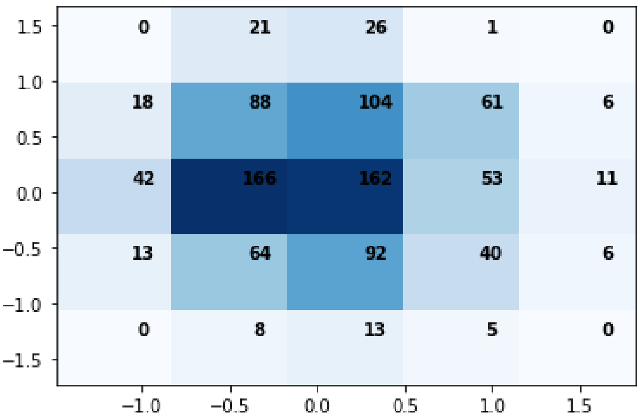
Контрольная работа (A 1 2 d a)

Задача 1

Гистограмма:



так как $n = 1000$, то $k = \frac{1000^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{10}{2} = 5$
Проверим методом χ^2 гипотезу независимости компонент двумерного случайного вектора (для этого используем scipy.stats.chi2_contrengency), получим:

p-value: 0.0013793302370199627

То есть p_value < 0.05

Проверим гипотезы
Спирмен (используя scipy.stats.spearmanr):

coef = -0.031749308225547585
p-value = 0.3158616269449295

Пирсон (используя scipy.stats.pearsonr):

coef = -0.03618320814722287
p-value = 0.2529735138640905

Задача 2

Проверми КС-методом гипотезу о совпадении законов распределения компонент вектора (используя scipy.stats.ks_2samp), получим:

Ks_2sampResult(statistic=0.06, pvalue=0.05462666510701526)

Так как pvalue > 0.05, то законы не совпадают, но, что видно из значения, довольно близки

Распределение модулей похоже на полунормальное распределение (так как является модулем нормального с $\sigma \approx 0.56$), соответственно плотность функции распределения будет

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{0.56\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot 0.56^2}\right), & \text{если } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Задача 3d

Произведение плотностей точек $x_1, \ldots, x_n$ это $\frac{1}{\Gamma^n(r)} \cdot (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{r-1} \cdot e^{b(x_1+\ldots+x_n)} \cdot b^{rn}$. Производная по b это $(nr - (x_1 + \ldots + x_n)b)e^{-(x_1+\ldots+x_n)b} \cdot b^{nr-1}$, ее нули расположены в 0 и $\frac{rn}{x_1+\ldots+x_n}$, тогда максимум функции правдоподобия достигается при $b = \frac{rn}{x_1+\ldots+x_n}$

Задача 4а

Смесь плотностей имеет вид $\omega(\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}} v(\alpha, \theta)u(\theta)d\theta$ и $A|\Theta \sim \mathcal{U}(0; \Theta),\ \Theta \sim \mathcal{U}(0; 1)$, тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} v_{A|\Theta}(\alpha, \theta)u_{\Theta}(\theta)d\theta = \left(\int\limits_0^{\alpha} 0 d\theta + \int\limits_{\alpha}^{1} \frac{1}{\theta} d\theta\right) \cdot 1_{0<\alpha<1} = -\ln(\alpha) \cdot 1_{0<\alpha<1}$$

То есть $w(x) = -\ln(x) \cdot 1_{0<x<1}$

ipynb с кодом