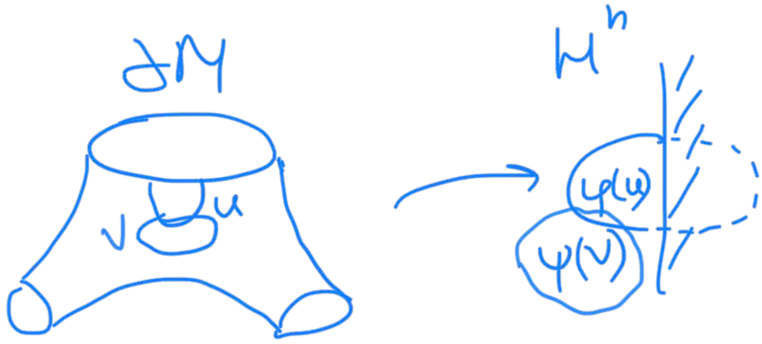
ЛЕКЦИЯ МАТАНАЛИЗ 28.09.20

МНОГООБРАЗИЯ С КРАЕМ

M – хаусд. топ. пр-во со счётной базой



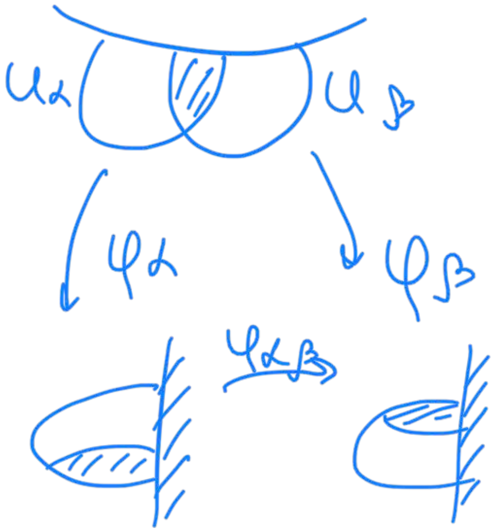
Опр. Картой многообр. с краем M наз. пара (U, φ), U – откр. мн-во

$$\varphi: U \to H^n = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \text{ – гомеоморфизм}$$

Опр. Атласом $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообр. с краем M наз. такой набор соглас. карт, что $M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$

Опр. Две карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) наз. согласованными, если отобр. перехода между ними явл. диффеоморфизмом (*)

многообразия M



$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

Замечание: x_1 на крае $= 0$ $\Rightarrow$ якобиан в первом столбце не определен $\Rightarrow$ в точках края это левые производные

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^n_{\alpha\beta}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

Опр. **Краем** многообразия с краем M и атласом $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ наз. множество:

$$\partial M = \bigcup_\alpha \{ p \in M \mid \varphi_\alpha^{-1}(0, x^2, \dots, x^n),$$
$$(0, x^2, \dots, x^n) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \}$$

Лемма. Множество ∂M не зависит от выбора атласа.

▷ Рассмотрим мн-во внутренних точек многообр. M $\qquad M \setminus \partial M$

Диффеом. $\varphi_{\alpha\beta}$ переводит окр-ть точки x в окр-ть точки $\varphi_{\alpha\beta}(x)$

Для всех атласов мн-ва $M \setminus \partial M$ совпадают (т.к. окр-ть ) ◁

(Рассматриваются 2 карты из 1го атласа, т.к. мы можем взять карты из разных атласов и объединить атласы)

Теорема. Край ∂M n-мерного C^k-гладкого многообразия с краем M явл. $(n-1)$-мерным C^k-гладким многообр. без края

▶ $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — атлас M. Определим атлас $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha', \varphi_\alpha')\}$ многообразия M

$$U_\alpha' = U_\alpha \cap \partial M \qquad \varphi_\alpha' = \varphi_\alpha \big|_{U_\alpha'}$$

$$p \in U_\alpha' \quad \varphi_\alpha'(p) = (\varphi_\alpha^2(p), \ldots, \varphi_\alpha^n(p))$$

Отображение биективно (т.к. топология индуцирована)

Проверим C^k-согласованность

$$\varphi_{\alpha\beta}' = \varphi_\beta' \circ \varphi_\alpha'^{-1} : (x^2, \ldots, x^n) \longmapsto (\varphi_{\alpha\beta}^2(x), \ldots, \varphi_{\alpha\beta}^n(x))$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(0, x^2, \ldots, x^n) \longmapsto (0, \varphi_{\alpha\beta}^2(x), \ldots, \varphi_{\alpha\beta}^n(x))$$

Необходимо показать, что $\varphi_{\alpha\beta}'$ — C^k-диффеоморф.

$$J(\varphi_{\alpha\beta})(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi'^{1}_{\alpha\beta}}{\partial x^1} & 0 \cdots 0 & \frac{\partial \varphi'^{1}_{\alpha\beta}}{\partial x^n} = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi'^{n}_{\alpha\beta}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi'^{1}_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

$x^1 = 0$

φ ? ?

$\varphi^1_{\alpha\beta} = 0$

$\Downarrow$

$\frac{\partial \varphi'^{1}_{\alpha\beta}}{\partial x_i} = 0$

$i = 2, \ldots, n$

$x \in \varphi'_\alpha(U'_\alpha)$

$$\frac{\partial \varphi'^{1}_{\alpha\beta}}{\partial x^1}(x) = \lim_{t \to -0} \frac{-\varphi^1_{\alpha\beta}(x) + \varphi^1_{\alpha\beta}(x^1 + t, x^2, \ldots, x^n)}{t}$$

Знаем, что $|J(\varphi_{\alpha\beta})| \neq 0 \Rightarrow$

минор $|A_{11}| \neq 0$

$$J(\varphi'_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^2_{\alpha\beta}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \\ \\ \frac{\partial \varphi^n_{\alpha\beta}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n_{\alpha\beta}}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

$\mathcal{A}' - C^k$-гладкий атлас на ∂M ◭

Ориентирующий атлас

$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M, что $\forall\, U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

$$|J(\varphi_{\alpha\beta})(x)| > 0 \quad \forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

Теорема. Ориентирующий атлас $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообразия с краем M индуцирует ориентир. атлас $\mathcal{A}$ на крае ∂M.

Ориентации атласов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ на M и ∂M наз. согласованными

Наглядно можно задать направлением обхода

▷ Из предыдущей теоремы:

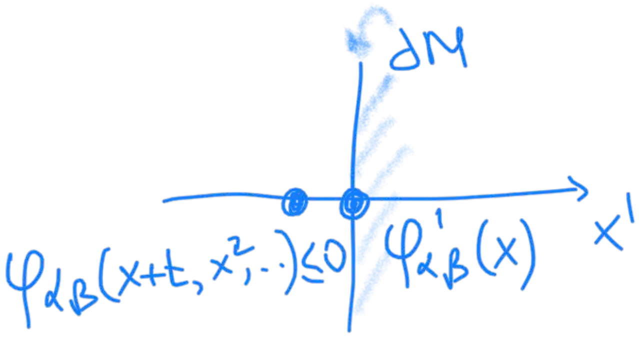
$$\varphi^1_{\alpha\beta} = \varphi^1_{\beta} \circ \varphi^{1-1}_{\alpha} : (x^2,\dots,x^n) \longmapsto (\varphi^2_{\alpha\beta}(x),\dots,\varphi^n_{\alpha\beta}(x))$$

$$J(\varphi^1_{\alpha\beta}) \neq 0$$

нужно показать, что $J(\varphi_{\alpha\beta})(x) > 0$

т.е. что

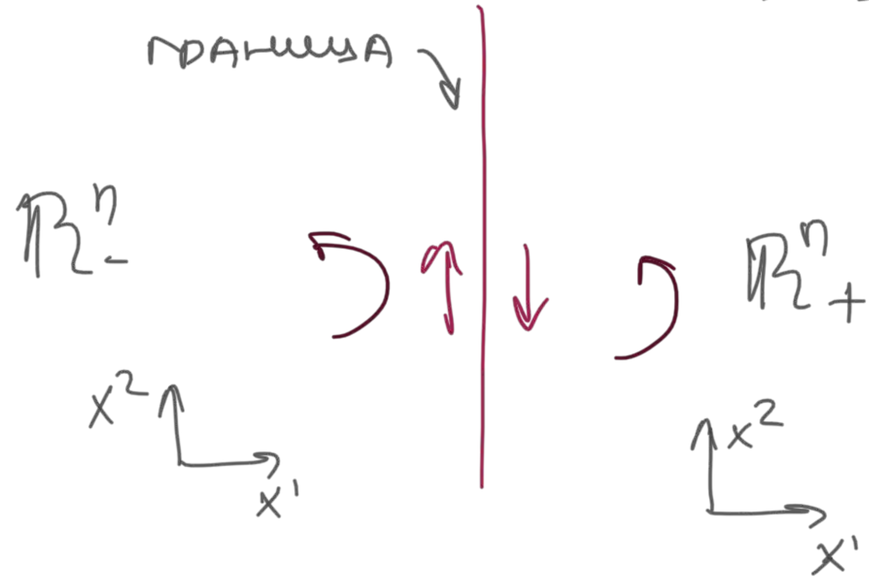
$$\frac{\partial \varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x^1}(x) = \lim_{t \to -0} \frac{-\overset{=0}{\varphi^1_{\alpha\beta}(x)} + \overset{\leqslant 0}{\varphi^1_{\alpha\beta}(x^1+t, x^2, \dots, x^n)}}{\underset{<0}{t}} \geqslant 0$$



<u>Пример.</u> Многообр. с краем

$\mathbb{R}^n_- = H^n$, $\mathbb{R}^n_+ = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$

2 многообразия, состоящ. из 1ой карты



Здесь отображ-ие тождественно id

$$x^1 \to -x^1$$
$$x^2 \to x^2$$
$$\vdots$$
$$x^n \to x^n$$