Логика и алгоритмы, лекция 25

лектор: Кудинов Андрей Валерьевич

25 мая 2021 г.

План лекции:

- Универсальная функция и неразрешимое множество
- Пара неотделимых перечислимых множеств
- Главные универсальные функции
- Теорема Райса–Успенского

Универсальная функция и неразрешимое множество

$\mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

Пусть $\mathcal{F}$ — счётное семейство част. функций $f : X \to Y$.

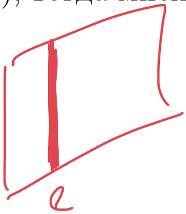
Универсальной функцией для $\mathcal{F}$ называем такую функцию $F : \mathbb{N} \times X \to Y$, что

- Для любого $e \in \mathbb{N}$ функция $F_e(x) := F(e, x)$ принадлежит $\mathcal{F}$.
- $\forall f{\in}\mathcal{F}\ \exists e{\in}\mathbb{N}\ \forall x{\in}X\ \ f(x) \simeq F(e, x)$.

Пусть F — универсальная вычислима функция для $\mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, тогда множество

$$K = \{x \in \mathbb{N} : !F(x, x)\}$$

является перечислимым и неразрешимым.



$f(x) = F(x,x)$

$K = \mathrm{dom}(f)$

Вопрос.

Что можно сказать про множество $\overline{K} = \mathbb{N} \setminus K$?

Оно разрешимо?

$\overline{K}$ – разреш $\Rightarrow$ K – разр

Вопрос.

Что можно сказать про множество $\overline{K} = \mathbb{N} \setminus K$?

Оно разрешимо?

Нет

Перечислимо?

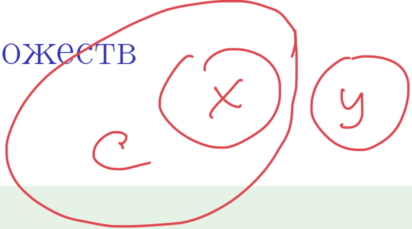
Нет

$\overline{K}$ – перечислимо $\xRightarrow{\text{т. Поста}}$ $\overline{K}$ разр и K-разр.

Опр A – наз коперечислимым, если $\overline{A}$ – перечислимо

K – коперечислимо

Пара неотделимых перечислимых множеств



Пара множеств $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ **неотделима**, если

- $X \cap Y = \varnothing$
- не существует **разрешимого** множества $C \subseteq \mathbb{N}$ такого,что $X \subseteq C$ и $Y \cap C = \varnothing$.

Теорема 25.1

Существует неотделимая пара перечислимых множеств.

Доказательство.

Пусть $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ — вычислимая функция без тотального вычислимого продолжения. Положим $X := \{x \in \mathbb{N} : f(x) = 0\}$ и $Y := \{x \in \mathbb{N} : f(x) = 1\}$.

По теореме о графике X, Y перечислимы. $X \cap Y = \varnothing$

Если разрешимое C отделяет X и Y, то функция

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in C; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases} = 1 - \chi_C(x)$$

продолжает f на всё $\mathbb{N}$.

Установленные факты

- Универсальная вычислимая функция $F(e,x)$.
- Частичная вычислимая $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$, не продолжаемая до тотальной вычислимой:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } F(x,x)=0; \\ 0, & \text{если } !F(x,x)\neq 0; \\ \text{неопр.}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- $K := \{x\in\mathbb{N} : !F(x,x)\}$ перечислимое, неразрешимое.

Пара неотделимых перечислимых множеств

Пара множеств $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ неотделима, если

- $X \cap Y = \varnothing$
- не существует разрешимого множества $C \subseteq \mathbb{N}$ такого,что $X \subseteq C$ и $Y \cap C = \varnothing$.

Теорема 25.2

Существует неотделимая пара перечислимых множеств.

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ — вычислимая функция без тотального вычислимого продолжения. Положим $X :=\{x \in \mathbb{N} : f(x) = 0\}$ и $Y :=\{x \in \mathbb{N} : f(x) = 1\}$.

По теореме о графике X, Y перечислимы.

Если разрешимое C отделяет X и Y, то функция

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in C; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

продолжает f на всё $\mathbb{N}$.

Главные универсальные функции

Вычислимая универсальная функция $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ называется главной, если для любой вычислимой $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ найдётся тотальная вычислимая функция $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что

$$\forall e, x \; g(e, x) \simeq F(\underline{s(e)}, x).$$

Теорема 25.3

Главная вычислимая универсальная функция $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ существует.

На самом деле, универсальная МТ задает главную унив. функцию.

M – вычисляет g   s на вход даёт <u>e</u>

Замечание

Вычислимую функцию $g(e,x)$ можно понимать как (возможно, не универсальный) язык программирования, где e — программа вычисления функции $x \mapsto g(e,x)$.

Функция s есть интерпретатор, сопоставляющий программе e языка g машину Тьюринга $s(e)$, вычисляющую ту же функцию.

(

Вариации Шеня

$F(x,y)$ — ун. выч. ф-ция

$\downarrow$

$T(x,y,z)$ — ун. выч. ф-ций где $Com(\mathbb{N}^3\mathbb{N})$

$\downarrow$

F

Теорема Райса–Успенского

Какие свойства вычислимых функций распознаваемы по программе?

Примеры практически интересных свойств частичных функций f:

- $\forall x\ !f(x)$ (тотальность); +
- $f(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 фиксированы; +
- $f = g_0$, где функция g_0 фиксирована; +
- «вычисление $f(x)$ на некотором x приводит к стиранию всех данных на HD компьютера». +

Пусть фиксирована универсальная вычислимая функция F. Обозначим через F_e частичную функцию с индексом e, т.е. $F_e(x) \simeq F(e, x)$.

Нетривиальным свойством вычислимых функций называем любое подмножество $\mathcal{C} \subset \mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ такое, что $\mathcal{C} \neq \varnothing$ и $\mathcal{C} \neq \mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

$I_C = \phi$ $\quad$ $I_C = \mathbb{N}$

С каждым свойством $\mathcal{C}$ вычислимых функций связывается множество всех программ, вычисляющих функции со свойством $\mathcal{C}$, то есть множество $I_{\mathcal{C}} := \{e \in \mathbb{N} : F_e \in \mathcal{C}\}$.

Теорема 25.4

Если $\mathcal{C}$ — нетривиальное свойство вычислимых функций, то множество $\{e \in \mathbb{N} : F_e \in \mathcal{C}\}$ неразрешимо.

$I_{\mathcal{C}} =$

Доказательство.

- Можно считать, что нигде не определённая функция ζ не обладает свойством $\mathcal{C}$ — иначе заменим $\mathcal{C}$ на его дополнение.
- Т.к. $\mathcal{C} \neq \varnothing$, фиксируем вычислимую функцию $f_0 \in \mathcal{C}$.

Доказательство.

- Можно считать, что нигде не определённая функция ζ не обладает свойством $\mathcal{C}$ — иначе заменим $\mathcal{C}$ на его дополнение.
- Т.к. $\mathcal{C} \neq \varnothing$, фиксируем вычислимую функцию $f_0 \in \mathcal{C}$.
- Построим тотальную вычислимую функцию $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такую, что для всех $x \in \mathbb{N}$
$$x \in K \iff s(x) \in I_{\mathcal{C}}.$$
- Если бы $I_{\mathcal{C}} := \{e \in \mathbb{N} : F_e \in \mathcal{C}\}$ было разрешимо, то мы получили бы следующий разрешающий алгоритм для K: для данного x вычислить $y = s(x)$ и проверить $y \in I_{\mathcal{C}}$.

Вычисляем $g(e, x)$ в соответствии со следующим алгоритмом:

- вычислить $F_e(e)$;
- если $!F_e(e)$, очистить ленту, а затем вычислить $f_0(x)$. $\in$ C

По свойству главности получаем тотальную вычислимую функцию s такую, что

$$\forall e, x\ F_{s(e)}(x) \simeq g(e, x).$$

Тогда имеем:

- Если $e \in K$, то $F_{s(e)}(x) \simeq f_0(x)$; $\in \mathcal{C}$
- Если $e \notin K$, то $\boxed{F_{s(e)} = \zeta}$.

$s(e) \in I_{\mathcal{C}}$

$\zeta \notin \mathcal{C}$

$s(e) \notin I_{\mathcal{C}}$

Отсюда $e \in K \iff F_{s(e)} \in \mathcal{C} \iff s(e) \in I_{\mathcal{C}}$.

Следствие 25.5

Следующие свойства вычислимых функций не распознаваемы по программе:

- тотальность,
- ограниченность,
- конечность области определения, и т.д.

Замечание

Такие свойства как

- «вычисление $f(0)$ завершается менее, чем за 100 шагов»;
- «программа f содержит менее 100 символов» (при фиксированном алфавите)

являются разрешимыми свойствами программ. Они не соответствуют никакому классу частичных функций.

Следствие $\quad f \in Com(\mathbb{N},\mathbb{N}) \quad \{e \mid F_e(x) \simeq f(x)\}$

— неразр. и след. бесконеч.

$\boxed{F(e,x) \text{ — ун. выч. ф-ция}}$ $\quad \{e \mid F_e \text{ — нигде неопр. ф-ция}\} = \{0\}$

m-сводимость

Говорят, что множество A натуральных чисел m-сводится к другому множеству B натуральных чисел, если существует всюду определённая вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с таким свойством:

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

для всех $x \in \mathbb{N}$. Обозначение: $A \leqslant_m B$.

Св-ва. 1) если B – разрешима $\Rightarrow$ A – разрешима

2) если B – перечислима $\Rightarrow$ A – перечислима

3) $\leqslant_m$ – рефлекс. и транзитивно

$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ $\quad$ $y \in B \Leftrightarrow g(y) \in C$

$x \in A \Leftrightarrow g(f(x)) \in C$

m-сводимость

Говорят, что множество A натуральных чисел m-сводится к другому множеству B натуральных чисел, если существует всюду определённая вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с таким свойством:

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

$\mathbb{N}\setminus A$ $\qquad$ $\mathbb{N}\setminus B$

для всех $x \in \mathbb{N}$. Обозначение: $A \leqslant_m B$.

4) A - разрешима и $B \neq \varnothing, \mathbb{N}$, то

$A \leq_m B$

5) $A \leq_m B \implies \mathbb{N}\setminus A \leq_m \mathbb{N}\setminus B$

та же f.