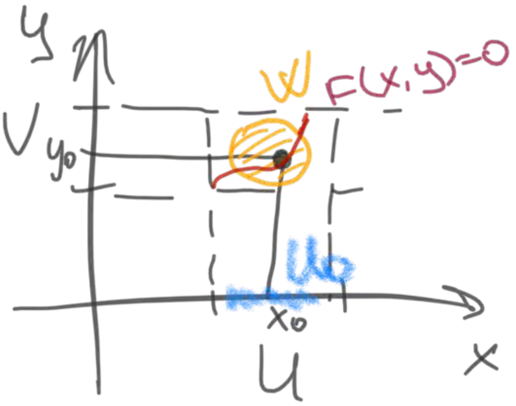
Лекция
14.09.20

Гладкие многообразия

Теорема о неявной ф-ции



$F: U\times V \to \mathbb{R}$ $\quad U, V \subset \mathbb{R}$

точка $(x_0, y_0) \in U\times V$

$F(x_0, y_0) = 0$

Если $F: U\times V \to \mathbb{R}$ – гладкое

$(x_0, y_0) \in U\times V$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

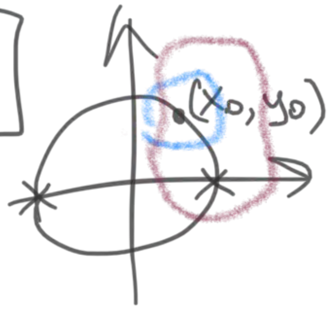
тогда $\exists$ такая окрестность W точки (x_0, y_0) и окр-ть $U_0 \subset U$ и

функция $f: U_0 \to \mathbb{R}$, т.ч. $\forall_{x_0}$ $(x,y)\in W$

$F(x,y) = 0 \iff x \in U_0,\ y = f(x)$

Иными словами: мн-во нулей этого отображения представляется графиком ф-ции

1]



$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

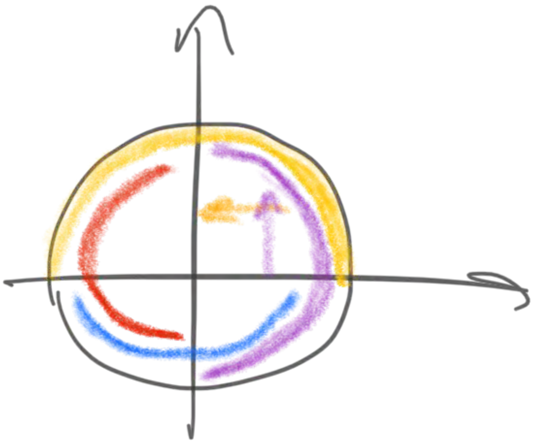
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y \neq 0 \qquad \begin{matrix} y \neq 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

В окр-ти $\forall (x_0, y_0)$ $(y \neq 0)$ $\exists$

т.ч. $y = f(x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ (аналогично $x = \pm\sqrt{y^2-1}$ $(x \neq 0)$)

2] К ф-ии $F = xy$ применить теорему о неявной ф-ии нельзя

Построим атлас для окр-ти



1) верхняя полуокр-ть

$U_B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ y > 0\}$

$\varphi_B : U_B \to \mathbb{R}$ $\qquad \varphi_B(x) = x$

2) правая

$U_п = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ x > 0\}$

$\varphi_п : (x,y) \to y$

$\varphi_{Bп} = \varphi_п \circ \varphi_B^{-1} : x \to \sqrt{1 - x^2}$

3)

4)

проверим, что отображ. невырожденно

$$\frac{\partial \varphi_{вп}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

аналогично с оставшимися картами

Лемма. Если у $\forall$ точки p мн-ва $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ выполнено условие т. о неявной ф-ии, то на этом мн-ве Σ в индуцированной топологии $\exists$ структура гладкого многообразия

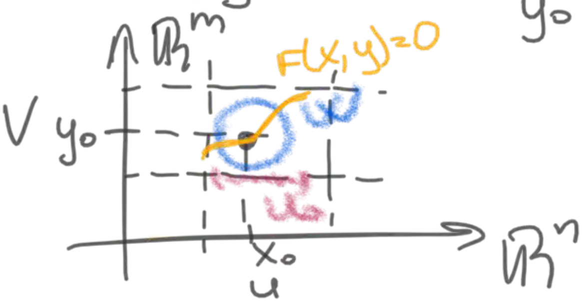
28:35 задача из листка (формулировка)
и подсказка

Т. о неявной ф-ии в многомерном случае (или **теорема о неявном отображении**)

Пусть $F: U \times V \to \mathbb{R}^m$ — гл. отобр., $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$

$F(x_0, y_0) = 0$ $\quad x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$

$\quad y_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^m)$



Если

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n}(x_0,y_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F^m}{\partial y^1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial y^n}(x_0,y_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

то $\exists$ окр-ть $\underset{(x_0,y_0)}{\overset{}{W_0}} \ni (x_0,y_0)$, $W_0 \subset U \times W$ и окр-ть $U_0 \subset U$ и $f: U_0 \to \mathbb{R}^m$, т.ч. $F(x,y)=0$,

$$(x,y) \in W \Longleftrightarrow y^1 = f^1(x), \ldots, y^m = f^m(x)$$

$$y = f(x)$$

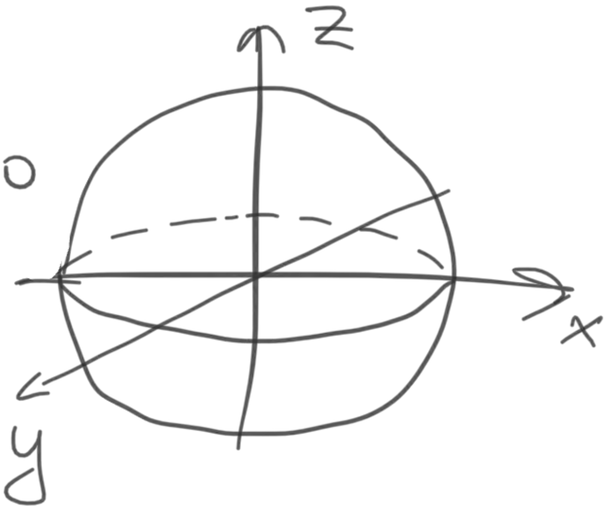
Производная отобр., заданного неявно:

$$f'(x) = -F_y'(x, f(x))^{-1} F_x'(x, f(x))$$

в многомерном случае $F_x'(\ldots)$ – м-ца Якоби

Опр. 1 Регулярной поверхностью $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ наз. такое мн-во Σ, к которому в окр. $\forall$ точки применима теорема о неявном отображении при подходящей перенумеровке координат

!] $x^2+y^2+z^2=1$



$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x$

$\vdots$

$\frac{\partial F}{\partial z}=2z$

$(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)\notin S^2 \Rightarrow$ $\boxed{S^2 \text{ — регулярная поверхность}}$

Лемма. Следующие опр-ия регулярной поверхности эквив.:

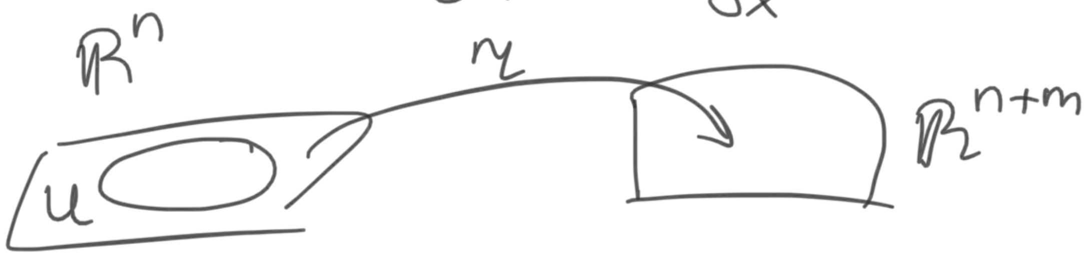
1) **Опр. 1.**

2) Σ локально в окрестности $\forall$ своей точки представляется графиком

$$y^1 = f^1(x), \dots\ y^m = f^m(x), \quad x = (x^1, \dots, x^m)$$

3) Σ лок. определяется как образ отображения $r: \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^{m+n}$

и векторы $\dfrac{\partial r}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial r}{\partial x^m}$ л.н.з.



Следствие (теор. об обратной ф-ии)

$f: \underset{\mathbb{R}^n?}{U} \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ и якобиан $\neq 0$

Тогда $\exists$ окр-ть $V \ni f(x_0)$

и отображ. $g: V \to \mathbb{R}^n$, т.ч. $g \circ f(y) = y$, $y \in V$

Доказательство леммы:

$1 \Rightarrow 2$ т. о неявном отображ.

$2 \Rightarrow 1$ $F(x,y) = f^i(x) - y^i$

применяем т. о неявн. отображ., т.к. $J \neq 0$

$2 \Rightarrow 3$ если представляется графиком, то можем пос-ть

$$x \longmapsto (\underbrace{x}_{n\text{-мерная координата}}, \underbrace{f(x)}_{m\text{-н-}})$$

$3 \Rightarrow 2$ $r : U \to \mathbb{R}^{n+m}$

$\frac{\partial r}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x^n}$ — лин. независ. в (x_0)

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \frac{\partial r^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial r^{n+m}}{\partial x^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial r^{n+m}}{\partial x^n} \end{pmatrix} & n \\ n+m & \end{array}$$

строки л.н.з. ⟹ выберем из $\frac{\partial r}{\partial x^i}$ лин. независ. столбцы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r^{i_1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial r^{i_1}}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial r^{i_n}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial r^{i_n}}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$x \mapsto (r^{i_1}, \dots, r^{i_n})$$

по т. об обратной ф-ии ~~отобрат.~~ обратимо

$$x^1, \dots, x^n \longmapsto r^1, \dots, r^{n+m}$$

$$\begin{array}{c} x^1, \dots, x^n \\ \downarrow \uparrow \\ r^{i_1}, \dots, r^{i_n} \end{array}$$

$$r^i = y^i$$

$$y^{i_1}, \dots, y^{i_n} \mapsto y^1, \dots, y^n$$

$\blacksquare$