Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 3

22 марта 2021

Элементарные подмодели

Определение. Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω.
M' — подмодель M, если

- $M' \subset M$ как множество,
- $c_M = c_{M'}$ для всех $c \in Const_\Omega$,
- $f_M(m_1, \ldots, m_k) = f_{M'}(m_1, \ldots, m_k)$ для всех k-местных $f \in Fun_\Omega$ и $m_1, \ldots, m_k \in M'$,
- $P_M(m_1, \ldots, m_k) = P_{M'}(m_1, \ldots, m_k)$ для всех k-местных $P \in Pred_\Omega$ и $m_1, \ldots, m_k \in M'$.

Обозначение подмодели: $M' \subset M$.

Определение. Подмодель $M' \subset M$ — элементарная, если

$$M' \vDash A(m_1, \ldots, m_k) \Leftrightarrow M \vDash A(m_1, \ldots, m_k)$$

для любой формулы $A(a_1, \ldots, a_k)$ и $m_1, \ldots, m_k \in M'$.
(Тогда, в частности, $M' \equiv M$.)
Обозначение элементарной подмодели: $M' \prec M$.

Теорема о спуске

Мощность сигнатуры Ω

$$|\Omega| := |Const_\Omega \cup Fun_\Omega \cup Pred_\Omega|$$

Теорема (Лёвенгейм – Сколем – Тарский).
Для любой модели M сигнатуры Ω существует $M' \prec M$ такая, что

$$|M'| \leq \max(|\Omega|, \aleph_0).$$

Теорема о спуске

Определение. Зафиксируем модель M и $m_0 \in M$.
Для каждой формулы $\exists x A(x, \overrightarrow{a})$, где $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ — список свободных переменных, и для каждого $\overrightarrow{m} \in M^k$ положим

$$S_{\exists x A(x,\overrightarrow{m})} := \begin{cases} \{e \in M \mid M \vDash A(e, \overrightarrow{m})\}, & \text{если это множество непусто,} \\ m_0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция выбора для семейства множеств $(S_{\exists x A(x,\overrightarrow{m})})_{\overrightarrow{m} \in M^k}$ называется *сколемовской функцией* для формулы $\exists x A(x, \overrightarrow{a})$ и обозначается $s_{\exists x A(x,\overrightarrow{a})}$ (или короче: $s_{\exists x A}$).
(Случай $k = 0$ тоже включается; тогда просто берем $s_{\exists x A} \in M$.)

Таким образом:

$$s_{\exists x A}(\overrightarrow{m}) \in S_{\exists x A(x,\overrightarrow{m})},$$

и тогда

$$M \vDash A(s_{\exists x A}(\overrightarrow{m}), \overrightarrow{m}),$$

если

$$M \vDash \exists x A(x, \overrightarrow{m}).$$

Теорема о спуске

План доказательства.
Пусть $M_0 := \{m_0\}$ (это множество, еще не модель). По рекурсии строим счетную последовательность множеств $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \ldots$ Их объединение даст M'.

$$M_{n+1} := M_n \cup \{s_{\exists x A(x,\overrightarrow{a})}[M_n^k] \mid \exists x A(x,\overrightarrow{a}) \in Fm\},$$

(Fm — множество всех формул нашей сигнатуры).

$$M' := \bigcup_n M_n (\text{как множество}).$$

Его можно превратить в модель $M' \subset M$, положив

- $M' \vDash P(\overrightarrow{m}) \Leftrightarrow M \vDash P(\overrightarrow{m})$,
- $c_{M'} = s_{\exists x(x=c)}$,
- $f_{M'}(\overrightarrow{m}) = s_{\exists x(x=f(\overrightarrow{a}))}(\overrightarrow{m})$.

Доказываем, что $M' \prec M$ — искомая.