Линейная алгебра и геометрия
первое полугодие 1 курса
Задачи

А.Л. Городенцев

16 декабря 2019 г.

Содержание

1 Аффинная плоскость 4
1.1 ГЛ1 1 . . . 4
1.2 ГЛ1 2 . . . 5
1.3 ГЛ1 3 . . . 6
1.4 ГЛ1 4 . . . 6
1.5 ГЛ1 5 . . . 7
1.6 ГЛ1 6 . . . 7
1.7 ГЛ1 7 . . . 8
1.8 ГЛ1 8 . . . 8
1.9 ГЛ1 9 . . . 8

2 Группа движений евклидовой плоскости 10
2.1 ГЛ2 1 . . . 10
2.2 ГЛ2 2 . . . 10
2.3 ГЛ2 3 . . . 10
2.4 ГЛ2 4 . . . 10
2.5 ГЛ2 5 . . . 10
2.6 ГЛ2 6 . . . 11
2.7 ГЛ2 7 . . . 11
2.8 ГЛ2 8 . . . 11
2.9 ГЛ2 9 . . . 11

3 Многомерие 12
3.1 ГЛ3 1 . . . 12
3.2 ГЛ3 2 . . . 12
3.3 ГЛ3 3 . . . 12
3.4 ГЛ3 4 . . . 13
3.5 ГЛ3 5 . . . 13
3.6 ГЛ3 6 . . . 13
3.7 ГЛ3 7 . . . 13
3.8 ГЛ3 8 . . . 14
3.9 ГЛ3 9 . . . 14

4 Линейные отображения и матрицы 15
4.1 ГЛ4 1 . . . 15
4.2 ГЛ4 2 . . . 15
4.3 ГЛ4 3 . . . 15
4.4 ГЛ4 4 . . . 15
4.5 ГЛ4 5 . . . 15
4.6 ГЛ4 6 . . . 16
4.7 ГЛ4 7 . . . 16
4.8 ГЛ4 8 . . . 16
4.9 ГЛ4 9 . . . 16
4.10 ГЛ4 10 . . . 17
4.11 ГЛ4 11* . . . 17
4.12 ГЛ4 12* . . . 17

5 Грассмановы многочлены и определители 18
5.1 ГЛ5 1 . . . 18
5.2 ГЛ5 2* . . . 18
5.3 ГЛ5 3 . . . 18
5.4 ГЛ5 4 . . . 18
5.5 ГЛ5 5 . . . 18
5.6 ГЛ5 6* . . . 19
5.7 ГЛ5 7 . . . 19
5.8 ГЛ5 8 . . . 20
5.9 ГЛ5 9 . . . 20
5.10 ГЛ5 10* . . . 21
5.11 ГЛ5 11 . . . 21
5.12 ГЛ5 12* . . . 21

6 Линейные операторы на конечномерном пространстве 22
6.1 ГЛ6 1 . . . 22
6.2 ГЛ6 2 . . . 22
6.3 ГЛ6 3 . . . 22
6.4 ГЛ6 4 . . . 22
6.5 ГЛ6 5 . . . 22
6.6 ГЛ6 6 . . . 22
6.7 ГЛ6 7 . . . 22
6.8 ГЛ6 8 . . . 22
6.9 ГЛ6 9 . . . 22
6.10 ГЛ6 10 . . . 22
6.11 ГЛ6 11 . . . 22

7 Евклидова геометрия 23
7.1 ГЛ7 1 . . . 23
7.2 ГЛ7 2 . . . 23
7.3 ГЛ7 3 . . . 23
7.4 ГЛ7 4 . . . 23
7.5 ГЛ7 5* . . . 23
7.6 ГЛ7 6 . . . 23
7.7 ГЛ7 7 . . . 23
7.8 ГЛ7 8 . . . 24

1 Аффинная плоскость

1.1 ГЛ1 1

А)
Пусть точки трапеции A, B, C, D, где $AD \parallel BD$. Рассмотрим базис, начало которого A, базис-векторы AB и AD.
Тогда точки имеют координаты

$$A = (0,0)$$
$$B = (1,0)$$
$$C = (1,\alpha)$$
$$D = (0,1)$$

Откуда
AB:

$$\det\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x\cdot 0 + y\cdot 1 = 0$$

CD:

$$\det\begin{pmatrix}1 & x\\ \alpha-1 & y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha-1 & 1\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow y - x\cdot\alpha + x = 1$$
$$\Leftrightarrow x\cdot(1-\alpha) + y\cdot 1 = 0$$

$$AB\cap CD : x\cdot 0 + y\cdot 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{\alpha-1} \quad y = 0$$
$$x\cdot(1-\alpha) + y\cdot 1 = 0$$
$$\Rightarrow$$

AC:

$$\det\begin{pmatrix}1 & x\\ \alpha & y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x\cdot(-\alpha) + y\cdot 1 = 0$$

BD:

$$\det\begin{pmatrix}1 & x\\ -1 & y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow x\cdot 1 + y\cdot 1 = 1$$

$$AC\cap BD : x\cdot(-\alpha) + y\cdot 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\alpha+1} \quad y = \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

$$x\cdot 1 + y\cdot 1 = 1 \Rightarrow$$
$$M_1 : (0;\frac{1}{2})$$
$$M_2 : (1;\frac{\alpha}{2})$$
$$M_1M_2 :$$
$$\det\begin{pmatrix}1 & x\\ \frac{\alpha-1}{2} & y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\alpha-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad x\cdot(\frac{1-\alpha}{2}) + y = \frac{1}{2}$$

Заметим что $AB\cap CD$ и $AC\cap BD$ принадлежат этой прямой

$$\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1-\alpha}{2} + 0 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1-\alpha}{2} + \frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{1}{2}$$

Б)

Пусть дан четырёхугольник $ABCD$, середины AC и BD - M_1 и M_2 соотв. Рассмотрим базис, центр которого A, базисные вектора AB и AD. Тогда координаты точек

$$A : (0; 0),$$
$$B : (1; 0),$$
$$C : (\alpha; \beta)$$
$$D : (0; 1)$$
$$M_1 : (\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2})$$
$$M_2 : (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

Далее прямые -

$$AB :$$
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \cdot 0 + y \cdot 1 = 0$$

$$CD :$$
$$\det \begin{pmatrix} \alpha & x \\ \beta - 1 & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta - 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x \cdot (\beta - 1) + y \cdot \alpha = \alpha$$

$$AB \cap CD : \begin{cases} x \cdot 0 + y \cdot 1 = 0 \\ -x \cdot (\beta - 1) + y \cdot \alpha = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow y = 0; x = -\frac{\alpha}{\beta - 1}$$

Аналогично

$$AD :$$
$$\det \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \cdot (-1) + y \cdot 0 = 0$$

$$BC : \det \begin{pmatrix} \alpha - 1 & x \\ \beta & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x \cdot (\beta) + y \cdot (\alpha - 1) = -\beta$$

$$AD \cap BC : \begin{cases} -x \cdot 1 + y \cdot 0 = 0 \\ -x \cdot \beta + y \cdot (\alpha - 1) = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{\beta}{\alpha - 1} \quad x = 0$$

Таким образом середина $AB \cap CD$ и $AC \cap BD$, точка M имеет координаты M: $(-\frac{\alpha}{2 \cdot (\beta-1)}; -\frac{\beta}{2 \cdot (\alpha-1)})$

Покажем что M_1, M_2 и M лежат на одной прямой .
M_1M_2 :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\alpha-1}{2} & x \\ \frac{\beta-1}{2} & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\alpha-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\beta-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x \cdot \frac{\beta - 1}{2} + y \cdot \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{\alpha - 1}{4} - \frac{\beta - 1}{4}$$

Подставив в это выражение координаты точки M получим

$$-(-\frac{\alpha}{2 \cdot (\beta - 1)}) \cdot \frac{\beta - 1}{2} + (-\frac{\beta}{2 \cdot (\alpha - 1)}) \cdot \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{\alpha - 1}{4} - \frac{\beta - 1}{4}$$

1.2 ГЛ1 2

Предположим q составное, то есть существует такие a и b, что $a, b \neq 0$ и $ab = q$. Тогда для точек $(0, 0)$ и $(0, a)$ верно, что через них проходят 2 прямые, а именно с векторами (0,1) и $(b, 1)$, при этом очевидно, что эти прямые не совпадают. Из этого следует, что при составном q, F_q не является аффинной плоскостью, поэтому q простое. Заметим, что каждая прямая содержит ровно q точек, так как каждой прямой можно сопоставить вектор $\overrightarrow{v}$, который в ней содержится и рассмотреть точки $a_1, a_2, ..., a_q$, где a_1 - случайная точка на прямой, остальные a задаются рекуррентно: $a_x = a_{x-1} + \overrightarrow{v}$. Очевидно, что $a_1 = a_{q+1}$, так как $\overrightarrow{v} q = (0, 0)$, при этом если есть точка b, принадлежащая прямой и не являющаяся одной из $a_1, a_2, ..., a_q$, то $\overrightarrow{v}$ пропорционален $b - a_1 \Rightarrow \overrightarrow{v} k_1 + (b - a_1) \cdot k_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v} \frac{-k_1}{k_2} = (b - a_1)$, при этом $\frac{-k_1}{k_2}$ однозначно определена на F_q при простом $q \Rightarrow b$ принадлежит множеству $a_n \Rightarrow$ на каждой прямой q точек $\Rightarrow$ всего прямых $= \frac{q^2(q^2-1)}{q(q-1)} = q \cdot (q + 1)$

1.3 ГЛ1 3

Обозначим через z_1 , z_2 , ... , z_m вершины ломаной, где s_1 лежит между z_1 и z_2, ... , s_m лежит между z_m и z_1.
Заметим, что

$$x_n = 2 \cdot s_n - x_{n-1}$$

Где $x_i = \overrightarrow{x_i x_0}$, $s_i = \overrightarrow{s_i x_0}$, $z_i = \overrightarrow{z_i x_0}$
Откуда

$$x_m = 2 \cdot s_m - x_{m-1}$$
$$x_m = 2 \cdot s_m - (2 \cdot s_{m-1} - x_{m-2}) = 2 \cdot (s_m - s_{m-1}) + x_{m-2}$$
$$...$$
$$x_m = 2 \cdot (s_m - s_{m-1}+, ..., +s_1) - x_0$$

Заметим, что $s_i = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}$ (i рассматривается по $\mod m$) из чего получаем, что

$$2 \cdot (s_m - s_{m-1}+, ..., +s_1) - x_0 =$$
$$(z_1 + z_m) - (z_m + z_{m-1}) + (z_{m-1} + z_{m-2})-, ..., +(z_2 + z_1) - x_0 =$$
$$z_1 \cdot 2 - x_0 = x_m$$

Из чего очевидно, что середина $x_0 x_m$, т.е. z_1 является вершиной ломаной.

1.4 ГЛ1 4

Да, так как барицентр каждой из групп точек P и Q (точки p_i и q_j) обладает свойством

$$\sum_i \overrightarrow{c_p p_i} \cdot \mu_i = 0$$
$$\sum_j \overrightarrow{c_q q_j} \cdot v_j = 0$$

В то время как барицентр c_p и c_q с весами $\sum \mu_i = P$ и $\sum v_j = Q$ соответственно, причем $|P|, |Q| > 0$. Пусть c - такая точка, что

$$\overrightarrow{cc_p} \cdot P + \overrightarrow{cc_q} \cdot Q = 0$$

При этом для каждого p_i верно, что

$$\overrightarrow{cc_p} + \overrightarrow{c_p p_i} = \overrightarrow{cp_i}$$

Из чего следует, что сложив выражения $\sum_i \overrightarrow{c_p p_i} \cdot \mu_i = 0$, $\sum_j \overrightarrow{c_q q_j} \cdot v_j = 0$ и $\overrightarrow{cc_p} \cdot P + \overrightarrow{cc_q} \cdot Q = 0$, получается

$$\left(\sum_i \overrightarrow{c_p p_i} \cdot \mu_i + \overrightarrow{cc_p} \cdot P\right) + \left(\sum_j \overrightarrow{c_q q_j} \cdot v_j + \overrightarrow{cc_q} \cdot Q\right) = 0$$

Что равносильно

$$\sum_i \overrightarrow{cp_i} \cdot \mu_i + \sum_j \overrightarrow{cq_j} \cdot v_j = 0$$

Из чего следует то, что c является барицентром всей системы.

1.5 ГЛ1 5

Докажем, что возможность расставить массы α, β и γ равносильна тому, что a_1, b_1 и c_1 являются основаниями чевиан.

1. (Массы $\Rightarrow$ Чевианы)
Возможность расставить массы означает, что центр масс находится на прямых aa_1, bb_1 и cc_1, из чего следует пересечение этих прямых в одной точке.

2. (Чевианы $\Rightarrow$ Массы)
Если прямые пересекаются в одной точке, то точку пересечения можно выбрать как центр масс.

1)
Теперь заметим, что если можно расставить массы, то можно рассмотреть отношение, в котором барицентры сторон делят стороны:

$$\alpha_b : \alpha_c = \beta : \gamma$$
$$\beta_c : \beta_a = \gamma : \alpha$$
$$\gamma_a : \gamma_b = \alpha : \beta$$

И тогда $\frac{\alpha_b \cdot \beta_c \cdot \gamma_a}{\alpha_c \cdot \beta_a \cdot \gamma_b} = \frac{\beta \cdot \gamma \cdot \alpha}{\gamma \cdot \alpha \cdot \beta} = 1$
Т.е. aa_1, bb_1, cc_1 это чевианы
2)
В свою очередь, если равенство$\left(\frac{\alpha_b \cdot \beta_c \cdot \gamma_a}{\alpha_c \cdot \beta_a \cdot \gamma_b} = 1\right)$ верно, то можно расставить массы γ_a, γ_b и $\frac{\alpha_b \cdot \gamma_a}{\alpha_c}$ так, что:
c_1 является барицентром A и B ($\gamma_a : \gamma_b = \gamma_a : \gamma_b$);
a_1 является барицентром B и C ($\frac{\alpha_b \cdot \gamma_a}{\alpha_c} : \gamma_a = \alpha_b : \alpha_c$);
b_1 является барицентром A и C ($\frac{\alpha_b \cdot \gamma_a}{\alpha_c} : \gamma_b = \beta_a : \beta_c$);

1.6 ГЛ1 6

Заметим, что барицентрические координаты точек

$a_1(0\ ;-|\overrightarrow{a_1c}|;|\overrightarrow{a_1b}|\ )$
$b_1\,(|\overrightarrow{b_1c}|\ ;0\ ;-|\overrightarrow{b_1a}|)$
$c_1\,(-|\overrightarrow{c_1b}|\ ;|\overrightarrow{c_1a}|\ ;0\ )$

Заметим, что если $a_1b_1c_1$ - прямая $\Leftrightarrow$
c_1 представимо в виде линейной комбинации точек a_1 и b_1 $\Leftrightarrow$

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot b_1 = c_1 \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{b_1c} \cdot x_2 = -\overrightarrow{c_1b} \Leftrightarrow$$

$$x_2 = -\frac{\overrightarrow{c_1b}}{\overrightarrow{b_1c}}\overrightarrow{c_1a} = -\overrightarrow{a_1c} \cdot x_1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -\frac{\overrightarrow{c_1a}}{\overrightarrow{a_1c}}\overrightarrow{a_1b} \cdot x_1 - \overrightarrow{b_1a} \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{a_1b} \cdot x_1 = \overrightarrow{b_1a} \cdot x_2 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{a_1b} \cdot \overrightarrow{c_1a} \cdot \overrightarrow{b_1c} = \overrightarrow{a_1c} \cdot \overrightarrow{c_1b} \cdot \overrightarrow{b_1a} \Leftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{a_1b} : \overrightarrow{a_1c}) \cdot (\overrightarrow{c_1a} : \overrightarrow{c_1b}) \cdot (\overrightarrow{b_1c} : \overrightarrow{b_1a}) = 1$$

что и требовалось доказать

1.7 ГЛ1 7

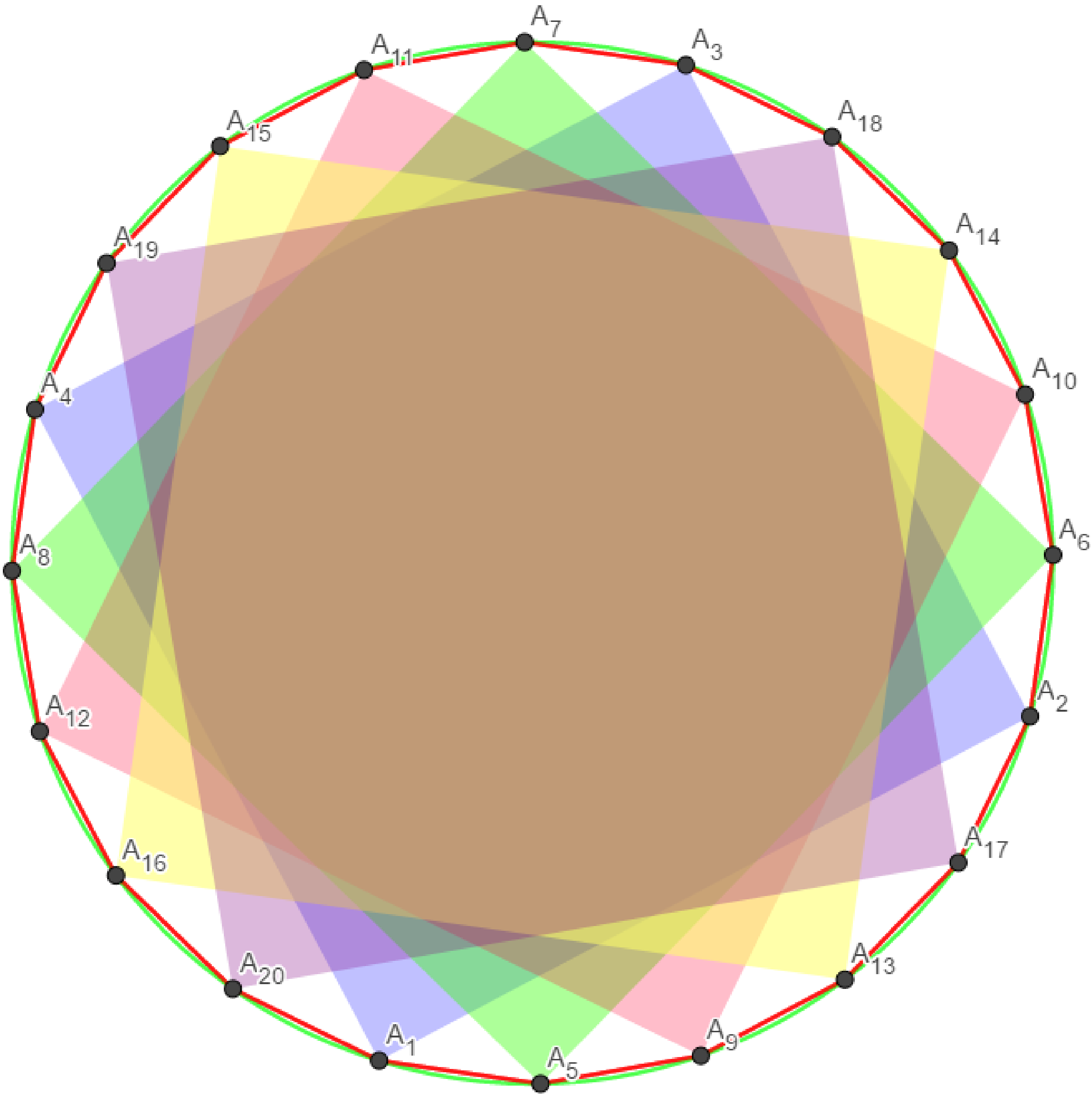
А)
Заметим, что если один четырёхугольник перешёл в другой, то отношение отрезков на диагоналях сохраняется, образ пересечения диагоналей это пересечение диагоналей образного четырёхугольника. При этом, если 2 четырёхугольника $ABCD$ и $EFGH$ имеют одинаковое отношение отрезков на диагоналях ($\frac{AO}{AC} = \frac{EU}{EG} = \alpha$; $\frac{BO}{BD} = \frac{FU}{FH} = \beta$), то можно перевести один в другой аффинным преобразованием, а именно переведя треугольник ABC в EFG, тогда O будет иметь барицентрические координаты $(\alpha; 1; 1-\alpha)$ относительно ABC. Такие же координаты имеет и точка U, относительно EFG. Аналогично D: $(\alpha\cdot(1-\beta); 1; (1-\alpha)\cdot(1-\beta))$ (с точностью до домножения на константу), имеет такие же кординаты, что и H относительно EFG.
Ответ: да

Б)
Заметим, что отношения отрезков диагоналей равны отношению оснований трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), так как рассмотрим репер $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, тогда точка B - $(1; -\alpha)$, D - $(0; 1)$. Заметим, что O имеет координаты $(\frac{1}{1+\alpha}; 0)$, так как $\overrightarrow{v} = (1; -1-\alpha)$, BOD лежат на одной прямой $\Leftrightarrow$ $\det(O, \overrightarrow{v}) = \det((0;1), \overrightarrow{v})$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{1+\alpha} \cdot (-1) \cdot (1+\alpha) = -(1) \cdot (1)$ $\Leftrightarrow$ $-1 = -1$. Откуда следует, что ответ такой же, что и в (7А).
Ответ: да

1.8 ГЛ1 8

1.9 ГЛ1 9

Впишем правильный многоугольник в окружность радиуса $r = 1$, тогда все векторы $|v_1| = |v_2| = ... = |v_n| = 1$ и, если S_1 - площадь правильного многоугольника, то $S_1 < \pi r^2 = \pi 1^2 = \pi$. Обозначим $S_2 = \det(v_1, v_2) + \det(v_2, v_3) + ... + \det(v_n, v_1)$, тогда если $S_2 > 2\pi$, то $S_2 > 2S_1$. Приведем пример такого n-угольника, для которого это выполнено



Рассмотрим 20-угольник, разобьем его вершины на 5 групп по 4 вершины, причем в каждую группу входят вершины, идущие через 5. И занумерыем вершины так: A_1, A_5, A_9, A_{13}, A_{17}, A_2, A_6, A_{10}, A_{14}, A_{18}, A_3, A_7, A_{11}, A_{15}, A_{19}, A_4, A_8, A_{12}, A_{16}, A_{20}.
Тогда каждая из групп будет образовывать квадрат со стороной $\sqrt{2}$, а все остальные треугольники будут положительной площади, так как если мы рассмотрим 2 подряд идущие точки из разных групп, то их площадь будет положительна, так как направленный угол, образованый этими 2 векторами будет $< 180^o$, так как они идут через 6 других точек, а в одной полуплоскости находятся 10 точек $\Rightarrow S_2 > 5 \cdot (\sqrt{2})^2 > 2\pi > 2S_1$, что и требовалось.

2 Группа движений евклидовой плоскости

2.1 ГЛ2 1

Пусть $O_3 = S_{O_2}(O_1)$. Легко проверить, что $S_{O_3} = S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_2}$. Поэтому если O_1 и O_2 — центры симметрии фигуры, то и O_3 — центр симметрии, причем $O_3 \neq O_1$ и $O_3 \neq O_2$.

2.2 ГЛ2 2

Заметим, что есть 2 последовательности преобразований: отражение $\circ$ поворот и поворот $\circ$ отражение
В (1) случае $s \mapsto s \mapsto s_1$, так как при повороте s переходит в себя, а при отражении $s \mapsto s_1$
Во (2) случае $s \mapsto s_1 \mapsto s_2$, так как при отражении $s \mapsto s_1$, а при повороте $s_1 \mapsto s_2$ (так как приповороте сохраняется только s)
Если поворот и отражение коммутируют, то $s_1 = s_2 \Rightarrow s_1$ лежит на прямой $\Rightarrow s$ лежит на прямой, т.е. мы доказали, что если преобразования коммутируют, то $s \in l$

Теперь докажем обратное - т.е. что если центр симметрии на прямой, то преобразования коммутируют.
Рассмотрим те же 2 случая:
Пусть наша прямая перпендикулярна оси координат x, тогда рассмотрим любую точку на этой оси - по координате x она не сдвинется(так как если рассматривать все по координате x, то оба преобразования просто отражают точку, а два отражения $= Id$), а по оси y она сдвинется на $2|y_1 - y_s|$, где y_1 координата по y рассматриваемой точки, а y_s координата по y точки s), тогда эти композиции движений коммутативны, так как положения точек при обоих последовательностях преобразований совпали.

2.3 ГЛ2 3

(в) $\Rightarrow$ (а) и (в) $\Rightarrow$ (б) — можно просто нарисовать каждый из случаев и разобрать, куда переходят точки при отражениях относительно этих прямых. В случае параллельности оба пункта((а) и (б)) очевидновыполнены. Если же все прямые проходят через одну точку, то $\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_3} = \sigma_{l_3} \circ \sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1}$ так как $\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_3} = \sigma_{l_3} \circ \sigma_{l_1}$ можно рассмотреть как поворот, а σ_{l_2} - отражение. Также $\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_3}$ - симметрия, так как длины сохранились, ориентация изменилась.
(а) $\Rightarrow$ (в)

2.4 ГЛ2 4

A)
Пусть l - отражение относительно прямой, $\overrightarrow{v}$ сдвиг относительно вектора, где $v = v_1 \cdot a + v_2 \cdot b$ - $v_1 \parallel l$ и $v_2 \perp l$. Тогда движение это симметрия со сдвигом $v_1 \cdot a$ относительно прямой $l + \frac{v_2 \cdot b}{2}$. Заметим, что если рассмотреть базис $(0,\ v_1,\ v_2)$, то движение переводит точку $(x_1,\ x_2)$ в $(x_1 + a,\ 2l - x_1 + v_2 \cdot b) = (x_1 + a,\ 2(l + \frac{v_2 \cdot b}{2}) - x_1)$, поэтому оба движения одинаковы.
B)

2.5 ГЛ2 5

A)
Заметим, что поворот переводит точку x в $(x - a) \cdot e_\alpha + a = x \cdot e_\alpha + a \cdot (1 - e_\alpha)$, где a - центр поворота, $e_\alpha = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$.
Тогда два повотрота переводят x в $x \cdot e_\alpha \cdot e_\beta + a \cdot (1 - e_\alpha) \cdot e_\beta + b \cdot (1 - e_\beta)$. Тогда если $e_\alpha e_\beta = 1$, то преобразование является сдвигом на вектор $a \cdot (1 - e_\alpha) \cdot e_\beta + b \cdot (1 - e_\beta)$. Если же $e_\alpha e_\beta \neq 1$, то преобразование это поворот относительно $\frac{a \cdot (1 - e_\alpha) \cdot e_\beta + b \cdot (1 - e_\beta)}{1 - (e_\alpha \cdot e_\beta)}$ на $(e_\alpha \cdot e_\beta)$, то есть на $\alpha + \beta$

B)
Заметим, что симметрия переводит x в $\overline{\frac{x-a}{e_\alpha}} \cdot e_\alpha + a = \overline{x} \cdot \frac{e_\alpha}{\overline{e_\alpha}} + a \cdot (1 - \frac{e_\alpha}{\overline{e_\alpha}}) = \overline{x} \cdot e_{2\alpha} + a \cdot (1 - e_{2\alpha})$, где прямая вида $x = k \cdot e_\alpha + a$ для комплексного x и вещественных k и a.
Тогда 2 скользящие симметрии переводят x в $x \cdot \overline{e_{2\alpha}} \cdot e_{2\beta} + \overline{a \cdot (1 - e_{2\alpha})} \cdot e_{2\beta} + b \cdot (1 - e_{2\beta}) + \overline{v_1} \cdot e_{2\beta} + v_2$ что является сдвигом при $\overline{e_{2\alpha}} \cdot e_{2\beta} = 1$, то есть если прямые параллельны. Сдвиг $\overline{a \cdot (1 - e_{2\alpha})} \cdot e_{2\beta} + b \cdot (1 - e_{2\beta}) + \overline{v_1} \cdot e_{2\beta} + v_2$.
При $\overline{e_{2\alpha}} \cdot e_{2\beta} \neq 1$ это поворот на угол $e_{2\alpha} \cdot e_{2\beta}$, то есть $2\alpha + 2\beta$, и центр - $\frac{\overline{a \cdot (1 - e_{2\alpha})} \cdot e_{2\beta} + b \cdot (1 - e_{2\beta}) + \overline{v_1} \cdot e_{2\beta} + v_2}{1 - e_{2\alpha} \cdot e_{2\beta}}$

2.6 ГЛ2 6

A)

Пусть задан треугольник ABC, серединные перпендикуляры выбираются в следующем порядке: AB, BC, CA. Тогда точка A переходит после этой композиции в себя, точка пересечения серединных перпендикуляров O также переходит в себя, откуда следует, что для композиции прямая AO - неподвижна, при этом прямые пересекаются в одной точке, значит композиция - отражение, откуда следует, что это отражение относительно прямой AO.

B)

Пусть треугольник ABC, биссектрисы выбираются в следующем порядке: AI, BI, CI, где I - пересечение биссектрис. Тогда проекция I на AC (B_I) переходит после этой композиции в себя (определим точки A_I и C_I аналогично, тогда $B_I \mapsto C_I \mapsto A_I \mapsto B_I$), точка пересечения биссектрис I также переходит в себя, откуда следует, что для композиции прямая $B_I I$ - неподвижна, при этом прямые пересекаются в одной точке, значит композиция - отражение, откуда следует, что это отражение относительно прямой $B_I I$.

C)

Пусть квадрат $ABCD$. Также пусть порядок отражения следующий: AB, BC, CD, DA. Заметим, что композиция отражений относительно AB и $BC \Leftrightarrow$ повороту на 180° относительно B, аналогично для композиции CD и $DA \Leftrightarrow$ повороту на 180^o относительно D, откуда следует, что композиция относительно 4 сторон $\Leftrightarrow$ композиции поворотов относительно B и D, что равно параллельному сдвигу в сторону удвоенного вектора $\overrightarrow{BD}$.

2.7 ГЛ2 7

2.8 ГЛ2 8

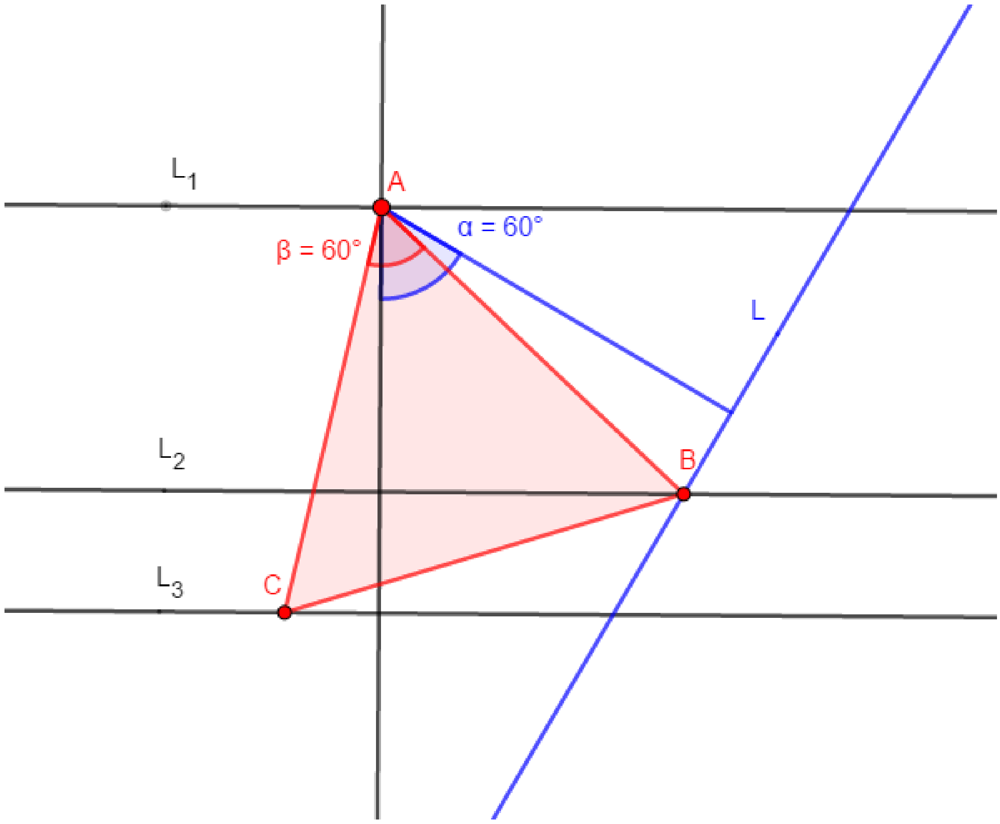
A)

B)

C)

2.9 ГЛ2 9

Пусть треугольник ABC построен: A на l_1, B на l_2, C на l_3. При повороте на 60° вокруг A, тогда $C \to B$, $l_3 \to l$, тогда точка пересечения l_2 и l - B. Тогда возьмём на l_1 точку A. Образ прямой l_3 при повороте на 60° вокруг A пересекает l_2 в B



3 Многомерие

3.1 ГЛЗ 1

сперва построим 1-мерные пространства(прямые через 0), их $\frac{q^n-1}{q-1}$ потом для каждого из них выбираем вторые вектора которых может быть $q^n - q$ (так как он не может заканчиваться в точке на первой прямой). Так мы получили двумерные пространства натянутые на эти пары векторов, их $\frac{(q^n-1)(q^n-q)}{q-1}$ каждое из них содержит $q^2 - 1$ ненулевых точек, поэтому разных двумерных пространств получаем $\frac{(q^n-1)(q^n-q)}{(q-1)(q^2-1)}$. Далее, по индукции:

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(q^n - q^{i-1})}{\prod\limits_{i=1}^{k}(q^k - q^{i-1})}$$

3.2 ГЛЗ 2

Заметим, что в любом k мерном подпространстве можно выбрать репер. Этот репер задаётся $k+1$ точкой, при этом они должны быть общего положения, так как вектора, образуемые парами из первой и остальных точек, должны быть линейно независимы. Тогда количество подпространств размерности k: $\frac{q^n(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\dots(q^n-q^{k-1})}{q^k(q^k-1)(q^k-q)(q^k-q^2)\dots(q^k-q^{k-1})}$, так как числитель – количество способов выбрать упорядоченное множество $k+1$ точек, знаменатель – количество таких упорядоченных множеств в одном пространстве.

3.3 ГЛЗ 3

A)

Рассмотрим следующие 6 плоскости проходящие через $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$: $(a_1,\ a_2,\ 0,\ 0)$, $(a_1,\ 0,\ a_3,\ 0)$, $(a_1,\ 0,\ 0,\ a_4)$, $(0,\ a_2,\ a_3,\ 0)$, $(0,\ a_2,\ 0,\ a_4)$, $(0,\ 0,\ a_3,\ a_4)$, где a_i – параметры. Покажем, что любая плоскость содержит хотя бы 1 точку с хотя бы двумя нулевыми координатами. Рассмотрим базисные вектора: они линейно независимы. Заметим, что тогда есть пара линейно независимых координат у этих векторов, так как иначе можем считать что первый вектор $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ (можем считать, что он один из следующих: $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 0,\ 1,\ 1)$, (0, 0, 0, 1)).

Для второго рассмотрим базис:	Для третьего:	Для четвёртого:
$(1,\ -1,\ 0,\ 0)$	$(1,\ -1,\ 0,\ 0)$	$(1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0)$
$(0,\ 2,\ 0,\ 0)$	$(-1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0)$	$(-\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2},\ 0)$
$(0,\ 0,\ 1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0)$	$(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ 0)$
$(0,\ 0,\ 0,\ 1)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 1)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 1)$

Тогда второй вектор $(\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha)$, откуда следует, что они линейно зависимы. Рассмотрим эту пару координат. Тогда заметим, что существует точка в этой плоскости с нулями в этих коордитах, а все такие точки принадлежат шести плоскостям, проходящим через 0, откуда следует, что любая плоскость пересекает хотя бы одну из 6 плоскостей.

Б)
Заметим, что все плоскости, пересекающие плоскость $(a_1,\ a_2,\ 0,\ 0)$, вида $(x_1,\ x_2,\ a_3,\ a_4)$, где x_i - константы, a_i - параметры. Тогда для пары плоскостей $(a_1,\ a_2,\ 0,\ 0)$ и $(0,\ 0,\ a_3,\ a_4)$ верно, что нет плоскости, пересекающие обе в одной точке.

3.4 ГЛЗ 4

А) $(U+V)\cap(W+U)\cap(V+W) = (U+W)\cap V + (U+V)\cap W$
Представим V как $[v_1,\ v_2,\ \ldots]$, U как $[u_1,\ u_2,\ \ldots]$, W как $[w_1,\ w_2,\ \ldots]$
Тогда заметим, что если $v_i \notin U+W$, то мы можем выкинуть v_i из V и тогда уравнение останется верным. Тогда проведем такую операцию "выкидывания"для U, V, W и получим U_1, V_1, W_1.
Теперь рассмотрим уравнение, заметим что в правой части есть как w (так как $w \subset (u+v)\cdot w$), так и v (так как $v \subset (u+w)\cdot v$), а следовательно там есть и u ($u \subset v+w$).

Б) $(U+V)\cap(W+U)\cap(V+W) \subseteq (U\cap V)+(W\cap U)+(V\cap W)$
Пусть $U=[1,1]$, $V=[0,1]$,$W=[1,0]$ - заметим что для таких множест уравнение имеет вид: $U+V+W \subseteq 0$, что очевидно неверно

В*)$(U+V)\cap(W+U)\cap(V+W) \supseteq (U\cap V)+(W\cap U)+(V\cap W)$
Представим V как $[v_1,\ v_2,\ \ldots]$, U как $[u_1,\ u_2,\ \ldots]$, W как $[w_1,\ w_2,\ \ldots]$
Тогда заметим, что если $v_i \notin U+W$, то мы можем выкинуть v_i из V и тогда уравнение останется верным. Тогда проведем такую операцию "выкидывания"для U, V, W и получим U_1, V_1, W_1. Тогда правая часть не меньше левой и все что входит в $(U\cap V)+(W\cap U)+(V\cap W)$, входити в $(U+V)\cap(W+U)\cap(V+W)$

Г)

3.5 ГЛЗ 5

3.6 ГЛЗ 6

Заметим, что базис объединения подпространств не больше, чем объединение базисов этих подпространств. Заметим, что если нельзя построить отображение из объединения базисов в базис всего пространства, то пространство "больше"объединения подпространств. Заметим, что $2*X\ \ X$ если X бесконечно, откуда следует, что $k*X\ \ X$ для всякого целого k, поэтому нельзя построить отображение из объединения базисов в базис пространства.
А)

Б)

3.7 ГЛЗ 7

Рассмотрим куб($\mathbf{R}^3$), для куба существует прямая, непересекающая его ребра($\mathbf{R}^1$), один изпримеров этой прмой - прямая соединяющая середины противоположных сторон. Увеличим размерность на 1, теперь куб в размерности $\mathbf{R}^4$ и прямая стала плоскостью $\mathbf{R}^2$, причем эта прямая не пересекает ни одну плоскость гиперкуба по построению.

3.8 ГЛЗ 8

Куб из задачи (7) пересекается с плоскостью $\sum_i x_i = c$ при $c = [-2,\ 2]$ так как $\sum_i x_i = c \ \Leftrightarrow\ x_1+x_2+x_3+x_4 = c$. Заметим что куб имеет координаты $\forall i:\ \ |x_i| < \frac{1}{2}$, а 4-мерная гиперплоскость $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c$ перпендикулярна прямой соединяющей точки $\left(\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ \right)$ и $\left(\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\ \right)$ – тогда, так как эти две точки являются противоположными вершинами куба, то плоскость пересекает куб в том случае, если она пересекает этот (соединяющий точки $\left(\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ \right)$ и $\left(\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\ \right)$) отрезок. То есть $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \in [-2, 2]$.

3.9 ГЛЗ 9

Набор векторов $\nu_0,\ \nu_1,\ \ldots,\ \nu_n \in \mathbb{R}^n$, n из $n+1$ образуют базис
А)
$w \in \mathbb{R}^n$ представим как $w = \sum x_i e_i;\ \sum x_i = 0$
Б)
Рассмотрим набор из n векторов, образующий базис, пусть это $\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_n$. Тогда ν_0 выражается через все остальные вектора – заметим, что тогда $\nu_0 = a_1\nu_1 + \ldots + a_n\nu_n$, тогда заметим, что если $\forall i:\ a_i \neq 0$, то любой вектор можно заменить на ν_0 имеет ненулевую ортогональную проекцию, если же $\exists i:\ a_i = 0$, без ограничения общности $a_1 = 0$, то набор векторов $\nu_2,\ \ldots,\ \nu_n$ является базисом в $\mathbb{R}^{n-1}$, а $\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_n$ базисом не является.

В)

4 Линейные отображения и матрицы

4.1 ГЛ4 1

Пусть верхняя левая клетка,граничащая по точке с прямоугольником имеет координаты $(0, 0)$ и в ней записано число $a_{(0\ 0)}$. Тогда в каждой клетке записано число $a_{(i\ j)}$. Причем если мы рассматриваем прямоугольник $n \times m$ то для точек $a_{(i\ j)} \quad i \in [1,\ n];\ j \in [1, m]$; выполнено: $a_{(i\ j)} = \frac{a_{(i+1\ j+1)}+a_{(i+1\ j-1)}+a_{(i-1\ j+1)}+a_{(i-1\ j-1)}}{4}$. Тогда

4.2 ГЛ4 2

Заметим, что по числам в четырех вершинах однозначно восстанавливаются оставшиеся (в предположении, что на грани также можно написать числа так, чтобы сумма сходящихся в вершине граней была равна значению в вершине). Пронумеруем вершины следующим образом: в верхнем квадрате по кругу от 1 до 4, каждая пара противоположных вершин имеет сумму 9. Тогда по значениям в вершинах 1, 2, 3 и 8. Заметим, что сумма во всех противоположных вершинах одинакова, так как их сумма равна сумме всех граней. Также четвертая вершина в верхнем квадрате однозначно задаётся, так как $b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0$ (грань этого квадрата посчитана 4 раза: 2 со знаком $+$, 2 с $-$. Противоположная сторона не учитывается, а каждая "боковая"грань посчитана 2 раза с разными знаками). Откуда следует, что по значениям b_1, b_2, b_3, b_8 однозначно задаются оставшиеся значения, откуда вытекают условия на b_i. Покажем, что при любых значениях в четырех вершинах есть решение, и покажем, какие они. Рассмотрим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & b_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & b_8 \end{pmatrix}$$

Приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & b_8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & | & b_1 - b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & | & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & b_8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & b_2 + b_3 - b_1 - b_8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & | & b_1 - b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & | & b_1 - b_2 + b_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & b_8 \end{pmatrix}$$

Заметим, что значения на гранях не задаются однозначно, а зависят от значений $x_5,\ x_6$ (значения на гранях – x_i), откуда следуют решения в зависимости от $b_i,\ x_5,\ x_6$.

4.3 ГЛ4 3

Ядро имеет нулевое пересечение с образом, откуда следует, что $V = \ker F + \mathrm{im} F$ (так как $\dim\ker F + \dim \mathrm{im} F = \dim V$). Докажем, что F проецирует на $\mathrm{im} F$: рассмотрев базисы $\ker F$ и $\mathrm{im} F$ можно заметить, что при разложении x и $F(x)$ в виде линейной комбинации, вектора из $\ker F$ занулятся в $F(x)$, а вектора из $\mathrm{im} F$ останутся теми же.

4.4 ГЛ4 4

4.5 ГЛ4 5

Пусть $X = x_1 + x_2 + ... + x_r$ (где rank $X = r$, rank $x_i = 1$ и x_i пока что "неизвестны"), тогда приведём левую часть к ступенчатому виду (сначала горизонтальному, потом вертикальному), копируя действия в правую часть. Теперь такие x_i точно существуют, откуда следует, что применяя оперции в обратном порядке мы получим r матриц ранга 1, сумма которых равна X. Покажем что меньше r быть не может. Рассмотрим пространство A, в котором вектора из X порождающие. В нем $\dim A = r$ и если $X = x_1 + x_2 + ... + x_{r-1}$, то A лежит в линейной оболочке пространств, образованных из $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{r-1}$, но размерность этих пространств равна 1, откуда их линейная оболочка имеет размерность не более чем $r - 1$.

4.6 ГЛ4 6

(б) и (в) независимы. Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$U_1 \cap U_2 = 0, W_1 \cap W_2 = W_2$ аналогичный пример в обратную сторону для транспонированных матриц.

4.7 ГЛ4 7

A)
$\dim \mathrm{im} A + \dim \ker A = \dim \mathrm{im}(B\ A) + \dim \ker(B\ A)$
Покажем, что $\dim(\mathrm{im} A \cap \ker B) = \dim \ker(B\ A) - \dim \ker(A)$
(1): Заметим, что $ker(A) \in \ker(B\ A)$, поэтому $\dim(\ker(B\ A)/\ker(A)) = \dim \ker(B\ A) - \dim \ker(A)$, при этом нетрудно видеть, что $\mathrm{im} A \cap \ker B = \ker(B\ A)/\ker(A)$ откуда следует (1) (откуда очевидно утверждение задачи).

B)
из предыдущего пункта:

$$\dim \mathrm{im} A = \dim \mathrm{im}(B\ A) + \dim(\mathrm{im} A \cap \ker B)$$
$$\dim \mathrm{im} AC = \dim \mathrm{im}(B\ AC) + \dim(\mathrm{im} AC \cap \ker B)$$

Откуда требуется доказать, что
$-\dim(\mathrm{im} A \cap \ker B) \le -\dim(\mathrm{im} AC \cap \ker B)$, то есть $\dim(\mathrm{im} A \cap \ker B) \ge \dim(\mathrm{im} AC \cap \ker B)$, что верно, так как $\mathrm{im} AC \in \mathrm{im} A$.

4.8 ГЛ4 8

A)
Рассмотрим матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Заметим, что $A^2 = B^2 = 0$, при этом $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = -4 \Rightarrow \det(A+B)^k \neq 0 \Rightarrow (A+B)^K \neq 0$
B)
Ответ: да.
Пусть $A^N = 0,\ B^M = 0$.
Тогда

$$(A+B)^{N+M} = A^{N+M} + \binom{N+M}{1} \cdot A^{N+M-1} \cdot B + ... + \binom{N+M}{M} A^N \cdot B^M + ... + B^{M+N} =$$
$$A^N \cdot A^M + A^N \cdot \binom{N+M}{1} \cdot A^{M-1} \cdot B + ... + A^N \cdot B^M + ... + B^M \cdot B^N = 0 + 0 + ... + 0 + ... + 0 = 0$$

(заметим, что мы явно пользуемся тем, что $AB = BA$ при разложении по биному Ньютона).
C)

4.9 ГЛ4 9

A)
Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда $\beta = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$, $\alpha = 0 \Leftrightarrow a + d = 0$. То есть c и d однозначно выражаются через a и b : $d = -a, c = -\frac{a^2}{b}$, при этом для любых a и b с такими c и d: $A^2 = 0$
B)
Заметим, что $\det(A\ B) = \det A \times \det B$, откуда если $A^3 = 0$, то $\det A = 0$, откуда если рассмотреть некоторое B, для которого $B^2 \neq 0$: $B^2 + \alpha B = 0$, то $B^3 + \alpha B^2 = 0$, откуда он может быть корнем $X^3 = 0$ при $\alpha = 0$, но тогда $B^2 = 0$. Поэтому нет корней из $X^3 = 0$, не являющимися корнями $X^2 = 0$, при этом очевидно, что все корни из $X^2 = 0$ являются корнями из $X^3 = 0$.
C)
Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда $\beta = 1 \Leftrightarrow \det A = 1$, $\alpha = 0 \Leftrightarrow a + d = 0$. То есть c и d однозначно выражаются через a и b : $d = -a, c = -\frac{1+a^2}{b}$, при этом для любых a и b с такими c и d: $A^2 = -E$

4.10 ГЛ4 10

4.11 ГЛ4 11*

4.12 ГЛ4 12*

Если $A \neq E \cdot v$, где v – матрица 1 на n (что равносильно $\exists i, j:\ i \neq j,\ a_{i\ j} \neq 0$), то рассмотрим 2 матрицы X, Y : $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(Y) = 0,\ (X - Y) = B$, где в B все элементы нулевые кроме $a_{j\ i}$. Тогда $\mathrm{Tr}(AX) \neq \mathrm{Tr}(AY)$, так как $AX - AY = AB$, а $\mathrm{Tr}(B) \neq 0$. Тогда $A = E \cdot v$. И если $\mathrm{Tr}(AX) = 0$, то $a_{1\ 1} \cdot x_{1\ 1} + ... + a_{i\ i} \cdot x_{i\ i} + ... + a_{n\ n} \cdot x_{n\ n} = 0$ при $\sum xi\ i = 0$. Рассмотрим $\exists l, m : a_{l\ l} \neq a_{m\ m}$, при замене $x_{l\ l}$ на $x_{l\ l} + 1$ и $x_{m\ m}$ на $x_{m\ m} - 1$ – $\sum xi\ i$ не изменится, но $\sum a_{i\ i} \cdot x_{i\ i}$ увеличится на $a_{l\ l} - a_{m\ m}$. Тогда если A удовлетворяет условию, то такой пары $l,\ m$ нет. Откуда $A = E \cdot c$, где – некое число, подходит.

5 Грассмановы многочлены и определители

5.1 ГЛ5 1

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 7 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 14y - 4z = 2(7y - 2z)$$

5.2 ГЛ5 2*

Итоговая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} & a_{1\ 3} \\ a_{2\ 1} & a_{2\ 2} & a_{2\ 3} \\ a_{3\ 1} & a_{3\ 2} & a_{3\ 3} \end{pmatrix}$$

Её определитель:

$$\det A = (a_{1\ 1} \cdot a_{2\ 2} \cdot a_{3\ 3} + a_{1\ 2} \cdot a_{2\ 3} \cdot a_{3\ 1} + a_{1\ 3} \cdot a_{2\ 1} \cdot a_{3\ 2}) - \\ (a_{3\ 1} \cdot a_{2\ 2} \cdot a_{1\ 3} + a_{3\ 2} \cdot a_{2\ 3} \cdot a_{1\ 1} + a_{3\ 3} \cdot a_{2\ 1} \cdot a_{1\ 2})$$

Заметим, что если первый поставит 0 в угол, то, независимо от действий второго, первый ставит 0 в любой из углов, имебщих общую сторону с изначальным углом. И тогда после следующего хода, независимо от того как пошёл соперник, надо потавить на $\circ$ или $\times$ в зависимости от того, какая тройка необнулилась:

$$\begin{pmatrix} 0 & \circ & \\ \circ & & \\ 0 & & \circ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \times & \\ & & \times \\ 0 & \times & \end{pmatrix}$$

5.3 ГЛ5 3

5.4 ГЛ5 4

5.5 ГЛ5 5

Изначальная матрица:

$$A = \begin{vmatrix} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} & \dots & a_{1\ n} \\ a_{2\ 1} & a_{2\ 2} & \dots & a_{2\ n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m\ 1} & a_{m\ 2} & \dots & a_{m\ n} \end{vmatrix}_{m \times n}$$

Пусть ее минор $t < \min(m,\ n)$

Без ограничения общности предположим, что верхний левый минор $\neq 0$:

$$\Delta = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \tau \\ 1 & 2 & \dots & \tau \end{pmatrix}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{1\ 1}x_1 + \dots + a_{1\ \tau}x_\tau = a_{1\ q} \\ \dots \\ a_{\tau\ 1}x_1 + \dots + a_{\tau\ \tau}x_\tau = a_{\tau\ q} \end{cases}$$
$$q \in \{\tau + 1,\ \cdots,\ n\}$$

Эта система совместна и имеет единственное решение поскольку определитель матрицы левых частей, по условию, отличен от нуля.

Запишем ее решение:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1\ 1} & \cdots & a_{1\ i-1} & a_{1\ i} & a_{1\ i+1} & \cdots & a_{1\ \tau} \\ a_{2\ 1} & \cdots & a_{2\ i-1} & a_{2\ i} & a_{2\ i+1} & \cdots & a_{2\ \tau} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\tau\ 1} & \cdots & a_{\tau\ i-1} & a_{\tau\ i} & a_{\tau\ i+1} & \cdots & a_{\tau\ \tau} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Докажем, что этот же набор является решением и уравнения

$$a_{s\ 1}x_1 + \cdots + a_{s\ \tau}x_\tau = a_{s\ q} \quad \text{при } \forall s \in \{\tau+1, \ldots, m\}$$

Подставим решения и домножим все на Δ:

$$a_{s\ q}\Delta - a_{s\ \tau}\begin{vmatrix} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} & \ldots & a_{1\ \tau-1} & a_{1\ q} \\ a_{2\ 1} & a_{2\ 2} & \ldots & a_{2\ \tau-1} & a_{2\ q} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{\tau\ 1} & a_{\tau\ 2} & \ldots & a_{\tau\ \tau-1} & a_{\tau\ q} \end{vmatrix} - a_{s\ \tau-1}\begin{vmatrix} a_{1\ 1} & \ldots & a_{1\ q} & a_{1\ \tau} \\ a_{2\ 1} & \ldots & a_{2\ q} & a_{2\ \tau} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{\tau\ 1} & \ldots & a_{p\ q} & a_{\tau\ \tau} \end{vmatrix} - \cdots - a_{s\ 1}\begin{vmatrix} a_{1\ q} & a_{1\ 2} & \ldots & a_{1\ \tau} \\ a_{2\ q} & a_{2\ 2} & \ldots & a_{2\ \tau} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{\tau\ q} & a_{2\ q} & \ldots & a_{\tau\ \tau} \end{vmatrix}$$

последнее выражение представляет собой разложение определителя

$$\begin{vmatrix} a_{1\ 1} & \ldots & a_{1\ \tau} & a_{1\ q} \\ a_{2\ 1} & \ldots & a_{2\ \tau} & a_{2\ q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{\tau\ 1} & \cdots & a_{\tau\ \tau} & a_{\tau\ q} \\ a_{s\ 1} & \ldots & a_{s\ \tau} & a_{s\ q} \end{vmatrix}$$

Этот определитель равен 0

$$\begin{cases} a_{1\ 1}x_1 + \cdots + a_{1\ \tau}x_\tau = a_{1\ q} \\ \cdots \\ a_{\tau\ 1}x_1 + \cdots + a_{\tau\ \tau}x_\tau = a_{\tau\ q} \\ a_{\tau+1\ 1}x_1 + \cdots + a_{\tau+1\ \tau}x_\tau = a_{\tau+1\ q} \\ \cdots \\ a_{m\ 1}x_1 + \cdots + a_{m\ \tau}x_\tau = a_{m\ q} \end{cases}$$

Но это означает, что столбец матрицы A с номером q является линейной комбинацией первых τ столбцов этой матрицы. Поскольку это утверждение справедливо для любого значения $q \in \{\tau+1, \ldots, n\}$, то заключаем, что ранг системы столбцов матрицы A равен τ.

5.6 ГЛ5 6*

5.7 ГЛ5 7

$$\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1}\, \partial a_{i_2 j_2} \ldots \partial a_{i_k j_k}}$$

Если $i_k = i_l,\ j_k = j_l$, то мы получим 0 в первой строке
Если $i_k \neq i_l,\ j_k \neq j_l$, то раскладывая по i-ой строке: все члены кроме $a_{i_k j_k}$ зануляются, так как количество спообобов перенести строку наверх $(-1)^{i_k+1}$, количество способов перенести стобец с $a_{i_k j_k}$ на первое место $(-1)^{j_k+1}$. Откуда $(-1)^{i_k+1} \cdot (-1)^{j_k+1} = (-1)^{i+j+2} = (-1)^{i+j}$ тогда $\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{i_k j_k}} = \det(-1)^{i_k+j_k} \cdot A_{i_k j_k}$
По индукции получим:

$$\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1}\, \partial a_{i_2 j_2} \ldots \partial a_{i_k j_k}} = \det(-1)^{i_1+j_1+\ldots+i_k+j_k} \cdot A_{(i_1 j_1)\ldots(i_k j_k)}$$

5.8 ГЛ5 8

Заметим, что мы рассматриваем матрицу Кирхгофа
А)
Определитель матрицы Кирхгофа равен нулю $\det K = 0$:

$$\det K = \begin{vmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \cdots & k_{n,n} \end{vmatrix}$$

Прибавим к первой строке все остальные строки:

$$\begin{vmatrix} k_{1,1} + k_{2,1} + \cdots + k_{n,1} & k_{1,2} + k_{2,2} + \cdots + k_{n,2} & \cdots & k_{1,n} + k_{2,n} + \cdots + k_{n,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \cdots & k_{n,n} \end{vmatrix}$$

Так как сумма элементов каждого столбца равна 0, получим:

$$\det K = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \cdots & k_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

Б*)

В*)

5.9 ГЛ5 9

А)
Да $A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0$
Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot 5 - 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6 = 0$$

Б)
$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0$
Тогда $A_{12}A_{34} + A_{14}A_{23} = A_{13}A_{24}$

1. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad 6 \cdot 8 = 48$
   $3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 = 12 + 35 \neq 48$
   $3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 15 + 28 \neq 48$
   $3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 21 + 20 \neq 48$

2. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad 5 \cdot 8 = 40$
   $3 \cdot 4 + 6 \cdot 7 = 12 + 42 \neq 40$
   $3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 = 18 + 28 \neq 40$
   $3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 = 21 + 24 \neq 40$

3. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad 4 \cdot 8 = 32$
   $3 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = 15 + 42 \neq 32$
   $3 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 18 + 35 \neq 32$
   $3 \cdot 7 + 5 \cdot 6 = 21 + 30 \neq 32$

Следовательно такой матрицы нет

5.10 ГЛ5 10*

5.11 ГЛ5 11

А)

Б)

В*)

5.12 ГЛ5 12*

6 Линейные операторы на конечномерном пространстве

6.1 ГЛ6 1

6.2 ГЛ6 2

6.3 ГЛ6 3

6.4 ГЛ6 4

6.5 ГЛ6 5

А)

Б)

6.6 ГЛ6 6

6.7 ГЛ6 7

6.8 ГЛ6 8

6.9 ГЛ6 9

6.10 ГЛ6 10

6.11 ГЛ6 11

7 Евклидова геометрия

7.1 ГЛ7 1

Да, всегда найдется

7.2 ГЛ7 2

Нет, неверно

$$\cos(a,b) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

Пусть a, b лежит в $\mathbb{R}^3$, будем проектировать гиперплоскость (xy)

$$\vec{a} = (1,1,1) \to \vec{a}_1 = (1,1,0)$$
$$\vec{b} = (1,2,-5) \to \vec{b}_1 = (1,2,0)$$

Тогда $\vec{a}\vec{b} = 1 + 2 - 5 = -2 < 0$ тогда угол тупой
Но $\vec{a}_1\vec{b}_1 = 1 + 2 = 3 > 0$ тогда угол острый

7.3 ГЛ7 3

Очевидно, что в каждой размерности $\mathbb{R}^n$ есть хотя бы n гиперплоскостей, относительно которых симметричен куб. Далее заметим, что плоскость относительно которой куб симметричен также может проходить через пары противоположных ребер (в размерности $\mathbb{R}^n$ это гиперплоскостей размерности $\mathbb{R}^{n-2}$ ровно $n \cdot (n-1) \cdot 2$).
Заметим, что для $\mathbb{R}^n$ есть ровно $\dim(\mathbb{R}^n) + \frac{n \cdot (n-1) \cdot 2}{2} = n + n \cdot (n-1) = n \cdot n$.
Тогда для 4: $4 \cdot 4 = 16$

7.4 ГЛ7 4

$\Delta_n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum x_i = 1, x_i \geqslant 0\right\}$
А)

Б)

7.5 ГЛ7 5*

Рассмотрим октаплекс $\{3, 4, 3\}$
А)

0	1	2 $\{3\}$	3 $\{3, 4\}$
24	96	96	24

Б)

В)
Правильные октаэдры $\{3, 4\}$
Г)
Правильные треугольники $\{3\}$

7.6 ГЛ7 6

7.7 ГЛ7 7

А) $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \rho_{v,\varphi}$

Б) $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \tau_v$

В) $\sigma_\pi \circ \varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_\pi = \varrho_{v,\psi}$

Г) $\varrho_{u,\varphi} \circ \varrho_{w,\psi} = \tau_v \circ \varrho_{v,\vartheta}$

Д) $\varrho u, \varphi \circ \sigma_\pi \circ \varrho_{u,-\varphi} = \sigma_{\pi_2}$

Е) $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_{\pi_1} = \sigma_{\pi_2}$

Ж) $\tau_{u_2} \circ \sigma_{\pi_2} \circ \tau_{u_1} \circ \sigma_{\pi_1} = \tau_v \circ \varrho_{v,\varphi}$

7.8 ГЛ7 8

А)
Рассмотрим
Тогда $\varrho_{AD} \circ \varrho_{AC} \circ \varrho_{AB}$ является поворотом вокруг оси $\perp AC$ и проходящей через A на $\frac{\pi}{4}$
Б)