1

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_7+a_9. Функция f определена и голоморфна на некоторой проколотой окрестности точки 0. Докажите или опровергните следующие утверждения. Можно пользоваться утверждениями из учебника, снабжая их точными ссылками.

(8) Если 0 является существенной особенностью функции f, то $|f(z_n)| < e^{-1/|z_n|}$ для некоторой последовательности $z_n \to 0$. .

Существенная особенность в точке a $\Rightarrow$
$\forall c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\exists$ такая посл-ть точек
$z_n \in D \setminus \{a\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = c$$

у ф-ии $e^{\frac{1}{z}}$ - существенная особенность в точке 0

$$|f(z_n)| < e^{-\frac{1}{|z_n|}} \qquad z_n \to 0$$

$$|f(z_n)|\, e^{\frac{1}{|z_n|}} < 1 \Rightarrow \left|f(z_n)\, e^{\frac{1}{z_n}}\right| < 1$$

у ф-ии $g = f(z) e^{\frac{1}{z}}$ существенная особенность в точке 0 $\Rightarrow$

для посл-ти $z_n \to 0$ $\exists$ посл-ть

$$g_n = f(z_n)\, e^{\frac{1}{z_n}} \to 0$$

$\Rightarrow \exists N : \forall n > N$ $\quad |g_n| < 1 \Rightarrow$ возьмём эту подпоследовательность $\{f_n\}$, где $\forall n > N$

$|f(z_n)| < e^{-\frac{1}{|z_n|}}$ $(z_n \to 0)$ и получим требуемое

2

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_4+a_5. Для следующих аналитических функций найдите все нули и их кратности. Также, найдите все особенности и определите их тип (устранимая особенность, полюс, существенная особенность, неизолированная особенность). Для тех особенностей, которые являются полюсами, найдите порядок полюса.

(0) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

- нули $\quad z = \pi k \quad k \neq 0 \qquad\qquad z = 0$

$$f'(z) = \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} \neq 0 \text{ при } z = \pi k$$

$$f'(\pi k) = \frac{(-1)^k}{\pi k}$$

$$\lim_{z\to 0} f'(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{z} = \infty \neq 0$$

$\Rightarrow$ нуль кратности 1

- устранимая особенность $z = 0$, т.к.

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

- устранимая особенность $z = \infty$, т.к.

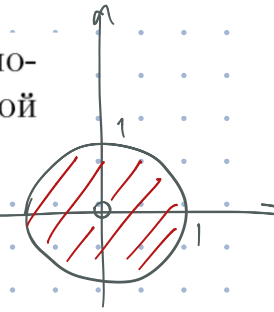
замена $z \mapsto \frac{1}{w}$

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = w \sin\frac{1}{w} \quad \text{особенность в } 0$$

$$\lim_{w\to 0} w\sin\frac{1}{w} = 0 \Rightarrow \text{устранимая особенность}$$

3

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_6$. Найдите ряд Лорана для указанной ниже функции f в указанном кольце A.



(7) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$

$z=0,\ z=1$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+3}}}$$

ОШИБКА: ВЫПИСАН РЯД В ОКР-ТИ ∞ (В $z=0$ РЯД НЕ СХОДИТСЯ)

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+3}$$

4

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6 + a_7$. Для каждой из следующих функций найдите ее вычеты во всех изолированных особенностях.

(4) $f(z) = \sin z \, \sin \frac{1}{z}$.

C_{-1} — ?

ОСОБЕННОСТЬ (УСТРАНИМАЯ) В $z=0$

$$\lim_{z\to 0} \sin z \sin\frac{1}{z} = 0$$

$$\sin z \sin\frac{1}{z} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots\right) =$$

C_{-1} ЭТО КОЭФ-Т ПРИ $\frac{1}{z}$ В РЯДЕ ЛОРАНА

ПРИ ПЕРЕМНОЖЕНИИ z^{2n+1} И $\frac{1}{z^{2m+1}}$

МОЖЕМ ПОЛУЧИТЬ ТОЛЬКО ЧЁТНУЮ СТЕПЕНЬ $z \Rightarrow$

$$\boxed{C_{-1} = 0}$$

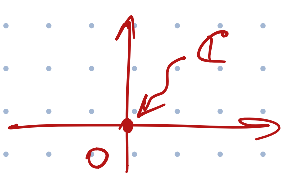
В $z=\infty$ ТОЖЕ УСТРАНИМАЯ ОСОБЕННОСТЬ

(Т.К. $z \mapsto \frac{1}{w} \Rightarrow \lim_{w\to 0} \sin\frac{1}{w} \sin w = 0$)

И ПО ТОЙ ЖЕ ПРИЧИНЕ $C_{-1} = 0$

ОШИБКА: ОСОБЕННОСТИ УСТРАНИМЫЕ $\sin\frac{1}{x}$

ТОЛЬКО ПРИ $x \in \mathbb{R}$, $x \to 0$



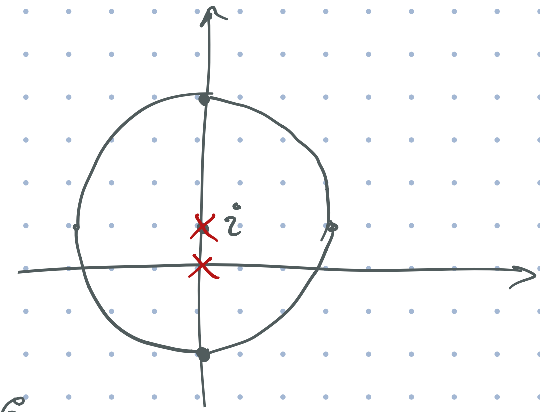
А ПРИ $x \in \mathbb{C}$, $x \notin \mathbb{R}$

ОСОБЕННОСТИ НЕУСТРАНИМЫЕ

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_8$. Вычислите следующие интегралы при помощи вычетов.

(4) $\int_{|z-i|=3} \frac{\exp(z^2)-1}{(z^3-iz^2)} dz.$

$$\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{\exp(z^2)-1}{z^2(z-i)}\,dz$$



$$f(z) = \frac{-1+1+z^2-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}-\dots}{z^2(z-i)} = \frac{\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{3!}-\dots\right)}{z-i}$$

$\Rightarrow$ в т. $z=0$ устранимая особенность

$\Rightarrow \operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = 0$

в i полюс 1го порядка

$$\Rightarrow \operatorname{res}_i \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{h(i)}{g'(i)}$$

$$\operatorname{res}\limits_{z=i} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} = \frac{e^{-1}-1}{3(i)^2-2i(i)} = \frac{\frac{1}{e}-1}{-3+2} = -\frac{1}{e}+1$$

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} f(z) = 2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_9$. Для каждой из указанных ниже функций f, найдите число корней уравнения $f(z) = 0$ в единичном диске $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ с учетом кратностей.

(0) $f(z) = 5z^3 + e^z + 1$.

(1) $f(z) = 3 + z^2 + e^{-z}$.

(2) $f(z) = 5 + \frac{3}{z} + e^z$.

ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ТЕОРЕМОЙ РУШЕ

Предложение 8.12 (теорема Руше). *Пусть* $\gamma\colon [A;B] \to \mathbb{C}$ — *замкнутый непрерывный путь, и пусть* $|\gamma|$ — *множество* $\gamma([A;B]) \subset \subset \mathbb{C}$. *Предположим, что* $f, g\colon |\gamma| \to \mathbb{C}$ — *непрерывные отображения, причем для всякого* $z \in |\gamma|$ *имеем* $f(z) \neq 0$ *и* $|f(z)| > |g(z)|$. *Тогда* $\mathrm{Ind}_0(f \circ \gamma) = \mathrm{Ind}_0((f+g)\circ\gamma)$.

$z = x + iy$ $\qquad |z| = 1$ т.е. $x^2 + y^2 = 1$

$$\left|5 + \frac{3}{x+iy}\right| - \left|e^{x+iy}\right| = \left|\frac{5x+5iy+3}{x+iy}\right| - e^x =$$

$$= \frac{\sqrt{(5x+3)^2 + (5y)^2}}{1} - e^x = \sqrt{25(x^2+y^2) + 30x + 9} - e^x =$$

$$= \sqrt{30x + 34} - e^x$$

ХОТИМ, ЧТОБЫ $\sqrt{30x+34} - e^x > 0$

$$30x + 34 > e^{2x}$$

ВОЗРАСТАЮТ

НЕ ОБЪЯСНЕНО, ПОЧЕМУ НЕТ КОРНЕЙ НА $[-1, 1]$

УР-ИЕ $30x + 34 = e^{2x}$ НЕ ИМЕЕТ КОРНЕЙ НА $[-1, 1]$

И $30(-1) + 34 > e^{2(-1)}$

$$\Rightarrow \left|5+\frac{3}{z}\right| > |e^z| \quad \forall z \in |\gamma|$$

$$\underbrace{5+\frac{3}{z}}_{h(z)} \qquad \underbrace{e^z}_{g(z)}$$

$5+\frac{3}{z}=0 \Rightarrow z=-\frac{3}{5}$ один нуль

$\Rightarrow f(z)=5+\frac{3}{z}+e^z$ имеет один нуль

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_4+a_6. Существуют ли многочлен $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и гомеоморфизмы $\alpha, \beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (не обязательно голоморфные), такие что $f = \beta \circ P \circ \alpha$ совпадает с выписанным ниже отображением? Строго обоснуйте ответ.

(0) $f(x+iy) = x^2 + iy$.

(1) $f(x+iy) = (x^2 - y^2) + ixy$.

(2) $f(re^{i\theta}) = re^{2i\theta}$.

9+6=15

(3) $f(x+iy) = x^3 + iy$.

(4) $f(x+iy) = (x^2+y^2)(x^2 - y^2 + ixy)$.

(5) $f(z) = \frac{z|z|^2}{1+|z|^2}$.

(6) $f(z) = \frac{z^2|z|^2}{1+|z|^2}$.

(7) $f(x+iy) = e^x + iy$.

(8) $f(x+iy) = e^x - e^{-x} + iy$.

(9) $f(x+iy) = \sin x + iy$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_1+a_5. В следующих ниже задачах функции f, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ являются голоморфными, а подмножество $K \subset \mathbb{D}$ является компактным. Через $\mathbb{D}$ обозначен единичный диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Множество $f(\mathbb{D} \setminus K) \setminus g(K)$ открыто в $\mathbb{C}$.

(1) Множество $f(K) \setminus g(\mathbb{D} \setminus K)$ компактно.

5+1=6

(2) Множество $\{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Re} f(z) > \operatorname{Im} g(z)\}$ открыто в $\mathbb{C}$.

(3) Множество $\operatorname{Re} f(\mathbb{D})$ открыто в $\mathbb{R}$.

(4) Множество $\operatorname{Re} f(\mathbb{D})$ ограниченно.

(5) Точняя верхняя грань чисел $(\operatorname{Re} f(z))^2 + (\operatorname{Im} f(z))^4$ не достигается при $z \in \mathbb{D}$.

(6) Множество $\operatorname{Re}(f(K)) \setminus \operatorname{Im}(g(\mathbb{D} \setminus K))$ компактно.

(7) Если $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} g(z)$ для всех z, таких, что $|z| = r > 0$, то $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} g(z)$ при $|z| < r$.

(8) Если $|f(z)|^2 < |g(z)|^3$ для всех z, таких, что $|z| = r > 0$, то $|f(z)|^2 < |g(z)|^3$ при $|z| < r$.

(9) Множество $\{|f(z)|^2 - |g(z)|^2 \mid z \in \mathbb{D}\}$ открыто в $\mathbb{R}$.

1

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_5$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(3) Рациональная функция степени $d > 1$ ни в одной точке не может иметь полюс порядка выше d.

o $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ $g(z), h(z)$ – многочлены

$$\max(\deg(g(z)), \deg(h(z))) = d > 1$$

o По предл. 7.27 из учебника: если f, g – функции на U, не явл. ~~тожд.~~ нулём, то $\frac{f}{g}$ мероморфная ф-ия на U, т.е. ф-ия $\frac{f}{g}: U/S \to \mathbb{C}$ голоморфна и не имеет полюсов $\forall z \in U/S$

o Рассм. ф-ию $\frac{f}{g}$ на S. Если $\frac{f}{g}$ имеет полюс порядка k в т. a, то ф-ия g имеет изолированный 0 порядка k в т. a

$$g = \sum_k c_k (z - a_k)^k$$

Если $k > d$, то степень ф-ии $\frac{f}{g}$ будет $\max(\deg(f(z)), k) > d$

$\Rightarrow$ противоречие.

- Если $\frac{f}{g}$ не подходит под предложение 7.27, значит, одна из ф-ий является тожд. нулём. Случай $g \equiv 0$ исключается, в случае $f \equiv 0$ противоречий с утверждением задачи нет

Т.о., утв. доказано

2

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_4+a_6. Существуют ли многочлен $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ и гомеоморфизмы $\alpha,\beta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (не обязательно голоморфные), такие что $f=\beta\circ P\circ\alpha$ совпадает с выписанным ниже отображением? Строго обоснуйте ответ.

(5) $f(z)=\frac{z|z|^2}{1+|z|^2}$.

$z = re^{i\theta} \Rightarrow |z| = r$

$$f(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta}\cdot r^2}{1+r^2} = \frac{r^3}{1+r^2}e^{i\theta}$$

ДОКАЖЕМ, ЧТО f – ГОМЕОМОРФИЗМ

$$f(r,\theta) = \frac{r^3}{1+r^2}e^{i\theta}$$

ОТОБРАЖЕНИЕ БИЕКТИВНО НА ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, Т.К. ИНАЧЕ

$\exists (r_1,\theta_1) \neq (r_2,\theta_2)$, т.ч. $f(r_1,\theta_1) = f(r_2,\theta_2)$

$$\frac{r_1^3}{1+r_1^2}e^{i\theta_1} = \frac{r_2^3}{1+r_2^2}e^{i\theta_2} \qquad \theta_1=\theta_2 \text{ ОЧЕВ.}$$

$$r_1^3 + r_1^3r_2^2 = r_2^3 + r_1^2r_2^3$$

$$-(r_1+r_2)(r_1^2+r_1r_2+r_2^2) = r_1^2r_2^2(r_2-r_1)$$

O_1 $r_1=r_2$ ИЛИ O_2 $\underbrace{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}_{\text{Ч}} = -r_1^2r_2^2$

$$r_1^2(1+r_2^2)+r_1r_2+r_2^2=0$$

$$\mathcal{D} = \text{ч}_2^2 - 4\text{ч}_2^2 - 4\text{ч}_2^4 = -\text{ч}_2^2(4\text{ч}_2^2+3) \leq 0$$

$\text{ч}_1, \text{ч}_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ нет действительных корней при $\text{ч}_2 \neq 0$

Если $\text{ч}_2 = 0$, то $\text{ч}_1 = 0$, а это случай 1 0_1

Проверим непрерывность f и f^{-1}

$\text{ч} \mapsto \dfrac{\text{ч}^3}{1+\text{ч}^2}$ непрерывно, т.к. это отношение двух многочленов и $1+\text{ч}^2 \neq 0$

$e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}$ непр. очевидно

$$f: x \mapsto \frac{x^3}{1+x^2} = y \Rightarrow x^3 = yx^2 + y$$
$$x^3 - yx^2 - y = 0$$

Замена $x \mapsto x + \dfrac{y}{3}$

Решим с помощью ф-лы Кардано

$$\left(x+\frac{y}{3}\right)^3 - y\left(x+\frac{y}{3}\right)^2 - y = 0$$

$$x^3 + \cancel{x^2 y} + x\frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{27} - \cancel{yx^2} - 2\frac{xy^2}{3} - \frac{y^3}{9} - y = 0$$

$$x^3 - \frac{xy^2}{3} - \left(\frac{2y^3}{27} + y\right) = 0$$

$$Q = \left(\frac{-y^2}{9}\right)^3 + \left(\frac{2y^3}{27} + \frac{y}{2}\right)^2 =$$

$$-\frac{y^6}{3^9} + \frac{4y^6 \cdot 3^3}{3^6 \cdot 3^3} + \frac{2y^4}{27} + \frac{y^2}{4} =$$

$$= \frac{27\cdot 4-1}{3^9}y^6+\frac{2y^4}{27}+\frac{y^2}{4}>0$$

$\Rightarrow$ УР-НЕ ИМЕЕТ 1 ВЕЩ. КОРЕНЬ И 2 КОМПЛ. СОПР., А $x \in \mathbb{R}$ ПО УСЛ. $\Rightarrow$ 1 КОРЕНЬ $\Rightarrow$ ОБРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ТОЖЕ НЕПРЕРЫВНО (И БИЕКТИВНО)

$$\Downarrow$$

$$\alpha : (r, \theta) \longmapsto \frac{r^3}{1+r^2} e^{i\theta}$$

$$P : z \longmapsto z$$

$$\beta : id$$

3

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_1 + a_5$. В следующих ниже задачах функции $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ являются голоморфными, а подмножество $K \subset \mathbb{D}$ является компактным. Через $\mathbb{D}$ обозначен единичный диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(6) Множество $\mathrm{Re}(f(K)) \setminus \mathrm{Im}(g(\mathbb{D} \setminus K))$ компактно.

КОМПАКТ В $\mathbb{C}$ — ЗАМКНУТОЕ И ОГРАНИЧЕННОЕ ПОДМН-ВО $\subset \mathbb{C}$

f, g — ГОЛОМОРФНЫЕ Ф-ЦИИ. ЕСЛИ ОНИ НЕ ПОСТОЯННЫЕ, ТО f, g — ОТКРЫТЫЕ ОТОБРАЖ-ИЯ

○ $\mathbb{D} \setminus K$ — ОТКРЫТОЕ МН-ВО $\Rightarrow g(\mathbb{D} \setminus K)$ — ОТКРЫТОЕ

$\mathrm{Im}(g(\mathbb{D} \setminus K)) = \mathrm{pr}(g(\mathbb{D} \setminus K))\big|_{Oy}$ — ОТКРЫТОЕ

БОЛЕЕ ТОГО, $\mathbb{D} \setminus K$ СВЯЗНО $\Rightarrow g(\mathbb{D} \setminus K)$ СВЯЗНО

$\Rightarrow \mathrm{Im}(\quad)$ ИМЕЕТ ВИД (a, b) ($a \neq b$, Т.К. ПРИ $a = b$ МН-ВО (a, b) ЗАМКНУТО)

○ РАССМ. $f(K)$

f — НЕПРЕРЫВНО, K — КОМПАКТ

$\Downarrow$

$f(K)$ — КОМПАКТ

$\Rightarrow \mathrm{Re}(f(K))$ — КОМПАКТ, Т.Е. ПРЕДСТАВИМ В ВИДЕ $[c, d]$

$\Rightarrow [c, d] \setminus (a, b)$

А для любых a, b, c, d $(a \neq b)$

$[c, d] \setminus (a, b)$ – компакт $\Rightarrow$ утв. верное

4

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_7$.

(5) Найдите интеграл

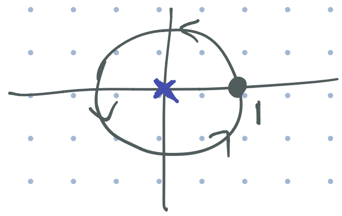
$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n d\theta$$

для всех целых положительных n.

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \text{СДЕЛАЕМ ЗАМЕНУ}$$

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad dz = iz\,d\theta$$

$$2\pi \geq \theta \geq 0 \Rightarrow$$



$$z \in S^1$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n d\theta = \frac{1}{i2^n} \int_{S^1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z} dz =$$

$$= \frac{2\pi i}{i2^n} \operatorname*{Res}_{z=0} \left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z} \right)$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z} = \frac{z^n + \binom{n}{1} z^{n-2} + \binom{n}{2} z^{n-4} + \ldots + z^{-n}}{z} =$$

$$= z^{n-1} + \binom{n}{1} z^{n-3} + \ldots + \binom{n}{m} z^{n-2m-1} + \ldots + z^{-n-1}$$

ВЫЧЕТ = КОЭФ. c_{-1} В РАЗЛОЖЕНИИ В РЯДЕ ЛОРАНА

$\Rightarrow$ ЕСЛИ n – НЕЧЁТНОЕ, ТО $n-2m-1$ ЧЁТНОЕ $\forall m \Rightarrow c_{-1} = 0$

ЕСЛИ n – ЧЁТНОЕ $n=2k$, ТО

$$c_{-1} = \binom{n}{k} = \binom{2k}{k} \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n \, d\theta = \binom{2k}{k} \frac{2\pi i}{i \, 2^{2k}} = \binom{2k}{k} \frac{\pi}{2^{2k-1}}$$

1

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_2$. Существует ли голоморфная функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ со следующими свойствами? Строго обоснуйте ответ.

(5) $f(i) = 2i$, $|f'(i)| = 1$.

$$f(z) = z + i = x + i(y+1)$$

ГОЛОМОРФНАЯ, Т.К. ВЫПОЛН. УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad 1 = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad 0 = 0$$

$$\left| \frac{\partial f(z)}{\partial z} \Big|_{z=i} \right| = |1+0| = 1 \Rightarrow$$ ГОЛОМ. Ф-ИЯ $f : H \to H$ СУЩЕСТВУЕТ

4

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_6$. Вычислите (при помощи вычетов) указанные ниже интегралы от многозначных аналитических функций. Во всех случаях выбирается такая ветвь функции x^a (в частности, $\sqrt{x}$, $\sqrt[5]{x}$ и т.д.), которая принимает положительные значения для положительных значений числа x.

(3) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \frac{dx}{1+x}$ при $-1 < \alpha < 1$.

$I =$

$$f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^\alpha \frac{1}{1+z}$$

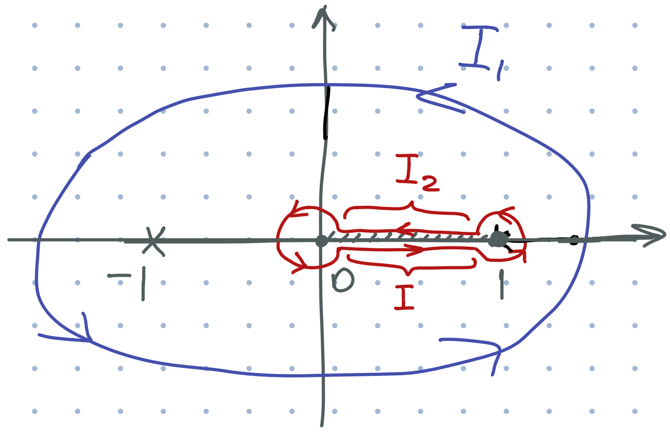
ВЫБЕРЕМ ВЕТВЬ

$f(x_-) \geq 0 \quad x > 0$

ПРОВЕРЯЕМ, $\exists$ ЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ С $[0,1]$ НА ВСЮ ВЕЩЕСТВЕННУЮ ОСЬ

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \frac{dx}{1+x} \qquad -1<\alpha<1$$

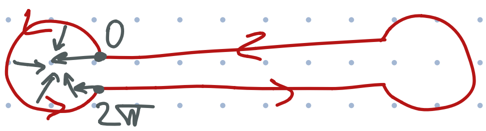
(С Ф-ЦЕЙ $\frac{1}{x+1}$ ВСЁ ХОРОШО, РАССМ. $\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha$)



Рассмотрим инт. I_1 при $R \to \infty$

$$I_1 = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) + I + I_2$$

Выразим I_2 через I



Параметризуем $z = \varepsilon e^{i\varphi}$
при обходе т. ветвления
φ изм. с 0 до 2π

$$I = e^{2\pi i \alpha} I_2$$

т.к. по ф-ле Муавра аргументы перемножаются

$$\Downarrow$$

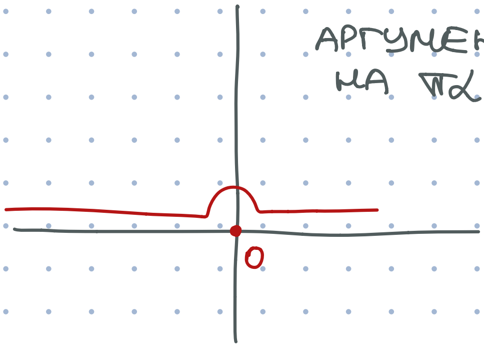
$$I_1 = I\left(1 - e^{2\pi i \alpha}\right)$$

т.к у I и I_2 противоположные направления

Чтобы найти $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)$ и $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$,

продолжим ф-ию на $z=-1$, $z=\infty$

$$f(z) \underset{z<0}{=} e^{\pi i \alpha}\left(\frac{-z}{1-z}\right)^{\alpha}\frac{1}{1+z}$$

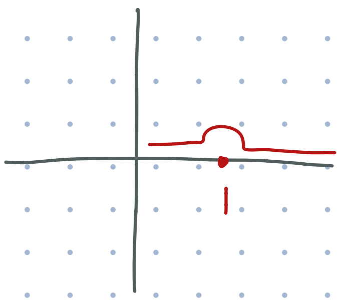


АРГУМЕНТ ИЗМ.
НА $\pi\alpha$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{1+z} + \dots \Rightarrow$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1}\left(f(z)\right) = \frac{e^{\pi i \alpha}}{2^{\alpha}}$$

$$f(z) \underset{z>0}{=} e^{-\pi i \alpha}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}\frac{1}{1+z} = \frac{e^{-\pi i \alpha}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$



$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = e^{-\pi i \alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$2\pi i\, e^{-\pi i \alpha} = 2\pi i\, e^{-\pi i \alpha}\frac{1}{2^{\alpha}} + \left(1 - e^{-2\pi i \alpha}\right) I$$

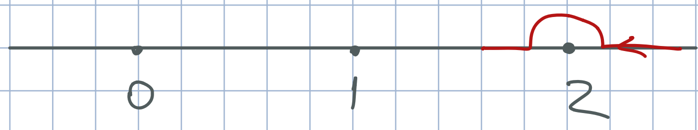
$$1 = 2^{-\alpha} + \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} I$$

$$\Downarrow$$

$$I = \left(1 - 2^{-\alpha}\right)\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_6$. Опишите (и нарисуйте) образ верхней полуплоскости относительно следующего отображения. (Точка z_0 — произвольная точка в верхней полуплоскости, а интеграл вычисляется по отрезку, соединяющему точки z_0 и z. Подынтегральное выражение понимается как произвольная однозначная ветвь на $\mathbb{H}$.)

(3) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)^3(z-2)}}$.



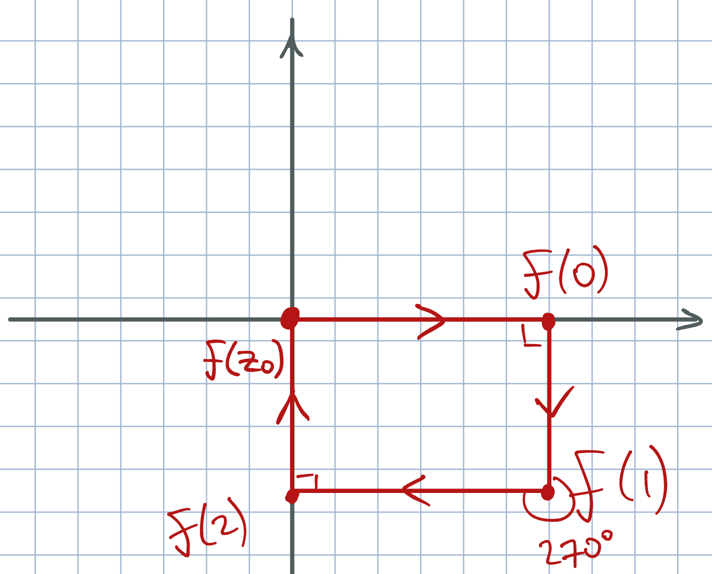
ПРИ ОБХОДЕ ТОЧЕК 0 И 2 АРГУМЕН ИЗМ.

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2\pi i}}} = e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$$

А ПРИ ОБХОДЕ Т. 1 $\frac{1}{\sqrt{(e^{2\pi i})^3}} = e^{-\frac{3\pi i}{2}} = i$

$z<0$	$0<z<1$	$1<z<2$	$z>2$
$-i\alpha, \alpha>0$	>0 $(-i \cdot i\alpha)$	$-i\alpha, \alpha>0$	>0

БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЯ ОБЩНОСТИ $F(z_0)=0$



3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_2+a_5. Докажите, что следующие уравнения имеют бесконечно много решений в комплексных числах.

(9) $\sin(\operatorname{ctg} z) = z + e.$

$$\sin(\operatorname{ctg} z) = z+e$$

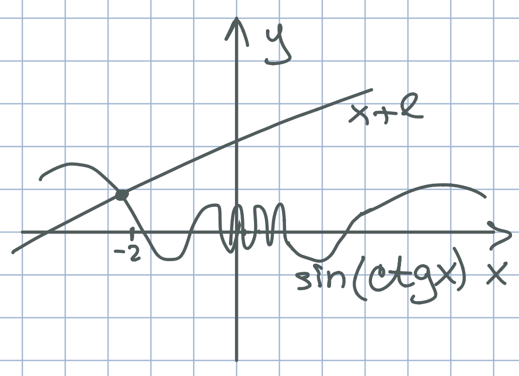
$$f = \sin(\operatorname{ctg} z)$$

$$\operatorname{tg}(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}(z) = \frac{1}{z} - \left(\frac{z}{3} + \frac{z^3}{45} + \ldots\right)$$

$$\sin(\operatorname{ctg} z) = \frac{1}{z} - \ldots - \frac{1}{z^3 3!} + \ldots + \frac{1}{z^5 5!} - \ldots$$

БЕСКОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЛАГАЕМЫХ ВБЛИЗИ $0 \Rightarrow f(z)$ ИМЕЕТ СУЩ. ОСОБЕННОСТЬ В 0



ЕСТЬ РЕШЕНИЕ ПРИ $z \in \mathbb{R}$ (ОБЛАСТЬ ЗНАЧ. $x+e = (-\infty; +\infty)$, Ф-ИЯ $\sin(\operatorname{ctg} x) \in [-1, 1]$ $\forall x$ $x \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ ПО БОЛЬШОЙ Т. ПИКАРА УТВ. ДОКАЗАНО