(x) \in C^2[-a,a]$.

$I(y) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \ell = \text{const}$

$\ell > 2a$

$y(a) = y(-a) = 0$

Найти $y(x)$, т.ч. $S(y) = \int_{-a}^{a} y\,dx$ – наибольшая площадь.

а)

$$J(y) = \int_{-a}^{a} y\,dx + \lambda\left(\int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,dx - \ell\right) = \int_{-a}^{a} \underbrace{\left(y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda \ell}{2a}\right)}_{h(x,y,y')} dx$$

Если $J(y)$ имеет экстремум в $y(x)$, то $y(x)$ уд-ет ур-ию

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) - \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \text{ т.е.}$$

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Действительно,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \frac{\lambda y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 1.$$

Заметим, что $\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ выполняется „З.С.Э"!

$$\text{„}E\text{"} = y'\frac{\partial h}{\partial y'} + \underbrace{\lambda'\frac{\partial h}{\partial \lambda'}}_{0,\ \text{т.к. нет } \lambda'} - h = \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y - \lambda\sqrt{1+y'^2} + \frac{\lambda \ell}{2a} = \text{const}$$

Обозначим $\dfrac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y - \lambda\sqrt{1+y'^2} = C_1 = const$

$$\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \lambda\sqrt{1+y'^2} = C_1 + y$$

$$-\lambda = (y+C_1)\sqrt{1+y'^2}$$

$$y' = \sqrt{\frac{\lambda^2}{(y+C_1)^2} - 1}$$

Т.е. $\dfrac{dx}{dy} = \sqrt{\dfrac{(y+C_1)^2}{\lambda^2-(y+C_1)^2}} \Rightarrow x + C_2 = \displaystyle\int \frac{y+C_1}{\sqrt{\lambda^2-(y+C_1)^2}}\,dy.$

Пусть $y + C_1 = \lambda\sin\varphi$, тогда $x + C_2 = \lambda\cos\varphi$.

Следовательно, $\left.\begin{array}{l} y+C_1=\lambda\sin\varphi \\ x+C_2=\lambda\cos\varphi \end{array}\right| \Rightarrow (x+C_2)^2+(y+C_1)^2=\lambda^2$

$y(a) = y(-a) = 0 \Rightarrow (a+C_2)^2 + C_1^2 = (-a+C_2)^2 + C_1^2 = \lambda^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2 = 0.$

Так как $y(x)$ является ф-цией (каждому значению x соответствует единственное значение $y(x)$), то $C_1 \geq 0 \Rightarrow$

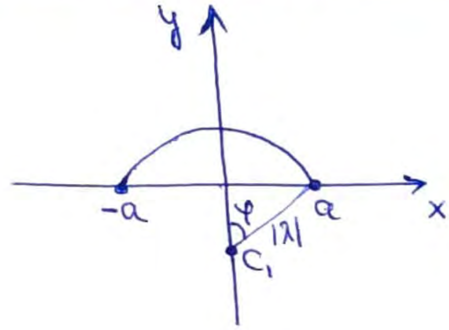
$\Rightarrow 2a < l \leq \pi a.$

Таким образом, $x^2 + (y+C_1)^2 = \lambda^2$, $C_1 \geq 0$, т.е.

$$\boxed{y = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - C_1, \quad C_1 \geq 0.}$$

б) Связь между l, a, λ:

$$\boxed{l = 2\arcsin\left(\frac{a}{|\lambda|}\right)|\lambda|}$$



в) При $l = \frac{\pi a}{\sqrt{2}}$ получаем

$$\frac{\pi a}{\sqrt{2}} = 2\arcsin\left(\frac{a}{|\lambda|}\right)|\lambda| \Rightarrow |\lambda| = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \sqrt{2a^2 - x^2} - a}$$