**Логика и алгоритмы, весна 2019.**
**Задачи для семинара N 3.**

(Все модели нормальные)

В задачах 1–3 рассматривается чистая теория равенства $Eq$ (или исчисление предикатов с равенством в сигнатуре $\{=\}$) и формулы этой сигнатуры.

1. (a) Найдите замкнутую формулу, которая не выводится и не опровергается в $Eq$.

   (b) Найдите замкнутую формулу $A$, которая не выводится и не опровергается в $Eq$, для которой обе теории $Eq \cup \{A\}$, $Eq \cup \{\neg A\}$ неполны.

   (c) Докажите, что не существует замкнутой формулы $A$, для которой обе теории $Eq \cup \{A\}$, $Eq \cup \{\neg A\}$ полны.

2. Постройте такие замкнутые формулы $A$ и $B$, что в $Eq$ не выводится ни одна из формул $A \wedge B$, $\neg A \wedge B$, $A \wedge \neg B$ , $\neg A \wedge \neg B$.

3. Пусть $F(P_1, P_2)$ — пропозициональная формула с двумя переменными, которая не является тавтологией. Докажите, что в сигнатуре $\{=\}$ существует ее подстановочный пример $F(A, B)$, не выводимый в $Eq$.

4. Докажите, что элементарная теория конечной модели в любой (даже бесконечной) сигнатуре с равенством сильно категорична.

5. Докажите, что если теория с равенством полна и имеет конечную модель, то она сильно категорична.

6. Докажите, что в сигнатуре абелевых групп $\{0, +, =\}$

   (a) $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Q}$;

   (b) $\mathbb{Q} \not\equiv \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$.

7. Докажите, что в сигнатуре упорядоченных множеств $\{<, =\}$;

   (a) $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Q}$;

   (b) $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Q} + \mathbb{Z}$;

   (c) $\mathbb{Z} + \mathbb{Q} \not\equiv \mathbb{Q} + \mathbb{Z}$.

   Здесь $+$ означает упорядоченную сумму.

*Спектром* замкнутой формулы называется множество мощностей ее конечных моделей.

8. Для сигнатуры с 2-местным предикатным символом $R$ и равенством постройте формулу, спектр которой состоит из всех (положительных) четных чисел.

9. Постройте формулу какой-нибудь сигнатуры с равенством, спектр которой есть множество $\{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

10. Пусть в сигнатуре есть один одноместный фунциональный символ и равенство. Докажите, что для любого $n$ существует формула $A_n(a)$ без кванторов, такая что формула $\exists x\, A_n(x)$ имеет модель мощности $n$ и не имеет моделей меньшей мощности.

11. Придумайте формулу в сигнатуре с одним одноместным функциональным символом и равенством, выполнимую только в бесконечной модели.

12. Докажите, что следующая формула истинна во всех конечных моделях (своей сигнатуры), но не общезначима:

$$\forall x S(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (S(x,z) \to S(x,y) \vee S(y,z)) \to \exists x \forall y S(x,y).$$

13. Пусть $B \doteq \exists x_1 \ldots \exists x_n A$ — замкнутая формула без функциональных символов и констант, где $A$ не содержит кванторов. Докажите, что если $B$ выполнима, то она имеет модель мощности не выше $n$.

14. Как изменится ответ, если в сигнатуре есть константы? Оцените сверху мощность модели.

Теория называется *конечно аксиоматизируемой*, если она эквивалентна конечной теории. Теория $T_1$ — *строгое расширение* теории $T$, если множество теорем $T_1$ строго содержит множество теорем $T$.

15. *(Критерий Тарского)* Докажите, что если $T_1$, $T_2$,... — счетная последовательность теорий, где $T_{i+1}$ — строгое расширение $T_i$, то объединение этих теорий не конечно аксиоматизируемо.

16. Рассмотрим теорию абелевых групп $ABG$ в сигнатуре $\{0, +, =\}$. Теория абелевых групп без кручения $ABGTF$ получается из $ABG$ добавлением аксиом

$$\forall x(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = 0 \to x = 0) \text{ для всех натуральных } n.$$

    (a) Докажите, что $ABGTF$ не является конечно аксиоматизируемой.

    (b) Полна ли эта теория?

17. В той же сигнатуре: $Th(\mathbb{Q})$ не конечно аксиоматизируема.

18. Докажите, что теория полей характеристики 0 в сигнатуре $\{0, 1, +, \cdot, =\}$ не конечно аксиоматизируема.

**Логика и алгоритмы, весна 2019.**
**Задачи для семинара N 4.**

1. Докажите, что следующие теории не являются счетно категоричными:

   (a) $Th(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}})$;

   (b) $Th(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}, =_{\mathbb{Z}})$;

   (c) $Th(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}}, =_{\mathbb{Z}})$.

2. Теории называются *эквивалентными*, если их множества теорем совпадают. Сколько попарно не эквивалентных полных расширений имеет теория плотных линейных порядков в сигнатуре $\{<, =\}$ ?

3. Докажите, что теория DLO неограниченных плотных линейных порядков не категорична в мощности континуум.

4. (a) Пусть $k$ — несчетный кардинал (т.е. вполне упорядоченное множество, у которого все собственные начальные отрезки имеют меньшую мощность), $^*k$ — противоположный порядок. Докажите, что лексикографические произведения $(\mathbb{Q}, <) \cdot k$ и $(\mathbb{Q}, <) \cdot (^*k)$ не изоморфны.

   (b) Докажите, что теория DLO неограниченных плотных линейных порядков не категорична ни в какой несчетной мощности (используйте теорему Zermelo).

5. Докажите, что не существует теории в сигнатуре колец, модели которой — в точности поля конечной характеристики.

6. (a) Докажите, что нестандартная модель арифметики разбивается на *галактики*: внутри галактик расстояние конечно, а между галактиками бесконечно (точное определение давалось в лекциях).

   (b) Докажите, что все галактики как упорядоченные множества изоморфны $\mathbb{Z}$.

   (c) Докажите, что упорядоченное множество удаленных галактик (т.е. отличных от первой) неограниченно вверх и вниз.

   (d) Докажите, что упорядоченное множество всех галактик плотно.

7. (теорема Эрбрана) Если $\vdash \exists x\, A(x)$, где $A$ — бескванторная формула, то найдётся конечная последовательность термов $t_1, \ldots, t_n$, такая что $\vdash A(t_1) \vee \cdots \vee A(t_n)$. *Указание.* Рассуждайте от противного и воспользуйтесь теоремой о компактности.

8. Применив теорему о компактности докажите, что любой частичный порядок можно дополнить до линейного.

9. Применив теорему о компактности докажите, что если данным конечным набором типов плиток можно замостить сколько угодно большой квадрат, то можно замостить и всю плоскость. Плитки считать квадратными с разноцветными сторонами. Прикладывать плитки можно только если совпадают цвета.

10. Применив теорему о компактности докажите, что для бесконечных графов двудольность эквивалентна отсутствию нечетных простых циклов.