ТФКП
2 курс
Домашнее задание

Владислав Мозговой
1789769386

8 июня 2021 г.

Домашнее задание 11

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_2$. Существует ли голоморфная функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ со следующими свойствами? Строго обоснуйте ответ.

(0) $f(i) = 2i$, $f(2i) = 5i$.

(1) $f(i) = 2i$, $f(2i) = 3i$.

(2) $f(i) = i$, $|f'(i)| = 2$.

(3) $f(i) = i$, $|f'(i)| = \frac{1}{2}$.

(4) $f(i) = 2i$, $|f'(i)| = 3$.

(5) $f(i) = 2i$, $|f'(i)| = 1$.

(6) $f(i) = i$, $f(2i) = \log 2 + i$, $f(-\log 2 + i) = i/3$.

(7) $f(2i) = 2i$, $f(i) = 4i$, $f(1 + i) = 4 + 4i$.

(8) $f(i) = 1 + i$, $f(1 + i) = 2 + i$, $f(2 + i) = 4 + i$.

(9) $f(i) = 2i$, $f(2i) = 4i$, $f(3i) = 8i$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_0+a_7. При решении следуюших задач можно воспользоваться тем фактом, что группа конформных автоморфизмов полуплоскости (или диска) совпадает с группой собственных изометрий полуплоскости (или диска) относительно метрики Пуанкаре. (Изометрии — это преобразования, сохраняющие расстояния. Собственные изометрии — это изометрии, сохраняющие ориентацию, то есть гомотопные тождественному преобразованию в группе изометрий.)

(0) Докажите, что для любых z, $w \in \mathbb{H}$ и для любого $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ расстояние между точками z и w в метрике Пуанкаре равно расстоянию между λz и λw.

(1) Найдите несобственную изометрию $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ в метрике Пуанкаре со следующим свойством. Точки $z \in \mathbb{H}$, такие, что $|z| = 1$, остаются на месте (то есть $f(z) = z$ для каждой такой точки z).

(2) Приведите пример дробно-линейного преобразования, которое не сопряжено в группе $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ никакому конформному автоморфизму диска.

(3) Пусть $L = \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$. Опишите все голоморфные автоморфизмы $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, такие, что $f(L) = L$. Найдите множество точек вида $f(1+i)$, где f пробегает все указанные автоморфизмы.

(4) Пусть $C = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$. Опишите все голоморфные автоморфизмы $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, такие, что $f(C) = C$. Найдите множество точек вида $f(1+i)$, где f пробегает все указанные автоморфизмы.

(5) Пусть $O = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - i| = 1\}$. Опишите все голоморфные автоморфизмы $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, такие, что $f(O) = O$. Найдите множество точек вида $f(i)$, где f пробегает все указанные автоморфизмы.

(6) Пусть f — конформный автоморфизм единичного диска, такой, что $f(a) = a$ для некоторой точки $a \in \mathbb{D}$. Докажите, что f сопряжен в группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ повороту вокруг нуля на некоторый угол.

(7) Пусть f — конформный автоморфизм единичного диска, такой, что $f \circ f = id$. Докажите, что найдется точка $a \in \mathbb{D}$, для которой $f(a) = a$.

(8) Пусть f — конформный автоморфизм верхней полуплоскости со следующим свойством. Существует единственная точка $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, такая, что $f(a) = a$. Докажите, что f сопряжен в группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ отображению $g(z) = z \pm 1$.

(9) Пусть f — конформный автоморфизм верхней полуплоскости со следующим свойством. Существуют две различные точки a, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, такие, что $f(a) = a$ и $f(b) = b$. Докажите, что f сопряжен в группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ отображению $g(z) = \lambda z$ для некоторого вещественного положительного λ.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6 + a_9$.

(0) Рассмотрим непрерывную функцию $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ и простую (несамопересекающуюся) ломаную, разделяющую единичный диск на два открытых множества U, V. Предположим, что ограничения функции f на U и на V голоморфны. Докажите, что f голоморфна на всем диске.

(1) Докажите, что не существует конформного изоморфизма между множествами $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ и $V = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

(2) Докажите, что не существует конформного изоморфизма между множествами $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ и $V = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$. *Указание:* воспользуйтесь принципом симметрии.

(3) Докажите, что не существует конформного изоморфизма между единичным диском и всей плоскостью.

(4) Докажите, что не существует конформного изоморфизма между $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(5) Рассмотрим множество $U = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > x^2\}$. Докажите, что любая непрерывная функция $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$, голоморфная внутри области U, допускает голоморфное продолжение на некоторую открытую окрестность множества $\overline{U}$. (Указание: рассмотрите конформное отображение, переводящее параболу в прямую, и воспользуйтесь принципом симметрии).

(6) Рассмотрим множество $U = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y^2 > x^2\}$. Докажите, что любая непрерывная функция $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$, голоморфная внутри области U, допускает голоморфное продолжение на некоторую открытую окрестность множества $\overline{U}$. (Указание: рассмотрите конформное отображение, переводящее гиперболу в прямую, и воспользуйтесь принципом симметрии).

(7) Рассмотрим множество $U = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + 2y^2 < 1\}$. Докажите, что любая непрерывная функция $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$, голоморфная внутри области U, допускает голоморфное продолжение на некоторую открытую окрестность множества $\overline{U}$. (Указание: рассмотрите конформное отображение, переводящее эллипс в окружность, и воспользуйтесь принципом симметрии).

(8) Существует ли конформный изоморфизм между $\mathbb{D} \setminus \{0, 1\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$? Строго обоснуйте ответ.

(9) Существует ли конформный изоморфизм между $\mathbb{D} \setminus \{0, 1/2\}$ и $\mathbb{D} \setminus \{0, 1/3\}$? Строго обоснуйте ответ.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_6$. Вычислите (при помощи вычетов) указанные ниже интегралы от многозначных аналитических функций. Во всех случаях выбирается такая ветвь функции x^a (в частности, $\sqrt{x}$, $\sqrt[5]{x}$ и т.д.), которая принимает положительные значения для положительных значений числа x.

(0) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(1) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$.

(2) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$ при $0 < \alpha < 1$.

(3) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \frac{dx}{1+x}$ при $-1 < \alpha < 1$.

(4) $\int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} dx$.

(5) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^2(4-x^2)}}$.

(6) $\int_0^\infty \frac{\log x\, dx}{x^2+a^2}$ при $a > 0$.

(7) $\int_0^\infty \left(\frac{\log x}{x-1}\right)^2 dx$.

(8) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \log x\, dx}{x^2+1}$.

(9) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\log|x^2-1|}{x^2+1} dx$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_4$.

(0) Докажите, что среди всех кривых в диске $\mathbb{D}$, соединяющих точки 0 и $r \in (0, 1)$, кратчайшую длину в метрику Пуанкаре имеет прямолинейный отрезок.

(1) Докажите, что среди всех кривых в верхней полуплоскости, соединяющих точки ia и ib (здесь a, b — различные положительные действительные числа), кратчайшую длину в метрике Пуанкаре имеет прямолинейный вертикальный отрезок.

(2) Задача 9.15 на стр. 161 основного учебника.

(3) Пусть $A(\varepsilon)$ — площадь круга с центром в нуле и радиусом $\varepsilon \in (0, 1)$ в метрике Пуанкаре единичного диска. Вычислите $A(\varepsilon)$ с точностью до членов четвертого порядка включительно, то есть с точностью до $o(\varepsilon^4)$ при $\varepsilon \to 0$. Напомним, что площадь области X с гладкой границей относительно метрики $\rho(z)|dz|^2$ определяется как интеграл по X от функции ρ.

(4) Задача 10.7 на стр. 190 основного учебника.

(5) Задача 10.8 на стр. 190 основного учебника.

(6) Задача 10.9 на стр. 191 основного учебника.

(7) Задача 10.10 на стр. 191 основного учебника.

(8) Задача 9.10 на стр. 161 основного учебника.

(9) Существует ли непрерывное отображение из замкнутого квадрата 1×1 на замкнутый прямоугольник 1×2, переводящее вершины квадрата в вершины прямоугольника, стороны квадрата

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_0 + a_2 = 1 + 8 = 9 \mod 10$
Да, существует, вот пример:

$$f(x+iy) = (2xy - x) + i(y^2 - y + 2 + x^2)$$
$$-\frac{\partial(y^2 - y + 2 - x^2)}{\partial x} = 2x = \frac{\partial(2xy - x)}{\partial y}$$
$$\frac{\partial(2xy - x)}{\partial x} = 2y - 1 = \frac{\partial(y^2 - y + 2 - x^2)}{\partial y}$$

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_0 + a_7 = 1 + 3 = 4 \mod 10$
$C = \{z \in \mathbb{H} |\ |z| = 1\}$ – полуокружность с центром в 0 и $R = 1$ то есть имеются 2 точки на абсолюте. Следовательно параболический автоморфизм не подходит, так как он сохраняет лишь одну точку на абсолюте.
Эллиптический автоморфизм: рассмотрим автоморфизм, сохраняющий пучок прямых через 0. Такой автоморфизм сохраняет окружности с центром в этой точке, а следовательно $f(1+i) \in A = \{|z| = \sqrt{2}\}$
Гиперболический авторморфизм: 2 неподвижные точки на абсолюте - это $\pm i$, тогда множество точек вида $f(1+i)$ – эквидистанта, проходящая через $\pm i, 1+i$, то есть $\left\{z \in \mathbb{H} |\ \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_6 + a_9 = 9 + 6 = 5 \mod 10$
Покажем, что требуемое утверждение неверно
Пусть

$$f : \overline{U} \to \mathbb{C} : \{$$

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_0 + a_6 = 1 + 9 = 0 \mod 10$
$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$ – не определено только в $1 - x^2 = 0$, то есть ± 1. Заметим что f аналитична в $\{x \in \mathbb{C} |\ \Im x \geqslant 0\}$, кроме конечного числа точек, а следовательно по лемме Жордана

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{\gamma} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = 2\pi i(\operatorname{Res}_1 f(x) + \operatorname{Res}_{-1} f(x)) = 2\pi i(\frac{1}{2i}) = \pi$$

‘