

**Вариант 2.**

1. Материальная точка движется вдоль прямой  $O\vec{x}$  в поле потенциальной силы, потенциальная энергия  $U(x)$  которой дается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} e^{-x^2} - 1 & x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x^2(x-3) & x > 0. \end{cases}$$

- а) Нарисуйте фазовый портрет этой механической системы.
- б) Укажите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям энергии  $E = -1$ ,  $E = 1/2$  и  $E = 0$ .

2. Компоненты силы  $\vec{F}$  заданы в полярных координатах  $(\rho, \phi)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  следующими выражениями:

$$F_\rho = \rho(\rho + 1)f(\phi), \quad F_\phi = g(\rho) \cos \phi \sin^3 \phi,$$

где  $f(\phi)$  и  $g(\rho)$  некоторые дифференцируемые функции своих аргументов.

- а) Определите наиболее общий вид функций  $f(\phi)$  и  $g(\rho)$ , при которых сила  $\vec{F}$  не имеет сингулярности в начале координат и потенциальна на всей плоскости.
- б) Найдите вид соответствующей потенциальной энергии  $U(\rho, \phi)$ .

3. Тележка массы  $M_1$  может без трения двигаться по прямой по поверхности горизонтального стола. На тележке шарнирно закреплен жесткий невесомый стержень длины  $2l$ , который может свободно вращаться в вертикальной плоскости, параллельной линии движения тележки. Шарнирное крепление расположено в геометрическом центре стержня. На концах стержня закреплены одинаковые точечные массы  $m$ . Невесомая нерастяжимая нить, перекинута через невесомый блок, соединяет тележку с грузом  $M_2$ , который движется вдоль вертикальной прямой. Система находится в однородном постоянном поле тяжести  $\vec{g}$ , направленном вертикально вниз (см. рисунок).

- а) Определите число степеней свободы системы.
- б) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте Лагранжиан системы.
- в) Выпишите формулы для всех сохраняющихся величин (интегралов движения), которые имеются в данной системе.

