Лекция гладкие 12.10.20

# Векторные расслоения

**Опр.** **Векторным расслоением** ранга $m$ наз. такой набор объектов

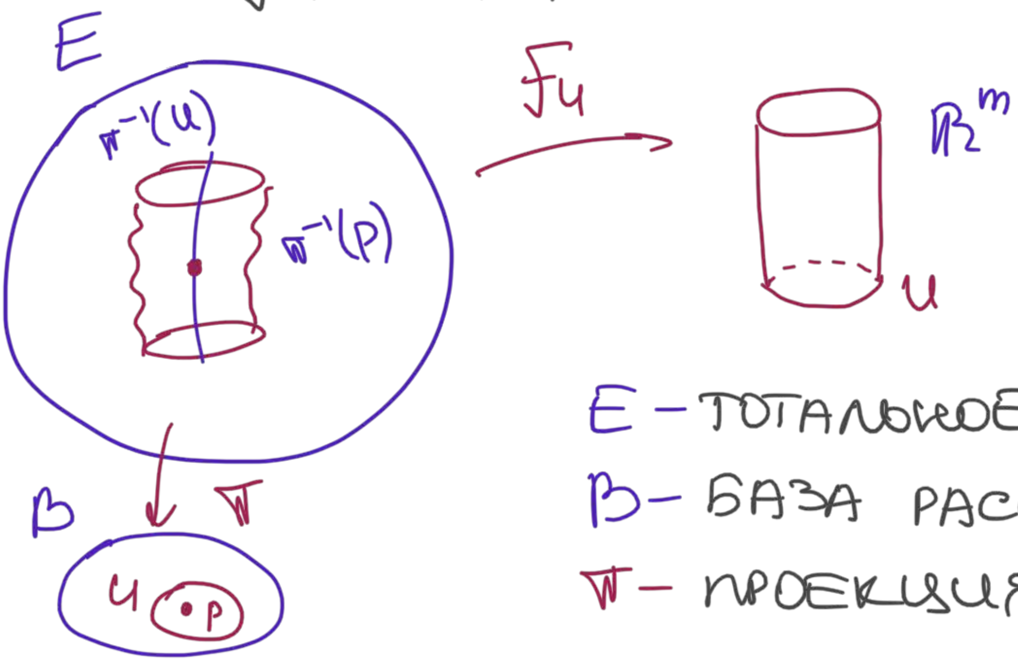
$$\mathcal{F} = (E, B, \pi), \text{ где:}$$

1) $E, B$ — многообразия, $\pi : E \to B$ — сюръективное отображение

2) $\forall p \in B$ $\pi^{-1}(p)$ явл. $m$-мерным векторным пр-вом $p^{-1}(p) = \mathbb{R}^m$

3) $\forall p \in B$ $\exists$ откр. $U \ni p$, что $\exists$ гомеоморфизм ($C^k$-диффео$^c$в морфизм)

$$f_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$$




$E$ — тотальное пр-во

$B$ — база расслоения

$\pi$ — проекция

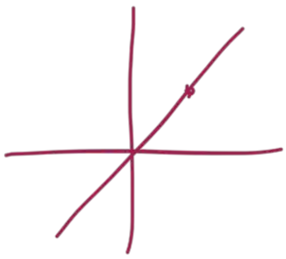
Диаграмма коммутативна

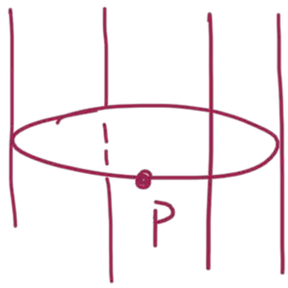
$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "f(U)"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^m \arrow[dl, "pr"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Примеры 1) $(E = S^1 \times \mathbb{R},\ B = S^1,\ \pi = pr)$

(тривиальное расслоение

2) $\mathbb{R}P^1 \simeq S^1$

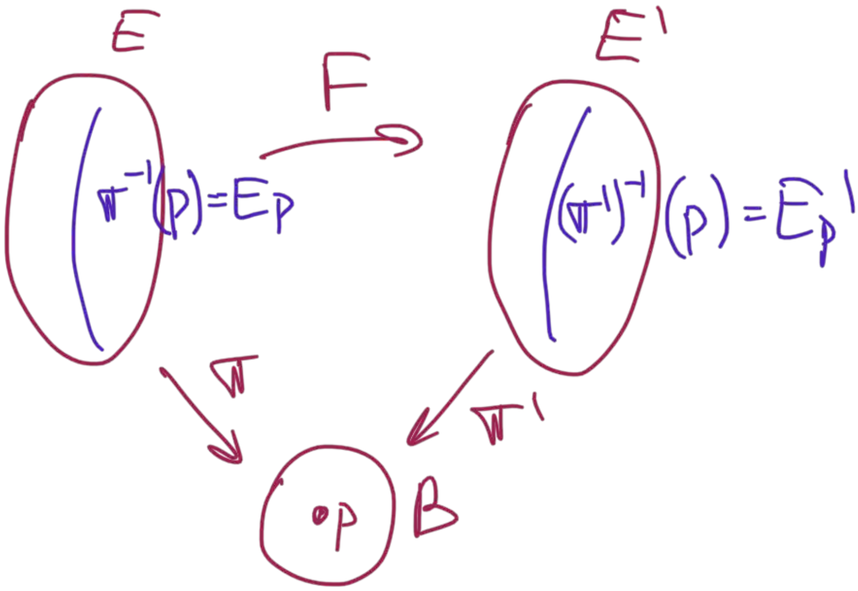





Опр. Векторные расслоения $\mathcal{F} = (E, B, \pi)$ и $\mathcal{F}' = (E', B, \pi')$ наз. эквивалентными, если $\exists$ гомеоморфизм ($C^k$-диффеоморфизм), т.ч. диаграмма коммутативна

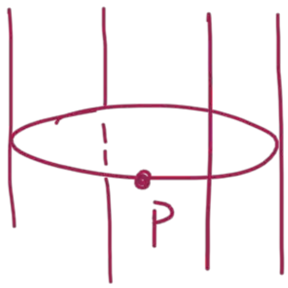
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

и $F\big|_{\pi^{-1}(p)} : E_p \longrightarrow E'_p$, $E_p = \pi^{-1}(p)$, $E'_p = (\pi')^{-1}(p)$ — изоморфизм векторных пр-в




<u>Опр.</u> Векторное расслоение ==тривиально,== если оно эквивалентно прямому произведению

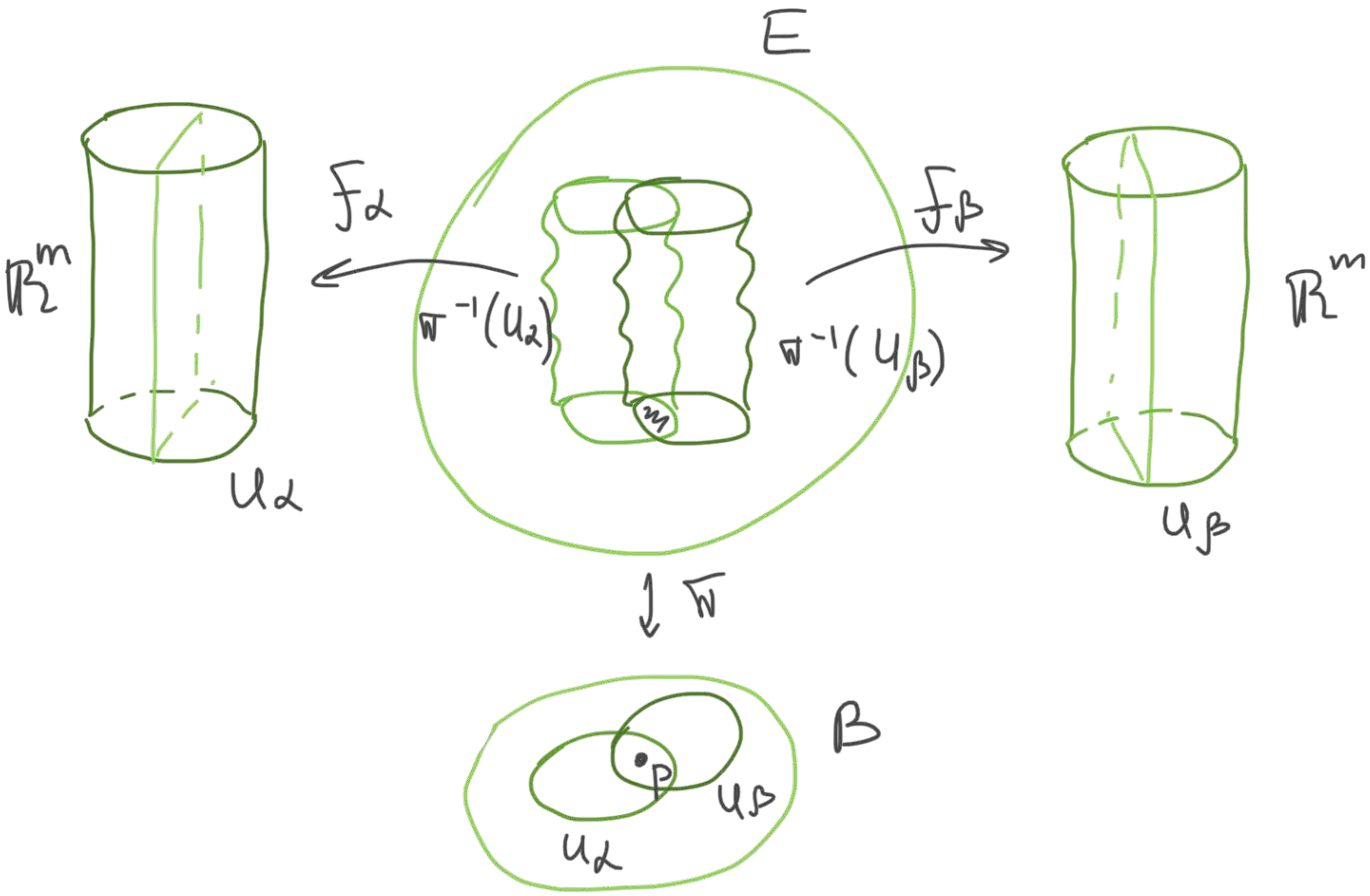
<u>Пример.</u>



# Координатное описание векторного расслоения

Рассмотрим покрытие базы $B$ окрестностями $\{U_\alpha\}$ $\left(B = \bigcup_\alpha U_\alpha\right)$, над которым расслоение $\xi(E, B, \pi)$ тривиализуется.

Обозначим $f_\alpha := f_{U_\alpha}$



$$
\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \arrow[dr, "pr"'] & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[l, "f_\alpha"'] \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d, "\pi"] & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \arrow[dl, "pr"] \\
 & U_\alpha \cap U_\beta &
\end{tikzcd}
$$

Склеивающее отображение:

$$\boxed{g_{\alpha\beta}(p) := f_\alpha^p \circ \left(f_\beta^p\right)^{-1}} \qquad p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

$$f_\alpha^p = f_\alpha\big|_{\pi^{-1}(p)} \qquad f_\beta^p = f_\beta\big|_{\pi^{-1}(p)}$$

$$g_{\alpha\beta}(p) \in GL(m, \mathbb{R})$$

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(m, \mathbb{R})$$

Координатным описанием расслоения $\mathfrak{F}$ называется набор $\{g_{\alpha\beta}\}, \{U_\alpha\}$

**ЛЕММА** 1) $g_{\alpha\beta}(p) = g^{-1}_{\beta\alpha}(p)$ $p \in U_\alpha \cap U_\beta$

2) $g_{\alpha\beta}(p)\, g_{\beta\gamma}(p)\, g_{\gamma\alpha}(p) = I$, $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

НАБОР $\{g_{\alpha\beta}\}$, УДОВЛ. УСЛОВИЯМ 1) И 2), НАЗ. КОЦИКЛОМ

▶ $g_{\alpha\beta} = f_\alpha \circ f_\beta^{-1} = (f_\beta \circ f_\alpha^{-1})^{-1} = g^{-1}_{\beta\alpha}$

$g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma}\, g_{\gamma\alpha} = (f_\alpha \circ f_\beta^{-1}) \circ (f_\beta \circ f_\gamma^{-1}) \circ (f_\gamma \circ f_\alpha^{-1}) = I$

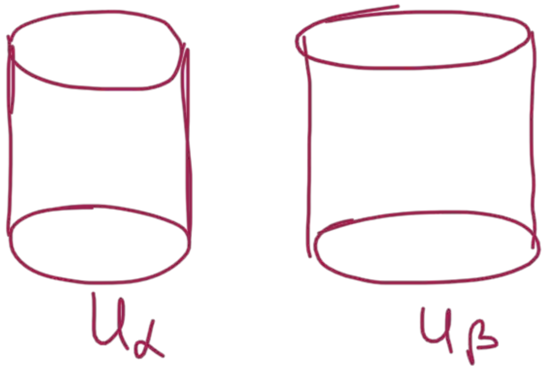
◀

БАЗА $B$, ПОКР. $U_\alpha$ И $\{g_{\alpha\beta}\}$, УДОВЛ. УСЛОВИЮ КОЦИКЛА ЗАДАЁТ ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ

**ЛЕММА** ПОКРЫТИЕ $\{U_\alpha\}$ И КОЦИКЛ $\{g_{\alpha\beta}\}$ ОПРЕДЕЛЯЮТ ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ, ЭКВИВАЛЕНТНОЕ РАССЛОЕНИЮ $\mathcal{F}$, ПО КОТОРОМУ ПОСТРОЕН КОЦИКЛ

▶ $B$, $\{U_\alpha\}$, $\{g_{\alpha\beta}\}$

$$\bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^m)$$




ЗАДАДИМ ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НА $\bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^m)$

$$\underset{U_\beta \times \mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{(p, v)}} \sim \underset{U_\alpha \times \mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{(p, g_{\alpha\beta}(p) v)}}$$

ЭТО ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВ-ТИ, Т.К. ВЫПОЛНЯЕТСЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ

ВОЗЬМЁМ ЭКВИВ. $(p, g_{\gamma\alpha} v') \in U_\gamma \times \mathbb{R}^m$, ГДЕ

$$g_{\gamma\alpha} \circ g_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\alpha}^{-1}$$

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = I \Rightarrow$$

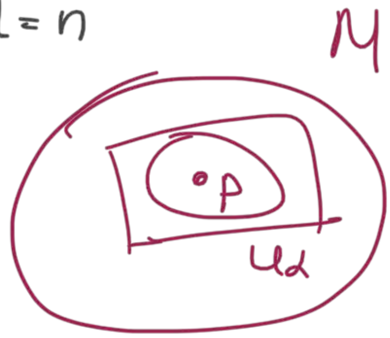
Атлас на $E = \bigsqcup_{\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^m / \sim$

$\tilde{U}_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^m$,

$\hat{\varphi}_{\alpha\beta}(p,v) = (\varphi_{\alpha\beta}(p), g_{\beta\alpha}(p)v)$

## Касательное и кокасательное расслоение к многообразию

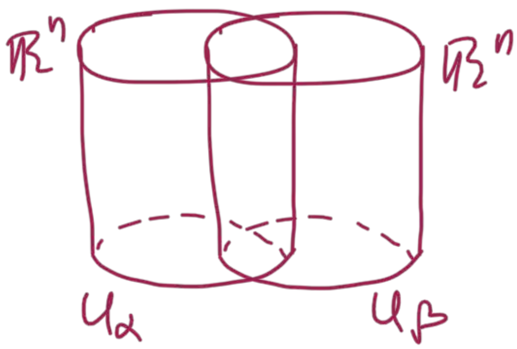
$TM = \bigcup\limits_{p\in M} T_pM$ $\quad \dim M = n$




Рассмотрим атлас

$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообр. $M$

Зададим касательное расслоение с помощью координатного описания




$p \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\underset{U_\alpha \times \mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{(p,v)}} \sim (p, \underset{U_\beta, \mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{J}}(\varphi_{\alpha\beta})v)$$

$$g_{\beta\alpha}(p) = J(\varphi_{\alpha\beta}) \in GL(n, \mathbb{R})$$

Определим $TM$ координатным описанием $\{U_\alpha\}, \{g_{\beta\alpha} = J(\varphi_{\alpha\beta})\} = TM$

Под касательным расслоением понимается как расслоение, так и его тотальное пр-во $TM$

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \qquad A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$$

$$\tilde{U}_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p M, \quad \tilde{U}_\beta = \bigcup_{p \in U_\beta} T_p M$$

$$\tilde{\varphi}_\alpha : (p, v) \longmapsto (\varphi_\alpha(p), dx^1(v), \dots, dx^n(v))$$

В касательном пр-ве базис $\frac{\partial}{\partial x^i}$, двойственный базис в кокасательном пр-ве — $dx^i$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} : (x, v) \longmapsto (\varphi_{\alpha\beta}(x), J(\varphi_{\alpha\beta}) v)$$