Семинар 8.

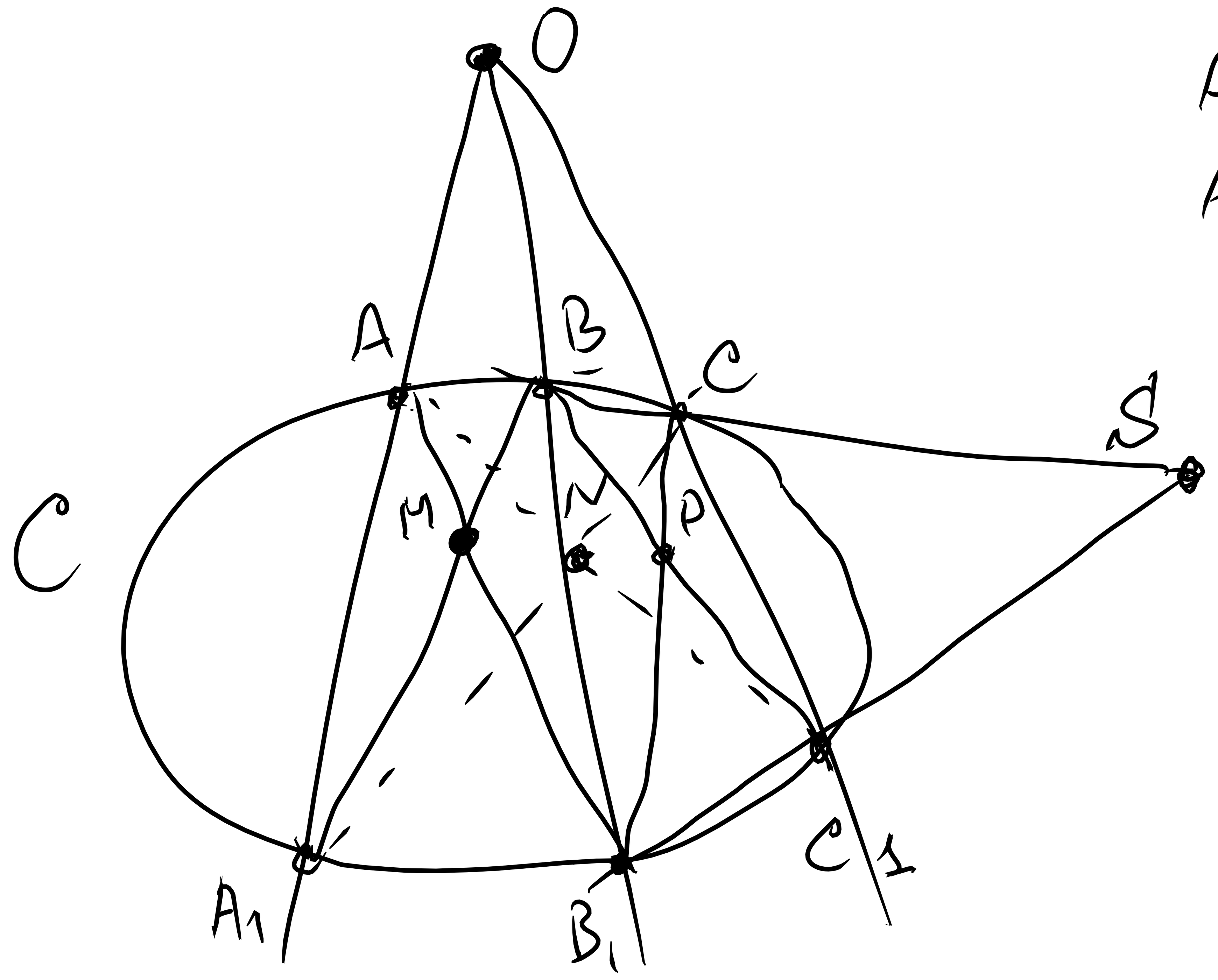
Задача 1. (Это задача 2.2) из задания к семинару 7.) По аналогии с задачей 2.1) из задания к семинару 7 получите явные формулы для перечисления троек натуральных чисел $(a,\ b,\ c)$ - длин сторон целочисленных треугольников с углом 60 градусов и найдите первый такой треугольник.

Задача 2. Как устроено произвольное дифференцирование кольца многочленов от n переменных $\mathbf{k}[t_1, ..., t_n]$? (См. комментарии в видеофайле к семинару 8.)

Задача 3. (Это задача 3 из задания к семинару 7. Она фактически рассмотрена на семинаре 8.) Пусть C – невырожденная коника, и O – произвольная точка вне C. Проведем три произвольные прямые l, m, n через точку O, пересекающие конику C в точках A и A_1, B и B_1, C и C_1. Тогда по теореме Дезарга для перспективных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ точки $S = (BC) \cap (B_1C_1),\ S' = (AB) \cap (A_1B_1),\ S'' = (AC) \cap (A_1C_1)$ лежат на одной прямой (оси Дезарга), которую мы обозначим через $\mathbf{p}_O$. Докажите, что прямая $\mathbf{p}_O$ совпадает с прямой Паскаля для 6-угольника $ABCA_1B_1C_1$.
Замечание. Эта прямая не зависит от выбора прямых l, m, n через точку O. (Это следует из задачи 4 к семинару 7, разобранной на семинаре 8.) Она называется **полярой точки O относительно коники C**.

Задача 4. (Это задача 5 из задания к семинару 7.) 1) В условиях предыдущей задачи докажите, что поляра $\mathbf{p}_O$ пересекает конику C в двух различных точках A и B. (Пусть для простоты основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$.)
2) Пусть $\mathbb{T}_AC$ и $\mathbb{T}_BC$ - касательные к конике C в точках A и B сответственно. Докажите, что O - точка пересечения прямых $\mathbb{T}_AC$ и $\mathbb{T}_BC$.

Задача 5. (Это задача 6 из задания к семинару 7.) Докажите, что если точка X лежит на поляре $\mathbf{p}_Y$ точки Y относительно коники C, то и, наоборот, точка Y лежит на поляре $\mathbf{p}_X$ точки X относительно C.



$\left.\begin{matrix} ABC \\ A_1B_1C_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ прямая Паскаля
$\underline{p} = MP$

$\left.\begin{matrix} \triangle ABC \\ \triangle A_1B_1C_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ прямая Дезарга
$q \ni S = BC \cap B_1C_1$

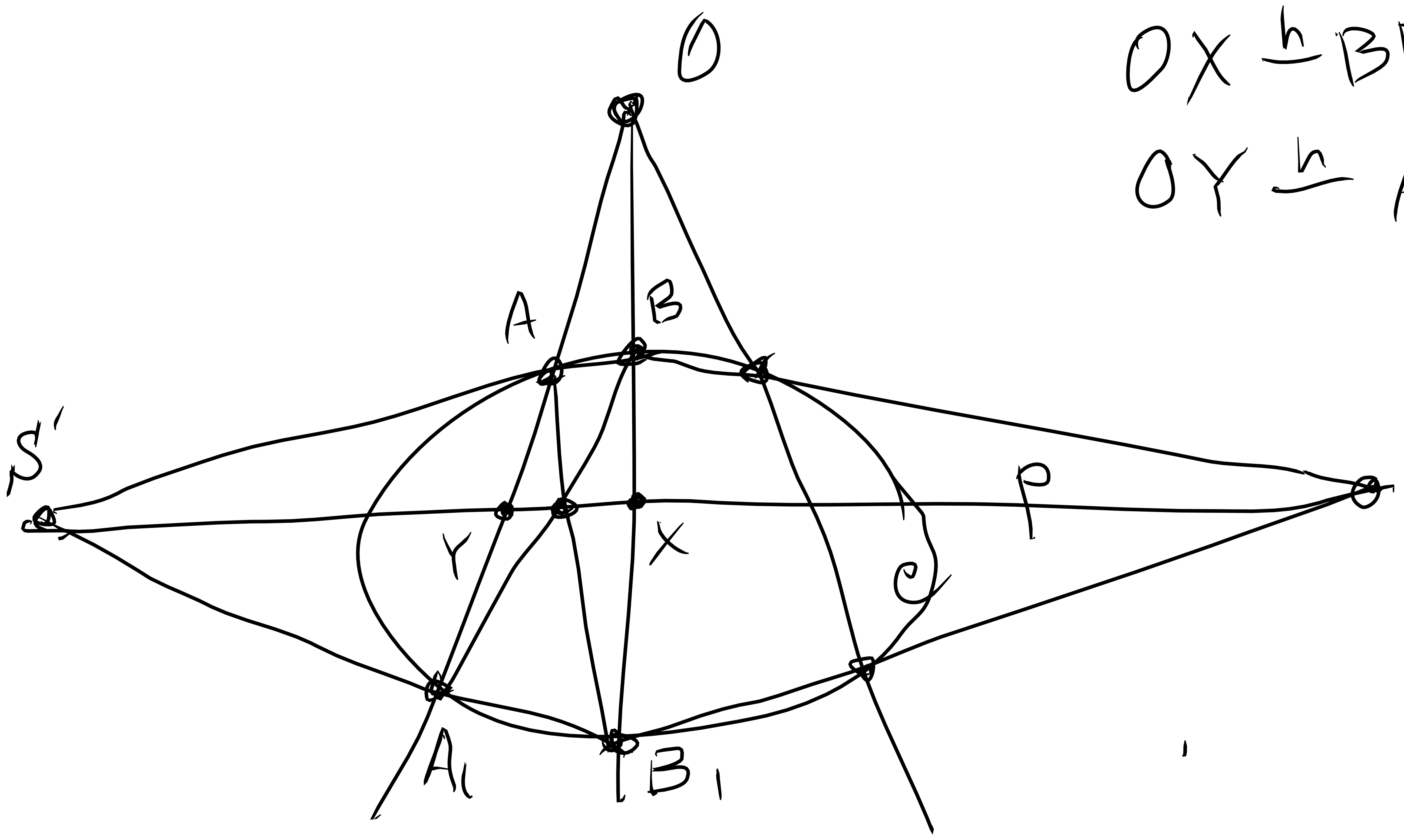
$\boxed{p = q}$

Проверьте, что $S \in p$

(Аналогично, $S' = AB \cap A_1B_1 \in p$
$S'' = AC \cap A_1C_1 \in p$)

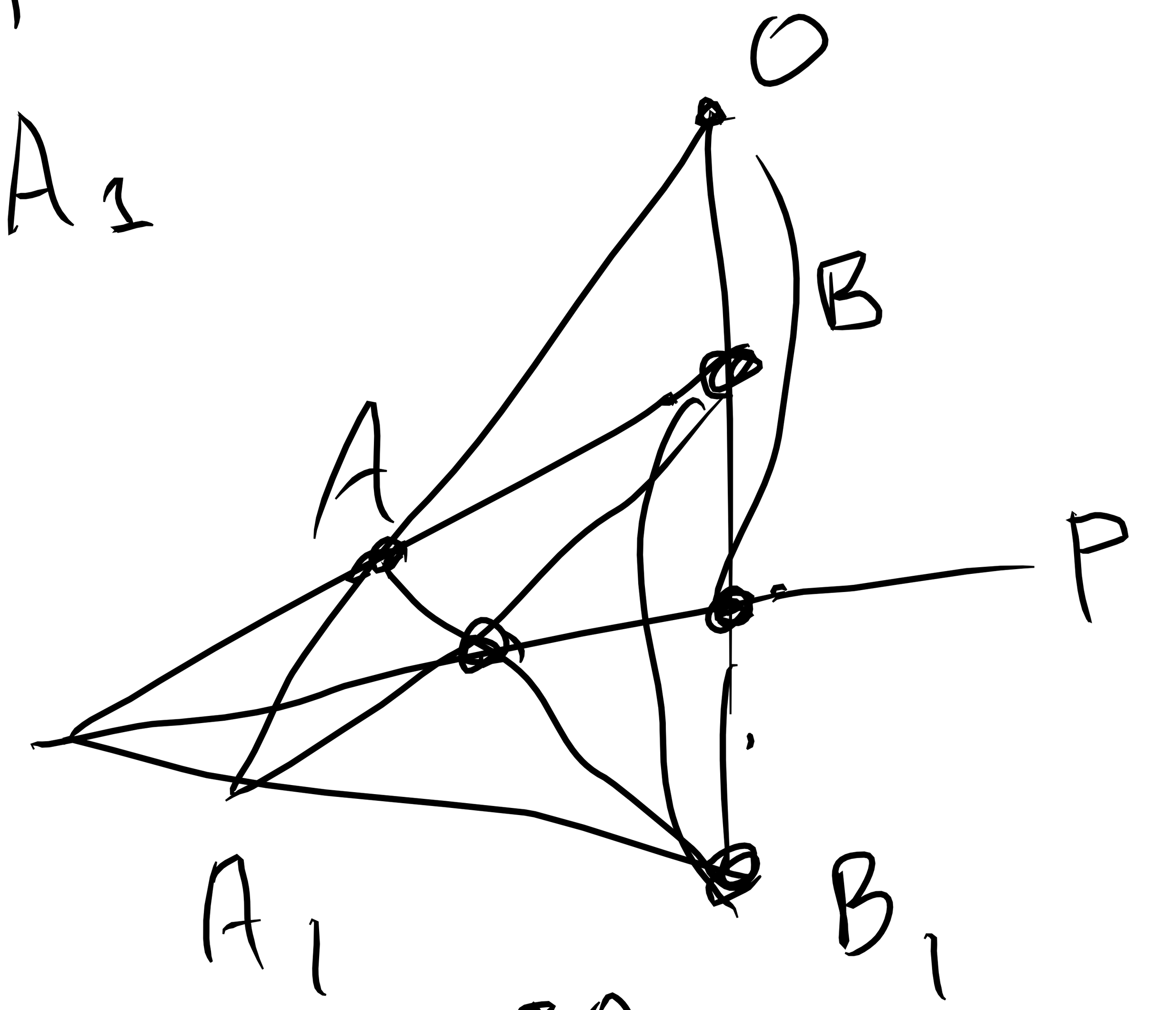
$\left.\begin{matrix} A_1BC \\ AB_1C_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ прямая Паскаля

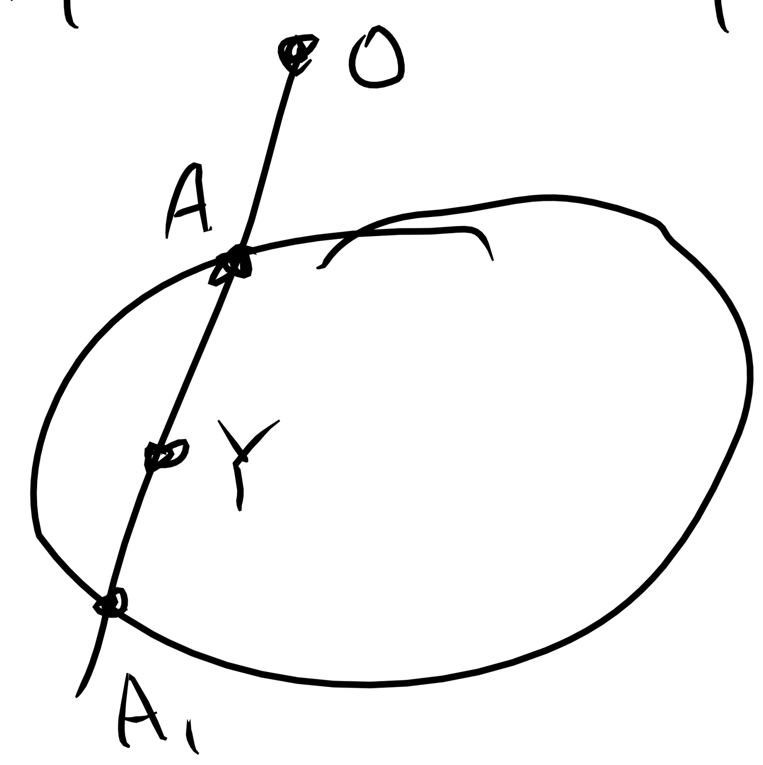
$S \in MN = MP \in p$



$OX \overset{h}{-} BB_1$

$OY \overset{h}{-} AA_1$





$$p_0 := p = \left\{ Y \in \mathbb{P}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} OY \overset{h}{-} AA_1, \\ \text{где } \{A, A_1\} = C \cap (OY) \end{matrix} \right\}$$

p_0 наз. полярой т. O относ. коники C

$\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$

C – невырожд. коника
(k – произв. $k = \bar{k}$,
$\operatorname{char} k \neq 2$)

Зад. 5