Анализ 2-2 2021 Семинар 25.
Обобщенные функции и операции с ними. Указания и решения.

Задача 1
Замена: $x/\varepsilon = z$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} f(z)\varphi(\varepsilon z)\varepsilon^n dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(\varepsilon z)dz.$$

Так как $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, можем оценить $|f(z)\varphi(\varepsilon z)| \leqslant c \cdot |f(z)|$. По теореме Лебега

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(\varepsilon z)dz \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi(0) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)dz = \langle \delta, \varphi\rangle \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Задача 2

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} \overset{\text{Зад.1}}{=} \delta(x) \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi\delta(x).$$

Задача 3
Следует из задачи 1.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-x^2/2\varepsilon} = \delta(x) \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\delta(x).$$

Задача 4
Очевидно, что ψ финитная. По формуле Тейлора

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^{k-1} + o(x^{(n-1)}),$$

следовательно, $\psi \in C^\infty$ причем $\psi^{(k)}(0) = \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}$.

Задача 5
Для любой пробной функции $\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ выполнено $\langle x\psi(x), f\rangle = 0$. Тогда по задаче 4 $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, такой что $\varphi(0) = 0$, выполнено $\langle\varphi(x), f\rangle = 0$, следовательно,

$$\forall\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \varphi_1(0) = \varphi_2(0) : \langle\varphi_1, f\rangle = \langle\varphi_2, f\rangle.$$

Пусть $\varphi(0) \neq 0 \Rightarrow \langle\varphi, f\rangle = \varphi(0) \cdot \underbrace{\left\langle\frac{\varphi}{\varphi(0)}, f\right\rangle}_{\text{не зависит от}\,\frac{\varphi}{\varphi(0)}} = C \cdot \varphi(0) \Rightarrow f = C\delta(x).$

Задача 6
По задаче 5 из равенства $x(xf) = 0$ следует, что $xf = C_1\delta(x)$. Общим решением уравнения $xf = g$ является $f = f^\star + C\delta(x)$, где $f^\star$ – какое-либо частное решение этого уравнения, так как разность $f - f^\star$ удовлетворяет $x(f - f^\star) = 0$ и поэтому равна $C\delta(x)(x)$. Проверим, что $-C_1\delta'(x)$ является частным решением $xf = C_1\delta(x)$.

$$\langle x\varphi, -C_1\delta'(x)\rangle = -C_1 \cdot \langle x\varphi, \delta'(x)\rangle = C_1(x\varphi)'\big|_0 = C_1\varphi(0) = C_1\langle\varphi(x), \delta(x)\rangle.$$

Значит, $f = C_1\delta_0' + C\delta(x)$.

Задача 7
Докажем, что $f = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ – частное решение $xf(x) = 1$.

$$\left\langle \varphi, x\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right\rangle = \left\langle x\varphi, \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right\rangle = \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\frac{1}{x}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \langle\varphi, 1\rangle$$

Общее решение: $f = \mathcal{P}(\frac{1}{x}) + C\delta_0$.

Задача 8
Ответ:

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}\left(\frac{1}{x+1}\right) + C_1\delta(x-1) + C_2\delta(x+1).$$

Задача 9

$$\lim_{\varepsilon\to\pm0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x\pm i\varepsilon}dx = \lim_{\varepsilon\to\pm0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)}{x\pm i\varepsilon}dx = \lim_{\varepsilon\to\pm0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}dx + \varphi(0)\cdot\lim_{\varepsilon\to\pm0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{dx}{x\pm i\varepsilon} =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \varphi(0)\cdot\lim_{\varepsilon\to\pm0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x\mp i\varepsilon}{x^2\mp\varepsilon^2} =$$

$$= \left\langle\varphi, \mathcal{P}\frac{1}{x}\right\rangle + \varphi(0)\cdot\lim_{\varepsilon\to\pm0}\left(\frac{1}{2}\ln(x\mp i\varepsilon)\Big|_{-R}^{R} \mp 2i\arctan\frac{R}{\varepsilon}\right) = \langle\varphi, \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)\rangle.$$

Задача 10
Ответ: $f = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_{n-1}x^{n-1}$. Доказывается по индукции.

Задача 11

$$|x| = \lim_{\varepsilon\to0}\sqrt{x^2+\varepsilon^2}, \quad \ln|x| = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\ln(x^2+\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left(x^2+\varepsilon^2\right)\right)' = \frac{1}{2\left(x^2+\varepsilon^2\right)}\cdot 2x = \frac{x}{\varepsilon^2+x^2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi, \frac{x}{\varepsilon^2+x^2}\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi, \frac{x-i\varepsilon+i\varepsilon}{(x-i\varepsilon)(x+i\varepsilon)}\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi, \frac{1}{x+i\varepsilon}\rangle + i\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi, \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\rangle =$$

$$= \langle\varphi, \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)\rangle + i\langle\varphi, \pi\delta(x)\rangle = \langle\varphi, \mathcal{P}\frac{1}{x}\rangle.$$

Воспользовались задачей 2 и формулой Сохоцкого.