Вопросы к коллоквиуму-1 по матанализу

1 декабря 2018

По вопросам к теху обращайтесь:

1. Вопросы 1-10: Бабушанова Даша
2. Вопросы 11-20: Юрлов Павел
3. Вопросы 21-30: Стрельцов Артем
4. Вопросы 31-38: Дегтеринский Николай

Вопрос 1

Аксиомы множества вещественных чисел. Аксиомы непрерывности.

Определение: Вещественные числа - множество элементов ($\mathbb{R}$) на котором задано 2 базовых операции («+» и «×») и отношение порядка «$\leqslant$», которые удовлетворяют набору аксиом.

Аксиомы сложения:

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: a + b = b + a
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: (a + b) + c = a + (b + c)
3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}$: a + 0 = 0 + a = a
4) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists (-a) \in \mathbb{R}$: a + (-a) = (-a) + a = 0

Аксиомы умножения:

5) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: ab = ba
6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: a(bc) = (ab)c
7) $\exists 1 \in \mathbb{R}$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
8) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$: $\exists\, 1/a \in \mathbb{R}$: $a \cdot (1/a) = 1$
(1/a - обратное для a)

Аксиома связи «+» и «×»:

9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \cdot (b + c) =$ ab + ac

Аксиомы сравнения:

10) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$
11) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Связь порядка и сложения:

12) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Rightarrow (a + c) \leq (b + c)$

Связь порядка и умножения:

13) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $0 \leq a$ и $0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab$

Аксиома непрерывности:

14) Для $\forall$ непустых подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ с условием $\forall\, a \in A$ и $\forall b \in B$, $a \leq b$
$\exists\, c \in \mathbb{R}\ \forall\, a \in A$ и $b \in B$:
$a \leq c \leq b$

Вопрос 2

Определение точной верхней и точной нижней граней ограниченного числового множества. Существование точной верхней грани (как следствие из аксиомы непрерывности). Единственность точней верхней грани.

1. A - множество ограниченное сверху.
Число $d \in R$ называется точной верхней гранью (супремумом) множества A, если:
1) d - верхняя грань
2) $\forall\, c < d$ не является верхней гранью для A
Иначе говоря, $d = \sup A$, если:
1) $\forall\, a \in A$, $a \leq d$
2) $\forall\, c < d\ \exists\, a \in A$, $a > c$

2. **У ограниченного сверху мн-ва существует супремум.**
Рассмотрим B = {мн-во всех верхних граней мн-ва A} $= \{b \in \mathbb{R} | \forall a \in A, a \leq b\}$, $A, B \neq \emptyset$
По аксиоме (14): $\exists\, d \in \mathbb{R} : a \leq d \leq b \Rightarrow d$ - $\sup A$
Возьмем $c < d$: Допустим, что c - верхняя грань, тогда c $\in B$,
но $\forall b \in B\ b \geqslant d \Rightarrow c \geqslant d$.
Противоречие.

3. **Супремум единственный**
Пусть множество A имеет 2 точных верхних грани: a_1 и a_2.
Допустим, что $a_1 < a_2$. Так как $a_1 < a_2$ и $a_2 =$ supA, то $\exists a' \in A$: a' $> a_1$, что противоречит тому факту, что $a_1 = \sup A$.

Вопрос 3

Бесконечные десятичные дроби (бдд). Сравнение бдд. Алгоритм построения точной верхней грани для множества положительных бдд, ограниченного сверху.

Бдд - выражение вида $\alpha = \pm\alpha_0{,}\alpha_1\alpha_2...$, где $\alpha_0 \in$ {0,1,2..}; $\alpha_n \in$ {0,1,2.. 9}

Сравнение бдд:
1. Пусть $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$:
$\alpha = \alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2...$
$\beta = \beta_0,\ \beta_1\ \beta_2...$
Скажем, что $\alpha < \beta$, если выполнено хотя бы одно утверждение:
$\cdot\alpha_0 < \beta_0$
$\cdot\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 < \beta_1$
$\cdot\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 < \beta_2$
·
·
Иначе $\alpha > \beta$.
2. Если $\alpha < 0$ и $\beta > 0$: $\alpha < \beta$.
3. Если $\alpha \leq 0$ и $\beta \leq 0$, - $\alpha <$ - β (преобразуем в положительные бдд, а потом используем первый пункт) $\rightarrow \alpha > \beta$.

Определим точную верхнюю грань множества бдд:
Пусть X - ограниченное множество бдд. (т.е. $\exists$ c такая, что $\forall\, x \in X$: $x \leq c$.)
Определим $\beta = \beta_0,\ \beta_1\ \beta_2...$ = supX.

Приведем алгоритм:
$\beta_0 = \max\{\ \alpha_0 \mid \alpha \in X\ \}$
$A_1 = \{\ \alpha \in X \mid \alpha_0 = \beta_0\ \}$
$\beta_1 = \max\{\alpha_1 \mid \alpha \in A_1\ \}$
$A_2 = \{\ \alpha \in A_1 \mid \alpha_1 = \beta_1\ \}$
$\beta_2 = \max\{\alpha_2 \mid \alpha \in A_2\ \}$
$A_3 = \{\ \alpha \in A_2 \mid \alpha_2 = \beta_2\ \}$

Вопрос 4

Построение арифметических опрераций на множестве бдд на примере суммы двух положительных бдд.

$\alpha = \alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2... > 0$
$\beta = \beta_0,\ \beta_1\ \beta_2... > 0$

Определим сумму бдд:
$\alpha + \beta = \sup$ { x + y | $0 \leq x \leq \alpha$, x - конечная десятичная дробь,
$0 \leq y \leq \beta$, y - конечная десятичная дробь}

Определим умножение бдд (на всяких случай)**:**
$\alpha \cdot \beta = \sup\ \{\ x \cdot y \mid 0 \leq x \leq \alpha$, x - конечная десятичная дробь,
$0 \leq y \leq \beta$, y - конечная десятичная дробь}

Вопрос 5

Теорема о единственности множества вещественных чисел с точностью до изоморфизма (без доказательства).

Теорема о единственности множества вещественных чисел.
Пусть $\mathbb{R}$ и $(\widetilde{\mathbb{R}})$ - множества, удовлетворяющие всем аксиомам 1 - 14. Тогда имеется биекция $\mathbb{R} \to (\widetilde{\mathbb{R}})$, такая что:
p : $\mathbb{R} \to \widetilde{\mathbb{R}}$
· x + y $\Longleftrightarrow \tilde{x} + \tilde{y}$ | p(x + y) = p(x) + p(y);
· xy $\Longleftrightarrow \tilde{x}\tilde{y}$ | p(xy) = p(x) · p(y);
· $x \leq y \Longleftrightarrow \tilde{x} \leq \tilde{y}$ | если $x \leq y$: $p(x) \leq p(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

Вопрос 6

Лемма о последовательности вложенных отрезков и о стягивающейся последовательности вложенных отрезков

Лемма о вложенных отрезках
(принцип непрерывности Кантора):

Для всякой системы вложенных отрезков $\exists$ c $\in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ c \in [a_n, b_n]$

Доказательство:
A = { $a_n \mid n \in \mathbb{N}$ }
B = { $b_n \mid n \in \mathbb{N}$ } Имеем $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$
$a_n \leq a_{n+m} < b_{n+m} \leq b_m$
Значит $\forall$ элемент из A меньше (левее), чем $\forall$ элемент из B.
По аксиоме непрерывности $\exists\, c \in \mathbb{R}$: $a_n \leq c \leq b_m\ \forall\, a_n \in A\ \forall\, b_m \in B$
Значит c $\in [a_n; b_n]\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Система вложенных отрезков называется стягивающейся, если
$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}$: $b_n - a_n < \epsilon$

Теорема: стягивающаяся система вложенных отр. имеет ровно 1 общую точку

Доказательство:
Предположим противное.
$\forall\, n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq c < c' \leq b_n \Rightarrow c' - c \leq b_n - a_n$
$\epsilon = c' - c\ \exists\, k \in \mathbb{N} : b_k - a_k < c' - c$
Противоречие.

Вопрос 7

Числовые последовательности (основные определения: монотонность, ограниченность, конечный предел, бесконечный предел, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности).

Пусть A - произвольное множество. Пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ сопоставили элемент $x_n \in A$. Тогда говорят, что задана последовательность элементов из A.
Если A = $\mathbb{R}$, то последовательность называется числовой.

Последовательность $\{x_n\}$ называется нестрого монотонно возрастающей, если $\forall\, n \in \mathbb{N}$, n $>$ m: $x_n \geq x_m$
Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если множество ее значений ограничено сверху, т.е $\exists\, c \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$: $x_n \leq c$.
Последовательность ограничена, если она ограничена и сверху и снизу, т.е. $\exists\, c \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$: $|x_n| \leq c$.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0$: $|x_n - a| < \epsilon$
$|x_n - a| < \epsilon \Longleftrightarrow x_n \in (a - \epsilon; a + \epsilon)$
$(a - \epsilon;\ a + \epsilon)$ - ϵ - окрестность точки a.

Утверждение: a является пределом $\{ x_n \} \iff$ для любой ϵ - окрестности числа a $\in \mathbb{R}$ начиная с некоторого номера все элементы попадают в эту окрестность.

Бесконечные пределы:
Определение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если $\forall$ c > 0 $\exists n_0 = n_0(c)$ $\forall n \geq n_0$: $x_n >$ c
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если $\forall$ c < 0 $\exists n_0 = n_0(c)$ $\forall n \geq n_0$: $x_n <$ c
n_0 - момент, с которого $\{ x_n \}$ попала на луч.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если $\forall$ c > 0 $\exists n_0 = n_0(c)$ $\forall n \geq n_0$: $|x_n| >$ c

Бесконечно малая последовательность:
Определение: x_n называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
Определение: Говорят, что $x_n \to a + 0$ (сходится к a сверху), если $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0(\epsilon)$ $\forall n \geq n_0$ $x_n \in [a; a+\epsilon)$
Утверждение: Если $x_n \to a \in \mathbb{R}$, то $x_n = a + \alpha_n$, где α_n - б.м

Бесконечно большая последовательность:
Определение: x_n называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Вопрос 8

Теорема о единственности предела последовательности.

Последовательность $\{ x_n \}$ имеет не более одного конечного предела.

Допустим противное: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $a' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $a < a'$
Положим $\epsilon = \frac{a-a'}{2} > 0$
Из $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\epsilon)$ $\forall n \geq n_0$: $|x_n - a| < \frac{a'-a}{2} \Rightarrow x_n - a < \frac{a'-a}{2} \Rightarrow x_n < \frac{a'+a}{2}$
Из a' $= \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists n'_0 = n'_0(\epsilon)$ $\forall n \geq n'_0$: $|x_n - a'| < \frac{a'-a}{2} \Rightarrow x_n > a' - \frac{a'-a}{2} = \frac{a'+a}{2}$
Противоречие.

Вопрос 9

Свойства пределов, связанные с неравенствами: сохранение знака нестрогого неравенства при переходе к пределу и лемма о милиционерах

Определение: Если последовательность имеет конечный предел, то последовательность называется сходящейся. Иначе - расходящейся.
Теорема: Сходящаяся последовательность ограничена. Положим $\epsilon = 1$, тогда $\exists n_0 = n_0(1)$ $\forall n \geq n_0$: $|x_n - a| < 1$ $\Rightarrow x_n < a + 1$
c $= \max\{x_1, x_2, ..x_{n_0-1}; a+1\}$ Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \leq c$. Значит ограничена сверху.
В качестве нижней грани можно взять D $= \min\{x_1, x_2, ..x_{n_0-1}\} \Rightarrow$ последовательность ограничена снизу.
Утверждения:
1. $x_n \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq c$

2. $x_n \leq y_n$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

3. Лемма о двух миллиционерах.
Пусть $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$
Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и он равен $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Доказательства:

1. Допустим, что $x_n \le c$, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > c$
$\epsilon = \frac{a-c}{2} > 0$
Из определения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ следует то, что $\exists\, n_0 = n_0(\epsilon)\ \forall\, n \ge n_0$
$|x_n - a| < \frac{a-c}{2}$

$\frac{a+c}{2} < x_n < \frac{3a-c}{2}$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$. Тогда:
$|y_n - c| < \frac{a-c}{2}$

$\frac{3c-a}{2} < y_n < \frac{a+c}{2}$

Тогда $y_n < \frac{a+c}{2} < x_n \Rightarrow y_n < x_n \le c$.
$y_n \to c$, $c \to c \Rightarrow x_n \to c$, но $x_n \to a$ и $a \ne c$.
Противоречие.

2. Допустим, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n > y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

$\epsilon = \frac{x-y}{2} > 0$
Из определения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ следует, что $\exists\, n_0 = n_0(\epsilon)^{n\to\infty}\ \forall\, n \ge n_0$

$|x_n - x| < \frac{x-y}{2} \Rightarrow \frac{x+y}{2} < x_n < \frac{3x+y}{2}$

Из определения $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ следует, что $\exists\, n_0' = n_0'(\epsilon)^{n\to\infty}\ \forall\, n \ge n_0'$

$|y_n - y| < \frac{x-y}{2} \Rightarrow \frac{3y-x}{2} < y_n < \frac{x+y}{2}$

Значит $\forall\, n \ge \max(n_0; n_0')$ имеем, что $y_n < \frac{x+y}{2} < x_n \to y_n < x_n$.
Противоречие с условием.

3. $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, n \ge n_0$: $z_n < c + \epsilon$ (следует из $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$)

$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, n \ge n_0$: $x_n < c - \epsilon$ (следует из $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$)

Значит при $n \ge \max(n_0, n_0')$ выполняется $c - \epsilon < x_n \le y_n \le z_n < c + \epsilon$

Значит, по определению $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$.

Вопрос 10

Арифметические свойства бесконечно малых последовательностей.

Свойства:
1. Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - б.м.п., то $\{\alpha_n + \beta_n\}$ тоже б.м.п.
2. Если $\{\alpha_n\}$ - б.м.п., то $\{c \cdot \alpha_n\}$ тоже б.м.п. для $c \in \mathbb{R}$.
3. Если $\{\alpha_n\}$ - б.м.п., а $\{\beta_n\}$ ограничена, то $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ тоже б.м.п.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - б.м.п.
5. Если $\{\alpha_n\}$ - б.м.п. и $\forall\, \alpha_n \ne 0$, то $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ - б.б.п.

Доказательства:
1. Нам дано, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.
$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0(\epsilon)\ \forall\, n \ge n_0$: $|\alpha_n| < \epsilon$
$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0(\epsilon)\ \forall\, n \ge n_0$: $|\beta_n| < \epsilon$
Надо доказать, что $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0''(\epsilon)\ \forall\, n \ge n_0''$: $|\alpha_n + \beta_n| < \epsilon$

Возьмем $n_0'' = \max(n_0(\frac{\epsilon}{2}); n_0'(\frac{\epsilon}{2}))$
Тогда $\forall\, n \geq n_0''$ выполнено:
$|\alpha_n| < \frac{\epsilon}{2}$
$|\beta_n| < \frac{\epsilon}{2}$
Значит $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

2. Нам дано, что $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0(\epsilon)\ \forall\, n \geq n_0,\ |\alpha_n| < \epsilon$
Докажем, что $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0'\ \forall\, n \geq n_0'$: $c \cdot \alpha_n < \epsilon$
Возьмем $n_0' = n_0 \cdot \frac{\epsilon}{|c|}$. Тогда $\forall\, n \geq n_0\ |\alpha_n| < \frac{\epsilon}{|c|} \Rightarrow (c \cdot \alpha_n) < \epsilon$

3. Так как $\{\beta_n\}$ ограничена, то $\exists\, c > 0$: $|\beta_n| < c$.
$-c \cdot \{\alpha_n\} \leq \alpha_n \cdot \beta_n \leq c \cdot \{\alpha_n\}$
По 2 пункту $-c \cdot \{\alpha_n\} \to 0$ и $c \cdot \{\alpha_n\} \to 0$
По теореме о двух миллиционерах $\alpha_n \cdot \beta_n$ тоже стремится к $0 \Rightarrow \{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ - б.м.п.

Вопрос 11

Арифметические свойства пределов последовательности(доказательство для предела суммы и предела произведения)

Ответ:

Предел суммы:

$$\lim_{x\to\infty}(X_n + Y_n) = \lim_{x\to\infty} X_n + \lim_{x\to\infty} Y_n$$

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} X_n = c$ и $\lim\limits_{x\to\infty} Y_n = d$, то $X_n = c + \alpha_n$ и $Y_n = d + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - б.м.п.
Из равентсва $X_n + Y_n = c + d + \alpha_n + \beta_n$ следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}(X_n + Y_n) = c + d$ так как $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - б.м.п. Ч.Т.Д

Предел произведения:
$\lim\limits_{x\to\infty}(X_n \cdot Y_n) = \lim\limits_{x\to\infty} X_n \cdot \lim\limits_{x\to\infty} Y_n$
Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} X_n = c$ и $\lim\limits_{x\to\infty} Y_n = d$, то $X_n = c + \alpha_n$ и $Y_n = d + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - б.м.п.
Воспользуемся равенством $X_n \cdot Y_n = c \cdot d + c \cdot \beta_n + d \cdot \alpha_n + \beta_n \cdot \alpha_n$ Так как $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности, то последовательности $\{c \cdot \beta_n\}$ $\{d \cdot \alpha_n\}$ $\{\beta_n \cdot \alpha_n\}$ также являются бесконечно малыми, откуда следует, что $\{c \cdot \beta_n + d \cdot \alpha_n + \beta_n \cdot \alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, значит $\lim\limits_{x\to\infty}(X_n \cdot Y_n) = \mathrm{c} \cdot d$ Ч.Т.Д

Вопрос 12

Если $\{X_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, то она сходится. Если $\{X_n\}$ монотонно убывет и ограничена снизу, то она сходится.

Ответ:

Ограничимся доказательством теоремы для случая ограниченной сверху и монотонно возрастающей последовательностью(так как для убывающей и огранченной снизу последовательности доазательство аналогично):
Так как $\{X_n\}$ - ограничена сверху, то по теореме о существовании верхней грани: $\exists!\sup\{X_n\} = l$ Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\{X_n\} = l$:
Так как по определению точной верхней грани: 1) $l = sup\{X_n\}\ \forall n\,|\,X_n \leq l$ 2) $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0\, :\, X_{n_0} > l - \varepsilon$
Так как $\{X_n\}$ - монотонно возрастает $\forall n \geq n_0\ X_n > X_{n_0}$ и $l - \varepsilon < X_{n_0} \leq X_n \leq l < l + \varepsilon$ значит $\lim\limits_{x\to\infty}\{X_n\} = l$ Ч.Т.Д

Вопрос 13

Определение числа e

Ответ:

Утверждения:

а) $X_n = (1+\frac{1}{n})^n$ - монотонно возрастает и ограничена сверху
б) $\widetilde{X_n} = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ - монотонно убывает и ограничена снизу
в) $\lim\limits_{x\to\infty}\{X_n\} = \lim\limits_{x\to\infty}\widetilde{X_n}$

Докажем б) и в):

б) Докажем ограниченность $\widetilde{X_n}$ снизу с помощью неравенства Бернули: $(1+\frac{1}{n})^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n} > 2\ \forall n \in \mathbb{N}$
б) Докажем монотонность:
Для этого покажем, что $\frac{\widetilde{X}_{n-1}}{\widetilde{X}_n} > 1$: $\frac{\widetilde{X}_{n-1}}{\widetilde{X}_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$ значит $\widetilde{X}_{n-1} > \widetilde{X}_n$ У $\widetilde{X}_n$ сущетвует предел который называется e
Докажем пункт в)
: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$ - такой предел и называется числом е

Вопрос 14

Частичные пределы последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса(формулировка и доказательство)

Ответ:

Определение: Пусть $\{n_k\}$ - возрастающая последовательность натуральныз чисел, пусть $\{X_n\}$ -числовая последовательность, тогда последовательность $\{X_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ называется подпоследовательностью в $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$
Определение: Частичным пределом $\{X_n\}$ называется предел ее сходящейся подпоследовательности
Теорема: Всякая ограниченная последовательность имеет (хотя бы один) частичный предел
Доказательство:
$\exists$ отрезок $I_0 = [a,b]$ т.ч $\forall n X_n \in I_0$. Разделим отрезок I_0 на два равных отрезка I_1 и I_2 хотя бы один из этих отрезков содержит бесконечно много элементов $\{X_n\}$ назовем его J_1. Пусть n_1 число т.ч. $\{X_{n_1}\} \in J_1$. Разобьем J_1 пополам, один из полученных отрезков(назовем его J_2), содержит бесконечно много элементов последовательности.
Пусть n_2 число т.ч. $n_2 \geq n_1$ и $\{X_{n_2}\} \in J_2$ продолжив данный алгоритм получим: $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset ...$
$J_1 \to X_{n_1}$, $J_2 \to X_{n_2}$, $J_3 \to X_{n_3}$ .... Получим что J_i - стягивающаяся система вложеных отрезков, тогда по теореме о вложенных отрезках существует единственная, такая точка с, что лежит во всех отрезках J_i. Утверждается что $\lim k \to \infty X_{n_k} = c$ при i с условием, что длина $J_i < \varepsilon$ отрезок J_i и все последующие, попадают в $(c-\varepsilon, c+\varepsilon$ Ч.Т.Д

Вопрос 15

Фундаментальные последовательности, условие Коши, отрицание условия Коши, критерий Коши.

Ответ:

Определение: Последовательность $\{X_n\}$ называется фундаментальной если выполнено условие Коши: $\forall\varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n,m \geq n_0\ : |X_n - X_m| < \varepsilon$
Отрицание условия Коши: $\exists\varepsilon\ \forall n_0 = n_0(\varepsilon)\ \exists n,m \geq n_0 : |X_n - X_m| \geq \varepsilon$
Теорема(критерий Коши):
Последовательность фундаментальна в том и толко в том случае, когда она сходится и имеет предел. (см. доказательство на следующей странице)

Доказательство:
1) Если $\lim\limits_{x\to\infty} X_n = c$, то $\{X_n\}$ фундаментальна:
$\forall\varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\frac{\varepsilon}{2})\quad \forall n \geq n_0\ \ : |X_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}\quad \forall\varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\frac{\varepsilon}{2})\quad \forall m \geq n_0\ \ : |X_m - c| < \frac{\varepsilon}{2}$, значит $|X_n - X_m| < |X_n - c| + |X_m - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon =>$ Есть условие Коши
2) Докажем, что из фундаментальнсоти следует сходимость:
(Лемма: фундаментальная последовательность ограничена)
Доказательство:
Пусть $\{X_n\}$ - фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет конечный предел. $\{X_n\}$ - фундаментальная последовательность значит у нее есть сходящаяся подпоследовательность $\{X_{n_k}\}$ $\lim\limits_{x\to\infty} X_{n_k} = c$
По определению фундаментальной последовательЕности: $\forall\varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n, m \geq n_0\ \ : |X_n - X_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, значит при $m = n_k \to\ \forall\varepsilon\ \exists n_0, k_0\ \forall n \geq n_0 \text{и} k \geq k_0\ \ : |X_n - X_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ (устремим k к ∞), тогда $|X_n - c| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, получим
$\forall\varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0\ \ : |X_n - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ значит по определению предела $\lim\limits_{x\to\infty} X_{n_k} = c$ Ч.Т.Д

Вопрос 16

Пределы функций: определение по Коши (для нескольких разных случаев на выбор экзаменатора: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = \infty$ и тому подобное) и определение по Гейне

Ответ:

Определение предела по Коши:
Пусть $c, d \in \mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{x\to c} f(x) = d$, если $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon)\,\forall\,x \in \mathring{U}_\delta(c)\colon f(x) \in \mathring{U}_\varepsilon(d)$.
Иными словами, определение по Коши говорит о том, что функция принимает сколь угодно близкие к своему пределу d значения в какой-то проколотой окрестности точки c.

Определение предела по Гейне:
Пусть $c, d \in \mathbb{R}\cup\{\infty, +\infty, -\infty\}$. Тогда $\lim\limits_{x\to c\pm 0} f(x) = d$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ с условием $\forall\,n\ x_n \neq c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = d$.

Вопрос 17

Свойства пределов функций: арифметические и связанные с неравенствами или сохранение знака нестрогого неравентсва при переходе к пределу(с доказательством одного из них) :$\lim(f(x) + g(x)), \lim(f(x) \cdot g(x))$

Ответ:

Доказательство предела суммы (или разности):
Пусть $s(x) = f(x) + g(x)$ Используя арифметические свойства пределов последовательностей, имеем: $\lim\limits_{x\to\infty} s(X_n) = \lim\limits_{x\to\infty} (f(X_n) \pm g(X_n)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(X_n) \pm \lim\limits_{x\to\infty} g(X_n) = a \pm b$ Поскольку $\{X_n\}$ есть произвольная последовательность, сходящаяся к x_0 и элементы которой принадлежат окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$, то, согласно определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{x\to x_0} s(x) = a \pm b$, $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$
Доказательство предела произведения:
Пусть $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, тогда $\lim\limits_{x\to\infty} p(X_n) = \lim\limits_{x\to\infty} (f(X_n) \cdot g(X_n)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(X_n) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(X_n) = a \cdot b$. Поскольку $\{X_n\}$ есть произвольная последовательность, сходящаяся к x_0 и элементы которой принадлежат окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$, то, согласно определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = a \cdot b$, $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
Сохранение знака нестрогого неравентсва при переходе к пределу:

Если существуют конечные пределы: $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = a_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = a_2$ и на некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 $f_1(x) \leq f_2(x)$, то $a_1 \leq a_2$

Доказательство сохранения знака нестрогого неравентсва при переходе к пределу:
Пусть $\{X_n\}$ есть произвольная последовательность, сходящаяся к x_0: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = x_0$. И пусть ее элементы принадлежат проколотой окрестности точки , на которой выполняется неравенство $f_1(x) \le f_2(x)$.
Рассмотрим последовательности $\{f_1(x)\}$ и $\{f_2(x)\}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = a_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = a_2$, то согласно определению предела функции по Гейне, эти последовательности имеют пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(X_n) = a_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_2(X_n) = a_2$
Поскольку $f_1(x) \le f_2(x)$, то их элементы связаны неравенствами: $f_1(X_n) \le f_2(X_n)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(X_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} f_2(X_n)$ отсюда $a_1 \le a_2$

Вопрос 18

Первый и второй замечательный пределы(первый с доказательством)

Ответ:

Второй замечательный предел:
$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
Первый замечательный предел:
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
Доказательство:
Нарисуйте себе тригонометрическую окружность и отметьте там точку $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Теперь исходя из этой же тригонометрической окружности видно: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.
Разделим на $\sin x$, зная, что он больше нуля для такого x:
$1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} \Leftrightarrow 1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$. По лемме о двух милионерах получим $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$.

Вопрос 19

Определение эквивалентных функций. О-символика(определения "О большого"и "о малого")

Ответ:

Определение эквивалентных функций: $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to c$ если $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ обозначается как $f \sim g$
О-символика определение:
Говорят, что $f(x) = O(g(x))$ $(f(x))$ есть ($\underline{\text{o}}$) О большое от $g(x)$ при $x \to c$, если в некоторой проколотой окрестности точки $x = c, (f(x) \le a(g(x))$ для некоторой константы а. Если $c = \infty$, то вместо проколотой окрестности в определении надо брать $(-\infty, -\delta) \vee (\delta, +\infty)$
Говорят, что $f(x) = o(g(x))$, $f(x)$ есть ($\bar{\bar{o}}$) о малое от $g(x)$ при $x \to c$ если $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ по другому $f(x) = g(x) \cdot d(x)$, где $d(x) \to 0$ при $x \to c$

Вопрос 20

Стандартные эквивалентности (с выводом каких-нибудь трех из них)

Ответ:

$$\text{При } x \to 0 \ (1+x)^p \sim 1 + p \cdot x$$
$$e^x \sim 1 + x$$
$$\ln(1+x) \sim x$$
$$\sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim x$$
$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

Докажем, что $\operatorname{tg} x \sim x$:
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{1} = 1$
Докажем, что $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$:
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,\ \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \sim \sqrt{1-x^2} \sim 1 - \frac{x^2}{2}$
Докажем, что $\sin x \sim x$:
(Доказывая первый замечательный предел, мы доказали, что $\sin x \sim x$

21 Определение непрерывности по Коши и Гейне. Классификация точек разрыва функций

Определение: Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пусть $f(x)$ определена на $A \subseteq \mathbb{R}$.

Непрерывность по Коши:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall x \in\ (x_0-\delta; x_0+\delta)\cap A\ |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

Непрерывность по Гейне:

Для любой последовательности x_n: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Определение: Функция непрерывна на некотором множества A (на котором она опредедена), если $f(x)$ непрерывна в $x_0\ \forall x_0 \in A$.

Функция непрерывна, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$. То есть непрерывные функции можно менять местами с пределами.

Точки разрыва:

Если $f(x)$ не обладает свойством непрерывности в точке x_0, то x_0 - точка разрыва. Принята следующая классификация точек разрыва:

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ существуют, конечны и равны, то x_0 называется точкой устранимого разрыва. Можно положить $f(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Тогда $f(x)$ становится непрерывной в x_0.

   Пример: Рассмотрим функцию $f(x) = |sign(x)|$. $f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0-0} = \lim\limits_{x\to 0+0} = 1$.

2. Если оба односторонних предела существуют, конечны, но не равны, то разрыв называется разрывом первого рода. Для такого разрыва определен скачок функции $\Delta_{x_0} f = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$

   Пример: Рассмотрим функцию $f(x) = sign(x)$. $f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0-0} \neq \lim\limits_{x\to 0+0}; d = 2$.

3. Если не существует или существует бесконечный хотя бы один односторонний предел, это разрыв 2 рода (то есть все, что не вышеперечисленное /shrug).

   Пример: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

22 Свойства непрерывных функций

Теорема о сохранении знака

Утверждение: Если $f(x)$ непрерывна в x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности x_0 $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.
Доказательство: Предположим, что $f(x) := d > 0$.
Из непрерывности по Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall x \in\ (x_0 - \delta; x_0 + \delta); |f(x) - d| < \varepsilon$.
Возьмем $\varepsilon = d/2$. Получим $|f(x) - d| < d/2 \Leftrightarrow -d/2 < f(x) - d < d/2 \Leftrightarrow d/2 < f(x) < 3d/2, d > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.

Арифметические

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в x_0, то $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x) \neq 0$) непрерывны в x_0. Это следует из арифметических свойств пределов, если воспользоваться $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ **Замечание**: Исходя из теоремы о сохранении знака, в случае частного функций требуется дополнительно проверить, что в некоторой окрестности x_0 $g(x) \neq 0$.

Непрерывность композиции

Утверждение: Пусть $g(x)$ непрерывна в x_0, а $f(y)$ непрерывна в $y_0 = g(x_0)$, тогда $f \circ g = f(g(x))$ непрерывна в x_0.
Доказательство: Пусть $x \to x_0$. Тогда $g(x_n) \to g(x_0) = y_0$ (по непрерывности $g(x)$).
Тогда $f(g(x_n)) \to f(y_0)$ (по непрерывности $f(y)$)
Написанное верно $\forall x_n \to x_0$, значит $f(g(x))$ непрерывна в x_0.

Можно проще: $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)) = f(g(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)) = f(g(x_0))$. Выполняется непрерывность по Гейне, утверждение доказано.

23 Теорема Вейерштрасса о достижимости непрерывной функции точной верхней и нижней граней на отрезке

Определение: Говорят, что $f(x)$ достигает своей точной верхней грани на множества A, если $\exists x_0 \in A \colon f(x_0) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ (Аналогично с нижней). **Определение:** Говорят, что $f(x)$ непрерывна на $A \in \mathbb{R}$, если $f(x)$ непрерывна в любой точке $x_0 \in A$.
Обозначение: $C(A)$ – множество всех функций, непрерывных на A.

Теорема Вейерштрасса

Утверждение: Если $f(x) \in C([a, b])$, то $f(x)$ ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значение. **Доказательство**: Докажем ограниченность сверху и достижимость супремума.

1. **Ограниченность от противного**. Допустим, что $f(x)$ не ограничена сверху. Значит, $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in [a, b]\ f(x_n) \geq n$.
   Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, $\exists$ сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $c := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.
   $x_{n_k} \to c \in [a, b] \xRightarrow[\text{по непрервыности в точке } c]{} f(x_{n_k}) \to f(c) \in \mathbb{R}$.
   Получаем $f(x_{n_k}) \geq n_k \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c) \in \mathbb{R}$ – противоречие.
2. **Достижимость супремума**. Пусть $s := \sup\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$. Так как s – это т.в.г., то в x_n можно выделить x_{n_k}, причем $x_{n_k} \to c \in [a, b]$. f непрерывна на $[a, b]$, тогда $f(c) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)$ (по Больц. – В.) $= s = f(c) = f(x_{n_k})$. Значит, супремум достигается в точке c. Аналогично делаем для инфимума.

24 Теорема Коши о промежуточном значении. Метод деления пополам для поиска корней уравнения

Утверждение: Пусть $f(x) \in C([a,b])$. Тогда для любого числа d между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists x_0 \in [a,b]$: $f(x_0) = d$.
Доказательство: Для определенности, пусть $f(a) \le d \le f(b)$.
Разобьем $[a,b]$ пополам и выберем ту половину $[a_1,b_1]$, для которой выполнено $f(a_1) \le d \le f(b_1)$.
Повторим операцию: делим $[a_1,b_1]$ пополам и обозначим за $[a_2,b_2]$ ту половину, для которой $f(a_2) \le d \le f(b_2)$.
Действуя аналогично, получаем последовательность отрезков $[a_n,b_n]$, таких, что $f(a_n) \le d \le f(b_n)$. Заметим, что последовательность вложенная и стягивающаяся. Значит, $\exists! c \in [a_n,b_n]$. В частности: $a_n \to c, b_n \to c$ при $n \to \infty \Rightarrow f(a_n) \to f(c)$ и $f(b_n) \to f(c)$ (следует из непрерывности).
Итого получаем из сходимости, что $f(a_n) \le d \le f(b_n) \Leftrightarrow f(c) \le d \le f(c) \Rightarrow f(c) = d$.
Следствие: Если $f \in C([a,b])$ и $f(a) \cdot f(b) \le 0$, то $\exists c \in [a,b]$, такое что $f(c) = 0$.
То есть это означает по сути-то, что f еще и монотонна, короче, корни ищем бинпоиском, ну вы поняли, окда.

25 Теорема о существовании обратной функции

Утверждение: Пусть $f(x) \in C([a,b])$ и строго монотонна на $[a,b]$. Тогда у f существует обратная функция g, заданная на $[A,B] = [f(a), f(b)]$ и g – непрерывна и монотонна на $[A,B]$. **Доказательство**: $f(g(x)) = x$ (ну потому что обратная функция)
$\forall\, d \in [A,B] \,\exists\, c \in [a,b]$, такое что $f(c) = d$ (по теореме Коши о промежуточном значении). Такое c еще и единственно, потому что f монотонна.
Тогда положим $g(d) := c$. Имеем $f(g(d)) = f(c) = d$.

26 Производная (приращение аргумента, функции, геометрический смысл). Уравнение прямой, касательной к графику дифференцируемой функции. Односторонние производные. Пример непрерывной функции, не имеющей производной в заданной точке.

Производная и ее геометрический смысл

Определение: Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если он существует и конечен, называется производной $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.
Обозначение:
$\Delta x := x - x_0$ – приращение аргумента функции.
$\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращении функции.
Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.
Геометрический смысл: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей.

При $\Delta x \to 0$ секущая – это касательная в x_0. Таким образом, касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке A - это предельное положение секущей AB при $B \to A$ (смотри рисунок :cool_story_bob:)

Отсюда достаточно простот выводится уравнение касательной. Очевидно, что ее вид будет $y = f'(x_0) \cdot x + b$.
Из касания следует: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b \Leftrightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.
Подставим в исходное равенство: $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x)$ – касательная к $f(x)$ в точке x_0.

Односторонняя производная

Определение: Левая (правая) производная функции $f(x)$ – это её левый (правый) предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0 \mp 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.
Обозначение: $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ соотвественно.
Пример непрерывной функции, не дифференцируемой в заданной точке: $f(x) = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

27 Связь между существованием производной и непрерывностью функции в данной точке

Из существования $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ следует, что при $\Delta x \to 0 \Delta f \to 0$, что фактически означает непрерывность в x_0. В обратную сторону работает аналогично. (Примечание: пните, если тут еще что-то нужно добавить, автор долбоеб).

Арифметические свойства производных

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
   Доказательство: Очевидно.
   Tank mode on: $(f \pm g)'(x_0) = \frac{(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) \pm (g(x_0+\Delta x) - g(x_0))}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \pm \frac{g(x_0+\Delta x) - gx_0}{\Delta x} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
   Tank mode off.

2. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
   Доказательство:
   $(fg)'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$
   $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - [f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)] - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0 + \Delta x) + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \cdot f(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

3. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
   Доказательство:
   $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{g(x_0 + \Delta x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x \cdot g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} =$
   $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} = \dfrac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)} = \left(f \cdot \dfrac{1}{g}\right)' = f' \cdot \dfrac{1}{g} + f \cdot \left(\dfrac{1}{g}\right)'$ – дальше просто воспользоваться предыдущим свойством.

28 Производная композиции функций и производная обратной функции

Производная композиции

Утверждение: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, если существует $g'(x)$ и f' в точке $g(x)$.

Доказательство:
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \cdot \dfrac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} =$

$\begin{bmatrix} g(x_0) = y_0, g(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y \\ \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0, \text{ т.к. } g \text{ непрерывна в } x_0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)}{\Delta y} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Производная обратной функции

Утверждение: Пусть $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и $f(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = g(y) = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $f(x_0)$ и $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0 + \Delta x) - g(y_0)}{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ g(y_0) = x_0 \\ g(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x \\ \Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0 \text{ из непрерывности } f \text{ и } g \end{bmatrix} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Важное следствие: $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ (потому что $x_0 = f^{-1}(y_0)$). Это очень полезно при нахождении производных. Например, пусть надо найти производную $(\arcsin y)'$. Тогда $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin y)}$. Дальше тупо выразить косинус через синус.

29 Вывод табличных производных

29.1 $f(x) = \log_a x$

29.2 $f(x) = x^a$

Воспользуемся предыдущей формулой.
$y = x^a \Leftrightarrow \ln y = \ln x^a \Leftrightarrow \ln y = a \cdot \ln x$.
$(\ln y)' = (a \cdot \ln x)'$
$\dfrac{1}{y} \cdot y' = a \cdot \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = a\dfrac{y}{x} = p \cdot \dfrac{x^a}{x} = p \cdot x^{p-1}$.
Осталось доказать для $x < 0$. Это возможно только для $a \; mod \; 2 = 1$.
$y(x) = -y(-x)$ $y'(x) = (-(-x)^a)' = -((-x)^a)' = -a \cdot (-x)^{a-1} \cdot (-x)' = a \cdot (-x)^{a-1} = a \cdot x^{a-1}$.

29.3 $f(x) = a^x$

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$. Получили неопределенность, сасатб /shrug.

Пусть $z = a^{\Delta x} - 1 \Rightarrow z + 1 = a^{\Delta x} \Rightarrow \Delta x = \log_a(z+1) = \dfrac{\ln(z+1)}{\ln a}$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^{x_0} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = a^{x_0} \cdot \ln a \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = a^{x_0} \cdot \ln a \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = a^{x_0} \cdot \ln a \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{1/z}} = a^{x_0} \cdot \ln a \cdot \frac{1}{\ln e} = a^{x_0} \ln a.$$

29.4 $f(x) = \sin x$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin \Delta x_0}{\Delta x} = [\text{по формуле разности синусов}] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x_0.$$

29.5 $f(x) = \cos x$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-sin(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}) \sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}} = -sin(x_0)$$

29.6 $f(x) = \operatorname{tg} x$

$f'(x_0) = \left(\dfrac{\sin x_0}{\cos x_0}\right)' = \dfrac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

29.7 $f(x) = \arcsin x$

$f'(x_0) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin(x_0))} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x_0)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x_0))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$

29.8 $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$f'(x_0) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x_0))} = \cos^2(\operatorname{arctg}(x_0))).$
Положим $y = \operatorname{arctg}(x_0))$.
$\dfrac{1}{\cos^2(y)} = \dfrac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2(y)} = 1 + \operatorname{tg}^2(y) = 1 + x^2.$
Тогда $\dfrac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x_0))} = \cos^2(\operatorname{arctg}(x_0))) = \dfrac{1}{1 + x^2}.$

30 Дифференциал: определение, геометрический смысл, арифметические свойства. Инвариантность формы первого дифференциала

Определение: Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Допустим, что приращение f в точке x_0 может быть записано в виде $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Тогда f называется дифференцируемой в точке x_0, а линейная функия $df := A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом f в точке x_0.

Утверждение: f дифференцируема в $x_0 \Leftrightarrow \exists\ f^{-1}(x_0)$. При этом $f'(x) = A$.

Доказательство: $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow o(\Delta x) = \Delta f - A\Delta x \Leftrightarrow$ [по определению] $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f - A\Delta x}{\Delta x} = 0$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} - A = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

Геометрический смысл:

Из картинки: $\dfrac{AB}{AM} = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow AB = \Delta x \cdot f'(x) = df = f'dx$. При $y = f(x)$.

Геометрический смысл:

1. Арифметические

   (a) $d(f \pm g) = df \pm dg$.

   (b) $d(fg) = (fg)'dx = gf^{-1}dx + fg'dx = g \cdot df + f \cdot dg$.

(c) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$.

2. Дифференциал композиции
   $df(g(x)) = f(g(x))'dx = f'g(x) \cdot g'(x)dx = f'(g) \cdot dg$.
   <u>**Замечание**</u>: Получается из вышесказанного, что последняя формула верна не только для независимой переменной но и для $y = g(x)$. (Инвариантность формы дифференциала)

3. Дифференциал от обратной функции
   $y = f(x)$. $x = f^{-1}(y) = g(y)$.
   $dy = df = f'(x)dx \Leftrightarrow dx = (f^{-1})'dy = \dfrac{dy}{f'(x)}$.

Вопрос 31

Теорема Ферма и теорема Ролля

Ответ:

Теорема Ферма: Пусть x_0 - точка нестрогого локального экстремума функции $f(x)$ и существует $f'(x)$. Тогда $f'(x) = 0$

Доказательство: Пусть x_0 - точка локального минимума. Если $x > x_0$ и x лежит в $U(x_0)$, на которой функция определена, то $f(x) \geqslant f(x_0)$. Тогда:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$$

Если $x < x_0$, то $f(x) \geqslant f(x_0)$. Значит,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$$

Значит, $f'(x_0) = 0$

Теорема Ролля: Допустим, $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1. $f(x) \in C([a, b])$
2. $f(x)$ дифференцируема на (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists\, c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство:

1. Если $f \equiv \text{const}$ на $[a, b]$, то утверждение верно
2. $f \not\equiv \text{const}$. По теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает минимума и максимума. При этом либо минимум, либо максимум достигается в точке $c \in (a, b)$. По теореме Ферма, $f'(c) = 0$

Вопрос 32

Теорема Коши (формула конечных приращений), и ее частный случай - теорема Лагранжа

Ответ:

Теорема Коши: Пусть $f(x)$ и $g(t)$ - функцие, такие что:

1. $f, g \in C([a, b])$
2. f, g дифференцируемы на (a, b)
3. $g' \neq 0$ нигде на (a, b)

Тогда справедлива формула конечных приращений Коши

$$\exists\, c \in (a, b): \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Замечания: Если $g(t) = t$, то получается теорема Лангранжа

Доказательство:

1. Заметим, что $g(a) \not\equiv g(b)$
(Иначе, если $g(a) = g(b)$ то по теореме Ролля $\exists\, c \in (a, b) \quad g'(c) = 0$, а это запрещено условием)
2. Введем функцию
$$F(t) = f(t) - \lambda \cdot g(t)$$
Подберем $\lambda \in \mathbb{R}$ т.ч. $F(t)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a, b]$
$$F(a) = F(b)$$
$$f(a) - \lambda \cdot g(a) = f(b) - \lambda \cdot g(b)$$
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$
$F(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) и F
Значит по теореме Ролля $\exists\, c \in (a, b)$
$$F'(c) = f'(c) - \lambda \cdot g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Теорема Лангранжа: Пусть f удовлетворяет:

1. $f \in c([a, b])$
2. f дифференцируема на (a, b)

Тогда $\exists\, c \in (a, b)$ такая, что:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Или, другими словами, $\exists\, C$ на графике $f(x)$ такая, что касательная в C параллельна хорде AB

Вопрос 33

Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей (доказательство для случая $x \to a \in \mathbb{R}$, неопределенность вида $\frac{0}{0}$)

Ответ:

Теорема:

Пусть $x \to a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
Пусть при этом $f(x), g(x) \to 0(\infty)$
Тогда вычисление предела $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ называется раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}(\frac{\infty}{\infty})$

Правило:

$f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

1. f и g дифференцируемы на (a, b)
2. $\lim\limits_{x \to a+0} f = \lim\limits_{x \to a+0} g = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ на (a, b)
4. $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство:

$$f(a) := \lim_{x \to a+0} = 0$$

$$g(a) := \lim_{x \to a+0} = 0$$

Теперь f и g непрерывны на $[a, b]$ Пусть $x \in (a, b)$. Тогда по теореме Коши. $\exists\, c \in (a, x)$, такая что:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Если $x \to a + 0$, то $c \to a + 0$, значит

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Вопрос 34

Старшие производные. Формула Лейбница для старшей производной.

Ответ:

Определение:

$f^{(0)}(x) = f(x)$ - производная нулевого порядка.
$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'$

Примеры:

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
a^x	$a^x \cdot (\ln a)^n$
x^α	$\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot x^{\alpha - n}$
$sin(x)$	$sin(x + \frac{\pi n}{2})$
$cos(x)$	$cos(x + \frac{\pi n}{2})$

Свойства n-ых производных:

1.
$$(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$$
$$(c \cdot f)^{(n)} = c \cdot f^{(n)}, \text{ где c = const}$$

2. Формула Лейбница:
$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

Доказательство:

1. Очевидно из соответствующих утверждений для 1-х производных.
2. Индукция по n = 1,2,3...

   База: n = 1
   $(f \cdot g)' = f^{(0)} \cdot g^{(1)} + f^{(1)} \cdot g^{(0)}$ - уже доказано

   Шаг
   Допустим, доказано, что
$$(f \cdot g)^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-1-k)}$$
   Тогда
$$(f \cdot g)^{(n)} = ((f \cdot g)^{(n-1)})' =$$
$$= (\binom{n-1}{0} f^{(0)} \cdot g^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} f^{(1)} \cdot g^{(n-2)} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} f^{(n-1)} \cdot g^{(0)})' =$$
$$= \binom{n-1}{0} (f^{(0)} \cdot g^{(n)} + f^{(1)} \cdot g^{(n-1)}) + \binom{n-1}{1} (f^{(1)} \cdot g^{(n-1)} + f^{(2)} \cdot g^{(n-2)}) + \ldots =$$
$$= \binom{n-1}{0} f^{(0)} \cdot g^{(n)} + [\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}] f^{(1)} \cdot g^{(n-1)} + [\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}] f^{(2)} \cdot g^{(n-2)} + \ldots =$$
$$= \binom{n}{0} f^{(0)} \cdot g^{(n)} + \binom{n}{1} f^{(1)} g^{(n-1)} + \binom{n}{2} f^{(2)} g^{(n-2)} + \ldots$$

Вопрос 35

Многочлены Тейлора (с доказательством леммы о существовании многочлена, производные которого принимают заданные значения в заданной точке)

Ответ:

Лемма:

Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда существует единственный многочлен $P(x), \quad degP \leqslant n$ такой, что:
$$P(x_0) = a_0$$
$$P'(x_0) = a_1$$
$$\vdots$$
$$P^{(n)}(x_0) = a_n$$

Существование:

$P(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_0$

$$\begin{cases} C_n x_0^n + C_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + C_0 = a_0 \\ C_n \cdot n \cdot x_0^{n-1} + C_{n-1}(n-1)x_0^{n-2} + \ldots + C_1 + 0 = a_1 \\ \vdots \\ C_n \cdot n! = a_n \end{cases}$$

Система треугольная с ненулевыми числами на диагонали. Значит решение существует.

Определение:

Пусть $\exists\, f^{(n)}(x_0)$. Многочлен $P_{n,f}(x)$ называется многочленом Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0, если:

1. $degP_{n,f}(x) \leqslant n$
2. Производные $P_{n,f}$ в точке x_0 порядков от 0 до n совпадают с соответствующими производными $f(x)$

$$P_{n,f}^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad k = 0, 1, \ldots n$$

Определение:

Разность $r_{n,f} = f(x) - P_{n,f}(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора, а тождество:

$$f(x) = P_{n,f}(x) + r_{n,f}(x) \text{ - Формула Тейлора}$$

Из доказательства леммы:

$$P_{n,f}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_{n,f}(x)$$

Вопрос 36

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (с доказательством).

Ответ:

Лемма: Пусть $\exists\, f^{(n)}(x_0)$
Тогда:

1. $P_{n,f}(x)' = P_{n-1,f'}(x)$
2. $r_{n,f}(x)' = r_{n-1,f'}(x)$

Доказательство:

1. По определению, $P_{n,f}^{(k)} = f^{(k)}(x_0)$ и $degP_{n,f} \leqslant n$
   Поэтому $(P'_{n,f})^{(k-1)}(x_0) = (f')^{(k-1)}(x_0)$
   Значит $P'_{n,f}$ есть по определению многочлен Тейлора для $f'(x)$
2. $$r'_{n,f} = (f - P_{n,f})' = f' - P'_{n,f} = f' - P_{n-1,f'} = r_{n-1,f'}$$

Формула Тейлора:
$n \in \mathbb{N}\ \exists\, f^{(n)}(x)$ в окрестности x_0

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_{n,f}(x),$$

$$\text{где } r_{n,f}(x) = o((x-x_0)^n) \text{ при } x \to x_0$$

Или по-другому:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Доказательство: По индукции

База: n $= 1, \quad x \to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

Это было доказано в теме дифференциал.

Шаг индукции Пусть утверждение верно при $n-1$, докажем для n:

Надо доказать, что $r_{n,f}(x) = o((x-x_0)'')$

$$r_{n,f}(x) = r_{n,f}(x) - r_{n,f}(x_0), \quad \text{где } r_{n,f}(x_0) = 0$$

$\boxed{r_{n,f}(x_0) = f(x_0) - P_{n,f}(x_0) = 0}$ - По формуле конечных приращений Лагранжа для $r_{n,f}(x)\, \exists\, c \in (x_0, x)$

$$= r'_{n,f}(c)(x-x_0) = r_{n-1,f'}(c)(x-x_0) \qquad \text{(по пред. лемме)}$$

По индуктивному предположению

$$r_{n-1,f'}(c) = o((c-x_0)^{n-1}) \qquad c \to x_0$$

Наконец,

$$r_{n,f}(x) = o((c-x_0)^{n-1}) \cdot (x-x_0) = o((x-x_0)^{n-1}) \cdot (x-x_0) = o((x-x_0)^n) \qquad x \to x_0$$

Вопрос 37

Теорема о единственности формулы Тейлора (с доказательством).

Ответ:

Теорема: Пусть в окрестности x_0 выполнено:

$$f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n) \qquad degP \leqslant n$$

$$f(x) = \widetilde{P}(x) + o((x-x_0)^n) \qquad deg\widetilde{P} \leqslant n$$

Тогда $P(x) \equiv \widetilde{P}(x)$

Доказательство:
Из условия имеем:

$$P(x) - \widetilde{P}(x) = \bar{o}((x-x_0)^n), \qquad x \to x_0$$

$$\Rightarrow \quad P(x_0) - \widetilde{P}(x_0) = 0$$

$$\boxed{P(x_0) = \widetilde{P}(x_0)}$$

$$(P(x)-\widetilde{P}(x))'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(P(x)-\widetilde{P}(x))-(P(x_0)-\widetilde{P}(x_0))}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{(P(x)-\widetilde{P}(x))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{o((x-x_0)^n)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} o((x-x_0)^{n-1}) = 0, \qquad \text{при условии n } \geqslant 1$$

$$\Rightarrow P'(x_0) = \widetilde{P}'(x_0)$$

Далее аналогично выводится, что:

$$P^{(k)}(x_0) = \widetilde{P}^{(k)}(x_0), \qquad \text{при } k = 0,1,2,3,\ldots,n$$

Т.к. $degP$ и $deg\widetilde{P} \leqslant n \quad \Rightarrow \quad P(x) \equiv \widetilde{P}(x_0)$ по Лемме о единственности многоччлена Тейлора

Вопрос 38

Вывод основных табличных формул Маклорена (будет предложено вывести формулу Маклорена для одной из стандартных функций: e^x, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$

Ответ:

Определение: Если x_0=0, то формула Тейлора для $f(x)$ называется формулой Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)\text{- общая формула Маклорена}$$

$f(x)$	$f^{(k)}(x_0)$	$f^{(k)}(0)$	Формула Маклорена для $f(x)$
e^x	e^x	1	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x$	$\sin x,\ k \equiv 0(4)$ $\cos x,\ k \equiv 1(4)$ $-\sin x,\ k \equiv 2(4)$ $-\cos x,\ k \equiv 3(4)$	0, k четн. 1, $k \equiv 1(4)$ -1, $k \equiv 3(4)$	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$\cos x,\ k \equiv 0(4)$ $-\sin x,\ k \equiv 1(4)$ $-\cos x,\ k \equiv 2(4)$ $\sin x,\ k \equiv 3(4)$	0, k нечетн. 1, $k = 4S$ -1, $k = 4S+2$	$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\ln(1+x)$	$\frac{-1\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-k+1)}{(1+x)^k},\ k \geqslant 1$	$0, k=0$ $(-1)^{k-1}(k-1)!,\ k \geqslant 1$	$\ln(1+x) = 0 + \frac{0!}{1!}x^2 - \frac{1!}{2!}x^2 + \ldots =$ $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots$ $\ldots\cdot(\alpha-k-1)\cdot(1+x)^{\alpha-k}$	$\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots$ $\ldots\cdot(\alpha-k+1)$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$ $\ldots + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$