

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 8

Цифры Вашего кода — a_0, \dots, a_9 . В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_7 + a_9$. Функция f определена и голоморфна на некоторой проколотой окрестности точки 0. Докажите или опровергните следующие утверждения. Можно пользоваться утверждениями из учебника, снабжая их точными ссылками.

(0) Если f имеет полюс или устранимую особенность в точке 0, то $f(z) = z^{\text{ordo}(f)} g(z)$, причем g имеет устранимую особенность в точке 0.

(1) Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка z , такая, что $|z| < \varepsilon$ и $|f(z)| > e^{\frac{1}{|z|}}$, то 0 является существенной особой точкой для f .

(2) Если $|f(z)| < \frac{|\log |z||}{|z|}$ для всех z из достаточно малой проколотой окрестности точки 0, то 0 является полюсом для f порядка не выше 1.

(3) Если $|f(z)| \leq |z|^{4/3}$ для всех достаточно маленьких $z \neq 0$, то $|f(z)| \leq |z|^{5/3}$ для всех достаточно маленьких $z \neq 0$.

(4) Если f имеет полюс в 0, то $f(z) = g(z) + P(1/z)$, где P — это многочлен, а g — голоморфная функция в (заполненной) окрестности точки 0.

(5) Если f является суммой рациональной и целой функций, то f имеет в 0 полюс или устранимую особенность.

(6) Если 0 является существенной особенностью функции f , то $|f(z_n)| < |z_n|^{2021}$ для некоторой последовательности $z_n \rightarrow 0$.

(7) Если 0 является существенной особенностью функции f , то $|f(z_n)| > |z_n|^{-2021}$ для некоторой последовательности $z_n \rightarrow 0$.

(8) Если 0 является существенной особенностью функции f , то $|f(z_n)| < e^{-1/|z_n|}$ для некоторой последовательности $z_n \rightarrow 0$.

(9) Если f является отношением двух целых функций, то f не может иметь существенную особенность в 0.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_5$. Для следующих аналитических функций найдите все нули и их кратности. Также, найдите все особенности и определите их тип (устраняемая особенность, полюс, существенная особенность, неизоллированная особенность). Для тех особенностей, которые являются полюсами, найдите порядок полюса.

(0) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

(1) $f(z) = z \sin z$.

(2) $f(z) = (\sin z)^3$.

(3) $f(z) = \operatorname{tg}(z^3)$.

(4) $f(z) = \frac{1}{z(z^2-4)^2}$.

(5) $f(z) = \frac{z}{\sin(z^2)}$.

(6) $f(z) = e^{\operatorname{tg} z}$.

(7) $f(z) = e^{\frac{1}{\sin(1/z)}}$.

(8) $f(z) = \frac{\sin z}{2 - \cos z}$.

(9) $f(z) = \frac{1}{\sin z + \cos z}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_6$. Найдите ряд Лорана для указанной ниже функции f в указанном кольце A .

(0) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

(1) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$.

(2) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

(3) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

(4) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < \infty\}$.

(5) $f(z) = \frac{z}{1+z^3}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$.

(6) $f(z) = \cos \frac{1}{z}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$.

(7) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

(8) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$.

(9) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6 + a_7$. Для каждой из следующих функций найдите ее вычеты во всех изолированных особенностях.

(0) $f(z) = \operatorname{tg} z$.

(1) $f(z) = \frac{1}{z^3+z}$.

(2) $f(z) = \frac{e^z}{z^2-4}$.

(3) $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z+1}$.

(4) $f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}$.

(5) $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$.

(6) $f(z) = \frac{1}{z^3+z^2}$.

(7) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2-1)^2}$.

(8) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}$.

(9) $f(z) = \frac{1}{z(\sin z)^2}$.

5. **Бонусная задача.** Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_6$.

(0) Упражнение 7.7 (a) на странице 117 основного учебника.

(1) Упражнение 7.7 (b) на странице 117 основного учебника.

(2) Упражнение 7.9 на странице 118 основного учебника.

(3) Упражнение 7.10 на странице 118 основного учебника.

(4) Упражнение 7.11 на странице 118 основного учебника.

(5) Упражнение 7.12 на странице 118 основного учебника.

(6) Упражнение 8.3 на странице 145 основного учебника.

(7) Упражнение 8.4 на странице 145 основного учебника.

(8) Упражнение 8.5 на странице 145 основного учебника.

(9) Упражнение 8.6 на странице 145 основного учебника.