ТФКП
2 курс
Домашнее задание

Владислав Мозговой
1789769386

29 марта 2021 г.

Домашнее задание 7

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_2 + a_8 + 1$. Допускает ли росток, заданный в точке 0 указанным степенным рядом $s(z)$, аналитическое продолжение вдоль указанной кривой $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Строго обоснуйте ответ.

(0) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $\gamma(t) = -t$.

(1) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{1/2}{k}$, $\gamma(t) = -2t$.

(2) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $\gamma(t) = t$.

(3) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k$, $\gamma(t) = -t$.

(4) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k$, $\gamma(t) = t$.

(5) $s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, $\gamma(t) = t$.

(6) $s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, $\gamma(t) = -t$.

(7) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{1/2}{k}$, $\gamma(t) = -t + it^2$.

(8) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{4k}$, $\gamma(t) = \frac{i}{2}(1 - e^{\pi i t})$.

(9) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}$, $\gamma(t) = t$.

Напомним, что $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ при $k > 0$ и $\binom{\alpha}{0} = 1$, если $\alpha \neq 0$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_7 + 1$. Докажите или опровергните существование и единственность ростка аналитической функции $f(z)$ в точке $z = 0$, удовлетворяющего указанным условиям. (Для решения этой задачи *не требуется* знакомства с теорией дифференциальных уравнений).

(0) $f(z)^2 = 1 + z$, $f(0) = -1$.

(1) $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$.

(2) $f'(z) = f(z) + e^z - 1$, $f(0) = 1$.

(3) $zf'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$.

(4) $zf'(z) = f(z)$, $f(0) = 0$.

(5) $f''(z) = f(z)$, $f(0) = 0$.

(6) $z^2 f''(z) + z f'(z) = 4z^2 f(z)$, $f(0) = 1$.

(7) $f''(z) = f(z)$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

(8) $z^2 f''(z) + z f'(z) + z^2 f(z) = 0$, $f(0) = 1$.

(9) $(1 - z^2) f''(z) - z f'(z) + m^2 f(z) = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = im$. Здесь m — целое число.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_2 + a_6 + 1$. Росток функции $w(z)$ в точке $\gamma(0)$ (для указанного пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$) задан выписанными ниже неявным уравнением на функцию w и ее значением $w(\gamma(0))$. Найдите значение $w(\gamma(1))$.

(0) $w^2 = z^2 + 9$, $w(4) = 5$, $\gamma(t) = 4e^{\pi i t}$.

(1) $w^2 = z^2 + 9$, $w(4) = 5$, $\gamma(t) = 4e^{-\pi i t}$.

(2) $w^2 = z^2 + 9$, $w(4) = 5$, $\gamma(t) = 4(1 - 2t)$.

(3) $e^w = z$, $w(1) = 0$, $\gamma(t) = e^{6\pi i t}$.

(4) $\sin w = z$, $w(0) = 0$, $\gamma(t) = 1 - e^{2\pi i t}$.

(5) $\cos w = z$, $w(0) = \pi/2$, $\gamma(t) = \frac{\pi}{2} e^{\pi i t}$.

(6) $w^3 = z^2$, $w(1) = 1$, $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$.

(7) $w^2 = 6z(z^2 - 1)$, $w(2) = 6$, $\gamma(t) = \frac{3 + 5e^{2\pi i t}}{4}$.

(8) $w^2 = z^2$, $w(1) = -1$, $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$.

(9) $w = z + w^2$, $w(1) = 0$, $\gamma(t) = e^{3\pi i t}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_7 + 1$. Для указанного ниже ростка аналитической функции f в указанной точке a найдите радиус сходимости степенного ряда для f с центром в a, не вычисляя коэффициенты этого ряда.

(0) $f(z) = \sqrt{\cos z}$, $a = 0$, $f(a) = 1$.

(1) $f(z) = e^{\sin z}$, $a = \pi$.

(2) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$, $a = 0$.

(3) $f(z) = \sqrt{z(z^2 - 1)(z^2 - 4)}$, $a = i$, $f(a) = \sqrt{5}(1 + i)$.

(4) $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 1)}$, $a = i$, $f(a) = \frac{i}{2}$.

(5) $f(z) = \log z$, $a = 1 + i$, $\mathrm{Im}(f(a)) \in [0, 2\pi)$.

(6) $f(z) = \log(\log z)$, $a = 3$, $f(a) > 0$.

(7) $f(z) = e^{1/z}$, $a = 1 + i$.

(8) $f(z) = \arcsin(z)$, $a = 0$, $f(a) = 0$.

(9) $f(z) = \frac{1}{\log z}$, $a = 2$, $f(a) > 0$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_4 + 1$.

(0) Упражнение 6.4 на страницах 101–102 основного учебника.
(1) Упражнение 6.5 на странице 102 основного учебника.
(2) Упражнение 6.6 на странице 102 основного учебника.
(3) Упражнение 6.7 на странице 102 основного учебника.
(4) Упражнение 6.8 на странице 102 основного учебника.
(5) Упражнение 6.9 на странице 102 основного учебника.
(6) Упражнение 5.18 на странице 82 основного учебника.
(7) Рассмотрим аналитическую функцию, заданную в диске $\mathbb{D}(0,1)$ с центром в 0 и радиусом 1 сходящимся рядом

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}.$$

Докажите, что f не продолжается аналитически ни в какую точку вне диска $\mathbb{D}(0,1)$.

(8) Рассмотрим непрерывную функцию $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$, где $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}(0,1)$ — единичная окружность. Последовательность многочленов $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, равномерно сходящаяся к f на $\mathbb{S}$, существует тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $F : \overline{\mathbb{D}}(0,1) \to \mathbb{C}$ такая, что $F|_{\mathbb{S}} = f$ и $F : \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ голоморфна. Докажите это утверждение.

(9) Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, такое, что пара точек $\{1, -1\}$ лежит в одной и той же компоненте множества $\mathbb{C} \setminus U$. Докажите, что на U существует однозначная аналитическая ветвь функции $\sqrt{z^2 - 1}$, то есть такая голоморфная функция $f : U \to \mathbb{C}$, что $f(z)^2 = z^2 - 1$.

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_2 + a_8 + 1 = 8 + 8 + 1 = 7 \mod 10$

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{\frac{1}{2}}{k}, \ \gamma(t) = -t + it^2$$

Радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k}}{\binom{\frac{1}{2}}{k+1}} \right| = 1$$

Заметим также что

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{\frac{1}{2}}{k} = \sqrt{z+1}$$
$$\gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = i - 1$$

Рассмотрим диск D_1 с центром в 0 и радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$, в нем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \binom{\frac{1}{2}}{k}$ сходится и $s : D_1 \to C$, теперь рассмотрим диск D_2 с центром в $(-1, 1)$ и радиусом $\frac{3}{4}$ и $h : D_2 \to C$, так мы покрыли γ двумя дисками, на пересечении s, h совпадают, так как в этой области оба ряда сходятся к одной и той же функции $\sqrt{1+z}$. Росток допускает аналитическое продолжение вдоль γ и $\sqrt{1+z}$ – результат аналитического продолжения вдоль γ.

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_5 + a_7 + 1 = 6 + 3 + 1 = 0 \mod 10$

$$f(z)^2 = 1 + z, \ f(0) = -1$$

Пусть росток существует, тогда он имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$f(0) = -1, \ a_0 = -1$$
$$f(z)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^2 = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 z + (a_1^2 + 2a_0 a_2) z^2 + \ldots = 1 + z$$
$$2a_0 a_1 = 2 \cdot (-1) \cdot a_1 = 1, \ a_1 = -\frac{1}{2}$$
$$a_1^2 + 2a_0 a_2 = \frac{1}{4} - 2a_2 = 0, \ a_2 = \frac{1}{8}$$
$$2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = -2a_3 - \frac{1}{16} = 0, \ a_3 = -\frac{1}{32}$$
$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}$$

А следовательно росток один

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_2 + a_6 + 1 = 8 + 9 + 1 = 8 \mod 10$

$$w^2 = z^2, \ w(1) = -1, \ \gamma(t) = e^{2\pi i t}$$

Заметим, что $\gamma(0) = e^{2\pi i * 0} = e^0 = 1, \gamma(1) = e^{2\pi i * 1} = e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$, тогда

$$\omega^2 = z^2 \Rightarrow \omega = z \vee \omega = -z$$
$$\omega(\gamma(0)) = -1$$

Далее нам нужно посмотреть, обходит ли график особые точки Если $\omega = z$, то график не обходит особые точки, если $\omega = -z$ то $\omega(z) = -1 \Leftrightarrow z = 1$ и $\omega(\gamma(1)) = \omega(1) = -1$.

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_0 + a_7 + 1 = 1 + 3 + 1 = 5 \mod 10$

$$f(z) = \log(z),\ a = 1 + i,\ \Im(f(a)) \in [0, 2\pi)$$

Заметим что на открытом шаре $B(z_0, |z_0|)$ мы можем определить логарифм как $f(z) = \log(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z}$, где контур $z_0 - z$ содержится целиком в $B(z_0, |z_0|)$. Радиус сходимости не может быть больше $|z_0|$, так как $\log(z)$ не аналитическая в любой окрестности $z = 0$, а также по интегральной формуле Коши

$$\frac{d^n}{dz^n}\log(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{\log(\omega)d\omega}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

$$\gamma_{z_0,r}(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\omega \in \gamma_{z_0,r}\, \frac{|z_0| - r}{|z_0|} \leqslant \frac{|z_0| + r}{|z_0|}$$

Тогда

$$|\log(\omega)| \leqslant \left(\frac{|z_0|^2}{|z_0| - r}\right)$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\log(z_0)\right|^{\frac{1}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{1}{r^{n+1}}\log\left(\frac{|z_0^2|}{|z_0| - r}\right)\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{r}$$

Радиус сходимости хотя бы r для любого $r < |z_0|$, а следовательно он не менбше и равен $|z_0|$, то есть в нашем случае $|1 + i| = \sqrt{2}$