2к

Мат. Анализ. Семинар № 26.

Обобщенные функции (распределения)

① Пространство основных (пробных) ф-ций.

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, Ω - открытое мн-во

Пространство: $\mathcal{D}(\Omega)=C_0^\infty(\Omega)$

$C_0^\infty(\Omega)=\{\varphi(x),\ x\in\Omega\}$

$C_0^\infty(\Omega)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, с компактным носителем в Ω, т.е.

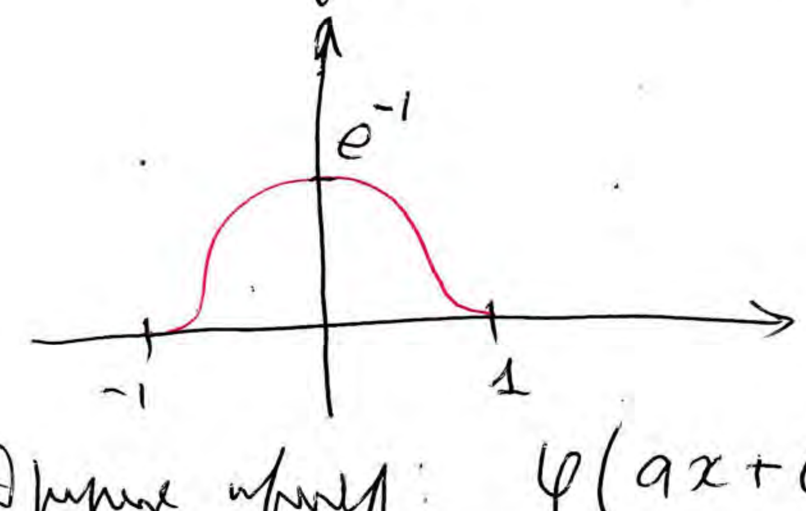
$\forall\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ (мультииндекс)

$$\partial_x^\alpha\varphi=\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}(x)\in C(\Omega),\quad |\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$$

$$\operatorname{supp}\varphi=\overline{\{x\in\Omega:\ \varphi(x)\neq 0\}}=K$$ - компакт в Ω (носитель K)

Пример: $\Omega=\mathbb{R}$ $(n=1)$.

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1.\end{cases}$$



Можно проверить, что $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$\operatorname{supp}\varphi=[-1,1]$

Другие примеры: $\varphi(ax+b)$, $\varphi^k(x)$ и т.д.

в $\mathbb{R}^n$: $\varphi(|x|^2)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$

$\mathcal{D}(\Omega)$ — линейное векторное пр-во.
В нем вводится топология сходимости

Определение 1. $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\Omega)$
Если $\exists K$ — компакт, $K \subset \Omega$: $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq K$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\quad \partial_x^\alpha \varphi_n(x) \rightrightarrows \partial_x^\alpha \varphi(x), \ (n \to \infty)$

Равномерно на Ω.

Пример 1. $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x)$, $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$

Тогда $\varphi_n(x) \to 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$.

Пример 2. $\Omega = \mathbb{R}$, пусть $a_n \to 1$
$\varphi_n(x) = \varphi(a_n x)$. Тогда $\varphi_n(x) \to \varphi$ в $\mathcal{D}$.

Пример 3. $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x - n)$, $x \in \mathbb{R}$.
Тогда $\partial_x^\alpha \varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ $\forall \alpha$, но $\varphi_n(x) \not\to 0$ в $\mathcal{D}$
(т.к. носители уходят)

Замечание: Введенная топология не является метризуемой! т.е. эту сходимость нельзя описать метрикой. $\mathcal{D}(\Omega)$ не является метрическим пр-вом.

Пространство обобщенных функций введено С.Л. Соболевым и Л. Шварцем (распределения, distributions)

2) Пространство обобщенных функций (распределения)

Определение 2. Пространство $\mathcal{D}'(\Omega)$ состоит из линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{D}(\Omega)$, т.е. $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$f: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $f(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha f(\varphi_1) + \beta f(\varphi_2)$

Обозначаем $f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$ т.е. действие функционала f на функцию φ,

f - непрерывен в $\mathcal{D}(\Omega)$, т.е., если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\Omega)$, то $f(\varphi_n) \to f(\varphi)$,

т.е. $\langle f, \varphi_n \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ $(n \to \infty)$.

3) Примеры обобщенных функций

Пример 1. Пусть $f \in L_1^{loc}(\Omega)$, т.е. $\forall K \subset\subset \Omega$. $\int\limits_K |f(x)|\,dx < \infty$.

(Локально суммируема функция)

Построим обобщенную функцию:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega f(x)\cdot\varphi(x)\,dx.$$

Интеграл конечен, т.к. $\operatorname{supp}\varphi(x) = K \subset\subset \Omega$

2. Функционал f линеен (очевидно)

3. Функционал f непрерывен, т.к. если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}$, то $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq K \subset\subset \Omega$

$\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ равномерно на K.

Тогда $|\varphi_n(x)| \le M \quad \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$|\varphi_n(x)\cdot f(x)| \le M\cdot|f(x)|, \quad x \in K.$$
(мажоранта)

По теореме Лебега, $\varphi_n(x)\cdot f(x) \to \varphi(x) f(x)$ почти всюду в K

$$\int_\Omega f(x)\cdot\varphi_n(x)\,dx \to \int_\Omega f(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

(На самом деле интеграл берется по K).

Следовательно: $L_1^{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Бывают ли другие обобщенные функции?

ДА! И огромное количество

Пример 2. δ-функция Дирака

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \Omega = \mathbb{R}^n \ (0 \in \Omega)$$

1. это линейный функционал, он непрерывен

Обозначение: $\langle \delta, \varphi \rangle = \int_\Omega \delta(x)\cdot\varphi(x)\,dx$

Но это не интеграл! Это обозначение

-5-

Утверждение: $\neg\exists f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $f = \delta$, т.е. $\varphi(0) = \int\limits_{\Omega} f(x)\cdot\varphi(x)dx \ \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

(Доказано в лекциях Степанова)

Пример 3. Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Тогда $f(x) \notin L_1^{loc}(\mathbb{R})$, не интегрируема.

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\delta\to 0}\left[\int\limits_{-\infty}^{-\delta}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] =$$

$$= V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

Пусть $\operatorname{supp}\varphi \in [-1, 1]$ (или $[-M, M]$)

тогда $\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{+\infty} = \int\limits_{-1}^{-\delta}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int\limits_{\delta}^{1}\frac{\varphi(x)}{x}dx =$

Сделаем замену $x = -y$ (в первом)

$$= \int\limits_{1}^{\delta}\frac{\varphi(-y)}{-y}(-dy) + \int\limits_{\delta}^{1}\frac{\varphi(x)}{x}dx = 2\int\limits_{\delta}^{1}\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}dx$$

По формуле Тейлора $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot x + o(x)$.

$\varphi(-x) = \varphi(0) - \varphi'(0)\cdot x + o(x)$, т.е.

$\varphi(x) - \varphi(-x) = 2\varphi'(0)x + o(x)$, значит

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0)+o(x) \quad (x\to 0).$$

т.е. функция $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ — ограничена. $\psi(x)$

Легко проверить, что $\psi(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Следовательно, $\exists \lim\limits_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx$

$= 2\int_0^{\infty}\psi(x)\,dx$.

Линейность $P(\frac{1}{x})$ — очевидна.

<u>Непрерывность</u>: Если $\varphi_n\to\varphi$ в $\mathcal{D}$, то

$\psi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)-\varphi(-x)}{x}\to\psi(x)$ в $\mathcal{D}$

где $\psi(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\in\mathcal{D}$.

<u>Утверждение 2</u> $P(\frac{1}{x})$ не является функцией из $L_1^{loc}(\mathbb{R})$ ([illegible])

<u>Решение</u> от противного. Пусть $P(\frac{1}{x})=f$, $f\in L_1^{loc}$. Покажем, что если $0\notin \operatorname{supp}\varphi$, то

$\langle P(\frac{1}{x}),\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$ п.в. в $\mathbb{R}$,

но $\frac{1}{x}\notin L_1^{loc}$. Противоречие.

③ Действия и операции с обобщенными функциями

$\mathcal{D}'(\Omega)$ – пр-во обобщенных функций линейно, т.е. если $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'$, то

$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{D}'$, $\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi \rangle = \alpha_1 \langle f_1, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle f_2, \varphi \rangle$.

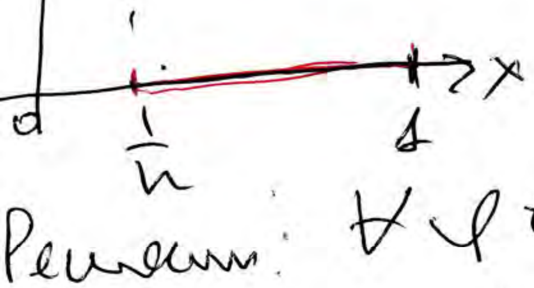
Определение 3. Топология в $\mathcal{D}'(\Omega)$, т.е. определим переход:

$f_n \to f$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \quad (n \to \infty).$$

Пример: Пусть $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$

Рассмотр. $h_n(x) = n \cdot h\left(\frac{x}{n}\right) = \begin{cases} n, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$



Задача 1. Докажите, что

$$h_n(x) \to \delta(x) \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Решение: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle h_n, \varphi \rangle = n \int_0^{1/n} \varphi(x)\,dx = n \cdot \frac{\varphi(x_n)}{n} = \varphi(x_n)$$

по теореме о среднем $\exists x_n \in [0, \frac{1}{n}]$.

Однако, при $n \to \infty$ $x_n \to 0 \Rightarrow \varphi(x_n) \to \varphi(0)$

т.е. $\langle h_n, \varphi \rangle \to \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$.

т.е. $h_n \to \delta$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Замечание: Вместо $h(x)$ можно брать любую функ $h \in L^1(\mathbb{R})$, $\int\limits_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = 1$.

Тогда $n \cdot h_n\left(\frac{x}{n}\right) \to \delta(x)$, $n \to \infty$.

Умножение на функции из $C^\infty(\Omega)$.

Пусть $a(x) \in C^\infty(\Omega)$. $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Определим $a \cdot f$:

$$\langle a \cdot f, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle. \quad \operatorname{supp} a\varphi \subseteq \operatorname{supp}\varphi$$

Корректно, т.к. $a\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} a\varphi \subseteq \operatorname{supp}\varphi$

Непрерывность: Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}$, то $a \cdot \varphi_n \to a \cdot \varphi$ в $\mathcal{D}$ (очевидно), т.е. $\langle af, \varphi_n \rangle \to \langle af, \varphi \rangle$, т.е. непрерывно

Задача 2: Найти а) $x \cdot \delta(x)$; б) $x \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)$

Решение: $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

а) $\langle x \cdot \delta(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), x \cdot \varphi(x) \rangle = 0 \cdot \varphi(0) = 0$

т.е. $x \cdot \delta(x) \equiv 0$.

б) $\langle x P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi(x) \rangle = \lim\limits_{\delta \to 0+} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{+\infty} \right) \frac{1}{x} \cdot x \cdot \varphi(x)\,dx =$

$$= \lim_{\delta\to 0+} \int_{-\infty}^{-\delta} \int_{\delta}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

т.е. $x \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ (в $L_1^{loc}(\mathbb{R})$)

Задача 3. Пример обобщенной функции:

$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n)$ – сумма δ-функций, в т. $\mathbb{Z}$ (Модель твер- (кристалла)
которое сущест.
дого тела). Корректность:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$ $\langle f, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$

ряд сходится, т.к. $\operatorname{supp} \varphi = K \Subset \mathbb{R}^n$,
т.е. лишь конечное число членов.

Аналогично: $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta(x-n)$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, что такое $a(x) f(x)$?

Ответ: $a(x) \cdot f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) \cdot \delta(x-n)$.

Дифференцирование обобщенных ф-ций

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $n = 1$.

Что такое $f' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$? производная.

<u>Определение 4.</u> Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$<f', \varphi> = - <f, \varphi'>$$

<u>Задача 4.</u> Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, т.е. непрерывно дифференцируема. Показать, что f' в $\mathcal{D}'$ совпадает с обычной производной.

<u>Решение:</u> Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда

$$<f', \varphi> = -<f, \varphi'> = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-M}^{M} f(x)\cdot \varphi'(x)\,dx = -f(x)\cdot\varphi(x)\Big|_{-M}^{M} + \int_{-M}^{M} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$

где $\operatorname{supp}\varphi \in [-M, M]$

$$= \int_{-M}^{M} f'(x)\varphi(x)\,dx = <f'(x), \varphi(x)>,$$ т.е. $f'(x)$ совпадает с обычной производной.

<u>Задача 5.</u> Пусть $f(x) = |x|$. Найти f'.

<u>Решение:</u> $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$<f', \varphi> = -<f, \varphi'> = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\cdot\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)\,dx = x\cdot\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx +$$

интегрируем по частям

$$= x\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx = \varphi(0) - \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx -$$

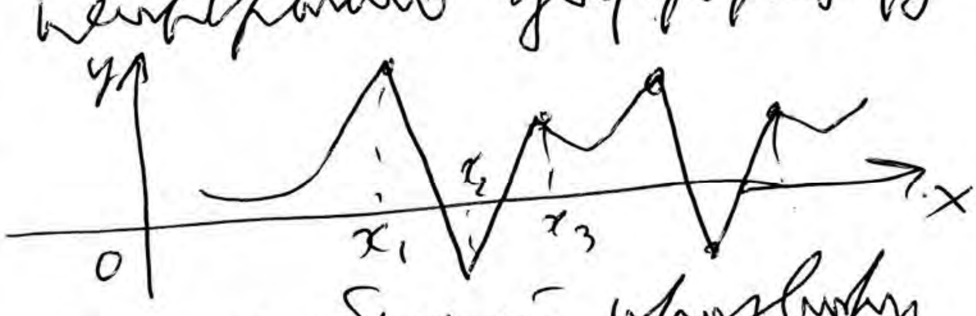
$$-\varphi(0) + \int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx + \int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \text{где } s(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

(функция $s(x) = \mathrm{sign}(x)$)

<u>Ответ</u>: $|x|' = \mathrm{sign}(x)$ в $\mathcal{D}'$

Аналогично доказывается, что если $f(x)$ – кусочно непрерывно дифференцируемая функция:



Тогда $f'(x)$ – совпадает с обычной производной всюду, кроме точек излома, где не определена.

<u>Доказательство</u>: Разбить на отрезки $[x_k, x_{k+1}]$ и применить интегрирование по частям

Самое интересное начинается, когда у функции $f(x)$ появляются <u>разрывы</u>

<u>Задача 6</u>. Найти $(\mathrm{sign}(x))'$.

Решение: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $s(x) = \mathrm{sign}(x)$

$$\langle S', \varphi \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle = \int\limits_{-\infty}^{0} +\varphi'(x)\,dx - \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= +\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty} = \varphi(0) + \varphi(0) = 2\varphi(0) =$$

$$= 2\langle \delta, \varphi \rangle \Rightarrow S'(x) = 2\delta(x)$$

<u>Задача 7.</u> Что такое $\delta'(x)$ в $\mathcal{D}'$?

<u>Решение:</u> $\langle \delta'(x), \varphi(x) \rangle = -\langle \delta(x), \varphi'(x) \rangle =$

$$= -\varphi'(0)$$

Это и есть производная δ-ф-ции Дирака

<u>Задача 8.</u> Найти производную $P\left(\frac{1}{x}\right)$.

<u>Решение:</u> $\langle P'\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = -\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi'(x) \rangle =$

$$= \lim_{\delta\to 0+} \left[-\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx - \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx \right] =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+} \left[-\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{d\varphi(x)}{x} - \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\varphi(x)}{x} \right] = \lim_{\delta\to 0+} \left[-\frac{\varphi(x)}{x}\Big|_{-\infty}^{-\delta} - \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi(x)}{x}\Big|_{\delta}^{+\infty} - \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx \right] = \frac{\varphi(-\delta)}{\delta} - \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(\delta)}{\delta} -$$

$$- \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx = \underbrace{\frac{\varphi(-\delta) - \varphi(\delta)}{\delta}}_{\delta\to 0+}\to 0 = -\lim_{\delta\to\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx \Rightarrow$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx =$$

$$= \underbrace{-\varphi'(0)+\varphi'(0)}_{=0} - \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} = -\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx$$

Ответ: $P\left(\frac{1}{x}\right)' = -\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} =: -P\left(\frac{1}{x^2}\right).$

Замечание: $P\left(\frac{1}{x^2}\right)$ можно выразить так:

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx = \int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx$$

где $\dfrac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2} = \dfrac{\varphi'(0)x-\varphi'(0)x+\varphi''(0)x^2+o(x^2)}{x^2}$

$= \varphi''(0)+o(x^2) = \psi(x)$ – суммируемая функция

Пусть $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Мы определили f'.

Аналогично определяем $f^{(n)}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Определение: По индукции:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \quad \text{т.е.}$$

$$\langle f^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n\langle f, \varphi^{(n)}\rangle, \ \forall\varphi\in\mathcal{D}.$$

Так же определяются производные в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

<u>Определение</u>: $\langle \partial_x^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial_x^\alpha \varphi \rangle$

$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Операция дифференцирования непрерывна в $\mathcal{D}'$.

<u>Задача 9.</u> Решить в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ уравнение: $f' = 0$.

<u>Решение</u>:

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 0$.

Тогда $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy \in \mathcal{D}$, $\underline{\psi'(x) = \varphi(x)}$

Действительно, $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$\psi(x) = 0$, если $|x| > M$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Рассмотрим $\forall$ функ. φ_0: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,dx = 1$

Тогда $\exists \psi \in \mathcal{D}'$:

$$\varphi(x) = C \cdot \varphi_0(x) + \psi'(x), \text{ где } C = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

Рассмотрим $\varphi(x) - C\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$

Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\,dx = 0$, т.е.

$\varphi_1(x)\in\mathcal{D}$, $\psi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_1(x)\in\mathcal{D}$.

<u>Следовательно:</u> $\psi'(x)=\varphi_1(x)=\varphi(x)-C\cdot\varphi_0(x)$

<u>Значит:</u> $\varphi(x)=C\cdot\varphi_0(x)+\psi'(x)$, где $\psi'(x)\in\mathcal{D}$.

<u>Решение задачи:</u> Пусть $f'=0$, тогда

$\forall\varphi\in\mathcal{D}$ $0=\langle f',\varphi\rangle=-\langle f,\varphi'\rangle=0$

Тогда $\forall\varphi\ \exists\psi\in\mathcal{D}$: $\varphi=C\cdot\varphi_0+\psi'$, т.е.

$\langle f,\varphi\rangle=\langle f,C\varphi_0+\psi'\rangle=C\langle f,\varphi_0\rangle+\langle f,\psi'\rangle=$

$=C\cdot\langle f,\varphi_0\rangle+0=C\cdot\langle f,\varphi_0\rangle$

где $C=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$.

<u>Значит:</u> $\langle f,\varphi\rangle=C_1\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$

т.е. $f\equiv C_1=\langle f,\varphi_0\rangle$.