Дискретная математика
первый модуль 1 курса
Домашняя работа

И.В.Артамкин

12 октября 2019 г.

Содержание

1 Домашнее задание 1

1.1 1

A)

$$ff^{-1}(N_1) = N_1$$

Докажем, что любой элемент первогомножества лежит во 2 и наоборот
1)
пусть $n \in N_1$ тогда у него $\exists! m$ прообраз при f, т.е. $f(m) = n$ и $f^{-1}(n) = m \Longrightarrow m \in f^{-1}(N_2)$ теперь, т.к. f-биекция, $f(m) = n$, т.е. $n \in ff^{-1}(N_2)$
2)
пусть $n \in ff^{-1}(N_1)$ тогда $\exists m \in f^{-1}(N_1) : \quad f(m) = n$, причем такое m единственно и у m есть единственный прообраз при f^{-1}

B)

$$f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$$

докажем аналогично (A)
1)
$m \in f^{-1}(N_1 \cap N_2)$, значит $\exists n \in N_1 \cap N_2 : \quad f(m) = n$
$n \in N_1 \cap N_2 \quad \Longleftrightarrow \quad n \in N_1 \quad \text{и} \quad n \in N_2$. Значит, образ n при f^{-1} лежит в $f^{-1}(N_1)$ и в $f^{-1}(N_2)$, т.е. в $f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$
2)
пусть $m \in f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$, тогда $\exists n \in N_1 \quad \text{и} \quad n \in N_2 : \quad f(m) = n$ Тогда если $n \in N_1 \quad \text{и} \quad n \in N_2 \quad \Longleftrightarrow$ $n \in N_1 \cap N_2$. Значит, образ n при f^{-1} лежит в $f^{-1}(N_1 \cap N_2)$

1.2 2

1)
Пронумеруем элементы m множества M
a_1, a_2, ... a_m
2)
Прономеруем элементы y множества $B(M)$

$$X \subset B \quad \forall X \in 2^m \quad \text{сопоставим} \begin{cases} y_i = 0 & a_i \notin X \\ y_i = 1 & a_i \in X \end{cases}$$

$Y \in \{0, 1\}^M$
Между $B(M)$ и $(0, 1, ...)$ существует биекция
3)
Рассмотрим множество $\{0, 1\}^M$
Каждому элементу m множества M при отображении во множество $\{0, 1\}^M$ может соответствовать либо 1, либо 0. Поэтому элементы множества $\{0, 1\}^M$ можно пронумеровать так:

$$\begin{cases} x_i = 0 & \text{если} \quad a_i \longrightarrow 0 \\ x_i = 1 & \text{если} \quad a_i \longrightarrow 1 \end{cases}$$

Аналогично можно занумеровать отображения из $(0, 1, ...)$ в $\{0, 1\}^M$

1.3 3

A)
Последовательность $\{a_n\}$ ограничена

$$\exists B > 0, B \in \mathbb{R} \quad \forall n : |a_n| \leq B$$

B)
Последовательность $\{a_n\}$ неограничена

$$\forall B > 0, B \in \mathbb{R} \quad \exists n : |a_n| \geq B$$

C)
Последовательность $\{a_n\}$ неограниченно возрастает (стремится к бесконечности)

$$\forall B > 0, B \in \mathbb{R} \quad \exists n : a_i \geq B \quad i \geq n$$

2 Домашнее задание 2

2.1 1

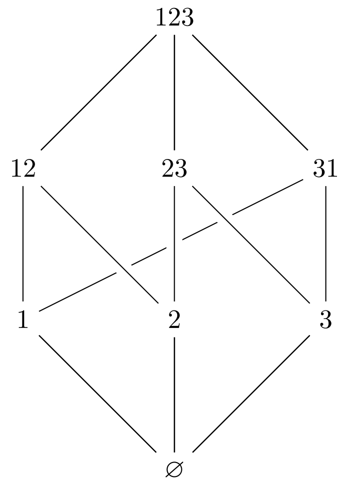
2.2 2

2.3 3

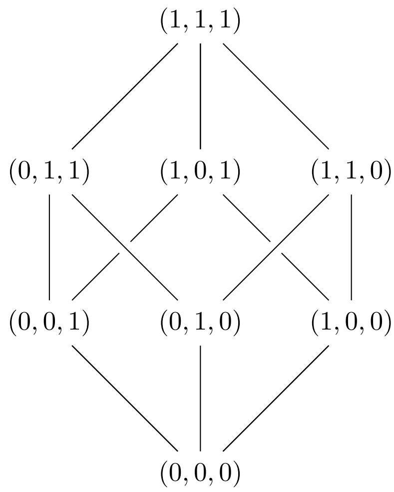
3 Домашнее задание 3

3.1 1

A)



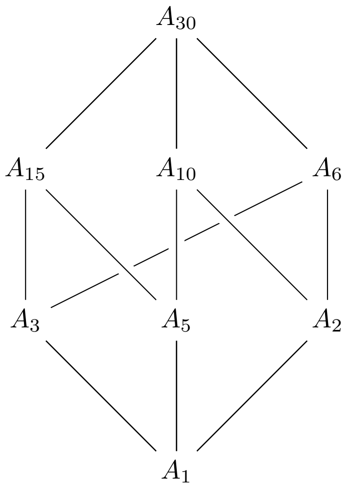
B)



C)
Делители числа 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
Пусть множества делителей это:

$$\begin{aligned}
A_{30} &= \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}\\
A_{15} &= \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}\\
A_{10} &= \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}\\
A_{6} &= \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}\\
A_{5} &= \{1,\ 5\}\\
A_{3} &= \{1,\ 3\}\\
A_{2} &= \{1,\ 2\}\\
A_{1} &= \{1\}
\end{aligned}$$

Тогда



3.2 2

1)
Сопоставим каждому вектору a число $N_a = a_1 * 2^{n-1} + a_2 * 2^{n-2} + ... + a_n * 2^0$. Нетрудно видеть, что тогда $a \preceq_1 b \;\Leftrightarrow\; N_a \leq N_b$, при этом "$\leq$"является отношением линейного порядка, откуда "$\preceq_1$"также является отношением линейного порядка, т.к. для всех $a, b : a \neq b \Rightarrow N_a \neq N_b$, т.к. коэффициэнты не превосходят 1, откуда пусть первое различие в k-том элементе, тогда тот вектор, у которого 1, будет больше второго вектора вне зависимости от последующих коэффициэнтов.
2)
Нетрудно видеть, что $a \preceq_3 b \;\Leftrightarrow\; a \preceq_1 b$ (можем аналогично сопоставлять вектору число, при этом если 2 вектора отличаются впервые в k-том элементе, тогда тот вектор, у которого 1, будет больше второго вектора в "$\preceq_3$"по определению и в "$\preceq_1$ т.к. $2^k > 2^{k-1} + 2^{k-2} + ... + 1$.

3.3 3

A)
Рассмотрим все возможные способы представить 4 в виде суммы неупорядоченных слагаемых.
Они следующие:

1. $1+1+1+1$
2. $2+1+1$
3. $2+2$
4. $3+1$
5. 4

Заметим, что выше указаны все возможные варианты мощностей классов эквивалентности.
Посчитаем, столько отношений эквивалентности для каждого варианта:

1. 1
2. $\frac{4*3}{2}$
3. $\frac{4*3}{2*2}$
4. 4
5. 1

Откуда всего разных отношений эквивалетности $1+6+3+4+1=15$.

B)
Докажем, что у каждого линейного отношения конечного множества есть "минимальный"элемент x, то есть такой, что $x \leq y$ для $\forall y$. Докажем по индукции по n где мощность множества $= n$. База - $n = 1$ - очевидна. Переход : пусть для любого множества мощности n. Тогда рассмотрим множество мощности $n+1$ и линейное отношение. Рассмотрим любые 2 различных элемента (они есть т.к. n $>$ 1), и рассмотрим среди них "большее". "Удалим"его из множества и линейного отношения. Для оставшегося множества и линейного отношения есть минимальное, нетрудно видеть, что минимальное меньше чем удалённый элемент из транзитивности.
При этом среди множества без минимального элемента есть также минимальный элемент, в множестве без 2х минимальных - ещё 1 и тд. Пронумераем минимальные элементы от 1 до n. Тогда для всех элементов a_i и a_j, что $i \leq j$ верно, что $a_i \leq a_j$. Таким образом каждое линейное отношение задаётся нумерацией элементов от 1 до n, таким образом линейных отношений $n!$. Ответ: $4! = 24$.