Листок 0. Индукция. Элементарная комбинаторика.

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два). Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X - 3 - 2N$, где N – номер недели, когда происходит сдача листка.

ВАЖНО: Необходимо заранее договариваться с вашим преподавателем о времени сдачи листка!

Задача 1. Вычислите суммы

а) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$; б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, г) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$

Задача 2. Покажите, что $\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}_{n} < 2$.

Задача 3. Число $x + \dfrac{1}{x}$ целое. Покажите, что $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ тоже целое при любом натуральном n.

Задача 4. Числа Фибоначчи F_n определяются условиями $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Докажите, что что квадрат F_n^2 n-го числа Фибоначчи отличается на 1 от произведения $F_{n-1}F_{n+1}$ двух соседних.

Задача 5. a) Сколько диагоналей в выпуклом n - угольнике?

b) Сколько треугольников с вершинами в данных n точках общего положения?

Задача 6. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах:

а) ананас; б) $\underbrace{\text{аа}\ldots\text{а}}_{k}\underbrace{\text{бб}\ldots\text{б}}_{m}$?

Задача 7. Имеется пять коробок, раскрашенных в различные цвета, 10 одинаковых карандашей и 10 попарно различных ручек. Сколькими способами можно разложить

a) ручки по коробкам ?

b) карандаши по коробкам ?

Задача 8. a) Дано n лампочек, каждая может быть либо включена, либо выключена. Сколько всего есть вариантов освещения? Каких вариантов больше: когда горит четное число ламп, или когда горит нечетное их число?

b) Натуральное число называется *свободным от квадратов*, если он не делится на квадрат никакого простого числа. Сколько всего делителей у свободного от квадратов числа?

Задача 9. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8×8 8 ладей, чтобы они не били друг друга?

Задача 10. a) Сколькими способами можно посадить n человек в ряд, чтобы Иванов и Петров не сидели рядом?

b) Сколько существует таких способов рассадки за круглым столом?

Задача 11. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость

a) n прямых;
b) * n окружностей?

Задача 12. * Единичным n-мерным кубом назовем множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, таких, что $0 \le x_i \le 1$. Его вершины - это точки, все координаты которых равны либо 0, либо 1. Любое ребро куба, параллельное k-ой координатной оси, соединяет две вершины, отличающиеся только в k-ой позиции. Сколько существует кратчайших путей по ребрам из вершины $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ (все координаты нули) в вершину $(1, 1, 1, \ldots, 1)$?

Листок 1. Множества, отображения, высказывания.

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два). Перед сдачей листка происходит обсуждение вашего письменного домашнего задания, которое должно быть зачтено для продолжения беседы. Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X - 3 - 2N + k - 2d$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказынных у доски на семинаре задач, $d = 0$, если домашнее задание зачтено в течение 10 дней после его выдачи и $d = 1$ в противном случае.

ВАЖНО: Необходимо заранее договариваться с вашим преподавателем о времени сдачи листка!

Задача 1. Докажите аккуратно одно из тождеств про операции с множествами на выбор принимающего.

Задача 2. Запишите с помощью кванторов и логических операций:
«Для каждого целого x найдётся целое y такое, что $x + y > 0$».
«Существует бесконечно много пар простых чисел, отличающихся на 2».

Задача 3. Докажите тождество $x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} = x\bar{z} \vee z\bar{y} \vee y\bar{x}$ двумя способами:

a) составив таблицы истинности левой и правой части;
b) преобразовав левую часть в правую пользуясь тождествами булевой алгебры.

Задача 4. a) Покажите, что отображение $f : M \to N$ конечных множеств сюръективно тогда и только тогда, когда у него существует правое обратное, т.е., отображение $g : N \to M$ такое, что $f \circ g = \mathrm{Id}_N$. Здесь Id_N - тождественное отображение множества N в себя.
b) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для инъективных отображений.

Задача 5. a) Покажите, что отображение $f : M \to N$ сюръективно тогда и только тогда, когда на него можно сокращать справа, т.е., из всякого равенства $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует, что $g_1 = g_2$.
b) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для инъективных отображений.

Задача 6. Пусть Ω - некоторое множество (не обязательно конечное). Сопоставим каждому подмножеству $A \subset \Omega$ функцию $\chi_A : \Omega \to \{0, 1\}$, заданную условием $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$ и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$ (характеристическая функция подмножества A).

a) Докажите, что сопоставление $A \mapsto \chi_A$ задает биекцию множества $\mathcal{B}(\Omega)$ всех подмножеств множества Ω и множества функций $\{0, 1\}^\Omega$;
b) Покажите,что если A и B — подмножества Ω, то $\chi_{A\cup B} = \chi_A \vee \chi_B$ и $\chi_{A\cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$. Каким операциям над множествами соответствуют сложение по модулю два $\chi_A + \chi_B$ и импликация $\chi_A \to \chi_B$?

Задача 7. Установите биекции между множествами:

a) $Z^{X\cup Y}$ и $Z^X \times Z^Y$, если $X, Y \in \mathcal{B}(\Omega)$ и $X \cap Y = \emptyset$;
b) $\left(A^B\right)^C$ и $A^{B\times C}$

Подсказка. Пусть задано отображение $f : B \times C \to A$. Тогда всякому элементу $c \in C$ можно сопоставить отображение $f(\cdot, c) : B \to A$, переводящее $b \in B$ в $f(b, c)$

Задача 8. Докажите, что любое отображение $f: X \to Y$ можно представить в виде

a) композиции $f = g \circ h$, где g - сюръекция, а h – инъекция;
b) * композиции $f = p \circ q$, где q сюръекция, а p – инъекция.

Задача 9. Пусть $f: M \to M$ - биекция конечного множества.Тогда $f^n = \mathrm{Id}_M$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Приведите пример биекции бесконечного множества, для которой это утверждение неверно

Задача 10. a) Пусть $f = g \circ h$. Докажите, что если отображения g и h инъективны (сюръективны) , то и f инъективно (сюръективно).
b) Известно, что отображение $g \circ h$ сюръективно. Можно ли утверждать, что g сюръективно? Можно ли утверждать, что h сюръективно?

Задача 11. Пусть $f, g \in X^X$, причем $f \circ g = g \circ f$ (в этом случае отображения f и g называются *перестановочными*, или *коммутирующими*), а отображение f имеет единственную неподвижную точку (т.е. существует единственное $a \in X$ такое, что $f(a) = a$).

a) Докажите, что тогда и $g(a) = a$.
b) Приведите пример двух коммутирующих биеций, не имеющих общих неподвижных точек.

Задача 12. * Пусть N - конечное множество из n элементов. Перестановкой называется биекция N в себя. Циклом (длины k) называется перестановка M такая, что $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \ldots, f(x_{k-1}) = x_k, f(x_k) = x_1$ для некоторых попарно различных элементов $x_1, \ldots x_k$ из N и $f(y) = y$ для всех элементов N отличных от $x_1, \ldots x_k$. Покажите, что всякая перестановка представляется в виде композиции коммутирующих циклов.

Задача 13. Таблица истинности булевой функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ от n переменных описывается числами $a_{k_1,\ldots k_p} \in \{0, 1\}$, равными значению функции на наборе $(x_1, ..., x_n)$ из нулей и единиц, в котором единицы стоят на местах $k_1, \ldots k_p$, где $1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n$. Зная эту таблицу, выпишите формулу для f с использованием операций $\wedge, \vee, \neg$.

Подсказка. Решите вначале задачу для функции, которая принимает значение 1 ровно один раз .

Задача 14. Сформулируйте принцип доказательства от противного. Предъявите доказательства от противного следующих утверждений:

a) $\sqrt{2}$ – иррациональное число;
b) простых чисел бесконечно много.

Задача 15. Покажите на примере, что прямая теорема $A \to B$ не равносильна обратной $B \to A$. А что можно сказать про утверждения $\neg A \to \neg B$ и $\neg B \to \neg A$?

Задача 16. * Пусть X — некоторое множество. Постройте биекцию между $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}}$ и $X^{\{1,2,\ldots,n\}}$.

Листок 2

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два, с двумя - за три). Перед сдачей листка происходит обсуждение вашего письменного домашнего задания, которое должно быть зачтено для продолжения беседы. Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X - 1 - 2N + k - 3d$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на семинаре задач, $d = 0$, если домашнее задание зачтено в течение 10 дней после его выдачи и $d = 1$ в противном случае.

Задача 1. Выведите формулу полинома

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2\ldots k_m \geq 0 \\ k_1+\ldots+k_m=n}} \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$$

непосредственно и индукцией по m

Задача 2. Выпишите тождества на биномиальные коэффициенты, эквивалентные равенствам $(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b), \quad (a+b)^{n+m} = (a+b)^n(a+b)^m$

Задача 3. Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на пары?; $3n$ человек на тройки?

Задача 4. a) Сколько имеется различных одночленов степени d от n переменных?

b) Сколько имеется различных одночленов степени d от n переменных, в которых каждая переменная входит в ненулевой степени?

Задача 5. Сколькими способами можно представить число $n \in \mathbb{N}$ в виде суммы (произвольного числа) натуральных слагаемых? Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Задача 6. Имеется n различных круглых бусинок. Сколькими способами можно составить из них ожерелье, насчитывающее k бусинок?

Задача 7. * Сколько k-мерных граней у n-мерного куба? (См задачу 12 листка 0)

Задача 8. Трехмерный параллелепипед размером $n \times m \times p$ $(m, n, p \in \mathbb{N})$ составлен из mnp элементарных кубиков $1 \times 1 \times 1$. Каково количество кратчайших путей из вершины параллелепипеда в противоположную, проходящих по ребрам элементарных кубиков?

Задача 9. Предложите чисто комбинаторные доказательства тождеств:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n-r-1}{k-r} = \binom{n}{k}$

Задача 10. Пусть M – множество из m различных натуральных чисел, N – множество из n различных натуральных чисел. Найдите, сколько имеется различных отображений $M \to N$:

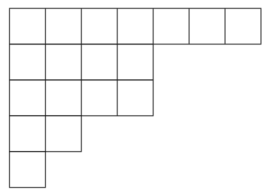
a) произвольных; иньективных; взаимно однозначных; строго возрастающих (т.е. таких, что $\forall x, y \in M \ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$);
b) неубывающих
c) * сюръективных

Задача 11. Сформулируйте и докажите формулу включений–исключений.

Задача 12. Сколько существует целых чисел от 1 до 1 000 000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью целого числа?

Задача 13. * Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – разложение числа n в произведение простых попарно различных чисел. Найдите сумму делителей числа n.

Задача 14. Фигурка типа



(состоящая из выравненных по левому краю клетчатых горизонтальных полосок с клетками одинакового размера, длина которых невозрастает сверху вниз) называется *диаграммой Юнга*. Общее число клеток в диаграмме называется ее *весом*. Выясните, сколько существует диаграмм Юнга

a) веса 7, имеющих не более 3 строк;
b) произвольного веса, но имеющих не более p строк и не более q столбцов.

Листок 3

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два, с двумя - за три). Перед сдачей листка происходит обсуждение вашего письменного домашнего задания, которое должно быть зачтено для продолжения беседы. Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X + 4 - 2N + k - 3d$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на семинаре задач, $d = 0$, если домашнее задание зачтено в течение 10 дней после его выдачи и $d = 1$ в противном случае.

ВАЖНО: Задавайте вопросы преподавателям! Спрашивайте обо всем, в чем не уверены! На количество вопросов до сдачи листка нет ограничений.

Задача 1. Какие из приведенных ниже отношений являются отношениями частичного порядка на плоскости? А какие являются отношениями линейного прядка?

$(x, y) \preceq_1 (x', y')$ если одновременно $x \leq x'$ и $y \leq y'$;
$(x, y) \preceq_2 (x', y')$ если выполняется хотя бы одно из неравенств $x \leq x'$ и $y \leq y'$;
$(x, y) \preceq_3 (x', y')$ если $\max(x, y) \leq \min(x', y')$;
$(x, y) \preceq_4 (x', y')$ если $x + y \leq x' + y'$;
$(x, y) \preceq_5 (x', y')$ если $x < x'$, или $x = x'$, но $y < y'$, или же $x = x'$ и $y = y'$.

Задача 2. Сколько различных отношений частичного порядка можно ввести на множестве из трех элементов ? Нарисуйте их диаграммы Хассе.

Задача 3. Приведите три примера бинарных операций, каждая из которых удовлетворяет двум перечисленным условиям и не удовлетворяет третьему. Условия: коммутативность; ассоциативность; существование нейтрального элемента.

Задача 4. Пусть R — отношение эквивалентности на множестве X. Классом эквивалентности элемента $a \in X$ называется множество $\{x \in X, \quad xRa\}$. Покажите, что любые два класса эквивалентности либо не пересекаюся, либо совпадают, и что тем самым отношение эквивалентности R задает представление множества X в виде объединения его непересекающихся подмножеств (классов эквивалентности). Множество классов эквивалентности называется фактор-множеством и обозначается X/R. Покажите что, наоборот, любое представление множества X в виде объединения его непересекающихся подмножеств задает отношение эквивалентности на X, определяемое тем, что два элемента множества X эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же подмножестве разбиения.

Задача 5. Пусть $f : X \to Y$ некоторое отображение. Введем на X отношение R так: aRb, если $f(a) = f(b)$. Докажите, что R является отношением эквивалентности, и установите биекцию между X/R и образом $f(X)$ отображения f.

Задача 6. Пусть на множестве X задана бинарная операция $*$ и отношение эквивалентности $\sim$. Говорят, что операция $*$ *согласована* с отношением эквивалентности $\sim$, если из $a \sim a'$ и $b \sim b'$ следует, что $a * a' \sim b * b'$. Покажите, что тогда на фактор-множестве $X/\sim$ можно определить бинарную операцию $\bar{*}$ следующим образом: если $A \subset X$ и $B \subset X$ — два класса эквивалентности, то $A \bar{*} B$ это класс эквивалентности, содержащий $a * b$, где a — какой-нибудь элемент класса A, а b — какой-нибудь элемент класса B. Покажите, что если операция $*$ была коммутативной, ассоциативной или обладала нейтральным элементом, то тем же свойством будет обладать и операция $\bar{*}$ на $X/\sim$. Приведите два примера таких операций.

Задача 7. Зададим отношение "$\sim$"на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ следующим образом: $(a, b) \sim (a', b')$ если $a + b' = a' + b$. Докажите, что это отношение эквивалентности. Опишите фактор-множество. Докажите, что операция покоординатного сложения на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ согласована с этим отношением эквивалентности. Покажите, что определенная в соответствии с задачей 6 операция сложения на фактор-множестве $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/ \sim$ коммутативна, ассоциативна, обладает нейтральным элементом, и любой класс обладает противоположным. Опишите это фактор-множество.

Задача 8. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Введем на множестве $\mathbb{Z}$ отношение *сравнимости по модулю n*: $x \equiv y \mod n$ если $x - y$ делится на n. Покажите, что операции сложения и умножения на $\mathbb{Z}$ согласованы с этим отношением эквивалентности. Это фактор-множество с введенными операциями сложения и умножения обозначается $\mathbb{Z}_n$.

Задача 9. Докажите, что на $\mathbb{Z}_n$ нельзя ввести никакого нетривиального отношения частичного порядка, с которым была бы согласована операция сложения на $\mathbb{Z}_n$, то есть такого, что из $a \leq b$ следует, что $a + c \leq b + c$ для любого $c \in \mathbb{Z}_n$.

Задача 10. Введем на множестве векторов в трехмерном пространстве отношение эквивалентности следующим образом: два вектора эквивалентны, если их разность параллельна оси OZ. Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности и операция сложения векторов согласована с этим отношением эквивалентности. Установите биекцию между фактор-множеством и множеством векторов плоскости.

Задача 11. Изменим отношение эквивалентности из предыдущей задачи следующим образом: пусть теперь два вектора эквивалентны, если их разность параллельна плоскости XOY. Докажите, что операция сложения векторов согласована с этим отношением эквивалентности. Дайте описание фактор-множества, аналогичное приведенному в предыдущей задаче.

Задача 12. Пусть $f : X \to X$ некоторое отображение. Рассмотрим на X следующее отношение: xRy, если для некоторого $k \geq 0$ $y = f^k(x)$.
а) * Докажите, что если R является отношением эквивалентности, то f биекция. Верно ли обратное? Если нет, найдите и докажите достаточное условие.
б) * Докажите, что если R является отношением частичного порядка, то $\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(X) = \varnothing$. Верно ли обратное? Если нет, найдите и докажите достаточное условие.

Задача 13. Пусть X, Y некоторые множества. Введем отношение на множестве отображений Y^X следующим образом: если $f, g \in Y^X$, то fRg, если существуют такие две биекции $\varphi : X \to X$ и $\psi : Y \to Y$, что $\psi \circ f = g \circ \varphi$. Докажите, что это отношение эквивалентности. Покажите, что все отображения, у которых $f(X)$ состоит из одного элемента, эквивалентны. Опишите классы эквивалентности тех отображений f, у которых $|f(X)| = 2$. Сколько их, если X конечно и состоит из n элементов?

Задача 14. На множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел введем отношение эквивалентности $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Z}$. Обозначим соответствующее фактормножество $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Постройте биекцию между $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и окружностью $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Отождествите функции на S^1 с периодическими функциями на $\mathbb{R}$.

Композицией отношений $R_1 \in M \times N$ и $R_2 \in N \times P$ называется отношение $R_1 \circ R_2 \in M \times P$ такое, что $(x, y) \in R_1 \circ R_2$ если $\exists z \in N$, такое что $(x, z) \in R_1$ и $(z, y) \in R_2$.

Задача 15. * Отношение $\Gamma_1 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - транспонированное к графику функции $x = 2\cos\varphi$: $\Gamma_1 = \{(2\cos\varphi, \varphi) | \varphi \in \mathbb{R}\}$, отношение $\Gamma_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - график функции

$y = 3\sin\varphi$: $\Gamma_2 = \{(\varphi, 3\sin\varphi,)|\varphi \in \mathbb{R}\}$. Вычислите композицию $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ и опишите ее как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача 16. * Граф называется связным, если из любой вершины можно пройти в любую. Ребро графа называется *мостом*, если после удаления этого ребра граф перестает быть связным. Назовем две вершины эквивалентными, если из одной можно пройти в другую, не проходя по мостам. Докажите, что это отношение эквивалентности. Докажите, что если в графе k мостов, то классов зквивалентности будет ровно $k+1$. Докажите, что если из графа удалить все мосты, то каждый класс эквивалентности будет связным графом.

Задача 17. ** Пусть граф не имеет мостов. Назовем ребро такого графа *рокадой*, если при его удалении в графе появляется мост. Введем на множестве всех рокад данного графа отношение эквивалентности следующим образом: каждая рокада эквивалентна самой себе, а две различные рокады эквивалентны, если при их удалении граф становится несвязным. Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности. Приведите примеры графов с как угодно большими классами эквивалентности и любым наперед заданным числом классов эквивлентности. Докажите, что при удалении рокад из одного класса эквивалентности число связных компонент получившегося графа рано числу удаленных рокад.

Листок 4

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два, с двумя - за три). Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X + 6 - 2N + k$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на семинаре задач,

Задача 1. Докажите счетность множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Придумайте формулу, задающую соответствующую биекцию с множеством натуральных чисел.

Задача 2. Какова мощность множества всех прямых на плоскости?

Задача 3. Докажите счетность

a) множества всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$

b) множества периодических с некоторого места последовательностей натуральных чисел

Задача 4. Покажите, что множество всех действительных алгебраических чисел (т.е., множество действительных корней многочленов с рациональными коэффициентами) счетно, а множество трансцендентных чисел имеет мощность континуум.

Задача 5. Покажите, что

a) объединение счетного числа континуальных множеств

b) множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел

c) множество отображений $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

d) множество всех счетных подмножеств $\mathbb{R}$

все имеют мощность континуум.

Задача 6. Имеют ли мощность континуума множества

a) всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) * биективных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

c) * непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Задача 7. * Если квадрат разбит на две части, то хотя бы одна из них имеет мощноссть континуум.

Задача 8. * Покажите, что множества $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ и $2^{\mathbb{R}}$ равномощны.

Задача 9. Рассмотрим все множества, являющиеся подмножествами некоторого множества X. Покажите, что:

a) отношение: равномощности (т.е. $M \sim N$, если существует биекция $f : M \to N$) является отношением эквивалентности на 2^X. Классы эквивалентности называются мощностями множеств;

b) отношение $M \prec N$, если существует инъекция $f : M \to N$, не является отношением частичного порядка на 2^X;

c) отношение $\prec$ согласовано с отношением $\sim$ и определяет на множестве классов эквивалентности отношение $\bar{\prec}$, которое уже является отношением частичного порядка.

Задача 10. Сформулируйте и докажите теорему Кантора-Бернштейна

Задача 11. Докажите теорему Кантора в общей формулировке: мощность множества 2^M всех подмножеств любого множества M больше (см. задачу 9) мощности множества M.

Задача 12. ** Пусть M - замкнутое множество на прямой без изолированных точек. Тогда оно имеет мощность континуум.

Листок 5

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два, с двумя - за три). Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X + 8 - 2N + 2k$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на сеинаре задач.

Задача 1. Изоморфны ли следующие упорядоченные множества:

a) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$?
b) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$?
c) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$?

Задача 2. Пусть X - вполне упорядоченное множество. Тогда

a) X содержит минимальный элемент
b) для всякого $x \in X$, кроме максимального, есть непосредственно следующий за ним (но не обязательно есть предыдущий)
c) любое ограниченое сверху множество элементов имеет точную верхнюю грань

Задача 3. Пусть M и N - два линейно упорядоченных множества. Тогда на их произведении $M \times N$ можно определить два естественных порядка: "покоординатный": $(x, y) \leq (x', y')$, если $x \leq x'$ и $y \leq y'$ и "лексикографический": $(x, y) \leq (x', y')$ если $x < x'$ (т.е., $x \leq x'$ и $x \neq x'$) либо $x = x'$ и $y \leq y'$.

a) Убедитесь, что это порядки, один из которых линеен, а другой нет, один согласован с проекциями на сомножители (т.е., проекции являются гомоморфизмами упорядоченных множеств), а другой нет.
b) Для порядка на плоскости $\mathbb{R}^2$, построенного лексикографически из стандартных порядков на $\mathbb{R}$, нарисуйте множество всех таких точек $p \in \mathbb{R}^2$, что $(1, 2) \leq p \leq (2, 1)$.

Задача 4. Пусть M - конечное множество с m элементами. Установите изоморфизм между следующими упорядоченныйми множествами: множеством $P(M)$ всех подмножеств множества M и последовательностями нулей и единиц длины m с покомпонентным порядком.

Задача 5. Рассмотрим финитные последовательности натуральных чисел, т.е., последовательности, все члены которых, за исключением конечного числа, равны нулю. Порядок - покомпонентное сравнение. Докажите, что это частично упорядоченное множество изоморфно множеству натуральных чисел с отношением делимости.

Задача 6. a) Рассмотрим множество 2^M всех подмножеств конечного множества M, $|M| = m$. Порядок - включение подмножеств. Сколько автоморфизмов у этого множества?
b) Покажите, что у множества $\mathbb{N}$, упорядоченного по отношению делимости, континуум автоморфизмов

Задача 7. Два различных элемента x и y линейно упорядоченного множества X называются соседними, если не существует такого $z \in X$ что либо $x < z < y$, либо $y < z < x$. Линейно упорядоченное множество X называется плотным, если в нем нет соседних элементов. Докажите, что всякое плотное линейно счетное упорядоченное множество без максимального и минимального элементов изоморфно $\mathbb{Q}$.

Задача 8. Сформулируйте лемму Цорна, аксиому выбора и теорему Цермело, определив при этом все необходимые для формулировок понятия.

Задача 9. Выведите из леммы Цорна следующие утверждения:

a) * всякий частичный порядок может быть продолжен до линейного
b) * у любой сюръекции есть левый обратный;
c) * в любом линейном пространстве существует максимальное подпространство, не содержащее данный вектор;
d) * на любом линейном пространстве существует линейная функция, равная нулю на одном наперед заданном векторе и единице на втором;
e) * любые два множества сравнимы по мощности.

Задача 10. Выведите из леммы Цорна

a) * аксиому выбора
b) * теорему Цермело