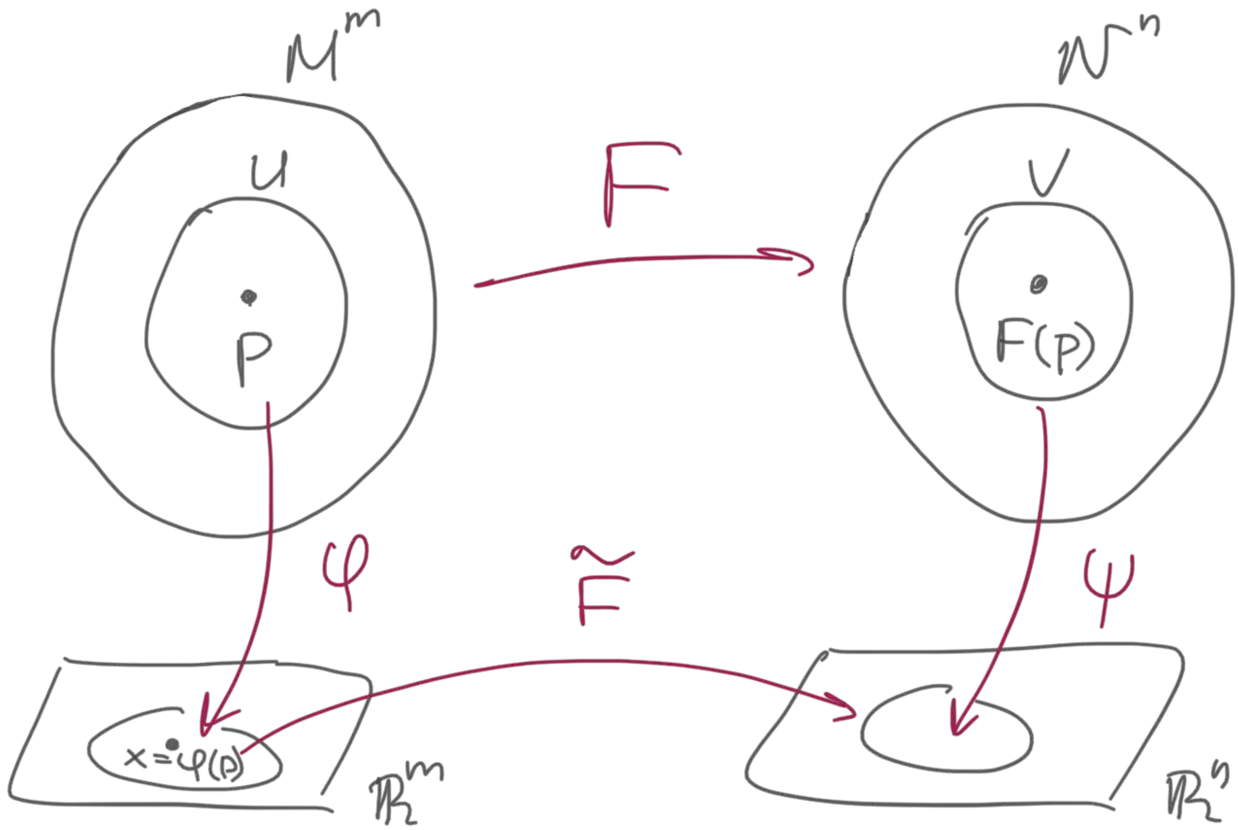
ЛЕКЦИЯ ГЛАДКИЕ

29.09.20

ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ. КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО



M, N – гл. многообразия

Опр. Отображение $F: M \to N$ наз. C^k-гладким в точке $p \in M$, если $\forall$ пары карт $(U,\varphi), (V,\psi)$, т.ч. $p \in U$, $F(p) \in V$ отображение $\tilde{F} = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ C^k-гладкое в некот. окр-ти точки $x = \varphi(p)$

Опр. Отображ. $F: M \to N$ наз. **C^k-гладким**, если оно C^k-гладкое в каждой точке

Опр. Назовём отобр. $F: M \to N$ **диффеоморфизмом**, если F - гомеоморфизм и F, F^{-1} - гладкие отображ.

Опр. **Гладкой функцией** на M наз. гладкое отображение $f: M \to \mathbb{R}$

$C(M)$ - пространство гладких функций на M.

$C(M)$ - алгебра гладких ф-ций на M
(ф-ции можно умножать, складывать)

Лемма. Условие гладкости отображ. $F: M \to N$ не зависит от выбора карт $(U, \varphi), (V, \psi)$

▶ Пусть $(U_1, \varphi_1), (V_1, \psi_1)$ - карты на M и N соответственно
$p \in U_1$, $F(p) \in V_1$

$$\varphi_{01} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}, \quad \psi_{01} = \psi_1 \circ \psi_0^{-1}$$

$$\varphi_{01} : \varphi(U \cap U_1) \longrightarrow \varphi_1(U \cap U_1)$$

$$\psi_{01} : \psi(V \cap V_1) \longrightarrow \psi_1(V \cap V_1)$$

Тогда $\widetilde{F} = \varphi^{-1} \circ F \circ \psi$

$$\widetilde{F} = \varphi_1^{-1} \circ F \circ \psi_1 = (\varphi_{01} \circ \varphi_0)^{-1} \circ F \circ \psi_{01} \circ \psi_0^{-1} =$$

$$= \varphi_0^{-1} \circ \varphi_{01}^{-1} \circ F \circ \psi_{01} \circ \psi_0^{-1}$$

C^k-гладкие

Если отобр. было C^k-гладкое, то при переходе к $\widetilde{F}$ оно останется C^k-гладким

Если M – гл. многообр., то $C(M)$ – алгебра гл. ф-ций

$$F : M \to N$$

$$F^* : C(N) \to C(M)$$

Опр. Пусть $f: N \to \mathbb{R}$, тогда определим

$F^* f = f \circ F$

Лемма. $F^*: C(N) \to C(M)$ — гомоморфизм алгебр

▷ $F^*(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(F(x)) =$

$= \alpha f(F(x)) + \beta g(F(x)) = \alpha F^* f(x) + \beta F^* g(x)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad f, g \in C(N)$ ◁

Следствие. Если $F: M \to N$ — диффеоморф., то $F^*: C(N) \to C(M)$ — изоморфизм алгебр.

▷ $(F)^* (F^{-1})^*$ — гомеоморфизм

$(F^*)^{-1}(f \circ F) = f \Rightarrow (F^*)^{-1} g = g \circ F^{-1} = (F^{-1})^* g$

$g = F^* f = f \circ F$

◁

Касательные пространства к многообразию в точке

Опр. Гладким путём на M, выходящим из т. $p \in M$, наз. гладкое (хотя бы C^1) отображение
$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \text{ т.ч. } \gamma(0) = p$$
и $\varepsilon > 0$ считается столь малым, сколь это необходимо (напр., чтобы путь лежал на 1ой карте)

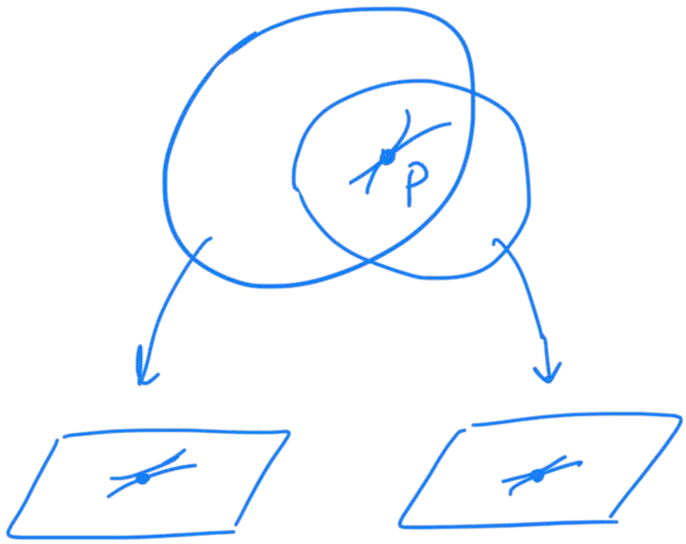
Опр. Два пути γ_1, γ_2, выход. из т. $p \in M$, наз. эквивалентными, если в карте (U, φ), $p \in U$
$$\boxed{\frac{d}{dt}\varphi(\gamma_1(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi(\gamma_2(t))\Big|_{t=0}}$$
(т.е. v одинаковая)

Лемма. Эквивалентность путей γ_1 и γ_2 не зависит от выбора карты

$\triangleright$ Пусть $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ $\gamma_i(0) = p$ $i = 1, 2$

и карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β), т.ч.

$p \in U_\alpha \cap U_\beta$



Пусть $\gamma_1 \sim \gamma_2$ в $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$:

$$\frac{d}{dt}\varphi_\alpha(\gamma_1(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi_\alpha(\gamma_2(t))\Big|_{t=0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\varphi_\beta(\gamma_1(t)) = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_\alpha(\gamma_1(t))\right) =$$

$$= J(\varphi_{\alpha\beta})\Big|_{\varphi_\alpha(p)} \frac{d}{dt}\varphi_\alpha(\gamma_1(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= J(\varphi_{\alpha\beta})\Big|_{\varphi_\alpha(p)} \frac{d}{dt}\varphi_\alpha(\gamma_2(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \varphi_\beta(\gamma_2(t))\Big|_{t=0}$$

В обратную стор. аналогично

Замечание Эквивалентность путей явл. отношением эквивалентности.

Опр. ==Касательным вектором== к многообразию M в точке p наз. класс эквивалентных путей: $v=[\gamma]$

$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(0)=p$

Координатная запись вектора $v=[\gamma]$ в карте (U,φ): $\tilde{\gamma}(t)=\varphi(\gamma(t))$

$v=(v^1, v^2, \ldots, v^m)$, $v^i = \frac{d}{dt}\gamma^i(0)$

т.е. $v=\gamma'(0)$

Обозначение. пр-во касательных векторов к M в точке p — ==T_pM==

Структура вект. пр-ва на T_pM

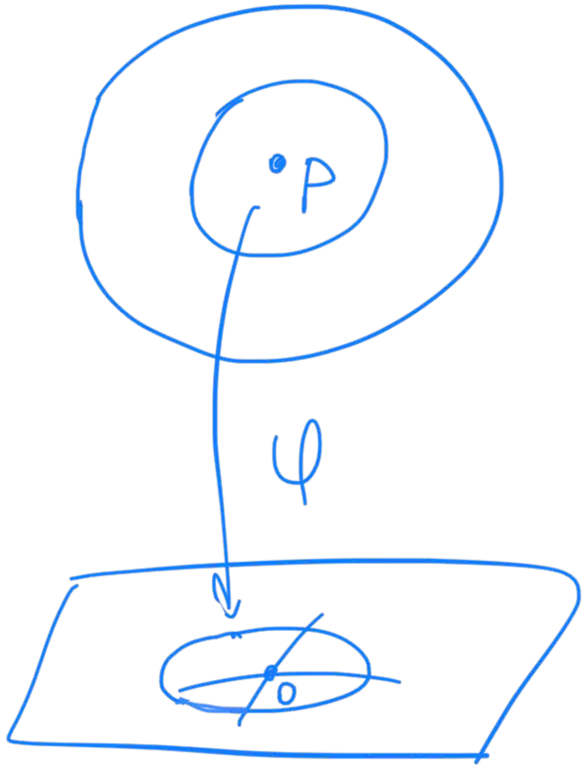
Рассм. карту (U, φ) на M, т.ч. $p \in U$ и $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\alpha[\gamma_1] + \beta[\gamma_2] = [\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2]$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

$\gamma_i(0) = p \quad i = 1,2$



В $\mathbb{R}^n$ касат. пр-вом была касат. плоскость

$r : U \to \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial r}{\partial x^1}$

Дифференциал отображения.

$F: M^m \to N^n$

Опр. Дифференциалом отображ.

$F: M \to N$ наз. отображение, которое в т. $p \in M$ является гомоморфизмом $dF: T_pM \to T_{F(p)}N$, т.ч.

$$dF(\gamma)(t) := F(\gamma(t))$$

Координатная запись dF

(U, φ) – карта на M^m, (V, ψ) – карта на N^n

$p \in U$, $F(p) \in V$

$v = [\gamma]$ в коорд. (U, φ) $\tilde{v} = \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))\Big|_{t=0}$

$$w = dF(v) = [F(\gamma(t))]$$

$$\tilde{w} = \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\left(\varphi(\gamma(t))\right)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{F}^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \widehat{F}^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{F}^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ \tilde{v}^n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}^i = \frac{d}{dt} \varphi^i(\gamma(t))\Big|_{t=0}$$