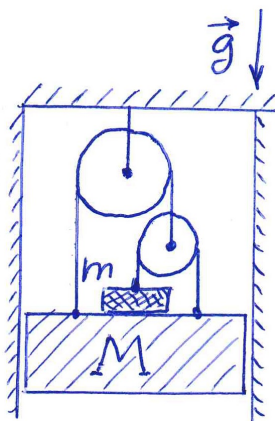


1 2021 Вариант 1

Задача 1.1. Кабина лифта массы M может без трения двигаться в вертикальном направлении в лифтовой шахте. Кабина соединена с потолком шахты системой блоков (см. рис. 1). Груз m может свободно двигаться в вертикальном направлении. Все нити невесомы, нерастяжимы и всегда натянуты (не сминаются). Массой блоков и трением в осях можно пренебречь.

- (а) При каких значениях масс m и M кабина лифта может находиться в состоянии покоя?
 (б) Найдите величину силы реакции N , действующей на груз со стороны кабины лифта, при $m = M/2$.



Доказательство.

(а)

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \ddot{x}_2 = 0 \\ mg &= T + N \\ Mg &= 3T - N \\ (M + m)g &= 4T \Rightarrow M = \frac{4T}{g} - m\end{aligned}$$

Груз не движется при $\frac{(M+m)g}{4} < mg$ то есть $M < 3m$

(б)

$$\begin{aligned}\frac{M}{2}\ddot{x}_1 &= \frac{M}{2}g - T - N \\ M\ddot{x}_2 &= Mg - 3T + N \\ \begin{cases} \frac{Mx}{2} = \frac{M}{2}g - T - N \\ Mx = Mg - 3T + N \end{cases} &\quad \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = x \\ \Rightarrow 3N &= T \\ N &= \frac{T}{3}\end{aligned}$$

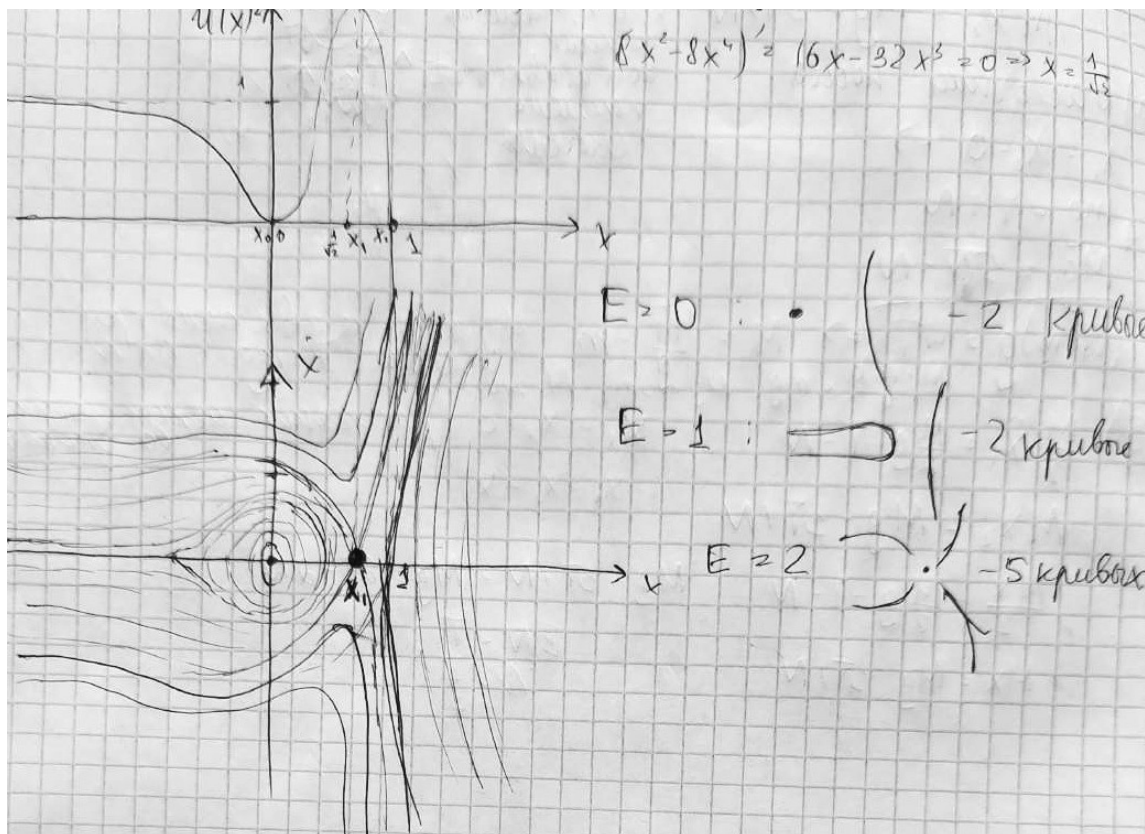
□

Задача 1.2. Материальная точка движется вдоль прямой Ox в поле потенциальной силы, потенциальная энергия $U(x)$ которой дается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} 1 - e^{-8x^2} & x \leq 0 \\ 8x^2(1 - x^2) & x > 0 \end{cases}$$

- (а) Нарисуйте качественный фазовый портрет этой одномерной механической системы.
- (б) Укажите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям полной механической энергии $E = 0$, $E = 1$ и $E = 2$.

Доказательство. (а)



(б)	E	0	1	2
	Num	2	2	5

□

Задача 1.3. Силовое поле \vec{F} задано в декартовых прямоугольных координатах (x, y, z) пространства \mathbb{R}^3 следующими выражениями своих компонент:

$$F_x = 2xy + y, \quad F_y = -2\alpha yz + x^2 + x, \quad F_z = \alpha z - y^2$$

где α — вещественный числовой параметр.

- (а) Найдите работу силы \vec{F} вдоль отрезка кривой, заданной уравнениями

$$x = y, \quad z = y^2$$

от начальной точки $(0, 0, 0)$ до конечной точки $(1, 1, 1)$.

- (б) Определите значение параметра α , при котором сила \vec{F} потенциальна, и найдите выражение для соответствующей потенциальной энергии $U(x, y, z)$.

Доказательство.

(a)

$$\begin{aligned}
d\vec{r} &= (dt, dt, 2tdt) \\
A &= \int_0^1 ((2xy + y) dt + (-2\alpha yz + x^2 + x) dt + 2t(\alpha z - y^2) dt) \\
&= \int_0^1 (2t^2 + t^2 - 2\alpha t^3 + t^2 + t + 2t^3\alpha - 2t^3) dt \\
&= \int_0^1 (3t^2 + 2t - 2t^3) dt = t^3 + t^2 - \frac{t^4}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(б)

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \partial_x F_y = \partial_y F_x \\ \partial_y F_z = \partial_z F_y \\ \partial_z F_x = \partial_x F_z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 2x + 1 \\ -2y = -2\alpha y \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1 \\
\partial_x U = -F_x = -2xy - y &\Leftrightarrow U = -x^2 y - yx + c_1(y, z) \\
\partial_y U = -F_y = 2yz - x^2 - x &\Leftrightarrow -x^2 - x + c'_{1y} = 2yz - x^2 - x \quad c_1 = y^2 z + c_2(z) \\
\partial_z U = -F_z = y^2 - z &\Leftrightarrow y^2 + c'_2 = y^2 - z \quad c'_2 = -z \quad c_2 = -\frac{z^2}{2} + c \\
U(x, y, z) &= -x^2 y - yx + y^2 z - \frac{z^2}{2} + c
\end{aligned}$$

□

Задача 1.4. Компоненты силы \vec{F} заданы в полярных координатах (ρ, ϕ) пространства \mathbb{R}^2 следующими выражениями:

$$F_\rho = \rho f(\phi), \quad F_\phi = g(\rho) \cos^3 \phi$$

где $f(\phi)$ и $g(\rho)$ некоторые дифференцируемые функции своих аргументов.

(а) Определите наиболее общий вид функций $f(\phi)$ и $g(\rho)$, при которых сила \vec{F} потенциальна и не имеет сингулярности в начале координат $\rho = 0$.

(б) Найдите вид соответствующей потенциальной энергии $U(\rho, \phi)$.

Доказательство.

(a)

$$\begin{aligned}
\partial_\phi F_\rho &= \partial_\rho (\rho F_\phi) \\
\partial_\phi f(\phi) &= \cos^3 \phi g(\rho) + \partial_\rho y \rho \cos^3 \phi = \cos^3 \phi \left(g + \frac{\partial g}{\partial \rho} \rho \right) \\
\frac{df}{d\phi} &= k \cos^3 \phi \quad \frac{dg}{d\rho} \rho = k \\
f(\phi) &= k \int \cos^3 \phi d\phi = k \left(\sin \phi - \frac{\sin^3 \phi}{3} + c \right) \\
g(\rho) \rho &= k \int 1 d\rho = k\rho + c \Rightarrow g = k + \frac{c}{\rho} \\
F_\rho &= k \left(\sin \phi - \frac{\sin^3 \phi}{3} + c_1 \right) \rho, \quad F_\phi = \left(k + \frac{c_2}{\rho} \right) \cos^3 \phi \quad c_2 = 0
\end{aligned}$$

(6)

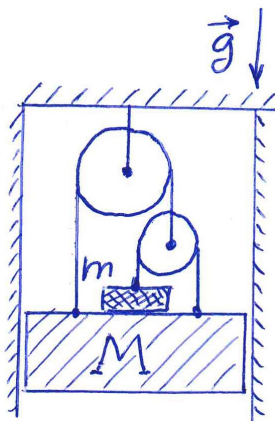
$$\begin{aligned}\nabla &= \left(\partial_\rho, \frac{1}{\rho} \partial_\phi \right) \\ -\partial_\rho U &= K \left(\sin \phi - \frac{\sin^3 \phi}{3} + c_1 \right) \rho \\ U &= -k \left(\sin \phi - \frac{\sin^3 \phi}{3} + c_1 \right) \frac{\rho^2}{2} - c(\phi) \\ -\frac{1}{\rho} \partial_\phi U &= -\frac{1}{\rho} \left(\left(-k \cos \phi - \frac{\sin^2 \phi \cos \phi}{3} \right) f^2 + c(\phi) \right) = k \cos^3 \phi + \frac{c_2}{\rho} \cos^3 \phi\end{aligned}$$

□

2 2021 Вариант 2

Задача 2.1. Кабина лифта массы M может без трения двигаться в вертикальном направлении в лифтовой шахте. Кабина соединена с потолком шахты системой блоков (см. рис. 1). Груз m может свободно двигаться в вертикальном направлении. Все нити невесомы, нерастяжимы и всегда натянуты (не сминаются). Массой блоков и трением в осях можно пренебречь.

- (а) При каких значениях масс m и M кабина лифта может находиться в состоянии покоя?
 (б) Найдите величину силы реакции N , действующей на груз со стороны кабины лифта, при $m = M$.



Доказательство.

(а)

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \ddot{x}_2 = 0 \\ mg &= T + N \\ Mg &= 3T - N \\ (M + m)g &= 4T \Rightarrow M = \frac{4T}{g} - m\end{aligned}$$

Груз не движется при $\frac{(M+m)g}{4} < mg$ то есть $M < 3m$

(б)

$$\begin{aligned}m &= M \quad \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \\ \begin{cases} m\ddot{x}_2 = mg - N - T \\ m\ddot{x}_1 = mg + N - 3T \end{cases} \\ -2N + 2T &= 0 \Rightarrow N = T\end{aligned}$$

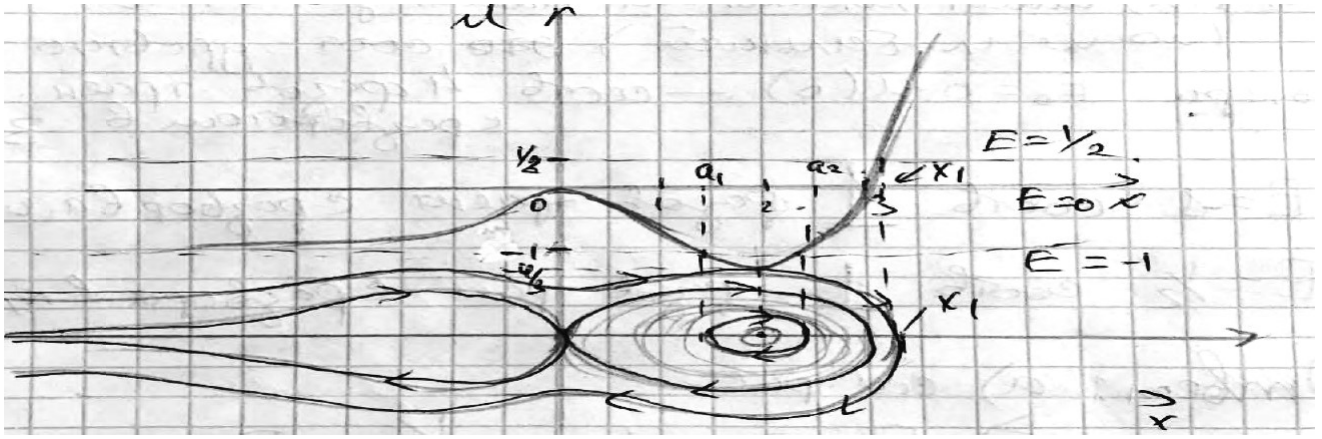
□

Задача 2.2. Материальная точка движется вдоль прямой Ox в поле потенциальной силы, потенциальная энергия $U(x)$ которой дается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} e^{-x^2} - 1 & x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x^2(x - 3) & x > 0 \end{cases}$$

- (а) Нарисуйте качественный фазовый портрет этой одномерной механической системы.
 (б) Укажите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям полной механической энергии $E = -1$, $E = 1/2$ и $E = 0$.

Доказательство. (а)



(6)
$$\begin{array}{c|ccc} E & -1 & 1/2 & 0 \\ \text{Num} & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

□

Задача 2.3. Силовое поле \vec{F} задано в декартовых прямоугольных координатах (x, y, z) пространства \mathbb{R}^3 следующими выражениями своих компонент:

$$F_x = yz - y^2 + \alpha z, \quad F_y = xz - 2\alpha xy, \quad F_z = xy + \alpha x + z$$

где α – вещественный числовой параметр.

(a) Найдите работу силы \vec{F} вдоль отрезка кривой, заданной уравнениями

$$x = y^2, \quad z = y$$

от начальной точки $(0, 0, 0)$ до конечной точки $(1, 1, 1)$.

(б) Определите значение параметра α , при котором сила \vec{F} потенциальна, и найдите выражение для соответствующей потенциальной энергии $U(x, y, z)$.

Доказательство.

(a)

$$d\vec{r} = (2t dt, dt, dt)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (2t(yz - y^2 + \alpha z) dt + (xz - 2\alpha xy) dt + (xy + \alpha x + z) dt) \\ &= \int_0^1 (2t(t^2 - t^2 + \alpha t) + (t^3 - 2\alpha t^3) + (t^3 + \alpha t^2 + t)) dt \\ &= \int_0^1 (3\alpha t^2 + 2(1 - \alpha)t^3 + t) dt = \alpha t^3 + \frac{(1 - \alpha)t^4}{2} + \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \alpha + \frac{(1 - \alpha)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2 + \alpha}{2} \end{aligned}$$

(б)

$$\begin{cases} \partial_x F_y = \partial_y F_x \\ \partial_y F_z = \partial_z F_y \\ \partial_z F_x = \partial_x F_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2\alpha y = z - 2y \\ y + \alpha = y + \alpha \\ x = x \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -(yz - y^2 + z) dx - (xz - 2xy) dy - (xy + x + z) dz = -d\left(yzx - y^2x + zx + \frac{z^2}{2}\right)$$

$$U = -xyz + y^2x - zx - \frac{z^2}{2} + c$$

□

Задача 2.4. Компоненты силы \vec{F} заданы в полярных координатах (ρ, ϕ) пространства \mathbb{R}^2 следующими выражениями:

$$F_\rho = \rho(\rho + 1)f(\phi), \quad F_\phi = g(\rho) \cos \phi \sin^3 \phi$$

где $f(\phi)$ и $g(\rho)$ некоторые дифференцируемые функции своих аргументов.

(а) Определите наиболее общий вид функций $f(\phi)$ и $g(\rho)$, при которых сила \vec{F} потенциальна и не имеет сингулярности в начале координат $\rho = 0$.

(б) Найдите вид соответствующей потенциальной энергии $U(\rho, \phi)$.

Доказательство.

(а)

$$\rho(\rho + 1)f'(\phi) = \partial_\phi F_\rho = \partial_\rho(\rho F_\phi) = \cos \phi \sin^3 \phi (g(\rho) + \rho g'(\rho))$$

$$f'(\phi) = A \cos \phi \sin^3 \phi \quad A \cdot B = 1$$

$$\rho(\rho + 1) = B(g(\rho) + \rho g'(\rho))$$

$$f(\phi) = A \left(\frac{\sin^4 \phi}{4} + c_1 \right)$$

$$g(\rho) = \frac{c_2}{\rho} + \frac{\rho^2}{3B} + \frac{\rho}{2B}$$

$$F_\rho = A\rho(\rho + 1) \left(\frac{\sin^4 \phi}{4} + c_1 \right)$$

$$F_\phi = \left(\frac{c_2}{\rho} + \frac{\rho^2 A}{3\rho} + \frac{\rho A}{2} \right) \cos \phi \sin^3 \phi = A\rho \left(\frac{\rho}{3} + \frac{1}{2} \right) \cos \phi \sin^3 \phi$$

(б)

$$-\partial_\rho U = F_\rho = A\rho(\rho + 1) \left(\frac{\sin^4 \phi}{4} + c_1 \right)$$

$$-U = A \left(\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^2}{2} \right) \left(\frac{\sin^4 \phi}{4} + c_1 \right) + f(\phi)$$

$$A \left(\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^2}{2} \right) \sin^3 \phi \cos \phi + f'(\phi) = -\partial_\phi U = \rho F_\phi = A\rho^2 \left(\frac{\rho}{3} + \frac{1}{2} \right) \cos \phi \sin^3 \phi \quad f'(\phi) = 0$$

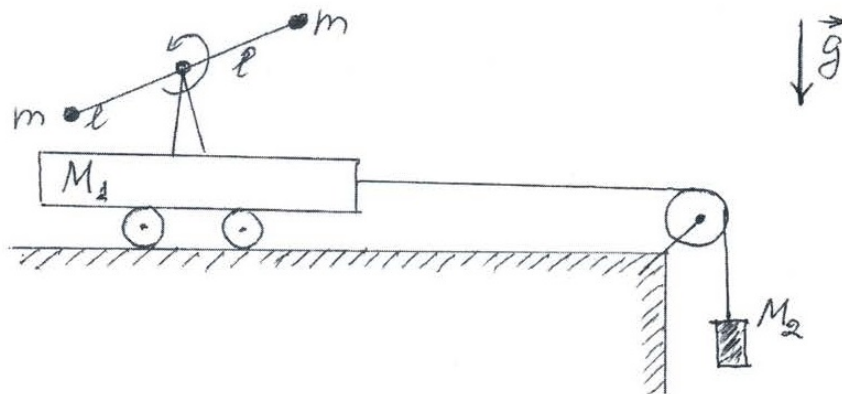
$$U = -A\rho^2 \left(\frac{\rho}{3} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sin^4 \phi}{4} + c_1 \right) + c_2$$

□

3 2022 (оба варианта)

Задача 3.1. Тележка массы M_1 может без трения двигаться по прямой по поверхности горизонтального стола. На тележке шарнирно закреплён жесткий невесомый стержень длины $2l$, который может свободно вращаться в вертикальной плоскости, параллельной линии движения тележки. Шарнирное крепление расположено в геометрическом центре стержня. На концах стержня закреплены одинаковые точечные массы m . Невесомая нерастяжимая нить, перекинутая через невесомый блок, соединяет тележку с грузом M_2 , который движется вдоль вертикальной прямой. Система находится в однородном постоянном поле тяжести \vec{g} , направленном вертикально вниз (см. рисунок).

- Определите число степеней свободы системы.
- Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте Лагранжиан системы.
- Выпишите формулы для всех сохраняющихся величин (интегралов движения), которые имеются в данной системе.



Доказательство.

- Заметим что система задается 2 координатами - углом стержня ϕ и положением тележки по оси Ox (или груза по оси Oy , в силу нерастяжимости нити эти два параметра эквивалентны).
- (б), (в)

$$\begin{cases} T = M_2 g \\ N = 2mg \\ M_1 g = N_1 + N_2 \\ N_1 = N_2 \end{cases}$$

□