17.1. Для каждого из следующих операторов T **1)** найдите $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$; **2)** вычислите $\mathrm{ind}(T-\lambda\mathbf{1})$ для всевозможных $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$:

(a) диагональный оператор в ℓ^p или в c_0;
(b) оператор умножения на непрерывную функцию в $C[a,b]$;
(c) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^p(X,\mu)$;
(d) оператор левого сдвига в ℓ^p или в c_0;
(e) оператор правого сдвига в ℓ^p или в c_0;
(f) оператор двустороннего сдвига в $\ell^p(\mathbb{Z})$ или в $c_0(\mathbb{Z})$;
(g) произвольный компактный оператор.

17.2. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, и пусть T_f — соответствующий оператор Тёплица в пространстве Харди $H^2(\mathbb{T})$.
1) Предположим, что $f(z) = 0$ для некоторого $z \in \mathbb{T}$. Докажите, что T_f не фредгольмов.
2) Найдите $\sigma_{\mathrm{ess}}(T_f)$ в терминах f.
3-b) Найдите $\|T_f\|$ в терминах f.

17.3. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ в H существует фредгольмов оператор индекса n.

17.4 (*четвертое доказательство аддитивности индекса*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$, $S\colon Y \to Z$ — фредгольмовы операторы. Рассмотрите оператор

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_Y & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_Y \cos t & -\mathbf{1}_Y \sin t \\ \mathbf{1}_Y \sin t & \mathbf{1}_Y \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_Y \end{pmatrix},$$

действующий из $X \oplus Y$ в $Y \oplus Z$, и, пользуясь непрерывностью индекса, получите еще одно доказательство формулы $\mathrm{ind}(ST) = \mathrm{ind}\, S + \mathrm{ind}\, T$.

Теорема 1. *Группа* $\mathrm{GL}(H)$ *ограниченных обратимых операторов в гильбертовом пространстве* H *линейно связна.*

Доказать эту теорему мы сможем через некоторое время[1]. В оставшейся части листка разрешается ею пользоваться.

17.5. Пусть H — гильбертово пространство. Докажите, что фредгольмовы операторы $S, T \in \mathscr{B}(H)$ лежат в одной компоненте связности множества $\mathscr{F}red(H) \iff$ их можно соединить непрерывным путем в $\mathscr{F}red(H) \iff \mathrm{ind}\, S = \mathrm{ind}\, T$.

17.6. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство и $\mathcal{Q}(H) = \mathscr{B}(H)/\mathscr{K}(H)$ — алгебра Калкина. Обозначим через G группу обратимых элементов в $\mathcal{Q}(H)$, а через $G_0 \subset G$ — связную компоненту единицы. Докажите, что фредгольмов индекс индуцирует изоморфизм групп $G/G_0 \cong \mathbb{Z}$.

17.7. Пусть X, Y — нормированные пространства. Докажите, что отображение

$$Y \otimes X^* \to \mathscr{F}(X,Y), \quad x \otimes f \mapsto f(\,\cdot\,)x \tag{1}$$

— изоморфизм векторных пространств.

[1] На самом деле верно гораздо более сильное утверждение: если H бесконечномерно, то группа $\mathrm{GL}(H)$ стягиваема, т.е. гомотопически эквивалентна точке (теорема Кюйпера). Это уже гораздо более сложное утверждение, и мы его доказывать не будем. См. добавление к книге М. Атья «Лекции по K-теории», М.: Мир, 1967.

Определение 17.1. Пусть X — нормированное пространство. Функционал $\mathrm{Tr}\colon \mathscr{F}(X) \to \mathbb{C}$ строится как композиция отображения $\mathscr{F}(X) \to X \otimes X^*$, обратного к (1), и спаривания

$$X \otimes X^* \to \mathbb{C}, \quad x \otimes f \mapsto f(x).$$

Этот функционал называется *следом.*

17.8. 1) Покажите, что при $\dim X < \infty$ определение 17.1 эквивалентно обычному определению следа.
2) Докажите, что для $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $S \in \mathscr{F}(Y, X)$ справедлива формула $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$.

17.9 (*абстрактная формула Атья–Ботта*)**.** Пусть X, Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — фредгольмов оператор. Выберем ограниченный оператор $S\colon Y \to X$ так, чтобы операторы $\mathbf{1}_X - ST$ и $\mathbf{1}_Y - TS$ были конечномерными. Докажите, что

$$\operatorname{ind} T = \mathrm{Tr}(\mathbf{1}_X - ST) - \mathrm{Tr}(\mathbf{1}_Y - TS).$$

В частности, если $X = Y$, то $\operatorname{ind} T = \mathrm{Tr}([T, S])$.

17.10 (*пятое доказательство аддитивности индекса*)**.** Придумайте доказательство формулы $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$, основанное на результате предыдущей задачи.

18.1. Для каждого из следующих операторов T найдите их (гильбертово) сопряженные:

1) диагональный оператор в ℓ^2;
2) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^2(X,\mu)$;
3) операторы левого и правого сдвига в ℓ^2;
4) оператор двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$;
5) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X,\mu)$ (см. задачу 2.7);
6) оператор T в $L^2[0,1]$, действующий по формуле

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

18.2. Какие из операторов предыдущей задачи самосопряженные? унитарные? нормальные? являются ортогональными проекторами?

18.3. Докажите, что
1) каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{C}$ является спектром некоторого нормального оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве;
2) каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{R}$ является спектром некоторого самосопряженного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве;
3) каждый непустой компакт $K \subseteq \mathbb{T}$ является спектром некоторого унитарного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве.

18.4-b. Что можно сказать про спектр изометрии в гильбертовом пространстве?

18.5. Вычислите норму оператора из п. 6 задачи 18.1.
Указание: оператор T^*T компактен и самосопряжен.

18.6. Докажите, что следующие свойства оператора V в гильбертовом пространстве H эквивалентны:
(i) $VV^*V = V$;
(ii) V^*V — проектор;
(iii) ограничение V на $(\operatorname{Ker} V)^\perp$ — изометрия.

Оператор V с такими свойствами называется *частичной изометрией.*

18.7. Пусть V — частичная изометрия в гильбертовом пространстве H.
1) Докажите, что V^* — частичная изометрия.
2) Положим $H_0 = (\operatorname{Ker} V)^\perp$ и $H_1 = \operatorname{Im} V$. Докажите, что операторы $V|_{H_0} \colon H_0 \to H_1$ и $V^*|_{H_1} \colon H_1 \to H_0$ — обратные друг другу изометрические изоморфизмы, V^*V — ортогональный проектор на H_0, а VV^* — ортогональный проектор на H_1. Эти проекторы называются, соответственно, *начальным* и *конечным* проекторами частичной изометрии V.

18.8. 1) Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ нормален тогда и только тогда, когда $\|Tx\| = \|T^*x\|$ для всех $x \in H$.
2) Докажите, что если оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ нормален, то $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$ и $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T}$ (ортогональная прямая сумма).

18.9. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $x \in H$ и $Tx = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Докажите, что $T^*x = \bar{\lambda}x$.

18.10. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

18.11. Пусть T — нормальный оператор в гильбертовом пространстве H (или нормальный элемент любой C^*-алгебры). Докажите, что $r(T) = \|T\|$.

Указание: оператор T^*T самосопряжен.

18.12. Докажите, что остаточный спектр нормального оператора пуст.

18.13. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор и $H_0 \subseteq H$ — замкнутое T-инвариантное подпространство. Обязательно ли $H_0^\perp$ T-инвариантно?

18.14. Обобщите теорему Гильберта-Шмидта на случай компактных нормальных операторов.

18.15-b. Введем инволюцию на $C^n[a,b]$ формулой $f^*(t) = \overline{f(t)}$. Докажите, что $C^n[a,b]$ — инволютивная банахова алгебра, но не C^*-алгебра при $n \geqslant 1$.

18.16-b. Введем инволюцию на дисковой алгебре $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ формулой $f^*(z) = \overline{f(\bar z)}$. Докажите, что $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ — инволютивная банахова алгебра, но не C^*-алгебра.

18.17-b. 1) Докажите, что спектр любого самосопряженного элемента унитальной C^*-алгебры A содержится в $\mathbb{R}$.

2) Верно ли это, если A — инволютивная банахова алгебра?

Указание. **1)** Для всех $\lambda \in \sigma(a)$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство $|\lambda \pm it|^2 \leqslant \|a\|^2 + t^2$.

18.18-b. Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $B \subseteq A$ — замкнутая $*$-подалгебра, причем $1_A \in B$. Докажите, что B спектрально инвариантна в A.

Указание. Возьмите самосопряженный элемент $a \in B$, обратимый в A, рассмотрите $a + it1$ при $t \in \mathbb{R}$ и воспользуйтесь предыдущей задачей.

18.19. Найдите все λ, при которых на отрезке $[0,\pi]$ имеет нетривиальное решение задача Штурма–Лиувилля

1) $-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\pi) = 0;$

2) $-u'' = \lambda u, \quad u'(0) = u'(\pi) = 0.$

Найдите соответствующие решения.

18.20. Из предыдущей задачи выведите тотальность тригонометрической системы в $L^2[-\pi,\pi]$.

18.21. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ и T_K — интегральный оператор Гильберта–Шмидта в пространстве $L^2(X,\mu)$ (компактный в силу задачи 15.8). Представим оператор T_K в виде

$$T_K f = \sum_n \lambda_n \langle f, e_n\rangle f_n, \tag{1}$$

где (e_n) и (f_n) — ортонормированные системы в $L^2(X,\mu)$; такое разложение всегда возможно в силу теоремы Шмидта. Докажите, что $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$.

18.22. Пусть X — метризуемый компакт, μ — регулярная борелевская мера на X, и пусть $K \in C(X \times X)$. Представим оператор Гильберта–Шмидта T_K в виде (1), где $\lambda_n \neq 0$ для всех n. Докажите, что

1) $f_n \in C(X)$ для всех n;

2) ряд (1) сходится равномерно и абсолютно для каждой $f \in L^2(X,\mu)$;

3) $g = \sum_n \langle g, f_n\rangle f_n$ для любой $g \in \operatorname{Im} T_K$, причем этот ряд сходится равномерно и абсолютно.

Указание. **1)** Воспользуйтесь задачей 15.9. **2)** Сначала убедитесь, что $\sup\limits_x \sum\limits_n |\lambda_n f_n(x)|^2 < \infty$.

18.23-b. Выведите из задач 18.19–18.22 равномерную и абсолютную сходимость рядов Фурье достаточно гладких периодических функций на прямой.

19.1. Пусть X, Y — топологические векторные пространства. Докажите, что
1) линейный оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен $\iff$ он непрерывен в нуле;
2) множество $\mathscr{L}(X, Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y — векторное подпространство в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$.

19.2. Пусть (X, P) — полинормированное пространство. Докажите, что для каждого $x \in X$ все множества вида $U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon}(x) = \{y \in X : p_i(y - x) < \varepsilon\ \forall i = 1, \ldots, n\}$ (где $p_1, \ldots, p_n \in P$ и $\varepsilon > 0$) образуют базу в x.

19.3. Докажите, что векторное пространство с топологией, порожденной семейством полунорм, является топологическим векторным пространством.

19.4. Докажите, что направленность (x_λ) в полинормированном пространстве (X, P) сходится к $x \in X$ тогда и только тогда, когда $p(x - x_\lambda) \to 0$ для всех $p \in P$.

19.5. Докажите, что топология на векторном пространстве X, порожденная семейством полунорм P, хаусдорфова тогда и только тогда, когда для каждого $0 \neq x \in X$ найдется такая полунорма $p \in P$, что $p(x) > 0$.

19.6. Для полунормы p на векторном пространстве X положим $U_p = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Докажите, что **1)** $U_p \cap U_q = U_{\max\{p,q\}}$; **2)** $U_p \subseteq U_q \iff q \leqslant p$; **3)** $U_p \prec U_q \iff q \prec p$. (Здесь отношение $\prec$ для полунорм означает «мажорируется», а для множеств — «поглощается»; см. лекцию.)

19.7. Докажите, что семейство полунорм P на векторном пространстве X является направленным (относительно порядка $\prec$) тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ (или, эквивалентно, для $x = 0$) множества вида $U_{p,\varepsilon}(x)$ (где $p \in P$, $\varepsilon > 0$) образуют базу в x.

19.8. Докажите, что **1)** выпуклая оболочка и **2)** закругленная оболочка открытого подмножества в топологическом векторном пространстве открыты.

19.9. Докажите, что хаусдорфова локально топология на векторном пространстве, порожденная семейством полунорм P, нормируема тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему конечному подсемейству. (Если семейство P направленное, то последнее равносильно тому, что $P \sim \{p_0\}$ для некоторого $p_0 \in P$).

19.10. На каких из следующих топологических векторных пространств существует хотя бы одна непрерывная норма?
1) $\mathbb{K}^S$ (где S — множество);
2) $C(X)$ (где X — тихоновское[1] топологическое пространство);
3) пространство голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}$;
4) $C^\infty[a, b]$;
5) $C^\infty(U)$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
6) нормированное пространство, снабженное слабой топологией;
7) сопряженное к нормированному пространству, снабженное слабой* топологией;
8) $\mathscr{B}(X, Y)$ с сильной операторной топологией (где X и Y — нормированные пространства);
9) $\mathscr{B}(X, Y)$ со слабой операторной топологией (где X и Y — нормированные пространства).

19.11. Какие пространства из предыдущей задачи нормируемы?

[1]Хаусдорфово топологическое пространство X называется *тихоновским*, если для каждого замкнутого множества $F \subset X$ и каждого $x \in X \setminus F$ найдется такая непрерывная функция $f\colon X \to [0, 1]$, что $f|_F = 0$ и $f(x) = 1$. Тихоновскими являются все метризуемые пространства (докажите!), все хаусдорфовы компакты и, более общим образом, все *нормальные* пространства (см. любой учебник по общей топологии).

19.12. 1) Докажите, что на конечномерном векторном пространстве любые два семейства полунорм, каждое из которых задает хаусдорфову топологию, эквивалентны.
2-b) Докажите, что на конечномерном векторном пространстве есть только одна топология, превращающая его в хаусдорфово топологическое векторное пространство.

19.13. Пусть S — множество.
1) Докажите, что для любой функции $f \in \mathbb{K}^S$ оператор умножения $M_f \colon \mathbb{K}^S \to \mathbb{K}^S$, $M_f(g) = fg$, непрерывен.
2) Опишите все непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathbb{K}^S$.

19.14. 1) Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Докажите, что любой линейный дифференциальный оператор $\sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha D^\alpha$ в пространстве $C^\infty(U)$ (где $a_\alpha \in C^\infty(U)$) непрерывен.
2) Докажите аналогичное утверждение для пространства $\mathscr{O}(U)$, где $U \subseteq \mathbb{C}$ (см. п.3 задачи 19.10).

19.15. Пусть $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ — пространство голоморфных функций в круге $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Для $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ положим $c_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Докажите, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ порождается любым из следующих эквивалентных семейств полунорм:

1) $\|f\|_r = \sum_{n=0}^\infty |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;

2) $\|f\|_{r,p} = \Big(\sum_{n=0}^\infty (|c_n(f)| r^n)^p\Big)^{1/p} \quad (0 < r < R,\ p \in [1,+\infty)$ фиксировано);

3) $\|f\|_{r,\infty} = \sup_{n\geqslant 0} |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;

4) $\|f\|_r^I = \int_{|z|=r} |f(z)|\, d\mu(z) \quad (0 < r < R)$;

5) $\|f\|_{r,p}^I = \Big(\int_{|z|=r} |f(z)|^p\, d\mu(z)\Big)^{1/p} \quad (0 < r < R,\ p \in [1,+\infty)$ фиксировано).

В пп. 4 и 5 μ — мера Лебега на окружности $|z| = r$.

19.16. Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество. Докажите, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(U)$ совпадает с топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$.

19.17. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $C_c^\infty(U)$ — пространство гладких функций с компактным носителем в U, снабженное стандартной индуктивной топологией (см. лекцию). Докажите, что последовательность (f_n) сходится к функции f в $C_c^\infty(U)$ тогда и только тогда, когда существует такой компакт $K \subset U$, что $\operatorname{supp} f_n \subseteq K$ для всех n, и $f_n \to f$ равномерно на K со всеми частными производными.

19.18. Пространство *быстро убывающих последовательностей* $s(\mathbb{Z})$ определяется так:

$$s(\mathbb{Z}) = \Big\{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \|x\|_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n||n|^k < \infty \ \forall k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\Big\}.$$

Топология на $s(\mathbb{Z})$ порождается последовательностью полунорм $\{\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$. Постройте топологический изоморфизм $C^\infty(\mathbb{T}) \cong s(\mathbb{Z})$.

19.19-b. Докажите, что хаусдорфова локально топология на векторном пространстве, порожденная семейством полунорм P, метризуема тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему не более чем счетному подсемейству.

Указание. Если $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность полунорм, то функция

$$\rho(x,y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

удовлетворяет неравенству треугольника.

19.20-b. Какие пространства из задач 19.10 и 19.17 метризуемы?

20.1. Пусть e_n — числовая последовательность с единицей на n-м месте и нулем на остальных. Исследуйте последовательность (e_n) на слабую сходимость в пространствах c_0 и ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$.

20.2. Докажите, что последовательность непрерывных функций на отрезке слабо сходится тогда и только тогда, когда она равномерно ограничена и сходится поточечно.

20.3. Пусть T_ℓ и T_r — операторы левого и правого сдвига в ℓ^2. Исследуйте последовательности (T_ℓ^n) и (T_r^n) на сходимость
1) по норме в $\mathscr{B}(\ell^2)$;
2) в сильной операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$;
3) в слабой операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$.

20.4-b. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Для каждого $p \in (0, 1)$ определим векторное пространство $L^p(X, \mu)$ так же, как и при $p \geqslant 1$. Для $f \in L^p(X, \mu)$ положим

$$|f|_p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x).$$

1) Докажите, что $\rho(f, g) = |f - g|_p$ — метрика на $L^p(X, \mu)$.
2) Докажите, что $L^p(X, \mu)$ локально выпукло лишь в том случае, когда оно конечномерно.
3) Докажите, что $L^p[0, 1]^* = \{0\}$.

20.5-b. Пусть (X, μ) — пространство с конечной мерой. Обозначим через $L^0(X, \mu)$ пространство классов эквивалентности μ-измеримых функций на X (как обычно, функции эквивалентны, если они равны почти всюду). Для $f \in L^0(X, \mu)$ положим

$$|f|_0 = \int_X \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|} \, d\mu(x).$$

1) Докажите, что $\rho(f, g) = |f - g|_0$ — метрика на $L^0(X, \mu)$.
2) Докажите, что сходимость по метрике из п. 1 — это то же самое, что сходимость по мере.
3) Докажите, что $L^0(X, \mu)$ локально выпукло лишь в том случае, когда оно конечномерно.
4) Докажите, что $L^0[0, 1]^* = \{0\}$.

20.6. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара векторных пространств. Докажите, что
1) $\dim X < \infty \iff \dim Y < \infty \iff$ слабая топология $\sigma(X, Y)$ нормируема;
2-b) слабая топология $\sigma(X, Y)$ метризуема $\iff$ размерность Y не более чем счетна;
3-b) слабая топология на бесконечномерном нормированном пространстве и слабая* топология на пространстве, сопряженном к бесконечномерному банахову пространству, неметризуемы.

20.7. Докажите, что слабая топология на пространстве $\mathbb{K}^S$ (где S — множество) совпадает с исходной.

20.8. Пусть X и Y — нормированные пространства. Обозначим через SOT, WOT и NT соответственно сильную операторную топологию, слабую операторную топологию и топологию, задаваемую операторной нормой на $\mathscr{B}(X, Y)$.
1) Докажите, что WOT $\subseteq$ SOT $\subseteq$ NT.
2) Докажите, что если Y бесконечномерно, то WOT $\neq$ SOT.
3) Докажите, что если X бесконечномерно, то SOT $\neq$ NT.

20.9. Пусть X, Y — нормированные пространства. Докажите, что подмножество $M \subset \mathscr{B}(X, Y)$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено по операторной норме.

20.10. 1) Приведите пример линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП X и Y, непрерывного относительно слабых топологий на X и Y, но не непрерывного.
2) Приведите пример линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП, переводящего ограниченные множества в ограниченные, но не непрерывного.
3) Приведите пример линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП, переводящего ограниченные множества в ограниченные, но не непрерывного относительно слабых топологий на X и Y.

20.11. Докажите, что пространство c_0 секвенциально плотно в своем втором сопряженном относительно слабой* топологии.

20.12. Приведите пример банахова пространства X и векторного подпространства $Y \subset X^*$, которое замкнуто по норме, но не замкнуто в слабой* топологии.

20.13-b. Докажите, что в пространстве ℓ^1 всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.

20.14-b. Приведите пример ограниченного линейного оператора между банаховыми пространствами, который переводит слабо сходящиеся последовательности в последовательности, сходящиеся по норме, но тем не менее не является компактным.

Определение 20.1. Пусть X — локально выпуклое пространство, топология которого порождена семейством полунорм P. Для каждого $p \in P$ положим $X_p^0 = X/p^{-1}(0)$ и будем рассматривать X_p^0 как нормированное пространство относительно факторнормы полунормы p. Пополнения X_p нормированных пространств X_p^0 называются *ассоциированными* с X банаховыми пространствами.

20.15. Опишите банаховы пространства, ассоциированные со следующими ЛВП:
1) $\mathbb{K}^S$ (S — множество); **2)** $C(X)$ (X — топологическое пространство); **3)** $C^\infty[a,b]$; **4)** $C^\infty(\mathbb{R})$; **5)** $\mathscr{O}(U)$ (U — область в $\mathbb{C}$).

20.16. Для каждой ограниченной области $U \subset \mathbb{C}$ обозначим через $\mathscr{A}(\overline{U})$ подпространство в $C(\overline{U})$, состоящее их тех функций, которые голоморфны в U.
1) Положим $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Докажите, что при $r < R$ *оператор ограничения* $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_R) \to \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_r)$, сопоставляющий каждой функции из $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_R)$ ее ограничение на $\overline{\mathbb{D}}_r$, разлагается в композицию $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_R) \xrightarrow{\varphi} \ell^1 \xrightarrow{M_\lambda} \ell^1 \xrightarrow{\psi} \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_r)$, где φ, ψ — непрерывные операторы, а M_λ — компактный диагональный оператор. Выведите отсюда, что оператор ограничения компактен.
2) Докажите, что всякое ограниченное подмножество в пространстве $\mathscr{O}(\mathbb{D}_r)$ относительно компактно.
3-b) Пусть U, V — ограниченные области в $\mathbb{C}$, причем $\overline{V} \subset U$. Интерпретируйте оператор ограничения $\mathscr{A}(\overline{U}) \to \mathscr{A}(\overline{V})$ как некоторый интегральный оператор, и выведите отсюда, что он компактен.
4-b) (*теорема Монтеля*). Пусть U — область в $\mathbb{C}$. Докажите, что всякое ограниченное подмножество в пространстве $\mathscr{O}(U)$ относительно компактно.

20.17. Докажите, что всякое ограниченное подмножество в пространствах **1)** $C^\infty[a,b]$ и **2)** $C^\infty(\mathbb{R})$ относительно компактно.

Указание: используйте тот же прием, основанный на использовании ассоциированных банаховых пространств, что и в предыдущей задаче.

21.1. Опишите (задайте явными формулами) непрерывные исчисления для следующих операторов:
1) двусторонний сдвиг в $\ell^2(\mathbb{Z})$;
2-b) сдвиг в $L^2(\mathbb{T})$;
3-b) сдвиг в $L^2(\mathbb{R})$.

Определение 21.1. Пусть A — $*$-алгебра. Элемент $a \in A$ называется *положительным* (в этом случае пишут $a \geqslant 0$), если он самосопряжен и $\sigma_A(a) \subseteq [0, +\infty)$.

21.2 (*квадратный корень*)**.** Пусть H — гильбертово пространство и T — положительный оператор в H. Докажите, что существует единственный положительный оператор S в H такой, что $S^2 = T$. Этот оператор называется *квадратным корнем* из T и обозначается $\sqrt{T}$ или $T^{1/2}$.

21.3. Докажите, что следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(H)$ эквивалентны:
1) $T \geqslant 0$;
2) $T = S^2$ для некоторого положительного $S \in \mathscr{B}(H)$;
3) $T = S^2$ для некоторого самосопряженного $S \in \mathscr{B}(H)$;
4) $T = S^*S$ для некоторого $S \in \mathscr{B}(H)$;
5) $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in H$.

Указание. Чтобы вывести (1) из (5), докажите, что $T + \lambda\mathbf{1}$ топологически инъективен при $\lambda > 0$.

Определение 21.2. Если $S, T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженные операторы, то пишут $S \leqslant T$, если $T - S \geqslant 0$.

21.4 (*отношение порядка для проекторов*)**.** Пусть P_1, P_2 — ортогональные проекторы в H. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
1) $P_1 \leqslant P_2$;
2) $\|P_1x\| \leqslant \|P_2x\|$ для всех $x \in H$;
3) $P_1P_2 = P_1$;
4) $P_2P_1 = P_1$;
5) $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$;
6) $P_2 - P_1$ — ортогональный проектор;
7) $\operatorname{Im} P_1 \subseteq \operatorname{Im} P_2$.

21.5 (*монотонность непрерывного исчисления*)**.** Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор, f, g — непрерывные действительные функции на его спектре. Докажите, что если $f \leqslant g$, то и $f(T) \leqslant g(T)$.

21.6. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$. Докажите, что
1) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*T = \operatorname{Ker}(T^*T)^{1/2}$; **2)** $\overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{Im} TT^*} = \overline{\operatorname{Im}(TT^*)^{1/2}}$.

21.7. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$. Положим $S_1 = (T^*T)^{1/2}$ и $S_2 = (TT^*)^{1/2}$.
1) (*полярное разложение*). Докажите, что существует такая частичная изометрия (см. листок 18) $V\colon H_1 \to H_2$, что

$$T = VS_1 = S_2V,$$
$$(\operatorname{Ker} V)^\perp = \overline{\operatorname{Im} S_1} = (\operatorname{Ker} S_1)^\perp = (\operatorname{Ker} T)^\perp,$$
$$\operatorname{Im} V = (\operatorname{Ker} S_2)^\perp = \overline{\operatorname{Im} S_2} = \overline{\operatorname{Im} T}.$$

2) (*единственность полярного разложения*). Пусть $T = WR_1$, где $W\colon H_1 \to H_2$ — частичная изометрия, $R_1 \in \mathscr{B}(H_1)$, $R_1 \geqslant 0$ и $(\operatorname{Ker} W)^\perp = \overline{\operatorname{Im} R_1}$. Докажите, что $W = V$ и $R_1 = S_1$.
3) (*единственность полярного разложения*). Пусть $T = R_2W$, где $W\colon H_1 \to H_2$ — частичная изометрия, $R_2 \in \mathscr{B}(H_2)$, $R_2 \geqslant 0$ и $\operatorname{Im} W = (\operatorname{Ker} R_2)^\perp$. Докажите, что $W = V$ и $R_2 = S_2$.

21.8. Опишите полярные разложения следующих операторов:
1) диагональный оператор в ℓ^2;
2) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^2(X,\mu)$;
3) оператор правого сдвига в ℓ^2;
4) оператор левого сдвига в ℓ^2.

21.9. Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$. Обязательно ли существуют *унитарный* оператор U и положительный оператор S такие, что $T = US$?

21.10-b. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $B(X)$ — алгебра ограниченных борелевских функций на X. Снабдим $B(X)$ слабо-мерной топологией (см. лекцию). Докажите следующие утверждения:
1) Последовательность в $B(X)$ сходится в слабо-мерной топологии тогда и только тогда когда она равномерно ограничена и сходится поточечно.
2) Умножение в $B(X)$ секвенциально непрерывно относительно слабо-мерной топологии.
3) Если X бесконечно, то умножение в $B(X)$ не является непрерывным относительно слабо-мерной топологии.

21.11-b. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Снабдим алгебру $\mathscr{B}(H)$ слабой операторной топологией. Является ли умножение в $\mathscr{B}(H)$ **1)** непрерывным? **2)** секвенциально непрерывным?