Семинар 9 .

Задача 1. Докажите, что дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t_i}$ и $\frac{\partial}{\partial t_j}$ кольца многочленов $\mathbf{k}[t_1, ..., t_n]$ коммутируют между собой, то есть $\frac{\partial}{\partial t_i} \circ \frac{\partial}{\partial t_j} = \frac{\partial}{\partial t_i} \circ \frac{\partial}{\partial t_j}$.

Задача 2. Из курса матанализа известна формула Тейлора для многочлена $Q(t)$ от одной переменной над полем $\mathbf{k}$. Напишите ее обобщение для случая многочлена $Q(t_1, ..., t_n)$ от n переменных над $\mathbf{k}$.

Далее всюду предполагается, что $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{k}}$, $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$.

Задача 3. Пусть $\mathcal{C}$ - невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$. Пусть в 6-угольнике $ABCA_1B_1C_1$ две точки A и B совпали. Дайте синтетическое (т.е. невычислительное) доказательство теоремы Паскаля для такого 6-угольника (утверждающей, что три точки пересечения пар противоположных его сторон, то есть точки $M = (AB) \cap (A_1B_1)$, $N = (BC) \cap (B_1C_1)$, $P = (CA_1) \cap (C_1A)$, коллинеарны), если под его стороной AB понимать касательную $\mathbb{T}_A\mathcal{C}$ к конике $\mathcal{C}$ в точке A.

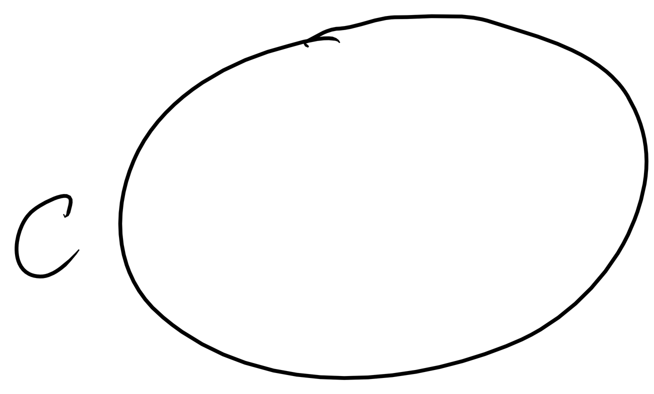
Задача 4. В условиях предыдущей задачи пусть коника $\mathcal{C}$ задана уравнением $\{\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = xAx^T = 0\}$, где $x = (x_0, x_1, x_2)^T$ - строка однородных координат в $\mathbb{P}^2$, $A = (a_{ij})$ - невырожденная симметрическая (3×3)-матрица, а точка y имеет координаты $(y_0 : y_1 : y_2)$. На семинаре мы установили, что уравнение поляры p_y точки y относительно коники $\mathcal{C}$ есть линейное по координатам $(x_0 : x_1 : x_2)$ точки x уравнение вида $\{xAy^T = 0\}$.
1) Докажите, что если $y \notin \mathcal{C}$, то поляра p_y пересекает конику $\mathcal{C}$ в двух различных точках.
2) Докажите, что если $y \in \mathcal{C}$, то поляра p_y имеет с $\mathcal{C}$ единственную общую точку y, то есть $p_y = \mathbb{T}_y\mathcal{C}$.

Задача 5. В условиях задачи 3 пусть $\check{\mathcal{C}}$ - двойственная коника к конике $\mathcal{C}$, лежащая в двойственной проективной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$. (Определение двойственной коники $\check{\mathcal{C}}$ было дано на семинаре.) Сформулируйте для исходной коники $\mathcal{C}$ теорему, двойственную к теореме Паскаля для двойственной коники $\check{\mathcal{C}}$. (Эта теорема называется теоремой Брианшона для коники $\mathcal{C}$.)

$(x_0:x_1:x_2)\in\mathbb{P}^2=\mathbb{P}(V)$, $\Bbbk=\bar{\Bbbk}$, char $\Bbbk\neq 2$ $\underbrace{\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j=0}$

$y=(y_0:y_1:y_2)$ $\cdot y$

$\vec{y}$ -



$(a_{ij})=A=A^T$, $\det A\neq 0$

$\Updownarrow$

Зад. $C\not\supset l$, где l — прямая

$\Updownarrow$

$\boxed{f:\check{A}\xrightarrow{\sim}\check{B},\quad f(AB)\neq AB}$

$y\notin C$

"$\langle\vec{y}\rangle$", $\vec{y}=(y_0,y_1,y_2)$, $\vec{x}=(x_0\, x_1\, x_2)$, $\vec{x}^T=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$

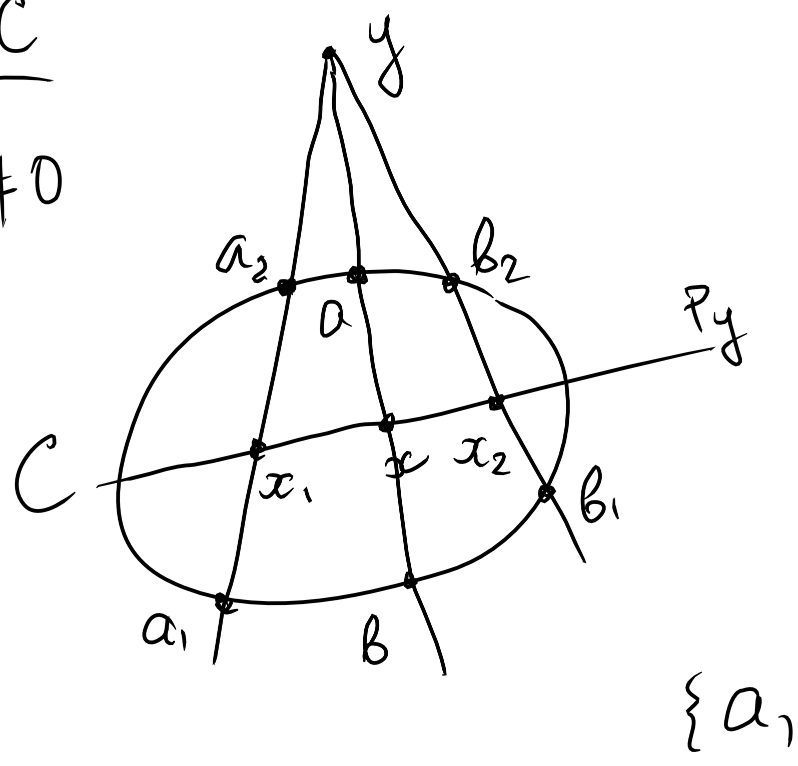
$C=\{\vec{x}A\vec{x}^T=0\}=\{\overbrace{xAx^T}^{=F(x)}=0\}$

Ур-ие поляры P_y точки y относ. C имеет ур-ие

$P_y=\{xAy^T=0\}=\{yAx^T=0\}$

$xAy^T=(xAy^T)^T=yAx^T$, $A^T=A$

$y\notin C$ $\Downarrow$ $yAy^T\neq 0$



$a_1a_2 \overset{h}{-} yx_1$

$b_1b_2 \overset{h}{-} yx_2$

$\{a,b\}=C\cap(xy)\Rightarrow ab\overset{h}{-}xy$

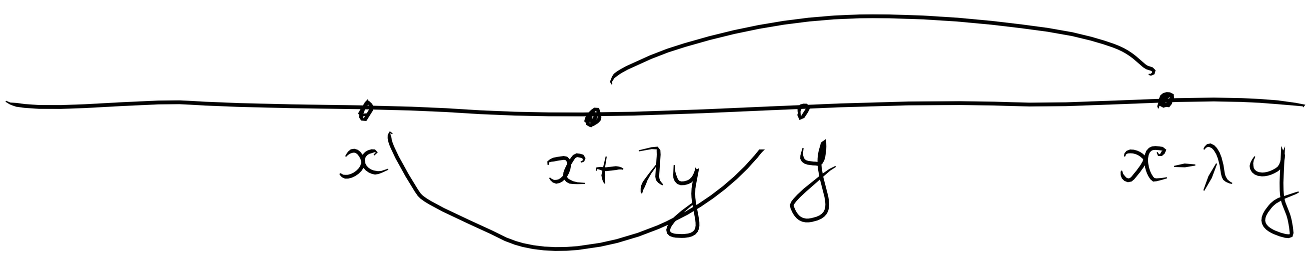
$x\in P_y$ $a=x+\lambda_1 y$, $b=x+\lambda_2 y$ $\Rightarrow$ $\lambda_2=-\lambda_1\Leftrightarrow ab\overset{h}{-}xy$

$0=F(a)=F(x+\lambda y)=(x+\lambda y)A(x+\lambda y)^T=\underset{\neq 0}{xAx^T}+\lambda(\underbrace{yAx^T+xAy^T}_{2xAy^T=0})+$

$+\lambda^2(\underset{\neq 0}{yAy^T})$ $0=xAx^T+\lambda^2(yAy^T)\Rightarrow$

$\lambda_1=\sqrt{-\frac{xAx^T}{yAy^T}}\neq 0$

$\lambda_2=-\sqrt{-\text{''}}=-\lambda_1\Rightarrow$



Задача.

$P_y\cap C=\underline{\{xAy^T=0\}\cap\{xAx^T=0\}}\xrightarrow{y\notin C,\ \text{т.е. } yAy^T\neq 0} P_y\cap C=\{x_1,x_2\}$, $x_1\neq x_2$

Пусть y — любая т. в $\mathbb{P}^2$. По опр-ию, поляρой точки y относ. C назовем прямую $P_y=\{xAy^T=0\}$

Задача. Если $y\in C$, т.е. $yAy^T=0$, то $P_y\cap C=\{y\}$, т.е. $P_y=\mathbb{T}_yC$ — касательная прямая к C в т. y.

$xb^T=0$, x — строка, b^T — столбец

$p:\mathbb{P}^2\xrightarrow{\sim}\check{\mathbb{P}}^2$, $y\mapsto P_y$ $\underset{\text{строка}}{y}\mapsto\underbrace{yA}_{=b}=(Ay^T)^T$

$\tilde{p}:V\xrightarrow{\sim}\check{V}$ — изом-м вект. пр-в A — невыр. м-ца

$\vec{y}\mapsto\vec{y}A$

$\check{C}:=$ коника $=p(C)=\{b\in\check{\mathbb{P}}^2 \mid b=yA,\ yAy^T=0\}$ $\Leftrightarrow$ $y=bA^{-1}$

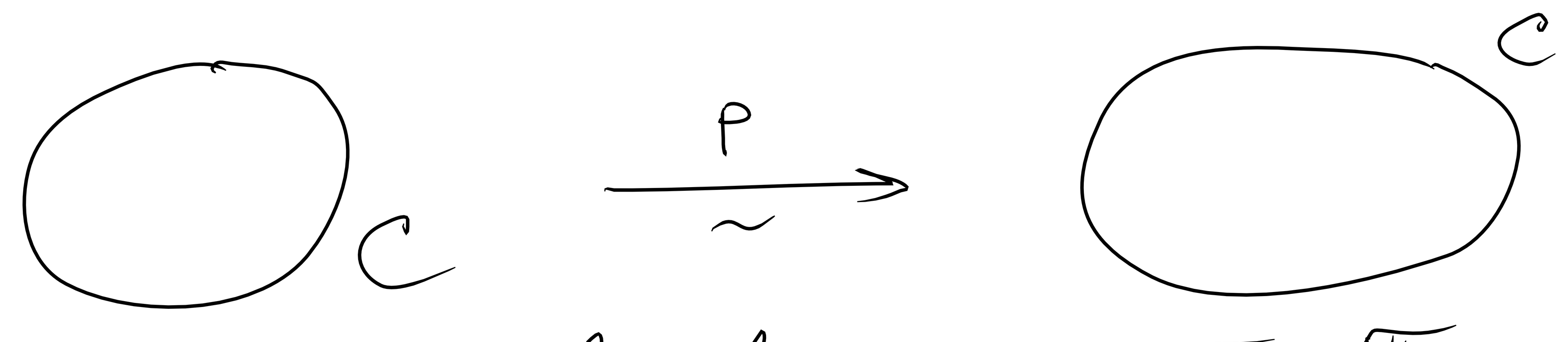
b — строка ко-ат в $\check{\mathbb{P}}^2$ $\{0=(bA^{-1})A(A^{-1}b^T)=\underbrace{bA^{-1}b^T=0}_{\text{ур-ие невыр. коники}}\}$

$\check{p}:\check{\mathbb{P}}^2\supset\check{C}\longrightarrow\mathbb{P}^2$, $b\mapsto P_b$, где P_b — поляра т. $b\in\check{\mathbb{P}}^2$ относ. $\check{C}$

$\check{p}(\check{C})=\underset{=C}{C'}$ — коника с ур-ием $x\underbrace{(A^{-1})^{-1}}_{A}x^T=0$ в $\mathbb{P}^2$

$\boxed{(\check{C})\check{}=C}$ принцип двойственности

Задача.



Теор. Брианшона, двойственная к теор. Паскаля.   Теор. Паскаля