Лекция 3

Числа Гурвица

Хотим считать число разложений перестановки в произведение транспозиций

S_n – группа перестановок на эл-тах $1, 2, \dots, n$

$(123)(14) = (1423)$ Перемножаем справа налево

m транспозиций

$\tau_m \circ \tau_{m-1} \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$ – произв. m транспозиций

Циклический тип перестановки – это набор длин независимых циклов

$\sigma \in S_5 \quad \sigma = (123)(45)$

Разбиение числа n – разложение n в Σ положит. слагаемых $(5 = 3+2)$

$n = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k \qquad \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_k$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)$

Можно также записать $\nu = 1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}$

(т.е. 1 вошло в Σ k_1 раз, ..)

Опр. Простое несвязное число Гурвица

$$h^{\circ}_{m,\mu} = \frac{1}{n!}\left|\left\{\tau_1,\dots,\tau_m \text{ — транспозиции} \in S_n, \text{ т.ч. } \tau_m\circ\dots\circ\tau_1 \text{ это перестановка циклического типа } \mu\right\}\right|$$

μ — циклический тип

m — число транспозиций

Пример. $n=3$ $\quad S_3$

$m=2 \Rightarrow$ 2 транспозиции

$\mu=3^1$ $\quad$ цикл. тип 3^1

(123)
(132)
(12)
(13)
(23)
id

$$h^{\circ}_{2,3} = \frac{1}{3!}\,3\cdot 2 = 1$$

Свойства

1) Если σ и σ_1 имеют одинаковый циклич. тип, то $\exists\, \alpha\in S_n:\ \sigma_1=\alpha\sigma\alpha^{-1}$

$\Downarrow$ и

Если $\sigma=\tau_m\circ\dots\circ\tau_1$, то $\sigma_1=\alpha\tau_m\alpha^{-1}\circ\dots\circ\alpha\tau_1\alpha^{-1}$

($\Rightarrow$ опр. „перестановка циклич. типа μ" корректно)

2) $\exists$ min m для которого такое разложение существует для фикс. μ

$m=$ через n,μ?

$m = n - \ell(\nu)$, где $\ell(\nu)$ — кол-во циклов

(т.к. цикл длины k раскладывается не менее чем в $k-1$ транспозицию)

$\Rightarrow m = \nu_1 - 1 + \nu_2 - 1 + \ldots + \nu_k - 1 = n - k = n - \ell(\nu)$

Д-во: $(i_1, \ldots, i_k)$ — цикл длины k

$$\begin{gathered}(i_1, \ldots, i_k) \\ \| \\ (i_1 i_2)(i_2 i_3)\ldots(i_{k-1} i_k)\end{gathered}$$ их $k-1$

почему меньше $k-1$ нельзя? Потому что при домножении $\underbrace{(\quad)}_{k}(i j)$ длина цикла k увел. не больше чем на 1

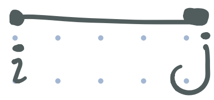
3) Все m, для которых разложение $\exists$, имеют одинаковую чётность. Эта чётность совпадает с чётностью перестановки

Пример (Теорема)

$$h^{\circ}_{n-1,\,n^1} = n^{n-3}$$

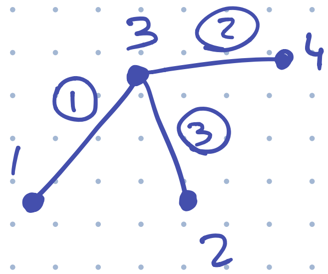
(Σ) Хотим раскладывать длинный цикл в произв. $n-1$ транспозиций

Рассм. дерево на n вершинах

Ребру  ставим в соотв. транспозицию (i,j)

Занумеруем рёбра

Всему дереву $\longmapsto$ произведение трансп., написанных на рёбрах



$\longmapsto (23)(34)(13) = (1423)$

Утв. T – дерево на n вершинах с произвольной нумерацией верш. и рёбер, тогда соотв. произв. транспозиций — это длинный цикл в S_n

Д-во: $\tau_{n-1}\circ\dots\circ\tau_1$

$$(i,j)\circ\sigma$$

$$\|$$

$$(i,j)\circ(\quad)\circ(\quad)\dots\circ(\quad)$$

Как транспозиция умнож. на перестановку?

1) Если $i,j\notin\sigma$, то ничего не происходит

2) Если $i \in \sigma$, $j \notin \sigma$

$$(i\,j)(\ldots 1\, i\, 2 \ldots) = (\ldots 1\, j\, i\, 2 \ldots)$$

3) Если $(i\,j) \circ (\ldots i \ldots j \ldots)$

$$(i\,j)(1\, i\, 2\, 3\, j\, 4) = (1\, j\, 4)(i\, 2\, 3)$$ „разрезание"

Перемножение перестановок: $1 \to i$ самый правый цикл

$\parallel$ в самом левом цикле

$j \to 4 \to 1$

4) Если $(i\,j)\underbrace{(i\,1\,2)(j\,3\,4)}_{\sigma} = (i\,1\,2\,j\,3\,4)$ „склеивание"

В случае с деревом пункта 3 не м.б. (иначе был бы цикл) $\Rightarrow$ подх. 1, 2, 4

На каждом шаге число комп. связности = кол-ву циклов.

Получилась биекция

Посчитаем деревья: $n^{n-2}(n-1)! \Rightarrow$

т. Кэли (ненумер. деревья)

нумеруем рёбра

$$h^{\circ}_{n-1,n} = \frac{n^{n-2}(n-1)!}{n!} = n^{n-3}$$

Опр. Связное простое число Гурвица

$h^{\circ}_{m,\nu}$ — то же, что и несвязное

+ условие, что $\langle \tau_1, \tau_2, .., \tau_m \rangle \subset S_n$

группа, порождённая $\tau_1, .., \tau_m$

действует транзитивно на мн-ве

$1, .., n$. Т.е. $\forall\, i, j\ \exists\, \sigma \in \langle \tau_1, .., \tau_m \rangle$:

$\sigma(i) = j$

Пример: $h^{\circ}_{n-1, n^1} = h_{n-1, n^1}$

Если $\nu \neq n^1$, то связное и несвязное отличаются

Пример $h^{\circ}_{3, 1^1 2^1}$, $h_{3, 1^1 2^1}$

$m = 3$

$n = 3$

$\nu = 1^1 2^1$

$$h^{\circ}_{3, 1^1 2^1} = \frac{1}{3!} 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

(12)

(23)

(13)

Нетранзит. $\Leftrightarrow$ все (ij) одинаковые $\Rightarrow$

$$h_{3, 1^1 2^1} = \frac{1}{3!}(27 - 3) = 4$$