Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 1

9 марта 2021

Логическое следование

Определение
Пусть T — теория, A — замкнутая формула в ее сигнатуре.
A логически следует из T (обозначение: $T \vDash A$), если любая модель теории T является моделью формулы A.

Теорема о корректности для исчисления предикатов

Если $T \vdash A$, то $T \vDash A$.

Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов

Если $T \vDash A$, то $T \vdash A$.

Версия для теорий с равенством:

$T \vdash A$ означает выводимость с использованием аксиом равенства.
$T \vDash A$ означает логическое следование на нормальных моделях.

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Определение
Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω. Отображение носителей $\alpha : M \longrightarrow M'$ называется изоморфизмом M на M', если

- α — биекция,
- $\alpha(c_M) = c_{M'}$ для всех констант c (из Ω),
- $\alpha(f_M(m_1, \ldots, m_k)) = f_{M'}(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k))$ для любого k-местного функционального символа f и $m_1, \ldots, m_k \in M$,
- $P_M(m_1, \ldots, m_k) = P_{M'}(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k))$ для любого k-местного предикатного символа P и $m_1, \ldots, m_k \in M$.

Запись $\alpha : M \cong M'$ означает, что α — изоморфизм M на M'.

Лемма 1.1

1. Если $\alpha : M \cong M'$ и $\beta : M' \cong M''$, то $\beta\alpha : M \cong M''$.
2. Если $\alpha : M \cong M'$, то $\alpha^{-1} : M' \cong M$.

Определение
Модели M, M' называются изоморфными (обозначение: $M \cong M'$), если существует изоморфизм $\alpha : M \cong M'$.
$\cong$ задает отношение эквивалентности на классе всех моделей данной сигнатуры.

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Обозначения и терминология

Пусть M — модель сигнатуры Ω.

- *Терм, оцененный в* M, — это замкнутый терм расширенной сигнатуры $\Omega(M)$. Из обычного терма $t(a_1, \ldots, a_n)$ получаются оцененные термы

  $$t(m_1, \ldots, m_n) := t[a_1, \ldots, a_n/\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}].$$

  $|r|_M$ — значение оцененного терма r в модели M; это элемент из M.
- *Формула, оцененная в* M, — это замкнутая формула сигнатуры $\Omega(M)$, $|A|_M$ — значение оцененной формулы A в M (0 или 1).

Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω, $\alpha : M \cong M'$.

- Для терма t, оцененного в M, обозначим через $\alpha \cdot t$ терм, полученный заменой всех констант m из M на их образы $\alpha(m)$. (Формально $\alpha \cdot t$ определяется по индукции.)
- Аналогично по формуле A, оцененной в M, строится формула $\alpha \cdot A$, оцененная в M'.

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Теорема 1.2 Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω, $\alpha : M \cong M'$.

1. Если t — терм, оцененный в M, то $|\alpha \cdot t|_{M'} = \alpha(|t|_M)$.
2. Если A — формула, оцененная в M, то $|\alpha \cdot A|_{M'} = |A|_M$.

Определение

- Пусть M — модель сигнатуры Ω. *Элементарная теория* модели M — это множество всех замкнутых формул сигнатуры Ω, которые истинны в M.

$$Th(M) := \{A \mid M \vDash A\}.$$

- Модели M_1, M_2 одной сигнатуры называются *элементарно эквивалентными*, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы, т.е. $Th(M_1) = Th(M_2)$; обозначение: $M_1 \equiv M_2$.

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность

Следствие 1.3 Если $M \cong M'$, то $M \equiv M'$.

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 2

16 марта 2021

Теория конечной модели

Все сигнатуры с равенством, все модели нормальные.

Определения

- Теория сильно категорична, если все ее модели изоморфны.
- Теория конечно аксиоматизируема, если она эквивалентна конечной теории.

Теорема 1.6

Пусть Ω - конечная сигнатура, M — конечная модель Ω. Тогда

- $Th(M)$ конечно аксиоматизируема.
- $Th(M)$ сильно категорична.

Доказательство теоремы.

Пусть M — конечная модель конечной сигнатуры Ω.
Строим формулу A_M, которая полностью описывает M.

Пусть $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Положим

$$A_M := \exists x_1 \ldots \exists x_n B_M(x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$B_M(a_1, \ldots, a_n) := \bigwedge_{1 \le i < j \le n} (a_i \neq a_j) \wedge \forall y \bigvee_{i=1}^{n} (y = a_i) \wedge$$

$$\bigwedge \{c = a_i \mid c \in Const_\Omega,\ M \vDash c = m_i\} \wedge$$

$$\bigwedge \{f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = a_j \mid f \in Fun_\Omega,\ M \vDash f(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) = m_j\} \wedge$$

$$\bigwedge \{P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \mid P \in Pred_\Omega,\ M \vDash P(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\} \wedge$$

$$\bigwedge \{\neg P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \mid P \in Pred_\Omega,\ M \vDash \neg P(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\}.$$

Лемма 1.7. Для модели M' сигнатуры Ω

$$M' \vDash A_M \Leftrightarrow M' \cong M.$$

Доказательство леммы.
($\Leftarrow$) Проверяем $M \vDash A_M$, это следует из $M \vDash B_M(m_1, \dots, m_n)$.

($\Rightarrow$) Предположим, что $M' \vDash A_M$ и построим изоморфизм M на M'.
По определению истинности, найдутся $m'_1, \dots, m'_n \in M'$, для которых

$$M' \vDash B_M(m'_1, \dots, m'_n).$$

Докажем, что отображение φ, переводящее каждый m_i в m'_i — искомый изоморфизм.

Окончание доказательства теоремы.
Заметим: $Th(M) \sim \{A_M\}$.
1. По лемме 1.7
$A_M \in Th(M)$ и значит,

$$M' \vDash Th(M) \Rightarrow M' \vDash A_M.$$

2. Обратно, если $M' \vDash A_M$, то по лемме 1.7, $M' \cong M$. И тогда $M' \vDash Th(M)$.

Теория конечной модели

$Th(M)$ сильно категорична, т.к. эквивалентная ей теория $\{A_M\}$ сильно категорична по лемме 1.7.

Следствие 2.1.
Если M — конечная модель и $M' \equiv M$, то $M' \cong M$.
Доказательство. Если $M' \equiv M$, то $M' \vDash Th(M)$. Тогда, по теореме 1.6, $M' \cong M$.

Определимость и автоморфизмы

k-местный предикат на множестве M — это отображение $\gamma : M^k \longrightarrow \{0,1\}$.
k-местное отношение на множестве M — это множество $R \subset M^k$.

Рассмотрим формулу $A(\overrightarrow{b})$, где $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_k)$. *$k$-местный предикат, определимый формулой $A(\overrightarrow{b})$ в модели M*, — это $A_M : M^k \longrightarrow \{0,1\}$ такое, что для всех $m_1, \ldots, m_k$

$$A_M(m_1, \ldots, m_k) = |A(m_1, \ldots, m_k)|_M.$$

Теорема 2.2

Пусть α — автоморфизм модели , $A(b_1, \ldots, b_k)$ — формула в ее сигнатуре. Тогда для всех $m_1, \ldots, m_k \in M$

$$A_M(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k)) = A_M(m_1, \ldots, m_k).$$

В сокращенной записи:

$$A_M(\alpha\overrightarrow{m}) = A_M(\overrightarrow{m}).$$

Таким образом, определимый в M предикат инвариантен при всех автоморфизмах M.

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 3

22 марта 2021

Элементарные подмодели

Определение. Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω.
M' — подмодель M, если

- $M' \subset M$ как множество,
- $c_M = c_{M'}$ для всех $c \in Const_\Omega$,
- $f_M(m_1, \ldots, m_k) = f_{M'}(m_1, \ldots, m_k)$ для всех k-местных $f \in Fun_\Omega$ и $m_1, \ldots, m_k \in M'$,
- $P_M(m_1, \ldots, m_k) = P_{M'}(m_1, \ldots, m_k)$ для всех k-местных $P \in Pred_\Omega$ и $m_1, \ldots, m_k \in M'$.

Обозначение подмодели: $M' \subset M$.

Определение. Подмодель $M' \subset M$ — элементарная, если

$$M' \vDash A(m_1, \ldots, m_k) \Leftrightarrow M \vDash A(m_1, \ldots, m_k)$$

для любой формулы $A(a_1, \ldots, a_k)$ и $m_1, \ldots, m_k \in M'$.
(Тогда, в частности, $M' \equiv M$.)
Обозначение элементарной подмодели: $M' \prec M$.

Теорема о спуске

Мощность сигнатуры Ω

$$|\Omega| := |Const_\Omega \cup Fun_\Omega \cup Pred_\Omega|$$

Теорема (Лёвенгейм – Сколем – Тарский).
Для любой модели M сигнатуры Ω существует $M' \prec M$ такая, что

$$|M'| \leq \max(|\Omega|, \aleph_0).$$

Теорема о спуске

Определение. Зафиксируем модель M и $m_0 \in M$.
Для каждой формулы $\exists x A(x, \overrightarrow{a})$, где $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ — список свободных переменных, и для каждого $\overrightarrow{m} \in M^k$ положим

$$S_{\exists x A(x, \overrightarrow{m})} := \begin{cases} \{e \in M \mid M \vDash A(e, \overrightarrow{m})\}, & \text{если это множество непусто,} \\ m_0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция выбора для семейства множеств $(S_{\exists x A(x, \overrightarrow{m})})_{\overrightarrow{m} \in M^k}$ называется *сколемовской функцией* для формулы $\exists x A(x, \overrightarrow{a})$ и обозначается $s_{\exists x A(x, \overrightarrow{a})}$ (или короче: $s_{\exists x A}$).
(Случай $k = 0$ тоже включается; тогда просто берем $s_{\exists x A} \in M$.)

Таким образом:

$$s_{\exists x A}(\overrightarrow{m}) \in S_{\exists x A(x, \overrightarrow{m})},$$

и тогда

$$M \vDash A(s_{\exists x A}(\overrightarrow{m}), \overrightarrow{m}),$$

если

$$M \vDash \exists x A(x, \overrightarrow{m}).$$

Теорема о спуске

План доказательства.
Пусть $M_0 := \{m_0\}$ (это множество, еще не модель). По рекурсии строим счетную последовательность множеств $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \dots$ Их объединение даст M'.

$$M_{n+1} := M_n \cup \{s_{\exists x A(x,\overrightarrow{a})}[M_n^k] \mid \exists x A(x, \overrightarrow{a}) \in Fm\},$$

(Fm — множество всех формул нашей сигнатуры).

$$M' := \bigcup_n M_n (\text{как множество}).$$

Его можно превратить в модель $M' \subset M$, положив

- $M' \vDash P(\overrightarrow{m}) \Leftrightarrow M \vDash P(\overrightarrow{m})$,
- $c_{M'} = s_{\exists x(x=c)}$,
- $f_{M'}(\overrightarrow{m}) = s_{\exists x(x=f(\overrightarrow{a}))}(\overrightarrow{m})$.

Доказываем, что $M' \prec M$ — искомая.

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 4

23 марта 2021

Фильтры и ультрафильтры

Определение. Фильтр на множестве I — это непустое $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ со свойствами

- $X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F}$
- $X \in \mathcal{F} \;\&\; X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

Фильтр $\mathcal{F}$ собственный, если $\varnothing \notin \mathcal{F}$

Ультрафильтр — максимальный по включению собственный фильтр.

Лемма 4.1.

Свойства ультрафильтров:

- $X \in \mathcal{F} \;\&\; Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F}$,
- $X \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow (I \setminus X) \in \mathcal{F}$.

Лемма 4.2.

Любой собственный фильтр можно расширить до ультрафильтра,

Фильтры и ультрафильтры

Определение. Фильтр $\mathcal{F}$ главный, если $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$.

Лемма 4.3.

Ультрафильтр $\mathcal{U}$ главный, если и только если существует конечное $J \in \mathcal{U}$.

Определение. Пусть задан ультрафильтр $\mathcal{U}$ на I. Рассмотрим свойства элементов I (одноместные предикаты).
Свойство Φ верно *почти всегда* (относительно $\mathcal{U}$), если

$$\{i \mid \Phi(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Обозначение: $\forall^\infty i\, \Phi(i)$.

Лемма 4.4.

Свойства квантора $\forall^\infty$.

- $\forall^\infty i\, (\Phi(i) \wedge \Psi(i)) \Leftrightarrow \forall^\infty i\, \Phi(i) \wedge \forall^\infty i\, \Psi(i)$,
- $\forall^\infty i\, \neg\Phi(i) \Leftrightarrow \neg\forall^\infty i\, \Phi(i)$.

Ультрапроизведения

Лемма 4.5.

Пусть $(M_i)_{i\in I}$ — семейство моделей сигнатуры Ω, $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на I. Тогда

$$\alpha \approx_{\mathcal{U}} \beta := \forall^{\infty} i\, (\alpha_i = \beta_i)$$

задает отношение эквивалентности на множестве $\prod\limits_{i\in I} M_i$.

Класс элемента $(\alpha_i)_{i\in I}$ обозначается $[\alpha_i]_{i\in I}$.

Ультрапроизведения

Определение. Пусть $(M_i)_{i\in I}$ — семейство моделей сигнатуры Ω, $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на I.
Ультрапроизведение семейства $(M_i)_{i\in I}$ по ультрафильтру $\mathcal{U}$ задается следующим образом.

- Носитель M — это $\prod\limits_{i\in I} M_i/\approx_{\mathcal{U}}$.
- $c_M := [c_{M_i}]_{i\in I}$.
- $f_M([m_i^1],\ldots,[m_i^k]) := [f_{M_i}(m_i^1,\ldots,m_i^k)]$.
- $M \vDash P([m_i^1],\ldots,[m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i\, M_i \vDash P(m_i^1,\ldots,m_i^k)$.

Обозначение: $\prod\limits_{\mathcal{U}} M_i$.

Теорема Лося.

$$\prod_{\mathcal{U}} M_i \vDash A([m_i^1],\ldots,[m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i\, M_i \vDash A(m_i^1,\ldots,m_i^k).$$

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 5

5 апреля 2021

Фильтры и ультрафильтры

Определение. Фильтр на множестве I — это непустое $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ со свойствами

- $X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F}$
- $X \in \mathcal{F} \;\&\; X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

Фильтр $\mathcal{F}$ собственный, если $\varnothing \notin \mathcal{F}$
Ультрафильтр — максимальный по включению собственный фильтр.

Лемма 4.1.

Свойства ультрафильтров:

- $X \in \mathcal{F} \;\&\; Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F}$,
- $X \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow (I \setminus X) \in \mathcal{F}$.

Лемма 4.2.

Любой собственный фильтр можно расширить до ультрафильтра,

Фильтры и ультрафильтры

Определение. Фильтр $\mathcal{F}$ главный, если $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$.

Лемма 4.3.

Ультрафильтр $\mathcal{U}$ главный, если и только если существует конечное $J \in \mathcal{U}$.

Определение. Пусть задан ультрафильтр $\mathcal{U}$ на I. Рассмотрим свойства элементов I (одноместные предикаты).
Свойство Φ верно *почти всегда* (относительно $\mathcal{U}$), если

$$\{i \mid \Phi(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Обозначение: $\forall^\infty i\, \Phi(i)$.

Лемма 4.4.

Свойства квантора $\forall^\infty$.

- $\forall^\infty i\, (\Phi(i) \wedge \Psi(i)) \Leftrightarrow \forall^\infty i\, \Phi(i) \wedge \forall^\infty i\, \Psi(i)$,
- $\forall^\infty i\, \neg\Phi(i) \Leftrightarrow \neg\forall^\infty i\, \Phi(i)$.

Ультрапроизведения

Лемма 4.5.

Пусть $(M_i)_{i \in I}$ — семейство моделей сигнатуры Ω, $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на I. Тогда

$$\alpha \approx_{\mathcal{U}} \beta := \forall^{\infty} i\,(\alpha_i = \beta_i)$$

задает отношение эквивалентности на множестве $\prod\limits_{i \in I} M_i$.

Класс элемента $(\alpha_i)_{i \in I}$ обозначается $[\alpha_i]_{i \in I}$.

Ультрапроизведения

Определение. Пусть $(M_i)_{i\in I}$ — семейство моделей сигнатуры Ω, $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на I.
Ультрапроизведение семейства $(M_i)_{i\in I}$ по ультрафильтру $\mathcal{U}$ задается следующим образом.

- Носитель M — это $\prod\limits_{i\in I} M_i/\approx_{\mathcal{U}}$.
- $c_M := [c_{M_i}]_{i\in I}$.
- $f_M([m_i^1],\ldots,[m_i^k]) := [f_{M_i}(m_i^1,\ldots,m_i^k)]$.
- $M \vDash P([m_i^1],\ldots,[m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i\, M_i \vDash P(m_i^1,\ldots,m_i^k)$.

Обозначение: $\prod\limits_{\mathcal{U}} M_i$.

Теорема Лося.

$$\prod_{\mathcal{U}} M_i \vDash A([m_i^1],\ldots,[m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i\, M_i \vDash A(m_i^1,\ldots,m_i^k).$$

Теорема компактности

Теорема компактности (Гёделя – Мальцева).

Пусть T — теория в некоторой сигнатуре. Если каждое конечное подмножество T выполнимо, то T выполнима.

Доказательство. Рассмотрим

$$I := \{S \subset T \mid I \text{ конечно } \}.$$

Для каждого $S \in I$ существует модель $M_S \vDash S$.
Для $A \in T$ пусть

$$J_A := \{S \in I \mid A \in S\}.$$

Лемма 5.1. Существует ультрафильтр на I, содержащий все J_A.

Доказательство. $J_{A_1} \cap \ldots \cap J_{A_k} \neq \varnothing$, т.к. содержит $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Поэтому найдется фильтр, содержащий все такие пересечения.

Теорема компактности

Пусть $\mathcal{U}$ содержит все J_A для $A \in T$. Тогда

$$\prod_{\mathcal{U}} M_S \models T.$$

Действительно,

$$J_A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall^\infty S\, A \in S.$$

Тогда

$$\forall^\infty S\, M_S \models A.$$

По теореме Лося,

$$\prod_{\mathcal{U}} M_S \models A.$$

Теоремы о подъеме

Теорема 5.2

Если теория имеет конечные модели неограниченной мощности, то она имеет и бесконечную модель.

Теорема 5.3 (Лёвенгейма — Сколема о подъеме)

Если теория в сигнатуре Ω имеет бесконечную модель, то она имеет модели любой бесконечной мощности $k \geq |\Omega|$.

Лекция 8

- Теорема о нулях

$K \subset P$ Система решается в P

$\models ACF$ $\Rightarrow$ решается в K

<u>Опр</u> Алгебраическое мн-во $X \subset K^n$

$$X = \{ \bar{m} \in K^n \mid \bigwedge_{i=1}^{r} f_i(\bar{m}) = 0 \}$$

$$f_i \in K[\bar{t}] \qquad \bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$$

X_1, X_2 - алгебр

$\Rightarrow X_1 \cap X_2, X_1 \cup X_2$ - алгебр.

$f(\bar{m}) = 0 \vee g(\bar{m}) = 0 \leftrightarrow fg(\bar{m}) = 0$

Конструктивное - булева комб. алгебраич.

$$(X_1 \setminus Y_1) \cup (X_2 \setminus Y_2) \cup \ldots$$

Опр $X \subset K^n$ определимо над K, если сущ. формула $A(\bar{b}, \bar{a})$

$$X = \{\bar{m} \in K^n \mid K \models A(\bar{k}, \bar{m})\}$$

$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$

$\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$

$\mathbb{C}$

$\{(m_1, m_2) \mid m_1 \cdot i + m_2^2 = 0$

Теорема 8.1 $K \models ACF$.

$X \subset K^n$ конструктивно $\Leftrightarrow$ X определимо над K

$\Rightarrow$ очев.

$\Leftarrow$

$$X = \{\bar{m} \mid K \models A(\bar{k}, \bar{m})\} = \{\bar{m} \mid K \models B(\bar{k}, \bar{m})\}$$

$ACF \vdash A \leftrightarrow B$

бескван т.

B - атом $\Rightarrow$ B задаёт алг. мн-во

$0, 1, +, -, \cdot, =$

$t(\bar{b}, \bar{a}) = r(\bar{b}, \bar{a})$

$t^2 + t^2$

$t(\bar{b}, \bar{a}) - r(\bar{b}, \bar{a}) = 0$

$2t^2$

$p(\bar{b}, \bar{a}) = 0 \qquad p \in \mathbb{Z}[\bar{t}, \bar{u}]$

$\mathbb{R} \qquad \{x \mid \exists y \ x = y^2\} \qquad \{x \mid x > 0\}$

<u>Опр</u> Полином. отображение $F : K^n \to K^r$

$F = (F_1, \ldots, F_r)$

$F_r \in K[t_1, \ldots, t_n]$

Теорема 8.2 (Шевалле)

Полином. образ констр. м-ва над $K \models ACF$ — конструктивное м-во.

$$X = \{ \bar{m} \mid K \models \Phi(\bar{m}) \}$$

$$F = (F_1, \dots, F_2)$$

$$F[X] = \{ (F_1(\bar{m}), \dots, F_2(\bar{m})) \mid \bar{m} \in X \} =$$

$$= \{ \bar{d} \in K^2 \mid \exists \bar{m} \in X \, (d_1 = F_1(\bar{m}) \wedge \dots \wedge d_2 = F_2(\bar{m})) \}$$

$$= \{ \bar{d} \mid K \models \exists \bar{x} \, (\Phi(\bar{x}) \wedge d_1 = F_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge d_2 = F_2(\bar{x})) \}$$

определимо

$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, -, =, <)$

<u>Опр</u> Полуалгебр. мн-во над $\mathbb{R}$

$$\left\{ \bar{m} \;\middle|\; \bigwedge_i f_i(\bar{m}) = 0 \;\wedge\; \bigwedge_j g_i(\bar{m}) > 0 \right\}$$

$f(\bar{m}) \neq g(\bar{m})$ $\qquad\qquad$ $f(\bar{m}) < g(\bar{m})$

<u>Теорема Тарского – Зайденберга</u> $Th(\mathbb{R})$ элиминирует кванторы

$p_i(x,\bar a) > 0$
$p_i(x,\bar a) = 0$

$p_i \in \mathbb{Z}[t,\bar u]$

Примит. формула

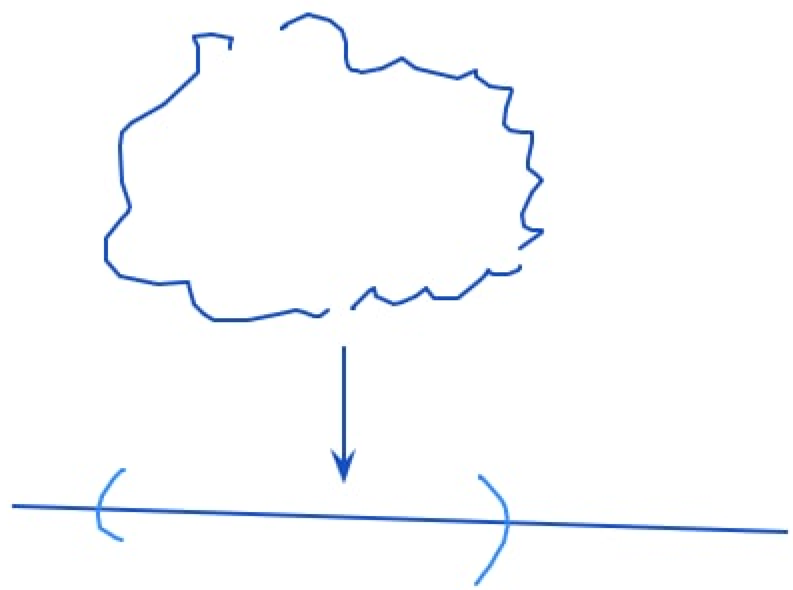
$$B(\bar a) = \exists x \bigwedge_i B_i(x,\bar a)$$

B_i - атом или отриц. атом.

$$\mathbb{R} \models B(\bar a) \leftrightarrow B'(\bar a)$$

бесквант.

B_i задает полуалг. м-во



Проекция полуалг. м-ва
— полуалг.

$x \cdot y - 1 = 0$

$x = y^2$

$p(x,\bar a) = 0$
> 0

$\mathbb{R} \models \exists x \quad ax^2+bx+c>0$

Верещагин, Шень

(Ан. А. Мучник)

$\leftrightarrow \quad a>0 \vee a<0 \wedge D \geqslant 0 \vee a=0 \wedge \dots$

Опр Знаковая диаграмма

$q_1,\dots,q_k \in \mathbb{R}[t]$

$\alpha_1<\dots<\alpha_m$ — корни $q_1 \dots q_k$

$2m+1$

	$(-\infty,\alpha_1)$	α_1	(α_1,α_2)	$\alpha_2 \dots$	α_m	$(\alpha_m,+\infty)$
q_1	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$\dots$						
q_k						

$p_i(t,\bar{u}) = p_{i\bar{u}}(t)$ $\quad\quad$ $\mathbb{Z}[\bar{u}][t] \cong \mathbb{Z}[\bar{u},t]$

При разных знач $\bar{u}$ получаются полиномы из $\mathbb{R}[t]$

$\bar{c} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow p_{i\bar{c}}(t) \in \mathbb{R}[t]$

$\Delta_{\bar{c}}$ – знаковая диагр. $p_{1\bar{c}}, \ldots, p_{k\bar{c}}$

Число столбцов $\leq 2N+1$, где $N = \sum \deg p_{i\bar{c}}$

$$\deg p_{i\bar{c}} = \deg_t p_i$$

$\mathbb{R}^m$ разбивается $\bigcup\limits_{i=1}^{s} \Gamma_i$

внутри Γ_i значение $B(\bar{u})$ не мен.

$$\{\bar{c} \mid \mathbb{R} \models B(\bar{c})\} = \bigcup_i \{\Gamma_i \mid \Gamma_i \models B\}$$

Основная лемма Γ_i полуалгебр.

Преобразования м-ва полиномов

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}$

1. Удаление старшего члена

$a_{n-1} x^{n-1} + \dots$

2. старший коэф. a_n

3. $\frac{\partial}{\partial x}$

4. $\widetilde{rest}(f, g) = rest(f a_n^M, g)$ a_n - старший коэф.

K-кольцо $\frac{f}{g}$ $\frac{f a_n^M}{g} = h + \frac{r}{g}$ $\deg r < \deg g$

Теорема Тарского – Зайденберга

$Th(\mathbb{R})$ элимин. кванторы

$\{+, -, 0, 1, \cdot, =, <\}$

$P_i \in \mathbb{Z}[t, \bar{u}]$

$P_{i\bar{u}}(t)$ $\mathbb{R}[t]$

Знаковые диаграммы

$(-\infty, \alpha_1)$ α_1 (α_1, α_2)

$+$ 0 $-$ $\dots$

$B(\bar{a}) = \exists x \bigwedge_i B_i(x, \bar{a})$

$P_i(x, \bar{a}) > 0$

$(=)$

Лемма 9.1

F_- — исходное мн-во полиномов (при фикс. $\bar{u}$)

Δ_{F_-} Δ_F

$F_- \subset F$ — замыкание

Утв (по индукции) F конечно

1. удаление старш. члена
2. только старш. коэфф.
3. $\partial/\partial t$
4. $Rest(f, g)$

$\exists x\, B(F^-)$

$\exists x\, B(F)$

Лемма 9.2

Пусть F замкнуто, F_0 – м-во всех констант из F

Тогда Δ_F определяется по Δ_{F_0}.

$B(F)$

соотв. бескв. формуле

$B(F_0)$ – бескв.

c_1 $+$
$\vdots$ 0
$\vdots$ 0
c_n $-$

Расширение F_0 до F

$$F_0 \subset F_1 \subset \ldots . F$$

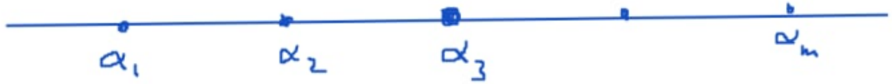
- $P(t) \in F_1 \setminus F_0$, все $Q(t) \in F$ добавлены в F_1
  $\deg Q < \deg P$

$$P(t) = a_m t^m + \ldots \qquad P(t) - a_m t^m \in F_1$$

$a_m = 0$ $\qquad B(F_1) = B(\Delta^1_{F_1}) \cup B(\Delta^2_{F_2}) \ldots$
(приведенности)

Δ_{F_1} увеличивается

- $a_m \neq 0$



Знак $P(\alpha)$

Знак $P(t)$ в гран. точках

1. $Q(\alpha)=0$ для $Q \in F_1$, $\deg Q < \deg P$

$R(t) \in F_1$

$$\beta^s P = U \cdot Q + R$$

$\deg R < \deg Q$

знаем

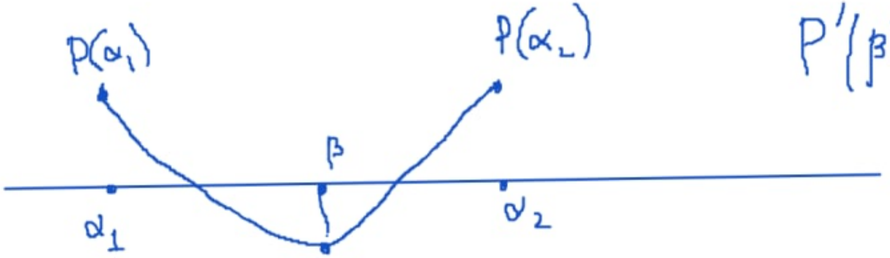
Знак $(\beta^s P(\alpha))$

$=$ Знак $R(\alpha)$

знаем

$P(\alpha)=0$

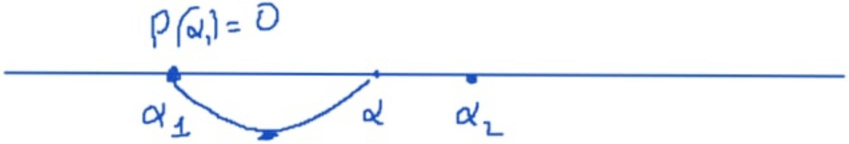
2.1 $P(\alpha_1)P(\alpha_2) > 0 \implies P$ не имеет корней на (α_1, α_2)



$P'(\beta)=0$

(2.2)

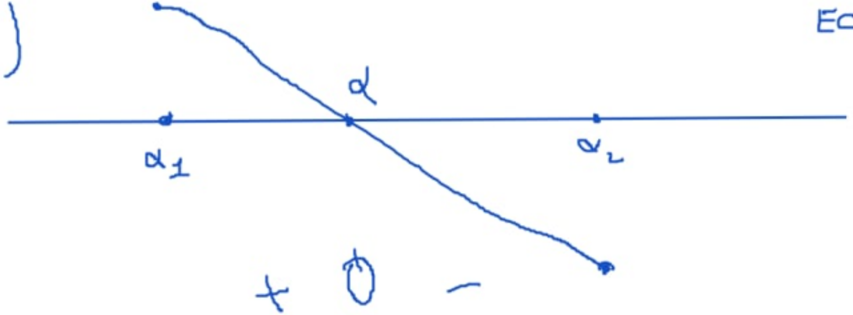
$P(\alpha) \neq 0$ для $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$



$P(\alpha_1) P(\alpha_2) < 0$

(2.3)

Есть корень
$\Rightarrow$ единств.



"<u>Следствие</u>" В элементарной геометрии элиминируются кванторы

$\cong$, В

т.к. она сводится к $Th(\mathbb{R})$

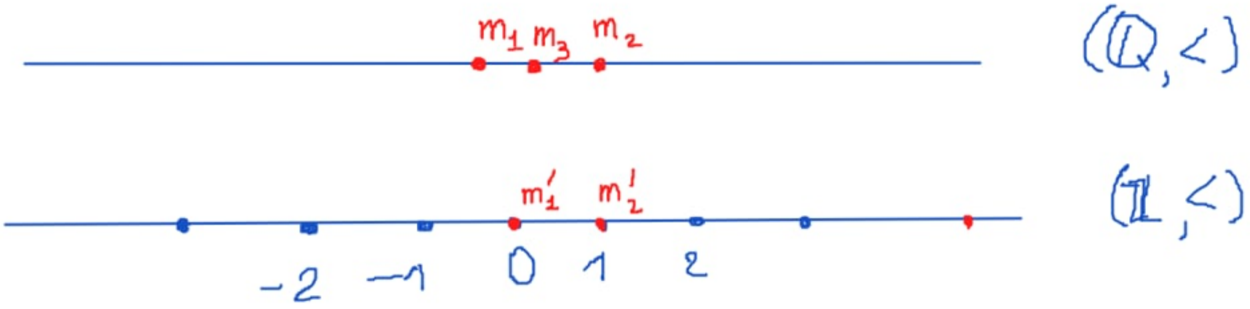
Игры Эренфойхта

$\forall$, $\exists$ $\qquad M \equiv M'$?

$M \qquad\qquad M'$

$\{m_1, \dots, m_n\} \equiv \{m'_1, \dots, m'_n\}$

$G_n(M, M')$



$(\mathbb{Q}, <)$

$(\mathbb{R}, <)$

Сигнатура кон. Ω

$Fun_{\Omega} = \emptyset$

атомарные:

$a_i = a_j$

$a_i = c$

$P(a_1, \dots, a_n)$

Опр Простая формула

Лемма 9.3

Всякая формула эквив. простой

$$P(t_1, \dots, t_n) \sim \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = t_i \wedge P(x_1, \dots, x_n) \right)$$

$\bar{m} \in M^k$

$\bar{m}' \in M^k$

<u>Опр</u>

$\bar{m} \equiv_0 \bar{m}'$, если для любой простой атомарной $A(a_1, \dots, a_k)$

$$M \models A(\bar{m}) \iff M' \models A(\bar{m}')$$

частичный изоморфизм

$G_n(M, \bar{m}, M', \bar{m}')$ игра Эренфойхта длины n с нач. позицией $(\bar{m}, \bar{m}')$

Ход $\overset{\mathrm{I}}{(M, e)}$ $e \in M$ $\overset{\mathrm{II}}{(M', e')}$ $e' \in M'$

Партия — послед. ходов черед. типов

$p(\pi)$ — последняя позиция в партии π

$(\bar{m}, \bar{m}')$ если $\pi = \varnothing$

π Выиграна $\exists$, если длина $2n$

$p(\pi)$ задает част. изоморф.

$p(\pi, (M, e)) = (\bar{d}e, \bar{d}')$, если $p(\pi) = (\bar{d}, \bar{d}')$

$p(\pi, (M', e)) = (\bar{d}, \bar{d}'e)$

Логика и алгоритмы
Ч. 3: Теория моделей
Лекция 10

27 апреля 2021

Игры Эренфойхта

Рассматриваем модели в конечной сигнатуре Ω без функциональных символов.

Игра Эренфойхта $G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$ длины n на моделях M, M' с начальной позицией $(\mathbf{m}, \mathbf{m}')$, где $\mathbf{m} \in M^k$, $\mathbf{m}' \in M'^k$ для некоторого k описывается правилами:

- Ходы делаются поочередно, первый ход делает $\forall$, каждый игрок делает n ходов.
- Ход $\forall$ — это пара (M, l), где $l \in M$ или (M', l'). Ответный ход $\exists$ — в другой модели.
- *Партия* — последовательность ходов по этим правилам. Законченная партия — длины $2n$. *Последняа позиция* $p(\pi)$ в партии π определяется по рекурсии: $p() = (\mathbf{m}, \mathbf{m}')$. Если $p(\pi) = (\mathbf{d}, \mathbf{e})$, то

$$p(\pi, (M, l)) = (\mathbf{d}l, \mathbf{e}), \; p(\pi, (M', l')) = (\mathbf{d}, \mathbf{e}l').$$

- $\exists$ выигрывает законченную партию π, если $p(\pi)$ задает частичный изоморфизм.

Игры Эренфойхта

Частичный изоморфизм:
$M, \mathbf{m} \equiv_0 M', \mathbf{m}'$, если

$$M \models A(\mathbf{m}) \Leftrightarrow M' \models A(\mathbf{m}')$$

для любой простой атомарной $A(\mathbf{a})$.
Простые атомарные формулы:

$$a_i = a_j,\ a_i = c,\ P(a_1, \ldots, a_n).$$

Определение. *Стратегия для* $\exists$.

$$\sigma: \text{ партии нечетной длины } < 2n \longrightarrow \text{ допустимые ходы}$$

Партия $\pi = \chi_1, \ldots, \chi_{2n}$ *согласована с* σ, если

$$\forall p < n\, \chi_{2p} = \sigma(\chi_1, \ldots, \chi_{2p-1}).$$

σ — *выигрышная для* $\exists$, если
для любой партии π, согласованной с σ, π выиграна $\exists$.

Игры Эренфойхта

Определение. *Игровая эквивалентность* $(M, \mathbf{m}) \approx_n (M', \mathbf{m}')$, если

$$\exists \text{ имеет выигрышную стратегию в } G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}').$$

Лемма 10.1 $\approx_n$ задает отношение эквивалентности.

Лемма 10.2 (Индуктивное определение $\approx_n$)

$$(M, \mathbf{m}) \approx_{n+1} (M', \mathbf{m}') \Leftrightarrow \begin{cases} \forall d \in M \, \exists d' \in M' \, (M, \mathbf{m}d) \approx_n (M', \mathbf{m}'d') \\ \forall d' \in M' \, \exists d \in M \, (M, \mathbf{m}d) \approx_n (M', \mathbf{m}'d'). \end{cases}$$

Игры Эренфойхта

Определение $q(A)$ — *кванторная глубина* формулы A определяется по рекурсии:
$q(A) = 0$ для атомарной A,
$q(\neg A) = q(A)$,
$q(A * B) = \max(q(A), q(B))$, где $*$ — бинарная связка,
$q(\forall x A[a \backslash x]) = q(\exists x A[a \backslash x]) = q(A) + 1$.

Определение. *Формульная эквивалентность* $(M, \mathbf{m}) \equiv_n (M', \mathbf{m}')$, если для любой простой формулы $A(\mathbf{a})$, где $q(A) \leq n$

$$M \models A(\mathbf{m}) \Leftrightarrow M' \models A(\mathbf{m}').$$

Теорема 10.3 (Эренфойхта – Фраиссе)

$$(M,\mathbf{m}) \approx_n (M',\mathbf{m}') \Leftrightarrow (M,\mathbf{m}) \equiv_n (M',\mathbf{m}').$$

Следствие 10.4 $M \equiv M' \Leftrightarrow \forall n\, M \approx_n M'$.

Логика одноместных предикатов

Рассмотрим сигнатуру Ω_1 с 1-местными предикатами и равенством.

Определение. Замкнутая формула A *финитно выполнима*, если она имеет конечную модель.

Теорема 10.5 (Лёвенгейм, 1915) Всякая выполнимая формула A сигнатуры Ω_1 выполнима в модели мощности $\leq 2^k \cdot n$, где
$n = q(A)$ (для простой A),
k — число предикатных символов в A.

Следствие 10.6 Конечный спектр формулы в Ω_1 не может быть равен $2\mathbf{N}$.

Бесконечные игры Эренфойхта

Бесконечная игра Эренфойхта $G_\omega(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$ задается теми же правилами, что $G_n(M, \mathbf{m}, M', \mathbf{m}')$, с отличиями:
число ходов бесконечно,
бесконечная партия выиграна $\exists$, если выигран любой ее начальный отрезок четной длины.
Игровая эквивалентность $M \approx_\omega M'$ определяется соответственно.

Теорема 10.7 Для счетных моделей сигнатуры Ω

$$M \approx_\omega M' \Leftrightarrow M \cong M'.$$

Теорема 10.8 (Кантор) Теория $DLO_\leftrightarrow$ счетно категорична.