Логика и алгоритмы, весна 2019.
Задачи для семинара N 3.

(Все модели нормальные)

В задачах 1–3 рассматривается чистая теория равенства Eq (или исчисление предикатов с равенством в сигнатуре $\{=\}$) и формулы этой сигнатуры.

1. (a) Найдите замкнутую формулу, которая не выводится и не опровергается в Eq.

   (b) Найдите замкнутую формулу A, которая не выводится и не опровергается в Eq, для которой обе теории $Eq \cup \{A\}$, $Eq \cup \{\neg A\}$ неполны.

   (c) Докажите, что не существует замкнутой формулы A, для которой обе теории $Eq \cup \{A\}$, $Eq \cup \{\neg A\}$ полны.

2. Постройте такие замкнутые формулы A и B, что в Eq не выводится ни одна из формул $A \wedge B$, $\neg A \wedge B$, $A \wedge \neg B$, $\neg A \wedge \neg B$.

3. Пусть $F(P_1, P_2)$ — пропозициональная формула с двумя переменными, которая не является тавтологией. Докажите, что в сигнатуре $\{=\}$ существует ее подстановочный пример $F(A, B)$, не выводимый в Eq.

4. Докажите, что элементарная теория конечной модели в любой (даже бесконечной) сигнатуре с равенством сильно категорична.

5. Докажите, что если теория с равенством полна и имеет конечную модель, то она сильно категорична.

6. Докажите, что в сигнатуре абелевых групп $\{0, +, =\}$

   (a) $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Q}$;

   (b) $\mathbb{Q} \not\equiv \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$.

7. Докажите, что в сигнатуре упорядоченных множеств $\{<, =\}$;

   (a) $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Q}$;

   (b) $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Q} + \mathbb{Z}$;

   (c) $\mathbb{Z} + \mathbb{Q} \not\equiv \mathbb{Q} + \mathbb{Z}$.

   Здесь + означает упорядоченную сумму.

Спектром замкнутой формулы называется множество мощностей ее конечных моделей.

8. Для сигнатуры с 2-местным предикатным символом R и равенством постройте формулу, спектр которой состоит из всех (положительных) четных чисел.

9. Постройте формулу какой-нибудь сигнатуры с равенством, спектр которой есть множество $\{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

10. Пусть в сигнатуре есть один одноместный фунциональный символ и равенство. Докажите, что для любого n существует формула $A_n(a)$ без кванторов, такая что формула $\exists x\, A_n(x)$ имеет модель мощности n и не имеет моделей меньшей мощности.

11. Придумайте формулу в сигнатуре с одним одноместным функциональным символом и равенством, выполнимую только в бесконечной модели.

12. Докажите, что следующая формула истинна во всех конечных моделях (своей сигнатуры), но не общезначима:

$$\forall x S(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (S(x,z) \to S(x,y) \vee S(y,z)) \to \exists x \forall y S(x,y).$$

13. Пусть $B \doteq \exists x_1 \ldots \exists x_n A$ — замкнутая формула без функциональных символов и констант, где A не содержит кванторов. Докажите, что если B выполнима, то она имеет модель мощности не выше n.

14. Как изменится ответ, если в сигнатуре есть константы? Оцените сверху мощность модели.

Теория называется *конечно аксиоматизируемой*, если она эквивалентна конечной теории. Теория T_1 — *строгое расширение* теории T, если множество теорем T_1 строго содержит множество теорем T.

15. *(Критерий Тарского)* Докажите, что если T_1, T_2,… — счетная последовательность теорий, где T_{i+1} — строгое расширение T_i, то объединение этих теорий не конечно аксиоматизируемо.

16. Рассмотрим теорию абелевых групп ABG в сигнатуре $\{0, +, =\}$. Теория абелевых групп без кручения $ABGTF$ получается из ABG добавлением аксиом

$$\forall x(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = 0 \to x = 0) \text{ для всех натуральных } n.$$

    (a) Докажите, что $ABGTF$ не является конечно аксиоматизируемой.
    (b) Полна ли эта теория?

17. В той же сигнатуре: $Th(\mathbb{Q})$ не конечно аксиоматизируема.

18. Докажите, что теория полей характеристики 0 в сигнатуре $\{0, 1, +, \cdot, =\}$ не конечно аксиоматизируема.