

Умножение

Теорема. Пространство когомологий является (градуированным) кольцом

$$H^k(X) \otimes H^e(X) \rightarrow H^{k+e}(X)$$

$$(a, b) \mapsto a \cup b$$

- Билинейно
- Ассоциативно
- (Супер)коммутативно $a \cup b = (-1)^{ke} b \cup a$
- $1 \in H^0(X)$ задается циклом "взвешенным количеством точек"
- ФунCTORиально (гомоморфизм ратного образа сохраняет умножение)

Определение. $\Delta: X \rightarrow X \times X$

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \xrightarrow{\times} H^*(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(X)$$

$$X = \bigcup \sigma_\alpha \Rightarrow X \times X = \bigcup \sigma_\alpha \times \sigma_\beta$$

$$f \in C^k(X) \quad g \in C^e(X)$$

$$f \times g (\sigma_\alpha \times \sigma_\beta) = f(\sigma_\alpha) \cdot g(\sigma_\beta)$$

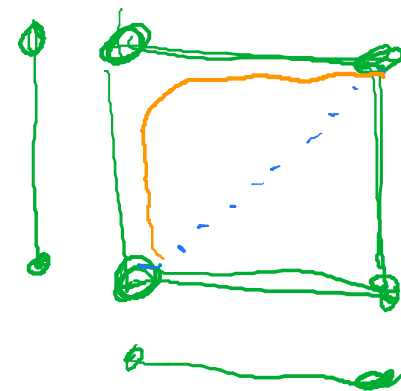
Замечание 1 гомоморфизмы $H_*(X) \otimes H_*(Y) \rightarrow H_*(X \times Y)$
(формула Кюннета)

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \rightarrow H^*(X \times Y)$$

(направления в одну сторону!)
являются изоморфизмами

- если группа коэффициентов поле
- если $H_*(X)$ или $H_*(Y)$ не имеет кручения
- в общем случае — по модулю кручения

② Вложение диагональ не является клеточным!
 где вычисление Δ^* нужна клеточная аппроксимация



Поэтому нужно либо порезать клеточное разбиение $X \times X$ так, чтобы диагональ стала клеточным подпр. вол, либо использовать клеточную аппроксимацию.

Напомним, что $f: X \rightarrow Y$ является клеточным, если

$f(X_k) \subset Y_k$. Тогда f_* вычисляется из индуцированного отображения дуэтов

$$\begin{array}{ccc} X_k / X_{k-1} & \rightarrow & Y_k / Y_{k-1} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ VS^k & & VS^k \end{array}$$

Пусть X — компактное ориентированное многообразие
 тогда умножение в коомологиях двойственно
 пересечению (ко)циклов:

$A, B \subset X$ транверсально пересекающиеся
 многообразия
 $k = \text{codim } A \quad l = \text{codim } B$

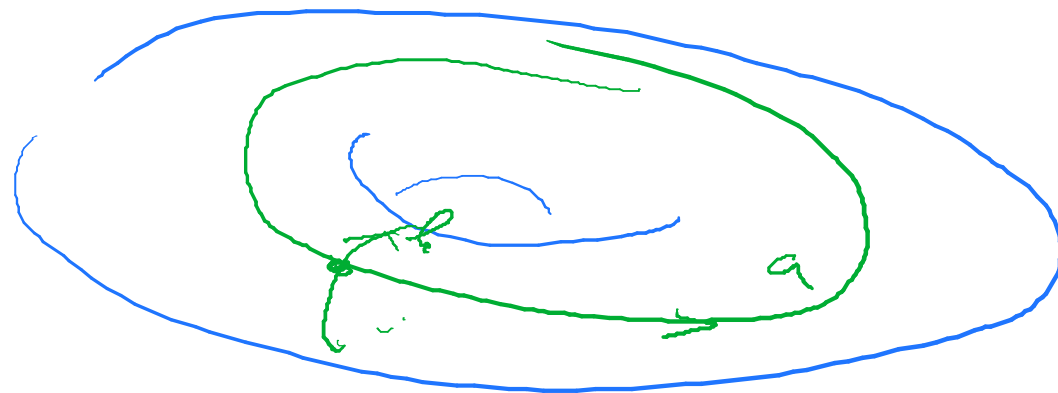
$$[A] \cup [B] = [A \cap B] \in H^{k+l}(X)$$

Доказ. 1) $[A] \times [B]$ двойственно $\leftarrow A \times B \subset X \times X$

$$2) \Delta : X \rightarrow X \times X$$

$$\Delta^*([A \times B]) = [\tilde{\Delta}^1(A \times B)] = A \cap B$$

Пример \mathbb{T}^2



$$[a] \cup [b] = [1]$$

n	0	1	2
$H^n(\mathbb{T}^2)$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	\mathbb{Z}

$$1 = [\pi^2] \quad a \quad b$$

$$ab = [1] = -ba$$

$$H^*(\mathbb{T}^2) = \Delta[a, b]$$

$$a^2 = b^2 = 0$$

$$a \cdot a = -a \cdot a$$

$$\Rightarrow 2a \cdot a = 0$$

$$H^*(\mathbb{T}^n) = \Delta[a_1, a_2, \dots, a_n] = \langle a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} \rangle \quad i_j \in \{0, 1\}$$

$$\langle a_{k_1} \dots a_{k_e} \rangle$$

$$k_1 < \dots < k_e$$

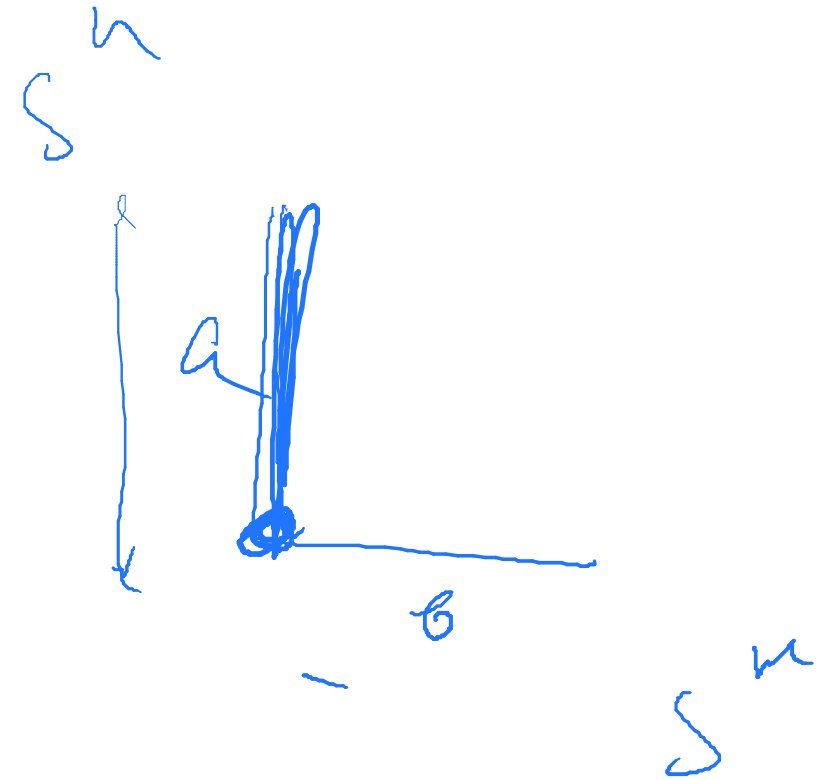
Пример $H^*(S^m \times S^n)$

k	0	m	n	$m+n$
$H^k(S^m \times S^n)$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
		a	b	$ab=c$

$$a = [pt \times S^n]^1$$

$$b = [S^m \times pt]$$

$$ab = [pt \times pt]$$



$$X = S^m \vee S^n \vee S^{m+n}$$

k	0	m	n	$m+n$
$H_k(X)$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
		a	b	c

$$ab=0$$

Теорема

$$X = \sum Y$$

\Rightarrow

гармониче

$\rho H^*(X)$ гурбанов

Д.Б.

$$\bar{H}^*(X) = H^*(X) / \langle 1 \rangle$$

$$H^*(X) \times \bar{H}^*(X) \rightarrow \bar{H}^*(X \wedge X) \xrightarrow{\Delta^*} \bar{H}^*(X)$$

$$X \wedge X = \frac{X \times X}{X * pt \cup pt * X}$$

|



Улб. (Загрузка)

Дуаро хамт

Баоме

$X \rightarrow X \wedge X$ стембаема, есм $X = \sum Y$

$$X = \mathbb{C}P^n = \sigma^0 \cup \sigma^2 \cup \sigma^4 \cup \dots \cup \sigma^{2n}$$

n	0	2	4	...	$2n$
$H_n(\mathbb{C}P^n)$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}		\mathbb{Z}
	$[\sigma^0]$	$[\sigma^2]$	$[\sigma^4]$		$[\sigma^{2n}]$

$$\sigma^0 \cup \dots \cup \sigma^k = \sigma^k = \mathbb{C}P^k$$

$$H^{2k}(\mathbb{C}P^n) \cong H_{2(n-k)}(\mathbb{C}P^n)$$

$$H^n(\mathbb{C}P^n) \begin{matrix} \nwarrow & \nearrow \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{matrix} \begin{matrix} \nwarrow & \nearrow \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{matrix} \begin{matrix} \nwarrow & \nearrow \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{matrix} \begin{matrix} \nwarrow & \nearrow \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$1 = [\sigma^n] \quad [\sigma^{n-1}] \quad [\sigma^{n-2}] \quad \dots \quad u^n$
 $u^1 \quad u^2 \quad \dots \quad u^n$

$$u^2 = [\sigma^{n-2}]$$

$$u^3 = [\sigma^{n-4}]$$

$$[\sigma^{n-k}] \cap [\sigma^{n-e}] = [\sigma^{n-k+e}]$$

$u^k \quad k+e \leq n \quad u^e \quad u^{k+e}$

$$H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[u] / (u^{n+1})$$

$$H^*(\mathbb{C}P^n) = \frac{\mathbb{Z}[u]}{(u^{n+1})} = \langle 1, u, u^2, \dots, u^n \rangle$$

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[u]$$

$$X \longrightarrow \mathbb{C}P^n$$

$$f^*([CP^k]) = (\underline{\underline{f^*(u)}})^{n-k}$$

$$\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$$

$$u \longleftarrow u$$

$$u^k \longleftarrow u^k$$

$$0 \longleftarrow u^n$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

Комментарий к определению

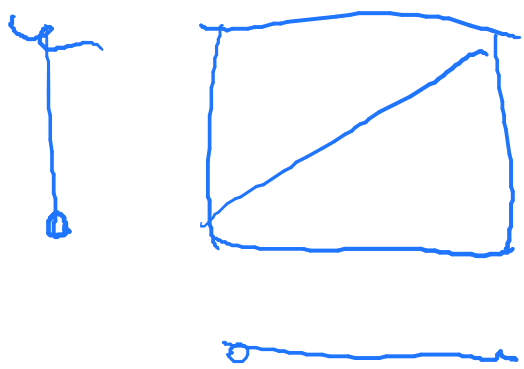
Наше бы условие в комплексе
с непрерывностью (симметричных) координат

X — симметричный

$\Delta^k \times \Delta^e$ не является симметричным

→ имеет каноническое симметричное

разделение, включающее
диагональ



Опр. $f \in C^k$ $g \in C^e$ симметричные
функции

$$(f \circ g)(\Delta_{a_0 \dots a_{k+e}}) := f(\Delta_{a_0 \dots a_k}) g(\Delta_{a_k \dots a_{k+e}})$$