2К

Мат. Анализ Семинар № 16

Другие ортогональные системы.

① Многочлены Лежандра.

Линейные комбинации функций

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots - \qquad (1)$$

порождают многочлены. По теореме Вейерштрасса любую непрерывную функцию на $[a,b]$ можно равномерно приблизить многочленами. Следовательно система (1) полна в $L_2(a,b)$ для любого $[a,b]$.

Сделаем процесс ортогонализации для системы (1) в пр-ве $L_2(-1,1)$ со скалярным произведением

$$\int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx .$$

Получим полную ортогональную систему (ортогональный базис)

$$Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots$$

Покажем, что каждый многочлен $Q_n(x)$ совпадает, с точностью до постоянного множителя, с многочленом

$$R_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

1) Проверим ортогональность $\{R_n(x)\}$. Пусть $n \geq m$. Заметим, что

$$\left.\frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^n\right|_{x=-1} = \left.\frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^n\right|_{x=1} = 0.$$

при $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Будем интегрировать по частям:

$$\int_{-1}^{1} R_m(x) R_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx =$$

$$= \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \cdot \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n}_{=0}\Bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\,dx =$$

$$= \ldots\ldots = \frac{d^{n+m-1}}{dx^{n+m-1}}(x^2-1)^m \cdot \underbrace{(x^2-1)}_{=0}\Bigg|_{-1}^{1} + (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^m (x^2-1)\,dx$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^m \cdot (x^2-1)\,dx \qquad (2)$$

Поскольку $\frac{d^{n+m}}{d^{n+m}}(x^2-1)^m \equiv 0$ при $m < n$.

Следовательно, $\int_{-1}^{1} R_m(x) \cdot R_n(x)\,dx = 0 \ \forall m \neq n$.

2) Каждый многочлен $R_n(x)$ имеет степень n, т.е., каждый из них лежит в подпространстве, порожденном $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Этими же свойствами обладают многочлены $Q_n(x)$. Поэтому из единственности процесса ортогонализации, $R_n(x)$ пропорциональны $Q_n(x)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Найдем нормирующий множитель для $R_n(x)$.

Равенство (2) при $m = n$ дает:

$$\int_{-1}^{1} R_n^2(x)\,dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\right](x^2-1)^n\,dx =$$

$$=(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}.$$

Равенство $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n=(2n)!$ доказывается по индукции. А последний интеграл находится с помощью B-функции: $x^2=t,\ x=\sqrt{t}$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx=\int_{0}^{1}t^{-1/2}(1-t)^n\,dt=$$

$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$

$$=\int_0^1 t^{1/2-1}(1-t)^{n+1-1}\,dt=B\left(\tfrac12,\,n+1\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(\frac12)\cdot\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac12+n+1)}=\frac{n!\,2^{n+1}}{(2n+1)!!}$$

$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

$\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Gamma\left(\tfrac12\right)=\sqrt{\pi},\quad \Gamma(n+1)=n!\\ &\Gamma\left(\tfrac12+n+1\right)=\Gamma\left(\tfrac12+n\right)\left(\tfrac12+n\right)=\ldots=\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\end{aligned}}$$

$$(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=\frac{(2n)!\cdot n!\cdot 2^{n+1}}{(2n+1)!!}=\frac{(2^n n!)\cdot n!\cdot 2^{n+1}}{2n+1}=$$

$$=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}.$$

Значит, норма многочлена R_n равна

$$\|R_n\|_{L_2(-1,1)}=n!\cdot 2^n\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

Получаем ортонормированную систему

$$\left\{\frac{1}{n!\,2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot R_n(x)\right\}$$

Принято рассматривать многочлены

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

которые называются <u>многочленами Лежандра</u>

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Вот первые 4 многочлена Лежандра

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$,

$P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$, $P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}$

Разложение функции f на $[-1,1]$ по многочленам Лежандра имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot P_n(x),\quad c_n=\frac{2n+1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$$

Этот ряд сходится в среднем квадратичном.

Равенство Парсеваля имеет вид:

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\cdot c_n^2$$

<u>Задача 1</u> Доказать, что многочлены Лежандра удовлетворяют дифф. уравнению:

$$(1-x^2)u''-2xu'+n(n+1)u=0,$$

$$u=u(x)=P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Решение: Обозначим $y(x)=(1-x^2)^n$

Тогда $y' = -2nx(1-x^2)^{n-1}$, т.е.

$$(1-x^2)y' + 2nx\cdot y = 0 \qquad (1)$$

Воспользуемся формулой Лейбница

$$\frac{d^k}{dx^k}(u\cdot y') = \sum_{j=0}^{k} C_k^j u^{(j)} y^{(k-j+1)}.$$

При $u = 1-x^2$ получаем:

$$\frac{d^k}{dx^k}(u\cdot y') = u\cdot y^{(k+1)} + k u'\cdot y^{(k)} + \frac{k(k-1)}{2}u''\cdot y^{(k-1)} =$$

$$=(1-x^2)y^{(k+1)} - 2k\cdot xy^{(k)} - k(k-1)y^{(k-1)} \qquad (2)$$

Находим также по формуле Лейбница

$$\frac{d^k}{dx^k}[2nx\cdot y] = 2nx\cdot y^{(k)} + 2nky^{(k-1)} \qquad (3)$$

Из (1) следует, что

$$\frac{d}{dx^k}\left((1-x^2)y' + 2nxy\right) = 0.$$

Подставляем сюда (2) и (3):

$$(1-x^2)y^{(k+1)} \underline{-2kxy^{(k)}} \underline{-k(k-1)y^{(k-1)}} + \underline{2nxy^{(k)}} + \underline{2nky^{(k-1)}} = 0$$

Подставляем $k=n+1$

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2xy^{(n+1)} + n(n+1)y^{(n)} = 0.$$

Заметим, что $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = -y^{(n)}$

Следовательно, $u = P_n(x)$ удовлетворяет уравнению $(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$.

Некоторые свойства многочленов Лежандра

1) Рекуррентная формула:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad P_0 = 1, P_1 = x$$

2) $P(1) = 1$, $P(-1) = (-1)^n$

(подставив $x = \pm 1$ в рекуррентную ф-лу)

3) Производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot z^n = \frac{1}{(1 - 2zx + z^2)^{1/2}}$$

$$|z| < \min |x \pm \sqrt{x^2 - 1}|$$

4) „Явная" формула:

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots \right.$$

---

② Ортогональные системы в произведениях

Пусть на множествах X и Y определены меры μ и ν. Рассмотрим пространства функций с интегрируемыми квадратами $L_2(X, \mu)$ и $L_2(Y, \nu)$.

$$L_2(X,\mu)=\{f(x),\ \int_X |f(x)|^2 d\mu<\infty\}$$

$$L_2(Y,\nu)=\{g(y),\ \int_Y |g(y)|^2 d\nu<\infty\}$$

Теперь в произведении $Z=X\times Y$ рассмотрим меру $d\theta=d\mu\otimes d\nu$ и соответствующее ей пространство $L_2(Z,\theta)=L_2(X\times Y, d\mu\otimes d\nu)$

<u>Задача 2.</u> Пусть $\{\varphi_m(x)\}$ и $\{\psi_n(y)\}$ ортонормированные базисы в $L_2(X,\mu)$ и $L_2(Y,\nu)$, соответственно. Тогда система

$$f_{m,n}(x,y)=\varphi_m(x)\cdot\psi_n(y),\ m,n\in\mathbb{N}$$

образует ортонормированный базис в $L_2(Z,\theta)$.

<u>Решение:</u> По теореме Фубини

$$\int_Z |f_{m,n}(x,y)|^2 d\theta=\int_X|\varphi_m(x)|^2\left(\int_Y|\psi_n(y)|^2 d\nu\right)d\mu=1$$

По той же теореме

$$\int_Z f_{mn}(x,y)\cdot f_{m'n'}(x,y)\,d\theta=\int_X \varphi_m(x)\varphi_{m'}(x)\int_Y \psi_n(y)\cdot\psi_{n'}(y)\,d\nu\,d\mu=0$$

Установили ортонормированность системы $\{f_{m,n}(x,y)\}_{m\in\mathbb{N},\, n\in\mathbb{N}}$

Докажем полноту этой системы.
Пусть в $L_2(Z, \theta)$ существует функция $f(x,y)$, которая ортогональна всем $f_{mn}(x,y)$

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\, f_{mn}(x,y)\, d(\mu\otimes\nu) = 0 \quad \forall n,m\in\mathbb{N}$$

Положим: $F_m(y) = \int\limits_X f(x,y)\,\varphi_m(x)\, d\mu$

Легко видеть, что $F_m(y) \in L_2(Y, \nu)$.
Поэтому функция $F_m(y)\cdot\psi_n(y)$ интегрируема $\forall n\in\mathbb{N}$. Снова используем теорему Фубини:

$$\int\limits_Y F_m(y)\,\psi_n(y)\, d\nu = \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\, f_{mn}(x,y)\, d\theta = 0$$

Однако, $\psi_n(y)$ - полная в $L_2(Y, \nu)$, т.е.

$$F_m(y) = 0 \text{ для почти всех } y\in Y$$

Следовательно, для почти каждого $y\in Y$

$$\int\limits_X f(x,y)\,\varphi_m(x)\, d\mu = 0, \quad \forall m\in\mathbb{N}$$

В силу полноты $\{\varphi_m(x)\}$ в $L_2(X, \mu)$

$$f(x,y) = 0 \text{ при почти всех } x\in X.$$

Итак, при почти каждом $y\in Y$

мера множества

$$\mu(x \in X \mid f(x,y) \neq 0) = 0.$$

По теореме Фубини, это означает, что функция $f(x,y)$ равна нулю почти всюду в $Z = X \times Y$.

Рассмотрим $X = [-\pi,\pi]$, $Y = [-\pi,\pi]$.

$Z = [-\pi,\pi]^2 = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$.

$L_2([-\pi,\pi]^2, dx\,dy)$ на квадрате $[-\pi,\pi]^2$.

В $L_2(-\pi,\pi)$ ортонормальная система (базис)

$$1,\ \cos nx,\ \sin nx \quad (n = 1,2,\dots).$$

Тогда, в $L_2((-\pi,\pi)^2)$ базис, орт. система

$$1,\ \cos mx,\ \sin nx,\ \cos mx \cos ny,\ \cos mx \sin ny,\ \sin mx \cos ny,\ \sin mx \sin ny;\ n,m \in \mathbb{N}.$$

Выглядит громоздко. Поэтому удобнее использовать комплексную форму тригонометрической системы:

$$e^{imx} \cdot e^{iny} = e^{i(mx+ny)}, \quad n,m \in \mathbb{Z}.$$

Это полная ортогональная система в $L_2((-\pi,\pi)^2)$. Этому базису отвечает ряд Фурье:

$$f(x,y)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{mn}\, e^{i(mx+ny)},$$ где

$$c_{m,n}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\, e^{-i(mx+ny)}\,dx\,dy$$

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x,y)|^2\,dx\,dy=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}|c_{mn}|^2$$

---

3 Ортогональный базис в $L_2(\mathbb{R})$.

На пространстве с бесконечной мерой $\mathbb{R}$. Здесь нельзя построить базис из тригонометрических функций или из многочленов. В качестве исходной системы можно взять функции, быстро убывающие на бесконечности:

$$x^n\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Линейные комбинации имеют вид $P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Они образуют всюду плотное м-во в $L_2(\mathbb{R})$. Применив процесс ортогонализации, получим функции вида

$$\varphi_n(x)=H_n(x)\,e^{-x^2/2},$$ где

$H_n(x)$ – многочлен степени n.

$H_n(x)$ – многочлены Эрмита, $\varphi_n(x)$ – ф-ции Эрмита

Можно показать, что многочлены Эрмита совпадают, с точностью до коэффициента с многочленами:

$$H_n^* = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

Легко проверить, что их степень равна n, а соотношение ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \int H_n^*(x)\cdot H_m^{(*)}\cdot e^{-x^2}\,dx$$

проверяется интегрированием по частям

Ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\left(2^n\cdot n!\sqrt{\pi}\right)^{1/2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$