2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_4+a_6. Существуют ли многочлен $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и гомеоморфизмы $\alpha, \beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (не обязательно голоморфные), такие что $f = \beta \circ P \circ \alpha$ совпадает с выписанным ниже отображением? Строго обоснуйте ответ.

(0) $f(x+iy) = x^2 + iy$.

(1) $f(x+iy) = (x^2 - y^2) + ixy$.

(2) $f(re^{i\theta}) = re^{2i\theta}$.

9+6=15

(3) $f(x+iy) = x^3 + iy$.

(4) $f(x+iy) = (x^2+y^2)(x^2 - y^2 + ixy)$.

(5) $f(z) = \frac{z|z|^2}{1+|z|^2}$.

(6) $f(z) = \frac{z^2|z|^2}{1+|z|^2}$.

(7) $f(x+iy) = e^x + iy$.

(8) $f(x+iy) = e^x - e^{-x} + iy$.

(9) $f(x+iy) = \sin x + iy$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_1+a_5. В следующих ниже задачах функции f, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ являются голоморфными, а подмножество $K \subset \mathbb{D}$ является компактным. Через $\mathbb{D}$ обозначен единичный диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Множество $f(\mathbb{D} \setminus K) \setminus g(K)$ открыто в $\mathbb{C}$.

(1) Множество $f(K) \setminus g(\mathbb{D} \setminus K)$ компактно.

5+1=6

(2) Множество $\{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Re} f(z) > \operatorname{Im} g(z)\}$ открыто в $\mathbb{C}$.

(3) Множество $\operatorname{Re} f(\mathbb{D})$ открыто в $\mathbb{R}$.

(4) Множество $\operatorname{Re} f(\mathbb{D})$ ограниченно.

(5) Точняя верхняя грань чисел $(\operatorname{Re} f(z))^2 + (\operatorname{Im} f(z))^4$ не достигается при $z \in \mathbb{D}$.

(6) Множество $\operatorname{Re}(f(K)) \setminus \operatorname{Im}(g(\mathbb{D} \setminus K))$ компактно.

(7) Если $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} g(z)$ для всех z, таких, что $|z| = r > 0$, то $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} g(z)$ при $|z| < r$.

(8) Если $|f(z)|^2 < |g(z)|^3$ для всех z, таких, что $|z| = r > 0$, то $|f(z)|^2 < |g(z)|^3$ при $|z| < r$.

(9) Множество $\{|f(z)|^2 - |g(z)|^2 \mid z \in \mathbb{D}\}$ открыто в $\mathbb{R}$.

1

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_5$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(3) Рациональная функция степени $d > 1$ ни в одной точке не может иметь полюс порядка выше d.

- $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ $g(z), h(z)$ — многочлены

$$\max(\deg(g(z)), \deg(h(z))) = d > 1$$

- По предл. 7.27 из учебника: если f, g — функции на U, не явл. ~~тожд.~~ нулём, то $\dfrac{f}{g}$ мероморфная ф-ия на U, т.е. ф-ия $\dfrac{f}{g}: U/S \to \mathbb{C}$ голоморфна и не имеет полюсов $\forall z \in U/S$

- Рассм. ф-ию $\dfrac{f}{g}$ на S. Если $\dfrac{f}{g}$ имеет полюс порядка k в т. a, то ф-ия g имеет изолированный 0 порядка k в т. a

$$g = \sum_k c_k (z - a_k)^k$$

Если $k>d$, то степень ф-ции $\frac{f}{g}$ будет $\max(\deg(f(z)), k) > d$

$\Rightarrow$ противоречие.

- Если $\frac{f}{g}$ не подходит под предложение 7.27, значит, одна из ф-ий является тожд. нулём. Случай $g \equiv 0$ исключается, в случае $f \equiv 0$ противоречий с утверждением задачи нет

Т.о., утв. доказано

2

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_4+a_6. Существуют ли многочлен $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ и гомеоморфизмы $\alpha,\beta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (не обязательно голоморфные), такие что $f=\beta\circ P\circ\alpha$ совпадает с выписанным ниже отображением? Строго обоснуйте ответ.

(5) $f(z)=\frac{z|z|^2}{1+|z|^2}$.

$z = re^{i\theta} \Rightarrow |z| = r$

$$f(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta}\cdot r^2}{1+r^2} = \frac{r^3}{1+r^2}e^{i\theta}$$

ДОКАЖЕМ, ЧТО f – ГОМЕОМОРФИЗМ

$$f(r,\theta) = \frac{r^3}{1+r^2}e^{i\theta}$$

ОТОБРАЖЕНИЕ БИЕКТИВНО НА ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, Т.К. ИНАЧЕ

$\exists (r_1,\theta_1) \neq (r_2,\theta_2)$, т.ч. $f(r_1,\theta_1) = f(r_2,\theta_2)$

$$\frac{r_1^3}{1+r_1^2}e^{i\theta_1} = \frac{r_2^3}{1+r_2^2}e^{i\theta_2} \qquad \theta_1=\theta_2 \text{ ОЧЕВ.}$$

$$r_1^3 + r_1^3r_2^2 = r_2^3 + r_1^2r_2^3$$

$$-(r_1+r_2)(r_1^2+r_1r_2+r_2^2) = r_1^2r_2^2(r_2-r_1)$$

O_1 $r_1=r_2$ или O_2 $r_1^2+r_1r_2+r_2^2 = -r_1^2r_2^2$

$$r_1^2(1+r_2^2)+r_1r_2+r_2^2=0$$

$$\mathcal{D} = u_2^2 - 4u_2^2 - 4u_2^4 = -u_2^2(4u_2^2+3) \leq 0$$

$u_1, u_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ нет действительных корней при $u_2 \neq 0$
если $u_2 = 0$, то $u_1 = 0$, а это случай 1 $\mathbf{0}$,

Проверим непрерывность f и f^{-1}

$u \mapsto \dfrac{u^3}{1+u^2}$ непрерывно, т.к. это отношение двух многочленов и $1+u^2 \neq 0$

$e^{i\varphi} \mapsto e^{i\varphi}$ непр. очевидно

$$f: x \mapsto \frac{x^3}{1+x^2} = y \Rightarrow x^3 = yx^2 + y$$
$$x^3 - yx^2 - y = 0$$

Замена $x \mapsto x + \dfrac{y}{3}$

Решим с помощью ф-лы Кардано

$$\left(x+\frac{y}{3}\right)^3 - y\left(x+\frac{y}{3}\right)^2 - y = 0$$

$$x^3 + \cancel{x^2y} + x\frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{27} - \cancel{yx^2} - 2\frac{xy^2}{3} - \frac{y^3}{9} - y = 0$$

$$x^3 - \frac{xy^2}{3} - \left(\frac{2y^3}{27} + y\right) = 0$$

$$Q = \left(\frac{-y^2}{9}\right)^3 + \left(\frac{2y^3}{27} + \frac{y}{2}\right)^2 =$$

$$-\frac{y^6}{3^9} + \frac{4y^6 \cdot 3^3}{3^6 \cdot 3^3} + \frac{2y^4}{27} + \frac{y^2}{4} =$$

$$= \frac{27 \cdot 4 - 1}{3^9} y^6 + \frac{2y^4}{27} + \frac{y^2}{4} > 0$$

$\Rightarrow$ УР-ИЕ ИМЕЕТ 1 ВЕЩ. КОРЕНЬ И 2 КОМПЛ. СОПР., А $x \in \mathbb{R}$ ПО УСЛ. $\Rightarrow$ 1 КОРЕНЬ $\Rightarrow$ ОБРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ТОЖЕ НЕПРЕРЫВНО (И БИЕКТИВНО)

$$\Downarrow$$

$$\alpha : (r, \theta) \longmapsto \frac{r^3}{1+r^2} e^{i\theta}$$

$$P : z \longmapsto z$$

$$\beta : id$$

3

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_1 + a_5$. В следующих ниже задачах функции $f,\, g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ являются голоморфными, а подмножество $K \subset \mathbb{D}$ является компактным. Через $\mathbb{D}$ обозначен единичный диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(6) Множество $\mathrm{Re}(f(K)) \setminus \mathrm{Im}(g(\mathbb{D} \setminus K))$ компактно.

КОМПАКТ В $\mathbb{C}$ – ЗАМКНУТОЕ И ОГРАНИЧЕННОЕ ПОДМН-ВО $\subset \mathbb{C}$

f, g – ГОЛОМОРФНЫЕ Ф-ЦИИ. ЕСЛИ ОНИ НЕ ПОСТОЯННЫЕ, ТО f, g – ОТКРЫТЫЕ ОТОБРАЖ-ИЯ

o $\mathbb{D}\setminus K$ – ОТКРЫТОЕ МН-ВО $\Rightarrow g(\mathbb{D}\setminus K)$ – ОТКРЫТОЕ

$\mathrm{Im}(g(\mathbb{D}\setminus K)) = \mathrm{pr}(g(\mathbb{D}\setminus K))\big|_{Oy}$ – ОТКРЫТОЕ

БОЛЕЕ ТОГО, $\mathbb{D}\setminus K$ СВЯЗНО $\Rightarrow g(\mathbb{D}\setminus K)$ СВЯЗНО $\Rightarrow \mathrm{Im}(\quad)$ ИМЕЕТ ВИД (a, b) ($a \neq b$, Т.К. ПРИ $a = b$ МН-ВО (a,b) ЗАМКНУТО)

o РАССМ. $f(K)$

f – НЕПРЕРЫВНО, K – КОМПАКТ $\Downarrow$ $f(K)$ – КОМПАКТ

$\Rightarrow \mathrm{Re}(f(K))$ – КОМПАКТ, Т.Е. ПРЕДСТАВИМ В ВИДЕ $[c, d]$

$\Rightarrow [c, d] \setminus (a, b)$

А для любых a, b, c, d $(a \neq b)$

$[c, d] \setminus (a, b)$ – компакт $\Rightarrow$ утв. верное

4

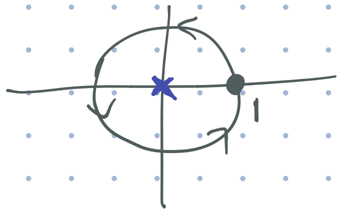
4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_7$.

(5) Найдите интеграл
$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n d\theta$$
для всех целых положительных n.

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \text{СДЕЛАЕМ ЗАМЕНУ}$$

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad dz = iz\,d\theta$$

$$2\pi \geq \theta \geq 0 \Rightarrow$$



$$z \in S^1$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n d\theta = \frac{1}{i2^n}\int_{S^1}\left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z}\,dz =$$
$$= \frac{2\pi i}{i2^n} \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z}\right)$$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z} = \frac{z^n + \binom{n}{1} z^{n-2} + \binom{n}{2} z^{n-4} + \ldots + z^{-n}}{z} =$$

$$= z^{n-1} + \binom{n}{1} z^{n-3} + \ldots + \binom{n}{m} z^{n-2m-1} + \ldots + z^{-n-1}$$

ВЫЧЕТ = КОЭФ. C_{-1} В РАЗЛОЖЕНИИ В РЯДЕ ЛОРАНА

$\Rightarrow$ ЕСЛИ n – НЕЧЁТНОЕ, ТО $n-2m-1$ ЧЁТНОЕ $\forall m \Rightarrow C_{-1} = 0$

ЕСЛИ n – ЧЁТНОЕ $n=2k$, ТО

$$c_{-1} = \binom{n}{k} = \binom{2k}{k} \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n \, d\theta = \binom{2k}{k} \frac{2\pi i}{i\, 2^{2k}} = \binom{2k}{k} \frac{\pi}{2^{2k-1}}$$