2К Мат. Анализ. Семинар №18

① О сходимости тригонометрических рядов

Рассмотрим ряды

$$(S)\ \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nt\,, \quad (C)\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos nt.$$

Вопрос 2) при каких условиях ряды (S) и (C) являются рядами Фурье некоторых суммируемых функций?
1) Когда эти ряды сходятся? поточечно? почти всюду? равномерно?

Из прошлых семинаров известно
I) Если $\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 < \infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 < \infty$, то это ряды Фурье функций из $L_2(-\pi,\pi)$
II) Если $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n| < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |q_n| < \infty$, то это ряды Фурье функции из $C[-\pi,\pi]$.

I) – сходятся в $L_2(-\pi,\pi)$ (п.всюду: Лузин)
II) – сходятся равномерно на $\mathbb{R}$.

Задача 1. Если $0 \le \ldots \le q_{n+1} \le q_n \le \ldots \le q_1$
и $0 \le \ldots p_{n+1} \le p_n \le \ldots \le p_1$, то

а) ряды (C) и (S) сходятся всюду к некоторой функции;

б) Равномерно сходится на $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} U_\delta(2\pi n)$ $\forall \delta > 0$

Решение: Вытекает из признака Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов вида: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x)$

Условие: 1) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right|$ — равномерно ограничен,

2) $b_n(x) \geq b_{n+1}(x)$, $b_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n\to\infty)$.

В нашем случае $a_k(x) = \sin kx$ или $\cos kx$

$b_n(x) = p_n$ или $b_n(x) = q_n$.

Равномерная ограниченность: для (S)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Равномерно огран при $\frac{\delta}{2} < \left|\frac{x}{2}\right| < \pi - \frac{\delta}{2}$

Аналогично для (C)

Примеры: 1) $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, 2) $\sum \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$

3) $\sum \frac{\sin nx}{\ln n}$ $\sum \frac{\cos nx}{\ln n}$.

Эти ряды сходятся всюду, кроме $x \in \pi\cdot\mathbb{Z}$.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Задача 2. Если ряд (S) сходится к интегрируемой функции $f(x)$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$

Решение: Проинтегрируем ряд (S) по $[0, y]$ (это можно делать, т.к. ряд равномерно сходится при $y < \pi$).

$$\int_0^y f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}(1 - \cos nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos nx$$

Слева стоит конечное число. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos nx$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ – сходится

Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье интегрируемой функции, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ – расходится!

Задача 3. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < \infty$, то оба ряда (C) и (S) сходятся к интегрируемой функции. (Обобщение задачи 10 а)

Домашнее задание. Из листка 2.

② О скорости убывания коэффициентов Фурье гладких функций

Пусть $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, причем
$\exists\, f'(x) \in L_2(-\pi,\pi)$.

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad f'(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$$

На прошлом семинаре доказали: $\boxed{d_n = in\cdot c_n}$ (1)

т.е. можно формально дифференцировать

если $f(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \Rightarrow f'(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} in\cdot c_n e^{inx}$.

Задача 4. Пусть $f\in C^{(m-1)}[-\pi,\pi]$,
$f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$, $j=0,1,\dots,m-1$,
$f^{(m)}(x)\in L_2(-\pi,\pi)$. Тогда

$$c_n(f^{(m)}) = (i n)^m c_n(f) \quad \text{и} \qquad (2)$$

$$|c_n(f)| = \frac{\gamma_n}{n^m} = o\left(\frac{1}{n^m}\right), \quad n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0. \qquad (3)$$

причем $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n^2 < \infty$.

Решение: применим (1) m раз:

$$c_n(f^{(m)}) = (in)\cdot c_n(f^{(m-1)}) = \dots = (in)^m c_n(f)$$

Положим теперь $\gamma_n = |c_n(f^{(m)})|$

Применим к функции $f^{(m)}(x) \in L_2(-\pi,\pi)$ равенство Парсеваля:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|c_n(f^{(m)})\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(x)|^2\,dx < \infty$$

при этом $|c_n| = \dfrac{\gamma_n}{n^m}$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Если записать ряд Фурье через $\sin nx$ и $\cos nx$, т.е. $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

то действуют те же правила дифференцирования:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n\cdot n \sin nx + b_n \cdot n \cdot \cos nx$$

Для оценки сходимости коэффициентов действуют аналогичные неравенства, если учесть, что $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$

$b_n(f) = i\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right)$. т.е.

$$|a_n| \le \frac{\alpha_n}{n^m}; \quad |b_n| \le \frac{\beta_n}{n^m}, \quad n \in \mathbb{N}$$

причем $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n + \gamma_{-n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 < \infty$.

При исследовании сходимости рядов Фурье производных $f^{(m)}(x)$ используются те же методы, что и для функции $f(x)$

Например: Если $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$

сходится равномерно, а

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} \text{ — сходится всюду,}$$

кроме точки $x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$,

и равномерно на $\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}U_\delta(2k\pi)$.

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\sin nx \text{ — расходится}$$

---

③ О скорости сходимости ряда Фурье в зависимости от гладкости функции

Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям задачи 4, т.е.

$$f\in C^{(m-1)}[-\pi,\pi],\quad f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi),\ j=0,\dots,m-1$$

причем $\exists\, f^{(m)}\in L_2(-\pi,\pi)$.

Задача 5. Доказать, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно, причем $|f(x)-S_n(x)|\le\frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}}$, $\varepsilon_n\to 0$

Решение: Если $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, причем $f'(x)\in L_2(-\pi,\pi)$, то, как установили в задаче 4 $(m=1)$ $\forall n\in\mathbb{Z}$ $|C_n| \le \dfrac{\gamma_n}{n}$, причем где $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\gamma_n^2 < \infty$. Следовательно,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n e^{inx}| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\gamma_n}{n} \le \frac{1}{2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\gamma_n^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2}\Big)$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса о мажорантной сходимости, ряд

$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{inx}$ <u>сходится равномерно</u> и сумма этого ряда, очевидно, есть $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{inx}.$$

Оценим отклонение $f(x)$ от $S_n(x)$:

$$|f(x)-S_n(x)| = \Big|\sum_{|k|\ge n+1} C_k e^{ikx}\Big| \le \sum_{|k|\ge n+1} |C_k| \le$$

$$\le \sum_{|k|\ge n+1}\frac{\gamma_k}{k^m} \le \Big(\sum_{|k|\ge n+1}\gamma_k^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{|k|\ge n+1}\frac{1}{k^{2m}}\Big)^{1/2}$$

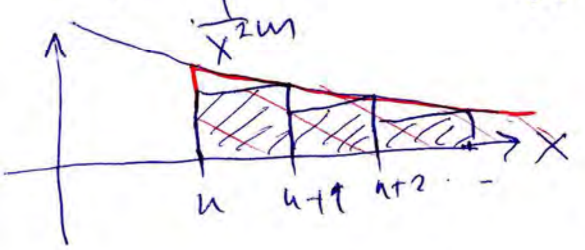
Применили неравенство Коши-Буняковского к суммам.

Обозначим $\delta_n = \left(\sum\limits_{|k|\geq n+1} \gamma_k^2\right)^{1/2} \to 0$ т.к. $\sum \gamma_n^2 < \infty$ сходится.

Оценим второй сомножитель:

$$\sum_{|k|\geq n+1} \frac{1}{k^{2m}} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{2m-1}\,\frac{1}{n^{2m-1}}$$

Следовательно:



$$\left(\sum_{|k|\geq n+1} \frac{1}{k^{2m}}\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot \frac{1}{n^{m-1/2}}$$

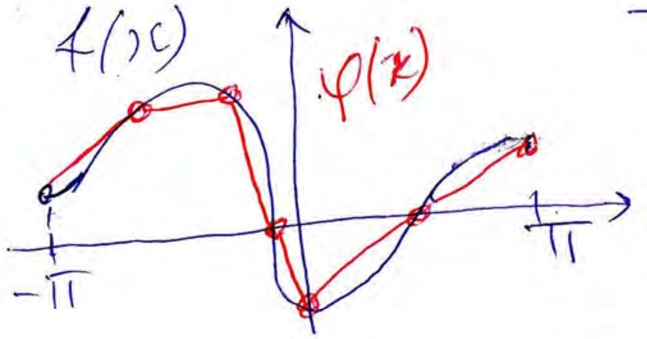
Положим $\varepsilon_n = \dfrac{\delta_n}{\sqrt{2m-1}}$, тогда

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}}$$

<u>Вывод</u>: чем глаже функция $f(x)$, тем быстрее сходится к ней её ряд Фурье.

С помощью этого результата при $m=1$ можно ещё раз получить теорему Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной функции тригонометрическими полиномами.

Пусть $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда $f(x)$ - равномерно непрерывна и при $\forall \varepsilon > 0$ её можно приблизить кусочно-линейной функцией $\varphi(x)$:



$\varphi(\pi) = \varphi(-\pi)$.

Тогда по задаче 5 при $m = 1$

$$\left|\varphi(x) - S_n(x)\right| \le \frac{\varepsilon_n}{n^{1/2}} \to 0 \ (\varepsilon \to ?)$$

Пусть $\frac{\varepsilon_n}{n^{1/2}} < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда $|f(x) - S_n(x)| \le \varepsilon$.

Ряд Фурье первообразной

Пусть $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$, 2π-периодична.
Пусть $F(x)$ – первообразная $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$

Задача 6. Найти связь коэффициентов Фурье функций $F(x)$ и $f(x)$. При каком условии $F(x)$ – 2π-периодическая функция?

Решение: По формуле Ньютона – Лейбница

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow c_0 = 0$$

т.е. $f(x)$ имеет нулевой коэффициент c_0.

Пусть $d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx}\,dx =$ $n \neq 0$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x)}{-in}\, d\left(e^{-inx}\right) = \frac{1}{2\pi}\Bigg(\underbrace{\frac{F(x)}{-in} e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx\Bigg) = \frac{c_n}{in}$$

Следовательно, $d_n = \frac{c_n}{in}$, $n \neq 0$.

А как найти d_0?

Можно взять любое число, т.к. первообразная функции $f(x)$ определяется с точностью до константы.

<u>Вывод:</u> $F(x) \sim d_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$

Чтобы записать через cos и sin:

Если $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

<u>Однако:</u> $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow a_0 = 0$. Получаем:

$$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx$$

Обсудим вопрос о сходимости ряда Фурье первообразной.

<u>Задача 7.</u> Пусть $f \in L_2(-\pi, \pi)$,

$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$. Сходится в $L_2(-\pi,\pi)$

Тогда после интегрирования по x

$$\int_0^x f(t) = c_0(f)x + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n(f)}{in}\left(e^{inx} - 1\right),$$

при этом ряд сходится <u>равномерно</u>

Решение: Рассмотрим функцию

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt - c_0(f)\cdot x\,,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

($c_0(f)$ — нулевой коэффициент Фурье f)

Тогда $F\in C[-\pi,\pi]$, $F(\pi)=F(-\pi)$, т.к.

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - 2\pi c_0(f)=0.$$

Поскольку $F'(x)=f(x)-c_0$, то $F'(x)$ принадлежит $L_2(-\pi,\pi)$ и по задаче 5 ряд Фурье функции $F(x)$ равномерно сходится на $[-\pi,\pi]$. А по формуле (1)

$$c_n(F)=\frac{c_n(F')}{in} \quad \text{при } n\neq 0.$$

Однако, очевидно $c_n(F')=c_n(f)$, $n\neq 0$.

Следовательно: $F(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F)e^{inx}$

Сходится равномерно, тогда при $x=0$.

$$0=F(0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F).$$

Тогда $\int_0^x f(t)\,dt - c_0(f)x = F(x)-F(0)=\sum_{n\neq 0}\frac{c_n(f)}{in}\left(e^{inx}-1\right)$

Вывод: ряды Фурье функций из L_2 можно интегрировать почленно.