Механика 2021

Контрольная работа 3

---

1. Найдите экстремаль функционала

$$S[y(x)] = \int_0^1 \Big(2(y')^2 + y^2/2 + e^x(2y' - y)\Big)\, dx,$$

заданного на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций $y(x) \in C^2[0,1]$ с фиксированным граничным значением $y(1) = \sqrt{e} - e$ (число e — основание натуральных логарифмов) и произвольным значением $y(0)$.

2. Найдите экстремаль функционала

$$S[y(x)] = \int_0^{\pi/2} \Big((y'')^2 - y^2 + 8y''e^{x-\pi/2}\Big)\, dx,$$

заданного на пространстве функций $y(x) \in C^4[0,\pi/2]$ с фиксированными граничными значениями:

$$y'(0) = 0, \qquad y'(\pi/2) = -1, \qquad y(\pi/2) = e^{-\pi/2} - \pi/2,$$

и произвольным значением $y(0)$.

3. Точечная частица массы m движется без трения по компоненте двухполостного гиперболоида, отвечающей положительным значениям координаты z:

$$z^2 - x^2 - y^2 = a^2, \quad z > 0,$$

где x, y и z — декартовы прямоугольные координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ и $a > 0$ — заданная константа. На частицу действует однородное поле тяжести, направленное против оси Oz с ускорением свободного падения $\vec{g}$.

а) Составьте лагранжиан этой механической системы и выпишите ее уравнения движения.

б) Приведите формулы для всех интегралов движения (законов сохранения).

в) Найдите решения уравнений движения, отвечающие постоянному значению координаты z.

4. Однородный обруч массы M и радиуса R катится без проскальзывания по оси Ox, все время оставаясь в плоскости xOy. К геометрическому центру обруча шарнирно прикреплен жесткий невесомый тонкий стержень длины ℓ, на свободном конце которого закреплена точечная частица массы m. Стержень ℓ может свободно вращаться в плоскости xOy вокруг центра обруча M. На систему действует однородное поле тяжести, направленное против оси Oy с ускорением свободного падения $\vec{g}$. Обруч при движении не отрывается от оси Ox.

а) Составьте лагранжиан этой механической системы и выпишите ее уравнения движения.

б) Найдите все интегралы движения (сохраняющиеся величины).

в) Найдите период малых колебаний системы возле положения устойчивого равновесия, когда обруч неподвижен, а частица m находится в своем низшем положении (стержень ℓ неподвижно висит параллельно осит Oy).