09.02.2021 Механика

Семинар №5

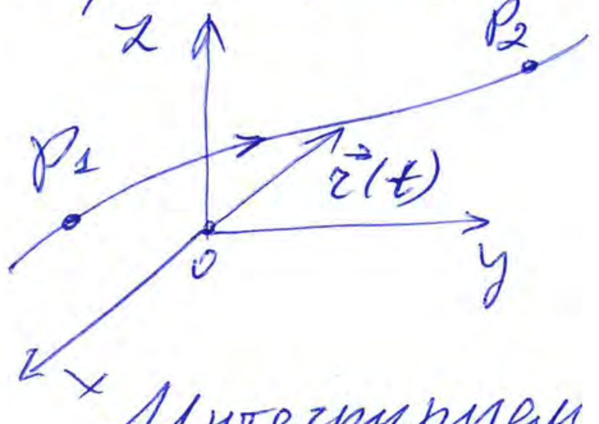
Напоминание о работе силы.

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ – уравнение Ньютона (2й закон).

Умножаем скалярно на $\dot{\vec{r}}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}\right) = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}$$

Пусть частица движется по параметризованной кривой $\vec{r}(t)$ из



положение P_1 в момент $t=t_1$ до положения P_2 в момент $t=t_2$.

Интегрируем по траектории от P_1 до P_2.

$$\underbrace{\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}}_{E_{кин}}\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}\,dt$$

$$E_{кин}(t_2) - E_{кин}(t_1) = \int_{P_1}^{P_2}\vec{F}\,d\vec{r}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\, d\vec{r} \overset{def}{=} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(r)\,\dot{\vec{r}}\, dt$$ — работа силы $\vec{F}$ вдоль траектории.

Если $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ (потенциальная сила)

то $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(\vec{\nabla} U \cdot d\vec{r}) = -dU$

и работа легко вычисляется:

$$A_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_{P_1}^{P_2} dU = U(P_1) - U(P_2)$$

Итог: $$\boxed{A_{P_1 \to P_2} = U(P_1) - U(P_2)}$$

$\Rightarrow$ из $E_{кин}(P_2) - E_{кин}(P_1) = A_{P_1 \to P_2} = U(P_1) - U(P_2)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_{кин}(P_2) \underline{+} U(P_2) = E_{кин}(P_1) + U(P_1)}$$

закон сохр. мех. энергии

$\boxed{\text{Зам}}$ Знак минус в $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ привел к сумме $E_{кин}$ и U в законе сохранения.

Итак, важно распознавать потенциальность силы.

<u>Необходимые</u> условие: равенство смешанных производных:

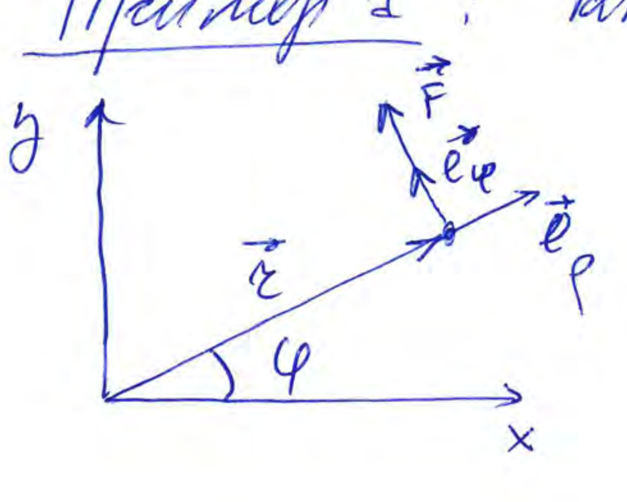
$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ в $\mathbb{R}^3$:

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} \end{cases}$$

Если F_x, F_y и F_z дифференцируемы в <u>односвязной</u> области $\mathbb{R}^3$, то по лемме Пуанкаре условие $(*)$ и достаточно для существования потенциальной функции $U(x, y, z)$.

Рассмотрим пример, когда этого <u>недостаточно</u>.

<u>Пример 1</u>: Тангенциальная сила.



$\vec{F} = f(x, y)\,\vec{e}_\varphi$

f – $\forall$ гладкая функция.

$$\begin{cases} \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \end{cases}$$ — орты полярной системы координат.

Для каких f тангенциальная сила $\vec{F} = f\vec{e}_\varphi$ потенциальна?

В $\mathbb{R}^2$ есть одно необходимое условие: $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$, $F_x = -f(x,y)\sin\varphi$, $F_y = f(x,y)\cos\varphi$.

Учитывая $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$,

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

получаем такое равенство:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{\rho} f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho} f(x,y)\right)$$

$$-\frac{f}{\rho} + \frac{y^2}{\rho^3} f - \frac{y}{\rho}\partial_y f = \frac{f}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3} f + \frac{x}{\rho}\partial_x f$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho},\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}\right)$$

$$\boxed{\left(y\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial x}\right) f = -f}$$ — условие на f.

Изучим оператор $x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$

в полярных координатах

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\varphi=\frac{x}{\rho},\quad \frac{\partial y}{\partial\rho}=\frac{y}{\rho}$$

$\Rightarrow$ по "цепному правилу":

$$\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}}$$

При действии на ~~одно~~ однородные полиномы от x и y оператор $x\partial_x+y\partial_y$ "вычисляет" степень этого полинома:

$$(x\partial_x+y\partial_y)\,x^m y^n=(m+n)\,x^m y^n$$

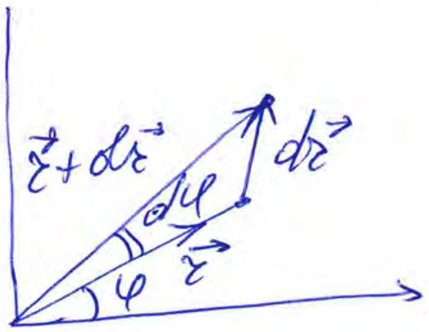
То же верно и для $\rho\frac{\partial}{\partial\rho}$:

$$\rho\,\partial_\rho\,\rho^k=\underline{k}\,\rho^k$$

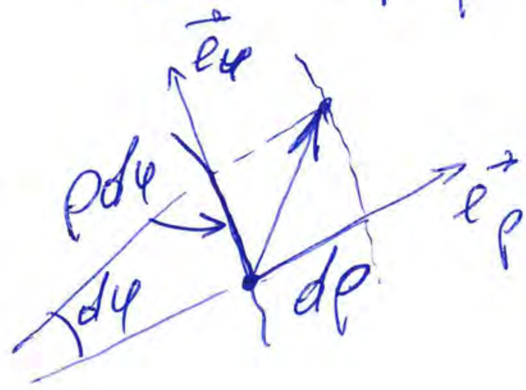
$$\Rightarrow (x\partial_x+y\partial_y)f=\underline{\rho\frac{\partial}{\partial\rho}f}=-f \Rightarrow f=\frac{\Phi(\varphi)}{\rho},$$

где $\Phi(\varphi)$ — произвольная дифф. функция.

Получим этот вид $f(x,y)$ сразу в полярных координатах.



$$d\vec{r} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi \;;$$



$$\Downarrow$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi$ — сила в полярных координатах

$$(\vec{F}\cdot d\vec{r}) = (F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi,\; d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi) =$$
$$= F_\rho\, d\rho + F_\varphi\, \rho\, d\varphi$$

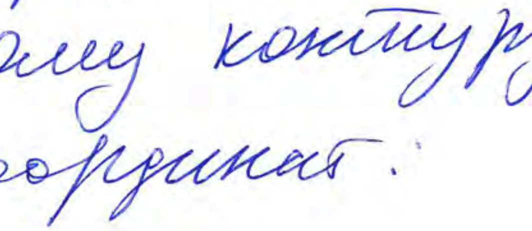
В нашем примере $F_\rho = 0$ $F_\varphi = f$

Итак: $(\vec{F}\cdot d\vec{r}) = \rho f\, d\varphi$

Если хотим, чтобы это было полным дифференциалом $\Rightarrow$ $\rho f = \Phi(\varphi)$ нужно требовать.

Получим ответ в <u>полярных</u> координатах, которые не вырождаются в $\mathbb{R}^2/0$, т.к. Якобиан $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = r$ — обращается в 0 в начале координат. Лемма Пуанкаре работает в области, <u>не содержащей</u> начала координат.

Если мы хотим потенциальности во <u>всей</u> плоскости $\mathbb{R}^2$, надо потребовать 0 работы по $\forall$ замкнутому контуру вокруг начала координат. Достаточно рассмотреть <u>окружность</u> $\gamma_0 : \begin{cases} \rho = 1. \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases}$

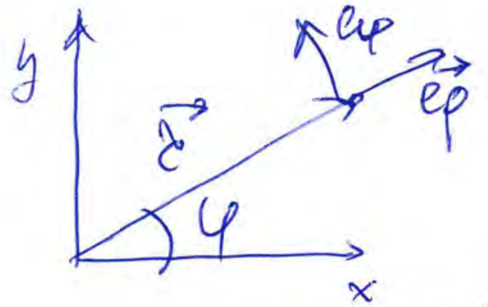


$$A_{\gamma_0} = \int\limits_{\gamma_0} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\Phi(\varphi)}{\rho} \rho \Big|_{\rho=1} d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \Phi(\varphi)\, d\varphi = 0$$

Это дополнительное условие на $\Phi(\varphi)$, обеспечивающее потенциальность тангенциальной силы. Кроме того, $\Phi(\varphi)$ должна быть 2π периодической, чтобы $\vec{F}$ было гладким векторным полем на $\mathbb{R}^2$.

Потренируемся теперь в написании кинетической и потенциальной энергии в криволинейных координатах. Кроме того, получим условие потенциальности в полярных (цилиндрических) и сферических координатах.

Полярные координаты в $\mathbb{R}^2$



$\rho = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$

Это разбиралось на лекциях (лекция 1, пример 1)

$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

Таким образом, кинетическая =9= энергия:

$$T_{кин} = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right)$$

Для силы $\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi$

получим 1-форму работы (ср. =6=):

$$\vec{F}d\vec{r} = F_\rho d\rho + \rho F_\varphi d\varphi$$

Сила $\vec{F}$ потенциальна, если $\vec{F}d\vec{r} = -dU$

В полярных координатах $U = U(\rho, \varphi)$

$$\Rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial U}{\partial \varphi}d\varphi.$$

Итак: $\vec{F}d\vec{r} = -dU \Rightarrow \begin{cases} F_\rho = -\dfrac{\partial U}{\partial \rho} \\ \rho F_\varphi = -\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} \end{cases}$

Обратите внимание на отличие от декартовых координат в последнем уравнении: $F_\varphi \neq -\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}$!,

есть дополнительный множитель ρ:

$$\underline{\rho} F_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Это отражается на формуле для оператора градиента:

$$du = (\vec{\nabla} u \cdot d\vec{r})$$

Определение градиента.

В <u>декартовых</u> координатах

$$\vec{\nabla} = \nabla_x \vec{e_x} + \nabla_y \vec{e_y} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y},$$

т. е. $\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}$.

В <u>полярных</u> координатах:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \nabla_\rho + \vec{e}_\varphi \nabla_\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{\nabla} u \cdot d\vec{r}) = \nabla_\rho u\, d\rho + (\nabla_\varphi u) \rho\, d\varphi = \Big\} \Rightarrow$$

$$= du = \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \nabla_\rho \\ \nabla_\varphi \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \partial/\partial\rho \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}}}$$

Видно, что из $F_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $F_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ $\Rightarrow \underline{\underline{\vec{F} = -\vec{\nabla} u}}$. Всё согласовано.

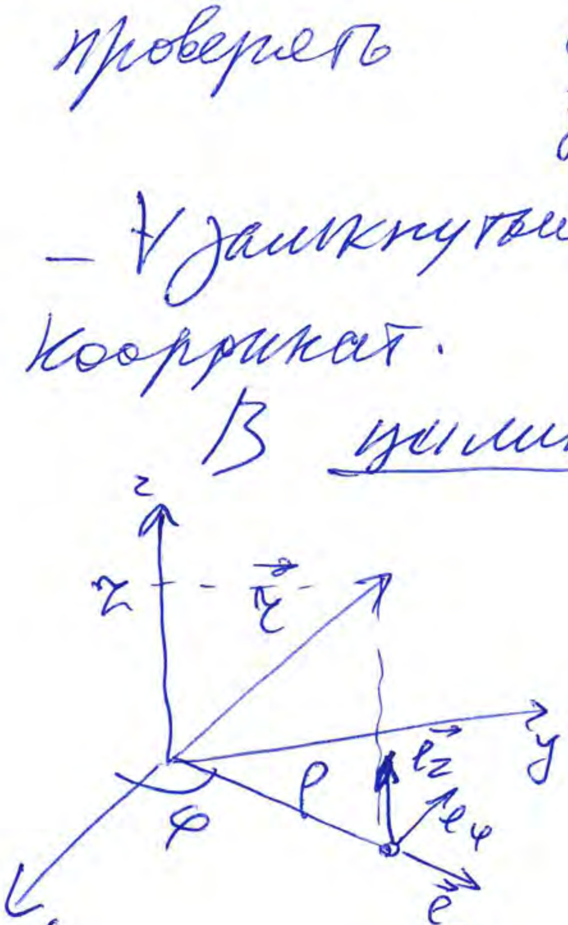
Условие потенциальности (необходимое) следует из равенства смешанных производных:

$$F_\rho = -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \rho F_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\underline{\underline{\rho}} F_\varphi\right)}$$

Этого, вообще говоря, недостаточно (из-за вырождения полярных координат в нуле). Нужно ещё проверить $\oint_{\gamma_0} (\vec F d\vec r) = 0$, где γ_0 – $\forall$ замкнутый контур вокруг начала координат.

В цилиндрических координатах



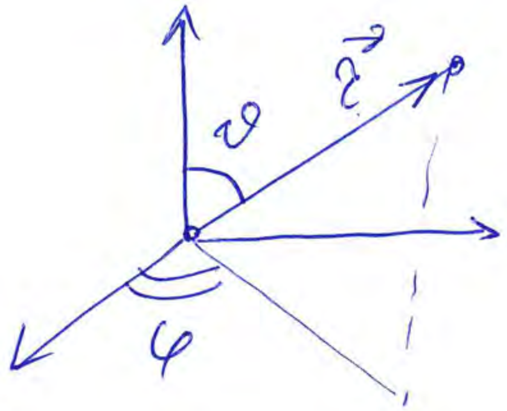
$$\vec F = F_\rho \vec e_\rho + F_\varphi \vec e_\varphi + F_z \vec e_z$$

$$\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial (\rho F_\varphi)}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial F_\rho}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial (\rho F_\varphi)}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial \varphi}$$

Сферические координаты



$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow T_{кин} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{F} &= F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi \\ d\vec{r} &= dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_r\,dr + rF_\theta\,d\theta + F_\varphi r\sin\theta\,d\varphi}$$

Условие потенциальности $\vec{F}d\vec{r} = -dU$,

$$dU(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi}d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \quad F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta}}$$

Таким образом из $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ получаем градиент в сферических координатах:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \nabla_r \\ \nabla_\theta \\ \nabla_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Необх. условия потенциальности:

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) \qquad \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta F_\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(r F_\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta F_\varphi) \end{gathered}}$$

Это следствие равенства трёх смешанных производных 2го порядка от функции $U(r, \theta, \varphi)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial \theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta\,\partial r} \quad \text{и т. д.}$$

Сферические координаты вырождаются на оси Oz (якобиан $r^2\sin\theta$)

=> надо ещё проверять равенство 0 работы по $\forall$ замкн. контуру вокруг оси Oz.