Мозговой Владислав

№1

$U(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$

$U'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$

• минимум (точка покоя)

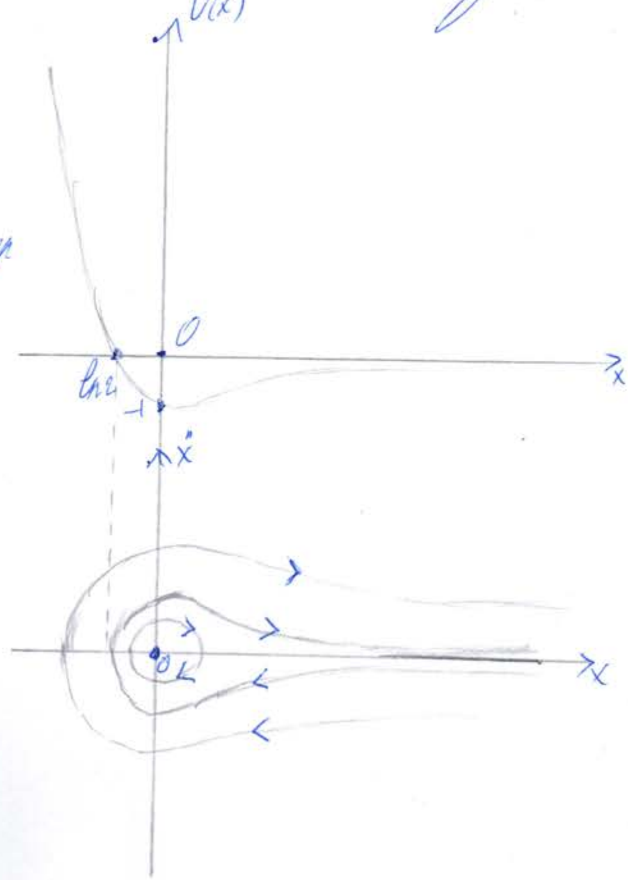
$x = 0 \Rightarrow (0,0)$ - особая точка, тип центр

• точек максимума нет => нет сепаратрис

По закону сохранения энергии

$$\underbrace{\frac{m\dot{x}^2}{2}}_{\geqslant 0} + \underbrace{U(x)}_{\geqslant -1} = E$$

$\Rightarrow E \geqslant -1$



№2

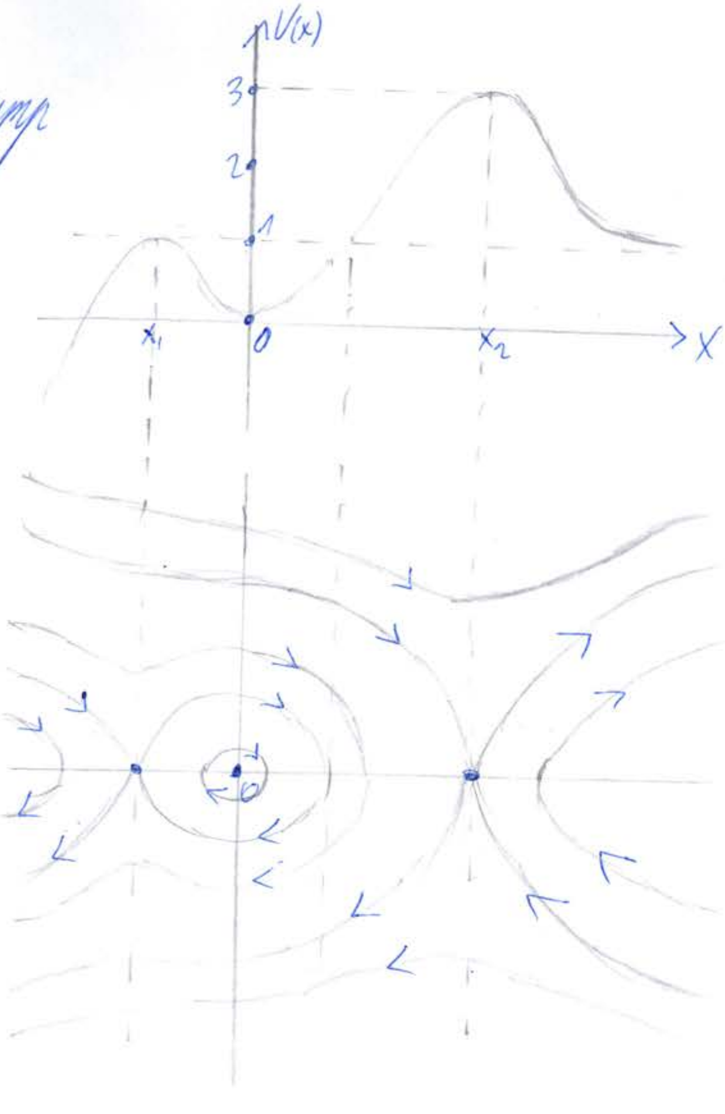
минимум

$x = 0 \Rightarrow (0,0)$ - особая точка, тип центр

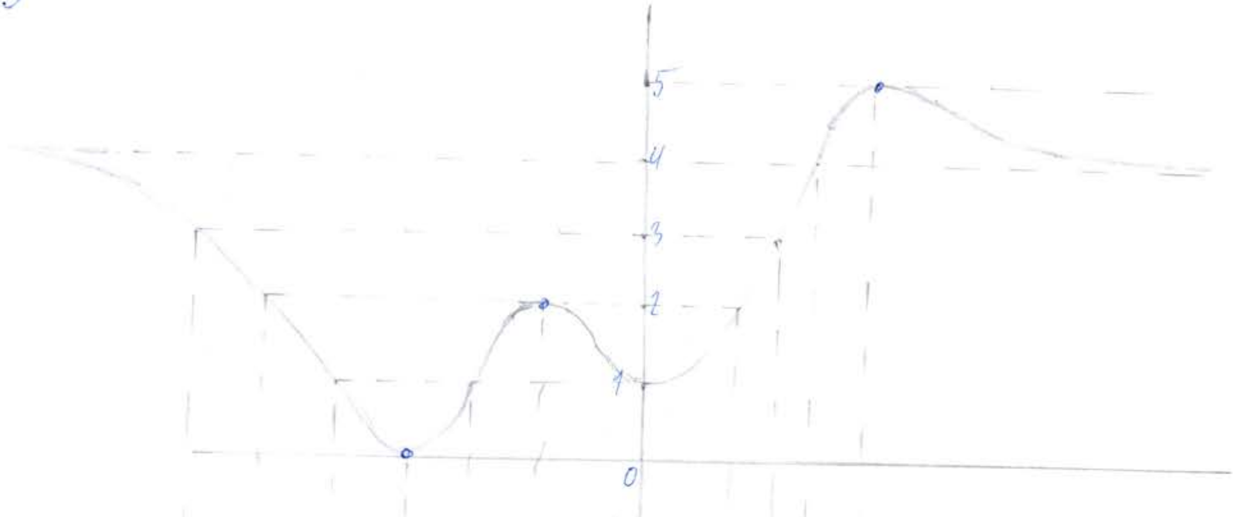
максимумы

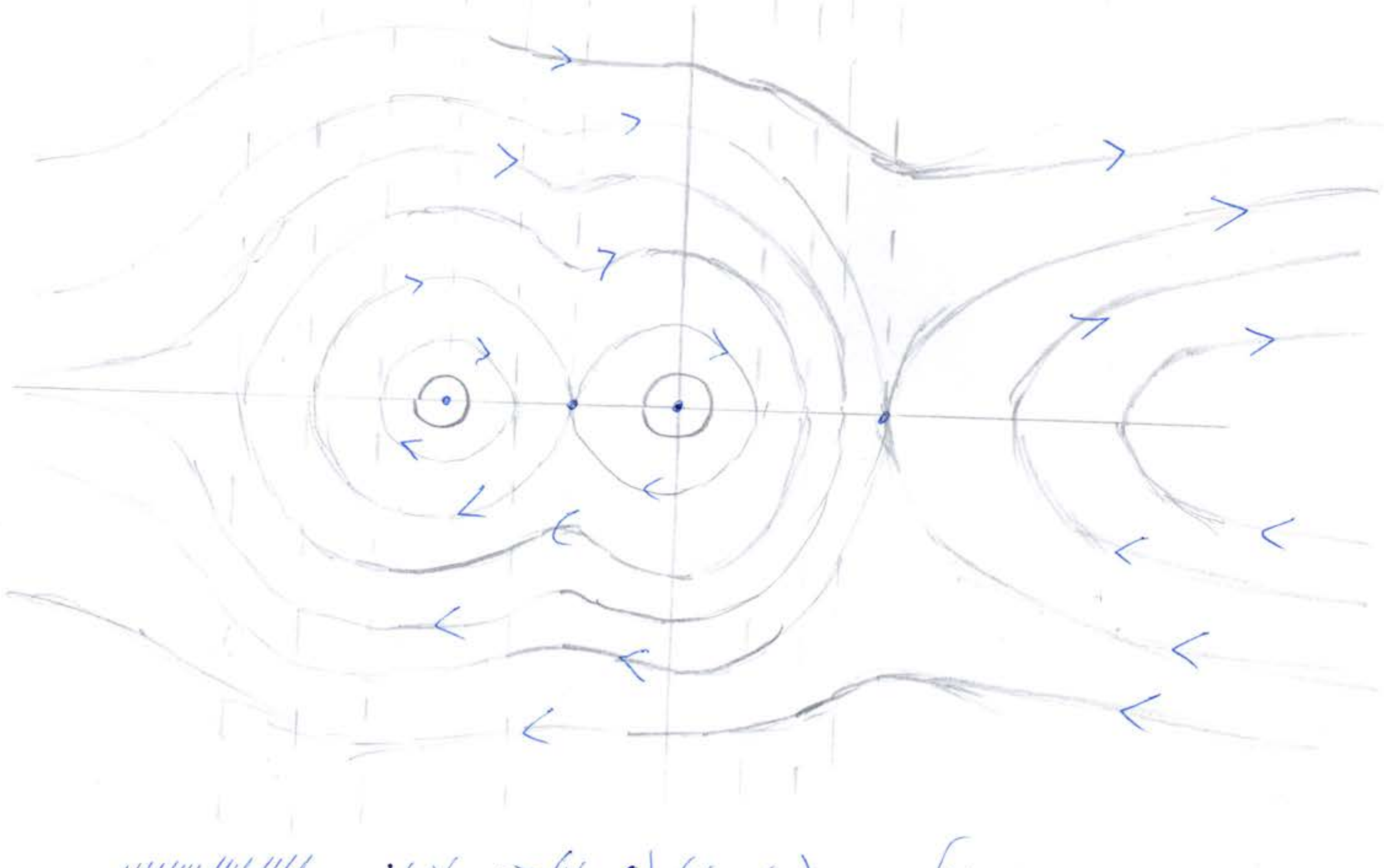
$x_1, x_2 \Rightarrow (x_1, 0), (x_2, 0)$ - ~~от~~ особая точка тип седло

E	# фазовых кривых
0	2
1	4
2	2
3	5



№3





минимумы $x_1, x_3 \Rightarrow (x_1, 0), (x_3, 0)$ - особые точки, тип центр

максимумы $x_2, x_4 \Rightarrow (x_2, 0), (x_4, 0)$ - особые точки, тип седло

E	0	1	2	3	4	5
# фаз. кривых	1	2	3	1	1	5

№4

$$E=\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+U(x)=const.$$

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}$$

Обозначим x_0 точку максимума $U(x)$ и разложим в ряд Тейлора в окрестности x_0

$$U(x)=U(x_0)+U'(x_0)(x-x_0)+\frac{U''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)=$$

$$=\underset{U(x_0)}{\underset{\parallel}{E}}+\underset{U'(x_0)=0}{\underset{\uparrow}{0}}+\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$

$$t(x,x_0)=\int_0^t dt=\pm\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}=\pm\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(-\frac{U''(x)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\right)}}=$$

$$=\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)}}$$

Заметим, что $\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)}}$ и $\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}}$ одновременно сходятся/расходятся

так как $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)}}=1$

$$\int_{x_1}^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}}}\int_{x_1}^{x_0}\frac{dx}{x-x_0}=\pm\sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\int_{x_1}^{x_0}\frac{dx}{x-x_0}=\pm\sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\ln(x-x_0)\Big|_{x_1}^{x_0}$$ – расходится

То есть двигаясь по сепаратрисе, тело никогда не достигнет положения неустойчивого равновесия.

№5

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ m\dot{y} = f(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} \end{cases}$$

Площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\, dt$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} -x(t)\frac{\partial U(x)}{\partial x}\cdot\frac{1}{m} - y^2(t)\, dt$$

По закону сохранения энергии: $\frac{my^2}{2} + U(x) = E$ $\quad y^2 = \frac{2(E-U)}{m}$

$$S = \frac{1}{2m}\int_{t_0}^{t_0+T} -x\frac{\partial U}{\partial x} - 2E + 2U\, dt$$

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dE}\int_{t_0}^{t_0+T} -x\frac{\partial U}{\partial x}\, dt - \frac{d}{dE}\int_{t_0}^{t_0+T} 2E\, dt + \frac{d}{dE}\int_{t_0}^{t_0+T} 2U dt\right) = -\frac{1}{2m}\, 2\int_{t_0}^{t_0+T} dt = -\frac{T}{m}$$

$$\Rightarrow |T| = m\frac{dS}{dE}$$

№6

$\bar{F}$: $F_x = yz - x \quad F_y = xz - \alpha y \quad F_z = \alpha xy + z \quad \alpha \in \mathbb{R}$

а) Сила F потенциальна, если 1-форма $\omega = (\bar{F}, d\bar{r})$ точна, то есть $\omega = -dU$

Конфигурационное пр-во односвязно => замкнутая форма точна

$$d\omega = 0 \iff \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j$$

проверим $\begin{cases} \partial_x F_y = \partial_y F_x \\ \partial_y F_z = \partial_z F_y \\ \partial_z F_x = \partial_x F_z \end{cases}$

$\frac{\partial F_y}{\partial x} = z = \frac{\partial F_x}{\partial y}$

$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \alpha x, \ \frac{\partial F_y}{\partial z} = x \Rightarrow \alpha = 1$

$\frac{\partial F_x}{\partial z} = y, \ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \alpha y \Rightarrow \alpha = 1$

то есть F потенциальна при $\alpha = 1$

Найдем $U(\bar{r})$, такое что $\bar{F}(\bar{r}) = -\bar{\nabla} U(\bar{r})$

$\begin{cases} \partial_x U = -F_x & (1) \\ \partial_y U = -F_y & (2) \\ \partial_z U = -F_z & (3) \end{cases} \Rightarrow U = -\int F_z dz = -xyz - \frac{z^2}{2} + C_1(x,y)$

$\partial_x U = -yz + \frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} \quad (4)$

из (1), (4) получим $\frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} = x \Rightarrow C_1(x,y) = \frac{x^2}{2} + C_2(y)$

Тогда $U = -xyz - \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} + C_2(y)$

$\partial_y U = -xz + \frac{\partial C_2(y)}{\partial y} \quad (5)$

из (2),(5) получим $\frac{\partial C_2(y)}{\partial y} = y \Rightarrow C_2(y) = \frac{y^2}{2} + C_3$

Значит $U = -xyz - \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C_3$

<u>Ответ:</u> $\alpha = 1$, $U(x,y,z) = -xyz + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} + C_3$

№6

б) (*) в сферических координатах

$\bar{r}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$d\bar{r}_1 = (-\sin\varphi d\varphi, \cos\varphi d\varphi, 0)$

$A_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} (\bar{F}, d\bar{r}_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((yz-x)\cdot -\sin\varphi + (xz-\alpha y)\cos\varphi) d\varphi =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi(1-\alpha)d\varphi = \frac{1}{2}(1-\alpha)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1-\alpha}{2}$

Ответ: $A_{\gamma_1} = \frac{1-\alpha}{2}$

(**) в сферических координатах:

$\bar{r}_2 = (\cos\varphi, \sin\varphi, \frac{2\varphi}{\pi})$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$d\bar{r}_2 = (-\sin\varphi d\varphi, \cos\varphi d\varphi, \frac{2}{\pi} d\varphi)$

$A_{\gamma_2} = \int_{\gamma_2} (\bar{F}, d\bar{r}_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\frac{2\varphi}{\pi}\sin\varphi - \cos\varphi)\cdot -\sin\varphi + (\frac{2\varphi}{\pi}\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)\cos\varphi +$

$+ (\alpha\cos\varphi\sin\varphi + \frac{2\varphi}{\pi})\frac{2}{\pi}\Big) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi(1-\alpha+\frac{2\alpha}{\pi}) + \frac{2\varphi}{\pi}(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \frac{4\varphi}{\pi^2} d\varphi =$

$= \frac{1}{2}(1-\alpha+\frac{2\alpha}{\pi})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cos 2\varphi d\varphi + \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi d\varphi =$

$= \frac{1}{2}(1-\alpha+\frac{2\alpha}{\pi}) + \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\varphi^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cos 2\varphi d\varphi$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\sin\pi - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

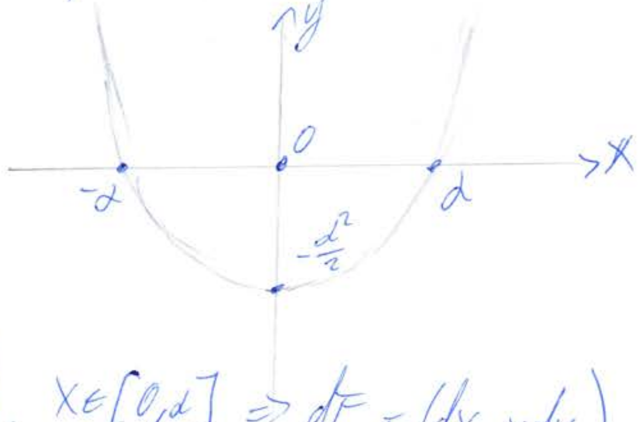
$A_{\gamma_2} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(-\frac{1}{2}) = \alpha(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}) + 1 - \frac{1}{\pi}$

Ответ: $A_{\gamma_2} = \alpha(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}) + 1 - \frac{1}{\pi}$

№7

$\bar{F} = -k\rho\bar{e}_\rho \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad k>0$

$A_\gamma = ?$ при перемещении из точки с абсциссой $x=0$, в точку с ординатой $y=0$



$\bar{r} = \left(x, \frac{x^2-\alpha^2}{2}\right), \; x\in[0,\alpha] \Rightarrow d\bar{r} = (dx, x\,dx)$

$\bar{e}_\rho = \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right) \Rightarrow \bar{F} = -k(x,y)$

$A_\gamma = \int\limits_\gamma (\bar{F}, d\bar{r}) = \int\limits_0^\alpha (-kx - kxy)\,dx = -k\int\limits_0^\alpha \left(x + x\frac{x^2-\alpha^2}{2}\right)dx =$

$= -k\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\int\limits_0^\alpha x\,dx - k\int\limits_0^\alpha \frac{x^3}{2}dx = -k\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\frac{\alpha^2}{2} - \frac{k}{2}\cdot\frac{\alpha^4}{2} =$

$= -k\frac{\alpha^2}{2} + k\frac{\alpha^4}{4} - k\frac{\alpha^4}{8} = -k\frac{\alpha^2}{2} + k\frac{\alpha^4}{8} = k\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}-1\right)$

Ответ: $A = k\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}-1\right)$

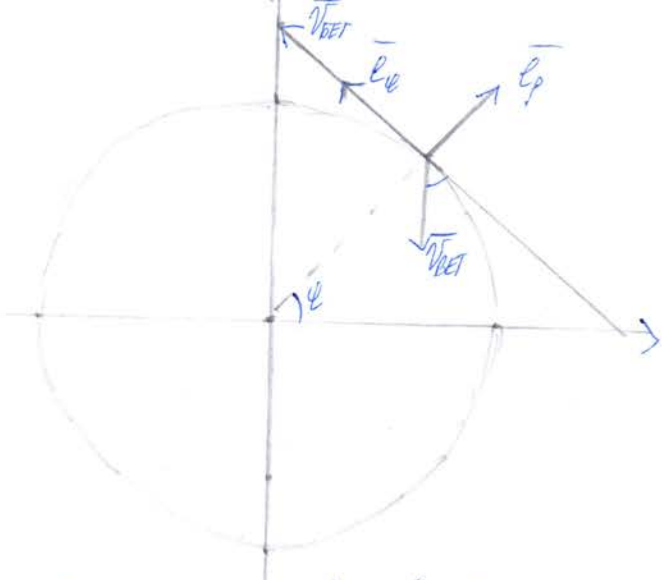
№8

$|\overline{v}_{бег}| = v$

$|\overline{v}_{вет}| = \alpha t^2$

$F_{сопр} = -k\overline{v}_{отн}$

$A_{окр} \to min, \; v = ?$



$\overline{v}_{отн} = \overline{v}_{бег} - \overline{v}_{вет} = (0, v) - (-\alpha t^2 \sin\varphi, -\alpha t^2 \cos\varphi) = (\alpha t^2 \sin\varphi, v + \alpha t^2 \cos\varphi)$

$\dot{r} = (0, v) \Rightarrow dr = (0, v\,dt)$

Пусть бегун сделал круг за время T

$A_{окр} = \int\limits_{окр} (F_{сопр}, dr) = -k\int\limits_0^T (v + \alpha t^2 \cos\varphi) v\,dt$

$t = \frac{\varphi R}{v} \Rightarrow dt = \frac{R}{v} d\varphi$

$A_{окр} = -k\int\limits_0^{2\pi} \varphi^2 \cos\varphi\,d\varphi = -kRv2\pi - kR^3\frac{\alpha}{v^2}\int\limits_0^{2\pi} \varphi^2 \cos\varphi\,d\varphi$

$\int \varphi^2 \cos\varphi\,d\varphi = \int \varphi^2 d\sin\varphi = \varphi^2 \sin\varphi - 2\int \sin\varphi \cdot \varphi\,d\varphi = \varphi^2 \sin\varphi + 2\int \varphi\,d\cos\varphi =$

$= \varphi^2 \sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi - 2\int \cos\varphi\,d\varphi = \varphi^2 \sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi + C$

$\int\limits_0^{2\pi} \varphi^2 \cos\varphi\,d\varphi = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$

$A_{окр} = -2kRv\pi - \frac{4kR^3\alpha\pi}{v^2}$

$A_{бег} = -A_{окр}$

$\frac{\partial A_{бег}}{\partial v} = 2kR\pi - \frac{8kR^3\alpha\pi}{v^3} = 0$

$2kR\pi\left(1 - \frac{4R^2\alpha}{v^3}\right) = 0$

$\frac{4R^2\alpha}{v^3} = 1 \Rightarrow v = \sqrt[3]{4R^2\alpha}$

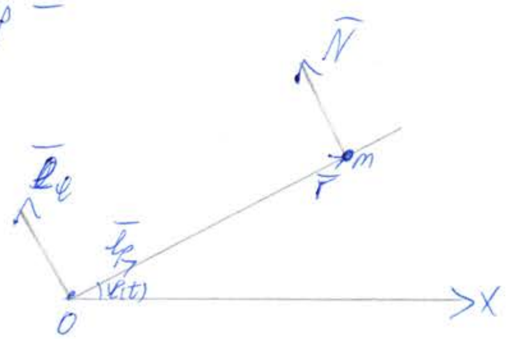
Ответ: $v = \sqrt[3]{4R^2\alpha}$

№9

а) $r=\rho\bar{e}_\rho \Rightarrow \dot{r}=\dot{\rho}\bar{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi \Rightarrow dr=(\dot{\rho}dt, \rho\omega dt)$

$\ddot{r}=\ddot{\rho}\bar{e}_\rho+\dot{\rho}\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi+\dot{\rho}\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi+\rho\ddot{\varphi}\bar{e}_\varphi-\rho\dot{\varphi}^2\bar{e}_\rho=$

$=\bar{e}_\rho(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)+\bar{e}_\varphi(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi})$



По 2 закону Ньютона $m\ddot{r}=\bar{N}$

В полярных координатах

$\bar{e}_\rho: m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=0 \to \ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2=0$

$\bar{e}_\varphi: m(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi})=N$

Задача Коши: $\begin{cases}\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2=0\\ \dot{\rho}(0)=0\\ \rho(0)=a\end{cases}$

$\lambda^2-\dot{\varphi}^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\dot{\varphi} \Rightarrow \left.\begin{matrix}y_1(t)=e^{\dot{\varphi}t}=e^{\omega t}\\ y_2(t)=e^{-\dot{\varphi}t}=e^{-\omega t}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho=C_1e^{\omega t}+C_2e^{-\omega t}$

$\rho(0)=C_1+C_2=a$

$\dot{\rho}(0)=\omega C_1e^{\omega t}\big|_{t=0}+C_2\cdot(-\omega)e^{-\omega t}\big|_{t=0}=\omega(C_1-C_2)=0 \Rightarrow C_1=C_2=\frac{a}{2}$

$\rho(t)=\frac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$

$\dot{\rho}(t)=\frac{a}{2}\omega(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$

по итогу $\bar{N}=(0, ma\omega^2(e^{\omega t}-e^{-\omega t}))$

$A_{\bar{N}}=\int_\gamma(\bar{N}, dr)=\int_0^T ma\omega^2(e^{\omega t}-e^{-\omega t})\frac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})\omega dt=$

$=\frac{ma^2\omega^3}{2}\int_0^T(e^{2\omega t}-e^{-2\omega t})dt=\frac{ma^2\omega^3}{2}\left(\frac{e^{2\omega t}}{2\omega}\Big|_0^T-\frac{e^{-2\omega t}}{-2\omega}\Big|_0^T\right)=$

$=\frac{ma^2\omega^3}{2}\left(\frac{e^{2\omega T}}{2\omega}-\frac{1}{2\omega}+\frac{e^{-2\omega T}}{2\omega}-\frac{1}{2\omega}\right)=\frac{ma^2\omega^2}{2}\left(\frac{e^{2\omega T}+e^{-2\omega T}}{2}-1\right)$

$\Rightarrow A_{\bar{N}}=\frac{ma^2\omega^2}{2}\left(\frac{e^{2\omega T}+e^{-2\omega T}}{2}-1\right)$

№9

б) $\Delta E_{K} = E_K(T) - E_K(0)$

$$E_K(T) = \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\bar{e}_\rho \dot{\rho} + \bar{e}_\varphi \omega\rho\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + (\omega\rho)^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{a^2\omega^2}{4}\left(e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} - 2\right) + \omega^2\frac{a^2}{4}\left(e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} + 2\right)\right) =$$

$$= \frac{ma^2\omega^2}{8}\left(2e^{2\omega T} + 2e^{-2\omega T}\right) = \frac{ma^2\omega^2}{4}\left(e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}\right)$$

$$E_K(0) = \frac{m}{2}\left(\bar{e}_\rho \dot{\rho}(0) + \bar{e}_\varphi \omega\rho(0)\right)^2 = \frac{m\omega^2 a^2}{2}$$

$$\Delta E_K = \frac{ma^2\omega^2}{4}\left(e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} - 2\right) = \frac{ma^2\omega^2}{2}\left(\frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \Delta E_K = A_{\bar{N}}$$

Ответ: а) $N(t) = ma\omega^2\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$

$$A_{\bar{N}}(T) = \frac{ma^2\omega^2}{2}\left(\frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} - 1\right)$$

б) $\Delta E_K = A_{\bar{N}}(T)$