Матанализ
2 курс
Задачи

17 декабря 2022 г.

Листок 3.

1. Найти интеграл от $|x|^p$ по половине единичного шара в $\mathbb{R}^3$ при тех p, для которых он конечен.

2. Найти интеграл функции $|\sin(x-y)|$ по квадрату $[0,\pi]^2$.

3. Выяснить, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $(\sin|x|)^\alpha$ на $\mathbb{R}^n$ интегрируема по множеству $\{x\colon |x| \le 1, x_i \ge 0,\ i=1,\dots,n\}$.

4. (a) Вычислить интеграл функции x^2y^2 по кругу радиуса π с центром в нуле. (b) Вычислить интеграл функции x^2+y^2 по множеству $|x|+|y| \le 1$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2px$, $y^2 = 2qx$, $x^2 = 2ry$, $x^2 = 2sy$, где $0 < p < q$, $0 < r < s$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = xy$, $x+y+z = 1$, $z = 0$.

7. Найти интеграл от функции $\sqrt{x^2+y^2}$ по области в $\mathbb{R}^3$, ограниченной поверхностями $z^2 = x^2+y^2$, $z = 1$.

8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 6-x^2-y^2$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

9. Выяснить, интегрируемо ли преобразование Фурье индикатора квадрата $[0,1]^2$ в $\mathbb{R}^2$.

10. Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, $e_1,\dots,e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что мера параллелепипеда, порожденного векторами $Ae_1,\dots,Ae_n$, равна $|\det(A^*A)|^{1/2}$, а также $|\det G|^{1/2}$, где G — матрица Грама с элементами $\langle Ae_i, Ae_j\rangle$.

Решения

Задача 1

По 5 задаче 2 листка: $\alpha > -3$
Перейдем в сферические координаты

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) & \theta \in [0,\pi] \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) & \varphi \in [0,2\pi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$|J| = r^2\sin(\theta)$$

$$|x| = \sqrt{r^2\left(\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \cos^2(\theta)\right)} = r$$

$$\int_{r\leqslant 1} r^\alpha r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = \int_{r\leqslant 1} r^{\alpha+2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha+3} r^{\alpha+3}\Big|_0^1\right)\left(-\cos(\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{\alpha+3}\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{\alpha+3}$$

Задача 2

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |\sin(x-y)| dx dy = 2\pi$$

$$\int_0^\pi |\sin(x-y)| dx = \int_0^\pi (\sin(x)) dx = \cos(x)\Big|_0^\pi = 2$$

Так как период $|\sin(x)| = \pi$, то интеграл по отрезку длиной π равен $\forall \text{const} = y$

$$\int_0^\pi |\sin(x-y)| = \int_0^\pi \sin(x) dx$$

$$\int_0^\pi 2dy = 2y\Big|_0^\pi = 2\pi$$

Задача 3

Перейдем в сферические координаты

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta_1) \\ x_2 = r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \vdots & \qquad\qquad \theta_1,\ldots,\theta_{n-2} \in [0,\pi] \quad \theta_{n-1} \in [0,2\pi) \\ x_{n-1} = r\sin(\theta_1)\ldots\sin(\theta_{n-2})\cos(\theta_{n-1}) \\ x_n = r\sin(\theta_1)\ldots\sin(\theta_{n-2})\sin(\theta_{n-1}) \end{cases}$$

$$|J| = r^{n-1} f(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$$

$$u = \{x:\ r \leqslant 1,\ \theta_1,\ldots,\theta_{n-2} \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \theta_{n-1} \in [0,\pi]\}$$

$$\int_u (\sin(r))^\alpha r^{n-1} f(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) dr d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}$$

$$(\sin(r))^\alpha r^{n-1} = \left(r - \frac{r^3}{3!} + \ldots\right)^\alpha r^{n-1} = r^{\alpha+n-1} + \ldots$$

$r \leqslant 1$ тогда если $\int r^{\alpha+n-1} dr < \infty$ то $(\sin r)^\alpha < \infty$ и $\alpha + n - 1 > -1$, то есть $\alpha > -n$

Задача 4

(a)

$$f(x,y) = x^2y^2$$

$$\begin{cases} x = r\sin(\varphi) \\ y = r\cos(\varphi) \end{cases} \qquad |J| = r$$

Перейдем от двойного интеграла к повторному

$$S = \iint_U x^2y^2dxdy =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^2\cos(\varphi)^2r^2\sin(\varphi)^2rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)^2\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\pi^6}{6}\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)^2d\varphi = \frac{\pi^6}{6}\left(\frac{1}{8}\varphi - \frac{\sin(4\varphi)}{32}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^7}{24}$$

(b)

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad S = \{(x,y): \ |x| + |y| \leqslant 1\}$$

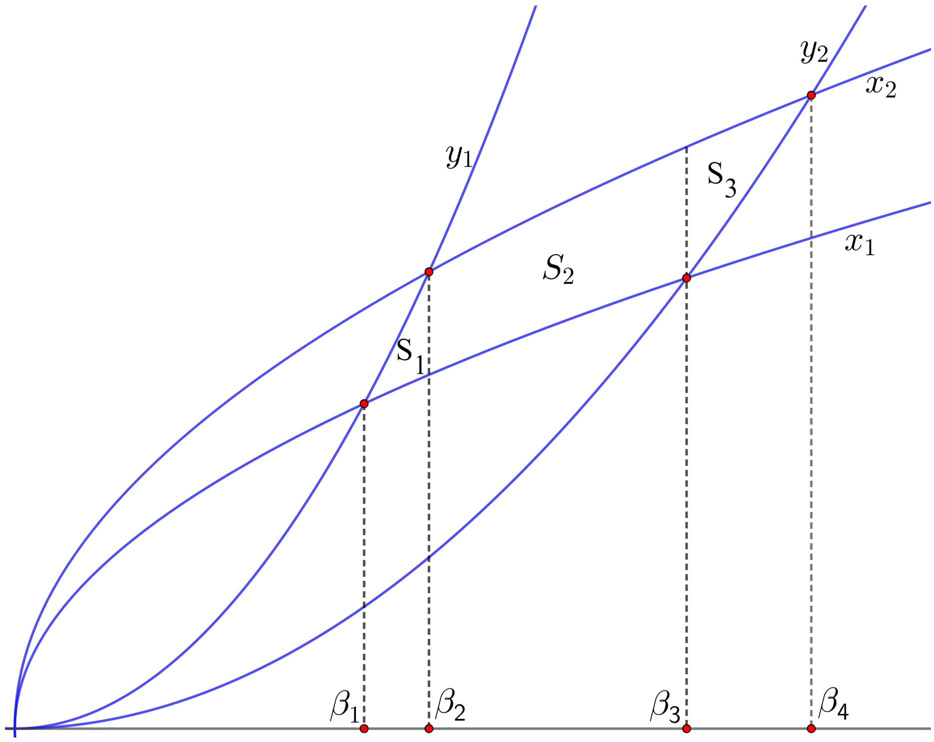
$$\iint_S (x^2+y^2)dxdy = 4\iint_{\substack{x,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} (x^2+y^2)dxdy =$$

$$4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)dy = 4\int_0^1 dx(x^2y + \frac{y^3}{3})\Big|_0^{1-x} =$$

$$4\int_0^1\left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3}\right)dx = 4\int_0^1(x^2 - x^3 + \frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{x^3}{3})dx =$$

$$4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) = \frac{2}{3}$$

Задача 5



Заметим что рассматриваемая фигура – четырехвершинник, сторонами которого являются параболы. Тогда мы можем заметить, что его вершины – точки пересечения парабол, то есть

$$\begin{cases} y^2 = 2ax \\ x^2 = 2by \end{cases} \qquad (x,y) = \left(2\sqrt[3]{ab^2}, 2\sqrt[3]{a^2b}\right)$$

То есть вершины это $\alpha_1 = \left(2\sqrt[3]{pr^2}, 2\sqrt[3]{p^2r}\right)$, $\alpha_3 = \left(2\sqrt[3]{ps^2}, 2\sqrt[3]{p^2s}\right)$, $\alpha_2 = \left(2\sqrt[3]{qr^2}, 2\sqrt[3]{q^2r}\right)$, $\alpha_4 = \left(2\sqrt[3]{qs^2}, 2\sqrt[3]{q^2s}\right)$. Тогда

$$S_1 = \int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{x_1}^{y_1} dydx = \int_{2\sqrt[3]{pr^2}}^{2\sqrt[3]{qr^2}}\int_{\sqrt{2px}}^{\frac{x^2}{2r}} dydx =$$

$$\int_{2\sqrt[3]{pr^2}}^{2\sqrt[3]{qr^2}}\left(\frac{x^2}{2r} - \sqrt{2px}\right)dx = \left(\frac{x^3}{6r} - \frac{2}{3}x\sqrt{2px}\right)\Bigg|_{2\sqrt[3]{pr^2}}^{2\sqrt[3]{qr^2}} =$$

$$\frac{4}{3}r(q-p) - \frac{8}{3}r\sqrt{pq} + \frac{8}{3}pr$$

$$S_2 = \int_{\beta_2}^{\beta_3}\int_{x_1}^{x_2} dydx = \int_{2\sqrt[3]{qr^2}}^{2\sqrt[3]{ps^2}}\int_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2qx}} dydx =$$

$$\int_{2\sqrt[3]{qr^2}}^{2\sqrt[3]{ps^2}} \sqrt{2qx} - \sqrt{2px}dx = \frac{2}{3}(\sqrt{2qx^3} - \sqrt{2px^3})\Big|_{2\sqrt[3]{qr^2}}^{2\sqrt[3]{ps^2}} = \frac{8}{3}(s\sqrt{pq} - ps - qr + r\sqrt{pq})$$

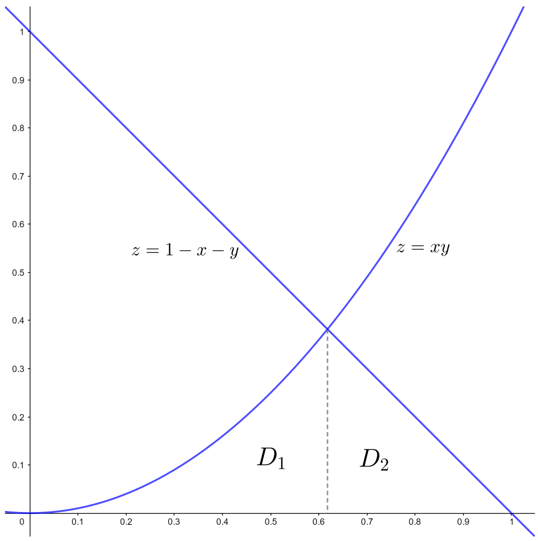
$$S_3 = \int_{\beta_3}^{\beta_4}\int_{y_2}^{x_2} dydx = \int_{2\sqrt[3]{ps^2}}^{2\sqrt[3]{qs^2}} \sqrt{2qx} - \frac{x^2}{2s}dx =$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{2qx^3} - \frac{x^3}{6s}\Big|_{2\sqrt[3]{qs^2}}^{2\sqrt[3]{ps^2}} = \frac{8}{3}(s\sqrt{pq} - \sqrt{qps^2}) - \frac{4}{3}(qs - ps)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{4}{3}r(q-p) - \frac{8}{3}r\sqrt{pq} + \frac{8}{3}pr + \frac{8}{3}(s\sqrt{pq} - ps - qr + r\sqrt{pq}) + \frac{8}{3}(qs - s\sqrt{qp}) - \frac{4}{3}(qs - ps) =$$

$$-\frac{4}{3}rq + \frac{4}{3}pr - \frac{4}{3}ps + \frac{4}{3}qs = \frac{4}{3}(q-p)(s-r)$$

Задача 6



Найдем точки пересечения

$$\begin{cases} z = xy \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad x + y + xy = 1 \quad y = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad x + y = 1$$

Тогда

$$V = D_1 + D_2 = \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz + \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} dy \int_0^{xy} dz =$$

$$\int_0^1 \left(y - xy - \frac{1}{2}y^2 \Big|_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}xy^2 \Big|_0^{\frac{1-x}{1+x}} \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(1 - x - \frac{1-x}{1+x} - x(1-x) + x\frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} \right) dx$$

Заметим что

$$-\frac{(1-x)}{(1+x)}(1-x) + (1-x)(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 \left(\frac{1}{(1+x)^2} - 1 \right) =$$

$$(1-x)^2 \left(-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \right) = (1-x)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}(1+x)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{(1-x)^2 x^2}{2(1+x)^2}$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2 x^2}{2(1+x)^2} dx + \int_0^1 \frac{(1-x)^2 x}{2(1+x)^2} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 (x+1) dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2 x}{1+x} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{x+1}) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 4\ln(x+1) \right) \Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - 4\ln(2) \right) =$$

$$\frac{17}{12} - 2\ln(2)$$

Задача 7

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

Перейдем к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\phi) \\ y = \rho\sin(\phi) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow\ f = \rho,\ z^2 = \rho^2,\ z = 1\ \Rightarrow\ \rho \in [0,1],\ z \in [0,1]$$

Тогда

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\rho)\rho d\rho d\phi dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^z d\phi dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{z^3}{3} d\phi dz \\ &= \int_0^1 \frac{2\pi}{3} z^3 dz \\ &= \frac{\pi z^4}{6}\bigg|_0^1 \qquad\qquad\qquad = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Задача 8

Рассмотрим точки пересечения: $6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2+y^2},\ (x,y) = (2,2)$, обозначим $x^2 + y^2 = r^2$, тогда

$$6 - r^2 = r \qquad r^2 + r - 6 = 0 \qquad r_1 = 2,\ r_2 = -3$$

Тогда $z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = 2$.
Перейдем к цилиндрическим координатам $x^2 + y^2 = r^2$ и $dxdydz = rdrd\phi dz$ и

$$\begin{aligned} V &= \iiint_U rdrd\phi dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_r^{6-r^2} rd\phi dzdr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} rz\bigg|_r^{6-r^2} d\phi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 6r - r^3 - r^2 d\phi dz \\ &= \int_0^2 2\pi(6r - r^3 - r^2)dr \\ &= 2\pi(3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3})\bigg|_0^2 \\ &= 2\pi(12 - 4 - \frac{8}{3}) \qquad\qquad = 2\pi \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}\pi \end{aligned}$$

Задача 9

$$\hat{I}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(xu+yv)} I dxdy =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-iyv} I_2 dy \int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} I_1 dx =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^{-iyv} dy \int_0^1 e^{-ixu} dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} I_1 = \int_0^1 e^{-ixu} I_1 dx \qquad \text{так как на остальных интервалах функция зануляется}$$
$$\int_{\mathbb{R}^2} \hat{I} dudv =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 e^{-iyv} dy\right) dv \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 e^{-ixu} dx\right) du$$
$$\left.\frac{e^{-ixu}}{-iu}\right|_0^1 = \frac{i}{u}(e^{-iu}+1)$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{i}{n} + i\frac{e^{-iu}}{u}\right) du = i\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{u} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu}}{u}du\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(u)}{u} + i\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{u} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(u)}{u}du\right)$$

Заметим что факту существования этого интеграла равносилен тому, что $\frac{\sin(u)}{u}$ и $\frac{du}{u} + \frac{\cos(u)}{u}du$ интегрируемы $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ интегрируема $\Leftrightarrow$ $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$ интегрируема (по Лебегу)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx = \int_{-\infty}^{0}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx + \int_{0}^{\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx = \int_{-\infty}^{0} -\frac{|\sin(x)|}{x}dx + \int_0^{\infty}\frac{|\sin(x)|}{x}dx =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{|\sin(x)|}{x}dx + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi(n+1)}^{-\pi n} -\frac{|\sin(x)|}{x}dx =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(x-\pi n)|}{(x-\pi n)+\pi n}d(x-\pi n) + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi} -\frac{|\sin(x+\pi(n+1))|}{(x+\pi(n+1))-\pi(n+1)}d(x+\pi(n+1)) =$$
$$2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(x-\pi n)|}{(n+1)\pi}d(x-\pi n) =$$
$$2\int_0^{\pi}|\sin(x-\pi n)|d(x-\pi n)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(n+1)} = 2\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \infty$$

TL;DR
Можно прочитать про интеграл Дирихле, он не является абсолютно сходящимся, а следовательно $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$ не интегрируется по Лебегу

Значит $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx = \infty$, то есть $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^1 e^{-iux}dx\right)du$ не существует, а следовательно и интеграл преобразования Фурье тоже не существует

Задача 10

Объем параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1, \ldots, x_n$ – определитель матрицы с соответствующими столбцами. Теперь посмотрим на меру. У единичного параллелепипеда это 1, а теперь мы проводим замену переменных, домножая их на A. Тогда подынтегральное выражение домножится на матрицу перехода, то есть на A и мера будет равна $|\det(A^*A)|^{\frac{1}{2}}$. Определитель транспонированной матрицы равен определителю обычной матрицы, а матрица Грама это произведение обычной с транспонированной, откуда $A^*A = G$ и $|\det G|^{\frac{1}{2}} = |\det A^*A|^{\frac{1}{2}}$.