① $U(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$

$U'(x) = +2e^{-x}(1-e^{-x})$

- минимум (точка покоя):

  $x = 0 \Rightarrow (0,0)$ – особая точка типа центр

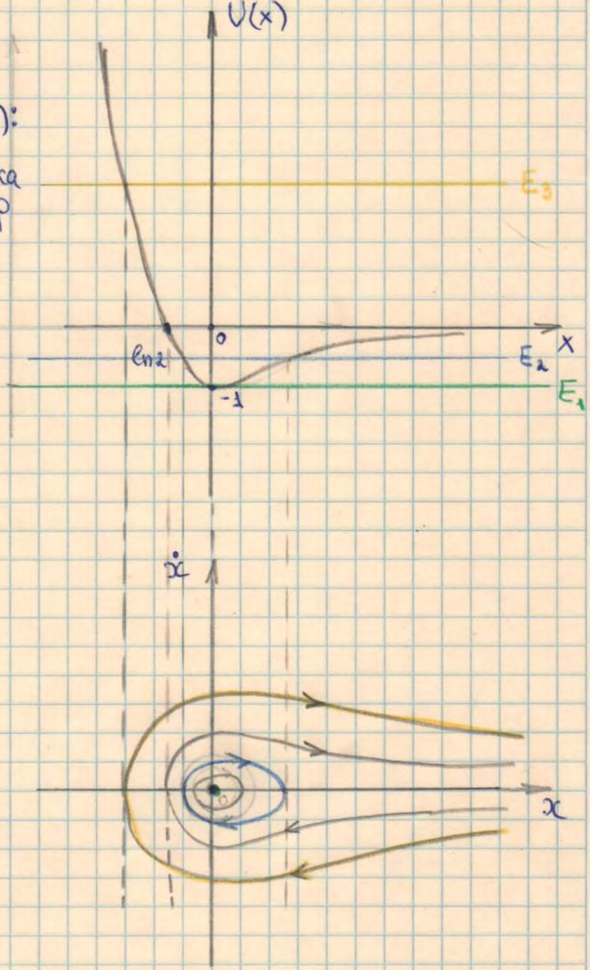
- точек максимума (неуст. равновесие) нет

$\Rightarrow$ нет сепаратрис.

- По з-ну сохр. энергии

$$\underbrace{\frac{m\dot{x}^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{U(x)}_{\geq -1} = E$$

$\Rightarrow E \geq -1.$



(2)

- минимум (точка покоя):

$x_0 = 0$, т.е.

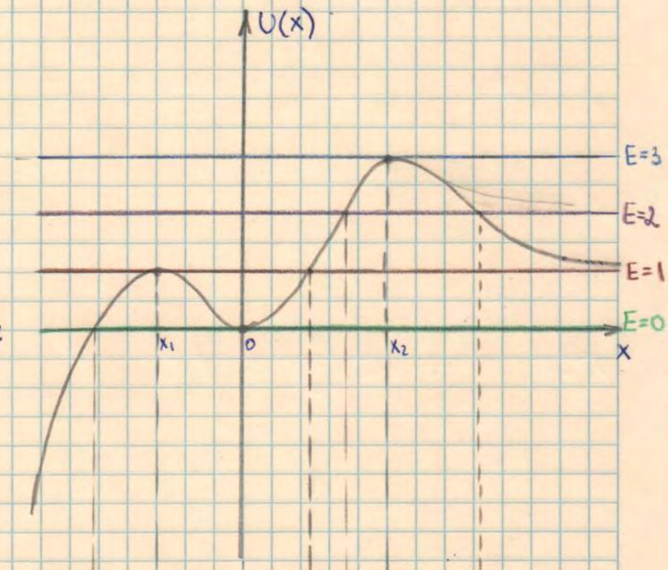
$(0,0)$ – особая точка типа центр

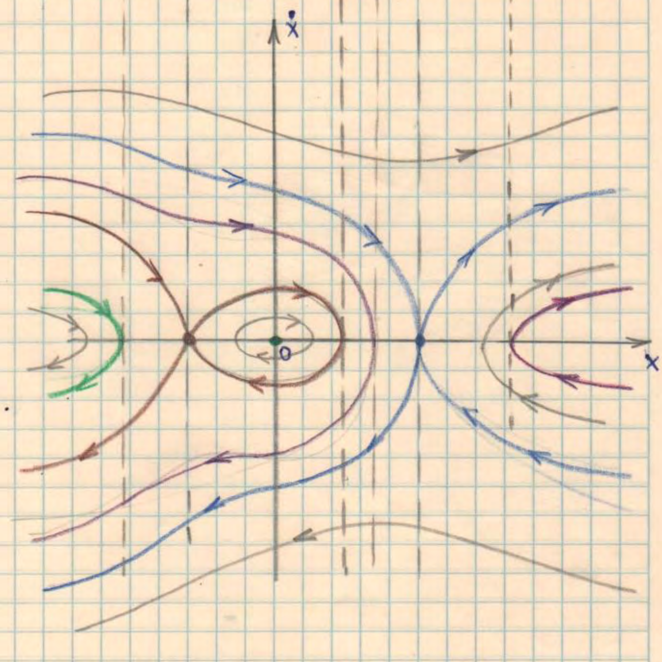
- максимумы (точки неуст. равн.):

x_1 и x_2, т.е.

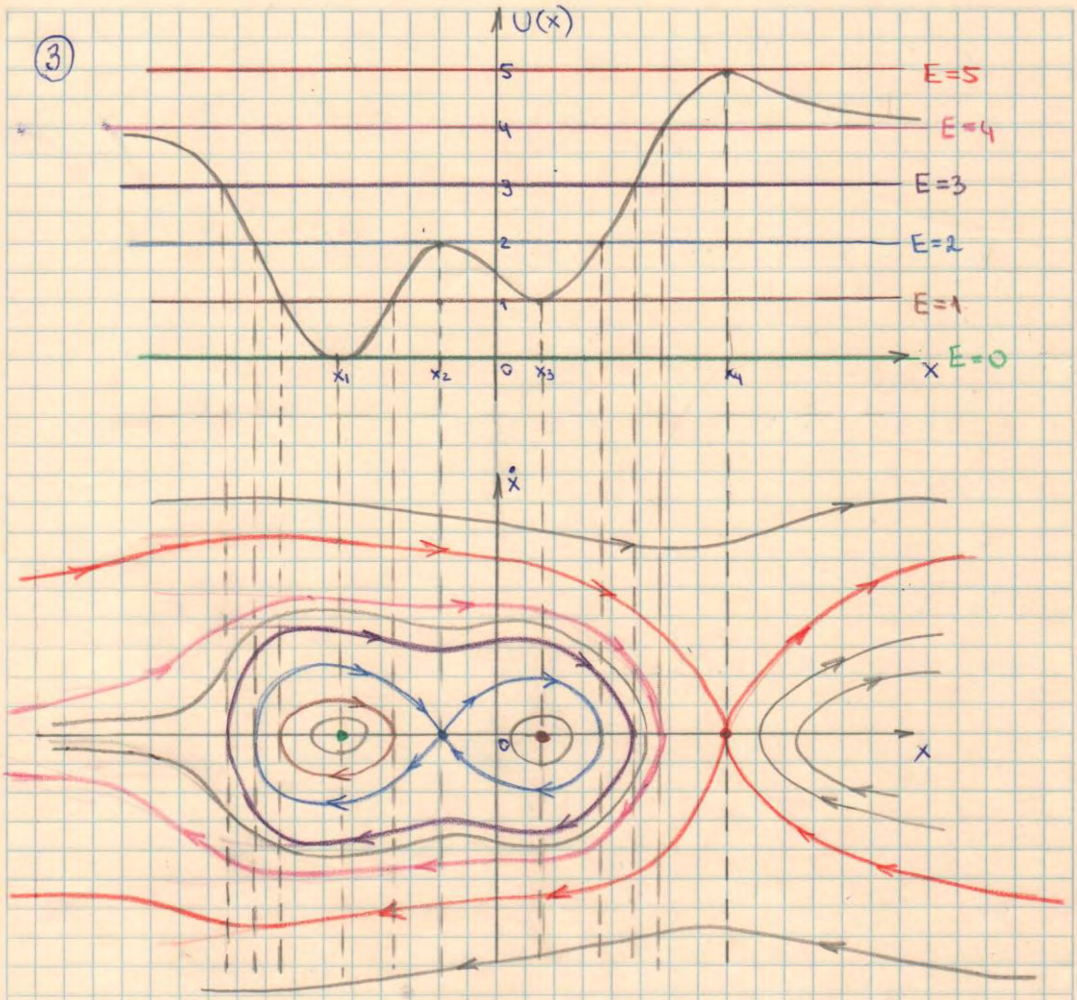
$(x_1,0)$, $(x_2,0)$ – особые точки типа седло

E	# фаз. кривых
0	2
1	4
2	2
3	5





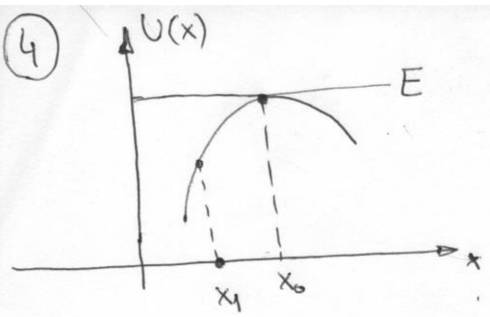
③



- минимумы (точки покоя): x_1 и x_3, т.е. $(x_1, 0)$, $(x_3, 0)$ – особые точки типа центр
- максимумы (точки неуст. равновесия): x_2 и x_4, т.е. $(x_2, 0)$, $(x_4, 0)$ – особые точки типа седло.

E	0	1	2	3	4	5
# фаз. кривых	1	2	3	1	1	5

4



1) $$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}$$

$$t = \int_0^t dt = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}$$

2) Пусть x_0 - точка максимума $U(x)$.

В окрестности x_0:

$$U(x) = \overset{E}{\overset{\shortparallel}{U(x_0)}} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{U'(x_0)}}(x-x_0) + \overbrace{\frac{U''(x_0)}{2}}^{k}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

$$U(x) = E + k(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2).$$

$$t = \pm\int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{k(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)}}$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{k(x-x_0)^2}}}{\frac{1}{\sqrt{k(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)}}} = 1 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{k(x-x_0)^2}} \text{ и } \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{k(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)}}$$

сх-ся или расх-ся одновременно

$$\int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{k(x-x_0)^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{k}}\int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{x-x_0} = \pm\frac{1}{\sqrt{k}} \ln(x-x_0)\Big|_{x_1-x_0}^{0} = \pm\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ интеграл $\displaystyle\int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$ расх-ся $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ время движения по сепаратрисе бесконечно большое.

(5) $$\begin{cases} \dot{x} = y \\ m\dot{y} = f(x) = -\dfrac{\partial U(x)}{\partial x} \end{cases}$$

Площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[x(t)\,\dot{y}(t) - y(t)\,\dot{x}(t) \right] dt$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[-x(t) \frac{\partial U(x)}{\partial x} \cdot \frac{1}{m} - y^2(t) \right] dt$$

По закону сохранение энергии: $\dfrac{my^2}{2} + U(x) = E$

$$y^2 = \frac{2(E-U)}{m}$$

$$S = \frac{1}{2m} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[-x \frac{\partial U}{\partial x} - 2E + 2U \right] dt$$

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{2m} \cdot \left(\cancel{\frac{d}{dE} \int_{t_0}^{t_0+T} -x \frac{\partial U}{\partial x}\, dt} - \frac{d}{dE} \int_{t_0}^{t_0+T} 2E\, dt + \cancel{\frac{d}{dE} \int_{t_0}^{t_0+T} 2U\, dt} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2m}\, 2 \int_{t_0}^{t_0+T} dt = -\frac{T}{m} \Rightarrow |T| = m \frac{dS}{dE}$$

$$⑥ \quad \vec{F}: \quad \begin{aligned} F_x &= yz - x \\ F_y &= xz - \alpha y \\ F_z &= \alpha xy + z, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

а) $\alpha = ?$, т.ч. $\vec{F}$ потенциальна; $U(x,y,z) = ?$

$\sum F_i dx_i$

Сила $\vec{F}$ потенциальна, если 1-форма $\omega = (\vec{F}, d\vec{r})$ точна, т.е. $\omega = -dU$. Конфигурационное пр-во системы односвязно $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ по лемме Пуанкаре замкнутая форма явл-ся точной.

$$d\omega = 0 \iff \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j.$$

Надо проверить: $\begin{cases} \partial_x F_y = \partial_y F_x \\ \partial_y F_z = \partial_z F_y \\ \partial_z F_x = \partial_x F_z \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial F_y}{\partial x} = z \overset{?}{=} \frac{\partial F_x}{\partial y} = z \\ &\frac{\partial F_z}{\partial y} = \alpha x \overset{?}{=} \frac{\partial F_y}{\partial z} = x \iff \boxed{\alpha = 1} \\ &\frac{\partial F_x}{\partial z} = y \overset{?}{=} \frac{\partial F_z}{\partial x} = \alpha y \iff \alpha = 1 \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{\vec{F} \text{ потенциальна только при } \alpha = 1.}$$

Найдем $U(\vec{r})$, т.ч. $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$.

$$\begin{cases} \partial_x U = -F_x & (1) \\ \partial_y U = -F_y & (2) \\ \partial_z U = -F_z & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \quad U = -\int F_z \, dz = -xyz - \frac{z^2}{2} + C_1(x,y)$$

$$\partial_x U = -yz + \frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} \quad (*)$$

Из (*) и (1) получаем, что $\frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} = x \Rightarrow C_1(x,y) = \frac{x^2}{2} + C_2(y)$.

Тогда $U = -xyz - \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} + C_2(y)$.

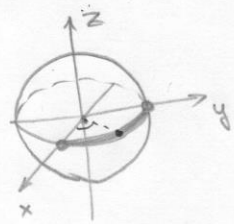
$$\partial_y U = -xz + \frac{\partial C_2(y)}{\partial y} \quad (**)$$

Из (**) и (2) получаем, что $\frac{\partial C_2}{\partial y} = y \Rightarrow C_2(y) = \frac{y^2}{2} + C_3$.

Значит, $U = -xyz - \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C_3$.

<u>Ответ:</u> $\alpha = 1$; $U(x,y,z) = -xyz - \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C_3$.

б) 1) γ_1 – дуга окр-ти $x^2+y^2=1$, $z=0$, заключенная между $M_1(1,0,0)$ и $M_2(0,1,0)$.



В сферических координатах:

$\vec{r}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$d\vec{r}_1 = (-\sin\varphi\, d\varphi, \cos\varphi\, d\varphi, 0)$

$$A_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} (\vec{F}, d\vec{r}_1) = \int_0^{\pi/2} \left((y\cancel{z}^{\,0} - x)(-\sin\varphi) + (\cancel{xz}^{\,0} - \alpha y)\cos\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi\,(1-\alpha)\, d\varphi = \frac{1}{2}(1-\alpha) \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{1-\alpha}{2}$$

2) γ_2: $x^2+y^2=1$, $z = \frac{2\varphi}{\pi}$ между $M_1(1,0,0)$ и $M_2(0,1,1)$.

В сферических координатах:

$\vec{r}_2 = (\cos\varphi, \sin\varphi, \frac{2\varphi}{\pi})$, где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$d\vec{r}_2 = (-\sin\varphi\, d\varphi, \cos\varphi\, d\varphi, \frac{2}{\pi} d\varphi)$

$$A_{\gamma_2} = \int_{\gamma_2} (\vec{F}, d\vec{r}_2) = \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{2\varphi}{\pi}\sin\varphi - \cos\varphi\right)(-\sin\varphi) + \left(\frac{2\varphi}{\pi}\cos\varphi - \alpha\sin\varphi\right)\cos\varphi + \right.$$

$$\left. + \left(\alpha\cos\varphi\sin\varphi + \frac{2\varphi}{\pi}\right)\frac{2}{\pi} \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\sin\varphi\cos\varphi\left(1-\alpha+\frac{2\alpha}{\pi}\right) + \frac{2\varphi}{\pi}\left(-\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right) + \frac{4\varphi}{\pi^2} \right] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\alpha+\frac{2\alpha}{\pi}\right) \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \varphi\cos 2\varphi \, d\varphi + \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\alpha+\frac{2\alpha}{\pi}\right) + \underbrace{\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}}_{\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \varphi\cos 2\varphi \, d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} \varphi\cos 2\varphi \, d\varphi = \left\{ \begin{array}{l} u = \varphi \longrightarrow du = d\varphi \\ dv = \cos 2\varphi \, d\varphi \longrightarrow v = \frac{1}{2}\sin(2\varphi) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\, d\varphi = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\sin\pi}_{0} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

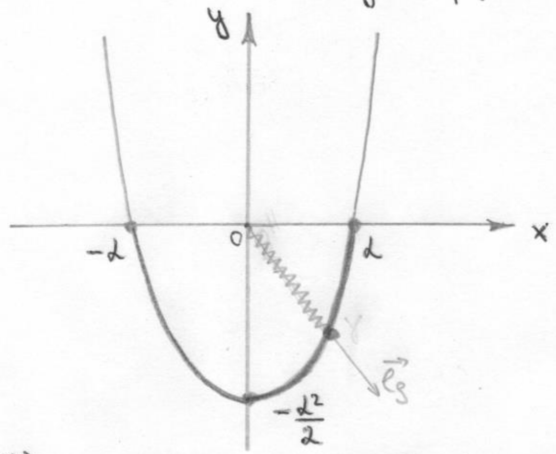
$$A_{\gamma_2} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) + 1 - \frac{1}{\pi}$$

Ответ: $A_{\gamma_1} = \frac{1-\alpha}{2}$; $A_{\gamma_2} = \alpha\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) + 1 - \frac{1}{\pi}$.

⑦ $\mathbb{R}^2$ $\quad y = \dfrac{x^2-\ell^2}{2}$

$\vec{F} = -k\rho\vec{e}_\rho$, $\quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad k>0$

$A_\gamma = ?$ при перемещ. из точки с абсциссой $x=0$,
в точку с ординатой $y=0$



$\vec{r} = \left(x, \dfrac{x^2-\ell^2}{2}\right)$, $x\in[0,\ell]$. $\Rightarrow d\vec{r} = (dx, x\,dx)$

$\vec{e}_\rho = \left(\dfrac{x}{\rho}, \dfrac{y}{\rho}\right) \Rightarrow \vec{F} = -k(x,y)$.

$$A_\gamma = \int_\gamma (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_0^\ell (-kx - kxy)\,dx = -k\int_0^\ell \left(x + x\,\frac{x^2-\ell^2}{2}\right)dx =$$

$$= -k\left(1-\frac{\ell^2}{2}\right)\int_0^\ell x\,dx - k\int_0^\ell \frac{x^3}{2}\,dx = -k\left(1-\frac{\ell^2}{2}\right)\frac{\ell^2}{2} -$$

$$-\frac{k}{2}\,\frac{\ell^4}{4} = -k\frac{\ell^2}{2} + \frac{k\ell^4}{4} - \frac{k\ell^4}{8} = -k\frac{\ell^2}{2} + \frac{k\ell^4}{8} =$$

$$= k\frac{\ell^2}{2}\left(\frac{\ell^2}{4}-1\right)$$ (Заметим, что $\int_0^\ell (-kx-kxy)dx = \int_{-\ell}^0 (-kx-kxy)dx$)

Ответ: $A_\gamma = k\dfrac{\ell^2}{2}\left(\dfrac{\ell^2}{4}-1\right)$.

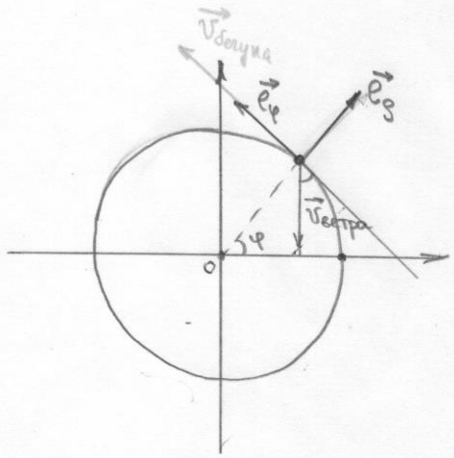
(8) R – радиус круга.

$|\vec{v}_{бегуна}| = v$

$|\vec{v}_{ветра}| = \alpha t^2$, $\alpha = const > 0$.

$\vec{F}_{сопр} = -k\vec{v}_{отн}$

$A_{окр} \to \min$, $v = ?$



$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_{бегуна} - \vec{v}_{ветра} = (0, v) - (-\alpha t^2 \sin\varphi, -\alpha t^2 \cos\varphi) =$$
$$= (\alpha t^2 \sin\varphi, v + \alpha t^2 \cos\varphi).$$

$$\dot{\vec{r}} = (0, v) \Rightarrow d\vec{r} = (0, v\,dt)$$

Пусть бегун сделал круг за время T.

$$A_{окр} = \int\limits_{окр} (\vec{F}_{сопр}, d\vec{r}) = -k \int\limits_0^T (v + \alpha t^2 \cos\varphi) v\,dt$$

$$t = \frac{\varphi R}{v} \Rightarrow dt = \frac{R}{v} d\varphi.$$ Тогда

$$A_{окр} = -k \int\limits_0^{2\pi} \left(v + \alpha \frac{\varphi^2 R^2}{v^2} \cos\varphi\right) \cancel{v} \cdot \frac{R}{\cancel{v}} d\varphi = -kRv \int\limits_0^{2\pi} d\varphi -$$

$$- kR^3 \frac{\alpha}{v^2} \int\limits_0^{2\pi} \varphi^2 \cos\varphi\, d\varphi = -kRv\,2\pi - kR^3 \frac{\alpha}{v^2} \int\limits_0^{2\pi} \varphi^2 \cos\varphi\, d\varphi$$

$$\int \varphi^2 \cos\varphi\, d\varphi = \int \varphi^2\, d\sin\varphi = \varphi^2 \sin\varphi - 2\int \sin\varphi \cdot \varphi\, d\varphi =$$

$$= \varphi^2 \sin\varphi + 2\int \varphi\, d\cos\varphi = \varphi^2 \sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi - 2\int \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \varphi^2 \sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi + C$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi^2 \cos\varphi\, d\varphi = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

$$A_{окр} = -2kRv\pi - \frac{4kR^3\alpha\pi}{v^2}$$

По условию $A_{бегуна} = -A_{окр}$.

$$\frac{\partial A_{бегуна}}{\partial v} = 2kR\pi - \frac{8kR^3\alpha\pi}{v^3} = 0$$

$$2kR\pi\left(1 - \frac{4R^2\alpha}{v^3}\right) = 0$$

$$\frac{4R^2\alpha}{v^3} = 1 \Rightarrow v = \sqrt[3]{4R^2\alpha}$$

знак $\frac{\partial A}{\partial v}$ $\quad - \quad \bullet \quad + \quad \to v$

$A(v)$ $\quad \searrow \quad \sqrt{4R^2\alpha} \quad \nearrow$

точка min

<u>Ответ:</u> $v = \sqrt[3]{4R^2\alpha}$.

⑨ m - масса бусинки.

ω - угловая скорость стержня.

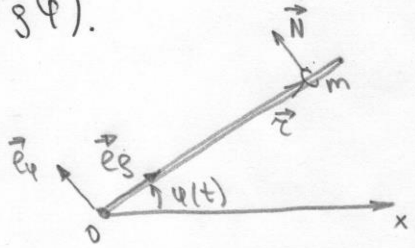
$\rho(0) = a$ - положение бусинки при $t=0$.

$\rho'(0) = 0$.

а) $N(t) = ?$ $\quad A_{\vec N} = ?$ (за время T)

$$\vec r = \rho \vec e_\rho \Rightarrow \dot{\vec r} = \dot\rho \vec e_\rho + \rho\dot\varphi \vec e_\varphi \Rightarrow \boxed{d\vec r = (\dot\rho\, dt, \rho\omega\, dt)}$$

$$\ddot{\vec r} = \ddot\rho \vec e_\rho + \dot\rho\dot\varphi\vec e_\varphi + \dot\rho\dot\varphi \vec e_\varphi + \rho\ddot\varphi\vec e_\varphi - \rho\dot\varphi^2\vec e_\rho =$$
$$= \vec e_\rho(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) + \vec e_\varphi(2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi).$$



По II закону Ньютона:

$$m\ddot{\vec r} = \vec N$$

В полярных координатах

$\vec e_\rho:\quad m(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) = 0 \quad\longrightarrow\quad \ddot\rho - \rho\varphi^2 = 0$

$\vec e_\varphi:\quad m(2\dot\rho\dot\varphi + \cancel{\rho\ddot\varphi}^{\,0}) = N$

Имеем: $\begin{cases} \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 = 0. \\ \dot\rho(0) = 0 \\ \rho(0) = a \end{cases}$

$$\lambda^2 - \dot\varphi^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\dot\varphi \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1(t) = e^{\dot\varphi t} = e^{\omega t} \\ y_2(t) = e^{-\dot\varphi t} = e^{-\omega t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

$\rho(0) = c_1 + c_2 = a$

$\dot\rho(0) = \omega c_1 e^{\omega t}\big|_{t=0} + c_2(-\omega)e^{-\omega t}\big|_{t=0} = \omega(c_1 - c_2) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{\rho(t) = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})}$$

$$\dot\rho(t) = \frac{a}{2}\omega(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

Значит, $\boxed{\vec N = (0,\ ma\omega^2(e^{\omega t} - e^{-\omega t}))}$

$$A_{\vec N} = \int\limits_{\gamma}(\vec N, d\vec r) = \int\limits_0^T maw^2(e^{wt}-e^{-wt})\,\frac{a}{2}(e^{wt}+e^{-wt})\,w\,dt =$$

$$= \frac{ma^2w^3}{2}\int\limits_0^T (e^{2wt}-e^{-2wt})\,dt = \frac{ma^2w^3}{2}\left(\frac{e^{2wt}}{2w}\Big|_0^T - \frac{e^{-2wt}}{-2w}\Big|_0^T\right) =$$

$$= \frac{ma^2w^3}{2}\left(\frac{e^{2wT}}{2w} - \frac{1}{2w} + \frac{e^{-2wT}}{2w} - \frac{1}{2w}\right) = \frac{ma^2w^2}{2}\left(\frac{e^{2wT}+e^{-2wT}}{2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{\vec N} = \frac{ma^2w^2}{2}\left(\frac{e^{2wT}+e^{-2wT}}{2}-1\right)}$$

б) $\Delta T_{кин}$ за время T =?

$$\Delta T_{кин} = T_{кин}(T) - T_{кин}(0)$$

$$T_{кин}(T) = \frac{m\vec v^2}{2} = \frac{m}{2}(\vec e_\rho\cdot\dot\rho + \vec e_\varphi w\rho)^2 = \frac{m}{2}(\dot\rho^2+(w\rho)^2) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{a^2w^2}{4}(e^{2wT}+e^{-2wT}-2) + w^2\frac{a^2}{4}(e^{2wT}+e^{-2wT}+2)\right) =$$

$$= \frac{ma^2w^2}{8}(2e^{2wT}+2e^{-2wT}) = \frac{ma^2w^2}{4}(e^{2wT}+e^{-2wT})$$

$$T_{кин}(0) = \frac{m}{2}(\cancel{\vec e_\rho\dot\rho(0)} + \vec e_\varphi w\rho(0))^2 = \frac{mw^2a^2}{2}$$

$$\Delta T_{кин} = \frac{ma^2w^2}{4}(e^{2wT}+e^{-2wT}-2) = \frac{ma^2w^2}{2}\left(\frac{e^{2wT}+e^{-2wT}}{2}-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta T_{кин} = A_{\vec N}}$$

<u>Ответ:</u> а) $N(t) = maw^2(e^{wt}-e^{-wt})$

$$A_{\vec N}(T) = \frac{ma^2w^2}{2}\left(\frac{e^{2wT}+e^{-2wT}}{2}-1\right)$$

б) $\Delta T_{кин}(T) = A_{\vec N}(T)$.