21к Мат. Анализ. Семинар № 17

Равномерная сходимость рядов Фурье

Пусть $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ — 2π — периодическая ф-я.
Рассмотрим её ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Если ряд сходится равномерно, то его сумма — непрерывная функция. Следовательно, если у $f(x)$ есть разрывы, то равн. сходимости не будет.

<u>Задача 1</u>. Пусть коэффициенты a_n удовлетворяют условию $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$.
Тогда ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ сходится равномерно, его сумма $f(x)$ — есть непрерывная функция и a_n — являются её коэффициентами Фурье.

<u>Решение</u>. Сходимость следует из теоремы Вейерштрасса, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

$$|a_n e^{inx}| = |a_n|,$$

Значит, есть равномерная сходимость.

$$\text{Пусть } f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} \qquad (1)$$

Если ряд сходится равномерно, то его можно интегрировать <u>почленно</u>.

Умножим левую и правую части на e^{-imx}:

$$f(x)\cdot e^{-imx}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}\cdot e^{-imx}$$

Равномерная сходимость сохраняется (теорема Вейерштрасса). Проинтегрировать ряд можно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\cdot e^{-imx}\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} = a_m\cdot 2\pi \Rightarrow a_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx$$

Задача 2. Пусть $f(x)$ – 2π-периодическая функция, дифференцируемая на $[-\pi,\pi]$, причем $f'(x)\in L_2(-\pi,\pi)$. Тогда ряд Фурье $f(x)$ сходится к $f(x)$ на всей оси.

Решение. Воспользуемся Задачей 1 и докажем, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$

Действительно, проинтегрируем по частям:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx = -\frac{1}{2\pi n i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\left(e^{-inx}\right)=$$

$$-\frac{1}{2\pi i n} f(x)\, e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi n i}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx}\,dx=$$

$$=0+\frac{1}{ni}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx=\frac{d_n}{ni}$$

Здесь $d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx$ — коэфф. Фурье $f'(x)$

т.е. $\boxed{d_n = in\cdot c_n}$ — связь коэфф. Фурье $f(x)$ и $f'(x)$. Поэтому,

Заметим, что $f'(x)\in L^2(-\pi,\pi)$.
по равенству Парсеваля:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\, dx < \infty.$$

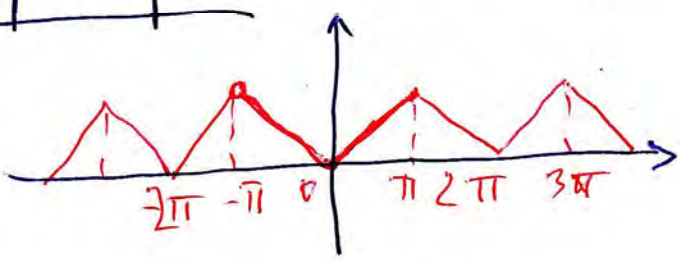
Тогда $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| = \sum \frac{|d_n|}{n} \le \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^2 + \frac{1}{n^2} < \infty.$

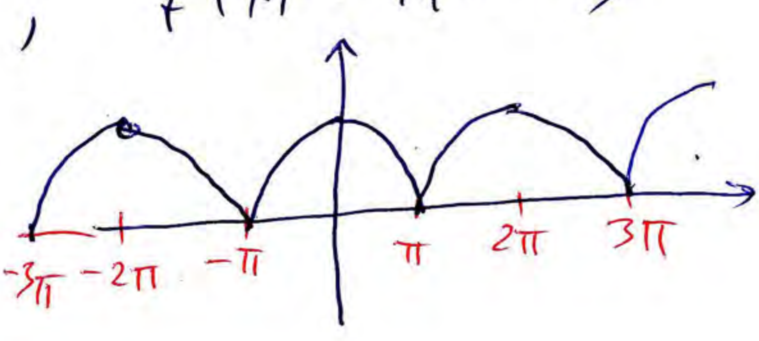
т.к. ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

Следовательно, ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ равн. сходится к функции $f(x)$.

<u>Следствие 1.</u> Если $f(x)\in C^1(-\pi,\pi)$ и 2π-периодическая или $f(x)$ — кусочно непрерывно-дифференцируемая функция, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно.

<u>Примеры:</u> $f(x) = |x|$, $f(x) = x(\pi - x)$





② Суммы Фейера, Теорема Фейера.

Пусть $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, периодическая: $f(-\pi)=f(\pi)$. Ряд Фурье $f(x)$ не обязательно сходится к функции $f(x)$ равномерно (даже он может не сходиться поточечно). Есть сходимость почти всюду (проблема Лузина). Существуют примеры таких непрерывных функций.

Проблема: как восстановить непрерывную функцию по ее коэффициентам Фурье в равномерной метрике? Знаем, что в L_2 это можно сделать с помощью рядов Фурье. А как быть в $C[-\pi,\pi]$?

Задача 3. Пусть X – нормированное пр-во. Дана последовательность $x_n \in X$, которая сходится:

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Рассмотрим последовательность

$$\sigma_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Доказать, что $\sigma_n \to x$ $(n\to\infty)$, т.е. $\|\sigma_n - x\|_X \to 0$

Решение: Рассмотрим $z_n = x_n - x$, $\|z_n\|_X \to 0$.
Достаточно доказать, что $\left\| \frac{z_1+\ldots+z_n}{n} \right\|_X \to 0$.

$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n > N \quad \|z_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\{z_n\}$ – ограничена: $\exists C: \ \|z_n\| \le C \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n} \right\| = \left\| \frac{z_1+\ldots+z_N+z_{N+1}+\ldots+z_n}{n} \right\| =$$

$$\le \frac{\sum_{k=1}^{N}\|z_k\|}{n} + \frac{\sum_{k=N+1}^{n}\|z_k\|}{n} \le \frac{N\cdot C}{n} + \frac{(n-N)\,\varepsilon}{2n}$$

$$\le \frac{N\cdot C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Выберем N_1: $\frac{NC}{N_1} < \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $N_1 > \frac{2NC}{\varepsilon}$

Тогда $\forall n > N_1$ $\quad \frac{N\cdot C}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

т.е. $\left\| \frac{z_1+\ldots+z_n}{n} \right\| < \varepsilon \quad \forall n \ge N_1$.

Следовательно: $\frac{z_1+\ldots+z_n}{n} \to 0$ в X.

Вывод: $\sigma_n = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \to x$ в X.

В обратную сторону не верно

Задача 4. Привести пример последовательности x_n: $\sigma_n = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ - сходится, а сами x_n - не сходятся

Решение: $X = \mathbb{R}$, $x_n = \{1, 0, 1, 0 \ldots\}$

Тогда $\sigma_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2n}, & n \text{ - нечетные} \\ \frac{1}{2}, & n \text{ - четные} \end{cases}$

т.е. $\sigma_n \to \frac{1}{2}$ $(n \to \infty)$, $x_n \not\to \frac{1}{2}$.

Поставленная проблема решается с помощью аналогичного утверждения.

Пусть $f \in (-\pi, \pi)$, $f(-\pi) = f(\pi)$.

$$S_n = \sum_{|k| \le n} C_k \cdot e^{ikx}, \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Положим: $$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n} \quad (2)$$

Называется суммой Фейера порядка n.

Теорема (Фейер) Если $f(x)$ - непрерывная функция с периодом 2π, то

$$\sigma_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \quad (n \to \infty)$$

сходится равномерно на всей оси.

Док-во: Воспользуемся интегралом Дирихле

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \cdot \frac{\sin \frac{2k+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}} dz \quad \text{и}$$

подставим в (2):

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}} \right] dz.$$

Найдем сумму:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)u = \frac{\sin^2 nu}{\sin u},$$

которая получается из тождества

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = \cos\alpha - \cos\beta,$$

если положить $\alpha = 2ku$, $\beta = 2(k+1)u$; т.е.

$$2\sin(2k+1)u\cdot\sin u = \cos 2ku - \cos 2(k+1)u$$

Тогда сумма:

$$2\sin u\sum_{k=0}^{n-1}(\sin 2k+1)u = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos 2ku - \cos 2(k+1)u\right) =$$

$$= 1 - \cos 2nu = 2\sin^2 nu.$$

Получим: $$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\cdot\left(\frac{\sin\frac{nz}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2 dz$$

Обозначим: $$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nz}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2$$

Называется <u>ядром Фейера</u> <u>порядка n</u>

Запишем в виде

$$(3)\quad \boxed{\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\,\Phi_n(z)\,dz}$$ <u>интеграл Фейера</u>

Сделав замену $z = t - x$ и воспользовавшись периодичностью функций f и Φ_n получим

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\Phi_n(x-t)\,dt = 2\pi\, f * \Phi_n\,(x)$$

опять <u>свертка</u> с ядром Фейера.

Свойства ядер Фейера

1) $\Phi_n(z) \geq 0$, функция четная

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)\,dz = 1$.

3) $\forall \delta > 0$ $\int\limits_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z)\,dz = \int\limits_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z)\,dz = \eta_n(\delta) \to 0 \ (n \to \infty)$

Первое свойство – очевидно.

Второе свойство. Положим в (3) $f(x) \equiv 1$.

Тогда $S_k(x) \equiv 1 \Rightarrow \sigma_n(x) \equiv 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Поэтому $1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)\,dz$.

Третье свойство: вытекает из неравенства:

Если $\delta \leq |z| \leq \pi \Rightarrow \left|\sin \frac{z}{2}\right| \geq \sin \frac{\delta}{2}$, т.е.

$$\left(\frac{\sin \frac{nz}{2}}{\sin \frac{z}{2}}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}\right)^2 \Rightarrow \eta_n(\delta) \leq \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\pi - \delta}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}\right) \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

Доказательство теоремы Фейера:

Поскольку ф-ия $f(x)$ непрерывна и периодична, то она равномерно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$:

$\exists M > 0$: $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$

Необходимо оценить разность:

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+z)] \Phi_n(z)\, dz =$$

$= J_- + J_0 + J_+$, где

$$J_- = \int_{-\pi}^{-\delta} [f(x) - f(x+z)] \Phi_n(z)\, dz, \quad |J_-| \le 2M \cdot \eta_n(\delta)$$

$$J_+ = \int_{\delta}^{\pi} [f(x) - f(x+z)] \Phi_n(z)\, dz, \quad |J_+| \le 2M \cdot \eta_n(\delta)$$

$$J_0 = \int_{-\delta}^{\delta} [f(x) - f(x+z)] \Phi_n(z)\, dz, \quad x \in (-\delta, \delta)$$

Воспользуемся равномерной непр. f

$$|J_0| \le \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z)\, dz \le \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)\, dz = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Воспользовались мы свойствами 1 и 2 ядра Φ_n.

Теперь воспользуемся свойством 3: $\forall \varepsilon > 0$

$\exists n_0 = n_0(\delta): \ \forall n > n_0 \ 2M \cdot \eta_n(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}$

Тогда $|f(x) - \sigma_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \ \forall x \in \mathbb{R}$

Значит: $\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x) \ (n \to \infty)$

равномерно на $\mathbb{R}$.

Получаем важное

Следствие: (1-я теорема Вейерштрасса)

Любую непрерывную 2π-периодическую функцию можно (равномерно на всей оси) приблизить тригонометрическими многочленами.

Отсюда получаем, что тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ или $\{e^{inx}\}$ полна в $L_2(-\pi, \pi)$.

Задача 5. Ряд Фурье непрерывной периодической функции в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ либо расходится, либо сходится к её значению $f(x)$.

Решение. Если последовательность $S_n(x)$ сходится для некоторого x, то последовательность $\sigma_n(x)$ сходится к тому же пределу (Задача 3). Однако, по теореме Фейера, $\sigma_n(x) \to f(x)$. Следовательно, $S_n(x) \to f(x)$.

---

③ Теорема Фейера в пр-ве $L_1(-\pi, \pi)$.

Мы доказали теорему Фейера для периодических функций из пр-ва $C[-\pi, \pi]$.

Для пространства $L_2(-\pi, \pi)$ она тоже выполнена, в силу сходимости рядов Фурье в этом пространстве.
Если одно пространство, где она выполнена

<u>Задача 6.</u> Если $f \in L_1(-\pi, \pi)$ – 2π-периодическая функция, то её суммы Фейера $\sigma_n(x)$ сходятся к $f(x)$ в $L_1(-\pi, \pi)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|\,dx \to 0 \ (n \to \infty).$$

(Домашнее задание)

<u>Задача 7.</u> Если $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$, то $f(x)$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

<u>Решение:</u> Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx}\,dx$$

Тогда функция $h(x) = f(x) - g(x)$ имеет нулевые коэффициенты Фурье. Тогда тождественно равны <u>нулю</u> все <u>суммы Фейера</u> для h. Но тогда их предел (функция $h(x)$) тоже равен нулю (почти всюду), т.е. $f(x) = g(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$.