Механика КР В2.

Задача 1.

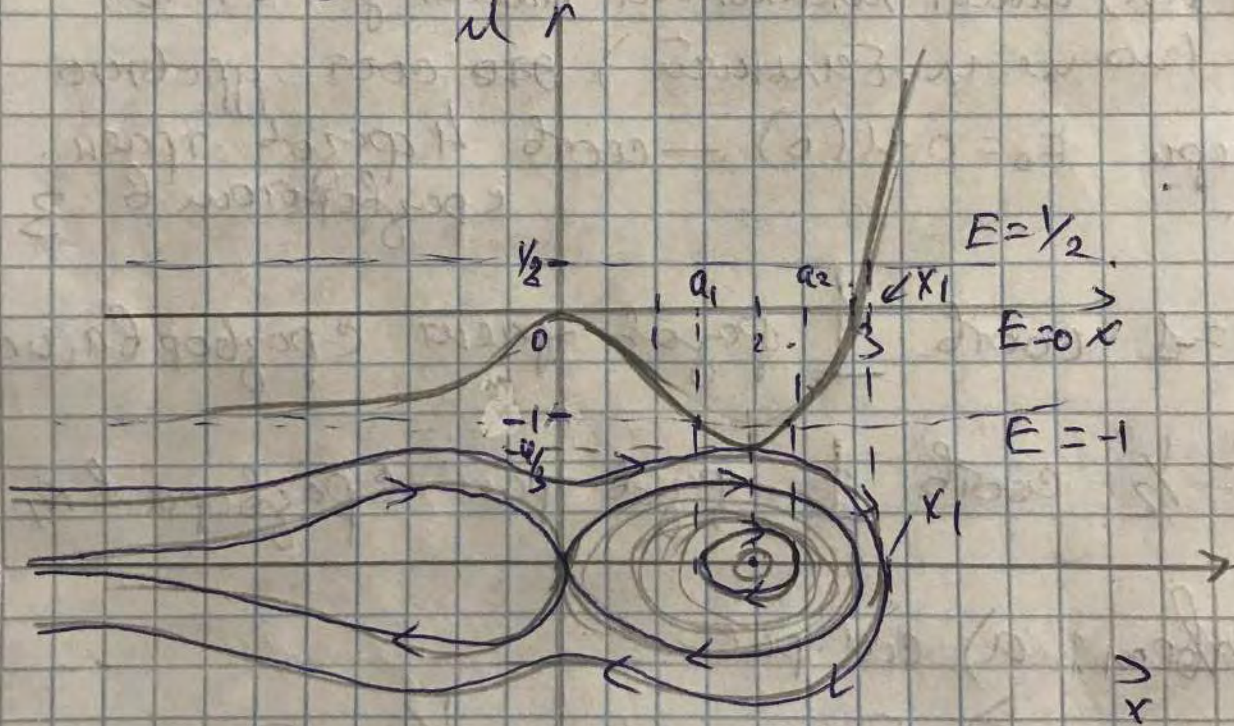
а) см КР В1.

б) $m = M$ $\qquad \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_2 = mg - N - T \\ m\ddot{x}_1 = mg + N - 3T \end{cases} \Rightarrow -2N + 2T \Rightarrow \boxed{N = T}$$

Задача 2

$$U(x) = \begin{cases} e^{-x^2} - 1 & x \le 0 \\ \frac{1}{3}x^2(x-3) & x > 0. \end{cases}$$



$$U'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & x \le 0 \quad \leftarrow U'(x) = 0 \text{ при } x = 0 \\ x^2 - 2x & x > 0 \quad \leftarrow U'(x) = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 2. \end{cases}$$

$$U(2) = \frac{2^3}{3} - 2^2 = \frac{8}{3} - 4 = \frac{8-12}{3} = -\frac{4}{3}$$

Комментарии

1) $U(x)$ имеет локальный минимум (он же и глобальный) в x_2. это соотв уровню энер ~~E=...~~ $E_{-4/3} = -4/3 = U(x_2)$ это позиция устойчивого равновесия

Этому уровню энергии соотв 1 фазова кривая-траектория - точка устойч. равнов.

2) $U(x)$ имеет локальный максимум в т. 0. (но не глобальный) ~~это~~ соот. уровню энерг. $E_0 = 0$ $U(0)$ — соотв 4 фазов. траек. с разворотом в 3.

$E=-1$ соотв 1 фазов траект с развор в a_1 и a_2.

$E = 1/2$ соотв 1 фазов траек с разворот в x_1

Ответ: а) см. рис.

б) $E = -1 \quad 1/2 \quad 0$

#ф. т $\quad 1 \quad 1 \quad 4$

Задача 3

$F_x = yz - y^2 + \alpha z$

$F_y = xz - 2\alpha xy$

$F_z = xy + \alpha x + z$

a) (t^2, t, t) $t \in [0,1]$

$d\vec{r} = (2t\,dt, dt, dt)$

$$A_{\gamma_1} = \int_0^1 \{ (t^2 - t^2 + \alpha t)2t\,dt + (t^2 \cdot t - 2\alpha t^2 \cdot t)dt +$$

$$+ (t^2 t + \alpha t^2 + t)dt \} = \int_0^1 (3\alpha t^2 + 2(1-\alpha)t^3 + t)dt =$$

$$= \left(\alpha t^3 + \frac{(1-\alpha)t^4}{2} + \frac{t^2}{2} \right)\Big|_0^1 = \alpha + \frac{(1-\alpha)}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{2+\alpha}{2}.$$

б) $\partial_x F_y = \partial_y F_x$ $\quad z - 2\alpha y = z - 2y \Rightarrow \alpha = 1$

$\partial_x F_z = \partial_z F_x$ $\quad y + \alpha = y + \alpha \Rightarrow \alpha$ любое

$\partial_y F_z = \partial_z F_y$ $\quad x = x \Rightarrow \alpha$ ...

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -(yz - y^2 + z)dx -$$

$$-(xz - 2xy)dy - (xy + x + z)dz =$$

$$= -d(yzx - y^2x + zx + \tfrac{z^2}{2}) \Rightarrow U = -xyz + y^2x - zx - \tfrac{z^2}{2} + C.$$

Задача 4.

а) $F_\rho = \rho(\rho+1)f(\varphi)$ $\quad F_\varphi = g(\rho)\cos\varphi\sin^3\varphi$ (пот.)

$$\partial_\varphi F_\rho = \partial_\rho(\rho F_\varphi)$$

$$\rho(\rho+1)f'(\varphi) \qquad \cos\varphi\sin^3\varphi\,(g(\rho) + \rho g'(\rho)) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(\varphi) = A\cos\varphi\sin^3\varphi \\ \rho(\rho+1) = B(g(\rho) + \rho g'(\rho)) \end{cases}$$

$$A \cdot B = 1 \Rightarrow A = 1/B.$$

$$f(\varphi) = A\left(\frac{\sin^4\varphi}{4} + c_1\right)$$

$$g(\rho) = \frac{c_2}{\rho} + \frac{\rho^2}{3\cdot B} + \frac{\rho}{2B}$$

$$F_\rho = A\rho(\rho+1)\left(\frac{\sin^4\varphi}{4} + c_1\right)$$

$A\rho\left(\frac{\rho}{3}+\frac{1}{2}\right)\cos\varphi\,\sin^3\varphi$

$$F_\varphi = \left(\frac{c_2}{\rho} + \frac{\rho^2 A}{3} + \frac{\rho A}{2}\right)\cos\varphi\sin^3\varphi$$

$c_2 = 0$ в $\rho = 0$, чтобы было конечно.

б) $-\partial_\rho U = F_\rho = A\rho(\rho+1)\left(\frac{\sin^4\varphi}{4} + c_1\right)$

$$-U = A\left(\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^2}{2}\right)\left(\frac{\sin^4\varphi}{4} + c_1\right) + f(\varphi)$$

$$-\partial_\varphi U = \rho F_\varphi = A\rho^2\left(\frac{\rho}{3}+\frac{1}{2}\right)\cos\varphi\sin^3\varphi$$

$$\parallel$$

$$A\left(\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^2}{2}\right)\sin^3\varphi\cos\varphi + f'(\varphi) \Rightarrow f'(\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = -A\rho^2\left(\frac{\rho}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sin^4\varphi}{4} + c_1\right) + c_2.$$

A, c_1, c_2 — конст.

$A \neq 0$!