Лекция 14. Вычисления с вычетами.

Теория функций комплексного переменного

Как считать вычет в простом полюсе

Предложение 8.15. *Если функции f и g голоморфны в окрестности точки a и при этом g имеет в точке a простой нуль, то*

$$\operatorname{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}. \tag{8.3}$$

Доказательство. Из условия явствует, что функция f/g имеет в точке a простой полюс (или вовсе устранимую особенность). Поэтому можно действовать так же, как в примере 8.14:

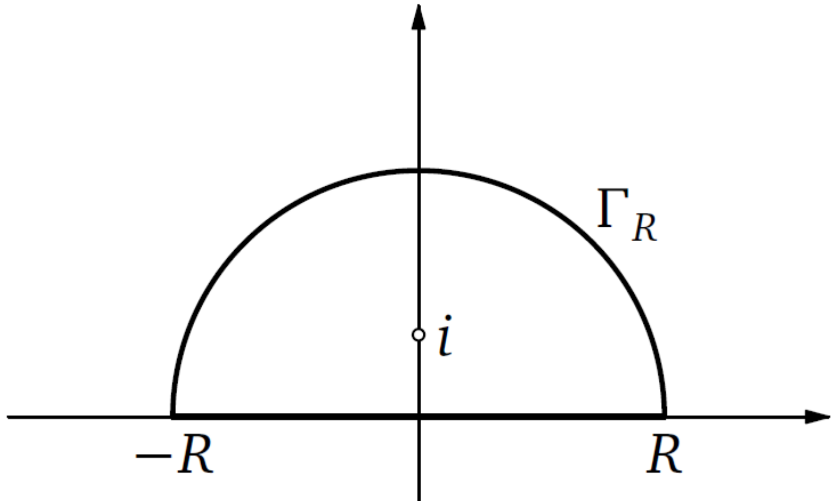
$$\operatorname{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f(z)(z-a)}{g(z)-g(a)} = \\ = \lim_{z\to a}\left(f(z)\Big/\frac{g(z)-g(a)}{z-a}\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}. \quad \square$$

Вычисление интегралов 1

Пример 8.17. Найдем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}\,dx}{x^2+1},$$

где t вещественно. Рассмотрим случай $t > 0$.



$$\operatorname{Res}_i \frac{e^{itz}}{z^2+1} = \frac{e^{it\cdot i}}{2i} = \frac{-ie^{-t}}{2}.$$

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{itz}\,dz}{z^2+1} = 2\pi i \frac{-ie^{-t}}{2} = \frac{\pi}{e^t}.$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{itz}\,dz}{z^2+1}\right| \leqslant \pi R \sup_{z\in\gamma_R} \frac{|e^{itz}|}{|z^2+1|}.$$

$$|e^{itz}| = e^{-Rt\sin\varphi} \leqslant 1$$

Вычисление интегралов 2

Пример 8.18. Найдем теперь интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)\,dx}{x^2+1},$$

где t опять вещественно.

Всю основную работу мы уже сделали в предыдущем примере: поскольку $\cos(tx) = \operatorname{Re} e^{itx}$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)\,dx}{x^2+1} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}\,dx}{x^2+1} = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{e^{|t|}}\right) = \frac{\pi}{e^{|t|}}.$$

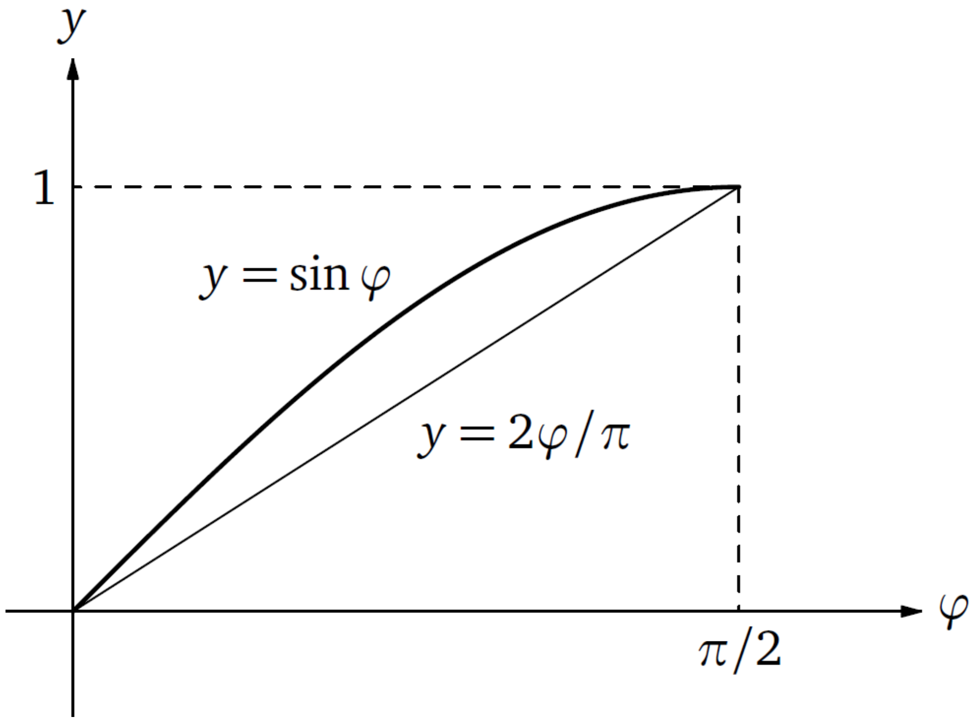
Лемма Жордана

Лемма 8.19 (К. Жордан). *Обозначим через* $\gamma_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *полуокружность радиуса* R *с центром в нуле, лежащую в верхней полуплоскости. Тогда для всякого* $a > 0$ *существует такая константа* C*, зависящая только от* a*, что*

$$\int\limits_{\gamma_R} |e^{iaz}|\,|dz| \leqslant C$$

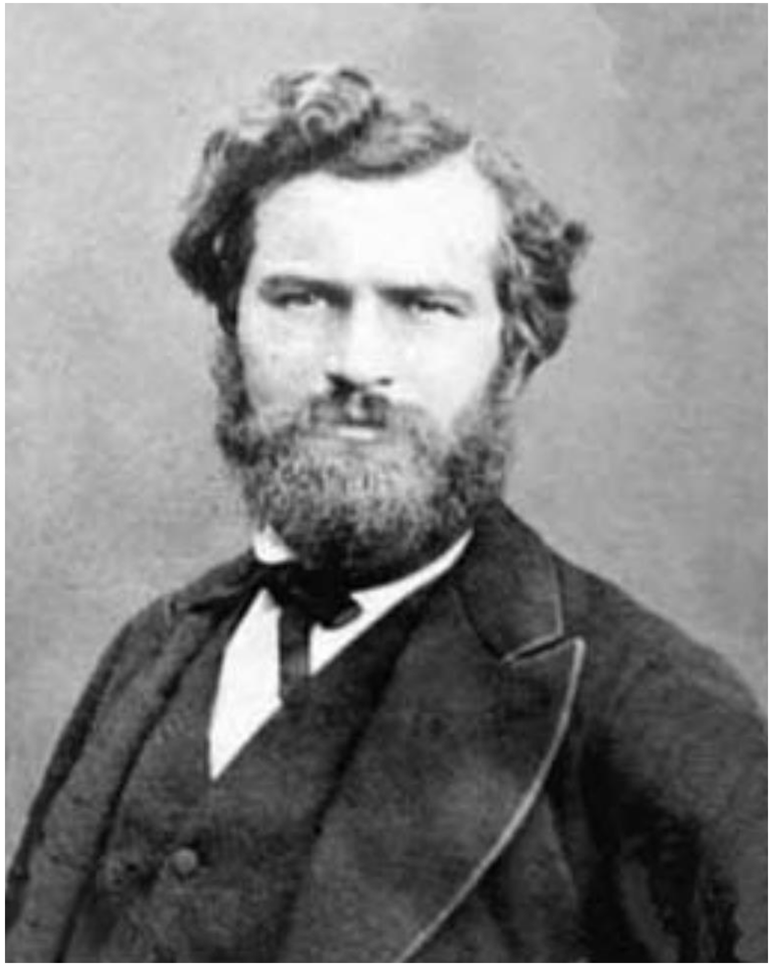
для всех $R > 0$.

$$\int\limits_{\gamma_R} |e^{iaz}|\,|dz| = 2R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi \leqslant 2R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-2aR\varphi/\pi}\,d\varphi = \frac{\pi}{a}(1 - e^{-aR}) \leqslant \frac{\pi}{a}.$$



Камиль Жордан (1838 – 1922)

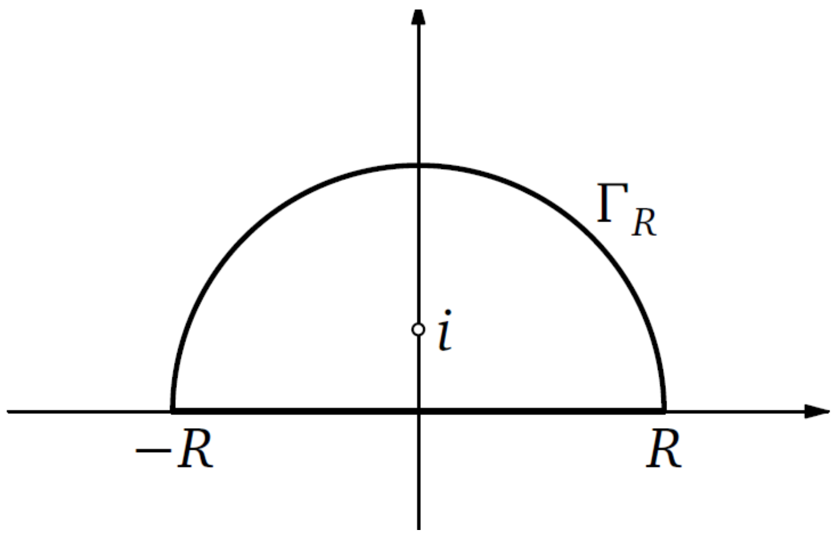
- Политехническая школа, Коллеж де Франс.
- По образованию инженер.
- Жорданова кривая, Жорданова нормальная форма, теорема Жордана-Гёльдера.



Вычисление интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e}$.

$$\frac{x \sin x}{x^2+1} = \operatorname{Im} \frac{x e^{ix}}{x^2+1},$$

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}_i \Big(\frac{z e^{iz}}{z^2+1} \Big) = \frac{\pi i}{e}.$$



$$\Bigg| \int\limits_{\gamma_R} \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2+1} \Bigg| \leqslant \int\limits_{\gamma_R} \Bigg| \frac{z e^{iz} \, dz}{z^2+1} \Bigg| \, |dz| \leqslant \sup_{z \in \Gamma_R} \Bigg| \frac{z}{z^2+1} \Bigg| \cdot \int\limits_{\gamma_R} |e^{iz}| \, |dz|.$$

Интеграл в смысле главного значения

- Пусть $a \in I$ – внутренняя точка отрезка $I = [b, c]$. Положим
$$\mathrm{V.p.} \int_b^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_b^{a-\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx \right)$$
для непрерывной функции $f: I \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, имеющей особенность в точке a.
- Аналогично, если $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, то положим
$$\mathrm{V.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}} \left(\int\limits_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{a+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \right).$$

Примеры интегралов в смысле главного значения

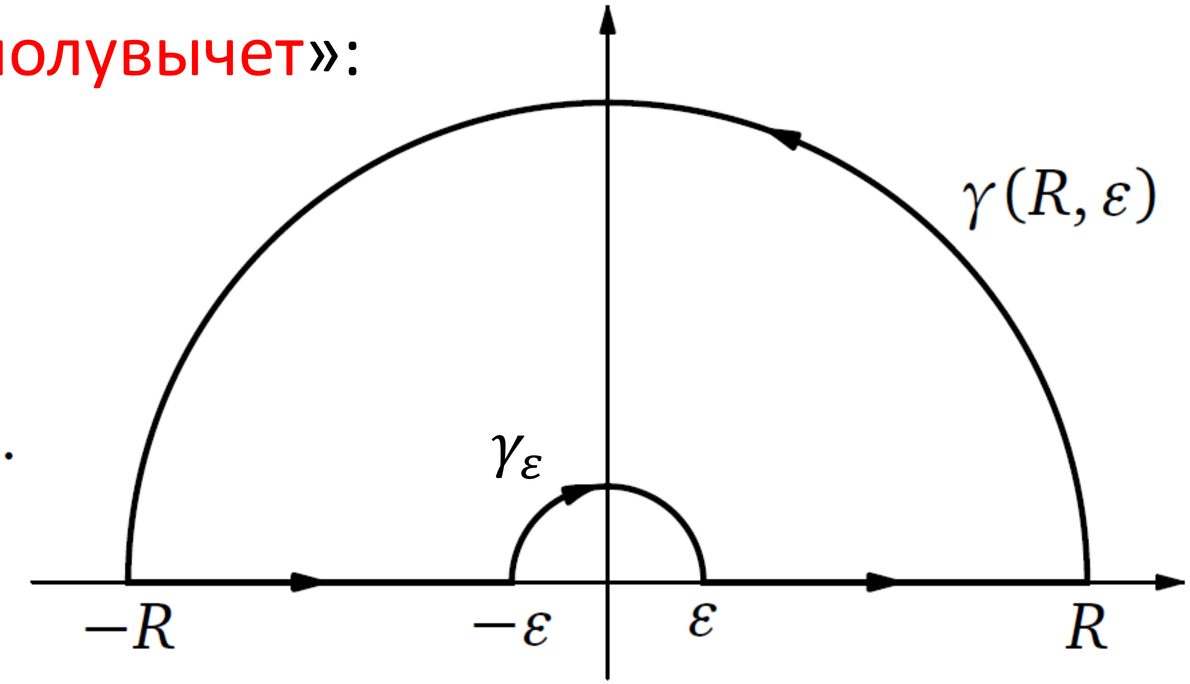
- «Главный» пример: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0$.
- Аналогично, с конечными пределами: $\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{b}{a}\right)$.
- Более общим образом, при $a < c < b$ имеем: $\int_{a}^{b} \frac{dx}{x-c} = \log\left(\frac{b-c}{c-a}\right)$.

Вычисление интеграла $\mathrm{V.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi.$

Интеграл по γ_ε – так называемый «полувычет»:

$$-\pi i\cdot \mathrm{Res}_0\,\frac{e^{iz}}{z}=-\pi i$$

$$0=\int\limits_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}\,dx}{x}+\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}\,dz}{z}+\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}\,dx}{x}+\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{iz}\,dz}{z}.$$



$$\mathrm{V.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{x}-\pi i=0;$$

Вычисление интеграла $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^6\,dz}{z^7+z+1}$

- Нахождение вычетов внутри диска $\{|z|<2\}$ проблематично.
- Сделаем замену $z = 1/w$.
- Теперь w пробегает окружность $|w| = 1/2$ по часовой стрелке:

$$dz = -\frac{dw}{w^2},$$

$$\frac{z^6}{z^7+z+1} = \frac{w}{1+w^6+w^7},$$

$$\frac{z^6\,dz}{z^7+z+1} = -\frac{dw}{w(1+w^6+w^7)}.$$

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^6\,dz}{z^7+z+1} = -\int\limits_{|w|=\frac{1}{2}} \left(-\frac{dw}{w(1+w^6+w^7)}\right) = \int\limits_{|w|=\frac{1}{2}} \frac{dw}{w(1+w^6+w^7)} = 2\pi i$$

Вычет на бесконечности

- Пусть $f\colon \{|z| > R\} \to \mathbb{C}$ – голоморфная функция.
- Рассмотрим ряд Лорана для f в кольце $\{|z| > R\}$:
$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots$$
- Определим вычет в бесконечности $\mathrm{Res}_\infty(f) = -c_{-1}$.
- Тогда сумма всех вычетов функции с конечным числом особенностей (включая вычет на бесконечности) =0.
- Имеем:
$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_\infty(f)$$

Странности вычета на бесконечности

- Почему-то возник знак минус.
- Бывает ненулевой вычет **даже у функции с устранимой особенностью на бесконечности**, например, $1/z$.

Вычет бывает не у функции

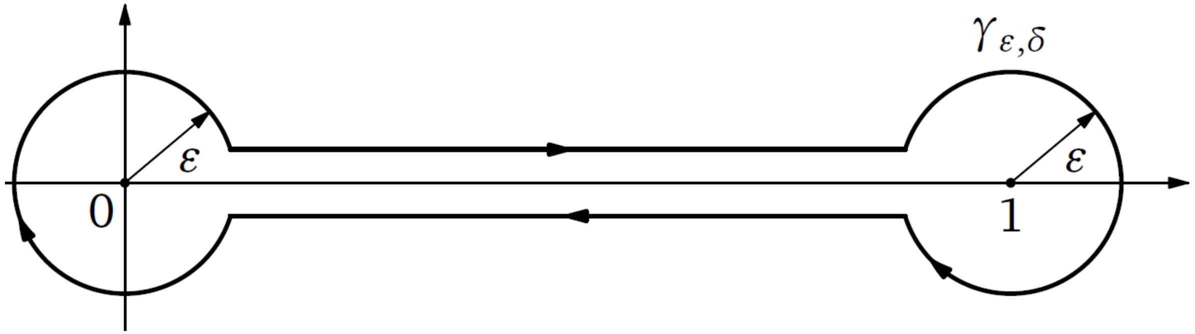
- … а у голоморфной 1-формы с изолированными особенностями.
- Правильно говорить про вычет 1-формы $\omega = f(z)dz$:
$$\mathrm{Res}_a \omega = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z-a|=\varepsilon} \omega$$
- Если поменять координату, ничего не изменится.
- Обойти ∞ против часовой стрелки = обойти большую окружность ПО часовой стрелке.
- Если нет особенности, то вычет всегда равен нулю.

Вычеты голоморфных 1-форм с особенностями

- Например, у формы $\frac{dz}{z}$ есть особенности (полюсы первого порядка) в нуле и бесконечности, с вычетами 1 и -1.
- Почему? У функции $1/z$ нет особенности на бесконечности, но у формы $dz = -dw/w^2$ (здесь $w = 1/z$) имеется полюс второго порядка.
- Если у 1-формы есть только конечное число особенностей на $\mathbb{S}^2$, то сумма всех вычетов всегда равна нулю!

Вычисление интеграла $I = \int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx.$

- Проинтегрируем по указанному контуру.
- Интегралы по маленьким дискам стремятся к нулю.
- Интегралы по горизонтальным отрезкам дают в сумме $2I$.
- Осталось посчитать вычет в бесконечности.



$$\sqrt{z(1-z)} = \pm iz \cdot \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{z(1-z)} = \pm iz\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z^2} + \ldots\right),$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\cdot(-2\pi i c_{-1}) = \pm\frac{\pi}{8}.$$

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ