Матанализ
2 курс
Домашнее задание
Владислав Мозговой

Домашнее задание (листок) 1

Анализ, 2 курс, весенний семестр, 29.01.2021

Дедлайн: 28.02.2021

Задача 1. Доказать полноту пространства $C^k[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, состоящего из k раз непрерывно дифференцируемых функций $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, снабженного нормой $\|f\|_k := \sum_{i=0}^k \max_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|$, где $f^{(i)}$ обозначает i-ую производную функции f.

Задача 2. Доказать, что норма $\|\cdot\|$ нормированного пространства над полем *комплексных* чисел порождена скалярным произведением тогда и только тогда, когда для любых двух векторов x и y выполнено равенство параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Задача 3. Доказать, что следующие пространства не являются гильбертовыми: а) l_p при $p \in [1,2) \cup (2,\infty]$; б) $C[0,1]$.
Напомним, что пространство l_p состоит из последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, $x_k \in \mathbb{R}$, с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p}$ при $p < \infty$ и $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$.
Здесь и далее пространство непрерывных функций $C[a,b]$ снабжено стандартной нормой $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Задача 4. Доказать неравенство Коши-Буняковского в векторном пространстве V над полем *комплексных* чисел со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$: $|(x,y)| \le \|x\|\|y\|$ для любых $x, y \in V$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.

Задача 5. В пространстве $L^2(-1,1)$ найти расстояние от функции $x(t) = t + \cos t$ до подпространства $M = \{x \in L^2(-1,1) :\ \int_{-1}^0 x(t)dt = \int_0^1 x(t)dt\}$.

Задача 6. а) В пространстве l_2 найти расстояние от вектора $e_1 = (1,0,0,...)$ до подпространства $H_n = \{x \in l_2 : \sum_{k=1}^n x_k = 0, x_{n+1} = x_{n+2} = ... = 0\}$.
б) Докажите, что пространство $H = \{x \in l_2 :\ \sum_{k=1}^\infty x_k = 0\}$ плотно в l_2.

Задача 7. Пусть M — замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H. Рассмотрим произвольный вектор $v \in H \setminus M$ и вектор $v_M \in M$, такой что $\|v - v_M\| = \operatorname{dist}(v, M)$. Докажите, что $(v - v_M, w - v_M) \le 0$ для любого $w \in M$. Дайте геометрическую интерпретацию этому факту.

Задача 8. Примените процесс ортогонализации к последовательности одночленов $1, z, z^2, ...$, где $z = x + iy \in \mathbb{C}$, относительно следующих скалярных произведений:

$$\text{а)} \qquad (P,Q) = \iint_{|z|\le 1} P(z)\overline{Q}(z)dxdy, \qquad \text{б)} \qquad (P,Q) = \iint_{\mathbb{C}} P(z)\overline{Q}(z)e^{-|z|^2}dxdy$$

Задача 9. (*) Рассмотрим линейное пространство V, состоящее из конечных линейных комбинаций (над полем комплексных чисел) одночленов из предыдущей задачи (другими словами, их линейную оболочку). Докажите, что пополнения V относительно норм, порожденных скалярными произведениями из предыдущей задачи, состоит из аналитических функций f в круге или на комплексной плоскости, таких что $\iint_{|z|\le 1} |f(z)|^2 dxdy < \infty$ или $\iint_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dxdy < \infty$ соответственно (полученные пространства называются *пространствами Бергмана*).

Задача 10. Докажите, что система Радемахера $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ортонормированна, но не полна в $L^2(0,1)$.

Задача 11. Докажите, что система Уолша, состоящая из всевозможных конечных произведений функций из системы Радемахера, является ортонормированным базисом в $L^2(0,1)$.

Задача 12. Докажите, что в системе многочленов Чебышева I рода

$$T_n(t) = \cos(n\arccos t),\ n = 0, 1, \ldots$$

а) $T_n(t)$ является многочленом степени n;
б) функция $T_n(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-t^2)T_n''(t) - tT_n'(t) + n^2T_n(t) = 0;$$

в) все функции ортогональны в пространстве $L^2(-1,1)$ с весом $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$;
г) образуют в этом пространстве ортогональный базис.

Задача 13. (*) Докажите, что среди всех многочленов вида $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ наименьшую норму в вещественном пространстве $C[-1,1]$ имеет многочлен Чебышева I рода $T_n(t) = 2^{1-n}\cos(n\arccos t)$.

Решения

Задача 1

Рассмотрим последовательность $\{f_i\}$ из $C^k[a,b]$, все положительноые пределы $\lim_i f_i^{(j)}(x)$ существуют для $j \in [0,k]$ и равномерно непрерывны. Необходимо показать что $\lim_i f^{(j)}$ дифференцируемо и производная имеет вид $\lim_i f^{(j+1)}$. Тогда покажем что для последовательности f_n из $C^1[a,b]$ с поточечными пределами $f(x) = \lim_n f_n(x)$ и $g(x) = \lim_n f_n'(x)$ выполнено равенство $f'(x) = g(x)$. По теореме Ньютона-Лейбница для любого i:

$$f_i(x) - f_i(a) = \int_a^x f_i'(t)dt$$

Тогда так как f_i' поточечно сходится к $g(x)$, то для $\varepsilon > 0$ существует i_0 такое что $|f_i'(t) - g(t)| < \varepsilon$ для $i \geqslant i_0$ и для всех t. Тогда

$$\left|\int_a^x f_i(t)dt - \int_a^x g(t)dt\right| \leqslant \int_a^x |f_i'(t) - g(t)|dt \leqslant \varepsilon \cdot |x-a| \to 0$$

$$\lim_i f_i(x) - f_i(a) = \lim_i \int_a^x f_i'(t)dt = \int_a^x g(t)dt$$

Откуда $f' = g$

Задача 2

Пусть $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, тогда

$$\langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = (||u||^2 + 2\langle u,v\rangle + ||v||^2) + (||u||^2 - 2\langle u,v\rangle + ||v||^2) = 2||u||^2 + 2||v||^2$$

Пусть $||\cdot||$ удовлетворяет

$$2||u||^2 + 2||v||^2 = ||u+v||^2 + ||u-v||^2$$

и

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$$

Заметим, что $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ и $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.
Далее покажем, что $(x,y) \to \langle x,y\rangle$ непрерывна, это следует из того, что сложение и вычитание $||\cdot||$-непрерывны, норма сама непрерывна, а также суммы и композиции непрерывных функций непрерывны.

Докажем что $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

$$2||x+z||^2 + 2||y||^2 = ||x+y+z||^2 + ||x-y+z||^2$$
$$||x+y+z||^2 = 2||x+z||^2 + 2||y||^2 - ||x-y+z||^2 = 2||y+z||^2 + 2||x||^2 - ||y-x+z||^2$$
$$||x+y+z||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + ||x+z||^2 + ||y+z||^2 - \frac{1}{2}||x-y+z||^2 - \frac{1}{2}||y-x+z||^2$$
$$||x+y-z||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + ||x-z||^2 + ||y-z||^2 - \frac{1}{2}||x-y-z||^2 - \frac{1}{2}||y-x-z||^2$$
$$\langle x+y, z\rangle = \frac{1}{4}(||x+y+z||^2 - ||x+y-z||^2)$$
$$= \frac{1}{4}(||x+z||^2 - ||x-z||^2) + \frac{1}{4}(||y+z||^2 - ||y-z||^2)$$
$$= \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$$

Теперь докажем что $\langle\lambda x, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$
Это очевидно выполнено для $\lambda = -1$ и по индукции $\langle\lambda x, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ для всех $\lambda \in \mathbb{N}$, рассмотрим $\lambda = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$ и $x' = \frac{x}{q}$.

$$q\langle\lambda x, y\rangle = q\langle px', y\rangle = p\langle qx', y\rangle = p\langle x,y\rangle$$

Разделив на q получим требуемое. То есть для фиксированных x,y непрерывная функция $t \mapsto \frac{1}{t}\langle tx, y\rangle$ определена на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, то есть $\langle x,y\rangle$ на всех $t \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, случай $\lambda = 0$ тривиален.

Определим $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{3} i^k||x+i^k y||^2$, заметим что $\langle ix,y\rangle = i\langle x,y\rangle$ и $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ и применим дважды вариант с вещественными скалярами

Задача 3

(a) Предположим что ℓ_p – Гильбертово пространство, тогда оно должно удовлетворять следующему равенству:

$$2||u||_p^2 + 2||v||_p^2 = ||u+v||_p^2 + ||u-v||_p^2$$

Рассмотрим $u = e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ и $v = e_2 = (0, 1, 0, \dots)$, для них эта формула имеет вид

$$4 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}$$

Это равенство выполнено только при $p = 2$, а следовательно ℓ_p при $p \in [1, 2) \cup (2, \infty]$

(b) Рассмотрим 2 функции $f(x) = x,\ x \in [0, 1]$ и $g(x) = 1, x \in [0, 1]$. Заметим, что для них $2(||f||_\infty^2 + ||g||_\infty^2) = 4$, но $||f+g||_\infty^2 + ||f-g||_\infty^2 = 5$

Задача 4

Предположим что неравенство доказано для вещественных чисел и докажем его для комплексных.
Заметим, что $x \cdot y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ и $x \cdot x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2$
Пусть A – векторное пространство $\mathbb{C}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение и если норма определена как $||x|| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$, то всегда выполнено:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leqslant ||x||^2 ||y||^2$$

Докажем это.
Если x или y равны 0, то неравенство верно, так как $\langle x, 0 \rangle = 0,\ ||0|| = 0$. Предположим, что x, y ненулевые, тогдп так как $\langle z, z \rangle \geqslant 0$, то можно рассмотреть z как $z = x - \frac{\langle x, y \rangle y}{||y||^2}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\langle z, z \rangle = \langle x, x \rangle - \frac{1}{||y||^2} \langle x, \langle x, y \rangle y \rangle - \frac{1}{||y||^2} \langle \langle x, y \rangle y, x \rangle + \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{||y||^2 ||y||^2} \langle y, y \rangle \\
&= ||x||^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{||y||^2} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{||y||^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{||y||^2} \\
&= ||x||^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{||y||^2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Как и требовалось

Задача 5

Пусть

$$\begin{aligned}
&f(t) = \begin{cases} -1,\ t \in [-1, 0) \\ 1,\ t \in [0, 1) \end{cases} \\
&\int_{-1}^{0} x(t)dt = -\int_{-1}^{0} -x(t)dt = -\int_{-1}^{0} f(t)x(t)dt \\
&\int_{0}^{1} x(t)dt = \int_{0}^{1} x(t)f(t)dt \\
&\int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt = 0 \Leftrightarrow -\int_{-1}^{0} x(t)f(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} x(t)f(t)dt = 0
\end{aligned}$$

То есть $(x(t), f(t)) = 0$ в $L^2(-1, 1)$.
Значит $M = \{x \in L^2(-1, 1) :\ (x(t), f(t)) = 0\}$ – ортогональное дополнение к $f(t) :\ M = \langle f \rangle^\perp$

$$\begin{aligned}
&M = \langle f \rangle^\perp \Rightarrow M^\perp = \langle f \rangle^{\perp\perp} = \langle \overline{f} \rangle = \langle f \rangle \\
&L^2(-1, 1) = \overline{M} + M^\perp = \overline{M} + \langle f \rangle \\
&x \in L^2(-1, 1) \Rightarrow x = m + f_1 = m + \alpha f \\
&P(x, M) = ||x^\perp|| = ||f_1|| = ||\alpha f||
\end{aligned}$$

Найдем α, так как $f \perp m$, то $0 = (m, f) = (x - \alpha f, f) = (x, f) - \alpha(f, f)$, откуда $\alpha = \frac{(x,f)}{(f,f)}$.

$$(x, f) = \int_{-1}^{1} x(t)f(t)dt = \int_{-1}^{0} -x(t)dt + \int_{0}^{1} xdt = -\int_{-1}^{0}(t + \cos(t))dt + \int_{0}^{1}(t + \cos(t))dt$$
$$= \left(\frac{t^2}{2} + \sin(t)\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{t^2}{2} + \sin(t)\right)\Bigg|_{-1}^0 = \frac{1}{2} + \sin(1) + \frac{1}{2} - \sin(1) = 1$$
$$(f, f) = \int_{-1}^{1} f(t)f(t)dt = \int_{-1}^{1} dt = t\Big|_{-1}^{1} = 2$$
$$||f||^2 = 2,\ ||f|| = \sqrt{2},\ \alpha = \frac{1}{2}$$
$$||\alpha f|| = \frac{1}{2}||f|| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Задача 6

(a) H_n – коненомерное подпространство размерности $n - 1$. Рассмотрим $\mathrm{d}(e_1, H_n),\ e_1 \notin H_n$. Это n-мерное подпространство. Найдем расстояние от e_1 до H_n.

$$x \in H_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Leftrightarrow x \perp H_n$$
$$H_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$$

Тогда $\mathrm{dist}(x, H_n) = d$, d – длина проекции e_1 на H_n, надем её:

$$d = \frac{(e_1, H_n)}{||H_n||} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Откуда $\mathrm{dist}(e_1, H_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

(b) Рассмотрим какую-нибудь сходящуюся последовательность из $\ell_2 H$, назовем ее $a = (a_k)$. Пусть $x \in \ell_2$ тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty$, тогда существует такое $N_0 \in \mathbb{N}$ для любого заданного $\varepsilon < 0$ такой что $\sum\limits_{k=N_0}^{\infty} |x_k|^2 < \varepsilon$

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = S$, тогда $b_k = \sqrt{\frac{\varepsilon}{S}} a_k$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \varepsilon$ и сходится.

Пусть $x = -\sum\limits_{k=1}^{N_0-1} x_k$, воспользуемся теоремой Римана об условно сходящихся рядах, рассмотрим последовательность $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ такую что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_{k_j} = x$, тогда

$$g_n = \begin{cases} x_n,\ n < N_0 \\ b_{k_n - N_0 + 1},\ n \geqslant N_0 \end{cases}$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k = x - x = 0$, тогда $g = (g_n) \in M_1$. Откуда $||x - g||_{l_2}^2 = \sum\limits_{n=N_0}^{\infty} |b_{k_n - N_0 + 1} - x_n|^2 \leqslant \sum\limits_{n=N_0}^{\infty} |b_{k_n - N_0 + 1}|^2 + |x_n|^2 \leqslant 2\varepsilon$, откуда M_1 плотно в ℓ_2

Задача 7

Известно, что $\forall u \in H\ \exists! v \in M :\ |u - v| = \mathrm{dist}(u, M)$

$$[z, v] = \{(1 - t)v + tz|\ t \in [0, 1]\}$$
$$f(t) := ||u - ((1 - t)v + tz)||^2 \geqslant 0$$
$$f(t) = ||u - v + tv - tz||^2 = ||(u - v) + t(v - z)||^2$$
$$f(0) = ||u - v||^2 = \mathrm{dist}^2(u, M)$$
$$f(0 + t) - f(0) = f'(0) + o(t)$$

Пусть $g(t) = ||x+th||^2,\ x=(u-v),\ h=(v-z)$

$$\frac{dg}{dt} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon)-g(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{||x+th+\varepsilon h||^2 - ||x+th||^2}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{||x+th||^2 + 2(x+th,\varepsilon h) + \varepsilon^2||h||^2 - ||x+th||^2}{\varepsilon} = 2(x+th,h)$$
$$\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = 2(x,h) \Rightarrow \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = 2(u-v,v-z) = f'(0)$$

$||u-((1-t)v+tz)||^2 - \operatorname{dist}^2(u,M) \geqslant 0$, так как $[z,v]\subset M$, а $\operatorname{dist}^2(u,M)$ берется как наименьшая норма разности с элементом M, откуда

$$f(t)-f(0)\geqslant 0$$
$$f'(0)t + o(t) \geqslant 0$$
$$f'(0) \geqslant \frac{o(t)}{t}$$
$$\lim_{t\to 0+} f'(0) = f'(0) \geqslant \lim_{t\to 0+}\frac{o(t)}{t} = 0 \Rightarrow f'(0)\geqslant 0 \Rightarrow (u-v,v-z)\geqslant 0 \Rightarrow (u-v,v-z)\geqslant 0 \Rightarrow (u-v,z-v)\leqslant 0$$

Задача 8

(a) Перейдем к сферическим координатам $x=r\cos(\varphi),\ y=r\sin(\varphi),\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ z=re^{i\varphi}$

$$(z^n,z^m) = \iint_{|z|\leqslant 1} P(z)\overline{Q(z)}rd\varphi dr = \int_0^1\int_0^{2\pi} z^n\overline{z^m}rd\varphi dr$$
$$= \int_0^1 r^{n+m+1}dr\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi}dr = \int_0^1 r^{n+m+1}dr\cdot\left.\frac{e^{i(n-m)\varphi}}{i(n-m)}\right|_0^{2\pi} = 0$$

Следовательно система уже ортанональна

(b)

$$(z^n,z^m) = \iint z^n\overline{z^m}e^{-|z|^2}rd\varphi dr = \int_0^\infty r^{n+m+1}e^{-r^2}dr\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi}d\varphi$$
$$= \int_0^\infty r^{n+m+1}e^{-r^2}dr\cdot 0 = 0$$
$$n=m \qquad \int_0^\infty r^{2n+1}e^{-r^2}d\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\int_0^\infty r^{2n+1}e^{-r^2}dr = \pi\Gamma(2n+1)\neq 0$$
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$
$$\Gamma(2n+1) = \int_0^\infty e^{-r^2}r^{2n}dr^2 = 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2n}rdr = 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2n+1}dr$$
$$\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2n+1}dr = \frac{\Gamma(2n+1)}{2}\neq 0$$

Тоже уже ортогональна

Задача 9*

Задача 10

Посчитаем $\langle r_n,r_m\rangle$ при $n<m$, заметим, что

$$\langle r_n,r_m\rangle = \int_0^1 \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t)\operatorname{sign}\sin(2^m\pi t)dt = \sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t)\operatorname{sign}\sin(2^m\pi t)dt$$

Заметим что $\operatorname{sign}\sin(2^n\pi t)$ постоянна, а $\operatorname{sign}\sin(2^m\pi t)$ проходит через 2^{m-n} периода (так как при подсчете t в диапазоне от $k2^{-n}$ до $(k+1)2^{-n}$, $2^n\pi t$ проходит диапазон от $k\pi$ до $(k+1)\pi$), откуда следует, что все слагаемые равны 0

Вспомним, что ортонормальная система $\{X_n\}$ олна тогда и только тогда, когда $\langle f, X_n\rangle = 0\ \forall n \Rightarrow f = 0$, пусть $f(x) = r_1(x)r_2(x)$, тогда $\langle f, r_n\rangle = 0$ для всех n, но $f \neq 0$, а следовательно система не полна в $L^2(0,1)$

Задача 11

Задача 12

(a) Пусть $\alpha = \arccos(t)$, тогда

$$\begin{aligned}
&\cos(n\alpha) = \Re(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \Re(t + i\sqrt{i - t^2})^n \\
&\sin(\arccos(t)) = \cos(\frac{\pi}{2} - \arccos(t)) \\
&= \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad x = \arccos(t) \\
&\sin(\arccos(t)) = \sqrt{1-t^2}
\end{aligned}$$

Необходимо доказать, что $\Re(t + i\sqrt{1-t^2})^n = [a]t^n + \ldots$ – многочлен степени n.
$(t+i\sqrt{1-t^2})(t+i\sqrt{1-t^2})\ldots(t+i\sqrt{1-t^2})$ посчитаем количество сочетаний n скобок, из 2α скобок взяли $i\sqrt{1-t^2}$, из $n - 2\alpha$ взяли t, откуда

$$\begin{aligned}
&T_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k}(x^2-1)x^{n-2k} \\
&\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1} \neq 0
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&(1-t^2)T_n''(t) - tT_n'(t) + n^2T_n(t) = 0 \\
&T_n(t) = \cos(n\arccos(t)) \\
&T_n'(t) = \sin(n\arccos(t)) \cdot n\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\
&T_n''(t) = -\cos(n\arccos(t)) \cdot n\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot n\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \sin(n\arccos(t)) \cdot n\frac{t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -T_n\frac{n^2}{1-t^2} + \sin(n\arccos(t)) \cdot n\frac{t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&(1-t^2)T_n'' - tT_n'(t) + n^2T_n(t) \\
&= -T_nn^2 + \sin(n\arccos(t)) \cdot n\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - t\sin(n\arccos(t))n\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + n^2T_n(t) = 0
\end{aligned}$$

(c) Сделаем замену $T_n(t) = \cos(n\arccos(t))$

$$\begin{aligned}
&y = \cos(t) \\
&\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos((n-m)t) + \cos((n+m)t))dt = \begin{cases} \pi & \text{if } m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{if } m \neq n \end{cases}
\end{aligned}$$

(d) Рассмотрим линейный оператор $H:\ f(t) \to (1-t^2)f''(t) - tf'(t)$. В 12б мы доказали, что $(1-t)T_n'' - tT_n'(t) + n^2T_n(t) = 0$, то есть $H(T_n) = -n^2T_n(t)$, то есть T_n – собственный вектор H. Помним, что собственные векторы самосопряженного оператора образуют базис пространства. Других собственных векторов у H нет, так как решением $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ является T_n. Так как ортогональность T_n в $L^2(-1,1)$ мы уже доказали, если докажем, что H самосопряженный, то все доказано. Тогда докажем, что $(Hf,g) = (f,Hg)$

$$
\begin{aligned}
&(Hf,g)\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{(1-t)^2 f'' - tf'}{\sqrt{1-t^2}} g dt = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-t^2} f'' - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} f' \right) g dt\\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f'' g dt - \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} f' g dt = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} f' g dt\\
&= -\int_{-1}^{1} f' g d\sqrt{1-t^2} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} d(f'g) = \int_{-1}^{1} f'' g \sqrt{1-t^2} dt + \int_{-1}^{1} f' g' \sqrt{1-t^2} dt\\
&= -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f' g' dt = -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} g' df = \int_{-1}^{1} f d(\sqrt{1-t^2} g')\\
&= \int_{-1}^{1} f \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} g' + \sqrt{1-t^2} g'' \right) dt = \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2) g'' - tg'}{\sqrt{1-t^2}} f dt\\
&= (f,Hg)
\end{aligned}
$$

Задача 13*

$$
\begin{aligned}
&||T_n|| = \max_{t\in[-1,1]} |T_n(t)| = \frac{1}{2^{n-1}}\\
&T_n'(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sin(n \arccos(t)) \cdot n \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 0\\
&\sin(n \arccos(t)) = 0\\
&n \arccos(t) = \pi k \qquad t = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right),\ 0 \leqslant k \leqslant n
\end{aligned}
$$

Если $k = n+1$, то

$$
\begin{aligned}
&t = \cos\left(\frac{\pi(n+1)}{n}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\pi(n-1)}{n}\right)\\
&k = n-1
\end{aligned}
$$

Следовательно $T_n(t)$ имеет $n+1$ критическую точку

Пусть $\exists$ ногочлен ω_n степени n такой что

$$
||\omega_n|| = \max_{t\in[-1,1]} |\omega_n(t)| < \frac{1}{2^{n-1}}
$$

Рассмотрим $f_n(t) = T_n(t) - \omega_n(t)$, $|\omega_n(t)| < |T_n(t)|$, следовательно значение f_n в критических точках T_n не меняет знак

$$
\begin{aligned}
&f_n(t) > 0 \quad t = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \quad 0 \leqslant 2k \leqslant n\\
&f_n(t) < 0 \quad t = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) \quad 0 \leqslant 2k+1 \leqslant n
\end{aligned}
$$

По теореме о промежуточном значении функция имеет $\geqslant n$ нулей, но $\deg f_n(t) = n-1$, противоречие

Домашнее задание (листок) 2

Анализ, 2 курс, весенний семестр

Дедлайн: 31.03.2021

Задача 1. Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|$ сходится. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx)$ сходится равномерно при $x \in \mathbb{R}$ и его сумма является непрерывной периодической функцией. Чему равны коэффициенты Фурье этой функции по системе $\{\sin(nx)\}$ на $(0, \pi)$?

Задача 2. Пусть $f \in L^2(-\pi; \pi)$ и a_n, b_n $(n = 1, 2, \dots)$ – коэффициенты Фурье f по стандартной тригонометрической системе. Доказать равномерную сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx$ при $x \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Пусть функция $f \in L^1(0, \pi)$. Рассмотрим ее коэффициенты Фурье $\{c_n\}$ по тригонометрической системе $\{\sin(nx)\}$ или $\{1, \cos(nx)\}$.

a) Доказать, что $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$. (Указание: использовать лемму Римана).

b) Обязательно ли сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$?

c) При каком условии сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$?

Задача 4. Зная коэффициенты Фурье $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислите коэффициенты Фурье $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ “усредненной” функции $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$.

Задача 5. Показать, что функция $f(x) = \ln |2 \sin \frac{x}{2}|$ лежит в $L^2(-\pi, \pi)$. Разложить в ее в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

Задача 6. Пусть функции $f, g \in L^2((-\pi; \pi); \mathbb{C})$. Рассмотрим соответствующие им ряды Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$, где $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$, $d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx$, $n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $fg \in L^1((-\pi; \pi); \mathbb{C})$ и коэффициенты Фурье произведения fg могут быть получены при перемножении формальных рядов Фурье функций f и g. Обоснуйте полученные формулы.

Задача 7. Пусть вещественная функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, удовлетворяет соотношению $\int_0^{\pi} f(x)\, dx = 0$ и имеет на $(0, \pi)$ производную f', которая принадлежит $L^2(0, \pi)$. Доказать *неравенство Пуанкаре-Виртингера* (ср. с неравенством Стеклова с семинара):

$$\int_0^{\pi} (f(x))^2 dx \le \int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx,$$

в котором равенство достигается лишь при $f(x) = a \cos x$.

Задача 8. Пусть функция $f \in C[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$, причем для ее коэффициентов Фурье $\{c_n\}$ по системе $\{\sin(nx)\}$ выполнено условие $c_n = o(1/n)$. Доказать, что ряд Фурье сходится к f равномерно на $[0, \pi]$. (Указание: применить теорему Фейера.)

Задача 9. Пусть $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Доказать, что суммы Фейера $\sigma_n(x)$ функции f сходятся к f по норме пространства $L^1(-\pi, \pi)$. Следствие: Всякая функция из пространства $L^1(-\pi, \pi)$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

Задача 10. a)(*) Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $x \in [0, 2\pi]$, сходится, его сумма $f(x)$ непрерывна при $x \in (0, 2\pi)$, и $f \in L^1(0, 2\pi)$, но $f \notin L^2(0, 2\pi)$.

b)(*) Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n}$ сходится при $x \in (0, 2\pi)$ к некоторой непрерывной функции $f(x)$ на этом интервале, но $f \notin L^1(0, 2\pi)$.

Решения

Задача 1

$|\sin(nx)| \leqslant 1 \Rightarrow |d_n||\sin(nx)| \leqslant |d_n|$. Из словия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |d_n|$ сходится, также $|d_n \sin(nx)| \leqslant |d_n|$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |d_n \sin(nx)|$ сходится, а следовательно и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx)$ сходится

Пусть $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx)$, $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} d_n \sin(nx)$. Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx)$ сходится равномерно, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon :\ \forall K > K_\varepsilon :\ |f - S_K(x)| < \varepsilon$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx) - \sum_{n=1}^{k} d_n \sin(nx)| = |\sum_{n=k+1}^{\infty} d_n \sin(nx)| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} |d_n \sin(nx)| = \sum_{n=k+1}^{\infty} (|d_n||\sin(nx)|) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} d_n \cdot 1$$
$$|f(x) - S_k(x)| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} |d_n|$$

Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$, применим это к $\sum |d_n| :\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon :\ \forall n > N_\varepsilon :\ |d_n| < \varepsilon$, откуда $|f - S_k| \leqslant \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |d_n| < \varepsilon$, тогда $|f - S_k(x)| < \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon :\ \forall n > N_\varepsilon$), следовательно ряд сходится равномерно

Заметим, что из равномерной сходимости и непрерывности $d_n \sin(nx)$ следует непрерывность f, заметим что f периодична $d_k \sin(k(x + 2\pi)) = d_k \sin(kx + k \cdot 2\pi) = d_k \sin(kx) \Rightarrow f(x + 2\pi) = f(x)$
Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$, $b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$, тогда

$$\int\limits_0^{\pi} \sum d_n \sin(nx) \sin(kx) dx = \sum_{k\neq n} \int\limits_0^{\pi} d_n \sin(nx) \sin(kx) dx + \int\limits_0^{\pi} d_k \sin^2(kx) dx$$
$$= \sum \frac{d_n}{2} (\int\limits_0^{\pi} \cos(n-k)x dx - \int\limits_0^{\pi} \cos(n+k)x dx) + \frac{d_k}{2} \int\limits_0^{\pi} (1 - \cos(2kx)) dx$$
$$= \sum \frac{d_n}{2} (\frac{\sin(n-k)x}{n-k}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin(n+k)x}{n+k}\Big|_0^{\pi}) + \frac{d_k}{2} (x\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin(2kx)}{2x}\Big|_0^{\pi}) = \frac{d_k}{2}\pi$$
$$b_k = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_k \pi}{2} = d_k \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(kx)$$

Задача 2

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

Если $\{\varphi_n\}$ – некоторая ортогональная нормированная система в R (не бязательно полная). Из нерваенства Бесселя вытекает, что для того, чтобы числа $c_1, c_2, \ldots$ служили коэффициентами Фурье какого-то элемента $f \in R$, необходимо чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходился.

$$a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{i=1}^{n} a_n^2 + \sum_{i=1}^{n} b_n^2$$

Сходится, а следовательно

$$\sum_{i=1}^{n} a_n^2,\ \sum_{i=1}^{n} b_n^2$$

Тоже сходятся

$$\left(\sum \frac{|a_n|}{n}\right)^2 = \left(\sum |a_n| \cdot \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \left(\sum a_n^2\right) + \left(\sum b_n^2\right)$$
$$\sum \frac{|a_n|}{n} \leqslant \sqrt{\left(\sum a_n^2\right) \cdot \left(\sum b_n^2\right)}$$

То есть $\sum \frac{a_n}{n}$ сходится, а следовательно по признаку вейерштрасса

$$\left|\frac{a_n \sin(nx)}{n}\right| \leqslant \left|\frac{a_n \cdot 1}{n}\right| = \frac{a_n}{n}$$

То есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \sin(nx)$ сходится равномерно.

Аналогично доказывается сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} \cos(nx)$

Задача 3

(a) Воспользуемся леммой Римана, $f \in L^1(0,\pi),\ f \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, где $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(t)e^{-int}dt$ – коэффициенты Фурье. Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = \sum_{|k|\leqslant n} c_k \cdot e^{ikx} = \sum_{|k|\leqslant n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt\right) e^{ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{2\pi} \left(\sum_{|k|\leqslant n} e^{ik(x-t)}\right) dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}} dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt2(f\circ D_n)(x)$$
$$D_n(x) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Так мы пришли к интегралу Дирихле, сделав замену $t - x = z$ получим

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z)D_n(z)dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k|\leqslant n} e^{ikz}dz = 1$$

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x+z) - f(x))D_n(x)dz$$

Сумма ряда Фурье $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ совпадает с пределом интеграла Дирихле при $n \to \infty$.

(b) Рассмотрим $f(x) = x$. $f \in L^1(0,\pi) \Rightarrow$ подходит по условию

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin(nx)dx = \frac{-2}{\pi n}\int\limits_0^\pi x d\cos(nx)$$
$$= \frac{-2}{\pi n}(x\cos(nx)\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \cos(nx)dx) = \frac{-2}{\pi n}(\pi\cos(\pi n) - \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^\pi) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$|c_n| = \frac{2}{n},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – как известно, не сходится

(c) Докажем, что $f \in L^2(0,\pi) \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится.

Из неравенства Бесселя следует, что для того, чтобы числа $c_1, \dots, c_n, \dots$ служили коэффициентами Фурье какого-то элемента $f \in E$, необходимо чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходился.

($\Rightarrow$) Если $f \in L^2(0,\pi)$, то так как $\{c_n\}$ – коэффициенты Фурье $f \in L^2(0,\pi) \subset L^1(0,\pi)$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится.

($\Leftarrow$) По теореме Рисса если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ схдится, то в $L^2(0,\pi)$ есть функция с коэффициентами $\{c_n\}$, а так как функция задается коэффициентами Фурье однозначно, то эта функция и есть наша f, откуда $f \in L^2(0,\pi)$

Задача 4

Сделаем замену $t = x + z,\ z = t - x$

$$c_n(f_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_h(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+z)dz\right)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi\cdot 2h}\int_{-h}^{h}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)e^{-inx}dx\right)dz$$
$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-in(y-z)}dy\right)dz = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+z}^{\pi+z} f(y)e^{-in(y-z)}dy\right)dz$$
$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e^{inz}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+z}^{\pi+z} f(y)e^{-iny}dy\right)dz = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e^{inz}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy\right)dz$$
$$= c_n(f)\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e^{inz}dz = c_n(f)\frac{1}{2h}\frac{e^{inz}}{in}\bigg|_{-h}^{h} = c_n(f)\frac{1}{nh}\frac{e^{inh}-e^{-inh}}{2i} = c_n(f)\frac{\sin nh}{nh}$$

Откуда

$$c_n(f_n) = c_n(f)\frac{\sin nh}{nh}$$

Задача 5

$$\ln|2\sin\frac{x}{2}| = \ln|e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}| = \ln|\frac{e^{ix}-1}{e^{\frac{ix}{2}}}| = \ln|e^{ix}-1| - \ln|e^{\frac{ix}{2}}| = \ln|e^{ix}-1|$$

Откуда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$
$$f(x) = \ln|e^{ix}-1| = (e^{ix}-2) - \frac{(e^{ix}-2)^2}{2} + \dots$$

То есть $f^2(x)$ интегрируема и $\in L_2(-\pi,\pi)$ Теперь посчитаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln|e^{ix}-1|\cos(nx)dx = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|2\sin\frac{x}{2}|d\sin nx = -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx$$

Тогда так как

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(nx)\cos\frac{x}{2} + \cos(nx)\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

То

$$\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(D_n(x) - \frac{\cos(nx)\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{2} = 0$$

$$-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx = -\frac{\pi}{n}$$

$$||\sin nx||^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2} - \frac{\cos(2nx)}{2}dx = \pi$$

Откуда

$$\ln|2\sin\frac{x}{2}| = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k}$$

Задача 6

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|fg|dx \leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|g|^2} = ||f||_2||g||_2 < \infty$$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

$$g(x) = \sum a_n e^{inx} = \sum \alpha_n\cos(nx) + \beta_n\sin(nx)$$

$$fg = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m\cos(mx) + B_m\sin(mx)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Обобщение формулы Парсеваля - обобщ. уравнение замкнутости: $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum\limits_{m=1}^{\infty}(a_m\alpha_m + b_m\beta_m)$

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} fgdx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m\alpha_m + b_m\beta_m$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} fg\cos(kx)dx$$

Коэффициенты Фурье для $\phi(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(m+k)xdx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g\cos(m-k)xdx) = \frac{1}{2}(\alpha_{m+k}+\alpha_{m-k})$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)dx = \alpha_k$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}(\beta_{m+k}+\beta_{m-k})$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} fg\cos(kx)dx = \frac{a_0\alpha_k}{2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} a_m(\alpha_{m+k}+\alpha_{m-k}) + b_m(\beta_{m+k}+\beta_{m-k})$$

$$B_k = \frac{a_0\beta_k}{2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} a_m(\beta_{m+k}+\beta_{m-k}) - b_m(\alpha_{m+k}+\alpha_{m-k})$$

$$(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\cos(nx) + \beta_n\sin(nx))$$
$$= \frac{a_0\alpha_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_0}{2}\alpha_n + \frac{\alpha_0}{2}a_n)\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_0}{2}\beta_n + \frac{\alpha_0}{2}b_n)\sin(nx)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos(nx)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos(kx)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\cos(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos(nx)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\cos(kx)$$

Задача 7

Если a_n – комплексные коэффициенты ряда Фурье для f, то у f' коэффициенты имеют вид ina_n, тогда применив равенство Парсеваля к f' и используя

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 0$$

Получим что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f'^2(x)dx = \sum_{-\infty}^{\infty} n^2|a_n|^2 \geqslant \sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^2(x)dx$$

Задача 8

(1)
Пусть

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} c_n\sin(nx)$$
$$\sigma_n = \frac{s_1(x)+\ldots+s_n(x)}{n}$$

Необходимо доаказать, что $S_k(x) \rightrightarrows f$ на $[0,\pi]$.
По теореме Фейера $\{\sigma_n\} \rightrightarrows f$ на $[0,\pi]$,

$$\sigma_n(x) = \frac{s_1(x)+\ldots+s_n(x)}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{1} c_k\sin(kx) + \sum\limits_{k=1}^{2} c_k\sin(kx) + \ldots + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\sin(kx)}{n}$$

Заметим что $c_1\sin(x)$ входит в каждую сумму, $c_2\sin(2x)$ во все кроме первой, $c_3\sin(3x)$ во все кроме первых двух и т.д., тогда

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{c_1 n\sin(x) + c_2(n-1)\sin(2x) + \ldots + c_n\sin(nx)}{n} \\
&= \frac{n(c_1\sin(x) + c_2\sin(2x) + \ldots + c_n\sin(nx)) - c_2\sin(2x) - \ldots - (n-1)c_n\sin(nx)}{n} \\
&= S_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}c_k\sin(kx) = S_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kc_k\sin(kx) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k\sin(kx) \\
&= S_n(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kc_k\sin(kx)
\end{aligned}$$

Тогда $\sigma_n(x) = S_n(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}kc_k\sin(kx)$

(2)
По условию $c_n = o(\frac{1}{n})$, то есть $\forall a\ \exists N:\ \forall n > N\ |c_n| \leqslant a|\frac{1}{n}| \leftrightarrow |nc_n| \leqslant a$. Заметим, что $|nc_n\sin(nx) \leqslant |nc_n|$, тогда $|nc_n\sin(nx)| \leqslant |nc_n| \leqslant a$. Итак, $|nc_n\sin(nx)| \leqslant a$

$$\forall x \frac{1}{n}|\sum_{k=N+1}^{n}kc_k\sin(kx)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|kc_k\sin(kx)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}a = \frac{1}{n}a(n-N) = a(1-\frac{N}{n}) = a - a\frac{N}{n} < a$$

То есть $\forall x\ \frac{1}{n}|\sum\limits_{k=N+1}^{n}kc_k\sin(kx)| < a$, обозначим $\sum\limits_{k=1}^{N}kc_k\sin(kx)$ как M

(3)

$$\forall x\ |\sigma_m(x) - S_n(1+\frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kc_k\sin(kx)| = \frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{N}kc_k\sin(kx) + \sum_{k=N+1}^{n}kc_k\sin(kx)| < \frac{1}{n}|M+na| \leqslant |\frac{M}{n}| + a$$

Пусть $n > N$ и $|\frac{M}{n}| < a$, тогда $|\frac{M}{n}| + a \leqslant 2a \Rightarrow \sigma_n(x) - S_n(1+\frac{1}{n}) \rightrightarrows f$

(4)

$$\begin{aligned}
&\forall x\ |f(x) - (1+\frac{1}{n})S_n| = |f(x) - \sigma_n(x) + \sigma_n(x) - (1+\frac{1}{n})S_n| \\
&\leqslant |f(x) - \sigma_n(x)| + |\sigma_n(x) - (1+\frac{1}{n})S_n| < a + 2a < 3a \\
&\Rightarrow (1+\frac{1}{n})S_n \rightrightarrows f
\end{aligned}$$

(5)
$(1+\frac{1}{n})S_n = S_n + \frac{1}{n}S_n$. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{N}c_k\sin(kx) = \alpha$. Выберем n достаточно большое, чтобы $|\frac{\alpha}{n}| < a$.

$$\begin{aligned}
&|\frac{1}{n}S_n| = |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k\sin(kx)| = |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}c_k\sin(kx) + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}c_k\sin(kx)| \\
&\leqslant |\frac{\alpha}{n}| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}a = |\frac{\alpha}{n}| + \frac{1}{n}a(n-N) = |\frac{\alpha}{n}| + a - \frac{Na}{n} < a + a = 2a
\end{aligned}$$

Тогда $\forall x\ |f(x) - S_n(x)| = |f(x) - S_n(x) + \frac{1}{n}S_n(x) - \frac{1}{n}S_n(x)| = |(f(x) - (1+\frac{1}{n})S_n(x)) + \frac{1}{n}S_n(x)| \leqslant 2a + 3a$ (по (4) и (5)), что и требовалось доказать

Задача 9

Продолжим f по 2π-ериодичности на всю ось

$$||f(x)-\sigma_n(x)|| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-\sigma_n(x)|dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\Phi_n(z)dz|dx$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} | \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x)-f(x+z))\Phi_n(z)dz|dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |(f(x)-f(x+z))\Phi_n(z)|dzdx$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)|\Phi_n(z)dzdx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)|dxdz$$

$$\lim_{z\to 0} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)|dx = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta : |z| < \delta \Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)|dx < \varepsilon$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)|dxdz$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z) \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)|dxdz + \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z) \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)|dxdz + \int\limits_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z) \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)|dxdz$$

$$= I_- + I_0 + I_+$$

Заметим что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)|dx < \infty$, так как по неравенству Минковского $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)| \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+z)|dx < \infty$

Обозначим $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+z)|dx$ как M

Возьмем n_0 настолько большим, что $\eta_n(\delta) < \varepsilon$ при $n > n_0$, тогда

$$I_- = \int\limits_{-\delta}^{\pi} \Phi_n(z)Mdz = \eta_n(\delta)M < \varepsilon M$$

$$I_0 = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z)Mdz < \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z)\varepsilon dz < \varepsilon \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)dz < \varepsilon$$

$$I_+ = \int\limits_{-\pi}^{\delta} \Phi_n(z)Mdz < \varepsilon M$$

$$||f(x)-\sigma_n(x)|| < 2\varepsilon M + \varepsilon \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

Задача 10

(a*)

(b*) По признаку дирихле мы знаем, что f сходится на $[\sigma, \pi-\sigma]$ для всех $\sigma \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\int\limits_{\sigma}^{\pi-\sigma} f(x)dx = \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_{\sigma}^{\pi-\sigma} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{n\ln(n)}\cos(n\sigma)$$

Домашнее задание (листок) 3

Анализ, 2 курс, весенний семестр 2021

Дедлайн: 27.05.2021

Во всех задачах по уравнениям с частными производными нужно обсуждать является ли полученное решение классическим.

Задача 1. Решите задачу теплопроводности $u_t = c^2 u_{xx}$ для стержня $[0, l]$ с изолированными концами ($u_x(t, 0) = u_x(t, l) = 0$) и начальным распределением температуры $u(0, x) = \chi_{[0,l/2]}$, где $\chi_{[0,l/2]}$ обозначает индикаторную функцию отрезка $[0, l/2]$. Каково предельное распределение температуры при $t \to \infty$? Попробуйте его угадать из физических соображений прежде чем решать задачу.

Задача 2. Решите следующее уравнение теплопроводности на отрезке $[0, \pi]$:

$$u_t = u_{xx} + te^{-t}\sin(3x/2), \quad u(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad u(0, x) = 1 - \cos x.$$

Замечание. В граничных условиях опечатки нет: на левом конце отрезка поддерживается нулевая температура, а правый конец изолирован.

Задача 3. Решите следующее волновое уравнение на отрезке $[0, \pi]$:

$$u_{tt} = u_{xx} + u + \sin x, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad u(0, x) = \sin 2x, \quad u_t(0, x) = \sin 3x.$$

Задача 4. а) Рассмотрим волновое уравнение на всей прямой

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

с начальными условиями $u(0, x) = \phi(x)$, $u_t(0, x) = \psi(x)$, где $\phi \in C^2(\mathbb{R})$, а $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Докажите, что следующая функция $u(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ является решением рассматриваемого уравнения:

$$u(t, x) = \frac{\phi(x + ct) + \phi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds.$$

Эта формула называется *формулой Даламбера.*

б) Придумайте аналог формулы Даламбера для волнового уравнения на отрезке $[0, \pi]$ с граничными условиями $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ (струна с закрепленными концами). Теперь начальные условия ϕ, ψ, конечно, заданы только на отрезке $[0, \pi]$.

в) Та же задача, что и в пункте б), но для струны со свободными концами (т.е. $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$).

Замечание. Формула Даламбера дает решение волнового уравнения в виде суммы двух функций $f(x + ct) + g(x - ct)$. Чтобы это увидеть, нужно записать $\int_{x-ct}^{x+ct} = \int_{x-ct}^{0} + \int_{0}^{x+ct}$. Функция $f(x - ct)$ описывает волну, бегущую вправо, а функция $g(x + ct)$ — волну, бегущую влево. Таким образом, решение представляется в виде суммы двух бегущих волн.

Задача 5. (*) Решите уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ с граничными условиями $u|_{x^2+y^2=1} = f(x, y)$, где функция f непрерывно дифференцируема.

Указание. Знания об уравнении и функциях Бесселя здесь не пригодятся.

Задача 6. Найдите $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Задача 7. Найдите все такие $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $x^3(x - 1)^2 f(x) = 0$.

Задача 8. Найдите все такие $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $(\sin x) f(x) = 0$.

Задача 9. (*) Вычислите $\Delta \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Решения

Задача 1

Ищем решения в виде (метод Фурье)

$$u(t,x) = z(t)y(x)$$

Подставим в $u_t = c^2 u_{xx}$

$$z'(t)y(x) = c^2 z(t)y''(x)$$
$$\frac{z'(t)}{z(t)c^2} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda$$

задача Ш.-Л. $\lambda = -\mu^2$

$$y(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$$
$$y'(0) = y'(l) = 0$$
$$A = 0,\ \mu = \frac{k\pi}{l}$$
$$y(x) = B\cos\frac{k\pi}{l}x$$
$$z'(t) = \lambda c^2 z(t) = -\left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2 z(t)$$
$$z(t) = C_{kl}^{-\left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2 t}$$
$$U(t,x) = \sum A_{k,l}^{-\left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2 t}\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

Подставим в $u(0,x) = \chi_{[0,l/2]}$

$$u(0,x) = \sum A_k \cos\frac{k\pi}{l}x = \chi_{[0,l/2]} = \begin{cases} 1,\ x\in\left[0,\frac{l}{2}\right] \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

Раскладываем $\chi_{[0,l/2]}$ в ряд Фурье

$$A_k = \frac{\int\limits_0^l \chi_{[0,l/2]}\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx}{\int\limits_0^l \cos^2\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx}$$

$$\int\limits_0^l \cos^2\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx = \int\limits_0^l \frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)}{2}dx = \frac{1}{2}l + \sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)\frac{l}{2\pi k\cdot 2}\Big|_0^l = \frac{1}{2}l$$

$$\int\limits_0^l \chi_{[0,l/2]}\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx = \int\limits_0^{l/2}\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx = \frac{l}{\pi k}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\Big|_0^{l/2} = \frac{l}{\pi k}\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0,\ k = 2n \\ \frac{l}{\pi k},\ k = 4n+1 \\ -\frac{l}{\pi k},\ k = 4n+3 \end{cases}$$

$$A_k = \begin{cases} 0,\ k = 2n \\ \frac{2}{\pi k},\ k = 4n+1 \\ -\frac{2}{\pi k},\ k = 4n+3 \end{cases}$$

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(4n+1)}e^{-\left(\frac{(4n+1)\pi c}{l}\right)^2 t}\cos\frac{(4n+1)\pi}{l}x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(4n+3)}e^{-\left(\frac{(4n+3)\pi c}{l}\right)^2 t}\cos\frac{(4n+3)\pi}{l}x$$

Задача 2

$$u(x,t) = y(x)z(t)$$
$$u_t = u_{xx}$$
$$y(x)z'(t) = y''(x)z(t)$$
$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda = -\mu^2$$
$$y(x) = A\sin\mu x + B\cos\mu x$$
$$u(t,0) = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$u_x(t,\pi) = 0 \Rightarrow \mu A\cos\mu\pi = 0 \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{2} + k$$

Решение задачи будем искать в виде ряда Фурье

$$u(t,x) = \sum u_k(t)\sin\left(\left(\frac{1}{2}+k\right)x\right)$$

Подставим в $u_t = u_{xx} + te^{-t}\sin(3x/2)$

$$k \neq 1$$
$$u_k'(t) = -\mu_k^2 u_k(t) \Rightarrow u_k(t) = c_k e^{-\mu_k^2}$$
$$k = 1$$
$$u_1'(t) = -\frac{9}{4}u_1(t) + te^{-t}$$
$$u_1(t) = c_1 e^{-\mu_1^2 t} + \frac{4}{5}e^{-t}\left(t - \frac{4}{5}\right) = c_1 e^{-\frac{9}{4}t} + \frac{4}{5}e^{-t}\left(t - \frac{4}{5}\right)$$
$$u(t,x) = \left(c_1 e^{-\frac{9}{4}t} + \frac{4}{5}e^{-t}\left(t - \frac{4}{5}\right)\right)\sin\frac{3x}{2} + \sum_{k=0,\ k\geqslant 2} c_k e^{-\mu_k^2 t}\sin\left(\left(\frac{1}{2}+k\right)x\right)$$
$$u(0,x) = (c_1 - \frac{16}{25})\sin\frac{3x}{2} + \sum_{k=0,\ k\geqslant 2} c_k\sin\left(\left(\frac{1}{2}+k\right)x\right) = 1 - \cos(x)$$

Разложим $1-\cos(x)$ по $\sin\mu_k x$

$$1 - \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sin\mu_k x$$
$$f_k = \frac{\int\limits_0^\pi (1-\cos(x))\sin\left(\left(\frac{1+2k}{2}\right)x\right)dx}{\int\limits_0^\pi \left(\left(\frac{1+2k}{2}\right)x\right)dx}$$
$$\int\limits_0^\pi \frac{1-\cos((1+2k)x)}{2}dx = \frac{1}{2}\pi - \frac{\sin((1+2k)\pi)}{2(1+2k)} = \frac{1}{2}\pi$$
$$\int\limits_0^\pi \sin\left(\frac{1+2k}{2}x\right)dx = -\frac{2}{1+2k}\cos\left(\frac{1+2k}{2}x\right)\Big|_0^\pi = \frac{2}{1+2k}$$
$$-\int\limits_0^\pi \cos(x)\sin\left(\frac{1+2k}{2}x\right)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin(kx - \frac{1}{2}x) + \sin(kx + \frac{3}{2}x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-\frac{1}{2}}\cos((k-\frac{1}{2})x)\right|_0^\pi + \frac{1}{k+\frac{3}{2}}\cos((k+\frac{3}{2})x)\Big|_0^\pi$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2k-1}(-1) + \frac{2}{2k+3}(-1)\right) = -\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3} = -\frac{4k+2}{(4k^2+4k-3)}$$

$$f_k = \frac{\int\limits_0^{\pi}(1-\cos(x))\sin\left(\left(\frac{1+2k}{2}\right)x\right)dx}{\int\limits_0^{\pi}\sin^2\left(\left(\frac{1+2k}{2}\right)x\right)dx} = \frac{\frac{2}{1+2k} - \frac{2(2k+1)}{(4k^2+4k-3)}}{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= 4\left(\frac{4k^2+4k-3-(2k+1)^2}{(1+2k)(4k^2+4k-3)\pi}\right) = \frac{-16}{(1+2k)(4k^2+4k-3)\pi}$$

$$c_1 - \frac{16}{25} = -\frac{16}{3\cdot 5\pi} \Rightarrow c_1 = \frac{16}{5}\left(-\frac{1}{3\pi}+\frac{1}{5}\right)$$

$$c_k = \frac{-16}{(1+2k)(4k^2+4k-3)\pi}\ \forall k \neq 1$$

$$u(t,x) = \left(\frac{16(3\pi-5)}{75\pi}e^{-\frac{9}{4}t} + \frac{4}{5}e^{-t}(t-\frac{4}{5})\right)\sin\frac{3x}{2} + \sum_{k=0,\ k\geqslant 2}\frac{-16}{(1+2k)(4k^2+4k-3)\pi}e^{-(\frac{1}{2}+k)^2 t}\sin\left(\left(\frac{1}{2}+k\right)x\right)$$

Задача 3

$$u(x,t) = \sum_{n\geqslant 1} T_n(t)\sin(nx)$$

$$\sum_{n\geqslant 1} T_n''(t)\sin(nx) = \sum_{n\geqslant 1}(-n^2T_n(t)\sin(nx) + T_n(t)\sin(nx)) + \sin x$$

$$n = 1$$

$$T_1''(t) = -T_1(t) + T_1(t) + 1 = 1$$

$$T_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_2 t + c_3 \quad T_1(0) = c_3 \quad T_1'(t) = t + c_2 \quad T_1'(0) = c_2$$

$$u(0,x) = T_1(0)\sin x = c_3\sin x = \sin 2x \quad c_3 = 0$$

$$u_t(0,x) = T_1'\sin x = c_2\sin x = \sin 3x \quad c_2 = 0$$

$$n \neq 1$$

$$T_n''(t) = -n^2T_n(t) + T_n(t)$$

$$T_n''(t) = (1-n^2)T_n(t)$$

$$T_n(t) = c_{0,n}\sin(t\sqrt{n^2-1}) + c_{1,n}\cos(t\sqrt{n^2-1})$$

$$u(0,x) = \sum_{n>1} c_{1,n}\sin nx = \sin 2x$$

При $n = 2:\ c_{1,2} = 1$, при остальныз $n : 0$
При $n = 1:\ c_{1,1} = 0$

$$u_t'(t,x) = \sum_{n\geqslant 1} T_n'(t)\sin(nx) = \sum_{n\geqslant 1}(\sqrt{n^2-1}\cdot c_{0,n}\cdot\cos(t\sqrt{n^2-1}) - \sqrt{n^2-1}\cdot c_{1,n}\cdot\sin(t\sqrt{n^2-1}))\sin nx$$

$$u_t'(0,x) = \sum_{n\geqslant 1}\sqrt{n^2-1}\cdot c_{0,n}\cdot\sin nx = \sin 3x$$

При $n = 3:\ \sqrt{8}\cdot c_{0,3} = 1,\ c_{0,3} = \frac{1}{\sqrt{8}}$
Тогда

$$u(t,x) = \frac{t^2}{2}\cdot\sin x + \frac{1}{\sqrt{8}}\sin\sqrt{8}t\cdot\sin 3x + \cos\sqrt{3}t\sin 2x$$

Задача 4

а)

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+ct)+\phi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$
$$u(0,x) = \frac{\phi(x)+\phi(x)}{2} = \phi(x)$$
$$u_t(t,x) = \frac{c\cdot\phi'(x+ct) - c\cdot\phi'(x-ct)}{2} + \frac{c}{2c}(\psi(x+ct)+\psi(x-ct))$$
$$u_t(0,x) = \frac{1}{2}(\psi(x)+\psi(x)) + \frac{c}{2}(\phi'(x)-\phi'(x)) = \psi(x)$$
$$u_{tt}(t,x) = \frac{1}{2}\cdot(c\psi'(x+ct) - c\psi'(x-ct)) + \frac{c^2\phi''(x+ct)+c^2\phi''(x-ct)}{2}$$
$$u_x(t,x) = \frac{\phi'(x+ct)+\phi'(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}(\psi(x+ct)-\psi(x-ct))$$
$$u_{xx}(t,x) = \frac{\phi''(x+ct)+\phi''(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}(\psi'(x+ct)-\psi'(x-ct))$$
$$\frac{1}{2}(c\psi'(x+ct)-c\psi'(x-ct)) + \frac{c^2}{2}(\phi''(x+ct)+\phi''(x+ct)) = c^2\left(\frac{1}{2c}(\psi'(x+ct)-\psi'(x+ct)) + \frac{\phi''(x+ct)+\phi''(x-ct}{2}\right.$$

б)

$$u(0,0) = u(0,\pi) = 0 \qquad \phi(0) - 0,\ \phi(\pi) = 0$$
$$u_t(t,0) = u_t(t,\pi) = 0,\ u_t(0,0) = u_t(0,\pi) = 0$$
$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0$$
$$\phi(2\pi k + x) = \phi(x),\ \phi(2\pi k - x) = -\phi(x),\ \psi(2\pi k + x) = \psi(x),\ \psi(2\pi k - x) = -\psi(x)$$

ψ, ϕ – неч., следовательно $u(t,0) = 0$

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+ct)+\phi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$
$$0 = u(t,\pi) = \frac{\phi(\pi+ct)+\phi(\pi-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int\limits_{\pi-ct}^{\pi+ct}\psi(s)ds$$

в)

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \quad u(0,x) = \phi(x)$$
$$u_x(0,0) = u_x(0,\pi) = 0 \quad u_t(0,x) = \psi(x)$$
$$u_{tx}(0,0) = u_{xt}(0,0) = \psi'(0) = 0 \quad \psi'(\pi) = 0$$
$$u_x(0,0) = \phi'(0) = 0 \quad u_x(0,\pi) = \phi'(\pi) = 0$$

Продолжим на $\mathbb{R}$

$$\phi(2\pi k + x) = \phi(x) \quad \phi(2\pi k - x) = \phi(x)$$
$$\psi(2\pi k + x) = \psi(x) \quad \psi(2\pi k - x) = \psi(x)$$

Тогда ϕ, ψ четные, а ϕ', ψ' нечетные

$$u_x(t,0) = \frac{\phi'(ct)+\phi'(-ct)}{2} + \frac{1}{2c}(\psi(ct)-\psi(-ct))$$
$$\frac{\phi'(ct)+\phi'(-ct)}{2} = 0 \text{ так как } \psi' \text{ неч} \qquad (\psi(ct)-\psi(-ct)) = 0 \text{ так как } \psi \text{ чет}$$
$$u_x(t,\pi) = \frac{\phi'(\pi+ct)+\phi'(\pi-ct)}{2} + \frac{1}{2c}(\psi(\pi+ct)-\psi(\pi-ct))$$
$$\frac{\phi'(\pi+ct)+\phi(\pi-ct)}{2} = 0 \text{ так как } \psi' \text{ неч} \qquad (\psi(\pi+ct)-\psi(\pi-ct)) = 0 \text{ так как } \psi \text{ чет}$$

Задача 5

Оператор лаплеса в полярных координатах $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

$$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0$$

$$\Phi(R'' + \frac{1}{r}R') = -\frac{R}{r^2}\Phi''$$

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{r^2R'' + IR'}{R} = \text{const}$$

Рассмотрим $\Phi'' = -c\Phi$, если $-c > 0$:

$$\Phi = ae^{\sqrt{c}\varphi} + be^{-\sqrt{c}\varphi}$$

$$ae^{\sqrt{c}(\varphi+2\pi)} + be^{-\sqrt{c}(\varphi+2\pi)} = ae^{\sqrt{c}\varphi} \cdot e^{\sqrt{c}2\pi} + be^{-\sqrt{c}\varphi} \cdot e^{-\sqrt{c}2\pi} = ae^{\sqrt{c}\varphi} + be^{-\sqrt{c}\varphi}$$

И из-за периодичности $a = b = 0$

Если $-c = 0$:

$$\Phi = a\varphi + b$$

$$a(\varphi + 2\pi) + b = a\varphi + b \qquad a \cdot 2\pi = 0$$

Из-за периодичности $a = 0$

Если $-c < 0$

$$\Phi = a \cdot \cos(\sqrt{c}\varphi) + b\sin(\sqrt{c}\varphi)$$

$$a\cos(\sqrt{c}(\varphi + 2\pi)) + b\sin(\sqrt{c}(\varphi + 2\pi)) = a\cos(\sqrt{c}\varphi) + b\sin(\sqrt{c}\varphi)$$

$$\sqrt{c}2\pi = 2\pi n \qquad c = n^2,\ n \in \mathbb{Z}^2$$

Тогда

$$r^2R'' + rR' = n^2R$$

$$r^{n+2}R'' + r^{n+1}R = r^n n^2 R \qquad l = r^n R$$

$$l' = R'r^n + nr^{n-1}R$$

$$r(2n-1)l' = R'r^{n+1}(2n-1) + nr^nR(2n-1)$$

$$l'' = R''r^n + nr^{n-1}R' + nr^{n-1}R' + n(n-1)r^{n-2}R = R''r^n + 2nr^{n-1}R' + n(n-1)r^{n-2}R$$

$$r^2l'' = R''r^{n+2} + 2nr^{n+1}R' + n(n-1)r^nR$$

$$r^2l'' - r(2n-1)l' = R''r^{n+2} + 2nr^{n+1}R' + n(n-1)r^nR - R'r^{n+1}(2n-1) - nr^nR(2n-1) = R''r^{n+2} - n^2r^nR + R'r^n$$

Пусть $y = l'$: $r^2y' - r(2n-1)y = 0$

$$\frac{y'}{y} = \frac{r(2n-1)}{r^2} = \frac{2n-1}{r}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dr}{r}(2n-1)$$

$$\ln(y) = \ln(c \cdot r^{2n-1}) \qquad y = cr^{2n-1} \quad l = c_1r^{2n} + c_0$$

$$R = \frac{l}{r^n} = c_1r^n + c_0r^{-n}$$

При $n = 0$:

$$r^2R'' + rR' = 0 \quad rR'' = -R' \quad z = R'$$

$$rz' = -z \quad r\frac{dz}{dr} = -z \quad \frac{dr}{r} = -\frac{dz}{z} \quad \ln(z) = \ln(c_2r^{-1})$$

$$z = c_2r^{-1} = R'$$

$$R = c_3\ln(r) + c_4$$

$$r = 1,\ R = c_4$$

Тогда

$$u_n = (\tilde{c}_1^n r^n + \frac{\tilde{c}_0^n}{r^n})(\tilde{a}^n\cos(n\varphi) + \tilde{b}^n\sin(n\varphi))$$

$$u(1, \Phi) = \sum_n u_n = \sum_n R_n(1)\Phi_n(\varphi) = f(x, y) = f(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

$f(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ раскладывается по $\{1, \cos(n\varphi), \sin(n\varphi)\}$ с коэффициентами a_0 при 1, a_n при $\cos(n\varphi)$, b_n при $\sin(n\varphi)$, прировняв коэффициенты:

$$(\tilde{c}_1^n + \tilde{c}_0^n)\tilde{b}^n = b_n$$
$$(\tilde{c}_1^n + \tilde{c}_0^n)\tilde{a}^n = a_n$$
$$bc_4 = a_0$$

Задача 6

$$(\lim_{\varepsilon\to 0+}(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}), \varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\varphi dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\sin t\cdot\varphi(\varepsilon t)dt \qquad \frac{x}{\varepsilon} = t$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\varphi(0)dt = \varphi(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon} = \pi\cdot\delta(x)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\varphi(\varepsilon t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(0)dt$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}(\varphi(\epsilon t) - \varphi(0))dt = 0$$

$$\frac{\sin t}{t}(\varphi(\epsilon t) - \varphi(0)) \leqslant \left|\frac{\sin t}{t}\right| 2\max_t|\varphi(t)| = c_0\left|\frac{\sin t}{t}\right|$$

По теореме Лебега

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}(\varphi(\epsilon t) - \varphi(0))dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{\sin t}{t}(\varphi(\epsilon t) - \varphi(0))dt = 0$$

Задача 7

Рассмотрим $(x-1)^2 f(x) = 0$.

$$0 = ((x-1)(x-1)f(x), \varphi) \Rightarrow (x-1)f(x) = c\delta(x-1)$$

По задаче с семинара
Общее решение = однор + частное

$$(x-1)f_{\text{ч}} = c\cdot\delta(x-1) \qquad (x-1)f_{\text{одн}} = c\cdot\delta(x-1)$$
$$(x-1)(f_{\text{ч}} + f_{\text{одн}}) = c\cdot\delta(x-1)$$

Любое решение h принадлежит множеству $f_{\text{ч}} + f_{\text{одн}}$ так как $h - f_{\text{ч}} \in f_{\text{одн}}$
$f_{\text{ч}} = -c\cdot\delta'(x-1)$ подходит:

$$((x-1)f_{\text{ч}}, \varphi) = -c(\delta'(x-1), (x-1)\varphi) = c(\delta(x-1), ((x-1)\varphi)')$$
$$= c(\delta(x-1), \varphi + (x-1)\varphi') = c(\delta(x-1), \varphi)$$
$$f = f_{\text{ч}} + f_{\text{одн}} = c_0\cdot\delta(x-1) + c_1'(x-1)$$

Для $x^2 f = 0$ на семинаре: $f = c_2\delta(x) + c_3\delta'(x)$
Для $x^3 f = 0$ налогично: $f = c_2\delta(x) + c_3\delta'(x) + c_4\delta''(x)$
Тогда $f = c_0\delta(x-1) + c_1\delta'(x-1) + c_2\delta(x) + c_3\delta'(x) + c_4\delta''(x)$

Задача 8

Задача 9

Домашнее задание (листок) 4
Анализ, 2 курс, весенний семестр 2021
Дедлайн: 25.06.2021

Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$. Преобразованием Фурье от функции f называется функция

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Обратным преобразованием Фурье функции $\hat{f}(\lambda)$ называется

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R},$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения: $\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} d\lambda$ (даже в смысле главного значения этот интеграл может расходиться).

Напомним, что если функция f в точке x удовлетворяет условию Дини, то верна формула обращения:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x).$$

Задача 1. Лемма Римана на $\mathbb{R}$. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$. Докажите, что

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt = 0.$$

Другими словами, преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$.

Задача 2. Принцип локализации для интеграла Фурье. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности $\mathcal{O}(x_0)$ некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$, то в выражениях $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x_0)$ и $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))(x_0)$ внешние интегралы, задающие оператор $\mathcal{F}^{-1}$, сходятся или расходятся одновременно (внутренние сходятся, так как $f, g \in L^1(\mathbb{R})$). Если эти интегралы сходятся, то рассматриваемые выражения принимают одно и то же значение.

Задача 3. Найти преобразования Фурье следующих функций:

$$f(x) = x\chi_{[a,b]}(x); \qquad f(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^3 e^{-|x|}).$$

Задача 4. Какой функцией будет преобразование Фурье функции $f(x)$, если известно, что функция f 1) четная, 2) нечетная, 3) вещественная, 4) удовлетворяет условию $f(x) = \overline{f(-x)}$?
Аналогичный вопрос про функцию f, если этими свойствами обладает ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)(\lambda)$ по переменной λ.

Задача 5. Пусть $f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$, причем $f'(x)$, $f''(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Доказать, что преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$.

Задача 6. Доказать, что функция $f(x) = e^{-x^2}$ принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Принадлежит ли функция $f(x) = e^{-x^2}\cos(e^{x^2})$ пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?

Задача 7. Регуляризация с помощью свертки. a) Докажите, что если $f, \phi \in L^1(\mathbb{R})$, $\phi \in C^n(\mathbb{R})$ и $\phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, то $f * \phi \in C^n(\mathbb{R})$ и $(f * \phi)^{(n)} = f * \phi^{(n)}$.

b) Пусть функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Придумайте последовательность функций ϕ_n, такую что $f * \phi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f * \phi_n)(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Указание: выберите ϕ_n в виде δ- образной последовательности: в виде "узких и высоких" бесконечно гладких "шапочек". Их можно построить стартуя с одной такой шапочки ϕ, $\operatorname{supp} \phi \in [-1, 1]$, правильно ее нормировав. Эту шапочку явно можно не предъявлять (хотя было бы хорошо).

Замечание. Можно доказать, что если потребовать только чтобы функция f лежала в $L^1(\mathbb{R})$, то бесконечно гладкие функции $f * \phi_n$ будут приближать функцию f в смысле $L^1(\mathbb{R})$. Такая свертка — классический способ регуляризации функций.

Задача 8. Найти преобразование Фурье следующих обобщенных функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$a)\ \operatorname{arctg} x \qquad\qquad b)\ V.p.\frac{\cos x}{x}$$

Задача 9. (*) Формула Пуассона. Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству Шварца. Докажите равенство

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Указание: левая часть является периодической функцией. Найдите для нее коэффициенты Фурье по ортогональной системе $\{e^{inx}\}$ и убедитесь в равномерной сходимости соответствующего ряда Фурье.

Задача 10. (*) Пусть функция $u = u(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_+$ принадлежит пространству Шварца по переменной x равномерно по y (т.е., константы в оценках производных $u(x, y)$ по по переменной x не зависят от y) и является решением следующей задачи в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0 \quad \text{(уравнение Лапласа)},\\ &u(x, 0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

причем $u(x, y) \to 0$ при $y \to +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Проверьте, что преобразование Фурье функции $u(x, y)$ по переменной x имеет следующий вид

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = \mathcal{F}(\varphi)(\lambda) e^{-y|\lambda|},\ \forall y \geqslant 0.$$

С помощью формулы обращения получите формулу для решения рассматриваемой задачи в виде интеграла Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} \varphi(\xi) d\xi.$$

Решения

Задача 1

Задача 2

Задача 3

Задача 4

Задача 5

Задача 6

Задача 7

Задача 8

Задача 9

Задача 10