К2 Мат. Анализ. Семинар № 2

Норма и нормированные пространства

Напомним определение нормы в линейном пространстве. Пусть L - линейное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

Функция $\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}$ называется <u>нормой</u>, если: (1.) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

(2.) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\forall x \in L$

(3.) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in L$.

<u>Примеры</u>

1) Конечномерное пр-во $\mathbb{R}^n$

а) $\|x\|_e = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$ евклидова норма

б) $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$. норма городских кварталов (L_1 норма)

в) $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k|$ норма Чебышева.

2) Бесконечномерное пр-во. Обобщение $\mathbb{R}^n$

а) $\ell_1 = \{x = (x_1, x_2, .., x_n, \dots),\ x_k \in \mathbb{R} :\ \|x\|_1 < \infty\}$

$\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$. Это норма L_1

б) $\ell_\infty = \{x = (x_1, x_2, .., x_n, \dots) : \|x\|_\infty < \infty\}$

$\|x\|_\infty = \sup\limits_{k=1,2,\dots} |x_k|$ (Может не достигаться)

<u>Замечание:</u> $\ell_1 \neq \ell_\infty$, $\ell_1 \subset \ell_\infty$

$\|x\|_1 < \infty \Rightarrow \|x\| < \infty$, но $x_0 = (1, 1, \dots 1, \dots)$

$x_0 \in \ell_\infty$; $x_0 \notin \ell_1$.

в) $\ell_2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_4, \ldots) : \|x\|_2 < \infty\}$.

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$ Евклидово пространство.

Опять: $\ell_1 \subset \ell_2$, $\ell_1 \neq \ell_2$

$x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{4}, \ldots)$ $\|x\|_1 = \infty$ (гарм. ряд)

$$\|x_0\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \infty$$

$\ell_2 \subset \ell_\infty$, $\ell_2 \neq \ell_\infty$. ℓ_∞ самое широкое.

Евклидовы пространства будем изучать подробно в следующих семинарах.

Основной объект изучения.

2) Пространство непрерывных функций $C[a, b]$, $f(t)$, $t \in [a, b]$

$$\|f\|_C = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Проверим, что это норма

1) $\|f\|_C \geq 0$ очевидно, 2) $\|f\|_C = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

3) нер-во треугольника:

$$\|f+g\|_C = \max_{t\in[a,b]} |f(t)+g(t)| \leq \max_{t\in[a,b]} (|f(t)| + |g(t)|) \leq$$

$$\leq \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g(t)| = \|f\|_C + \|g\|_C$$

Определение. Линейное пространство с нормой называется нормированным пространством.

В нормированном пространстве L можно ввести расстояние (метрику), которая превращает его в метрическое пространство.

$$\rho(x, y) = \|x-y\|_L, \quad x, y \in L$$

Проверим, что это расстояние:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, $\|x-y\| \geq 0$, $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\|x-y\| = \|y-x\|$
$\|-x\| = \|(-1)x\| = \|x\|$

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$
$\|x-y\| = \|(x-z) + (z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$
$= \|x-z\| + \|y-z\|$

Задача 1. Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(x,y)$. При каких условиях метрика порождается некоторой нормой? Когда величина $\rho(0,x) = \|x\|_L$ будет нормой?

Ответ: 1) $\rho(0, \lambda x) = |\lambda| \cdot \rho(0, x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

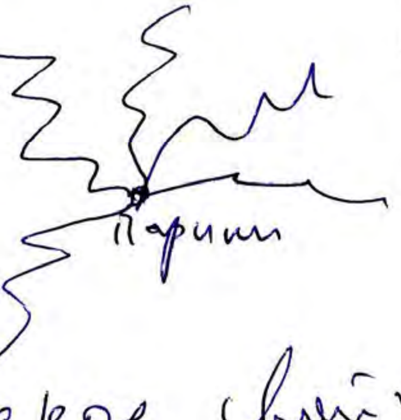
2) $\rho(x,y) = \rho(x+z, y+z)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$

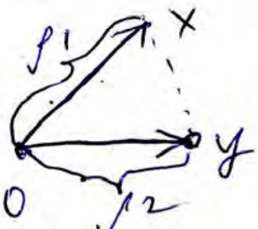
Действительно, легко видеть, что такая метрика порождает норму. А любая норма имеет метрику с этими свойствами.

Рассмотрим пример метрики, которая не порождается никакой нормой.

Метрика французских железных дорог

$$\rho_Ф(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2, & \text{если } x \text{ и } y \text{ коллинеарны (т.е. } x=\lambda y) \\ \|x\|_2+\|y\|_2, & \text{если } x \text{ и } y \text{ — не колл.} \end{cases}$$



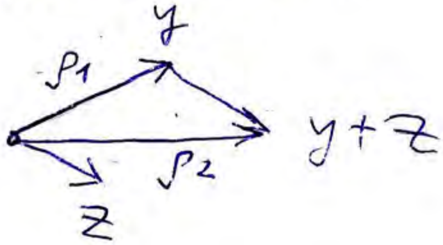


$\rho = \rho_1 + \rho_2$

Какое свойство не выполняется?

1) $\rho(0,\lambda x) = |\lambda|\,\rho(0,x)$ — выполнено

2) $\rho(x+z, y+z) \neq \underset{\rho_1}{\rho(x,y)}$

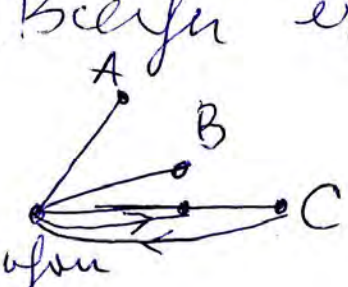


$\underset{\rho_1+\rho_2}{\rho(z, y+z)} \neq \underset{\rho_1}{\rho(0,y)}$.

Метрика британских железных дорог

$$\rho_Б(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x=y \\ \|x\|_2+\|y\|_2 & \text{если } x\neq y. \end{cases}$$

(Всегда ехать через Лондон!)



Очевидно, 1) выполнено
2) не выполнено.

Обе эти метрики не порождаются нормами

Вспомним понятие полноты метрического пространства.

Метрическое пространство называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность имеет предел

$\{x_n\}$ – фунд. в L, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N$

$\rho(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|_L < \varepsilon$

т.е. $\exists x \in L \quad x_n \to x$, т.е. $\|x_n - x\|_L \to 0$

Определение. Полное нормированное пространство называется пространством Банаха или банаховым пространством.

Все приведенные выше нормированные пространства являются полными, т.е. банаховыми пространствами.

а) $\mathbb{R}^k$ – полно, любое конечномерное пространство является полным.

б) $\ell_1 = \{x = (x_1, x_2 \ldots x_k, \ldots),\ \|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$

Проверим полноту: $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k=1,2\ldots}$

Пусть $\{x^{(n)}\}$ – фундаментальная, т.е. $\forall \varepsilon > 0$
$\exists N\ \forall n, m > N \quad \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_1 < \varepsilon$, т.е.

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\forall k$. Тогда $x_k^{(n)}$ – фундаментальная числовая последовательность. Она имеет преде

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^{(0)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, \dots)$.

Утверждаем: $\|x^{(n)} - x^0\|_1 \to 0$

Надо в неравенстве

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$$

перейти к пределу при $m \to \infty$

Получим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| \le \varepsilon$

т.е., $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N \quad \|x^{(n)} - x^{(0)}\|_1 \le \varepsilon$

Значит, $x^{(n)} \to x^{(0)}$ в ℓ_1.

Аналогично проверяется полнота пространств ℓ_∞, ℓ_2 и $C[a,b]$.

Бывают ли неполные нормированные пространства? Сколько угодно!

Рассмотрим в пространстве ℓ_2 следующее линейное подпространство ℓ_2^φ, состоящее из финитных последовательностей:

$\{x_n\}$ - финитная, если $\exists N: \forall n \geq N \; a_n = 0$.

Тогда ℓ_2^φ является линейным пространством.

Рассмотрим в ℓ_2^φ обычную евклидову норму:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right)^{1/2}$$

Получилось нормированное пространство.
Покажем, что оно не полное.
Рассмотрим последовательность $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$
Легко видеть, что она фундаментальна, поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, т.е. $\exists N : \forall n, m > N$

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_2 = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

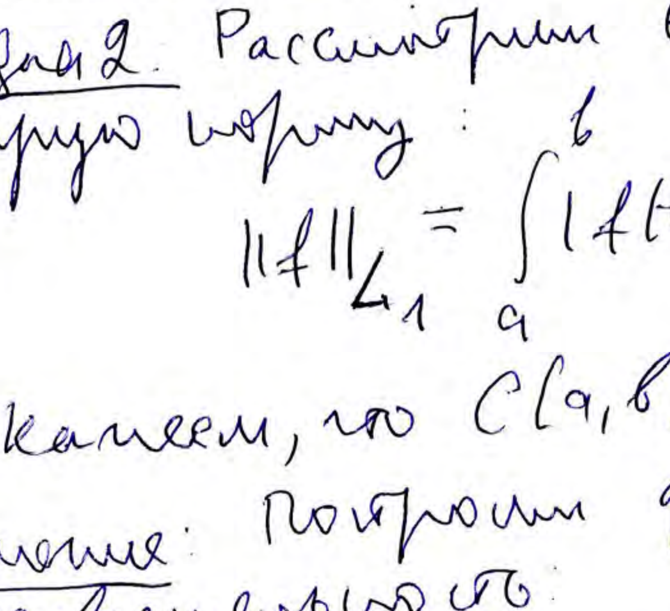
Предел суммы $x^{(0)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \notin \ell_2^{\varphi}$
Поэтому, ℓ_2^{φ} не полное пространство.

<u>Задача 2.</u> Рассмотрим в пр-во $C[a,b]$ другую норму:

$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Покажем, что $C[a,b]$ с этой нормой <u>не полно</u>.
<u>Решение:</u> Построим фундаментальную последовательность $C[0,1]$

$$\|f_n - f_m\|_1 \le \frac{1}{2(n+m)}$$



т.е. фундаментальна.
Однако, она не имеет предела в этом пространстве.

<u>предел:</u> $f_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & t \in [0, \frac{1}{2}) \end{cases}$

$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

Разрывная ф-я.

Задача 3. Будут ли следующие пространства полными?

Норма: $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$

а) Все ограниченные непрерывные функции $t \in \mathbb{R}$;

б) Все непрерывные функции, обладающие свойством: $\lim\limits_{|t| \to \infty} |f(t)| = 0$;

в) Все непрерывные финитные функции, т.е. $f(t)$ - финитная, если $\exists M: \ f(t) = 0 \ \forall |t| \geqslant M$

г) $t \in [a, b]$. Все многочлены вида
$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k.$$

д) $t \in (0, 1)$, Все ограниченные непрерывные функции.