1 HW 7

Задача 1.1. Пусть X схема, $f \in \mathcal{O}_X(X), X_f$ подмножество точек X, где f не обращается в нуль (т е образ f не лежит в максимальном идеале соответствующего локального кольца). Предположим, что X нетерова, или же отделима и квазикомпактна. Покажите, что X_f открыто и гомоморфизм ограничения индуцирует изоморфизм $\mathcal{O}_X(X)_f$ и $\mathcal{O}_X\left(X_f\right)$.

Доказательство. O_X - квазикомпактный пучок $\Rightarrow \exists U_i = \operatorname{Spec} A_i$

$O_X(U_i) = \tilde{A}_i \quad \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i = X$ X - нетерово или квазикоспактное

$V_{ii} = U_i \cap X_f = D(f_I)$, где f_i ограничение f на U_iтак как$(f_i)_p = f_p \Rightarrow V_i$ - открытое

$x_f = \bigcup V_i \Rightarrow X_f$ - открытое

$O_X(V_i) \simeq O_X(U_i)_f = (A_i)_f$

O_X - пучок $\Rightarrow \exists$s.e.s

$0 \to O_X(X) \to \oplus O_X(U_i) \to \oplus O_X(U_i \cap U_j)$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & O_X(X)_f & \xrightarrow{g} & \oplus O_X(U_i)_f & \xrightarrow{h} & \oplus O_X(U_i \cap U_j)_f \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\
0 & \longrightarrow & O_X(X_f) & \xrightarrow{g'} & \oplus O_X(V_i) & \xrightarrow{h'} & \oplus O_X(V_i \cap V_j)
\end{array}$$

β - ихоморфизм, α - инъекция, так как g, β, g' - инъекции

так как $U_i \cap U_j$ - афф, если X - отделима или покрыта конечным числом афф., если X - нетерова $\Rightarrow$ либо γ - изоморфизм, либо γ - инъекция по той же причине, что и $\alpha \Rightarrow \gamma$ как минимум инъекция $\Rightarrow$ по лемме о гомоморфизме α - сюръекция, а следовательно изомофизм ☐

Задача 1.2. Пусть X схема и $f_1, \ldots, f_k$ порождают $\mathcal{O}_X(X)$. Предположим, что X_{f_i} аффинны, докажите, что X тоже аффинно.

Доказательство.

$\varphi : X \to \operatorname{Spec}(\Gamma(X, O_X))$

$\varphi_{f_i} : X_{f_i} \to \operatorname{Spec}(\Gamma(X, O_X)_{f_i}) \simeq \operatorname{Spec}(\Gamma(X_{f_i}, O_X)) \quad$ так как $\quad X_{f_i} - \text{aff} \Rightarrow \varphi$ - изоморфизм

$O_X = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \Rightarrow X = \bigcup X_{f_i}$

$\operatorname{Spec}(\Gamma(X, O_X)) = \bigcup \operatorname{Spec}(\Gamma(X, O_X)_{f_i})$

то есть φ - изоморфизм на базе $\Rightarrow \varphi$ - изоморфизм ☐

Задача 1.3. Выведите отсюда, что аффинность морфизма $f : X \to Y$ можно проверять на покрытии, то есть следующие условия равносильны:

(a) f аффинный, то есть прообраз любого аффинного открытого подмножества тоже аффинный

(b) существует открытое аффинное покрытие U_i схемы Y, такое, что все $f^{-1}\left(U_i\right)$ аффинны.

Доказательство.

$(a) \Rightarrow (b)$ – очевидно

$(b) \Rightarrow (a)$

$$
\begin{aligned}
&U \subset Y - \text{aff} \qquad U = \operatorname{Spec} A \quad Y = \bigcup U_i = \bigcup \operatorname{Spec} A_i \\
&U \cap U_i = \bigcup U_{i,j} \\
&\Rightarrow U_{i,j} = (\operatorname{Spec} A_i)_{g_j} = (\operatorname{Spec} A)_{h_{i,j}} \\
&f^{-1}(U_i) = V_i = \operatorname{Spec} B_i \\
&f^{-1}(U_{i,j}) = (\operatorname{Spec} B_i)_{f^{\#}(g_j)} \\
&(f^{-1}(U))_{f^{\#}(h_{i,j})} = (\operatorname{Spec} B_i)_{f^{\#}(g_j)} \\
&O_X(f^{-1}(U)) = \langle f^{\#}(h_{i,j}) \rangle \\
&\Rightarrow f^{-1}(U) - \text{aff (по 2)}
\end{aligned}
$$

□

Задача 1.4. Докажите, что конечность морфизма можно проверять на покрытии.

Доказательство. Тут также $(a) \Rightarrow (b)$ – очев, $(b) \Rightarrow (a)$ по прошлой задаче: $f^{-1}(U)$ – aff. Факт из коммутативной алгебры, если $R = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, (*) $g : R \to S$, $R_{f_i} \to S_{g(f_i)}$ - конечно $\Rightarrow$ g - конечно; $O_y(U)_{h_{i,j}} \to O_X(f^{-1}(U))_{f^{\#}(h_{i,j})}$ - конечно $\Rightarrow f^{-1}(U) \to U$ - конечно

(*): $g : R \to S$ - конечно g - целый морфизм и S - R-алгебра кон. типа
Зафиксируем $s \in S \quad I \subset R[x] \quad \forall p \in T \quad p(s) = 0$
$J \subset R$ - коэфф. при старших степенях у элем. I

$$
\begin{aligned}
&s \in S \Rightarrow \frac{s}{1} \in S_{f_i} \Rightarrow \exists p_i \in R_{f_i}[x] : \ p_i(\frac{s}{1}) = 0 \\
&\exists n_i : (f_i^{n_i} p_i) \in R[x] \Rightarrow f_i^{n_i} p_i \in I
\end{aligned}
$$

так как $1 = \sum a_i f_i$ то $\exists N$ - достаточно большой что: $1 = 1^N = (\sum a_i f_i)^N \in J \Rightarrow g$-целый

$$
\begin{aligned}
&S_{f_i} = \langle s_{i1}, \ldots, s_{in} \rangle \text{ - как } R_{f_i} \text{ - алг} \\
&\Rightarrow \frac{s}{1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} s_{ij} \Rightarrow \exists n_i : \frac{f_i^{n_i} s}{1} = \sum_{i=1}^{n} f_i^{n_i} a_{ij} s_{ij} \in S \\
&\Rightarrow s = 1 \cdot s = 1^N \cdot s = (\sum b_i f_i)^N s = (\sum b_i f_i)^N \sum a_{ij} s_{ij} \in S
\end{aligned}
$$

□

Задача 1.5. Пусть X схема и $\mathcal{F}$ пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Докажите что $\mathcal{F}$ квазикогерентный тогда и только тогда, когда у любой точки есть окрестность U и точная последовательность пучков $\mathcal{O}_X$-модулей

$$\mathcal{O}_U^{\oplus I} \to \mathcal{O}_U^{\oplus J} \to \mathcal{F}\big|_U \to 0.$$

Здесь I, J - некоторые множества индексов.

Доказательство.

($\Rightarrow$)

$\mathcal{F}\big|_{U_i} = \tilde{M}_i \qquad O_x\big|_{U_i} = U_{U_i} = \tilde{A}_i$

$X = \cup U_i = \cup \operatorname{Spec} A_i$

M_i - модуль над $A_i \Rightarrow \exists$точная последовательность

$A_i^{\oplus J} \to A_i^{\oplus I} \to M \to 0$, где $|I|$ - количество порождающих у M

и $|J|$ - количество соотношений на эти порождающие

$\Rightarrow \forall q \in U_i = \mathrm{A_i}$

$(A_i^{\oplus J})_q \simeq (A_i)_q^{\oplus J} \to (A_i^{\oplus I})_q \to M_q \to 0$ - точная последовательность

$\Rightarrow (\tilde{A}_i)_q^{\oplus J} \simeq (O_{U_i})_q^{\oplus J} \to (\tilde{A}_i)_q^{\oplus I} \simeq (O_{U_i})_q^{\oplus I} \to \tilde{M}_q \simeq (\mathcal{F}\big|_{U_i})_q \to 0$

точная последовательноть $\forall U_i$

$\Rightarrow O_{U_i}^{\oplus J} \to O_{U_i}^{\oplus I} \to \mathcal{F}\big|_{U_i} \to 0$ - точная последовательность

($\Leftarrow$)

зафиксируем$x \in X \quad \exists U^x \ni x \quad O_U^J \to O_U^I \to \mathcal{F}\big|_U \to 0$

$\exists U_i^x: \ U^x = \cup U_i^x = \cup \operatorname{Spec} A_i$ без ограничения общности$x \in U_1^x$

$O_{U_1^x}^J \to O_{U_1^x}^I \to \mathcal{F}\big| + U_1^x \to 0$ точная

$M = \operatorname{coker} f_{U_1^x} = \dfrac{A_1^I}{f(A_1^J)} \quad \forall p \in U_1^x$

$M_p = \left(\dfrac{A_1^I}{f(A_1^J)}\right)_p = \dfrac{(A_1^I)_p}{f(A_1^J)_p} = \dfrac{(A_1)_p^I}{f((A_1)_p^J)} = \operatorname{coker} f_p = \mathcal{F}_p$

$\Rightarrow \mathcal{F}\big|_{U_1^x} \simeq \tilde{M}$

этот процесс не зависит от выбора $x \Rightarrow$ у них есть аффинное покрытие $X = \cup U_1^x$ и $\mathcal{F}$ огранич. на $\forall U_1^x = \operatorname{Spec} A_1^x$ - это модуль над A_1^x

$\square$

Задача 1.6. Пусть $f : X \to Y$ аффинный морфизм, проверьте, что для квазикогерентного $\mathcal{F}$ на X и $\mathcal{G}$ на Y верно $f_* (\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G}) = f_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

Доказательство. $\square$