Семинар 4.

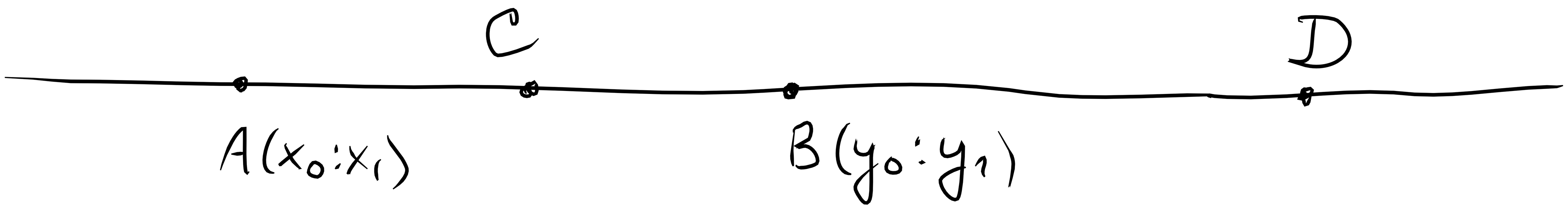
Задача 1. Даны две различные проективные прямые l_1 и l_2 в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и дано проективное отображение $F : l_1 \xrightarrow{\sim} l_2$ такое, что $F(S) \neq S$. Пусть p - прямая Паппа, построенная по точкам $A, B, C \in l_1$ и точкам $f(A), f(B), f(C) \in l_2$. Покажите, что прямая Паппа p не зависит от выбора точек $A, B, C \in l_1$, а зависит только от отображения f. Как ее построить, зная только отображение f и не привлекая точек $A, B, C \in l_1$ и точек $f(A), f(B), f(C) \in l_2$.

Задача 2. 1) Докажите, совпадение определения двойного отношения $(ABCD)$ четырех различных точек $A,\ B,\ C,\ D$ на проективной прямой через $\frac{\lambda}{\mu}$ с определением через отношение определителей $\frac{|xz|}{|xw|}/\frac{|yz|}{|yw|}$ и с определением в аффинной карте как отношения $\frac{|a-c|}{|a-d|}/\frac{|b-c|}{|b-d|}$; эти определения были даны на семинаре 4.
2) Докажите, что двойное отношение сохраняется при проективных отображениях, т.е. если $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}'^1$ - проективное отображение и $A,\ B,\ C,\ D$ - четыре различные точки на $\mathbb{P}^1$, то $(ABCD) = (f(A)f(B)f(C)f(D))$.

Задача 3. 1) Докажите, что если на проективной прямой пара точек A, B гармонически делит пару точек C, D, то и пара точек C, D гармонически делит пару точек A, B.
2) Докажите, что определение гармонической четверки точек, данное на семинаре 4, не зависит от вспомогательного 4-вершинника $PQRS$, с помощью которого определялась гармоническая четверка, т.е. если $AB \overset{h}{-} CD$ и $AB \overset{h}{-} CD'$, то $D = D'$. сПусть пара точек A, B гармонически делит пару точек C, D. Найдите двойное отношение $(ABCD)$ этих точек. Чему равно двойное отношение $(CDAB)$?

Задача 4. Пусть $(x_0 : x_1 : x_2)$ - однородные координаты в проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ над произвольным полем, и пусть $F(x_0, x_1, x_2)$ - ненулевой однородный многочлен (форма) степени $d \geqslant 1$, а $L(x_0, x_1, x_2)$ - ненулевая линейная форма. Рассмотрим в $\mathbb{P}^2$ кривую $X = \{(x_0 : x_1 : x_2) \ : F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ и прямую $l = \{(x_0 : x_1 : x_2) \ : \ L(x_0, x_1, x_2) = 0\}$. Докажите, что если $l \subset X$, то форма F делится на линейную форму L.

$\Bbbk$

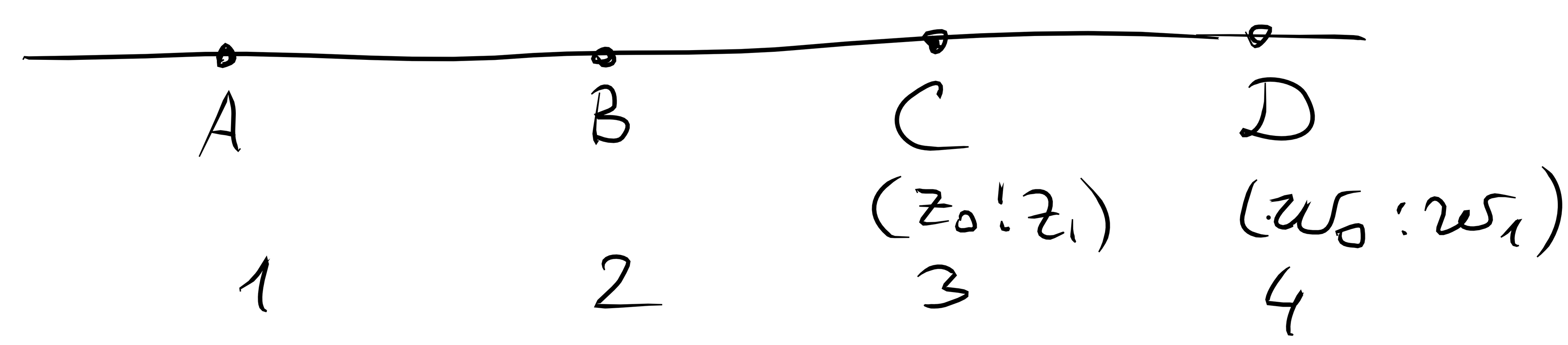


$\exists\, \lambda, \mu \in \Bbbk^{\times}$

$$C = (x_0 + \lambda y_0 : x_1 + \lambda y_1)$$
$$D = (x_0 + \mu y_0 : x_1 + \mu y_1)$$

Def. $(ABCD) := \dfrac{\lambda}{\mu} \in \Bbbk^{\times}$

$$(ABCD) = (AB, CD)$$



$|xz| := \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ z_0 & z_1 \end{vmatrix}$

$|xw| := \ ---$

$|yz| := \ ---$

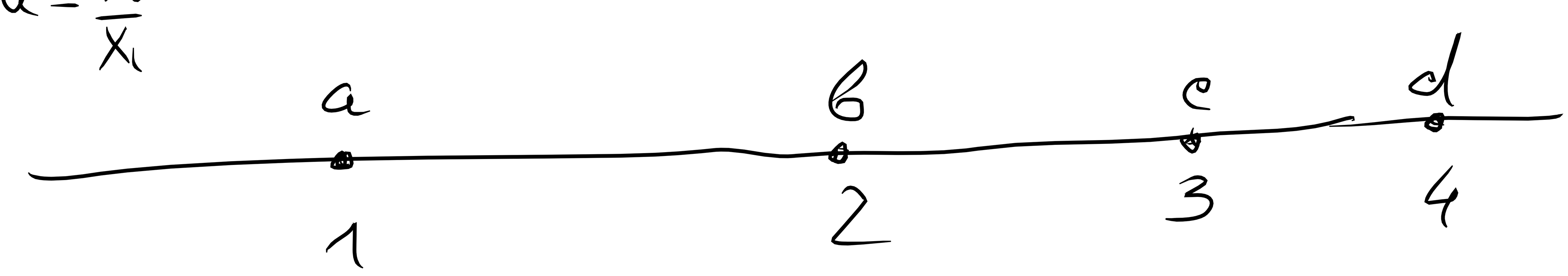
$|yw| := \ ---$

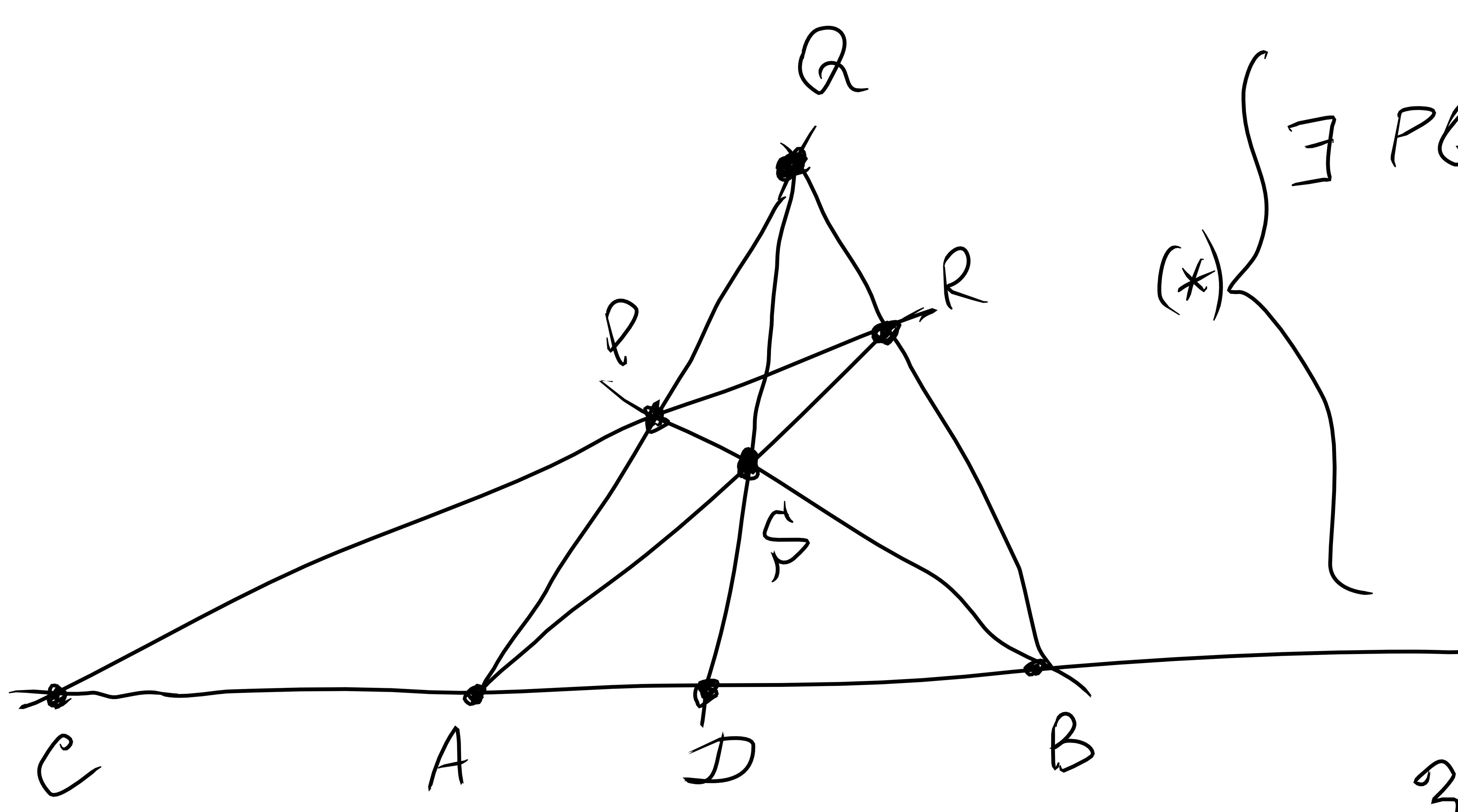
$$\boxed{(ABCD) = \frac{|xz|}{|xw|} \Big/ \frac{|yz|}{|yw|}}$$

$$(ABCD) = \frac{|13|}{|14|} \Big/ \frac{|23|}{|24|} = \frac{|13|}{|23|} \Big/ \frac{|14|}{|24|}$$

$$\frac{a-c}{a-d} \Big/ \frac{b-c}{b-d}$$

$a = \dfrac{x_0}{x_1}$





$(*)$ $\begin{cases} \exists\, PQRS : & A = PQ \cap RS \\ & B = PS \cap RQ \\ & C = (AB) \cap PR \\ & D = (AB) \cap QS \end{cases}$

$$(*) \Rightarrow AB \overset{h}{\text{---}} CD$$

Зад. $\left\{ \begin{array}{c} AB \overset{h}{\text{---}} CD \\ \Downarrow \\ CD \overset{h}{\text{---}} AB \end{array} \right.$

(AB, CD) – гармонич. 4-ка на $\mathbb{P}^1$

$\Downarrow$

$$\underline{(ABCD) = \ ?}$$

$$(A, B, C) \rightsquigarrow D \ ?$$