Мат. Анализ. Семинар № 28.

Подготовка к к. р. № 2.

Задача 1. В области $Q=\{0<x<\pi, 0<y<\pi, 0<t<\infty\}$

Решить задачу:

$$u_{tt}-\Delta u=\boxed{3\sin 2t \sin x \cos \frac{y}{2}} \quad f(x,y,t)$$

$$u\big|_{t=0}=\boxed{0}_{\varphi(x,y)}; \quad u_t\big|_{t=0}=\boxed{6\sin 2x \cos\frac{3y}{2}}_{\psi(x,y)}$$

$$u\big|_{x=0}=u_{x=\pi}=0; \quad u_y\big|_{y=0}=u\big|_{y=\pi}=0.$$

Решение: Решаем отдельно однородную $(\psi\neq 0)$ $(f=0)$ и неоднородную задачу:

① Однородная задача. Метод разделения переменных: $u_0(x,y,t)=v(x,y)\cdot T(t)$

Подставим:

$$T''(t)+\lambda T(t)=0$$

$$v_{xx}+v_{yy}+\lambda v=0$$

$$v\big|_{x=0}=v\big|_{x=\pi}=0; \quad v_y\big|_{y=0}=v\big|_{y=\pi}=0.$$

Опять разделим переменные: $\lambda=\mu+\nu$

$$v(x,y)=X(x)\cdot Y(y),$$

Получим:

$X''(x)+\mu X(x)=0$	$Y''(y)+\nu Y(y)=0$
$X\big|_{x=0}=X\big|_{x=\pi}=0$	$Y_y\big|_{y=0}=Y\big|_{y=0}=0.$

<u>Получаем</u>: $\mu_n = n^2$, $X_n(x) = \sin nx$

$\nu_m = \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2$, $Y_m(y) = \cos \frac{2m-1}{2} y$

$\boxed{\lambda_{n,m} = n^2 + \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2,}$ $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$.

$v_{n,m}(x,y) = \sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y$

$$T''_{n,m}(t) + \lambda_{n,m} \cdot T_{n,m}(t) = 0$$

$$T_{n,m}(t) = A_{n,m} \cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t + B_{n,m} \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t$$

Общее решение однородного уравнения:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1,\, m=1}^{\infty,\infty} \left(A_{n,m} \cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t + B_{n,m} \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t\right) \times$$
$$\times \sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y$$

$A_{n,m}$ – коэф. фурье $\varphi(x,y)$ по $\sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y$

$B_{n,m}$ – коэф. фурье $\psi(x,y)$ по $\sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y$, <u>деленный</u> на $\sqrt{\lambda_{n,m}}$

$$A_{n,m} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi(x,y) \sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y \, dx\, dy$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\pi \psi(x,y) \sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y \, dx\, dy.$$

В нашем случае: $\varphi(x,y) \equiv 0 \Rightarrow A_{n,m} = 0 \; \forall n,m$

$\psi(x,y) = 6 \sin 2x \cos \frac{3y}{2}$. $\quad \frac{2m-1}{2} = \frac{3}{2}$

т.е. Все $B_{n,m}$ были нули, кроме $n=2,\ m=2$

т.е. $B_{2,2} = 6$. $\quad \lambda_{2,2} = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$

$\sqrt{\lambda_{2,2}} = \frac{5}{2}$.

Решение однородного уравнения:

$$u_0(x,y,t) = B_{22} \cdot \sin \sqrt{\lambda_{2,2}}\, t \cdot \sin 2x \cdot \cos \frac{3y}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{6 \cdot 2}{5} \sin\left(\frac{5}{2} t\right) \cdot \sin 2x \cdot \cos \frac{3y}{2}}.$$

---

② Решаем неоднородную задачу

$$u_{tt} = \Delta u + \underline{f(x,y,t)}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi} = 0$$

где $f(x,y,t) = 3 \sin 2t \sin x \cdot \cos \frac{y}{2}$

Раскладываем $f(x,y,t)$ в ряд Фурье по $\sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y$

$$f(x,y,t) = \underbrace{3 \sin 2t}_{f_{1,1}(t)} \cdot \left(\sin x \cdot \cos \frac{y}{2}\right) \quad n=1 \quad m=1$$

Остальные нулевые

Пусть $f(x,y,t) = \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m}(t) \sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y$

Тогда решение $u_1(x,y,t)$ ищем в виде ряда: $u_1(x,y,t)=\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} p_{n,m}(t)\cdot\sin nx\cdot\cos\frac{2m-1}{2}y$

Подставляем в уравнение и находим ур. для $p_{n,m}(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} &p''_{n,m}(t)+\lambda_{n,m}\,p_{n,m}(t)=f_{n,m}(t)\\ &p_{n,m}(0)=0,\quad p'_{n,m}(0)=0.\end{aligned}}$$

Решение имеет вид:

$$\boxed{p_{n,m}(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,m}}}\int\limits_0^t \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,(t-s)\,f_{n,m}(s)\,ds}$$

В нашем случае, только для $\boxed{n=1,\ m=1}$

$$\lambda_{1,1}=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\qquad \sqrt{\lambda_{1,1}}=\frac{\sqrt5}{2}$$

$$p_{1,1}=\frac{2}{\sqrt5}\int\limits_0^t \sin\frac{\sqrt5}{2}(t-s)\cdot 3\cdot\sin(2s)\,ds=$$

Необходимо посчитать этот интеграл.

$$=\frac{6}{\sqrt5}\int\limits_0^t\left(\sin\frac{\sqrt5}{2}t\cdot\cos\frac{\sqrt5}{2}s-\cos\frac{\sqrt5}{2}t\cdot\sin\frac{\sqrt5}{2}s\right)\sin(2s)\,ds=$$

$$=\frac{6}{\sqrt5}\left(\sin\frac{\sqrt5}{2}t\int\limits_0^t\cos\frac{\sqrt5}{2}s\cdot\sin 2s\,ds-\cos\frac{\sqrt5}{2}t\int\limits_0^t\sin\frac{\sqrt5}{2}s\cdot\sin 2s\,ds\right)$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5}}\left(\frac{8}{11}\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t - \frac{2\sqrt{5}}{11}\sin 2t\right)$$

Решение неоднородной задачи:

$$u_1(x,y,t) = \frac{6}{\sqrt{5}}\left(\frac{8}{11}\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t - \frac{2\sqrt{5}}{11}\sin 2t\right)\sin x\cdot\cos\frac{y}{2}$$

<u>Ответ:</u> $u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + u_1(x,y,t) =$

$$= \frac{12}{5}\sin\frac{5t}{2}\sin 2x\cdot\cos\frac{3y}{2} + \frac{6}{\sqrt{5}}\left(\frac{8}{11}\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t - \frac{2\sqrt{5}}{11}\sin 2t\right)\sin x\cdot\cos\frac{y}{2}$$

Можно проверить подстановкой

<u>Задача 2.</u> Записать решение задачи:

$$u_{tt} = \Delta u + 3\sin 2t\cdot f(x,y)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u|_{x=0} = 0 & u|_{x=\pi} = 0 \\ u_y|_{y=0} = 0 & u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$

Решается аналогично 2-й части задачи 1. Граничные условия одни и те же. Следовательно решение имеет следующий вид

Пусть $f(x,y) = \sum\limits_{n,m} f_{n,m} \cdot \sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y$

где $f_{n,m} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int\limits_0^\pi f(x,y) \cdot \sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y \, dx dy$

коэффициенты Фурье $f(x,y)$ по этой системе

Решение задачи ищем в виде

$$(1) \quad u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} p_{n,m}(t) \cdot \sin nx \cdot \cos \frac{2m-1}{2} y$$

$f(x,y,t) = 3 \sin 2t \cdot f(x,y)$.

подставляем в уравнение, получаем:

$$\begin{cases} p''_{n,m}(t) + \lambda_{n,m} \, p(t) = 3 \sin 2t \cdot f_{n,m} \\ p_{n,m}(0) = 0, \quad p'_{n,m}(0) = 0 \end{cases}$$

Решение: $p_{n,m}(t) = \frac{f_{n,m}}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \int\limits_0^t \sin \sqrt{\lambda_{n,m}}(t-s) \, 3 \sin(2s) \, ds$

Необходимо посчитать этот интеграл. (см. стр. 7)

$$= \frac{3 f_{n,m}}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \left(\frac{2 \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} \, t - \sqrt{\lambda_{n,m}} \sin 2t}{(2 - \sqrt{\lambda_{n,m}})(2 + \sqrt{\lambda_{n,m}})} \right) \quad (2)$$

где $\lambda_{n,m} = n^2 + \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \quad (\neq 2)$.

$$\int_0^t \sin\alpha(t-s)\cdot\sin(\beta s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\left(\alpha(t-s)-\beta s\right) - \cos\left(\alpha(t-s)+\beta s\right) ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\left(\alpha t-(\alpha+\beta)s\right) - \cos\left(\alpha t+(\beta-\alpha)s\right) ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\sin\left(\alpha t-(\alpha+\beta)s\right)}{\alpha+\beta}\Bigg|_0^t - \frac{\sin\left(\alpha t+(\beta-\alpha)s\right)}{\beta-\alpha}\Bigg|_0^t \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(+\frac{\sin\beta t+\sin\alpha t}{\alpha+\beta} - \frac{\sin\beta t-\sin\alpha t}{\beta-\alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\alpha t\cdot\left(\frac{1}{\beta-\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}\right) - \sin\beta t\left(-\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta-\alpha}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha\cdot t)\cdot\frac{\alpha+\beta+\beta-\alpha}{(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)} - \sin\beta t\cdot\frac{-\beta+\alpha+\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)} \right) =$$

$$= \frac{\beta\sin\alpha t-\alpha\sin\beta t}{(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)}.$$

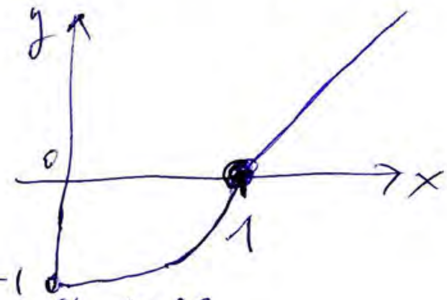
Получили формулу решения:
Ответ: Подставить (2) в (1).

Еще вопрос: определяет ли эта формула обобщенное решение уравнения? Ответ: определяет, т.к. $f(x,y) \in L_2\left((0,\pi)^2\right)$ и, следовательно ряд: $\sum_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m} \sin nx \cdot \cos\frac{2m-1}{2} y$ сходится в $L_2(0,\pi)^2$. Но тогда и ряд (1) тоже сходится в $L_2(0,\pi)^2$ т.к. $|p_{n,m}| \le C\,|f_{n,m}|$.

Поэтому, этот ряд сходится в пространстве обобщенных функций. Операция дифференцирования непрерывна в пр-ве обобщенных функций. Значит, предельная функция удовлетворяет уравнению.

Задача 3. В пространстве обобщенных функций найти первую и вторую производные для

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x<1 \\ 5 & x=1 \\ x-1, & x>0. \end{cases}$$



Решение: f – кусочно непрерывная функция.

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{1}(x^2-1)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{1}^{\infty}(x-1)\,\varphi'(x)\,dx =$$

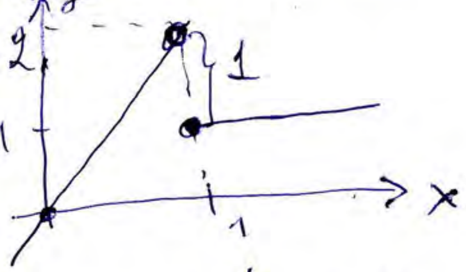
$$\boxed{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^{\infty}(\mathbb{R})}$$

$$= -\underbrace{(x^2-1)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{1}}_{=0} + \int_{-\infty}^{1} 2x\,\varphi(x)\,dx - \underbrace{(x-1)\varphi(x)\Big|_{1}^{+\infty}}_{=0} + \int_{1}^{\infty} 1\cdot\varphi(x)\,dx =$$

$\varphi(-\infty)=0$ $\qquad$ $\varphi(+\infty)=0$

$$= \int_{-\infty}^{1} 2x\,\varphi(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} 1\cdot\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

где
$$g(x) = \begin{cases} 2x, & x<1 \\ 1 & x>1. \end{cases}$$



Следовательно $\quad f'(x) = g(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Найдем вторую производную, т.е. $g'(x)$.

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{1} 2x\,\varphi'(x)\,dx - \int_{1}^{\infty} 1\cdot\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -2x\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{1} + \int_{-\infty}^{1} 2\varphi(x)\,dx - 1\varphi(x)\Big|_{1}^{+\infty} =$$

$\varphi(-\infty)=0$ $\qquad$ $\varphi(+\infty)=0$

$$= -2\varphi(1) + \int_{-\infty}^{1} 2\varphi(x)\,dx + \varphi(1) = \int_{-\infty}^{1} 2\varphi(x)\,dx - \varphi(1) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)\,dx - \langle \delta(x-1), \varphi \rangle;$$ $\boxed{\delta(x-1) \text{ – сдвиг } \delta(x)}$

где $$h(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

<u>Следовательно</u>: $f''(x) = h(x) - \delta(x-1)$.

Регулярность: $f'(x)$ – регулярная

$f''(x)$ – не регулярная

Задача 4. В области $Q = \{0<x<\pi,\ 0<t<\infty\}$ решить задачу:

$$u_t = 4u_{xx} + t\,e^{-t}\sin\frac{5x}{2}, \quad u(t,0) = u_x(t,\pi) = 0$$

$$u(0,x) = \sin\frac{x}{2}\cos x \boxed{= \varphi(x)} \text{ нач. усл.}$$

Решение: Обозначим $\boxed{f(x,t) = t e^{-t}\sin\frac{5x}{2}}$ правая часть.

Решаем отдельно однородную задачу ($f(x,t)=0$) и неоднородную задачу ($\varphi(x)=0,\ f\neq 0$).

(1) Однородная задача:

Зад. Штурма-Лиувилля: $-X'' = \lambda X$; $X(0) = X'(\pi) = 0$

Имеет решен.: $\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$, $X_n(x) = \sin\frac{2n-1}{2}x$.

Общее решение однородн. задачи:

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-4\lambda_n t} \cdot X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-4(n-\frac{1}{2})^2 t} \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x$$

где C_n - коэфф. Фурье функции $\varphi(x)$.

В нашем случае

$$\varphi(x) = \sin\frac{x}{2}\cdot\cos x = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)$$

т.е. $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_n = 0 \ \forall\, n \geq 2$

Решение однородной:

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2} e^{-t} \cdot \sin\frac{x}{2} + \frac{1}{9} e^{-9t} \sin\frac{3x}{2}$$

Неоднородная задача ($\varphi = 0,\ f \neq 0$).

Разложим $f(x,t)$ в ряд Фурье по $X_n(x)$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x$$

В нашем случае $f(x,t) = t e^{-t} \sin\frac{5x}{2}$

т.е. $f_3(t) = t \cdot e^{-t}$, $f_n(t) \equiv 0 \ \forall n \neq 3$.

Ищем решение в виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \cdot X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x$$

Подставляем в уравнение:

$$p_n'(t) = -4\lambda_n p(t) + f_n(t), \quad p_n(0) = 0.$$

Решение: $p_n(t) = \int_0^t e^{-4\lambda_n(t-s)} f_n(s)\, ds$

В нашем случае $f_n \neq 0$ только при $n = 3$

т.е. $p_n(t) \equiv 0 \ \forall n \neq 3$. Найдем $p_3(t)$.

$$p_3(t) = \int_0^t e^{-25(t-s)} \cdot s\, e^{-s}\, ds =$$

$$= e^{-25t}\int_0^t s\cdot e^{24s}\,ds = e^{-25t}\left(\frac{1}{24}te^{24t} - \frac{1}{(24)^2}e^{24t} + \frac{1}{(24)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{24}t\cdot e^{-t} - \frac{1}{(24)^2}\cdot e^{-t} + \frac{1}{(24)^2}\cdot e^{-25t}$$

Следовательно,

$$u_1(x,t) = \left(\frac{te^{-t}}{24} - \frac{e^{-t}}{24^2} + \frac{e^{-25t}}{(24)^2}\right)\cdot \sin\frac{5x}{2}.$$

Ответ: $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) =$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}e^{-9t}\sin\frac{3x}{2} + \left(\frac{te^{-t}}{24} - \frac{e^{-t}}{24^2} + \frac{e^{-25t}}{24^2}\right)\sin\frac{5x}{2}$$