Семинар 23.03.2021

Вариационные задачи II

Пример 1. Задача о геодезических в пространстве Лобачевского, реализованном в верхней полуплоскости (модель Пуанкаре)

Это задача о движении свободной частицы в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2$, $y > 0$, с метрикой

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{y^2}\,\mathrm{diag}(1,1).$$

Лагранжиан такой свободной частицы:

$$\boxed{L = T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}} \quad (\text{считаем } m=2).$$

Как мы уже не раз поступали, не будем выписывать уравнения Эйлера-Лагранжа этой задачи, а воспользуемся законами сохранения (это — первые интегралы от уравнений Э.-Л.).

1) Поскольку $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, сохраняется импульс частицы вдоль оси $O\vec{x}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{y^2} = \mathrm{const} = 2C$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{x} = Cy^2} \qquad (4)$$

2) поскольку $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, сохраняется энергия системы.

В нашем случае: $\boxed{E = T = L = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2} = \mathrm{const}}$.

Подставив сюда (4), получаем уравнение на $y(t)$:

$$\boxed{\dot{y}^2 + C^2 y^4 = E y^2 \quad (E \geqslant 0)} \qquad (5)$$

* Если $C = 0$, то $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = \pm\sqrt{E}\,y$ — это вертикальный луч

$$x = \mathrm{const}, \quad y(t) = A e^{\pm\sqrt{E}t} \geqslant 0.$$

* Если $C \neq 0$, то подставив в (5) $\dot{y} = y'\dot{x} = Cy'y^2$

получаем $\boxed{y^2(1+y'^2) = E/C^2 = R^2} \qquad (6)$

При переходе от (4), (5) к (6) мы заменили полное описание траектории частицы на описание лишь ее формы: $y(x)$.

Решаем (6): $y^2 y'^2 = R^2 - y^2$

Напрашивается замена $\begin{cases} z = R^2 - y^2 \\ z' = -2yy' \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$(z')^2 = 4z \Rightarrow \frac{dz}{2\sqrt{z}} = dx$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{z} = (x - A)$$

Возвращаясь к $y(x)$ имеем:

$$\boxed{(x-A)^2 + y^2 = R^2}$$

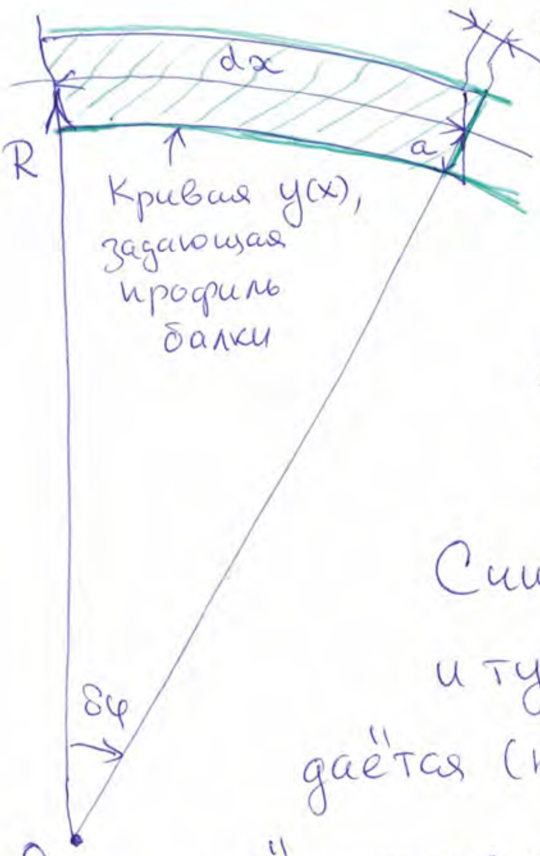
Геодезические в этой модели - это дуги окружностей (возможно, бесконечного радиуса) с центром на оси $\overrightarrow{Ox}$.

2 Вариационная задача со старшими производными.

Задача о прогибе балки.

Рассмотрим балку в однородном поле тяжести. Изначально она лежала горизонтально, опираясь на концы, но под действием силы тяжести прогнулась вниз. Считаем, что прогиб незначителен, и в балке возникают силы упругой деформации изгиба, компенсирующие действие силы тяжести. Это задача из статики. Кинетической энергии у балки нет, поэтому принцип наименьшего действия утверждает, что балка примет конфигурацию, в которой её потенциальная энергия имеет экстремум. Этот экстремум будет минимумом (в задачах статики устойчивому положению равновесия всегда соответствует минимум потенциальной энергии). А у действия этот экстремум будет максимумом ($S = -U$), что ещё раз подчёркивает, что в принципе наименьшего действия мы интересуемся любыми экстремалями, не выясняя, минимумы они или максимумы.

Итак, оценим в 1-м приближении потенциальную энергию балки.



Рассмотрим небольшой отрезок балки длиной dx (см. Рис). Под действием силы тяжести балка искривляется. R – радиус кривизны балки в окрестности ее отрезка dx.

Считаем, что балка везде имеет одну и ту же толщину $2a$, её профиль задаётся (например) кривой $y(x)$ — высотой её нижнего края.

Кусок балки dx виден из центра касательной к нему окружности под углом $\delta\varphi$:

$$\boxed{dx = R\,\delta\varphi}$$

Под действием силы тяжести правый, висящий край куска балки снизу сжимается, а сверху растягивается на величину $\boxed{\delta x = a\,\delta\varphi}$ (см. Рис)

Относительная деформация слоя балки

$$\Delta = \frac{\delta x}{dx} = \frac{a}{R} \sim R^{-1}$$

Энергия упругой деформации куска балки единичной длины (т.е. линейная плотность энергии деформации)

$$U_{упр} = \frac{k\Delta^2}{2} \sim R^{-2}, \text{ где}$$

k – коэфф. упругости, зависящий от материала балки.

Из анализа вспоминаем формулу кривизны кривой $y(x)$:

$$\boxed{R^{-1}(x) = \frac{y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}} \cong y''(x)}$$ в первом приближении, когда $y'(x) \ll 1$.

Получаем, что энергия упругой деформации куска балки dx

$$\delta U_{упр}(x) \cong \frac{\varkappa}{2}(y''(x))^2 dx,$$

где $\varkappa$ – коэффициент, зависящий от толщины балки и от материала, из которого она сделана.

Энергия этого же куска в поле тяжести

$$\delta U_{тяж}(x) = \rho g y(x)\, dx,$$

где ρ – линейная плотность балки.

Предполагая балку однородной, мы считаем, что ρ и $\varkappa$ – константы, не зависящие от x.

Функционал потенциальной энергии балки имеет вид:

$$\boxed{U[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\varkappa y''^2}{2} + \rho g y\right) dx} \quad (1)$$

С точностью до переобозначений $x \mapsto t$, $y(x) \mapsto q(t)$ это функционал действия $S[q(t)]$ (1) из Лекции 7.

Его экстремаль является решением дифура (3) (стр3. Лекции 7). В данном случае это:

$$\boxed{y'''' + \frac{\rho g}{\varkappa} = 0} \qquad (2)$$

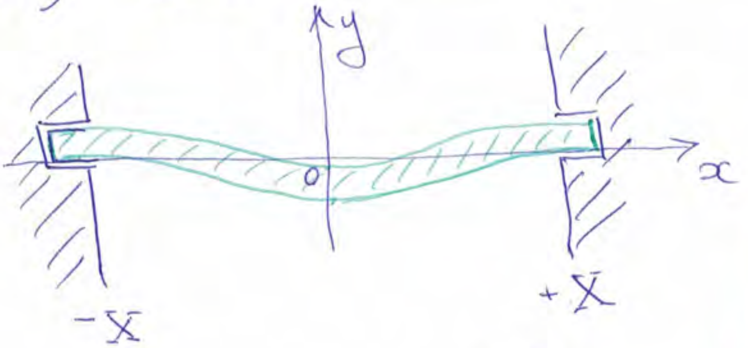
Его общее решение:

$$\boxed{y(x) = -\frac{\rho g}{\varkappa}\frac{1}{4!}x^4 + P_3(x),} \qquad (3)$$

где $P_3(x)$ произвольный многочлен 3-й степени по x.

Форма балки определяется тем, что происходит с её концами.

а) <u>Балка — межэтажное перекрытие</u>



Концы балки <u>горизонтально</u> вбетонированы в стены.

Выбирая систему отсчёта так, что левый/правый конец балки имеют координату $-X/+X$ по оси $O\vec{x}$ и 0 по оси $O\vec{y}$, имеем граничные условия

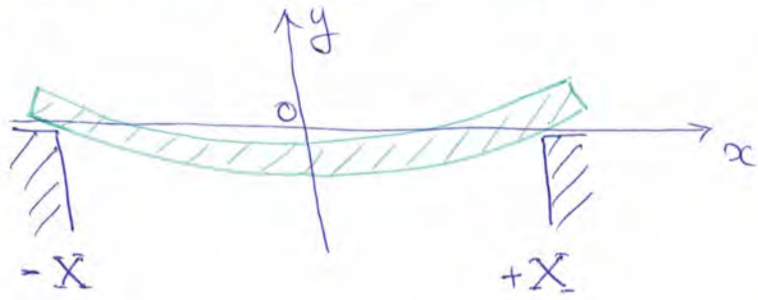
$$\boxed{y(\pm X) = 0\,, \quad y'(\pm X) = 0} \qquad (4a)$$

Это граничные условия типа (4а) из Лекции 7 (см стр 3)

Многочлен 4-й степени по x, у которого при $x = \pm X$ имеются нули 2-го порядка, это

$$\boxed{y(x) = -\frac{\rho g}{4!\,\varkappa}(x - X)^2(x + X)^2} \qquad (5)$$

б) Балка – мостик



Концы балки свободно лежат на двух опорах

Опять выберем систему отсчёта, где края балки имеют координаты $\pm X$ по оси $O\vec{x}$, и 0 по оси $O\vec{y}$ (мы на самом деле учитываем таким образом симметрию задачи: $y(x)$ будет чётной функцией x)

$$\boxed{y(\pm X) = 0\,, \quad y'(\pm X) - \forall} \text{ – наклон концов произволен} \quad (6a)$$

Это граничные условия типа (4в1) (см. Лекцию 7, стр 3)
Недостающие 2 граничных условия дают формулы (4в2) /Лекция 7, стр4/ :

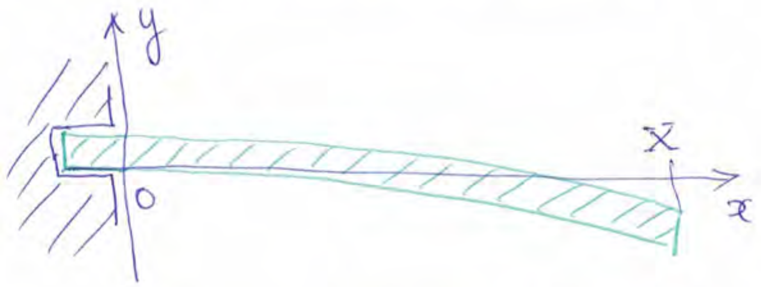
$$\frac{\partial}{\partial y''}\left(\frac{\varkappa y''^2}{2} + \rho g y\right)\Bigg|_{x=\pm X} = \boxed{\varkappa y''\Big|_{x=\pm X} = 0} \quad (6в)$$

Удовлетворяющую этим условиям чётную функцию x^2, зануляющуюся при $x = \pm X$, легко определить, выбрав анзац:

$$\boxed{y(x) = -\frac{\rho g}{4!\,\varkappa}(x^2 - X^2)(x^2 - \underset{\text{параметр}}{A})} \quad (7)$$

Оказывается, $y''(\pm X) = 0$ при $\boxed{A = 5X^2}$

в) <u>Балка - балкон</u> Один конец балки вбетонирован горизонтально в стену, другой свободно висит.



В этом случае выберем началом координат вбетонированный конец балки. Имеем граничные условия

$$\boxed{y(0)=y'(0)=0\ , \quad y(X),\, y'(X)-\forall} \quad (8a)$$

На левом конце это условия, как в варианте а), на правом конце - полная свобода

$\forall \delta y'(X)$ - как в (4в2) Лекции 7 (стр 4)

$$\frac{\partial}{\partial y''}\left(\frac{\varkappa y''^2}{2}+\rho g y\right)\Big|_{x=X}=0 \iff \boxed{y''(X)=0} \quad (8в)$$

$\forall \delta y(X)$ - как в (4с2) Лекции 7 (стр 4)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y''}\right)\left(\frac{\varkappa y''^2}{2}+\rho g y\right)\Big|_{x=X}=0 \iff \boxed{y'''(X)=0} \quad (8c)$$

Выбирая в качестве анзаца полином, имеющий ноль 2-го порядка при $x=0$

$$\boxed{y(x)=-\frac{\rho g}{4!\,\varkappa}x^2\left(x^2-Ax+B\right)}$$

нетрудно проверить, что $y''(X)=y'''(X)=0$ для

$$\boxed{A=4X\ , \quad B=6X^2} \quad (9)$$