№2

Мозговой Владислав

$D_1 = 2\cdot p_1 - p_2$, рассмотрим такое отображение, что его сумма с D_1 будет ≥ 0

то есть оно $\geq -2\cdot p_1 + p_2$, его степень 0, поэтому оно имеет вид

$a - 2\cdot p_1 + p_2$, где a — точка CP^1

если координаты точек $a = (x_a; y_a)$, $p_1 = (x_1; y_1)$, $p_2 = (x_2; y_2)$, то

$$f: (x;y) \to \frac{(x_a y - x y_a)(x_2 y - x y_2)}{(x_1 y - x y_1)^2}$$

тогда так как проективизация имеет размерность на 1, а это пространство одномерное (т.к. мы просто выбираем $a \in CP^1$), то $l(D_1) = 2$

Тогда по Риману-Роху

$l(2k) - l(k-2k) = \deg 2k - g + 1$

$l(2k) - l(-k) = 2\deg k - g + 1 = 4g - 4 - g + 1 = 3g - 3$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} g=0 \Rightarrow l(-k)=3,\ l(2k)=0 \\ g=1 \Rightarrow l(-k)=1,\ l(2k)=3-2=1 \\ g>1 \Rightarrow l(-k)=0,\ l(2k)=3g-3 \end{array}\right.$$

№4

Проведем прямую через p, q, она пересечет кривую в r, проведем через r еще какую-то прямую, отношение этих прямых, ограниченное на данную кривую, будет искомой мероморфной функцией с полюсами только в p, q.

№6

$x^4+xy+y^4=0$

$x^4+xyz^2+y^4=0$

$3d(d-2)=24$ - число точек перегиба

$$\begin{vmatrix} 12x^2 & z^2 & 2yz \\ z^2 & 12y^2 & 2xz \\ 2yz & 2xz & 2xy \end{vmatrix} = 12x^2\cdot 12y^2\cdot 2xy + 2zy\cdot z^2\cdot 2xz + z^2\cdot 2xz\cdot 2yz -$$

$$- 2yz\cdot 12y^2\cdot 2yz - 12x^2\cdot 2xz\cdot 2xz - z^2\cdot z^2\cdot 2xy =$$

$$= 2\cdot 12^2 x^3y^3 + 2^2 xyz^4 + 4xyz^4$$

$$- 2^2\cdot 12\cdot xy^4z - 2^2\cdot 12x^4z^2 - 2xyz^4$$

Заметим что если у автоморфизма гладкой алгебр. кривой ≥ 4 неподвижные точки, то все они - точки Вейерштрасса

$(x:y:z)\to(x:y:-z)$ автоморфизм

тогда искомые точки это

$\left(1:\frac{1+i}{\sqrt2}:0\right), \left(i:\frac{1+i}{\sqrt2}:0\right), \left(-1:\frac{1+i}{\sqrt2}:0\right), \left(-i:\frac{1+i}{\sqrt2}:0\right)$

суммарный вес $(g-1)g(g+1)=2\cdot3\cdot4=24$

№7

а) точки $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

набор пример

$\{a_1, a_2, a_3\}$ $y = x^4$ $(x^4 + yz^3)$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 \\ 0 & 3z^2 & 6yz \end{vmatrix} = -12 \cdot 3^2 x^2 z^4$

$(1:1:0)$ – не перегиб

$\{a_1, a_2, a_4\}$ $y = x^4 + x$ вес 1 перегиб

$\{a_1, a_2, a_5\}$ $y = x^4$ вес 2 перегиб 2 порядка

$\{a_1, a_3, a_5\}$ $y^2 = x^4$ эллиптич.

б) $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$

набор пример