Итоговый экзамен по ТФКП

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. *Ваша работа должна начинаться с указания Вашего имени, Вашей фамилии и Вашего кода.* В каждом из следующих блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано. За каждую решенную задачу можно получить до 50 баллов. При решении можно пользоваться (со ссылками, но без подробных доказательств) утверждениями из учебника и из лекций.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа .... Нарисуйте следующие множества (на рисунке должны быть ясно отмечены особенности, асимптоты и т.д.). Буква z обозначает комплексное число, а буквы x, y — вещественные числа.

(0) $\{z^2 \mid |z-1| = 1\}$.
(1) $\{(1+iy)^2\}$.
(2) $\{z + 1/z \mid |z| = 2\}$.
(3) $\{e^z \mid |z| < \pi\}$.
(4) $\{(x+iy)^2 \mid y = x+1\}$.
(5) $\{(x+iy)^2 \mid xy = 1\}$.
(6) $\{(x+iy)^2 \mid y^2 = x^2 - 1,\ x > 0\}$.
(7) $\{e^{x+iy} \mid 0 < x < 1\}$.
(8) $\{e^{x+iy} \mid 5\pi/3 < y < 8\pi/3\}$.
(9) $\{e^{x+iy} \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi/4\}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа .... Для выписанной ниже функции u, докажите или опровергните существование гомеоморфизма $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, такого, что $u \circ \alpha$ является вещественной частью целой функции, то есть голоморфной функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(0) $u(x,y) = x^2 - y^6$.
(1) $u(x,y) = xy(xy-1)(xy-2)$.
(2) $u(x,y) = e^{-x^2-y^2} + (xy)^3$.
(3) $u(x,y) = e^{x^2-4y^2}\cos(4xy)$.
(4) $u(x,y) = e^{x^2+y}$.
(5) $u(x,y) = \frac{y\cos(x)\,\mathrm{sh}(y) + x\sin(x)\,\mathrm{ch}(y)}{x^2+y^2}$ при $(x,y) \neq 0$ и $u(0,0) = 0$.
(6) $u(x,y) = e^{-y-y^3}\cos x$.
(7) $u(x,y) = \cos x + y^2 - 5$.
(8) $u(x,y) = 1 + x^2 + xy + y^2 + x^3 - y^5$.
(9) $u(x,y) = (2\sqrt[3]{x} + 3y)(5\sqrt[3]{x} - 7y)$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа .... Докажите или опровергните следующие утверждения. Через $\mathbb{D}$ обозначен единичный диск $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

(0) Голоморфная ограниченная непостоянная функция $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ может иметь только конечное число нулей.

(1) Если непрерывная функция $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ голоморфна в $\mathbb{D}$, то множество $\{z \in \overline{\mathbb{D}} \mid |f(z)| = \max_{u \in \overline{\mathbb{D}}} |f(u)|\}$ не может совпадать с $\{z \mid |z| = 1,\ \mathrm{Im} z \geqslant 0\}$.

(2) Существует голоморфная функция $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, такая, что $f(z) + e^{f(z)} = 1/z$.

(3) Любое голоморфное отображение $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ продолжается до непрерывного отображения $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$.

(4) Если последовательность голоморфных функций $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ сходится к голоморфной функции f равномерно на компактах, то $f_n' \to f'$ равномерно на компактах.

(5) Если голоморфное отображение $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ не имеет критических точек, то оно инъективно.

(6) Если U и V — открытые связные односвязные подмножества в $\mathbb{C}$ с отмеченными точками $a \in U$ и $b \in V$, то существует не более двух конформных изоморфизмов $f : U \to V$, таких, что $f(a) = b$ и $f'(a) \in \mathbb{R}$.

(7) Если $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ — голоморфное отображение, то индекс кривой $t \mapsto f(e^{2\pi it}/2)$ (здесь t пробегает отрезок $[0,1]$) относительно 0 является неотрицательным целым числом.

(8) Для любых двух точек $a, b \in \mathbb{D}$ найдется такое голоморфное отображение $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, что $f(1/2) = a$ и $f(-1/2) = b$.

(9) Непостоянная голоморфная функция $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ обязательно принимает либо значение 0, либо значение 1.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа .... Для указанной ниже функции f, найдите интегралы от $f(z)\,dz$ по **всем** замкнутым кусочно-гладким путям, не проходящим через особенности функции f. Пути интегрирования могут иметь точки самопересечения.

(0) $f(z) = \mathrm{tg}^3(z)$.
(1) $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)}$.
(2) $f(z) = \cos\frac{z}{z+1}$.
(3) $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$.
(4) $f(z) = \frac{e^z}{e^z+1}$.
(5) $f(z) = \frac{1}{\sin^3 x}$.
(6) $f(z) = \frac{1}{\cos z + \sin z}$.
(7) $f(z) = \frac{z}{\cos(z^2)}$.
(8) $f(z) = \frac{1}{z^3+z^2}$.
(9) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}$.

5. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа .... Для указанной ниже функции f, найдите число нулей в указанном ниже множестве U. Число нулей должно быть посчитано с учетом кратности, то есть если $f(a) = 0$ и $\mathrm{ord}_a(f) = k$ для $a \in \mathbb{D}$, то точка a считается k раз.

(0) $f(z) = z^5 + 5z^2 + 2z + 1$, в области $U = \{1 < |z| < 2\}$.
(1) $f(z) = e^z z^{-1} + 3z^9$, в области $U = \{|z| < 1\}$.
(2) $f(z) = \cos z + z + 5z^2$, в области $U = \{|z| < 1\}$.
(3) $f(z) = z^5 + 5z^4 - 5$, в области $U = \{\mathrm{Re} z > 0\}$.
(4) $f(z) = z^{10} + 2z^9 + 3$, в области $U = \{\mathrm{Re} z > 0\}$.
(5) $f(z) = z^7 + z^4 + 2z^3 + 1$, в области $U = \{x + iy \mid x, y > 0\}$.
(6) $f(z) = z^3 + z + 1$, в области $U = \{|z| < 1/2\}$.
(7) $f(z) = z^6 - 8z + 10$, в области $U = \{1 < |z| < 3\}$.
(8) $f(z) = z^4 - 5z + 1$, в области $U = \{1 < |z| < 2\}$.
(9) $f(z) = z^6 - z^5 + z^3 - z + 1$, в области $U = \{x + iy \mid x > 0,\ y < 0\}$.

6. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа .... Вычислите несобственный интеграл от 0 до $+\infty$ от выписанной ниже функции f. Выбирается положительная ветвь корня.

(0) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x^2+4)}$.

(1) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}$.

(2) $f(x) = \frac{1}{(x+3)\sqrt{x}}$.

(3) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x}}$.

(4) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[3]{x}}$.

(5) $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt[4]{x}}$.

(6) $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2+1}$.

(7) $f(x) = \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}$.

(8) $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$.

(9) $f(x) = \frac{(x^2-1)}{x^4+1}$.

Решения

Задача 1

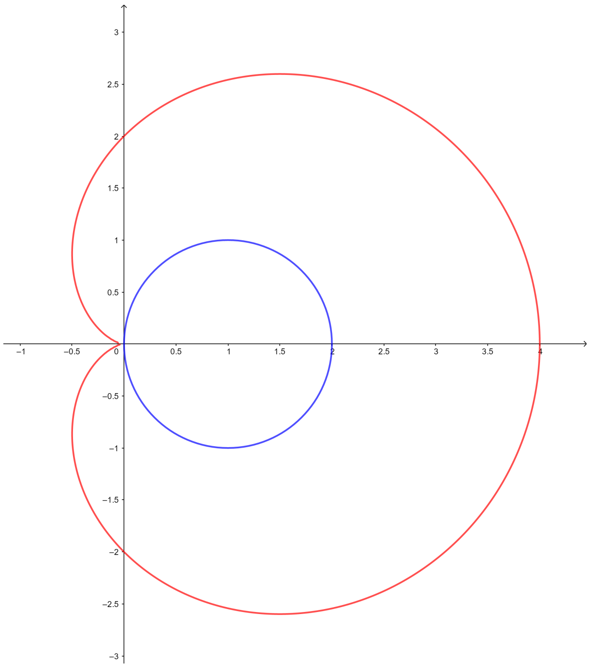

Рис. 1. $\{z^2| \ |z-1|=1\}$

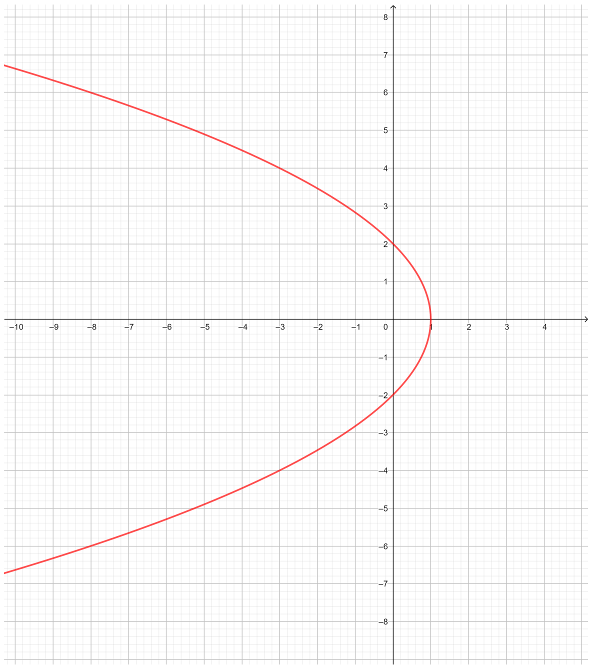

Рис. 2. $\{(1+iy)^2)\}$

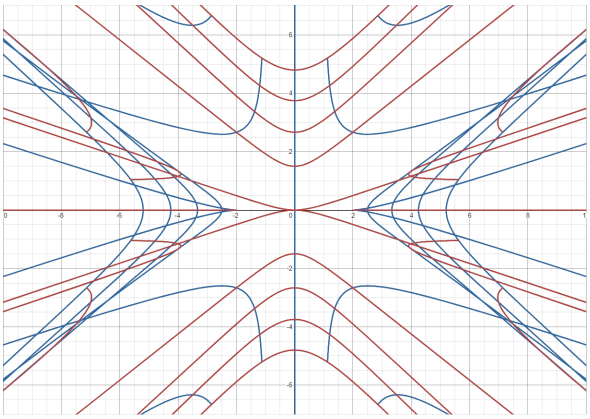

Рис. 3. $\{z+1/z| \ |z|=2\}$

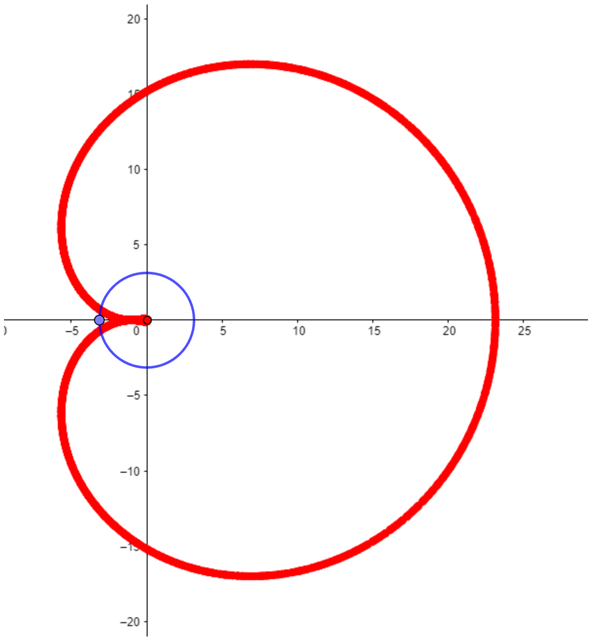

Рис. 4. $\{e^z| \ |z|<\pi\}$

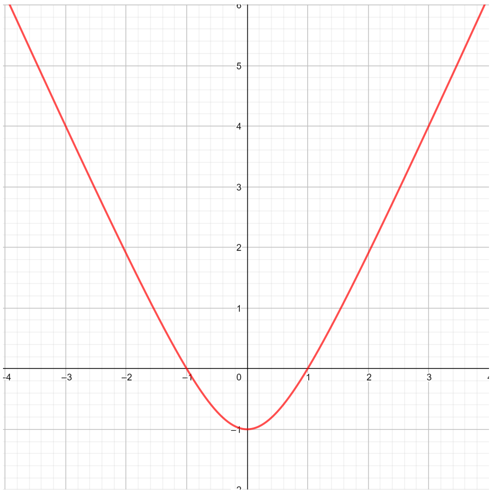

Рис. 5. $\{(x+iy)^2 |\ y = x+1\}$

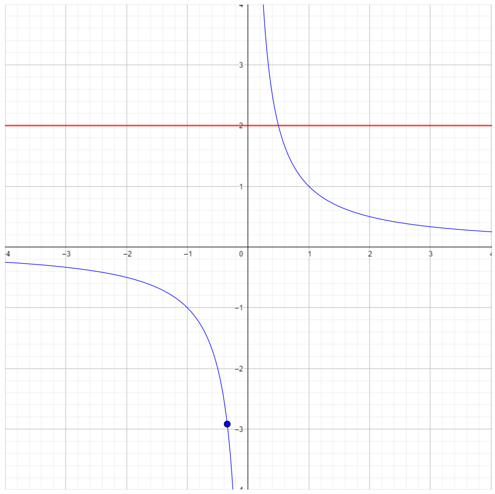

Рис. 6. $\{(x+iy)^2 |\ xy = 1\}$

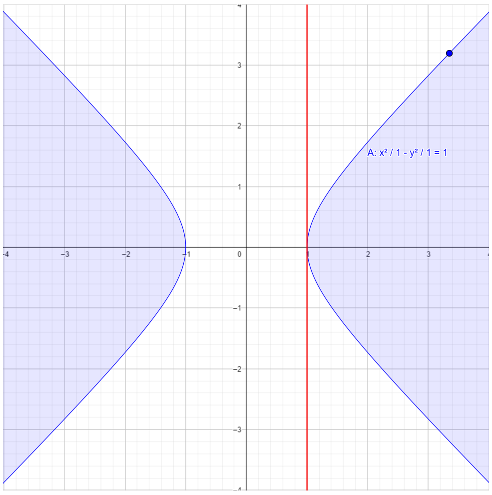

Рис. 7. $\{(x+iy)^2 |\ y^2 = x^2 - 1, x > 0\}$

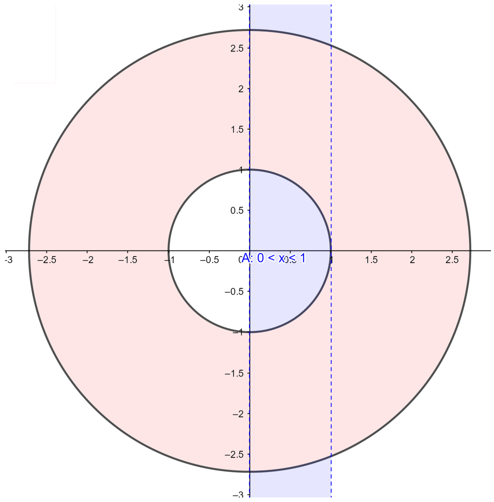

Рис. 8. $\{e^{x+iy} |\ 0 < x < 1\}$

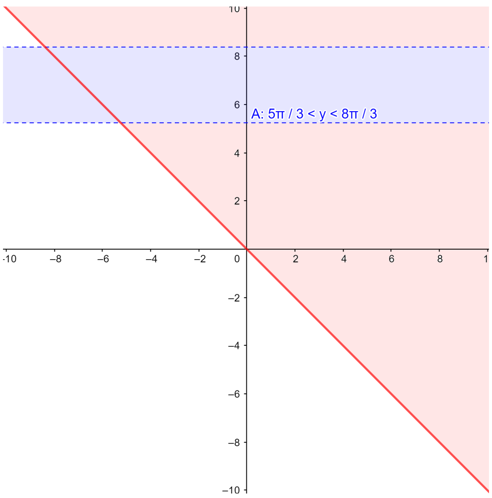

Рис. 9. $\{e^{x+iy} |\ 5\pi/3 < y < 8\pi/3\}$

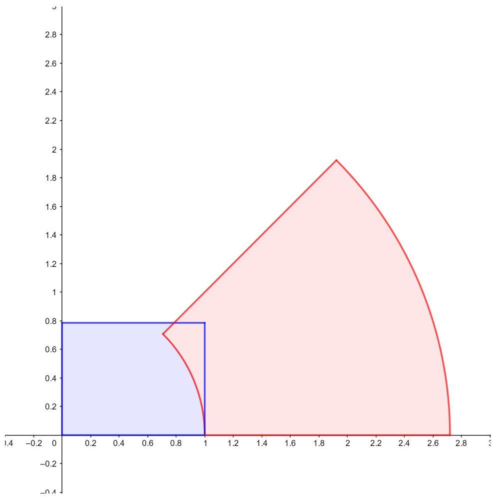

Рис. 10. $\{e^{x+iy} |\ 0 < x < 1, 0 < y < \pi/4\}$

Задача 2

пункт 0

$$\alpha : (x, y) \mapsto (x, \sqrt[3]{y})$$
$$u \circ \alpha(x, y) = x^2 - y^2 = \Re((x+iy)^2)$$

пункт 3

$$
\begin{aligned}
&\Re(e^{(x+iy)^2}) = \Re(e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy))) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) \\
&\alpha : (x, y) \mapsto (x, \frac{y}{2}) \\
&u \circ \alpha = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) = \Re(e^{(x+iy)^2})
\end{aligned}
$$

пункт 4

По малой теореме Пикара область значений вещественной части целой функции - вся вещественная прямая. Но для любого гомеоморфизма α область значений $u \circ \alpha$ вложена в $\mathbb{R}^+$, следовательно подходящего α не существует

пункт 6

$$
\begin{aligned}
&g^{-1}(y) : y \mapsto y^3 + y \\
&\alpha : (x, y) \mapsto (x, g(y)) \\
&u \circ \alpha = e^{-y}\cos(x) = \Re(e^{ix-y}) = \Re(e^{i(x+iy)})
\end{aligned}
$$

пункт 9

$$
\begin{aligned}
&\alpha : (x, y) \mapsto (x^3 2.1^{\frac{3}{2}}, y) \\
&u \circ \alpha = (2x \cdot \sqrt{2.1} + 3y)(5x\sqrt{2.1} - 7y) = 21x^2 - 21y^2 + \sqrt{2.1}xy \\
&= \Re(21(x+iy)^2 - i\frac{\sqrt{2.1}}{2}(x+iy)^2) = \Re((x+iy)^2(21 - i\frac{\sqrt{2.1}}{2}))
\end{aligned}
$$

Задача 5

пункт 0

$$
\begin{aligned}
&f : z^5 \quad g : 5z^2 + 2z + 1 \\
&|z| = 2 : \ g \leqslant 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 25 \quad f = 2^5 = 32,\ 25 < 32 \\
&g : z^5 \quad f : 5z^2 + 2z + 1 \\
&|z| = 1 : \ g = 1 \quad f \leqslant 5 + 2 + 1 = 8,\ 1 < 8 \\
&5 - 1 = 4
\end{aligned}
$$

пункт 1

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{e^z}{z}\right| \leqslant e < 3 \leqslant |3z^9| \\
&g(z) = 3z^9, \quad \text{то есть корней 9}
\end{aligned}
$$

пункт 3

Заметим что $f(-5) < 0, f(-4) > 0, f(0) < 0, f(1) > 0$, следовательно есть 3 вещественных корня, остальные корни имеют вид $\alpha \pm \beta i$, а так как сумма вещественных корней отрицательна и перед z^4 стоит 0, то сумма всех корней ноль, а следовательно оставшиеся 2 комплексных корня имеют положительную вещественную часть.

пункт 5

$$f : z^7 + z^3 + 1 \quad g : z^4 + z^3$$
$$|z| = 2 : \ |g(z)| = 2^4 + 2^3 < 2^7 - 2^3 - 1 \leqslant |f(z)|$$
$$\gamma_1 = \{z = x + iy : 0 \leqslant x \leqslant 2, y = 0\} \quad \min(f(x) - g(x)) > 0$$
$$\gamma_2 = \{z : |z| = 2, 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\}$$
$$\gamma_3 = \{z = x + iy : x = 0, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$$

пункт 6

$$g : z^3 \quad f : z + 1$$
$$|z| = \frac{1}{2} : \ f \leqslant \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad g = \frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8}, \ \frac{1}{8} < \frac{3}{2}$$

пункт 7

$$f : z^6 \quad g : -8z + 10$$
$$|z| = 3 : \ g \leqslant -8 \cdot 3 + 10 = -14 \quad f = 3^6 = 729, \ -14 < 729$$
$$g : z^6 \quad f : -8z + 10$$
$$|z| = 1 : \ g = 1 \quad f \leqslant -8 + 10 = 2, \ 1 < 2$$
$$6 - 1 = 5$$

пункт 8

$$f : z^4 \quad g : -5z + 1$$
$$|z| = 2 : \ g \leqslant -5 \cdot 2 + 1 = -9 \quad f = 2^4 = 16, \ -9 < 16$$
$$|z| = 1 : \ g \leqslant -5 + 1 = -4 \quad f = 1, \ -4 < 1$$
$$4 - 1 = 3$$

пункт 9

$$z^6 - z^5 + z^3 - z + 1 = (z^2 - z + 1)(z^4 - z^2 + 1)$$
$$z^2 - z + 1 = 0 : (-1)^{1/3}, -(-1)^{2/3}$$