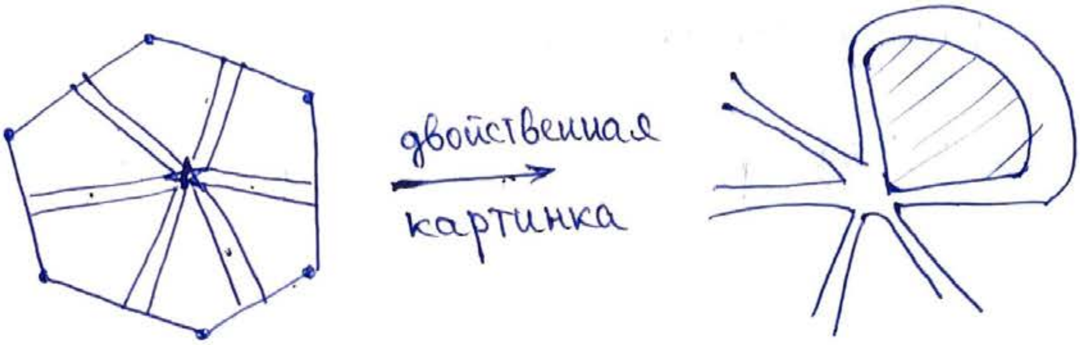
Лекция 09.04.21.



Гауссов интеграл

чётная штука

$$\frac{1}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \underbrace{f_1\dots f_{2n}}_{\uparrow}\, e^{-(\bar{x}, B\bar{x})}\, dx_1\dots dx_m,$$ k – какая-то константа

линейные ф-ции от координат

Такой интеграл обозначается так

$$\langle f_1 \dots f_{2n} \rangle. \qquad \text{(среднее)}$$

Утв. $$\boxed{\langle f_1, \dots, f_{2n} \rangle = \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{спарив.}}} \langle f_{p_1} f_{q_1} \rangle \langle f_{p_2} f_{q_2} \rangle \dots \langle f_{p_n} f_{q_n} \rangle}$$

Д-во. • $\langle f_1, \dots, f_{2n+1} \rangle = 0$

$$\left.\begin{aligned} &f_1 \cdot \ldots \cdot f_{2n+1} \text{ – нечетная ф-ция} \\ &e^{-(\bar{x}, B\bar{x})} \text{ – четная} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^m} = 0$$

• Достаточно доказать утв. для координат

$$\langle x_{i_1} \dots x_{i_{2n}} \rangle = \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{спариваниям}}} \langle x_{p_1} x_{q_1} \rangle \langle x_{p_2} x_{q_2} \rangle \dots$$

- $\langle x_{j_1}^{k_1} x_{j_2}^{k_2} \dots x_{j_l}^{k_l} \rangle = \langle x_{j_1}^{k_1} \rangle \langle x_{j_2}^{k_2} \rangle \dots \langle x_{j_l}^{k_l} \rangle$

В удобных координатах (в которых B диагональна):

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_1 \dots f_{2n} e^{-(\bar{x}, B\bar{x})} dx_1 \dots dx_m \to \int_{\mathbb{R}^m} f_1 \dots f_{2n} e^{-\sum x_i^2} dx_1 \dots dx_m$$

- $\langle x_i^{k_i} \rangle = \frac{1}{\dots} \int_{\mathbb{R}} x_i^{k_i} e^{-x_i^2} dx_i$

$$\langle f_1 \dots f_{2n} \rangle = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} \int_{\mathbb{R}^m} f_1 \dots f_{2n} e^{-\sum (x_i)^2} dx_1 \dots dx_m$$

$\langle x_i^{k_i} \rangle = \int_{\mathbb{R}} x_i^{k_i} e^{-x_i^2} dx_i$ (в тех коорд., в кот. B диагональна)

- $\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle = 0$ при $i_1 \neq i_2$

- $\langle x_{j_1}^{k_1} \rangle \langle x_{j_2}^{k_2} \rangle \dots \langle x_{j_l}^{k_l} \rangle = \Big(\sum\limits_{\text{по всем парам } x_{j_1}} \overbrace{\langle x_{j_1}^2 \rangle}^{\text{обе коорд. } x_{j_1}} \overbrace{\langle x_{j_1}^2 \rangle}^{\text{в какой-то степени}} \dots \Big) \times$

$\times \Big(\sum\limits_{\text{по всем парам } x_{j_2}} \langle \quad \rangle \langle \quad \rangle \dots \Big) \times \Big(\sum\limits_{\text{по всем парам } x_{j_3}} \langle \quad \rangle \langle \quad \rangle \dots \Big) \times \dots$

- $\langle x^{2k} \rangle = \sum\limits_{\text{по всем спариваниям}} \langle x^2 \rangle \langle x^2 \rangle \dots \langle x^2 \rangle$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$ (считали на прошлой лекции)

$\Downarrow$

$\langle x^{2k} \rangle = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(2k-1)!!}{2^k}$ – правая часть

Посчитаем левую часть

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k} e^{-x^2}\, dx = \begin{bmatrix} dv = d e^{-x^2} = \\ = -2x e^{-x^2} \\ u = -x^{2k-1} \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2k-1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k-2} e^{-x^2}\, dx = \ldots = \frac{(2k-1)!!}{2^k}. \quad ▨$$

Хотим считать интеграл по пр-ву эрмитовых матриц.

Опр. Матрица H эрмитова, если

$$H^+ = H,$$

где $H^+ = (\overline{H})^T$

$\dim \overbrace{M_N(\mathbb{C})}^{\text{пр-во матриц } N\times N} = 2N^2$

$\dim \underbrace{H(\mathbb{C})}_{\text{пр-во эрмитовых матриц}} = N^2$

будем считать такие интегралы

$$\frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{(\sqrt{\pi})^{N^2}} \int_{H(\mathbb{C})} \underline{Tr(H^{2n})}\, e^{-Tr(H^2)}\, \underline{dx_{ii} \ldots}$$

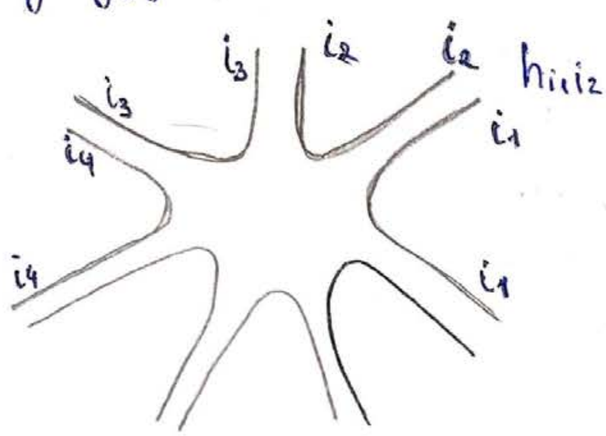
$$-Tr(H^2) = -\sum (x_{ii})^2 + 2\sum_{i<j} (Re\, x_{ij}) + 2\sum_{i<j} (Im\, x_{ij})$$

$$\boxed{\begin{aligned} &Tr(H^k) = \sum_{1 \le i_1 \ldots i_k \le N} h_{i_1 i_2} h_{i_2 i_3} h_{i_3 i_4} \ldots h_{i_k i_1}, \\ &\text{где } H = (h_{ij}) \end{aligned}}$$

- если k нечетное, то $\langle Tr\, H^k \rangle = 0$

- $$Tr(H^{2n}) = \sum_{1 \le i_1 \ldots i_k \le N} h_{i_1 i_2} h_{i_2 i_3} \ldots h_{i_{2n}} h_{i_1}$$

К такому произведению будем рисовать такую звезду



- $$\langle Tr(H^{2n}) \rangle = \langle \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} h_{i_1 i_2} h_{i_2 i_3} \ldots h_{i_{2n} i_1} \rangle =$$

$$= \sum \langle h_{i_1 i_2} h_{i_2 i_3} \ldots h_{i_{2n} i_1} \rangle$$

$$h_{12} = Re\, h_{12} + i\, Im\, h_{12}$$

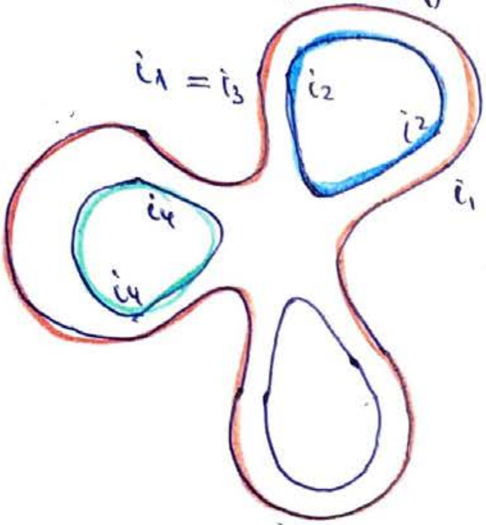
$$\langle \ldots \rangle = \sum \langle \ \rangle \langle \ \rangle \ldots \langle \ \rangle$$

$\langle h_{k_1 j_1} h_{k_2 j_2} \rangle = 0$ (k_1, j_1, k_2, j_2 – различные числа)

$$\langle h_{kk}^2 \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle h_{ij} h_{ji} \rangle = \mathrm{Re}\, h_{ij}^2 + \mathrm{Im}\, h_{ij}^2 = 1$$

$$\langle h_{j_1 j_2} h_{j_2 j_3} \dots h_{j_{2n} j_1} \rangle = \sum \langle \quad \rangle \langle \quad \rangle \dots \langle \quad \rangle \qquad (*)$$



Фейнмановская диаграмма для эрмитовой матричной модели

на линиях должно оказаться одно число, тогда попарный коррелятор (*) не равен 0

в данном случае N^4

$$\boxed{\langle \mathrm{Tr}(H^{2n}) \rangle = \sum_{\substack{\text{по} \\ \text{склейкам}}} N^{\#\text{ граней}}}$$

План.

$$\mathrm{T}_n(N) = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{склейкам}}} N^{\#\text{ вершин}} \text{ – было}$$

Оказалось, $\mathrm{T}_n(N) = \langle \mathrm{Tr}(H^{2n}) \rangle$

Док-ть: $\langle \mathrm{Tr}(H^{2n}) \rangle$ – многочлен от n.