НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Конспект Лекций

«Дифференциальные уравнения. Первый семестр»

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Москва
2020

Содержание

4.09

1.

1.1. Обыкновенные Дифференциальные Уравнения

$y : I \to \mathbb{R}^d, I \in \mathbb{R}$

Обыкновенное дифференциальное уравнение – $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0(*)$, n – порядок ур-я

$F : \Omega \to \mathbb{R}^d, \Omega \in \mathbb{R}^{1+d(n+1)}$

F – непрпрерывная функция

Определение. Решение ОДУ это $y : I \to \mathbb{R}^d : \exists\, y', \ldots, y^{(n)} : I \to \mathbb{R}^d, (*)$ обращается в тождество при подстановке.

$y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x, \ldots, y^{(n-1)}(x))$ $(**)$ – ОДУ разрешенное относительно старшей производной. Мы будем заниматься только ими.

Если $\left|\dfrac{\delta F_i}{\delta y_j^{(n)}}\right| \neq 0$, то локально $(*)$ эквивалентно $(**)$

1.2. Сведение к системе 1-го порядка.

$$(\#)\ \begin{cases} z_0(x) = y(x) \\ z_1(x) = y'(x) \\ \ldots \\ z_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

Или же $(***)$

$$\begin{cases} z'_{n-1} = \varphi(x, z_1, \ldots, z_{n-1}) \\ z'_{n-2} = z_{n-1} \\ \ldots \\ z'_0 = z_1 \end{cases}$$

Лемма 1.1. *1) Если $y : I \to \mathbb{R}^d$ – решение $(**)$, то набор $(z_0 = y, z_1 = y', \ldots, z_{n-1} = y^{(n-1)})$ – решение $(***)$*

2) Пусть $(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ – решение $(***)$. Тогда $y = z_0$ – решением $(**)$ и верны формулы $(\#)$

1.3. Задача Коши для уранения первого и высших порядков

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^d$

Пример $\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(1) = 2 \end{cases}$ Решением будет $x = \dfrac{2}{e} e^t$

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \\ z_0(x_0) = \hat{z}_0 \\ z_1(x_0) = \hat{z}_1 \\ \ldots \\ z_{n-1}(x_0) = \hat{z}_{n-1} \end{cases}, y_i \in \mathbb{R}^d \iff (**) \begin{cases} y(x_0) = \hat{z}_0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)} = \hat{z}_{n-1} \end{cases}$$

1.4. Существование и единственность решения задачи Коши

Пример неединственности
$x(t) = t^3$
$\dot{x}(t) = 3t^2 = 3x^{2/3}$

$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$
$x_1(t) = t^3, x_2(t) = 0$ – решения системы. $x(t) = (t-a)^3$ – решение первого уравнения.

Другой пример:
Пусть $x : J \to \mathbb{R}^d$ – решение задачи Коши
$I \subset J, x|_I : I \to \mathbb{R}^d$ – тоже решение
Ограниченный интервал существования
$\dot{x}(t) = x^2 + 1$
$x(t) = \tan(t-c), t \in [c - \dfrac{\pi}{2}; c + \dfrac{\pi}{2}]$ (можно с константой написать, потому что можно сдвигать)

1.5. Локальная теорема существования и единственности задачи Коши

$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
$f : \Omega \to \mathbb{R}^d, \Omega \in \mathbb{R}^{d+1}, (t_0, x_0) \in \Omega$

Выполнено условие гладкости для функции: $f, f'_x \in C(\Omega)$ – непрерывные
Тогда

1) $\exists\, x : I \to \mathbb{R}^d, t_0 \in I$ – решение з. Коши
2) Если $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^d$ – решение з. Коши, то $x|_{I \cap J} = \tilde{x}|_{I \cap J}$

Более подробно:
т.к. Ω – открытое $(t_0, x_0) \in \Omega \Longrightarrow \exists\, \delta, \epsilon : K = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\epsilon}(x_0) \subset \Omega$
$f, f'_x \in C(K) \Longrightarrow \sup\limits_K |f| \le M, \sup\limits_K ||f'_x|| \le L$ (норма, потому что вектор)
Что за I? это значит $\exists\, I = [x_0 - \tau, x_0 + \tau], \tau = \tau(\epsilon, \delta, M, L)$

1.6. Глобальная теорема единственности

Рассмотрим з. Коши и $(t_0, x_0) \in \Omega, f, f'_x \in C(\Omega)$
Тогда если $x^{(1)} : I^{(1)} \to \mathbb{R}^d, x^{(2)} : I^{(2)} \to \mathbb{R}^d$ – решения з. Коши, то $x^{(1)}|_{I^{(1)} \cap I^{(2)}} = x^{(2)}|_{I^{(1)} \cap I^{(2)}}$ (причем тождественно) (!)
Доказательство:
Рассмотрим $\{t \ge t_0 : x^{(1)}|_{[t_0,t]} = x^{(2)}|_{[t_0,t]}\} = A$, тогда

1) $t_0 \in A$
2) Если $t \in A$, то $\forall\, t' \in [t_0, t], t' \in A$
3)
   - Может быть $A = [t_0, +\infty)$ Тогда $I^{(1)} = (\dots, +\infty), I^{(2)} = (\dots, +\infty), x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$ при $t \in [t_0, +\infty)$
   - Может быть $A = [t_0, \tau)$
   - Может быть $A = [t_0, \tau]$

Если $\sup I^{(1)} = \tau$ или $\sup I^{(2)} = \tau$, то (!)– $x^{(1)}|_{I^{(1)}\cap I^{(2)}} = x^{(2)}|_{I^{(1)}\cap I^{(2)}}$ (причем тождественно) верно при $t \geq t_0$. При $t \leq t_0$ разбираемся аналогично.

1) Доказано

2) Пусть $A = [t_0, \tau)$. Пусть $\tau \in I^{(1)} \cap I^{(2)}$. Раз это не макисмум этих интервалов, то это внутренняя точка.

   $x^{(1)}(\tau) = \lim\limits_{t\to\tau-0} x^{(1)}(t) = \lim\limits_{t\to\tau-0} x^{(2)}(t) = x^{(2)}(\tau)$ (пользуясь тем, что наши решения слева совпадают, а значит и в момент времени τ). Значит $\tau \in A$. А мы договорились, что такого не бывает.

3) Пусть $A = [t_0, \tau], x^{(1)}.x^{(2)}$ – реш. з. К.(1-1) $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(\tau) = x^{(1)}(\tau) = x^{(2)}(\tau) \end{cases}$

   Значит эти два решения совпадают в маленькой окрестности. Т.е. $x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$ при $t \in \overline{B_\delta}(\tau)$.

   Множество A таково что на $[t_0, \tau]$ совпадают В силу теоремы сущ. и единственности, примененной к (1-1) з. К. на отрезке с центром в τ. Значит они совпадают на $[t_0, \tau + \delta) \subset A$. Противоречие.

.

Ослабление условия $f, f'_x \in C(K) \to f'_x \in C(K)$

Определение. Функция $g : K = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\epsilon}(x_0) \to \mathbb{R}^m$ – липшицева по x, если $\exists\ L : \forall\ (t,x),(t,y) \in K$

$||g(t,x) - g(t,y)|| \leq L \cdot ||x-y||$

Лемма 1.2. *Если $g'_x \in C(K), ||g'_x||_{C(K)} \leq L$, то g липшицева по x (с этой константой L)*

Доказательство: Рассмотрим путь $\psi(\theta) = (1-\theta)x + \theta y$

$$|g(t,y) - g(t,x)| = |g(t,\psi(1)) - g(t,\psi(0))| = \left| \int\limits_0^1 \frac{\partial g(t,\psi(\theta))}{\partial\theta} d\theta \right| \leq \int\limits_0^1 \left| \frac{\partial g(t,\psi(\theta))}{\partial\theta} \right| d\theta$$

$$= \int\limits_0^1 |dg_x|_{\psi(\theta)}(\frac{\partial\psi}{\partial\theta})d\theta = \int\limits_0^1 |dg_x|_{\psi(\theta)}(y-x)d\theta \leq \int\limits_0^1 ||dg_x|_{\psi(\theta)}|| \cdot |(y-x)|d\theta \leq ||g_x||_{C(K)}|y-x|.$$

■

11.09

2.

2.1. Локальная теорема существования и единственности задачи Коши.

$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
$F : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \in \mathbb{R}^{n+1}, (t_0, x_0) \in \Omega$ и выполнены условия:

1) $D = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\epsilon}(x_0) \subset \Omega$

2) $F \in C(D), (||F||_{C(D)} \leq M)$

3) F липшицева по x на D, т.е. для $\forall\,(t,x),(t,y) \in D\ |F(t,x) - F(t,y)| \leq L|x-y||$

Тогда существует $\tau = \tau(\delta, \epsilon, L, M)$: з.К. имеет единственное решение на $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ (в конце отрезках односторонние производные)

И Если $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^d$ – решение з. Коши, то $x|_{I\cap J} = \tilde{x}|_{I\cap J}$

2.1.1. Сведение к эквивалентному интегральному уравнению

Лемма 2.1. *x – непрерывн, решение задачи Коши $\Longleftrightarrow$ x решение:* $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds (**)$

Доказательство: ($\Longrightarrow$) Если x решение задачи Коши, то x дифференцируема, т.е. непрерывна. Тогда $F(s, x(s))$ непрерывна (как композиция непрерывных), т.е. $x \in C^1$ (один раз диффер.)

$x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds = x_0 + x(t) - x(t_0) = x(t)$

($\Longleftarrow$)x – решение интегрального уравнения. Тогда x – непрерывн, тогда $F(s, x(s))$ непрерывно. Тогда $\frac{dx}{dt} = F(t, x(t))$. При этом начальное условие выполняется $x(t_0) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_0} = x_0$

■

2.1.2. Теорема сжимающих отображений

Пусть (X, ρ) полное метрическое пространтсво и $f : X \to X$ и существует $q < 1 : \forall x, y \in X\ \rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x,y)$. Тогда $\exists\,!\, z \in X : f(z) = z$

Доказательство Взять точку x и начать ее итерировать $x, f(x), f^2(x), \ldots$ тогда $\rho(f^n(x), f^m(x)) \leq \sum\limits_{k=n}^{m-1} q^k d \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} q^k d = q^n \cdot C,\ C = \frac{d}{1-q}$. Тогда эта последовательность фундаментальна. то есть она сходится.

$f^n(x) \to z, f^{n+1}(x) \to z$. С другой стороны $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \to f(z) \Longrightarrow f(z) = z$.

Единственность. Пусть их две. Тогда при операции их образы приблизятся, а значит и они сами должны стать ближе (т.к. неподвижные). Противоречие.

■

2.2. Доказательство нашей теоремы

2.2.1. Часть 1:

Потребуем $\tau \le \delta$ (У1)

$E_I = \{x : I \to \overline{B_\epsilon}(x_0) - \text{непр.}\}$ $I \subset [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ – отрезок $E \subset C^0(I \to \mathbb{R}^n)$ – полное метрическое пространство, E замкнутое подмножество, тогда E полное.

Пусть $\Phi : E \to E : (\Phi(x))(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds$. Тогда

1) Φ определена(У1), поскольку $F \in C(D)$, а там ф-я определена и непрерывна и можно взять интеграл
2) $\Phi(x) \to C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau] \to \mathbb{R}^n)$
3) $\forall t \in \overline{B_\tau}(t_0)$ $(\Phi(x))(t) \in \overline{B_\epsilon}(x_0)$.

   Действительно $|(\Phi(x))(t) - x_0| = |\int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds| \le M|t_0 - t| \le M\tau \le \epsilon$

   Потребуем второе условие $\tau \le \dfrac{\epsilon}{M}$ (У2)

   Значит Φ действительно из E в E
4) Φ сжимающее с $q = 0,5$

   $$x_1, x_2 \in E, |\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} F(s, x_1(s))ds - F(s, x_2(s))ds\right| \overset{\text{в силу липшивости}}{\le}$$

   $$\overset{\text{в силу липшивости}}{\le} \left|\int\limits_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_2(s)|ds\right| \le L|t - t_0| \cdot ||x_1 - x_2|| \le L\tau||x_1 - x_2||$$

   Положим $L\tau \le 0,5$. Тогда все ок. $\Rightarrow \tau \le \dfrac{1}{2L}$

Получили, что при трех условиях $\tau \le \delta, \tau \le \dfrac{\epsilon}{M}, \tau \le \dfrac{1}{2L}$ $\exists\,!\; x \in E_I : x$ – решение $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds$ $(**)$ по принципу сжимающего отображения. Решения зазадчи Коши на отрезке (и даже любом подотрезке) единственны.

2.2.2. Часть 2:

Если $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^n$ – решение $(*)$ или мы уже знаем что или $(**)$, то $x|_{I \cap J} = \tilde{x}|_{I \cap J}$

Пусть K – любой отрезок в $I \cap J$. Тогда если x неподвижная точка $\Phi_{[t_0 - \tau, t_0 + \tau]}$, то $x|_K, \tilde{x}|_K$ – решения задачи Коши $(*)$ на K.

По части 1 для Φ_K $x|_K = \tilde{x}|_K$. Следовательно $x|_{I \cap J} = \tilde{x}|_{I \cap J}$

2.3. Задача Коши с параметром

$\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$

Назовем эту задачу $*_\lambda$

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$$

Тогда $x(t, \lambda)$ – решение $*_\lambda$

2.3.1. Теорема локальной непрерывной зависимости от параметра

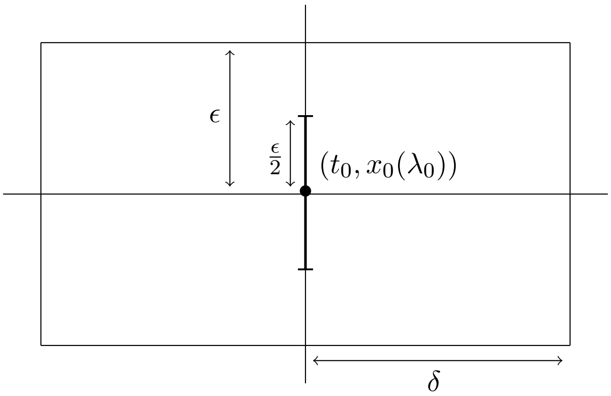
$$*_\lambda \begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$$

$F : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \in \mathbb{R}^{n+1+m}, x_0 : \Psi \to \mathbb{R}^n$ и выполнены условия:

1) $D = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\epsilon}(x_0(\lambda)) \times \overline{B_\xi}(\lambda_0) \subset \Omega$
   $\forall\ \lambda \in \overline{B_\xi}(\lambda_0)$ верно, что $x_0(\lambda) \in \overline{B_{\epsilon/2}}(x_0(\lambda_0))$

2) $F \in C(D), x_0 \in C(\overline{B_\xi}(\lambda_0)(||F||_{C(D)} \leq M)$

3) F линейно по x на D, т.е. для $\forall\ (t, x, \lambda), (t, y, \lambda) \in D$ верно $|F(t, x, \lambda F(t, y, \lambda)| \leq L|x - y|$



Тогда

0) $(*_\lambda)$ имеет решение x_λ на $\overline{B_\tau}(t_0)$, $\tau = \tau(\delta, \epsilon/2, L, M)$ (из теоремы $\exists\,!$) (почему $\epsilon/2$ см. лекция 49:50 и рисунок)

1) $x_\lambda \in C^0(\overline{B_\tau}(t_0)) \to \mathbb{R}^n : \lambda \to x_\lambda$ непрерывно на $\overline{B_\xi}(\lambda_0)$. (Утверждается непрерывность из диска в множество непрерывных функций)

1$'$) $x(\lambda, t) = x_\lambda(t), x \in C(\overline{B_\xi}(\lambda_0) \times \overline{B_\tau}(t_0))$

Доказательство эквивалентности 1 и 1$'$:
$1 \to 1'$. (t, λ). Хотим построить окрестность, в которой мало будут отличатся функции.

1) $\forall\ \zeta > 0\ \ \exists\ \alpha > 0 : \forall\ \lambda' \in B_\alpha(\lambda)$ верно, что $||x_\lambda - x_{\lambda'}|| < \frac{\zeta}{2}$

2) Сама функция x_λ непрерывна. Поэтому $\forall\ \zeta\ \ \exists\ \beta > 0 : \forall\ t' \in B_\beta(t)$ верно, что $|x_\lambda(t) - x_{\lambda'}(t')| < \frac{\zeta}{2}$

Тогда $\forall\ \lambda' \in B_\alpha(\lambda), t' \in B_\beta(\lambda)(t)\ \ |x_\lambda(t) - x_{\lambda'}(t')| \leq |x_\lambda(t) - x_\lambda(t')| + |x_\lambda(t') - x_{\lambda'}(t')| \leq \zeta$

$1' \to 1$. Если x непрерывна на $\overline{B_\xi}(\lambda_0) \times \overline{B_\tau}(t_0)$. Поскольку компакт, x равномерно непрерывно.
$\forall\zeta\exists\ \gamma > 0 : \forall\ \lambda, \lambda' : |\lambda - \lambda'| < \gamma \Longrightarrow \forall\ t$ верно, что $|x(t, \lambda) - x(t, \lambda')| < \zeta$
$\forall\lambda, \lambda' : |\lambda - \lambda'| < \gamma(\zeta) \Rightarrow ||x_\lambda - x'_\lambda||_{C^0(B_\tau(t_0))} < \zeta$ – получается непрерывность.

2.3.2. Доказательство теоремы:

Будем считать, что решения заданы на множестве $E = \{x : \overline{B_\tau}(t_0) \to \overline{B_\epsilon}(x_0) - \text{непрерывно}\}$

$$\Phi_\lambda : E \to E : (\Phi_\lambda(x))(t) = x_0(\lambda) + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s), \lambda) ds.$$

Тогда неподвижная точка Φ_λ – решение задачи Коши, то есть x_λ. Хотим понять, как эта точка будет меняться с изменением λ.

2.3.3. Принцип сжимающих отображений с параметром

$\Phi : \Lambda \times X \to X$
X – полное метрическое, Λ – метрическое.

1) Φ непрерывна

2) $\exists\, q_0 < 1 : \forall\, \lambda \in \Lambda\ \ \Phi_\lambda$ сжимающее с коэффициентом q_0 то есть $\forall x, y \in X$ верно, что $\rho(\Phi_\lambda(x), \Phi_\lambda(y)) \leq q_0 \rho(x, y)$

Тогда если $z(\lambda)$ неподвижная точка Φ_λ, то $z : \Lambda \to X$ – непрерывно.

Доказательство:
Докажем, что z непрерывна в λ_0. $z_0 = z(\lambda_0)$
Рассмотрим последовательность $z_0, \Phi_\lambda(z_0), \Phi_\lambda^2(z_0), \ldots$
Тогда $\rho(z_0, \Phi_\lambda(z_0)) = \rho(\Phi_{\lambda_0}(z_0), \Phi_\lambda(z_0))$.
Из непрерывности Φ_λ следует, что $\exists\, U \ni \lambda_0 : \forall \lambda \in U : \rho(\Phi_{\lambda_0}(z_0), \Phi_\lambda(z_0)) \leq \epsilon$

$\rho(\Phi_\lambda^n(z_0), \Phi_\lambda^m(z_0)) \leq \epsilon \sum\limits_{k=n}^{m-1} q_0^k \leq \dfrac{\epsilon q^n}{1-q}$. Опять пользуемся фундаментальностью последовательности, поэтому последовательность имеет предел. $\Phi_\lambda^m(z_0) \to z(\lambda), m \to +\infty$.
Перейдем к пределу. $\rho(\Phi_\lambda^n(z_0), z(\lambda)) \leq \frac{\epsilon q^n}{1-q}$.
При $n = 0$ $\ \rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) \leq \frac{\epsilon}{1-q}$

11.09

3. Продолжение второй лекции

Решили, для каких отображений стоит применять принцип сжимающих отображений. Осталось проверить, что Φ непрерывно по λ

1) $\Phi_\lambda : E \to E$ непрерывно и сжимает с коэффициентом $0,5$. Дословно переносится из доказательства Теоремы существования и единственности. Только в нужные места встаить "непрерывно по λ"

2) Φ непрерывн.

$$\left|\Phi(\lambda, x)(t) - \Phi(\tilde{\lambda}, \tilde{x})(t)\right| = \left|x_0(\lambda) + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s), \lambda)ds - x_0(\tilde{\lambda}) - \int\limits_{t_0}^{t} F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda})ds\right| \leq$$

$$\leq \left|x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})\right| + \int\limits_{t_0}^{t} \left|F(s, x(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda})ds\right| \leq$$

$$\leq \left|x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})\right| + \int\limits_{t_0}^{t} |F(s, x(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \lambda)ds| + \int\limits_{t_0}^{t} \left|F(s, \tilde{x}(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda})ds\right|$$

1) Здесь пользуемся равномерной непрерывностью $x_0(\lambda)$: Для любого $\xi\ \exists\ \alpha\ :\ |\lambda - \tilde{\lambda}| < \alpha \implies |x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})| \leq \dfrac{\xi}{3}$

2) Пользуемся липшиевостью

3) Здесь пользуемся равномерной непрерывностью: Для любого $\xi \ \exists\ \beta : |\lambda - \tilde{\lambda}| < \beta \implies |F(t, x, \lambda) - F(t, x, \tilde{\lambda})| < \xi \ \ \forall t, x$

Выражение оценивается $\leq \dfrac{\xi}{3} + L||x - \tilde{x}|| \cdot |t - t_0| + \xi|t - t_0| \leq \xi(\dfrac{1}{3} + \tau) + L\tau||x - \tilde{x}||$, где $|t - t_0|$ оценивается τ.

Теперь если потребуем еще одно доп. условие $||x - \tilde{x}|| < \xi$, то все выражение оценивается $|\Phi(\lambda, x)(t) - \Phi(\tilde{\lambda}, \tilde{x})(t)| \leq \xi(\dfrac{1}{3} + \tau + L\tau)\ \ \forall t$. То есть норма меньше либо равно то выражение. Значит непрерывно.

3.1. Глобальная теорема непрерывной зависимости от параметра

Рассмотрим задачу Коши

$$(*_\lambda) \begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}, F, F' \in C(\Omega)$$

при $\lambda = \lambda_0$, x_{λ_0} – решение $(*_{\lambda_0})$. Решение определено на некотором интервале, но мы выделим отрезок I. $x_{\lambda_0} : I \to \mathbb{R}^n$

Тогда $\exists\, U \ni \lambda_0$:

1) $\forall \lambda \in U$ решение $(*_\lambda)$ существует на I (по глобальной теореме единственности, раз существует, то и единственно)

2) $x(\lambda, t) = x_\lambda(t), x$ непрерывно на $U \times I$.

3.2. Доказательство:

Основа: решаем задачу Коши на маленьких отрезках и собираем все глобальное решение из множества локальных.

Посмотрим множество точек $K = \{(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0), t \in I\}$ – график непрерывной функции на компакте. Значит это тоже компакт.

Тогда расстояние от компакта до границы $dist(K, \partial\Omega) = \alpha > 0$.

Действительно, $dist(x, \partial\Omega)$ непрерывная функция, поскольку она даже 1-липшицева (если сдвинули точку x, то расстояние до любого множества не может измениться больше чем на то, что мы сдвинули). Непрерывная функция на компакте достигает своего минимума, а ноль быть не может, поскольку тогда точка x лежит на границе.

Фиксируем $\epsilon = \delta = \zeta = \dfrac{\alpha}{4}$

То есть $\forall\ (\hat{t}, \hat{x}, \hat{\lambda}) \in K\ \overline{B_\delta}(\hat{t}) \times \overline{B_\epsilon}(\hat{x}) \times \overline{B_\zeta}(\hat{\lambda}) \subset \hat{K} \subset \Omega$

Рассмотрим $\{(t, x, \lambda) : dist((t, x, \lambda), K) \leq \dfrac{3\alpha}{4}\} = \hat{K}$ – компакт (замкнуто и ограничено). $\hat{K} \subset \Omega$.

$||F||_{C^0(\hat{K})} \leq M, ||F'_x||_{C^0(\hat{K})} \leq L$, потому что непрерывная функция на компакте. Все 4 константы, участвующие в локальных теоремах, одинаковы для всех точек компакта K.

Вывод: $\tau = \tau(\delta, \epsilon, L, M)$ можно выбрать одним и тем же для всех точек компакта K.

Рассмотрим $\{\min I = t_{-l} < t_{-l+1} < \ldots < t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \max I : |t_i - t_{i-1}| < \tau\}$

Рассматриваем такую последовательность задач Коши:

$$(*_i) \begin{cases} \dot{x}_i = F(t, x_i, \lambda) \\ x_i(t_{i-1}, \lambda) = \begin{cases} x_{i-1}(t_{i-1}, \lambda), i \geq 2 \\ x_0(\lambda), i = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$(*_1)$ – задача Коши с начальным условием $x_1(t_0) = x_0(\lambda)$. При $\lambda \in U_1 \ni \lambda_0$ $x_{1\lambda}$ опеределен на $[t_0, t_1]$ (и даже немного шире, потому что расстояние между cocelними точками строго меньше τ).

В частности, $x_1(t_1, \lambda)$ непрерывно по $\lambda, x_1(t_1, \lambda_0) = x_{\lambda_0}(t_1)$.

$(*_2)$ – задача Коши с начальным условием $x_2(t_1) = x_1(t_1, \lambda)$. Правая часть непрерывная функция, которая при $\lambda = \lambda_0$ попадает на наш компакт. То есть решения этой задачи при $\lambda \in U_2 \ni \lambda_0$ определен на $[t_1, t_2]$ (и даже немного шире, потому что расстояние между соседними точками строго меньше τ). $x_2(t_2, \lambda)$ непрерывно по $\lambda, x_2(t_2, \lambda_0) = x_{\lambda_0}(t_2)$.

Замечание: $x_{1,\lambda}, x_{2,\lambda}$ – решения $*_2$. По локальной или глобальной теореме единственности $x_{1,\lambda} = x_{2,\lambda}$ на пересечении областей определения.

Весь процесс продолжается и продолжается. И в итоге...

$\hat{x}(t) = x_i(t, \lambda)$, если $x_i(t, \lambda)$ определено и $t \in \left(\dfrac{t_{i-1} + t_{i-2}}{2}, \dfrac{t_i + t_{i+1}}{2}\right), \lambda \in \cap U_i$

$\hat{x}(t)$ определено на $[t_0, max(I)]$. Аналогично для $t \in [min(I), t_0]$. Осталось проверить, что $\hat{x}(t, \lambda)$ – решение Коши $(*)$

Действительно:

Уравнение: $\forall t\ \exists\ (t - \beta, t + \beta) : \hat{x}|_{(t-\beta,t+\beta)} = x_i|_{(t-\beta,t+\beta)}.x_i$ удовлетворяет уравнению в $t \Longrightarrow \hat{x}$ тоже, но с начальным условием $\hat{x}(t_0) = x_1(t_0) = x_0(\lambda)$.

Итак. доказали, что при $\lambda \in \cap U_i$ (конечное пересение) все решение $x(t, \lambda)$ существуют. Покажем, что $\hat{x}(t, \lambda)$ непрерывна.

Возьмем $\tilde{t} \in [t_i, t_{i+1}], i \geq 0$. Локально $\hat{x} = x_i$, тогда проверим, что x_i непрерывна по λ. Заметим. что зависимость от λ передается в каждую следующую задачу Коши и входит в уравнение. Но каждая функция непрерывна по (t, λ).

■

24.09

4.

4.1. Операторы Коши

$\dot{x} = F(t,x), F, F'_x \in C(\Omega)$. Рассмотрим отображение $X_{t_0 t_1}(\xi) = \nu$, если решение з.Коши:
$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = y \end{cases}$ $\quad \hat{x}$ равно ν в точке t_1

Свойства:

1) $X_{tt} = id$

2) $X_{t_2 t_3} X_{t_1 t_2} = X_{t_1 t_3}$. Если t_2 между t_1, t_3 – область определения совпадает. Иначе – на пересечении областей определения.

3) $X_{st} = X_{ts}^{-1}$

4) $X_{ts}(y)$ непрерывно по (t,s,y)

5) X_{ts} определено на $A_{ts} \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество из глобальной теоремы непрерывной зависимости. $B_{ts} = X_{ts}(A_{ts}) = A_{st}$

   $X_{ts} : A_{ts} \to A_{st} X_{st} : A_{st} \to A_{ts}$ непрерывные.

   Вывод: X_{ts} гомеоморфзим.

Лемма 4.1. *(λ – параметр) $\dot{x} = f(t,x,\lambda), f \in C$. $X^{\lambda}_{t_0 t_1}$ – его оператор Коши. Тогда $X^{\lambda}_{t_0 t_1}(y)$ непрерывно по $(y, t_0, t_1 . \lambda)$*

Доказательство:

Мы решим задачу Коши: $(*) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = y \end{cases}$. Проблема возникает в зависимости от t_0 (В доказательстве непрерывности раннее предполагали t_0 постоянным, а тут надо непрерывность по t_0 еще)

Пусть $z(s) = x(t_0 + s)$, тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{ds}(s) = \dot{x}(t_0 + s) = f(t_0 + s, x(t_0, s), \lambda) = f(t_0 + s, z(s), \lambda) \\ z(0) = y \end{cases}$$

$(*) \iff (**) \begin{cases} \dfrac{dz}{ds} f(t_0 + s, z, \lambda) \\ z(0) = y \end{cases}$. Посмотрим на эту систему, как на задачу коши с параметром-тройкой (λ, t_0, y)

$z_{\lambda, t_0, y}(s)$ непрерывно по (λ, t_0, y, s). Тогда $X^{\lambda}_{t_0 t_1}(y) = z_{\lambda, t_0, y}(t_1 - t_0)$ непрерывна.

■

4.2. Автономные ДУ

$\dot{x} = f(x)$ – нет зависимости от времени

Лемма 4.2. *Если x – решение автономного ДУ, то $\hat{x}(t) = x(t + a)$ тоже решение $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Доказательство:
$\dot{\hat{x}}(t) = \dot{x}(t + a) = f(x(t + a)) = f(\hat{x}(t))$

■

Следствие:
Для автономного ДУ $X_{t_0t_1} = X_{t_0+a,t_1+a}$ операторы Коши зависят не от t_0, t_1, а от их разности

Определение. Преобразования потока автономного ДУ – это $g^t = X_{o,t}$.

Свойства:

1) $g^0 = id$
2) $g^{t+s} = g^t g^s$ так как $(g^t g^s = X_{0,t}X_{0,s} = X_{s,t+s}X_{0,s} = X_{0,t+s} = g^{t+s})$
3) $g^{-t} = (g^t)^{-1}$
4) $g^t(x)$ непрерывно по (t, x)
5) g^t – гомеоморфизм

Определение. Решение задачи Коши $x : I \to \mathbb{R}^n$ (I интервал) непродолжимо, если не существует $\hat{x} : J \to \mathbb{R}, I \subset J : \hat{x}|_I = x$

Теорема 4.1. *Всякое решение продолжается до непродолжимого. (Если верна теореме существования и единстевнности, то есть $f, f'_x \in C$)*

Доказательство:
Пусть Ξ – множество всех решений задачи Коши. Рассмотрим $J = \bigcup\limits_{(x:I\to\mathbb{R}^n)\in\Xi} I$. Тогда J – открытое множество.

1) J – интервал.
   Если $t \in J$, то $t \in I$ для некоторого $(x : I \to \mathbb{R}^n) \in \Xi$. Тогда $[t_0, t] \subset I \subset J \Longrightarrow J = (\inf(J), \sup(J))$.
2) Определим $\overline{x} : J \to \mathbb{R}^n, \overline{x}(t) = x(t)$, если $(x : I \to \mathbb{R}^n) \in \Xi, t \in I$.
   Корректность:
   $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n \in \Xi, t \in I_1 \cap I_2$.
   Тогда $x_1(t) = x_2(t)$ из глобальной теоремы единствнности $(x_1|_{I_1\cap I_2} = x_2|_{I_1\cap I_2})$
3) $\overline{x} \in \Xi$
   Если $t \in J$, то $\exists\, (x : I \to \mathbb{R}^n) \in \Xi, t \in I$.
   Тогда некоторая $B_\delta(t) \subset I \Longrightarrow x|_{B_\delta(t)} = \overline{x}|_{B_\delta(t)}$
   $\Longrightarrow \frac{d\overline{x}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) = f(t, \overline{x}(t))$
   $\overline{x}(t_0) = x_0$
4) $\overline{x}$ непродолжимо.
   Если нет, то существует $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n) \in \Xi, J \subset \tilde{I}$. НО это противоречит $J = \bigcup\limits_{(x:I\to\mathbb{R}^n)\in\Xi} I$

4.3. Теорема о продолжении решения до границы (или за границу) компакта

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n,\ f, f'_x \in C(\Omega).\ K \subset \Omega,\ (t_0, x_0) \in \Omega,\ x : J \to \mathbb{R}^n$ непродолжимое решение задачи Коши.
Тогда $\exists\, T : t_0 < T < \sup(J) : x(t) \notin K$ при $t \in (T, \sup(J))$
Замечание, если $\sup(J) = +\infty$, то $T \in \mathbb{R}$

4.3.1. Доказательство:

Если $\sup(J) = +\infty$, то очевидно. Действительно, $T = \max(t|(t,x) \in K)$
$\sup(J) = t_+ \in \mathbb{R}$.

Напоминание (если помним формулировку теоремы существования и единственности):
Если $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$, то решение задачи Коши определено на $B_\tau(\tilde{t})$, причем $\tau = \tau(\epsilon, \delta, M, L)$, где эти параметры определяются так: $B = \overline{B_\delta}(\tilde{t}) \times \overline{B_\epsilon}(\tilde{x}) \subset \Omega, \sup_B |f| \leq M, \sup |f'_x| \leq L$
Идея: если точка $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in K$, то можем гарантировать фиксированные значения для (ϵ, δ, M, L)

Рассмотрим $\rho = \min_K(dist(t,x), \mathbb{R}^n \backslash \Omega) > 0$. Тогда $\tilde{K} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : dist((t,x), K) \leq \dfrac{\rho}{2}\}$ – непрерывная функция принимает значения из данного замкнутого множетсва, поэтому тоже замкнуто и $\tilde{K} \subset \Omega$.
$\tilde{K}$ ограничено ($K \subset B_R(0,0) \Longrightarrow \tilde{K} \subset B_{R+\rho/2}(0,0)$). Тогда $\tilde{K}$ компакт.
Положим $\epsilon = \delta = \dfrac{\rho}{4}$. Тогда $\forall\ (\tilde{t}, \tilde{x}) \in K$ верно что $B = \overline{B_\delta}(\tilde{t}) \times \overline{B_\epsilon}(\tilde{x} \subset \tilde{K}$
$\sup_B |f| \leq \sup_{\tilde{K}} |f| := M, \sup_B |f'_x| \leq \sup_{\tilde{K}} |f'_x| := L$.
Итак $\tau = \tau_K$ можно считать одинаковым для всех $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in K$.
Положим $T = t_+ - \tau_K$. Если $\exists\ t \in (\tau, t_+) : (\hat{t}, x|_{\hat{t}}) \in K$, то задача Коши $(*_y) \begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(\hat{t}) = x(\hat{t}) \end{cases}$ имеет решение $y : B_\tau(\hat{t}) \to \mathbb{R}^n$ (теорема существования и единственности с нашей количественной оценкой).
С другой стороны, x – тоже решение задачи коши $(*_y)$
Тогда $\exists\ \overline{y}$ непродолжимое решение $(*_y)$
$\overline{y}(t_0) = x(t_0) = x_0 \Longrightarrow \overline{y}$ решение $(*)$. НО $\overline{y}$ определено при $t = t_+$ (и равно $y(t_+)$), а $\overline{x}$ непродолжимое решение $(*)$ – не определено при $t = t_+$. Противоречие с тем, что $\overline{x}$ продолжение $\overline{y}$

■

4.4. Линейное ДУ

$\dot{x} = A(t)x + b(t), A(t) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, A, b \in C(I), I$ – интервал. Тогда выполнено условие теоремы сущ. и един. $f'_x = A$

Теорема 4.2. *Пусть $A, b \in C(I)$. Тогда все решения $\dot{x} = A(t)x + b(t), A(t) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ продолжаются на весь I*

Доказательство:
Пусть $[\alpha, \beta] \subset I$ Рассмотрим $x(t)$ – решение $x(\alpha)$ определено. Докажем, что x определено на $[\alpha, \beta]$. Устремляя $\beta \to \sup I$ получим требуемое.
$||A(t)|| \leq M, |b(t)| \leq B\ \forall t$ (Норма здесь значит, что применяя A к вектору, он удлинится не более чем в M раз) $\forall u\ |Au| \leq M|u|$. $M = n \cdot \max_{[t\in[\alpha,\beta]]} |a_{ij}(t)|, ||Au||_\infty = \max |(Au)_j| \leq \max_{[t\in[\alpha,\beta]]} \cdot (\sum |u_i|) \leq M \max |u_i| = M \cdot ||u||_\infty$
У нас будет евклидова норма $||Au||_2 \leq \tilde{M}||u||_2$
$\dfrac{d}{dt}(||x||^2) = \frac{d}{dt}(< x, x >) = 2 < x, \dot{x} > \leq 2||x||(||Ax + b||) \leq 2||x||(\tilde{M}||x|| + B)$
$\dfrac{d}{dt}(||x||) = \frac{1}{2||x||}\frac{d}{dt}(||x||^2) \leq \tilde{M}||x|| + B$
Пусть $R(t) = ||x(t)||$ (по дороге доказали, что она дифференцируема. если норма не равняется нулю)
И пусть $S(t) = e^{-(\tilde{M}+1)t}R(t)$

$$\frac{dS}{dt} = -(\tilde{M}+1)S(t) + e^{-(\tilde{M}+1)t}\dot{R}(t) \leq e^{-(\tilde{M}+1)t}(-R(t)(\tilde{M}+1) + R(t)\tilde{M} + B) \leq$$
$$\leq e^{-(\tilde{M}+1)t}(B - R(t)) \leq e^{-(\tilde{M}+1)t}(B - e^{(\tilde{M}+1)t}S(t)) \leq e^{-(\tilde{M}+1)t}(B - e^{(\tilde{M}+1)\alpha}S(t)).$$

Пусть $S(\alpha) = S_0$, $S_1 = 2Be^{-(\tilde{M}+1)\alpha}$, то $S(t)$ не может превзойти $\max(S_0, S_1) = \overline{S}$ (S убывает). Тогда $R(t) = e^{(\tilde{M}+1)t}S(t) \leq e^{(\tilde{M}+1)t}\overline{S}(t)$. То есть R не может неограничено возрастать, что значит, что R определено вплоть до β

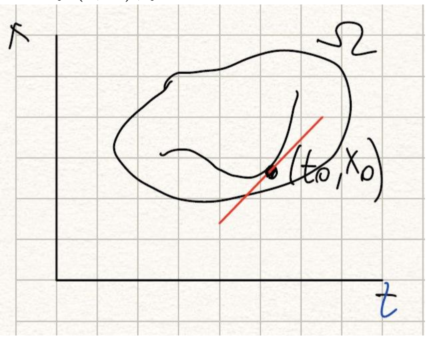
■

25.09

5.

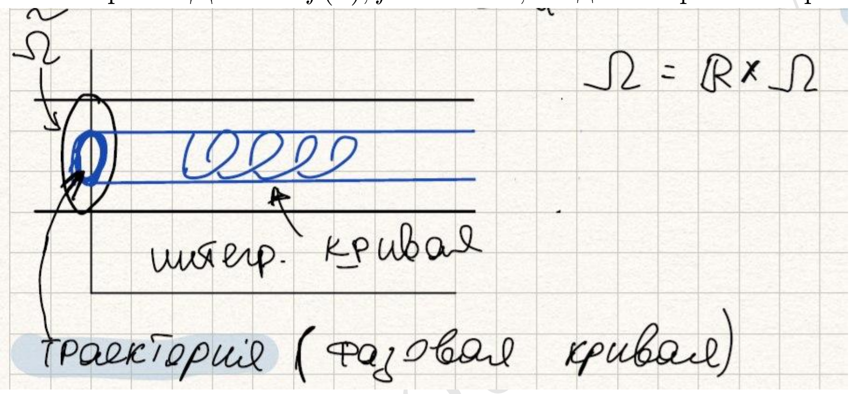
5.1. Фазовые пространства

$\dot{x} = f(t, x), f : \Omega \to \mathbb{R}^n$



Тогда про область Ω говорят, что она расширенное фазовое пространство.
В каждой точке (t_0, x_0) верно $x - x_0 = f(x_0, t_0)(t - t_0)$ $(**)$

Рассмотрим АДУ: $\dot{x} = f(x), f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, тогда $\tilde{\Omega}$ – фазовое пространство.



Следствие: $\Omega = \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$

Пусть $x(t)$ – решение з. Коши, тогда Кривая $\{t, x(t)\}$ – **интегральная кривая**.

Если спроецировать **интегральную кривую** на фазовое пространство, то получится **траектория**.

Предположение: Интегральные кривые это кривые, касающиеся прямых $(**)$ в каждой своей точке.

Доказательство:
Касательный вектор к интегральной кривой это $(1, \dot{x}_1(t_0), \ldots, \dot{x}_n(t_0))$

Лемма 5.1. *Пусть $f \in C^1(\tilde{\Omega})$. Тогда траектория $\dot{x} = f(x)$ не пересекаются (1) и заполняют (2) все пространство $\tilde{\Omega}$*

Доказательство:

(1) Пусть есть две траектории: $x, \tilde{x}$ – решения $\dot{x} = f(x)$ и пусть $x(t_0) = \tilde{x}(\tilde{t}_0) = x_0$

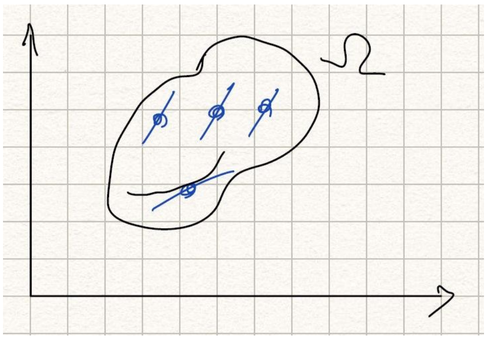
Тогда пусть $\overline{x}(t) = \tilde{x}(t - t_0 + \tilde{t}_0) \Rightarrow \overline{x}$ – тоже решение

Пусть $\overline{x}(t_0) = \tilde{x}(t_0) = x_0$

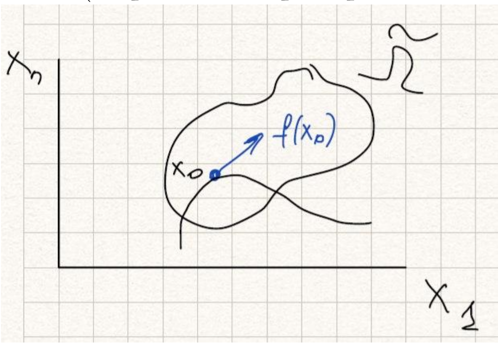
Т.е. $x, \overline{x}$ – решение одной з. Коши $\Rightarrow x \equiv \overline{x} \Rightarrow$ траектории $x, \overline{x}$ совпадают

НО траектории $\tilde{x}, \overline{x}$ сопадают по строению, так как сдвиг по времени не влияет на траекторию.

(2) Возьмем точку x_0 в фазовом пространстве, берем время t_0 и находим интегральную кривую для этой точки, ее проекция будет траекторией.



Поле направлений – это множество всех прямых проведенных к каждой точке **интегральной кривой**. (В **фазовом пространстве** мы получаем **векторное поле**)



Векторном поле: в каждой точке задан касательный вектор

5.2. Уравнения с разделяюшимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. Пусть $G(y), F(x)$ – первообразные $\frac{1}{g(y)}$ и $f(x)$ соответственно, тогда $G(y) = F(x) + C$, где C – константа.

$*_1 \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y)$

Можно совершить замену на уравнение $(*_2)\frac{dx}{dy} = G(x, y)$, где $G = \frac{1}{F}$, если $\begin{cases} F \text{ – Определена} \\ F \neq 0 \end{cases}$

Теорема 5.1. *Интегральная кривая* $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ *проходящ. через* (x_0, y_0) *совпадает с инт. кривой* $\frac{dx}{dy} = G(x, y)$ *проход. через ту же точку* (x_0, y_0)*, если* $F, G \neq 0$ *(эквив. "Определены")*

Доказательство:

Т.к. $F(x_0, y_0) > 0$, то $\exists\, U : F(U) > 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$, т.е. $y(x)$ монот. возраст в $B_\delta(x_0) \Rightarrow$ там есть обратная функция $x(y)$

$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{dy/dx(x(y))} = \frac{1}{F(x(y), y)} = G(x(y), y)$$

5.2.1. Обобщенное решение $*_1, *_2$

Это такая кривая на плоскости (x, y), в $\forall$ окрестности $(x_0, y_0) : F(x_0, y_0) \neq 0$ – график решения $y = y(x)$ (тоже самое для $G(x_0, y_0)$)

Теорема 5.2. (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\Phi(x,y)}{\Psi(x,y)}; \Phi, \Psi \in C$

Рассмотрим систему: (2) $\begin{cases} \dot{x} = \Psi(x,y) \\ \dot{y} = \Phi(x,y) \end{cases}$ *, тогда в области* $\{(\Phi, \Psi) \neq (0,0)\}$ *обобщ. решение* (1) = *траектории* (2)

Доказательство:
($\Longleftarrow$) Пусть $\Psi(x_0, y_0) \neq 0$ и $(x(t), y(t))$ – решение $(2), x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$
Тогда $\dot{x}(t_0) = \Psi(x_0, y_0) \neq 0$, а по Т. о неявной ф-ции локально $t = t(x)$ – обратная функция.
$\dfrac{dt}{dx}(\hat{x}) = \dfrac{1}{\dot{x}(t(\hat{x}))} = \dfrac{1}{\Psi(\hat{x}, y(t((\hat{x})))}$
Рассмотрим функцию $y(t(x)) : \dfrac{dy}{dx}\hat{x} = \dfrac{dy}{dt}(t(\hat{x}))\cdot\dfrac{dt}{dx}(\hat{x}) = \Phi(x(t(\hat{x})), y(t(\hat{x})))\cdot\dfrac{1}{\Psi(\hat{x}, y(t(\hat{x})))} = \dfrac{\Phi(\hat{x}, y(t(\hat{x})))}{\Psi(\hat{x}, y(t(\hat{x})))}$, а $y(x) = y(t(x))$ локально удоавлетворяет (1)

($\Longrightarrow$) Пусть $y(x)$ – решение (1)
Тогда $\dot{x}(t) = \Psi(x(t), y(x(t)))$ (3) это Автономное уравнение на прямой.
Оно имеет решение (см. ниже) $x = x(t)$, где $x(t_0) = x_0$
Положим $y(t) = y(x(t))$, тогда $(x(t), y(t))$ удовл. (2):
1е уравнению (2) – по построению $x(t)$
$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dot{x} = \dfrac{\Phi\left(x(t), y(x(t))\right)}{\Psi\left(x(t), y(x(t))\right)} \cdot \Psi\left(x(t), y(x(t))\right) = \Phi\left(x(t), y(x(t))\right)$ таким образом мы установили соответствие.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) = \frac{g(y)}{1/f(x)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = g(y) \\ \dot{x} = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$$

5.3. АДУ на прямой

$\dot{x} = f(x), f \in C(I), I \subset \mathbb{R}$
Предложение:
Если $f(x_0) = 0$, то $x \equiv x_0$ – решение нашего АДУ.
Пусть $f(x_0) \neq 0$, тогда $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{f(x)}$ (локально эквивалентно)
$$t(x) = t_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}$$
Это были локальные решения.
Теперь пусть $x(t)$ – решение
Пусть $F(x(t)) > 0$ при $t \in (t_0, t_1)$, то $\dot{x}(t) > 0, x : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$, x – обратима и обратная функция локально равна $t(x) = F(x) + C$
Т.е. функция $t(x) - F(x)$ локально постоянная $\Rightarrow$ глобально постоянная.
Предложение:
Если $F|_J > 0, x(t_0) \in J$, то либо $\exists\ T : x(T) = \sup J$, либо $x(t)$ определена на $(t_0, +\infty)$ и $x(t) \overset{t \to +\infty}{\to} \sup J$
Доказательство:
(Теорема о продолжении до границы компакта) + надо исключить $x(t) \overset{t\to+\infty}{\to} a < \sup J$
$F(a) > 0$ тогда $F(x) \geq \epsilon > 0$ при $x \in B_\delta(a)$
Если $x(\hat{t}) \in B_\delta(a)$, то $x\left(\hat{t} + \frac{2\delta}{\epsilon}\right)$
$x\left(\hat{t} + \frac{2\delta}{\epsilon}\right) = x(\hat{t}) + \dfrac{2\delta}{\epsilon}\dot{x}(\tilde{t}) \geq (a - \delta) + 2\delta > a.$

■

Теорема 5.3. *Пусть* $f(x_0) = 0$ *– дискретный ноль функции* f*, тогда решение* $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *справа от* t_0 *ведет себя одним из следующих способов:*

1) $x \equiv x_0$

2) $x = x_0$ *на* $[t_0, T]$*,* $x(t) > x_0$ *при* $t \in (T, T + \epsilon)$

3) $x = x_0, t \in [t_0, T], x(t) < x_0, t \in (T, T + \epsilon)$

причем 2), 3) *возможно только если*

а) $f(x) > 0$ *при* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

б) $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)} < \infty$ *(сходится)*

Предложение:

Если $f \in C^1$, то возможен только вариант А, т.е. $\int\limits_{x_0}^{x_0+\epsilon} \frac{d\xi}{|f(\xi)|}$

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \overline{\overline{o}}(x - x_0) \Rightarrow |f(x)| \leq C|x - x_0| \Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x_0+\epsilon} \frac{d\xi}{|f(\xi)|} \geq \int\limits_{x_0}^{x_0+\epsilon} \frac{d\xi}{C|\xi - x_0|} = +\infty$$

1.10

6.

6.1. ДУ на многообразиях

$\dot{x} = f(x,t), x \in M$
$x : I \to M$, тогда $\dot{x}$ – касательный вектор.
<u>**Определение.**</u> $\{\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M\}$ – гладкие кривые, где $\gamma(0) = p$

$\gamma \sim \hat{\gamma}$ если $dist(\gamma(t), \hat{\gamma}(t)) = \overline{\overline{o}}(t)$

Лемма 6.1. *Если $(U, \varphi), (V, \psi)$ две карты содержащие p, то условие выше для них эквивалентно.*

Пусть $(y_1, \ldots, y_n)$ – локальная система координат в окрестности $p \in \mathbf{R}^n$

- $y = y(x)$ определена в окрестности p
- y гладко зависит от x
- $\det \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x=p} \neq 0$

Тогда если $\gamma, \hat{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$, то $dist(\gamma(t), \hat{\gamma}(t)) \to 0 \Longleftrightarrow dist(y(\gamma(t)), y(\hat{\gamma}(t))) \to 0(!)$
Замечание:
По теореме о неявной функции $x = x(y)$ (локально в окрестности $\tilde{p} = y(p)$) можно написать $\delta(t) = y(\gamma(t)), \hat{\delta}(t) = y(\hat{\gamma}(t))$, тогда (!) имеет вид $dist(x(\delta(t)), x(\hat{\delta}(t))) \to 0 \Longleftrightarrow dist(\delta(t), \hat{\delta}(t)) \to 0$
Итак достаточно доказать ($\Rightarrow$) в (!)

Доказательство:
$y = y(x) \in C^1$, тогда $\exists\ \overline{B}_\epsilon(p), \exists\ M : \forall x \in \overline{B}_\epsilon(p) : \left| \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M$
$\nu(\theta) = y_i(\theta x + (1-\theta)\hat{x})$
$y_i(x) - y_i(\hat{x}) = \sum\limits_j (x_j - \hat{x}_j) \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big|_{\theta_i x + (1-\theta_i)\hat{x}}$
Теперь мы можем оценить $|y_i(x) - y_i(\hat{x})| \leq M \cdot \sum |x_j - \hat{x}_j|$, тогда $||y_i(x) - y_i(\hat{x})|| \leq \sqrt{n} \cdot M \cdot \sum |x_j - \hat{x}_j|$ (т.к. берем n элементов)
$\sum |x_j - \hat{x}_j| \cdot 1 \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum |x_j - \hat{x}_j|^2}$ (первая норма l_1, а вторая евклидовская l_2) $\Rightarrow ||y_i(x) - y_i(\hat{x})|| \leq n \cdot M \cdot ||x - \hat{x}||$
Получаем: $dist(y(\gamma(t)), y(\hat{\gamma}(t))) \leq L \cdot dist(\gamma(t), \hat{\gamma}(t)) = \overline{\overline{o}}(t)$
Продолжаем определение
$\{\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ – гладкие кривые, где $\gamma(0) = p\ \}_{/\sim} = T_p$ – касательное пространсто.

Лемма 6.2. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – лок. система координат в окрестности p*
Тогда $\varphi : T_p \to \mathbb{R}^n$
$[\gamma] \mapsto \left(\dfrac{dx_1(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0}, \ldots, \dfrac{dx_n(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} \right)$ *– это биекция, причем если $(y_1, \ldots, y_n)$ – другая система координат, ψ – соответствующее отображение, то $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – изоморфизм векторных пространств*

Доказательство:

1) φ корректно определено. (далее вместо $x_i(\gamma(t))$ будем писать $x_i(t)$)

   $|\gamma(t)-\hat{\gamma}(t)|^2 = \sum_i |x_i(t)-\hat{x}_i(t)|^2 = \sum_i |p_i + v_i t + \bar{\bar{o}}(t) - p_i - \hat{v}_i t + \bar{\bar{o}}(t)|^2 = \sum_i |(v_i - \hat{v}_i)t + \bar{\bar{o}}(t)|^2 = \left(\sum_i (v_i-\hat{v}_i)^2\right) t^2 + \bar{\bar{o}}(t^2)$

   (*) $||x(t)-\hat{x}(t)|| = \sqrt{||v-\hat{v}||^2 t^2 + \bar{\bar{o}}(t^2)} = ||v-\hat{x}|| \cdot |t| \sqrt{1+\bar{\bar{o}}(1)} = ||v-\hat{v}|| \cdot |t| + \bar{\bar{o}}(t)$

   Если $||x(t)-\hat{x}(t)|| = \bar{\bar{0}}(t)$, то из (*) $v-\hat{v}|| = 0$, (т.е. $v=\hat{v}$) (корректность)

2) Проверим инъективность φ

   Если $\varphi(\gamma) = v \neq \hat{v} = \varphi(\gamma)$, то из (*):

   $||x(\gamma(t)) - x(\hat{\gamma}(t)) \neq \bar{\bar{o}}(t) \Longrightarrow \gamma \sim \hat{\gamma}$ (инъективность)

3) Проверим сюръективность φ

   Рассмотрим γ, задаваемую $x_i(\gamma(t)) = p_i + v_i t$

   Тогда $\varphi(\gamma) = (v_1, \ldots, v_n)$ Проверяем ручками, о да, все супер

4) Проверим линейность: $\psi \circ \varphi^{-1} : v \mapsto Jv$, где $J = \left(\left.\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|_p\right)_{i,j=1,\ldots,n}$

   $$\left.\frac{dy_i(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dy_i(x(\gamma(t)))}{dt}\right|_{t=0} = \sum_j \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|_{x=x(p)} \cdot \frac{dx_j(\gamma(t))}{dt}$$

$\dot{x}(t) = f(x(t),t),\ f: M\times\mathbb{R} \to \bigsqcup_p T_pM = TM$ – касательное расслоение. Условие $f(p,t)\in T_pM \Longleftrightarrow f(\cdot,t)$ – сечение TM

$x: I\to M, \dot{x}(t) \in T_{x(t)}M, \dot{x}(t) = [\gamma(s) = x(t+s), s\in(-\epsilon,\epsilon)]$

6.2. Автономные ДУ на многообразии

$\dot{x}(t) = f(x(t))$

Определение. Векторное поле на многообразии – это отображение $v: M \to \bigsqcup_p T_pM : v(p)\in T_pM\ \forall p$

Векторное поле называется гладким если в $\forall$ локальной системе координат мы можем рассмотреть такие функции $\varphi.(v(\cdot)): U\to\mathbb{R}^n$ и они будут гладкими

Лемма 6.3. $\xi: U \Longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\eta: V \Longrightarrow \mathbb{R}^n$

Если есть 2 лок. с. коорд. в окрестности p, то непрерывность $\varphi.(v(\cdot))$ в p, где v – векторное поле, эквивалентно таковой для $\psi.(v(\cdot))$

Доказательство:

$\varphi_{\xi^{-1}(x)}(v(\xi^{-1}(x))) = (v_1(x),\ldots,v_n(x))$

$\psi_{\eta^{-1}(y)}(u(\eta^{-1}(y))) = (u_1(y),\ldots,u_n(y))$

$u(y(x)) = J(x)\cdot v(x)$, $J(x)$ - гладкая, $y(x)$ - бесконечно гладкая

$J(x) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_x$

Если $J(x)$ - гладкая(ее гладкость не хуже, чем у v) и если v(x) - функция непрерывная, то $J(x)v(x)$ - непрерывная, а если J(x) - гладкая, то слева тоже гладкая.

Если мы берем какой-то непрерывную вектор-функцию v и умножаем его на бесконечно гладкую функцию, то мы снова получаем непрерывную вектор-функцию. Если вектор-функция была трижды гладкая, то произведение тоже будет трижды гладкой.

Если мы берем композицию трижды гладкой функции и бесконечно гладкой функции, то мы снова получаем трижды гладкую функцию Нам нужно перейти от сложной функции u к функции от аргумента y. Взять ее композицию с функцией x = x(y), которая у нас, убдем счиатть, бесконечно гладкая. Поэтому наша непрерывность и гладкость не меняется => u будет непрерывной и гладкой, чтд

Нотация Эйнштейна:

$(x^1, ..., x^n)^T$ - локальная система координат

$(x^{1'}, ..., x^{n'})^T$ - другая локальная система координат

$\gamma : x^i = x^i(t)$ - кривая

$[\gamma]$: $v^i = \left.\dfrac{dx^i}{dt}\right|_{t=0}$

$v^{i'} = \sum \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i$

7.

7.1. Дифференцирование решений по параметру

$$(*)\begin{cases}\dot{x} = f(t,x,\lambda)\\ x(t_0) = x_0(\lambda)\end{cases}$$

Продифференцируем по $\dfrac{\partial}{\partial\lambda_j}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \dot{x}_i}{\partial\lambda_j} = \displaystyle\sum_k \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\bigg|_{(t,x(t,\lambda),\lambda)} \dfrac{\partial x_k}{\partial\lambda_j} + \dfrac{\partial f}{\partial\lambda_j}\\ \dfrac{\partial x_i}{\partial\lambda_j}(t_0) = \dfrac{\partial x_0}{\partial\lambda_j}\end{cases}$$

Тогда обозначим $z_i(t) = \dfrac{\partial x_i}{\partial\lambda_j}(t,\lambda^0)$ (фиксированное j) и получим систему:

$$\begin{cases}\dot{z}_i = \displaystyle\sum_k \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\bigg|_{(t,x(t,\lambda^0),\lambda^0)} z_k + \dfrac{\partial f}{\partial\lambda_j}\\ z_i(t_0) = \dfrac{\partial (x_0)_i}{\partial\lambda_j}(\lambda^0)\end{cases}$$

Лемма 7.1. ***Адамара***

Если $f = f(x,y), f, f_x' \in C, (x,y) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, *тогда* $\exists\ F_i(x_0,x,y)$ *– непрерывная, такая что* $f(x,y) - f(x_0,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^n F_i(x_0,x,y)(x_i - x_i^0)$

Причем $F_i(x_0,x_0,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,y)$

Доказательство:

$$f(x,y) - f(x_0,y) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\left(f(tx + (1-t)x_0, y)\right)dt = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)\cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{tx+(1-t)x_0,y} dt =$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{tx+(1-t)x_0,y} dt, \text{ получаем что } \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{tx+(1-t)x_0,y} dt \text{ это } F_i(x_0,x,y)$$

■

7.2. Сведение к параметру только в начальном условии

$$(**)\begin{cases}\dot{x} = f(t,x,y)\\ \dot{y} = 0\\ x(t_0) = x_0(\lambda)\\ y(t_0) = \lambda\end{cases}$$

Предложение x – решение $(*)$ при данных $\lambda \iff (x, \equiv\lambda)$ – решение $(**)$

Доказательство:

$$(\#)\begin{cases}\dot{x} = f(t,x)\\ x(t_0) = x_0(\lambda_0)\end{cases}$$

Теорема 7.1. *Пусть* $f, x_0 \in C^1, x(t,\lambda)$ *– решение* $(\#), \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_d)$ *фиксируем* $j \in \{1,\dots,d\}$

Тогда $\forall\lambda^0\ \exists\ z_i(t) = \dfrac{\partial x_i}{\partial\lambda_j}(t,\lambda^0)$ z *удовлетворяет з.Коши:* $\star$ $\begin{cases}\dot{z}_i = \displaystyle\sum_k \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\bigg|_{(t,x(t,\lambda^0))} z_k\\ z_i(t_0) = \dfrac{\partial (x_0)_i}{\partial\lambda_j}\end{cases}$

Доказательство:
$\lambda = \lambda^0 + \delta e_j$
$\dfrac{x(t,\lambda) - x(t,\lambda^0)}{\delta} = z_\delta(t)$
$(\#_\delta)\ \dot z_{\delta,i}(t) = \dfrac{1}{\delta}\left(f_i(t,x(t,\lambda)) - f_i(t,x(t,\lambda_0))\right) = \dfrac{1}{\delta}\sum\limits_k F_{ik}(t,x(t,\lambda),x(t,\lambda^0))\cdot(x_k(t,\lambda) - x_k(t,\lambda^0)) =$
$\sum\limits_k F_{ik}(t,x(t,\lambda),x(t,\lambda^0))\cdot z_{\delta,k}$

Начальное условие: $z_{\delta,i}(t_0) = \dfrac{x_{0,i}(\lambda) - x_{0,i}(\lambda^0)}{\delta}(\#*_\delta)$

Рассмотрим задачу: $\begin{cases} \dot z_{0,i} = \sum\limits_k \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\Big|_{(t,x(t,\lambda^0))} \cdot z_{0,k}\ (\#_0) \\ z_{0,i}(t_0) = \dfrac{\partial x_{0,i}}{\partial \lambda_j}(\lambda^0)\ (\#*_0) \end{cases}$

Вывод: если $(z_{0,i})$ – решение $(\#_0, \#*_0)$, то это предел при $\delta \to 0$ решений $(\#_\delta, \#*_\delta)$, т.е. $z_{\delta,i} \to z_{0,i}$

Следствие:

1) $\dfrac{\partial x(t,\lambda)}{\partial \lambda_j}$ – непрерывна по (t,λ) (теорема о непрерывной зависимости для (☆))

2) $x(t,\lambda) \in C^1$

3) Для системы $\begin{cases} \dot x = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases} \quad f, x_0 \in C^1$

$\exists\ \dfrac{\partial x(t,\lambda)}{\partial \lambda_j}\Big|_{\lambda-\lambda_0} = z_j$, удовлетворяющее $\begin{cases} \dot z_i = \sum\limits_k \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\Big|_{(t,x(t,\lambda^0),\lambda^0)} \cdot z_{0,k} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \lambda_j}\Big|_{\dots} \\ z_{0,i}(t_0) = \dfrac{\partial x_{0,i}}{\partial \lambda_j}(\lambda^0) \end{cases}$

Перейдем к $(**)$ $\quad w_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial \lambda_j}$

$$\begin{cases} \dot z_i = \sum\limits_k \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\cdot z_k + \sum\limits_l \dfrac{\partial f_i}{\partial \lambda_l}\cdot w_l \\ \dot w_i = 0 \\ z_i(t_0) = \dfrac{\partial x_{0,i}(\lambda^0)}{\partial \lambda_j} \\ w_i = \delta_{ij}(0, if\ \ i \neq j\ \ and\ \ 1, if\ \ i = j) \end{cases}$$

4) Если $f \in C^2$, то можно найти $\dfrac{\partial^2 x(t,\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k}$

5) Можно разлагать решения в ассимптотические ряды:

$\begin{cases} \dot x = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases} \quad f, x_0 \in C^1$

Если $x(t,\lambda) = x(t,\lambda^0) + \sum\limits_j \dfrac{\partial x}{\partial \lambda_j}\Big|_{\lambda^0}(\lambda_j - \lambda_j^0) + \dfrac{1}{2}\cdot\sum \dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k}(\dots) + \dots + o(|\lambda - \lambda^0|^n)$

$x(t,\lambda^0) + a_j(t)\sum(\lambda_j - \lambda_j^0) + \dfrac{1}{2}\sum b_{ij}(\lambda_j - \lambda_j^0)(\lambda_i - \lambda_i^0) + \dots + o(|\lambda - \lambda^0|^n)$ подставим в уравнения системы начальной и получим уравнения на a_i, b_{ij} и так далее.

6) $\left.\begin{matrix} X_{t_0,t_1}(x) \text{ для } \dot{x} = f(t,x) \\ g^t(x) \text{ для } \dot{x} = f(x) \end{matrix}\right\} \in C^1$ по совокупности аргументов, при этом $f \in C^1$

$g^t(x)$ – гладкая, т.к. производная по t – это f в соответстующей точке, а производная по x непрерывна по доказанной теореме. Таким образом обе частные производные непрерывны, значит вся эта функция дифференцируема.

Для $X_{t_0,t_1}(x)$ работало бы такое же рассуждение, если бы не было t_0. Поэтому докажем, что и по t_0 у нас также все хорошо.

$\begin{cases} \dot{y} = f(s+t_0, y(s)) \\ y(0) = x \end{cases}$ решение такой системы будет гладко зависить и от t_0 тоже

$X_{t_0,t_1}(x) = y(t_1 - t_0)$, а это выражение непрерывно по всем 3 аргументам: t_0 и x участвуют в предыдущей системе, t_1 – точка, в которой мы его берем $\Rightarrow X_{t_0,t_1}(x) \in C^1$.

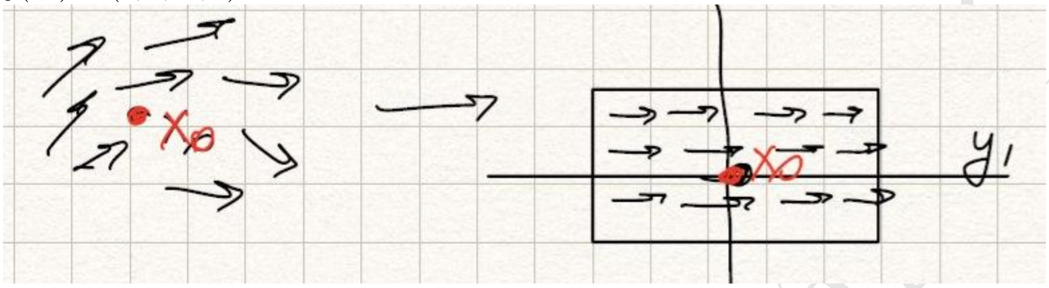
09.10

8.

8.1. Теорема о выпрямлении в.п.

$(*)\begin{cases}\dot{x} = v(x) \\ v(x_0) \neq 0\end{cases}$ $\exists$ локальная система координат $(y_1, ..., y_n)$ в окрестности x_0 такая, что (*) принимает вид:

$\dot{y}_1 = 1$, $\dot{y}_2 = \dot{y}_3 = ... = \dot{y}_n = 0$
$y(x_0) = (0, 0, ..., 0)$



Можно ввести новые координаты:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \varphi(y_2, ..., y_n) \\ z_2 = \psi_2(y_2, ..., y_n) \\ \dots \\ z_n = \psi_n(y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

Усиление:
$\dot{x} = v(x)$, $v(x^0) \neq 0$
Пусть M – поверхность $\dim = n - 1$

- $x^0 \in M$
- $T_{x^0}M \oplus < v(x^0) >= T_{x^0}\mathbb{R}^n$

M трансверсальна v в x_0
Тогда существует локальная система координат такая, что:

- $(*) \Leftrightarrow \dot{y}_1 = 1; \dot{y}_2 = ... = \dot{y}_n = 0$
- M имеет вид $\{y_1 = 0\}$

Доказательство: Часть 1. Выберем такое параметрическое задание M

$$\text{M: } \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, ..., u_{n-1}) \\ ... \\ x_n = \varphi_n(u_1, ..., u_{n-1}) \end{cases}$$

$x^0 = \varphi(0, 0, ..., 0)$

$$rk\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) = n - 1 \text{ (максимально)}$$

Рассмотрим $\Phi(u_1, ..., u_{n-1}, u_n) := g^{u_n}(\varphi(u_1, ..., u_{n-1}))$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}\right|_{(0,...,0)} \overset{j \neq n}{=} \frac{\partial}{\partial u_j}(g^0(\varphi(u_1, ..., u_{n-1})) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}\right|_{(0,...,0)}$$

$\left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\right|_{(0,...,0)} = v(\varphi(0,...,0)) = v(x_0)$

$T_{x^0}M =< \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_j}, j = 1,...,n-1 >$

1) $\dfrac{\partial \varphi}{u_j} \in T_{x^0}M$

2) В определении через $[\gamma]$. $\varphi(u_1,...,u_{n-1})$. Фиксируем все u, кроме u_j, а этот u_j меняется с течением времени.

$=> \operatorname{rk} \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}\right)_{j=1,...,n} = n$

Т.е. локально Φ обратимо, $u_j = u_j(x)$

$x = \Phi(u_1,...,u_n) = g^{u_n}(\varphi(u_1,...,u_{n-1}))$

$g^\tau x = g^{u_n+\tau}(\varphi(u_1,...,u_{n-1})) = \Phi(u_1,...,u_{n-1},u_n+\tau)$

$\dot{u}_j =?$

$\dot{x} = \sum \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\dot{u}_j = v(\Phi(u))$ (**). $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}$ – линейно независимы в т. $(0,...,0) \Rightarrow$ линейно независимы в окрестности $(0,...,0)$

Т.к. $\left.\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial u_n}\right|_{(u_1,...,u_n)} = \left.\dfrac{d}{ds}\right|_{s=0}(g^{u_n+s}(\varphi(u_1,...,u_{n-1})) = \left.\dfrac{d}{ds}\right|_{s=0}(g^s(\Phi(u))) = v(\Phi(u))$

Система (**) имеет решение: $\dot{u}_1 = ...\dot{u}_{n-1} = 0$, $\dot{u}_n = 1$

1. Такие u_n подходят

2. Т.к. векторы $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}$ линейно независимы => единственный набор

3. $u = u(x)$ гладкие => такие производные существуют

Часть 2. $M - \{\Phi(u_1,...,u_{n-1},0)\} = \{u_n = 0\}$. При этом $v(x^0) \neq 0$ – важное условие!

8.2. Дифференциальные 1-формы

$T_p\mathbb{R}^n$ – касательное пространство

$(T_p\mathbb{R}^n)^* := T_p^*\mathbb{R}^n$ – двойственное пространство $= \{l : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ – линейный функционал$\}$ = кокасательное пространство = пространство линейных 1-форм на $T_p\mathbb{R}^n$

Определение. Дифференциальная 1-форма – это отображение $\omega : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \bigsqcup\limits_p T_p^*\mathbb{R}^n : \omega(p) \in T_p^*\mathbb{R}^n$.

Пусть $(x^1,...,x^n)$ – локальная система координат

Базис в $T_p^*\mathbb{R}^n$: $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = [x^j = x^j(p) + t\delta_i^j]$

dx^i – двойственный базис в $T_p^*\mathbb{R}^n$

$dx^i\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_j^i$

Координаты в $T_p^*\mathbb{R}^n$

$v = \sum\limits_i v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$\omega = \sum\limits_j \omega_j dx^j$

Лемма 8.1. *Два определения гладкости эквивалентны:*

1) $\omega \in C^r$

2) $\forall v \in C^r$ $\omega(v) \in C^2$

$(1 \Rightarrow 2)$: $\omega(v) = \sum\limits_{i,j} v^i\omega_j dx^j\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = v^i\omega_j\delta_i^j = v^i\omega_i$

$(2 \Rightarrow 1)$: $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \omega_i \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \text{гладкая сколько угодно раз}\right)$

8.3. Дифференциал функции

$f \in C^r$
$df|_p \in T_p^*\mathbb{R}^n$; $v = [\gamma]$, $v \in T_pM$
$df(v) \overset{det}{=} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(\gamma(s))$

Лемма 8.2. $df|_p$ *– корректно определено в* $(x_1, ..., x_n)$ *– локальная система координат*

1. Не зависит от представителя γ
2. Линейность по v
$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(\gamma(s)) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_p \cdot \dot{\gamma}^j(0) = \dot{\tilde{\gamma}}^j(0)$
$\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \dot{\gamma}^j(0) = \dot{\tilde{\gamma}}^j(0)$
$\omega(p) = df|_p$; $\omega = df$ – дифференциал функции
Предложение: dx^i – двойственные базис в $T_p^*\mathbb{R}^n = dx^i - df$ для $f = x^i$

Доказательство: $\gamma^k(s) = x^k(p) + s\delta_j^k$
$d(x^j)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(x^i(\gamma(s))) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(\gamma^i(s)) = \delta_j^i$ чтд
Из $\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(\gamma(s)) - \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_p \cdot \dot{\gamma}^j(0) = \dot{\delta}^j(0)$: $df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$

■

8.4. Дифференциальные уравнения на $\mathbb{R}^2$

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
ω – 1-форма

Задача: найти все такие кривые $\gamma : \omega(T_p\gamma) = 0$; $T_p\gamma \subset \ker\omega(p)$ (!)
Если ω в точке p $\neq 0$, то $\dim(\ker\omega(p)) = 1$
$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$
Все касательные векторы пропорциональны
Если локально γ задается $y = y(x)$; $T_{x,y(x)}\gamma = < \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y} >$
Применим ω к $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y}\right)$
(!) даёт $A(x, y)dx\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y}\right) + B(x, y)(...) = A(x, y) + B(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$
Если локально $x = x(y)$ $A(x, y)\frac{dx}{dy} + B(x, y) = 0$
$Adx + Bdy = 0$ – пфаффово уравнение
$T_p\mathbb{R}^2$ – пространство
$T_p\gamma$ – подпространство; $\omega|_\gamma$, то в $Adx + Bdy = 0$ dx и dy линейно зависимы
$(\omega(T_p\gamma) = 0 : T_p\gamma \subset Ker\omega(p))$ связано с $(Adx + Bdy = 0)$

Замечание: Пусть $\omega(p) \neq 0$. Тогда локально существует единственная кривая γ, $p \in \gamma$, является решением пфаффова уравнения (= удовлетворяет Задаче)

Доказательство:
$A(x, y) + B(x, y)\frac{dy}{dx} = 0| : B(x, y)$, если $B(p) \neq 0$,

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{A(x,y)}{B(x,y)}$ – оно удовлетворяет теореме о существовании и единственности

8.5. Уравнения в полных дифференциалах

Пусть $\omega = df$, $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ (A или B не равно 0). Тогда пфаффовое уравнение легко решается:
Рассмотрим $\gamma = \{f = C\}$
1 способ.
Локально γ – это $y = y(x)$; $f(x, y(x)) = C$; $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$
$T_{x,y(x)}\gamma =< \left(1, \dfrac{dy}{dx}\right) >=< \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial x} \cdot \dfrac{dy}{dx} >$
$\omega\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$
2 способ.
$\omega = df$; $d(f|_\gamma) = (df)|_{T\gamma}$
$df(v) = \dfrac{d}{ds}(f(\delta(s))) = f(f_\gamma)([\delta]) = d(f_\gamma)(v)$ ($v \in T_p\gamma => v = [\delta], \delta \subset \gamma$) ($f$ можно заменить на f_γ)
Если есть уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$, то решить его это тоже самое, что решить пфаффовое уравнение $g(y)dy - f(x)dx = 0$
$d(G(y) - F(x)) = 0 \Leftrightarrow G(y) - F(x) = C$
Почему не всегда $\omega = df$?
$\omega = df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$
Замечание: Если $\omega = Adx + Bdy = df$, то $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}\left(= \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$

8.6. Метод интегрирующего множителя

Идея: Уравнение $Adx + Bdy = 0$ меняется на равносильное, если ω заменить на $\omega \cdot g(x,y)$ (g не обращается в 0)
Если $\omega g = df$, то $Adx + Bdy = 0$ эквивалентно $\{f = const\}$
Определение. 1-форма ω называется точной, если существует $f : \omega = df$.
Определение. Пусть дана такая 1-форма $\omega = \sum \omega_i dx^i$. ω называется замкнутой, если $\forall i, j$ $\dfrac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$
Мы видели, что ω – точная => ω - замкнутая
Верно ли обратное? Зависит от топологии области определения
Пример 1: $\mathbb{R}^2$
$\omega = Adx + Bdy$; $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x} = A$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = B$

Неизвестная функция f имеет такой вид: $f(x,y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} A(\xi, y)d\xi + g(y)$

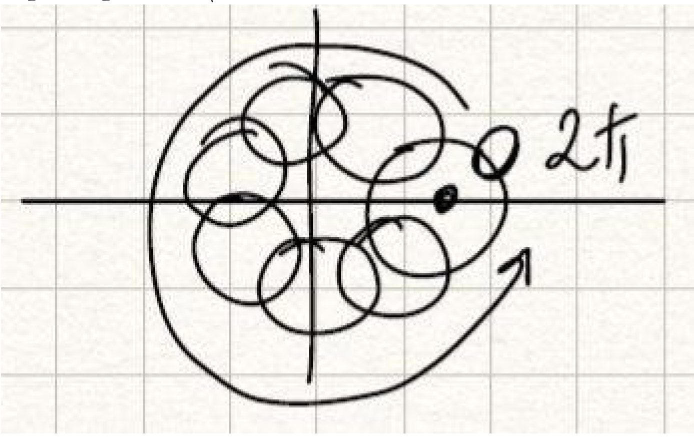
$f(x_0, y) = g(y)$; $\dfrac{dg}{dy} = B(x_0, y)$

$f(x,y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} A(\xi, y)d\xi + \int_{y_0}^{y} B(x_0, \eta)d\eta + f(x_0, y_0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \dfrac{\partial A}{\partial y}(\xi, y)d\xi + B(x_0, y) = B(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} \dfrac{\partial B}{\partial x}(\xi, y)d\xi = B(x, y)$

$\Rightarrow$ Да, на плоскости обратное верно

Пример 2: $\mathbb{R}^2 \backslash 0$



$u = d\varphi$, где φ – полярный угол (не функция на $\mathbb{R}^2 \backslash 0$)

$u = df$

Почему ω – замкнута? Это следует из того, что ω точна в окрестности (локально)

С другой стороны, почему ω не точна? Потому что локально наше решение должно быть ветвью полярного угла + константа. Тогда начнем с какой-нибудь окрестности, в нем мы зафиксируем решение. Возьмем соседнюю окрестность, тогда на пересечении у нас возникает разность этих констант. Мы получаем, что мы туда должны продолжить тем же полярным углом, это же одна и та же функция. И так мы продолжаем. Когда мы проделаем полный круг, то к нашему полярному углу добавится угол 2π, т.е.в какой-то точке равна, скажем, 0. Дальше $\pi/4$,$\pi/2$ и т.д. Пройдя полный круг мы скажем, что наша функция в изначальной точке равна 2π, приходим к противоречию.

$\varphi = arctg\dfrac{y}{x} + const = arcctg\dfrac{x}{y} + const$

$d\varphi = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(d\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{xdy - ydx}{(1+\dfrac{y^2}{x^2})x^2} = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \omega$

$\dfrac{\partial\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}$

$x + iy = z$

$\omega = Im\left(\dfrac{dz}{z}\right) = Im(dLnz)$

$Lnz = Ln|z| + iArg\varphi$

23.10.2020

9.

На семинарах нам вводили однородные уравнения: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right)$
Если $\exists\, H_\lambda : (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$, то это диффеоморфизм переводящий решение в решение.

9.1. Симметрии ДУ

$\dot{x} = f(x, t)(*)$, Ω – расширенное фазовое пространство, тогда $H : \Omega \to \Omega$ – диффеоморфизм. H является симметрией $(*)$: если H переводит поле направлений $(*)$ в себя.
Пусть $\exists\, h : X \to Y$ – диффеом
Пусть $h(p) = q$, тогда можно определить $h_* : T_pX \to T_qY$
Возьмем $v \in T_pX$, $\;h_*(v) = [h \circ \gamma]$, $[h \circ \gamma] \in T_qY$, действительно $h(\gamma(0)) = h(p) = q$
x^i – лок. система координат в окр $p \in X$
y^α – лок. система координат в окр $q \in Y$