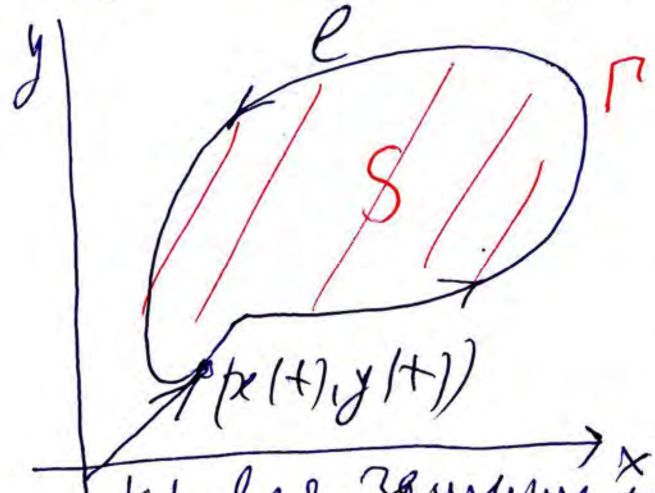
2к

Мат. Анализ. Семинар № 19

Применение рядов Фурье

① Изопериметрическое неравенство

Классическая задача: среди всех кривых на плоскости, длина которых не превосходит числа L, найти кривую, ограничивающую наибольшую площадь.



Кривая Γ: $x = x(t), y = y(t), \quad t \in [0, T]$

Кривая гладкая: $x(t), y(t) \in C^1[0, T]$

$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t), \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}(t)$.

Кривая замкнутая

$x(0) = x(T), \quad y(0) = y(T)$.

Длина кривой: $l(\Gamma) = \int_0^T \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$

Площадь внутри кривой (против час. стрелки)

$$S(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t) \cdot \dot{y}(t) - y(t) \cdot \dot{x}(t))\, dt$$

По условию задачи: $l \leq L$

Найти $\max\limits_{\Gamma \in C^1} \{ S(\Gamma) : l(\Gamma) \leq L \}$.

Поменяем параметризацию на кривой, перейдем к натуральному параметру:

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{(\dot{x}(t'))^2 + (\dot{y}(t'))^2}\, dt'$$

Получим $s(0) = 0$, $s(T) = L$,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}$$

Тогда $$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}};$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Γ: $x(s), y(s)$, $s \in [0, L]$, $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$

Для удобства введем параметризацию:

$$u = 2\pi \cdot \frac{s}{L} - \pi, \quad u \in [-\pi, \pi].$$

Тогда Γ: $x = x(u)$, $y = y(u)$

причем $x(-\pi) = x(\pi)$, $y(-\pi) = y(\pi)$.

Обозначим $z(u) = x(u) + i\,y(u)$ — комплексная функция

$$\boxed{|z'(u)|^2 = (x'(u))^2 + (y'(u))^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}}$$

Найдем функцию, которая выражает

выразив $S(\Gamma)$ через $z(u)$.

<u>Найдём:</u> $\overline{z}\cdot z' = (x-iy)(x'+iy') =$

$= x\cdot x' + y\cdot y' + i(xy' - y\cdot x') =$

$= \frac{1}{2}(x^2+y^2)' + i(xy' - y\cdot x')$

Следовательно:

$$S(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(x\cdot y' - y\cdot x')\,du = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\cdot z'\,du +$$

$$-\frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+y^2)'\,du + \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\cdot z'\,du =$$

$$= -\frac{1}{2i}\underbrace{(x^2+y^2)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\cdot z'\,du, \text{ т.к. } z(-\pi)=z(\pi)$$

<u>Получили:</u> $S(\Gamma) = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\cdot z'\,du.$

Разложим $z(u)$ в ряд Фурье

$$z(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\cdot e^{inu}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z(u)e^{-inu}\,du$$

Тогда ряд Фурье для производной примет вид:

$$z'(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\cdot c_n e^{inu}$$

Применим равенство Парсеваля:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\cdot|c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|z'(u)|^2\,du = \frac{L^2}{4\pi^2}$$

А для площади $S(\Gamma)$ получаем

$$S = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi} z'(u)\cdot\overline{z}(u)\,du = \pi\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n\cdot c_n)\overline{c_n}$$

(Равенство Парсеваля для скалярного произведения $z'(u)$ и $z(u)$ в комплексной форме). Следовательно, $\frac{S}{\pi} = \sum n\cdot|c_n|^2$

В итоге получаем равенство:

$$\frac{L^2}{4\pi^2} - \frac{S}{\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(n^2-n)\cdot|c_n|^2 \geq 0$$

Заметим, что правая часть неотрицательна, причем равенство достигается лишь условии $c_n = 0\ \forall n\in\mathbb{Z}, n\neq 0, 1$.

Поэтому для любой кривой Γ выполнено <u>изопериметрическое н-во</u>:

$$\boxed{4\pi S \leq L^2.}$$

Равенство достигается при $z(u) = c_0 + c_1\cdot e^{iu}$ это <u>окружность</u>!

2) Решение уравнения теплопроводности.

$Q = \{(x,t),\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$u = u(x,t)$, $u \in C(\overline{Q})$, $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(\overline{Q})$

Уравнение теплопроводности $(a > 0)$

(1) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, $(x,t) \in Q$.

Начальные условия:

(2) $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in [0,l]$; $\varphi \in C[0,l]$

Граничные условия

(3) $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t \in [0,T]$.

Метод Фурье (метод разделения переменных) для решения этой задачи.

ШАГ 1: Ищем решения специального вида: $u(x,t) = Y(x) \cdot Z(t)$

Подставляем в уравнение (1):

$$Z'(t) \cdot Y(x) = a^2 \cdot Y''(x) \cdot Z(t)$$

$$\frac{Z'(t)}{a^2 Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda$$

Не зависит от t и от x.

$$Y''(x) = \lambda Y(x), \quad Z'(t) = \lambda \cdot Z(t).$$

Частное решение должно удовлетворять граничному условию (2):

$$Y(0) \cdot Z(t) = Y(l) \cdot Z(t) = 0 \Rightarrow Y(0) = Y(l) = 0$$

<u>ШАГ 2.</u> Находим все решения $Y(x)$ удовлетворяющие граничному условию:

$$\begin{cases} Y''(x) = \lambda Y(x), \ x \in [0, l], & (4) \\ Y(0) = Y(l) = 0. & (5) \end{cases}$$

Называется <u>задача Штурма - Лиувилля.</u> при $Y \not\equiv 0$. λ - называется <u>собственным значением</u>, $Y(x)$ - называется <u>собственной функцией</u> задачи Ш - Л. (4), (5).

Если $\lambda > 0$, то общее решение (4):

$$Y(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

Условие (5) влечет:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} l} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} l} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

Следовательно, при $\lambda > 0$ нет решений задачи Ш - Л.

Если $\lambda = 0$, то $y''(x) = 0 \Rightarrow$

$y(x) = C_1 + C_2 \cdot x$, $y(0) = y(l) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

Опять нет решения задачи Ш-Л.

Пусть $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$. Тогда общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 \cdot \sin \mu x + C_2 \cdot \cos \mu x$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$

$y(l) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot \sin \mu \cdot l = 0 \Rightarrow \sin(\mu l) = 0$

т.е. $\mu l = k \cdot \pi \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$

Следовательно,

$$\lambda_k = -\frac{k^2 \cdot \pi^2}{l^2}, \; k = 1, 2, \ldots$$

Нашли собственные значения.

Тогда собственные функции:

$$Y_k(x) = \sin \mu_k \cdot x, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \; k \in \mathbb{N}$$

Нашли решения задачи Ш-Л. (4)-(5)

ШАГ 3 Решаем уравнение для $Z(t)$ с найденными собственными значениями:

$$Z'(t) = -a^2 \mu_k^2 \cdot Z(t). \quad (6)$$

<u>Решение</u>: $Z_k(t) = C_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 \cdot t}$

Мы нашли <u>все</u> частные решения вида $u(x,t) = y(x) \cdot z(t)$, удовлетворяющие <u>уравнению теплопроводности</u> (1) и граничным условиям (3).

$$u_k(x,t) = C_k \cdot e^{-a^2\mu_k t} \cdot \sin \mu_k x, \quad k \in \mathbb{N}$$

<u>ШАГ 4</u>. Решение задачи (1), (2), (3)

Ищем в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-a^2\mu_k t} \cdot \sin \mu_k x.$$

Подставляем $t = 0$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin \mu_k x$$

$$\boxed{\mu_k = \frac{k\pi}{\ell}, \quad k = 1, 2, \ldots},$$

Это ряд Фурье $\varphi(x)$ по <u>ортогональной системе</u> $\{\sin \frac{k\pi}{\ell} x, \ k \in \mathbb{N}\}$

Она полная. При $\ell = \pi$ $\{\sin kx\}$ (Теорема Вейерштрасса).

Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$:

Напомним, что

$$\int_0^l \sin^2 \mu_k x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1-\cos 2\mu_k x)\,dx =$$

$$= \frac{l}{2} + \left.\frac{\sin\frac{2k\pi}{l}\cdot x}{\mu_k}\right|_0^l = \frac{l}{2}$$

Следовательно, коэффициенты Фурье:

$$\boxed{C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\sin\mu_k x\,dx}$$

ШАГ 5. Необходимо обосновать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\cdot\sin\mu_k t$$

является решением задачи (1), (2), (3), т.е. найти условия, при которых он сходится, его можно дифференцировать по t один раз, по x два раза, и удовлетворяет уравнению (1), и краевым условиям (3) и начальным условиям (2).