НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Билеты к коллоквиуму

«Математический Анализ. Первый семестр»

Москва

2018

Содержание

Билеты к коллоквиуму по матану 1 курс, 1 модуль

ЦПМ

2018/19 учебный год

1. Вещественные числа, натуральные числа — определения. Аксиома Архимеда.

На множестве G определена *бинарная операция*: каждой паре $(a, b), a \in G, b \in G$ элементов множества G сопоставлен единственный элемент, обозначаемый $a * b$. Символом $*$ обозначается бинарная операция.

Множество G называется *группой* относительно операции $*$, если выполены следующие свойства:

1. Существует нейтральный элемент e, такой, что $\forall x \in G$ справедливо $x \cdot e = e \cdot x = x$
2. Существует обратный элемеакой, что $\forall x \in G \; \exists y \in G$ такой что $x \cdot y = y \cdot x = e$
3. Операция $*$ ассоциативна: всегда $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. Операция $*$ коммутативна: всегда $a \cdot b = b \cdot a$

Аксиомы операций

В множестве вещественных чисел заданы 2 коммутативных бинарных операции, сложения и умножения.

1. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ — аддитивная коммутативная группа.
2. Множество вещественных чисел $\mathbb{R} \backslash 0$ — мультипликативная коммутативная группа.
3. Умножение дистрибутивно относительно сложения:$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$

Если выполнены такие аксиомы, то множество называется *полем.* Таким образом, первая аксиома вещественных чисел: на $\mathbb{R}$ заданы 2 операции, относительно которых $\mathbb{R}$ является полем.

Поле — это как раз множество, на котором есть 2 коммутативных операции, связанные дистрибутивным законом.

Аксиомы порядка

Мы будем говорить, что на множестве A определено отношение $\leqslant$, если в множестве пар $(a, b), a \in A, b \in A$ выбрано некоторое подмножество. Если пара (a, b) принадлежит подмножеству, то будем говорить, что $a \leqslant b$.

Отношение называется *отношением порядка*, если выполнены следующие свойства:

1. $a \leqslant a$;
2. $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant a) \Rightarrow a = b$;
3. $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$;
4. $\forall a, b \in A$ либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$.

Если выполнено свойство 4, то множество называется *линейно упорядоченным*, если нет - *частично упорядоченным.*

Поле F называется упорядоченным полем, если на этом поле задано отношение порядка, F линейно упорядочено, причём $a \leqslant b \;\Rightarrow\; a + c \leqslant b + c$ при любом $c \in F$ и $(0 \leqslant a) \wedge (0 \leqslant b) \Rightarrow 0 \leqslant ab$.

Аксиома непрерывности

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}, A, B \neq \varnothing$ причём $\forall a \in A, b \in B$ справедливо $a \leqslant b$. Тогда существуетт такое $c \in \mathbb{R}$, что $\forall a \in A$ справедливо $a \leqslant c$, и $\forall b \in B$ справедливо $c \leqslant b$.

ОСНОВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Множеством вещественных чисел называется упорядоченное поле с аксиомой непрерывности.

Аксимома Архимеда

Для любых вещественных чисел $a, b > 0$ *среди чисел* $a, a+a(=2a), a+a+a(=3a), ..., na, ...$ *найдутся числа, большие чем* b

◀ Рассмотрим множество A таких чисел вида $n*a$. Допустим, что среди них нет ни одного числа, больше b.

Рассмотрим множество B вещественных чисел, больших всех чисел из A. Множества A и B не пустые $(b \in B)$. Все элементы множества A меньше всех элементов $B \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности между A и B найдется промежуточное число α:

$$x \leqslant \alpha \leqslant y, x \in A, y \in B. \qquad (1)$$

Это число α по построению — точная верхняя грань$A, \alpha = supA$. Однако, $\beta = \alpha - a \in B$ по построению ($\alpha > a + ... + a$ при любом количестве слагаемых, значит, $\beta > a + ... + a$ также при любом их количестве), а это противоречит $\alpha = supA$. ▶

Аксиома Архимеда уточненная

Для любого $h > 0$ *и для любого* $a \in \mathbb{R}$ *найдется такое* $n \in \mathbb{Z}$*, что справедливы неравенства* $(n-1)h \leqslant a < nh$.

◀ Рассмотрим множество $E = n \in \mathbb{Z}$. Множество E не пусто и огарничено снизу: если $a > 0$, то не пусто по аксиоме Архимеда, ограничено снизу нулем; если $a < 0$, то не пусто так как содержит ноль, ограничено по аксиоме Архимеда.
Пусть $m = min\, E$. Тогда $m - 1 \leqslant a/h < m$, отсюда следует учточнённая аксиома Архимеда. ▶

Множество натуральных чисел N — это пересечение всех индуктивных* подмножеств $\mathbb{R}$, содержащих 1.

Множество$X \subset R$ называется индуктивным, если $\forall x \in X : x + 1 \in X$.
Примеры: $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$
Пересечение $X = \cap X_\alpha$ любого набора индуктивных множеств или пусто, или само является индуктивным множеством. В самом деле: $x \in X \Rightarrow \forall \alpha : x \in X\alpha \Rightarrow \forall \alpha : (x+1) \in X_\alpha \Rightarrow (x+1) \in X$

Из определения следует принцип математической индукции: если $E \subset N, 1 \in E$ и E — индуктивное множество, то $E = N$. Эта формулировка эквивалентна более привычной: если какое-то утверждение верно для $n = 1$ и если из того, что оно верно для натуральных чисел $n \leqslant k$ следует, что оно верно для $n = k+1$, то это утверждение верно для всех натуральных чисел. Чтобы увидеть эту эквивалентность, достаточно обозначить множество, для которого верно утверждение, буквой E, вывод $E = N$ означает, что утверждение верно для всех n.

Свойства натуральных чисел:

1. Сумма и произведение натуральных чисел - натуральное число;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1 : n - 1 \in \mathbb{N}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} : minx \in \mathbb{N} : x > n = n + 1$
4. $\forall n \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{N} : n < x < n + 1 = \varnothing$;

Теорема. *Множество $\mathbb{N}$ вполне упорядочено.*

◀ Пусть $M \subset \mathbb{N}$. Если $1 = minM$. Если $1 \varnothing M$, то есть $1 \in E = \mathbb{N} \backslash M$. В множестве E найдется такое n, что $1, ..., n \in E, (n+1) \in M$. Если бы такого n ненашлось бы, то E было бы индуктивным множеством и совпадало бы с $\mathbb{N}$. Но тогда $M = \mathbb{N} \backslash E = \varnothing$, что не так по предположению. Найденное число $n+1 \in M$ и есть минимальный элемент в M. ▶

2. Ограниченные множества, точная верхняя грань.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$,что для любого $x \in A$ справедливо $x \leqslant M$. Число M называется *верхней границей* множества A.

Множество ограничено сверху $\Leftrightarrow$ у множества есть верхняя граница.

Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если сущесвует такое число $m \in \mathbb{R}$, что для любого $x \in A$ справедливо $x \geqslant m$. Число m называется *нижней границей* множества A.

Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Число $M \in A$ называется максимальным или наибольшим элементом множества A,если оно является верхней границей множества A, то есть для любого $x \in A$ справедливо $x \geqslant m$. Из аксиомы порядка следует единственность максимума и минимума любого множества из вещественных чисел, если этот минимум или максимум существует.

Рассмотрим множество A^+ всех границ множества A. Наименьший элемент множества A^+ называется *точная верхняя грань* множества A и обозначается $supA$. Аналогично определяется *точная нижняя грань* A и обозначается $infA$.

Теорема *У любого непустого ограниченного сверху множества A существует точная верхняя грань.*

◀ Пусть A^+ - множество верхних границ множества A. Оба множества A и A^+ не пустые и выполнено условие аксиомы непрерывности: все элементы первого множества не больше всех элементов второго множества $\Rightarrow$ существует M такое, что $\forall x \in A, y \in A^+ : x \leqslant M \leqslant y$.

По построению, $M = supA$: число M является верхней границей, так как $\forall y \in A^+ : y \geqslant M$. ▶

Аналогично, у любого ограниченного снизу множества $A \neq \varnothing$ существует точная нижняя гарнь и она единственная.

Упорядоченное поле, в котором каждое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань, есть $\mathbb{R}$.

3. Теорема о вложенных промежутках.

Любая последовательность вложенных отрезков $\Delta_n = [a_n, b_n]$ имеет непустое пересечение. Если их длины $b_n - a_n$ стремятся к нулю, то это пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ состоит из единственной точки.

Рассмотрим два множества: множество A, состоящее из точек a_n (левых концов отрезков) и множество B, состоящее из точек b_n (правых концов отрезков). Заметим, что какое-то из этих множеств вполне может оказаться конечным.

Множества A и B удовлетворяют условиям аксиомы непрерывности (они не пустые и каждое a_m не превосходит каждого b_n), поэтому существует число $\gamma\colon a_m \leqslant \gamma \leqslant b_n$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует искомое включение $\gamma \in \cap_{n=1}^{\infty}\Delta_n$.

Единственность точки γ следует из $b_n - a_n \to 0$. Если бы было 2 таких различных точки $\gamma_1 < \gamma_2$, то из неравенств $a_n \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant b_n$ следовало бы неравенство $b_n - a_n > \varepsilon = \gamma_2 - \gamma_1 > 0$, которое противоречит $b_n - a_n \to 0$.

4. Предельные и граничные точки. Множество предельных точек – замкнуто.

Предельная точка x - предельная точка X, $x \in X\{\forall\varepsilon\ \exists y \in X\ |x - y| < \varepsilon\}$
Граничная точка x - граничная точка X, $x \in X\{\forall\varepsilon\ \exists y \in X\ \exists c \varnothing X\ |x - y| < \varepsilon \wedge |x - c| < \varepsilon\}$
Множество A' предельных точек множества A замкнутое.
◀ Пусть A' - множество предельных точек множества A. Пусть x - предельная точка множества A. Тогда в любой окрестности $O(x)$ точки x лежит точка $y \in A'$, предельная точка множества A. Возьмем окрестность $O(y)$ точки y, целиком лежащую в $O(x)$ и не содержащую x. По определению предельной точки там лежит точка $z \in A$. Эта точка лежит в $O(x)$ и не совпадает с x.
Мы доказали, что в любой окрестности точки x(предельной для A') лежит точка $y \neq x, y \in A$. Значит, $x \in A'$. Итак, каждая предельная точка множества A' ему принадлежит, множество A' - замкнутое.▶

5. Открытые и замкнутые множества. Дополнение к замкнутому множеству – открытое и наоборот.

Открытые множества – множество называется открытым, если оно не имеет граничных точек. Иными словами множество X называется открытым если $\forall x_0 \in X\{\forall x \in X\ \exists\varepsilon\ |x - x_0| < \varepsilon\}$. Если все его точки внутренние(если найдется окрестность точки, целиком лежащая в множестве).
Замкнутое множества - множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Иными словами множество X называется замкнутым если $\nexists x \varnothing X\{\forall\varepsilon\ \exists y \in X\ |x - y| < \varepsilon\}$
Теорема. Пусть A — открытое множество, B — замкнутое множество. Тогда 1) $A \backslash B$ — открытое множество. 2) $B \backslash A$— замкнутое множество
1)Обозначим как X_P как множество всех предельных точек множества P .

$$x \in A\backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \varnothing B \tag{1}$$

(2) $$x \in A \wedge x \varnothing B \Rightarrow \forall x_B \in X_B \; x_B \varnothing A \backslash B \text{ Т.к. В - закрытое множество}$$

(3) $$x \in A \Rightarrow X_{A \backslash B} \cap X_A = \emptyset$$

(4) Из (3) и (4) $\Rightarrow X_{A \backslash B} \subset X_A \Rightarrow X_{A \backslash B}$ - не содержит граничных точек $\Rightarrow A \backslash B$ - открытое

Утверждение доказано. 2)Обозначим как X_P как множество всех предельных точек множества P .

$$x \in B \backslash A \Leftrightarrow x \in B \wedge x \varnothing A \tag{2}$$

$$x \in B \wedge x \varnothing A \Rightarrow X_{A \backslash B} \subset X_B \tag{3}$$

$$X_{A \backslash B} \subset X_B \Rightarrow X_{A \backslash B} \cap A = \emptyset (\text{ Т.к. В закрытое множество }) \; X_{A \backslash B} \subset B \Rightarrow X_{A \backslash B} \subset A \backslash B \Rightarrow A \backslash B \text{ - закрытое} \tag{4}$$

Утверждение доказано.

6.

Всякое ограниченное бесконечное множество имеет по крайней мере одну предельную точку.

◀ Дано ограниченное бесконечное множество E. Пусть отрезок $[a_1, b_1], b_1 > a_1$ содержит E. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой $(a_1 + b_1)/2$ на 2 отрезка: $L_1 = [a_1, (a_1 + b_1)/2]$ и $R_1 = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$. По крайней мере одно из множеств $L_1 \cap E$ или $R_1 \cap E$ содержит бесконечное множество точек. Пусть, например, это будет множество $R_1 \cap E$. Обозначим отречок R_1 через $[a_2, b_2]$. Разделим его пополам на отрезки и снова выберем множество, которое содержит бесконечное множество точек, повторим процедуру бесконечно много раз.

Мы получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, длины этих отрезков равны $(b_n - a_n) = (b_1 - a_1)2^{-n+1} \to 0$. Итак, персечение всех этих открезков состоит из единственной точки α. Это есть предельная точка множества E: любая окрестность точки α содержит все отрезки $[a_n, b_n]$ с достаточно большими номерами, на каждом отрезке есть бесконечное количество точек множества E.

7.

Покрытия. Лемма Гейне–Бореля (компактность отрезка).

Пусть дано множество A и ещё дана система U множеств B_α, причём $A \subset \bigcup\limits_\alpha B_\alpha$. Тогда говорят, что система U образует *покрытие* множества $A : \forall x \in A\, \exists B_\alpha : x \in B_\alpha$.

Любое подмножество системы U, если оно также является покрытием, называется *подпокрытием.*

Покрытие U называют открытым, если все множества $B_\alpha \in U$ открытые. Покрытие U называют конечным, если оно содержит конечное множество множеств B_alpha.

Лемма Гейне-Бореля. *Любое открытое покрытие* $\bigcup\limits_\alpha I_\alpha$ *отрезка* Δ *имеет конечное подпокрытие.*

◄ Пусть отрезок $\Delta = [a_1, b_1], b_1 > a_1$ покрыт бесконечной системой открытых множеств $I_\alpha : \Delta \subset \bigcup\limits_\alpha I_\alpha$. Пусть не существует конечного подпокрытия, нельзя выбрать конечный набор $I_{\alpha_k}, k = 1, 2, ..., N$ открытых множеств, также покрывающее открезок Δ.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой $(a_1 + b_1)/2$ на 2 отрезка:

$L_1 = [a_1, (a_1 + b_1)/2]$ и $R_1 = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$.

По крайней мере для одного из отрезков не существует конечное подпокрытие из покрытия I_α.

Пусть, например, это отрезок R_1.

Разделим его пополам и для новых открезков проделаем то же самое, повторим это бесконечно много раз.

Мы получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, длины этих отрезков равны $(b_n - a_n) = (b_1 - a_1)2^{-n+1} \to 0$. Эти отрезки строились так, чтобы ни один из них не мог быть покрыт конечным набором множества I_α.

По лемме о вложенных отрезках пересечение всех этих отрезков сосотоит из единственной точки γ.

Эта точка γ принадлежит какому-то открытому множеству I из открытого покрытия. Вместе с точкой γ открытое множество I содержит и некоторую окрестность точки γ. Теперь, при достаточно больших n отрезки $[a_n, b_n]$ все покрыты один единственнным открытым множеством I из покрытия. Полученное противоречие доказывает лемму Гейне-Бореля. ►

Доказанная лемма означает, что отрезок(= замкнутый промежуток) - компакт.

8. Нигде не плотные и всюду плотные множества. Теорема Бэра.

Множество $A \subset [0, 1]$ называется *всюду плотным*, если замыкание $\overline{A}$ множества A содержит $[0, 1]$. Множество $A \subset [0, 1]$ называется *нигде не плотным*, если внутри любого интервала $U \subset [0, 1]$ есть меньший интервал $V \subset U$ такой, что $A \cap V = \varnothing$.

Множество A *всюду плотно на* $[0, 1]$, если внутри любого интервала $U \subset [0, 1]$ есть точка из A. Иначе говоря, если $[0, 1] \subset \overline{A}$.

Теормема Бэра. *Отрезок не может быть покрыт объединением счетного числа нигде не плотных множеств.*

◄ Пусть $[0, 1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где все множества A_n - нигде не плотные. Тогда выберем отрезок, $\Delta_1 \subset [0, 1]$,

на котором нет точек из A_1, потом выберем отрезок, $\Delta_2 \subset \Delta_1$, на котором нет точек из A_2, и так далее. В опр нигде не плотного множества стоят интервалы, но это не страшно, будем выбирать интервалы, а потом в каждом из них выберем отрезок чуть поменьше.
Последовательность вложенных отрезков Δ_n имеет общую точку, эта точка не принадлежат ни одному из множеств $A_n \Rightarrow$ предположение не верное.

9. Компактность и секвенциальная компактность.

Определение. Множество называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.
Определение. Множество E называется секвенциально компактным, если из любой последовательности $x_n \in E$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к пределу, лежащему в E.
Теорема. Множество $E \in \mathbb{R}$ компактно, если и только если оно секвенциально компанктно. Теорема. Множество $E \in \mathbb{R}$ компактно, если и только если оно замкнуто и ограничено.
Доказательство по следующей схеме:
1)Если множество ограничено и замкнуто, то оно секвенциально компактно.
2)Если множество ограничено и замкнуто, то оно компактно.
3)Если множество не ограничено, то оно не компактно и не секвенциально компактно.
4)Если множество не замкнуто, то оно не компактно и не секвенциально компактно.

◀ 1) Из ограниченноц последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, она принадлежит множеству, так как множество замкнуто, то и предел принадлежит множеству. ▶
◀ 2) Пусть есть ограниченное и замкнутое множество E и его открытое покрытие $\bigcup U_\alpha$. Множество E принадлежит некоторому отрезку $[a, b]$. Множество $(a-1, b+1) \setminus E$ - открытое. Рассмотрим покрытие отрезка $[a, b]$, состоящее из всех множеств $\bigcup U_\alpha$ и множества $(a-1, b+1) \setminus E$. Каждая точка отрезка покрывается, точки из E покрываются множествами из $\bigcup U_\alpha$, точки не из E - точками из $(a-1, b+1) \setminus E$. Теперь выберем по лемме Гейне-Бореля из покрытия $\bigcup U_\alpha \bigcup (a-1, b+1) \setminus E$ отрезка $[a, b]$ конечное подпокрытие. Оно состоит из конечно симла множеств $\bigcup U_\alpha \colon \{U_{\alpha 1}, ..., U_{\alpha n}\}$ и множества $(a-1, b+1) \setminus E$, которое с E не пересекается. Поэтому $\{U_{\alpha 1}, ..., U_{\alpha n}\}$ - конечное покрытие E ▶
◀ 3) Пусть множество E неограничено, например, сверху. Тогда есть последовательность $x_n \in E$, $x_n \to \infty$. Без потери общности можно считать последовательность x_n монотонной. Из этой последовательности нельзя извлечь сходящуюся. Поэтому, E не секвенциально компактно.▶
◀ 4) Пусть множество E ограничено, но не замкнуто. Это значит, что у него есть предельная точка x^*, которая не принадлежит множеству E.
По определению предельной точки выберем последовательность $x_n \in E$, сходящуюся к x^*. Любая ее подпоследовательность сходится к той же точке x^*, которая не принадлежит множеству E. Поэтому множество E не секвенциально компактное.
Теперь построим открытое покрытие E, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Его легко выписать в явном виде, например, в него можно включить все лучи вида $(-\infty, x^* - \dfrac{1}{n})$ и все лучи

$(x^* + \dfrac{1}{n}, +\infty)$. Это покрытие множества $\mathbb{R} \setminus x^* \to$ покрытие E. Любая конечная система множеств из такого покрытия не содержит некоторую окрестность точки x^*, но по определению предельной точки в ней обязательно есть точки множества E, то есть эта конечная система не является покрытием.►

10. Предел последовательности, сходимости к бесконечности — определения. Лемма о двух милиционерах.

Последовательность вещественных чисел - функция с областью определения $\mathbb{N}$ и областью значений $\mathbb{R}$.

Число A называется *пределом последовательности* x_n ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$), если вне любой окрестности точки A лежит лишь конечное множество элементов последовательности x_n, или, что то же самое, все элементы x_n с достаточно большими номерами n лежат внутри этой окрестности.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \ \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : |x_n - A| < \varepsilon$.

Если у последовтельности есть какой-то предел, то говорят, что такая последовательность сходится.

Последовательность не сходится

$\forall A\, \exists\varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n > N : |x_n - A| > \varepsilon$.

Последовательность не сходится к A

$\exists\varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n > N : |x_n - A| > \varepsilon$.

Определение сходимости к бесконечности. Будем говорить, что последовательность x_n сходится к $+\infty$, если $\forall K\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : x_n > K$.

Лемма о двух милиционерах

Пусть даны 3 последовательности, причём $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$.

Пусть существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. *Тогда существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ *и он также равен* A

◄ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$:

$\forall\varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > N : |x_n - A|, |z_n - A| < \varepsilon$.

Это то же самое, что $\forall\varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > N : A - \varepsilon < x_n \leqslant z_n < A + \varepsilon$.

$\forall\varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > N : A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon$. ►

11. Подпоследовательности, выбор сходящейся подпоследовательности. Частичные пределы. Верхний предел, нижний предел.

Последовательность строго возрастает, если $x_n < x_{n+1}$ *при* $n \in \mathbb{N}$.

Подпоследовательность

Пусть у нас есть последовательность x_n. Предположим, задана строго возрастающая последовательность $n_k, k = 1, 2, \ldots$ с положительными целыми элементами.

Тогда можно рассмотреть композицию отображений $k \mapsto n_k$, $n \mapsto x_n$, ставящую в соответствие каждому натуральному числу k элемент последовательности x_{n_k}.

Такая последовательность называетсяя подпоследовательностью последовательности x_n. Последовательность n_k должна быть монотонная.
Теорема. *Если последовательность x_n сходится, то и каждая подпоследовательность x_{n_k} сходится к тому же пределу.*
Теорема. *Если подпоследовательность x_{n_k} содержит все элементы последовательности x_n кроме конечного числа, то из сходимости подпоследовательности следует сходимость самой последовательности*
Теорема(лемма Больцано - Вейерштрасса). *Всякая ограниченная последовательность $x_n \in \mathbb{R}$ имеет сходящуюся подпоследовательность*

◀ Так как элементов последовательности бесконечное (счётное) множество,
то либо множество значений, которые принимают элементы последовательности, бесконечно,
либо какое-то из значений последовательность принимает бесконечное количество раз
(возможно, таких значений много).В этом случае можно выбрать постоянную подпоследовательность,
которая сходится. Если же множество значений, которые принимают элементы последовательности,
бесконечно, то воспользуемся теоремой о том,что каждое ограниченное бесконечное множество
имеет по крайней мере одну предельную точку a.
text Эта предельная точка и есть искомый предел подпоследовательности.
Для указания конкретной подпоследовательности, сходящейся к этой предельной точке a,
надо положить $\varepsilon_1 = 1$, выбрать ε - окрестность $O_\varepsilon(a)$, в ней найти элемент x_{n_1}, потом надо положить $\varepsilon_2 = 1/$
выбрать меньшую окрестность, в ней найти элемент x_{n_2}, проследив, чтобы было $n_2 > n_1$, и так далее.
Полученная подпоследовательность x_{n_k} сходится к a. ▶

Частичный предел - это величина, в любой окрестности которой находится бесконечное количество элементов последовательности(пределы подпоследовательностей называются частичными пределами). Частичные пределы называют также *предельными точками последовательности.*
Число A - частичный предел последовательности x_n, если $\forall\varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n > N : |x_n - A| < \varepsilon$.
Верхний предел - это максимальный из всех частичный пределов, *нижний предел* - это минимальных из них(если существуют). Обозначаются $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

12. Фундаментальные последовательности, критерий Коши.

Фундаментальная последовательность:
Последовательность x_n называется фундаментальной, если

$$\forall\varepsilon\; \exists N \in \mathbb{N}\{\forall n, m > N \in \mathbb{N}\; |x_n - x_m| < \varepsilon\}$$

Критерий Коши
Всякая фундаментальная последовательность сходится, всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Доказательство:

Докажем две леммы.

Лемма 1: Фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство:

◀ Пусть x_n фундаментальная последовательность, тогда возьмем $\varepsilon = a$, тогда по определению $\exists N \in \mathbb{N}\{\forall n, m > N \in \mathbb{N}\ |x_n - x_m| < \varepsilon\}$, возьмем тогда $m = N+1$, тогда по определению $\forall n > N |x_n - x_N + 1| < a$, следовательно подпоследовательность $x_n(n > N)$ ограниченна, а конечное множество $x_1, x_2, ..., x_N - 1$ ограниченно по определению(т.к. конечно), следовательно x_n ограниченна▶

Лемма 2: Если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к A, то и последовательность сходится к A.

Доказательство:

◀ Пусть x_n -фундаментальная последовательность, а x_{n_k} сходящаяся фундаментальная подпоследовательность. По определению фундаментальной последовательности:

$$\forall \varepsilon\ \exists N \in \mathbb{N}\{\forall n, m > N \in \mathbb{N}\ |x_n - x_m| < \varepsilon\}$$

По определению сходящейся последовательности

$$\forall \varepsilon\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\{\forall n_k > N_1 \in \mathbb{N}\ |x_{n_k} - A| < \varepsilon\}$$

Возьмем такое $k_0 > K_1$, что $n_{k_0} > N$, тогда ввиду включения в сходящуюся подпоследовательность $|x_{n_{k_0}} - A| < \varepsilon$, а ввиду того что последовательность фундаментальна и $n_{k_0} > N$, то выполняется $|x_{n_{k_0}} - x_n| < \varepsilon$, где $n > n_{k_0}$, тогда справедливо следующее

$$|x_{n_{k_0}} - x_n| + |x_{n_{k_0}} - A| < 2 * \varepsilon$$

Легко понять, что $|A - x_n| \leqslant |x_{n_{k_0}} - x_n| + |x_{n_{k_0}} - A|$, следовательно $|A - x_n| < 2 * \varepsilon$, следовательно x_n - сходящаяся▶

1)◀ Пусть x_n сходящаяся последовательность, докажем что она фундаментальная, по определению

$$\forall \varepsilon\ \exists N \in \mathbb{N}\{\forall n > N \in \mathbb{N}\ |x_n - x_0| < \varepsilon\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall n, p > N \in \mathbb{N}\ |x_n - x_0| + |x_p - x_0| < 2 * \varepsilon \Rightarrow x_p + x_n < 2 * \varepsilon \Rightarrow x_n \text{ - фундаментальная}$$

▶

2)◀ Пусть x_n — фундаментальная последовательность. Тогда по лемме 1 последовательность x_n ограниченная. Теперь, по теореме Больцано–Вейерштрасса из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} . По лемме 2 вся последовательность x_n сходится к тому же пределу.▶

13. Монотонные последовательности, теорема Вейерштрасса.

Монотонные последовательности:

Последовательность монотонно возрастает(не убывает), если $x_n \leqslant x_n + 1$ при $n \in N$.
Последовательность строго возрастает, если $x_n < x_n + 1$ при $n \in N$.
Последовательность монотонно убывает(не возрастает), если$x_n \geqslant x_n + 1$ при $n \in N$.
Последовательность строго убывает, если$x_n > x_n + 1$ при $n \in N$.
Последовательность x_n называется *монотонной*, если она *монотонно возрастает* или *монотонно убывает*. Последовательность называется строго монотонной, если она *строго монотонно возрастает* или *строго монотонно убывает.*

Теорема Вейерштрасса:

Ограниченная монотонная последовательность сходится *Доказательство:*

◀

1) Пусть x_n монотонно возрастающая, ограниченная снизу последовательность, тогда $\exists A = \sup\{x_n\}$, по определению:

$$\forall n\ x_n < A \Rightarrow \exists \varepsilon_n > 0 \forall n\ x_n > A - \varepsilon_n$$

Причем для ввиду монотонности $x_{n+1} > x_n \Rightarrow A - x_n > A - x_{n+1}$, следовательно каждому такому x_n соответствуют все такие $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, ...$, то есть $\exists \varepsilon_k > 0\ \varepsilon_k > A - x_k \Leftrightarrow \exists \varepsilon_k > 0 \forall n \geqslant k\ \varepsilon_k > A - x_n$. Предположим что $\exists \varepsilon$ которому не соответствуют ни одного, такого x_k

$$\nexists \varepsilon > 0\ \varepsilon > A - x_k \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \varepsilon < A - x_k$$
$$0 < A - x_k (\text{Т.к. } \sup\{x_n\}\ )$$
$$0 < A - x_k \wedge \varepsilon < A - x_k \wedge \varepsilon > 0 \Rightarrow 0 < \varepsilon < A - x_k$$

Т.к. $A - x_k \neq 0$ по аксиоме непрерывности $\exists \varepsilon\ 0 < \varepsilon < A - x_k$ - противоречие. Следовательно каждому ε , соответствует такое k, а следовательно и $k+1, k+2, ...$, то есть $\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \{\forall n < N \in \mathbb{N}\ A - x_n < \varepsilon\} \Rightarrow \forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \{\forall n < N \in \mathbb{N}\ |A - x_n| < \varepsilon\} \Rightarrow$ Предел последовательности x_n существует и равен $\sup\{x_n\}$, Что и Требовалось Доказать.

2) Пусть x_n монотонно убывающая, ограниченная снизу последовательность, тогда $\exists\ A = \inf\{x_n\}$, по определению:

$$\forall n\ x_n < A \Rightarrow \exists \varepsilon_n > 0 \forall n\ x_n < A + \varepsilon_n$$

Причем для ввиду монотонности $x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n - A > x_{n+1} - A$, следовательно каждому такому x_n соответствуют все такие $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, ...$, то есть $\exists \varepsilon_k > 0\ \varepsilon_k > x_k - A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_k > 0 \forall n \geqslant k\ \varepsilon_k > x_n - A$.

Предположим что $\exists\varepsilon$ которому не соответствуют ни одного, такого x_k

$$\nexists\varepsilon > 0\ \varepsilon > x_k - A \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\ \varepsilon < x_k - A$$
$$0 < x_k - A (\text{Т.к. } \inf\{x_n\}\ )$$
$$0 < x_k - A \wedge \varepsilon < x_k - A \wedge \varepsilon > 0 \Rightarrow 0 < \varepsilon < x_k - A$$

Т.к. $x_k - A \neq 0$ по аксиоме непрерывности получаем $\exists\varepsilon\ 0 < \varepsilon < A - x_k$ - противоречие. Следовательно каждому ε , соответствует такое k, а следовательно и $k+1, k+2, ...$, то есть $\forall\varepsilon\exists N \in \mathbb{N}\{\forall n < N \in \mathbb{N}\ x_n - A < \varepsilon\} \Rightarrow \forall\varepsilon\exists N \in \mathbb{N}\{\forall n < N \in \mathbb{N}\ |A - x_n| < \varepsilon\} \Rightarrow$ Предел последовательности x_n существует и равен $\inf\{x_n\}$, Что и Требовалось Доказать. ►

14. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$$

Это выражение называется *числовой ряд*. Слагаемые a_n называются *членами* этого ряда.

Ряд сходится, если сходится последовательность частичных сумм. Если не существует предел частичной суммы, то ряд расходится.

Сходимость ряда не зависит от выбрасывания конечного числа элементов

Критерий Коши сходимости ряда.

Для того, чтобы ряд $\sum a_n$ *сходился, НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, чтобы*

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall m > 0, n > N$ справедливо $A = |\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k| < \varepsilon$.

◄ Достаточно заметить, что $A = |S_{n+m} - S_n|$ и воспользоваться критерием Коши для последовательностей).

► Важное следствие. *Если ряд* $\sum |a_n|$ *сходится, то и ряд* $\sum a_n$ *сходится.*

(надо применить дважды признак Коши в разные стороны)

15. Необходимое условие сходимости ряда.

Необходимо условие сходимости. *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

◄ Если ряд сходится, то последовательности S_n и S_{n+1} сходятся к общему пределу S - сумме ряда $\sum a_n$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. ►

16. Геометрическая прогрессия, гармонический ряд

Примеры числовых рядов:

1. *Геометрическая прогрессия.*
$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, при $|q| < 1$. Ряд сходится
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1....$ Частичные суммы S_n это ряда равны -1 и 0. Последовательность частичных сумм не сходится, ряд расходится.
2. *Гармонический ряд.*
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$
Написать явную формулу частичных сумм не удаётся. Этот ряд расходится.

17. Признаки сравнения сходимости рядов с положительными членами.

Положительность слагаемых ряда эквивалента монотонности последовательности частичных сумм.

Признак Для сходимости ряда с неотрицательными или положительными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм была ограничена.
◀ Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами не убывает. Поэтому,если эта последовательность ограничена, то она сходится по теореме Вейерштрасса. Обратно,если эта последовательность сходится, то она ограничена. ▶
Сумма сходящего сходящегося ряда с положительными членами совпадет с точной верхней гранью частичных сумм.

Теорема. *Пусть даны два ряда $\sum a_n$, $\sum b_n$, $a_n, b_n \geqslant 0$. Пусть при некотором $c > 0$ для всех n справедливо неравенство $a_n \leqslant c b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum a_n$, а из расходимости ряда $\sum a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum b_n$.*

◀ Пусть ряд $\sum b_n$ сходится. По критерию Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N$ и $m > 0$ выполнено неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+m} b_k < \varepsilon$. Но тогда $\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} c\, b_k < c\varepsilon$. Поэтому в силу критерия Коши ряд $\sum a_n$ сходится тоже.

Второе утверждение следует из уже доказанного первого, рассуждение «от противного». ▶

Теорема. *Пусть даны два ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ с положительными членами и пусть существует конечный положительный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0.$$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

◀ В силу условия при достаточно больших n выполнены неравенства $\frac{1}{2}Lb_n \leqslant a_n \leqslant 2Lb_n$. ▶

Теорема. *Пусть даны два ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ с положительными членами. Пусть при достаточно больших n справедливо неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Тогда из сходимости ряда $\sum b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum a_n$, а из расходимости ряда $\sum a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum b_n$.

◂ Без ограничения общности можно считать, что неравенство выполняется при всех n. В противном случае выбросим начальную конечную часть ряда, ту, где не выполнено. Сходимость ряда не зависит от выбрасывания конечного числа элементов.

Выпишем неравенство для $n = 1, 2, \ldots$:

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \ \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

и перемножим все эти неравенства между собой. Полученное неравенство

$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1} \quad \text{перепишем в виде} \quad a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

Теперь утверждения теоремы вытекают из уже доказанного. ▸

Следующая теорема — весьма практичный метод исследования сходимости рядов с положительными членами.

Теорема. *Пусть последовательность $a_n > 0$ монотонная и убывает к нулю. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ сходятся или расходятся одновременно.*

◂ Напишем неравенства

$$\begin{aligned}
a_2 \leqslant a_2 \leqslant a_1, \\
2a_4 \leqslant a_3 + a_4 \leqslant 2a_2, \\
4a_8 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leqslant 4a_4, \\
8a_{16} \leqslant a_9 + a_{10} + \ldots + a_{15} + a_{16} \leqslant 8a_8, \\
\ldots \\
2^{n-1} a_{2^n} \leqslant a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n} \leqslant 2^{n-1} a_{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

и сложим их. Положим $R_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$, получается $\frac{1}{2}(R_n - a_1) \leqslant S_{2^n} - a_1 \leqslant R_n$. Осталось воспользоваться теоремами сравнения. ▸

18. Признак через a_{2^n}.

Телескопический признак:

Для каждого такой монотонно убывающей последовательности $f(n)(n \in \mathbb{N})$, причем $\forall n \in \mathbb{N} f(n) \geqslant 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} f(2^n)$ сходится или расходится тогда и только тогда когда ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится соответственно.

Доказательство:

Лемма: Заметим что $\forall k, n\{k > n\}$ $(k - n) * f(n) \geqslant f(n+1) + f(n+2) + ... + f(k)$, ввиду того что последовательность $f(n)$ убывающая.

$$\sum_{n}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + ...$$

Распишем ряд следующим образом, для каждого такого элемента ряда $\sum\limits_{n}^{\infty} f(n)$, такого что $n = 2^k$ распишем все последующие 2^n элементов ряда как $k * 2^n$, тогда соответственно следующий ряд $f(1) * 1 + f(2) * 2 + f(4) * 4 + ... \Leftrightarrow \sum\limits_{n}^{\infty} 2^n * f(2^n)$, причем в силлу леммы $0 < \sum\limits_{n}^{\infty} 2^n * f(2^n) \geqslant \sum\limits_{n}^{\infty} f(n)$, тогда по признаку сравнения рядов, если ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} 2^n * f(2^n)$ сходится, тогда ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} f(n)$ тем более сходится. Тоже утверждение следственно верно и для расходимости ввиду признака сравнения.

19. Признаки Даламбера и Коши.

Признак Даламбера. *Пусть* $a_n > 0$. *Положим* $\mathfrak{D}_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
Если для всех достаточно больших n *справедливо неравенство* $\mathfrak{D}_n \leqslant q < 1$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
Если для всех достаточно больших n *справедливо неравенство* $\mathfrak{D}_n \geqslant 1$, *то ряд* $\sum a_n$ *расходится.*
Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{D}_n = d$. Если $d < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится; если $d > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится (*признак Даламбера в предельной форме.*)

Признак Коши. *Пусть* $a_n > 0$, *положим* $\mathfrak{C}_n = \sqrt[3]{a_n}$. *Если при достаточно больших* n *справедливо неравенство* $\mathfrak{C}_n \leqslant q < 1$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится. Если при бесконечном множестве достаточно больших* n *справедливо неравенство* $\mathfrak{C}_n \geqslant 1$, *то ряд* $\sum a_n$ *расходится.*
◀ В случае $\mathfrak{C}_n \leqslant q < 1$ сравним ряд $\sum a_n$ со сходящейся геометрической прогрессией $\sum q^n$, в случае $q > 1$ не выполнено необходимое условие сходимости. ▶

20. Число $e = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ — существование предела.

Бином Ньютона.
$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 an - 2b^2 + ... + b^n$

Неравенство Бернулли. Для всех $\alpha > -1$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ (доказательство по индукции)

Рассмотрим последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Пусть $n > 1$. Тогда

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \geqslant \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1} > 1.$$

Мы воспользовались неравенством $\left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow n^3 + n^2 - n > n^2 - 1 + n^3 - n$. Таким образом, последовательность y_n убывает. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, у неё есть предел. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Определение. $e = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Последовательность y_n мы рассматривали для удобства исследования x_n.

Можно доказать сходимость последовательности x_n по-другому. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$(1+b)^n = 1 + \frac{n}{1!}b + \frac{n(n-1)}{2!}b^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-1)!}b^{n-1} + b^n.$$

Из этой формулы вытекает при $b = 1/n$:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \\ + \frac{1}{4!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Теперь

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$: в формулах каждое слагаемое при переходе от n к $n+1$ увеличивается, да ещё добавляется последнее слагаемое.

Из первой формулы следует оценка

$$x_n \leqslant s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} \leqslant 1 + 1 + 1 = 3.$$

Теперь мы видим, что последовательность x_n строго монотонно возрастает и что 3 — верхняя её граница. Значит, последовательность x_n сходится, заодно получили оценку $e < 3$. На самом деле e — иррациональное число, оно трансцендентное, в десятичном виде оно имеет вид $e = 2,718281828459045...$

21. Представление e в виде суммы ряда из обратных факториалов. Иррациональность числа e.

Представление e в виде суммы ряда из обратных факториалов.

Доказали, что $x_n \leqslant s_n$. Однако, при любом k и $n \geqslant k$ из тех же формул следует

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k}{n}\right) < x_n$$

(это обрезанная формула бинома Ньютона для x_n). Зафиксируем k и перейдём к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство $s_k \leqslant e$.

Мы доказали, что при любом k справедливы неравенства $x_n < s_k < e$. Значит, по теореме о двух милиционерах существует $\lim s_n$ и он равен e.

Таким образом мы доказали формулу

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Докажем ещё оценку скорости сходимости этого ряда к e, рассмотрим величину

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+1}).$$

Полученную оценку записывают в виде $e = s_{n+1} + \dfrac{\theta_n}{(n+1)!(n+1)}$, где $\theta_n \in (0,1)$.

◀ Если $e = p/q$ — несократимая дробь, то число $e \cdot q!$ является целым. При этом

$$e \cdot q! = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \ldots + \frac{q!}{(q-1)!} + \frac{q!}{q!} + \frac{\theta}{q},$$

отсюда следует, что число $\dfrac{\theta}{q}$ должно быть целым, а оно не целое по построению. ▶

22. Предел функции. Предел функции по Гейне.

Проколотая окрестность точки a – это окрестность точки a без точки a. Обозначение $O^\circ(a)$.

Определение 1 (Коши). Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки a. (Функция f стремится к A при x, стремящемся к a) $\Leftrightarrow$ (A равно пределу f при $x \to a$) $\Leftrightarrow$ ($f(x) \to A$ при $x \to a$) $\Leftrightarrow$ ($A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$), если и только если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E, 0 < |x-a| < \delta:\quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 2 (переформулировка). $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, если для любой окрестности $\mathcal{O}(A)$ точки A найдётся проколотая окрестность $\mathring{\mathcal{O}}(a)$ точки a такая, что $f(\mathring{\mathcal{O}}(a)) \subset \mathcal{O}(A)$.

Предел функции по Гейне.

Теорема 1 (необходимое условие). *Если* $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, *то для любой последовательности* $x_n \to a$, $x_n \neq a$ *справедливо соотношение* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Теорема 2 (достаточное условие). *Пусть для любой строго монотонной последовательности* $x_n \to a$ *справедливо соотношение* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. *Тогда* $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Теорема 2' (достаточное условие). *Пусть для любой последовательности* $x_n \to a$, $x_n \neq a$ *справедливо соотношение* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. *Тогда* $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Часто следующий текст называют **определением предела функции по Гейне**: *число* A *является пределом функции* f *при* $x \to a$, *если для любой последовательности* $x_n \to a$, $x_n \neq a$ *справедливо соотношение* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

◂ 1. Пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Выберем $\varepsilon > 0$ и построим по нему такое $\delta > 0$, что из $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Теперь, в силу $x_n \to a$ по числу δ выберем такое N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \delta$. Отсюда и по построению числа δ следует, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. ▸

◂ 2. Пусть для любой строго монотонной последовательности $x_n \to a$ справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что тогда $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Рассуждать будем от противного. Построим отрицание к

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall 0 < |x-a| < \delta:\quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для этого поменяем местами кванторы и перевернём заключительное неравенство:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists 0 < |x-a| < \delta:\quad |f(x) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Итак, пусть такое ε существует. В качестве произвольного δ будем выбирать числа $\delta_n = n^{-1}$, каждому такому δ соответствует $x_n \neq a$ такой, что $|x_n - a| < \delta_n$, но $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$.

Очевидно, что $x_n \to a$. Осталось воспользоваться следующей леммой[15]: из любой последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$ можно выбрать строго монотонную подпоследовательность x_{n_k}. Эта строго монотонная подпоследовательность также стремится к a, однако f_{n_k} не стремится к A по построению: $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$. ▸

23. Критерий Коши существования предела функции.

Критерий Коши. *Предел* $\lim_{x \to a} f(x)$ *существует, если и только если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x', x'', \text{ таких что } |x' - a|, |x'' - a| \in (0, \delta) \text{ справедливо } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

◂ Необходимость. Пусть существует $\lim_{x \to a} f(x)$. Тогда, по определению Коши,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, \text{ такого что } |x - a| \in (0, \delta) \text{ справедливо } |f(x) - A| < \varepsilon/2.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, построим по нему $\delta > 0$. Теперь

$$\forall x', x'', \text{ таких что } |x' - a|, |x'' - a| \in (0, \delta) \text{ справедливо } |f(x') - a| < \varepsilon/2, |f(x') - a| < \varepsilon/2.$$

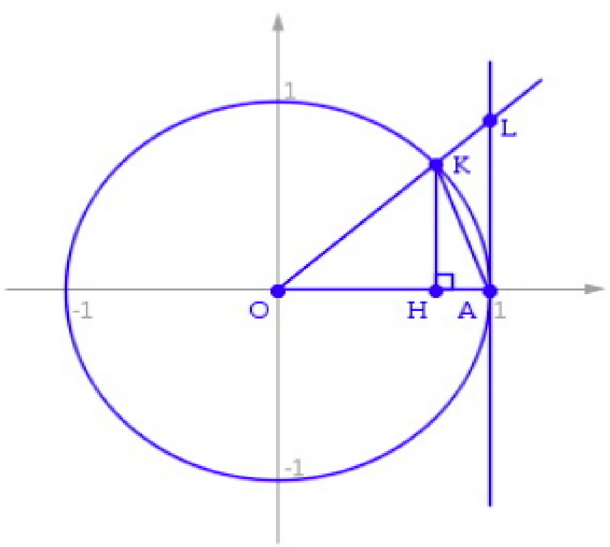
Из $|f(x') - a| < \varepsilon/2, |f(x') - a| < \varepsilon/2$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено критерия Коши. Из него вытекает, что для каждой последовательности $x_n \to a$ последовательность образов $f(x_n)$ фундаментальна (почему?). Поэтому для каждой $x_n \to a$ последовательность $f(x_n)$ сходится. Осталось увидеть, что для двух последовательностей $x'_n, x''_n \to a$ пределы последовательностей $f(x'_n)$ и $f(x''_n)$ совпадают.

Для этого рассмотрим последовательность $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n, \ldots$, эта последовательность также сходится к a, поэтому последовательность образов $f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \ldots$ также фундаментальна, следовательно, — сходится. ▸

24. Первый замечательный предел.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$



◂ Итак, на рисунке у нас тригонометрический круг, с центром в начале координат, луч OL, проведённый под углом $x \in (0, \pi/2)$ к положительному лучу оси абсцисс, тока K — точка пересечения окружности и луча OL, перпендикуляры к оси абсцисс проходят через K и точку с координатами $(1, 0)$.

Теперь $S_{\triangle OAK} < S_{\triangleleft OAK} < S_{\triangle OHL}$. Выразим эти площади через x:

$$|OA| = |OK| = 1,\ KH = \sin x,\ AL = \operatorname{tg} x,\ S_{\triangle OAK} = \frac{1}{2}\sin x,\ S_{\triangleleft OAK} = \frac{1}{2}x,\ S_{\triangle OHL} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Итак, $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ и

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Теперь $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$ и по лемме о двух милиционерах $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. ▸

25. Второй замечательный предел.

$\lim\limits_{t\to}(1+t)^{1/t} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

◂ Второй замечательный предел следует из определения числа e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Пусть теперь x — вещественное число, а не натуральное, обозначим через $n = [x]$ его целую часть. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n+1}{n}.$$

Так как

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} \to e, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n+1}{n} \to e,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся N, такое что при $n > N, n \in \mathbb{N}$

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} - e\right|,\ \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n+1}{n} - e\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$ при $x > N$, $x \in \mathbb{R}$ и второй замечательный предел доказан. ▸

26. Предел сложной функции. Замена переменных в пределах.

Предел сложной функции. Замена переменных в пределах.

Пусть даны две функции, f и g, причём их области определения и множества значений так согласованы, что определена функция $g(f(x))$,

Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки a и пусть существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, причём $f(x) \neq A$. Пусть функция g определена в проколотой окрестности $\mathcal{O}(A)$ точки A и существует предел $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$.

Тогда в некоторой проколотой окрестности точки a определена функция $g(f(x))$, существует предел $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$, иными словами, если в формуле

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to A} g(y) = B.$$

второй предел существует, то существует и первый и он равен второму.

◂ Дано:

$$\forall\varepsilon_0 > 0\ \exists\delta_0 > 0\ \forall x:\ |x-a| \in (0,\delta_0)\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon_0,$$

$$\forall\varepsilon_1 > 0\ \exists\delta_1 > 0\ \forall y:\ |y-A| \in (0,\delta_1)\ \Rightarrow\ |g(y) - B| < \varepsilon_1.$$

Доказать:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y:\ |x-a| \in (0,\delta)\ \Rightarrow\ |g(f(x)) - B| < \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и построим по ε_1 величину δ_1 так, чтобы $\forall y:\ |y-A| \in (0,\delta_1)\ \Rightarrow\ |g(y) - B| < \varepsilon_1$. Теперь положим $\varepsilon_0 = \delta_1$ и построим по этому ε_0 величину δ_0.

Покажем, что требуемая формула выполняется при $\delta = \delta_0$.

По построению при $|x-a| \in (0,\delta)$ выполнено $|f(x) - A| < \varepsilon_0 = \delta_1$, при $|f(x) - A| < \delta_1$ выполнено $|g(f(x)) - B| < \varepsilon$. ▸

Эту формулу удобно применять к вычислению пределов:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

27. Односторонние пределы — определение, примеры. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

Левый предел обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, правый — $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Определение. *Число A называется левым пределом пределом f при $x \to a$, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a): \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называется правым пределом пределом f при $x \to a$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (a, a+\delta): \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Соответственно, если существуют оба односторонних предела и они равны:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = A,$$

то существует и обычный предел и он также равен A: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Теорема о левом пределе по Гейне. *Если $A = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, то для любой последовательности $x_n \to a$, $x_n \in (a-h, a)$ справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Пусть для любой строго возрастающей последовательности $x_n \to a$ последовательность $f(x_n)$ сходится. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.*

◂ Доказательство первой части теоремы опустим, ранее мы доказывали очень похожие утверждения.

Во второй части сначала заметим, что в условиях теоремы все последовательности $f(x_n)$ сходятся к одному и тому же пределу A. Пусть есть две строго возрастающих последовательности $x_n, y_n \to a$. Построим по ним объединяющую строго возрастающую последовательность $z_n \to a$, последовательности $x_n, y_n \to a$ — подпоследовательности z_n. Теперь по предположению $f(z_n)$ сходится к некоторому числу A, следовательно обе подпоследовательности $f(x_n), f(y_n)$ также сходятся к A. Дальнейшее доказательство можно провести от противного, аналогично доказательству теоремы 2 со страницы 45. ▸

Из этой теоремы следует, например следующее важное утверждение.

Теорема об односторонних пределах монотонной функции. *Пусть на отрезке $[c, d]$ задана монотонно возрастающая функция $f(x)$. Пусть $a \in (c, d)$. Тогда существуют пределы $A = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.*

◂ Для доказательства достаточно отметить, что для любой строго возрастающей последовательности $x_n \to a$ последовательность $f(x_n)$ не убывает и ограничена сверху числом $f(a)$ и что для любой строго убывающей последовательности $x_n \to a$ последовательность $f(x_n)$ не возрастает и ограничена числом $f(a)$ снизу. ▸

28. Непрерывные функции. Разрывы, классификация точек разрыва.Пример

Определения.

Колебанием ограниченной функции f на множестве E называется величина $w(E,f) = \sup_{x\in E} f(x) - \inf_{x\in E} f(x)$. *Колебанием ограниченной функции f в точке x_0 называется величина*

$$w(E,x_0) = \lim_{\delta\to+0} w(\mathcal{O}_\delta, f).$$

Так как при убывании δ окрестность $\mathcal{O}_\delta$ «стягивается», то величина $w(\mathcal{O}_\delta, f)$ убывает. Поэтому для любой монотонной последовательности $\delta_n \to +0$ последовательность $w(\mathcal{O}_{\delta_n}, f)$ не возрастает, она ограничена снизу нулём. Поэтому предел в определении $w(E,x_0)$ существует всегда.

Функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in (a,b)$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) :\ f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(f(x_0)).$$

Перефразировка этого же определения

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall|x - x_0| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Эквивалентные утверждения.

1) Функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ является непрерывной в точке $x_0 \in (a,b)$, если и только если существует предел $f(x)$ при $x \to x_0$ и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это ещё можно переформулировать так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x),$$

то есть знак непрерывной функции перестановочен с пределом.

2) Функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ является непрерывной в точке $x_0 \in (a,b)$, если и только если для любой последовательности $x_n \to x_0$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

3) Функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ является непрерывной в точке $x_0 \in (a,b)$, если и только если $w(x_0, f) = 0$.

Определение. *Функция называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Теорема. *Функция f непрерывна на интервале, если прообраз любого открытого множества открыт.*

Разрывы, классификация точек разрыва.

Точки разрыва бывают разные.

Если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и они равны между собой (но не равны $f(x_0)$), то x_0 — *устранимая точка разрыва.*

Если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и они не равны между собой, то x_0 — *точка разрыва 1-го рода.*

Если не существует хотя бы один односторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, то x_0 — *точка разрыва 2-го рода.*

На правой картинке — почти все возможные варианты разрыва 2-го рода, на левой картинке — разрыв 1-го рода.

29.

Локальные свойства непрерывных функций.Теорема о непрерывности сложной функции.

Теорема. *Пусть функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0\in(a,b)$. Тогда функция f ограничена в некоторой окрестности точки x_0; а если $f(x_0)\neq 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 функция f ненулевая: $|f|\geqslant|f(x_0)|/2>0$, её знак совпадает со знаком $f(x_0)$.*

◂ Пусть f непрерывна в точке x_0. Тогда (по определению непрерывности) для $\varepsilon=1$ существует такое $\delta>0$, что при $|x-x_0|<\delta$ справедливо неравенство $|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+1$. Ограниченность непрерывной функции доказана.

Пусть $f(x_0)\neq 0$, например, $f(x_0)>0$. Положим $\varepsilon=f(x_0)/2>0$, по определению непрерывности существует такое $\delta>0$, что при $|x-x_0|<\delta$ справедливо неравенство $f(x)>\varepsilon$. ▸

Теорема. *Пусть функции $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ непрерывны в точке $x_0\in(a,b)$. Тогда функции $\alpha f+\beta g$, $f\cdot g$ и (если, дополнительно, $g(x_0)\neq 0$) f/g непрерывны в x_0.*

◂ Все утверждения непосредственно следуют из соответствующих теорем о пределах. ▸

Теорема о сложной функции. *Пусть функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0\in(a,b)$, а функция g определена в окрестности точки $f(x_0)$ и непрерывна в этой точке. Тогда функция $x\mapsto g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

◂ Дано (с изменением букв): непрерывность g в точке $f(x_0)$:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall y\in(f(x_0)-\eta,f(x_0)+\eta):\ |g(f(x_0)-g(y)|<\varepsilon,$$

непрерывность f в точке x_0:

$$\forall\eta>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta):\ |f(x_0)-f(x)|<\eta.$$

Доказать:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(f(x_0)-\delta,f(x_0)+\delta):\ |g(f(x_0))-g(f(x_0))|<\varepsilon.$$

Фиксируем $\varepsilon>0$, строим η, по η строим δ. Теперь $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ имеем $|f(x_0)-y|<\eta$ ($y=f(x)$) и, следовательно, $|g(f(x_0))-g(f(x_0))|<\varepsilon$. ▸

30.

Глобальные свойства непрерывных функций. Ограниченность, максимум ограниченной функции достигается.

Теорема Вейерштрасса о максимальном значении. *Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда f ограничена сверху и снизу, найдутся такие точки x_1 и x_2, что $f(x_1) = \min f(x)$, $f(x_2) = \max f(x)$.*

◂ Будем рассуждать от противного. Пусть функция f не ограничена, это значит, что найдётся последовательность $x_n \in [a,b]$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = \infty$.

Выберем из последовательности x_n (она ограничена!) сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}, $\lim x_{n_k} = x_0$. Теперь $\lim x_{n_k} = x_0$, а $\lim f(x_{n_k}) = \infty \neq f(x_0)$.

Итак, функция f ограничена и сверху, и снизу. Пусть $M = \sup f(x)$, но f не принимает значение M ни в какой точке. Тогда функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ определена при всех $x \in [a,b]$, по доказанным ранее теоремам, она непрерывна.

Значит, эта функция ограничена сверху: $\varphi(x) < K$, отсюда $M - f(x) > \dfrac{1}{K}$, или $f(x) \leqslant M - \frac{1}{K}$, что противоречит $M = \sup f(x)$.

Аналогичная конструкция показывает, что достигается точка минимума. ▸

31. Глобальные свойства непрерывных функций. Теорема о промежуточном значении.

Теорема о промежуточном значении (Больцано–Коши). *Пусть $f \in C[a,b]$, причём $f(a)f(b) < 0$. Тогда существует такое $\theta \in (a,b)$, что $f(\theta) = 0$.*

◂ Рассмотрим случай $f(a) < 0, f(b) > 0$. Определим множество $E = \{y : \forall x \in (y,b) :\ f(y) > 0\}$.

Это множество не пусто: из $f(b) > 0$ следует, что $f(x) > 0$ в окрестности точки b. Это множество ограничено снизу: a — нижняя граница этого множества. Значит, у этого множества есть точная нижняя грань $\theta = \inf E$. Покажем, что $f(\theta) = 0$. Если это не так, то либо $f(\theta) > 0$, либо $f(\theta) < 0$.

Если $f(\theta) > 0$, то $f > 0$ в окрестности $\mathcal{O}_\delta(\theta)$, таким образом $f(\theta - \delta/2) \in E$, это противоречит тому, что θ — нижняя граница E.

Если $f(\theta) < 0$, то $f < 0$ в окрестности $\mathcal{O}_\delta(\theta)$, таким образом $f(\theta + \delta/2) \notin E$, это противоречит тому, что θ — точная нижняя граница для E. ▸

Следствие. *Пусть $f \in C[a,b]$, причём $f(a) < f(b)$. Тогда для любого $A \in (f(a), f(b))$, найдётся такое $\theta \in (a,b)$, что $f(\theta) = A$.*

◂ Для доказательства следствия достаточно рассмотреть функцию $f(x) - A$, для неё выполнены все условия теоремы Больцано–Коши. ▸

32. Глобальные свойства непрерывных функций. Непрерывный образ отрезка – отрезок.

◂ Если $f \equiv const$, то образ — единственная точка. Пусть $f \not\equiv const$ Это не просто отрезок — это отрезок $\Delta = [\min f, \max f]$.

То, что значения $\min f(x)$ и $\max f(x)$ достигаются, мы доказали. То, что любые значения из Δ достигаются, следует из теоремы о промежуточном значении. То, что значения вне Δ не принадлежат образу — очевидно. ▸

33. Глобальные свойства непрерывных функций. Равномерная непрерывность, теорема Кантора.

Определение равномерной непрерывности. Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Это определение похоже на определение непрерывности в точке. При определении непрерывности в точке x_0 число δ определялось по ε и x_0. При определении равномерной непрерывности на множестве число δ определяется по ε и множеству E, одно общее δ для всего множества.

Естественно, непрерывность во всех точках $x_0 \in E$ функция f, означает, что в каждой точке есть своё число δ. Равномерная непрерывность означает, что для каждого ε есть единственное δ, общее для всех точек из E.

Теорема Кантора. *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция равномерно непрерывна.*

◂ Пусть это не так. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta \ \exists x, y \in E : |x - y| < \delta, \text{ но } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

То есть для каждого $\delta = \delta_n = 1/n$ найдутся такие x, y, $|x_n - y_n| < \delta_n$, что $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.

Выберем из ограниченной последовательности чисел x_n сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}: $x_{n_k} \to x^*$. Так как $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \delta_{n_k}$, то и $y_{n_k} \to x^*$. Функция f непрерывна в точке x_*, поэтому $f(y_{n_k}) \to f(x^*)$ и $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$

Для всех k по построению справедливо неравенство $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon$, перейдем в нём к пределу, получим противоречие: $0 \geqslant \varepsilon > 0$. ▸

Теорема Кантора справедлива в несколько более общем виде: *если функция непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на нём.*

Пример. Непрерывная на (a, b) функция может быть не равномерно непрерывной. Главный пример: $f(x) = 1/x$ на $(0, 1)$.

Увидеть это можно так: величина $|f(x) - f(y)| = |x - y|/(xy)$ может быть очень большой, даже если $|x - y|$ очень маленькое число. Положим $\varepsilon = 1$, $x = \delta, y = \delta^2$, тогда $|f(x) - f(y)| = |1 - \delta|/\delta^2 \sim \delta^{-2}$.