Преобразование Фурье, матричные обозначения

Тождественный оператор как обычно обозначаем **E**, а **R** обращение направления индексации координат $f_k \mapsto f_{-k}$ вектора $f_0, f_1, \dots f_{N-1}$. Для удобства дальнейших формул выберем перенормировку формул прямого $F: f \to \hat{f}$ и обратного $F^{-1}: \hat{f} \to f$ дискретных преобразований Фурье:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} f(t)e^{-2\pi i t s/N}$$
(1)

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} \hat{f}(s) e^{2\pi i s t/N}$$
 (2)

Преобразование Фурье очевидным образом линейно, обозначения F^{-1} , F^{-1} сохраним и для матриц этих преобразований. Такая перенормировка приводит к тому, что коэффициент в равенстве Парсеваля, тем самым, исчезает: $\sum_t |f(t)|^2 = \sum_s |\hat{f}(s)|^2$.

Задания контрольной

- 1. Какой определитель у матрицы преобразования Фурье \digamma сигналов дискретного времени длины N=4 ?
- 2. Какой определитель у матрицы преобразования Фурье \digamma сигналов дискретного времени длины N=5 ?
- 3. При N=13 найти явно собственный вектор матрицы преобразования Фурье \digamma с собственным значением -1.
- 4. При N=9 найти явно два неколлинеарных собственных вектора матрицы преобразования Фурье \digamma с собственным значением 1.
- 5. Выразить с помощью матрицы ${\bf R}$ преобразование $(\digamma + \digamma^{-1}) \circ (\digamma + \digamma^{-1})$
- 6. Выразить с помощью матрицы ${\bf R}$ преобразование $(\digamma \digamma^{-1}) \circ (\digamma \digamma^{-1})$
- 7. Рассмотрим преобразование ${\bf E} + \digamma + \digamma \circ \digamma + \digamma \circ \digamma \circ \digamma$ найти квадрат этого преобразования.
- 8. Рассмотрим преобразование $\mathbf{E} \mathcal{F}^{-1} + \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1}$ найти квадрат этого преобразования.
- 9. Для N=8 указать явно непостоянный собственный вектор с собственным значением 1. Подсказка: вспомните разложение на множители многочлена a^n-b^n
- 10. Для N=8 указать явно непостоянный собственный вектор с собственным значением -1. Подсказка: вспомните разложение на множители многочлена a^n+b^n
- 11. Вычислительная задача. Для N=23 численно найти три непостоянных собственных вектора с собственным значением 1. Подсказка: вспомните разложение на множители многочлена a^n-b^n

- 12. Вычислительная задача. Для N=21 численно найти три непостоянных собственных вектора с собственным значением -1. Подсказка: вспомните разложение на множители многочлена a^n+b^n
- 13. Частоты вещественного непрерывного сигнала f(t) ограничены сверху 5 к Γ ц (пять тысяч герц). В результате его дискретизации с частотой 10 к Γ ц получилась дискретная последовательность f[n] где $f[n] = f(n \cdot \Delta t)$, $\Delta t = 10^{-4}$. Выберем окно в 1000 точек и рассмотрим в нем ДП Φ , какой непрерывной частоте отвечает \hat{f}_{800} ?
- 14. Частоты вещественного непрерывного сигнала f(t) ограничены сверху 2 к Γ ц (две тысячи герц). В результате его дискретизации с частотой 10 к Γ ц получилась дискретная последовательность f[n] где $f[n] = f(n \cdot \Delta t)$, $\Delta t = 10^{-4}$. Выберем окно в 1000 точек и рассмотрим в нем ДП Φ , какой непрерывной частоте отвечает \hat{f}_{150} ?
- 15. Вычислительная задача, см. файл RRecovering_03767.txt В данном случае использовать преобразование Фурье без нормализации, подготовить ответ в виде текстового файла со строками вида « $k = f(k) = \hat{f}(k)$ ».
- 16. Вычислительная задача, см. файл RRecovering_03768.txt В данном случае использовать преобразование Фурье без нормализации, подготовить ответ в виде текстового файла со строками вида « $k-f(k)-\hat{f}(k)$ ».
- 17. ° Возможно ли равенство в соотношении неопределенности $\boxed{\operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} \hat{f} \geqslant N}$ для дискретного действительного сигнала $\mathbb{Z}/N \to \mathbb{R}$? Объяснить.
- 18. ° Упростить $(F F^{-1}) \circ (F + F^{-1})$
- 19. ° Что получится, если применить к симметричному непрерывному сигналу из $L^1(\mathbb{R})$ преобразование Фурье дважды? Объяснить.
- 20. **Численное интегрирование** Для полиномов трех переменных x, y, z из списка ниже найти с точностью до второго знака после запятой численные характеристики их ограничений на двумерную сферу единичного радиуса, то есть указать их свойства в в пространстве $L^2(S^2)$

$$P_{1} = \frac{3\sqrt{35}}{\sqrt{16\pi}} \left(x^{3}y - xy^{3} \right) \quad P_{2} = \sqrt{\frac{45}{32\pi}} \left(7yz^{3} - 3yz \right)$$

$$P_{3} = \sqrt{\frac{45}{16\pi}} \left(7xyz^{2} - xy \right) \quad P_{4} = \frac{3}{16\sqrt{\pi}} \left(35z^{4} - 30z^{2} + 3 \right)$$

$$Q_{1} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(2z^{2} - x^{2} - y^{2} \right) \quad Q_{2} = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} zx$$

$$Q_{3} = \sqrt{\frac{105}{4\pi}} xyz \quad Q_{4} = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} \left(2z^{3} - 3zx^{2} - 3y^{2}z \right)$$

- (а) угол в градусах между P_2 и P_3 и норму суммы $\|P_4 + Q_4\|$
- (b) угол в градусах между P_2 и Q_2 и норму разности $\|P_1-Q_3\|$

- 21. Работа с видеообразами Пронумерованные файлы в директории Data содержат либо значения логарифма от модуля двумерного Фурье-преобразования $\hat{f}_m(\omega_1, \omega_2)$ либо значения аргументов (в радианах) от $(\hat{f}_m(\omega_1, \omega_2)$. Изображения $f_m(x_1, x_2)$ отвечают отдельным буквам русского алфавита, эти буквы Подробно объясните (лучше бы качественно, воспользовавшись лишь определением двумерного преобразования Фурье) соответствие между номерами и исходными буквами.
- 22. Работа с видеообразами Рассмотрим действия двумерной (циклической) свертки * на несложное черно-белое изображение P= horse.pmg. Более детально: зафиксируем две 2×2 матрицы $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ и (нелинейное) преобразование $P\mapsto Q$ на основе суммы абсолютных значений двух циклических сверток: Q=|P*A|+|P*B|. Нарисовать (в центре пиксельной картинки) изображение Q и объяснить получившийся эффект. Циклическая свертка как обычно реализуема поаргументным умножением в спектральной области.