2к Мат. Анализ. Семинар №11

Комплексные евклидовые пр-ва

Пусть E - комплексное линейное пр-во, т.е. над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Нельзя ввести скалярное произведение (комплексное) с сохранением всех свойств: положительность, линейность, однородность и симметричность:

Пусть $x, y \in E$, $(x, y) \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Рассмотрим $(\lambda x, \lambda x) = \lambda(x, \lambda x) = \lambda^2 (x, x)$.

Выберем $\lambda = i$, $i^2 = -1$ $(ix, ix) = (-1)(x, x)$

Числа (ix, ix) и $(\ \ )$ не могут быть одновременно положительными!

Аксиомы комплексного евклидова пр-ва

(эрмитово пр-во, эрмитово скалярное произведение) $\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$.

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $\forall x, y \in E$

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,

3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

4) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Из 1) и 3) следует, что

$$(x,\lambda y)=\overline{(\lambda y, x)}=\overline{\lambda (y,x)}=\bar\lambda\,\overline{(y,x)}=$$
$$=\bar\lambda (x,y).$$

Примеры эрмитовых пространств

<u>Пример 1</u>. Пр-во $\mathbb{C}^n=\{(x_1,\dots,x_n),\ x_k\in\mathbb{C}\}$

Скалярное произведение:

$x=(x_1,\dots x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}.$$

Все конечномерные эрмитовы пр-ва размерности n изоморфны между собой, $\mathbb{C}^n$

Бесконечномерные пр-ва.

<u>Пример 2</u>. Комплексное пр-во $\ell_2=$
$=\{(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots),\ x_k\in\mathbb{C}\ \ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty$

Скалярное произведение:

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}.$$

(Ряд сходится абсолютно)

<u>Пример 3</u>. Комплексное пр-во $C_2[a,b]$, состоящее из комплексно-значных функций, непрерывных на $[a,b]$

$$(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Почти все понятия, свойства, теоремы переносятся на эрмитовы пр-ва:

Понятие нормы: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Нер-во Коши-Буняковского

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in E$$

Причем $(x,y) = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow x$ и y - коллин.

Отличие: Нет понятия угла, т.к. (x,y) - комплексное число.

Все остальное есть!

Ортогональность: $x \perp y \Leftrightarrow (x,y) = 0$.

Задача 1. $x \perp y \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 + |\beta|^2 \|y\|^2.$$

Решение:

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha(x, \alpha x + \beta y) + \beta(y, \alpha x + \beta y) = \alpha \cdot \bar{\alpha}(x,x) + \alpha \cdot \bar{\beta}(x,y) + \beta\bar{\alpha}(y,x) + \beta\bar{\beta}(y,y) = |\alpha|^2 \|x\|^2 + |\beta|^2 \cdot \|y\|^2 + \alpha \cdot \bar{\beta}(x,y) + \beta \cdot \bar{\alpha}\,\overline{(x,y)}$$

Если $x \perp y$, т.е. $(x, y) = 0 \Rightarrow$

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 + |\beta|^2 \|y\|^2$$

Обратно: пусть выполнено $\uparrow$, тогда

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \alpha \bar{\beta} (x, y) = -\beta \bar{\alpha} \overline{(x, y)}$

Выберем $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow (x, y) = -\overline{(x, y)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(x, y) = 0.$

Выберем $\alpha = 1, \beta = i \quad -i(x, y) = -i\overline{(x, y)}$

т.е. $(x, y) = \overline{(x, y)} \Rightarrow \operatorname{Im}(x, y) = 0$

Значит $(x, y) = 0$

Задача 2. Теорема Пифагора

Если $x_1, \dots, x_n$ – ортогональны, $x_k \perp x_j$.

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

(можно с множ. $\alpha_k x_k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$).

Решение: очевидно

Ортогонализация: $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$

(линейно независимы)

Строим: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$

(ортонормальные).

$\varphi_1 = f_1$. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — построены.

Тогда $\varphi_{n+1} = f_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(f_{n+1}, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k$.

Достаточно проверить, что $\varphi_{n+1} \perp \varphi_j$:

$$(\varphi_{n+1}, \varphi_j) = (f_{n+1}, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f_{n+1}, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} (\varphi_k, \varphi_j) =$$

$$= (f_{n+1}, \varphi_j) - (f_{n+1}, \varphi_j) = 0.$$

Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система. $f \in E$. Коэффициенты Фурье: $c_n = (f, \varphi_n)$.

Рассмотрим: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$

$$r_n = f - S_n.$$

<u>Задача 3</u> а) $r_n \perp S_n$

б) $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \|r_n\|^2$

<u>Решение</u>: а) Проверить, что (r_n, φ_j), $j = 1, \dots, n$

$$(r_n, \varphi_j) = (f - S_n, \varphi_j) = \Big(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, \varphi_j\Big) =$$

$$= (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{n} c_k (\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0$$

б) $r_n \perp S_n$. По теореме Пифагора

$$\|S_n + r_n\|^2 = \|S_n\|^2 + \|r_n\|^2$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \|r_n\|^2.$$

<u>Задача 4.</u> (Неравенство Бесселя)

$\{\varphi_n\}$ - ортонормированная

$$\forall f \in E \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|f\|^2.$$

<u>Задача 5.</u> Коэффициенты Фурье $c_k = (f, \varphi_k)$ $k = 1, .., n$. Обеспечивают наилучшее приближение функции f суммами вида $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$

т.е. $\forall \alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \ne (c_1, .., c_n)$

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \varphi_k\|^2 > \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \varphi_k\|^2$$

Решение: $\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\|^2 =$

$$= (f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k) = \|f\|^2 - (f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k) -$$

$$- (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f) + (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k) =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}(f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_k, f) + \Big\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \Big\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \cdot c_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{c_k} + \sum |\alpha_k|^2$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(|c_k|^2 - \overline{\alpha_k} \cdot c_k - \alpha_k \cdot \overline{c_k} + |\alpha_k|^2 \right)$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \alpha_k|^2$$

Итог:

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \Big\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \alpha_k|^2$$

Если $\alpha_k = c_k$, $k = 1, \dots, n$, то

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \Big\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$ — минимальное значение для расстояния.

Определение: Ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ в E есть базис, если

$$\overline{\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} = E.$$

Задача 6. $\{\varphi_n\}$ – есть базис в E $\Leftrightarrow$ $\forall f \in E$ $\quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$, $c_k = (f, \varphi_k)$.
(Равенство Парсеваля)

Решение: совпадает с вещественным случаем. (См. Задачу 5)

Задача 7. Пусть $\{\varphi_n\}$ – базис в E.
Тогда $\forall f, g \in E$

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}, \quad a_k = (f, \varphi_k), \ b_k = (g, \varphi_k)$$

Решение: В вещественном случае тождество

$$(f,g) = \frac{1}{2}\left(\|f\|^2 + \|g\|^2 - \|f-g\|^2\right)$$

Рассмотрим в комплексном случае. Справа

$$\|f-g\|^2 = (f-g, f-g) = (f,f) - (g,f) - (f,g) + (g,g)$$

$$(g,f) + (f,g) = \overline{(f,g)} + (f,g) \neq 2(f,g)$$

$(f,g) = \alpha + i\beta$, $\overline{(f,g)} = \alpha - i\beta$, Равно $2\,\mathrm{Re}\,(f,g)$

Нужно другое тождество

Задача 8. Поляризационное тождество

$$(f,g) = \frac{1}{4}\left\{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2\right\}$$

Решение: $(f,g) = \alpha + i\beta, \quad \overline{(f,g)} = \alpha - i\beta$

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + (f,g) + (g,f)$$

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - (f,g) - (g,f)$$

$$\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 = 2(f,g) + 2(g,f) = 2\left((f,g) + (g,f)\right)$$

$$= 2\left((f,g) + \overline{(f,g)}\right) = 4\alpha = 4\,\mathrm{Re}\,(f,g).$$

Подставим вместо $g \to ig$.

$$\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2 = 2(f,ig) + 2(ig,f) =$$

$$= 2i\left(-(f,g) + \overline{(f,g)}\right) = 2i(-i\beta - i\beta) = 4\beta =$$

$$= 4\,\mathrm{Im}\,(f,g).$$

Следовательно:

$$\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\left(\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2\right) = 4(\alpha + i\beta) =$$

$$= 4\left(\mathrm{Re}(f,g) + i\,\mathrm{Im}(f,g)\right) = 4(f,g)$$

Воспользуемся поляризационным тождеством в задаче 7

$f \to a_k = (f, \varphi_k), \quad g \to b_k = (g, \varphi_k).$

$f+g \to a_k + b_k, \quad f-g \to a_k - b_k$

$f+ig \to a_k + i b_k, \quad f-ig \to a_k - i b_k.$

Тогда $(f,g) = \frac{1}{4}\left\{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2\right\} =$

$$=\frac{1}{4}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|a_k+b_k|^2-\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-b_k|^2+i\sum_{k=1}^{\infty}|a_k+ib_k|^2-i\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-ib_k|^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k+b_k|^2-|a_k-b_k|^2+i|a_k+ib_k|^2-i|a_k-ib_k|^2=$$

Для комплексных чисел поляризационное тождество выполнено (т.к. $\mathbb{C}$ — эрм. пр-во)

$$|a+b|^2-|a-b|^2+i|a+ib|^2-i|a-ib|^2=4a\cdot\overline{b}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}4\cdot a_k\overline{b_k}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\overline{b_k}$$

Поляризационное тождество можно записать в следующем виде:

$$(f,g)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}i^k\|f+i^k g\|^2$$

<u>Обобщение</u> тождества:

<u>Задача 9</u> Доказать

a) $$(f,g)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{\frac{2\pi ik}{N}}\cdot\|f+e^{\frac{2\pi ik}{N}}g\|^2,\quad N\geq 3.$$

Здесь $\varepsilon_k=e^{\frac{2\pi ik}{N}}$ — это корни из 1 N-степени

$\varepsilon_k^N=1$, $k=0,1,\dots,N-1$, $(N=4:\ \{1,i,-1,-i\})$

б) $$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f+e^{it}g\|^2\cdot e^{it}\,dt$$

(Домашнее задание)

Полное комплексное пространство называется комплексным гильбертовым пространством.

Задача 10 (Теорема Рисса–Фишера)
Пусть H – комплексное гильб. пр-во. Числа $\{c_k\}$ – являются коэффициентами Фурье вектора $f \in H \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$

Точнее: $\exists!\ f \in H: \ c_k = (f, \varphi_k), \ \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$

Док-во: полностью аналогично случаю $\mathbb{R}$.

Вводится понятие изоморфизма.

Задача 11. Любые два сепарабельных комплексных гильберт. пр-ва изоморфны между собой и изоморфны пр-ву l_2.

Док-во: как и в действительном случае через равенство Парсеваля:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$$

$$f \leftrightarrow \{c_k\}, \quad c_k = (f, \varphi_k), \ k = 1, \dots$$