1 Аффинная плоскость

1.1 ГЛ1 1

Сколько прямых на аффинной плоскости над конечным полем из q чисел?

На аффинной плоскости порядка n всего n^2 точек, в каждой из которых пересекается $n+1$ прямая. Тогда всего прямых - $n^2(n+1)$. Но на каждой прямой n точек, значит, каждую прямую мы посчитали всегго n раз. Очевидно, что полученное нами изначально выражение нужно поделить на n, то есть финальный ответ - $n(n+1)$ прямая, где n - порядок аффинной плоскости.

1.2 ГЛ1 2

Коллинеарны ли на аффинной плоскости...
а) Пересечение боковых сторон, пересечение диагоналей и середины оснований произвольной трапеции?
б) Середины диагоналей и середина отрезка с концами в точках пересечения боковых сторон произвольного четырехугольника?

(A) Пусть точки трапеции A, B, C, D, где $AD \parallel BD$. Рассмотрим базис, начало которого A, базис-векторы AB и AD.
Тогда точки имеют координаты

$$A = (0,0) \qquad B = (1,0) \qquad C = (1,\alpha) \qquad D = (0,1)$$

Откуда
AB:

$$\det\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x\cdot 0 + y\cdot 1 = 0$$

CD:

$$\det\begin{pmatrix}1 & x\\ \alpha-1 & y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha-1 & 1\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow y - x\cdot\alpha + x = 1 \qquad \Leftrightarrow x\cdot(1-\alpha) + y\cdot 1 = 0$$

$AB \cap CD$:

$$x\cdot 0 + y\cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha-1} \quad y = 0$$
$$x\cdot(1-\alpha) + y\cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow$$

AC:

$$\det\begin{pmatrix}1 & x\\ \alpha & y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x\cdot(-\alpha) + y\cdot 1 = 0$$

BD:

$$\det\begin{pmatrix}1 & x\\ -1 & y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow x\cdot 1 + y\cdot 1 = 1$$

$$AC \cap BD : x \cdot (-\alpha) + y \cdot 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\alpha+1} \quad y = \frac{\alpha}{\alpha+1}$$
$$x \cdot 1 + y \cdot 1 = 1 \Rightarrow$$
$$M_1 : (0; \frac{1}{2}) \qquad M_2 : (1; \frac{\alpha}{2})$$

M_1M_2:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x \\ \frac{\alpha-1}{2} & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (\frac{1-\alpha}{2}) + y = \frac{1}{2}$$

Заметим что $AB \cap CD$ и $AC \cap BD$ принадлежат этой прямой

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1-\alpha}{2} + 0 = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1-\alpha}{2} + \frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{1}{2}$$

(Б) Пусть дан четырёхугольник $ABCD$, середины AC и BD - M_1 и M_2 соотв. Рассмотрим базис, центр которого A, базисные вектора AB и AD. Тогда координаты точек

$$A : (0; 0) \qquad B : (1; 0) \qquad C : (\alpha; \beta) \qquad D : (0; 1)$$
$$M_1 : (\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}) \qquad M_2 : (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

Далее прямые -
AB:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \cdot 0 + y \cdot 1 = 0$$

CD:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & x \\ \beta - 1 & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta - 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x \cdot (\beta - 1) + y \cdot \alpha = \alpha$$

$AB \cap CD$:

$$\begin{cases} x \cdot 0 + y \cdot 1 = 0 \\ -x \cdot (\beta - 1) + y \cdot \alpha = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow y = 0; x = -\frac{\alpha}{\beta - 1}$$

Аналогично

$$AD :$$
$$\det \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \cdot (-1) + y \cdot 0 = 0$$

$$BC : \det \begin{pmatrix} \alpha - 1 & x \\ \beta & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x \cdot (\beta) + y \cdot (\alpha - 1) = -\beta$$

$$AD \cap BC : \begin{cases} -x \cdot 1 + y \cdot 0 = 0 \\ -x \cdot \beta + y \cdot (\alpha - 1) = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{\beta}{\alpha - 1} \quad x = 0$$

Таким образом середина $AB \cap CD$ и $AC \cap BD$, точка M имеет координаты
M: $(-\frac{\alpha}{2\cdot(\beta-1)}; -\frac{\beta}{2\cdot(\alpha-1)})$
Покажем что M_1, M_2 и M лежат на одной прямой .
M_1M_2 :

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\alpha-1}{2} & x \\ \frac{\beta-1}{2} & y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\alpha-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\beta-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x\cdot\frac{\beta-1}{2} + y\cdot\frac{\alpha-1}{2} = \frac{\alpha-1}{4} - \frac{\beta-1}{4}$$

Подставив в это выражение координаты точки M получим

$$-(-\frac{\alpha}{2\cdot(\beta-1)})\cdot\frac{\beta-1}{2} + (-\frac{\beta}{2\cdot(\alpha-1)})\cdot\frac{\alpha-1}{2} = \frac{\alpha-1}{4} - \frac{\beta-1}{4}$$

1.3 ГЛ1 3

Дана замкнутая ломаная с нечётным числом вершин. Обозначим через $s_1,\ s_2, \dots, s_m$ середины её последовательных сторон, через x_0 — произвольную точку, а через x_i - результат центрально симметричного отражения точки x_{i-1} относительно точки s_i, где $i = 1, 2, \dots, m$. Всегда ли середина отрезка $[x_0, x_m]$ является вершиной данной ломаной?

Обозначим через z_1 , z_2 , ... , z_m вершины ломаной, где s_1 лежит между z_1 и z_2, ... , s_m лежит между z_m и z_1.
Заметим, что

$$x_n = 2\cdot s_n - x_{n-1}$$

Где $x_i = \overrightarrow{x_i x_0}, s_i = \overrightarrow{s_i x_0}, z_i = \overrightarrow{z_i x_0}$
Откуда

$$x_m = 2\cdot s_m - x_{m-1}$$
$$x_m = 2\cdot s_m - (2\cdot s_{m-1} - x_{m-2}) = 2\cdot(s_m - s_{m-1}) + x_{m-2}$$
$$\dots$$
$$x_m = 2\cdot(s_m - s_{m-1} +, \dots, +s_1) - x_0$$

Заметим, что $s_i = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}$ (i рассматривается по $\mod m$) из чего получаем, что

$$2\cdot(s_m - s_{m-1} +, \dots, +s_1) - x_0 =$$
$$(z_1 + z_m) - (z_m + z_{m-1}) + (z_{m-1} + z_{m-2}) -, \dots, +(z_2 + z_1) - x_0 =$$
$$z_1\cdot 2 - x_0 = x_m$$

Из чего очевидно, что середина x_0x_m, т.е. z_1 является вершиной ломаной.

1.4 ГЛ1 4

Пусть набор точек p_i с весами μ_i и набор точек q_j с весами ν_j имеют барицентры c_p и c_q соответственно, причём все три суммы $\sum\mu_i$, $\sum\nu_j$ и $\sum\mu_i + \sum\nu_j$ ненулевые. Совпадает ли барицентр объединения этих наборов с барицентром пары точек c_p и c_q, взятых с весами $\sum\mu_i$ и $\sum\nu_j$?

Да, так как барицентр каждой из групп точек P и Q (точки p_i и q_j) обладает свойством

$$\sum_i \overrightarrow{c_p p_i} \cdot \mu_i = 0$$
$$\sum_j \overrightarrow{c_q q_j} \cdot v_j = 0$$

В то время как барицентр c_p и c_q с весами $\sum \mu_i = P$ и $\sum v_j = Q$ соответственно, причем $|P|, |Q| > 0$. Пусть c - такая точка, что

$$\overrightarrow{cc_p} \cdot P + \overrightarrow{cc_q} \cdot Q = 0$$

При этом для каждого p_i верно, что

$$\overrightarrow{cc_p} + \overrightarrow{c_p p_i} = \overrightarrow{cp_i}$$

Из чего следует, что сложив выражения $\sum_i \overrightarrow{c_p p_i} \cdot \mu_i = 0, \sum_j \overrightarrow{c_q q_j} \cdot v_j = 0$ и $\overrightarrow{cc_p} \cdot P + \overrightarrow{cc_q} \cdot Q = 0$, получается

$$\left(\sum_i \overrightarrow{c_p p_i} \cdot \mu_i + \overrightarrow{cc_p} \cdot P\right) + \left(\sum_j \overrightarrow{c_q q_j} \cdot v_j + \overrightarrow{cc_q} \cdot Q\right) = 0$$

Что равносильно

$$\sum_i \overrightarrow{cp_i} \cdot \mu_i + \sum_j \overrightarrow{cq_j} \cdot v_j = 0$$

Из чего следует то, что c является барицентром всей системы.

1.5 ГЛ1 5

На проходящих через три неколлинеарные точки a, b, c прямых (ab), (ac) и (bc) отмечены точки $a_1 = \alpha_b b + \alpha_c c$, $b_1 = \beta_a a + \beta_c c$ и $c_1 = \gamma_a a + \gamma_b b$. Покажите, что в точки a, b и c можно поместить веса α, β и γ так, чтобы центр тяжести точек a и b оказался в точке c_1, центр тяжести точек b и c — в точке a_1, а центр тяжести точек a и c — в точке b_1, если и только если $(\alpha_b : \alpha_c) \cdot (\beta_c : \beta_a) \cdot (\gamma_a : \gamma_b) = 1$. Выведите из этого необходимое и достаточное условие прохождения прямых (aa_1), (bb_1) и (cc_1) через одну точку.

Докажем, что возможность расставить массы α, β и γ равносильна тому, что a_1, b_1 и c_1 являются основаниями чевиан.

- (Массы $\Rightarrow$ Чевианы)
  Возможность расставить массы означает, что центр масс находится на прямых aa_1, bb_1 и cc_1, из чего следует пересечение этих прямых в одной точке.

- (Чевианы $\Rightarrow$ Массы)
  Если прямые пересекаются в одной точке, то точку пересечения можно выбрать как центр масс.

- Теперь заметим, что если можно расставить массы, то можно рассмотреть отношение, в котором барицентры сторон делят стороны:

  $$\alpha_b : \alpha_c = \beta : \gamma$$
  $$\beta_c : \beta_a = \gamma : \alpha$$
  $$\gamma_a : \gamma_b = \alpha : \beta$$

И тогда $\frac{\alpha_b \cdot \beta_c \cdot \gamma_a}{\alpha_c \cdot \beta_a \cdot \gamma_b} = \frac{\beta \cdot \gamma \cdot \alpha}{\gamma \cdot \alpha \cdot \beta} = 1$
Т.е. aa_1, bb_1, cc_1 это чевианы

- В свою очередь, если равенство$\left(\frac{\alpha_b \cdot \beta_c \cdot \gamma_a}{\alpha_c \cdot \beta_a \cdot \gamma_b} = 1\right)$ верно, то можно расставить массы γ_a, γ_b и $\frac{\alpha_b \cdot \gamma_a}{\alpha_c}$ так, что:
  c_1 является барицентром A и B ($\gamma_a : \gamma_b \ = \ \gamma_a : \gamma_b$);
  a_1 является барицентром B и C ($\frac{\alpha_b \cdot \gamma_a}{\alpha_c} : \gamma_a = \alpha_b : \alpha_c$);
  b_1 является барицентром A и C ($\frac{\alpha_b \cdot \gamma_a}{\alpha_c} : \gamma_b = \beta_a : \beta_c$);

1.6 ГЛ1 6

Покажите, что лежащие на прямых (bc), (ca), (ab) точки a_1, b_1 и c_1 коллинеарны тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{a_1 b} : \overrightarrow{a_1 c}) \cdot (\overrightarrow{b_1 c} : \overrightarrow{b_1 a}) \cdot (\overrightarrow{c_1 a} : \overrightarrow{c_1 b}) = 1$

Заметим, что барицентрические координаты точек

$$a_1 = (0, -|\overrightarrow{a_1 c}|, |\overrightarrow{a_1 b}|)$$
$$b_1 = (|\overrightarrow{b_1 c}|, 0, -|\overrightarrow{b_1 a}|)$$
$$c_1 = (-|\overrightarrow{c_1 b}|, |\overrightarrow{c_1 a}|, 0)$$

Заметим, что если $a_1 b_1 c_1$ - прямая $\Leftrightarrow$
c_1 представимо в виде линейной комбинации точек a_1 и b_1 $\Leftrightarrow$

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot b_1 = c_1 \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{b_1 c} \cdot x_2 = -\overrightarrow{c_1 b} \Leftrightarrow$$
$$x_2 = -\frac{\overrightarrow{c_1 b}}{\overrightarrow{b_1 c}} \overrightarrow{c_1 a} = -\overrightarrow{a_1 c} \cdot x_1 \Leftrightarrow$$
$$x_1 = -\frac{\overrightarrow{c_1 a}}{\overrightarrow{a_1 c}} \overrightarrow{a_1 b} \cdot x_1 - \overrightarrow{b_1 a} \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{a_1 b} \cdot x_1 = \overrightarrow{b_1 a} \cdot x_2 \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{a_1 b} \cdot \overrightarrow{c_1 a} \cdot \overrightarrow{b_1 c} = \overrightarrow{a_1 c} \cdot \overrightarrow{c_1 b} \cdot \overrightarrow{b_1 a} \Leftrightarrow$$
$$(\overrightarrow{a_1 b} : \overrightarrow{a_1 c}) \cdot (\overrightarrow{c_1 a} : \overrightarrow{c_1 b}) \cdot (\overrightarrow{b_1 c} : \overrightarrow{b_1 a}) = 1$$

Что и требовалось доказать

1.7 ГЛ1 7

Верно ли, что на аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$:
а) два выпуклых четырёхугольника переводятся друг в друга аффинным преобразованием если и только если у них одинаковы отношения, в которых соответственные друг другу диагонали делятся точкой своего пересечения
б) две трапеции переводятся друг в друга аффинным преобразованием если и только если у них одинаковые отношения оснований
в) пятиугольник переводится аффинным преобразованием в правильный пятиугольник если

и только если какие-то четыре его диагонали параллельны противолежащим им сторонам?

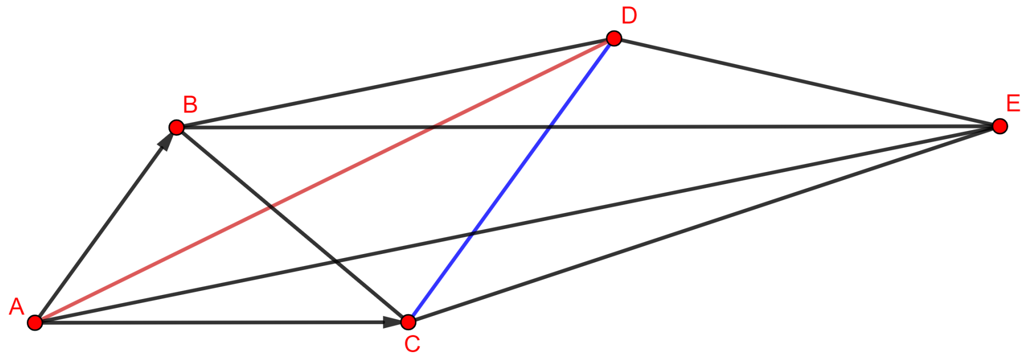
(А) Заметим, что если один четырёхугольник перешёл в другой, то отношение отрезков на диагоналях сохраняется, образ пересечения диагоналей это пересечение диагоналей образного четырёхугольника. При этом, если 2 четырёхугольника $ABCD$ и $EFGH$ имеют одинаковое отношение отрезков на диагоналях ($\frac{AO}{AC} = \frac{EU}{EG} = \alpha$; $\frac{BO}{BD} = \frac{FU}{FH} = \beta$), то можно перевести один в другой аффинным преобразованием, а именно переведя треугольник ABC в EFG, тогда O будет иметь барицентрические координаты $(\alpha; 1; 1-\alpha)$ относительно ABC. Такие же координаты имеет и точка U, относительно EFG. Аналогично D: $(\alpha\cdot(1-\beta); 1; (1-\alpha)\cdot(1-\beta))$ (с точностью до домножения на константу), имеет такие же кординаты, что и H относительно EFG.
Ответ: да

(Б) Заметим, что отношения отрезков диагоналей равны отношению оснований трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), так как рассмотрим репер $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, тогда точка B - $(1; -\alpha)$, D - $(0; 1)$. Заметим, что O имеет координаты $(\frac{1}{1+\alpha}; 0)$, так как $\overrightarrow{v} = (1; -1-\alpha)$, BOD лежат на одной прямой $\Leftrightarrow \det(O, \overrightarrow{v}) = \det((0;1), \overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \frac{1}{1+\alpha}\cdot(-1)\cdot(1+\alpha) = -(1)\cdot(1) \Leftrightarrow -1 = -1$. Откуда следует, что ответ такой же, что и в (7А).
Ответ: да

(В) Рассмотрим аффинный базис, где изначальной точкой будет одна из вершин пятиугольника, а две стороны, выходящие из нее будут совпадать с векторами базиса (очевидно, что они неколлинеарны). Тогда в аффинной системе координат точки имею координаты: $A = (0,0)$, $B = (0,1)$, $C = (1,0)$, $D = (1,y)$ и $E = (x,1)$. В силу параллельности можно написать систему уравнений:

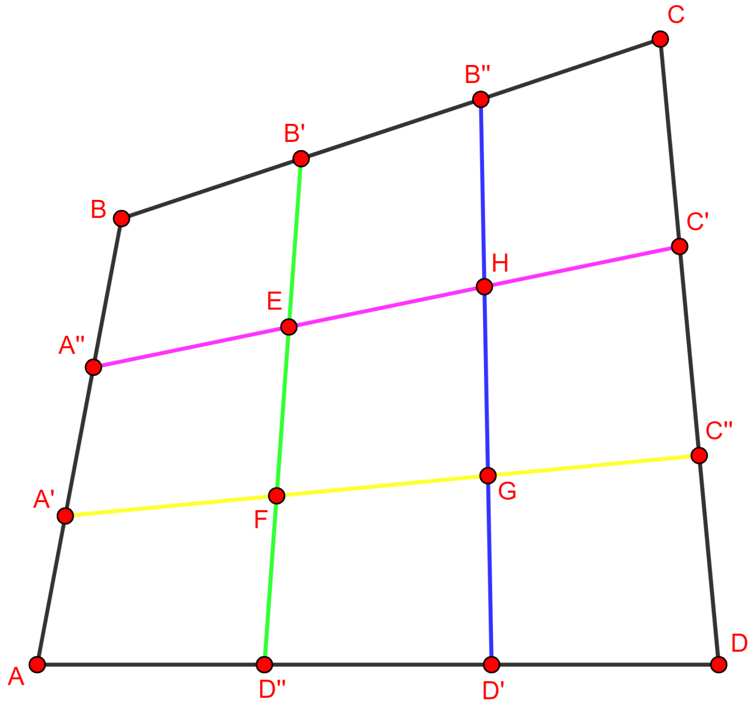
$$\begin{cases}(1,y) = \lambda_1(x-1,1)\\(x,1) = \lambda_2(1,y-1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y = \lambda_1 \Rightarrow 1 = y(x-1)\\x = \lambda_2 \Rightarrow 1 = x(y-1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y = \frac{1}{x-1}\\1 = x(\frac{1-x+1}{x-1})\end{cases}$$

Решая систему, получаем, что $x = y = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. То есть две фиксированные диагонали относятся к противоположным сторонам одинаково, следовательно, можно перевести эти диагонали в соответствующие диагонали правильного пятиугольника, а по ним можно однозначно задать все вершины и диагонали. Таким образом, можно перевести любой пятиугольник с заданным в условии свойством в правильный.



1.8 ГЛ1 8

Докажем, что все 4 отрезка внутри четырехугольника делятся на 3 равные части. Рассмотрим какое-то одно из пересечений (для остальных доказывается аналогично). Сделаем так, чтобы центр тяжести системы попал в эту точку. Известно, что все стороны делятся на 3 равные части, значит, если в одной из вершин вес 1, то в соседних с ней (=соединенных ребром) будет вес $\frac{1}{2}$ (чтобы было на расстоянии $\frac{1}{3}$ от этой вершины). Тогда для четвертой вершины вес, очевидно, должен быть равен $\frac{1}{4}$. Тогда в точках, лежащих на сторонах, соединяющих вершину с весом 1 с другими вершинами, лежат точки с весом $\frac{3}{2}$, а на других двух сторонах - $\frac{3}{4}$. Тогда, меньший отрезок относится к большему, как $1 : 2$, а значит, все эти отрезки делятся на 3 равные части. Осталось заметить, что площадь среднего четырехугольника считается, как сумма определителей векторов, втрое меньшая исходных и деленная пополам. Тогда, отношение площадей большого и маленького четырехугольника равно 9.



1.9 ГЛ1 9

Впишем правильный многоугольник в окружность радиуса $r = 1$, тогда все векторы $|v_1| = |v_2| = ... = |v_n| = 1$ и, если S_1 - площадь правильного многоугольника, то $S_1 < \pi r^2 = \pi 1^2 = \pi$. Обозначим $S_2 = \det(v_1, v_2) + \det(v_2, v_3) + ... + \det(v_n, v_1)$, тогда если $S_2 > 2\pi$, то $S_2 > 2S_1$. Приведем пример такого n-угольника, для которого это выполнено Рассмотрим 20-угольник, разобьем его вершины на 5 групп по 4 вершины, причем в каждую группу входят вершины, идущие через 5. И занумеруем вершины так: $A_1, A_5, A_9, A_{13}, A_{17}, A_2, A_6, A_{10}, A_{14}, A_{18}$,
$A_3, A_7, A_{11}, A_{15}, A_{19}, A_4, A_8, A_{12}, A_{16}, A_{20}$.
Тогда каждая из групп будет образовывать квадрат со стороной $\sqrt{2}$, а все остальные треугольники будут положительной площади, так как если мы рассмотрим 2 подряд идущие точки из разных групп, то их площадь будет положительна, так как направленный угол, образованный этими 2 векторами будет $< 180^o$, так как они идут через 6 других точек, а в одной полуплоскости находятся 10 точек $\Rightarrow S_2 > 5 \cdot (\sqrt{2})^2 > 2\pi > 2S_1$, что и требовалось.

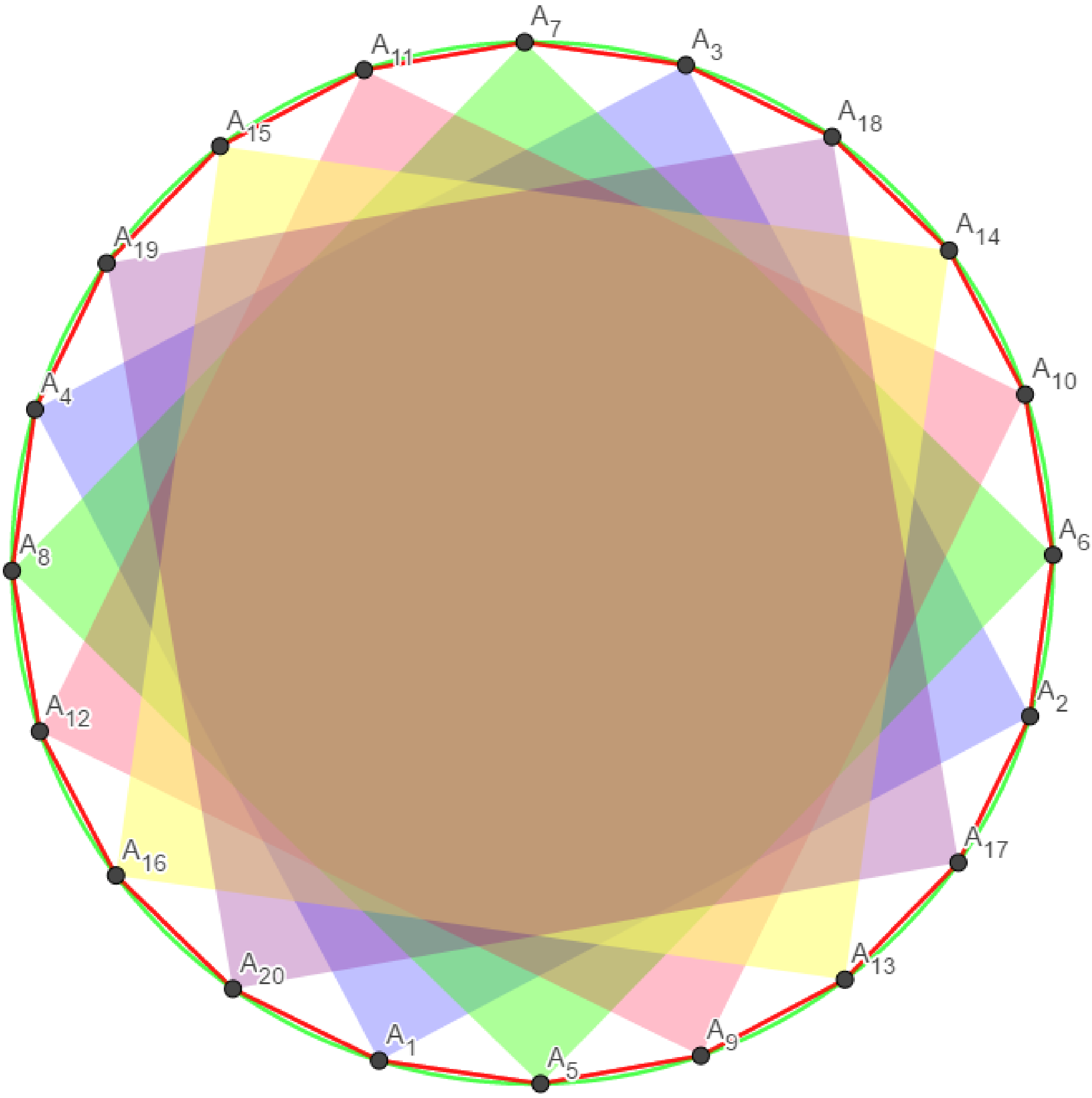
2 Линейные отображения и матрицы

2.1 ГЛ4 1

2.2 ГЛ4 2

2.3 ГЛ4 3

Рассмотрим матрицу $7 \cdot 7$ с числами $\frac{9}{10}$ на главной диагонали. Пусть по строкам будут стоять банки, а по столбцам - цвета. Заметим, что за одно переливание из банки i в банку j - это то же самое, что и замена строк i и j на строки $i - \alpha i$ и $j + \alpha i$. При таких преобразованиях определитель меняется в ненулевое количество раз, при этом определитель изначальной



матрицы 0 не равен.
В конце, если мы получили, что в одной из банок все цвета есть в равной пропорции, то мы получим в матрице строку с одинаковыми числами. Так как в изначальной матрице сумма чисел в каждом столбце была одинакова, то и после преобразований это свойство останется, то есть строка, в которой все числа равны, пропорциональна строке, составленной из сумм чисел по столбцам. То есть определитель итоговой матрицы равен 0, из чего следует, что невозможно сделать все так, как требовалось в условии.

2.4 ГЛ4 4

Покажем, что меньше r быть не может. Рассмотрим пространство, порожденное векторами из X, где $X = x_1 + x_2 + ... + x_r$. Его размерность равна r, а также оно представляется в виде суммы не более, чем $r - 1$ вектора. По определению данное пространство лежит в линейной оболочке этих векторов, размерность которой не больше, чем $r - 1$.
Представим исходную матрицу так: пусть без ограничения общности первые ее r строк линейно независимы, а остальные выражаются через них с какими-то коэффициентами. Тогда рассмотрим сумму r матриц, в i-той матрице в i-той строке стоит та же строка, что и в изначальной, все остальные строки от первой до r-той состоят только из нулей. На месте всех

строк, выражающихся через линейно независимые, будет стоять в i-той матрице i-тая строка с коэффициентом, входящим в разложение этой строки через первые r линейно независимых. Так, суммируя все матрицы, мы получим в первых r строках как раз нужный набор линейно-независимых, а линейно зависимые будут представлены через первые r строк в виде их суммы с какими-то коэффициентами.

2.5 ГЛ4 5

Для начала заметим, что (2) и (3) условия независимы, так как можно рассмотреть матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Очевидно, что пересечение линейных оболочек строк равно 0, а $W_1 \cap W_2 = W_2$. Транспонируя эти матрицы, получим пример для нулевого пересечения линейных оболочек столбцов и ненулевого пересечения линейной оболочки строк.
Также можно заметить, что в примере выше сумма рангов матриц равна 3, а ранг суммы равен 2, то есть импликации из (2) (как и из (3)) пункта в (1) нет.
Как известно, верно неравенство $rk(A_1 + A_2) \leq rk(A_1) + rk(A_2)$. Так как $rk(A_1 + A_2) \leq \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) = rk(A_1) + rk(A_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$, то из равенства ранга суммы и суммы рангов непосредственно следует, что размерность пересечения линейных оболочек строк (или столбцов, в этом случае они эквивалентны), равна 0.
Итоговый ответ: есть только 2 импликации, из первого пункта во второй и из первого в третий.

2.6 ГЛ4 6

а)

Рассмотрим ограничение оператора B на $\mathrm{im}(A)$, обозначим как C. Тогда $\dim(\mathrm{im}\ A \cap \ker B) = \dim(\ker C)$, так как это все векторы, принадлежащие образу A и в то же время зануляющиеся оператором B. В то же время образ C - это как раз образ BA, тогда получим:
$\dim(\mathrm{im}\ A) = \dim(\mathrm{im}\ C) + \dim(\ker C)$, что, очевидно, верно.

б)

2.7 ГЛ4 7

Представим вектор w в виде:

$$w = w + F(w) - F(w),$$

где $w - F(w) \in ker(F)$ и $F(w) \in im(F)$. Первое включение верно, так как при применении к нему F получим:

$$F(w - F(w)) = F(w) - F(F(w)) = F(w) - F^2(w) = F(w) - F(w) = 0$$

Докажем, что два данных подпространства трансверсальны. Как известно, подпространства трансверсальны тогда и только тогда, когда все векторы $u \in U_1 + U_2$ могут быть представлены единственным образом в виде $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$, то есть подпространства не имеют никаких общих векторов, кроме нулевого. Тогда пусть существует вектор, принадлежащий одновременно и ядру, и образу, то есть:

$$F(v) = 0,\ v \in F(v)$$

Идемпотентный оператор действует тождественно на образ, из чего следует, что пересечение возможно только по нулевому вектору, и данные подпространства трансверсальны.

2.8 ГЛ4 8

Представим вектор в виде:

$$w = \frac{w + F(w)}{2} + \frac{w - F(w)}{2}$$

Векторы из суммы, очевидно, принадлежат V_- и V_+. Действительно:

$$w_1 = F(\frac{w + F(w)}{2}) = \frac{F(w) + F^2(w)}{2} = \frac{F(w) + w}{2} = w_1$$
$$w_2 = F(\frac{w - F(w)}{2}) = \frac{F(w) - F^2(w)}{2} = \frac{F(w) - w}{2} = -w_2$$

Таким образом, мы представили каждый вектор единственным образом в виде суммы двух других из заданных подпространств.
PS полезно рисовать картинку с симметрией.
PPS Такое разложение невозможно в поле $\mathbb{F}$, таком что $char(\mathbb{F}) = 2$, так как в нем $2 \sim 0$.