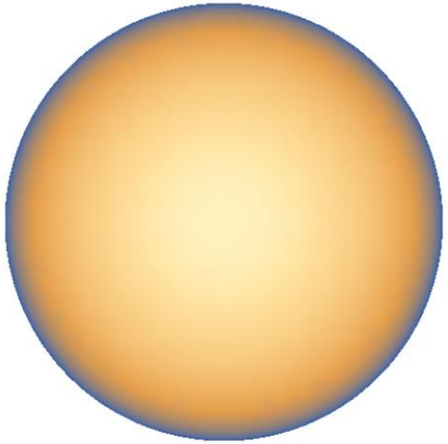
Лекция 19. Теоремы Пикара.

Теория функций комплексного переменного

Гиперболическая метрика

Определение 12.18. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Для всякой точки $a \in U$ обозначим через $\Psi_U(a)$ верхнюю грань чисел $|\psi'(0)|$ для всевозможных голоморфных отображений $\psi\colon D_1 = D \to U$, для которых $\psi(0) = a$. Тогда число $\rho_U(a) = 1/\Psi_U(a)$ называется *плотностью гиперболической метрики* на множестве U в точке a. (Мы не исключаем случая $\Psi_U(a) = +\infty$; тогда $\rho_U(a) = 0$.)

- Если $U = \mathbb{D}$, то $\rho_U(0) = 1$. Следовательно, гиперболическая метрика совпадает с $\rho_U(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$.



Гиперболическая длина

Предложение 12.19. *Если $U \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, отличная от $\mathbb{C}$, то для $a \in U$ имеем $\rho_U(a) = |F'(a)|$, где $F : U \to D$ — конформное отображение, переводящее точку a в нуль.*

Предложение 12.21. *Если $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость, то для всякой $a \in H$ имеем $\rho_H(a) = 1/(2 \operatorname{Im} a)$.*

Определение 12.22. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — область, и пусть $\gamma : [p; q] \to U$ — кусочно гладкий путь. Тогда *гиперболической длиной* пути γ называется число

$$\text{h-length}_U(\gamma) = \int_\gamma \rho_U(z)\,|dz|. \tag{12.11}$$

Голоморфные отображения сжимают гиперболическую метрику

Предложение 12.23. *Пусть $U, V \subset \mathbb{C}$ — связные открытые множества, и пусть $f : U \to V$ — голоморфное отображение.*

(1) *Для всякой $a \in U$ имеем $\rho_V(f(a)) \cdot |f'(a)| \leqslant \rho_U(a)$.*

(2) *Для всякого кусочно гладкого пути $\gamma : [p; q] \to U$ имеем*

$$\text{h-length}_V(f \circ \gamma) \leqslant \text{h-length}_U(\gamma).$$

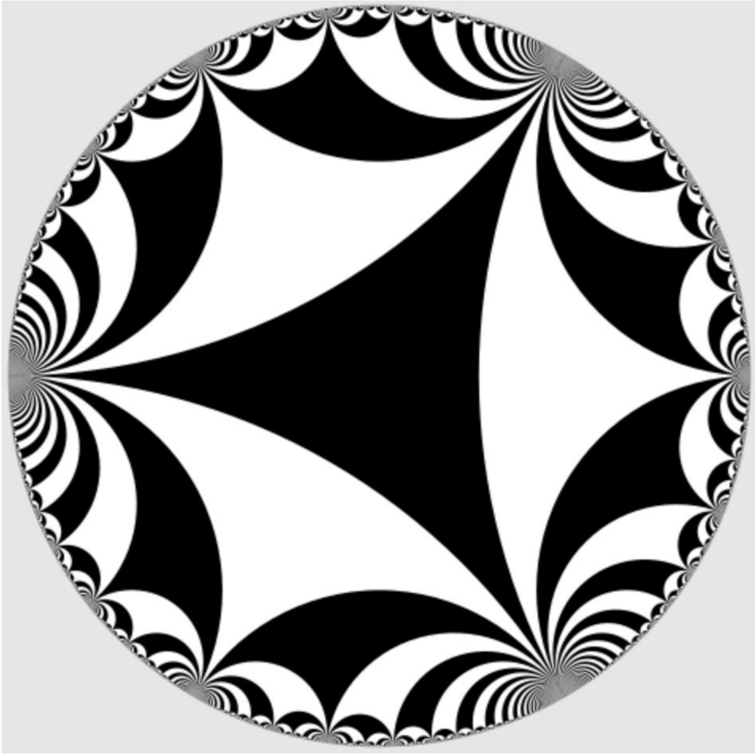
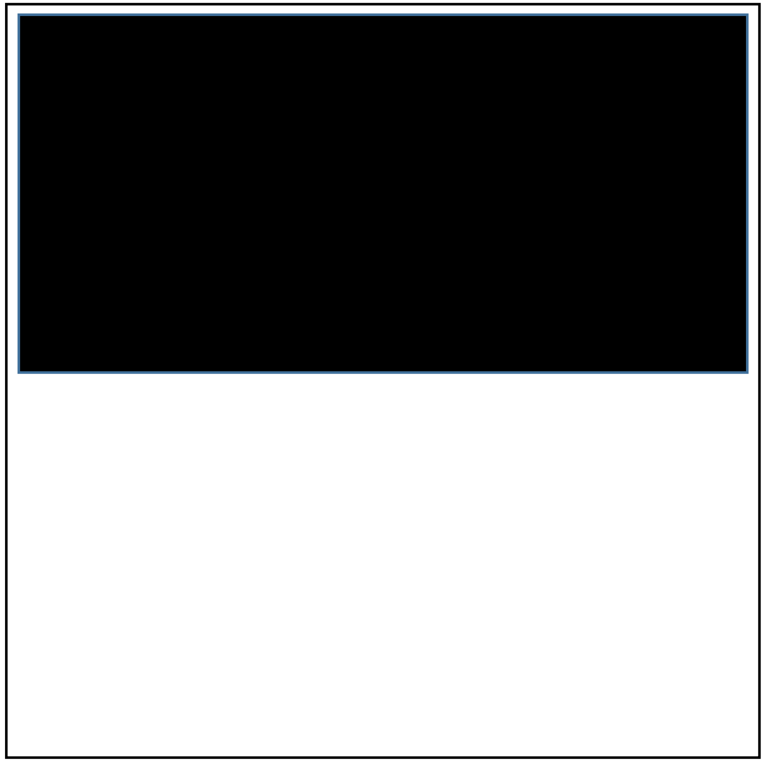
Следствие 12.24. *Если $V \subset U$ — связные открытые подмножества в $\mathbb{C}$, то $\rho_V(a) \geqslant \rho_U(a)$ для всякой точки $a \in V$.*

Следствие 12.25. *Если $f : U \to V$ — конформный изоморфизм, то:*
(1) *для всякой $a \in U$ имеем $\rho_V(f(a)) = \rho_U(a)/|f'(a)|$;*
(2) *если $\gamma : [p; q] \to U$ — кусочно гладкий путь, то*

$$\text{h-length}_V(f \circ \gamma) = \text{h-length}_U(\gamma).$$

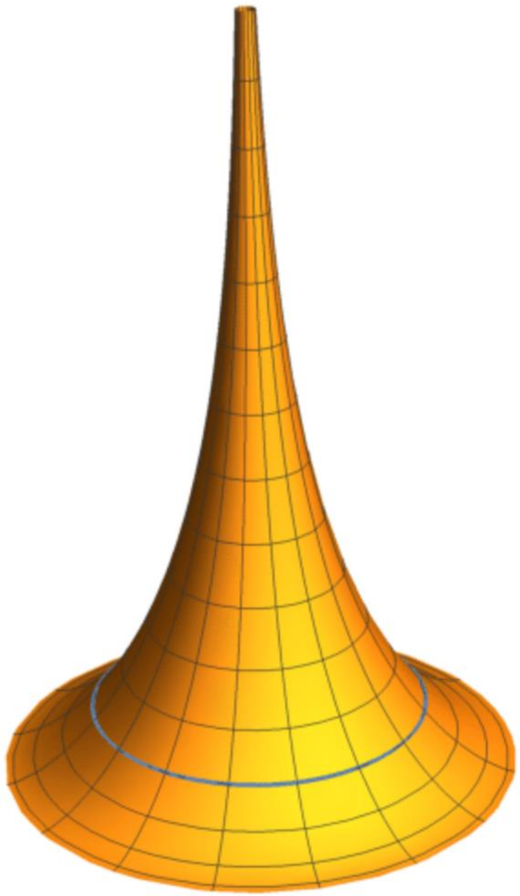
Теорема об униформизации

Теорема. *Пусть* $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ *открыто, причем* $\left|\overline{\mathbb{C}} \setminus V\right| > 2$. *Существует голоморфное накрытие* $\pi\colon \mathbb{D} \to V$.

Метрика Пуанкаре на $V \subset \overline{\mathbb{C}}, \left|\overline{\mathbb{C}} \setminus V\right| > 2$

- Голоморфное накрытие $\pi\colon \mathbb{D} \to V$ позволяет перенести метрику Пуанкаре на V: $\|\pi_*(v)\| \coloneqq \|v\|$.
- Это и есть *гиперболическая метрика*, т.к. любое голоморфное отображение $f\colon \mathbb{D} \to V$ имеет вид $f = \pi \circ g$ для некоторого голоморфного $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.
- Проколы выглядят (относительно метрики Пуанкаре) как каспы.

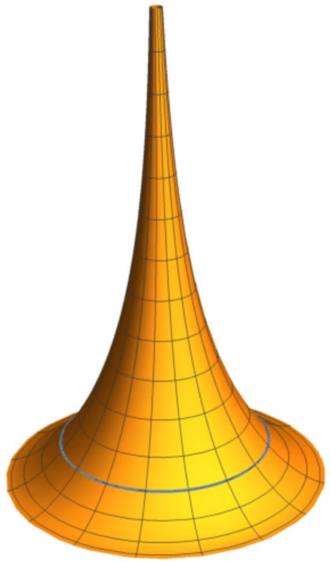


Гиперболическая метрика около проколов

Предложение 12.26. *Пусть* $D^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ — *проколотый единичный диск. Тогда для всякой* $a \in D^*$ *имеем*

$$\rho_{D^*}(a) = 1/(2|a|\ln(1/|a|)).$$

- Можно показать, что вблизи любой проколотой точки гиперболическая метрика выглядит так (с точностью до умножения на функцию, ограниченную сверху и снизу двумя положительными константами). Частный случай этого утверждения – **теорема Ландау** из учебника.
- В частности, площадь проколотой окрестности конечна!



Малая и большая теоремы Пикара

Малая теорема Пикара. *Областью значений целой функции, отличной от константы, является вся комплексная плоскость, за исключением, быть может, лишь одной точки*.

Доказательство. Пусть $f: \mathbb{C} \to V$ целая, $|\mathbb{C} \setminus V| > 1$. Поднимем на универсальное накрытие: $g: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$.

Большая теорема Пикара. *Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $U(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и имеет в точке z_0 существенную особенность. Тогда f принимает в $U(z_0)$ все значения, кроме, быть может, одного, бесконечное число раз.*

Идея доказательства: метрика Пуанкаре.

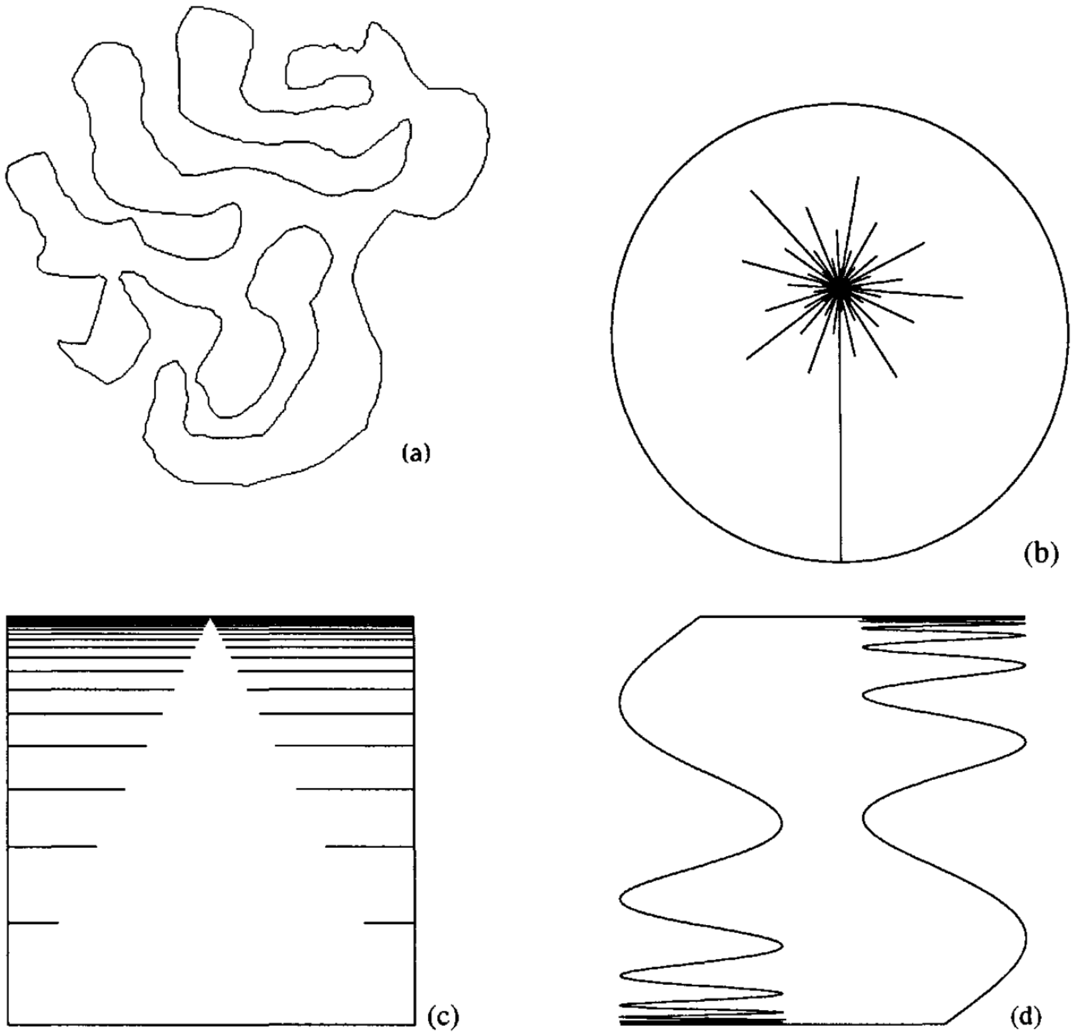
Эмиль Пикар (1856 – 1941)

- Член (с 1910 – президент) Парижской академии наук, член французской академии, член-корр Петербургской АН, почетный член АН СССР, иностранный член АН США, член Лондонского королевского общества.
- Руководил ICM в 1908 (Рим) и 1920 (Страсбург).

Принцип соответствия границ

- Пусть $U \subset \mathbb{C}$ – открытая односвязная область, $U \neq \mathbb{C}$.
- Рассмотрим конформный изоморфизм $\phi: \mathbb{D} \to U$ (отображение Римана).
- **Вопрос**. *Существует ли непрерывное продолжение $\overline{\phi}: \overline{\mathbb{D}} \to \overline{U}$?*
- Не всегда. Пример: $U = \{x + iy |\ y > \sin(1/x)\}$.
- **Теорема Каратеодори**. *Отображение Римана допускает непрерывное отображение на границу тогда и только тогда, когда ∂U локально связна*.
- В частности, это так, если граница ∂U кусочно гладкая.

Границы четырех односвязных областей



Неравенство длина-площадь

- Пусть $\rho(z)|dz|$ – конформная метрика на $I^2 = I \times I,\ I = [0,1]$.
- Площадь квадрата и длина горизонтального отрезка:

$$\mathcal{A} = \int\int_{I^2} \rho(x+iy)^2\,dx\,dy, \quad L(y) = \int_{x\in I} \rho(x+iy)\,dx.$$

17.1. Лемма. Неравенство длин–площадей. *Если площадь $\mathcal{A}$ конечна, то длина $L(y)$ конечна для почти всех значений $y \in I$, и выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\delta}\int_I (L(y))^2 dy \leqslant \mathcal{A}. \qquad (17:1)$$

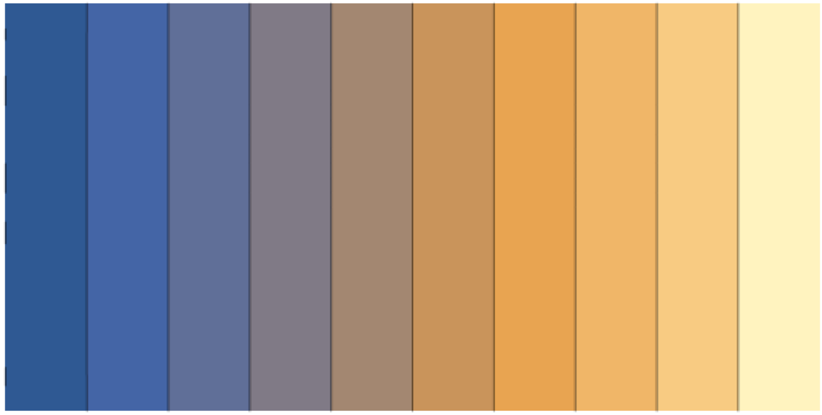
Выбор конформной метрики

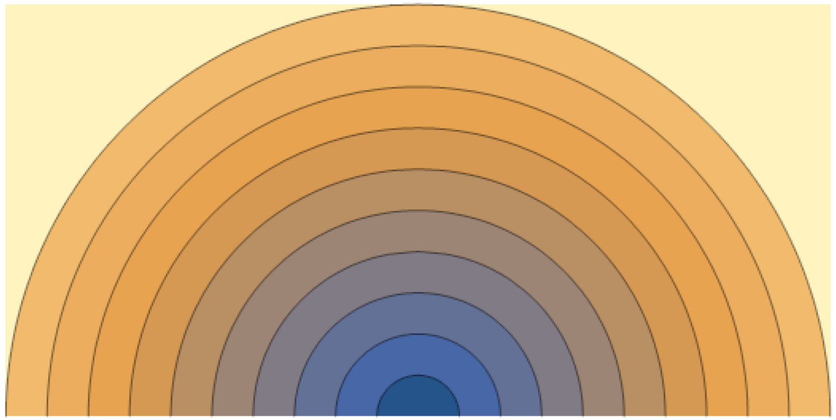
- Рассмотрим конформный изоморфизм $f: \mathbb{H} \to U$, где U – область с «хорошей границей».
- Метрика на полуполосе

$$\{x + iy \in \mathbb{C} | \; x < -M, y \in [0, \pi]\}$$

индуцируется голоморфным отображением $g(u) = f(e^u)$.

- Относительно этой метрики площадь полуполосы конечна.
- Значит, короткие вертикальные отрезки встречаются сколь угодно далеко слева.





В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.
- Дж. Милнор, «Голоморфная динамика», РиХД 2000.
- https://wikipedia.org
- https://mathworld.wolfram.com/

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ