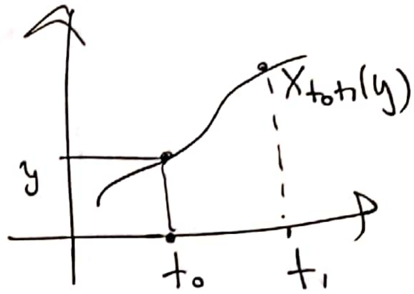
Лекция 4

$\dot{x} = f(t, x)$

$X_{t_0 t_1}(y)$



$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = y \end{cases} \longmapsto \hat{x}$ – её решение.

$X_{t_0 t_1}(y) = \hat{x}(t_1)$

В прошлый раз доказали (1, 2, 3)

1) $X_{tt} = id$

2) $X_{t_2 t_3} \circ X_{t_1 t_2} = X_{t_1 t_3}$

3) $X_{ts}^{-1} = X_{st}$

~~Лемма~~

4) $X_{ts}(y)$ непр. по (t, s, y)

Лемма:

$\dot{x} = f(t, x, \lambda)$, $f \in C$

$X_{t_0 t_1}^{\lambda}$ – его оператор Коши

Тогда $X_{t_0 t_1}^{\lambda}(y)$ непр. по (y, t_0, t_1, λ)

Д-во:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = y \end{cases} (*) \iff \begin{cases} \frac{dz}{ds} = f(t_0 + s, z, \lambda) \\ z = 0 \end{cases} (**)$$

$z(s) = x(t_0 + s)$

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds}(s) = \dot{x}(t_0 + s) = f(t_0 + s, x(t_0 + s), \lambda) = f(t_0 + s, z(s), \lambda) \\ z = 0 \end{cases}$$

– задача Коши с параметром (λ, t_0, y)

→ все непр. зависит.

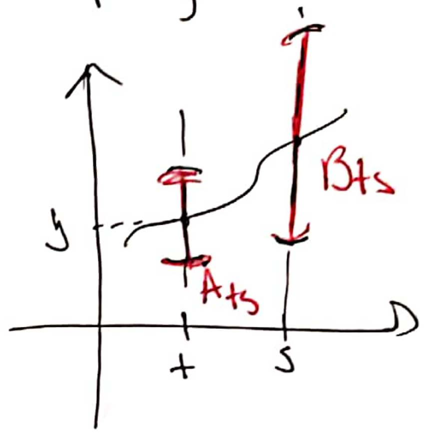
$(**)$ — з. Коши с параметром (λ, t_0, y)

$Z_{\lambda, t_0, y}(s)$ — непр

$\Rightarrow X^{\lambda}_{t_0 t_1}(y) = Z_{\lambda, t_0, y}(t_1 - t_0)$ $\Rightarrow$ тоже непр зависит

$\Rightarrow$ (4) — тоже доказано

(5) X_{ts} опр на $A_{ts} \subset \mathbb{R}^n$
↑ откр.



$B_{ts} = X_{ts}(A_{ts}) = \cancel{X_{st}(A_{ts})} = A_{st}$

$X_{ts} : A_{ts} \to A_{st}$

$X_{st} : A_{st} \to A_{ts}$ } непр.

<u>Вывод</u>: X_{ts} — $\boxed{\text{гомеоморфизм.}}$

Автономные системы Автономные DY

$\to$ нет зависимости от времени.

$\dot{x} = f(x)$ (#)

<u>Лемма</u>: Если x — реш (#), то $\tilde{x}(t) = x(t+a)$ — тоже решение $\forall a \in \mathbb{R}$

<u>Д-во</u>: $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t+a) = f(x(t+a)) = f(\tilde{x}(t))$

$\square$

~~Пространство опр~~

$\Rightarrow$ Для автономных DY $X_{t_0 t_1} = X_{t_0+a,\, t_1+a}$ (Важно только $t_1 - t_2$)

<u>Опр</u> Преобразование потока авт. DY, это
$g^t = X_{0,t}$.

<u>Свойства</u>:

1) $g^0 = id$

2) $g^{t+s} = g^t \circ g^s$ <u>Д-во</u>: $g^t \circ g^s = X_{0,t} \circ X_{0s} = \underbrace{X_{s,t+s}}_{\text{сдвиг на } s} \circ X_{0s} = X_{0,t+s} = g^{t+s}$

3) $g^{-t} = (g^t)^{-1}$

4) $g^t(x)$ непр по (t,x)

5) g^t - гомеоморфизм

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (*) \qquad f: \Omega \to \mathbb{R}^n$$

Опр: реш. $x: I \to \mathbb{R}^n$ наз <u>непродолжимым</u>, если не сущ. решения $\hat{x}: J \to \mathbb{R}^n$, $I \subsetneq J$: $\hat{x}|_I = x$.

<u>Теорема</u>: Всякое решение продолжается до непродолжимого (Если верна Теорема существования и единственности): $f, f'_x \in C$).

<u>Д-во</u>: Пусть $\mathfrak{X}$ - множество всех решений $(*)$

1) Рассм.

$$J = \bigcup_{(x: I \to \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{X}} I$$

J - откр. ~~[illegible]~~ множество

<u>Утв</u>: J - интервал

Если $t \in J$, то $t \in I$, для $(x: I \to \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{X}$

Тогда $[t_0, t] \subset I$ т.е. $[t_0, t_1] \subset J$

$\Rightarrow J$ - интервал $(\inf J, \sup J)$

2) Определим

$\bar{x}: J \to \mathbb{R}^n$

$\bar{x}(t) = x(t)$, если $(x: I \to \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{X}$, $t \in I$.

$\bar{x}$

Корректность: $\left.\begin{matrix} x_1: I_1 \to \mathbb{R}^n \\ x_2: I_2 \to \mathbb{R}^n \end{matrix}\right\} \in \mathfrak{X}$

$t \in I_1 \cap I_2$

$x_1(t) \overset{?}{=} (x_2(t))$ - Следует из глоб. теор. о единств. от $x_1|_{I_1 \cap I_2} = x_2|_{I_1 \cap I_2}$

3) $\bar{x} \in \mathcal{X}$

Если $t \in J$, то $\exists (x: I \to \mathbb{R}^n) \in \mathcal{X}$, $t \in I$

Тогда $B_\delta(t) \subset I$

$$\bar{x}\Big|_{B_\delta(t)} = x\Big|_{B_\delta(t)}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) = f(t, \bar{x}(t))\Big|.$$

4) $\bar{x}$ - непродолжимо. Если нет, то $\exists (\tilde{x}: \tilde{I} \to \mathbb{R}^n) \in \mathcal{X}$

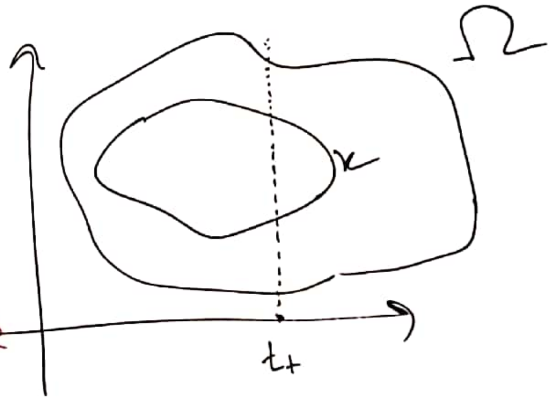
$\tilde{I} \supsetneq J$ - противоречие!

Теорема о продолжимости решения до границы компакта.

$K \subset \Omega$ - компакт

$(t_0, x_0) \in \Omega$

$x: J \to \mathbb{R}^n$ - непродолжимое решение $(*)$



$\exists T < \sup J$: ← Если $\sup = \infty$, то просто $T \in \mathbb{R}$

$(t, x(t)) \notin K$ при $t \in (T, \sup J)$

Д-во: 1) $\sup J = +\infty$ - очевидно:

$T = \max(t \mid (t, x) \in K)$

2) $\sup J = t_+ \in \mathbb{R}$

Напоминание: Если $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$, тогда решение задачи Коши $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(\tilde{t}) = \tilde{x} \end{cases}$ определено на $B_\tau(\tilde{t})$

$\tau = \tau(\varepsilon, \delta, M, L)$, где $\overline{B_\delta(\tilde{t})} \times \overline{B_\varepsilon}(\tilde{x}) \subset \Omega$

3) $\rho = \min_K \left(\mathrm{dist}\left((t,x), \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega\right)\right)$ ← непр. положит.

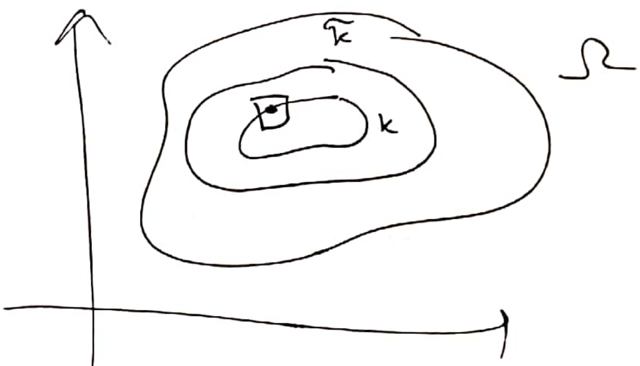
$\mathrm{dist}(p, A) \le \mathrm{dist}(q, A) + \mathrm{dist}(p,q)$
$\mathrm{dist}(q,A) - \mathrm{dist}(p,q) \le \mathrm{dist}(p,A)$

$\rho > 0$

Тогда $\tilde{K} = \{ (t,x) : \mathrm{dist}((t,x), K) \le \rho/2 \}$, $\tilde{K} \subset \Omega$.
↓
замкнуто

$\tilde{K}$ - ограничено : $\left(K \in B_R(0,0)\right) \Rightarrow \tilde{K} \subset B_{R+\rho/2}(0,0)$

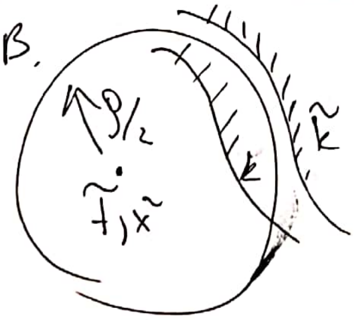
$\tilde{K}$ - компакт.



4) Положим $\xi = \delta = \rho/4$
Тогда $\forall \hat{x}, \hat{t}$ $\underbrace{\overline{B_\rho(\hat{t})} \times \overline{B_\xi(\hat{x})}}$ $\subset \tilde{K}$

$\sup_B f \le \sup_{\tilde{K}} |f| = M$

$|f_x'|$ $|f_x'| =: L$



Итак, $\tau = \tau_K$ можно считать одинаковыми для всех $(\hat{t}, \hat{x}) \subset K$.

5) Положим $T = t_+ - \tau_K$
Если $(\hat{t}, x(\hat{t})) \in K$
$\exists \hat{t} \in (T, t_+)$
, то задача Коши $(\S) \begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(\hat{t}) = x(\hat{t}) \end{cases}$

имеет решение y, опр τ-окр-ти $\hat{t}$
$y : B_{\tau_K}(\hat{t}) \to \mathbb{R}^n$

С другой стороны, x - тоже решение задачи Коши $(\S)$
Тогда $\exists \bar{y}$ - непродолжимое решение $(\S)$, $\bar{y}(t_0) = x(t_0) = x_0$

$\Rightarrow \bar{y}$ – реш. (*)

Но $\bar{y}$ опр при $t = t_+$ (и равно $y(t_+)$).

а $\bar{x}$ – непродолжимое решение, не опр при $t = t_+$

Противоречие с тем, что $\bar{x}$ – продолж. $\bar{y}$. $\square$

Линейные ДУ

$\dot{x} = A(t)x + bt$

$A(t) \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$

$x \in \mathbb{R}^n$

$A, b \in C(I)$

$\uparrow$ интервал.

Тогда выполнено условие сущ. и единственности.

$f'_x = A$.

$\boxed{\text{Теорема}}$: Пусть $A, b \in C(I)$. Тогда все решения $\dot{x} = A(t) \cdot x + bt$ продолжаются на весь I.

Д-во: Пусть $[\alpha, \beta] \subset I$. Рассмотрим $x(t)$ – решение ($x(\alpha)$ – определено). Докажем, что x определено на всем $[\alpha, \beta]$

(Устремляя $\beta \to \sup I$ получим требуемое.)

2) $\|A(t)\| < M$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$

$|b(t)| \le B$

~~Заметим~~ ~~$\forall u$~~

$\forall u$ $|Au| \le M|u|$ $\quad M = n \cdot \max\limits_{t \in [\alpha, \beta]} |a_{ij}(t)|$

$|(Au)_j| \le \max \ldots (\cdot \sum |u_i|) \le M \cdot \max |u_i|$

$\underbrace{\max |(Au)_j|}_{\|Au\|_\infty} \le \underbrace{M \max |u_i|}_{\|u\|_\infty}$

$\|Au\|_2 \le \tilde{M} \|u\|_2$

$\uparrow$ евкл. норма.

$$\frac{d}{dt}\left(\|x\|^2\right)=\frac{d}{dt}\left(\langle x,x\rangle\right)=2\langle x,\dot{x}\rangle \le 2\|x\|\left(\|Ax+b\|\right) \le$$

$$\le 2\|x\|\left(\tilde{M}\|x\|+B\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\|x\|\right)=\frac{1}{2\|x\|}\cdot\frac{d}{dt}\left(\|x\|^2\right)\le \tilde{M}\|x\|+B.$$

Пусть $R(t)=\|x(t)\|$

$S(t)=e^{-(\tilde{M}+1)t}R(t)$

$$\frac{ds}{dt}=-(\tilde{M}+1)\cdot S(t)+e^{-(\tilde{M}+1)t}\dot{R}(t)\le e^{-(\tilde{M}+1)t}\left(-R(t)\cdot(\tilde{M}+1)+R(t)\tilde{M}+B\right)\le$$

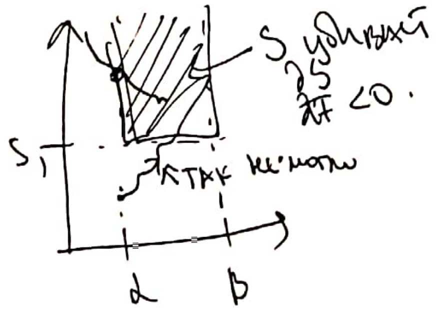
$$\le e^{-(\tilde{M}+1)t}\left(B-R(t)\right)\le e^{-}$$

~~Вывод: Пусть R(t) ≥ R₀ Тогда~~

$$\left(B-e^{(\tilde{M}+1)t}S(t)\right)\le e^{-(\tilde{M}+1)t}\left(B-e^{(\tilde{M}+1)\alpha}S(t)\right)$$

Вывод: Пусть $\cancel{R(t)\ge R_0}$ $S(\alpha)=S_0$

$S_1=\frac{B\cdot e^{-(\tilde{M}+1)\alpha}}{\alpha}$, то $S(t)$ не может превзойти $\max(S_0,S_1)=\bar{S}$



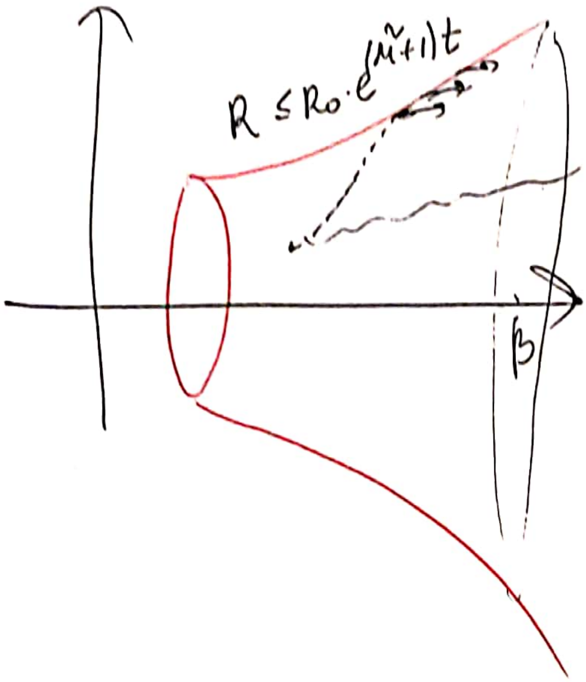
$\Rightarrow$ S – ограничена

Тогда $R(t)=e^{(\tilde{M}+1)t}S(t)\le e^{(\tilde{M}+1)B}\bar{S}(t)$

т.е. R не может неограниченно возрастать

т.к. R определено вплоть до β.

Геометрическая инт-ция



На границе воронки вектор. поле (касат) смотрит „внутр."

$\Rightarrow$ может „покинуть" компакт только через β.

Но β может быть каким угодно.