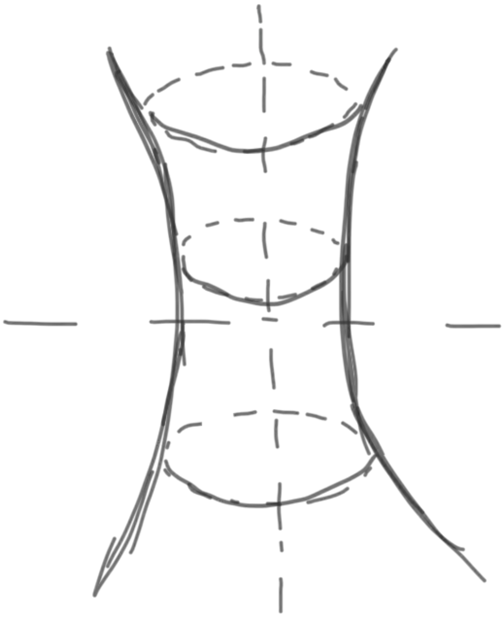
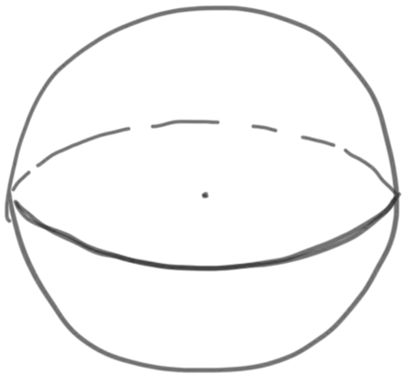
01.09.20

ММС Гладкие многообразия





1. Классическая дифференциальная геометрия
2. Анализ на многообразиях
3. Риманова геометрия

Гладкое многообразие

M – множество

Опр. Пусть τ – сем-во подмножеств удовл. условиям

1) $\varnothing, M \in \tau$

2) $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \tau$, $U_i \in \tau$ $\forall i$

3) $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$, $U_i \in \tau$ $\forall i$

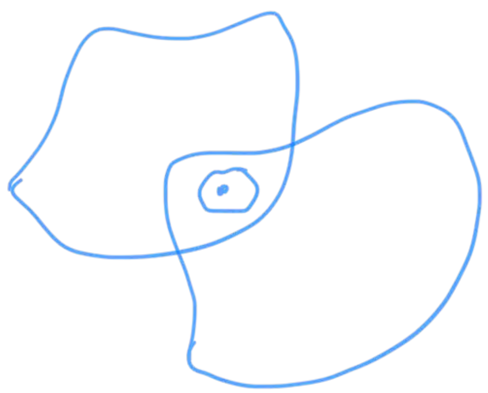
тогда τ наз. топологией на M

(M, τ), а U_i наз. открытыми мн-ми

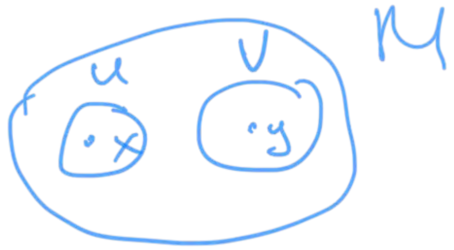
• пример

Топология в $\mathbb{R}^n$ сост. из мн-в $U \in \mathbb{R}^n$ т.ч. вместе с $\forall x \in U$

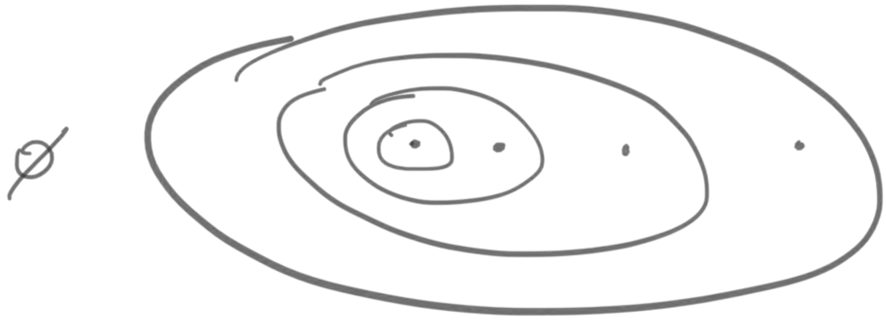
$\exists\, \varepsilon > 0$ $\quad S_\varepsilon(x) \subset U$



Опр. Топология τ на M наз. хаусдорфовой, если $\forall x, y \in M$ $\exists\, U, V \in \tau$, $x \in U$, $y \in V \mid U \cap V = \varnothing$



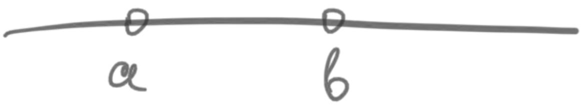
Не хаусдорфова топология:



Опр. **Базой** топологии на τ наз. сем-во подмн-в $\{U_\alpha\} \subset \tau$, что $\forall\, U \in \tau$ можно представить в виде $U = \bigcup U_\alpha$

Опр. Если в базе β топологии τ не более чем счётное мн-во эл-ов, то β наз. **счётной базой**

Пример: счётная база прямой:



$\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ (рацио-нальные)

несчётная база прямой:

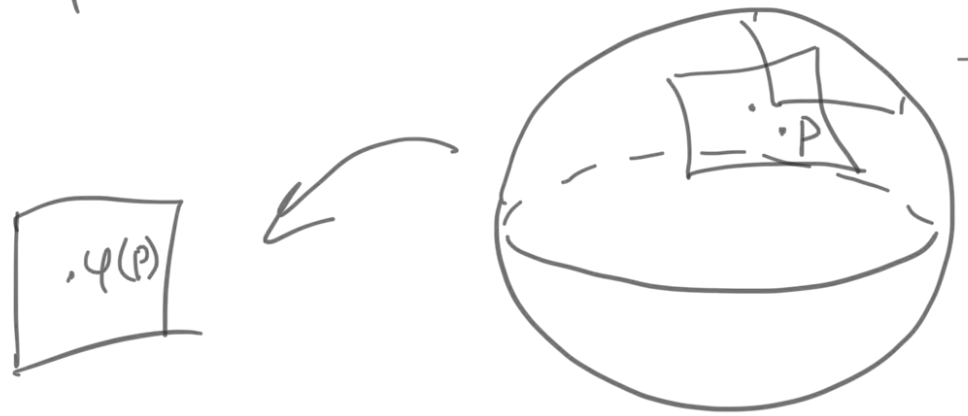
$(a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}$

Опр. Топологическое многообразие M называется хаусдорфово топ. пр-во (M, τ) со счётной базой, т.ч. $\forall p \in M$ $\exists U \in \tau$ $p \in U$ и гомеоморфизм на образ

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$$

$$\varphi : U \to \varphi(U)$$

с некот. откр. подмн-вом $\varphi(U)$ пр-ва $\mathbb{R}^n$



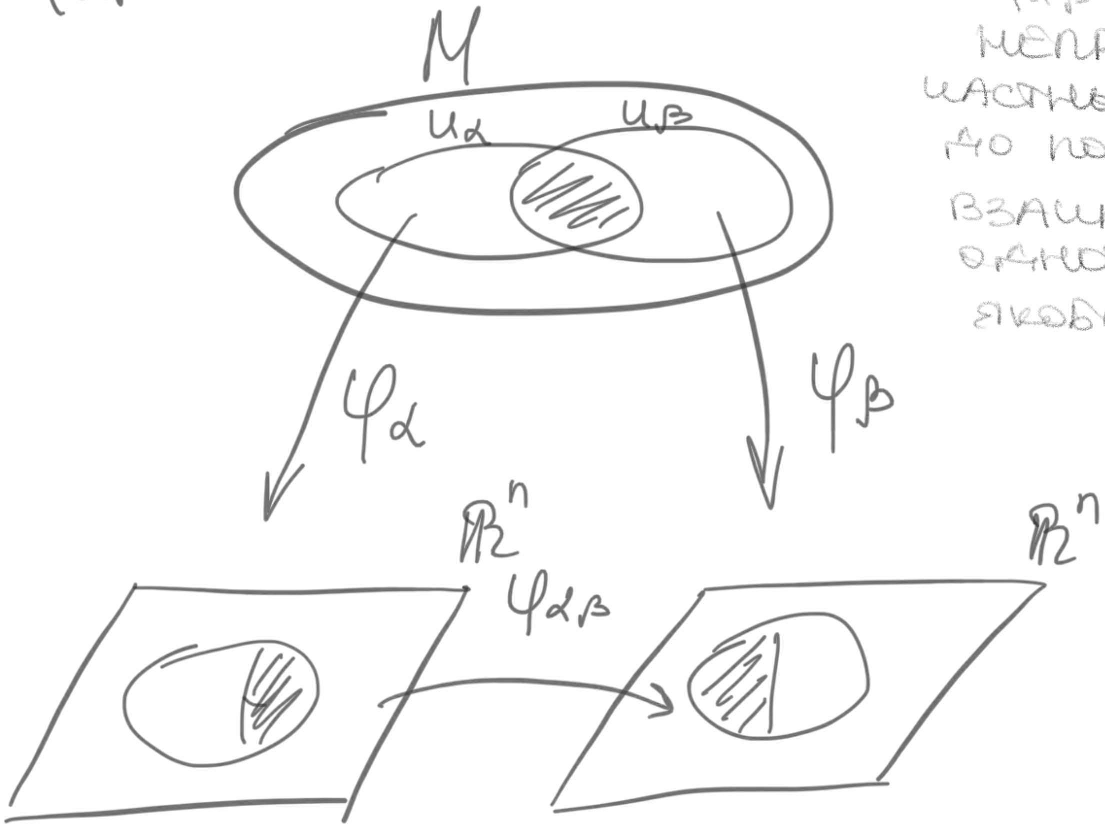
Опр. Картой многообразия (M, τ) наз. гомеоморфизм

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n, \quad U \subset M$$

Опр. Атласом назовём набор карт, покрывающих всё многообразие

Опр. Две карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ наз. C^k-согл., если отображение $\varphi_{\alpha\beta}$ — C^k-диффеоморфизм

$\varphi_{\alpha\beta}$ имеет непрерывные частные произв. до порядка k, взаимно однозначно и якобиан $J \neq 0$



$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ | отобр. $\mathbb{R}^n$ в область $\mathbb{R}^n$

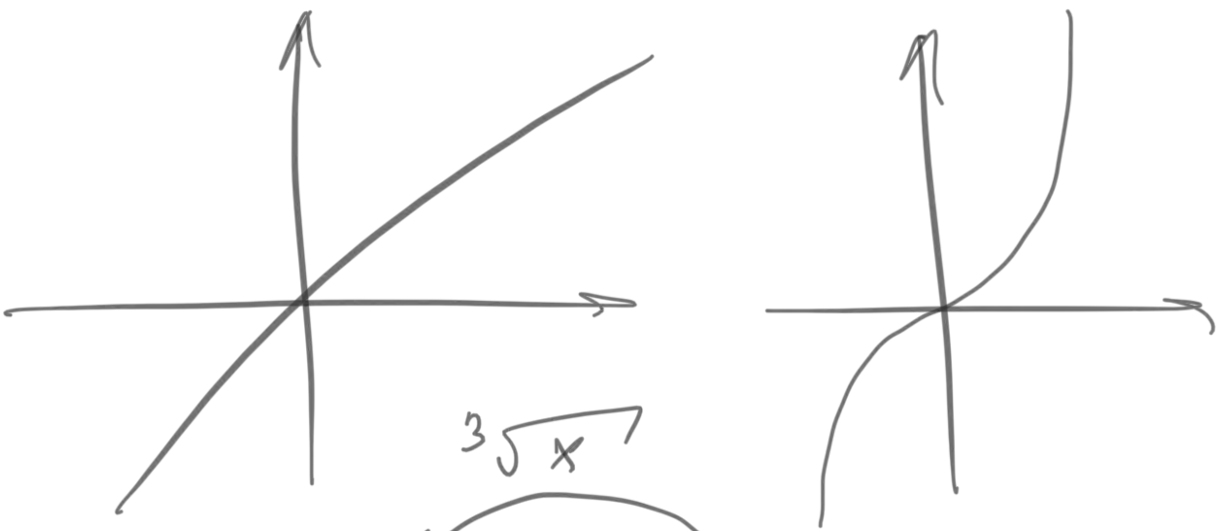
$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

Опр. Атлас наз. C^k-гладким, если он состоит из попарно C^k-согласованных карт.

Опр. C^k-гладкое многообразие наз. хаусдорфово топ. пр-во со счетной базой, на котором задан хотя бы 1 C^k-гладкий атлас.

Опр. C^k-атласы A, A' наз. C^k-эквив., если $A \cup A'$ тоже является C^k-атласом

Опр. Класс эквив. C^k-атласов наз. гладкой C^k-структурой



$$\begin{tikzcd} \varphi_1 : x \mapsto x \arrow[rr, bend right, "x^3"'] & & \varphi_2 : x \mapsto x^3 \arrow[ll, bend right, "\sqrt[3]{x}"'] \end{tikzcd}$$

$\varphi_2''(x) = 6x$ вырожденна

якобиан в $0 = 0 \Rightarrow$ обратное отображ. к φ_2 не дифф. $\Rightarrow$ φ_1 и φ_2 разные многообр.

МНОГООБРАЗИЯ ДИФФЕОМОРФНЫ, НО ОНИ РАЗНЫЕ

Опр. КАРТОЙ МНОГООБРАЗИЯ С КРАЕМ НАЗ. ГОМЕОМОРФИЗМ

$$\varphi : U \to H^n$$

$$H^n = (-\infty; 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$$

(ЯКОБИАН $\neq 0$ $\forall$ ТОЧКАХ, ТОГДА C^k СОГЛАСОВАНО)

Семинар

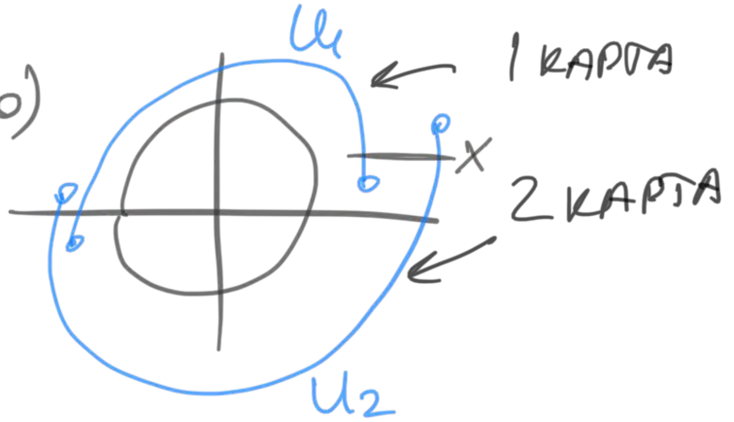
1.09.20

Окружность нельзя покрыть 1 картой

(по определению карты)

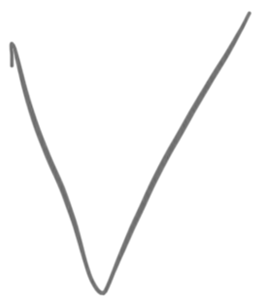
$\pi^*(S^1) \neq \pi^*(\mathbb{R})$

$x \in U_1 \cap U_2$



$$U_1 \cap U_2 \neq \varnothing \qquad \varphi_{U_2}^{-1} \circ \varphi_{U_1} : V_1 \to V_2$$

Аналитическая ф-ия — бесконечно дифференцируема и ряд Тейлора сходится к исходной ф-ии.



У угла 1 карта (интервал)

$x \to (x, |x|)$

$\Downarrow$

гладкое многообр.

(после того, как атлас задан, можно определить, гладкое многообр. или нет)

до этого говорить о гладкости

Лекция 2.

10.09.20

Кривые в $\mathbb{R}^n$

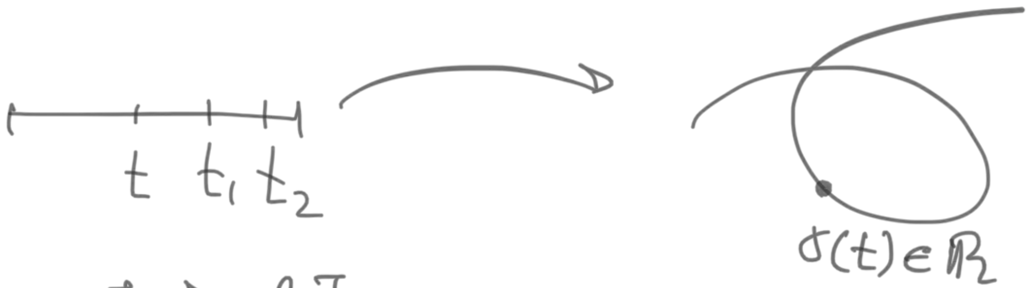
$\mathbb{R}^n$ $e_1, \dots, e_n$ – базис

Скалярное произведение $(v, w) = \sum_i v_i w_i$

$$\|v\| = \sqrt{(v^1)^2 + \dots + (v^n)^2}$$

Опр. Гладкой/непр. параметризованной кривой $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ наз. гладкое/непр. отображение

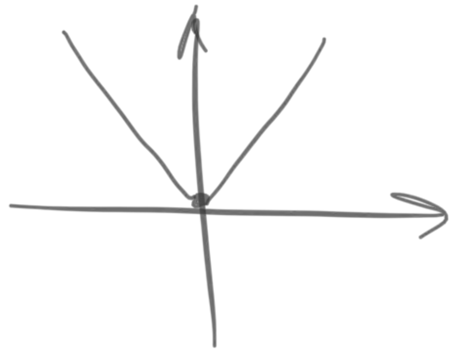
Точкой параметризованной кривой наз. пара $(\gamma(t), t)$



$I = [a, b]$

Опр. Гладкая кривая $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ называется регулярной, если $\forall\, t \in \operatorname{int} I$ $\|\gamma'(t)\| \neq 0$, а в граничных точках промежутка I сущ. отличные от нуля пределы производной.

в каждой точке
$\exists$ касательная



не в каждой точке
$\exists$ касательная

$t \to (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$t \to (\cos 2t, \sin 2t)$, $t \in [0, \pi]$

образы одинаковые,
но кривые — разные

Опр. Параметр. кривые $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^2$ и $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ наз. эквивалентными $\Rightarrow$ $\exists\, \varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$, т.ч. $\exists\, \varphi^{-1}$ | φ, φ^{-1} – гладкие и $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$, $t \in [a_1, b_1]$

Опр. Класс эквивалентных кривых наз. **непараметризованной кривой**, представители этого класса наз. **параметризацией кривой**.

Опр. **Длиной** регулярной кривой $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = (\dot{\gamma}^1(t), \ldots \dot{\gamma}^n(t))$$

Лемма. Длина регулярной непараметризованной кривой не зависит от выбора параметризации.

Док-во: $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n \quad \gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$

$\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2] \qquad t \in [a_1, b_1]$

$\tau = \varphi(t) \in [a_2, b_2]$

$$L(\gamma_1) = \int_{a_1}^{b_1} \|\dot{\gamma}_1(t)\| \, dt = \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{d\gamma_2(\varphi(t))}{dt} \right\| dt =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{d\gamma_2(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt =$$

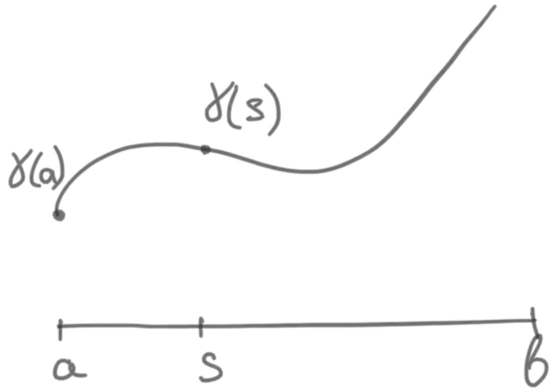
[Предположим, что $\frac{d\varphi}{dt} > 0$. Тогда]

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{d\gamma_2(t)}{d\tau} \right\| \underbrace{\frac{d\varphi}{dt} dt}_{d\tau} = \int_{a_2}^{b_2} \left\| \frac{d\gamma_2}{d\tau} \right\| d\tau = \ell(\gamma_2)$$

$\blacksquare$

Опр. Параметризация $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ наз. натуральной (s — натур. параметр), если длина любого участка кривой $\gamma_{a,x} : s \mapsto \gamma(s)$, $s \in [a,x]$ равна

$$\ell(\gamma_{a,x}) = x - a$$



Лемма. На регулярной кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $\exists$ натуральная параметризация.

Д-во: $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ $\quad t \in [a,b]$

$\varphi : [a,b] \to [0, \ell(\gamma)]$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \qquad \varphi(t) = \int_0^{\tau} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt$$

$\varphi \nearrow \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \|\mathring{\gamma}(\tau)\| \qquad s = \varphi(t)$

$$\ell(\gamma_{a,x}) = \int_a^x \|\mathring{\gamma}_{a,x}(t)\| dt$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \|\mathring{\gamma}(t)\| \qquad \left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\| = 1$$

$$dt = \frac{d\varphi(t)}{\|\mathring{\gamma}(t)\|}$$

$$\left\|\frac{\gamma(\varphi^{-1}(s))}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\varphi^{-1}(s)}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\frac{1}{\frac{d\varphi}{ds}}\right\| = 1 = x - a$$

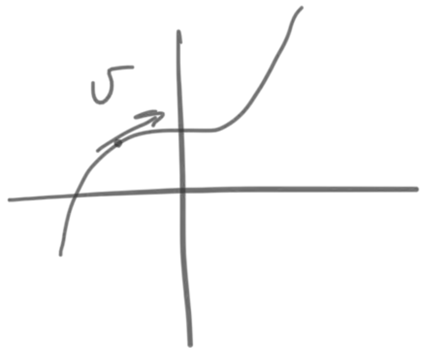
$\blacksquare$

Кривые в $\mathbb{R}^2$

$\gamma(s) = (x(s), y(s))$

s – натур. параметр

$v = \frac{d\gamma}{ds}, \ \|v\| = 1$

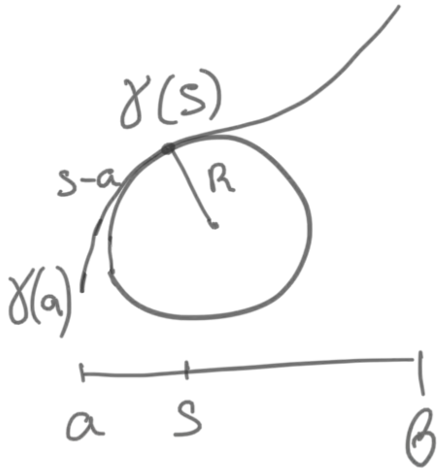


$$\frac{d(v,v)}{ds} = (v'(s), v(s)) + (v(s), v'(s)) =$$

$$= 2(v'(s), v(s)) = 0 \Rightarrow v(s) \perp v'(s)$$

Опр. Кривизной регулярной кривой наз.

$k := \|v'(s)\|$ $\qquad$ $R = \frac{1}{k}$ — радиус кривизны кривой

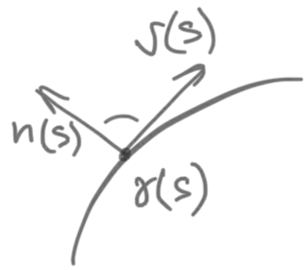


Формулы Френе в $\mathbb{R}^2$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, s — натур. параметр

В точке $(\gamma(s), s)$ выберем базис v, n, т.ч. $v = \gamma'(s)$, $n \perp v$, $\|n\| = 1$, базис v, n положительно ориентирован

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}$$



Док-во: $v \perp v'(s)$, $n \perp n'(s) \Longrightarrow$

$$\frac{dv}{ds} = \alpha(s) n \qquad \frac{dn}{ds} = \beta(s) v$$

покажем, чему равны $\alpha(s)$ и $\beta(s)$:

$$\frac{d(v,n)}{ds} = \underbrace{(v',n)}_{\alpha(s)} + \underbrace{(v,n')}_{\beta(s)} = 0 \Rightarrow \alpha(s) = -\beta(s) = k(s)$$

(по определению)

Лекция 14.09.20

Гладкие многообразия

Теорема о неявной ф-ции

$F: U \times V \to \mathbb{R}$ $\quad U, V \subset \mathbb{R}$

точка $(x_0, y_0) \in U \times V$

$F(x_0, y_0) = 0$

Если $F: U \times V \to \mathbb{R}$ — гладкое

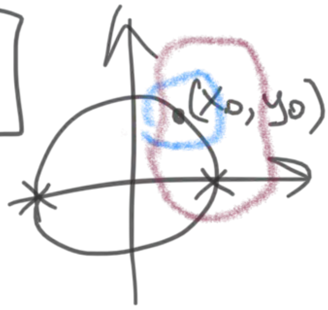
$(x_0, y_0) \in U \times V$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

тогда $\exists$ такая окрестность W точки (x_0, y_0) и окр-ть $U_0 \subset U$ и функция $f: U_0 \to \mathbb{R}$, т.ч. $\forall (x, y) \in W$

$F(x,y) = 0 \iff x \in U_0,\ y = f(x)$

Иными словами: мн-во нулей этого отображения представляется графиком ф-ции

1]



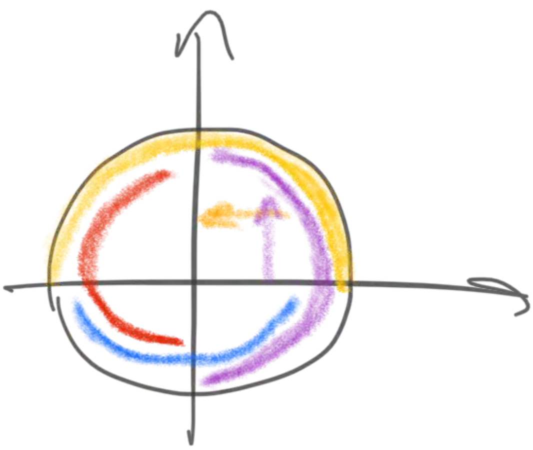
$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y \neq 0$ $\quad y \neq 0$, $x \neq 0$

в окр-ти $\forall (x_0, y_0)$ $(y \neq 0)$ $\exists$ т.ч. $y = f(x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ (аналогично $x = \pm\sqrt{y^2-1}$ $(x \neq 0)$)

2] к ф-ии $F = xy$ применить теорему о неявной ф-ии нельзя

Построим атлас для окр-ти



1) верхняя полуокр-ть

$U_B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$

$\varphi_B : U_B \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi_B(x) = x$

2) правая

$U_n = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$

$\varphi_n : (x,y) \to y$

$\varphi_{Bn} = \varphi_n \circ \varphi_B^{-1} : x \to \sqrt{1 - x^2}$

3)

4)

проверим, что отображ. невырожденно

$$\frac{\partial \varphi_{вн}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

аналогично с оставшимися картами

Лемма. Если у $\forall$ точки p мн-ва $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ выполнено условие т. о неявной ф-ции, то на этом мн-ве Σ в индуцированной топологии $\exists$ структура гладкого многообразия

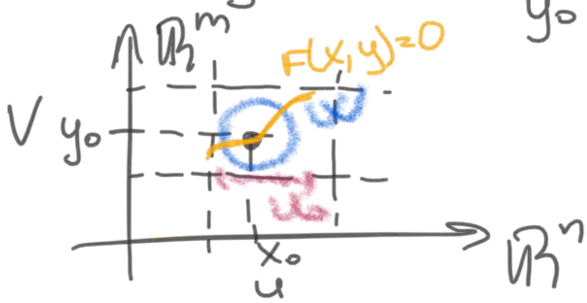
28:35 задача из листка (формулировка) и подсказка

Т. о неявной ф-ции в многомерном случае (или теорема о неявном отображении)

Пусть $F: U \times V \to \mathbb{R}^m$ — гл. отобр., $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$

$F(x_0, y_0) = 0$ $\quad x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$

$y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^m)$



Если

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F^m}{\partial y^1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial y^n}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

то $\exists$ окр-ть $\underset{(x_0, y_0)}{W_0 \ni} \subset U \times W$ и окр-ть

$U_0 \subset U$ и $f: U_0 \to \mathbb{R}^m$, т.ч. $F(x,y) = 0$,

$$(x, y) \in W \Longleftrightarrow y^1 = f^1(x), \ldots, y^m = f^m(x)$$

$$y = f(x)$$

Производная отобр., заданного неявно:

$$f'(x) = -F'_y(x, f(x))^{-1} F'_x(x, f(x))$$

в многомерном случае $F'_x(\ldots)$ – м-ца Якоби

Опр. 1 Регулярной поверхностью $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ наз. такое мн-во Σ, к которому в окр. $\forall$ точки применима теорема о неявном отображении при подходящей перенумеровке координат

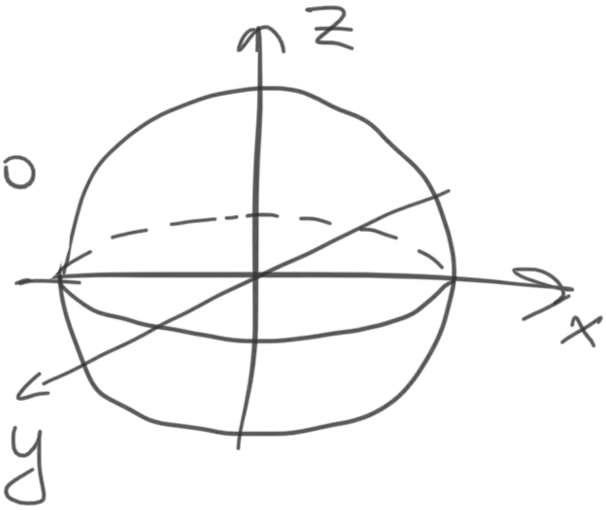
$\exists$ $x^2+y^2+z^2=1$

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x$

$\vdots$

$\frac{\partial F}{\partial z}=2z$



$(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)\notin S^2 \Rightarrow$ $\boxed{S^2 \text{ — регулярная поверхность}}$

Лемма. Следующие опр-ия регулярной поверхности эквив.:

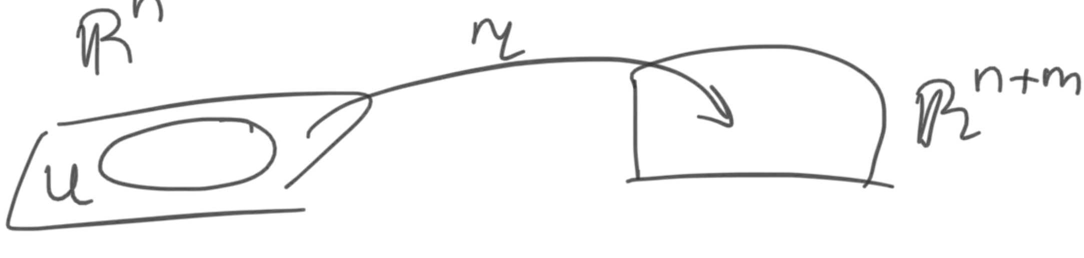
1) Опр. 1.

2) Σ локально в окрестности $\forall$ своей точки представляется графиком

$$y^1 = f^1(x), \dots y^m = f^m(x), \quad x = (x^1, \dots, x^m)$$

3) Σ лок. определяется как образ отображения $r: \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$

и векторы $\dfrac{\partial r}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial r}{\partial x^m}$ л.н.з.



Следствие (теор. об обратной ф-ии)

$f: \underset{\mathbb{R}^n?}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ и якобиан $\neq 0$

Тогда $\exists$ окр-ть $V \ni f(x_0)$

и отображ. $g: V \to \mathbb{R}^n$, т.ч. $g \circ f(y) = y$, $y \in V$

Доказательство леммы:

$1 \Rightarrow 2$ т. о неявном отображ.

$2 \Rightarrow 1$ $F(x,y) = f^i(x) - y^i$

применяем т. о неявн. отображ., т.к. $J \neq 0$

$2 \Rightarrow 3$ если представляется графиком, то можем пос-ть

$$x \longmapsto (\underset{\text{n-мерная координата}}{x}, \underset{\text{m-н-}}{f(x)})$$

$3 \Rightarrow 2$ $r : U \to \mathbb{R}^{n+m}$

$$\frac{\partial r}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x^n}$$ — лин. независ. в (x_0)

$$\begin{array}{c} \\ \\ n \end{array}\left(\begin{matrix} \frac{\partial r^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial r^{n+m}}{\partial x^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial r^{n+m}}{\partial x^n} \end{matrix}\right)$$

$n+m$

СТРОКИ Л.Н.З. $\Rightarrow$ ВЫБЕРЕМ ИЗ $\dfrac{\partial r}{\partial x^i}$
ЛИН. НЕЗАВИС. СТОЛБЦЫ

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial r^{i_1}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial r^{i_1}}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial r^{i_n}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial r^{i_n}}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$x \mapsto (r^{i_1}, \dots, r^{i_n})$$

ПО Т. ОБ ОБРАТНОЙ Ф-ИИ ОТОБРАЖ.
ОБРАТИМО

$$\begin{tikzcd} x^1, \dots, x^n \arrow[r, mapsto] \arrow[d, shift left] & r^1, \dots, r^{n+m} \\ r^{i_1}, \dots, r^{i_n} \arrow[u, bend right] & \end{tikzcd}$$

$$r^i = y^i$$

$$y^{i_1}, \dots, y^{i_n} \mapsto y^1, \dots, y^n$$

$\blacksquare$

Лекция гладкие

15.09.20

Ориентация многообразия

в $\mathbb{R}^n$ определяется репером

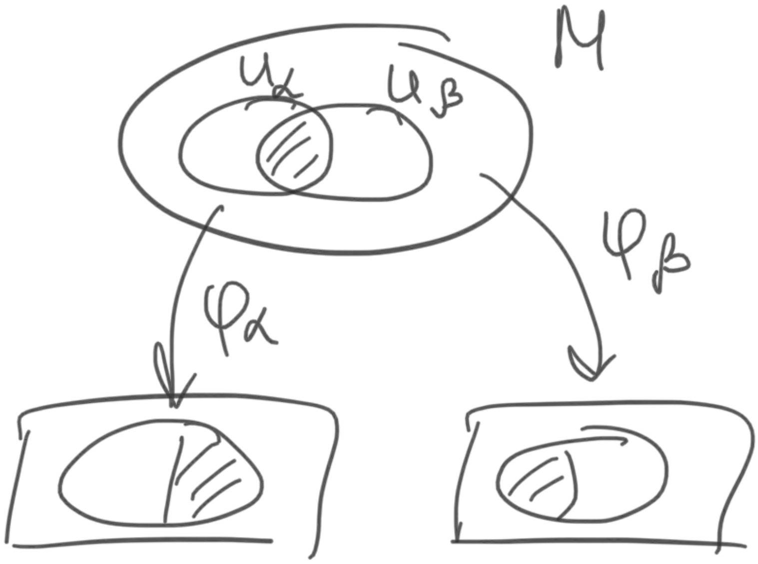
$$\begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{vmatrix} > 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}$$

M – многообр. $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$

Опр. Карты согласованы, если

$$\det J(\varphi_{\alpha\beta}) > 0$$

$$x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$



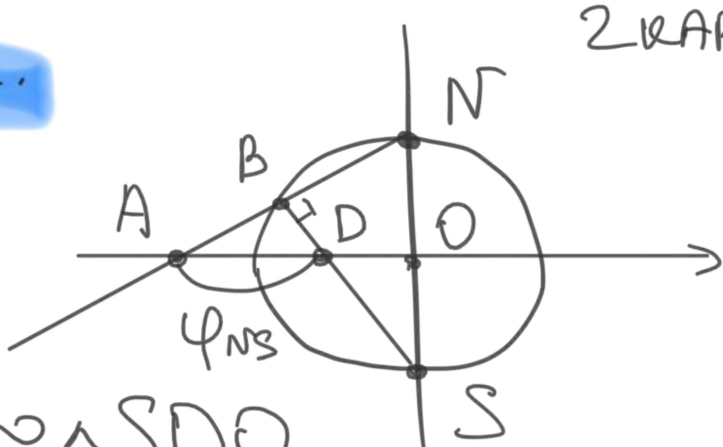
Опр. Атлас $A = \{(U_i, \varphi_i)\}$ наз. **ориентирующим**, если все его карты согласованы.

Опр. 1) Многообразие M наз. **ориентируемым**, если на нём $\exists$ хотя бы один ориентирующий атлас.

2) — и — **ориентированным**, если на нём зафиксирован ориентирующий атлас.

Опр. Ориентирующие атласы A и A' многообр. M наз. **эквивалентными**, если $A \cup A'$ — ориентирующий атлас

Примеры.



2 карты: $S^1 \setminus N$ и $S^1 \setminus S$

$$\triangle ANO \sim \triangle SDO$$

$$\frac{AO}{SO} = \frac{NO}{DO} \Rightarrow AO \cdot DO = r^2$$

$\boxed{\text{пусть } r = 1}$

$$\varphi_{NS} : x \to \varphi(x) \mid x \cdot \varphi(x) = r^2 = 1 \ (\text{инверсия})$$

Посмотрим, будет ли атлас (U_N, φ_N), (U_S, φ_S) ориентирующим

$$\varphi_{NS}(x) = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \varphi_{NS}'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$\Rightarrow J < 0 \Rightarrow$ атлас не ориентирующий

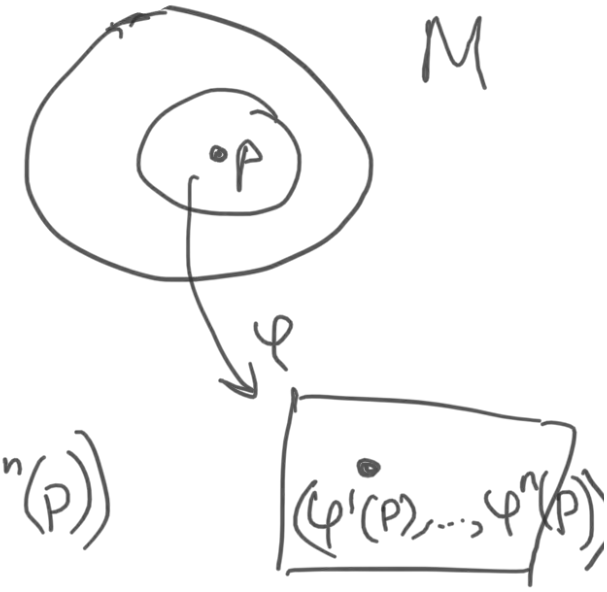
Можем поменять (U_N, φ_N) на $(U_N, -\varphi_N)$. Тогда $J > 0$

$$\varphi_N : (x_1, y_1) \longmapsto (x_2, y_2)$$

$$-\varphi_N : (x_1, y_1) \longmapsto (-x_2, y_2)$$

Замечание.

Для карты (U, φ) $\exists$ антиподальная карта $(U, \tilde{\varphi})$



$$\tilde{\varphi}(p) = (-\varphi^1(p), \varphi^2(p), \ldots, \varphi^n(p))$$

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto (-x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

$$\det J(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) = \det \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Теорема. У связанного ориентир. многообразия $\exists$ ровно 2 различных ориентации.

Док-во: M — связное многообр.,

$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\mathcal{A}' = \{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ — два ориентир. атласа

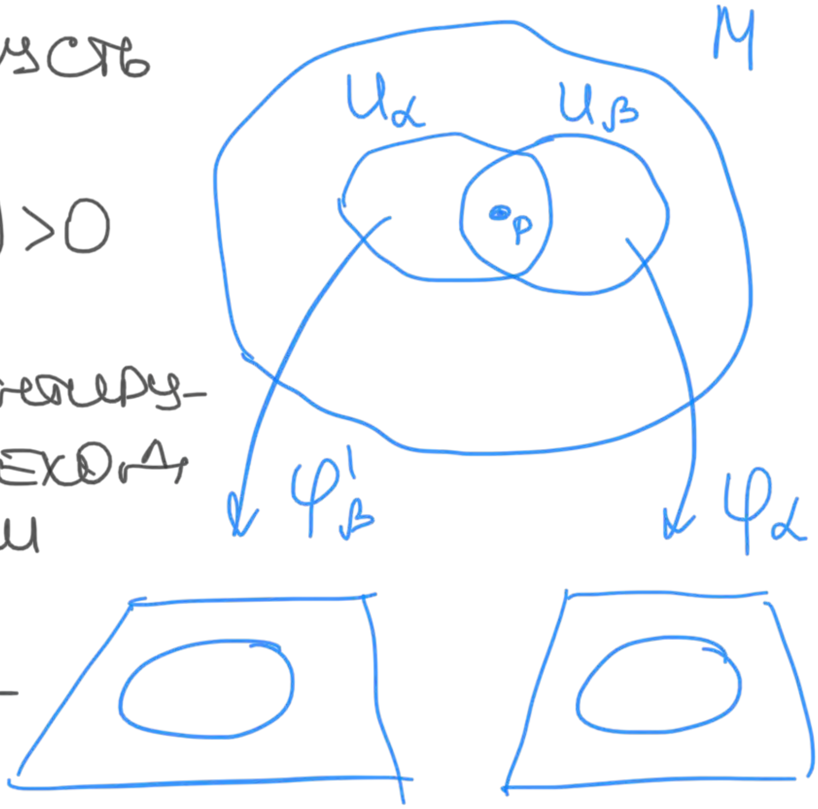
Рассмотрим антиподальный атлас

$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$

Покажем, что $A' \sim A$ или $A' \sim \tilde{A}$

$p \in U_\alpha \cap U'_\beta$. Пусть

$\det J(\varphi'_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p)) > 0$



Т.к. атласы ориентирующие, то переход между картами таких атласов имеет положительный в т. p якобиан $\Rightarrow$ для другой любой пары карт в т. $p \in M$ $J > 0$

Обозначим через M^+ мн-во точек $p \in M$ таких, что якобиан отображ-ия перехода между картами атласов A и A' положителен

Свойства M^+: 1) M^+ — открыто
(т.к. ф-ия φ непрер. $\Rightarrow$ $\exists$ окрестность т. p ...)
2) M^+ — замкнуто
(можем определить M^+ как мн-во, где $J \geq 0$ прообраз замкнутого мн-ва $[0, +\infty)$ замкнут

3) $M^+ \neq \varnothing$ т.к. M связно, то $\exists$ только 2 откр. и замк. подмн-ва — $\varnothing$ и M

$$\Downarrow$$

$$M^+ = M$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{A} \sim A$$

аналогично с $\det J < 0$

$\square$

КРИТЕРИЙ ОРИЕНТИРУЕМОСТИ МНОГООБРАЗИЯ

Опр. **Цепочкой** карт наз. последовательность карт: $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_k, \varphi_k)$, т.ч. $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$ $i = 1, \ldots, k-1$

Опр. Назовём цепочку карт (U_i, φ_i) $i = 1, \ldots, k$ **противоречивой**, если

$$\begin{cases} J(\varphi_{i,i+1}(x)) > 0 \ \forall x \in \varphi_i(U_i \cap U_{i+1}), \\ U_1 \cap U_k \neq \varnothing \\ \exists x \in \varphi_k(U_1 \cap U_k) \mid \det J(\varphi_{k1}(x)) < 0 \end{cases}$$

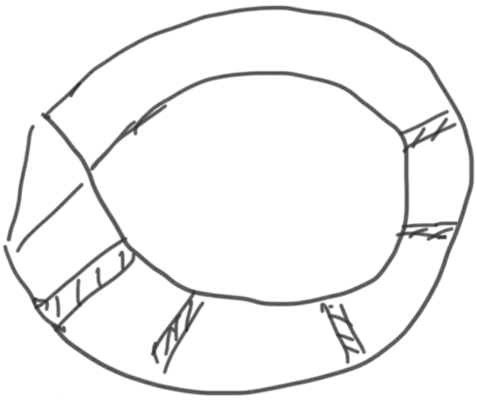
Теорема (критерий ориентируемости многообразия)

Многообр. M не ориентируемо

$\Updownarrow$

на M $\exists$ противоречивая цепочка карт

Пример:



$x \longmapsto x + l$

$y \longmapsto -y$ $\qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Док-во}}$: рассмотрим связную компоненту отдельно (и докажем противоположное утверждение)

Необходимость: M ориент. $\Rightarrow \nexists$ противоречивой ц. карт

карта 1 задаёт ориентирующий атлас $\Rightarrow$ согласована либо с $\mathcal{A}$, либо с $\mathcal{A}'$

далее берём карту 2 и т.д.

Достаточность: $\nexists$ противоречивой ц. карт $\Downarrow$ M — ориентируемо

На M $\exists$ атлас, состоящий из конечного или счётного числа карт

Многообразие — топологич. пр-во со <u>счётной базой</u>, т.е. можем вместо карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ $\left(U_\alpha = \bigcup_\beta V_\beta\right)$ рассмотреть набор карт $\rightsquigarrow \left(V_\beta, \varphi_\alpha|_{V_\beta}\right)_{\beta \in B}$

(База топологии $\{V_\alpha \in \tau\}$
$\forall U \subset \tau \quad U = \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$)

Множества V_β могут участвовать в атласе много раз $\Rightarrow$ выберем их по одному разу.

Пусть $A = \{(U_i, \varphi_i)\}$ — атлас из конечного или счётного числа карт.

$$(U_1, \varphi_1), (U_i, \varphi_i)$$

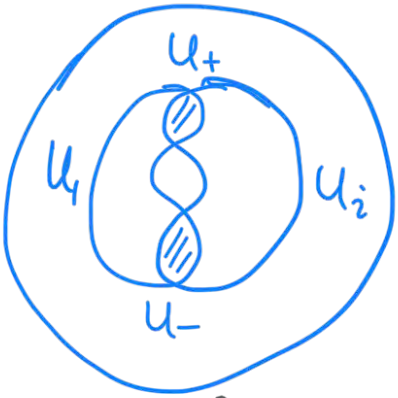
$$U_1 \cap U_i \neq \varnothing$$

1. Если $|J(\varphi_{1i}(p))| > 0$ $\forall p \in U_1 \cap U_i$

тогда добавим к (U_1, φ_1) карту (U_i, φ_i)

2. Если $|J(\varphi_{1i}(p))| < 0$, то добавим антиподальную к (U_i, φ_i)

3.



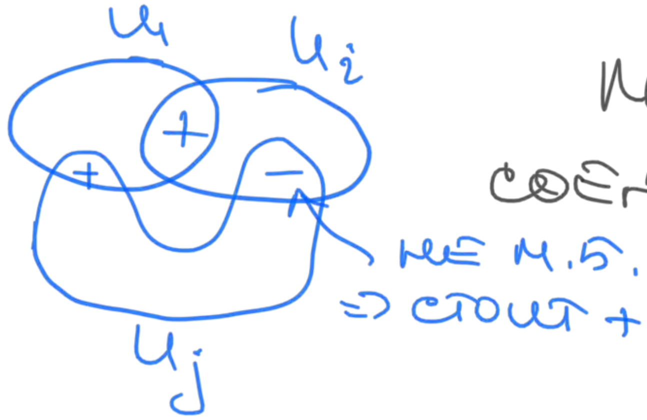
$U_+ : |J| > 0$

$U_- : |J| < 0$

Тогда рассмотрим цепочку карт

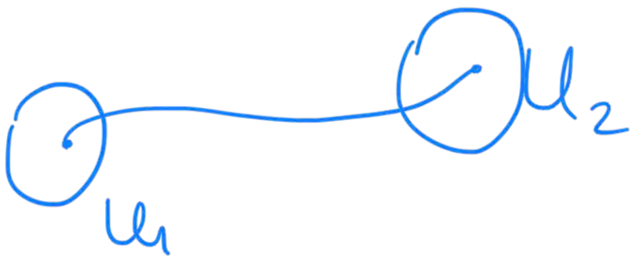
$$(U_1, \varphi_1), (U_+, \varphi_1), (U_i, \varphi_i), (U_-, \varphi_i)$$

Она противоречива $\Rightarrow$ такого не м.б.



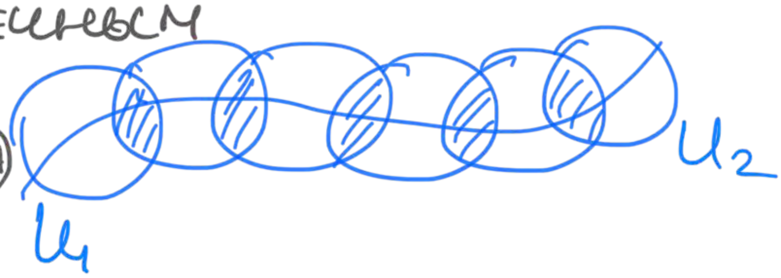
Можем так соединять карты дальше.

Мы переберём все карты, т.к. на многообразии $\exists$ регулярная кривая,



которая является образом отрезка при непрерывном отображении

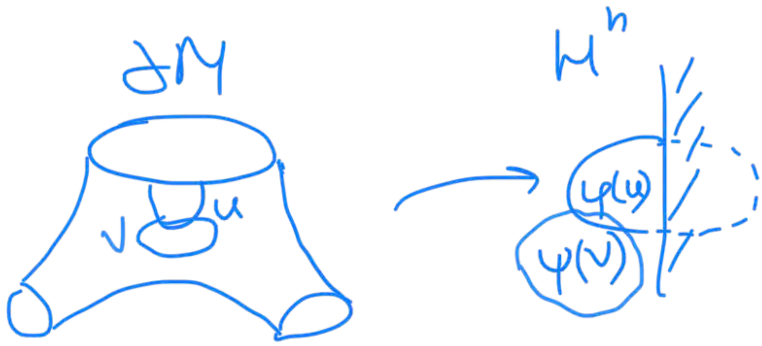
Эта кривая = компакт $\Rightarrow$ можем покрыть конечным числом карт (по опр. компакта)



ЛЕКЦИЯ ПЛАНИНЕ 28.09.20

МНОГООБРАЗИЯ С КРАЕМ

M – хаусд. топ. пр-во со счётной базой



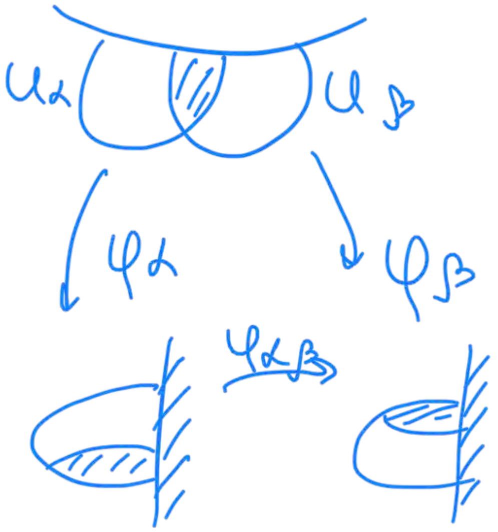
Опр. КАРТОЙ многообр. с краем M наз. пара (U, φ) U – откр. мн-во

$$\varphi: U \to H^n = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \text{ – гомеоморфизм}$$

Опр. АТЛАСОМ $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообр. с краем M наз. такой набор соглас. карт, что $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$

Опр. Две карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) наз. СОГЛАСОВАННЫМИ, если отобр. перехода между ними явл. диффеоморфизмом (*)

многообразия M



$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

Замечание: x_1 на крае $= 0 \Rightarrow$ якобиан в первом столбце не определен $\Rightarrow$ в точках края это левые производные

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi^n_{\alpha\beta}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

Опр. **Краем** многообразия с краем M и атласом $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ наз. множество:

$$\partial M = \bigcup_{\alpha} \{ p \in M \mid \varphi_\alpha^{-1}(0, x^2, \dots, x^n),\ (0, x^2, \dots, x^n) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \}$$

Лемма. Множество ∂M не зависит от выбора атласа.

▷ Рассмотрим мн-во внутренних точек многообр. M $\quad M \setminus \partial M$

Диффеом. $\varphi_{\alpha\beta}$ переводит окр-ть точки x в окр-ть точки $\varphi_{\alpha\beta}(x)$

Для всех атласов мн-ва $M \setminus \partial M$ совпадают (т.к. окр-ть ) ◁

(Рассматриваются 2 карты из 1го атласа, т.к. мы можем взять карты из разных атласов и объединить атласы)

Теорема. Край ∂M n-мерного C^k-гладкого многообразия с краем M явл. $(n-1)$-мерным C^k-гладким многообр. без края

▶ $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ — атлас M. Определим атлас $\mathcal{A}'=\{(U'_\alpha,\varphi'_\alpha)\}$ многообразия M

$$U'_\alpha = U_\alpha \cap \partial M \qquad \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha\big|_{U'_\alpha}$$

$$p\in U'_\alpha \qquad \varphi'_\alpha(p)=(\varphi^2_\alpha(p),\dots,\varphi^n_\alpha(p))$$

Отображение биективно (т.к. топология индуцирована)

Проверим C^k-согласованность

$$\varphi'_{\alpha\beta}=\varphi'_\beta\circ\varphi'^{-1}_\alpha:(x^2,\dots,x^n)\longmapsto(\varphi^2_{\alpha\beta}(x),\dots,\varphi^n_{\alpha\beta}(x))$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(0,x^2,\dots,x^n)\longmapsto(0,\varphi^2_{\alpha\beta}(x),\dots,\varphi^n_{\alpha\beta}(x))$$

Необходимо показать, что $\varphi'_{\alpha\beta}$ — C^k-диффеоморф.

$$J(\varphi_{\alpha\beta})(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi'^1_{\alpha\beta}}{\partial x^1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi'^1_{\alpha\beta}}{\partial x^n} = 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi'^n_{\alpha\beta}}{\partial x^1} & & \dots & & \frac{\partial \varphi'^1_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

$x^1 = 0$

φ ? ?

$\varphi^1_{\alpha\beta} = 0$

$\Downarrow$

$\frac{\partial \varphi'^1_{\alpha\beta}}{\partial x_i} = 0$

$i = 2, \dots, n$

$x \in \varphi'_\alpha(U'_\alpha)$

$$\frac{\partial \varphi'^1_{\alpha\beta}}{\partial x^1}(x) = \lim_{t \to -0} \frac{-\varphi'^1_{\alpha\beta}(x) + \varphi'^1_{\alpha\beta}(x^1 + t, x^2, \dots, x^n)}{t}$$

Знаем, что $|J(\varphi_{\alpha\beta})| \neq 0 \Rightarrow$

минор $|A_{11}| \neq 0$

$$J(\varphi'_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^2_{\alpha\beta}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \varphi^n_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \\ \\ \frac{\partial \varphi^n_{\alpha\beta}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \varphi^n_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

A' – C^k-гладкий атлас на ∂M ◭

Ориентирующий атлас

$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M, что $\forall\, U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$

$|J(\varphi_{\alpha\beta})(x)| > 0 \quad \forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$

Теорема. Ориентирующий атлас $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообразия с краем M индуцирует ориентир. атлас $\mathcal{A}'$ на крае ∂M.

Ориентации атласов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ на M и ∂M наз. согласованными

Наглядно можно задать направлением обхода

▶ Из предыдущей теоремы:

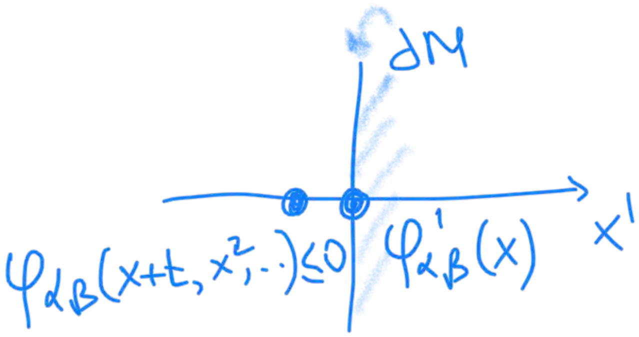
$$\varphi^1_{\alpha\beta} = \varphi^1_\beta \circ \varphi_\alpha^{1-1} : (x^2, \dots, x^n) \longmapsto (\varphi^2_{\alpha\beta}(x), \dots, \varphi^n_{\alpha\beta}(x))$$

$$J(\varphi^1_{\alpha\beta}) \neq 0$$

нужно показать, что $J(\varphi_{\alpha\beta})(x) > 0$

т.е. что

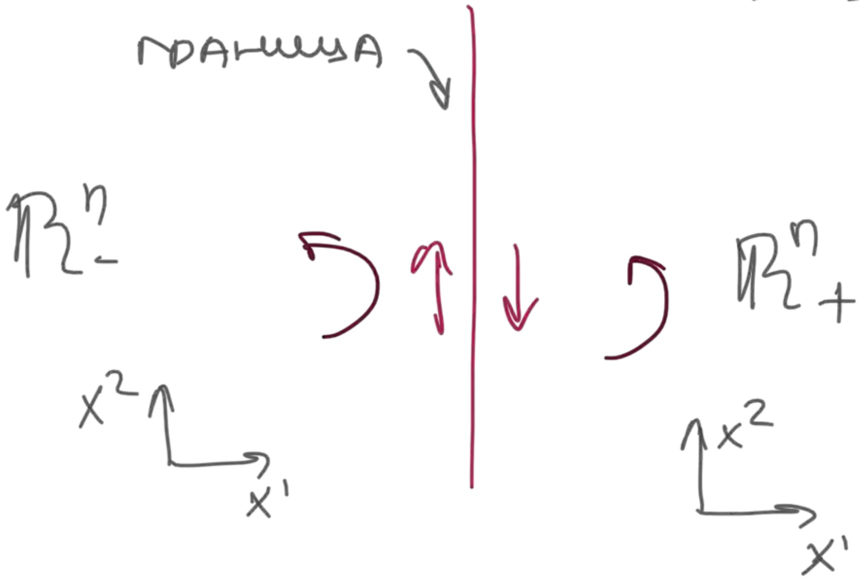
$$\frac{\partial \varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x^1}(x) = \lim_{t \to -0} \frac{-\overbrace{\varphi^1_{\alpha\beta}(x)}^{=0} + \overbrace{\varphi^1_{\alpha\beta}(x^1+t, x^2, \dots, x^n)}^{\leq 0}}{\underbrace{t}_{<0}} \geq 0$$



<u>Пример.</u> Многообр. с краем

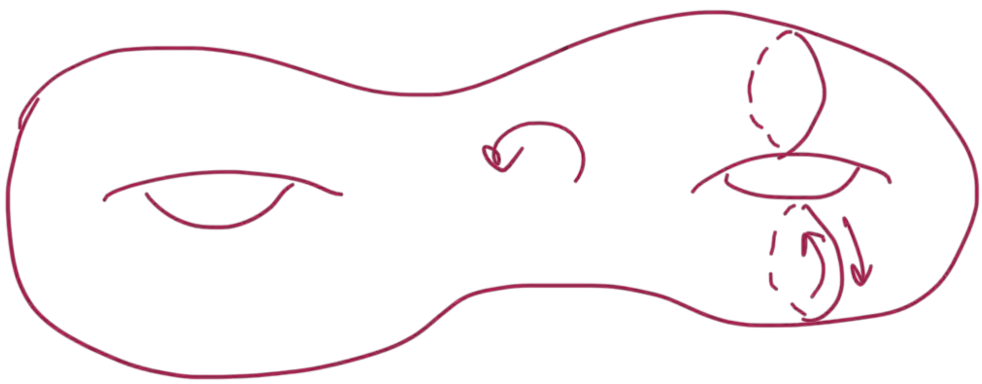
$\mathbb{R}^n_- = H^n$, $\mathbb{R}^n_+$
$\qquad\qquad\qquad \| $
$\qquad\qquad [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$

2 многообразия, состоящ. из 1ой карты



Здесь отображ-ие тождественно id

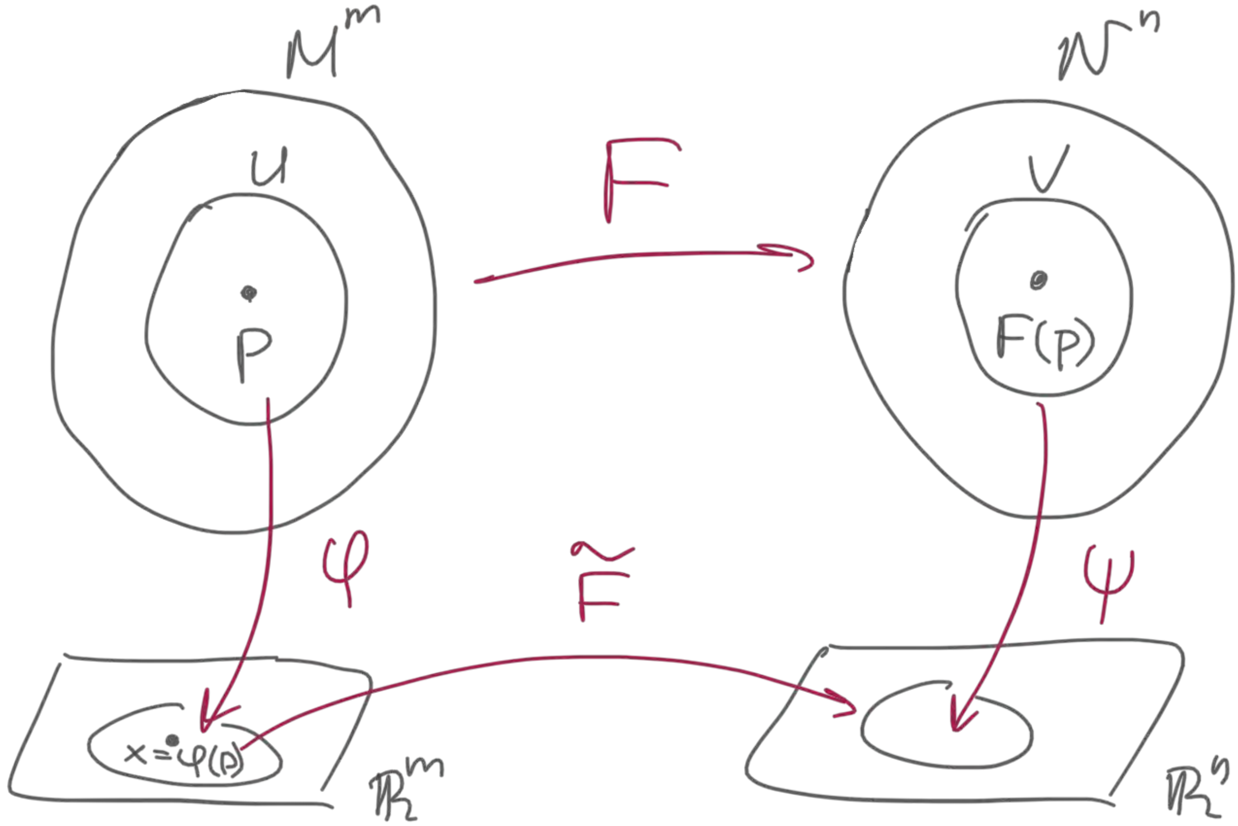
$$x^1 \to -x^1$$
$$x^2 \to x^2$$
$$\vdots$$
$$x^n \to x^n$$



Лекция гладкие

29.09.20

Отображения многообразий. Касательное пространство



M, N — гл. многообразия.

Опр. Отображение $F: M \to N$ наз. C^k-гладким в точке $p \in M$, если $\forall$ пары карт (U,φ), (V,ψ), т.ч. $p \in U$, $F(p) \in V$ отображение $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ C^k-гладкое в некот. окр-ти точки $x=\varphi(p)$

Опр. Отображ. $F: M \to N$ наз. **C^k-гладким**, если оно C^k-гладкое в каждой точке

Опр. Назовём отобр. $F: M \to N$ **диффеоморфизмом**, если F - гомеоморфизм и F, F^{-1} - гладкие отображ.

Опр. **Гладкой функцией** на M наз. гладкое отображение $f: M \to \mathbb{R}$

$C(M)$ - пространство гладких функций на M.

$C(M)$ — алгебра гладких ф-ий на M
(ф-ии можно умножать, складывать)

Лемма. Условие гладкости отображ. $F: M \to N$ не зависит от выбора карт $(U, \varphi), (V, \psi)$

▶ Пусть $(U_1, \varphi_1), (V_1, \psi_1)$ — карты на M и N соответственно
$p \in U_1$, $F(p) \in V_1$

$$\varphi_{01} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}, \quad \psi_{01} = \psi_1 \circ \psi_0^{-1}$$

$$\varphi_{01} : \varphi(U \cap U_1) \longrightarrow \varphi_1(U \cap U_1)$$

$$\psi_{01} : \psi(V \cap V_1) \longrightarrow \psi_1(V \cap V_1)$$

Тогда $\widetilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$

$$\widetilde{F} = \psi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1} = \psi_{01} \circ \psi_0 \circ F \circ (\varphi_{01} \circ \varphi_0)^{-1} =$$

$$= \psi_{01} \circ \underbrace{\psi_0 \circ F \circ \varphi_0^{-1}}_{C^k\text{-гладкое}} \circ \varphi_{01}^{-1}$$

диффеоморфизм $\Rightarrow C^k$-гладкое

Если отобр. было C^k-гладкое, то при переходе к $\widetilde{F}$ оно останется C^k-гладким ∎

Если M – гл. многообр., то $C(M)$ – алгебра гл. ф-ций

$$F : M \longrightarrow N$$

$$F^* : C(N) \longrightarrow C(M)$$

Опр. Пусть $f: N \to \mathbb{R}$, тогда определим
$F^* f = f \circ F$

Лемма. $F^*: C(N) \to C(M)$ – гомоморфизм алгебр

$\triangleright$ $F^*(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(F(x)) =$
$= \alpha f(F(x)) + \beta g(F(x)) = \alpha F^* f(x) + \beta F^* g(x)$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad f, g \in C(N)$ $\triangleleft$

Следствие. Если $F: M \to N$ – диффеоморф., то $F^*: C(N) \to C(M)$ – изоморфизм алгебр.

$\triangleright$ $(F)^* (F^{-1})^*$ – гомоморфизм

$(F^*)^{-1}(f \circ F) = f \Rightarrow (F^*)^{-1} g = g \circ F^{-1} = (F^{-1})^* g$
$g = F^* f = f \circ F \Rightarrow$ инъективно $\triangleleft$

Касательные пространства к многообразию в точке

Опр. Гладким путём на M, выходящим из т. $p \in M$, наз. гладкое (хотя бы C^1) отображение
$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \text{ т.ч. } \gamma(0) = p \text{ и}$$
$\varepsilon > 0$ считается столь малым, сколь это необходимо

(напр., чтобы путь наход. на 1ой карте)

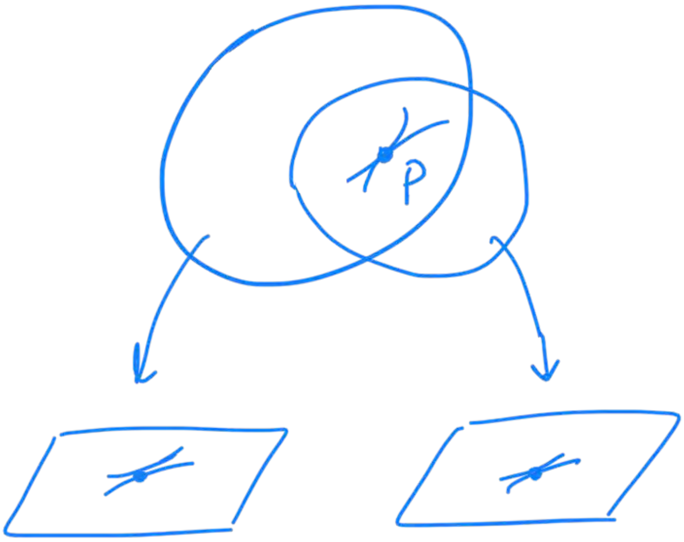
Опр. Два пути γ_1, γ_2, выход. из т. $p \in M$, наз. эквивалентными, если в карте (U, φ), $p \in U$
$$\boxed{\frac{d}{dt}\varphi(\gamma_1(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi(\gamma_2(t))\Big|_{t=0}}$$
(т.е. $\vec{v}$ одинаковая)

Лемма. Эквивалентность путей γ_1 и γ_2 не зависит от выбора карты

▷ Пусть $\gamma_i:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ $\quad\gamma_i(0)=p$, $\quad i=1,2$

и карты $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ и (U_β,φ_β), т.ч.

$p\in U_\alpha\cap U_\beta$



Пусть $\gamma_1\sim\gamma_2$

в $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$:

$$\frac{d}{dt}\varphi_\alpha(\gamma_1(t))\Big|_{t=0}=$$

$$=\frac{d}{dt}\varphi_\alpha(\gamma_2(t))\Big|_{t=0}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\varphi_\beta(\gamma_1(t))=\frac{d}{dt}\left(\varphi_{\alpha\beta}\circ\varphi_\alpha(\gamma_1(t))\right)=$$

$$=J(\varphi_{\alpha\beta})\Big|_{\varphi_\alpha(p)}\frac{d}{dt}\varphi_\alpha(\gamma_1(t))\Big|_{t=0}=$$

$$=J(\varphi_{\alpha\beta})\Big|_{\varphi_\alpha(p)}\frac{d}{dt}\varphi_\alpha(\gamma_2(t))\Big|_{t=0}=$$

$$= \frac{d}{dt} \varphi_\beta(\gamma_2(t))\Big|_{t=0}$$

В обратную стор. аналогично

Замечание Эквивалентность путей явл. отношением эквивалентности.

Опр. Касательным вектором к многообразию M в точке p наз. класс эквивалентных путей: $v = [\gamma]$

$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(0) = p$

Координатная запись вектора $v = [\gamma]$ в карте (U, φ): $\tilde{\gamma}(t) = \varphi(\gamma(t))$

$v = (v^1, v^2, \ldots, v^m)$, $v^i = \frac{d}{dt} \gamma^i(0)$

т.е. $v = \gamma'(0)$

Обозначение. Пр-во касательных векторов к M в точке p — T_pM

Структура вект. пр-ва на T_pM

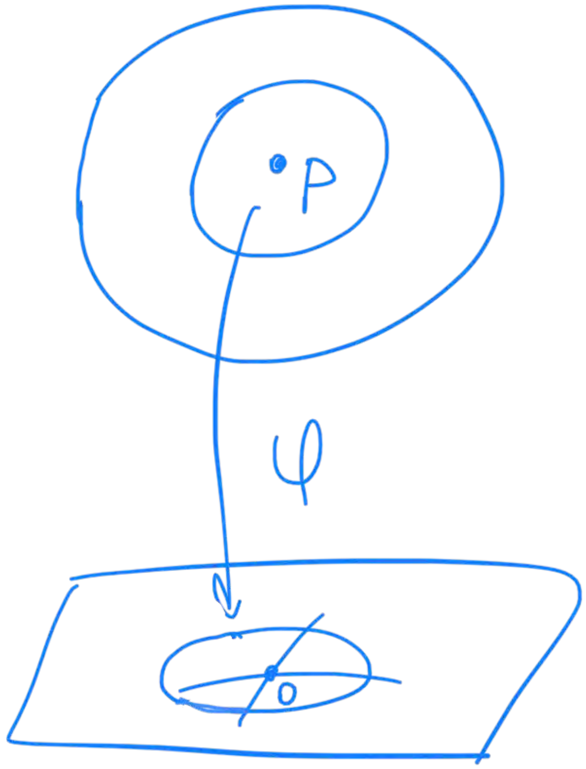
Рассм. карту (U, φ) на M, т.ч. $p \in U$ и $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\alpha[\gamma_1] + \beta[\gamma_2] = [\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2]$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

$\gamma_i(0) = p \quad i = 1,2$



В $\mathbb{R}^n$ касат. пр-вом была касат. плоскость

$r : U \to \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial r}{\partial x^1}$

Дифференциал отображения.

$F: M^m \to N^n$

Опр. Дифференциалом отображ.

$F: M \to N$ наз. отображение, которое в т. $p \in M$ является гомоморфизмом $dF: T_pM \to T_{F(p)}N$, т.ч.

$$dF(\gamma)(t) := F(\gamma(t))$$

Координатная запись dF

(U, φ) – карта на M^m, (V, ψ) – карта на N^n

$p \in U$, $F(p) \in V$

$v = [\gamma]$ в коорд. (U, φ) $\tilde{v} = \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))\Big|_{t=0}$

$$w = dF(v) = [F(\gamma(t))]$$

КООРДИНАТНАЯ ЗАПИСЬ ВЕКТОРА

$v = [\gamma]$ В КАРТЕ (U, φ): $\tilde{\gamma}(1) = \varphi(\gamma(t))$

КЛАСС ЭКВИВ. ПУТЕЙ

$v = (v^1, v^2, \ldots, v^m)$, $v^i = \frac{d}{dt} \gamma^i(0)$

Т.Е. $v = \gamma'(0)$

$$\tilde{w} = \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\varphi \circ F \circ \varphi^{-1} (\varphi(\gamma(t))) \right) \Big|_{t=0} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{F}^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}^1}{\partial x^m} \\ & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{F}^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ \tilde{v}^n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}^i = \frac{d}{dt} \varphi^i(\gamma(t)) \Big|_{t=0}$$

ЛЕКЦИЯ ГЛАДКИЕ

13.10.20

Касательные векторы как дифференцирование

Опр. Дифференцированием функций из M в точке $p \in M$ наз. линейный функционал

$$X : C(M) \to \mathbb{R},$$ удовл. условиям:

- $X(\underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} f + \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} g) = \lambda X \underbrace{f}_{} + \mu X \underbrace{g}_{}$ — линейность

  гладкие ф-ии на M $(\in C(M))$

- $X(f \cdot g) = X(f) \cdot \underbrace{g(p) + f(p)}_{\text{в точке } p} X(g)$ — пр-ло Лейбница

Примеры

$\frac{\partial}{\partial x^i} \partial v$ — дифференцирование

$\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$ — не дифференц.

Дифференцирование в точке $p \in M$ образует векторное пространство

$$X, Y \in \mathrm{Diff}_p(M)$$

$$\lambda X + \mu Y \in \mathrm{Diff}_p(M), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Опр. **Касательным вектором** к M в точке $p \in M$ назовём дифференцирование гладких функций на M в точке p

т.е. $X \in \mathrm{Diff}_p(M)$ X – касат. вектор

Теорема Пространство T_pM и Diff_pM канонически изоморфны

▷ 1) Построим гомоморфизм

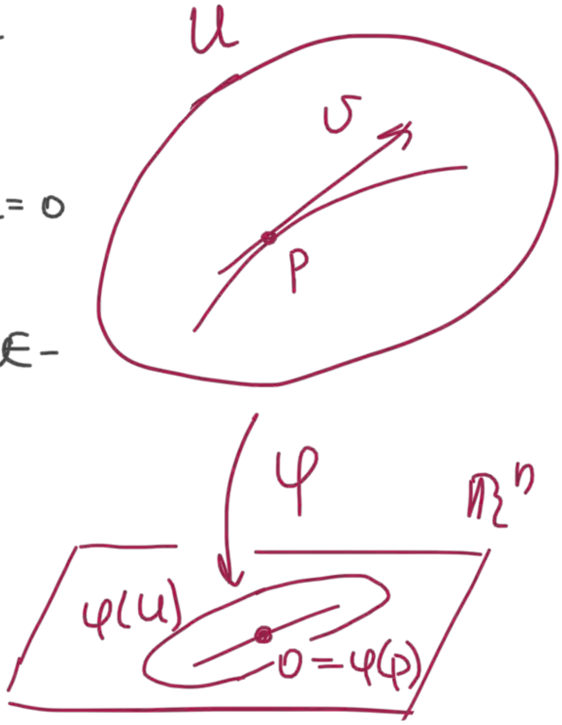
$$\Phi = \Phi_p : T_pM \to \mathrm{Diff}_p(M)$$

$$v \in T_pM, \quad v = [\gamma], \quad \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

$$\gamma(0) = p$$

$$\Phi(v) = X_v : C(M) \to \mathbb{R}$$

$$X_v f = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$$



Покажем, что сопоставление — гомоморфизм

• $X_{v_1+v_2} f = X_{v_1} f + X_{v_2} f$

Рассмотрим карту (U,φ), т.ч. $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$

$$\tilde{\gamma}^i = \varphi \circ \gamma_i,\ i = 1,2 \qquad \tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$$

$$X_{v_2+v_1}(f) \underset{\text{опр.}}{=} \frac{d}{dt} \tilde{f}\left(\tilde{\gamma}_1(t) + \tilde{\gamma}_2(t)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \left(\operatorname{grad} \tilde{f}(0),\ \dot{\tilde{\gamma}}_1(0) + \dot{\tilde{\gamma}}_2(0)\right) =$$

$$= \left(\operatorname{grad} \tilde{f}(0),\ \dot{\tilde{\gamma}}_1(0)\right) + \left(\operatorname{grad} \tilde{f}(0),\ \dot{\tilde{\gamma}}_2(0)\right) =$$

$$= X_{v_1}(f) + X_{v_2}(f)$$

• $X_{\lambda v} = \lambda X_v$ по аналогии

$\varphi: U \to \mathbb{R}^n, \ \varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$

φ — диффеоморфизм $\varphi: U \to \varphi(U)$

$\varphi^*: C(\varphi(U)) \to C(U)$

$\varphi^*(g) = g \circ \varphi \qquad g \in C(\varphi(U)), \ \varphi^* g \in C(U)$

1. φ^* — изоморфизм $C(\varphi(U))$ и $C(U)$
2. $\varphi^*: \mathrm{Diff}_0(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Diff}_p(M)$

диффеоморфизм по той ~~же~~ причине

$\varphi^*(X) f := X_{\varphi(p)}, \ x \in \mathrm{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$ — $\in \mathrm{Diff}_p(M), \ f \in C(M)$

изоморфизм (т.к. $\exists$ обр. отображ.)

$\Phi_0: T_0\mathbb{R}^n \to \mathrm{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$

Построим Φ_0^{-1}

$f = f(x^1, \dots, x^n) \qquad x = (x^1, \dots, x^n)$

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)\, x^i + r_2(x)$$

остаточный член

$$r_2(x) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x)\, x^i x^j$$

$$h_{ij}(x) = \frac{d^2 f}{dx^i\, dx^j}(\Theta x)$$

$$\Theta \in [0,1]$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(x)\, x^j \Rightarrow$$

$$r_2(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, x^i \qquad g_i(0) = 0$$

$$X(r_2(x)) = X\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, x^i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(X g_i \cdot 0 + g_i(0)\, X(x^i)\right) = 0$$

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx^i}(0)\, X(x^i)$$

НАЙДЁМ $\Phi^{-1}(w)$, $w \in T_pM$

$$w = [\varphi^{-1}(wt)]$$

$$X_w(f) = \frac{d}{dt} f \circ \varphi^{-1}(wt) = w = (w^1, \dots, w^n) =$$

$$= (\operatorname{grad} f(0), (w^1, \dots, w^n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx^i}(0)\, X(x^i) =$$

$$= X(f) \Rightarrow w^i = X(x^i)$$

$$\Phi^{-1}(X) = \varphi^{-1}(w^t), \quad w^i = X(x^i)$$

т.о. изоморфизм $\exists$ $\triangleleft$

Дифференцирование в координатах

$$T_pM = Diff_f(M)$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$a_i(x) = X(x^i)$$

$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ — базис в $Diff_p(M)$

$$F: M \to N$$

$$F^*: C(N) \to C(M)$$

$$F_*: Diff_p(M) \to Diff_{F(p)}(N)$$

$$g \in C(N), \quad X \in Diff_p(M)$$

$$F_*X(g) = X(g \circ F)$$

$\in C(M) \Rightarrow$ можем применить X

Опр. Сопряжённым пространством к векторному пр-ву V наз. пространство линейных функционалов на V

Кокасательное пр-во к M в т. p:

$$T^*_p(M) := (T_p M)^*$$

$$F: M \to N$$

$$F_*: T_p M \to T_{F(p)} N$$

$$F^*: T^*_{F(p)} N \to T^*_p M$$

Матрица отображения F^* в базисах, двойств. к базисам $T_p M$ и $T_p N$ выражается как $\left(J(\tilde{F})\right)^T$