Алгебраическая геометрия: дз 7, до 23.12

1. Пусть X схема, $f \in \mathcal{O}_X(X)$, X_f подмножество точек X, где f не обращается в нуль (т е образ f не лежит в максимальном идеале соответствующего локального кольца). Предположим, что X нетерова, или же отделима и квазикомпактна. Покажите, что X_f открыто и гомоморфизм ограничения индуцирует изоморфизм $\mathcal{O}_X(X)_f$ и $\mathcal{O}_X(X_f)$.

2. Пусть X схема и $f_1, \ldots, f_k$ порождают $\mathcal{O}_X(X)$. Предположим, что X_{f_i} аффинны, докажите, что X тоже аффинно.

3. Выведите отсюда, что замкнутая подсхема аффинной схемы аффинна.

4. А также что аффинность морфизма $f : X \to Y$ можно проверять на покрытии, то есть следующие условия равносильны:

а) f аффинный, то есть прообраз любого аффинного открытого подмножества тоже аффинный

б) существует открытое аффинное покрытие U_i схемы Y, такое, что все $f^{-1}(U_i)$ аффинны.

5. Докажите, что конечность морфизма можно проверять на покрытии.

6. Пусть X схема и $\mathcal{F}$ пучок $\mathcal{O}_X$-модулей . Докажите, что $\mathcal{F}$ квазикогерентный тогда и только тогда, когда у любой точки есть окрестность U и точная последовательность пучков

$$\mathcal{O}_U^{\oplus I} \to \mathcal{O}_U^{\oplus J} \to \mathcal{F}|_U \to 0.$$

Здесь I, J - некоторые множества индексов.

$\mathcal{O}_X$ - квазиког. пучок $\overset{\sim 1}{\Rightarrow}$ $\exists U_i = \operatorname{Spec} A_i$

$\mathcal{O}_X(U_i) = \tilde{A}_i$ $\quad \overset{\sim}{\bigcup_{i=1}} U_i = X$ (X - нёт или квазикомп)

$V_i := U_i \cap X_f = D(f_i)$, где f_i ограничение f на U_i, т.к. $(f_i)_p = f_p \Rightarrow V_i$ - откр $X_f = \bigcup V_i \Rightarrow$

$\Rightarrow X_f$ - откр

$\mathcal{O}_X(V_i) \simeq \mathcal{O}_X(U_i)_f = (A_i)_f$

$\mathcal{O}_X$ - пучок $\Rightarrow \exists$ s.e.s.

$$0 \to \mathcal{O}_X(X) \to \oplus\, \mathcal{O}_X(U_i) \to \oplus\, \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \to$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X)_f \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & \oplus\, \mathcal{O}_X(U_i)_f \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta", "\wr"'] & \oplus\, \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f \arrow[d, "\gamma"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X_f) \arrow[r, "g'"'] & \oplus\, \mathcal{O}_X(V_i) \arrow[r, "h'"'] & \oplus\, \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j)
\end{tikzcd}$$

морфизм точных послед.

β - изоморфизм

α - инъ., т.к. g, β, g' - инъ.

т.к. $U_i \cap U_j$ - афф., если X - отделима или покр кон. кол-вом афф., если X - нёт. $\Rightarrow$ либо γ - изо, либо γ - инъ. по той же причине, что и α $\Rightarrow$ γ как минимум инъ. $\Rightarrow$ по лемме о 5 гомом. α - сюр.

$\Rightarrow$ α - изо

№6

$X = \cup U_i = \cup \operatorname{Spec} A_i$

fix p $\quad \exists i\ p \in U_i \quad \mathcal{F}|_{U_i} = \widetilde{M_i} \quad \mathcal{O}_X|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} = \widetilde{A_i}$

M_i - модуль над A_i $\Rightarrow$ $\exists$ точная послед.

$A_i^{\oplus J} \to A_i^{\oplus I} \to M \to 0$, где $|I|$ - кол-во

... соотношений

порожд. у M и $|J|$ - кол-во соотн

на эти порождающие

$\Rightarrow \forall q \in U_i = \operatorname{Spec} A_i$

$(A_i^{\oplus J})_q \simeq (A_i)_q^{\oplus J} \to (A_i^{\oplus I})_q \simeq (A_i)_q^{\oplus I} \to M_q \to 0$ - точная послед.

$\Rightarrow (\tilde{A}_i)_q^{\oplus J} \simeq (\mathcal{O}_{U_i})_q^{\oplus J} \to (\tilde{A}_i)_q^{\oplus I} \simeq (\mathcal{O}_{U_i})_q^{\oplus I} \to \tilde{M}_q \simeq (\mathcal{F}|_{U_i})_q \to 0$

точная послед $\forall q \in U_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus J} \to \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus I} \to \mathcal{F}|_{U_i} \to 0$ - точная послед

№2

$\varphi: X \to \operatorname{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$

$\varphi_{f_i}: X_{f_i} \to \operatorname{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{f_i}) \simeq \operatorname{Spec}(\Gamma(X_{f_i}, \mathcal{O}_X))$

т.к. X_{f_i} - aff $\Rightarrow \varphi$ - изоморфизм

$\mathcal{O}_X = \langle f_1, \dots f_k \rangle \Rightarrow X = \cup X_{f_i}$

$\operatorname{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)) = \cup \operatorname{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{f_i})$

т.е. φ - изоморфизм на базе $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi$ - изоморфизм

№3

$X \overset{i}{\hookrightarrow} \operatorname{Spec} A$ - замкн влож.

$X = \cup U_i = \cup \operatorname{Spec} B_i$

$\operatorname{Spec} A = \overset{n}{\cup} \operatorname{Spec} A_{f_i}$

$\mathrm{Spec}\,A \ \bigcup_{i=1}$

$\varphi^{\#}: A \to \mathcal{O}_X(X)$ - сюр. $a_i := \varphi^{\#}(f_i)$

$\mathcal{O}_X(X) = \langle a_1, \dots, a_N \rangle$

$\mathcal{O}_X(X_{a_i}) = \mathcal{O}_X(X)_{a_i} = \langle \frac{a_1}{1}, \dots \frac{a_N}{1} \rangle$

$\varphi(X_{a_i}) = \mathrm{Spec}\, A_{f_i}$

$X_{a_i} = \bigcup (X_{a_i} \cap \mathrm{Spec}\, B_i)$

№4

а) => б) - очев

б) => а) $U \subset Y$ - aff $U = \mathrm{Spec}\,A$ $Y = \bigcup U_i = \bigcup \mathrm{Spec}\,A_i$

$U \cap U_i = \bigcup U_{i,j}$ - гл мн. вели в обоих откр.

$\Rightarrow U_{i,j} = (\mathrm{Spec}\,A_i)_{g_j} = (\mathrm{Spec}\,A)_{h_{i,j}}$

$f^{-1}(U_i) = V_i = \mathrm{Spec}\,B_i$

$f^{-1}(U_{i,j}) = (\mathrm{Spec}\,B_i)_{f^{\#}(g_j)}$

$\left.\begin{array}{l} (f^{-1}(U))_{f^{\#}(h_{i,j})} = (\mathrm{Spec}\,B_i)_{f^{\#}(g_j)} \\ \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \langle f^{\#}(h_{i,j}) \rangle \end{array}\right\} \overset{\text{по 2}}{\Longrightarrow} f^{-1}(U)\text{-aff}$

тут также а) $\Rightarrow$ б) - очев

б) $\Rightarrow$ а) по ч $f^{-1}(U)$ - aff

факт из коммутата, если $R = \langle f_1, \dots f_n \rangle$

$\circledast$ $\varphi: R \to S$ $\quad R_{f_i} \to S_{\varphi(f_i)}$ - ком. $\Rightarrow$ φ - ком.

$\mathcal{O}_Y(U)_{h_{i,j}} \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))_{f^{\#}(h_{i,j})}$ - ком. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(U) \to U$ - ком.

д-во $\circledast$

$\varphi: R \to S$ - ком $\Leftrightarrow$ φ - целый морфизм и S - R-алг. ком. типа

fix $s \in S$ $\quad I \subset R[x]$ $\quad \forall p \in I \ \ p(s) = 0$

$J \subset R$ - коэфф. при старших степенях

у элем. I

$s \in S \Rightarrow \frac{s}{1} \in S_{f_i} \Rightarrow \exists p_i \in R_{f_i}[x] \ \ p_i(\frac{s}{1}) = 0$

$\exists n_i \ \ (f_i^{n_i} p_i) \in R[x] \Rightarrow f_i^{n_i} p_i \in I$

т.к. $1 = \sum a_i f_i$ $\quad \exists N$ - дост. большой, что

$N \ (\sum a_i f_i)^N \in J \Rightarrow \varphi$ - целый

$1 = 1 = (\sum a_i f_i)$

$S_{f_i} = \langle s_{i1}, \dots s_{in} \rangle$ - как R_{f_i}-мод. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{s}{1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} s_{ij} \Rightarrow \exists n_i \quad \frac{f_i^{n_i} s}{1} = \sum_{j=1}^{n} f_i^{n_i} a_{ij} s_{ij} \in S$

$\Rightarrow s = 1 \cdot s = 1^N \cdot s = (\sum b_i f_i)^N s = (\sum b_i f_i)^{\sim} \sum a_{ij} s_{ij} \in S$

№6

$\Leftarrow$ fix $x \in X \quad \exists U^* \ni x \qquad \mathcal{O}_U^J \to \mathcal{O}_U^I \to \mathcal{F}|_U \to 0$

$\exists U_i^*$, s.t. $U^* = \cup U_i^* = \cup \operatorname{Spec} A_i \quad$ w.l.o.g. $x \in U_i^*$

$\mathcal{O}_{U_i^*}^J \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{U_i^*}^I \to \mathcal{F}|_{U_i} \to 0$ (exact, since stalks still exact)

$M = \operatorname{coker} f_{U_i^*} = \frac{A_1^I}{f(A_1^J)} \qquad \forall p \in U_i^*$

$M_p = \left(\frac{A_1^I}{f(A_1^J)}\right)_p = \frac{(A_1^I)_p}{f(A_1^J)_p} = \frac{(A_1)_p^I}{f((A_1)_p^J)} = \operatorname{coker} f_p = \mathcal{F}_p$

$\Rightarrow \mathcal{F}|_{U_i^*} \simeq \tilde{M}$

этот процесс не зависит от выбора $x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ у нас есть aff. покрытие $X = \cup U_i^*$ и $\mathcal{F}$ огранич. на $\forall U_i^* = \operatorname{Spec} A_i^*$ это модуль над A_1^*