Механика

Предисловие

В этом курсе мы будем учиться строить модели классической нерелятивистской механики и осваивать математические (не численные, а аналитические) методы их исследования.

Очень ограниченное число моделей можно разрешить "до конца". Кроме свободной частицы и гармонического осциллятора точное решение есть для задачи Кеплера — его обязательно обсудим.

Про остальные модели мы научимся аналитически получать часть информации — законы сохранения — используя симметрии моделей.

Среди применяемых в курсе мат. методов будут и новые, те, что вы до сих пор не изучали (вариационное исчисление). При этом мы будем упрощать формулировки, оставляя детали для будущих спецкурсов. Иначе ничего не успеем.

Лекция 1

Принципы Ньютоновой механики

Объекты изучения в механике: небольшое число (1, 2, 3..) взаимодействующих между собой простых по структуре тел: Примеры:

* **Материальная точка** (грузик математического маятника, Земля при её вращении вокруг Солнца). У неё есть только 3 координаты в нашем реальном пространстве $\mathbb{R}^3$ (n координат в моделях на пространстве $\mathbb{R}^n$). У неё есть параметр "m" – масса материальной точки. – он различает разные мат. точки. Мы будем часто называть мат. точку **частицей**.

* **Твёрдое тело**: множество материальных точек, соединенных жёсткими невесомыми стержнями (иными словами, расстояния между всеми частицами твёрдого тела фиксированы).

* **Гибкая нерастяжимая (обычно) невесомая нить** – это даже скорее не объект, а вид связи между двумя, соединяемыми этой нитью, объектами.

Мы не будем изучать более сложных объектов: мягких тел, жидкостей, газов, и связанных с ними феноменологически моделируемых сил трения и неидеальной упругости. Зато мы обнаружим универсальные принципы построения моделей с малым числом взаимодействующих объектов — Лагранжев формализм и принцип наименьшего действия. Эти принципы обобщаются затем на модели релятивистской и квантовой механики, классической и квантовой теории поля.

Задача механики: определить движение тел (объектов) в любой момент времени, зная их начальные данные (нам потребуются нач. координаты и скорости). Без измерения этого не сделать. Для измерения нужна система координат. Системы координат бывают разные, наша задача — в каждой модели выбрать самую удобную систему. Типичный выбор:

Декартова система координа — это ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$ (или в $\mathbb{R}^4$)

Поскольку мы изучаем движение тел во времени, нам надо определить и как система координат ведет себя во времени.

Нам, в первую очередь, нужны инерциальные декартовы системы координат. Будем называть их инерциальными системами отсчёта – ИСО.

Def: ИСО – это такая система отсчета, в которой любая частица при отсутствии действующих на неё внешних сил движется равномерно и прямолинейно.

"Математик" скажет, что это определение некорректно: не определено, что такое "внешняя сила"

"Физик" скажет, что про "внешнюю силу" он знает из повседневного опыта, а это определение задаёт метод нахождения ИСО: взять несколько тестовых частиц (сколько?), обеспечить, чтобы на них не действовали внешние силы, и посмотреть, в какой системе координат они будут двигаться по линейному закону. Затем в этой найденной ИСО можно будет изучать движения других частиц, тех, на которые уже действуют силы.

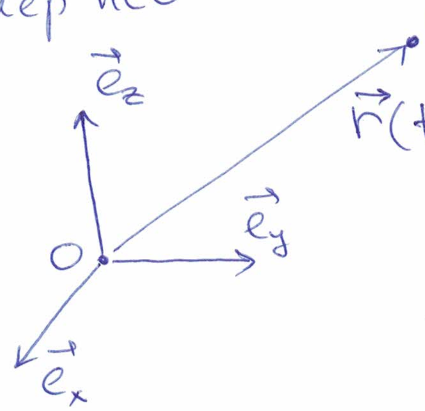
Первый закон Ньютона (видимо, впервые сформулирован Галилеем)

$$\boxed{\text{Существуют ИСО}}$$

Rem: Этот закон далеко не очевиден. В античной и средневековой метафизике считалось, что всякое, в том числе линейное движение нуждается в движителе (внешней силе), и этим принципиально отличается от состояния покоя (Аристотель).

Если ИСО существует, то их есть много.

Пример ИСО:



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

$\vec{r}(t)$ – радиус-вектор частицы

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ – декартов базис ИСО

Если частица свободная, т.е. нет внешних действующих на неё сил, то $\vec{r}(t)$ (т.е. $x(t), y(t), z(t)$) — линейная функция времени "t".

Эта линейность не нарушается линейными преобразованиями

ⓐ Вращение тройки базисных векторов

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \mapsto (\vec{e}\,'_x, \vec{e}\,'_y, \vec{e}\,'_z) = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \cdot G$$

Здесь G — 3×3 матрица ортогонального преобразования, сохраняющего расстояния между точками:

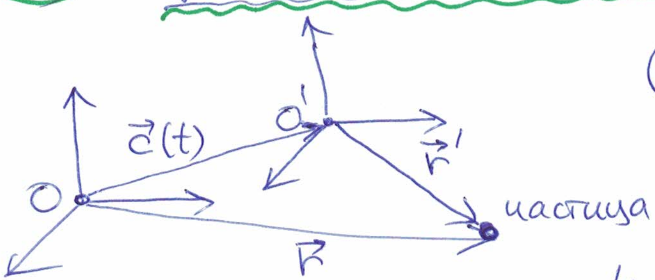
$$\boxed{G^t G = \mathrm{id}, \text{ или } G^t = G^{-1}}$$

Типичный пример: вращение вокруг оси $\vec{e}_z$:

$$G = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Эти преобразования образуют группу вращений $O(3)$.

б) Трансляция начала координат O.



$$O \longmapsto O',$$

причем $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{c}(t)$:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_x(t) \\ c_y(t) \\ c_z(t) \end{pmatrix}$$

б1) Если $\vec{c}(t) = \overrightarrow{\mathrm{const}}$, т.е. $\vec{c}$ не меняется со временем, то мы имеем параллельный перенос.

б2) Если $\vec{c}(t) = t \cdot \overrightarrow{\mathrm{const}}$, то мы имеем переход в движущуюся с постоянной скоростью систему координат.

в) Изменение начала отсчёта времени

$$t \longmapsto t' = t + t_0$$

Все вместе эти преобразования а), б), в) образуют группу. Она называется группой Галилея. Это группа Ли (т.е. это группа и многообразие одновременно). Размерность её (компоненты связности единицы):

$$3_{(\text{вращения})} + 3_{(\text{трансляции})} + 3_{\left(\substack{\text{переход}\\ \text{в движ.}\\ \text{сист.}}\right)} + 1_{\left(\substack{\text{трансл.}\\ \text{"}t\text{"}}\right)} = \underline{\underline{10}}$$

<u>Rem</u>: Есть и ещё преобразования, сохраняющие линейность:

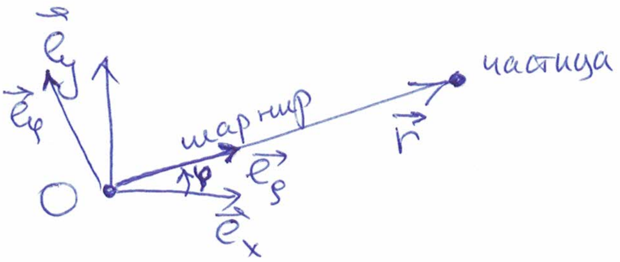
$$x \mapsto \alpha \cdot x, \quad y \mapsto \beta \cdot y, \quad z \mapsto \gamma \cdot z, \quad t \mapsto \delta \cdot t,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – константы. Это – масштабные преобразования. Но "физики" измеряют расстояние и время приборами с раз и навсегда зафиксированными масштабами – единицами измерения (метры, секунды). Так что такие преобразования к числу допустимых для ИСО мы не относим. В частности, они нарушают ортонормированность тройки базисных векторов $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Обсудим на нескольких примерах, какие бывают неинерциальные системы отсчета.

Пример 1 : Маятник в $\mathbb{R}^2$

Частица на шарнире (жесткий стержень) крутится вокруг начала отсчёта O.



Эту модель удобно описывать в полярной системе координат.

Она — ортонормированная имеет начало координат в O, но направление её базисных векторов $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ зависит от положения частицы. $\vec{e}_\rho$ — "смотрит" в направлении частицы

$$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi) = (\vec{e}_x, \vec{e}_y)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

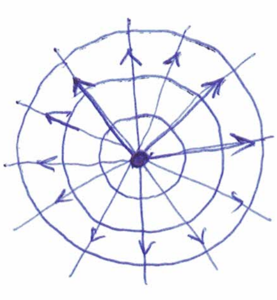
где $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$. Вводя еще $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$, получаем:

$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho$$

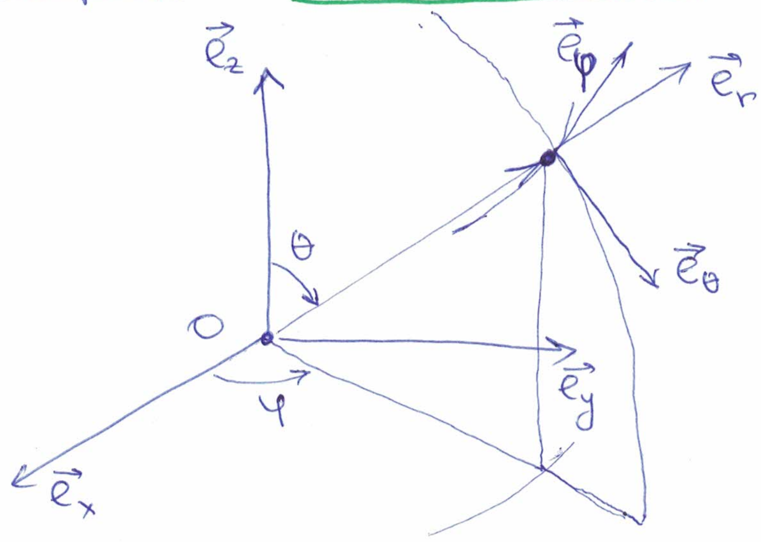
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

(Замечаем $\underline{\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi}$, $\underline{\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho}$)

Если $x(t), y(t)$ — линейные функции "t", то $\rho(t)$ не обязательно линейна. Поэтому полярная система координат неинерциальна. Координатная сетка этой системы криволинейна:



Пример 2 : Маятник в $\mathbb{R}^3$ — эту модель удобно описывать в сферической системе координат.



Её базисные векторы

$\vec{e}_r$ – смотрит на частицу

$\vec{e}_\theta$ – касателен к меридианам на сфере

$\vec{e}_\varphi$ – касателен к параллелям.

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi, & \cos\theta\cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi, & \cos\theta\sin\varphi, & \cos\varphi \\ \cos\theta, & -\sin\theta, & 0 \end{bmatrix}$$

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg}\theta = (x^2+y^2)^{1/2}/z, \quad \operatorname{tg}\varphi = y/x.$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$
$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$\Big(\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \cos\theta\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta$

Это тоже неинерциальная криволинейная система координат.

Еще пример неинерциальной системы — система, начало координат которой движется по нелинейному закону относительно начала координат ИСО.

Теперь вернёмся к описанию движения тел в ИСО.

По определению свободная частица движется в ИСО по закону

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} := \ddot{\vec{r}} = 0}$$

Для всех остальных частиц 2-й закон Ньютона гласит:

$$\boxed{\text{Движение материальных точек в ИСО описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка: } m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}$$

Это утверждение о том, что, зная массу m и задав начальные координаты $\vec{r}(0)$ и скорости $\dot{\vec{r}}(0)$ частицы мы можем однозначно восстановить её движение (какие при этом нужны условия на функцию $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$?).

"Математику" достаточно этого утверждения о существовании и единственности решения дифура.

"Физик" же задаётся вопросом: как найти m и $\vec{F}$, да и что это вообще за величины?

"Математик" написал бы вообще $\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \left(\frac{\vec{F}}{m}\right)$

но "физик" возразит, что m – мера инертности частицы, она измеряет отклик частицы на внешнее воздействие. А $\vec{F}$ – это характеристика внешнего воздействия на частицу – сила. Их не надо смешивать.

Откуда определяются силы? – Из опыта.

Список фундаментальных сил очень ограничен.

Вот они:

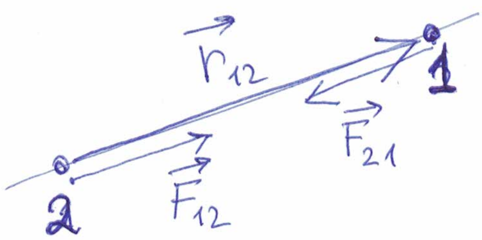
а) Гравитационная сила (Ньютон)

$$\boxed{\vec{F}_{21\,(грав)} = -\gamma\,\frac{m_1 m_2\,\vec{r}_{12}}{(r_{12})^3}}$$

б) Электростатическая сила (Кулон)

$$\boxed{\vec{F}_{21\,(эл\text{-}стат)} = \frac{q_1 q_2\,\vec{r}_{12}}{(r_{12})^3}}$$

Это сила взаимодействия двух частиц "1" и "2",



$\vec{r}_{12} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ – радиус-вектор, соединяющий частицы,

m_1, m_2 и q_1, q_2 – массы и заряды частиц,

γ – постоянная всемирного тяготения

$\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на частицу "1" со стороны частицы "2"

$\vec{F}_{12}$ – сила со стороны частицы "1" на частицу "2".

Замечаем: $\boxed{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0}$

Это 3-й закон Ньютона: "действие равно противодействию". Он менее фундаментален, чем первые два, но при парных взаимодействиях частиц выполняется.

К фундаментальным силам можно также с некоторой натяжкой отнести:

в) сила тяготения Земли (приближение $\vec{F}_{грав}$)

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{g}}$$

г) сила действия абсолютно упругой пружины (Гук)

$$\boxed{\vec{F} = -k\vec{r}}$$

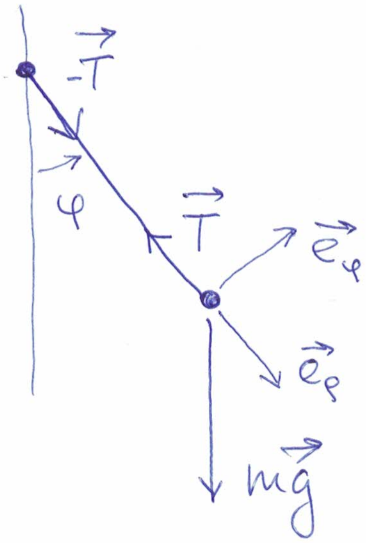
д) сила действия внешнего магнитного поля (Лоренц)

$$\boxed{\vec{F} = \frac{q}{c}[\dot{\vec{r}}, \vec{H}]}$$

Здесь $\vec{H}(\vec{r}, t)$ – напряженность магнитного поля, и это единственная из нашего списка сила, зависящая от скорости частицы.

Рассмотрим теперь примеры построения и решения простейших механических моделей с помощью законов Ньютона.

Пример 1 Математический маятник в плоскости $\mathbb{R}^2$.



В ИСО в начале координат шарнирно закреплен невесомый жесткий стержень. К его свободному концу прикреплена частица массы m. На частицу действует сила тяжести Земли (см. Рис)

Кроме того, на частицу действует сила реакции стержня $\vec{T}$. Она направлена вдоль стержня (объясните это, исходя из невесомости стержня, 2 и 3 законов Ньютона и 2 закона Ньютона для моментов сил — это и есть "моделестроительство").

2-й закон Ньютона: $\boxed{m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{T}}$

Но вид силы $\vec{T}$ нам неизвестен!

Попробуем записать уравнение движения в полярной системе координат:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho$$
$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \text{ (см. стр 8)}$$
$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

(проверьте!)

$$\vec{T} = -T\vec{e}_\rho, \quad m\vec{g} = mg(\cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi).$$

В проекциях на базисные вектора $\vec{e}_\rho$ и $\vec{e}_\varphi$ имеем:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho: & m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -T + mg\cos\varphi \\ \vec{e}_\varphi: & m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = -mg\sin\varphi \end{cases}$$

Во втором уравнении неизвестная нам сила T не появляется. Кроме того, условие жесткости стержня предполагает $\dot{\rho} = 0$, $\rho = \ell = \mathrm{const}$ – длина стержня.

Итак:

$$\vec{e}_\varphi: \quad \boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi} \qquad (*)$$

Это уже хорошо определенный дифур. Решив его, можно найти и силу реакции стержня:

$$\text{из } \vec{e}_\rho: \quad \boxed{T = mg\cos\varphi + m\ell\dot{\varphi}^2}$$

Особенно просто решать приближение $(*)$ при малых углах отклонения φ: $\sin\varphi \sim \varphi$.

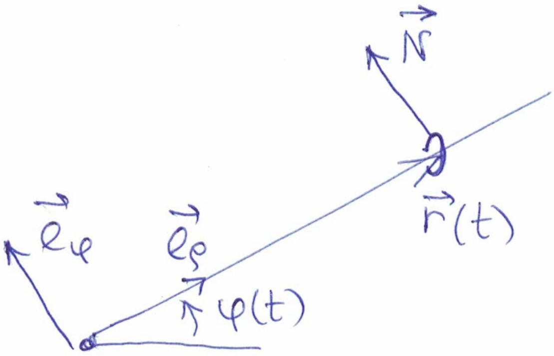
$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\varphi} \qquad (* \text{ прибл.})$$

Это линейный однородный дифур с постоянными коэффициентами. Общее его решение

$$\boxed{\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Это – <u>закон гармонических колебаний</u>.

Пример 2 Бусинка на вращающемся стержне в $\mathbb{R}^2$.



В начале координат ИСО шарнирно закреплен длинный жесткий невесомый гладкий стержень. Закон его вращения известен – $\varphi(t)$. По стержню перемещается бусинка массы m.

На бусинку действует только сила реакции стержня $\vec{N}$. Поскольку трения нет (стержень гладкий), $\vec{N} \perp \vec{r}$.

Снова есть неизвестная сила $\vec{N}$, и снова удобно закон движение бусинки

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{N}}$$

переписать в полярной системе координат:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_\rho &: \quad m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = 0 \\
\vec{e}_\varphi &: \quad m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = N \quad (\vec{N} = N\vec{e}_\varphi)
\end{aligned}$$

Закон движение бусинки определяется из проекции на $\vec{e}_\rho$:

$$\boxed{\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = 0}$$

Особенно легко это уравнение решается, когда стержень вращается равномерно: $\varphi(t) = \omega t$. Тогда:

$$\boxed{\rho(t) = A\,\mathrm{ch}\,\omega t + B\,\mathrm{sh}\,\omega t},$$

где A и B определяются из начальных условий $\rho(0)$ и $\dot{\rho}(0)$.

Сделаем выводы:

1) Оказывается, в уравнениях Ньютона появляются неизвестные силы реакции. С ними надо "бороться"

2) Пишутся уравнения Ньютона изначально в ИСО, а решать их, зачастую, удобно в других системах отсчета. В этих других системах отсчета вид уравнений Ньютона совсем не такой, как в ИСО. В этом неудобство Ньютонова формализма.

3) При наличии сил реакций число (проекций) уравнений Ньютона больше числа независимых переменных, задающих движение системы. На самом деле

$$\boxed{\#\,\text{проекций ур-ний Ньютона} = \#\,\text{независимых сил реакции} + \#\,\text{независимых координат системы.}}$$

Независимые координаты, определяющие положение системы в любой момент времени называются **степенями свободы** системы. Они являются координатами многообразия всех возможных положений системы — **конфигурационного пространства**.

У математического маятника одна степень свободы — φ, его конфигурационное пространство — S^1

У бусинки на стержне одна степень свободы — ρ, её конфигурационное пространство — луч $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

Интуитивно число степеней свободы системы можно определить, посмотрев, сколько её координат надо "заморозить", чтобы она уже не могла больше двигаться.

Ещё пример: твердое тело в $\mathbb{R}^3$. Его можно закрепить в одной точке (фиксируем 3 координаты точки $\mathbb{R}^3$), а затем лишить возможности вращаться вокруг этой точки (фиксируем направление оси вращения и угол поворота — $2+1=3$ координаты $\mathbb{RP}^3$). Конфигурационное пространство твердого тела в $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{RP}^3$. Число его степеней свободы — 6.

И еще определение термина:

пространство всевозможных начальных данных механической системы называется фазовым пространством. Оно является касательным расслоением конфигурационного пространства: начальные координаты системы живут в базе (т.е. в конфигурационном пр-стве), а начальные скорости в касательном слое. Размерность фазового пространства в 2 раза больше числа степеней свободы системы.