Лекция 12. Теорема Лиувилля

Теория функций комплексного переменного

Глоссарий

- Изолированная особенность.
- Устранимая особенность.
- Полюс.
- Простой полюс.
- Существенная особенность.

Изолированная особенность в точке ∞

Определение 7.21. Пусть f — функция, голоморфная в проколотой окрестности бесконечности. Говорят, что f *имеет в бесконечности устранимую особенность* (*полюс*, *существенную особенность* соответственно), если такого же типа особенность имеет в нуле функция $t \mapsto f(1/t)$.

Определение 7.22. *Правильной частью* ряда Лорана функции, голоморфной в проколотой окрестности бесконечности, называется сумма его членов с *неположительными* степенями переменной. *Главной частью* ряда Лорана функции, голоморфной в проколотой окрестности бесконечности, называется сумма его членов с *положительными* степенями переменной.

Теорема Лиувилля

Предложение 7.24 (теорема Лиувилля)**.** *Если f — целая функция и $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \to \infty$ для некоторого $N > 0$, то f — многочлен степени не выше N.*

Напомним, что в данном случае $|f(z)| = O(|z|^N)$ означает, что существуют такие $C > 0$ и $M > 0$, что $|f(z)| \leqslant C|z|^N$ при $|z| \geqslant M$.

Доказательство. Из условия и предложения 7.12 (а также его доказательства) явствует, что главная часть ряда Лорана функции $t \mapsto f(1/t)$ содержит лишь слагаемые со степенью t не ниже $-N$, так что степенной ряд для $z \mapsto f(z)$ содержит лишь слагаемые, в которые z входит со степенью не выше N. Это и означает, что f — многочлен степени не выше N. $\square$

Жозеф Лиувилль (1809 – 1882)

- Член Парижской академии наук, член-корреспондент Петербургской академии наук, член Лондонского королевского общества.
- Занимался вопросами разрешимости в элементарных функциях и в квадратурах. Поверхность и сеть Лиувилля, числа Лиувилля, дробный интеграл Лиувилля, теорема Лиувилля-Арнольда, ...

Частный случай теоремы Лиувилля

Теорема. *Голоморфная на всем $\mathbb{C}$ ограниченная функция постоянна.*

Несколько вариантов доказательства:

- Применить теорему об устранимой особенности к $f\left(\frac{1}{z}\right)$.
- Воспользоваться неравенствами Коши $|c_n| \leqslant \dfrac{\sup\limits_{z\in D}|f(z)|}{R^n}$.

Мероморфные функции

Определение 7.26. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. *Мероморфной функцией* на U называется голоморфная функция $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$, где $S \subset U$ — подмножество, не имеющее в U предельных точек, обладающее следующим свойством: в каждой точке $s \in S$ функция f имеет полюс или устранимую особенность.

Предложение 7.27. *Если $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество, а f и g — голоморфные функции на U, не являющиеся тождественным нулем, то отношение f/g является мероморфной функцией на U.*

Мероморфные функции на сфере

Определение 7.28. Функция, *мероморфная в бесконечности*, — это функция, голоморфная в некоторой проколотой окрестности бесконечности и имеющая в бесконечности полюс (в смысле определения 7.21).

В заключение этой главы опишем функции, мероморфные на всей сфере Римана.

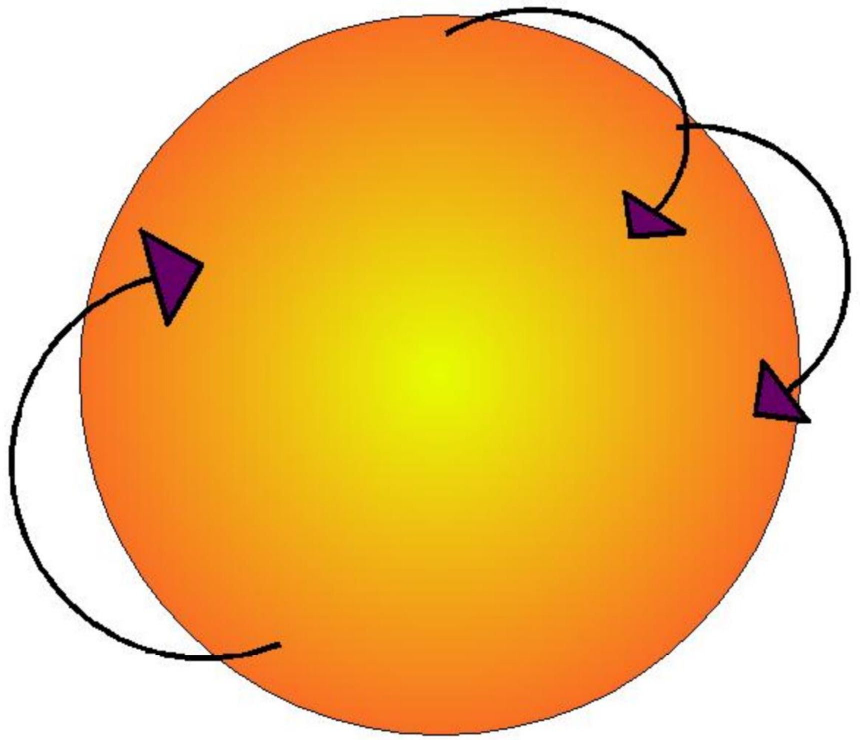
Предложение 7.29. *Функции, мероморфные на всей сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, суть рациональные функции и только они.*

Идея доказательства предложения 7.29

- Пусть $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ – мероморфная (в т.ч. в точке ∞) функция.
- Вычтем из f главные части во всех полюсах (в т.ч. в ∞).
- Останется функция g только с устранимыми особенностями.
- Такая функция постоянна по теореме Лиувилля.
- Т.о. $f =$ константа + главные части в полюсах (сразу получаем разложение f в простейшие дроби).

Что такое рациональная функция над $\mathbb{C}$

- Отношение двух многочленов с комплексными коэффициентами.
- Элемент расширения $\mathbb{C}(x)$, полученного присоединением к полю $\mathbb{C}$ трансцендентного элемента x.
- Мероморфная функция $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.
- Голоморфное отображение из сферы Римана в себя.



В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ