Линейные ур-ния. Система уравнений

3.11.20

$$\begin{cases} x_1(t), \dots, x_n(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = X(t) \\ \dot{x}_i(t) = \frac{dx_i}{dt}(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t) + f_i(t) \qquad 1 \le i \le n$$

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + F(t), \text{ где } A(t) \in Mat_n(\mathbb{R})$$

Утв. 1. Если $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ — непрерывно на (a, b), то решение ✱ $\exists 1!$ на (a, b) для задачи Коши $X(0) = x_0$.

Если $F \equiv 0 \Rightarrow$ ✱ однородное ур-ние (система уравнений)

Утв. 2. Множество вещественных решений однородной системы образует n-мерное линейное пр-во.

Определение: $\forall$ n линейно независимых решений ✱ образуют фундаментальную систему реш. (ФСР)

Утв. 3. ФСР образует базис в пространстве всех реш. $\Rightarrow \forall$ решение ✱ есть мн-во комбинаций элементов ФСР.

Пусть $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{x}_3(t) \dots, \tilde{x}_n(t)$ – ФСР $\Rightarrow$

$n \times n$ – матрица $W_n(t) = \| \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t) \|$ фундам. реш. ☆

$\det W_n(t) \equiv W(t)$ – определитель Вронского или Вронскиан системы

Определитель Вронского можно задать $\forall$ систему из n векторов $Y_1(t), \dots, Y_n(t) \Rightarrow W_Y(t) = \det \| Y_1(t) \dots Y_n(t) \|$

Если $Y_i(t)$ – линейно зависимы $\Rightarrow W_Y(t) = 0$, а если они линейно независимые $\Rightarrow$ может быть по разному

#1 $\quad Y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$

Y_i линейно независимы на $\mathbb{R}$.

$\det \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Но если $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$ – набор линейно незав. реш. системы

$\dot{X}(t) = A(t) X(t) \Rightarrow W(Y_1(t) \dots Y_n(t)) \neq 0$

$\dot{W}_n(t) = A(t) W_n(t) \Rightarrow A(t) = \dot{W}_n(t) W_n^{-1}(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = A(t) X(t)$

#2 $\quad Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix} \quad D \subset \mathbb{R}$

$A(t)$ – ?

$W = \begin{pmatrix} t & e^t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = t \cdot e^{2t}$, если $t = 0 \Rightarrow W = 0$

$\left\{ \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix} \right. \quad W(t) \neq 0$

$$W_2(t) = \begin{pmatrix} t & e^{t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{W}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{t} \\ 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \dot{W}(t)\, W_2^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & e^{-t(1-\frac{1}{t})} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{t} x_1 + e^{-t}\left(1-\frac{1}{t}\right) x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

$$A(t) = A$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) \\ x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$x(t) = \exp(tA)\, x_0$$

$$\det(\exp(A)) = e^{t\cdot \operatorname{tr}(A)} \neq 0 \quad \forall t,\ \forall A$$

$\begin{cases} \exp(tA) \text{ — фунд. матрица системы } \dot{x} = Ax \\ \text{её столбцы — ФСР} \end{cases}$

$$A = TJT^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}$$

$$f(A) = T f(J) T^{-1}$$

$$e^{-A}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}^{n}_{n} \qquad A = \lambda I_n + H_n$$

$$H_n^n = 0$$

$$\|$$

$$e^{\lambda I_n + H_n} = e^{\lambda I_n} e^{H_n}$$

$$H_n^k = \begin{array}{c} \qquad\qquad n-k \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \\ k \end{array}$$

$$e^{t\lambda I_n} = e^{t\lambda} I_n$$

$$e^{tH_n} = I_n + tH_n + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} H_n^{n-1}$$

$$e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = I_2 + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = cx + dy & y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$$

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$u_1 \longleftrightarrow \lambda_1 \qquad u_2 \longleftrightarrow \lambda_2$$

$$Au_1 = \lambda_1 u_1 \qquad Au_2 = \lambda_2 u_2$$

$$T = \| u_1 \, u_2 \|$$

$$AT = \| Au_1, Au_2 \| = \| \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2 \| = \| u_1, u_2 \| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$= T_2 J$$

$$A = T J T^{-1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \; ; \; \lambda_2 = 3$$

$$A u_1 = 2 u_1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A u_2 = 3 u_2 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (x_0 + y_0)\, e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - (x_0 + 2y_0)\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10.11.20

$\chi_A(\lambda)$ - имеет кратный корень

$\chi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_0$ единств. корень хар-та

$A = TJT^{-1}$, $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, $\underbrace{J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}}_{= \lambda_0 I_2}$

1) $J = \lambda_0 I_2$

$$A = T \lambda_0 I_2 T^{-1} \equiv \lambda_0 I_2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax+by \\ \dot{y} = cx+dy \end{cases} \to \begin{cases} \dot{x} = \lambda_0 x \\ \dot{y} = \lambda_0 y \end{cases} \to \begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda_0 t} \\ y(t) = C_2 e^{\lambda_0 t} \end{cases}$$

2) $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

$$Au_0 = \lambda_0 u_0 \Rightarrow (A-\lambda_0 I)u_0 = 0$$

$$\exists\, u_1 :\Rightarrow (A-\lambda_0 I)u_1 = u_0 \Rightarrow (A-\lambda_0 I)^2 u_1 = 0$$

присоединенный собств. вектор

u_0 и u_1 строим T

$$\begin{aligned} Au_0 &= \lambda_0 u_0 + 0\cdot u_1 \\ Au_1 &= 1\cdot u_0 + \lambda_0 \cdot u_1 \end{aligned} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}}_{J^t} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$T = \|u_0\, u_1\|$

#1

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y - x \\ \dot{y} = 5y - 3x \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

$$\lambda_0 = 2$$

$$A u_0 = 2 u_0 \Rightarrow u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2 I_2) u_1 = u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = T e^{tJ} T^{-1}$$

$$J = \underset{\lambda_0}{2} \cdot I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} \quad N^2 = 0$$

$$tJ = 2t I_2 + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ} = e^{2t I_2} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$e^N = 1 + N + \underbrace{\frac{1}{2} N^2 + \ldots}_{=0}$$

$= 0$, т.к. N — нильпотентная

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = T e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix} e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-3t & 3t \\ -3t & 1+3t \end{pmatrix}$$ - вид фундамент. матрицы

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$ - решение задачи Коши

3) Комплексные корни у $\chi_A(\lambda) = 0$

$$\overline{\lambda_1} \doteq \lambda_2$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda_0})$$

$$A = T\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_0} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{tA} = T\begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & e^{\overline{\lambda_0} t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 = q + i\omega \\ \overline{\lambda_0} = q - i\omega \end{cases}$$

$$A f_1 = \lambda_0 f_1 \qquad f_1 \in \mathbb{C}^2$$
$$A f_2 = \overline{\lambda_0} f_2 \qquad f_2 \in \mathbb{C}^2$$

Выбираем f_1 и f_2 т.ч. $f_2 = \overline{f_1}$ (сопряж.)

$$\begin{cases} f_1 = u + iv \\ f_2 = u - iv \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}^2$$

$$Af_1 = Au + iAv = \lambda_0 f_1 = (q + i\omega)(u + iv) =$$
$$= (qu - \omega v) + i(qv + \omega u)$$

В базисе $(u; v)$: $A \mapsto \begin{pmatrix} q & \omega \\ -\omega & q \end{pmatrix} = Q$

$A = TQT^{-1}$; $T = \|uv\|$ матрица из базисных векторов u и v

$$AT = A\|u\,v\| = \|Au, Av\| = \underbrace{\|u, v\|}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} q & \omega \\ -\omega & q \end{pmatrix}}_{Q}$$

$$AT = TQ \Rightarrow A = TQT^{-1}$$

$$e^{tA} = T e^{tQ} T^{-1}$$

$e^{tQ} = ?$ $\quad Q = qI_2 + \omega\sigma$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$[I_2, \sigma] = 0 \Rightarrow e^{tQ} = e^{qt} e^{t\omega\sigma}$$

$$e^{t\omega\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} de^{t\omega\sigma} = \omega\sigma e^{t\omega\sigma} \\ e^{t\omega\sigma}\big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$ доказали

$$e^{\alpha\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\sigma)^n}{n!} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

$$\sigma^3 = -\sigma; \quad \sigma^4 = I_2$$

$$\sigma^n = \begin{cases} (-1)^k I_2, & n = 2k, \ k = 0, 1 \ldots \\ (-1)^k \sigma, & n = 2k+1, \ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

ряд сходится $\Rightarrow$

$$e^{\alpha\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^{2k}\sigma^{2k}}{(2k)!} + \frac{\alpha^{2k+1}\sigma^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) =$$

$$= 1\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}}_{\cos} + \sigma\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin}$$

$$e^{tA} = T e^{qt}\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$$

#2
$$\begin{cases}\dot{x} = 3x + 5y\\ \dot{y} = -x - y\end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 1 + i$$

$$\lambda_2 = 1 - i = \bar{\lambda}_1$$

$$q = 1 \quad \omega = 1$$

$$e^{tA} = T\overset{e^{qt}}{e^{T}}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}T^{-1}$$

$$\cancel{\begin{cases}Au = u - v\\ Av = u + v\end{cases} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}$$

$$Af_1 = (1+i)f_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\alpha = -(2+i)\beta$$

$$f_1 = \begin{pmatrix}-2-i\\ 1\end{pmatrix} = \underset{u}{\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}} + i\underset{v}{\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}}$$

$$T = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^t\begin{pmatrix}\cos t + 2\sin t & 5\sin t\\ -\sin t & \cos t - 2\sin t\end{pmatrix}$$

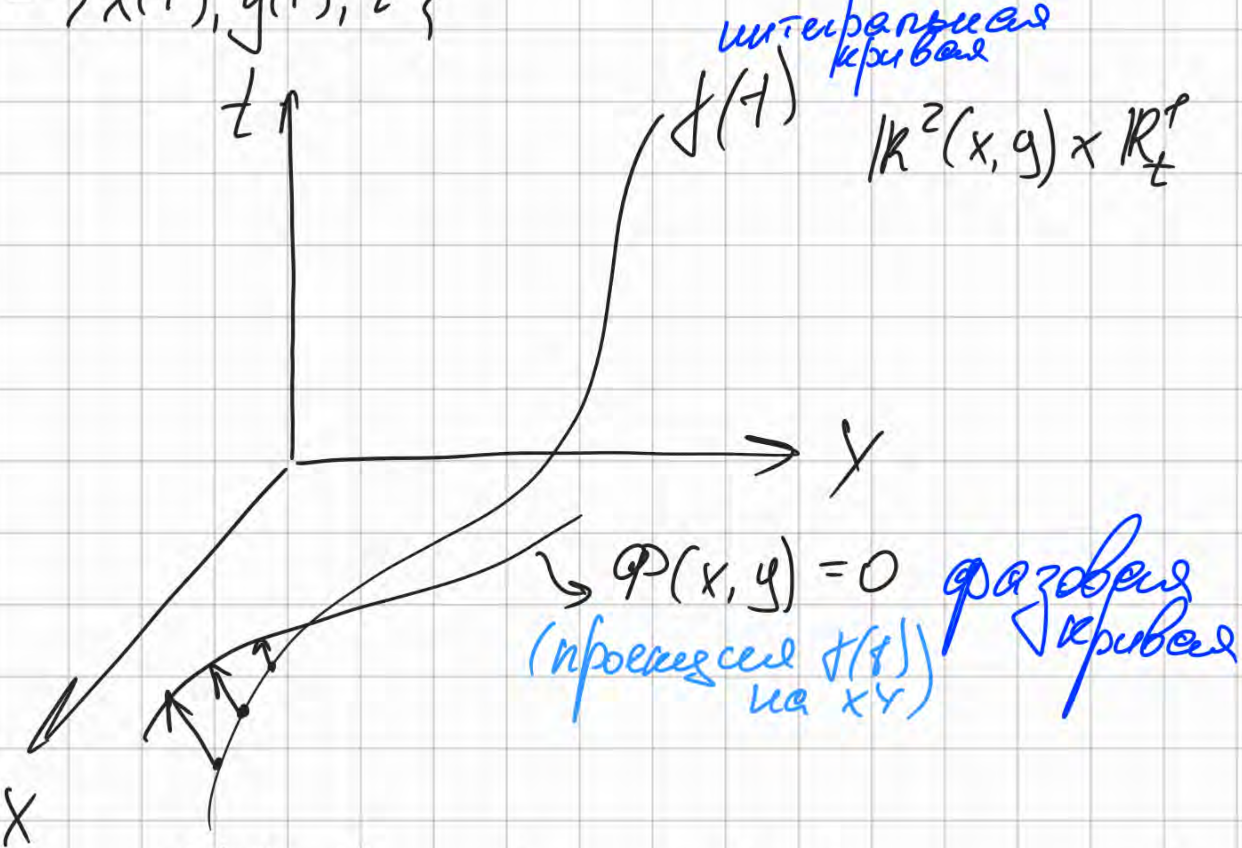
Система дифференциальных уравнений

Фазовый портрет автономной системы

→ нет добавок от t

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

$$\gamma(t) = \{x(t), y(t), t\}$$



$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$ – вектор в $\mathbb{R}^2$ ⇒ поле направлений

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \vec{V}(x,y)$$

Если найдём $\Phi(x,y)$ ⇒ решение

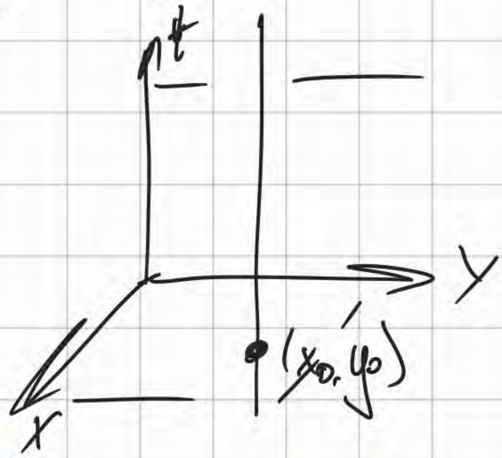
$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)} & \text{если } P\neq 0 \\[2ex] \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} & \text{если } Q\neq 0 \end{array}\right.$$

$] \quad \exists (x_0, y_0): \; P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \; \vec{V}\Big|_{x_0, y_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Особая точка системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 \end{cases}$$ стационарное решение



$](x_0, y_0)$ изолированная особая точка

$\exists \; U(x_0, y_0) \subset D \subset \mathbb{R}^2$

$\forall (x, y) \in U(x_0, y_0): \; P(x, y) \neq 0, \; Q(x, y) \neq 0$

$$\begin{matrix} x \to \tilde{x} = x - x_0 \\ y \to \tilde{y} = y - y_0 \end{matrix} \Bigg| \to$$ совместили с началом координат изолированную особую точку (x_0, y_0)

$(x_0, y_0) \to (0, 0)$

Линеаризация сложных систем

$$P(0,0) = 0 = Q(0,0)$$

$$P(x, y) = x \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{0,0} + y \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{0,0} + \ldots$$

$$Q(x, y) = x \frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{0,0} + y \frac{\partial Q}{\partial y}\Big|_{0,0} + \ldots$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \theta(x,y)$$

$$A = \begin{pmatrix}\partial_x P & \partial_y P\\ \partial_x Q & \partial_y Q\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)}$$ система, которая линеаризует исходную систему.

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

#1 $\begin{cases}\dot{x} = 2x + \operatorname{sh} y\\ \dot{y} = y(1-x^2) + \sin(\alpha x + y)\end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$x=0,\ y=0$ — особая точка (система задана)

линеаризация

$\operatorname{sh} y \simeq y + \ldots$

$\sin(\alpha x + y) \simeq \alpha x + y + \ldots$

$$\begin{cases}\dot{x} = 2x + y\\ \dot{y} = 2y + \alpha x\end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ \alpha & 2\end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 - \alpha = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{\alpha} \qquad \lambda_2 = 2 - \sqrt{\alpha}$$

1) $\alpha = 4 \Rightarrow$ Th. Г-Х не работает
2) $\alpha < 0$ „фокус"
3) $\alpha = 0$ „вырожденный узел"
4) $0 < \alpha < 4$ „обычный узел"
5) $\alpha > 4$ „седло"

Th. (Гробмана-Хартмана, 1954)

Если веществ. части всех собств. значений матрицы A отличны от 0, то $\exists$ окрестность изолированной точки, в которой фазовый портрет линейной системы гомеоморфен фазовому портрету исходной системы.

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad (1)$$

$x=0, y=0$ изолир. особая т. исходной сист.

$$\begin{vmatrix}a&b\\ c&d\end{vmatrix}\neq 0$$

Спектр A – набор собств. знач. и собств. векторов

1) Спектр A – веществ., собств. знач. различны и одного знака

$0<\lambda_1<\lambda_2$; λ_1 и λ_2 собств. знач. A.

$$A=T\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\ 0&\lambda_2\end{pmatrix}T^{-1}\equiv T\mathcal{D}T^{-1}$$

$$\begin{cases}Au_1=\lambda_1 u_1\\ Au_2=\lambda_2 u_2\end{cases}\qquad T=\|u_1\ u_2\|$$

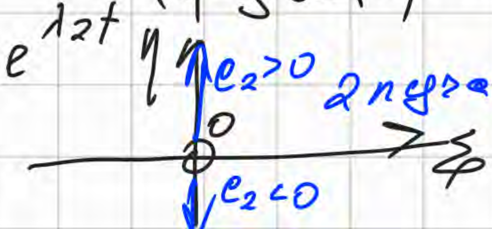
Замена: $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$$(1)\longmapsto\begin{pmatrix}\dot\xi\\ \dot\eta\end{pmatrix}=\underbrace{(T^{-1}AT)}_{\mathcal{D}}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

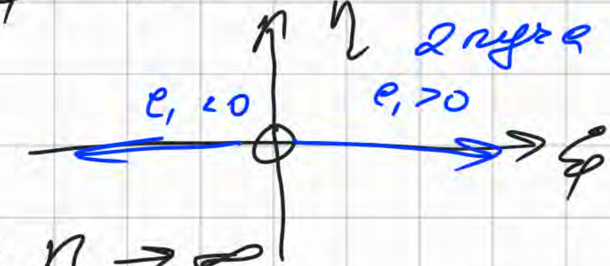
$$\begin{cases}\dot\xi=\lambda_1\xi\\ \dot\eta=\lambda_2\eta\end{cases}\qquad\begin{cases}\xi(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\\ \eta(t)=c_2e^{\lambda_2 t}\end{cases}$$

1. $c_1=c_2=0\Rightarrow\xi=\eta=0$ особая точка (фазовая кривая)

2. $c_1=0\Rightarrow\xi=0,\ \eta=c_2e^{\lambda_2 t}$



3. $c_2 = 0 \Rightarrow \eta = 0,\ \xi = c_1 e^{\lambda_1 t}$



4. $t \to +\infty \Rightarrow \xi, \eta \to \infty$

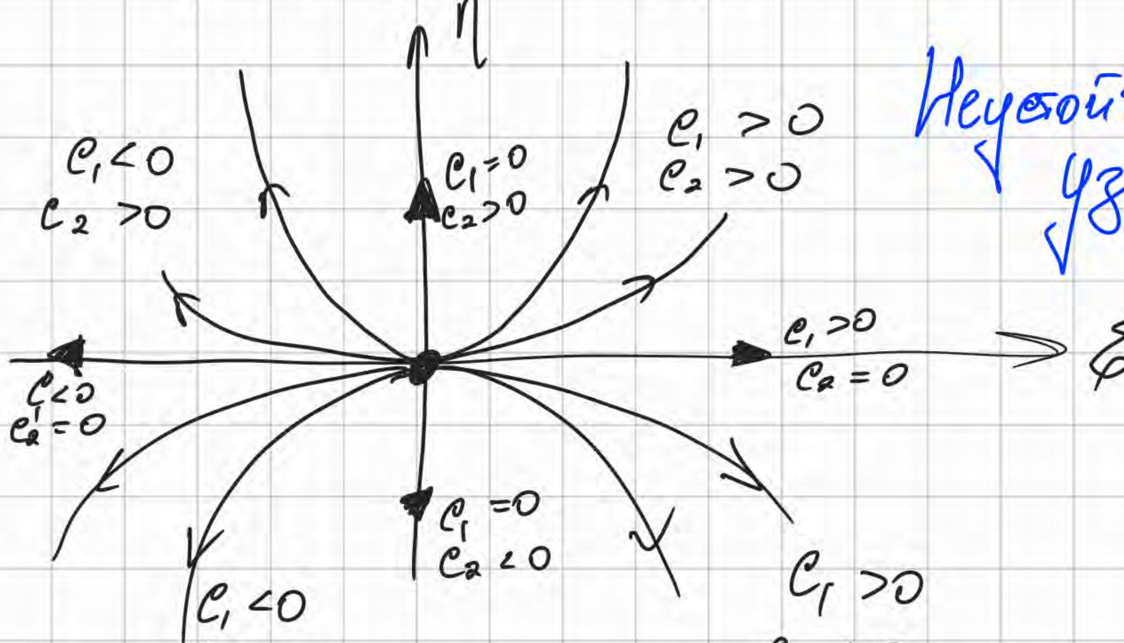
5. $t \to -\infty \Rightarrow \xi, \eta \to 0$ никогда не дост!

Все фазовые кривые в $\lim\limits_{t \to -\infty}$ „касаются" прямой $\eta = 0$ (т.к. $\lambda_2 > \lambda_1$)

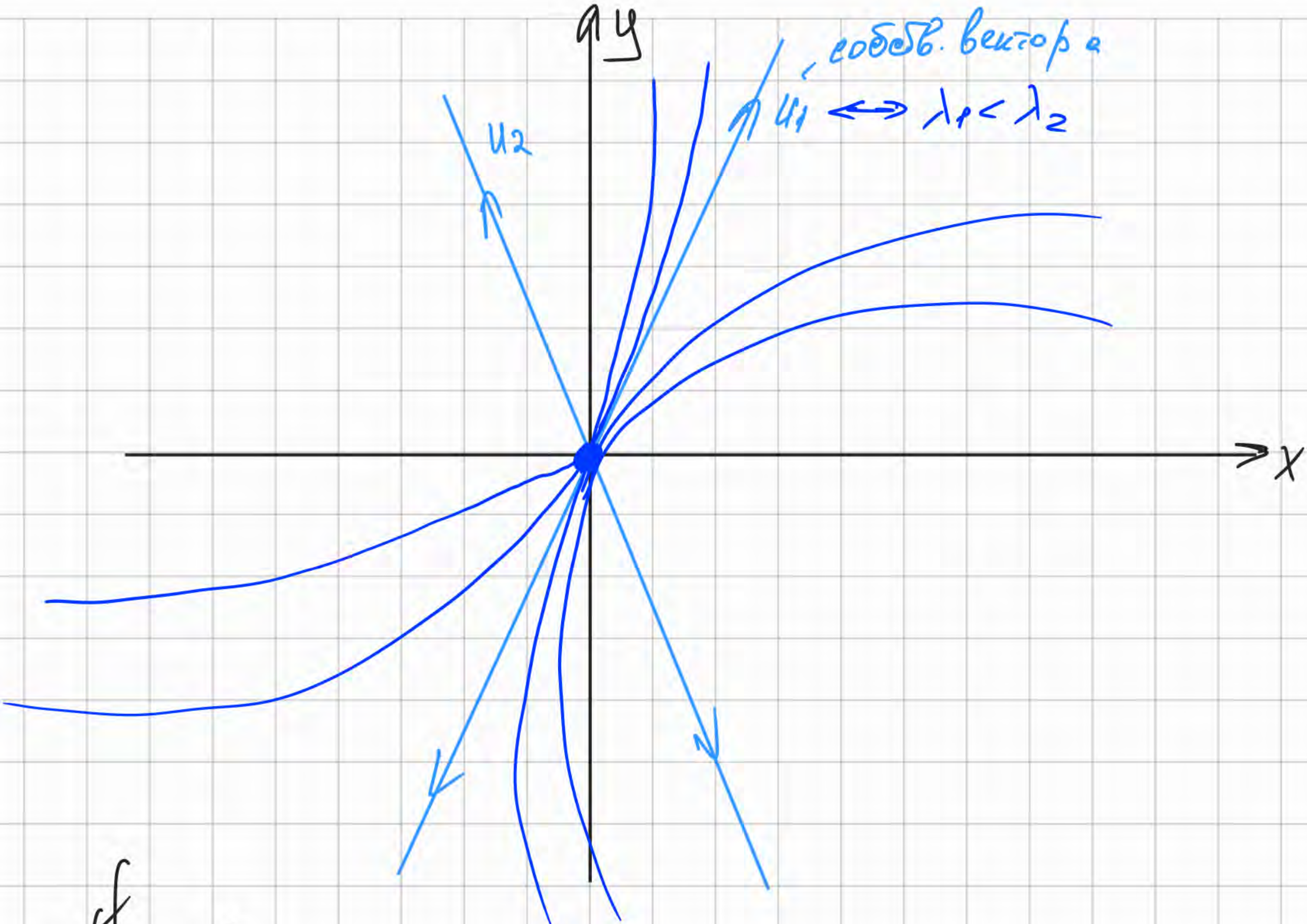
В координатах (ξ, η) прямая $\eta = 0$ имеет направляющий вектор $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ после „обратной подкрутки" матрицей T

$\vec{e} \to$ "u_1"



Неустойчивый узел



Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

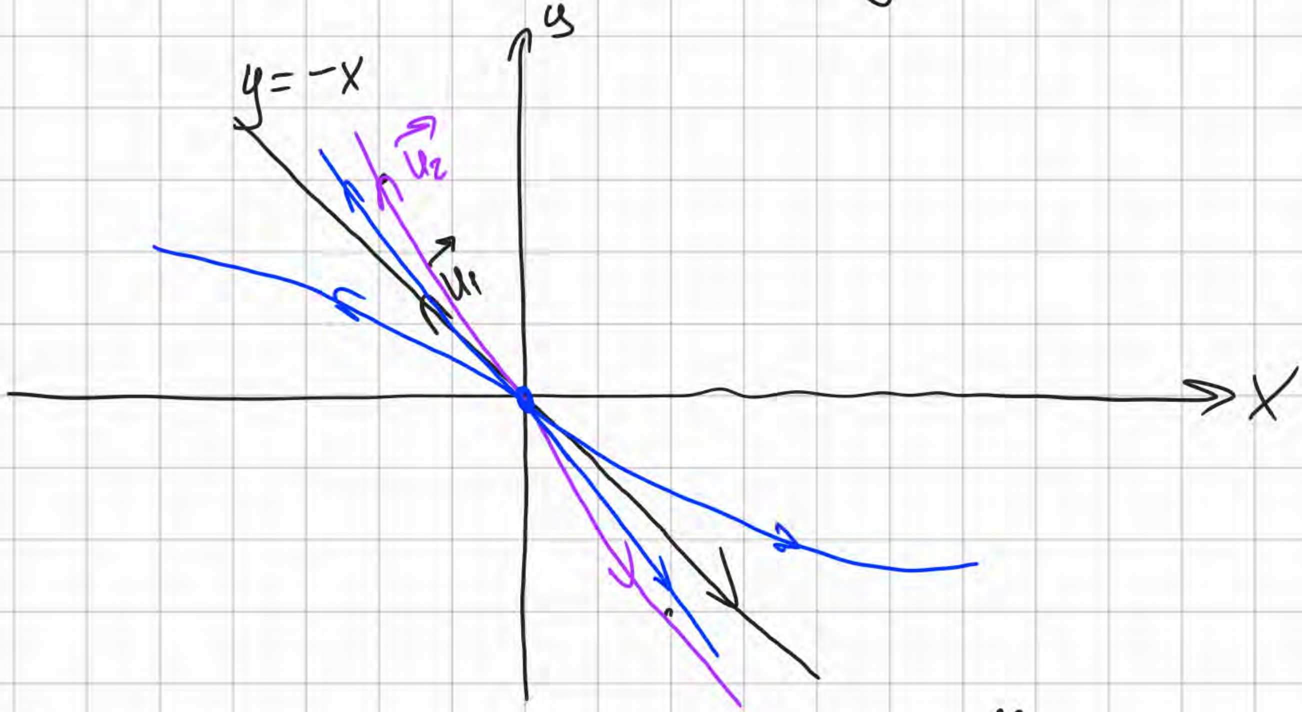
$$\begin{cases} \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$Au_1 = u_1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y = -x$$

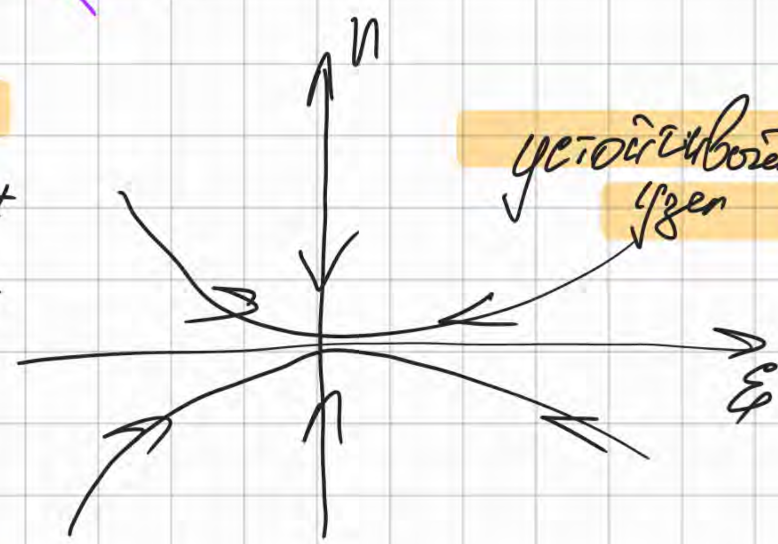
Фазовые кривые будут „прилипать" в $\lim\limits_{t\to-\infty}$ этой прямой! в т. (0,0)

$Au_2 = 2u_2 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$



2) $\exists\ \lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$$\begin{cases} \xi = c_1 e^{-|\lambda_1|t} \\ \eta = c_2 e^{-|\lambda_2|t} \end{cases}$$



3) $\exists\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$$A = T \begin{pmatrix} -|\lambda_1| & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}$$

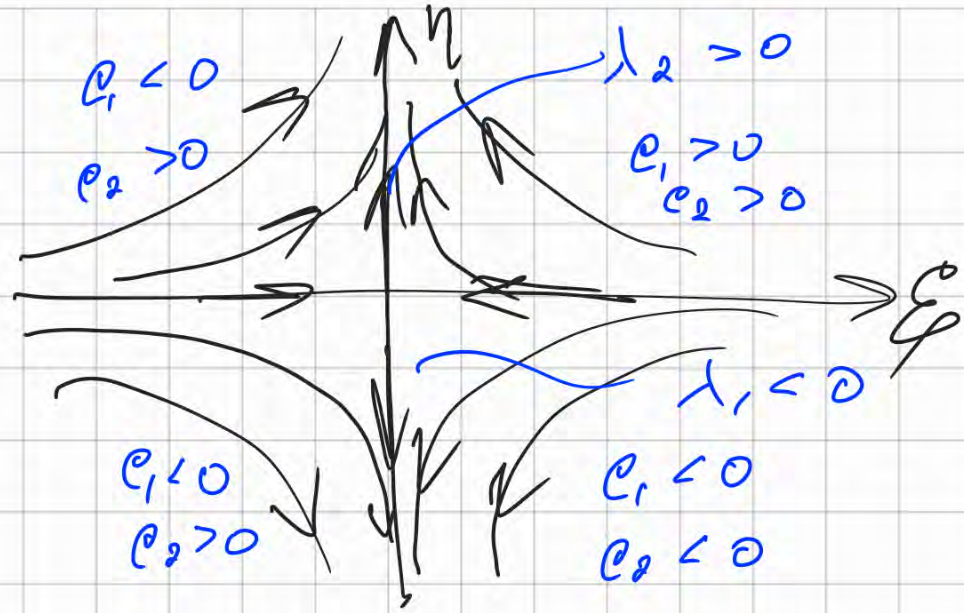
$$\begin{cases} \xi(t) = c_1 e^{-|\lambda_1|t} \\ \eta(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

у ξ, η - разные асимптоты

2 луча $\xi = c_1 e^{-|\lambda_1|t}$

$c_2 = 0$

Точки фазовой кривой стремятся к особой точке при $t \to +\infty$ на лучах $\eta = c_2 e^{\lambda_2 t}$: точки к $\pm\infty$, $t \to \infty$



Пример

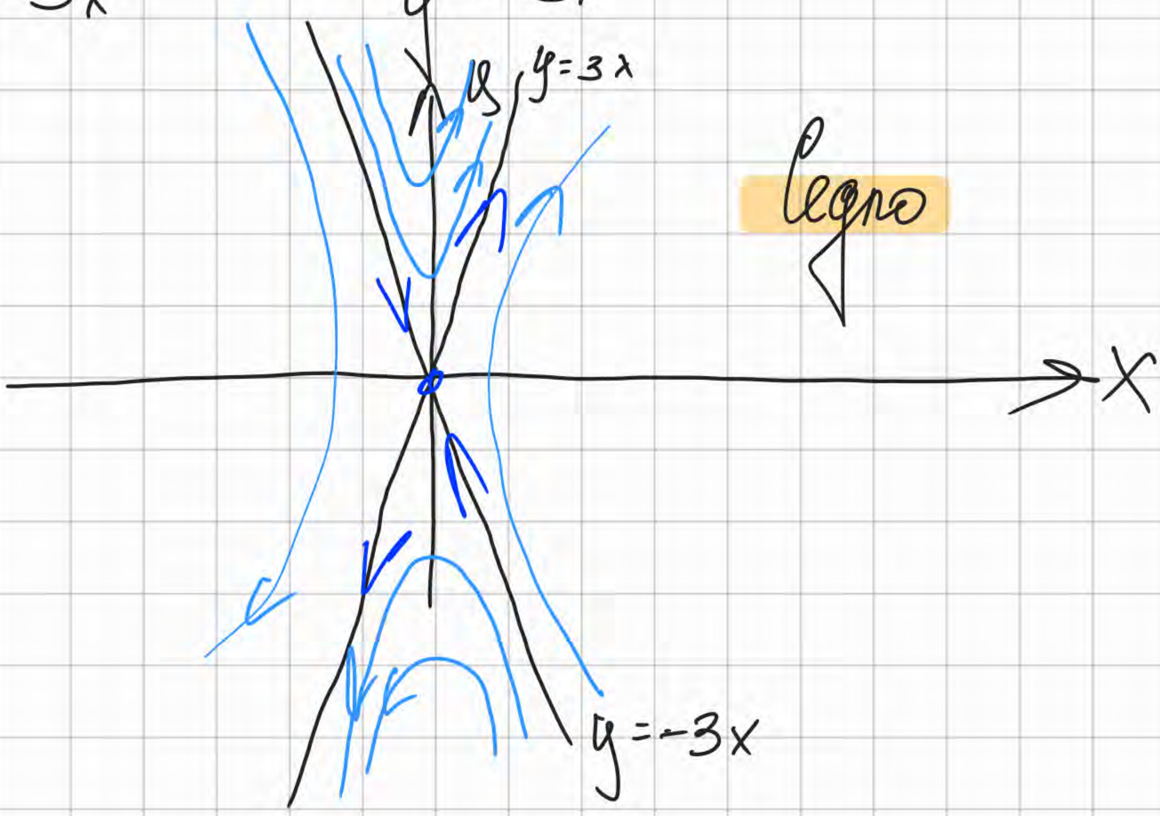
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 9x + 2y \end{cases}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \; ; \; \lambda_2 = 5$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y = -3x \qquad y = 3x$$



Седло

Типы особых точек

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

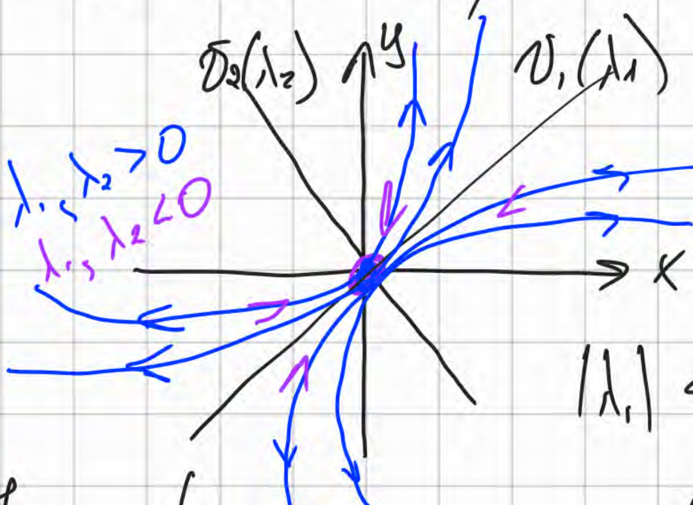
о.т. узел

а) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ неустойч. узел

б) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ устойч. узел

v_1 - собств. вектор от λ_1

v_2 - собств. вектор от λ_2

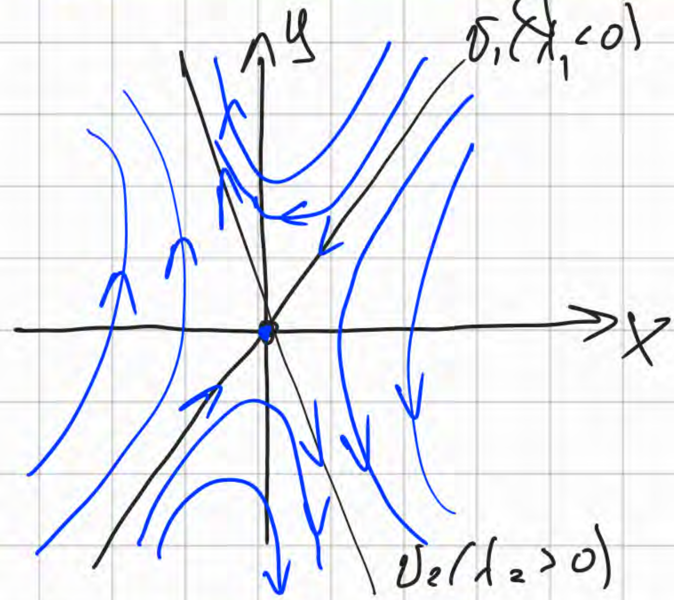


$|\lambda_1| < |\lambda_2|$

Траектории касаются направл. собств. наименьшему по модулю собств. значению

2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ седло



3) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ устойчивый вырожд. узел

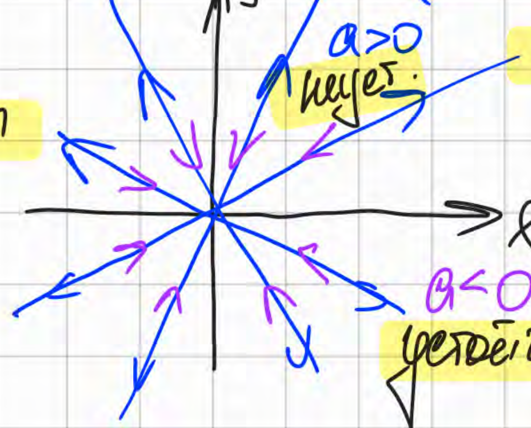
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ неустойчивый вырожденный узел

4) $\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = ay \end{cases}$ $a \neq 0$

дикритич. узел

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$y = kx$$

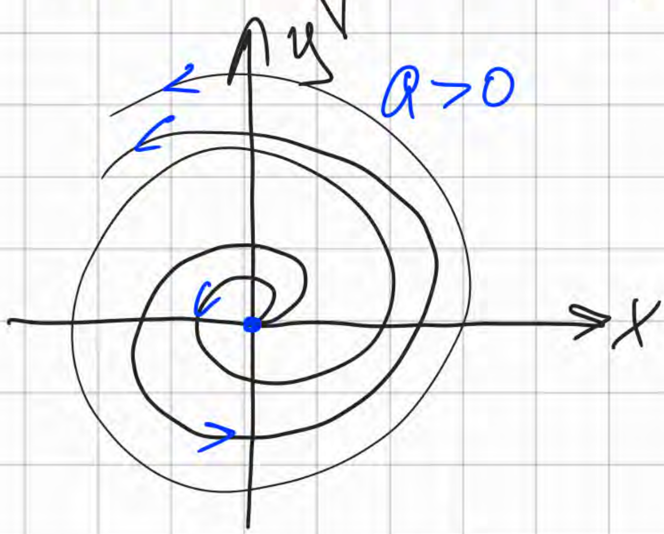


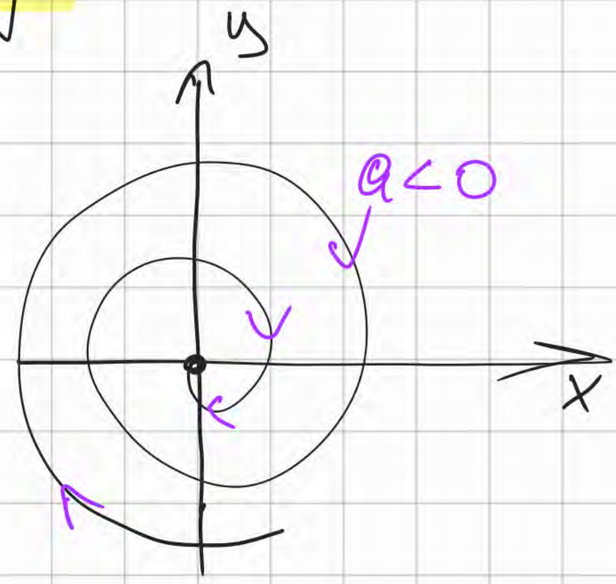
5) $\lambda_{1,2} = a + bi$

$a \neq 0$ фокус

а) $a > 0$ неуст. фокус

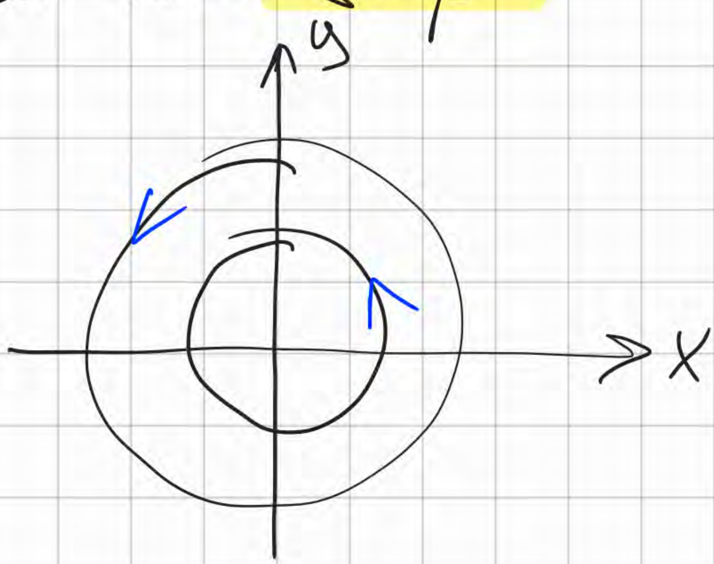
б) $a < 0$ устойчивый фокус





6) $\lambda_1, \lambda_2 = \pm bi$

особая точка центр



17.11.2020

Diff. eqs

Семинар №12

Пример 0.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

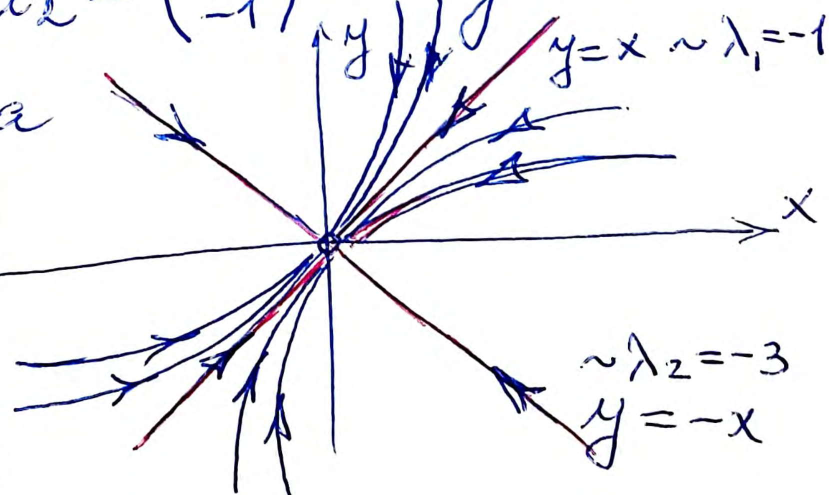
$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$$

2 различных с.з. $< 0 \Rightarrow$ устойчивый узел.

NB! Бывает также устойчивый фокус, устойчивый вырожденный узел $\longleftrightarrow$ не путать!

Итак, $\lambda_1 = -1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = x$ – эта прямая ещё наз. сепаратрисой. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ отвечает меньшему по модулю с.з. $\Rightarrow$ фазовые кривые в т. $(0,0)$ будут асимптотически касаться прямой $y = x$ (с направляющим вектором u_1).

$\lambda_2 = -3 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -x$ – 2я сепаратриса



NB! $\eta(t) = C\left(\xi\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$

$C = C_2 / C_1^{\lambda_2/\lambda_1}$

Продолжаем фазовые портреты:

③° Матрица A линейной системы имеет кратный ($\Rightarrow$ вещественный) корень: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2 \doteq 0$

Это возможно, если $A = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ изначально или (если A не кратна I_2) A подобна жордановой клетке

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} T^{-1}, \quad T = \|u, v\|$$

Такая особая точка наз. вырожденным узлом, устойчивым при $\lambda_0 < 0$ и неустойчивым при $\lambda_0 > 0$.

Наша линейная замена $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ приводит исходную систему к виду

$$\begin{pmatrix} \dot\xi \\ \dot\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot\xi = \lambda_0 \xi + \eta \\ \dot\eta = \lambda_0 \eta \end{cases}$$

2е ур-е решается сразу:

$$\eta = C_1 e^{\lambda_0 t}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

1е ур-е превращается в неоднородное линейное: $\dot\xi - \lambda_0 \xi = \eta \doteq C_1 e^{\lambda_0 t}$.

Решая методом вариации постоянной,
находим ответ и для $\xi(t)$:

$$\begin{cases} \xi(t) = (C_1 t + C_2)\, e^{\lambda_0 t} \\ \eta(t) = C_1 e^{\lambda_0 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Координата η зависит от t монотонно и <u>не меняет</u> знак при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Если $C_1 \gtrless 0$, то $\eta(t) \gtrless 0$ для $\forall t$.

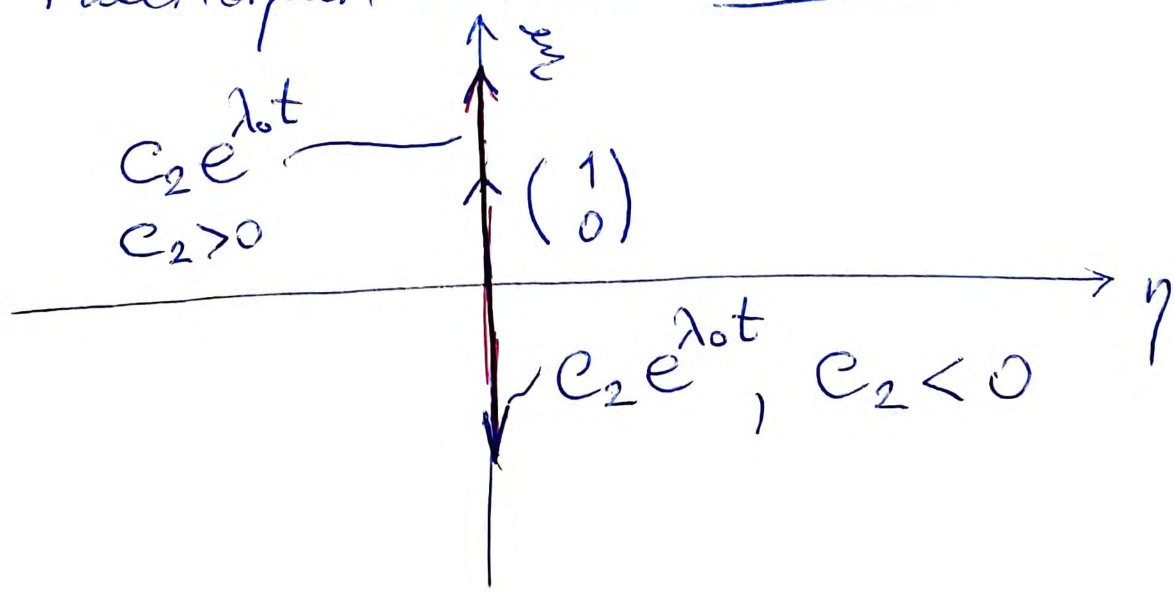
А вот у $\xi(t)$ <u>для любых</u> C_1 и C_2 есть моменты t, когда $\xi > 0$, < 0 и $= 0$.

Собственный вектор у $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ – <u>один</u>: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, он отвечает оси ξ, т.е.

$\eta = 0 \iff \underline{C_1 = 0}$.

В этом случае $\xi(t) = C_2 e^{\lambda_0 t} \gtrless 0$ в зависимости от знака C_2.

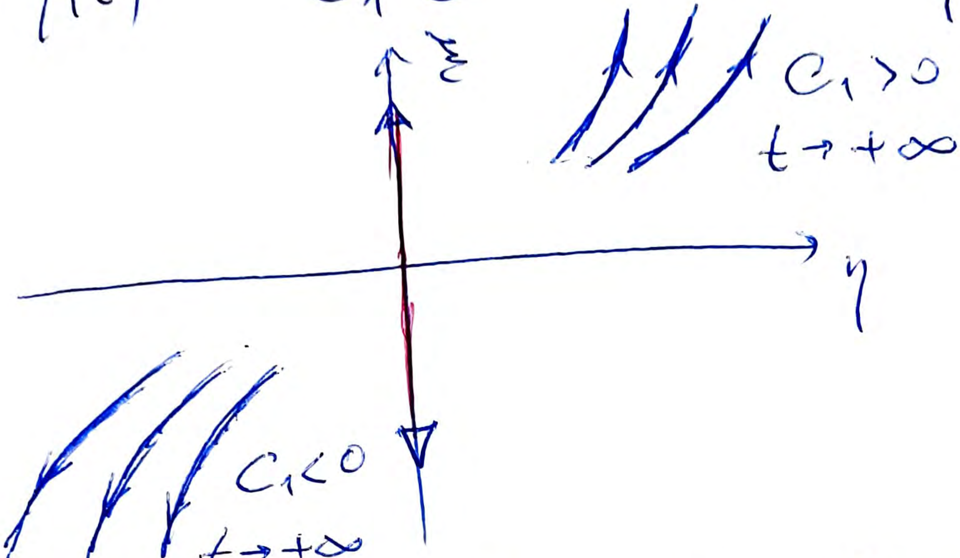
Рассмотрим далее $\underline{\lambda_0 > 0}$:



Асимптотики: $t \to +\infty$

$\xi(t) \sim C_1 t e^{\lambda_0 t}$ $\quad \xi \to \infty$ быстрее,

$\eta(t) \sim C_1 e^{\lambda_0 t}$ $\quad$ чем $\eta \to \infty$



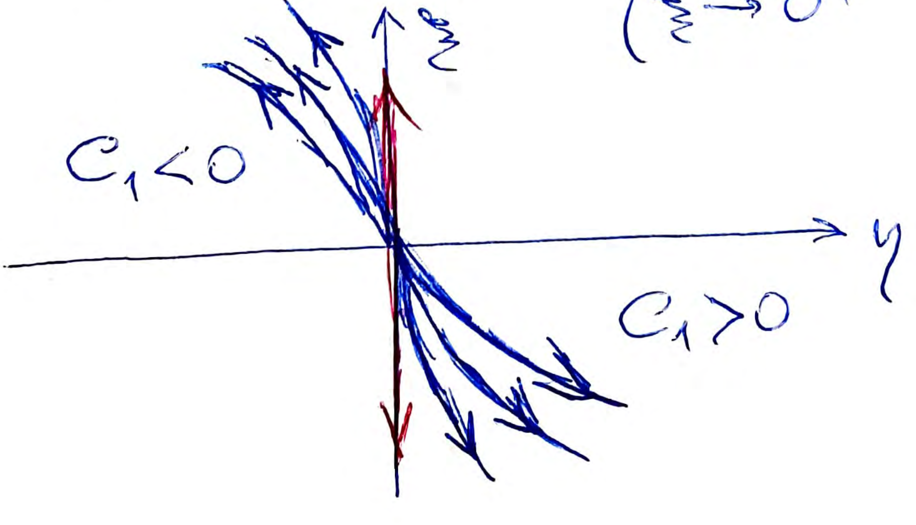
При $t \to -\infty$ $\begin{cases} \eta \to 0 \\ \xi \to 0 \end{cases}$ теперь уже $\eta \to 0$ быстрее, чем $\xi \to 0$.

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

При этом, если $C_1>0$, то

$\eta \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0^+$, $\quad \xi \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0^-$

а если $C_1<0$, то $\begin{cases} \eta \to 0^- \\ \xi \to 0^+ \end{cases}$ при $t \to -\infty$



$\xi = (C_1 t + C_2) e^{\lambda_0 t} \Rightarrow$ при $t_0 = -\frac{C_2}{C_1}$

фазовая кривая пересекает ось $O\eta$ ($\xi = 0$).

Вектор скорости:

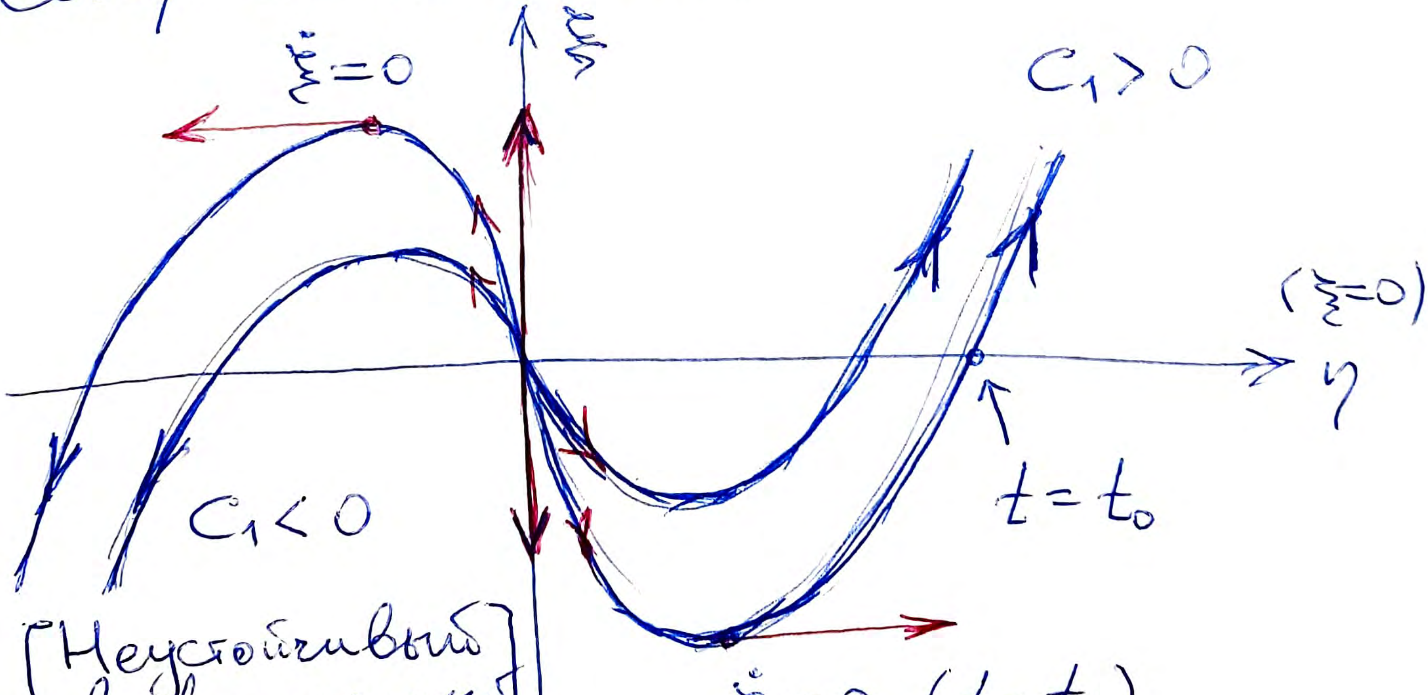
$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} C_1 + \lambda_0 C_1 t + \lambda_0 C_2 \\ \lambda_0 C_1 \end{pmatrix}$$

При $t_1 = -\frac{C_2}{C_1} - \frac{1}{\lambda_0} \Rightarrow \dot{\xi} = 0$

(компонента $\dot{\eta}$ никогда не обращается в 0). при $C_1 \neq 0$

Заметим, что $t_1 = t_0 - \frac{1}{\lambda_0} < t_0 \Rightarrow$ $\dot{\xi} = 0$ (горизонтальная касательная) – до того, как фазовая кривая пересекает ось $O\eta$.

Соберем всё вместе:



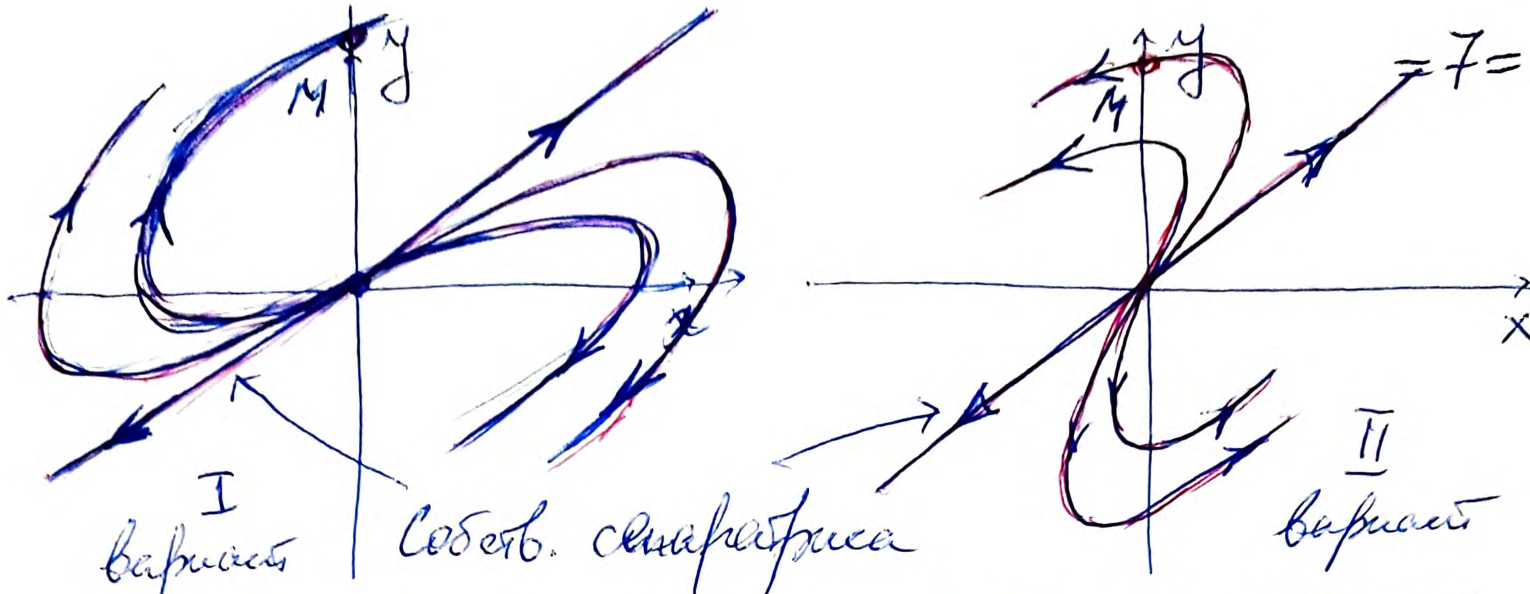
[Неустойчивый вырожденный узел.]

Итак, есть всего одно собственное направление и фазовые кривые касаются его (асимптотически) в точке $(0,0)$ при $t \to -\infty$:

$$\frac{d\xi}{dy}\Big|_{t\to-\infty} = \frac{\dot{\xi}}{\dot{y}}\Big|_{t\to-\infty} = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{\lambda_0} + t + \frac{c_2}{c_1}\right)$$

Чтобы нарисовать фазовый портрет в исходных координатах $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix}$, надо, прежде всего, найти собств. вектор матрицы A — образ вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в пл-ти $\begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix}$ при отображении $T = \|u, v\|$. Прямая в плоскости $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ с направляющим вектором u — сепаратриса, к ней будут "касаться" в $(0,0)$ (асимптотическое).

Тут есть тонкий момент: при заданной (единственной) сепаратрисе можно нарисовать $\underline{2}$ разных фазовых портрета с правильными асимптотиками при $t \to \pm\infty$ (и одной и той же сепаратрисой $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to u$):



Как узнать, какой вариант правильный? Надо посмотреть значения векторного поля на осях (напр., на оси OY).

В I варианте фазовая кривая проходит точку M из II-го квадранта в I-й $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\dot{x}|_M > 0$, а во II варианте: $\dot{x}|_M < 0$. Выяснив, какое значение $\dot{x}|_M$ даёт наша конкретная система, мы легко выберем правильный вариант.

Пример 1

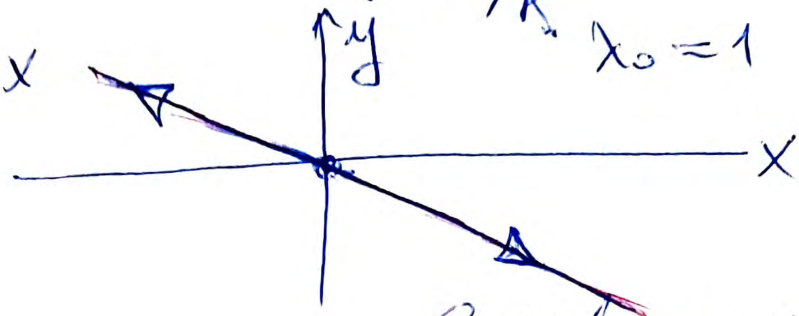
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_0 = 1 > 0.$$

Это неустойчивый вырожденный узел.

$$Au = \lambda_0 u \Rightarrow u = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \lambda_0 = 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$

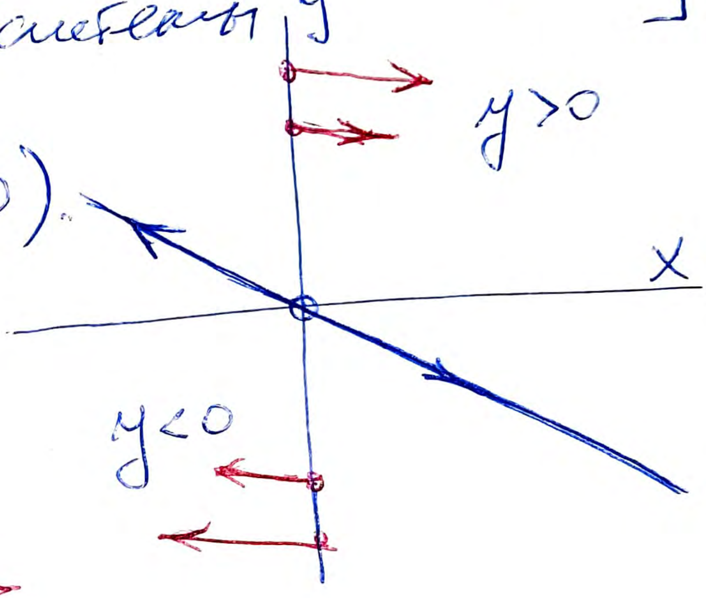


Рассмотрим значение векторного поля

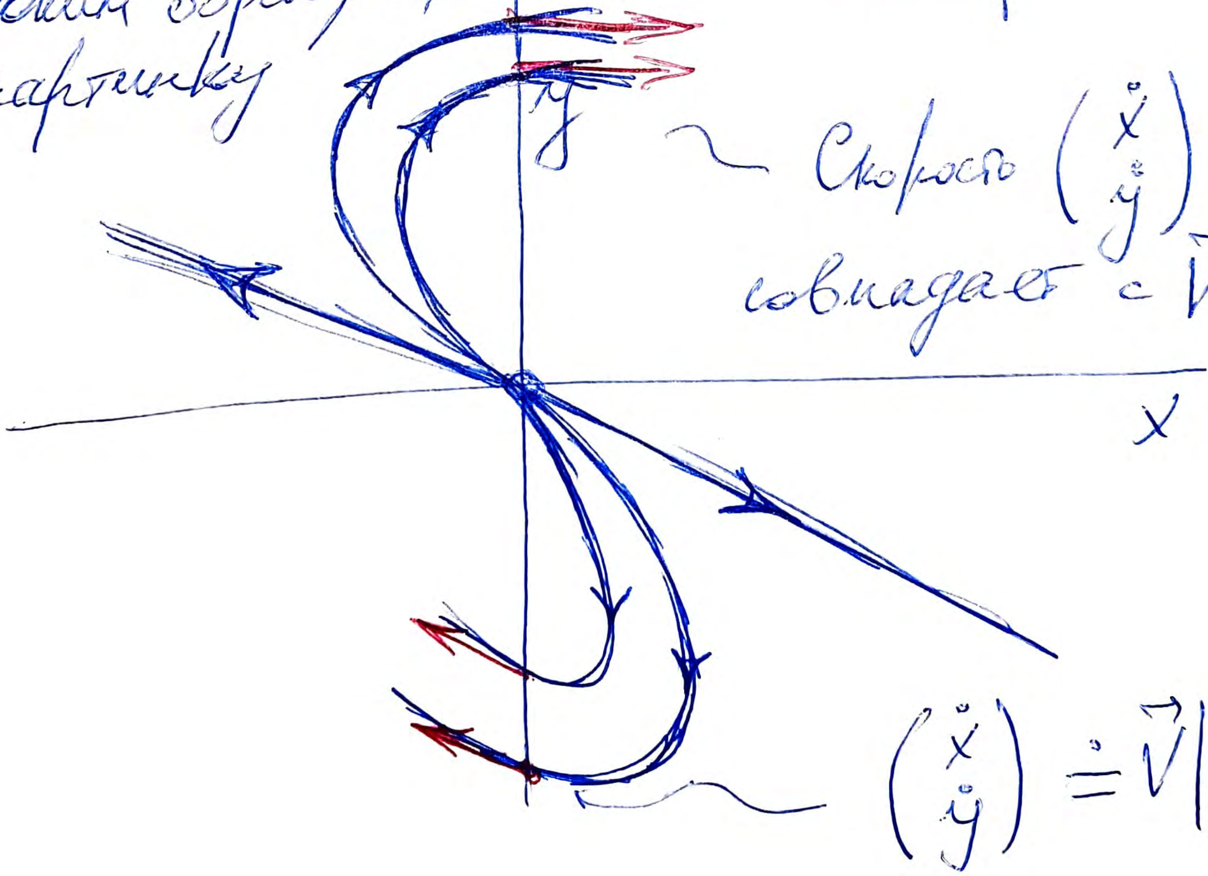
$$\vec{V} = \begin{pmatrix}3x+4y\\-x-y\end{pmatrix} \leftarrow \left[\text{правая часть исходной системы}\right]$$

на оси OY $(x=0)$.

$$\vec{V}\Big|_{x=0} = \begin{pmatrix}4y\\-y\end{pmatrix}$$



Таким образом, имеем картинку



~ Скорость $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}$ совпадает с $\vec{V}\big|_{x=0}$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} \doteq \vec{V}\Big|_{x=0}$$

*Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 4x - 4y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \\ (\lambda+2)^2 = 0 \end{matrix}$$

$$\lambda_0 = -2 < 0$$

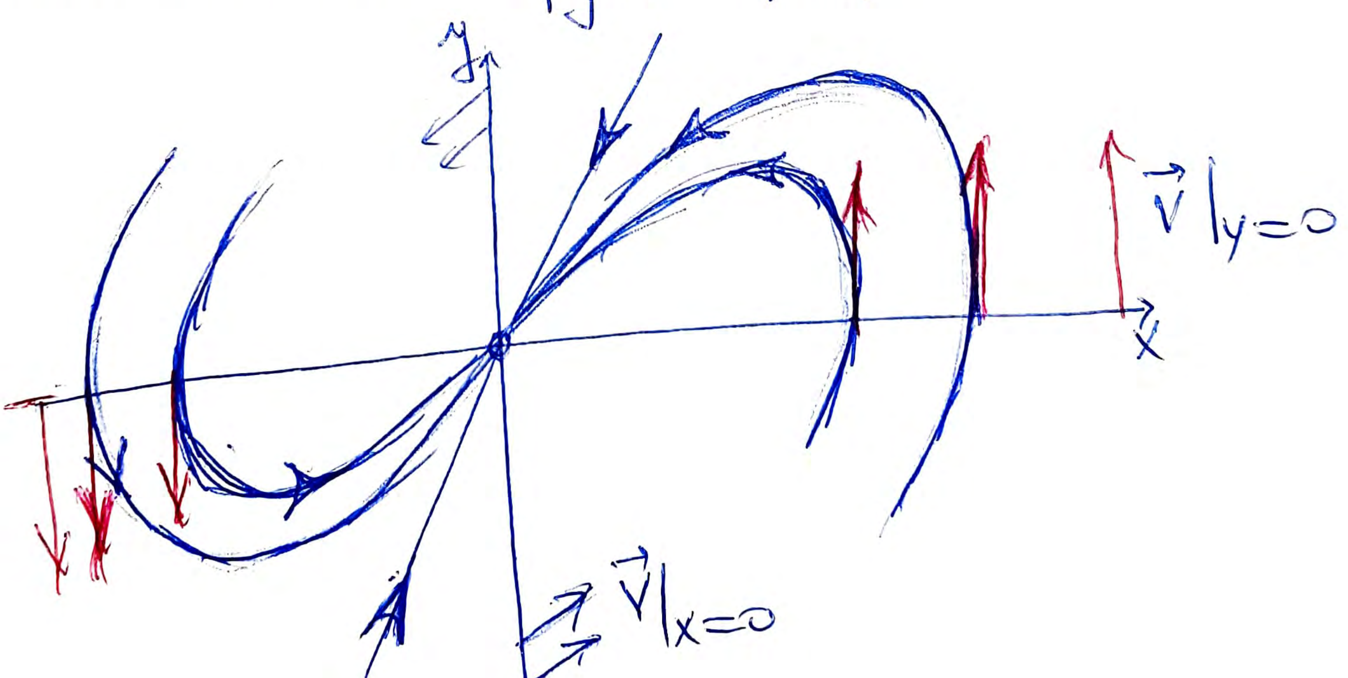
Устойчивый вырожденный узел

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $y = 2x$ – сепаратриса.

Поле на оси OY: $\vec{V}|_{x=0} = \begin{pmatrix} -y \\ -4y \end{pmatrix}$

На оси OX: $\vec{V}|_{y=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4x \end{pmatrix}$.

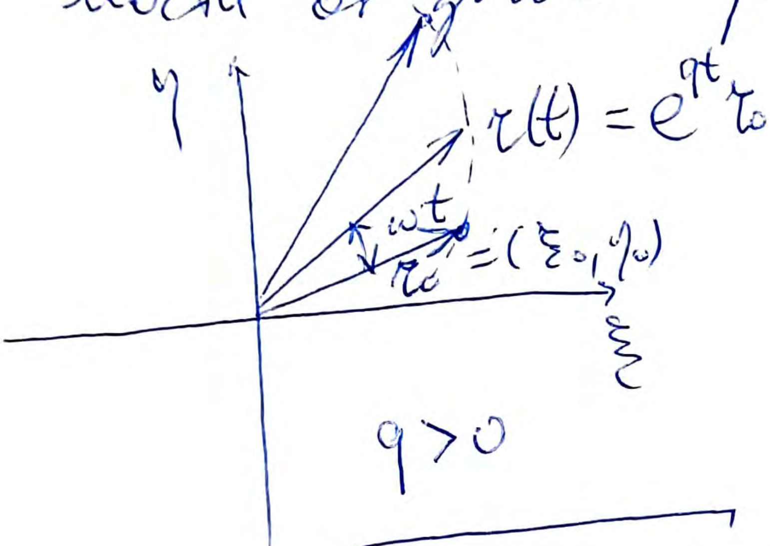


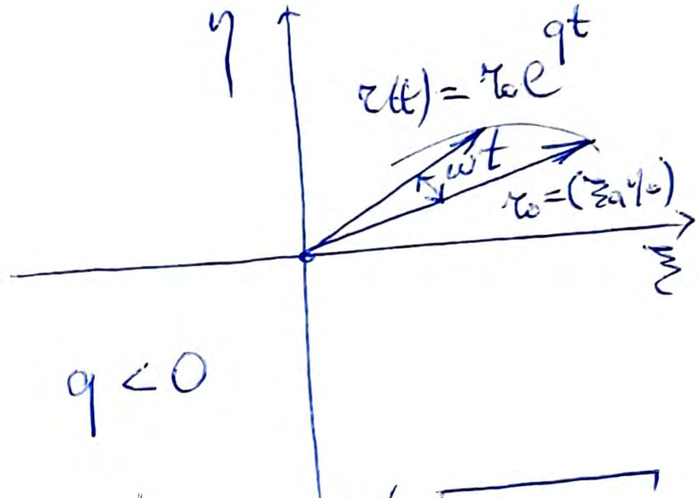
4° Собственные значения A — комплексно-сопряженные числа
$$\lambda_1 = q + i\omega \qquad \lambda_2 = q - i\omega$$

Вспомним, что в этом случае
$$A = T\begin{pmatrix} q & \omega \\ -\omega & q \end{pmatrix} T^{-1},$$
где $T = \|u, v\|$, вектора u и v — веществ. и мнимая части комплексного собственного вектора матрицы A:
$$Af = (q + i\omega)f, \qquad f = u + iv$$
$$Au = qu - \omega v, \quad Av = \omega u + qv$$

Делаем замену $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$
$$\begin{pmatrix} \dot\xi \\ \dot\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & \omega \\ -\omega & q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = e^{t\begin{pmatrix} q & \omega \\ -\omega & q \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} =$$
$$= e^{qt}\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}.$$
С течением времени начальный вектор $\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$ вращается с угловой скоростью ω,

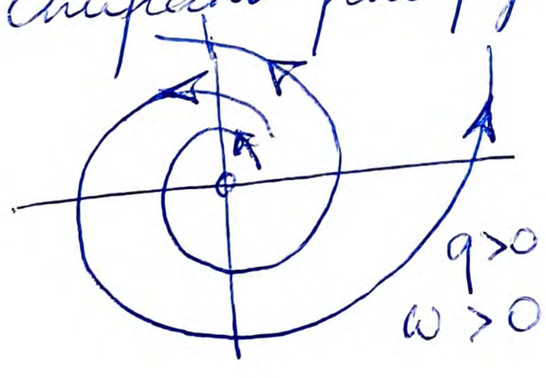
а его модуль (длина) экспоненциально $\to$ к $+\infty$ или $\to$ к 0 в зависимости от знака q.

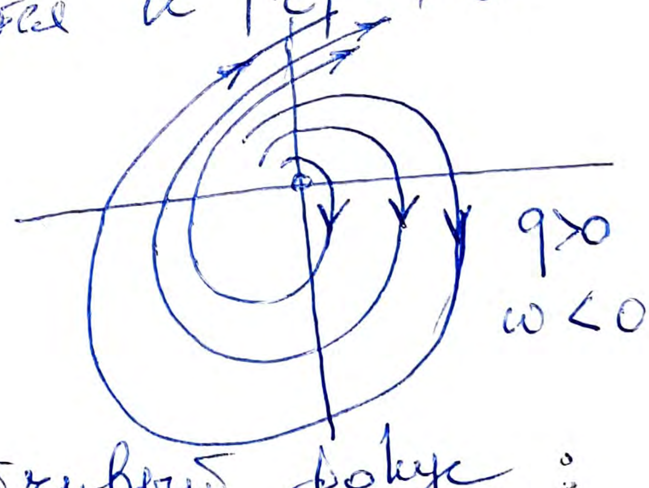




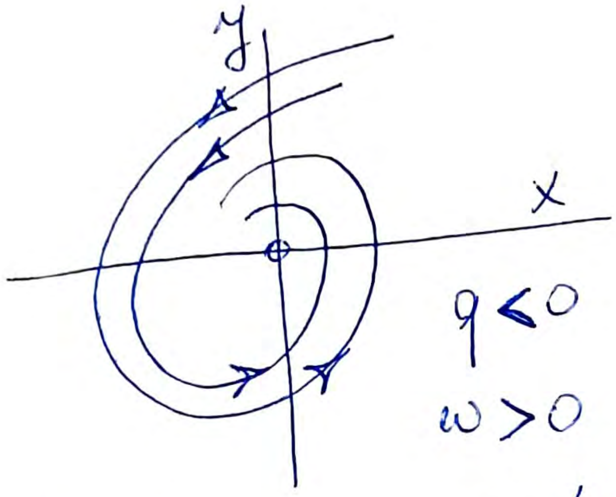
$$r(t) = \sqrt{\xi(t)^2 + \eta(t)^2} = e^{qt} r_0 = e^{qt}\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$$

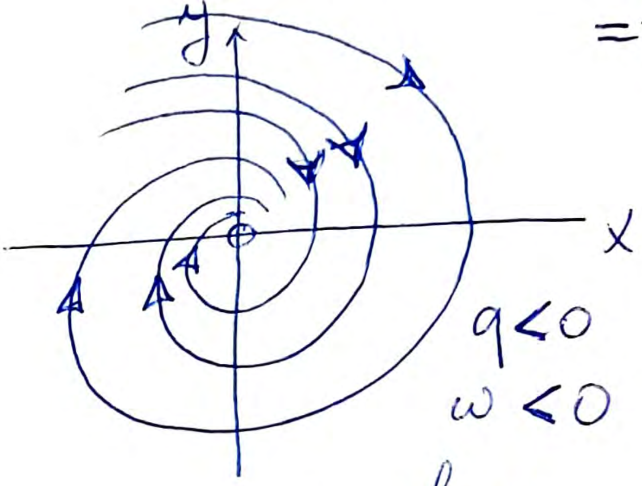
Направление вращения зависит от знака ω. Если $q > 0$, то это (спираль) неустойчивый фокус: при $t \to +\infty$ спираль раскручивается и $|\vec{z}| \to \infty$





Если $q < 0$ – устойчивый фокус: при $t \to +\infty$ спираль сжимается к т. $(0,0)$:





NB! Число витков ∞, т.е. спираль никогда не придёт в т. (0,0).

В осях $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ направление вращения задаётся значением векторного поля на осях $x=0$ и $y=0$.

Если $q>0$ — спираль „разматывается", если $q<0$ — сжимается. Если $q=0$ — особая точка центр. Нарушается условие теоремы Гробмана-Хартмана. Внешние поправки могут превратить центр в устойчивый или неустойчивый фокус.

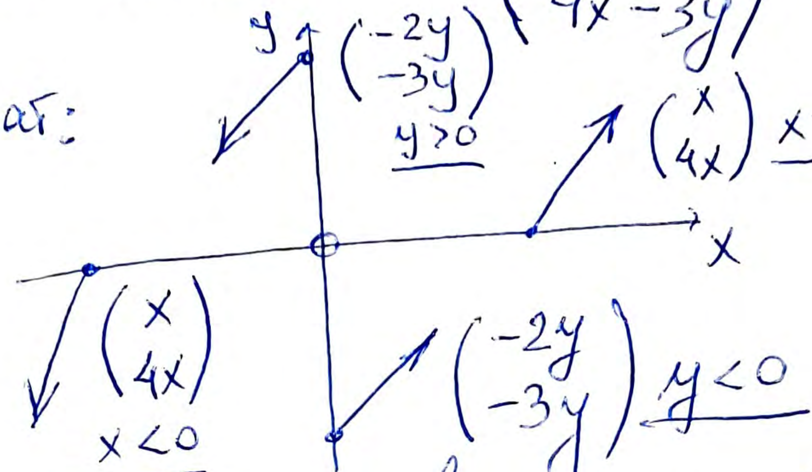
Пример 3.

$$\begin{cases} \dot{x} = x-2y \\ \dot{y} = 4x-3y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

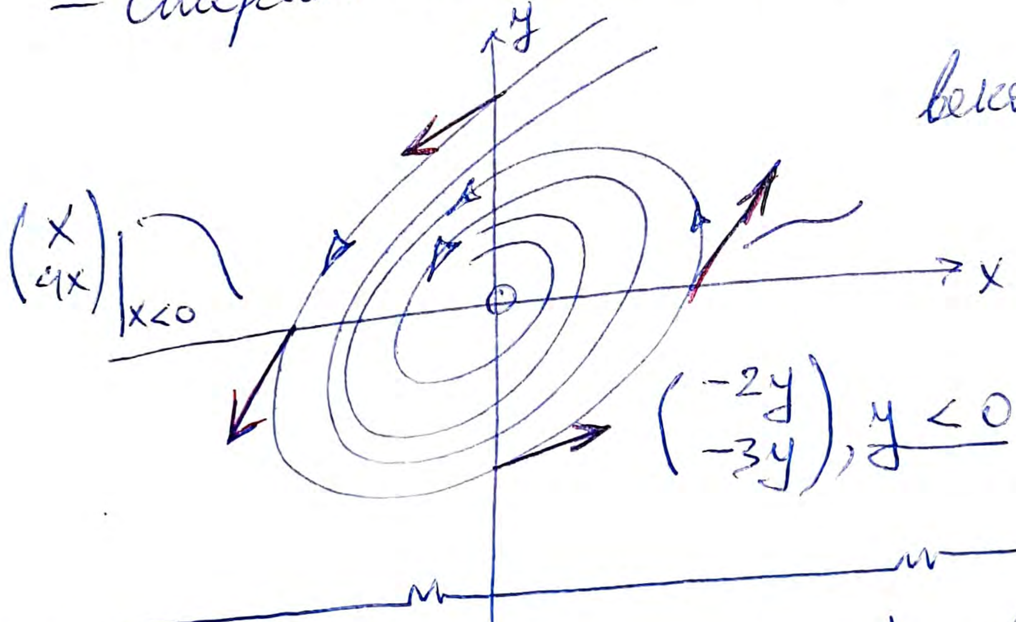
$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1+2i \\ \lambda_2 = -1-2i \end{cases}$$

$q = -1$ Устойчивый фокус.

Векторное поле $\vec{V} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 4x-3y \end{pmatrix}$ на осях координат:



Отсюда видно, что вращение — против часовой стрелки и $q = -1 < 0$ — спираль сжимается:



вектор $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4x \end{pmatrix}$
$x>0$

5' №10

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - \operatorname{tg} 2x \\ \dot{y} = \sqrt{1+x} + \sin\left(\dfrac{x-4y}{2}\right) - 1 \end{cases}$$

Для этой системы:

(а) Линеаризовать в окр-ти особой точки и определить её тип.

(б) Нарисовать ф.п. Гомеоморфен ли он ф.п. исходной системы в некоторой окр-ти особой точки?

Решение: Особая точка $(x=y=0)$. =14=

(а) Линеаризация:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x \simeq 2x + \ldots \\ \sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{x}{2} + \ldots \\ \sin\left(\dfrac{x-4y}{2}\right) \simeq \dfrac{x}{2} - 2y + \ldots \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases} \quad \Big| \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\lambda+2)^2 = 0$$

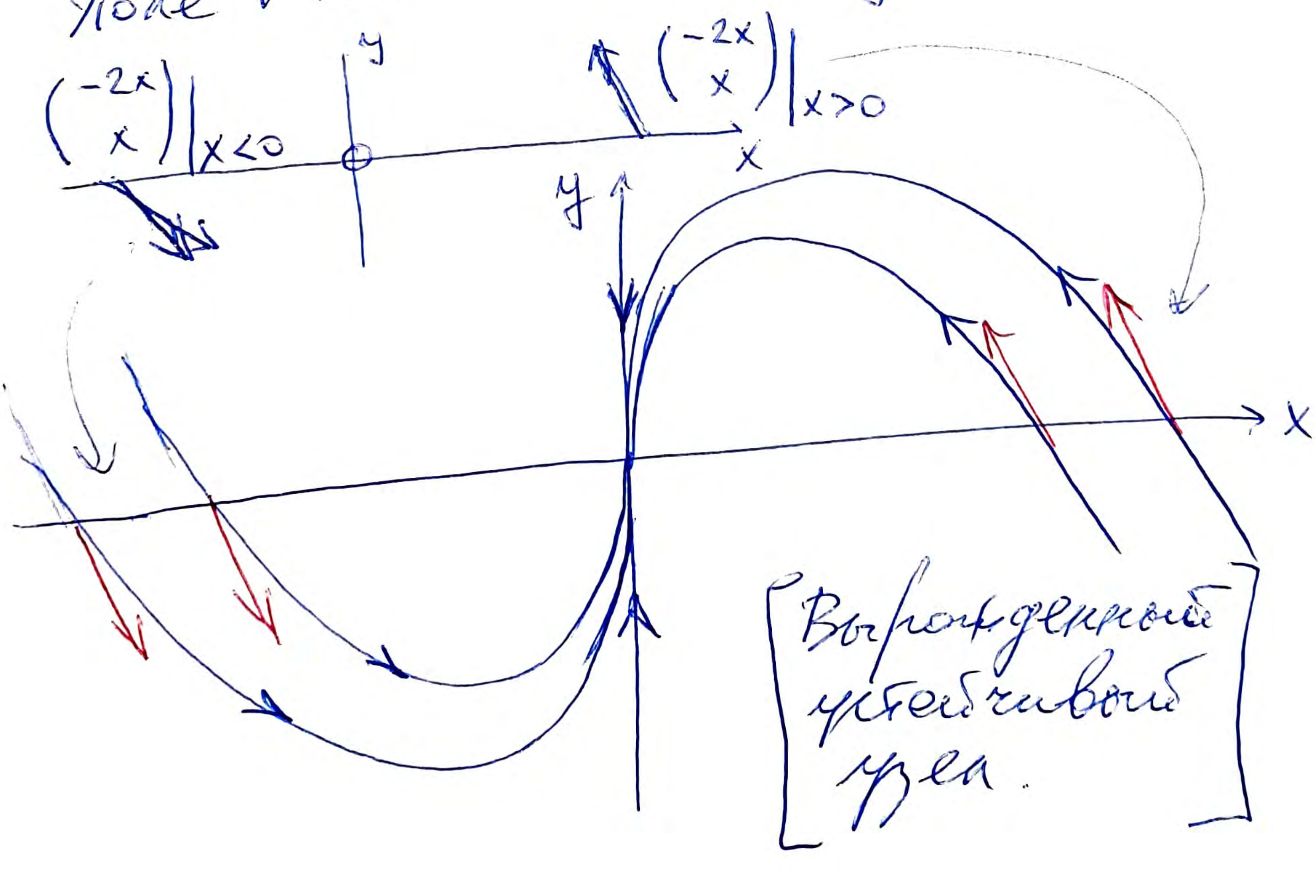
$$\lambda_0 = -2$$

Вырожденный устойчивый узел.

(б) Собств. вектор $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ Ось ординат

$x = 0$ — сепаратриса.

Поле $\vec{v}$ на оси OX: $\vec{v}\big|_{y=0} = \begin{pmatrix} -2x \\ x \end{pmatrix}$



Семинар № 13

I. Разбор 5' прошлого семинара (5' № 10)

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - \operatorname{tg} 2x \\ \dot{y} = \sqrt{1+x} + \sin\left(\frac{x-4y}{2}\right) - 1 \end{cases}$$

а) Линеаризация
б) Фаз. портрет

Решение:
а) Разложение до 1-го порядка:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha \simeq \alpha + \dots \\ \sqrt{1+\alpha} \simeq 1 + \alpha/2 + \dots \\ \sin\alpha \simeq \alpha + \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

NB! С.з. матрицы A уже видны, нет нужды составлять характ. полином $\chi_A(\lambda)$.

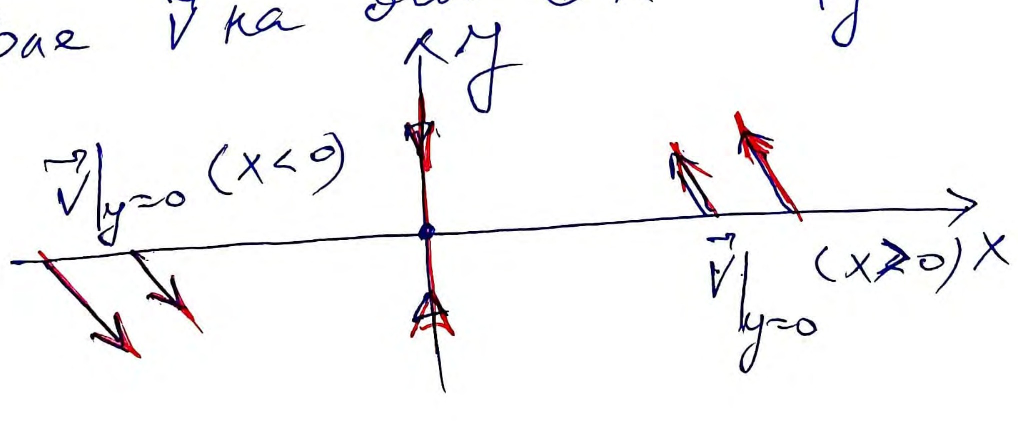
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

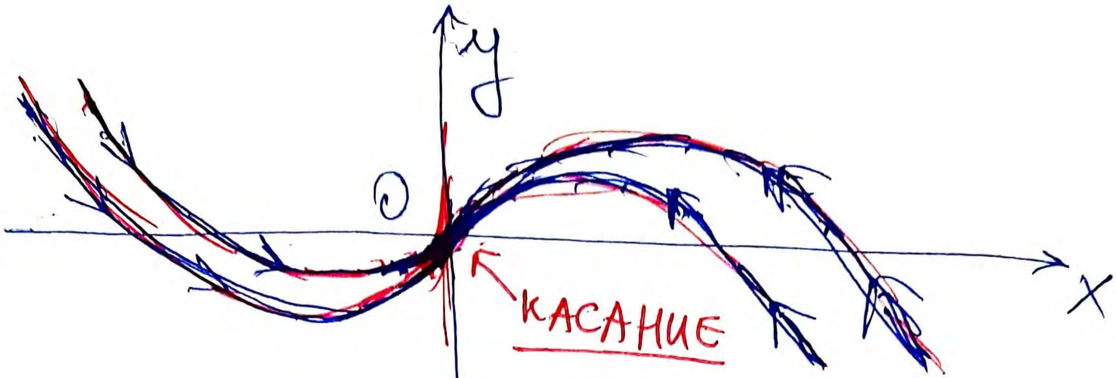
б) Это вырожденный устойчивый узел.

Собств. вектор $Au = -2u \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Сепаратриса – ось ординат.

Поле $\vec{v}$ на оси OX: $\vec{v}\big|_{y=0} = \begin{pmatrix} -2x \\ x \end{pmatrix}$





Устойчивый вырожденный узел.

Веществ. часть собств. значений A $(\lambda=-2)$ не равна 0 $\Rightarrow$ т. Гробмана–Хартмана „работает" и портрет линеаризованной системы гомеоморфен ф.п. исходной в некоторой окр-ти особой точки $(0,0)$.

II. Зависимость решений от параметра.

Рассм. систему дифф. ур-ий 1-го порядка

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = f^i(t,x;\mu) \\ x^i(t_0) = a^i(\mu) \end{cases} \qquad i=1,\dots,n$$

где f^i и a^i — заданные ф-ции. Решение такой системы $x^i(t,\mu)$ зависит от параметра μ (или многих параметров $\{\mu\}$ — их м.б. несколько), и мы рассм. метод, позволяющий исследовать зависимость от μ в случае, когда $n = 3$ — точное решение системы неизвестно.

Это типичная ситуация в приложениях, напр., в квантовой механике, где наш метод лежит в основе теории возмущений при решении диф. ур-я Шредингера.

Итак, сформулируем теорему с ограничениями на f^i и a^i:

$\boxed{\text{Th.}}$ $\exists$ $f^i(t; x^1, \ldots, x^n; \mu)$ и $a^i(\mu)$ удовлетв. условиям:

(а) $f^i(t; \vec{x}; \mu)$ непр. по совокупности аргументов в некоторой области

$$\tilde{D} \subset \mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\mu \times \mathbb{R}^n_{\vec{x}};$$

(б) Ф-ии f^i имеют в $\tilde{D}$ непрерывные частные производные по $x^1, \ldots, x^n$ и μ до порядка $p \geq 1$ включительно:

$$\exists \; \frac{\partial^p f^i}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^n)^{\alpha_n} \partial \mu^\beta} \text{ — непр. в } \tilde{D}$$

при всех $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta = p \geq 1$;

(в) ф-ии $a^i(\mu)$, определяющие нач. =4=
данные, непр. дифф-мы до порядка
p на некотором интервале $a < \mu < b$
(остаемся в $\hat{\mathcal{D}}$).

Тогда решение задачи (*)
$$x^i = x^i(t, \mu), \quad 1 \le i \le n,$$
непр. дифф. по μ до порядка p включ.

Практическая польза от этой Т. появляется в случае, когда удаётся найти некоторое $\mu_0 \in (a, b)$, для которого задача (*) решается точно (напр., при этом μ_0 пропадают какие-нибудь нелинейные слагаемые). Тогда решение для $\mu \ne \mu_0$ можно получить в виде ряда по $\Delta\mu = (\mu - \mu_0)$ с явно известными коэффициентами — некоторыми ф-ями t.

Обозначим точное решение при $\mu = \mu_0$ символом $x^i_{(0)}(t)$: $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{d\overset{\circ}{x}{}^{i}_{(0)}}{dt} = f^i(t; \vec{\overset{\circ}{x}}_{(0)}; \mu_0) \\ \overset{\circ}{x}{}^{i}_{(0)}(t_0) = a^i(\mu_0) \end{cases}$$

Пользуясь Th., мы можем разложить любое другое решение $x^i(t,\mu)$ системы (*) для некоторого μ вблизи μ_0 в ряд Тейлора по разности $\Delta\mu$ до порядка p:

$$x^i(t;\mu) = \underbrace{x^i(t;\mu_0)}_{\overset{\circ}{x}{}^{i}_{(0)}(t)} + \Delta\mu\, \overset{\circ}{x}{}^{i}_{(1)} + \ldots + \frac{(\Delta\mu)^p}{p!}\overset{\circ}{x}{}^{i}_{(p)}(t) + o((\Delta\mu)^p)$$

(известно!) $\leftarrow \overset{\circ}{x}{}^{i}_{(0)}(t)$

Наша задача – найти ф-ии

$$\overset{\circ}{x}{}^{i}_{(1)}(t), \ldots, \overset{\circ}{x}{}^{i}_{(p)}(t).$$

<u>NB!</u> Эти ф-ии – суть частные производные по μ в т. μ_0: точного решения $x^i(t;\mu)$

$$\overset{\circ}{x}{}^{i}_{(k)}(t) = \left.\frac{\partial^k x^i(t;\mu)}{\partial\mu^k}\right|_{\mu=\mu_0}$$

Если 1я ф-я $\overset{\circ}{x}{}^{i}_{(0)}(t) = x^i(t,\mu_0)$ известна явно (что мы и будем предполагать),

то все $X^i_{(k)}(t)$ удовлетворяют си- =6=
стемам **линейных** ур-ний с известными
коэффициентами.

Для того, чтобы найти эти линейные си-
темы, нужно подставить разложение в
ряд Тейлора функции $x^i(t,\mu)$ в (*),
разложить также и правые части
f^i и a^i в ряд по $\Delta\mu$ и приравнять
друг другу отдельные слагаемые с
одинаковой степенью $\Delta\mu$. Проиллюстри-
руем это разложение до 1-го порядка

$$\begin{cases} x^i(t,\mu) = X^i_{(0)}(t) + \Delta\mu \cdot X^i_{(1)}(t) + o(\Delta\mu) \\ a^i(\mu) = a^i(\mu_0) + \Delta\mu \cdot a^i_{(1)}(\mu_0) + o(\Delta\mu) \\ f^i(t;\vec{x}(t,\mu),\mu) = f^i(t;\vec{X}_{(0)} + \Delta\mu\,\vec{X}_{(1)};\mu_0+\Delta\mu) \\ = f^i(t;\vec{X}_{(0)};\mu_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \left.\dfrac{\partial f^i}{\partial x^k}\right|_{\substack{\vec{x}=\vec{x}_0\\ \mu=\mu_0}} \cdot \Delta\mu \cdot X^k_{(1)} \\ \quad + \left.\dfrac{\partial f^i}{\partial \mu}\right|_{\substack{\vec{x}=\vec{x}_0\\ \mu=\mu_0}} \cdot \Delta\mu + o(\Delta\mu) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}x^i(t,\mu) = \frac{d}{dt}x^i_{(0)}(t,\mu_0) + \Delta\mu\,\frac{dx^i_{(1)}(t)}{dt} + o(\Delta\mu)$$

$$\begin{cases} x^i(t_0,\mu) = a^i(\mu) \Longrightarrow \\ \quad\shortparallel \\ x^i_{(0)}(t_0) + \Delta\mu\, x^i_{(1)}(t_0) \doteq a^i_{(0)} + \Delta\mu\, a^i_{(1)} \end{cases}$$

— это начальные данные для $x^i_{(k)}(t_0)$.

Подставив эти разложения в (*), получим для $x^i_{(1)}(t)$ <u>линейную систему</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i_{(1)}(t)}{dt} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\bigg|_{\substack{\mu=\mu_0\\ \vec{x}=\vec{x}_{(0)}}}}_{\text{известная явно ф-я } t} \cdot\, x^k_{(1)}(t) + \underbrace{\frac{\partial f^i}{\partial \mu}\bigg|_{\substack{\mu=\mu_0\\ \vec{x}=\vec{x}_{(0)}}}} \\ \\ x^i_{(1)}(t_0) = a^i_{(1)} \end{cases}$$

<u>NB!</u> Частный случай этой схемы: если f^i не зависит от $\mu \Rightarrow \dfrac{\partial f^i}{\partial \mu} = 0$, а μ входит только в начальные данные. В этом случае система на $x^i_{(1)}(t)$ — <u>однородная линейная</u> и называется системой ур-ний в вариациях.

($x^i_{(1)}(t)$ – <u>вариация</u> x^i при изменении δ-начальных данных).

<u>Пример 1.</u>

$n = 1$, имеем всего одно ур-е :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + \dfrac{2\mu}{t} \\ x(1) = -1 + \mu \end{cases}$$

Решаем в области $t > 0$, например, так как

$f(t, x, \mu) = x^2 + \dfrac{2\mu}{t}$ должна быть <u>непрерывна</u> по аргументам. Зависимость от μ в f и $a(\mu) = -1 + \mu$ вообще аналитична, можно разложить до любого порядка.

Выделенное значение μ_0 видно сразу: при $\mu = \mu_0 = 0$ всё решается точно:

$$\begin{cases} \dot{x}_{(0)}(t) = x^2_{(0)} \\ x_{(0)}(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow x_{(0)}(t) = -\frac{1}{t} \quad \underline{(t > 0)}$$

В данном примере $\Delta\mu = \mu - \mu_0 = \mu \Rightarrow$ имеем разложение:

$$x(t, \mu) = x_{(0)}(t) + \mu\, x_{(1)}(t) + \frac{\mu^2}{2!} x_{(2)}(t) + \ldots$$

Функция начальных данных

$$a(\mu) = -1+\mu$$

уже разложена по μ как нам нужно.

Получим разложение правой части ур-я:

$$x^2 = \left(x_{(0)} + \mu x_{(1)} + \frac{\mu^2}{2!}x_{(2)} + \dots\right)^2 =$$

$$= x_{(0)}^2 + 2\mu x_{(0)} x_{(1)} + \mu^2\left(x_{(1)}^2 + x_{(0)} x_{(2)}\right) + \dots$$

И ещё $\frac{2\mu}{t}$ даст 1 вклад в ур-е для $x_{(1)}$.

Итак, получаем <u>равенство рядов по μ</u>:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(x_{(0)} + \mu x_{(1)} + \frac{\mu^2}{2}x_{(2)} + \dots\right) = \\ \quad = x_{(0)}^2 + \mu\left(2x_{(0)}x_{(1)} + \frac{2}{t}\right) + \mu^2\left(x_{(1)}^2 + x_{(0)}x_{(2)}\right) + \\ \quad + \dots \\ x_{(0)}(1) + \mu x_{(1)}(1) + \frac{\mu^2}{2!}x_{(2)}(1) + \dots = -1+\mu \end{cases}$$

$\Rightarrow x_{(k)}(1) = 0$ при $k \geq 2$

На $x_{(0)}$ получается уже решённая задача; на $x_{(1)}$ получаем задачу Коши, приравняв слагаемые с μ в 1-й степени:

$X_{(0)}$ подставили

$$\mu^1:\begin{cases} \dfrac{dX_{(1)}}{dt} = 2X_{(0)}X_{(1)} + \dfrac{2}{t} = -\dfrac{2}{t}X_{(1)} + \dfrac{2}{t} \\ X_{(1)}(1) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ На $X_{(1)}$ – линейное неоднородное ур-е,

$$X_{(1)}(t) = 1 + \frac{C}{t^2} \text{ – общее решение.}$$

$$X_{(1)}(1) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{X_{(1)}(t) = 1}$$

Далее, при μ^2:

$X_{(1)} = 1$ $\quad$ $X_{(0)} = -\frac{1}{t}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dX_{(2)}}{dt} = X_{(1)}^2 + X_{(0)}X_{(2)} \doteq 1 - \dfrac{1}{t}X_{(2)} \\ X_{(2)}(1) = 0 \end{cases}$$

Эта линейная задача тоже решается:

$$X_{(2)}(t) = \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{t^2}\right), \quad t > 0$$

Таким образом, мы получаем решение исходного нелинейного ур-я в виде ряда по μ с известными коэф-ми:

$$x(t,\mu) = -\frac{1}{t} + \mu + \frac{\mu^2}{3}\left(t - \frac{1}{t^2}\right) + o(\mu^2)$$

Пример 2

$n = 2$ – система 2х ур-ний:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4ty^2 \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$$

NB! Начальные данные не зависят от μ.

Требуется найти $\left.\dfrac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$

Заметим, что $\mu = 0 = \mu_0$ – точка, где всё решается точно.

До 1-го порядка по μ:

$$\begin{cases} x(t,\mu) = x_{(0)}(t) + \mu x_{(1)}(t) + \dots \\ y(t,\mu) = y_{(0)}(t) + \mu y_{(1)}(t) + \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2 = y_{(0)}^2 + 2\mu y_{(0)} y_{(1)} + o(\mu)$$

Подставляем в исходную систему и получаем:

μ^0 – главное приближение:

$$\begin{cases} \dot{x}_{(0)} = 4t\, y_{(0)}^2 & x_{(0)}(0) = 0 \\ \dot{y}_{(0)} = 1 & y_{(0)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{(0)} = t \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{(0)} = 4t^3 \\ x_{(0)}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x_{(0)} = t^4}}$$

μ^1 – 1й порядок:

$$\begin{cases} \dot{x}_{(1)} = 8t\, y_{(0)} y_{(1)} = 8t^2 y_{(1)} & y_{(1)}(0) = 0 \\ \dot{y}_{(1)} = 5 x_{(0)}(t) = 5t^4 & x_{(1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{(1)} = t^5 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{(1)}(t) = 8t^7 \\ x_{(1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x_{(1)} = t^8$$

В итоге получаем:

$$\begin{cases} x(t,\mu) = t^4 + \mu t^8 + o(\mu) \\ y(t,\mu) = t + \mu t^5 + o(\mu) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = t^8.$$

(Ещё пример, если будет время.) =13=

<u>Пример 3</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + t x^3 \\ x(2) = \mu \end{cases} \quad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$$

При $\mu = 0$ <u>угадывается</u> решение

$$x_{(0)}(t) \equiv 0.$$

$$\begin{cases} x(t,\mu) = x_{(0)} + \mu x_{(1)} + o(\mu) \\ x^2(t,\mu) = x_{(0)}^2 + 2\mu x_{(0)} x_{(1)} + o(\mu) \\ x^3(t,\mu) = x_{(0)}^3 + 3\mu x_{(0)}^2 x_{(1)} + o(\mu) \end{cases}$$

Для вариации $x_{(1)}$ получаем ур-е:

$$\begin{cases} \dot{x}_{(1)} = x_{(1)} + 2x_{(0)} x_{(1)} + 3t x_{(0)}^2 x_{(1)} \\ x_{(1)}(2) = 1 \end{cases}$$

Поскольку $x_{(0)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{(1)} = x_{(1)} \\ x_{(1)}(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{(1)}(t) = e^{t-2} \Rightarrow \underline{x(t,\mu) = \mu e^{t-2} + o(\mu)}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = e^{t-2}.$$

Diff. eqs 5' №11 24.11.20 =14=

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \mu (x^2 + t) \\ x(0) = \dfrac{1}{1+\mu} \end{cases}$$

(а) Найти явный вид $x_{(0)}$ и $x_{(1)}$.

(б)* Написать дифф. ур-е на $x_{(2)}$.