Листок 1. Многообразия и поверхности
Гладкие многообразия
Крайний срок сдачи 25.09.2020

Задачи со звездочками можно сдавать и после дедлайна.

1. Задайте гладкий атлас (карты, гладкость перехода между картами) на множестве невырожденных треугольников в плоскости с вершиной в $(0,0)$ и углом $\frac{\pi}{3}$ при этой вершине.

2. (а) Напишите формулы, задающие стереографические проекции двумерной сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

на плоскость $z = 0$ из полюсов и определите с помощью них атлас.

(б) Напишите аналогичные формулы для n-мерной сферы S^n:

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1,$$

и определите с помощью них атлас S^n.

(в) Докажите, что атлас S^n состоит как минимум из двух карт.

3. Введите на множестве всех прямых на плоскости естественную топологию и структуру гладкого многообразия, так, чтобы оно было гомеоморфно листу Мёбиуса.

4. Нарисуйте на плоскости множество точек, которое (а)* может быть образом непрерывной кривой, но не может быть образом гладкой кривой (Ответ необходимо обосновать!); (б) может быть гладкой, но не может быть образом регулярной кривой.

5. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция,

$$\Sigma_C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = C\}$$

её множество уровня и $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$, $x \in \Sigma_C$. Докажите, что в этом случае на Σ_C можно ввести структуру гладкого $(n-1)$-мерного многообразия.

6. Докажите, что у регулярной поверхности существует гладкий атлас.

7. Пусть (M, A) и $(\tilde{M}, \tilde{A})$ — многообразия с заданными на них гладкими $C^{(k)}$-структурами. Гладкие структуры (M, A) и $(\tilde{M}, \tilde{A})$ считаются *изоморфными*, если существует такое $C^{(k)}$-отображение $f : M \to \tilde{M}$, которое имеет обратное $f^{-1} : M \to \tilde{M}$ также $C^{(k)}$-отображение в атласах A, $\tilde{A}$.

(а) Покажите, что гладкая структура на $\mathbb{R}$, заданная картой $\varphi(x) = x^{2k+1}$, изоморфна, но не равна, гладкой структуре на $\mathbb{R}$, заданной картой $\psi(x) = x^{2n+1}$, $k \neq n$.

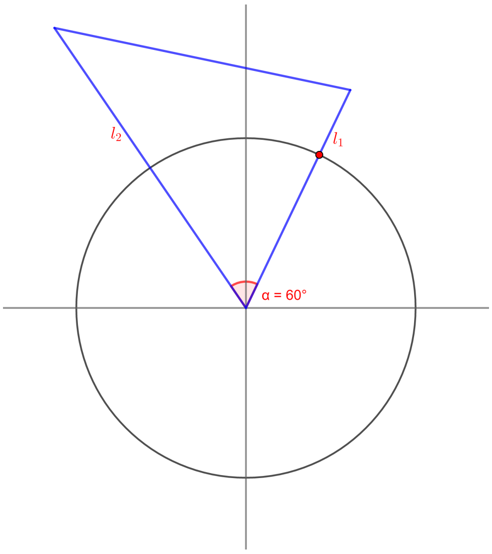
(б) Покажите, что на $\mathbb{R}$ все структуры одинаковой гладкости изоморфны.

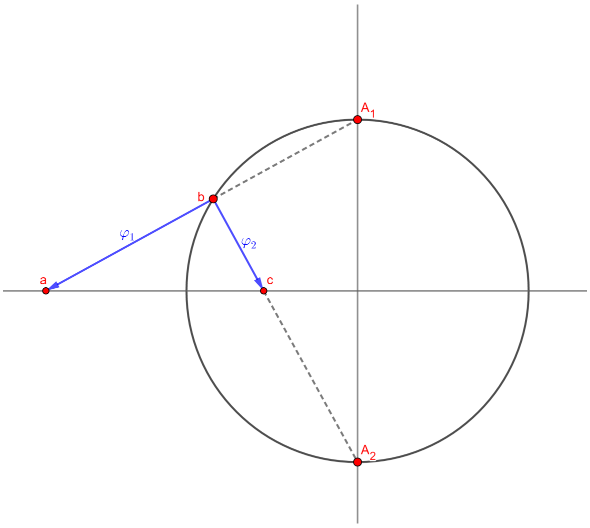
(в)* Покажите, что на окружности S^1 любые две $C^{(\infty)}$-структуры изоморфны.
(Отметим, что это свойство остается верным вплоть до сферы S^6, а на сфере S^7, напротив, существуют неэквивалентные $C^{(\infty)}$-структуры.)

8. * Докажите, что гладкая замкнутая кривая на плоскости, не имеющая самопересечений, имеет не менее четырёх экстремумов кривизны.

Решения

Задача 1





Сопоставим каждому треугольнику точку a на $\mathbb{S}$ и длины сторон $l_1, l_2 > 0$. Таким образом мы построили биекцию $\varphi : \triangle \to (a, l_1, l_2)$.

$$a \in \mathbb{S},\ l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+ \to (a, l_1, l_2) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Открытые множества $U_1 \times U_2 \times U_3 \subset \mathbb{S} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Карты на $S^1 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ – это $(U_1 \times U_2 \times U_3,\ \varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3)$

Карты на S^1 – 2 интервала S^1/A_1 и S^1/A_2, эти каты согласованы. $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(a) = \varphi_2(b) = c$

Карты на $\mathbb{R}_+$ это $((a, b), f)$

$$f = f_1 \circ f_1'$$
$$f_1' :\ x \to -\frac{2}{a-b}x + \frac{a+b}{a-b} = \frac{a+b-2x}{a-b} \text{ то есть } (a, b) \to (1, 1)$$
$$f_1 :\ x \to \tan\frac{\pi x}{2}$$

Тогда $(a, b) \sim \mathbb{R}$

Проверим согласованность карт $((a, b), f_{ab})$ и $((c, d), f_{cd})$

$$(f_1 \circ f_1')^{-1} = f_1'^{-1} \circ f_1^{-1}$$
$$f_2 \circ (f_2' \circ f_1'^{-1}) \circ f_1^{-1} = \frac{x(b-a) + (a+b) - (c+d)}{d-c}$$
$$x \in (c, b)$$

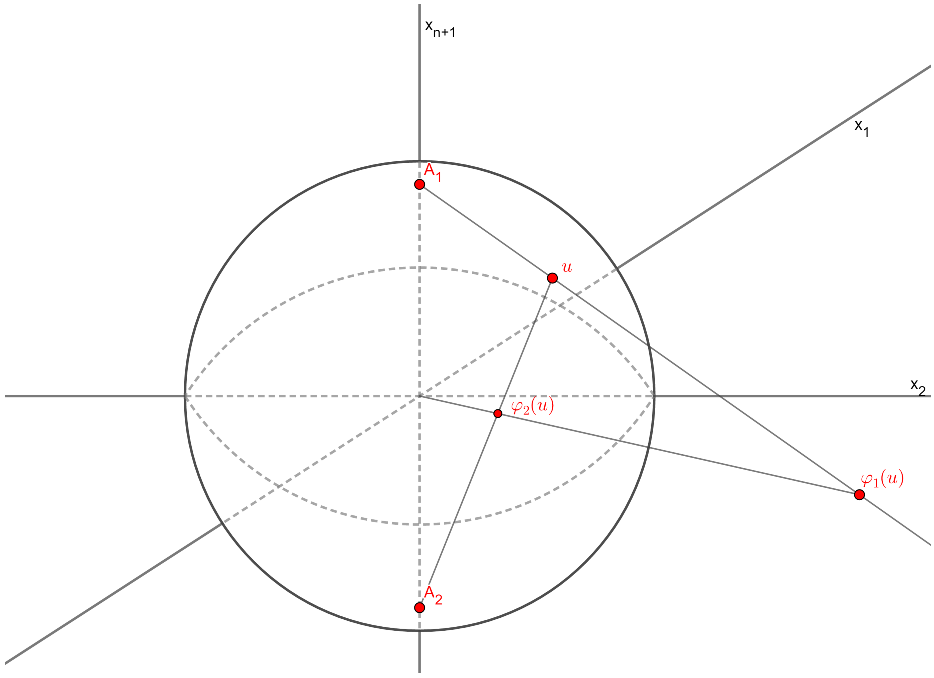
$$y_1 = \frac{2x - (a+b)}{b-a}$$
$$x = \frac{2y - (a+b)}{b-a}$$
$$y_2 = \frac{x(b-a) + (a+b)}{2}$$
$$y_1 \circ y_2 = x$$
$$y_2 \circ y_1 = x$$

Следовательно отображение линейное, откуда следует что оно биективное и $c-1$ диффеоморфизм
Таким образом все карты $(U_1 \times U_2 \times U_3,\ \varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3)$ согласованы.

Задача 2

(а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
A_1, A_2 – полюса Пусть $U_1 = S^2/A_1,\ U_2 = S^2/A_2$

$$\varphi_1 : (x, y, z) \to \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$
$$\varphi_2 : (x, y, z) \to \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$$



Отображение перехода

$$\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$$
$$(x, y, z) \neq (0, 0, \pm 1)$$
$$\varphi_1^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{|a|^2+1}, \frac{2y}{|a|^2+1}, \frac{|a|^2-1}{|a|^2+1}\right)$$
$$|a|^2 = x^2 + y^2$$
$$\varphi_{12} = \left(\frac{x}{|a|^2}, \frac{y}{|a|^2}\right) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$
$$J = \begin{vmatrix} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{vmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Следовательно отображение гладкое

(б) зададим A_1, A_2, U_1, U_2 аналогично пункту (а)

$$\varphi_1 :\ (x_0, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_0}{1-x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n}\right)$$
$$\varphi_2 :\ (x_0, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_0}{1+x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1+x_n}\right)$$
$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} :\ (x_0, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \ldots, \frac{x_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)$$

Следовательно оно гладкое

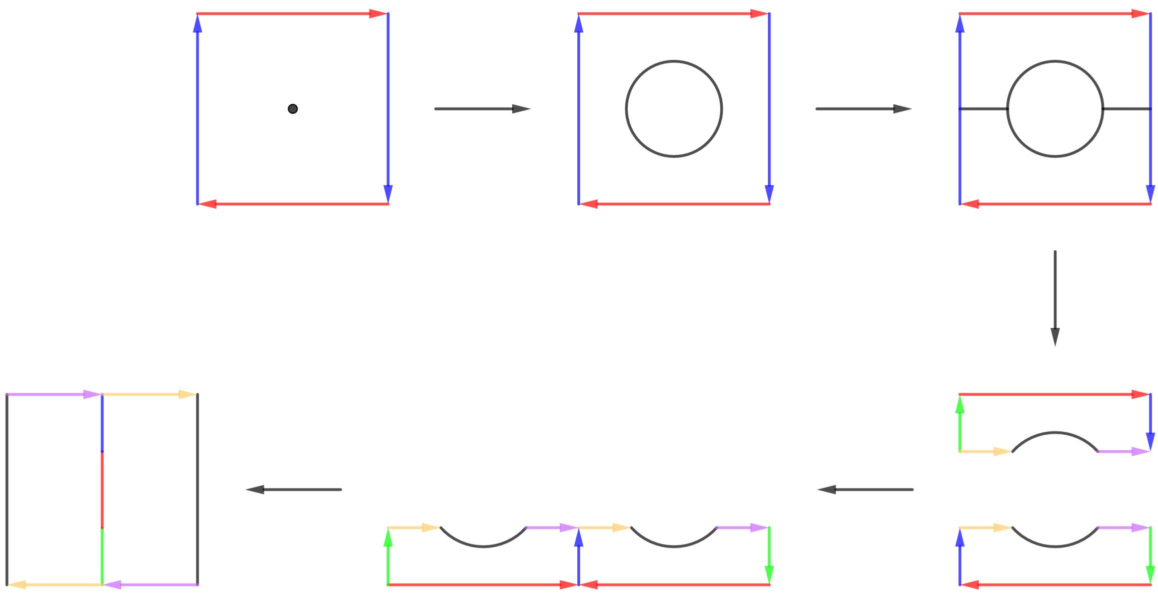
Посчитаем Якобиан

$$\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_1} = \frac{x_1^2+\ldots+x_n^2-2x_1^2}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^2} = \frac{-x_1^2+\ldots+x_n^2}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^2}$$
$$\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_2} = \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^2}$$
$$\frac{1}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^2}\cdot\begin{vmatrix} -x_1^2+\ldots+x_n^2 & -2x_1x_2 & -2x_1x_3 & \ldots & -2x_1x_n \\ -2x_1x_2 & x_1^2-x_2^2+\ldots+x_n^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2x_1x_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -2x_{n-1}x_n \\ -2x_1x_n & \ldots & \ldots & -2x_{n-1}x_n & x_1^2+\ldots+x_n^2 \end{vmatrix}$$
$$= -(x_1^{2n}+\ldots+x_n^{2n})+\ldots\neq 0$$

(в) Допустим что можно покрыть одной картой, тогда по определению карты существует гомеоморфизм $\varphi:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}^n$, но S^n компакт, так как оно закрыто и ограничено (можно рассмотреть норму $|\,|:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ и $S^n=|\,|^{-1}(1)$), в то время как $\mathbb{R}^n$ не компакт так как его открытое покрытие $\{B(0,n)\mid n=1,\ldots,\infty\}$ не имеет конечного подпокрытия.

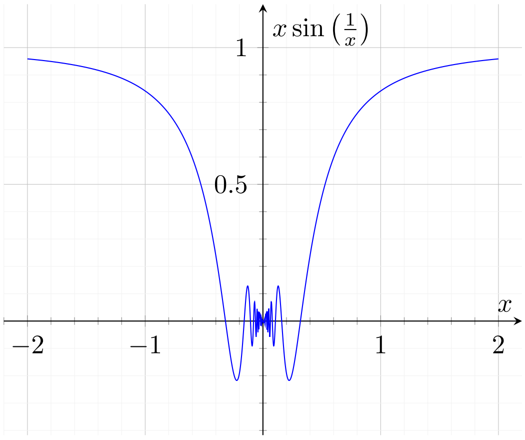
Задача 3

Заметим, что можно построить сюръективное отображение из множества ненулевых векторов(с началом в любой точке плоскости) во множество прямых на плоскости. Рассмотрим $A=\mathbb{R}^2\times(\mathbb{R}^2/0)$, где перва точка отождествляется с началом вектора, а вторая является самим ненулевым вектором и введем на данном пространстве стандартную топологию. Теперь зададим отношение эквивалентности векторов $(p_1,v_1)\sim(p_2,v_2)\Leftrightarrow v_1\parallel v_2\wedge(p_1-p_2)\parallel v_1$. Таким образом мы можем отождествить $A/\sim$ со множеством всех прямых плоскости и задать на нем стандартную фактор-топологию.
Заметим, что любую прямую на плоскости можно задать как $ax+by+c=0$, таким образом построив биекцию с тройками (a,b,c), причем можно заметить, что $(a,b,c)\sim(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$ и тогда каждая прямая отождествляется с соответствующей ей тройкой в однородных координатах $ax+by+c\to(a:b:c)$ и множество прямых является подмножеством RP^2 (так как там отсутствует точка $a=b=0$).



Задача 4

(a*)



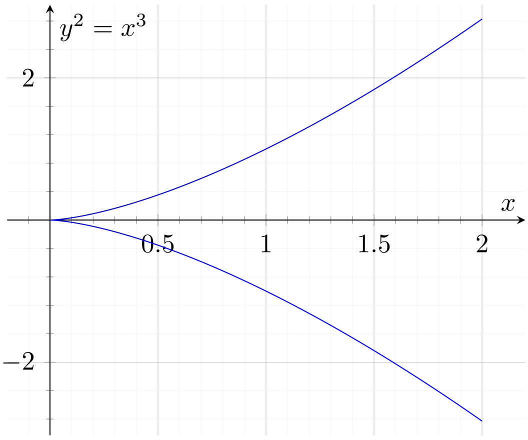
$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| < 1$ ограничена, а $x = 0$ при $x \to 0$ следовательно функция непрерывна в 0
Если функция гладкая то её производная существует и непрерывна

$$f' = \sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x}\cdot -\frac{1}{x^2} = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

$\sin\frac{1}{x}$ имеет разрыв в 0, а следовательно и f' имеет разрыв, откуда следует что f не гладкая.

(б) <u>Гладкая кривая</u> – это гладкое отображение $f : I \to \mathbb{R}^n$, где $I \subset \mathbb{R}$ является открытым множеством. Геометрическим объектом в данном случае является $f(I) \subset \mathbb{R}$
<u>Регулярная кривая</u> – это гладкая кривая $f : I \to \mathbb{R}^n$ для которой выполнено что $\forall t \in I : \ \dot{f}(t) \neq 0$



$$\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to (t^2, t^3)$$
$$\frac{\partial t^2}{\partial t} \neq 0$$
$$\frac{\partial t^3}{\partial t} \neq 0$$

Дифференцируема, а следовательно гладкая

$$||v|| = ||(2t, 3t^2)|| = \sqrt{4t^2 + 9t^2} = 0 \text{ при } t = 0$$

Задача 5

Пусть $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ – координаты точки x_0 в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \neq 0$. Рассмотрим точку $v_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^{i+1}, \dots$ $\mathbb{R}^{n-1}$. Согласно теореме о неявной функции существует окрестность $v_0 \in V_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$, интервал $(x_0^i - \delta, x_0^i + \delta)$ и гладкая функция $y^i : V_i \to \mathbb{R}$ такие что:

$$x_0^i = y^i(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)$$

$$|x_0^i - y^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)| < \delta \text{ на } V_i$$

множество $U_i = \delta_c \cap (V \times (x_0^i - \delta, x_0^i + \delta)) \subset \mathbb{R}^n$ совпадает с множеством

$$\{(x^1, \dots, x^{i-1}, y^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n), x^{i+1}, \dots, x^n) \mid (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \subset V\}$$

Рассмотрим (U_i, φ_i) в качестве карты в окрестности точки x_0.
Это возможно так как $\varphi_i(U_i) = V_i$ и обратное отображение задается равенством $\varphi_i^{-1}(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{i-1}, y^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n), x^{i+1}, \dots, x^n)$
Отображение перехода $\varphi_j \varphi_i^{-1} : \ \varphi(U_i \cap U_j) \to V_j$ имеет вид $(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \to (x'^1, \dots, x'^{j-1}, x'^{j+1}, \dots, x'^n)$ где $x^a = x'^a$ при $a \neq i$ и $x'^i = y^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$ и, следовательно, гладкое.

Задача 6

Поверхность $f(x_1, \dots, x_n) = 0$
<u>Карты регулярной поверхности</u> – локальные окрестности $x \in U$, которым гомеоморфно $V \subset \mathbb{R}^n$ (некое открытое множество)
Тогда каждое множество, удовлетворяющее условию, будет картой, рассмотрим 2 из них
Проверим согласованность карт $(U_1, f_1),\ (U_2, f_2)$ в точке $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_3, \dots, x_n)$$

$$f_{12} = f_2 \circ f_1^{-1}(x_2, x_3, \dots, x_n) = f_2(f_1(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_2, \dots, x_n), x_3, \dots, x_n)$$

$$x_1 = f_1(x_2, \dots, x_n)$$

$$x_2 \to f_1(x_2, \dots, x_n)$$

$$x_3 \to x_3$$

$$\dots$$

$$x_n \to x_n$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ так как } \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0 \text{ так как теорема о неявной функции применима}$$

Задача 7

(а) $(\mathbb{R},\varphi),(\mathbb{R},\psi)$ – гладкие структуры

$$\varphi(x) = x^{2k+1}$$
$$\psi(x) = x^{2n+1}$$
$$k \neq n$$

Атласы $(\mathbb{R},\varphi)$ и $(\mathbb{R},\psi)$ не одинаковые, так как $\bigcup$ атласов не является атласом.

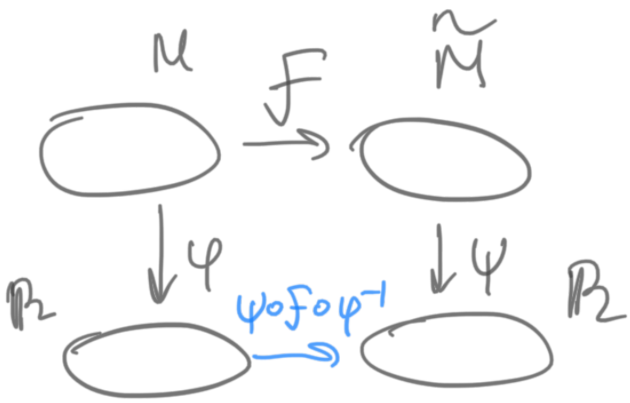
$$\psi\circ\varphi^{-1}(x) = x^{\frac{2n+1}{2k+1}}$$
$$\varphi\circ\psi^{-1}(x) = x^{\frac{2k+1}{2n+1}}$$
$$x^{\frac{2n+1}{2k+1}}\cdot x^{\frac{2k+1}{2n+1}} = x$$

следовательно $J\left(x^{\frac{2n+1}{2k+1}}{}'\right) = J\left(\frac{2n+1}{2k+1}\cdot x^{\frac{2k+1}{2n+1}-1}\right)$ или $J\left(x^{\frac{2k+1}{2n+1}}{}'\right) = J\left(\frac{2k+1}{2n+1}\cdot x^{\frac{2n+1}{2k+1}-1}\right)$

не существует в точке $x = 0$

Следовательно карты не согласованы и отображение перехода не гладкое

$$\exists f : \varphi(x) \to \psi(x)$$
$$f : x \to x^{\frac{2k+1}{2n+1}}$$



Тогда $g : x \stackrel{id}{\to} \psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x) = x$ – диффеоморфизм

(б)

(в*)

Задача 8*