Числа Гурвица. Домашная контрольная работа №1 7.03.2021

Решения нужно присылать по адресу bbychkov@hse.ru до 21.03.2021 включительно.

Каждая задача оценивается в 2 балла. Оценка за работу равна минимуму из 10 *и суммы баллов за правильно решенные задачи.*

1. Пусть граф Γ — цикл на n вершинах. Докажите, что произведение в S_n всех транспозиций, соответствующих ребрам графа Γ, раскладывается в произведение двух независимых циклов.

2. Вычислите простые и связные простые числа Гурвица $h^{\circ}_{4;1^1 2^1 3^1}$ и $h_{4;1^1 2^1 3^1}$.

3. Вычислите простые и связные простые числа Гурвица $h^{\circ}_{3;1^1 4^1}$ и $h_{3;1^1 4^1}$.

4. Вычислите число Гурвица $h_{4;2^2}$ с помощью уравнения транспозиции.

5. Выпишите коэффициент при u^3 в производящем ряду $H^{\circ}(u;p_1,p_2,\ldots)$ для простых чисел Гурвица.

6. Докажите, что сфера с g ручками накрывает сферу с h ручками тогда и только тогда когда $g-1$ делится на $h-1$.

7. Докажите, что любое накрытие тора тором является неразветвленным.

1. Пусть граф Г — цикл на n вершинах. Докажите, что произведение в S_n всех транспозиций, соответствующих ребрам графа Г, раскладывается в произведение двух независимых циклов.

Факт

Добавляя транспозицию (ij) к произведению независ. циклов $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_m$, м.б. 2 варианта:

① $i\in\sigma_p$, $j\in\sigma_q$, $p\neq q$, тогда циклы склеятся

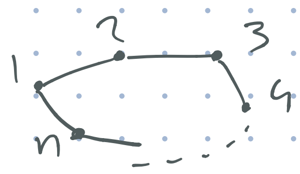
$$(\dots i-1\ i,\ i+1\dots)(\dots j-1\ j,\ j+1\dots)(i\,j)=$$
$$=(i\ j+1\ j+2\dots j-1\ j\ i+1\ i+2\dots i-1)$$

② $i,j\in\sigma_p$, тогда цикл разобьётся на 2:

$$(\dots i-1\ i\ i+1\dots j-1\ j\ j+1\dots)(i\,j)=$$
$$=(i\ j+1\ j+2\dots i-1)(j\ i+1\dots j-1)$$

Шаг 1 Имеем тождественную перестановку $(1)(2)(3)\dots(n)$

Нужно док-ть, что $n-1$ транспозиция склеивает, а 1 — разбивает цикл.



БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЯ ОБЩНОСТИ МОЖЕМ СЧИТАТЬ, ЧТО У НАС n-УГОЛЬНИК И ПЕРЕСТАНОВКИ ВИДА $(1 2), (2 3), \dots, (n-1\ n), (n 1)$

ШАГ 2.

$\forall$ ЦИКЛ ДЛИНЫ $< n$ НЕЛЬЗЯ РАСКЛЕИТЬ, Т.К. ДЛЯ РАСКЛЕИВАНИЯ ЦИКЛА НУЖНО ПРИМЕНИТЬ ТРАНСПОЗИЦИЮ $(i\ \ i+1)$, ГДЕ $i \in$ ЦИКЛУ И $i+1 \in$ ЦИКЛУ, Т.Е. ЦИКЛ РАСКЛАДЫВАЕТСЯ НА ТРАНСПОЗИЦИИ $(i-1\ \ i)(i+1\ \ i+2)(\ldots\ldots) \Rightarrow$ ЦИКЛ СОДЕРЖИТ ЭЛ-ТЫ $i+2$ И $i-1 \Rightarrow$ СОДЕРЖИТ $i+3$ И $i-2$ $\xRightarrow{\text{и т.д.}}$ СОДЕРЖИТ ВСЕ НОМЕРА ВЕРШИН ГРАФА

ШАГ 3.

НА ШАГЕ $n-1$ ПОЛУЧАЕМ ЦИКЛ ДЛИНЫ n $1, 2, \ldots, n \in$ ЦИКЛУ $\Rightarrow$ ПРИМЕНЯЯ ТРАНСПОЗИЦИЮ НА ШАГЕ n, ПОЛУЧАЕМ 2 ЦИКЛА. $\triangleleft$

2. Вычислите простые и связные простые числа Гурвица $h^{\circ}_{4;1^1 2^1 3^1}$ и $h_{4;1^1 2^1 3^1}$.

$$h^{\circ}_{m,\mu} = \frac{1}{n!} \left| \{ \tau_1, \ldots, \tau_m \text{ — ТРАНСПОЗИЦИИ} \in S_n, \text{ Т.Ч. } \tau_m \circ \ldots \circ \tau_1 \text{ ЭТО ПЕРЕСТАНОВКА ЦИКЛИЧЕСКОГО ТИПА } \mu \} \right|$$

ЧЁТНОСТЬ ЦИКЛИЧЕСКОГО ТИПА $= -1$

(Т.К. $(ij)(l\ m\ n) = (ij)(m\,l)(n\,m)$)

А $m = 4$, Т.Е. ЧЁТНОСТЬ $\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_m = 1$

$\Rightarrow$ ПРОТИВОРЕЧИЕ

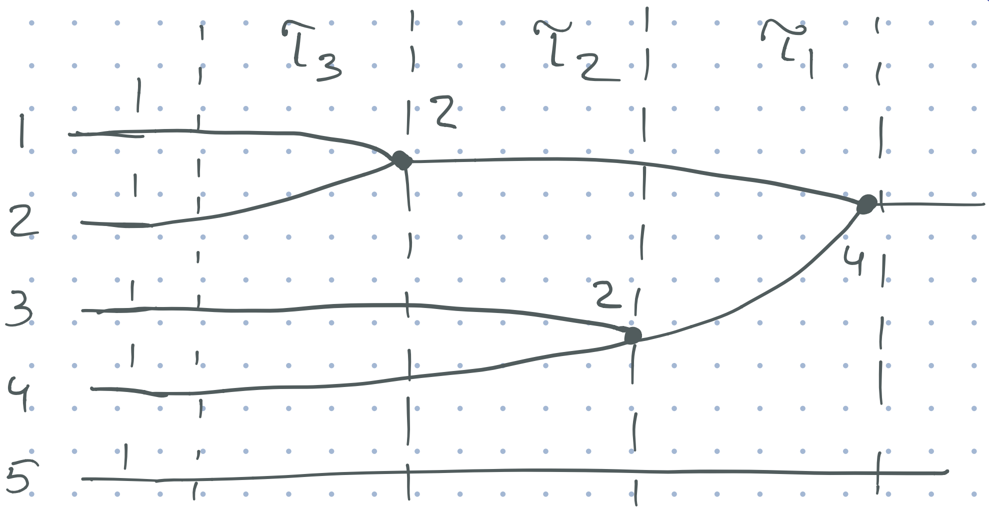
$h_{4;1^1 2^1 3^1} = 0$ и $h^{\circ}_{4;1^1 2^1 3^1} = 0$

3. Вычислите простые и связные простые числа Гурвица $h^{\circ}_{3;1^14^1}$ и $h_{3;1^14^1}$.

$m=3$ $\quad n=5$

$(1234)(5)$

Пользуемся „тропическим" вычислением чисел Гурвица



$\Rightarrow$ вес графа $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2\cdot 4 = 4$

веса вершин

т.к. в $(ij)(mk)$ ~~можем~~ поменять местами i,j и m,k $\Rightarrow 2\cdot 2=4$

$\Rightarrow \boxed{h^{\circ}_{3;1^14^1}=4}$

Т.к. цикл из их эл-ов $(abcd)(e)$, а $n=5$, то $\exists$ эл-т $f\neq a,b,c,d,e$, не переставляемый транспозициями

$\Rightarrow \boxed{h_{3;1^14^1}=0}$

5. Выпишите коэффициент при u^3 в производящем ряду $H^\circ(u; p_1, p_2, \ldots)$ для простых чисел Гурвица.

$$H^\circ(u, p_1, p_2, \ldots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h^\circ_{m;\mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \ldots \frac{u^m}{m!}$$

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \ldots) = \sum_{m=0}^{\infty} H^\circ_{(m)}(p_1, p_2, \ldots) \frac{u^m}{m!}.$$

Тогда уравнение транспозиции можно переписать в виде рекурсии

$$H^\circ_{(m+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left((i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right) H^\circ_{(m)} =$$

$$H_1^\circ = \frac{1}{2} p_2 e^{p_1}$$

$$H_2^\circ = \frac{1}{2}\Big((1+1) p_1^2 \frac{\partial}{\partial p_2} + 1 \cdot 1 \, p_2 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_1} +$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot 2 \, p_3 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2}\Big)\left(\frac{1}{2} p_2 e^{p_1}\right) = \frac{1}{2}\Big(2 \cdot \frac{1}{2} p_1^2 +$$

$$+ p_2 \cdot \frac{1}{2} p_2 + 2 p_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\Big) e^{p_1} = \frac{1}{4}\left(2p_1^2 + p_2^2 + 4p_3\right) e^{p_1}$$

$$H_3^0 = \frac{1}{2}\left((1+1)p_1^2\frac{\partial}{\partial p_2} + p_2\frac{\partial^2}{\partial p_1\partial p_1}\right) + \left(3p_1p_2\frac{\partial}{\partial p_3} + 2p_3\frac{\partial^2}{\partial p_1\partial p_2} + \cancel{4p_1p_3\frac{\partial}{\partial p_4}} + 3p_4\frac{\partial^2}{\partial p_1\partial p_3} + \cancel{4p_2^2\frac{\partial}{\partial p_4}} + 4p_4\frac{\partial^2}{\partial p_2\partial p_2}\right) H_2^0 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(2p_1^2\cdot 2p_2 + p_2(4+8p_1+2p_1^2+p_2^2+4p_3)\right) + \frac{1}{4}\left(3p_1p_2\cdot 4 + 2p_3 2p_2 + 3p_4\cdot 4 + \frac{1}{2}4p_4\cdot 2\right)e^{p_1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}p_1^2p_2 + \frac{1}{2}p_2 + p_1p_2 + \frac{1}{4}p_1^2p_2 + \frac{1}{8}p_2^3 + \frac{1}{2}p_2p_3 + 3p_1p_2 + p_2p_3 + 3p_4 + p_4\right)e^{p_1} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}p_1^2p_2 + \frac{1}{2}p_2 + 4p_1p_2 + \frac{1}{8}p_2^3 + \frac{3}{2}p_2p_3 + 4p_4\right)e^{p_1}$$

$\Rightarrow$ при u^3 коэф-т

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}p_1^2p_2 + p_2 + 8p_1p_2 + \frac{1}{4}p_2^3 + 3p_2p_3 + 8p_4\right)e^{p_1}}{3!}$$

4. Вычислите число Гурвица $h_{4;2^2}$ с помощью уравнения транспозиции.

НАЙДЁМ $h_{4,2^2}$ С ПОМОЩЬЮ УР-ИЯ

$$H^{\circ} = \exp(H) = 1 + H + \frac{H^2}{2!} + \ldots$$

$$[u, p_2^2] H_4^{\circ} = \underbrace{h_{4,2^2} p_2^2 \frac{u^4}{4!}}_{H} + \underbrace{\frac{2 h_{1,2} p_2 \cdot \frac{u}{1!} h_{3,2} p_2 \frac{u^3}{3!}}{2!}}_{\frac{H^2}{2!}} =$$

$$= h_{4,2^2} p_2^2 \frac{u^4}{4!} + \frac{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} p_2^2 \frac{1}{2!} \frac{u^4}{3!}}{2} \Rightarrow$$

$$h_{4,2^2} p_2^2 \frac{u^4}{4!} + p_2^2 \frac{u^4}{4!} = [u, p_2^2] H_4^{\circ}$$

$$h_{4,2^2} = \frac{[u, p_2^2] H_4^{\circ}}{p_2^2 \frac{u^4}{4!}} - 1$$

НАЙДЁМ $[u, p_2^2] H_4^{\circ}$ С ПОМОЩЬЮ УР-ИЯ ТРАНСПОЗИЦИИ

$$H_3^{\circ} = \left(\frac{3}{4} p_1^2 p_2 + \frac{1}{2} p_2 + 4 p_1 p_2 + \frac{1}{8} p_2^3 + \frac{3}{2} p_2 p_3 + 4 p_4\right) e^{p_1}$$

(ЗАДАЧА 4) И

$$H^{\circ}_{(m+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left((i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right) H^{\circ}_{(m)}$$

p_2^2 из WH_3^0 можем получить 2мя способами:

1) $(2+2)\, p_2^2 \frac{\partial}{\partial p_4} H_3^0$

2) $1 \cdot 1\, p_2 \frac{\partial^2}{\partial^2 p_1} H_3^0$

$$e^{p_1} = \left(1 + p_1 + \frac{p_1^2}{2!} + \ldots\right)$$

$$p_2 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_1}\left(\frac{3}{4} p_1^2 p_2 + \frac{1}{4} p_2 + 4 p_1 p_2\right) + \frac{1}{2}\left(4 p_2^2 \frac{\partial}{\partial p_4}(4p_4)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} p_2\left(\frac{3}{4} \cdot 2 p_2 + \frac{1}{4} p_2 + 4 p_2\right) + \frac{1}{2}\left(4 p_2^2 \cdot 4\right)\right) =$$

$$= p_2^2 (1 + 4 + 8) = p_2^2 \cdot 13$$

$$\Rightarrow h_{4, 2^2} = 13 - 1 = 12$$