Логика и алгоритмы, весна 2019.
Задачи для семинара N 2.

В задачах 1,2 рассматриваются сигнатуры с равенством и нормальные модели.

1. Опишите все автоморфизмы следующих моделей:

   (a) $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$,
   (b) $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$,
   (c) $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}})$,
   (d) $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}})$,
   (e) $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$,
   (f) (V, E), где V — множество вершин правильного n-угольника, $E(x, y)$ верно тогда и только тогда, когда x и y соединены ребром.

2. Докажите, что следующие предикаты не определимы в следующих моделях:

   (a) предикаты «$x = 1$» и «$x = y + z$» в модели $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$ сигнатуры $\{<, =\}$;
   (b) предикаты «$x = 1$» и «$x < y$» в модели $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}})$ сигнатуры $\{+, =\}$;
   (c) предикат «$x = \frac{1}{2}$» в модели $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ сигнатуры $\{<, 0, 1, =\}$;
   (d) предикат «$x < y$» в модели $(\mathbb{N}, \vdots)$ ($\vdots$ означает делимость) сигнатуры $\{P^2, =\}$.

Выводимость в исчислении предикатов

Исчисление предикатов PC_{Ω}

I. 10 схем аксиом исчисления высказываний CL (где A, B, C — формулы сигнатуры Ω).

II. предикатные аксиомы

1. $\forall x[x/a]A \to [t/a]A$.
2. $[t/a]A \to \exists x\, [x/a]A$.
3. $\forall x[x/a](A \to B) \to (A \to \forall x[x/a]B)$.
4. $\forall x[x/a](B \to A) \to (\exists x\, [x/a]B \to A)$.

(A, B — формулы, t — терм, a — свободная переменная, x — связанная переменная; $[t/a]A$ получается из A заменой всех вхождений a на t)

(ограничения: переменная x не должна входить в A и B; в аксиомах 3, 4 переменная a не должна входить в A).

III (правила вывода).

Modus Ponens (MP)

$$\vdash A,\ A \to B\ \Rightarrow \vdash B,$$

Gen (правило обобщения)

$$\vdash A\ \Rightarrow \vdash \forall x[x/a]A.$$

(x не входит в A)

3. Если $\Gamma, A \vdash B$ то $\Gamma, \exists x[x/a]A \vdash B$.

4. Докажите выводимость следующих формул:

   (a) $\forall x[x/a]A \to A$;

   (b) $A \to \exists x[x/a]A$;

   (c) $\forall x[x/a]A \to \exists x[x/a]A$;

   (d) $\forall x[x/a](A \to B) \to (\forall x[x/a]A \to \forall x[x/a]B)$;

   (e) $\forall x P(x) \to \forall y P(y)$ (P — одноместный предикатный символ);

   (f) $\forall x[x/a](A \to B) \to (\exists x[x/a]A \to \exists x[x/a]B)$;

   (g) $\exists x[x/a]A \vee \exists x[x/a]B \leftrightarrow \exists x[x/a](A \vee B)$;

   (h) $\neg\exists x[x/a]A \to \forall x\neg[x/a]A$;

   (i) $\forall x\neg[x/a]A \to \neg\exists x[x/a]A$;

   (j) $\exists x\neg[x/a]A \to \neg\forall x[x/a]A$;

   (k) $\neg\forall x[x/a]A \to \exists x\neg[x/a]A$.

5. Используя теорему корректности (все теоремы общезначимы), докажите, что следующие формулы не выводимы в исчислении предикатов:

   (a) $\forall y\exists x R(x,y) \to \exists x\forall y R(x,y)$;

   (b) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$;

   (c) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.

6. (Euler's problem) 36 офицеров шести рангов из шести полков (по шесть офицеров шести разных рангов из каждого полка) требуется расположить в квадратном строю так. чтобы ни в одной шеренге и ни в одной колонне не было офицеров одного ранга из одного полка. Сформулируйте эту проблему как вопрос о выполнимости некоторой теории первого порядка в подходящей сигнатуре. (Отвечать на этот вопрос по существу не нужно.)