11.05.2021 **Механика 2021** 

## Напоминание о скобках Пуассона

Гамильтонова динамика на $T^*M$ определяется 2 объектами:

(а) Пуассоновой структурой $\{f,g\}$ $f,g \in C^\infty(T^*M)$ с 4 аксиомами

$\{f,g\} \in C^\infty(T^*M)$

(б) Введением функцией $H(q,p)$

(локальные) коорд. в $T^*M$.

Эволюция $\forall$ наблюдаемой $f(q,p)$:

$$\frac{d}{dt}f(q,p) = \{f,H\}$$

$\Leftrightarrow$ подставим вместо $q$ и $p$ решение динам. уравнений Гамильтона

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$q(t) \qquad\qquad p(t)$$

В общем случае фазовое пространство может отличаться от четномерного пространства $T^*M$, $\dim T^*M = 2\dim M$.

Если (локальные) координаты на фазовом пр-ве $\Phi$ обозначить $x^i$, то скобка Пуассона $\{\}$ на $\Phi$ определяется пуассоновым тензором $J$ - антисимм. тензором второго ранга с матрицей

$$J^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}; \text{ тогда}$$

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^i} J^{ij} \frac{\partial g}{\partial x^j}$$

Мы вводили Гамильтоновы векторные поля: $\forall F \in C^\infty(\Phi)$ - функции на фаз. пространстве

$$X_F = \{F, \cdot\},$$

$$\text{т.е. } X_F \circ G = \{F, G\}$$

В локальных коорд. $x^i$ базисные векторные поля (касательные) ~~на~~ $\Phi$ находятся во взаимно-однозн.

Соответствии с $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

$\boxed{\text{IV}}$ В этом базисе компоненты гамильтонова векторного поля имеют вид:

$$X_F = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x^j} \omega^{ji}}_{\overset{\circ}{X}{}^i_F(x)} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\overset{\circ}{X}{}^i_F(x) = X_F \, x^i = \{F, x^i\}$$

Интегральные кривые гамильтонова векторного поля — $x^i(t, x_{(0)})$ — решение системы
$$\begin{cases} \dot{x}^i = \overset{\circ}{X}{}^i_F = \{F, x^i\} \\ x^i(0) = x^i_{(0)} \end{cases}$$

$\boxed{\text{V}}$ Гамильтоновы вект. поля образуют алгебру Ли ~~над (веществ.) ...~~ (обычно рассм. веществ., т.к. в механике — веществ. числовое поле)

$$[X_F, X_G] = X_F X_G - X_G X_F = X_{\{F,G\}} \text{ — ал.}$$

тожд. Якоби.

<u>Пример:</u> $\Phi = \mathbb{R}^2$, $p$ и $q$ — канонические координаты: $\{q, p\} = 1$.

$F = \frac{q^2 + p^2}{2}$, $G = qp$.

(а) Написать $X_F$ и $X_G$ в базисе $\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}$

(б) Найти коммутатор $X_F$ и $X_G$ и убедиться, что он равен $X_{\{F, G\}}$.

---

Вырожденная Пуассонова структура:

<u>$\det J = 0$</u>

$\boxed{\text{Зам.}}$ Это $\Leftarrow$ с необходимостью так, если $\dim \Phi = 2k+1$ — нечётная.

$\boxed{\text{О}}$ Пуассонов центр: ф-ции $g$ такие, что $\{g, f\} = 0$ $\forall f \in C^\infty(\Phi)$.

У <u>невырожд.</u> скобки пуассонов центр — только константы.

Если же есть отличное от констант Пуассон-центр. ф-ции, то скобка вырождена.

Эти функции не годятся на роль ∫ов движения, т.к. они Пуассон-коммутируют с ∀ гамильтонианом. Их значение другое: ~~...~~ если $f(x)$ – Пуассон-центральна, то $f(x) = \text{Const}$ определяет некоторое подмногообразие в $\Phi$ $\xi$, и все гамильтоновы вект. поле касательны к этому подмногообразию:

$$X_F \triangleright f = \{F, f\} = 0$$

Обратное тоже верно (т. Фробениуса) поскольку Гам. вект. поле образуют алг. Ли. Доказывается, что ∃ разложение $\Phi$ ~~на~~ в ∪ непересекающихся подмногообразий (слоение) симплектическое) и все гам. векторные поля $= \mathcal{B} =$ касательны к листам слоения. Это, в частности, означает, что если точка начальных данных $\{z^i_{(0)}\}$ лежит на каком-то листе, то вся динамика при $\underline{\forall}$ гамильтониане остаётся на этом листе (траектории $z^i(t)$ не покидают лист, на котором выбраны нач. данные $z^i_{(0)}$).

$\boxed{V}$ Ограничение скобки Пуассона на листы симпл. слоения невырождено.

---

Пример вырожд. скобки П.

<u>Линейная</u> скобка:

$$\{z_i, z_j\} = C_{ij}{}^k z_k$$

$C_{ij}{}^k$ – структ. конст. <u>алгебры Ли</u>

Рассм. алг. Ли $sl(2,\mathbb{R})$ =7=

— бесследовых вещ. матриц 2×2:

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ —

— базис $[H,E] = 2E$ (над $\mathbb{C}$ эта

$[H,F] = -2F$ алг. Ли изомор-

$[E,F] = H$ фна $SO(3)$.)

Рассм. трехмерное веществ. пр-во $\mathbb{R}^3$ с координатами $h, x, y$:

(☆) $\boxed{\{h,x\} = 2x \quad \{h,y\} = -2y \quad \{x,y\} = h}$

[У] $F = \frac{h^2}{4} + xy$ — Пуассон-центр. ф-ция.

[У] Это генератор Пуассонова центра.

$\forall$ Пуассон-центральная ф-ция

$G(h,x,y) = \tilde{G}\left(\frac{h^2}{4} + xy\right)$.

[Сл] Поверхности уровня ф-ции $F$ — листы симплектического слоения $\mathbb{R}^3$ относительно ск. Пуассона (☆):

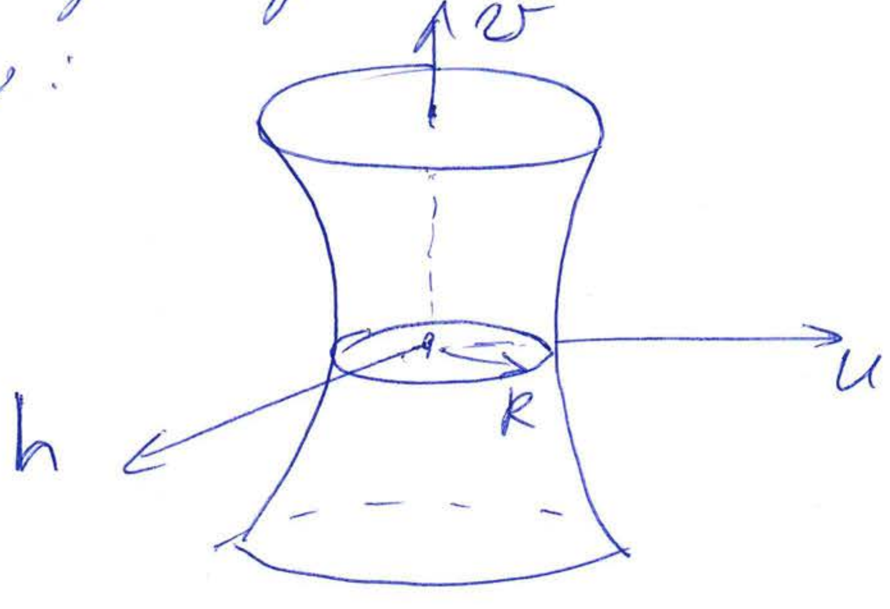
$$\boxed{\frac{h^2}{4} + xy = \mathrm{Const}}$$

Удобно сделать замену координат: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$

Тогда поверхности уровня:

$$\boxed{h^2+u^2-v^2=c}$$

а) $C=R^2>0$ — однополостные гиперболоиды вращения с осью $Ov$:



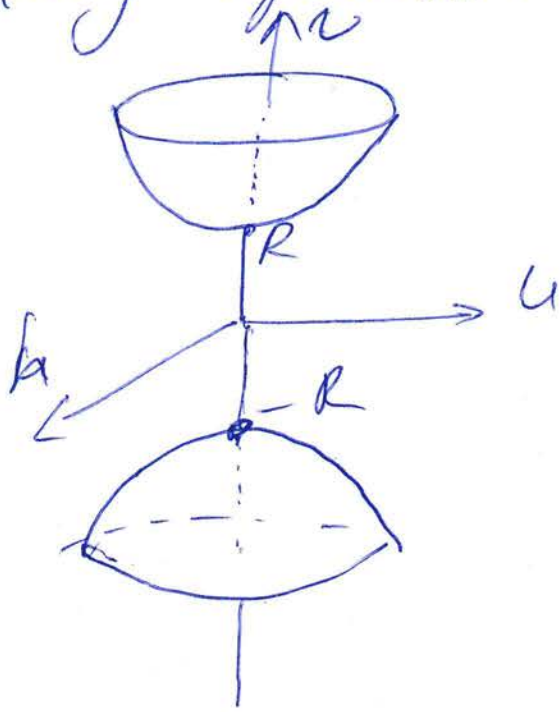

б). $C=0$ — $\underline{\underline{3}}$ ~~поверхности~~ "листа": верхняя и нижняя половины конуса $\begin{cases} h^2+u^2-v^2=0 \\ v>0 \end{cases} \cup \begin{cases} h^2+u^2-v^2=0 \\ v<0 \end{cases}$

и начало координат $h=u=v=0$

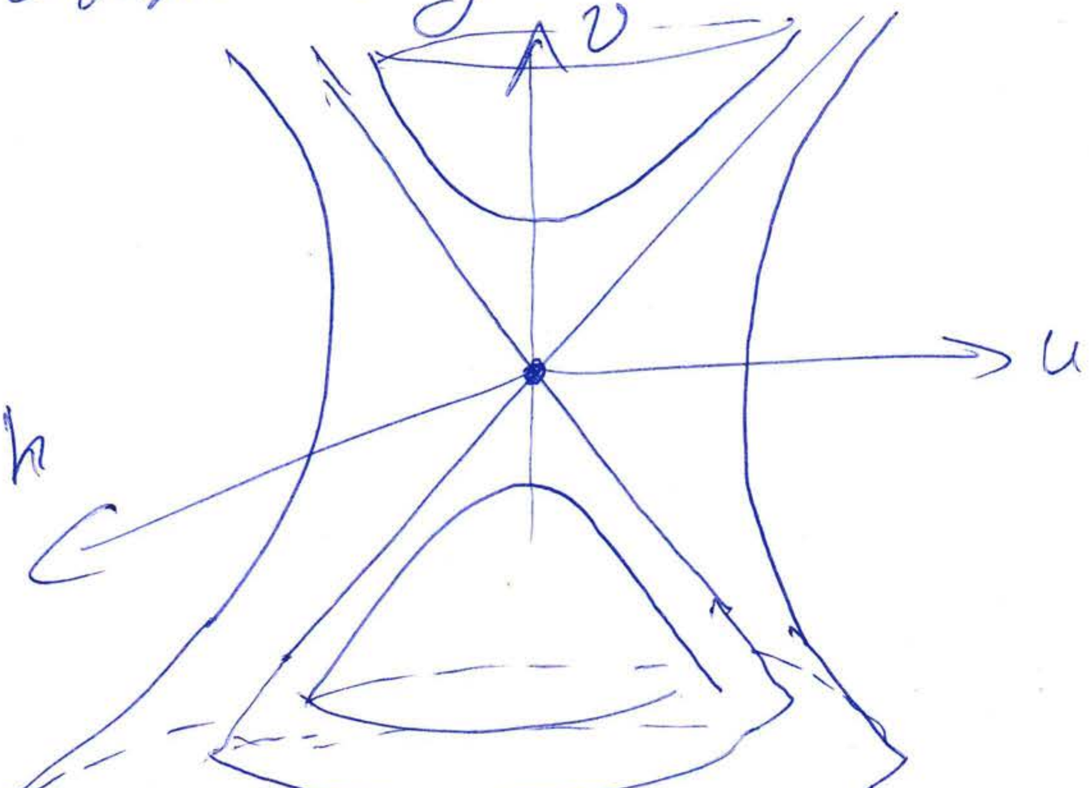
в) $C = -R^2 < 0$

$v^2 - h^2 - u^2 = R^2$ — 2х полостный

Гиперболоид вращение:




Общий вид слоение



<u>Пример:</u> Ограничим скобку Пуассона ($\star$) на листы слоения и убедимся в её невырожденности.

(а) В области пространства <u>вне</u> конуса $h^2+u^2-v^2=0$ (однополостные гиперболоиды) введём координаты $\tau$, $S$ и $\varphi$ формулами:

$$\begin{cases} h = \tau \operatorname{ch} S \cos\varphi \\ u = \tau \operatorname{ch} S \sin\varphi \\ v = \tau \operatorname{sh} S \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \tau > 0 \\ S \in (-\infty; +\infty) \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array}$$

Гиперболоид задаётся условием

$$\boxed{\tau = R > 0 = \mathrm{const}}$$

$$\tau^2 = h^2 + u^2 - v^2$$

На поверхности $\tau = R$ остаются 2 координаты: $S$ и $\varphi$ (независимые). Найдём их скобку на гиперболоиде.

В терминах $h$, $u$ и $v$:

$$\{h, u\} = \{h, x+y\} = 2(x-y) = 2v$$

$$\{h, v\} = \{h, x-y\} = 2(x+y) = 2u$$

$$\{u, v\} = \{x+y, x-y\} = -2h$$

Скобку $\{s, \varphi\}$ проще всего посчитать так:

$$\operatorname{sh} s = \frac{v}{r}, \quad r = \sqrt{h^2+u^2-v^2} -$$

– центр. ф-ция

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{h}$$

Поэтому: $\{\operatorname{sh} s, \operatorname{tg}\varphi\} = \operatorname{ch} s\{s, \varphi\}\frac{1}{\cos^2\varphi}$

$$\parallel$$

$$\left\{\frac{v}{r}, \frac{u}{h}\right\} = \frac{1}{r}\left\{v, \frac{u}{h}\right\} =$$

центр. ф-ция

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{h}\{v, u\} - \frac{u}{h^2}\{v, h\}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(2 + \frac{2u^2}{h^2}\right) = \frac{2(h^2+u^2)}{r h^2} =$$

$$= \frac{2\, \tau^2 \operatorname{ch}^2 s}{\tau\, \tau^2 \operatorname{ch}^2 s \cos^2\varphi} = \frac{\operatorname{ch} s}{\cos^2\varphi} \{s, \varphi\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\{s, \varphi\} = \frac{2}{\tau \operatorname{ch} s}}\Bigg|_{\tau = R}$$ — не вырождена в $\forall$ точке

гиперболоида.