Мозговой Владимир

1

$f = x^3 - 17x + 1 \qquad f' = 3x^2 - 17$

Критерий Эйзенштейна: если f имеет корень над Q, то имеет корень над Z (± 1)

$\Rightarrow f$ неприводим над Q

Найдём группу Галуа, если это A_3, то D - квадрат в Q

$$D = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & -17 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -17 & 1 \\ 3 & 0 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -17 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = 19625 = 5^3 \cdot 157 \text{ - не квадрат}$$

Также заметим, что

$$x^3 - 17x + 1 = (x \pm 1)(x^2 + bx \pm 1) \Rightarrow \begin{cases} \pm 1 + b = 0 \\ \pm 1 \pm b = -17 \end{cases} \text{ решений нет}$$

$\Rightarrow$ не $\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$

Добавив один корень x_1 многочлена $x^3 - 17x + 1$ получим расширение степени 3 $\Rightarrow$ степень расширения многочлена $= 6$

Ответ: группа Галуа S_3

2 №

Мозговой Владислав

корни x^3-11 : $\sqrt[3]{11}$, $\omega\sqrt[3]{11}$, $\omega^2\sqrt[3]{11}$, где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$\Rightarrow L = Q(\sqrt[3]{11}, \omega)$

минимальный многочлен ω: $x^2+x+1 = \frac{x^3-1}{x-1}$, степень расширения 6

$F = Q(\sqrt{3} i)$, то есть элементы имеют вид $a + i\sqrt{3}b$, $a,b \in Q$

степень расширения 2, так как минимальный $x^2+3=0$

поле разложения x^3-11 над ~~[illegible]~~
$K = Q(i\sqrt{3}) = Q(\omega)$ это $K(\sqrt[3]{11})$, тогда группа $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ группа циклическая порядка 3 $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$

Ответ: $\mathbb{Z}_3$

Мозговой Владислав

(3)

$x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^5-1}{x-1}$

корни $e^{\frac{2\pi i}{5}}=\omega$, кроме ω^5

Тогда поле разложения $x^4+x^3+x^2+x+1$ это $\mathbb{Q}[\omega]$ и имеет степень 4

x^3-3x+6 неприводим по критерию Эйзенштейна

$6^3-3\cdot6+6\neq0$

$-6^3+3\cdot6+6\neq0$

Тогда добавив корень x_1, получим расширение степени 3

но $3 \nmid 4$ $\Rightarrow$ корни не лежат в $\mathbb{Q}[\omega]$

Ответ: 0