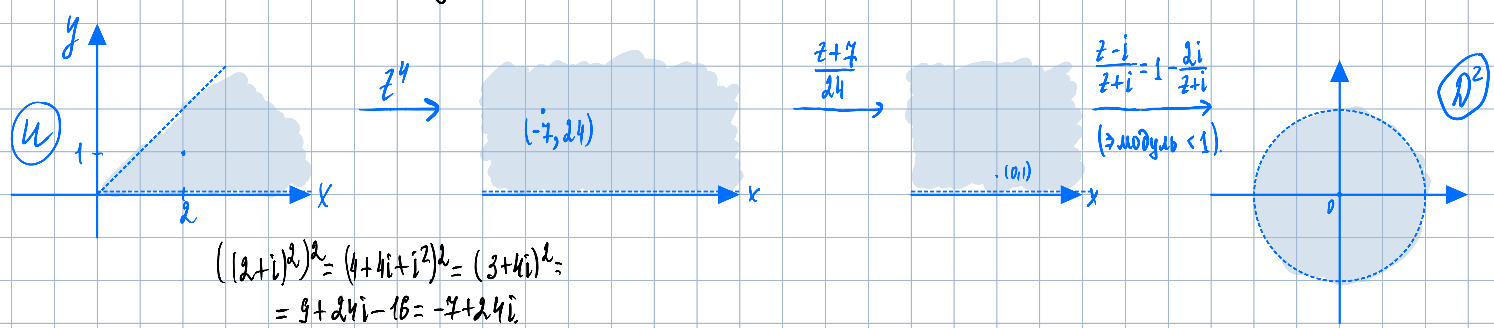
№3. $a_3 = 4,\ a_4 = 1 \to a_3 + a_4 = 5.$

(5) Найти $u(x,y)$, определенную и гармоничную в $U \setminus \{(2,1)\}$, $u|_{\partial U} \to 0$, $u|_{(2,1)} \to \infty$, где $U = \{x > 0,\ 0 < y < x\}$.

Построим голоморфную $f: U \to D^2$.



$((2+i)^2)^2 = (4+4i+i^2)^2 = (3+4i)^2 =$
$= 9+24i-16 = -7+24i$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "g\circ f"'] & & \mathbb{R} \\
& D^2 \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "g"] & \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

f — голоморфная.

Построим $h: D^2 \to \mathbb{R}$ — гармоническую (позже, сейчас план). (*)

Построим $g: D^2 \to \mathbb{C}$, $g = h + ik$, h, k гарм. сопряжена. Т.к. h гармоническая, g голоморфная.

$u = \mathrm{Re}(g \circ f)$. $g\circ f$ голоморфна как композиция голоморфных ⇒ $\mathrm{Re}(g\circ f)$ гармонична на обл. опр. $g\circ f$. $u = h \circ f$.

(*) Настало время h. Рассмотрим $h(z) = \ln|z| : D^2 \to \mathbb{R}$, $h|_{(0,0)} \to \infty$, $h|_{\partial D^2} = \ln|1| = 0$. $\ln|z| = \mathrm{Re}(\ln z)$, где $\ln z$ — голоморфная, ⇒ h гармонична в $D^2 \setminus \{(0,0)\}$.

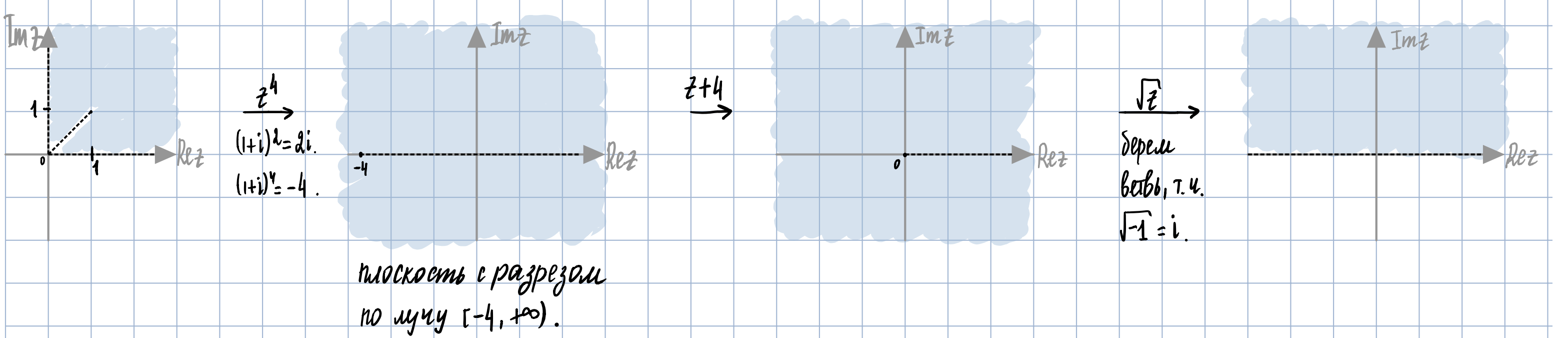
Тогда $$u = h \circ f = \ln\left|\frac{\frac{z^4+7}{24} - i}{\frac{z^4+7}{24} + i}\right| = \ln\left|\frac{z^4+7-24i}{z^4+7+24i}\right|.$$

u определена в U ⇒ и в $U \setminus \{(2,1)\}$. h гарм. в $D^2 \setminus \{(0,0)\}$, а $(0,0)$ появляется из равенства нулю модуля аргу. логар., т.е. если $z^4 + 7 - 24i = 0$, т.е. $z = (2,1)$. Значит, u гармонична на $D^2 \setminus \{(2,1)\}$. Остальное проверили на логарифме ⇒ и на u.

Ответ. $\ln\left|\dfrac{z^4+7-24i}{z^4+7+24i}\right|$.

№1. $a_0=4$, $a_7=1 \to a_0+a_7=5$.

(5) Выписать формулу голоморф. биект. отобр. $X=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z>0\}\setminus\{(1+i)t \mid t\in(0,1]\} \to \mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z>0\}$.

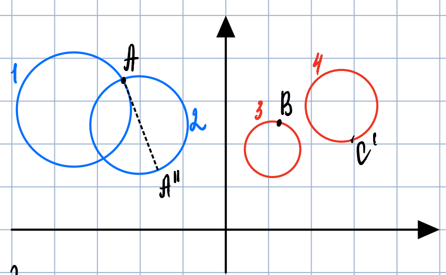


Значит, нужное преобразование: $\sqrt{z^4+4}$.

Ответ: $\sqrt{z^4+4}$.

№2. $a_6=5$, $a_9=1 \to a_6+a_9=6$.

(6) Попробуем перевести синие окружности в красные (синие — пересекаются, красные — нет).



Автоморфизмы полуплоскости — это дробно-линейные преобразования. Дробно-линейное преобразование переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности.

Значит, каждая синяя окружность переходит в какую-то красную. Для определенности пусть окр.-1 переходит в окр.-3, а окр.-2 переходит в окр.-4.

Пусть A — точка пересечения окр.-1 и окр.-2. При автоморфизме пл-ти она перейдет в какую-то точку на одной из красных окружностей. Для определенности пусть в точку B на окр.-3 (не ограничивая общности).

Знаем, что при дробно-линейном преобразовании симметричные точки перейдут в симметричные. Пусть A'' — точка, симметричная A, на окр.-2. При автоморфизме она перейдет в точку на окр.-4 (окр. 2 переходит в окр.-4). Назовем ее C'. Она была симметрична A на окружности-2, значит, образ A должен лежать на окр.-4 и быть симметричен C'! Но образ A не лежит на окр.-4, он лежит на окр.-3, а окр.-3 и окр.-4 не пересекаются. Значит, картинка невозможна. Т.е. перевести можно не любую пару в верхней полуплоскости автоморфизмом полуплоскости в любую др. пару таких окружностей.

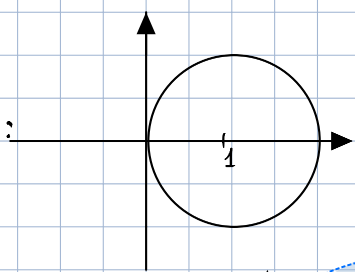
Ответ. Неверно.

№4. За$_7$ = 3.

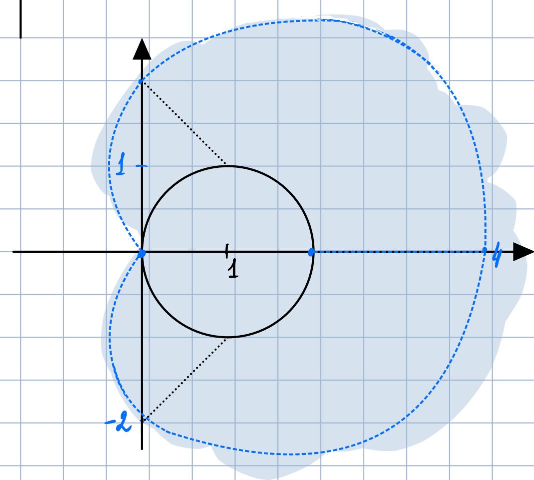
$$(a+bi)^2 = a^2+2abi-b^2$$

(3) Нарисовать образ $X=\{z \mid |z|<1\}$ при $f(z)=(z+1)^2$.

Образ открытого круга при $z \mapsto z+1$:



Посмотрим, куда перейдут отдельные точки.



- $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$
- $2^2 = 4$
- $0^2 = 0$
- $(1-i)^2 = -2i$

Ответ — закрашенная голубая фигура внутри штриховки.