2к.

Мат Анализ. Семинар № 7

Ортогональные дополнения

① Ряды Фурье

На прошлом семинаре представляли вектора гильбертова пр-ва с помощью рядов Фурье. Были ортонормированные системы. Рассмотрим ортогональную систему $\{\psi_n\}$, $(\psi_i, \psi_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.

По ней можно построить ортонормированную систему $\varphi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$

Пусть c_n - коэффициенты Фурье для $u \in H$ относительно $\{\varphi_n\}$:

$$c_n = (u, \varphi_n) = \frac{1}{\|\psi_n\|}(u, \psi_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2} \cdot \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$$

В частности, если система $\{\psi_n\}$ полная, то $\forall u \in H$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n, \text{ где } a_n = \frac{(u, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$$ - коэфф. Фурье по $\{\psi_n\}$

Ряд сходится по норме пр-ва H.

Напишем равенство Парсеваля для системы $\{\psi_n\}$.

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u,\psi_n)^2}{\|\psi_n\|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n\|^2 a_n^2$$

<u>Пример.</u> Рассмотрим в пр-ве $H = L_2(-\pi,\pi)$ ортогональную систему: $1, \cos nt, \sin nt$

$$\|1\|^2 = 2\pi, \quad \|\cos nt\|^2 = \|\sin nt\|^2 = \pi$$

Выберем функцию $f(t) = |t|$, $-\pi \le t \le \pi$

$$a_0 = \frac{1}{\|1\|^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cdot\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} t\,d\sin nt =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(t\sin nt\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nt\,dt\right) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos \pi n - 1) = \begin{cases} 0, & n\text{-чёт} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n\text{-нечёт} \end{cases}$$

<u>Следовательно:</u> <u>Ряд Фурье</u>

$$|t| = \frac{\pi}{2}\cdot 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos(2n-1)t$$

Подставим $t = 0$ и получим ряд:

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}}$$

Напишем равенство <u>Парсеваля</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = 2\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\pi\cdot\frac{16}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$= \frac{2}{3}\pi^3$$

Получаем: $\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

---

(2) Ортогональные дополнения

Пусть M – множество гильбертова пространства H. Не обязательно замкнутое, не обязательно линейное подпр-во.

Определение: Ортогональное дополнение к мн-ву M: $M^{\perp} = \{x \in H : (x,y) = 0 \ \forall y \in M\}$

$0 \in M^{\perp}$, $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, $x \perp x \Longleftrightarrow x = 0$.

Задача 1. а) Множество $M^{\perp}$ является замкнутым подпространством H;

б) Если M – замкнутое подпространство, то H представляется в виде суммы: $H = M \oplus M^{\perp}$

в) Если M – линейное подпространство H, (не обязательно замкнутое), то $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$, где $\overline{M}$ – замыкание M

2) Мн-во M – плотно в $H \iff$

$\iff$: $M^{\perp} = \{0\}$

<u>Решение</u> а) Если $x_1 \in M^{\perp}$, $x_2 \in M^{\perp}$, то

$\forall y \in M \quad (x_1, y) = 0, \ (x_2, y) = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2, y) = 0$

т.е. $x_1 + x_2 \in M^{\perp}$; $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda x, y) = \lambda (x, y) = 0$

Следовательно, $M^{\perp}$ – подпространство

Если $x_n \to x$ в H и $(x_n, y) = 0 \ \forall y \in M$,

тогда $(x_n, y) \to (x, y) \Rightarrow (x, y) = 0 \Rightarrow x \in M^{\perp}$

б) Если M – совпадает с H, то $M^{\perp} = \{0\}$

если $M \neq H$, то $\exists u \notin M$. Рассмотрим

её проекцию $P_M u = v \in M$.

Тогда $h = u - v \perp M$ (Задача 1 из прошлого семинара), причем $h \neq 0$.

Следовательно $h \in M^{\perp} \neq \{0\}$

<u>Значит</u>: $\forall u \in H \ \exists v \in M, \ \exists h \in M^{\perp}$:

$$u = v + h \Rightarrow H = M \oplus M^{\perp},$$

причем v и h однозначно определяются по вектору u.

В самом деле, если есть 2 пары:

$$u = v_1 + h_1 = v_2 + h_2, \quad v_1, v_2 \in M, \; h_1, h_2 \in M^\perp$$

тогда $\underset{M}{v_1 - v_2} = \underset{M^\perp}{h_2 - h_1}$, но $M \cap M^\perp = \{0\}$

Следовательно, $v_1 = v_2$ и $h_1 = h_2$

в) $\overline{M}$ – замкнутое подпространство в H.
Поэтому, в силу б) $H = \overline{M} \oplus \overline{M}^\perp$
Ясно, что $M^\perp = \overline{M}^\perp$. Значит $H = \overline{M} \oplus M^\perp$
Следовательно $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

г) Если M плотно в H, то $\overline{M} = H$.
Следовательно $\overline{M}^\perp = \{0\}$, но $\overline{M}^\perp = M^\perp$,
поэтому $M^\perp = \{0\}$. Обратно, пусть M
не плотно в H, тогда $\exists u \in H: u \notin \overline{M}$
Пусть $v = P_{\overline{M}}(u)$ – проекция u на $\overline{M}$.
Тогда $h = u - v \in \overline{M}^\perp$, $h \neq 0$, т.к. $u \neq v$
Следовательно $\overline{M}^\perp \neq \{0\}$

Задача 2. В пространстве $L_2(-1,1)$ построить ортогональное дополнение к следующим множествам:
а) $M = \{x \in L_2(-1,1) : x(t) = 0 \;\; \forall t \leq 0\}$

б) $M = \{ x \in L_2(-1,1) : x(t) = x(-t) \ \forall t \in (-1,1) \}$

в) $M = \{ x \in L_2(-1,1) : \int_{-1}^{1} t\, x(t)\, dt = 0 \}$

г) $M = \{ x \in C[-1,1] : x(0) = 0 \}$

д) $M =$ множество всех ступенчатых функций с конечным числом ступенек.

Решение.

а) $M^\perp = \{ y \in L_2(-1,1) \quad y(t) = 0 \ \forall t \geq 0 \}$ (*)

Включение $\supseteq$ очевидно, т.к. $y \perp x \ \forall x \in M$

Проверим обратное включение. $\forall$ функцию $f(t) \in L_2(-1,-1)$ можно представить в виде $f(t) = x(t) + y(t)$, где $x(t) \leq 0$ при $t \leq 0$, $y(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Очевидно, что $x \perp y$, и $x \in M$. Поэтому

Пусть $y \in M^\perp \Rightarrow \int_{-1}^{1} y(t) x(t)\, dt = 0 \ \forall x \in M$.

Возьмем $x(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $x(t) = y(t)$ при $t \geq 0$

Тогда $\int_{0}^{1} y^2(t)\, dt = 0 \Rightarrow y(t) = 0 \ \forall t \geq 0$,

т.е. $y(t) \in$ правой части (*).

б) $M^\perp = \{ y \in L_2(-1,1) : y(t) = -y(-t) \}$.

замкн.

(мн-во нечетных ф-ций, под-пр-во)

Опять, включение $\supseteq$ очевидно, т.к. $\forall$ нечетная функция ортогональна $\forall$ четной функции.

Пусть $f(t) \in L_2(-1,1)$ – любая функция. $\exists$ четная функ $x(t)$ и нечетная функ $y(t)$:

$$f(t) = x(t) + y(t).$$

Достаточно взять $x(t) = \dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$

$$y(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

Легко проверить, что $x(t)$ – четная, $y(t)$ – нечетн.

т.е. $L_2(-1,1) = M \oplus \{$нечетные функц$\}$

Но $L_2(-1,1) = M \oplus M^{\perp}$

Следовательно $M^{\perp} = \{$нечетные ф-ии$)$

в) $M^{\perp} = \{\alpha \cdot t,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ – прямая, проходящая через t. Действительно, если $y(t) = \alpha \cdot t$, то $\int_{-1}^{1} y(t) \cdot x(t)\,dt = \alpha \int_{-1}^{1} t\,x(t) = 0\ \forall x \in M$

Значит, опять, проверим $\supseteq$.

Пусть $y(t) \in M^{\perp}$, т.е. $\int_{-1}^{1} y(t)\,x(t)\,dt = 0\ \forall x \in M$

Любую функцию $f(t) \in L_2(-1,1)$ найдем число λ: $\int_{-1}^{1} (f(t) - \lambda t)\,t = 0$;

$$\int_{-1}^{1} t f(t)\,dt = \lambda \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2\lambda}{3}$$

т.е. $\lambda = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1} t\cdot f(t)\,dt$, т.е. $\underbrace{f(t)-\lambda t}_{=x(t)} \in M$

т.е. $f(t) = x(t) + \lambda\cdot t$, где $x(t)\in M$

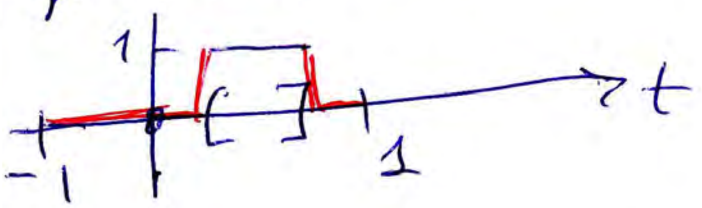
Следовательно $L_2(-1,1) = M \oplus \{$функции вида $\alpha\cdot t\}$

но $L_2(-1,1) = M\oplus M^\perp$

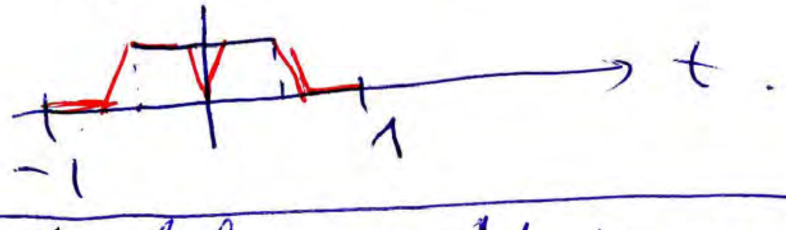
Значит $M^\perp = \{\alpha t,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$

г) $M^\perp=\{0\}$. Надо проверить, что любую функцию из $L_2(-1,1)$ можно приблизить непрерывными функциями с условием $f(0)=0$. Достаточно проверить для ступенчатых функций, и даже для одной ступеньки вида $\chi_{[a,b]}(t)$, где $[a,b]\subset[-1,1]$.

Если $0\notin[a,b]$



Если $0\in[a,b]$



д) $M^\perp=\{0\}$, Очевидно, что M плотно в $L_2(-1,1)$.

Задача 3. Пусть M - любое множество из H.

$$M^\perp = \left(\overline{\mathcal{L}(M)}\right)^\perp$$

Решение: Пусть $y \in M^\perp$, тогда $\forall \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\forall x_k \in M$, $k=1,\dots,n$

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, y\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k, y) = 0$$

т.е. $y \in (\mathcal{L}(M))^\perp \Rightarrow y \in \overline{\mathcal{L}(M)}^\perp$

Обратное включение очевидно, т.к. $M \in \overline{\mathcal{L}(M)}$.

Следствие. Система функций $\{\varphi_n\}$ в гильбертовом пространстве образует базис, если $\{\varphi_n\}^\perp = \{0\}$, т.е. если $\exists f \in H: (f, \varphi_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, тогда $f = 0$.

Это удобный способ проверить, что система образует базис (ортогональный или неортогональный)

Задача 4. В пространстве $L_2(0,\pi)$ найти расстояние от вектора $x(t) = t^n$ до подпространства $H_0 = \{ \int_0^\pi y(t)\,dt = 0 \}$

Решение: Найдем $H_0^\perp$.

Понятно $H_0^\perp = \{\alpha \cdot 1,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Доказательство как в задаче 2б.

Тогда $L_2(0,\pi) = H_0 \oplus \{\alpha \cdot 1,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Тогда расстояние от $x(t) = t^n$ до H_0 равно длине проекции $x(t)$ на $\{\alpha \cdot 1\}$

т.е. $$d = \frac{(t^n, 1)}{\|1\|} = \frac{\int_0^\pi t^n dt}{\left(\int_0^\pi 1\, dt\right)^{1/2}} = \frac{\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^\pi}{\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{\pi^{n+\frac{1}{2}}}{n+1}.$$