Алгебраическая геометрия: экзамен 23.12.22

1) Вокруг произведений.

а) Пусть $X = Spec(A)$, где A конечнопорожденная целостная алгебра над полем k. Покажите, что существует конечный сюръективный морфизм $X \to \mathbb{A}^n_k$. Какова в этом случае размерность X и почему?

б) Пусть k алгебраически замкнуто и L поле, содержащее k . Покажите, что если система полиномиальных уравнений (от конечного числа переменных) с коэффициентами в k имеет решение в L , то она имеет решение и в k (поможет теорема Гильберта о нулях).

в) Выведите отсюда, что если A, B целостные конечно порожденные k-алгебры, $k = \bar{k}$, то $A \otimes_k Frac(B)$ целостна, а затем - что если X, Y целостные аффинные схемы конечного типа над алгебраически замкнутым k, то $X \times_k Y$ тоже целостна. Верно ли это, если k не алгебраически замкнуто?

г) Для X, Y как выше, k произвольного, покажите, что $dim(X \times_k Y) = dim(X) + dim(Y)$.

д) То же самое для произвольных целостных схем конечного типа над полем.

е) Условие конечности важно: покажите, что равенство не выполнено, если $X = Y = Spec(k(T))$ (можно воспользоваться свойством перестановочности тензорного произведения и локализации: $S^{-1}B \otimes_A C \cong S'^{-1}(B \otimes_A C)$, где S' образ S в $B \otimes_A C$).

2) Ранг пучка модулей. Пусть $\mathcal{F}$ когерентный пучок на нетеровой схеме X (в частности, для любого открытого $U = Spec(A)$, $\mathcal{F}(U)$ конечнопорожденный A-модуль).

а) Докажите, что носитель $\{x \in X | \mathcal{F}_x \neq 0\}$ замкнут (можно вспомнить описание носителя конечнопорожденного модуля, например, из ДЗ).

б) Пусть $x \in X$ некоторая точка, и $s_1, \dots s_n \in \mathcal{F}(X)$ таковы, что их образы порождают слой $\mathcal{F}_x$. Докажите, что найдется такая открытая аффинная окрестность U точки x, что образы s_i порождают $\mathcal{F}_y$ для любого $y \in U$. Верно ли, что s_i порождают $\mathcal{F}(U)$?

в) Рангом пучка в точке $x \in X$ с полем вычетов $k(x)$ называется размерность $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$ как $k(x)$-векторного пространства. Докажите, что ранг полунепрерывен сверху (т.е. множество точек, где ранг не меньше заданного, замкнуто); поможет лемма Накаямы.

г) Если схема X целая, докажите, что $\mathcal{F}$ локально свободный тогда и только тогда, когда он постоянного ранга.

3) Правда или ложь? Пусть $f : X \to Y$ морфизм схем, докажите верные из следующих утверждений и приведите контрпримеры к неверным.

а) Если $f^{-1}(y)$ конечное множество для любого $y \in Y$, то f конечный;

б) Если f конечный, то $f^{-1}(y)$ конечное множество для любого $y \in Y$;

в) Если f конечный, то f сюръективный;

г) Если f конечный и доминантный, то f сюръективный;

д) Свойство конечности $f^{-1}(y)$ для любого $y \in Y$ стабильно относительно замены базы.

Возможный расклад по баллам: 5+4+3.

№1

а) $X = \operatorname{Spec} A$, A — к.п. k-алгебр

$\Rightarrow \exists$ кон. сюр. $X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n_k$.

По лемме Нётер о нормализации,

$\exists a_1, \ldots, a_n \in A$, т.ч. $a_1, \ldots, a_n$ алг. независимы

и $A / \underbrace{k[a_1, \ldots, a_n]}_{\substack{\text{подалгебра,} \\ \text{порожд. } a_1, \ldots, a_n}}$ — кон. расш.

$\Rightarrow \exists$ инъ. гом-м. колец $k[T_1, \ldots, T_n] \to A$
$T_i \longmapsto a_i$

и $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} k[T_1, \ldots, T_n]$ — кон. и сюр.

[сюр-ть следует из Lying Over].

По задаче 3а) из Д/з 6, $\dim X = \dim \mathbb{A}^n_k = n$.

б) Итак, Пусть $P_\alpha \in k[T_1, \ldots, T_n]$, и

$l_1, \ldots, l_n \in L$ — т.ч. $\forall \alpha$ $P_\alpha(l_1, \ldots, l_n) = 0$.

Имеем расш. колец $L[T_1, \ldots, T_n] / k[T_1, \ldots, T_n]$.

$(P_\alpha)_{L[\ldots]} \subset (T_1 - l_1, \ldots, T_n - l_n)$.

Пусть $\mathfrak{p} := (T_1 - l_1, \ldots, T_n - l_n) \cap k[T_1, \ldots, T_n]$ —

— это должен быть простой идеал в $k[T_1, \ldots, T_n]$.

Пусть $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[T_1, \ldots, T_n]$ — т.ч. $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$.

Тогда $(P_\alpha)_{k[\ldots]} \subset ((P_\alpha)_{L[\ldots]} \cap k[T_1, \ldots, T_n]) \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$.

Т.к. $k=\bar{k}$, по т. Гильберта о нулях,

$\mathfrak{m}=(T_1-x_1,\dots,T_n-x_n)$, $x_i\in k$.

$\Rightarrow (P_\alpha)\subset(T_1-x_1,\dots,x_n)\Rightarrow \forall\alpha\ P_\alpha(x_1,\dots,x_n)=0$,

т. е. сис. $\{P_\alpha=0$ имеет реш. в k.

г) Пусть $X\to\mathbb{A}^n_k$, $Y\to\mathbb{A}^m_k$ – кон. сюр. отобр.

Тогда. $X\times Y\to\mathbb{A}^n_k\times\mathbb{A}^m_k=\mathbb{A}^{n+m}_k$ – кон. сюр.

$\Rightarrow \dim X\times Y=\dim\mathbb{A}^{n+m}_k=n+m$.

д).

№2

а) <u>Лемма.</u> Если T – топ. пр-во, $T = \bigcup U_i$ – откр. покр. и $Z \subset T$ – т.ч. $\forall i$ $Z \cap U_i$ замк. в U_i, то Z замк. в X.

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_i \cap U_i \text{ – замк. в } U_i \Rightarrow U_i \setminus Z \text{ – откр. в } U_i \Rightarrow \\ \Rightarrow U_i \setminus Z \text{ – откр. в } X, \text{ т.к. } U_i \text{ – откр.} \\ X \setminus Z = (\bigcup U_i) \setminus Z = \bigcup \underbrace{(U_i \setminus Z)}_{\text{откр.}} \text{ – объед. открытых} \\ \Rightarrow X \setminus Z \text{ – откр.} \Rightarrow Z \text{ – откр.} \end{array}}$$

Из леммы следует, что дост. покрыть $X = \bigcup \operatorname{Spec} A_i$ и показать, что $\operatorname{Supp} \mathcal{F} \cap \operatorname{Spec} A_i$ – замк.

$\operatorname{Supp} \mathcal{F} \cap \operatorname{Spec} A_i = \operatorname{Supp} \mathcal{F}|_{\operatorname{Spec} A_i} = \operatorname{Supp} \mathcal{F}(\operatorname{Spec} A_i)$

Т.к. $\mathcal{F}(\operatorname{Spec} A_i)$ – кон., $\operatorname{Supp} \mathcal{F}(\operatorname{Spec} A_i)$ – замк. по задаче №3 из Д/з 3.

б) $\mathcal{F}_x = (s_1, \dots, s_n)$, $s_i \in \mathcal{F}(X)$.

Пусть $\operatorname{Spec} A$ – афф. окр-ть x и $\mathcal{F}|_{\operatorname{Spec} A} = \widetilde{M}$, $M \in A\text{-Mod}$.

$M = (m_1, \dots, m_k)$. Пусть $m_i = \sum \frac{a_{ij}}{f_{ij}^{d_{ij}}} s_j$ в M_x, где $a_{ij} \in A$, $f_{ij} \in A \setminus p_x$ [p_x – идеал.], $d_{ij} \geq 0$.

Тогда рассм. $f := \prod_{i,j} f_{ij}$. Ясно, что $\frac{m_i}{1} \in (s_1, \dots, s_n)$ в M_f. $\Rightarrow M_f = (s_1, \dots, s_n)$. При этом $M_f = \widetilde{M}(\mathcal{D}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{D}(f))$ и $x \in \mathcal{D}(f)$ [т.к. $f_{ij} \notin p_x$ и p_x – простой].

Итого, $\mathcal{F}(\overset{\text{афф. окр-ть } x}{D(f)})$ порожд-ся $s_1,\dots,s_n$ (а значит $\forall y\in D(f)$ $\mathcal{F}_y$ тоже).

в) $S_n := \{x\in X \mid rk\,\mathcal{F}_x \geq n\}$ — замк.

Pf:

Доп. $x\notin S_n$, т.е. $\dim \mathcal{F}_x\otimes_{\mathcal{O}_x} k(x) = m < n$.

Пусть $\operatorname{Spec}A$ — афф. окр-ть x и $\mathcal{F}|_{\operatorname{Spec}A} = \widetilde{M}$, $M\in A\text{-Mod}$,

M — к.п. $\Rightarrow M_x$ — тоже. Пусть $\frac{s_1}{f_1^{d_1}},\dots,\frac{s_m}{f_m^{d_m}}\in M_x$ — т.ч.

$s_i\in M$, $f_i\in A\setminus p_x$ и их классы экв. — базис $M_x\otimes_{A_{p_x}} k(x)$!

Тогда $M_x = (s_1,\dots,s_m)$: действ.:

$$M_x\otimes_{A_{p_x}} k(x) = M_x\otimes_{A_{p_x}} A_{p_x}/p_xA_{p_x} = M_x/p_xM_x.$$

Рассм. $N := M_x/(s_1,\dots,s_m)$. Имеем точную:

$$(s_1,\dots,s_m)\to M_x\to N\to 0$$

$$\Big\}\otimes k(x)$$

$$M_x\otimes k(x)\to M_x\otimes k(x)\to N\otimes k(x)\to 0$$

$\Rightarrow N/p_xN = 0$. p_x — рад. Джекобсона A_{p_x},

N — к.п. A_{p_x}-модуль $\Rightarrow$ по л. Накаямы $N=0$

$\Rightarrow M_x = (s_1,\dots,s_m)$.

Теперь: $\mathcal{F}|_{\operatorname{Spec}A}$ —ког. пучок, $s_1,\dots,s_m$ — его

глоб. сеч. $\Rightarrow$ по пред. пункту $\exists$ окр-ть $U\ni x$,

т.ч. $\forall y\in U$ $\mathcal{F}_y = (s_1,\dots,s_m) \Rightarrow \dim \mathcal{F}_y\otimes k(y)\leq m<n$

$\Rightarrow U \subset X \setminus S_n$. Таким образом, $X \setminus S_n$ — откр., а значит S_n — замк.

г) X — целая.

$\mathcal{F}$ — лок. своб. $\Leftrightarrow \operatorname{rk}\mathcal{F} \equiv \mathrm{const}$

$(\Rightarrow)$ Положим $X_n := \{x \in X \mid \operatorname{rk}\mathcal{F}_x = n\}$.

$\forall x \in X$ $\exists$ афф. окр-ть U, т.ч. $\mathcal{F}|_U = \mathcal{O}_U^m$.

Тогда $\forall y \in U$ $\mathcal{F}_y = (\mathcal{O}_U^m)_y = \mathcal{O}_y^m$

$\Rightarrow \mathcal{F}_y \otimes k(y) = k(y)^m$, т.е. $U \subset X_m$.

Таким образом, $\forall m$ X_m — откр.

При этом $X = \bigsqcup_{m \geq 0} X_m$. Т.к. X — неприв., X — связна

$\Rightarrow X = X_m$ для нек. m.

$(\Leftarrow)$ Зафикс. $x \in X$. Как в пред. пункте, пусть U — афф. окр-ть x и $s_1, \ldots, s_m \in \mathcal{F}(U)$ — т.ч. $s_{1x}, \ldots, s_{mx}$ — базис $\mathcal{F}_x \otimes k(x)$ и $\mathcal{F}(U) = (s_1, \ldots, s_m)$.

имеем короткую точную посл-ть пучков:

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{O}_U^m \to \mathcal{F}|_U \to 0.$$

Зафикс. произв. $y \in U$. Т.к. X — нёт. схема, $\mathcal{K}$ — ког. пучок (как ядро м-ма ког. пучков) $\Rightarrow \mathcal{K}_y$ — к.п. $\mathcal{O}_y$-модуль. Значит, по л. Накаямы

$$\mathcal{K}_y = 0 \Leftrightarrow \mathcal{K}_y \otimes k(y) = 0 \Leftrightarrow \dim \mathcal{K}_y \otimes k(y) = 0.$$

При этом т.к. $-\otimes k(y)$ - локализация $\mathcal{O}_y$ в m_y, она оставит точной посл-ть

$$0 \to \mathcal{K}_y \otimes k(y) \to k(y)^m \to \mathcal{F}_y \otimes k(y) \to 0.$$

$$\Rightarrow \dim \mathcal{K}_y \otimes k(y) = \dim k(y)^m - \dim \mathcal{F}_y \otimes k(y) =$$

$$= m - rk\,\mathcal{F}_y = rk\,\mathcal{F}_x - rk\,\mathcal{F}_y = 0, \text{ т.к. } rk\,F \equiv const.$$

Итого, $\mathcal{K} = 0$ и $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_U^m$, т.е. $\mathcal{F}$ - лок. своб.

№3 $X \xrightarrow{f} Y$

а) Если $f^{-1}(y)$ - кон. $\forall y \in Y$, то f - кон.

Контрпример: $\operatorname{Spec} k(T) \to \operatorname{Spec} k$.

[$\operatorname{Spec} k(T)$, $\operatorname{Spec} k$ - одноточечн. мн-ва, $k(T)/k$ - не кон. расш.]

б) Если f - кон., то $f^{-1}(y)$ - кон. $\forall y \in Y$.

<u>Д-во:</u>

Т.к. f - афф., считаем $Y = \operatorname{Spec} A$, $X = f^{-1}(\operatorname{Spec} A) = \operatorname{Spec} B$, B - кон. A-алгебра. По задаче 5б, из Д/з 2, все слои f конечны.

в) Если f - кон, то f - сюр.

<u>Контрпример:</u>

Рассм. $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} k[T]$, индуц. $k[T] \to k$,
$T \mapsto 0$.

Это отобр., очев. не сюр, при этом $k/k[T]$ - кон.

г) Если f - кон. и дом., то он сюр.

<u>Д-во:</u>

Пусть $Y = \bigcup \operatorname{Spec} A_i$, $f^{-1}(\operatorname{Spec} A_i) = \operatorname{Spec} B_i$, B_i - кон. A_i - алгебры.

$V(0) = \operatorname{Spec} A_i = \overline{f(\operatorname{Spec} B_i)} = V(\operatorname{Ker} f^{\#})$ - т.к. f - дом.

$\ker f^{\#} \subset nil(A_i) \Rightarrow f^{\#-1}(nil\, B_i) = nil\, A_i$

$\Rightarrow$ $\underset{A/nil(A)}{\overset{\shortparallel}{A_{red}}} \longrightarrow \underset{B/nil(B)}{\overset{\shortparallel}{B_{red}}}$ - влож., при этом, очев. $B_{i\,red}/A_{i\,red}$ - кон. расш.

Тогда по Lying Over, $\operatorname{Spec} B_{i,red} \to \operatorname{Spec} A_{i,red}$ - сюр.

Т.к. теоретико-множеств. $\operatorname{Spec} B_{i\,red} \to \operatorname{Spec} A_{i\,red}$ и $\operatorname{Spec} B_i \to \operatorname{Spec} A_i$ совпадают, $\operatorname{Spec} B_i \to \operatorname{Spec} A_i$ - сюр.

д) Если $\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ - кон., то $\forall Z \to Y$ и $X \times_Y Z \xrightarrow{f_Z} Z$ $\forall z \in Z$ $f_Z^{-1}(z)$ - тоже кон.

<u>Контрпример:</u>

Расм. $X = Z = k(T)$ и $Y = k$. Очев., у $\operatorname{Spec} k(T) \to \operatorname{Spec} k$ все слои кон. При этом $f_Z = \operatorname{Spec} k(T) \otimes_k k(T) \to \operatorname{Spec} k(T)$.

$f_Z^{-1}(\operatorname{Spec} k(T)) = \operatorname{Spec} k(T) \otimes_k k(T) \Rightarrow$ Хотим показать, что $\operatorname{Spec} k(T) \otimes_k k(T)$ - беск.

Заметим, что $K(T) \otimes K(T) / (T \otimes 1 - 1 \otimes T^m) \simeq \dfrac{k(T)[x]}{(x^m - T)}$ - поле,

т.е. $(T\otimes 1 - 1\otimes T^{u})$ — max идеалы, при чем различн. [т.к. факторы по ним различны как расш. $k(T)$, которые мы будем получать при комп. с $k(T) \to k(T)\otimes k(T)$
$T \longmapsto 1\otimes T$].

$\Rightarrow$ в $k(T)\otimes_k k(T)$ беск. число max идеалов.