Лекция 7. Теорема Коши

Теория функций комплексного переменного

Теорема Коши: версия 1

Теорема 5.1 (теорема Коши, версия 1). *Пусть* $U \subset \mathbb{C}$ — *открытое подмножество,* $f\colon U \to \mathbb{C}$ — *голоморфная функция и* $\Delta \subset U$ — *треугольник. Тогда* $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

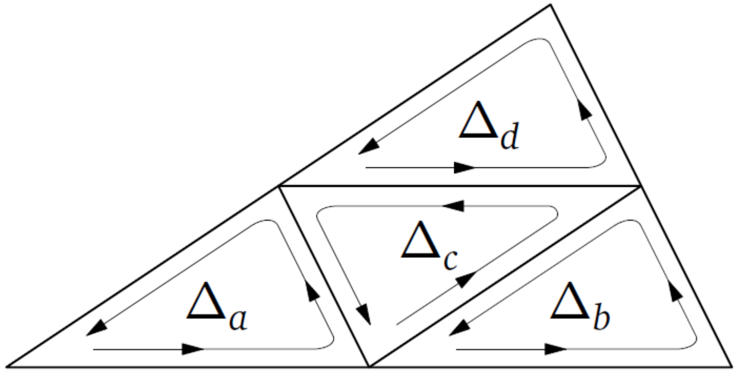
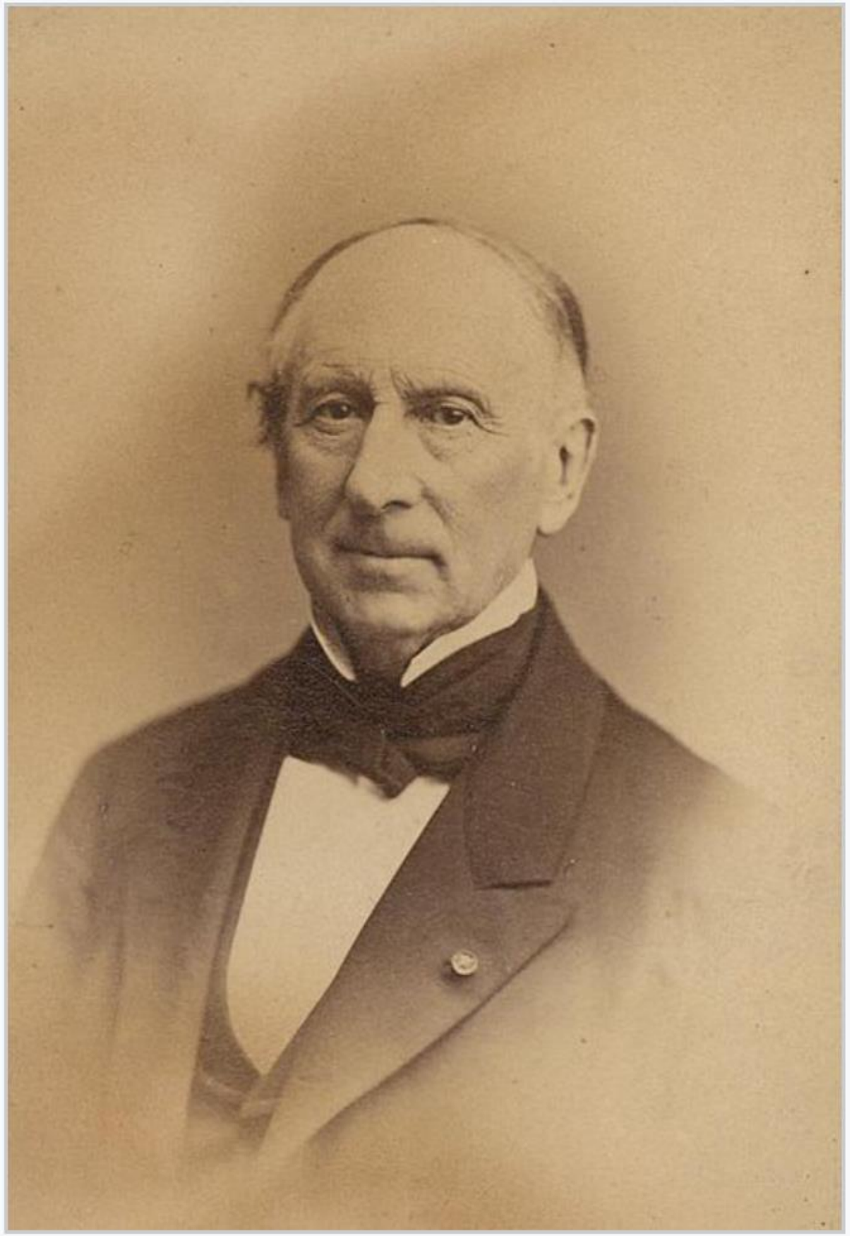


Рис. 5.1. Если границы всех треугольников ориентированы одинаково, то интеграл по большому треугольнику равен сумме интегралов по четырем маленьким

Огюстен Луи Коши (1789 – 1857)

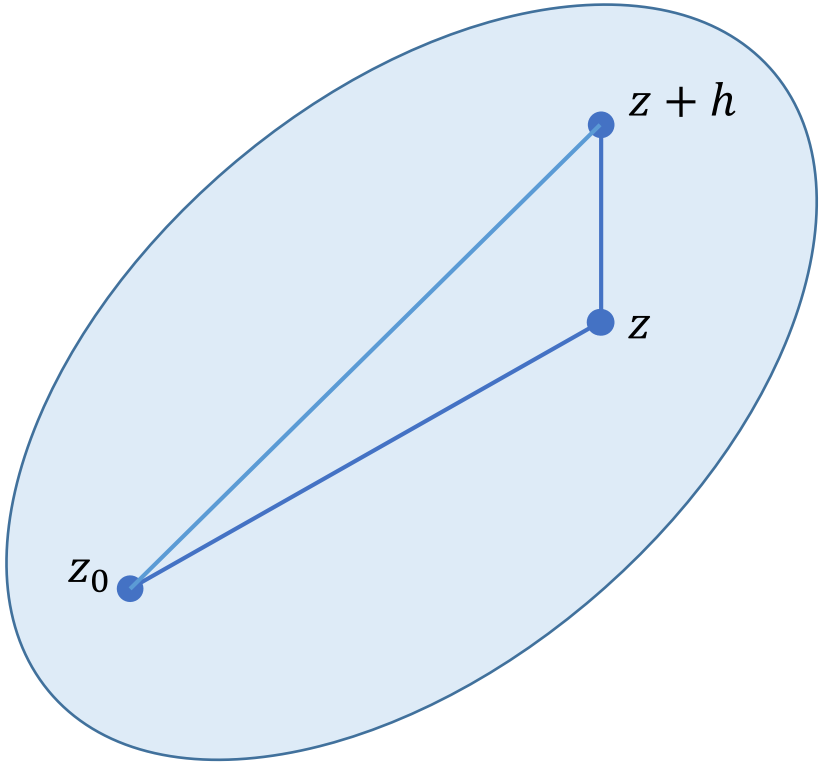
- французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.
- написал свыше 800 работ, полное собрание его сочинений содержит 27 томов. Его работы относятся к различным областям математики (преимущественно к математическому анализу) и математической физики.



Первообразная

Предложение 5.2. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — выпуклое открытое множество и $f: U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Тогда для f существует первообразная, т. е. функция $F: U \to \mathbb{C}$, для которой $F'(a) = f(a)$ при всех $a \in \mathbb{C}$.*

$$F(z) = \int_{[z_0;z]} f(t)\,dt$$



$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(t)dt$$

$$= f(z)h + o(h)$$

Теорема Коши, версия 2

Теорема 5.3 (теорема Коши, версия 2). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — выпуклое открытое множество и $f : U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Тогда*:

(а) *интеграл от f по любому замкнутому пути, лежащему в U, равен нулю;*

(б) *если $p, q \in U$ — две точки, а γ_1 и γ_2 — два пути в U, соединяющие точки p и q, то интегралы от функции f по γ_1 и γ_2 совпадают.*

Доказательство. По предложению 5.2 функция f имеет первообразную в U; теперь все вытекает из следствия 4.11 и предложения 4.10. $\square$

Теорема Коши, версия 3

«Теорема» 5.4 (теорема Коши, версия 3). *Предположим, что* $f : U \to \mathbb{C}$ *— голоморфная функция на открытом множестве* $U \subset \mathbb{C}$.

(а) *Пусть* $\gamma_1, \gamma_2 \subset U$ *— замкнутые несамопересекающиеся и не пересекающиеся друг с другом кривые, ориентированные положительно (против часовой стрелки). Если часть плоскости, заключенная между* γ_1 *и* γ_2*, целиком содержится в* U*, то* $\int\limits_{\gamma_1} f\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f\,dz$.

(б) *Пусть* γ_1 *и* γ_2 *— две кривые в* U*, соединяющие точки* $p \in U$ *и* $q \in U$*. Если часть плоскости, заключенная между* γ_1 *и* γ_2*, целиком содержится в* U*, то* $\int\limits_{\gamma_1} f\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f\,dz$.

«Доказательство» версии 3

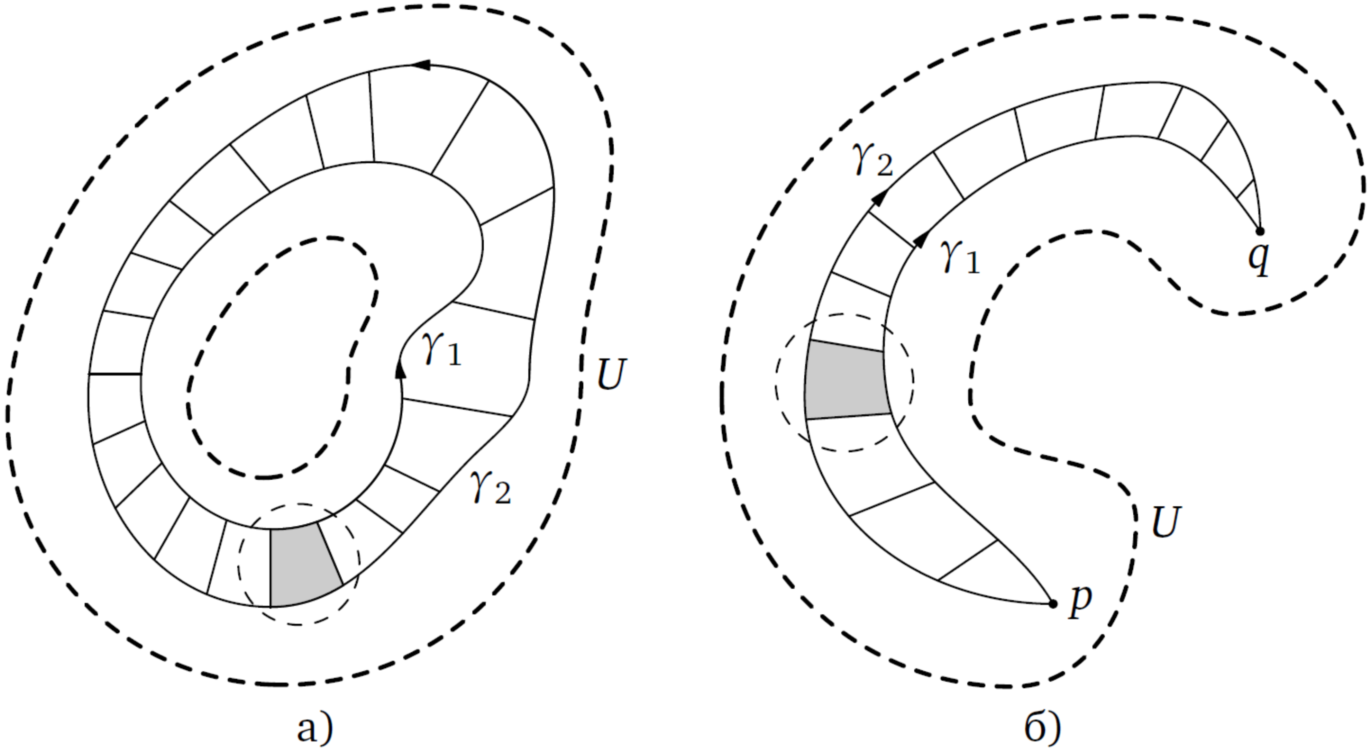
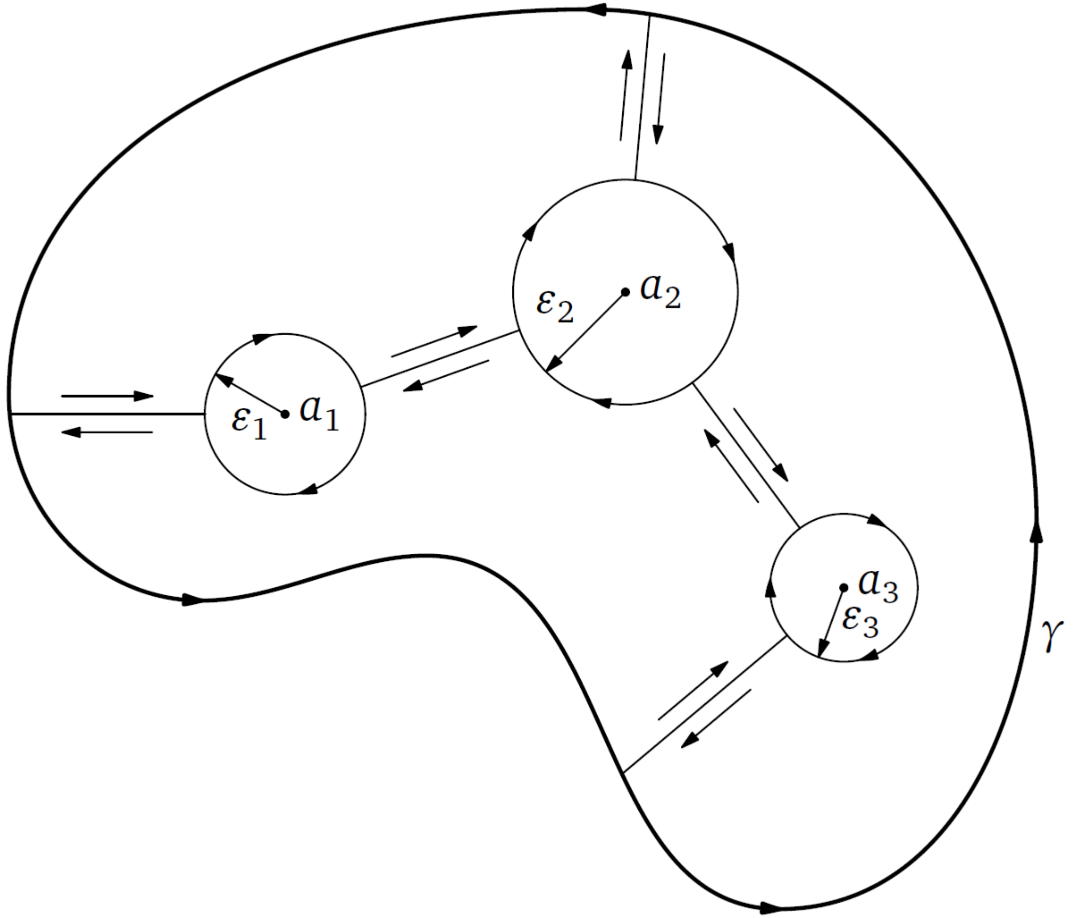
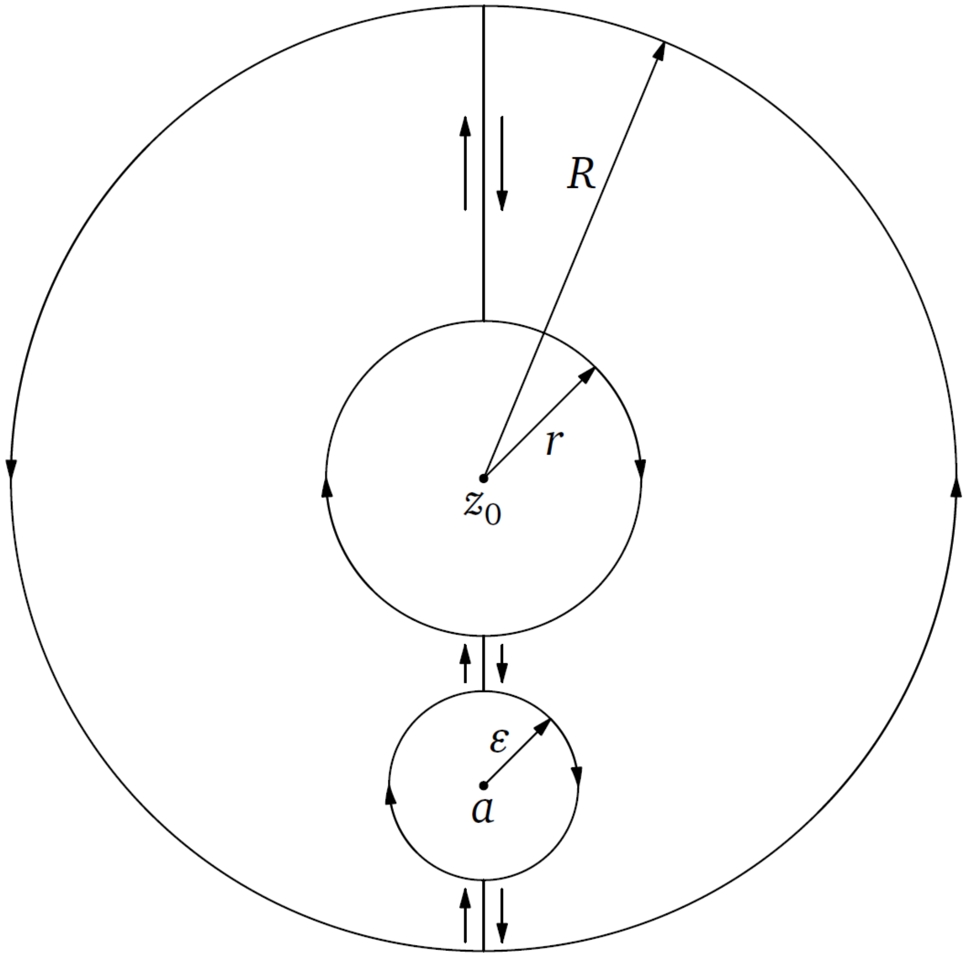


Рис. 5.2. (а) Замкнутые кривые γ_1 и γ_2 ориентированы положительно; (б) кривые γ_1 и γ_2 соединяют точки p и q. Жирным пунктиром обозначена граница области U. Часть плоскости между γ_1 и γ_2 разбита отрезками на «малые» части; одна из этих частей заштрихована, и изображен содержащий ее круг, который, в свою очередь, содержится в U.

Примеры применения версии 3





Теорема Коши vs формула Стокса (Грина)

- Пусть U – гладкое многообразие с краем, а ω – дифференциальная C^1-форма на U. Формула Стокса:
$$\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega\,.$$
- Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$. Тогда формула Стокса = формула Грина:
$$\int_{\partial U} A(x,y)dx + B(x,y)dy = \int_U \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$
- В классическом изложении требуется, чтобы $A, B \in C^1(\overline{U})$.
- На самом деле достаточно: $A, B \in D^1(\overline{U}),\ B_x - A_y \in C^1(\overline{U})$.

Теорема Коши vs формула Стокса (Грина)

- $f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy)$.
- $d(fdz) = \left(-\left(v_x + u_y\right) + i\left(u_x - v_y\right)\right) dx \wedge dy$.
- В комплексных терминах $d(fdz) = -f_{\overline{z}}\,dz \wedge d\overline{z}$.
- Если f голоморфна, то $d(f(z)dz) = 0$ согласно условиям Коши-Римана.
- Таким образом, формулу Коши можно вывести из формулы Грина, но не из той версии формулы Грина, которую обычно приводят в курсе «гладких многообразий».

Формула Коши

Теорема 5.8 (формула Коши). *Пусть $\bar{U} \subset \mathbb{C}$ — часть комплексной плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой γ (кривая γ входит в $\bar{U}$); положим $\operatorname{Int}(\bar{U}) = U$. Если функция $f : \bar{U} \to \mathbb{C}$ непрерывна на $\bar{U}$ и голоморфна в U, то для всякого $a \in U$ выполнено равенство*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z - a}, \tag{5.6}$$

где кривая γ ориентирована в положительном направлении.

Идея доказательства. По теореме Коши, достаточно рассмотреть маленькую окружность с центром в точке a.

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Wolfram Mathematica
- https://wikipedia.org

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ