А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 8

8.1. Теорема Радона–Никодима

На прошлой лекции мы построили изометрический изоморфизм $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, где числа $p, q \in (1, +\infty)$ связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$. Чтобы обобщить этот результат на случай пространств $L^p(X, \mu)$, нам понадобится один важный результат из теории меры — теорема Радона–Никодима. Эта теорема весьма часто используется в функциональном анализе, теории вероятностей и других науках, поэтому ее справедливо считают одной из центральных теорем теории меры.

Пусть X — множество и $\mathscr{A}$ — алгебра его подмножеств.

Определение 8.1. Функция $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ называется *мерой* (или *комплексной мерой*), если для любого конечного набора попарно не пересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ выполнено равенство

$$\mu\Bigl(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\Bigr) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Мера $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ называется *σ-аддитивной*, если для любого счетного набора попарно не пересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$, такого, что $\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{A}$, выполнено равенство

$$\mu\Bigl(\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i\Bigr) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i). \tag{8.1}$$

Замечание 8.1. Подчеркнем, что требование сходимости ряда в (8.1) входит в определение σ-аддитивной меры и не следует автоматически из того, что множества A_i попарно не пересекаются (в отличие от случая неотрицательных мер). Отметим также, что этот ряд сходится абсолютно, т.к. левая часть формулы (8.1) не зависит от нумерации множеств A_i.

Чтобы работать с комплексными мерами, удобно сопоставить каждой комплексной мере некоторую «обычную» (т.е. неотрицательную) меру, называемую ее вариацией.

Определение 8.2. *Вариацией* меры $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ называется функция $|\mu|\colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$, заданная формулой

$$|\mu|(A) = \sup\Bigl\{\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| : A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i,\ A_i \in \mathscr{A}\Bigr\}.$$

Доказательство следующего предложения — простое упражнение.

Предложение 8.1. *Вариация меры μ сама является мерой на $\mathscr{A}$. Если мера μ σ-аддитивна, то такова же и $|\mu|$.*

Определение 8.3. Говорят, что мера μ на алгебре $\mathscr{A}$ имеет *ограниченную вариацию*, если $|\mu|(X) < \infty$.

Предложение 8.2. *Если $\mathscr{A}$ — σ-алгебра, а $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ — σ-аддитивная мера, то μ имеет ограниченную вариацию.*

Для доказательства нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 8.3. *Для любого набора чисел $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ найдется такое подмножество $S \subset \{1, \ldots, n\}$, что*

$$\Big|\sum_{i\in S} a_i\Big| \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Докажите эту лемму сами в качестве упражнения.

Доказательство предложения 8.2. Разберем сначала случай, когда мера μ вещественна. Предположим, что $|\mu|(X) = \infty$. Тогда для любого $C > 0$ существует разбиение $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i$, где $X_i \in \mathscr{A}$, такое, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu(X_i)| \geqslant C.$$

Зафиксируем такое разбиение для константы $C = 2(|\mu(X)| + 1)$. Согласно лемме 8.3, найдется такое подмножество $S \subset \{1, \ldots, n\}$, что

$$\Big|\mu\Big(\bigcup_{i\in S} X_i\Big)\Big| = \Big|\sum_{i\in S} \mu(X_i)\Big| \geqslant \frac{C}{2} \geqslant 1. \tag{8.2}$$

Положим $A = \bigcup_{i\in S} X_i$ и $B = X \setminus A$. С учетом (8.2) получаем оценку

$$|\mu(B)| = |\mu(X) - \mu(A)| \geqslant |\mu(A)| - |\mu(X)| \geqslant \frac{C}{2} - |\mu(X)| = 1.$$

Итак, мы построили такое разбиение $X = A \sqcup B$, что $|\mu(A)| \geqslant 1$ и $|\mu(B)| \geqslant 1$. Из предположения $|\mu|(X) = \infty$ следует, что либо $|\mu|(A) = \infty$, либо $|\mu|(B) = \infty$. Будем считать, что $|\mu|(B) = \infty$, и применим к множеству B ту же процедуру, что была проделана выше для всего множества X. Получим разбиение $B = A_1 \sqcup B_1$, в котором $|\mu(A_1)| \geqslant 1$ и $|\mu|(B_1) = \infty$. Далее проделаем то же самое для множества B_1, и т.д. В итоге получим бесконечную последовательность попарно не пересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$, в которой $|\mu(A_i)| \geqslant 1$ для всех i. Следовательно, ряд $\sum_i \mu(A_i)$ расходится, что противоречит σ-аддитивности меры μ. Таким образом, для вещественных мер предложение доказано.

Если μ — комплексная мера, то представим ее в виде $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1, μ_2 — ее вещественная и мнимая части. Очевидно, μ_1 и μ_2 также являются σ-аддитивными мерами на $\mathscr{A}$ и по доказанному выше имеют ограниченную вариацию. Но из определения вариации меры легко следует, что $|\mu| \leqslant |\mu_1| + |\mu_2|$; следовательно, μ также имеет ограниченную вариацию. □

Обсудим теперь одну конструкцию комплексных мер. Пусть $\mathscr{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества X и $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ — σ-аддитивная мера. Возьмем какую-нибудь μ-интегрируемую функцию $\rho\colon X \to \mathbb{C}$ и определим функцию $\rho\cdot\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$, полагая

$$(\rho\cdot\mu)(A) = \int_A \rho(x)\,d\mu(x) \qquad (A \in \mathscr{A}).$$

Из свойств интеграла Лебега немедленно следует, что $\rho\cdot\mu$ — комплексная мера на $\mathscr{A}$. Легко проверить (проверьте!), что если ρ_1, ρ_2 — μ-интегрируемые функции на X и $\rho_1\cdot\mu = \rho_2\cdot\mu$, то $\rho_1 = \rho_2$ μ-п.в. Следовательно, функция ρ определена мерой $\nu = \rho\cdot\mu$ однозначно с точностью до равенства μ-п.в. Эта функция называется *плотностью* меры ν относительно μ.

Отметим следующее очевидное свойство меры $\rho\cdot\mu$: если $\mu(A) = 0$ для некоторого $A \in \mathscr{A}$, то и $(\rho\cdot\mu)(A) = 0$. У этого свойства есть специальное название:

Определение 8.4. Пусть $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ и $\nu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ — σ-аддитивные меры. Говорят, что мера ν *абсолютно непрерывна* относительно μ (и пишут $\nu \ll \mu$), если из условия $\mu(A) = 0,\ A \in \mathscr{A}$ следует, что $\nu(A) = 0$.

Наблюдение 8.4. Из определения вариации меры легко следует, что $\nu \ll \mu$ тогда и только тогда, когда $|\nu| \ll \mu$.

Из сказанного выше видно, что если мера ν имеет плотность относительно μ, то она абсолютно непрерывна относительно μ. Теорема Радона–Никодима утверждает, что верно и обратное.

Теорема 8.5 (Радон, Никодим). *Пусть $\mathscr{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества X, $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ и $\nu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ — σ-аддитивные меры, причем μ σ-конечна. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) *$\nu \ll \mu$;*
- (ii) *$\nu = \rho\cdot\mu$ для некоторой μ-интегрируемой функции $\rho\colon X \to \mathbb{C}$.*

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8.6. *Пусть $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,+\infty)$ — σ-аддитивная мера, $\rho\colon \mathscr{A} \to [0,+\infty)$ — μ-интегрируемая функция. Положим $\nu = \rho\cdot\mu$. Тогда следующие свойства $\mathscr{A}$-измеримой функции $f\colon X \to \mathbb{C}$ эквивалентны:*

- (i) *f ν-интегрируема;*
- (ii) *$f\rho$ μ-интегрируема.*

Если эти свойства выполнены, то

$$\int_X f(x)\,d\nu(x) = \int_X f(x)\rho(x)\,d\mu(x). \tag{8.3}$$

Схема доказательства. Для характеристических функций $f = \chi_A$ (где $A \in \mathscr{A}$) и их линейных комбинаций (так называемых простых функций) равенство (8.3) очевидно. Если $f \geqslant 0$, то f является поточечным пределом неубывающей последовательности простых функций (докажите!), и как эквивалентность условий (i) и (ii), так и равенство (8.3) доказываются с помощью теоремы о монотонной сходимости. Общий случай сводится к предыдущему с помощью разложения $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$, где $f_k \geqslant 0$. $\square$

Доказательство теоремы 8.5. Доказательство проведем в несколько шагов.

Случай 1: предположим, что обе меры μ и ν неотрицательны и конечны, и положим $\lambda = \mu+\nu$. Легко проверить (проверьте!), что всякая $\mathscr{A}$-измеримая λ-интегрируемая функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ μ-интегрируема, и $\int_X |f|\,d\mu \leqslant \int_X |f|\,d\lambda$. В частности, это верно для любой функции $f \in L^2(X,\lambda)$, которая λ-интегрируема ввиду конечности λ. Следовательно, определен линейный функционал

$$F\colon L^2(X,\lambda) \to \mathbb{C}, \quad F(f) = \int_X f(x)\,d\mu(x).$$

Используя сделанное выше наблюдение и неравенство Коши–Буняковского–Шварца, заключаем, что для любой $f \in L^2(X,\mu)$ справедливы неравенства

$$|F(f)| \leqslant \int_X |f|\,d\mu \leqslant \int_X |f|\,d\lambda \leqslant \lambda(X)^{1/2}\|f\|_{L^2(X,\lambda)}.$$

Следовательно, функционал F ограничен, и в силу теоремы Рисса существует такая функция $\psi \in L^2(X,\lambda)$, что

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f\psi\,d\lambda \quad (f \in L^2(X,\lambda)).$$

Подставляя сюда $f = \chi_A$ (где $A \in \mathscr{A}$), заключаем, что

$$\mu = \psi \cdot \lambda, \quad \nu = \lambda - \mu = (1-\psi)\cdot\lambda. \tag{8.4}$$

Отсюда и из неотрицательности мер μ и ν легко следует (убедитесь!), что $\psi \geqslant 0$ λ-п.в. и $1-\psi \geqslant 0$ λ-п.в.

Формулы (8.4) наводят на мысль, что искомая плотность меры ν относительно μ — это функция $(1-\psi)/\psi$. Докажем это. Во-первых, добьемся того, чтобы эта функция была всюду определена. Для этого рассмотрим множество $E = \{x \in X : \psi(x) = 0\}$. Из (8.4) следует, что $\mu(E) = \int_E \psi\,d\lambda = 0$. С учетом условия $\nu \ll \mu$ получаем отсюда, что $\nu(E) = 0$, а значит, и $\lambda(E) = 0$. Таким образом, $\psi > 0$ λ-п.в. Переопределив ψ на E (например, положив ее равной 1 на E), мы добьемся того, что $\psi > 0$ всюду на X; соотношения (8.4) при этом сохранятся.

Положим теперь $\rho = (1-\psi)/\psi$. Функция $\rho\psi = 1-\psi$ λ-интегрируема, поэтому, в силу (8.4) и леммы 8.6, функция ρ μ-интегрируема, и для любого $A \in \mathscr{A}$ справедливы равенства

$$\int_A \rho\,d\mu = \int_A \rho\psi\,d\lambda = \int_A (1-\psi)\,d\lambda = \nu(A).$$

Следовательно, $\nu = \rho\cdot\mu$, как и требовалось.

Случай 2: пусть теперь мера μ σ-конечна, а ν по-прежнему неотрицательна. Представим X в виде $X = \bigcup_n X_n$, где $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность множеств из $\mathscr{A}$, для которых $\mu(X_n) < \infty$. Применяя разобранный выше случай 1, для каждого n получаем μ-интегрируемую функцию $\rho_n\colon X_n \to [0,+\infty)$, такую, что для любого $A \in \mathscr{A}$, $A \subseteq X_n$ справедливо равенство $\nu(A) = \int_A \rho_n\,d\mu$. Поскольку это же равенство выполнено и для функции ρ_{n+1} вместо ρ_n, мы заключаем, что $\rho_{n+1}|_{X_n} = \rho_n$ μ-п.в. Следовательно, определена функция $\rho\colon X \to [0,+\infty)$, для каждого n удовлетворяющая условию $\rho|_{X_n} = \rho_n$ μ-п.в. Заметим, что $\sup_n \int_{X_n} \rho\,d\mu = \sup_n \nu(X_n) \leqslant \nu(X) < \infty$, поэтому ρ μ-интегрируема на X. Остается заметить, что любого $A \in \mathscr{A}$ справедливы равенства

$$(\rho \cdot \mu)(A) = \lim_{n\to\infty} (\rho \cdot \mu)(A \cap X_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap X_n) = \nu(A),$$

т.е. $\nu = \rho \cdot \mu$, как и требовалось.

Случай 3: пусть теперь мера ν вещественна. Представим ее в виде $\nu = \nu_1 - \nu_2$, где $\nu_1 = |\nu|$ и $\nu_2 = |\nu| - \nu$. Меры ν_1 и ν_2 неотрицательны и абсолютно непрерывны относительно μ, поэтому, согласно разобранному выше случаю 2, они имеют вид $\nu_k = \rho_k \cdot \mu$ $(k = 1, 2)$ для некоторых μ-интегрируемых функций ρ_k на X. Следовательно, $\nu = (\rho_1 - \rho_2) \cdot \mu$.

Случай 4 (общий). Запишем меру ν в виде $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, где ν_1 и ν_2 — ее действительная и мнимая части. Меры ν_1 и ν_2 вещественны и абсолютно непрерывны относительно μ, поэтому, согласно разобранному выше случаю 3, они имеют вид $\nu_k = \rho_k \cdot \mu$ $(k = 1, 2)$ для некоторых μ-интегрируемых функций ρ_k на X. Следовательно, $\nu = (\rho_1 + i\rho_2) \cdot \mu$. □

С помощью теоремы Радона–Никодима нетрудно описать пространство, сопряженное к $L^p(X, \mu)$. Следующая теорема обобщает предложение 7.4.

Теорема 8.7. *Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $p, q \in (1, +\infty)$ и $1/p + 1/q = 1$. Существует изометрический изоморфизм $L^q(X, \mu) \to (L^p(X, \mu))^*$, переводящий каждую функцию $g \in L^q(X, \mu)$ в функционал $\varphi_g \in (L^p(X, \mu))^*$, действующий по правилу*

$$\varphi_g(f) = \int_X f(x)g(x)\, d\mu(x) \qquad (f \in L^p(X, \mu)). \tag{8.5}$$

Схема доказательства. То, что сопоставление $g \mapsto \varphi_g$ действительно является линейным отображением из $L^q(X, \mu)$ в $(L^p(X, \mu))^*$, не увеличивающим норму, проверяется так же, как в доказательстве предложения 7.4. Для доказательства его инъективности достаточно взять $f = \chi_A$, где $A \subseteq X$ — измеримое множество конечной меры. Чтобы доказать сюръективность этого отображения, предположим, что $\mu(X) < \infty$, и для произвольного $\varphi \in (L^p(X, \mu))^*$ определим комплексную меру ν формулой $\nu(A) = \varphi(\chi_A)$. Легко проверяется, что ν — σ-аддитивная мера, и что $\nu \ll \mu$. По теореме Радона–Никодима, $\nu = g \cdot \mu$ для некоторой $g \in L^1(X, \mu)$. Иначе говоря, для $f = \chi_A$ справедлива формула

$$\varphi(f) = \int_X f(x)g(x)\, d\mu(x). \tag{8.6}$$

В случае σ-конечной меры μ существование такой функции g (уже не обязательно интегрируемой!) легко сводится к только что разобранному случаю с помощью подходящего исчерпания $X = \bigcup_n X_n$ множествами X_n конечной меры.

Остается проверить, что $g \in L^q(X, \mu)$, что формула (8.6) справедлива для всех $f \in L^p(X, \mu)$, и что $\|g\| = \|\varphi\|$. Это делается в два этапа. Сначала формула (8.6) проверяется в предположении, что f ограничена и сосредоточена на множестве конечной меры; для этого следует использовать подходящую теорему о предельном переходе. Затем нужно подставить в (8.6) вместо f функцию $g_n = (|g|^q/g)\chi_{A_n}$, где $A_n = \{x : 0 < |g(x)| \leqslant n\} \cap X_n$. Дальнейшие рассуждения — те же, что в доказательстве предложения 7.4. □

Упражнение 8.1. Постройте изометрический изоморфизм $(L^1(X, \mu))^* \cong L^\infty(X, \mu)$, где (X, μ) — пространство с мерой.

Замечание 8.2. Напомним (см. лекцию 1), что все пространства с мерой, которые мы рассматриваем, по умолчанию предполагаются σ-конечными. Можно, однако, показать, что теорема 8.7 сохраняет силу для произвольных пространств с мерой; одна из возникающих при этом тонкостей — проверить, что функция g измерима. Что же касается теоремы Радона–Никодима и упражнения 8.1, то в их формулировках σ-конечность меры μ существенна (попробуйте привести соответствующие контрпримеры).

А. Ю. Пирковский

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 9

Считается, что классический функциональный анализ стоит на «трех китах» — на трех фундаментальных теоремах. Это теорема Хана–Банаха, теорема Банаха об обратном операторе и теорема Банаха–Штейнгауза. Наша ближайшая цель — познакомиться с первым из этих «китов».

9.1. Теорема Хана–Банаха

Чтобы понятия сопряженного пространства и сопряженного оператора были содержательными, хотелось бы, чтобы на каждом нормированном пространстве имелось достаточно много (в каком-либо разумном смысле) ограниченных линейных функционалов. Мы уже видели, что сопряженные пространства к гильбертову пространству и к пространствам L^p довольно обширны. А что происходит в общем случае? Если задуматься, то совершенно непонятно, почему на произвольном нормированном пространстве вообще должны существовать ограниченные линейные функционалы (кроме нулевого). На самом деле они действительно существуют, и их «достаточно много». Это, а также многое другое, следует из теоремы Хана–Банаха, которую нам предстоит доказать.

Пусть X — векторное пространство (как обычно, над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Определение 9.1. Функция $p\colon X \to \mathbb{R}$ называется *сублинейным функционалом*, если

(i) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$;
(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad (x \in X,\ \lambda \geqslant 0)$.

Например, всякая полунорма является сублинейным функционалом. Отличие этих двух понятий в том, что, во-первых, сублинейный функционал (в отличие от полунормы) может принимать и отрицательные значения, а во-вторых, в условии (ii) из определения сублинейного функционала речь идет только о неотрицательных (а не о произвольных) скалярах. Вот другой пример: если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то любой линейный функционал является сублинейным.

Мы обсудим теорему Хана–Банаха в двух вариантах. Первый вариант относится только к векторным пространствам над $\mathbb{R}$.

Теорема 9.1 (Хан, Банах). *Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $p\colon X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал, $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство и $f_0\colon X_0 \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, удовлетворяющий условию $f_0(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in X_0$. Тогда существует линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$, продолжающий f_0 и такой, что $f(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $X = X_0 \oplus \mathbb{R}y$ для некоторого $y \in X \setminus X_0$. Тогда задать линейный функционал f на X, продолжающий f_0 — это все равно, что задать число $c = f(y)$. Пусть f — такой функционал. Мы хотим добиться того, чтобы

$$f(\pm\lambda y + x) \leqslant p(\pm\lambda y + x) \quad \text{для всех } \lambda > 0 \text{ и } x \in X_0. \tag{9.1}$$

Вынося λ из обеих частей неравенства и сокращая на λ, видим, что условие (9.1) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} & f(\pm y + \lambda^{-1}x) \leqslant p(\pm y + \lambda^{-1}x) \quad \text{для всех } \lambda > 0 \text{ и } x \in X_0 \\ & \quad\iff f(\pm y + x) \leqslant p(\pm y + x) \quad \text{для всех } x \in X_0 \\ & \quad\iff \pm c + f_0(x) \leqslant p(\pm y + x) \quad \text{для всех } x \in X_0 \\ & \quad\iff f_0(x) - p(-y + x) \leqslant c \leqslant p(y + x) - f_0(x) \quad \text{для всех } x \in X_0. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Итак, наша задача свелась к нахождению числа $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего (9.2). Ясно, что такое c существует тогда и только тогда, когда

$$f_0(x_1) - p(-y + x_1) \leqslant p(y + x_2) - f_0(x_2) \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in X_0,$$

или, что эквивалентно,

$$f_0(x_1 + x_2) \leqslant p(y + x_2) + p(-y + x_1) \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in X_0. \tag{9.3}$$

Но из условия следует, что для любых $x_1, x_2 \in X_0$ справедливы неравенства

$$f_0(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1 + x_2) \leqslant p(y + x_2) + p(-y + x_1).$$

Это доказывает (9.3), а вместе с ним и существование функционала f с требуемыми свойствами.

Общий случай сводится к предыдущему при помощи леммы Цорна. А именно, рассмотрим множество M, состоящее из пар (Z, g), где $Z \supseteq X_0$ — векторное подпространство в X, а $g\colon Z \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, продолжающий f_0 и удовлетворяющий неравенству $g(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in Z$. Введем отношение порядка на M, полагая $(Z_1, g_1) \leqslant (Z_2, g_2)$, если $Z_1 \subseteq Z_2$ и $g_2|_{Z_1} = g_1$. Очевидно, любое линейно упорядоченное подмножество $\{(Z_\alpha, g_\alpha)\} \subset M$ имеет верхнюю грань (Z, g), где $Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$, а функционал g однозначно определяется из условия $g|_{Z_\alpha} = g_\alpha$ для всех α. Поэтому в M есть максимальный элемент (Z, f).

Мы утверждаем, что $Z = X$. В самом деле, если это не так, то зафиксируем $y \in X \setminus Z$ и, пользуясь уже разобранным частным случаем нашей теоремы, продолжим f до функционала h на пространстве $Z_1 = Z \oplus \mathbb{R}y$, удовлетворяющего условию $h(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in Z_1$. Но существование такого продолжения противоречит максимальности элемента (Z, f) в множестве M. Следовательно, $Z = X$, и f — искомый функционал. $\square$

В таком виде, как мы ее доказали, пользоваться теоремой Хана–Банаха не всегда удобно. Во-первых, пока не совсем понятно, какое отношение она имеет к ограниченным линейным функционалам на нормированных пространствах. А во-вторых, в ней ничего не говорится о векторных пространствах над $\mathbb{C}$. Чтобы сформулировать и доказать вторую разновидность теоремы Хана–Банаха, в большей степени применимую к задачам классического функционального анализа, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9.2. *Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{C}$.*

(i) *Отображение*

$$\alpha\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R}), \quad \alpha(f) = \operatorname{Re} f,$$

является биекцией, и обратное к нему задается формулой

$$\alpha^{-1}(g)(x) = g(x) - ig(ix) \qquad (x \in X).$$

(ii) *Пусть $\|\cdot\|$ — полунорма на X, $g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})$ и $\tilde g = \alpha^{-1}(g)$. Тогда*

$$|g(x)| \leqslant \|x\| \quad \forall\, x \in X \iff |\tilde g(x)| \leqslant \|x\| \quad \forall\, x \in X.$$

Доказательство. (i) Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re}(iz)$. Поэтому для любого $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})$ имеем

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) \qquad (x \in X). \tag{9.4}$$

Зафиксируем теперь $g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})$ и рассмотрим отображение

$$\tilde g\colon X \to \mathbb{C}, \quad \tilde g(x) = g(x) - ig(ix) \qquad (x \in X).$$

Очевидно, $\tilde g$ — $\mathbb{R}$-линейный функционал на X. Далее,

$$\tilde g(ix) = g(ix) + ig(x) = i\tilde g(x),$$

откуда следует, что $\tilde g$ $\mathbb{C}$-линеен. Ясно, наконец, что $\operatorname{Re}\tilde g = g$. Отсюда и из (9.4) следует утверждение (i).

(ii) Импликация ($\Longleftarrow$) очевидна. Для доказательства обратного утверждения зафиксируем произвольный $x \in X$ и представим $\tilde g(x)$ в виде $\tilde g(x) = re^{i\varphi}$, где $r \geqslant 0$. Положим $y = e^{-i\varphi}x$. Тогда $\tilde g(y) = r \in \mathbb{R}$, поэтому $\tilde g(y) = g(y)$. Отсюда

$$|\tilde g(x)| = r = \tilde g(y) = g(y) \leqslant \|y\| = \|x\|,$$

как и требовалось. □

Теорема 9.3 (Хан, Банах). *Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $\|\cdot\|$ — полунорма на X, $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство и $f_0\colon X_0 \to \mathbb{K}$ — линейный функционал, удовлетворяющий условию $|f_0(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X_0$. Тогда существует линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{K}$, продолжающий f_0 и такой, что $|f(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Случай 1: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Из теоремы 9.1 следует, что существует линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$, продолжающий f_0 и такой, что $f(x) \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$. Заменяя x на $-x$, получаем

$$-f(x) = f(-x) \leqslant \|-x\| = \|x\|,$$

откуда окончательно следует, что $-\|x\| \leqslant f(x) \leqslant \|x\|$, т.е. $|f(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$.

Случай 2: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Из уже разобранного случая 1 следует, что существует $\mathbb{R}$-линейный функционал $g\colon X \to \mathbb{R}$, продолжающий $\operatorname{Re} f_0$ и такой, что $|g(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$. Применяя лемму 9.2, видим, что функционал $f = \alpha^{-1}(g)$ — искомый. □

Выведем теперь несколько важных следствий из теоремы Хана–Банаха.

Следствие 9.4. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство. Тогда для любого $f_0 \in X_0^*$ существует $f \in X^*$, продолжающий f_0 и такой, что $\|f\| = \|f_0\|$.*

Доказательство. Домножим норму в X на число $\|f_0\|$ и применим теорему 9.3. □

Иначе говоря, любой ограниченный линейный функционал, заданный на подпространстве нормированного пространства, продолжается на все пространство с сохранением нормы. Естественно поинтересоваться: а можно ли таким же образом продолжать линейные операторы? В контексте линейной алгебры ответ утвердителен:

Упражнение 9.1. Пусть X и Y — векторные пространства (над любым полем) и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Тогда любой линейный оператор $T_0\colon X_0 \to Y$ продолжается до линейного оператора $T\colon X \to Y$.

Но в контексте функционального анализа это уже не так:

Упражнение 9.2. Если X и Y — нормированные пространства и $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство, то, вообще говоря, не всякий ограниченный линейный оператор $T_0\colon X_0 \to Y$ продолжается до ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$.

Замечание 9.1 (*для знакомых с основами гомологической алгебры*)**.** Упражнение 9.1 утверждает попросту, что все векторные пространства (т.е. все модули над полем) инъективны, а упражнение 9.2 состоит в том, что в категории нормированных пространств уже не все объекты инъективны. Тем не менее, из следствия 9.4 вытекает, что основное поле $\mathbb{K}$ — инъективное нормированное пространство. См. по этому поводу также задачи из листка 6.

Следствие 9.5. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда для любого ненулевого $x \in X$ найдется такой $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$.*

Доказательство. Зададим функционал $f_0\colon \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$ формулой $f_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$ и продолжим его на X с сохранением нормы (см. следствие 9.4). □

Следствие 9.6. *Пусть X — нормированное пространство и $x_1, x_2 \in X$ — различные векторы. Тогда существует такой $f \in X^*$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Следствие 9.6 обычно выражают фразой «ограниченные линейные функционалы *разделяют точки* пространства X», или «на любом нормированном пространстве имеется *достаточно много* ограниченных линейных функционалов».

Следствие 9.7. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $x \in X \setminus \overline{X_0}$. Тогда существует такой $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$, $f|_{X_0} = 0$ и $f(x) = \rho(x, X_0)$.*

Доказательство. Применим следствие 9.5 к вектору $x + \overline{X_0} \in X/\overline{X_0}$ и получим такой функционал $g \in (X/\overline{X_0})^*$, что $\|g\| = 1$ и

$$g(x + \overline{X_0}) = \|x + \overline{X_0}\|^\wedge = \rho(x, \overline{X_0}) = \rho(x, X_0).$$

Остается положить $f = g \circ Q$, где $Q\colon X \to X/\overline{X_0}$ — факторотображение. Равенство $\|f\| = 1$ следует тогда из коизометричности Q, а остальные требуемые свойства f очевидны. □

Следствие 9.8. *Пусть X — нормированное пространство. Для любого $x \in X$ справедливо равенство*

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*,\, \|f\| \leqslant 1} |f(x)|, \tag{9.5}$$

причем эта верхняя грань достигается на некотором f.

Доказательство. Это просто переформулировка следствия 9.5. □

Теперь мы можем выполнить обещание, данное в начале лекции 8.

Следствие 9.9. *Пусть $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор между нормированными пространствами. Тогда $\|T^*\| = \|T\|$.*

Доказательство. Из определения оператора T^* и равенства (9.5) получаем:

$$\|T^*\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|T^*(f)\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \sup_{\|x\| \leqslant 1} |T^*(f)(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(Tx)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| = \|T\|. \quad \square$$

Следствие 9.10. *Если $S, T \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $S \neq T$, то и $S^* \neq T^*$.*

9.2. Отделение выпуклых множеств

Обсудим теперь одно важное геометрическое следствие теоремы Хана–Банаха. Прежде чем его формулировать, дадим несколько определений.

Пусть X — векторное пространство (как обычно, над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Определение 9.2. Непустое подмножество $S \subseteq X$ называется

- *выпуклым*, если для любых $x, y \in S$ отрезок $[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$ содержится в S;
- *закругленным* (или *сбалансированным*), если $\lambda S \subset S$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leqslant 1$;
- *абсолютно выпуклым*, если оно выпукло и закруглено;
- *поглощающим*, если для любого $x \in X$ найдется такое $C > 0$, что $x \in \lambda S$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geqslant C$.

Замечание 9.2. Обратите внимание, что если подмножество $S \subseteq X$ — закругленное или поглощающее, то $0 \in S$.

Пример 9.1. Если $\|\cdot\|$ — полунорма на X, то шары

$$\mathbb{B}_{r,X} = \{x \in X : \|x\| \leqslant r\}, \quad \mathbb{B}^\circ_{r,X} = \{x \in X : \|x\| < r\}$$

являются абсолютно выпуклыми поглощающими множествами (проверьте!).

В дальнейшем мы будем часто использовать следующие простейшие свойства выпуклых и закругленных множеств. Их доказательство — несложное упражнение.

Предложение 9.11. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *сумма любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;*
(ii) *пересечение любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;*
(iii) *образ и прообраз выпуклого множества при линейном отображении — выпуклые множества;*
(iv) *аналогичные утверждения справедливы для закругленных множеств;*
(v) *замыкание* $\overline{S}$ *и внутренность* $\operatorname{Int}(S)$ *выпуклого множества* S *в нормированном пространстве — выпуклые множества;*
(vi) *замыкание* $\overline{S}$ *закругленного множества* S *в нормированном пространстве — закругленное множество; если же* $0 \in \operatorname{Int}(S)$, *то и* $\operatorname{Int}(S)$ *закруглено.*

С каждым поглощающим множеством можно связать одну важную функцию — его функционал Минковского.

Определение 9.3. Пусть X — векторное пространство и $S \subseteq X$ — поглощающее множество. *Функционалом Минковского* множества S называется функция

$$p_S \colon X \to [0,+\infty); \quad p_S(x) = \inf\{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda S\}.$$

Перечислим простейшие свойства функционала Минковского:

Предложение 9.12. *Пусть* S *— поглощающее множество в векторном пространстве* X. *Тогда:*

(i) $p_S(\lambda x) = \lambda p_S(x)$ *для всех* $x \in X$, $\lambda \geqslant 0$;
(ii) *если* S *выпукло, то* $p_S(x+y) \leqslant p_S(x) + p_S(y)$ *для всех* $x, y \in X$;
(iii) *если* S *закруглено, то* $p_S(\lambda x) = |\lambda| p_S(x)$ *для всех* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$;
(iv) *если* S *абсолютно выпукло, то* p_S *— полунорма;*
(v) *если* S *выпукло, то* $\{x : p_S(x) < 1\} \subseteq S \subseteq \{x : p_S(x) \leqslant 1\}$.

Доказательство. Мы докажем только утверждение (ii); остальные утверждения докажите сами в качестве упражнения.

Нетрудно проверить (проверьте!), что для любого выпуклого множества S и любых $\alpha, \beta \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\alpha S + \beta S = (\alpha + \beta) S. \tag{9.6}$$

Возьмем теперь $x, y \in X$, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\alpha, \beta > 0$ так, чтобы

$$x \in \alpha S, \quad y \in \beta S, \quad \alpha \leqslant p_S(x) + \varepsilon, \quad \beta \leqslant p_S(y) + \varepsilon.$$

Из (9.6) заключаем, что $x + y \in (\alpha + \beta) S$, откуда

$$p_S(x+y) \leqslant \alpha + \beta \leqslant p_S(x) + p_S(y) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это завершает доказательство п. (ii). □

Пусть теперь X — нормированное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение 9.4. Говорят, что множества $A, B \subset X$ *разделены гиперплоскостью* (соответственно, *строго разделены гиперплоскостью*), если существуют такие $f \in X^*$ и $c \in \mathbb{R}$, что для любых $a \in A$ и $b \in B$ справедливо неравенство $f(a) \leqslant c \leqslant f(b)$ (соответственно, $f(a) < c < f(b)$).

С геометрической точки зрения это означает, что множества A и B лежат в разных замкнутых (соответственно, открытых) полупространствах, на которые гиперплоскость $\{x : f(x) = c\}$ разбивает пространство X.

Теорема 9.13. *Пусть X — нормированное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $A, B \subset X$ — выпуклые непересекающиеся подмножества.*

(i) *Если $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$, то A и B разделены гиперплоскостью.*
(ii) *Если A и B открыты, то они строго разделены гиперплоскостью.*
(iii) *Если A замкнуто, а B компактно, то они строго разделены гиперплоскостью.*

Доказательство. (i) Поскольку $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$, то и $\operatorname{Int}(B - A) \neq \varnothing$ (объясните, почему). Зафиксируем произвольный $y \in \operatorname{Int}(B - A)$ и положим $M = A - B + y$. Из предложения 9.11 следует, что M выпукло. Далее, $0 \in \operatorname{Int} M$ (почему?), поэтому M поглощающее. Наконец, $y \notin M$ (т.к. $A \cap B = \varnothing$), откуда $p_M(y) \geqslant 1$.

Рассмотрим линейный функционал $f_0 \colon \mathbb{R}y \to \mathbb{R}$, однозначно определенный условием $f_0(y) = p_M(y)$. Ясно, что $f_0(z) \leqslant p_M(z)$ для всех $z \in \mathbb{R}y$. Из теоремы 9.1 следует, что существует линейный функционал $f \colon X \to \mathbb{R}$, продолжающий f_0 и удовлетворяющий условию $f(x) \leqslant p_M(x)$ для всех $x \in X$. В частности, $f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in M$. Отсюда с учетом того, что $0 \in \operatorname{Int} M$, следует, что f переводит некоторую окрестность нуля в ограниченное множество (обоснуйте!). Следовательно, f ограничен.

Наконец, заметим, что условие $f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in M$ равносильно тому, что $f(a) - f(b) + p_M(y) \leqslant 1$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Отсюда и из неравенства $p_M(y) \geqslant 1$ заключаем, что $f(a) \leqslant f(b)$. С учетом произвольности $a \in A$ и $b \in B$ это доказывает утверждение (i): в качестве константы $c \in \mathbb{R}$, фигурирующей в определении 9.4, можно взять, например, $\sup f(A)$.

(ii) Предположим теперь, что A и B открыты. Из п. (i) следует, что существуют такие $f \in X^*$ и $c \in \mathbb{R}$, что

$$\sup f(A) \leqslant c \leqslant \inf f(B). \tag{9.7}$$

Воспользуемся тем несложным утверждением (докажите его!), что любой ненулевой ограниченный линейный функционал — открытое отображение X на $\mathbb{R}$. Из него следует, что $f(A)$ и $f(B)$ — открытые подмножества $\mathbb{R}$, откуда с учетом (9.7) получаем строгие неравенства $f(a) < c < f(b)$ для всех $a \in A$, $b \in B$.

(iii) Наконец, предположим, что A замкнуто, а B компактно. Нетрудно проверить (проверьте!), что существует такое $\varepsilon > 0$, что $A \cap (B + \mathbb{B}^\circ_\varepsilon) = \varnothing$. Отсюда следует, что

$$(A + \mathbb{B}^\circ_{\varepsilon/2}) \cap (B + \mathbb{B}^\circ_{\varepsilon/2}) = \varnothing.$$

Поскольку множества $(A + \mathbb{B}^\circ_{\varepsilon/2})$ и $(B + \mathbb{B}^\circ_{\varepsilon/2})$ открыты и выпуклы, они строго разделены гиперплоскостью в силу п. (ii). Следовательно, A и B тем более строго разделены гиперплоскостью. □

Замечание 9.3. Можно показать, что в конечномерном нормированном пространстве любые два выпуклых непересекающихся множества разделены гиперплоскостью. В бесконечномерном случае это уже, вообще говоря, не так, даже если эти множества замкнуты (см. задачи из листка 7).

Замечание 9.4. Мы получили теорему 9.13 о разделении выпуклых множеств как следствие теоремы Хана–Банаха. На самом деле, если немного переформулировать п. (i) теоремы 9.13 (а именно, вместо нормированных пространств рассматривать произвольные векторные пространства, а вместо внутренности — так называемую «линейную внутренность»), то полученное утверждение окажется в сущности эквивалентным теореме Хана–Банаха (см. соответствующую задачу из листка 7).

О ряде других эквивалентных формулировок теоремы Хана–Банаха и об их приложениях можно прочитать в книге R. Holmes, “Geometric Functional Analysis and its applications” (Springer, 1975).

А. Ю. ПИРКОВСКИЙ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 10

10.1. Теорема Рисса

Мы уже знаем, как устроены пространства, сопряженные к гильбертову пространству (теорема 7.3) и к пространству L^p (теорема 8.7). Наша ближайшая цель — описать пространство, сопряженное к пространству $C(X)$ непрерывных функций на компакте X. Сразу оговоримся, что соответствующая теорема для произвольного компакта будет лишь сформулирована; докажем мы ее в частном случае, когда X — отрезок на вещественной прямой.

10.1.1. Интегрирование по комплексной мере. Теорема Рисса–Маркова–Какутани

Наша ближайшая цель — научиться интегрировать функции по произвольной (вообще говоря, комплексной) мере. Для наших целей достаточно уметь интегрировать лишь ограниченные функции; этим случаем мы и ограничимся.

Пусть X — множество и $\mathscr{A}$ — алгебра его подмножеств. Обозначим через $B_{\mathscr{A}}(X)$ множество всех ограниченных $\mathscr{A}$-измеримых функций из X в $\mathbb{K}$ (как обычно, мы полагаем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Множество $B_{\mathscr{A}}(X)$ является векторным подпространством в $\ell^\infty(X)$ и, следовательно, может рассматриваться как нормированное пространство относительно равномерной нормы.

Напомним, что для $A \subseteq X$ через χ_A мы обозначаем характеристическую функцию множества A (т.е. функцию, равную 1 на A и 0 вне A). Положим

$$S_{\mathscr{A}}(X) = \operatorname{span}\{\chi_A : A \in \mathscr{A}\} \subset B_{\mathscr{A}}(X).$$

Функции из $S_{\mathscr{A}}(X)$ называются *$\mathscr{A}$-простыми.*

Доказательство следующего факта — простое упражнение.

Предложение 10.1. *Подпространство $S_{\mathscr{A}}(X)$ плотно в $B_{\mathscr{A}}(X)$.*

Через $M(\mathscr{A})$ мы будем обозначать множество всех $\mathbb{K}$-значных мер на $\mathscr{A}$ (не обязательно σ-аддитивных), имеющих ограниченную вариацию. Легко убедиться (убедитесь!), что $M(\mathscr{A})$ — векторное пространство относительно поточечных операций, и что формула $\|\mu\| = |\mu|(X)$ задает норму на $M(\mathscr{A})$.

Предложение 10.2. *Для каждой меры $\mu \in M(\mathscr{A})$ существует единственный функционал $I_\mu \in B_{\mathscr{A}}(X)^*$, удовлетворяющий условию $I_\mu(\chi_A) = \mu(A)$ для каждого $A \in \mathscr{A}$. При этом $\|I_\mu\| = \|\mu\|$.*

Определение 10.1. Для любой функции $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$ величина $I_\mu(f)$ называется *интегралом* f по μ и обозначается $\int_X f(x)\, d\mu(x)$.

Схема доказательства предложения 10.2. На пространстве $S_{\mathscr{A}}(X)$ линейный функционал I_μ определяется очевидным и единственно возможным способом. Нетрудно убедиться (убедитесь), что I_μ ограничен и $\|I_\mu\| = \|\mu\|$. Остается воспользоваться предложением 10.1 и теоремой 4.1 о продолжении по непрерывности. ☐

Следующая теорема показывает, что других непрерывных линейных функционалов на $B_{\mathscr{A}}(X)$, кроме описанных в предложении 10.2, не бывает.

Теорема 10.3 (Хильдебрандт, Канторович). *Отображение*

$$M(\mathscr{A}) \to B_{\mathscr{A}}(X)^*, \quad \mu \mapsto I_\mu,$$

— изометрический изоморфизм.

Схема доказательства. Изометричность указанного отображения уже установлена в предложении 10.2. Для доказательства его сюръективности возьмем $F \in B_{\mathscr{A}}(X)^*$ и для каждого $A \in \mathscr{A}$ положим $\mu(A) = F(\chi_A)$. Нетрудно проверить (проверьте), что $\mu \in M(\mathscr{A})$. Применяя предложение 10.2, получаем $F = I_\mu$. ☐

Следствие 10.4. *Отображение $\mu \mapsto I_\mu$ устанавливает изометрический изоморфизм между $M(2^{\mathbb{N}})$ и $(\ell^\infty)^*$.*

Замечание 10.1. Отметим, что пространство ℓ^1 изометрически вкладывается в $M(2^{\mathbb{N}})$: каждой последовательности $x \in \ell^1$ отвечает мера $\mu_x(A) = \sum_{n\in A} x_n$. Таким образом, пространство $M(2^{\mathbb{N}})$, сопряженное к ℓ^∞, содержит в себе ℓ^1, однако не совпадает с ℓ^1 (ср. предостережение 7.4). Через некоторое время мы дадим общую интерпретацию явлениям такого рода.

Пусть теперь X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Обозначим через $\mathscr{B}or(X)$ его борелевскую σ-алгебру, т.е. наименьшую σ-алгебру, содержащую все открытые подмножества X.

Определение 10.2. *Борелевская мера* на X — это σ-аддитивная комплексная мера на $\mathscr{B}or(X)$.

Среди всех борелевских мер выделяют те, которые «хорошо согласованы» с топологией:

Определение 10.3. Борелевская мера μ на X называется *регулярной* (или *мерой Радона*), если для каждого борелевского множества $B \subseteq X$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдутся открытое множество $U \supseteq B$ и компактное множество $K \subseteq B$ такие, что $|\mu|(U \setminus K) < \varepsilon$.

Замечание 10.2. Известно, что если компакт X метризуем, то любая борелевская мера на X регулярна (см., например, В. И. Богачев, «Теория меры», М.: РХД, 2003). Пользоваться этим фактом мы не будем.

Обозначим через $M(X)$ подмножество в $M(\mathscr{B}or(X))$, состоящее из регулярных мер. Нетрудно проверить (проверьте), что $M(X)$ — векторное подпространство в $M(\mathscr{B}or(X))$.

Теорема 10.5 (Рисс, Марков, Какутани)**.** *Отображение*

$$M(X) \to C(X)^*, \qquad \mu \mapsto I_\mu,$$
$$\text{где } I_\mu(f) = \int_X f\, d\mu \qquad (f \in C(X))$$

— изометрический изоморфизм.

Теорема Рисса–Маркова–Какутани имеет долгую историю. Ее первоначальную версию доказал Ф. Рисс в 1909 г. для случая, когда X — отрезок вещественной прямой. Интеграл Лебега в то время еще не существовал, поэтому в первоначальной формулировке теоремы Рисса меры как таковые отсутствуют, а вместо интеграла Лебега используется интеграл Римана–Стилтьеса. В 1919 г. И. Радон обобщил теорему Рисса на случай компактов в $\mathbb{R}^n$. В 1937–1938 гг. С. Банах и С. Сакс доказали ее для метризуемых компактов. Наконец, в общем случае теорема 10.5 была доказана А. А. Марковым в 1938 г. и С. Какутани в 1941 г. (так что правильнее было бы называть ее «теоремой Рисса–Радона–Банаха–Сакса–Маркова–Какутани»).

Доказательство теоремы 10.5 (в отличие от сходной по формулировке теоремы 10.3 Хильдебрандта–Канторовича) довольно нетривиально. С ним можно познакомиться, например, по книге Н. Данфорда и Дж. Шварца «Линейные операторы», т. I, М.: ИЛ, 1962. Существует также альтернативное и существенно более короткое доказательство, основанное, однако, на ином подходе к теории интегрирования (так называемой схеме Даниэля); см. по этому поводу второй том цитированной выше книги В. И. Богачева.

Мы докажем теорему 10.5 в частном случае, когда X — отрезок вещественной прямой, т.е. фактически в той же общности, в какой ее доказал Рисс, но с использованием более современной терминологии. Для этого нам понадобятся некоторые конструкции из действительного анализа.

10.1.2. Функции ограниченной вариации. Теорема Рисса

Определение 10.4. *Вариацией* функции $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ на отрезке $[a,b]$ называется величина

$$V_a^b(\varphi) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| : a = t_0 < \ldots < t_n = b,\ n \in \mathbb{N}\Big\} \in [0, +\infty].$$

Предложение 10.6. *Если $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$, то $V_a^y(\varphi) = V_a^x(\varphi) + V_x^y(\varphi)$.*

Доказательство. Упражнение. □

Определение 10.5. Функция $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ называется *функцией ограниченной вариации*, если $V_a^b(\varphi) < \infty$.

Множество всех функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ будем обозначать через $BV[a,b]$. Нетрудно проверить (проверьте), что $BV[a,b]$ — векторное подпространство в пространстве всех функций на $[a,b]$, и что V_a^b — полунорма на $BV[a,b]$.

Пример 10.1. Любая монотонно неубывающая функция $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, и $V_a^b(\varphi) = \varphi(b) - \varphi(a)$.

Пример 10.2. Из теоремы Лагранжа легко следует, что любая $\varphi \in C^1[a,b]$ имеет ограниченную вариацию. С другой стороны, существуют непрерывные (и даже дифференцируемые) функции неограниченной вариации (см. листок 8).

Предложение 10.7. *Функция* $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда она является разностью двух монотонно неубывающих функций.*

Схема доказательства. Достаточность очевидна (см. пример 10.1). Для доказательства необходимости положим $v_1(x) = V_a^x(\varphi)$ и $v_2 = v_1 - \varphi$. Из предложения 10.6 следует, что v_1 монотонна. Монотонность v_2 также легко вывести из предложения 10.6. ☐

Следствие 10.8. *Множество точек разрыва функции* $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ *ограниченной вариации не более чем счетно, и все они являются разрывами* 1*-го рода (т.е. в каждой точке* φ *имеет пределы слева и справа).*

Доказательство. Если φ монотонна, то это утверждение — хорошо известное упражнение по действительному анализу. Если $\varphi \in BV[a,b]$ вещественна, то утверждение следует из предложения 10.7. Общий случай сводится к рассмотрению действительной и мнимой частей функции φ. ☐

Установим теперь взаимосвязь между функциями ограниченной вариации и мерами на отрезке. Положим

$$BV_0[a,b] = \{\varphi \in BV[a,b] : \varphi(a) = 0,\ \varphi \text{ непрерывна справа на } (a,b)\}.$$

Очевидно, $BV_0[a,b]$ — векторное подпространство в $BV[a,b]$, и $\|\varphi\| = V_a^b(\varphi)$ — норма на $BV_0[a,b]$.

Определение 10.6. *Функцией распределения* меры $\mu \in M[a,b]$ называется функция

$$\varphi_\mu\colon [a,b] \to \mathbb{K}, \quad \varphi_\mu(t) = \begin{cases} \mu([a,t]) & \text{при } t > a, \\ 0 & \text{при } t = a. \end{cases}$$

Предложение 10.9. $\varphi_\mu \in BV_0[a,b]$, *и* $V_a^b(\varphi_\mu) = \|\mu\|$.

Схема доказательства. Обозначим через $\mathscr{A}$ алгебру подмножеств $[a,b]$, порожденную отрезками вида $[a,t]$, где $a < t \leqslant b$. Легко видеть, что $\mathscr{A}$ состоит из всевозможных дизъюнктных объединений конечного числа множеств вида $(\alpha,\beta]$ (где $a < \alpha \leqslant \beta \leqslant b$) и $[a,t]$ (где $a < t \leqslant b$). Пусть $\mu_{\mathscr{A}}$ — ограничение меры μ на алгебру $\mathscr{A}$. Из определений вариации меры и функции немедленно следует, что $V_a^b(\varphi_\mu) = |\mu_{\mathscr{A}}|([a,b])$. В частности, φ_μ — функция ограниченной вариации. С другой стороны, из регулярности μ следует, что для каждого борелевского множества $B \subseteq [a,b]$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $A \in \mathscr{A}$, что $|\mu|(A \triangle B) < \varepsilon$. Отсюда нетрудно вывести (сделайте это), что $|\mu_{\mathscr{A}}|([a,b]) = |\mu|([a,b]) = \|\mu\|$. Следовательно, $V_a^b(\varphi_\mu) = \|\mu\|$, как и требовалось. Непрерывность φ_μ справа на (a,b) легко выводится из σ-аддитивности меры μ. ☐

Итак, каждой мере на отрезке мы сопоставили некоторую функцию ограниченной вариации. В итоге получилось изометрическое линейное отображение

$$M[a,b] \to BV_0[a,b], \qquad \mu \mapsto \varphi_\mu. \tag{10.1}$$

Покажем теперь, что это отображение биективно.

Предложение 10.10. *Для каждой функции $\varphi \in BV_0[a,b]$ существует единственная мера $\mu_\varphi \in M[a,b]$, удовлетворяющая условию $\mu_\varphi([a,t]) = \varphi(t)$ для всех $t > a$ (т.е. мера, функция распределения которой совпадает с φ).*

Схема доказательства. Единственность меры μ_φ следует из изометричности отображения (10.1). Для доказательства ее существования рассмотрим алгебру множеств $\mathscr{A}$, использованную в доказательстве предложения 10.9, и зададим меру μ_φ на $\mathscr{A}$ формулами

$$\mu_\varphi((\alpha,\beta]) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \qquad (a < \alpha \leqslant \beta \leqslant b);$$
$$\mu_\varphi([a,t]) = \varphi(t) \qquad (a < t \leqslant b).$$

Очевидно, μ_φ — мера на $\mathscr{A}$. Из непрерывности справа функции φ на (a,b) нетрудно вывести, что μ_φ σ-аддитивна. Согласно теореме о продолжении меры (см. курс анализа), μ_φ единственным образом продолжается до σ-аддитивной меры на σ-алгебре μ_φ-измеримых множеств, содержащей в себе борелевскую σ-алгебру $\mathscr{B}or([a,b])$. Регулярность μ_φ проверяется точно так же, как и для обычной меры Лебега. ☐

Определение 10.7. Мера μ_φ, построенная в предложении 10.10, называется *мерой Лебега–Стилтьеса.*

Пример 10.3. Если $\varphi(t) = t$ для всех $t \in [a,b]$, то μ_φ — это мера Лебега. Если $\varphi = \chi_{(a,b]}$, то μ_φ — это *мера Дирака δ_a*, заданная формулой

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1 & \text{при } a \in B, \\ 0 & \text{при } a \notin B. \end{cases}$$

Объединяя предложения 10.9 и 10.10, получаем следующую теорему.

Теорема 10.11. *Отображения*

$$M[a,b] \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} BV_0[a,b]\ ,$$
$$\alpha(\mu) = \varphi_\mu, \quad \beta(\varphi) = \mu_\varphi,$$

— взаимно обратные изометрические изоморфизмы.

Теперь мы почти готовы к доказательству теоремы Рисса. Следующая несложная лемма позволяет «нормализовать» произвольную функцию ограниченной вариации, т.е. сделать ее непрерывной справа на интервале (a,b).

Лемма 10.12. *Пусть $\varphi \in BV[a,b]$. Положим*

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t+0), & \text{если } a < t < b; \\ \varphi(t), & \text{если } t = a \text{ или } t = b. \end{cases} \tag{10.2}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) $\psi \in BV[a,b]$;
(ii) $V_a^b(\psi) \leqslant V_a^b(\varphi)$;

(iii) *ψ непрерывна справа на (a,b).*

Доказательство. Упражнение. □

Теорема 10.13 (Рисс)**.** *Отображение*

$$M[a,b] \to C[a,b]^*, \qquad \mu \mapsto I_\mu, \tag{10.3}$$
$$\text{где } I_\mu(f) = \int_{[a,b]} f\,d\mu \qquad (f \in C[a,b])$$

— изометрический изоморфизм.

Доказательство. Докажем сначала инъективность отображения (10.3). Предположим, что $I_\mu = 0$. Зафиксируем произвольный промежуток $J \subseteq [a,b]$ и построим последовательность функций (f_n) в $C[a,b]$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ и поточечно сходящуюся к функции χ_J. Применяя теорему Лебега о мажорированной сходимости, получаем

$$\mu(J) = \int_{[a,b]} \chi_J\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n\,d\mu = 0.$$

Отсюда с учетом регулярности μ следует, что $\mu = 0$. Следовательно, (10.3) — инъекция.

Покажем теперь, что отображение (10.3) сюръективно и изометрично. Зафиксируем произвольный $F \in C[a,b]^*$ и, пользуясь теоремой Хана–Банаха, продолжим его до функционала $\tilde F \in \ell^\infty([a,b])^*$ так, чтобы $\|\tilde F\| = \|F\|$. Определим функцию $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ формулой

$$\varphi(t) = \begin{cases} \tilde F(\chi_{[a,t]}) & \text{при } t > a, \\ 0 & \text{при } t = a. \end{cases}$$

Покажем, что $\varphi \in BV[a,b]$. Для этого возьмем разбиение $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$ и для каждого $i = 1,\ldots,n$ найдем $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $|\lambda_i| = 1$, так, чтобы

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \lambda_i(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| &= \lambda_1 \tilde F(\chi_{[a,t_1]}) + \sum_{i=2}^n \lambda_i \tilde F(\chi_{(t_{i-1},t_i]}) \\ &= \tilde F(\lambda_1 \chi_{[a,t_1]} + \sum_{i=2}^n \lambda_i \chi_{(t_{i-1},t_i]}) \leqslant \|\tilde F\| = \|F\|. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi \in BV[a,b]$, и $V_a^b(\varphi) \leqslant \|F\|$. Определим теперь функцию $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ формулой (10.2). Согласно лемме 10.12, $\psi \in BV_0[a,b]$ и $V_a^b(\psi) \leqslant V_a^b(\varphi) \leqslant \|F\|$.

Положим теперь $\mu = \mu_\psi \in M[a,b]$. Мы утверждаем, что $F = I_\mu$. В самом деле, пусть A — множество точек непрерывности функции φ на $(a,b]$. В силу следствия 10.8, множество $[a,b] \setminus A$ не более чем счетно. Для любых $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$, имеем

$$\int_{[a,b]} \chi_{(\alpha,\beta]}\,d\mu = \mu((\alpha,\beta]) = \psi(\beta) - \psi(\alpha) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \tilde F(\chi_{(\alpha,\beta]}).$$

Аналогично проверяется, что

$$\int_{[a,b]} \chi_{[a,\beta]}\, d\mu = \tilde{F}(\chi_{[a,\beta]}).$$

Следовательно, функционалы $\tilde{F}$ и I_μ совпадают на подпространстве

$$S = \operatorname{span}\{\chi_{(\alpha,\beta]},\ \chi_{[a,\beta]} : a < \alpha < \beta \leqslant b,\ \alpha,\beta \in A\} \subset \ell^\infty([a,b]).$$

С другой стороны, замыкание S в $\ell^\infty([a,b])$ содержит $C[a,b]$ (почему?). Отсюда получаем требуемое равенство $F = I_\mu$. Наконец,

$$\|\mu\| = V_a^b(\psi) \leqslant \|F\| = \|I_\mu\| \leqslant \|\mu\|,$$

поэтому $\|\mu\| = \|F\|$. Следовательно, (10.3) — изометрический изоморфизм. ☐

Замечание 10.3. Вы, вероятно, заметили, что «трудная» часть теоремы Рисса — это доказательство сюръективности отображения $M[a,b] \to C[a,b]^*$. То же самое относится и к более общей теореме Рисса–Маркова–Какутани. Может возникнуть искушение доказать сюръективность этого отображения следующим образом. Начнем так же, как и в приведенном выше доказательстве теоремы Рисса, а именно, продолжим произвольный функционал $F \in C(X)^*$ до функционала $\tilde{F} \in \ell^\infty(X)^*$, имеющего ту же норму, а затем определим борелевскую меру μ на X формулой $\mu(A) = \tilde{F}(\chi_A)$. Проблема в том, что так определенная мера вовсе не обязана быть ни σ-аддитивной, ни регулярной, и приходится как-то ее «подправлять». Для отрезка нам удалось это сделать с помощью функций ограниченной вариации: дело в том, что «подправить» функцию ограниченной вариации так, чтобы она задавала именно σ-аддитивную меру, не составляет труда — надо применить лемму 10.12.

Отметим также, что для произвольного компакта X оператор, сопряженный к вложению $C(X)$ в пространство $B(X) = B_{\mathscr{B}or(X)}(X)$ ограниченных борелевских функций на X, может быть отождествлен (в силу теорем Хильдебрандта–Канторовича и Рисса–Маркова–Какутани) с некоторым оператором из $M(\mathscr{B}or(X))$ в $M(X)$. Нетрудно проверить, что этот оператор тождествен на $M(X)$, т.е. является проектором, который в некотором смысле «регуляризует» каждую меру ограниченной вариации.

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 11

11.1. Каноническое вложение во второе сопряженное. Рефлексивные пространства

Пусть X — нормированное пространство над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Для каждого $x \in X$ рассмотрим функцию

$$\varepsilon_x \colon X^* \to \mathbb{K}, \quad \varepsilon_x(f) = f(x).$$

Очевидно, ε_x — ограниченный линейный функционал, и $\|\varepsilon_x\| \leqslant \|x\|$.

Предложение 11.1. *Для каждого* $x \in X$ *справедливо равенство* $\|\varepsilon_x\| = \|x\|$.

Доказательство. Применяя следствие 9.8 из теоремы Хана–Банаха, получаем

$$\|\varepsilon_x\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\varepsilon_x(f)| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(x)| = \|x\|. \qquad \square$$

Определение 11.1. *Каноническим вложением* нормированного пространства X в его второе сопряженное X^{**} называется отображение

$$i_X \colon X \to X^{**}, \quad i_X(x) = \varepsilon_x.$$

Очевидно, отображение i_X линейно и, в силу предложения 11.1, изометрично.

Канонические вложения разных пространств согласованы друг с другом следующим образом.

Предложение 11.2 (естественность канонического вложения)**.** *Пусть* X, Y *— нормированные пространства и* $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \\
X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "i_Y"']
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Прямое вычисление (упражнение). $\square$

Таким образом, если считать каждое нормированное пространство канонически вложенным в его второе сопряженное, то второй сопряженный оператор $T^{**} \colon X^{**} \to Y^{**}$ оказывается продолжением оператора $T \colon X \to Y$.

Замечание 11.1. На категорном языке предложение 11.2 означает, что каноническое вложение во второе сопряженное представляет собой морфизм из тождественного функтора $\mathbf{1}_{\mathscr{N}orm}$ в функтор двойного сопряжения $** = (*)^2 \colon \mathscr{N}orm \to \mathscr{N}orm$ (см. замечание 7.1). То же самое верно и для категории $\mathscr{N}orm_1$.

Замечание 11.2. Отметим, что каноническое вложение дает простой способ доказать существование пополнения у любого нормированного пространства X (см. замечание 4.2). В самом деле, подпространство $\widetilde{X} = \overline{\operatorname{Im} i_X} \subseteq X^{**}$ полно ввиду полноты X^{**} (см. теорему 3.18), и X линейно изометрически вкладывается в $\widetilde{X}$ с плотным образом.

Определение 11.2. Нормированное пространство X называется *рефлексивным*, если каноническое вложение $i_X \colon X \to X^{**}$ — изометрический изоморфизм.

Наблюдение 11.3. Отметим, что рефлексивное нормированное пространство с необходимостью полно ввиду полноты X^{**} (см. теорему 3.18).

Пример 11.1. Всякое конечномерное нормированное пространство X рефлексивно. В самом деле, в этом случае все линейные функционалы как на X, так и на X^{**} ограничены (см. задачу 9 из листка 2), поэтому $\dim X^{**} = \dim X$ и, следовательно, i_X — сюръекция.

Пример 11.2. Пусть $1 < p < \infty$. Мы утверждаем, что пространство ℓ^p рефлексивно. В самом деле, пусть $\alpha_{qp} \colon \ell^q \to (\ell^p)^*$ (где $1/p + 1/q = 1$) — канонический изоморфизм (см. предложение 7.4). Прямая проверка (проведите ее!) показывает, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\ell^p \arrow[r, "i_{\ell^p}"] \arrow[dr, "\alpha_{pq}"'] & (\ell^p)^{**} \arrow[d, "\alpha_{qp}^*"] \\
& (\ell^q)^*
\end{tikzcd}$$

Следовательно, i_{ℓ^p} — изоморфизм.

Аналогичное рассуждение показывает, что пространства $L^p(X, \mu)$ (где $1 < p < \infty$) также рефлексивны.

Предостережение 11.3. Рассуждение типа «раз $(\ell^p)^*$ изоморфно ℓ^q, а $(\ell^q)^*$ изоморфно ℓ^p, то ℓ^p рефлексивно» на самом деле не доказывает рефлексивность ℓ^p! Из него следует лишь, что ℓ^p изоморфно $(\ell^p)^{**}$, но вовсе не следует, что каноническое вложение является изоморфизмом. Отметим, что банахово пространство может оказаться изометрически изоморфным своему второму сопряженному, не будучи при этом рефлексивным. Исторически первый пример такого пространства — пространство Джеймса; см., например, F. Albiac, N. Kalton, “Topics in Banach Space Theory”, Springer, 2006.

Упражнение 11.1. Гильбертово пространство рефлексивно.

Упражнение 11.2. Композиция канонического вложения $c_0 \to (c_0)^{**}$ и стандартного изоморфизма $(c_0)^{**} \cong \ell^\infty$ (см. упражнение 7.1) — это тождественное вложение c_0 в ℓ^∞.

Упражнение 11.3. Композиция канонического вложения $\ell^1 \to (\ell^1)^{**}$ и стандартного изоморфизма $(\ell^1)^{**} \cong (\ell^\infty)^* \cong M(2^{\mathbb{N}})$ (см. следствие 10.4) — это вложение ℓ^1 в $M(2^{\mathbb{N}})$, описанное в замечании 10.1.

Упражнение 11.4. Пространства c_0, ℓ^1, ℓ^∞ и $C[a, b]$ нерефлексивны.

11.2. Теорема Бэра

Мы уже упоминали выше (см. начало лекции 9), что функциональный анализ базируется на трех фундаментальных теоремах — теореме Хана–Банаха, теореме Банаха об обратном операторе и теореме Банаха–Штейнгауза. С первой из них мы уже знакомы; наша ближайшая задача — познакомиться с оставшимися двумя. Для этого нам понадобится теорема Бэра — несложный, но чрезвычайно полезный факт о полных метрических пространствах.

Определение 11.3. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $B \subseteq X$ называется *нигде не плотным*, если $\operatorname{Int}(\overline{B}) = \varnothing$. Эквивалентно, B нигде не плотно, если в каждом непустом открытом множестве $U \subseteq X$ найдется такое непустое открытое подмножество $V \subseteq U$, что $V \cap B = \varnothing$.

Примеры 11.3. Любое дискретное подмножество в $\mathbb{R}^n$ нигде не плотно. Канторово множество на отрезке $[0, 1]$ нигде не плотно (хотя и не содержит изолированных точек).

Теорема 11.4 (Бэр)**.** *Пусть X — полное метрическое пространство и $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — счетное семейство его нигде не плотных подмножеств. Тогда множество $X \setminus \bigcup_n X_n$ плотно в X. Как следствие, если $X \neq \varnothing$, то $X \neq \bigcup_n X_n$.*

Доказательство. Будем считать, что $X \neq \varnothing$. Пусть U_1 — непустой открытый шар в X радиуса r_1. Наша задача — найти в нем точку, не лежащую ни в одном из множеств X_n. Поскольку X_1 нигде не плотно, существует непустой открытый шар U_2 радиуса r_2, такой, что $\overline{U}_2 \subseteq U_1$ и $\overline{U}_2 \cap X_1 = \varnothing$. При этот мы можем считать, что $r_2 \leqslant r_1/2$. Аналогично, пользуясь нигде не плотностью множества X_2, найдем непустой открытый шар U_3 радиуса $r_3 \leqslant r_2/2$, такой, что $\overline{U}_3 \subseteq U_2$ и $\overline{U}_3 \cap X_2 = \varnothing$. Продолжая этот процесс, мы получим убывающую последовательность $\{\overline{U}_n\}$ замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю. Ввиду полноты пространства X, у этих шаров есть общая точка x. Если предположить, что $x \in X_n$ для какого-то n, то из построения следует, что $x \notin \overline{U}_{n+1}$, что противоречит определению точки x. Следовательно, $x \notin \bigcup_n X_n$, как и требовалось. □

Упражнение 11.5. Докажите, что теорему Бэра можно эквивалентно сформулировать так: в полном метрическом пространстве пересечение счетного числа открытых всюду плотных множеств всюду плотно.

Замечание 11.4. Теорема Бэра является мощным инструментом для доказательства неконструктивных теорем существования. А именно, если требуется доказать существование объекта с какими-то специальными свойствами, то достаточно построить полное метрическое пространство, элементом которого должен быть искомый объект, а затем найти в этом пространстве последовательность нигде не плотных множеств так, чтобы искомый объект не мог лежать ни в одном из них. С помощью такого подхода можно доказать, например, существование непрерывных, но нигде не дифференцируемых функций. Теорема Бэра имеет многочисленные приложения в разных областях математики – анализе, топологии, теории динамических систем, теории игр, теории чисел…Про результаты, связанные с теоремой Бэра, и про различные ее приложения можно прочитать в книге Дж. Окстоби «Мера и категория»(М.: Мир, 1974). О приложениях в топологии см. книгу М. Хирша «Дифференциальная топология»(М.: Мир, 1979) или записки лекций Ю. М. Бурмана (`http://ium.mccme.ru/ancient/mapsf96.html`).

11.3. Свойство бочечности банаховых пространств

Геометрическое свойство банаховых пространств, о котором пойдет речь ниже, понадобится нам дважды — при доказательстве теоремы Банаха–Штейнгауза и теоремы Банаха об обратном операторе.

Пусть X — нормированное пространство.

Определение 11.4. Абсолютно выпуклое, поглощающее и замкнутое подмножество в X называется *бочкой.*

Пример 11.4. Типичный пример бочки — замкнутый шар $\mathbb{B}_r = \{x \in X : \|x\| \leqslant r\}$ положительного радиуса. Более общим образом, любое абсолютно выпуклое замкнутое множество, содержащее окрестность нуля, является бочкой.

Оказывается, предыдущий пример полностью характеризует бочки в банаховых пространствах:

Теорема 11.5. *Любая бочка в банаховом пространстве содержит окрестность нуля.*

Доказательство. Пусть B — бочка в банаховом пространстве X. Поскольку B — поглощающее множество, справедливо равенство $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB$. Применяя теорему Бэра и учитывая замкнутость B, мы видим, что $\operatorname{Int}(nB) \neq \varnothing$ для некоторого n. Следовательно, $\operatorname{Int}(B) \neq \varnothing$. Зафиксируем произвольный $x \in \operatorname{Int}(B)$. Пользуясь сперва закругленностью, а потом выпуклостью B, получаем цепочку включений

$$0 \in \operatorname{Int}(B - x) \subseteq \operatorname{Int}(B + B) = \operatorname{Int}(2B).$$

Иначе говоря, $2B$ (а, значит, и B) содержит окрестность нуля, как и требовалось. □

11.4. Теорема Банаха–Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности)

Теорема 11.6 (Банах, Штейнгауз)**.** *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство. Следующие свойства подмножества $M \subseteq \mathscr{B}(X,Y)$ эквивалентны:*

(i) *M ограничено;*

(ii) *для каждого $x \in X$ множество $\{Tx : T \in M\} \subseteq Y$ ограничено.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii): это очевидно и верно без предположения о полноте X.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Рассмотрим множество $B = \bigcap_{T\in M} T^{-1}(\mathbb{B}_1)$. Ясно, что B абсолютно выпукло и замкнуто (почему?). Покажем, что B — бочка. В самом деле, из (ii) следует, что для любого $x \in X$ найдется такое $C > 0$, что $\|Tx\| \leqslant C$ для всех $T \in M$. Следовательно, при $|\lambda| \geqslant C$ имеем $\lambda^{-1}x \in T^{-1}(\mathbb{B}_1)$ для всех $T \in M$, т.е. $x \in \lambda B$. Таким образом, B — поглощающее множество, а значит, оно является бочкой. В силу теоремы 11.5, для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $\mathbb{B}_\varepsilon \subseteq B$. Это означает, что для любого $T \in M$ справедливо включение $T(\mathbb{B}_\varepsilon) \subseteq \mathbb{B}_1$, или, эквивалентно, $\|T\| \leqslant 1/\varepsilon$. Следовательно, M ограничено. □

Следствие 11.7. *Пусть X — банахово пространство, и пусть подмножество $M \subseteq X^*$ таково, что $\sup_{f \in M} |f(x)| < \infty$ для каждого $x \in X$. Тогда M ограничено.*

Следствие 11.8. *Пусть X — нормированное пространство, и пусть подмножество $M \subseteq X$ таково, что $\sup_{x \in M} |f(x)| < \infty$ для каждого $f \in X^*$. Тогда M ограничено.*

Доказательство. Достаточно применить следствие 11.7 к подмножеству $i_X(M) \subseteq X^{**}$, где $i_X \colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. ☐

Теперь можно несколько усилить теорему 11.6:

Теорема 11.9. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство. Следующие свойства подмножества $M \subseteq \mathscr{B}(X,Y)$ эквивалентны:*

(i) *M ограничено;*
(ii) *для каждого $x \in X$ и каждого $f \in Y$ подмножество $\{f(Tx) : T \in M\} \subseteq \mathbb{K}$ ограничено.*

Доказательство. Достаточно объединить теорему 11.6 со следствием 11.8. ☐

Следствие 11.10 («классическая» теорема Банаха–Штейнгауза)**.** *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство, (T_n) — последовательность в $\mathscr{B}(X,Y)$. Предположим, что для каждого $x \in X$ последовательность $(T_n x)$ сходится в Y. Тогда $\sup_n \|T_n\| < \infty$, и существует такой оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, что $T_n x \to Tx$ для каждого $x \in X$.*

Доказательство. Определим отображение $T \colon X \to Y$ формулой $Tx = \lim_n T_n x$. Легко проверить (проверьте), что T — линейный оператор. Осталось доказать его ограниченность. Поскольку для каждого $x \in X$ последовательность $(T_n x)$ ограничена в Y, применима теорема 11.6, согласно которой $C = \sup_n \|T_n\| < \infty$. Из неравенства $\|T_n x\| \leqslant C\|x\|$, справедливого для всех $x \in X$ и всех $n \in \mathbb{N}$, получаем при $n \to \infty$, что $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$. Следовательно, оператор T ограничен, как и требовалось. ☐

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 12

12.1. Теорема Банаха об открытом отображении

Напомним (см. следствие 2.4), что любой открытый линейный оператор $T\colon X \to Y$ между нормированными пространствами X и Y сюръективен. Теорема Банаха, которую нам предстоит доказать, утверждает, что в случае банаховых пространств верно и обратное.

Теорема 12.1 (об открытом отображении)**.** *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ — сюръективный линейный оператор. Тогда T открыт.*

Теорему об открытом отображении удобно доказывать в два этапа. На первом этапе будет использоваться полнота Y, а на втором — полнота X.

Прежде чем вводить следующее понятие, напомним (см. предложение 2.3), что линейный оператор $T\colon X \to Y$ открыт тогда и только тогда, когда $T(\mathbb{B}_1^\circ) \supseteq \mathbb{B}_r^\circ$ для некоторого $r > 0$.

Определение 12.1. Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *почти открытым*, если $\overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)} \supseteq \mathbb{B}_r^\circ$ для некоторого $r > 0$.

Лемма 12.2. *Пусть X — нормированное пространство, Y — банахово пространство и $T\colon X \to Y$ — сюръективный линейный оператор. Тогда T почти открыт.*

Доказательство. Очевидно, множество $\overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)}$ абсолютно выпукло и замкнуто, а из сюръективности T следует, что оно поглощающее. Следовательно, это множество — бочка, и для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 11.5. ☐

Лемма 12.3. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ — линейный оператор. Предположим, что $\overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)} \supseteq \mathbb{B}_r^\circ$ для некоторого $r > 0$. Тогда $T(\mathbb{B}_1^\circ) \supseteq \mathbb{B}_r^\circ$.*

Доказательство. Из условия очевидным образом следует, что для любого $s > 0$ справедливо включение

$$\mathbb{B}_s^\circ \subseteq \overline{T(\mathbb{B}_{r^{-1}s}^\circ)}. \tag{12.1}$$

Возьмем любой элемент $y \in \mathbb{B}_r^\circ \subset Y$ и зафиксируем число ρ так, чтобы $\|y\| < \rho < r$. Положим $\varepsilon = r - \rho$. Поскольку $y \in \mathbb{B}_\rho^\circ$, из (12.1) следует, что $\|y - Tx_1\| < \varepsilon/2$ для некоторого $x_1 \in \mathbb{B}_{r^{-1}\rho}^\circ$. Применяя (12.1) к $s = \varepsilon/2$, подберем $x_2 \in \mathbb{B}_{r^{-1}\varepsilon/2}^\circ$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon/4$. Продолжая в том же духе, получим последовательность (x_n) в X, удовлетворяющую условиям

$$x_1 \in \mathbb{B}_{r^{-1}\rho}^\circ, \quad x_n \in \mathbb{B}_{r^{-1}\varepsilon/2^{n-1}}^\circ \quad (n \geqslant 2), \tag{12.2}$$

$$\|y - Tx_1 - \ldots - Tx_n\| < \varepsilon/2^n. \tag{12.3}$$

Из (12.2) заключаем, что

$$\sum_n \|x_n\| < r^{-1}(\rho + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \cdots) = r^{-1}(\rho + \varepsilon) = 1.$$

Отсюда с учетом полноты X следует, что ряд $\sum_n x_n$ сходится к некоторому элементу $x \in X$, причем $\|x\| \leqslant \sum_n \|x_n\| < 1$, т.е. $x \in \mathbb{B}_1^\circ$. Из (12.3) при $n \to \infty$ следует, что $y = Tx$. Тем самым мы показали, что $T(\mathbb{B}_1^\circ) \supseteq \mathbb{B}_r^\circ$, как и требовалось. $\square$

Следствие 12.4. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ — почти открытый линейный оператор. Тогда T открыт.*

Теперь, чтобы доказать теорему 12.1, достаточно объединить лемму 12.2 и следствие 12.4.

Выведем теперь несколько важных следствий из теоремы об открытом отображении. На самом деле (см. листок 9) нетрудно показать, что все эти следствия на самом деле эквивалентны теореме об открытом отображении.

Теорема 12.5 (об обратном операторе)**.** *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ — биективный оператор. Тогда T — топологический изоморфизм.*

Теорема 12.6. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Линейный оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ топологически инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен и имеет замкнутый образ.*

Доказательство. Если T топологически инъективен, то пространство $\operatorname{Im} T$ топологически изоморфно X, а значит, полно и поэтому замкнуто в Y. Для доказательства обратного утверждения достаточно применить теорему 12.5 к оператору $T\colon X \to \operatorname{Im} T$. $\square$

Прежде чем формулировать следующее утверждение, напомним, что для любых множеств X и Y *графиком* отображения $T\colon X \to Y$ называется множество

$$\Gamma_T = \{(x, Tx) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Если X и Y — векторные пространства, а T — линейный оператор, то легко видеть, что Γ_T — векторное подпространство в $X \oplus Y$. Отметим, что Γ_T является ядром линейного оператора

$$X \oplus Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto y - Tx.$$

Отсюда немедленно следует, что если X и Y — нормированные пространства, а оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен, то Γ_T — замкнутое подпространство в $X \oplus Y$.

Теорема 12.7 (о замкнутом графике)**.** *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор, график которого замкнут в $X \oplus Y$. Тогда T непрерывен.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_T \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[rr, "T"] & & Y, \end{tikzcd}$$

в которой отображения p_1 и p_2 заданы формулами $p_1(x, y) = x$ и $p_2(x, y) = y$. Очевидно, p_1 и p_2 — непрерывные линейные операторы, причем p_1 биективен. Поскольку X и Y — банаховы пространства, такова же и их прямая сумма $X \oplus Y$ (см. предложение 3.15), а вместе с ней и замкнутое подпространство $\Gamma_T \subseteq X \oplus Y$. Таким образом, к оператору p_1 применима теорема 12.5, из которой следует, что оператор $T = p_2 p_1^{-1}$ непрерывен. □

Чтобы ощутить пользу от теоремы о замкнутом графике, полезно переформулировать ее на языке последовательностей.

Теорема 12.8 (о замкнутом графике). *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *T непрерывен;*

(ii) *если последовательность (x_n) стремится к нулю в X, а последовательность (Tx_n) стремится к $y \in Y$, то $y = 0$.*

Доказательство. Условие (ii), как нетрудно проверить (проверьте), равносильно замкнутости графика Γ_T в $X \oplus Y$. □

Замечание 12.1. Если мы хотим проверить непрерывность какого-то линейного оператора $T\colon X \to Y$ (или, эквивалентно, его непрерывность в нуле) по определению, то мы должны взять стремящуюся к нулю последовательность (x_n) в X и доказать, что последовательность (Tx_n) стремится к нулю в Y. Теорема 12.8 показывает, что мы можем при этом предполагать, что последовательность (Tx_n) имеет предел в Y. В ряде случаев это существенно облегчает жизнь при доказательстве непрерывности операторов.

12.2. Топологические прямые суммы и дополняемые подпространства

Определение 12.2. Говорят, что нормированное пространство X *разлагается в топологическую прямую сумму* векторных подпространств $X_0, X_1 \subseteq X$, если отображение

$$X_0 \oplus_1 X_1 \to X, \quad (x_0, x_1) \mapsto x_0 + x_1, \tag{12.4}$$

— топологический изоморфизм. В этом случае пишут $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$.

Наблюдение 12.9. Заметим, что отображение (12.4) всегда непрерывно, а его биективность равносильна равенству $X = X_0 \oplus X_1$ (понимаемому в обычном алгебраическом смысле). Поэтому условие $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$ равносильно выполнению следующих двух условий:

(i) $X = X_0 \oplus X_1$;

(ii) существует такое $C > 0$, что $\|x_0\| + \|x_1\| \leqslant C\|x_0 + x_1\|$ для всех $x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1$.

Наблюдение 12.10. Разумеется, в формуле (12.4) вместо ℓ^1-суммы $X_0 \oplus_1 X_1$ можно брать ℓ^p-сумму $X_0 \oplus_p X_1$ для любого $p \in [1, +\infty]$; см замечание 3.1.

Удобно переформулировать определение 12.2 в несколько иных терминах. Для этого сначала вспомним следующий простой факт из линейной алгебры.

Предложение 12.11. *Пусть X — векторное пространство. Следующие свойства линейного оператора $P\colon X \to X$ эквивалентны:*

(i) $P^2 = P$;

(ii) *существуют такие векторные подпространства $X_0, X_1 \subseteq X$, что $X = X_0 \oplus X_1$, $P|_{X_0} = \mathbf{1}_{X_0}$ и $P|_{X_1} = 0$.*

При этом, если подпространства $X_0, X_1 \subseteq X$ таковы, как в п. (ii)*, то $X_0 = \operatorname{Im} P$ и $X_1 = \operatorname{Ker} P$.*

Если Вы не встречались раньше с этим утверждением, обязательно докажите его в качестве упражнения.

Определение 12.3. Линейный оператор P, удовлетворяющий условиям предложения 12.11, называется *проектором* на X_0 вдоль X_1.

Наблюдение 12.12. Если P — проектор на X_0 вдоль X_1, то $\mathbf{1}_X - P$ — проектор на X_1 вдоль X_0.

Предложение 12.13. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0, X_1 \subseteq X$ — векторные подпространства и $X = X_0 \oplus X_1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$;

(ii) *проектор на X_0 вдоль X_1 ограничен;*

(iii) *проектор на X_1 вдоль X_0 ограничен.*

Доказательство. Эквивалентность условий (ii) и (iii) следует из наблюдения 12.12. Обозначим проектор на X_0 вдоль X_1 через P. Если выполнено условие (i), то норма на X эквивалентна норме $\|x_0 + x_1\|_1 = \|x_0\| + \|x_1\|$ (где $x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1$), а относительно этой нормы проектор P, очевидно, ограничен. Обратно, если известно, что P ограничен, то оператор

$$X \to X_0 \oplus_1 X_1, \quad x \mapsto \bigl(Px, (\mathbf{1}_X - P)x\bigr),$$

также ограничен и является, очевидно, обратным к (12.4). □

Следствие 12.14. *Если X — нормированное пространство и $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$, то подпространства X_0 и X_1 замкнуты в X.*

Доказательство. Пусть P — проектор на X_0 вдоль X_1. Тогда $X_1 = \operatorname{Ker} P$ и $X_0 = \operatorname{Ker}(\mathbf{1}_X - P)$. □

Для банаховых пространств следствие 12.14 можно обратить:

Предложение 12.15. *Пусть X — банахово пространство, $X_0, X_1 \subseteq X$ — замкнутые векторные подпространства и $X = X_0 \oplus X_1$. Тогда $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$.*

Доказательство. Достаточно применить к (12.4) теорему Банаха 12.5. □

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Предположим, что даны нормированное пространство X и векторное подпространство $X_0 \subseteq X$. Всегда ли существует такое векторное подпространство $X_1 \subseteq X$, что $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$? Забегая вперед, предупредим, что в общем случае ответ отрицателен, даже если X банахово и X_0 замкнуто в X. Для ситуации же, когда ответ положителен, есть специальная терминология:

Определение 12.4. Векторное подпространство X_0 нормированного пространства X называется *дополняемым* в X, если существует такое векторное подпространство $X_1 \subseteq X$, что $X = X_0 \oplus_{\text{top}} X_1$.

Наблюдение 12.16. Согласно следствию 12.14, любое дополняемое подпространство замкнуто в X.

Пример 12.1. Из теоремы 5.9 об ортогональном дополнении следует, что каждое замкнутое подпространство гильбертова пространства дополняемо.

Чтобы проверять дополняемость, удобно иметь несколько ее эквивалентных определений.

Теорема 12.17. *Пусть X — нормированное пространство. Следующие свойства замкнутого векторного подпространства $X_0 \subseteq X$ эквивалентны:*

(i) *X_0 дополняемо в X;*

(ii) *X_0 является образом некоторого ограниченного проектора $P \in \mathscr{B}(X)$;*

(iii) *существует непрерывный линейный оператор $S\colon X/X_0 \to X$, удовлетворяющий условию $Q \circ S = \mathbf{1}_{X/X_0}$, где $Q\colon X \to X/X_0$ — факторотображение.*

Доказательство. (i) $\iff$ (ii): немедленно следует из предложения 12.13.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Из универсального свойства факторпространств (теорема 3.4) следует, что существует единственный оператор $S \in \mathscr{B}(X/X_0, X)$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathbf{1}_X - P"] \arrow[d, "Q"'] & X \\ X/X_0 \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативной, т.е. удовлетворяющий условию $SQ = \mathbf{1}_X - P$. Умножая слева на Q и учитывая, что $QP = 0$, получаем равенства

$$QSQ = Q - QP = Q. \tag{12.5}$$

Но Q — сюръекция, поэтому из (12.5) следует, что $QS = \mathbf{1}_{X/X_0}$, как и требовалось.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). Заметим, что $(SQ)^2 = SQ$, т.е. SQ — проектор в X. Следовательно, оператор $P = \mathbf{1}_X - SQ$ — тоже проектор в X. Далее, из (iii) следует, что S инъективен, поэтому $\operatorname{Ker} SQ = \operatorname{Ker} Q = X_0$. Следовательно, $\operatorname{Im} P = X_0$, и P — искомый проектор. □

Приведем теперь два простых, но важных примера дополняемых подпространств.

Предложение 12.18. *Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — конечномерное подпространство. Тогда X_0 дополняемо в X.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X_0 и $f_1, \ldots, f_n$ — соответствующий дуальный базис в X_0^*, т.е. набор функционалов, однозначно определенных условием $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Заметим, что $f_1, \ldots, f_n$ непрерывны ввиду конечномерности X_0 (см. предложение 1.5

или задачу 2.9 из листка). Продолжим их до непрерывных линейных функционалов $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ на X (см. следствие 9.4). Тогда оператор

$$P\colon X \to X, \quad P(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(x) e_i,$$

является ограниченным проектором на X_0. Остается воспользоваться теоремой 12.17. □

Предложение 12.19. *Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — замкнутое подпространство конечной коразмерности. Тогда X_0 дополняемо в X.*

Доказательство. Обозначим через $Q\colon X \to X/X_0$ факторотображение и выберем элементы $x_1, \ldots, x_n \in X$ так, чтобы векторы $e_i = Q(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ образовывали базис в X/X_0. Зададим линейное отображение $S\colon X/X_0 \to X$ формулой $S(e_i) = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда, очевидно, $Q \circ S = \mathbf{1}_{X/X_0}$, и из конечномерности X/X_0 следует, что S непрерывно (см. предложение 1.5 или задачу 2.9 из листка). Остается воспользоваться теоремой 12.17. □

А вот и контрпример:

Упражнение 12.1. Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

Указание. Можно действовать следующим образом:

1) Докажите, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде несчетного объединения $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in I} A_i$ счетных множеств A_i так, что $A_i \cap A_j$ конечно при $i \neq j$. (Подсказка: вместо $\mathbb{N}$ удобнее брать $\mathbb{Q}$).
2) Докажите, что для каждого $f \in (\ell^\infty)^*$, обращающегося в нуль на c_0, множество тех $i \in I$, для которых $f(\chi_{A_i}) \neq 0$, не более чем счетно.
3) Докажите, что на ℓ^∞/c_0 не существует счетного множества непрерывных линейных функционалов, разделяющего точки.
4) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

На самом деле наличие недополняемых подпространств — закономерность, а не патология. Как показали Линденштраусс и Цафрири в 1971 г., если в банаховом пространстве X каждое замкнутое подпространство дополняемо, то X топологически изоморфно гильбертову пространству.

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 13

13.1. Двойственность для банаховых пространств

Настало время выполнить обещание, данное в лекции 7, и установить некоторые красивые и полезные взаимосвязи между свойствами линейных операторов и их сопряженных. Начнем с нескольких определений.

Определение 13.1. Пусть X — нормированное пространство. *Аннулятором* подмножества $M \subseteq X$ называется множество

$$M^{\perp} = \{f \in X^* : f(x) = 0 \ \forall x \in M\}.$$

Преданнулятором подмножества $N \subseteq X^*$ называется множество

$$^{\perp}N = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in N\}.$$

Для обозначения аннуляторов и преданнуляторов не случайно используется тот же символ, что и для ортогональных дополнений:

Наблюдение 13.1. Пусть H — гильбертово пространство. Легко видеть, что каноническая биекция $R \colon H \to H^*$ (см. теорему 7.3) отображает ортогональное дополнение множества $M \subseteq H$ на его аннулятор. Аналогично, ортогональное дополнение к прообразу множества $N \subseteq H^*$ при биекции R — это в точности преданнулятор N.

Заметим теперь, что понятия аннулятора и преданнулятора согласованы с каноническим вложением во второе сопряженное (см. лекцию 11):

Наблюдение 13.2. Пусть X — нормированное пространство, $i_X \colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Тогда для любого подмножества $N \subseteq X^*$ справедливо равенство $^{\perp}N = i_X^{-1}(N^{\perp})$. Как следствие, если X рефлексивно, то $N^{\perp} = i_X(^{\perp}N)$.

Таким образом, если договориться отождествлять X с частью X^{**} посредством канонического вложения, то $^{\perp}N = N^{\perp} \cap X$; если же X рефлексивно, то $^{\perp}N = N^{\perp}$. Стало быть, для рефлексивных пространств аннулятор и преданнулятор — это в сущности одно и то же.

Следующие простейшие свойства аннуляторов и преданнуляторов во многом аналогичны соответствующим свойствам ортогональных дополнений (см. предложение 5.4). Все они следуют непосредственно из определения 13.1, за исключением второй части утверждения (vi), которое опирается на следствие 9.5 из теоремы Хана–Банаха.

Предложение 13.3. *Пусть X — нормированное пространство. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для любого подмножества* $M \subseteq X$ *его аннулятор* $M^\perp$ — *замкнутое векторное подпространство в* X^**;*

(ii) *для любого подмножества* $N \subseteq X^*$ *его преданнулятор* ${}^\perp N$ — *замкнутое векторное подпространство в* X*;*

(iii) *если* $M \subseteq X$*, то* $M^\perp = (\overline{\operatorname{span}}(M))^\perp$*;*

(iv) *если* $N \subseteq X^*$*, то* ${}^\perp N = {}^\perp(\overline{\operatorname{span}}(N))$*;*

(v) $\{0\}^\perp = X^*$, $X^\perp = \{0\}$*;*

(vi) ${}^\perp\{0\} = X$, ${}^\perp X^* = \{0\}$*;*

(vii) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq X \Longrightarrow M_2^\perp \subseteq M_1^\perp \subseteq X^*$*;*

(viii) $N_1 \subseteq N_2 \subseteq X^* \Longrightarrow {}^\perp N_2 \subseteq {}^\perp N_1 \subseteq X$*;*

(ix) $\overline{\operatorname{span}}(M) \subseteq {}^\perp(M^\perp)$ *для любого* $M \subseteq X$*;*

(x) $\overline{\operatorname{span}}(N) \subseteq ({}^\perp N)^\perp$ *для любого* $N \subseteq X^*$.

Напомним, что для ортогональных дополнений в гильбертовом пространстве включение, аналогичное п. (ix) (или п. (x)) предложения 13.3, на самом деле является равенством (см. следствие 5.10). Естественно поинтересоваться, не являются ли равенствами сами включения (ix) и (x). Что касается включения (ix), то ответ положителен:

Предложение 13.4. *Для любого подмножества* M *нормированного пространства* X *справедливо равенство* $\overline{\operatorname{span}}(M) = {}^\perp(M^\perp)$.

Доказательство. Если $x \notin \overline{\operatorname{span}}(M)$, то в силу следствия 9.7 найдется такой функционал $f \in X^*$, что $f|_{\overline{\operatorname{span}}(M)} = 0$ и $f(x) \neq 0$. Отсюда получаем, что $f \in M^\perp$ и $x \notin {}^\perp(M^\perp)$. Это доказывает включение ${}^\perp(M^\perp) \subseteq \overline{\operatorname{span}}(M)$, а противоположное включение уже было отмечено в п. (ix) предложения 13.3. □

Из предложения 13.4 с учетом наблюдения 13.2 немедленно следует, что для рефлексивных банаховых пространств включение (x) в предложении 13.3 — также равенство:

Следствие 13.5. *Если* X — *рефлексивное банахово пространство, то для любого подмножества* $N \subseteq X^*$ *справедливо равенство* $\overline{\operatorname{span}}(N) = ({}^\perp N)^\perp$.

В качестве следствия получаем следующий полезный критерий плотности векторного подпространства:

Следствие 13.6. *Пусть* X — *нормированное пространство. Тогда:*

(i) *векторное подпространство* $X_0 \subseteq X$ *плотно в* X *тогда и только тогда, когда* $X_0^\perp = \{0\}$*;*

(ii) *если* X *рефлексивно, то векторное подпространство* $Y_0 \subseteq X^*$ *плотно в* X^* *тогда и только тогда, когда* ${}^\perp Y_0 = \{0\}$.

Доказательство. (i) Если X_0 плотно в X, то $X_0^\perp = \{0\}$ в силу предложения 13.3. Обратно, если $X_0^\perp = \{0\}$, то $\overline{X_0} = {}^\perp(X_0^\perp) = {}^\perp\{0\} = X$ в силу предложения 13.4.

(ii) Следует из (i) и наблюдения 13.2. □

Предостережение 13.1. Для нерефлексивных пространств следствие 13.5, а также п. (ii) следствия 13.6 теряют силу! См. задачи на эту тему в листке 10.

С помощью аннуляторов легко описать пространства, сопряженные к подпространствам и к факторпространствам.

Предложение 13.7. *Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда существуют изометрические изоморфизмы*

$$(X/X_0)^* \cong X_0^\perp, \qquad X_0^* \cong X^*/X_0^\perp.$$

Точнее, если $Q\colon X \to X/X_0$ — фактормотображение, то отображения

$$(X/X_0)^* \to X_0^\perp, \quad f \mapsto f \circ Q, \tag{13.1}$$

$$X^*/X_0^\perp \to X_0^*, \quad f + X_0^\perp \mapsto f|_{X_0}, \tag{13.2}$$

— изометрические изоморфизмы.

Доказательство. То, что (13.1) — изометрический изоморфизм, является частным случаем теоремы 3.5. Чтобы построить изоморфизм (13.2), обозначим через $J\colon X_0 \to X$ тождественное вложение и заметим, что сопряженный оператор $J^*\colon X^* \to X_0^*$ действует по правилу $f \mapsto f|_{X_0}$. Поскольку $\operatorname{Ker} J = X_0^\perp$, существует единственный линейный оператор $\varphi\colon X^*/X_0^\perp \to X_0^*$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "J^*"] \arrow[d] & X_0^* \\ X^*/X_0^\perp \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативной. Иначе говоря, φ — это и есть отображение (13.2). Применяя следствие 9.4 из теоремы Хана–Банаха, видим, что J^* — коизометрия; но тогда φ — изометрический изоморфизм в силу следствия 3.8. □

Приступим теперь к исследованию взаимосвязей между свойствами линейного оператора и его сопряженного.

Предложение 13.8. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Справедливы следующие соотношения:*

(i) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$*;*
(ii) $\overline{\operatorname{Im} T} = {}^\perp(\operatorname{Ker} T^*)$*;*
(iii) $\operatorname{Ker} T = {}^\perp(\operatorname{Im} T^*)$*;*
(iv) $\overline{\operatorname{Im} T^*} \subseteq (\operatorname{Ker} T)^\perp$*;*
(v) *если X рефлексивно, то* $\overline{\operatorname{Im} T^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Доказательство. (i) Пусть $f \in Y^*$; тогда

$$f \in \operatorname{Ker} T^* \iff (T^*f)(x) = 0 \;\forall x \in X \iff f(Tx) = 0 \;\forall x \in X \iff f \in (\operatorname{Im} T)^\perp.$$

(ii) Следует из (i) и предложения 13.4.

(iii) Пусть $x \in X$; тогда, с учетом следствия 9.5 из теоремы Хана–Банаха,

$$x \in \operatorname{Ker} T \iff f(Tx) = 0 \;\forall f \in Y^* \iff (T^*f)(x) = 0 \;\forall f \in Y^* \iff x \in {}^\perp(\operatorname{Im} T^*).$$

(iv), (v) Следует из (iii), предложения 13.3 и следствия 13.5. □

Объединяя предложение 13.8 со следствием 13.6, получаем следующий результат.

Следствие 13.9. *Пусть* X, Y *— нормированные пространства и* $T\colon X \to Y$ *— ограниченный линейный оператор. Тогда*

(i) T^* *инъективен* $\iff$ $\operatorname{Im} T$ *плотен в* Y*;*
(ii) *если* $\operatorname{Im} T^*$ *плотен в* X^**, то* T *инъективен;*
(iii) *если* X *рефлексивно, то* T *инъективен* $\iff$ $\operatorname{Im} T^*$ *плотен в* Y*.*

Предостережение 13.2. Для нерефлексивного X п. (v) предложения 13.8 и п. (iii) следствия 13.9 могут не выполняться! См. по этому поводу задачи из листка 10.

Замечание 13.3. Забегая вперед, отметим, что от требований рефлексивности в результатах этого параграфа все же можно в некотором смысле избавиться — для этого вместо привычной нам нормированной топологии на сопряженном пространстве нужно рассматривать так называемую *слабую** топологию. С этим понятием мы познакомимся позже в контексте топологических векторных пространств.

Итак, мы видим, что инъективные операторы в определенном смысле двойственны операторам с плотным образом. А какие операторы двойственны сюръективным операторам? Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 13.10. *Пусть* X, Y *— банаховы пространства и* $T\colon X \to Y$ *— ограниченный линейный оператор. Справедливы следующие утверждения:*

(i) T *топологически инъективен* $\iff$ T^* *сюръективен;*
(ii) T *сюръективен* $\iff$ T^* *топологически инъективен;*
(iii) T *— топологический изоморфизм* $\iff$ T^* *— топологический изоморфизм.*

Доказательство. (i) ($\Longrightarrow$) Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T_0"'] & Y \\ & \operatorname{Im} T \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd} \tag{13.3}$$

в которой J — тождественное вложение, а T_0 действует так же, как T. Диаграмма, сопряженная к (13.3), имеет вид

$$\begin{tikzcd} X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] \arrow[d, "J^*"] \\ & (\operatorname{Im} T)^* \arrow[ul, "T_0^*"] \end{tikzcd}$$

Оператор J^* действует по формуле $J^*(f) = f|_{\operatorname{Im} T}$, поэтому он сюръективен (и даже коизометричен) в силу следствия 9.4 из теоремы Хана–Банаха. Оператор T_0 — топологический изоморфизм по условию, поэтому T_0^* — также топологический изоморфизм (см. предложение 7.2). Следовательно, оператор $T^* = T_0^* J^*$ сюръективен как композиция двух сюръекций.

(ii) ($\Longrightarrow$) Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ X/\operatorname{Ker} T \arrow[ur, "T_0"'] & \end{tikzcd} \tag{13.4}$$

в которой Q — факторотображение, а T_0 индуцирован оператором T (см. теорему 3.4). Диаграмма, сопряженная к (13.4), имеет вид

$$\begin{tikzcd} X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] \arrow[dl, "T_0^*"] \\ (X/\operatorname{Ker} T)^* \arrow[u, "Q^*"] & \end{tikzcd}$$

Оператор Q^* топологически инъективен (и даже изометричен) в силу предложения 13.7; см. (13.1). Оператор T сюръективен по предположению, поэтому он открыт в силу теоремы 12.1 об открытом отображении. Применяя следствие 3.8, видим, что T_0 — топологический изоморфизм; следовательно, таков же и T_0^* (см. предложение 7.2). Таким образом, оператор $T^* = Q^*T_0^*$ топологически инъективен как композиция двух топологически инъективных операторов.

(i) ($\Longleftarrow$) Применяя уже доказанную импликацию ($\Longrightarrow$) п. (ii) к оператору T^*, получаем, что оператор T^{**} топологически инъективен. Отождествляя X с частью X^{**}, а Y — с частью Y^{**} посредством канонических вложений, мы видим, что оператор $T = T^{**}|_X$ также топологически инъективен (см. предложение 11.2).

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$) в п. (ii) потребует дополнительной подготовки.

Лемма 13.11. *Пусть X — нормированное пространство, $M \subseteq X$ — замкнутое абсолютно выпуклое множество и $x_0 \notin M$. Тогда найдется такой функционал $f \in X^*$, что $|f(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in M$ и $|f(x_0)| > 1$.*

Доказательство. Предположим сначала, что основное поле $\mathbb{K}$ — это поле $\mathbb{R}$ действительных чисел. Согласно теореме 9.13 (iii), множества M и $\{x_0\}$ строго разделены гиперплоскостью, т.е. существует такой функционал $g \in X^*$, что $\sup_{x\in M} g(x) < g(x_0)$. С учетом того, что $0 \in M$, получаем неравенство $0 \leqslant \sup_{x\in M} g(x) < g(x_0)$. Домножая g на подходящую положительную константу, мы можем считать, что $\sup_{x\in M} g(x) \leqslant 1$ и $g(x_0) > 1$. Для любого $x \in M$ вектор $-x$ также лежит в M, поэтому $g(-x) \leqslant 1$, т.е. $g(x) \geqslant -1$. Следовательно, для любого $x \in M$ справедлива оценка $|g(x)| \leqslant 1$, и в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ все доказано.

Пусть теперь $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Рассматривая X как векторное пространство над $\mathbb{R}$, получаем ограниченный $\mathbb{R}$-линейный функционал $g \colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям $|g(x_0)| > 1$ и $|g(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in M$. Положим $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Согласно лемме 9.2, f — ограниченный $\mathbb{C}$-линейный функционал на X. Очевидно, $|f(x_0)| > 1$. Наконец, рассуждение, аналогичное проведенному в доказательстве п. (ii) леммы 9.2, показывает (убедитесь), что $|f(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in M$. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 13.10.

(ii) ($\Longleftarrow$) Выберем $c > 0$ так, чтобы

$$\|T^* f\| \geqslant c\|f\| \qquad (f \in Y^*) \tag{13.5}$$

(см. предложение 2.1). Нам достаточно показать, что

$$\overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)} \supseteq \mathbb{B}_c^\circ. \tag{13.6}$$

В самом деле, включение (13.6) будет означать, что T почти открыт, а значит, открыт в силу следствия 12.4 и поэтому сюръективен в силу следствия 2.4.

Предположим, что включение (13.6) не выполняется, и зафиксируем $y_0 \in \mathbb{B}_c^\circ \setminus \overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)}$. Из леммы 13.11 следует, что найдется функционал $f \in Y^*$, удовлетворяющий условиям $|f(y_0)| > 1$ и $|f(y)| \leqslant 1$ для всех $y \in \overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)}$. В частности, для любого $x \in \mathbb{B}_{1,X}^\circ$ имеем $|(T^* f)(x)| = |f(Tx)| \leqslant 1$. Следовательно, $\|T^* f\| \leqslant 1$, откуда с учетом (13.5) следует, что $\|f\| \leqslant c^{-1}$. Но тогда $|f(y_0)| \leqslant c^{-1}\|y_0\| < 1$, т.к. $y_0 \in \mathbb{B}_c^\circ$. Полученное противоречие доказывает включение (13.6), из которого, как уже отмечалось выше, следует сюръективность оператора T.

(iii) Очевидным образом следует из (i) и (ii). □

У теоремы 13.10 есть и «метрический» аналог:

Теорема 13.12. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *T изометричен $\iff$ T^* коизометричен;*
(ii) *T коизометричен $\iff$ T^* изометричен;*
(iii) *T — изометрический изоморфизм $\iff$ T^* — изометрический изоморфизм.*

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 13.10 с очевидными видоизменениями — убедитесь в этом самостоятельно.

Замечание 13.4. Отметим, что п. (iii) теоремы 13.10 можно доказать и без использования «трудной части» этой теоремы, т.е. импликации ($\Longleftarrow$) п. (ii). В самом деле, предположим, что T^* — топологический изоморфизм. Тогда и T^{**} — топологический изоморфизм. Следовательно, оператор $T = T^{**}|_X$ топологически инъективен и, в частности, имеет замкнутый образ. С другой стороны, из инъективности оператора T^* следует, что T имеет плотный образ (см. следствие 13.9). Следовательно, T — топологический изоморфизм. Аналогичные рассуждения применимы и к п. (iii) теоремы 13.12.

Прежде чем выводить следствия из теоремы 13.10, напомним следующее алгебраическое определение.

Определение 13.2. Пусть X, Y — векторные пространства. *Коядром* линейного оператора $T\colon X \to Y$ называется векторное пространство $\operatorname{Coker} T = Y/\operatorname{Im} T$.

Замечание 13.5. Есть и другое, более абстрактное определение коядра, имеющее смысл для морфизма произвольной категории с нулевым объектом. Возможно, оно встречалось вам в курсе алгебры, а если нет, то о нем можно прочитать, например, в книге С. И. Гельфанда и Ю. И. Манина «Методы гомологической алгебры» (М.: Наука, 1988) или С. Маклейна «Категории для работающего математика»(М.: Физматлит, 2004). В этой связи, во избежание возможной путаницы, важно отметить следующее. Коядро в смысле определения 13.2 — это коядро морфизма в категории векторных пространств. Коядро же морфизма $T\colon X \to Y$ в любой из категорий $\mathscr{N}orm$, $\mathscr{N}orm_1$, $\mathscr{B}an$, $\mathscr{B}an_1$ (см. замечание 4.3) — это $Y/\overline{\operatorname{Im} T}$. В дальнейшем мы всегда будем понимать коядро в смысле определения 13.2, несмотря на то, что использовать это понятие мы будем в контексте функционального анализа. Впрочем, для наших целей будет достаточно рассматривать коядра операторов с замкнутым образом, а для них оба понятия коядра совпадают.

Теорема 13.13. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$ имеет замкнутый образ тогда и только тогда, когда его сопряженный оператор $T^*\colon Y^* \to X^*$ имеет замкнутый образ. Если эти условия выполнены, то*

$$\operatorname{Im} T = {}^{\perp}(\operatorname{Ker} T^*), \quad \operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}, \tag{13.7}$$

и существуют изометрические изоморфизмы

$$\operatorname{Ker} T^* \cong (\operatorname{Coker} T)^*, \quad \operatorname{Coker} T^* \cong (\operatorname{Ker} T)^*. \tag{13.8}$$

Доказательство. Предположим, что T имеет замкнутый образ, и рассмотрим коммутативную диаграмму (13.4). Очевидно, оператор T_0 инъективен, и $\operatorname{Im} T_0 = \operatorname{Im} T$. Применяя теорему 12.6, видим, что T_0 топологически инъективен. Следовательно, оператор T_0^* сюръективен в силу теоремы 13.10. Из равенства $T^* = Q^* T_0^*$ заключаем, что $\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Im} Q^*$. Но из предложения 13.7 (см. (13.1)) следует, что $\operatorname{Im} Q^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. Это доказывает одновременно и замкнутость $\operatorname{Im} T^*$, и второе из равенств (13.7). Первое же из равенств (13.7) — непосредственное следствие предложения 13.8 (ii).

Предположим теперь, что T^* имеет замкнутый образ, и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T_0"'] & Y \\
& \overline{\operatorname{Im} T} \arrow[u, "J"']
\end{tikzcd}$$

в которой J — тождественное вложение, а T_0 действует так же, как T. Оператор J^* действует по правилу $J^*(f) = f|_{\overline{\operatorname{Im} T}}$, поэтому он сюръективен в силу следствия 9.4 из теоремы Хана–Банаха. Из равенства $T^* = T_0^* J^*$ заключаем, что $\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Im} T_0^*$. Таким образом, оператор T_0^* имеет замкнутый образ. С другой стороны, оператор T_0 имеет плотный образ по построению, а значит, T_0^* инъективен (см. следствие 13.9). Применяя теорему 12.6, заключаем, что T_0^* топологически инъективен. Но тогда T_0 сюръективен в силу теоремы 13.10, а это и означает, что $\operatorname{Im} T = \overline{\operatorname{Im} T}$.

Для завершения доказательства остается построить изоморфизмы (13.8). Для этого воспользуемся предложением 13.7, предложением 13.8 (i) и вторым из равенств (13.7):

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Coker} T)^* = (Y/\operatorname{Im} T)^* \cong (\operatorname{Im} T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T^*;\\
(\operatorname{Ker} T)^* \cong X^*/(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = X^*/\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Coker} T^*.
\end{aligned} \qquad \square$$

Следующие четыре несложных, но красивых следствия из теоремы 13.13 докажите сами в качестве упражнений.

Следствие 13.14. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *последовательность $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ точна и* $\operatorname{Im} T$ *замкнут;*

(ii) *последовательность $X^* \xleftarrow{S^*} Y^* \xleftarrow{T^*} Z^*$ точна и* $\operatorname{Im} S^*$ *замкнут.*

Следствие 13.15. *Цепной комплекс $C = (C_n, d_n)$ банаховых пространств точен тогда и только тогда, когда точен его сопряженный комплекс $C^* = (C_n^*, d_n^*)$.*

Следствие 13.16 («лемма Серра)**.** *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Предположим, что операторы S и T имеют замкнутые образы. Тогда существует изометрический изоморфизм*

$$(\operatorname{Ker} T / \operatorname{Im} S)^* \cong \operatorname{Ker} S^* / \operatorname{Im} T^*.$$

Следствие 13.17. *Если C — цепной комплекс банаховых пространств со строгими дифференциалами, то для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует изометрический изоморфизм $H^n(C^*) \cong H_n(C)^*$.*

Замечание 13.6. Лемма Серра (следствие 13.16) была, по-видимому, впервые явно сформулирована и доказана Ж.-П. Серром в 1955 г. в связи с некоторыми вопросами двойственности на комплексно-аналитических многообразиях. Строго говоря, речь в лемме Серра идет не о банаховых пространствах, а о так называемых *пространствах Фреше*, с которыми мы познакомимся позже, но доказательство от этого сложнее не становится. Начиная с работ Серра, следствие 13.16 и его разновидности систематически применяются в комплексно-аналитической геометрии (см., например, В. Д. Головин, «Гомологии аналитических пучков и теоремы двойственности», М.: Наука, 1986). Более общие следствия 13.14 и 13.15 играют важную роль в гомологической теории банаховых алгебр (см. А. Я. Хелемский, «Гомология в банаховых и топологических алгебрах», М.: МГУ, 1986).