Логика и алгоритмы

Задачи семинаров 4-5

Теорема 0.1 (Цермело)**.** *Для любого множества X существует отношение $<\subset X \times X$, которое является полным порядком на X.*

Теорема 0.2 (лемма Цорна)**.** *Пусть $(P, <)$ — частично упорядоченное множество, в котором всякая цепь имеет верхнюю грань. Тогда $(P, <)$ содержит максимальный элемент.*

1. Докажите, что всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.

2. Докажите, что если A — бесконечное множество, B — не более чем счетное (т.е. конечное или счетное) множество, то $A \cup B \sim A$.

3. Выведите аксиому выбора из леммы Цорна и из теоремы Цермело (в теории множеств Цермело-Френкеля без аксиомы выбора).

4. С помощью леммы Цорна докажите, что всякая цепь в частично упорядоченном множестве содержится в максимальной (по включению).

5. Докажите, что любой частичный порядок на множестве X можно продолжить до линейного. (Отношение R_2 *продолжает* R_1, если $R_1 \subset R_2$.)

6. Докажите теорему Гамеля о том, что в любом векторном пространстве существует базис.

7. Проверьте, что все базисы имеют одинаковую мощность.

8. Какую мощность будет иметь базис в случае векторного пространства $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$?

9. Докажите, что существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отличная от линейной и удовлетворяющая тождеству $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Может ли такая функция иметь предел в точке $x = 0$?

10. Докажите, что между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ существует биекция, сохраняющая операцию сложения, то есть аддитивные группы $(\mathbb{C}, +)$ и $(\mathbb{R}, +)$ изоморфны. (Вместо $\mathbb{C}$ можно взять аддитивную группу n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$.)

11. Докажите, что существует подмножество $\mathbb{R}^2$, которое пересекается с каждой прямой на плоскости ровно по двум точкам.

Опр X конечно, если $\exists n \in \mathbb{N}\ \ X \sim n$

Дедекинд:
X конечно, если
$\neg \exists Y \subsetneq X \ \ X \sim Y$

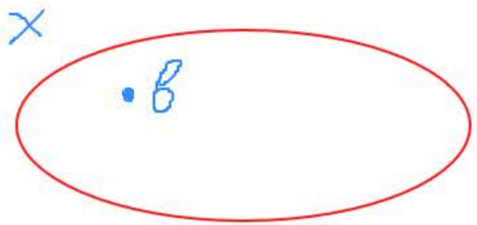
D-конечность

X конечно $\Rightarrow X$ D-конечно

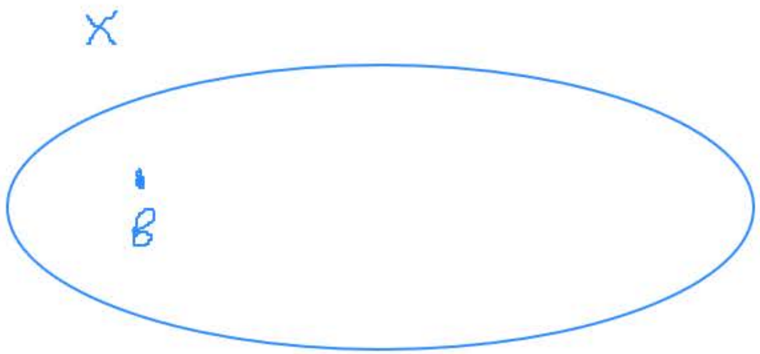
$\left.\begin{array}{l} X \text{ конечно} \\ Y \subsetneq X \end{array}\right\} \Rightarrow Y$ конечно, $|Y| < |X|$

Утверждение
X бесконечно
$\Rightarrow \exists Y \subsetneq X \ \ X \sim Y$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{a\}$



$Y = X \setminus \{b\} \sim X$



$(X \setminus \{b\}) \cup \{b\} \sim X \setminus \{b\}$

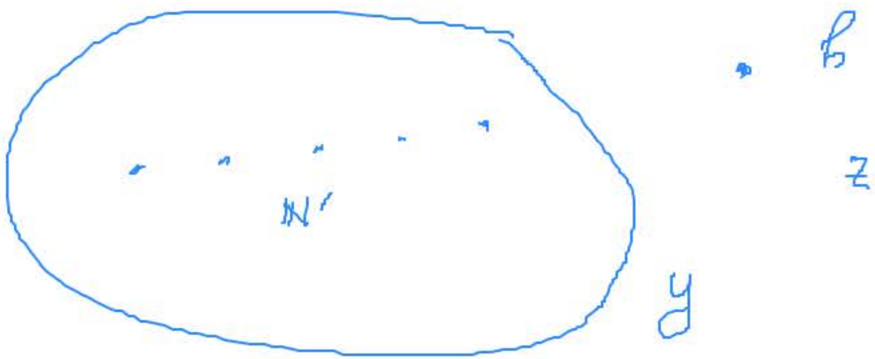
Y

беск.

Листок 4 №1

$Y \cup \{b\} \sim Y$

$f\colon \quad \longrightarrow$



$z \in Y \setminus N'$

$f(z) = z$

$f(z_n) = z_{n+1}$

$f(b) = z_0$

10, 11 x, y конечны $\Rightarrow$ $x \cup y$, $x \times y$ конечны

$x \cup y = (x \setminus y) \cup y$ • Индукция по $|y|$

$|y| = n+1$

$x \cup y = \overbrace{x \cup y'}^{\text{кон}} \cup \{a\}$

$x \cap y = \varnothing$ $|y'| = n$

z кон. $\to z \cup \{a\}$ кон.

$\sim n$ $\sim n+1 = \{0, \dots, n\}$

$X \times Y$

$|Y|$

$$X \times (Y \cup \{a\}) = \underbrace{X \times Y}_{\text{кон.}} \cup \underbrace{X \times \{a\}}_{\sim X}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathbb{N} \\ Y \subset X \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} Y \sim \mathbb{N} \\ \text{или } Y \text{ кон.} \end{array}\right\}$$

Теор. Кантора

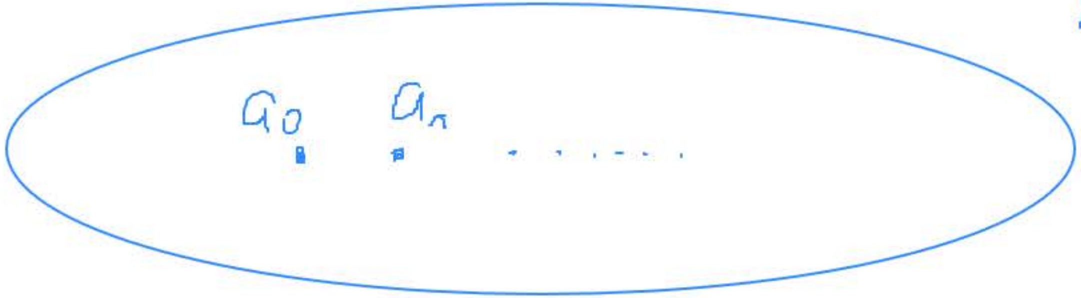
$Z \cong \alpha$

$\to \alpha \leq \omega$

$\omega < \alpha$

$Z \subset \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$



рекурсия

$a_{n+1} = \min\left(Z \setminus \{a_0, \dots, a_n\}\right)$

если $\neq \varnothing$

иначе $Z = \{a_0, \dots, a_n\}$

$a_0 = \min Z$

$Z = \{a_0, a_1, \dots\}$

$f(n) = a_n$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Листок 3 N 2

$$\begin{cases} f(0) = \min \mathbb{Z} \\ f(n) = \min(\mathbb{Z} \setminus f[n]) \end{cases}$$

б) $\Leftrightarrow$ в)

б) $\Rightarrow$ в)

x_n - наим.

$y_{n+1} < x_n$

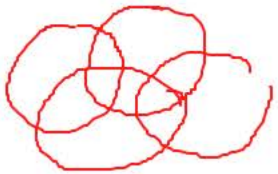
в) $\Rightarrow$ б)

$Y \subset X$

$Y \neq \varnothing$, нет min

$a_3 < a_2 < a_1$

$a_2 \in Y$



$a_n = g(n)$

$f : \mathcal{P}_0(Y) \to Y = \bigcup \mathcal{P}_0(Y)$

$\mathcal{P}_0(Y)$ – непустые подм-ва

$g(n+1)$

функция выбора

$= f(\{b \in Y \mid b < g(n)\})$

$f(Z) \in Z$

листок 4 N 1

X бесконеч. $\Rightarrow \exists Y \subset X$

$Y \sim \mathbb{N}$

$a_0 \in X$

a_{n+1}

Опр X конечно, если $\exists n \in \mathbb{N}\ \ X \sim n$

Дедекинд: X конечно, если $\neg \exists Y \subsetneq X\ \ X \sim Y$

D-конечность

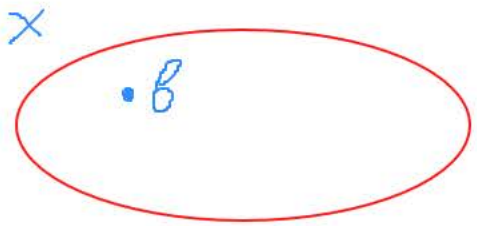
$\left.\begin{array}{l} X \text{ конечно} \\ Y \subsetneq X \end{array}\right\} \Rightarrow Y \text{ конечно},\ |Y| < |X|$

X конечно $\Rightarrow X$ D-конечно

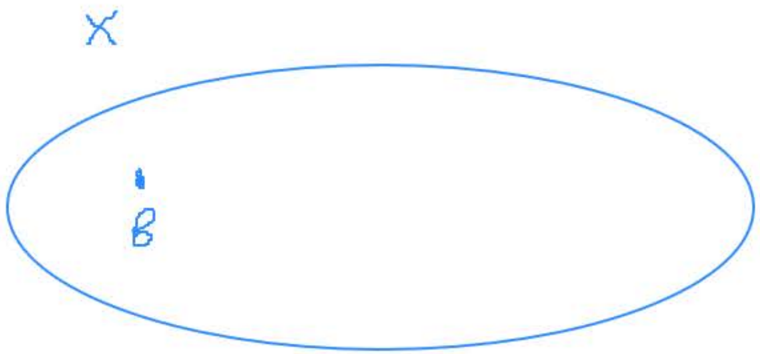
Утверждение

X бесконечно $\Rightarrow \exists Y \subsetneq X\ \ X \sim Y$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{a\}$



$Y = X \setminus \{b\} \sim X$



$(X\setminus\{b\})\cup\{b\}\sim X\setminus\{b\}$

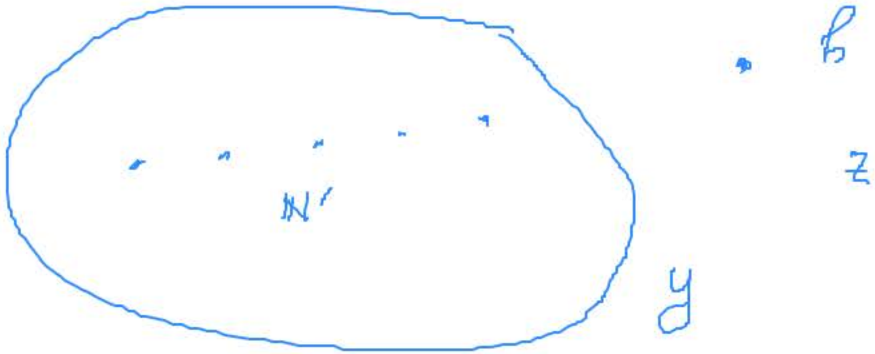
Y

беск.

Листок 4 № 1

$Y\cup\{b\}\sim Y$

$f:\ \longrightarrow$



$z\in Y\setminus N'$

$f(z)=z$

$f(z_n)=z_{n+1}$

$f(b)=z_0$

10, 11 x, y конечны $\Rightarrow$ $x \cup y$, $x \times y$ конечны

$x \cup y = (x \setminus y) \cup y$ • Индукция по $|y|$

$|y| = n+1$

$x \cup y = \overbrace{x \cup y'}^{\text{кон}} \cup \{a\}$

$x \cap y = \varnothing$ $|y'| = n$

X кон. $\to$ $z \cup \{a\}$ кон.

$\sim n$ $\sim n+1 = \{0, \dots, n\}$

$X \times Y$

$|Y|$

$$X \times (Y \cup \{a\}) = \underbrace{X \times Y}_{\text{кон.}} \cup \underbrace{X \times \{a\}}_{X}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathbb{N} \\ Y \subset X \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} Y \sim \mathbb{N} \\ \text{или } Y \text{ кон.} \end{array}\right\}$$

Теор. Кантора

$Z \cong \alpha$

$\to \alpha \leq \omega$

$\omega < \alpha$

$Z \subset \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$

a_0 a_1 . . . .

рекурсия

$$a_{n+1} = \min\left(Z \setminus \{a_0, \dots, a_n\}\right)$$

если $\neq \emptyset$

иначе $Z = \{a_0, \dots, a_n\}$

$a_0 = \min Z$

$Z = \{a_0, a_1, \dots\}$

$f(n) = a_n$

$f: N \to Z$

Листок 3 N2

$$\begin{cases} f(0) = \min Z \\ f(n) = \min (Z \setminus f[n]) \end{cases}$$

б) $\Leftrightarrow$ в)

б) $\Rightarrow$ в)

x_n - наим.

$y_{n+1} < x_n$

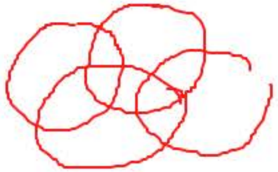
в) $\Rightarrow$ б)

$Y \subset X$

$Y \neq \emptyset$, нет min

$a_3 < a_2 < a_1$

$a_2 \in Y$



$a_n = g(n)$

$$f : \mathcal{P}_0(Y) \to Y = \bigcup \mathcal{P}_0(Y)$$

– непустые подмн-ва

функция выбора

$g(n+1)$

$= f(\{b \in Y \mid b < g(n)\})$

$f(Z) \in Z$

листок 4 N 1

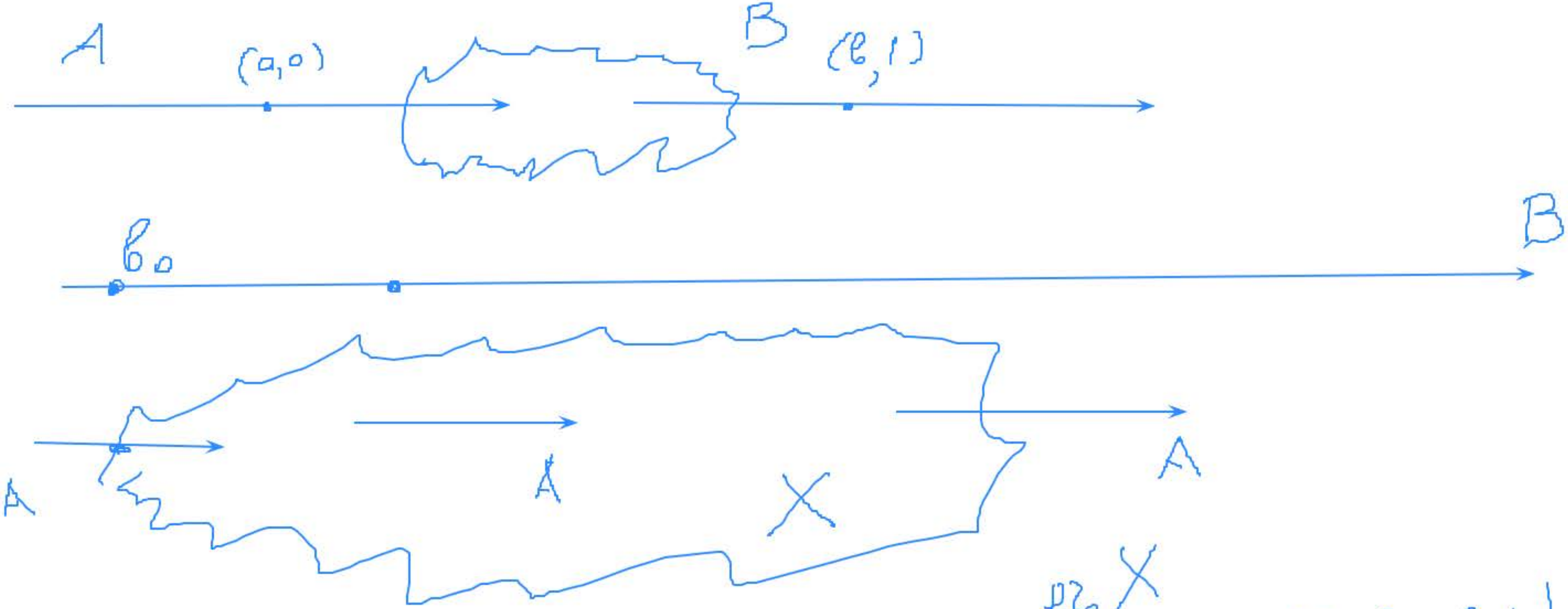
X бесконеч. $\Rightarrow \exists Y \subset X$

$Y \sim \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_0 \in X \\ a_{n+1} \in X \setminus \{a_0, \dots, a_n\} \end{cases}$$

$$g(n) = f(X \setminus g[n])$$

$$f : \mathcal{P}_0(X) \to X$$



$pr_2 X$

$pr_1\left(X \cap (A \times \{b_0\})\right)$