Логика и Алгоритмы
2 курс
Задачи

31 декабря 2021 г.

Логика и алгоритмы 2021. Листок 1.
Срок сдачи 19.02.2021

Каждая задача оценивается некоторым количеством баллов, которое указано в скобках после ее номера. Оценка за листок равна сумме баллов сданных задач, но не может превышать 10.

1. (1) Для множеств A, B и функции $f : A \to B$ показать, что $f(X) = \{y \mid \exists x \in X(f(x) = y)\}$ и $f^{-1}(Y) = \{x \mid \exists y \in Y(f(x) = y)\}$ являются множествами.

2. (1) Существует ли множество, содержащее в точности все кардиналы?

3. (1) Докажите, что любой плотный (т.е. для которого верно $\forall x \forall y\, (x < y \to \exists z(x < z \land z < y)))$ счётный линейный порядок без максимального и минимального элементов изоморфен $\mathbb{Q}$.

4. (1) Докажите, что для двух множеств A и B, таких что $A \lesssim B$ и $A \gtrsim B$, верно, что $A \sim B$. Это утверждение известно, как теорема Кантора-Бернштейна.

5. (баллы по пунктам) Пусть $(X, <)$ — вполне упорядоченное множество. Обозначим через $\Omega(X)$ множество всех конечных последовательностей $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ элементов X таких, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, где n может быть произвольным.

   Зададим на $\Omega(X)$ порядок: $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ меньше $\langle y_1, y_2, \ldots, y_m\rangle$, если для некоторого $k \leqslant \min(n, m)$ верно $x_k < y_k$ и $\forall i < k\, (x_i = y_i)$, или же если $n < m$ и $\forall i \leqslant n\, (x_i = y_i)$. Такой порядок обычно называется лексикографическим. Например для $\Omega(\mathbb{N})$ верно

$$\langle 5,4,3,2,1\rangle < \langle 5,4,3,2,2\rangle;$$
$$\langle 5,4,3,2,1\rangle < \langle 5,4,3,2,1,0\rangle;$$
$$\langle 5,4,3,2,1\rangle < \langle 5,5\rangle.$$

   а) (1 балл) Докажите, что $\Omega(X)$ вполне упорядочено.

   б) (2 балла) Проверьте, что $\Omega(1) \cong \omega$; $\Omega(X+1) \cong \Omega(X) \times \omega$; $\Omega(X+Y) \cong \Omega(X) \times \Omega(Y)$.

6. (3) Пусть ω_1 — первый несчётный кардинал. Определите порядковый тип вполне упорядоченного множества $\Omega(\omega_1)$?

7. (3) Пусть $(P, <)$ — частично упорядоченное множество, в котором всякая цепь имеет точную верхнюю грань. Дана функция $f : P \to P$, т.ч. $f(x) \leqslant f(y)$ для всех $x \leqslant y$. Докажите, что у функции f есть неподвижная точка, т.е. $\exists z\, (f(z) = z)$.

8. (2) Выведете Теорему Цермело из Леммы Цорна непосредственно (в теории Цермело-Френкеля без аксиомы выбора).

9. (2) Докажите, что в теории Цермело-Френкеля с аксиомой выбора, но без аксиомы регулярности, докажите, что аксиома регулярности эквивалентна утверждению об отсутствии бесконечных $\in$-убывающий последовательностей множеств.

   Замечание. В доказательстве теоремы о рекурсии для натуральных чисел не используется аксиома регулярности.

10. (2) Пусть $X \neq \varnothing$ и $R \subset X \times X$ — ациклическое отношение на X, т.е. не существует x_1, x_2, $\ldots x_n$ $(n \geqslant 1)$, таких что
$$x_1 R x_2, \ldots x_{n-1} R x_n, x_n R x_1$$
   (в частности, R иррефлексивно и не симметрично). Докажите, что существует линейный порядок продолжающий R.

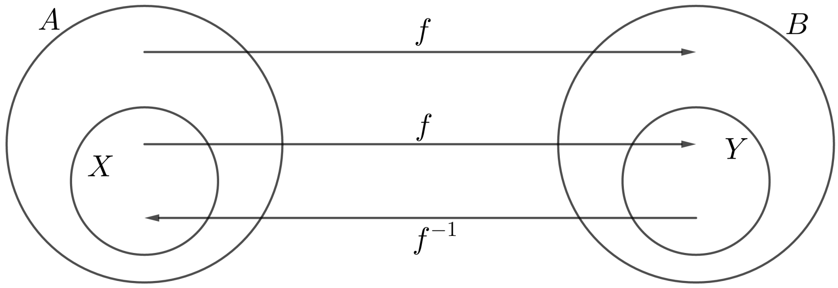
11. (3) Докажите, что в $\mathbb{R}^3$ существует множество окружностей радиуса 1, такое что через каждую точку проходит ровно одна окружность. Т.е. что пространство $\mathbb{R}^3$ можно разбить на непересекающиеся окружности.

12. (2) В теории Цермело-Френкеля без аксиомы выбора докажите, что следующие утверждение эквивалентно аксиоме выбора:

    У любого связного графа (неориентированного без петель) существует остовное дерево, т.е. подграф-дерево, содержащее все вершины.

Решения

Задача 1



Вопспользуемся схемой аксиом подстановки. Пусть свойство $\varphi(x, y)$ - такое, что для любого множества x айдется не более одного множества y, для которого $\varphi(x, y)$. Тогда для любого X найдется множество $Y = \{y|\ \exists x \in X\ \varphi(x, y\}$
Тогда $f^{-1}(y) = \{x|\ \exists y \in Y\ (f(x) = y)\}$ множество, теперь воспользуемся схемой аксиом выделения.
Для любого свойства φ и множества Y существует множество $Z = \{x \in Y|\ \varphi(x)\}$. То есть для X и свойства $\varphi(x) \leftrightarrow \exists y : f(x) = y$, существует множество $f^{-1}(Y) = \{x \in X|\ \varphi(x)\} = \{x \in X|\ \exists y : f(x) = y\}$

Задача 2

Допустим, существует множество всех кардиналов A, оно изоморфно кардиналу ω_N. Существует 2^{ω_N} множество всех подмножеств множества ω_N, по теореме с семинара известно, что для любого множества $B : |B| \not\simeq |2^B|$. Тогда существует кардинал $\omega_{N_1} : \omega_{N_1} \simeq 2^{\omega_N}$, но $\omega_{N_1} \notin A$, так как $\omega_{N_1} < |A|$ – противоречие.

Задача 3

$(A, <)$ счетно, плотно, линейно упорядочено, $\mathbb{Q}$ тоже. У обоих нет минимального или максимального элемента
Докажем, что они изоморфны
1) $\mathbb{Q}, A$ счетные, поэтому мы можем занумеровать их элементы
2) Построим по шагам (элементов счетно, следовательно шагов тоже).
Пусть мы построили множества X, Y из n элементов. Построение: возьмем элемент $\mathbb{Q} \backslash X$ или $Y \backslash A$ (пусть из $Y \backslash A$) и сравниваем его со всеми остальными элементами. Он или наименьший, или наибольший, или между y_i, y_{i+1}. Найдем элемент в $\mathbb{Q} \backslash X$, состоящий в таком же отношении с элементами X. Это можно сделать, так как $\mathbb{Q}$ плотно и не содержит минимального и максимального элемента. Теперь будем считать эти два элемента эквивалентными. На каждом шаге будем присоединять элемент из $\mathbb{Q} \backslash X$ или $Y \backslash A$ с элементом с наименьшим номером.

Задача 4

$(A, <)$ – вполне упорядочено
Пусть $B \subset A$, $(B, <_B)$ – полне упорядоченное множество. По теореме Кантора для любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.

$$(B, <_B) \simeq [0, a)_A$$
$$(A, <) \simeq [0, b)_B$$

Рассмотрим $f : A \to [0, b) \subset A$, это изоморфизм и f сохраняет порядок.

Лемма из Лекции:
Даны вполне упорядоченное множество $(A, <)$ и функция $f : A \to A$, сохраняющая порядок, тогда $a \leqslant f(a)\ \forall a \in A$
В нашем случае это также выполнено, а следовательно $\forall a \in A : a \leqslant f(a)$
$[0, b)_B$ по определению это подмножество $B \subset A$, такое что $\tilde{b} \in [0, b)_B$, $\tilde{\tilde{b}} < \tilde{b} \Rightarrow \tilde{\tilde{b}} \in [0, b)_B$. У нас $\forall a \in A : a \leqslant f(a) \in [0, b)_B$, то есть $a \in [0, b)_B$. Значит, $A \subseteq [0, b)_B \subseteq A$, то есть $[0, b)_B = A$ и $B = A$, что и требовалось.

Задача 7

$(P,<)$ частично упорядочено, всякая цепь имеет точную верхнюю грань, следовательно по лемме Цорна $(P,<)$ имеет максимальный элемент.
Зафиксируем $a \in P$ и построим функцию

$$g : \gamma \to P \quad \gamma \text{ – ординал, такой что не существует инъекции } \gamma \to P$$

$$g = \begin{cases} g(0) = a \\ g(\alpha+1) = f(g(\alpha)) \\ g(\alpha) = \sup\{g(\beta) : \beta < \alpha\} \quad \text{если } \alpha \text{ предельный ординал} \end{cases}$$

$$\forall x \leqslant y : f(x) \leqslant f(y) \Rightarrow \forall \alpha \leqslant \beta : g(\alpha) \leqslant g(\beta)$$
$$\{g(\beta) : \beta < \alpha\} \text{ – цепь } \forall \alpha < \gamma$$

Пусть g строго возрастает, следовательно оно инъективно, но $g : \gamma \to P$ не инъекция, откуда

$$\exists \alpha < \beta < \gamma, \text{ так что } g(\alpha) = g(\beta)$$
$$g(\alpha) \leqslant g(\alpha+1) \leqslant g(\beta) = g(\alpha) \qquad g(\alpha+1) = f(g(\alpha))$$
$$f(g(\alpha)) = g(\alpha)$$
$$\exists z : f(z) = z$$

Покажем, что существует ординал α, такой что не существует инъекции $\alpha \to P$
$\alpha = \{\beta |\ \beta$ – ординал такой, что существует инъекция $\beta \to P\}$ (то есть $\forall \beta \in \alpha\ \exists P' \subseteq P : \beta \simeq |P'|$)
Возьмем инъекцию $g : \beta \to P$, некий $\gamma < \beta$ и $h : \gamma \to \beta$ – включение. $g \circ h$ – инъекция, следовательно $\gamma \in \alpha$, откуда $\beta \in \alpha, \gamma \in \beta$, то $\gamma \in \alpha$, тогда α – транзитивно, его элементы тоже, а следовательно это ординал.
Если существует инъекция $\alpha \to P$, то $\alpha \in \alpha$ – противоречие.

Задача 8

Вполне упорядоченное множество $(S, <_S)$ назовем вполне упорядоченным подмножеством X, если $S \subset X$. Для данного множества X рассмотрим совокупность $W(X)$ всех его вполне упорядоченных подмножеств. На $W(X)$ определим отношение строгого частичного порядка $\prec$ следующим образом:
$(S, <_S) \prec (T, <_T)$, если и только если $S \subset T$ – собственный начальный отрезок $(T, <_T)$, $<_S = <_T |_S$.

Порядок:
транзитивность $(S, <_S) < (T, <_T)$, $(T, <_T) < (M, <_M)$, следовательно $S \subset T$ – собственный начальный отрезок $(T, <_T)$, $<_S = <_T |_S$, $T \subset M$ – собственный начальный отрезок $(M, <_M)$, $<_T = <_M |_T$. Тогда $S \subset T \subset M$, S – собственный начальный отрезок M, $<_S = <_T |_S = <_{(M|T)|S}$, откуда $<_S = <_{M|T}$

Докажем, что $(W(X), \prec)$ удовлетворяет условию леммы Цорна. Рассмотрим любую цепь $C \subset W(X)$. Цепь – подмножество $W(X)$, любые 2 элемента которого сравнимы, то есть среди любых двух элементов один является начальным отрезком другого, причем элементы – это вполне упорядоченные подмножества X. Таким образом, цепи C соответствуют возрастающая по включению цепь подмножеств X и возрастающая по включению цепь бинарных отношений на этих множествах. Пусть n – объединение этой цепи подмножеств и $<_n$ – цепи отношений.
$<_n$ – отношение линейного порядка на n (все сравнимо). Каждое $(S_1, <_s) \in C$ – начальный отрезок $(n, <_n)$. Тогда $(n, <_n)$ – вполне упорядоченное подмножество X, следовательно это элемент $W(X)$, также верхняя грань цепи C.
Применим к $W(X)$ лемму Цорна. В $(W(X), <)$ найдется некоторый максимальный элемент $(M, <_M)$. Покажем, что $M = X$. Допустим это не так, тогда возьмем $a \in X \backslash M$ и продолжим порядок $<_M$ на $N = M \cup \{a\}$, считая $x <_N a$, $\forall x \in M$. Тогда $(N, <_N)$ – вполне упорядоченное подмножество X, и $(M, <_M) \prec (N, <_N)$, но $(M, <_M)$ максимальный, следовательно X – это $(M, <_M)$, причем $(M, <_M)$ – вполне упорядоченное множество.

Задача 9

(утверждение 1) Пусть A – множество, $A \neq \varnothing$, R – тотальное бинарное отношение на A. Тогда существует последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, такая что $a_n R a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$
$R(a) \neq \varnothing\ \forall a \in A$ (отношение тотальное). A разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности, то есть A – семейство непустых классов эквивалентности. По аксиоме выбора существует функция $f :\ A \to A$,

такая что $\forall a \in A: \; f(a) \in A$, откуда $f(a) \in R(a)$, так как A разбито на классы эквивалентности. Значит, $\forall a \in A: \; aRf(a)$, так как $f(a) \in R(a)$

Зафиксируем $a \in A$ и рекурсивно зададим последовательность, то есть функцию из M:

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

То есть последовательность выглядит так: $a, \; f(a), \; f(f(a)), \ldots$
Аксиома регулярности равносильна отсутствию бесконечной $\in$-убывающей последовательности множеств.

($\Rightarrow$) Пусть существует такая последовательность, то есть f, определенная на $\mathbb{N}$. $f(n+1)$ – это элемент $f(n)$ ля любого n (так как последовательность $\in$-убывающая). Пусть $S = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ – множество значений f. По аксиоме регулярности $\exists B \in S$, такое что $B \cap S = \varnothing$. По определению S, B – это $f(k)$ для какого-то $k \in \mathbb{N}$. $f(k)$ содержит $f(k+1)$, $f(k+1) \in S$. Тогда $f(k+1) \in f(k) \cap S$. Но в пересечении пустое множество – противоречие, а следовательно такого f не существует

($\Leftarrow$) Пусть $S \neq \varnothing$ является контрпримером к аксиоме регулярности, то есть $\forall s \in S: \; s \cap S \neq \varnothing$. Определим бинарное отношение R на $S: \; aRb \Leftrightarrow b \in S \cap a \neq \varnothing$. Отношение тотальное, так как иначе $\exists s_1 : \nexists s_2 \in S : s_2 \in S \cap s_1$ – противоречит определению S. По утверждению 1 существует последовательность $(a_n) \in S$, где $a_n R a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$. Это бесконечная убывающая цепочка – противоречие, такого S не существует.

Задача 11

Используя теорему Цермело введем отношение полного порядка в $\mathbb{R}^3$
Луч $\{\beta : \beta \leqslant \alpha\} < \{\beta : \beta \leqslant \gamma\}$, если $\alpha < \gamma$ и не существует луча равномощного $\mathbb{R}^3 \simeq 2^\omega$

Во вполне упорядоченном множестве существует минимальный элемент a_0, проведем через него окружность.

Затем воспользуемся трансфинитной индукцией: пусть $\forall \beta < \alpha$ проведены непересекающиеся окружности, тогда:
1) точка α принадлежит одной из проведенных окружностей, в этом случае мы ничего не проводим
2) точка α не принадлежит ни одной из проведенных окружностей, в этом случае построим окружность: Через α проходит континуум окружностей, а уже проведено $\leqslant \beta$ окружностей $\neq 2^\omega$. Выберем плоскость A, которая не содержит проведенных окружностей (это можно сделать, так как плоскостей континуум, а построенные окружности входят не более чем в β плоскостей). Каждая окружность пересекает A не более чем в 2 точках, а следовательно их меньше 2^ω. Проведем на A семейство окружностей, касающихся в α. Существует окружность, которую не пересекает ни одна построенная окружность (так как каждая из построенных окружностей пересекается не более чем с 2 из данного семейства).

Задача 12

(Выбор $\Rightarrow$ Дерево)
Дан связанный граф, заметим что любой максимальный подграф без циклов будет остовным деревом, а существование такого подграфа следует из леммы Цорна (порядок введен по отоншению подграфа)

(Выбор $\Leftarrow$ Дерево)
Дано непустое семейсто $(X_i)_{i \in I}$ непересекающихся непустых множеств, определим семейство одноэлементных множеств $(Y_i)_{i \in I}$ так, что $Y_i \notin X_j$ и какое-то $a \notin \bigcup_{i \in I}(X_i \cup \{Y_i\})$. Пусть $V := \{a\} \cup (\cup_{i \in I}(X_i \cup \{Y_i\}))$. Определим связный граф G с вершинами V таким образом: для каждого $i \in I$ и $x \in X_i$ свяжем(соединим ребром) x с Y_i и a. Определим остовное дерево T графе G. Для каждого $i \in I$, каждый путь в G, проходящий через Y_i и a, проходит через элемент X_i (и для каждого i элемент свой). Так как остовное дерево является связанным подграфом G, T имеет хотя бы один путь, а так как в нем нет циклов, то такой путь ровно один. Пусть этот путь проходит через x_i в X_i, тогда $(x_i)_{i \in I}$ Принадлежит $\prod_{i \in I} X_i$.

Логика и алгоритмы 2021. Листок 2.
Срок сдачи 09.04.2021

Каждая задача оценивается некоторым количеством баллов, которое указано в скобках после ее номера. Оценка за листок равна сумме баллов сданных задач, но не может превышать 10.

В задачах 2, 7, 8, 9, 12 рассматриваются сигнатуры с равенством и все модели предполагаются нормальными.

1. (1) Докажите, что любую булеву функцию от произвольного числа аргументов можно записать с помощью $x \leftrightarrow y$ (эквиваленция), $x \oplus y$(сложение по модулю 2) и функции $maj(x, y, z)$ от трех аргументов, которая равна значению, которое встречается среди аргументов x, y и z по крайней мере 2 раза.

2. Для сигнатуры с одним предикатным символом $\leqslant$ и равенством, рассмотрим модель $M = (P(\mathbb{N}), \subset)$ (т.е. носитель состоит из всех подмножеств $\mathbb{N}$, а $\leq$ интерпретируется как включение). Докажите, что в M:
   а) (1 балл) множество $\{\{0\}\}$ не определимо,
   б) (1 балл)множество $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\}$ определимо.

3. (1) Приведите следующую формулу, в которой P и Q — двуместные предикатные символы, к предваренной нормальной форме
$$\forall x \exists y \big(P(x, a) \to Q(y, a)\big) \to \exists y \big(P(b, y) \to \neg \forall x Q(y, x)\big).$$

4. Для следующих формул проверьте выполнимость и общезначимость:
   (a) (1 балл) $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \to \exists z \forall y \exists x P(x, y, z)$;
   (b) (1 балл) $\exists x \forall y \exists z P(x, y, z) \to \forall y \exists z \exists x P(x, y, z)$.

5. (2) Покажите, что следующая формула выполнима, но только на бесконечных моделях:
$$\neg \exists x \left(\exists y \left(R(y, x) \land \forall z (R(x, z) \to R(y, z))\right) \to R(x, x)\right).$$

6. Докажите выводимость следующих формул в исчислении предикатов, не используя теорему о полноте:
   (a) (2 балл) $(\forall x\, A \land \forall x\, B) \to \forall x\, (A \land B)$;
   (b) (2 балл) $\exists x\, [a/x](A \land B) \to (\exists x\, [a/x]A \land B)$, где a не входит в B;

7. (2) Пусть сигнатура Ω конечна и состоит из одноместных предикатных символов и равенства. Докажите, что всякая теория в сигнатуре Ω имеет не более счетного числа попарно неизоморфных счетных нормальных моделей.

8. (2) Докажите, что теория в сигнатуре с одним 2-местным предикатным символом R, равенством и двумя аксиомами:
$$\forall x \forall y\, (R(x, y) \to R(y, x)) \qquad \text{(симметричность)},$$
$$\forall x\, R(x, x) \qquad \text{(рефлексивность)},$$
имеет бесконечно много попарно не эквивалентных расширений (в той же сигнатуре).

9. (2) Рассмотрим абелевы группы в сигнатуре $\{0, +, =\}$. Верно ли, что $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \equiv \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$?

10. (1) Постройте формулу в какой-нибудь сигнатуре без равенства, имеющую 3-элементную модель, но не имеющую 2-элементных моделей.

11. (2) Можно ли построить в сигнатуре без равенства формулу, имеющую 2-элементную модель, но не имеющую 3-элементных моделей?

В последней задаче используются следующие сокращения:

$$\exists! x\, A(x) := \exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \to y = x)) \text{ (где } y \text{ не входит в } A(x)),$$

$$\exists_{=n} x\, A(x) :=$$

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (A(x_1) \wedge \ldots \wedge A(x_n) \wedge \bigwedge\{\neg(x_i = x_j) \mid i < j\} \wedge \forall y(A(y) \to (y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n)))$$

(где y, $x_1, \ldots, x_n$ — различные связанные переменные, не входящие в $A(x)$).

12. (3) («Проективная геометрия») Докажите, что теория в сигнатуре $(R^2, =)$ со следующими аксиомами сильно категорична:

   (a) $\forall x(\exists y\, R(y, x) \to \exists_{=3} y\, R(y, x))$,
   (b) $\forall x(\exists y\, R(x, y) \to \exists_{=3} y\, R(x, y))$,
   (c) $\forall x \forall y(x = y \vee \exists z R(z, x) \vee \exists z R(z, y) \vee \exists! z(R(x, z) \wedge R(y, z)))$,
   (d) $\forall x \forall y(x = y \vee \exists z R(x, z) \vee \exists z R(y, z) \vee \exists! z(R(z, x) \wedge R(z, y)))$,
   (e) $\forall x(\exists y R(x, y) \leftrightarrow \neg \exists y R(y, x))$.

Решения

Задача 1

Теорема о функциональной полноте. Для любой функции $\varphi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ найдется такая формула A от n переменных, что $\varphi = \varphi_A$. При этом можно считать, что A содержит лишь связки $\neg$ и $\vee$.
Следовательно если выразить $\neg$ и $\vee$ через $x \leftrightarrow y,\ x \oplus y,\ \mathrm{maj}(x, y, z)$

x	y	x $\leftrightarrow y$	x $\oplus y$	$\mathrm{maj}(x, y, x \oplus y)$	x $\oplus (x \leftrightarrow x)$
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0

Заметим, что $\mathrm{maj}(x, y, x \oplus y)$ соответствует $x \vee y$, а $x \oplus (x \leftrightarrow x) = x \oplus 1$ соответствует $\neg x$, а следовательно любую булеву функцию можно записать, используя только данные по условию функции.

Задача 2

(a) Рассмотрим отображение, такое что $\{0\} \leftrightarrow \{1\}$. Покажем, что это автоморфизм, то есть что если $A \subseteq B$, то $A' \subseteq B'$. Пусть $a \in A'$

$$a \neq 0, 1 \Rightarrow a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \in B'$$
$$a = 0 \Rightarrow 1 \in A \Rightarrow 1 \in B \Rightarrow 0 \in B'$$
$$a = 1 \Rightarrow 0 \in A \Rightarrow 0 \in B \Rightarrow 1 \in B'$$

Итак, множество $\{\{0\}\}$ не сохранилось при рассмотренном автоморфизме, а определимые множество сохраняются при любом автоморфизме, а следовательно $\{\{0\}\}$ не явояется определимым.

(b) Зададим предикат, выражающий свойство одноэлементности множества, то есть всякое подмножество данного множества или пусто, или совпадает с ним самим. Выразим свойство пустоты множества ($x = \{\}$) формулой $\forall y\ x \leqslant y$, а также свойство равенства двух подмножеств ($x = y$) формулой $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x)$. Через это мы можем выразить свойство одноэлементности $\forall y((y \leqslant x) \to ((y = \{\}) \vee (y = x)))$.

Задача 3

$$\forall x \exists y(P(x, a) \to Q(y, a)) \to \exists y(P(b, y) \to \neg \forall x Q(y, x))$$
$$\forall x \exists y(P(x, a) \to Q(y, a)) \to \exists z(P(b, z) \to \neg \forall t Q(z, t))$$
$$\forall x \exists y(\neg P(x, a) \vee Q(y, a)) \to \exists z(\neg P(b, z) \vee \neg \forall t Q(z, t))$$
$$\neg \forall x \exists y(\neg P(x, a) \vee Q(y, a)) \vee \exists z(\neg P(b, z) \vee \neg \forall t Q(z, t))$$
$$\neg \forall x \exists y(\neg P(x, a) \vee Q(y, a)) \vee \exists z(\neg P(b, z) \vee \exists t \neg Q(z, t))$$
$$\exists x \forall y \neg(\neg P(x, a) \vee Q(y, a)) \vee \exists z(\neg P(b, z) \vee \exists t \neg Q(z, t))$$
$$\exists x \forall y \exists z \exists t \neg(\neg P(x, a) \vee Q(y, a)) \vee (\neg P(b, z) \vee \neg Q(z, t))$$
$$\exists x \forall y \exists z \exists t(P(x, a) \wedge \neg Q(y, a)) \vee (\neg P(b, z) \vee \neg Q(z, t))$$
$$\exists x \forall y \exists z \exists t(P(x, a) \vee \neg P(b, z) \vee \neg Q(z, t)) \wedge (\neg Q(y, a) \vee \neg P(b, z) \vee \neg Q(z, t))$$

Задача 4

(a)

$$\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \to \exists z \forall y \exists x P(x, y, z)$$

Рассмотрим модель целых чисел, в которой $P(x, y, z):\ y = x^2$. Тогда $\forall x \exists y \forall z(y = x^2)$ верно, а $\exists z \forall y \exists x(y = x^2)$ неверно, следовательно формула необщезначима.

(b)

$$\exists x \forall y \exists z P(x,y,z) \to \forall y \exists z \exists x P(x,y,z)$$

Если левая часть – истина, то существуют такие x_0, z_0, что $\forall y: \ P(x,y,z) \equiv 1$, тогда правая часть также истина, так как для этой же пары x_0, z_0 все будет выполнено, а следовательно формула истина. Если левая часть ложна, то следствие может быть любым, а следовательно формула также истина. Тогда она всегда истина, а следовательно выполнима и общезначима

Задача 5

$$\neg\exists x(\exists y(R(y,x) \wedge \forall z(R(x,z) \to R(y,z))) \to R(x,x))$$
$$\forall x \neg(\exists y(R(y,x) \wedge \forall z(R(x,z) \to R(y,z))) \to R(x,x))$$
$$\forall x \neg(\exists y(R(y,x) \wedge \forall z(\neg R(x,z) \vee R(y,z))) \to R(x,x))$$
$$\forall x \neg(\neg\exists y(R(y,x) \wedge \forall z(\neg R(x,z) \vee R(y,z))) \vee R(x,x))$$
$$\forall x (\exists y(R(y,x) \wedge \forall z(\neg R(x,z) \vee R(y,z))) \wedge \neg R(x,x))$$
$$\forall x \neg R(x,x) \wedge \forall x \exists y(R(y,x) \wedge \forall z(\neg R(x,z) \vee R(y,z)))$$
$$\forall x \neg R(x,x) \wedge \forall x \exists y \forall z(R(y,x) \wedge (\neg R(x,z) \vee R(y,z)))$$
$$\forall x \exists y \forall z(\neg R(x,x) \wedge R(y,x) \wedge (\neg R(x,z) \vee R(y,z)))$$

Задача 6

(a) Правило Бернайса $\frac{A \to B}{A \to \forall x B[a/x]}$, следовательно нам достаточно доказать, что $(\forall x A \wedge \forall x B) \to A \wedge B$ выводимо.
Применим теорему о дедукции: $\Gamma \vee \{P\} \vdash Q \Leftrightarrow \Gamma \vdash P \to Q$, то есть будем выводить $A \wedge B$ из аксиом и $(\forall x\ A \wedge \forall x\ B)$
Аксиомы:
$A \wedge B \to A$ (1), $A \wedge B \to B$ (2), $A \to (B \to A \wedge B)$ (3)
$\forall x A[a/x] \to A[a/t]$ (4), $A[a/t] \to \exists x A[a/x]$ (5)
Modus ponens: $\frac{A,\ A \to B}{B}$ (MP)

$$\forall x A \wedge \forall x B \xrightarrow{(1)} \forall x A \xrightarrow{(4)} A \xrightarrow{(*)} A \wedge B$$

$$\forall x A \wedge \forall x B \xrightarrow{(2)} \forall x B \xrightarrow{(4)} B$$

$$(*)\text{: } (A \to (B \to A \wedge B)) \xrightarrow{(\text{MP})} (A \to A \wedge B) \xrightarrow{(\text{MP})} A \wedge B$$

Задача 9

Рассмотрим формулу

$$\forall x (\forall s\ x \neq s + s) \to (\forall y (\forall t\ y \neq t + t) \to \exists w\ x + y = w + w)$$

Пусть $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} = M_1,\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q} = M_2$

Эта формула всегда верна в M_1:
Пусть $x \neq s + s\ \forall s$, это значит, что $x = (\text{нечетное}, \text{любое}, \text{любое})$, так как га второй и третьей позиции рациональные числа, там можно любое число представить в виде $\frac{\text{число}}{2}$. Пусть $y \neq t + t$, тогда аналог $y = (\text{нечетное}, \text{любое}, \text{любое})$. Тогда $x+y = (\text{нечетное}, \text{любое}, \text{любое}) + (\text{нечетное}, \text{любое}, \text{любое}) = (\text{четное}, \text{любое}, \text{любое})$, то есть формула примет вид $1 \to (1 \to 1) = 1$
Если $x \neq s + s,\ y = t + t$, то $x + y = (\text{нечетное}, \text{любое}, \text{любое})$ и формула примет вид $1 \to (0 \to 0) = 1 \to 1 = 1$
Если $x = s + s,\ y \neq t + t$, то $x + y = (\text{нечетное}, \text{любое}, \text{любое})$ и формула примет вид $0 \to (1 \to 0) = 0 \to 0 = 1$
Если $x = s + s,\ y = t + t$, то $x + y = (\text{четное}, \text{любое}, \text{любое})$ и формула примет вид $0 \to (0 \to 1) = 0 \to 1 = 1$

Но в M_2 эта формула не всегда верна, рассмотрим следующий случай:
$x = (1, 0, 0),\ y = (0, 1, 0),\ x + y = (1, 1, 0)$. Тогда формула примет вид $1 \to (1 \to 0) = 1 \to 0 = 0$, то есть они не изоморфны и утверждение задачи неверно.

Логика и алгоритмы (весна 2021)
Листок N 3. Срок сдачи 15 июня.

Задачи оцениваются по 1 баллу, кроме задач 6 и 7, за которые дается 2 балла. Можно набрать не более 10 баллов.

В этом листке все сигнатуры и теории с равенством, все модели нормальны.

Спектр замкнутой формулы — это множество мощностей ее конечных моделей.
Теории одной сигнатуры называются *эквивалентными*, если у них одни и те же модели.
Теория называется *конечно аксиоматизируемой*, если существует эквивалентная ей конечная теория.
$A_{=n}$ — формула в сигнатуре $\{=\}$, истинная в точности в моделях мощности n.

1. Докажите, что ординалы $\omega \cdot 2$ и $\omega \cdot 3$ как модели сигнатуры $\{<, =\}$ не элементарно эквивалентны.

2. (a) Докажите, что в сигнатуре $\{=\}$ спектр любой замкнутой формулы — либо конечное, либо ко-конечное (т.е. дополнение к конечному) множество.

   (b) Докажите, что всякая замкнутая формула этой сигнатуры эквивалентна булевой комбинации формул вида $A_{=n}$ (т.е. формуле, построенной из них с помощью $\vee, \wedge, \neg$).

3. Докажите, что если замкнутая формула в сигнатуре $\{+, \cdot, 1, 0, =\}$ истинна во всех полях характеристики 0, то она истинна в некотором поле конечной характеристики.

4. Докажите, что $Th(\mathbb{Q}, <, =, P)$, где $\{r \mid \mathbb{Q} \models P(r)\} = (-\infty, \sqrt{2})$, счетно категорична

5. Даны две теории T и S в сигнатуре Ω со следующими свойствами:

   - теория $T \cup S$ противоречива;
   - всякая модель сигнатуры Ω является либо моделью T, либо моделью S.

   Докажите, что обе теории T и S конечно аксиоматизируемы.

6. (2 балла) Докажите, что любой бесконечный линейный порядок $(X, \leq)$ изоморфно вкладывается в некоторое ультрапроизведение своих конечных подпорядков.

7. (2 балла) Докажите, что теория $Th(\mathbb{Q})$ в сигнатуре $\{+, \cdot, 1, 0, =\}$ не является счетно категоричной.

8. Пусть A, A', B, B' — линейно упорядоченные множества (в сигнатуре $\{<, =\}$). Докажите, что если $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$, то $A+B \equiv A'+B'$.

9. В сигнатуре $\{S, =\}$, где S — одноместный функциональный символ рассмотрим теорию T с аксиомами

$$\forall x \exists! y\, S(y) = x,$$

$$\forall x\, S^n(x) \neq x \quad \text{(для всех } n\text{)}.$$

(a) Докажите, что T не счетно категорична.

(b) Докажите, что T категорична в любой несчетной мощности и, как следствие, теория T полна.

10. Докажите, что в модели $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, <)$ операция умножения не определима.

Решения

Задача 1

Предъявим формулу, которая выполняется в одной модели, но не выполняется в другой:
Существует три различных элемента, у которых нет непосредственного предшественника. То есть $A = \exists x1, x2, x3\ (x1! = x2 \wedge x1! = x3 \wedge x2! = x3 \wedge \forall y\ (y < x_i \Rightarrow \exists z :\ y < z < x_i).\ w * 3 \models A,\ w * 2 \models A.$

Задача 2

(a) Пусть $\mathrm{Sp}(A)$ – спектр A. $\mathrm{Sp}(A)$ – дополнение к $\mathrm{Sp}(\neg(A))$, так как если A не истинна в M, то $\neg(A)$ истинна в M, а модели одинакового порядка, раз у нас сигнатура $\{=\}$, изоморфны. Тогда надо показать, что невозможно, что и $\mathrm{Sp}(A)$, и $\mathrm{Sp}(\neg(A))$ бесконечны. Пусть бесконечны, тогда у A и $\neg(A)$ есть конечные модели сколь угодно большой мощности $\Rightarrow$ по теореме о подъеме есть и сколь угодно бесконечной. Возьмем тогда такие модели бесконечной мощности k. Получается, у A и $\neg(A)$ есть модели одинаковой мощности одной сигнатуры. Как мы уже сказали, они должны быть изоморфны, то есть в них истинны одни и те же формулы, то есть в таких моделях мощности k истинны и A, и $\neg(A)$, а так не может быть.

(b) Если $\mathrm{Sp}(A)$ конечен, то тогда у A модели мощности $n_1, n_2, \ldots, n_k$. А еще модели одинаковой мощности изоморфны, то есть модели мощностей $n_1, \ldots, n_k$ будут моделями A. Значит, $A = \vee A_{=n}$ по $n = n_1, \ldots, n_k$.
Если конечен, то $\mathrm{Sp}(\neg(A))$ конечное, тогда $\neg(A) \Leftrightarrow \vee A_{=n}$, тогда $A \Leftrightarrow \wedge\neg(A_{=n})$.

Задача 3

Пусть $\{B\}$ аксиоматизирует теорию поля, A замкнутая формула в сигнатуре, которая истинна в каждом поле характеристики 0. Тогда $\{B\} \vee \{1 + \ldots + 1 \neq 0(\text{n единиц})|n \geqslant 1,\ n \in A\} \models A \Rightarrow$ по теореме о компактности есть натуральное m, такое что $\{B\} \vee \{1 + \ldots + 1 \neq 0(\text{n единиц})|n = 1, \ldots, m\} \models A \Rightarrow A$ истинна в каком-то поле $\mathrm{char}\, p > m$

Задача 5

$T \cup S$ противоречива $\Leftrightarrow$ есть формула A, такая что $T \cup S \vdash A$, $T \cup S \vdash \neg(A)$. Выводы конечные по определению, так что число использующихся аксиом конечно. Пусть из T используются $\{t_1, \ldots, t_k\}$, из $S - \{s_1, \ldots, s_m\}$. В их объединении выводимы $A,\ \neg(A)$
Теперь покажем, что $\{t_1, \ldots, t_k\} \sim T$. Покажем, что у них одинаковые модели. Если M – модель T, то M – модель $\{t_1, \ldots, t_k\} \subset T$. Наоборот от противного. То есть M – модель $\{t_1, \ldots, t_k\}$, но не модель T. По условию M – модель или T, или S. Значит, модель S. Тогда $M \models \{s_1, \ldots, s_m\} \subset S$. Раз $M \models \{t_1, \ldots, t_k\}$ по предположению, то $M \models \{s_1, \ldots, s_m\} \vee \{t_1, \ldots, t_k\}$. А в этом объединении выводимы A и $\neg(A)$ (а значит, и истинны). Значит, $M \models A,\ \neg(A)$. Противоречие.
Значит, $T \sim \{t_1, \ldots, t_k\} \Leftrightarrow T$ конечно аксиоматизируема. Аналогично S конечно аксиоматизируема

Задача 7

Расширим сигнатуру, добавив в нее константу c. Добавим в $\mathrm{Th}(Q)$ схему аксиом $\forall n \exists x : x^n = c$.
$\mathrm{Th}(Q) \vee \{\forall n \exists x : x^n = c\}$ выполнима по теореме о компактности (в каждой конечной подтеории есть лишь конечное число аксиом об извлечении корня. В качестве c возьмем достаточно большое рациональное число, из которого извлекаются все корни теории). По теореме о понижении мощности есть счетная элементарно эквивалентная ей модель M.
Обедним сигнатуру до исходной. Чтобы показать, что $\mathrm{Th}(Q)$ не счетно категорична, предъявим две счетные неизоморфные модели. Покажем, что это Q и M. От противного: пусть есть изоморфизм $\phi : M \sim Q$. Тогда $\phi(x) = \phi(0 + x) = \phi(0) + \phi(x) \Rightarrow \phi(0) = 0,\ \phi(x) = \phi(1 \cdot x) = \phi(1)\phi(x) \Rightarrow \phi(1) = 1$. Теперь посмотрим, как выглядит $\phi(c)$. Из $\phi(c)$ должен извлекаться корень любой степени. $\phi(c)$ рациональное, так что $\phi(c)$ или 0, или 1. Но 0 и 1 мы показали, что уже заняты. Так что изоморфизма нет.

Задача 9

(a) T не счетно категорично, т.е. не все счетные модели изоморфны. Явно покажем две счетные неизоморфные модели T. $M_1 = \{Z, S_1(x) = x+1\}$, $M_2 = \{Z, S_2(x) = x+2\}$. От противного: пусть они изоморфны, ϕ — изоморфизм. Тогда для любого m из $M_1:\ \phi(m+1) = \phi(m)+2$. Тогда все $\phi(m)$ для всех m из M_1 одинаковой четности. Но ϕ – биекция. Противоречие