

Вариационные задачи.

Кратко напомним материал из лекции.

Функционал $F[y]$ — это отображение из некоторого множества функций $y(x)$ в числовое поле. Обычно "множество функций" — нормированное пространство. Мы будем всегда работать с функциями $C^k[a, b]$ (a и b могут $\rightarrow \infty$).

Если пространство функций, где задан $F[y]$, — линейное, то линейный функционал по определению

$$F[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha F[y_1] + \beta F[y_2].$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Вариация (дифференциал) функционала. Фиксиров.

Пусть $y_0(x)$ — функция из области определения $F[y]$. Любую другую функцию из обл. определения

можно представить в виде

$$y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$$

$\delta y(x) = y - y_0$ — вариация аргумента функционала в точке $y_0(x)$.

10) Приращение ΔF для $F[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающее вариации аргумента $\delta y(x)$ называется разностью:

$$\Delta F = F[y_0(x) + \delta y(x)] - F[y_0(x)]$$

11) Если приращение ΔF можно представить в виде

$$\Delta F = L[y_0(x), \delta y(x)] + \lambda[y_0(x), \delta y(x)],$$

где $L[y_0(x), \delta y(x)]$ — линейный функционал по $\delta y(x)$, а функционал λ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|\delta y\| \rightarrow 0} \frac{\lambda[y_0, \delta y]}{\|\delta y\|} = 0, \quad \forall$$

(обычно берут норму $\|\delta y\| = \max_{x \in [a, b]} |\delta y(x)|$)

линейная часть $L[y_0(x), \delta y(x)]$
называется вариацией функционала
 $F[y]$ в точке $y_0(x)$. Будем также
пользоваться обозначением

$$\delta F[y_0] := L[y_0(x), \delta y(x)].$$

Другое определение (почти эквива-
лентное): фиксируем $y_0(x)$ и
фиксируем какую-то вариацию $\delta y(x)$.
Введём параметр ε , тогда

$F[y_0 + \varepsilon \delta y]$ — функция ε . Пусть
производная $\frac{d}{d\varepsilon} F[y_0 + \varepsilon \delta y]$ в $\varepsilon = 0$.

Эта производная называется вариацией
ф-ла $F[y]$ в т. $y_0(x)$

$$\delta F[y_0] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} F[y_0 + \varepsilon \delta y] \right|_{\varepsilon = 0}.$$

Пример: $F[y]$ на $C^1[0,1]$

задан правилом:

$$F[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy(x) + (y')^2) dx.$$

Найти приращение ΔF и вариацию δF в некотором заданном ф.и.и. $\bar{y}(x)$.

Решение:

Приращение: $F[\bar{y} + \delta y] - F[\bar{y}] =$
 $= 2\bar{y}(0)\delta y(0) + (\delta y(0))^2 +$
 $+ \int_0^1 (x\delta y + 2\bar{y}'(x)\delta y'(x) + (\delta y')^2) dx.$

Вариация

$$\delta F[\bar{y}] = 2\bar{y}(0)\delta y(0) + \int_0^1 (x\delta y(x) + 2\bar{y}'(x)\delta y'(x)) dx.$$

[Зам.] Здесь мы понимаем также норму на $C^1[0,1]$:

$$\|y(x)\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |y(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |y'(x)|.$$

Если рассматривать ф-ции из $C^2[0,1]$, то вариацию можно преобразовать, интегрировав по частям слагаемые с $\bar{y}'\delta y'$:

$$\int_0^1 2\bar{y}'(x)\delta y'(x) = 2\bar{y}'(x)\delta y(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\bar{y}''(x)\delta y(x) dx.$$

Тогда вариация функционала примет вид:

$$\delta F[\bar{y}] = 2\bar{y}(0)\delta y(0) + 2\bar{y}'(1)\delta y(1) - 2\bar{y}'(0)\delta y(0) + \int_0^1 (x - 2\bar{y}''(x))\delta y(x) dx.$$

Необх. условия экстремума.

[0] Функционал $F[y]$ достигает в $y_0(x)$ (локального) максимума (минимума), если \exists ε -окрестность (по норме пространства ф-ций)

функции $y_0(x)$ экстремал, если $=10=$

$$F[y_0] - F[y] \geq 0 \text{ (} \leq 0 \text{)}$$

где $\forall y(x): \|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$.

IV) Необход. условие экстремума в

$$y_0: \quad \underline{\delta F[y_0] = 0.}$$

$$V) \text{ Если } F[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx \text{ то}$$

экстремум достигается на решении
 $\mathcal{D}Y$ (уравнение Эйлера - Лагранжа):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\mathcal{H}}{\partial y'} \right) - \frac{\mathcal{H}}{\partial y} = 0.$$

с фиксиров. гранич. условиями

$$y(a) = y_1 \quad y(b) = y_2.$$

В заключение разберем выражение
на поиск экстремали функционала

$$\Phi[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 2y(x)y'(x) + y^2(x)) dx \quad (8)$$

Вотислени его дифференциал:

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= \delta \left(\int_0^1 (y' + y)^2 dx \right) = 2 \int_0^1 (y' + y) (\delta y' + \delta y) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (y' + y) \delta y dx + 2 \int_0^1 ((y' + y) \delta y)' dx - 2 \int_0^1 (y' + y)' \delta y dx = \\ &= 2 \int_0^1 ((y' + y) - (y' + y)') \delta y dx + 2 (y' + y) \delta y \Big|_0^1 = \\ &= 2 \int_0^1 (y - y'') \delta y dx + 2 (y' + y) \delta y \Big|_0^1 \end{aligned}$$

А) Если мы ищем экстремаль на пространстве функций с фиксированными значениями на концах, то $\delta y|_0 = \delta y|_1 = 0$. Условие экстремальности даёт лишь дифур

$$y'' - y = 0 \quad (9)$$

с общим решением $y(x) = Ae^x + Be^{-x}$. (10)

Но мы имели граничные условия, скажем

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \text{которые}$$

фиксируют значение констант $A = -B = \frac{1}{2} \operatorname{sh}(1)$

так что экстремаль действия единственна:

$$\underline{y_{\text{экстр.}}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{sh}(1)}}$$

Б) Если мы рассматриваем пространство функций, у которых фиксируется значение лишь в точке $x=0$, скажем, $y(0) = 1$, так что $\delta y|_{x=0} = 0$, то условие $\delta\Phi = 0$, по формуле (9), даёт ещё и граничное условие в точке $x=1$.

$$\underline{(y' + y)|_{x=1} = 0}, \text{ т.к. } \delta y|_{x=1} \text{ произвольна!}$$

Граничное условие при $x=1$ фиксирует параметр $A: A=0$ в общем решении (10). Граничное условие при $x=0$ фиксирует $B: B=1$. Экстремаль для этого пространства функций:

$$\underline{y_{\text{экстр}} = e^{-x}}$$

В) Рассмотрим пространство функций на отрезке $[0, 1]$ без ограничений на их значения на концах. В этом случае условие $\delta\Phi = 0$, по формуле (9) даёт два граничных условия:

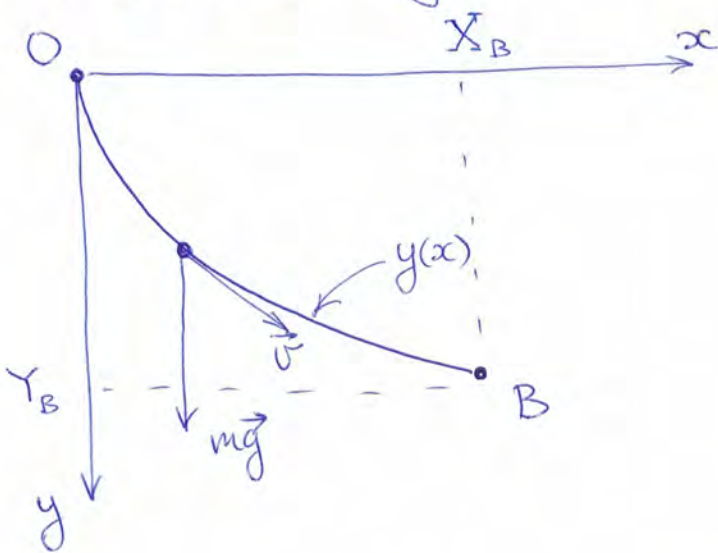
$$\underline{(y' + y)|_{x=0} = (y' + y)|_{x=1} = 0};$$

В результате получаем 1-параметрическое семейство экстремалей $y_{\text{экстр}} = Ae^{-x} \quad \forall A \in \mathbb{R}$

Решение этой задачи не единственно!

Примеры вариационных задач

Исторически первый пример вариационной задачи — задача о брахистохроне. Она была поставлена Иоганном Бернулли в 1696 г. Это было научное соревнование того времени: кто первый решит. Через год было найдено 5 решений, одно из них принадлежит Ньютону (1697 г.). Его мы и разберём.



Задача: найти форму кривой $y(x)$, по которой материальная точка (санки) наиболее быстро соскользнет из точки O в точку B (см. Рис.).

$$O = (0, 0) \quad B = (x_B, y_B)$$

На точку действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная по оси Oy . В начальный момент времени материальная точка стоит.

Используем известный нам закон сохранения энергии точки:

$$E = \frac{mv^2}{2} - mgy,$$

знак "-", т.к. ось Oy смотрит вниз.

где $\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ — скорость точки.

Эе" величина: $v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x} \sqrt{1 + y'^2}$,

где $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$.

Так как в начальный момент времени $t=0$
 $v(0)=0$, $x(0)=y(0)=0$, то $E=0$

и закон сохранения энергии даёт соотношение

$$v = \sqrt{2gy}$$

$$\dot{x} \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{2gy}$$

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = dt.$$

Интегрируем:

$$T_B[y(x)] = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (0)$$

Время прибытия в точку В является функционалом от траектории $y(x)$.

Задача о минимизации T_B выглядит как механическая задача с лагранжианом

$$L(y, y', x) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}},$$

где x играет роль времени, а $y(x)$ — единственная обобщенная координата задачи.

Так как $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, то в системе сохраняется

"энергия" (см. лекцию 5, об-во лагр. формализма С2, стр 4)

$$E = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = - \frac{1}{\sqrt{2g y(1+y'^2)}} = \text{const}$$

$$\Downarrow$$
$$\boxed{y(1+y'^2) = \kappa = \text{const}} \quad (1)$$

Этот дифур 1-го порядка и будем решать (вместо уравнения Эйлера-Лагранжа) для нахождения экстремали $T_B[y(x)]$

Разрешаем его относительно y' :

$$y' = \pm \frac{\sqrt{\kappa - y}}{\sqrt{y}}$$

$$\Downarrow$$
$$dx = \frac{dy \cdot y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\kappa - y}}$$

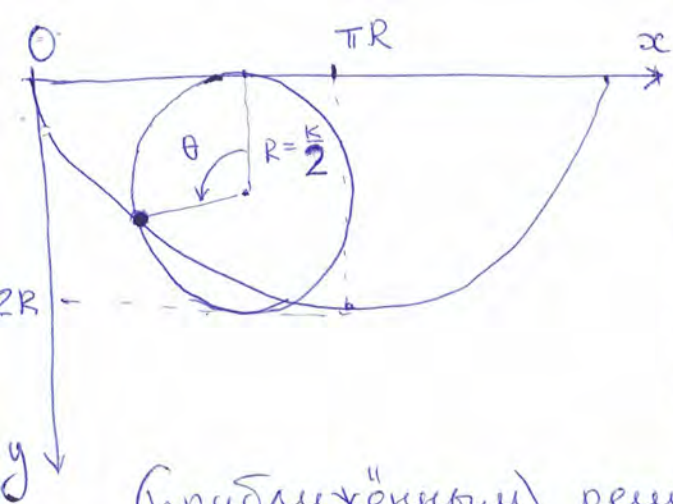
Интегрируем, сделав в правой части подстановку $y(x) \mapsto \theta(x)$:

$$\boxed{y = \kappa \sin^2(\theta/2) = \frac{\kappa}{2}(1 - \cos\theta)} \quad (2a)$$

$$dx = \kappa \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{\kappa}{2}(1 - \cos\theta) d\theta = \frac{\kappa}{2} d(\theta - \sin\theta)$$

$$\Downarrow$$
$$\boxed{x = x_0 + \frac{\kappa}{2}(\theta - \sin\theta)} \quad (2b)$$

Формулы (2a, b) — это параметрическое задание циклоиды — кривой, по которой движется точка обода колеса, при его качении без проскальзывания по Ox . Начальные условия $x(0) = y(0) = 0$ выполняются, если $\theta(0) = 0, x_0 = 0$



Константа k связана с радиусом колеса: $R = \frac{k}{2}$.

Её значение, а также значение параметра θ в точке прилёта $\theta_B = \theta(T_B)$ находится

(приближённым) решением уравнений

$$\begin{cases} Y_B = \frac{k}{2} (1 - \cos \theta_B) \\ X_B = \frac{k}{2} (\theta_B - \sin \theta_B) \end{cases}$$

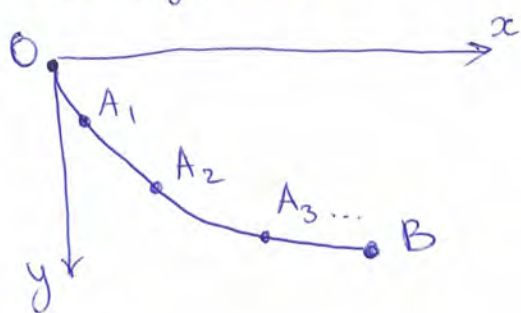
Реш 1. Если $X_B/Y_B > \pi/2$, то y' меняет знак: точка временно опускается ниже Y_B , а затем поехать в горку.

Реш 2. Подставив решение (2а, б) в функционал $T_B[y(x)]$ (0), мы можем вычислить время движения по брахистохроне из O в B :

$$T_B = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx = \int_0^{\theta_B} \sqrt{\frac{k}{2g}} d\theta = \sqrt{\frac{k}{2g}} \theta_B.$$

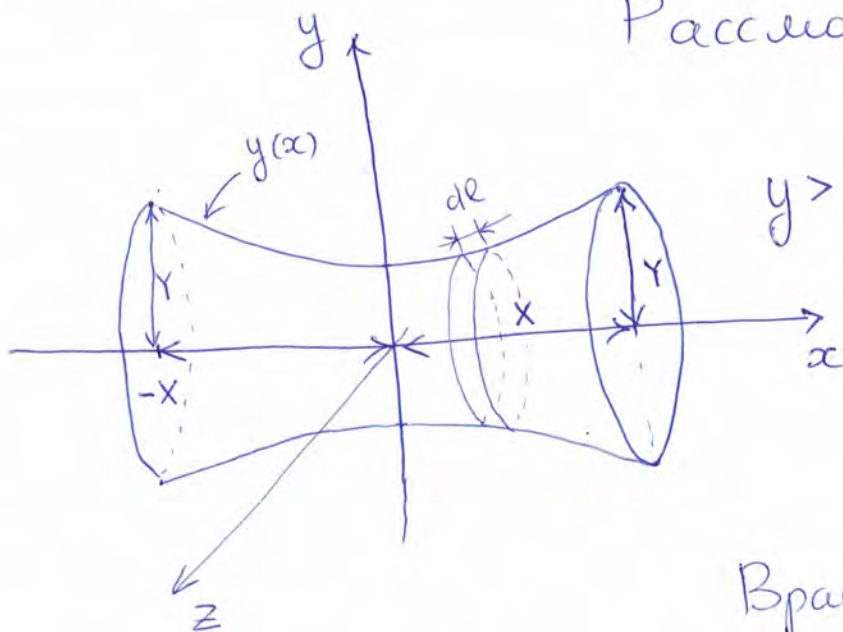
То есть параметр θ пропорционален времени движения по брахистохроне.

Реш 3 Можно проверить, что стартуя из любой промежуточной точки циклоиды A_1, A_2, A_3, \dots (см. Рис.),



если начинать движение с нулевой скоростью, то до B всегда доберешься за одно и то же время.

Задача о мыльных пленках



Рассмотрим семейство функций $y(x)$, $x \in [-X, X]$

$y > 0$, с фиксированными значениями на границах

$$y(-X) = y(X) = Y$$

Вращая такие функции

вокруг оси Ox мы получаем поверхности вращения (см. Рис.). Необходимо определить $y(x)$ такую, чтобы площадь ее фигуры вращения была минимальной. Экспериментально такие поверхности можно получить, катя мыльную плёнку между двумя кольцами.

Площадь поверхности вращения

$$S[y(x)] = \int_{-Y}^Y \underbrace{2\pi y(x)}_{\text{периметр окружности}} \underbrace{\sqrt{1+y'^2(x)} dx}_{\substack{\text{длина боковой} \\ \text{образующей куска конуса}}} dx$$

площадь боковой поверхности куска конуса (см. рис.)

Поиск экстремалей этого функционала — типичная задача механика: конус кривой $y(x)$ фиксирован.

x играет роль времени. "Лагранжиан" задачи $L = 2\pi y \sqrt{1+y'^2}$ не зависит явно от времени x , значит выполняется закон сохранения "энергии".

$$"E" = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = -\frac{2\pi y}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

Разрешаем соотношение относительно y' :

$$\boxed{y'^2 = \frac{1}{\alpha^2} y^2 - 1}, \text{ где } \alpha - \text{некоторая константа}$$

Заменой $y(x) \mapsto \varphi(x)$:

$$\begin{cases} y = \alpha \operatorname{ch} \varphi, \\ y' = \alpha \operatorname{sh} \varphi \cdot \varphi', (\varphi \neq 0) \end{cases}$$

получаем уравнение

$$\boxed{\alpha^2 \varphi'^2 = 1}$$

Выбор знака φ здесь несущественен. Выбираем решение $\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} x + \varphi_0$

Симметричность граничных условий для y : $y(x) = y(-x)$ приводит к $\varphi_0 = 0$. Получаем ответ

$$\boxed{y(x) = \alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha}}$$

где значение параметра $\alpha(X, Y)$ должно определяться из граничного условия

$$\boxed{Y = \alpha \operatorname{ch} \frac{X}{\alpha}}$$

Но для всяких X и Y это условие разрешимо. Вот отличие граничных условий вариационных задач от качальных условий механических задач.

Прежде чем разрешить это условие, попытаем
площадь фигуры:

$$S = \int_{-x}^x 2\pi \left(\alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha} \right) \underbrace{d \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha}}_{\substack{\uparrow \\ \text{это } \sqrt{1+y'^2}, \text{ т.к. } y' = \operatorname{sh} \frac{x}{\alpha}}} dx =$$

$$= 2\pi\alpha \int_{-x}^x \frac{\operatorname{ch} \frac{2x}{\alpha} + 1}{2} dx =$$

$$= 2\pi\alpha X + \pi\alpha^2 \operatorname{sh} \left(\frac{2X}{\alpha} \right) \leftarrow \begin{matrix} \text{преобразуем, исполь-} \\ \text{зуя } Y = \alpha \operatorname{ch} \frac{X}{\alpha} \end{matrix}$$

$$\boxed{S = 2\pi X\alpha + 2\pi Y\sqrt{Y^2 - \alpha^2}}$$

У параметра α есть геом. смысл: $y(0) = \alpha$ —
это радиус фигуры в самом узком месте.

Иско, что $\alpha \in [0, Y]$

$\alpha \rightarrow 0$, т.е. фигура схлопывается в 2 дольки от
цилиндра, $y(x)$ имеет вид \bigcup_{-x}^x . $S = 2\pi Y^2$
Верно!

$\alpha \rightarrow Y$, т.е. фигура превращается в боковую поверх-
ность цилиндра $y(x) = \text{---}$ $S = 4\pi XY$

Реш.: при "тупой" подста-
новке входит $2\pi XY$.
На самом деле $\alpha = Y(1 - \varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$
приводит к $X \rightarrow 0$ как $X = \sqrt{2} Y \varepsilon + o(\varepsilon)$

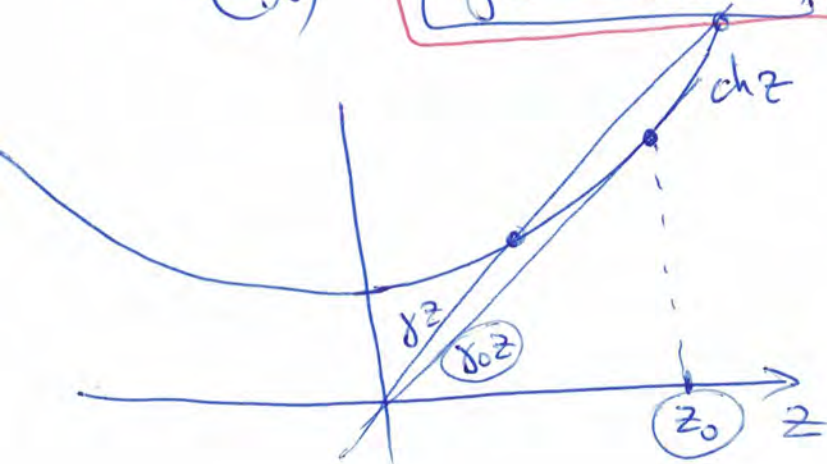
Поэтому $S = 2\pi(\sqrt{2} Y \varepsilon) \cdot Y + 2\pi Y \cdot Y(\sqrt{1 - (1 - \varepsilon^2)^2}) = 4\pi(\sqrt{2} Y \varepsilon) Y = 4\pi XY$
(см. $Y = \alpha \operatorname{ch} X/\alpha$)

Теперь найдем $\alpha(X, Y)$:

$$\boxed{Y = \alpha \operatorname{ch} \frac{X}{\alpha}} \quad (*)$$

Преобразуем $\gamma = \frac{Y}{X}, z = \frac{X}{\alpha}$.

(*) $\boxed{\gamma z = \operatorname{ch} z}$ — надо решить по z



Не при всех γ решение есть.

Касание при $\gamma = \gamma_0$

$$\begin{cases} \gamma_0 = \operatorname{sh} z \\ \gamma_0 z = \operatorname{ch} z \end{cases} \leftarrow \text{уравнения на } z_0$$

$$\boxed{\operatorname{th} z_0 = \frac{1}{z_0}}$$

Численно решается: $\boxed{z_0 = 1,199678 \dots}$

При этом $\boxed{\gamma_0 = \operatorname{sh} z_0 = 1,509 \dots = \frac{Y}{X}}$
 Начиная с такого отношения $\frac{Y}{X}$ есть группа мин мощности

$\gamma > \gamma_0$ — 2 решения уравнение (*)
 Какое верное?

Проведем численный эксперимент

$$\gamma = 2, X = 1 \Rightarrow \gamma = 2 > \gamma_0$$

2 корня $z_1 = 0,589...$, $\alpha_1 = \frac{X}{z_1} = \frac{1}{z_1} = 1,697$

$z_2 = 2,127...$, $\alpha_2 = \frac{1}{z_2} = 0,470$

Площади поверхностей





$S_1 = 23,97$ $\alpha_1 = y_1(0) = 1,697$

$S_2 = 27,38$ $\alpha_2 = y_2(0) = 0,470$

Боковая пов-сть цилиндра $S_{бок} = 2\pi\gamma \cdot 2X = 8\pi \approx 25,13$

Площадь донышек: $S_{2 дна} = 2(\pi\gamma^2) = 8\pi \approx 25,13$

Получим такое изменение площадей

 $\alpha = y(0) = \gamma = 2$	 $\alpha = 1,69,7$	 $\alpha = 0,470$	 $\alpha = 0$
$S = 25,13$	$23,97$ ↑ это min	$27,38$ ↑ это max	$25,13$



среди семейства
кривых $y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha}$

При уменьшении γ вплоть до $\gamma_0 = 1,509$ мин и макс
сходятся и при $\gamma = \gamma_0$ мин пропадает \Rightarrow пленка лопается !