Линейная алгебра и геометрия
первое полугодие 1 курса
Экзамен
А.Л. Городенцев

12 октября 2019 г.

Содержание

1 Задачи для подготовки к контрольной 1 . . . 3
- 1.1 ПК1 1 . . . 3
- 1.2 ПК1 2 . . . 6
- 1.3 ПК1 3.1 . . . 6
- 1.4 ПК1 4 . . . 8
- 1.5 ПК1 5 . . . 8
- 1.6 ПК1 6 . . . 9

1 Задачи для подготовки к контрольной 1

1.1 ПК1 1

1.1)

A)
Прямые -

$$
\begin{aligned}
&a : 28x_1 - 4x_2 = 16\\
&b : -13x_1 + 2x_2 = -8\\
&c : -41x_1 + 6x_2 = -20
\end{aligned}
$$

Пусть точки A, B и C - $b \cap c$, $c \cap a$ и $a \cap b$ соотв. Тогда -

$$
\begin{aligned}
&A :\\
&-13x_1 + 2x_2 = -8 \iff 2x_2 = -8 + 13x_1\\
&-41x_1 + 6x_2 = -20 \iff 6x_2 = -20 + 41x_1 \iff -24 + 39x_1 = -20 + 41x_1 \iff\\
&2x_1 = -4 \iff x_1 = -2; x_2 = \frac{-8 - 26}{2} = -17\\
&A : (-2; -17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B :\\
&28x_1 - 4x_2 = 16 \iff -4x_2 = 16 - 28x_1 \iff 2x_2 = -8 + 14x_1\\
&-41x_1 + 6x_2 = -20 \iff 6x_2 = -20 + 41x_1 \iff\\
&-24 + 42x_1 = -20 + 41x_1 \iff x_1 = 4; x_2 = \frac{-8 + 56}{2} = 24\\
&B : (4; 24)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&C :\\
&-13x_1 + 2x_2 = -8 \iff 2x_2 = -8 + 13x_1\\
&28x_1 - 4x_2 = 16 \iff -4x_2 = 16 - 28x_1 \iff 16 - 26x_1 = 16 - 28x_1 \iff x_1 = 0; x_2 = -4\\
&C : (0; -4)
\end{aligned}
$$

Заметим, что тогда площадь треугольника равна $\frac{\det\begin{pmatrix}-2-4 & -17-24\\ -2+0 & -17+4\end{pmatrix}}{2} = \frac{\det\begin{pmatrix}-6 & -41\\ -2 & -13\end{pmatrix}}{2} = \frac{6*13-2*41}{2} = \frac{78-82}{2} = \frac{-4}{2} = -2$, откуда неориентированная площадь равна 2.

B)
Прямые -

$$
\begin{aligned}
&a : 14x_1 - 7x_2 = -49\\
&b : 17x_1 - 8x_2 = -57\\
&c : 3x_1 - x_2 = -1
\end{aligned}
$$

Пусть точки A, B и C - $b \cap c$, $c \cap a$ и $a \cap b$ соотв. Тогда -

$A:$
$3x_1 - x_2 = -1 \iff x_2 = 1 + 3x_1$
$17x_1 - 8x_2 = -57 \iff 8x_2 = 57 + 17x_1 \iff$
$8 + 24x_1 = 57 + 17x_1 \iff 7x_1 = 49 \iff x_1 = 7; x_2 = 22$
$A : (7; 22)$

$B:$
$14x_1 - 7x_2 = -49 \iff 7x_2 = 49 + 14x_1 \iff 56x_2 = 392 + 112x_1$
$17x_1 - 8x_2 = -57 \iff 8x_2 = 57 + 17x_1 \iff 56x_2 = 399 + 119x_1 \iff$
$392 + 112x_1 = 399 + 119x_1 \iff 7x_1 = 7 \iff x_1 = -1; x_2 = \dfrac{49 - 14}{7} = 5$
$B : (-1; 5)$

$C:$
$3x_1 - x_2 = -1 \iff x_2 = 1 + 3x_1$
$14x_1 - 7x_2 = -49 \iff 7x_2 = 49 + 14x_1 \iff$
$7 + 21x_1 = 49 + 14x_1 \iff 7x_1 = 42 \iff x_1 = 6; x_2 = 19$
$C : (6; 19)$

Заметим, что тогда площадь треугольника равна $\frac{\det\begin{pmatrix} 7-(-1) & 22-5 \\ 7-6 & 22-19 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\det\begin{pmatrix} 8 & 17 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \frac{8*3-17*1}{2} = \frac{7}{2}$, откуда неориентированная площадь равна $\frac{7}{2}$.

1.2)

1. (a)

$$28x_1 - 4x_2 = 16$$
$$-13x_1 + 2x_2 = -8$$

$\Delta^1 = \begin{Vmatrix} 28 & -4 \\ -13 & 2 \end{Vmatrix} = 56 - 52 = 2 \neq 0$

$\Delta^1_{x_1} = \begin{Vmatrix} 16 & -4 \\ -8 & 2 \end{Vmatrix} = 32 - 32 = 0,\ x_1^1 = \dfrac{\Delta^1_{x_1}}{\Delta^1} = 0$

$\Delta^1_{x_2} = \begin{Vmatrix} 28 & 16 \\ -13 & -8 \end{Vmatrix} = -224 + 208 = -16,\ x_2^1 = \dfrac{\Delta^1_{x_2}}{\Delta^1} = \dfrac{-16}{4} = -4$

Тогда $x_0^1 = (0, -4)$;

(b)

$$28x_1 - 4x_2 = 16$$
$$-41x_1 + 6x_2 = -20$$

$\Delta^2 = \begin{Vmatrix} 28 & -4 \\ -41 & 6 \end{Vmatrix} = 168 - 164 = 4 \neq 0$

$\Delta^2_{x_1} = \begin{Vmatrix} 16 & -4 \\ -20 & 6 \end{Vmatrix} = 96 - 80 = 16,\ x_1^2 = \dfrac{\Delta^2_{x_1}}{\Delta^2} = \dfrac{16}{4} = 4$

$\Delta^2_{x_2} = \begin{Vmatrix} 28 & 16 \\ -41 & -20 \end{Vmatrix} = -560 + 656 = 96,\ x_2^2 = \dfrac{\Delta^2_{x_2}}{\Delta^2} = \dfrac{96}{4} = 24$

Тогда $x_0^2 = (4, 24)$;

(c)

$$-13x_1 + 2x_2 = -8$$
$$-41x_1 + 6x_2 = -20$$

$$\Delta^3 = \left\| \begin{matrix} -13 & 2 \\ -41 & 6 \end{matrix} \right\| = -78 + 82 = 4 \neq 0$$
$$\Delta^3_{x_1} = \left\| \begin{matrix} -8 & 2 \\ -20 & 6 \end{matrix} \right\| = -48 + 40 = -8,\ x_1^3 = \frac{\Delta^3_{x_1}}{\Delta^3} = \frac{-8}{4} = -2$$
$$\Delta^3_{x_2} = \left\| \begin{matrix} -13 & -8 \\ -41 & -20 \end{matrix} \right\| = 260 - 328 = -68,\ x_2^3 = \frac{\Delta^3_{x_2}}{\Delta^3} = \frac{-68}{4} = -17$$

Тогда $x_0^3 = (-2, -17)$;

(d) Пусть вектор $a = (-2 - 0, -17 + 4) = (-2, -13)$, а вектор $b = (4 - 0, 24 + 4) = (4, 28)$. Тогда площадь треугольника, образованного этими векторами равна:

$$2S = \left\| \begin{matrix} -2 & -13 \\ 4 & 28 \end{matrix} \right\| = |-56 + 52| = 4,$$

откуда $S = 2$.

2. (a)

$$14x_1 - 7x_2 = -49$$
$$17x_1 - 8x_2 = -57$$

$$\Delta^1 = \left\| \begin{matrix} 14 & -7 \\ 17 & -8 \end{matrix} \right\| = -112 + 119 = 7 \neq 0$$
$$\Delta^1_{x_1} = \left\| \begin{matrix} -49 & -7 \\ -57 & -8 \end{matrix} \right\| = 392 - 399 = -7,\ x_1^1 = \frac{\Delta^1_{x_1}}{\Delta^1} = -1$$
$$\Delta^1_{x_2} = \left\| \begin{matrix} 14 & -49 \\ 17 & -57 \end{matrix} \right\| = -798 + 833 = 35,\ x_2^1 = \frac{\Delta^1_{x_2}}{\Delta^1} = \frac{35}{7} = 5$$

Тогда $x_0^1 = (-1, 5)$;

(b)

$$14x_1 - 7x_2 = -49$$
$$3x_1 - x_2 = -1$$

$$\Delta^2 = \left\| \begin{matrix} 14 & -7 \\ 3 & -1 \end{matrix} \right\| = -14 + 21 = 7 \neq 0$$
$$\Delta^2_{x_1} = \left\| \begin{matrix} -49 & -7 \\ -1 & -1 \end{matrix} \right\| = 49 - 7 = 42,\ x_1^2 = \frac{\Delta^2_{x_2}}{\Delta^2} = \frac{42}{7} = 6$$
$$\Delta^2_{x_2} = \left\| \begin{matrix} 14 & -49 \\ 3 & -1 \end{matrix} \right\| = -14 + 147 = 133,\ x_2^2 = \frac{\Delta^2_{x_2}}{\Delta^2} = \frac{133}{7} = 19$$

Тогда $x_0^2 = (6, 19)$;

(c)

$$17x_1 - 8x_2 = -57$$
$$3x_1 - x_2 = -1$$

$$\Delta^3 = \left\| \begin{matrix} 17 & -8 \\ 3 & -1 \end{matrix} \right\| = -17 + 24 = 7 \neq 0$$

$$\Delta^3_{x_1} = \left\| \begin{matrix} -57 & -8 \\ -1 & -1 \end{matrix} \right\| = 57 - 8 = 49,\ x^3_1 = \frac{\Delta^3_{x_1}}{\Delta^3} = \frac{49}{7} = 7$$

$$\Delta^3_{x_2} = \left\| \begin{matrix} 17 & -57 \\ 3 & -1 \end{matrix} \right\| = -17 + 171 = 154,\ x^3_2 = \frac{\Delta^3_{x_2}}{\Delta_3} = \frac{154}{7} = 22$$

Тогда $x^3_0 = (7, 22)$;

(d) Пусть вектор $a = (6 + 1, 19 - 5) = (7, 14)$, а вектор $b = (7 + 1, 22 - 5) = (8, 17)$. Тогда площадь треугольника, образованного этими векторами равна:

$$2S = \left\| \begin{matrix} 7 & 14 \\ 8 & 17 \end{matrix} \right\| = |119 - 104| = 15,$$

откуда $S = 7,5$.

1.2 ПК1 2

Нарисуйте на вещественной аффинной плоскости фигуру, задаваемую в барицентрических координатах (α, β, γ) относительно вершин данного $\Delta\ abc$ неравенствами:

$$(A:)\frac{\beta}{2} - \gamma \geq -\frac{1}{2}, \quad \frac{3\alpha}{2} + 2\gamma \geq 3, \quad -\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \geq -\frac{1}{4}$$

$$(B:)2\beta + \frac{3\gamma}{2} \geq 3, \quad \frac{2\alpha}{3} - \frac{\gamma}{2} \geq -\frac{1}{3}, \quad \frac{\alpha}{3} - \beta \geq -\frac{1}{3}$$

Решение не существует, если в обеих пунктах $\alpha + \beta + \gamma > 1$ - это мы можем наблюдать при цифрах, данных в задаче
Иначе:

1. Подставить различные нулевые значения в равенство, сделанное из неравенства;
2. Построить прямую, исходя из полученых равенств;
3. Определить область - полуплоскость, ограниченную неравенством;
4. Повторить данные операции для каждого неравенства;
5. Нарисовать пересечение полуплоскостей

1.3 ПК1 3.1

Пусть аффинное преобразование

$$M : \begin{pmatrix} M_{1\ 1} & M_{2\ 1} \\ M_{1\ 2} & M_{2\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} M_{1\ 1} & M_{2\ 1} \\ M_{1\ 2} & M_{2\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \iff$$

1.1 $\quad M_{1\ 1} * 1 + M_{2\ 1} * 2 + b_1 = 1$

1.2 $\quad M_{1\ 2} * 1 + M_{2\ 2} * 2 + b_2 = -5$

Аналогично:

2.1 $\quad M_{1\ 1} * -2 + M_{2\ 1} * -4 + b_1 = -8$

2.2 $\quad M_{1\ 2} * -2 + M_{2\ 2} * -4 + b_2 = 7$

3.1 $\quad M_{1\ 1} * 2 + M_{2\ 1} * 5 + b_1 = 5$

3.2 $\quad M_{1\ 2} * 2 + M_{2\ 2} * 5 + b_2 = -10$

$1.1 \quad \iff \quad 4.1: \quad M_{1\ 1} = 1 - M_{2\ 1} * 2 - b_1$

$2.1 + 4.1 \quad \Longrightarrow \quad 5.1: \quad -2 * (1 - M_{2\ 1} * 2 - b_1) + M_{2\ 1} * -4 + b_1 = -8 \iff$

$-2 + M_{2\ 1} * 4 + b_1 * 2 + M_{2\ 1} * -4 + b_1 = -8 \quad \iff \quad b_1 = -2$

$3.1 + 4.1 + 5.1 \quad \Longrightarrow \quad 6.1: 2 * (1 - M_{2\ 1} * 2 + 2) + M_{2\ 1} * 5 - 2 = 5 \quad \iff$

$2 - M_{2\ 1} * 4 + 4 + M_{2\ 1} * 5 - 2 = 5; \quad M_{2\ 1} = 1$

Итого: $M_{1\ 1} = 1; \quad M_{2\ 1} = 1; \quad b_1 = -2$

Аналогично:

$$
\begin{aligned}
&1.2 \iff 4.2: \quad M_{1\ 2} = -5 - M_{2\ 2} * 2 - b_2 \\
&2.2 + 4.2 \implies 5.2: -2 * (-5 - M_{2\ 2} * 2 - b_2) + M_{2\ 2} * -4 + b_2 = 7 \iff \\
&10 + M_{2\ 2} * 4 + b_2 * 2 + M_{2\ 2} * -4 + b_2 = 7 \iff b_2 = -1 \\
&3.2 + 4.2 + 5.2 \implies 6.2: \quad 2 * (-5 - M_{2\ 2} * 2 + 1) + M_{2\ 2} * 5 - 1 = -10 \iff \\
&-10 - M_{2\ 2} * 4 + 2 + M_{2\ 2} * 5 - 1 = -10; \quad M_{2\ 2} = -1
\end{aligned}
$$

Итого:

$$
\begin{aligned}
&M_{1\ 2} = -2; \quad M_{2\ 2} = -1; \quad b_1 = -1 \\
&M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Откуда получаем, что

$$
M \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (3 - 2 - 2; -6 + 2 - 1) = (-1; -5)
$$

ПК1 3.2

Пусть аффинное преобразование:

$$
M : \begin{pmatrix} M_{1\ 1} & M_{2\ 1} \\ M_{1\ 2} & M_{2\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}
$$

Тогда:

1. $M : \begin{pmatrix} M_{1\ 1} & M_{2\ 1} \\ M_{1\ 2} & M_{2\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \iff$
   (a) $M_{1\ 1} \times 1 + M_{2\ 1} \times 2 + b_1 = 1$
   (b) $M_{1\ 2} \times 1 + M_{2\ 2} \times 2 + b_1 = -5$
2. $M : \begin{pmatrix} M_{1\ 1} & M_{2\ 1} \\ M_{1\ 2} & M_{2\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix} \iff$
   (a) $M_{1\ 1} \times (-2) + M_{2\ 1} \times (-4) + b_1 = -8$
   (b) $M_{1\ 2} \times (-2) + M_{2\ 2} \times (-4) + b_1 = 7$
3. $M : \begin{pmatrix} M_{1\ 1} & M_{2\ 1} \\ M_{1\ 2} & M_{2\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} \iff$
   (a) $M_{1\ 1} \times 2 + M_{2\ 1} \times 5 + b_1 = 5$
   (b) $M_{1\ 2} \times 2 + M_{2\ 2} \times 5 + b_1 = -10$

   Итого:

$$
\begin{aligned}
&M_{1\ 1} \times 1 + M_{2\ 1} \times 2 + b_1 = 1 \\
&M_{1\ 2} \times 1 + M_{2\ 2} \times 2 + b_1 = -5 \\
&M_{1\ 1} \times (-2) + M_{2\ 1} \times (-4) + b_1 = -8 \\
&M_{1\ 2} \times (-2) + M_{2\ 2} \times (-4) + b_1 = 7 \\
&M_{1\ 1} \times 2 + M_{2\ 1} \times 5 + b_1 = 5 \\
&M_{1\ 2} \times 2 + M_{2\ 2} \times 5 + b_1 = -10
\end{aligned}
$$

$$M_{1\ 1} = 1 - M_{2\ 1} \times 2 - b_1 \quad (1)$$
$$M_{1\ 2} = -5 - M_{2\ 2} \times 2 - b_1 \quad (1)$$
$$(1 - M_{2\ 1} \times 2 - b_1) \times (-2) + M_{2\ 1} \times (-4) + b_1 = -8 \iff b_1 = -2 \quad (2)$$
$$(-5 - M_{2\ 2} \times 2 - b_1) \times (-2) + M_{2\ 2} \times (-4) + b_1 = 7 \iff b_2 = -1 \quad (2)$$
$$(1 - M_{2\ 1} \times 2 - b_1) \times 2 + M_{2\ 1} \times 5 + b_1 = 5 \iff M_{2\ 1} = 1 \quad (3)$$
$$(-5 - M_{2\ 2} \times 2 - b_1) \times 2 + M_{2\ 2} \times 5 + b_1 = -10 \iff M_{2\ 2} = -1 \quad (3)$$

$$M_{1\ 1} = 1 - M_{2\ 1} \times 2 - b_1(1) \iff M_{1\ 1} = 1$$
$$M_{1\ 2} = -5 - M_{2\ 2} \times 2 - b_1(1) \iff M_{1\ 2} = -2$$
$$b_1 = -2$$
$$b_2 = -1$$
$$M_{2\ 1} = 1$$
$$M_{2\ 2} = -1$$

Итого:

$$M : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Откуда получаем, что:

$$M \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -6+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

1.4 ПК1 4

1.5 ПК1 5

5.1) Из условия:

$A : (3; -4)$

$B : (5; -12)$

$C : (-1; 13)$

Тогда нормальный вектор $\overrightarrow{n}$ к серединному перпендикуляру l через точку M $(= \frac{B+C}{2}) = \overrightarrow{B-C}$ (с точностью до домножения).

$n : (-6; 25)$

Поэтому серединный перпендикуляр задаётся уравнением:

$$l : (n, x) = (n, M) = ((-6; 25), (2; \frac{1}{2})) = -12 + \frac{25}{2} = \frac{1}{2}$$

$$l : (n, x) = \frac{1}{2}$$

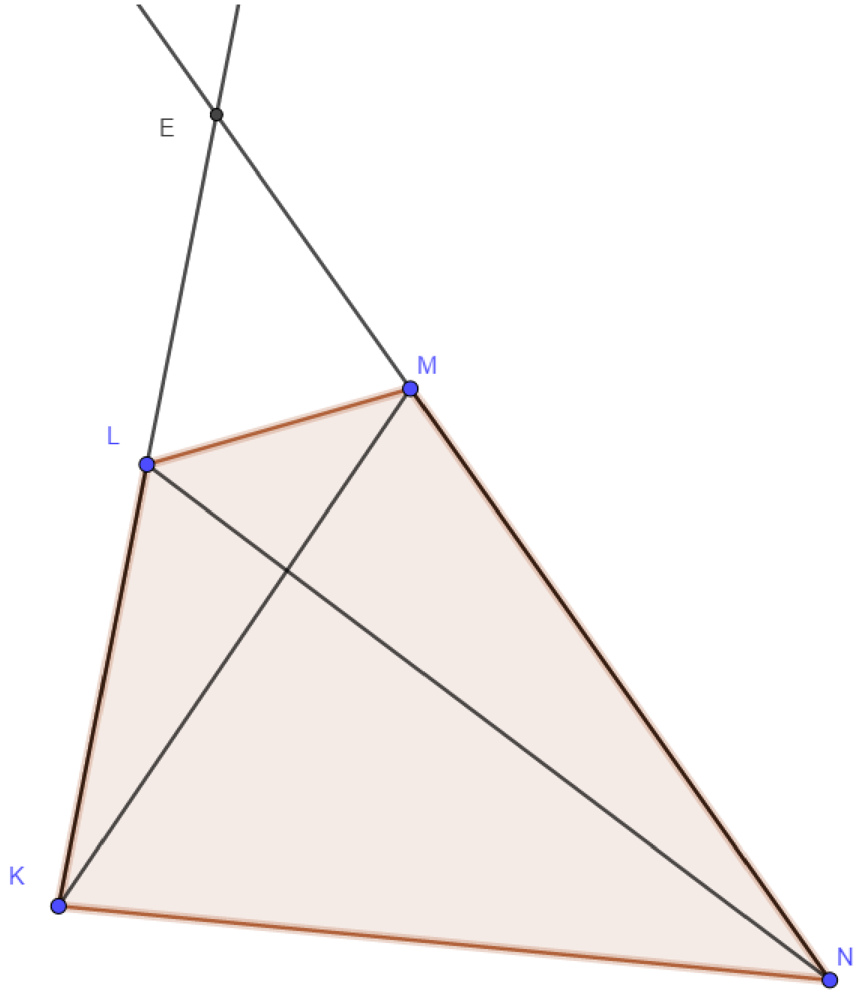
Тогда расстояние от A до l =

$$\frac{\frac{1}{2} - (n, A)}{|A|} = \frac{\frac{1}{2} - ((-6; 25), (3; -4))}{\sqrt{36 + 625}} = \frac{\frac{1}{2} - (-18 - 100)}{\sqrt{661}} = \frac{237\sqrt{661}}{1322}$$

Ответ: $\frac{237\sqrt{661}}{1322}$

5.2)
Нормальный вектор через точку $m = \frac{b+c}{2} = (2,\ 0.5)$ к серединному перпендикуляру $l = \overline{b-c} = (6, -25)$: $n = (-6, 25)$.
Поэтому серединный перпендикуляр задается уравнением:
$l = (n, x) = (n, m) = ((-6, 25), (2,\ 0.5)) = -12 + 12,5 = 0,5$.
Тогда расстояние от a до l:
$$\frac{(n, m) - (n, a)}{\sqrt{(n, n)}} = \frac{0,5 + 118}{\sqrt{661}} = \frac{237\sqrt{661}}{1322}.$$

1.6 ПК1 6



А) Пусть вектора $\overrightarrow{l}$, $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$ такие:

$$\overrightarrow{l} = \overrightarrow{KL} = \sqrt{10}$$
$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{LM} = \sqrt{17}$$
$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{MN} = 2\sqrt{53}$$

Тогда:

$$(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m}) = |\overrightarrow{l}| * |\overrightarrow{m}| * (-1 * \cos\angle KLM) = \sqrt{10} * \sqrt{17} * (-1 * \frac{13}{\sqrt{170}}) = -13$$
$$(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = |\overrightarrow{m}| * |\overrightarrow{n}| * (-1 * \cos\angle LMN) = \sqrt{17} * 2\sqrt{53} * (-1 * -\frac{30}{\sqrt{901}}) = 60$$

$(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{n}) = |\overrightarrow{l}| * |\overrightarrow{n}| * (\cos(\angle KLM + \angle LMN))$, т.к. $\overrightarrow{l} + \angle KLM = -\overrightarrow{m}$, $-\overrightarrow{m} + \angle LMN = \overrightarrow{n}$.
Заметим, что:

$$\cos(\angle KLM + \angle LMN) = \cos\angle KLM * \cos\angle LMN - \sin\angle KLM * \sin\angle LMN =$$
$$\frac{13}{\sqrt{170}} * -\frac{30}{\sqrt{901}} - \frac{1}{\sqrt{170}} * \frac{1}{\sqrt{901}} =$$
$$\frac{13 * \sqrt{170} * (-30) * \sqrt{901}}{170 * 901} - \frac{1 * \sqrt{170} * 1 * \sqrt{901}}{170 * 901} =$$
$$\frac{-391 * 17\sqrt{10}\sqrt{53}}{170 * 901} = \frac{-23 * \sqrt{10}\sqrt{53}}{10 * 53}$$

$\sin\angle KLM * \sin\angle LMN > 0$, т.к. углы меньше 180^o.

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{n}) = \overrightarrow{l} * \overrightarrow{n} * \cos(\angle KLM + \angle LMN) = \\
&\overrightarrow{l} * \overrightarrow{n} * (\cos\angle KLM * \cos\angle LMN - \sin\angle KLM * \sin\angle LMN) = \\
&\overrightarrow{l} * \overrightarrow{n} * \left(\cos\angle KLM * \cos\angle LMN - \sqrt{1-(\cos\angle KLM)^2} * \sqrt{1-(\cos\angle LMN)^2}\right) = \\
&\overrightarrow{KL} * \overrightarrow{MN} * \left(\cos\angle KLM * \cos\angle LMN - \sqrt{1-(\cos\angle KLM)^2} * \sqrt{1-(\cos\angle LMN)^2}\right) = \\
&\sqrt{10} * 2 * \sqrt{53} * \frac{-23 * \sqrt{10}\sqrt{53}}{10 * 53} = -46
\end{aligned}
$$

Найдём $(\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}, \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n})$:

$$
(\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}, \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}) = (\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m}) + (\overrightarrow{l}, \overrightarrow{n}) + (\overrightarrow{m}, \overrightarrow{m}) + (\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = -13 - 46 + 17 + 60 = 18
$$

С другой стороны α - угол между $(\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m})$ и $(\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n})$:

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}, \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}) = |\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}| * |\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}| * \cos\alpha = \\
&\sqrt{|\overrightarrow{l}|^2 + |\overrightarrow{m}|^2 - |\overrightarrow{l}| * |\overrightarrow{m}| * 2 * \cos\angle KLM} * \sqrt{|\overrightarrow{m}|^2 + |\overrightarrow{n}|^2 - |\overrightarrow{m}| * |\overrightarrow{n}| * 2 * \cos\angle LMN} * \cos\alpha = \\
&\sqrt{10 + 17 - 26} * \sqrt{17 + 212 + 120} * \cos\alpha = \sqrt{1} * \sqrt{349} * \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Откуда:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1} * \sqrt{349} * \cos\alpha = 18 \\
&\cos\alpha = \frac{18}{\sqrt{349}} = \frac{18\sqrt{349}}{349}
\end{aligned}
$$

Б)
аналогично пункту (А) Пусть вектора $\overrightarrow{l}$, $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$ такие:

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{l} = \overrightarrow{KL} = 3\sqrt{2} \\
&\overrightarrow{m} = \overrightarrow{LM} = \sqrt{13} \\
&\overrightarrow{n} = \overrightarrow{MN} = \sqrt{10}
\end{aligned}
$$

Тогда:

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m}) = |\overrightarrow{l}| * |\overrightarrow{m}| * (-1 * \cos\angle KLM) = 3\sqrt{2} * \sqrt{13} * (-1 * -\frac{5}{\sqrt{26}}) = 15 \\
&(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = |\overrightarrow{m}| * |\overrightarrow{n}| * (-1 * \cos\angle LMN) = \sqrt{13} * \sqrt{10} * (-1 * -\frac{11}{\sqrt{130}}) = 11
\end{aligned}
$$

$(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{n}) = |\overrightarrow{l}| * |\overrightarrow{n}| * (\cos(\angle KLM + \angle LMN))$, т.к. $\overrightarrow{l} + \angle KLM = -\overrightarrow{m}$, $-\overrightarrow{m} + \angle LMN = \overrightarrow{n}$.
Заметим, что:

$$
\begin{aligned}
&\cos(\angle KLM + \angle LMN) = \cos\angle KLM * \cos\angle LMN - \sin\angle KLM * \sin\angle LMN = \\
&-\frac{5}{\sqrt{26}} * -\frac{11}{\sqrt{130}} - \frac{1}{\sqrt{26}} * \frac{3}{\sqrt{130}} = \\
&\frac{(-5) * \sqrt{26} * (-11) * \sqrt{130}}{26 * 130} - \frac{1 * \sqrt{26} * 3 * \sqrt{130}}{26 * 130} = \\
&\frac{2\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}
$$

$\sin\angle KLM * \sin\angle LMN > 0$, т.к. углы меньше 180°.

$$(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{n}) = \overrightarrow{l} * \overrightarrow{n} * \cos(\angle KLM + \angle LMN) =$$
$$\overrightarrow{l} * \overrightarrow{n} * (\cos\angle KLM * \cos\angle LMN - \sin\angle KLM * \sin\angle LMN) =$$
$$\overrightarrow{l} * \overrightarrow{n} * \left(\cos\angle KLM * \cos\angle LMN - \sqrt{1 - (\cos\angle KLM)^2} * \sqrt{1 - (\cos\angle LMN)^2}\right) =$$
$$\overrightarrow{KL} * \overrightarrow{MN} * \left(\cos\angle KLM * \cos\angle LMN - \sqrt{1 - (\cos\angle KLM)^2} * \sqrt{1 - (\cos\angle LMN)^2}\right) =$$
$$3\sqrt{2} * \sqrt{10} * \frac{2\sqrt{5}}{5} = -12$$

Найдём $(\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}, \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n})$:

$$(\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}, \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}) = (\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m}) + (\overrightarrow{l}, \overrightarrow{n}) + (\overrightarrow{m}, \overrightarrow{m}) + (\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = 15 + 12 + 13 + 11 = 51$$

С другой стороны α - угол между $(\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m})$ и $(\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n})$:

$$(\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}, \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}) = |\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}| * |\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}| * \cos\alpha =$$
$$\sqrt{|\overrightarrow{l}|^2 + |\overrightarrow{m}|^2 - |\overrightarrow{l}| * |\overrightarrow{m}| * 2 * \cos\angle KLM} * \sqrt{|\overrightarrow{m}|^2 + |\overrightarrow{n}|^2 - |\overrightarrow{m}| * |\overrightarrow{n}| * 2 * \cos\angle LMN} * \cos\alpha =$$
$$\sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{13})^2 - (3\sqrt{2} * \sqrt{13} * 2 * -\frac{5}{\sqrt{26}})} *$$
$$\sqrt{(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{10})^2 - (\sqrt{13} * \sqrt{10} * 2 * -\frac{11}{\sqrt{130}})} * \cos\alpha =$$
$$\sqrt{18 + 13 + 30} * \sqrt{13 + 10 + 22} * \cos\alpha =$$
$$\sqrt{61} * \sqrt{45} * \cos\alpha = \sqrt{61} * 3\sqrt{5} * \cos\alpha$$

Откуда:

$$\sqrt{61} * 3\sqrt{5} * \cos\alpha = 51$$
$$\cos\alpha = \frac{51}{\sqrt{61} * 3\sqrt{5}} = \frac{17}{\sqrt{61} * \sqrt{5}} = \frac{17}{\sqrt{305}} = \frac{17\sqrt{305}}{305}$$

Дополнительно*)
Также можно заметить, что искомый угол можно выразить напрямую из 5 входных данных(3 длин сторон

и 2 углов), хотя данная форм просто является объединением всех формул, написанных выше:

$$\cos\angle(\overrightarrow{LN},\overrightarrow{KM})=\frac{(\overrightarrow{l},\overrightarrow{m})+(\overrightarrow{l},\overrightarrow{n})+(\overrightarrow{m},\overrightarrow{m})+(\overrightarrow{m},\overrightarrow{n})}{|\overrightarrow{l}+\overrightarrow{m}|*|\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}|}=$$

$$\frac{(\overrightarrow{l},\overrightarrow{m})+(\overrightarrow{l},\overrightarrow{n})+(\overrightarrow{m},\overrightarrow{m})+(\overrightarrow{m},\overrightarrow{n})}{\sqrt{|\overrightarrow{l}|^2+|\overrightarrow{m}|^2-|\overrightarrow{l}|*|\overrightarrow{m}|*2*\cos\angle KLM}*\sqrt{|\overrightarrow{m}|^2+|\overrightarrow{n}|^2-|\overrightarrow{m}|*|\overrightarrow{n}|*2*\cos\angle LMN}}=$$

$$\frac{(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{LM})+(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{MN})+(\overrightarrow{LM},\overrightarrow{LM})+(\overrightarrow{LM},\overrightarrow{MN})}{\sqrt{|\overrightarrow{KL}|^2+|\overrightarrow{LM}|^2-|\overrightarrow{KL}|*|\overrightarrow{LM}|*2*\cos\angle KLM}*\sqrt{|\overrightarrow{LM}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{LM}|*|\overrightarrow{MN}|*2*\cos\angle LMN}}=$$

$$\frac{\overrightarrow{KL}*\overrightarrow{LM}*\cos\angle KLM}{\sqrt{|\overrightarrow{KL}|^2+|\overrightarrow{LM}|^2-|\overrightarrow{KL}|*|\overrightarrow{LM}|*2*\cos\angle KLM}*\sqrt{|\overrightarrow{LM}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{LM}|*|\overrightarrow{MN}|*2*\cos\angle LMN}}+$$

$$\frac{\overrightarrow{KL}*\overrightarrow{MN}*\left(\cos\angle KLM*\cos\angle LMN-\sqrt{1-(\cos\angle KLM)^2}*\sqrt{1-(\cos\angle LMN)^2}\right)}{\sqrt{|\overrightarrow{KL}|^2+|\overrightarrow{LM}|^2-|\overrightarrow{KL}|*|\overrightarrow{LM}|*2*\cos\angle KLM}*\sqrt{|\overrightarrow{LM}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{LM}|*|\overrightarrow{MN}|*2*\cos\angle LMN}}+$$

$$\frac{\overrightarrow{LM}*\overrightarrow{LM}*\cos 0}{\sqrt{|\overrightarrow{KL}|^2+|\overrightarrow{LM}|^2-|\overrightarrow{KL}|*|\overrightarrow{LM}|*2*\cos\angle KLM}*\sqrt{|\overrightarrow{LM}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{LM}|*|\overrightarrow{MN}|*2*\cos\angle LMN}}+$$

$$\frac{\overrightarrow{LM}*\overrightarrow{MN}*\cos\angle LMN}{\sqrt{|\overrightarrow{KL}|^2+|\overrightarrow{LM}|^2-|\overrightarrow{KL}|*|\overrightarrow{LM}|*2*\cos\angle KLM}*\sqrt{|\overrightarrow{LM}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{LM}|*|\overrightarrow{MN}|*2*\cos\angle LMN}}$$