$\boxed{1}$

Ω - мн-во - мн-во элементарных событий

$\omega \in \Omega$ - элементарное событие

$\mathcal{F}$ - σ-алгебра подмн-в Ω, т.е. 1) $\Omega \in \mathcal{F}$ — мн-во событий
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$

$A \in \mathcal{F}$ - событие

$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ - вероятность, если 1) $P(\Omega) = 1$
2) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$; $A_i \cap A_j = \varnothing \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство

Свойства вероятности:

1) $P(\varnothing) = 0$, т.к. $\underbrace{P(\varnothing \cup \varnothing)}_{P(\varnothing)} = P(\varnothing) + P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing) = 0$

2) $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$, т.к. $B = A \cup B \setminus A \Rightarrow P(B) = P(A) + \overbrace{P(B\setminus A)}^{\geq 0}$

3) $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \ldots + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots$

4) Свойство непрерывности. Пусть $P : \mathcal{F} \to [0,1]$: $P(\Omega) = 1$, $\forall A_1, \ldots, A_n$: $A_i \cap A_j = \varnothing$ $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$

Тогда эквивалентны следующие св-ва:

- P - вероятность
- Если $A_n \downarrow A$, где $A_n \in \mathcal{F}$ (т.е. $A_1 \supset A_2 \ldots$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$), то $P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$
- Если $A_n \uparrow A$, где $A_n \in \mathcal{F}$ (т.е. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$), то $P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$
- Если $A_n \downarrow \varnothing$, то $P(A_n) \to 0$, $n \to \infty$.

Классическая вероятность

Ω конечно, $|\Omega| = n$, т.е. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ $\quad \mathcal{F} = 2^{\Omega} := \{A \subseteq \Omega\}$

$P(A) = \frac{|A|}{n}$ (равносильно тому, что $\forall i$ $P(\omega_i) := P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$)

Замечание. Если Ω не более чем счётно и $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, то тогда для того, чтобы задать P достаточно задать $p(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$.

Задача. 10 книг на полке, 5 с синими обложками и 5 с красными. Случайно выбирается 3 книги. $P(1 \text{ синяя}, 2 \text{ красные}) = ?$

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_{10}),\ x_i \in \{1,0\},\ \sum x_i = 3\} \qquad |\Omega| = C_{10}^3$$

$$\forall \omega \in \Omega \quad P(\{\omega\}) = \frac{1}{C_{10}^3}$$

$$A = \{(x_1, \dots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{5} x_i = 1,\ \sum_{i=6}^{10} x_i = 2\} \qquad |A| = C_5^1 C_5^2$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3}.$$

Схема Бернулли

$$k \in \mathbb{N} \qquad \Omega = \{(x_1, \dots, x_k),\ \omega_i \in \{0,1\}\} \qquad |\Omega| = 2^k$$

$$p \in (0,1) \qquad P(\{\omega = (x_1, \dots, x_k)\}) = p^{\sum x_i} (1-p)^{k - \sum x_i}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j p^j (1-p)^{k-j} = (p + 1 - p)^k = 1$$

A_j – „при j-ом подбр. решка" $= \{(x_1, \dots, x_k) : x_j = 1\}$

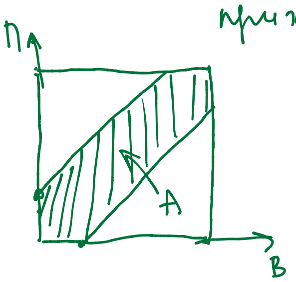
$$P(A_j) = p \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} p^i (1-p)^{k-1-i} = p$$

Геометрические вероятности

$$\Omega \subset \mathbb{R}^d : \mu(\Omega) < \infty$$

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega : \mu(A) < \infty\} \qquad P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Задача. В, П договорились встретиться в интервале с 12 до 13, приходят в случ. время и ждут 15 минут. $P(\text{встреча}) = ?$



$$\Omega = [0,1]^2$$

$$P(A) = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1} = \frac{7}{16}.$$

Ответ на вопрос, не относящийся к текущей лекции:

$$P : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1] \qquad F(x_1, \dots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$$

$$F_i(x) = P(\overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^{i-1} \times (-\infty, x] \times \overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^{n-i})$$

2

Распред. вероятностей — вероятность на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Функция р-я, соотв. распред. P, это $F : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

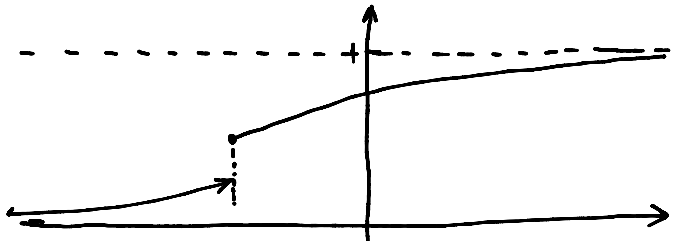
Утв 1. Если у р-ий P_1 и P_2 совпадают ф-ии распред., то $P_1 = P_2$

Свойства:

1) Не убывает

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

3) Непрер. справа



$$P(\{x\}) = \underbrace{F(x)}_{= P((-\infty, x])} - \underbrace{F(x-0)}_{= P(\bigcup_\varepsilon (-\infty, x-\varepsilon]) = P((-\infty, x))}$$

▶ 1) Если $x < y$, то $F(y) - F(x)$

$$= P((-\infty, y]) - P((-\infty, x]) = P((x,y]) \geq 0$$

2) $x_n \uparrow +\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) = P\left(\bigcup_n (-\infty, x_n]\right)$

$$= P(\mathbb{R}) = 1$$

$x_n \downarrow -\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) = P\left(\bigcap_n (-\infty, x_n]\right)$

$$= P(\varnothing) = 0$$

3) $x_n \downarrow x_0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) = P\left(\bigcap (-\infty, x_n]\right)$

$$= P((-\infty, x_0]) = F(x_0)$$ ◀

Утв.2 Любая функция, облад. св-вами 1), 2), 3), является ф-ей распред. для некоторого распред. вероятностей.

▶ $P((a,b]) := F(b) - F(a)$. Продолжаем! на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ◀

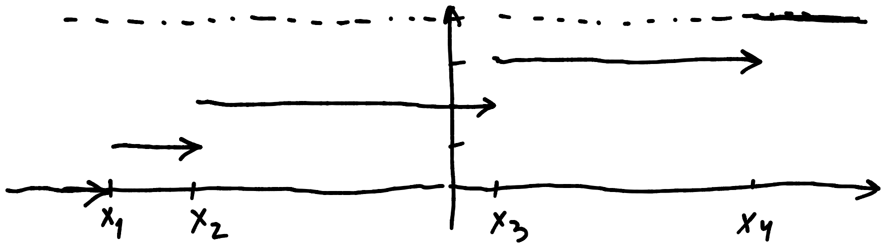
$$P[(a_1, b_1] \cup \ldots \cup (a_n, b_n]] = \sum_{i=1}^{n} P((a_i, b_i])$$

Дискретное распределение — это такое P, что $\exists$ не более чем счетное $X \subset \mathbb{R}$: $P(X) = 1$

$p : X \to [0,1]$, $\quad p(x) = P(\{x\})$

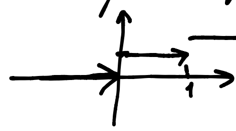
$$F(x) = \sum_{y \leq x,\, y \in X} p(y)$$

1) $\mathcal{U}(X)$ равномерное, X — конечное $\quad \forall x\in X \quad p(x)=\frac{1}{|X|}$



2) $Bern(p)$ — распределение Бернулли с параметром $p\in(0,1)$

$X=\{0,1\} \qquad p(0)=1-p, \quad p(1)=p$



3) $Bin(n,p)$ — биномиальное р-е с параметрами $n\in\mathbb{N}$, $p\in(0,1)$

$X=\{0,\dots,n\} \qquad p(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

4) $Pois(\lambda)$ — пуассоновское распределение с параметром $\lambda>0$

$X=\mathbb{Z}_+$ (целые неотр. числа) $\qquad p(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Абсолютно непрер. распределение P — это такое распред., что сущ. $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ (неотр.) такая, что $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$

$F(x) = P((-\infty,x]) = \int_{-\infty}^{x} dP$

F — **абсолютно непрерывная**

дифф. $\Rightarrow$ абсолютная непрер. $\Rightarrow$ непрер.

Утв.3 Пусть F-дифференцируема, тогда $p(x)=F'(x)$.

► Пусть $p(x)=F'(x)$. Тогда $\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = F(x)-F(-\infty)=F(x)$ ◄

Свойства плотности:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt=1 \quad$ (т.к. $1=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt$).

2) Если $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ такова, что $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt=1$, то p — плотность некоторого распред.

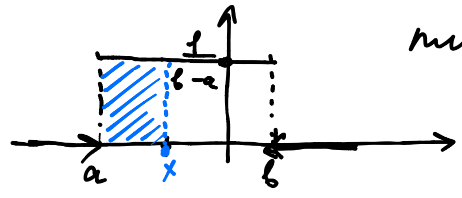
(Положим $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt$ и увидим, что F обладает св-вами 1)–3) ф-ции р-я).

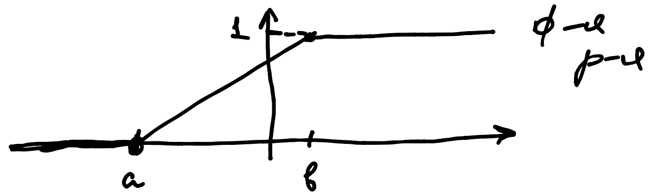
Примеры:

1) $\mathcal{U}([a,b])$ — равномерное р-е на $[a,b]$ $\qquad p(x)=\frac{1}{b-a} I(x\in[a,b])$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt \longleftarrow 1$$

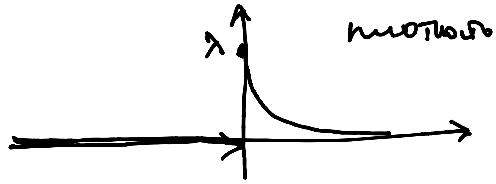


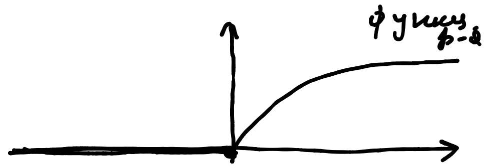


2) $\exp(\lambda)$ – экспоненц. р-е с парам. $\lambda>0$

$$p(x)=\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{I}(x\geq 0)$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$$

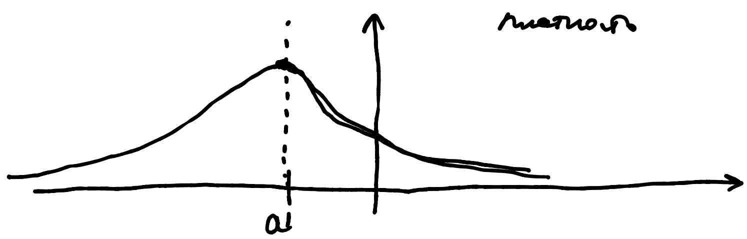


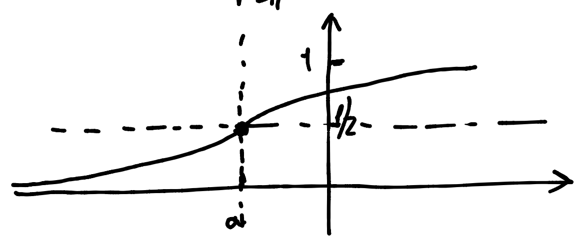


3) $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$ – норм. распред. с параметр. $a\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$

стандартное норм. распред. $\mathcal{N}(0,1)$: $\quad p=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$





Распределение в $\mathbb{R}^n$

$\boxed{3}$

$\Omega=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, P – распределение вероятностей

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\sigma\left(\{B_1\times\ldots\times B_n,\ B_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}\right)$$
$$=\sigma\left(\{(-\infty,x_1]\times\ldots\times(-\infty,x_n],\ x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}\right)$$

$F:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ – функция распред. соотв. P, если

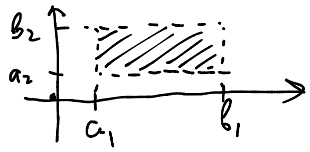
$\forall (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \quad F(x_1,\ldots,x_n)=P\left((-\infty,x_1]\times\ldots\times(-\infty,x_n]\right)$

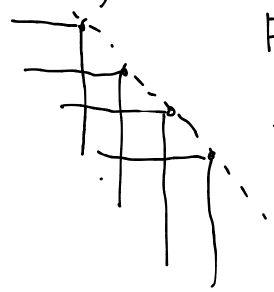
Утв1. Если $F_1=F_2$, то и $P_1=P_2$.

Свойства:

1) $\Delta^i_{a,b} F(x_1,\dots,x_n) = F(x_1,\dots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\dots,x_n) - F(x_1,\dots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\dots,x_n)$

$\forall a_1\le b_1,\dots,a_n\le b_n \qquad \Delta^1_{a_1,b_1}\Delta^2_{a_2,b_2}\dots\Delta^n_{a_n,b_n}F(x_1,\dots,x_n)\ge 0$





$F(x_1,+\infty)$
$\parallel$
$P((-\infty,x_1]\times\mathbb{R})$

2) $\lim\limits_{x_1\to+\infty,\dots,x_n\to+\infty} F(x_1,\dots,x_n)=1,\quad \forall i \lim\limits_{x_i\to-\infty} F(x_1,\dots,x_n)=0$

3) $x^k\downarrow x$, $k\to\infty$, i.e. $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ $x^k_i\downarrow x_i$

$\lim\limits_{k\to\infty}F(x^k)=F(x)$

$$\lim_{x_1\to-\infty,\, x_2\to\infty}F(x_1,x_2) \le \quad F(x_1^i,x_2^i)\le F(x_1^i,+\infty)$$
$$\lim_{x_1\to-\infty}F(x_1,+\infty)=0$$

P в $\mathbb{R}^2 \to \tilde P$ в $\mathbb{R}$

$\tilde P(B)=P(B\times\mathbb{R})$

$F(x,+\infty)$

▶ 1) $\Delta^1_{a_1,b_1}\dots\Delta^n_{a_n,b_n}F(x_1,\dots,x_n) = P((a_1,b_1]\times\dots\times(a_n,b_n])\ge 0$

$n=2 \quad \Delta^1_{a_1,b_1}\Delta^2_{a_2,b_2}F(x_1,x_2) = \Delta^1_{a_1,b_1}(F(x_1,b_2)-F(x_1,a_2))=$

$=\Delta^1_{a_1,b_1}(P((-\infty,x_1]\times(-\infty,b_2])-P((-\infty,x_1]\times(-\infty,a_2]))$

$=\Delta^1_{a_1,b_1} P((-\infty,x_1]\times(a_2,b_2])$

$=P((-\infty,b_1]\times(a_2,b_2])-P((-\infty,a_1]\times(a_2,b_2]) = P((a_1,b_1]\times(a_2,b_2])$

$\Delta^2_{a_2,b_2}\dots\Delta^n_{a_n,b_n}F(x_1,\dots,x_n) = P((-\infty,x_1]\times(a_2,b_2]\times\dots\times(a_n,b_n])$

$\Delta^n_{a_n,b_n}F(x_1,\dots,x_n) = P((-\infty,x_1]\times\dots\times(-\infty,x_{n-1}]\times(a_n,b_n])$

2) $x_1^k\uparrow+\infty,\dots,x_n^k\uparrow+\infty \qquad \tilde x_i^k=\max\limits_{j\in\{1,\dots,k\}} x_i^j$

$F(x_1^k,\dots,x_n^k)=P((-\infty,x_1^k]\times\dots\times(-\infty,x_n^k])$

$\lim\limits_{k\to\infty}F(x_1^k,\dots,x_n^k)=P\left(\bigcup\limits_k (-\infty,x_1^k]\times\dots\times(-\infty,x_n^k]\right)=P(\mathbb{R}^n)=1$

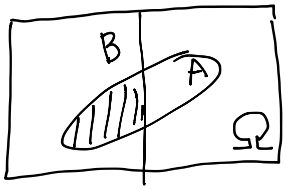
$x_1^k\downarrow-\infty$

$\lim\limits_{k\to+\infty}F(x_1^k,x_2,\dots,x_n)=P\left(\bigcap\limits_k (-\infty,x_1^k]\times(-\infty,x_2]\times\dots\times(-\infty,x_n]\right)=P(\varnothing)=0$

Ут. 2 Если F обладает св-вами 1), 2), 3), то она явл. ф-ей р-я для некот. P.

Независимость событий.

Условная вероятность $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $P(B)\neq 0$



$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

$A \perp\!\!\!\perp B$ (независимы), если

Формула полной вероятности. Пусть $\Omega = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)\,P(B_n)$$

Формула Байеса: $P(B_n|A) = \dfrac{P(A|B_n)\,P(B_n)}{\sum\limits_j P(A|B_j)\,P(B_j)}$

Пусть $\Sigma \subset \mathcal{F}$. События из Σ называются независимыми (в совокупности), если

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall A_1,\dots,A_n\in\Sigma$ — различных

$$P(A_1\cap\ldots\cap A_n) = P(A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$$

Попарная независимость $\Leftarrow$ независимость в совокупности

Пусть P — распред. в $\mathbb{R}^n$, $i\in\{1,\dots,n\}$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Положим $P_i(B) = P(\underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{i-1}\times B\times\underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n-i})$ — маргинальное распределение

Если $P_1,\dots,P_n$ — независимы, то

$$P(B_1\times\ldots\times B_n) = P([B_1\times\mathbb{R}^{n-1}]\cap[\mathbb{R}\times B_2\times\mathbb{R}^{n-2}]\cap\ldots)$$

$$= P(B_1\times\mathbb{R}^{n-1})\cdot P(\mathbb{R}\cdot B_2\cdot\mathbb{R}^{n-2})\cdot\ldots = P_1(B_1)\cdot P_2(B_2)\cdot\ldots$$

$$P((-\infty,x_1]\times\ldots\times(-\infty,x_n]) = F(x_1,\dots,x_n)$$

$$\| $$

$$P_1((-\infty,x_1])\cdot\ldots\cdot P_n((-\infty,x_n]) = F_1(x_1)\cdot\ldots\cdot F_n(x_n),$$

где F_i — ф.р. P_i — маргинальная функция распределения

Распределение P наз. дискретным, если $\exists$ не более чем счётное $X\subset\mathbb{R}^n$: $P(X)=1$.

Если $P_1,\dots,P_n$ — дискр. распред. в $\mathbb{R}$, то $P = P_1\times\ldots\times P_n$ (р-е P, у которого $P_1,\dots,P_n$ — независ. марг. распределения).

Если X_i - не более чем счетный носитель P_i, то $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ - не более чем счетный носитель P.

Распределение P наз. абсолютно непрер., если сущ. $\overset{\text{плотность}}{p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n$

Если $P_1, \ldots, P_n$ - абсолютно непр. распред. в $\mathbb{R}$ с плотностями $p_1, \ldots, p_n$. Тогда $P = P_1 \times \ldots \times P_n$ - абсолютно непрер. распред. с плотностью $p(x_1, \ldots, x_n) = p_1(x_1) \cdot \ldots \cdot p_n(x_n)$

▶ Положим $p(x_1, \ldots, x_n) = p_1(x_1) \cdot \ldots \cdot p_n(x_n)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n = \int_{-\infty}^{x_1} p(t_1) dt_1 \cdot \ldots \cdot \int_{-\infty}^{x_n} p(t_n) dt_n = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n) = F(x_1, \ldots, x_n)$$ ◀

Свойства плотности:

1) $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $P(B) = \int_B p(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n$

2) Если F - n раз дифферен., то $p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$.

3) Если $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $1 = \int_{\mathbb{R}^n} p(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n$, то p - плотность некоторого абсолютно непрер. распред.

4

Случайный элемент - $\xi : \Omega \to X$, явл. $(\mathcal{F} | \Sigma)$-измеримый (т.е. $\forall A \in \Sigma$ $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вер. пр-во

(X, Σ) - измер. пр-во

В частности, $(X, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то ξ - случайная величина

Если $X = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, то ξ - случайный вектор

$P(\xi \in B) = P(\{\omega : \xi(\omega) \in B\})$

$P(\xi < x)$, $P(\xi = x)$, $P(a < \xi < b)$

$P(\xi = x) = P(\{\omega : \xi(\omega) = x\})$

$\mathcal{F}_\xi = \{ \xi^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \} \subset \mathcal{F}$

Утв.1 $\mathcal{F}_\xi$ — σ-алгебра

▶ 1) $\Omega = \xi^{-1}(\mathbb{R}^n) \in \mathcal{F}_\xi$

2) Пусть $A \in \mathcal{F}_\xi$. $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n): \ \xi^{-1}(B) = A$

$\bar{A} = \xi^{-1}(\bar{B}) \in \mathcal{F}_\xi$

3) Пусть $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_\xi$ $\ \exists B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n): \ A_i = \xi^{-1}(B_i)$

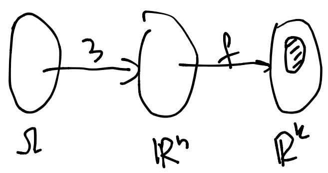
$\cup A_i = \cup \xi^{-1}(B_i) = \xi^{-1}(\cup B_i) \in \mathcal{F}_\xi$ ◀

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — борелевская, если f — $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$-измеримая.

Утв.2 Любая непрер. ф-я явл. борелевской.

Утв.3 Если ξ — n-мерный случ. вектор, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — борелевская, то $f(\xi)$ — k-мерный случ. вектор.

▶ $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ $\quad (f(\xi))^{-1}(B) = \xi^{-1}(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}) \in \mathcal{F} \Rightarrow f(\xi)$ — измер. ◀



Утв.4 Пусть ξ — n-мерный случ. вектор, $\eta: \Omega \to \mathbb{R}^k$. Тогда η — $(\mathcal{F}_\xi \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$-измер. $\Leftrightarrow \exists f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — борел.: $\eta = f(\xi)$.

▶ ($\Leftarrow$) Пусть $\eta = f(\xi)$. $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ $\quad \eta^{-1}(B) = \xi^{-1}(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}) \in \mathcal{F}_\xi$ ◀

Теорема (критерий измеримости) Пусть $\xi: \Omega \to X$. $\mathcal{M}$ — система подмн-в X: $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда ξ — $(\mathcal{F} \,|\, \mathcal{E})$-измер. $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{M}\ \ \xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

▶ ($\Rightarrow$) очевидно

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{R} = \{ A \subseteq X: \ \xi^{-1}(A) \in \mathcal{F} \}$. Известно, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$.

Если $\mathcal{R}$ — σ-алгебра, то $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E} \subset \mathcal{R}$

Докажем, что $\mathcal{R}$ — σ-алгебра: 1) $X \in \mathcal{R}$, т.к. $\xi^{-1}(X) = \Omega \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{R} \Rightarrow \xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$

$\xi^{-1}(\bar{A}) = \overline{\xi^{-1}(A)} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{R}$

3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R} \Rightarrow \xi^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}$

$\xi^{-1}\left(\bigcup A_i\right) = \bigcup \xi^{-1}(A_i) \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{R}$ ◁

Утв. 5 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случ. вектор $\Leftrightarrow$ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случ. величины

► ($\Rightarrow$) $i \in \{1, \ldots, n\}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \xi_i^{-1}(B) = \xi^{-1}(\mathbb{R}^{i-1} \times B \times \mathbb{R}^{n-i}) \in \mathcal{F}$

($\Leftarrow$) $\mathcal{M} = \{B_1 \times \ldots \times B_n,\ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. $\quad \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

По критерию измеримости достаточно проверить, что $\forall A \in \mathcal{M}\ \ \xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

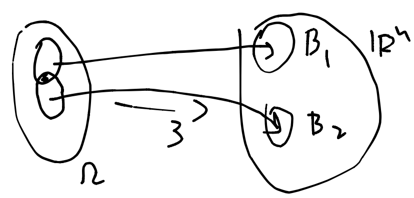
$A = B_1 \times \ldots \times B_n \quad \xi^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \underbrace{\xi_1^{-1}(B_1)}_{\in \mathcal{F}} \cap \ldots \cap \underbrace{\xi_n^{-1}(B_n)}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ ◄

Следствие (из утв. 2, 3, 5). Если ξ, η — случ. величины, то $\xi + \eta,\ \xi - \eta,\ \xi\eta,\ \xi/\eta\, I(\eta \neq 0)$ — случ. величины

Утв. 6 Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — случ. величины. Тогда $\inf_n \xi_n$, $\sup_n \xi_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n$ — случ. величины

ξ — n-мерный случ. вектор, $P_\xi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, 1]$, $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$

Утв. 7 P_ξ — распределение



► 1) $P_\xi(\mathbb{R}^n) = P(\xi \in \mathbb{R}^n) = 1$

2) Пусть $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — попарно не пересек.

$P_\xi\left(\bigcup B_i\right) = P\left(\xi^{-1}\left(\bigcup B_i\right)\right) = P\Big(\bigcup \underbrace{\xi^{-1}(B_i)}_{\text{не пересек.}}\Big) = \sum P(\xi^{-1}(B_i))$

$= \sum P_\xi(B_i)$ ◄

P_ξ — распределение случ. вектора (величины) ξ

F_ξ — функция распред., соотв. P_ξ — функция распределения ξ.

Если P_ξ — дискретно/абс. непрерывно, то будем говорить ξ — дискр./абс. непрер.

Если p_ξ — плотность P_ξ, то будем говорить, что p_ξ — плотность ξ.

Обозн: $\xi \sim Pois(\lambda)$ — ξ имеет распред. $Pois(\lambda)$.

ξ_1, ξ_2 – случ. векторы размерностей n_1, n_2 – независимы, если

$\forall B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_1}),\ B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_2})$ $\quad P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot P(\xi_2 \in B_2)$

(или, иными словами, $\mathcal{F}_{\xi_1}, \mathcal{F}_{\xi_2}$ – независимы)

Пусть Σ – мн-во случ. векторов. Случ. векторы из Σ независимы (в совокупности), если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall$ разл. $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Sigma$ $\forall$ борел. $B_1, \dots, B_n$ $\quad P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \in B_n)$.

Теорема (критерий незав.). Случ. величины (векторы) $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы $\Leftrightarrow$ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $(x_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{k_n})$

$$F_{(\xi_1, \dots, \xi_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n).$$

Пусть X – некотор. мн-во, $\mathcal{M}$ – система подмн-в X.

$\mathcal{M}$ – π-система, если $\forall A, B \in \mathcal{M}$ $\ A \cap B \in \mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ – λ-система, если 1) $X \in \mathcal{M}$

2) Если $A \subset B$, $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$, то $B \setminus A \in \mathcal{M}$

3) Если $A_n \uparrow A$, $A_i \in \mathcal{M}$, то $A \in \mathcal{M}$

Лемма 1 Если $\mathcal{M}$ – π-система, то $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$, где $\lambda(\mathcal{M})$ – миним. λ-система, содержащая все мн-ва из $\mathcal{M}$.

$\boxed{5}$

$\Leftarrow$ Докажем, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ $\quad (*)$

$$P(\xi_1 \in B, \xi_2 \le x_2, \dots, \xi_n \le x_n) = P(\xi_1 \in B) P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n)$$

$\Sigma = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : (*)\}$ $\quad \Sigma \supset \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$ – π-система

Если Σ - λ-система $\Rightarrow \Sigma \supset \lambda(\{(-\infty, x]\}) = \sigma(\{(-\infty, x]\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

1) $\mathbb{R} \in \Sigma$: $\quad P(\xi_1 \in \mathbb{R}, \xi_2 \le x_2, \dots, \xi_n \le x_n) \overset{\xi_0 \in B_0}{=} \lim\limits_{x \to \infty} P(\xi_1 \le x, \xi_2 \le x_2, \dots, \xi_n \le x_n)$

$\overset{P(\xi_0 \in B_0)}{=} \lim\limits_{x \to \infty} P(\xi_1 \le x) P(\xi_2 \le x_2) \dots P(\xi_n \le x_n) \underset{P(\xi_1 \in \mathbb{R})}{=} P(\xi_2 \le x_2) \dots P(\xi_n \le x_n)$

2) $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$ $\quad P(\xi_1 \in B \setminus A, \xi_2 \le x_2, \dots, \xi_n \le x_n)$ $\quad \xi_0 \in B_0$

$= P(\xi_1 \in B, \xi_2 \le x_2, \dots, \xi_n \le x_n) - P(\xi_1 \in A, \xi_2 \le x_2, \dots, \xi_n \le x_n)$

$= P(\xi_1 \in B) P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n) - P(\xi_1 \in A) P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n)$

$$= P(\xi_1 \in B\setminus A)\, P(\xi_2 \le x_2)\cdot\ldots\cdot P(\xi_n \le x_n) \Rightarrow B\setminus A \in \Sigma$$

3) $A_k \uparrow A$, $A_k \in \Sigma$. $P(\xi_1 \in A, \xi_2 \le x_2, \ldots, \xi_n \le x_n)$

$$= \lim_{k\to\infty} P(\xi_1 \in A_k, \xi_2 \le x_2, \ldots, \xi_n \le x_n)$$

$$= \lim_{k\to\infty} P(\xi_1 \in A_k)\, P(\xi_2 \le x_2)\cdot\ldots\cdot P(\xi_n \le x_n)$$

$$= P(\xi_1 \in A)\, P(\xi_2 \le x_2)\cdot\ldots\cdot P(\xi_n \le x_n).$$

Пусть $\forall B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall x_{m+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_m \in B_m, \xi_{m+1} \le x_{m+1}, \ldots, \xi_n \le x_n) =$$

$$= P(\xi_1 \in B_1)\cdot\ldots\cdot P(\xi_m \in B_m)\cdot P(\xi_{m+1} \le x_{m+1})\cdot\ldots\cdot P(\xi_n \le x_n)$$

Докажем, что то же самое верно для $m \to m+1$.

$\Sigma = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) :\ \forall B_1, \ldots, B_m, \forall x_{m+2}, \ldots x_n$

$P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_m \in B_m, \xi_{m+1} \in B, \xi_{m+2} \le x_{m+2}, \ldots, \xi_n \le x_n) = P(\xi_1 \in B_1)\cdot\ldots\cdot P(\xi_m \in B_m)\, P(\xi_{m+1} \in B)$
$\cdot P(\xi_{m+2} \le x_{m+2})\cdot\ldots\cdot P(\xi_n \le x_n)\}$

Осталось доказать, что Σ — λ-система. Доказывается аналогично базе. ◀

Лемма 2. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независ. случ. вектора.
Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — борелевские, $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{m_i}$,
где n_i — размерность ξ_i. Тогда $f_1(\xi_1), \ldots, f_k(\xi_k)$ — независ.

▶ $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_1}), \ldots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_k})$

$$P(f_1(\xi_1) \in B_1, \ldots, f_k(\xi_k) \in B_k) = P(\xi_1 \in \underbrace{f_1^{-1}(B_1)}_{\in\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_1})}, \ldots, \xi_k \in f_k^{-1}(B_k))$$

$$= P(\xi_1 \in f_1^{-1}(B_1))\cdot\ldots\cdot P(\xi_k \in f_k^{-1}(B_k))$$

$$= P(f_1(\xi_1) \in B_1)\cdot\ldots\cdot P(f_k(\xi_k) \in B_k)$$ ◀

Лемма 3 Если $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независ. случ. величины, абс. непрер. с плотностями $p_1, \ldots, p_k$. Тогда $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ — абс. непрер. с плотностью $p(x_1, \ldots, x_k) = p_1(x_1)\cdot\ldots\cdot p_k(x_k)$.

▶ $$\int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_k} p(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k = \int_{-\infty}^{x_1} p_1(t_1)\, dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{x_k} p_k(t_k)\, dt_k = F_1(x_1)\ldots F_k(x_k)$$

$$= F_{(\xi_1, \ldots, \xi_k)}(\vec{x_1, \ldots, x_k})$$ ◀

Теорема Фубини. $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ - вер. пр-ва

$(\Omega_1 \times \Omega_2, \underset{\sigma(A_1 \times A_2,\ A_1 \in \mathcal{F}_1,\ A_2 \in \mathcal{F}_2)}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}}, P_1 \times P_2)$, ξ - случ. величина.

$$P_1 \times P_2 (A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$$

Пусть $\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} |\xi| \, dP_1 \times P_2 < \infty$. Тогда $\int\limits_{\Omega_1} \xi \, dP_1$ - $\mathcal{F}_2$-измер. случ. вел,

$\int\limits_{\Omega_2} \xi \, dP_2$ - $\mathcal{F}_1$-измер. случ. величина,

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} \xi \, dP_1 \times P_2 = \int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} \xi \, dP_2 \right) dP_1 = \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} \xi \, dP_1 \right) dP_2.$$

Формула свертки Пусть ξ_1, ξ_2 - независ. случ. вел.

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(x) = P(\xi_1 + \xi_2 \le x) = P_{(\xi_1, \xi_2)} (\overbrace{\{(u,v) : u + v \le x\}}^{D})$$

$$= \int\limits_D dP_{(\xi_1, \xi_2)} = \int\limits_D dP_{\xi_1} \times P_{\xi_2}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{x-u} dP_{\xi_2} \right) dP_{\xi_1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-u) \, dP_{\xi_1}$$

В частности, если ξ_1, ξ_2 - абс. непрер. с плотностями p_1, p_2.

Тогда $\boxed{F_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-u) \, p_{\xi_1}(u) \, du}$

Докажем, что $\boxed{p_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_2}(x-u) \, p_{\xi_1}(u) \, du}$

Действительно $\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_2}(t-u) \, p_{\xi_1}(u) \, du \, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{x} p_{\xi_2}(t-u) dt \right] p_{\xi_1}(u) du$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{x-u} p_{\xi_2}(y) \, dy \right] p_{\xi_1}(u) du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-u) \, p_{\xi_1}(u) \, du = F_{\xi_1 + \xi_2}(x)$$

Задача Пусть ξ_1 - дискр., ξ_2 - абс. непр. - независ.

Какое р-е у $\xi_1 + \xi_2$?

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(x) = P(\xi_1 + \xi_2 \le x) = \sum_{t \in X} P(\xi_1 = t, \xi_1 + \xi_2 \le x)$$

Пусть X - мн-во знач. ξ_1

$$= \sum_{t \in X} P(\xi_1 = t, \xi_2 \le x - t)$$

$$= \sum_{t\in X} P(\xi_1 = t)\, P(\xi_2 \le x-t) = \sum_{t \in X} P(\xi_1 = t)\, F_{\xi_2}(x-t)$$

$$\boxed{p(x) = \sum_{t\in X} P(\xi_1 = t)\, p_{\xi_2}(x-t).}$$

$$\int_{-\infty}^{x} p(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} \sum_{t\in X} P(\xi_1 = t)\, p_{\xi_2}(y-t)\,dy = \sum_{t\in X} \int_{-\infty}^{x} P(\xi_1 = t)\, p_{\xi_2}(y-t)\,dy$$

$$= \sum_{t\in X} P(\xi_1 = t) \int_{-\infty}^{x \to x-t} p_{\xi_2}(\underbrace{y-t}_{z})\,dy = \sum_{t\in X} P(\xi_1 = t)\, F_{\xi_2}(x-t) = F_{\xi_1+\xi_2}(x)$$

$\Rightarrow \xi_1 + \xi_2$ — абс. непр. с плотностью p

Математическое ожидание

$$E\xi = \int_\Omega \xi\,dP \;\; \left(= \int_{\mathbb{R}} x \cdot dP_\xi\right)$$

$\int \xi^+ dP,\ \int \xi^- dP = \infty \Rightarrow E\xi$ не существует

Если ξ — дискретна, то $E\xi = \sum_{x\in X} x \cdot P(\xi = x)$

Если ξ — абс. непр., то $E\xi = \int_{\mathbb{R}} x \cdot p_\xi(x)\,dx$

6

1) ξ — дискретна $\qquad E\xi = \int_\Omega \xi\,dP = \sum_{x\in X} x \cdot P(\xi = x)$

$\xi \sim Bern(p) \Rightarrow E\xi = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

$\xi \sim U(\{1,\dots,N\}) \Rightarrow E\xi = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2}$

$\xi \sim Bin(n,p) \Rightarrow E\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = pn \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$= pn \sum_{y=0}^{n-1} C_{n-1}^{y} p^y (1-p)^{n-y} = pn$$

$\xi \sim Pois(\lambda) \Rightarrow E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$$= \lambda.$$

2) ξ — абс. непр. $\quad E\xi = \int_\Omega \xi\,dP = |x = \xi(\omega)| = \int_{\mathbb{R}} x\,dP_\xi = \int_{\mathbb{R}} x \cdot p_\xi(x)\,dx$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} I(x\in B)\,dP_\xi = \int_{\mathbb{R}} I(x\in B)\, p_\xi(x)\,dx\right)$$

$\xi \sim U([a,b]) \Rightarrow E\xi = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{b+a}{2}$

$\xi \sim exp(\lambda) \Rightarrow E\xi = \int_0^\infty x\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty -x\,d(e^{-\lambda x}) = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$

$$= \int_0^{\infty} -\frac{1}{\lambda} d(e^{-\lambda x}) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2) \Rightarrow E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$+ a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| x-a=y \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + a = a$$

Свойства:

1) Если $\xi = c \in \mathbb{R}$, то $E\xi = c$

2) Если $\xi \geq 0$, то $E\xi \geq 0$. Если, к тому же, $E\xi = 0$, то $P(\xi = 0) = 1$.

3) Если $\xi \geq \eta$, то $E\xi \geq E\eta$

4) Если $E\xi$ конечно, то $E|\xi| \geq |E\xi|$.

► $-|\xi| \leq \xi \leq |\xi| \overset{3)}{\Rightarrow} \underset{\underset{-E|\xi|}{\parallel}}{E(-|\xi|)} \leq E\xi \leq E(|\xi|) \iff |E\xi| \leq E|\xi|$ ◄

5) Если сущ. $E\xi$, то $\forall A \in \mathcal{F}$ сущ. $E\xi I_A$.

Если $|E\xi| < \infty$, то $\forall A \in \mathcal{F}$ $|E\xi I_A| < \infty$

► Сущ. $E\xi$ $\Rightarrow$ либо $E\xi^+ < \infty$, либо $E\xi^- < \infty$

Будем считать, что $E\xi^+ < \infty$. Тогда $0 \leq \xi^+ I_A \leq \xi^+$

По св-ву 3) $0 \leq E\xi^+ I_A \leq E\xi^+ \Rightarrow E(\xi I_A)^+ = E\xi^+ I_A < \infty$

Аналогично действуем, если $E\xi^- < \infty$ ◄

6) (линейность) $\forall c \in \mathbb{R}$ $Ec\xi = cE\xi$

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

7) Если $\forall A \in \mathcal{F}$ $E\xi I_A \leq E\eta I_A$, то $P(\xi \leq \eta) = 1$

(при условии что $|E\xi|, |E\eta| < \infty$)

► $B = \{\omega : \xi(\omega) > \eta(\omega)\} \in \mathcal{F}$ $\quad E\xi I_B \leq E\eta I_B$

$0 \geq E\xi I_B - E\eta I_B = E\underbrace{(\xi-\eta)}\, I_B \geq 0 \Rightarrow E(\xi-\eta) I_B = 0$

$P(\xi \leq \eta) = 1 \iff P((\xi-\eta) I_B = 0) = 1$ (св-во 2) $) \Leftarrow ((\xi-\eta) I_B \geq 0$ ◄

8) (Теорема Лебега о мажор. сходимости)

Пусть $\eta \geq 0$, $E\eta < \infty$, $|\xi_n| \leq \eta$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Тогда если $P(\xi_n \to \xi) = 1$, то $E\xi_n \to E\xi$, $E|\xi_n - \xi| \to 0$

$$\underbrace{|\xi_n - \xi|}_{|\xi_n - \xi| \leq 2\eta} \to 0 \quad \Downarrow$$

Теорема о замене переменных. ξ – случ. вел-на (вектор), $\varphi: \mathbb{R}^{(n)} \to \mathbb{R}$ – борелевская, $E\varphi(\xi)$ существует. Тогда $E\varphi(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{(n)}} \varphi(x)\, dP_\xi$.

$$\parallel$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x\, dP_{\varphi(\xi)} = |x = \varphi(y)| = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dP_\xi$$

▶ 1) $\varphi(x) = I(x \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$E\varphi(\xi) = E\, I(\xi \in B) = P(\xi \in B) = \int\limits_B dP_\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} I(x \in B)\, dP_\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dP_\xi$$

2) $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^n c_j I(x \in B_j)$, $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\varphi_j(x) = I(x \in B_j)$

$$E\varphi(\xi) = E\sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(\xi) = \sum_{j=1}^n c_j E\varphi_j(\xi) = \sum_{j=1}^n c_j \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)\, dP_\xi$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x)\, dP_\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dP_\xi$$

3) $\varphi \geq 0$.

$\exists\, \varphi_n \geq 0$ – простые: $\varphi_n \uparrow \varphi$. $(\Rightarrow \varphi_n(\xi) \uparrow \varphi(\xi))$

$$E\varphi(\xi) = \lim_{n\to\infty} E\varphi_n(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\, dP_\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dP_\xi$$

4) φ – произв. Тогда $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$

$\varphi^- = \max\{-\varphi, 0\}$

$$\varphi(\xi) = \underset{(\varphi(\xi))^+}{\underset{\parallel}{\varphi^+(\xi)}} - \underset{(\varphi(\xi))^-}{\underset{\parallel}{\varphi^-(\xi)}}$$

$$E\varphi(\xi) = E(\varphi(\xi))^+ - E(\varphi(\xi))^- = E\varphi^+(\xi) - E\varphi^-(\xi)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^+(x)\, dP_\xi - \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^-(x)\, dP_\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi^+ - \varphi^-)\, dP_\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\, dP_\xi$$ ◀

* $\xi_1, \dots, \xi_n \sim Bern(p)$ — независимые $\Rightarrow$ $(\xi_1 + \dots + \xi_n) \sim Bin(n, p)$

$$E(\xi_1 + \dots + \xi_n) = E\xi_1 + \dots + E\xi_n = np$$

* $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ $\quad \beta\xi + \alpha \sim ?$ $\quad \beta \neq 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$F_{\alpha+\xi\beta}(x) = P(\alpha + \xi\beta \le x) = |\beta>0| = P\left(\xi \le \frac{x-\alpha}{\beta}\right) = F_\xi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

$$|\beta<0| = P\left(\xi \geqslant \frac{x-\alpha}{\beta}\right) = 1 - F_\xi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

При $\beta > 0$ $\quad p_{\alpha+\beta\xi}(x) = \frac{1}{\beta} p_\xi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\beta^2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{x-\alpha}{\beta} - a\right)^2}{2\sigma^2}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\beta^2}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha-a\beta)^2}{2\sigma^2\beta^2}\right)$$

При $\beta < 0$ $\quad p_{\alpha+\beta\xi}(x) = -\frac{1}{\beta} p_\xi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$

$\Rightarrow \alpha + \xi\beta \sim \mathcal{N}(\alpha + a\beta, \sigma^2\beta^2)$

$$E(\alpha + \xi\beta) = \alpha + \beta E\xi = \alpha + a\beta$$

$\eta \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow \sqrt{\sigma^2}\,\eta + a \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Дисперсия

$D\xi = E\left((\xi - E\xi)^2\right)$ — дисперсия ξ

<u>Утв.</u> $D\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2$

► $E\left((\xi - E\xi)^2\right) = E\left(\xi^2 - 2\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2\right) =$

$= E(\xi^2) - 2E\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$ ◄

7

1) $\xi \sim Bern(p)$

$E\xi^2 = E\xi = p \Rightarrow D\xi = p - p^2$

2) $\xi \sim U(\{1, \dots, n\})$

$$E\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 P(\xi = i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2 - 1}{12}$$

3) $\xi \sim Pois(\lambda)$

$$E\xi^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i-1)!} = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i-1)!}$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i-2)!} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda$$

4) $\xi \sim \mathcal{U}([a,b])$

$$E\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot \frac{1}{b-a} I(a \le x \le b)\, dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

5) $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$E\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} -x/\sqrt{2\pi}\, d(e^{-x^2/2}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1$$

Свойства:

1) $D\xi \ge 0$

2) $D(c\xi) = c^2 D\xi$

$\blacktriangleright$ $D(c\xi) = E\left(c\xi - E(c\xi)\right)^2 = E(c\xi - cE\xi)^2 = E\left[c^2(\xi - E\xi)^2\right]$

$= c^2 E(\xi - E\xi)^2 = c^2 D\xi$ $\blacktriangleleft$

3) $Dc = 0$

4) $D(\xi + c) = D\xi$

$\blacktriangleright$ $D(\xi + c) = E(\xi + c - E(\xi + c))^2 = E(\xi - E\xi)^2 = D\xi$ $\blacktriangleleft$

5) $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n + \sum_{i \ne j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$, где

$\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = E\left[(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)\right]$.

$\blacktriangleright$ $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = E(\xi_1 + \ldots + \xi_n - E(\xi_1 + \ldots + \xi_n))^2 =$

$= E\left((\xi_1 - E\xi_1) + \ldots + (\xi_n - E\xi_n)\right)^2 = E\Big[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - E\xi_i)^2$

$+ \sum_{i \ne j} (\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)\Big] = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i + \sum_{i \ne j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$ $\blacktriangleleft$

Свойства ковариации

1) $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$

► $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E[\xi\eta - \xi\cdot E\eta - \eta\cdot E\xi + E\xi\cdot E\eta]$
$= E(\xi\eta) - E\eta\cdot \cancel{E\xi} - E\xi\cdot E\eta + \cancel{E\xi}\cdot E\eta = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$ ◄

2) $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \operatorname{cov}(\eta,\xi)$

3) $\operatorname{cov}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2, \eta) = a_1\operatorname{cov}(\xi_1,\eta) + a_2\operatorname{cov}(\xi_2,\eta)$

► $\operatorname{cov}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2, \eta) = E[(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 - E(a_1\xi_1 + a_2\xi_2))(\eta - E\eta)]$

$= E[(a_1\xi_1 - E(a_1\xi_1))(\eta - E\eta) + (a_2\xi_2 - E(a_2\xi_2))(\eta - E\eta)]$

$= a_1 E[(\xi_1 - E\xi_1)(\eta - E\eta)] + a_2 E[(\xi_2 - E\xi_2)(\eta - E\eta)]$

$= a_1\operatorname{cov}(\xi_1,\eta) + a_2\operatorname{cov}(\xi_2,\eta)$ ◄

Утв. Если ξ,η – независимы и все мат. ожидания конечны, то

$$E(\xi\eta) = E\xi E\eta.$$

► $E(\xi\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\,dP_{(\xi,\eta)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\,d(P_\xi \times P_\eta) \overset{\text{Т.Ф}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\,dP_\eta\right) dP_\xi$

$\varphi(x,y) = x\cdot y$

$= \int\limits_{\mathbb{R}} x\left[\int\limits_{\mathbb{R}} y\,dP_\eta\right] dP_\xi = E\eta\cdot E\xi$ ◄

Следствие 1) Если ξ,η – независимы, то $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$

2) Если $\xi_1,\dots,\xi_n$ – попарно независимы,

то $D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$.

Задача. Найти $D\xi$, если 1) $\xi \sim Bin(n,p)$, 2) $\xi \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$.

1) $\xi_1,\dots,\xi_n \sim Bern(p)$ – независимые

$\xi_1 + \dots + \xi_n \sim Bin(n,p)$

$D\xi = D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = nD\xi_1 = np(1-p)$

2) $\eta \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \sqrt{\sigma^2}\eta + a \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2) \Rightarrow D\xi = D(\sqrt{\sigma^2}\eta + a) = D(\sqrt{\sigma^2}\cdot\eta)$
$= \sigma^2 D\eta = \sigma^2.$

Неравенства

Нер-во Маркова Пусть $\xi \geq 0$, $a>0$, $E\xi<\infty$.
Тогда $P(\xi \geq a) \leq E\xi / a$.

► $\xi \geq \xi I(\xi \geq a) \geq a I(\xi \geq a)$
$\Rightarrow E\xi \geq E(aI(\xi\geq a)) = aP(\xi \geq a) \Rightarrow P(\xi\geq a) \leq E\xi/a$ ◄

Нер-во Чебышева. Пусть $E\xi^2<\infty$, $a>0$.
Тогда $P(|\xi - E\xi| \geq a) \leq \frac{D\xi}{a^2}$.

Задача Пусть $E|\xi|^\alpha < \infty$, $\alpha>\beta>0$. Доказать, что $E|\xi|^\beta<\infty$.

► $P(|\xi - E\xi| \geq a) = P((\xi-E\xi)^2 \geq a^2) \overset{M}{\leq} \frac{E(\xi-E\xi)^2}{a^2} = \frac{D\xi}{a^2}$ ◄

ЗБЧ (в форме Чебышева) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независ. одинаково распр. сл.вел,
$E\xi_1 = a$, $E\xi_1^2<\infty$. Тогда $\forall \varepsilon>0$ $P\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \to 0$, $n\to\infty$

► $P\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) = P(|\xi_1+\ldots+\xi_n - an| > \varepsilon n)$
$= P(|\xi_1+\ldots+\xi_n - E(\xi_1+\ldots+\xi_n)| > \varepsilon n)$
$\leq \frac{D(\xi_1+\ldots+\xi_n)}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{nD\xi_1}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{D\xi_1}{\varepsilon^2 n} \to 0$ ◄

Ослабим условие: Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – попарно независ. случ. вел-ны:
$\exists C>0$ $\forall i$ $D\xi_i \leq C$. Тогда $\forall \varepsilon>0$ $\forall \varphi(n) \uparrow \infty$ ($\varphi(n)\neq 0$)

$$P\left(\frac{|\xi_1+\ldots+\xi_n - E(\xi_1+\ldots+\xi_n)|}{\sqrt{n}\cdot\varphi(n)} > \varepsilon\right) \to 0$$

► $P(|\xi_1+\ldots+\xi_n - E(\xi_1+\ldots+\xi_n)| > \varepsilon\sqrt{n}\varphi(n)) \leq \frac{D(\xi_1+\ldots+\xi_n)}{\varepsilon^2 n \varphi^2(n)} \leq \frac{Cn}{\varepsilon^2 n \varphi(n)} = \frac{C}{\varepsilon^2\varphi(n)} \to 0$ ◄

Нер-во Коши-Буняковского ξ, η – случ. вел. $E\xi^2, E\eta^2<\infty$.
Тогда $E|\xi\eta| < \infty$ и $E|\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 E\eta^2}$.

► Пусть $E\xi^2 = 0$. Тогда $P(\xi=0)=1 \Rightarrow P(\xi\eta = 0) = 1 \Rightarrow E|\xi\eta| = 0$

Пусть $E\xi^2, E\eta^2 \neq 0$. Тогда $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{E\xi^2}}$, $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{E\eta^2}}$.

$$0 \leq (|\tilde{\xi}| - |\tilde{\eta}|)^2 = \tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2 - 2|\tilde{\xi}||\tilde{\eta}| \Rightarrow |\tilde{\xi}\tilde{\eta}| \leq \frac{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2}{2} = \frac{\xi^2/E\xi^2 + \eta^2/E\eta^2}{2}$$

$$\Rightarrow E|\tilde{\xi}\tilde{\eta}| \leq 1 \Rightarrow E\frac{|\xi\eta|}{\sqrt{E\xi^2}\sqrt{E\eta^2}} \leq 1 \Rightarrow E|\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 E\eta^2} \blacktriangleleft$$

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = E\left[\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}\right)\cdot\left(\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}}\right)\right] \qquad |\rho(\xi,\eta)| \leq 1 \text{ (К-Б)}$$

Нер-во Йенсена Пусть $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – выпуклая, $E|\xi| < \infty$.

Тогда $g(E\xi) \leq Eg(\xi)$

$\blacktriangleright$ $\forall x_0 \in \mathbb{R} \ \exists \lambda(x_0) \in \mathbb{R}: \ \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$

В частности, $g(\xi) \geq g(E\xi) + \lambda(E\xi)(\xi - E\xi)$

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi) + E(\lambda(E\xi)\cdot(\xi - E\xi))$$

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi) \blacktriangleleft$$

В частности, $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$, $E|\xi| \geq |E\xi|$.

$\boxed{8}$

Условное мат. ожидание

ξ – сл. величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ – σ-алгебра

$E(\xi|\mathcal{G})$ – сл. величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ такая, что

1) $\mathcal{G}$-измеримая $(\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{G})$

2) $\forall A \in \mathcal{G} \quad E(\xi I_A) = E(E(\xi|\mathcal{G})\cdot I_A)$

Ут.1 $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $B_i \in \mathcal{F}$, $\mathcal{G} = \sigma(\{B_1, B_2, \ldots\})$, $P(\xi \in B_i) > 0$

Тогда $E(\xi|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(\xi I(B_i))}{P(B_i)} I(\omega \in B_i)$

$\blacktriangleright$ $c_i = \frac{E(\xi I(B_i))}{P(B_i)}$. $\quad \eta := \sum_{i=1}^{\infty} c_i I(\omega \in B_i)$

1) $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \{\omega: \eta(\omega) \in B\} = \{\omega: \eta(\omega) \in B \cap \{c_1, c_2, \ldots\}\}$

$$= \bigcup_{c_i \in B} \{\omega: \eta(\omega) \in c_i\} = \bigcup_{c_i \in B} B_i \in \mathcal{G}$$

2) $A \in \mathcal{G} \Rightarrow A = \bigsqcup_j B_{i_j}$

$$E(\eta I_A) = E\sum_{i\geq 1}^{\infty} c_i I(\omega \in B_i)\, I(\omega \in \bigcup_j B_{i_j}) = E\sum_j c_{i_j} I(\omega \in B_{i_j})$$
$$= \sum_j \frac{E(\xi I(B_{i_j}))}{P(B_{i_j})} \cdot P(B_{i_j}) = \sum_j E(\xi I(B_{i_j})) = E(\xi \cdot \sum_j I(B_{i_j}))$$
$$= E(\xi I_A) \blacktriangleleft$$

Утв. 2 Если $E|\xi| < \infty$, то $E(\xi | \mathcal{G})$ существ. и единств. P-п.н.
(т.е. если η_1, η_2 удовлетв. опр. УМО, то $P(\eta_1 = \eta_2) = 1$)

$\blacktriangleright$ $\forall A \in \mathcal{G}$ положим $\nu(A) = E\xi I_A$

$\nu : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ $\quad \forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G} : A_i \cap A_j = \varnothing$
$\nu(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots) = \nu(A_1) + \nu(A_2) + \ldots$ $\Big| \Rightarrow \nu$ — заряд

заряд ν абс. непрер. относительно P, если из того, что $P(A) = 0$, следует что $\nu(A) = 0$

Теорема (Радона-Никодима) Если ν — абс. непрер. относительно P, то $\exists!$ P-п.н. функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{G}$-измеримая)
$\forall A \in \mathcal{G} \quad \nu(A) = \int_A f \, dP$

По т. Р-Н $\quad \exists\, \eta$ на $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ такая, что
$$\underset{E\xi I_A}{\overset{\|}{\nu(A)}} = \int_A \eta \, dP = E\eta I_A \quad \blacktriangleleft$$

$$E(\xi | \eta) := E(\xi | \mathcal{F}_\eta), \quad \mathcal{F}_\eta = \{\eta^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

Свойства:

1) Если ξ — $\mathcal{F}$-измерима, то $E(\xi|\mathcal{F}) = \xi$

2) Если $\mathcal{F}_\xi \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ ($\forall A_1 \in \mathcal{F}_\xi, A_2 \in \mathcal{G} \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$), то $E(\xi|\mathcal{G}) = E\xi$

► $E\xi$ – $\mathcal{G}$-измеримо, т.к. константа

Пусть $A \in \mathcal{G}$ $\quad E(\xi \cdot I_A) = E\xi \cdot E I_A = E\xi \cdot P(A) = E((E\xi) \cdot I_A)$ ◄

3) $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. Тогда

$$E(E(\xi|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(\xi|\mathcal{G}_1) = E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)$$

► $E(\xi|\mathcal{G}_1)$ – $\mathcal{G}_2$-измеримое $\Rightarrow$ по 1) $E(E(\xi|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(\xi|\mathcal{G}_1)$

Докажем, что $E(\underbrace{E(\xi|\mathcal{G}_2)}|\mathcal{G}_1) = E(\xi|\mathcal{G}_1)$

1. $E(\xi|\mathcal{G}_1)$ – $\mathcal{G}_1$-измеримое

2. $A \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ $\quad E(E(\xi|\mathcal{G}_2) I_A) = E\xi I_A = E(E(\xi|\mathcal{G}_1) I_A)$ ◄

4) $E(E(\xi|\mathcal{G})) = E\xi$ $\qquad \mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$

► $E(E(\xi|\mathcal{G})) \overset{2)}{=} E(E(\xi|\mathcal{G})|\mathcal{F}_0) \overset{3)}{=} E(\xi|\mathcal{F}_0) = E\xi$ ◄

5) Если $\xi_1 \le \xi_2$ п.н., то и $E(\xi_1|\mathcal{G}) \le E(\xi_2|\mathcal{G})$ п.н.

► По св-ву мат. ожидания достаточно проверить, что $\forall A \in \mathcal{G}$

$$\begin{array}{ccc} E(E(\xi_1|\mathcal{G}) I_A) & \le & E(E(\xi_2|\mathcal{G}) I_A) \\ \| & & \| \\ E(\xi_1 I_A) & \le & E(\xi_2 I_A) \end{array}, \text{ т.к. } \xi_1 I_A \le \xi_2 I_A \text{ п.н.}$$ ◄

6) $E(c_1\xi_1 + c_2\xi_2|\mathcal{G}) = c_1 E(\xi_1|\mathcal{G}) + c_2 E(\xi_2|\mathcal{G})$

► 1. $c_1 E(\xi_1|\mathcal{G}) + c_2 E(\xi_2|\mathcal{G})$ – $\mathcal{G}$-измер.

2. $A \in \mathcal{G}$ $\quad E([c_1 E(\xi_1|\mathcal{G}) + c_2 E(\xi_2|\mathcal{G})] I_A)$

$$= c_1 E(E(\xi_1|\mathcal{G}) I_A) + c_2 E(E(\xi_2|\mathcal{G}) I_A)$$

$$= c_1 E(\xi_1 I_A) + c_2 E(\xi_2 I_A) = E([c_1\xi_1 + c_2\xi_2] I_A)$$ ◄

7) $|E(\xi|\mathcal{G})| \le E(|\xi| \,|\, \mathcal{G})$

► $-|\xi| \le \xi \le |\xi| \overset{5)}{\Rightarrow} E(-|\xi| \,|\, \mathcal{G}) \le E(\xi|\mathcal{G}) \le E(|\xi| \,|\, \mathcal{G})$

$$\overset{6)}{=} -E(|\xi| \,|\, \mathcal{G}) \Rightarrow |E(\xi|\mathcal{G})| \le E(|\xi| \,|\, \mathcal{G})$$ ◄

8) Если $P(\xi_n \to \xi) = 1$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\xi_n| \le \eta$, $E\eta < \infty$, то
$$P\left(E(\xi_n | \mathcal{G}) \to E(\xi | \mathcal{G})\right) = 1$$

9) Если η — $\mathcal{G}$-измер., то $E(\xi\eta | \mathcal{G}) = \eta E(\xi | \mathcal{G})$

► 1. $\eta E(\xi | \mathcal{G})$ — $\mathcal{G}$-измер.

2. Надо доказать, что $\forall A \in \mathcal{G}$ $\quad E(\xi\eta I_A) = E(E(\xi|\mathcal{G})\eta I_A)$

– $\eta = I_B$, $B \in \mathcal{G}$ $\quad E(E(\xi|\mathcal{G})\eta I_A) = E(E(\xi|\mathcal{G}) I_{A\cap B})$
$$= E(\xi I_{A\cap B}) = E(\xi\eta I_A)$$

– $\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i I_{B_i}$, $B_i \in \mathcal{G}$ $\Rightarrow E(E(\xi|\mathcal{G})\eta I_A) =$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i E(E(\xi|\mathcal{G}) I_{B_i} I_A) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(\xi I_{B_i} I_A) = E(\xi\eta I_A).$$

– η — произв., $\eta_n \to \eta$: η_n — простые, $|\eta_n| \le |\eta|$
$$E(E(\xi|\mathcal{G})\eta I_A) \overset{\text{т.Л.}}{=} \lim_{n\to\infty} E(E(\xi|\mathcal{G})\eta_n I_A)$$
$$= \lim_{n\to\infty} E(\xi\eta_n I_A) \overset{\text{т.Л.}}{=} E(\xi\eta I_A) \text{ ◄}$$

$\boxed{9}$

Пусть η — дискретная со значениями $y_1, y_2, \dots$
$$E(\xi|\eta) = E(\xi|\mathcal{F}_\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \boxed{\frac{E\xi I(\eta = y_i)}{P(\eta = y_i)}} \cdot I(\eta = y_i)$$

Положим $E(\xi | \eta = y_i) = \dfrac{E\xi I(\eta = y_i)}{P(\eta = y_i)} \Rightarrow E(\xi|\eta) = \sum E(\xi|\eta = y_i) I(\eta = y_i)$

В частности, если ξ тоже дискретна, то $E(\xi|\eta = y_i) = \sum\limits_{x} x P(\xi = x | \eta = y_i)$

Условное распределение

$\varphi(y) = E(\xi | \eta = y)$ — борелевская ф-я $\mathbb{R}^{(n)} \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
$$E\xi I(\eta \in B) = \int_B \varphi(y)\, dP_\eta$$

<u>Утв1</u> $E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$, где $\varphi(y) = E(\xi|\eta = y)$

► 1) $\varphi(\eta)$ — $\mathcal{F}_\eta$ — измеримая

2) $\forall A \in \mathcal{F}_\eta$ $\quad E\xi I_A \overset{?}{=} E\varphi(\eta) I_A$ $\qquad \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = \eta^{-1}(B)$

$E\varphi(\eta) I_A = E\varphi(\eta) I(\eta\in B) = \int\limits_B \varphi(y)\, dP_\eta = E\xi I(\eta \in B) = E\xi I_A$ ◀

$P_\xi(B|\eta=y) = E(I(\xi\in B)|\eta=y)$ – условное распределение

Если $\exists\ p_{\xi|\eta}(x|y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P_\xi(B|\eta=y) = \int\limits_B p_{\xi|\eta}(x|y)\,dx, \text{ то}$$

$p_{\xi|\eta}$ – условная плотность.

Ут. 2. Пусть (ξ,η) – абс. непрер. с плотностью $p_{(\xi,\eta)}(x,y)$. Тогда сущ. условная плотность распр-я $P_\xi(B|\eta=y)$ и она равна

$$p_{\xi|\eta}(x|y) = \varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{p_{(\xi,\eta)}(x,y)}{p_\eta(y)}, & p_\eta(y)\neq 0, \\ 0, & p_\eta(y) = 0. \end{cases}$$

► Нужно доказать, что $P_\xi(B|\eta=y) = \int\limits_B \varphi(x,y)\,dx$.

По т. Фубини $\int\limits_B p_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dx$ – борелевская $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\int_B p_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dx}{p_\eta(y)}}$ – борелевская

Осталось проверить, что $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$E\, I(\xi\in B)\, I(\eta\in A) = \int\limits_A \left(\int\limits_B \varphi(x,y)\,dx\right) dP_\eta$$

$$E I(\xi\in B) I(\eta\in A) = P(\xi\in B, \eta\in A) = \int\limits_A\left(\int\limits_B p_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dx\right)dy =$$

$\boxed{\Sigma = \{y : p_\eta(y) = 0\}}$

$$= \int\limits_{A\setminus\Sigma}\left(\int\limits_B p_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_{A\setminus\Sigma} p_\eta(y)\left(\int\limits_B \frac{p_{(\xi,\eta)}(x,y)}{p_\eta(y)}\,dx\right)dy =$$

$$= \int\limits_{A\setminus\Sigma} p_\eta(y)\left(\int\limits_B \varphi(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_A p_\eta(y)\left(\int\limits_B \varphi(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_A\left(\int\limits_B \varphi(x,y)\,dx\right)dP_\eta \text{ ◀}$$

Ут. 3 Пусть $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – борелевская, $E|f(\xi)|<\infty$, существует $p_{\xi|\eta}$.
Тогда $E(f(\xi)|\eta=y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, p_{(\xi|\eta)}(x|y)\,dx$.

► 1) Пусть $f = I_B$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Тогда $E(f(\xi)|\eta=y) = E(I(\xi\in B)|\eta=y) = P_\xi(B|\eta=y)$
$$= \int_B p_{\xi|\eta}(x|y)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, p_{\xi|\eta}(x|y)dx.$$

2) Пусть $f = c_1 I_{B_1} + \ldots + c_n I_{B_n}$, $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - непересек.

Тогда $E(f(\xi)|\eta=y) = E(c_1 I(\xi\in B_1) + \ldots + c_n I(\xi\in B_n)|\eta=y)$
$$= c_1 E(I(\xi\in B_1)|\eta=y) + \ldots + c_n E(I(\xi\in B_n)|\eta=y) =$$
$$= c_1 \int_{\mathbb{R}} I(x\in B_1)\, p_{\xi|\eta}(x|y)dx + \ldots + c_n \int_{\mathbb{R}} I(x\in B_n)\, p_{\xi|\eta}(x|y)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, p_{\xi|\eta}(x|y)\,dx.$$

3) f - произв. $f_n \to f$ - простые, $|f_n| \le |f|$

Уже доказано, что $E(f_n(\xi)|\eta=y) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, p_{\xi|\eta}(x|y)dx \ \forall n$

По св-ву 8 $P_\eta\big(E(f_n(\xi)|\eta=y) \to E(f(\xi)|\eta=y)\big) = 1$

По т. Лебега о мажорир. сходимость $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, p_{\xi|\eta}(x|y)dx$
$$\to \int_{\mathbb{R}} f(x)\, p_{\xi|\eta}(x|y)dx \quad \forall y$$

Сл-но, $E(f(\xi)|\eta=y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, p_{\xi|\eta}(x|y)\,dx$ ◀

Сходимости

1). $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, $n\to\infty$ (почти наверное / с вероятностью 1), если
$$P(\xi_n \to \xi) = 1$$

2) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $n\to\infty$ (по вероятности), если $\forall \varepsilon>0$ $P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)\to 0$

3) $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, $n\to\infty$, $p>0$ (в L_p), если $E|\xi_n-\xi|^p \to 0$

4) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $n\to\infty$ (слабая / по распределению), если $\forall f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - непрер. и огр. $Ef(\xi_n)\to Ef(\xi)$.

Теорема

$$\begin{matrix} \text{п.н.} \searrow & & \\ & P \Rightarrow d & \\ L_p \nearrow & & \end{matrix}$$

, никакие другие следствие не верны

1) п.н. $\Rightarrow$ P.

Пусть $P(\xi_n \to \xi) = 1$. $A = \{\omega;\ \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\} =$

$= \{\omega:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n\ \forall k \geq n\ \ |\xi_k - \xi| < \varepsilon\}$

$A_\varepsilon = \{\omega:\ \boxed{\exists n}\ \forall k \geq n\ |\xi_k - \xi| \leq \varepsilon\} \supset A \quad \Rightarrow P(A_\varepsilon) = 1$

$B_n = \{\omega:\ |\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\} \supset \widetilde{B}_n = \{\omega:\ \forall k \geq n\ \ |\xi_k - \xi| \leq \varepsilon\}$

$A_\varepsilon = \bigcup_n \widetilde{B}_n \quad \Rightarrow P(A_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(\widetilde{B}_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1$

$\Rightarrow P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0$

2) $L_p \Rightarrow P$.

Пусть $E|\xi_n - \xi|^p \to 0$. Тогда $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p > \varepsilon^p)$

$\leq \dfrac{E|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \to 0$

3) $P \Rightarrow d$.

Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \ P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0 \qquad |f| \leq C$

f — непр. огр. Надо доказать, что $Ef(\xi_n) \to Ef(\xi)$.

$\boxed{\exists n_1:\ P(|\xi| \geq n_1) < \frac{\varepsilon}{100C}}$ (1) Почему существует?

$\tilde{\xi}_n = I(|\xi| \leq n)\,\xi$. $\quad \tilde{\xi}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \tilde{\xi}_n \xrightarrow{P} \xi$

$P(|\xi| > n) = P(|\tilde{\xi}_n - \xi| > \frac{1}{2}) \to 0$

$\exists \delta > 0\ \ \forall x, y \in [-n_1 - \delta, n_1 + \delta],\ |x - y| < \delta, \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{100}$ (2)

$\exists n_2:\ \forall n \geq n_2\ \ P(|\xi_n - \xi| \geq \delta) < \frac{\varepsilon}{100C}$ (3)

$n \geq n_2$. Тогда $|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| = |E(f(\xi_n) - f(\xi))|$

$\leq E|f(\xi_n) - f(\xi)| = E|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot I(|\xi| > n_1)$

$+ E|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot I(|\xi| \leq n_1,\ |\xi_n - \xi| \geq \delta) +$

$+ E|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot I(|\xi| \leq n_1,\ |\xi_n - \xi| < \delta)$

$\leq 2C \cdot \frac{\varepsilon}{100C} + 2C \cdot \frac{\varepsilon}{100C} + \frac{\varepsilon}{100} = \frac{\varepsilon}{20}$

10

1) $d \not\Rightarrow P$

$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ -1, & 1/2 \end{cases}$ $\quad \xi = -\xi_1$

$P(|\xi - \xi_n| > 1) = 1 \Rightarrow$ нет сх-ти по вероятности

$F_{\xi_n} = F_\xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

2) P, п.н., $\cancel{L_p}$

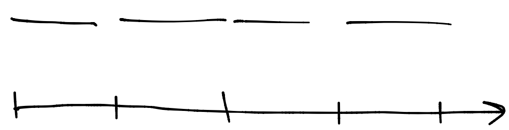
$\Omega = [0,1]$, $P = \mu$

$\xi_n = 2^n \cdot I[0, \frac{1}{n}]$

$\xi_n \xrightarrow{п.н.} 0 \qquad \{\omega : \xi_n(\omega) \to 0\} = (0,1]$

$E|\xi_n|^p = 2^{np} \cdot \frac{1}{n} \to \infty$

3) P, $\cancel{п.н.}$, L_p



$\Omega = [0,1)$, $P = \mu$

$\xi_1 = I[0,\frac{1}{2})$, $\xi_2 = I[\frac{1}{2}, 1)$

$\xi_3 = I[0,\frac{1}{4})$, $\xi_4 = I[\frac{1}{4},\frac{1}{2})$, $\xi_5 = I[\frac{1}{2},\frac{3}{4})$, $\xi_6 = I[\frac{3}{4}, 1)$

$E|\xi_n^p| = P(\xi_n = 1) \to 0$

$\forall \omega \in [0,1)$ $\exists$ беск. много n: $\xi_n(\omega) = 1$,
$\exists$ беск. много n: $\xi_n(\omega) = 0$ $\qquad \xi_n \not\xrightarrow{п.н.} 0$

4) P, $\cancel{п.н.}$, $\cancel{L_p}$

$\Omega = [0,1)$, $P = \mu$

$\xi_1 = 2I[0,\frac{1}{2})$, $\xi_2 = 4 \cdot I[\frac{1}{2}, 1)$,

$\xi_3 = 8 I[0,\frac{1}{4})$, ... $\xi_7 = 2^7 I[0,\frac{1}{8})$

$E|\xi_n^p| = 2^{np} \cdot P(\xi_n = 1) = 2^{np} \cdot \frac{1}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}} \to \infty$