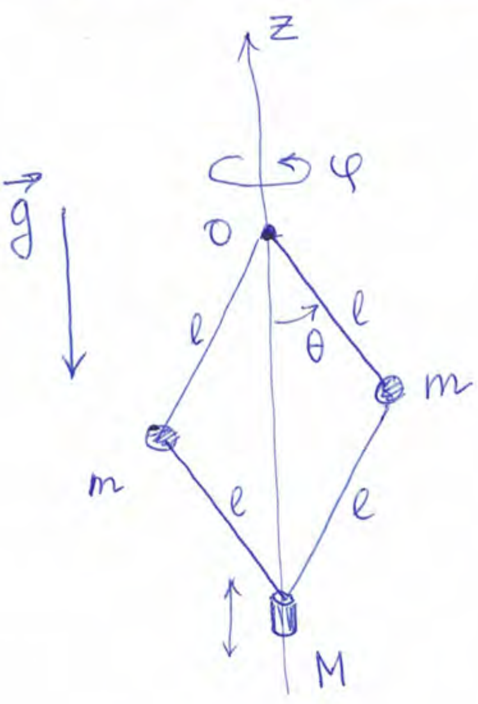
Примеры составления лагранжианов и анализа движения механических систем

① Регулятор Уатта (он же, Джеймс Ватт)

Рем: Первоначально центробежный регулятор был предложен первооткрывателем центробежной силы Христианом Гюйгенсом (Голландия) и использовался в ветреных мельницах для регулировки расстояния и давления между жерновами (XVII век). В 1788 году этот регулятор был адаптирован Джеймсом Ваттом (Шотландия) для регулировки давления пара в котлах паровых машин.



Модель регулятора Ватта состоит из 4-х (невесомых, жестких) стержней длины l. Стержни соединены шарнирами в ромб, концы стержней расположены в одной плоскости, одна вершина ромба закреплена в начале координат O, на двух соседних вершинах закреплены грузики массой m, на противолежащей вершине закреплена муфта массы M. Муфта может свободно двигаться вдоль оси $O\vec{z}$, грузики свободно вращаются вокруг оси $O\vec{z}$ (см. Рис.)

Вдоль оси $O\vec{Z}$ вниз действует однородная сила тяжести с ускорением $\vec{g}$. (2)

<u>Число степеней свободы</u> системы — 2, это углы θ и φ (см. Рис.)

<u>Конфигурационное пространство</u> системы — полусфера: $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi/2)$

<u>Кинетическая энергия</u>:

$$\boxed{T = \frac{M}{2}\Big(\underbrace{(2l\cos\theta)}_{\text{координата муфты по оси } O\vec{Z}}\dot{\ }\Big)^2 + 2\cdot\underbrace{\frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \cancel{\dot{l}^2}\right)}_{\text{кинетическая энергия грузика } m \text{ в сферической системе координат. Учтена связь } l=\text{const}}}$$

<u>Rem</u>: Кинетическая энергия системы — величина <u>аддитивная</u>. Мы посчитали кин. энергии трех грузиков, составляющих систему, и сложили их.

<u>Потенциальная энергия</u>:

$$\boxed{U = Mg(-2l\cos\theta) + 2\cdot mg(-l\cos\theta)}$$

Координаты муфты M и грузиков m по оси $O\vec{Z}$ — $(-2l\cos\theta)$ и $(-l\cos\theta)$, соответственно.

Rem: Потенциальная энергия системы тоже величина аддитивная. Она складывается из потенциальных энергий парных взаимодействий тел системы (в модели регулятора Уатта таких нет) и потенциальных энергий тел системы во внешнем силовом поле (поле тяжести в нашем случае).

Лагранжиан системы:

$$\boxed{L(\theta, \dot\varphi, \dot\theta) = T - U = (m + 2M\sin^2\theta)\,\ell^2\dot\theta^2 + m\ell^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + 2(m+M)g\ell\cos\theta.}$$

Вообще говоря L, как функция на касательном расслоении конфигурационного пространства, может зависеть от координат φ, θ и скоростей $\dot\varphi$, $\dot\theta$. В нашем случае зависимость L от φ отсутствует.

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

а) по переменной φ

$$\text{(1a)}\quad L_\varphi := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\varphi}}_{=0} = \boxed{\frac{d}{dt}\left(2m\ell^2\sin^2\theta\,\dot\varphi\right) = 0}$$

Это уравнение легко интегрируется 1 раз по t и даёт закон сохранения "обобщенного импульса", отвечающего переменной φ (см. свойство C1 лагранжева формализма, лекция 5, стр. 13):

$$(1б)\quad \boxed{J := \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = 2ml^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi = \mathrm{const}}$$

„Физически" этот обобщённый импульс есть угловой момент вращения системы вокруг оси $\vec{OZ}$.

б) <u>по переменной θ</u>:

$$(2)\quad L_\theta := \left(\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial}{\partial\theta}\right)L = \frac{d}{dt}\left(2l^2(m+2M\sin^2\theta)\dot\theta\right) - \left(2Ml^2\dot\theta^2 + ml^2\dot\varphi^2\right)\sin(2\theta) + 2(m+M)gl\sin\theta = 0$$

Это уравнение сложное. Искать его общее решение „в лоб" бессмысленно. Можно проанализировать <u>наличие</u> частного режима стационарного по θ движения: $\theta = \mathrm{const} = \theta_0$.

$$(3)\quad L_\theta\Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \text{а значит } \dot\theta=\ddot\theta=0}} = -ml^2\dot\varphi^2\sin(2\theta_0) + 2(m+M)gl\sin\theta_0 = 0$$

Случай $\sin\theta_0 = 0$ – неинтересный. В интересном случае $\theta_0 \neq 0$, решая стационарное уравнение (3) получаем соотношение между $\dot\varphi$ и θ:

$$\boxed{\dot\varphi^2 = \frac{(m+M)g}{ml\cos\theta_0}}$$

Это стационарное решение ($\theta = \mathrm{const}$, $\dot\varphi = \mathrm{const}$) удовлетворяет и уравнению L_φ (1а), причём значение обобщенного импульса J (1б) для него фиксируется:

$$\boxed{J^2 = 4m^2l^4\sin^4\theta_0\,\dot\varphi^2 = \frac{4m(m+M)gl^3\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}}$$

Для качественного изучения всех движений системы удобно вместо уравнения $L_\theta = 0$ использовать ещё один закон сохранения —

закон сохранения энергии

(см. свойство С2 лагранжева формализма, Лекция 5, стр. 14)

Так как $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то

$$E = \underbrace{\dot\varphi\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} + \dot\theta\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - L}_{\text{общая формула для энергии}} = \underbrace{T + U}_{\text{частная формула, пригодная для нерелятивистской механики}} = \mathrm{const}$$

У нас:

$$(4)\quad \boxed{E = (m + 2M\sin^2\theta)l^2\dot\theta^2 + ml^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 - 2(m+M)gl\cos\theta}$$

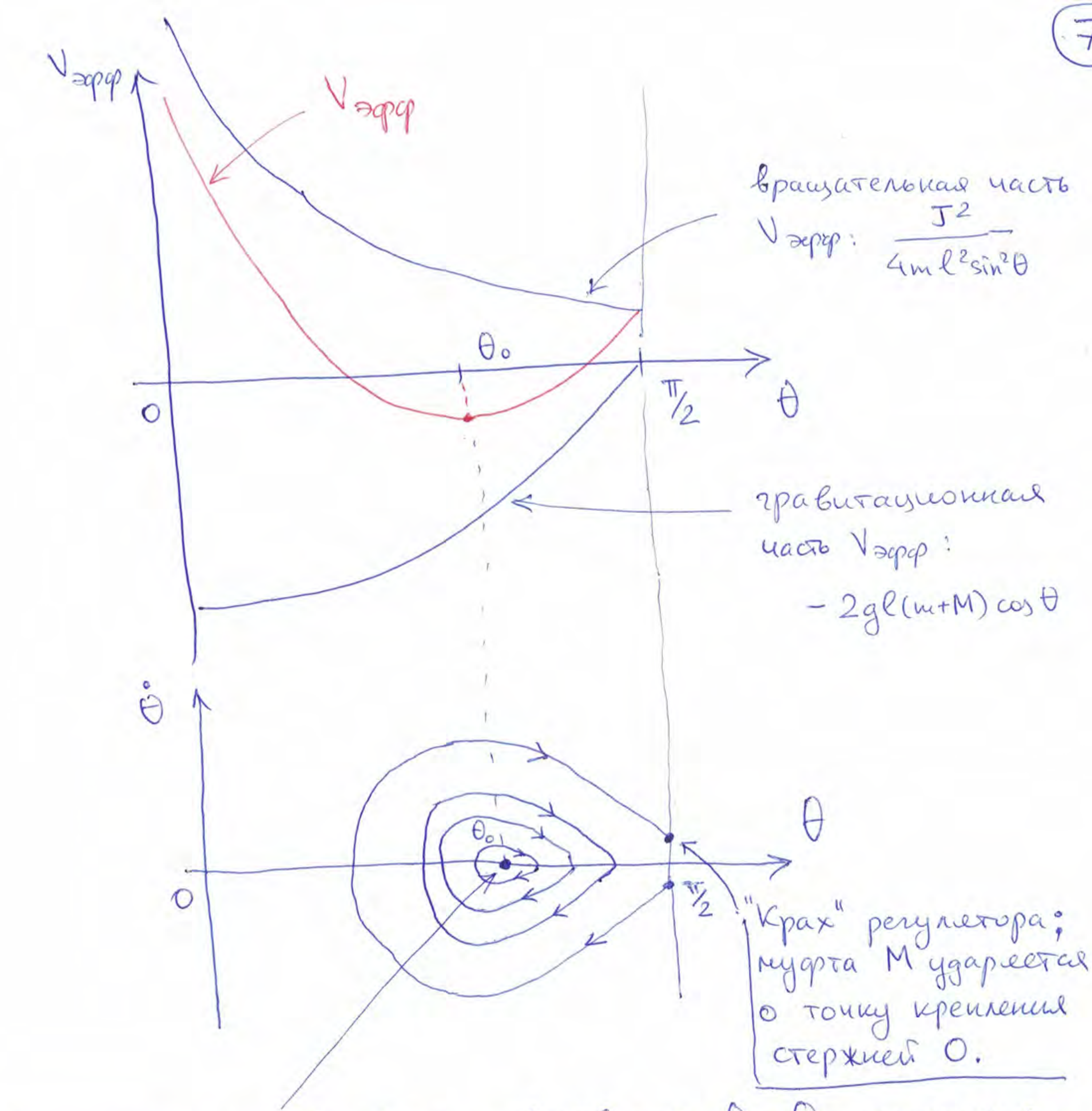
<u>Rem</u>: закон $E = \text{const}$ можно вывести из уравнения $L_\theta = 0$, домножив его на интегрирующий множитель $(m+2M\sin^2\theta)\dot\theta$ и проинтегрировав по t.

Для анализа закона сохранения энергии (4) подставим в него выражение для $\dot\varphi$ из закона сохранения углового момента (1б):

$$E = \underbrace{(m+2M\sin^2\theta)\,l^2\dot\theta^2}_{T_{эфф}(\theta,\dot\theta)} + \underbrace{\frac{J^2}{4ml^2\sin^2\theta} - 2(m+M)gl\cos\theta}_{V_{эфф.}(\theta)} = \text{const}$$

Это выражение выглядит как закон сохранения энергии для "эффективной" 1-мерной системы с координатой θ, потенциальной энергией $V_{эфф}(\theta)$ и со специфической кинетической энергией $T_{эфф}(\theta,\dot\theta)$, зависящей не только от квадрата скорости $\dot\theta^2$, но и от координаты θ (эффективная масса частицы зависит от θ).

Нарисуем фазовый портрет этой эффективной системы:



Состояние устойчивого равновесия $\theta = \theta_0$ определяется условием

$$\frac{d}{d\theta} V_{эфф}(\theta) = 0 \iff J^2 = \frac{4m(m+M)gl^3\sin^4\theta}{\cos\theta}$$
(проверьте)

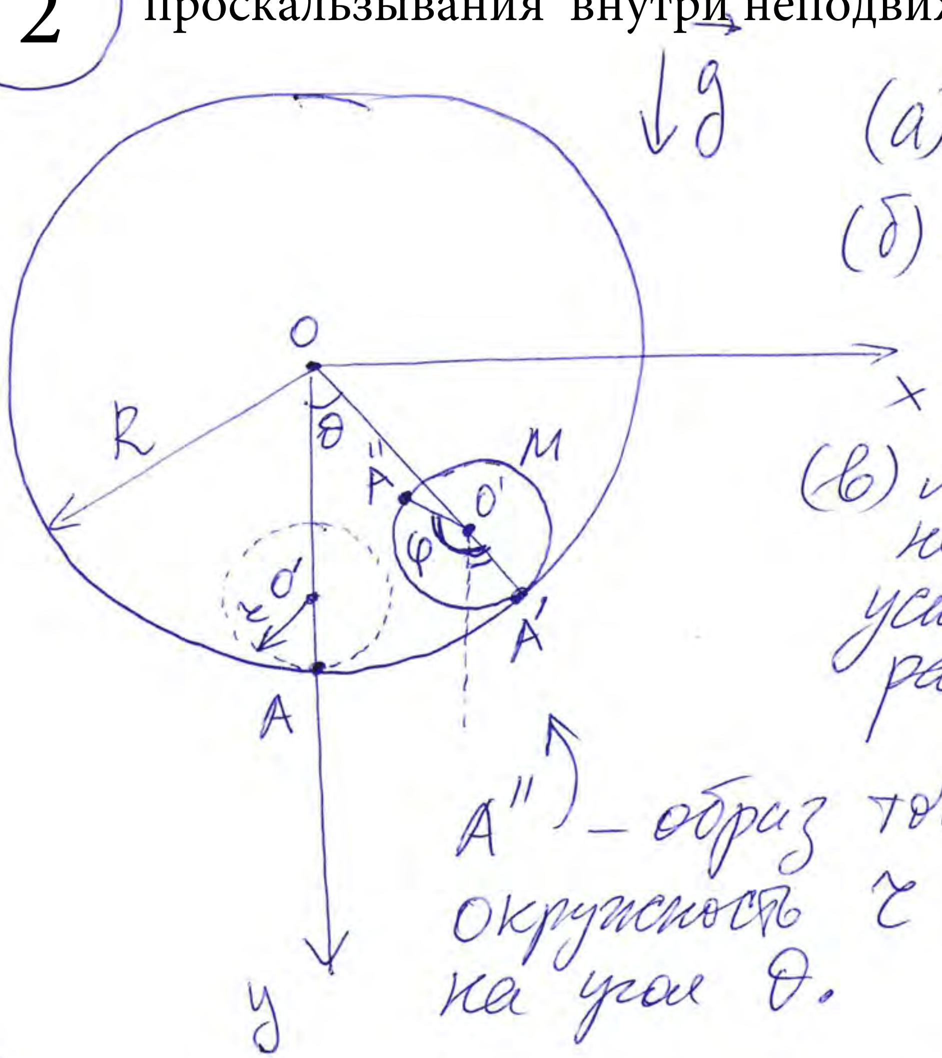
Это то самое стационарное по θ движение, которое мы анализировали на стр 4-5 (там это было сделано проще, чем тут)

В окрестности устойчивого равновесия $\theta = \theta_0$

фазовые траектории системы по θ – сплюснутые справа эллипсы. С ростом θ эффективная масса 1-мерной системы растёт; в окрестности $\theta = 0$ $m_{эфф} = 2m$, в окрестности $\theta = \pi/2$ $m_{эфф} = 2(m+2M)$.

---

2 Массивный обод, катающийся без проскальзывания внутри неподвижной трубы



(а) Лагранжиан

(б) Законы сохранения, фазовый портрет.

(в) Малые колебания в окрестности устойчивого равновесия.

A'' — образ точки A, когда окружность r откатилась на угол θ.

Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты выберем угол θ между направлением оси Oy и направлением луча OO', соединяющего центры окружностей.

Будем считать θ > 0 при движении центра O' против часовой стрелки ($x_{O'} > 0$).

Отделим движение центра масс обруча (расположен в геометрическом центре окружности O'):

$$T_{кин} = \underbrace{\frac{M}{2}\left(\dot{x}_{0'}^2 + \dot{y}_{0'}^2\right)}_{\text{Кинетическая энергия центра масс}} + \underbrace{\frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}^2}_{\text{Энергия вращения обруча вокруг } O'}$$

$x_{0'}$ и $y_{0'}$ через обобщённую координату ϑ выражаются легко:

$$x_{0'} = (R-r)\sin\vartheta$$

$$y_{0'} = (R-r)\cos\vartheta.$$

Некоторая тонкость есть в определении угловой скорости обруча $\dot{\varphi}$. Отсутствие скольжения приводит к равенству длин дуг AA' и $A'A''$ =>

$$\Rightarrow R\vartheta = r\varphi \qquad \varphi = \frac{R}{r}\vartheta.$$

Поворот <u>окружности</u> r вокруг центра O' описывается <u>не углом</u> φ, а углом $\psi = \varphi - \theta$ — это угол между лучом $O'A''$ и фиксированным направлением — осью OY.

По-другому это ещё можно пояснить так: обруч r участвует в 2х вращениях: центр O' вращается вокруг т. O с угловой скоростью $\dot{\theta}$ против часовой стрелки и одновременно (относительно точки касания A') происходит поворот на φ по часовой стрелке. Эти вращения противоположны и угол поворота обруча относительно фиксированного луча OY равен разности углов φ и θ.

Итак, $\dot{\psi} = \dot{\varphi} - \dot{\theta} = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\theta} \Rightarrow$

$$T_{кин} = \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}r^2\left(\frac{R}{r}-1\right)^2\dot{\theta}^2 =$$

$$= m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

Потенциальная энергия равна энергии центра масс обруча в поле тяжести $\vec{g}$. Учитывая направление оси OY: $U(\theta) = Mg(R-r)(1-\cos\theta)$ — нуль выбран в точке равновесия $\theta = 0\ (+2k\pi)$.

(а) Лагранжиан:

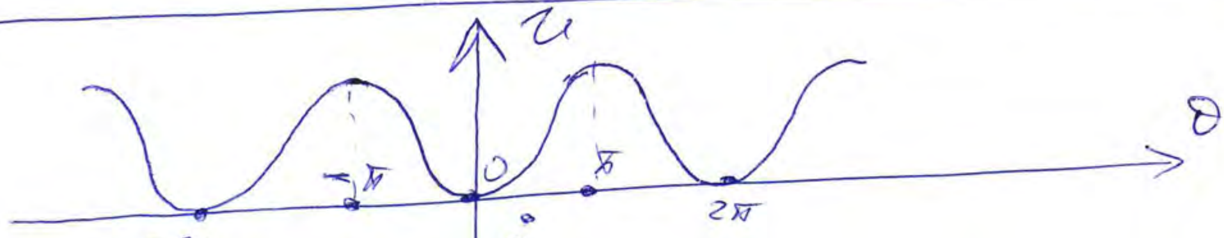
$$\boxed{L = M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + Mg(R-r)(\cos\theta - 1)}$$

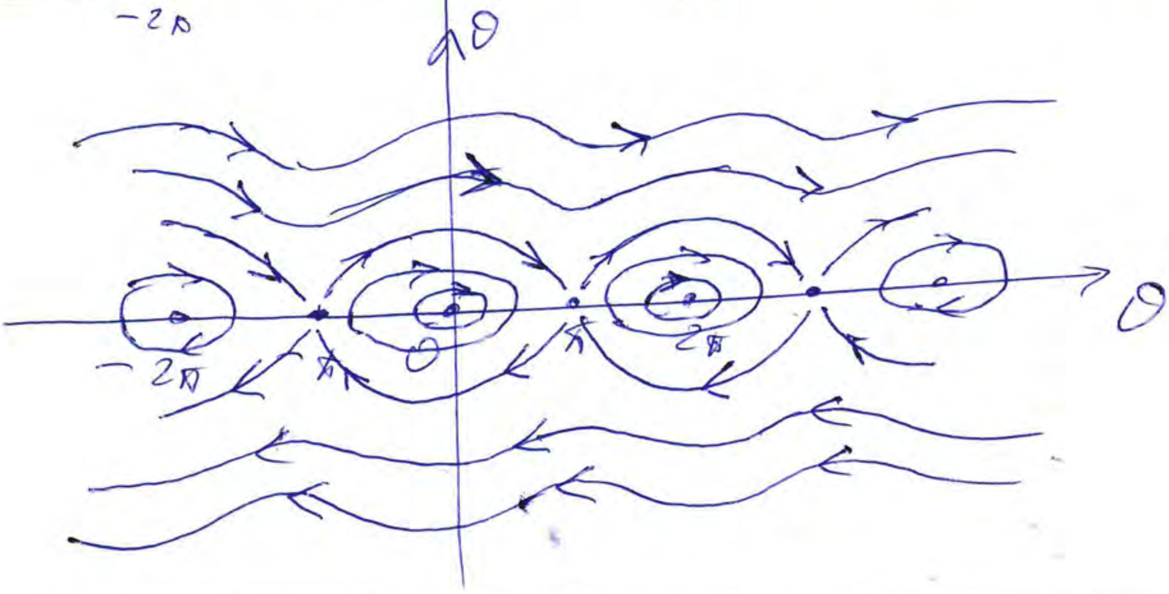
Уравнение Эйлера-Лагранжа $L_\theta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{2(R-r)}\sin\theta = 0}$$

(б) В системе один интеграл движения — полная механическая энергия:

$$\boxed{E = T + U = M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + Mg(R-r)(1-\cos\theta).}$$





(в) В окрестности точки равновесия $\theta = 0$ $(+2k\pi)$

Уравнение движения для малых θ:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2(R-r)}\theta = 0$$

Это уравнение гармонических колебаний с угловой частотой

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}}$$

3

Частица с пружинкой на параболоиде вращения

$$z = \frac{x^2+y^2}{2a}$$

(а) Лагранжиан

(б) Уравнения Эйлера – Лагранжа и стационарные по z траектории

(в) Фазовый портрет эффективной системы.

Точка m находится на двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ => 2 степени свободы. Выберем в качестве обобщённых координат полярные координаты ρ и φ проекции точки m на плоскость xOy:

$$\rho^2 = x^2+y^2 \qquad tg\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

Выражаем декартовы координаты x, y, z через обобщённые:

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad \underbrace{z = \frac{\rho^2}{2a}}_{\text{поверхность}}.$$

$$T_{кин} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)+\rho^2\dot{\varphi}^2\right).$$

Сила упругости потенциальна:

$$\vec{F} = -k\vec{r} \Rightarrow U = \frac{k}{2}\vec{r}^2 = \frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2) =$$

$$= \frac{k}{2}\rho^2\left(1+\frac{\rho^2}{4a^2}\right)$$

(а) Лагранжиан

$$\boxed{L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)+\rho^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{k}{2}\rho^2\left(1+\frac{\rho^2}{4a^2}\right)}$$

Координата φ – циклическая, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

(б) Уравнения Эйлера – Лагранжа

$$L_\rho: \frac{d}{dt}\left(m\dot{\rho}\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\right) - m\rho\left(\dot{\varphi}^2+\frac{\dot{\rho}^2}{a^2}\right) + k\rho\left(1+\frac{\rho^2}{2a^2}\right) = 0$$

$$L_\varphi: \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\varphi}\right) = 0 \Rightarrow m\rho^2\dot{\varphi} = J = Const$$

Стационарные решения по координате z:

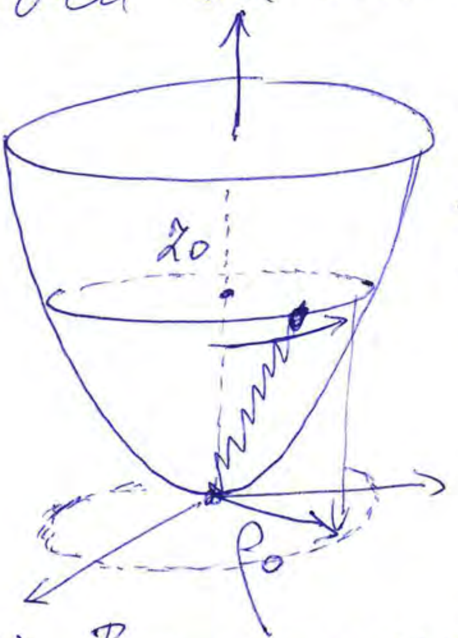
$z = z_0 = Const \Rightarrow$ $\rho = \rho_0 = Const$: $z_0 = \frac{\rho_0^2}{2a}$.

$\rho = Const \Rightarrow \dot{\rho} = 0$. Тогда уравнение $L_\rho = 0$ дает связь ρ_0 и угловой скорости $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{k}{m}\left(1+\frac{\rho_0^2}{2a^2}\right) = Const$$

Решение
$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 \\ \varphi(t) = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{\rho_0^2}{2a^2}\right)}\, t + \varphi_0 \end{cases}$$

– равномерное вращение в плоскости $\perp$ оси Oz на высоте $z_0 = \frac{\rho_0^2}{2a}$:



$$\begin{cases} x = \rho_0 \cos\omega_0 t \\ y = \pm\rho_0 \sin\omega_0 t \end{cases} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{\rho_0^2}{2a^2}\right)}$$

(в) В системе 2 закона сохранения

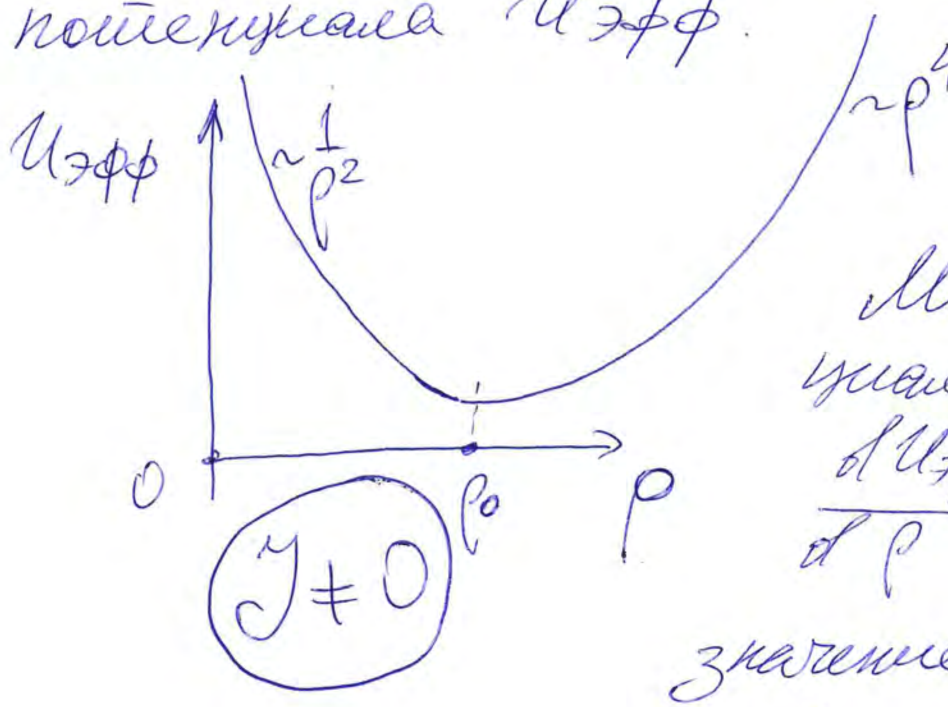
Из цикличности $\varphi \Rightarrow \boxed{m\rho^2\dot\varphi = J = \mathrm{Const}}$ – сохранение z-компоненты момента импульса.

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = T + U}$ – энергия системы постоянна во времени.

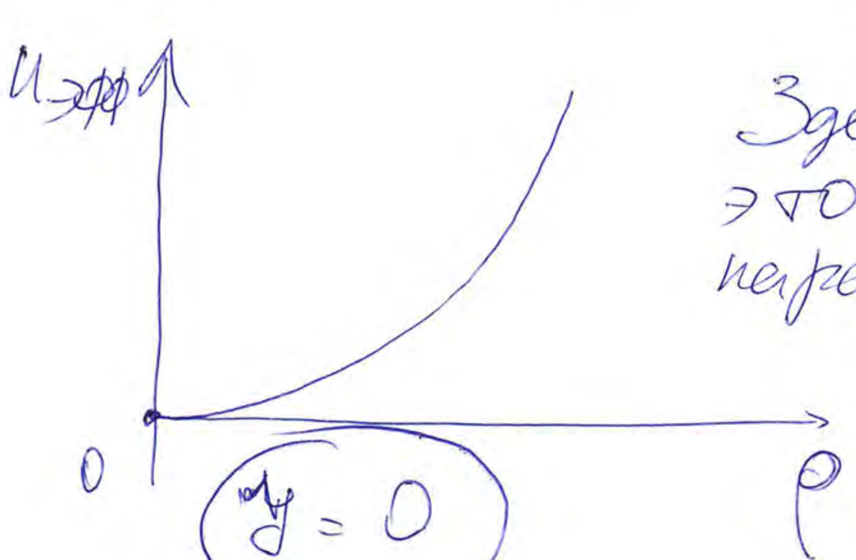
Исключая $\dot\varphi$ из первого закона сохранения и подставляя в $\mathcal{E}$, получаем формулу для эффективной потенциальной энергии одномерной системы:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2 + \underbrace{\frac{J^2}{2m\rho^2} + \frac{k\rho^2}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{4a^2}\right)}_{U_{эфф}} = Const$$

Выражение $m\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right) = m(\rho)$ – переменная „масса" частицы в поле эффективного потенциала $U_{эфф}$.



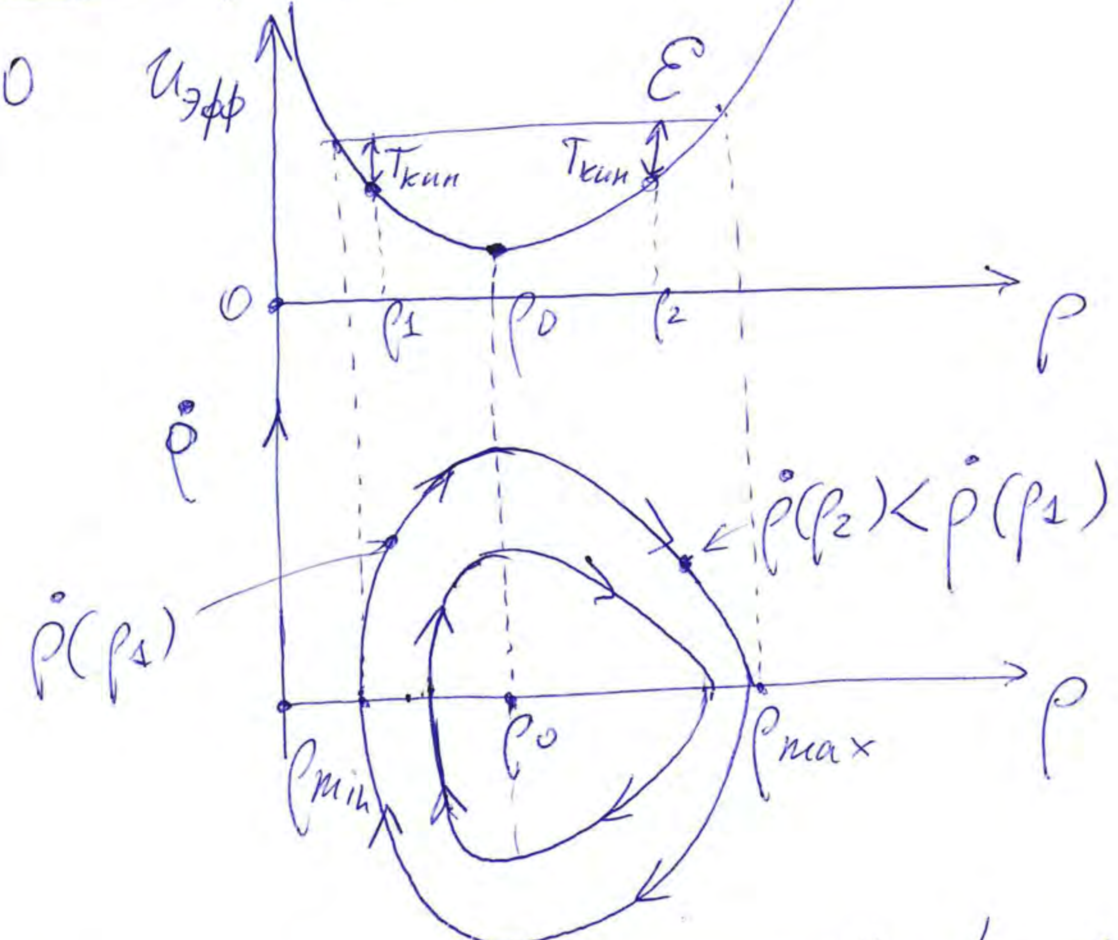
Минимум потенциала $\left.\frac{dU_{эфф}}{d\rho}\right|_{\rho_0} = 0$ дает значение ρ_0, отвечающее стационарному вращению из (б) с угловой скоростью $\sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{\rho_0^2}{2a^2}\right)}$:



Здесь $\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow$ это колебание вдоль параболического сечения

Фазовый портрет :

$J \neq 0$



Специфическая "яйцевидность" фазовых кривых объясняется зависимостью $m(\rho) = m\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)$. Вблизи ρ_{min} (при малых ρ) масса меньше, чем вблизи ρ_{max} (большие ρ). Поэтому при равной кинетической энергии $T_{кин} = \mathcal{E} - U(\rho_1) = \mathcal{E} - U(\rho_2)$ (см. рисунок) скорость в точке ρ_1 (частица "легкая") должна быть больше скорости в точке ρ_2, когда частица "тяжелеет".

Для $\mathcal{J}=0$ частица достигает начала координат $x=y=z=0$. — ангармонические колебания по параболическому сечению плоскостью $\varphi=\varphi_0=\mathrm{Const}$: