

**Анализ 2-2 2021 Семинар 25.**  
**Задача Штурма-Лиувилля. Оператор Лапласа**

**Задача 1.** Решите задачу Штурма-Лиувилля на нахождение собственных функций и собственных значений следующих краевых задач (для случаев, решенных раньше, просто выписать ответы):

$$\begin{array}{ll} a) -y'' = \lambda y, y(0) = y(l) = 0; & b) -y'' = \lambda y, y'(0) = y'(l) = 0; \\ c) -y'' = \lambda y, y(0) = y'(l) = 0; & d) -y'' = \lambda y, y'(0) = y(l) = 0. \end{array}$$

**Задача 2.** а) Проверьте и объясните ортогональность собственных функций; найдите их нормы; сколько у них нулей на интервале  $(0, l)$ ?  
б) Докажите полноту этих систем в пространстве  $L_2(0, l)$ .

**Задача 3.** Пусть  $l = \pi$ . Разложите в ряд Фурье

- а) функцию  $y = x$  по системе а);
- б) функцию  $y = 1$  по системе б);
- в) функцию  $y = x(2\pi - x)$  по системе в);
- г) функцию  $y = x^2 - \pi^2$  по системе г).

**Задача 4.** Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \quad x \in [0, l], \\ \alpha y'(0) + \beta y(0) &= 0, \quad \gamma y'(l) + \delta y(l) = 0, \end{aligned}$$

где  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ,  $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ ,  $q(x) \geq 0$ .

Проверьте, что соответствующий оператор Штурма-Лиувилля является симметричным. При каких условиях для  $\alpha, \beta, \gamma$  этот оператор положителен?

**Задача 5. (\*)** а) Найдите собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике  $[0, a] \times [0, b]$  с нулевыми граничными условиями? то есть найти все числа  $\lambda$  и все ненулевые функции  $u(x, y)$  :

$$-(u_{xx} + u_{yy}) = \lambda u, \quad u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = u(a, y) = 0,$$

Указание: использовать метод разделения переменных.

б) Бывают ли многократные собственные значения в квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$ ?