Лекция 3

Для сжимающих отображений осталось проверить непрерывность φ по λ.

1) $\varphi_\lambda : E \to E$ - непр, $1/2$ - сжимает

2) φ - непр. - дословно из д-ва существования и единственности.

$$|\varphi(\lambda, x)(t) - \varphi(\tilde{\lambda}, \tilde{x})(t)| \le x_0(\lambda) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), \lambda)\,ds -$$

$$x_0(\tilde{\lambda}) - \int_{t_0}^{t} F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda})\,ds \le \underbrace{|x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})|}_{\le \varepsilon/3} + \int_{t_0}^{t} |F(s, x(s), \lambda -$$

$$- F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda})|\,ds \le |x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})| + \int_{t_0}^{t} |F(s, x(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \lambda)|\,ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} |F(s, \tilde{x}(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda})|\,ds$$ (прибавили и вычли)

- $\forall \varepsilon\ \exists \alpha.\ |\lambda - \tilde{\lambda}| < \alpha \Rightarrow |x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})| < \varepsilon/3$.
- $\forall \varepsilon\ \exists \beta\ |\lambda - \tilde{\lambda}| < \beta \to |F(t, x, \lambda) - F(t, x, \tilde{\lambda})| < \varepsilon$ $\quad \forall t, x$

В итоге эта штука $\le \varepsilon/3 + L \cdot \|x - \tilde{x}\| |t - t_0| + \varepsilon |t - t_0| \le$

$$\le \varepsilon(1/3 + \tau) + L\tau \underbrace{\|x - \tilde{x}\|}_{< \varepsilon} \le \varepsilon(1/3 + \tau + L\tau)$$

$\Rightarrow$ Непрерывность доказана.

Теорема (глобальная зависимость от параметр.)

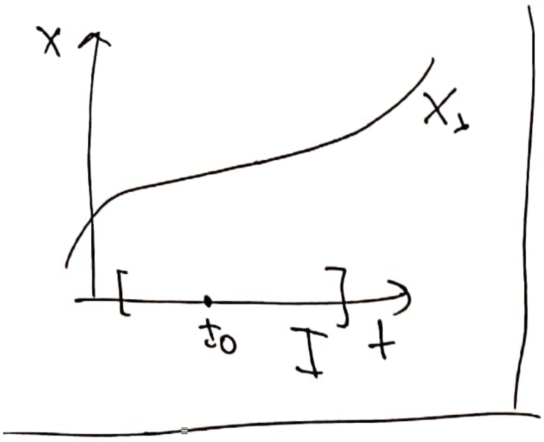
$$(*_\lambda)\begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases} \to \begin{matrix} F \text{ непр}, \\ F_x \text{ - непр}. \end{matrix} \in C(\Omega)$$

X_{λ_0} - реш. $(*_\lambda)$

$X_{\lambda_0}: I \to \mathbb{R}^n$
↑ отрезок

$\boxed{\text{Тогда}}$ $\exists U \ni \lambda_0$ (1) $\forall \lambda \in U$, что решение $(*_\lambda)$ существует на I (и единств.)

(2) $X(\lambda, t) = X_\lambda(t)$
X - непр. на $U \times I$.



$\{(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0), t \in I\}$ — компакт
(непр. на компакте)

$\mathrm{dist}(K, \partial\Omega) \geq d > 0$

(непр. на компакте ⇒ достигаем минимума ⇒ ⇒ это не 0).

Фиксируем $\xi = \delta = \zeta = d/4$

$\forall (\hat{t}, \hat{x}, \hat{\lambda}) \in K.$

$B_\delta(\hat{t}) \times \overline{B}_\xi(\hat{x}) \times \overline{B}_\zeta(\hat{\lambda}) \subset \Omega$

$\{(t, x, \lambda) : \mathrm{dist}((t, x, \lambda), K) \leq \frac{3d}{4}\} = \hat{K}$

(1) $\hat{K}$ — компакт (замкн. и огранич. в $\mathbb{R}^4$)

(2) $\hat{K} \subset \Omega$

(3) $B_\delta(\hat{t}) \times \hat{B}_\xi(\hat{x}) \times \overline{B}_\zeta(\hat{\lambda}) \subset \hat{K}$

$\|F\|_{C^0(\hat{K})} \leq M$

$\|F'_x\|_{C^0(\hat{K})} \leq L$

Вывод: $\tau = t(\delta, \xi, L, M)$ можно выбрать одним и тем же для всех точек компакта K.

Рассмотрим мн-во $\{\min I = t_{-L} < t_{-L+1} < \ldots < t_0 < \ldots < t_k = \max\}$

$|t_i - t_{i-1}| < \tau$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F(t, x_i, \lambda) \\ x_i(t_{i-1}) = \begin{cases} x_{i-1}(t_{i-1}), & i \geq 2 \\ x_0(\lambda), & i = 1. \end{cases} \end{cases} \qquad (\#_i)$$

$(\#_1)$ — задача Коши с нач. условием $x_1(t_0) = x_0(\lambda)$ (и даже немного шире)

⇒ при $\lambda \in U_1 \ni \lambda_0$ x_1 опр на $[t_0, t_1]$

При этом $x_1(t_1, \lambda)$ непр по λ

$x_1(t_1, \lambda_0) = x_{\lambda_0}(t_1)$

$(\#_2)$ ~~$X_2(t_1)$~~ $X_2(t,\lambda) = X_1(t_1,\lambda)$ непр.

Решение при $\lambda \in U_2 \ni \lambda_0$ определено шире, чем на $[t_1, t_2]$, $X_2(t_2,\lambda)$ непр по λ

$|t_2 - t_1| < \tau$ $\quad X_2(t_2,\lambda_0) = X_{\lambda_0}(t_2)$

и т.д.

$X_1\lambda$ и $X_2\lambda$ – реш. $(\#_2)$ $\Rightarrow$ (по глобальной теореме единственности $(X_1\lambda - X_2\lambda)$ – на пересеч. обл. определено.

Теперь можем определить все решение целиком.

$X(t) = X_i(t)$ $\quad (X(t,\lambda) = X_i(t,\lambda),\ \lambda \in \cap U_i)$

$X_i(t)$ – определено и $t \in \left(\frac{t_{i-1}+t_{i-2}}{2}, \frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)$

$X(t)$ – определено на $[t_0, \max I]$

Точно так же можем строить и „влево" т.е. для $t \in [\min I, t_0]$

$\Rightarrow$ ~~в итоге получаем~~

<u>Осталось проверить</u>, что $\hat{X}(t,\lambda)$ – решение задачи

Коши $\begin{cases} \dot{x} = F(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

<u>Ур-е</u>: $\forall t\ \exists (t-\beta; t+\beta)$

$\hat{X}\big|_{(t-\beta,t+\beta)} = X_i\big| \ldots$

X_i удовлетв ур-ю в $t \Rightarrow \hat{X}$ – тоже

Нач.дан $\hat{X}(t_0) = X_1(t_0) = X_0(t_0)$

Показжем, что $\hat{X}(t,\lambda)$ – непрерывно.

Возьмем $\hat{t} \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \geq 0$ (Для $i \leq 0$ – аналогично)

• Локально $\hat{X} \equiv X_i$

~~к. надо проверить, что X_i – непр. от λ~~

А X_i – непр по (t,λ) $\quad \Rightarrow$ Теорема доказана.

Операторы Коши

$\dot{x} = F(t,x) \qquad F, F'_x \in C(\Omega)$

$X_{t_0 t_1}(\xi) = \eta$, если решение задачи Коши $\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = \xi \end{cases}$ равно η при $t = t_1$

Свойства:

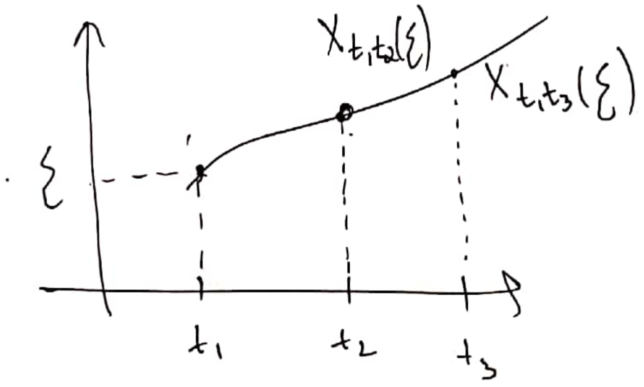
1) $X_{tt} = id$

2) $X_{t_2 t_3} \circ X_{t_1 t_2} = X_{t_1 t_3}$

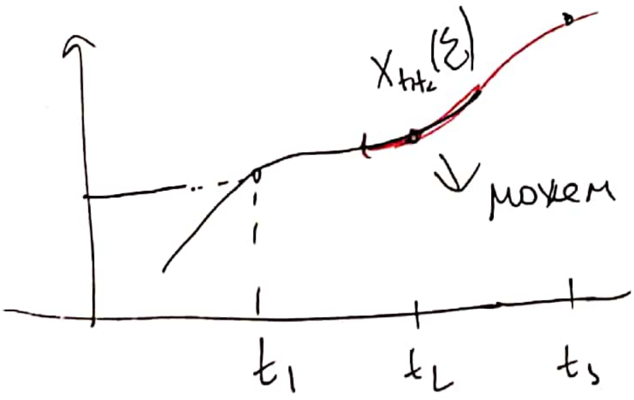
Если $t_2 \in (t_1, t_3)$ между., области опр. совпадают (иначе на пересеч. обл. опр)

3) $X_{ts}^{-1} = X_{st}$

Д-во св-ва (2):

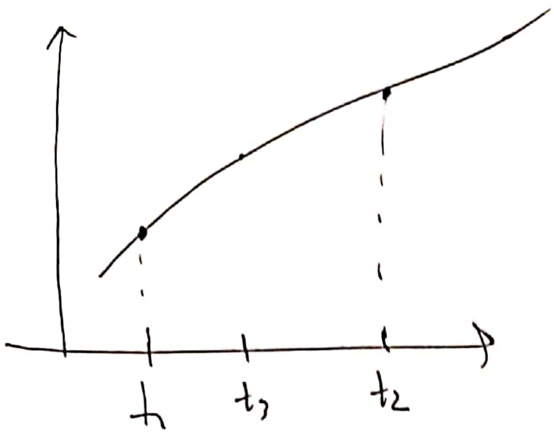


Это если определена правая часть



Это если левая часть определена.

можем объединить эти решения.



– тут тоже все понятно