1 ноября 2020 г. 23:06

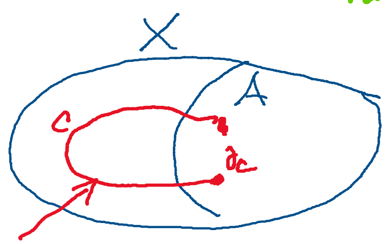
Длинная точная последовательность пары

Топологическая пара (X, A) $\quad A \subset X$

Опр. Относительные цепи $C_k(X,A) = C_k(X)/C_k(A)$

$$0 \leftarrow C_0(X,A) \leftarrow C_1(X,A) \leftarrow C_2(X,A) \leftarrow \dots$$

Гомологии комплекса относительных цепей называются **относительными гомологиями**. Обозначение: $H_k(X,A)$



$[c] \in H_k(X,A)$

относительный цикл: $\partial c \subset A$

Пример. Приведенные гомологии

$$\tilde H_k(X) = H_k(X,pt) = \begin{cases} H_k(X), & k>0 \\ H_0(X)/\mathbb{Z}, & k=0 \end{cases} \quad (=0, \text{ если } X \text{ связно})$$

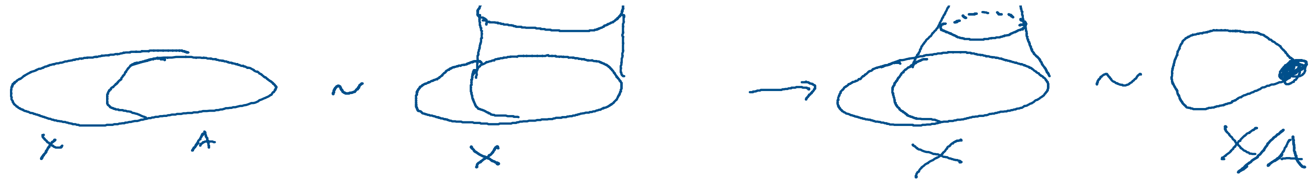
Теорема. (X,A) – клеточная пара $\Rightarrow$
$$H_k(X,A) = \tilde H_k(X/A)$$

Для случая клеточных гомологий теорема очевидна (докажите)

Идея доказательства для сингулярных:

$CA = A \times [0,1]/\sim$

CA



$(X,A) \sim (X \cup ЦA, ЦA) \to (X \cup CA, CA) \sim (X/A, pt)$

гомот. экв-ть

"изоморфизм вырезания":

гомот. экв-ть

$H_k(X \cup ЦA, ЦA) \cong H_k(X \cup CA, CA)$

нужно показать, что всякий цикл в $(X \cup CA, CA)$ гомологичен циклу, лежащему в $X \cup ЦA$

Опр. Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\dots \to A \to B \to C \to \dots$$

называется **точной**, если ядро следующего равно образу предыдущего

Это "почти то же самое", что комплекс с нулевыми гомологиями.

Отличие в том, что в цепном комплексе нумерация групп — часть структуры

Примеры

$0 \to A \xrightarrow{f} B \iff f$ инъективно

$A \xrightarrow{f} B \to 0 \iff f$ сюръективно

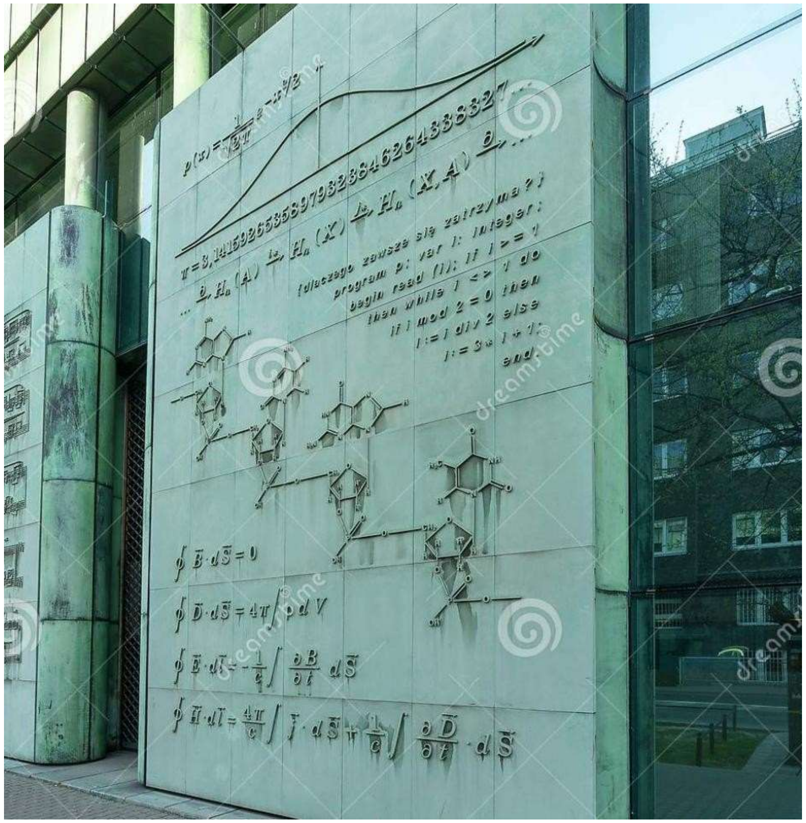
$0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0 \iff f$ изоморфизм

Короткая точная последовательность

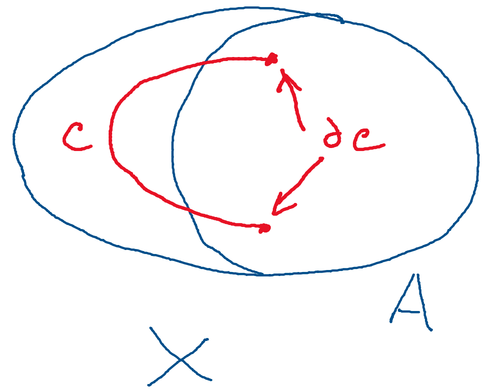
$$0 \to A \to B \to C \to 0 \iff A \subset B,\ C = B/A$$

Теорема (длинная точная последовательность пары)

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{p_*} \ldots$$



Фасад библиотеки университета Варшавы



$[c] \in H_n(X,A)$

$[\partial c] \in H_{n-1}(A)$

Пример $\quad X = \mathbb{R}P^2,\ A = \mathbb{R}P^1 \simeq S^1,\quad X/A \cong S^2$

$H_2(A) \to H_2(X) \to H_2(X,A) \quad | \quad 0 \to ? \to \mathbb{Z} \quad |$

$$H_1(A) \to H_1(X) \to H_1(X/A)$$
$$H_0(A) \to H_0(X) \to \tilde H_0(X/A)$$

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$
$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$
$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$$

$$0 \to H_2(\mathbb{R}P^2) \to 0 \quad \Rightarrow \quad H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$$
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to H_1(\mathbb{R}P^2) \to 0 \quad \Rightarrow \quad H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$$
$$0 \to \mathbb{Z} \to H_0(\mathbb{R}P^2) \to 0 \quad \Rightarrow \quad H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$$

Пример $(X, A) = (B^n, \partial B^n)$ $X \sim pt$, $A \sim S^{n-1}$, $X/A \sim S^n$.

$$\underset{H_k(B^n)}{0} \to H_k(B^n, \partial B^n) \to \underset{H_{k-1}(\partial B^n)}{0}, \quad k \neq n \quad \Rightarrow \quad H_k(B^n, \partial B^n) = 0$$

$$\underset{H_n(B^n)}{0} \to H_n(B^n, \partial B^n) \to \underset{H_{n-1}(\partial B^n)}{\mathbb{Z}} \to \underset{H_{n-1}(B^n)}{0} \quad \Rightarrow \quad H_n(B^n, \partial B^n) = \mathbb{Z}$$

Получаем вычисление гомологий сферы

$$\tilde H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$ индукцией по n

---

Пример Изоморфизм надстройки

CX

$\to CX/X \sim \Sigma X$

$\tilde H \; (\Sigma X) \simeq H \; (X)$

$H_k(\Sigma X) = H_{k-1}(X)$

$\Leftarrow$ из длинной точной последовательности пары (CX, X)

$CX \sim pt$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H_k(\Sigma X) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(X) & \to & 0 \\ \| & & & & & & \| \\ H_k(pt) & & & & & & H_{k-1}(pt) \end{array}$$

(X, A) клеточная пара $\rightsquigarrow (Y, X)$

$Y = X \cup CA \sim X/A$, $Y/X \sim \Sigma A$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \to H_n(A) & \to & H_n(X) & \to & H_n(X/A) & \to & H_{n-1}(A) & \to & H_{n-1}(X) & \to & H_{n-1}(X/A) & \to \\ \wr\| & & \| & & \wr\| & & \| & & \wr\| & & \wr\| & \\ H_{n+1}(Y/X) & \to & H_n(X) & \to & H_n(Y) & \to & H_n(Y/X) & \to & H_{n-1}(X) & \to & H_{n-1}(Y) & \to \end{array}$$

Вывод: роль пространства, подпространства и факторпространства, гомологии которых участвует в длинной точной последовательности, условна, и может циклически переставляться

$$\begin{array}{ccc} H_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \\ \wr\| & & \wr\| \\ H_n(Y) & \xrightarrow{p_*} & H_n(Y/X) \end{array}$$

$p: Y \to Y/X$

Вывод: связывающий гомоморфизм ∂ точной последовательности пары выражается через изоморфизм надстройки (и гомоморфизм прямого образа)

В какой мере известные гомологии двух пространств из $X, A, X/A$ определяют гомологии третьего пространства?

$$\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A)$$

$$0 \to \operatorname{coker} \partial_{n-1} \to H_n(X) \to \ker \partial_n \to 0$$

Вывод: Известные гомологии $H_n(A)$, $H_n(X/A)$ и связывающий гомоморфизм $\partial: H_n(X/A) \to H_{n-1}(A)$ для всех n выражают $H_n(X)$ как центральный член короткой точной последовательности

Примеры: $0 \to \mathbb{Z}_2 \to ? \to \mathbb{Z} \to 0 \quad \Rightarrow ? = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$

$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} ? \to \mathbb{Z}_2 \to 0 \quad \Rightarrow$ либо $? = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$
либо $? = \mathbb{Z}$ и f — умножение на 2

В общем случае

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

Одна из возможностей $B = A \oplus C$. Говорят, что короткая точная последовательность расщепляется

Не всякая последовательность расщепляется

Задача: C свободна $\Rightarrow$ расщепляется

Таким образом, в общем случае при восстановлении гомологий X по известным гомологиям A и X/A остается небольшая неоднозначность (в кручении)

Имеется случай, когда эта неоднозначность пропадает: если у вычисляемых гомологий имеется "естественный кандидат"

<u>Опр.</u> Отображение пар $(X,A)\to(Y,B)$ — это отображение $f: X\to Y$, такое что $f(A)\subset B$

$$f_*: \begin{cases} H_k(X)\to H_k(Y) \\ H_k(A)\to H_k(B) \\ H_k(X,A)\to H_k(Y,B) \end{cases}$$

Теорема. Пусть $f:(X,A)\to(Y,B)$ индуцирует изоморфизм двух из трех серий гомологии пространств из данной точной последовательности. Тогда f_* изоморфизм и для третьей серии гомологий

Утверждение теоремы — следствие алгебраического утверждения, называемого леммой о пяти гомоморфизмах, или 5-леммой

Теорема. Пусть дана коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"'] & A_5 \arrow[d, "\varphi_5"'] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}$$

Тогда, если $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ — изоморфизмы, то и φ_3 - изоморфизм

Задача. В приведенной теореме 2 утверждения (инъективность и сюръективность φ_3) и 8 предпосылок (инъективность и сюръективность $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$). Определите, какие из этих 8 предпосылок нужны для доказательства инъективности (соотв., сюръективности) φ_3, а какие не используются вовсе.