

1 2021 Вариант 2

Задача 1.1. Найдите экстремаль функционала

$$S[y] = 2y^2(\pi) + \int_0^\pi dx \left((y'(x))^2 - y^2(x) + 3y(x) \cos 2x \right),$$

заданного на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций $y(x) \in C^2[0, \pi]$ с фиксированным граничным значением $y(0) = 0$.

Доказательство.

$$\Delta S[y] = S[y + \delta y] - S[y] = 2(y + \delta y)^2(\pi) - 2y^2(\pi) + \int_0^\pi dx ((y'(x) + (\delta y)'(x))^2 - (y + \delta y)^2(x) + 3(y(x) + \delta y(x)) \cos 2x$$

$$\delta S[y] = 4y(\pi)\delta y(\pi) + \int_0^\pi dx (2y'(x)\delta y'(x) - 2y(x)\delta y(x) + 3\delta y(x) \cos 2x)$$

$$\int_0^\pi 2y'(x)\delta y'(x)dx = \int_0^\pi 2y'd\delta y(x) = 2y'(x)\delta y(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \delta y(x)d2y'(x) = 2y'(x)\delta y(x)\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi \delta y''(x)d2y(x)dx$$

$$\delta S[y] = 4y(\pi)\delta y(\pi) + \int_0^\pi dx (3\cos 2x - 2y(x) - 2y''(x))\delta y(x) + 2y'(x)\delta y(x)\Big|_0^\pi = (4y(\pi) + 2y'(\pi))\delta y(\pi) - 2y'(0)\delta y(0) + \int_0^\pi$$

$$2y''2y - 3\cos 2x = 0$$

$$y(x) = c_2 \sin x + c_1 \cos x - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$y(0) = c_1 - \frac{1}{2} = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2}$$

$$Sy|_{x=\pi} - \text{произвольна} \Rightarrow (4y + 2y')|_{x=\pi} = 0$$

$$(2y + y')|_{x=\pi} = 0$$

$$y'(x) = c_2 \cos x - c_1 \sin x + \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 2x$$

$$y'(\pi) = -c_2 \quad y(\pi) = -c_1 - \frac{1}{2}$$

$$2y(\pi) + y'(\pi) = -2c_1 - 1 - c_2 = 0$$

$$c_2 = -2c_1 - 1 = -2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = -2$$

Откуда $y(x) = -2 \sin x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x$

□

Задача 1.2. Найдите экстремаль функционала

$$S[y(x)] = \int_0^{\pi/2} dx \left((y'')^2 - 81y^2 + 18xy' \right),$$

заданного на пространстве гладких функций $y(x) \in C^\infty[0, \pi/2]$ с фиксированными граничными значениями:

$$y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = -\frac{1}{9}, \quad y'(0) = 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 S[y + \delta y] - S[y] &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx ((y + 8y)'')^2 - 81(y + 8y)^2 + 18(y + 8y)'x - (y'')^2 + 81y^2 - 18y'x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\delta y'')^2 - 81(\delta y)^2 + 18\delta y'x) \\
 \delta S[y] &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2y''\delta y'' - 162y\delta y)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2y''d(\delta y') - 162 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\delta y dx = 2y''\delta y' \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta y' y''' dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 162y\delta y dx = 2y''\delta y' \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \\
 2y'''' - 162y &= 0 \\
 y'''' - 81y &= 0 \\
 t^4 - 81 = 0 \quad t = \pm 3, \pm 3i \\
 y &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x
 \end{aligned}$$

□

Задача 1.3. Точечная частица массы m движется без трения по поверхности, заданной соотношением:

$$z = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

где x, y и z - декартовы прямоугольные координаты в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Частица соединена с началом координат невесомой пружиной, потенциальная энергия деформации пружины задается формулой:

$$U(l) = \frac{kl^2}{2},$$

где l - длина пружины, k - коэффициент ее упругости.

- Составьте лагранжиан этой механической системы и выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа.
- Приведите формулы для всех интегралов движения (законов сохранения).
- Убедитесь, что уравнения движения допускают стационарные решения, отвечающие постоянному значению z , и найдите, при каких условиях на начальные данные задачи такие решения существуют.

Доказательство. Введем цилиндрические координаты ρ, z, ϕ

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = \frac{1}{2\rho^2} \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{1}{2z} \\
 l &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{1}{2z} + z^2} \\
 L &= T - U \\
 T &= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{z}^2}{8z^3} + \dot{z}^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{2z}\right) \\
 U &= \frac{k}{2}\left(\frac{1}{2z} + z^2\right)
 \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
 L = T - U &= \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{z}^2}{8z^3} + \dot{z}^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{2z}\right) - \frac{k}{2}\left(\frac{1}{2z} + z^2\right) \\
 L_\phi &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot{\phi}m}{4z}\right) = 0 \Rightarrow I = \frac{\dot{\phi}m}{2z} \\
 L_z &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{2m\dot{z}}{16z^3} + \frac{2m\dot{z}}{2}\right) - \left(-\frac{3}{16}mz^2\frac{1}{z^4} - \frac{m\dot{\phi}^2}{4z^2} + \frac{k}{4z^2} - \frac{2zk}{2}\right)
 \end{aligned}$$

(б)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{const} \\
 \frac{\partial L}{\partial t} &= 0 \Rightarrow \text{выполняется } \mathcal{H} = T + U = \text{const}
 \end{aligned}$$

(в)

$$z = \text{const} = z_0 \Rightarrow \dot{z} = 0$$

$$L_z|_{z=z_0} = \frac{m\dot{\phi}^2}{4z_0^2} - \frac{k}{4z_0^2} + z_0 k = 0 \Rightarrow z_0^3 = \frac{m\dot{\phi}^2 - k}{4k}$$

$$z \neq 0 \quad m\dot{\phi} \neq k$$

□

Задача 1.4. Точечная частица массы m движется по окружности радиуса R . Вторая точечная частица такой же массы m соединена жестким невесомым стержнем длины ℓ с первой частицей. Стержень может свободно вращаться в плоскости окружности R вокруг первой частицы. Внешние силы отсутствуют, трения нет.

(а) Составьте лагранжиан этой механической системы и выпишите ее уравнения движения.

(б) Найдите все интегралы движения (сохраняющиеся величины).

Доказательство.

(а) Для первой частицы

$$x_1 = R \cos \phi \quad \dot{x}_1 = -R \sin \phi \dot{\phi}$$

$$y_1 = R \sin \phi \quad \dot{y}_1 = R \cos \phi \dot{\phi}$$

Для второй частицы

$$x_2 = R \cos \phi + \ell \cos(\theta + \phi - \pi) = R \cos \phi - \ell \cos(\theta + \phi)$$

$$y_2 = R \sin \phi + \ell \sin(\theta + \phi - \pi) = R \sin \phi - \ell \sin(\theta + \phi)$$

Откуда

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{m}{2}(R^2 \dot{\phi}^2) + \frac{m}{2}(-R \sin \phi \dot{\phi} + \ell \sin(\theta + \phi)(\dot{\theta} + \dot{\phi}))^2 + (R \cos \phi \dot{\phi} - \ell \cos(\theta + \phi)(\dot{\theta} + \dot{\phi}))^2 \\ &= \frac{m}{2}(R^2 \dot{\phi}^2) + \frac{m}{2}(R^2 \dot{\phi}^2 + \ell^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - 2\dot{\phi}(\dot{\theta} + \dot{\phi})R\ell(\sin \phi \sin(\theta + \phi) + \cos \phi \cos(\theta + \phi))) \\ U &= 0 \end{aligned}$$

Значит

$$L = T = \frac{m}{2}(R^2 \dot{\phi}^2) + \frac{m}{2}(R^2 \dot{\phi}^2 + \ell^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - 2\dot{\phi}(\dot{\theta} + \dot{\phi})R\ell \cos \theta)$$

(б)

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{выполняется ЗСЭ } E = T + U = T = \text{const}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{const}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2mR^2 \dot{\phi} + 2\ell^2 \dot{\phi} + 2\dot{\theta} \ell^2 - 2(2\dot{\phi} + \dot{\theta})R\ell \cos \theta = \text{const}$$

□