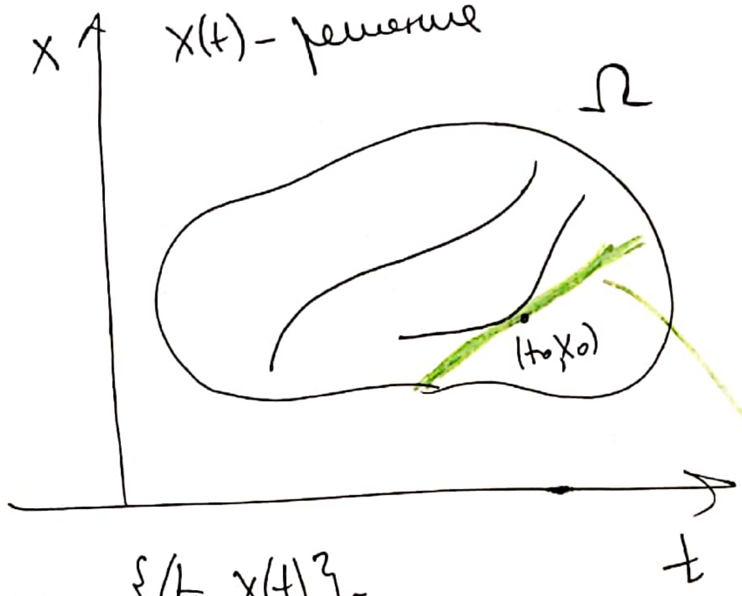
Лекция 5

(*) $\dot{x} = f(t,x)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Геометрический взгляд:



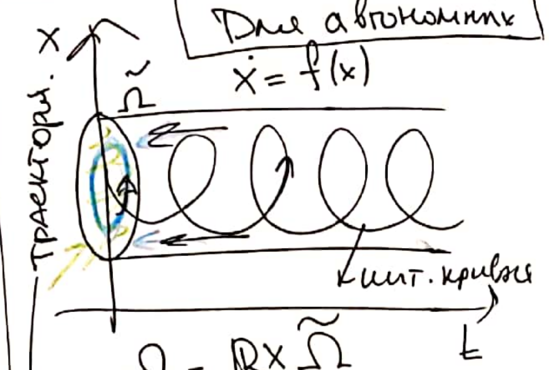
Ω – расширенное фазовое пр-во.

Кривая $\{(t, x(t))\}$ – интегральная кривая

Прямая $(x-x_0) = f(t_0,x_0)\cdot(t-t_0)$

~~$(x-x_0)(t-t_0)$~~

Для автономных $\dot{x} = f(x)$



$\Omega = \mathbb{R}\times\tilde{\Omega}$

$\tilde{\Omega}$ – фазовое пр-во

фазовая кривая

Предложение: Инт. кривые = кривые, касающиеся прямых (**) в каждой своей точке (t_0, x_0)

Д-во: Кас. вектор к инт. кривой $= (1, \dot{x}_1(t_0), \dots \dot{x}_n(t_0))$ – касат. вектор к (**)

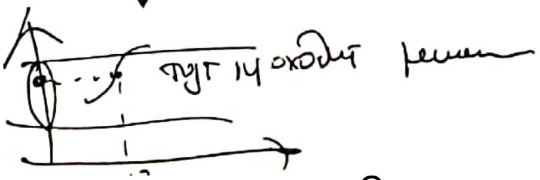
$\dot{x}_1(t_0) = f_1(x_0,t_0)$, $\dot{x}_n(t_0) = f_n(x_0,t_0)$ – поскольку инт. кривая

Лемма: Пусть $f \in C^1(\tilde{\Omega})$ тогда траектории $\dot{x} = f(x)$ не пересекаются и заполняют всё фазовое пр-во $\tilde{\Omega}$

↓

(*)

↓



Д-во (*)

Пусть $x, \tilde{x}$ - решения $\dot{x} = f(x)$ (***)

$x(t_0) = \tilde{x}(\hat{t}_0)$

Тогда $\bar{x}(t) = \tilde{x}(t - t_0 + \hat{t}_0)$, $\bar{x}$ - тоже решение (***)

$\bar{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$

т.е. $x, \bar{x}$ - решение одной задачи Коши

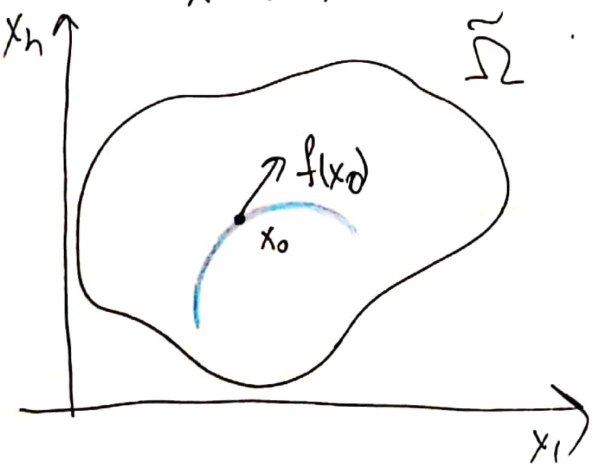
$\Rightarrow x \equiv \bar{x} \Rightarrow$ траектории совпадают.

Но траектории $\bar{x}$ и $\tilde{x}$ совпадают по построению.

Поле направлений: для каждой точки $\tilde{\Omega}$ задана прямая, проходящая через неё

Для автономного случая:

$\dot{x} = f(x)$



Векторное поле: в каждой точке задан касательный вектор.

Ур-ия с разделяющимися переменными.

Общие разложения

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \to \int g(y)dy = \int f(x)dx$

$G(y)$ - первообр $\frac{1}{g(y)}$

$F(x) \to$ первообр. $f(x)$

$\Rightarrow G(y) = F(x) + const.$

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \qquad (\#_1)$$

Пример: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ при $y=0 \to$!! .

$$\frac{dx}{dy} = G(x,y) = \cancel{\ }$$

$\downarrow$

$(\#_2)$

$G = 1/F$, если F огр. и $F \neq 0$.

$F = y/x$ неогр. только на $x=0$

$G = \frac{x}{y}$ — \|\| — $y=0$.

Теорема: Интегральная кривая $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ через (x_0, y_0) (лок.) совпадает с инт. кривой $\frac{dx}{dy} = G(x,y)$ через эту же точку, если $F, G \neq 0$ ($\Leftarrow$ $\Leftarrow$ определены.)

Д-во:

~~Пусть~~ $F(x_0,y_0) > 0$, $\exists$ окр-ть, где $F > 0$. $\Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0$

пусть

$\forall x \in B_\delta(x_0)$. т.к. $y(x)$ монотонно возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ там есть обратная функция $x(y)$

$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x(y))} = \frac{1}{F(x(y),y)} = G(x(y),y)$$

$\square$.

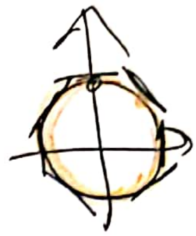
Обобщ. решение $(\#_1), (\#_2)$ - кривая на плоскости (x,y), которая в окрестности (x_0,y_0) т.ч. $F(x_0,y_0) \neq 0$ - график решения $y=y(x)$ ур-я $(\#_1)$

— \|\| — $G(x_0,y_0) \neq 0 \to$ гра — \|\| — $x=x(y)$ ур-я $(\#_2)$

Пример: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ $\qquad \int y\,dy = \int -x\,dx$

$\frac{dx}{dy} = -y/x$ $\qquad y^2 = -x^2 + C$

$x^2 + y^2 = C$



Важно, что ситуация двумерная!

Теорема: (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$ $\qquad \varphi, \psi \in C.$ $\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{\psi}{\varphi}$

(2) $\begin{cases} \dot{x} = \psi(x,y) \\ \dot{y} = \varphi(x,y) \end{cases}$

Тогда в области $\{(\varphi, \psi) \neq (0,0)\}$ решения (1) -то же самое, что траектории (2)

Доказательство: Для определенности пусть $\psi(x_0,y_0) \neq 0$

Пусть $\underline{(x(t), y(t))}$ - реш (2)

$\qquad \uparrow \in C^1$

$x(t_0) = x_0$ $\qquad \dot{x}(t_0) = \psi(x_0,y_0) \neq 0$

$y(t_0) = y_0$,

$\Rightarrow$ По теореме о неявной функции локально $t = t(x)$ - обратная функция.

$\frac{dt}{dx}(\hat{x}) = \cancel{\frac{1}{\dot{x}(t_0)} = \frac{1}{\psi(x_0,y_0)}} = \frac{1}{\dot{x}(t(\hat{x}))} = \frac{1}{\psi(\hat{x}, t(\hat{x}))}$

Рассмотрим ф-ю $y(t(x))$

$\cancel{\frac{dy}{dt}(x)\ dy/dt\ \frac{dt}{dx}}$

$\frac{dy}{dx}(\hat{x}) = dy/dt(t(\hat{x})) \cdot \frac{dt}{dx}(\hat{x}) = \frac{\varphi(x(t(\hat{x})), y(t(\hat{x})))}{\psi \ldots} =$

$$= \frac{\Phi(\bar{x}, y(t(\bar{x})))}{\Psi(\bar{x}, y(t(\bar{x})))}$$

Вывод: $y(x) := y(t(x))$ удовл-ть (1) (локально)

Пусть теперь $y(x)$ — решение уравнения (1)

$$\dot{x}(t) = \Psi(x(t), y(x(t))) \quad (3)$$

— Это автономное уравнение на прямой ($\dot{x} = F(x)$)

Оно имеет решение (докажем в след. лекции)

$x = x(t)$, где $x(t_0) = x_0$

Положим $y(t) = y(x(t))$

Тогда $(x(t), y(t))$ удовл-ть (2)

- 1-е ур-е (2) — по построению $x(t)$ (см (3))
- $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \dot{x} = \frac{\Phi(x(t), y(x(t)))}{\Psi(\ldots)} \cdot \Psi(\ldots) = \Phi(x(t), y(t))$.

— 2-е уравнение.

$\square$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(y) = \frac{g(y)}{1/f(x)} \to \begin{cases} \dot{y} = g(y) \\ \dot{x} = 1/f(x) \end{cases}$$

Автономные ДУ на прямой

$\dot{x} = f(x)$, $\quad f \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ $\quad$ (★)

<u>Предл</u>: Если $f(x_0)=0$, то $x \equiv x_0$ — решение ★)

(просто подставляем).

Пусть $f(x_0) \neq 0$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)}$ (лок. эк-но)

Тогда $t(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)} + t_0$ (4) (решение у-я $y' = \varphi(x)$ это $y = \int \varphi(x)dx$)

$\downarrow$

$\approx$ Первообразная

$\Rightarrow x(t)$ — обратная ф-я

— $\boxed{\text{Тут всё происходило локально.}}$

(4) $\Leftrightarrow t(x) = F(x) + C$, где F — фикс. первообразная для $1/f(x)$

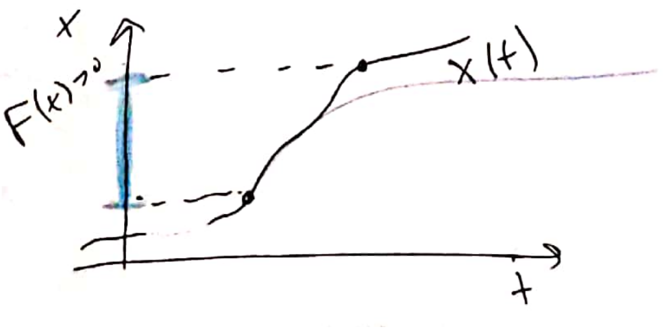
Пусть $x(t)$ — решение, и пусть $F(x(t)) > 0$ при $t \in (t_0, t_1)$,

~~Тогда локально обратная ф-я имеет вид~~

то $\dot{x}(t) > 0$ там же.

$x: (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ обратима, и обр. ф-я локально есть $t(x) = F(x) + C$

т.с. $t(x) - F(x)$ — локально постоянна $\Rightarrow$ глобально постоянна.

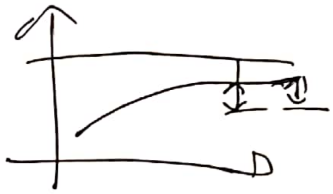


$c(x_*) = 0$ — дискретный корень ф-ии F.

Предл: Если $F\big|_J > 0$, $x(t_0) \in J$, тогда либо $\exists T: x(T) = \sup J$, либо $x(t)$ опр. на $[t_0, +\infty)$ и $x(t) \xrightarrow{t \to +\infty} \sup J$

Д-во: (т.о продолж. до границы компакта) +

надо исключить $x(t) \xrightarrow{t \to +\infty} a < \sup J$



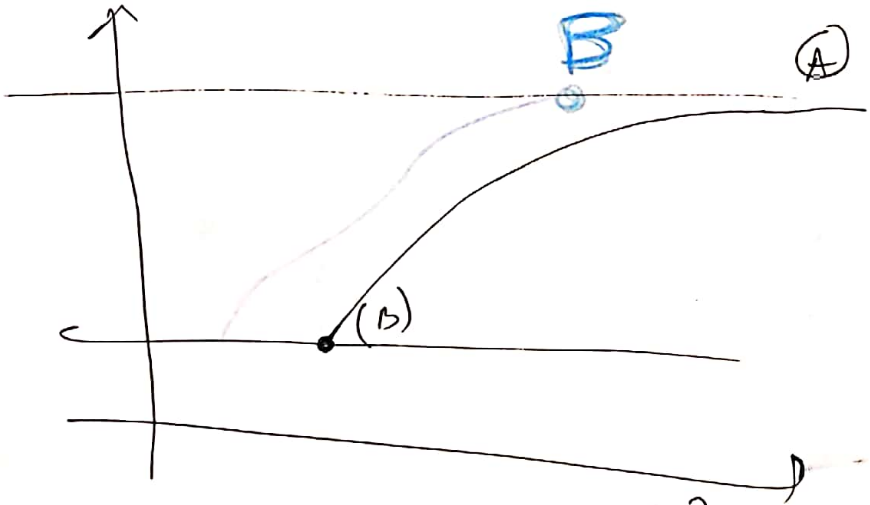
$F(a) > 0$

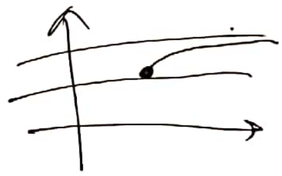
$F(x) \geqslant \varepsilon > 0$ при $x \in B_\delta(a)$

Если $x(\hat{t}) \in B_\delta(a)$, то $x\left(\hat{t} + \frac{2\delta}{\varepsilon}\right) > 0$, ведь

$$x\left(\hat{t} + \frac{2\delta}{\varepsilon}\right) = \underbrace{x(\hat{t})}_{\geqslant a-\delta} + \frac{2\delta}{\varepsilon} \cdot \underbrace{\dot{x}(\tilde{t})}_{\geqslant \varepsilon} \geqslant a + \delta > a.$$

$\square$.





Когда имеют место A и B?

A. $x \to \sup J$, $t \to +\infty$

$$t = F(x) + C = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)} + C$$

$$A \Leftrightarrow \int_{\sup J - \xi}^{\sup J} \frac{d\xi}{f(\xi)} + C \quad \text{— расходится}$$

B. $x \to \sup J$, $t \to t^*$

$$B \Leftrightarrow \int_{\sup J - \varepsilon}^{\sup J} \frac{d\xi}{f(\xi)} \quad \text{— сходится.}$$

Теорема: Пусть $f(x_0)=0$ — дискретный ноль ф-ии F.

Тогда решение $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ справа от t_0 ведет себя

одним из следующих ~~образов~~ способов:

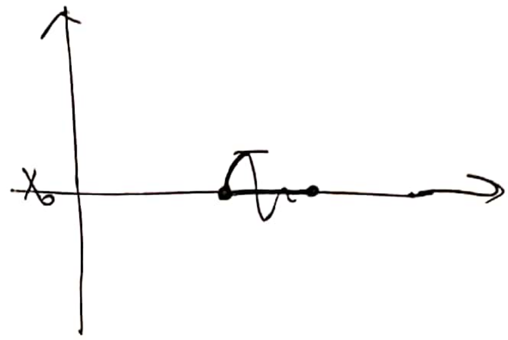
(1) $x = x_0$ в окрестности

(2) $x = x_0$ на $[t_0, T]$

$x(t) > x_0$ при $t \in (T, T+\varepsilon)$

(3) $x = x_0$ на $t \in [t_0, T]$

$x(t) < x_0$ $t \in (T, T+\varepsilon)$



— (~~Локально понятно~~, ~~почему это так.~~)

При чем (2) возможно только если

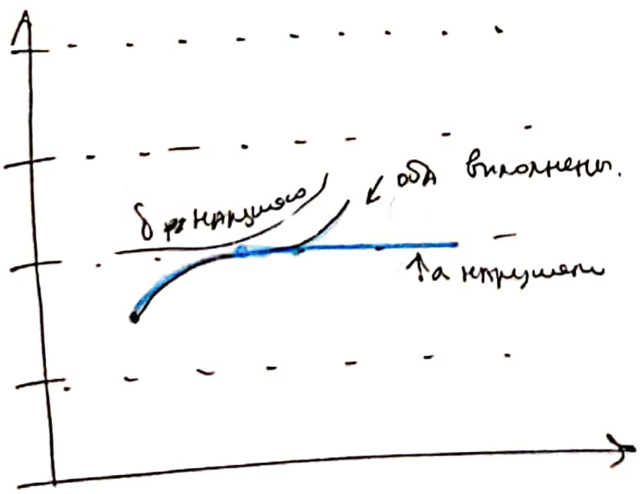
а) $f(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0+\delta)$

б) $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)} < \infty$ (сходится)

Для (3) аналогично:

а) $F(x) < 0$ $x \in (x_0 - \delta, x_0)$

б) ... — сходится.



Предл: Если $f \in C^1$, то возможен только (A) т.е.

$$\int_{x_0}^{x_0 \pm \xi} \frac{d\xi}{f(\xi)}$$ расходится при всех x_0, т.ч. $f(x_0) = 0$

Д-во:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$|f(x)| \leq C|x - x_0|$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_0 \pm \xi} \frac{d\xi}{|f(\xi)|} \geqslant \int_{x_0}^{x_0 \pm} \geqslant \frac{d\xi}{C|\xi - x_0|} = +\infty$$

↓

f постоянного знака (локально), ведь f имеет только дискретные 0.

□.

$\boxed{\cancel{\xi = f(x) \neq 0}}$