2К

Мат. Анализ. Семинар № 13

① Тригонометрические ряды Фурье

Задача 1. Разложить

$$f(x)=e^{\lambda x}, \quad \lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}, \quad x\in[-\pi,\pi]$$

в комплексный ряд Фурье.

Решение: Найдем коэффициенты Фурье

$$C_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\lambda x}\cdot e^{-ikx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\lambda-ik}\,e^{(\lambda-ik)x}\Big|_{\pi}^{-\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi(\lambda-ik)}\cdot\frac{e^{\lambda\pi}\cdot e^{-ik\pi}-e^{-\lambda\pi}\cdot e^{ik\pi}}{2}, \quad k\in\mathbb{Z} \qquad (\lambda\neq ik)$$

$$e^{\pm ik\pi}=(-1)^k; \qquad \boxed{C_k=\frac{(-1)^k\cdot sh(\lambda\pi)}{\pi(\lambda-ik)}}$$

$$sh(\lambda\pi)=\frac{e^{\lambda\pi}-e^{-\lambda\pi}}{2}=\frac{e^{\alpha\pi}e^{i\beta\pi}-e^{-\alpha\pi}\cdot e^{-i\beta\pi}}{2}=$$

$$=\frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{2}\cdot\cos\beta\pi+i\cdot\frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{2}\cdot\sin\beta\pi=$$

$$=sh\,\alpha\pi\cdot\cos\beta\pi+i\,ch\,\alpha\pi\cdot\sin\beta\pi$$

$$e^{i\beta\pi}=\cos\beta\pi+i\sin\beta\pi$$

Ответ: $$f(x)=\frac{sh\,\lambda\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\lambda-ik}e^{ikx} \qquad (*)$$

Применим к ряду (*) равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{\|f\|^2}{2\pi}$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{\lambda x}|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha x} dx = \frac{e^{2\alpha x}}{2\alpha}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{e^{2\alpha\pi} - e^{-2\alpha\pi}}{\alpha \cdot 2} = \frac{sh(2\alpha\pi)}{\alpha}$$

$$|c_k|^2 = \frac{|sh(\lambda\pi)|^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{|\alpha + i(\beta - k)|^2} = \frac{sh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi}{\pi^2(\alpha^2 + (\beta-k)^2)}$$

Получаем числовой ряд:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (\beta-k)^2} = \frac{\pi \cdot sh\, 2\alpha\pi}{2\alpha(sh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi)}.$$

Использовали: $|sh(\lambda\pi)|^2 =$

$= |sh\,\alpha\pi \cdot \cos\beta\pi + i\, ch\,\alpha\pi \cdot \sin\beta\pi| =$

$= sh^2\alpha\pi \cdot \cos^2\beta\pi + ch^2\alpha\pi \cdot \sin^2\beta\pi =$

$= sh^2\alpha\pi(1 - \sin^2\beta\pi) + ch^2\alpha\pi \cdot \sin^2\beta\pi =$

$= sh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi(ch^2\alpha\pi - sh^2\alpha\pi) = sh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi$

Разложение в ряд Фурье с использованием ряда Тейлора по $z = e^{ix}$.

Задача 2. Разложить в триг. ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}, \quad |a| < 1, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Решение: Подставим $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

И воспользуемся формулой $z = e^{ix}$

$$\boxed{z^n = e^{inx} = \cos nx + i\sin nx}$$

$$\cos x = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

$$\frac{a\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{a(z^2 - 1)}{2i(z - a(z^2+1) + a^2 z)} = \frac{a(z^2 - 1)}{2i(z-a)(1-az)} =$$

$$\left[z - az^2 - a + a^2 z = (z-a) - az(z-a) = (z-a)(1-az) \right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-az} - \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1 - \frac{a}{z} - 1 + az}{(1-az)(z-a)} \right) z =$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{a(z^2 - 1)}{(z-a)(1-az)} =$$

По условию $|z| = 1 \Rightarrow |az| < 1, \ \left|\frac{a}{z}\right| < 1$

Воспользуемся суммой геометрической прогрессии.

$$= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(az)^n - \sum\left(\frac{a}{z}\right)^n\right) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}a^n\left(z^n - z^{-n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}a^n\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}a^n \sin nx$$

Получили ряд Фурье.

Ответ: $\frac{a\sin x}{1-2a\cos x - a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin nx$

На первом семинаре получили:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x \leq 2\pi$$

(Можно взять ряд $\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ и подставить $x \to \pi - x$).

Задача 2 Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

Решение: Обозначим $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$, $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

$$f(x) = u + iv = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n} + i\,\frac{\sin nx}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx + i\sin nx}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$$

$\boxed{e^{ix} = z}$ Сходится при $|z| \leq 1$, $z \neq 1$.

Напоминание из 1 курса:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z}{3} + \frac{z}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Следовательно, $u(x) + i v(x) = \ln\left(\frac{1}{1-e^{ix}}\right)$

$$\frac{1}{1-\cos x - i\sin x} = \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\sin\frac{x}{2} + i\cos\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)} = R\, e^{i\alpha},$$

модуль — аргумент

$$R = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}; \quad R \in \mathbb{R}_+, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\ln\left(R \cdot e^{i\alpha}\right) = \ln R + i\alpha}$$

Следовательно $\ln\left(\frac{1}{1-e^{ix}}\right) = \ln R + i\alpha = u + iv$

$$u(x) = \ln R = \boxed{-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}}$$

$$v(x) = \alpha = \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

Пусть $f(x)$ — 2π периодическая функция. Пусть её ряд Фурье: $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}$

<u>Задача 3.</u> Найти ряд Фурье функции $f(x+a)$, $x\in\mathbb{R}$.

<u>Решение:</u>

1) Неформально: $f(x+a) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{in(x+a)} =$

$= \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{ina} \cdot e^{inx} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \cdot e^{inx}$, $\boxed{d_n = c_n \cdot e^{ina}}$

2) Докажем это строго: по определению

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y) e^{ina} \cdot e^{iny} dy =$$

$\boxed{\text{Замена: } x+a=y}$ $= e^{ina} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy = e^{ina} \cdot c_n$

<u>Значит:</u> $d_n = e^{ina} \cdot c_n$

<u>Задача 4.</u> Ряд Фурье функции а) $f(-x)$

б) $\overline{f(x)}$; в) $e^{idx} \cdot f(x)$;

г) $f(x)\cdot\cos mx$, д) $f(x)\sin mx$

Решение:

а) $f(-x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{-inx} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n} e^{inx}$

т.е. $d_n = c_{-n}$. Обоснование аналогично.

б) $\overline{f(x)} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n} e^{-inx} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_{-n}} e^{inx}$

т.е. $\boxed{d_n = \overline{c_{-n}}}$. Если $f(x) = \overline{f(x)}$, то $c_n = \overline{c_{-n}}$

в) $f(x) \cdot e^{i\alpha x}$. Для каких α это будет 2π-периодическая функция? $\alpha = m \in \mathbb{Z}$

$f(x) \cdot e^{imx} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \cdot e^{imx} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i(n+m)x} =$

$n+m=k$

$= \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_{k-m} e^{ikx} \Rightarrow \boxed{d_n = c_{n-m}}$

г) $f(x) \cdot \cos mx$

$\cos mx = \dfrac{e^{imx} + e^{-imx}}{2}$

$f(x) \cdot \cos mx = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \dfrac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} e^{inx} =$

$= \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{c_n}{2} \cdot e^{i(n+m)x} + \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{c_n}{2} e^{i(n-m)x} =$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{C_{k+m} + C_{k-m}}{2} \right) e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k e^{ikx}.$$

$$d_n = \frac{C_{n+m} + C_{n-m}}{2}$$

---

g) $f(x)\cdot \sin mx$, $d_n = \dfrac{C_{n+m} - C_{n-m}}{2i}$

Задача 5. Пусть $f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n \cdot e^{inx}$

Найти: а) ряд $f(2x)$, б) ряд $f(kx)$, $k\in\mathbb{N}$

Решение:

Неформально: $f(2x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n \cdot e^{i2nx}$,

$$f(2x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \cdot e^{inx}, \quad d_n = \begin{cases} C_{n/2}, & n\text{-четно} \\ 0, & n\text{-нечетн} \end{cases}$$

Проверка: $\boxed{2x = y}$

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(2x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(2x) e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} f(y) e^{-in\frac{y}{2}} d\frac{y}{2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(y) e^{-i\frac{ny}{2}} dy + \int_{2\pi}^{4\pi} f(y) e^{-i\frac{ny}{2}} dy \right) =$$

во втором интеграле замена $y = 2\pi + x$

$f(2\pi + x) = f(x)$, т.к. периодическая

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-\frac{inx}{2}}\left(1+e^{-in\pi}\right)dx\right) =$$

$1+e^{-in\pi} = 1+1$, если n - четно, $= 1-1$, если n-нечет.

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-\frac{inx}{2}}dx = c_{\frac{n}{2}}, & n - \text{четно} \\ 0, & \text{если } n - \text{нечетно}. \end{cases}$$

б) $d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(kx)e^{-inx}dx = \quad (kx = y) \; x = \frac{y}{k}$

$$= \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi k} f(y)\,e^{in\frac{y}{k}}dy = \frac{1}{2\pi k}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} f(y)e^{\frac{iny}{k}}dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-\frac{inx}{k}}\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{-i\frac{n}{k}\cdot 2\pi j}\right)dx$$

Замена $y = 2\pi j + x$, $j = 0,\dots,k-1$

$f(2\pi j + x) = f(x)$

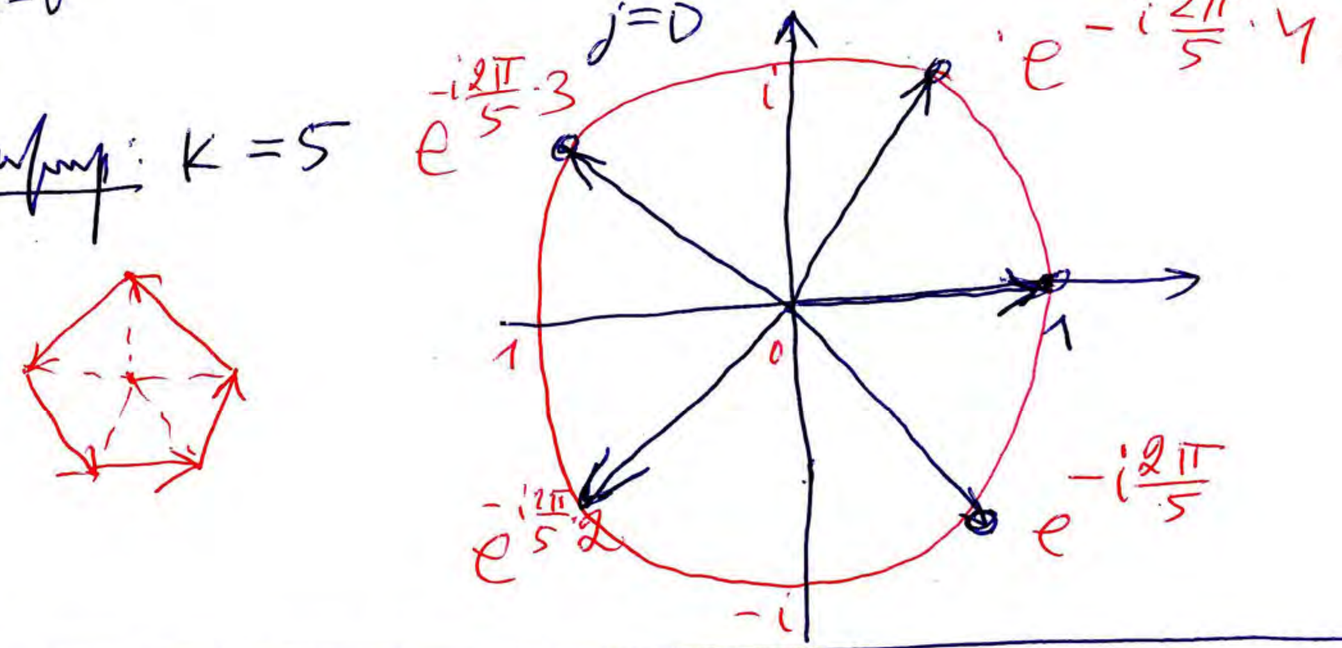
$$\sum_{j=0}^{k-1} e^{-i\frac{n}{k}2\pi j} = \begin{cases} k, & \text{если } n \,\vdots\, k \\ 0, & \text{если } n \not\vdots\, k \end{cases}$$

Докажем это: $n \not\vdots\, k$

Это сумма p-степеней корней k-степени из 1, где $n = k\cdot l + p$, $1 \le p \le k-1$.

$$= \sum_{j=0}^{k-1} e^{-i\frac{p}{k}2\pi j} = \sum_{j=0}^{n} \left(e^{-i\frac{2\pi j}{k}}\right)^p = 0.$$

Напр.: $K=5$



2) Свёртка функций.

$f(x), g(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, периодические.

Определение: $f*g(x) = F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cdot g(x-y)\,dy$

Свойства: 1) $f*g = g*f$.

Замена $x-y=z$

$$f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)f(x-z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)f(x-y)\,dy = g*f(x)$$

2) $f*\mathbb{1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy = C\cdot\mathbb{1}$, $C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy$

это не единица по умножению.

Единицы нет! (Докажите это).

3) Линейность $(f_1+f_2)*g = f_1*g + f_2*g$.

Задача 6. (На дом).
Найти свертку $\sinh x$ и $\cosh x$

Задача 7. (На дом).
Пусть $f(x) \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $g(x) \sim \sum d_n e^{inx}$
Найти S_n, $f*g(x) \sim \sum s_n e^{inx}$

Зад 8. Нет един., т.е $\nexists!\, e(x)$:
$\forall f(x)$ $f*e = f$.
