ТФКП
2 курс
Домашнее задание 12
1789769386

28 декабря 2021 г.

Домашнее задание 1

Цифры Вашего кода — a_0, …, a_9. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано. За каждую решенную задачу можно получить до 10 баллов. Последняя задача (предполагающая устную сдачу) — бонусная. Для того, чтобы получить максимальную оценку за курс, не обязательно решать бонусные задачи.

Вычисления с комплексными числами.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_1 + a_2$. Найдите вещественную и мнимую части комплексных чисел (параметр k предполагается натуральным числом).

(0) $(5+i)(3+5i)/2e^{\pi i/4}$;
(1) $(1+i)^5/(1-i)^3$;
(2) i^{4k+1};
(3) $(1+i)^{4k}$;
(4) $(1+i\sqrt{3})^{6k+5}$;
(5) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12k+6}$;
(6) $\frac{(1+i\sqrt{3})^{6k}}{(1+i)^{12k}}$;
(7) $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$;
(8) $2e^{\frac{\pi i}{3}}$;
(9) $e^{\frac{11\pi i}{6}}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $3a_3 + 7a_4$. Найдите модуль и аргумент комплексных чисел (параметр α предполагается вещественным числом):

(0) α;
(1) $i\alpha$;
(2) $(-2-2i)e^{\alpha}$;
(3) $(1+i\sqrt{3})e^{\alpha}$;
(4) $3+4i$;
(5) $\sin\alpha + i\cos\alpha$;
(6) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$;
(7) $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$;
(8) $\frac{e^{i\alpha}-1}{e^{i\alpha}+1}$;
(9) $(1+i)^{10}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $2a_6 + a_7$. Воспользуйтесь формулой Муавра.

(0) Выразите $\sin 4x$ как многочлен от $\sin x$ и $\cos x$.

(1) Выразите $\cos 5x$ как многочлен от $\sin x$ и $\cos x$.

(2) Выразите $\operatorname{tg} 3x$ как рациональную функцию от $\operatorname{tg} x$.

(3) Выразите $\operatorname{tg} 4x$ как рациональную функцию от $\operatorname{tg} x$.

(4) Выразите $\sin^4 \varphi$ через первые степени синусов и косинусов от кратных аргументов.

(5) Выразите $\cos^5 \varphi$ через первые степени синусов и косинусов от кратных аргументов.

(6) Вычислите $z^3 + \frac{1}{z^3}$, если $z + \frac{1}{z} = a$. Здесь значение a предполагается известным.

(7) Вычислите $z^4 + \frac{1}{z^4}$, если $z + \frac{1}{z} = a$. Здесь значение a предполагается известным.

(8) Представьте $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin(n-1)x$ в виде рациональной функции от $\sin x$, $\cos x$, $\sin nx$ и $\cos nx$.

(9) Представьте $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x$ в виде рациональной функции от $\sin x$, $\cos x$, $\sin nx$ и $\cos nx$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_8 + a_9$. Найдите все комплексные значения z, удовлетворяющие выписанному уравнению (явно выразить вещественную и мнимую части).

(0) $\cos(z) = 2$;
(1) $z^2 = 5 - 12i$;
(2) $e^z = i$;
(3) $z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i = 0$;
(4) $z^3 = i$;
(5) $\overline{z} = z^3$;
(6) $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$;
(7) $z^4 + 4 = 0$;
(8) $(z + i)^4 = (z - i)^4$;
(9) $z^4 + (z - 4)^4 = 32$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_9$.

(0) Рассмотрим четырехугольник, описанный вокруг окружности $\{|z| = 1\}$ (т.е. такой четырехугольник, стороны которого касаются окружности). Докажите с использованием комплексный чисел, что прямая, соединяющая середины диагоналей этого четырехугольника, проходит через центр окружности.

(1) Пусть a, b, c, d — четыре различные точки на единичной окружности. Докажите, что точка пересечения прямых ab и cd задается формулой

$$\frac{(\overline{a}+\overline{b})-(\overline{c}+\overline{d})}{\overline{ab}-\overline{cd}}.$$

(2) Пусть a и b — точки на единичной окружности $|z| = 1$, а точка c — точка пересечения касательных к единичной окружности в точках a и b. Докажите, что число c является гармоническим средним чисел a and b, то есть

$$c^{-1} = \frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}.$$

(3) Докажите, что неотрицательный вещественный многочлен от одной переменной можно представить как сумму квадратов двух вещественных многочленов.

(4) Найдите сумму квадратов длин всех диагоналей правильного 7-угольника.

(5) Докажите, что комплексные числа a, b, c представляют вершины равностороннего треугольника тогда и только тогда, когда

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac.$$

(6) Пусть a, b — комплексные числа, представляющие вершины квадрата. Найдите остальные вершины (при всех возможных расположениях квадрата).

(7) Пусть a, b, c, d — комплексные числа, такие, что $c^2 = a$ и $d^2 = b$. Докажите, что

$$(|c+d| + |c-d|)^2 = 2(|a| + |b| + |a-b|).$$

(8) Можно ли ввести на комплексных числах отношение порядка $>$, согласованное со сложением и умножением? (Последнее означает, что для всех $a, b, c \in \mathbb{C}$

- из $a > b$ следует $a + c > b + c$;
- из $a > 0$ и $b > 0$ следует, что $ab > 0$.)

(9) Из вершины 0 треугольника $0ab$ на сторону ab (или ее продолжение) опущена высота. Выразите основание высоты через a и b.

Решения

Задача 1

необходимо решить пункт под номером $7 + 8 = 5 \mod 10$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12k+6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{2} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{-2i} = -\frac{1+\sqrt{3}i}{i} = i - \sqrt{3}$$

$$\left(1^2 + \sqrt{3}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \sin(\theta) = \frac{1}{2},\ \cos(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow\ \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12k+6} = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12k} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{6} = (-64)^k \cdot 8i = (-1)^k 2^{6k+3} i$$

Задача 2

необходимо решить пункт под номером $3 \cdot 9 + 7 \cdot 7 = 6 \mod 10$

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{1+i\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})}}{1-i\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})}} = \frac{1+\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}}{1-\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}} = \frac{\frac{(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}}{\frac{(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})-(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}} = \frac{(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})}{(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})-(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})} =$$

$$\frac{2e^{i\alpha}}{2e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha} = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

$$\mathrm{mod}(e^{2i\alpha}) = 1 \qquad \arg(e^{2i\alpha}) = 2\alpha$$

Задача 3

необходимо решить пункт под номером $2 \cdot 9 + 3 = 1 \mod 10$

$$\cos(5x) + i\sin(5x) = (\cos(x) + i\sin(x))^5 =$$

$$\cos(x)^5 - 10\sin(x)^2\cos(x)^3 + 5\sin(x)^4\cos(x) + i(\sin(x)^5 - 10\sin(x)^3\cos(x)^2 + 5\sin(x)\cos(x)^4) =$$

$$\cos(x)^5 - 10(1-\cos(x)^2)\cos(x)^3 + 5(1-\cos(x)^2)^2\cos(x) +$$
$$i(\sin(x)^5 - 10\sin(x)^3(1-\sin(x)^2) + 5\sin(x)(1-\sin(x)^2)^2) =$$

$$16\cos(x)^5 - 20\cos(x)^3 + 5\cos(x) + i(16\sin(x)^5 - 20\sin(x)^3 + 5\sin(x))$$
$$\cos(5x) = 16\cos(x)^5 - 20\cos(x)^3 + 5\cos(x)$$

Задача 4

необходимо решить пункт под номером $8 + 6 = 4 \mod 10$

$$z^3 = i$$
$$z^3 - i = 0$$
$$z^3 + i^3 = 0$$
$$(z+i)(z^2 - iz - 1) = 0$$
$$z_1 = -i,\ z_2 = \frac{1}{2}(i - \sqrt{3}),\ z_3 = \frac{1}{2}(i + \sqrt{3})$$

Задача 5

необходимо решить пункт под номером $7+6=3 \mod 10$

Заметим что многочлен $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = Aq_1(x)\dots q_k(x)(x-x_1)^{n_1}\dots(x-x_r)^{n_r}(x-y_1)^{m_1}\dots(x-y_s)^{m_s}$, где q_i – квадратные многочлены без вещественных корней, n_i – четные степени (пусть $n_i = 2d_i$), m_i – нечетные степени, а также $A \neq 0$. Заметим что так как $f(x) \geqslant 0$, то $m_i = 0$, а следовательно $f(x) = Aq_1(x)\dots q_k(x)(x-x_1)^{n_1}\dots(x-x_r)^{n_r}$, если в таком разложении какие-то q_i отрицательны при всех x, вынесем -1 из них в A, тогда получим $f(x) = \tilde{A}\tilde{q}_1(x)\dots\tilde{q}_k(x)(x-x_1)^{n_1}\dots(x-x_r)^{n_r}$. Так как $\tilde{q}_i > 0$, то $(x-x_i)^{n_r} \geqslant 0$ для всех x, тогда также $\tilde{A} > 0$. Тогда можно представить $\tilde{q}_i$ как сумму 2 кадваратов*, а также заметить, что $(x-x_i)^{n_i} = ((x-x_i)^{d_i})^2$.

Осталось заметить, что если $A(x) = a_1(x)^2 + a_2(x)^2$ и $B(x) = b_1(x)^2 + b_2(x)^2$, то

$$\begin{aligned}
&A(x)B(x) = a_1(x)^2b_1(x)^2 + a_1(x)^2b_2(x)^2 + a_2(x)^2b_1(x)^2 + a_2(x)^2b_2(x)^2 \\
&= (a_1(x)^2b_1(x)^2 + 2a_1(x)a_2(x)b_1(x)b_2(x) + a_2(x)^2b_2(x)^2) + (a_1(x)^2b_1(x)^2 - 2a_1(x)a_2(x)b_1(x)b_2(x) + a_2(x)^2b_2(x)^2) \\
&= (a_1(x)b_1(x) + a_2(x)b_2(x))^2 + (a_1(x)b_1(x) - a_2(x)b_2(x))^2
\end{aligned}$$

То есть произведение сумм квадратов можно представить в виде суммы квадратов, а следовательно, представив $f(x)$ в виде суммы квадратов, мы разбили $f(x)$ на сумму квадратов.

Осталось представить $\tilde{q}_i$ в виде суммы квадратов – пусть $\tilde{q}_i = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, тогда

$$\begin{aligned}
&a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= \left(\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c\right) \\
&= \left(\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
\end{aligned}$$

Таким образом мы представили все элементы разложения в виде сумм квадратов, а, следовательно, показали что любой неотрицательный вещественный многочлен от одной переменной можно представить в виде суммы двух квадратов

Домашнее задание 2

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_1$. Найдите множество, в которое отображается множество $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ при дробно-линейном преобразовании $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Нарисуйте это множество и вычислите его параметры (например, если это окружность или диск, то найдите центр и радиус).

(0) $X = \{\mathrm{Im}(z) = 0\}$, $f(z) = \frac{2iz}{z-2}$
(1) $X = \{|z| = 2\}$, $f(z) = 1/z$
(2) $X = \{|z| = \frac{1}{3}\}$, $f(z) = (z+3)/z$
(3) $X = \{\mathrm{Im}(z) = 0\}$, $f(z) = \frac{(1+i)z}{4z-2}$
(4) $X = \{|z| = \frac{1}{2}\}$, $f(z) = (z+i)/z$
(5) $X = \{\mathrm{Re}(z) = 1\}$, $f(z) = (z+1)/(z-1)$
(6) $X = \{\mathrm{Im}(z) = -4\}$, $f(z) = iz/(z+4i)$
(7) $X = \{\mathrm{Im}(z) = 1\}$, $f(z) = z/(z-i)$
(8) $X = \{\mathrm{Re}(z) = -3\}$, $f(z) = (z-i)/(z+3)$
(9) $X = \{|z| = 3\}$, $f(z) = -9i/z$

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $3a_2 + a_3$. Отождествим расширенную плоскость $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ со сферой с центром в $(0,0,1)$ и радиусом 1 при помощи стереографической проекции из северного полюса $(0,0,2)$ на горизонтальную плоскость $\{(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), 0)\}$.

(0) Найдите преобразования расширенной плоскости z, соответствующие при стереографической проекции вращению сферы относительно оси с направляющим вектором $(1,0,0)$ на угол $\pi/2$.

(1) Найдите образ экватора (пересечения сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы параллельно плоскости проекции) при стереографической проекции.

(2) Найдите преобразования расширенной плоскости z, соответствующие при стереографической проекции вращению сферы относительно оси с направляющим вектором $(1,0,0)$ на угол π.

(3) Введём на сфере сферические координаты как на глобусе (широта и долгота). Найдите образ части сферы, лежащей выше 30-ой параллели северной широты.

(4) Найдите преобразования расширенной плоскости z, соответствующие при стереографической проекции вращению сферы относительно оси с направляющим вектором $(0,1,0)$ на угол $\pi/2$.

(5) Введём на сфере сферические координаты как на глобусе (широта и долгота). Найдите образ 45-ого мериадиана западной долготы (0-ой меридиан проходит через точку $(1, 0, 1)$).

(6) Найдите преобразования расширенной плоскости z, соответствующие при стереографической проекции вращению сферы относительно оси с направляющим вектором $(0, 1, 0)$ на угол π.

(7) Введём на сфере сферические координаты как на глобусе (широта и долгота). Найдите образ части сферы, лежащей ниже 30-ой параллели южной широты.

(8) Найдите преобразования расширенной плоскости z, соответствующие при стереографической проекции вращению сферы относительно оси с направляющим вектором $(0, 0, 1)$ на угол $\pi/3$.

(9) Введём на сфере сферические координаты как на глобусе (широта и долгота). Найдите образ 60-го мериадиана восточной долготы (0-ой меридиан проходит через точку $(1, 0, 1)$).

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + 2a_5$.

(0) Найдите центр и радиус обобщенной окружности, заданной уравнением $z\overline{z} - i\overline{z} + iz - 1 = 0$

(1) Задайте уравнением относительно координаты z прямую, проходящую через точки $1 + i$ и $2 + 3i$

(2) Найдите множество, в которое отображается множество X при преобразовании f

$X = \{\mathrm{Re}(z) > 0; \mathrm{Im}(z) < 0\}, f(z) = z^4 + 2$

(3) Задайте уравнением относительно координаты z прямую, проходящую через точки $1 + i$ и $e^{\frac{\pi i}{4}}$

(4) Найдите центр и радиус обобщенной окружности, заданной уравнением $iz\overline{z} + \overline{z} - z - 3i = 0$

(5) Задайте уравнением относительно координаты z прямую, проходящую через точки $-3 + i$ и $2 - 4i$.

(6) Найдите центр и радиус обобщенной окружности, заданной уравнением $z\overline{z} - |z| = 1$

(7) Найдите множество, в которое отображается множество X при преобразовании f

$X = \{\mathrm{Re}(z) > 0; \mathrm{Im}(z) - i\}, f(z) = (z + i)^2 - i$

(8) Найдите центр и радиус обобщенной окружности, заданной уравнением $z\overline{z} + \overline{z} + z - 1 = 0$

(9) Найдите множество, в которое отображается множество X при преобразовании f

$X = \{\mathrm{Re}(z) < 0; \mathrm{Im}(z) > 0\}, f(z) = z^3 - i$

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $2a_6 + 3a_7$. Дайте геометрическое описание следующих множеств:

(0) $|z-i| + |z-1| \leqslant 2$
(1) $|z-i| = 2|z|$
(2) $\mathrm{Re}(\frac{z}{1-z}) = 1$
(3) $|z-2| = |z+2|$
(4) $|z-i| = |z+1|$
(5) $|z| \geqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$
(6) $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{5}}|z|$
(7) $|z-i| - |z-1| \leqslant 1$
(8) $\mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 1$
(9) $|z+1| = 3|z|$

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $3a_0 + 4a_8$.

(0) Найдите центр и радиус окружности, описанной вокруг треугольника с вершинами a, b, c. Выразите ответ в симметричном виде.

(1) Найдите все пары коммутирующих дробно-линейных преобразований.

(2) Найдите два семейства окружностей или прямых со следующим свойством. Каждое из двух семейств инвариантно относительно всех дробно-линейных преобразований с неподвижными точками ± 1 (в том смысле, что каждое дробно-линейное преобразование f, такое, что $f(\pm 1) = \pm 1$, переводит каждую окружность или прямую каждого семейства в окружность или прямую того же семейства).

(3) Пусть даны две различные точки a, $b \in \mathbb{C}$ и положительное действительное число $r > 0$. Докажите, что геометрическое множество точек $z \in \mathbb{C}$, таких, что

$$\frac{|z-a|}{|z-b|} = r,$$

является окружностью или прямой.

(4) Найдите общий вид дробно-линейного преобразования, соответствующего вращению сферы при стереографической проекции на $\overline{\mathbb{C}}$.

(5) Дробно-линейное преобразование называется *эллиптическим*, если оно сопряжено в группе дробно-линейных преобразований евклидовому вращению вокруг некоторого центра. Докажите, что если дробно-линейное преобразование f удовлетворяет тождеству $f(f(z)) = z$, то f эллиптическое.

(6) Рассмотрим преобразование $f(z) = \frac{z}{1-z}$. Найдите явную формулу для n-ой итерации $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$.

(7) Выпишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет частное любых двух линейно независимых решений уравнения

$$u''(z) + e^z u(z) = 0.$$

(8) Докажите, что комплексные точки a, b, c, d лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ является вещественным числом.

(9) Дробно-линейное преобразование f имеет только одну неподвижную точку в $\overline{\mathbb{C}}$. Докажите, что f сопряжено в группе дробно-линейных преобразований отображению $z \mapsto z + 1$.

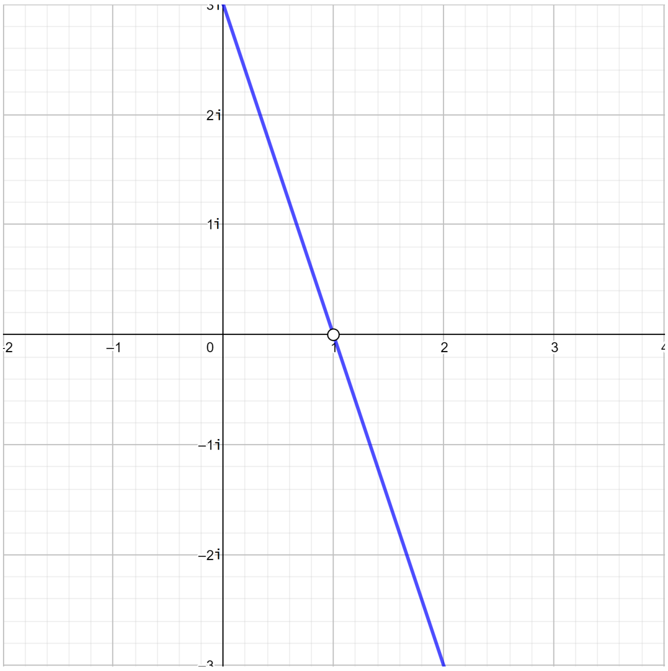
Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_0 + a_1 = 1 + 7 = 8 \mod 10$

$$X = \{\mathrm{Re}(z) = -3\},\ f(z) = \frac{z-i}{z+3}$$
$$\frac{(x+iy)-i}{(x+iy)+3} = 1 - \frac{3+i}{(x+iy)+3}$$
$$X:\ 1 - \frac{3+i}{(x+iy)+3} = 1 - \frac{3+i}{(-3+iy)+3} = 1 - \frac{3+i}{iy}$$

То есть мы получим прямую с выколотой точкой $z_0 = 1$



Задача 2

Необходимо решить задачу $3a_2 + a_3 = 3 \cdot 8 + 9 = 3 \mod 10$
Заметим, что часть сферы, лежащая выше 30-ой параллели является шапочкой данной сферы, точнее ее частью, лежащей выше $z = 1 + \sin(30) = 1.5$, тогда мы можем посмотреть, куда отображается эта параллель, а она отображается в окружность, точки которой имеют модуль $x = 2\sqrt{3}$, то есть образ части сферы будет лежать вне этой окружности и задаваться формулой $z\overline{z} > (2\sqrt{3})^2 = 12$

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_4 + 2a_5 = 7 + 2 \cdot 6 = 9 \mod 10$

$$X = \{\mathrm{Re}(z) < 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\},\ f(z) = z^3 - i$$

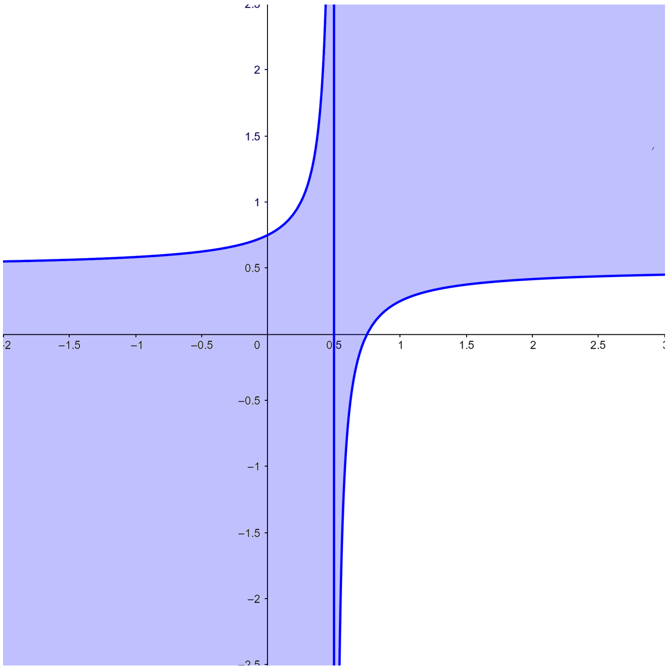
Замеьтим, что при преобразовании $z \to z^3 - i$ модуль z возводится в куб, аргумент умножается на 3, а затем результат сдвигается на i. Заметим, что аргументы элементов множества X лежат в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, а следовательно, после умножения на 3, аргументы будут лежать в $\left(\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right)$. А следовательно в итоге будет множество $A = \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(z) < 0,\ \mathrm{Im}(z) < -1\}$

Задача 4

Необходимо решить задачу $2a_6 + 3a_7 = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 7 \mod 10$

$$
\begin{aligned}
&|z - i| - |z - 1| \leqslant 1 \\
&|x + i(y-1)| - |(x-1) + iy| \leqslant 1 \\
&\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leqslant 1 \\
&x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1 + (x-1)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\
&2x - 2y - 1 \leqslant 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\
&(2x - 2y - 1)^2 \leqslant 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) \\
&(2x-2y-1)(2x-2y-1) = 4x^2 + 4y^2 - 8xy - 4x + 4y + 1 \leqslant 4x^2 - 8x + 4y^2 + 4 \\
&-8xy + 4x + 4y \leqslant 3 \\
&y(4 - 8x) \leqslant 3 - 4x
\end{aligned}
$$

Тогда при $4 - 8x > 0: \ x < \frac{1}{2}, \ y \leqslant \frac{3-4x}{4-8x}$ и при $4 - 8x < 0: \ x > \frac{1}{2}, \ y \geqslant \frac{3-4x}{4-8x}$



Домашнее задание 3

Цифры Вашего кода — a_0, …, a_9. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_5$.

(0) При каких комплексных значениях a, b, $c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = az + b\overline{z} + z^2 + c$ имеет комплексную производную в точке $z = 0$?

(1) При каких комплексных значениях a, b, $c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = az + b\overline{z} + c$ является евклидовой изометрией?

(2) Покажите, что функция $f : re^{i\phi} \mapsto re^{2i\phi}$ не является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(3) При каких вещественных значениях параметров a, $b \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x + iy) = ax^2 + by^2 + ixy$$

голоморфна на всем $\mathbb{C}$?

(4) При каких комплексных значениях $a, b, c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = a\,\mathrm{Re}z + b\,\mathrm{Im}z + c\,z\overline{z}$ имеет комплексную производную в точке $z = 0$?

(5) Покажите что функция $f : re^{i\phi} \mapsto e^{i\phi}$ не является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(6) При каких вещественных значениях параметров a, $b \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x, y) = x^3 - axy^2 + i(bx^2y - y^3)$$

голоморфна на всем $\mathbb{C}$?

(7) При каких комплексных значениях a, b, $c \in \mathbb{C}$ функция $f(z) = e^{ia}\overline{z} + b|z|^2 + c$ является евклидовой изометрией?

(8) Покажите что функция $f : re^{i\phi} \mapsto r^2e^{i\phi}$ не является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(9) При каких вещественных значениях параметров a, $b \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x, y) = e^x \cos y + ay + ibe^x \sin y + ix$$

голоморфна на всем $\mathbb{C}$?

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_6$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Полный прообраз множества $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 2\}$ при отображении $f(z) = z^2 - \frac{1}{2}$ связен.

(1) Существует голоморфное отображение $f : X \to \mathbb{C}$, такое, что $f(z)^2 = z$ для всех $z \in X$. Здесь $X = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x + y^2 > 0\}$.

(2) Преобразование (взаимно-однозначное отображение) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, переводящее любую окружность в окружность, обязательно голоморфно.

(3) Существует несвязное открытое множество, переводимое отображением $f(z) = z^3$ в связное.

(4) Существует голоморфное отображение $f : X \to \mathbb{C}$, такое, что $f(z)^3 = z$ для всех $z \in X$. Здесь $X = \{z \mid |z| > 2\}$.

(5) Полный прообраз множества $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)^2 + 4\mathrm{Im}(z)^2 > 1\}$ при отображении $f(z) = z^2 - \frac{1}{2}$ связен.

(6) Существует голоморфная функция $f : X \to \mathbb{C}$, такая, что $e^{f(z)} = z$. Здесь $X = \{z = x + iy \mid y > x^3 - 1\}$.

(7) Существует непрерывная функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, такая, что $f(z)^2 - 1 = z$.

(8) Существует только одна непрерывная функция $f : \mathbb{C} \backslash [-1, 1] \to \mathbb{C}$, такая, что $f(z^2) = z^2 - 1$ и $\mathrm{Im}(f(i)) > 0$.

(9) Множество голоморфных функций $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ со свойством $e^{f(z)} = z + 2$ бесконечно. Здесь $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_2 + a_7$. Являются ли указанные ниже функции $u(x, y)$ гармоническими? Если да, то найдите гармонически сопряженные функции.

(0) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.
(1) $u(x, y) = e^x \cos y$.
(2) $u(x, y) = -2 \sin(xy) \cos(xy) e^{x^2 - y^2}$
(3) $u(x, y) = x + y$.
(4) $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$.
(5) $u(x, y) = e^{x^3 - 3y^2 x} (\cos 3yx^2 \cos y^3 + \sin 3yx^2 \sin y^3)$.
(6) $u(x, y) = e^{2x} \cos 2y + e^x \cos y$.
(7) $u(x, y) = e^{-y} \cos x + 3x$.
(8) $u(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x$.

(9) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x - y$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_1 + a_8$. Может ли непостоянная голоморфная функция $f : U \to \mathbb{C}$ (где $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое подмножество) удовлетворять следующим условиям. Строго обоснуйте ответ.

(0) Функция $|f(z)|$ постоянна.
(1) Функция $\mathrm{Re}(f(z))$ постоянна.
(2) Функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f(z) = \overline{f(z)}$ для всех z.
(3) Функция $\arg f(z)$ постоянна.
(4) $\mathrm{Re} f(z) = -\mathrm{Im} f(\overline{z})$ для всех z.
(5) Разность $\mathrm{Re} f(z) - \mathrm{Im} f(z)$ постоянна.
(6) Разность $\arg f(z) - |f(z)|$ постоянна.
(7) Произведение $(\mathrm{Re}\, f(z))(\mathrm{Im}\, f(z))$ постоянно.
(8) Произведение $\arg(f(z))|f(z)|$ постоянно.
(9) Сумма $f(z) + \overline{z}^2$ постоянна.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_9$.

(0) Выпишите уравнения Коши–Римана в полярных координатах.

(1) Пусть $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ — рациональная функция от $z = x+iy$. Докажите, что функцию f можно следующим образом восстановить по функции u:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0).$$

(2) Найдите размерность пространства гармонических однородных кубических многочленов от x и y.

(3) Известно, что функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ голоморфна. Докажите, что функция $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ тоже голоморфна.

(4) Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция. Являются ли гармоническими функции $u(x, -y)$ и $u(x^2 - y^2, 2xy)$?

(5) Докажите, что отображение, осуществляемое голоморфной функцией, имеет неотрицательный якобиан. Как этот якобиан связан с комплексной производной?

(6) Докажите, что если гармоническая функция u от x и y записана как функция от комплексной переменной $z = x + iy$, то она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

(7) Приведите пример функции, удовлетворяющей условию Коши–Римана в точке 0, но не имеющей комплексной производной в этой точке.

(8) Найдите гармоническую функцию $u(x, y)$ на $\mathbb{C}$, такую, что

$$u(\cos t, \sin t) = \cos^2 t.$$

(9) Опишите геометрический смысл условия

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| > \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|.$$

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_4 + a_5 = 7 + 6 = 3 \mod 10$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = ax^2 + by^2 + ixy$$
$$u(x,y) = ax^2 + b^2y \qquad v(x,y) = xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2by$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

Каждая голоморфная функция удовлетворяет условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Откуда

$$2ax = x \qquad 2by = -y$$
$$a = \frac{1}{2} \qquad b = -\frac{1}{2}$$

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_3 + a_6 = 9 + 9 = 8 \mod 10$

$$f: \ \mathbb{C}\backslash[-1,1] \to \mathbb{C}$$
$$f: \ x + iy \to u(x,y) + iv(x,y)$$
$$f(z^2) = z^2 - 1 \qquad f(x^2 + 2ixy - y^2) = (x^2 - y^2 - 1) + i(2xy)$$
$$f((x^2 - y^2) + i(2xy)) = (\Re(z^2) - 1) + i(\Im(z^2))$$

Утверждение: $\forall \ z = a + bi \ \exists!$ пара $x, y : \begin{cases} a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \end{cases}$ и $\Im(f(i)) > 0 \ b > 0$

Решим систему

$$a = \frac{b^2}{4y^2} - y^2$$
$$4y^4 + 4ay^2 - b^2 = 0$$
$$D = 16a^2 + 16b^2 = 16|z|^2$$
$$y^2 = \frac{-4a \pm 4|z|}{8} = \frac{-a \pm |z|}{2}$$
$$b > 0 \Rightarrow |z| > a$$
$$y = \sqrt{\frac{-a + |z|}{2}} \qquad x = \frac{b}{\sqrt{2(|z| - a)}}$$

Однозначно восстановили отображение $f: \ a + bi \mapsto a - 1 + ib$ оно единственно

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_2 + a_7 = 8 + 3 = 1 \mod 10$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos(y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \cos(y) - e^x \cos(y) = 0$$

Следовательно $e^x\cos(y)$ – гармоническая

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\sin(y) = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x\cos(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$v(x,y) = -e^x\cos(y) + \phi(x)$$
$$e^x\cos(y) = e^x\cos(y) - \phi'(x)$$
$$v(x,y) = -e^x\cos(y) + c$$

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_1 + a_8 = 7 + 8 = 5 \mod 10$
Докажем более общий факт, что если $a\Re(f(z)) + b\Im(f(z)) = c$ при $a^2 + b^2 \neq 0$, то f – константа

$$\Re(f) = u(x,y) \qquad \Im(f) = v(x,y)$$
$$au(x,y) + bv(x,y) = c$$
$$au_x + bv_x = 0 \quad au_y + bv_y = 0 \quad \text{диффиринцирование с обеих сторон}$$
$$au_x - bu_y = 0 \quad au_y + bu_x = 0 \quad \text{условия Коши-Римана}$$
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$
$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$v_x = v_y = 0 \quad \text{то есть фугкция константа}$$

Задача 5

Необходимо решить задачу $a_0 + a_9 = 1 + 6 = 7 \mod 10$
Рассмотрим $f(z) = \sqrt{|xy|}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$$

Соответственно условие Коши-Римана выполнено в $z = 0$, так как $0 = 0,\ 0 = 0$. Тогда если f дифференцируемо, то $f'(0) = 0$, но если рассмотреть $x = y$, то есть $z = x + ix$, то

$$\frac{f(x+ix)}{x+ix} = \frac{x}{x+ix} = \frac{1}{1+i}$$

То есть $f'(0) \neq 0$, противоречие, а следовательно f не дифференцируема в 0

Домашнее задание 4

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_7$. Выпишите явную формулу для голоморфного биективного отображения из множества X в верхнюю полуплоскость $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

(0) $X = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > 2\}$.
(1) $X = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{e^{it} \mid t \in [0, \pi/2]\}$.
(2) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ |z-1| < 1\}$.
(3) $X = \mathbb{H} \setminus \{e^{it} \mid t \in [0, \pi/2]\}$.
(4) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2,\ \mathrm{Im}(z) > -1\}$.
(5) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\} \setminus \{(1+i)t \mid t \in (0,1]\}$.
(6) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \setminus [0,1]$.
(7) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \setminus ([-1,-1/2] \cup [1/2, 1])$.
(8) $X = \mathbb{C} \setminus \{1 + (1-i)t \mid t \in [1,2]\}$.
(9) $X = \mathbb{C} \setminus \{1 + e^{\pi i/3} t \mid t \in [0, \infty)\}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6 + a_9$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Дробно линейный автоморфизм единичного диска коммутирует с отображением $z \mapsto 1/\overline{z}$. Другими словами, если $A : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является дробно-линейным автоморфизмом и $w = 1/\overline{z}$, то $A(w) = 1/\overline{A(z)}$.

(1) Отображение $f(z) = z + \frac{1}{z}$ переводит окружности с центром в 0 в эллипсы (за исключением единичной окружности, которая переходит в отрезок).

(2) Любое отображение вида $f(z) = A_1(z) \ldots A_k(z)$, где $A_j(z) = \frac{z - a_j}{1 - \overline{a}_j z}$, переводит единичный диск в себя.

(3) Существует дробно-линейное преобразование множества $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 2\}$ в себя, переводящее точку 1 в точку 0.

(4) Существует не более одного дробно-линейного преобразования множества $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 2\}$ в себя, переводящего точку 1 в точку 0.

(5) Любую окружность, целиком лежащую в верхней полуплоскости, можно автоморфизмом полуплоскости перевести в любую другую такую окружность.

(6) Любую пару окружностей, целиком лежащих в верхней полуплоскости, можно автоморфизмом полуплоскости перевести в любую другую пару таких окружностей.

(7) Будем называть *луночкой* часть плоскости, ограниченную двумя пересекающимися окружностями. Любую луночку можно конформно отобразить на любую другую луночку.

(8) Отображение $f(z) = z^2$ переводит гиперболы вида $xy = C$ (здесь C — постоянный параметр, а x, y — вещественные координаты точки $z = x + iy$) в горизонтальные прямые.

(9) Отображение $f(z) = z^2$ переводит вертикальные прямые, не проходящие через 0, в параболы.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_9$. Найдите хотя бы одну гармоническую функцию $u(x, y)$ от двух вещественных переменных со следующими свойствами. Функция u определена и гармонична в области $U \setminus \{(a, b)\}$, стремится к нулю на границе области U и к бесконечности в точке (a, b).

(0) $U = \{y > x^2\}$, $a = 0$, $b = 1$.
(1) $U = \{xy > 1,\ x, y > 0\}$, $a = 2$, $b = 1$.
(2) $U = \{x^2 + 2y^2 < 1\}$, $a = b = 0$.
(3) $U = \{y > 0\}$, $a = 0$, $b = 1$.
(4) $U = \{x > 0,\ y > 0\}$, $a = b = 1$.
(5) $U = \{x > 0,\ 0 < y < x\}$, $a = 2$, $b = 1$.
(6) $U = \{0 < y < 2\}$, $a = 0$, $b = 1$.
(7) $U = \{x > -1,\ x^2 + y^2 > 1\}$, $a = 2$, $b = 0$.
(8) $U = \{x > 0,\ 0 < y < 2\}$, $a = b = 1$.
(9) $U = \{y > 0,\ x^2 + y^2 < 2\}$, $a = 0$, $b = 1$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $3a_7$. Нарисуйте образ множества X при отображении f.

(0) $X = \{z = x + iy \mid x + y = 1\}$, $f(z) = 1/z$.
(1) $X = \{z = x + iy \mid x = -1\}$, $f(z) = z/(z - 2)$.
(2) $X = \{z = x + iy \mid y < 0,\ x^2 + y^2 < 4\}$, $f(z) = z^2$.
(3) $X = \{z \mid |z| < 1\}$, $f(z) = (z + 1)^2$.
(4) $X = \{z \mid |z| < 1\}$, $f(z) = \sqrt{1 + z}$ (ветвь на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$).
(5) $X = \{z = x + iy \mid y = 1\}$, $f(z) = e^z$.

(6) $X = \{z = x + iy \mid x = 1\}$, $f(z) = \log z$ (ветвь на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$).
(7) $X = \{z = x + iy \mid y = 1\}$, $f(z) = z^3$.
(8) $X = \{z \mid |z| = 2\}$, $f(z) = (z-1)^2$.
(9) $X = \{z = x + iy \mid 0 < x < \pi/2\}$, $f(z) = \sin z$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа ....

(0) Пусть P и Q — два квадратных многочлена относительно z, не имеющих непостоянных общих множителей. Рассмотрим рациональную функцию $R(z) = P(z)/Q(z)$. Докажите, что найдутся такие дробно-линейные функции ϕ и η, что $\phi \circ R \circ \eta(z) = z^2$.

(1) Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < 2,\ |\mathrm{Im}(z)| < 3\}$ и $f(z) = \cos z - 2$. Докажите, что замыкание множества U содержится во множестве $f(U)$.

(2) Докажите, что группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ изоморфна факторгруппе $\mathrm{PSU}(1,1)$ группы

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

(групповая операция — умножение матриц) по подгруппе, состоящей из скалярных матриц λI, таких, что $|\lambda| = 1$. *Указание:* дайте интерпретацию группы $\mathrm{PSU}(1,1)$ как группы дробно-линейных автоморфизмов единичного диска.

(3) Пусть f — дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости, а $z \in \mathbb{H}$ — точка верхней полуплоскости, такая, что $f(z) = z$. Докажите, что $|f'(z)| = 1$.

(4) Найдите максимум $|f'(0)|$ по всем дробно-линейным автоморфизмам единичного диска.

(5) Предположим, что дробно-линейный автоморфизм f единичного диска имеет неподвижную точку в этом диске. Докажите, что f сопряжен автоморфизму вида $z \mapsto e^{i\theta} z$, где $\theta \in \mathbb{R}$.

(6) Докажите, что любой дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости можно представить в виде композиции двух инверсий, причем можно считать, что окружности, относительно которых осуществляются эти инверсии, перпендикулярны вещественной оси.

(7) Предположим, что дробно-линейный автоморфизм f верхней полуплоскости имеет две разные неподвижные точки на (расширенной) вещественной оси $\overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что в этом случае f сопряжен отображению $z \mapsto kz$, где k — положительное действительное число.

(8) Предположим, что дробно-линейный автоморфизм f верхней полуплоскости имеет ровно одну неподвижную точку на (расширенной) вещественной оси $\overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что в этом случае f сопряжен отображению $z \mapsto z \pm 1$.

(9) При каких вещественных значениях коэффициента a кривая, заданная уравнением

$$x^2 + 2axy - y^2 + 2y + 1 = 0$$

относительно координат (x, y) на плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, переводится в прямую некоторым конформным отображением, определенным в окрестности этой кривой?

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_0 + a_7 = 1 + 3 = 4 \mod 10$

$$X = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 2, \ \Im(z) > -1\} \qquad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \ \Im(z) > 0\}$$

Заметим, что у X есть 2 угла $\frac{2\pi}{3}$, тогда переведем один из них (пусть это будет точка $\sqrt{3}-i$) на бесконечность, а второй $(-\sqrt{3} - i)$ в 0. И тогда, чтобы угол $\frac{2\pi}{3}$ стал равным π, необходимо возвести итоговое отображение в степень $\frac{3}{2}$.

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\begin{cases} f(\sqrt{3} - i) = \frac{a(\sqrt{3}-i)+b}{c(\sqrt{3}-i)+d} = \infty & c(\sqrt{3} - i) + d = 0 \\ f(-\sqrt{3} - i) = \frac{a(-\sqrt{3}-i)+b}{c(-\sqrt{3}-i)+d} = 0 & a(-\sqrt{3} - i) + b = 0 \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{az + (\sqrt{3} + i)a}{cz + (i - \sqrt{3})c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + i + \sqrt{3}}{z + i - \sqrt{3}}$$

$$f_1(z) = f(z)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{z + i + \sqrt{3}}{z + i - \sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Осталось заметить, что данное преобразование дает нам полуплоскость $\{\Re(z) < 0\}$, это можно проверить, посмотрев куда переходит центр окружности $\frac{0+i+\sqrt{3}}{0+i-\sqrt{3}}^{\frac{3}{2}} = -1$, тогда для получения отображения необходимо повернуть все на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, то есть домножить на $-i$, откуда

$$F(z) = -i \cdot \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{z + i + \sqrt{3}}{z + i - \sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{a}{c} \in \mathbb{R}$$

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_6 + a_9 = 9 + 6 = 5 \mod 10$

Мы можем задать окружность 3 точками, поэтому будем рассматривать автоморфизм $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2, y_3)$, обозначим его как Φ и $\Phi(x_i) = y_i$. Заметим, что $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ – автоморфизмы верхней полуплоскости и

$$z \to \frac{az + b}{cz + d}$$
$$ad - bc = 1$$
$$(a, b, c, d) \sim (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d)$$

То есть эти матрицы задаются 3 параметрами (так как 4 получается из $ad - bc = 1$). Тогда заметим, что у нас есть система из 4 уравнений с 4 неизвестными:

$$\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = y_1 \qquad \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} = y_2 \qquad \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d} = y_3 \qquad ad - bc = 1$$

У это системы есть хотя бы одно решение, а следовательно есть и автоморфизм, переводящий одну окружность в другую.

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_3 + a_9 = 9 + 6 = 5 \mod 10$

$$U = \{x > y > 0\}, \ (a, b) = (2, 1)$$

Переведем нашу область в полуплоскость, получим отображение $f_1(z) = z^4$ и $(2,1)$ перейдет в $(-7,24)$. Теперь переведем полуплоскость $\mathbb{H}$ в окружность, но сперва переведем $(-7,24)$ в $(0,1)$

$$f_2(z) = \frac{z+7}{24}$$
$$f_3(z) = \frac{z-i}{z+i}$$
$$f(z) = f_1 \circ f_2 \circ f_3 = \frac{\frac{z^4+7}{24} - i}{\frac{z^4+7}{24} + i} = \frac{z^4+7-24i}{z^4+7-24i}$$

Возьмем логарифм от $f(z)$, он перведет центр окружности в бексонечность, а края в 0, что и трбовалось

$$F(z) = \log(f(z)) = \log\left(\frac{z^4+7-24i}{z^4+7-24i}\right)$$

Задача 4

Необходимо решить задачу $3a_7 = 3 \cdot 3 = 9 \mod 10$

$$X = \{z = x + iy |\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\}, \quad f(z) = \sin(z)$$
$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + i\cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$
$$\Re(\sin(z)) = \sin(x)\cosh(y), \quad \Im(\sin(z)) = \cos(x)\sinh(y)$$

Заметим что есть период 2π, а следовательно достаточно рассмотреть $x \in (-\pi,\pi)$. Заметим, что

$$u\left(\frac{\pi}{2} - x, y\right) = u\left(\frac{\pi}{2} + x, -y\right)$$
$$v\left(\frac{\pi}{2} - x, y\right) = v\left(\frac{\pi}{2} + x, -y\right)$$

Тогда

Рис. 1. Комплексная плоскость

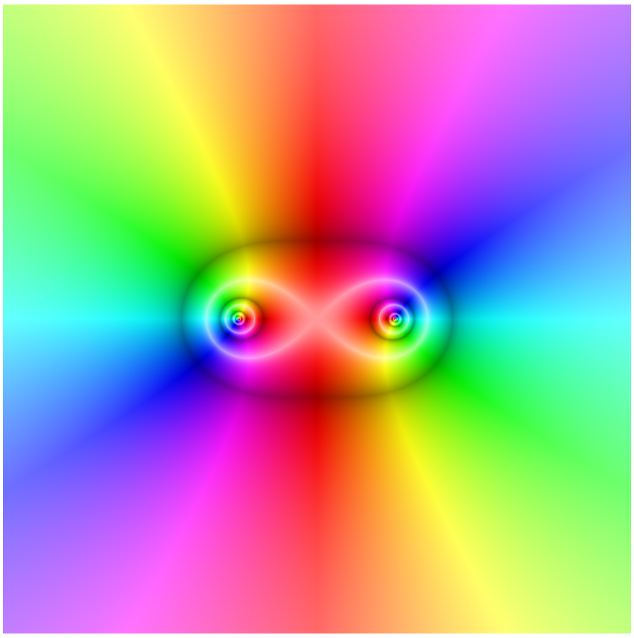


Рис. 2. Плоскость после преобразования $\sin z$ на X

Домашнее задание 5

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_7$. Вычислите интеграл

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

от функции f по пути γ.

(0) $f(x+iy) = x$, $\gamma(t) = e^{\pi i \sin t}$, $t \in [0, \pi/2]$.
(1) $f(z) = \bar{z}$, $\gamma(t) = 2t + i$, $t \in [0, 4]$.
(2) $f(z) = 1$, $\gamma(t) = t + i \operatorname{ch}(t)$, $t \in [0, 1]$.
(3) $f(x+iy) = 1 - ix$, $\gamma(t) = t + i\frac{t^2}{2}$, $t \in [0, 1]$.
(4) $f(z) = \frac{1}{z}$, $\gamma(t) = e^{it^2}$, $t \in [0, 3\pi]$.
(5) $f(x+iy) = e^y$, $\gamma(t) = t + i\ \ln(t)$, $t \in [1, 2]$.
(6) $f(x+iy) = x^2$, $\gamma(t) = t + i\ \ln(t)$, $t \in [0, 1]$.
(7) $f(x+iy) = x^5$, $\gamma(t) = t + \frac{i}{t}$, $t \in [0, 1]$.
(8) $f(x+iy) = x^2 + y^2$, $\gamma(t) = e^{it^2}$, $t \in [0, 2]$.
(9) $f(z) = e^z$, $\gamma(t) = (2+i)t$, $t \in [0, 1]$.

Напомним, что $\operatorname{ch}(t) = \cos(it) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + 2a_4$.

(0) Нарисуйте замкнутый путь с, такой, что $\mathrm{Ind}_0\gamma = 3$ и $\mathrm{Ind}_1\gamma = -2$.

(1) Найдите максимум $\mathrm{Ind}_z\gamma$, где

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2e^{4\pi it}, \text{если } t \in [0, 1/2], \\ e^{4\pi i(t-1)} + 1, \text{если } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

.

(2) Для каждой из связных областей, на которые плоскость разбивает лемниската Бернулли (“восьмёрка”, заданная в полярных координатах ρ, θ уравнением $\rho^2 = 2\cos 2\theta$), найдите значение индекса относительно лемнискаты (направление выберите произвольно).

(3) Нарисуйте схематично путь γ и найдите индекс относительно γ в каждой из связных областей, на которые он разбивает плоскость, где

$$\gamma(t) = \sin(t)e^{2it}, \quad t \in [0, \pi].$$

(4) Нарисуйте путь γ и найдите индекс относительно γ в каждой из связных областей, на которые он разбивает плоскость, где

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{6\pi i t}, \text{ если } t \in [0, 1/3], \\ 3e^{6\pi i(t-1/3)} + 1, \text{ если } t \in [1/3, 2/3], \\ e^{6\pi i(1-t)} - 1, \text{ если } t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

(5) Нарисуйте схематично путь γ и найдите индекс относительно γ в каждой из связных областей, на которые он разбивает плоскость, где

$$\gamma(t) = \sin(3t)e^{it}, \quad t \in [0, \pi].$$

(6) Нарисуйте схематично путь γ и найдите индекс относительно γ в каждой из связных областей, на которые он разбивает плоскость, где

$$\gamma(t) = \left(\sin(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{2it}, \quad t \in [0, \pi].$$

(7) Нарисуйте замкутый путь γ, такой что $\mathrm{Ind}_z\gamma$ принимает на $\mathbb{C}$ ровно 4 значения.

(8) Нарисуйте замкунтый путь γ, такой, что $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|k| \leq 2$, верно $\mathrm{Ind}_k\gamma = k$.

(9) Для пути

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2e^{-6\pi i t}, \text{если } t \in [0, 1/3], \\ e^{6\pi i t} + 1, \text{если } t \in [1/3, 2/3], \\ e^{-6\pi i t} - 1, \text{если } t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

найдите площадь области, в которой $\mathrm{Ind}_z\gamma = -1$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $5a_0 + 7a_1$. Найдите все значения интеграла

$$\int_C f(z)\, dz$$

для выписанной ниже функции f и любых замкнутых контуров (=путей) C, не имеющих самопересечений и не проходящих через точки, в которых функция f не определена или обращается в бесконечность.

(0) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$.

(1) $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$.

(2) $f(z) = \frac{z^2+2z-3}{(z-1)^2(z+1)}$.

(3) $f(z) = \frac{z^2-3z-4}{(z-1)^2(z+1)}$.

(4) $f(z) = \frac{2}{z^3+z}$.

(5) $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-iz+2}$.
(6) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$.
(7) $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^2}$.
(8) $f(z) = \frac{e^z-\cos(z)-\sin(z)-z^2}{z^2}$.
(9) $f(z) = \frac{z^3-7z^2+16z-12}{z^3-8z^2+19z-12}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $6a_1 + a_6$.

(0) Приведите пример открытой области $U \subset \mathbb{C}$, голоморфной функции $f : U \to \mathbb{C}$ и двух замкнутых контуров C_1, C_2, таких, что $\int_{C_1} f(z)\,dz = 1$ и $\int_{C_2} f(z)\,dz = \pi$.

(1) Приведите пример рациональной функции f и замкнутого контура C, таких, что $\int_C f(z)\,dz = 1$ и $\int_C zf(z)\,dz = -1$.

(2) Приведите пример открытой области $U \subset \mathbb{C}$, пары голоморфных функции $f, g : U \to \mathbb{C}$ и замкнутого контура C, таких, что $\int_C \frac{f(z)}{g(z)}\,dz = \int_C \frac{g(z)}{f(z)}\,dz = 1$.

(3) Приведите пример открытой области $U \subset \mathbb{C}$, голоморфной функции $f : U \to \mathbb{C}$ и замкнутых контуров C_1, C_2, C_3, таких, что $\int_{C_1} f(z)\,dz = 1$, $\int_{C_2} f(z)\,dz = 2$, $\int_{C_3} (z+3)f(z)\,dz = 3$.

(4) Приведите пример открытой области $U \subset \mathbb{C}$, голоморфной функции $f : U \to \mathbb{C}$ и замкнутых контуров C_1 и C_2, содержащих 0 внутри, таких, что $\int_{C_1} f(z)\,dz = 1$, $\int_{C_2} (f(z) - \frac{1}{z})\,dz = 1$.

(5) Приведите пример функции f, голоморфной на $\mathbb{C}$ без конечного числа точек, такой, что $\int_\gamma f(z)\ dz = 3$, где $\gamma(t) = \sin(3t)e^{it}, t \in [0, \pi]$.

(6) Приведите пример функции f, голоморфной на $\mathbb{C}$ без конечного числа точек, такой, что $\int_\gamma f(z)\ dz = 7$, где $\gamma(t) = e^{8it}, t \in [0, \pi]$.

(7) Приведите пример контура C, такого, что $\int_C f(z)\ dz = 10\pi i$, где $f(z) = \frac{5z-1}{z^2-1}$.

(8) Приведите пример контура C, такого, что $\int_C f(z)\ dz = 7\pi i$, где $f(z) = \frac{13z+4}{6z^2+6z}$.

(9) Приведите пример открытой области $U \subset \mathbb{C}$, пары голоморфных функции $f, g : U \to \mathbb{C}$ и замкнутого контура C, таких, что $\int_C f(z)\,dz \neq 0$, $\int_C g(z)\,dz \neq 0$, $\int_C f(z)g(z)\,dz = 0$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_8$.

(0) Упражнение 4.8 на странице 59 основного учебника.

(1) Упражнение 4.9 на странице 59 основного учебника.

(2) Упражнение 4.10 на странице 59 основного учебника.

(3) Упражнение 4.13 на странице 60 основного учебника.

(4) Упражнение 4.14 на странице 60 основного учебника.

(5) Для непрерывной функции $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, дайте определение интеграла

$$\int_\gamma \varphi(x+iy)\sqrt{dx^2+dy^2},$$

сформулируйте и докажите теорему о кусочно-гладкой замене параметра в этом интеграле.

(6) Пусть C — кусочно-гладкая замкнутая кривая (=образ кусочно-гладкого пути), а функция f определена и голоморфна в окрестности кривой C. Предполагая без доказательства непрерывность производной f' в некоторой окрестности кривой C, докажите, что интеграл

$$\int_C \overline{f(z)} f'(z) dz$$

выражается чисто мнимым числом.

(7) Пусть функция f определена и голоморфна в открытой области Ω, удовлетворяет в этой области неравенству $|f(z) - 1| < 1$, а также имеет непрерывную производную в Ω (последнее вытекает из голоморфности, но мы этого пока не знаем). Докажите, что

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

для любого замкнутого кусочно-гладкого пути γ.

(8) Пусть $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — многочлен, а через C обозначена окружность радиуса $R > 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{C}$. Докажите, что

$$\int_C P(z) d\overline{z} = -2\pi i R^2 P'(a).$$

(9) Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое связное множество, а $f : U \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Докажите, что любые две первообразные функции f (если они существуют) отличаются на постоянную. Что изменится, если не предполагать множество U связным?

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_5 + a_7 = 6 + 3 = 9 \mod 10$

$$f(z) = e^z,\ \gamma(t) = (2+i)t,\ t \in [0,1]$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2+i} f((2+i)t) \cdot (2+i)dt$$

$$= \int_0^{2+i} e^{(2+i)t} \cdot (2+i)dt = (2+i)\int_0^{2+i} e^{(2+i)t}dt = \int_0^{(2+i)^2} e^{(2+i)t}dt$$

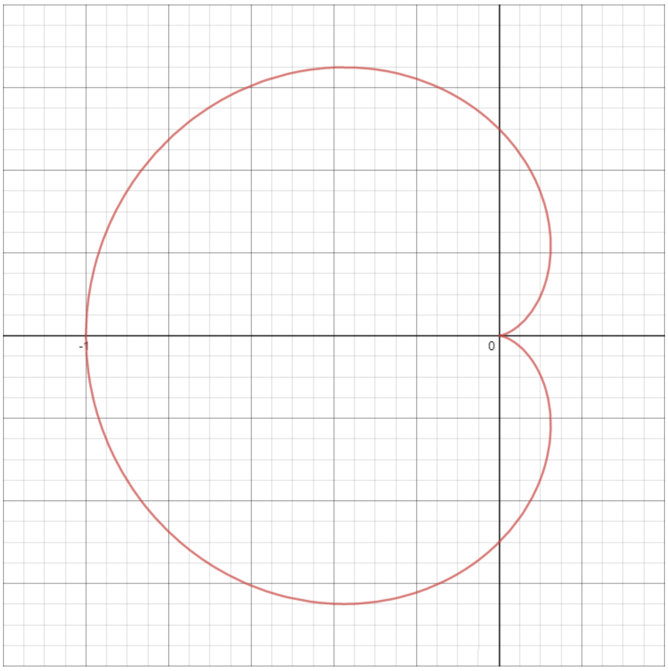
$$= e^{(2+i)^2} - e^0 = e^{(2+i)^2} - 1 = e^{3+4i} - 1$$

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_3 + 2a_4 = 9 + 2 \cdot 7 = 3 \mod 10$

$$\gamma(t) = \sin(t)e^{2it},\ t \in [0,\pi]$$

Данная функция задает кардиоиду, индекс внутри нее равен 1, снаружи 0.



Задача 3

Необходимо решить задачу $5a_0 + 7a_1 = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 7 = 4 \mod 10$ Контур не проходит через $0, i, -i$

$$\frac{2}{z^3+z} = \frac{2}{z} - \frac{2z}{z^2+1} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}$$

и $\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$, если φ – биекция. Так как C не имеет самопересечений, то он биективен окружности, то есть $\int_C f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$ и $\operatorname{Ind}_a \gamma = 0$ или 1.

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)d\theta$$

$$\gamma(\theta) = re^{i\varphi}$$

$$f(z) = \frac{2}{z} \qquad f(\gamma(\theta)) = \frac{1}{re^{i\varphi}}$$

$$\int_\gamma \frac{2}{z} = 2\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(\theta)}{f(\gamma(\theta))}d\theta = 2\int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}d\theta = 2\int_0^{2\pi} id\theta = 4\pi i$$

Аналогично $-\int_\gamma \frac{dz}{z+i} = -2\pi i$ и $-\int_\gamma \frac{dz}{z-i} = -2\pi i$, откуда

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i k_1 - 2\pi i k_2 - 2\pi i k_2$$

Где $k_i = 0, 1$ – индекс точки

Задача 4

Необходимо решить задачу $6a_1 + a_6 = 6 \cdot 7 + 9 = 1 \mod 10$

$$\int_C f(z)dz = 1, \quad \int_C z f(z)dz = -1$$

Домашнее задание 6

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_7 + 2a_9$. Предположим, что функция f голоморфна, а функция g непрерывна на открытом диске $\mathbb{D}(a, R)$ с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ и радиусом R. Пусть $0 < r < R$. Докажите, что

(0) $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi})\, d\phi$.

(1) $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|x+iy-a| \leqslant r} f(x + iy)\, dx\, dy$. (Можно пользоваться результатом п. (0) без доказательства).

(2) $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) \mathrm{Re} \left(\frac{re^{i\phi}+z}{re^{i\phi}-z} \right) d\phi$, если $z \in \mathbb{D}(a, r)$.

(3) $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{2\pi} g(a + \varepsilon e^{i\phi})\, d\phi = 2\pi g(a)$.

(4) $\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{|x+iy-a| \leqslant \varepsilon} g(x + iy)\, dx\, dy = g(a)$.

(5) $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(z)\, dz = 0$.

(6) $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} \frac{g(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i g(a)$.

(7) $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(z)\, |dz| = 0$.

(8) $\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(z)\, |dz| = g(a)$.

(9) $\int_0^{2\pi} (\mathrm{Re} f(a + re^{i\phi}) \cos\phi - \mathrm{Im} f(a + re^{i\phi}) \sin\phi)\, d\phi = 0$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $9a_0 + a_3$. Пользуясь теоремой Коши и-или интегральной формулой Коши, вычислите следующие интегралы по окружности единичного радиуса с центром в нуле, ориентированной положительно (т.е. против часовой стрелки).

(0) $\int \frac{e^z}{z(z+2)} dz$.

(1) $\int \frac{e^z}{4z^2-1} dz$.

(2) $\int \frac{z\, dz}{16z^4-1}$.

(3) $\int \frac{dz}{\sin z}$.

(4) $\int \frac{dz}{3z^{2021}-z+1}$.

(5) $\int \frac{z\, dz}{e^z-1}$.

(6) $\int \frac{e^z\,dz}{z(1-2z)^3}$.

(7) $\int \frac{z^2\,dz}{5z^3-2z+1}$.

(8) $\int \frac{dz}{4z^2+1}$.

(9) $\int \frac{dz}{2z^{2021}-1}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_6+4a_8. Разложите выписанную ниже функцию f в степенной ряд по степеням $z-a$ для указанного центра $a \in \mathbb{C}$ и найдите радиус сходимости этого ряда.

(0) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, $a = 0$.

(1) $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$, $a = 0$.

(2) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, $a = 1/2$.

(3) $f(z) = (\cos z)^2$, $a = 0$.

(4) $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$, $a = 0$.

(5) $f(z) = \log\frac{1+z}{1-z}$, $a = 0$ (используется ветвь логарифма, для которой $\log 1 = 0$).

(6) $f(z) = \frac{z}{z^2+2z+5}$, $a = -1$.

(7) $f(z) = \frac{\cos(z)+1}{(z-\pi)^2}$, $a = \pi$.

(8) $f(z) = \frac{e^z-\cos(z)-\sin(z)-z^2}{z^2}$, $a = 0$.

(9) $f(z) = (\sin z)^2(\cos z)^3$, $a = 0$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_1+a_6. Для указанной ниже функции f найдите указанную кратную производную, сначала посчитав несколько первых членов Тейлоровского разложения функции f. Оцените, проще ли такой способ, чем непосредственное дифференцирование (последнее не обязательно доводить до конца).

(0) $f(z) = \sqrt{\cos z}$ (выбрана ветвь корня, для которой $\sqrt{1} = 1$), найдите $f^{(4)}(0)$.

(1) $f(z) = e^{\sin z}$, найдите $f'''(0)$.

(2) $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$, найдите $f'''(0)$.

(3) $f(z) = (\mathrm{tg} z)^2$, найдите $f^{(4)}(0)$.

(4) $f(z) = e^{e^z}$, найдите $f''(1)$.

(5) $f(z) = \cos(\cos z)$, найдите $f^{(4)}(\pi/2)$.

(6) $f(z) = \cos(\cos(\sin z))$, найдите $f^{(2021)}(0)$.

(7) $f(z) = g(g(g(z)))$, где $g(z) = e^{2\pi i/3}z + z^2$; найдите $f'''(0)$.

(8) $f(z) = \log(\cos z)$, найдите $f^{(4)}(0)$.

(9) $f(z) = \log(1 + e^z)$, найдите $f''(1)$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $4a_1 + a_3$.

(0) Упражнение 5.1 на страницах 80–81 основного учебника.

(1) Упражнение 5.2 на странице 81 основного учебника. (Можно пользоваться результатом задачи 5.1 без доказательства).

(2) Докажите, что у всякой гармонической функции на открытом выпуклом множестве есть гармонически сопряженная функция. Можно пользоваться результатом упражнения 5.1 основного учебника без доказательства.

(3) Упражнение 5.4 на странице 81 основного учебника.

(4) Упражнение 5.11 на странице 82 основного учебника.

(5) Упражнение 5.12 на странице 82 основного учебника.

(6) Упражнение 5.13 на странице 82 основного учебника.

(7) Упражнение 5.14 на странице 82 основного учебника.

(8) Упражнение 5.15 на странице 82 основного учебника.

(9) Упражнение 5.16 на странице 82 основного учебника.

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_7 + 2a_9 = 3 + 2 \cdot 6 = 5 \mod 10$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(z)dz = 0$$

Параметризуем окружность $z(\varphi) = a + \varepsilon e^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi$ Тогда

$$\int_\gamma dz = \int_A^B |\gamma'(t)|dt$$
$$dz = d(a + \varepsilon e^{i\varphi}) = \varepsilon de^{i\varphi} = \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi$$

Известно, что $g : \gamma \to \mathbb{C}$ – непрерывная функция, тогда

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(z)dz = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(a)\varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(a) i e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

Задача 2

Необходимо решить задачу $9a_0 + a_3 = 9 \cdot 1 + 9 = 8 \mod 10$

$$\int \frac{dz}{4z^2+1} = \int \left(\frac{i}{2(2x+i)} - \frac{i}{2(2x-i)} \right) dz$$
$$= \frac{1}{2} i \int \frac{1}{2z+i} dz - \frac{1}{2} i \int \frac{1}{2z-i} dz$$
$$= \frac{1}{4} i \int \frac{1}{z+\frac{i}{2}} dz - \frac{1}{4} i \int \frac{1}{z-\frac{i}{2}} dz$$

Вопсользуемся интегральной формулой Коши

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{z+\frac{i}{2}} dz \qquad 2\pi i = 2\pi i f(\frac{i}{2}) = \int \frac{1}{z+\frac{i}{2}} dz$$
$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{z-\frac{i}{2}} dz \qquad 2\pi i = 2\pi i f(-\frac{i}{2}) = \int \frac{1}{z-\frac{i}{2}} dz$$

Тогда

$$\frac{1}{4} i \int \frac{1}{z+\frac{i}{2}} dz - \frac{1}{4} i \int \frac{1}{z-\frac{i}{2}} dz = \frac{1}{4} i \cdot 2\pi i - \frac{1}{4} i \cdot 2\pi i = 0$$

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_6 + 4a_8 = 9 + 4 \cdot 8 = 1 \mod 10$

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z},\ a = 0$$
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
$$\frac{e^z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n-1)}}{n!}$$
$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{e^z}{z} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n-1)}}{n!} - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(n-1)}}{n!}$$

Найдем радиус сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(n-1)}}{n!}$$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)!}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(n+1)!} = \infty$$

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_1 + a_6 = 7 + 9 = 6 \mod 10$

$$f(z) = \cos(\cos(\sin(z)))$$

$$f(z) = \cos\left(\cos\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)\right) = \cos\left(1 - \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^2}{2!} + \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^4}{4!} - \dots\right)$$

$$= 1 - \frac{\left(1 - \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^2}{2!} + \dots\right)^2}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^2}{2!} + \dots\right)^4}{4!} - \dots$$

Заметим, что при раскрытии скобочек все полученные степени будут четными, а следовательно все нечетные производные будут равняться 0, так как не будет ни одного элемента, не являющегося степенью z, а так как мы смотрим $z = 0$, то и $f^{(2n+1)}(0)$ будет 0.

Домашнее задание 7

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_2 + a_8 + 1$. Допускает ли росток, заданный в точке 0 указанным степенным рядом $s(z)$, аналитическое продолжение вдоль указанной кривой $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Строго обоснуйте ответ.

(0) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $\gamma(t) = -t$.

(1) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{1/2}{k}$, $\gamma(t) = -2t$.

(2) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $\gamma(t) = t$.

(3) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k$, $\gamma(t) = -t$.

(4) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k$, $\gamma(t) = t$.

(5) $s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, $\gamma(t) = t$.

(6) $s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, $\gamma(t) = -t$.

(7) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{1/2}{k}$, $\gamma(t) = -t + it^2$.

(8) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{4k}$, $\gamma(t) = \frac{i}{2}(1 - e^{\pi i t})$.

(9) $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}$, $\gamma(t) = t$.

Напомним, что $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ при $k > 0$ и $\binom{\alpha}{0} = 1$, если $\alpha \neq 0$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_7 + 1$. Докажите или опровергните существование и единственность ростка аналитической функции $f(z)$ в точке $z = 0$, удовлетворяющего указанным условиям. (Для решения этой задачи *не требуется* знакомства с теорией дифференциальных уравнений).

(0) $f(z)^2 = 1 + z$, $f(0) = -1$.

(1) $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$.

(2) $f'(z) = f(z) + e^z - 1$, $f(0) = 1$.

(3) $zf'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$.

(4) $zf'(z) = f(z)$, $f(0) = 0$.

(5) $f''(z) = f(z)$, $f(0) = 0$.

(6) $z^2 f''(z) + z f'(z) = 4z^2 f(z)$, $f(0) = 1$.

(7) $f''(z) = f(z)$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

(8) $z^2 f''(z) + z f'(z) + z^2 f(z) = 0$, $f(0) = 1$.

(9) $(1 - z^2) f''(z) - z f'(z) + m^2 f(z) = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = im$. Здесь m — целое число.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_2 + a_6 + 1$. Росток функции $w(z)$ в точке $\gamma(0)$ (для указанного пути $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$) задан выписанными ниже неявным уравнением на функцию w и ее значением $w(\gamma(0))$. Найдите значение $w(\gamma(1))$.

(0) $w^2 = z^2 + 9$, $w(4) = 5$, $\gamma(t) = 4e^{\pi i t}$.

(1) $w^2 = z^2 + 9$, $w(4) = 5$, $\gamma(t) = 4e^{-\pi i t}$.

(2) $w^2 = z^2 + 9$, $w(4) = 5$, $\gamma(t) = 4(1 - 2t)$.

(3) $e^w = z$, $w(1) = 0$, $\gamma(t) = e^{6\pi i t}$.

(4) $\sin w = z$, $w(0) = 0$, $\gamma(t) = 1 - e^{2\pi i t}$.

(5) $\cos w = z$, $w(0) = \pi/2$, $\gamma(t) = \frac{\pi}{2} e^{\pi i t}$.

(6) $w^3 = z^2$, $w(1) = 1$, $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$.

(7) $w^2 = 6z(z^2 - 1)$, $w(2) = 6$, $\gamma(t) = \frac{3 + 5e^{2\pi i t}}{4}$.

(8) $w^2 = z^2$, $w(1) = -1$, $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$.

(9) $w = z + w^2$, $w(1) = 0$, $\gamma(t) = e^{3\pi i t}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_7 + 1$. Для указанного ниже ростка аналитической функции f в указанной точке a найдите радиус сходимости степенного ряда для f с центром в a, не вычисляя коэффициенты этого ряда.

(0) $f(z) = \sqrt{\cos z}$, $a = 0$, $f(a) = 1$.

(1) $f(z) = e^{\sin z}$, $a = \pi$.

(2) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$, $a = 0$.

(3) $f(z) = \sqrt{z(z^2 - 1)(z^2 - 4)}$, $a = i$, $f(a) = \sqrt{5}(1 + i)$.

(4) $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 1)}$, $a = i$, $f(a) = \frac{i}{2}$.

(5) $f(z) = \log z$, $a = 1 + i$, $\mathrm{Im}(f(a)) \in [0, 2\pi)$.

(6) $f(z) = \log(\log z)$, $a = 3$, $f(a) > 0$.

(7) $f(z) = e^{1/z}$, $a = 1 + i$.

(8) $f(z) = \arcsin(z)$, $a = 0$, $f(a) = 0$.

(9) $f(z) = \frac{1}{\log z}$, $a = 2$, $f(a) > 0$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_4 + 1$.

(0) Упражнение 6.4 на страницах 101–102 основного учебника.
(1) Упражнение 6.5 на странице 102 основного учебника.
(2) Упражнение 6.6 на странице 102 основного учебника.
(3) Упражнение 6.7 на странице 102 основного учебника.
(4) Упражнение 6.8 на странице 102 основного учебника.
(5) Упражнение 6.9 на странице 102 основного учебника.
(6) Упражнение 5.18 на странице 82 основного учебника.

(7) Рассмотрим аналитическую функцию, заданную в диске $\mathbb{D}(0,1)$ с центром в 0 и радиусом 1 сходящимся рядом

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}.$$

Докажите, что f не продолжается аналитически ни в какую точку вне диска $\mathbb{D}(0,1)$.

(8) Рассмотрим непрерывную функцию $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$, где $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}(0,1)$ — единичная окружность. Последовательность многочленов $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, равномерно сходящаяся к f на $\mathbb{S}$, существует тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $F : \overline{\mathbb{D}}(0,1) \to \mathbb{C}$ такая, что $F|_{\mathbb{S}} = f$ и $F : \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ голоморфна. Докажите это утверждение.

(9) Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, такое, что пара точек $\{1, -1\}$ лежит в одной и той же компоненте множества $\mathbb{C} \setminus U$. Докажите, что на U существует однозначная аналитическая ветвь функции $\sqrt{z^2 - 1}$, то есть такая голоморфная функция $f : U \to \mathbb{C}$, что $f(z)^2 = z^2 - 1$.

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_2 + a_8 + 1 = 8 + 8 + 1 = 7 \mod 10$

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{\frac{1}{2}}{k},\ \gamma(t) = -t + it^2$$

Радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k}}{\binom{\frac{1}{2}}{k+1}} \right| = 1$$

Заметим также что

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{\frac{1}{2}}{k} = \sqrt{z+1}$$
$$\gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = i - 1$$

Рассмотрим диск D_1 с центром в 0 и радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$, в нем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \binom{\frac{1}{2}}{k}$ сходится и $s : D_1 \to C$, теперь рассмотрим диск D_2 с центром в $(-1, 1)$ и радиусом $\frac{3}{4}$ и $h : D_2 \to C$, так мы покрыли γ двумя дисками, на пересечении s, h совпадают, так как в этой области оба ряда сходятся к одной и той же функции $\sqrt{1+z}$. Росток допускает аналитическое продолжение вдоль γ и $\sqrt{1+z}$ – результат аналитического продолжения вдоль γ.

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_5 + a_7 + 1 = 6 + 3 + 1 = 0 \mod 10$

$$f(z)^2 = 1 + z,\ f(0) = -1$$

Пусть росток существует, тогда он имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$f(0) = -1,\ a_0 = -1$$
$$f(z)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^2 = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^2 = a_0^2 + 2a_0a_1z + (a_1^2 + 2a_0a_2)z^2 + \ldots = 1 + z$$
$$2a_0a_1 = 2 \cdot (-1) \cdot a_1 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{2}$$
$$a_1^2 + 2a_0a_2 = \frac{1}{4} - 2a_2 = 0,\ a_2 = \frac{1}{8}$$
$$2a_0a_3 + 2a_1a_2 = -2a_3 - \frac{1}{16} = 0,\ a_3 = -\frac{1}{32}$$
$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}$$

А следовательно росток один

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_2 + a_6 + 1 = 8 + 9 + 1 = 8 \mod 10$

$$w^2 = z^2,\ w(1) = -1,\ \gamma(t) = e^{2\pi i t}$$

Заметим, что $\gamma(0) = e^{2\pi i * 0} = e^0 = 1, \gamma(1) = e^{2\pi i * 1} = e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$, тогда

$$\omega^2 = z^2 \Rightarrow \omega = z \vee \omega = -z$$
$$\omega(\gamma(0)) = -1$$

Далее нам нужно посмотреть, обходит ли график особые точки Если $\omega = z$, то график не обходит особые точки, если $\omega = -z$ то $\omega(z) = -1 \Leftrightarrow z = 1$ и $\omega(\gamma(1)) = \omega(1) = -1$.

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_0 + a_7 + 1 = 1 + 3 + 1 = 5 \mod 10$

$$f(z) = \log(z),\ a = 1 + i,\ \Im(f(a)) \in [0, 2\pi)$$

Заметим что на открытом шаре $B(z_0, |z_0|)$ мы можем определить логарифм как $f(z) = \log(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z}$, где контур $z_0 - z$ содержится целиком в $B(z_0, |z_0|)$. Радиус сходимости не может быть больше $|z_0|$, так как $\log(z)$ не аналитическая в любой окрестности $z = 0$, а также по интегральной формуле Коши

$$\frac{d^n}{dz^n}\log(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{\log(\omega)d\omega}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

$$\gamma_{z_0,r}(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\omega \in \gamma_{z_0,r}\, \frac{|z_0| - r}{|z_0|} \leqslant \frac{|z_0| + r}{|z_0|}$$

Тогда

$$|\log(\omega)| \leqslant \left(\frac{|z_0|^2}{|z_0| - r}\right)$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left|\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\log(z_0)\right|^{\frac{1}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \left|\frac{1}{r^{n+1}}\log\left(\frac{|z_0^2|}{|z_0| - r}\right)\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{r}$$

Радиус сходимости хотя бы r для любого $r < |z_0|$, а следовательно он не менбше и равен $|z_0|$, то есть в нашем случае $|1 + i| = \sqrt{2}$

Домашнее задание 8

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_7+a_9. Функция f определена и голоморфна на некоторой проколотой окрестности точки 0. Докажите или опровергните следующие утверждения. Можно пользоваться утверждениями из учебника, снабжая их точными ссылками.

(0) Если f имеет полюс или устранимую особенность в точке 0, то $f(z) = z^{\mathrm{ord}_0(f)} g(z)$, причем g имеет устранимую особенность в точке 0.

(1) Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка z, такая, что $|z| < \varepsilon$ и $|f(z)| > e^{\frac{1}{|z|}}$, то 0 является существенной особой точкой для f.

(2) Если $|f(z)| < \frac{|\log |z||}{|z|}$ для всех z из достаточно малой проколотой окрестности точки 0, то 0 является полюсом для f порядка не выше 1.

(3) Если $|f(z)| \leqslant |z|^{4/3}$ для всех достаточно маленьких $z \neq 0$, то $|f(z)| \leqslant |z|^{5/3}$ для всех достаточно маленьких $z \neq 0$.

(4) Если f имеет полюс в 0, то $f(z) = g(z) + P(1/z)$, где P — это многочлен, а g — голоморфная функция в (заполненной) окрестности точки 0.

(5) Если f является суммой рациональной и целой функций, то f имеет в 0 полюс или устранимую особенность.

(6) Если 0 является существенной особенностью функции f, то $|f(z_n)| < |z_n|^{2021}$ для некоторой последовательности $z_n \to 0$.

(7) Если 0 является существенной особенностью функции f, то $|f(z_n)| > |z_n|^{-2021}$ для некоторой последовательности $z_n \to 0$.

(8) Если 0 является существенной особенностью функции f, то $|f(z_n)| < e^{-1/|z_n|}$ для некоторой последовательности $z_n \to 0$. .

(9) Если f является отношением двух целых функкий, то f не может иметь существенную особенность в 0.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_4+a_5. Для следующих аналитических функций найдите все нули и их кратности. Также, найдите все особенности и определите их тип (устранимая особенность, полюс, существенная особенность, неизолированная особенность). Для тех особенностей, которые являются полюсами, найдите порядок полюса.

(0) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

(1) $f(z) = z \sin z$.

(2) $f(z) = (\sin z)^3$.

(3) $f(z) = \operatorname{tg}(z^3)$.

(4) $f(z) = \frac{1}{z(z^2-4)^2}$.

(5) $f(z) = \frac{z}{\sin(z^2)}$.

(6) $f(z) = e^{\operatorname{tg} z}$.

(7) $f(z) = e^{\frac{1}{\sin(1/z)}}$.

(8) $f(z) = \frac{\sin z}{2-\cos z}$.

(9) $f(z) = \frac{1}{\sin z+\cos z}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_6$. Найдите ряд Лорана для указанной ниже функции f в указанном кольце A.

(0) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

(1) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$.

(2) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

(3) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

(4) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < \infty\}$.

(5) $f(z) = \frac{z}{1+z^3}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$.

(6) $f(z) = \cos \frac{1}{z}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$.

(7) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

(8) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$.

(9) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_6+a_7. Для каждой из следующих функций найдите ее вычеты во всех изолированных особенностях.

(0) $f(z) = \operatorname{tg} z$.

(1) $f(z) = \frac{1}{z^3+z}$.

(2) $f(z) = \frac{e^z}{z^2-4}$.

(3) $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z+1}$.

(4) $f(z) = \sin z \, \sin \frac{1}{z}$.

(5) $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$.

(6) $f(z) = \frac{1}{z^3+z^2}$.

(7) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2-1)^2}$.

(8) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}$.

(9) $f(z) = \frac{1}{z(\sin z)^2}$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_6$.

(0) Упражнение 7.7 (a) на странице 117 основного учебника.
(1) Упражнение 7.7 (b) на странице 117 основного учебника.
(2) Упражнение 7.9 на странице 118 основного учебника.
(3) Упражнение 7.10 на странице 118 основного учебника.
(4) Упражнение 7.11 на странице 118 основного учебника.
(5) Упражнение 7.12 на странице 118 основного учебника.
(6) Упражнение 8.3 на странице 145 основного учебника.
(7) Упражнение 8.4 на странице 145 основного учебника.
(8) Упражнение 8.5 на странице 145 основного учебника.
(9) Упражнение 8.6 на странице 145 основного учебника.

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_7 + a_9 = 3 + 6 = 9 \mod 10$ Пусть $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, тогда особенности $f(z)$ это нули $q(z)$ и ∞. Так как $q(z)$ – некий многочлен, то все его нули конечного порядка – они являются полюсами этого порядка (мы исходим из того, что у $p(z), q(z)$ нет общих корней). Заметим, что $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ либо 0 (если $\deg(p) < \deg(q)$), либо ∞ (если $\deg(p) > \deg(q)$), либо является отношением коэффициентов перед старшими членами (если $\deg(p) = \deg(q)$), а следовательно предел существует и в ∞ также не может быть существенной особенности.
Так мы доказали, что если $f(z)$ является отношением двух целых функций, то у нее вообще нет существуенных особенностей, а следовательно и в 0 они тоже отсутствуют.

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_4 + a_5 = 7 + 6 = 3 \mod 10$

$$\tan(z^3)$$

Найдем нули

$$\tan(z^3) = 0$$
$$z^3 = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$
$$z_1 = \sqrt[3]{\pi n_1},\ n_1 \in \mathbb{Z}$$
$$z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\pi n_2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\pi n_2},\ n_2 \in \mathbb{Z}$$
$$z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\pi n_3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\pi n_3},\ n_3 \in \mathbb{Z}$$

Найдем особенности

$$\tan(z^3) = \frac{\sin(z^3)}{\cos(z^3)} = -\frac{\cos(z^3 - \frac{\pi}{2})}{\sin(z^3 - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{z^3 - \frac{\pi}{2}}\left(-\frac{z^3 - \frac{\pi}{2}}{\sin(z^3 - \frac{\pi}{2})} \cdot \cos(z^3 - \frac{\pi}{2})\right)$$

Уравнение в скобках аналитическое и имеет проколотую окрестность $z^3 = \frac{\pi}{2}$ пределом -1 при $z \to \frac{\pi}{2}$, откуда следует что в $z_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ полюс порядка 1. Заметим, что другие полюса имеют координаты $z = \sqrt[3]{\frac{(2n+1)\pi}{2}},\ n \in \mathbb{Z}$ (так как $\tan(x) = \tan(\pi + x)$) и также имеют порядок 1.

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_5 + a_6 = 6 + 9 = 5 \mod 10$

$$f(z) = \frac{z}{1 + z^3},\ A = \{z \in \mathbb{C} |\ 1 < |z| < \infty\}$$
$$\frac{z}{1+z^3} = \frac{1}{\frac{1}{z} + z^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{z^3})} = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{z^3}\right)^n\right)$$
$$= \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{z}\right)^{3n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{3n+2}\right)$$
$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow 1 < |z|$$

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_6 + a_7 = 9 + 3 = 2 \mod 10$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 4}$$
$$z = \pm 2$$

$\mathrm{Res}_2(f)$ равен коэффициенту при $(z-2)^{-1}$ в разложении f в точке 2, а $\mathrm{Res}_{-2}(f)$ коэффициенту при $(z+2)^{-1}$ разложения в точке -2.
Разложим в ряд Лорана по степеням $(z-2)$ в окр $z=2$

$$\frac{e^z}{z^2-4} = e^z \cdot \frac{1}{(z-2)(z+2)} = e^z \cdot \frac{1}{(z-2)((z-2)+4)} = e^z \cdot \frac{1}{(z-2)^2(1+\frac{4}{z-2})} = e^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{(z-2)^{k+2}}$$

$$\mathrm{Res}_2(f) = \frac{e^2}{-4} = -\frac{e^2}{4}$$

Разложим в ряд Лорана по степеням $(z+2)$ в окр $z=-2$

$$\frac{e^z}{z^2-4} = e^z \cdot \frac{1}{(z-2)(z+2)} = e^z \cdot \frac{1}{(z+2)((z+2)-4)} = e^z \cdot \frac{1}{(z+2)^2(1-\frac{4}{z+2})} = e^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{(z+2)^{k+2}}$$

$$\mathrm{Res}_{-2}(f) = \frac{e^{-2}}{-4} = -\frac{1}{4e^2}$$

То есть $\mathrm{Res}_{-2}(f) = -\frac{1}{4e^2},\ \mathrm{Res}_2(f) = -\frac{e^2}{4}$

Домашнее задание 9

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_8$. Вычислите следующие интегралы при помощи вычетов.

(0) $\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{1+x^2+x^4}$.

(1) $\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

(2) $\int_{|z|=1} z \operatorname{tg}(\pi z) dz$.

(3) $\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)} dz$.

(4) $\int_{|z-i|=3} \frac{\exp(z^2)-1}{(z^3-iz^2)} dz$.

(5) $\int_{|z|=5/2} \frac{z^2}{z-3} \sin(\frac{z}{z-2})\, dz$.

(6) $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} e^{\frac{1}{z-1}} dz$.

(7) $\int_{|z-\frac{\pi}{2}(1-i)|=\pi} \frac{z dz}{\cos z - \operatorname{ch} z}$.

(8) $\int_{|z-i|=3} \frac{z}{z^2+9} \operatorname{ch} \frac{z}{z-2} dz$.

(9) $\int_{|z|=2} z^2 \sin \frac{1}{1-z} dz$.

Напомним, что $\operatorname{ch} z$ обозначает функцию гиперболический косинус, равную $\frac{e^z+e^{-z}}{2}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_9$. Для каждой из указанных ниже функций f, найдите число корней уравнения $f(z) = 0$ в единичном диске $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ с учетом кратностей.

(0) $f(z) = 5z^3 + e^z + 1$.

(1) $f(z) = 3 + z^2 + e^{-z}$.

(2) $f(z) = 5 + \frac{3}{z} + e^z$.

(3) $f(z) = \cos(z) + 5z - 3$.

(4) $f(z) = \sin(z) + z^2 + 2$.

(5) $f(z) = 3 + 7z^2 + \log(z+1)$ (рассматривается та ветвь натурального логарифма, для которой $\log(1) = 0$).

(6) $f(z) = e^{3z} - z^2 + z$.

(7) $f(z) = e^z + \sin(z) + 1$.

(8) $f(z) = 3 - 2z^3 + e^z$.

(9) $f(z) = 4 - 2z^2 + \sin(z)$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_1 + a_9$. В следующих ниже задачах про функцию f предполагается, что она определена и голоморфна в диске $\mathbb{D}(2) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$, а через $\mathbb{D}$ обозначен единичный диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Если $f(0) = 0$ и $|f(e^{it})| > 1$ для всех вещественных t, то $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}$.

(1) Если $|f(e^{it})| > 1$ для всех вещественных t, то f имеет хотя бы один корень в $\mathbb{D}$.

(2) Если $|f(e^{it})| < 1$ для всех вещественных t, то $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(3) Если $|f(e^{it})| > 1$ для всех вещественных t, причем индекс кривой $t \mapsto f(e^{it})$ относительно точки 0 равен 1, то $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}$.

(4) Если $f(e^{it}) \neq 0$ при вещественных t, то индекс кривой $t \mapsto f(e^{it})$ относительно точки 0 не может быть отрицательным.

(5) Если $f(0) = 0$ и $|f(e^{it})| > 1$ для всех вещественных t, то индекс кривой $t \mapsto f(e^{it})$ относительно точки 0 не может быть равен нулю.

(6) Если уравнение $f(z) = 2$ имеет ровно два различных корня в $\mathbb{D}$, причем $|f(e^{it})| > 2$ для всех вещественных t, то уравнение $f(z) = 0$ имеет не менее двух корней с учетом кратности.

(7) Если $|f(e^{it})| < 1$ для всех вещественных t, то уравнение $z + f(z) = c$ имеет хотя бы один корень в $\mathbb{D}$ для всякого $c \in \mathbb{D}$.

(8) Если $|f(e^{it})| < 1$ для всех вещественных t, то уравнение $z^2 + f(z) = c$ имеет хотя бы два различных корня в $\mathbb{D}$ для всякого $c \in \mathbb{D}$.

(9) Если $|f(e^{it})| < 1$ для всех вещественных t, то уравнение $z^2 + f(z) = c$ имеет ровно два различных корня в $\mathbb{D}$ для хотя бы одного $c \in \mathbb{D}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_9$. Вычислите следующие интегралы в смысле главного значения

(0) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x(1-x)}$.

(1) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x\,dx}{1-x^6}$.

(2) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos x\,dx}{x^2-6x+10}$.

(3) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$.

(4) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x\,dx}{x^2-4x+8}$.

(5) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2-x)\cos(3x-2)x\,dx}{x^2-2x+2}$.

(6) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3)\sin\frac{x}{2}\,dx}{x^2+4x+20}$.

(7) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3x)\sin(3x)\,dx}{1-x^4}$.

(8) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x+3)\sin(x+5)\,dx}{x^2+4x+8}$.

(9) V.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+x^3\sin 3x\,dx}{1-x^4}$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_4$.

(0) Упражнение 8.7 на стр. 145 основного учебника.
(1) Упражнение 8.22 на стр. 147 основного учебника.
(2) Упражнение 8.23 на стр. 147 основного учебника.
(3) Упражнение 8.24 на стр. 147 основного учебника.
(4) Упражнение 8.25 на стр. 147 основного учебника.

(5) Положим $f(z) = \cos z - 2$ и $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| < 2,\ |\mathrm{Im}\, z| < 3\}$. Докажите, что $U \subset f(U)$, причем каждая точка в $f(U)$ имеет ровно два прообраза в U с учетом кратности.

(6) Найдите самый большой диск с центром в точке 0, на котором отображение $f(z) = z^2 + z$ инъективно.

(7) Найдите самый большой диск с центром в точке 0, на котором отображение $f(z) = e^z$ инъективно.

(8) Пусть функция f определена и голоморфна в окрестности точки 0, причем $f'(0) \neq 0$. Докажите, что существует голоморфная в окрестности точки 0 функция g, для которой $f(z^3) = f(0) + g(z)^3$.

(9) Пусть R — рациональная функция, не имеющая ни нулей, ни полюсов на единичной окружности $\{|z| = 1\}$. Докажите, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z\,\frac{R'(z)}{R(z)}dz$$

равен разности между суммой нулей и суммой полюсов функции R в единичном диске $\{|z| < 1\}$ с учетом кратности. Какое условие

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_4 + a_8 = 7 + 8 = 5 \mod 10$

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{z^2}{z-3} \sin\left(\frac{z}{z-2}\right) dz$$
$$I = \int_C \frac{z^2}{z-3} \sin\left(\frac{z}{z-2}\right) dz,\ C : |z| = \frac{5}{2}$$
$$I = 2\pi i \sum \text{вычеты } f \text{ внутри контура}$$

Заметим, что особые точки это $z = 3$, но $|3| > \frac{5}{2}$. Следовательно $I = 2\pi i * 0 = 0$, то есть интеграл равен 0

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_3 + a_9 = 9 + 6 = 5 \mod 10$

$$f_1(z) = 3 + \log(z+1) \qquad f_2(z) = 7z^2$$
$$|3 + \log(z+1)| \leqslant 3 + |\log(z+1)|$$
$$|\log(z+1)| = |\log|(z+1)| + i\arg(z+1)| \leqslant |\log|(z+1)|| + \pi \leqslant \log 2 + \pi < 4$$

Откуда $|3 + \log(z+1)| < 3 + 4 = 7$, при $|z| \to 1 :\ |7z^2| \to 7$, откуда $|f_1(z)| < |f_2(z)|$ при $|z| = 1 - \epsilon$. Тогда по теореме Руше функции $f_2(z)$ и $f_1(z) + f_2(z)$ имеют равное количество нулей на $\mathbb{D}$, откуда у $f_1(z) + f_2(z)$ 2 нуля (так как у $f_2(z)$ 2 нуля).

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_1 + a_9 = 7 + 6 = 3 \mod 10$ $|f(e^{it})| > 1$ для всех вещественных t, индекс $t \mapsto f(e^{it})$ относительно 0 равен 1, то $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}$

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_4 + a_9 = 7 + 6 = 3 \mod 10$

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 - x^4} = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{x^2}{1-x^4} dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} -\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int\limits_{-R}^{-1} -\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx + \int\limits_{-1}^{1} -\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx + \int\limits_{1}^{R} -\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx \right)$$
$$= \lim_{R\to\infty} ((-\frac{1}{4}\log(1+R) + \frac{1}{4}\log(-R+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(R)) - (-\frac{1}{4}\log(1+1) + \frac{1}{4}\log(-1+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(-1))$$
$$+(-\frac{1}{4}\log(1+1) + \frac{1}{4}\log(-1+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(-1)) - (-\frac{1}{4}\log(1-1) + \frac{1}{4}\log(1+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(1))$$
$$+(-\frac{1}{4}\log(1-1) + \frac{1}{4}\log(1+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(1)) - (-\frac{1}{4}\log(1-R) + \frac{1}{4}\log(R+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(-R)))$$
$$= \lim_{R\to\infty} (\tan^{-1}(-R) - \tan^{-1}(R)) = -\pi$$

Домашнее задание 10

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_5$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Индекс ветвления рациональной функции степени $d > 1$ ни в какой точке не может быть больше чем d.

(1) Рациональная функция степени $d > 1$ не может иметь более двух точек, в которых индекс ветвления равен d.

(2) Рациональная функция степени $d > 1$ может иметь максимум $2d - 2$ критических точки.

(3) Рациональная функция степени $d > 1$ ни в одной точке не может иметь полюс порядка выше d.

(4) Рациональная функция степени $d > 1$ может иметь более одного полюса порядка d.

(5) Если рациональная функция f степени $d > 1$ имеет две геометрически различных точки ветвления степени d, то существует преобразование Мебиуса h, такое, что $h \circ f \circ h^{-1}(z) = z^{\pm d}$.

(6) Если рациональная функция f степени $d > 1$ имеет полюс степени d, то существует дробно-линейное преобразование h, такое, что $f \circ h(z)$ является многочленом степени d.

(7) Известно, что рациональная функция f степени 4 имеет два геометрически различных кратных нуля и только один полюс. Тогда f является квадратом некоторой рациональной функции степени 2.

(8) Известно, что рациональная функция f степени 2 имеет критическую точку c, такую, что $f(f(c)) = c$. В этом случае найдется такое дробно-линейное преобразование h, что $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \frac{a}{z^2 - 2z}$ для некоторого $a \in \mathbb{C}$ (не зависящего от z) или $h \circ f \circ h^{-1}(z) = 1/z^2$.

(9) Известно, что рациональная функция f степени 2 имеет критическую точку c, такую, что $f(c) = c$. В этом случае найдется такое дробно-линейное преобразование h, что $h \circ f \circ h^{-1}(z) = z^2 + a$ для некоторого $a \in \mathbb{C}$ (не зависящего от z).

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_4+a_6. Существуют ли многочлен $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ и гомеоморфизмы $\alpha,\beta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (не обязательно голоморфные), такие что $f=\beta\circ P\circ\alpha$ совпадает с выписанным ниже отображением? Строго обоснуйте ответ.

(0) $f(x+iy)=x^2+iy$.

(1) $f(x+iy)=(x^2-y^2)+ixy$.

(2) $f(re^{i\theta})=re^{2i\theta}$.

(3) $f(x+iy)=x^3+iy$.

(4) $f(x+iy)=(x^2+y^2)(x^2-y^2+ixy)$.

(5) $f(z)=\frac{z|z|^2}{1+|z|^2}$.

(6) $f(z)=\frac{z^2|z|^2}{1+|z|^2}$.

(7) $f(x+iy)=e^x+iy$.

(8) $f(x+iy)=e^x-e^{-x}+iy$.

(9) $f(x+iy)=\sin x+iy$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_1+a_5. В следующих ниже задачах функции $f,\ g:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ являются голоморфными, а подмножество $K\subset\mathbb{D}$ является компактным. Через $\mathbb{D}$ обозначен единичный диск $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Множество $f(\mathbb{D}\setminus K)\setminus g(K)$ открыто в $\mathbb{C}$.

(1) Множество $f(K)\setminus g(\mathbb{D}\setminus K)$ компактно.

(2) Множество $\{z\in\mathbb{D}\mid \operatorname{Re} f(z)>\operatorname{Im} g(z)\}$ открыто в $\mathbb{C}$.

(3) Множество $\operatorname{Re} f(\mathbb{D})$ открыто в $\mathbb{R}$.

(4) Множество $\operatorname{Re} f(\mathbb{D})$ ограниченно.

(5) Точняя верхняя грань чисел $(\operatorname{Re} f(z))^2+(\operatorname{Im} f(z))^4$ не достигается при $z\in\mathbb{D}$.

(6) Множество $\operatorname{Re}(f(K))\setminus\operatorname{Im}(g(\mathbb{D}\setminus K))$ компактно.

(7) Если $\operatorname{Re} f(z)<\operatorname{Re} g(z)$ для всех z, таких, что $|z|=r>0$, то $\operatorname{Re} f(z)<\operatorname{Re} g(z)$ при $|z|<r$.

(8) Если $|f(z)|^2<|g(z)|^3$ для всех z, таких, что $|z|=r>0$, то $|f(z)|^2<|g(z)|^3$ при $|z|<r$.

(9) Множество $\{|f(z)|^2-|g(z)|^2\mid z\in\mathbb{D}\}$ открыто в $\mathbb{R}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_7$.

(0) Выразив по формуле Коши n-ую производную функции e^z в нуле через интеграл по окружности радиуса ρ с центром в 0, докажите, что

$$\int_0^{2\pi} e^{\rho\cos\phi}\cos(\rho\sin\phi - n\phi)\,d\phi = 2\pi\frac{\rho^n}{n!}.$$

(1) Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta},$$

сведя его к интегралу от некоторой рациональной функции по окружности $\{|z| = 1\}$. Здесь a и b — вещественные параметры, такие, что $0 < b < a$.

(2) Докажите, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2\cos 2\alpha}\cos(x^2\sin 2\alpha)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\alpha,$$

проинтегрировав функцию e^{-z^2} по границе области, заданной в полярных координатах (ρ, θ) неравенствами $0 < \rho < R$ и $0 < \theta < \alpha$, а потом устремив R к бесконечности.

(3) Докажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Указание: проинтегрируйте функцию e^{iz}/z по границе области, заданной в полярных координатах (ρ, θ) неравенствами $r < \rho < R$ и $0 < \theta < \pi$ (здесь $0 < r < R$). Рассмотрите предельный переход $r \to 0$, $R \to \infty$.

(4) Пусть $-\pi < a < \pi$. Докажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}.$$

Здесь $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ обозначает функцию гиперболического синуса. *Указание:* проинтегрируйте функцию $e^{az}/\operatorname{sh}\pi z$ по границе прямоугольника $\{z \in \mathbb{C} \mid -R \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant R,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1\}$, из которого удалены маленькие диски вокруг точек 0 и i.

(5) Найдите интеграл

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n d\theta$$

для всех целых положительных n.

(6) Докажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Здесь $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ обозначает функцию гиперболического синуса.

(7) При $a > 0$, докажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x(x^2+a^2)} = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-a}).$$

Чему будет равен этот интеграл при $a < 0$?

(8) Пусть m и n — положительные целые числа, такие, что $m < n$. Докажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1} dx = \frac{\pi}{2n \sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

(9) Докажите, что если $b > 0$, то

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - a - bi}{2} d\theta = 2\pi i.$$

Чему равен интеграл в левой части при $b < 0$?

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6 + a_9$.

(0) Задача 9.1 на стр. 159–160 основного учебника.
(1) Задача 9.2 на стр. 160 основного учебника.
(2) Задача 9.3 на стр. 160 основного учебника.
(3) Задача 9.4 на стр. 160 основного учебника.
(4) Задача 9.5 на стр. 160 основного учебника.
(5) Пусть $f_n : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ — последовательность отображений, голоморфных в диске $\mathbb{D}$ и непрерывных на его замыкании. Известно, что ограничения отображений f_n на границу диска (т.е. на единичную окружность) сходятся равномерно. Докажите, что последовательность f_n равномерно сходится в $\overline{\mathbb{D}}$.
(6) Задача 9.6 на стр. 160 основного учебника.

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_3 + a_5 = 9 + 6 = 5 \mod 10$
5 задача оказалась сложной, поэтому я записал 4
Заметим что рациональную функцию можно представить в виде $\frac{p(z)}{q(z)}$, допустим что у рассматриваемой функции есть хотя бы 2 полюса степени d, назовем их $z_1,\ z_2$. Тогда функцию можно представить как $\frac{p(z)}{(z-z_1)^d(z-z_2)^d q_1(z)}$, $(z-z_1)^d(z-z_2)^d q_1(z) = q(z)$, тогда $\deg((z-z_1)^d(z-z_2)^d q_1(z)) \geqslant 2d$, но $\deg(q(z)) \leqslant d$, противоречие.

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_4 + a_6 = 7 + 9 = 6 \mod 10$

$$\begin{aligned}
&a : \ z \mapsto \frac{z|z|}{1+|z|} \\
&P : \ z \mapsto z^2 \\
&b : \ \text{id} \\
&a \circ P \circ b = \frac{z^2|z|^2}{1+|z|^2}
\end{aligned}$$

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_1 + a_5 = 7 + 6 = 3 \mod 10$
Заметим что f голоморфна, а следовательно аналитична, откуда следует что так как $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ открыто, то $f(\mathbb{D})$ либо открыта в $\mathbb{C}$, либо константа, рассмотрим $f(z) = C$, $\Re(f(\mathbb{D})) = \Re(C) = \Re(a+bi) = a$, а точка не является открытым множеством

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_0 + a_7 = 1 + 3 = 4 \mod 10$
Заметим что функция $\sinh(ax)$ симметрична относительна начала координат

$$\int_{\gamma_R} \frac{\sinh(az)e^{itz}}{\sinh(bz)} dz = 2\pi i \sum_{1 \le n \le Rb/\pi} \text{Res}\left(\frac{\sinh(az)e^{itz}}{\sinh(bz)}, \frac{\pi i n}{b}\right)$$

Где γ_R – замкнутый контур, состоящий из полуокружности радиуса R и интервала $[-R, R]$, рассмотрев $R \to +\infty$ получим:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh(ax)}{\sinh(bx)} e^{itx} dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}\left(\frac{\sinh(az)e^{itz}}{\sinh(bz)}, \frac{\pi i n}{b}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(a\pi i n/b)e^{-\pi n t/b}}{\cosh(\pi i n)} = -\frac{2\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(a\pi n/b) e^{-\pi n t/b} \\
&= -\frac{2\pi}{b} \text{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\pi n(-t+ia)/b}\right) = -\frac{2\pi}{b} \text{Im}\left(\frac{1}{1+e^{\pi(ia+t)/b}}\right)
\end{aligned}$$

Тогда рассмотрим $t \to 0^+$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh(ax)}{\sinh(bx)} dx = \frac{\pi}{2b} \cdot \frac{\sin(a\pi/b)}{\cos(a\pi/b)+1}$$

Откуда при $b = \pi$ получаем

$$\frac{\pi}{2b} \cdot \frac{\sin(a\pi/b)}{\cos(a\pi/b)+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(a)}{\cos(a)+1} = \frac{1}{2} \tan\frac{a}{2}$$

Домашнее задание 11

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_2$. Существует ли голоморфная функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ со следующими свойствами? Строго обоснуйте ответ.

(0) $f(i) = 2i$, $f(2i) = 5i$.

(1) $f(i) = 2i$, $f(2i) = 3i$.

(2) $f(i) = i$, $|f'(i)| = 2$.

(3) $f(i) = i$, $|f'(i)| = \frac{1}{2}$.

(4) $f(i) = 2i$, $|f'(i)| = 3$.

(5) $f(i) = 2i$, $|f'(i)| = 1$.

(6) $f(i) = i$, $f(2i) = \log 2 + i$, $f(-\log 2 + i) = i/3$.

(7) $f(2i) = 2i$, $f(i) = 4i$, $f(1 + i) = 4 + 4i$.

(8) $f(i) = 1 + i$, $f(1 + i) = 2 + i$, $f(2 + i) = 4 + i$.

(9) $f(i) = 2i$, $f(2i) = 4i$, $f(3i) = 8i$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_0+a_7. При решении следуюших задач можно воспользоваться тем фактом, что группа конформных автоморфизмов полуплоскости (или диска) совпадает с группой собственных изометрий полуплоскости (или диска) относительно метрики Пуанкаре. (Изометрии — это преобразования, сохраняющие расстояния. Собственные изометрии — это изометрии, сохраняющие ориентацию, то есть гомотопные тождественному преобразованию в группе изометрий.)

(0) Докажите, что для любых z, $w \in \mathbb{H}$ и для любого $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ расстояние между точками z и w в метрике Пуанкаре равно расстоянию между λz и λw.

(1) Найдите несобственную изометрию $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ в метрике Пуанкаре со следующим свойством. Точки $z \in \mathbb{H}$, такие, что $|z| = 1$, остаются на месте (то есть $f(z) = z$ для каждой такой точки z).

(2) Приведите пример дробно-линейного преобразования, которое не сопряжено в группе $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ никакому конформному автоморфизму диска.

(3) Пусть $L = \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$. Опишите все голоморфные автоморфизмы $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, такие, что $f(L) = L$. Найдите множество точек вида $f(1+i)$, где f пробегает все указанные автоморфизмы.

(4) Пусть $C = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$. Опишите все голоморфные автоморфизмы $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, такие, что $f(C) = C$. Найдите множество точек вида $f(1+i)$, где f пробегает все указанные автоморфизмы.

(5) Пусть $O = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - i| = 1\}$. Опишите все голоморфные автоморфизмы $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, такие, что $f(O) = O$. Найдите множество точек вида $f(i)$, где f пробегает все указанные автоморфизмы.

(6) Пусть f — конформный автоморфизм единичного диска, такой, что $f(a) = a$ для некоторой точки $a \in \mathbb{D}$. Докажите, что f сопряжен в группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ повороту вокруг нуля на некоторый угол.

(7) Пусть f — конформный автоморфизм единичного диска, такой, что $f \circ f = id$. Докажите, что найдется точка $a \in \mathbb{D}$, для которой $f(a) = a$.

(8) Пусть f — конформный автоморфизм верхней полуплоскости со следующим свойством. Существует единственная точка $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, такая, что $f(a) = a$. Докажите, что f сопряжен в группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ отображению $g(z) = z \pm 1$.

(9) Пусть f — конформный автоморфизм верхней полуплоскости со следующим свойством. Существуют две различные точки a, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, такие, что $f(a) = a$ и $f(b) = b$. Докажите, что f сопряжен в группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ отображению $g(z) = \lambda z$ для некоторого вещественного положительного λ.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6 + a_9$.

(0) Рассмотрим непрерывную функцию $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ и простую (несамопересекающуюся) ломаную, разделяющую единичный диск на два открытых множества U, V. Предположим, что ограничения функции f на U и на V голоморфны. Докажите, что f голоморфна на всем диске.

(1) Докажите, что не существует конформного изоморфизма между множествами $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ и $V = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

(2) Докажите, что не существует конформного изоморфизма между множествами $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ и $V = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$. *Указание:* воспользуйтесь принципом симметрии.

(3) Докажите, что не существует конформного изоморфизма между единичным диском и всей плоскостью.

(4) Докажите, что не существует конформного изоморфизма между $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(5) Рассмотрим множество $U = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > x^2\}$. Докажите, что любая непрерывная функция $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$, голоморфная внутри области U, допускает голоморфное продолжение на некоторую открытую окрестность множества $\overline{U}$. (Указание: рассмотрите конформное отображение, переводящее параболу в прямую, и воспользуйтесь принципом симметрии).

(6) Рассмотрим множество $U = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y^2 > x^2\}$. Докажите, что любая непрерывная функция $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$, голоморфная внутри области U, допускает голоморфное продолжение на некоторую открытую окрестность множества $\overline{U}$. (Указание: рассмотрите конформное отображение, переводящее гиперболу в прямую, и воспользуйтесь принципом симметрии).

(7) Рассмотрим множество $U = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid x^2+2y^2 < 1\}$. Докажите, что любая непрерывная функция $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$, голоморфная внутри области U, допускает голоморфное продолжение на некоторую открытую окрестность множества $\overline{U}$. (Указание: рассмотрите конформное отображение, переводящее эллипс в окружность, и воспользуйтесь принципом симметрии).

(8) Существует ли конформный изоморфизм между $\mathbb{D} \setminus \{0, 1\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$? Строго обоснуйте ответ.

(9) Существует ли конформный изоморфизм между $\mathbb{D} \setminus \{0, 1/2\}$ и $\mathbb{D} \setminus \{0, 1/3\}$? Строго обоснуйте ответ.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_6$. Вычислите (при помощи вычетов) указанные ниже интегралы от многозначных аналитических функций. Во всех случаях выбирается такая ветвь функции x^a (в частности, $\sqrt{x}$, $\sqrt[5]{x}$ и т.д.), которая принимает положительные значения для положительных значений числа x.

(0) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(1) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$.

(2) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$ при $0 < \alpha < 1$.

(3) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \frac{dx}{1+x}$ при $-1 < \alpha < 1$.

(4) $\int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} dx$.

(5) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^2(4-x^2)}}$.

(6) $\int_0^\infty \frac{\log x\, dx}{x^2+a^2}$ при $a > 0$.

(7) $\int_0^\infty \left(\frac{\log x}{x-1}\right)^2 dx$.

(8) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x\, dx}{x^2+1}$.

(9) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\log|x^2-1|}{x^2+1} dx$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_4$.

(0) Докажите, что среди всех кривых в диске $\mathbb{D}$, соединяющих точки 0 и $r \in (0, 1)$, кратчайшую длину в метрику Пуанкаре имеет прямолинейный отрезок.

(1) Докажите, что среди всех кривых в верхней полуплоскости, соединяющих точки ia и ib (здесь a, b — различные положительные действительные числа), кратчайшую длину в метрике Пуанкаре имеет прямолинейный вертикальный отрезок.

(2) Задача 9.15 на стр. 161 основного учебника.

(3) Пусть $A(\varepsilon)$ — площадь круга с центром в нуле и радиусом $\varepsilon \in (0, 1)$ в метрике Пуанкаре единичного диска. Вычислите $A(\varepsilon)$ с точностью до членов четвертого порядка включительно, то есть с точностью до $o(\varepsilon^4)$ при $\varepsilon \to 0$. Напомним, что площадь области X с гладкой границей относительно метрики $\rho(z)|dz|^2$ определяется как интеграл по X от функции ρ.

(4) Задача 10.7 на стр. 190 основного учебника.

(5) Задача 10.8 на стр. 190 основного учебника.

(6) Задача 10.9 на стр. 191 основного учебника.

(7) Задача 10.10 на стр. 191 основного учебника.

(8) Задача 9.10 на стр. 161 основного учебника.

(9) Существует ли непрерывное отображение из замкнутого квадрата 1×1 на замкнутый прямоугольник 1×2, переводящее вершины квадрата в вершины прямоугольника, стороны квадрата

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_0 + a_2 = 1 + 8 = 9 \mod 10$
Да, существует, вот пример:

$$f(x+iy) = (2xy - x) + i(y^2 - y + 2 + x^2)$$
$$-\frac{\partial(y^2 - y + 2 - x^2)}{\partial x} = 2x = \frac{\partial(2xy - x)}{\partial y}$$
$$\frac{\partial(2xy - x)}{\partial x} = 2y - 1 = \frac{\partial(y^2 - y + 2 - x^2)}{\partial y}$$

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_0 + a_7 = 1 + 3 = 4 \mod 10$
$C = \{z \in \mathbb{H} | \ |z| = 1\}$ – полуокружность с центром в 0 и $R = 1$ то есть имеются 2 точки на абсолюте. Следовательно параболический автоморфизм не подходит, так как он сохраняет лишь одну точку на абсолюте.
Эллиптический автоморфизм: рассмотрим автоморфизм, сохраняющий пучок прямых через 0. Такой автоморфизм сохраняет окружности с центром в этой точке, а следовательно $f(1+i) \in A = \{|z| = \sqrt{2}\}$
Гиперболический авторморфизм: 2 неподвижные точки на абсолюте - это $\pm i$, тогда множество точек вида $f(1+i)$ – эквидистанта, проходящая через $\pm i, 1+i$, то есть $\left\{z \in \mathbb{H} | \ \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_6 + a_9 = 9 + 6 = 5 \mod 10$
Покажем, что требуемое утверждение неверно
Пусть

$$f : \overline{U} \to \mathbb{C} : \{$$

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_0 + a_6 = 1 + 9 = 0 \mod 10$
$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$ – не определено только в $1 - x^2 = 0$, то есть ± 1. Заметим что f аналитична в $\{x \in \mathbb{C} | \ \Im x \geqslant 0\}$, кроме конечного числа точек, а следовательно по лемме Жордана

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{\gamma} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = 2\pi i(\operatorname{Res}_1 f(x) + \operatorname{Res}_{-1} f(x)) = 2\pi i(\frac{1}{2i}) = \pi$$

Домашнее задание 12

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_8$. Для указанной ниже открытой области U найдите неотрицательную функцию $\rho_U : U \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такую, что $\rho_U(z)|dz|$ — гиперболическая метрика в области U.

(0) $U = \{x + iy \mid x < 0\}$.

(1) $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(2) $U = \{x + iy \mid -\pi < y < \pi\}$.

(3) $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

(4) $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

(5) $U = \{x + iy \mid -\pi < y < \pi,\ x < 0\}$.

(6) $U = \{x + iy \mid x, y > 0\}$.

(7) $U = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

(8) $U = \{x + iy \mid x^2 + y^2 > 1,\ y > 0\}$.

(9) $U = \mathbb{C} \setminus \{x + 2\pi i k \mid -\infty < x \leqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_6$. Опишите (и нарисуйте) образ верхней полуплоскости относительно следующего отображения. (Точка z_0 — произвольная точка в верхней полуплоскости, а интеграл вычисляется по отрезку, соединяющему точки z_0 и z. Подынтегральное выражение понимается как произвольная однозначная ветвь на $\mathbb{H}$.)

(0) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$.

(1) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z(z^2-1)}}$.

(2) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z^2-1)^{2/3}}$.

(3) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)^3(z-2)}}$.

(4) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt[5]{z^2(z^2-1)^2(z^2-4)^2}}$.

(5) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt[3]{(z^2-1)^2(z^2-4)^2(z^2-9)^2}}$.

(6) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-2)}}$.

(7) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z}}$.

(8) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt[4]{z(z-1)^3}}$.

(9) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z^4-3z^2+1}}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_2+a_5. Докажите, что следующие уравнения имеют бесконечно много решений в комплексных числах.

(0) $\sin(z+e^z) = 2$.

(1) $(z+e^z)^2 = 1$.

(2) $(\sin z + 3z^3 + 1)^4 = -1$.

(3) $(\sin z - z)^3 + \sin z = z + 1$.

(4) $\cos(e^z - \sin z) = 2$.

(5) $\exp(1/\sin z) + z = 1$.

(6) $\operatorname{tg}(z^3) + z = 2$.

(7) $e^{1/(z^2-1)} = 2z - 5$.

(8) $(\sin(\operatorname{tg}(z)) - 2)(1+2z) = 3$.

(9) $\sin(\operatorname{ctg} z) = z + e$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_8 + a_9$. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — односвязная открытая область, отличная от $\mathbb{C}$. Рассмотрим голоморфное отображение $f : U \to U$ и точку $a \in U$, такую, что $f(a) = a$. (Такая точка называется *неподвижной*). *Итерация* $f^{\circ n} : U \to U$ определяется по индукции формулами $f^{\circ 1} = f$ и $f^{\circ n+1} = f \circ f^{\circ n}$. Докажите, что ...

(0) Если $f'(a) = e^{2\pi i/5}$, то $f \circ f \circ f \circ f \circ f = id$.

(1) Если $|f'(a)| < 1$, то уравнение $f' = 0$ имеет решение в U.

(2) Если $|f'(a)| < 1$, то $f^{\circ 3}(b) = b$ влечет $b = a$.

(3) Если f не является конформным автоморфизмом, то $f^{\circ n}(z) \to a$ равномерно на компактах.

(4) Если $f \in \operatorname{Aut}(U)$ и $f^{\circ n}(b) = b$ для $b \neq a$, то $f^{\circ n} = id$.

(5) Для всякой точки $b \in U$ последовательность $f^{\circ n}(b)$ лежит на некоторой гладкой кривой.

(6) Если $|f^{\circ n}(b) - a| > n^{-1/2}$ при $b \neq a$, то $|f'(a)| = 1$.

(7) Если a является единственной критической точкой для f в U, то существует конформный изоморфизм $h : U \to \mathbb{D}$, такой, что $h \circ f \circ h^{-1}(z) = z^k$ для некоторого натурального $k > 1$ и всех $z \in \mathbb{D}$.

(8) Если $f(b) = a$ для некоторого $b \in U \setminus \{a\}$, то $f' = 0$ имеет решение в U.

(9) Если $|f'(a)| = 1$, то $f \in \mathrm{Aut}(U)$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_8$.

(0) Упражнение 12.3 на стр. 246 основного учебника.
(1) Упражнение 12.4 на стр. 246 основного учебника.
(2) Упражнение 12.5 на стр. 246 основного учебника.
(3) Упражнение 12.6 на стр. 246 основного учебника.
(4) Упражнение 12.8 на стр. 247 основного учебника.
(5) Упражнение 12.9 на стр. 247 основного учебника.
(6) Докажите, что любой конформный изоморфизм прямоугольника на прямоугольник, переводящий (при соответствии границ) все четыре вершины в вершины, продолжается до конформного автоморфизма плоскости $\mathbb{C}$.
(7) Приведите пример голоморфного сюръективного отображения кругового кольца на круг.
(8) *Конечным произведением Бляшке* называется отображение вида

$$B(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z - a_1}{1 - \overline{a}_1 z}\right)\left(\frac{z - a_2}{1 - \overline{a}_2 z}\right)\dots\left(\frac{z - a_n}{1 - \overline{a}_n z}\right),$$

в котором $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$, а $\theta \in \mathbb{R}$. Пусть отображение $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ непрерывно на $\overline{\mathbb{D}}$ и голоморфно в $\mathbb{D}$. Предположим, что $|f(z)| = 1$ для любого z, такого, что $|z| = 1$. Докажите, что в этом случае f совпадает с конечным произведением Бляшке.
(9) Приведите пример голоморфного сюръективного отображения круга на круговое кольцо.

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_5 + a_8 = 6 + 8 = 4 \mod 10$

Задача 2

Необходимо решить задачу $a_0 + a_6 = 1 + 9 = 0 \mod 10$
Представим $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$ как $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-1)(z+1)}}$. Заметим, что $f(z_0) = 0$

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_2 + a_5 = 8 + 6 = 4 \mod 10$
Заметим, что $\cos(e^z - \sin(z))$ аналитична и имеет существенную особенность на бесконечности, а следовательно, по теореме Пикара, она принимает все значения, кроме одного, в данной окрестности бесконечно много раз, а следовательно так как у $\cos(e^z - \sin(z)) - 2$ есть 1 корень, то корней бесконечно много

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_8 + a_9 = 8 + 6 = 4 \mod 10$