Алгебраическая геометрия: дз 3, до 21.10

1) Докажите, что гомоморфизм пучков

а) инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен послойно,

б) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он послойный изоморфизм.

(замечание: поскольку “образ” морфизма пучков $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, определенный по формуле $U \mapsto im(\mathcal{F}(U))$, в общем случае пучком не является, образом морфизма пучков обычно называется пучок, ассоциированный с этим предпучком, так что сюръективный морфизм пучков - это по определению морфизм, сюръективный послойно, при этом $F(U) \to G(U)$ не обязаны быть сюръекциями для всех U.)

2) Пусть A кольцо и M некоторый модуль. Проверьте, что определенный следующим образом $\tilde{M}$:

$$\tilde{M}(U) = \{s : U \to \sqcup_{p \in U} M_p | \forall p\, s(p) \in M_p, \forall p \exists D(f), p \in D(f), \forall q \in D(f)\; s = m/f^k\}$$

является пучком, что его слой в точке p - это M_p и что $\tilde{M}(D(f)) = M_f$.

3) (Носитель модуля) а) Пусть M A-модуль. Докажите, что если $M_p = 0$ для любого простого идеала $p \subset A$, то $M = 0$.

Носитель $Supp(M)$ модуля M - это носитель пучка $\tilde{M}$, т е множество таких $p \in Spec(A)$, что слой $M_p \neq 0$.

б) Если M конечно порожден, докажите, что носитель M замкнут (сначала можно рассмотреть случай циклического M). Верно ли это в случае произвольного M?

в) Докажите, что если M является суммой своих подмодулей M_1 и M_2, то $Supp(M) = Supp(M_1) \cup Supp(M_2)$ (воспользуйтесь точностью локализации, вспомнив, что это такое).

г) Докажите, что носитель тензорного произведения конечно порожденных модулей $M_1 \otimes M_2$ - это пересечение носителей M_1 и M_2 (вспомните лемму Накаямы, выведите из нее, что тензорное произведение к.п. модулей над локальным кольцом нулевое если и только если таков один из модулей).

4) а) Проверьте, что если $(X, \mathcal{O}_X)$ - схема и U открыто в X, то $(U, (\mathcal{O}_X)|_U)$ тоже схема (вместо $\mathcal{O}_X)|_U$ будем писать просто $\mathcal{O}_U$).

б) Пусть $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ схемы, а U_{ij} открыты в X_i, причем для $i \neq j$ заданы морфизмы $\phi_{ij} : (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}) \to (U_{ji}, \mathcal{O}_{U_{ji}})$ со свойством $\phi_{ij} \circ \phi_{ji} = id$, $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$ (на $U_{ij} \cap U_{ik}$). Проверьте, что существует схема $(X, \mathcal{O}_X)$, ее открытое покрытие U_i и изоморфизмы схем $f_i : X_i \to U_i$, такие, что $f_i(U_{ij}) = U_i \cap U_j$ и $f_i = f_j \phi_{ij}$.

5) Найдите $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\mathbb{P}^n_K)$.

№1

а) $\varphi: F \to G$ - инъ $\Leftrightarrow \varphi_p: F_p \to G_p$ - инъ.

Д-во

$\Rightarrow$ φ - inj $\Rightarrow \ker\varphi$ - zero presheaf $\Rightarrow$

0 - colim of a 0 diagram

$\Rightarrow \forall U \subset X \ (\ker\varphi)_U = 0$

$\Rightarrow (\ker\varphi)_p = 0$

$\Leftarrow$ φ_p - inj $\Rightarrow \forall p \ \ker\varphi_p = 0 \Rightarrow (\ker\varphi)^+_U : U \to \bigsqcup_{p \in U} \ker\varphi_p$

$\Rightarrow (\ker\varphi)^+_U = 0$ $\forall U \subset X$ since $\ker\varphi$ - sheaf $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ker\varphi \simeq (\ker\varphi)^+ \simeq 0$ $\square$

б) $\varphi: F \to G$ - изо $\Leftrightarrow \varphi_p: F_p \to G_p$ - изо

Д-во $\Rightarrow$ φ - изо $\Rightarrow \exists \varphi^{-1} \Rightarrow (\varphi^{-1})_p = (\varphi_p)^{-1}$

$\Leftarrow$ W.T.S. $\forall U$ φ_U - изо, инъ. следует из а

сюр. $t \in G(U)$ $t_p \in G_p \Rightarrow \exists s_p \in F_p$ $\varphi(s_p) = t_p$

$\exists V'_p \subset X : \exists s(p) \in F(V'_p)$ $s(p)|_p = s_p$

$\varphi(s(p)), t|_{V'_p} \in G(V'_p)$ - их ростки в p равны

$\Rightarrow \exists V_p : \varphi(s(p))|_{V_p} = t|_{V_p}$

$s(q)| \quad \in F(V_p \cap V_q)$

$U = \bigcup V_p \quad p, q \in U \quad s(p)|_{V_p \cap V_q},\ s(q)|_{V_p \cap V_q}$

$\varphi(s(p)|_{V_p \cap V_q}) = \varphi(s(q)|_{V_p \cap V_q})$ φ - инъ $\Rightarrow$

$\Rightarrow s(p)|_{V_p \cap V_q} = s(q)|_{V_p \cap V_q}$ т.к. F-пучок $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists s \in F(U) \quad \varphi(s)|_{V_p} = t|_{V_p} \Rightarrow \varphi(s) = t$

№2

M - A-модуль

$\tilde{M}(U) = \{\sigma : U \to \coprod_{p \in U} M_p \mid U \subset \operatorname{Spec} A,\ \sigma(p) \in M_p,$

$\forall p\ \exists D_f \underset{\ni p}{\subset} U : \forall q \in D_f \quad \sigma(q) = \frac{m}{f^k} \}$

$res_{U,V} : \tilde{M}(U) \to \tilde{M}(V)$ - огранич. отобр

а) $U = \bigcup U_i \qquad \sigma_1, \sigma_2 \in \tilde{M}(U)$

$\forall U_i \quad \sigma_1|_{U_i} = \sigma_2|_{U_i}$

Если $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \exists p \in U \quad \sigma_1(p) \neq \sigma_2(p)$

$\exists U_i$, т.ч. $p \in U_i \Rightarrow \sigma_1|_{U_i}(p) = \sigma_2|_{U_i}(p)$, но

$\forall p \in U_i \quad \sigma_j|_{U_i}(p) = \sigma_j(p) \quad \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$

б) $\{\sigma_i\} \in \tilde{M}(U_i) \qquad \forall i,j \quad \sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$

Пусть $\sigma : U \to \coprod_{p \in U} M_p \quad \sigma(p) = \sigma_i(p), p \in U_i$

если $p \in U_i \cap U_j \Rightarrow \sigma(p) = \sigma_i(p)$ и $\sigma(p) = \sigma_j(p)$, но

$\sigma_i(p) = \sigma_j(p)$, т.к. $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow \tilde{M}(U)$ - пучок

$\varphi: \tilde{M}_p \to M_p$ $\quad s \to s(p)$ $\quad \varphi$-homomorphism $\quad \frac{a}{f} \in M_p \Rightarrow$

$\Rightarrow D(f) \ni p$ - откр. окр $\quad s: D(f) \to \bigsqcup_{p \in D(f)} M_p$ $\quad s(x) = \frac{a}{f} \Rightarrow \varphi$ - сюр.

$p \in U$ - окр $\quad s, t \in \tilde{M}(U)$ $\quad s(p) = t(p)$ $\quad s = \frac{a}{f}$ $\quad t = \frac{b}{g}$ $\quad \frac{a}{f} = \frac{b}{g}$ в M_p

$\Rightarrow h(ga - fb) = 0$ в $M \Rightarrow \frac{a}{f} = \frac{b}{g}$ в M_q $\quad \forall q \not\ni f, g, h$, такое

$q \in D(f) \cap D(g) \cap D(h) \ni p \Rightarrow s = t \Rightarrow \varphi$ - изо.

№3

а) M - A - модуль $\quad M_p = 0 \quad \forall p \in \operatorname{Spec} A \Rightarrow M = 0$

Д-во $\quad x \in M \quad x \neq 0 \quad \forall p \quad M_p = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists s \in A \setminus p \quad sx = 0$

$\Downarrow$

$\operatorname{Ann}(x) \not\subset p \quad \forall p$, но $\operatorname{Ann}(x)$ - идеал $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Ann}(x) = A \quad \forall x \in M$

б) $(x_1, \ldots x_n) = M \qquad T = \operatorname{Spec} A \setminus \operatorname{Supp} M$

$T = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid M_p = 0\} \Rightarrow \exists t_i \in A \setminus p \quad t_i x_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow$

$\Rightarrow t = t_1 \cdot \ldots \cdot t_n \in A \setminus p \Rightarrow D(t) = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid t \notin p\} \Rightarrow$

$\Rightarrow D(t) \subset T \Rightarrow T$ - откр

в) $M = M_1 \oplus M_2$

$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0 \qquad p \in \operatorname{Supp} M_1 \sqcup \operatorname{Supp} M_2$

$0 \to (M_1)_p \to M_p \to (M_2)_p \to 0 \qquad$ либо $(M_1)_p \neq 0$, либо

$(M_2)_p \neq 0$

$M_p \neq 0 \Rightarrow p \in Supp\, M$

Аналогично наоборот

г) $M_1 \otimes M_2 = 0 \Leftrightarrow M_1 = 0$ или $M_2 = 0$ для к.п.

$\Rightarrow p \notin Supp\, M_1 \cap Supp\, M_2 \Rightarrow (M_1)_p = 0$ или $(M_2)_p = 0$

$\Rightarrow (M_1)_p \otimes (M_2)_p = (M_1 \otimes M_2)_p = 0$

$p \in Supp(M_1 \otimes M_2) \Rightarrow (M_1 \otimes M_2)_p \neq 0 \Rightarrow (M_1)_p \neq 0 \quad (M_2)_p \neq 0$

$\Rightarrow p \in Supp(M_1) \cap Supp(M_2)$

№4

$(X, \mathcal{O}_X)$ - сх. $\quad X = \cup U_i$ - aff покрытие

$U < X$ - откр $\quad U_i = \cup (U_i)_f = \cup \{x \in U_i \mid f(x) \neq 0\}$

$f \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \quad (U_i)_f$ - aff сх.

$(U_i)_f$ - база топологии

$U \cap U_i$ - тоже покр aff картами

б) $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ - сх $\quad U_{ij} < X_i$ - откр при $i \neq j$

$\varphi_{ij} : (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}) \to (U_{ji}, \mathcal{O}_{U_{ji}}) \quad \varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} = id$

$\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ (на $U_{ij} \cap U_{ik}$) $\Rightarrow \exists (X, \mathcal{O}_X)$ - сх

$X = \cup U_i \quad f_i : X_i \to U_i$ - изо $\quad f_i(U_{ij}) = U_i \cap U_j$

$f_i = f_j \varphi_{ij}$

Д-во $X = \sqcup X_i$ - как мн-во

... если $\forall i \; U \cap X_i$ - откр}

$Top(X) = \{ U$ - откр ...

№ 5

$\mathbb{P}^n_k$ – покроем стандартными aff картами

$Spec(k[\frac{x_1}{x_i}, \dots \frac{x_n}{x_i}]) = U_i$

$y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots y_n = \frac{x_n}{x_i}$ $\qquad \frac{x_1}{x_j} = y_1 \cdot \frac{1}{y_j}$

$\Rightarrow f \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ $\quad g \in \Gamma(U_j, \mathcal{O}_{U_j})$

$f|_{U_i \cap U_j} = g|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow f(y_1, \dots y_n) = y_j^{-m} g_m + \dots$
$+ y_j^{-1} g_1 + g_0 \Rightarrow y_j^m (f - g_0) = g_1 y_j^{m-1} + \dots + g_m$

$\Rightarrow f = g_0 = g \Rightarrow \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) = k$