1 ДЗ 1

Задача 1.1. Докажите, что квазиаффинное многообразие $U = \left\{x \in \mathbb{A}_k^2 \mid f(x) \neq 0\right\}$ аффинно, т.е. есть взаимно обратные регулярные отображения между ним и некоторым замкнутым алгебраическим множеством (каким?).

Доказательство. Рассмотрим множество U, заметим, что его можно отобразить во вложение в $\mathbb{A}_k^3$ следующим образом: $(x, y) \mapsto \left(x, y, \frac{1}{f}\right)$ и обратно: $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Это отображение регулярное и нормально определено, так как f нигде не 0 (по условию). $\square$

Задача 1.2. Если k алгебраически замкнуто, докажите, что $V = \mathbb{A}_k^2 - \{(0,0)\}$ не является аффинным (можно воспользоваться теоремой Гильберта о нулях).

Доказательство. Предположим, от противного, что V аффинно. Тогда существует идеал I группы $k[x, y]$ такой, что $V = Z(I)$. Пусть $p(x, y) = x + y$. Тогда $p(x, y)$ обращается в нуль на $(0,0)$, которого нет в V, поэтому он не обращается в нуль ни в одной точке V. Следовательно, по теореме Гильберта о нулях $p(x, y)$ не принадлежит I. Но это означает, что существует простой идеал P, содержащий I, такой, что $p(x, y)$ не принадлежит P. По соответствию между алгебраическими множествами и радикальными идеалами это означает, что существует неприводимое алгебраическое подмножество W в $\mathbb{A}_k^2$ такое, что $V \subset W$ и $(0,0) \notin W$. Но это противоречит тому, что $\overline{V} = \mathbb{A}_k^2$, поскольку любое неприводимое подмножество, содержащее V, должно быть равно $\overline{V}$. Следовательно, наше предположение об аффинности V оказалось ложным. $\square$

Задача 1.3. Пусть S мультипликативное подмножество в A, A_S кольцо частных. Докажите, что отображение $\operatorname{Spec}(A_S) \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$, индуцированное естественным $A \rightarrow A_S$, является гомеоморфизмом на подмножество идеалов $\operatorname{Spec}(A)$, не пересекающихся с S.

Доказательство. Пусть $\varphi : A \rightarrow A_S$ — отображение, переводящее a в $a/1$. Тогда мы имеем непрерывное отображение $\operatorname{Spec} \varphi : \operatorname{Spec}(A_S) \rightarrow \operatorname{Spec} A$. Для простоты обозначим $\operatorname{Spec} \varphi$ как h. Пусть $\mathfrak{p}'$ простой идеал в A_S. Тогда $\varphi^{-1} \mathfrak{p}'$ является простым идеалом в A, таким что $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}') \cap S = \emptyset$. Если нет, то существует $f \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}') \cap S$. Тогда $f \in S$ и $f/1 \in \mathfrak{p}'$. Так как $f \in S, 1/f \in A_S$. Это означает, что $1/1 \in \mathfrak{p}'$, то есть $A_S = \mathfrak{p}'$ что неправда так как $\mathfrak{p}'$ - простой идеал. Так как $\operatorname{Im} h \subset \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$. И наоборот, если $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$, то $\varphi(\mathfrak{p}) = S^{-1}\mathfrak{p}$ является простым идеалом в A_S. Это связано с тем, что локализация области целостности является областью целостности и, следовательно, $A_S / S^{-1}\mathfrak{p} \cong S^{-1}(A/\mathfrak{p})$ является целостной областью. Более того, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}\left(S^{-1}\mathfrak{p}\right)$. Поэтому $\mathfrak{p} \in \operatorname{Im} h$. мы обнаружили $\operatorname{Im} h = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$.

Пусть $h' : \operatorname{Im} h \rightarrow \operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right)$, $\mathfrak{p} \rightarrow S^{-1}\mathfrak{p}$. Для $\mathfrak{p} \in \operatorname{Im} h, h \circ h'(\mathfrak{p}) = h\left(S^{-1}\mathfrak{p}\right) = \varphi^{-1}\left(S^{-1}\mathfrak{p}\right) = \mathfrak{p}$ и для любого $\mathfrak{p}', h' \circ h(\mathfrak{p}') = h'\left(\varphi^{-1}\mathfrak{p}'\right) = S^{-1}\left(\varphi^{-1}\mathfrak{p}'\right) = \mathfrak{p}'$ по определению. Следовательно h' является обратным к h. Теперь нам нужно только показать, что h — открытое отображение.

Пусть $D(t/s)$ — стандартное открытое подмножество в $\operatorname{Spec}(A_S)$. Давайте покажем, что $h(D(t/s)) = D(t) \cap \operatorname{Im} h$. Предположим $\mathfrak{p} \in D(t) \cap \operatorname{Im} h$. Тогда $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ и $t \notin \mathfrak{p}$. Тогда $t/s \notin \mathfrak{p}' = \varphi(\mathfrak{p})^1$ Это показывает, что $\mathfrak{p}' \in D(t/s)$. Другими словами, $\mathfrak{p} = h(\mathfrak{p}') \subset h(D(t/s)))$ Поэтому $D(t) \cap \operatorname{Im} h \subset h(D(t/s))$. Предположим, что $\mathfrak{p} \in h(D(t/s))$. Затем $\mathfrak{p} \in \operatorname{Im} h$ и тогда $\mathfrak{p}' \in D(t/s)$ так что $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$. Следовательно $\mathfrak{p} \in \operatorname{Im} h, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Так как $\mathfrak{p}' \in D(t/s), t/s \notin \mathfrak{p}'$. Теперь мы хотим показать $\mathfrak{p} \in D(t)$. Предположим, противное. $t \in \mathfrak{p}$. Тогда $t/s \in \mathfrak{p}'$ что приводит к противоречию, заключающемуся в том, что $t/s \notin \mathfrak{p}'$. Следовательно, $t \notin \mathfrak{p}$ и, следовательно, $\mathfrak{p} \in D(t)$. Мы заключаем, что

$$h(D(t/s)) = D(t) \cap \operatorname{Im} h.$$

То есть h — открытое отображение. $\square$

Задача 1.4. Каков образ отображения спектров, индуцированного гомоморфизмом колец $k[X, Y] \to k[X, Y, Z]/(XZ - Y)$?

Доказательство. Заметим, что в $k[X, Y, Z]$ простые идеалы – 0, неприводимые многочлены и максимальные. Тогда, при факторе $(XZ - Y)$, 0 остается нулем, а неприводимые факторизуются, тем самым любой многочлен с Y будет выражаться через X, Z. Тогда простые идеалы в фактор-кольце – это все неприводимые по X, Z. Получаем, что отображение спектров биективно, ведь неприводимые многочлены двух переменных переходят в неприводимые,из чего следует, что в ядре лежит только 0. □

Задача 1.5. Опишите простые идеалы $k[X, Y]$.

Доказательство. Простые идеалы $k[X, Y]$ — это 0, максимальные, и (P), где P — любой неприводимый многочлен. Это связано с тем, что $k[X, Y]$ имеет размерность два и является факториальным кольцом. □