Логика и Алгоритмы
2 курс
Задачи

16 июня 2021 г.

Логика и алгоритмы (весна 2021)
Листок N 3. Срок сдачи 15 июня.

Задачи оцениваются по 1 баллу, кроме задач 6 и 7, за которые дается 2 балла. Можно набрать не более 10 баллов.

В этом листке все сигнатуры и теории с равенством, все модели нормальны.

Спектр замкнутой формулы — это множество мощностей ее конечных моделей.
Теории одной сигнатуры называются *эквивалентными*, если у них одни и те же модели.
Теория называется *конечно аксиоматизируемой*, если существует эквивалентная ей конечная теория.
$A_{=n}$ — формула в сигнатуре $\{=\}$, истинная в точности в моделях мощности n.

1. Докажите, что ординалы $\omega \cdot 2$ и $\omega \cdot 3$ как модели сигнатуры $\{<, =\}$ не элементарно эквивалентны.

2. (a) Докажите, что в сигнатуре $\{=\}$ спектр любой замкнутой формулы — либо конечное, либо ко-конечное (т.е. дополнение к конечному) множество.

   (b) Докажите, что всякая замкнутая формула этой сигнатуры эквивалентна булевой комбинации формул вида $A_{=n}$ (т.е. формуле, построенной из них с помощью $\vee, \wedge, \neg$).

3. Докажите, что если замкнутая формула в сигнатуре $\{+, \cdot, 1, 0, =\}$ истинна во всех полях характеристики 0, то она истинна в некотором поле конечной характеристики.

4. Докажите, что $Th(\mathbb{Q}, <, =, P)$, где $\{r \mid \mathbb{Q} \models P(r)\} = (-\infty, \sqrt{2})$, счетно категорична

5. Даны две теории T и S в сигнатуре Ω со следующими свойствами:

   - теория $T \cup S$ противоречива;
   - всякая модель сигнатуры Ω является либо моделью T, либо моделью S.

   Докажите, что обе теории T и S конечно аксиоматизируемы.

6. (2 балла) Докажите, что любой бесконечный линейный порядок $(X, \leq)$ изоморфно вкладывается в некоторое ультрапроизведение своих конечных подпорядков.

7. (2 балла) Докажите, что теория $Th(\mathbb{Q})$ в сигнатуре $\{+, \cdot, 1, 0, =\}$ не является счетно категоричной.

8. Пусть A, A', B, B' — линейно упорядоченные множества (в сигнатуре $\{<, =\}$). Докажите, что если $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$, то $A+B \equiv A'+B'$.

9. В сигнатуре $\{S, =\}$, где S — одноместный функциональный символ рассмотрим теорию T с аксиомами

$$\forall x \exists! y\, S(y) = x,$$

$$\forall x\, S^n(x) \neq x \quad \text{(для всех } n\text{)}.$$

(a) Докажите, что T не счетно категорична.

(b) Докажите, что T категорична в любой несчетной мощности и, как следствие, теория T полна.

10. Докажите, что в модели $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, <)$ операция умножения не определима.

Решения

Задача 1

Предъявим формулу, которая выполняется в одной модели, но не выполняется в другой:
Существует три различных элемента, у которых нет непосредственного предшественника. То есть $A = \exists x1, x2, x3\ (x1! = x2 \wedge x1! = x3 \wedge x2! = x3 \wedge \forall y\ (y < x_i \Rightarrow \exists z:\ y < z < x_i)$. $w * 3 \models A,\ w * 2 \models A$.

Задача 2

(a) Пусть $\mathrm{Sp}(A)$ – спектр A. $\mathrm{Sp}(A)$ – дополнение к $\mathrm{Sp}(\neg(A))$, так как если A не истинна в M, то $\neg(A)$ истинна в M, а модели одинакового порядка, раз у нас сигнатура $\{=\}$, изоморфны. Тогда надо показать, что невозможно, что и $\mathrm{Sp}(A)$, и $\mathrm{Sp}(\neg(A))$ бесконечны. Пусть бесконечны, тогда у A и $\neg(A)$ есть конечные модели сколь угодно большой мощности $\Rightarrow$ по теореме о подъеме есть и сколь угодно бесконечной. Возьмем тогда такие модели бесконечной мощности k. Получается, у A и $\neg(A)$ есть модели одинаковой мощности одной сигнатуры. Как мы уже сказали, они должны быть изоморфны, то есть в них истинны одни и те же формулы, то есть в таких моделях мощности k истинны и A, и $\neg(A)$, а так не может быть.

(b) Если $\mathrm{Sp}(A)$ конечен, то тогда у A модели мощности $n_1, n_2, \ldots, n_k$. А еще модели одинаковой мощности изоморфны, то есть модели мощностей $n_1, \ldots, n_k$ будут моделями A. Значит, $A = \vee A_{=n}$ по $n = n_1, \ldots, n_k$.
Если конечен, то $\mathrm{Sp}(\neg(A))$ конечное, тогда $\neg(A) \Leftrightarrow \vee A_{=n}$, тогда $A \Leftrightarrow \wedge\neg(A_{=n})$.

Задача 3

Пусть $\{B\}$ аксиоматизирует теорию поля, A замкнутая формула в сигнатуре, которая истинна в каждом поле характеристики 0. Тогда $\{B\} \vee \{1 + \ldots + 1 \neq 0(\text{n единиц}) | n \geqslant 1,\ n \in A\} \models A \Rightarrow$ по теореме о компактности есть натуральное m, такое что $\{B\} \vee \{1 + \ldots + 1 \neq 0(\text{n единиц}) | n = 1, \ldots, m\} \models A \Rightarrow A$ истинна в каком-то поле $\mathrm{char}\, p > m$

Задача 5

$T \cup S$ противоречива $\Leftrightarrow$ есть формула A, такая что $T \cup S \vdash A$, $T \cup S \vdash \neg(A)$. Выводы конечные по определению, так что число использующихся аксиом конечно. Пусть из T используются $\{t_1, \ldots, t_k\}$, из S – $\{s_1, \ldots, s_m\}$. В их объединении выводимы $A,\ \neg(A)$
Теперь покажем, что $\{t_1, \ldots, t_k\} \sim T$. Покажем, что у них одинаковые модели. Если M – модель T, то M – модель $\{t_1, \ldots, t_k\} \subset T$. Наоборот от противного. То есть M – модель $\{t_1, \ldots, t_k\}$, но не модель T. По условию M – модель или T, или S. Значит, модель S. Тогда $M \models \{s_1, \ldots, s_m\} \subset S$. Раз $M \models \{t_1, \ldots, t_k\}$ по предположению, то $M \models \{s_1, \ldots, s_m\} \vee \{t_1, \ldots, t_k\}$. А в этом объединении выводимы A и $\neg(A)$ (а значит, и истинны). Значит, $M \models A,\ \neg(A)$. Противоречие.
Значит, $T \sim \{t_1, \ldots, t_k\} \Leftrightarrow T$ конечно аксиоматизируема. Аналогично S конечно аксиоматизируема

Задача 7

Расширим сигнатуру, добавив в нее константу c. Добавим в $\mathrm{Th}(Q)$ схему аксиом $\forall n \exists x : x^n = c$.
$\mathrm{Th}(Q) \vee \{\forall n \exists x : x^n = c\}$ выполнима по теореме о компактности (в каждой конечной подтеории есть лишь конечное число аксиом об извлечении корня. В качестве с возьмем достаточно большое рациональное число, из которого извлекаются все корни теории). По теореме о понижении мощности есть счетная элементарно эквивалентная ей модель M.
Обедним сигнатуру до исходной. Чтобы показать, что $\mathrm{Th}(Q)$ не счетно категорична, предъявим две счетные неизоморфные модели. Покажем, что это Q и M. От противного: пусть есть изоморфизм $\phi : M \sim Q$. Тогда $\phi(x) = \phi(0 + x) = \phi(0) + \phi(x) \Rightarrow \phi(0) = 0,\ \phi(x) = \phi(1 \cdot x) = \phi(1)\phi(x) \Rightarrow \phi(1) = 1$. Теперь посмотрим, как выглядит $\phi(c)$. Из $\phi(c)$ должен извлекаться корень любой степени. $\phi(c)$ рациональное, так что $\phi(c)$ или 0, или 1. Но 0 и 1 мы показали, что уже заняты. Так что изоморфизма нет.

Задача 9

(a) T не счетно категорично, т.е. не все счетные модели изоморфны. Явно покажем две счетные неизоморфные модели T. $M_1 = \{Z, S_1(x) = x+1\}$, $M_2 = \{Z, S_2(x) = x+2\}$. От противного: пусть они изоморфны, ϕ — изоморфизм. Тогда для любого m из $M_1: \ \phi(m+1) = \phi(m) + 2$. Тогда все $\phi(m)$ для всех m из M_1 одинаковой четности. Но ϕ – биекция. Противоречие