1 Введение: принцип наименьшего действия

1.1 Введение к введению

- Курс гамильтоновой механики (*Механики*!): дать представление об интересных *простых* задачах теоретической физики - “избранные главы” ...
- “Математика - то, что можно объяснить” (?), физика - надо думать в каждом случае (выделить простую систему из сложной). Математическая красота как один из критериев “правильности” физической теории.
- Курс квантовой механики - естественное продолжение!
- Главное - решать и сдавать задачи! Гораздо важнее, чем слушать любые лекции.
- Литература: Ландау-Лифшиц 1-й (и 2-й том?), Арнольд (?), Дубровин-Новиков-Фоменко (гл. 5).

1.2 Общие физические принципы

- Главная цель физики (в том числе математической) - решать реальные задачи, более естественны, часто помогает здравый смысл и т.п.
- Все основывается на некоторых общих принципах, постулатах - их принято считать естественными, результат наблюдений (пока опыт не покажет нечто прямо противоположное). Физические постулаты - аналог математических аксиом.
- Теоретическая физика - имеет дело с простыми конструкциями, часто ничего другого просто нельзя написать ...
- Является источником большинства задач современной математики.

1.3 Картины мира

Кинематика:

- Описание системы: обобщенные координаты ($\{q\}$ или $\{x\}$), их количество – число *степеней свободы*;
- Обобщенные скорости или импульсы ($\{\dot{x}\}$ или $\{p\}$);
- $(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots) = (x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots)$

Динамика:

- "Картина Тейлора": $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n$;
- Однако (И.И.Ньютон): $\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = \frac{1}{m}F(x, \dot{x})$;
- Лагранжева и Гамильтонова картины: принцип наименьшего действия.

1.4 Принцип наименьшего действия

Принцип наименьшего действия (или принцип Гамильтона) - *не следует* ниоткуда.

$$S = \int_0^T L(q, \dot{q}; t)dt = S[q, \dot{q}; T], \tag{1}$$

- Некоторый функционал от траекторий (достаточно гладких), отображений отрезка в многообразие $q : [0, T] \mapsto M \simeq \mathbb{R}^D$;
- Зависит только от (обобщенных) координат и скоростей, гладкие траектории - "большие системы", $S \gg \hbar$;
- На траекториях *необходимо* $\delta S = 0$,

$$\delta S = S[q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}; T] - S[q, \dot{q}; T] \tag{2}$$

  при *малых* $\delta q(t)$ (и $\delta\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\delta q(t)$).

Из вариации действия следуют уравнения движения, определяющие траекторию системы (в пространстве конфигураций или обобщенных координат):

$$\begin{aligned}\delta L = L[q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}; t] - L[q,\dot{q};t] \simeq \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \\ = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\end{aligned} \tag{3}$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование!) или же можно сказать, что второе слагаемое интегрируется по частям:

$$\int_0^T dt\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_0^T - \int_0^T dt\ \delta q_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{4}$$

Если мы как-то занулим граничный член (существеннейшая часть - граничные условия!): например, $\delta q|_{0,T} = 0$, тогда на экстремали (в силу произвольности вариации $\delta q(t)$ при $0 < t < T$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, \dim M \tag{5}$$

получим *уравнения Эйлера-Лагранжа.*

Теорема: уравнения Эйлера-Лагранжа (5) при $q(0) = q_0$, $q(T) = q_1$ задают единственную траекторию (как система дифференциальных уравнений второго порядка!) на которой функционал действия $S[q,\dot{q};T] = S(q_0,q_1;T)$ есть число (минимальное при некоторых естественных условиях).

Свойства функции Лагранжа $L(q,\dot{q};t)$:

- Зависит от обобщенных координат и их *первых* производных (функция на касательном расслоении TM?). Вообще говоря это не так - признак фундаментальной физической системы ...

- Определена с точностью до полной производной по времени: легко проверить, что $L(q,\dot{q};t)$ и $\tilde{L}(q,\dot{q};t) = L(q,\dot{q};t) + \frac{d}{dt}\varphi(q,t)$ дают одни и те же уравнения движения.

- Аддитивна для системы из двух невзаимодействующих подсистем.

1.5 Свободная частица

Свободное движение (принцип относительности)

$$L_{\text{free}}(q, \dot{q}; t) = L_{\text{free}}(\dot{q}) = l(\dot{q}^2) = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 \tag{6}$$

Уравнения ЭЛ для $L = L_{\text{free}}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= m\ddot{q}_i = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

с очевидным решением

$$q = q_0 + vt = q_0 + \frac{q_1 - q_0}{T}t \tag{8}$$

а заодно проверили и аддитивность (для нескольких координат $L_{\text{free}} = \sum_i \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2$, для нескольких свободнах частиц $L_{\text{free}} = \sum_{a,i} \frac{1}{2}m_a\dot{\mathbf{q}}_a^2$).

Тут можно уже начинать цепляться, но:

- На первом шаге действительно очевидно, что функция Лагранжа зависит только от скоростей $\dot{q} = v$, а значит $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = 0$, т.е. $\frac{\partial L}{\partial v} = \text{const}$, а значит $v = \text{const}$ при любой функции $L(v) = l(v^2)$.

- Линейность функции $l(v^2)$ следует из принципа относительности Галилея: уравнения движения ковариантны относительно преобразований $t \mapsto t$, $q \mapsto q' = q + Vt$ с постоянной V – скоростью движения системы отсчета. Действительно, при этом $v \mapsto v + V$, и при малых V

$$\begin{aligned} L' = L(v + V) = l(v^2 + 2vV + V^2) \simeq l(v^2) + l'(v^2)2vV = \\ = L(v) + \frac{d}{dt}\varphi(q) \end{aligned} \tag{9}$$

  отличаются на полную производную (т.к. обязаны давать одни и те же уравнения движения!) только при линейной $l(v^2) = \frac{1}{2}mv^2$.

- Наконец, для свободной частицы действие $S = \frac{1}{2}\int_0^T dt\, mv^2 = \frac{1}{2}mT\langle v^2\rangle$, т.е. средний квадрат скорости на траектории, очевидно минимально на решении уравнений движения ЭЛ – движении с постоянной скоростью $v = \langle v\rangle = \frac{q_1-q_0}{T}$, поскольку

$$\langle (v - \langle v\rangle)^2\rangle = \langle v^2\rangle - \langle v\rangle^2 \geq 0 \tag{10}$$

а значит

$$S = \tfrac{1}{2}mT\langle v^2\rangle \geq \tfrac{1}{2}mT\langle v\rangle^2 \tag{11}$$

больше стоящего в правой части действия на траектории при любом $v \neq \langle v\rangle$.

1.6 Примеры других механических систем

А что еще можно написать? Вообще говоря:

$$L(q,\dot{q}) = -U(q) + A_i(q)\dot{q}_i + \tfrac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \ldots \tag{12}$$

просто разложение по степеням производных с любыми заданными на M “фунциями” $U(q)$, $\{A_i(q)\}$, $\{g_{ij}(q)\}$.

- Члены выше квадратичных писать "не нужно"(?!) - несущественны при медленных изменениях;
- В только что рассмотренном примере свободной частицы было $U = 0$, $A_i = 0$ и $g_{ij}(q) = \delta_{ij}$, что легко отождествляется с евклидовой метрикой в $M = \mathbb{R}^n$.
- Вообще говоря: $U(q)$ - скалярный потенциал взаимодействия (почему знак минус?), $A_i(q)$ - вектор-потенциал (магнитное поле - пока про него забудем, т.е. пусть пока $A_i = 0$), $g_{ij}(q)$ - метрика на “кривом” M, или просто в криволинейных координатах.

Можно ли положить вместо этого $g_{ij}(q) = 0$?

- Частичный (но яркий!) ответ на этот вопрос дается примером Дирака: $L(q,\dot{q},t) = q$, приводит к уравнению движения ... $1 = 0$, т.е. не любая функция на TM имеет смысл функции Лагранжа;

- Немногим лучше пример $L(q,\dot{q},t)=\dot{q}$, с лагранжианом – полной производной, т.е. отсутствующими уравнениями движения и действием $S=q_1-q_0$ на *любой* траектории $q(t)$. Впрочем, иногда такие теории называются ... *топологическими*.

Усложним пример Дирака: пусть $L(q,\dot{q},t)=-U(q)$. Тогда решениями уравнений движения $dU=0$ является $q(t)=q^*=\mathrm{const}$ фиксированный (динамики нет!) набор критических точек функции $U(q)$ на многообразии M. Ситуация однако становится нетривиальной, когда условие

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0, \qquad i=1,\ldots,m<n \tag{13}$$

независимости от скоростей выполняется *по части* переменных. Тогда уравнения ЭЛ по соответствующим переменным превращаются в уравнения связей

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad i=1,\ldots,m<n \tag{14}$$

максимум первого порядка по времени, и при удаче их можно просто разрешить относительно $q_1,\ldots,q_m$, т.е. сократить число реальных степеней свободы на $m<n$.

Пусть, наконец, $M=\mathbb{R}^D$, $g_{ij}(q)=m\delta_{ij}$, тогда уравнения движения в общем случае

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}+\partial_i A_j\dot{q}_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=m\dot{q}_i+A_i(q)\\ m\ddot{q}_i=-\frac{\partial U}{\partial q_i}-F_{ij}\dot{q}_j=f_i(q,\dot{q};t),\\ F_{ij}=\partial_i A_j-\partial_j A_i\end{gathered} \tag{15}$$

представляют собой 2-й закон Ньютона для силы в потенциальном $f=-\frac{\partial U}{\partial q}$ (знак – просто соглашение!) и в магнитном полях (сила Лоренца).

- Закон Ньютона - утверждение, что классическая механика описывается дифференциальными уравнениями 2-го порядка: состояние системы определяется её координатами и скоростями (импульсами), взаимодействие зависит них же. Дифференциальное уравнение вычисляет ускорения по координатам и скоростям и задает (однозначно!) состояния системы в последующие моменты времени.

- Вид естественных в природе взаимодействий почти однозначно определяется простыми свойствами действия - больше практически ничего нельзя написать! Более сложные явления - явная зависимость от времени и т.п. - более характерны для “неэлементарных” систем.

Системы частиц: $q \to \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N\} \in (\mathbb{R}^D)^{\times N}$

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{2} \dot{\mathbf{q}}_a^2 - U(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N) \tag{16}$$

2-й закон Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{q}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_a} \quad a = 1, \ldots, N \tag{17}$$

где силы определяются потенциальной энергией, и зависят *только* от взаимного расположения тел, $U(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N) = \sum_{a<b} V(|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|)$.

1 Введение: принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

Принцип наименьшего действия замечателен и тем, что помимо уравнений движения дает сразу дополнительную информацию о системе. В частности - главное, что бы обсудим на этой лекции - *симметрии* действия системы приводят к *законам сохранения*.

2.1 Энергия

Функция Лагранжа *замкнутой* (в более общем случае - *консервативной*) системы *явно* (требуется расшифровать!) не зависит от времени. Поэтому для нее в формуле

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{1}$$

последнее слагаемое отсутствует. На уравнениях движения ЭЛ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2}$$

поэтому

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \underset{\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)}{=} \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{3}$$

а стало быть

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0 \tag{4}$$

и величина

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{5}$$

сохраняется (для явно не зависящей от времени функции Лагранжа консервативной системы) на уравнениях движения, или как говорят является *интегралом движения*.

- Эта величина называется энергией. Например для движения в потенциальном поле

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 - U(q) \\ E &= \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 + U(q) \end{aligned} \tag{6}$$

  полная энергия является суммой кинетической (зависящей от скоростей) и потенциальной (зависящей только от координат) энергий.

- Закон сохранения энергиии является следствием инвариантности действия относительно сдвига времени.

- Энергия, выраженная не через координаты и скорости, а через координаты и импульсы $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (если эти уравнения можно разрешить относительно скоростей)

$$E = \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right)_{\dot{q}_i(q,p)} = (p_i \dot{q}_i - L)_{\dot{q}_i(q,p)} = H(p,q) \tag{7}$$

  называется функцией Гамильтона, а преобразование $L \to H$ преобразованием Лежандра.

- Самый важный интеграл движения: для большинства физических систем - единственный! Это определяет выделенную роль энергии в статистической физики. В квантовой механике гамильтониан - оператор эволюции, вернемся к этому при рассмотрении гамильтонова формализма.

2.2 Импульс

Пусть теперь функция Лагранжа не зависит от какой-либо из координат (называемой циклической) q_A (или - что то же самое - от сдвига координаты q_A: $L|_{q_A+\epsilon} = L$. Тогда из соответствующего уравнения ЭЛ следует, что

$$\frac{dp_A}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} = \frac{\partial L}{\partial q_A} = 0 \tag{8}$$

т.е. соответствующая компонента импульса $p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}$ является интегралом движения.

Пример: для свободной частицы *все* компоненты импульса $\frac{dp_i}{dt}$, $i = 1, \ldots, D$ являются интегралами движения, т.е. число независимых интегралов движения равно числу степеней свободы. Такие системы называются интегрируемыми, при этом любой другой интеграл движения (например энергия свободной частицы $E = \frac{1}{2m}\sum_i p_i^2$) выражается через эти независимые компоненты импульса.

Предположим теперь, что лагранжиан инвариантен лишь относительно *одновременного* сдвига всех координат

$$L(q, \dot{q}) = L(q_1 + \epsilon, \ldots, q_D + \epsilon, \dot{q}), \qquad \frac{dL}{d\epsilon} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{9}$$

Тогда в силу уравнений движения сохраняется лишь полный импульс $P = \sum_i p_i$, поскольку

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{10}$$

Пример: системы частиц: $q \to \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N\} \in (\mathbb{R}^D)^{\times N}$

$$L(x, \dot{x}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{2}\dot{\mathbf{x}}_a^2 - U(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) \tag{11}$$

2-й закон Ньютона

$$m_a \ddot{\mathbf{x}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_a} \quad a = 1, \ldots, N \tag{12}$$

где силы определяются потенциальной энергией, и зависят *только* от взаимного расположения тел, $U(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) = \sum_{a<b} V(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)$. Для такого потенциала $U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}, \ldots, \mathbf{x}_N + \mathbf{r}) = U(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$, а стало быть полный импульс $\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_a} = \sum_a m_a \dot{\mathbf{x}}_a$ сохраняется.

2.3 Теорема Нетер

Идейно: *всякая непрерывная однопараметрическая симметрия задачи влечёт существование закона сохранения.*

Теорема 1 *Если лагранжиан* $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ *сохраняется под действием однопараметрической группы диффеморфизмов* $\delta q = s\chi(q)$ *или*

$$\begin{aligned} q^1 &\mapsto q^1(s) = q^1 + \chi^1(\mathbf{q}) \cdot s + o(s) \\ &\vdots \\ q^n &\mapsto q^n(s) = q^n + \chi^n(\mathbf{q}) \cdot s + o(s) \end{aligned} \tag{13}$$

То система имеет первый интеграл следующего вида

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \chi^i = \mathrm{const}$$

В данном случае можно говорить о том, что на многообразии M обобщенных координат $\{q\}$ действует некоторая группа G симметрий (преобразований, оставляющих действие инвариантным), а $X = \chi^i \frac{\partial}{\partial q_i}$- векторное поле $X \in \mathfrak{g} = Lie(G)$, отвечающее ее некоторой однопараметрической подгруппе.

Действие группы $G : M \mapsto M$ индуцирует действие на касательном расслоение TM, при котором вектора касательного пространства преобразуются как дифференциал отображения $M \mapsto M$

$$\begin{gathered} q^i \mapsto \tilde{q}^i(q), \qquad i = 1, \ldots, \dim M \\ \chi^i \mapsto \tilde{\chi}^i = \chi^j \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q_j} \end{gathered} \tag{14}$$

Непрерывной симметрией будем называть однопараметрическую группу диффеоморфизмов M (гладких преобразований обобщённых координат, а вообще говоря - можно добавить и время), сохраняющих действие, т.е.

$$\begin{gathered} \mathbf{q}(t) \mapsto {}^s\mathbf{q} = \mathbf{q}(t; s) \\ L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{t}) = L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}, t) \end{gathered} \tag{15}$$

Пример: Свободная частица в $\mathbb{R}^2$, координаты декартовы, преобразование – поворот:

$$\begin{aligned} q_1 &\mapsto \ {}^s q_1 = \cos s \cdot q_1 + \sin s \cdot q_2 \\ q_2 &\mapsto \ {}^s q_2 = -\sin s \cdot q_1 + \cos s \cdot q_2 \end{aligned}$$

Лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$. При деформации получаем $L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2}({}^s\dot{q}_1^2 + {}^s\dot{q}_2^2) = \frac{m}{2}(\cos^2 s + \sin^2 s)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ Лагранжиан вообще не изменился, значит и действие вообще не изменилось, данное преобразование действительно является симметрией.

Доказательство: упражнение на дифференцирование. Очевидно, что дифференцируя по параметру преобразования ($q' = \frac{dq}{ds}$)

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{ds} L(q(t,s), \dot{q}(t,s); t) = \frac{\partial L}{\partial q} q' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}' \underset{\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}{=} \\ = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} q' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} q'\right) \end{aligned} \tag{16}$$

откуда с очевидностью

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} q'\right)\bigg|_{s=0} = 0 \tag{17}$$

- Закон сохранения импульса (полного импульса или его компонент) - очевидные частные случаи;
- Вращательная симметрия - задача на разбор

2.4 Одномерное движение

Зачем нужны интегралы движения? Рассмотрим самый простой пример.

Пусть у нас есть консервативная система с одной степенью свободы, т.е.

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q) = \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) \tag{18}$$

если ограничиться квадратичным по производной слагаемым. (Почему нет члена $A(q)\dot{q}$, коэффициент $g(q) = m$ можно считать константой или просто массой, а $q = x$ – декартовой координатой?)

Уравнения движения нам хорошо знакомы

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} \tag{19}$$

и их решение всем хорошо известно (?) в линейном случае (гармонический осциллятор). Для решения задачи в произвольном потенциале достаточно ответить на два простых вопроса:

- Есть ли у данного дифференциального уравнения интегрирующий множитель?

- Может ли помочь найденный в начале лекции (и *всегда* существующий у такой системы) интеграл движения: энергия $\frac{dE}{dt} = 0$.

Ответы на два данных вопроса положительны и эквивалентны. Действительно, домножив обе части равенства (19) на $\dot{x}$, получим

$$\begin{gathered} m\ddot{x}\dot{x} = -\frac{dU}{dx}\dot{x} \\ \frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}^2}{2} = -\frac{d}{dt}U(x) \\ \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \qquad \frac{dE}{dt} = 0 \end{gathered} \tag{20}$$

Таким образом вместо дифференциального уравнения 2-го порядка (19) мы получили дифференциальное уравнение первого порядка, которое интегрируется (при любом потенциале!) разделением переменных

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \\ t = \int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \end{gathered} \tag{21}$$

где ответ (приведенный в виде неопределенного интеграла) пишется в виде неявной функции $t = t(x; E, C)$ с двумя константами интегрирования – энергией и, например, начального момента времени.

Одномерное движение консервативной системы (с интегралом движения – сохраняющейся энергией) представляет собой простейший пример *интегрируемой системы*. Ответ для этой задачи (с любым полиномиальным потенциалом $U(x)$ степени ≥ 3) выражается через абелев интеграл от голоморфного дифференциала $\frac{dx}{\sqrt{(E-U(x))}}$ на гиперэллиптической кривой $y^2 = E - U(x)$ вложенной в $\mathbb{C}^2$.

2.5 Система двух тел

В качестве простейшего обобщения рассмотрим систему двух тел в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^D \ni \mathbf{x}$, т.е. систему с лагранжианом

$$L = \sum_{a=1,2} \tfrac{1}{2} m_a \dot{\mathbf{x}}_a^2 - U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \tag{22}$$

Как мы уже видели у этой системы есть D интегралов движения – полный импульс

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1,2} m_a \dot{\mathbf{x}}_a, \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{P} = 0 \tag{23}$$

что позволяет в два раза сократить число степеней свободы.

Перейдем в систему центра масс положив

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1,2} m_a \dot{\mathbf{x}}_a = 0 \tag{24}$$

и введем относительную координату $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Два последние равенства можно разрешить относительно

$$\mathbf{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{x} \tag{25}$$

поставляя которые в лагранжиан (22) получаем

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x}) \tag{26}$$

т.е. систему из единственной частицы с приведенной массой

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{27}$$

- Физически это рассуждение легко проверить в пределе, скажем $m_1 \gg m_2$. Тогда движением тяжелого тела можно пренебречь и система (26) сводится к движению легкого тела с $m \to m_2$.
- Математически это рассуждение представляет собой простейший пример так называемой *гамильтоновой редукции*, когда мы садимся на поверхность уровней некоторых интегралов движения (в данном случае $\mathbf{P} = 0$) и факторизуем систему по действию соответствующей группы инвариантности (в данном случае по общему сдвигу всех координат). Об этом подробнее ниже.

- При $D = 1$ система интегрируема – возвращаемся к предыдущему примеру.

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

Вернемся еще раз к теме интегралов движения.

3.1 Момент импульса

Применим теорему Нетер к вращательной симметрии задачи о движении в центрально-симметричном поле

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - U(|\mathbf{x}|) \tag{1}$$

для определенности – в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Симметрия задачи очевидна [1] – инвариантность лагранжиана относительно группы поворотов $O(3)$ или преобразований

$$\delta x_i = \epsilon_{ijk} x_j \delta\varphi_k \tag{3}$$

из алгебры Ли $\mathfrak{g} = so(3) \simeq su(2)$, генерируемых векторными полями

$$V_i = -\epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad [V_i, V_j] = \epsilon_{ijk} V_k \tag{4}$$

В этих формулах $\{\epsilon_{ijk}\}$ – набор компонент полностью антисимметричного тензора в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, а также – структурных констант алгебры Ли, генерирующей его повороты.

[1] Действительно, мы уже рассматривали вращение в двумерной плоскости, которое описывается формулами

$$\begin{aligned} {}^s x_1 - x_1 = \delta x_1 = s \cdot x_2 + o(s) \\ {}^s x_2 - x_2 = \delta x_2 = -s \cdot x_1 + o(s) \end{aligned} \tag{2}$$

которое является частным случаем данной формулы при $\delta\varphi_j = s\delta_{j3}$.

Буквальное применение теоремы Нетер сразу дает три интеграла движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\epsilon_{ijk}\delta\varphi_j x_k\right) = \sum_j \delta\varphi_j \frac{d}{dt}M_j = 0$$
$$M_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k \tag{5}$$

которые являются компонентами вектора $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. Этот факт совершенно очевиден и непосредственно из уравнений движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}$$
$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = -U'(|\mathbf{x}|)\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \tag{6}$$

поскольку

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = m\frac{d}{dt}\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = m\frac{d}{dt}\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}} \underset{(6)}{=} 0 \tag{7}$$

Сохранение момента импульса $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$, который перпендикулярен радиус-вектору частицы $\mathbf{x}$, означает, что движение происходит все время в плоскости $\mathbb{R}^2$, перпендикулярной моменту $\mathbf{x} \cdot \mathbf{M} = 0$, а значит задача редуцируется в $D = 2$. Записав лагранжиан в полярных координатах

$$L = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - U(r) \tag{8}$$

становится очевидным, что $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$, а значит соответствующий (обобщенный) импульс

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = M = \mathrm{const} \tag{9}$$

Очевидно также, что в данной системе сохраняется энергия

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + U(r) = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{10}$$

т.е. избавившись от угловой координаты мы видим, что система стала эквивалентной одномерной системе (на полупрямой $0 < r < \infty$) с потенциалом $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$, куда вносит вклад центробежная энергия $U_c(r) = \frac{M^2}{2mr^2}$.

3.2 Задача Кеплера

Геометрический смысл формулы (9) представляет собой *второй закон Кеплера*, утверждающий, что “секториальная скорость” при движении в центральном поле сохраняется – где площадь сектора, заметаемого радиус-вектором при движении за бесконечно малый интервал времени dt

$$\tfrac{1}{2}r \cdot rd\phi = \frac{M}{2m}dt \tag{11}$$

Законы сохранения (9) и (10) при интегрировании дают

$$\begin{aligned} t &= \int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} \\ \phi &= \frac{M}{m} \int \frac{dt}{r^2} = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} \end{aligned} \tag{12}$$

явное решение (в смысле, который мы уже обсуждали) поставленной задачи: обратные функции к динамике $r(t)$ и форме траектории в плоскости $r(\phi)$.

При задаче движения в ньютоновском или кулоновском притягивающем потенциале $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$ (собственно “задаче Кеплера”)

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{13}$$

имеет очевидные асимптотические свойства

$$U_{\text{eff}}(r) \underset{r\to 0}{\to} \infty_+, \qquad U_{\text{eff}}(r) \underset{r\to\infty}{\to} 0_- \tag{14}$$

и единственный минимум

$$r_* = \frac{M^2}{\alpha m}, \qquad U_* = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2} \tag{15}$$

Уравнения (12) в данном случае интегрируются в явных функциях, что дает например

$$\phi = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}}} = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \phi_0 \tag{16}$$

где константа интегрирования – просто начало отсчета угла. Это уравнение явно переписывается в виде конического сечения (легко убедиться, переписав в декартовых координатах!) с фокусом в начале координат

$$\frac{A}{r} = 1 + \gamma \cos\phi \tag{17}$$

где $A = \frac{M^2}{m\alpha}$ – параметр, а $\gamma = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ – эксцентриситет орбиты.

- При минимальной энергии $E = U_* = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}$ это движение по окружности с радиусом $r = r_* = 1/A$;
- При отрицательных энергиях $U_* \le E < 0$ движение финитно, траектория – эллипс;
- При $E = 0$ получим $\gamma = 0$ и движение по параболе;
- При $E > 0$ имеем $\gamma > 0$ и движение по гиперболе.

3.3 Смена парадигмы

Ну а пусть теперь $U(r) = 0$, и радиальное одномерное движение происходит в потенциале

$$U_{\text{eff}}(r) = U_c(r) = \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{g}{r^2}, \quad g = \frac{M^2}{2m} > 0 \tag{18}$$

Это случай интегрируемого потенциала *модели Калоджеро*. Ожидаемо уравнения (12) интегрируются с результатом

$$t = \int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_c(r)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{rdr}{\sqrt{Er^2 - g}} \tag{19}$$

или попросту

$$r = \sqrt{\frac{g}{E} + \frac{2E}{m}t^2} \tag{20}$$

Что и естественно было ожидать: ответ представляет собой траекторию движения *свободной* частицы в двумерной плоскости: прямую

$$\begin{gathered} x = x_0 + v_x t, \quad y = y_0 + v_y t \\ v_x^2 + v_y^2 = \frac{2E}{m} \end{gathered} \tag{21}$$

а константа взаимодействия $g = \frac{M^2}{2m}$ связывается при этом с дополнительным интегралом движения. При этом важно, что

- Движение в системе интегрируемым потенциалом возникает как редукция *свободного* движения в большем числе измерений;
- Это свойство модели Калоджеро сохраняется и для систем многих частиц с потенциалами, имеющими полюс второго порядка:

$$U_c(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{1}{\sin^2(x)}, & x \in S^1 \\ \wp(x), & x \in T^2 \end{cases} \tag{22}$$

Многие свойства интегрируемых систем имеют рациональное, тригонометрическое и эллиптическое воплощения – и при этом ... не продолжаются дальше.

3.4 Принцип наименьшего действия

Сегодня при решении задач мы пользовались, в основном, интегралами движения. Вспомним однако, что мы находимся в картине лагранжевой механике, и проверим еще раз "на прочность" принцип наименьшего действия.

Итак, мы выяснили, что свободное движение в двумерии с функцией Лагранжа в полярных координатах

$$L = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) \tag{23}$$

приводит к сохранению момента импульса $M = mr^2\dot{\phi} = \mathrm{const}$ и при редукции на радиальное направление к эффективному одномерному движению с энергией $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2}$, сохраняющейся на уравнениях одномерного движения в отталкивающем потенциале Калоджеро, т.е.

$$m\ddot{r} = -U_c'(r) = \frac{M^2}{mr^3} \tag{24}$$

с константой $g = \frac{M^2}{2m} > 0$.

Ну а почему бы не воспользоваться прямо лагранжевой формулировкой? Уравнения ЭЛ для (23)

$$\begin{aligned} &m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 \\ &\frac{d}{dt}mr^2\dot{\phi} = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

и решив второе в виде $\dot{\phi} = \frac{M}{mr^2}$, и подставив это решение прямо в лагранжиан мы получаем

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\phi}^2 = \frac{M^2}{mr^3} \\ L_{\text{eff}} &= \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} \end{aligned} \tag{26}$$

т.е. ту же систему Калоджеро (24), но ... с другим ($m\ddot{r} = -\frac{M^2}{mr^3}$) знаком?!

- Вроде бы очевидно физически, что правильным уравнением является (24), так как центробежная сила должна отталкивать, а не притягивать.

- Как же тогда быть с принципом наименьшего действия?

Правильный ответ – аккуратно. Вспомним, что мы варьируем действие на траектории, и должны добиваться вообще говоря зануления не только интегрального, но и граничных вкладов. Это означает, в том числе, что решая уравнение на угол, следует аккуратно написать

$$\dot{\phi} = \frac{M}{mr^2}, \qquad \phi(t) = \frac{M}{m}\int_0^t \frac{d\tau}{r^2(\tau)} + \phi_0 \tag{27}$$

а стало быть константа M фиксируется условием

$$\phi_1 - \phi_0 = \frac{M}{m}\int_0^T \frac{d\tau}{r^2(\tau)} \tag{28}$$

и при фиксированных граничных значениях угла (или их разности $\theta = \phi_1 - \phi_0$)

$$M = \frac{m\theta}{\int_0^T \frac{dt}{r^2}} \tag{29}$$

сама становится нетривиальным функционалом координаты $r(t)$ на траектории. Подстановка последнего равенства в действие дает

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} &= \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\theta^2}{2r^2}\left(\frac{1}{\int_0^T \frac{dt}{r^2}}\right)^2 \\ S_{\text{eff}} &= \int_0^T dt L_{\text{eff}} = \int_0^T dt\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\theta^2}{2\int_0^T \frac{dt}{r^2}} \end{aligned} \tag{30}$$

Первый философский вывод таков:

- Все что говорилось о свойствах действия (интеграл от функции Лагранжа, степени не выше двух по первым производным итп) верно только для фундаментальных систем;
- При построении эффективных действий (“интегрировании” по части переменных) это свойство нарушается уже в простейших примерах, эффективные действия могут быть какими угодно;
- Принцип наименьшего действия верен даже там, где нельзя пользоваться уравнениями ЭЛ (это, конечно, еще надо проверить!), т.к. в последней формуле нет “нормального лагранжиана”.

Варьируя (но не пользуясь уравнениями ЭЛ!), получаем

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}} &= \int_0^T dt m\dot{r}\delta\dot{r} - \frac{m\theta^2}{2\left(\int_0^T \frac{dt}{r^2}\right)^2}\int_0^T (-2)\frac{dt}{r^3}\delta r = \\ &= -\int_0^T dt m\ddot{r}\delta r + \frac{m\theta^2}{\left(\int_0^T \frac{dt}{r^2}\right)^2}\int_0^T \frac{dt}{r^3}\delta r = \\ &= -\int_0^T dt m\ddot{r}\delta r + \frac{M^2}{m}\int_0^T \frac{dt}{r^3}\delta r = \int_0^T dt\delta r\left(-m\ddot{r} + \frac{M^2}{m}\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

или просто – правильные уравнения движения.

Элементы дифференциальной геометрии

В этой лекции мы напомним основные понятия и конструкции анализа на многообразиях необходимые для введения гамильтонова формализма.

1 Гладкие многообразия

Неформально многообразием M называется *то, что "локально устроено как евклидово пространство"*, то есть, можно считать, что в окрестности всякой точки $\mathbf{m} \in M$ имеются локальные координаты $(q^1, \cdots, q^n)$, с нулём в $\mathbf{m}$ (очевидно не единственные). Стандартное строгое определение оперирует понятием *класса эквивалентности атласов* можно найти в любой книге по дифференциальной геометрии. Ещё один менее формальный, но относительно более наглядный способ предлагает смотреть на структуру гладкого многообразия как на правило или способ задавания множества всех гладких функций на нём – функция гладкая в окрестности точки $\mathbf{m}$ в каких-либо координатах какого-либо атласа должна быть гладкой в окрестности $\mathbf{m}$ во всех других картах этого и всех прочих атласов, покрывающих точку $\mathbf{m}$.

1.1 (Ко)касательные вектора, пространства и расслоения

Понятие касательного вектора к точке $\mathbf{m}$ многообразия M обобщает известные из матанализа понятия вектора скорости параметризованной кривой в $\mathbb{R}^n$ и производной по направлению в $\mathbb{R}^n$. Как мы видели, задание на M структуры гладкого многообразия позволяет корректно определить понятие гладкой функции на M. Основным свойством и характеристикой дифференцируемых (а значит и гладких) отображений является возможность локально приближать их линейными. При этом, в случае евклидова аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ соответствующее линейное отображение действует на векторном пространстве $V^n \simeq \mathbb{R}^n$ приложенном к точке x, окрестность которой мы рассматриваем. Пространство V^n в этом случае называется касательным к $\mathbb{R}^n$ в точке x, а линейное отображение индуцированное на нём гладким отображением $\mathbb{R}^n$ дифференциалом. Эту конструкцию можно перенести и на случай гладких многообразий. Приведём три эквивалентных определения касательного вектора:

Определение 1. *Касательным вектором v в точке $\mathbf{m}$ многообразия M называется*

- *Отнесённый к системе координат* $(q^1, \cdots, q^n)$ *набор* $(v^1, \cdots, v^n)$*, меняющийся при переходе к координатам* $(\widetilde{q}^1, \cdots, \widetilde{q}^n)$ *по правилу*

$$\widetilde{v}^i = \frac{\partial \widetilde{q}^i}{\partial q^j} v^j$$

- *Класс эквивалентности гладких кривых* $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

- *Дифференцирование алгебры (вообще говоря ростков) гладких в* $\mathbf{m}$ *функций, то есть, линейное отображение* $v : C^\infty_{\mathbf{m}}(M) \to \mathbb{R}$*, удовлетворяющее правилу Лейбница.*

Множество всех векторов v, касательных к M в точке $\mathbf{m}$ очевидно образует векторное пространство, обозначаемое $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$. Всякие координаты $(q^1, \cdots, q^n)$ на M в окрестности $\mathbf{m}$ задают (по третьему определению) на $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$ базис, состоящий из элементов

$$\partial_{q^i}\Big|_{\mathbf{m}} = \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\mathbf{m}}$$

Упражнение: *Найдите кривые и наборы чисел, задающие этот базис в первом и втором определении касательных векторов.*

Как и для всякого векторного пространства, для $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$ определено двойственное пространство $(\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M)^*$, традиционно обозначаемое $\mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$, состоящее из линейных функционалов на $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$. Выбор координат $(q^1, \cdots, q^n)$ в окрестности $\mathbf{m}$ задаёт на $\mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$, базис

$$dq^i\Big|_{\mathbf{m}} : \quad \left\langle dq^i\Big|_{\mathbf{m}}, \partial_{q^j}\Big|_{\mathbf{m}} \right\rangle = \delta^i_j$$

Структура гладкого многообразия на M задаёт структуры гладких многообразий и на объединениях $\bigcup_{\mathbf{m}\in M} \mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$ и $\bigcup_{\mathbf{m}\in M} \mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$. Получающиеся при объекты называются касательным $\mathrm{T}M$ и кокасательным T^*M расслоениями.

Упражнение: *Пусть* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha\})\}$ *атлас на* M*. Найдите функции перехода между картами соответствующих ему атласов на* $\mathrm{T}M$ *и* T^*M*.*

Таким образом, точка $\mathrm{T}M$ это пара $(\mathbf{m}, v)$ где $\mathbf{m} \in M$, а $v \in \mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$. Оператор проекции $\pi : \mathrm{T}M \to M$ отображает пару $(\mathbf{m}, v)$ в точку $\mathbf{m}$.

Определение 2. *(Гладкое) векторное поле* X *на* M *есть сечение векторного расслоения* $\mathrm{T}M$*, то есть, такое (гладкое) отображение* $X : M \to \mathrm{T}M$*, что* $\pi \circ X = \mathrm{id}$*.*

Сечение ω кокасательного расслоения называется дифференциальной 1-формой. Гладкие векторные поля и дифференциальные формы очевидно образуют модули над кольцом гладких функций. Если $(q^1, \cdots, q^n)$ координаты в окрестности $\mathbf{m}$, то поля $(\partial_{q^1}, \cdots, \partial_{q^n})$ и формы $(dq^1, \cdots, dq^n)$ являются базисными, всякое гладкое поле (форма) записывается через них с гладкими коэффициентами:

$$X = X^1(q)\partial_{q^1} + \cdots + X^n(q)\partial_{q^n}$$

Действие формы на векторное поле даёт гладкую функцию $\omega(X) = f$. Вектор поля X в точке $\mathbf{m}$ будем обозначать $X_{\mathbf{m}}$.

1.2 Поведение при отображениях

Всякое гладкое отображение F между гладкими многобразиями M и N естественным и очевидным образом индуцирует отображения соответствующих касательных и кокасательных пространств:

$$\begin{array}{rcl} F & : & M \to N \\ F_* & : & \mathrm{T}_{\mathbf{m}}M \to \mathrm{T}_{F(\mathbf{m})}N \\ F^* & : & \mathrm{T}^*_{F(\mathbf{m})}N \to \mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M \end{array}$$

где

$$\begin{array}{ll} [F_*(X)]\,(g) = [X]\,(g \circ F) & \forall X \in \mathrm{Vect}(M),\ g \in \mathrm{Func}(N) \\ [F^*(\omega)]\,(X) = [\omega]\,\big(F_*(X)\big) & \forall \omega \in \mathrm{Vect}^*(N),\ X \in \mathrm{Vect}(M) \end{array}$$

Отображение F_* также часто обозначают dF и называют дифференциалом, в случае $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ оно в точности совпадает из известным понятием дифференциала в матанализе.

2 Дополнительные структуры

2.1 Скобка Ли векторных полей

Зададим бинарную операцию $[\cdot,\cdot]$ на векторных полях гладкого многообразия M следующим образом:

$$\begin{array}{rcll} [\cdot,\cdot] & : & \mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Vect}(M) & \\ [X,Y](g) & = & [X]\big([Y](g)\big) - [Y]\big([X](g)\big), & \forall X,Y \in \mathrm{Vect}(M), g \in \mathrm{Func}(M) \end{array}$$

Упражнение:*Проверьте, что скобка Ли двух векторных полей действительно является векторным полем, то есть, дифференцированием и подтвердите следующие её свойства:*

1. $[X,Y] = -[Y,X]$
2. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$
3. $[f \cdot X, g \cdot Y] = f \cdot g \cdot [X,Y] + f \cdot (Xg) \cdot Y - g \cdot (Yf) \cdot X$

Векторное пространство, например, $\mathrm{Vect}(M)$ снабжённое бинарной операцией, удовлетворяющей первым двум из перечисленных свойств называется алгеброй Ли.

2.2 Внешнее произведение и дифференциальные k-формы

Из двух 1-форм ω_a, ω_b с помощью операции внешнего умножения $\wedge$ можно составить 2-форму – Объект, который из двух векторных полей делает одну функцию, кососимметричный по подаваемым в него полям:

$$\omega_a \wedge \omega_b(X,Y) = \omega_a(X) \cdot \omega_b(Y) - \omega_b(Y)\omega_a(X)$$

Аналогичным образом определяются дифференциальные $k-$формы как объекты, переводящие упорядоченные наборы из k векторных полей в функции на многообразии, кососимметричные по входящим в набор полям. Множество дифференциальных k-форм на M обозначается $\Omega^k(M)$ или $\Lambda^k(M)$. Всякая $k-$форма ω очевидно допускает представление в виде

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} a_{i_1,\dots,i_k}(x)\cdot dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

Внешнее произведение $k-$ и $l-$форм определяется прямым обобщением:

$$\omega_a\wedge\omega_b(X_1,\dots,X_{k+l}) = \sum_{\sigma\in S_{k+l}}(-1)^\sigma\omega_a(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\omega_b(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l)})$$

Внешнее произведение очевидным образом ассоциативно и дистрибутивно, коммутационное же соотношение имеет вид

$$\omega_a\wedge\omega_b = (-1)^{\deg(\omega_a)\cdot\deg(\omega_b)}\omega_b\wedge\omega_a$$

2.3 Внешнее дифференцирование и внутреннее произведение

Внешнее дифференцирование $k-$форм имеет несколько эквивалентных инвариантных определений. Время, требуемое на детальное знакомство с ними неадекватно нашим практическим потребностям и возможностям, поэтому мы воспользуемся координатным определением. Зададим внешнее дифференцирование d на Ω^k как линейный оператор $\Omega^k\to\Omega^{k+1}$ действующий на мономах следующим образом:

$$d\big(a_{i_1,\dots,i_k}(x)\cdot dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\big) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\partial_j\big(a_{i_1,\dots,i_k}(x)\big)\cdot dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

Упражнение: *Проверьте:* $d^2=0$ *и* $d(\omega_a\wedge\omega_b) = d\omega_a\wedge\omega_b+(-1)^{\deg\omega_a}\omega_a\wedge d\omega_b$

Цепочка

$$\dots\xrightarrow{d}\Omega^{k-1}\xrightarrow{d}\Omega^k\xrightarrow{d}\Omega^{k+1}\xrightarrow{d}\dots$$

называется (дифференциальным) комплексом де Рама. В каждом Ω^k лежат замкнутые ($\ker d$) и точные ($\operatorname{Im} d$) формы. В силу $d^2=0$ все точные формы являются замкнутыми. Локально верно и обратное утверждение (лемма Пуанкаре) – определённая в шаре замкнутая форма является в нём и точной. Глобально утверждение очевидно неверно – форма $d\varphi$ на плоскости не является точной, интеграл её по замкнутому контуру не равен нулю.

Для всякого векторного поля $X\in\operatorname{Vect}(M)$ можно определить линейную операцию $\imath_X$ действующую на дифференциальных формах подстановкой поля X на место первого аргумента формы: $\imath_X(\omega)(Y_1,\dots,,Y_{k-1}) = \omega(X,Y_1,\dots,Y_{k-1})$, что даёт цепочку

$$\dots\xleftarrow[\imath_X]{}\Omega^{k-1}\xleftarrow[\imath_X]{}\Omega^k\xleftarrow[\imath_X]{}\Omega^{k+1}\xleftarrow[\imath_X]{}\dots$$

связь между двумя построенными цепочками даётся формулой Картана для производной Ли.

2.4 Потоки векторных полей и производная Ли

Всякое гладкое векторное поле X на многообразии M порождает однопараметрическую группу диффеоморфизмов $X_t : M \to M$, также называемую потоком поля X. В произвольных координатах q на M преобразование потока за время t имеет вид

$$X_t(\mathbf{m}) = q(t), \text{ где } q(t) \text{ решение задачи Коши } \begin{cases} \dot{q}(t) = X_{q(t)} \\ q(0) = \mathbf{m} \end{cases}$$

По теореме существования и единственности ОДУ через всякую точку $\mathbf{m} \in M$ проходит интегральная кривая поля X и значит, преобразование потока для $\mathbf{m}$ корректно определено по крайней мере для достаточно малых по модулю $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Более того, по той же самой теореме (здесь удобнее использовать альтернативную формулировку о выпрямлении векторного поля) преобразование это будет диффеоморфизмом в некоторой окрестности $\mathbf{m}$. Конечно же, для того чтобы преобразование потока существовало при всех $t \in \mathbb{R}$ и было диффеоморфизмом на всём M нужны некоторые дополнительные требования на X и M. Подробности мы приводить не будем, заметим только, что наиболее распространённым достаточным условием является компактность многообразия M.

Следствием существования преобразования потока является возможность дифференцировать функции, векторные поля, формы, и вообще произвольные тензорные поля на M по направлению гладкого векторного поля X. Конструкция является элементарным обобщением используемой в матанализе производной по направлению. Производная по направлению поля X Называется производной Ли и обозначается $\mathcal{L}_X$.

Для скалярных функций $f : M \to \mathbb{R}$ производная Ли определяется элементарно:

$$\mathcal{L}_X f = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ X_t - f}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ X_t$$

и как видно из определения буквально совпадает с обычной производной по направлению, то есть действием поля X на функцию f:

$$\mathcal{L}_X f = Xf$$

Для производной векторного поля $Y : M \to \mathrm{T}M$ определение придётся подправить, проблема в том, что образы отображений $Y \circ X_t$ и Y априори лежат в разных касательных пространствах $\mathrm{T}_{X_t(\mathbf{m})}M$ и $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$ и их невозможно вычитать друг из друга. Предварительно следует перенести первый из векторов в “исходное” пространство $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$, сделать это несложно, переносить касательные пространства мы уже умеем, для этого нам нужен дифференциал какого-нибудь отображения, переводящего точку $X_t(\mathbf{m})$ в точку $\mathbf{m}$. Естественный кандидат на эту должность преобразование потока X_{-t}. Получаем (в данном случае векторное поле $\mathcal{L}_X Y$ удобно описывать через его действие на произвольную гладкую функцию f):

$$\mathcal{L}_X Y f = \lim_{t\to 0} \frac{dX_{-t}\big(Y\circ X_t\big) - Y}{t} f = \Big\{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(dX_{-t}(Y\circ X_t)\big)\Big\} f =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big\{Y\circ X_t(f\circ X_{-t})\Big\} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Big(f\circ X_{-t}\circ Y_s\circ X_t\Big) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial_t \partial_s}\Big|_{(0,0)}\big(f\circ X_{-t}\circ Y_s\circ X_t\big)$$

Если теперь провести дифференцирование в явном виде, то оно даст

$$\mathcal{L}_X Y f = [X,Y] f$$

Упражнение: *Получите этот же результат более элементарным способом проведя вычисление в координатах – найдите члены первого по порядка в разложении в ряд по t*

$$Y^1(q+Xt)\frac{\partial}{\partial(q^1+X^1t)} + \dots + Y^n(q+Xt)\frac{\partial}{\partial(q^n+X^nt)}$$

Производная Ли для 1-форм определяется аналогично, только для переноса кокасательных пространств используется X^*_{-t} вместо dX_{-t}.

Упражнение: *Дайте формальное определение производной Ли для тензорного поля типа (r,s).*

В дальнейшем для доказательства теоремы Дарбу нам потребуется формула Картана, описывающее действие производной Ли на k-формы:

$$\mathcal{L}_X = \imath_X \circ d + d\circ \imath_X$$

Идея её доказательства – проверяем, что правая и левая части являются дифференцированиями, коммутируют с оператором d и одинаково действуют на Ω^0, затем показываем, что этими свойствами объект определяется однозначно.

3 Римановы и симплектические многообразия

Более содержательная нелокальная внутренняя жизнь на многообразиях при наличии на них дополнительных структур. Самые известные и простейшие примеры это римановы и симплектические многообразия.

3.1 Римановы многообразия

Риманово многобразие (M,g) это пара из гладкого многообразия M и гладкого поля g билинейных симметричных положительно определённых форм $\sum g_{ij}(q)dq^i dq^j$. Основные выгоды от его существования – придание смысл понятию длины кривой $q(t)$ на M и возможность опускания-поднимания индексов у тензорных полей на M. Примеры римановых многообразий – обычное $\mathbb{R}^n$ и его подмногообразия с индуцированными вложением в $\mathbb{R}^n$ метриками.

Как известно из линейной алгебры, в произвольной точке $\mathbf{m}\in M$ билинейную форму g можно привести к главным осям, то есть заменой координат диагонализовать матрицу $g_{ij}(\mathbf{m})$ билинейной формы g на $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$.

Этот нормальный вид существенно локальный, даже если метрику g удаётся диагонализовать не только в точке $\mathbf{m}$, но и в некоторой её окрестности, то коэффициенты, стоящие на диагонали не будут постоянными, ведь они, как известно, отвечают за кривизны многообразия M в соответствующих точках. По сути это означает, что с точки зрения внутренней геометрии многообразия M его точки могут быть "неодинаковыми" и иметь отличающиеся по своему строению окрестности. Симплектические многообразия в этом отношении устроены гораздо проще.

3.2 Симплектические многообразия

Симплектическое многообразие (M,ω) это пара из гладкого многообразия M и гладкой замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формы ω на нём. Как всякая 2-форма локально ω имеет вид

$$\omega = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \omega_{ij}(q)dq^i \wedge dq^j$$

Упражнение: *Покажите, что невырожденность формы ω эквивалентна условию* $\det\big(\omega_{ij}(q)\big) \neq 0$

Из невырожденности ω следует во-первых чётномерность многообразия M, и невырожденность n-ой внешней степени $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ на $2n$-мерном многобразии M, то есть, существование знакопостоянной формы объёма на M.

Примером симплектического многообразия является $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$. Другой важный пример кокасательное расслоение T^*M произвольного гладкого многообразия M. Покажем, что на T^*M существует каноническая невырожденная 1-форма α такая, что $d\alpha$ тоже невырождена. 1-форма на T^*M должна брать касательный вектор к T^*M и делать из него число. Точка T^*M это пара $(\mathbf{m},p)$, где $\mathbf{m} \in M$, $p \in \mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$. Следовательно, касательный вектор к T^*M это пара (v,w) где v вектор касательный к M в $\mathbf{m}$, а w вектор, касательный к p в $\mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$. Так как $\mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$ является векторным пространством, то касательным к нему служит оно само, $w \in \mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$. Теперь можно определить форму α как отображение, делающее из вектора (v,w) касательного к $(\mathbf{m},p)$ число $\langle p,v\rangle$. В локальных на T^*M координатах q,p, где q координаты на M, а p отвечают за кокасательные компоненты форма α имеет вид $\alpha = pdq = \sum p_i dq^i$. Невырожденность и замкнутость $d\alpha = dp_i \wedge dq^i$ очевидны.

3.3 Теорема Дарбу

Теорема Дарбу описывает локальный нормальный вид произвольной симплектической формы на M.

Теорема 1. *В окрестности любой точки $\mathbf{m}$ симплектического многообразия (M,ω) существуют координаты $(q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p^n)$ в которых*

$$\omega = dp_1 \wedge dq^1 + \cdots + dp_n^d q^n$$

Доказательство. Как мы знаем из линейной алгебры, по крайней мере в одной точке $\mathbf{m}$ переходом к новым координатам (q,p) форму можно привести к требуемому нормальному виду: $\omega\Big|_{\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M} = \sum dp_i \wedge dq^i$. Обозначим через $\omega_0 = \sum dp_i \wedge dq^i$ определённую в окрестности $\mathbf{m}$ 2-форму, очевидно замкнутую и совпадающую на $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$ с исходной формой ω. Так как обе формы ω и ω_0 замкнуты, то локально, в достаточно малой окрестности $\mathbf{m}$ они точны, и значит, в этой окрустности существует 1-форма β такая что $d\beta = \omega - \omega_0$. Определим теперь для $t \in [0, 1]$ дифференциальную 2-форму на $M \times [0, 1]$:

$$\Omega(p, q, t) = t\omega_0 + (1 - t)\omega + \beta \wedge dt$$

Так как $d\Omega = dt \wedge \omega_0 - dt \wedge \omega + d\beta \wedge dt = 0$, то Ω локально замкнута, а значит и точна. Так как $M \times [0, 1]$ нечётномерно, то ω вырождена, как и любая другая 2-форма на нём. Следовательно, существует такое векторное поле X на $M \times [0, 1]$ (очевидно, с нигде не занулющейся t-компонентой) что $\imath_X \Omega = 0$. Так как зануление формы определяется направлением поля и не зависит от длины его векторов, то поле можно считать отнормированным: $dt(X) = 1$. Посмотрим, что делает поток векторного поля X_t с 2-формой Ω. Замечаем, что $\Omega_0 = \Omega\Big|_{M\times 0} = \omega$, и $\Omega_1 = \Omega\Big|_{M\times 1} = \omega$. Применяем формулу Картана:

$$\mathcal{L}_X \Omega = d \circ \imath_X \Omega + \imath_X \circ d\Omega = 0$$

Видим, что преобразование потока переводит форму Ω_1 в Ω_0, и следовательно, ω в ω_0. Следовательно, преобразование потока за время 1 и будет давать требуемую замену координат в окрестности $\mathbf{m}$ $\square$

Теорема Дарбу показывает, что локально, в отличие от римановых многообразий все точки симплектического многообразия (M, ω) “одинаковы” с точки зрения внутренней геометрии. Более того, локально “одинаковы” все точки всех симплектических многообразий фиксированной размерности, так как в силу теоремы Дарбу локально всякое симплектическое многообразие (M, ω) является кокасательным расслоением к некоторому многообразию N.

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

Перейдем, наконец, собствено – к формализму Гамильтона.

5.1 Преобразование Лежандра

Вспомним как мы строили интеграл энергии для консервативной системы, хотя для того, что сейчас будет проделано совершенно необязательно, чтобы $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

- Для каждой обобщенной координаты (на многообразии M) введем ее канонический импульс

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1}$$

По теореме о неявной функции эти уравнения можно разрешить относительно скоростей, если матрица гессиана

$$h_{ij}(q, \dot{q}) = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \tag{2}$$

является невырожденной $\det h \neq 0$. Поэтому лагранжианы с невырожденным гессианом называют также невырожденными: очевидный пример положительно определенного невырожденного гессиана $h_{ij}(q, \dot{q}) = g_{ij}(q)$ – риманова метрика на M.

- Построим функцию Гамильтона по формуле, которой мы пользовались для интеграла энергии

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{3}$$

и которая (в более общем контексте) называется преобразованием Лежандра.

Важнейшей для дальнейшего формулой является *дифференциал* преобразования Лежандра

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) = \\ &\underset{(1)}{=} \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) \end{aligned} \tag{4}$$

Из “мастер-формулы” (4) следует практически все, что мы можем сказать о преобразовании Лежандра, а также о функции и уравнениях Гамильтона. Последнее замечание здесь – по циклическим координатам никакого преобразования делать и не нужно.

5.2 Канонические уравнения Гамильтона

Из формулы (4) немедленно следует

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{5}$$

а второе слагаемое в правой части на уравнениях ЭЛ дает

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{6}$$

т.е. его можно переписать в виде

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{7}$$

Таким образом система уравнений ЭЛ может быть переписана в виде системы уравнений первого порядка (5), (7). Одной из изначальных целей гамильтонова формализма было желание переписать уравнения ЭЛ второго порядка в виде системы уравнений первого порядка, что и сделано в формулах (5), (7), как говорят на *фазовом* пространстве с координатами (p, q). Отметим, что более точно канонические уравнения Гамильтона следует писать как

$$\dot{q} = \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_q, \qquad \dot{p} = -\left.\frac{\partial H}{\partial q}\right|_p \tag{8}$$

т.е. функцию Гамильтона - энергию надо выразить через координаты и импульсы [1].

Заметим еще раз, что при выводе нигде на самом деле не использовалась независимость лагранжиана от времени, поэтому все формулы остаются верными при $L = L(q, \dot{q}; t)$. При этом конечно возникает явно зависящая от времени функция Гамильтона $H = H(p, q; t)$, полная производная по времени которой

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \underset{(5),(7)}{=} \frac{\partial H}{\partial t} \tag{9}$$

равна частной производной в силу канонических уравнений Гамильтона. При независимости от времени функции Лагранжа (а стало быть и Гамильтона) мы получаем из этого закон сохранения энергии.

5.3 Примеры

Для лагранжиана движения в потенциальном поле имеем стандартным образом

$$\begin{gathered} L(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q) \\ p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \\ h_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = m\delta_{ij} \end{gathered} \tag{10}$$

[1]"Упорядочение" (p, q) – алфавитный порядок, хотя казалось бы q главнее p. В дальнейшем мы поймем, что это – несущественно, т.к. в гамильтоновом формализме разности между p и q фактически нет.

т.е. гессиан невырожден (в общем случае – массовая матрица или метрика $m_{ij} = g_{ij}(q)$), поэтому уравнения на скорости элементарно разрешаются

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \tag{11}$$

через обратную массовую матрицу. Таким образом, очевидно получаем

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + U(q) \tag{12}$$

гамильтониан для частицы в потенциальном поле, приводящий к каноническим уравнениям

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial U}{\partial q} \tag{13}$$

первое из которых в данном случае банально совпадает с (11). Для произвольной метрики (или массовой матрицы) имеем

$$H(p,q) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij}(q)p_i p_j + U(q) = \tfrac{1}{2}\langle p,p\rangle_g + U(q) \tag{14}$$

где скалярное произведение в пространстве импульсов V^* определяется *обратной* матрицей к римановой метрике, определяющей скалярное произведение в пространстве V касательных векторов или скоростей.

В случае магнитного поля

$$\begin{aligned} L(q,\dot{q}) &= \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + A_i(q)\dot{q}_i \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + A_i(q) \end{aligned} \tag{15}$$

и решение для скоростей имеет вид

$$\dot{q}_i = \frac{1}{m}P_i = \frac{1}{m}\left(p_i - A_i(q)\right) \tag{16}$$

Функция Гамильтона при этом имеет вид

$$H(p,q) = \frac{P^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p - A(q)\right)^2 \tag{17}$$

такой же как у *свободной* частицы, но со сдвинутым на вектор-потенциал импульсом (16). Это важнейшее свойство “минимальности” электромагнитного взаимодействия (“удлинение” импульса, или, после квантования – производной), и оно универсально для всех проявлений электромагнитного поля в природе.

5.4 Геометрический смысл

С геометрической точки зрения преобразование Лежандра (3) строит по функции Лагранжа $L(q,\dot{q}) : TM \mapsto \mathbb{R}$ на касательном расслоении функцию Гамильтона $H(q,p) : T^*M \mapsto \mathbb{R}$ на *кокасательном* расслоении. Действительно, импульсы (1) можно рассматривать как компоненты вектора в двойственном к касательному пространстве, а саму формулу (3) переписать в виде

$$\begin{aligned} H(p,q) = \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q}) \right)_{\dot{q}=\dot{q}(q,p)} = \\ = \sup_v \left(\langle p, v \rangle - L(q,v) \right) \end{aligned} \tag{18}$$

где $v \in V$ – элемент касательного слоя, а скобка задает спаривание между касательным слоем и ему двойственным пространством ($p \in V^*$) – линейных функционалов на V. Кокасательное расслоение T^*M и является (в данном случае!) фазовым пространством $\mathcal{M}$ динамической системы с функцией Гамильтона (3).

Преобразование Лежандра (для хорошего класса лагранжианов и гамильтонианов) является *инволюцией*

$$L \overset{\mathcal{L}}{\to} H \overset{\mathcal{L}}{\to} L \tag{19}$$

Действительно, формулу (3) можно переписать в виде

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H \tag{20}$$

дифференциал которой

$$\begin{aligned} dL = \sum_i \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) = \\ \underset{(5)}{=} \sum_i \left(p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) \underset{(1)}{=} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) \end{aligned} \tag{21}$$

в силу канонических уравнений очевидным образом совпадает с дифференциалом функции Лагранжа.

5.5 Принцип наименьшего действия

Из свойств преобразования Лежандра следует, что принцип наименьшего действия можно переформулировать в форме Гамильтона. Для действия имеем

$$S = \int_0^T dtL = \int_0^T dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p) \right) \tag{22}$$

Вариация действия в этой форме немедленно приводит к каноническим уравнениям Гамильтона (5), (7)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_0^T dt \sum_i \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \\ &= \int_0^T dt \sum_i \left(\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) + \sum_i p_i \delta q_i \Big|_0^T \end{aligned} \tag{23}$$

следующими из зануления интеграла вдоль траектории при произвольных вариациях δq и δp, дополненым граничными условиями

$$\delta q_i|_0^T = 0, \quad i = 1, \ldots, N \tag{24}$$

только на координаты (но не на импульсы). Это обстоятельство окажется довольно существенным в квантовой механике.

5.6 Принцип Мопертюи и геодезические

Для консервативной системы, т.е. когда энергия сохраняется, принцип наименьшего действия можно переформулировать или упростить. Действительно, на уравнении

$$H(p,q) = E = \text{const} \tag{25}$$

гамильтоново действие (22) можно переписать как

$$S = \int_0^T dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p) \right) = \int_0^T dt \sum_i p_i \dot{q}_i - ET \tag{26}$$

и экстремали действия на траекториях с постоянной энергией совпадают с траекториями “укороченного действия”

$$S_0 = \int_0^T dt \sum_i p_i \dot{q}_i = \int_{q_0}^{q_T} \sum_i p_i dq_i \tag{27}$$

определенного как интеграл на гиперповерхности (единичной коразмерности) или $(2N-1)$-мерной поверхности (25) в фазовом-пространстве.

Из этого следует принцип Мопертюи, который довольно странным образом обобщает науку о геодезических. Вспомним общий вид квадратичного по производным лагранжиана

$$L_g = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{28}$$

вариация которого приводит к уравнению геодезической. То же самое уравнение возникает при вариации действия

$$S_g = \int_0^T dt \sqrt{g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j} = \int_{q_0}^{q_T} \sqrt{g_{ij}(q) dq_i dq_j} \tag{29}$$

являющимся просто геометрической длиной траектории. Какая связь у этого с (27)?

Напишем условие (25) для квадратичной теории в потенциале

$$\tfrac{1}{2} \sum_i p_i \dot{q}_i + U(q) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q) = E \tag{30}$$

которое можно переписать в виде

$$dt = \frac{\sqrt{g_{ij}(q) dq_i dq_j}}{\sqrt{2(E - U(q))}} \tag{31}$$

откуда

$$\begin{aligned} S_0 = \int_0^T dt \sum_i p_i \dot{q}_i = \int_{q_0}^{q_T} \frac{g_{ij}(q) dq_i dq_j}{dt} = \\ = \int_{q_0}^{q_T} \sqrt{2(E - U(q)) g_{ij}(q) dq_i dq_j} \end{aligned} \tag{32}$$

т.е. минимизация укороченного действия эквивалентна поиску геодезических для многообразия с эффективной метрикой

$$G_{ij}^{\mathrm{eff}}(q) = (E - U(q)) g_{ij}(q) \tag{33}$$

Похожие рассуждения возникают и в релятивистской механике.

5.7 Симплектическая геометрия фазового пространства

Кокасательное расслоение T^*M являетcя примером симплектического многообразия: четномерного многообразия ($\dim T^*M = 2N$, если $\dim M = N$), оснащенного замкнутой 2-формой – в данном случае

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i, \qquad d\omega = 0 \tag{34}$$

где $d = dq_i \frac{\partial}{\partial q_i} + dp_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ – внешний дифференциал на T^*M. Координаты (q, p) называются при этом координатами Дарбу.

Определение: Симплектическим многообразием называется четномерное многообразие $\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = 2N$, оснащенное невырожденной замкнутой, положительно определенной 2-формой ω:

$$d\omega = 0, \qquad \det \omega \neq 0, \qquad \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{N} > 0 \tag{35}$$

Примеры:

- $\mathcal{M} = T^*M$, в частности $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2N}$ с формой $\omega = \sum_{i=1}^{N} dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$;
- $\mathcal{M} = S^2$, $\omega = \sin\theta d\theta \wedge d\phi$, $N = 1$. Этот пример существенен, так как двумерная сфера S^2 *не* является кокасательным расслоением к чему-бы то ни было.
- Обобщение предыдущего примера на $N > 1$ уже не вполне тривиально: $\mathcal{M} = \mathbb{P}^N$ – комплексное проективное пространство с симплектической формой

$$\omega = \frac{i}{2} \frac{\sum_{i=1}^{N} dz_i \wedge d\bar{z}_i}{\left(1 + \sum_{j=1}^{N} |z_j|^2\right)^2} \tag{36}$$

  являющейся вещественной частью кэлеровой формы Фубини-Штуди.

Задача: Написать явно матрицу симплектической формы на $\mathcal{M} = T^*M$ в координатах Дарбу

$$\|\omega\| = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{37}$$

где, **0** и **1** – "очевидные" матрица размера $N \times N$. Очевидно, что обратная матрица существует, и совпадает с ней – с точностью до знака

$$\|\Omega\| = \|\omega\|^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

а канонические уравнения Гамильтона на координаты $\{x\} = \{(p, q)\}$ можно переписать в виде

$$\dot{x} = \xi_H(x) = \Omega dH, \qquad \text{or} \quad \dot{x}^i = \xi_H^i(x) = \sum_j \Omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \tag{39}$$

где dH – дифференциал функции Гамильтона на фазовом пространстве.

Геометрический смысл уравнения (39) очень простой, производная координаты на фазовом пространстве задается векторным полем "специального вида", выражающимся через производную некоторой функции $H = H(x)$ на $\mathcal{M}$. Такие векторные поля называются гамильтоновыми.

5.8 Теорема Лиувилля

Рассмотрим любую область в фазовом пространстве $D \subset \mathcal{M}$ и ее объем

$$V = \int_D dx = \int_D dpdq \tag{40}$$

Назовем гамильтоновым потоком однопараметрическую группу преобразований $U_t : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$

$$U_t : (p, q) \mapsto (p(t), q(t)) \tag{41}$$

фазового пространства, генерируемую каноническими уравнениями Гамильтона (5), (7) или (39).

Теорема Лиувилля: Объем любой области фазового пространства сохраняется при гамильтоновой динамике.

Действительно, для производной объема верно соотношение

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = \int_D \mathrm{div}\xi_H dx \tag{42}$$

следующее из разложения

$$x(t) = U_t x = x + t\xi_H + O(t^2) \tag{43}$$

при $t \to 0$ и формулы для якобианов

$$V(t) = \int_{D(t)} dx(t) = \int_D \frac{\partial x(t)}{\partial x} dx = \int_D (1 + t\mathrm{div}\xi_H)\, dx + O(t^2) \tag{44}$$

где

$$\mathrm{div}\xi_H = \sum_i \frac{\partial \xi_H^i}{\partial x^i} \tag{45}$$

поскольку для любой матрицы A

$$\det(1 + tA) \underset{t\to 0}{=} 1 + t\mathrm{Tr}A + O(t^2) \tag{46}$$

Для гамильтонова векторного поля (39) (например, в координатах Дарбу) очевидно, что $\sum_i \frac{\partial \xi_H^i}{\partial x^i} = 0$.

Вообще, поскольку гамильтоновы потоки сохраняют симплектическую форму (проверить!)

$$\omega(t) = \sum_i dp_i(t) \wedge dq_i(t) = \sum_i dp_i \wedge dq_i = \omega \tag{47}$$

то сохряняются все, выраженные через нее, “интегральные величины”.

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

6.1 Еще раз о канонических уравнениях

Напомним еще раз, что из канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1}$$

тривиальным образом следует закон сохранения энергии

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) \underset{(1)}{=} \frac{\partial H}{\partial t} \tag{2}$$

при $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ при явно не зависящей от времени функции Гамильтона. Точно также можно написать вообще для *любой* функции на фазовом пространстве $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) = \\ &\underset{(1)}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \end{aligned} \tag{3}$$

где введено обозначение для *скобки Пуассона*

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{4}$$

любых двух функций $f = f(p,q)$ и $g = g(p,q)$ на $\mathcal{M}$. Сразу очевидно, что

- Для любой явно независящей от времени $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ функции на $\mathcal{M}$ из

$$\{f, H\} = 0 \tag{5}$$

  следует $\frac{df}{dt} = 0$, т.е. если функция находится в пуассоновой инволюции с Гамильтонианом, то она является интегралом движения – т.е. постоянной на траектории динамической системы.

- Для координат Дарбу скобки Пуассона имеют канонический вид

$$\begin{gathered}\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, N \\ \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0\end{gathered} \tag{6}$$

6.2 Пуассонова геометрия фазового пространства

Вернемся к произвольному симплектическому многообразию $\mathcal{M}$, с невырожденной замкнутой, положительно определенной 2-формой ω

$$\begin{gathered}\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ d\omega = 0, \qquad \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} = 0, \quad \forall\ i, j, k\end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим теперь гамильтонов поток на произвольном симплектическом многообразии $\mathcal{M}$, который мы уже записывали в виде

$$\dot{x} = \xi_H(x) = \Omega dH, \qquad \text{or} \quad \dot{x}^i = \xi_H^i(x) = \sum_j \Omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \tag{8}$$

где dH – дифференциал функции Гамильтона на фазовом пространстве, а $\Omega^{ij} = \omega_{ij}^{-1}$.

Очевидно, что это уравнение переписывается через скобки Пуассона в виде:

$$\dot{x} = \{x, H\}, \qquad \{f, g\} = \sum_{i,j} \Omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i,j} \Omega^{ij} \partial_i f \partial_j g \tag{9}$$

где $\Omega^{ij} = -\Omega^{ji}$ – компоненты так называемого пуассонова бивектора. Каков геометрический смысл полученной формулы? Посмотрим на коммутатор двух гамильтоновых векторных полей $[\xi_f, \xi_g]$, для произвольных функций f и g на $\mathcal{M}$. Имеем

$$[\xi_f, \xi_g] = \left[\xi_f^i \partial_i, \xi_g^j \partial_j\right] = \left(\xi_f^i \partial_i \xi_g^j - \xi_g^i \partial_i \xi_f^j\right) \partial_j \tag{10}$$

что пока означает лишь то, что векторные поля образуют алгебру Ли – в правой части стоит векторное поле $\xi(f,g) = \sum_k \xi^k(f,g)\partial_k$, где $\xi^k(f,g) = \sum_i(\xi_f^i \partial_i \xi_g^k - \xi_g^i \partial_i \xi_f^k)$. Если же векторные поля гамильтоновы, то

$$\xi^k(f,g) = \sum_i (\xi_f^i \partial_i \xi_g^k - \xi_g^i \partial_i \xi_f^k) = -\sum_l \Omega^{kl} \partial_l h \tag{11}$$

с некоторой функцией $h = h(f,g)$ на $\mathcal{M}$, т.е. гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру в алгебре Ли всех векторных полей. Более того, прямым вычислением (разобрать подробно на семинаре?) может быть доказана

Теорема: Коммутатор двух гамильтоновых векторных полей на $\mathcal{M}$

$$[\xi_f, \xi_g] = -\xi_h \tag{12}$$

является тоже гамильтоновым векторным полем, где

$$h = \{f, g\} = \sum_{i,j} \Omega^{ij} \partial_i f \partial_j g \tag{13}$$

есть ни что иное, как скобка Пуассона соответствующих функций.

Доказательство: В самом деле:

$$\begin{gathered}
\xi^k(f,g) = \sum_{i,j,n} \left(\Omega^{ij} \partial_j f \partial_i \left(\Omega^{kn} \partial_n g\right) - (f \leftrightarrow g)\right) = \\
= \sum_{i,j,n} \left(\Omega^{kn} \Omega^{ij} \partial_j f \partial_i \partial_n g + \Omega^{ij} \partial_i \Omega^{kn} \partial_j f \partial_n g - (f \leftrightarrow g)\right) = \\
= \sum_{i,j,n} \Omega^{kn} \partial_n \left(\Omega^{ij} \partial_j f \partial_i g\right) + \\
+ \sum_{i,j,n} \left(-\Omega^{kn} \partial_n \Omega^{ij} \partial_j f \partial_i g + \Omega^{ij} \partial_i \Omega^{kn} \left(\partial_j f \partial_n g - \partial_j g \partial_n f\right)\right)
\end{gathered} \tag{14}$$

Первый член в правлй части дает буквально утверждение теоремы (12), (13), а для второй суммы (меняя немые индексы суммирования) имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,n}\left(-\Omega^{ki}\partial_i\Omega^{nj}\partial_j f\partial_n g+\Omega^{ij}\partial_i\Omega^{kn}\partial_j f\partial_n g-\Omega^{in}\partial_i\Omega^{kj}\partial_j f\partial_n g\right)=\\ =-\sum_{j,n}\partial_j f\partial_n g\sum_i\left(\Omega^{ki}\partial_i\Omega^{nj}+\Omega^{ji}\partial_i\Omega^{kn}+\Omega^{ni}\partial_i\Omega^{jk}\right)\end{aligned}\tag{15}$$

Это слагаемое обнуляется в виду тождества

$$\sum_i\left(\Omega^{ki}\partial_i\Omega^{nj}+\Omega^{ji}\partial_i\Omega^{kn}+\Omega^{ni}\partial_i\Omega^{jk}\right)=0\tag{16}$$

представляющего собой квадратичное соотношение, эквивалентное (7), переписанное в обратных матрицах (проверить на семинаре!), к геометрическому смыслу которого мы еще вернемся.

У этой теоремы имеется важнейшее:

Следствие: Если две функции на $\mathcal{M}$

$$\{f,g\}=0\tag{17}$$

находятся друг с другом в инволюции относительно скобки Пуассона (иногда на жаргоне говорят – "пуассоново коммутируют"), то соответствующие векторные поля

$$[\xi_f,\xi_g]=0\tag{18}$$

коммутируют.

6.3 Свойства скобок Пуассона

По своему определению скобка Пуассона обладает рядом свойств, из которых многие – почти очевидны:

- Антисимметричность

$$\{f,g\}=-\{g,f\}\tag{19}$$

- Линейность

$$\{a_1 f_1 + a_2 f_2, g\} = a_1\{f_1, g\} + a_2\{f_2, g\}, \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{C} \tag{20}$$

  по каждому аргументу.

- "Тождество Лейбница"

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \tag{21}$$

  которое распространяет пуассоновых соотношений для образующих на произвольные функции. Его можно действительно понимать как правило Лейбница, поскольку

$$\begin{gathered}\{f, h\} = \sum_{i,j} \Omega^{ij}\partial_i f \partial_j h = \sum_i \xi_h^i(x)\partial_i f = \xi_h(f) \\ \{fg, h\} = \xi_h(fg) = (\xi_h f)g + f(\xi_h g)\end{gathered} \tag{22}$$

- Наконец, менее тривиальным является *тождество Якоби*

$$\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0 \tag{23}$$

  для любых трех функций f, g и h на $\mathcal{M}$, которое эквивалентно тождеству Якоби

$$[\xi_h, [\xi_f, \xi_g]] + [\xi_g, [\xi_h, \xi_f]] + [\xi_f, [\xi_g, \xi_h]] = 0 \tag{24}$$

  в соответствующей алгебре Ли гамильтоновых векторных полей.

Тождество (24) элементарно доказывается прямым вычислением, явно расписывая коммутаторы $[\xi_f, \xi_g] = \xi_f \cdot \xi_g - \xi_g \cdot \xi_f$, а затем – повторные коммутаторы, при этом следя за порядком. Эквивалентное ему тождество (23) в каком-то смысле менее тривиально, и обеспечивается квадратичным соотношением (16) на пуассонов бивектор. Таким образом, функции на фазовом пространстве – а в более общем случае на любом пуассоновом многообразии – образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона.

6.4 Скобки Пуассона и интегралы движения

Напомним, что интегралами движения называются функции

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \tag{25}$$

которые, в том случае когда явно не зависят от времени, определяются тем, что они находятся в пуассоновой инволюции с гамильтонианом H

$$\{f, H\} = 0 \tag{26}$$

Задача: доказать, что скобка пуассона двух интегралов движения является тоже интегралом движения. Указание: начать с более простом случае – явно не зависящих от времени интегралов, и воспользоваться тождеством Якоби.

Следствием этого является то, что в алгебре Ли функций на $\mathcal{M}$ существует подалгебра интегралов движения.

Утверждение: Алгебра Ли группы симметрий системы (по теоремы Нетер) изоморфна пуассоновой алгебре интегралов движения системы.

Действительно, вспомним, что согласно теореме Нетер симметрии генерируются векторными полями

$$X = \sum_{i=1}^{N} \chi^i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} \tag{27}$$

действующими на M, а соответствующие им интегралы движения имеют вид

$$I_X = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \chi^i(q) = \sum_i \chi^i(q) p_i \tag{28}$$

Скобка Пуассона двух таких интегралов ($I_Z = \sum_i \zeta^i(q) p_i$)

$$\begin{aligned} [I_X, I_Z] &= \sum_k \left(\frac{\partial I_X}{\partial q_k} \frac{\partial I_Z}{\partial p_k} - \frac{\partial I_X}{\partial p_k} \frac{\partial I_Z}{\partial q_k} \right) = \\ &= \sum_i p_i \sum_k \left(\zeta_k \frac{\partial \chi^i}{\partial q_k} - \chi_k \frac{\partial \zeta^i}{\partial q_k} \right) = -I_{[X,Z]} \end{aligned} \tag{29}$$

является интегралом движения, отвечающим коммутатору векторных полей в алгебре Ли группы нетеровской симметрии.

Примеры:

- Закон сохранения импульса для циклической координаты $\frac{dp_A}{dt} = 0$ генерируется сдвигом соответствующей координаты, т.е. векторным полем
$$X_A = \frac{\partial}{\partial q_A} \tag{30}$$
Соответствующий интеграл движения в гамильтоновой картине $I_A = p_A$. В случае нескольких циклических координат соответствующие векторные поля коммутируют
$$[X_A, X_B] = \left[\frac{\partial}{\partial q_A}, \frac{\partial}{\partial q_B}\right] = 0 \tag{31}$$
и этому отвечают нулевые канонических скобки Пуассона
$$\{I_A, I_B\} = \{p_A, p_B\} = 0 \tag{32}$$
соответствующих импульсов.

- Преобразования вращения, генерирующиеся векторными полями
$$V_i = -\epsilon_{ijk} q_j \frac{\partial}{\partial q_k}, \qquad [V_i, V_j] = \epsilon_{ijk} V_k \tag{33}$$
при $i, j, k = 1, 2, 3$ в $\mathbb{R}^3$. Мы выводили, что соответствующие интегралы движения – компоненты вектора момента импульса
$$M_i = \epsilon_{ijk} q_j p_k, \quad i = 1, 2, 3 \tag{34}$$
Задача: вычислить скобки Пуассона $\{M_i, q_j\}$, $\{M_i, p_j\}$ и $\{M_i, M_j\}$. Ответ очевиден.

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

7.1 Пуассоновы многообразия: напоминание

Обратимся теперь к содержательным примерам Пуассоновых многообразий. Поскольку мы уже предъявили скобку пуассона на симплектическом многообразии, то ясно, что любое симплектическое многообразие является Пуассоновым.

- Четномерное евклидово пространство $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2N}$. Простейший вариант фазового пространства с канонической симплектической структурой $\omega = \sum_{j=1}^{N} dp_j \wedge dq_j$ или скобкой Пуассона $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, т.е. глобально заданным постоянным пуассоновым бивектором Ω^{ij} с матричными элементами $0, \pm 1$. Вспомнив именно эту формулу Дирак наконец сформулировал каноническую формулировку квантовой механики, в которой скобки Пуассона *канонических* координат заменяются на коммутаторы, и при этом алгебра функций на фазовом пространстве становится некоммутативной.

- В большой степени все это переносится на кокасательные расслоения $\mathcal{M} = T^*M$, и даже на любое симплектическое пространство

$\mathcal{M}_\omega$. Пуассонов бивектор задается обратной матрицей симплектической формы $\Omega = \omega^{-1}$, и все свойства скобки Пуассона выполняются. Главное нетривиальное – соотношение

$$\sum_i \left(\Omega^{ki}\partial_i\Omega^{nj} + \Omega^{ji}\partial_i\Omega^{kn} + \Omega^{ni}\partial_i\Omega^{jk}\right) = 0 \tag{1}$$

эквивалентно условию замкнутости $d\omega = 0$ симплектической формы.

7.2 Первый несимплектический пример

Однако можно поставить более общую задачу: найти *все* нетривиальные решения уравнений Якоби (1) и назвать соответствующие многообразия, оснащенные бивектором Ω^{ij} пуассоновыми. Немедленный вопрос: можно ли найти решения *не* отвечающие симплектическим многообразиям $\mathcal{M}$?

Ответ на этот вопрос дает уже совсем простой пример. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ и попытаемся определить на нем скобку Пуассона формулами

$$\begin{aligned} \{x,y\} &= -\{y,x\} = z \\ \{y,z\} &= -\{z,y\} = x \\ \{z,x\} &= -\{x,z\} = y \end{aligned} \tag{2}$$

(вообще в дальнейшем антисимметричность будем подразумевать автоматически!) или

$$\{x_i, x_j\} = \epsilon_{ijk}x_k, \qquad i,j,k = 1,2,3 \tag{3}$$

с помощью полностью антисимметричного тензора в $\mathbb{R}^3$. С помощью "тождества Лейбница" продолжим эти соонтошения на все (полиномиальные?) функции на $\mathbb{R}^3$, или попросту напишем

$$\{f,g\} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}x_k\partial_i f\partial_j g \tag{4}$$

т.е. $\Omega^{ij} = \sum_k \epsilon_{ijk}x_k$ является линейной функцией координат. Соотношения Якоби (1) превращаются в

$$\begin{aligned}&\sum_i \left(\Omega^{ki}\partial_i\Omega^{nj} + \Omega^{ji}\partial_i\Omega^{kn} + \Omega^{ni}\partial_i\Omega^{jk}\right) = \\ &= \sum_{l,i} x_l \left(\epsilon_{lki}\epsilon_{inj} + \epsilon_{lji}\epsilon_{ikn} + \epsilon_{lni}\epsilon_{ijl}\right) = 0\end{aligned} \tag{5}$$

которые выполняются в силу тождеств

$$\sum_i \left(\epsilon_{lki}\epsilon_{inj} + \epsilon_{lji}\epsilon_{ikn} + \epsilon_{lni}\epsilon_{ijl}\right) = 0 \tag{6}$$

для антисимметричного тензора. Таким образом, мы получили, что

- Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ является *пуассоновым многообразием* – в наиболее общем смысле этого слова.

- Это пуассоново многообразие *не* является симплектическим, матрица Пуассонова бивектора

$$\|\Omega\| = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

  очевидно вырождена $\det\Omega = 0$ и имеет rank $\Omega = 2$.

- Легко экспериментально установить и следующий факт: на пуассонов многообразии $\mathbb{R}^3$ существуют функция *Казимира* $C = \sum_i x_i^2 = x^2 + y^2 + z^2$ обладающая свойством

$$\{C, x_i\} = 0, \qquad \forall i \tag{8}$$

  т.е. которая находится в пуассоновой инволюции с *любой* функцией на $\mathbb{R}^3$. Отметим сразу терминологический момент: иногда происходит путаница между функциями Казимира (или "казимирами") и интегралами движения (или "гамильтонианами") – последние находятся в инволюции с Гамильтонианом $\{H_i, H\} = 0$ или в более общем интегрируемом контексте – между собой $\{H_i, H_j\} = 0$, но вовсе не со всеми функциями на пуассоновом многообразии.

7.3 Структура пуассоновых многообразий

Что это означает? Поскольку функция Казимира “является числом”, то посмотрим на ее “линии уровня”

$$C(x) = \sum_i x_i^2 = J^2 \tag{9}$$

представляющие собой семейство концентрических сфер вокруг начала координат в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, зафиксировав значение функции Казимира мы сядем на некоторое подмногообразие в $\mathbb{R}^3$, а меняя ее значения – получим некоторую *стратификацию* пуассонова многообразия.

Легко видеть, что гамильтоновы векторные поля для любой функци $f \in Fun(\mathbb{R}^3)$ касательны к линии уровня $C = J^2$ в силу $\{C, f\} = 0$, т.е. значение функции Казимира постоянно вдоль любых гамильтоновых потоков. Таким образом можно ограничить гамильтонову динамику на такие подмногообразия. Более точно теорема Ли говорит о том, что любое Пуассоново многообразие допускает стратификацию на *симплектические листы*. Пуассонову структуру в $\mathbb{R}^3$ можно ограничить на подмногообразие $\mathcal{M}_J \subset \mathbb{R}^3$, очевидно, что $\dim\mathcal{M}_J = 2$.

В данном случае это сделать совсем легко, достаточно переписать одно из соотношений (2), например $\{x, y\} = z$ в сферических координатах (для простоты $J = 1$)

$$\begin{gathered} x = \sin\theta\cos\phi, \qquad y = \sin\theta\sin\phi, \qquad z = \cos\theta \\ \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\phi} - \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\{\theta, \phi\} = \{x, y\}|_{J=1} = z|_{J=1} = \cos\theta \end{gathered} \tag{10}$$

Вычисляя левую часть получим

$$\{\theta, \phi\} = \frac{1}{\sin\theta} \tag{11}$$

т.е. $\mathcal{M}_J$ является симплектическим многообразием с невырожденной замкнутой 2-формой $\omega = \sin\theta d\phi \wedge d\theta$.

Задача: Провести эту процедуру, называемую гамильтоновой редукцией, научным образом.

Замечание: На формулу (6) можно смотреть как на тождество для структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g} = so_3$ вращений трехмерного пространства. Формулы последних двух разделов имеют естественное обобщение, называемое конструкцией Кириллова-Костанта.

Вместо евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ в общем случае имеется векторное пространство двойственной алгебры Ли – линейных функционалов на $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g}} \tag{12}$$

на котором коммутационные соотношения в алгебре Ли

$$[t_i, t_j] = \mathfrak{f}_{ijk} t_k, \qquad i, j, k = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g} \tag{13}$$

задают скобку Пуассона, естественным образом записанную на образующих $\langle x_i, t_j \rangle = \delta_{ij}$ как

$$\{x^i, x^j\} = \mathfrak{f}_{ijk} x_k, \qquad i, j, k = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}^* \tag{14}$$

Для этой скобки можно проверить все свойства пуассоновости, тождество Якоби будет автоматически выполняться из-за соотношения на структурные константы, обеспечивающие тождество Якоби для алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Менее тривиальным утверждением является то, что симплектические листы являются орбитами ко-присоединенного действия группы G на $\mathfrak{g}^*$.

7.4 Сфера как фазовое пространство

Обычное фазовое пространство классической теории является кокасательным расслоением T^*M с симплектической формой

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j, \qquad d\omega = 0 \tag{15}$$

где $n = \dim \mathcal{M}$, $\{q_1, \ldots, q_n\}$ - координаты на $\mathcal{M}$, а $\{p_1, \ldots, p_n\}$ - координаты в слое. Симплектической форме (15) отвечает скобка Пуассона $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, естественным образом продолжаемая на функции $\{f(q,p)\} \in \mathrm{Fun}(T^*M)$.

Однако для *квантовой* (маленькой!) системы симплектическое фазовое пространство не обязано быть кокасательным расслоением. Мы уже рассмотрели пример простейшего компактного фазового пространства - двумерной сферы

$$\begin{gathered} S^2: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = J^2 \\ x_1 = J \sin\theta \cos\phi, \quad x_2 = J \sin\theta \sin\phi, \quad x_3 = J \cos\theta \end{gathered} \tag{16}$$

с симплектической формой (теперь ее нормируем!)

$$\omega = \frac{1}{2J^2}\ \epsilon_{ijk} x_i dx_j \wedge dx_k = \tfrac{1}{2} J \sin\theta d\theta \wedge d\phi \tag{17}$$

которая в компактном случае должна удовлетворять условию целочисленности

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi J \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{18}$$

т.е. “спин” J обязан быть полуцелым.

Откуда берется это условие? Давайте решим какую-нибудь динамическую задачу. Отвечающая (17) скобка Пуассона имеет вид

$$\{x_i, x_j\} = \epsilon_{ijk} x_k, \qquad i,j,k = 1,2,3 \tag{19}$$

совпадающий со структурой алгебры Ли $su(2)$

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k, \qquad i,j,k = 1,2,3 \tag{20}$$

для операторов вращения или спина, и может рассматриваться как ее классический предел.

Для гамильтониана $H = -x_3 = -J\cos\theta$ уравнения движения принимают вид

$$\dot{x}_1 = \{x_1, H\} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \{x_2, H\} = -x_1, \quad \dot{x}_3 = 0 \tag{21}$$

или, в угловых координатах

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = 1 \tag{22}$$

т.е. он является просто генератором вращений вокруг третьей оси, а решениями уравнений движения являются траектории-“намотки”

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0, \quad 0 \le \theta_0 \le \pi \\ \phi(t) &= \phi_0 + t, \quad 0 \le \phi_0 \le 2\pi \end{aligned} \tag{23}$$

среди которых замкнутые на отрезке времени $0 \le t \le T$ удовлетворяют периодическим граничным условиям

$$\phi(T) = \phi_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{24}$$

На таких траекториях можно определить аналог классического действия

$$S = \int_0^T (\alpha_t - Hdt) = J \int_0^T dt \Big((1-\cos\theta)\dot{\phi} + \cos\theta \Big) \tag{25}$$

где α_t - вычисленная на траектории 1-форма $\alpha = J(1-\cos\theta)d\phi$, такая что $d\alpha = \omega$, которая определена, вообще говоря, неоднозначно. Однако если траектория замкнута, то

$$\int_0^T \alpha_t = \oint_\gamma \alpha = \int_D \omega \tag{26}$$

где границей диска $\partial D = \gamma$ является замкнутый контур на сфере. Такой диск можно выбрать двумя способами, но разница сводится к $\int_{S^2}\omega$ по всей сфере, и поэтому в силу (18) величина $\exp(i\oint_\gamma \alpha)$ уже определена однозначно. В предельном случае, когда траектория стягивается к одному из двух полюсов, уже сам интеграл в (26) равен или нулю, или интегралу по всей сфере, и тогда выбор $\alpha = J(1-\cos\theta)d\phi$ обеспечивает его целочисленность.

7.5 Пуассоновы многообразия Фока-Гончарова

Это специальный тип пуассоновых многообразий с квадратичной по переменным скобкой Пуассона.

Рассмотрим граф (или *колчан*) Γ - набор $|\Gamma|$ вершин, соединенных произвольным количеством ориентированных ребер (стрелок). В колчанахданного типа запрещаются только стрелки из любой вершины в себя. Припишем каждой вершине $I \in \Gamma$ (комплексную или вещественную, точнее – из $\mathbb{C}^\times$ или $\mathbb{R}_+$) переменную x_I, $I = 1, \ldots, |\Gamma|$, и будем на них смотреть как на некоторой карте $(\mathbb{C}^\times)^{|\Gamma|}$ пуассонова многообразия. На этих переменных определим *квадратичную* скобку Пуассона по формуле (в которой, естественно, нет никакого суммирования по индексам)

$$\{x_I, x_J\} = \Omega^{IJ}(x) = \varepsilon_{IJ} x_I x_J, \qquad I, J = 1, \ldots, |\Gamma| \tag{27}$$

где кососимметричная ε_{IJ} представляет собой матрицу смежности графа

$$\varepsilon_{IJ} = \#\text{arrows } (I \to J) - \#\text{arrows } (J \to I) \tag{28}$$

очевидно, что $\varepsilon_{IJ} = -\varepsilon_{JI}$. *Задача*: проверить для (29) тождество Якоби. В принципе в данном контексте в матрице (28) допускаются иногда не только целые (а например – полуцелые) значения.

В формуле (29) *нет* суммирования по I, J, т.е. в логарифмических переменных

$$\{\log x_I, \log x_J\} = \varepsilon_{IJ}, \qquad I, J = 1, \dots, |\Gamma| \tag{29}$$

эта скобка постоянная.

Примеры:

- Многообразие Пуассона-Воронова $\{x_I, x_J\} = 0$, $\forall I, J$. Это многообразие очевидно не является симплектическим.
- Простейший нетривиальный граф из двух вершин, соединенных одной стрелкой. Соответствующая скобка $\{x, y\} = xy$ переходом в логарифмические координаты $x = e^q$ и $y = e^p$ превращается в каноническую $\{q, p\} = 1$.

Таким образом можно определить Пуассоново многообразие (точнее пока – его карту $(\mathbb{C}^\times)^{|\Gamma|}$), называемое X-кластерным многообразием Фока-Гончарова. Эти многообразия допускают ряд пуассоновых операций, т.е. отображений, сохраняющих пуассонову структуру

- Для любого подграфа $\Gamma' \subset \Gamma$ можно положить

  $$\varepsilon_{IJ'} = 0, \quad \forall\ I \in \Gamma, \ \ \forall\ J' \in \Gamma' \tag{30}$$

  что отвечает просто "забвению" всех вершин графа Γ с переменными $\{x_{J'}\}$, $J' \in \Gamma'$.

- Склеивание двух графов Γ_1 и Γ_2 путем *отождествления* (части) их вершин $\Gamma_1' = \Gamma_2' = \Gamma'$, получая новый граф

  $$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_1 \diagdown \Gamma_1' \ \cup \Gamma' \ \cup \Gamma_2 \diagdown \Gamma_2' \tag{31}$$

  с переменными $x_{I_1} = x_{I_1}^{(1)}$ во всех незатронутых вершинах $I_1 \in \Gamma_1 \diagdown \Gamma_1'$, $x_{I_2} = x_{I_2}^{(2)}$ для $I_2 \in \Gamma_2 \diagdown \Gamma_2'$, и произведениями $x_{I'} = x_{I'}^{(1)} x_{I'}^{(2)}$

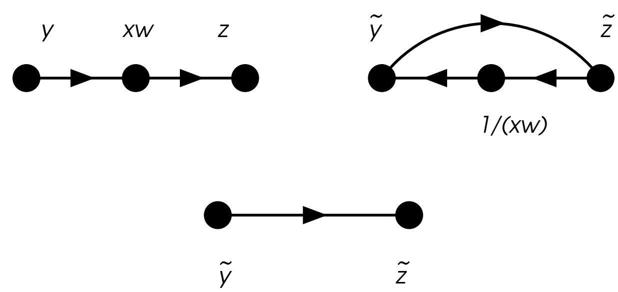

Рис. 1: *Пример кластерного преобразования: склейка, а также мутация в склеенной вершине и последующее ее "забвение" порождают групповую структуру на пуассоновых графах определенного типа.*

для склеенных $I' \in \Gamma'$. Для матрицы смежности склеенного графа (31) можно написать

$$\begin{gathered}\varepsilon_{I_k J} = \varepsilon^{(k)}_{I_k J}, \quad J \in \Gamma, \quad I_k \in \Gamma_k \diagdown \Gamma'_k, \quad k = 1, 2 \\ \varepsilon_{I'J'} = \varepsilon^{(1)}_{I'J'} + \varepsilon^{(2)}_{I'J'}, \quad I', J' \in \Gamma'\end{gathered} \tag{32}$$

При этом следует избавляться от всех стрелок типа $\circlearrowleft$.

Наконец, важнейшим пуассоновым преобразованием являются мутации, которые можно производить в каждой из вершин графа Γ.

- Пуассонова структура (29) сохраняется при *мутациях* графа и соответствующих преобразованиях x-переменных

$$\mu_J: \quad x_J \to \frac{1}{x_J}, \qquad x_I \to x_I \left(1 + x_J^{\mathrm{sgn}(\varepsilon_{IJ})}\right)^{\varepsilon_{IJ}}, I \neq J \tag{33}$$

которые позволяют распространить скобку пуассона с данной карты на все кластерное многообразие. При этом

$$\epsilon_{IK} \mapsto \epsilon_{IK} + \frac{\epsilon_{IJ}|\epsilon_{JK}| + \epsilon_{JK}|\epsilon_{IJ}|}{2} \tag{34}$$

что легче пояснить "словами" на операциях с графами.

Пример пуассоновых преобразований приведен на картинке 1.

- Consider a multiplication $(y \to x) \cdot (w \to z) = y \to xw \to z$, according to the gluing rule.
- After mutating at the intermediate point, the variables according to (33) transform as
$$xw \to \frac{1}{xw}, \quad y \to y(1+xw) = \tilde{y}, \quad z \to z\left(1+\frac{1}{xw}\right)^{-1} = \tilde{z} \tag{35}$$
which corresponds to the second graph from fig. 1, with an extra arrow between $\tilde{y}$ and $\tilde{z}$ reflecting, that
$$\begin{gathered}\{\tilde{y},\tilde{z}\} = \left\{y(1+xw), z\left(1+\frac{1}{xw}\right)^{-1}\right\} = \\ = (1+xw)z\left\{y, \left(1+\frac{1}{xw}\right)^{-1}\right\} + y\left(1+\frac{1}{xw}\right)^{-1}\{(1+xw),z\} = \\ = yxwz = \tilde{y}\tilde{z}\end{gathered} \tag{36}$$
- Forgetting the intermediate vertex, as at fig. 1, one gets the original graph $\tilde{y} \to \tilde{z}$ but with the new variables in the vertices.

Какую мы получили группу?

Ответ: The simplest graph $y \to x$ corresponds to the subgroup of upper-triangular matrices in $SL(2)$ or $PGL(2)$ (sometimes it is easier just to forget about the determinant). More strictly, consider it as a short-hand notation for
$$y \underset{E}{\longrightarrow} x = YEX = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yx & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$
with the matrix in r.h.s. considered as an element of $PGL(2)$.

The rule to get them exactly corresponds to
$$\begin{gathered}\left(y \underset{E}{\longrightarrow} x\right) \cdot \left(w \underset{E}{\longrightarrow} z\right) = \begin{pmatrix} yx & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} wz & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yxwz & y(1+xw) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \tilde{y}\tilde{z} & \tilde{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{Y}E\tilde{Z} = \tilde{y} \underset{E}{\longrightarrow} \tilde{z}\end{gathered} \tag{38}$$

multiplication of the upper-triangular matrices.

Примерами пуассоновых кластерных многообразий являются группы Ли и пространства Тейхмюллера. Приведенным рассуждением мы продемонстрировали идею того, как кластерные координаты задаются на пуассоновых подмногообразиях в группах Ли.

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

8.1 Уравнения Лагранжа и замены координат

Основополагающим принципом в классической механике является то, что в качестве обобщенных координат системы можно выбирать что угодно, скажем лагранжева динамика системы на многообразии M не должна зависеть от такого выбора. Действительно, посмотрим, что происходит с уравнениями движения ЭЛ при замене обобщенных координат $g : M \mapsto M$, $g \in Diff(M)$, т.е.

$$q = q(Q), \qquad \dot{q}^i = \frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\dot{Q}^j, \quad L(q(Q), \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q}) = \mathcal{L}(Q, \dot{Q}) \tag{1}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered} \dot{Q}^i = \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\dot{q}^j, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^i} = \frac{\partial q^j}{\partial Q^i}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial Q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 q^j}{\partial Q^i \partial Q^k}\dot{Q}^k \end{gathered} \tag{2}$$

поэтому уравнения ЭЛ в новых координатах

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial Q^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 q^j}{\partial Q^i \partial Q^k}\dot{Q}^k =$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j}\right)\frac{\partial q^j}{\partial Q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q^j}{\partial Q^i} - \frac{\partial^2 q^j}{\partial Q^i \partial Q^k}\dot{Q}^k\right) = \tag{3}$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j}\right)\frac{\partial q^j}{\partial Q^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, N$$

благополучно выполняются в силу уравнений в старых координатах.

8.2 Симплектоморфизмы фазового пространства

Вернемся теперь к гамильтонову формализму и фазовому пространству, симплетическому $2N$-мерному многообразию $\mathcal{M}$, оснащенному невырожденной замкнутой 2-формой

$$d\omega = 0, \qquad \omega^N \neq 0 \tag{4}$$

на котором естественно рассматривать более общие замены координат – симплектоморфизмы, сохраняющие симплектическую форму

$$F : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}, \qquad F^*(\omega) = \omega \tag{5}$$

Рассмотрим теперь "форму Пуанкаре"

$$\alpha : \qquad d\alpha = \omega \tag{6}$$

такую, что в координатах Дарбу она имеет вид [1]

$$\alpha = pdq = \sum_{i=1}^{N} p_i dq^i \tag{7}$$

Теорему Лиувилля о сохранении симплектической формы (или интегрально – фазового объема) можно переформулировать одним из следующих "локальных" способов

[1] Ясно, что вообще говоря она определена с точностью до некоторой точной формы – дифференциала функции $\alpha \sim \alpha + df$.

- Сохраняется сама форма
$$F^*(\omega) = \omega \tag{8}$$

- Сохраняются любые площади
$$\int_\Sigma \omega = \int_{\Sigma_F} \omega \tag{9}$$
для любых "сумм площадей проекций" поверхности.

- По теореме Стокса отсюда следует для контуров $\gamma = \partial\Sigma$
$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma_F} \alpha_F \tag{10}$$

Последнее утверждение эквивалентно тому, что при канонических преобразованиях
$$\alpha_F - \alpha = F^*\alpha - \alpha = dS \tag{11}$$
форма Пуанкаре α преобразуется с точностью до дифференциала некоторой *функции* на $\mathcal{M}$, поскольку $d\alpha_F - d\alpha = 0$. Это утверждение является частным случаем важнейшего физического понятия – "калибровочных преобразований"
$$\alpha \mapsto \alpha + dS, \qquad \omega \mapsto \omega \tag{12}$$
для связности $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$ и ее кривизны $\omega = d\alpha$. Таким образом, каноническое преобразование задается производящей функцией $S \in Fun(\mathcal{M})$ на симплектическом многообразии – фазовом пространстве.

Пример: $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$, $\omega = dp \wedge dq$, общее преобразование $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$
$$F: \qquad P = P(p,q), \qquad Q = Q(p,q) \tag{13}$$
желательно обратимое. Тогда
$$\begin{aligned} dP \wedge dQ = \left(\frac{\partial P}{\partial p}dp + \frac{\partial P}{\partial q}dq\right) \wedge \left(\frac{\partial Q}{\partial p}dp + \frac{\partial Q}{\partial q}dq\right) = \\ = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right) dp \wedge dq = \{Q,P\} dp \wedge dq \end{aligned} \tag{14}$$

т.е. преобразование каноническое, если $\{Q,P\}=1$. Получили частный случай общего простого следствия: если преобразование сохраняет симплектическую форму ω, то оно сохраняет и скобку Пуассона.

Казалось бы у нас осталось две функции $\{P(p,q),Q(p,q)\}$ с единственным на них условием. Но если взять уже инфинитезимальную форму

$$P(p,q)=p+\pi(p,q)+\ldots,\qquad Q(p,q)=q+\vartheta(p,q)+\ldots \tag{15}$$

то

$$\begin{gathered}\{Q,P\}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}=\left(1+\frac{\partial\vartheta}{\partial q}\right)\left(1+\frac{\partial\pi}{\partial p}\right)-\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\frac{\partial\pi}{\partial q}+\ldots=\\=1+\frac{\partial\vartheta}{\partial q}+\frac{\partial\pi}{\partial p}+\ldots\end{gathered} \tag{16}$$

что означает, что уже в первом порядке

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial q}+\frac{\partial\pi}{\partial p}=0 \tag{17}$$

или дифференциал

$$\vartheta dp-\pi dq=d(\ldots) \tag{18}$$

является точным (ср. с формулой Стокса). Другими словами – канонические преобразования определяются одной производящей функцией на фазовом пространстве, это рассуждене легко обобщить на произвольный случай.

8.3 Уравнение Гамильтона-Якоби

Попробуем посмотреть на все это с другой точки зрения. Начнем с того, что:

Лемма: Гамильтоновы потоки на $\mathcal{M}$ сохраняют симплектическую форму ω, т.е. являются примерами канонических преобразования.

Доказательство: воспользуемся координатами Дарбу. Тогда

$$\dot\omega=\sum_{i=1}^{N}\left(d\dot p_i\wedge dq_i+dp_i\wedge d\dot q_i\right) \tag{19}$$

и вследствие канонических уравнений

$$\begin{aligned} d\dot{q}_i &= d\frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_j dq_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} + \sum_j dp_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \\ d\dot{p}_i &= -d\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_j dq_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} - \sum_j dp_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} \end{aligned} \tag{20}$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = \sum_{i,j} \left(dp_i \wedge dp_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} + dq_i \wedge dq_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} \right) + \\ + \sum_{i,j} \left(dp_i \wedge dq_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - dp_j \wedge dq_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} \right) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Вернемся теперь к динамике гамильтоновой системы, геренируемой гамильтонианом H или векторным полем $\xi_H = \Omega dH$ и посмотрим на соответствующую однопараметрическую подгруппу группы симплектоморфизмов, скажем за время $t \in (0, T)$. Решение соответствующих канонических уравнений можно интерпретировать как каноническое преобразование

$$\begin{gathered} F: \qquad P = P(p, q), \qquad Q = Q(p, q) \\ (p, q) = (p_0, q_0) = (p(0), q(0)), \qquad (P, Q) = (p(T), q(T)) \end{gathered} \tag{22}$$

и рассмотреть его производящую функцию

$$dS = PdQ - pdq, \qquad P = \frac{\partial S}{\partial Q}, \qquad p = -\frac{\partial S}{\partial q} \tag{23}$$

выраженную $S = S(q, Q; T)$ через начальные и конечные координаты, и зависящую от временного интервала T как от параметра. Более того, в дальнейшем часто будет полезно считать, что начальная координата $q = q_0$ фиксирована, и мы рассматриваем “пучок траекторий”, проходящих через эту точку в “конфигурационном пространстве” (что бы это ни значило!), т.е. смотрим на функции $S = S(Q; T)$, зависящие от $q = q_0$ как от параметра.

Теорема: Производящей функцией канонического преобразования (22) является действие системы

$$S(q, Q; T) = \int_0^T dt(p\dot{q} - H) \tag{24}$$

вычисленное на решении канонических уравнений с фиксированными координатами на концах. Как функция $S = S(Q; T)$ времени T и конечной координаты Q это действие удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial T} + H\left(\frac{\partial S}{\partial Q}, Q; T\right) = 0 \tag{25}$$

называемым *уравнением Гамильтона-Якоби.*

Пример: Для свободной частицы имеем:

$$\begin{gathered} H = \frac{p^2}{2m}, \qquad \dot{q} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = 0 \\ q(t) = q_0 + \frac{p}{m}t = q + \frac{Q-q}{T}t \\ S = m\frac{(Q-q)^2}{2T} \end{gathered} \tag{26}$$

откуда

$$\begin{gathered} P = \frac{\partial S}{\partial Q} = -\frac{\partial S}{\partial q} = m\frac{Q-q}{T} = p \\ \frac{\partial S}{\partial T} = -m\frac{(Q-q)^2}{2T^2} = -\frac{p^2}{2m} = -\frac{P^2}{2m} = -H \end{gathered} \tag{27}$$

и уравнение Гамильтона-Якоби с очевидностью выполняется.

Задача: проверить это утверждение для гармонического осциллятора.

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

9 Уравнение Гамильтона-Якоби

9.1 Действие и уравнение Гамильтона-Якоби

Вернемся теперь к динамике гамильтоновой системы, геренируемой гамильтонианом H или векторным полем $\xi_H = \Omega dH$ и посмотрим на соответствующую однопараметрическую подгруппу группы симплектоморфизмов, скажем за время $t \in (0, T)$. Решение соответствующих канонических уравнений можно интерпретировать как каноническое преобразование

$$\begin{gathered} F: \qquad P = P(p,q), \qquad Q = Q(p,q) \\ (p,q) = (p_0, q_0) = (p(0), q(0)), \qquad (P,Q) = (p(T), q(T)) \end{gathered} \tag{1}$$

и рассмотреть его производящую функцию

$$dS = PdQ - pdq, \qquad P = \frac{\partial S}{\partial Q}, \qquad p = -\frac{\partial S}{\partial q} \tag{2}$$

выраженную $S = S(q, Q; T)$ через начальные и конечные координаты, и зависящую от временного интервала T как от параметра. Более того, в дальнейшем часто будет полезно считать, что начальная координата $q = q_0$ фиксирована, и мы рассматриваем “пучок траекторий”, проходящих через эту точку в “конфигурационном пространстве” (что бы это ни значило!), т.е. смотрим на функции $S = S(Q; T)$, зависящие от $q = q_0$ как от параметра.

Теорема: Производящей функцией канонического преобразования (1) является действие системы

$$S(q, Q; T) = \int_0^T dt(p\dot{q} - H) \tag{3}$$

вычисленное *на решении* уравнений движения с фиксированными координатами на концах. Как функция $S = S(Q; T)$ времени T и конечной координаты Q это действие удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial T} + H\left(\frac{\partial S}{\partial Q}, Q; T\right) = 0 \tag{4}$$

называемым *уравнением Гамильтона-Якоби*. Другими словами, функция действия (3) удовлетворяет соотношениям

$$dS = PdQ - pdq, \qquad \frac{\partial S}{\partial T} = -H(P, Q; T) \tag{5}$$

9.2 Доказательство теоремы и принцип наименьшего действия

Доказательство почти очевидно, хотя по дороге встречаются нудные тонкости. Реально оно сводится к очередному использованию принципа наименьшего действия.

- В лагранжевой формулировке

$$\begin{aligned} \delta S = \delta \int_0^T dt L(q, \dot{q}; t) = \int_0^T dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i + \\ + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_0^T \end{aligned} \tag{6}$$

обычно мы выкидывали второе слагаемое (полагаясь на граничные условия), и требовали уравнений ЭЛ для зануления интеграла. Можно то же самое переформулировать по-другому: наоборот, *на уравнениях* ЭЛ получаем

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_0^T = P\delta Q - p\delta q \tag{7}$$

что совпадает с формулой для дифференциала производящей функции при использовании очевидных определений $P_i = p_i(T) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big|_T$ и $p_i = p_i(0) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big|_0$.

Также для лагранжева дейсвия очевидно, что $\frac{dS}{dT} = L(q, \dot{q}; T)$. Применим это теперь к функции $S = S(Q; T)$

$$\frac{dS}{dT} = \frac{\partial S}{\partial T} + \frac{\partial S}{\partial Q}\frac{dQ}{dT} = \frac{\partial S}{\partial T} + P\dot{Q} \tag{8}$$

где мы воспользовались (2), (7). Другими словами

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q}\frac{dq}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + p\dot{q} = L \tag{9}$$

или, воспользовавшись преобразованием Лежандра,

$$\frac{\partial S(q;t)}{\partial t} = L - p\dot{q} = -H(p, q; t) \tag{10}$$

т.е. выполняется уравнение Гамильтона-Якоби.

- Из принципа наименьшего действия в гамильтоновой формулировке

$$\delta S = \int_0^T dt \left(\delta p\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right) - \delta q\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\right) + p\delta q\big|_0^T \tag{11}$$

следует, что на решениях канонических уравнений Гамильтона (т.е. на траектории)

$$\begin{aligned} P = p(T) = \frac{\partial S}{\partial Q}, \qquad Q = q(T) \\ p = p(0) = -\frac{\partial S}{\partial q}, \qquad q = q(0) \end{aligned} \tag{12}$$

а кроме того, из формулы (3) очевидно, что

$$\frac{\partial S}{\partial T} = -H(P, Q; T) \tag{13}$$

Поэтому на пространстве $(Q; T)$ для дифференциала функции $S = S(q, Q; T)$ (при фиксированном q!) можно написать

$$dS = PdQ - HdT \tag{14}$$

Этот дифференциал определяет функцию

$$S(Q; T) = \int_{(q;0)}^{(Q;T)} dS = \int_{(q;0)}^{(Q;T)} (pdq - Hdt) \tag{15}$$

т.к. он является точным в силу уравнений Гамильтона $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$.

9.3 Канонические преобразования и гамильтониан

Пусть теперь (p, q) и (P, Q) опять два разных абстрактных выбора координат Дарбу на $\mathcal{M}$, связанных каноническим преобразованием. Поставим вопрос о том, как выглядят в новых переменных канонические уравнения: т.е. какова для них функция Гамильтона $\mathbb{H}(P, Q; t)$. Поскольку и в тех и в других переменных канонические уравнения следуют из принципа наименьшего действия, т.е.

$$\delta S = \delta \int (pdq - Hdt) = 0 \tag{16}$$

и

$$\delta \mathbb{S} = \delta \int (PdQ - \mathbb{H}dt) = 0 \tag{17}$$

то действия в тех и других переменных должны совпадать с точностью до полных производных, т.е.

$$PdQ - \mathbb{H}dt = pdq - Hdt - dF \tag{18}$$

(для дальнейшего удобства взяли dF с минусом), и это равенство имеет смысл канонического преобразования на расширенном (временем) фазовом пространстве с производящей функцией $F = F(Q, q; t)$, такой что

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \mathbb{H} = \frac{\partial F}{\partial t} + H \tag{19}$$

Понятно, что добавляя к (18) полный дифференциал, можно (преобразованием Лежандра!) задать производящую функцию $\Phi = \Phi(P, q; t) = F - PQ$ для канонического преобразования

$$QdP - \mathbb{H}dt = pdq - Hdt - d\Phi$$
$$Q = -\frac{\partial \Phi}{\partial P}, \quad p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad \mathbb{H} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \tag{20}$$

9.4 Решение уравнения Гамильтона-Якоби и канонические преобразования

На уравнение Гамильтона-Якоби (точнее - на его решения) возможен и другой взгляд с точки зрения канонических преобразований. Посмотрим на уравнение (4) забыв, что $S = S(Q, T)$ как-то связано с начальными координатами, т.е. написав

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q; t\right) = 0 \tag{21}$$

где $S = S(q; t)$ есть функция времени и N координат, и рассматривая (21) просто как уравнение первого порядка в частных производных. Как решение задачи Коши уравнение (21) зависело бы от выбора произвольной (начальной) функции $S|_{t=0} = S_0(q_1, \ldots, q_N)$, однако для целей интегрирования канонических уравнений достаточно найти решения (21), зависящее от $N + 1$ произвольных постоянных (т.н. полный интеграл).

Теорема Якоби: Если найден полный интеграл (21), т.е. решение

$$S = f(t; q_1, \ldots, q_N; \alpha_1, \ldots, \alpha_N) + C \tag{22}$$

зависящее от $N+1$ произвольных $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N; C\}$, то канонические уравнения Гамильтона решаются в квадратурах.

Доказательство опять же вытекает из того, что теперь уже формула (22) имеет смысл канонического преобразования (18) (или (20)), если рассматривать параметры $\{\alpha\}$ как набор новых координат (или импульсов). При этом в силу (21)

$$\mathbb{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \tag{23}$$

т.е. новые переменные $\{\alpha\}$ (и им сопряженные $\{\beta\}$!) удовлятворяют каноническим уравнениям с *нулевым* гамильтонианом

$$\dot{\alpha}_i = 0, \qquad \dot{\beta}_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{24}$$

а значит решение (22) приводит к системе

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{25}$$

из N *алгебраических* уравнений, из которых можно в принципе найти

$$q_i = q_i(t; \alpha, \beta), \qquad i = 1, \ldots, N \tag{26}$$

т.е. интересующие нас координаты системы как функции времени и $2N$ постоянных (связанных, например) с граничными условиями.

Чтобы понять, что решение уравнение Гамильтона-Якоби имеет достаточно непривычный на первый взгляд вид, рассмотрим:

Пример: Свободная частица

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0 \tag{27}$$

Будем искать решение в виде разделяющихся переменных (более или менее единственный существующий метод), т.е.

$$\begin{aligned} S &= A(t) + B(q) + C \\ A'(t) &+ \frac{1}{2m} B'(q)^2 = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

т.е.

$$A(t) = -\alpha t, \qquad B(q) = \sqrt{2m\alpha}\, q \tag{29}$$

или

$$\begin{aligned} S &= -\alpha t + \sqrt{2m\alpha}\, q + C \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= -t + \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\, q = \beta \end{aligned} \tag{30}$$

Отсюда получаем

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}(t + \beta) \tag{31}$$

где две появившиеся константы имеют очевидный смысл

$$\alpha = \frac{mv_0^2}{2} = E, \quad \beta = q_0\sqrt{\frac{m}{2E}} = \frac{q_0}{v_0} \tag{32}$$

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

9 Канонические преобразования и уравнение Гамильтона-Якоби

10 Уравнение Гамильтона-Якоби и интегрируемость

10.1 Решение уравнения Гамильтона-Якоби и канонические преобразования

Вернемся опять к тому, что действие на решении уравнений движения – как функция конечных координат и времени $S = S(q, t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q; t\right) = 0 \qquad (1)$$

где $S = S(q;t)$ есть функция времени и N координат, и можно рассматривать (1) просто как уравнение первого порядка в частных производных. Как решение задачи Коши уравнение (1) зависело бы от выбора произвольной (начальной) функции $S|_{t=0} = S_0(q_1,\ldots,q_N)$, однако для целей интегрирования канонических уравнений достаточно найти решения (1), зависящее от $N+1$ произвольных постоянных (т.н. полный интеграл).

В частности, мы рассмотрели пример свободной частицы

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

для которого решение имеет достаточно непривычный на первый взгляд вид

$$S = -Et + \sqrt{2mE}\ q + C \tag{3}$$

где E – одна из таких констант, легко отождествляемая с энергией системы.

Теорема Якоби: Если найден полный интеграл (1), т.е. решение

$$S = f(t;q_1,\ldots,q_N;\alpha_1,\ldots,\alpha_N) + C \tag{4}$$

то канонические уравнения Гамильтона решаются в квадратурах.

Доказательство опять же вытекает из того, что теперь уже формула (4) имеет смысл канонического преобразования, если рассматривать параметры $\{\alpha\}$ как набор новых координат (или импульсов). При этом в силу (1)

$$\mathbb{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \tag{5}$$

т.е. новые переменные $\{\alpha\}$ (и им сопряженные $\{\beta\}$!) удовлятворяют каноническим уравнениям с *нулевым* гамильтонианом

$$\dot{\alpha}_i = 0, \qquad \dot{\beta}_i = 0, \qquad i = 1,\ldots,N \tag{6}$$

а значит решение (4) приводит к системе

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad i = 1,\ldots,N \tag{7}$$

из N *алгебраических* уравнений, из которых можно в принципе найти

$$q_i = q_i(t;\alpha,\beta), \qquad i = 1,\ldots,N \tag{8}$$

т.е. интересующие нас координаты системы как функции времени и $2N$ постоянных (связанных, например) с граничными условиями.

Уже пример свободной частицы (2), (3) приводит к мысли, что верно:

Замечание: Вообще, в случае сохраняющейся энергии, действие можно представить в виде

$$S(q,t) = \tilde{S}(q) - Et \tag{9}$$

где функция $\tilde{S}(q)$ удовлетворяет уже уравнению Гамильтона-Якоби

$$H\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}, q\right) = E \tag{10}$$

Действительно, в силу того, что

$$\begin{gathered} dS = pdq - Hdt \\ S = \int pdq - \int Hdt \underset{H=E=\text{const}}{=} \int pdq - Et = \tilde{S}(q) - Et \\ p = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} \end{gathered} \tag{11}$$

уравнение (1) при постоянной энергии сводится к (10).

У этого рассуждения есть замечательный квантовый аналог, когда нестационарное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \tag{12}$$

переходит в уравнение на спектр гамильтониана

$$\hat{H}\tilde{\Psi} = E\tilde{\Psi} \tag{13}$$

при подстановке $\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\tilde{\Psi}$ и квазиклассическом соответствии

$$\Psi \underset{\hbar\to 0}{\sim} e^{\frac{i}{\hbar}S}, \quad \tilde{\Psi} \underset{\hbar\to 0}{\sim} e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{S}} \tag{14}$$

10.2 Разделение переменных

Уравнение Гамильтона-Якоби реально решается только в случае разделения переменных, т.е. когда (будем для простоты говорить о форме (10), для зависящего от времени уравнения (1) рассуждения аналогичны) разделения переменных, т.е. когда можно выбрать такие координаты, что, например, гамильтониан системы схематично можно представить как

$$H\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q}, q\right) = H\left(h_1\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q_1}, q_1; h\right), \ldots, h_N\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q_N}, q_N; h\right)\right) \tag{15}$$

для набора функций двух переменных $\{h_i = h_i(p,q)\}$, $i = 1, \ldots, N$. Действительно, тогда ищем решение (10) в виде

$$\tilde{S}(q_1, \ldots, q_N) = \sum_{j=1}^{N} \hat{S}_j(q_j; \alpha) \tag{16}$$

и, подставляя этот анзац в (15), получаем

$$h_i\left(\frac{d\hat{S}}{dq_i}, q_i; \alpha\right) = \alpha_i, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{17}$$

где N *интегралов движения* $\{\alpha\}$ лежат на поверхности

$$H(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = E \tag{18}$$

Каждое из уравнений (17) решается в квадратурах, что с помощью (16) дает полный интеграл

$$S(q_1, \ldots, q_N; t) = \sum_{j=1}^{N} \hat{S}_j(q_j; \alpha_j) - E(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)t + C \tag{19}$$

что позволяет применить теорему Якоби, и найти решение из алгебраических уравнений (7).

Пример: Задача Кеплера о движении в центрально-симметричном поле с гамильтонианом

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + U(r) \tag{20}$$

разделяется в сферических координатах (r, θ, ϕ). Буквально можно написать

$$h_\phi = \frac{p_\phi^2}{2m}, \qquad h_\theta = \frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{h_\phi}{\sin^2\theta}$$
$$h_r = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{h_\theta}{r^2} + U(r) \tag{21}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби (10) принимает вид

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r}\right)^2 + U(r) + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \phi}\right)^2 = E \tag{22}$$

и при использовании подстановки (16) получаем

$$\tilde{S}(t,\theta,\phi) = \hat{S}_r(r) + \hat{S}_\theta(\theta) + \hat{S}_\phi(\phi)$$
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{d\hat{S}_r}{dr}\right)^2 + U(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{d\hat{S}_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\hat{S}_\phi}{d\phi}\right)^2\right] = E \tag{23}$$

или

$$\left(\frac{d\hat{S}_\phi}{d\phi}\right)^2 = \alpha_\phi, \qquad \left(\frac{d\hat{S}_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta$$
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{d\hat{S}_r}{dr}\right)^2 + U(r) + \frac{\alpha_\theta}{2mr^2} = E \tag{24}$$

откуда

$$\hat{S}_\phi = \sqrt{\alpha_\phi}\phi, \qquad \hat{S}_\theta = \int^\theta d\zeta \sqrt{\alpha_\theta - \frac{\alpha_\phi}{\sin^2\zeta}}$$
$$\hat{S}_r(r) = \sqrt{2m}\int^r ds \sqrt{E - \frac{\alpha_\theta}{2ms^2} - U(s)} \tag{25}$$

10.3 Интегрируемость: интегралы движения

Давайте еще раз взглянем на решение уравнения Гамильтона-Якоби в “укороченной форме” (10). Что на самом деле утверждается

- Если это уравнение решается, то существует функция $\tilde{S} = \tilde{S}(q, \alpha)$, осуществляющая каноническое преобразование от координат $\{q\}$ к новым координатам (а лучше – импульсам) $\{\alpha\}$.

- Уравнение (10) утверждает
$$H\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q},q\right)=E(\alpha) \tag{26}$$
что в новых переменных гамильтониан зависит только от половины координат на фазовом пространстве.

- Таким образом, в новых переменных можно написать
$$\begin{gathered}\omega=dp\wedge dq=d\alpha\wedge d\tilde{\beta}\\ \dot{\alpha}_i=0,\qquad \dot{\tilde{\beta}}_i=\frac{\partial E}{\partial\alpha_i},\qquad i=1,\ldots,N\\ \{\alpha_i,\alpha_j\}=0,\qquad i,j=1,\ldots,N\end{gathered} \tag{27}$$
Важно, что интегралы движения выступают в качестве новых импульсов (можно – или координат!?), которые находятся в пуассоновой инволюции, т.е. "интерес представляют" интегралы движения, которые коммутируют друг с другом.

  Действительно, мы уже решали уравнение Гамильтона-Якоби с помощью функции
$$S(q,\alpha;t)=\tilde{S}(q,\alpha)-E(\alpha)t \tag{28}$$
и соотношений
$$\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\beta=\mathrm{const} \tag{29}$$
Из последних соотношений в частности следует, что
$$\tilde{\beta}_i=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial E}{\partial\alpha_i}t=\beta_i+\frac{\partial E}{\partial\alpha_i}t,\qquad i=1,\ldots,N \tag{30}$$
действительно являются линейными функциями времени.

Когда с помощью канонического преобразования можно перейти к новым переменным, для которых выполняются соотношения (27), то говорят, что систему можно *полностью проинтегрировать*. Нам осталось понять как это эффективно делать в тех случаях, когда переменные не разделяются в уравнении Гамильтона-Якоби, но для начала установить некоторые основные общие свойства интегрируемых систем.

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

9 Канонические преобразования и уравнение Гамильтона-Якоби

10 Уравнение Гамильтона-Якоби и интегрируемость

11 Интегрируемость: теорема Лиувилля

11.1 Теорема Лиувилля

Определение: Система (на фазовом пространстве $\dim \mathcal{M} = 2N$) называется вполне интегрируемой, когда существует N функционально независимых *интегралов движения* – локальных функций $I_k \in Fun(\mathcal{M})$ в инволюции между собой

$$\{I_k, I_l\} = 0, \qquad k = 1, \ldots, N \tag{1}$$

относительно скобки Пуассона.

Пример: Свободное движение $H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m}$, тогда $I_k = p_k$ (или $\sum_{i_1<\ldots<i_k} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$), $\{I_k, I_l\} = \{p_k, p_l\} = 0$. Пример тривиальный, но базовый для вполне-интегрируемых систем, $N = \frac{1}{2}\dim\mathcal{M}$ интегралов движения, которые выбираются неоднозначно.

Замечание: Независимых интегралов движения не может быть больше чем $N = \frac{1}{2}\dim\mathcal{M}$.

Если N функций – функционально независимых интегралов движения находятся в пуассоновой инволюции (1), то соответствующие им (линейно независимые!) гамильтоновы векторные поля

$$\begin{gathered} \xi_k = \Omega dI_k, \qquad k = 1, \ldots, N \\ [\xi_k, \xi_l] = 0, \qquad \forall\ k, l \end{gathered} \tag{2}$$

коммутируют (как дифференциальные операторы). Очевидно также, что они ортогональны в симплектическом смысле, то есть

$$\langle \xi_k, \xi_l \rangle = \omega(\xi_k, \xi_l) = \{I_k, I_l\} = 0, \qquad \forall\ k, l \tag{3}$$

N векторов $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ линейно независимы, а их линейная оболочка образует N-мерную плоскость

$$W = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_N \subset \mathbb{R}^{2N} = T\mathcal{M} \tag{4}$$

Эта плоскость является максимально-изотропным пространством, т.е. $W \wedge W = 0$, также эти максимально-изотропные плоскости половинной размерности называются лагранжевыми. Локально максимально-изотропные плоскости выглядят как $\frac{\partial}{\partial q_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial q_N}$ (или $\frac{\partial}{\partial p_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial p_N}$) и их уже нельзя "расширить" коммутирующим вектором, т.к. любой новый линейно-независимый вектор обязан содержать хотя бы один $\frac{\partial}{\partial p_k}$, что сразу нарушает симплектическую ортогональность, а значит и коммутативность соответствующих гамильтонианов. В дальнейшем мы будем часто пользоваться лагранжевыми плоскостями, касательными к *лагранжевым подмногообразиям* $\mathcal{M}_C \subset \mathcal{M}$, заданными фиксированными значениями интегралов движения $I_k = C_k = \text{const}$, на которых очевидно

$\omega|_{\mathcal{M}_C} = 0$. Локально эти многообразия всегда можно описать уравнениями типа $\{p_j = p_j(q, C)\}$ разрешив уравнения $I_k(p, q) = C_k$ по теореме о неявной функции, например, относительно всех импульсов.

Отсюда следует, в частности, что поскольку интегралы движения находянся в инволюции с гамильтонианом $\{H, I_k\} = 0$, то гамильтониан сам является функцией от них, например - одним из них. Сформулируем теперь важнейшую классическую

Теорема Лиувилля: Пусть на $2N$-мерном симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ заданы N-функций в инволюции $\{I_k, I_l\} = 0$. Рассмотрим подмногообразие их линий уровня

$$\mathcal{M}_C: \quad I_k = C_k = \mathrm{const}, \quad k = 1, \dots, N \tag{5}$$

такое что на нем формы $\{dI_k\}$ линейно независимы в каждой точке. Тогда

- $\mathcal{M}_C$-гладкое многообразие, инвариантное относительно гамильтоновых потоков этих интегралов, в том числе гамильтониана H.
- Если $\mathcal{M}$ связно и компактно, то $\mathcal{M}_C$ диффеоморфно N-мерному тору
$$T^N: \quad \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \mod 2\pi \tag{6}$$
- Гамильтонов поток H в координатах на торе имеет вид
$$\frac{d\varphi}{dt} = \varpi(I) \tag{7}$$
т.е. свободного (условно-периодического) движения.
- Канонические уравнения Гамильтона при этом интегрируются в квадратурах.

Для доказательства сначала нужно воспользоваться тем, что линейно-независимые дифференциальные формы $\{dI_k\}$ на $\mathcal{M}_C$ порождают векторные поля $\{\xi_k = \Omega dI_k\}$, которые

- линейно-независимы (в силу независимости $\{dI_k\}$ и невырожденности $\Omega = \omega^{-1}$;

- коммутируют $[\xi_k, \xi_l] = 0$ в силу $\{I_k, I_l\} = 0$;

- касательны к $\mathcal{M}_C$ в силу

$$\xi_i I_j = \{I_i, I_j\} = 0, \quad \forall\, i, j \tag{8}$$

Отсюда следует, что $\{\xi_k\}$ образуют базис в $T\mathcal{M}_C$, и многообразие $\mathcal{M}_C$ – лагранжево, т.е. все касательные плоскости к нему лагранжевы или нулевые.

Кроме того, $\mathcal{M}_C$ инвариантно относительно действия н нем N независимых намильтоновых векторных потоков, генерируемых векторами $\{\xi_k\}$, т.е. является N-мерным тором. Доказательство этого факта (см., например у Арнольда) основано на том, что N коммутирующих векторных полей генерируют действие коммутативной группы

$$\mathbb{R}^N \supset g(t) = e^{\sum_{j=1}^N t_j \xi_j} \tag{9}$$

на $\mathcal{M}_C$. Для любой точки $P_0 \in \mathcal{M}_C$ можно изучить отображение

$$g(t)P_0 : \qquad \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{M}_C \tag{10}$$

которое из-за компактности $\mathcal{M}_C$ не может быть взаимно-однозначным, и можно установить, что стабилизатор любой точки $P_0 \in \mathcal{M}_C$ представляет собой дискретную подгруппу $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ (в силу коммутативности не зависящая от самой точки P_0). Отсюда следует, что $\mathcal{M}_C \simeq \mathbb{R}^N/\Gamma = T^N$.

11.2 Теорема Пуанкаре: интегрируемость и хаос

На теорему Лиувилля об интегрируемости интересно посмотреть и с точки зрения другой теоремы Лиувилля – о сохранении фазового объема, точнее ее следствия в виде

Теорема Пуанкаре о возвращении: В любой окрестности U любой точки компактного фазового пространства $\mathcal{M}$ найдется точка $P \in U$, такая, что при гамильтоновой динамике $g_H : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ окажется для некоторого $n > 0$ что $g_H^n P \in U$.

Этот факт относится уже к *эргодической теории* и является почти очевидным, т.к. все области $U, g_H U, g_H^2 U, \ldots, g_H^n U, \ldots$ имеют одинаковый положительный объем (в силу теоремы Лиувилля), а значит обязаны как-то пересекаться. Забавно проиллюстрировать эту теорему на примере двухкамерного ящика с газом – если одна из камер изначально была пуста, то весь газ через некоторое время (естественно – астрономическое!) опять обязан собраться в другой. Вообще, с точки зрения эргодической теории различают две ситуации: интегрируемый случай и хаос:

- В "нормальном" случае хаоса система заметает все фазовой пространство, более или менее "равномерно" оказываясь со времени около каждой его точки.
- Интегрируемый случай – принципиально другой, система заметает в фазовом пространстве лишь подмногообразия положительной коразмерности, в полностью интегрируемом случае половинной – Лиувиллев тор, висящий над данной конкретной точкой в пространстве интегралов движения.

Этот эффект можно увидеть на картинках даже в случае одной степени свободы – "размывание" кривой, по которой происходит движение в фазовой плоскости при сохраняющейся энергии при "деавтономизации", т.е. когда гамильтониан начинает явно зависеть от времени, как например в случае уравнений Пенлеве.

11.3 Переменные действие-угол

Наконец, у нас остался вопрос – как находить в интегрируемом случае собственно уравнения (7). Очевидно, что речь опять идет о каноническом преобразовании $(p, q) \to (I, \varphi)$, таком что симплектическая форма

$$\omega = \sum_{j=1}^{N} dp_j \wedge dq_j = \sum_{j=1}^{N} dI_j \wedge d\varphi_j \tag{11}$$

инвариантна, а гамильтониан в силу

$$\begin{gathered} \{I_k, I_l\} = 0, \qquad k, l = 1, \ldots, N \\ \{H, I_k\} = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

является функцией лишь интегралов движения $H = H(I_1, \ldots, I_N)$. Тогда в новых переменных

$$\begin{gathered} \dot{I}_k = 0, \qquad \dot{\varphi}_k = \frac{\partial H}{\partial I_k}, \qquad k = 1, \ldots, N \\ \varphi_k = \varphi_k(0) + \frac{\partial H}{\partial I_k} t = \varphi_k(0) + \varpi_k(I) t \end{gathered} \tag{13}$$

Формальный ответ на вопрос о переменных действия дает

Теорема: Пусть $\{\gamma_j\}$, $j = 1, \ldots, N$ – базисные циклы лиувиллевского тора $\mathcal{M}_C = T^N$, такие что при обходе j-го цикла $\Delta\varphi_i = 2\pi\delta_{ij}$. Тогда переменные действия можно определить как

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} \sum_{k=1}^{N} p_k dq_k, \qquad j = 1, \ldots, N \tag{14}$$

интегралы от формы $\alpha = pdq$ по соответствующим циклам.

Мы уже доказывали, что $\mathcal{M}_C$ – лагранжево подмногообразие, т.е. на нем $\omega|_{\mathcal{M}_C} = 0$. Значит для ограничения формы $\alpha_C = \alpha|_{\mathcal{M}_C}$ на $\mathcal{M}_C$ имеем

$$d\alpha_C = 0 \tag{15}$$

а значит интеграл

$$\int_{P_0}^{P} \alpha_C = \int_{P_0}^{P} pdq = S(P) \tag{16}$$

не зависит от контура и определяет локально некоторую функцию на $\mathcal{M}_C$. Глобально на торе эта функция многозначна, а ее скачки при обходе по базисным контурам определяются как раз периодами

$$\Delta S_j = \oint_{\gamma_j} \alpha_C = 2\pi I_j, \qquad j = 1, \ldots, N \tag{17}$$

Лагранжево подмногообразие $\mathcal{M}_C$ в окрестности некоторой точки P_0 можно локально задать уравнениями

$$p_j = p_j(I, q), \qquad j = 1, \ldots, N \tag{18}$$

Тогда функцию (однозначную в окрестности точки P_0, $q(P_0) = q_0$)

$$S(q, I) = \int_{q_0}^{q} \sum_{j=1}^{N} p_j(I, x) dx_j \tag{19}$$

можно считать производящей функцией канонического преобразования $(p, q) \to (I, \varphi)$, т.е. определить

$$\begin{gathered} pdq = -\varphi dI + dS \\ p = \frac{\partial S}{\partial q}, \qquad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I} \end{gathered} \tag{20}$$

Новые координаты будут неоднозначными, с периодами

$$\Delta_i \varphi_j = \frac{\partial}{\partial I_i} \Delta_j S = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint_{\gamma_j} pdq = 2\pi\delta_{ij} \tag{21}$$

11.4 Примеры

1. *Гармонический осциллятор* с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\varpi^2 q^2}{2} \tag{22}$$

траектории которого при $H = E$ представляют собой эллипс

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\varpi^2} = 1 \tag{23}$$

так что действие в данном случае

$$\begin{gathered} I = \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma pdq = \frac{1}{2\pi} \int dp \wedge dq = \\ = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{2mE} \sqrt{2E/m\varpi^2} = \frac{E}{\varpi} \end{gathered} \tag{24}$$

а угловая переменная связана с временем частотой

$$\frac{\partial E}{\partial I} = \varpi, \qquad \varphi = \varphi_0 + \varpi t \tag{25}$$

собственных колебаний гармонического осциллятора.

2. *Физический маятник* с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2mL^2} - mgL\cos\phi \tag{26}$$

или каноническими уравнениями

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{mL^2} \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -mgL\sin\phi
\end{aligned}
\tag{27}
$$

т.е.

$$
\ddot{\phi} + \omega^2 \sin\phi = 0, \qquad \omega^2 = \frac{g}{L} \tag{28}
$$

которое при малых отклонениях $\sin\phi \approx \phi$ превращается в уравнение математического маятника – гармонического осциллятора $\ddot{\phi} - \omega^2\phi = 0$. Уравнение (28) интегрируется стандартным образом

$$
\tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \omega^2 \cos\phi = \frac{H}{mL^2} \tag{29}
$$

или

$$
\begin{aligned}
dt &= \frac{d\phi}{\omega\sqrt{2E + 2\cos\phi}}, \qquad E = \frac{H}{mgL} \\
t &= \frac{1}{\omega}\int^{\phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2E + 2\cos\varphi}}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Заметим, что последний интеграл можно переписать как

$$
t = \frac{\partial}{\partial E}\int^{\phi} \frac{d\varphi}{\omega}\sqrt{2E + 2\cos\varphi} = \frac{\partial}{\partial H}\int^{\phi} p d\varphi \tag{31}
$$

Обратим теперь внимание на следующий факт: эллиптический интеграл в (30) с помощью очевидных замен

$$
w = e^{i\phi}, \qquad \sqrt{2E + 2\cos\phi} = \sqrt{2E + w + w^{-1}} = \lambda \tag{32}
$$

можно переписать как интеграл от дифференциала

$$
\frac{d\phi}{\omega\sqrt{2E + 2\cos\phi}} \sim \frac{dw}{2\lambda w} = dv \tag{33}
$$

по некоторому циклу на комплексной кривой

$$
w + \frac{1}{w} = \lambda^2 - 2E \tag{34}
$$

или

$$y^2 = (\lambda^2 - 2E)^2 - 4, \qquad y = w - \frac{1}{w} \tag{35}$$

очевидно представляющую собой эллиптическую кривую (рода $g = 1$), на которой

$$dv = \frac{dw}{2\lambda w} = \frac{d\lambda}{y} \tag{36}$$

голоморфный дифференциал (единственный – с точностью до нормировки). Этот интеграл отображает эллиптическую кривую (34), (35) в одномерный комплексный тор $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ – решетка натянутая на два независимых периода дифференциала dv. Из этого проистекает, что

- Лиувиллевский тор в данном случае является вещественным сечением комплексного тора – якобиана эллиптической кривой (34), (35) (в данном случае ей изоморфным);

- Интегралы действия выражаются через периоды (по замкнутым нестягиваемым циклам, т.е. элементам H_1 эллиптической кривой) дифференциала $pd\phi \sim dS$

  $$dS = \lambda \frac{dw}{w}, \qquad \frac{\partial}{\partial E} dS = dv \tag{37}$$

  т.е. мероморфного дифференциала, производная которого по единственному параметру семейства кривых представляет собой голоморфный дифференциал.

И то и другое являются признаками *интегрируемой системы.*

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

9 Канонические преобразования и уравнение Гамильтона-Якоби

10 Уравнение Гамильтона-Якоби и интегрируемость

11 Интегрируемость: теорема Лиувилля

12 Динамика твердого тела и пара Лакса

Пока мы познакомились с проблемой интегрируемости “в абстрактном ключе” – например на уровне теоремы Лиувилля, которая вовсе не дает конструктивного способа построения интегрируемой замены переменных, т.е. канонического преобразования $dp \wedge dq \mapsto dI \wedge d\varphi$. Мы выяснили также, что такой способ (с точностью до некоторой нормировки!) существует, если удается решить методом разделения переменных уравнение Гамильтона-Якоби. Однако, большинство интегрируемых систем, известных на данный момент, решается по-другому – тогда, и только тогда, когда для них удается найти так называемое *представление Лакса* [1].

Наиболее естественным образом это представление возникает в задаче о движении твердого тела, где довольно естественно ожидать интегрируемости – т.к. движение свободно. Однако в случае более трех степеней свободы (естественного многомерного обобщения задачи твердого тела в $\mathbb{R}^3$) интегрируемость доказать не так просто, зато существует формулировка, естественным образом приводящая к понятию об операторе Лакса и основных необходимых свойствах этого оператора.

12.1 Движение твердого тела

Определение: Твердым телом называется набор материальных точек, расстояние между которыми неизменно $|\vec{x}_I - \vec{x}_J| = \mathrm{const}$ [2]. Движение твердого тела одобно описывать как движение его центра инерции, т.е. точке в которой выполняется $\sum_I m_I \vec{x}_I = 0$, $\vec{x}_I \in \mathbb{R}^3$ с началом в этой точке, и вращение относительно этого центра – таким образом конфигурационное пространство системы представляет собой $M = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Для простоты мы забудем про движение центра инерции, и будем изучать вращения твердого тела, описываемые элементами $U \in SO(3)$, например тремя углами $U = U(\vec{\varphi})$, поворотов вокруг осей декартовой системы координат [3]. Это часто называют движением твердого тела, закрепленного в точке.

При вращении на угол $\delta\vec{\varphi}$ координата точки $\vec{x}$ меняется как

$$\delta\vec{x} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{x} \tag{1}$$

под действием бесконечно-малого элемента группы вращений. Переходя

[1] Другие известные названия – пара Лакса, представление нулевой кривизны итп.

[2] Это довольно существенное физическое приближение, скажем в релятивистской физике оно просто невозможно.

[3] Сразу зафиксируем вопрос: являются ли эти углы хорошими обобщенными координатами?

к производным по времени, получим

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{x} \tag{2}$$

где $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ называется угловой скоростью. Легко убедиться (задача – проверить самостоятельно!), что угловая скорость одинакова для всех точек твердого тела, и не зависит от выбора закрепленной точки.

Как лагранжиан, так и гамильтониан системы при отсутствии внешнего воздействия определяется кинетической энергией. Для каждой точки легко написать

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\vec{\omega}\times\vec{x}, \vec{\omega}\times\vec{x}\right) = \frac{m}{2}\left(\vec{\omega}^2\vec{x} - (\vec{\omega}\cdot\vec{x})^2\right) \tag{3}$$

Действительно, это очевидно, например в компонентах, поскольку

$$\begin{gathered}(\vec{\omega}\times\vec{x})_i = \sum_{j,k}\epsilon_{ijk}\omega_j x_k \\ \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{iln} = \delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}\end{gathered} \tag{4}$$

Таким образом, лагранжиан твердого тела принимает вид

$$\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2}\sum_{i,k} J_{ik}\omega_i\omega_k = \tfrac{1}{2}(\omega, J\omega) \tag{5}$$

где квадратичная форма задается симметричной матрицей

$$J_{ik} = \int dm(x)\left(x^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) = \int d^3x\rho(x)\left(x^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \tag{6}$$

вклад в которую дают все точки твердого тела с весом $dm(x)\left(x^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)$, называемой *тензором инерции*. Поскольку любую симметричную матрицу можно привести ортогональным преобразованием к диагональному виду, то в дальнейшем можем без потери общности считать, что $J_{ik} = J_i\delta_{ik}$.

Очевиден и переход к гамильтониану, производная по скорости дает

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\omega_i} = \sum_k J_{ik}\omega_k = M_i \tag{7}$$

компоненты импульса – вектора момента количества движения $\vec{M} = J\vec{\omega}$. В том, что это момент импульса, легко убедиться, посчитав по определению (для каждой точки)

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p} = m\vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) = J\vec{\omega} \tag{8}$$

где опять можно проверить в компонентах

$$\begin{aligned} M_i = m\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \sum_{l,n} \epsilon_{kln}\omega_l x_n = m\sum_{j,l,n}(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl})x_j x_n \omega_l = \\ = m\sum_j(\omega_i x^2 - x_i x_j \omega_j) = m\sum_j(\delta_{ij}x^2 - x_i x_j)\omega_j = \sum_j J_{ij}\omega_j \end{aligned} \tag{9}$$

После преобразования для гамильтониана очевидно получаем

$$H = \tfrac{1}{2}(M, J^{-1}M) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,k} J^{-1}_{ik} M_i M_k \tag{10}$$

где симметричный тензор инерции считаем невырожденным, положительно определенным (и даже – диагональным).

12.2 Уравнения движения

Мы начнем с гамильтонова формализма, поскольку варьировать непосредственно лагранжиан (5) не очень осмысленно, углы $\delta\vec{\varphi}$ являются "плохими координатами" так как группа вращений $SO(3)$ некоммутативна (кроме их численных значений нужно еще задавать и порядок, в котором осуществляются повороты вокруг данных осей).

Используем гамильтониан (10) вместе с канонической скобкой Пуассона на компоненты момента количества движения

$$\{M_i, M_j\} = \epsilon_{ijk} M_k \tag{11}$$

Тогда

$$\dot{M}_i = \{M_i, H\} = \epsilon_{ijk} M_k \frac{\partial H}{\partial M_j} = \epsilon_{ijk} M_k J^{-1}_{jl} M_l = \epsilon_{ijk}\omega_j M_k \tag{12}$$

или же просто

$$\dot{\vec{M}} = \vec{\omega} \times \vec{M} \tag{13}$$

Для дальнейшего удобно переписать эти уравнения в матричной форме, воспользовавшись структурой алгебры Ли $\mathfrak{g} = so(3)$ на $\mathbb{R}^3$, т.е. введя матрицы

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \epsilon_{ijk} M_k, \qquad & \Omega_{ij} &= \epsilon_{ijk}\omega_k \\ M_i &= \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} L_{jk}, \qquad & \omega_i &= \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{jk} \end{aligned} \tag{14}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} L_{ij} = \epsilon_{ijk} M_k = \epsilon_{ijk} J_{kl}\omega_l = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} J_{kl}\epsilon_{lpq}\Omega_{pq} = \\ = \tfrac{1}{2} J_{kl}\Omega_{pq} \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jl} & \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kl} & \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} = \mathrm{Tr} J\Omega_{ij} - J_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik} J_{kj} \end{aligned} \tag{15}$$

или, в матричном виде имеем по-прежнему линейную связь

$$L = I\Omega + \Omega I \tag{16}$$

где мы ввели симметричную матрицу

$$I_{ik} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr} J\delta_{ik} - J_{ik} \tag{17}$$

которую тоже можно считать диагональной.

Уравнения движения (13) легко переписать в матричном виде

$$\begin{aligned} \dot{L}_{ij} = \epsilon_{ijk}\dot{M}_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{kpq}\omega_p M_q = (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp})\omega_p M_q = \\ = (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{ij}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{jp})\omega_p M_q = \\ = (\epsilon_{kiq}\epsilon_{kpj} + \epsilon_{kip}\epsilon_{kjq})\omega_p M_q = \Omega_{jk} L_{ki} + \Omega_{ki} L_{kj} = \\ = L_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik} L_{kj} = [L, \Omega]_{ij} \end{aligned} \tag{18}$$

т.е. в форме

$$\dot{L} = [L, \Omega] \tag{19}$$

матричного коммутатора.

Заметим, что уравнение (19) сразу возникает как уравнение ЭЛ из Лагранжиана

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Tr}(I\Omega\Omega), \qquad \Omega = U^{-1}\dot{U} \in so(N) \tag{20}$$

который мы записали введя *настоящие координаты* на группе вращений, матрицу $U \in SO(N)$, и обобщив сразу этот вид на вращение в евклидовом пространстве произвольной размерности. Действительно

$$
\begin{gathered}
\delta\Omega = U^{-1}\delta\dot{U} - U^{-1}\delta U\Omega \\
\delta\mathfrak{L} = \mathrm{Tr}(\Omega I\delta\Omega) + \mathrm{Tr}(I\Omega\delta\Omega) \underset{(16)}{=} \mathrm{Tr}(L\delta\Omega) = \\
= \mathrm{Tr}(LU^{-1}\delta\dot{U}) - \mathrm{Tr}(LU^{-1}\delta U\Omega) = \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(LU^{-1}\delta U) - \\
-\mathrm{Tr}(\dot{L}U^{-1}\delta U) + \mathrm{Tr}(LU^{-1}\dot{U}U^{-1}\delta U) - \mathrm{Tr}(LU^{-1}\delta U\Omega) = \\
= \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(LU^{-1}\delta U) + \mathrm{Tr}\left((-L + L\dot{\Omega} - \Omega L)U^{-1}\delta U\right)
\end{gathered} \tag{21}
$$

и, отбрасывая полную производную по времени, из зануления последнего слагаемого получаем уравнение (19).

12.3 Представление Лакса

Чем замечательно уравнение (19). Из него немедленно следует, что у системы имеются интегралы движения, поскольку $\dot{L}^k = -\left[\Omega, L^k\right]$ для любой степени k, а значит (для матриц конечного размера)

$$
\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(L^k) = -\mathrm{Tr}\left[\Omega, L^k\right] = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{22}
$$

т.е. $H_k = \mathrm{Tr}(L^k)$ являются интегралами движения.

Остается более сложный вопрос о числе таких независимых интегралов, и легко видеть, что ответ на него – отрицательный. Уже в трехмерном пространстве, поскольку

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Tr}L = 0, \qquad \mathrm{Tr}(L^2) = \sum_{i,j} L_{ij}L_{ji} = -\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}M_kM_l = -2\sum_k M_k^2 \\
\mathrm{Tr}(L^3) = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jln}\epsilon_{lim}M_kM_nM_m = (\delta_{kl}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{il})\epsilon_{lim}M_kM_nM_m = \\
= \epsilon_{knm}M_kM_nM_m = 0
\end{gathered} \tag{23}
$$

а старшие степени матрицы L заведомо не являются независимыми [4].

[4]Таким образом, реально мы получим из представления (19) $\lfloor N/2 \rfloor$ интегралов движения, т.е. все четные $\mathrm{Tr}(L^{2k})$ при $k = 1, 2, \ldots, \lfloor N/2 \rfloor$.

Поэтому представление Лакса (19) удобно для поиска интегралов движения, но его явно недостаточно.

Теорема Манакова, 1976: Уравнения движения твердого тела в N-мерном пространстве допускают представление Лакса

$$\dot{\mathcal{L}} = [\mathcal{L}, A] \tag{24}$$

где матрицы $(\mathcal{L}, A) = (\mathcal{L}(z), A(z))$ – элементы пары Лакса, зависящей от спектрального параметра (напомним, что симметричную матрицу $I_{ij} = I_i\delta_{ij}$ можно считать диагональной)

$$\mathcal{L} = I^2 z + L, \qquad A = Iz + \Omega \tag{25}$$

Представление (24) приводит к существованию $\frac{1}{2}\left[\frac{N}{2}\right] + \frac{N(N-1)}{4}$ интегралов движения в инволюции, коэффициентов полиномов $\mathrm{Tr}\mathcal{L}(z)^k$, $k = 2, \ldots, N$.

Для доказательства посмотрим сначала, что дает уравнение (24). Вычисляя коммутатор в правой части получим

$$[\mathcal{L}, A] = z^2\left[I^2, I\right] + z\left(\left[I^2, \Omega\right] + [L, I]\right) + [L, \Omega] \tag{26}$$

Коммутатор при z^2 звнуляется автоматически. При первой степени имеем в силу (16)

$$\left[I^2, \Omega\right] + [L, I] = I^2\Omega - \Omega I^2 + \Omega I^2 + I\Omega I - I\Omega I - I^2\Omega = 0 \tag{27}$$

нетривиальное сокращение. Наконец, независящий от спектрального параметра член дает ровно уравнение движения (19), поскольку

$$[L, \Omega] = [\mathcal{L}, A] = \dot{\mathcal{L}} = \frac{d}{dt}(I^2 z + L) = \dot{L} \tag{28}$$

В силу уравнений Лакса (24) (с операторами, зависящими от спектрального параметра) очевидно, что

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\mathcal{L}^k = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{L}^k, A\right] = 0 \tag{29}$$

поэтому полиномы

$$P_k(z) = \mathrm{Tr}\mathcal{L}^k = \sum_l H_{kl} z^l \tag{30}$$

являются производящими функциями для интегралов движения $\{H_{kl}\}$, число которых растет квадратично с ростом размера матрицы N (как и число динамических переменных). Хотя

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\mathcal{L}^2 = \mathrm{Tr}\left(I^2 z + L\right)^2 = z^2\mathrm{Tr}I^4 + 2z\mathrm{Tr}(I^2 L) + \mathrm{Tr}L^2 = \\ = z^2\mathrm{Tr}I^4 - 2\vec{M}^2\end{aligned} \tag{31}$$

не дает ничего нового, но уже

$$\mathrm{Tr}\mathcal{L}^3 = \mathrm{Tr}\left(I^2 z + L\right)^3 = z^3\mathrm{Tr}I^6 + 3z\mathcal{L}_1 \tag{32}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = -2\mathrm{Tr}J^2\vec{M}^2 + 4(\det J)H \tag{33}$$

где искомый гамильтониан H определен искомой формулой (10).

12.4 Свойства оператора Лакса для твердого тела

Общий разговор о свойствах операторов Лакса мы пока отложим, но отметим сразу ряд важных свойств формул (25)

- Оператор Лакса удовлетворяет матричному уравнению первого порядка (24), которое автоматически генерирует интегралы движения.

- Уравнения (24) сильно *переопределены*, так как являются системой как минимум из N^2 линейных динамических уравнений на коэффициенты матрицы Лакса. "Содержательных" из них не так много, а остальные должны удовлетворяться в силу ряда тождеств. Эти тождества – нетривиальные свойства прелставления Лакса.

- Реальная интегрируемость (достаточное количество интегралов движения) часто возникает лишь когда оператор Лакса $\mathcal{L} = \mathcal{L}(z)$ дополнительно зависит от *спектрального параметра* z. В этом случае интегралы движения можно "считывать" из характеристического уравнения
$$\det(\mathcal{L}(z) - \lambda) = F(\lambda, z) = 0 \tag{34}$$

которое представляет собой комплексную кривую, точнее семейство кривых параметризованное интегралами движения (коэффициентами уравнения). При этом над каждой точкой $\mathcal{M}_C$ в пространстве модулей таких кривых (т.е. при фиксированных значениях интегралов движения) висит комплексный тор – якобиан кривой (34). Лиувиллев тор при этом является вещественным сечением якобиана, т.е. представление Лакса дает конструктивный способ поиска переменных действие-угол.

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

9 Канонические преобразования и уравнение Гамильтона-Якоби

10 Уравнение Гамильтона-Якоби и интегрируемость

11 Интегрируемость: теорема Лиувилля

12 Динамика твердого тела и пара Лакса

13 Операторы Лакса и примеры интегрируемых систем

13.1 Пара Лакса для твердого тела

Уравнения движения твердого тела в N-мерном пространстве допускают предложенное Манаковым представление Лакса

$$\dot{\mathcal{L}} = [\mathcal{L}, A] \tag{1}$$

где матрицы $(\mathcal{L}, A) = (\mathcal{L}(z), A(z))$ – элементы пары Лакса, зависящей от спектрального параметра (симметричную матрицу $I_{ij} = I_i\delta_{ij}$ можно считать диагональной)

$$\mathcal{L} = I^2 z + L, \qquad A = Iz + \Omega \tag{2}$$

Представление (1) приводит к существованию $\frac{1}{2}\left[\frac{N}{2}\right] + \frac{N(N-1)}{4}$ интегралов движения в инволюции, коэффициентов полиномов $\mathrm{Tr}\mathcal{L}(z)^k$, $k = 2, \ldots, N$. Для этого представления существенно, что

- Оператор Лакса удовлетворяет матричному уравнению первого порядка (1), которое автоматически генерирует интегралы движения.
- Уравнения (1) сильно *переопределены*, так как являются системой как минимум из N^2 линейных динамических уравнений на коэффициенты матрицы Лакса. “Содержательных” из них не так много, а остальные должны удовлетворяться в силу ряда тождеств. Эти тождества – нетривиальные свойства прелставления Лакса.
- Реальная интегрируемость (достаточное количество интегралов движения) часто возникает лишь когда оператор Лакса $\mathcal{L} = \mathcal{L}(z)$ дополнительно зависит от *спектрального параметра* z. В этом случае интегралы движения можно “считывать” из характеристического уравнения
$$\det(\mathcal{L}(z) - \lambda) = F(\lambda, z) = 0 \tag{3}$$
которое представляет собой комплексную кривую, точнее семейство кривых параметризованное интегралами движения (коэффициентами уравнения). При этом над каждой точкой $\mathcal{M}_C$ в пространстве модулей таких кривых (т.е. при фиксированных значениях интегралов движения) висит комплексный тор – якобиан кривой

(3). Лиувиллев тор при этом является вещественным сечением якобиана, т.е. представление Лакса дает конструктивный способ поиска переменных действие-угол.

13.2 Свойства представления Лакса

Посмотрим теперь на свойства общего уравнения Лакса (1) в предположении, что матрица Лакса диагонализуема, т.е. существуют решения линейной задачи

$$\mathcal{L}\Psi_k = \lambda_k \Psi_k, \qquad k = 1, \ldots, N \tag{4}$$

Введем также двойственные решения

$$\tilde{\Psi}_k \mathcal{L} = \lambda_k \tilde{\Psi}_k, \qquad (\tilde{\Psi}_k, \Psi_l) = \delta_{kl} \tag{5}$$

Тогда легко проверить, что верна следующая

Теорема: При эволюции в силу уравнения Лакса (1) спектр оператора $\mathcal{L}$ не меняется.

Действительно:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_k = \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\Psi}_k, \mathcal{L}\Psi_k) = (\dot{\tilde{\Psi}}_k, \mathcal{L}\Psi_k) + (\tilde{\Psi}_k, \mathcal{L}\dot{\Psi}_k) + (\tilde{\Psi}_k, \dot{\mathcal{L}}\Psi_k) = \\ = \lambda_k \Big((\dot{\tilde{\Psi}}_k, \Psi_k) + (\tilde{\Psi}_k, \dot{\Psi}_k) \Big) + (\tilde{\Psi}_k, [\mathcal{L}, A]\, \Psi_k) = \\ = (\tilde{\Psi}_k, (\mathcal{L}A - A\mathcal{L})\Psi_k) = (\lambda_k - \lambda_k)(\tilde{\Psi}_k, A\Psi_k) = 0\end{aligned} \tag{6}$$

В силу этой теоремы собственные числа оператора Лакса являются интегралами движения, как и их симметрические функции

$$\mathrm{Tr}\mathcal{L}^n = \sum_k \lambda_k^n = p_n(\lambda) \tag{7}$$

или коэффициенты характеристического многочлена

$$\begin{gathered}\det(\lambda - \mathcal{L}) = \lambda^N - \lambda^{N-1}u_1 + \ldots + (-)^N u_N \\ u_n = e_n(\lambda) = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_n} \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_n}\end{gathered} \tag{8}$$

Задача: выразить коэффициенты (7) через (8), и наоборот.

Мгновенно доказывается и следующая

Теорема: Уравнение Лакса (1) является условием совместности линейной задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Psi &= \lambda\Psi \\ \dot{\Psi} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -A\Psi \end{aligned} \tag{9}$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}\Psi) = \dot{\mathcal{L}}\Psi + \mathcal{L}\dot{\Psi} = \dot{\mathcal{L}}\Psi - \mathcal{L}A\Psi \tag{10}$$

а также

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda\Psi) = \dot{\lambda}\Psi + \lambda\dot{\Psi} = \dot{\lambda}\Psi - \lambda A\Psi = -A\mathcal{L}\Psi \tag{11}$$

в силу изоспектральности. Вычитая одно из другого, получаем

$$\left(\dot{\mathcal{L}} - \mathcal{L}A + A\mathcal{L}\right)\Psi = 0 \tag{12}$$

на всех собственных векторах матрицы Лакса, что возможно только при выполнении уравнения (1).

13.3 Примеры операторов Лакса

Приведем теперь несколько важнейших примеров интегрируемых систем, где операторы Лакса возникают не столь очевидным образом как для N-мерного твердого тела.

13.4 Система частиц Калоджеро-Мозера

Ясно, что для системы свободных частиц матрицу Лакса можно сразу написать в виде

$$\mathcal{L}_{ij} = p_i\delta_{ij}, \qquad i,j = 1,\ldots,N \tag{13}$$

и тогда следы ее степеней $\mathrm{Tr}L^k$ или кожффициенты характеристического многочлена $\det(\lambda - L)$ немедленно выдадут интегралы движения – симметрические функции импульсов.

Возникает естественный вопрос – можно ли как-то изменить (13), сделав систему нетривиальной, но сохраняя интегрируемость. Одним из удачных способов решения такой задачи является анзац

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{ij} = p_i\delta_{ij} + (1-\delta_{ij})\alpha(q_i - q_j), \qquad i,j = 1,\dots,N \\ A_{ij} = \delta_{ij}\sum_k \beta(q_i - q_k) + (1-\delta_{ij})\gamma(q_i - q_j)\end{gathered} \tag{14}$$

подставляя который в уравнения Лакса достаточно легко убедиться, что канонические уравнения $p_i = \dot{q}_i$ выполняются при условии $\gamma(x) = \alpha'(x)$, следующем из сравнивания внедиагональных матричных элементов уравнения (1). Зануление диагональных элементов происходит автоматически, если выполняется еще и функциональное соотношение

$$\alpha(x)\alpha'(y) - \alpha(y)\alpha'(x) = (\beta(x) - \beta(y))\alpha(x+y) \tag{15}$$

на функции $\alpha(x)$ и четную $\beta(x) = \beta(-x)$. При этом вторая пара канонических уравнений приобретает вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{k\neq i} V'(q_i - q_k), \qquad V(q) = \alpha(q)\alpha(-q) \tag{16}$$

т.е.интегрируемая система (если найдутся нетривиальные решения соотношения (15)) представляет из себя систему попарно взаимодействующих частиц с гамильтонианом

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i<j} V(q_i - q_j) \tag{17}$$

- У функциональных уравнений имеются очевидные решения, например

  $$\alpha(x) = \frac{ig}{x}, \qquad \beta(x) = \frac{ig}{x^2} \tag{18}$$

  или

  $$\alpha(x) = \frac{igR}{\sinh Rx}, \qquad \beta(x) = \frac{igR^2}{\sinh^2(Rx)} \tag{19}$$

  все устроенные так, что потенциал $V(q) = \alpha(q)\alpha(-q) \underset{q\to 0}{\sim} \frac{1}{q^2}$ имеет в нуле полюс второго порядка. Очевидно, скажем, что при $R \to 0$ решение (19) переходит в решение (18).

Системы частиц с полюсными потенциалами второго порядка называются системами Калоджеро-Мозера, и они интегрируемы (вспомним одномерную задачу с потенциалом $V(r) \sim \frac{1}{r^2}$, которая сводилась к свободному движению в плоскости).

- Решений уравнения (15) с полюсами второго порядка немного. Ольшанецкий и Переломов нашли эллиптическое решение, которое дает систему эллиптического Калоджеро с потенциалом

$$V(q) = g^2 \wp(q) \tag{20}$$

  а рациональное и тригонометрические решения возникают при вырождениях тора.

- Однако самое существенное, что существует эллиптическое решение Кричевера со спектральным параметром

$$\alpha(x) = 2\Phi(x,z), \qquad \beta(x) = 2\wp(x) - \frac{1}{N-1}\wp(z) \tag{21}$$

  где

$$\Phi(x,z) = \frac{\sigma(x-z)}{\sigma(x)\sigma(z)} e^{x\zeta(z)}, \qquad \Phi(x,z)\Phi(-x,z) = \wp(z) - \wp(x) \tag{22}$$

  которое дает не только интегралы движения, но и уравнение саектральной кривой (3) рода $g = N$, которая N-кратно накрывает эллиптическую кривую.

13.5 Цепочка Тоды

Класс моделей Калоджеро (включающий обобщения того, что мы рассмотрели) фактически исчерпывает интегрируемые модели частиц с потенциалами вида (17), где “все взаимодействуют со всеми”. Другим важнейшим классом интегрируемых моделей частиц являются цепочки Тоды, тесно связанные с алгебрами и группами Ли.

Цепочками Тоды называются модели взаимодействующих “соседних” частиц с экспоненциальным потенциалом, т.е. с гамильтонианом

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_i p_i^2 + \sum_i e^{q_{i+1}-q_i} \tag{23}$$

интегрируемость которых следует из представления Лакса

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ij} &= p_i\delta_{ij} + c_i\delta_{i+1,j} + c_{i-1}\delta_{i,j+1} \\ A_{ij} &= \tfrac{1}{2}c_i\delta_{i+1,j} - \tfrac{1}{2}c_{i-1}\delta_{i,j+1}\end{aligned} \tag{24}$$

где $c_i = \exp\left(\frac{1}{2}(q_{i+1} - q_i)\right)$. Операторы (24) представляют собой трехдиагональные матрицы, т.е. уравнение Лакса

$$\sum_j \mathcal{L}_{ij}\Psi_j = \lambda\Psi_i \tag{25}$$

является разностным уравнением второго порядка.

В данном примере получить спектральную кривую (или сделать оператор Лакса зависящим от спектрального параметра) помогает следующее соображение. Формально пока все формулы написаны как бы для бесконечной цепочки частиц, и если мы хотим ограничить ее на конечное число частиц N, то надо как-то определить граничные условия. Например, периодическим образом, т.е. сказать, что

$$q_{i+N} = q_i, \qquad p_{i+N} = p_i, \qquad \forall\ i \tag{26}$$

Следует также наложить граничные условия на решения линейной задачи (25), и спектральная теория операторов (или физика конденсированного состояния) подсказывает, что это должно быть условие *квази*-периодичности

$$\Psi_{i+N} = w\Psi_i, \qquad w \in \mathbb{C}^\times \tag{27}$$

где возникает еще одно комплексное число, так называемый квазиимпульс. Таким образом, мы можем считать набор $\{\Psi_i\}$ решением системы уравнений из (25) и (27), или собственным функциями *двух* операторов – оператора Лакса $\mathcal{L}$ и оператора сдвига $T = T_N$ на конечное число N вдоль цепочки.

Необходимым условием существования решения этой задачи (как и для пары Лакса) является коммутативность

$$[\mathcal{L}, T] = 0 \tag{28}$$

двух операторов. Когда Кричевер сформулировал это в 70-х, то выяснилось, что задача классификации коммутирующих операторов уже была решена за 50 лет до этого Бурнхалом и Чонди, которые доказали, что в этом случае найдется функция $F(\lambda, w)$, такая что

$$F(\mathcal{L}, T) = 0 \tag{29}$$

Это и есть уравнение спектральной кривой, вопрос только в том – как его технически получить.

Очевидный ответ: надо переписать оператор Лакса в базисе собственных функций оператора сдвига – при этом в нем появится зависимость от спектрального параметра или $\mathcal{L} = \mathcal{L}(w)$ собственного числа оператора сдвина T. Можно естественно поступить наоборот – записать оператор сдвига в базисе собственных функций оператора Лакса.

Задача: доказать, что в первом случае возникает уравнение

$$\det_{N\times N} (\lambda - \mathcal{L}(w)) = 0 \tag{30}$$

а во втором

$$\det_{2\times 2} (w - T(\lambda)) = 0 \tag{31}$$

которое имеет вид

$$w + \frac{1}{w} = P_N(\lambda) \tag{32}$$

т.е. задает гиперэллиптическую кривую рода $g = N - 1$, вложенную в $(\lambda, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\times}$.

Добавим ряд замечаний:

- При $N = 2$ эллиптическая кривая (32) $w + \frac{1}{w} = u$ буквально совпадает с той, что у нас возникала при интегрировании физического маятника.

- Операторы Лакса Тодовских систем строятся для любой простой или аффинной алгебры Ли по формуле

$$\mathcal{L} = p \cdot h + \sum_{\alpha} (e_\alpha + f_\alpha) e^{\alpha\cdot q/2} \tag{33}$$

  где (h, e, f) – генераторы Шевалле, а сумма идет по простым корням.

- Рассмотренные выше кривые для систем Тоды и Калоджеро возникают в теории Виттена-Зайберга при описании суперсимметричных калибровочных теорий поля с группами $SU(N)$.

13.6 Уравнение КдФ

Отметим наконец, что интегрируемость и представления Лакса возникают также в задачах с бесконечным числом степеней свободы, например для дифференциальных уравнений на функции $u = u(x)$ на прямой или окружности. Самый известный пример – пара Лакса для оператора Штурма-Лиувилля

$$L = \partial^2 + u, \qquad A = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u_x \tag{34}$$

где $\partial = \partial/\partial x$, уравнение Лакса для которой приводит к

$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx} \tag{35}$$

знаменитому уравнению Кортевега-де-Фриза. Заметим, что по-прежнему уравнение Лакса требует помимо самого уравнения (35) нетривиального сокращения коэффициентов, возникающих при старших степенях ∂.