1 Домашняя работа 8

Задача 1.1. Пусть q и p - канонически сопряженные переменные одномерной системы: $\{q,p\}=1$. Совершим каноническое преобразование, заданное производящей функцией второго рода $F_2(q,P)=q^2e^P$

(а) Найдите явный вид функциональной зависимости новых переменых Q и P от исходных переменных q и p: $Q=Q(q,p), P=P(q,p)$

(б) Найдите производящую функцию первого рода $F_1(q,Q)$, задающую то же самое каноническое преобразование

Доказательство. (а)

$$\begin{aligned}
&Q=Q(q,p), \quad P=P(q,p)\\
&P=\frac{\partial F_2}{\partial q}=2qe^P \quad P=\ln\frac{p}{2q}\\
&Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}=q^2e^p \quad Q=q^2\frac{p}{2q}=\frac{pq}{2}
\end{aligned}$$

(б)

$$\begin{aligned}
&p=\frac{2Q}{q} \quad P=\ln\frac{Q}{q^2}\\
&p=\frac{\partial F_1}{\partial q}=\frac{2Q}{q}\Rightarrow F_1(q,Q)=2Q\ln q+f(Q)\\
&P=-\frac{\partial F_1}{\partial Q}\Rightarrow \ln Q-2\ln q=-2\ln q-\frac{\partial f}{\partial Q}\Rightarrow f(Q)=-\int\ln QdQ=-Q\ln Q+Q+c\\
&F_1(q,Q)=2Q\ln q-Q\ln Q+Q+c
\end{aligned}$$

□

Задача 1.2. Пусть q и p - канонически сопряженные переменные одномерной системы: $\{q,p\}=1$. Рассмотрим преобразование к новым переменным Q и P, заданное формулами:

$$Q=-p, \quad P=q+Ap^2$$

где A - некоторая константа

(а) Докажите, что это преобразование - каноническое

(б) Найдите производящую функцию первого рода $F_1(q,Q)$, отвечающую этому преобразованию

(в) Найдите производящую функцию второго рода $F_2(q,P)$, отвечающую этому преобразованию

Доказательство. (а)

$$\{Q,P\}=\{-p,q+Ap^2\}=-\{p,q\}=\{q,p\}=1$$

$$\begin{aligned}
\{P,P\}&=\{q+Ap^2,q+Ap^2\}\\
&=\{q,q\}+A\{q,p^2\}+A\{p^2,q\}+A^2\{p^2,p\}\\
&=0+2A\{q,p\}-2A\{q,p\}+4A^2\{p,p\}\\
&=0
\end{aligned}$$

$$\{Q,Q\}=\{-p,-p\}=0$$

(б)

$$
\begin{aligned}
&F_1(q,Q) \Rightarrow p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}\\
&Q = -p \quad -Q = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad P = q + Aq^2 = q + AQ^2\\
&F_1 = -Qq + f(Q,t)\\
&q + AQ^2 = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \Rightarrow F_1 = -Qq + f(Q,t) \Rightarrow q + AQ^2 = -(-q + \frac{\partial f(Q,t)}{\partial Q}) = q - \frac{\partial f(Q,t)}{\partial Q} = q + AQ^2\\
&\frac{\partial f(Q,t)}{\partial Q} = -AQ^2 \Rightarrow f(Q,t) = -\frac{AQ^3}{3} + q(t)\\
&F_1(q,Q) = -Qq - \frac{AQ^3}{3} + c
\end{aligned}
$$

(в)

$$
\begin{aligned}
&F_2(q,p) \Rightarrow p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial p}\\
&P = q + Ap^2 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{p-q}{A}} \quad Q = -p = -\sqrt{\frac{p-q}{A}}\\
&p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \sqrt{\frac{p-q}{A}} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2 &= \int \sqrt{\frac{p-q}{A}} dq\\
&= \frac{1}{\sqrt{A}} \int \sqrt{p-q} dq\\
&= \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{-1}{(1+\frac{1}{2})} (p-q)^{\frac{3}{2}} + f(p)\\
&= -\frac{(p-q)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A}} \frac{2}{3} + f(p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\sqrt{\frac{p-q}{A}} &= Q\\
&= \frac{\partial F_2}{\partial P}\\
&= -\frac{2}{3\sqrt{A}} \frac{3}{2} (p-q)^{\frac{1}{2}} + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\\
&= -\sqrt{\frac{p-q}{A}} + \frac{\partial f(P)}{\partial P}\\
&= -\sqrt{\frac{p-q}{A}}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow F_2(q,p) = -\frac{(p-q)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A}} \frac{2}{3} + c
$$

□

Задача 1.3. Частица массы m движетея вдоль оси $O\vec{x}$ под действием постоянной силы $(\vec{F})_x = F$

(а) Напишите лагранжиан и перейдите к гамильтониану этой механической системы

(б) Совершите каноническое преобразование, описанное в задаче 2, и получите новый гамильтониан $\tilde{H}(Q,P)$. Докажите, что выбором константы A его можно привести к виду $\tilde{H}(P)$.

(в) Решите при этом значении константы A уравнения Гамльтона для переменных Q и P, а затем получите решения для исходных переменных q и p, выполнив обратное преобразование

Доказательство. (а)

$$
\begin{aligned}
&L = T - U = \frac{m\dot{q}^2}{2} - qF + c \\
&H = p\dot{q} - L = p\dot{q} - \frac{m\dot{q}^2}{2} + qF - c \\
&p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \dot{q} = \frac{p}{m} \\
&\ = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + qF = \frac{p^2}{2m} + qF - c
\end{aligned}
$$

(б)

$$
\begin{aligned}
&Q = -p \quad P = q + Ap^2 \\
&p = -Q \quad q = P - Ap^2 = P - AQ^2 \\
&\tilde{H}(Q, P) = \frac{Q^2}{2m} + (P - AQ^2)F
\end{aligned}
$$

Можно привести к $\tilde{H}(p)$ выбором $A = \frac{1}{2mF} : \frac{Q^2}{2m} + PF - \frac{Q^2 F}{2mF} = PF$

(в)

$$
\begin{aligned}
&\tilde{H}(P) = PF \\
&\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = F \quad Q = Ft + Q^{(0)} \\
&\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \quad P = P^{(0)} \\
&p = -Q = -Ft - Q^{(0)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q &= P - AQ^2 \\
&= p^{(0)} - \frac{1}{2mF}(Ft + Q^{(0)})^2 \\
&= p^{(0)} - \frac{1}{2mF}(F^2t^2 + 2FtQ^{(0)} + (Q^{(0)})^2) \\
&= p^{(0)} - \frac{Ft^2}{2m} - \frac{tQ^{(0)}}{m} - \frac{(Q^{(0)})^2}{2mF}
\end{aligned}
$$

□

Задача 1.4. Одномерный гармонический осциллятор задается гамильтонианом:

$$
H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}
$$

(а) Считая начальные данные q_0 и p_0 канонически сопряженными переменными со скобкой Пуассона

$$
\{q_0, p_0\} = 1
$$

докажите, что решения уравнений движения $q(t)$ и $p(t)$ в любой момент времени тоже образуют пару канонически сопряженных величин:

$$
\{q(t), p(t)\}_{q_0, p_0} = 1
$$

(б) Найдите производящую функцию первого рода $F_1(q_0, q(t), t)$, отвечающую каноническому преобразованию временной эволюции

$$
(q_0, p_0) \to (q(t), p(t))
$$

(в) Найдите производящую функцию второго рода $F_2\left(q_0, p(t), t\right)$, отвечающую каноническому преобразованию временной эволюции

Доказательство. (a)

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2}}q = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(q_0\cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t))$$

$$\frac{p}{m\omega} = \frac{p_0}{m\omega}\cos(\omega t) - q_0\sin(\omega t)$$

$$q = q_0\cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t) \qquad p = p_0\cos(\omega t) - q_0 m\omega\sin(\omega t) \qquad p_0 = \frac{(q - q_0\cos(\omega t))}{\sin(\omega t)}m\omega$$

$$\begin{aligned}
\{q,p\} &= \{q_0\cos(\omega t) + \frac{p_0}{\omega t}, p_0\cos(\omega t) - q_0 m\omega\sin(\omega t)\} \\
&= \{q_0,p_0\}\cos^2(\omega t) - \{p_0,q_0\}\frac{\sin^2(\omega t)}{m\omega}m\omega \\
&= \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \\
&= 1 \\
\{p,p\} &= \{p_0\cos(\omega t) - q_0 m\omega\sin(\omega t), p_0\cos(\omega t) - q_0 m\omega\sin(\omega t)\} \\
&= -\{p_0,q_0\}\cos(\omega t)m\omega\sin(\omega t) - \{q_0,p_0\}m\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) \\
&= -(-1) - 1 = 0 \\
\{q,q\} &= 0
\end{aligned}$$

(б)

$$p_0 = \frac{\partial F_1}{\partial q_0} = \frac{(q - q_0\cos(\omega t))}{\sin(\omega t)}m\omega$$

$$F_1 = \frac{(qq_0 - \frac{q_0^2}{2}\cos(\omega t))m\omega}{\sin(\omega t)} + f(q,t)$$

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{\partial F_1}{\partial q} \\
&= -\frac{(q - q_0\cos(\omega t))m\omega}{\sin(\omega t)}\cos(\omega t) + q_0 m\omega\sin(\omega t) \\
&= -\frac{q^2 m\omega\cos(\omega t)}{2\sin(\omega t)} + \frac{m\omega q_0 q(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}{\sin(\omega t)} + f(q_0,t) \\
&= -\frac{q^2 m\omega\cos(\omega t)}{2\sin(\omega t)} + \frac{m\omega q_0 q}{\sin(\omega t)} + f(q_0,t)
\end{aligned}$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = \tilde{H} = \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{H} &= \frac{p_0^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} \\
&= \frac{p_0^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_0^2(1-\cos^2(\omega t))}{2\sin^2(\omega t)} \\
&= \frac{p_0^2 \sin^2(\omega t) + m^2\omega^2 q_0^2 - m^2\omega^2 q_0^2 \cos(\omega t)}{2m\sin^2(\omega t)} \\
&= \frac{\omega^2(q^2 - \frac{2p_0^2}{m\omega^2}\sin(\omega t)\cos(\omega t) - 2q_0^2\cos^2(\omega t) + q_0^2)}{2\sin^2(\omega t)} \\
&= \frac{m\omega^2(q^2 - 2q_0\cos(\omega t)q + q_0^2)}{2\sin^2(\omega t)} \\
F_1 &= -\frac{\omega^2 q^2}{2}\frac{\tan^{-1}(\omega t)}{\omega} + q_0 q\frac{\omega m}{\sin(\omega t)} - \frac{m\omega^2 q_0^2}{2}\frac{\tan^{-1}(\omega t)}{\omega} + f(q, q_0) \\
&= -\frac{m\omega q^2\tan^{-1}(\omega t)}{2} + \frac{m\omega q_0 q}{\sin(\omega t)} - \frac{m\omega q_0^2\tan^{-1}(\omega t)}{2} + f(q, q_0)
\end{aligned}
$$

(в)

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_0} = \frac{p + q_0 m\omega\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} \\
F_2 &= \frac{pq_0 + \frac{q_0^2}{2}m\omega\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} + f_2(p, t) \\
q &= \frac{\partial F_2}{\partial p} \\
&= q_0\cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t) \\
&= q_0\cos(\omega t) + \frac{p + q_0 m\omega\sin(\omega t)}{m\omega\cos(\omega t)}\sin(\omega t) \\
F_2 &= q_0 p\cos(\omega t) + \frac{\frac{p^2}{2} + q_0 p m\omega\sin(\omega t)}{m\omega\cos(\omega t)}\sin(\omega t) + f_2(q_0, t) \\
&= \frac{m\omega\cos^2(\omega t)q_0 p + (\frac{p^2}{2})\sin(\omega t) + q_0 p m\omega\sin^2(\omega t)}{m\omega\cos(\omega t)} + f_2(q_0, t) \\
&= \frac{m\omega q_0 p + \frac{p^2}{2}\sin(\omega t)}{m\omega\cos(\omega t)} + f_2(q_0, t) \\
&= \frac{pq_0 + \frac{p^2}{2m\omega}\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} + f_2(q_0, t) \\
\tilde{H} &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\
F_2(q, p(t), t) &= \frac{pq_0}{\cos(\omega t)} + \frac{\frac{q_0^2}{2}m\omega\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} + \frac{\frac{p^2}{2m\omega}\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} + c \\
&= \frac{pq_0}{\cos(\omega t)} + \frac{q_0^2}{2}m\omega\tan(\omega t) + \frac{p^2}{2m\omega}\tan(\omega t) + c
\end{aligned}
$$

□