Семинар по матану

16.11.20

Повторное суммирование

$$\sum_k\left(\sum_n a_{n,k}\right) \neq \sum_n\left(\sum_k a_{n,k}\right)$$

Пример:

$$\forall n \quad \sum_k a_{n,k}=0$$

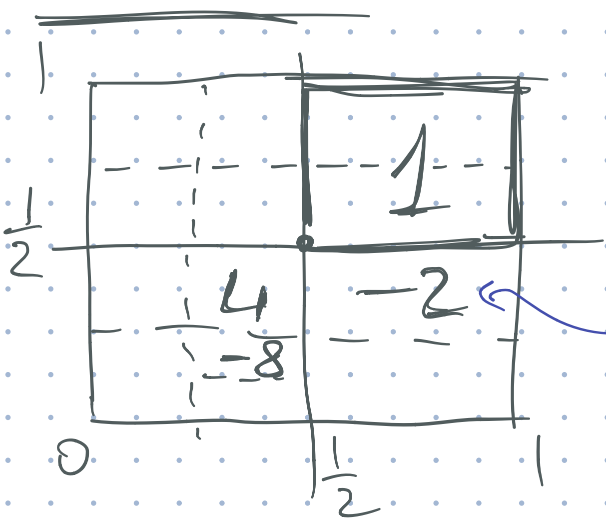
$$\Rightarrow \sum_n\left(\sum_k a_{n,k}\right)=0$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \dots & 0 \end{matrix}$$

$$a_{n,k}=\begin{cases} 1 & n=k \\ -1 & k=n+1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \qquad \sum_n a_{n,k}=\begin{cases} 0 & n>1 \\ 1 & n=1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_k\left(\sum_n a_{n,k}\right)=1$$



$$I_k=\left[2^{-k-1},\ 2^{-k}\right]$$

Выбираем константу так, чтобы интеграл занулился

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad \forall x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]$$

по аналогии строим всю функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{2k}, & (x,y) \in [2^{-k-1}, 2^{-k}]^2 \\ 2^{2k+1}, & (x,y) \in [2^{-k-1}, 2^{-k}] \times [2^{-k-2}, 2^{-k-1}] \end{cases}$$

проверим:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \underbrace{\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(x,y)\,dy}_{2^{2k}} + \underbrace{\int_{2^{-k-2}}^{2^{-k-1}} f(x,y)\,dy}_{2^{2k+1}}$$

$$\int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 f(x,y)\,dy}_{y} \Big) dx = 0$$

в другом порядке:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dx \Big) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{4} \neq 0$$

$\boxed{2}$

$f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$

измерима

$\exists \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy$ — конечный, но

$\nexists \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$ — бесконечный

Решение: попробуем построить ряды

$\exists \sum_n\left(\sum_k a_{n,k}\right) < \infty$

$\nexists \sum_k\left(\sum_n a_{n,k}\right)$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{matrix}$$

$\sum_k a_{n,k} = 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow \sum_n\left(\sum_k a_{n,k}\right) = 0$

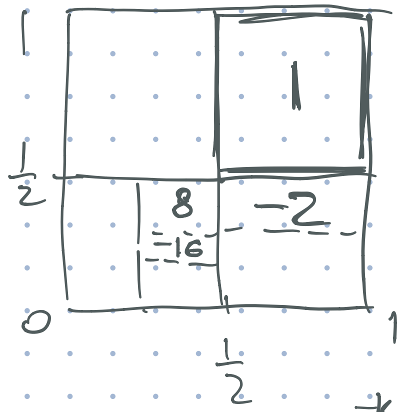
$\sum_k\left(\sum_n a_{n,k}\right)$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4 & -4 \end{matrix}$$

по строкам $\Rightarrow \sum = 0$

по столбцам $\sum = \infty$

(каждый столбец $= 1$)



$$f(x,y)=\begin{cases} 2^{2k}\cdot k & (x,y)\in[2^{-k-1},2^{-k}] \\ -2^{2k}\cdot k\cdot 2 & (x,y)\in[2^{-k-1},2^{-k}]\times \\ & \times[2^{-k-2},2^{-k-1}] \end{cases}$$

$$\int f(x,y)\,dx=\underset{2^{k}\cdot k}{\underset{\parallel}{\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(x,y)\,dx}}+\underset{-2^{2(k-1)}(k-1)2}{\underset{\parallel}{\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(x,y)\,dx}}=2^k$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy=\sum\frac{1}{2}=\infty$$

$(X,\mathcal{A},\mu),\ (Y,\mathcal{B},\nu)$

$(X\times Y,\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\ \mu\otimes\nu)$

пусть $f: X\times Y\to\mathbb{R}$ - измер. неотриц.

$\exists \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy)$

Тогда $\exists \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)$

f - измер., огранич. $\Rightarrow \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)=$

$=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy)$

Пусть $f_n = \min(f, n)$ $\quad f_n \geq 0$

Тогда $f_n(x) \uparrow f(x)$

$$\int_{X\times Y} f_n(x,y)\, d(\mu\otimes\nu) = \int_Y \left(\int_X f_n(x,y)\, \mu(dx)\right) \nu(dy)$$

по т. Беппо Леви - - -

$$\sup_n \int_{X\times Y} f_n(x,y)\, d(\mu\otimes\nu) = \sup_n \int_Y \left(\int_X f_n(x,y)\, \mu(dx)\right) \nu(dy) \leq$$

$$\leq \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, \mu(dx)\right) \nu(dy)$$

$$U_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

$\lambda_n(U_n) - ?$ (объём n-мерного шара)

$$\lambda_n(U_n) = \int_{U_n} dx_1 \dots dx_n = \int \left(\int_{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2} dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n =$$

V_n – объём n-мерного шара

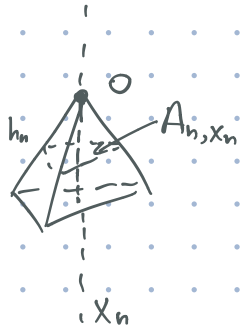
$$= \int V_{n-1} \left(\sqrt{1-x_n^2}\right)^{n-1} dx_n = V_{n-1} \int \sqrt{1-x_n^2}^{\,n-1} dx_n$$

$$\Rightarrow V_n = \prod_{k=3}^{n} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{k-1}{2}} dx \quad V_2 = \pi$$

$x = \sin x$ $\qquad$ подстановка Эйлера

$$\int_{-1}^{1} (\cos \overset{y}{x})^k dx \qquad \sqrt{1-x^2} = xt$$

$$V_n = \int_{A_n} d\lambda_n = \int_0^{h_n} \lambda_{n-1}(A_{n,x_n})\,dx_n =$$



$$= \int_0^{h_n} \left(\frac{x_n}{h_n}\right)^{n-1} V_{n-1}\,dx_n =$$

$$= V_{n-1} \int_0^{h_n} \left(\frac{x_n}{h_n}\right)^{n-1} dx =$$

$$= V_{n-1}\left(\frac{x_n^n}{n} \cdot \frac{1}{h_n^{n-1}}\right)\Bigg|_0^{h_n} = V_{n-1}\,\frac{h_n}{n}$$