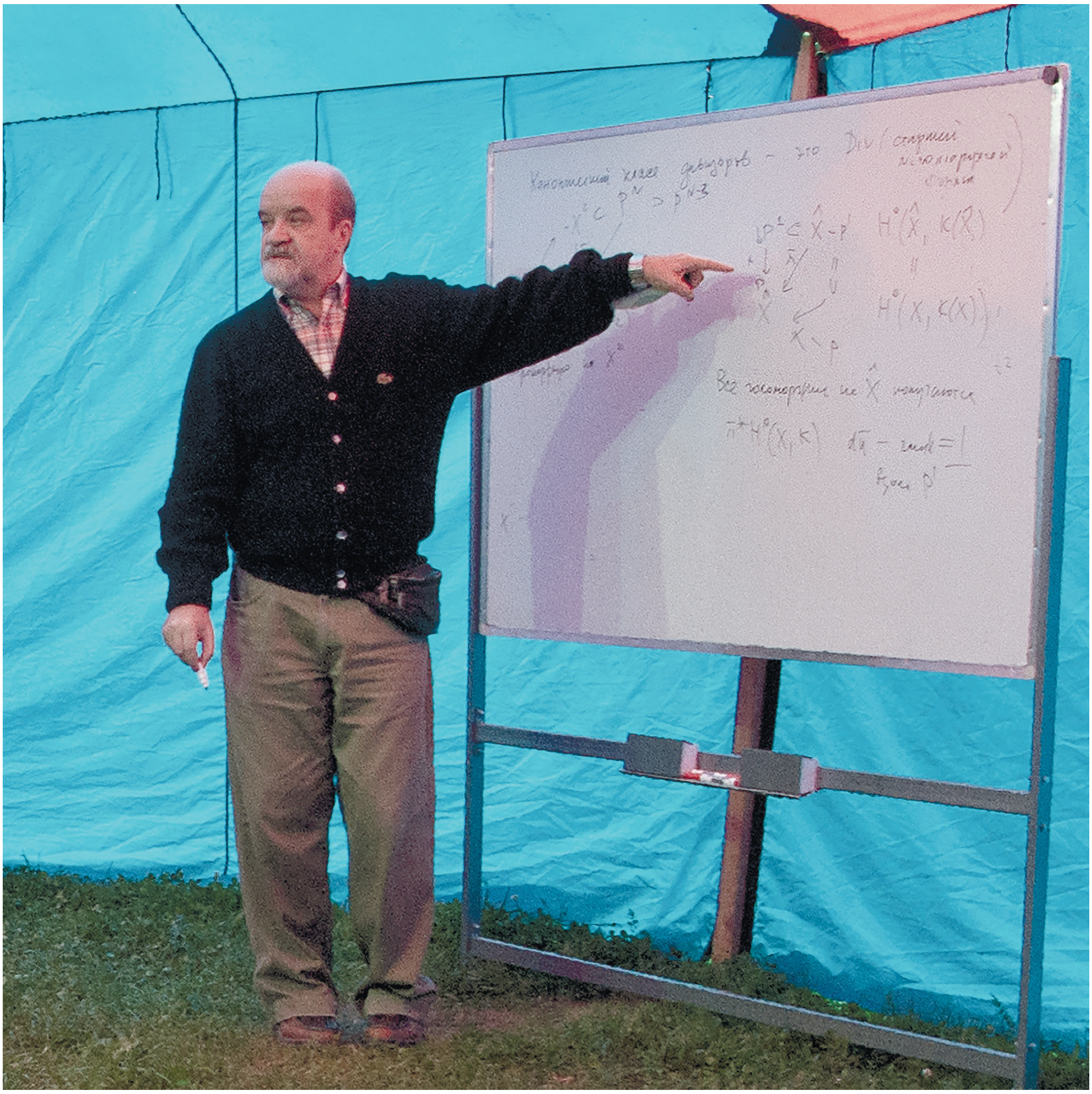
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

# КУРСЫ И СЕМИНАРЫ ПО ВЫБОРУ ПРЕДЛАГАЕМЫЕ В 2022/23 УЧЕБНОМ ГОДУ СТУДЕНТАМ ФАКУЛЬТЕТА МАТЕМАТИКИ



МОСКВА
17 мая 2022 г.

## Содержание

**Course descriptions in English** **130**

(*primary* and advanced level curses are in *italic* and regular shape respectively)

## Курсы на выбор студентов

Все занятия на факультете математики формально делятся на «курсы», «семинары» и «проекты». Деление вызвано имеющимися в НИУ ВШЭ ограничениями на число занятий каждого типа с одной стороны и число студентов на этих занятиях с другой. Уточнять, сколько курсов, семинаров и проектов может быть в Вашем учебном плане, следует в учебной части. Обратите внимание, что формальный статус «курса», «семинара» или «проекта» может не иметь никакого отношения к стилю проведения занятий. О реальном соотношении лекций, упражнений, докладов участников и т. п. и их влиянии на итоговую отметку читайте на странице с аннотацией предмета.

В представленных ниже таблицах **толстым шрифтом** набраны «толстые» предметы с нагрузкой две пары в неделю и оцениваемые в 6 кредитов за семестр[1]. Остальные, «тонкие» предметы идут одну пару в неделю и оцениваются в 3 кредита за семестр. Английское название предмета всегда означает, что он преподаётся на английском языке. У некоторых таких занятий кроме английской аннотации имеется ещё и русская, к ней ведёт отдельная гиперссылка. По уровню предполагаемой от участников предварительной подготовки занятия делятся на *начальные*[2], не слишком опирающиеся на другие курсы, и специальные[3], рассчитанные на тех, кто уже что-то знает в данной области. Пометка типа «2+» означает, что занятия ориентированы[4] на студентов второго года обучения и старше.

Эпитеты «простой» и «трудный» добавлены по просьбам студентов и выражают субъективную оценку[5] усилий, которые придётся приложить для освоения предмета. Эта характеристика не имеет чёткого формального определения и мало коррелирует с тем, на студентов какого года рассчитан курс, а также является ли он начальным или более продвинутым в той или иной линейке курсов. Бывают как «трудные» занятия для начинающих, вполне доступные первокурсникам, так и «простые» спецкурсы, предполагающие владение материалом первых трёх лет бакалавриата.

Эпитеты «дистанционный» и «аудиторный» означают, что вне зависимости от пожеланий участников все занятия и контрольные мероприятия будут проходить только дистанционно (online) или только в аудиториях факультета (offline), если последнее не будет противоречить противоэпидемическим нормам. Отсутствие эпитетов «дистанционный» или «аудиторный» означает, что организаторы занятий в принципе готовы на любую — как дистанционную, так и аудиторную — форму проведения занятий.

Эпитет «межкампусный» означает, что в занятиях могут принимать участие студенты не московских кампусов НИУ ВШЭ. Как это будет реализовано технически, пока не вполне понятно, однако «межкампусность» курса никак не коррелирует с тем, в какой форме — аудиторной или дистанционной — будут проводиться занятия.

[1] Если «толстый» предмет продолжается меньше семестра (например один модуль), то он, как правило, оценивается в 3 кредита, однако возможны исключения — уточняйте это на странице с описанием курса. Обязательные «толстые» семестровые курсы магистратуры, взятые студентами бакалавриата в качестве спецкурсов, дают 5 кредитов.

[2] Названия этих занятий набраны в оглавлении *курсивом*.

[3] Названия таких занятий набраны в оглавлении прямым шрифтом.

[4] По мнению организаторов и академического руководства учебных программ. Это мнение имеет рекомендательный характер и не означает никаких формальных ограничений на выбор данного предмета студентами младших курсов.

[5] Основанную на мнениях студентов прошлых лет, организаторов занятий и академического руководства программ.

### Курсы начального уровня

Пререквизиты к этим курсам не выходят за рамки первых двух лет бакалавриата. Они рекомендуются студентам младших курсов[1] как введения в те разделы математики, где планируется дальнейшая специализация, а также старшекурсникам, желающим расширить математический кругозор в областях, выходящих за рамки выбранной специализации. В «Содержании» на стр. 2–5 ссылки на описания курсов начального уровня набраны *курсивом*.

ЗАНЯТИЯ, ДОСТУПНЫЕ ПЕРВОКУРСНИКАМ

| ОСЕНЬ | ВЕСНА |
|---|---|
| ◦ Основные понятия математики, простой межкампусный НИС 1 +, Ю. М. Бурман, С. М. Львовский. | ◦ Основные понятия математики, простой межкампусный НИС 1 +, Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.<br>◦ Математика физических явлений, простой аудит. НИС 1 +, П. И. Арсеев. |
| ◦ Элементы математической логики, трудный межкампусный курс 1 +, А. В. Кудинов. | ◦ Избранные главы дискретной математики, простой межкампусный аудит. НИС 1 +, И. В. Артамкин.<br>◦ Геометрия и группы, простой аудит. НИС 1 +, О. В. Шварцман. |
| ◦ Проективная алгебраическая геометрия, простой межкампусный дист. НИС 1 +, А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин. | ◦ Проективная алгебраическая геометрия, простой межкампусный дист. НИС 1 +, А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин. |
| ◦ **Теория Кодирования как введение в Алгебру и Арифметику, трудный межкампусный аудит. НИС 1 +, В. А. Гриценко.** | ◦ Конечные кольца: коды и многочлены, простой межкампусный дист. НИС 1 +, В. А. Гриценко. |
| ◦ Геометрия и динамика, простой межкампусный аудит. НИС 1 +, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский. | ◦ Геометрия и динамика, простой межкампусный аудит. НИС 1 +, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский. |
| ◦ Representations and Probability, advanced intercampus offline RS 1 +, A. Dymov, A. V. Klimenko, описание на русском. | ◦ Representations and Probability, advanced intercampus offline RS 1 +, A. Dymov, A. V. Klimenko, описание на русском. |
| ◦ **Инварианты графов, узлов и вложенных графов, простой межкампусный аудит. курс 1 +, С. К. Ландо.** | ◦ **Symmetric functions, advanced inter-campus offline course 1 +, E. Yu. Smirnov, описание на русском.**<br>◦ Математика физических явлений, простой аудит. НИС 1 +, П. И. Арсеев. |

[1]В частности, большинство этих курсов подойдут второкурсникам в качестве «антимайноров».

ОСЕНЬ

◦ Современные проблемы математической логики, простой межкампусный НИС 2+, А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман.
◦ Введение в криптографию, трудный межкампусный аудит. НИС 2+, В. С. Болбочан.
◦ Introduction to algebraic number theory, simple inter-campus RS 2+, V. S. Zhgoon, описание на русском.
◦ *p*-adic numbers, advanced inter-campus offline RS 2+, M. V. Finkelberg.

**◦ Геометрическое введение в алгебраическую геометрию, простой межкампусный аудит. курс 2+, И. В. Артамкин.**
◦ Категории и универсальная алгебра, простой межкампусный НИС 2+, В. Б. Шехтман.

**◦ Введение в алгебраическую топологию, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. С. Хорошкин.**
**◦ Линейное программирование, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. В. Колесников.**

◦ Markov Chains, simple inter-campus offline course 2+, A. Dymov, описание на русском.

**◦ Cluster Poisson Varieties, advanced inter-campus project 2+, V. G. Gorbounov.**
**◦ Прикладные методы анализа, простой аудит. курс 2+, К. П. Зыбин, Т. Такебе.**

ВЕСНА

◦ Современные проблемы математической логики, простой межкампусный НИС 2+, А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман.
**◦ Введение в теорию чисел, простой межкампусный курс 2+, В. А. Кириченко.**
**◦ Introduction to commutative algebra, simple inter-campus course 2+, V. S. Zhgoon, описание на русском.**
**◦ Introduction to Galois theory, advanced online course 2+, N. S. Markarian, описание на русском.**
**◦ Introduction to Riemann surfaces, simple inter-campus offline course 2+, A. Yu. Buryak, описание на русском.**
**◦ Introduction to Category Theory and Homological Algebra, simple inter-campus course 2+, A. B. Pavlov.**
◦ Конечномерные алгебры, простой межкампусный аудит. НИС 2+, А. С. Штерн.

**◦ Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений, простой межкампусный аудит. НИС 2+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.**
◦ Основные приложения математики, простой межкампусный дист. НИС 2+, Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.
**◦ Foundations of game theory, simple inter-campus offline RS 2+, M. S. Panov, описание на русском.**
**◦ Continuous-Time Games, simple inter-campus offline RS 2+, M. S. Panov, описание на русском.**
**◦ Topological data analysis, advanced inter-campus course 2+, V. G. Gorbounov.**
◦ Асимптотические методы, простой аудит. НИС 2+, К. П. Зыбин.

## Специальные курсы и семинары

Эти занятия предназначены для более глубокого изучения тех разделов, по которым планируется дальнейшая специализация. В «Содержании» на стр. 2–5 они набраны прямым шрифтом.

### ГОДОВЫЕ СТУДЕНЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ СЕМИНАРЫ

#### ОСЕНЬ

◦ Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.

**◦ Теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин.**

◦ Combinatorics of invariants, simple inter-campus offline RS 3+, M. E. Kazarian, S. K. Lando, описание на русском.

◦ Динамические системы, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.

◦ Геометрия и алгебра дифференциальных уравнений, простой межкампусный аудит. НИС 3+, В. А. Побережный, И. В. Вьюгин.

◦ Stochastic analysis and its applications in economics, advanced RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.

#### ВЕСНА

◦ Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.

**◦ Теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин.**

◦ Combinatorics of invariants, simple inter-campus offline RS 3+, M. E. Kazarian, S. K. Lando, описание на русском.

◦ Динамические системы, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.

◦ Голоморфные расслоения, мероморфные связности и их применение, простой аудит. НИС 3+, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.

◦ Stochastic analysis and its applications in economics, advanced RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.

### СПЕЦКУРСЫ (НАЧАЛО)

#### ОСЕНЬ

◦ Модальные логики и вычислительная сложность, простой межкампусный НИС 3+, М. Н. Рыбаков.

**◦ Алгебраическая геометрия, трудный межкампусный аудит. курс 3+, Е. Ю. Америк.**

**◦ Introduction to sheaves, advanced inter-campus offline course 3+, C. Brav.**

◦ Gauss class number problem, advanced inter-campus offline RS 3+, A. M. Levin, A. B. Kalmynin, описание на русском.

◦ Аддитивные инварианты пространств и их применения, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, С. М. Гусейн-Заде.

**◦ Критические точки функций, простой межкампусный аудит. курс 3+, М. Э. Казарян.**

**◦ Риманова геометрия, простой аудит. НИС 3+, А. В. Пенской.**

**◦ Introduction to elliptic operators, simple inter-campus offline RS 3+, A. G. Gorinov, описание на русском.**

**◦ Smooth structures on manifolds, advanced inter-campus offline RS 3+, A. S. Tikhomirov, описание на русском.**

#### ВЕСНА

◦ Алгебраическая логика, простой межкампусный НИС 3+, А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов.

**◦ Алгебраическая геометрия – 2 , трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Е. Ю. Америк.**

◦ *p*-adic Geometry, advanced inter-campus RS 4+, V. A. Vologodsky.

**◦ Representations of GL($n$, $F_q$), advanced inter-campus offline course 3+, M. V. Finkelberg.**

**◦ Homological stability and the topology of moduli spaces, advanced inter-campus offline RS 3+, A. G. Gorinov, C. Brav, описание на русском.**

**◦ Характеристические классы и многочлены Тома, трудный межкампусный аудит. курс 3+, М. Э. Казарян.**

**◦ Оптимизация формы, трудный межкампусный НИС 3+, Е. О. Степанов.**

**◦ Введение в дифференциальную геометрию, простой аудит. курс 3+, П. Е. Пушкарь.**

**◦ Introduction to Floer homology, simple inter-campus offline RS 3+, A. G. Gorinov, P. E. Pushkar, описание на русском.**

**◦ Дополнительные главы топологии, трудный межкампусный курс 3+, В. А. Васильев.**

| ОСЕНЬ | ВЕСНА |
|---|---|
| ◦ **Группы и алгебры Ли, простой межкампусный аудит. курс 3+, Л. Г. Рыбников, А. С. Хорошкин.** | ◦ **Lie gropus and Lie algebras - 2, advanced inter-campus offline course 3+, E. B. Feigin, описание на русском.** |
| ◦ Конформная теория поля и теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Б. Л. Фейгин. | ◦ Конформная теория поля и теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Б. Л. Фейгин. |
| ◦ **Введение в функциональный анализ, простой межкампусный аудит. курс 3+, С. В. Шапошников.** | ◦ **Functional Analysis 2, advanced inter-campus offline course 3+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском.** |
| ◦ Harmonic Analysis and Unitary Representations, advanced inter-campus offline RS 3+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском. | ◦ Discrete Integrable Equations And Their Reductions, advanced inter-campus offline RS 3+, A. K. Pogrebkov, описание на русском. |
| | ◦ **Уравнения в частных производных, простой аудит. курс 3+, И. В. Вьюгин, В. В. Чепыжов.** |
| ◦ Introduction to Ergodic Theory, advanced inter-campus offline course 3+, M. L. Blank, описание на русском. | ◦ Introduction to the theory of random processes, advanced inter-campus offline course 3+, M. L. Blank, описание на русском. |
| | ◦ **Математическая статистика и анализ данных, простой межкампусный аудит. курс 3+, И. В. Щуров.** |
| | ◦ **Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые системы, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. М. Поволоцкий.** |
| ◦ **Гамильтонова механика, простой межкампусный аудит. курс 3+, В. А. Побережный, А. А. Басалаев.** | ◦ **Классическая теория поля, трудный аудит. НИС 3+, П. И. Арсеев.** |
| ◦ **Математические основы квантовой механики, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, П. А. Сапонов, П. Н. Пятов.** | ◦ **Введение в квантовую теорию поля, простой межкампусный аудит. НИС 3+, В. В. Лосяков, П. И. Дунин–Барковский.** |
| ◦ Introduction to two-dimensional conformal field theory, advanced inter-campus offline RS 4+, A. V. Litvinov, описание на русском. | ◦ Introduction to two-dimensional conformal field theory, advanced inter-campus offline RS 4+, A. V. Litvinov, описание на русском. |
| | ◦ **Группа кос, квантовые группы и приложения, простой межкампусный аудит. НИС 3+, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.** |
| ◦ Функциональный Интеграл: от стохастических процессов к квантовой теории, простой межкампусный аудит. НИС 3+, А. Г. Семёнов. | ◦ **Элементы стохастической динамики, простой межкампусный аудит. НИС 3+, А. С. Ильин.** |

## Курсы НОЦ МИАН

В Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН (МИАН) реализуется научно-образовательная программа МЦМУ МИАН (НОЦ МИАН). Её целью является подготовка сильных студентов, желающих заниматься математикой и физикой на профессиональном уровне. Ведущие учёные читают специальные курсы и ведут исследовательские семинары по основным математическим и физическим дисциплинам. Занятия проходят в вечернее время в здании МИАН, как правило, начиная с $18^{00}$. Экзамены принимаются после окончания каждого семестра. Студенты и аспиранты математического факультета НИУ ВШЭ могут включать курсы и семинары НОЦ МИАН в свой ИУП. Каждый сданный *курс* НОЦ МИАН оценивается в 5 кредитов, каждый сданный *семинар* — в 4 кредита. Расписание НОЦ МИАН в осеннем семестре 2022/23 учебного года см. на www.mi-ras.ru/index.php?c=noc2223_1.

## Курсы от Huawei R&D

Эти курсы читаются представителями Huawei R&D. Они входят в число математических предметов и могут без ограничений включаться в ИУП студентами всех бакалаврских и магистерских программ факультета математики.

Курсы Huawei R&D

| осень | весна |
| --- | --- |
| ◦ Discrete Optimization and Integer Programming, simple inter-campus offline RS 3+, D. I. Arkhipov, описание на русском.<br>◦ Mathematics in Information Transmission, advanced inter-campus offline RS 3+, S. A. Loktev, описание на русском. | ◦ **Telecom mathematics, advanced inter-campus offline RS 3+, D. S. Minenkov, описание на русском.**<br>◦ **Algorithms as math research, simple inter-campus offline RS 3+, D. A. Shmelkin, описание на русском.** |

## Нематематические курсы, читаемые на факультете математики

Эти курсы читаются представителями других факультетов НИУ ВШЭ и предназначены тем, кто хочет изучить те или иные области за пределами математики. Курсы программирования на Python, эконометрики и машинного обучения не учитываются в ограничении на суммарное число нематематических курсов в ИУП. Все остальные курсы учитываются в этом ограничении наравне с курсами, читаемыми на других факультетах ВШЭ.

курсы, читаемые представителями других факультетов

| осень | весна |
| --- | --- |
| ◦ **Избранные главы математической экономики, простой аудит. курс 3+, М. И. Левин.**<br>◦ Элементы количественного анализа в экономике, простой межкампусный аудит. НИС 2+, И. Б. Воскобойников. | ◦ **Основы эконометрики, простой межкампусный аудит. НИС 2+, И. Б. Воскобойников.**<br>◦ Непараметрика и другие сюжеты статистики, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Д. С. Шмерлинг.<br>◦ **Машинное обучение, простой межкампусный аудит. курс 3+, Е. О. Кантонистова.** |

## Рекомендуемые линейки курсов

В этом разделе курсы собраны в «линейки», рекомендуемые для специализации в той или иной области. Между линейками есть значительные пересечения, и взаимная зависимость курсов далеко не линейна. Логическая взаимосвязь предметов уточняется в предваряющих таблицы пояснениях. Всем, кто только выбирает себе направления будущей специализации, рекомендуется начинать с посещения занятий, доступных первокурсникам.

### Алгебра и теория чисел

Курсы по теории чисел, за исключением самого продвинутого курса «$p$-adic geometry», мало зависят друг от друга и мало пересекаются по содержанию, их можно брать в произвольном порядке и количестве в зависимости от интересов и уровня алгебраической подготовки. Студентам, слабо владеющим алгеброй в объёме первого курса (первокурсникам, а также второкурсникам, которым плохо давалась алгебра на первом курсе) рекомендуется начинать с курсов «Введение в теорию чисел» и «Конечные кольца: коды и многочлены». Студентам, хорошо освоившим алгебру в объёме первого курса, можно сразу браться за курсы «Введение в криптографию», «Теория кодирования как введение в алгебру и арифметику», «Introduction to algebraic number theory», «$p$-adic numbers» и «Gauss class number problem» — в зависимости от своих интересов. Курс «$p$-adic geometry» требует владения $p$-адическими числами, алгебраической теорией чисел и теорией схем[1].

Курсы по алгебре «Introduction to Galois theory», «Introduction to commutative algebra», «Introduction to category theory and homological algebra», «Конечномерные алгебры» и «Representations of $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$» рассчитаны на студентов, хорошо освоивших алгебру в объёме первых трёх семестров. Эти курсы тоже мало зависят друг от друга, но первые три из них являются пререквизитами к более продвинутым курсам по алгебраической и диофантовой геометрии — студентам, специализирующимся в алгебре и её приложениях к арифметике, геометрии и топологии, рекомендуется взять их в любом удобном порядке. Четвёртый и пятый курсы предназначены для студентов, желающих на понятных и интересных примерах познакомиться с некоммутативной алгеброй и теорией представлений.

ОСЕНЬ

- **Теория Кодирования как введение в Алгебру и Арифметику, трудный межкампусный аудит. НИС 1+, В. А. Гриценко.**
- Введение в криптографию, трудный межкампусный аудит. НИС 2+, В. С. Болбочан.
- Introduction to algebraic number theory, simple inter-campus RS 2+, V. S. Zhgoon, описание на русском.
- Gauss class number problem, advanced inter-campus offline RS 3+, A. M. Levin, A. B. Kalmynin, описание на русском.
- $p$-adic numbers, advanced inter-campus offline RS 2+, M. V. Finkelberg.

ВЕСНА

- Конечные кольца: коды и многочлены, простой межкампусный дист. НИС 1+, В. А. Гриценко.
- **Введение в теорию чисел, простой межкампусный курс 2+, В. А. Кириченко.**
- **Introduction to Galois theory, advanced online course 2+, N. S. Markarian, описание на русском.**
- **Introduction to commutative algebra, simple inter-campus course 2+, V. S. Zhgoon, описание на русском.**
- $p$-adic Geometry, advanced inter-campus RS 4+, V. A. Vologodsky.
- Конечномерные алгебры, простой межкампусный аудит. НИС 2+, А. С. Штерн.
- **Representations of GL($n$, $F_q$), advanced inter-campus offline course 3+, M. V. Finkelberg.**
- **Introduction to Category Theory and Homological Algebra, simple inter-campus course 2+, A. B. Pavlov.**

[1] См. линейку курсов по алгебраической геометрии.

## Алгебраическая геометрия

В этой линейке три основных курса — «Геометрическое введение в алгебраическую геометрию» (семестровый курс, читается ежегодно), «Алгебраическая геометрия – 1,2» (годовой или трёхмодульный курс по теории схем, читается раз в один-два года), «Келерова геометрия» (семестровый или годовой курс по комплексно-аналитическим многообразиям и теории Ходжа, читается раз в два года, в 1922/23 учебном году его не планируется). Желательными пререквизитами к первому из курсов являются алгебра, геометрия и топология в объёме первого года бакалавриата, ко второму — первый из курсов, а также введения в коммутативную алгебру, теорию пучков, теорию категорий и гомологическую алгебру, к третьему — первый из курсов, а также введения в алгебраическую топологию, дифференциальную геометрию, теорию пучков, гомологическую алгебру, функциональный анализ (эллиптические операторы) и функции комплексных переменных. Курсы по римановым поверхностям и по теории Галуа знакомят с двумя центральными математическими сюжетами, исследование которых во многом и привело к созданию современной алгебраической геометрии. Оба сюжета до сих пор весьма актуальны, и знакомство с ними очень полезно для понимания как теории схем, так и аналитической геометрии. Основными семинарами для студентов, специализирующихся в алгебраической геометрии, являются «Геометрические структуры на многообразиях» и научный семинар лаборатории Алгебраической Геометрии. Первокурсникам, только выбирающим себе направления дальнейшей специализации, для знакомства с областью можно посоветовать семинар «Проективная алгебраическая геометрия».

| осень | весна |
| --- | --- |
| ∘ Проективная алгебраическая геометрия, простой межкампусный дист. НИС 1+, А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин. | ∘ Проективная алгебраическая геометрия, простой межкампусный дист. НИС 1+, А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин. |
| ∘ **Геометрическое введение в алгебраическую геометрию, простой межкампусный аудит. курс 2+, И. В. Артамкин.** | ∘ **Introduction to commutative algebra, simple inter-campus course 2+, V. S. Zhgoon, описание на русском.** |
| | ∘ **Introduction to Galois theory, advanced online course 2+, N. S. Markarian, описание на русском.** |
| | ∘ **Introduction to Riemann surfaces, simple inter-campus offline course 2+, A. Yu. Buryak, описание на русском.** |
| ∘ **Introduction to sheaves, advanced inter-campus offline course 3+, C. Brav.** | ∘ **Introduction to Category Theory and Homological Algebra, simple inter-campus course 2+, A. B. Pavlov.** |
| ∘ **Алгебраическая геометрия, трудный межкампусный аудит. курс 3+, Е. Ю. Америк.** | ∘ **Алгебраическая геометрия – 2 , трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Е. Ю. Америк.** |
| | ∘ $p$-adic Geometry, advanced inter-campus RS 4+, V. A. Vologodsky. |
| | ∘ **Homological stability and the topology of moduli spaces, advanced inter-campus offline RS 3+, A. G. Gorinov, C. Brav, описание на русском.** |

## Анализ

ОСЕНЬ

◦ **Введение в функциональный анализ, простой межкампусный аудит. курс 3+, С. В. Шапошников.**
◦ Harmonic Analysis and Unitary Representations, advanced inter-campus offline RS 3+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском.
◦ **Прикладные методы анализа, простой аудит. курс 2+, К. П. Зыбин, Т. Такебе.**
◦ **Критические точки функций, простой межкампусный аудит. курс 3+, М. Э. Казарян.**
◦ Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.

ВЕСНА

◦ **Functional Analysis 2, advanced inter-campus offline course 3+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском.**
◦ **Уравнения в частных производных, простой аудит. курс 3+, И. В. Вьюгин, В. В. Чепыжов.**
◦ Асимптотические методы, простой аудит. НИС 2+, К. П. Зыбин.
◦ **Оптимизация формы, трудный межкампусный НИС 3+, Е. О. Степанов.**
◦ Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.

## Вероятность и стохастическая динамика

ОСЕНЬ

◦ Геометрия и динамика, простой межкампусный аудит. НИС 1+, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский.
◦ Representations and Probability, advanced inter-campus offline RS 1+, A. Dymov, A. V. Klimenko, описание на русском.
◦ Markov Chains, simple inter-campus offline course 2+, A. Dymov, описание на русском.
◦ Introduction to Ergodic Theory, advanced inter-campus offline course 3+, M. L. Blank, описание на русском.
◦ Stochastic analysis and its applications in economics, advanced RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.

ВЕСНА

◦ Геометрия и динамика, простой межкампусный аудит. НИС 1+, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский.
◦ Representations and Probability, advanced inter-campus offline RS 1+, A. Dymov, A. V. Klimenko, описание на русском.
◦ Introduction to the theory of random processes, advanced inter-campus offline course 3+, M. L. Blank, описание на русском.
◦ **Математическая статистика и анализ данных, простой межкампусный аудит. курс 3+, И. В. Щуров.**
◦ **Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые системы, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. М. Поволоцкий.**
◦ **Элементы стохастической динамики, простой межкампусный аудит. НИС 3+, А. С. Ильин.**
◦ Stochastic analysis and its applications in economics, advanced RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.

## Дифференциальная геометрия и топология

Язык геометрии и топологии является одним основных в современной математике. Значительная часть курсов этой линейки необходима для профессиональной специализации во многих других областях, представленных в этой книге. Курсы линейки можно (очень условно) разбить на два направления — «топологическое» и «геометрическое».

К первому относятся курсы «Введение в алгебраическую топологию», «Дополнительные главы топологии», «Introduction to Category Theory and Homological Algebra» и «Introduction to sheaves», посвящённые построению топологических инвариантов пространств и методам их вычисления, а также курсы «Критические точки функций» и «Характеристические классы и многочлены Тома», посвящённые применению этих топологических методов к задачам из более «аналитических» и «геометрических» областей.

Ко второму относятся курсы «Введение в дифференциальную геометрию» и «Риманова геометрия», являющиеся пререквизитами к более продвинутым курсам по алгебраической, дифференциальной и келеровой геометрии, математической физике и т. п. Курсы «Introduction to Riemann surfaces» и «Оптимизация формы» знакомят с яркими примерами применения дифференциально геометрических и аналитических методов в классических и очень востребованных задачах. Курсы «Introduction to elliptic operators», «Introduction to Floer homology», «Smooth structures on manifolds», «Homological stability and the topology of moduli spaces» являются более продвинутыми и вводят слушателей в круг наиболее техничных современных геометрических и топологических задач.

ОСЕНЬ

- **Введение в алгебраическую топологию, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. С. Хорошкин.**
- Аддитивные инварианты пространств и их применения, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, С. М. Гусейн-Заде.
- **Критические точки функций, простой межкампусный аудит. курс 3+, М. Э. Казарян.**
- **Introduction to sheaves, advanced inter-campus offline course 3+, C. Brav.**
- **Риманова геометрия, простой аудит. НИС 3+, А. В. Пенской.**
- **Introduction to elliptic operators, simple inter-campus offline RS 3+, A. G. Gorinov, описание на русском.**
- **Smooth structures on manifolds, advanced inter-campus offline RS 3+, A. S. Tikhomirov, описание на русском.**

ВЕСНА

- **Introduction to Category Theory and Homological Algebra, simple inter-campus course 2+, A. V. Pavlov.**
- **Характеристические классы и многочлены Тома, трудный межкампусный аудит. курс 3+, М. Э. Казарян.**
- **Дополнительные главы топологии, трудный межкампусный курс 3+, В. А. Васильев.**
- **Введение в дифференциальную геометрию, простой аудит. курс 3+, П. Е. Пушкарь.**
- **Introduction to Riemann surfaces, simple inter-campus offline course 2+, A. Yu. Buryak, описание на русском.**
- **Оптимизация формы, трудный межкампусный НИС 3+, Е. О. Степанов.**
- **Introduction to Floer homology, simple inter-campus offline RS 3+, A. G. Gorinov, P. E. Pushkar, описание на русском.**
- **Homological stability and the topology of moduli spaces, advanced inter-campus offline RS 3+, A. G. Gorinov, C. Brav, описание на русском.**

## Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы

ОСЕНЬ

◦ **Гамильтонова механика, простой межкампусный аудит. курс 3+, В. А. Побережный, А. А. Басалаев.**

◦ **Прикладные методы анализа, простой аудит. курс 2+, К. П. Зыбин, Т. Такебе.**

◦ Динамические системы, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.

◦ Геометрия и алгебра дифференциальных уравнений, простой межкампусный аудит. НИС 3+, В. А. Побережный, И. В. Вьюгин.

ВЕСНА

◦ **Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений, простой межкампусный аудит. НИС 2+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.**

◦ **Уравнения в частных производных, простой аудит. курс 3+, И. В. Вьюгин, В. В. Чепыжов.**

◦ Асимптотические методы, простой аудит. НИС 2+, К. П. Зыбин.

◦ Discrete Integrable Equations And Their Reductions, advanced inter-campus offline RS 3+, A. K. Pogrebkov, описание на русском.

◦ Динамические системы, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.

◦ Голоморфные расслоения, мероморфные связности и их применение, простой аудит. НИС 3+, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.

## Инварианты и представления

ОСЕНЬ

◦ **Группы и алгебры Ли, простой межкампусный аудит. курс 3+, Л. Г. Рыбников, А. С. Хорошкин.**

◦ Harmonic Analysis and Unitary Representations, advanced inter-campus offline RS 3+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском.

◦ Конформная теория поля и теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Б. Л. Фейгин.

◦ **Теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин.**

ВЕСНА

◦ Геометрия и группы, простой аудит. НИС 1+, О. В. Шварцман.

◦ Конечномерные алгебры, простой межкампусный аудит. НИС 2+, А. С. Штерн.

◦ **Lie gropus and Lie algebras - 2, advanced inter-campus offline course 3+, E. B. Feigin, описание на русском.**

◦ **Representations of GL($n$, $F_q$), advanced inter-campus offline course 3+, M. V. Finkelberg.**

◦ Конформная теория поля и теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Б. Л. Фейгин.

◦ **Теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин.**

### Комбинаторика и маломерная топология

Все курсы линейки можно брать независимо друг от друга. Курсы «Инварианты графов, узлов и вложенных графов», «Избранные главы дискретной математики» и «Symmetric functions» предполагают владение алгеброй в объёме первого курса и владение дискретной математикой в объёме первых двух курсов или в объёме онлайн-курса Е. Ю. Смирнова «Introduction to enumerative combinatorics», однако можно попробовать взять эти курсы параллельно с освоением необходимых пререквизитов. Для курсов «Cluster Poisson varieties» и «Representations of $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$» требуется хорошее знание алгебры в объёме первых трёх семестров. Для курсов «Инварианты графов, узлов и вложенных графов» и «Cluster Poisson varieties» кроме алгебры потребуется топология в объёме первого курса. Основным студенческим научным семинаром по комбинаторике и маломерной топологии является «Combinatorics of invariants». Участие в нём не предполагает серьёзной предварительной подготовки: каждый студент при желании сможет найти себе приемлемую по уровню тему для доклада.

**ОСЕНЬ**

- **Инварианты графов, узлов и вложенных графов, простой межкампусный аудит. курс 1+, С. К. Ландо.**
- **Cluster Poisson Varieties, advanced inter-campus project 2+, V. G. Gorbounov.**
- Combinatorics of invariants, simple inter-campus offline RS 3+, M. E. Kazarian, S. K. Lando, описание на русском.

**ВЕСНА**

- Избранные главы дискретной математики, простой межкампусный аудит. НИС 1+, И. В. Артамкин.
- **Symmetric functions, advanced inter-campus offline course 1+, E. Yu. Smirnov, описание на русском.**
- **Representations of GL($n$, $F_q$), advanced inter-campus offline course 3+, M. V. Finkelberg.**
- Combinatorics of invariants, simple inter-campus offline RS 3+, M. E. Kazarian, S. K. Lando, описание на русском.

### Логика

**ОСЕНЬ**

- Элементы математической логики, трудный межкампусный курс 1+, А. В. Кудинов.
- Категории и универсальная алгебра, простой межкампусный НИС 2+, В. Б. Шехтман.
- Модальные логики и вычислительная сложность, простой межкампусный НИС 3+, М. Н. Рыбаков.
- Современные проблемы математической логики, простой межкампусный НИС 2+, А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман.

**ВЕСНА**

- Алгебраическая логика, простой межкампусный НИС 3+, А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов.
- Современные проблемы математической логики, простой межкампусный НИС 2+, А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман.

## Матфизика

Это не совсем «линейка», а скорее «дерево» из четырёх ветвей. Основная состоит из базовых курсов, входящих в образовательный минимум любого физика-теоретика: «Математика физических явлений», «Гамильтонова механика», «Квантовая механика», «Классическая теория поля», «Квантовая теория поля» и «Функциональный интеграл». Семинар «Математика физических явлений» адресован младшекурсникам, которые хотят познакомиться с физикой, научиться понимать её язык и свободно переводить с него на язык математики и обратно. Остальные курсы желательно изучать именно в той последовательности, как они написаны, хотя готовность (а главное — способность) освоить три-четыре ключевых идеи предыдущих курсов, в принципе, позволяет на ходу впрыгнуть в любой вагон этого поезда.

Курсы «Прикладные методы анализа», «Асимптотические методы» и «Discrete Integrable Equations And Their Reductions» посвящены важнейшим аналитическим инструментам практического решения разнообразных уравнений, возникающих не только в математической физике, но и в чистой математике (обобщённые функции, преобразования Фурье и Лапласа, асимптотические и разностные методы).

Курсы «Случайные матрицы» и «Стохастическая динамика» — это чисто математические курсы, посвящённые избранным задачам стохастической динамики — разделу теории вероятностей, тесно связанному со статистической физикой.

Четвёртая группа курсов посвящена связи математической физики с теорией представлений. Годовые семинары Б. Фейгина и А. Литвинова имеют дело с довольно продвинутым алгебраическим аппаратом (алгебры Вирасоро, вертексные алгебры и т. п.) и его приложениями в конформной теории поля. Семинар «Группа кос, квантовые группы и приложения» использует более простой алгебраический аппарат (алгебры Хопфа, квантовые группы), пришедший из интегрируемых моделей статистической физики.

| ОСЕНЬ | ВЕСНА |
|---|---|
| | ∘ Математика физических явлений, простой аудит. НИС 1 +, П. И. Арсеев. |
| **∘ Прикладные методы анализа, простой аудит. курс 2 +, К. П. Зыбин, Т. Такебе.** | ∘ Асимптотические методы, простой аудит. НИС 2 +, К. П. Зыбин. |
| **∘ Гамильтонова механика, простой межкампусный аудит. курс 3 +, В. А. Побережный, А. А. Басалаев.** | **∘ Классическая теория поля, трудный аудит. НИС 3 +, П. И. Арсеев.** |
| **∘ Математические основы квантовой механики, трудный межкампусный аудит. НИС 3 +, П. А. Сапонов, П. Н. Пятов.** | **∘ Введение в квантовую теорию поля, простой межкампусный аудит. НИС 3 +, В. В. Лосяков, П. И. Дунин–Барковский.** |
| ∘ Функциональный Интеграл: от стохастических процессов к квантовой теории, простой межкампусный аудит. НИС 3 +, А. Г. Семёнов. | **∘ Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые системы, трудный межкампусный аудит. курс 3 +, А. М. Поволоцкий.** |
| | **∘ Элементы стохастической динамики, простой межкампусный аудит. НИС 3 +, А. С. Ильин.** |
| | **∘ Группа кос, квантовые группы и приложения, простой межкампусный аудит. НИС 3 +, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.** |
| ∘ Конформная теория поля и теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3 +, Б. Л. Фейгин. | ∘ Конформная теория поля и теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3 +, Б. Л. Фейгин. |
| ∘ Introduction to two-dimensional conformal field theory, advanced inter-campus offline RS 4 +, A. V. Litvinov, описание на русском. | ∘ Introduction to two-dimensional conformal field theory, advanced inter-campus offline RS 4 +, A. V. Litvinov, описание на русском. |

### Прикладная математика

Студенты, увлёкшиеся приложениями математики, могут включить в свой ИУП перечисленные ниже курсы. Между ними нет чётких логических зависимостей.

| осень | весна |
|---|---|
| ◦ **Линейное программирование, простой межкампусный аудит. курс 2+, А. В. Колесников.** | ◦ Основные приложения математики, простой межкампусный дист. НИС 2+, Ю. М. Бурман, С. М. Львовский. |
| | ◦ **Foundations of game theory, simple inter-campus offline RS 2+, M. S. Panov, описание на русском.** |
| | ◦ **Continuous-Time Games, simple inter-campus offline RS 2+, M. S. Panov, описание на русском.** |
| ◦ Элементы количественного анализа в экономике, простой межкампусный аудит. НИС 2+, И. Б. Воскобойников. | ◦ **Основы эконометрики, простой межкампусный аудит. НИС 2+, И. Б. Воскобойников.** |
| ◦ **Избранные главы математической экономики, простой аудит. курс 3+, М. И. Левин.** | ◦ Непараметрика и другие сюжеты статистики, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Д. С. Шмерлинг. |
| | ◦ **Математическая статистика и анализ данных, простой межкампусный аудит. курс 3+, И. В. Щуров.** |
| | ◦ **Машинное обучение, простой межкампусный аудит. курс 3+, Е. О. Кантонистова.** |
| | ◦ **Topological data analysis, advanced inter-campus course 2+, V. G. Gorbounov.** |
| ◦ Discrete Optimization and Integer Programming, simple inter-campus offline RS 3+, D. I. Arkhipov, описание на русском. | ◦ **Algorithms as math research, simple inter-campus offline RS 3+, D. A. Shmelkin, описание на русском.** |
| ◦ Mathematics in Information Transmission, advanced inter-campus offline RS 3+, S. A. Loktev, описание на русском. | ◦ **Telecom mathematics, advanced inter-campus offline RS 3+, D. S. Minenkov, описание на русском.** |

## Статистическая информация о курсах

в настоящей момент в книге курсов имеется

| | осенью | весной |
|---|---|---|
| всего | 46 | 57 |
| курсов | 15 | 18 |
| НИСов | 30 | 39 |
| проектов | 1 | 0 |
| толстых | 19 | 32 |
| тонких | 27 | 25 |
| на русском | 30 | 35 |
| на английском | 16 | 22 |
| из них с русским описанием | 13 | 18 |
| для первого курса | 7 | 10 |
| для первого-второго курсов | 19 | 24 |
| для третьего курса и старше | 27 | 33 |
| субъективно простых | 25 | 32 |
| субъективно трудных | 21 | 25 |
| межкампусных | 42 | 47 |
| дистанционных | 1 | 4 |
| аудиторных | 45 | 53 |
| нематематических | 2 | 2 |

## Описания курсов на русском

Кроме курсов, читаемых по-русски, в этом разделе имеются русские описания некоторых курсов, читаемых по-английски. Это отмечается сразу под названием курса, следом за указанием его статуса и целевой аудитории.

### Аддитивные инварианты пространств и их применения
**трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** С. М. Гусейн-Заде.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Одним из простейших инвариантов топологических пространств является эйлерова характеристика. Она связана со многими другими инвариантами, например, с индексами особых точек векторных полей. Кроме того, она обладает многими замечательными свойствами, помогающими ее эффективному вычислению. Например, при «правильном» понимании эйлерова характеристика является аддитивным инвариантом топологических пространств (в действительности, в некотором смысле универсальным). Во ряде случаев другие инварианты (например, группы (ко)гомологий) оказываются известными (легко вычисляемыми) во всех размерностях, кроме одной (примеры: гомологии гиперповерхностей или полных пересечений в комплексном проективном пространстве, гомологии локального многообразия уровня голоморфной функции около изолированной критической точки). В таких случаях вычисление эйлеровой характеристики позволяет получить результат для недостающей размерности. Аддитивность эйлеровой характеристики позволяет использовать ее в качестве своего рода меры для понятия интеграла. В курсе будет рассказано о свойствах эйлеровой характеристики и ее применениях, других аддитивных инвариантах (обобщенных эйлеровых характеристиках, например, в ситуации с действием конечной группы, аддитивных инвариантах алгебраических пространств). Курс подойдет к (или завершится) понятию(ем) мотивного интегрирования.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Надо знать, что такое группы гомологий и когомологий (и их простейшие свойства). Все остальное необходимое будет рассказано.

**ПРОГРАММА:**

- Эйлерова характеристика. Аддитивная эйлерова характеристика. Универсальность эйлеровой характеристики.
- Интеграл по отношению к эйлеровой характеристике. Примеры его применения.
- Формула Макдональда для эйлеровой характеристики.
- Обобщенные эйлеровы характеристики для пространств с действием конечной группы.
- Индексы векторных полей, инвариантных относительно действия конечной группы.
- Аддитивные инварианты алгебраических пространств. Многочлен Ходжа – Делиня (без доказательства).
- Кольцо Гротендика квазипроективных пространств. Степенная структура на кольце Гротендика комплексных квазипроективных пространств.
- Интегрирование по отношению к эйлеровой характеристике по бесконечномерным пространствам (функций, ростков кривых).
- Мотивное интегрирование.

**УЧЕБНИКИ:**


- Дж. Милнор. Особые точки комплексных гиперповерхностей. Мир, 1971.
- Дж. Милнор. Теория Морса. Мир, 1965.
- A. Craw, «An introduction to motivic integration», Strings and geometry, Clay Math. Proc., 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 203-225.
- T. tom Dieck, Transformation groups and representation theory, Lecture Notes in Math., 766, Springer, Berlin, 1979.
- С. М. Гусейн-Заде, «Интегрирование по отношению к эйлеровой характеристике и его приложения», УМН, 65:3(393) (2010), 5-42.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Сумма баллов за решение задач в течение курса и баллов за экзамен (поровну).

## Алгебраическая геометрия
**трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Е. Ю. Америк.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Цель курса — познакомить слушателя с аппаратом алгебраической геометрии: схемы, пучки, когомологии.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** очень желательно знакомство с коммутативной алгеброй в объёме Атьи – Макдональда примерно.

**ПРОГРАММА:** Аффинные схемы: повторение коммутативной алгебры. Пучки. Понятие схемы. как пример. Многочлен Гильберта, теорема Безу. Общие свойства схем и их морфизмов (целостность, условия конечности, отделимость, собственность). Размерность, неособость. Когерентные пучки на аффинной и проективной схеме. Обратимые пучки и группа Пикара. Обратимые пучки и отображения в проективное пространство. Обильность и очень обильность.

**** Когомологии пучков. Когомологии Чеха, вычисление для проективного пространства. Теоремы конечности и обращения в нуль. Плоские морфизмы, плоские семейства и многочлен Гильберта. Теорема Римана – Роха для кривых. (Когомологии, скорее всего, будут уже в третьем модуле — в курсе Алгебраическая геометрия – 2 .)

**УЧЕБНИКИ:** Манин. «Введение в теорию схем и квантовые группы». Хартсхорн. «Алгебраическая геометрия».

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** среднее промежуточной контрольной и экзамена.

## Алгебраическая геометрия – 2
**трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Е. Ю. Америк.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** 3-й модуль 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Цель курса — познакомить слушателя с аппаратом алгебраической геометрии: схемы, пучки, когомологии. Это продолжение курса Алгебраическая геометрия, который не уместится в 1-2 модуле. Оформляется как два курса, чтобы уставшие могли не продолжать ☺, хотя тут-то и начинается самое интересное!

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** очень желательно знакомство с коммутативной алгеброй в объёме Атьи – Макдональда примерно.

**ПРОГРАММА:** Когомологии пучков. Когомологии Чеха, вычисление для проективного пространства. Теоремы конечности и обращения в нуль. Плоские морфизмы, плоские семейства и многочлен Гильберта. Теорема Римана – Роха для кривых.

**УЧЕБНИКИ:** Манин. «Введение в теорию схем и квантовые группы». Хартсхорн. «Алгебраическая геометрия».

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** среднее промежуточной контрольной и экзамена.

## Алгебраическая логика
### простой межкампусный НИС для 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Логика как математическая дисциплина родилась в XIX в., когда Дж. Буль, О. де Морган и другие предприняли попытку перенести алгебраические свойства арифметических операций на действия с высказываниями. Им удалось найти законы, которым подчиняются логические операции классической логики высказываний, и создать новое направление исследований, именуемое сегодня алгебраической логикой. Наш курс станет введением в эту дисциплину. С одной стороны, мы рассмотрим различные типы алгебр, возникающих при изучении конкретных пропозициональных логик, уделяя особое внимания теоремам о представлении и вопросам пополняемости и двойственности. С другой стороны, мы разовьём общую теорию пропозициональных логик, ответим на вопрос, какие логики алгебраизуемы, а какие нет, а также обсудим, как связаны свойства логик и их алгебраических семантик.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Материал рассчитан на студентов 2 курса бакалавриата и старше. Для его освоения необходимы базовые знания теории множеств в рамках обязательного курса «Дискретная математика». Знакомство с основными понятиями универсальной алгебры и математической логики в объёме курсов «Категории и универсальная алгебра», «Элементы математической логики» или «Логика и алгоритмы» будет полезным, но не является обязательным.

**ПРОГРАММА:**

- Классическая логика высказываний. Булевы алгебры и решетки.
- Полные атомные булевы алгебры и дискретная двойственность. Двойственность Стоуна.
- Конструкция Линденбаума – Тарского.
- Интуиционистская логика. Импликативные решетки и алгебры Гейтинга.
- Многообразия абстрактных алгебр и HSP-теорема Биркгофа.
- Структура многообразий булевых алгебр и алгебр Гейтинга.
- Топологические пространства и связанные с ними алгебры. Двойственность Эсакиа. Модальные алгебры. Представление топобулевых алгебр.
- Алгебраические решетки и системы замыкания. Абстрактные логики высказываний. Семантика логических матриц.
- Алгебраизуемые и неалгебраизуемые логики. Квазимногообразия абстрактных алгебр и финитарные алгебраизуемые логики.
- Инфинитарные алгебраизуемые логики. Алгебраическая семантика модальной логики общего знания.

**УЧЕБНИКИ:**


- S. Burris, H. Sankappanavar. A course in universal algebra. Millenium edition, 2012.
- B. A. Davey, H. A. Priestley. Introduction to Lattices and Order. Second Edition, 2002.
- J. M. Font. Abstract Algebraic Logic. An Introductory Textbook. College Publications, 2016.
- J. Czelakowski. Protoalgebraic Logics. Springer, 2001.
- В. Е. Плиско, В. Х. Хаханян. Интуиционистская логика. М.: Изд-во при мех.-мат. ф-те МГУ, 2009

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Накопленная оценка (Н) равна средней оценке за домашние задания. Если она не меньше 8, то она совпадает с итоговой и студент освобождается от экзамена. Иначе, итоговая оценка равна 0.7 * Н + 0.4 * К, где К — оценка за экзамен в форме коллоквиума.

## Алгоритмы как математическое исследование
**простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Д .А. Шмелькин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Слово Алгоритм часто оказывается мостом между программированием и математикой. Мы расскажем о том, в чём заключается и как оценивается эффективность алгоритмов. С одной стороны, алгоритмы оцениваются по своей асимптотической сложности. С другой стороны, мы уделим должное внимание структурам данных, выбор которых существенно влияет на сложность алгоритмов. Курс в основном посвящён полиномиальным алгоритмам, однако мы покажем, какие методы применимы (в некотором приближённом смысле, конечно) к NP-трудным задачам, которые и встречаются чаще всего на практике. Участники получат опыт практической реализации алгоритмов в виде программ: без этой работы было бы слишком трудно по настоящему понять алгоритмы. Курс будет иллюстрирован примерами, как из учебников, так и из практики. Замечание: Студенты матфака имеют широкие возможности выбора курсов, в частности на других факультетах ВШЭ и в ШАД имеются глубокие многосеместровые курсы по Алгоритмам. Выбирая между этими возможностями следует иметь в виду, что наша цель состоит прежде всего в том, чтобы за ограниченное время показать математику в алгоритмах, используя минимальный багаж программирования, что удобно для тех, кто пока ещё присматривается к компьютерным наукам.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** В части математических знаний, минимальные требования довольно просты, и в основном требуют только базовой математики в рамках программы «Матфак: предисловие». Важно, что участники должны быть готовы к тому, что им придётся писать программы на языке `Python`, а ещё лучше на `C++`. При этом требования к знанию языка невелики, и всё чего не хватает можно выучить в процессе решения задач. Очевидно, что для того чтобы писать программы, необходим доступ к компьютеру, в идеале — собственный ноутбук, с которым можно работать на практическом занятии.

**ПРОГРАММА:**

- Начальные примеры алгоритмических задач. Понятие сложности алгоритма и сложности задачи. Нижние оценки сложности алгоритмов. Навыки: алгоритмы на множествах чисел, оценка их сложности.

- Стандартные структуры данных: массив, стек, очередь, список, дерево, хэш таблица. Навыки: умение программировать некоторые методы структур данных и выбирать подходящую структуру для задачи.

- Неориентированные графы и их обходы. Поиск в ширину и его применения (поиск связных компонент и минимального покрывающего дерева графа, поиск кратчайших путей, обобщения). Навык: умение решать алгоритмические задачи на графах методом построения структуры данных и поиска в ширину.

- Ориентированные графы и порядки на множествах. Поиск в глубину. Топологическая сортировка, поиск сильно связных компонент, перечисление всех ориентированных циклов. Навык: построение полных порядков из предпорядка.

- Потоки на графах. Алгоритмы поиска максимального потока и минимального разреза. Многопродуктовые потоки, алгоритмы поиска максимального конкурентного потока. Навык: решение задач методом построения и максимизации потока на графе.

- Жадные алгоритмы и их применимость. Матроиды и субмодулярные функции. Примеры (минимальное покрывающее дерево, упаковка рюкзака, оптимальное расписание, покраски графов). Навык: умение видеть задачи, допускающие точные жадные алгоритмы.
- Практикум по работе с NP-трудными задачами оптимизации включая эвристические алгоритмы поиска решения, приближённые алгоритмы с оценками близости к оптимуму, полный перебор и его ускорения, такие как Метод ветвей и границ. . Каждому студенту будет выдана задача для всестороннего анализа и отчёта.

**УЧЕБНИКИ:**

- Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест « Алгоритмы: построение и анализ», пер. под ред. А.Шеня. М.: МЦНМО, 2001.
- С. Дасгупта, Х. Пападимитриу, У. Вазирани «Алгоритмы», пер. под ред. А. Шеня. М.: МЦНМО, 2014.
- Б. Корте, Й. Фиген, «Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы», пер. М. Бабенко. М.: МЦНМО, 2015.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Оценка складывается из 3 составляющих. 50% составит оценка за выполнение периодически анонсируемых упражнений по решению задач, в том числе на программирование и финального практикума; 20% - оценка за решение контрольной письменной работы в конце третьего модуля; 30% - оценка за решение письменной экзаменационной работы в конце курса

**КОММЕНТАРИЙ:** Для меня оптимально готовить все материалы на английском, но читать лекции и вести упражнения на русском. Первое позволяет переиспользовать материалы в многоязычной аудитории, а второе сильно увеличивает контакт со слушателями.

## Асимптотические методы
**простой аудиторный НИС для 2-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** К. П. Зыбин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** В курсе дифференциальных уравнений обсуждается разложение решения в ряд по малому параметру $\varepsilon$ в окрестности известного решения при $\varepsilon = 0$ . Однако такое решение существует, обычно, на временах меньше $\varepsilon^{-1}$ . Как построить решение на больших временах, причем не только для обыкновенных дифференциальных уравнений, но и уравнений в частных производных будет разобрано в данном курсе. Кроме того, особый интерес представляют уравнения, где малый параметр находится при старшей производной. При занулении порядок уравнения понижается и становится невозможно решить граничную задачу. Методы решение такого типа уравнений также будут разобраны в этом курсе.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** математический анализ, дифференциальные уравнения, теория функций комплексного переменного

**ПРОГРАММА:**

- Асимптотические ряды и действию над ними.
- Алгебраические уравнения с малым параметром
- Интегралы, содержащие малый параметр, метод перевала
- Уравнение Дюффинга, точное решение, методика Пуанкаре, метод перенормировок, метод многих масштабов
- Колебательные системы с самовозбуждением
- Колебательные системы со слабой нелинейностью общего вида
- Уравнение Матье
- Задачи с пограничным слоем

**УЧЕБНИКИ:**

- А Найфе «Введение в методы возмущений» Москва, МИР 1984
- Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний»
- Асимптотические методы в механике жидкости и газа - Иркутск: ИГУ 1979

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 5 баллов работа на семинаре + 5 баллов экзамен

## Введение в алгебраическую теорию чисел
## простой межкампусный НИС на английском языке для 2-го курса и старше
## (see also description in English)

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** В. С. Жгун.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Алгебраическая теория чисел — классическая область математики, сформировавшаяся в ходе исследования решений диофантовых уравнений, а также благодаря попыткам доказать теорему Ферма. Сейчас это обширная классическая область лежащая в основании Арифметической геометрии. В этом курсе мы напомним основы теории Галуа, рассмотрим так называемую теорию ветвления, докажем основные теоремы о структуре идеалов (разложения на простые идеалы), докажем теорему Дирихле о структуре S-единиц, теорему о конечности группы классов. Мы осветим очень важную аналогию между теорией алгебраических чисел и теорией алгебраических кривых над конечными полями.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** бакалавриат стандартный курс алгебры

**ПРОГРАММА:**

1. Теория Галуа и конечные поля. Основные факты из теории Галуа. Структура конечных полей. Уравнения над конечными полями. Квадратичный закон взаимности.

2. $p$-адические числа. Сравнения и $p$-адические числа. Лемма Гензеля. Теорема Островского.

3. Квадратичные формы. Представление чисел квадратичными формами над $\mathbb{Q}_p$ и над $\mathbb{Q}$. Теорема Минковского – Хассе.

4. Поля алгебраических чисел. Дедекиндовы кольца. Разложение на простые идеалы. Модули над Дедекиндовыми кольцами.

5. Норма и след. Ветвление, дискриминант, дифферента.

6. Адели и идели.

7. Группа классов идеалов. Теорема конечности. Константа Минковского.

8. Теорема Дирихле о $S$-единицах.

9. Циклотомические поля.

**УЧЕБНИКИ:**

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1985.

2. Вейль А. Основы теории чисел. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

3. Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

4. Ленг С. Алгебраические числа. — М.: Мир, 1972.

5. Манин Ю. И., Панчишкин А. А. Введение в современную теорию чисел. — М.: МЦНМО, 2009.

6. Серр Ж.-П. Курс арифметики. — М.: Мир, 1972.

7. Касселс Д., Фрелих А.(ред.), Алгебраическая теория чисел. — 1969.

8. Serre J. P. Local fields. — Springer, 2013. — Т. 67.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0,7 (final exam) + 0,3 (problem sheets)

## Введение в алгебраическую топологию
## простой межкампусный аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. С. Хорошкин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Алгебраическая топология — область математики, появившаяся и бурно развившаяся в 20-м веке, которая продолжает развиваться и в 21-ом веке, двигаясь всё больше в сторону алгебры. Удивительным образом помимо самостоятельного развития алгебраическая топология стала причиной возникновения многих других разделов математики, самым ярким примером из которых является гомологическая алгебра. Многочисленные методы, направленные на вычисление гомотопических групп сфер, послужили отправной точкой множества теорий нашедших применения в других разделах математики. Удачное сочетание геометрических идей с формализованными алгебраическими конструкциями позволяют эффективно изучать не только топологические инварианты, но и множество иных математических структур. На данный момент уже 14 филдсовских медалей были вручены за заслуги по алгебраической топологии, так что если Вы планируете получать высшие математические награды, то Вам необходимо познакомиться с этим важным разделом математики.

Это первая часть годового курса, которая больше направлена на изучение понятий групп гомологий и старших гомотопических групп. Вторая часть будет иметь больший упор на отдельные вычисления и методы при этом использующиеся.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Необходимо владение программой обязательных курсов алгебры, анализа, геометрии и топологии 1-го года обучения. В частности, предполагается, что слушатели уже знакомы с понятием фундаментальной группы и степенью отображения из окружности в себя.

**ПРОГРАММА:**

- Операции над топологическими пространствами и понятие гомотопической эквивалентности;
- Клеточные пространства и отображения;
- Старшие гомотопические группы;
- Степень отображения, $\pi_n(S^n)$;
- (Ко)гомологии: определения и примеры;
- Умножение в когомологиях;
- Гомотопические группы и группы гомологий.

**УЧЕБНИКИ:**

- В.А.Васильев «Введение в топологию» Фазис, 1997.
- А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс «Курс гомотопической топологии», М.Наука, 1989
- А.Хатчер «Алгебраическая топология», Москва, МЦНМО, 2011

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** вычисляется по формуле $\min(100, 0.35H + 0.3 + 0.4E)/10$, где $H$ — процентные доли решенных домашних задач и коротких контрольных, проводимых на семинаре, $M$ — мидтерма и $E$ — экзамена.

## Введение в гомологии Флоэра

**простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** А. Г. Горинов, П. Е. Пушкарь.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Гомологии Флоэра — это гомологии бесконечномерного аналога комплекса Морса. Их придумал Флоэр для доказательства одной из версий гипотезы Арнольда о неподвижных точках симплектоморфизмов. Впоследствие эти идеи были развиты другими авторами и использованы для решения некоторых классических проблем маломерной топологии. Мы начнем с изучения исходной конструкции Флоэра и применения к гипотезе Арнольда. Затем мы изучим несколько более общую конструкцию, а именно лагранжевы гомологии Флоэра, а также ее частные случаи и варианты (гомологии Хегора – Флоэра, инстантонные гомологии Флоэра и т.д.), и обсудим нерешенные вопросы.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Алгебаическая топология в объеме, например, книги Хатчера (главы 0-3) или Фоменко – Фукса (главы 1-2); гладкие многообразия в объеме обязательного курса. Будет полезно также знание функционального анализа в объеме курсов по выбору Функциональный анализ 1 и 2.

**ПРОГРАММА:**

1. Обзор теории Морса.
2. Обзор симплектической геометрии.
3. $J$-голоморфные кривые.
4. Принцип компактности Громова и стабильные отображения.
5. Симплектические гомологии Флоэра и гипотеза Арнольда.
6. Лагранжевы гомологии Флоэра.
7. Гомологии Хегора – Флоэра и их комбинаторное описание.
8. Инстантонные гомологии Флоэра.
9. Гомологии Флоэра – Зайберга – Виттена.
10. Вложенные контактные гомологии.
11. Нерешенные проблемы и гипотезы (гипотеза Атии – Флоэра, гомологии Флоэра и гомологии Хованова и т.д.).

**УЧЕБНИКИ:** Morse theory and Floer homology by M. Audin and M. Damian

Monopoles and Three-Manifolds by M. Kronheimer and T. Mrowka

An introduction to knot Floer homology by C. Manolescu, available at:
https://arxiv.org/abs/1401.7107

Introduction to Symplectic Topology by D. McDuff and D. Salamon

An introduction to Heegaard Floer homology by P. Ozsvath and Z. Szabo, available at:
https://web.math.princeton.edu/~petero/Introduction.pdf

Lectures on Floer homology by D. Salamon, available at:
https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/floer.pdf

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 50% доклад; 50% записки доклада в Латехе.

## Введение в двумерную конформную теорию поля
**трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 4-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. В. Литвинов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** Конформные теории поля, как следует из названия, изучают квантовые теории поля обладающие конформной симметрией. Такие теории описывают фиксированные точки ренормгруппы Вильсона и поэтому чрезвычайно важны. В двух измерениях группа локальных конформных преобразований бесконечномерна. Следствием этого является бесконечное число соотношений между различными наблюдаемыми — тождествами Уорда. Данный курс посвящен исследованию математической структуры этих соотношений и вычислениям корреляционных функций — конформному бустрапу. Будет изложена общая теория построения моделей конформной теории поля, теория представлений алгебры Вирасоро, классификация минимальных моделей конформной теории поля, будет описана теория Лиувилля и ее связь с моделями двумерной квантовой гравитации. Также в курсе будет довольно много технических сюжетов, таких как свободно-полевое представление для корреляционных функций или рекурсионная формула для конформных блоков.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Знакомство с квантовой механикой, квантовой теорией поля и теорией представлений

**ПРОГРАММА:**

Лекция 1. Элементы классической теории поля, теорема Нётер, тензор энергии-импульса.

Лекция 2. Конформная группа в $D > 2$ и $D = 2$ измерениях.

Лекция 3. Тензор энергии-импульса в квантовой теории поля, конформные тождества Уорда.

Лекция 4. Конформные семейства, алгебра Вирасоро

Лекция 5. Элементы теории представлений алгебры Вирасоро, сингулярные вектора

Лекция 6. Теория свободного безмассового бозонного поля.

Лекция 7. Теория свободного безмассового фермионного поля, бозон-фермионное соответствие.

Лекция 8. Бета-гамма система, свободно полевое представление алгебры токов

Лекция 9. Операторная алгебра, конформные свойства операторной алгебры

Лекция 10. Конформные блоки

Лекция 11. Рекурсионная формула Замолодчикова

Лекция 12. Дифференциальное уравнение БПЗ и вычисление трёхточечных корреляционных функций

Лекция 13. Минимальные модели I, теорема Фриедана, Кю и Шенкера

Лекция 14. Минимальные модели II, суперконформная теория поля

Лекция 15. Минимальные модели III, расширенная конформная симметрия, $W$-алгебры

Лекция 16. Конформная теория поля в искривленном пространстве

Лекция 17. Конформная аномалия

Лекция 18. Двумерная квантовая гравитация, теория Лиувилля

Лекция 19. Кулоновские интегралы I: трехточечные функции

Лекция 20. Кулоновские интегралы II: четырехточечные функции

Лекция 21. Кулоновские интегралы III: экранирующие операторы

Лекция 22. Классическая конформная теория поля I: корреляционные функции

Лекция 23. Классическая конформная теория поля II: классический конформный блок, связь с уравнением Пенлеве VI

Лекция 24. Суперсимметричная теория Лиувилля I: корреляционные функции

Лекция 25. Суперсимметричная теория Лиувилля II: конформный бутсрап

Лекция 26. Теории с $W$-симметрией, теории Тоды

Лекция 27. Конформная теория поля на торе I : тождества Уорда

Лекция 28. Конформная теория поля на торе II: модулярный бустрап

Лекция 29. Модели WZNW

Лекция 30. Косет конструкция

**УЧЕБНИКИ:**

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Для получения оценки 10 необходимо решить 80 процентов домашних задач и уметь объяснить решения устно.

## Введение в дифференциальную геометрию
**простой аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** П. Е. Пушкарь.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Курс служит введением в основные темы дифференциальной геометрии: симплектическую и контактную геометрии, теорию аффинных связностей на многообразиях, римановы многообразия, геодезические.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** стандартные курсы линейной алгебры, дифференциальных уравнений и анализа на многообразиях.

**ПРОГРАММА:**

- Симплектические и контактные структуры. Теоремы Дарбу.
- Симплектические и контактные многообразия. Примеры. Лагранжевы и лежандровы многообразия.
- Гамильтоновы поля и их контактные аналоги. Редукции.
- Лагранжев грассманиан, индекс Маслова и теоремы Штурма.
- Гипотеза Арнольда.
- Связности.
- Параллельный перенос. Кривизна.
- Аффинные связности.
- Введение в характеристические классы.
- Римановы многообразия, связность Леви – Чевита.
- Тензор кривизны Римана.
- Геодезические. Теорема Хопфа – Ринова.
- Формулы первой и второй вариации. Якобиевы поля и сопряженные точки.

**УЧЕБНИКИ:**

**[AG]** В.И. Арнольд, А.Б. Гивенталь «Симплектическая геометрия»

**[M]** Дж. Милнор «Теория Морса»

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0.5 $*$ листки с задачами $+$ 0.5 $*$ экзамен

**КОММЕНТАРИЙ:** помогать вести курс будет В. Медведев.

## Введение в квантовую теорию поля
**простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** В. В. Лосяков, П. И. Дунин–Барковский.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Как известно, современная теория фундаментальной физики («стандартная модель физики элементарных частиц») представляет из себя квантовую теорию поля (КТП). Помимо этой центральной роли в современной физике, квантовая теория поля также имеет множество применений в чистой математике (например, из нее пришли т.н. квантовые инварианты узлов и инварианты Громова – Виттена симплектических многообразий). «Обычная» квантовая механика занимается системами с фиксированным числом частиц. В КТП объектами изучения являются поля (не в смысле «поле комплексных чисел», а в смысле «электромагнитное поле»), элементарные возмущения которых являются аналогами квантовомеханических частиц, но могут появляться и исчезать («рождаться» и «умирать»); при этом число степеней свободы оказывается бесконечным.

В рамках данного курса будут «с нуля» введены базовые понятия КТП. Будет определено пространство Фока и формализм операторов на нем, а также формализм «континуального интеграла». Главным рассматриваемым примером будет квантовая теория скалярного поля. Скалярное поле в физической терминологии — поле, которое на классическом уровне определяется одним числом в каждой точке (т. е., фактически, его состояние в данный момент времени — это просто числовая функция на пространстве), в отличие от векторного поля (примером которого, в частности, является электромагнитное поле). В реальном мире в фундаментальной физике (стандартной модели физики элементарных частиц) скалярным полем является только поле, соответствующее бозону Хиггса. Однако рассмотрение квантовой теории скалярного поля (даже в отдельности, и более простой, чем для поля Хиггса) в любом случае очень полезно, поскольку позволяет познакомиться с аппаратом и явлениями КТП на более простом примере, чем, например, векторные поля. В курсе будет рассмотрена «теория возмущений» (то есть, фактически, способ вычислений первых порядков малости в разложении по малому параметру) для скалярного поля и описаны способы вычисления различных вероятностей событий с частицами. Используемый математический аппарат будет включать в себя гильбертовы пространства и операторы на них, обобщенные функции (необходимый материал будет напомнен). Всем объектам будут даны строгие определения.

Предварительное знание курсов классической механики, классической теории поля и квантовой механики не предполагается, хотя, конечно, не помешает (но все необходимые элементы этих курсов будут рассказаны во всех подробностях).

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Базовые курсы анализа (первого и второго курсов), алгебры (первого курса), геометрии (в части линейной алгебры) и ТФКП.

**ПРОГРАММА:**

- Квантовая система из многих тождественных частиц. Гильбертово пространство, наблюдаемые, гамильтониан, операторы рождения и уничтожения. Бозоны и фермионы.
- Когерентные состояния. Коммутационные и антикоммутационные соотношения.
- Континуальный (фейнмановский) интеграл.
- Квантовая теория скалярного поля.
- Квантование спинорного поля.
- S-матрица для скалярного поля. Теория возмущений. Диаграммы Фейнмана.
- Расходимости и регуляризации.
- Перенормировки в КТП на примере скалярного поля.

**УЧЕБНИКИ:**

- М. Пескин, Д. Шредер. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001.
- А.С. Шварц. Математические основы квантовой теории поля. Москва: Атомиздат, 1975.
- В. Н. Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Москва: Атомиздат, 1976.
- Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Москва: Наука, 1984.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Оценка вычисляется по формуле $\min(0.3 \cdot (H_1 + H_2 + H_3) + 0.2 \cdot E, 10)$ с округлением по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх), где $H_1$, $H_2$, $H_3$ — отнормированные на 10 баллов (можно получить и больше 10 баллов) оценки за три домашних задания, а $E$ — оценка за устный неблокирующий коллоквиум в конце курса.

## Введение в коммутативную алгебру
**простой межкампусный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** В. С. Жгун.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Классическая алгебраическая геометрия изучает геометрию множества решений полиномиальных уравнений. В простейшей ситуации коэффициенты полиномиального уравнения принадлежат алгебраически замкнутому полю. Рассмотрение полиномиальных уравнений с коэффициентами в разных кольцах, таких как, например, кольцо целых в полях алгебраических чисел, приводит к вопросам и задачам современной алгебраической геометрии и современной алгебраической теории чисел.

Коммутативная алгебра является удачным инструментом, помогающим при ответах на простейшие вопросы о множествах решений системы полиномиальных уравнений, таких как конечная порождённость системы, существования решения в подходящем расширении, вычислении размерности и количества неприводимых компонент, а также в вопросах гладкости.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** стандартный курса алгебры бакалавриата

**ПРОГРАММА:**

- Кольца, алгебры, идеалы, модули.
- Нётеровы кольца.
- Факториальные кольца. Кольца и модули частных. Локализация.
- Целая зависимость и лемма Нётер о нормализации. Теоремы о спуске и подъёме.
- Тензорное произведение. Плоские, проективные и инъективные модули.
- Теорема Гильберта о нулях. Спектр кольца.
- Размерность Крулля и степень трансцендентности. Теорема Крулля о главном идеале.
- Примарное разложение.
- Кольца дискретного нормирования и дедекиндовы области.
- Теория размерности нетеровых колец.
- Функция Гильберта. Кратности.
- Комплекс Кошуля.
- Свободные резольвенты и регулярные кольца

**УЧЕБНИКИ:**

- M. Reid, «Undergraduate commutative algebra», Vol. 29. Cambridge University Press, 1995.
- М. Атья, И. Макдональд. «Введение в коммутативную алгебру», Мир, Москва (1972)
- G. Kemper. «A course in commutative algebra», Vol. 256. Springer Science & Business Media, 2010.
- D. Eisenbud. «Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry», New York, NY: Springer Verlag, 1999.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0,3 (решение задач из листков) + 0,7 (итоговый устный экзамен)

## Введение в криптографию
**трудный межкампусный аудиторный НИС для 2-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** В. С. Болбочан.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Современная криптография — это красивая наука, возникшая на стыке теории чисел, теории вероятностей и computer science с целью найти способы обмениваться данными, не раскрывая информации, которую хотелось бы скрыть. Мы сталкиваемся с применением криптографии каждый день: когда платим в магазине, когда пользуемся электронной почтой. Курс ставит перед собой две цели: во-первых будут рассказаны основные криптографические протоколы, такие как шифрование с открытым ключом, цифровая подпись, разделение секрета (в основе каждого лежит интересная математическая задача); во-вторых мы обсудим, что вообще означает безопасность криптографического протокола (если принять, что ряд задач теории чисел не решается за полиномиальное время, то безопасность многих протоколов можно строго доказать).

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Алгебра и дискретная математика в рамках программы первого курса матфака. Начиная с октября нам понадобится элементарная теория вероятностей в рамках книжки www.mccme.ru/shen/proba.pdf (по 20 главу).

**ПРОГРАММА:** Примерная программа.

- Что такое криптография? Примеры задач, которые решает криптография.
- Задача дискретного логарифмирования. Протокол Диффи – Хеллмана. Предположение Диффи – Хелмана. Схема шифрования Эль-Гамаля. ∗ Эллиптические кривые
- Разложение на простые множители. Схема шифрования RSA. Цифровая подпись.
- Совершенная безопасность. Теорема Шеннона.
- Вероятностные полиномиальные алгоритмы. Вычислительная безопасность. Семантическая стойкость. Доказтельство безопасности Эль-Гамаля.
- Симметричное шифрование. Генератор псевдослучайных чисел. Блочные шифры.
- ∗ Парадигма случайного оракула.
- Доказательства с нулевым разглашением. Совместные вычисления. Разделение секрета Шамира. Гомоморфное шифрование. Протокол забывчивой передачи
- ∗ Криптография основанная на решетках. Квантовая криптография.

**УЧЕБНИКИ:**


Введение в криптографию под общ. ред. В. В. Ященко. 4-е изд., доп. М.: МЦНМО

Hoffstein, J., Pipher, J., Silverman, J. H., Silverman, J. H. (2008). An introduction to mathematical cryptography (Vol. 1). New York: Springer.
https://people.ucsc.edu/~morozco7/Books/hoffstein2014introduction.pdf

Katz, J., Lindell, Y. (2020). Introduction to modern cryptography. CRC press.
http://staff.ustc.edu.cn/~mfy/moderncrypto/reading%20materials/Introduction_to_Modern_Cryptography.pdf

Smart, N. P., Cryptography: an introduction, Vol. 3 (2003), New York: McGraw-Hill.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0,4 (письменное домашнее задание) + 0,6 (письменный домашний экзамен).

## Введение в римановы поверхности
**простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. Ю. Буряк.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Римановой поверхностью называется гладкое двумерное многообразие (поверхность) с заданной комплексной структурой. Замечательным образом, теория римановых поверхностей сочетает в себе обилие красивых результатов вместе с доступностью доказательств, особенно в сравнении с теорией комплексных многообразий большей размерности. Основным техническим инструментов у нас будет теория когомологий пучков, которую мы аккуратно построим, не предполагая никаких предварительных знаний. Основной целью курса является вывод теоремы Римана – Роха, двойственности Серра, а также теоремы Абеля.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Теория функций одной комплексной переменной, основы топологии (в объёме первого курса), основы теории гладких многообразий (включая дифференциальные формы и формулу Стокса).

**ПРОГРАММА:**

1. Понятие римановой поверхности, каноническое разложение касательного пространства, а также пространства дифференциальных форм.

2. Понятие пучка.

3. Когомологии пучков.

4. Теорема конечности, род римановой поверхности.

5. Дивизоры на римановой поверхности.

6. Теорема Римана – Роха.

7. Двойственность Серра.

8*. Теорема Абеля.

**УЧЕБНИКИ:** О. Форстер. Римановы поверхности.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Работа на семинаре 3, первая контрольная 3, вторая контрольная 3, экзамен 5. Если суммарная оценка превышает 10, до результат уменьшается до 10.

## Введение в теорию Галуа

**трудный дистанционный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше**

**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Н. С. Маркарян.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Теория Галуа изучает корни полиномов и их симметрии в терминах групп Галуа. Будучи алгебраическим аналогом фундаментальной группы, теория Галуа лежит в основании современной алгебраической геометрии и теории чисел.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** основы алгебры: группы, кольца, линейная алгебра.

**ПРОГРАММА:** Кольца полиномов и более общие кольца главных идеалов. Поля, алгебраические и трансцендетные расширения. Поля разложения полиномов и группы Галуа. Основная теорема теории Галуа. Вычисление групп Галуа. Приложения теории Галуа.

**УЧЕБНИКИ:** J. S. Milne, Fields and Galois Theory, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ft.html.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 40% контрольная, 60% экзамен. Оценка: округление результата/10 до ближайшего целого.

**КОММЕНТАРИЙ:** курс основан на видеолекциях Е. Америк

## Введение в теорию случайных процессов
**трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** М. Л. Бланк.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Курс является продолжением стандартного курса по теории вероятностей (связанного в основном с комбинаторикой) и предназначен для первоначального ознакомления с теорией случайных процессов. Уделяется особое внимание связи этой теории с функциональным анализом и общей теорией меры. Курс ориентирован на бакалавров 2 – 4 курса, магистрантов и аспирантов.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** курсы анализа и теории вероятностей

**ПРОГРАММА:**

- Понятие случайного процесса.
- Элементы случайного анализа.
- Корреляционная теория случайных процессов.
- Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем.
- Винеровский и пуассоновский процессы.
- Стохастический интеграл. Формула Ито.
- (Суб/супер)мартингалы.
- Инфинитезимальный оператор полугруппы.
- Стохастическая устойчивость динамических систем.
- Большие уклонения в марковских процессах и хаотической динамике.
- Нелинейные марковские процессы.

**УЧЕБНИКИ:**

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- А. Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. Физматлит, 1996
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.
- Б. Оксендаль. Стохастические дифференциальные уравнения, Москва, 2003.
- А. Н. Ширяев. Вероятность, 2 т. МЦНМО, 2007.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0.4 (Накопленная оценка) + 0.6 (Экзамен), накопленная оценка определяется контрольными, сдачей листков и работой на лекциях и семинарах. Округление в большую сторону.

## Введение в теорию чисел
### простой межкампусный курс для студентов 2-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** В. А. Кириченко.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Натуральные числа — естественный, интересный и сложный для изучения объект. Теория чисел — одна из самых древних областей математики, и стороннему наблюдателю она может показаться набором отдельных сюжетов из разных опер. В курсе мы изучим основные задачи и методы теории чисел с акцентом на внутреннюю цельность и логику этой области и её связи с другими областями. Курс поможет подготовиться к более продвинутым спецкурсам алгебраической направленности.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** алгебра и геометрия первого курса бакалавриата.

**ПРОГРАММА:**

- Простые числа, конечные поля, квадратичный закон взаимности.
- Целочисленные квадратичные формы, кольца целых квадратичных числовых полей.
- Дзета-функция, $L$-функции, теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях.
- Модулярная группа, эллиптические кривые, модулярные функции.

**УЧЕБНИКИ:**

- **[G]** К.-Ф. Гаусс, «Арифметические исследования».
- **[S]** Ж.-П. Серр, «Курс арифметики».

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 30% ДЗ + 30% К + 40% Э, где ДЗ — средняя оценка за домашние задания, К — оценка за контрольную в конце 3 модуля, Э — оценка за письменный экзамен.

## Введение в функциональный анализ
**простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** С. В. Шапошников.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Курс функционального анализа посвящен широкому кругу идей и методов современной математики. В курсе будут рассмотрены метрические и нормированные пространства, понятие полноты и теорема Бэра, компактные пространства и их свойства, линейные функционалы и отделимость выпуклых множеств, линейные операторы, элементы спектральной теории.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** владение материалом курсов математического анализа и линейной алгебры

**ПРОГРАММА:**

1. Метрические и нормированные пространства. Эквивалентность метрик и норм.
2. Полные пространства. Теорема Бэра. Теорема о сжимающем отображении.
3. Компакты и их свойства. Теорема Стоуна – Вейерштрасса.
4. Критерий Хаусдорфа. Теорема Арцела – Асколи.
5. Линейные функционалы. Теорема Хана – Банаха.
6. Сопряженное пространство. Слабая и $*$-слабая топология.
7. Гильбертово пространство. Теорема Рисса. Ряды Фурье.
8. Линейные непрерывные операторы. Теорема Банаха – Штейнгауза.
9. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
10. Спектр линейного оператора и его свойства. Резольвента.
11. Компактный оператор и его спектр. Альтернатива Фредгольма.
12. Спектр самосопряженного оператора. Теорема Гильберта – Шмидта.

**УЧЕБНИКИ:**


1. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.-Ижевск: РХД, 2009.
2. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу, МЦМНО, 2017.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006.
5. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу, МЦНМО, 2004.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Курс включает лекции и семинары. На семинарах выдаются листки с задачами, часть из которых разбирается на семинаре, а часть является домашним заданием. Оценка за курс складывается из оценки за экзамен и накопленной оценки по формуле 0.5*(Накопленная оценка) + 0.5*(Экзамен), а накопленная оценка складывается из оценки за выполнение домашних заданий и оценки за работу на семинаре по формуле 0.6*(домашнее задание) + 0.4*(работа на семинарах). Все формы контроля оцениваются от 0 до 10 баллов.

## Введение в эллиптические операторы
**простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. Г. Горинов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** В этом семинаре мы изучим основы теории эллиптических операторов; примерами таких операторов являются операторы де Рама и Дольбо и их обобщения, такие как операторы Дирака. Мы увидим, как несколько на первый взгляд не связанных друг с другом результатов, таких как теоремы Хирцебруха и Рохлина о сигнатуре, теорема Римана – Роха, являются частными случаями формулы индекса, принадлежащей М. Атии и А. Зингеру, и разберем общий план доказательства этой формулы.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Гладкие многообразия о объёме обязательного курса; гомологии и когомологии в объёме курса по выбору «Введение в алгебраическую топологию» или первых трёх глав Хатчера. Кроме того, для участия будет полезно иметь представление о топологических векторных пространствах. Если нужно, мы повторим часть пререквизитов или все.

**ПРОГРАММА:**

- Векторные расслоения и характеристические классы: сводка результатов.
- Дифференциальные операторы: определение и первые примеры.
- Эллиптические операторы: определение и основные свойства.
- Римановы метрики на многообразиях и оператор де Рама.
- Оператор сигнатуры.
- Комплексные многообразия и оператор Дольбо.
- Алгебры Клиффорда и их представления.
- Редукция структурной группы векторного расслоения. Spin-структуры на многообразиях
- Операторы Дирака и их конструкция с помощью Spin-структур.
- Эллиптическая регулярность и другие результаты об эллиптических операторах на компактных многообразиях.
- Первые применения: разложения де Рама и Ходжа; двойственность Серра.
- Формула Атьи – Зингера.
- Применения формулы индекса: теоремы Хирцебруха и Рохлина о сигнатуре; теорема Римана – Роха.

**УЧЕБНИКИ:**

- *Algebraic Topology* by A. Hatcher, freely available online at: http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html.
- *Spin geometry* by H. B. Lawson and M.-L. Michelsohn.
- *Seminar on the Atiyah – Singer index theorem* by R. S. Palais et al.
- *Characteristic classes* by J. Milnor and J. Stasheff.
- *The Atiyah – Singer index theorem* by P. Shanahan.
- *Differential analysis on complex manifolds* by R. O. Wells.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 100% домашний экзамен

## Введение в эргодическую теорию
**трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** М. Л. Бланк.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Можно ли отличить детерминированную хаотическую динамику от чисто случайной и имеет ли этот вопрос смысл? Влияет ли необратимость динамики на качественные характеристики процесса? Эргодическая теория изучает эти и другие статистические свойства динамических систем. Интерес к этой проблематике связан с тем, что «типичные» детерминированные динамические системы (например, дифференциальные уравнения) демонстрируют хаотическое поведение: их траектории выглядят как реализации случайных процессов. Мы начнем с классических результатов Пуанкаре, Биркгофа, Хинчина, Колмогорова и дойдем до современных постановок (в том числе и нерешенных) задач. Курс является вводным и ориентирован на бакалавров 2–4 курса, магистрантов и аспирантов. Естественным его продолжением является сколковский курс «Динамика и эргодическая теория».

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** стандартный двухгодовой курс математического анализа.

**ПРОГРАММА:**

1. Динамические системы: траектории, инвариантные множества, простые и странные аттракторы и их классификация, хаотичность.
2. Топологические свойства измеримой динамики.
3. Действие в пространстве мер, понятие трансфер-оператора, инвариантные меры. Сравнение со случайными марковскими процессами.
4. Эргодичность, теорема Биркгофа, перемешивание, ЦПТ. Меры Синая – Боуэна – Рюэлля и естественные/наблюдаемые меры.
5. Основные эргодические конструкции: прямые и косые произведения, производное и интегральное отображения, естественное расширение и проблема необратимости.
6. Эргодический подход к задачам теории чисел.
7. Энтропия: метрический и топологический подходы.
8. Операторный формализм. Спектральная теория динамических систем. Банаховы пространства мер, случайные возмущения.
9. Многокомпонентные системы: синхронизация и фазовые переходы.
10. Математические основания численного моделирования хаотической динамики.

**УЧЕБНИКИ:**


1. М. Бланк. «Устойчивость и локализация в хаотической динамике», МЦНМО, Москва, 2001.
2. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. «Эргодическая теория», Наука, Москва, 1980.
3. A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0.4 (Накопленная оценка) + 0.6 (Экзамен). Накопленная оценка определяется контрольными, сдачей листков и работой на лекциях и семинарах. Округление в большую сторону.

## Гамильтонова механика
**простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** В. А. Побережный, А. А. Басалаев.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Курс гамильтоновой механики относится к базовым фундаментальным матфизическим курсам и направлен на знакомство слушателей с современным взглядом на основы теории интегрируемых систем и математической физики. Курс рассчитан на старших студентов бакалавриата и студентов магистратуры, освоение его программы даёт возможность в дальнейшем изучать более продвинутые курсы связанные с математической физикой. Математический аппарат современной теории гамильтоновых систем включает в себя методы теории дифференциальных уравнений и динамических систем, групп и алгебр Ли и их представлений, симплектической и пуассоновой геометрии, анализа на многобразиях и многих других. Приобретение практических навыков применения методов и конструкций этих разделов математики, умение их сочетать для решения задач механики является одной из целей данного курса. Курс может быть рекомендован не только студентам, собирающимся продолжить свою обучение на программе «Математика и математическая физика», но и планирующим специализироваться в чистой математике или её приложениях.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Стандартные курсы бакалавриата первых двух лет: анализ, анализ на многообразиях, дифференциальные уравнения. Знакомство с лагранжевой механикой желательно, но не критично. Физический бэкграунд не требуется.

**ПРОГРАММА:**

- Ньютонов формализм: напоминание, симметрии, геометрия.
- Лагранжев формализм: принцип наименьшего действия, симметрии, законы сохранения.
- Гамильтонов формализм: канонические преобразования, симметрии, интегрируемость по Лиувиллю – Арнольду, уравнения Гамильтона – Якоби, разделение переменных.
- Симплектические и пуассоновы структуры: теорема Дарбу, системы на алгебрах Ли, коприсоединённое действие, скобка Кириллова – Костанта, отображение момента.
- Представление Лакса.

**УЧЕБНИКИ:**

- В. И. Арнольд «Математические методы классической механики», 3-е изд. М. : Наука, 1989
- А. М. Переломов, «Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли» М. : Наука, 1990
- Д. тер Хаар, «Основы гамильтоновой механики» М. : Наука, 1974

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** (сумма оценок за две контрольные)/4 + (оценка за экзамен)/2 с округлением до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх.

**КОММЕНТАРИЙ:** Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

## Гармонический анализ и унитарные представления
**трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. Ю. Пирковский.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Гармонический анализ на группах и теория унитарных представлений — тесно связанные и дополняющие друг друга области математики. Они играют важную роль в анализе, геометрии, топологии, физике и других науках. В сущности, гармонический анализ и теория унитарных представлений выросли из двух классических сюжетов, которые студенты-математики обычно изучают на младших курсах, а именно, из теории тригонометрических рядов Фурье и теории представлений конечных групп (над комплексными числами). В курсе, помимо прочего, будет объяснено, что общего между этими сюжетами, как устроена теория унитарных представлений компактных групп, что такое двойственность Таннаки – Крейна и при чем здесь преобразование Фурье. Кроме того, будет полностью построен гармонический анализ на локально компактных абелевых группах, включающий в себя двойственность Понтрягина и обобщающий теорию преобразования Фурье на прямой. В качестве вспомогательного материала будут также изложены основы теории банаховых алгебр.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Теория интеграла Лебега и основы функционального анализа. Полезно также знакомство с основными фактами теории представлений конечных групп.

**ПРОГРАММА:**

1. **Введение.** Игрушечный пример: гармонический анализ на конечной абелевой группе. Классические примеры: гармонический анализ на группе целых чисел, на окружности и на прямой.
2. **Основные объекты.** Топологические группы. Мера Хаара. Связь между левой и правой мерами Хаара. Унитарные представления. Общее понятие преобразования Фурье.
3. **Банаховы алгебры.** Групповая $L^1$-алгебра локально компактной группы. Спектр элемента банаховой алгебры. Коммутативные банаховы алгебры: гельфандов спектр, преобразование Гельфанда. Общие сведения о $C^*$-алгебрах. Групповая $C^*$-алгебра локально компактной группы. Первая теорема Гельфанда – Наймарка.
4. **Локально компактные абелевы группы.** Группа, двойственная к локально компактной абелевой группе. Преобразование Фурье как частный случай преобразования Гельфанда. Теорема Планшереля. Двойственность Понтрягина. Приложение: формула суммирования Пуассона.
5. **Компактные группы.** Процедура усреднения. Конечномерность неприводимых представлений. Разложение унитарных представлений на неприводимые. Теорема Петера – Вейля. Соотношения ортогональности. Преобразование Фурье и его обратное. Теорема Планшереля. Двойственность Таннаки – Крейна.

**УЧЕБНИКИ:**

### Список литературы


[DeitEcht] A. Deitmar, S. Echterhoff. Principles of harmonic analysis. Springer, 2009.

[Folland] G. B. Folland. A course in abstract harmonic analysis. CRC Press, 1995.

[HR] Э. Хьюитт, К. Росс. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975; Т. 2. М.: Мир, 1975.

[JS] A. Joyal, R. Street. An introduction to Tannaka duality and quantum groups. Lecture Notes in Math. **1488**, 411 – 492. Springer, 1991.

[Zhel] Д. П. Желобенко. Основные структуры и методы теории представлений. М.: МЦНМО, 2004.

[BourSpec] Н. Бурбаки. Спектральная теория. М.: Мир, 1972.

[EdComp] R. E. Edwards. Integration and harmonic analysis on compact groups. Cambridge Univ. Press, 1972.

[FD] J. M. G. Fell, R. S. Doran. Representations of $*$-algebras, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles. Academic Press, 1988.

[Hoch] G. Hochschild. The structure of Lie groups. Holden-Day, 1965.

[HofMorr] K. H. Hofmann, S. Morris. The structure of compact groups. Walter de Gruyter, 2006.

[Kaniuth] E. Kaniuth. A course in commutative Banach algebras. Springer, 2009.

[Loomis] Л. Люмис. Введение в абстрактный гармонический анализ. М.: ИЛ, 1956.

[Murphy] Дж. Мёрфи. $C^*$-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.

[Robert] A. Robert. Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups. Cambridge University Press, 1983.

[ZhComp] Д. П. Желобенко. Компактные группы Ли и их представления. М.: МЦНМО, 2007.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Итоговая оценка равна оценке за домашний письменный экзамен.

## Геометрическое введение в алгебраическую геометрию
**простой межкампусный аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** И. В. Артамкин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Алгебраическая геометрия изучает фигуры, локально устроенные как множество решений системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве, и служит мостом между точным, но скудным языком алгебраических формул и бесконечно богатым, но трудно выражаемым в словах миром геометрических образов. Поэтому алгебраическая геометрия занимает центральное место в самых разных областях математики и математической физики, являясь наиболее эффективным и красивым инструментом для установления нетривиальных связей между кажущимися далёкими друг от друга явлениями. Настоящий курс является геометрическим введением в предмет и знакомит слушателей с фундаментальными геометрическими фигурами и конструкциями, а также современной алгеброй, которая за ними стоит.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** первый год бакалавриата (алгебра, анализ, геометрия, топология).

**ПРОГРАММА:**

- Проективные пространства и проективные квадрики. Пространства квадрик. Прямые, коники, PGL (2), кривые Веронезе, рациональные кривые. Плоские кубические кривые.
- Многообразия Грассмана, Веронезе и Сегре. Проективные морфизмы, связанные с тензорной алгеброй.
- Доза коммутативной алгебры: целые элементы в расширениях колец, строение конечно порождённых алгебр над полем, базисы трансцендентности, теоремы Гильберта о нулях и базисе идеала.
- Словарик «Коммутативная алгебра – Аффинная алгебраическая геометрия». Спектры, гомоморфизмы поднятия, топология Зарисского, геометрические свойства гомоморфизмов алгебр.
- Алгебраические многообразия. Отделимость. Свойства проективных многообразий, собственность. Рациональные функции и рациональные морфизмы.
- Размерность. Размерности подмногообразий и слоёв морфизмов. Вычисление размерностей проективных многообразий.
- Векторные расслоения и пучки их сечений. Векторные расслоения на проективной прямой. Линейные системы, обратимые пучки и дивизоры, группа Пикара.
- Если позволит время: (ко)касательные и (ко)нормальные пространства и конусы, гладкость, раздутие. Точная последовательность Эйлера на грассманиане.

**УЧЕБНИКИ:**


- А. Л. Городенцев, Алгебра – 2.
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.
- А. Л. Городенцев. Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/giag_ru/giag.pdf.
- А. Л. Городенцев. Algebraic Geometry. A Start Up Course, М., МЦНМО, 2006,
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/tot-2006.ps.gz
- Дж. Харрис, Алгебраическая геометрия. Начальный курс, «МЦНМО».
- И. Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии. МЦНМО, 2007.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** итоговая оценка = 5·(доля решенных задач из листков) + 5·(доля решенных задач из итогового письменного экзамена)

## Геометрия и алгебра дифференциальных уравнений
## простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** В. А. Побережный, И. В. Вьюгин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Уравнения в частных производных возникают и применяются в самых разных областях математики и физики. В свою очередь, общая теория таких уравнений основана на методах дифференциальной геометрии, дифференциальной и алгебраической топологии, теории групп и алгебр Ли и представляет собой пример эффективного взаимодействия взглядов, подходов и техник из казазалось бы неблизких друг другу разделов геометрии, анализа и алгебры.

Представление о пользе систематического изучения симметрий уравнений и связи разрешимости дифференциального уравнения «в квадратурах» с разрешимостью некоторой алгебры Ли впервые, по-видимому, возникло у Софуса Ли. Его идеи были развиты Эли Картаном, описавшим симметрии уравнений и распределений в терминах векторных полей и дифференциальных форм. В рамках курса мы на современном языке разберём результаты Ли и Картана необходимые для формулировки и доказательства теоремы Ли – Бьянки об интегрируемости и суперпозиции.

Полученные знания и умения будут полезны в дальнейшем при изучении контактной геометрии, теории интегрируемых систем и уравнений в частных производных.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Стандартный курса анализа на многообразиях или дифференциальной геометрии

**ПРОГРАММА:**

- Распределения, описание полями и формами
- Интегрируемость и теорема Фробениуса
- Симметрии распределений и дифференциальных уравнений
- Разрешимость распределений и их алгебр симметрий
- Редукции и модельные уравнения
- Теорема Ли о суперпозиции

**УЧЕБНИКИ:**

- **[KLR]** A. Kushner, V. Lychagin, V. Rubtsov, «Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations»
- **[P]** М. М. Постников, «Лекции по геометрии», Семестр IV

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Вычисляется как оценка за сдачу листка (он же письменный домашний экзамен если его нельзя называть листком)

**КОММЕНТАРИЙ:** По уровню курс рассчитан в первую очередь на третьекурсников и может быть рекомендован студентам, заинтересовавшимся курсом анализа на многообразиях. Именно к этому предмету из первых двух лет наш курс наиболее идейно и технически близок.

## Геометрия и группы
**простой аудиторный НИС для 1-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** О. В. Шварцман.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Этот традиционный НИС , в основном рассчитанный на первокурсников, будет посвящен избранным вопросам геометрии и арифметики бинарных квадратичных форм с рациональными коэффициентами. В первую очередь, нас будут интересовать глубокие и красивые связи теории бинарных квадратичных форм с арифметикой и геометрией квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m \in \mathbb{Z}$.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** первые полгода бакалавриата (курсы алгебры и геометрии)

**ПРОГРАММА:**

- Бинарные формы над полем рациональных чисел, эквивалентность бинарных форм.
- Бинарные формы с целыми коэффициентами. Представление чисел бинарными квадратичными формами. Группа целочисленных автоморфизмов бинарной формы с целыми коэффициентами.Теория приведения бинарных квадратичных форм и цепные дроби.
- Квадратичные поля. Кольцо целых квадратичного поля. Группа единиц и теорема Дирихле.Решетки, идеалы, порядки. Соответствие между решетками и квадратичными формами. Группа классов идеалов и группа классов бинарных квадратичных форм.

**УЧЕБНИКИ:**

- Э. Б. Винберг. Курс алгебры.
- З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. Теория чисел.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Планируется провести две контрольные и итоговый экзамен. Накопленная оценка равна полусумме оценок за две контрольные. Итоговая оценка равна полусумме накопленной оценки и оценки за экзамен. Округление происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

## Геометрия и динамика
## простой межкампусный аудиторный НИС для 1-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** Мы предполагаем рассказать слушателям о понятиях, методах и результатах из различных разделов геометрии, динамики и смежных областей. При этом нередко соображения из одной области будут использоваться в работе с объектами другой природы.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Семинар рассчитан на студентов 1–2 курса бакалавриата: изложение опирается только на изученный к данному моменту материал обязательных предметов 1 курса.

**ПРОГРАММА:** НИС состоит из почти независимых блоков в 1–3 занятия. Вот некоторые из тем, запланированные на этот год:

1. символическое кодирование: связь отображения $x \mapsto 2x$ на единичном отрезке с подбрасыванием монетки; как построить обратимую непрерывную динамическую систему с похожим поведением?
2. энтропия динамической системы: как измерить «случайность» поведения системы?
3. цепные дроби: выпуклые оболочки и рациональные приближения
4. марковские цепи и случайные блуждания: какая математика стоит за поиском в интернете и за молекулярной физикой?
5. геометрическая теория групп: сколько разных элементов можно получить произведениями $n$ образующих группы и при чём здесь случайные блуждания?
6. растягивающие отображения и их периодические точки: как отображение может оставаться «таким же», если его возмутить?
7. итерационные методы приближенных вычислений: как быстро и точно найти корни уравнения?
8. геометрия классических групп
9. элементы алгебраической комбинаторики

**УЧЕБНИКИ:**


- А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.:МЦНМО, 2005.
- С. Табачников. Геометрия и биллиарды. Библиотека журнала «Реальная и хаотическая динамика», М.-Ижевск, 2011.
- Э. Артин. Геометрическая алгебра. М.: «Наука», 1969.
- Дж. Милнор. Комплексная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Семестр разбивается на тематические блоки, каждый из которых оценивается отдельно оценкой $O_k$. Итоговая оценка равна сумме оценок за блоки, причём максимальное значение суммы составляет примерно12. Каждая из оценок $O_k$ есть сумма оценки за проверочную работу в конце блока и за соответствующую часть экзамена (с ограничением на суммарное число набранных баллов). Задачи экзамена сдаются в письменном виде с последующим устным обсуждением. Также предусмотрено выставление оценки за доклад на семинаре, без решения задач.

## Гладкие структуры на многообразиях
**трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. С. Тихомиров.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Гладкая топология 4-мерных многообразиях уникальна в том смысле, что в ней наблюдаются феномены, не имеющие аналогов как в меньших, так и больших размерностях. Так, например, на многих известных топологических 4-мерных многообразиях было найдено бесконечное, а на $\mathbb{R}^4$ даже несчетное, число различных гладких структур. Эти феномены были открыты в 80-ых – 90-ых годах в работах С. Дональдсона, К. Таубса и целого ряда других геометров в связи с применениями к 4-мерной топологии методов современной дифференциальной геометрии. Эта новая область лежит на стыке глобального анализа и калибровочной теории и связана с понятием функционала Янга – Миллса. Решения уравнений Янга – Миллса — так называемые инстантоны — приводят к новым типам инвариантов гладких структур 4-мерных многообразий. Цель настоящего НИСа — дать введение в инстантоны и показать, как они работают в гладкой 4-мерной топологии.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Предполагается знание стандартных курсов линейной алгебры и геометрии. Желательно знкомство с основными понятиями топологии и дифференциальной геометрии, такими как гладкие многообразия, группы гомологий, касательное расслоение, дифференциальные формы, интегралы на многообразиях.

**ПРОГРАММА:**

- Гладкие структуры на топологических многообразиях
- Главные и векторные расслоения. Связности
- Кривизна и характеристические классы
- Пространство связностей
- Уравнения Янга – Миллса и пространство модулей
- Компактность пространства модулей
- Знакоопределенные формы пересечения
- Полиномиальные инварианты Дональдсона
- Теорема о связной сумме
- Соответствие Кобаяши – Хитчина
- Гладкие структуры на комплексных алгебраических поверхностях

**УЧЕБНИКИ:**


- **[FU]** Д. Фрид, К. Уленбек. «Инстантоны и четырехмерные многообразия.» Москва, Мир, 1988.
- **[A]** S. Akbulut. «4-manifolds.» Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford Univ. Press, 2016.
- **[T]** C. H. Taubes. «Differential geometry: bundles, connections, metrics and curvature.» Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford Univ. Press, 2011.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** $3H + 2E + 0,5F$, где $H$ и $E$ суть доля решенных домашних задач и доля решенных задач промежуточного задания за 1 модуль, вычисленные по формуле [число всех (включая необязательные) решенных задач]:[число заданных обязательных задач], а $F$ — оценка по 10-бальной шкале за итоговый устный доклад.

**КОММЕНТАРИЙ:** Курс согласован с акад. программой бак.

## Голоморфные расслоения, мероморфные связности и их применение
**простой аудиторный НИС для 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Векторные расслоения являются одним из важнейших инструментов современной математики, без них практически невозможно не только решить, но и поставит многие важные задачи. В рамках нашего НИСа мы планируем обсудить такие понятия как главные и голоморфные расслоения над сферой Римана и римановыми поверхностями рода $g$, научиться определять мероморфные связности. Также мы обсудим применение расслоений и связностей к исследованию некоторых известных задач. На нашем семинаре вы можно не только слушать лекции, но и сделать доклад.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Основные курсы комплексного анализа, гладких многообразий и обыкновенных дифференциальных уравнений. Знакомство с римановыми поверхностями приветствуется, но не является обязательным.

**ПРОГРАММА:**

- Главные расслоения со структурной группой. Примеры главных расслоений.
- Векторные расслоения. Примеры.
- Мероморфная связность в векторном расслоении. Плоские связности.
- Некоторые вопросы локальной теории линейных дифференциальных систем.
- Метод построения голоморфных расслоений и связностей на римановой поверхности или на сфере Римана.
- Стабильные и полустабильные расслоения и пары (расслоение со связностью).
- Применение расслоений со связностью к исследованию проблемы Римана – Гильберта.
- Применение расслоений к исследованию других задач.

**УЧЕБНИКИ:**


- **[B]** А. А. Болибрух, « Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений», М.: МЦНМО, 2009
- **[U]** Ф. Уорнер, «Основы теории гладких многообразий и групп Ли», М.: Мир, 1987
- **[HV]** H. Esnault, E. Viehweg «Semistable bundles on curves and irreducible representations of fundamental proup», arxiv:math/9808001.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0.5*(оценка за коллоквиум) + 0.5*(оценка за семинары)

**КОММЕНТАРИЙ:** Возможен частичный переход в онлайн (при необходимости).

## Гомологическая стабильность и топология пространств модулей
**трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** А. Г. Горинов, К. Брав.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** За последние 20 лет было получено несколько результатов о стабилизации когомологии последовательности геометрических объектов. Стабильные когомологии при этом проще устроены, чем когомологии индивидуальных объектов, и иногда могут быть явно описаны. Наша цель в том, чтобы изучить общие идеи, которые стоят за этими результатами, и более подробно изучить некоторые примеры.

Вот один из них. Пусть дана ориентируемая поверхность рода $g$ с границей из одной компоненты. Группа классов отогражений этой поверхности состоит из классов изотопии диффеоморфизмов, тождественных на границе. Приклеивая к поверхности поверхность рода 1 с границей из двух компонент, мы получаем поверхность рода $g+1$ с с гранцей из одной компоненты, а также гомоморфизм групп классов отображений $\Gamma_{g,1} \to \Gamma_{g+1,1}$, который получается тождественным продолжением диффеоморфизмов на приклеенную компоненту. Теорема Харера о стабильности говорит о стабилизации гомологий последовательности классифицирующих пространств. Теорема Мадсена – Вайса описывает гомотопический тип гомотопического копредела этой последовательности.

Цель семинара в том, чтобы изучить стабильность Харера, теорему Мадсена – Вайса и обобщения на многообразия старшей размерности, полученные Галатиусом, Мадсеном, Тилльманн и Вайсом, а также Галатиусом и Рэндал – Уильямсом. Если позволит время, мы обсудим также некоторые связанные или похожие явления.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Алгебаическая топология в объеме, например, книги Хатчера (главы 0-3) или Фоменко – Фукса (главы 1-2); гладкие многообразия в объеме обязательного курса.

**ПРОГРАММА:**

1. Обзор групп классов отображений поверхностей и пространств модулей комплексных кривых.
2. Результаты Харера.
3. Спектры и стабильная теории гомотопий.
4. Классифицирующие пространства топологических групп и моноидов.
5. Сканирующее отображение.
6. Теорема Мадсена – Вайсса и гипотеза Мамфорда.
7. Пространства модулей многообразий старшей размерности.
8. Стабильность представлений и когомологии пространств конфигураций.
9. Другие примеры гомологической стабильности в алгебраической топологии (пространства неособых проективных гиперповерхностей и т.д.).

**УЧЕБНИКИ:** Lectures on the Madsen–Weiss theorem by Soren Galatius, available at http://web.math.ku.dk/ wahl/Ga

A short exposition of the Madsen – Weiss theorem by Allen Hatcher, available at https://arxiv.org/abs/1103.5223

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 50% доклад; 50% записки доклада в LaTeX.

## Группа кос, квантовые группы и приложения
**простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Мы обсудим несколько связанных с $R$-матрицами сюжетов из теории групп кос и теории квантовых групп. $R$-матрица (в узком понимании этого термина) — это решение (кубического матричного) уравнения Янга – Бакстера. Сферы применения $R$-матриц очень разнообразны — от точно решаемых моделей квантовой механики, статистической физики и теории стохастических процессов до инвариантов узлов и квантовых матричных алгебр. Мы познакомим слушателей с алгебраическими структурами, порождающими $R$-матрицы, и используем $R$-матрицы для построения квантовых матричных алгебр и изучения их структурных свойств и представлений. В отличие от прежних лет, мы планируем уделить значительное время применению $R$-матриц для построения и исследования интегрируемых моделей квантовых спиновых цепочек Гейзенберга, а также моделей стохастических процессов диффузии и аннигиляции.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Основы алгебры, теории групп и теории представлений в объёме первых двух курсов бакалавриата. Все необходимые сведения по теории представлений, теории групп и алгебр Ли, а также алгебр Хопфа будут напоминаться в процессе занятий. Курс рассчитан на студентов 3 – 4 курса бакалавриата и магистрантов, но подойдёт и сильным второкурсникам.

**ПРОГРАММА:**

- Группа кос $B_n$, ее геометрическое и алгебраическое представления. Конечномерная фактор алгебра $\mathbb{C}[B_n]$ — алгебра Гекке, классификация ее неприводимых представления в духе Вершика – Окунькова.
- $R$-матричные представления группы кос, $R$-след, и их применения в построении инвариантов узлов и зацеплений.
- Коммутативная алгебра с пуассоновой структурой и ее квантование. Квантование алгебр функций на линейных группах Ли — RTT-алгебры. Приложение этих алгебр в построении трансфер-матриц и изучении интегралов движения квантовых спиновых цепочек Гейзенберга.
- Стохастические $R$-матрицы и их применение в описании марковских стохастических процессов диффузии и аннигиляции.
- Квантование алгебры функций на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$ — универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{gl}(n))$. Квадратичная скобка Пуассона на алгебре функций на $\mathfrak{gl}(n)^*$ и ее квантование — алгебра уравнения отражений. Структурные свойства квантовых матриц: их спектр и квантовая версия теоремы Гамильтона – Кэли. Конечномерные разложимые представления алгебры уравнения отражений.

**УЧЕБНИКИ:**


- O. Ogievetsky, P. Pyatov, «Lecture on Hecke algebras». Preprint CPT-2000/P.40762.
- J. S. Birman and T. E. Brendle, «Braids: a Survey», `arXiv:math/0409205[math.RT]`. In: «Handbook of Knot Theory», edited by: W. Menasco and M. Thistlethwaite, Elsevier B. V. 20053.
- Кассель К., «Квантовые группы», Фазис, 1999.
- A. Klimyk, K. Schmuedgen, «Quantum groups and their representations», Springer, 1997.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** По каждой теме курса будут выдаваться листки с задачами. Задания листков оцениваются по 10-балльной шкале. Для получения оценки 10 достаточно решить примерно 80% задач листка. Накопленная оценка $O_{\text{накоп}}$ — среднее арифметическое оценок за все листки. Если $O_{\text{накоп}} \geq 8$, итоговая оценка $O_{\text{итог}}$ получается округлением $O_{\text{накоп}}$ до целого по обычному правилу. В случае, если $O_{\text{накоп}} < 8$, студент обязан сдать экзамен, и тогда $O_{\text{итог}} = 0.5(O_{\text{накоп}} + O_{\text{экз}})$.

## Группы и алгебры Ли
**простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** Л. Г. Рыбников, А. С. Хорошкин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Группы и алгебры Ли и их представления являются важнейшим инструментом в таких, казалось бы далеких друг от друга областях математики как алгебраическая топология, алгебраическая и дифференциальная геометрия, динамические системы и математическая физика. Данный курс является вводным курсом групп и алгебр Ли, начиная с базовых определений и примеров. Курс преследует двоякую цель: во-первых, овладение основными понятиями и общими конструкциями теории Ли, и, во-вторых, разбор первой конкретной содержательной задачи теории групп и алгебр Ли — классификации конечномерных представлений унитарной (а также полной линейной) группы.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Необходимо хорошее владение линейной алгеброй и анализом на многообразиях, а также начальными понятиями топологии (включая понятия фундаментальной группы и локально-тривиального расслоения). Желательно (но не обязательно) знание теории представлений конечных групп (теорема Машке и ортогональность характеров).

**ПРОГРАММА:**

- Определение и примеры групп Ли. Действие группы Ли на многообразии. Замкнутые подгруппы и однородные пространства. Связные группы Ли и группа компонент.
- Определение и примеры алгебр Ли. Алгебра Ли группы Ли. Формальная группа Ли. Инвариантные векторные поля. Экспоненциальное отображение.
- Гомоморфизмы групп Ли. Касательный гомоморфизм алгебр Ли. Теорема существования и единственности гомоморфизма. Односвязные группы Ли. Теорема существования (без доказательства) и единственности связной односвязной группы Ли с данной алгеброй Ли.
- Представления групп и алгебр Ли. Универсальная обертывающая алгебра. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта. Коумножение в универсальной обертывающей алгебре и тензорное произведение представлений.
- Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Оператор Казимира.
- Мера Хаара. Представления компактных групп Ли: полная приводимость и ортогональность характеров. Представления группы Ли $SU_2$.
- Гармонический анализ на двумерной и трехмерной сфере.
- Представления унитарной (полной линейной) группы: старшие веса.
- Представления унитарной (полной линейной) группы: формула Вейля для характера.
- Формула Вейля для размерности. Тождества с полиномами Шура. Полустандартные таблицы Юнга.

**УЧЕБНИКИ:**


**[K]** Alexander Kirillov Jr, «Introduction to Lie Groups and Lie Algebras».

**[VO]** Э. Б. Винберг, А.Л.Онищик, «Семинар по группам Ли и алгебраическим группам».

**[FH]** У. Фултон, Дж. Харрис, «Теория представлений. Начальный курс».

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Вычисляется по формуле $\min(10,\ 0.4\,E + 0.4\,H + 0.2\,C + 0.2\,M)$, где $E$ — оценка за письменный экзамен в конце семестра, $H$ — средняя оценка за домашние задания, $C$ — оценка за устный коллоквиум в середине семестра, $M$ — оценка за письменную контрольную работу в середине семестра (все оценки по 10-балльной шкале).

**КОММЕНТАРИЙ:** Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

## Группы и алгебры Ли –2

**трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше**

**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Е. Б. Фейгин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Теория группы и алгебры Ли является одним из центральных разделов современной математики. Основная причина важности этой теории состоит в огромном числе приложений в различных областях математики и физики (математической и теоретической). Целью курса является изучение основных классов групп и алгебр Ли и их представлений.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Группы и алгебры Ли – 1

**ПРОГРАММА:** Абелевы, нильпотентные и разрешимые группы и алгебры Ли, теория представлений. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта. Инвариантные билинейные формы, форма Киллинга. Свойства полупростых алгебр и групп, операторы Казимира. Теорема о полной приводимости представлений для полупростых алгебр Ли. Картановские подалгебры, картановское разложение, системы корней, отражения. Поляризации, простые корни, решётки корней и весов. Камеры Вейля, простые отражения и длина элементов группы Вейля. Приведённое разложение, матрица Картана, диаграмма Дынкина, теорема классификации.Представления со старшим весом. Модули Верма. Характеры представлений. Многообразия флагов. Резольвента Бернштейна – Гельфанда – Гельфанда. Характеры и размерности неприводимых представлений.

**УЧЕБНИКИ:**

- **[KJr]** A.Kirillov, Jr., An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras
- **[S]** J.-P. Serre, Lie Algebras and Lie Groups

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0.5 * экзамен + 0.5*(домашние задачи и задачи на семинарах)

## Динамические системы
## трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** Семинар посвящён теории динамических систем в ее разных аспектах: многомерные динамические системы и хаос, теория аттракторов, дифференциальные уравнения на плоскости, комплексные дифференциальные уравнения, теория бифуркаций. Семинар преследует две цели: научить младших участников азам перечисленных теорий; вовлечь всех участников в современные исследования.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Математический анализ и дифференциальные уравнения.

**ПРОГРАММА:** Мозаика из перечисленных выше теорий.

**УЧЕБНИКИ:**

- Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.
- Арнольд В. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений.
- Ильяшенко Ю., Ли Вейгу. Нелокальные бифуркации.
- Ильяшенко Ю., Яковенко С. Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 40% за посещение, 20% за активность, 40% за один доклад в году.

## Дискретная оптимизация и целочисленное линейное программирование
**простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Д. И. Архипов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Каждый из нас постоянно составляет расписания. Мы оптимизируем своё время: составляем планы на выходные, выбираем оптимальный маршрут чтобы добраться от одной станции метро до другой. Сложно ли составить расписание для факультета или спортивной лиги, учитывая множество требований и пожеланий? А если речь идёт об оптимизации работы дата-центра с тысячами серверов, морского порта или железнодорожной сети крупной страны? В рамках курса мы сформулируем, какие вызовы стоят перед математиками в условиях современного мира, когда размер данных, влияющих на принятие решений растёт быстрее вычислительных возможностей. После прохождения курса вы научитесь строить математические модели оптимизационных задач разной сложности и решать их с помощью солверов, основанных на методах целочисленного и линейного программирования. Курс не ограничивается практикой решения задач, вас ждёт знакомство с базовыми понятиями и классическими алгоритмами методов оптимизации, а также основные аспекты теории, лежащей в основах программного обеспечения, помогающего принимать решения в современном мире.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Строгие ограничения на пройденные ранее курсы отсутствуют.

**ПРОГРАММА:**

- Задачи безусловной и условной оптимизации. Метод множителей Лагранжа.
- Теория сложности задач условной оптмизации. Отношение классов P и NP.
- Теория двойственности. Условия оптимальности и двойственность в задачах линейного и квадратичного программирования.
- Численные методы оптимизации. Метод Ньютона. Метод сопряжённых градиентов.
- Линейное программирование, прямой и дуальный симплекс метод. Постановка и решение задач с использованием LP-солверов.
- Целые точки многогранников. Целочисленное линейное программирование. Метод ветвей и границ. Постановка и решение задач с использованием MILP-солверов.
- Многокритериальная оптимизация. Множество решений оптимальных по Парето.
- Частичный порядок в векторном пространстве. Конус доминирования. Проблема устойчивости, оболочка Эджворта-Парето.

**УЧЕБНИКИ:**

- **[STF]** А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров «Курс методов оптимизации».
- **[KV]** Б. Корте, Й. Фиген «Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы».
- **[SI]** И. Сигал, А. Иванова «Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы».
- **[LP]** А. Лотов, И. Поспелова «Многокритериальные задачи принятия решений».

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** $0.6H + 0.4E$, где $H$ и $E$ — оценки по 10-бальной шкале за домашние задания и экзамен соответственно.

**КОММЕНТАРИЙ:** Курс от Huawei R&D. Руководители курса: Архипов Дмитрий, Поспелов Алексей, Лавров Алексей.

## Дискретные интегрируемые уравнения и их редукции
**трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. К. Погребков.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Создание и развитие теории интегрируемых уравнений является одним из главных достижений современной математической физики. В настоящее время идеи и результаты этой теории проникают во многие разделы математики: от теории струн до теории римановых поверхностей. В последнее время значительное внимание уделяется теории дискретных интегрируемых уравнений. В этих лекциях будет представлен общий подход к построению и исследованию таких уравнений.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** математический анализ, элементы теории функций комплексной переменной, линейная алгебра, теория линейных дифференциальных уравнений.

**ПРОГРАММА:** Введение. Коммутаторное тождество и линейное уравнение на ассоциативной алгебре. Символ оператора B. Процедура одевания. Разностное уравнение Хироты. Прямая задача: функция Грина и решение Йоста. Свойства решений Йоста. Временная эволюция и обратная задача. Интегралы движения. Высшее разностное уравнение Хироты. $(1+1)$-мерные редукции разностного уравнения Хироты.

**УЧЕБНИКИ:** С. П. Новиков и др. «Теория солитонов».

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Конечная оценка вычисляется как 0,3 (оценка за теоретическую работу в семестре) + 0,7 (оценка за итоговый экзамен). Все округления — до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх.

**Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений**
**простой межкампусный аудиторный НИС для 2-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Приложения дифференциальных уравнений: движение планет и возникновение миражей. Связь со спектральной теорией: Уравнения с частными производными как линейные уравнения в бесконечномерном пространстве; Задача Штурма – Лиувилля; Функции Бесселя. Продолжение общей теории дифференциальных уравнений: Теорема о неустойчивости; Теорема Гробмана – Хартмана; Особые точки на плоскости. Элементы теории динамических систем: Подкова Смейла; Структурная устойчивость; Бифуркации

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Обязательный курс дифференциальных уравнений (с любым лектором), три семестра анализа, линейная алгебра.

**ПРОГРАММА:**

- Лекция 1. Дифференциальные уравнения на прямой и ход лучей в среде с переменным показателем преломления
- Лекция 2. Законы Кеплера.
- Лекция 3. Задача трех тел и пример Ситникова.
- Лекция 4. Теория Штурма. Задача Штурма – Лиувилля.
- Лекция 5. Шарик в чашке. Фигуры Лиссажу.
- Лекция 6. Уравнения с частными производными как линейные уравнения в бесконечномерном пространстве. Метод разделения переменных.
- Лекция 7. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение на окружности.
- Лекция 8. Собственные функции оператора Лапласа. Функции Бесселя.
- Лекция 9. Теорема о неустойчивости
- Лекция 10. Теорема Гробмана – Хартмана
- Лекция 11. Особые точки на плоскости
- Лекция 12. Первые интегралы
- Лекция 13.Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными
- Лекция 14.Теория Фробениуса
- Лекция 15.Подкова Смейла
- Лекция 16. Структурная усойчивость
- Лекция 17. Бифуркации.

**УЧЕБНИКИ:** А. Буфетов, Н. Гончарук, Ю. Ильяшенко, Обыкновенные дифференциальные урвнения, электронная версия.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 75% решенных домашних, контрольных и экзаменационных задач – 10; 20% – 4; в промежутке линейная интерполяция

## Дополнительные главы топологии
**трудный межкампусный курс для студентов 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** В. А. Васильев.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Хочу дать по возможности наглядное и гуманное введение в базовые понятия современной топологии: спектральные последовательности, теорию препятствий, гомологии локальных систем, когомологические операции, характеристические классы

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Базовые понятия гомотопической топологии: гомотопические группы, накрытия и расслоения, группы гомологии (с постоянными коэффициентами) включая когомологическое умножение, клеточные комплексы, точные последовательности, гладкие многообразия и анализ на них включая двойственность Пуанкаре; желательно знакомство с теорией Морса

**ПРОГРАММА:**

- Гомологии с коэффициентами в локальной системе. Ориентирующий пучок многообразия, двойственность Пуанкаре На неориентированном многообразии.
- Теория препятствий. Топологическое препятствие к продолжению отображения и к сечению расслоения. Характеристический класс расслоения. Род расслоения.
- Спектральная последовательность. Спектральные последовательности фильтрованного пространства и расслоения. Симплициальное разрешение. Умножение в спектральной последовательности расслоения. Приложения.
- Характеристические классы векторного расслоения (базовая теория). Приложения в теории вложений, погружений, интерполяции…
- Когомологические операции. Алгебра Стинрода mod 2.
- А также разбор необходимых сведений по сопутствующим главам топологии

**УЧЕБНИКИ:** А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, Курс гомотопической топологии. «Наука», 1989

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** $\min(0.3A+0.4B+0.5C, 10)$ где A — десятибалльная оценка за первую контрольную, B — за вторую, C — за экзамен.

## Избранные главы математической экономики
## простой аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** М. И. Левин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Курс ориентирован на студентов 3 – 4 курса бакалавриата, студентов магистратуры и аспирантов, а также всех интересующихся современными проблемами экономической теории и применением математических моделей для исследования социально-экономических систем. Предполагается ознакомить студентов с основными концепциями современной экономической теории и обсудить актуальные вопросы конструирования и использования математических моделей для принятия экономических и политических, индивидуальных и коллективных решений в условиях ограниченной рациональности, асимметрии информации и рентоориентированного поведения. Наряду с теоретическими моделями будут рассмотрены прикладные социально-экономические модели и элементы поведенческой и цифровой экономик. Одна из задач курса — научить пользоваться математическим инструментарием для разработки и исследования социально-экономических и политэкономических явлений. Курс основывается на современных исследованиях, в том числе, на работах лектора.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** базовые курсы первых двух лет бакалавриата.

**ПРОГРАММА:**

- Введение в науку экономику. «Экономика — это интересно!». Примеры экономических «парадоксов», иллюзий и ошибочных решений.
- Модели экономического равновесия и неравновесия. Экономика дефицита, очередей и привилегий.
- Элементы теории игр. Ассимметричная и неполная информация.
- Неопределенность и риск. Равновесие на финансовых рынках.
- Экономика общественного сектора, семьи и «сект».
- Теневые рынки, «экономика джунглей», модели аддиктивного поведения.
- Математические модели экономики коррупции и борьбы за ренту.
- Экономика институтов. Нормы, традиции и мораль.
- Модели международной торговли и международной политики.
- Эволюционная экономика. Диффузия инноваций и «созидательное разрушение».
- Модели экономического роста и развития.
- Экономика знаний и интернет-экономика.

**УЧЕБНИКИ:**

1. А. Мас – Коллелл, М. Уинстон, Дж. Грин. Микроэкономическая теория. М.: Дело, 2016.
2. А. Хилман. Государство и экономическая политика. Возможности и ограничения управления. М.: Изд. Дом ГУ ВШЭ, 2009.
3. М. И. Левин, В.Л. Макаров, А. М. Рубинов. Математические модели экономического взаимодействия. М.: Физматлит, 1993.

А также статьи, актуальные на момент чтения спецкурса.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** форма контроля — реферат, оценивающийся по 10-бальной шкале и по шкале «плохо, удовлетворительно, хорошо, отлично».

**КОММЕНТАРИЙ:** Курс читается уже несколько лет подряд.

## Игры в непрерывном времени
**простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 2-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** М. С. Панов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Теоретико-игровые модели в непрерывном времени получили большое распространение среди экономистов-теоретиков в последние двадцать лет. Моделируя экономический проблему с помощью игры в непрерывном времени, мы зачастую можем достичь лучшего её понимания, чем если бы мы при использовании игры в дискретном времени. В отличие от игр в дискретном времени, игры в непрерывном времени позволяют описывать равновесные объекты как решения уравнений с частными производными или стохастических дифференциальных уравнений, которые можно решить аналитически или численно. В этом курсе мы изучим недавние продвижения в теории игр в непрерывном времени.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** стандартные курсы по уравнениям с частными производными, теории вероятностей, теории случайных процессов.

**ПРОГРАММА:**

- Динамические игры в дискретном времени. Подход Абрю. Алгоритм АПС.
- Игры в развернутой форме в непрерывном времени.
- Дифференциальные игры.
- Броуновское движение и стохастическое исчисление.
- Модель принципала и агента.
- Игры с не полностью наблюдаемыми действиями.
- Марковские равновесия.
- Договоренности в детерминистических играх.
- Договоренности в стохастических играх.

**УЧЕБНИКИ:**

- Harrison, J.M., «Brownian Models of Performance and Control»
- Karatzas, I and Shreve, S. E., «Brownian Motion and Stochastic Calculus»
- Oksendal, B, «Stochastic Differential Equations»

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Итоговая оценка, $F$, будет рассчитана по формуле $F = 0.3*S+0.3*P+0.4*E$, где $S$ — это оценка за решение задач из списка курса; $P$ — оценка за презентацию в классе; $E$ — оценка за итоговый устный экзамен.

## Инварианты графов, узлов и вложенных графов
**простой межкампусный аудиторный курс для студентов 1-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** С. К. Ландо.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Предлагаемый курс лекций посвящен инвариантам различных комбинаторно-топологических объектов малой размерности — графов и оснащенных графов, узлов и зацеплений в 3-мерной сфере, вложенных графов и дельта-матроидов. Инвариант — это функция, принимающая одинаковые значения на изоморфных объектах. Основной акцент в курсе будет сделан на задаче переноса инвариантов с объектов одного вида на объекты другого вида. Эта задача активно обсуждается в исследовательской литературе последнего времени, и лектор планирует познакомить слушателей с самыми свежими результатами. Курс рассчитан на студентов бакалавриата и магистратуры. Он не требует предварительных знаний. В курсе планируется предлагать участникам большое количество задач; некоторые из предлагаемых задач являются нерешенными.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** специальных знаний не требуется

**ПРОГРАММА:**

Графы и их инварианты: виды графовп, примеры инвариантов графов, соотношения удаления-стягивания.

Вложенные графы: двумерные поверхности, ориентируемость, графы на поверхностях.

Узлы и их инварианты: плоская диаграмма узла, движения Райдемайстера и инварианты узлов, особые узлы, инварианты конечного типа.

4-членные соотношения: хордовые диаграммы и 4-членные соотношения, графы пересечений, 4-членные соотношения для графов.

Алгебра Хопфа графов: примитивные элементы и структура алгебры Хопфа, инварианты графов и структура алгебра Хопфа, алгебра Хопфа и интегрируемость.

Весовые системы, отвечающие алгебрам Ли: универсальная весовая система, строящаяся по алгебре Ли, $\mathfrak{sl}_2$-весовая система, $\mathfrak{gl}_N$-весовая система.

Вложенные графы и дельта-матроиды: алгебры Хопфа дельта-матроидов, продолжение инвариантов графов на вложенные графы и дельта-матроиды, 4-членные соотношения для вложенных графов и дельта-матроидов.

**УЧЕБНИКИ:** 1. А. К. Звонкин, С. К. Ландо, *Графы на поверхностях и их приложения*, М., МЦНМО, 2010. 2. С. К. Ландо, *Введение в дискретную математику*, М., МЦНМО, 2019.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Вычисляется в результате суммирования оценок за работу на семинаре (4 балла), контрольную работу по итогам 1-го модуля (3 балла), письменный экзамен в конце 2-го модуля (7 баллов). Если суммарная оценка превышает 10 баллов, то она округляется до 10 баллов.

## Категории и универсальная алгебра
## простой межкампусный НИС для 2-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** В. Б. Шехтман.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Будет дано короткое введение в две обширные области на границе математической логики с информатикой. Теория категорий проявляется во всех областях современной математики; она даёт простой язык для описания сходных явлений. Универсальная алгебра изучает категории абстрактных алгебр и морфизмов; они возникают как в привычном математическом контексте (группы, кольца, модули), так и в логике (решётки, булевы алгебры) и информатике (типы данных, алгебры термов). Занятия будут проходить в форме спецкурса.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** базовые курсы первого года бакалавриата: алгебра, анализ, топология, логика.

**ПРОГРАММА:**

- Категории и функторы. Суммы, произведения, пределы. Эквивалентность категорий.
- Морфизм функторов. Представимость, лемма Йонеды. Сопряжённые функторы.
- Алгебры и конгруэнции.
- Многообразия и эквациональные теории. Теорема Биркгофа о многообразиях.
- Переписывание термов. Унификация.
- Решетки и булевы алгебры.

**УЧЕБНИКИ:**


- С. Маклейн. Категории для работающего математика. М., 2004.
- П. Кон. Универсальная алгебра. М., 1968.
- S. Burris, H. Sankappanavar. A course in universal algebra. Millenium edition, 2012.
- W. Wechler. Universal algebra for computer scientists. Springer, 1992.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Накопленная оценка $=$ (число решённых задач)$\times 10/12$. Если эта оценка не менее 8, она равна итоговой. Иначе: итоговая оценка $=$ (число решённых задач)$\times 0.75 +$ оценка за экзамен$\times 0.5$. Округление до ближайшего целого.

## Классическая теория поля
## трудный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** П. И. Арсеев.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Курс «Классическая теория поля» является следующим после курса по механике в программе «Математическая физика». Понимание классической теории поля является необходимым для дальнейшего изучения квантовой теории поля, общей теории относительности, теории струн и т.д. Поскольку известный нам мир и существующие в нем поля обладают симметрией, известной, как релятивистская инвариантность, обсуждаются группа Лоренца (Пуанкаре) и построение действия, инвариантного относительно этой группы. В первую очередь мы рассмотрим разные формулировки уравнений электродинамики, как наиболее разработанный и «практичный» пример теории поля, однако, потом обсудим и другие примеры : скалярное поле, спинорное и соответствующие уравнения поля. В конце поговорим о некоторых нетривиальных решениях уравнений на экстремум действия в лагранжевой формулировке некоторых простых классических полевых теорий.

Курс предполагает одну лекцию и один семинар в неделю.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Предполагается знание матанализа, знакомство с дифференциальными уравнениями, желательно иметь понятие о лагранжевой формулировке механики, об основах теории групп и алгебр Ли и их представлений.

**ПРОГРАММА:**

- Введение: Лагранжев подход в механике, уравнения Эйлера – Лагранжа. Законы сохранения, как следствие некоторых симметрийных свойств Лагранжиана .
- Специальная теория относительности. Пространство Минковского и группа Лоренца. Лагранжиан частицы, инвариантный относительно группы Лоренца — релятивистское действие свободной частицы. 4-х вектора, преобразование различных физических величин при переходе от одной системы отсчета к другой- действие группы Лоренца (Пуанкаре).
- Напоминание основ электродинамики: уравнения Максвелла, их дифференциальная и интегральная формулировка.
- Уравнения электромагнитных волн в терминах потенциалов и полей, их Лоренц-инвариантность. Векторный и скалярный потенциал, как компоненты 4-вектора. Постоянство скорости света в различных системах отсчета — физическая основа преобразований Лоренца.
- Расширение Лагранжева подхода для описания полей: что такое Лагранжиан поля (а не частицы), уравнения Эйлера – Лагранжа для полей. Простой вид Лагранжиана электромагнитного поля через напряженности поля.
- Лагранжиан частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем. Полный Лагранжиан электромагнитного поля — возможность вывода уравнений электродинамики из новых принципов.
- Построение Лоренц-инвариантного лагранжиана — тензор электромагнитного поля. Действие для электромагнтного поля и уравнения Максвелла (записанные через тензора поля) как уравнения Эйлера – Лагранжа.
- Инварианты, законы сохранения. Калибровочная инвариантность. Нарушение Лоренц-инвариантности выбором калибровки.

- Различные решения «уравнений движения» электромагнитного поля (они же уравнения Максвелла). Функция источника (Грина) для скалярного потенциала в электростатике и для векторного потенциала. Запаздывающие потенциалы, излучение волн.
- Другие примеры релятивистски инвариантных уравнений для полей. О представлениях группы вращения, Лоренца. Скалярное поле — уравнение Клейна–Гордона. Спинорные представления. Уравнение Дирака как классическое полевое уравнение.
- Появление нетривиальных решений в уравнениях на экстремум действия в лагранжевой формулировке ряда классических полевых теорий. Скалярные $\varphi^4$ и синус–Гордон.
- *Нелинейная O (3)-модель
- *Понятие о полях Янга–Миллса: пример более сложной калибровочной симметрии.

**УЧЕБНИКИ:**

- Л.Ландау, Е.Лифшиц, «Теория поля», Курс теоретической физики, т. 2.Москва, Физматлит, 2003.
- К.Ициксон, Ж-Б.Зюбер, «Квантовая теория поля» т.1,Москва ,Мир,1984
- Морс Ф.М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, Том 1, Москва, Издательство иностранной литературы, 1958
- Р.Раджараман Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля . Москва, Мир, 1985
- В.С.Владимиров, «Обобщенные функции в математической физике»,Москва, Наука, 1979
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1977
- Фейнман Р.,Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике — М.: Мир,1967

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** За семестр предполагается решение студентами 3-х листков с задачами, проведение 2 контрольных работ и сдача экзамена.
Оценка за листки $L$ от 0 до 10
Оценка за каждую контрольную работу $K$ от 0 до 10
Накопленная оценка $N = (L_1 + L_2 + L_3 + (K_1 + K_2) * 1.2)/4.5)$
Если накопленная оценка больше 8 (без округления) студент получает автомат за экзамен.
В случае сдачи экзамена с оценкой $E$ от 0 до 10 итоговая оценка определяется по формуле: $N*0.4+E*0.6$

## Комбинаторика инвариантов

**простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** М. Э. Казарян, С. К. Ландо.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** Этот студенческий исследовательский семинар посвящен инвариантам комбинаторных объектов различной природы. Обсуждаемые на нем темы включают инварианты конечного типа узлов, инварианты графов, матроидов, дельта-матроидов, интегрируемые системы и их комбинаторные решения. Изучаются алгебры Хопфа разнообразных комбинаторных объектов. Участники семинара делают доклады по недавним исследовательским статьям и рассказывают о своих собственных результатах.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** отсутствуют.

**ПРОГРАММА:**

1. Узлы и их инварианты
2. Диаграммы узлов и хордовые диаграммы
3. 4-членные соотношения для хордовых диаграмм, графов и дельта-матроидов
4. Весовые системы
5. Построение весовых систем по алгебрам Ли
6. Алгебры Хопфа графов, хордовых диаграмм и дельта-матроидов
7. Комбинаторные решения интегрируемых иерархий
8. Гомологии Хованова

**УЧЕБНИКИ:**

1. S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy. CDBook. CUP, 2012.
2. S. Lando, A. Zvonkin. Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004. (А. К. Звонкин, С. К. Ландо, Графы на поверхностях и их приложения, М.: МЦНМО, 2010)

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Для получения оценки за семинар необходимо участвовать в нем на регулярной основе. Однако просто участие не позволяет получить оценку выше 8 баллов. Для получения более высокой оценки необходимо сделать доклад по недавней исследовательской статье или по своим собственным результатам.

## Конечные кольца: коды и многочлены
### простой межкампусный дистанционный НИС для 1-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** В. А. Гриценко.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Планируется изучение алгебраических структур на примере задач теории кодирования над кольцами. Линейный код в обычной теории кодирования является подпространством векторного пространства над конечным полем. В данном курсе мы будем понимать под линейным кодом специальный модуль над конечным кольцом. Переход от полей к кольцам (например, от конечного поля $\mathbb{F}_2$ к кольцу $\mathbb{Z}/(4)$) радикально меняет инструментарий теории и позволяет иначе взглянуть на такие базисные понятия алгебры как модули, идеалы, локальные кольца, разложение на неприводимые и т. п. Слушатели познакомятся с новыми проблемами и смогут выбрать для себя темы как ознакомительных, так и более творческих докладов по алгебраическим вопросам теории кодирования, в том числе и алгоритмической направленности. Всячески приветствуется использование в работе компьютерных средств типа PARI или Macaulay для исследования многочленов над конечными и $p$-адическими полями полями или кольцами вычетов.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** основными понятия алгебры — конечномерные векторные пространства, кольца, фактор кольца, поля, многочлены.

**ПРОГРАММА:** Примерные темы докладов таковы.

1) Конечные кольца, локальные конечные кольца Галуа и другие типы конечных колец.

2) Код по модулю $p^m$ и подмодули свободного модуля ранга $n$. Отличие этой задачи от аналогичной проблемы над конечным полем из $p$ элементов. Различные метрические функции в кодировании: вес Хэмминга, вес Ли…

3) Кольцо многочленов от одной переменной  над конечными кольцами: делители нуля, обратимые и неприводимые элементы, (не)приводимость элемента . Структура кольца многочленов $\mathbb{Z}/(N)[x]$ над кольцом вычетов по модулю $N$.

4) Различные описания идеала в кольце многочленов над конечным кольцом Галуа (делители и идемпотенты).

5) Разложение многочлена $x^n - 1$ над бинарным полем и над кольцом целых по модулю 4. Есть ли однозначность во втором случае? Как строить разложения по модулю 4? Какие считать неприводимыми?

6) Лемма Гензеля по модулю $p^m$ и квазиканоническое разложение многочленов по модулю $p^m$.

7) Лемма Гензеля в локальном поле. Разложение многочлена над $p$-адическими числами и по модулю степени простого числа $p$. Как связаны структуры разложений на конечным кольцом и кольцом характеристики 0?

8) Циклический код над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/(p^m)$ и делители многочлена $x^n - 1$ по модулю $p^n$. Общий случай или простейший случай $p^2 = 4$.

9) Самодвойственные коды по модулю 4 и 8.

10) Квадратичные вычеты и невычеты. Вычетно-квадратичные коды над кольцами. (Для студентов с подготовкой в арифметике).

11) Унимодулярные решётки и коды по модулю 3, 5, 4, 8. (Для интересующихся арифметикой и квадратичными формами).

12) Геометрические коды над конечными полями. Есть ли обобщение на конечные кольца? (Для студентов с алгебро-геометрической подготовкой).

**УЧЕБНИКИ:**

- M. R. Kibler, «Galois Fields and Galois Rings Made Easy» Elsevier, 2017.
- G. Bini, F. Flamini, «Finite commutative rings and their applications», Springer 2002.
- W.C. Huffman, V. Pless, «Fundamentals of Error-Correcting Codes», Chapter 12. Codes over $\mathbb{Z}_4$. Cambridge University Press 2003.
- Min J. Shi, A. Alahmadi, P. Solé, «Codes and Rings. Theory and Practice», Elsevier, 2017.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0.3 (оценка за работу в течение семестра) + 0.7 (оценка за доклад).

## Конформная теория поля и теория представлений
## трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Б. Л. Фейгин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** Конформная теория поля возникла как наука физическая, но теперь это, скорее, часть математики. Теория замечательная и очень интересная, однако изучать её довольно трудно. Будет предложено несколько конкретных относительно небольших тем, где потребуется разобраться в каких-то идеях и понятиях, а потом что-нибудь посчитать. Иногда для этого придётся доказать естественно возникающее комбинаторное тождество или вычислить некоторый характер.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** трёхсеместровый курс алгебры, включающий теорию представлений; группы и алгебры Ли – 1.

**ПРОГРАММА:**

1. Представления афинных алгебр и их характеры. Выражения характеров через $\theta$-функции и модулярные свойства.
2. Представления алгебры Вирасоро. Модули Верма и бозонные модули. Доказательство формул Каца и вычисление детерминанта формы Шаповалова.
3. Примарные поля и операторное произведение. Доказательство формул Каца, использующее операторное произведение и язык конформной теории поля.
4. Конформные теории, связанные с алгебрами токов и алгеброй Вирасоро — основные понятия.
5. Минимальные модели конформных теорий, связанных с алгебрами токов и Вирасоро. Сингулярные носители. Теорема о сингулярных носителях представлений из минимальных теорий.
6. Алгебра Верлинде и ее вычисление в простейших случаях.
7. Решетчатая вертексная алгебра как простейший пример вертексной алгебры.
8. Коинварианты представлений вертексных алгебр. Разбор простейших случаев.
9. Локальные и глобальные модули Вейля.

**УЧЕБНИКИ:** будут предлагаться по ходу дела.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** студент разбирается в конкретном вопросе, например, в доказательстве той или иной формулы, и пишет небольшой текст с этим доказательством и мотивировкой своей деятельности.

**КОММЕНТАРИЙ:** В проекте может участвовать не более пяти студентов.

## Критические точки функций
### простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** М. Э. Казарян.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Теория особенностей изучает локальную геометрическую структуру особенностей дифференцируемых отображений, а также их взаимодействие с глобальными топологическими инвариантами отображаемых многообразий. Изучение критических точек функций занимает одно из центральных мест в этой теории. В курсе мы планируем обсуждать классификацию критических точек и ее связь с сериями ADE простых алгебр Ли и соответствующих групп отражений, а также деформации особенностей и их примыкания. Изучение топологической структуры будет включать в себя описание слоя Милнора и исчезающих циклов. Мы обсудим также приложения теории критических точек к изучению каустик и волновых фронтов в геометрической оптике и классической механике, а также к перечислительным задачам комплексной проективной геометрии.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** уверенное владение основами математического анализа многих переменных и линейной алгеброй. Знание основ топологии, включая теорию гомологий, приветствуется.

**ПРОГРАММА:**

1. Функции одной переменной. Классификация критических точек функций от одной переменной. Норамальные формы. Деформации. Ростки с струи.

2. Лемма Морса. Невырожденные и вырожденные критические точки. Второй дифференциалл. Коранг. Стабильная эквивалентность критических точек.

3. Локальная алгебра. Число Милнора. Диаграмма Ньютона и методы вычисления числа Милнора. Число Милнора квазиоднородной особенности.

4. Простые и непростые особенности. Примеры непростых особенностей. Класификация простых особенностей.

5. Гомотопический метод для приведения функции к нормальной форме. Версальные деформации.

6. ADE-классификация и ее проявления в разных областях математики. Симметрии правильные многогранников. Миниальные разрешения простых особенностей поверхностей и диаграммы Дынкина. Бифуркационная диаграмма простых особенностей как многообразие нерегулярных орбит группы отражений

7. Слой Милнора. Исчезающие циклы. Монодромия. Теорема Пикара – Лефшеца.

8. Особенности отображений многообразий старших размерностей. Павая, лево-правая и контактная эквивалентность. Генотип. Теорема об устойчивых отображениях.

**УЧЕБНИКИ:** В.И.Арнольд, А.Н.Варченко, С.М.Гусейн-Заде, Особенности дифференцируемых отображений. I и II.

В.И.Арнольд, В.А.Васильев, В.В.Горюнов, О.В.Ляшко, Теория особенностей, ВИНИТИ, Динамические системы VI

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Min(0.5 M + 0.5 E + H,10), где M и H — оценки за промежуточную контрольную работу и итоговый письменный экзамен по 10-балльной системе; H - дополнительные поощрительные баллы за выполнение домашних заданий (0-2 балла)

**КОММЕНТАРИЙ:**

## Линейное программирование
### простой межкампусный аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. В. Колесников.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Линейное программирование — раздел теории оптимизации, изучающих специальный класс задач — нахождение экстремумов линейных функций на выпуклых множествах (как конечномерных, так и бесконечномерных). Линейное программирование зародилось как прикладная дисциплина, с приложениями (в первую очередь) к экономике, но оно имеет глубокие связи со многими задачами анализа, геометрии, дискретной математики, а также численными методами и алгоритмами. Настоящий курс представляет собой введение в линейное программирование и ставит своей целью осветить многообразие связей и приложений линейного программирования.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** математический анализ и линейная алгебра в объёме первого курса

**ПРОГРАММА:**

1. Линейное программирование. Постановка задачи и базовые свойства.
2. Классические задачи линейного программирования (задача о диете, транспортная задача и др.).
3. Элементы выпуклого анализа. Теорема Каратеодори, теорема об отделимости.
4. Выпуклые многогранники. Крайние точки. Теорема Бирхгофа о бистохастических матрицах.
5. Теорема о минимаксе.
6. Двойственность в линейном программировании.
7. Другие приложения минимакса. Двудольные графы (теоремы Кёнига, Холла). Игры с нулевой суммой.
8. Симплекс-метод.
9. Другие алгоритмы (обзорно).
10. Транспортные потоки в сетях. Теорема Форда – Фалькерсона.
11. Целочисленное линейное программирование.
12. Общая теорема о минимаксе*.
13. Непрерывная транспортная задача*. Метрика Канторовича – Рубинштейна*.

**УЧЕБНИКИ:** Основные учебники:

1. Evar D. Nering and Albert W. Tucker[1]. Linear Programs and Related Problems. (1993).
2. Robert J. Vanderbei. Linear Programming. Foundations and Extensions. (2001).
3. Пападимитроу Х., Стайглиц К., Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. 1982.

Дополнительное чтение

1. Lovasz L., Plummer M., Matching theory. (1985)
2. Villani C., Topics in optimal transportation (2003).
3. Циглер Г., Выпуклые многогранники. МЦНМО (2014).

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_W._Tucker

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** В течение семестра студентам предлагается решать задачи из четырех листков. Экзамен состоит из двухчасовой контрольной работы с пятью задачами (по 2 балла за каждую). Окончательная оценка вычисляется по следующей формуле $E \cdot 0.4 + H \cdot 0.06$, где $E$ — оценка за письменный экзамен (по 10-балльной шкале), а $H$ — процент правильно решённых задач в течение семестра (округленный в сторону увеличения до числа, делящегося на 10). Для студентов, посещавших лекции в течение семестра, округление итоговой оценки производится в большую сторону, для посетивших менее половины лекций — в меньшую.

**КОММЕНТАРИЙ:** Для понимания некоторых (немногих) сюжетов курса желательно (но необязательно) знакомство с функциональным анализом.

## Математика в беспроводных сетях
**трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Д. С. Миненков.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** В каждом телефоне и ноутбуке есть радиомодуль. Про его работу пишут статьи в IEEE и создают программы магистратуры. Причём до недавних пор развитие систем связи обусловливалось физикой и технологиями, а сейчас на первый план выходят алгоритмы и математика. Мы покажем, как фундаментальная математика (в частности, неконструктивные теоремы существования) приносит непосредственную пользу. На примере реально возникающих задач беспроводной связи мы продемонстрируем особенности исследований в IT и R&D.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Материал обязательных курсов по линейной алгебре и анализу. Знание базовых понятий из теории вероятности (математическое ожидание, функция распределения). Владение каким-либо языком программирования (Python) хотя бы на начальном уровне приветствуется.

**ПРОГРАММА:**

1. Непрерывная оптимизация (выпуклая оптимизация, двойственная задача, современные методы).

2. Теория массового обслуживания (многокритериальная оптимизация: эффективность и справедливость, пакетный трафик, марковские цепи).

3. Напоминания из линейной алгебры и эрмитовой геометрии.

4. Методы обработки радиосигнала (передача, приём направленного сигнала).

5. Управление радио-ресурсами (частота, время, пространство).

**УЧЕБНИКИ:**

1. J. Nocedal and S. Wright, Numerical Optimization, 1999, Springer, New York.

2. Mor Harchol – Balter, Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action, 2013, Cambridge University Press.

3. Emil Björnson, Jakob Hoydis, and Luca Sanguinetti, Massive MIMO networks: Spectral, energy, and hardware efficiency, 2017, Foundations and Trends in Signal Processing, 11(3-4) 154–655.

4. M. J. Neely, Stochastic Network Optimization, 2010, University of Southern California.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Оценка формируется из нескольких частей: текущая работа (60%), которая предусматривает сдачу листков, для наиболее заинтересованных возможно проведение индивдуального проекта, а также промежуточкая контрольная (10%) и экзамен (30%).

**КОММЕНТАРИЙ:** Курс от Huawei R&D

## Математика передачи информации
**трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** С. А. Локтев.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Если вы читаете этот текст, значит методы, о которых пойдёт речь в этом курсе, работают. Мы расскажем о том, какие математические конструкции и теоремы возникают и применяются при передаче сигнала и защите его от помех, как в дискретной модели (представляя сигнал как последовательность битов с определённой вероятностью ошибки), так и при типичных способах передачи сигнала электромагнитными волнами. По ходу курса мы разберём понятие энтропии и оценки Шеннона на пропускную способность линий связи.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Материал обязательных курсов по алгебре и анализу. Базовые знания из теории вероятности: во второй части курса будут использоваться непрерывные случайные величины и нормальное распределение. Возможно освоение теории вероятности параллельно с этим курсом

**ПРОГРАММА:**

- Коды, исправляющие ошибки [SH], [M]
- Основы теории информации. Сжатие данных (архивация) [M]
- Модуляция сигнала. Теорема Котельникова. Созвездия амплитудно-фазовой модуляции [K]
- Детектирование сигнала на фоне белого шума. MLD (maximum likelihood detection). L-MMSE (linear minimal mean square error) [K], [C]
- Энтропия. Оценки Шеннона на пропускную способность канала [V], [C]

**УЧЕБНИКИ:**


- **[V]** Н. К. Верещагин, Е. В. Щепин, «Информация, кодирование и предсказание» (МЦНМО, 2012).
- **[SH]** А. Ромащенко, А. Румянцев, А. Шень, «Заметки по теории кодирования» (МЦНМО, 2017).
- **[M]** D. J. C. MacKay, «Information Theory, Inference, and Learning Algorithms» (Cambridge University Press, 2003).
- **[K]** E. Krouk, S. Semenov «Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications» (Wiley, 2011).
- **[C]** T. M. Cover, J. A. Thomas «Elements of Information Theory» (Wiley Interscience, 2006).


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 40% текущая успеваемость (листки, домашние задания)

20% промежуточная контрольная работа

40% финальный экзамен.

**КОММЕНТАРИЙ:** Курс от Huawei R&D. Предполагаемый со-ведущий — Михаил Кречетов.

## Математика физических явлений
## простой аудиторный НИС для 1-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** П. И. Арсеев.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Курс о связи реальных физических явлений и математических методов их описания, о возникновении определенных математических структур из законов физики, в первую очередь в механике, электростатике и электродинамике. В курсе обсуждаются такие вещи, как связь второго закона Ньютона с Лагранжевым формализмом, движение «по прямой» по криволинейной поверхности, поведение гироскопа, эквивалентность закона Кулона теореме Гаусса и т. д.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** желательно знание основ матанализа и понимание простых дифференциальных уравнений. Занятия рассчитаны скорее на студентов 2–3 курсов бакалавриата, но и подготовленные первокурсники не должны встретить серьёзных трудностей.

**ПРОГРАММА:**

1. Механика
   - Второй закон Ньютона — основа описания классического движения. Примеры динамики. Законы сохранения из уравнений движения.
   - От законов Ньютона к лагранжевой формулировке. Принцип наименьшего действия. Законы сохранения с точки зрения лагранжевого подхода.
   - «Свободное» движение в криволинейном пространстве. Движение по сфере и поверхностям вращения. Описание с помощью метрики.
   - Движение быстро вращающихся тел. Нетривиальность их свободного движения. «Антиинтуитивное» поведение гироскопа.
2. Электростатика
   - Закон Кулона как прямое следствие эксперимента. Понятие потока векторного поля. Эквивалентность теоремы Гаусса «экспериментальной» формулировке закона Кулона. Дивергенция векторного поля, дифференциальная формулировка закона Кулона. Уравнения Лапласа и Пуассона.
   - Решение задач электростатики с помощью теоремы Гаусса. Поле заряженных плоскостей и стержней. Понятие о двумерной и одномерной электростатике и специфических «законах Кулона». Заряды над поверхностью металла.
   - Электрическое поле в диэлектриках. Поверхностные заряды и граничные условия для электрического поля в неоднородной системе. Метод зарядов изображений — физическое решение задачи о нахождении решения дифференциального уравнения с граничными условиями.
3. Электродинамика
   - Взаимодействие токов. Экспериментальные законы Эрстеда и Ампера. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Сила Лоренца. Движение частицы в магнитном поле.
   - Понятие векторного потенциала. Ротор векторного поля, формула Стокса. Свойства векторного потенциала, сравнение со скалярным потенциалом. Дифференциальная формулировка законов электромагнетизма при условии стационарности токов.
   - Лагранжиан частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем.

- Закон Фарадея, его интегральная и дифференциальная формулировки. Система уравнений Максвелла. Еще раз их физический смысл и математическая формулировка. Полный Лагранжиан электромагнитного поля — возможность вывода уравнений электродинамики из новых принципов.
- Уравнения электромагнитных волн из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны в среде. Граничные условия на поверхности раздела двух сред.
- Отражение от поверхности раздела двух сред. Два метода решения задачи об отражении от плоскопараллельной пластины. Поверхностные волны
- Волноводы и резонаторы. Дискретные частоты собственных колебаний — путь к описанию полей как набора осцилляторов.

**УЧЕБНИКИ:**


1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике — М.: Мир, 1967
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики — М.: Физматлит, 1974
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика — М.: Физматлит, 2004
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества — М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** студенты сдают задачи по двум спискам и отвечают на дополнительные вопросы. Начисление баллов следующее:

- $N_1$, от 0 до 10, за сданные в третьем модуле задачи
- $Q_1$, от 0 до 5, за ответы на дополнительные вопросы в третьем модуле
- $N_2$, от 0 до 10, за сданные в четвёртом модуле задачи
- $Q_2$, от 0 до 5, за ответы на дополнительные вопросы в четвёртом модуле
- $W$, от 0 до 5, за работу на занятиях.

Итоговая оценка $S = (N_1 + N_2 + Q_1 + Q_2 + W)/3$. Округление по стандартным правилам.

**КОММЕНТАРИЙ:** Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

## Математические основы квантовой механики
**трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** П. А. Сапонов, П. Н. Пятов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Это — не требующее серьезной физической подготовки введение в квантовую механику для студентов-математиков. При моделировании квантовых явлений мы будем привлекать в качестве аргументов внутреннюю логику и естественность математических конструкций. Модели квантовой механики служили и продолжают служить источником вдохновения во многих разделах современной математики: функциональном анализе, теории представлений групп и алгебр Ли, деформационном и геометрическом квантовании, теории квантовых групп и др. Квантовая механика является важнейшим инструментом исследования явлений микромира и в настоящее время входит в обязательный образовательный минимум физиков-теоретиков и специалистов по математической физике.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Курс рассчитан на студентов 3 – 4 года бакалавриата и магистрантов, не имеющих физического образования. Специальных знаний по физике не требуется, хотя знакомство с механикой и классической теорией поля облегчит восприятие материала.

Необходимая математическая подготовка (в объеме базовых курсов 1-го и 2-го года бакалавриата):

- Лагранжева механика: конфигурационное и фазовое пространство механической модели, лагранжиан, уравнения Эйлера-Лагранжа, принцип наименьшего действия.

- Линейная алгебра: векторные пространства, скалярное произведение, линейные операторы, их собственные значения и собственные вектора.

- Теория вероятностей и математическая статистика: случайная величина, функция распределения, плотность вероятности, статистические моменты случайной величины (среднее, дисперсия и т. п.).

- Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.

- Математический анализ (вещественный и комплексный), в основном теория интегрирования (обычные и кратные интегралы) и преобразование Фурье.

Желательная дополнительная математическая подготовка:

- Знакомство с азами теории групп и алгебр Ли и их конечномерными матричными представлениями (хотя бы на примерах групп $SU_2$ и $SO_3$), базовые сведения о симметрической группе.

- Некоторые понятия функционального анализа: гильбертово пространство, линейные операторы в гильбертовом пространстве, эрмитовы и самосопряжённые операторы.

- Понятие об обобщённых функциях на пространстве финитных основных функций и пространстве быстроубывающих функций (пространстве Шварца), производная и преобразование Фурье обобщённой функции, дельта-функция Дирака и ее регуляризации.

При необходимости математические понятия (особенно из раздела дополнительной математической подготовки) будут напоминаться и вводиться на лекциях.

**ПРОГРАММА:**

1. Краткий обзор основных физических проблем, приведших к возникновению квантовой механики. Гамильтонов формализм классической механики, фазовое пространство состояний механической системы и пуассонова структура на нем.

2. Основные понятия квантовой механики. Гильбертово пространство состояний квантовой системы, спектры самосопряженных операторов как множество значений квантовых наблюдаемых, статистическая интерпретация. Элементы теории обобщенных функций. Уравнения движения квантовой системы в представлениях Шредингера и Гейзенберга.

3. Гармонический осциллятор, его координатное представление и полиномы Эрмита. Алгебра операторов рождения и уничтожения и представление осциллятора в пространстве Фока. Общая теория одномерного движения.

4. Трехмерное движение в центральном поле. Модель атома водорода. Сферические функции, полиномы Лаггера.

5. Группы симметрий квантово-механических систем и их представления в пространстве состояний, законы сохранения и интегралы движения. Угловой момент в квантовой механике. Спин квантовой частицы. Конечномерные представления алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$.

6. Симметрическая группа и теория тождественных частиц. Статистики Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака, типы симметрий векторов состояний и диаграммы Юнга. Принцип запрета Паули и объяснение периодического закона Менделеева.

7. Интегрируемые модели квантовой механики: спиновые цепочки, понятие об алгебраическом анзаце Бете.

8. Релятивистская квантовая механика. Уравнение Дирака и квантование свободного фотонного поля.

**УЧЕБНИКИ:**

1. Л.Д. Фаддеев, О.А. Якубовский, «Лекции по квантовой механике для студентов-математиков», Издательство ЛГУ, 1980.

2. Brian C. Hall, «Quantum Theory for Mathematicians», Graduate Texts in Mathematics 267, Springer 2013.

3. В.В. Балашов, В.К. Долинов, «Курс квантовой механики», изд. РХД, Москва-Ижевск, 2001.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** оценка за курс $= 0.6\cdot$«накопленная оценка»$+0.4\cdot$«оценка за экзамен». Здесь «оценка за экзамен» — целое число от 0 до 10, а «накопленная оценка» вычисляется по результатам решения задач из листков по формуле $100\,S/(9\,M)$, где $S$ — фактически набранное количество баллов за решения задач, а $M$ — максимально возможное число баллов за верное решение всех задач из всех листков. Обратите внимание, что накопленная оценка может быть больше 10 баллов. Если (до округления) она не менее 8 баллов, студент получает автомат за курс с этой оценкой. Округление в итоговой формуле происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

## Математическая статистика и анализ данных
**простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** И. В. Щуров.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Анализ данных — пожалуй, самое популярное приложение математики в современном мире. Математическая статистика — его фундамент. Она используется во всех областях науки, где происходит работа с данными — от психологии до физики, не говоря уже об индустриальных приложениях. Решать задачи реального мира — захватывающее, непростое и порой даже рискованное дело: слишком легко сделать неверный, но при этом кажущийся очевидным вывод. Чтобы избежать ловушек и научиться эффективной работе с данными, нужно одновременно глубоко знать теорию, уметь строить теоретико-вероятностные модели различных реальных процессов и обладать практическим опытом. Всем этим аспектам и будет посвящен наш курс.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Требуется уверенное знание линейной алгебры, математического анализа (в том числе многомерного, в первую очередь — задач оптимизации функций нескольких переменных) и теории вероятностей. Также ожидается, что вы знаете Python или R: мы планируем анализировать реальные данные и ставить много численных экспериментов.

**ПРОГРАММА:**

- Задачи математической статистики. Статистика и математическое моделирование. Понятие выборки. Функция правдоподобия. Компьютерные эксперименты в статистике. Что может пойти не так при анализе данных.
- Фреквентистская статистика. Параметрические и непараметрические методы. Статистические оценки, их свойства. Точечные и интервальные оценки. Почему доверительные интервалы — это не (совсем) то, чем они кажутся.
- Проверка статистических гипотез. Ошибки первого и второго рода. Уровень значимости. Мощность статистического критерия. Построение критериев. Как p-hacking сломал статистику.
- Регрессионный анализ. Линейная регрессия. МНК-оценка параметров, её свойства. Теорема Гаусса–Маркова. Всегда ли хороши несмещенные оценки?
- Байесовская статистика. Априорное и апостериорное распределения. Байесовские подходы к задачам оценивания параметров и проверки гипотез. Почему байесовская статистика ещё не захватила мир?
- Статистика и причинность. Структурные каузальные модели. Оператор do. Оценка причинно-следственных эффектов. Как искусственный интеллект учится работать с причинами и следствиями.

**УЧЕБНИКИ:**


- Larry Wasserman. All of Statistics. Springer, 2004.
- Judea Pearl, Madelyn Glymour, Nicholas P. Jewell. Causal Inference In Statistics: A Primer. Wiley, 2016.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** $0.3 \times$ [Домашние работы] $+ 0.1 \times$ [Работа на семинарах] $+ 0.3 \times$ [Контрольная работа] $+ 0.3 \times$ [Письменный экзамен]

## Машинное обучение
**простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Е. О. Кантонистова.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Мало кто не слышал о машинном обучении, но ещё меньше тех, кто понимает, что это такое. Машинное обучение используется, когда необходимо найти ответ к задаче, которую затруднительно решенить явно, но при этом есть достаточное число правильных ответов при тех или иных начальных условиях. Скажем, трудно представить себе алгоритм, способный отличить по фотографии кошку от собаки, однако, при наличии достаточного количества фотографий тех и других, машинное обучение может создать такой алгоритм автоматически.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** линейная алгебра, математический анализ (одномерный и многомерный), теория вероятностей. Слушателей не должны пугать слова «гиперплоскость», «градиент», «плотность вероятности» и «ковариационная матрица». Ещё мы будем программировать: основным языком будет `Python 3`, желательно знать библиотеки `numpy` и `pandas`.

**ПРОГРАММА:** В курсе мы будем обсуждать разные методы машинного обучения — начиная с линейных регрессий и деревьев решений и заканчивая современными нейросетевыми архитектурами. Мы начнём с теоретической основы каждого метода, посмотрим, как он работает на простых примерах, а затем перейдём к практической работе с реальными данными.

1. Обзор задач машинного обучения. Постановка задачи «обучения с учителем» (supervised learning). Метод $k$ ближайших соседей. Проблема переобучения. Проклятие размерности.
2. Регрессии и классификаторы. Линейные модели. Регуляризация.
3. Методы оптимизации. Градиентный спуск и его модификации.
4. Решающие деревья. Бутстрап и бэггинг. Случайные леса. Градиентный бустинг.
5. Метод опорных векторов.
6. Нейронные сети и глубокое обучение.
7. Задачи «обучения без учителя» (unsupervised learning): оценка плотности, кластеризация, снижение размерности. Semi-supervised learning.
8. Другие задачи машинного обучения.

**УЧЕБНИКИ:**

- Hastie T., Tibshirani R, Friedman J. The Elements of Statistical Learning (2nd edition). Springer, 2009.
- Murphy K. Machine Learning: A Probabilistic Perspective. MIT Press, 2012.
- Ian Goodfellow, Yoshua Bengio and Aaron Courville. Deep Learning. MIT Press, 2016.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Итоговая оценка вычисляется как средневзвешенное от оценки за текущую работу (40%), оценки за контрольную работу (30%) и оценки за экзамен (30%). Оценка за текущую работу формируется как среднее оценок за домашние задания и другие формы текущего контроля. В число домашних заданий могут быть включены соревнования по машинному обучению. Итоговая оценка округляется арифметически, остальные оценки не округляются.

**КОММЕНТАРИЙ:** Вы можете посмотреть на страницу курса 2018/19 учебного года: http://wiki.cs.hse.ru/?curid=15880.

## Модальные логики и вычислительная сложность
### простой межкампусный НИС для 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** М. Н. Рыбаков.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** В курсе затрагиваются два больших направления математики — модальная логика и теория вычислительной сложности. Предполагается, что слушатели смогут не только познакомиться с понятиями, теоремами и вопросами этих разделов, но и увидят взаимосвязи между ними. Цель курса во многом ознакомительная и обзорная, хотя приводимые утверждения будут сопровождаться доказательствами. Во-первых, это знакомство с модальными языками и исчислениями, с реляционной семантикой возможных миров, с методами доказательства полноты и разрешимости логических систем, с теоремами о взаимосвязях между классическими и неклассическими логиками. Во-вторых, это знакомство с подходами к оценке сложности алгоритмов и задач, знакомство с классами сложности, с их взаимосвязями, с открытыми проблемами (включая проблему тысячелетия «P = NP?»). В-третьих, это знакомство с взаимосвязями между логикой и теорией вычислительной сложности, причём взаимосвязи предполагается показать как для классических логик, так и для модальных.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Приветствуются (но не являются обязательными) базовые знания по логике, алгебре и математическому анализу.

**ПРОГРАММА:**

- Что изучает логика? Что изучает теория вычислительной сложности?
- Классическая логика. Напоминание основных понятий.
- Интуиционистская логика. Взаимосвязи.
- Модальный язык. Реляционная семантика.
- Стандартные модальные логики.
- Каноническая модель. Теоремы о полноте.
- Фильтрация. Разрешимость.
- Связь между модальными логиками и интуиционистской логикой.
- Связь между модальными логиками и классической логикой предикатов.
- Модели вычислений. Машины Тьюринга.
- Очень коротко: неразрешимые проблемы, неразрешимость классической логики предикатов.
- Оценка сложности алгоритмов и задач.
- Классы сложности P, NP, PSPACE, EXPTIME, теоремы об их взаимосвязях, открытые вопросы.
- Теорема об NP-полноте проблемы выполнимости булевых формул.
- Теорема о PSPACE-полноте проблемы выполнимости булевых формул с кванторами.
- Сложность модальных логик. Взаимосвязи между логиками и задачами теории вычислительной сложности.
- Заключительные замечания и комментарии.

**УЧЕБНИКИ:**

- A.Chagrov, M.Zakharyaschev. Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
- В.Н.Крупский. Введение в сложность вычислений. М., Факториал, 2006.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0,5дз + 0,5э, возможен «автомат» по итогам домашних заданий.

## Непараметрика и другие сюжеты статистики
**трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Д. С. Шмерлинг.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** В практических задачах часто возникают ситуации, когда распределение и зависимость данных неизвестны. В таком случае на помощь приходят непараметрические методы статистики, базовое представление о которых будет дано в этом курсе. Также планируются лекции приглашённых специалистов, применяющих такие статистические методы на практике (социологи, медицинские статистики, аналитики, специалисты по психометрии). Эти лекции будут занимать дополнительную пару сразу после базовой или же замещать её, и о каждой такой лекций будет сообщено заранее.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** дискретная математика, линейная алгебра и геометрия, математический анализ, теория вероятностей, математическая статистика.

**ПРОГРАММА:**

1. Задача о дихотомических данных: биномиальный критерий.
2. Одновыборочная задача о положении (сдвиге): анализ повторных наблюдений с помощью знаковых рангов (свободный от распределения критерий знаковых рангов Уилкоксона), анализ повторных парных наблюдений с помощью знаков (свободный от распределения критерий знаков Фишера), анализ данных одной выборки.
3. Двухвыборочная задача о положении (сдвиге): свободный от распределения критерий знаковых ранговых сумм Уилкоксона, оценка Ходжес – Лемана.
4. Двухвыборочная задача о рассеянии (масштабе): свободные от распределения ранговый критерий Ансари – Брэдли и критерий Мазеса.
5. Критерии согласия: $\chi^2$, Колмогорова – Смирнова, Шапиро – Уилка
6. Однофакторный дисперсионный анализ: свободные от распределения критериии Краскела – Уоллиса, Джонкхиера, Терпстра
7. Двухфакторный дисперсионный анализ: свободные от распределения критерии Фридмана, Кендала и Бэбингтона Смита, свободные от распределения критерии для альтернатив с упорядочиванием Пейджа.
8. Задача о независимости: свободный от распределения критерий независимости Кендала.
9. Если успеем — анализ выживаемости и др.

**УЧЕБНИКИ: Литература:**


1. М. Холландер, Д. Вульф. Непараметрические Методы Статистики. 1983. (Перевод с английского Д. С. Шмерлинга.)
2. M. Hollander, A. Douglas, D. Wolfe, E. Chicken. Nonparametric Statistical Methods. Third Edition. 2014.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** $\min(10;\ 0.5 \cdot \text{ДЗ} + 0.3 \cdot \text{ЭК} + 0.3 \cdot \text{ИР} + 0.1 \cdot \text{АР})$, где

- ДЗ — домашние задания (листки)
- ЭК — экзамен
- ИР — индивидуальная работа
- АР — аудиторная работа.

Задания, сданные в течение недели после установленного срока, оцениваются с коэффициентом 0.8, а сданные ещё позже — с коэффициентом 0.4. Если $(0.4 \cdot \text{ДЗ} + 0.4 \cdot \text{ИР} + 0.2 \cdot \text{АР}) \geqslant 8$, то можно зачесть себе именно эту оценку и не ходить на экзамен.

## Оптимизация формы
### трудный межкампусный НИС для 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Е. О. Степанов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** 4-й модуль 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Задача курса — познакомить слушателей с наиболее характерными оптимизационными задачами, в которых неизвестным является множество не заданной *a priori* структуры, а также с методами, применяемыми для исследования их решений. К таким задачам относятся, например, задача о минимальной поверхности, аэродинамическая задача Ньютона, задача Штейнера, задачи построения оптимальных транспортных сетей.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** математический и функциональный анализ, дифференциальная геометрия и топология в объёме первых двух-трёх лет бакалавриата.

**ПРОГРАММА:**

I. Задачи оптимального размещения ресурсов. Постановки задач об оптимальном размещении ресурсов (optimal location problems), $k$-center problem, $k$-median problem, задачи оптимальной упаковки и т. п. Гексагональная эвристика. Общая теория $\Gamma$-сходимости. Пример вычисления $\Gamma$-предельной задачи для одной из задач оптимального размещения ресурсов, предельное распределение ресурсов. Динамическое размещения ресурсов (краткосрочное планирование), сравнение с задачей Какутани деления отрезков.

II. Задача Штейнера. Меры Хаусдорфа. Липшицевы функции. Спрямляемые множества. Формулы площади и коплощади. Теорема Блашке, теорема Голаба и их модификации. Существование решений задачи Штейнера. Основы топологии кривых. Топологические и геометрические свойства штейнеровских сетей. Некоторые явные примеры.

III. Задачи оптимизации одномерных объектов (кривых). Функционалы среднего и максимального расстояний. Задача Монжа – Канторовича об оптимальном переносе массы. Задача об оптимизации транспортной сети. Задача об оптимальном газопроводе наименьшей длины. Существование, топологические и геометрические свойства решений.

IV. Задача Ньютона о теле наименьшего сопротивления. Выпуклые функции. Существование в классе выпуклых форм. Невыпуклые формы. Вид выпуклого тела наименьшего сопротивления.

V. Задача о минимальной поверхности. Функции ограниченной вариации. Периметр. Множества Каччиопполи. Теорема о компактности. Существование множества минимального периметра. Уравнение минимальной поверхности.

VI. Задачи об оптимизации собственных чисел. Собственные числа лапласиана (для задачи Дирихле и для задачи Неймана). Задачи об оптимизации функционалов, зависящих от собственных чисел. Существование решений в специальных классах множеств. Релаксация. Сходимость по Mosco функциональных пространств. Существование решений ослабленной задачи.

VII. Задача о максимальной жёсткости пластины. Существование решений. Формула монотонности. Регулярность решений. Классификация особых точек.

Темы [IV]–[VII] предлагаются на выбор слушателей (будет выбрана одна или две)

**УЧЕБНИКИ:**


1. Э. Джусти. Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М., Мир, 1989.
2. F. Santambrogio. Optimal Transport for Applied Mathematicians. Calculus of Variations, PDEs, and Modeling. Birkhäuser, 2015.
3. G. Allaire. Shape optimization by the homogenization method. Applied Mathematical Sciences 146, Springer Verlag, 2002.
4. M.C. Delfour, J.-P. Zolesio. Shapes and Geometries - Analysis, Differential Calculus, and Optimization. SIAM, 2001.
5. G. Dal Maso. An Introduction to $\Gamma$-convergence. Birkhäuser, 1993.
6. А. Арутюнов, Г. Магарил-Ильяев, В. Тихомиров. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М., УРСС, 2006.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** оценка выставляется по результатам устного экзамена.

## Основания теории игр

**простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 2-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** М. С. Панов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Теория игр берет свое начало в 1944 с совместной книги Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна. С тех пор теория игр получила большое развитие в вычислительной математике, общественных науках, биологии. Методы теории игр стали повсеместно использоваться во многих прикладных областях. В этом курсе мы обсудим основные понятия и решения теории игр, область их применимости, их слабые и сильные стороны.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Базовый курс математической логики.

**ПРОГРАММА:**

- Кооперативные игры. Ядро и стабильное множество.
- Байесовская теория принятия решений. Лексикографическая вероятность.
- Статические игры. Антогонистические игры. Равновесие Нэша. Последовательное удаление доминируемых страгеий.
- Динамические игры. Совершенство по подыграм и метод обратной индукции. Подход Абрю.
- Эпистемеологическая теория игр: модель разбиения Ауманна и модель пространства типов Мертенса и Замира.
- Эпистемеологическая теория игр: модель принятия решений многими игроками.
- Стабильность по Кольбергу и Мертенсу. Прямая индукция. Выбор равновесий в динамических играх.
- Проблема торга.
- Проблема мэтчинга.

**УЧЕБНИКИ:**

- В.И. Данилов «Лекции по теории игр»
- R. Myerson «Game Theory: Analysis of Conflict»

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Итоговая оценка, $F$, будет рассчитана по формуле $F = 0.3*S+0.3*P+0.4*E$, где $S$ — это оценка за решение задач из списка курса; $P$ — оценка за презентацию в классе; $E$ — оценка за итоговый устный экзамен.

## Основные понятия математики
**простой межкампусный НИС для 1-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** Это семинар для первокурсников, посвящённый тому, как «работает» математика. Мы будем обсуждать темы из самых разных областей — анализа, геометрии, алгебры, комбинаторики, теории чисел и т.п. Доклад по теме длится одно занятие, в редких случаях — два. В первом семестре некоторые доклады делают руководители семинара, некоторые — слушатели, некоторые — приглашённые докладчики. Во втором семестре все доклады делают слушатели; как правило, тема доклада связана с темой курсовой работы. Семинар позволит участникам ещё раз ощутить красоту и разнообразие математики; в первом семестре он также может помочь в выборе темы и руководителя курсовой работы.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** нет.

**ПРОГРАММА:** Некоторые темы, обсуждаемые на семинаре (это заведомо не полный список, он может варьироваться от года к году):

- Разрезание четырехмерного куба трехмерной пилой: что получится в сечении?
- Квадратичный закон взаимности: квадратные корни по модулю простого числа.
- Как решать кубические уравнения и почему этого никогда не делают.
- Парадокс Банаха–Тарского: разрезание шара на конечное число кусков, из которых можно сложить четыре шара такого же радиуса.
- Теорема Эрроу о диктаторе (невозможность идеальной системы голосования по нескольким кандидатурам) и нестандартный анализ (в котором есть бесконечно малые числа).
- Пентагональное тождество Эйлера.
- Три взаимосвязанных теоремы из топологии: теорема Брауэра о неподвижной точке, основная теорема алгебры и теорема о причесывании ежа.

**УЧЕБНИКИ:** Р. Курант, Г. Роббинс, «Что такое математика», М., МЦНМО, 2000, http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.pdf. Также по каждой из тем есть своя литература.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** В первом семестре оценка зависит от того, делал ли участник семинара доклад и от результата заключительной контрольной работы. Если участник семинара сделал успешный доклад, то он получает итоговую оценку 10 баллов и не должен писать заключительную контрольную. Если участник семинара доклада не сделал или доклад был очень неудачным, то итоговая оценка за семинар равна оценке за заключительную контрольную. Во втором семестре каждый участник должен сделать доклад и оценка за курс равна оценке за доклад.

**КОММЕНТАРИЙ:** Семинар проводится ежегодно с момента основания факультета и предназначен исключительно для студентов первого курса бакалавриата. Студенты остальных курсов не смогут получить за этот семинар никаких кредитов. В первом семестре участвовать в семинаре могут все желающие первокурсники математических и родственных специальностей (в том числе из других кампусов ВШЭ). Во втором семестре участвовать в семинаре можно только с разрешения его руководителей. Доклады происходят главным образом по-русски, но несколько докладов на английском вполне может быть.

## Основные приложения математики
**простой межкампусный дистанционный НИС для 2-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Где применяется математика, кроме самой математики?

- в физике
- в экономике
- в лингвистике
- в статистике
- в информатике
- в биологии

и это далеко не полный список! На нашем семинаре докладчики — специалисты в вышеперечисленных областях — расскажут о математических методах исследования, о применяемых моделях и как получать с их помощью выводы. Мы будем обсуждать математические проблемы, но не будем избегать и пограничных между математикой и предметной областью вопросов: как найти хорошее математическое описание проблемы? как проверить, соответствуют ли выводы действительности? Наша тема — взаимодействие математики и реальности.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Стандартные курсы первого года бакалавриата (анализ, алгебра, геометрия). Основная предполагаемая аудитория семинара — второкурсники.

**ПРОГРАММА:** Мы рассмотрим математические модели в таких областях, как

- физика (механика, электродинамика, квантовая теория)
- экономика
- лингвистика
- статистика (и анализ больших массивов данных)
- информатика (теория сложности, криптография)
- биология

и других. Доклады на семинаре будут делать приглашенные докладчики — специалисты в соответствующих предметных областях. Точные темы докладов будут определяться их пожеланиями.

**УЧЕБНИКИ:** Ввиду того, что доклады на семинаре имеют отношения к различным и мало связанным между собой областям знания, невозможно заранее предложить список литературы. Мы будем просить каждого докладчика рекомендовать книги и статьи для тех, кого заинтересовала тема доклада.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Итоговая оценка равна оценке, полученной на устном экзамене. Для проведения устного экзамена студент беседует с одним из докладчиков, выступавших на семинаре в этом семестре (по собственному выбору, с согласия докладчика); беседа может включать решение задач и/или обсуждение предметной области. Результат беседы оценивается докладчиком по 10-балльной шкале.

**КОММЕНТАРИЙ:** Семинар впервые проводился весной 2021 г. Состав докладчиков каждый год разный. Занятия проводится онлайн. Участие студентов из других кампусов вполне возможно, но могут возникнуть трудности при выводе итоговой оценки: некоторые из докладчиков предпочитают личное (а не дистанционное) общение, так что получить у них зачет студенты из других кампусов не смогут.

## Основы эконометрики
**простой межкампусный аудиторный НИС для 2-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** И. Б. Воскобойников.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Цель курса — расширение представлений студента-математика о роли математического аппарата теории вероятностей, математической статистики, математической экономики и ряда смежных разделов математики в современных экономических исследованиях. Для этого в курсе будут представлены базовые понятия теории вероятностей и экономической статистики, необходимые для аппарата эконометрики; изложена базовая теория эконометрических методов. Предполагается освоение подходов к решению типовых эконометрических задач, а также выработка практических навыков работы с экономическими данными и интерпретации результатов.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** знание основ теории вероятностей и математической статистики, а также математического анализа и линейной алгебры

**ПРОГРАММА:** В курсе будут представлены модели классической линейной регрессии, различные методы оценки параметров и их статистические свойства, проверка статистических гипотез и доверительных интервалов для параметров регрессии. Курс также содержит краткое введение в анализ временных рядов и панельных данных, можели с дискретными и смешанными зависимыми переменными.

**УЧЕБНИКИ:** Hill, R. Carter, W. E Griffiths, и G. C. Lim. Principles of Econometrics. 5-е изд. John Wiley & Sons, 2018.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Оценка складывается из баллов, набранных за промежуточную (15%) и итоговую (50%) контрольные работы, эмпирической домашней работы (30%), а также текущей работы на семинарах с выполнением небольших домашних заданий (5%). Каждый вид работы оценивается количеством баллов от 0 до 100. Итоговая оценка получается как среднее взвешенное с весами, указанными в скобках. Итоговая оценка округляется до ближайшего наибольшего целого числа. Например, итоговый балл 5,01 округляется до 6.

**КОММЕНТАРИЙ:** Курс предполагает освоение основ работы с эконометрическим пакетом STATA.

”

## Представления и вероятность
**трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 1-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** А. Дымов, А. В. Клименко.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** Семинар в основном предназначен для студентов 3-4 курса бакалавриата, магистрантов и аспирантов. Тематика семинара объединяет современные результаты в области вероятности и случайных процессов, динамических систем, представлений, а также служащие для них основной более старые сюжеты в этих областях. Мы предполагаем, что старшие участники, специализирующиеся по тематике семинара, выступят на нём с докладом.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Стандартные курсы математического анализа (включая теорию меры) и теории вероятностей. Знание основ функционального анализа и случайных процессов (в объёме первой части соответствующих курсов матфака) будет полезно (но не необходимо) в осеннем семестре, а знание алгебры (теории представлений в объёме стандартного курса алгебры матфака) — в весеннем. Семестры можно включать в учебный план независимо друг от друга. Предполагается, что осенью занятия будут проходить в МИАН (ул. Губкина, 8), а весной — на матфаке.

**ПРОГРАММА:** Примерные темы осеннего семестра:

- Начала теории случайных процессов (Независимость приращений, ковариационная функция, потраекторное поведение процесса. Важные примеры: пуассоновский и винеровский процессы.)
- Теория волновой турбулентности (WT). Стохастические модели в WT.
- Марковские цепи на графах: инвариантные меры, формулы для представлений, связанные с этим мартингалы.
- Процессы исключения на прямой: инвариантные меры, эквивалентность ансамблей, ренормализационный предел.
- Группы экспоненциального роста: свободные, гиперболические, марковские, фуксовы и т.д. Эргодическая теория их действий.

Примерные темы весеннего семестра:

- Элементы теории представлений.
- Представления бесконечномерных групп и операторных алгебр.
- Связанные с ними вопросы алгебраической комбинаторики и теории марковских процессов.

**УЧЕБНИКИ:**


- И.И. Гихман, А.В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. М.: 1977.
- S. Nazarenko, Wave Turbulence, Springer 2011
- A. Dymov, S. Kuksin, Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1: kinetic limit, *Comm. Math. Phys.*, **382** (2021), 951–1014
- Kipnis C., Landim C., Scaling Limits of Interacting Particle Systems, Springer 1999.
- A. Borodin and G. Olshanski, Representations of the infinite symmetric group. Cambridge University Press (2017).

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Участники могут либо сделать доклад на семинаре (такой доклад обычно оценивается в 8-10 баллов итоговой оценки), либо решать задачи экзамена. Список задач выдаётся для решения примерно за неделю до экзамена. На экзамене студент обсуждает свои решения с преподавателем. Формула для вычисления оценки за экзамен указывается в списке задач к нему.

## Прикладные методы анализа
## простой аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** К. П. Зыбин, Т. Такебе.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Аналитические методы, используемые в решении приходящих из математической физики задач, вбирают в себя как традиционную технику университетских курсов анализа, алгебры и дифференциальных уравнений, так и более абстрактные приемы функционального анализа. Цель курса — ознакомить с идеологией применения аппарата обобщенных функций, интегральных преобразований, фундаментальных решений, асимптотических оценок и др. Форма занятий в значительной части основана на самостоятельном решении задач студентами.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения в объёме первых двух курсов бакалавриата.

**ПРОГРАММА:**

1. Функции Грина краевой задачи и задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Дифференциальные уравнения с комплексным временем. Преобразование Лапласа.
3. Обобщенные функции.
4. Преобразование Фурье обобщенных Функций.
5. Фундаментальные решения классических операторов второго порядка. Приложения к задачам математической физики.
6. Асимптотические оценки и асимптотические разложения.

**УЧЕБНИКИ:**

1. Владимиров В. С., Уравнения математической физики
2. Гельфанд И. М, Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними
3. Эрдейи А., Асимптотические разложения
4. Погребков А. К. Записи лекций https://math.hse.ru/mathmethods2016
5. Лосяков В. В. Записи лекций
https://math.hse.ru/data/2018/01/15/1160394242/MathminThPh.pdf

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** итоговая оценка вычисляется по формуле

$$0,2\,x + 0,7\,y + 0,3\,z + 0,2\,u\,,$$

где $x$ — средняя оценка за короткие контрольные раборы на семинарах, $y$ — средняя оценка за три домашних контрольных работы, $z$ — оценка за итоговый экзамен, $u$ — бонус за активную работу на занятиях.

**КОММЕНТАРИЙ:** Этот курс является обязательным для студентов магистратуры, обучающихся по профилю «Математическая Физика», и входит в официальный РУП под названием «Математические методы естествознания». Все остальные студенты, включая студентов бакалавриата, могут взять этот курс в качестве спецкурса по выбору стоимостью в 5 кредитов.

## Проблема десятого дискриминанта
**трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** А. М. Левин, А. Б. Калмынин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Пусть $p(x) = x^2 + x + 41$. Хорошо известно, что все значения $p(0), p(1), \dots, p(39)$ — простые числа. Также известно, что число $\exp(\sqrt{163}\pi)$ очень близко к целому. Оба эти факта связаны с тем, что кольцо целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ имеет однозначное разложение на простые. Задача о нахождении всех мнимоквадратичных полей с тем же свойством была впервые поставлена Гауссом, он же описал девять подходящих дискриминантов. Вопрос о существовании десятого дискриминанта оставался открытым до середины XX века. В данном курсе мы обсудим несколько разных решений данной задачи, опирающихся на различные техники теории чисел от модулярных форм и теории полей классов до методов трансцендентной теории чисел. Также в контексте данной задачи мы обсудим ряд фундаментальных гипотез, включая обобщенную гипотезу Римана и гипотезу Бёрча – Свиннертон-Дайера.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** основы алгебраической теории чисел (числовые поля, их кольца целых, группы единиц, группы классов), комплексный анализ, теория Галуа

**ПРОГРАММА:**

- Квадратичные поля и квадратичные формы. Композиционный закон Гаусса, число классов. Точки Хегнера. $*$ Кубы Бхаргавы.
- Аналитическая формула для числа классов. Теорема Дирихле о простых в арифметических прогрессиях. Теорема Зигеля. $*$ Обобщенная гипотеза Римана, суммы семи кубов.
- Эллиптические функции, эллиптические кривые и модулярные формы. Кривые с комплексным умножением, поля классов. $*$ Простые числа вида $x^2 + ny^2$.
- Решение Хегнера: сведение задачи к диофантовым уравнениям. Решение Бейкера: линейные формы с логарифмами. $*$ Числа классов вещественных квадратичных полей специального вида.
- $*$ $L$-функции эллиптических кривых, аналитический ранг и гипотеза Бёрча – Свиннертон-Дайера. Решение Гольдфельда: эффективная нижняя оценка для числа классов.

**УЧЕБНИКИ:**

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** min(10, Листки$*$0.4 + Экзамен$*$0.6)

## Проективная алгебраическая геометрия
## простой межкампусный дистанционный НИС для 1-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** В течение последних полувека алгебраическая геометрия оказалась в фокусе всей современной математики, и за это время развились мощнейшие технические методы, обеспечившие колоссальное продвижение алгебраической геометрии. Это бурное развитие имело и оборотную сторону, поскольку современные абстрактные методы в значительной мере вытеснили из поля зрения прозрачные геометрические основания этой науки. Эти основания по-прежнему остаются основным объектом исследования, источником всех интуиций в алгебраической геометрии, и потому очень важны. Задача семинара — рассказать о геометрических истоках алгебраической геометрии. Поэтому семинар рассчитан как на студентов-младшекурсников, имеющих совсем элементарный начальный уровень, так и на студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов, которые уже имеют серьезную техническую базу в алгебраической геометрии (однако, и для них знакомство с наглядными геометрическими картинками несомненно будет полезно).

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** нет

**ПРОГРАММА:**

1. Задачи, связанные с теоремами Дезарга, Паппа, Паскаля, и др.
2. Задачи евклидоваой и других геометрий: решение средствами проективной геометрии.
3. Теорема Безу, индексы пересечения, правила Цейтена.
4. Поляры, гессианы, принцип двойственности.
5. Линейные ряды, линейные сечения и проекции, раздутия, джойны, мультисеканты, проективные касательные пространства к многообразиям.
6. Поверхности дель Пеццо, нормmногообразия, квадрики.
7. Детерминантали, многообразия Сегре, Веронезе, их многообразия хорд.
8. Грассманианы, многообразия флагов, индукционная процедура построения грассманианов.
9. Многомерные конфигурации прямых.
10. Замыкания Понселе и задачи классификации векторных расслоений.
11. Пространства «полных» квадрик, «полных» треугольников и задачи исчислительной геометрии.

**УЧЕБНИКИ:**


1. I. V. Dolgachev. Classical algebraic geometry: a modern view. Cambridge, 2011.
2. M. Beltrametti et al. Lectures on Curves, Surfaces and Projective Varieties: A Classical View of Algebraic Geometry. European Math. Soc., Zuerich, 2009.
3. J. G.Semple, J. T. Kneebone. Algebraic projective geometry. Oxford, 1963.
4. J. G. Semple, L. Roth. Introduction to algebraic geometry. Oxford, 1949.
5. Н. А. Глаголев. Проективная геометрия, М., Высшая школа, 1963.
6. Х. С. М. Кокстер. Действительная проективная плоскость. М., Физматгиз, 1959.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 50% за решение домашних задач и 50% за итоговый экзамен, все округления происходят по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

## Риманова геометрия
**простой аудиторный НИС для 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. В. Пенской.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Риманова геометрия — один из важнейших разделов дифференциальной геометрии, изучающий многообразия с заданной римановой метрикой, имеющий многочисленные приложения. Целью курса является овладение римановой геометрией и умением применять ее понятия (связность Леви-Чивиты, геодезические, кривизна, индекс и так далее)

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Анализ на многообразиях, Дифференциальная геометрия (не обязательна, но желательна)

**ПРОГРАММА:**

- Риманова метрика на многообразии. Связности, связность Леви – Чивиты. Тензор кривизны Римана, тензор Риччи, скалярная кривизна.
- Параллельный перенос, геодезические, экспоненциальное отображение, теорема Уайтхеда о нормальной окрестности. Полнота риманова многообразия.
- Римановы подмногообразия, функционалы длины, площади, энергии и так далее. Первая и вторая вариация функционалов, поля Якоби, индекс.
- Связь кривизны и топологии. Римановы накрытия.
- Поверхности. Изотермические координаты, конформный параметр, комплексный язык.
- Изопериметрические неравенства.

**УЧЕБНИКИ:**

- **[B]** Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, Введение в риманову геометрию.
- **[C]** I. Chavel, Riemannian Geometry, A Modern Introduction.
- **[P]** P. Petersen, Riemannian Geometry.
- **[R]** П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0,4 * контрольная работа + 0,1 * работа на семинарах + 0,5 * экзамен

## Симметрические функции
**трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 1-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** Е. Ю. Смирнов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Теория симметрических функций — один из центральных разделов алгебраической комбинаторики. Эта теория, богатая и многообразная сама по себе, также имеет многочисленные применения к теории представлений и алгебраической геометрии, в особенности геометрии однородных пространств: например, многообразий флагов, торических и сферических многообразий. В этом курсе мы в основном сосредоточимся на комбинаторных аспектах теории симметрических функций и изучим свойства многочленов Шура. В теории представлений они возникают как характеры представлений группы $\mathrm{GL}_n$; они также тесно связаны с геометрией грассманианов. Вторая часть курса будет посвящена многочленам Шуберта: это естественное обобщение многочленов Шура, которые определяются как «частично симметрические» функции. Подобно многочленам Шура, они обладают интересной комбинаторной структурой и допускают различные комбинаторные описания; геометрически они возникают как представители классов Шуберта в кольце когомологий многообразия флагов. Если позволит время, мы также обсудим возникающие в $K$-теории неоднородные аналоги многочленов Шура и Шуберта.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Стандартные курсы алгебры и дискретной математики. Знакомство с теорией представлений симметрической и полной линейной группы необязательно, но полезно. Курс будет доступен студентам начиная с третьего курса; второкурсники тоже могут попробовать.

**ПРОГРАММА:**

1. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены, полные симметрические многочлены, двойственность. Многочлены Шура. Симметрические функции.
2. Комбинаторное описание многочленов Шура. Диаграммы Юнга, стандартные таблицы Юнга. Формулы Якоби – Труди. Формулы Пьери.
3. Числа Костки. Произведение и детерминант Коши. Скалярное произведение, ортогональность.
4. Массивы (по Данилову и Кошевому). Операции над массивами, уплотнение. Соответствие РСК. Правило Литтлвуда – Ричардсона.
5. Приложения к теории представлений: представления симметрической группы. Формула Фробениуса для характера, связь с многочленами Шура. Правило ветвления. Правило Мурнагана – Накаямы.
6. Приложения к теории представлений (2): многочлены Шура как характеры представлений полной линейной группы. Разложение тензорных произведений.
7. Многочлены Шуберта. Формула Шевалле – Монка, формула перехода Ласку, теорема Кириллова – Фомина.
8. (если останется время) Обобщения: двойные многочлены Шуберта, симметрические функции Стенли, многочлены Гротендика.
9. (если останется время) q-аналоги симметрических функций. Многочлены Костки-Фулкса, функции Холла-Литтлвуда.

**УЧЕБНИКИ:**

1. William Fulton. Young tableaux, With Applications to Representation Theory and Geometry. CUP, 1997 (есть русский перевод)

2. Laurent Manivel. Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence. Société Mathématique de France, 1998. (есть английский перевод)

3. Ian G. Macdonald. Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd edition. Clarendon Press, 1998. (есть расширенный русский перевод первого издания)

4. Richard Stanley. Enumerative combinatorics, vol.2. CUP, 1999 (есть русский перевод).

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Будет промежуточная письменная контрольная после первого модуля и итоговый экзамен. Их веса составят соответственно 40% и 60% итоговой оценки. Оба экзамена оцениваются из 10 баллов, итоговая оценка вычисляется как их взвешенное среднее, округленное до ближайшего целого.

## Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые системы
## трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. М. Поволоцкий.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** В последние годы обнаружились неожиданные связи между, на первый взгляд, совершенно разными задачами математики и физики. С математической стороны это комбинаторные и вероятностные задачи о системах с большим числом степеней свободы: описание собственных значений матриц со случайными элементами, статистика случайных диаграмм Юнга, замощение различных областей плоскости доминошками или ромбиками, перечисление непересекающихся путей на решётках. С физической стороны это задачи о распространении границ разделов между средами, потоках взаимодействующих частиц, полимерах в неупорядоченных средах и т. д. Ключевое явление здесь — «интегрируемость», влекущая множество красивых и точных математических результатов, столь же общезначимых, как закон больших чисел или центральная предельная теорема. Рассматривая наши случайные системы издалека, мы обнаруживаем, что они имеют совершенно неслучайные предельные формы, случайные отклонения от которых описываются небольшим числом универсальных вероятностных распределений, совершенно не зависящих от деталей исходных систем. Слушатели познакомятся с очерченным кругом вопросов и узнают о последних достижениях в этой области.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Математический анализ, линейная алгебра, теория функций комплексного переменного, теория вероятности.

**ПРОГРАММА:**

1. Распределение собственных значений вигнеровских матриц. Полукруглый закон Вигнера. Метод моментов.
2. Распределение собственных значений коварционных выборочных матриц. Закон Пастура – Марченко. Метод распределения Стильтьеса.
3. Инвариантные матричные ансамбли.
4. Основы теории детерминантных процессов.
5. Определители Фредгольма.
6. Метод ортогональных многочленов.
7. Универсальные распределения: процессы синус, Эйри и Бесселя. Распределения Трейси Уидома.
8. Построение корреляционных ядер в ортогональном и симплектическом ансамблях.
9. Теорема Карлина – Макгрегора. Построение расширенных процессов в задачах о непересекающихся броуновских мостах.
10. Одна задача с разными лицами: рост поверхностей, частицы с отталкиванием, задача о времени перколяции последнего достижения и задача о максимальной возрастающей подпоследовательности случайной перестановки. Соответсвие Робинсона – Шенстеда – Кнута.
11. Теорема Гесселя – Виенно о непересекающихся путях. Подсчет пар таблиц Юнга и процесс Шура.

**УЧЕБНИКИ:**

- М. Л. Мехта. Случайные матрицы.
- P. J. Forrester. Log-gases and random matrices.
- A. Guionnet, G. W. Anderson O. Zeitouni. An Introduction to Random Matrices.
- G. Blower. Random matrices: High dimensional phenomena.
- A. Borodin, V. Gorin. Lectures on integrable probability.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:**

**КОММЕНТАРИЙ:** Раньше курс заказывался программой матфизики.

## Современные проблемы математической логики
### простой межкампусный НИС для 2-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** Математическая логика представляет собой широкий спектр дисциплин, движимых интересом к основаниям математики, а также множеством различных приложений в таких областях как информатика, лингвистика и философия. Данный научно-исследовательский семинар призван познакомить слушателей с различными задачами и проблемами современной математической логики, показать как классические результаты, так и продвижения последнего времени в данной области. Семинар рассчитан на студентов второго курса и старше, но в нем также могут принять участия особо заинтересованные первокурсники.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Знание основ логики и теории множеств в рамках обязательного курса «Логика и алгоритмы» или любого другого логического курса: «Элементы математической логики», «Введение в теорию моделей» и др.

**ПРОГРАММА:** Доклады на семинаре будут касаться таких тем как модальная логика, теория доказательств, лямбда-исчисление, теория индуктивных определений, семантика компьютерных языков и т. п. Возможные темы докладов:

- эпистемические логики,
- циклические выводы в модальной мю-логике,
- формальная арифметика и вторая теорема Гёделя о неполноте,
- логика доказуемости,
- генценовское доказательство непротиворечивости формальной арифметики,
- теоремы Шаврукова об алгебрах доказуемости формальных теорий,
- интуиционистская логика,
- теоремы Руитенбурга для интуиционистской логики,
- игровая семантика для модальной логики Гжегорчика,
- теорема Зиглера о неразрешимости некоторых теорий полей,
- элементы теории типов,
- циклические и нефундированные выводы в арифметике Пеано.

**УЧЕБНИКИ:**

- Справочная книга по математической логике. Ред. Дж. Барвайс.
- Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов (в трех частях).
- С.П. Одинцов, С.О. Сперанский, С.А. Дробышевич. Введение в неклассические логики. Учебное пособие.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Итоговая оценка совпадает с накопленной. Если участник сделал доклад, то его накопленная оценка — 10. Если нет — оценка равна оценке за итоговый коллоквиум.

## Стохастический анализ и его применения в экономике
**трудный НИС на английском языке для 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** А. В. Колесников, В. Д. Конаков.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** На семинаре будут обсуждаться темы, связанные с вероятностными идеями в анализе, в частности, стохастический и бесконечномерный анализ. Из основных приложений планируется обсудить базовые финансовые экономические модели. Основные темы: меры на бесконечномерных пространствах, гауссовские меры, винеровский процесс, стохастические дифференциальные уравнения, диффузии, элементы теории пространств Соболева, исчисление Маллявэна, выпуклая геометрия и вероятность (некоторые открытые проблемы), стохастический анализ на многообразиях.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Математический анализ, дифференциальные уравнения и основы теории вероятностей. Желательно знакомство с основами функционального анализа.

**ПРОГРАММА:**

- Перенос массы, задача Монжа – Канторовича;
- дискретизация и аппроксимация стохастических дифференциальных уравнений;
- модели, построенные на основе процессов Леви;
- теория информации и формула Тьюринга;
- моделирование экстремальных событий в страховании и финансах;
- непараметрические и полупараметрические статистические модели;
- стохастическое моделирование в физике (модели со случайными энергетическими уровнями), биологии (модели деления клеток) и в других естественных науках.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Студенты должны сделать доклад на семинаре, оценка за который совпадает с оценкой за курс.

## Теория Кодирования как введение в Алгебру и Арифметику
**трудный межкампусный аудиторный НИС для 1-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** В. А. Гриценко.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Теория кодирование возникла в 50-е годы XX века. Первые ее задачи состояли в изучении линейного векторного пространства над простейшим полем из двух элементов как метрического пространства. Для построения подпространств с очень специальными метрическими свойствами — кодов — используются различные алгебраические и геометрические методы. Задачи теория кодирования, совершенно естественные по формулировкам, дают новую базу для изучения важнейших алгебраических и геометрических структур. Например, структура корней многочленов над конечными полями (один из основных вопросов теории Галуа) отвечает за существование эффективных циклических кодов. Двойственность линейных пространств сводится к парам двойственных кодов. Геометрические структуры (конечные проективные пространства, лагранжианы бинарного и тернарного векторных пространств) отвечают за автодуальные и совершенные коды. Группы автоморфизмов кодов — это основные конечные простые группы. Цель нашего курса в том, чтобы освоить основные алгебраические конструкции (поля, кольца, модули, фактор-кольца) на примере внешних для алгебры задач теории кодирования.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Знакомство только с основными понятиями алгебры такими как конечномерные векторные пространства, кольца, фактор-кольца, поля, многочлены. Доступен для всех, начиная с мотивированных студентов первого курса.

**ПРОГРАММА:**

1) Бинарное векторное пространство как метрическое пространство, метрика Хэмминга, Разбиение на шары как примеры простейших кодов. Автоморфизмы бинарного метрического пространства.

2) Примеры кодов, линейные коды, совершенные коды.

3) Вопрос «Как задать линейный код?» и двойственность линейных пространств. Двойственность и классический метод Гаусса (в полном объеме) над полем из двух элементов. Автодуальные коды.

4) Конечная проективная плоскость Фано. Конечные геометрии (нерешенные проблемы). Совершенный код Хэмминга. Группа автоморфизмов кода Хэмминга — следующая после $A_5$ некоммутативная простая группа.

5) Описание метрической характеристики линейного кода методами линейной алгебры. Бесконечная серия кодов Хэмминга.

6) Фактор-кольцо по модулю многочлена $x^n-1$ и циклические коды длины $n$. Что есть обобщения кольца вычетов по модулю степени простого числа? Конечные кольца Галуа.

7) Неприводимые многочлены над конечным полем. Как их описать?

8) Как ведет себя классический круговой многочлен $\Phi_n$ над конечным поле? Автоморфизм Фробениуса. Циклотомические орбиты и один из основных результатов теории Галуа над конечным полем (конструктивное доказательство).

9) Определитель Вандермонда как основной инструмент оценки минимальной длины циклического кода.

10) Неожиданности теории конечных колец: задание идеалов идемпотентами.

11) Арифметика квадратичных вычетов, идемпотенты в кольцах Галуа и вычетно-квадратичные коды.

12) Совершенный бинарный код Голея, его структура и свойства. Системы Штайнера и алгебраическая комбинаторика. Группа автоморфизмов кода Голея и исключительные конечные простые группу.

**УЧЕБНИКИ:**


- **[L]** J.H. van Lint, «Introduction to coding theory» Gr. Texts in Mathem., Vol. 86, 1999.
- **[B]** Simeon Ball, «A Course in Algebraic Error-Correcting Codes» Compact Textbooks in Mathematics, Springer, 2020.
- **[K]** M. R. Kibler, «Galois Fields and Galois Rings Made Easy» Elsevier, 2017.
- **[E]** Noam D. Elkies, «Lattices, Linear Codes, and Invariants» Part I. II, Notices of the AMS vol 47 (2000), N 10–11.


**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Вычисляется по формуле: 0.4*Индивидуальные лабораторные работы + 0.3*Индивидуальное письменное решение дополнительных задач + 0.3*Устный коллоквиум. Если индивидуальная работа дает больше 10 баллов, то устный коллоквиум не является необходимым.

## Теория представлений
### трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** Семинар посвящён разбору разных сюжетов из теории представлений полупростых алгебр Ли, алгебры Вирасоро, аффинных алгебр Каца – Муди, квантовых групп и родственных им алгебр. Представления перечисленных алгебр играют центральную роль в конформной теории поля, интегрируемых системах, перечислительной геометрии, маломерной топологии и других разделах математики. Предполагается, что каждый участник семинара какую-то часть программы разберёт самостоятельно и расскажет на семинаре.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** стандартные курсы алгебры, топологии и групп и алгебр Ли.

**ПРОГРАММА:**

- Представления полной линейной группы: двойственность Шура – Вейля.
- Тензорная категория представлений полной линейной группы.
- Алгебра $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ и ее представления.
- Приложения квантовой группы к инвариантам узлов и зацеплений.
- Пространство Фока как представление алгебры Гейзенберга и Вирасоро.
- Аффинные алгебры Каца – Муди и их представления.
- Конструкция Шугавары.
- Фьюжн-произведение.

Более конкретный список тем зависит от возможностей участников.

**УЧЕБНИКИ:** по личной договорённости.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** $0,8 *$ (участие) $+ 0,2 *$ (доклад).

## Уравнения в частных производных
## простой аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛИ:** И. В. Вьюгин, В. В. Чепыжов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Окружающие нас физические явления, все, что мы видим, слышим, осязаем, описывается уравнениями в частных производных. Более точно это означает, что математические модели таких физических процессов, как колебания струны, волны на поверхности воды, звук и электромагнитные колебания, в частности, свет, распространение тепла и диффузия, а также модели многих других явлений природы описываются уравнениями математической физики, которые, как правило, являются уравнениями в частных производных. Наш курс направлен на то, чтобы изучить постановки основных задач для важнейших уравнений математической физики (волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа), а также дать введение в некоторые другие разделы уравнений в частных производных. Теория УрЧП тесно связана с другими разделами математики: с функциональным анализом и теорией функций, топологией, алгеброй, геометрией, комплексным анализом и другими. УрЧП используют основные понятия и методы этих областей математики и, в свою очередь, влияют на их проблематику и направление исследований.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, линейная алгебра

**ПРОГРАММА:**

- Некоторые важные физические задачи, приводящие к УрЧП.
- Основные типы линейных УрЧП второго порядка.
- Постановка основных краевых задач. Теорема Коши-Ковалевской.
- Решение уравнения колебаний струны, формула Даламбера. Метод Фурье решения волновых уравнений. Обобщенные решения уравнения колебаний струны.
- Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций этой задачи. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля.
- Решение уравнение теплопроводности методом Фурье и с помощью преобразования Фурье. Формула Пуассона. Принцип максимума.
- Уравнения и системы УрЧП, корректные по Петровскому.
- Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Распространение волн.
- Эллиптические уравнения. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа.
- Гармонические функции и их свойства. Принцип максимума. Теорема Лиувилля.
- Обобщенные производные и пространства Соболева. Неравенство Фридрихса. Вариационный метод решения эллиптических уравнений
- Распределения и их задание
- Интегрируемость распределения и интегрируемость линейной пфаффовой системы.

**УЧЕБНИКИ:**

- **[V]** В. С. Владимиров, « Уравнения математической физики », М.: Наука, 1988
- **[S]** С. Л. Соболев, «Некоторые приложения функционального анализа в математической физике», М.: Наука, 1988
- **[Il]** А. М. Ильин, «Уравнения математической физики», М.: Физматлит, 2009
- **[Shu]** В. С. Шубин, «Лекции об уравнениях математической физики», М.: МЦНМО, 2003
- **[Ol]** О. А. Олейник, «Лекции об уравнениях с частными производными», М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010
- **[Ev]** Л. К. Эванс, «Уравнения с частными производными», Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003
- **[ShK]** «Сборник задач по уравнениям с частными производными», Под ред. Шамаева А.С. – М.: БИНОМ, 2005
- **[U]** Ф. Уорнер, «Основы теории гладких многообразий и групп Ли», М.: Мир, 1987

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** 0.4*(оценка за коллоквиумы) + 0.3*(оценка за листки) + 0.3*(оценка за семинары)

## Функциональный анализ 2
**трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. Ю. Пирковский.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Функциональный анализ изучает бесконечномерные векторные пространства, снабженные нормой (или, более общим образом, топологией), операторы между такими пространствами и представления алгебраических структур в таких пространствах. Классические разделы функционального анализа — спектральная теория линейных операторов, геометрия банаховых пространств, теория обобщенных функций, теория операторных алгебр и др. К более новым его направлениям относятся некоммутативная геометрия в смысле А. Конна, теория операторных пространств (известная также как «квантовый функциональный анализ») и локально компактные квантовые группы. Функциональный анализ имеет многочисленные приложения в теории дифференциальных уравнений, гармоническим анализе, теории представлений, геометрии, топологии, вариационном исчислении, оптимизации, квантовой физике и т.д.

В этом курсе планируется обсудить разделы функционального анализа, посвященные достаточно общим классам линейных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах. В частности, это означает, что мы не будем рассматривать, например, дифференциальные операторы, поскольку их теория может быть адекватно представлена лишь в отдельном специальном курсе. Вместо этого мы сконцентрируемся на тех сюжетах, которые подчеркивают роль алгебраических методов в функциональном анализе. Выбор сюжетов из приведенной ниже программы будет сделан из соображений минимизации пересечений с осенним курсом «Функциональный анализ – 1».

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Анализ, линейная алгебра, метрические пространства, интеграл Лебега, основы функционального анализа (например, в объёме осеннего курса Введение в функциональный анализ: банаховы и гильбертовы пространства, ограниченные линейные операторы). Курс доступен студентам начиная со 2 курса.

**ПРОГРАММА:**

1. Двойственность для банаховых пространств.
2. Банаховы алгебры и элементарная спектральная теория.
3. Фредгольмовы операторы. Теория Рисса – Шаудера. Общая теория индекса.
4. Топологические векторные пространства. Слабые топологии.
5. Коммутативные банаховы алгебры. Преобразование Гельфанда. Коммутативная теорема Гельфанда – Наймарка.
6. Спектральная теория нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Спектральная теорема.

**УЧЕБНИКИ:**

## Список литературы


[1] A. Ya. Helemskii. *Lectures in Functional Analysis*. MCCME, 2004 (in Russian). English transl.: AMS, 2006.

[2] V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. *Real and Functional Analysis*. RCD, 2011 (in Russian). English transl.: Springer, 2020.

[3] A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. *Theorems and problems in Functional Analysis*. Moscow, Nauka, 1979 (in Russian). English transl.: Springer, 1982.

[4] B. Simon. *Real Analysis. (A comprehensive course in Analysis, Part 1).* AMS, 2015.

[5] B. Simon. *Operator Theory. (A comprehensive course in Analysis, Part 4).* AMS, 2015.

[6] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis.* Academic Press, 1972. Russian transl.: Mir, 1977.

[7] V. M. Kadets. *A course in functional analysis*. Khar'kov. Nats. Univ. im. V. N. Karazina, Kharkiv, 2006 (in Russian). English transl.: Springer, 2018.

[8] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1991. Russian transl.: Lan', 2005.

[9] J. B. Conway. *A course in Functional Analysis.* Springer, 1990.

[10] A. Yu. Pirkovskii. *Spectral theory and functional calculi for linear operators*. MCCME, 2010 (in Russian). https://www.mccme.ru/free-books/pirkovsky/pirkovsky-spectral.pdf.

[11] A. Yu. Pirkovskii. *Lecture notes in functional analysis*. Unfinished and unpublished lecture notes (HSE, 2011/2012, in Russian). http://vyshka.math.ru/1112/funcan.html.

[12] G. Murphy. *$C^*$-algebras and operator theory*. Academic Press, 1990. Russian transl.: Factorial, 1997.

[13] R. Meise and D. Vogt. *Introduction to Functional Analysis*. Clarendon Press, 1997.

[14] F. Treves. *Topological vector spaces, distributions, and kernels*. Academic Press, 1967.


## Порядок оценивания:

- The final grade is calculated by the formula

$$\text{final grade} = 0.7 \times (\text{cumulative grade}) + 0.3 \times (\text{exam grade}).$$

- The cumulative grade is calculated by the formula

$$\text{cumulative grade} = 0.5 \times (\text{midterm grade}) + 0.5 \times (\text{exercise sheets grade}).$$

- The oral exam will be at the end of May and will include only the material of the 4th module.
- The midterm exam (also oral) will be in the 2nd half of March and will include only the material of the 3rd module.
- To get the maximum grade for the exercise sheets, you should solve 75% of all the exercises. If you solve more, you will earn bonus points.
- You can also earn bonus points for working actively at the exercise classes and for solving «bonus exercises» (marked as «**B**» in the sheets).

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**
**трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. Ю. Пирковский.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** два семестра 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

**ОПИСАНИЕ:** Студенты, участвующие в семинаре, делают доклады по функционально-аналитическим аспектам некоммутативной геометрии. Доклады, относящиеся к некоммутативной алгебраической геометрии или к «чистому» функциональному анализу (предпочтительно с алгебраическим или геометрическим ароматом), также приветствуются. Темы для докладов обычно берутся из литературы, но иногда участники рассказывают о своих собственных результатах. Время от времени с докладами выступают руководитель семинара и приглашенные докладчики.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Участники семинара должны знать основы алгебры и функционального анализа (в объёме стандартных вводных курсов матфака ВШЭ) и любить какую-нибудь разновидность геометрии или топологии.

**ПРОГРАММА:**

**УЧЕБНИКИ:** 1. A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.

2. A. Connes, M. Marcolli. Noncommutative geometry, quantum fields and motives. AMS, 2008.

3. L. L. Vaksman. Quantum bounded symmetric domains. AMS, 2010.

4. M. A. Rieffel. Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^d$. Mem. Amer. Math. Soc. 106 (1993), no. 506.

5. J. Cuntz, R. Meyer, J. Rosenberg. Topological and bivariant K-theory. Birkh”auser, 2007.

6. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov. Foundations of free noncommutative function theory. AMS, 2014.

7. M. Kashiwara, P. Schapira. Deformation quantization modules. Astérisque No. 345 (2012).

8. K. A. Brown, K. R. Goodearl. Lectures on algebraic quantum groups. Birkh”auser, 2002.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Для получения положительной оценки достаточно сделать хотя бы один доклад на семинаре. Оценка будет зависеть от качества доклада.

**Функциональный Интеграл: от стохастических процессов к квантовой теории**
**простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. Г. Семёнов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Одним из мощнейших методов современной теоретической физики является метод функционального интегрирования или, интегрирования по траекториям. Основы данного подхода были заложены Н. Винером ещё в начале XX века, однако наибольшую известность он получил после того, как Р. Фейнман применил данный подход в квантовой механике. В настоящее время функциональный интеграл нашел своё применение в теории случайных процессов, физике полимеров, квантовой и статистической механике и даже в финансовой математике. Несмотря на то, что в ряде случаев его применимость математически строго пока не доказана, данный метод позволяет с удивительным изяществом получать точные и приближённые решения различных интересных задач. Курс посвящён основам данного подхода. На примере стохастических дифференциальных уравнений будут рассказаны основные идеи данного подхода, а так же различные способы точного и приближённого вычисления функциональных интегралов. Далее, в зависимости от интересов аудитории, будет рассказано о различных применениях данного подхода, таких как физика полимеров, квантовая механика, финансовая математика и др. При наличии времени будет дан обзор более продвинутых сюжетов в данной области, в том числе, интегрирование по грассмановым переменным, вычисление функциональных детерминантов операторов и др.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** базовые курсы анализа, ТФКП, теории вероятностей, классической механики. Желательно, но не обязательно: классическая теория поля, статистическая механика, квантовая механика.

**ПРОГРАММА:**

1. Стохастические дифференциальные уравнения и случайные процессы.
2. Производящий функционал. Марковский ($\delta$-коррелированный) и Гауссов случайные процессы.
3. Вероятность перехода и ее представление в виде функционального интеграла.
4. Вычисление простейших функциональных интегралов.
5. Броуновское движение и Винеровский интеграл.
6. Связь с уравнением Фоккера – Планка, исчислениями Ито и Стратоновича.
7. Гауссовы функциональные интегралы и теорема Гельфанда – Яглома.
8. Приближенное вычисление функционального интеграла.
9. Применение функционального интеграла в квантовой механике, физике полимеров и финансовой математике.
10. Дальнейшее развитие идей.

**УЧЕБНИКИ:**


1. Chaichian M., Demichev A. Path integrals in physics. Vol. 1: Stochastic processes and quantum mechanics. 2001.
2. Kleinert H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. 2004.
3. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. 1976.
4. Семенов А. Г. О случайном блуждании «пьяной компании». Теор. и математ. физика 2016 Т. 187 №. 2 с. 350–359.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** итоговая оценка равна $0.7\,H + 0.3\,E$, где $H$ — средняя оценка по всем домашним контрольным в семестре, а $E$ — оценка за экзамен. Округление в меньшую сторону, но на экзамене есть возможность для повышения оценки путём обсуждения и решения задач.

**КОММЕНТАРИЙ:** Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика». Тем ни менее он достаточно прост и может быть освоен студентами начиная с третьего курса бакалавриата. А некоторые продвинутые студенты смогут освоить его и на втором курсе.

## Характеристические классы и многочлены Тома
## трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** М. Э. Казарян.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Характеристические классы выражают топологические препятствия для тривиальности векторных или более общих локально тривиальных расслоений. Инструмент характеристических классов используется во многих областях математики и математической физики, от классификации многообразий до решения исчислительных задач проективной комплексной геометрии. Основной упор курса будет сделан на приложениях к решению конкретных задач. Среди разнообразных вычислительных методов будут, в частности, освоены метод универсальных многочленов Тома и формула локализации.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Теория гомологий в рамках курса «Введение в алгебраическую топологию», умение вычислять когомологии простейших пространств (сферы, поверхности с ручками, вещественные и комплексные проективные пространства) и знание кольцевой структуры на них. Желательно хотя бы приблизительное знакомство с теорией особенностей (критические точки, типы особенностей).

**ПРОГРАММА:**

- Понятие характеристического класса расслоения. Локально тривиальные расслоения, структурная группа, главные $G$-расслоения. Понятие характеристического класса. Первые примеры: класс Эйлера и класс Штифеля – Уитни.
- Классифицирующее пространство для $G$-расслоений. Эквивалентность понятий абстрактного $G$-расслоения и главного $G$-расслоения. Универсальное свойство классифицирующего пространства. Существование и единственность. Конструкция Милнора.
- Классы Черна комплексных векторных расслоений. Первый класс Черна линейного расслоения. Определение старших классов Черна. Формула Уитни и принцип расщепления.
- Исчисление Шуберта. Аддитивные и мультипликативные образующие когомологий грассманиана. Классы Шуберта. Формулы Пьери и Джамбелли, правило Литлвуда – Ричардсона.
- Эквивариантное интегрирование. Эквивариантное продолжение классов когомологий. Эквивариантное интегрирование и гомоморфизм Гизина.
- Применение исчисления Шуберта для решения исчислительных задач проективной геометрии. Исчисление коник и квадрик, перечисление прямых и плоскостей с геометрическими ограничениями и другие примеры.
- Отображения и их особенности. Многочлены Тома типов особенностей, их вычисление, свойство стабилизации. Примеры вычисления и применения к исчислительным задачам.

**УЧЕБНИКИ:** Дж. Милнор, Дж. Сташеф. Характеристические классы. М.: «Мир», 1979. У. Фултон. Теория пересечений. М.: «Мир», 1989.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Вычисляется по формуле $\min(0.4\,M + 0.6\,E + H,\ 10)$, где $M$ и $E$ — оценки по дестибалльной шкале промежуточной контрольной работы и итогового экзамена, соответственно, а $H$ — дополнительные поощрительные 1-3 балла за решение домашних задач. И контрольная, и экзамен письменные, состоят в решении задач.

## Цепи Маркова
**простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше**
**(see also description in English)**

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. Дымов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Простейший случайный процесс — последовательность независимых испытаний (экспериментов). Область применения таких процессов весьма ограничена, так как на практике испытания очень часто оказываются зависимыми. Марковские цепи — простейшие случайные процессы, состоящие из последовательных зависимых испытаний, в которых результат следующего испытания зависит только от результата последнего проведенного испытания, но не зависит от результатов предыдущих испытаний. Другими словами, «будущее зависит только от настоящего, но не зависит от прошлого». Цепи Маркова имеют глубокую и красивую, но в то же время достаточно простую математику. Благодаря своей удивительной эффективности в приложениях к задачам из различных областей — математики, физики, компьютерных наук, биологии, экономики и др. — они составляют, возможно, самый важный класс случайных процессов. Курс является введением в теорию марковских цепей. Мы обсудим их наиболее важные свойства и некоторые известные приложения.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** Стандартные курсы линейной алгебры и анализа первого года обучения. Если у вас был курс теории вероятностей — вам будет проще, однако он не обязателен: все необходимые сведения будут сообщены.

**ПРОГРАММА:**

1. Марковские цепи с конечным множеством состояний.
2. Примеры.
3. Стационарные состояния и их существование. Метод Боголюбова – Крылова.
4. Эргодическая теорема для цепей Маркова, имеющих эргодическую матрицу переходных вероятностей.
5. Приложения эргодической теоремы. Закон больших чисел для цепей Маркова. Алгоритм Page Rank (Google). Алгоритм Метрополиса – Хастингса.
6. Теорема Перрона – Фробениуса.
7. Топологическая структура цепей Маркова с конечным множеством состояний.
8. Периодические марковские цепи.
9. Апериодические марковские цепи. Эргодическая теорема для неприводимых апериодических цепей Маркова.

**УЧЕБНИКИ:**

- А.Н. Ширяев, «Вероятность».
- Л.Б. Коралов, Я.Г. Синай, «Теория вероятностей и случайных процессов»

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** $(C+E)/2$, где $C$ обозначает накопленную оценку, а $E$ — оценку за экзамен

**КОММЕНТАРИЙ:** курс будет прочитан на английском при наличии не говорящих на русском участников.

## Элементы количественного анализа в экономике
## простой межкампусный аудиторный НИС для 2-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** И. Б. Воскобойников.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Математические методы лежат в основе решения большинства современных задач прикладного экономического анализа. Это обеспечивает математику широкие возможности для профессиональной реализации в разработке и применении методов прикладного экономического анализа. Однако успех в этом направлении связан не только со способностью решать чётко поставленные математические задачи. Необходимы также навыки формальной постановки экономической задачи, а также перевода её формального математического решения на язык, понятный экономистам — ясный с точки зрения экономической теории и поддающийся восприятию на уровне экономической интуиции. Курс предполагает рассмотрение простых установочных примеров из разных областей экономического анализа, в которых успешно реализованы все три этапа — формальная постановка сложной экономической задачи, её математическое решение и ясная экономическая интерпретация полученного результата. Семинар призван продемонстрировать, как математический аппарат помогает выявлять экономические механизмы рассматриваемых явлений, в четырёх взаимосвязанных областях — теории индексов, эконометрике, анализе эффективности и производительности, а также в анализе межотраслевых связей на основе таблиц «затраты-выпуск».

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:**

- Обязательными требованиями для успешного освоения курса являются стандартные курсы математического анализа и линейной алгебры.
- Желательно знакомство с элементами теории вероятностей и математической статистики.
- Все необходимые сведения по экономической теории, эконометрике, а также основам работы в пакете Stata, будут даны на занятиях.

**ПРОГРАММА:**

- Экономические индексы цен и количеств. Аксиоматический и экономико-теоретический подходы к построению экономических индексов. Свойства экономических индексов.
- Элементы эконометрики. Регрессионный анализ в задачах построения индексов постоянного качества.
- Примеры методов оптимизации. Задачи анализа эффективности и производительности.
- Основы анализа межотраслевых взаимодействий с использованием таблиц «Затраты-Выпуск».

**УЧЕБНИКИ:**

- Берндт, Эрнст. 2005. Практика эконометрики: классика и современность. Зарубежный учебник. Москва: ЮНИТИ-ДАНА.
- Магнус, Я.Р., П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. 2021. Эконометрика. Начальный курс. 9-е изд. испр. ed. Учебники Президентской академии. Москва: Издательский дом «Дело».
- Adkins, Lee C., and R. Carter Hill. 2018. Using Stata. For Principles of Econometrics. 5th ed. Wiley.
- Allen, R.G.D. 2008. Index Numbers in Economic Theory and Practice. AldineTransaction.

- Coelli, Timothy J., D. S. Prasada Rao, Christopher J. O'Donnell, and George E. Battese. 2005. An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. 2nd ed. New York: Springer.
- Hill, R. Carter, W.E. Griffiths, and G.C. Lim. 2018. Principles of Econometrics. 5th ed. John Wiley & Sons.
- Miller, Ronald E., and Peter D. Blair. 2009. Input-Output Analysis. Foundations and Extensions. 2nd ed. Cambridge University Press.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Оценка складывается складывается из двух оценок — за практическое задание с весом 50% и контрольную работу с весом 50%.

## ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
## трудный межкампусный курс для студентов 1-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. В. Кудинов.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** осенний семестр 2022/23 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

**ОПИСАНИЕ:** Математическая логика изучает основания математики, принципы построения формальных математических теорий и их свойства, а также теорию алгоритмов. Базовых понятий математической логики, является необходимым для изучения любой другой математической дисциплины. Знания основных принципов, возможностей и ограничений формального построения математической теории позволяет более глубоко понять многие теоремы алгебры, математического анализа, топологии и других математических дисциплин. В этом курсе студенты познакомятся с основными принципами построения формальных систем, изучат их свойства, семантику и научатся доказывать основные теоремы, такие как теоремы о корректности и полноте. Формальные системы будут изучаться на примере классической, интуиционистской и модальной пропозициональных логик.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** нет.

**ПРОГРАММА:**

- Булевы формулы, индуктивное определение. ДНФ, КНФ, теорема Поста.
- Тавтологии и эквивалентности. Булевы алгебры. Теорема Стоуна о представлении булевых алгебр
- Аксиомы исчисления высказываний. Формальное определение вывода, как математической модели доказательства.
- Теорема о дедукции. Противоречивость.
- Независимость аксиомы исключенного третьего и многозначная логика.
- Теорема о полноте исчисления высказываний.
- Теорема о компактности и ее следствия.
- Интуиционистская логика: история, аксиоматика.
- Семантика Крипке интуиционистской логики и теорема корректности.
- Полнота интуиционистской логики относительно семантики Крипке.
- Модальная логика, язык и семантика Крипке.
- Корректность модальной логики относительно семантики Крипке.
- Булевы алгебры с оператором, как семантика модальной логики.
- Теорема о канонической модели и теорема о полноте.

**УЧЕБНИКИ:**

- Верещагин Н. К., Шень А. «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств.» М.: МЦНМО, 2012.
- Верещагин Н. К., Шень А. «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления.» М.: МЦНМО, 2012.

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Вычисляется по формуле $0,6H+0,4E$, где $H$ — средняя оценка за домашние задания, $E$ — оценка за устный экзамен.

## Элементы стохастической динамики
## простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

**ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:** А. С. Ильин.

**УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА:** весенний семестр 2022/23 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

**ОПИСАНИЕ:** Стохастические динамические системы возникают в самых разных областях — от теоретической физики и астрофизики до экономики и финансовой математики. Основным инструментом исследования таких систем является теория стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Однако при изучении СДУ студенты быстро сталкиваются со странной ситуацией. Курсы, читаемые физикам-теоретикам и математикам, отличаются уже на уровне определения СДУ, в результате одинаково написанные уравнения для физиков и математиков имеют совершенно разный смысл. Основная причина этого несоответствия кроется вовсе не в разном уровне строгости изложения. Вкратце, причина заключается в различном порядке взятия пределов: в курсах, ориентированных на физические приложения $dt$ стремится к нулю раньше корреляционного времени, а в курсах, обслуживающих финансовую математику, приращение $dt$ всегда больше корреляционного времени. Порядок взятия пределов зависит от конкретных задач, стоящих перед исследователями, однако, в результате оказывается, что «физические» СДУ гораздо больше похожи на обычные диффуры, а «математические» СДУ больше похожи на разностные (или интегральные) уравнения. В нашем курсе мы собираемся рассмотреть оба предельных случая в рамках одного подхода.

Изложение будет вестись на относительно элементарном языке корреляционных функций и их производящих функционалов, что позволит в дальнейшем плавно перейти к изучению технически более сложных конструкций квантовой теории поля и статистической физики с одной стороны и финансовой математики с другой. Мы начнём с обсуждения элементарных вещей: непрерывных случайных величин, плотности вероятности, статистических моментов, характеристических функций и связных моментов (куммулянтов) случайных векторов. Они позволяют легко и изящно изложить закон больших чисел, ЦПТ и принципы больших отклонений. Случайная функция (случайный процесс, случайное поле) вводится как естественное обобщение случайного вектора на бесконечномерный случай. Мы обсудим понятия корреляционного времени, корреляционного масштаба, дельта-процессов. Подробно изучим Пуассоновский и Гауссовский случайные процессы, теорему Вика, принципы расщепления корреляций, закон больших чисел и ЦПТ для случайных процессов с конечным корреляционным временем. Далее рассмотрим стохастические дифференциальные уравнения с аддитивным шумом (диффузия) и мультипликативным шумом (системы с перемежаемостью). В качестве интересного примера, обсуждается парадоксальное поведение статистических моментов в системах с мультипликативным шумом и поясняется значение редких «катастрофических» событий для жизни таких систем. Далее мы рассмотрим формализм Фейнмана – Каца, который позволяет изучать параболические дифференциальные уравнения в частных производных с помощью континуального интегрирования по мере Винера. Этот формализм широко используется в современной квантовой теории, поэтому знакомство с ним важно для каждого культурного математика. В процессе изучения этого формализма мы рассмотрим понятия интегралов Ито и Стратоновича и поговорим про красивую задачу под названием «стохастическое квантование». В заключении курса мы коснемся технически довольно сложной, но также чрезвычайно красивой теории континуальных произведений случайных матриц. Эти произведения естественным образом возникают при решении линейных матричных стохастических уравнений с мультипликативным шумом и используются в теории турбулентного транспорта, стохастической гидродинамике, экономике и т.д.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА:** линейная алгебра и матанализ; желательно знакомство с основами теории вероятности и дифференциальными уравнениями, однако все нужные факты будут напоминаться на лекциях.

**ПРОГРАММА:**

- Конечномерные случайные векторы. Производящие функции моментов и связных моментов. Кумулянты. Гауссовы случайные векторы. Теорема Марцинкевича. Закон больших чисел. ЦПТ. Теория больших уклонений. Функция Крамера. Мультипликативный закон больших чисел. Произведения случайных матриц. Спектр Ляпунова.
- Случайные процессы. Производящие функционалы. Корреляционное время. Эргодичность. Гауссовы процессы. Теорема Вика. Пуассоновский процесс. ЦПТ. Большие уклонения. Дельта-процесс. Марковский процесс.
- Стохастические дифференциальные уравнения. Аддитивный и мультипликативный шум. Перемежаемость. Уравнение Ланжевена. Процесс Винера. Процесс Орнштейна – Уленбека.
- Расщепление корреляций. Формула Фурутцы – Новикова. Кинетические уравнения. Уравнение Фоккера – Планка.
- Мера Винера. Континуальное интегрирование. Формализм Фейнмана – Каца. Интегралы Ито и Стратоновича. Евклидово уравнение Шредингера. Амплитуды перехода как условные средние по мере Винера. Стохастическое квантование. Квантовый осциллятор. Критерий существования растущих мод параболических уравнений.
- Если позволит время: Континуальные произведения случайных матриц. -экспонента случайного матричного процесса. Спектр Ляпунова.
- Если позволит время: Турбулентность. Теория Колмогорова. Турбулентный транспорт. Теория Крайчнана – Казанцева.

**УЧЕБНИКИ:**

**[B]** В. Кляцкин, «Динамика стохастических систем».

**[GM]** Б. Оксендаль, «Стохастические дифференциальные уравнения»

**ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:** Итоговая оценка вычисляется по формуле $\min(10, \lceil S+C+E \rceil)$, где $\lceil * \rceil$ означает округление вверх, а вещественные числа $S, C, E \in [0, 5]$ суть оценки за сдачу листков ($S$), за проводимые на семинарах самостоятельные работы ($C$) и за устный экзамен ($E$). Если перед итоговым экзаменом выполняется условие $\min(10, \lceil S + C \rceil) \geqslant 8$, то эта отметка по желанию студента может быть поставлена в качестве итоговой без экзамена.

**КОММЕНТАРИЙ:** Курс читается на русском языке.

## Course descriptions in English

Listed in this section are the courses that will be given in English if required (e.g., if some students do not understand Russian). All these courses will be equipped with printed matter in English.

### Algorithms as math research
**simple inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** D. A. Shmelkin.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** The HSE Math. faculty students have a rich choice of course available including several semesters on Algorithms at other faculties of HSE and at Yandex Data Analysis School. When choosing among these opportunities, one should take into account the goal of the proposed course, which consists in showing how math works in algorithms using limited time and minimal programming skills. This approach would be convenient for those who are still considering Computer Science as a potential direction.

**PREREQUISITES:** Mathematical prerequisites are minimal and include foundation of mathematics at the level of high school. The participants should be ready to implement programs in Python, or better C++. However, the programming language requirements are minimal and what is lacking can and will be learned while solving problems. A personal computer, preferably a notebook is mandatory.

**SYLLABUS:**

- Initial examples of algorithmic problems. The concept of algorithm and problem complexity. Low complexity bounds. Skills: algorithms with number sets, complexity estimation.
- Standard data structures: array, stack, queue, list, binary tree, hash table. Skills: implementation of some methods for data structures and ability to choose a suitable data structure for an algorithm.
- Graphs and graph walks. Breadth first search and applications (connected components, minimal spanning tree, shortest paths and generalizations). Skills: solving algorithm on graph problems by building a data structure and applying BFS.
- Oriented graphs and partial orders on sets. Depth first search. Topology sorting, strongly connected components, finding all oriented cycles. Skills: extending a preorder to an indexing.
- Network flows. Algorithms for maximal flow and minimal cut in a network. Multi-commodity flows, algorithms to find the maximal concurrent flow. Skills: solving different problems by reducing to maximal flow problem.
- Greedy algorithms and their applicability. Matroids and submodular functions. Examples (MST, knapsack problem, optimal timetables). Skills: to see problems admitting a greedy algorithm..
- Workshop on NP-hard problem solving. It includes heuristics methods, approximate algorithms, and brute force search treated scientifically by some technics such as Branch-and-Bound method. Every student will get a problem for a comprehensive analysis and report.

**TEXTBOOKS:**

- T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest «Introduction to Algorithms»
- S.Dasgupta, C. Papadimitriou, U. Vazirani «Algorithms»
- B. Korte, K. Vigen «Combinatorial optimization. Theory and Algorithms»

**GRADING RULES:** Three summands of the score are: score for the regularly announced exercises in problem solving, including the programming and final workshop, with 50% weight; score for written control work at the end of the 3rd module, with 20% weight; score for the written exam at the end of the course, with weight 30%.

## Cluster Poisson Varieties
**advanced inter-campus project for 2nd year students and higher**

**TEACHER:** V. G. Gorbounov.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** Cluster varieties introduced by Fomin and Zelevinsky are commutative rings with unit and no zero divisors equipped with a distinguished family of generators (cluster variables) grouped in overlapping subsets (clusters) of the same cardinality connected by exchange relations. Originally they were introduced in an attempt to create an algebraic and combinatorial framework for the study total positivity in semisimple groups. In the case of $\mathrm{GL}_n$ the notion of total positivity coincides with the classical one, first introduced by Gantmakher and Krein. Since then, the theory of cluster algebras has witnessed a spectacular growth due to the many links that have been discovered with a wide range of subjects including representation theory of quivers and finite-dimensional algebras and categorification; discrete dynamical systems based on rational recurrences; Teichmuller and higher Teichmuller spaces; combinatorics and the study of combinatorial polyhedra; commutative and non-commutative algebraic geometry, projective configurations and their tropical analogues, the study of stability conditions in the sense of Bridgeland, Donaldson – Thomas invariants; Poisson geometry and theory of integrable systems. The purpose of the course is to give an introduction to the theory of cluster poisson varieties.

**PREREQUISITES:** Courses in algebra and topology.

**SYLLABUS:**

1. Totally positive matrices. Whitney theorem. Fekete criteria.
2. Bruhat cells. Symmetric group and the length function.
3. Bruhat cells in the unipotent group and its positive parametrization.
4. Matrix product as a concatenation of graphs. Planar networks. Lindstrom – Gessel – Viennot lemma.
5. The cluster algebra structure on the unipotent group and the Plucker relations.
6. The new positivity criteria defined by the cluster algebra structure.
7. Examples of the cluster algebra structure in geometry.
8. Poisson algebras. Poisson algebra structure on the matrix group.
9. Poisson structure on the set of networks.
10. Custer Poisson algebras.

**TEXTBOOKS:**

**GRADING RULES:** The exam will consists of a presentation of a topic from the course.

## Combinatorics of invariants

**simple inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher**

**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHERS:** M. E. Kazarian, S. K. Lando.

**LEARNING LOAD:** two terms of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

**DESCRIPTION:** This students' research seminar is devoted to combinatorial problems arising in knot theory. The topics include finite order knot invariants, graph invariants, matroids, delta-matroids, integrable systems and their combinatorial solutions. Hopf algebras of various combinatorial species are studied. Seminar's participants give talks following resent research papers in the area and explaining results of their own.

**PREREQUISITES:** no.

**SYLLABUS:**

1. Knots and their invariants.
2. Knot diagrams and chord diagrams.
3. 4-term relations for chord diagrams, graphs, and delta-matroids.
4. Weight systems.
5. Constructing weight systems from Lie algebras.
6. Hopf algebras of graphs, chord diagrams and delta-matroids.
7. Combinatorial solutions to integrable hierarchies.
8. Khovanov homology.

**TEXTBOOKS:**

1. S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy. CDBook. CUP, 2012.
2. S. Lando, A. Zvonkin. Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004.

**GRADING RULES:** Regular participation in the seminar is necessary for marking. However, the participation only can not contribute more than 8 points. For getting a higher score, you have to give a talk either on resent actual papers or on your own results in scientific directions of the seminar.

## Continuous-Time Games
**simple inter-campus offline seminar for 2nd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** M. S. Panov.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** Continuous-time game-theoretic models have become increasingly popular among economic theorists in the last two decades. In many cases, modeling economic phenomena with continuous-time games can considerably expand our understanding beyond what could be achieved with conventional discrete-time tools. Unlike their discrete-time counterparts, continuous-time models allow one to express equilibrium objects as solutions to partial differential equations or stochastic differential equations, which can then be readily found either analytically or numerically. In this course, we will study the most recent developments in this area of research.

**PREREQUISITES:** partial differential equations, probability theory, and stochastic processes.

**SYLLABUS:**

- Dynamic games in discrete time. The Abreu approach and the APS algorithm.
- Extensive-form games in continuous time.
- Differential games.
- Brownian motion and stochastic calculus.
- The principal-agent model.
- Games with imperfectly-observable actions.
- Markov equilibria.
- Agreements of continuous-time games: deterministic games.
- Agreements of continuous-time games: stochastic games.

**TEXTBOOKS:**

- Harrison, J.M., «Brownian Models of Performance and Control»;
- Karatzas, I and Shreve, S. E., «Brownian Motion and Stochastic Calculus»;
- «Oksendal, B, «Stochastic Differential Equations».

**GRADING RULES:** The final grade, $F$, will be computed as $F = 0.3 * S + 0.3 * P + 0.4 * E$, where $S$ is the grade for solving problems from the course problem list; $P$ is the grade for the in-class presentation; $E$ is the grade for the final oral exam.

## Discrete Integrable Equations And Their Reductions
**advanced inter-campus offline seminar for $3^{rd}$ year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** A. K. Pogrebkov.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits.

**DESCRIPTION:** The creation and development of the theory of integrable equations is one of the main achievements of mathematical physics. Currently, the ideas and results of this theory penetrate into many branches of mathematics: from string theory to the theory of Riemann surfaces. Recently, considerable attention has been paid to the theory of discrete integrable equations. These lectures will present a general approach to the construction and study of such equations.

**PREREQUISITES:** mathematical analysis, elements of functions of complex variable, linear algebra, theory of linear partial differential equations

**SYLLABUS:** Introduction. Commutator identity and linear equation on an associative algebra. Operator realization of elements of an associative algebra. Symbol of operator B. Dressing procedure. Hirota difference equation. Jost solution. Direct problem: Green's function and Jost solution. Properties of the Jost solutions. Time evolution and Inverse problem. Integrals of motion. Higher Hirota difference equations. $(1+1)$-dimensional reductions of the HDE.

**TEXTBOOKS:** F. Calogero and A. Degasperis. «Spectral transform and solitons: Tools to solve».

**GRADING RULES:** The final grade is computed as 0.3 (theoretical activity during semester) + 0.7 (final exam), all grades are rounded to the nearest integer, half-integers are rounded upwards.

## Discrete Optimization and Integer Programming
**simple inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** D. I. Arkhipov.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits.

**DESCRIPTION:** Each of us constantly makes schedules. We optimize our time: make plans for the weekend, choose the best route to get from one metro station to another. Is it difficult to create a schedule for a faculty or a sports league, given the many requirements and wishes? And what about optimization of the data center with thousands of servers, a seaport or a railway network of a large country? In this course we will formulate what challenges mathematicians face in the modern world, when the size of data that influences decision-making is growing faster than computing capabilities. After completing the course you will learn how to build mathematical models of optimization problems of varying complexity and solve them using solvers based on integer and linear programming methods. The course is not limited to the practice of problem solving, you will get acquainted with the basic concepts and classical algorithms of optimization methods, as well as the main aspects of the theory underlying the software that helps to make decisions in the modern world.

**PREREQUISITES:** There are no strict restrictions on previously completed courses.

**SYLLABUS:**

- Problems of unconditional and conditional optimization. Method of Lagrange multipliers.
- Complexity theory of conditional optimization problems. Relation of classes P and NP.
- Theory of duality. Optimality Conditions and Duality in Problems of Linear and Quadratic Programming.
- Numerical optimization methods. Newton's method. Conjugate gradient method.
- Linear programming, direct and dual simplex methods. Statement and solution of problems using LP-solvers.
- Integer points of polyhedra. Integer linear programming. The branch and bound method. Statement and solution of problems using MILP-solvers.
- Multi-criteria optimization. The set of Pareto optimal solutions.
- Partial order on vector space. The cone of dominance. Stability problem, Edgeworth – Pareto hull.

**TEXTBOOKS:**

- **[KV]** B. Korte, J. Vygen, «Combinatorial Optimization. Theory and Algorithms».
- **[SCO]** A. Schriver «Combinatorial Optimization».
- **[SLP]** A. Schriver «Theory of Linear and Integer Programming».
- **[W]** L. Wolsey «Integer Programming».
- **[JL]** M. Junger, T. M. Liebling et al. «50 Years of Integer Programming 1958-2008: From the Early Years to the State-of-the-Art».

**GRADING RULES:** $0.6H + 0.4E$, where $H$ and $E$ are marks on a 10-point scale for homework and an exam respectively.

**COMMENTS:** Курс от Huawei R&D. Руководители: Архипов Дмитрий, Поспелов Алексей, Лавров Алексей.

## Foundations of game theory
**simple inter-campus offline seminar for 2nd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** M. S. Panov.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** The theory of games was first formulated by John von Neumann and Oskar Morgenstern in the book published in 1944. Since then, game theory has been extensively developed by mathematicians, social scientists, computer scientists, and evolutionary biologists. Game-theoretic tools have become indispensable in many applied fields. In this course, we will discuss various game-theoretic solution concepts that have been proposed, outline their scope of applicability, their weaknesses and strengths.

**PREREQUISITES:** Standard course of logic.

**SYLLABUS:**

- Cooperative games. Core and stable set.
- Bayesian decision theory. Lexicographic probability.
- Static games. Zero-sum games. Nash equilibrium. Rationalizability and Iterative Admissibility.
- Dynamic games. Subgame perfection and backwards induction. The Abreu approach.
- Epistemic game theory: the partition model and the type-structure model.
- Epistemic game theory: the multi-person decision model.
- The Kohlberg-Mertens stability. Forward induction. Stability-based equilibrium refinements.
- The bargaining problem.
- The mathcing problem.

**TEXTBOOKS:**

- V.I. Danilov «Lectures on Game Theory».
- R. Myerson «Game Theory: Analysis of Conflict».

**GRADING RULES:** The final grade, $F$, will be computed as $F = 0.3 * S + 0.3 * P + 0.4 * E$, where $S$ is the grade for solving problems from the course problem list; $P$ is the grade for the in-class presentation; $E$ is the grade for the final oral exam.

## Functional Analysis 2
**advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** A. Yu. Pirkovskii.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** Functional analysis studies infinite-dimensional vector spaces equipped with a norm (or, more generally, with a topology), operators between such spaces, and representations of algebraic structures on such spaces. The classical areas of Functional Analysis are the spectral theory of linear operators, the geometry of Banach spaces, distribution theory, operator algebra theory, etc. Among relatively new areas are noncommutative geometry à la Connes, operator space theory (a.k.a. «quantum functional analysis»), and locally compact quantum groups. Functional analysis has numerous applications in differential equations, harmonic analysis, representation theory, geometry, topology, calculus of variations, optimization, quantum physics, etc.

We plan to discuss those aspects of functional analysis which deal with rather general classes of linear operators on Banach and Hilbert spaces. This means that we will not consider, for example, differential operators at all, because their theory can be well presented in a separate course only. Instead, we concentrate on those topics which emphasize the role of algebraic methods in functional analysis. The choice of topics from the syllabus below will be made in accordance with the material of the course «Functional Analysis 1» (fall 2022) in order to minimize intersections.

**PREREQUISITES:** Calculus, linear algebra, metric spaces, the Lebesgue integral, basics of functional analysis (Banach and Hilbert spaces, bounded linear operators — see, for example, the course «Functional Analysis 1», Fall 2022)

**SYLLABUS:**

1. Duality theory for Banach spaces.
2. Banach algebras and elementary spectral theory.
3. Fredholm operators. The Riesz – Schauder theory. The general index theory.
4. Topological vector spaces. Weak topologies.
5. Commutative Banach algebras. The Gelfand transform. The commutative Gelfand – Naimark theorem.
6. Spectral theory of normal operators on a Hilbert space. The spectral theorem.

**TEXTBOOKS:**

### Список литературы


[1] A. Ya. Helemskii. *Lectures in Functional Analysis*. MCCME, 2004 (in Russian). English transl.: AMS, 2006.

[2] V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. *Real and Functional Analysis*. RCD, 2011 (in Russian). English transl.: Springer, 2020.

[3] A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. *Theorems and problems in Functional Analysis*. Moscow, Nauka, 1979 (in Russian). English transl.: Springer, 1982.

[4] B. Simon. *Real Analysis. (A comprehensive course in Analysis, Part 1).* AMS, 2015.

[5] B. Simon. *Operator Theory. (A comprehensive course in Analysis, Part 4)*. AMS, 2015.

[6] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis.* Academic Press, 1972. Russian transl.: Mir, 1977.

[7] V. M. Kadets. *A course in functional analysis*. Khar'kov. Nats. Univ. im. V. N. Karazina, Kharkiv, 2006 (in Russian). English transl.: Springer, 2018.

[8] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1991. Russian transl.: Lan', 2005.

[9] J. B. Conway. *A course in Functional Analysis.* Springer, 1990.

[10] A. Yu. Pirkovskii. *Spectral theory and functional calculi for linear operators*. MCCME, 2010 (in Russian). https://www.mccme.ru/free-books/pirkovsky/pirkovsky-spectral.pdf.

[11] A. Yu. Pirkovskii. *Lecture notes in functional analysis*. Unfinished and unpublished lecture notes (HSE, 2011/2012, in Russian). http://vyshka.math.ru/1112/funcan.html.

[12] G. Murphy. *$C^*$-algebras and operator theory*. Academic Press, 1990. Russian transl.: Factorial, 1997.

[13] R. Meise and D. Vogt. *Introduction to Functional Analysis*. Clarendon Press, 1997.

[14] F. Treves. *Topological vector spaces, distributions, and kernels*. Academic Press, 1967.

**GRADING RULES:**

- The final grade is calculated by the formula

$$\text{final grade} = 0.7 \times (\text{cumulative grade}) + 0.3 \times (\text{exam grade}).$$

- The cumulative grade is calculated by the formula

$$\text{cumulative grade} = 0.5 \times (\text{midterm grade}) + 0.5 \times (\text{exercise sheets grade}).$$

- The oral exam will be at the end of May and will include only the material of the 4th module.
- The midterm exam (also oral) will be in the 2nd half of March and will include only the material of the 3rd module.
- To get the maximum grade for the exercise sheets, you should solve 75% of all the exercises. If you solve more, you will earn bonus points.
- You can also earn bonus points for working actively at the exercise classes and for solving «bonus exercises» (marked as «**B**» in the sheets).

## Gauss class number problem
## advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher
## (у этого курса имеется описание на русском)

**TEACHERS:** A. M. Levin, A. B. Kalmynin.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits.

**DESCRIPTION:** Set $p(x) = x^2+x+41$. It is well-known that all the values $p(0), p(1), \dots, p(39)$ are prime. It is also known that the number $\exp(\sqrt{163}\pi)$ is very close to an integer. These facts are connected to the uniqueness of prime factorization in the ring of integers of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$. The problem of describing all the imaginary quadratic fields with this property was first stated by Gauss, who also listed 9 discriminants of such fields. The question of existence of the 10th discriminant remained open until the middle of 20th century. In this course, we are going to discuss several different solutions of this problem that rely on various techniques of number theory, from modular forms and class field theory to methods of transcendent number theory. In context of this problem, we will also discuss a number of fundamental conjectures, including the Riemann hypothesis and Birch and Swinnerton-Dyer conjecture.

**PREREQUISITES:** basic algebraic number theory (number fields, their rings of integers, groups of units, class groups), complex analysis, Galois theory

**SYLLABUS:**

1. Quadratic fields and quadratic forms. Gauss's composition law, the class number. Heegner points. *Bhargava's cubes.

2. The analytic class number formula. Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions. Siegel's theorem. *Generalized Riemann hypothesis, sums of seven cubes.

3. Elliptic functions, elliptic curves and modular forms. Curves with complex multiplication, class fields. *Primes of the form $x^2 + ny^2$.

4. Heegner's solution: a reduction of the problem to Diophantine equations. Baker's solution: linear forms with logarithms. *Class numbers of real quadratic fields of special form.

5*. $L$-functions of elliptic curves, analytic rank and Birch and Swinnerton-Dyer conjecture. Goldfeld's solution: an effective lower bound for the class number.

**TEXTBOOKS:**

**GRADING RULES:** min(10, Problem sets*0.4 + Exam*0.6)

”

**Harmonic Analysis and Unitary Representations**
**advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** A. Yu. Pirkovskii.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits.

**DESCRIPTION:** Harmonic analysis on groups and unitary representation theory are closely related areas of mathematics, complementary to each other. They play an important role in analysis, geometry, topology, physics, and other fields of science. In essence, they grew out of two classical topics that are usually studied by undergraduate students in mathematics. The two topics are the theory of trigonometric Fourier series and the representation theory (over the compelx numbers) of finite groups. Among other things, we plan to explain what the above topics have in common, what the representation theory of compact groups looks like, what the Tannaka – Krein duality is, and what all this has to do with the Fourier transform. We are also going to construct harmonic analysis on locally compact abelian groups. This theory includes the Pontryagin duality and generalizes the Fourier transform theory on the real line. As an auxiliary material, the basics of Banach algebra theory will also be given.

**PREREQUISITES:** The Lebesgue integration theory and the basics of functional analysis. Some knowledge of the representation theory of finite groups will also be helpful.

**SYLLABUS:**

1. **Introduction.** A toy example: harmonic analysis on a finite abelian group. Classical examples: harmonic analysis on the integers, on the circle, and on the real line.
2. **The main objects.** Topological groups. The Haar measure. A relation between the left and right Haar measures. Unitary representations. The general Fourier transform.
3. **Banach algebras.** The $L^1$-algebra of a locally compact group. The spectrum of a Banach algebra element. Commutative Banach algebras, the Gelfand spectrum, the Gelfand transform. Basics of $C^*$-algebra theory. The $C^*$-algebra of a locally compact group. The 1st Gelfand – Naimark theorem.
4. **Locally compact abelian groups.** The dual group. The Fourier transform as a special case of the Gelfand transform. The Plancherel theorem. The Pontryagin duality. An application: the Poisson summation formula.
5. **Compact groups.** The averaging procedure. Irreducible representations are finite-dimensional. Decomposing unitary representations into irreducibles. The Peter – Weyl theorem. The orthogonality relations. The Fourier transform and its inverse. The Plancherel theorem. The Tannaka – Krein duality.

**TEXTBOOKS:**

## Список литературы

[DeitEcht] A. Deitmar, S. Echterhoff. Principles of harmonic analysis. Springer, 2009.

[Folland] G. B. Folland. A course in abstract harmonic analysis. CRC Press, 1995.

[HR] E. Hewitt, K. A. Ross. Abstract harmonic analysis. Springer, 1963, 1979.

[JS] A. Joyal, R. Street. An introduction to Tannaka duality and quantum groups. Lecture Notes in Math. **1488**, 411 – 492. Springer, 1991.

[Zhel] D. P. Zhelobenko. Principal structures and methods of representation theory. AMS, 2005.

[BourSpec] N. Bourbaki, Théories spectrales. Springer, 2019.

[EdComp] R. E. Edwards. Integration and harmonic analysis on compact groups. Cambridge Univ. Press, 1972.

[FD] J. M. G. Fell, R. S. Doran. Representations of $*$-algebras, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles. Academic Press, 1988.

[Hoch] G. Hochschild. The structure of Lie groups. Holden – Day, 1965.

[HofMorr] K. H. Hofmann, S. Morris. The structure of compact groups. Walter de Gruyter, 2006.

[Kaniuth] E. Kaniuth. A course in commutative Banach algebras. Springer, 2009.

[Loomis] L. H. Loomis. Introduction to abstract harmonic analysis. Dover, 2013.

[Murphy] G. Murphy. $C^*$-algebras and operator theory. Academic Press, 1990.

[Robert] A. Robert. Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups. Cambridge University Press, 1983.

[ZhComp] D. P. Zhelobenko. Compact Lie groups and their representations. AMS, 1973.

**GRADING RULES:** The final grade is equal to the grade for the written take – home exam.

”

**HOMOLOGICAL STABILITY AND THE TOPOLOGY OF MODULI SPACES**
**advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHERS:** A. G. Gorinov, C. Brav.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** In the past 20 years there have been several results which state that the cohomology of a certain series of geometric objects stabilises. Moreover, the stable cohomology is often more accessible than the cohomology of the individual objects, and can be explicitly described in some cases. Our goal is to understand the general ideas behind these results, and also to discuss some of the examples in detail.

Here is one of these. Given an orientable genus $g$ surface with one boundary component, consider its mapping class group $\Gamma_{g,1}$, consisting of isotopy classes of diffeomorphisms acting trivially near the boundary. Gluing along one component of a genus 1 surface with two boundary components, we obtain a genus $g+1$ surface with one boundary component, and a corresponding map of mapping class groups $\Gamma_{g,1} \to \Gamma_{g+1,1}$ by extending diffeomorphisms trivially beyond the boundary. Harer stability concerns the stabilization of homology for the sequence of classifying spaces $B\Gamma_{g,1} \to B\Gamma_{g+1,1}$, while the Madsen – Weiss theorem determines the homotopy type of the homotopy colimit of this system of classifying spaces.

The goal of this seminar is to understand Harer stability, the Madsen-Weiss theorem, and generalizations to higher dimensional manifolds due to Galatius – Madsen – Tilmann – Weiss and Galatius – Randal – Williams. If time allows, we will also discuss several related or similar phenomena.

**PREREQUISITES:** Algebraic topology as covered e.g. in Hatcher (chapters 0-3) or Fomenko – Fuchs (chapters 1-2); smooth manifolds as covered in the compulsory course.

**SYLLABUS:**

1. A review of the mapping class groups of surfaces and moduli spaces of complex curves.
2. Harer’s results.
3. Spectra and stable homotopy theory.
4. Classifying spaces of topological groups and monoids.
5. The scanning map.
6. Madsen – Weiss theorem and Mumford’s conjecture.
7. Moduli spaces of higher-dimensional manifolds.
8. Representation stability and cohomology of configuration spaces.
9. Other examples of homological stability in algebraic topology (smooth projective hypersurfaces etc).

**TEXTBOOKS:** Lectures on the Madsen – Weiss theorem by Soren Galatius, available at:
http://web.math.ku.dk/~wahl/Galatius.ParkCity.pdf.

A short exposition of the Madsen – Weiss theorem by Allen Hatcher, available at:
https://arxiv.org/abs/1103.5223

**GRADING RULES:** 50% talk; 50% talk notes in LaTeX.

## INTRODUCTION TO ALGEBRAIC NUMBER THEORY
**simple inter-campus seminar for $2^{nd}$ year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** V. S. Zhgoon.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits.

**DESCRIPTION:** Algebraic number theory is a classical field of mathematics, formed during the study of solutions of Diophantine equations, as well as through attempts to prove Fermat's theorem. Now it is a vast classical field which form the basis of Arithmetic Geometry. In this course we will recall the basics of Galois theory, consider the so-called ramification theory, prove the main theorems about the structure of ideals (decompositions into prime ideals), prove Dirichlet's theorem about the structure of $S$-units, the finiteness theorem of a class group. We will highlight a very important analogy between the theory of algebraic numbers and the theory of algebraic curves over finite fields.

**PREREQUISITES:** basic algebra course

**SYLLABUS:**

1. Galois theory and finite fields. Basic facts from Galois theory. The structure of finite fields. Equations over finite fields. The quadratic law of reciprocity.

2. $p$-adic numbers. Hensel's lemma. Ostrovsky's theorem.

3. Quadratic forms. Representation of numbers by quadratic forms over $\mathbb{Q}_p$ and over $\mathbb{Q}$. The Minkowski – Hasse theorem.

4. Fields of algebraic numbers. Dedekind rings. Decomposition into prime ideals. Modules over Dedekind rings.

5. Norm and trace. Branching, discriminant, differential.

6. Adeles and ideles.

7. A group of classes of ideals. The finiteness theorem. Minkowski constant.

8. Dirichlet's theorem on $S$-units.

9. Cyclotomic fields.

**TEXTBOOKS:**


1. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. Theory of numbers. — M.: Nauka, 1985.

2. Weil A. fundamentals of the theory of numbers. — M.: editorial URSS, 2004.

3. Lang, S. Algebra. — M.: Mir, 1968.

4. Lang, S. Algebraic numbers. — M.: Mir, 1972.

5. Manin, Y. I., Panchishkin A. A. Introduction to modern number theory. — M.: mtsnmo, 2009.

6. Serre, J.-P. a Course in arithmetic. — M.: Mir, 1972.

7. D. Cassels, A. Frohlich(ed.), Algebraic number theory. — 1969.

8. J. P. Serre, Local fields. — Springer, 2013. — V. 67.


**GRADING RULES:** 0,7 (final exam) + 0,3 (problem sheets)

## Introduction to commutative algebra
**simple inter-campus course for 2nd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** V. S. Zhgoon.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** At its most basic level, algebraic geometry is the study of the geometry of solution sets of polynomial systems of equations. Classically, the coefficients of the polynomial equations are assumed to lie in an algebraically closed field. Considering more general coefficient rings, in particular rings of integers in number fields, one arrives at modern algebraic geometry and algebraic number theory. Commutative algebra provides the tools for answering basic questions about solutions sets of polynomial systems, such as finite generation of the system, existence of solutions in some extension of the coefficient ring, dimension and irreducible components, and smoothness and singularities.

**PREREQUISITES:** basic course of algebra

**SYLLABUS:**

- Rings, algebras, ideals and modules
- Noetherian rings
- Unique factorization domains
- Rings and modules of fractions. Localisation.
- Integral dependence and Noether's normalization theorem
- The going-up and going-down theorems
- Tensor product. Flat, projective and injective modules
- Hilbert Nullstellensatz
- The spectrum of the ring
- Krull dimension and transcendence degree. Krull principal ideal theorem.
- Primary decomposition
- Discrete valuation rings and Dedekind domains
- Dimension theory for noetherian rings
- Hilbert series. Multiplicity.
- Koszul complex.
- Free resolutions and regular rings.

**TEXTBOOKS:**


- M. Reid, «Undergraduate commutative algebra.» Vol. 29. Cambridge University Press, 1995.
- M. Atiyah, «Introduction to commutative algebra.» Vol. 361. Westview press, 1994. 121
- G. Kemper. «A course in commutative algebra.» Vol. 256. Springer Science & Business Media, 2010.
- D. Eisenbud. «Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry.» New York, NY: Springer Verlag, 1999.

**GRADING RULES:** (0,70(final exam) + 0,30(problem sheets))

**COMMENTS:**

## INTRODUCTION TO ELLIPTIC OPERATORS
**simple inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** A. G. Gorinov.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** In this seminar we will cover the basics of the theory of elliptic operators, examples of which include the de Rham and Dolbeault operators, as well as their generalisations such as the Dirac operator. We will explain how several seemingly unrelated results in geometry and topology (e.g. the Hirzebruch and Rokhlin signature theorems and the Riemann – Roch theorem) all follow from the general index formula by M. Atiyah and I. Singer, and sketch a proof of the latter.

**PREREQUISITES:** The main prerequisites are smooth manifolds and singular cohomology as covered e.g. in Algebraic Topology by A. Hatcher, chapters 2 and 3. An introductory course on topological vector spaces would be very helpful. We will revise some or all of the prerequisites if necessary.

**SYLLABUS:**

- Vector bundles and characteristic classes: a summary of results.
- Differential operators: the definition and first examples.
- Elliptic operators: the definition and basic properties.
- Riemannian metrics on manifolds and the de Rham operator.
- The signature operator.
- Complex manifolds and the Dolbeault operator.
- Clifford algebras and their representations.
- Reduction of the structure group of a vector bundle. Spin structures on vector bundles.
- Dirac operators. Constructing Dirac operators using Spin structures.
- Elliptic regularity and related results about elliptic operators on compact manifolds.
- First applications: the de Rham and Hodge decomposition theorems; the Serre duality.
- The Atiyah-Singer index formula.
- Applications of the index formula: the Riemann – Roch theorem, the Hirzebruch signature theorem, V. Rokhlin's signature theorem.

**TEXTBOOKS:**

- *Algebraic Topology* by A. Hatcher, freely available online at http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html.
- *Spin geometry* by H. B. Lawson and M.-L. Michelsohn.
- *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem* by R. S. Palais et al.
- *Characteristic classes* by J. Milnor and J. Stasheff.
- *The Atiyah – Singer index theorem* by P. Shanahan.
- *Differential analysis on complex manifolds* by R.O. Wells.

**GRADING RULES:** 100% home exam

**COMMENTS:**

## INTRODUCTION TO ERGODIC THEORY
**advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** M. L. Blank.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits.

**DESCRIPTION:**

**DESCRIPTION:** Is it possible to distinguish deterministic chaotic dynamics from a purely random and whether this question makes sense? Does irreversibility influence qualitative characteristics of the process? Ergodic theory studies these and other statistical properties of dynamical systems. Interest in this subject stems from the fact that «typical» deterministic dynamical systems (eg, differential equations) exhibit chaotic behavior: their trajectories look similar to the implementation of random processes. We begin with the classical results by Poincare, Birkhoff, Khinchin, Kolmogorov, and get to modern productions (including yet unresolved) problems. This is an introductory course designed for 2 – 4 year's bachelors and graduate students. Prior knowledge except for the course in mathematical analysis is not required (although it is desirable).

**PREREQUISITES:** calculus.

**SYLLABUS:**

- Dynamical systems: trajectories, invariant sets, simple and strange attractors and their classification, randomness.
- The action in the space of measures, transfer operator, invariant measures. Comparison with Markov chains.
- Ergodicity, Birkhoff ergodic theorem, mixing, CLT. Sinai – Bowen – Ruelle measures and natural / observable measures.
- Basic ergodic structures: direct and skew products, Poincare and integral maps, a natural extension and the problem of irreversibility.
- Ergodic approach to number theoretical problems.
- Entropy: metric and topological approaches.
- Operator formalism. Spectral theory of dynamical systems. Banach space of measures, random perturbations.
- Multicomponent systems: synchronization and phase transitions.
- Mathematical foundations of numerical simulations.

**TEXTBOOKS:** A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.

**GRADING RULES:** 0.4 (Cumulative assessment) + 0.6 (Exam). The cumulative assessment is determined by control, delivery of sheets and work at lectures and seminars. Round up.

”

## INTRODUCTION TO FLOER HOMOLOGY
**simple inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHERS:** A. G. Gorinov, P. E. Pushkar.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** Floer homology is the homology of a certain infinite-dimensional analogue of the Morse complex. The construction was invented by Floer in order to prove a version of Arnold's conjecture on the number of fixed points of a symplectomorphism. These ideas were subsequently developed by other authors, who used them to solve some of the classical problems in low-dimensional topology. We will start by studying Floer's original construction and applications to Arnold's conjecture. We will then discuss a more general version, namely Lagrangian Floer homology, its particular cases and variants (Heegaard Floer homology, instanton Floer homology etc.), as well as open problems.

**PREREQUISITES:** Algebraic topology as covered e.g. in Hatcher (chapters 0-3) or Fomenko – Fuchs (chapters 1-2); smooth manifolds as covered in the compulsory course. Some knowledge of functional analysis (e.g. as covered in the elective courses Functional analysis 1 and 2) will also be helpful.

**SYLLABUS:**

1. A review of Morse theory
2. A review of symplectic geometry.
3. $J$-holomorphic curves.
4. Gromov's compactness principle and stable maps.
5. Symplectic Floer homology and Arnold's conjecture
6. Lagrangian Floer homology.
7. Heegaard – Floer homology and its combinatorial description.
8. Instanton Floer homology.
9. Seiberg – Witten – Floer homology.
10. Embedded contact Floer homology.
11. Open problems and conjectures (Atiyah – Floer conjecture, Floer homology and Khovanov homology etc.).

**TEXTBOOKS:**

Morse theory and Floer homology by M. Audin and M. Damian

Monopoles and Three-Manifolds by M. Kronheimer and T. Mrowka

An introduction to knot Floer homology by C. Manolescu, available at:
https://arxiv.org/abs/1401.7107

Introduction to Symplectic Topology by D. McDuff and D. Salamon

An introduction to Heegaard Floer homology by P. Ozsvath and Z. Szabo, available at:
https://web.math.princeton.edu/ petero/Introduction.pdf

Lectures on Floer homology by D. Salamon, available at:
https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/floer.pdf

**GRADING RULES:** 50% talk; 50% talk notes in LaTeX.

## Introduction to Galois theory
**advanced online course for $2^{nd}$ year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** N. S. Markarian.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** Galois theory is the study of roots of polynomials and their symmetries in terms of Galois groups. As the algebraic counterpart of the fundamental group of topology, the Galois group is an essential object in algebraic geometry and number theory.

**PREREQUISITES:** Basic algebra: groups, rings, linear algebra over a field

**SYLLABUS:** Review of polynomial rings and more general principal ideal domains. Extensions of fields, algebraic and transcendental. Splitting fields of polynomials and Galois groups. The fundamental theorem of Galois theory. Computing Galois groups. Applications.

**TEXTBOOKS:** J. S. Milne, Fields and Galois Theory, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ft.html.

**GRADING RULES:** 40% midterm; 60% final. Final mark: round percent/10 to nearest integer

**COMMENTS:** This is a blended course based on the on-line lectures by E. Amerik.

## Introduction to Category Theory and Homological Algebra
**simple inter-campus course for 2nd year students and higher**

**TEACHER:** A. B. Pavlov.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** This is an introductory course in category theory and homological algebra. In the first part we cover basics of the category theory with main focus on universal construction (limits and colimits). The category theory is a universal mathematical language that has applications in many areas on mathematics, it allows us to illustrate all definition and theorems with examples from algebra, topology and geometry. After this focus on the categories that resemble categories of modules (abelian categories) and develop resolutions of objects in such categories. Using resolutions we define derived functors. The second half of the course is about general properties and examples of derived functors.

**PREREQUISITES:** First year algebra and topology.

**SYLLABUS:**

Categories and Functors.

Adjoint Functors.

Limits and Colimits.

Additive and Abelian Categories.

Complexes and Categories of Complexes.

Derived Functors Tor and Ext over a Ring.

Homological Dimensions.

Spectral Sequences.

Group (co)homology (and, if time permits, (co)homology of Lie Algebras).

**TEXTBOOKS:** S. Mac Lane: Categories for Working Mathematicians, 2nd ed., 1997. C. Weibel: An Introduction to Homological Algebra, 1994.

**GRADING RULES:** $0.1S + 0.2Q + 0.3M + 0.4F$, where S is grade for participation in tutorials, Q is quiz grade for 4 one-hour long quizzes, M is the midterm grade, F is final exam grade.

## INTRODUCTION TO THE THEORY OF RANDOM PROCESSES
**advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** M. L. Blank.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits.

**DESCRIPTION:** The course is a continuation of the standard course in probability theory (associated mainly with combinatorics) and is intended for an initial introduction to the theory of random processes. Special attention is paid to the connection of this theory with functional analysis and the general measure theory. The course is aimed at bachelors 2–4 courses, undergraduates and graduate students.

**PREREQUISITES:** calculus, probability theory

**SYLLABUS:**

- The concept of a random process.
- Elements of random analysis.
- Correlation theory of random processes.
- Markov processes with discrete and continuous time.
- Wiener and Poisson processes.
- Stochastic integral. Ito's formula.
- (sub/super) martingales.
- Infinitesimal semigroup operator.
- Stochastic stability of dynamical systems.
- Large deviations in Markov processes and chaotic dynamics.
- Nonlinear Markov processes.

**TEXTBOOKS:**

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.

**GRADING RULES:** 0.4 (cumulative assessment) + 0.6 (exam). The cumulative assessment is determined by control, delivery of sheets and work at lectures and seminars. Round up.

## Introduction to Riemann surfaces
**simple inter-campus offline course for 2nd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** A. Yu. Buryak.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** A Riemann surface is a two-dimensional manifold (surface) with a given complex structure. Remarkably, the theory of Riemann surfaces is full of beautiful results and at the same time the proofs do not require a lot of prior knowledge, particularly comparing with the theory of complex manifolds of higher dimension. Sheaf cohomology will be the main technical tool for us, and we will carefully derive all the necessary results from it. The main goal of the course is to derive the Riemann–Roch theorem, the Serre duality, and the Abel theorem.

**PREREQUISITES:** The theory of functions of one complex variable, basics of topology (in the amount of the 1st course), basics of the theory of smooth manifolds (including differential forms and Stokes' theorem)

**SYLLABUS:**

1. The notion of a Riemann surface, the canonical decomposition of the tangent bundle and of the space of differential forms.

2. The notion of a sheaf.

3. Cohomology of sheaves.

4. Finiteness theorem, the genus of a Riemann surface.

5. Divisors on a Riemann surface.

6. The Riemann–Roch theorem.

7. The Serre duality.

8*. The Abel theorem.

**TEXTBOOKS:** O. Forster. Lectures on Riemann surfaces.

**GRADING RULES:** Work in exercise classes 3, first test 3, second test 3, exam 5. In the result is greater than 10, then it is decreased to 10.

## INTRODUCTION TO TWO-DIMENSIONAL CONFORMAL FIELD THEORY
**advanced inter-campus offline seminar for 4th year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** A. V. Litvinov.

**LEARNING LOAD:** two terms of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

**DESCRIPTION:** Conformal field theories study quantum field theories that have the conformal symmetry. These theories describe fixed points of the Wilson renormalization group and are therefore extremely important. In two dimensions, the group of local conformal transformations is infinite-dimensional. The consequence of this is an infinite number of relationships between different observables — Ward identities. This course is devoted to the study of the mathematical structure of these relations and the calculation of correlation functions — conformal bootstrap. We will describe the general theory of constructing models of conformal field theory, the theory of representations of the Virasoro algebra, the classification of minimal models of conformal field theory, the Liouville theory and related models of two-dimensional quantum gravity.

**PREREQUISITES:** Basic knowledge of quantum mecjanics, quantum field theory and representation theory

**SYLLABUS:** Lecture 1. Elements of classical field theory, Noether's theorem, energy-momentum tensor.

Lecture 2. Conformal group in $D > 2$ and $D = 2$ dimensions.

Lecture 3. The energy-momentum tensor in quantum field theory, conformal Ward identities.

Lecture 4. Conformal families, Virasoro algebra

Lecture 5. Elements of the representation theory of the Virasoro algebra, singular vectors

Lecture 6. The theory of a free massless bosonic field.

Lecture 7. The theory of a free massless fermion field, boson-fermion correspondence.

Lecture 8. Beta-gamma system, free field representation of current algebra

Lecture 9. Operator algebra, conformal properties of operator algebra

Lecture 10 Conformal blocks

Lecture 11. Recursion formula of Zamolodchikov

Lecture 12. BPZ differential equation and calculation of three-point correlation functions

Lecture 13. Minimal models I, Friedan, Qui and Schenker theorem

Lecture 14. Minimal models II, superconformal field theory

Lecture 15. Minimal models III, extended conformal symmetry, W-algebras

Lecture 16. Minimal Models II, Superconformal Field Theory

Lecture 17. Minimal models III, extended conformal symmetry, W-algebras

Lecture 18. Conformal field theory in curved space

Lecture 19. Coulomb integrals I: three-point functions

Lecture 20. Coulomb integrals II: four-point functions

Lecture 21. Coulomb integrals III: screening operators

Lecture 22. Classical conformal field theory I: correlation functions

Lecture 23. Classical conformal field theory II: classical conformal block, connection with the Painlevé IV equation

Lecture 24. Supersymmetric Liouville theory I: correlation functions

Lecture 25. Supersymmetric Liouville II Theory: Conformal Bootstrap

Lecture 26. Theories with W-symmetry, Toda theories

Lecture 27. Conformal field theory on a torus I: Ward's identities

Lecture 28. Conformal field theory on a torus II: modular bootstrap

Lecture 29. WZNW Models

Lecture 30. GKO coset construction

**TEXTBOOKS:**

**GRADING RULES:** To get a grade of 10, you have to solve at least 80 percent of home problems and be able to explain solutions orally.

## Introduction to sheaves
### advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher

**TEACHER:** C. Brav.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** Пучки являются центральным объектом во многих областях математики. Знакомство с теорией пучков необходимо для изучения алгебраической геометрии, топологии и других дисциплин. Целью курса является знакомство с основными определениями теории пучков, примерами пучков, а также с необходимыми инструментами из теории категорий и гомологической алгебры.

**PREREQUISITES:** Необходимо владение первыми тремя семестрами обязательных курсов алгебры, анализа, геометрии и топологии. Очень желательно знакомство с основами коммутативной алгебры и началами гомологической алгебры.

**SYLLABUS:**

- Пучки на топологических пространствах
- Экскурс в гомологическую алгебру и теорию категорий
- (Квази)когерентные пучки на афинных схемах
- Когомологии Чеха
- Вялые, тонкие и мягкие пучки, вылые резольвенты
- Спектральные последовательности, теорема ДеРама

**TEXTBOOKS:**

- Stacks project: https://stacks.math.columbia.edu/
- Хартсхорн «Алгебраическая геометрия»
- Маклейн «Категория для работающего математика»

**GRADING RULES:** вычисляется по формуле $\min(100, 0.5H+0.6E)/10$, где $H$ — процентные доли решенных домашних задач и коротких контрольных, проводимых на семинаре, и $E$ — письменного домашнего экзамена.

## LIE GROPUS AND LIE ALGEBRAS - 2
**advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** E. B. Feigin.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** Lie theory plays a crucial role in modern mathematics due a huge number of applications in various fileds of mathematics and physics (mathematical and theoretical). The goal of the course is to study the main classes of Lie groups and Lie algebras. We will also describe the basic ingredients of their representation theory.

**PREREQUISITES:** Lie groups and Lie algebras – 1

**SYLLABUS:** Abelian, nilpotent and solvable Lie groups and Lie algebras, representation theory. Poincaré – Birkhoff – Witt theorem. Invariant bilinear forms, Killing form. Semi-simple Lie algebras and groups, complete reducibility. Cartan subalgebras and Cartan decomposition. Root systems and reflections. Polarization, simple roots, root and weight lattices. Weyl chambers, Weyl groups and simple reflections. Reduced expressions, Cartan matrices, Dynkin diagrams, classification theorem. Highest weight modules. Verma modules. Characters of representations. Flag manfolds. Bernstein – Gelfand – Gelfand resolution. Characters of irreducible representations.

**TEXTBOOKS:**

- **[KJr]** A.Kirillov, Jr., An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras
- **[S]** J.-P. Serre, Lie Algebras and Lie Groups

**GRADING RULES:** 0.5*exam + 0.5 (homeworks and seminars problems)

## MARKOV CHAINS
**simple inter-campus offline course for $2^{\text{nd}}$ year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** A. Dymov.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits.

**DESCRIPTION:** The simplest random process is a sequence of independent events (experiments). The scope of such processes is limited, since in practice very often the events are not independent. Markov chains are the simplest random processes formed by sequences of dependent events: given an event, it is assumed that the next event depends only on the given one, but does not depend on the previous events. In other words, «the future depends only on the present, but does not depend on the past». Markov chains have deep and beautiful but rather simple mathematics. Due to their amazing efficiency in applications to problems from various fields — mathematics, physics, computer science, biology, economics, etc. — they are known as probably the most important class of random processes. The present course is an introduction to the theory of Markov chains. We will discuss their most important properties and some of their applications

**PREREQUISITES:** Standard courses of linear algebra and analysis of the first year of education. A standard course of the probability theory is recommended but not required: all essential knowledge from the probability theory will be communicated.

**SYLLABUS:**

1. Markov chains with finite number of states.
2. Examples.
3. Stationary states and their existence. Bogoliubov – Krylov method.
4. Ergodic theorem for Markov chains with ergodic transition probability matrix.
5. Applications of the ergodic theorem. The law of large numbers for Markov chains. The Google's Page Rank. Metropolis – Hastings algorithm.
6. Perron – Frobenius theorem.
7. Topological structure of Markov Chains with finite number of states.
8. Periodic Markov chains.
9. Aperiodic Markov chains. Ergodic theorem for irreducible aperiodic Markov chains.

**TEXTBOOKS:**

**[Sh]** A.N. Shiryaev, «Probability».

**[KS]** L.B. Koralov, Ya.G. Sinai, «Theory of probability and random processes»

**GRADING RULES:** $(C + E)/2$, where $C$ denotes the current grade and $E$ denotes the exam

## $p$-ADIC GEOMETRY
## advanced inter-campus seminar for 4$^{\text{th}}$ year students and higher

**TEACHER:** V. A. Vologodsky.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits.

**DESCRIPTION:** The classical Riemann-Hilbert correspondence is an equivalence between the category of representations of the fundamental group of a complex manifold and the category of vector bundles with integrable connection on the same manifold. The course will discuss a $p$-adic version of this result.

**PREREQUISITES:** Students are expected to have mastered the material of Hartshorne's book «Algebraic Geometry». Some acquaintance with local class field theory (e.g. Serre's book on this subject) will be useful.

**SYLLABUS:**

- A reminder on the structure of $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p)$. Ramification subgroups.
- Representations of $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p)$. Sen's theory.
- Fontaine's rings.
- Derived de Rham cohomology.
- $p$-adic Hodge theory after Beilinson.
- $p$-adic Riemann – Hilbert correspondence after Bhatt – Lurie.

**TEXTBOOKS:**

**GRADING RULES:** The final grade is calculated by the formula $H/10$, where $H$ is the percentage of correctly solved homework problems.

## $p$-ADIC NUMBERS
## advanced inter-campus offline seminar for $2^{nd}$ year students and higher

**TEACHER:** M. V. Finkelberg.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits.

**DESCRIPTION:** $p$-adic numbers were discovered by Hensel at the turn of 20-th century as an alternative to the classical real analysis in order to solve number theoretic problems. The development of $p$-adic analysis allowed Dwork to prove the first Weil conjecture on the number of solutions of algebraic equations over finite fields in 1960's. The goal of the course is to understand this proof and to learn the basics of $p$-adic analysis.

**PREREQUISITES:** the standard courses in algebra, calculus, and combinatorics for the 1st year students, ang Galois theory.

**SYLLABUS:**

- Metrics on the field of rational numbers.
- $p$-adic numbers.
- Hilbert symbol.
- Quadratic forms over $p$-adic fields.
- Minkowski – Hasse theorem.
- Algebraic closure of $p$-adic field.
- Tate field.
- Artin – Hasse exponent.
- Newton polygons.
- $\zeta$-functions.
- Rationality of $\zeta$-function.

**TEXTBOOKS:**

**[K]** N. Koblitz, «$p$-adic numbers, $p$-adic analysis, and zeta-functions».

**[C]** J. P. Serre, «Cours d'arithmetique».

**GRADING RULES:** 1/10 of the total percentage of completely solved exercises (assigned weekly)

## Representations and Probability

**advanced inter-campus offline seminar for 1st year students and higher**

**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHERS:** A. Dymov, A. V. Klimenko.

**LEARNING LOAD:** two terms of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

**DESCRIPTION:** The seminar is mostly aimed to 3–4th year bachelor students, as well as master and PhD students. Senior participants are expected to deliver a talk on the seminar. The seminar topics are the mix of modern results in areas related to probability theory, random processes, dynamical systems, representations, and older areas, which are prerequisites to the former, as well as keep their own value.

**PREREQUISITES:** Standard courses of calculus (including measure theory) and probability. Basic courses on functional analysis and random processes will be helpful but by no means required for the fall semester, while algebra (representations theory) will be useful for the spring semester. Semesters of the seminar can be taken independently. We plan to hold seminar meetings at the Steklov Mathematical Institute in the fall semester and at HSE Math Dept. in the spring semester.

**SYLLABUS:** Tentative topics for fall semester:

- Elements of stochastic processes theory. (Basic notions: independence of differences, covariance function, trajectory-wise behavior of a process. Important examples: Poisson and Wiener processes.)
- Wave turbulence theory (WT). Stochastic models in the WT.
- Markov chains on graphs: invariant measures and representation formulas; notable martingales.
- Exclusion processes on the line: invariant measures, equivalence of ensembles, scaling limit.
- Exponentially growing groups: free, hyperbolic, Markov, Fuchsian, etc. Ergodic theory of their actions.

Tentative topics for spring semester:

- Classical representations theory.
- Representations of infinite-dimensional groups and operator algebras.
- Their connections with algebraic combinatorics (symmetric functions), classical analysis (orthogonal polynomials) and probability theory (point processes and Markov dynamics).

**TEXTBOOKS:**

- I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, Introduction to the theory of random processes, Dover (1996) (Translation of the Russian book: И.И. Гихман, А.В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. М.: 1977.)
- S. Nazarenko, Wave Turbulence, Springer 2011
- A. Dymov, S. Kuksin, Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1: kinetic limit, *Comm. Math. Phys.*, **382** (2021), 951–1014
- Kipnis C., Landim C., Scaling Limits of Interacting Particle Systems, Springer 1999.
- A. Borodin and G. Olshanski, Representations of the infinite symmetric group. Cambridge University Press (2017).

**GRADING RULES:** Participants can either make a talk during the semester (this is usually graded with a mark 8–10) or solve the problems of the final exam. The problems list is given to the students approximately a week before the exam, and on the exam a student discusses the solutions that he/she obtained. Formula for calculating the final grade for the exam is provided along with the problems list.

## Representations of $GL(n, F_q)$
### advanced inter-campus offline course for 3rd year students and higher

**TEACHER:** M. V. Finkelberg.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** Irreducible characters of $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ were computed by Green in 1955 in elementary combinatorial terms (Kostka polynomials, Hall – Littlewood symmetric functions). Quite mysteriously, there are very deep parallels between this theory and that of (infinite-dimensional) representations of $\mathrm{GL}(n)$ over real or $p$-adic numbers. We will also discuss a few related topics such as A. Weil representation, P. Hall algebra, I. Macdonald polynomials.

**PREREQUISITES:** Basic representation theory of finite groups (you have to know the sum of squares of degrees of irreducible representations, but do not have to know Frobenius classification of irreducible representations of symmetric groups), basic analysis including Fourier series and Fourier transform.

**SYLLABUS:**

- Review of Frobenius theory of of irreducible characters of symmetric groups
- Representations of Heisenberg groups
- A. Weil representation
- Representations of $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$
- P. Hall algebra
- Hall polynomials
- Hall – Littlewood symmetric functions
- Green functions
- Parabolic induction
- Irreducible characters of $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$
- Affine Hecke algebra of $\mathrm{GL}(n)$
- I. Macdonald polynomials

**TEXTBOOKS:**


- **[M]** I. G. Macdonald, «Symmetric functions and Hall polynomials».


**GRADING RULES:** 1/10 of the total percentage of completely solved exercises (assigned weekly)

## Smooth structures on manifolds
**advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher**
**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** A. S. Tikhomirov.

**LEARNING LOAD:** Fall term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** The smooth topology of four-dimensional manifolds is unique in the sense that it provides phenomena having no analogues neither in smaller, nor in higher dimensions. For instance, on many four-manifolds there were found an infinite, and on $\mathbb{R}^4$ even uncountable number of smooth structures. These phenomena were invented in 80-90-ies in the works of S. Donaldson, C. Taubes and many other geometers in connection with the application of methods of modern differential geometry to four-dimensional topology. This is a new area of mathematics lying at the junction of global analysis and gauge theory which is related to the Yang – Mills equations. Their solutions — the so-called instantons — lead to new invariants of smooth structures on four-manifolds. In this course we give an introduction to the invariants of smooth structures related to instantons and show how they work in four-dimensional topology.

**PREREQUISITES:** Standard courses of linear algebra and geometry are required. Familiarity with basic notions of topology and differential geometry like topological and smooth manifold, homology groups, tangent bundle, differential forms and integration on manifolds is desirable.

**SYLLABUS:**

- Smooth structures on topological manifoldsx
- Principal and vector bundles. Connections
- Curvature and characteristic classes
- The space of connections
- The Yang – Mills equations and the moduli space
- Compactness of the moduli space
- Definite intersection forms
- The Donaldson polynomial invariants
- The connected sum theorem
- Соответствие Кобаяши-Хитчина
- Smooth structures on complex algebraic surfaces

**TEXTBOOKS:**

- **[FU]** D. Freed, K. Uhlenbeck. «Instantons and Four-Manifolds.» Springer, 1984.
- **[A]** S. Akbulut. «4-manifolds.» Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford Univ. Press, 2016.
- **[T]** C. H. Taubes. «Differential geometry: bundles, connections, metrics and curvature.» Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford Univ. Press, 2011.

**GRADING RULES:** final grade = 0,3(grade for home tasks) + 0,2(grade for midterm written exam) + 0,5(grade for final oral talk), where all grades are given on a 10-point scale

**COMMENTS:** Курс согласован с акад. программой бак.

# Stochastic analysis and its applications in economics
## advanced seminar for 3rd year students and higher
## (у этого курса имеется описание на русском)

**TEACHERS:** A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov.

**LEARNING LOAD:** two terms of 2022/23 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

**DESCRIPTION:** This seminar will cover a wide range of problems related to stochastics. The aim of this seminar is to present new developments in this field and to give students an opportunity to learn some modern concepts of stochastic analysis. Special attention will be paid to applications of stochastic models in economics and finance. The talks will be given by the members of the laboratory of stochastic analysis and its applications (lsa.hse.ru), the guests of the laboratory, the stuff of the faculty of mathematics, as well as by students and postdocs.

**PREREQUISITES:** Some knowledge in the mathematical analysis, probability theory, stochastic processes is expected.

**SYLLABUS:**

- Transportation theory, Monge – Kantorovich problem;
- discretization and approximation schemes for stochastic differential equations;
- Levy-based models motivated by economical problems;
- information theory and Turing's formula;
- semimartingales and applications to the financial mathematics;
- modelling extremal events for insurance and finance;
- non- and semi-parametric statistical models;
- stochastic modelling in physics (random energy model), biology (cell-growth model) and other natural sciences.

**TEXTBOOKS:**

**GRADING RULES:** Students should make a presentation on the seminar, and will get a mark for it.

## Symmetric functions
## advanced inter-campus offline course for 1st year students and higher
## (у этого курса имеется описание на русском)

**TEACHER:** E. Yu. Smirnov.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** The theory of symmetric functions is one of the central branches of algebraic combinatorics. Being a rich and beautiful theory by itself, it also has numerous connections with the representation theory and algebraic geometry (especially geometry of homogeneous spaces, such as flag varieties, toric and spherical varieties). In this course we will mostly focus on the combinatorial aspects of the theory of symmetric functions and study the properties of Schur polynomials. In representation theory they appear as characters of representations of $\mathrm{GL}_n$; they are also closely related with the geometry of Grassmannians. The second half of the course will be devoted to Schubert polynomials, a natural generalization of Schur polynomials, defined as «partially symmetric» functions. Like the Schur functions, they also have a rich structure and admit several nice combinatorial descriptions; geometrically they appear as representatives of Schubert classes in the cohomology ring of a full flag variety. Time permitting, we will also discuss $K$-theoretic (non-homogeneous) analogues of Schur and Schubert polynomials.

**PREREQUISITES:** Standard courses of algebra and discrete mathematics. Some knowledge of representation theory of symmetric and general linear groups is not required, but helpful

**SYLLABUS:**

1. Symmetric polynomials. The ring of symmetric functions. Bases of the ring of symmetric functions: elementary, complete, monomial symmetric functions, power sums. Transition formulas between these bases.
2. Schur functions. Algebraic definition. Jacobi-Trudi formula. Combinatorial definition, equivalence with the algebraic definition. Young tableaux.
3. Pieri rule. Kostka numbers. Enumeration of semistandard and standard Young tableaux, hook length formula.
4. Applications to combinatorics: enumerating plane partitions. MacMahon formula.
5. Enumeration of massifs (after Danilov and Koshevoy). Dense massifs. RSK-correspondence.
6. Multiplication of Schur functions. Littlewood – Richardson rule. (*) Knutson – Tao puzzles.
7. Symmetric group, its Coxeter presentation. The Bruhat order. The Lehmer code and the essential set of a permutation.
8. «Partially symmetric» polynomials. Divided difference operators. Schubert polynomials.
9. Properties of Schubert polynomials. Monk's formula, Lascoux transition formula.
10. Combinatorial presentation of Schubert polynomials. Pipe dreams. Positivity. Fomin – Kirillov theorem.
11. Flagged Schur functions, determinantal formulae.
12. (*) Generalizations: double Schubert polynomials, Stanley symmetric functions, Grothendieck polynomials.

The topics marked with (*) will be covered if the time and the enthusiasm of the audience permits.

**TEXTBOOKS:**

1. William Fulton. Young tableaux, With Applications to Representation Theory and Geometry. CUP, 1997 (Russian translation available)
2. Laurent Manivel. Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence. Société Mathématique de France, 1998. (English translation available)
3. Ian G. Macdonald. Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd edition. Clarendon Press, 1998. (An expanded Russian translation of the 1st edition available)
4. Richard Stanley. Enumerative combinatorics, vol.2. CUP, 1999 (Russian translation available).

**GRADING RULES:** There will be two written exams: the midterm exam at the end of the first quarter and the final exam, counted as 40% and 60% towards the final grade, respectively. Both exams are graded out of 10 points. The final grade is the weighted average, rounded to the nearest integer.

## Telecom mathematics

**advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher**

**(у этого курса имеется описание на русском)**

**TEACHER:** D. S. Minenkov.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** Almost every modern device has a baseband radio processor. Its performance is the object of numerous IEEE papers and master's programs. Until recently, progress in telecom was achieved mainly due to physics and technologies, but now mathematics and algorithms become the main source of improvements. We aim to show how fundamental mathematics (incl. non-constructive theorems of existence) can be beneficial for practical needs. IT and R&D research specifics will be demonstrated while studying telecom problems that arise in real life.

**PREREQUISITES:** Linear algebra and analysis. Basics of probability theory (expectation, distribution). Programming is a bonus.

**SYLLABUS:**

1. Continuous optimization (convex optimization, duality, modern approaches).

2. Queueing theory (multi-criterial approach: optimality and fairness, packet traffic, Markov chains).

3. Linear algebra and Hermit geometry (reminder).

4. Signal processing methods (beamforming and equalization).

5. Radio resource management (time-frequency-space).

**TEXTBOOKS:**


1. J. Nocedal and S. Wright, Numerical Optimization, 1999, Springer, New York.

2. Mor Harchol – Balter, Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action, 2013, Cambridge University Press.

3. Emil Björnson, Jakob Hoydis, and Luca Sanguinetti. Massive MIMO networks: Spectral, energy, and hardware efficiency, 2017, Foundations and Trends in Signal Processing, 11(3-4) 154–655.

4. M. J. Neely, Stochastic Network Optimization, 2010, University of Southern California.


**GRADING RULES:** The final mark is composed of the following factors: working during the semester, which includes problem sheets and/or completing individual research project for those interested (60%); midterm test (10%); final exam (30%).

**COMMENTS:** Курс от Huawei R&D

## TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS
**advanced inter-campus course for $2^{nd}$ year students and higher**

**TEACHER:** V. G. Gorbounov.

**LEARNING LOAD:** Spring term of 2022/23 A. Y., two classes per week, 6 credits.

**DESCRIPTION:** Topological Data Analysis (TDA) is a field that lies at the intersection of data analysis, algebraic topology, computational geometry, computer science, statistics, and other related areas. The main goal of TDA is to use ideas and results from geometry and topology to develop tools for studying qualitative features of data. To achieve this goal, one needs precise definitions of qualitative features, tools to compute them in practice, and some guaranteeabout the robustness of those features. One way to address all three points is a method in TDA called persistent homology (PH). This method is appealing for applications because it is based on algebraic topology, which gives a well-understood theoretical framework to study qualitative features of data with complex structure, is computable via linear algebra, and is robust with respect to small perturbations in input data.

**PREREQUISITES:** Courses in algebra, topology and topology of smooth manifolds

**SYLLABUS:**

**TEXTBOOKS:**

**GRADING RULES:** There are will be 3 tests and a final exam. They contribute to the course Mark 50% and 50% respectively.

**COMMENTS:**