НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Билеты к лицентиату

Москва
2021

Содержание

Матанализ

1. Числовые последовательности, пределы и предельные точки, критерий Коши сходимости последовательности.

1.1. Числовые последовательности

Числовая последовательность – это функция натурального аргумента. Иначе, отображение $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Определение 1. Последовательность a_n *стремится* к числу A, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \ |a_n - A| < \epsilon.$$

Другое определение. Последовательность a_n стремится к числу A, если вне любой окрестности A находится только конечное число элементов a_n.

Определение 2. *Предельная точка* последовательности (*частичный предел*) – это точка, в любой окрестности которой содержится бесконечно много элементов этой последовательности.

Иначе. Рассмотрим строго монотонную последовательность натуральных чисел $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, тогда последовательность a_{n_k} называется подпоследовательностью a_n.

Если подпоследовательность a_{n_k} сходится к числу B, то B называется частичным пределом.

Определение 3. Последовательность называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет условию:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N : \forall n, k \geq N \ |a_n - a_k| < \epsilon.$$

1.2. Критерий Коши

Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, тогда выберем $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$. Зафиксируем N из определения, выберем $n, k \geq N$, тогда

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |a_k - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

По неравенству треугольника

$$|a_n - a_k| < \epsilon.$$

$\Leftarrow$ В другую сторону:

1) Если последовательность фундаментальна, то она ограничена (элементарное следствие из определения).

2) Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (доказательство через бинпоиск).

3) Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то и она сама сходится (естественно, к тому же числу).

□

2. Предел функции, непрерывность, теорема о промежуточном значении непрерывной функции, равномерная непрерывность непрерывной функции на отрезке.

2.1. Предел функции

Определение 1. Функция $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ стремится к A при x, стремящемся к a, или что A является **пределом функции** f при x, стремящемся к a, если для любого числа $\epsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in E$ такой, что $0 < |x-a| < \delta$, выполнено соотношение $|f(x) - A| < \epsilon$.

$$\forall \epsilon \quad \exists \delta > 0 \; \forall x \in E \; (0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

Если A - предел функции $f(x)$ при x, стремящемся по множеству E в точке a, то пишут $f(x) \longrightarrow A$ при $x \longrightarrow a, x \in E$, или $\lim_{x\longrightarrow a, x\in E} f(x) = A$.

Определение 2. **Проколотой окрестностью точки** называется окрестность точки, из которой исключена сама эта точка. Если $U(a)$ – обозначение окрестности точки a, то проколотую окрестность этой точки будем обозначать символом $\overset{\circ}{U}(a)$. Проколотая δ-окрестность точки a в множестве E - $\overset{\circ}{U}{}^{\delta}{}_E(a)$; ϵ-окрестность точки A в $\mathbb{R}$ – $V_{\mathbb{R}}^{\epsilon}$.

Определение 3.

$$\left(\lim_{E\ni x\longrightarrow a} f(x) = A\right) \coloneqq \forall V_{\mathbb{R}}(A) \quad \exists \overset{\circ}{U}_E(a) \; \left(f(\overset{\circ}{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A) \quad \right)$$

Примеры

1) Пусть $E = \mathbb{R} \setminus 0, f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Проверим, что $\lim\limits_{E\ni x\longrightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

   Действительно, при заданном $\epsilon > 0$ возьмем $\delta = \epsilon$, тогда при $0 < |x| < \delta = \epsilon$, учитывая, что $|x \sin \frac{1}{x}| \le |x|$, будем иметь $|x \sin \frac{1}{x}| < \epsilon$.

2) Функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

   определена на всей числовой оси. Покажем, что у нее нет предела при $x \longrightarrow 0$. Значит, что

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists V(A) \; \forall \overset{\circ}{U}(0) \quad \exists x \in \overset{\circ}{U}(0) \; \left(f(x) \notin V(A)\right),$$

   то есть, какое бы A мы не взяли, найдется такая окрестность $V(A)$ точки A, что, какую бы (малую) проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}(0)$ точки 0 ни взять, в ней есть по крайней мере одна точка $x \in \overset{\circ}{U}(0)$, значение функции в которой не лежит в $V(A)$.

Поскольку функция принимает только значения $-1, 0, 1$, то ясно, что никакое число A, отличное от них, не может быть пределом функции, ибо оно имеет окрестность $V(A)$, не содержащую ни одну из трех чисел.

Если же $A \in \{-1, 0, 1\}$, то возьмем в качестве $V(A)$ ϵ-окрестность точки A при $\epsilon = \frac{1}{2}$. В такую окрестность заведомо не могут попасть одновременно обе точки -1 и 1. Но, какую бы проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}(0)$ точки 0 ни взять, в ней есть как положительное, так и отрицательные числа, т.е. есть и точки x, где $f(x) = 1$, и точки, где $f(x) = -1$.

Значит, найдется точка $x \in \overset{\circ}{U}(0)$ такая, что $f(x) \notin V(A)$.

Определение 4. Функция $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, принимающая только одно значение, называется **постоянной**. Функция $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **финально постоянной** при $E \ni x \longrightarrow a$, если она постоянно в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(\mathrm{a})$ точки a, предельной для множества E.

Функция $f(x)$ непрерывна на (a, b), если она непрерывна в каждой точке промежутка.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на (a, b), тогда для любых c, d таких, что $a < c < d < b$ (пусть $f(c) < f(d)$, хотя это и не особо важно), верно, что

$$\forall A \in [f(c); f(d)] \exists x_0 : f(x_0) = A.$$

Доказательство. Бинпоиск и теорема о вложенных отрезках.

Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X, если

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon, f, X) : |x - y| < \delta |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на нём.

Доказательство. Зафиксируем $\frac{\epsilon}{2} > 0$. В каждой точке отрезка есть своя $\delta(\frac{\epsilon}{2})$. Отрезок — компакт, мы можем выбрать конечное подпокрытие. Рассмотрим это подпокрытие $\delta_k, k = 1, \dots n$, это подпокрытие отмечает на вещественной прямой точки – границы окрестностей, в качестве δ для всего отрезка выберем длину наименьшего получившегося отрезка. В этом случае, если мы возьмем $|x - y| < \delta$, то x и y попадут в одну δ_i-окрестность какой-то точки a_i, а значит по неравенству треугольника всё получится:

$$|f(x) - f(a_i)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |f(y) - f(a_i)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

3. Сходимость числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов (сходимость абсолютно сходящегося ряда, перестановка членов). Признаки сходимости Д'Аламбера и Коши. Условно сходящиеся ряды. Примеры условно сходящихся рядов.

3.1. Сходимость числовых рядов.

Определение 1. Числовой ряд - это формальное выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n – элементы числового ряда. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - частичные суммы. Ряд $\sum a_n$ сходится к A если $\lim_{n\to\infty} S_n = A$.

Свойства рядов.

1) Если сходится ряд, то сходится и любой из его остатков; обратное - из сходимости остатка вытекает сходимость исходного ряда.

2) Если ряд сходится, то сумма его остатка после m-ого члена с возрастанием m стремится к нулю.

3) Если члены сходящегося ряда умножить на один и тот же множитель c, то его сходимость не нарушается.

4) Два сходящихся ряда A и B можно почленнно складывать (или вычитать). Новый ряд также будет сходится.

5) Общий член a_n сходящегося ряда стремится к нулю.

6) Пусть $\sum a_n$ и $\sum b_n$ - положительные ряды (их члены положительные), тогда

   а) Положительный ряд всегда имеет сумму, она конечна, если частичные суммы этого ряда ограничены сверху и наоборот.

   б) Если $n > N \quad a_n \le b_n$, то из сходимости b_n следует сходимость b_n, из расходимости a_n следует расходимость b_n.

   в) Если $\quad \exists K : \lim \frac{a_n}{b_n} = K (0 \le K \le \infty)$, то из сходимости b_n при $K < \infty$ следует сходимость a_n, из расходимости a_n при $K > 0$ следует расходимость b_n.

   г) Если $\quad \exists N$ такое, что при $n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то из сходимости b_n следует сходимость a_n, из расходимости a_n следует расходимость b_n.

Примеры.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ - расходится.

2) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ - сходится.

3.2. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Определение 2. Пусть дан ряд $\sum a_n$, если ряд $\sum |a_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum a_n$, причем говорят, что ряд $\sum a_n$ сходится **абсолютно**.

Если ряд (A) абсолютно сходится, то ряд (A'), полученный из него перестановкой членов также сходится и имеет ту же сумму A, что и исходный ряд. Иными словами: абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством.

Доказательство. 1) Допусти ряд (A) положительный. Рассмотрим произвольную частичную сумму A'_k ряда (A'). Так как $a'_1 = a_{n_1}, ..., a'_k = a_{n_k}$, то, взяв n' большим всех номеров $n_1, ..., n_k$, будем иметь $A'_k \leq A_{n'} \Rightarrow A'_k \leq A$. Тогда (A') будет сходящимся и его сумма A' не провзойдет A : $A' \leq A$. Но и ряд (A) получается из (A') перестановкой членов $\rightarrow A \leq A'. \rightarrow A = A'$.

2) Пусть теперь (A) - произвольный абсолютно сходящийся ряд. Так как сходящийся положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + ...$ при любой перестановке членов остается сходящимся, то сохранит свою сходисоть (абсолютную) и ряд (A).

3) В случае абсолютной сходимости ряда (A), его сумму можно выразить как $A = P - Q$, где P, Q - это суммы положительных рядов, составленных из соответственно положительных и абсолютных величин отрицательных членов ряда (A). Перестановка членов в ряде (A) вызовет перестановку членов в этих рядах, но не отразится по доказанному на их суммах P, Q. Значит, и сумма ряда (A) останется прежней,

□

3.3. Признак сходимости Д'Аламбера.

Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad a_i > 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n,$$

тогда

$$\begin{cases} q < 1, & \text{сходится} \\ q > 1, & \text{расходится} \\ q = 1, & \text{не определено} \end{cases}$$

Доказательство. Используется одна из теорем сравнения (6). □

3.4. Признак сходимости Коши.

Если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \quad a_i > 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n,$$

тогда

$$\begin{cases} q < 1, & \text{сходится} \\ q > 1, & \text{расходится} \\ q = 1, & \text{не определено} \end{cases}$$

Доказательство. Используется одна из теорем сравнения (6). □

3.5. Условно сходящиеся ряды.

Определение 3. Если ряд a_n сходится, а ряд из модулей нет, то тогда говорят об **условной** сходимости. **Свойства.**

1) Если ряд условно сходится, то ряды, составленные из его положительных и отрицательных членов, расходятся.

2) Путем изменения порядка членов условно сходящегося ряда можно получить ряд, сходящийся к любоой наперед заданной сумме или же расходящийся.

3) При почленном умножении двух условно сходящихся рядов может получиться расходящийся ряд.

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд (члены попеременно принимают значения противоположного знаков) сходится, если последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает и общий член стремится к нулю. При этом сумма ряда больше нуля и меньше абсолютной величины первого члена ряда.

3.6. Примеры.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = ln2$, равенство доказывается через формулу Маклорена.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ - сходится по признаку Лейбница.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n-1}$ - сходится по признаку Лейбница.

4. Дифференцируемые функции одного переменного. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа о конечном приращении.

4.1. Дифференцируемые функции одного переменного

Определение 1. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}$ называется **дифференцируемой** в точке $a \in E$ предельной для множества E, если существует такая линейная относительно приращения $x - a$ аргумента функция $A \cdot (x - a)$, что приращение $f(x) - f(a)$ функции f представляется в виде $f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + o(x - a)$ при $x \to a$, $x \in E$

Определение 2. Линейная функция $A \cdot (x - a)$ (из определения выше) называется **дифференциалом** функции f в точке a.
Дифференциал функции в точке определен однозначно, ибо из определения дифференцируемости в точке следует
$\lim\limits_{E \ni x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{E \ni x \to a} \left(A + \frac{o(x-a)}{x-a}\right) = A$
и в силу единственности предела число A определено однозначо.

Определение 3. Величина $f' = \lim\limits_{E \ni x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ называется **производной** функции f в точке a.
Дифференцируемость функции равносильна наличию у нее производной в соответствующей точке.

Определение 4. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}$ называется **дифференцируемой** в точке $a \in E$ предельной для множества E, если $f(x + h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x; h)$, где $h \to A(x)h$ — линейная относительно h функция, а $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x + h \in E$.

Определение 5. Величины $\Delta x(h) := (x+h)-x = h$ и $\Delta f(x; h) := f(x+h)-f(x)$ называют соответственно **приращением аргумента и приращением функции** (соответствующим этому приращению аргумента).

Определение 6. Линейная по h функция $h \to A(x)h$ называется **дифференциалом** функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x \in E$ и обозначается символом $df(x)$ или $Df(x)$. Таким образом, $df(x)(h) = A(x)h$.
$A(x) = f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x+h, x \in E}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, поэтому дифференциал можно записать в виде $df(x)(h) = f'(x)h$
$\frac{df(x)(h)}{dx(h)} = f'(x)$

Пример 1. Пусть $f(x) = \sin x$. Покажем, что $f'(x) = \cos x$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \cos x$$

Пример 2. Покажем, что $\cos' x = -\sin x$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$
$$= -\lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = -\sin x.$$

Пример 3. Покажем, что если $f(t) = r\cos\omega t$, то $f'(t) = -r\omega\sin\omega t$.

$$- \lim_{h\to 0} \frac{r\cos\omega(t+h) - r\cos\omega t}{h} = r\lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{\omega h}{2}\right)\sin\omega\left(t+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$
$$= -r\lim_{h\to 0} \sin\omega\left(t + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\omega h}{2}\right)}{\left(\frac{\omega h}{2}\right)} = -r\omega\sin\omega t.$$

4.2. Необходимое условие дифференцируемости

Функция дифференцируема $\Longrightarrow$ функция непрерывна.
$f(x) = |x|$

4.3. Арифметические операции

Теорема 1. Есаи функции $f : X \to \mathbb{R}, g : X \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in X$, то
a) их сумма дифференцируема в x, причем

$$(f+g)'(x) = (f' + g')(x)$$

b) их произведение дифференцируемо в x, причем

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

c) их отношение дифиференцируемо в x, если $g(x) \neq 0$, причем

$$(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Доказательство. В доказательстве мы будем опираться на определение дифференцируемой функции и свойства символа $o(\cdot)$.

a) $(f+g)(x+h) - (f+g)(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) =$
$(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)) =$
$= (f'(x)h + o(h)) + (g'(x)h + o(h)) =$
$(f'(x) + g'(x))\,h + o(h) =$
$= (f' + g')\,(x)h + o(h).$

b) $(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) =$
$= (f(x) + f'(x)h + o(h))\,(g(x) + g'(x)h + o(h)) - f(x)g(x) =$
$= (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,h + o(h).$

c) Поскольку функция, дифференцируемая в некоторой точке $x \in X$, непрерывна в этой точке, то, учитывая, что $g(x) \neq 0$, на основании свойств непрерывных функций можем гарантировать, что при достаточно малых значениях h также $g(x+h) \neq 0$. В следующих выкладках предполагается, что h мало: $\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} =$
$= \frac{1}{g(x)g(x+h)}(f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)) =$
$= \left(\frac{1}{g^2(x)} + o(1)\right)((f(x) + f'(x)h + o(h))\,g(x) - f(x)\,(g(x) + g'(x)h + o(h))) =$
$= \left(\frac{1}{g^2(x)} + o(1)\right)((f'(x)g(x) - f(x)g'(x))\,h + o(h)) =$
$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}h + o(h)$

Мы воспользовались тем, что в силу непрерывности функции g в точке x и того, что $g(x) \neq 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} = \frac{1}{g^2(x)}$$

Т. е.

$$\frac{1}{g(x)g(x+h)} = \frac{1}{g^2(x)} + o(1)$$

гle $o(1)$ есть бесконечно малая при $h \to 0, x+h \in X$ □

4.4. Линейность

Производная от линейной комбинации дифференцируемых функций равна линейной комбинации производных этих функций
Следует из дифференцируемости произведения, где одна из функций принимается за константу.

4.5. Композиция

4.6. Обратная функция

Пусть функции $f : X \to Y, f^{-1} : Y \to X$ взаимно обратны и непрерывны в точках $X_0 \in X$ и $f(x_0) = y_0 \in Y$ соответственно. Если функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то функция f' также дифференцируема в точке y_0, причем $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^(- 1)$

Доказательство. Поскольку функции $f : X \to Y, f^{-1} : Y \to X$ взаимно обратны, то величины $f(x) - f\left(x_0\right), \quad f^{-1}(y) - f^{-1}\left(y_0\right)$ при $y = f(x)$ не обращаются в нуль, если $x \neq x_0$. Из непрерывности f в x_0 и f^{-1} в y_0 можно, кроме того, заключить, что $\left(X \ni x \to x_0\right) \Leftrightarrow \left(Y \ni y \to y_0\right)$. Используя теперь теорему о пределе композиции функций и арифметические свойства предела, находим

$$\begin{aligned} \lim_{Y\ni y\to y0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}\left(y_0\right)}{y - y_0} = \lim_{X\ni x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f\left(x_0\right)} = \\ = \lim_{X\ni x\to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)} = \frac{1}{f'\left(x_0\right)}. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что в точке y_0 функция $f^{-1} : Y \to X$ имеет производную и

$$\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right) = \left(f'\left(x_0\right)\right)^{-1}.$$

□

Если бы нам заранее было известно, что функция f^{-1} дифференцируема в точке y_0, то из тождества $(f^{-1} \circ f)(x) = = x$ по теореме о дифференцировании композиции функций мы сразу же нашли бы, что $(f^{-1})'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1$.

Пример. Покажем, что $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ при $|y| < 1$. Функции sin: $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ и arcsin: $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ взаимно обратны и непрерывны (см. гл. IV, §2, пример 8), причем $\sin' x = \cos x \neq 0$ если $|x| < \pi/2$. При $|x| < \pi/2$ для значений $y = \sin x$ имеем $|y| < 1$. Таким образом, по теореме о дифференцировании обратной функции

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Знак перед радикалом выбран с учетом того, что $\cos x > 0$ при $|x| < \pi/2$.

4.7. Лемма Ферма. Ноль производной в экстремуме

Определение 7. Точку $x_0 \in E$ экстремума функции $f : E \to \mathbb{R}$ будем называть точкой вуутреннего экстремума, если x_0 является предельной точкой как для множества $E_- = \{x \in E \mid x < x_0\}$, так и для множества $E_+ = \{x \in E \mid x > x_0\}$ B

Лемма Ферма.

Если фуукция $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема 6 точке бнутреннего экстремума $x_0 \in E$, то ее производная в этоц точке рабна иуло: $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. По определению дифференцируемости функции в точке x_0

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(x_0; h)h$$

где $\alpha(x_0; h) \to 0$ при $h \to 0, x_0 + h \in E$. Перепишем это соотнонение в виде

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = [f'(x_0) + \alpha(x_0; h)]h$$

Поскольку x_0- точка экстремума, то левая часть равенства либо неотрицательна, либо неположительна одновременно для всех достаточно близких к нулю значений h таких, что $x_0 + h \in E$.

Если бы было $f'(x_0) \neq 0$, то при h достаточно близких к нулю величина $f'(x_0) + \alpha(x_0; h)$ имела бы тот же знак, что и $f'(x_0)$, ибо $\alpha(x_0; h) \to 0$ при $h \to 0, x_0 + h \in E$. Что же касается самого значения h, то оно может быть как положительным, так и отрицательным, коль скоро x_0- точка внутреннего экстремума.

Таким образом, предположив, что $f'(x_0) \neq 0$, мы получаем, что правая часть меняет знак при изменении знака h (если h достаточно близко к нулю), в то время как левая часть (1) не может менять знака (если h достаточно близко к нулю). Это противоречие завершает доказательство. □

4.8. Теорема Ролля

Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке [a,b], дифференцируема в интервале $]a, b[$ и $f(a) = f(b)$, то найдется точка $\xi \in]a, b[$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Поскольку функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдутся точки $x_m, x_M \in [a, b]$, в которых она принимает соответственно минимальное и максимальное из своих значений на этом отрезке. Если $f(x_m) = f(x_M)$, то функция постоянна на $[a, b]$, и поскольку в этом случае $f'(x) \equiv 0$, то утверждение, очевидно, выполнено. Если же $f(x_m) < < f(x_M)$, то, поскольку $f(a) = f(b)$, одна из точек x_m, x_M обязана лежать в интервале $]a, b[$. Ее мы и обозначим через ξ. По лемме Ферма $f'(\xi) = 0$. □

4.9. Теорема Лагранжа

Если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале $]a,b[$, то найдется точка $\xi\in]a,b[$ такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

которая, очевидно, непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема В интервале $]a,b[$ и на его концах принимает равные значения: $F(a)==F(b)=f(a)$. Применяя к $F(x)$ теорему Ролля, найдем точку $\xi\in]a,b[$,, в которой

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

□

5. Частные производные функции нескольких переменных. Производная (дифференциал) отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Теорема о производной сложной функции.

6. Теорема о неявной функции для отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ (без доказательства). Теорема об обратной функции. Производная неявной и обратной функции.

7. Интеграл Римана функции на отрезке и его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница и существование первообразной для непрерывной функции.

8. Формула Тейлора для функции одного переменного. Формы остаточного члена.

9. Экстремумы и выпуклость функций одного переменного. Исследование функции на экстремумы и выпуклость с помощью производных.

9.1. Условия монотонности функции.

Между характером монотонности дифференцируемой на интервале $(a,b)=E$ функции $f:E\to\mathbb{R}$ и знаком (положительностью) ее производной f' на этом интервале имеется следующая взаимосвязь:

$$\begin{array}{lcl} f'(x)>0 & \Rightarrow & f \text{ возрастает} & \Rightarrow f'(x) & \geq 0, \\ f'(x)\geq 0 & \Rightarrow & f \text{ не убывает} & \Rightarrow f'(x) & \geq 0, \\ f'(x)\equiv 0 & \Rightarrow & f \text{ константа} & \Rightarrow f'(x) & = 0, \\ f'(x)<0 & \Rightarrow & f \text{ не возрастает} & \Rightarrow f'(x) & \leq 0, \\ f'(x)\leq 0 & \Rightarrow & f \text{ убывает} & \Rightarrow f'(x) & \leq 0. \end{array}$$

Доказательство: Левый столбец следует из теоремы Лагранжа, в силу которой $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$, где $x_1,x_2\in[a,b]$, а $\xi\in(x_1,x_2)$. Отсюда видно, что при $x_1<x_2$ знак $f(x_2)-f(x_1)$ совпадает со знаком $f'(\xi)$.

Правый столбец следствий получается непосредственно из определения производной. Покажем, например, что если дифференцируемая на (a,b) функция f возрастает, то $f'(x)\geq 0$ на (a,b). Действительно,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Если $h>0$, то $f(x+h)-f(x)>0$, а если $h<0$, то $f(x+h)-f(x)<0$; поэтому дробь под знаком предела положительна. Следовательно, ее предел $f'(x)$ неотрицателен, что и утверждалось.

9.2. Необходимое условие внутреннего экстремума.

Для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f:U(x_0)\to R$, определенной в окрестности $U(x_0)$ этой точки, необходимо выполнение одного из двух условий: либо функция не дифференцируема в x_0, либо $f'(x_0)=0$.

Это условие не достаточно. Пример $f(x)=x^3$ на $\mathbb{R}$. $f'(0)=0$, но в $x_0=0$ нет экстремума.

9.3. Достаточные условия экстремума в терминах первой производной.

Пусть $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$ – функция, определенная в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, непрерывная в самой этой точке и дифференцируемая в ее проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$. Пусть $\mathring{U}^-(x_0)=\{x\in U(x_0)|x<x_0\}$ и $\mathring{U}^+(x_0)=x\in U(x_0)|x>x_0$. Тогда справедливы следующие заключения:

1) $(\forall x\in\mathring{U}^-(x_0)(f'(x_0)<0))\wedge(\forall x\in\mathring{U}^+(x_0)(f'(x_0)<0))\Rightarrow$ нет экстремума;

2) $(\forall x\in\mathring{U}^-(x_0)(f'(x_0)<0))\wedge(\forall x\in\mathring{U}^+(x_0)(f'(x_0)>0))\Rightarrow$ точка x_0 точка локального минимума;

3) $(\forall x\in\mathring{U}^-(x_0)(f'(x_0)>0))\wedge(\forall x\in\mathring{U}^+(x_0)(f'(x_0)<0))\Rightarrow$ x_0 - точка локального максимума;

4) $(\forall x\in\mathring{U}^-(x_0)(f'(x_0)>0))\wedge(\forall x\in\mathring{U}^+(x_0)(f'(x_0)>0))\Rightarrow$ нет экстремума.

Кратко можно сказать, что если при переходе через точку производная меняет знак, то экстремум есть, а если ее знак при этом не меняется, то экстремума нет.

9.4. Выпуклость.

Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, определенная на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, называется *выпуклой* на нем, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и любых чисел $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, имеет место неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Если при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$ это неравенство является строгим, то функция называется строго выпуклой на интервале (a, b).

Для того, чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ была выпуклой (вниз) на (a, b) необходимо и достаточно, чтобы ее производная f' не убывала на (a, b). При этом строгому возрастанию f' соответствует строгая выпуклость f.

Для того чтобы функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, имеющая на интервале (a, b) вторую производную, была выпуклой (вниз) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы на (a, b) было $f''(x) > 0$. Если же $f''(x) > 0$ на (a, b), то этого достаточно, чтобы гарантировать строгую выпуклость функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

9.5. Исследование.

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, Пусть f дважды дифференцируема на D. Цель нарисовать график.

Алгоритм исследования функции.

1) Нахождение области определения функции.

2) Исследование поведения функции на границе области определения, нахождение вертикальных асимптот.

3) Найти точки пересечения с осями координат.

4) Исследование функции на четность или нечетность.

5) Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точек экстремума.

   Промежутки возрастания и убывания являются решениями неравенств $f'(x) \geq 0$ и $f'(x) \leq 0$ соответственно.

   Критическими точками функции называют внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует.

6) Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба.

   Промежутки вогнутости и выпуклости функции находятся при решениями неравенств $f''(x) \geq 0$ и $f''(x) \leq 0$ соответственно.

7) Нахождение горизонтальных и наклонных асимптот.

8) Вычисляем значения функции в промежуточных точках.

10. **Экстремумы функций нескольких переменных, условные экстремумы, множители Лагранжа.**

11. **Интеграл Римана по n-мерному параллелепипеду. Сведение кратного интеграла от непрерывной функции к повторному.**

ащыфри

12. **Криволинейные интегралы. Вычисление длин кривых и работы силы по криволинейному пути. Формула Грина.**

as

13. **Интегрируемые по Лебегу функции на единичном кубе $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Конструкция интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (все без доказательств). Неравенство Чебышёва (с доказательством).**

14. **Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость, непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.**

15. Несобственные интегралы, признаки сходимости несобственных интегралов. Сходимость интегралов $\int_0^1 x^\alpha dx$ и $\int_1^\infty x^\alpha dx$.

15.1. Несобственные интегралы

Определение 1. Пусть функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, \infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, содержащемся в этом промежутке.

Величина

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \coloneqq \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

если указанный предел существует, называется несобственным интегралом Римана или просто **несобственным интегралом от функции** f **по промежутку** $[a, +\infty)$**.**

Сам символ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также называется несобственным интегралом. Говорят, что несобственный интеграл **сходится**, если указанный предел существует, и **расходится** в противном случае.

Определение 2. Пусть функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, B)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset [a, B)$. Величина

$$\int_a^{B} f(x)dx \coloneqq \lim_{b \to B-0} \int_a^b f(x)dx,$$

если указаный предел существует, называется **несобственным интегралом от функции** f **по промежутку** $[a, B)$**.**

Определение 3. П

16. Эйлеровы интегралы. Гамма- и Бета-функции. Связь между функциями Г и Б. Функциональное уравнение и формула дополнения для Гамма-функции. Объем n-мерного шара.

17. Ортогональные системы векторов в пространстве со скалярным произведением. Примеры. Тригонометрическая система. Неравенство Бесселя. Полные ортогональные системы, теорема о разложении в ряд по полной ортогональной системе, равенство Парсеваля. Полнота тригонометрической системы (без доказательства). Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье функции класса C^1

as

Дискретная Математика

18. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Счётные множества. Объединение счётного множества счётных множеств счётно. Теорема Кантора: множество всех подмножеств множества X неравномощно X. Несчётность множества вещественных чисел. Аксиома выбора, лемма Цорна, их эквивалентность (без доказательства)

18.1. Сравнение множеств по мощности.

Опр. *Декартово произведение* $A \times B = < a, b > \mid a \in A, b \in B$

$$< a, b >= \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$< a, b >=< c, d > \iff a = c \ \& \ b = d$$

Опр. f - *функция*, если $f \subseteq A \times B$, выполняется тотальность $\forall a \in A \ \exists b \in B \ (< a, b >\in f)$ и функциональность $\forall a \in A \ \forall b_1, b_2 \in B \ (< a, b_1 >\in f \ \& < a, b_2 >\in f \Longrightarrow b_1 = b_2)$.

$\forall a \ \exists! b \ \ < a, b >\in f$ тогда записывают $f(a) = b$

Свойства функций:

a) инъективность: $\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

b) сюръективность: $\forall b \in B \ \exists a \in A, f(a) = b$

f - биекция, если f - инъективно и сюръективно.

Опр. Два множества называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию).

$|A| = |B| \ (A \sim B) \iff \exists f$ - биекция $(f : A \longrightarrow B)$

$|A| \leq |B| \ (A \lesssim B) \iff \exists f$ - инъекция $(f : A \longrightarrow B)$

Сравнение множеств по мощности. Множество A по мощности не больше множества B, если A равномощно некоторому подмножеству B.

18.2. Теорема Кантора-Берштейна.

Если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B, а B равномощно некоторому подмножеству множества A, то множества A и B равномощны.

Доказательство. Пусть A равномощно подмножеству B_1 множества B, а B равномощно подмножеству A_1 множества A (см. рис. 1). При взаимно однозначном соответствии между B и A_1 подмножество $A_2 \subset A_1$. При этом все три множества A, B_1, A_2 равномощны, - нужно доказать, что они равномощны множеству B, или, что то же самое, A_1. Будем использовать $A_0 = A$

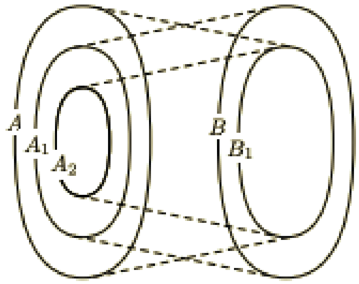


Рис. 1: теорема Кантора-Берштейна

Нужно доказать такой факт: *если $A_2 \subset A_1 \subset A_0$ и $|A_2| = |A_0|$, то все три множества равномощны.*

Пусть f - функция, осуществляющая взаимно однозначное соответствие $A_0 \longrightarrow A_2$ (элемент $x \in A_0$ соответствует элементу $f(x) \in A_2$). Когда A_0 переходит в A_2, меньшее множество A_1 переходит в какое-то множество $A_3 \subset A_2$ (см. рис. 2). Аналогичным образом само A_2 переходит в некоторое множество $A_4 \subset A_2$. При этом $A_4 \subset A_3$, так как $A_1 \subset A_2$.

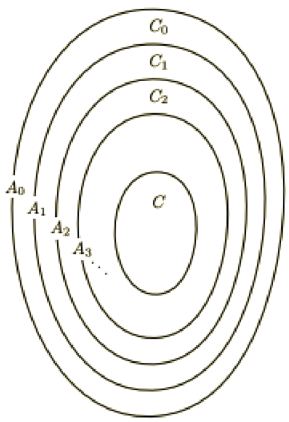


Рис. 2: док-во теоремы Кантора-Берштейна

Продолжая эту конструкцию, мы получаем убывающую последовательность множеств

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \dots$$

и взаимно однозначное соответствие $f : A_0 \longrightarrow A_2$, при котором A_i соответствует A_{i+2} $f(A_i) = A_{i+2}$. Формально можно описать A_{2n} как множество тех элементов, которые получаются из какого-то элемента множества A_0 после n-кратного применения функции f. Анаогичным образом A_{2n+1} состоит из тех и только тех элементов, которые получаются из какого-то элемента множества A_1 после n-кратного применения функции f.

Заметим, что пересечение всех множеств A_i вполне может быть непусто: оно состоит из тех элементов, у которых можно сколько угодно брать f-прообраз. Теперь можно сказать так: множество A_0 мы разбили на непересекающие слои $C_i = A_i \setminus A_{i+1}$ и на сердцевину $C = \cap_i A_i$.

Слои $C_0, C_2, C_4, \dots$ равномощны (функция f осуществляет взаимно однозначное соответствие между C_0 и C_2, между C_2 и C_4 и т.д.):

$$C_0 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{f} C_4 \xrightarrow{f} \dots$$

То же самое можно сказать про слои с нечетными номерами:

$$C_1 \xrightarrow{f} C_3 \xrightarrow{f} C_5 \xrightarrow{f} \ldots$$

Теперь легко понять, как построить взамно однозначное соответствие g между A_0 и A_1. Пусть $x \in A_0$. Тогда соответствующий ему элемент $g(x)$ строится так: $g(x) = f(x)$ при $x \in C_{2k}$ и $g(x) = x$ при $x \in C_{2k+1}$ или $x \in C$ (см. рис. 3).

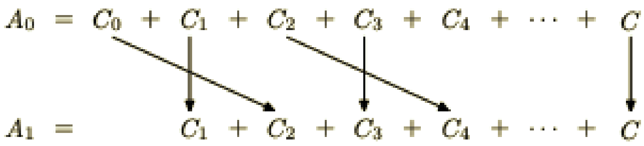


Рис. 3: док-во теоремы Кантора-Берштейна

□

18.3. Счётные множества

Опр. Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Множество называется конечным, если оно равномощно какому-то натуральному числу.

Примеры счётных множеств: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^k$, множество всех конечных последовательностей натуральных чисел.

18.4. Объединение счётного множества счётных множеств счётно.

Доказательство. Пусть имеется счетное число счетных множеств $A_1, A_2, \ldots$. Расположим элементы каждого из них слева направо в последовательность ($A_i = \{a_{i0}, a_{i1}, \ldots\}$) и поместив эти последовательности друг под другом, получим таблицу:

$$\begin{array}{ccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \ldots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Теперь эту таблицу можно развернуть в последовательности, проходя по диагоналям: $[(a_{00}), (a_{01}, a_{10}),$

Если множества A_i не пересекались, то мы получили искомое представление для их объединения. Если пересекались, то из построенной последовательности надо выбросить повторения.

Если множеств конечное число или какие-то из подможеств конечны, то в этой конструкции части членов не будет - останется либо конечное, либо счетное множество.

□

18.5. Теорема Кантора.

Множество всех подмножеств множества неравномощно A.

Доказательство. Предположим, что существует множество A, равномощное множеству всех своих подмножеств 2^A, то есть, что существует такая биекция f, ставящая в соответствие каждому элементу множества A некоторое подмножество множества A.

Рассмотрим множество B, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих своим образам при отображении f (существует по аксиоме выделения): $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$.

Отображение f биективно, а $B \subseteq A$, поэтому существует $y \in A$ такой, что $f(y) = B$.

Теперь посмотрим может ли y принадлежать B. Если $y \in B$, то $y \in f(y)$, а тогда, по определению B, $y \notin B$. Если $y \notin B$, то $y \notin f(y)$, а тогда, по определению B, $y \in B$. В любом случае противоречие. □

18.6. Несчётность множества вещественных чисел.

Доказательство. Рассмотрим отрезок $A = [0, 1]$, покажем, что он несчётный, а значит и вся $\mathbb{R}$ будет несчётной (любое бесконечное подмножество счетного множества счетно) .

Выпишем из данного множества некоторое счетное множество действительный чисел (дробей), каждое из которых имеет вид:

$$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots a_{1n} \dots$$

$$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots a_{2n} \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots a_{nn} \dots$$

Теперь составим число (дробь), которое не совпадет ни с одним из указанных чисел:

$$b = 0, b_1b_2b_3 \dots b_n \dots$$

$$b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \dots, b_n \neq a_{nn}$$

НО! Мы забыли, что $4,(9) = 5$, то есть несовпадение двух десятичных дробей вовсе не значит, что числа, которое они обозначают различны. Как же строить дробь b более осторожно? $b_n = 1$, если $a_{nn} \neq 1$; $b_n = 2$, если $a_{nn} = 1$. □

18.7. Аксиома выбора, лемма Цорна, их эквивалентность (без доказательства).

Аксиома выбора: Для любого семейства непустых множеств S существует функция выбора на S, то есть такая функция f, что $f(x) \in x$ для всех $x \in S$.

Лемма Цорна: Пусть $(X, <)$ — частично упорядоченное множество, в котором любая цепь $C \subset X$ имеет верхнюю грань. Тогда в $(X, <)$ найдётся максимальный элемент.

Теорема Цермело: Всякое множество можно вполне упорядочить. (Более строго: для всякого множества X существует бинарное отношение $<$ на X такое, что $(X, <)$ – вполне упорядоченное множество.)

Теорема. Все три выше сказанные утверждения эквивалентны.

19. Производящие функции. Линейные рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции. Формула Бине для чисел Фибоначчи.

19.1. Производящие функции

Пусть $a_0, a_1, a_2, \dots$ – произвольная последовательность чисел

Определение 1. Производящая функция этой последовательности – это выражение вида $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n s^n$. Если $\{a_i\}$ конечна, $A(s)$ называют производящим многочленом.

19.2. Линейные рекуррентные соотношения и рациональ-ные производящие функции.

Теорема. Пусть последовательность a_n задается рекуррентым (линейным) соотношением порядка k с постоянными $c_1, \dots, c_k$: $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n$ $(*)$ (числа $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ заданы). Тогда производящая функция $A(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, причем $degQ = k$, $degP \leq k-1$

Доказательство. Рассмотрим выражение $c_1 s_1 + \dots + c_k s^k)A(s) = c_1 a_0 s + \dots + c_1 a_{k-1} s^k + \dots + c_2 a_0 s^2 + c_2 a_{k-2} s^k + \dots + c_k a_0 s^k = P(s) + A(s)$, где $deg \leq k-1$, посольку коэффициент при s^{n+k} в правой части равенства совпадает с правой частью равенства $(*)$. Отсюда $A(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, где $Q(s) = c_1 s + \dots + c_k s^k - 1$ □

Обратная теорема.Если $A(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, P и Q взаимнопросты, $Q(0) \neq 0$, то начиная с некоторого n верно, что $a_{n+k} = {}_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n$, где $k = degQ$, $c_1, \dots, c_k$ – константы

Доказательство. Пусть $Q(s) = q_0 + q_1 s + \dots + q_k s^k$. Тогда $(q_0 + q_1 s + \dots + q_k s^k)A(s) = P(s)$. $\forall n > degP$ получимм, что коэффициент при s^n в левой части равенства обращается в 0. Этот коэффициент равен $a_n q_0 + \dots + a_{n-k} q_k + \dots + a_n q_0 + \dots a_{n-k} q^k = 0 \Rightarrow a_n = a_{n-1}\left(-\dfrac{q_1}{q_0}\right) + \dots + a_{n-k}\left(-\dfrac{q_k}{q_0}\right)$, чтд $\left(c_k = -\dfrac{q_k}{q_0}\right)$

□

Теорема. Если $A(s)$ удовлетворяет условию предыдущей теоремы, то она представляется в виде суммы элементарных дробей вида $\dfrac{1}{(1-q_i s)^{k_i}}$, где q_i обратны корням Q, а k_i не превосходят кратности корня $\dfrac{1}{q_i}$

Доказательство. Пусть d_i – кратность корня $\dfrac{1}{q_i}$. Тогда $Q(s) = Q_1(s) \cdot \dots \cdot Q_m(s)$, где $Q_i = (1-q_i s)^{d_i}$. Существует константа c_m такая, что знаменатель разности $A(s) - \dfrac{c_m}{(1-q_m s)^{d_m}}$ имеет степень меньше, чем $degQ$. c_m равна значению рациональной функции $\dfrac{P(s)}{Q_1(s)\dots Q_{m-1}(s)}$ в точке $\dfrac{1}{q_m}$. Далее – индукция по $degQ$, чтд □

19.3. Последовательность Фибоначчи.

$F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Производящая функция: $Fib(s) = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots$.

Домножим равенство на $s+s^2$: $(s+s^2)Fib(s) = s+s^2+2s^3+3s^4+5s^5+\dots+s^2+s^3+2s^4+3s^5+5s^6+\dots = Fib(s)-1 \Rightarrow Fib(s) = \dfrac{1}{1-s-s^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{s-s_2} - \dfrac{1}{s-s_1}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{s_1(1-\frac{s}{s_1})}\right) - \dfrac{1}{s_2(1-\frac{s}{s_2})}$,

где $s_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $s_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ – корни $1 - s - s^2 = 0$

То есть $Fib(s) = \dfrac{1}{\sqrt{5}s_1}(1+\dfrac{s}{s_1}+\dfrac{s^2}{s_1^2}+\dots) - \dfrac{1}{\sqrt{5}s_2}(1+\dfrac{s}{s_2}+\dfrac{s^2}{s_2^2}+\dots)$ и $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(s_1^{-1-n} - s_2^{-1-n} =$ [пользуемся тем, что $s_1 s_2 = -1$] $= \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}}(s_2^{n+1} - s_1^{n+1}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$

– формула Бине для чисел Фибоначчи

Линейная Алгебра и Геометрия

20. Аффинные пространства, аффинные отображения. Задание аффинного отображения n-мерного аффинного пространства образами $n+1$ точки.

21. Проективные пространства, проективные отображения. Задание проективного отображения n-мерного проективного пространства образами $n+2$ точек.

22. Кривые второго порядка в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}^2$, их аффинная и проективная классификации.

23. Векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, теорема о ранге матрицы. Определитель матрицы и его свойства. Разложение по строке и столбцу. Определитель произведения матриц.

23.1. Векторное пространство.

Определение 1. **Векторным пространством** над полем $\mathbb{F}$ называется непустое множество V с операцией сложения и умножения на элементы поля. По сложению V должно быть абелевой группой, и должно быть выполнено:

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall x \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$; – ассоциативность умножения на скаляр

2) $1 \cdot x = x \forall x \in V$; – унитарность

3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{F}$; – дистрибутивность-1

4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall x \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$; – дистрибутивность-2

Примеры: $\mathbb{R}, \mathbb{C}^n$, многочлены относительно сложения и умножения на скаляр.

Определение 2. Подмножество U векторного пространства V называется подпространством, если

1) U является подгруппой аддитивной групы V:

2) $a \in U \to \lambda a \in U$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$.

23.2. Линейные отображения.

Определение 3. Векторные пространства V и U на полем $\mathbb{K}$ называются **изоморфными**, если существует такое биективное отображение $\varphi : V \to U$, что

1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для любых $a, b \in V$;

2) $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для любых $a \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

Само отображение φ при этом называется **изоморфизмом** пространства V и U. Также изображение φ называется линейным.

23.3. Базис.

Определение 4. Линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ называется выражение вида:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{F}, i = \overline{1, n}$.

Если $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, для некоторого набора λ_i, то говорят что y линейно выражается через $x_1, \ldots, x_n$.

Система векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$ называется **линейно независимой**, если не существует не нулевой набор λ_i, такой чтобы $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$.

Определение 5. Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства V называется его **базисом.**

Теорема. Каждый вектор x из линейного n-мерного векторного пространства V можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов.

Теорема. Если $e_1, \ldots, e_n$ — линейно независимые вектора пространства V и каждый вектор $x \in V$ линейно выражается через $e_1, \ldots, e_n$, то эти векторы образуют базис.

23.4. Размерность.

Определение 6. Размерность пространства - это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов (обозначение $\dim V$).

Определение 7. Пространство, имеющее конечную размерность называется *конечномерным.* Пространство, где можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, называется *бесконечномерным.*

Теорема. Все базисы конечномерного векторного пространства содержат одно и то же число векторов.

Доказательство. Если бы в пространстве V существовало два базиса из разного числа векторов, то по предложению тот из них, в котором большее число векторов, был бы линейно зависим, что противоречит определению базиса. $\square$

23.5. Ранг.

Ранг линейного отображения - это размерность образа. Размерность образа совпадает с рангом матрицы этого линейного отображения.

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ её рангом называется максимальное число линейно независимых строк или столбцов (обозначение $\operatorname{rk} A$).

23.6. Матрица.

Пусть задан базис $e_1, \ldots, e_n$ в V и базис $f_1, \ldots, f_m$ в U. Тогда линейное отображение $\varphi : V \to U$, можно записать в виде матрицы $A \in \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^n$, где каждый из n столбцов — образ соответствующего базисного вектора. Тогда $\forall x \in V$ $\varphi(x) = Ax$ (x – вектор столбец). Матрица A называется матрицей линейного отображения.

При линейном отображении подпространство перейдёт в подпространство.

Для линейного отображения определены ядро и образ.

Определение 8. Ядро оператора $KerT = \{v \in V_1 | T(v) = 0\}$

Определение 9. Образ оператора $ImT = \{w \in V_2 | w = T(v)\}$

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются преобразования следующих трех типов:

1) прибавление к одной строке другой, умноженного на число;
2) перестановка двух строк;
3) умножение ожной строки на число, отличное от 0.

23.7. Теорема о ранге.

Ранг матрицы равен наибольшему порядку ее миноров, отличных от нуля.

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r и пусть $s > r$. Тогда любые s строк матрицы A линейно зависимы и, тем более, зависимы строки любой квадратной подматрицы порядка s, представляющие собой части соответствующих строк матрицы A. Следовательно, любой минор порядка s равен нулю. Рассмотрим подматрицу, образованную каким-либо r линейно независимыми строками матрицы A. Ее ранг, очевидно тоже равен r и, значит, среди ее столбов найдется r линейно независимых. Минор порядка r, образованных этими столбцами, не равен нклю. □

23.8. Определитель матрицы.

Пусть V - векторное пространство над произвольным полем $\mathbb{K}$ и $f(a_1, ..., a_m)$ - функция от m векторов пространства V, принимающая значения в $\mathbb{K}$.

Определение 10. Функция $f(a_1, ..., a_m)$ называется **полилинейной** (или m-линейной), если она линейна по каждому аргументу.

Определение 11. Полилинейная функция $f(a_1, ..., a_m)$ называется **кососимметрической**, если при перестановке любых двух аргументов она умножается на -1.

Определение 12. **Определителем** квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется число

$$\det A = \sum_{(k_1,...,k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, ..., k_n) a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n}$$

.

Теорема.

1) Определитель является кососимметрической полинейной функцией строк матрицы.

2) Всякая функция f на множестве квадратных матриц порядка n, являющееся кососимметрической полинейной функцией строк матрицы имеет вид

$$f(A) = f(E) \det A,$$

в частности, если $f(E) = 1$, то $f = \det$.

23.9. Свойства определителя матрицы.

Следующие свойства отражают основные результаты теории определителей:

1) $\det E = 1$ (определитель единичной матрицы равен 1);

2) $\det cA = c^n \det A$ (определитель является однородной функцией степени n на пространстве матриц размера $n \times n$;

3) $\det A^T = \det A$ (определитель матрицы не меняется при её транспонировании);

4) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (определитель произведения матриц равен произведению их определителей, A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка);

5) $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, причём матрица A обратима тогда и только тогда, когда обратим её определитель $\det(A)$;

6) существует ненулевое решение уравнения $AX = 0$ тогда и только тогда, когда $\det A = 0$ (или же $\det A$ должен быть нетривиальным делителем нуля в случае, если R — не целостное кольцо).

23.10. Разложение матрицы по строке.

Разложение по i строке:

$$\forall i |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

23.11. Разложение матрицы по столбцу.

Разложение по j столбцу:

$$\forall i |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

23.12. Определитель произведения матриц.

Для любых квадратных матриц A и B (одного порядка):

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доказательство. Легко увидеть, что строки $c_1, ..., c_n$ матрицы AB получаются из строк $a_1, ..., a_n$ матрицы A умножением на B: $c_i = a_i B$.

Отсюда следует, что при фиксированной матрице B определитель $\det AB$ есть кососимметрическая полилинейная функция строк матрицы A. В самом деле, например, $a_1 = a_k + a_m$, тогда

$$\det(a_1 B, ..., a_n B) = \det(a_k B, ..., a_n B) + \det(a_m B, ..., a_n B)$$

Остальные свойства проверяются аналогично. Дальше по теореме (**??**):

$$\det(AB) = \det(EB) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(B)$$

□

24. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Формулы Крамера. Теорема Кронекера-Капелли.

25. Характеристический и минимальный многочлены линейного оператора, теорема Гамильтона–Кэли.

25.1. Линейный оператор

Определение 1. Линейным оператором в векторном пространстве V называется линейное отображение пространства V в себя.

Более подробно, линейный оператор – это отображение $\mathcal{A} : V \to V$, удовлетворяющее условиям:
1) $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$ для любых x, $y \in V$
2) $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\mathcal{A}(x)$ для любых $x \in V$, $\lambda \in K$

Определение 2. Матрицей линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ называется матрица $A = (a_ij)$, определяемая из равенств $Ae_j = \sum\limits_i a_{ij}e_i$

То есть в j-ом столбце матрицы A стоят координаты вектора Ae_j в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Определение 3. Ненулевой вектор $e \in V$ называется **собственным** вектором оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}e = \lambda e$. Число $\lambda \in K$ называется при этом собственным значением оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору e.

25.2. Характеристический многочлен

Определение 4. Многочлен $f_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n det(\mathcal{A} - tE) = det(tE - \mathcal{A})$ называется **характеристическ** оператора $\mathcal{A}$.

Замечание. Коэффициент при t^{n-k} многочлена $f_{\mathcal{A}}(t)$ равен $(-1)^k\times$(сумма главных миноров порядка k матрицы A)

Отметим, что характеристический многочлен линейного оператора в силу своего определения не зависит от выбора базиса. Получаем теорему

Теорема. Собственные значения линейного оператора – это в точности корни его характеристического многочлена.

Следствие. Любой линейный оператор в комплексном векторном пространстве имеет собственный вектор

25.3. Минимальный многочлен

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в n-мерном векторном пространстве V над полем K. Для люого многочлена

$$f(t) = a_0t^m + a_1t^{m-1} + \dots + a_{m-1}t + a_m \in K[t]$$

можно определить его значение оператора $\mathcal{A}$ по формуле

$$f(\mathcal{A} = a_0\mathcal{A}^m + a_1\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_{m-1}\mathcal{A} + a_mE$$

Ясно, что

$$(f + g)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A}), \quad (fg)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})$$

Аналогичным образлм можно определить многочлен от матрицы. При этом если оператор $\mathcal{A}$ имеет в некотором базисе матрицу A, то оператор $f(\mathcal{A})$ будет иметь в том же базисе матрицу $f(A)$.

Так как пространство линейных операторов конечномерно (при конечномерном V), то среди степеней оператора $\mathcal{A}$ может быть лишь конечное число линейно независимых. Следовательно, существуют такие ненулевые многочлены f, что $f(\mathcal{A}) = 0$. Они называются **аннулирующими** многочленами оператора $\mathcal{A}$.

Определение 5. Аннулирующий многочлен наименьшей степени называется минимальным многочленом оператора $\mathcal{A}$ и обозначает $\mu_{\mathcal{A}}$

Замечание. Всякий аннулирующий многочлен f делится на минимальный. В самом деле, если остаток от деление f на $\mu_{\mathcal{A}}$ отличен от нуля, то он является аннулирующим многочленом меньшей степени, чем $\mu_{\mathcal{A}}$, что противоречит определению минимального многочлена. Отсюда следует, что минимальный многочлен определен с точностью до постоянного множителя.

25.4. Теорема Гамильтона-Кэли

Предложение. Если $1 \leq i, j \leq n$ и $i \neq j$, то $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$

Доказательство. Пусть A' – матрица, полученная из матрицы A заменой ее j-ой строки на i-ую. $\forall k = 1, 2, \dots, n$ обозначим через A_k матрицу, полученную при вычеркивании из матрицы A ее j-ой строки и k-го столбца, а через A'_k – матрицу, полученную при вычеркивании из матрицы A' ее i-ой строки и k-го столбца. Либо для всех k матрицы A_k и A'_k совпадают, либо для всех k эти матрицы получаются одна из другой одной и той же перестановкой строк. Значит, либо $A_{ik} = A'_{ik}$, либо $A_{ik} = -A'_{ik}$ для всех k. Но в матрице A' имеются две одинаковые строки, значит, ее определитель равен нулю:

$$0 = a_{i1}A'_{i1} + a_{i2}A'_{i2} + \dots + a_{in}A'_{in} = \pm(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn})$$

□

Определение 6. Присоединенная матрица A^*– матрица, составленная из алгебраических дополнений для соответствующих элементов транспонированной матрицы (Транспонированная матрица — матрица A^T, полученная из исходной матрицы A заменой строк на столбцы. В присоединенной надо элементы относительно диагонали переставить местами)

Преложение (Теорема Безу для λ-матриц) Правым и левым остатком от деления λ-матрицы на $A(\lambda)$ на $\lambda E - B$ является $A(B)$ и $\hat{A}(B)$ соответственно. ($A(\lambda) = C(\lambda)(\lambda E - B) + A(B)$)

Доказательство. Разложение на множители

$$\lambda^j E - B^j = (\lambda^{j-1}E + \lambda^{j-2}B + \dots + \lambda B^{j-2} + B^{j-1})(\lambda E - B)$$

можно проверить раскрытием скобок. Умножим обе части на A_{l-j} ($A(\lambda) = A_0\lambda^l + \dots + A_{l-1}\lambda + A_l$) слева и сложим все полученные равенства при $j = 1, \dots, l$. Правая часть полученного равенства будет иметь вид $C(\lambda)(\lambda E - B)$, где $C(\lambda)$ – некоторая λ-матрица. Левая часть равенства

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda^j A_{l-j} - \sum_{j=1}^{l} A_{l-j}B^j = \sum_{j=0}^{l} \lambda^j A_{l-j} - \sum_{j=0}^{l} A_{l-j}B^j = A(\lambda) - A(B)$$

Таким образом $A(\lambda) = C(\lambda)(\lambda E - B) + A(B)$. Результат теперь следует и единственности правого остатка. Утверждение для левого остатка получается обращением множителей в исходном разложении, умножением полученного на A_{l-j} справа и суммированием. □

Теорема Гамильтона-Кэли. Всякий линейный оператор и матрица этого оператора аннулируются своим характеристическим многочленом.

Доказательство. Пусть A – квадратная матрица рассматриваемого оператора в каком-либо базисе, а $f(\lambda)$ – ее характеристический многочлен. Тогда хотим доказать, что $f(A) = 0$. Рассмотрим присоединненную матрицу $(A - \lambda E)^*$:

$$(A - \lambda E)^*(A - \lambda E) = (A - \lambda E)(A - \lambda E)^* = det(A - \lambda E)E = f(\lambda)E$$

Значит, $f(\lambda)E$ делится без остатка $(A - \lambda E)$, а значит по теореме Безу $f(A)E = 0 \Rightarrow f(A) = 0$. Так как мы рассматривали матрицу оператора в произвольном базисе, то утверждение верно и для оператора □

26. Корневые подпространства линейного оператора, жорданова нормальная форма.

27. Квадратичные и билинейные формы, положительная определенность, закон инерции.

28. Евклидовы линейные пространства. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогонализация Грама–Шмидта.

29. Вещественные самосопряженные операторы, их диагонализуемость. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Алгебра

30. Группы, подгруппы, смежные классы, формула Лагранжа для числа смежных классов.

30.1. Группа.

Определение 1. $(G, \cdot)$ - непустое множество G называется группой, если

1) Существует нейтрального элемента e;

2) существует обратного элемента:

3) операции ассоциативны $((ab)c = a(bc))$.

Группа называется коммутативной (абелевой), если операция коммутативна. $(ab = ba \forall a, b \in G)$

30.2. Подгруппа.

Определение 2. Подмножество $H \subset G$, замкнутое относительно $\cdot$, являющееся группой, называется подгруппой группы G.

30.3. Примеры.

Группы: $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}/0, \cdot)$.

Не абелевы группы: невырожденные квадратные матрицы порядка n над полем $\mathbb{K}$ образуют группу по умножению, обозначаемую $GL_n(\mathbb{K})$.

Подгруппы: матрицы с определителем 1 образуют подгруппу группы $GL_n(\mathbb{K})$. Эта подгруппа называется унимодулярной группой и обозначается $SL_n(\mathbb{K})$.

30.4. Смежные классы.

Определение 3. Правым смежным классом элемента $g \in G$ по подгруппе H называется множество

$$gH = \{gh | h \in H\}.$$

Будем писать, что $g_1 \equiv g_2 (\mod H)$, если $g_2^{-1} g_1 \in H$.

Докажем, что так определённое сравнение по модулю является отношением эквивалентности:

1) (рефлексивность) $g^{-1}g = e \in H$ — OK

2) (симметричность) $a^{-1}b = h \Rightarrow b = ah \Rightarrow bh^{-1} = a \Rightarrow h^{-1} = b^{-1}a \in H$.

3) (транзитивность) $a^{-1}b = h_1, b^{-1}c = h_2$

$$a^{-1}c = h_1 b^{-1} c = h_1 h_2 \in H$$

Это отношение эквивалентности разбивает G на классы эквивалентности. Такие классы совпадают с классами смежности, действительно, пусть $a, b \in gH$, то есть $a = gh_1, b = gh_2$, тогда $b^{-1}a = (gh_2)^{-}1gh_1 = h_2^{-1}g^{-1}gh_1 = h_2^{-1}h_1 \in H$. Пусть $a \equiv b(\mod H)$, тогда $b^{-1}a \in H$, то есть $a = bH$, a лежит в классе сопряженности b.

Подгруппа H — это отдельный класс сопряженности.

В каждом классе сопряженности одинаковое число элементов равное $|H|$, действительно, если бы $gh_1 = gh_2$, то $h_1 = h_2$.

Отсюда вытекает, что $|G|$ делится на $|H|$. Число $|G|/|H|$ называется индексом группы и обозначается $[G : H]$.

30.5. Формула Лагранжа.

Теорема Лагранжа. Пусть группа G конечна, и H — её подгруппа. Тогда порядок G равен порядку H, умноженному на количество её левых или правых классов смежности.

$$|G| = |G : H||H|$$

Доказательство. Все смежные классы gH содержат одно и то же число элементов, равное $|H|$. Поскольку они образуют разбиение группы G (как классы эквивалентности), порядок группы G равен произведению их числа на $|H|$. (+ смотреть утверждения выше!) □

Следствия.

1) Порядок любой подгруппый конечной группы делит порядок группы.

2) Порядок любого элемента конечной группы делит порядок группы.

3) Всякая конечная группа простого порядка является циклической.

4) Если $|G| = n$, то $g^n = e \quad \forall g \in G$.

31. Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы, фактор-группы. Теорема о гомоморфизмах групп.

31.1. Гомоморфизм групп.

Пусть заданы две группы $(G_1, *_1)$ и $(G_2, *_2)$. Отображение $\varphi : G_1 \to G_2$ называется *гомоморфизмом* этих групп, если $\forall a, b \in G_1$

$$\varphi(a *_1 b) = \varphi(a) *_2 \varphi(b).$$

$\operatorname{Im}\varphi = \{g \in G_2 | \exists h \in G_1 \varphi(h) = g\} = \varphi(G_1)$ — образ.
$\ker\varphi = \{g \in G_1 | \varphi(g) = e_{G_2}\}$ — ядро.
Если гомоморфизм φ — биекция, то φ — изоморфизм.
Свойства:

1) $\varphi(e) = e$.

2) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

3) $\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \quad \Leftrightarrow \quad g_1 \equiv g_2 (mod \operatorname{Ker}\varphi)$

Пример. Пусть G - произвольная аддитивная (соответственно, мультипликативная) абелева группа. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ отображение $x \mapsto nx$ (соответственно, $x \mapsto x^n$ является эндоморфизмом группы G. В случае $G = \mathbb{C}^*$ ядром этого гомоморфизма является группа C_n корней n-ой степени из 1.

31.2. Нормальные подгруппы.

Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если правый смежный класс $gH = \{gh | h \in H\}$ равен левому смежному классу $Hg = \{hg | h \in H\}$:

$$gH = Hg \forall, g \in G.$$

В этом случае пишут $H \lhd G$.

Пример.В абелевой группе все подгруппы нормальны. Тривиальные подгруппы нормальны

Теорема. Отношение сравнимости по модулю подгруппы H могласовано с операцией умножения в группе G тогда и только тогда, когда подгруппа H нормальна.

31.3. Фактор группы.

Факторгруппа G/H — это группа на множестве смежных классов нормальной подгруппы H, где умножение задаётся так: $(aH)(bH) = (ab)H$. Так как подгруппа H нормальна, умножение задано корректно.

Пример: факторгруппа $Z \setminus nZ$ есть группа вычетов Z_n

31.4. Теорема о гомоморфизмах.

Гомоморфный образ группы G изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма φ

$$\operatorname{Im}\varphi \simeq G/\ker\varphi.$$

Доказательство. Во-первых, $\ker\varphi$ — нормальная подгруппа:

Пусть $g \in G$, $H = \ker\varphi$, $h \in H$
докажем, что $g^{-1}hg \in H$

$$\varphi(g^{-1}hg) = \varphi(g^{-1})\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(g^{-1}g) = \varphi(e) = e \Rightarrow g^{-1}hg \in H.$$

Значит факторгруппа определена корректно.

Рассмотрим отображение $f : \operatorname{Im}\varphi \to G/\ker\varphi$, такое что $f(g) = \varphi^{-1}(g)H$.
Докажем, что отображение задано корректно. Пусть $\varphi(a) = g$ и $\varphi(b) = g$, тогда $\varphi(b^{-1}a) = \varphi(b^{-1})\varphi(a) = g^{-1}g = e \Rightarrow b^{-1}a \in H \Rightarrow aH = bH$.

Пусть $g_1g_2 \in \operatorname{Im}\varphi$, $\varphi^{-1}(g_1) = a, \varphi^{-1}(g_2) = b$. То есть $\varphi(a) = g_1, \varphi(b) = g_2$ и $\varphi(ab) = g_1g_2$

$$f(g_1g_2) = \varphi^{-1}(g_1g_2)H = abH = aHbH = \varphi^{-1}(g_1)H\varphi^{-1}(g_2)H = f(g_1)f(g_2)$$

f — гомоморфизм.

Пусть $f(g_1) \neq f(g_2)$, но $aH = bH$. $aH = bH \Rightarrow b^{-1}a \in H$ $\varphi(b^{-1}a) = e = g_2^{-1}g_1 \Rightarrow g_2 = g_1$ — противоречие, значит f — инъективен.

И каждому классу aH соответствует элемент из образа $\varphi(a)$. Т.е. сюръекция, а значит биекция. □

32. Классификация конечнопорожденных абелевых групп (без доказательства). Свободные абелевы группы конечного ранга и их подгруппы

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

33. Коммутативные кольца. Примеры колец. Кольца вычетов. Малая теорема Ферма.

33.1. Коммутативные кольца.

Кольцом называется множество с двумя операциями $(R, +, \cdot)$. По сложению кольцо должно быть абелевой группой. И должна быть выполнена дистрибутивность:

$$a(b+c) = ab + ac;$$

$$(b+c)a = ba + ca.$$

Это наиболее общее определение кольца.

Под коммутативным кольцом обычно понимают кольцо, где операция $\cdot$ ассоциативна, коммутативна и существует 1 – нейтральный элемент по умножению.

То есть от поля коммутативное кольцо отличается тем, что в кольце могут быть ненулевые элементы, у которых нет обратного по умножению.

33.2. Примеры колец.

$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, кольца многочленов над полем, любое поле: $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$

$2\mathbb{Z}$ — ассоциативное, коммутативное кольцо без 1.

33.3. Кольца вычетов

Выберем натуральное число n. Рассмотрим отношение эквивалентности на множестве целых чисел $a \sim b$, если $a \equiv b \pmod{n}$ или, что тоже самое
$a - b \,\vdots\, n$.

Проверим, что это действительно отношение эквивалентности:

1) Рефлексивность: $\forall a \in \mathbb{Z}\ a \sim a$, действительно, $a - a = 0 \,\vdots\, n$;

2) Симметричность: $\forall a, b \in \mathbb{Z}\ \ a \sim b \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, n \Leftrightarrow a - b = nk \Leftrightarrow b - a = -nk \Leftrightarrow b - a \,\vdots\, n \Leftrightarrow b \sim a$.

3) Транзитивность: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}\ a \sim b$ и $b \sim c \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, n, b - c \,\vdots\, n \Leftrightarrow a - b = nk, b - c = nm$ $\Leftrightarrow a - c = n(k+m) \Leftrightarrow a - c \,\vdots\, n \Leftrightarrow a \sim c$.

Значит все целые числа можно разделить на классы эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности могут быть занумерованы числами $0, 1, \ldots, n-1$. Эти классы называются вычетами.

Можно рассмотреть фактормножество по отношению эквивалентности $\mathbb{Z}/\sim$. Это множество обозначается $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и называется кольцом вычетов по модулю n.

И действительно это множество является кольцом.

Обычно классы эквивалентности в кольце вычетов не отличают от чисел, чтобы не путаться в дальнейшем тексте я буду обозначать вычет числа a, как $[a]$.

Рассмотрим операцию сложения:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \ \ [a] + [b] = [a + b]$$

Проверим, что операция $+$ корректна: $x, y \in \mathbb{Z} : [x] = [a], [y] = [b]$, $[x] + [y] = [x + y]$, $x - a = nk, y - b = nm \Rightarrow x + y = a + nk + b + nm = a + b + n(k + m) \sim a + b \Rightarrow [a + b] = [x + y]$.

Так как $+$ коммутативен и ассоциативен над $\mathbb{Z}$, то и в кольце вычетов всё будет в порядке.

Вычет $[0]$ – нейтральный элемент этой группы: $\forall a \in \mathbb{Z}\ [a]+[0] = [a+0] = [a] = [0+a] = [0]+[a]$

???? Существует обратный по сложению: $\forall a \in \mathbb{Z}\ [a] = [-a]$

Определим умножение:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \ \ [a][b] = [ab]$$

Умножение определено корректно: $x, y \in \mathbb{Z} : [x] = [a], [y] = [b]$, $[x][y] = [xy]$, $x - a = nk, y - b = nm \Rightarrow xy = (a + nk)(b + nm) = ab + n(am + bk + nmk) \sim ab \Rightarrow [ab] = [xy]$.

Так как $\cdot$ коммутативно и ассоциативно над $\mathbb{Z}$, то и в кольце вычетов всё будет в порядке.

Вычет $[1]$ – нейтральный элемент по умножению: $\forall a \in \mathbb{Z}\ [a][1] = [a \cdot 1] = [a] = [1 \cdot a] = [1][a]$

Дистрибутивность выполняется для $\mathbb{Z}$, откуда с учетом определенных выше операций следует дистрибутивность для $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Итого $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ – коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

33.4. Малая теорема Ферма.

Теорема 33.1. *Если p простое и $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} \equiv_p 1$.*

Доказательство. Порядок подгруппы делит порядок группы. Мультипликативная группа $\mathbb{Z}_p$ — это цикличная группа порядка $p - 1$, а значит любой не нулевой элемент этой группы в степени $p - 1$ равен единице группы. Если $(a, p) = 1$, значит что $a \not\equiv_p 0$.

Другое доказательство:

Лемма: В $\mathbb{Z}_p$ верно равенство: $(a + b)^p = a^p + b^p$.

Доказательство: Для доказательства леммы раскроем скобки по биному Ньютона, первое и последнее слагаемое никуда не денутся, тогда как у остальных мономов коэффициент будет такой $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$, при $1 \leq k < p$ этот коэффициент делится на p, а значит равен 0 в $\mathbb{F}_p$.

Малая теорема Ферма следует из представления $a = 1 + \ldots + 1$. Тогда $a^p = (1 + \ldots + 1)^p = 1^p + 1^p + \ldots + 1^p = 1 + 1 + \ldots + 1 = a$, и, наконец, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

34. Евклидово кольцо. Примеры: кольцо целых чисел, кольцо целых комплексных (гауссовых) чисел, кольцо многочленов над полем. Алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя двух элементов евклидова кольца. Факториальность евклидова кольца.

34.1. Евклидово кольцо.

Определение 1. Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и без делителей нуля называется целостным кольцом (или областью целостности).

Пример: Кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел и кольцо $K[x]$ многолченов над любым полем K являются целостными кольцами. Кольца многолченов над любым целостным кольцом тоже целостное кольцо.

Пусть A – целостное кольцо. Говорят, что элемент b делит элмент a, если существует $q : a = qb$. Элементы a, b называют ассоциированными (обозначение $a \sim b$), если выполнено либо $b|a$ и $a|b$, либо $a = cb$, где c – обратимый элемент кольца.

Определение 2. Целостное кольцо A, не являющееся полем, называется евклидовым, если существует функция $N : A\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}_+$, которая называется нормой и которая довлетворяет следующим условиям:

1) $N(ab) \geq N(a)$, причем равенство имеет место титтк элемент b обратим.

2) для любых $a, b \in A$, где $b \neq 0$, суеществует такие $q, r \in A$, что $a = qb + r$ и либо $r = 0$, либо $N(r) < N(b)$.

Пример: Евклидово кольцо $\mathbb{Z}$ с нормой модулем целого числа.

Евклидово кольцо $K[x]$ мнголченов над полем K с нормой степенью многолчена.

Комплексные числа вида $z = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ называются целыми гауссовыми числами и образуют подкольцо в $\mathbb{C}$ которое обозначается $\mathbb{Z}[i]$ и является евклидовым кольцом относительно нормы $N(z) = a^2 + b^2$

34.2. Алгоритм Евклида

35. Теорема Вильсона, малая теорема Ферма, существование примитивного вычета (первообразного корня) по простому модулю, квадратичные вычеты, символ Лежандра и его свойства, квадратичный закон взаимности Гаусса (б/д).

35.1. Теорема Вильсона

Лемма

Пусть a целое взаимнопростое с модулем m, тогда найдется такое b, что $ab \equiv_m 1$.
Док-во:Рассмотрим a,2a,3a,...,ma. Они не сравнимы по модулю m, так как если бы $ak \equiv_m al$, где k и l натуральные не больше m, то $k = l$. Значит $a \cdot l$ и $a \cdot k$ из разных классов вычетов по модулю m. Количество классов m, значит какой-то лежит в классе сравнения с 1.□

Теорема Если $p \in \mathbb{P}$, то $(p-1)! \equiv_p -1$
Доказательство: для $p = 2$ выполняется.
Дальше пусть p нечетное.
Возьмем произвольный x: $1 \leq x \leq p-1$.
Для такого x есть парный y, такой что $xy \equiv_p 1$. Можно считать что y наименьший неотрицательный вычет в своем классе. $y \neq 0$ и $1 \leq y \leq p-1$ и определяется единственным образом(если двумя, то были бы равны).
Если $y \equiv_p x$, то $x^2 \equiv_p 1$ и $p|(x^2-1) = (x-1)(x+1)$. Но p - простое, это возможно только если $x = 1$ или $x = p-1$. Значит множество целых из промежутка от 1 до $p-1$ разбивается на пары x и y, таких что $xy \equiv_p 1$.

$$\prod_{k=2}^{p-2} k \equiv_p 1$$

Умножив сравнение на $p-1$,

$$(p-1)! \equiv_p p-1 \equiv_p -1$$

Для составных Т.Вильсона не работает.

35.2. Малая теорема Ферма

$a^{p-1} \equiv_p 1$, $p \in \mathbb{P}$
Док-во. Индукция по a. База $a = 0$, 0 делится на p. Предположение $a^p - a$ делится на p. Шаг $k = a + 1$.

$$(k+1)^p - (k+1) = k^p - k + \sum_{l=1}^{p-1} k^l \binom{p}{l}$$

$k^p - k$ делится по предположению. В $\sum\limits_{l=1}^{p-1} k^l \binom{p}{l}$ смотрим на биномы. Бином $\binom{p}{l} = \frac{p!}{l! \cdot (p-l)!}$ где $1 \leq l \leq p$ и знаменатель взаимнопростой с p. Значит биномы делятся на p. Все делится на p, шаг доказан.

35.3. Существование примитивного вычета(первообразного корня) по простому модулю.

Определение 1. Примитивный вычет по mod m- образующий элемент мультипликативной группы кольца вычетов по модулю m.

$$g^{\varphi(m)} \equiv_m 1 \text{ и } g^i \not\equiv_m 1 \text{ при } 1 \leq i \leq \varphi(m)$$

Существование
Докажем что $\mathbb{F}_m$ циклическая. Пусть нет. $\mathbb{F}_m^*$ абелева порядка $p-1$. Если не циклическая, то существует $s < m-1$ такой что

$$z^s \equiv_m 1 : \forall z \in \mathbb{F}_m^*$$

Значит все элементы поля $\mathbb{F}_m$ корни много члена $x^{s+1} - x$. Значит у многочлена степени меньше p ,будет p корней, а так нельзя по т.Безу.КАНЕЦ.
Существует по модулям 2, 4, p^γ и $p^{2\gamma}$ где p из простых а гамма из натуральных.

35.4. Квадратичный вычет

Определение 2. а квадратичный вычет если $\exists x, x^2 \equiv_p a$.
СКОЛЬКО ЖЕ ИХ?
Среди ненулевых чисел 1, 2, $p-1$ для простого модуля $3 \leq p$ существует $\frac{p-1}{2}$ штук вычетов и столько же невычетов.
*Док-во.*Так как $x^2 \equiv_p (p-x)^2$, то достаточно показать, что среди 0^2, 1^2, 2^2,...,$(\frac{p-1}{2})^2$ нет сравнимых по модулю p.
Пусть есть, тогда и $x^2 \equiv_p y^2$ при $x \neq y$ и $0 \leq x, y \leq \frac{p-1}{2}$.
Так как $x^2 - y^2$ делится на p, то $(x-y)(x+y)$ делится на p, так как p простое, и $0 < |x-y| < p$ имеем что $(x+y)$ делится на p, чего быть не может так как $(x+y) \leq p-1$.

35.5. Символ Лежандра и его свойства, квадратичный закон взаимности Гаусса.

$(\frac{a}{p}) = -1$,0 или 1. -1 если а невычет, 0 если делится, 1 если а вычет.
Критерий Эйлера: Число а взаимнопростое с p является квадратичным вычетом тогда и только тогда, когда $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p 1$.
То есть $a^{\frac{p-1}{2}} = (\frac{a}{p})$

1) Мультипликативен сразу из критерия Эйлера.

$$(\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p})(\frac{b}{p})$$

$$2)\ (\frac{-1}{p}) = (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}$$

$$3)\ (\frac{2}{p}) = (-1)^{\frac{(p^2-1)}{8}} \quad 4)\ (\frac{q}{p}) \cdot (\frac{p}{q}) = (-1)^{\frac{(p-1)}{2} \cdot \frac{(q-1)}{2}}$$

36. Цепные дроби, континуанты и подходящие дроби, сходимость подходящих дробей цепной дроби, теорема Лагранжа о периодических цепных дробях (б/д).

36.1. Цепные дроби

Смотрим алгоритм Евклида.

$$a = bq_0 + r_1$$
$$b = r_1 q_1 + r_2$$
$$r_1 = r_2 q_2 + r_3$$
$$\dots\dots$$

Определение 1. Посмотрим на неполные частные q. Запишем дробь:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

Такая дробь называется цепной. Когда мы делим так целые числа, то дробь когда-нибудь закончится. Но если так делать с рациональной или иррациональной дробью, то можно сделать следующее:

$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots}}}$, где q_0 - целая часть α, q_1 - целая часть от $\frac{1}{\text{дробная часть } \alpha}$ и так далее. В рациональном случае получится конечная дробь, в иррациональном случае получается бесконечная дробь.

36.2. Континуанты

Определение 2. **Континуанта** $K_n(x_1, \dots, x_n)$ есть сумма всех одночленовб получаемых из одночлена $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ вычеркиванием всевозможных непересекающих пар соседних переменных (правило Эйлера).

Определение 3. Рекурентное определение. Континуанта индекса n есть многочлен $K_n(x_1, \dots, x_n)$, определяемый рекурентным соотношением:

$$K_{-1} = 0, K_0 = 1,$$

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 K_{n-1}(x_2, \dots, x_n) + K_{n-2}(x_3, \dots, x_n)$$

Или же:

$$K_{-1} = 0, K_0 = 1,$$
$$K_n(x_1, \dots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + K_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})$$

Разложение матрицы на произведение

$$\begin{pmatrix} K_n(x_1,\ldots,x_n) & K_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \\ K_{n-1}(x_2,\ldots,x_n) & K_{n-2}(x_2,\ldots,x_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это напрямую следует из реккурентного соотношения и мгновенно доказывается по индукции.

Свойства континуанта:

$$K_n(x_1,\ldots,x_n)\cdot K_{n-2}(x_2,\ldots,x_{n-1}) - K_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\cdot K_{n-1}(x_2,\ldots,x_n) = (-1)^n$$

Первая часть равенства - определитель "толстой"матрицы. Вторая часть - берем определители маленьких матриц, на которые мы это разложили. А они в точности -1.

Можно ли утверждать, что дробь $\dfrac{K_{n+1}(a_0,a_1,\ldots,a_n)}{K_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)}$ несократима? Оказывается, да!

$$K_{n+1} = a_0K_n + K_{n-1} \Rightarrow \gcd(K_{n+1},K_n) = \gcd(K_n,K_{n-1}) = \cdots = \gcd(K_1,K_0) = \gcd(x,1) = 1.$$

Так же, это можно вывести из

$$K_n(x_1,\ldots,x_n)\cdot K_{n-2}(x_2,\ldots,x_{n-1}) - K_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\cdot K_{n-1}(x_2,\ldots,x_n) = (-1)^n.$$

Обзовем $K_{n+1}(a_0,a_1,\ldots,a_n) = p_n, K_n(a_1,a_2,\ldots,a_n) = q_n$. Мы показали, что $\gcd(p_n,q_n) = 1$.

Разложение континуанта в цепную дробь

Справедливо тождество:

$$\frac{K_n(x_1,\ldots,x_n)}{K_{n-1}(x_2,\ldots,x_n)} = x_1 + \frac{K_{n-2}(x_3,\ldots,x_n)}{K_{n-1}(x_2,\ldots,x_n)}$$

$$\frac{K_n(x_1,\ldots,x_n)}{K_{n-1}(x_2,\ldots,x_n)} = [x_1;x_2,\ldots,x_n] = x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{x_3}{\ldots}}$$

Достаточно расписать и воспользоваться индукцией.

36.3. Сходимость подходящих дробей цепной дроби

Определение 4. n **- подходящей дробью для цепной дроби** $x = [a_0;a_1;a_2;a_3;\ldots]$, называется конечная цепная дробь $[a_0,a_1,\ldots,a_n]$, значение которой есть некоторое рациональное число $\dfrac{P_n}{Q_n}$.

Подходящие дроби с четными номерами образуют возрастающую последовательность, предел которой x. Аналогично, подходящие дроби с нечетными номерами образуют убывающую последовательность, предел которой также равен x. Таким образом, значение цепной дроби всегда находится между значениями соседних подходящих дробей.

$$P_k = K_{k+1}(a_0,a_1,\ldots,a_k), Q_k = K_k(a_1,\ldots,a_k$$

Рекуррентные формулы для вычисления числителей и знаменателей подходящих дробей:

$$p_{-1} = 1, p_0 = a_0, p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2};$$

$$q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}.$$

Свойства:

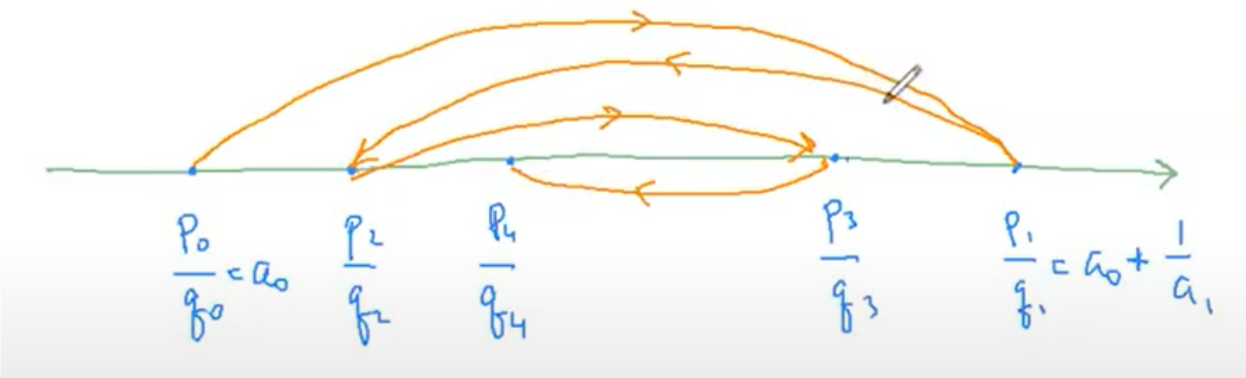
1) $Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n$

2) $|P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = 1|$

Доказательство. $|p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k| = |(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-1} - p_{k-1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2})| = |p_{k_2} q_{k-1} - p_{k-1} q_{k-2}| = 1$ □

Ранее мы доказывали свойство, что разность двух произведений K-шек равна $(-1)^n$. Из этого следует, что $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$.
Следовательно, $\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}$. Здесь сказано, что соседние подходящие дроби становятся все ближе и ближе друг к другу, так как в этой разности знаменатель становится все больше и больше.

И в итоге хотим показать, что $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{p_n}{q_n} = x$, где x - значение бесконечной цепной дроби.



Посмотрим на эту картинку. Здесь изображено, как подходящие дроби располагаются на числовой прямой. Причем, первая подходящяя дробь находится правее нулевой, вторая находится левее первой, но правее нулевой и так далее.

Нулевая, вторая, четвертая и так далее дроби возрастают, но они ограничены сверху например первой дробью. Из чего следует, что у них есть предел. Ура!

Но ТЧ не сдаётся! Докажем, что этот предел в точности x. Докажем, что x находится между $\dfrac{p_n}{q_n}$ и $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + 0}} < a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \delta}}} < a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}$$

Все это так как $0 < \dfrac{1}{a_n + \delta} < \dfrac{1}{a_n}$

С другой стороны $\dfrac{1}{a_{n-1} + 0} > \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \delta}} > \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}$.

И так далее. Значит, x находится всегда между $\dfrac{p_n}{q_n}$ и $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.

Следует, что $|x - \dfrac{p_n}{q_n}| < |\dfrac{p_{n_1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n}| = \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$

36.4. Теорема Лагранжа о периодических цепных дробях

Определение 5. Цепная дробь $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, называется **периодической**, если существуют такие целые положительные числа k_0 и h, что для любого $k \geq k_0$ $a_{k+h} = a_k$. Обозначение: $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}}]$.

Теорема Лагранжа о периодических цепных дробях. Число представляется в виде бесконечной периодической цепной дроби тогда и только тогда, когда оно является иррациональным решением квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

37. Теорема Минковского о выпуклом теле, теорема Кронекера, теорема Вейля о равномерном распределении $n\alpha$.

Определение 1. Лемма Блихфельда- любую фигуру площади больше $n \in \mathbb{N}$, можно сдвинуть так чтобы она накрывала хотя бы $n+1$ узлов целочисленной решетки.

37.1. Теорема Минковского

Определение 2. Фигура площадью больше 4, центрально симметричная и выпуклая с центом симметрии в начале координат, содержит хотя бы одну точку с целочисленными координатами.

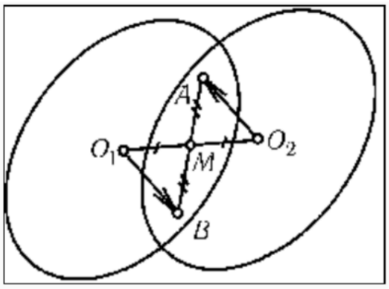


Рис. 4: док-во теоремы Минковского

Доказательство. Рассмотрим все фигуры, получающиеся из данной переносами на векторы, обе координаты которых четные:$(0,0)$,$(0,2)$,$(2,0)$,$(2,2)$,... и докажем что хотя бы две из них пересекаются.
Исходную фигуру можно заключить в круг радиуса R с центром в начале координат и R можно выбрать целым. Возьмем те фигуры, у которых центры неотрицательные числа не превосходящие 2n. Этих фигур $(n+1)^2$ штук, все они лежат внутри квадрата со стороной $2n+2R = 2(n+R)$. Если бы они не пересекались,то при любом n выполнялось бы неравенство $(n+1)^2 S < 4(n+R)^2$ где S-площадь фигуры. Но площадь больше 4, потому n можно выбрать так, чтоб выполнялось неравенство $\frac{n+R}{n+1} < \sqrt{\frac{S}{4}}(n > \frac{2R-\sqrt{S}}{\sqrt{S}-2})$.
Пусть теперь фигуры с центрами O_1 и O_2 имеют общую точку A (рис.). Докажем, что тогда середина M отрезка O_1O_2 принадлежит обеим фигурам(M имеет целые координаты). Пусть $\overrightarrow{O_1B} = -\overrightarrow{O_2A}$. Так как данная фигура центрально симметрична, точка B принадлежит фигуре с центром O_1. Эта фигура выпукла, и точки A и B принадлежат ей, поэтому ей принадлежит также середина AB. Середина AB совпадает с серединой O_1O_2. □

37.2. Теорема Кронекера

Определение 3. Формулировка Теоремы Дирихле
Для любого вещественного α и натурального n существует целое p и натуральное q, $q \leq n$ такие, что

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq}$$

Определение 4. Теорема Кронекера $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ \forall I \subset [0;1) \quad \exists k \in \mathbb{N} : \{k\alpha\} \in I$. Альтернативная формулировка: : нарисуем окружность длины 1. Запускаем кузнечика из точки 0. Он прыгает по окружности с шагом α, посетит все точки $\{n\alpha\}$. В любой интервал он попадет бесконечно много раз. $\left[\begin{array}{l} x \leq y; \\ x < y, \end{array}\right.$ Рассматриваем $\{n\alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}(\alpha \notin \mathbb{Q}), n \in \mathbb{Z}(n \in \mathbb{N})$
$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0;1)$
α фиксировано, а n принимает все целые значения.

Посмотрим на распределение этих точек на отрезке $[0;1)$. Точек будет бесконечно много, плюс разные n порождают разные точки.

Выберем некий интервал I. Нас интересует, когда эти точки попадают в I.

Теорема Кронекера: $\exists \infty$ точек $\{n\alpha\} \in I$

Альтернативная формулировка: $\forall a, b \in [0;1), a < b,\ \exists m, k \in \mathbb{Z} : a < \{m\alpha - k\} < b$.

Третья формулировка: нарисуем окружность длины 1. Запускаем кузнечика из точки 0. Он прыгает по окружности с шагом α. Таким образом он посетит все точки $\{n\alpha\}$. В любой интервал он попадет бесконечно много раз. 1. Все точки различны. Почему? Ну ведь тогда $\{n_1\alpha\} = \{n_2\alpha\}$. Тогда $n_1\alpha - n_2\alpha = k \in \mathbb{Z}$. Ну и тогда $\alpha = \frac{k}{n_1 - n_2} \in \mathbb{Q}$, что противоречит условию, что α иррационально.

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, что $|\{n_1\alpha\} - \{n_2\alpha\}| < \varepsilon$. Возьмем $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ промежутков $> \frac{1}{\varepsilon}$. Сумма всех промежутков равна $1 \Rightarrow \exists$ промежуток $< \varepsilon$.

3. За $n_1 - n_2$ шагов кузнечик сдвигается $< \varepsilon$.

4. Есть $\varepsilon < |I|$, то применяя все предыдущее, попадем в I. Причем попадем бесконечно много раз.

В случае рационального $\alpha, \alpha = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, gcd(p,q) = 1$
$\{n\alpha\} = \{\frac{np}{q}\} = \frac{np}{q} - m = \frac{np - mq}{q}$.

Покажем, что $np - mq$ принимает все $t \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{n\alpha\} \in \{\frac{0}{q}, \frac{1}{1}, \ldots, \frac{q-1}{q}\}$.

Воспользуемся тем. что $NOD(p,q) = 1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}\ ap - bq = 1$. Умножим равенство на t и поделим на q. $(at)\frac{p}{q} - (bt) = \frac{t}{q}, at = n, bt = m$.

37.3. Теорема Вейля (б/д)

Зафиксируем n. Рассмотрим такое значение :
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#\{m : 1 \leqslant m \leqslant n, \{m\alpha\} \in I\}}{n}.$$
Сколько раз за первые n шагов мы попали в интервал.

Оказывается, что такой предел всегда равен $|I|$, то есть доле промежутка, который занимает интервал.

38. Общее решение линейных диофантовых уравнений, теорема Сильвестра о линейных комбинациях натуральных чисел с неотрицательными коэффициентами, пифагоровы тройки, существование и структура решений уравнения Пелля.

38.1. Общее решение линейных диофантовых уравнений

$ax + by = c, a, b, c \in \mathbb{Z}, a, b, c$ одновременно не равны 0

i $\exists x, y \Leftrightarrow c \,\vdots\, (a, b)$

$$\begin{cases} (a,b) = ak + bm \text{ домножим на } \dfrac{c}{(a,b)} \\ c = ax + by \ x, y- \text{ целые, а почему - докажем далее} \end{cases}$$

i Пусть x_0, y_0 - частные решения. Тогда все решения имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{(a,b)} \cdot t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{(a,b)} \cdot t. \text{Помним, что } t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из системы приходим к тому, что все решения такого вида будут целыми (посмотрите на дробь, все очевидно). Теперь хотелось бы доказать, что все решения этого уравнения будут иметь именно такой вид, как выше:

Пусть x_1, y_1- какое-то решение, тогда $ax_0 + by_0 = ax_1 + by_1 \Rightarrow a \cdot (x_1 - x_0) = b \cdot (y_0 - y_1) \Rightarrow$ поделим обе части на $(a, b) \Rightarrow \dfrac{a}{(a,b)} \cdot (x_1 - x_0) = \dfrac{b}{(a,b)} \cdot (y_0 - y_1)$, а так как $\dfrac{a}{(a,b)} \perp \dfrac{b}{(a,b)}$, мы приходим к $x_1 - x_0 \,\vdots\, \dfrac{b}{(a,b)} \Rightarrow x_1 - x_0 = \dfrac{b}{(a,b)} \cdot t \Rightarrow$ подставляем в уравнение, а не выражаем, как x, чтобы была точность с $t \Rightarrow y_0 - y_1 = \dfrac{a}{(a,b)} \cdot t$ $\square$

38.1.1. Теорема Сильвестра

$ax + by = c, x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a, b \in \mathbb{N}, a \perp b$

$$\begin{cases} \textbf{i } \nexists x, y \Leftarrow c = ab - a - b \text{ наибольшее } c, \text{ для которого не существует!} \\ \textbf{ii} \exists x, y \Leftarrow c > ab - a - b \text{ для всех таких } c, \text{ меньшие могут раскладываться} \end{cases}$$

Доказательство. **i.** Сгруппируем и получим: $a(x + 1) + b(y + 1) = ab$. Заметим, что $b(y + 1) \,\vdots\, a \Rightarrow y + 1 \,\vdots\, a$. Аналогично получаем, что $x + 1 \,\vdots\, b$. Так как x, y неотрицательные, приходим к $y + 1 \geqslant a; x + 1 \geqslant b \Longrightarrow ax + by \geqslant a(b - 1) + b(a - 1) = ab - a - b > ab - a - b \Longrightarrow$ пришли к противоречию.

ii. $by = c - ax \Rightarrow c - ax \,\vdots\, y, c - ax > 0$. Рассмотрим все $x = 0, \ldots, b - 1$, тогда $c - ax$ пробегает все остатки $mod b$. Выберем тот $x : c - ax \,\vdots\, b$, назовем его x_0. Получаем $y_0 = \dfrac{c - ax_0}{b}$. Почему числитель неотрицателен? Воспользуемся условием и приведем его к виду $c \geqslant ab - a - b + 1$. Получаем, что $y_0 \geqslant \dfrac{ab - a - b + 1 - ax_0}{b} = a - 1 - \dfrac{a(x_0 + 1) - 1}{b} \geqslant |$Помним, что $x_0 \leqslant b - 1 \Longrightarrow| \geqslant a - 1 - a + \dfrac{1}{b} = -1 + \dfrac{1}{b} > -1 \Rightarrow y_0 \geqslant 0$.

$\square$

38.2. Общий вид пифагоровых троек

$a^2 + b^2 = c^2, a, b, c \in \mathbb{N}$
$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$
Если у a, b, c есть общий делитель, то можно сократить на квадрат этого общего делителя. Значит примем, что $gcd(a, b) = 1, gcd(b, c) = 1, gcd(a, c) = 1$.
Разделим наше уравнение на 4.
$(\frac{a}{2})^2 = \frac{c-b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$. Посмотрим на четность a, b, c.
Они не могут быть одновременно все четными, ведь тогда НОД не равен 1.
Они не могут быть одновременно все нечетными, ведь сумма квадратов нечетных - четное число.
Если два числа четных, то третье тоже должно быть четное.
Значит, может быть только 2 нечетных и 1 четное.
н$^2 \equiv 1$ mod 4, ч$^2 \equiv 0$ mod 4. Значит, a и b не могут быть одновременно нечетными.
Пусть тогда a четное, а b, c нечетные. Посмотрим на $\frac{c-b}{2}$ и $\frac{c+b}{2}$. Их сумма c, а разность b. Если бы у этих дробей есть общий делитель, то это противоречит $gcd(b, c) = 1$.
Раз они взаимно простые, то тогда каждое из них является квадратом, ведь их произведение тоже квадрат.
$\frac{c-b}{2} = k^2, \frac{c+b}{2} = m^2 \Rightarrow c = m^2 + k^2, b = m^2 - k^2$
$\frac{a}{2} = km, a = 2km$

Получили общий вид пифагоровой тройки:
$a = d(2km), b = d(m^2 - k^2), c = d(m^2 + k^2), k, m \in \mathbb{N}$

38.3. Структура решений уравнения Пелля

Уравнение Пелля: $x^2 - ay^2 = 1, a \in \mathbb{N}, a$ не квадрат.

Посмотрим что будет, если $a = b^2$:
$x^2 - b^2y^2 = 1$
$(x - by)(x + by) = 1$
$x = \pm 1, y = 0$

В ином случае решений бесконечно много.

Возьмем какое-то решение: $\exists x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ и пусть x_1, y_1 минимальная пара решений
$x_1^2 - ay_1^2 = 1$
$(x_1 - y_1\sqrt{a})(x_1 + y_1\sqrt{a}) = 1$.
Возведем скобки в любую натуральную степень
$(x_k - y_k\sqrt{a})(x_k + y_k\sqrt{a}) = 1$
$x_k^2 - ay_k^2 = 1$.
Из этого уже следует, что решений бесконечно много, ведь мы только что нашли новое.

Можно ли как-то описать все эти решения?

Утверждение: $x_1 + y_1\sqrt{a} = z_1, \pm z_1^k, k \in \mathbb{Z}$, то любое такое $z_1^k = x_k + y_k\sqrt{a}$ является решением. И это все возможные решения!

Почему $\pm z_1^k$. Возьмем какую-нибудь пару решение x, y. Если $x, y > 0$, то $z = x + y\sqrt{a} > 1$
Если $x > 0, y < 0, z \in (0, 1)$
Если $x < 0, y > 0, z \in (-1, 0)$
Если $x < 0, y < 0, z < -1$.

Докажем, что это все решения.

Рассмотрим числа $1, z_1, z_1^2, \ldots, z_1^m, z_1^{m+1}, \ldots$. Утверждение, что здесь содержатся все решения уравнения. Пусть есть w - решение, $w > 1$. Значит, оно находится допустим между z_1^m и z_1^{m+1}.

$z_1 = x_1 + y_1\sqrt{a}$
$\overline{z_1} = x_1 - y_1\sqrt{a}$
$z_1 \cdot \overline{z_1} = 1$

Возьмем $\frac{w}{z_1^m} = w \cdot \overline{z_1}^m$ - это будет решение. Потому что произведение двух решений тоже решение. Число $w \cdot \overline{z_1}$ лежит между 1 и z_1. А такого решения быть не должно, ведь мы взяли z_1 как самое маленькое решение.

39. Конечные поля. Примеры. Цикличность мультипликативной группы конечного поля.

ТОПОЛОГИЯ

40. Метрические пространства. Примеры. Открытые множества в метрических пространствах. Структура открытых множеств в $\mathbb{R}$. Топологические пространства. Замкнутые множества; замыкание множества. Непрерывные отображения топологических пространств.

40.1. Метрическое пространство.

Определение 1. Метрикой на множестве M называется отображение $\rho : M \times M \to [0; +\infty]$ такое, что

1) $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ невырожденность
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ симметричность
3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ неравенство треугольника

Определение 2. Метрическим пространством называется пара (M, ρ), где ρ метрика на M.

40.2. Примеры.

1) $(\mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|)$;
2) $(\mathbb{R}, \rho(x, y) = \min\{1, |x - y|\})$;
3) $(\mathbb{R}, \rho(x, y) = 1\ x = y\ |0\ x \neq y\ )$;
4) $(C[0, 1], \rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx)$.

40.3. Открытое множество.

Определение 3. Пусть задано (M, ρ) — метрическое пространство. Тогда в нём можно ввести понятие ϵ-окрестности точки $x \in M$:

$$U_\epsilon(x) = \{y \in M | \rho(x, y) < \epsilon\}.$$

Определение 4. Пусть задано (M, ρ) — метрическое пространство. Множество называется открытым, если для каждой точки $x \in M$, существует $\epsilon > 0$ такое, что $U_\epsilon(x) \subset M$.

40.4. Структура открытых множеств в $\mathbb{R}$.

Всякое открытое множество на числовой прямой представляет собой сумму конечного или счётного числа попарно непересекающихся интервалов $((-\infty, \infty), (-\infty, \alpha), (\beta, \infty)$ — тоже считаем).

Доказательство. Пусть $U \subset \mathbb{R}$ – непустое открытое множество. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на U:

$$a \sim b \Leftrightarrow [a,b] \in U.$$

Множество U распадается на классы эквивалентности.

Рассмотрим класс эквивалентности $V \subset U$. Он выпуклый по определению отношения эквивалентности. Возьмем любую точку $a \in V$. Поскольку она принадлежит открытому множеству U, у нее есть окрестность, принадлежащая U. Все точки этой окрестности эквивалентны a. Значит, вся окрестность принадлежит V . Следовательно, V открыто и V — интервал, так как любое выпуклое открытое множество на прямой является интервалом. (Напомним, что множество называется *выпуклым* если вместе с любыми двумя точками оно содержит отрезок, их соединяющий.)

Итак, U равно дизъюнктноиу объединению интервалов. Но число таких интервалов не более, чем счетно. Действительно, в каждом из них можно взять по одной рациональной точке. □

40.5. Топологическое пространство.

Определение 5. Топологией на множестве X называется τ – семейство его подмножеств $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ такое, что

1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;

2) $\forall n \in \mathbb{N}\ X_1 \in \tau, \dots X_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} X_k \in \tau$;

3) $\forall \alpha \in A$ – произвольное семейство множеств, $X_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \in \tau$.

Определение 6. Топологическим пространством называется пара (X, τ), где τ топология на X.

Если $A \in \tau$, то подмножество A называется открытым.

Примеры:

1) $X = \{a, b\}, \tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$;

2) $\mathbb{R}, \tau = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$;

3) Всякое метрическое пространство является топологическим пространством, базу топологии которого составляют открытые шары.

Теорема. Для подмножества F топологического пространства X TFAE:

1) F — содержит в себе все свои предельные точки;

2) $x \setminus F$ — открыто;

40.6. Замкнутое множество.

Множество F называется замкнутым в метрическом пространстве (X, ρ), если $\overline{F} = X \setminus F$ - открыто.

40.7. Замыкание.

Определение 7. Замыканием множества A называется наименьшее замкнутое множество, содержащее данное множество $\overline{A}$. То есть пусть
$F = \{S \subset X | S \text{ - замкнуто}, A \subset S\}$

$$\overline{A} = \bigcap_{f \in F} f$$

.

Свойства.

1) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Доказательство. 1) Пусть это не так. Тогда $x_n \subset A, x$-Предельная точка. 1 случай $\exists U_\varepsilon(x) U_\varepsilon \cap \overline{B} = \varnothing \Rightarrow \exists x_k \in x_n : x_k$не принадлежит$\overline{B}$но$x_k \in A \Rightarrow x_k \in B \Rightarrow in\overline{B}$ Противоречие. 2 случай. $\forall U_\varepsilon(x) U_\varepsilon \cap \overline{B} \neq \varnothing \Rightarrow x \subset \overline{B}$

2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Замыкание A содержит все предельные точки A и само A. Замыкание замыкания A это предельнве точки замыкания A и само замыкание A, но предельные точки замыкания A это предельные точки A => ЧТД

3) $A \subset (A \cup B) \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$
$B \subset (A \cup B) \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$
$\Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$
$(A \cup B) \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ЧТД

□

40.8. Непрерывные отображения топологических пространств.

$f : X \to Y$, где X и Y — топологические пространства, называется непрерывным если прообраз любого открытого множество открыт.

Критерии непрерывности: Пусть X, Y - топ.пространства и $f : X \longrightarrow Y$. Следующие утверждения эквивалентны:

1) f - непрерывно.

2) Для любого открытого $V \subset Y f^{-1}(V)$ открыто в X.

3) Для любого замкнутого $V \subset Y f^{-1}(V)$ замкнуто в X.

4) $\forall A \subset X : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Доказательство. (1) =>(2) Пусть $V \subset Y$ -открыто. $\forall x \in f^{-1}(V), V$ - окрестность $f(x) \Longrightarrow$ существует окрестность $U_x (x \in U_x) : f(U_x) \subset f^{-1}V \Longrightarrow U_x \subset f^{-1}(V) \Longrightarrow \cup U_x = f^{-1}(V) \Longrightarrow$ $f^{-1}(V)$ открыто (2)<=> (3) $X \diagup f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \diagup B) \forall B \subset Y$
(3) =>(4) $\forall A \subset X A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, то есть $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
(4) =>(1) Пусть $x \in X$ и f не является непрерывной в $x \Longrightarrow$ существует окрестность $V(f(x) \in V)$: для любой окрестности $U(x \in U), f(U)$ не принадлежит $V \Longrightarrow f(U) \cap (Y \diagup V) \neq \varnothing \Longrightarrow U \cap f^{-1}(Y \diagup V) \neq \varnothing$. Это верно для любой окрестности $U(x \in U) \Longrightarrow x \in \overline{f^{-1}(Y \diagup V)} \Longrightarrow f(x) \in f(\overline{f^{-1}(Y \diagup V)}) \subset \overline{f(f^{-1}(Y \diagup V))} \subset \overline{Y \diagup V} \Longrightarrow f(x)$ не лежит в V, противоречие. □

41. Компактные топологические пространства. Свойства компактных пространств и отображений между ними. Критерий компактности подмножества $\mathbb{R}^n$.

X – топол. пр-во, U – семейство подмножеств в X.
Определение 1. U – покрытие $X \iff \bigcup U = X, \bigcup U = \bigcup\{V : V \in U\}$

Покрытие U – открытое покрытие $\iff$ все множества из U – открыты.

Определение 2. X – компактно $\iff$ каждое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Теорема 41.1.

(1) $f : X \to Y$ непр, X – компакт $\Rightarrow f(X)$ – компакт

> *X – топ. пространство, $Z \subset X$*
> *$V \subset Z$ открыто в $Z \iff \exists$ откр. $U \subset X$*
> *т.ч. $V = U \cap Z$*

(2) X компакт, $Y \subset X$ замкнуто $\Rightarrow Y$ компакт.

(3) X хаусдорфово, $Y \subset X$ компакт $\Rightarrow Y$ замкнуто в X.

> *X хаусдорфово $\overset{\text{опр.}}{\iff} \forall x, y \in X$*
> *т.ч. $x \neq y$, $\quad \exists U \ni x, V \ni y : U \cap V = \varnothing$*

(4) X компакт, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ непрерывно $\Rightarrow f$ замкнуто (т.е. $\forall$ замкнутого $B \subset X f(B)$ замкнуто в Y)

(5) X компакт, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ – непрерывная биекция $\Rightarrow f$ – гомеоморфизм (т.е. f^{-1} непрерывно.)

Теорема 41.2. *$X \subset \mathbb{R}^n$ компактно $\iff X$ замкнуто и ограничено.*

42. Связность и линейная связность топологического пространства. Связность отрезка. Пример связного нелинейно-связного множества.

42.1. Связность и линейная связность.

Определение 1. Топологическое пространство называется *связным*, если его невозможно представить в виде объединения двух непустых открытых не пересекающихся множеств.

Другое. Топологическое пространство называется связным, если в нём существует только 2 одновременно открытых и замкнутых множества: оно само и пустое множество.

Определение 2. Топологическое пространство M называется *линейно-связным*, если для любых точек $a, b \in M$ существует непрерывное отображение $f : [0,1] \to M, f(0) = a, f(1) = b$.

Если M линейно связно, то оно связно.

Доказательство. Пусть M линейно-связно, но не связно. Значит $M = U \sqcup V$, где U и V открытые непустные множества. Пусть $a \in U$, $b \in V$, тогда воспользуемся тем, что образ открытого множества открыт: $f^{-1}(U) \subset [0,1]$ и $f^{-1}(V) \subset [0,1]$ — открыты, непрерывны, непусты, не пересекаются и их объединение это весь отрезок, что противоречит связности отрезка. □

42.2. Связность отрезка.

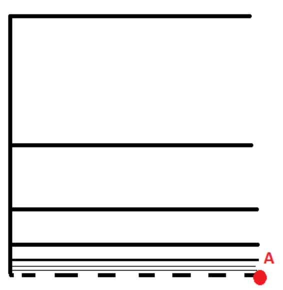
Предположим, что отрезок несвязен и $[0,1] = U \sqcup V$ — разбиение на открытые непустые подмножества. Пусть $1 \in V$. Пусть $a = \sup U$; покажем, что $a \in V$. Если $a = 1$, то всё ок. Иначе $a < 1$ и $a \in U$, так как U – открытое, существует такое $\epsilon > 0$, что $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset U \subset [0,1]$. Отсюда вытекает противоречие с тем, что a точная верхняя грань $a < a + \frac{\epsilon}{2} \in U$.

Получается, что $a \in V$. $a > 0$, так как точка не открытое множество. Снова рассмотрим окрестность $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, вся эта окрестность принадлежит множеству V, и интервал $(a - \epsilon, a)$ не содержит точек множества U, и снова a не может быть точной верхней гранью. □

42.3. Пример.

Рассмотрим множество X состоящее из
1) $[(0,0),(0,1)]$
2) $[(0,1),(1,1)]$
3) $[(0,\frac{1}{2}),(1,\frac{1}{2})]$
4) $[(0,\frac{1}{4}),(1,\frac{1}{4})]$
...
n+2) $[(0,\frac{1}{2^n}),(1,\frac{1}{2^n})]$
...
+) $A = (1,0)$

То есть такая гребенка, без отрезка $[(0,0),(1,0)]$, но рядом с этим отрезком много других, и ещё одна точка.



Доказательство. Конструкция без точки A (назовём её Y, т.е. $X = Y \cup A$) очевидно линейно-связна, а значит и связна. Пусть множество X несвязно, значит существуют такие открытые множества U и V, что $X = U \sqcup V$. Пусть $A \in U$, тогда кроме A в U лежит ещё какая-то окрестность и туда попадают точки из Y, а значит Y разбили на два непустых не пересекающихся открытых множества - противоречие.

Теперь докажем, что X не линейно-связен. Пусть не так и есть непрерывный путь $f(t) = (x(t), y(t))t \in [0,1]$ из A в $(1,1)$. $A = (x(1), y(0)), (1,1) = (x(1), y(1))$. Есть множество $T \subset [0,1], T = \{\tau | (x(\tau), y(\tau)) = A\}$ - множество всех точек, где путь находится в точке A. И $t_0 = \sup T$ - такая точка есть, так как $(x(1), y(1)) \neq A$. Рассмотрим некоторый отрезок $(t_0, t_0 + \delta)$, где значения $f(t)$ лежат недалеко от A, т.е. не доходит до вертикального отрезка. На промежутке $(t_0, t_0 + \delta)$ непрерывная функция $y(t)$ принимает только значения вида $1/2^n$. Это противоречит тому, что непрерывная функция принимает все промежуточные значения. $\square$

43. Полные метрические пространства. Примеры. Полнота пространства $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке. Существование неподвижной точки у сжимающего отображения полного метрического пространства в себя.

43.1. Метрическое пространство.

Определение 1. **Метрикой** на множестве M называется отображение $\rho : M \times M \to [0; +\infty]$ такое, что

1) $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ невырожденность

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ симметричность

3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ неравенство треугольника

Определение 2. Метрическим пространством называется пара (M, ρ), где ρ метрика на M.

Определение 3. Последовательность f_n называется **фундаментальной** (или удовлетворяет условию Коши), если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для любых $n, k \in \mathbb{N}, n > N, k > N$ $\rho(f_n, f_k) < \epsilon$.

Очевидно, если последовательность $\{f_n\}$ точек метрического пространства M имеет предел в этом пространстве, т.е. если

$$\exists a \in M : \lim_{n\to\infty} \rho(f_n, a) = 0,$$

то эта последовательность удовлетворяет условию Коши. Действительно, если выполнено условие выше, то

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N_\epsilon : \quad \forall n \geq N_\epsilon \ \ \rho(f_n, a) < \epsilon/2$$

и поэтому

$$\forall n, m \geq N_\epsilon \ \ \rho(f_n, f_m) \leq \rho(f_n, a) + \rho(a, f_m) < \epsilon.$$

В общем случае обратное утверждение является неверным.

Определение 4. Метрическое пространство (X, ρ) называется **полным**, если всякая фундаментальная последовательность в нём сходится.

43.2. Примеры.

Примеры полных пространств $\mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|, \mathbb{R}^n, \rho(x,y) = |x-y|$, замкнутое подмножество полного пространства, $M_1 \times M_2$ с метрикой $\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \rho_2^2(x_2,y_2)}$, где M_1 и M_2 метрические пространства с метриками ρ_1 и ρ_2 соответственно.

Примеры неполных пространств: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ со стандартной метрикой, в качестве $f_n = \frac{1}{n}$., $\mathbb{Q}^n$.

43.3. Полнота пространства $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке.

Рассмотрим пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с метрикой:

$$\rho(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Это пространство полное.

Доказательство. Действительно, если последовательность функций $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна относительно метрики ρ, то при любом фиксированном $x \in [a; b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной, и поэтому имеет предел (в силу полноты пространства $\mathbb{R}$). Обозначим этот предел $f(x)$. Очевидно $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ по метрике ρ.

Действительно, так как

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon :\quad \forall n, m \geq N_\epsilon\ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

для любого $x \in [a, b]$. Зафиксируем x и перейдём к пределу при $m \to \infty$, в пределе для любого $n \geq N_\epsilon$ получим неравенство:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \ x \in [a, b].$$

Следовательно, последовательность непрерывных на $[a; b]$ функций $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$. В другом билете доказано, что тогда функция $f(x)$ тоже непрерывна на $[a; b]$. Полнота пространства $C([a; b])$ доказана.

□

43.4. Существование неподвижной точки у сжимающего отображения полного метрического пространства в себя.

Определение 5. a - **неподвижная точка** отображения $f : M \to M$, если $f(a) = a$.

Определение 6. Отображение $f : M \to M$ называется **сжимающим**, если существует $0 \leq \alpha < 1$, что для любых $x, y \in M$

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y).$$

Теорема Банаха. У сжимающего отображения на полном метрическом пространстве существует единственная неподвижная точка:

$$x^* : f(x^*) = x^*.$$

Доказательство. Обозначения возьмем из определний выше.

Рассмотрим произвольный $x \in M$ и последовательность:

$$x_1 = f(x), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots.$$

Получившаяся последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, действительно:

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x), f(x_1)) \leq \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho(x, f(x))$$

$$\rho(x_2, x_3) \leq \alpha^2\rho(x, f(x))$$

$$\ldots$$

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho(x, f(x))$$

По неравенству треугольника:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \alpha^n(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{p-1})\rho(x, f(x))$$

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1 - \alpha}\rho(x, f(x))$$

Правая часть стремится к 0 при $n \to \infty$ и любом p. Значит последовательность фундаментальна и сходится к числу x_0.
Докажем, что $f(x_0) = x_0$.

По неравенству треугольника, $\rho(x_0,\ f(x_0)) \leqslant \rho(x_0,\ x_n) + \rho(x_n,\ f(x_0)) = \rho(x_0,\ x_n) + \rho(f(x_{n-1}),\ f(x_0)) \leqslant \rho(x_0,\ x_n) + \alpha\rho(x_{n-1},\ x_0)$. Так как $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, то для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n $\rho(x_0,\ x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_0,\ x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что $\rho(x_0,\ f(x_0)) = 0$, то есть $x_0 = f(x_0)$, что и требовалось доказать.

Если у оператора f нашлось более одной неподвижной точки, тогда найдём $\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$, так как $0 \leq \alpha < 1$, то $\rho(x, y) = 0$.

□

44. Фундаментальная группа топологического пространства. Ее вычисление для окружности S^1 и сферы S^2.

44.1. Гомотопия.

X, Y – топ. пространства, $f, g : X \to Y$ непрерывно. $I = [0, 1]$

Определение 1. Гомотопия между f, g – это непрерывная $F : X \times I \to Y$, т.ч. (**Обозн:** $F : f \simeq g$) $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$

Обознач: $\forall t \in I\ F_t : X \to Y, F_t(x) = F(x, t), F_0 = f, F_1 = g$

Определение 2. f, g гомотопны $(f \simeq g) \iff \quad \exists$ гомотопия $F : f \simeq g$

44.2. Гомотопия путей.

Пусть X – топ. пространство, $x_0, x_1 \in X$, $P(x_0, x_1) = \{$пути в X от x_0 до $x_1\}$. Пусть $u, v \in P(x_0, x_1)$

Определение 3. Гомотопия $F : u \simeq v$ называется гомотопией путей тогда и только тогда когда $\forall t \in I\ F_t \in P(x_0, x_1)$,
т.е. $F : I \times I \to X$ – непрерывно, т.ч. $F(s, 0) = u(s), F(s, 1) = v(s)\ \forall s \in I$
$F(0, t) = x_0, F(1, t) = x_1\ \forall t \in I$

Обознач: $F : u \underset{p}{\simeq} v$ (path homotopy)

Определение 4. u, v гомотопны как пути $\iff \quad \exists F : u \underset{p}{\simeq} v$

Предложение 1. (замена параметра)
$u \in P(x_0, x_1); \varphi : I \to I, \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1 \Rightarrow u \circ \varphi \underset{p}{\simeq} u$

Предложение 2. $\underset{p}{\simeq}$ – это отношение эквивалентности на $P(x_0, x_1)$

44.3. Фундаментальная группа.

Обознач: $\prod(x_0, x_1) = P(x_0, x_1)/\underset{p}{\simeq}$ $\pi_1(X, x_0) = \prod(x_0, x_0)$ – множество гомот. классов петель в точке x_0.

Хотим чтоб π_1 было группой.

Определение 5. $u \in P(x_0, x_1), v \in P(x_1, x_2)$. Произведение u, v – путь $uv \in P(x_0, x_2)$
$$(uv)(s) = \begin{cases} u(2s), s \leq \dfrac{1}{2} \\ v(2s-1), s \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Предложение 3. $u_1, u_2 \in P(x_0, x_1), v_1, v_2 \in P(x_1, x_2)$, $u_1 \underset{p}{\simeq} u_2, v_1 \underset{p}{\simeq} v_2 \Rightarrow u_1v_1 \underset{p}{\simeq} u_2v_2$

Следствие: Определена операция $\prod(x_0, x_1) \times \prod(x_1, x_2) \to \prod(x_0, x_2)$
$[u][v] = [uv]$, где $[u]$ – гомотопический класс пути u (операция в группе.)

Обознач: $x_0 \in X$, тогда $e_{x_0} : I \to X$
$e_{x_0}(s) = x_0 \ \forall s \in I$ (нейтральный элемент)

Обознач: $u \in P(x_0, x_1)$. Определим $u^{-1} \in P(x_1, x_0) : u^{-1}(s) = u(1-s)$ (Обратный элемент)

Теорема 44.1.

(1) $[e_{x_0}][u] = [u] \ \ \forall u \in P(x_0, x_1)$

Полвремени мы сидим в точке x_0, а потом с удвоенной скоростью идем в x_1, отображение будет само по себе другим, но очеидно гомотопным u

(2) $[u][e_{x_1}] = [u] \ \ \forall u \in P(x_0, x_1)$

(3) *Ассоциативность.* $([u][v])[w] = [u]([v][w])$, $\forall u \in P(x_0, x_1)$, $\forall v \in P(x_1, x_2)$, $\forall w \in P(x_2, x_3)$

(4) $[u][u^{-1}] = [e_{x_0}] \ \forall u \in P(x_0, x_1)$

$[u^{-1}][u] = [e_{x_1}]$

Следствие: Операция произведения гомото. классов превращает множество $\pi_1(X, x_0)$ в группу.

Определение 6. $\pi_1(X, x_0)$ – фундаментальная группа X в точке x_0

Предложение 5. $p \in P(x_0, x_1)$
$\pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), [u] \to [p][u][p^{-1}]$ – изоморфизм групп.

Предложение 6. $X \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое множество, $x_0 \in X \Rightarrow \pi_1(X, x_0) = \{e\}$

Определение 7. Топологическое пространство X односвязно $\iff X$ – линейно связно и $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$. Гомотопия между $u, v : tv(s) + (1-t)u(s)$

44.4. Фундаментальная группа S^n

Теорема 44.2. $\pi_1(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}$

Теорема 44.3. S^n *односвязно* $\forall n \geq 2$

44.4.1. Структура доказательства Теоремы 44.2.

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$p : \mathbb{R} \to S^1, p(t) = e^{2i\pi t}$

Наблюдение:
1) $\mathbb{R}$ –группа по сложению, S^1 – по умножению
2) p – непрер. сюръект. гомоморфизм групп.
3) $Kerp = \mathbb{Z}$

Лемма 1. $p|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ – гомеоморфизм $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ на $S^1 \backslash \{-1\}$

Обознач: $l : (p|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})})^{-1} : S^1 \backslash \{-1\} \to \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Определение 8. Непрерывное $g : Y \to \mathbb{R}$ –поднятие $f \iff p \circ g = f$

Лемма 2. Y – связное топ. пр-во.
$f : Y \to S^1$ – непрерыв; $g_1, g_2 : Y \to \mathbb{R}$ – поднятия f
Предположение. $\exists y_0 \in Y$ т.ч. $g_1(y_0) = g_2(y_0) \Rightarrow g_1 = g_2$
Рассмотрим $g_1 - g_2$. Скомпаниуем с p, а p гомоморфизм групп, поэтому она разность переводит в частное, тогда $p(g_1 - g_2) = \dfrac{pg_1}{pg_2}$ и это должно быть тождественно равно единице (чтоб доказать то что мы хотим), получается $g_1 - g_2$ отображает Y в $Kerp$. А непрерывное отображение из связного пространства в целые числа может быть лишь постоянным, поэтому если оно хоть где то равно нулю, то и везде нуль. (Единственность поднятий.)

Определение 9. $Y \subset \mathbb{R}^n$ – звездное относительно точки $y_0 \in Y$, если $\forall y \in Y$ отрезок $[y_0, y] \subset Y$
Лемма 3. $Y \subset \mathbb{R}^n$ компактное и звездное относительно точки $y_0 \in Y$; $f : Y \to S^1$ непрерыв.

Тогда $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ т.ч. $p(t_0) = f(y_0)$ $\exists!$ непрерывн $g : Y \to \mathbb{R}$, поднимающее f и т.ч. $g(y_0) = t_0$

Идея док-ва: чекайте время 2:36:30

Определение 10. Пусть $u : I \to S^1$ – петля в точке 1. $u(0) = u(1) = 1$
$\tilde{u} : I \to \mathbb{R}$ – поднятие u, т.ч. $\tilde{u}(0) = 0$
$p(\tilde{u}(1)) = 1 \Rightarrow \tilde{u}(1) \in \mathbb{Z}$

Вращение u – это $w(u) = \tilde{u}(1) \in \mathbb{Z}$

44.4.2. Структура доказательства Теоремы 44.3.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

45. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения и его решения. Задача Коши и теорема о существовании и единственности ее решения (без доказательства). Приближение решения задачи Коши итерациями Пикара

45.1. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения и его решения.

Определение 1. Обыкновенное диф. уравнение это $F(x, x', x'', \ldots, x^{(n)}, t) = 0$ $(*)$, (число n – порядок уравнения) где $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{d(n+1)+1} \to \mathbb{R}^d$

Решение: $x : I = (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^d$, такое что при подставновке в наше уравнение получается $F(x(t), x(t)', x(t)'', \ldots, x(t)^{(n)}, t) = 0 \ \ \forall t \in I$

Такую уравнение можно свести к системе первого порядка:

$$\begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ \ldots \\ x_{n-2}' = x_{n-1} \\ F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}', t) = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Лемма 1:

1) x – решение $(*) \Rightarrow (x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})$ – решение $(**)$

2) $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ – решение $(**) \Rightarrow x_j = x_0^{(j)}, x = x_0$ удовлетворяет $(*)$

Доказательство ручками подстановкой (Очевидно)

Далее мы будем говорить об уравнения разрешенных относительно старшей производной: $x^{(n)} = \varphi(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, t), \varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^{dn+1} \to \mathbb{R}^d$

Решение: $x : I = (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^d$, такое что при подставновке в наше уравнение получается $x^{(n)} = \varphi(x(t), x(t)', \ldots, x(t)^{(n-1)}, t) \ \ \forall t \in I$ и дальнейшие изменения выше (про систему и прочее)

45.2. Задача Коши и теорема о существовании и единственности ее решения (без доказательства)

Задача Коши:

$$\begin{cases} x^{(n)} = \varphi(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, t) \\ x(t_0) = a_0 \\ x'(t_0) = a_1 \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

Если уравнение первого порядка, то оно выглядит следующим образом:
$\begin{cases} x' = f(x,t) x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Теорема 45.1. *Пусть*

(0) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$

(1) $(x_0, t_0) \in \Omega \Rightarrow k = \overline{B}_\epsilon(x_0) \times \overline{B}_\delta(t_0) \in \Omega$

(2) $f \in C(\Omega)$ *(непрерывна в* Ω*)* $\Rightarrow \quad \exists \sup\limits_K |f| \leq M$

(3) f *липшецева по* x *в* K*:* $\forall x, x' \in \overline{B}_\epsilon(x_0), \forall t \in \overline{B}_\delta(t_0) \, \Bigg| \, f(x,t) - f(x',t) \Bigg| \leq L \cdot |x - x'|$

, *тогда*

1) $\exists \tau = \tau(\epsilon, \delta, M, L) : \exists$ *решение З.К.* $x : I = [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \to \mathbb{R}^n$

2) Если $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^n$ *– решение этой З.К., то* $x|_{I \cap J} = \tilde{x}|_{I \cap J}$

45.3. Приближение решения задачи Коши итерациями Пикара

Рассмотрим $x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0 = \displaystyle\int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$
$x(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(x(s), s)ds$

Лемма 2: Для непрерывно дифф. $x(t)$ Задача Коши эквивалентна этому интегральному уравнению.

Определение 2. Итерации Пикара это:

$$x_0(t) \equiv x_0$$
$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x_0(s), s)ds$$
$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x_1(s), s)ds$$
$$\dots$$

Причем $x_j : J \to \mathbb{R}^n$
Проделывая эту итерацию мы строим эти приближения. Если правильно подобрать τ, то эта последовательность будет просто сжимающим отображением. $\lim x_i = x$, x_i равномерно сходятся и для их предела будет верна наше интегральное уравнение.

46. Методы решения дифференциальных уравнений: решение уравнений с разделяющимися переменными, метод вариации постоянных для линейных неоднородных уравнения первого порядка, однородные уравнения.

46.1. Решение уравнений с разделяющимися переменными

Определение 1. Уравнение с разделяющимися переменными это $\frac{\partial y}{\partial x} = f(y)g(x)$.

Решене: $\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx$, тогда если F – первообразная $\frac{1}{f}$, а G – первообразная g, то $F(y) = G(x) + C$

Теорема 46.1. *Пусть $f \in C^1, g \in C$ (гладкая и непрерывная соответственно), тогда решение уравнения это:*

1) Если $f(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$ – решение

2) $\{(x, y) : F(y) = G(x) + C\}$

Доказательство.

1) Очевидно

2) Пусть теперь $y \neq 0$, тогда $\frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$. Проинтегрируем: $\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(y(\zeta))} y^{'}(\zeta) d\zeta = \int_{x_0}^{x} g(\zeta) d\zeta = G(x) - G(x_0)$, $\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(y(\zeta))} y^{'}(\zeta) d\zeta = \int_{y_0}^{y} \frac{d\nu}{f(\nu)} = F(y) - F(y_0)$

Тоже самое и в обратную сторону: Дифференцируем $F(y) = G(x) + C$: $y^{'}\frac{1}{f(y)} = g(x)$. □

Так как f – гладкая, а g – непрерывная, то тут работает теорема о существовании и единственности, а значит полученные нами решения выше – единственны.

Почему важны условия для f, g?
Пример:
$y = x^3 \Rightarrow y^{'} = 3x^2 = 3y^{\frac{2}{3}}$.
Посмотрим на это уравнение: $\boxed{y^{'} = 3y^{\frac{2}{3}}}$. Его решения это 1)$y \equiv 0$, $F(y) = \int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = y^{\frac{1}{3}} + C, G(x) = x + C \Rightarrow$ решения это $y^{\frac{1}{3}} = x + C$

Запишем это множество решений как $y = (x - a)^3$. Но мы можем собрать новое решение: Пусть $y = \begin{cases} (x-a)^3, if x < a \\ (x-b)^3, if x > b \\ 0, if x \in [a, b] \end{cases}$, получили гладкое решение. Все дело в сходимости интеграла $\int_{y_0}^{y} \frac{d\nu}{f(\nu)}$: если он сходится, это значит что будет конечное прирощение для $G(x)$, а значит мы можем дойти по x до точки после которой может быть дальше по решению первого типа.

$(y = C)$. Поэтому если $y \in C^1$, то такой интеграл расходится и никаких проблем не возникает.

Можно "перевернуть уравнение если правая часть стремится к бесконечности: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)g(x)}$.

46.2. метод вариации постоянных для линейных неоднородных уравнения первого порядка

Определение 2. Линейное неоднородное уравнение первого порядка это: $y' = a(x)y + b(x)$, если $b(x)$ отсутствует, то это линейное однородное уравнение первого порядка.

Чтоб решить неоднородное уравнение надо сначало решить соответствующее однородное, а это уже намного проще:

$z' = a(x)z$. Применяем метод разделения переменных и получаем $\int \frac{dz}{z} = \int a(x)dx \Rightarrow \ln|z| = A(x) + \tilde{C}$, где $A(x)$ – первообразная $a(x)$, тогда $z = Ce^{A(x)}$. Мы решили все уравнения.

Теперь чтобы решить неоднородное уравнение, мы должны посмотреть на C как на функцию от x:

$y = C(x)e^{A(x)}$, $C'e^A + CA'e^A = aCe^A + b, A' = a \Rightarrow C'e^A = b \Rightarrow C'(x) = b(x)e^{-A(x)} \Rightarrow C(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx + C_0$

Подставим $C(x)$ в наше уравнение и получим: $y = \left(\int b(x)e^{-A(x)}dx + D\right)e^{A(x)} = y_0(x) + De^{A(x)}, y_0(x) = \left(\int b(x)e^{-A(x)}dx\right)e^{A(x)}$. Можно сказать что y_0 – это частное решение неоднородного, а вторая часть это общее решение однородного уравнения.

46.3. Однородные уравнения

$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$, с условием что $f(\lambda x, \lambda t) = f(x,t)\ \forall\lambda \neq 0$ (функция f – однородная функция нулевого порядка.) Тогда мы можем написать что $\frac{dx}{dt} = f(x,t) = F\left(\frac{x}{t}\right)$.

Пусть $u = \frac{x}{t}, x = ut \Rightarrow u't + u = F(u) \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{F(u) - u}{t}$, а это уравнение с разделяющимися переменными: $\int_{u_0}^{u} \frac{dv}{F(v) - v} = \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau} = \ln|t| - \ln|t_0|, \int_{u_0}^{u} \frac{dv}{F(v) - v} = \Phi(u) - \Phi(u_0)$, то мы получаем что $\Phi\left(\frac{x}{t}\right) = C + ln|t|$

47. Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения для случая квазимногочлена в правой части. Матричная экспонента: метод нахождения и связь с решением системы линейных ДУ первого порядка с постоянными коэффициентами.

47.1. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородного уравнения.

$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0, a_i \in \mathbb{C}$

Лемма: Множество непродолжаемых решений таких уравнений – n-мерное векторное пространство.

Доказательство. Сумма и линейные комбинации решений это тоже решение (Очевидно). Отсюда следует что это векторное пространство. Почему оно n-мерное?

Рассмотрим З.К.: $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$. Для каждого набора $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ существует свое решение (а значит инъекция), а по теореме о сущ. и един. оно только одно, а значит можно построить изоморфизм между $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \to$ решение $\in$ множестве непродолжаемых решений.

□

Определение 1. ФСР (фунд. сис. реш.) – базис в пространстве решений.

Для линейного уравнения n-го порядка можно написать соответствующий характеристический многочлен: $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = \prod(\lambda - \lambda_j)^{d_j}$, где λ_j – корни хар. мног., а d_j – их кратности.

Теорема 47.1. *Для нашего уравнения система* $\left\{ t^s e^{\lambda_j t}, s = 0, 1, \dots, d_j - 1 \right\}$ *– ФСР.*

Доказательство. 1) $t^s e^{\lambda_j t}$ – решение: Мы можем обозвать наше уравнение линейным дифференциальным оператором примененный к $x(t)$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L = X(D) = \prod(D - \lambda_j)^{d_j}, D = \dfrac{d}{dt}$, где X – это наш хар. многолчен. То есть $(D - \lambda_j)$ переводит x в $x' - \lambda_j x$.

Тогда $L(t^s e^{\lambda_k t}) = \left(\prod_{j \neq k} (D - \lambda_j)^{d_j} \right) (D - \lambda_k)^{d_k} (t^s e^{\lambda_k t})$

Лемма:

$(D-\mu)(Q(t)e^{\lambda t})$, где $Q(t)e^{\lambda t}$ – квазимноголчен. Перемножая получаем следующее: $Q'e^{\lambda t} + Q\lambda e^{\lambda t} - \mu Q e^{\lambda t} = e^{\lambda t}((\lambda-\mu)Q + Q') = e^{\lambda t}R$, где R – снова квазимногочлен. Тогда если $\lambda \neq \mu$, то $\deg R = \deg Q$, а если $\lambda = \mu$, то $\deg R = \deg Q - 1$

Применяем знания из Леммы к $(D-\lambda_k)^{d_k}(t^s e^{\lambda_k t})$ и знаем, что $s < d_k$ (по определению), а значит степень квазимногочлена станет "отрицательной многолчен станет нулевым, а значит $L(t^s e^{\lambda_k t}) = 0$, а значит решение.

2) Докажем что эти функции линейно независимы:

От противного: Пусть $\sum\limits_i P_i(t)e^{\lambda_i t} = 0, \deg P_i \leq d_i - 1$

Посмотрим как будет действовать оператор L на эту сумму: $\sum\limits_i P_i(t)e^{\lambda_i t} = \sum\limits_{i\neq k} P_i(t)e^{\lambda_i t} + \sum\limits_{i=k} P_i(t)e^{\lambda_i t} \Rightarrow L\left(\sum\limits_i P_i(t)e^{\lambda_i t}\right) = \left(\prod\limits_{j\neq k}(D-\lambda_j)^{d_j}\right)(D-\lambda_k)^{d_k}\left(\sum\limits_{i\neq k} P_i(t)e^{\lambda_i t} + \sum\limits_{i=k} P_i(t)e^{\lambda_i t}\right)$, заметим, что тогда первая сумма зануляется по Лемме (т.к. из произведения можно выделить скобку, в которой $j \neq k \neq i$ и умножить ее на первую сумму.), а значит у нас остается лишь k слагаемое, и по Лемме получаем, что степень квазимногочлена не понижается, а значит из того что сумма 0 была изначально, должно следовать что квазимногочлен должен быть 0, противоречие.

□

47.2. Решение неоднородного уравнения для случая квазимногочлена в правой части.

$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = Q(t)e^{\mu t}$ – неоднородное линейное уравнение.

Решим сначала однородное уравнение. (Это ФСР)

Дальше ищем частное решение в виде $x = R(t)e^{\mu t}$

Теорема 47.2. *Пусть* $d_\mu = \begin{cases} 0, \ \mu \neq \lambda_j \ \ \forall j \\ d_j, \mu = \lambda_j \end{cases}$ *, тогда неоднородное уравнение имеет решение* $x = R(t)e^{\mu t}, \ \deg R \leq \deg Q + d_\mu$

Доказательство. $R(t) = \alpha_{k+d}t^{k+d} + \dots + a_0$, где $k = \deg Q$.

$L(R(t)e^{\mu t}) = \prod\limits_j (D-\lambda_j)^{d_j}(R(t)e^{\mu t})$, здесь каждая скобка произведения, где $\lambda_l \neq \mu$, не влияет на степень $R(t)$, а где равны – понижает. Тогда мы получим $= (\beta_k t^k + \dots + \beta_0)e^{\mu t}$ □

ТФКП

48. Дифференцирование функций одного комплексного переменного. Голоморфные функции, условия Коши–Римана, Примеры голоморфных функций. Голоморфность элементарных функций.

48.1. Дифференцирование функций одного комплексного переменного.

Определение 1. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ – открытое подмножество. Функция $f : U \to \mathbb{C}$ называется **комплексно дифференцируемой** в точке $a \in U$, если существует предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{1}$$

Если предел (1) существует, он называется производной функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

Определение 2. Альтернатива. Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определенная в окрестности точки z_0, называется $\mathbb{C}$ - **дифференцируемой в точке** z_0, если найдется комплексное число a такое, что в окрестности точки z_0 имеет место представление

$$\Delta f = f(z) - f(z_0) = a\cdot\Delta z + o(\Delta z),$$

или иначе

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = a + o(1), \text{ при } \Delta z \to 0,$$

то есть существует предел

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0).$$

Число $f'(z_0)$ называется **комплексной производной** функции f в точке z_0.

48.2. Условия Коши–Римана.

Пусть $U \subset \mathbb{C}$ – открытое множество. Функция $f : U \to \mathbb{C}$, пусть $f : x+iy \mapsto u(x,y)+iv(x,y)$. Если f комплексно дифференцируемым в некоторой точке, то в этой точке имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Если отображение f (или, равносильно, функции u и v) принадлежит классу C^1, то f голоморфно на U тогда и только тогда, когда всюду на U выполняются соотношения (2).

Доказательство. Функция f комплексно дифференцируема в точке a с производной, равной c, тогда и только тогда, когда

$$f(a+h) - f(a) = c\cdot h + o(h),$$

Стало быть, комплексная дифференцируемость равносильна тому, что f вещественно дифференцируема и ее производная как линейное отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ имеет вид $z \mapsto cz$ для некоторого комплексного числа c. Поскольку матрица линейного оператора «умножение на комплексное число $p+qi$» (в базисе из 1 и i) имеет вид $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$, а якобиева матрица отображения (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix}$$

Отсюда всё получается. □

48.3. Голоморфные функции.

Определение 3. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ – открытое множество. Функция $f : U \to \mathbb{C}$ называется голоморфной на U, если она комплексно дифференцируема в каждой точке $a \in U$.

48.4. Примеры голоморфных функций.

1) z^n : $(z^n)' = nz^{n-1}$ — можно доказать по определению. А можно через условие Коши-Римана.

2) $\overline{z}$ и $|z|$, функции, имеющие полюса, не являются голоморфными в $\mathbb{C}$.

48.5. Голоморфность элементарных функций.

Теорема. Пусть функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определена в окрестности точки z_0, тогда $f(z)$ голоморфна в окрестности z_0 тогда и только тогда когда $f(z)$ аналитична, то есть может быть представлена в виде сходящегося в некоторой окрестности каждой точки ряда Тейлора. Таким образом, для комплексных функций комплексной переменной множества голоморфных и аналитических функций совпадают.

Функция e^z – голоморфна на $\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^a \cdot e^h - e^a}{h} = e^a \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Теперь заметим, что для любого $h \neq 0$:

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \ldots + \frac{h^n}{(n+1)!} + \ldots$$

Так как ряд в правой части сходится при любом h, его радиус сходимости бесконечен; значит, он сходится к функции, непрерывной на всем $\mathbb{C}$. В частности, предел этой функции при $h \to 0$ равен ее значению в нуле, то есть единице. Это нам и требовалось. □

Определение 4.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

Эти две функции голоморфны, так как голоморфна экспонента.

Определить $\ln x$ сложнее, так как эта функция получается неоднозначной на $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, поэтому определим логарифм на множестве V_α, получаемом удалением из комплексной плоскости луча, выходящего из нуля под углом α к действительной оси, можно для каждого целого n определить голоморфную функцию ln по формуле

$$\ln(re^{it}) = \ln r + it, \quad \alpha + 2\pi n < t < 2\pi(n+1).$$

Имеем $e^{\ln z} = z$ и $(\ln z)' = 1/z$.

Аналогичная история для корня: Пусть $n > 1$ – натуральное число, и пусть через V_α, где $\alpha \in R$, обозначено то же открытое множество, что для логарифма. Тогда для каждого целого $k \in [0; n-1]$ можно определить на V_α голоморфную функцию $\sqrt[n]{z}$ по формуле

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi.$$

Имеем $(\sqrt[n]{z})^n = z$ и $(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}}$.

49. Теорема Коши об интеграле голоморфной функции по замкнутому контуру. Интегральная формула Коши.

49.1. Теорема Коши об интеграле голоморфной функции по замкнутому контуру.

Эта теорема утверждает, что значение интеграла от голоморфной функции по пути с фиксированными концами зависит только от гомотопического класса пути.

Положим $I = [0; 1]$.

Определение 1. Два пути $\gamma_0 : I \to D$ и $\gamma_1 : I \to D$ с общими концами $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$ называются **гомотопными** в области D, если существует непрерывное отображение $\gamma(s,t) : I \times I \to D$ такое, что

$$\gamma(0,t) = \gamma_0(t), \quad \gamma(1,t) = \gamma_1(t),$$

$$\gamma(s,0) = a, \quad \gamma(s,1) = b$$

Гомотопность двух путей $\gamma_0 \sim \gamma_1$ в области D означает возможность непрерывно продеформировать их друг в друга в области D. Гомотопность является отношением эквивалентности, так что все пути можно разбить на гомотопические классы. В односвязной области любые два пути с общими концами гомотопны друг другу.

Теорема Коши. Если f – голоморфная функция в области D, а γ_0, γ_1 – два пути, гомотопные друг другу в D, то

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_0} f dz$$

Доказательство. Пусть семейство путей $\gamma_s(t) = \gamma(s,t) : I \to D$ осуществляет гомотопию γ_0 в γ_1. Положим

$$J(s) - \int_{\gamma_s} f dz$$

Нужно доказать, что $J(0) = J(1)$. Для этого достаточно показать, что функция $J(s)$ локально постоянна на I, т.е. каждая точка $s_0 \in I$ обладает окрестностью $v_{s_0} \subset I$ такой, что $J(s) = J(s_0)$ для всех $s \in v_{s_0}$.

Пусть Φ – произвольно выбранная первообразная функции f вдоль пути γ_{s_0}. Рассмотрим разбиение отрезка I точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ на отрезки $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, для которых найдутся:

а) Круги U_j такие, что $\gamma_{s_0}(I_j) \subset U_j$

б) Первообразные F_j функции f в U_j такие, что $\Phi(t) = F_j(\gamma_{s_0}(t))$ на I_j и $F_j = F_{j-1}$ на $U_j \cap U_{j-1}$.

В силу равномерной непрерывности функции γ на $I \times I$ найдется окрестность v_{s_0} точки s_0 такая, что $\gamma(v_{s_0} \times I_j) \subset U_j$ при всех j. Рассмотрим функцию $\Phi_s : I \to \mathbb{C}$ переменной t, зависящую от $s \in v_{s_0}$ как от параметра:

$$\Phi_s(t) = F_j(\gamma_s(t)) \text{ на } I_j$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$J(s) = \int_{\gamma_s} f dz = \Phi_s(1) - \Phi_s(0)$$

Эта функция не зависит от $s \in v_{s_0}$. Действительно, для гомотопных путей с общими концами ($\gamma_s(0) = a, \gamma_s(1) = b$) числа $\Phi_s(0) = F_1(\gamma_s(0)) = F_1(a)$, $\Phi_s(1) - F_n(\gamma_s(1)) = F_n(b)$ не зависят от s. Значит, их разность тоже не зависит от s.

Если γ_0 и γ_1 гомотопны как замкнутые пути ($\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$), функции F_1 и F_n как две первообразные функции f в окрестности $U_1 \cap U_n$ точки $z_s = \gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ отличаются на не зависящую от s константу C, т.е.

$$J(s) = F_n(\gamma_s(1)) - F_1(\gamma_s(0)) = F_n(z_s) - F_1(z_s) = C$$

не зависит от s □

Следствие. Если функция f голоморфна в области D, и путь $\gamma : I \to D$ гомотопен нулю в D, то

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Следствие очевидно, поскольку интеграл по постоянному пути $\gamma(t) = z_0$ равен 0.

Следствие. Если функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема в односвязной области D, то интеграл от нее не зависит от пути интегрирования. Именно, если $\gamma \subset D$ и $\gamma_1 \subset D$ – кривые, имеющие одни и те же концы, то

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Вытекает из того, что в односвязной области любые два пути гомотопны.

Следствие. Если функция f дифференцируема в односвязной области D, то она имеет в этой области первообразную $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$. Любая первообращная выражается формулой $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + C$.

Имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0)$$

и правило интегрирования по частям.

49.2. Интегральная формула Коши.

Интегральная формула Коши восстанавливает функцию, голоморфную в области, по ее значению на границе этой области.

Теорема. Пусть D – область, границей которой служит простая кривая, и функция f голоморфна в области $G \supset \overline{D}$. Тогда для всех $z \in D$ справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Доказательство. Рассмотрим диск U_r с центром в точке z. При достаточно малых $r > 0$ $\overline{U}_r \subset D$. Применим теорему Коши к области $D \diagdown \overline{U}_r$ и функции $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Получим:

$$\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Интеграл в правой части не зависит от r. Покажем, что он равен $2\pi i f(z)$. Имеем

$$\oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) = \oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

где использовано равенство $\oint_{\partial U_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$. Из непрерывности функции f в точке z и оценки интеграла следует, что правая часть сколь угодно мала при $r \to 0$:

$$\left|\oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta = z} d\zeta\right| \leq max_{\zeta \in U_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{r} 2\pi r \leq 2\pi max_{\zeta \in U_r} |f(\zeta) - f(z)|$$

Но поскольку она не зависит от r, она должа быть равна 0. $\square$

Если $z \notin \overline{D}$, то $\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$ по теореме Коши.

50. Область сходимости степенного ряда с комплексными коэффициентами. Разложение функции, голоморфной в круге, в ряд Тейлора. Интегральная формула для коэффициентов ряда Тейлора.

50.1. Функциональные ряды

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x), u_n$ определены на $E \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Определение 1. Ряд называется равномерно сходящимся на E если $\forall z \in E \;\; \forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \;\; \forall z \in E$ выполнено $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)\right| < \epsilon$. Обычно используется для оценки сходимости признак Вейштрасса.

50.2. Теорема Абеля

Теорема 50.1. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *сходится в точке* z_0*, то он абсолютно точно сходится в* $K_0 = \{|z - a| < |z_0 - a|\}$*, а в круге* $K_1 = \{|z - a| \leq p\}$*, где* $p < |z_0 - a|$ *– сходится равномерно.*

Доказательство. Сдвигом координат делаем $a = 0$. В силу сходимости ряда $\sum c_n z^n \Rightarrow |c_n z_0^n| < M \; \forall n$. Пусть $z \in K_0$, тогда $|c_n z^n| = |c_n z^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n$, где $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$

Теперь пусть $z \in K_1$, тогда $|c_n z^n| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M q_1^n, q_1 = \frac{p}{|z_0|}$. Так как q_1 не зависит от z, то по признаку Вейштрасса ряд сходится равномерно в K_1. $\square$

50.3. Ряд Тейлора

Пусть f – голоморфная функция в области D и $a \in D$ – произвольная точка, тогда $\forall V_R = \{|z - a| < R\} \subset D \; f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ и функция будет сходится в этой области.

Доказательство. Пусть $z \in V_R$; выберем $r : |r-a| < r < R; \gamma_r$ – окружность радиуса r с центром a. Из интегральной формулой Коши имеем равенство $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_r} \dfrac{f(\zeta))}{\zeta - z}; \dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{(\zeta-a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}; \forall\zeta \in \gamma_r \left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$. Значит сходится равномерно в нашем круге.

Умножим обе части на $\dfrac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ и так как сходится равномерно, а значит почленно интегрруем по $\gamma_r; f(z)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n; c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\dfrac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$, интеграл по γ_r не зависит от $r : 0 < r < R$, это ряд Тейлора функции f в точке a.

□

50.4. Следствия:

Неравенство Коши

f – голом. в замкнутом круге $\overline{U} = \{|z-a| \le r\}; \gamma_r = \partial U \quad |f| \le M$, тогда $|c_n| \le \dfrac{M}{r^n}, n = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема Лиувиля $f \in \mathbb{C}$ – голом и ограничена, то $f = const$.

В любом круге $\overline{V} = \{|z| \le r\}$ функция представляется рядом Тейлора. Пусть $|f| \le M$, тогда по неравенству Коши $c_n \le \dfrac{M}{r^n} \quad \forall n, \forall r$, а значит $C_0, n = 0$

50.5. Обратное Тейлору*

Теорема 50.2. *Сумма ряда* $f(z) = \sum c_n(z-a)^n$ *– голоморфная функция в крге сходимости, и* $f'(z)$ *– функция полученная почленым дифференцированием ряда.*

Доказательство. Пусть $R > 0; \varphi(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$. Его радиус сходимости тоже R. На компактных подмножествах ряд сходится равномерно. А значит φ –непрерывна в этом круге. Тогда $\displaystyle\oint_{\partial}\varphi dz = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \oint_{\partial}(z-a)^{n-1}dz = 0$??????? □

51. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Единственность лорановского разложения. Классификация изолированных особых точек голоморфных функций.

51.1. Ряды Лорана

Теорема 51.1. *$\forall f(z)$ голоморф. в кольце $V = \{r < |z-a| < R\}$ можно представить как* $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n; c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=p} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}; r < p < R$

Доказательство. $z \in V$. Кольцо $V' = \{\zeta : r' < |\zeta - a| < R'\}$. $z \in V' \subset V$, тогда $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \Gamma' = \{|\zeta - a| = R'\}, \gamma = \{|\zeta - a| = r'\}$

$\Gamma' : \frac{|z-a|}{|\zeta-a|} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ и ряд сходится равномерно. Берем $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и инт по Γ' : $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n; c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$, а на $\gamma' : \frac{|\zeta-a|}{|z-a|} < 1; -\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\zeta-a}{z-a}\right)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$. Помножим на $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и интегр. по γ', тогда поулчим $-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n; c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}^{n+1}$

В ряде Лорана есть 2 части: с положительной частью – регулярной и с отрицательной – главной. $R^{-1} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n}, n > 0; r^{-1} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n}, n < 0$

□

51.2. Изолированные особые точки

Определение 1. Устранимая особая точка a функции f, если $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) = A$

Определение 2. Изолированная особая точка называется полюсом, если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

Определение 3. Называется существенно особой, если f не имеет предела при $z \to a$
Примеры: (1) $\frac{\sin z}{z}$, (2) $\frac{1}{z}$, (3) $e^{\frac{1}{z}}$

52. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычеты и коэффициенты ряда Лорана.

52.1. Вычеты.

Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < \varepsilon\}$ точки $a \in \mathbb{C}$, так что a является ее изолированной особенностью.

Опр. *Вычетом* функции f в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ называется число

$$res_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta)d\zeta, \text{ где } 0 < r < \varepsilon$$

По теореме Коши этот интеграл не зависит от выбора r

52.2. Теорема Коши о вычетах.

Теорема. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область с простой границей и G – некоторая область в $\mathbb{C}$, содержащая замыкание $\overline{D}$ области D. Предположим, что функция f голоморфна всюду в области G, за исключением конечного числа особенных точек $a_1, \dots, a_n \in D$. Тогда

$$\int_{\partial D} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} res_{a_i} f.$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы круги

$$B_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_j| < \varepsilon\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

попарно не пересекались, а их замыкания содержались в D (см. рис. 5). Тогда по теореме Коши для многосвязной области

$$D_\varepsilon := D \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{B}_j$$

будем иметь

$$0 = \int_{\partial D_\varepsilon} f(\zeta)d\zeta = \int_{\partial D} f(\zeta)d\zeta - \sum_{j=1}^{n}\int_{\partial B_j} f(\zeta)d\zeta =$$

$$= \int_{\partial D} f(\zeta)d\zeta - 2\pi i \sum_{j=1}^{n} res_{a_i} f$$

что и требовалось доказать.

□

52.3. Вычеты и коэффициенты ряда Лорана.

Предложение. Если функция

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

голоморфна в проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < \varepsilon\}$ точки $a \in \mathbb{C}$, то

$$res_a f = c_{-1}$$

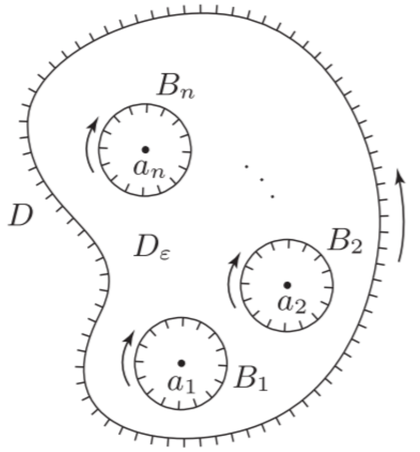


Рис. 5: док-во теоремы Коши

Доказательство. (Записываем ряд Лорана и почленно интегрируем по замкнутому контуру)

$$res_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{|z-a|=r}(z-a)^n dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i c_{-1} = c_{-1},$$

Мы воспользовались определением вычета, равномерной сходимостью ряда Лорана для f на окружности $|z-a| = r$, $0 < r < \varepsilon$ и фактом, что интеграл $\int_{|z-a|=r}(z-a)^n dz$ равен нулю при $n \neq -1$ и $2\pi i$ при $n = -1$

□

Следствие. Вычет в устранимой особой точке $a \in \mathbb{C}$ равен нулю.

Заметим, однако, что из равенства нулю вычета f в некоторой особой точке вовсе не следует, что эта точка является устранимой особенностью для f. Действительно, обращение в нуль лорановского коэффициента $c_{-1} = 0$ еще не означает, что обращаются в нуль коэффициенты $c_{-2}, c_{-3}, \ldots$. Например, вычет в нуле функции z^{-2} равен нулю, но сама функция имеет полюс 2-го порядка в этой точке

Формулы для вычисления вычетов.

Случай 1. вычет в простом полюсе. Пусть a есть простой полюс (т.е. полюс 1-го порядка) функции f. Лорановское разложение f в точке a имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

откуда

$$c_{-1} = res_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

Случай 2. Полюс n-го порядка. Пусть a есть полюс n-го порядка функции f. Тогда ее лорановское разложение в точке a имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^m.$$

Чтобы извлечь отсюда c_{-1}, надо умножить $f(z)$ на $(z-a)^n$ и взять производную порядка $n-1$ от получившейся функции при $z=a$:

$$res_a f = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$$

Теория Вероятности

53. Вероятностное пространство. Условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса. Независимость событий. Случайные величины. Функция распределения, плотность. Дискретные и непрерывные случайные величины. Математическое ожидание. Дисперсия

53.1. Вероятностное пространство.

Определение 1. Вероятностное пространство – это тройка $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, где Ω – произвольное непустое множество, оно называется пространством элементарных событий.
Σ – сигма-алгебра подмножеств Ω, элементы которой называются случайными событиями.
$\mathbb{P}$ – вероятностная мера на Σ, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Сигма-алгебра — это семейство A подмножеств множества X, такое что:

1) $X \in A$, $\emptyset \in A$;
2) $(a \in A) \Rightarrow (X \setminus a \in X)$;
3) $(a \in A, b \in A) \Rightarrow (a \cap b \in A, a \cup b \in A)$;
4) $(a_n \in A, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\bigcap_n a_n \in A, \bigcup_n a_n \in A)$.

Естественно, в силу второго пункта в третьем и четвёртых пунктах достаточно требовать чего-то одного: пересечения или объединения.

Определение 2. Вероятностная мера - это нормированная мера, то есть $P : \Sigma \to [0, 1]$, где выполнены следующие условия:

1) $\forall a \in \Sigma\ P(a) \geq 0$;
2) $P(\Omega) = 1$;
3) для любого счётного набора попарно несовместных $(a_i \cap a_j = \emptyset, i \neq j)$ событий $a_i \in \Sigma, n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство
$$P\left(\bigcup_i^{\infty} a_i\right) = \sum_i^{\infty} P(a_i).$$

У вероятности много замечательных свойств:

1) $P(\emptyset) = 0$;
2) $a, b \in \Sigma\ P(a \cup b) = P(a) + P(b) - P(a \cap b)$;
3) $a, b \in \Sigma\ a \subseteq b\ P(a) \leq P(b)$;
4) $a \in \Sigma\ P(\Omega \setminus a) = 1 - P(a)$.

53.2. Условная вероятность.

Определение 3. Иногда рассматривают вероятность события A при условии, что произошло событие B. Такая вероятность называется **условной** и обозначается $P(A|B$, если $P(B) > 0$, то

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Формула полной вероятности. Пусть есть полная группа попарно несовместных событий $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \Sigma$, таких что $\forall i\ \mathbb{P}\ (A_i) > 0\ ;\ \forall j \neq i\ A_i \cap A_j = \varnothing$;

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

Пусть $B \in \Sigma$ — интересующее нас событие. Тогда получим:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \mid A_i)P(A_i).$$

Формула Байеса. Пусть $(A_i)_{i\in I}$ – конечное или счетное разбиение пространства Ω, A_i – события. Итак, для каждого события B с $\mathbb{P}(B) > 0$ и $j \in I$:

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum\limits_i \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Доказательство. (A_i) разбиение, $B = \bigcup\limits_{i\in I} B \cap A_i$ - не пересекаются, поэтому:

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum\limits_i \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

$(\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i) = 0$, если $\mathbb{P}(A_i) = 0)$ □

53.3. Независимость событий.

Определение 4. События A и B независимы, если $P(A|B) = P(A)$ $(P(A \cap B) = P(A)P(B)$ - это следует из определения).

53.4. Случайные величины.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, Σ, P) и измеримое пространство X, B (обычно говорят про $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ – это борелевская σ-алгебра).

Определение 5. Случайной величиной. на пространстве элементарных событий (Ω, Σ, P) со значениями в $(X, \mathcal{B})$ называется $\Sigma/\mathcal{B}$ измеримая функция $\xi \colon \Omega \to X$. (Измеримая: прообраз любого борелевского лежит в Σ.)

Если хотите проверить измеримость, то достаточно проверить для всех интервалов (если ξ действует в $\mathbb{R}$).

Доказательство этих двух формул по определению.

Примеры случайных величин:

1) **Дискретная.** $P(x \in A) = \frac{|A|}{|E|}$.

2) **Бернулли.** $P(x - 1) = p, P(x = 0) = 1 - p$.

3) **Биномиальная.** $P(x=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

4) **Равномерная на** $[a;b]$**.** $\rho(x)=\frac{1}{b-a}P_{[a;b]}(x)$.

5) **Экспонициаьная.** $P(x>t)=e^{-\lambda t}, \quad \lambda>0,\ t\geq 0$.

6) **Гауссовская.** $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \mu\in\mathbb{R},\ \sigma^2\geq 0$.

53.5. Функция распределения, плотность

Определение 6. Рассмотрим функцию

$$F_\xi(t)=P(\{w:\xi(w)\leq t\})=P_\xi((-\infty,t))$$

эта функция называется **функцией распределения** случайной величины ξ.

Верно следующее: $0\leq F(t)\leq 1$, $F(t)$ – не убывает, предел в минус бесконечность 0, а в плюс бесконечность 1.

Определение 7. Если мера P_ξ задана **плотностью** ρ относительно меры Лебега, т.е.

$$P(\xi\in B)=\int_B\rho(t)dt,$$

то ρ называется плотностью распределения. Тогда $\rho(t)=F'(t)$ почти всюду.

Достаточное условие: $F'(t)$ существует всюду.

53.6. Дискретные и непрерывные случайные величины.

Определение 8. Дискретная случайная величина X принимает конечное или счётное множество значений. Функция распределения дискретной случайной величины - ступенчатая, совершаются скачика в x_i на величину $P(x_i)$. ($P(x_i)\geq 0$ и $\sum P(x_i)=1$)

Определение 9. Случайная величина называется **непрерывной**, если функция её распределения непрерывна. Т.е. $\exists\rho\in L_1(R,dx)$, т.ч. $P(x\in A)=\int_A\rho(x)dx$.

53.7. Математическое ожидание.

Определение 10. Математическое ожидание - это среднее (взвешенное по вероятностям возможных значений) значение случайной величины.

Если ξ дискретна, то математическое ожидание: $E(X)=\sum_k p_k x_k$, а если непрерывна, то $E(X)=\int_\Omega XdP=\int_\Omega xp(x)dx$.

Свойства.

1) $E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$;

2) если $X\geq 0$, то $E(X)\geq 0$.

53.8. Дисперсия.

Мера разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания.

$$D(X)=E(X-E((X))^2).$$

Пусть $E(X)=m$. Если X дискретна, то $D(X)=\sum_k(x_k-m)^2p_k$, а если непрерывна, то $D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2f_X(x)dx$

Свойства.

1) $D(X) \geq 0$;

2) если дисперсия случайной величины конечна, то конечно и её математическое ожидание;

3) $X = const \to D(X) = 0$;

4) $D(\alpha X + \beta) = \alpha^2 D(X)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

5) если $X = (X_i)^d$ на $\mathbb{R}^2$ в L^2, то ковариация симметричных неотрицательных матриц:

$$D_{ij}(X) = E(X_i, X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

.

54. Случайные векторы (наборы случайных величин). Совместные функция распределения и плотности нескольких случайных величин. Независимость случайных величин, её выражение в терминах совместной функции распределения и совместной плотности. Ковариация и коэффициент корреляции. Некоррелированность независимых величин.

54.1. Случайные векторы(наборы случайных величин

Вероятностное пространство - это тройка $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$,

Определение 1. Если (E, ξ) - измеримое пространство, $X \colon \Omega \to E$ измеримое отображение называется E-значной случайной величиной. Если $E = \mathbb{R}$ и ξ - борелевская σ-алгебра, то X называется случайной величиной или вещественной случайной величиной.

Определение 2. (Ширяев) Действительная функция $\psi = \psi(\omega)$, определенная на измеримом пространстве, называется случайной величиной если для любого $B \in \xi$:

$$\{\omega : \psi(\omega) \in B\} \in \xi$$

. Если X - E-случайная величина, то $\mu(E) := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ - вероятностная мера на (E, ξ):

$$\mu(E) = \mathbb{P}(X^{-1}(E)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$
$$\mu(\cup_i A_i) = \mathbb{P}(X^{-1}(\cup_i A_i)) = \mathbb{P}(\cup_i X{-}1(A_i)) = \sum_i \mathbb{P}(X^{-1}(A_i)) = \sum_i \mu(A_i)$$

Определение 3. Вероятностное пространство — это тройка (Ω, Σ, P), где Ω — произвольное непустое множество, оно называется пространством элементарных событий.
Σ — сигма-алгебра подмножеств Ω, элементы которой называются случайными событиями.
P — вероятностная мера на Σ.

55. Виды сходимости последовательностей случайных величин: почти наверное, по вероятности, по распределению. Закон больших чисел (с доказательством). Усиленный закон больших чисел (формулировка).

55.1. Виды сходимости последовательностей случайных величин: почти наверное, по вероятности, по распределению.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин (измеримых функций) в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Определение 1. Последовательность сходится **почти наверное** к случайной величине ξ, если

$$P(\{w : \xi_n(w) \not\to \xi\}) = 0,$$

то есть есть поточечная сходимость почти всюду, кроме, возможно, множества меры нуль.

Определение 2. Последовательность сходится **по вероятности** (сходимость по мере) к случайной величине ξ, если для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что начиная с него $\forall\ n > N$:

$$P(\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\}) \to 0.$$

Определение 3. Последовательность сходится **по распределению** к случайной величине ξ, если для любой ограниченной непрерывной функции f:

$$Ef(\xi_n) \to_{n \to \infty} Ef(\xi).$$

Определение 4. Последовательность сходится **в среднем** (норма в L^1) к случайной величине ξ, если:

$$E|\xi_n - \xi| \to 0,$$

разумеется, если эти интегралы существуют.

Определение 5. Последовательность сходится **в среднем квадратичном** (норма в L^2) к случайной величине ξ, если:

$$E|\xi_n - \xi|^2 \to 0,$$

разумеется, если эти интегралы существуют.

55.2. Связь сходимостей.

Сходимость почти всюду влечет сходимость по вероятности (это следует из того, что сходимость по вероятности равносильна

$$E\left(\frac{|\xi_n - \xi|}{|\xi_n - \xi| + 1}\right)$$

и из теоремы Лебега, что бы это ни было).

Обратное неверно, пример: возьмем индикатор отрезка, но отрезок уменьшающейся длины (в этом случае есть поточечная сходимость к 0), но мы добавим условие, что отрезок будет «блуждать» по отрезку $[0,\ 1]$ — $[0, 1], [0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}], [0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{5}] \ldots$. Здесь уже поточечной сходимости не будет ни в одной точке.

Из неравенства Чебышёва следует, что сходимость в среднем влечет сходимость по вероятности.

Из теоремы Лебега следует, что любая сходимость влечет сходимость по распределению.

Из сходимости в среднем квадратичном следует сходимость в среднем. Это следует из неравенства Коши-Буняковского.

Обратных импликаций нет, НО (теорема Риса) из сходящейся по вероятности последовательности можно извлечь подпоследовательность сходящуюся почти всюду.

55.3. Закон больших чисел (с доказательством).

Википедия. Закон больших чисел — принцип, описывающий результат выполнения одного и того же эксперимента много раз. Согласно закону, среднее значение конечной выборки из фиксированного распределения близко к математическому ожиданию этого распределения.

Формулировка. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ последовательность случайных величин со средним m, (т.е. $E\xi_i = m$) и равномерно ограниченными дисперсиями (равномерно ограничены в L^2). Предположим, что они попарно некоррелируемы (скалярные произведения в L^2 попарно ортогональны после вычета среднего), тогда

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{в ср. квад.}} m$$

и

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} m.$$

Доказательство. Можно считать, что $m = 0$, (иначе перейдём к $\xi_n - m$). Итого есть попарно ортогональные величины ($E\xi_k\xi_m = 0$ при $k \neq m$) с равномерно ограниченной нормой в L^2. Их среднее арифметическое сходится к нулю. Посчитаем дисперсию:

$$DS_n = n^{-2}\sum_{i=1}^{n} D\xi_i \leq Cn^{-1} \to 0$$

C – это константа которой ограничены дисперсии. □

Отсюда получается сходимость в L^2, а значит и сходимость по вероятности.

55.4. Усиленный закон больших чисел.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ последовательность независимых с одним и тем же распределением со средним m, (т.е. $E\xi_i = m$). Тогда случайные величины S_n сходятся почти наверное к n.

Здесь важно, что величины независимы и одинаково распределены.

56. Характеристические функции. Выражение сходимости по распределению в терминах характеристических функций (без доказательства). Центральная предельная теорема (формулировка, сведение к предельной теореме для характеристических функций).