Листок 4. Дифференциальные формы и формула Стокса
Гладкие многообразия
Крайний срок сдачи 19.12.2020

1. Пусть v_1, v_2, v_3, v_4 — линейно независимые векторы пространства V. Существуют ли $\xi_1, \xi_2 \in V$ такие, что

(а) $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4 = \xi_1 \wedge \xi_2$;

(б) $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4 + v_4 \wedge v_1 = \xi_1 \wedge \xi_2$?

2. Пусть X, Y — векторные поля, ω — 1-форма. Докажите соотношение:

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]).$$

3. (а) Найдите площадь области, ограниченной астроидой:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(б) Вычислите интеграл $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ для любого контура $L \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Как ответ соотносится с формулой Стокса?

4. Покажите, что гладкое n-мерное многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда на нём существует нигде не вырождающаяся n-форма.

5. (а) Докажите, что на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ существует и единственна с точностью до множителя 2-форма, инвариантная относительно группы $SO(3)$. (б) Выпишите эту форму явно в координатах φ, ψ (широта и долгота). (в) Найдите все $SO(3)$-инвариантные 2-формы на $\mathbb{R}^3$. Проверьте, что при ограничении на S^2 получаются формы, описанные в пункте (б).

6. Пусть A, B, C — гладкие функции переменных $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, такие, что

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Найдите решение системы в частных производных

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C \end{cases}$$

с неизвестными функциями P, Q, R. *(Указание: достаточно найти такую 1-форму η, что выполнено: $A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy = d\eta$.)*

7. * Запишем элементы $(p, \tau) \in T^*M$ кокасательного расслоения к многообразию M в координатах как $(p, v) = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, где $\tau = q_1 dp_1 + \ldots + q_n dp_n$.

(а) Докажите, что форма, заданная формулой $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$ в каждой карте является невырожденной формой на M.

(б) Чему равна n-я внешняя степень $\omega^{\wedge^n}$ формы ω? Выведите отсюда ориентируемость кокасательного расслоения.

Решения

Задача 1

(а)

$$\xi_1 = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 + \gamma_1 v_3 + \delta_1 v_4$$
$$\xi_2 = \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma_2 v_3 + \delta_2 v_4$$

$$\xi_1 \wedge \xi_2 =$$
$$\alpha_1\beta_2 v_1 \wedge v_2 + \alpha_1\gamma_2 v_1 \wedge v_3 + \alpha_1\delta_2 v_1 \wedge v_4 + \beta_1\alpha_2 v_2 \wedge v_1 + \beta_1\gamma_2 v_2 \wedge v_3 + \beta_1\delta_2 v_2 \wedge v_4 +$$
$$\gamma_1\alpha_2 v_3 \wedge v_1 + \gamma_1\beta_2 v_3 \wedge v_2 + \gamma_1\delta_2 v_3 \wedge v_4 + \delta_1\alpha_1 v_4 \wedge v_1 + \delta_1\beta_2 v_4 \wedge v_2 + \delta_1\gamma_2 v_4 \wedge v_3 =$$

$$(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) v_1 \wedge v_2 + (\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2) v_1 \wedge v_3 + (\alpha_1\delta_2 - \delta_1\alpha_2) v_1 \wedge v_4$$
$$+ (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) v_2 \wedge v_3 + (\beta_1\delta_2 - \delta_1\beta_2) v_2 \wedge v_4 + (\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2) v_3 \wedge v_4 =$$

$$v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4$$

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1\delta_2 - \delta_1\alpha_2 = 0 \\ \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 = 1 \\ \beta_1\delta_2 - \delta_1\beta_2 = 0 \\ \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2 = 1 \end{cases}$$

Откуда следует

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \Rightarrow \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2 = 0 \quad \text{но } \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2 = 1$$

Следовательно такой пары ξ_1, ξ_2 не существует

(б)

$$v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4 + v_4 \wedge v_1 =$$
$$v_1 \wedge v_2 - v_3 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 - v_1 \wedge v_4 =$$
$$(v_1 - v_3) \wedge (v_2 - v_4) = \xi_1 \wedge \xi_2$$

Задача 2

Пусть $\omega = fdg,\ f, g \in C^\infty(U)$, тогда $d\omega = d(fdg) = df \wedge dg$, тогда

$$d\omega(X, Y) = df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X) = (Xf)Yg - (Yf)Xg$$
$$X\omega(Y) = X(fdg(Y)) = X(fYg) = (Xf)Yg + fXYg$$
$$Y\omega(X) = Y(fdg(X)) = Y(fXg) = (Yf)Xg + fYXg$$
$$\omega([X, Y]) = fdg([X, Y]) = f(XY - YX)g$$

Откуда следует

$$X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = (Xf)Yg - (Yf)Xg = d\omega(X, Y)$$

Задача 3

(а)

$$\begin{cases} x = a\cos(t)^3 \\ y = a\sin(t)^3 \end{cases}$$

$$S = 4\int_0^a ydx = 4\int_{x=0}^{x=a} y\frac{dx}{dt}dt =$$

$$4\int_{x=0}^{x=a} a\sin(t)^3 3a\cos(t)^2\sin(t)(-\sin(t))dt =$$

$$4\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0} a\sin(t)^3 3a\cos(t)^2\sin(t)(-\sin(t))dt =$$

$$12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^4\cos(t)^2dt$$

Распишем $\sin(t)^4\cos(t)^2$

$$\sin(t)^4\cos(t)^2 = \frac{(2\sin(t)\cos(t))^2}{4}\cdot\frac{2\sin(t)^2}{2} =$$

$$\frac{\sin(2t)^2}{4}\cdot\frac{2\sin(t)^2}{2} = \frac{\sin(2t)^2}{4}\cdot\frac{1-\cos(2t)}{2} =$$

$$\frac{\sin(2t)^2 - \sin(2t)^2\cos(2t)}{8} = \frac{1-\cos(4t)}{16}\cdot\frac{\sin(2t)^2}{\cos}(2t)8$$

Тогда

$$S = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos(4t)}{16} - \frac{\sin(2t)^2\cos(2t)}{8}\right)dt =$$

$$\frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(4t))dt - \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)^2\cos(2t)dt =$$

$$\frac{3}{4}a^2\left(t - \frac{\sin(4t)}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{2}a^2\left(\frac{\sin(2t)^3}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{3\pi a^2}{8} - \frac{3a^2}{16}\sin(2\pi) - \frac{3a^2}{12}\sin(\pi)^3 = \frac{3\pi a^2}{8}$$

(б) Заметим, что $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ – производная $\arctan(\frac{x}{y})$, тогда

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$

Разобьем контур на отрезки, на которых нет точек пресечения. Тогда будем интегрировать по промежуткам (t_1,t_2), где $x(t_1)=x(t_2),\ y(t_1)=y(t_2)$. Вычислим значения на промежутках через замену $x(t)=\sin(\varphi),\ y(t)=\cos(\varphi)$, откуда

$$\arctan\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right)\Big|_{t_2}^{t_1} = \varphi|_{s_1+2\pi}^{s_1} = 2\pi$$

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 2\pi k \quad \text{где } k \text{ – степень отображения}$$

Задача 4

Пусть μ – нигде не вырождающаяся n-форма на многообразии M. Тогда для каждой локальной карты $(U,x^1,\ldots,x^n)$ существует гладкая функция $f\neq 0$, такая что $\mu = fdx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$. Тогда $\mu(\partial_1,\ldots,\partial_n) = f \neq 0$. Тогда мы можем для каждой точки найти карту, для которой $f>0$ (рассмотрев любую карту и заменив x^1 на $-x^1$ если $f<0$). Тогда рассмотрим 2 пересекающихся карты $(U_\alpha, x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^n)$ и $(U_\beta, x_\beta^1,\ldots,x_\beta^n)$, для их пересечения выполнено:

$$\mu = fdx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^n = gdx_\beta^1\wedge\ldots\wedge dx_\beta^n \qquad f,g>0$$

$$0 < g = \mu(\partial_1^\beta,\ldots,\partial_n^\beta)^=(\det d\phi_{\alpha\beta})\mu(\partial_1^\alpha,\ldots,\partial_n^\alpha) = (\det d\phi_{\alpha\beta})f$$

Откуда следует что $\det(d\phi_{\alpha\beta}) > 0$ тогда построенный таким образом атлас будет иметь ориентацию

Пусть A – ориентация, тогда для каждой карты U_α с A предположим что $\mu_\alpha = dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n$. Рассмотрим тогда $\{\rho_\alpha\}$, . Тогда $\mu := \sum\limits_\alpha \rho_\alpha \mu_\alpha$ нигде не вырождающаяся гладкая n-форма на M. Тогда для каждого $p \in M$ существует окрестность U такая что $\sum\limits_\alpha \rho_\alpha \mu_\alpha$ – конченая сумма $\sum\limits_{i=1}^k \rho_i \mu_i$, тогда в окрестности p

$$\mu(\partial_1^1, \ldots, \partial_n^1) = \sum_{i=0} (\det d\phi_{1k}) \rho_i > 0 \ \Leftrightarrow \mu \neq 0$$

Задача 5

Рассмотрим $\omega = zdx \wedge dy + ydz \wedge dx + xdy \wedge dz$, проверим что такая форма подходит

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in SO(3) \qquad \det(A) = 1$$

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z$$
$$z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z$$
$$\omega(x', y', z') = z' dx' \wedge dy' + y' dz' \wedge dx' + x' dy' \wedge dz' =$$
$$(a_3 x + b_3 y + c_3 z)\left((a_1 b_2 - a_2 b_1)\, dx \wedge dy + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\, dy \wedge dz + (c_1 a_2 - c_2 a_1)\, dz \wedge dx\right) +$$
$$(a_2 x + b_2 y + c_2 z)\left((a_3 b_1 - a_1 b_3)\, dx \wedge dy + (b_3 c_1 - b_1 c_3)\, dy \wedge dz + (c_3 a_1 - c_1 a_3)\, dz \wedge dx\right) +$$
$$(a_3 x + b_3 y + c_3 z)\left((a_2 b_3 - a_3 b_2)\, dx \wedge dy + (b_2 c_3 - b_3 c_2)\, dy \wedge dz + (c_2 a_3 - c_3 a_2)\, dz \wedge dx\right)$$

Посчитаем коэффициент при $dx \wedge dy$:

$$z \left(c_3 \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} - c_2 \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \right) = z \det(A) = z$$

Аналогично при $dy \wedge dz, \ dz \wedge dx$

$$\omega(x', y', z') = zdx \wedge dy + ydz \wedge dx + xdy \wedge dz = w(x, y, z)$$

Зададим её через сферические координаты

$$x = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \quad y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \quad z = r\cos(\varphi)$$

$$dx \wedge dy =$$
$$(\sin(\varphi)\cos(\theta)dr + r\cos(\theta)\cos(\varphi)d\varphi - r\sin(\varphi)\sin(\theta)d\theta) \wedge$$
$$(\sin(\varphi)\sin(\theta)dr + r\sin(\theta)\cos(\varphi)d\varphi + r\sin(\varphi)\cos(\theta)d\theta) =$$
$$dr \wedge d\varphi \left(\frac{r}{4}\sin(2\theta)\sin(2\varphi) - \frac{r}{4}\sin(2\theta)\sin(2\varphi)\right) +$$
$$d\varphi \wedge d\theta \left(\frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)\cos(\theta)^2 + \frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)\sin(\theta)^2\right) +$$
$$d\theta \wedge dr \left(-r\sin(\varphi)^2\sin(\theta)^2 - r\sin(\varphi)^2\cos(\theta)^2\right) =$$
$$\frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)\, d\varphi \wedge d\theta - r\sin(\varphi)^2 d\theta \wedge dr$$

$$dy \wedge dz =$$
$$(\sin(\varphi)\sin(\theta)dr + r\cos(\varphi)\sin(\theta)d\varphi + r\sin(\varphi)\cos(\theta)d\theta) \wedge (\cos(\varphi)dr - r\sin(\varphi)d\varphi) =$$
$$dr \wedge d\varphi\left(-r\sin(\varphi)^2\sin(\theta) - r\cos(\varphi)^2\sin(\theta)\right) + d\varphi \wedge d\theta\left(r^2\sin(\varphi)^2\cos(\theta)\right) + d\theta \wedge dr\left(\frac{r}{2}\sin(2\varphi)\cos(\theta)\right) =$$
$$-r\sin(\theta)dr \wedge d\varphi + r^2\sin(\varphi)^2\cos(\theta)d\varphi \wedge d\theta + \frac{r}{2}\sin(2\varphi)\cos(\theta)d\theta \wedge dr$$

$$dz \wedge dx = (\cos(\varphi)dr - r\sin(\varphi)d\varphi) \wedge (\sin(\varphi)\cos(\theta)dr + r\cos(\varphi)\cos(\theta)d\varphi - r\sin(\varphi)\sin(\theta)d\theta) =$$
$$dr \wedge d\varphi\left(r\cos(\varphi)^2\cos(\theta) + r\sin(\varphi)^2\cos(\theta)\right) + d\varphi \wedge d\theta\left(r^2\sin(\varphi)^2\sin(\theta)\right) + d\theta \wedge dr\left(\frac{r}{2}\sin(2\varphi)\sin(\theta)\right) =$$
$$r\cos(\theta)dr \wedge d\varphi + r^2\sin(\varphi)^2\sin(\theta)d\varphi \wedge d\theta + \frac{r}{2}\sin(2\varphi)\sin(\theta)d\theta \wedge dr$$

$$\omega =$$
$$\frac{r^3}{2}\sin(2\varphi)\cos(\varphi)d\varphi \wedge d\theta - \frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)\sin(\varphi)d\theta \wedge dr + \left(-\frac{r^2}{2}\sin(\varphi)\sin(2\theta)\right)dr \wedge d\varphi +$$
$$r^3\sin(\varphi)^3\cos(\theta)^2 d\varphi \wedge d\theta + \frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)\sin(\varphi)\cos(\theta)^2 d\theta \wedge dr + \frac{r^2}{2}\sin(\varphi)\sin(2\theta)\, dr \wedge d\varphi +$$
$$r^3\sin(\varphi)^3\sin(\theta)^2 d\varphi \wedge d\theta + \frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)\sin(\varphi)\sin(\theta)^2 d\theta \wedge dr =$$
$$r^3\sin(\varphi)d\varphi \wedge d\theta$$

Так как радиус сферы фиксирован, то $\omega = \sin(\varphi)d\varphi \wedge d\theta$.
Проверим, что ω единственна – зададим её в какой-то точке (x, y), так как на сфере точку можно перевести в любую другую ортогональным преобразованием, то

$$f(x, y)\, d\varphi \wedge d\theta = |J| f(x', y')\, d\varphi \wedge d\theta$$

Где J – якобиан отображения перехода. Тогда по значению в точке (x, y) определяются значения формы в остальных точках, и мы получаем единственность с точностью до домножения на константу(какое-то число).

Задача 6

ν – замкнутая, $\mathbb{R}^3$ стягиваемо, а следовательно ν – точная. Существует оператор $K:\ \Omega^{k+1}(M \times I) \to \Omega^k(M)$ и существует $F:\ M \times I \to M$, $F^*\nu \in \Omega^k(M \times I)$, тогда

$$d(K(F^*\nu)) = \nu$$
$$F:\ \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z, t) \to (tx, ty, tz)$$
$$F^*\omega = A(tx, ty, tz)\, d(ty) \wedge d(tz) - B(tx, ty, tz)\, d(tx) \wedge d(tz) + C(tx, ty, tz)\, d(tx) \wedge d(ty) =$$

$$A(tx, ty, tz)(ydt + tdy) \wedge (zdt + tdz) -$$
$$B(tx, ty, tz)(xdt + tdx) \wedge (zdt + tdz) +$$
$$C(tx, ty, tz)(xdt + tdx) \wedge (ydt + tdy) =$$

$$(B(tx, ty, tz)\, tz - C(tx, ty, tz)\, yt)\, dt \wedge dx +$$
$$(C(tx, ty, tz)\, tx - A(tx, ty, tz)\, tz)\, dt \wedge dy +$$
$$(A(tx, ty, tz)\, yt - B(tx, ty, tz)\, tx)\, dt \wedge dz + (\text{члены без } t)$$

$$K(F^*\omega) =$$
$$\left(\int_0^1 (B(tx, ty, tz)\, tz - C(tx, ty, tz)\, yt)\, dt\right) dx +$$
$$\left(\int_0^1 (C(tx, ty, tz)\, tx - A(tx, ty, tz)\, tz)\, dt\right) dy +$$
$$\left(\int_0^1 (A(tx, ty, tz)\, yt - B(tx, ty, tz)\, tx)\, dt\right) dz$$

Задача 7*

(а)

(б)