(1) Пусть Γ - цикл на n вершинах.

Док-ть: произведение в S_n всех транспозиций, соответствующих ребрам графа Γ, раскладывается в произведение двух независимых циклов.

Док-во.

1. Заметим, что если утв. верно при выбранной нумерации вершин и ребер Γ, то оно остается верным и при любой другой нумерации: перенумерация эл-тов мн-ва $N_n = \{1, \dots, n\}$ действует на $\forall$ перестановке этого мн-ва сопряжением $\Rightarrow$ не меняет её циклический тип.

2. Пусть $\sigma \in S_n$ - произвольная перестановка, $\tau = (i,j) \in S_n$. Кол-во циклов в $\tau \circ \sigma = (i,j) \circ \sigma$ зависит от того, входят ли i и j в один цикл перест. σ или - в разные.

- i,j входят в один цикл $\Rightarrow$ cut
- i,j входят в разные циклы $\Rightarrow$ join

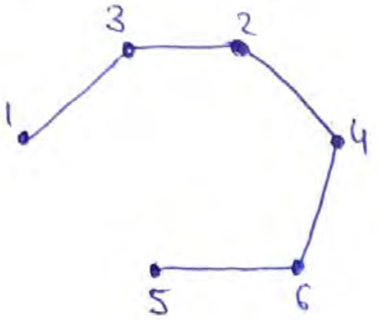
Получается, что, если $\tau_k \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$ - произведение транспозиций, отвечающих первым k ребрам Γ, то

$\#$ циклов $\tau_k \circ \dots \circ \tau_1 = \#$ компонент связности подграфа. (состоящего из первых k ребер Γ)

Добавление ребра с номером $(k+1)$ приводит к тому, что два цикла, отвечающие компонентам связности, соединяемым

Этим ребром, склеиваются в один.

Таким образом, когда $(n-1)$ ребро будет добавлено, произведение $\tau_{n-1}\circ\ldots\circ\tau_2\circ\tau_1$ склеится в один цикл длины n.



$(i,j)(\underbrace{\ldots i \ldots j \ldots}_{\text{цикл длины } n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ цикл длины n расщепляется на два цикла.

(2) $h^{\circ}_{4;1^1 2^1 3^1} = ?$ $h_{4;1^1 2^1 3^1} = ?$

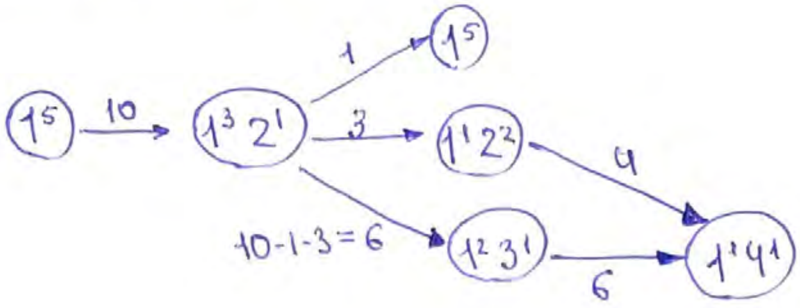
Заметим, что перестановка типа $1^1 2^1 3^1$ явл-ся нечетной, так как $(i_1)(i_2 i_3)(i_4 i_5 i_6) = \underbrace{(i_2 i_3)(i_4 i_6)(i_5 i_4)}_{\text{нечетное число транспозиций}}$,

$\Rightarrow$ такую перестановку нельзя представить в виде произведения 4 транспозиций.

<u>Ответ</u>: $h^{\circ}_{4;1^1 2^1 3^1} = h_{4;1^1 2^1 3^1} = 0$.

③ $h^0_{3;1^14^1} = ?$ $\quad h_{3;1^14^1} = ?$

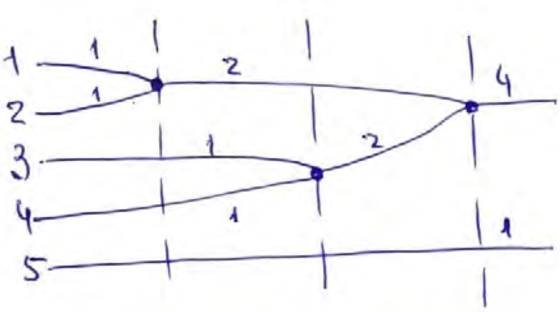
1) Посчитаем $h^0_{3;1^14^1}$.



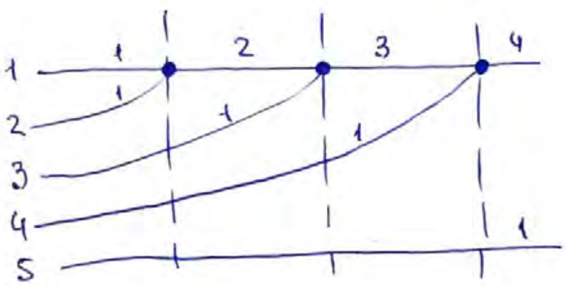
$$(ij)(1i2) = (1ji2)$$
$$(13)\circ(12)(34) = (1234)$$

$$\Rightarrow h^0_{3;1^14^1} = \frac{1}{5!}\left(10\cdot3\cdot4 + \overset{10\cdot3\cdot4\cdot3}{10\cdot6\cdot6}\right) = \frac{\cancel{10\cdot3\cdot4}\,(1+3)}{\cancel{5!}} = 4$$

2) Воспользуемся „тропическим" вычислением, чтобы найти $h_{3;1^14^1}$.



Вес такого графа: $\frac{1}{4}\cdot1\cdot1\cdot4 = 1$



Вес такого графа: $\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot3 = 3$

$h_{3;1^14^1} = 0$, так как связных графов нет.

Ответ: $h^0_{3;1^14^1} = 4$, $h_{3;1^14^1} = 0$.

(5) $[u^3]\, H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = ?$

$$H_0^\circ(p_1, p_2, \dots) = e^{p_1}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i+j=n}\left((i+j)\, p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij\, p_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\right)$$

$$H_{m+1}^\circ = W H_m^\circ$$

$H_1^\circ = \frac{1}{2} p_2 e^{p_1} \leftarrow$ считали на семинаре

$$W = \frac{1}{2}\left(2p_1^2 \frac{\partial}{\partial p_2} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\right) + \quad (n=2)$$

$(n=3)$ $$+ \frac{1}{2}\cdot 2\left(3 p_1 p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} + 1\cdot 2\, p_3 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2}\right) +$$

$(n=4)$ $$+ \frac{1}{2}\cdot 2\left(4 p_1 p_3 \frac{\partial}{\partial p_4} + 3 p_4 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_3}\right) + \frac{1}{2}\left(4 p_2^2 \frac{\partial}{\partial p_4} + 4 p_4 \frac{\partial^2}{\partial p_2^2}\right) +$$

$(n=5)$ $$+ \frac{1}{2}\cdot 2\left(5 p_1 p_4 \frac{\partial}{\partial p_5} + 4 p_5 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_4}\right) + \frac{1}{2}\cdot 2\left(5 p_2 p_3 \frac{\partial}{\partial p_5} + 6 p_5 \frac{\partial^2}{\partial p_2 \partial p_3}\right)$$

$+ \dots$

$$\frac{1}{2}p_2^2 \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} e^{p_1}$$

$$H_2^\circ = W H_1^\circ = W\left(\frac{1}{2} p_2 e^{p_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2p_1^2 \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{1}{2} p_2 e^{p_1}\right) + p_2 \frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\left(\frac{1}{2} p_2 e^{p_1}\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot 2\left(2 p_3 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2}\left(\frac{1}{2} p_2 e^{p_1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_1^2 e^{p_1} + p_2 \cdot \frac{1}{2} p_2 e^{p_1}\right) + 2\,\frac{1}{2}\, p_3 e^{p_1} = \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2) e^{p_1} + p_3 e^{p_1} =$$

$$= \frac{1}{4} e^{p_1}\left(2p_1^2 + p_2^2 + 4p_3\right)$$

$$H_3^0 = W H_2^0 = W\left(\frac{1}{4} e^{p_1}(p_1^2+p_2^2+4p_3)\right) =$$

$$= \frac{1}{4} W\left(e^{p_1}(2p_1^2+p_2^2+4p_3)\right) =$$

$$= \frac{1}{4} * \Bigg[\frac{1}{2}\cdot 2p_1^2 \overbrace{\frac{\partial}{\partial p_2}(e^{p_1}p_2^2)}^{2p_2 e^{p_1}} + \frac{1}{2} p_2 \overbrace{\frac{\partial}{\partial p_1^2}(2e^{p_1}p_1^2 + e^{p_1}p_2^2 + e^{p_1}\cdot 4p_3)}^{e^{p_1}(2p_1^2+8p_1+4+p_2^2+4p_3)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot 2\left(3p_1p_2 \overbrace{\frac{\partial}{\partial p_3}(e^{p_1}\cdot 4p_3)}^{4e^{p_1}} + 2p_3 \overbrace{\frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2}\left(e^{p_1}(2p_1^2+p_2^2+4p_3)\right)}^{2p_2 e^{p_1}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3p_4 \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_3}\left(e^{p_1}(2p_1^2+p_2^2+4p_3)\right)}_{4e^{p_1}} + \frac{1}{2}\cdot 4p_4 \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial p_2^2}(e^{p_1}p_2^2)}_{2e^{p_1}} \Bigg]$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1^2}(2e^{p_1}p_1^2 + e^{p_1}p_2^2 + e^{p_1}\cdot 4p_3) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_1^2}(2e^{p_1}p_1^2) + p_2^2 \frac{\partial}{\partial p_1^2} e^{p_1} + 4p_3 \frac{\partial}{\partial p_1^2} e^{p_1} =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial p_1}(e^{p_1}p_1^2 + 2p_1 e^{p_1}) + p_2^2 e^{p_1} + 4p_3 e^{p_1} =$$

$$= 2(e^{p_1}p_1^2 + 2p_1 e^{p_1} + 2p_1 e^{p_1} + 2e^{p_1}) + p_2^2 e^{p_1} + 4p_3 e^{p_1} =$$

$$= e^{p_1}(2p_1^2 + 8p_1 + 4 + p_2^2 + 4p_3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2}(2e^{p_1}p_1^2) + \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2}(e^{p_1}p_2^2) + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial p_1 \partial p_2}(e^{p_1}\cdot 4p_3)} =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial p_2}(e^{p_1}p_1^2 + 2p_1 e^{p_1}) + \frac{\partial}{\partial p_1}(2p_2 e^{p_1}) = 2p_2 e^{p_1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p_2^2}(e^{p_1}p_2^2) = \frac{\partial}{\partial p_2}(2p_2 e^{p_1}) = 2e^{p_1}$$

$$\Rightarrow H_3^0 = \frac{1}{4}\Big(2p_1^2 p_2 e^{p_1} + e^{p_1}(2p_1^2 + 8p_1 + 4 + p_2^2 + 4p_3)\cdot \frac{1}{2}p_2 +$$

$$+ 3p_1p_2\cdot 4e^{p_1} + 2p_3\cdot 2p_2 e^{p_1} + 3p_4 4e^{p_1} + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot 4p_4\cdot \cancel{2}e^{p_1}\Big) =$$

$$H_3^0 = \frac{1}{4} e^t \left(2p_1^2 p_2 + p_2 p_1^2 + 4p_1p_2 + 2p_2 + \frac{1}{2} p_2^3 + 2p_3p_2 + \right.$$

$$\left. + 12 p_1 p_2 + 4p_2p_3 + 12p_4 + 4p_4 \right) =$$

$$= \frac{1}{4} e^t \left(3p_1^2 p_2 + 16p_1p_2 + 6p_2p_3 + 2p_2 + \frac{1}{2} p_2^3 + 16p_4 \right)$$

$3! = 2 \cdot 3 = 6$

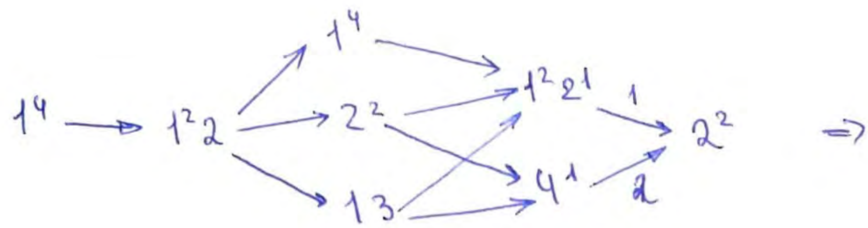
Ответ: $[u^3] H^0 = \frac{1}{24} e^t \left(3p_1^2p_2 + 16p_1p_2 + 6p_2p_3 + 2p_2 + \frac{1}{2} p_2^3 + 16p_4 \right).$

$$[u^3] H^0 = \frac{H_3^0}{3!}$$

④ В номере 5 мы посчитали с помощью ур-ия транспозиции

$$H_3^0 = \frac{1}{2} e^{p_1}\left(\frac{3}{2} p_1^2 p_2 + \frac{p_2^2}{4} + 3p_2p_3 + 8p_1p_2 + p_2 + 8p_4\right)$$

Найдем $[p_2^2]H_4^0$.



$$\Rightarrow [p_2^2]H_4^0 = [p_1^2p_2]H_3^0 + 2[p_4]H_3^0$$

Найдем $[p_1^2p_2]H_3^0$.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} p_1^2p_2 + \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{2!}p_2 + \frac{1}{2} p_1\cdot 8p_1p_2 = 5p_1^2p_2 \Rightarrow [p_1^2p_2]H_3^0 = 5.$$

$[p_4]H_3^0 = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4$

Значит, $h^0_{4,2^2} = 5+2\cdot 4 = 13.$

На лекции вывели: $H^0 = \exp(H) = 1 + H + \frac{H^2}{2!} + \frac{H^3}{3!} + \dots$

Посмотрим, как получается $[p_2^2]H_4^0\frac{u^4}{4!}$

$$[p_2^2]H_4^0\frac{u^4}{4!} = \underbrace{h_{4,2^2}p_2^2\frac{u^4}{4!}}_{\text{из } H} + \underbrace{\frac{2\overset{1/2}{\overset{\shortparallel}{h_{1,2}}}p_2\frac{u}{1!}\cdot \overset{1/2!}{\overset{\shortparallel}{h_{3,2}}}p_2\frac{u^3}{3!}}{2!}}_{\text{из } \frac{H^2}{2!}} =$$

$$= h_{4,2^2}p_2^2\frac{u^4}{4!} + \frac{2\cdot\frac{1}{2} p_2\frac{u}{1!}\cdot\frac{1}{2!}p_2\frac{u^3}{3!}}{2!} =$$

$$= h_{4,2^2}p_2^2\frac{u^4}{4!} + p_2^2\frac{u^4}{4!} = 13p_2^2\frac{u^4}{4!} \Rightarrow h_{4,2^2} = 12$$

Ответ: $h_{4,2^2} = 12.$

(6) $\begin{tikzcd} M \arrow[d, "p"] \\ N \end{tikzcd}$ $\iff \chi(M) = n\,\chi(N)$

p – n-листное неразветвлённое накрытие

$\Rightarrow$ Рассмотрим достаточно маленькую триангуляцию N.

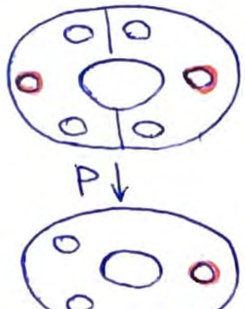
Тогда прообраз каждого треугольника этой триангуляции состоит из n попарно непересекающихся треугольников, причем в совокупности они образуют триангуляцию пов-ти M. В полученной триангуляции пов-ти M каждому треугольнику пов-ти N соответствует n треугольников, каждому ребру – n ребер, каждой вершине – n вершин $\Rightarrow \chi(M) = n\chi(N)$.

$\Leftarrow$ Пусть $\chi(M) = n\,\chi(N)$

Рассмотрим $p: M_1 \to N_1$, $p(z) = z^n$ – „намотка".

$\chi(M_1) = \chi(M)$, $\chi(N_1) = \chi(N)$.

$M_1 =$



$N_1 =$

(*) Мы знаем, что связные ориентируемые замкнутые двумерные пов-ти с одинаковой Эйлеровой характеристикой гомеоморфны

$\Rightarrow$ M гомеоморфно M_1,

N гомеоморфно N_1. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ M накрывает N.