

Контрольная работа

Структурная
Косинус

$$n4 \quad Q = p^\alpha e^{\beta q}, \quad P = q^{2\alpha-1} + \ln p + e^{-q}$$

а) Преобразование $q, p \rightarrow Q, P$ - каноническое, если

$$\{p, p\} = \{q, q\} = 0 \quad \rightarrow \quad \{P, P\}_{p,q} = \{Q, Q\}_{p,q} = 0$$

$$\{q, p\} = 1 \quad \rightarrow \quad \{Q, P\}_{p,q} = 1$$

$$\{Q, Q\} = \{p^\alpha e^{\beta q}, p^\alpha e^{\beta q}\} = \alpha p^{\alpha-1} e^{\beta q} \{p, q\} p^\alpha \beta e^{\beta q} +$$

$$+ \{q, p\} \cdot p^\alpha \cdot e^{\beta q} \cdot \beta \cdot \alpha p^{\alpha-1} e^{\beta q} = 0$$

$$\{P, P\} = \{q^{2\alpha-1} + \ln p + e^{-q}, q^{2\alpha-1} + \ln p + e^{-q}\} =$$

остальное слагаемое
будет содержать $\{p, p\}$ и $\{q, q\}$

$$= \{q^{2\alpha-1}, \ln p\} + \{\ln p, e^{-q}\} + \{q^{2\alpha-1}, e^{-q}\} + \{e^{-q}, \ln p\} = 0$$

$$\{Q, P\} = \{p^\alpha e^{\beta q}, q^{2\alpha-1} + \ln p + e^{-q}\} =$$

$$= \{p^\alpha e^{\beta q}, q^{2\alpha-1}\} + \{p^\alpha e^{\beta q}, \ln p\} + \{p^\alpha e^{\beta q}, e^{-q}\} =$$

$$= e^{\beta q} \cdot \alpha p^{\alpha-1} \{p, q\} \cdot (2\alpha-1) q^{2\alpha-2} + p^\alpha \beta e^{\beta q} \{q, p\} \cdot \frac{1}{p} +$$

$$+ p^{\alpha-1} \alpha \{p, q\} \cdot (-e^{-q}) e^{\beta q} = 1$$

$$\{q, p\} \cdot (\alpha e^{\beta q} p^{\alpha-1} (\beta - 2\alpha) \cdot q^{2\alpha-2} + p^{\alpha-1} \beta e^{\beta q} + \alpha p^{\alpha-1} e^{-q} e^{\beta q}) = 1$$

$$1 \cdot e^{\beta q} p^{\alpha-1} (\alpha (\beta - 2\alpha) q^{2\alpha-2} + \beta + \alpha e^{-q}) = 1$$

Т.к. это тождество (должно быть), то как
функция от p - это 1 , $\Rightarrow p^{\alpha-1} = 1$, $\Rightarrow \alpha = 1$

$$e^{\beta q} ((\beta - 2) q^{1-\beta} + \beta + e^{-q}) = 1$$

$(\beta - 2) q^{1-\beta} + \beta + e^{-q} = e^{-q}$ - как функция от q :

$q^{1-\beta} = 1$ (левая часть правая часть от q независимы) \Rightarrow

$$\beta = 1: -1 + 1 + e^{-q} = e^{-q} - \text{верно!}$$

Значит, $(\alpha, \beta) = (1, 1)$,

а) Производящая функция канонического преобразования вида $P(p, Q)$ - это производящая функция третьего рода $F_3(p, Q)$.

Для $(\alpha, \beta) = (1, 1)$

$$Q = p e^q, \quad P = q + \ln p + e^{-q}.$$

Для производящей функции третьего рода:

$$q = - \frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = - \frac{\partial F_3}{\partial Q}$$

$$Q = p e^q, \Rightarrow q = \ln \left(\frac{Q}{p} \right) = \ln Q - \ln p$$

$$P = \ln \left(\frac{Q}{p} \right) + \ln p + e^{-\ln \left(\frac{Q}{p} \right)} = \ln Q + \frac{p}{Q}$$

$$q = \ln \frac{Q}{p}, \quad P = \ln Q + \frac{p}{Q}$$

$$\ln \frac{Q}{p} = q = - \frac{\partial F_3(p, Q)}{\partial p} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F_3(p, Q)}{\partial p} = - \ln Q + \ln p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_3(p, Q) = -p \ln Q + \int \ln p \, dp =$$

$$= -p \ln Q + p \ln p - p + f(Q)$$

$$\ln Q + \frac{p}{Q} = P = - \frac{\partial F_3(p, Q)}{\partial Q} = \cancel{-p \ln Q - p} + \cancel{p \ln p - p} + f'(Q)$$

$$\frac{p}{Q} + \frac{\partial f(Q)}{\partial Q} \Rightarrow \frac{\partial f(Q)}{\partial Q} = \ln Q \Rightarrow$$

$$f(Q) = -Q + Q \ln Q + c, \quad c - \text{const}$$

$$\text{Итак, } F_3(p, Q) = -p \ln Q + p \ln p - p - Q + Q \ln Q + c$$

$$N \perp a) \{(\vec{r}_a)_i, (\vec{p}_a)_j\} = \delta_{ab} \delta_{ij}, \{(\vec{r}_a)_i, (\vec{r}_b)_j\} = \{(\vec{p}_a)_i, (\vec{p}_b)_j\} = 0$$

$\forall a, b = 1, 2$
 $\forall i, j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \{(\vec{r}_1, \vec{p}_2), (\vec{r}_2, \vec{p}_1)\} &= \{r_{11} p_{21} + r_{12} p_{22} + r_{13} p_{23}, r_{21} p_{11} + r_{22} p_{12} + r_{23} p_{13}\} = \\ &= \{r_{11} p_{21}, r_{21} p_{11}\} + \{r_{12} p_{22}, r_{22} p_{12}\} + \{r_{13} p_{23}, r_{23} p_{13}\} - \text{остальные слагаемые равны нулю, т.к. либо } a \neq b, \text{ либо } i \neq j \\ &= \{p_{21}, r_{21}\} r_{11} p_{11} + r_{21} p_{21} \{r_{11}, p_{11}\} + r_{12} p_{22} \{p_{22}, r_{22}\} + p_{22} r_{22} \{r_{12}, p_{12}\} + \\ &+ \{r_{13}, p_{13}\} p_{23} r_{23} + \{p_{23}, r_{23}\} r_{13} p_{13} = -r_{11} p_{11} + r_{21} p_{21} - r_{12} p_{12} + p_{22} r_{22} + \\ &+ r_{13} p_{13} - p_{23} r_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \{(\vec{r}_1, \vec{p}_2), [\vec{r}_2 \times \vec{p}_1]\} &= \{r_{11} p_{21} + r_{12} p_{22} + r_{13} p_{23}, \epsilon_{ijk} r_{2j} p_{1k}\} = \\ &= \{r_{1k} p_{2k}, \epsilon_{ijk} r_{2j} p_{1k}\} \stackrel{1x=1k \text{ или } 2x=2j}{=} \{r_{1k} p_{2k}, \epsilon_{ijk} r_{2j} p_{1k}\} + \{r_{1j} p_{2j}, \epsilon_{ijk} r_{2j} p_{1k}\} = \\ &= \epsilon_{ijk} (\{r_{1k} p_{1k}\} p_{2k} r_{2j} + r_{1j} p_{1k} \{p_{2j}, r_{2j}\}) = \\ &= \epsilon_{ijk} (p_{2k} r_{2j} - r_{1j} p_{1k}) = [\vec{r}_2 \times \vec{p}_2]_i - [\vec{r}_1 \times \vec{p}_1]_i \\ \text{Значит, } \{(\vec{r}_1, \vec{p}_2), [\vec{r}_2 \times \vec{p}_1]\} &= [\vec{r}_2 \times \vec{p}_2] - [\vec{r}_1 \times \vec{p}_1] \end{aligned}$$

$$N 2 \quad L = \frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2} + \frac{e}{2c} (\vec{B}, [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}])$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \quad L = \frac{m(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 + \dot{\vec{r}}_3)^2}{2} + \frac{e}{2c} (\vec{B}, \epsilon_{ijk} \vec{r}_j \dot{\vec{r}}_k)$$

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_s} = m \dot{r}_s + \frac{e}{2c} (\vec{B}, \epsilon_{ijs} \vec{r}_j \dot{\vec{r}}_s)$$

$$H = \text{сррррр } \dot{r} p - L = \vec{r}_i (m \dot{r}_s + \frac{e}{2c} (\vec{B}, \epsilon_{ijs} \vec{r}_j \dot{\vec{r}}_s)) - \frac{m(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 + \dot{\vec{r}}_3)^2}{2} + \frac{e}{2c} (\vec{B}, \epsilon_{ijk} \vec{r}_j \dot{\vec{r}}_k)$$

$$1.3 \text{ a) } \vec{r}(0) = \vec{r}, \quad \vec{p}(0) = \vec{p}_0$$

$$T_{\text{kin}} = m \dot{x}^2, \quad U = mgx \quad (\dot{x} = \dot{r})$$

$$L = \frac{m \dot{x}^2}{2} - mgx$$

$$H = \dot{x}p - L$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} \right)^2 - mgx \right) = \frac{p^2}{2m} + mgx$$

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -mg \Rightarrow p(t) = -mgt + p_0$$

$$\frac{1}{m} (-mgt + p_0) = -gt + \frac{p_0}{m} = \dot{x}$$

$$\text{Значит, } x(t) = r(t) = -g \frac{t^2}{2} + \frac{p_0}{m} t + r$$

(Для удобства и полноты переобозначим $\vec{p}(0) = \vec{p}_0$, иначе всё смешалось. Вроде бы с r такую удачно и учесть (везде пишем x !))

$$\delta) \quad \{r_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{r_i, r_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 - \frac{1}{2} g t^2 \hat{e}_x + \frac{p_0}{m} t \hat{e}_x$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -mg, \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$A_2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = 0$$