14 билет

Уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Кратко:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = g(y) \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \int \frac{dy}{g(y)} &= t + C \\ \int f(x)dx &= t + C' \end{aligned}$$

Приравнивая реш-ия ↑, получаем реш-ия исходного уравнения.

Если $g(y)$ только непр., то реш-ие ∄!

$g(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$ — реш-ие

Чуть подлиннее:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Тогда

$G(y)$ — первообр. $\frac{1}{g(y)}$

$F(x)$ — первообр. $f(x)$

$$G(y) = F(x) + C$$

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

Теорема. Инт. кривая $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ через (x_0, y_0) локально совпадает с инт. кривой $\frac{dx}{dy} = G(x,y)$ через ту же точку, если $F, G \neq 0$ (то есть определены)

Д-во: Пусть $F(x_0, y_0) \neq 0$ $\exists$ окр-ть, где $F > 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0$ $\forall x \in B_\delta(x_0)$ т.е. $y(x)$ монотонно возр. в $B_\delta(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ там есть обратная ф-ия $x(y)$

$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{dy/dx(x(y))} = \frac{1}{F(x(y), y)} = G(x(y), y)$$

Обобщ. решение (#1) (#2) – кривая на пл-ти (x,y) которая в окр-ти (x_0,y_0), т.ч. $F(x_0,y_0)\neq 0$ – график решения $y=y(x)$ уравнения (#1)

$G(x_0,y_0)\neq 0$ —— // —— $x=x(y)$ уравнения (#2)

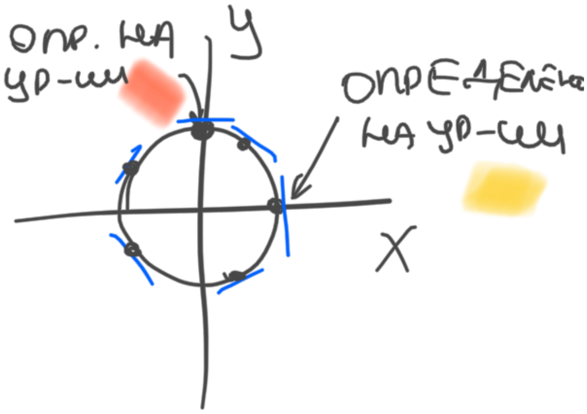
Пример:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \qquad \frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$$

$$\int y\,dy=\int -x\,dx$$

$$y^2=-x^2+C$$

$$x^2+y^2=C$$



Теорема. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\Phi(x,y)}{\Psi(x,y)}$ $\Phi,\Psi\in C$

(2) $\begin{cases}\dot{x}=\Psi(x,y)\\ \dot{y}=\Phi(x,y)\end{cases}$

$$\boxed{\frac{dx}{dy}=\frac{\Psi(x,y)}{\Phi(x,y)}}$$

Тогда в области $\{(\Phi, \Psi) \neq (0,0)\}$ обобщ. решения (1) = траектории (2)

<u>Д-во:</u> Для определённости пусть

$\Psi(x_0, y_0) \neq 0$

Пусть $(x(t), y(t))$ – реш. (2)

$\in C^1$

$x(t_0) = x_0$

$y(t_0) = y_0$

$$\dot{x}(t_0) = \Psi(x_0, y_0) \neq 0$$

по т. о неявной функции локально $t = t(x)$ – обр. функция

$$\frac{dt}{dx}(\hat{x}) = \frac{1}{\dot{x}(t(\hat{x}))} = \frac{1}{\Psi(\hat{x}, y(t(\hat{x})))}$$

Рассмотрим функцию $y(t(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}(t(\hat{x})) \cdot \frac{dt}{dx}(\hat{x}) =$$

$$\frac{\Phi(x(t(\hat{x})), y(t(\hat{x})))}{\Psi(\ldots)} = \frac{\Phi(\hat{x}, y(t(\hat{x})))}{\Psi(\hat{x}, y(t(\hat{x})))}$$

Вывод: $y(x) \underset{\text{по опр.}}{=} y(t(x))$ локально удовл. (1)

В другую сторону:

пусть $y(x)$ – реш-ие (1)

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = \Psi(x(t), y(x(t))) \quad (3)$$

Это автономное ур-ие на прямой. Оно имеет решение (см. в след. лекции)

$x = x(t)$, где $x(t_0) = x_0$

Положим $y(t) = y(x(t))$. Тогда $(x(t), y(t))$ удовлетворяет (2):

Первое ур-ие (2) – по построению $x(t)$ (см. (3))

Второе ур-ие:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\dot{x} = \frac{\Phi(x(t), y(x(t)))}{\Psi(\ldots)}\,\Psi(\ldots) =$$

$$= \Phi(x(t), y(t)) \qquad \blacksquare$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) = \frac{g(y)}{1/f(x)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{y} = g(y) \\ \dot{x} = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$$

Дальше в лекции пошла какая-то херня

Автономные ДУ на прямой

лекция 25.09.20 1:04:00