Избранные главы дискретной математики. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно посылать вашему учебному ассистенту (его адрес сообщен всем записанным на этот НИС на корпоративную почту), до 24:00 четверга перед следующим занятием.

Задание с 4 занятия.

(1) Первая задача из прошлого занятия, в первую очередь для случая $\operatorname{char}\mathbb{K} = 2$.

(2) Докажите, что лексикографическое упорядочение булевых векторов из $\{0,1\}^n$ (при таком упорядочении два различных вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ связаны неравенством $a < b$, если существует такой номер k, что $a_k < b_k$, и при этом $a_i = b_i$ при всех $i < k$) совпадает с упорядочением по величине двоичной записи числа (вектору $a = (a_1, \ldots, a_n)$ отвечает целое число $n_a = a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \ldots + a_{n-1} 2^1 + a_n 2^0$).

(3) Обосновать следующий алгоритм вычисления многочлена Жегалкина булевой функции от n переменных. Задаем булеву функцию вектором из $N = 2^n$ ее значений, соответствующих лексикографическому упорядочению переменных, и записываем этот вектор в первый столбец матрицы A размером $N \times N$. Последовательно вычисляем все элементы матрицы A, лежащие не ниже побочной диагонали, по столбцам, начиная со второго столбца (первый уже заполнен). Элементы столбца с номером $k+1$ вычисляются по элементам k-ого столбца по формуле $a_{i,k+1} = a_{i,k} + a_{i+1,k}$. После заполнения всех столбцов в первой строке матрицы A оказываются коэффициенты многочлена Жегалкина, записанные в лексикографическом порядке.

(4) Докажите следующее свойство треугольника Паскаля по модулю 2: если $n_a = a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \ldots + a_{n-1} 2^1 + a_n 2^0$ и $n_b = b_1 2^{n-1} + b_2 2^{n-2} + \ldots + b_{n-1} 2^1 + b_n 2^0$ ($a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — булевы векторы) то

$$\binom{n_a}{n_b} \equiv 1 \pmod 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geq b_i \quad \forall i$$

(5) а) Докажите, что отображение Φ, сопоставляющее булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ новую булеву функцию

$$(\Phi f)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n} f(a_1, \ldots, a_n) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n},$$

является инволюцией на множестве булевых функций.

б) Как описать оператор Φ в терминах задачи 1? Как описать те булевы функции f, что $\Phi f = f$, и те, что представляются в виде $\Phi f + f$?