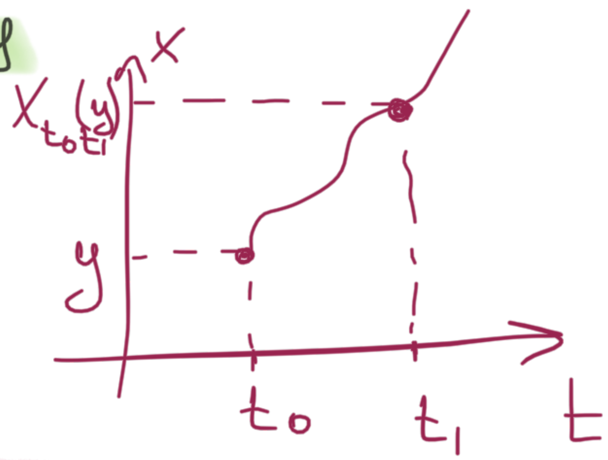
7 билет

Оператор Коши ДУ



$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = y \end{cases}$$

$\hat{x}$ – решение

тогда $\boxed{X_{t_0t_1}(y) = \hat{x}(t_1)}$

Свойства:

- $X_{tt} = id$
- $X_{t_2t_3} \circ X_{t_1t_2} = X_{t_1t_3}$
- $X_{ts}^{-1} = X_{st}$
- $X_{ts}(y)$ непрерывна по (t,s,y)

Лемма. Если уравнение $\dot{x} = f(t,x,\lambda)$ имеет параметр, f – непрерывна

$X_{t_0t_1}^{\lambda}$ – его оператор Коши

Тогда $X_{t_0t_1}^{\lambda}(y)$ непр. по (y, t_0, t_1, λ)

Д-во:
$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = y \end{cases}$$

Рассм. ф-цию $z(s) = x(t_0 + s)$

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{ds}(s) = \dot{x}(t_0 + s) = f(t_0 + s, x(t_0 + s), \lambda) = \\ = f(t_0 + s, z(s), \lambda) \\ z(0) = y \end{cases}$$

задача Коши с параметром (λ, t_0, y)

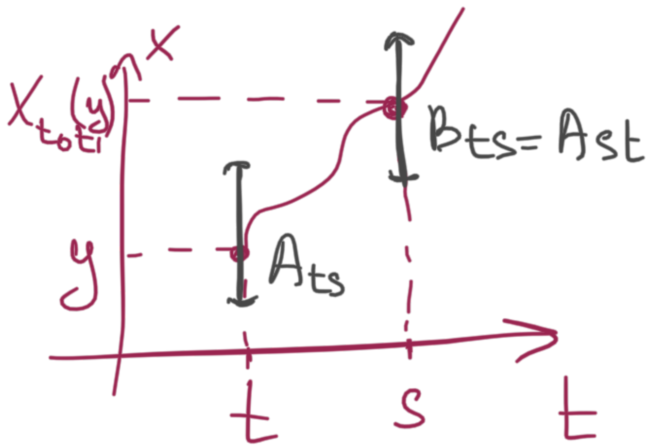
$z_{\lambda, t_0, y}(s)$ — непр. по (λ, t_0, y, s)

$$X^{\lambda}_{t_0 t_1}(y) = z_{\lambda, t_0, y}(t_1 - t_0) \Rightarrow X^{\lambda}_{t_0 t_1}(y)$$
непред. $\blacksquare$

- X_{ts} определен на $A_{ts} \subset \mathbb{R}^n$

откр.

$B_{ts} = X_{ts}(A_{ts}) =$
$= A_{st}$



$X_{ts}: A_{ts} \to A_{st}$

$X_{st}: A_{st} \to A_{ts}$ непр.

Вывод: X_{ts} – гомеоморфизм

Автономные ДУ (не зависят от времени)

$\dot{x} = f(x)$ $\blacklozenge$

Лемма: Если x – реш-ие $\blacklozenge$, то $\hat{x}(t) = x(t+a)$ – тоже реш-ие $\forall a \in \mathbb{R}$

(иными словами: сдвиг по времени переводит решения в себя)

Д-во: $\dot{\hat{x}}(t) = \dot{x}(t+a) = f(x(t+a)) = f(\hat{x}(t))$ $\blacksquare$

Следствие: для автономных ДУ

$$X_{t_0,t_1} = X_{t_0+a,\, t_1+a}$$

Опр.: Преобразование потока автономного ДУ – это

$$\boxed{g^t = X_{0,t}}$$

Свойства: 1) $g^0 = id$

2) $g^{t+s} = g^t \circ g^s$

$$g^t \circ g^s = \underbrace{X_{0,t} \circ X_{0,s}}_{\text{сдвиг на } s} = \underbrace{X_{s,\,t+s} \circ X_{0,s}}_{\text{св-во 2}} = X_{0,\,t+s} = g^{t+s}$$

3) $g^{-t} = (g^t)^{-1}$

4) $g^t(x)$ непр. по (t, x)

5) g^t – гомеоморфизм

$$\dot{x} = F(t, x)$$
$$x(t_0) = x_0$$