Механика 2021

Контрольная работа 4

25 мая 2021г.

---

1. Две частицы с радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ и импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, соответственно, двигаются в пространстве $\mathbb{R}^3$. Считая набор координат $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ каноническим в фазовом пространстве данной системы,[1] вычислите следующие скобки Пуассона:

а) $\{(\vec{r}_1, \vec{p}_2), (\vec{r}_2, \vec{p}_1)\}$, б) $\{(\vec{r}_1, \vec{p}_2), [\vec{r}_2 \times p_1]\}$.

Здесь записи $(\vec{A}, \vec{B})$, $[\vec{A} \times \vec{B}]$ обозначают скалярное и векторное произведения векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$, соответственно.

2. Лагранжиан частицы массы m и заряда e, движущейся в пространстве $\mathbb{R}^3$ в постоянном и однородном магнитном поле $\vec{B}$, может быть записан в виде

$$L = \frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2} + \frac{e}{2c}\,(\vec{B}\,[\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\,]),$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор частицы в некоторой инерциальной системе координат, $\dot{\vec{r}} := d\,\vec{r}/dt$ — её скорость, а константа c имеет смысл скорости света в вакууме.

а) Получите выражение для обобщённого импульса и постройте гамильтониан этой системы.

б) Напишите гамильтоновы уравнения движения для компонент векторов координат r_i и импульса p_i частицы.

в) Вычислите скобки Пуассона следующих величин:

$$\{r_i, \dot{r}_j\}, \qquad \{p_i, \dot{p}_j\}.$$

3. Частица массы m движется в пространстве $\mathbb{R}^3$ в однородном и постоянном поле тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}$.

а) Напишите гамильтониан этой системы и решите гамильтоновы уравнения движения с начальными данными

$$\vec{r}(0) = \vec{r}, \qquad \vec{p}(0) = \vec{p}.$$

б) Считая компоненты векторов начальных данных канонически сопряжёнными величинами

$$\{r_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{r_i, r_j\} = \{p_i, p_j\} = 0,$$

докажите, что компоненты векторов $\vec{r}(t)$ и $\vec{p}(t)$ — решений гамильтоновых уравнений движения с начальными данными $\vec{r}$ и $\vec{p}$ — тоже канонически сопряжённые величины в любой момент времени t, и найдите производящую функцию $F_1(\vec{r}, \vec{r}(t))$ соответствующего канонического преобразования $\{\vec{r}; \vec{p}\} \to \{\vec{r}(t); \vec{p}(t)\}$.

4. От канонически сопряжённых переменных q и p совершён переход к новым переменным Q и P согласно формулам:

$$Q = p^{\alpha} e^{\beta q}, \qquad P = q^{2\alpha - \beta} + \ln p + e^{-q},$$

где α и β — вещественные параметры.

а) При каких значениях параметров α и β данное преобразование будет каноническим?

б) Для этих выделенных значений параметров найдите производящую функцию канонического преобразования вида $\Phi(p, Q)$.

---

[1] То есть, $\{(\vec{r}_a)_i, (\vec{p}_b)_j\} = \delta_{ab}\delta_{ij}$, $\{(\vec{r}_a)_i, (\vec{r}_b)_j\} = \{(\vec{p}_a)_i, (\vec{p}_b)_j\} = 0 \ \ \forall a, b = 1, 2, \ \ \forall i, j = 1, 2, 3.$