N1.

$$F_r = -2r\cos\varphi\sin 2\theta$$
$$F_\theta = -2r\cos\varphi\,(1+\alpha\sin^2\theta)$$
$$F_\varphi = -\alpha r\cos\theta\cdot\sin\varphi$$

Необх. усл-ие потенциальности: $\mathrm{I}\ \partial_\theta F_r = \partial_r(rF_\theta)$

$\partial_i F_j = \partial_j F_i$ $\qquad \mathrm{II}\ \partial_\varphi F_r = \partial_r(r\sin\theta F_\varphi)$

$\partial_i\partial_j U = \partial_j\partial_i U$ $\qquad \mathrm{III}\ \partial_\varphi(rF_\theta) = \partial_\theta(r\sin\theta F_\varphi)$

$\vec F = -\vec\nabla U$

$$\partial_\theta F_r = -2r\cos\varphi\cdot\cdot 2\cdot\cos 2\theta$$
$$\partial_r(rF_\theta) = \partial_r(-2r^2\cos\varphi(1+\alpha\sin^2\theta)) = -4r\cos\varphi - 4r\cdot\alpha\cdot\sin^2\theta\cos\varphi$$
$$\Rightarrow -4r\cos\varphi\cos 2\theta = -4r\cos\varphi(1+\sin^2\theta\cdot\alpha)$$
$$\cos 2\theta = 1+\sin^2\theta\cdot\alpha$$
$$\alpha = \frac{\cos 2\theta - 1}{\sin^2\theta} = \frac{\cos 2\theta - 1}{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = -2$$
$$\alpha = -2$$

$$\partial_\varphi F_r = 2r\sin\varphi\sin 2\theta$$
$$\partial_r(r\sin\theta F_\varphi) = \partial_r(-\alpha r^2\sin\theta\cdot\cos\theta\sin\varphi) = -2\alpha r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi$$
$$\Rightarrow 2\cancel{r}\cancel{\sin\varphi}\sin 2\theta = -\cancel{2}\alpha\cancel{r}\cancel{\sin\theta\cos\theta}\cancel{\sin\varphi}$$
$$2 = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = -2.$$
$$\partial_\varphi(rF_\theta) = \partial_\varphi(-2r^2\cos\varphi(1+\alpha\sin^2\theta)) = 2r^2\sin\varphi + 2r^2\sin\varphi\cdot\alpha\cdot\sin^2\theta$$
$$\partial_\theta(r\sin\theta F_\varphi) = \partial_\theta(-\alpha r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi) =$$
$$= \partial_\theta(-\tfrac{1}{2}\alpha r^2\sin 2\theta\cdot\sin\varphi) = -\tfrac{1}{2}\alpha r^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos(2\theta)\cdot 2 = -\alpha r^2\sin\varphi\cos(2\theta)$$
$$\Rightarrow 2\cancel{r^2}\cancel{\sin\varphi}(1+\alpha\cdot\sin^2\theta) = -\alpha\cancel{r^2}\cancel{\sin\varphi}\cdot\cos(2\theta)$$
$$2+2\alpha\sin^2\theta = -\alpha\cos(2\theta)$$
$$\cancel{\alpha = \frac{-\cos(2\theta)-2}{2\cdot\frac{1-\cos(2\theta)}{2}} = \frac{-\cos(2\theta)-2}{1-\cos(2\theta)}}$$
$$\alpha(2\sin^2\theta+\cos 2\theta) = -2$$
$$\alpha\left(2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\cos 2\theta\right) = -2$$
$$\alpha = -2.$$

$\mathrm{I}\wedge\mathrm{II}\wedge\mathrm{III}:\ \alpha = -2.$ Дост: по лемме Пуанкаре

~~на R^3 ... потенциальна~~

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = F_r \overset{\alpha=-2}{=} -2r\cos\varphi\sin 2\theta$$

$$U = \cancel{2}\frac{r^2}{\cancel{2}}\cos\varphi\sin 2\theta + \Phi(\theta,\varphi)$$

$$-\partial_\theta U = r\cdot F_\theta = -r^2\cos\varphi\cos 2\theta\cdot 2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

$$-2r^2\cos\varphi\,(1-2\sin^2\theta) = -r^2\cos\varphi\cdot\cos 2\theta\cdot 2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

$$-2r^2\cos\varphi\cdot\cos 2\theta = -2r^2\cdot\cos\varphi\cdot\cos 2\theta + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}}_{=0} \Rightarrow \Phi = \Phi(\varphi).$$

$$-\partial_\varphi U = r\sin\theta F_\varphi = r^2\cdot\sin\varphi\cdot\sin 2\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$$

$$\Rightarrow 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi = r^2\sin\varphi\cdot\sin 2\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = const$$

$$U(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\varphi\sin 2\theta + C$$

2π-периодичная ф-ция по φ

$\Rightarrow$ работа сил F по $\forall$ замк. пути вокруг Oz равна 0

$\Rightarrow$ F потенциальна во всем R^3.

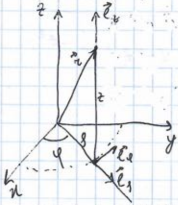
№2.

$$F_\rho = \rho\, X(z)\cos\varphi \qquad F_\varphi = \rho\, Y(\varphi)\cdot e^{-z^2} \qquad F_z = V(\rho,\varphi)\cdot z\cdot e^{-z^2}$$

X, Y, V — гладкие ф-ции

$$\vec F\big|_{\rho=0} = 0 \qquad F_\rho\big|_{\varphi=z=0} = \rho$$

~~Необх. усл-ие потенциальности силы~~:



где ρ,φ — полярные коорд-ы в xOy.

$$(\vec e_x, \vec e_y, \vec e_z)\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (\vec e_\rho, \vec e_\varphi, \vec e_z)$$

$$\dot{\vec e}_\rho = (\vec e_x\cdot\cos\varphi + \vec e_y\cdot\sin\varphi)^\cdot = \vec e_x\cdot(\cos\varphi)^\cdot + \vec e_y\cdot(\sin\varphi)^\cdot = -\vec e_x\cdot\sin\varphi\cdot\dot\varphi + \vec e_y\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi =$$

$(\vec e_\varphi = -\vec e_x\cdot\sin\varphi + \vec e_y\cdot\cos\varphi)$

$$= \vec e_\varphi\cdot\dot\varphi$$

$$\dot{\vec e}_\varphi = (-\vec e_x\cdot\sin\varphi + e_y\cdot\cos\varphi)^\cdot = -\vec e_x\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi + \vec e_y\cdot(-\sin\varphi)\dot\varphi = -\vec e_\rho\cdot\dot\varphi$$

$$\dot{\vec e}_z = 0$$

$$\vec r = \rho\cdot\vec e_\rho + z\cdot\vec e_z$$

$$\dot{\vec r} = \rho\cdot\dot{\vec e}_\rho + \dot\rho\cdot e_\rho + z\cdot\dot{\vec e}_z + \dot z\cdot\vec e_z = \rho\cdot\vec e_\varphi\cdot\dot\varphi + \dot\rho\cdot\vec e_\rho + \dot z\cdot\vec e_z$$

$$\vec F = F_\rho\cdot\vec e_\rho + F_\varphi\cdot\vec e_\varphi + F_z\cdot\vec e_z$$

$$(\vec F, d\vec r) = F_\rho\, d\rho + F_\varphi\,\rho\, d\varphi + F_z\, dz$$

~~[illegible]~~ $(\vec F, d\vec r) = -dU$

$$\vec F = -\vec\nabla U \qquad \vec\nabla = (\nabla_\rho, \nabla_\varphi, \nabla_z) = (\partial_\rho, \tfrac{1}{\rho}\partial_\varphi, \partial_z)$$

$$F_\rho = -\partial_\rho U$$

$$\rho F_\varphi = -\partial_\varphi U$$

$$F_z = -\partial_z U$$

$$\partial_\rho\partial_\varphi U = \partial_\varphi\partial_\rho U$$

$$\partial_\varphi\partial_z U = \partial_z\partial_\varphi U$$

$$\partial_z\partial_\rho U = \partial_\rho\partial_z U$$

Необх. усл-ия потенциальности силы:

I $\partial_\rho(\rho F_\varphi) = \partial_\varphi(F_\rho)$

II $\partial_\varphi(F_z) = \partial_z(\rho F_\varphi)$

III $\partial_z(F_\rho) = \partial_\rho(F_z)$

$F_\rho = \rho \cdot X(z) \cdot \cos\varphi \qquad F_\varphi = \rho \cdot Y(\varphi) \cdot e^{-z^2} \qquad F_z = V(\rho,\varphi) \cdot z \cdot e^{-z^2}$

$\partial_\rho(\rho F_\varphi) = \partial_\rho(\rho^2 \cdot Y(\varphi) \cdot e^{-z^2}) = 2\rho \cdot Y(\varphi) \cdot e^{-z^2}$

$\partial_\varphi(F_\rho) = -\rho \cdot X(z) \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow 2\cancel{\rho} \cdot Y(\varphi) \cdot e^{-z^2} = -\cancel{\rho} \cdot X(z) \cdot \sin\varphi$

$2Y(\varphi) \cdot e^{-z^2} = -X(z) \cdot \sin\varphi \qquad \underline{X(z) = -\frac{2Y(\varphi) \cdot e^{-z^2}}{\sin\varphi}}$ (*)

$\partial_\varphi(F_z) = (\partial_\varphi V(\rho,\varphi)) \cdot z \cdot e^{-z^2}$

$\partial_z(\rho F_\varphi) = \partial_z(\rho^2 \cdot Y(\varphi) \cdot e^{-z^2}) = \rho^2 \cdot Y(\varphi) \cdot (-2z) \cdot e^{-z^2}$

$\Rightarrow (\partial_\varphi V(\rho,\varphi)) \cdot \cancel{z} \cdot \cancel{e^{-z^2}} = -\rho^2 \cdot Y(\varphi) \cdot 2\cancel{z} \cdot \cancel{e^{-z^2}}$

$\underline{(\partial_\varphi V(\rho,\varphi)) = -2\rho^2 \cdot Y(\varphi)}$

$\partial_z(F_\rho) = \rho \cdot \partial_z(X(z)) \cdot \cos\varphi$

$\partial_\rho(F_z) = (\partial_\rho(V(\rho,\varphi))) \cdot z \cdot e^{-z^2}$

$\underline{\rho \cdot \partial_z(X(z)) \cdot \cos\varphi = \partial_\rho(V(\rho,\varphi)) \cdot z \cdot e^{-z^2}}$

(*) т.к $\underline{X(z)} = -2 \cdot e^{-z^2} \cdot \frac{Y(\varphi)}{\sin\varphi}$, то $\boxed{Y(\varphi) = C \cdot \sin\varphi}$

$\partial_\varphi V(\rho,\varphi) = -2\rho^2 \cdot C \cdot \sin\varphi$

$V(\rho,\varphi) = 2\rho^2 C \cdot \cos\varphi + f(\rho)$ (1)

Подст. $\boxed{X(z) = -2 \cdot e^{-z^2} \cdot C}$ в

$\rho \cdot 4\cancel{z} \cdot \cancel{e^{-z^2}} \cdot C \cdot \cos\varphi = \partial_\rho(V(\rho,\varphi)) \cdot \cancel{z} \cdot \cancel{e^{-z^2}}$

$\Rightarrow \partial_\rho(V(\rho,\varphi)) = 4\rho \cdot \cos\varphi \cdot C$

$V(\rho,\varphi) = 2\rho^2 \cdot C \cdot \cos\varphi + g(\varphi)$ (2)

(1) и (2): $2\rho^2 \cdot C \cdot \cos\varphi + f(\rho) = 2\rho^2 \cdot C \cdot \cos\varphi + g(\varphi)$

$\Rightarrow f(\rho) = g(\varphi) = \mathrm{const} = C_1$

$\boxed{V(\rho,\varphi) = 2\rho^2 \cdot C \cdot \cos\varphi + C_1}$

$\vec{F}\big|_{\rho=0} = 0 \qquad F_\rho\big|_{\varphi=z=0} = \rho$

$\vec{F} = \vec{e}_\rho \cdot (\rho X(z) \cdot \cos\varphi) + \vec{e}_\varphi \cdot (\rho \cdot Y(\varphi) \cdot e^{-z^2}) + \vec{e}_z (V(\rho,\varphi) \cdot z \cdot e^{-z^2}) \Rightarrow \vec{F}\big|_{\rho=0} = \vec{e}_z \cdot (V(0,\varphi) \cdot z \cdot e^{-z^2})$

$V(0,\varphi) = 0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$F_\rho = \rho X(z) \cdot \cos\varphi \qquad F_\rho|_{\varphi=z=0} = \rho \cdot X(0) \cdot 1 = \rho$

$X(0) = -2 \cdot e^0 \cdot C = -2C$

$\Rightarrow \rho \cdot (-2) \cdot C = \rho \qquad -2C = 1 \iff \underline{C = -\frac{1}{2}}$

$$F_\rho = \rho\cdot\cos\varphi\cdot\left(2\cdot e^{-z^2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \rho\cdot\cos\varphi\cdot e^{-z^2}$$
$$F_\varphi = -\rho\cdot e^{-z^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\varphi = -\frac{1}{2}\rho\cdot\sin\varphi\cdot e^{-z^2}$$
$$F_z = 2\rho^2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\varphi\cdot z\cdot e^{-z^2} = -\rho^2\cdot\cos\varphi\cdot z\cdot e^{-z^2}$$

потенциал $(\vec{F}, d\vec{r}) = -dU$

$$= F_\rho\, d\rho + \rho F_\varphi\, d\varphi + F_z\, dz$$

$$= \rho\cos\varphi\, e^{-z^2} d\rho - \frac{1}{2}\rho^2\sin\varphi\cdot e^{-z^2} d\varphi - \rho^2\cos\varphi\cdot z\cdot e^{-z^2} dz$$

$$= d\left(\frac{1}{2}\rho^2\cos\varphi\cdot e^{-z^2}\right)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \rho} = F_\rho = \rho\cos\varphi\cdot e^{-z^2} \Rightarrow U = -\frac{\rho^2}{2} e^{-z^2}\cdot\cos\varphi + \varphi_1(\varphi, z)$$
$$-\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \rho F_\varphi = -\frac{1}{2}\rho^2\sin\varphi\cdot e^{-z^2} \Rightarrow U = -\frac{1}{2}\rho^2\cdot\cos\varphi\cdot e^{-z^2} + \varphi_2(\rho, z)$$
$$-\frac{\partial U}{\partial z} = F_z = -\rho^2\cdot\cos\varphi\cdot z e^{-z^2} \Rightarrow U = -\frac{\rho^2}{2}\cos\varphi\, e^{-z^2} + \varphi_3(\rho, \varphi)$$

$$\left(\frac{1}{2}\rho^2\cos\varphi\cdot e^{-z^2}\right)'_z = -\rho^2\cdot\cos\varphi\cdot z\cdot e^{-z^2}$$

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{2}\rho^2\cdot\cos\varphi\cdot e^{-z^2} + C$$

по φ 2π-периодична

Работа силы $\vec{F}$ по $\forall$ замк. контуру вокруг Oz : 0.
$\Rightarrow \vec{F}$ потенциальна во всём R^3.

№3.

цилиндр. коорд.

$$\underset{\text{потенц.}}{F_\varphi} = \underbrace{f(\rho, z)}_{\text{гладкая}} \cdot \cos\varphi$$

$\Downarrow$

$$\partial_\rho(\rho F_\varphi) = \partial_\varphi(F_\rho) \Rightarrow \partial_\rho(\rho f(\rho, z)\cdot\cos\varphi) = \partial_\varphi(F_\rho) \quad (1)$$

$$\partial_\varphi(F_z) = \partial_z(\rho F_\varphi) \Rightarrow \partial_\varphi(F_z) = \partial_z(\rho f(\rho, z)\cdot\cos\varphi). \quad (2)$$

$$\partial_z(F_\rho) = \partial_\rho(F_z) \quad (3)$$

(1): $F_\rho = \sin\varphi\cdot(\partial_\rho(\rho\cdot f(\rho,z))) + h(\rho, z) =$

$= \sin\varphi((\partial_\rho(f(\rho,z))\cdot\rho + f(\rho,z)) + h_1(\rho,z).$

(2): $F_z = \sin\varphi\cdot(\partial_z(f(\rho,z)))\cdot\rho + h_2(\rho,z)$

(3): $\partial_z(\sin\varphi\cdot\rho\cdot\partial_\rho(f(\rho,z)) + \sin\varphi\cdot f(\rho,z) + h_1(\rho,z)) =$

$= \partial_\rho(\sin\varphi\cdot\rho\cdot\partial_z(f(\rho,z)) + h_2(\rho,z))$

$\Rightarrow \sin\varphi\cdot\rho\cdot\partial_z(\partial_\rho(f(\rho,z))) + \cancel{\sin\varphi\,\partial_z(f(\rho,z))} + \partial_z h_1(\rho,z) =$

$= \sin\varphi(\rho\,\partial_\rho(\partial_z(f(\rho,z))) + \cancel{\sin\varphi\,\partial_z f(\rho,z))} + \partial_\rho(h_2(\rho,z))$

т.к. $\partial_z(\partial_\rho(f(\rho,z))) = \partial_\rho(\partial_z(f(\rho,z)))$, то

$\underline{\partial_z(h_1(\rho,z)) = \partial_\rho(h_2(\rho,z))}.$

$(\vec{F}, d\vec{r}) = -dU$

$\parallel$

$F_\rho d\rho + F_\varphi\,\rho\,d\varphi + F_z dz = (\sin\varphi[(\partial_\rho(f(\rho,z))\cdot\rho + f(\rho,z))] + h_1(\rho,z))d\rho\,+$

$+\rho(f(\rho,z)\cdot\cos\varphi)d\varphi + (\sin\varphi[\partial_z(f(\rho,z))\cdot\rho] + h_2(\rho,z))dz =$

$= h_1(\rho,z)d\rho + h_2(\rho,z)dz + d(\rho\cdot f(\rho,z)\sin\varphi) =$

$= d\left(\int_0^\rho h_1\,d\rho + \int_0^z h_2\,dz + \rho\cdot f\cdot\sin\varphi\right).$

$\Rightarrow U = -\int_0^\rho h_1(\rho,z)\,d\rho - \int_0^z h_2(\rho,z)dz - \rho f(\rho,z)\cdot\sin\varphi$

по φ 2π-периодична $\Rightarrow$ работа силы $\vec{F}$ по $\forall$ замк. контуру вокруг Oz равна 0, F потенц. (усл. выполн.)

N4

$$\vec{F} = F_\theta \cdot \vec{e}_\theta + F_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

Необх условие потенциальности силы:

$$\partial_\theta F_r = \partial_r (r F_\theta)$$
$$\partial_\varphi F_r = \partial_r (r \sin\theta F_\varphi)$$
$$\partial_\varphi (r F_\theta) = \partial_\theta (r \sin\theta F_\varphi)$$

т.к $F_r = 0$, то 1) $\partial_r (r F_\theta) = 0$

2) $\partial_r (r \sin\theta F_\varphi) = 0$

3) $\partial_\varphi (r F_\theta) = \partial_\theta (r \sin\theta F_\varphi)$

Достат. усл.:

$$A_{\gamma_0} = \oint_{\gamma_0} r F_\theta \, d\theta + r F_\varphi \sin\theta d\varphi = 0$$

γ_0 - замк. контур, обход Oz.

т.е. $\oint_{\gamma_0} f d\theta + g \sin\theta d\varphi = 0$

(т.к $f = r \cdot F_\theta$ по (*), а $g = F_\varphi \cdot r$ по (**))

Получаем: 1) $r \cdot \dfrac{\partial F_\theta}{\partial r} + F_\theta = 0 \Rightarrow F_\theta = \dfrac{f(\varphi, \theta)}{r}$ (*)

2) $\sin\theta \left(F_\varphi + \dfrac{\partial F_\varphi}{\partial r} \cdot r\right) = 0$ $\quad F_\varphi = \dfrac{g(\varphi, \theta)}{r}$ (**)

$(F_\varphi)'_r \cdot r + F_\varphi = 0$ $\quad \int \dfrac{dF_\varphi}{F_\varphi} = -\int \dfrac{dr}{r}$ $\quad F_\varphi = \dfrac{g(\varphi, \theta)}{r}$

3) $\partial_\varphi (r F_\theta) = \partial_\varphi \left(r \cdot \dfrac{f(\varphi, \theta)}{r}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = \partial_\theta (g(\varphi, \theta) \cdot \sin\theta) =$

$$= \frac{\partial g(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \cdot \sin\theta + g(\varphi, \theta) \cdot \cos\theta$$

Т.е. $F_\theta = \dfrac{f(\varphi, \theta)}{r}$, $F_\varphi = \dfrac{g(\varphi, \theta)}{r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial g(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \cdot \sin\theta + g(\varphi, \theta) \cos\theta$

Пример потенциального тангенциального поля:

$U = -\sin\varphi \cdot \sin\theta \qquad F_\theta = \dfrac{\sin\varphi \cdot \cos\theta}{r} \qquad F_\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{r}$

$-\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = r F_\theta \qquad -\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = r \sin\theta \cdot F_\varphi$

б) Не существует потенциального тангенциального поля, кот. в точках экватора сферы радиуса r. (при $\theta = \frac{\pi}{2}$) имеет ненулевую компоненту $F_\varphi(r)$, не зависящую от угла φ, т.к

Рассм. петлю, явл. экватором сферы радиуса r

$r = const$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = t$, где $t \in [0, 2\pi]$

$g(\varphi, \frac{\pi}{2}) = C \neq 0$ (если бы $F_\varphi(r) = \dfrac{g(\varphi, \theta)}{r} \neq 0$)

Но тогда $A_\gamma = \int_\gamma \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f}} d\theta + g \sin\theta d\varphi = \int_\gamma g d\varphi = \int_0^{2\pi} C d\varphi = 2\pi \overset{\neq 0}{C} \neq 0$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow$ поле не м.б. потенц., т.к работа по замк контуру вокруг Oz не 0.

№5.

а) б) в) $z^2 = x^2 + y^2$

$U = \frac{k\ell^2}{2}$

число степеней свободы:
$3 - 1 = 2$

цилиндр. коорд.: $\rho = z$, z, φ

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$$T_{кин} = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \dot z^2 + \rho^2\cdot\dot\varphi^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\cdot\left(\dot z^2 + \dot z^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right) = \frac{m}{2}\left(2\dot z^2 + \rho^2\cdot\dot\varphi^2\right) = \frac{m}{2}\cdot\left(2\dot z^2 + z^2\cdot\dot\varphi^2\right)$$

$$U = \frac{kz^2}{2}$$

$z = \ell$, т.к. сечение конуса гор. пл-тью: окр-ть с радиусом z.

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(2\dot z^2 + \rho^2\cdot\dot\varphi^2\right) - \frac{kz^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(m\cdot(2\dot z^2 + z^2\cdot\dot\varphi^2) - kz^2\right)$$

лагранжиан не зависит от φ

$\Downarrow$

выполн. ЗСИ:

$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = const$

$m\rho^2\cdot\dot\varphi = const$

$$L_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\varphi}}_{=0} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mz^2\cdot 2\cdot\dot\varphi\right) = 0$$

$$m\left((z^2)^{\cdot}\cdot\dot\varphi + z^2\cdot\ddot\varphi\right) = 0$$

$$m(2z\cdot\dot z\cdot\dot\varphi + z^2\cdot\ddot\varphi) = 0$$

$$2\dot\varphi\cdot\dot z = -z\cdot\ddot\varphi \qquad \ddot\varphi = -\frac{2\dot\varphi\cdot\dot z}{z}$$

лагранжиан не зависит явно от времени $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$\Downarrow$

выполн. ЗСЭ:

$E = T + U$

$$L_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m2\dot z\right) - \frac{1}{2}m2z\cdot\dot\varphi^2 + kz = 0$$

$$2m\ddot z = mz\cdot\dot\varphi^2 - kz \qquad \ddot z = \frac{mz\cdot\dot\varphi^2 - kz}{2m}$$