10 БИЛЕТ

Дифференцирование решений по параметру

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$$

Если реш-ия $\exists$, то вычисляются они след. образом:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \lambda_j \partial t} = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\Bigg|_{(t, x(t, \lambda^0, \lambda))} \frac{\partial x_k}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j}(t_0) = \frac{\partial x_0}{\partial \lambda_j}$$

прим. λ^0 — нач. условие

$$z_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j}(t, \lambda^0)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\Bigg|_{(t, x(t, \lambda^0, \lambda))} \cdot z_k + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_j}\Bigg|_{(-\,''\,-)} \\ z_i(t_0) = \frac{\partial (x_0)_i}{\partial \lambda_j}(\lambda^0) \end{cases}$$

Пример (интернет): найти произв. по параметру λ от реш-ия $\dot{x}=f(x,t,\lambda)$

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 + \lambda(t + x^3) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t,\lambda) = x(t,\lambda) - x^2(t,\lambda) + \lambda(t + x^3(t,\lambda))$$

(x зависит от λ и t)

пусть $z(t) = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,\lambda^0)$, $z(0) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial z(t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(x - x^2 + \lambda(t + x^3)\right) =$$

$$= z - 2xz + t + 3x^2 z\lambda$$

Лемма Адамара

$$f = f(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

выпукла по x

$$\exists F_i(x_0, x, y)$$

$$f(x,y) - f(x_0,y) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_0,x,y)(x_i - x_i^0)$$

ПРИМЁМ $F_i(x_0, x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y)$

Д-ВО 7 ЛЕКЦИЯ ≈15 МИНУТА

ТЕОРЕМА. ПУСТЬ $f \in C^1$ $x_0 \in C^1$

$x(t,\lambda)$ — РЕШ-ИЕ

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$$

$\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_d)$

ФИКСИРУЕМ $j \in \{1, \dots, d\}$

ТОГДА $\forall \lambda^0 \; \exists \; z_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j}(t, \lambda^0)$ И

z УДОВЛ. З. КОШИ

$$\begin{cases} \dot{z}_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\Big|_{(t, x(t,\lambda^0))} z_k \\ z_i(t_0) = \frac{\partial (x_0)_i}{\partial \lambda_j} \end{cases}$$

Д-ВО: $\lambda = \lambda^0 + \delta e_j$

ИМЕЕТ ПРЕДЕЛ ПРИ $\delta \to 0$ (ПО ОПР. ПРОИЗВ.)

$$\frac{x(t,\lambda) - x(t,\lambda^0)}{\delta} = z_\delta(t)$$

$$\dot{z}_{\delta}(t) = f(t, x(t,\lambda)) - f(t, x(t,\lambda_0)) =$$

$$\overset{\text{ЛЕММА}}{\underset{\text{АДАМАРА}}{=}} \sum_k F_{ik}(t, x(t,\lambda), x(t,\lambda^0)) \big(\underbrace{x_k(t,\lambda) - x_k(t,\lambda^0)}_{z_{\delta,k}}\big)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_{\delta,i} = \sum\limits_k F_{ik}(t, x(t,\lambda), x(t,\lambda^0)) z_{\delta,k} \\ z_{\delta,i}(t_0) = \dfrac{x_{0,i}(\lambda) - x_{0,i}(\lambda^0)}{\delta} \end{cases}$$

ЗАМЕТИМ, ЧТО ЭТУ СИСТЕМУ УР-ИЙ МОЖЕМ ПРОДОЛЖИТЬ В ТОЧКУ $\delta = 0$

$x(t,\lambda) \to x(t,\lambda^0)$ + ЛЕММА АДАМАРА.

РАССМ. ЗАДАЧУ КОШИ

$$\begin{cases} \dot{z}_{0,i} = \sum\limits_k \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\Big|_{(t,x(t,\lambda^0))} z_{0,k} \\ z_{0,i}(t_0) = \dfrac{\partial x_{0,i}}{\partial \lambda_j}(\lambda^0) \end{cases}$$

ВЫВОД: ЕСЛИ $(z_{0,i})$ — РЕШ-ИЕ З. КОШИ, ТО ЭТО ПРЕДЕЛ ПРИ $\delta \to 0$ РЕШ-ИЙ,

Т.Е. $z_{\delta,i}$ $(z_{\delta,i} \to z_{0,i})$

$\boxed{///}$