Домашнее задание 7

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_2 + a_8 + 1$. Допускает ли росток, заданный в точке 0 указанным степенным рядом $s(z)$, аналитическое продолжение вдоль указанной кривой $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Строго обоснуйте ответ.

(0) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $\gamma(t) = -t$.

(1) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{1/2}{k}$, $\gamma(t) = -2t$.

(2) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $\gamma(t) = t$.

(3) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k$, $\gamma(t) = -t$.

(4) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k$, $\gamma(t) = t$.

(5) $s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, $\gamma(t) = t$.

(6) $s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, $\gamma(t) = -t$.

(7) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{1/2}{k}$, $\gamma(t) = -t + it^2$.

(8) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{4k}$, $\gamma(t) = \frac{i}{2}(1 - e^{\pi i t})$.

(9) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}$, $\gamma(t) = t$.

Напомним, что $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ при $k > 0$ и $\binom{\alpha}{0} = 1$, если $\alpha \neq 0$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_7 + 1$. Докажите или опровергните существование и единственность ростка аналитической функции $f(z)$ в точке $z = 0$, удовлетворяющего указанным условиям. (Для решения этой задачи *не требуется* знакомства с теорией дифференциальных уравнений).

(0) $f(z)^2 = 1 + z$, $f(0) = -1$.

(1) $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$.

(2) $f'(z) = f(z) + e^z - 1$, $f(0) = 1$.

(3) $zf'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$.

(4) $zf'(z) = f(z)$, $f(0) = 0$.

(5) $f''(z) = f(z)$, $f(0) = 0$.

(6) $z^2 f''(z) + z f'(z) = 4z^2 f(z),\ f(0) = 1.$

(7) $f''(z) = f(z),\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0.$

(8) $z^2 f''(z) + z f'(z) + z^2 f(z) = 0,\ f(0) = 1.$

(9) $(1 - z^2) f''(z) - z f'(z) + m^2 f(z) = 0,\ f(0) = 1,\ f'(0) = im.$
Здесь m — целое число.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_2 + a_6 + 1$. Росток функции $w(z)$ в точке $\gamma(0)$ (для указанного пути $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$) задан выписанными ниже неявным уравнением на функцию w и ее значением $w(\gamma(0))$. Найдите значение $w(\gamma(1))$.

(0) $w^2 = z^2 + 9$, $w(4) = 5$, $\gamma(t) = 4e^{\pi i t}$.

(1) $w^2 = z^2 + 9$, $w(4) = 5$, $\gamma(t) = 4e^{-\pi i t}$.

(2) $w^2 = z^2 + 9$, $w(4) = 5$, $\gamma(t) = 4(1 - 2t)$.

(3) $e^w = z$, $w(1) = 0$, $\gamma(t) = e^{6\pi i t}$.

(4) $\sin w = z$, $w(0) = 0$, $\gamma(t) = 1 - e^{2\pi i t}$.

(5) $\cos w = z$, $w(0) = \pi/2$, $\gamma(t) = \frac{\pi}{2} e^{\pi i t}$.

(6) $w^3 = z^2$, $w(1) = 1$, $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$.

(7) $w^2 = 6z(z^2 - 1)$, $w(2) = 6$, $\gamma(t) = \frac{3 + 5e^{2\pi i t}}{4}$.

(8) $w^2 = z^2$, $w(1) = -1$, $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$.

(9) $w = z + w^2$, $w(1) = 0$, $\gamma(t) = e^{3\pi i t}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_7 + 1$. Для указанного ниже ростка аналитической функции f в указанной точке a найдите радиус сходимости степенного ряда для f с центром в a, не вычисляя коэффициенты этого ряда.

(0) $f(z) = \sqrt{\cos z},\ a = 0,\ f(a) = 1.$

(1) $f(z) = e^{\sin z}$, $a = \pi$.

(2) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$, $a = 0$.

(3) $f(z) = \sqrt{z(z^2 - 1)(z^2 - 4)},\ a = i,\ f(a) = \sqrt{5}(1 + i).$

(4) $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 1)},\ a = i,\ f(a) = \frac{i}{2}.$

(5) $f(z) = \log z$, $a = 1 + i$, $\mathrm{Im}(f(a)) \in [0, 2\pi)$.

(6) $f(z) = \log(\log z),\ a = 3,\ f(a) > 0.$

(7) $f(z) = e^{1/z}$, $a = 1 + i$.

(8) $f(z) = \arcsin(z)$, $a = 0$, $f(a) = 0$.

(9) $f(z) = \frac{1}{\log z}$, $a = 2$, $f(a) > 0$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_4 + 1$.

(0) Упражнение 6.4 на страницах 101–102 основного учебника.
(1) Упражнение 6.5 на странице 102 основного учебника.
(2) Упражнение 6.6 на странице 102 основного учебника.
(3) Упражнение 6.7 на странице 102 основного учебника.
(4) Упражнение 6.8 на странице 102 основного учебника.
(5) Упражнение 6.9 на странице 102 основного учебника.
(6) Упражнение 5.18 на странице 82 основного учебника.
(7) Рассмотрим аналитическую функцию, заданную в диске $\mathbb{D}(0,1)$ с центром в 0 и радиусом 1 сходящимся рядом

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}.$$

Докажите, что f не продолжается аналитически ни в какую точку вне диска $\mathbb{D}(0,1)$.

(8) Рассмотрим непрерывную функцию $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$, где $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}(0,1)$ — единичная окружность. Последовательность многочленов $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, равномерно сходящаяся к f на $\mathbb{S}$, существует тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $F : \overline{\mathbb{D}}(0,1) \to \mathbb{C}$ такая, что $F|_{\mathbb{S}} = f$ и $F : \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ голоморфна. Докажите это утверждение.

(9) Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, такое, что пара точек $\{1, -1\}$ лежит в одной и той же компоненте множества $\mathbb{C} \setminus U$. Докажите, что на U существует однозначная аналитическая ветвь функции $\sqrt{z^2 - 1}$, то есть такая голоморфная функция $f : U \to \mathbb{C}$, что $f(z)^2 = z^2 - 1$.