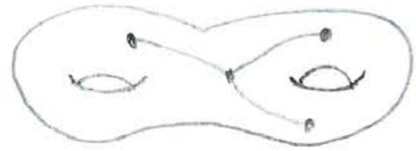
Лекция 10

Считаем склейки многоугольников

2n-угольник

- Склейка опр-ет накрытие сферы, разветвленное над тремя точками

- Граница многоугольника переходит в граф.



Когда мы по этому графу разрезаем, получается наш многоуг-ник

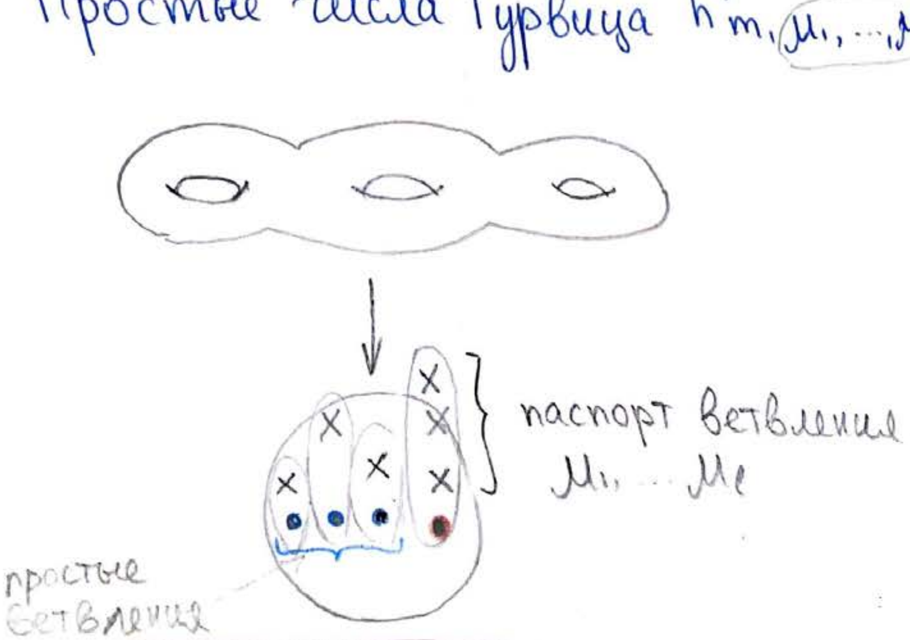
$\# f^{-1}(\star) = 1$

$\# f^{-1}(\circ) = n$

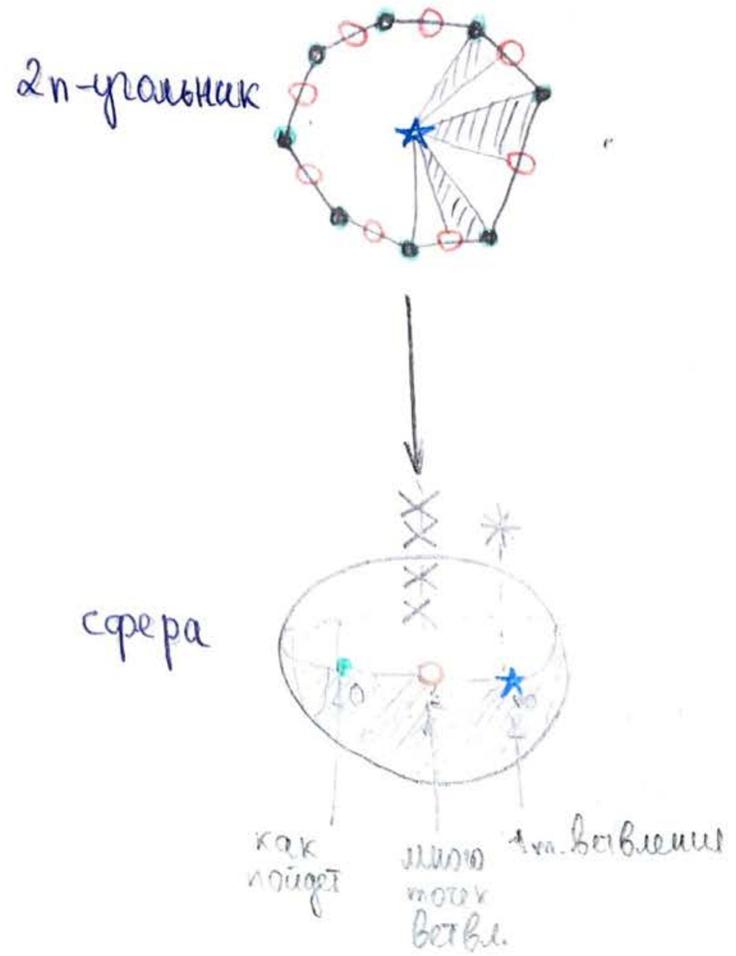
$\# f^{-1}(\bullet)$ – от этого зависит род (можно вычислить)

(связные)

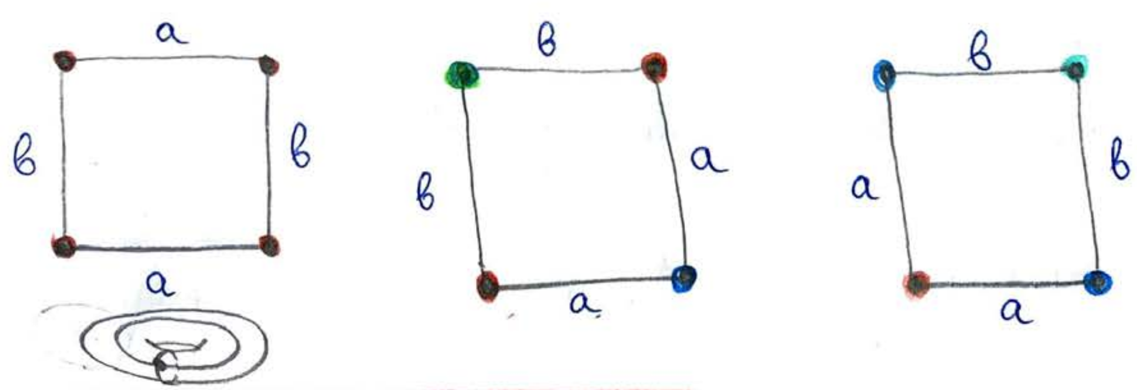
Простые числа Гурвица $h'_{m,\mu_1,\ldots,\mu_l}$ – это история про...



Детский рисунок



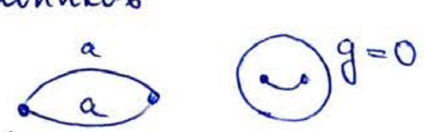
Будем считать все склейки многоугольника, которые дают ориентируемую пов-ть. ($n=2$)



$$\boxed{T_n(N) = \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{склейкам}}} N^{\#\text{ вершин}}}$$

производящая ф-ция для склеек n-угольников

$T_1(N) = N^2$



$$T_2(N) = 2N^3 + 1\,N^1 = \sum_{\text{склейки}} N^{n+1-2g}$$

.... Кика]

$2-2g = \#\text{Вер} - n + 1,$

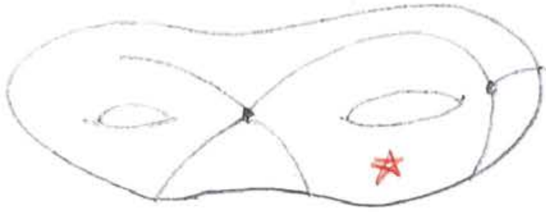
т.е. # Вер. однозначно определяет род g склейки.

Теперь сделаем из T_n еще большую производящую ф-цию

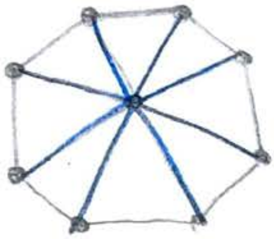
$$\boxed{T(N,s) = 1 + 2Ns + 2s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n(N)}{(2n-1)!!}s^n = \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^N}$$

наша цель

Зайдем издалека...

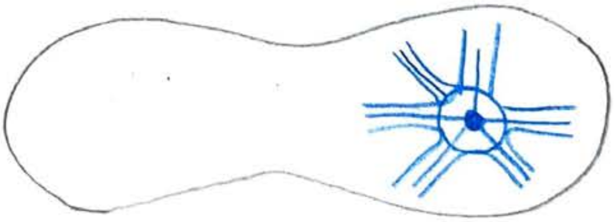


Будем думать про $2n$-угольник как про детский рисунок с одной гранью



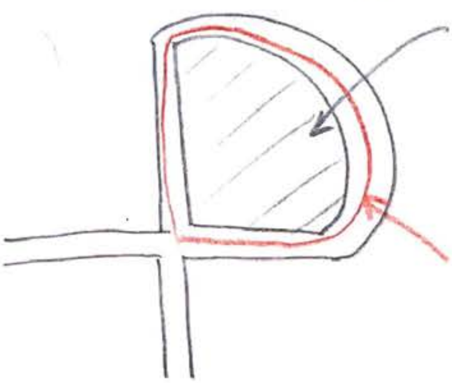
26 минут

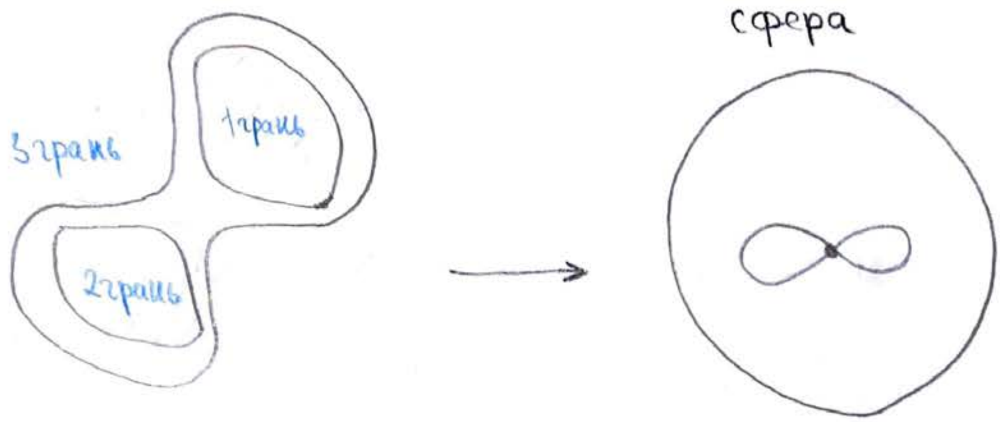
Рассмотрим двойственный граф



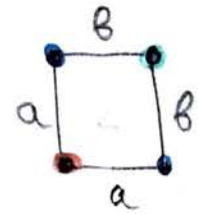
„$2n$ – звезда"

Вместо склеивания сторон многоугольника теперь склеивание усов „звезды"



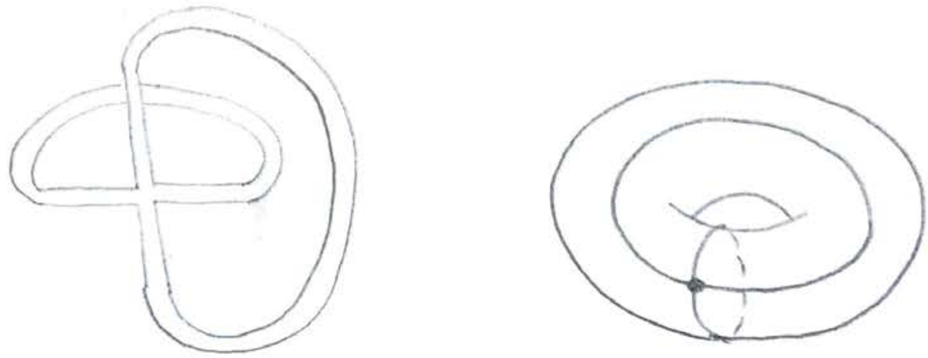


Эта картинка соответствует

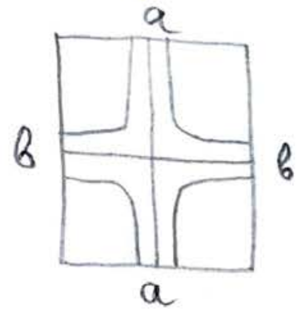


граней = # вершин

Тор.



(самодвойственный рисунок)



Шагнем в сторону и будем считать такие интегралы...

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\overset{0}{\hat{b}}x^2}\,dx = \left\{ y = \sqrt{b}\,x \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = 0, \text{ если } n=2k+1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \left[de^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x)\,dx \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(-2x)\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\Big(\underbrace{xe^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underline{\qquad} \; e^{-\bar{\beta}(x)}\,dx_1\ldots dx_n$$

$\beta(\ ,\ )$ – квадратичная, положительна определенная форма, т.е.

$$(x, Bx) = (x_1 \ldots x_n)\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{матрица} \\ \text{(невырожденная)}}}{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y,By)}\,dy_1\ldots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-b_1y_1^2 - b_2y_2^2 - \ldots - b_ny_n^2}\,dy_1\ldots dy_n =$$

$$= \prod_k \int_{\mathbb{R}} e^{-b_k y_k^2}\,dy_k = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det B}}$$

Пространство эрмитовых матриц H_N

Опр. $H_N \subset Mat_{N\times N}(\mathbb{C})$

$A \in H_N$, если $\overline{A^T} = A$.

$$\begin{pmatrix} \bullet & & \times \\ & \ddots & \\ \times & & \bullet \end{pmatrix}$$

- H_N — линейное пр-во размерности N^2

$$N + \frac{N(N-1)}{2}\cdot 2 = N^2$$

$$(h_{ij}) = (\mathrm{Re}\, h_{ij} + \mathrm{Im}\, h_{ij}) \in H_N$$

$$\int_{H_N} e^{-\mathrm{Tr}(H^2)} \prod_{i=1}^{N} dh_{ii} \prod_{1\le i<j\le N} d\,\mathrm{Re}\, h_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\, h_{ij}$$

$\mathrm{Tr}\, H^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{ij}h_{ji}$, причем $h_{ij} = \overline{h_{ji}}$ (т.к. (h_{ij}) - эрмитова)

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}\, H^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{ij}\overline{h_{ij}} = \sum_{i=1}^{N} h_{ii}^2 + \sum_{1\le i<j\le N} 2\,\mathrm{Re}\, h_{ij}^2 + 2\,\mathrm{Im}\, h_{ij}^2$$

Значит, $\displaystyle\int_{H_N} e^{-\mathrm{Tr}(H^2)} dH = \frac{(\sqrt{\pi})^{N^2}}{2^{\frac{N^2-N}{2}}}$

$\sqrt{\det(h_{ij})}$

Вероятностое пр-во

Опр. $\displaystyle \langle f(p) \rangle = \frac{\sqrt{\det B}}{(\sqrt{\pi})^n}\int f(p)\, e^{-(p,Bp)}\, dx_1 \ldots dx_n$,

где $p = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\langle f(p) \rangle$ — среднее (или корреляция)

Формула Вика

$$\langle f_1 f_2 \dots f_n \rangle = \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{парам}}} \langle f_{i_1} f_{i_2} \rangle \langle f_{i_3} f_{i_4} \rangle \dots \langle \quad \rangle$$

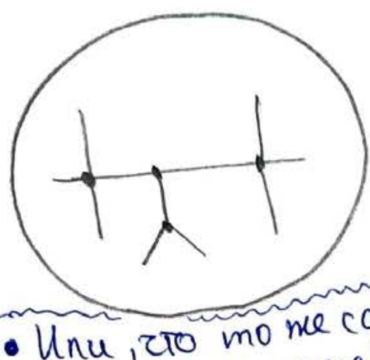
f_i - лин. ф-ция, $1 \le i \le n$

План: 1) понять как склейки связаны с гауссовым интегралом

2) посчитать гауссов интеграл, перейдя к собственным значениям матрицы B и отдельно унитарной группы

3) найдем производящую ф-цию.

То, что не сказали в начале...



• Если считать только склейки рода 0, то нужно, чтобы было max возможное число вершин (ф-ла Эйлеровой хар.)

• Или, что то же самое, когда склеиваем получаем дерево

Значит,

$\#$ способов склеить пов-ть рода 0 – числа Каталана Cat_n

$$\Rightarrow T_n = Cat_n N^{n+1} + \dots$$

Для док-ва этого факта:

$$\frac{T_n(N)}{(2n-1)!!} = P(n)$$

многочлен от n

используется, что $T_n(N)$ – матричный интеграл.