Логика и алгоритмы

Задачи семинаров 1

Теория множеств Цермело-Френкеля с аксиомой выбора.

- (Аксиома экстенсиональности) $\forall x\, \forall y\, (x = y \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y))$
- (Аксиома равенства) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \to (x \in z \leftrightarrow y \in z))$
- (Аксиома пары) Для любых множеств x и y найдется множество $\{x, y\}$, элементами которого являются в точности x и y.
- (Аксиома объединения) Для любого множества X существует множество $\bigcup X$, содержащее в точности те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из элементов множества X.
- (Аксиома степени) Для любого множества X существует множество $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X.
- (Аксиома пустого множества) Существует пустое множество $\varnothing$, т.е. такое множество, которое не содержит элементов.
- (Аксиома бесконечности) Существует множество S такое, что $\varnothing \in S$ и $\forall x\, (x \in S \to x \cup \{x\} \in S)$.
- (Схема аксиом выделения) Для любого свойства множеств φ и множества Y существует множество $Z = \{x \in Y \mid \varphi(x)\}$.
- (Схема аксиом подстановки) Пусть свойство $\varphi(x, y)$ — такое, что для любого множества x найдется не более одного множества y, для которого $\varphi(x, y)$. Тогда для любого X найдется множество $Y = \{y \mid \exists x \in X\ \varphi(x, y)\}$.
- (Аксиома регулярности) Любое непустое множество X содержит элемент y, для которого $y \cap X = \varnothing$.
- (Аксиома выбора) Для любого семейства непустых множеств S существует функция выбора на S, т.е. такая функция $f\colon S \to \bigcup S$, что $\forall x \in S\ (f(x) \in x)$.

1. Как, используя только пустое множество $\varnothing$, составить множество состоящие из 1 элемента? из 2 элементов? из n элементов?

2. Может ли такое быть, что $A \subset B$ и $A \in B$ одновременно?

3. Для двух множеств A и B докажите, что существует их упорядоченная пара по Куратовскому, их декартово произведение.

4. Даны множества A, B и соответствие $R \subset A \times B$. Докажите, что существуют множества $\operatorname{dom} R$, $\operatorname{ran} R$ и B^A.

5. Для индексированного семейства множеств $(A_i)_{i \in I}$ определите произведение элементов этого семейства. Почему оно существует?

6. Выведите аксиомы выделения из аксиом подстановки.

7. Для множеств A, B и C таких, что $A \cap B = \emptyset$, постройте биекцию $f\colon C^{A \cup B} \to C^A \times C^B$. Какое условие на функцию f нарушается, инъективности или сюръективности, если $A \cap B \neq \emptyset$.

8. Для всякой сюръекции $f\colon A \to B$ существует правое обратное отображение, т.е. такое отображение $g\colon B \to A$, что $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Сформулируйте аналогичное утверждение для инъекции и проверьте, верно ли оно?

9. Докажите, что для любого множества A не существует сюръекции из A на $\mathcal{P}(A)$.

10. Существует ли множество всех множеств? А множество всех одноэлементных множеств?

11. Существует ли множество $A \in A$? Существует ли $\in$-убывающая последовательность множеств?

    Множество T называется *транзитивным*, если $\bigcup T \subset T$.

12. Существует ли множество всех транзитивных множеств? нетранзитивных множеств?

13. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$. Докажите, что A или $\mathbb{R}^2 \setminus A$ имеет мощность континуума, т.е. равномощно $\mathbb{R}$.

14. Верно ли, что для каждого семейства S непустых множеств существует такое множество A, что $A \cap X$ — множество из одного элемента для всякого $X \in S$?

15. Докажите теорему Кантора–Бернштейна (Шрёдера–Бернштейна), не используя индукцию: если $f : X \to X$ инъекция и $X \supset A \supset f(X)$, то $f(X) \sim A$.

    (a) Назовём множество $B \subset X$ *хорошим*, если $X \setminus A \subset B$ и $f(B) \subset B$. Докажите, что пересечение C всех хороших множеств — хорошее.
    (b) Докажите, что $C = (X \setminus A) \cup f(C)$.
    (c) Положим

    $$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in C \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

    Докажите, что $g : X \to A$ является биекцией.

16. Докажите, что $2^{\mathbb{N}} \sim k^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, где $k \in \mathbb{N}$ и $k \geq 2$.

17. Докажите, что множество $2^{\mathbb{N}}$ имеет мощность континуума.

18. Являются ли следующие множества счётными (равномощными $\mathbb{N}$)? континуальными (равномощными $\mathbb{R}$)? имеющими иную мощность?

    а) Множество всех бесконечных возрастающих последовательностей натуральных чисел.

    б) Множество всех бесконечных невозрастающих последовательностей натуральных чисел.

    в) Множество всех биекций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

    г) Множество всех последовательностей рациональных чисел, стремящихся к 0.

    д) Множество всех монотонно убывающих последовательностей рациональных чисел, стремящихся к 0 справа.

    е) Множество всех монотонно убывающих последовательностей действительных чисел, стремящихся к 0 справа.

ж) Множество всех отображений из $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

з) Множество всех непрерывных отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

и) Множество всех отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

19. Пусть A — некоторое множество непересекающихся кругов на плоскости. Что можно сказать о мощности множества A?

20. Пусть A — некоторое множество непересекающихся восьмерок (пар касающихся окружностей) на плоскости. Что можно сказать о мощности множества A?

21. Дано счетное множество A. Докажите, что в A существует счетная строго возрастающая последовательность подмножеств $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_n \subsetneq \ldots$, в которой все множества $A_{n+1} \setminus A_n$ бесконечны.

22. Существует ли множество $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ мощности континуума такое, что для всех $A, B \in X$ либо $A \subset B$, либо $B \subset A$?