1 Листок 2

1.1 Задача 1

При $a > 0$ исследовать существование предела

$$\frac{3^{an} + 2^n \sin n}{e^n + 2^n \ln n}$$

Разделим и умножим все на e^n:

$$\frac{\left(\frac{3^a}{e})^n\right) + (\frac{2}{e})^n \sin n}{1 + (\frac{2}{e})^n \ln n}$$

Заметим, что вторые слагаемые в числителе и в знаменателе стремятся к 0, то есть в итоге нам надо посчитать:

$$\lim(\frac{3^a}{e})^n$$

В таком случае, если $3^a < e$, то такой предел равен 0, если же $3^a > e$, то предел равен бесконечности, то есть последовательность расходится. Если же $3^a = e$, очевидно, что предел равен единице.

1.2 Задача 3

Заметим, что на бесконечности $sin\frac{1}{n^a} \approx \frac{1}{n^a}$. Очевидно, что при $a = 1$ ряд расходится, так как он соответствует гармоническому ряду, который тоже расходится. Про ряды вида $\frac{1}{n^a}$ нам уже известно: они сходятся при $a > 1$ и расходятся при $a \leq 1$. (То, что они расходятся, можно доказать через расходимость гармонического ряда)

1.3 Задача 4

Предположим, что ряд $\sum |a_n|$ расходится. Тогда для любого натурального числа N найдется такой номер k, что $\sum a_k > N$ (это частичная сумма). Рассмотрим последовательность степеней двойки и отметим такие номера k, для которых частичная сумма впервые становится больше 2, потом 4, 8, 16 и так далее. Выберем $b_n = \frac{1}{2^p}$ такую, что для частичной суммы, большей k-той степени двойки, члены последовательности будут равны $\frac{1}{2^k}$. Тогда $\sum a_n b_n = \frac{1}{2}(\sum\limits_1^k a_k) + \frac{1}{4}(\sum\limits_1^m a_m) + .. >= 1 + 1 + 1 + ...$, то есть расходится, их чего можно сделать вывод, что для расходящегося $\sum a_n$ всегда можно придумать b_n, которая делала бы ряд из произведений расходящимся.

1.4 Задача 5

Покажем, что если ряд сходится абсолютно, то и $\lim \sum a_n^2 < \infty$. Всякая сходящаяся последовательность ограничена, поэтому можно выбрать ξ такое, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < |\xi|$. Домножим на $|a_n|$: $|a_n|^2 < |\xi||a_n| \Rightarrow a_n^2 < |\xi||a_n|$.

$$\lim \sum |\xi||a_n| = \lim |\xi| \sum |a_n| = |\xi| \lim \sum |a_n|$$

Данный ряд - сходящийся, умноженный на конечную константу, сходится, а $\sum a_n^2$ меньше него, значит, он тоже сходится.
Значит, что в условиях предыдущей задачи ряд $\sum b_n^2$ сходится, то есть $\lim b_n^2 = 0$ (необходимое условие сходимости рядов), из чего следует, что $(\lim b_n)^2 = 0 \Rightarrow \lim b_n = 0$, далее делаем аналогично, как в предыдущей задаче, из абсолютной сходимости последовательности следует сходимость квадрата последовательности по доказанному выше.

1.5 Задача 6

По определению непрерывности у функции в каждой точке отрезка должен быть предел, равный значению функции в этой точке. Пусть график функции не замкнут, тогда существует предельная точка, которая в нем не содержится. В ее окрестности бесконечно много точек данной функции, значит, это предел, при этом в этой точке его нет, что противоречит свойствам непрерывности, значит, функция содержит все свои предельные точки, то есть график является замкнутым. В бесконечном случае можно привести пример функции $y = \frac{1}{x}$ на интервале $(0, +\infty)$ и $y = 0$ для $x = 0$.

1.6 Задача 10

По теореме Ролля если в двух точках значения функции равны, то между ними найдется точка такая, что в ней производная будет равна 0. Пусть у многочлена все корни действительные. Очевидно, что если есть кратные корни, можно рассмотреть только один из них. Рассмотрим два соседних различных корня многочлена. Так как в обеих этих точках значение равно 0, между ними есть корень производной. Значит, что все $n-1$ корней производной также вещественны, так как по теореме Ролля лежат между корнями многочлена.

1.7 Задача 11

Если функция дифференцируема на всей прямой, то она дифференцируема и на отрезке $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. При этом в концах отрезка она 0 по условию, значит, по теореме Ролля на отрезке есть некоторый x, для которого первая производная равна 0. Для всех таких интервалов получаем монотонно убывающую к 0 последовательность, из чего можно сделать вывод, что она сходится. Функция непрерывна, следовательно, предел функции в 0 равен ее значению там, то есть производная в 0 - 0. Для второй, третьей и тд производных можно по индукции.