Алгебраическая геометрия: дз 4, до 4 ноября

1) Покажите, что гомоморфизм градуированных колец $f : R \to R'$ индуцирует морфизм схем в $Proj(R)$ из дополнения в $Proj(R')$ к $V(I)$, где I - идеал, порождаемый в R' образом R_+ (вначале можно проверить почти очевидную склейку морфизмов: если схема X покрыта открытыми U_i и заданы морфизмы $g_i : U_i \to Y$, совпадающие на пересечениях, то существует и морфизм $g : X \to Y$, совпадающий с g_i на U_i)

2) а) Докажите, что схема $\mathbb{P}^1_k$ (k поле) изоморфна замкнутой подсхеме, определенной уравнением $y^2 = xz$ в $\mathbb{P}^2_k$ (т.е. $Proj(k[x, y, z]/(y^2 - xz))$).

б) Докажите, что если k алгебраически замкнуто, то все неприводимые коники над k (то есть подсхемы $\mathbb{P}^2_k$, определенные обращением в нуль неприводимого однородного многочлена второй степени) изоморфны над k.

в) Верно ли это, если k не является алгебраически замкнутым? Изоморфны ли в этом случае все коники просто как схемы?

3) Пусть k поле, рассмотрим градуированное кольцо $R(a_0, \ldots, a_n)$, которое представляет собой кольцо многочленов $k[X_0, \ldots, X_n]$ с нестандартной градуировкой $deg(X_i) = a_i$ (так что обычное кольцо многочленов - это $R(1, \ldots, 1)$). Положим $\mathbb{P}_k(a_0, \ldots, a_n) = Proj(R(a_0, \ldots, a_n))$.

а) Покажите, что $\mathbb{P}_k(a_0, \ldots, a_n) \cong \mathbb{P}_k(da_0, \ldots, da_n)$ для всех $d \in \mathbb{Z}_{>0}$.

б) Покажите, что $\mathbb{P}_k(a, b) \cong \mathbb{P}^1_k$ для всех $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$.

в) Постройте замкнутое вложение $\mathbb{P}_k(1, 1, 2)$ в $\mathbb{P}^3_k$ и опишите $\mathbb{P}_k(1, 1, 2)$ геометрически.

г) Изоморфны ли $\mathbb{P}_k(1, 1, 2)$ и $\mathbb{P}^2_k$?

4) Если $Proj(R)$ - конечное дискретное множество, докажите, что оно покрывается одной аффинной картой $D_+(f)$ (то есть на самом деле совпадает со $Spec(R_{(f)})$.

№1

$f_i : U_i \hookrightarrow X$

$g : X \to Y \qquad g^\# : \mathcal{O}_Y \to g_* \mathcal{O}_X$

$f_i^\# : \mathcal{O}_X \to f_{i*} \mathcal{O}_{U_i}$

$g_i : U_i \to Y \qquad g_i^\# \ \mathcal{O}_Y \to g_{i*} \mathcal{O}_{U_i}$

$Proj\, R = \bigcup_{f \in R_+} D_+(f) \Rightarrow Proj\, R' \setminus V(\varphi(R_+)) =$

$= \bigcup D_+(\varphi(f))$

$f \in R_f$

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_f & \xrightarrow[\varphi_f]{} & R_{\varphi(f)} \end{array}$$

$$\varphi_f\left(\frac{a}{f^n}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)^n}$$

т.к. φ – гомом. гр колец

$\Rightarrow \varphi_f(R_{(f)}) < R'_{(\varphi(f))} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \varphi_{(f)} : R_{(f)} \to R'_{(\varphi(f))}$

$\Rightarrow \varphi^*_{(f)} : D_+(\varphi(f)) \to D_+(f) \quad \forall f \in R_+$

$D_+(\varphi(f)) \cap D_+(\varphi(g)) = D_+(\varphi(f)\varphi(g)) = D_+(\varphi(fg)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi^*_{(f)}\big|_{D_+(\varphi(f)) \cap D_+(\varphi(g))} = \varphi^*_{(g)}\big|_{D_+(\varphi(f)) \cap D_+(\varphi(g))} = \varphi^*_{(fg)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно склеить $\varphi^* : \mathrm{Proj}\, R' \setminus V(\varphi(R_+)) \to \mathrm{Proj}\, R$

№2

$$\frac{k[x,y,z]}{y^2 - xz} \simeq k[x_0^2, x_0x_1, x_1^2]$$

$\mathrm{Proj}\, \underbrace{k[x_0^2, x_0x_1, x_1^2]}_{=R'} = D_+^{R'}(x_0^2) \cup D_+^{R'}(x_0x_1) \cup D_+^{R'}(x_1^2)$

$\mathrm{Proj}\, \underbrace{k[x_0, x_1]}_{R} = D_+^{R}(x_0) \cup D_+^{R}(x_1)$

$R'_{(x_0x_1)} = \left\langle \frac{x_1^2}{x_0x_1} = \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_0^2}{x_0x_1} = \frac{x_0}{x_1} \right\rangle$ - как k-алгебра

$R'_{(x_0^2)} = \left\langle \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2, \frac{x_1x_0}{x_0^2} = \frac{x_1}{x_0} \right\rangle = \left\langle \frac{x_1}{x_0} \right\rangle$

$R'_{(x_1^2)} = \left\langle \frac{x_0}{x_1} \right\rangle$

$\Rightarrow R'_{(x_0x_1)} = R'_{(x_0^2)} \times_k R'_{(x_1^2)} \Rightarrow D_+^{R'}(x_0x_1) = D_+^{R'}(x_0^2) \cup D_+^{R'}(x_1^2)$

$\Rightarrow \mathrm{Proj}\, R' = D_+^{R'}(x_0^2) \cup D_+^{R'}(x_1^2)$

$\Rightarrow \operatorname{Proj} R = D_+(x_0) \cup D_+(x_1)$

$R_{(x_0)} = \langle \frac{x_1}{x_0} \rangle \quad R_{(x_1)} = \langle \frac{x_0}{x_1} \rangle \Rightarrow R_{(x_0)} \simeq R'_{(x_1^2)}$

$R_{(x_1)} \simeq R'_{(x_1^2)} \Rightarrow D_+^{R'}(x_0^2) \simeq D_+^{R}(x_0)$

$D_+^{R'}(x_1^2) \simeq D_+^{R}(x_1) \quad D_+^{R'}(x_0^2) \cap D_+^{R'}(x_1^2) \simeq D_+^{R'}(x_0^2 x_1^2) \simeq$

$\simeq D_+^{R}(x_0 x_1) \simeq D_+^{R}(x_0) \cap D_+^{R}(x_1) \Rightarrow \operatorname{Proj} R \simeq \operatorname{Proj} R'$

б) $R = k[x,y] \quad R' = \frac{k[x,y,z]}{f}$

как мы знаем из курса линейной алгебры с точностью до лин. замены $\exists!$ неприв. коника над ал. замкн. полем, которая задана $xz = y^2$, если $x_0 = l_0(x,y,z)$ $x_1 = l_1(x,y,z)$ $x_2 = l_2(x,y,z)$, где l_i - лин. ур-я $\Rightarrow k[x_0, x_1, x_2] \simeq k[x,y,z]$

$\Rightarrow R' \simeq \frac{k[x,y,z]}{y^2 - xz} \Rightarrow \operatorname{Proj} R' \simeq \mathbb{P}^1_k$

в) $X = \operatorname{Proj} \frac{\mathbb{R}[x,y,z]}{x^2+y^2+z^2}$

$\{\mathbb{R}\text{-точки } X\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{решения } x^2+y^2+z^2\}$

$\Rightarrow \{\mathbb{R}\text{-точки } X\} = \varnothing$, но у $\operatorname{Proj} \frac{\mathbb{R}[x,y,z]}{xz - y^2}$ есть $\mathbb{R}$-точки, т.к. $(1,1,1)$ – решение $xz - y^2$

$$\text{а) } \operatorname{Proj}(\underbrace{R(a_0,\dots a_n)}_{=A}) \overset{\sim 3}{=} \bigcup_{i=0}^{n} D_+(x_i)$$

$$A_{(x_i)} = \left(\frac{x_0^{a_i}}{x_i^{a_0}}, \dots \frac{x_n^{a_i}}{x_i^{a_n}}\right) \text{ – как } k\text{-алгебра}$$

$$\operatorname{Proj}(\underbrace{R(da_0, \dots da_n)}_{=A'}) = \bigcup_{i=0}^{n} D'_+(x_i)$$

$$A'_{(x_i)} = \left(\left(\frac{x_0^{a_i}}{x_i^{a_0}}\right)^d, \dots \left(\frac{x_n^{a_i}}{x_i^{a_n}}\right)^d\right) \text{ – как } k\text{-алгебра}$$

$$A_{(x_i)} \simeq A'_{(x_i)}$$

$$\frac{f}{x_i^k} \rightsquigarrow \frac{f'}{x_i^k} \qquad f' = f \text{ просто } \deg f = k \quad \deg f' = dk$$

$$\Rightarrow D_+(x_i) \simeq D'_+(x_i) \qquad D_+(x_i) \cap D_+(x_j) \simeq D'_+(x_i) \cap D'_+(x_j)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Proj} R(a_0, \dots a_n) \simeq \operatorname{Proj} R(da_0, \dots da_n)$$

$$\text{б) } \mathbb{P}^1_k = \operatorname{Proj} k[x,y] = \operatorname{Proj} A$$

$$\mathbb{P}^1_k(a,b) = \operatorname{Proj} R(a,b) = \operatorname{Proj} A'$$

$$\operatorname{Proj} A = D_+(x) \cup D_+(y) \qquad \operatorname{Proj} A' = D'_+(x) \cup D'_+(y)$$

$$A_{(x)} = \left\langle \frac{y}{x} \right\rangle \qquad A_{(y)} = \left\langle \frac{x}{y} \right\rangle$$

$$A'_{(x)} = \left\langle \frac{y^a}{x^b} \right\rangle \qquad A'_{(y)} = \left\langle \frac{x^b}{y^a} \right\rangle$$

$$A_{(x)} \simeq A'_{(x)} \quad A_{(y)} \simeq A'_{(y)} \Rightarrow D_+(x) \simeq D'_+(x)$$

$y_x \mapsto y^a/x^b \qquad x/y \mapsto x^b/y^a \qquad D_+(y) \simeq D'_+(y)$

$$D_+(x) \cap D_+(y) = D_+(xy) \simeq \operatorname{Spec} A_{(xy)}$$

$$A_{(xy)} = \langle \frac{x^2}{xy} = \frac{x}{y}, \frac{y^2}{xy} = \frac{y}{x} \rangle \simeq \frac{k[x_0,x_1]}{x_0x_1-1}$$

$$D'_+(x) \cap D'_+(y) = D'_+(xy) \simeq \operatorname{Spec} A'_{(xy)}$$

$$A'_{(xy)} = \langle \frac{x^{a+b}}{(xy)^a} = \frac{x^b}{y^a}, \frac{y^{a+b}}{(xy)^b} = \frac{y^a}{x^b} \rangle \simeq \frac{k[x_0,x_1]}{x_0x_1-1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Proj} A \simeq \operatorname{Proj} A'$$

в) из задачи 2 мы знаем что

$$\mathbb{k}[x_0^2, x_0x_1, x_1^2] \simeq \frac{\mathbb{k}[x,y,z]}{y^2-xz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{k}[x_0^2, x_0x_1, x_1^2][t] \simeq \frac{k[x,y,z]}{y^2-xz}[t] \simeq \frac{k[x,y,z,t]}{y^2-xz}$$

$\deg t = 2 \qquad R = \mathbb{k}[x_0,x_1,t], \quad R' = k[x_0^2, x_0x_1, x_1^2, t]$

$$\operatorname{Proj} R \simeq \operatorname{Proj} R' \Rightarrow \mathbb{P}_k(1,1,2) \simeq \operatorname{Proj} \frac{k[x,y,z,t]}{y^2-xz} -$$

это проективный конус над коникой из з-чи 2

г) $\mathbb{P}_k(1,1,2) \simeq \operatorname{Proj} \frac{k[x,y,z,t]}{y^2-xz}$

афф. окр вершины конуса это

$\operatorname{Spec} \frac{k[x,y,z]}{y^2-xz}$, вершина $m = (x,y,z)$

$\frac{m}{m^2}$ – 3-х мерное вект. пр-во над k,
порожд $[x], [y], [z]$
$\frac{k[x,y,z]}{y^2-xz} \simeq k[x_0^2, x_0x_1, x_1^2] \subset k[x_0, x_1] \Rightarrow ht\, m \le 2$
$(x,y,z) \supset (x,y) \supset (0) \Rightarrow ht\, m \ge 2 \Rightarrow ht\, m = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ размерность лок. кольца в т. $(x,y,z) = 2$
$2 < 3 \Rightarrow$ конус не регулярен в вершине $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ он не может быть изоморфен регулярной сх.

№4

$X = Proj(R)$ Пусть $\not\exists f : X = D_+(f) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall f \in R_+ \quad \exists x \in X : f(x) = 0$
Пусть $Y < X$ – мин. подмн-во, т.ч. $\forall f \in R_+$
$\exists y \in Y \; f(y) = 0$, т.к. $\forall x \in X \quad x = I \cap R_0 \quad I \not\supset R_+$
$\Rightarrow |Y| \ne 1$ (только если $|X| = 1$, но тогда $X = Spec\, \mathcal{O}_{X,x}$)
$\forall y \in Y \quad \exists a_y \in R_+$, т.ч. $a_y(y) = 0 \; \forall y' \in Y \; a_y(y') \ne 0$
$b_x = \prod_{y \in Y \setminus \{x\}} a_y \quad b_x(y) = 0 \; \forall y \ne x \Rightarrow \sum_{x \in Y} b_x(y) \ne 0 \; \forall y \in Y$
$\Rightarrow \Leftarrow \quad \square$