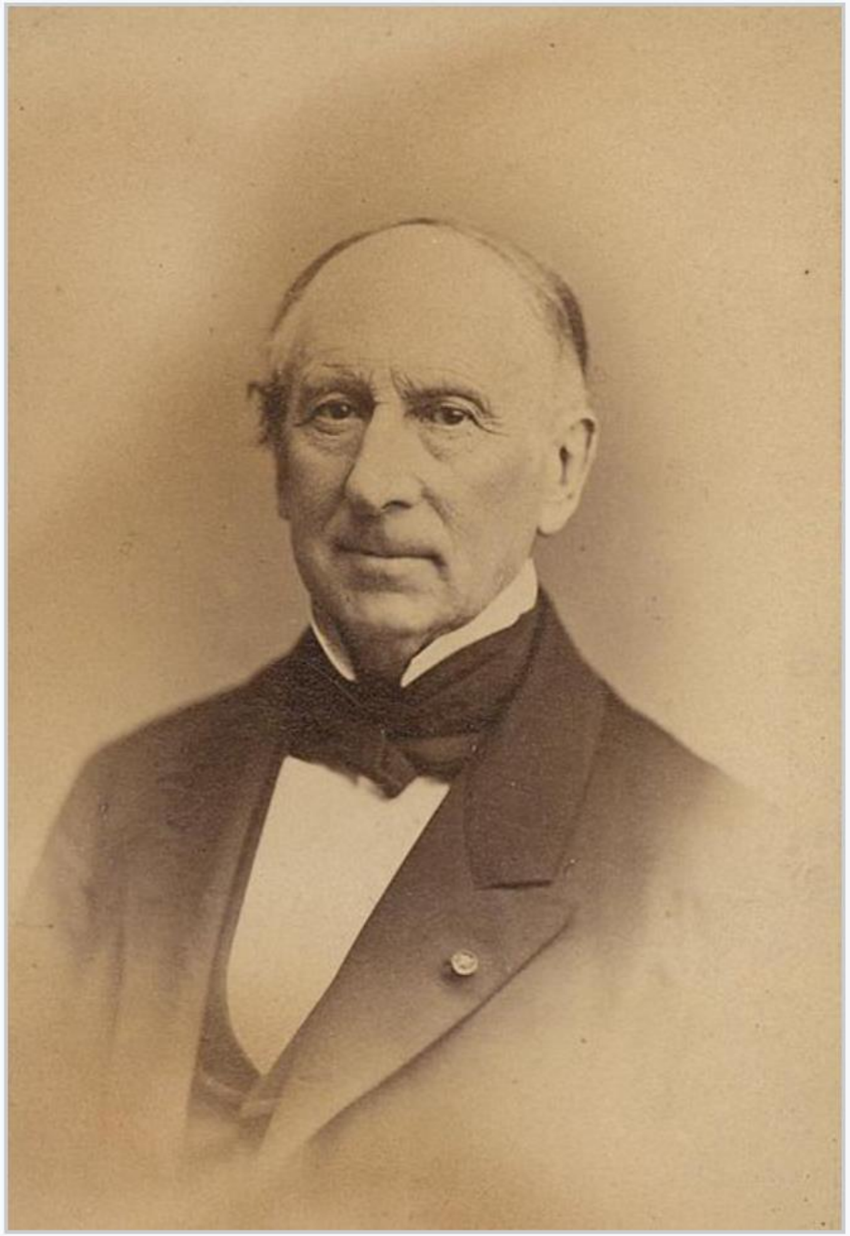
Лекция 8. Следствия из формулы Коши

Теория функций комплексного переменного

Формула Коши
(1789 – 1857)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$



Аналитические функции

Определение 5.9. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, называется *аналитической*, если для всякой точки $a \in U$ существует такой открытый диск $D = \{z : |z-a| < r\} \subset U$ с центром в a, что для всех $z \in D$ функция f представляется в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \tag{5.11}$$

Поскольку в силу предложения 1.19 ряд (5.11) сходится равномерно на каждом компактном подмножестве в D, а его частичные суммы непрерывны, получаем, что всякая аналитическая функция непрерывна.

Всякая голоморфная функция аналитична

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Обратите внимание на то, как правая часть зависит от z!

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Голоморфные функции в круге

Следствие 5.11 (из доказательства). *Всякая функция, голоморфная на открытом круге $D \subset \mathbb{C}$ с центром в точке a, представляется в этом круге в виде суммы степенного ряда $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-a)^j$, абсолютно и равномерно сходящегося на каждом компакте* $\cancel{K \subset \mathbb{C}}$. $K \subset D$.

Голоморфные функции бесконечно дифференцируемы

Теорема 5.12. *Пусть* $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — *часть комплексной плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой* γ *(кривая* γ *входит в* $\bar{U}$*); положим* $\mathrm{Int}(\bar{U}) = U$*. Если функция* $f: \bar{U} \to \mathbb{C}$ *непрерывна на* $\bar{U}$ *и голоморфна в* U*, то она имеет во внутренности* D *производные любого порядка; эти производные также голоморфны и задаются формулами*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \qquad (5.17)$$

Дифференцирование степенных рядов

- Рассмотрим степенной ряд $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$, сходящийся в диске радиуса $R > 0$ с центром в a.
- Формальная производная $c_1 + 2c_2(z-a) + \cdots$ в точке a сходится в том же диске.
- Сходящийся ряд можно почленно интегрировать:

$$f(z) - c_0 = \int_0^z g(z)dz\,.$$

- Следовательно, $g(z) = f'(z)$. Значит, сходящийся степенной ряд можно почленно дифференцировать (сколь угодно много раз).

Следствия теоремы 5.12

Следствие 5.13 (из теоремы). *Всякая голоморфная функция «бесконечно комплексно дифференцируема»: если функция f голоморфна на открытом множестве U, то и функция $z \mapsto f'(z)$ голоморфна на том же множестве.*

Следствие 5.14 (из доказательства). *Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ — кусочно гладкая кривая и $f : \gamma \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Тогда функция*

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \gamma$; ее n-я производная равна

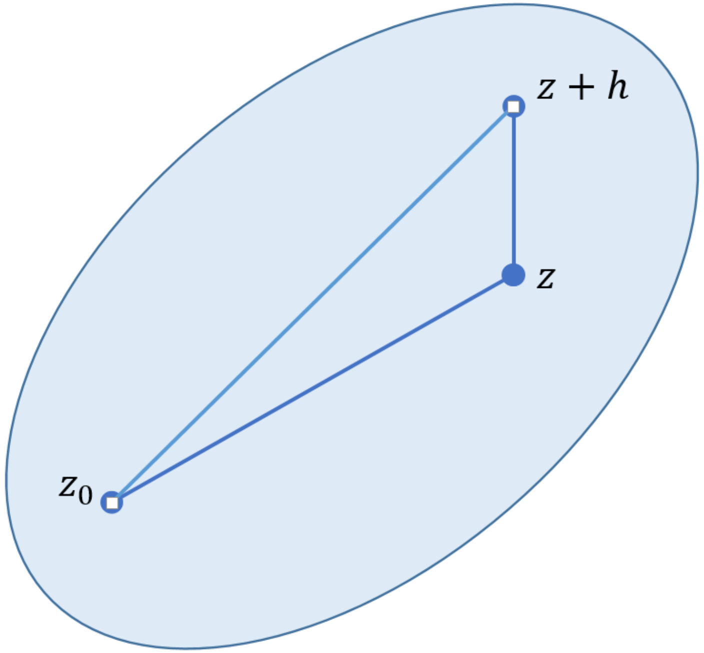
$$\frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Теорема Мореры

Предложение 5.15 (теорема Мореры). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Если непрерывная функция $f : U \to \mathbb{C}$ обладает тем свойством, что $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ для всякого треугольника $\Delta \subset U$, то f голоморфна на U.*

Идея доказательства. 1) Построим первообразную как раньше.

2) Первообразная голоморфна, следовательно, дважды дифференцируема.



Джиачинто Морера (1856 – 1909)

- Итальянский инженер и математик.
- Учился и работал в Турине, Павии, Пизе, Лейпциге, Генуе (15 лет, в т.ч. в должностях декана и ректора).
- Член национальной академии деи Линчеи. Член-корреспондент Харьковского математического общества.
- Комплексный анализ, ОДУ, УрЧП, теория упругости.

Равномерная сходимость голоморфных функций

Предложение 5.16. *Пусть* $U \subset \mathbb{C}$ — *открытое множество, и пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — *ряд из голоморфных на* U *функций, равномерно сходящийся на всяком компактном подмножестве* $K \subset U$. *Тогда сумма этого ряда (обозначим ее* $f(z)$*) — голоморфная функция на* U, *и имеет место равенство* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$, *причем ряд в правой части также равномерно сходится на всяком компактном подмножестве* $K \subset U$.

- Интегралы от равномерно сходящихся функций сходятся.
- Воспользуемся теоремой Мореры.

Аналитичность vs. Голоморфность

Предложение 5.17. *Функция комплексного переменного аналитична тогда и только тогда, когда она голоморфна. Если функция f голоморфна в открытом круге $\{z\colon |z-a|<r\}$, то в этом круге она представляется в виде суммы следующего степенного ряда:*

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots \tag{5.21}$$

Неравенства Коши: если $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ – коэффициенты Тейлора, то

$$|c_n| \leqslant \frac{\sup\limits_{z\in D}|f(z)|}{R^n}.$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

Качественные следствия

Следствие 5.19. *Если функция f голоморфна в окрестности точки a и при этом $f(a) = 0$, то либо f тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки a, либо в некоторой проколотой окрестности точки a функция f в нуль не обращается.*

Предложение 5.20. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество, и пусть $S \subset U$ — подмножество, имеющее в U предельную точку. Если $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфные функции, совпадающие на подмножестве $S \subset U$, то $f(z) = g(z)$ для всех $z \in U$.*

Предложение 5.20 известна как **теорема единственности**.

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ