Программа коллоквиума по курсу «Логика и алгоритмы»

лекторы: Шамканов Д.С. и Беклемишев Л.Д.

18 марта 2021 г.

1. Теория множеств Цермело-Френкеля с аксиомой выбора. Основные понятия: множество, принадлежность, равенство множеств. Аксиомы экстенсиональности (объемности) и равенства. Схема аксиом выделения. Парадокс Рассела. Аксиомы пары, степени, пустого множества, бесконечности и регулярности. Схема аксиом подстановки. Аксиома выбора.

2. Определение множества натуральных чисел по фон Нейману. Принцип математической индукции. Принцип порядковой индукции. Принцип минимального элемента.

3. Существование и единственность функции натурального аргумента, определяемой по рекурсии. Определение сложения и умножения натуральных чисел.

4. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку. Теорема Кантора: из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.

5. Ординалы. Порядок на ординалах. Принцип трансфинитной индукции. Парадокс Бурали-Форти.

6. Порядковый тип вполне упорядоченного множества. Теорема Кантора: для всякого вполне упорядоченного множества существует единственный ординал, который ему изоморфен.

7. Трансфинитные последовательности. Теорема о трансфинитной рекурсии.

8. Теорема Цермело. Сравнимость любых двух множеств по мощности. Кардиналы. Всякое множество равномощно единственному кардиналу.

9. Лемма Цорна. Объединение двух бесконечных множеств равномощно большему из них. Произведение двух бесконечных множеств равномощно большему из них. Бесконечное множество A равномощно A^* (множеству конечных последовательностей элементов A).

10. Принцип $\in$-индукции. Иерархия фон Неймана. Свойства множеств $\mathbb{V}_\alpha$. Ранг множества по фон Нейману. Вывод формулы $\operatorname{rnk} x = \sup\{\operatorname{rnk} y + 1 \mid y \in x\}$.

11. Формулы логики высказываний. Таблица истинности формулы. Связь между формулами логики высказываний от n переменных и булевыми функциями. Теорема о функциональной полноте.

12. Выполнимые формулы, тавтологии, тождественно ложные формулы и их взаимосвязь. Равносильность формул логики высказываний, связь с тождественной истинностью. Основные равносильности (тождества булевой алгебры).

13. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Приведение формул логики высказываний к совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме. Единственность совершенной дизъюнктивной нормальной формы.

14. Понятие сигнатуры и модели (алгебраической системы) данной сигнатуры. Примеры моделей: стандартная модель арифметики; евклидова плоскость в сигнатуре элементарной геометрии Тарского $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$; модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.

15. Язык логики предикатов первого порядка данной сигнатуры. Свободные и связанные переменные, термы, формулы. Замкнутые формулы. Подстановка терма вместо переменной.

16. Семантика логики предикатов первого порядка. Расширение сигнатуры данной модели константами. Значение замкнутого терма расширенной сигнатуры в данной модели. Истинностное значение замкнутой формулы расширенной сигнатуры в данной модели.

17. Предикаты и функции, выразимые в данной модели. Выразимость предиката параллельности прямых $ab\|cd$ в языке элементарной геометрии и формулировка аксиомы о параллельных.

18. Выполнимые формулы и множества формул языка первого порядка. Общезначимые и тождественно ложные формулы, их связь с выполнимыми формулами; примеры.

19. Равносильность формул языка первого порядка, важнейшие равносильности. Переименование связанных переменных. Приведение формулы языка первого порядка к предварённой форме.

20. Теория первого порядка, её аксиомы и теоремы. Модель данной теории. Понятие выполнимой теории. Примеры теорий: теория строгих частичных порядков, теория отношения эквивалентности, теория простых графов.

21. Теории первого порядка с равенством. Нормальные модели. Теорема о существовании нормальной модели у выполнимой теории с равенством.

22. Важнейшие формальные теории: арифметика Пеано PA, теория множеств Цермело–Френкеля ZFC.

23. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Выводимость в теории, простейшие свойства выводимости. Доказуемые, опровержимые, независимые формулы для данной теории.

24. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.

25. Общезначимость аксиом исчисления предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.

26. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (без доказательства). Следствие: теорема Гёделя–Мальцева о компактности для логики предикатов.

27. Нестандартные модели арифметики, их существование. Понятие галактики. Описание отношения порядка на элементах данной галактики. Плотность порядка на множестве галактик.

1. Теория множеств Цермело-Френкеля с аксиомой выбора. Основные понятия: множество, принадлежность, равенство множеств. Аксиомы экстенсиональности (объемности) и равенства. Схема аксиом выделения. Парадокс Рассела. Аксиомы пары, степени, пустого множества, бесконечности и регулярности. Схема аксиом подстановки. Аксиома выбора.

МНОЖЕСТВО — СОВОКУПНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ

$x \in y \Leftrightarrow$ X ЯВЛЯЕТСЯ ЭЛЕМЕНТОМ МН-ВА y

$x = y$ КОГДА x И y СОСТОЯТ ИЗ ОДНИХ И ТЕХ ЖЕ ЭЛЕМЕНТОВ

Теория множеств Цермело-Френкеля с аксиомой выбора.

- (Аксиома экстенсиональности) $\forall x\, \forall y\, (x = y \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y))$
- (Аксиома равенства) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \to (x \in z \leftrightarrow y \in z))$
- (Аксиома пары) Для любых множеств x и y найдется множество $\{x, y\}$, элементами которого являются в точности x и y.
- (Аксиома объединения) Для любого множества X существует множество $\bigcup X$, содержащее в точности те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из элементов множества X.
- (Аксиома степени) Для любого множества X существует множество $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X.
- (Аксиома пустого множества) Существует пустое множество $\varnothing$, т.е. такое множество, которое не содержит элементов.
- (Аксиома бесконечности) Существует множество S такое, что $\varnothing \in S$ и $\forall x\, (x \in S \to x \cup \{x\} \in S)$.
- (Схема аксиом выделения) Для любого свойства множеств φ и множества Y существует множество $Z = \{x \in Y \mid \varphi(x)\}$.
- (Схема аксиом подстановки) Пусть свойство $\varphi(x, y)$ — такое, что для любого множества x найдется не более одного множества y, для которого $\varphi(x, y)$. Тогда для любого X найдется множество $Y = \{y \mid \exists x \in X\ \varphi(x, y)\}$.
- (Аксиома регулярности) Любое непустое множество X содержит элемент y, для которого $y \cap X = \varnothing$.
- (Аксиома выбора) Для любого семейства непустых множеств S существует функция выбора на S, т.е. такая функция $f : S \to \bigcup S$, что $\forall x \in S\ (f(x) \in x)$.

ПАРАДОКС РАССЕЛА

R — МН-ВО ВСЕХ МНОЖЕСТВ, КОТОРЫЕ НЕ ЯВЛ. СВОИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ $R = \{x \mid x \in x\} \Rightarrow R \in R$ ВЫПОЛН. ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА $R \notin R$

2. Определение множества натуральных чисел по фон Нейману. Принцип математической индукции. Принцип порядковой индукции. Принцип минимального элемента.

Мн-во A наз. индуктивным, если $\varnothing \in A$ и $\{\forall x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A\}$ (аксиома ∞)

$\mathbb{N}$ (или ω) – это наименьшее по включению индуктивное множество

$0 = \varnothing$

$x+1 = x \cup \{x\}$

$\left.\begin{array}{l} P \subset \mathbb{N} \\ 0 \in P \\ \forall x \in P \; x+1 \in P \end{array}\right\} \Rightarrow P = \mathbb{N}$

т.к. если P – индуктивное, то $\forall x \in P \; x+1 \in P$

Элементы $\mathbb{N}$ наз. натуральными числами

Теорема (принцип мат. индукции)

Дано некоторое множество A

Если $0 \in A$ и $\forall n \in \mathbb{N} (n \in A \rightarrow n+1 \in A)$, то $\mathbb{N} \subset A$

▷ Рассмотрим мн-во $A \cap \mathbb{N}$

① $0 \in A \cap \mathbb{N}$

② мн-во замкнуто отн. прибавления 1: если $x \in A \cap \mathbb{N}$, то по усл. $x+1 \in A$

$x+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in A \cap \mathbb{N}$

$D \cap \mathbb{N}$ – индуктивно $\Rightarrow \mathbb{N} \subset A \cap \mathbb{N} \subset A$ ◁

по лемме

Лемма Пересечение любого непустого семейства I инд. мн-в явл. индуктивным

▷ Рассмотрим $A \in I$. Имеем
$\bigcap I = \{x \in A \mid \forall B \in I \; x \in B\}$

$\varnothing \in \bigcap I$ Если $y \in \bigcap I$, то $\forall B \in I \; y \in B$

все B индуктивны $\Rightarrow y \cup \{y\} \in B$ для всякого $B \in I$

Получаем, что $y \cup \{y\} \in \bigcap I$

$\bigcap I$ – инд. мн-во ◁

Теорема (принцип порядковой индукции)

Дано мн-во A. Если $\forall n \in \mathbb{N} \; (\forall m < n \; m \in A \rightarrow n \in A)$ то $\mathbb{N} \subset A$

▷ Рассмотрим мн-во
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y < x \; y \in A\}$

Поскольку $0 = \varnothing$, имеем $0 \in B$

Допустим $n \in \mathbb{N}$ и $n \in B$. Тогда $\forall y < n \; y \in A$

$\forall y < n+1 \; y \in A \Leftrightarrow \forall y < n \; y \in A$ и $n \in A$

Получаем, что $(n+1) \in B$. По теореме о мат. индукц., $\mathbb{N} \subset B$

Тогда $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in B \Rightarrow n \in A$

Другими словами, $\mathbb{N} \subset A$ ◁

переформулировка

Теорема (принцип минимального эл-та)

Пусть A — непустое подмн-во $\mathbb{N}$. Тогда A содержит $<$—мин. эл-т, т.е. такой эл-т $n \in A$, что $\forall m < n \quad m \notin A$

▷ Предположим, что такого эл-та нет. и рассм. $B = \mathbb{N} \setminus A$

Проверим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (\forall m < n \ \ m \in B \Rightarrow n \in B)$$

Действительно, пусть

$$n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall m < n \quad m \in B = \mathbb{N} \setminus A$$

$$\forall m < n \quad m \notin A$$

По нашему предположению $n \notin A$, иначе n — $<$—мин. элемент

Имеем $n \in \mathbb{N} \setminus A = B$. По теореме о порядковой индукции $\mathbb{N} \subset B$, т.е. $A = \varnothing$. Противоречие.

$\Rightarrow A$ содержит $<$—минимальный эл-т ◁

3. Существование и единственность функции натурального аргумента, определяемой по рекурсии. Определение сложения и умножения натуральных чисел.

Теорема (о рекурсии)

Пусть Y — непуст. мн-во $y_0 \in Y$ и
$h: Y \to Y$ — любая функция

Тогда $\exists!$ функция $f: \mathbb{N} \to Y$,
которая $\forall n \in \mathbb{N}$ уд. условию

$$\begin{cases} f(0) = y_0 \\ f(n+1) = h(f(n)) \end{cases}$$

Лемма $\forall n \in \mathbb{N}\ (n = 0 \vee \exists m \in \mathbb{N}\ n = m+1)$

(разбирали на семинаре)

$\triangleright$ Пусть F — мн-во всех ф-ий
$g: m \to Y$ $m \in \mathbb{N}$, уд. условиям
на $\operatorname{dom} g$ (области определения)

$\forall$ 2 функций $g_0, g_1 \in F$ совпадают
на $\cap \operatorname{dom} g_{0,1}$

В противном случае $g_0(k) \neq g_1(k)$

$g_0(0) = y_0 = g_1(0) \Rightarrow k \neq 0$

$\Rightarrow k = s+1$, причём $g_0(s) = g_1(s)$, т.к. k – минимальный

$$g_0(k) = g_0(s+1) = h(g_0(s)) = h(g_1(s)) =$$
$$= g_1(s+1) = g_1(k) \Rightarrow \text{противоречие}$$

Каждая $g: m \to Y$ есть подмножество $m \times Y \subset \mathbb{N} \times Y$

Рассмотрим множество $f := \bigcup F \subset \mathbb{N} \times Y$ и докажем, что f явл. искомой ф-цей из $\mathbb{N}$ в Y

Опр. Соответствие $R \subset A \times B$ функционально, если $\forall a \in A \ \forall b_1, b_2 \in B$ $((a, b_1) \in R \wedge (a, b_2) \in R \Rightarrow b_1 = b_2)$

Отношение $f = \bigcup F$ функционально, т.к. $\forall$ 2 эл-та F совпадают на общей области определения.

Св-ва ● очев. выполняются для f.

Докажем тотальность, рассуждая от противного.

Рассмотрим min k такое, что $k \notin \operatorname{dom} f$. Имеем $f: k \to Y$

Можно продолжить f до функции $f_0: k+1 \to Y$

$$\begin{cases} f_0(k) := y_0, & \text{если } k=0 \\ f_0(k) := h(f(s)), & \text{если } k=s+1 \end{cases}$$

$f_0 \in F \Rightarrow k \in \operatorname{dom} f \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ такая ф-ия f существует $\triangleleft$

Определение сложения и умножения

Опр. Пусть $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $s(n) = n+1$
Сложение $+$ определяется как $!$ функция, у.д. рекурсивным усл. $\forall$ $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} m+0=m \\ m+s(n) = s(m+n) \end{cases}$$

Опр. Умножение $\cdot$ опр. как $!$ ф-ия из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, у.д. рекурсивным усл. $\forall$ $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot s(n) = m \cdot n + m \end{cases}$$

4. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку. Теорема Кантора: из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.

ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

СВ-ВА:

— ВСЯКОЕ НЕПУСТОЕ ВУМ ИМЕЕТ НАИМЕНЬШИЙ ЭЛ-Т

— ВСЯКИЙ ОТЛИЧНЫЙ ОТ НАИБОЛЬШЕГО ЭЛ-Т $x \in X$ ИМЕЕТ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ, ТО ЕСТЬ

$$\exists y \in X \ \forall z \in X \ (x < z \rightarrow y \leq z)$$

— ВСЯКОЕ ОГРАНИЧЕННОЕ СВЕРХУ ПОДМНОЖЕСТВО ИМЕЕТ ТОЧНУЮ ВЕРХНЮЮ ГРАНЬ

ЛЕММА. ДАНЫ ВУМ $(X, <)$ И Ф-ЦИЯ $f: X \rightarrow X$, СОХРАНЯЮЩАЯ ПОРЯДОК.

ТОГДА $x \leq f(x) \quad \forall x \in X$

$$(x < y \rightarrow f(x) < f(y))$$

▷ ПУСТЬ $Y = \{x \in X \mid f(x) < x\} \neq \varnothing$

И РАССМ. $a = \min Y$

$f(a) < a$, Т.К. $a \in Y$

$f(f(a)) < f(a)$ ПО МОНОТОННОСТИ f

$\Rightarrow f(a) \in Y$ и $f(a) < a \Rightarrow$ противоречие

$\Rightarrow Y = \varnothing$ $\triangleleft$

Опр. Начальным отрезком мн-ва $(X, <)$ наз. такое подмножество $Y \subset X$, для которого

$$\forall x, y \in X \; (y < x \wedge x \in Y \Rightarrow y \in Y)$$

Для $a \in X$ обозначим $[0, a) = \{x \in X \mid x < a\}$

<u>Наблюдение</u> $\forall$ собственный начал. отрезок $(X, <)$ имеет вид $[0, a)$ для некоторого $a \in X$

Утверждение ВУМ не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку.

$\triangleright$ Допустим, $\exists$ собств. нач. отрезок $Y \subset X$ и изоморфизм $f: X \to Y$

Рассмотрим $a \in X \setminus Y$

Имеем $f(a) < a$, т.к. $a \notin Y$, $f(a) \in Y$ и Y явл. начальным отрезком X

Противоречие с утв. предыдущей леммы (в ВУМ $f(a) \geq a$) $\triangleleft$

$\triangleright$ $\triangleleft$

Теорема 20. Пусть A и B — два вполне упорядоченных множества. Тогда либо A изоморфно некоторому начальному отрезку множества B, либо B изоморфно некоторому начальному отрезку множества A.

$\triangleleft$ Отметим прежде всего, что начальный отрезок может совпадать со всем множеством, так что случай изоморфных множеств A и B также покрывается этой теоремой.

Определим отображение f из A в B таким рекурсивным правилом: для любого $a \in A$

> *$f(a)$ есть наименьший элемент множества B, который не встречается среди $f(a')$ при $a' < a$.*

Это правило не определено в том случае, когда значения $f(a')$ при $a' < a$ покрывают всё B. Применяя теорему 19, мы получаем функцию f, согласованную с этим правилом. Теперь рассмотрим два случая:

- Функция f определена на всём A. Заметим, что рекурсивное определение гарантирует монотонность, поскольку $f(a)$ определяется как минимальный ещё не использованный элемент; чем больше a, тем меньше остаётся неиспользованных элементов и потому минимальный элемент может только возрасти (из определения следует также, что одинаковых значений быть не может). Остаётся лишь проверить, что множество значений функции f, то есть $f(A)$, будет начальным отрезком. В самом деле, пусть $b < f(a)$ для некоторого $a \in A$; надо проверить, что b также является значением функции f. Действительно, согласно рекурсивному определению $f(a)$ является наименьшим неиспользованным значением, следовательно, b уже использовано, то есть встречается среди $f(a')$ при $a' < a$.

- Функция f определена лишь на некотором начальном отрезке $[0, a)$. В этом случае этот начальный отрезок изоморфен B, и функция f является искомым изоморфизмом. В самом деле, раз $f(a)$ не определено, то среди значений функции f встречаются все элементы множества B. С другой стороны, f сохраняет порядок в силу рекурсивного определения.

Таким образом, в обоих случаях утверждение теоремы верно. $\triangleright$

5. Ординалы. Порядок на ординалах. Принцип трансфинитной индукции. Парадокс Бурали-Форти.

Идея: трансфинитно продолжим ряд натуральных чисел так, чтобы всякий член ряда был равен множеству предшествующих членов ряда.

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{N}+1, \quad \mathbb{N}+2, \quad \ldots, \quad \mathbb{N}+\mathbb{N}, \quad \ldots$$

ТРАНСФИНИТНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЯДА $\mathbb{N}$ ЧИСЕЛ

Обозначение: $x+1 := x \cup \{x\}$.

Определение. Множество T называется *транзитивным*, если $\bigcup T \subset T$, или эквивалентно $\forall x, y\ (x \in y \in T \to x \in T)$.

Ординал — это транзитивное множество, все элементы которого также транзитивны.

(ВСЯКИЙ ЭЛЕМЕНТ ЭЛЕМЕНТА — ЭЛЕМЕНТ)

Порядок на ординалах

Аксиома регулярности: $\forall x\ (x \neq \varnothing \to \exists y \in x\ \forall z \in x\ z \notin y)$.

Лемма (иррефлексивность и транзитинвость)

Для любых ординалов α, β и γ имеем

- $\alpha \notin \alpha$,
- $\alpha \in \gamma$, если $\alpha \in \beta$ и $\beta \in \gamma$.

Доказательство.

Предположим, что $\alpha \in \alpha$, и рассмотрим множество $\{\alpha\}$. В нём по аксиоме регулярности должен найтись элемент, не содержащий α. Но такого элемента нет. Следовательно, $\alpha \notin \alpha$.

Рассмотрим ординалы α, β и γ такие, что $\alpha \in \beta \in \gamma$. В силу транзитивности γ, получаем, что $\alpha \in \gamma$. □

Аксиома регулярности: $\forall x\, (x \neq \varnothing \to \exists y \in x\ \forall z \in x\ z \notin y)$.

(т.е. z не меньше y
в смысле принадлежности)

Лемма. Всякое непустое множество ординалов X содержит $\in$-минимальный элемент.

по аксиоме регулярности y-минимальный эл-т

Лемма (линейность)

Для любых ординалов α и β верно, что $\alpha \in \beta$, или $\alpha = \beta$, или $\beta \in \alpha$.

Доказательство:

Допустим, что это не так, т.е. существует ординал α, который несравним с некоторым ординалом.

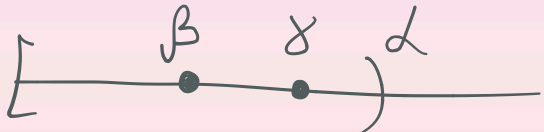
Порядок на ординалах

Обозначение: $x < y :\Leftrightarrow x \in y$.

Теорема. Класс всех ординалов линейно упорядочен с помощью $<$. Более того, всякое непустое множество ординалов содержит $<$-наименьший элемент.

Следствие. Любой ординал α сам как множество вполне упорядочен с помощью $<$ и является начальным отрезком в классе всех ординалов.

$\alpha = \{\beta \mid \beta \underset{\in}{<} \alpha\}$



$\beta \in \gamma \in \alpha \Rightarrow \beta \in \alpha \Rightarrow$

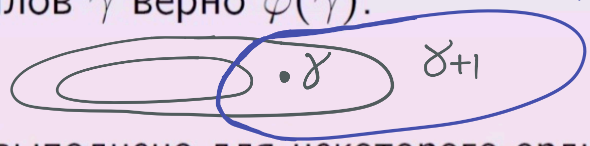
Трансфинитная индукция

Теорема (трансфинитная индукция). Пусть φ — некоторое свойство множеств. Допустим, что для всякого ординала α имеет место

$$\forall \beta < \alpha \, \varphi(\beta) \to \varphi(\alpha).$$

Тогда для всех ординалов γ верно $\varphi(\gamma)$.

$X \neq \varnothing$, т.к. $\gamma \in X$



Доказательство.

Допустим, что $\varphi(\gamma)$ не выполнено для некоторого ординала γ.

Рассмотрим подмножество X множества $\gamma + 1 = \gamma \cup \{\gamma\}$, состоящее из ординалов, которые не удовлетворяют свойству φ.

Поскольку множество X непусто, оно содержит $<$-минимальный элемент α. Получаем, что $\varphi(\alpha)$ верно, поскольку $\varphi(\beta)$ верно для любого $\beta < \alpha$. Противоречие.

Следовательно, для всех ординалов γ верно $\varphi(\gamma)$. □

Парадокс Бурали-Форти

Утверждение (парадокс Бурали-Форти 1897). Класс всех ординалов не является множеством.

Доказательство.

Допустим, что существует множество O, которое в точности содержит все ординалы.

Тогда O является транзитивным множеством транзитивных множеств, т.е. ординалом.

Следовательно, множество $O \in O$, что противоречит иррефлексивности $\in$. □

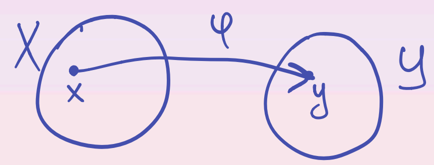
Упражнение. Каждое натуральное число и всё множество $\mathbb{N}$ — ординалы.

6. Порядковый тип вполне упорядоченного множества. Теорема Кантора: для всякого вполне упорядоченного множества существует единственный ординал, который ему изоморфен.

Определение. Ординал α называется порядковым типом вполне упорядоченного множества $(X, <)$, если он изоморфен $(X, <)$.

Схема аксиом подстановки. Пусть свойство $\varphi(x, y)$ — такое, что для любого множества x найдется не более одного множества y, для которого $\varphi(x, y)$. Тогда для любого X найдется множество $Y = \{y \mid \exists x \in X \ \varphi(x, y)\}$.

Теорема (Кантор). Пусть $(X, <)$ — вполне упорядоченное множество. Тогда существует единственный ординал α изоморфный множеству $(X, <)$.



Доказательство теоремы:

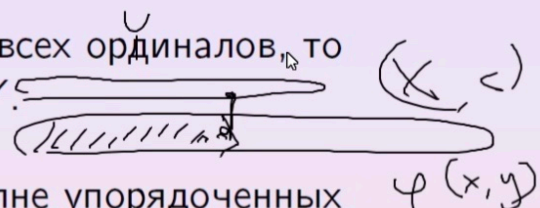
Рассмотрим свойство $\varphi(x, y)$: $x \in X$, y — ординал, и $[0, x)_X \cong y$.

Видим, что для любого множества x найдется не более одного множества y, для которого имеет место $\varphi(x, y)$.

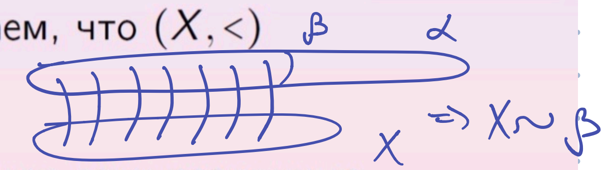
$y_1 < y_2 \Rightarrow [0, y_1) \subset [0, y_2)$ и $[0, y_1) \sim [0, y_2)$ — противоречие

По аксиоме подстановки найдется множество $Y = \{y \mid \exists x \in X \ \varphi(x, y)\}$, содержащее те и только те ординалы, которые изоморфны собственным начальным отрезкам $(X, <)$.

Поскольку не существует множества всех ординалов, то найдется ординал α, не лежащий в Y.



По теореме Кантра о сравнимии вполне упорядоченных множеств множество $(X, <)$ изоморфно некоторому начальному отрезку α. Поскольку α и все его собственные начальные отрезки являются ординалами, получаем, что $(X, <)$ изоморфно ординалу.



Единственность следует из того, что, для двух различные ординалов, один из них является собственным начальным отрезком другого. Следовательно, разные ординалы неизоморфны как вполне упорядоченные множества.

7. Трансфинитные последовательности. Теорема о трансфинитной рекурсии.

Определение.

Пусть ξ — некоторый ординал. Множество g называется *ξ-последовательностью*, если $g : \xi \to X$ для некоторого X.

Такие последовательности также обозначают $(x_\eta)_{\eta<\xi}$. Тогда образ ординала $\eta < \xi$ при данном отображении обозначают x_η.

Множество называется *трансфинитной последовательностью*, если оно является ξ-последовательностью для некоторого ординала ξ.

Определение.

Пусть $\varphi(x, y)$ — некоторое свойство множеств, причем для любой трансфинитной последовательности x существует не более одного множество y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$.

Будем говорить, что *трансфинитная последовательность g (длины ξ) удовлетворяет рекурсивному условию, заданному φ*, если для всякого ординала $\eta < \xi$ имеет место $\varphi(g{\restriction}_\eta, g(\eta))$.

На $\cap$ областей определения α-послед. и β-послед. совпадают. $\Rightarrow$ у пос-ти g $\exists$ продолжение $\Rightarrow$ усл. 1 и усл. 2 не выполняются вместе

Теорема (о трансфинитной рекурсии)

Пусть $\varphi(x, y)$ — некоторое свойство множеств, причем для любой трансфинитной последовательности x существует не более одного множество y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$.

Тогда выполнено следующее:

усл.1
- любо для любого ординала α существует единственная α-последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ,

усл.2 $\alpha < \beta$
- либо существует единственная трансфинитная последовательность g, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ, для которой не существует такого y, что $\varphi(g, y)$.

$g(0), g(1), \ldots$ — можем продолжить сколь угодно далеко

$g(0), g(1), \ldots$ $-$

Доказательство теоремы:

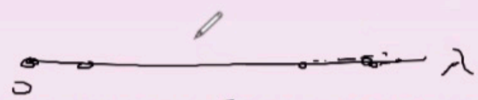
Будем говорить, что *трансфинитная последовательность g (длины ξ) удовлетворяет рекурсивному условию*, если для всякого ординала $\eta < \xi$ имеет место $\varphi(g\restriction_\eta, g(\eta))$.

Любые две трансфинитные последовательности g_1 и g_2, удовлетворяющие рекурсивному условию, совпадают на пересечении своих областей определения. В противном случае рассмотрим $\in$-минимальный ординал λ такой, что $g_1(\lambda) \neq g_2(\lambda)$. В силу минимальности λ получаем, что $g_1\restriction_\lambda = g_2\restriction_\lambda$. Кроме того, имеют место условия $\varphi(g_1\restriction_\lambda, g_1(\lambda))$ и $\varphi(g_2\restriction_\lambda, g_2(\lambda))$. Следовательно, $g_1(\lambda) = g_2(\lambda)$, противоречие.

Таким образом, любые две α-последовательности, удовлетворяющие рекурсивному условию, совпадают.

Предположим, что не для всякого ординала α существует α-последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию. Рассмотрим минимальное ординал λ, для которого не существует соответствующей λ-последовательности.

Видим, что $\lambda \neq 0$. Проверим, что λ не является предельным ординалом. Рассмотрим условие $\psi(u, v)$: u — ординал, v — u-последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию.



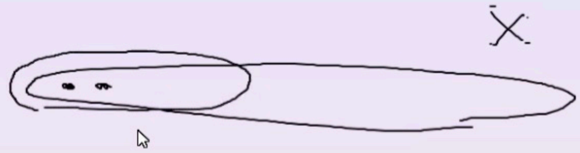
Для всякого u существует не более одного v такого, что верно $\psi(u, v)$. По аксиоме подстановки существует множество $V = \{v \mid \exists u \in \lambda\ \psi(u, v)\}$. Тогда $\bigcup V$ — λ-последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию. Противоречие.

Следовательно, $\lambda = \lambda_0 + 1$ для некоторого ординала λ_0. По минимальности λ, найдется λ_0-последовательность g, удовлетворяющая рекурсивному условию. Видим, что не существует y такого, что $\varphi(g, y)$. В противном случае мы могли бы продолжить g до функции на $\lambda_0 + 1$, что противоречит выбору λ. Нашли последовательность, которую нельзя продолжить.

Теорема доказана.

8. Теорема Цермело. Сравнимость любых двух множеств по мощности. Кардиналы. Всякое множество равномощно единственному кардиналу.

Теорема Цермело. Для всякого множества X существует бинарное отношение $<$ на X такое, что $(X, <)$ — вполне упорядоченное множество.

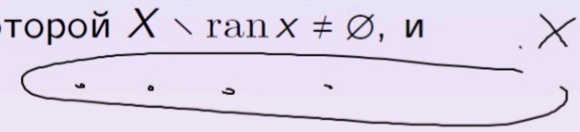


Доказательство:

Пусть f — функция выбора на семействе всех непустых подмножеств X (т.е. функция, отображающая всякое непустое подмножество X в элемент данного подмножества). Такая функция существует по аксиоме выбора.

Назовем трансфинитную последовательность g *хорошей*, если $\operatorname{ran} g \subset X$ и $g(\zeta) \neq g(\eta)$ для любых $\zeta \neq \eta$ из $\operatorname{dom} g$. Другими словами, хорошая последовательность — это трансфинитная последовательность, состоящая из различных элементов X.

Рассмотрим условие $\varphi(x, y)$: x — хорошая трансфинитная последовательность, для которой $X \setminus \operatorname{ran} x \neq \varnothing$, и $y = f(X \setminus \operatorname{ran} x)$.



Видим, что для любой трансфинитной последовательности x существует не более одного множество y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$.

Мы находимся в условиях теоремы о трансфинитной рекурсии. Заметим, что любая трансфинитная последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ, является хорошей.

Допустим, что для любого ординала α существует единственная α-последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ.

Придем к противоречию, рассмотрев условие $\psi(c, d)$: $c \in X$, d — ординал, и для некоторой трансфинитной последовательности g, удовлетворяющей рекурсивному условию, $g(d) = c$.

Видим, что для любого множества c существует не более одного множество d, удовлетворяющего условию $\psi(c, d)$. По аксиоме подстановки существует множество $D = \{d \mid \exists c \in P\ \psi(c, d)\}$. В нашем предположении D является множеством всех ординалов. Противоречие.

Рассмотрим условие $\varphi(x, y)$: x — хорошая трансфинитная последовательность, для которой $X \setminus \operatorname{ran} x \neq \varnothing$, и $y = f(X \setminus \operatorname{ran} x)$.

Видим, что для любой трансфинитной последовательности x существует не более одного множество y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$.

Мы находимся в условиях теоремы о трансфинитной рекурсии. Заметим, что любая трансфинитная последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ, является хорошей.

Следовательно, существует трансфинитная последовательность g, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ, которую нельзя продолжить, т.е. не существует такого y, что $\varphi(g, y)$.

Поскольку g является хорошей и g нельзя продолжить, получаем, что $X \setminus \operatorname{ran} g = \varnothing$. Другими словами, g является биекцией из некоторого ординала α в X. Тогда полный порядок на X определяется, как $\{(a, b) \in X \times X \mid g^{-1}(a) \in g^{-1}(b)\}$.

Напоминание: множества A и B равномощны, $A \sim B$, если существует биекция из A в B.

Определение. *Кардинал* — это такой ординал, который неравномощен никакому меньшему ординалу.

$\omega+1$, 2ω – не кардиналы ω – кардинал

Утверждение. Для любого множества A существует единственный кардинал, который равномощен A.

Определение. Кардинал κ называется мощностью множества A, если он равномощен A.

$0, 1, 2 \ldots \quad \omega, \quad \omega+1 \quad \omega+2 \ldots \omega+\omega \ldots \omega_1, \omega_2$

ω^ω – след. кардинал, если верна континуум-гипотеза

Док-во утв.: $\exists A$. Его можно упорядочить

Всякое ВУМ изоморфно ! ординалу α

$$k = \min\{\beta \leq \alpha \mid \beta \sim \alpha \sim A\}$$

кардинал

Допустим $A \sim k_1 \sim k_2 \quad k_1 \neq k_2$

Можно считать, что $k_1 \subset k_2 \Rightarrow$

$k_2 \sim k_1 \Rightarrow$ противоречие определению

9. Лемма Цорна. Объединение двух бесконечных множеств равномощно большему из них. Произведение двух бесконечных множеств равномощно большему из них. Бесконечное множество A равномощно A^* (множеству конечных последовательностей элементов A).

Теорема (лемма Цорна). Пусть $(P, <)$ — частично упорядоченное множество, в котором всякая цепь имеет верхнюю грань. Тогда $(P, <)$ содержит максимальный элемент.

Доказательство:

Пусть f — функция выбора на семействе всех непустых подмножеств P (т.е. функция, отображающая всякое непустое подмножество P в элемент данного подмножества). Такая функция существует по аксиоме выбора.

Назовем трансфинитную последовательность g *хорошей*, если $\operatorname{ran} g \subset P$ и $g(\zeta) < g(\eta)$ для любых $\zeta < \eta \in \operatorname{dom} g$. Другими словами, хорошая последовательность — это строго возрастающая трансфинитная последовательность элементов P.

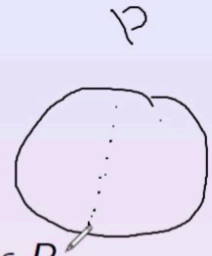
Назовем *строгой верхней гранью множества* $A \subset P$ такой элемент $z \in P$, что $a < z$ для любого $a \in A$. Через $b(A)$ обозначим множество всех строгих верхних граней A.

Рассмотрим условие $\varphi(x, y)$: x — хорошая трансфинитная последовательность, для которой $b(\operatorname{ran} x) \neq \varnothing$, и $y = f(b(\operatorname{ran} x))$.

Видим, что для любой трансфинитной последовательности x существует не более одного множество y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$.

Мы находимся в условиях теоремы о трансфинитной рекурсии. Заметим, что любая трансфинитная последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ, является хорошей.

Допустим, что для любого ординала α существует единственная α-последовательность, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ.



Придем к противоречию, рассмотрев условие $\psi(c, d)$: $c \in P$, d — ординал, и для некоторой трансфинитной последовательности g, удовлетворяющей рекурсивному условию, $g(d) = c$.

Видим, что для любого множества c существует не более одного множество d, удовлетворяющего условию $\psi(c, d)$. По аксиоме подстановки существует множество $D = \{d \mid \exists c \in P\ \psi(c, d)\}$. В нашем предположении D является множеством всех ординалов. Противоречие.

Следовательно, существует трансфинитная последовательность g, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ, которую нельзя продолжить, т.е. не существует такого y, что $\varphi(g, y)$.

Поскольку g является хорошей и g нельзя продолжить, получаем, что $b(\operatorname{ran} g) = \varnothing$. Кроме того, $\operatorname{ran} g$ является цепью в P. По условию P содержит верхнюю грань a для $\operatorname{ran} g$. Замечаем, что a — искомый максимальный элемент P, поскольку в противном случае $b(\operatorname{ran} g) \neq \varnothing$, и последовательность g можно было бы продолжить.

Доказательство леммы Цорна закончено.

Замечание. В теории множеств Цермело-Френкеля (без аксиомы выбора) аксиома выбора, теорема Цермело и лемма Цорна эквивалентны.

Утверждение

Если множество A бесконечно, то $A \sim A \times \{0, 1\}$.

Доказательство:

Рассмотрим множество P, состоящее из пар вида (B, f), где B — бесконечное подмножество A, $f\colon B \to B \times 2$ — биекция.

Зададим на P частичный порядок:

$$(B_1, f_1) \leqslant (B_2, f_2) \iff B_1 \subset B_2 \text{ и } f_1 = f_2{\restriction}_{B_1} .$$

Пусть C — произвольная цепь в P. Убедимся, что C имеет верхнюю грань (D, g).

Если $C = \varnothing$, то любой элемент P является верхней гранью C. Проверим, что P непусто. Бесконечное множество A содержит счетное подмножество D. Поскольку D счетно, существует биекция $g\colon D \to D \times 2$. Получаем, что пара $(D, g) \in P$ и является верхней гранью C.

Теперь предположим, что $C \neq \varnothing$.

Рассмотрим $D = \bigcup\{B \mid \exists f\ (B, f) \in C\}$, т.е. объединение всех первых компонент элементов C, и $g = \bigcup\{f \mid \exists B\ (B, f) \in C\}$, т.е. объединение всех вторых компонент.

$(a, b_1) \in g$, $(a, b_2) \in g$

Соответствие $g \subset D \times (D \times 2)$ функционально в силу того, что все вторые компоненты элементов C попарно совпадают на общих областях определения. Очевидно, что g тотально. Следовательно, g — функция.

$(a, b_1) \in f_1$ $(a, b_2) \in$

Функция g инъективна: для различных $d_1, d_2 \in D$ возьмём большее из множеств, которым принадлежат d_1 и d_2; на нём g является инъекцией по предположению.

Кроме того, g является сюръекцией: для любой пары $(d, i) \in D \times 2$ возьмём множество B, из которого произошло d и вспомним, что мы имели взаимно однозначное соответствие между ним и $B \times 2$.

Мы находимся в условиях леммы Цорна и знаем, что P содержит максимальный элемент (E, h).

Рассмотрим дополнение E до A. Если множество $A \setminus E$ конечно, то $A = (A \setminus E) \cup E \sim E$. Получаем, что $A \sim E \sim E \times 2 \sim A \times 2$ и всё доказано.

Если множество $A \setminus E$ бесконечно, то оно содержит счетное подмножество E'. Кроме того, существует биекция $h' : E' \to E' \times 2$.

Тогда $h \cup h'$ — биекция из $E \cup E'$ в $(E \cup E') \times 2 = E \times 2 \cup E' \times 2$. Получаем пару $(E \cup E', h \cup h')$ из P, которая больше пары (E, h), что противоречит максимальности (E, h). Таким образом, этот случай невозможен.

Теорема

Объединение двух бесконечных множеств A и B равномощно большему из них.

Доказательство:

Поскольку любые два множества сравнимы по мощности, можно считать без ограничения общности, что $A \lesssim B$. Тогда

$$B \lesssim A \cup B \lesssim B \times \{0, 1\} \sim B.$$

По теореме Кантора-Бернштейна получаем, что $B \sim A \cup B$.

Теорема Кантора-Бернштейна.

Если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$, то $A \sim B$

Утверждение

Если множество A бесконечно, то $A \sim A \times A$.

Доказательство:

Рассмотрим множество P, состоящее из пар вида (B, f), где B — бесконечное подмножество A, $f\colon B \to B \times B$ — биекция.

Зададим на P частичный порядок:

$$(B_1, f_1) \leqslant (B_2, f_2) \iff B_1 \subset B_2 \text{ и } f_1 = f_2\restriction_{B_1} .$$

Пусть C — произвольная цепь в P. Убедимся, что C имеет верхнюю грань (D, g).

Если $C = \varnothing$, то любой элемент P является верхней гранью C. Проверим, что P непусто. Бесконечное множество A содержит счетное подмножество D. Поскольку D счетно, существует биекция $g\colon D \to D \times D$. Получаем, что пара $(D, g) \in P$ и является верхней гранью C.

Теперь предположим, что $C \neq \varnothing$.

Рассмотрим $D = \bigcup\{B \mid \exists f\ (B, f) \in C\}$, т.е. объединение всех первых компонент элементов C, и $g = \bigcup\{f \mid \exists B\ (B, f) \in C\}$, т.е. объединение всех вторых компонент.

Как и в предыдущем доказательстве, замечаем, что соответствие $g \subset D \times (D \times D)$ является функцией.

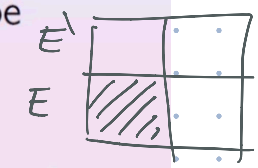
Функция g инъективна: для различных $d_1, d_2 \in D$ возьмём большее из множеств, которым принадлежат d_1 и d_2; на нём g является инъекцией по предположению.

Кроме того, g является сюръекцией: для любой пары $(d_1, d_2) \in D \times D$ возьмём множества B_1 и B_2, из которых произошли d_1, d_2, выберем из этих множеств большее и вспомним, что мы имели взаимно однозначное соответствие между ним и его квадратом.

Мы находимся в условиях леммы Цорна и знаем, что P содержит максимальный элемент (E, h).

Рассмотрим дополнение E до A. Если $A \setminus E \lesssim E$, то $A = (A \setminus E) \cup E \sim E$. Получаем, что $A \sim E \sim E \times E \sim A \times A$ и всё доказано.

Если $E \lesssim A \setminus E$, то $A \setminus E$ содержит подмножество E', которое равномощно E.



Биекцию h из E в $E \times E$ можно продолжить до биекции из $E \cup E'$ в $S = (E \cup E') \times (E \cup E')$, поскольку $E' \sim S \setminus (E \times E)$. Действительно,

$$S \setminus (E \times E) = (E \times E') \cup (E' \times E') \cup (E' \times E) \sim E \times E \sim E \sim E'.$$

Получаем пару из P, которая больше пары (E, h), что противоречит максимальности (E, h). Таким образом, этот случай невозможен.

Теорема

Произведение двух бесконечных множеств A и B равномощно большему из них.

Доказательство:

Поскольку любые два множества сравнимы по мощности, можно считать без ограничения общности, что $A \lesssim B$. Тогда

$$B \lesssim A \times B \lesssim B \times B \sim B.$$

По теореме Кантора-Бернштейна получаем, что $B \sim A \times B$.

Следствие

Если множество A бесконечно, то множество всех последовательностей длины $n > 0$, составленных из элементов A, равномощно A, т.е. $A^n \sim A$.

$A^{n+1} \sim A^n \times A \sim A \times A \sim A$

Следствие

Если множество A бесконечно, то множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов A, равномощно A, т.е. $A^* \sim A$.

Доказательство:

Имеем

пользуется аксиомой выбора

$$A^* = \bigcup\{A^n \mid n \in \mathbb{N}\} \sim A \times \mathbb{N} \sim A.$$

$A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$

ед мн-во

10. Принцип $\in$-индукции. Иерархия фон Неймана. Свойства множеств $\mathbb{V}_\alpha$. Ранг множества по фон Нейману. Вывод формулы $\operatorname{rnk} x = \sup\{\operatorname{rnk} y + 1 \mid y \in x\}$.

Положим $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g(n) = \bigcup \operatorname{ran} g$. Очевидно, что T — транзитивное множество, и $X \subset T$.

Проверим, что T является $\subset$-наименьшим из таких множеств.

Предположим, что $X \subset S$ для некоторого транзитивного множества S.

Имеем $g(0) = X \subset S$. Кроме того, если $g(m) \subset S$, то $g(m+1) = \bigcup g(m) \subset \bigcup S \subset S$.

По принципу математической индукции получаем, что $g(m) \subset S$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Следовательно, $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g(n) \subset S$. Доказали, что T является $\subset$-наименьшим из транзитивных множеств, содержащих X в качестве подмножества.

Лемма
Объединение любого семейства транзитивных множеств является транзитивным множеством.

Лемма
Пусть X — транзитивное множество. Тогда $X \subset \mathcal{P}(X)$, и множество $\mathcal{P}(X)$ является транзитивным.

Доказательство:
Проверим, что $X \subset \mathcal{P}(X)$. Если $x \in X$, то $x \subset X$ по транзитивности X. Следовательно, $x \in \mathcal{P}(X)$.

Проверим транзитивность $\mathcal{P}(X)$. Если $y \in \mathcal{P}(X)$, то $y \subset X \subset \mathcal{P}(X)$. Следовательно, $\mathcal{P}(X)$ является транзитивным множеством.

Иерархия фон Неймана

По трансфинитной рекурсии для каждого ординала ξ определим множество $\mathbb{V}_\xi$ так, чтобы

- $\mathbb{V}_0 = \varnothing$,
- $\mathbb{V}_{\eta+1} = \mathcal{P}(\mathbb{V}_\eta)$ для любого ординала η,
- $\mathbb{V}_\lambda = \bigcup_{\eta<\lambda} \mathbb{V}_\eta$ для любого предельного ординала λ.

Действительно, рассмотрим условие $\varphi(x, y)$: x — трансфинитная последовательность, и

$$y = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } \operatorname{dom} x = 0; \\ \mathcal{P}(x(\eta)), \text{ если } \operatorname{dom} x = \eta + 1 \text{ для некоторого } \eta; \\ \bigcup \operatorname{ran} x, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Видим, что для любой трансфинитной последовательности x существует ровно одно множество y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$. Мы находимся в условиях теоремы о трансфинитной рекурсии.

Иерархия фон Неймана

Получаем, что для любого ординала α существует единственная трансфинитная последовательность длины α, удовлетворяющая рекурсивному условию, заданному φ.

В силу единственности получающиеся трансфинитные последовательности продолжают одна другую.

Множество $\mathbb{V}_\xi$ определяется, как член с номером ξ для некоторой (или любой достаточно длинной) трансфинитной последовательности, удовлетворяющая рекурсивному условию.

Так определенный бесконечный ряд множеств $\mathbb{V}_\xi$ называется *иерархией фон Неймана*.

Иерархия фон Неймана

Для каждого ординала ξ определили множество $\mathbb{V}_\xi$ таким образом, что

- $\mathbb{V}_0 = \varnothing$;
- $\mathbb{V}_{\eta+1} = \mathcal{P}(\mathbb{V}_\eta)$ для любого ординала η,
- $\mathbb{V}_\lambda = \bigcup\limits_{\eta<\lambda} \mathbb{V}_\eta$ для любого предельного ординала λ.

Примеры: $\mathbb{V}_0 = \varnothing, \quad \mathbb{V}_1 = \{\varnothing\}, \quad \mathbb{V}_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

$\mathbb{V}_3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots, \mathbb{V}_\omega, \ldots.$

Иерархия фон Неймана

Утверждение

Для любых ординалов α и β имеет место следующее:

- $\mathbb{V}_\alpha$ транзитивно;
- $\mathbb{V}_\beta \subset \mathbb{V}_\alpha$, если $\beta < \alpha$.

Доказательство:

Оба пункта получаются трансфинитной индукцией по ординалу α. Разберем первый пункт.

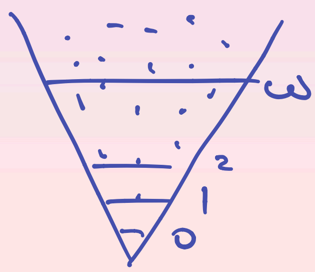
Рассмотрим ординал α такой, что для всех $\gamma < \alpha$ множество $\mathbb{V}_\gamma$ транзитивно. Если $\alpha = 0$, то $\mathbb{V}_0 = \varnothing$ является транзитивным.

Если $\alpha = \alpha_0 + 1$ для некоторого α_0, то $\mathbb{V}_\alpha = \mathcal{P}(\mathbb{V}_{\alpha_0})$. Поскольку $\mathbb{V}_{\alpha_0}$ транзитивно по предположению, множество $\mathbb{V}_\alpha$ транзитивно.

Если α — предельный ординал, то $\mathbb{V}_\alpha$ является объединением транзитивных множеств и, следовательно, транзитивно.

По индукции заключаем, что $\mathbb{V}_\alpha$ транзитивно для любого α.

Чтобы получить утверждение второго пункта, надо индукцией по α доказать, что для всех α верно $\forall \beta < \alpha\ \mathbb{V}_\beta \subset \mathbb{V}_\alpha$.



Принцип $\in$-индукции

$$A_0 \ni A_1 \ni A_2 \ni A_3 \ni \ldots\ldots$$

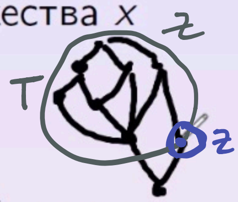
Аксиома регулярности: $\forall y\ (y \neq \varnothing \to \exists z \in y\ (z \cap y = \varnothing))$.

Теорема ($\in$-индукция). Пусть φ — некоторое свойство множеств. Тогда

$$\forall x\ (\forall y \in x\ \varphi(y) \to \varphi(x)) \to \forall x\ \varphi(x).$$

Доказательство:

Допустим, что $\varphi(x)$ не выполнено для некоторого множества x и $\forall a\,(\forall b \in a\, \varphi(b) \to \varphi(a))$.



Рассмотрим подмножество Z множества $T = \mathrm{TC}(\{x\})$, состоящее из множеств, которые не удовлетворяют свойству φ.

Видим, что множество Z непусто. Тогда по аксиоме регулярности оно содержит элемент z такой, что $z \cap Z = \varnothing$.

В силу транзитивности множества T, все элементы множества z лежат T (и не лежат Z). Получаем, что $\varphi(z)$ верно, поскольку $\varphi(y)$ верно для любого $y \in z$. Противоречие.

Следовательно, для всякого множества x (в предположении $\forall a\,(\forall b \in a\, \varphi(b) \to \varphi(a))$) имеет место $\varphi(x)$.

Иерархия фон Неймана

Теорема. Для всякого множества x существует ординал α такой, что $x \in \mathbb{V}_\alpha$.

Доказательство:

Рассмотрим свойство φ: существует ординал α такой, что $x \in \mathbb{V}_\alpha$.

Предположим, что нам дано множество y, все элементы которого обладают свойством φ, т.е. $\forall z \in y\, \varphi(z)$.

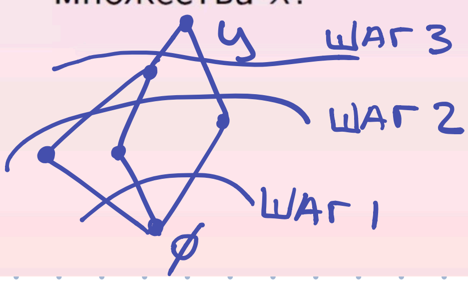
Теперь рассмотрим условие $\psi(c, d)$: d — наименьший ординал, для которого $c \in \mathbb{V}_d$. Заметим, что для любого элемента z множества y существует такой ординал β, что выполнено $\psi(z, \beta)$.

$\psi(c,d_1)$ и $\psi(c,d_2) \Rightarrow \begin{cases} d_1 \le d_2 \\ d_2 \le d_1 \end{cases} \Rightarrow d_1 = d_2$

Кроме того, для любого множества c существует не более одного множество d, удовлетворяющего условию $\psi(c,d)$. По аксиоме подстановки существует множество $D = \{d \mid \exists c \in y\ \psi(c,d)\}$.

Видим, что D — это множество ординалов. Возьмем точную верхнюю грань $\sup D$ всех элементов множества D. Получаем, что $y \subset \mathbb{V}_{\sup D}$, а потому $y \in \mathbb{V}_{\sup D+1}$. Следовательно, имеет место $\varphi(y)$.

Согласно принципу $\in$-индукции $\varphi(x)$ верно для любого множества x.



Ранг множества по фон Нейману

Определение. *Рангом множества x по фон Нейману* называется наименьший ординал α, для которого $x \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$ или, что эквивалентно, $x \subset \mathbb{V}_{\alpha}$.

Данный ординал обозначается $\operatorname{rnk} x$.

Напоминание: $\mathbb{V}_0 = \varnothing$, $\mathbb{V}_1 = \{\varnothing\}$, $\mathbb{V}_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Пример: $\operatorname{rnk} 0 = 0$, $\operatorname{rnk} 1 = 1$.

Ранг множества по фон Нейману

Лемма. $\forall x\ x \notin \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} x}$.

Доказательство:

Предположим, что $x \in \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} x}$ для некоторого множества x и придем к противоречию. $x \in V_{\beta+1} \Rightarrow$ rk $x \leq \beta$ не м.б.

Очевидно, что $\operatorname{rnk} x \neq 0$. Если $\operatorname{rnk} x = \beta + 1$ для некоторого ординала β, то по определению ранга $\operatorname{rnk} x \leqslant \beta$. Противоречие.

Осталось рассмотреть случай, когда $\operatorname{rnk} x$ — предельный ординал. В этом случае

$$\mathbb{V}_{\operatorname{rnk} x} = \bigcup_{\gamma < \operatorname{rnk} x} \mathbb{V}_\gamma .$$

Видим, что $x \in \mathbb{V}_\gamma$ для некоторого $\gamma < \operatorname{rnk} x$, $x \in \mathbb{V}_\gamma \subset \mathbb{V}_{\gamma+1}$ и $\operatorname{rnk} x \leqslant \gamma$. Противоречие.

Ранг множества по фон Нейману

Утверждение. Для любого множества x ранг $\operatorname{rnk} x = \sup \{\operatorname{rnk} y + 1 \mid y \in x\}$.

Доказательство:

Во-первых,

$$\forall y \in x\ \ y \in \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} y + 1}.$$

Тогда

$$x \subset \bigcup_{y \in x} \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} y+1} \subset \mathbb{V}_{\sup \{\operatorname{rnk} y + 1 \mid y \in x\}}.$$

Получаем, что $\operatorname{rnk} x \leqslant \sup \{\operatorname{rnk} y + 1 \mid y \in x\}$.

Теперь проверим, что $\operatorname{rnk} y + 1 \leqslant \operatorname{rnk} x$ для любого $y \in x$. Если $\operatorname{rnk} x < \operatorname{rnk} y + 1$, то $\operatorname{rnk} x \leqslant \operatorname{rnk} y$ и

$$y \in x \subset \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} x} \subset \mathbb{V}_{\operatorname{rnk} y},$$

что противоречит предыдущей лемме.

Следовательно, $\operatorname{rnk} y + 1 \leqslant \operatorname{rnk} x$ для любого $y \in x$, и

$$\sup \{\operatorname{rnk} y + 1 \mid y \in x\} \leqslant \operatorname{rnk} x.$$

Доказательство закончено.

Упражнение. Проверьте, что $\operatorname{rnk} \alpha = \alpha$ для любого ординала α.

11. Формулы логики высказываний. Таблица истинности формулы. Связь между формулами логики высказываний от n переменных и булевыми функциями. Теорема о функциональной полноте.

M — НЕПУСТОЕ МНОЖЕСТВО

n-АРНЫЙ ПРЕДИКАТ НА M: ФУНКЦИЯ
$Q: M^n \to \{0,1\}$ (ВАЛЕНТНОСТЬ n)

n-АРНАЯ ФУНКЦИЯ НА M: ФУНКЦИЯ $f: M^n \to M$
(ВАЛЕНТНОСТЬ n)

КОНСТАНТА: ЭЛЕМЕНТ M

FrVar — СВОБОДНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ (МОЖЕМ ПОДСТАВИТЬ СВЯЗАННУЮ ПЕР.)
BdVar — СВЯЗАННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

МНОЖЕСТВО ТЕРМОВ Tm_Σ ЕСТЬ НАИМЕНЬШЕЕ МН-ВО, ЗАМКН. ОТН. ПРАВИЛ:

- СВОБОДНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И КОНСТАНТЫ СУТЬ ТЕРМЫ
- ЕСЛИ $f \in Func_\Sigma$ ВАЛ. n И $t_1, \ldots, t_n$ — ТЕРМЫ, ТО $f(t_1, \ldots, t_n)$ ЕСТЬ ТЕРМ

Опр.

Множество формул Fm_Σ есть наименьшее множество, замкнутое относительно следующих правил:

- Если $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$ валентности n и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ есть формула (называемая *атомарной формулой*).
- Если A, B — формулы, то формулами являются $(A \to B)$, $\neg A$, $(A \land B)$, $(A \lor B)$.

- Если A — формула, и a — свободная переменная, то для любой связанной переменной x, не входящей в A, выражения $(\forall x\, A[a/x])$ и $(\exists x\, A[a/x])$ — формулы.

(Здесь $A[a/x]$ означает результат замены всех вхождений a в A на x.)

Таблицы истинности

Функции $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ принято задавать *таблицами истинности* вида

x_1	x_2	$\dots$	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	$\dots$	0	$f(0, 0, \dots, 0)$
0	0	$\dots$	1	$f(0, 0, \dots, 1)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	$\dots$	1	$f(1, 1, \dots, 1)$

В такой таблице 2^n строк.

Опр.

Оценка переменных: функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$.

Любая оценка продолжается естественным образом до отображения $f : \mathrm{Fm} \to \mathbb{B}$.

Опр.

$f(A) =$ *значение* формулы A при оценке f.
Определяется индукцией по построению A:

Утверждение.

Пусть $\mathrm{Var} = \{P_1, \dots, P_n\}$.
Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между оценками $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$ и наборами $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n$.

$$f \longmapsto (f(P_1), \dots, f(P_n)) \in \mathbb{B}^n$$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f_{\vec{x}}$, где оценка $f_{\vec{x}}$ определена таблицей

P_1	P_2	$\dots$	P_n
x_1	x_2	$\dots$	x_n

Опр.

Таблица истинности формулы A от n переменных есть булева функция $\varphi_A : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ такая, что

$$\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A),$$

для всех $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$.

Теорема о функциональной полноте

Для любой функции $\varphi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ найдётся такая формула A от n переменных, что $\varphi = \varphi_A$.

При этом можно считать, что A содержит лишь связки $\neg$ и $\vee$

Доказательство.

Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, & \text{если } x = \text{И};\\ \neg P, & \text{если } x = \text{Л}. \end{cases}$$

Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i},$$

где $\bigwedge_{j=1}^{m} B_j \rightleftharpoons ((B_1 \wedge B_2) \wedge \cdots \wedge B_m)$.

Имеем: для любой оценки f

$$f(A_{\vec{x}}) = \text{И} \iff f = f_{\vec{x}}. \qquad (1)$$

Пусть список $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ исчерпывает все $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$ для которых $\varphi(\vec{x}) = \text{И}$, то есть

$$\varphi(\vec{x}) = \text{И} \iff \exists j\ \vec{x} = \vec{x}_j. \qquad (2)$$

Положим

$$A \rightleftharpoons \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = \text{И} &\iff \exists j\ f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = \text{И} \\ &\iff \exists j\ \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по (1)} \\ &\iff \varphi(\vec{x}) = \text{И} \quad \text{по (2)}. \end{aligned}$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$. $\boxtimes$

12. Выполнимые формулы, тавтологии, тождественно ложные формулы и их взаимосвязь. Равносильность формул логики высказываний, связь с тождественной истинностью. Основные равносильности (тождества булевой алгебры).

Сигнатура Σ — совокупность имён функций, предикатов и констант. Задаётся

- $Pred_\Sigma$ предикатные символы (которыми обозн. предикаты)
- $Func_\Sigma$ функциональные символы
- $Const_\Sigma$ символы констант (которыми обозн. символы)
- функция валентности (число аргументов)

$$Pred_\Sigma \cup Func_\Sigma \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

т.е. ф-ии валентности n соотв. число n

Модель сигнатуры Σ есть непустое множество M вместе с отображением (интерпретацией), сопоставляющим

- каждому $P \in Pred_\Sigma$ биективно сопост. предикат P_M на M той ~~же~~ валентности
- — // — $f \in Func_\Sigma$ — // — f_M — // —
- — // — $c \in Const_\Sigma$ константу $c_M \in M$

Опр.

Пусть A — замкнутая формула сигнатуры $\Sigma(M)$. Отношение $M \vDash A$ «*формула A истинна в модели M*» определяется индукцией по построению A.

- $M \vDash P(t_1, \ldots, t_n) \overset{\text{def}}{\iff} P_M((t_1)_M, \ldots, (t_n)_M) = 1$, если $A = P(t_1, \ldots, t_n)$ — атомарная формула;

Формула $A(b_1, \dots, b_n)$ сигнатуры Σ **выполнима в модели (M, Σ)**, если $\exists$ константы $c_1, \dots, c_n \in M$, т.ч. предложение $A[b_1/\underline{c_1}, \dots b_n/\underline{c_n}]$ истинно

Формула $A(b_1, \dots, b_n)$ сигнатуры Σ **выполнима**, если она выполнима в некоторой модели (Σ, M)

$\exists F: F(A) = 1$

Формула A **общезначима (тожд. истинна)**, если $\neg A$ не выполнима

$\forall F \quad F(A) = 1$

Формула A **тожд. ложна**, если A не выполнима

$\forall F \quad F(A) = 0$

Утверждения 1 – 3 **равносильны**:

1. Ф-ла A тождественно ложна
2. Ф-ла A не выполнима
3. Ф-ла $\neg A$ тавтология

Основные равносильности логики высказываний (тождества булевой алгебры)

$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge A$	$\equiv$	A	$A \vee A$	$\equiv$	A
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$\perp$	$\equiv$	$A \wedge \neg A$	$\top$	$\equiv$	$A \vee \neg A$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	$A \to B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$