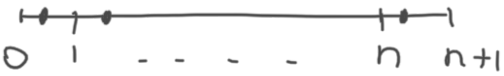
Семинар по матану

02.11.20

$\boxed{4}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — интегрируема

Д-ть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x+n)$ абсолютно сходится почти всюду (п.в.)



Нужно проверить, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(x+n)| < \infty$ п.в.

Оценим частичные суммы

$f_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} |f(x+n)|$ — интегрируемы, т.к. каждое слагаемое $|f(x+n)|$ интегр. по усл.

$$\int_0^1 f_N(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\int_0^1 |f(x+n)|\,dx}_{\int_n^{n+1} |f(x)|\,dx} = \int_1^{N+1} |f(x)|\,dx$$

$$\int_1^{N+1} |f(x)|\,dx \longrightarrow \int_1^{\infty} |f(x)|\,dx \Rightarrow$$

$$\sup_N \int_0^1 f_N(x)\,dx < \infty \Rightarrow \sup_N f_N(x) < \infty \text{ п.в.}$$

По теореме Бепо Леви: $f_N(x) \le f_{N+1}(x)$

$$\sup_N \int_0^1 f_N(x)\,dx < \infty$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{N\to\infty} f_N(x) < \infty \text{ п.в.}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x+n)| < \infty \text{ п.в.}$$

$$\boxed{5}$$

$L^p[0,1]$ – ф-ции, кот. интегрируемы в p-ой степени

$L^p[0,1] = \{ f: [0,1] \to \mathbb{R},\ |f|^p \text{ интегрируема}\}$

$h \sim g$, если $h = g$ п.в.

$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ – f – класс эквив-ти

Задача:

$f_n \to f$ в $L^1[0,1]$

Док-ть: $\sqrt{f_n} \to \sqrt{f}$ в $L^2[0,1]$

$$\|f_n - f\|_1 \to 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \|\sqrt{f_n} - \sqrt{f}\| \to 0$$

$$\int |f_n - f|\,dx \to 0$$

$$\int \left(\sqrt{f_n} - \sqrt{f}\right)^2 dx = \int \left(f_n + f - 2\sqrt{f_n}\sqrt{f}\right) dx$$

$$\int \sqrt{f_n}\sqrt{f}\,dx \geq \frac{2}{\frac{1}{f_n}+\frac{1}{f}} = \frac{2ff_n}{f+f_n}$$ (ср. гармонич.)

$$\int \left(f_n+f-4\frac{ff_n}{f+f_n}\right)dx = \int \frac{(f-f_n)^2}{f+f_n}dx \leq \int |f_n-f|\,dx \to 0$$

$\boxed{6}$

f — огранич. измер. ф-ция на $[0,1]$

$$\int_0^1 f(x)^2dx = \int_0^1 f(x)^3dx = \int_0^1 f(x)^4dx$$

Д-ть, что f совпадает п.в. с индикатором множества

$f = I_A \quad A\subset[0,1]$

$$A = f(x)^3 \leq \frac{f^2(x)+f^4(x)}{2} \Rightarrow \int f^3(x)\,dx \leq \int \frac{f^2(x)+f^4(x)}{2}\,dx = A$$

$$f^3(x) = \frac{f^2(x)+f^4(x)}{2} \quad \text{п.в.}$$

$$f(x)^2 = f(x)^3 = f(x)^4 \Rightarrow f(x)\in\{0,1\}$$

$$A = \{x: f(x)=1\} \Rightarrow f = I_A$$

$\boxed{\text{II способ!}}$ неравенство Коши-Буняковского

Пусть $f,g\in L^2(\mu)$. Тогда

$$\int_X f(x)g(x)\,d\mu \leq \sqrt{\int \|f(x)\|^2 d\mu}\sqrt{\int \|g(x)\|^2 d\mu}$$

$$A=\int f(x)\cdot f(x)^2\,dx \le \sqrt{\int f(x)^2\,dx}\,\sqrt{\int f(x)^4\,dx} = A$$

$$\Rightarrow f(x) = c\, f(x)^2 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ c\, f(x)=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{c} I_A$$

$\boxed{7}$

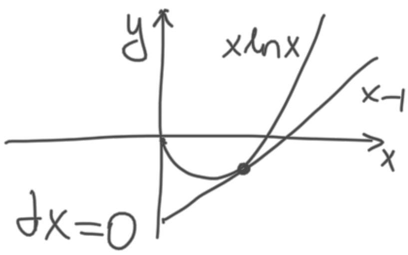
Пусть $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\int_0^1 f(x)\,dx=1$, $f(x)>0$

$f\ln f$ — интегр. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 f(x)\ln f(x)\,dx}_{\text{энтропия}} \geqslant 0$$

Воспользуемся $f(x)\ln f(x) \geqslant f(x)-1$

$x\ln x \geqslant x-1$

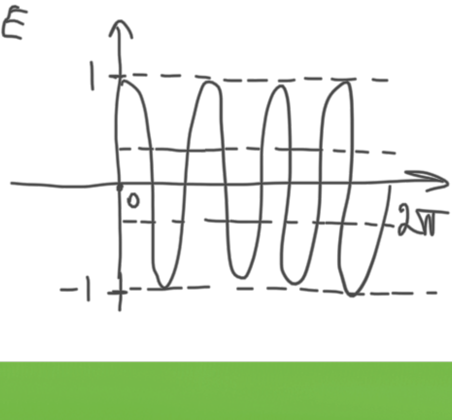


$$\int f(x)\ln f(x)\,dx \geqslant \int (f(x)-1)\,dx = 0$$

$\boxed{8}$

$E\subset[0,2\pi]$ $\lambda(E)>0$

$$\inf_n \int_E |\cos nx|\,dx > 0$$



$$\geq \varepsilon \cdot \lambda(E \cap \{x : |\cos nx| \geq \varepsilon\})$$

$$\int_E |\cos nx|\, dx = \int_{E \cap \{x : |\cos nx| \geq \varepsilon\}} |\cos nx|\, dx$$

пусть $\varepsilon > 0$

$\{x : |\cos nx| > \varepsilon\}$

$\lambda(\{x : |\cos nx| < \varepsilon\})$