Содержание

0.1 Задача 1.

Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *- непрерывная функция, такая, что* $\int_0^1 f(x)dx = 0$. *Докажите, что уравнение* $f(x) = 0$ *имеет хотя бы один корень на интервале* $(0,1)$.

Пусть $F(x)-$ первообразная функции $f(x)$, тогда уравнение $f(x) = 0$ принимает вид $F'(x) = 0$ и $\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 0$, т.е. $F(1) = F(0)$.

Тогда по Теореме Ролля для функции $F(x)$ на интервале $(0,1)$ найдется точка ξ, такая что $F'(\xi) = 0$, значит, $f(\xi) = 0$, т.е. уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень, равный ξ.

0.2 Задача 2.

Найдите предел $\lim_{n\to\infty}(\sin 1 \sin 2 \ldots \sin n)$.

По формуле из школы,

$$\sin k \sin(k+1) = \frac{1}{2}(\cos 1 - \cos(2k+1))$$

Далее,

$$\alpha < \cos 1 < 1 - \alpha, \alpha > 0$$
$$-1 \le \cos(2k+1) \le 1$$

Тогда

$$|\sin k \sin(k+1)| < \frac{2-\alpha}{2}$$

Следовательно,

$$|\sin 1 \sin 2 \ldots \sin(n)| < (\frac{2-\alpha}{2})^{n/2}$$

Предел равен нулю.

0.3 Задача 3.

Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *такие, что*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Посмотрим на эту функцию, ограничив ее на отрезок $[0,1]$. Разобьем его на n равных частей. Тогда,

$$|f(1/n) - f(0)| \leqslant (1/n - 0)^2,$$
$$|f(2/n) - f(1/n)| \leqslant (2/n - 1/n)^2,$$

и т.д.

$$|f(1) - f((n-1)/n)| \leqslant (1 - (n-1)/n)^2,$$

Сложим все неравенства. По неравенству треугольника,

$$|f(1)-f(0)| \leqslant |f(1)-f((n-1)/n)|+\ldots+|f(2/n)-f(1/n)|+|f(1/n)-f(0)| \leqslant n\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

И это для любого n. Значит, значения в точках 0 и 1 совпадают. Аналогично, значения в любой паре точек совпадают. Значит, $f = C$.

0.4 Задача 4.

Найдите восьмую производную функции $f(x) = \sin(\sin(x))$ в точке $x = 0$.

Разложим $\sin(\sin(x))$ в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sin(\sin(x)) = \sin(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8))$$

Идея в том, чтобы разложить всю функцию в ряд Тейлора и посмотреть на коэффициент при x^8 — именно он (домноженный на 8!) даст значение восьмой производной в нуле. Понятно, что члены более высоких степеней во внутреннем синусе нам не нужны. Аналогично разложим внешний синус:

$$f(x) = \sin(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)) = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)-\frac{1}{3!}(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8))^3+$$

$$+\frac{1}{5!}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8))^5 - \frac{1}{7!}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8))^7 + o(x^8)$$

Заметим, что ни во одной скобке не получится моном степени 8. Значит, производная ноль.

0.5 Задача 5.

Докажите, что

$$0 < e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

при всех $x > 0$.

Если понимать экспоненту как:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

то

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 0$$

так как каждое слагаемое больше 0.

Если же e^x–решение дифференциального уравнения $y' = y, y(0) = 1$, то:

$$\int_0^y (e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!})dx = e^x|_0^y - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{k+1}}{(k+1)!} = e^y - 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{k+1}}{(k+1)!}$$

и идем индукцией по n.

Также можно рассматривать экспоненту как $e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$, но вычислений много.

0.6 Задача 6.

Найдите кривую, касающуюся всех прямых вида $y = px - e^p$.

$$F(x, y, p) = y - px + e^p = 0$$
$$\frac{dF}{dp} = 0$$
$$-x + e^p = 0$$
$$x = e^p$$
$$y = pe^p - e^p = (p-1)e^p$$

0.7 Задача 7.

Рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $\phi(x, y) = (x, y+x^2)$. Найдите образ вектора $(1, 2)$ при отображении первого дифференциала $d_{(1,1)}\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ отображения ϕ в точке $(1, 1)$.

$$\varphi(f(x, y), g(x, y)) = (x, y + x^2)$$
$$d\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$
$$(x, y) = (1, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

0.8 Задача 8.

Сходится ли ряд $-1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \ldots - \frac{1}{2n-1} + \frac{3}{2n} - \ldots$?

Ряд не сходится абсолютно (сумма модулей), так как содержит $\frac{3}{2}$ от гармонического ряда, который расходится. Поэтому надо быть немного осторожным и не менять порядок суммирования, иначе можно получить все что угодно, в том числе и ∞ и зафейлить. Ок,

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2n-1} + \frac{3}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-4)+1}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{n(2n-1)} + \frac{1}{2n(2n-1)}$$

Получилась сумма двух положительных рядов. Их уже можно складывать по одиночке. Второй сходится, так как в знаменателе что-то квадратичное. Аккуратно покажем, что первый расходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{n(2n-1)} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{n \cdot 2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}$$

Ряд справа расходится по интегральному признаку: $\int_{x=1}^{\infty} \frac{x-1}{x^2} = \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} - \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \infty$. Итого весь ряд расходится.

0.9 Задача 9.

Равномерно ли сходится ряд $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n}$ *на отрезке* $[-1,0]$*?*

Этот ряд сходится к функции $f(x) = -ln(1-x)$, так как беру $\epsilon > 0$, N такое, что $\frac{1}{N+1} < \epsilon$, тогда для любого $n > N$, для любого $x \in [-1,0]$:

$$|\sum_1^n \frac{x^n}{n} - (-ln(1-x))| = |\sum_1^n \frac{x^n}{n} + (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ...)| = |\sum_{n+1}^{\infty} \frac{x^n}{n}| =$$

$$= |\frac{|x|^{n+1}}{n+1} - \frac{|x|^{n+2}}{n+2} + ...| \leq |\frac{|x|^{n+1}}{n+1}| \leq |\frac{1}{n+1}| < \frac{1}{N+1} = \epsilon$$

0.10 Задача 10.

Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

Проверим существование предела:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{x^{(n+1)^2}}{2^{n+1}}}{\frac{x^{n^2}}{2^n}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^{(n+1)^2}2^n}{x^{n^2}2^{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^{2n+1}}{2}|$$

Он существует при $x \in [-1,1]$, иначе предел–бесконечность. Поэтому радиус сходимости $=1$.

0.11 Задача 11.

Придумайте функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, имеющую в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^2$ *производную по любому направлению, непрерывную в* x_0*, но не дифференцируемую в* x_0*.*

Это функция

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

доопределенная нулем в начале координат. Она непрерывна в нуле, поскольку если точка (x,y) устремляется к началу координат $(0,0)$, то в числителе будет бесконечно малая величина большего порядка, чем в знаменателе, значит, в пределе получится ноль.

Функция имеет производную по любому направлению, ее можно выписать явно. Пусть (e_1, e_2) — единичный вектор в некотором направлении. Тогда производная

$$\frac{f(x^0 + he) - f(x^0)}{h} = \frac{\frac{(he_1)^2(he_2)}{(he_1)^2+(he_2)^2} - 0}{h} = \frac{e_1^2 e_2}{e_1^2 + e_2^2}$$

Даже предел не понадобилось брать. Короче, из нуля просто выходят прямые в разных направлениях. Функция не дифференцируема нуле: так как $f(x,0) = f(0,y) = 0$, то касательная плоскость-дифференциал функции должна содержать эти две прямые и быть горизонтальной (линейным отображением, равным нулю в любой точке). Однако, для направления $f(x,x) = \frac{x}{2}$ эта плоскость не будет приближающим линейным отображением.

0.12 Задача 12.

Найдите $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{24} \partial y^{26}}(0,0)$ *для* $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

$$\sin(x^2+y^2) = \sin(x^2)\cos(y^2) + \cos(x^2)\sin(y^2) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{4n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{4n+2}}{(2n+1)!} = ☺$$

В $\frac{\partial^{50} ☺}{\partial x^{24} \partial y^{26}}$ выживет только моном, $k \cdot x^{24} y^{26}$ — ибо всё младшее умрёт от дифференцирования, а старшее – от нуля. Т.е. имеем

$$\frac{\partial^{50} ☺}{\partial x^{24} \partial y^{26}} = \frac{\partial^{50}}{\partial x^{24} \partial y^{26}} \frac{x^{24}}{12!} \cdot \frac{y^{26}}{13!} = \frac{24! \cdot 26!}{12! \cdot 13!}$$

0.13 Задача 13.

Если $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *— открытое множество,* $(x_0, y_0) \in U$*, и пусть функция* $F \in C^2(U)$ *такова, что* $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$*. Пусть* $y = f(x)$ *— функция, неявно заданная уравнением* $F(x,y) = 0$ *в окрестности* (x_0, y_0)*. Выразите* $f''(x_0)$ *через частные производные функции* F*.*

Если $F(x, f(x)) = 0$, то, дифференцируя по x (все в точке (x_0, y_0), мне просто лень писать),

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f'(x) = 0$$

Значит,

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Еще раз продифференцируем:

$$f''(x) = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} f'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y})}{(\frac{\partial F}{\partial y})^2}$$

Подставим теперь $f'(x)$ в то, что получилось:

$$f''(x) = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\frac{\partial F}{\partial y})^2 - (\frac{\partial F}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{(\frac{\partial F}{\partial y})^3}$$

И врагу такой производной не пожелаешь.

0.14 Задача 14.

Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a, 2b, 2c$ *опишите эллипсоид наименьшего объема*

Решим обратную задачу: вписать в данный эллипсоид прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Берем эллипсоид, центр которого совпадает с началом координат,а оси направлены по осям координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

где $2a, 2b, 2c$–оси эллипсоида. Центр вписанного прямоугольного параллелепипеда будет совпадать с началом координат, а его ребра параллельны осям координат. Таким образом, если одна вершина (x, y, z) лежит на эллипсоиде, то и остальные симметрично расположены. Так как ребра параллелепипеда имеют длину $2x, 2y, 2z$, то объем параллелепипеда равен:

$$V = 8xyz$$

По теореме о среднем арифметическом и геометрическом:

$$\frac{1}{3}(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) \geq (\frac{x^2}{a^2} * \frac{y^2}{b^2} * \frac{z^2}{c^2})^{\frac{1}{3}}$$

Тогда

$$\frac{1}{3} \geq \frac{V^{\frac{2}{3}}}{4(a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{4}{3}(abc)^{\frac{2}{3}} \geq V^{\frac{2}{3}}$$

Тогда наибольший объем паралелепипеда

$$\frac{8abc}{3\sqrt{(3)}}$$

Этот объем достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Это искомые размеры параллелепипеда, вписанного в эллипсоид с полуосями a, b, c.

Обратная задача: $W = \frac{4}{3}\pi abc$—объем эллипсоида с a, b, c. Требуется найти такие a, b, c, удовлетворяющие уравнению эллипсоида, что объем минимален. Так как нам теперь известны числа x, y, z, а нужно определить a, b, c, то обратим алфавит:

$$a = \frac{1}{X}, b = \frac{1}{Y}, c = \frac{1}{Z}$$

$$x = \frac{1}{A}, y = \frac{1}{B}, z = \frac{1}{C}$$

Тогда уравнение эллипсоида:

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1$$

Требуется найти такие X, Y, Z, что объем W имеет минимальное значение.

$$W = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{4\pi}{3XYZ}$$

Ищем минимум произведения $\frac{1}{XYZ}$. Что равносильно определению максимума величины $V' = 8XYZ$. Эту задачу мы уже решили:

$$X = \frac{A}{\sqrt{3}}, Y = \frac{B}{\sqrt{3}}, Z = \frac{C}{\sqrt{3}}$$

Делаем обратную замену:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x\sqrt{3}}, \frac{1}{b} = \frac{1}{y\sqrt{3}}, \frac{1}{c} = \frac{1}{z\sqrt{3}}$$

$$a = x\sqrt{3}, b = y\sqrt{3}, c = z\sqrt{3}$$

Объем:

$$V = \frac{4}{3}\pi(x\sqrt{3} \cdot y\sqrt{3} \cdot z\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}\pi xyz$$

или в наших обозначениях:

$$V = 4\sqrt{3}\pi abc.$$

0.15 Задача 15.

Найти радиус R сходимости степенного ряда $\sum (n2^n)^{-1}x^n$. Сходится ли этот ряд на промежутках $(-R; 0]$ и $[0; R)$?

Пользуемся признаком Даламбера:

$$lim_{n\to\infty}|\frac{x^{n+1}n2^n}{x^n(n+1)2^{n+1}}| = lim_{n\to\infty}|\frac{nx}{2(n+1)}| = |\frac{x}{2}| < 1$$

$$|x| < 2$$

$$-2 < x < 2$$

Отсюда $R = 2$. Исследуем сходимость степенного ряда в крайних точках:

$$x = 2 : \sum \frac{2^n}{(n2^n)} = \sum \frac{1}{n}$$

Гармонический ряд расходится.

$$x = -2 : \sum \frac{(-2)^n}{(n2^n)} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

Ряд сходится условно по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости ряда $-2 \le x < 2$. Тогда на промежутке $(-2; 0]$ ряд сходится равномерно, а на промежутке $[0, 2)$ неравномерно.

Почему это так: для равномерной сходимости можно сделать замену $y = \frac{x}{2}$, тогда нужно доказать равномерную сходимость ряда $\sum \frac{y^n}{n}$ на $[-1, 0]$, а это :

Этот ряд сходится к функции $f(y) = -ln(1-y)$, так как беру $\epsilon > 0$, N такое, что $\frac{1}{N+1} < \epsilon$, тогда для любого $n > N$, для любого $y \in [-1, 0]$:

$$|\sum_1^n \frac{y^n}{n} - (-ln(1-y))| = |\sum_1^n \frac{y^n}{n} + (-y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - ...)| = |\sum_{n+1}^{\infty} \frac{y^n}{n}| =$$

$$= |\frac{|y|^{n+1}}{n+1} - \frac{|y|^{n+2}}{n+2} + ...| \le |\frac{|y|^{n+1}}{n+1}| \le |\frac{1}{n+1}| < \frac{1}{N+1} = \epsilon$$

А для интервала $[0, 2)$ достаточно сказать, что раз ряд расходится в 2, то при приближении к 2 наши частичные суммы будут расти, поэтому равномерной сходимости нет.

0.16 Задача 16.

Вычислить интеграл: $\int_a^b \sqrt[3]{(b-x)(x-a)^2}dx$ *при* $b > a$.

$$\int_a^b \sqrt[3]{(b-x)(x-a)^2}dx = [y = x-a] = \int_0^{b-a} (b-a-y)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} dy = [b-a=c] =$$

$$\int_0^c (c-y)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} dy = \int_0^c (\frac{c}{y}-1)^{\frac{1}{3}} ydy = c^2 \int_0^c (\frac{c}{y}-1)^{\frac{1}{3}} \frac{y}{c} d\frac{y}{c} = [z = \frac{y}{c}] =$$

$$c^2 \int_0^1 (\frac{1}{z}-1)^{\frac{1}{3}} zdz = c^2 \int_0^1 (1-z)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} dz$$

Это бетта функция!

$$c^2 \int_0^1 (1-z)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} dz = c^2 B(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}) = c^2 \frac{\Gamma(\frac{5}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{5}{3}+\frac{4}{3})} = c^2 \frac{\Gamma(1+\frac{1}{3})\Gamma(1+\frac{2}{3})\Gamma(1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)}$$

Мы домножили числитель из знаменатель на $\Gamma(1)$, чтобы воспользоваться формулой Гаусса:

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{n})...\Gamma(z+\frac{n-1}{n}) = n^{\frac{1}{2}-nz} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma(nz)$$

У нас $n = 3, z = 1$.

$$c^2 \frac{\Gamma(1+\frac{1}{3})\Gamma(1+\frac{2}{3})\Gamma(1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} = c^2 \frac{3^{-\frac{5}{2}} \cdot 2\pi \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{2\pi c^2}{9\sqrt{3}} = \frac{2\pi (b-a)^2}{9\sqrt{3}}$$

0.17 Задача 17.

Вычислить интеграл: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt[3]{(b-x)(x-a)^2}}dx$ *при* $b > a$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt[3]{(b-x)(x-a)^2}}dx = [y = x-a] = \int_0^{b-a} \frac{1}{\sqrt[3]{(b-a-y)y^2}}dy = [b-a=c] =$$

$$\int_0^c \frac{1}{\sqrt[3]{(c-y)y^2}}dy = \int_0^c y^{-\frac{2}{3}}(c-y)^{-\frac{1}{3}}dy = \int_0^c y^{-1}(\frac{c}{y}-1)^{-\frac{1}{3}}dy = [z = \frac{y}{c}] =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{cz}(\frac{1}{z}-1)^{-\frac{1}{3}} cdz = \int_0^1 \frac{1}{z}(\frac{1}{z}-1)^{-\frac{1}{3}} dz = \int_0^1 \frac{1}{z}(\frac{1-z}{z})^{-\frac{1}{3}} dz = \int_0^1 z^{-\frac{2}{3}}(1-z)^{-\frac{1}{3}} dz$$

Эта бетта-функция!

$$\int_0^1 z^{-\frac{2}{3}}(1-z)^{-\frac{1}{3}} dz = B(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(1)}$$

Теперь воспользуемся рекуррентным соотношением $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$:

$$\Gamma(\frac{1}{3}+1) = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$$

$$\Gamma(\frac{2}{3}+1) = \frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})$$

И считаем, используя формулу Гаусса:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(1)} = \frac{3\Gamma(\frac{4}{3})3\Gamma(\frac{5}{3})}{2\Gamma(1)} = \frac{9}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}-3} \cdot 2\pi \cdot \Gamma(3) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

0.18 Задача 18.

Доказать, что ряд $\sum (p_n)^{-1}$ *расходится.*

Предположим, что ряд сходится. Тогда существует такое целое k, что

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_m} < \frac{1}{2}$$

Пусть $Q = p_1 \cdot ... \cdot p_k$. Рассмотрим числа $1 + nQ, n = 1, 2, ...$ Ни одно из этих чисел не делится на $p_1, ..., p_k$. Поэтому все простые множители $1 + nQ$ содержатся среди $p_{k+1}, p_{k+2}, ...$ Поэтому, для каждого $r \geq 1$ мы имеем:

$$\sum_{n=1}^{r} \frac{1}{1+nQ} \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_m})^i$$

так как права сумма содержит среди своих членов все члены левой суммы. Но правая часть неравенства доминируется сходящимся геометрическим рядом:

$$\sum_{r=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^r$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+nQ}$ имеет ограниченными частичные суммы и поэтому сходится. Приходим к противоречию, так как интегральный признак покаывает, что он расходится.

0.19 Задача 19.

Пусть функция $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ *монотонная функция, и пусть интеграл* $\int_0^\infty f(x)dx$ *сходится. Докажите, что* $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$

Полагаем, что f неотрицательная (почему это так—см. в конце). Если интеграл $\int_0^\infty f(x)dx$ сходится, тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такоц x_0, что для любого $y > x_0$:

$$\int_y^\infty f(x)dx < \frac{\epsilon}{2}$$

Покажем, что если $x > 2x_0$, тогда $xf(x) < \epsilon$, что докажет, что $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

Пусть $x > 2x_0$. Тогда:

$$xf(x) = 2\frac{x}{2}f(x) = 2(x - \frac{x}{2})f(x) = 2f(x)\int_{\frac{x}{2}}^{x} dt = 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)dt \leq 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt$$

Последнее неравенство следует из того, что f невозрастающая, так что $f(x) \leq f(t)$ для любого $t \in [x/2, x]$.

$$2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt \leq 2\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} f(t)dt < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Последнее неравенство следует из того, что $\frac{x}{2} > x_0$. Собственно, все доказали. Теперь вернемся к факту, что f неотрицательная.

Сходимость исходного интеграла и монотонность функции обязательно подразумевает, что $f(t) \geq 0 \forall t \geq 0$. Чтобы показать это, положим, ради противоречия, что $f(t_0) < 0$ для некоторого $t_0 \geq 0$. Пусть

$$K = -f(t_0) > 0$$

Пусть M–сколь угодно большое положительное число и выберем некоторое положительное число H настолько большое, что

$$H \geq \frac{t_0 f(0) + M}{K}$$

Наконец, положим, что $x > t_0 + H$, тогда:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{t_0} f(t)dt + \int_{t_0}^x f(t)dt \leq t_0 f(0) + (x - t_0) f(t_0) = t_0 f(0) - (x - t_0)K$$

Последнее неравенство следует из того, что f невозрастающая.

$$t_0 f(0) - (x - t_0)K < t_0 f(0) - HK \leq t_0 f(0) - [t_0 f(0) + M] = -M$$

Так как M сколь угодно большое, то

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)dt = -\infty$$

что противоречит сходимости интеграла.

0.20 Задача 20.

Найти площадь петли кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2xy, x > 0, y > 0$

Перейдем в полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}.$$

Тогда наше уравнение теперь имеет вид:

$$r^4 = 2r^2 \sin\phi\cos\phi$$

$$\Updownarrow$$

$$r^2 = \sin 2\phi,$$

где $\phi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Назовем A фигуру, ограниченную этим графиком. Итак, найдем ее площадь:

$$S_A = \int_A dxdy = \int_A rdrd\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\sqrt{\sin 2\phi}} rdr = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\phi d\phi =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

0.21 Задача 21.

Найти площадь петли кривой $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2 = x^2y$

Сразу обратим внимание, что эта кривая симметрична относительно оси ординат и $y \geqslant 0$. Значит, можем рассмотреть $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, а потом полученную площадь умножить на 2. Сделаем следующую замену:

$$\begin{cases} x = ar\cos\phi \\ y = br\sin\phi \end{cases}.$$

Тогда наше уравнение теперь имеет вид:

$$r^4 = a^2br^3\sin\phi\cos^2\phi$$

$$\Updownarrow$$

$$r = \frac{1}{4}a^2b(\sin 3\phi + \sin\phi),$$

где $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Теперь якобиан отораражения равен:

$$\begin{vmatrix} a\cos\phi & -ar\sin\phi \\ b\sin\phi & br\cos\phi \end{vmatrix} = abr.$$

Используя это, найдем площадь петли A:

$$S_A = \int_A dxdy = ab\int_A rdrd\phi = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{1}{4}a^2b(\sin 3\phi+\sin\phi)} rdr =$$

$$= \frac{1}{16}a^5b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3\phi + \sin\phi)^2\, d\phi =$$

$$= \frac{1}{16}a^5b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}(1-\cos 6\phi) + (\cos 2\phi - \cos 4\phi) + \frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)\right) d\phi =$$

$$= \frac{1}{32}a^5b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos 6\phi + \cos 2\phi - 2\cos 4\phi)\, d\phi =$$

$$= \frac{1}{32}a^5b^3\left(2\phi - \frac{1}{6}\sin 6\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi - \frac{1}{2}\sin 4\phi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{32}a^5b^3.$$

Ответ: $\frac{\pi}{32}a^5b^3$.

0.22 Задача 22.

Вычислите интеграл. Контур обходится один раз в положительном направлении (против часовой стрелки).

$$\int\limits_{\partial D} fdz = 2\pi i \sum_j res\ p_j$$

0.22.1 а)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z\cos(\pi z)}{z+2}\cdot\frac{1}{z}dz = 2\pi i\cdot\frac{1\cdot 1}{2} = \pi i$$

(только 0; -2 — не в области); в полюсе $res_{z=z_0}f(z) = \lim_{z\to z_o}((z-z_o)f(z))$.

0.22.2 b)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{tg(z)}{z \cdot e^{\frac{1}{z+2}}} dz = 0$$

(только 0; -2 и $\frac{\pi}{2} + \pi k$ — не в области); вычет в устранимой особой точке равен 0

0.22.3 c)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3} dz = 2\pi i \cdot (-\frac{1}{2}) = -\pi i$$

, ибо коэффициент при z^{-1}

$$\frac{\cos(z)}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2!} + z \cdot \frac{1}{4!} - \dots$$

*в полюсе порядка n - $\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [(z-a)^n f(z)]$

0.22.4 d)

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z+i)(z-i)} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^{\frac{-1}{i}} - e^{\frac{1}{i}}}{2i} - res0 \right) =$$

Ибо

$$res\ i = 2\pi i \cdot \frac{e^{\frac{-1}{i}}}{2i},$$

$$res\ \ -i = 2\pi i \cdot \frac{e^{\frac{1}{i}}}{-2i},$$

Вычет в нуле:

$$\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z^2+1)} = \frac{1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z} - \dots}{1 - (-z^2)} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} (-\frac{1}{z})^k \sum_{n \geqslant 0} (-z^2)^n$$

Ищем коэффициент при $\frac{1}{z}$. Для этого нужно, чтоб $k = 2n+1$. Тогда коэффициент будет равен $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n (-1)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} = -\sin 1$. Итого

$$= 2\pi i \cdot \left(\frac{e^i - e^{-i}}{2i} - \sin 1 \right) = 0$$

0.23 Задача 23.

Лемма 1 (Жордан) *Пусть функция f определена и непрерывна на множестве*

$$\{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0, |z| \geq R_0\}$$

Положим при $R \geq R_0$

$$M(R) := \max_{z \in C_R} |f(z)|$$

где C_R есть полуокружность $\{z = Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Предположим, что f стремится к нулю на бесконечности так, что

$$\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$$

Тогда для всякого $t > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{itz}dz = 0$$

Доказательство:

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{itz}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{-tRsin\theta+itRcos\theta}iRe^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} M(R)Re^{-tRsin\theta}d\theta$$

Чтобы оценить последний интеграл воспользуемся неравенством

$$sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta \text{ при } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Делая замены $\tau := \frac{2R\theta}{\pi}$, получаем, что

$$\int_0^{\pi} Re^{-tRsin\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-tRsin\theta}\, d\theta \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{\frac{-2tR\theta}{\pi}}\, d\theta = \pi\int_0^{R} e^{-t\tau}d\tau = \frac{\pi}{t}(1-e^{-tR})$$

откуда и следует требуемый результат. ■

Задача 23:

$\cos x = Re(e^{izt}); \sin x = Im(e^{izt})$

16a) Надо взять интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xcos(x)}{x^2-2x+10}dx = Re\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz$$

Пусть $r < R$ и $C = C_R \cup [-R, R]$ - контур. Заметим, что по лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz = 0$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz = \lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz$$

Многочлен $z^2-2z+10 = (z-1-3i)(z-1+3i)$, поэтому по теореме Коши о вычетах

$$\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz = 2\pi iRes_{1+3i}\left(\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}\right) = 2\pi i\left(\lim_{z\to 1+3i} \frac{ze^{iz}}{z-1+3i}\right) =$$

$$= \frac{\pi(1+3i)(cos(1)+isin(1))}{3e^3}$$

А значит, искомый интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xcos(x)}{x^2-2x+10}dx = Re\frac{\pi(1+3i)(cos(1)+isin(1))}{3e^3} = \frac{\pi(cos(1)-3sin(1))}{3e^3}$$

16б) Надо взять интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2cos(x)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}Re\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz$$

Контур такой же, как и в а). Интеграл по C_R стремится к 0 по лемме Жордана. Многочлен $(z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = \oint_C \frac{z^2e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi iRes_i\left(\frac{z^2e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{z^2e^{iz}}{(z+i)^2}\right)' =$$

$$= \frac{i(-4e^{-1}+4e^{-1})}{(2i)^4} = 0$$

А значит, искомый интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2cos(x)}{(x^2+1)^2}dx = 0$$

16в) Пусть $\xi = e^{\frac{\pi i}{3}}$. Надо взять интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{xsin(x)}{1+x^2+x^4}dx = \frac{1}{2}Im\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{1+z^2+z^4}dz$$

Контур тот же, рассуждения те же (Лемма Жордана итп). $1+z^2+z^4 = (z-\xi)(z+\xi)(z-\xi^2)(z+\xi^2)$. Значит

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{1+z^2+z^4}dz = \oint_C \frac{ze^{iz}}{1+z^2+z^4}dz = 2\pi i\left(Res_\xi\left(\frac{ze^{iz}}{1+z^2+z^4}\right) + Res_{\xi^2}\left(\frac{ze^{iz}}{1+z^2+z^4}\right)\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to\xi}\frac{ze^{iz}}{(z+\xi)(z-\xi^2)(z+\xi^2)} + \lim_{z\to\xi^2}\frac{ze^{iz}}{(z+\xi)(z-\xi)(z+\xi^2)}\right) = 2\pi i\left(\frac{e^{i\xi}-e^{i\xi^2}}{2(\xi^2-\xi^4)}\right) =$$

$$= \frac{\pi e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}}sin(\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}$$

16г)Надо взять интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{sin(x)}{x}dx$$

Пусть $m \in [0,1]$ и $a \in [0,1]$. Определим функцию:

$$F(a,m) = \int_0^{\infty} \frac{sin(mx)e^{-ax}}{x}dx$$

$F(0,1)$ - это то, что нам надо. Для начала посчитаем возьмем интеграл:

$$F'_m(a,m) = \int_0^{\infty} cos(mx)e^{-ax}dx = -\frac{cos(mx)e^{-ax}}{a}\Bigg|_0^{\infty} - \frac{m}{a}\int_0^{\infty} sin(mx)e^{-ax}dx =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{m}{a}\left(-\frac{sin(mx)e^{-ax}}{a}\Big|_0^{\infty} + \frac{m}{a}\int_0^{\infty} cos(mx)e^{-ax}dx\right) = \frac{1}{a} - \frac{m^2}{a^2}\int_0^{\infty} cos(mx)e^{-ax}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'_m(a,m) = \frac{1}{1+\frac{m^2}{a^2}}\frac{1}{a} \Rightarrow F(a,m) = \arctan\frac{m}{a} + C$$

$F(a,0) = 0 \Rightarrow C = 0.$

$$F(0,1) = \lim_{a\to 0+}\left(\arctan\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

0.24 Задача 24.

Решите дифференциальное уравнение:

$$y' = (1+y^2)\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = ((1+y^2)\cos x)$$

$$\frac{1}{1+y^2}dy = \cos x dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \cos x dx$$

$$\operatorname{arctg} y + c_1 = \sin x + C_2$$

$$\operatorname{arctg} y = \sin x + C$$

$$y = \operatorname{tg}(\sin x + C)$$

0.25 Задача 25.

Решите дифференциальное уравнение:

$$y' = \frac{y-3x}{x+3y}$$

Пусть $y = zx$, тогда $dy = zdx + xdz$. Получаем:

$$(zdx + xdz)(x+3zx) = (zx-3x)dx$$

$$3z^2xdx + x^2dz + 3zx^2dz + 3xdx = 0$$

$$x^2(1+3z)dz + 3x(z^2+1)dx = 0$$

$$\frac{1+3z}{z^2+1}dz = -\frac{3x}{x^2}dx$$

$$\int \frac{1+3z}{z^2+1}dz = -3\int\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{z^2+1}dz + 3\int\frac{zdz}{z^2+1} = -3\ln|x| + C_1$$

$$\operatorname{arctg} z + C_2 + 3\int\frac{zdz}{z^2+1} = -3\ln|x| + C_1$$

Решим оставшийся интеграл. Пусть $u = z^2 + 1$. Тогда $du = 2zdz -> dz = \frac{du}{2z}$ Получаем

$$\int \frac{zdz}{z^2+1} = \int \frac{zdu}{2zu} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}ln|u| + C_3 = \frac{1}{2}ln|z^2+1| + C_3$$

Делаем обратные замены:

$$\operatorname{arctg} z + C_2 + \frac{3}{2}\ln|z^2+1| + C_3 = -3\ln|x| + C_1$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{3}{2}\ln|\frac{y^2}{x^2} + 1| = -3\ln|x| + C$$

Такой неявной ~~хренью~~ уравнением задается решение

0.26 Задача 26.

Найдите общее решение дифференциального уравнения: $y'' + y = xsinx$
общее решение однородного:

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

если у нас получается два сопряженных комплексных корня $\lambda = \alpha \pm \beta i$в характеристическом уравнении, то записываем ответ в виде

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

В нашем случае

$$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Теперь ищем частное решение. так как $f(x) = x\sin x$, то будем искать в виде $y_p = (ax^2 + bx)\cos x + (cx^2 + dx)\sin x$.
Найдем первую и вторую производную:

$$y_p' = \cos x(2ax + b + cx^2 + dx) + \sin x(2cx + d - ax^2 + bx)$$

$$y_p'' = \cos x(2a + 4cx + 2d - ax^2 + bx) + \sin x(2c - 2ax - 2ax - cx^2 - dx)$$

$$y_p'' + y_p = \sin x(2c - 4ax) + \cos x(2a + 4cx + 2d + 2bx) = x\sin x$$

Далее метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} 2a + 4cx + 2d + 2bx = 0, \\ 2c - 4ax = x. \end{cases}$$

Получаем, что $a = -\frac{1}{4}$, $c = 0$(из второго ур-я),
$b = 0$,$d = \frac{1}{4}$.
Частное решение:
$y_p = -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x$ Решение неоднородного диффура - сумма общего решения однородного и частного решения, то есть:
$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x$

0.27 Задача 27.

Найдите общее решение системы и нарисуйте фазовый портрет.

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$$

Выразим y из первого $y = \frac{\dot{x}}{3} - \frac{5x}{3}$

$$\dot{y} = \frac{\ddot{x}}{3} - \frac{5\dot{x}}{3}$$

подставим во второе уравнение

$$-3x - (\frac{\dot{x}}{3} - \frac{5x}{3}) = \frac{\ddot{x}}{3} - \frac{5\dot{x}}{3}$$

$$-9x - \dot{x} + 5x = \ddot{x} - 5\dot{x}$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$$

характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, $(\lambda - 2)^2 = 0 {-}{>} \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Получим $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$
отсюда, $y(t) = \frac{\dot{x}}{3} - \frac{5x}{3} = (\frac{C_2}{3} - C_1)e^{2t} - C_2 t e^{2t}$
Теперь фазовый портрет

$$\begin{cases} 0 = 5x + 3y, \\ 0 = -3x - y. \end{cases}$$

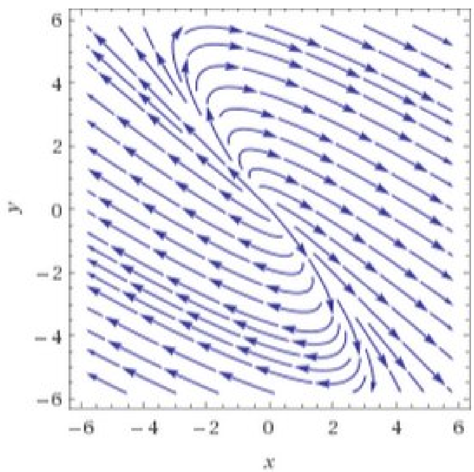
Решение - особая точка (0,0)

$$|J - \lambda I| = | \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ -3 & -1 - \lambda \end{pmatrix} | = 4 + \lambda^2 - 4\lambda = (\lambda - 2)^2$$

Получаем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$- действительные, положительные. Тип особой точки - неустойчивый вырожденный узел.
Найдем собстенный вектор:

$$\begin{pmatrix} 5 - 2 & 3 \\ -3 & -1 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$v_1 = -v_2 {-}{>} y = -x$
Тогда фазовый портрет:



0.28 Задача 28.

Колебания пружинного матника массы m с коэффициентом жесткости пружины k^2 затухают благодаря трению, пропорциональному скорости маятника. При каком коэффициенте трения маятник не дойдет до положения равновесия ни разу за конечное время; пройдет это положение 1 раз; пройдет положение равновесия бесконечно много раз?

1. составляем ур-ие по закону Гука($F = ma = k\delta x$): $mx'' = -k^2x - cx'$. Составляем характеристическое уравнение, так как знаем, что линейные диф. ур-ия имеют общие решения вида $e^{\lambda t}$
$m\lambda^2 + c\lambda + k^2 = 0$; $\lambda_{1,2} = \frac{-c\pm\sqrt{c^2-4k^2m}}{2m}$. Три случая:
1) c=0$\to$ $\lambda_{1,2} = \pm ik/\sqrt{m}$
2)$c^2 \geq 4k^2m \to \lambda_{1,2}$ вещественные
3)$c^2 < 4k^2m \to \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ комплексные решение(уравнение движения) в общем виде имеет вид: $x(t) = c_1e^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4k^2m}}{2m}t} + c_2e^{\frac{-c-\sqrt{c^2-4k^2m}}{2m}t}$. Положение равновесия означает, что смещение=0 $x(t) = 0 \to c_1e^{\frac{\sqrt{c^2-4k^2m}}{2m}}t + c_2e^{\frac{-\sqrt{c^2-4k^2m}}{2m}t} = 0$ Решаем:
$e^{\frac{\sqrt{c^2-4k^2m}}{2m}t} = \sqrt{-c_2/c_1}$ значит при $\sqrt{c^2-4k^2m} = 0$ уравнение уравнение имеет единсн-ственное решение $c_1 = -c_2$, то есть x(t)=0 всегда, значит при таком с равноевесие не достигается.
При комплексных решениях, мы будем колебаться и проходить через т. равновесия бесконечно много раз. остается случай 2, вещественные решения. начальные условия были такими: $x(0) = a; x'(0) = 0$, значит:$c_1 + = a - c_2$, значит:$c_1 = \frac{\lambda_2 a}{\lambda_2-\lambda_1}$; $c_2 = \frac{-\lambda_1 c_1}{\lambda_2-\lambda_1}$ подставляем, находим: $-c_2/c_1 = \frac{c/(2m)-\sqrt{c^2-4k^2m}}{c/(2m)+\sqrt{c^2-4k^2m}=e^{2\sqrt{}t}}$. Но у нас остался только случай два, $\sqrt{c^2-4k^2m} > 0$, значит $e^{\sqrt{}}>$1 значит через равновесие не пройдем. Итого: в случае 3 бесконечно много равновесий, в случае 1,2 не проходим через т. равновесия. Один раз через т равновесия мог быть только в случае 2, но мы показали, чтотак быть не может.

0.29 Задача 29.

Вычислите амплетуду вынужденных колебаний (эквивалентно, колебаний в установившемся режиме) пружинного маятника массы m с коэффициентом жесткости пружины k^2 под действием внешней силы $F = \sin\omega t$ в отсутствие силы трения. Напишите решение в случае $\omega = 1$.

Решаем методом варьирования постоянной, составим уравнение по условию: $mx'' = -k^2x(t) + sin(\omega t)$. Пусть b-внешнее воздействие, $x' = Ax + b$ теперь все зависит от t, общее решение имеет вид: $e^{At}c(t)$
тогда $x' = Ax + b = Ae^{At}c + e^{At}c' = Ae^{At}c + b$
$mx''(t) = -k^2x(t) + sin(\omega t) \to e^{At}c' = b$
$c = \int_0^t e^{-At}bdt + const$, константа из граничного условия, нам она не важна, так как от b не зависит, то есть не зависит от внешнего воздействия. Подставляем с в уравнение общего решения:
$e^{At}(\int_0^t e^{-At}bdt + const) = e^{At} \cdot const + e^{At} \cdot \int_0^t e^{-At}bdt$
Спрашивают про вынужденные колебания, то есть про ту часть уавнения движения, которая зависит от b. Пусть X вектор (x, x'), тогда $b = (0, sin\omega t)$.

Теперь рассмотрим $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
$x' = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$
$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$
вспомним уравнение полученное для b:
$b = \begin{bmatrix} 0 \\ sin(\omega t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix}$
выражаем $c_2' = \frac{sin(\omega t)}{e^{\lambda - 2t(\lambda_2 - \lambda_1)}}$
$c_2 = \int_0^t \frac{sin(\omega t)}{e^{\lambda_2 t}(\lambda_2 - \lambda_1)} dt + const$, аналогично:
$c_1 = \int_0^t \frac{sin(\omega t)}{e^{\lambda_1 t}(\lambda_1 - \lambda_2)} dt + const$
Подставляем в уравнение движения: $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
$x = e^{\lambda_2 t} \int_0^t \frac{sin(\omega t)}{e^{\lambda_2 t}(\lambda_2 - \lambda_1)} dt + e^{\lambda_1 t} \int_0^t \frac{sin(\omega t)}{e^{\lambda_1 t}(\lambda_1 - \lambda_2)} dt + const$
Теперь вспомним, что $\lambda_{1,2}$ это просто решения характеристического уравнения соответствующего условию $mx'' = -k^2 x \to \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k^2/m}$
подставляем и интегрируем прямо, получаем уравнение движенияч $x(t) = (sint))(m/k^2)$.
Откуда амплитуда- m/k^2

0.30 Задача 30.

(a) *Вычислите амплитуду вынужденных колебаний (эквивалентно, колебаний в установившемся режиме) пружинного маятника массы m под действием внешней силы $F = \sin \omega t$, если коэффициент жесткости равен k^2, а коэффициент трения равен a.*

(b) *Для какой частоты ω колебаний внешней силы амплитуда вынужденных колебаний максимальна?*

Уравнение выглядит следующим образом:

$$mx'' + ax' + k^2 x = \sin(\omega t).$$

$$x'' + \frac{a}{m}x' + \frac{k^2}{m}x = \frac{1}{m}\sin(wt).$$

Будем искать решения в виде $x(t) = A \sin \omega t + \varphi$, где A-искомая амплитуда. Подставим это решение в само уравнение:

$$x'(t) = A\omega \cos \omega t + \varphi = A\omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$x''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Получаем:

$$-\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{a}{m}\omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + \frac{k^2}{m}\sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{Am}\sin(\omega t)$$

$A_1 = -\omega^2$ - амплитуда ускорения, $A_2 = \frac{a}{m}\omega$ - амплитуда скорости, $A_3 = \frac{k^2}{m}$ - амплитуда смещения, $A_4 = \frac{1}{mA}$ - амплитуда вынужденной силы. Тогда $\overrightarrow{A_4} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2} + \overrightarrow{A_3}$.

Получаем $A = \frac{1}{mA_4} = \frac{1}{m\sqrt{(A_3 - A_1)^2 + A_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2 m)^2 + a^2\omega^2}}$.

Чтобы найти максимальное значение амплитуды, надо найти минимум знаменателя. Продифференцируем подкоренное выражение по ω:

$$\frac{d}{d\omega}((k^2 - m\omega^2)^2 + a^2\omega^2) = 2\omega(a^2 - 2k^2 + 2m^2\omega^2) = 0$$

Значит, $\omega = \sqrt{\frac{2k^2m - a^2}{2m^2}}$.

0.31 Задача 31.

Является ли подмножество в $\mathbb{R}^2$, состоящее из точек с иррациональными координатами (a) открытым, (b) замкнутым, (c) связным, (d) линейно связным, (e) всюду плотным?

a) Если бы оно было открытым, то оно с каждой точкой содержало бы и некоторую окрестность. Возьмем какой-нибудь горизонтальный отрезок в этой окрестности (ее можно считать кругом). На этом горизонтальном отрезке найдется рациональная точка, так как они всюду плотны на прямой. Значит, у этой точки первая координата рациональна. Противоречие. **b)** Если бы оно было замкнутым, то дополнение было открыто. Дополнение — множество точек, у которых хотя бы одна координата рациональна. Значит, оно с каждой точкой содержит и некоторую окрестность. Но в эту окрестность непременно попадет точка с иррациональными координатами, так как они составляют всюду плотное множество (см. пункт e). **c)** Оно не связно, так как покрывается двумя открыми дизъюнктными множествами, а именно: $\{x > 2\}$ и $\{x < 2\}$. **d)** Не связное пространство не может быть линейно связным. **e)** Является, докажем, что в любом открытом множестве $\mathbb{R}^2$ есть такая точка. Возьмем в открытом множестве какой-нибудь горизонтальный отрезок. В нем найдется иррациональная точка, так как иррациональные числа всюду плотны. Возьмем теперь вертикальный отрезок в открытом множестве, который проходит через найденную точку. На нем тоже найдется иррациональная точка. Вот эта (последняя точка) имеет обе иррациональные координаты.

0.32 Задача 32.

Докажите, что каждое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

Будем называть точку рациональной, если все ее координаты рациональны. Рациональных точек - счетное число. Замкнутых кругов с рациональным центром и рациональным радиусом - счетное число. Будем называть такие шары хорошими.

Открытый шар с рациональным центром можно представить в виде объединения счетного числа хороших шаров. Если шар радиуса r, то найдется последовательность рациональных чисел меньших r, $a_n \to r$. Тогда объединение замкнутых шаров с центром в той же точке и радиусами a_i будет совпадать с нашим шаром.

Возьмем открытое множество и построим в каждой его рациональной точке шар с радиусом, равным половине расстояния от этой точки до границы множества. Объединение этих шаров составляет наше множество. Этих шаров счетное число, каждый из них представляется в виде объединения счетного числа хороших шаров.

0.33 Задача 33.

Какие из букв A, O, T, K, B гомеоморфны? Гомотопически эквивалентны?

Разберемся сначала с гомотопической эквивалентностью. Буквы A и O можно прогомотопировать в окружность. K и T стягиваются в точку, а B гомотопически эквивалентна букету из двух окружностей. Здесь можно явно предъявить гомотопию. $A \times [0, 1]$ – это просто изогнутое кольцо, которое ретрагиуется на O или на S^1. То же самое с кляксой, которая получается из K и T и кренделем B.

С гомеоморфностью все чуть хуже. Понятно, что гомотопически не эквивалентные буквы не могут быть гомеоморфны. Осталось показать, что A не гомеоморфна O, а K не гомеоморфна T. Предположим, что это не так и мы нашли непрерывную функцию $f(x) : A \to O$, такую что f^{-1} тоже непрерывна. Тогда посмотрим на прообраз окрестности точки на A, в которой сходяся 3 отрезка. Если выколоть эту точку, окрестность распадется на несколько компонент связности, отображение между которыми должно остаться непрерывным. Но непрерывного отображения из двух интервалов в три не существуе, а значит мы пришли к противоречию и буквы не гомеоморфны. С K и T ровно то же самое.

0.34 Задача 34.

Пусть Y – топологическое пространство, имеющее форму буквы Y, X – топологическое пространство, имеющее форму буквы X, а $f : X \to Y$ – непрерывное отображение. Докажите, что существуют две различные точки $a, b \in X$, для которых $f(a) = f(b)$.

Обозначим за x и y центры (точки, в окрестности которых сходится больше двух интервалов) X и Y соответственно, и назовем кусками компоненты, на которые распадаются буквы при выкалывании точек x и y. Посмотрим, куда может перейти центр x при непрерывном отображении f. Пусть переходит в y.

Выберем в окрестности точки x 4 точки x_i, по одной из каждого куска. Их образы должны лежать в окрестности y. По принципу Дирихле, какие-нибудь две из этих точек x_1 и x_2 обязательно должны попасть в один кусок Y в окрестность точки y. В силу непрерывности, куски, содержащие эти две точки должны целиком перейти в один кусок Y. Из точек $f(x_1)$ и $f(x_2)$, выберем ту, которая лежит ближе к y. У нее будет два прообраза.

Теперь пусть x переходит в какую-то точку z, лежащую на лучах Y, тогда возьмём маленькую окрестность z, чтобы она не содержала центра Y, и выберем дельта-окрестность центра X, чтобы она полностью попадала в эту маленькую окрестность z. Для неё применяем аналогичное рассуждение: штука типа X с четырьмя лучами из центра отображается в штуку с двумя лучами из центра, значит, какие-то наложатся.

0.35 Задача 35.

Пусть $f, g : S^2 \to \mathbb{R}$ – две непрерывные функции на сфере. Докажите, что существуют две различные точки b, a такие, что $f(a) = f(b), g(a) = g(b)$.

Докажем, что для любого непрерывного отображения $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ существует пара диаметрально противоположных точек x и $-x$ сферы S^2, для которых $f(x) = f(-x)$.

Если утверждение ложно для отобрвжения $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$, то мы можем задать отображение $g : S^2 \to S^1$ формулой

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

Определим петлю ν, обходящую вокруг экватора сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, формулой $\nu(s) = (cos2\pi s, sin2\pi s, 0)$, и пусть $h : I \to S^1$ - составная петля $g\nu$. Так как $g(-x) = -g(x)$, мы получаем соотношение $h(s+\frac{1}{2}) = -h(s)$ для всех s из отрезка $[0, \frac{1}{2}]$. Как мы показали при вычислении группы $\pi_1(S^1)$, петлю h можно поднять и получить путь $\bar{h} : I \to \mathbb{R}$. Из соотношения $h(s+1/2) = -h(s)$ следует, что $\bar{h}(s+1/2) = \bar{h}(s) + q/2$ для некоторого нечетного целого числа q, которое моглы бы ависеть от $s \in [0, 1/2]$. Но в действительности q не зависит от s, так как, решая уравнение $\bar{h}(s+1/2) = \bar{h}(s) + q/2$ относительно q, мы видим, что q непрерывно зависит от $s \in [0, 1/2]$. а потому величина q должна быть постоянной, так как значения этой величины ограничиваются целыми числами. В частности, мы имеем

$$\bar{h}(1) = \bar{h}(1/2) + q/2 = \bar{h}(0) + q$$

Это означает, что петля h представляет q-ю степень образующей группы $\pi_1(S^1)$. Так как число q нечетно, мы получаем, что петля h не гомотопна нулю. Но h–это композиция $g\nu : I \to S^2 \to S^1$, причем петля ν, очевидно, гомотопна нулю в S^2, таким образом, петля $g\nu$ гомотопна нулю в S^1 (поскольку мы можем рассмотреть композицию стягивания петли ν и отображения g). Получено противоречие.

0.36 Задача 36.

Найдите жорданову нормальную форму оператора третьей производной на пространстве многочленов от одной переменной степени не выше n.

Возьмем базис $\{1, \frac{x^3}{3!}, \frac{x^6}{6!}, \frac{x^9}{9!}, \dots, x, \frac{x^4}{4!}, \frac{x^7}{7!}, \dots, x^2, \frac{x^5}{5!}, \frac{x^8}{8!}, \dots\}$ в этом базисе дифференциал — 3 нильпотентных блока.

Осталось уточнить размеры этих трёх клеток (где $n > 2$). Нетрудно проверить, что они равны $[\frac{(n+3)}{3}]$, $[\frac{(n+2)}{3}]$, $[\frac{(n+1)}{3}]$, где квадратные скобки означают целую часть. В сумме эти величины дают $n+1$ (число векторов базиса, то есть размерность пространства).

0.37 Задача 37.

Докажите, что у любого набора попарно коммутирующих операторов на конечномерном пространстве есть общий собственный вектор.

Решение

Пусть даны две матрицы A, B: $AB = BA$. Пусть вектор x – собственный вектор матрицы A: $Ax = \lambda x$ Тогда в силу перестановочности: $AB^k x = \lambda B^k x, \qquad k = 0, \dots, n, \dots$. Возьмем линейную оболочку $\langle x, Bx, B^2x, \dots, B^n x\rangle$ такую, что все члены в этой оболочке независимы, а $B^{n+1}x$ является линейной комбинацией последних.

Тогда пространство $\langle x, Bx, B^2x, \dots, B^n x\rangle$ – инвариантно относительно оператора B, а значит будет существовать вектор y: $By = \mu y$. С другой стороны, вектора $x, Bx, B^2x, \dots, B^n x$ являются собственными для оператора A, отвечающие одному и тому же собственному значению λ. Поэтому любая линейная система этих векторов, в частности, y – собственные вектора для оператора A.

Очевидно, что для конечного набора таких операторов будет существовать такой вектор (можно доказать методом индукции).

Условие также справедливо для бесконечного набора коммутирующих операторов, поскольку такое множество может содежать только конечное число ($\leq n^2$) линейно независимых операторов, а общий вектор таких линейно-независимых операторов будет общим всех операторов данного набора.

0.38 Задача 38.

Найдите размерность пространства многочленов от n переменных общей степени k.

Решение:

Базис пространства – множество многочленов вида $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, где сумма $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$.

Надо найти множество всевозможных степеней $\alpha_i \geq 0$, чтобы сумма была k.

Найдем это количество следующим образом. Запишем $\alpha_1, ..., \alpha_n$ в виде последовательности 0 и 1, а именно пусть α_i – записанные подряд единицы (если $\alpha = 3$, то будет стоять запись 111). между α_i и α_{i+1} пусть будет стоять 0. То есть если есть выражение $x_1^3 x_2^1 x_3^0 x_4^2$ то последовательность имеет вид 1110100011. Очевидно, что количество единиц равно k, количество всех чисел в последовательности равна $n + k - 1$. Тогда всевозможные такие последовательности – это выбор $n - 1$ мест для нулей и остальные места забить автоматически единицами. Это можно сделать следующим количеством:

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{(k)!(n-1)!} = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

Надеюсь понятно, почему такое множество всевозможных многочленов составляет базис. Большего базиса не может быть так как мы итак перебрали все, и каждый элемент этого пространства – это всевозможная линейная комбинация элементов из базиса.

0.39 Задача 39.

Существуют ли матрицы с характеристическим многочленом $\chi(\lambda)$ и минимальным многочленом $m(\lambda)$.

Решение: 1) $\chi(\lambda) = (\lambda^6 - 1)$, $m(\lambda) = (\lambda^3 - 1)$.

Воспользуемся свойством, что множество корней минимального многочлена совпадает с множеством корней характеристического многочлена матрицы. Тогда, очевидно, при таких условиях матрицы не существует.

2) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^3$, $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

Характеристический многочлен $(\lambda - 1)^2$ задает блоки вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен $(\lambda - 2)^3$ задает блоки вида:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Но так как задан минимальный многочлен то матрица может иметь:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda - 2)^5$, $m(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$.

По рассуждениям, аналогичным для пункта 2, можно выписать сразу исходную матрицу. Выпишем две части матрицы (два блока, отвечающих для каждого слагаемого в исходном многочлене):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

0.40 Задача 40.

Докажите, что в евклидовом пространстве равенство $||x+y|| = ||x||+||y||$ возможно лишь в случае, когда векторы x и y отличаются неотрицательным скалярным множителем.

Решение.

По определению $||x|| = \sqrt{(x,x)}$,, причем $(ax+by, z) = (z, ax+by) = a(x,z)+b(y,z)$, где a, b – числа.

$$||x+y|| = ||x|| + ||y|| \iff \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)} = \sqrt{(x+y, x+y)}$$

$$\iff (x,x) + (y,y) + 2\sqrt{(x,x)(y,y)} = (x+y, x+y)$$

$$\iff (x,x) + (y,y) + 2\sqrt{(x,x)(y,y)} = (x,x) + (y,y) + 2(x,y)$$

$$\iff \sqrt{(x,x)(y,y)} = (x,y), \text{причем} (x,y) \geq 0.$$

$$\iff ||x|| \cdot ||y|| = (x,y)$$

Значит косинус угла между векторами x, y, равный по определению:

$$\cos\alpha = \frac{(x,y)}{||x|| \cdot ||y||}$$

равен 1, откуда векторы сонаправлены, то есть отличаются неотрицательным скалярным множителем.

0.41 Задача 41.

Докажите, что на комплексном векторном пространстве неотрицательная билинейная форма тождественно равна нулю.

Решение.

Так как билинейная форма неотрицательна, тогда:

$$(x,x) \geq 0; \qquad (ix,ix) = -(x,x).$$

Отсюда следует, что форма на векторах типа $(x,x) = 0 \quad \forall x$. Докажем, что форма также равна нулю на векторах (x,y). В силу линейности по каждому аргументу, имеем:

$$(x,y) = \frac{1}{2}\left[(x+y,x+y) - (x,x) - (y,y)\right] = 0.$$

0.42 Задача 42.

Пусть T — линейный оператор в векторном пространстве X. Положим $X_0 = KerT$ и обозначим через T_0 линейный оператор в факторпространстве X/X_0, действующий по формуле $T_0(x+X_0) = T(x)+X_0$ (где $x \in X$). Докажите, что $T^n = 0$ для некоторого $n \in N$ тогда и только тогда, когда $T_0^{n-1} = 0$.

T - линейный оператор на X, $X_0 = KerT$. T_0 действует на факторпространстве X/X_0 по формуле $T_0(x+X_0) = T(x)+X_0$. Заметим, что $T_0^n(x+X_0) = T^n(x)+X_0$.

Пусть $T^n = 0$, тогда $T^{n-1}(x) \in X_0$ для всех $x \in X$, но тогда $T_0^{n-1}(x+X_0) = T^{n-1}(x)+X_0 = 0+X_0$.

Пусть $T_0^{n-1} = 0$, тогда $T_0^{n-1}(x+X_0) = T^{n-1}(x)+X_0 = 0+X_0$, а значит $T^{n-1}(x) \in X_0$ для всех $x \in X$, что значит $T^n = 0$.

0.43 Задача 43.

Пусть X - конечномерное векторное пространство, T - линейный оператор на X, матрица которого в некотором базисе $(e_1,...,e_n)$ - жорданова клетка. Докажите, что подпространство $Y \subseteq X$ T-инвариантно тогда и только тогда, когда $Y =< e_1,...,e_k >$ для некоторого k.

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a \end{pmatrix}$$

Пусть Y–ненулевое инвариантное подпространство. Покажем, что $e_1 \in Y$ и $k = max\{k \in \{1,..,n\} : e_i \in Y, 1 \leq i \leq k\}$.

Покажем, что Y натянуто на $S = \{e_1,...,e_k\}$ путем от обратного. Пусть это не так. Это значит, что не все элементы Y являются линейными комбинациями элементов S, то есть существует вектор $x = c_1e_1 + .. + c_re_r, r > k, c_r \neq 0, x \in Y$.

$$(T-aE)(x) = c_2e_1 + c_3e_2 + ... + c_re_{r-1}$$

И так как Y у нас T-инвариантно, то это элемент пространства Y.

$$(T-aE)^2(x) = c_3e_1 + c_4e_2 + ... + c_re_{r-2}$$

$$(T-aE)^{r-k-1}(x) = c_re_{k+1} + c_{r-1}e_k + ... \in Y$$

Так как $e_1,...,e_k \in Y$ и $c_r \neq 0$, то и $e_{k+1} \in Y$, но это противоречит нашему выбору k.

0.44 Задача 44.

Докажите, что линейный оператор T в конечномерном векторном пространстве над алегбраически замкнутым полем K диагонализуем тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in K$ выполнено равенство $rk(T-\lambda) = rk(T-\lambda)^2$

Приведем матрицу оператора T к блочному виду. Ясно, что ранг матрицы оператора равен сумме рангов блоков. Ввиду того, что ранг квадрата матрицы не превосходит ранга самой матрицы, достаточно проверить условие для каждого блока (жордановой клетки). Значит рассмотрим жорданову клетку A.

Пусть собственное значение жордановой клетки равно μ. Если $\lambda \neq \mu$, то обе матрицы $A - \lambda E$ и $(A - \lambda E)^2$ невырождены. Ранги равны размеру матрицы и они совпадают. Поэтому пусть $\lambda = \mu$. Если жорданова клетка имеет размер 1, то обе матрицы $A - \lambda E$ и ее квадрат–нулевые, и ранги их равны. Если размер больше 1, то осталось проверить простой факт. Возьмем матрицу B порядка $m > 1$ с собственными значениями μ и единицами над ними (жорданова клетка размера m). Тогда $B - \lambda E$, где $\mu = \lambda$, есть матрица с нулями всюду, кроме мест над диагональю—там единицы. Ранг матрицы $B - \lambda E$ равен $m - 1$,а ранг квадрата матрицы $m - 2$ (при возведении в квадрат линия единиц сдвигается вверх на одну позицию). То есть, ранги $B - \lambda E$ и $(B - \lambda E)^2$ не равны.

0.45 Задача 45.

В евклидовом пространстве найдите $\mathbb{R}^n$ найдите расстояние от начала координат до аффинной гиперплоскости, заданной уравнением $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = 1$.

Пусть x_0 — какая-то точка, которая лежит в гиперплоскости. Тогда уравнение гиперплоскости имеет вид $(x - x_0, n) = 0$, где n — вектор нормали к гиперплоскости. В данном случае, $n = (1, 2, \ldots, n)$, так как именно этому вектору ортогональны вектора, лежащие в гиперплоскости, если ее переместить в начало координат: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 0$. Расстояние от точки до гиперплоскости — длина проекции вектора, соединяющего точку с любой точкой гиперплоскости, на нормаль. Проекция имеет вид $\frac{(y-x_0,n)}{(n,n)}n$, ее длина: $\frac{|(y-x_0,n)|}{|n|}$ В данном случае, удобно взять точку $(1, 0, \ldots, 0)$ в качестве x_0. Итого,

$$d = \frac{|((0,0,\ldots,0) - (1,0,\ldots,0), (1,2,\ldots,n))|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}}$$

0.46 Задача 46.

Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, F — квадратичная форма с положительным индексом инерции p и отрицательным индексом инерции q. Чему равна максимальная размерность такого подпространства $W \subset V$, что $F|_W = 0$

Будем рассматривать ассоциированную билинейную форму $b(x, y) = (F(x + y) - F(x) - F(y))/2$ (задачи эквивалентны, т.к. матрицы у этих двух форм совпадают, а ограничение на подпространство нулём означает, что матрица ограничения нулевая). Отметим, для начала, что очевидным образом $\ker b \subset W$, поэтому далее будем считать, что форма невырождена (т.е. $p + q = n$), отметив про себя, что в нашем ответе уже есть слагаемое $\dim \ker b$. Будем также считать, что $p \leq q$ (в противном случае рассуждение аналогично).

Рассмотрим базис $e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q$ такой, что в нём матрица b диагональна с единицами и минус единицами понятно где, а соответствующие прямые слагаемые V обозначим через U_+ и U_-. Подпространство
$< e_i + f_i >_{i=1}^p$ p-мерно, причём

$$b(e_i + f_i, e_j + f_j) = b(e_i, e_j) + b(f_i, f_j) = \delta_i^j - \delta_i^j = 0$$

т.е. на него форма ограничивается нулём.

Покажем теперь, что любое такое подпространство W не более чем p-мерно. Пусть оно хотя бы $(p+1)$-мерно, тогда по соображениям размерности оно пересекается с U_-. Но ограничение F на U_- отрицательно определено, а значит $b(v,v) = 0 \implies v = 0$, противоречие.

Возвращая исходную общность получаем ответ
$\dim \ker b + \min(p,q) = n - \max(p,q)$.

0.47 Задача 47.

Пусть в евклидовом пространстве V задан самосопряженный оператор A, у которого все корни характеристического многочлена меньше единицы. Докажите, что A переводит единичный шар с центром в нуле в себя.

Самосопряженный оператор в евклидовом пространстве удовлетворяет условию $(Av, v) = (v, Av)$, то есть просто является симметрическим ($A^T = A$). Любой симметрический оператор имеет ортогональный базис из собственных векторов $e_1, ..., e_n$. Также дано, что собственные значения меньше 1, значит:

$$(Av, Av) = (\lambda_1 x_1 e_1 + ..., \lambda_n x_n e_n, \lambda_1 x_1 e_1 + ..., \lambda_n x_n e_n) = \lambda_1^2 x_1^2 + ... + \lambda_n^2 x_n^2 \leq \\ x_1^2 + ... + x_n^2 = (v, v)$$

А значит переводит единичный шар в себя.

0.48 Задача 48.

Известно, что минимальный многочлен оператора A в конечномерном комплексном пространстве V не имеет кратных корней. Докажите, что число инвариантных подпространств в V конечно тогда и только тогда, когда все собственные значения A различны.

Поскольку минимальный многочлен не имеет кратных корней, жорданова форма A диагональна. Теперь, если какие-то два собственных значения совпадают, то любой вектор, лежащий в оболочке этих двух базисных векторов, является собственным с этим собственным значением, и мы получили бесконечное число инвариантных прямых. Если же все собственные значения разные, докажем, что любое инвариантное подпространство — это оболочка какого-то набора базисных векторов (тогда, поскольку пространство конечномерно, этих наборов тоже конечное число). В самом деле, пусть в инвариантном подпространстве лежит вектор $v = \sum_{k=1}^{l} x_{i_k} e_{i_k}$, где все $x_{i_k} \neq 0$. Рассмотрим векторы $v, Av, \dots, A^{l-1}v$ (которые все по инвариантности лежат в подпространстве) и докажем, что эти l векторов порождают подпространство $\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_l} \rangle$. В самом деле, если сократить столбцы матрицы на ни на что не влияющие числа x_{i_k}, то мы получим определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_{i_1} & \lambda_{i_1}^2 & \cdots & \lambda_{i_1}^{l-1} \\ 1 & \lambda_{i_2} & \lambda_{i_2}^2 & \cdots & \lambda_{i_2}^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_{i_l} & \lambda_{i_l}^2 & \cdots & \lambda_{i_l}^{l-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant l} (\lambda_{i_\beta} - \lambda_{i_\alpha}),$$

и, поскольку все λ_{i_k} не равны друг другу, он ненулевой.

0.49 Задача 49.

Существует ли поле из 6 элементов?

Нет, не существует. Во-первых, в любом поле есть единица. Порядок единицы по сложению конечен, иначе бы получилось бесконечное поле. Кроме того, легко понять, что порядок единицы в конечном поле — простое число (иначе можно было бы разбить в произведение двух скобок, где в каждой стоит сумма единиц, и количество единиц в каждой — это два делителя порядка. Тогда, так как в поле нет делителей нуля, то одна из скобок равна нулю: противоречие с минимальностью порядка). Отлично, значит, в конечном поле есть целое $\mathbb{F}_p$. Второй факт: если в поле есть подполе, то объемлющее поле можно рассматривать как векторное пространство над содержащимся (просто обдумайте). Ну тогда размерность у этого пространства конечная и получается, что всего у нас может быть p^n элементов в поле, где n — размерность. А шесть в таком виде не представляется.

0.50 Задача 50.

Что можно сказать про группу, у которой нет нетривиальных собственных подгрупп?

Возьмем какой-нибудь неединичный элемент в группе (если его нету, то это группа из одного элемента). Начнем его умножать на себя: $e, g, g^2, \ldots$. Если мы никогда не остановимся и будем получать новые элементы, то добавим еще $g^{-1}, g^{-2}, \ldots$ и либо мы нашли подгруппу в бесконечной группе, либо это $\mathbb{Z}$, у которой есть нетривиальные подгруппы вида $n\mathbb{Z}$. Значит, в бесконечных группах такого эффекта не наблюдается. Ок, если мы зациклились, то мы нашли подгруппу в конечной группе. Если она со всем совпадает, то значит, это $\mathbb{Z}_n$. Но при не простых n у этой группы тоже есть подгруппы. Итого, ответ: группа из одного элемента и $\mathbb{Z}_p$.

0.51 Задача 51.

Изоморфны ли группы $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$ (где $\mathbb{H}$ — тело кватернионов) и группа диэдра D_4 (т.е. группа симметрий квадрата)?

Нет, потому что у Q_8 всего два элемента порядка 2 (это 1 и -1, остальные порядка 4), а в D_4 их больше, например, все симметрии имеют порядок 2, а их 4 штуки (относительно диагоналей и средних линий).

0.52 Задача 52.

Постройте изоморфизм групп S_3 и $SL_2(\mathbb{Z}_2)$.

Не знаю как это делать по-умному, но. В $SL_2(\mathbb{Z}_2)$ шесть элементов, а именно

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

И это понятно почему. Как известно, S_3 — единственная некоммутативная группа из 6 элементов. Покажем, что $SL_2(\mathbb{Z}_2)$ тоже неабелева и на этом у меня все.

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

По-умному: есть двумерное вектороное пространство над $\mathbb{Z}_2$, на нем есть очевидное действие $SL_2(\mathbb{Z}_2)$. Ноль оно оставляет на месте, переставляет оставшиеся три точки. При этом стабилизатор тривиален, а также реализуются все транспозиции, так как если $(x_1, y_1) \to (x_1, y_1), (x_2, y_2) \to (\sigma(x_2), \sigma(y_2))$, то на матрицу A_σ, соответсвтующую транспозции, имеется уравнение

$$A_\sigma \begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&\sigma(x_2)\\y_1&\sigma(y_2)\end{pmatrix}$$

значит, $SL_2(\mathbb{Z}_2)=S_3$.

0.53 Задача 53.

Положим $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ и $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Докажите, что группы $\mathbb{C}^\times/U_n$ и $\mathbb{C}^\times$ изоморфны.

Решение.

Рассмотрим $f : \mathbb{C}^\times/U_n \to \mathbb{C}^\times$, $f(x) = x^n$. Это гомоморфизм, так как $(ab)^n = a^n b^n$. Осталось доказать взаимно-однозначность, то есть если $f(x) = f(y)$, то $x = y$ в $\mathbb{C}^\times/U_n$. Действительно, если $x^n = y^n$, то $(\frac{x}{y})^n = 1$, то есть $\frac{x}{y} \in U_n$, и $x = y$ в $\mathbb{C}^\times/U_n$.

0.54 Задача 54.

Докажите, что симметрическая группа S_n порождается двумя элементами.

Она порождается (12) и $(12\dots n)$. На пальцах: сопрягая транспозицию длинным циклом, мы двигаем нумерацию и получаем следующую транспозицию (23). Продолжая, можно получить все транспозиции вида $(i \quad i+1)$. Ну а они конечно порождают все перестановки, потому что если вы хотите что-то попереставлять (например, камни), то вам нужно достаточно долго менять местами соседние и у вас все получится.

0.55 Задача 55.

Разлагается ли группа $GL(2, \mathbb{R})$ в прямое произведение подгрупп $SL(2, \mathbb{R})$ и $D = \{\lambda E : \lambda \in \mathbb{R}\ \{0\}\}$? Верно ли аналогичное утверждение для $GL(3, \mathbb{R})$?

Нет, не разлагается, т.к. поворот на угол π имеет двоякое представление в виде композиции элемента $SL(2, \mathbb{R})$ и D:

$$R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

В трёхмерном случае разлагается. Пусть мы хотим представить некоторый оператор U в виде композиции $V \circ W$, $V \in SL(3, \mathbb{R}), W \in D$. Тогда положим $W = |U|^{1/3}E$, где E — тождественный оператор, $V = U \circ W^{-1}$. Такое разложение единственно, т.к. если мы возьмем какие-то другие V, W, такие, что $U = V \circ W$, $V \in SL(3, \mathbb{R}), W \in D$, из мультипликативности определителя, $|W|$ всё равно будет равен $|U|$, значит, элемент W будет таким же, каким мы его выбрали, т.к. элемент D в размерности 3 однозначно задаётся своим определителем. После этого из $U = V \circ W$ однозначно находим $V = U \circ W^{-1}$.

0.56 Задача 56.

Докажите, что любая подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена.

Пусть A - конечнопорожденная абелева группа, мы хотим доказать, что любая ее подгруппа B конечнопорожденна. Напомним, что абелевы группы - это $\mathbb{Z}$-модули. Z-модуль называется нетеровым если любой его подмодуль (подгруппа) конечнопорожден. Нас просят доказать, что любой конечнопорожденный $\mathbb{Z}$-модуль нетеров. Пусть $0 \to A \to B \to C \to 0$ - короткая точная последовательность $\mathbb{Z}$-модулей, тогда B - нетеров тогда и только тогда, когда A и C - нетеровы. Если B - нетеров, то A - нетеров так как, любой подмодуль A - это в том числе подмодуль B, а значит любой подмодуль A конечнопорожден. Прообраз любого подмодуля в C - это подмодуль в B, а значит он конечнопорожден, так образ конечнопорожденного - конечнопорожден. Пусть A и C - нетеровы, тогда возьмем подмодуль $B' \subset B$ и рассмотрим его пересечение с образом A, обозначив его за B_0. B_0 конечнопорожден как образ конечнопорожденного, а B'/B_0 конечнопорожден как подмодуль C. Взяв прообразы образующих из C и образы образующих из A получим набор образующих для B. Теперь все просто: $\mathbb{Z}^n$ - нетеров по индукции из рассмотрения последовательностей $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$, а произвольный конечнопоржденный $\mathbb{Z}$-модуль - это какой-то образ $\mathbb{Z}^n$, а значит из соотвествующей короткой точной последовательности - нетеров.

0.57 Задача 57.

Докажите, что конечная абелева группа G порядка n является циклической тогда и только тогда, когда для любого d, делящего n, в G существует единственная подгруппа порядка d.

Если $G = \mathbb{Z}_n$, то для $d|n$ единственная подгруппа порядка d — это, конечно, порождённая элементом n/d.

Обратно, если группа G не циклическая, то по теореме о классификации конечных абелевых групп она изоморфна сумме *нескольких* циклических, причём среди них найдутся не взаимно простые, то есть $G = \mathbb{Z}_k + \mathbb{Z}_l + H$, и существует $m \neq 1$ такое, что $k = mk_1$ и $l = ml_1$. Тогда искомые две подгруппы порядка $m|n$ — это группа, порождённая $(k_1, 0, 0)$, и группа, порождённая $(0, l_1, 0)$.

0.58 Задача 58.

Пусть R – евклидово кольцо, $u \in R \setminus 0$ – элемент наименьшей нормы. Докажите. что u –обратим.

Решение.

Любые два числа a,b можно поделить с остатком, что $a = bq + r$ и $d(r) < d(b)$ по определению евклидова кольца. Пусть u– число наименьшей нормы, тогда $1 = uq+r$, причем $d(r) < d(u)$. Тогда $d(r) = 0$, то есть $r = 0$ и значит q – обратный элемент к u.

0.59 Задача 59.

Пусть p — минимальное число, делящее порядок конечной группы G, а $H \subset G$ — подгруппа индекса p. Докажите, что H обязательно нормальна.

Обозначим $|G| = n$. Рассмотрим действие группы G на множестве левых смежных классов xH. Его стабилизатор K — это наибольшая нормальная подгруппа G, содержащаяся в H. В самом деле:

$$\begin{gathered} gxH = xH\ \forall\ x \in G \Leftrightarrow \\ (x^{-1}gx)H = H\ \forall\ x \in G \Leftrightarrow \\ x^{-1}gx \in H\ \forall\ x \in G \Leftrightarrow \\ g \in xHx^{-1}\ \forall\ x \in G, \end{gathered}$$

откуда стабилизатор равняется $\bigcap_{x\in G} xHx^{-1}$.

Нужно доказать, что этот стабилизатор совпадает с H. Пусть $|H\colon K| = k$, тогда $|G\colon K| = |G\colon H||H\colon K| = pk$, и факторгруппа G/K вкладывается в перестановки смежных классов (как фактор по стабилизатору он действует точно), коих всего p, то есть $pk|p!$. Значит, $k|(p-1)!$, но при этом $k|n$, поэтому $k \geq p$ или $k = 1$. Поскольку все делители $(p-1)!$ меньше p, получаем $k = 1$, и, следовательно, $K = H$.

0.60 Задача 60.

Пусть конечная группа G имеет две факторгруппы F_1 и F_2, порядки которых взаимно просты, причём $|G| = |F_1| \cdot |F_2|$. Докажите, что $|G| \cong F_1 \times F_2$.

Пусть $F_1 = G/H_1$, а $F_2 = G/H_2$, где H_1 и H_2 — нормальные подгруппы, и из равенства $|G| = |F_1| \cdot |F_2|$ следует $|H_1| = |F_2|$, $|H_2| = |F_1|$. Зададим отображение из G в $F_1 \times F_2$ следующим образом: $g \mapsto (gH_1, gH_2)$. Это, конечно, гомоморфизм, поскольку это гомоморфизм покомпонентно. Кроме того, поскольку порядки групп совпадают, чтобы доказать, что это изоморфизм, достаточно проверить инъективность. Если существует $g \mapsto (0, 0)$, то по определению $g \in H_1$ и $g \in H_2$, но две подгруппы взаимно простых порядков пересекаются по единице (иначе в пересечении существует циклическая подгруппа, порождённая элементом порядка больше единицы, и, следовательно, $|H_1|$ и $|H_2|$ не взаимно просты).

0.61 Задача 61.

Приведите пример двух изоморфных, но не совпадающих подколец в $\mathbb{C}$

Положим $\omega = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ — нетривиальный кубический корень из единицы. Тогда я утверждаю, что $\mathbb{Z}[\omega\sqrt[3]{2}]$ и $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ — два разных, но изоморфных подкольца в $\mathbb{C}$. То, что они разные следует из того, что в $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ все элементы вещественны, а в $\mathbb{Z}[\omega\sqrt[3]{2}]$ — нет. Обозначим за α любое из чисел $\omega\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}$ и докажем, что $\mathbb{Z}[\alpha]$ изоморфно $\mathbb{Z}[x]/(x^3-2)$, пользуясь только тем, что $\alpha^3 - 2 = 0$ и неприводимостью (x^3-2) над $\mathbb{Q}$, следующей из критерия Эйзенштейна (см. Википедию, в Винберге лень искать, но там тоже есть). Из этого следует, что выбранные кольца изоморфны друг другу.

Итак рассмотрим гомоморфизм $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[\alpha]$, который просто подставляет в любой многочлен вместо x значение α. В его ядро входит идеал (x^3-2), поскольку при подстановке α в любой многочлен, делящийся на x^3-2, получаем 0, ибо $\alpha^3 - 2 = 0$. Осталось понять, почему в это ядро больше ничего не входит, тогда мы докажем нужный изоморфизм. Ок, если туда входит ещё один многочлен P, поделим его с остатком на x^3-2 — получим ненулевой многочлен R не более чем второй степени, который при подстановке α должен давать то же, что и P (т.е. 0), ибо мы просто вычли из P что-то кратное x^3-2. Получаем, что α является корнем многочлена не более чем второй степени R. Многочлены x^3-2 и R имеют один и тот же НОД над $\mathbb{Q}$ и над $\mathbb{C}$, ибо R с целыми коэффициентами, и мы можем просто применить алгоритм Евклида к x^3-2 и R для его нахождения. Этот НОД над $\mathbb{C}$ обязан делиться на $(x-\alpha)$, поскольку α является корнем как R, так и x^3-2. Также он не может иметь степень выше 2, поскольку R не может иметь такую степень. Но такой многочлен с рациональными коэффициентами не может быть делителем неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена x^3-2.

0.62 Задача 62.

Является ли кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ *евклидовым?*

Определение евклидовости можно взять, например, из Винберга, гл. 3, параграф 5, опр. 2. Но здесь оно не так важно: мы просто докажем, что $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ не является факториальным (см. теорему 2 из того же параграфа, из неё следует, что в этом случае оно так же не является евклидовым). Действительно, заметим просто, что $4 = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 2\cdot 2$ — два разложения четвёрки на множители в $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Докажем, что 2 — простое число в $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Действительно, предположим, что $2 = (a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5}) = (ac+5bd) + (ad+bc)\sqrt{5}$. Введём норму на $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$:

$$N(x+y\sqrt{5}) := |x^2 - 5y^2|.$$

Легко проверить, что при перемножении двух чисел из $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ нормы перемножаются. Кроме того, если норма равна 1, то элемент обратим, т.к. $(x+y\sqrt{5})(x-y\sqrt{5})$ в этом случае равно ± 1, значит, $(x-y\sqrt{5})$ или $(-x+y\sqrt{5})$ — обратный. Осталось показать, что в разложении двойки норма у одного из элементов 1. Так как у самой двойки норма 4, а при перемножении нормы перемножаются, то обратное возможно только если норма обоих сомножителей равна 2. Т.е. $a^2 - 5b^2 = \pm 2$. Однако перебором возможных остатков a от деления на 5 легко проверить, что это невозможно.

Итак, $4 = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 2\cdot 2$, причём 2 — простое. Но тогда, если бы разложение на простые множители в $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ было единственным, двойка обязана бы была входить в $(\sqrt{5}-1)$ или $(\sqrt{5}+1)$ в качестве простого множителя. Но если мы поделим любое из этих чисел на 2, мы выйдем за пределы $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ — противоречие.

0.63 Задача 63.

Некоторый оператор T на векторном пространстве удовлетворяет уравнению $T^2 - 5T + 6I = 0$, где I—тождественный оператор. Чему могут быть равны собственные значения оператора T?

Многочлен $x^2 - 5x + 6 = 0$ является аннулирующим для оператора T. Любой аннулирующий многочлен делится на минимальный m_A. Так как :

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

То минимальный может быть:

$$m_{A1} = x - 2$$

$$m_{A2} = x - 3$$

$$m_{A3} = (x-2)(x-3)$$

Корни минимального многочлена совпадают с корнями характеристического, которые, в свою очередь, являются собственными значениями. Поэтому собственные значения могут быть 2 или 3.

0.64 Задача 64.

Существует ли вещественная 3×3 матрица A, удовлетворяющая уравнению $A^2 + A + 7I = 0$, I–единичная матрица.

Допустим, такая матрица существует. Тогда $m(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 7$ является ее аннулирующим многочленом. Знаем, что аннулирующий многочлен делится на минимальный.

$$\lambda^2 + \lambda + 7 = \left(\lambda - \frac{-1+\sqrt{-27}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{-1-\sqrt{-27}}{2}\right).$$

Заметим,что $\frac{-1+\sqrt{-27}}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{-27}}{2}$ — комплексные числа, значит, ни первая скобка в правой части равенства выше, ни вторая не могут аннулировать вещественнозначную матрицу. Выходит, что $m(\lambda)$ и есть минимальный многочлен. Мы знаем, что минимальный и харатеристический многочлены имеют одинаковые корни. Значит, для характеристического имеются две возможности:

$$\left(\lambda - \frac{-1+\sqrt{-27}}{2}\right)^2\left(\lambda - \frac{-1-\sqrt{-27}}{2}\right)$$

или

$$\left(\lambda - \frac{-1+\sqrt{-27}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{-1-\sqrt{-27}}{2}\right)^2.$$

Свободный член характеристического многочлена равняется определителю матрицы. Посмотрим, какое значение он принимает здесь:

$$-\left(\frac{-1+\sqrt{-27}}{2}\right)^2\left(\frac{-1-\sqrt{-27}}{2}\right) = -\frac{28(-1+i\sqrt{27})}{8}$$

или
$$-\left(\frac{-1+\sqrt{-27}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-27}}{2}\right)^2=-\frac{28(-1-i\sqrt{27})}{8}.$$
Оба этих числа комплексные, а вещественнозначная матрица комплексный определитель иметь не может. Приходим к противоречию.

0.65 Задача 65.

Для вещественной 2×2-матрицы $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ найдите собственные числа и собственные значения оператора M_A на пространстве 2-матриц, действующих по формуле: $M_A: X\to AX$.

Я так понимаю, нужно найти собственные векторы и собственные значения. Для этого выпишем характеристический многочлен $\det(\lambda E-A)=0$:
$$f_A(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$
$$\lambda_1=\frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$$
$$\lambda_2=\frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$$
Теперь ищем собственные векторы по формуле:
$$(A-\lambda_i E)v=0$$
Пусть $v=(x,y)$:
$$\begin{pmatrix}\lambda_1-a & -b \\ -c & \lambda_1-d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$
Откуда решения:
$$y=\frac{\lambda_1-a}{b}x=\frac{c}{\lambda_1-d}x$$
Если $b\neq 0$, то берем $v_1=(b,\lambda_1-a)$ и аналогично найдем $v_2=(b,\lambda_2-a)$. Иначе если $c\neq 0$, то берем $v_1=(\lambda_1-d,c)$ и $v_2=(\lambda_2-d,c)$. Если $b=c=0$, то берем $v_1=(1,0)$ и $v_2=(0,1)$.

0.66 Задача 66.

Докажите, что в n-мерном комплексном векторном пространстве всякий линейный оператор имеет инвариантное подпространство размерности $n-1$

Пусть λ–некоторое собственное значение оператора A. Тогда достаточно рассмотреть любое $(n-1)$-мерное подпространство, включающее $V(\lambda)=Im(A-\lambda E)$. Хотим понять, что будет, если к этому пространству применить оператор A. Для этого рассмотрим $\lambda=0$, тогда матрица A вырождена и рассмотрим вектор z такой, что $A^Tz=0$. Это то же самое, что $z^TA=0$. Хотим доказать, что существует $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство. Рассмотрим множество S векторов, ортогональных z: $z^TS=0$. Это подпространство имеет размерность $n-1$, так как V раскладывается в прямую сумму пространства, порожденного z и S. Теперь равенство $z^TA=0$ домножим справа на S:
$$z^T(AS)=0$$

Мы применили оператор A и пространство S как было ортогонально, так и осталось, значит, инвариантно.

Если же взять любое λ, то снова ищем z такое, что:

$$(A - \lambda E)^T z = 0$$

$$z^T (A - \lambda E) = 0$$

$$z^T S = 0$$

$$z^T (A - \lambda E) S = 0 = z^T AS - \lambda z^T S$$

Отсюда:

$$z^T (AS) = 0$$

0.67 Задача 67.

Группа действует с двумя орбитами на множестве из пяти элементов. При этом действие точное (то есть только единичный элемент группы действует как тождественное преобразование). Одна орбита состоит из двух элементов, а вторая — из трёх. Найдите все такие группы с точностью до изоморфизма.

Пронумеруем элементы, на которых группа действует, числами от 1 до 5, чтобы 1-3 лежали в одной орбите, а 4-5 — в другой. Теперь данную группу можно вложить в S_5 с помощью данного действия, при этом получится инъекция, т.к. действие точное, и в ядре, как сказано в условии, содержится только тривиальный элемент. Т.е. группа будет изоморфна своему образу — подгруппе в S_5. Значит, нам нужно просто найти все подгруппы S_5, для которых орбиты состоят из 1-3 и 4-5. Все элементы, которые только перемешивают 1-3 и 4-5 ($S_3 \times S_2$) — одна из возможных групп и содержит все остальные ответы в качестве подгрупп. В любой подобной группе должна присутствовать прокрутка трёх элементов (123) по циклу, оставляющая 4 и 5 на местах: 1) У нас точно есть какая-то прокрутка трёх элементов ввиду транзитивности действия на $1, 2, 3$ [если нету, то единица может перейти в двойку только транспозицией с двойкой, а двойка в тройку — только транспозицией с тройкой, но композиция транспозиций есть прокрутка по циклу], возможно, содержащая вместе с собой обмен элементов $4, 5$. Но если мы его возведём в квадрат, мы уж точно получим элемент, для которого $4, 5$ не меняются, а $1, 2, 3$ крутятся по циклу. Имея один цикл из $1, 2, 3$, мы легко получаем другой просто возведением в квадрат. Далее, есть два варианта: либо перестановки по три первых бывают все, либо только кручения. Во втором случае у нас точно есть элемент, меняющий $4, 5$ местами (раз они на одной орбите), и если он как-то крутит $1, 2, 3$, то это кручение можно погасить, домножив на подходящий цикл из трёх. Тогда у нас есть все элементы из $A_3 \times S_2$, и больше быть ничего не может, т.к. это просто все элементы, которые не выполняют транспозиции первых 3-х. Если же у нас есть вся S_3 в первом слое, то единственный способ, когда это может быть не $S_3 \times S_2$ — если нету нечётных перестановок (иначе есть нечётная перестановка, переставляющая $4, 5$, можно загасить цикл и получить транспозицию (45), а раз любая перестановка из S_3 на первых элементах возможна, то мы композицией с этой транспозицией получим что угодно; если есть какая-то нечётная перестановка, то есть нечётная перестановка, переставляющая (45): предположим, что все такие перестановки чётные, но тогда мы можем взять композицию с какой-нибудь нечётной, не переставляющей (45) и получить противоречие). Тем не менее, любой элемент из S_3 в первой компоненте присутствует, и он тогда однозначно задаёт чётность перестановки на $4, 5$. Таким образом, есть всего три хороших подргуппы: $S_3 \times S_2, A_3 \times S_2$, подгруппа чётных перестановок $S_3 \times S_2$. Несложно видеть, что последняя просто изоморфна S_3 посредством ограничения действия на первые 3 элемента. S_3 не изоморфна $A_3 \times S_2$, поскольку первая некоммутативна, а вторая коммутативна.

0.68 Задача 68.

Изоморфны ли группы D_{mn} и $D_m \times Z/nZ$? (Здесь D_k — группа симметрий правильного k-угольника.)

Ответ нет. Для этого рассмотрим эти группы при $m = 8, n = 2$. Заметим, что в группе D_{16} ровно 17 элементов порядка 2: это 16 симметрий (8 с осями, проходящими через противоположные вершины, и 8 с осями, проходящими через середины противоположных сторон) и 1 поворот на 180. Теперь же посмотрим элементы порядка 2 в группе $D_m \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. В группе D_8 ровно 9 элементов порядка 2 (8 симметрий и 1 поворот на 180), а в группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ все элементы порядка 2. Итого в группе $D_8 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ровно $9 * 2 = 18$ элементов порядка два. Если бы существовал изоморфизм этих групп, то элементы сохраняли бы свой порядок, чего не произойдет.

Решение Андрея:

Эти группы тривиально изоморфны в случае $n = 1$. Заметим, что если m и n не взаимно просты, то они не могут быть изоморфны, т.к. в D_{mn} максимальный порядок элемента mn, а в $D_m \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ максимальный порядок элемента — НОК m и n. В дальнейшем будем рассматривать только случай взаимно простых m и n.

В случае $n = 2$ и нечётного m можно построить изоморфизм следующим образом: у $2m$-угольника покрасить вершины через одну, а затем любому элементу α из D_{2m} сопоставить в компоненте $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 1 или 0 в зависимости от того, надо или не надо выполнить центральную симметрию, чтобы при композиции с α получить преобразование, переводящее крашеные вершины в крашеные, а в компоненте D_m взять просто полученное преобразование на крашеных вершинах. Благодаря тому, что центральная симметрия коммутирует с любым преобразованием, мы получим гомоморфизм, а биективность легко проверяется.

Пусть теперь $n > 2$, докажем, что тогда они не изоморфны. Дело в том, что в D_{mn} присутствует mn поворотов и mn симметрий, что даёт не меньше mn элементов порядка 2, в то время как в D_m не больше $m + 1$ элемента порядка 2, в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — не больше двух. Всего в декартовом произведении их не больше $2(m + 1) = 2m + 2 < 3m \leq mn$ при $m, n > 2$. Поэтому эти группы не могут быть изоморфны.

0.69 Задача 69.

Может ли поле из 9 элементов быть подполем поля из 27 элементов?

$$27 = 3^3$$

$$9 = 3^2$$

Если б существовало подполе K из 9 элементов поля M из 27, то степень простого числа поля должна была бы делиться на степень простого числа подполя, но 3 не кратно 2, поэтому ответ нет.

69. Нет, не может быть. Если поле K является подполем L, то L естественным образом является векторным пространством над K. Если они оба конечны, то ясно, что пространство конечномерно, и обозначив его размерность за n, легко видеть, что $|L| = |K|^n$. Но 27 не является целой степенью числа 9.

0.70 Задача 70.

Сколько существует k-мерных векторных подпространств в n-мерном векторном пространстве над полем из q элементов? При фиксированных k и n найдите предел этой величины при $q \to 1$.

Чтобы задать k-мерное векторное пространство в n-мерном, необходимо задать k независимых векторов. Первый вектор можем выбрать среди всех ненулевых векторов, таких над полем из q элементов ровно $q^n - 1$. Второй вектор должен быть независимым относительного первого выбранного, поэтому вариантов $q^n - q$, соответственно дальше k-ый вектор можем выбрать $q^n - q^{k-1}$. Значит линейно независимое множество мощности k может быть выбрано способами:

$$(q^n - 1)(q^n - q)...(q^n - q^{k-1})$$

Заметим, что существует множество линейно независимых множеств мощности k, которые задают одно и то же пространство. Поэтому это число мы должны разделить на число k-множеств, задающих одно и то же подпространство. Но это в точности то, что мы посчитали, только $n = k$, то есть:

$$(q^k - 1)(q^k - q)...(q^k - q^{k-1})$$

В итоге имеем q-биномиальный коэффициент:

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q)...(q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q)...(q^k - q^{k-1})}$$

Найдем предел при $q \to 1$. Для этого сделаем следующие преобразования:

$$\frac{(q-1)(1+q+...+q^{n-1})q(q-1)(1+q+...+q^{n-2})...q^{k-1}(q-1)(1+q+...+q^{n-k})}{(q-1)(1+q+...+q^{k-1})q(q-1)(1+q+...+q^{k-2})...q^{k-1}(q-1)}$$

Получим:

$$\frac{(q-1)^k q^{1+2+...+k-1}(1+q+...+q^{n-1})...(1+q+...+q^{n-k})}{(q-1)^k q^{1+2+...+k-1}(1+q+...+q^{k-1})...(1+q+...+q^{k-(k-1)})}$$

При $q \to 1$ имеем:

$$\frac{n*(n-1)*(n-2)*...*(n-k+1)}{k*(k-1)*...*2*1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

0.71 Задача 71.

Сколько существует $n \times n$-матриц с определителем 1 над полем из q элементов?

Для первой строки вариантов ровно $q^n - 1$ (убираем нулевую строку, так как матрица невырожденная). Вторая строка должна быть незаисимой от первой, поэтому вариантов $q^n - q$. Для третьей, соответственно, $q^n - q^2$. И так, на k-ой строке у нас $q^n - q^{k-1}$ вариантов. Значит, на n-ой строке $q^n - q^{n-1}$. В итоге имеем произведение:

$$\prod_{k=1}^{n} (q^n - q^{k-1})$$

Теперь нам нужен определитель 1. Всего q элементов, один из них нулевой, имеем $q-1$ вариант для определителя.

Заметим, что если строку в матрице умножить на 2, то определитель умножится на 2, если на 3—то на 3 и т.д. Мы можем построить биекцию из множества матриц с определителем 1 во множество матриц с определителем 2, или 3, или итд. Значит, матриц с разными определителями одинаковое количество, а всего вариантов $q-1$. Соответственно, ответ:

$$\frac{1}{q-1}\prod_{k=1}^{n} (q^n - q^{k-1})$$

0.72 Задача 72.

Найдите ранг матрицы, присоединенной к $n \times n$-матрице M ранга $n-1$ (т.е. матрицы, составленной из алгебраических дополнений элементов M.)

Пусть M^*–присоединенная матрица к M. Известна теорема: если есть две матрицы A и B размером $m \times n$ и $n \times k$ соответственно, то

$$rk(AB) \geq rk(A) + rk(B) - n$$

У нас:

$$rk(M) = n - 1$$

$$MM^* = |\det M| * E$$

где E-единичная матрица размера $n \times n$. Так как ранг матрицы M размера $n \times n$ равен $n-1$, то она вырождена,поэтому $\det M = 0$.

$$MM^* = 0 => rk(MM^*) = 0$$

Из теоремы получаем:

$$0 \geq n - 1 + rk(M^*) - n$$

$$0 \geq rk(M^*) - 1$$

Откуда

$$rk(M^*) = 1$$

Решение Андрея:

Элементарными преобразованиями строк матрицу можно привести к ступенчатому виду, а если к ступенчатому виду применять преобразования столбцов, то можно привести к виду на диагонали стоят несколько единиц, а всё остальное нули. Ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк, так что к концу единиц будет $n-1$. Теперь заметим, что ранг присоединённой матрицы тоже не меняется при элементарных преобразованиях. Отсюда будет следовать, что её ранг 1, поскольку для матрицы с $1, 1, 1 \cdots 1, 0$ на диагонали присоединённая — просто матричная единица в углу.

При обмене строк у нас просто обмениваются соответствующие строки в присоединённой матрице, и, возможно, меняется в них знак, т.к. в минорах, соответствующих алгебраическим дополнениям, мог поменяться порядок строк. При домножении строки на константу, отличную от нуля, все строки в присоединённой матрице домножаются на ту же константу, кроме строки, соответствующей данной. Наконец, при замене одной из строк на сумму её и второй строки могли поменяться только миноры, соответствующие этой самой второй строке. Из полилинейности определителя легко видеть, что к каждому минору для второй строки просто добавляется минор для элемента из того же столбца второй строки. Значит, происходит то же элементарное преобразование на присоединённой матрице.

0.73 Задача 73.

Докажите равенства $ImF^* = AnnKerF$ и $KerF^* = AnnImF$ для пары двойственных линейных отображений $F : V \to W$, $F^* : W^* \to V^*$ между конечномерными векторными пространствами

Пусть $\alpha \in \operatorname{Im} F^*$, возьмём любой элемент $w \in \operatorname{Ker} F$ и докажем, что $\alpha(w) = 0$. Действительно, существует $\beta \in W^*$, для которого $\alpha = F^*(\beta)$, но тогда по определению сопряжённого оператора имеем $\alpha(w) = F^*(\beta)(w) = \beta(Fw) = \beta(0) = 0$, третье равенство следует из $w \in \operatorname{Ker} F$. Таким образом, $\alpha \in \operatorname{Ann} \operatorname{Ker} F$, поскольку так можно сделать для любого $w \in \operatorname{Ker} F$. Раз это верно для любого $\alpha \in \operatorname{Im} F^*$, получаем $\operatorname{Im} F^* \subset \operatorname{Ann} \operatorname{Ker} F$. Чтобы доказать, что на самом деле здесь имеет место равенство, достаточно показать, что размерности пространств справа и слева совпадают.

Чтобы понять это, зафиксируем в V и W базисы e_i и f_j, а в V^* и W^* зафиксируем двойственные им ξ_i и ϕ_j. Пусть матрица оператора F есть A, т.е.

$$Fe_i = \sum_j A_{ji} f_j$$

Тогда

$$F^*(\phi_i)(e_k) = \phi_i(Fe_k) = \sum_j A_{jk}\phi_i(f_j) = A_{ik},$$

откуда

$$F^*(\phi_i) = \sum_k A_{ik}\xi_k = \sum_j (A^t)_{ji}\xi_j$$

Значит, в двойственных базисах матрица сопряжённого оператора записывается транспонированной матрицей к исходной.

Теперь видно, что (см. Винберг, параграф 2.3, теорема 2, следствие 1 теоремы 3, а также Винберг, параграф 5.2, теорема 2)

$$\dim \operatorname{Im} F^* = \operatorname{rk} A^t = \operatorname{rk} A = \dim V - \dim \operatorname{Ker} F = \dim \operatorname{Ann} \operatorname{Ker} F$$

Аналогично, если взять элементы $\alpha \in \operatorname{Ker} F^*, w \in \operatorname{Im} F$, то представив $w = Fv$ для какого-то $v \in V$, получим $\alpha(w) = \alpha(Fv) = (F^*\alpha)(v) = 0$, откуда $\alpha \in \operatorname{Ker} F^* \Rightarrow \alpha \in \operatorname{Ann} \operatorname{Im} F$, стало быть, $\operatorname{Ker} F^* \subset \operatorname{Ann} \operatorname{Im} F$. Равенство опять следует из равенства размерностей:

$$\dim \operatorname{Ker} F^* = \dim W^* - \operatorname{rk} A^t = \dim W - \operatorname{rk} A = \dim W - \dim \operatorname{Im} F = \dim \operatorname{Ann} \operatorname{Im} F$$

0.74 Задача 74.

Докажите соотношения для обобщенных чисел сочетаний
а)
$$\binom{-a}{k} = \frac{(-a)(-a-1)\dots(-a-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!}$$
$$= (-1)^k \binom{a+k-1}{k} \qquad (1)$$

б)
$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k-1} = \frac{(a-k+1)(a-k+2)...a}{k!} + \frac{(a-k+2)(a-k+3)...a}{(k-1)!}$$
$$= \frac{(a-k+1)(a-k+2)...a + (a-k+2)(a-k+3)...ak}{k!} \qquad (2)$$
$$= \frac{(a-k+2)(a-k+3)...a(a-k+1+k)}{k!} = \binom{a+1}{k} \qquad (3)$$

0.75 Задача 75.

Вычислите производящие функции для последовательностей $1^2, 2^2, ..., k^2, ...$ *и* $n^2, (n+1)^2, ..., (n+k)^2, ...$

а)
$$1,1,1,1,1,\dots \longleftrightarrow 1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \frac{1}{1-s}$$
$$1,2,3,4,5,\dots \longleftrightarrow 1 + 2s + 3s^2 + 4s^3 + \dots = \frac{d}{ds}\frac{1}{1-s} = \frac{1}{(1-s)^2}$$
$$0,1,2,3,4,5,\dots \longleftrightarrow 0 + s + 2s^2 + 3s^3 + 4s^4 + \dots = \frac{s}{(1-s)^2}$$
$$1^2,2^2,3^2,4^2,\dots \longleftrightarrow 1 + 2^2 s + 3^2 s^2 + \dots = \frac{d}{ds}\frac{s}{(1-s)^2} = \frac{1+s}{(1-s)^3}$$

б)
$$0,0,\dots,0,1,1,\dots \longleftrightarrow s^n + s^{n+1} + \dots = \frac{s^n}{1-s}$$
$$0,0,\dots,0,n,n+1,\dots \longleftrightarrow ns^{n-1} + (n+1)s^n + \dots = \frac{d}{ds}\frac{s^n}{1-s} = \frac{ns^{n-1} + s^n(1-n)}{(1-s)^2}$$
$$0,0,\dots,n,n+1,\dots \longleftrightarrow ns^n + (n+1)s^{n+1} + \dots = \frac{ns^n + s^{n+1}(1-n)}{(1-s)^2}$$
$$0,0,\dots,n^2,(n+1)^2,\dots \longleftrightarrow n^2 s^n + (n+1)^2 s^{n+1} + \dots = \frac{d}{ds}\frac{ns^n + s^{n+1}(1-n)}{(1-s)^2}$$
$$\frac{d}{ds}\frac{ns^n + s^{n+1}(1-n)}{(1-s)^2} = \frac{n^2 s^{n-1} + s^n(1-2n^2+2n) + s^{n+1}(n^2-2n+1)}{(1-s)^3}$$
$$n^2,(n+1)^2,\dots \longleftrightarrow n^2 + (n+1)^2 s + \dots = \frac{n^2 + s(1-2n^2+2n) + s^2(n^2-2n+1)}{(1-s)^3}$$

0.76 Задача 76.

Докажите соотношения

0.76.1 a)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{a+n}{n},$$

типо очевидно. Ну действительно, можно поразмыслить над задачей чисто с комбинаторной точки зрения: у нас имеется $a+n$ шаров, нам нужно выбрать n шаров. Для этого сначала мы можем выбрать k шаров из a и оставшиеся $n-k$ шаров из n.

0.76.2 b)

$$\frac{(1+\sqrt{s})^n + (1-\sqrt{s})^n}{2} = \frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^{\frac{i}{2}} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i s^{\frac{i}{2}}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \sum_{i\in\{0,2,4,\dots\}} 2\binom{n}{i}s^{\frac{i}{2}} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}$$

0.77 Задача 77.

Найдите производящую функцию чисел Фибоначчи. Выведите явную формулу для n-ого числа Фибоначчи

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$Fib(s) = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots$$

Умножим обе части на $s+s^2$:

$$(s+s^2)Fib(s) = s+s^2+2s^3+3s^4+5s^5+\dots+s^2+s^3+2s^4+\dots = s+2s^2+3s^3+5s^4+8s^5+\dots$$

$$(s+s^2)Fib(s) = Fib(s) - 1$$

$$1 = Fib(s)(1-s-s^2)$$

$$Fib(s) = \frac{1}{1-s-s^2}$$

Теперь найдём явную формулу для вычисления n-ого числа Фибоначчи. Уравнение $1-s-s^2 =$ имеет два корня: $s_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $s_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Таким образом: $\frac{1}{1-s-s^2} = \frac{-1}{(s_1-s)(s_2-s)} = \frac{s_1/(s_1-s_2)}{s_1-s} + \frac{s_2(s_2-s_1)}{s_2-s}$

$$\frac{s_1/(s_1-s_2)}{s_1-s} = \frac{1}{s_1-s_2}\frac{1}{1-\frac{s}{s_1}} = \frac{1}{s_1-s_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{s_1^n}$$

$$\frac{s_2/(s_2-s_1)}{s_2-s} = \frac{1}{s_2-s_1}\frac{1}{1-\frac{s}{s_2}} = \frac{1}{s_2-s_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{s_2^n}$$

Значит, что

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{s_1 - s_2} \frac{1}{s_1^n} + \frac{1}{s_2 - s_1} \frac{1}{s_2^n} \Big) s^n$$

А следовательно:

$$f_n = \frac{1}{s_1 - s_2} \frac{1}{s_1^n} + \frac{1}{s_2 - s_1} \frac{1}{s_2^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \bigg(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^n \bigg)$$

0.78 Задача 78.

Найдите производящую функцию последовательности, заданной начальными условиями и рекуррентным соотношением

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

$F(s) = 1 + s + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (3a_{n-1} + 4a_{n-2}) s^n = 1 + s + 3 \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{n-1} s^n + 4 \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{n-2} s^n = 1 + s + 3s \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n s^n + 4s^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n s^n = 1 + s + 3s(F(s) - 1) + 4s^2 F(s)$

$$F(s) - 3sF(s) - 4s^2 F(s) = 1 - 2s$$

$$F(s) = \frac{1 - 2s}{1 - 3s - 4s^2}$$

0.79 Задача 79.

Производящая функция последовательности (a_n) *имеет вид* $A(s) = \frac{1+4s-3s^2}{1-4s+3s^2}$. *Начиная с какого номера члены последовательности представляются как значения квазимногочлена?*

Решение.

Заметим, что производящая функция разлагается на следующие слагаемые:

$$A(s) = \frac{1+4s-3s^2}{1-4s+3s^2} = \frac{3}{1-3s} + \frac{1}{s-1} - 1 = -1 + 3 * \sum_{n=0}^{\infty} (3s)^n - \sum_{n=0}^{\infty} s^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (3^{n+1} - 1) s^n. \tag{4}$$

Таким образом, $a_0 = 1$, $a_n = 3^{n+1} - 1$ при $n \geq 1$. То есть при $n \geq 1$ члены последовательности будут принимать вид квазимногочлена.

0.80 Задача 80.

Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ *заданы рекурретными соотношениями и начальными условиями*

$$\begin{array}{llll} a_0 = 5 & a_1 = 3 & a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 1) \\ b_0 = 1 & b_1 = 4 & b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2} & (n > 1) \end{array}$$

Сравните числа a_n и b_n *при достаточно больших* n

$$A(s) = 5 + 3s + \sum_2^\infty (2a_{t-1} + 3a_{t-1})s^t = 5 + 3s + 3A(s) \cdot s^2 + 2(A(s) - 5) \cdot s$$

$$\Rightarrow\ A(s) = \frac{5 - 7s}{-3s^2 - 2s + 1} = \frac{3}{1+s} + \frac{2}{1-3s} = \sum_0^\infty (3(-1)^t + 2(3)^t) \cdot s^t$$

$$B(s) = 1 + 4s + \sum_2^\infty (5b_{n-1} - 6b_{n-2})s^t = 1 + 4s - 6s^2 \cdot B(s) + 5s \cdot B(s) - 5s$$

$$B(s) = \frac{1 - s}{6s^2 - 5s + 1} = \frac{-1}{1 - 2s} + \frac{2}{1 - 3s} = \sum_0^\infty (2(3)^t - 2^t) \cdot s^t$$

Теперь $a_i - b_i = 3(-1)^i + 2(3)^i - 2(3)^i + 2^i = 3(-1)^i + 2^i$.
Значит $b_i < a_i$ для чётных i и $a_i < b_i$ для нечётных.

0.81 Задача 81.

Пусть ξ, η *— случайные величины. Обязаны ли они быть независимыми, если независимы случайные величины* ξ^2, η^2*?*

Это неверно (но, кстати, верно обратное). Пусть (X, Y) — случайный вектор, для которого вероятности $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$, где $i, j = -1, 0, 1$, заданы так:

$$p_{1,1} = p_{-1,1} = \frac{1}{32}, p_{-1,-1} = p_{1,-1} = p_{1,0} = p_{0,1} = \frac{3}{32}, p_{-1,0} = p_{0,-1} = \frac{5}{32}, p_{0,0} = \frac{8}{32}$$

Независимость X^2, Y^2:

$$P(X^2 = 0, Y^2 = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P(X^2 = 0, Y^2 = 1) - \frac{5}{32} + \frac{3}{32} = \frac{1}{4}$$

$$P(X^2 = 1, Y^2 = 0) = \frac{3}{32} + \frac{5}{32} = \frac{1}{4}$$

$$P(X^2 = 1, Y^2 = 1) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{1}{4}$$

Значит:

$$P(X^2 = 0) = P(X^2 = 1) = P(Y^2 = 0) = P(Y^2 = 1) = \frac{1}{2}$$

И величины независимы. Теперь зависимость величин X, Y. Распишем вероятность событий как произведение вероятностей (в силу предполагаемой независимости) и придем к противоречию:

$$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{8}{32}$$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=\frac{3}{32}$$
$$P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0)=\frac{3}{32}$$
$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{32}$$

Разделим 2) на 1) и 4) на 3):

$$\frac{P(Y=1)}{P(Y=0)}=\frac{3}{8}=\frac{1}{3}$$

Получили неверное равенство, следовательно, величины зависимы!

0.82 Задача 82.

Равнобедренный треугольник на плоскости образован единичным вектором вдоль оси абсцисс и единичным вектором в случайном направлении. Найдите распределение длины третьей стороны.

По теореме косинусов, если угол между двумя векторами равен α, то длина третьей стороны равна $c=\sqrt{1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\alpha}=\sqrt{2-2\cos\alpha}$, где α распределен равномерно на $[0,2\pi]$. Найдем функцию распределения:

$$F(x)=\mathbb{P}(c\leqslant x)=\mathbb{P}(\sqrt{2-2\cos\alpha}\leqslant x)=\mathbb{P}(2-2\cos\alpha\leq x^2\wedge x\geq 0)=$$
$$=\mathbb{P}(\cos\alpha\geqslant 1-\frac{x^2}{2}\wedge x\geq 0)$$

Это равно 0 при $x\leq 0$, единице при $x\geq 2$, а на промежутке $[0,2]$ получаем, что нужно восставить перпендикуляр к оси x в точке $1-x^2/2$ и посмотреть, какую долю всего круга составляет часть справа от перпендикуляра. Понятно, что ввиду симметрии относительно оси x это то же самое, что спросить, какую долю верхней полуокружности занимает часть справа. Так как такой перпендикуляр пересекает верхнюю полуокружность по точке с аргументом $\arccos(1-x^2/2)$, получаем, что на $[0,2]$ функция распределения ведёт себя как $\arccos(1-x^2/2)/\pi$

0.83 Задача 83.

Величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найдите функцию распределения случайной величины $\frac{\xi+|\xi|}{2}$.

$\frac{\xi+|\xi|}{2}$ равна 0, когда $\xi\leq 0$ и равна ξ, когда $\xi>0$. Значит, её функция распределения — тождественный 0 на $(-\infty,0)$. Но она совпадает с функцией распределения ξ при $x\geq 0$. Действительно, если $\xi\leq x$ при $x\geq 0$, то $\frac{\xi+|\xi|}{2}=\max(0,\xi)\leq x$, и наоборот, если $\frac{\xi+|\xi|}{2}=\max(0,\xi)\leq x$, то $\xi\leq x$, так что вероятности событий $\xi\leq x$ и $\frac{\xi+|\xi|}{2}\leq x$, т.к. эти события достигаются на одном и том же множестве.

0.84 Задача 84.

Доказать, что $D\xi = \min_a \mathbb{E}(\xi - a)^2$.

Обозначим $f(a) = \mathbb{E}(\xi - a)^2$. Раскроем:

$$f(a) = \mathbb{E}(\xi - a)^2 = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi a + a^2) = \mathbb{E}(\xi^2) - 2\mathbb{E}(\xi)a + a^2$$

Получается просто парабола с ветвями вверх, минимум в вершине, то есть в точке $\mathbb{E}(\xi)$. А при подстановке получается именно дисперсия.

0.85 Задача 85.

Случайные величины ξ, η *независимы и имеют математическое ожидание* a *и дисперсию* σ^2. *Найдите коэффициент корреляции случайных величин* $\xi_1 = \alpha\xi + \beta\eta, \xi_2 = \alpha\xi - \beta\eta$.

Формула для коэффициента корреляции:

$$r = \frac{Cov(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}},$$

где

$$Cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2)$$

Сразу отметим, что в данных обозначениях получается, что $\mathbb{E}(\xi^2) = \sigma^2 + a^2$ (по формуле дисперсии). Итак (там пользуемся независимостью величин, откуда $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$),

$$r = \frac{\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2)}{\sqrt{\mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))^2}\sqrt{\mathbb{E}(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))^2}} =$$

$$= \frac{\mathbb{E}((\alpha\xi + \beta\eta)(\alpha\xi - \beta\eta)) - \mathbb{E}((\alpha\xi + \beta\eta))\mathbb{E}((\alpha\xi - \beta\eta))}{\sqrt{\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta)^2 - (\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta))^2}\sqrt{\mathbb{E}(\alpha\xi - \beta\eta)^2 - (\mathbb{E}(\alpha\xi - \beta\eta))^2}} =$$

$$= \frac{\mathbb{E}(\alpha^2\xi^2 - \beta^2\eta^2) - (\alpha + \beta)a(\alpha - \beta)a}{\sqrt{\mathbb{E}(\alpha^2\xi^2 + \beta^2\eta^2 + 2\alpha\beta\xi\eta) - (\alpha + \beta)^2a^2}\sqrt{\mathbb{E}(\alpha^2\xi^2 + \beta^2\eta^2 - 2\alpha\beta\xi\eta) - (\alpha - \beta)^2a^2}} =$$

$$= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\sigma^2 + a^2) - (\alpha + \beta)a(\alpha - \beta)a}{\sqrt{\mathbb{E}(\alpha^2\xi^2 + \beta^2\eta^2 + 2\alpha\beta\xi\eta) - (\alpha + \beta)^2a^2}\sqrt{\mathbb{E}(\alpha^2\xi^2 + \beta^2\eta^2 - 2\alpha\beta\xi\eta) - (\alpha - \beta)^2a^2}} =$$

$$= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\sigma^2 + a^2) + 2\alpha\beta a^2) - (\alpha + \beta)^2a^2}\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\sigma^2 + a^2) - 2\alpha\beta a^2) - (\alpha - \beta)^2a^2}} =$$

$$= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

0.86 Задача 86.

Пусть ξ_i — *последовательность независимых случайных величин, каждая из которых равномерно распределена на отрезке* $[a_n - 1, a_n + 1]$, *причем ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}$ *сходится. Найдите*

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(0 \le \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}} \le 1\Big).$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(P\left[0\le\frac{\sum_{i=1}^n\xi_i}{\sqrt{n}}\le 1\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\left(P\left[0-\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{n}}\le\frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i-a_i)}{\sqrt{n}}\le 1-\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{n}}\right]\right)=(*)$$

Пусть $X_i=\xi_i-a_i$. Тогда все $X_i\sim U(-1,1)$, непрерывному равномерному распределению на $[-1,1]$. Из независимости ξ_i следует независимость и X_i. Так же заметим $\mathbb{E}X_i=0$, а $\mathbb{D}X_i=\frac{1}{3}$, последнее обозначим σ^2. Продолжая цепочку равенств

$$(*)=\lim_{n\to\infty}\left(P\left[0-\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{n}}\le\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}\le 1-\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{n}}\right]\right)=[\text{Делим неравенства на }\sigma]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(P\left[-\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{n}\sigma}\le\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}\sigma}\le\frac{1}{\sigma}-\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{n}\sigma}\right]\right)=(**)$$

Согласно центральной пределной теореме $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}\sigma}\longrightarrow N(0,1)$ по распределению. А тогда, если $\zeta\sim N(0,1)$, можно продолжить цепочку равенств:

$$(**)=P\left[-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{n}\sigma}\le\zeta\le\frac{1}{\sigma}-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{n}\sigma}\right]=(***)$$

Исходя из того, что $\sum_{i=1}^\infty a_i$ сходится, последовательность $\sum_{i=1}^n a_i$ ограничена, а значит выполнено $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{n}\sigma}=0$. А тогда получаем ответ

$$(***)=P(0\le\zeta\le\frac{1}{\sigma})=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$$

0.87 Задача 87.

Рассмотрим множество всех нестрого убывающих последовательностей натуральных чисел. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

Одна последовательность 1111111........ Затем идут двойки и единицы. Их можем упорядочить так:

21111111.....

22111111.....

22211111.....

22221111.....

Таких последовательностей счетное число. Это база индукции. Предположение: пусть множество нестрого убывающих последовательностей, первый элемент которых n или меньше счетно. Рассмотрим те, у которых первый элемент $n+1$. Это все равно, что ко множеству с первым элементом n или меньше приписать слева $n+1$, затем $n+1, n+1$ и тд. То есть мы счетное множество (из предположения индукции) берем счетное число раз, значит множество последовательностей с первым числом $n+1$ тоже счетно. Для базы мы доказали. Значит для любого натурального k множество таких последовательностей с первым k счетно. Таких чисел k у нас счетно, а счетное объединение счетных множеств счетно. Поэтому ответ: счетно.

0.88 Задача 88.

Рассмотрим множество всех биекций из N в N. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

Данное множество континуально. Докажем это, используя теорему Кантора – Бернштейна, то есть докажем, что оно не более чем континуально и не менее чем континуально.

Биекцию $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ запишем в виде последовательности. Берутся все натуральные числа и располагаются в определенном порядке: $a_1, a_2, a_3, ...$, где каждое число встречается ровно один раз.

Далее, поскольку существует биекция между бесконечными последовательностями 0 и 1 и множеством бесконечных подмножеств $\mathbb{N}$, а первых ровно континуум, то и бесконечных подмножеств $\mathbb{N}$ континуум.

Покажем, что биекций не меньше континуума. Для этого по каждой двоичной последовательности типа 011010001... строим свою биекцию по определённому правилу. Я возьму такое правило: все натуральные числа разобью на пары соседних: 1 и 2, 3 и 4, и так далее. В n-ю пару войдут $2n-1$ и $2n$. Теперь я смотрю на последовательность из нулей и единиц, и начинаю располагать натуральные числа в определённой последовательности. Если я вижу на n-м месте 0, то числа $2n-1$ располагаю по порядку. А если вижу 1, то беру эти числа в обратном порядке. По той последовательности, которую я написал чуть выше, у меня получится 1,2,4,3,6,5,7,8,10,9, ... и так далее. Это не что иное как биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, где 1 переходит в 1, 2 переходит в 2, 3 переходит в 4, 4 переходит в 3, и так далее. Разумеется, не каждая биекция имеет такой вид, но нам здесь важно, что для каждой двоичной последовательности получается биекция, причём своя. Это рассуждение обосновывает тот факт, что биекций имеется по крайней мере континуум.

Теперь докажем второе утверждение: что биекций не больше континуума. Здесь удобно доказать более сильный факт, что вообще отображений $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ имеется не больше континуума. Каждое такое отображение есть последовательность натуральных чисел, где числа могут повторяться, могут отсутствовать и так далее.

Пусть у нас в последовательности натуральных чисел встретилось число k. Тогда мы пишем k нулей и одну единицу за ними. Скажем, 001000100101... будет кодом последовательности 2,3,2,1,... и так далее. Понятно, что каждая последовательность натуральных чисел получает при этом свой двоичный код, по которому её можно восстановить. Это задаёт инъекцию из множества всех отображений ($\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$) в множество двоичных последовательностей, откуда можно сделать вывод, что таких отображений не больше континуума.

0.89 Задача 89.

Рассмотрим множество непрерывных функций из R в R. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

Данное множество континуально. Докажем это, используя теорему Кантора – Бернштейна, то есть докажем, что оно не более чем континуально и не менее чем континуально.

Функция-константа является непрерывной функцией из R в R, а так как констант в R ровно континуум и функции-константы являются подмножеством исследуемого множества, то мы доказали, что оно не менее чем континуально. Докажем, что не более.

Действительно, непрерывная функция из R в R однозначно задается своими значениями на множестве рациональных точек, которое счётно. Таким образом, необходимо доказать, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не более чем континуально.

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \simeq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \simeq 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \simeq 2^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R}$$

Итак, мы доказали оба знака неравенства, следовательно, множество непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ континуально.

0.90 Задача 90.

Приведите к дизъюнктивной нормальной форме следующую формулу:

$$((p \leftrightarrow (p \wedge q)) \to ((r \wedge (p \wedge (r \to q))) \to q))$$

Составим таблицу истинности для второй части импликации:

r	p	q	r$\to q$	p $\wedge(r \to q)$	r $\wedge(p \wedge (r \to q))$	(r $\wedge(p \wedge (r \to q))) \to q)$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Заметим, что там всегда 1, поэтому и вся формула будет тождественно равна 1. Для ДНФ нам нужны лишь строчки, дающие 1 в ответе. Получаем:

$$\bar{r}\bar{p}\bar{q} + \bar{r}\bar{p}q + \bar{r}p\bar{q} + \bar{r}pq + r\bar{p}\bar{q} + r\bar{p}q + rp\bar{q} + rpq$$

0.91 Задача 91.

Приведите к дизъюнктивной нормальной форме следующую формулу:

$$(((\neg\, p \to q) \to (\neg\, q \to p)) \vee ((r \to p) \to (p \vee q)))$$

Составим таблицу истинности для первой половины:

p	q	$\neg\, p$	$\neg\, q$	$\neg\, p \to q$	$\neg\, q \to p$	$(\neg\, p \to q) \to (\neg\, q \to p)$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

Заметим, что левая часть дизъюнкции всегда 1 в независимости от p, q, r, поэтомуи все выражение тождественно истина. А значит, ДНФ выглядит так:

$$\bar{r}\bar{p}\bar{q} + \bar{r}\bar{p}q + \bar{r}p\bar{q} + \bar{r}pq + r\bar{p}\bar{q} + r\bar{p}q + rp\bar{q} + rpq$$