Преобразование Фурье, матричные обозначения

Тождественный оператор как обычно обозначаем $\mathbf{E}$, а $\mathbf{R}$ обращение направления индексации координат $f_k \mapsto f_{-k}$ вектора $f_0, f_1, \dots f_{N-1}$. Для удобства дальнейших формул выберем перенормировку формул прямого $\mathcal{F} : f \to \hat{f}$ и обратного $\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \to f$ дискретных преобразований Фурье:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-2\pi i t s/N} \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} \hat{f}(s) e^{2\pi i s t/N} \tag{2}$$

Преобразование Фурье очевидным образом линейно, обозначения $\mathcal{F}^{-1}$, $\mathcal{F}^{-1}$ сохраним и для матриц этих преобразований. Такая перенормировка приводит к тому, что коэффициент в равенстве Парсеваля, тем самым, исчезает: $\sum_t |f(t)|^2 = \sum_s |\hat{f}(s)|^2$.

Задания контрольной

1. Какой определитель у матрицы преобразования Фурье $\mathcal{F}$ сигналов дискретного времени длины $N = 4$?

2. Какой определитель у матрицы преобразования Фурье $\mathcal{F}$ сигналов дискретного времени длины $N = 5$?

3. При $N = 13$ найти явно собственный вектор матрицы преобразования Фурье $\mathcal{F}$ с собственным значением -1.

4. При $N = 9$ найти явно два неколлинеарных собственных вектора матрицы преобразования Фурье $\mathcal{F}$ с собственным значением 1.

5. Выразить с помощью матрицы $\mathbf{R}$ преобразование $(\mathcal{F} + \mathcal{F}^{-1}) \circ (\mathcal{F} + \mathcal{F}^{-1})$

6. Выразить с помощью матрицы $\mathbf{R}$ преобразование $(\mathcal{F} - \mathcal{F}^{-1}) \circ (\mathcal{F} - \mathcal{F}^{-1})$

7. Рассмотрим преобразование $\mathbf{E} + \mathcal{F} + \mathcal{F} \circ \mathcal{F} + \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ найти квадрат этого преобразования.

8. Рассмотрим преобразование $\mathbf{E} - \mathcal{F}^{-1} + \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1} - \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1}$ найти квадрат этого преобразования.

9. Для $N = 8$ указать явно непостоянный собственный вектор с собственным значением 1. Подсказка: вспомните разложение на множители многочлена $a^n - b^n$

10. Для $N = 8$ указать явно непостоянный собственный вектор с собственным значением -1. Подсказка: вспомните разложение на множители многочлена $a^n + b^n$

11. **Вычислительная задача**. Для $N = 23$ численно найти три непостоянных собственных вектора с собственным значением 1. Подсказка: вспомните разложение на множители многочлена $a^n - b^n$

12. **Вычислительная задача**. Для $N = 21$ численно найти три непостоянных собственных вектора с собственным значением -1. Подсказка: вспомните разложение на множители многочлена $a^n + b^n$

13. Частоты вещественного непрерывного сигнала $f(t)$ ограничены сверху 5 кГц (пять тысяч герц). В результате его дискретизации с частотой 10 кГц получилась дискретная последовательность $f[n]$ где $f[n] = f(n \cdot \Delta t)$, $\Delta t = 10^{-4}$. Выберем окно в 1000 точек и рассмотрим в нем ДПФ, какой непрерывной частоте отвечает $\hat{f}_{800}$?

14. Частоты вещественного непрерывного сигнала $f(t)$ ограничены сверху 2 кГц (две тысячи герц). В результате его дискретизации с частотой 10 кГц получилась дискретная последовательность $f[n]$ где $f[n] = f(n \cdot \Delta t)$, $\Delta t = 10^{-4}$. Выберем окно в 1000 точек и рассмотрим в нем ДПФ, какой непрерывной частоте отвечает $\hat{f}_{150}$?

15. **Вычислительная задача**, см. файл `RRecovering_03767.txt` **В данном случае использовать преобразование Фурье без нормализации**, подготовить ответ в виде текстового файла со строками вида «$k \quad f(k) \quad \hat{f}(k)$ ».

16. **Вычислительная задача**, см. файл `RRecovering_03768.txt` **В данном случае использовать преобразование Фурье без нормализации**, подготовить ответ в виде текстового файла со строками вида «$k \quad f(k) \quad \hat{f}(k)$ ».

17. $^\circ$ Возможно ли равенство в соотношении неопределенности $\boxed{\mathrm{supp} f \times \mathrm{supp} \hat{f} \geqslant N}$ для дискретного действительного сигнала $\mathbb{Z}/N \to \mathbb{R}$? Объяснить.

18. $^\circ$ Упростить $(\mathcal{F} - \mathcal{F}^{-1}) \circ (\mathcal{F} + \mathcal{F}^{-1})$

19. $^\circ$ Что получится, если применить к симметричному непрерывному сигналу из $L^1(\mathbb{R})$ преобразование Фурье дважды? Объяснить.

20. **Численное интегрирование** Для полиномов трех переменных x, y, z из списка ниже найти с точностью до второго знака после запятой численные характеристики их ограничений на двумерную сферу единичного радиуса, то есть указать их свойства в в пространстве $L^2(S^2)$

$$P_1 = \frac{3\sqrt{35}}{\sqrt{16\pi}} \left(x^3 y - x y^3\right) \quad P_2 = \sqrt{\frac{45}{32\pi}} \left(7 y z^3 - 3 y z\right)$$
$$P_3 = \sqrt{\frac{45}{16\pi}} \left(7 x y z^2 - x y\right) \quad P_4 = \frac{3}{16\sqrt{\pi}} \left(35 z^4 - 30 z^2 + 3\right)$$
$$Q_1 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(2 z^2 - x^2 - y^2\right) \quad Q_2 = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} z x$$
$$Q_3 = \sqrt{\frac{105}{4\pi}} x y z \quad Q_4 = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} \left(2 z^3 - 3 z x^2 - 3 y^2 z\right)$$

   (a) угол в градусах между P_2 и P_3 и норму суммы $\|P_4 + Q_4\|$
   (b) угол в градусах между P_2 и Q_2 и норму разности $\|P_1 - Q_3\|$

21. **Работа с видеообразами** Пронумерованные файлы в директории `Data` содержат либо значения логарифма от модуля двумерного Фурье-преобразования $\hat{f}_m(\omega_1, \omega_2)$ либо значения аргументов (в радианах) от $(\hat{f}_m(\omega_1, \omega_2)$. Изображения $f_m(x_1, x_2)$ отвечают отдельным буквам русского алфавита, эти буквы *Подробно* объясните (лучше бы качественно, воспользовавшись лишь определением двумерного преобразования Фурье) соответствие между номерами и исходными буквами.

22. **Работа с видеообразами** Рассмотрим действия двумерной (циклической) свертки $*$ на несложное черно-белое изображение $P =$ `horse.pmg`. Более детально: зафиксируем две 2×2 матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ и (нелинейное) преобразование $P \mapsto Q$ на основе суммы абсолютных значений двух циклических сверток: $Q = |P * A| + |P * B|$. Нарисовать (в центре пиксельной картинки) изображение Q и объяснить получившийся эффект. Циклическая свертка как обычно реализуема поаргументным умножением в спектральной области.