Линейная алгебра и геометрия
первое полугодие 1 курса
Коллоквиум

А.Л. Городенцев

20 октября 2019 г.

Содержание

1 Задачи для подготовки к коллоквиуму 1

1.1 1

Пусть аффинное преобразование из условия - $M(x) = \begin{pmatrix} M_{1\ 1} & M_{2\ 1} \\ M_{1\ 2} & M_{2\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Заметим, что для всех c_1, c_2, x_1, x_2 : $\begin{pmatrix} M_{1\ 1} & M_{2\ 1} \\ M_{1\ 2} & M_{2\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + c_1 \\ x_2 + c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{1\ 1} & M_{2\ 1} \\ M_{1\ 2} & M_{2\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix}$
то есть
$\begin{pmatrix} M_{1\ 1} * x_1 + M_{1\ 1} * c_1 + M_{2\ 1} * x_2 + M_{2\ 1} * c_2 + b_1 \\ M_{1\ 2} * x_1 + M_{1\ 2} * c_1 + M_{2\ 2} * x_2 + M_{2\ 2} * c_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{1\ 1} * x_1 + M_{2\ 1} * x_2 + b_1 + c_1 \\ M_{1\ 2} * x_1 + M_{2\ 2} * x_2 + b_2 + c_2 \end{pmatrix}$
откуда
1.$M_{1\ 1} * c_1 + M_{2\ 1} * c_2 = c_1$
2.$M_{1\ 2} * c_1 + M_{2\ 2} * c_2 = c_2$

Заметим, что (1.) выполнено для всех пар $(c_1; c_2)$, то есть и для пары $(1; 0)$, откуда $M_{1\ 1} = 1$. Поэтому $M_{2\ 1} = 0$.

Аналогично $M_{1\ 2} = 0; M_{2\ 2} = 1$. Заметим, что тогда $M(x) = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b_2 \end{pmatrix}$, то есть $M(x)$ - сдвиг, что очевидно коммутирует со всеми сдвигами.

1.2 2

Заметим, что можно выбрать такой базис, что одна из 3х прямых - $x_1 = 0$, вторая - $x_1 = 1$, тогда третья - $x_1 = \alpha$. Далее будем работать в этом базисе. Покажем, что нет преобразования переводящее $x_1 = 0- > x_1 = 0$, $x_1 = 1- > x_1 = 1$, $x_1 = \alpha- > x_1 = \beta$ Пусть есть такое аффинное преобразование $M(x) = \begin{pmatrix} M_{1\ 1} & M_{2\ 1} \\ M_{1\ 2} & M_{2\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. При этом точка вида $(0; y)- > (M_{2\ 1} * y + b_1; M_{2\ 2} * y + b_2)$, откуда $M_{2\ 1} * y + b_1 = 0$ для всех y, откуда $b_1 = 0, M_{2\ 1} = 0$. Аналогично $(1; y)- > (M_{1\ 1} + M_{2\ 1} * y + b_1; M_{1\ 2} + M_{2\ 2} * y + b_2)$, откуда $M_{1\ 1} = 1$. Поэтому точка вида $(q; w)- > (q; e)$, откуда следует, что прямая $x_1 = \alpha- > x_1 = \alpha$, откуда следует, что $M(x)$ не является "подхоящим"аффинным преобразованием, если $\beta \neq \alpha, \beta \neq 0, \beta \neq 1$.

1.3 3

$2x - y = 5 \quad x + 3y = 2$

Пусть $n_1 = (1; 2), n_2 = (3; -1)$. Тогда прямые задаются уравнениями:

$$l_1 : (n_1, x) = (n_1, (0; -5)) = -10 l_2 : (n_2, x) = (n_2, (2; 0)) = 6$$

Заметим, что множество точек, равноудалённых от прямых l_1 и l_2 :

$$|\frac{-10 - (n_1, a)}{|n_1|}| = |\frac{6 - (n_2, a)}{|n_2|}|$$
1. $(-10 - (n_1, a)) \cdot \sqrt{10} = +(6 - (n_2, a)) \cdot \sqrt{5}$
$$-(n_1, a) \cdot \sqrt{2} + (n_2, a) = 10\sqrt{2} + 6$$
$$((-\sqrt{2} + 3; -2\sqrt{2} - 1), a) = 10\sqrt{2} + 6$$
2. $(-10 - (n_1, a)) \cdot \sqrt{10} = -(6 - (n_2, a)) \cdot \sqrt{5}$
$$-(n_1, a) \cdot \sqrt{2} - (n_2, a) = 10\sqrt{2} - 6$$
$$((-\sqrt{2} - 3; -2\sqrt{2} + 1), a) = 10\sqrt{2} - 6$$

Откуда нормальные векторы биссектрисс: $(-\sqrt{2} + 3; -2\sqrt{2} - 1)$ и $(-\sqrt{2} - 3; -2\sqrt{2} + 1)$,
поэтому напрявляющие - $(2\sqrt{2} + 1; -\sqrt{2} + 3)$ и $(2\sqrt{2} - 1; -\sqrt{2} - 3)$

1.4 4

Заметим, что размерность любого подпространства меньше или равна размерности пространства, так как базис пространства является порождающим для подпространства. При этом все возможные мощности, меньшие или равные счётной - конечные или счётные (так как любое подмножество натуральных чисел либо конечно, либо можно в явном виде посчитать).
При этом несчётное множество линейно зависимо, так как иначе базис не может быть счётным.

1.5 5

Считаем, что вершины гиперкуба имеют координаты "0"или "1"в каждой из осей (не обязательно одновременно).
Заметим, что каждый куб можно задать уравнением вида (x, y, z, t), где ровно одно из чисел - константа, равная 0 или 1. (к примеру $(x, y, z, 0)$). Аналогично можно задать стену в кубе, зафиксировав одну из переменных, которые остались (к примеру $(x, y, 0, 0)$).
A)
Заметим, что противоложная дверь стены (x,y,0,0) для куба (x,y,z,0) : (x,y,1,0), то есть имеющую противоположную координату в соотв. оси. Аналогично это верно для всех стен во всех кубах. Теперь начнём путь: без огр общ считаем, что изначально мы в кубе (x,y,z,0) и вошли из стены (x,y,0,0), далее:

Стена	Куб	
$(x, y, 0, 0)$	$(x, y, z, 0)$	(начало)
$(x, y, 1, 0)$	$(x, y, 1, t)$	(x,y,1,0) в 2х кубах: (x,y,z,0) и (x,y,1,t). Из 1 куба Алиса пришла⇒ она вошла во 2
$(x, y, 1, 1)$	$(x, y, z, 1)$	(x,y,1,1) в 2х кубах: (x,y,z,1) и (x,y,1,t). Из 2 куба Алиса пришла⇒ она вошла в 1
$(x, y, 0, 1)$	$(x, y, 0, t)$	(x,y,0,1) в 2х кубах: (x,y,z,1) и (x,y,0,t). Из 1 куба Алиса пришла⇒ она вошла во 2
$(x, y, 0, 0)$	$(x, y, z, 0)$	(x,y,0,0) в 2х кубах: (x,y,z,0) и (x,y,0,t). Из 2 куба Алиса пришла⇒ она вошла в 1

откуда видно, что всего комнат – 4.
B)

1.6 6

Заметим, что если l параллельна П (это русская букова), то нет, не заметают, так как любая точка a из плоскости α, параллельной П и проходещей через l не может быть полученна, так как любая прямая, проходящая через a и точку на l лежит в плоскости α, что не лежит в плоскости П.
Заметим, что если же l не параллельна П, то есть существует пересечение l и П, то любая точка b может быть получена, так как рассмотрим плоскость, натянутую на b и l. Заметим, что она пересекает П хотя бы по прямой, откуда следует, что если на плоскости есть 2 прямые и все прямые, проходящие через пары точек на этих 2х прямых, замощают плоскость, то в трёхмерной задаче прямые через l и П замощают пространство. Заметим, что утверждение на плоскости выполнено, так как для любой точки можно выбрать прямую, не параллельную ни одной из 2х данных, тогда эта прямая пересекает 2 данные в каких то точках, откуда и следует, что для каждой точки можно указать прямую, проходящую через неё.

1.7 7

Центры треугольников имеют координаты $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0; 0)$ и $(0; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ соотв.
Тогда середина между этими центрами имеет координаты $X : (\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6})$
Заметим, что $Y : (\alpha; 0; 0; 0; 1-\alpha)$, $Z : (0; b; c; d; 0)$ (при b + c + d = 1). Откуда прямая XY не может проходить через Z, если $\alpha \neq 1-\alpha$, поэтому $\alpha = \frac{1}{2}$, при этом $Z = \beta * Y + (1-\beta) * X$, откуда $\beta * \frac{1}{2} = -(1-\beta) * \frac{1}{6} \Leftrightarrow \beta * \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
$Z : (0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 0)$. Из того, что $\beta = -\frac{1}{2}$ следует, что $\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{YZ} = 2 : 1$

1.8 8

Рассмотрим пространство α над $ABCD$, рассмотрим точку пересечения прямой EP с α. (пусть это точка E_1). Назовём такую операцию P-проекцией (которая была проведена с точкой E). Заметим, что P-проекция точки, лежащей на отрезке EA, лежит на прямой E_1A . Заметим, что в плоскости α можно выбрать такую прямую l, которая не будет пересекаться ни с одной из прямых пар точек A,B,C,D,E_1. Проведём через эту прямую l и P плоскость. Заметим, что она не пересекает ни одно "ребро так как это означает, что через

1.9 9

1.10 10

Докажем, что любой прямой ровно q точек: рассмотрим 2 различные точки a, b, проведём черех них прямую. Рассмотрим всевозможные произведения $v = \overrightarrow{ab}$ со всеми элементами из поля. Заметим, что получится q различных векторов, так как иначе $\alpha \cdot v = \beta \cdot v \Leftrightarrow v \cdot (\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Тогда все точки вида $\gamma \cdot v + a$ лежат на прямой ab, при этом все они различны и других нет, откуда и следует, что точек на прямой – q.
Тогда заметим, что всего прямых – $\frac{A(A-1)}{q(q-1)}$, где $A = q^n = |M|$ (M - аффинное пространство из условия), так

как каждая прямая однозначно задаётся парой точек, то каждая прямая была посчитана $q(q-1)$ раз.
Заметим, что треугольников – $\frac{A(A-1)(A-q)}{3!}$, так как каждый треугольник задаётся тремя точками общего положения, и каждая тройка точек была посчитана 3! раз.
Каждая плоскость содержит q^2 точек, так как каждая плоскость изоморфна 2-мерному пространству: каждая плоскость задаётся тремя неколлиниарными точками o, a, b, остальные задаются $o + \overrightarrow{oa} \cdot \alpha + \overrightarrow{ob} \cdot \beta$, при этом все точки различны (это нетрудно видеть, так как иначе точки лежат на одной прямой). Тогда сопоставим точку o точке $(0;0)$, точку a, b – точкам $(1;0)$, $(0;1)$. Остальные точки задаются однозначно.
Тогда плоскостей – $\frac{A(A-1)(A-q)}{q^2(q^2-1)(q^2-A)}$.

1.11 11

Если поле из 27 элементов – расширение поля из 9 размерности n, то в нем $9^n = 27$ элементов. Но в этом случае n – не целое число, а размерность расширения нецелой быть не может.
Ответ: нет

1.12 12

a,b) Нет, так как пусть есть N прямых. Заметим, что тогда точек с целочисленными координатами от α до $\alpha + N + 1$: $(N+1)^2$ (выберем такое α, что нет прямых вида $x_2 = c$, где $\in [\alpha, \alpha + N + 1]$), при этом каждая прямая (не вида $x_2 = c$), содержит не более $N + 1$ точку (то есть каждой x_2 сопоставляется не более одной x_1), при этом прямых - N, откуда точек, принадлежащим прямым не более $N * (N+1)$, что меньше $(N+1)^2$.
c) Пусть N подпространств размерности k. (если есть пространства меньшей размерности - расширим их до k) (Тогда пространство размерности хотя бы $k+1$). Рассмотрим точки с целочисленными координатами от 0 до $N+1$. Таких точек хотя бы $(N+1)^{k+1}$, при этом каждое подпростанство размерности k имеет не более $(N+1)^k$ точек (заметим, что подпространство размерности k либо вырождено, то есть вида $(a_1, a_2, ..., a_k, 0)$, где a_i - параметры, 0 - константа, при этом константа не обязательно в последней координате, либо по первым k координатам однозначно восстанавливается последняя), откуда всего точек в объединении не более $(N+1)^k * N < (N+1)^{k+1}$.

1.13 13

Да. Докажем по индукции:
База: V содержит все многочлены нулевой степени – это верно, так как есть хотя бы 1 многочлен нулевой степени, остальные выражаются линейно комбинацией. Переход: V содержит все многочлены степени $< k$, тогда содержит и все многочлены степени k (при $k \le m$). Заметим, что есть хотя бы один многочлен степени k, тогда ax^k лежит в этом векторном пространстве (так как можно вычесть многочлен с коэффициэнтами меньших степеней). Любой многочлен степени k можно представить в виде $\alpha * x^k + P(x)$, где степень $P(x) < k$. Заметим, что из этого следует, что любой многочлен степени k лежит в этом векторном пространстве.

1.14 14

1.15 15

1.16 16

1) Покажем, что сложение в F_2 такое же, что и в нашем векторном пространстве V (которое образовано следующим образом: это $|M|$-мерное пространство, то есть сопоставим каждой координате элемент из M. Каждому множеству C сопоставим следующий вектор $v = [v_1,\ v_2,\ ...]$: пусть $m_i \in M$ (m_i соответсвует i -той координате), тогда $m_i \in C \ \Leftrightarrow \ v_i = 1.$):

Складываем множества A и B (и соответствующие вектора $a = [a_1,\ a_2,\ ...]$, $b = [b_1,\ b_2,\ ...]$) Проверим для каждого элемента, что соответствующая ему координата соответствует нахождению (или отсутствию) элемента в сумме. Если $m_i \in A$ и $m_i \notin B$, то $m_i \in A + B$, как и $1 + 0 = 1$. Аналогично для случая наоборот. Если $m_i \notin A, B$, то $m_i \notin A, B$, как и $0 + 0 = 0$. Если $m_i \in A, B$, то $m_i \notin A, B$, как и $1 + 1 = 0$.
Так же заметим, что умножение также соответствует умножению в F_2.

2) Рассмотрим следующий базис: все множества из одного элементаю. Заметим, что это базис: он порождающий, так как любое множество представимо в виде объединения одноэлементных множеств, он линейно независим, так как пусть один (содержащий элемент m_i) выражается через остальные, но заметим, что во всех векторах i-тая координата нулевая, а сумма нулей равна 0, при этом в m_i эта координата равна единице, противоречие.
Размерность этого базиса – $|M|$.

3) Заметим, что если множество не лежит в объединении других, то в этом множестве есть элемент, не принадлежащий объединению (очевидно, что если все элементы из множества принадлежат объединению, то само множество принадлежит объединению). Откуда множества X_i линейно независимы.

1.17 17

Пусть нам даны точки $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3),\ (x_4,\ y_4),\ (x_5,\ y_5)$
Тогда возьмем уравнение $a_{(2\ 0)}x^2 + a_{(1\ 1)}xy + a_{(0\ 2)}y^2 + a_{(1\ 0)}x + a_{(0\ 1)}y + a_{(0\ 0)} = 0$ и подставим в него наши точки, получим:

$$\det\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

И эта матрица задает искомую прямую.

1.18 18

А)
Покажем, что да. Пусть даны матрицы A содержащее $a_{i\ j}$ и B содержащее $b_{i\ j}$ (считаем, что матрицы $\mathbb{N}x\mathbb{N}$) (первый индекс – столбец, второй – строка).
Заметим, что сумма l строки матрицы $A \cdot B$ равна сумме произведений всех возможных пар чисел $(a_{i_a\ l};\ b_{l\ i_b})$, где i - параметры. Сумма произведений пар $(a_{\alpha\ l};\ b_{l\ j_b})$ равна $a_{\alpha\ l}$, так как сумма $b_{l\ j_b}$ равна 1. Тогда сумма всех произведений равна сумме чисел вида $a_{i_a\ l} = 1 \cdot 1 = 1$. Аналогично заметим, что сумма h столбца матрицы $A \cdot B$ равна сумме произведений всех возможных пар чисел $(a_{h\ i_a}; b_{i_b\ h})$, где i - параметры. И аналогично эта сумма равна 1.
В)
Пусть существует такие A и B: $(E - A) \cdot B = E$. Заметим, что в $(E - A)$ сумма во всех столбцах и строках равна 0, откуда следует, что $(E - A) \cdot B$ обладает таким же свойством, что нетрудно видеть из доказательнства пункта (a). Тогда $(E - A) * B \neq E$, так как E не обладает таким свойтвом. Откуда ответ – да

1.19 19

(1) Заметим, что в любой момент времени количество красок каждого типа в банках равно $\frac{p}{10^q}$, где $p, q \in N \cap 0$. Заметим, что множество таких чисел замкнуто относительно сложения, вычитания и деления. При этом переливание - следующая операция над парой векторов $a = (a_1,\ a_2,\ ...,\ a_7), b = (b_1,\ b_2,\ ...,\ b_7)$: $a \to a - \frac{a}{1-|b|};\ b \to b + \frac{a}{1-|b|}$, где $|x| = x_1 + x_2 + ... + x_7$. Откуда следует утверждение (1).
Предположим в какой-то момент появилась банка с одинаковым отношением красок. Заметим, что в момент, когда она появилась, её объём краски в ней равен 1, то есть каждая краска имеет объём $\frac{1}{7} \neq \frac{p}{10^q}$, откуда следует, что такого момента не может быть, поэтому ответ к задаче – нет.

1.20 20

Пусть:

$$A = \begin{vmatrix} a_{0\ 0} & a_{1\ 0} & \cdots & a_{n-1\ 0} & a_{n\ 0} \\ a_{0\ 1} & a_{1\ 1} & \cdots & a_{n-1\ 1} & a_{n\ 0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{0\ n-1} & a_{1\ n-1} & \cdots & a_{n-1\ n-1} & a_{n\ 0} \\ a_{0\ n} & a_{1\ n} & \cdots & a_{n-1\ n} & a_{n\ n} \end{vmatrix}$$

Тогда $(E + A)(E + B) = E + A + B + A \cdot B$
$A + A \cdot B = A(E + B)$
$A + A^{m-1} \cdot C = 0$