

На этом семинаре мы тренируемся

- * определять число степеней свободы механической системы
- * определять силы и связи, действующие в мех. системе
- * выписывать и решать уравнения Ньютона.
- * потренируемся переходить из одной системы отсчета в другую и выписывать ур-ния Ньютона в разных системах отсчета

Всё это — на простейших примерах

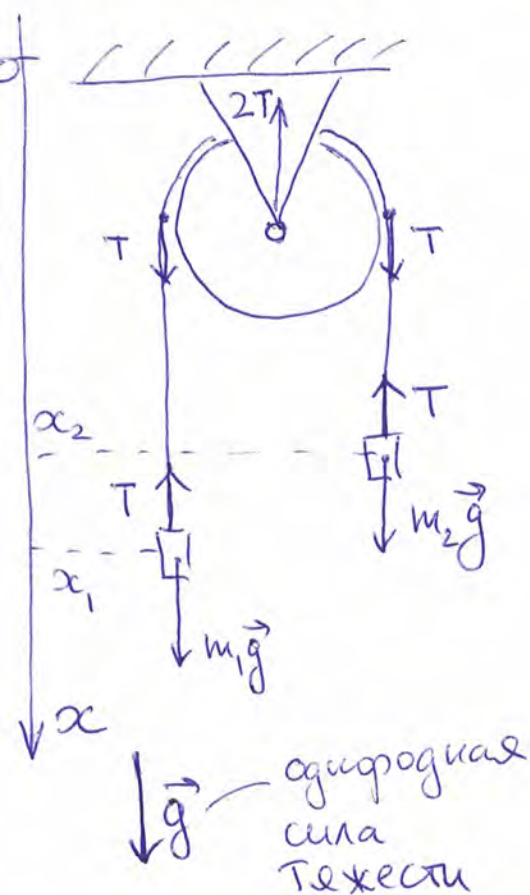
Сначала комментарий о связях, которые порождают силы реакции (см. вывод стр. 16 записок лекций).

В наших моделях связи реализуются

- а) поверхностями или линиями, ограничивающими движение тел.
- б) жесткими стержнями или гибкими нерастяжимыми нитями, связывающими части механической системы между собой.

Пример 1

(машинка Атвуда)



Рис

На блоке повешено два грузика массами m_1 и m_2 . Блок и нить удовлетворяют обсуждавшимся выше модельным представлениям

В системе действует однокороткая сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ (см. рис.)

(?) Сколько у системы степеней свободы?

Ответ: #свободы = 1

Этот ответ на самом деле сделан в дополнительных предположениях о том, что грузики не раскачиваются, а движутся строго вверх-вниз по вертикали. Тогда, если зафиксировать координату, например, первого грузика x_1 от Ox (см. рис.), то координата второго грузика x_2 — определяется однозначно. У системы единственная степень свободы — например x_1 .

На координатах грузиков есть связь:

$$x_1 + x_2 = \text{const} - \text{это константа кевалжа.}$$

или:

$$\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$$

Обозначение: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ (полагая $x = x(t)$)

? Нарисуйте силы, действующие на грузики и на блок

Ответ: смотри на рисунке.

Здесь T — величина силы, а направления сил указаны стрелками.

Все пояснения по этому рисунку были сделаны ранее.

Напишите уравнение движение грузиков — уравнения Ньютона.

Ответ:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T \end{cases}$$

Уравнение движения 1-го грузика в проекции на выбранную на Рис. ось Ox

то же самое для 2-го грузика.

Это мы написали уравнения Ньютона в инерциальной системе отсчета, связанной с осью $O\vec{x}$, т.е., очевидно, с поверхностью земли.

С учётом связи $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ уравнения решаются относительно двух неизвестных величин:

координаты грузика $\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = -\ddot{x}_2$

и заранее неизвестной силе натяжения нити

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Имеем равноускоренное движение грузиков

Тут для самопроверки полезно посмотреть на ответы в очевидных предельных случаях:

а) $m_2 = 0 \Rightarrow$ свободное падение груза m_1 :

$$\ddot{x}_1 = g, \quad T = 0 \text{ — нить не натягивает}$$

ся.

б) $m_1 = 0 \Rightarrow$ свободное падение груза m_2 :

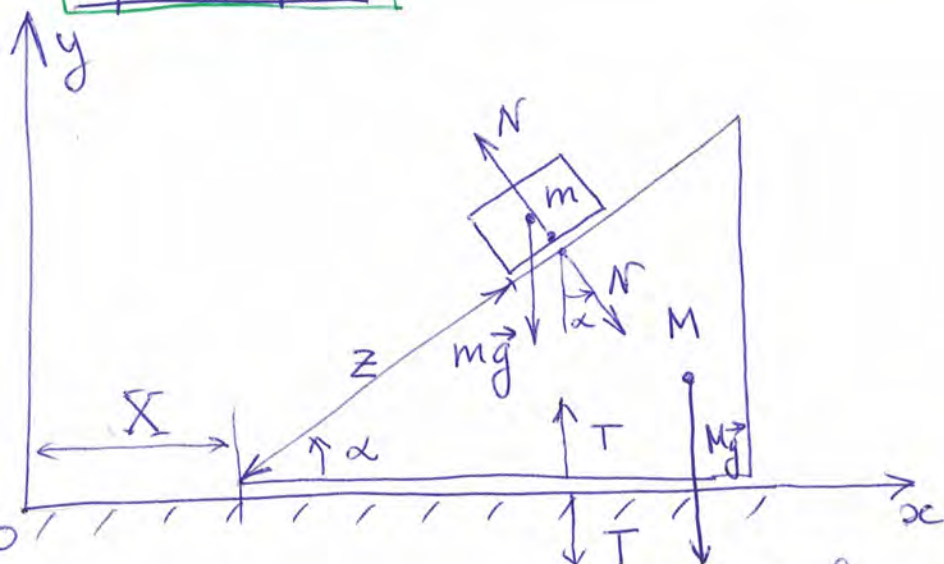
$$\ddot{x}_1 = -g = -\ddot{x}_2, \quad T = 0 \text{ — нить не напряжена.}$$

в) $m_1 = m_2 = m \Rightarrow$ грузики уравновешивают друг друга и движутся без ускорения $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$.

$T = mg$ — натяжение нити компенсирует силу тяжести грузиков

Пример 2

6



Клик на горизонтальной плоскости.

Кирпич на клине
Их массе m и M , соответственно.

Трение нет.

По вертикали вниз действует однородная сила тяжести \vec{g} . Угол клина — α .

? Сколько степеней свободы в системе?

Ответ: $\# \text{своб.} = 2$

Комментарий: Фиксируем клин (координата его острого на оси $O\vec{x} - X$), и фиксируем кирпич на клине (z — расстояние от острого клина до кирпича). x и z — две степени свободы.

? Какие связи есть в системе?

У кирпича и клина на плоскости по 2 степени свободы (считаем, что они "не вращаются" — это тоже модельное предположение).

$2 \times 2 = 4$ степени свободы на двоих.

Нужны 2 связи, чтоб в системе осталось 2 степени свободы.

1) Координата Y клина по оси $O\vec{y} = 0$

7

2) Координаты x_k и y_k кирпича линейно связаны, с угастем координаты X конца клина по оси $O\vec{x}$.

Это — потому, что кирпич лежит на клине. Имеем:

$$\begin{cases} x_k = X + z \cos \alpha \\ y_k = z \sin \alpha \end{cases}$$

Действительно, у системы 2 независимых координат: X и z .

(?) Напишите уравнения движения.

Ответ:

Клик:
$$\begin{cases} M \ddot{X} = N \sin \alpha & (1) \\ M \ddot{Y} = -N \cos \alpha + T - Mg & (2) \end{cases}$$

Кирпич:
$$\begin{cases} m(\ddot{X} + \ddot{z} \cos \alpha) = -N \sin \alpha & (3) \\ m \ddot{z} \sin \alpha = -mg + N \cos \alpha & (4) \end{cases}$$

При записи этих уравнений Ньютона мож:

а) выбрать инерциальную систему отсчета с осями $O\vec{x}$, $O\vec{y}$ (см. рис.)

б) нарисовать в системе все силы: силы тяжести кирпича $m\vec{g}$ и клина $M\vec{g}$; силы реакции плоскости — T и поверхности клина на кирпич — N

- 8
- в) напишем 2-й закон Ньютона в проекциях на $O\vec{x}$ и $O\vec{y}$ для кирпича и для клина
- г) подставим условия связи.

При решении уравнение проекции клина на $O\vec{y}$ можно не учитывать, если нас не интересует значение реакции плоскости T .

Остаётся система 3-х линейных уравнений на 3 неизвестных: координаты X и Z , и силу N .

Выразив N и \ddot{X} из (1) и (3):

$$\ddot{X} = - \frac{m}{M+m} \cos \alpha \ddot{Z}$$

$$N = - \frac{mM}{m+M} \operatorname{ctg} \alpha \ddot{Z}$$

подставим N в (4) и получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{Z} &= - \frac{(M+m) \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g \\ \ddot{X} &= \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g \end{aligned}$$

Для оценки правдоподобности ответа рассмотрим предельные случаи:

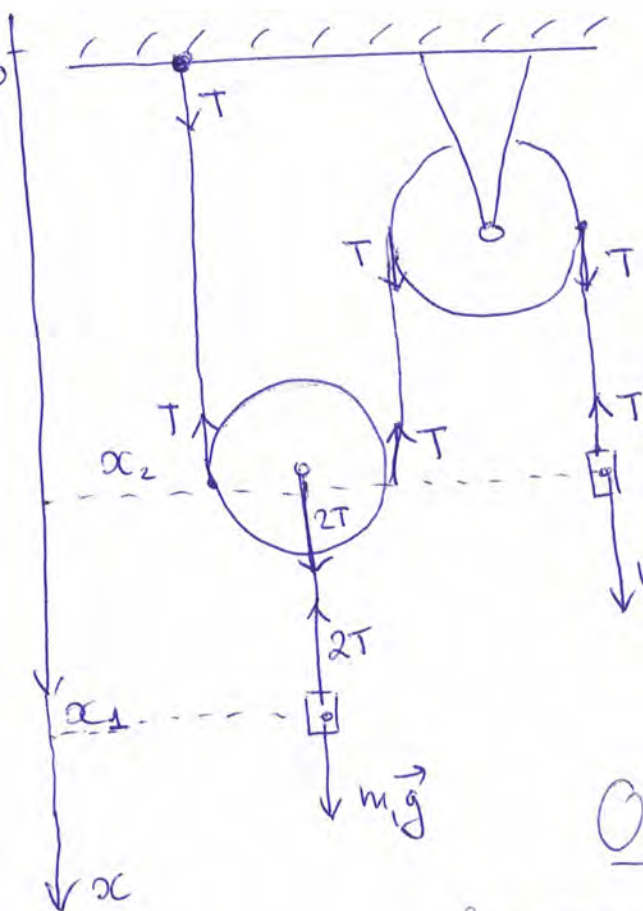
$$m \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0$$

$$M \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \pi/2$$

Пример 3

Более сложный блок
(см. рис)

9



? Сколько степеней свободы у этой системы?

Ответ: $\# \text{своб.} = 1$

(система фиксируется, если определить координату любого грузика, скажем x_1).

? Какие связи на координатах частей системы?

Ответ: Частью системы считаем движущиеся по вертикали грузики m_1 и m_2 .

Левый блок тоже движется по вертикали. Но его считаем невесомым, поэтому он лишь участвует в задании связи x_1 и x_2 , но сам не влияет на динамику системы. (Был бы массивным, пришлось бы учитывать и его поступательное движение, и возможное вращение).

Нить нерастяжима, поэтому

$$\text{или} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = \text{const} \\ \dot{x}_2 = -2\dot{x}_1 \end{cases}$$

? Расставьте действующие в системе силы натяжения нитей, запишите и решите уравнения Ньютона.

Решение: Расстановку сил натяжения см. на рисунке. При расстановке сил для левого блока мы упустили его невесомость (а значит и отсутствие момента инерции)

Уравнения Ньютона для обоих грузиков в проекции на ось $O\vec{x}$ (система отсчета Земли):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - 2T \\ m_2 \ddot{x}_2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{сверху}}}{-2m_2 \ddot{x}_1} = m_2 g - T \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2} g \\ T &= \frac{3m_1 m_2}{m_1 + 4m_2} g \end{aligned}}$$

Предельные случаи для оценки правдоподобности ответа:

$$m_2 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 = g, T = 0$$

$$m_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 = -g/2, \ddot{x}_2 = g, T = 0$$

$$m_1 = 2m_2 \Rightarrow \text{движение с постоянной скоростью } \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0, T = g$$