ТФКП
2 курс
Домашнее задание

Владислав Мозговой
1789769386

29 марта 2021 г.

Домашнее задание 6

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_7 + 2a_9$. Предположим, что функция f голоморфна, а функция g непрерывна на открытом диске $\mathbb{D}(a, R)$ с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ и радиусом R. Пусть $0 < r < R$. Докажите, что

(0) $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi})\, d\phi$.

(1) $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|x+iy-a| \leqslant r} f(x + iy)\, dx\, dy$. (Можно пользоваться результатом п. (0) без доказательства).

(2) $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) \mathrm{Re} \left(\frac{re^{i\phi}+z}{re^{i\phi}-z} \right) d\phi$, если $z \in \mathbb{D}(a, r)$.

(3) $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{2\pi} g(a + \varepsilon e^{i\phi})\, d\phi = 2\pi g(a)$.

(4) $\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{|x+iy-a| \leqslant \varepsilon} g(x + iy)\, dx\, dy = g(a)$.

(5) $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(z)\, dz = 0$.

(6) $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} \frac{g(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i g(a)$.

(7) $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(z)\, |dz| = 0$.

(8) $\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(z)\, |dz| = g(a)$.

(9) $\int_0^{2\pi} (\mathrm{Re} f(a + re^{i\phi}) \cos\phi - \mathrm{Im} f(a + re^{i\phi}) \sin\phi)\, d\phi = 0$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $9a_0 + a_3$. Пользуясь теоремой Коши и-или интегральной формулой Коши, вычислите следующие интегралы по окружности единичного радиуса с центром в нуле, ориентированной положительно (т.е. против часовой стрелки).

(0) $\int \frac{e^z}{z(z+2)} dz$.

(1) $\int \frac{e^z}{4z^2-1} dz$.

(2) $\int \frac{z\, dz}{16z^4-1}$.

(3) $\int \frac{dz}{\sin z}$.

(4) $\int \frac{dz}{3z^{2021}-z+1}$.

(5) $\int \frac{z\, dz}{e^z-1}$.

(6) $\int \frac{e^z\,dz}{z(1-2z)^3}$.

(7) $\int \frac{z^2\,dz}{5z^3-2z+1}$.

(8) $\int \frac{dz}{4z^2+1}$.

(9) $\int \frac{dz}{2z^{2021}-1}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_6+4a_8. Разложите выписанную ниже функцию f в степенной ряд по степеням $z-a$ для указанного центра $a \in \mathbb{C}$ и найдите радиус сходимости этого ряда.

(0) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, $a = 0$.

(1) $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$, $a = 0$.

(2) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, $a = 1/2$.

(3) $f(z) = (\cos z)^2$, $a = 0$.

(4) $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$, $a = 0$.

(5) $f(z) = \log\frac{1+z}{1-z}$, $a = 0$ (используется ветвь логарифма, для которой $\log 1 = 0$).

(6) $f(z) = \frac{z}{z^2+2z+5}$, $a = -1$.

(7) $f(z) = \frac{\cos(z)+1}{(z-\pi)^2}$, $a = \pi$.

(8) $f(z) = \frac{e^z-\cos(z)-\sin(z)-z^2}{z^2}$, $a = 0$.

(9) $f(z) = (\sin z)^2(\cos z)^3$, $a = 0$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_1+a_6. Для указанной ниже функции f найдите указанную кратную производную, сначала посчитав несколько первых членов Тейлоровского разложения функции f. Оцените, проще ли такой способ, чем непосредственное дифференцирование (последнее не обязательно доводить до конца).

(0) $f(z) = \sqrt{\cos z}$ (выбрана ветвь корня, для которой $\sqrt{1} = 1$), найдите $f^{(4)}(0)$.

(1) $f(z) = e^{\sin z}$, найдите $f'''(0)$.

(2) $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$, найдите $f'''(0)$.

(3) $f(z) = (\mathrm{tg} z)^2$, найдите $f^{(4)}(0)$.

(4) $f(z) = e^{e^z}$, найдите $f''(1)$.

(5) $f(z) = \cos(\cos z)$, найдите $f^{(4)}(\pi/2)$.

(6) $f(z) = \cos(\cos(\sin z))$, найдите $f^{(2021)}(0)$.

(7) $f(z) = g(g(g(z)))$, где $g(z) = e^{2\pi i/3}z + z^2$; найдите $f'''(0)$.

(8) $f(z) = \log(\cos z)$, найдите $f^{(4)}(0)$.

(9) $f(z) = \log(1 + e^z)$, найдите $f''(1)$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $4a_1 + a_3$.

(0) Упражнение 5.1 на страницах 80–81 основного учебника.

(1) Упражнение 5.2 на странице 81 основного учебника. (Можно пользоваться результатом задачи 5.1 без доказательства).

(2) Докажите, что у всякой гармонической функции на открытом выпуклом множестве есть гармонически сопряженная функция. Можно пользоваться результатом упражнения 5.1 основного учебника без доказательства.

(3) Упражнение 5.4 на странице 81 основного учебника.

(4) Упражнение 5.11 на странице 82 основного учебника.

(5) Упражнение 5.12 на странице 82 основного учебника.

(6) Упражнение 5.13 на странице 82 основного учебника.

(7) Упражнение 5.14 на странице 82 основного учебника.

(8) Упражнение 5.15 на странице 82 основного учебника.

(9) Упражнение 5.16 на странице 82 основного учебника.

Решения

Задача 1

Необходимо решить задачу $a_7 + 2a_9 = 3 + 2 \cdot 6 = 5 \mod 10$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(z)dz = 0$$

Параметризуем окружность $z(\varphi) = a + \varepsilon e^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi$ Тогда

$$\int_\gamma dz = \int_A^B |\gamma'(t)|dt$$
$$dz = d(a + \varepsilon e^{i\varphi}) = \varepsilon de^{i\varphi} = \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi$$

Известно, что $g : \gamma \to \mathbb{C}$ – непрерывная функция, тогда

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(z)dz = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(a)\varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \int_{\partial \mathbb{D}(a,\varepsilon)} g(a) i e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

Задача 2

Необходимо решить задачу $9a_0 + a_3 = 9 \cdot 1 + 9 = 8 \mod 10$

$$\int \frac{dz}{4z^2+1} = \int \left(\frac{i}{2(2x+i)} - \frac{i}{2(2x-i)} \right) dz$$
$$= \frac{1}{2}i \int \frac{1}{2z+i}dz - \frac{1}{2}i \int \frac{1}{2z-i}dz$$
$$= \frac{1}{4}i \int \frac{1}{z+\frac{i}{2}}dz - \frac{1}{4}i \int \frac{1}{z-\frac{i}{2}}dz$$

Вопсользуемся интегральной формулой Коши

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{z+\frac{i}{2}}dz \qquad 2\pi i = 2\pi i f(\frac{i}{2}) = \int \frac{1}{z+\frac{i}{2}}dz$$
$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{z-\frac{i}{2}}dz \qquad 2\pi i = 2\pi i f(-\frac{i}{2}) = \int \frac{1}{z-\frac{i}{2}}dz$$

Тогда

$$\frac{1}{4}i \int \frac{1}{z+\frac{i}{2}}dz - \frac{1}{4}i \int \frac{1}{z-\frac{i}{2}}dz = \frac{1}{4}i \cdot 2\pi i - \frac{1}{4}i \cdot 2\pi i = 0$$

Задача 3

Необходимо решить задачу $a_6 + 4a_8 = 9 + 4 \cdot 8 = 1 \mod 10$

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z},\ a = 0$$
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
$$\frac{e^z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n-1)}}{n!}$$
$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{e^z}{z} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n-1)}}{n!} - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(n-1)}}{n!}$$

Найдем радиус сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(n-1)}}{n!}$$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)!}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(n+1)!} = \infty$$

Задача 4

Необходимо решить задачу $a_1 + a_6 = 7 + 9 = 6 \mod 10$

$$f(z) = \cos(\cos(\sin(z)))$$

$$f(z) = \cos\left(\cos\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)\right) = \cos\left(1 - \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^2}{2!} + \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^4}{4!} - \dots\right)$$

$$= 1 - \frac{\left(1 - \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^2}{2!} + \dots\right)^2}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^2}{2!} + \dots\right)^4}{4!} - \dots$$

Заметим, что при раскрытии скобочек все полученные степени будут четными, а следовательно все нечетные производные будут равняться 0, так как не будет ни одного элемента, не являющегося степенью z, а так как мы смотрим $z = 0$, то и $f^{(2n+1)}(0)$ будет 0.