НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Конспект Лекций

«Дифференциальные уравнения. Первый семестр»

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Москва
2020

Содержание

4.09

1.

1.1. Обыкновенные Дифференциальные Уравнения

$y : I \to \mathbb{R}^d, I \in \mathbb{R}$

Обыкновенное дифференциальное уравнение – $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0(*)$, n – порядок ур-я

$F : \Omega \to \mathbb{R}^d, \Omega \in \mathbb{R}^{1+d(n+1)}$

F – непрпрерывная функция

Определение. Решение ОДУ это $y : I \to \mathbb{R}^d : \exists\, y^{'}, \ldots, y^{(n)} : I \to \mathbb{R}^d, (*)$ обращается в тождество при подстановке.

$y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x, \ldots, y^{(n-1)}(x))$ $(**)$ – ОДУ разрешенное относительно старшей производной. Мы будем заниматься только ими.

Если $\left|\dfrac{\delta F_i}{\delta y_J^{(n)}}\right| \neq 0$, то локально $(*)$ эквивалентно $(**)$

1.2. Сведение к системе 1-го порядка.

$$(\#)\ \begin{cases} z_0(x) = y(x) \\ z_1(x) = y'(x) \\ \ldots \\ z_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

Или же $(***)$

$$\begin{cases} z'_{n-1} = \varphi(x, z_1, \ldots, z_{n-1}) \\ z'_{n-2} = z_{n-1} \\ \ldots \\ z'_0 = z_1 \end{cases}$$

Лемма

1) Если $y : I \to \mathbb{R}^d$ – решение $(**)$, то набор $(z_0 = y, z_1 = y', \ldots, z_{n-1} = y^{(n-1)})$ – решение $(***)$
2) Пусть $(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ – решение $(***)$. Тогда $y = z_0$ – решением $(**)$ и верны формулы $(\#)$

1.3. Задача Коши для уранения первого и высших порядков

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^d$

Пример $\dot{x} = x, x(1) = 2$. Решением будет $x = \dfrac{2}{e}e^t$

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x, \ldots, y^{(n-1)}(x)) \\ y_0(x_0) = \hat{z}_0 \\ y_1(x_0) = \hat{z}_1 \\ \ldots \\ y_{n-1}(x_0) = \hat{z}_{n-1} \end{cases} , y_i \in \mathbb{R}^d \iff (**) \begin{cases} y(x_0) = \hat{z}_0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)} = \hat{z}_{n-1} \end{cases}$$

1.4. Существование и единственность решения задачи Коши

Пример неединственности
$x(t) = t^3$
$\dot{x}(t) = 3t^2 = 3x^{2/3}$
$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$
$x_1(t) = t^3, x_2(t) = 0, x(t) = (t-a)^3$

Другой пример:
Пусть $x : J \to \mathbb{R}^d$ – решение задачи Коши
$I \subset J, x|_I : I \to \mathbb{R}^d$ – тоже решение
Ограниченный интервал существования
$\dot{x}(t) = x^2 + 1$
$x(t) = \tan(t - c), t \in [c - \dfrac{\pi}{2}; c + \dfrac{\pi}{2}]$ (можно с константой написать, потому что можно сдвигать)

1.5. Локальная теорема существования и единственности задачи Коши

$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^d, \Omega \in \mathbb{R}^{d+1}, (t_0, x_0) \in \Omega$

Выполнено условие гладкости для функции : $f, f'_x \in C(\Omega)$ – непрерывные
Тогда

1) $\exists\, x : I \to \mathbb{R}^d, t_0 \in I$ – решение з. Коши

2) Если $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^d$ – решение з. Коши, то $x|_{I\cap J} = \tilde{x}|_{I\cap J}$

Более подробно:
т.к. Ω – открытое $(t_0, x_0) \in \Omega \implies \exists\, \delta, \epsilon : K = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\epsilon}(x_0) \subset \Omega$
$f, f'_x \in C(K) \implies \sup\limits_K |f| \le M, \sup\limits_K ||f'_x|| \le L$ (норма, потому что вектор)
Что за I? это значит $\exists\, I = [x_0 - \tau, x_0 + \tau], \tau = \tau(\epsilon, \delta, M, L)$

1.6. Глобальная теорема единственности

Рассмотрим з. Коши и $(t_0, x_0) \in \Omega, f, f'_x \in C(\Omega)$
Тогда если $x^{(1)} : I^{(1)} \to \mathbb{R}^d, x^{(2)} : I^{(2)} \to \mathbb{R}^d$ – решения з. Коши, то $x^{(1)}|_{I^{(1)}\cap I^{(2)}} = x^{(2)}|_{I^{(1)}\cap I^{(2)}}$ (причем тождественно) (!)
Доказательство: Рассмотрим $\{t \ge t_0 : x^{(1)}|_{[t_0,t]} = x^{(2)}|_{[t_0,t]}\} = A$

1) $t_0 \in A$

2) Если $t \in A$, то $\forall\, t' \in [t_0, t], t' \in A$

3) Может быть $A = [t_0, +\infty)$ Тогда $I^{(1)} = (\dots, +\infty), I^{(2)} = (\dots, +\infty), x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$ при $t \in [t_0, +\infty)$

- Может быть $A = [t_0, \tau)$
- Может быть $A = [t_0, \tau]$

Пусть $A = [t_0, \tau)$. Если $\sup I^{(1)} = \tau$ или $\sup I^{(2)} = \tau$, то (!)– $x^{(1)}|_{I^{(1)}\cap I^{(2)}} = x^{(2)}|_{I^{(1)}\cap I^{(2)}}$ (причем тождественно) верно при $t \ge t_0$ При $t \le t_0$ разбираемся аналогично.
Пусть $\tau \in I^{(1)} \cap I^{(2)}$. Раз это не макисмум этих интервалов, то это внутренняя точка.

$x^{(1)}(\tau) = \lim\limits_{t\to\tau-0} x^{(1)}(t) = \lim\limits_{t\to\tau-0} x^{(2)}(t) = x^{(2)}(\tau)$ (пользуясь тем, что наши решения слева совпадают, а значит и в момент времени τ). Значит $\tau \in A$. А мы договорились, что такого не бывает.

Пусть $A = [t_0, \tau], x^{(1)}.x^{(2)}$ – реш. з. К.(1-1) $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(\tau) = x^{(1)}(\tau) = x^{(2)}(\tau) \end{cases}$

Значит эти два решения совпадают в маленькой окрестности. Т.е. $x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$ при $t \in \overline{B_\delta}(\tau)$.

Множество A таково что на $[t_0, \tau]$ совпадают В силу теоремы сущ. и единственности, примененной к (1-1) з. К. на отрезке с центром в τ. Значит они совпадают на $[t_0, \tau+\delta) \subset A$. Противоречие.

Ослабление условия $f'_x \in C(K)$

Определение. Ф-я $g : K = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\epsilon}(x_0) \to \mathbb{R}^m$ – липшицева по x, если $\exists\, L : \forall\ (t,x),(t,y) \in K$ $||g(t,x) - g(t,y)|| \le L \cdot ||x-y||$

Лемма 1.1. *Если $g'_x \in C(K), ||g'_x||_{C(K)} \le L$, то g липшицева по x (с этой константой L)*

Доказательство: Рассмотрим путь $\psi(\theta) = (1-\theta)x + \theta y$

$$|g(t,y) - g(t,x)| = |g(t,\psi(1)) - g(t,\psi(0))| = \left| \int\limits_0^1 \frac{\partial g(t,\psi(\theta))}{\partial \theta} d\theta \right| \le \int\limits_0^1 \left| \frac{\partial g(t,\psi(\theta))}{\partial \theta} \right| d\theta$$

$$= \int\limits_0^1 |dg_x|_{\psi(\theta)}(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}) d\theta = \int\limits_0^1 |dg_x|_{\psi(\theta)}(y-x) d\theta \le \int\limits_0^1 ||dg_x|_{\psi(\theta)}|| \cdot |(y-x)| d\theta \le ||g_x||_{C(K)} |y-x|.$$

■

11.09

2.

2.1. Локальная теорема существования и единственности задачи Коши.

$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
$F : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \in \mathbb{R}^{n+1}, (t_0, x_0) \in \Omega$ и выполнены условия:

1) $D = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\epsilon}(x_0) \subset \Omega$
2) $F \in C(D), (||F||_{C(D)} \leq M)$
3) F липшицева по x на D, т.е. для $\forall\,(t,x),(t,y) \in D\ |F(t,x) - F(t,y)| \leq L|x-y||$

Тогда существует $\tau = \tau(\delta, \epsilon, L, M)$: з.К. имеет единственное решение на $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ (в конце отрезках односторонние производные)

И Если $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^d$ – решение з. Коши, то $x|_{I \cap J} = \tilde{x}|_{I \cap J}$

2.1.1. Сведение к эквивалентному интегральному уравнению

Лемма 2.1. *x – непрерывн, решение задачи Коши $\Longleftrightarrow$ x решение: $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds(**)$*

Доказательство: ($\Longrightarrow$) Если x решение задачи Коши, то x дифференцируема, т.е. непрерывна. Тогда $F(s, x(s))$ непрерывна (как композиция непрерывных), т.е. $x \in C^1$ (один раз диффер.)

$x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds = x_0 + x(t) - x(t_0) = x(t)$

($\Longleftarrow$)x – решение интегрального уравнения. Тогда x – непрерывн, тогда $F(s, x(s))$ непрерывно. Тогда $\frac{dx}{dt} = F(t, x(t))$. При этом начальное условие выполняется $x(t_0) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_0} = x_0$

■

2.1.2. Теорема сжимающих отображений

Пусть (X, ρ) полное метрическое пространтсво и $f : X \to X$ и существует $q < 1 : \forall x, y \in X\ \rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y)$. Тогда $\exists\,!z \in X : f(z) = z$

Доказательство Взять точку x и начать ее итерировать $x, f(x), f^2(x), \ldots$. тогда $\rho(f^n(x), f^m(x)) \leq \sum\limits_{k=n}^{m-1} q^k d \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} q^k d = q^n \cdot C,\ C = \frac{d}{1-q}$. Тогда эта последовательность фундаментальна. то есть она сходится.

$f^n(x) \to z, f^{n+1}(x) \to z$. С другой стороны $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \to f(z) \Longrightarrow f(z) = z$.

единственность. Пусть их две. Тогда при операции их образы, а значит и они сами должны стать ближе. Противоречие.

■

2.2. Доказательство нашей теоремы

2.2.1. Часть 1:

Потребуем $\tau \leq \delta$ (У1)

$E_I = \{x : I \to \overline{B_\epsilon}(x_0) - \text{непр.}\}$ $I \subset [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ – отрезок $E \subset C^0(I \to \mathbb{R}^n)$ – полное метрическое пространство, E замкнутое подмножество, тогда E полное.

Пусть $\Phi : E \to E : (\Phi(x))(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds$. Тогда

1) Φ определена(У1), поскольку $F \in C(D)$, а там ф-я определена и непрерывна и можно взять интеграл
2) $\Phi(x) \to C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau] \to \mathbb{R}^n)$
3) $\forall t \in \overline{B_\tau}(t_0)$ $(\Phi(x))(t) \in \overline{B_\epsilon}(x_0)$.

   Действительно $|(\Phi(x))(t) - x_0| = |\int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds| \leq M|t_0 - t| \leq M\tau \leq \epsilon$

   Потребуем второе условие $\tau \leq \dfrac{\epsilon}{M}$ (У2)

   Значит Φ действительно из E в E

4) Φ сжимающее с $q = 0,5$

   $$x_1, x_2 \in E, |\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x_1(s))ds - F(s, x_2(s))ds \right| \overset{\text{в силу липшивости}}{\leq}$$

   $$\overset{\text{в силу липшивости}}{\leq} \left| \int\limits_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_2(s)|ds \right| \leq L|t - t_0| \cdot ||x_1 - x_2|| \leq L\tau||x_1 - x_2||$$

   Положим $L\tau \leq 0,5$. Тогда все ок. $\Rightarrow \tau \leq \dfrac{1}{2L}$

Получили, что при трех условиях $\tau \leq \delta, \tau \leq \dfrac{\epsilon}{M}, \tau \leq \dfrac{1}{2L}$ $\exists\,!\ x \in E_I : x$ – решение $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds$ $(**)$ по принципу сжимающего отображения. Решения зазадчи Коши на отрезке (и даже любом подотрезке) единственны.

2.2.2. Часть 2:

Если $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^n$ – решение $(*)$ или мы уже знаем что или $(**)$, то $x|_{I \cap J} = \tilde{x}|_{I \cap J}$

Пусть K – любой отрезок в $I \cap J$. Тогда если x неподвижная точка $\Phi_{[t_0 - \tau, t_0 + \tau]}$, то $x|_K, \tilde{x}|_K$ – решения задачи Коши $(*)$ на K.

По части 1 для Φ_K $x|_K = \tilde{x}|_K$. Следовательно $x|_{I \cap J} = \tilde{x}|_{I \cap J}$

2.3. Задача Коши с параметром

$\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$

Назовем эту задачу $*_\lambda$

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$$

Тогда $x(t, \lambda)$ – решение $*_\lambda$

2.3.1. Теорема локальной непрерывной зависимости от параметра

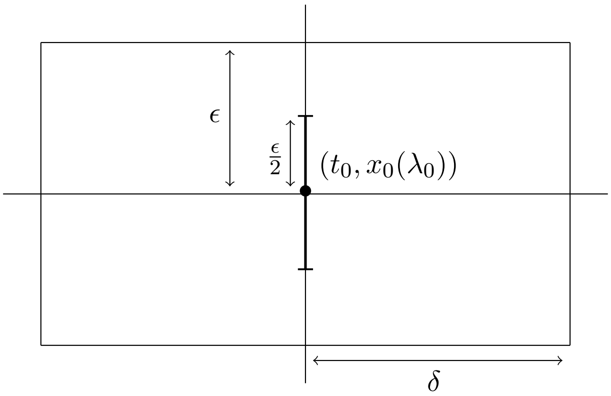
$$*_\lambda \begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$$

$F : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \in \mathbb{R}^{n+1+m}, x_0 : \Psi \to \mathbb{R}^n$ и выполнены условия:

1) $D = \overline{B_\delta}(t_0) \times \overline{B_\epsilon}(x_0(\lambda)) \times \overline{B_\xi}(\lambda_0) \subset \Omega$
   $\forall\, \lambda \in \overline{B_\xi}(\lambda_0)$ верно, что $x_0(\lambda) \in \overline{B_{\epsilon/2}}(x_0(\lambda_0))$

2) $F \in C(D), x_0 \in C(\overline{B_\xi}(\lambda_0)(||F||_{C(D)} \leq M)$

3) F линейно по x на D, т.е. для $\forall\, (t, x, \lambda), (t, y, \lambda) \in D$ верно $|F(t, x, \lambda F(t, y, \lambda)| \leq L|x - y|$



Тогда

0) $(*_\lambda)$ имеет решение x_λ на $\overline{B_\tau}(t_0)$, $\tau = \tau(\delta, \epsilon/2, L, M)$ (из теоремы $\exists\,!$) (почему $\epsilon/2$ см. лекция 49:50 и рисунок)

1) $x_\lambda \in C^0(\overline{B_\tau}(t_0)) \to \mathbb{R}^n : \lambda \to x_\lambda$ непрерывно на $\overline{B_\xi}(\lambda_0)$. (Утверждается непрерывность из диска в множество непрерывных функций)

$1'$) $x(\lambda, t) = x_\lambda(t), x \in C(\overline{B_\xi}(\lambda_0) \times \overline{B_\tau}(t_0))$

Доказательство экивалентности 1 и $1'$:
$1 \to 1'$. (t, λ). Хотим построить окрестность, в которой мало будут отличатся функции.

1) $\forall\, \zeta > 0\ \ \exists\, \alpha > 0 : \forall\, \lambda' \in B_\alpha(\lambda)$ верно, что $||x_\lambda - x_{\lambda'}|| < \frac{\zeta}{2}$

2) Сама функция x_λ непрерывна. Поэтому $\forall\, \zeta\ \ \exists\, \beta > 0 : \forall\, t' \in B_\beta(t)$ верно, что $|x_\lambda(t) - x_{\lambda'}(t')| < \frac{\zeta}{2}$

Тогда $\forall\, \lambda' \in B_\alpha(\lambda), t' \in B_\beta(\lambda)(t)\ \ |x_\lambda(t) - x_{\lambda'}(t')| \leq |x_\lambda(t) - x_\lambda(t')| + |x_\lambda(t') - x_{\lambda'}(t')| \leq \zeta$

$1' \to 1$. Если x непрерывна на $\overline{B_\xi}(\lambda_0) \times \overline{B_\tau}(t_0)$. Поскольку компакт, x равномерно непрерывно.
$\forall \zeta \exists\, \gamma > 0 : \forall\, \lambda, \lambda' : |\lambda - \lambda'| < \gamma \Longrightarrow \forall\, t$ верно, что $|x(t, \lambda) - x(t, \lambda')| < \zeta$
$\forall \lambda, \lambda' : |\lambda - \lambda'| < \gamma(\zeta) \Rightarrow ||x_\lambda - x'_\lambda||_{C^0(B_\tau(t_0))} < \zeta$ – получается непрерывность.

2.3.2. Доказательство теоремы:

Будем считать, что решения заданы на множестве $E = \{x : \overline{B_\tau}(t_0) \to \overline{B_\epsilon}(x_0) - \text{непрерывно}\}$

$\Phi_\lambda : E \to E : (\Phi_\lambda(x))(t) = x_0(\lambda) + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s), \lambda) ds.$

Тогда неподвижная точка Φ_λ – решение задачи Коши, то есть x_λ. Хотим понять, как эта точка будет меняться с изменением λ.

2.3.3. Принцип сжимающих отображений с параметром

$\Phi : \Lambda \times X \to X$
X – полное метрическое, Λ – метрическое.

1) Φ непрерывна
2) $\exists\, q_0 < 1 : \forall\, \lambda \in \Lambda\;\; \Phi_\lambda$ сжимающее с коэффициентом q_0 то есть $\forall x, y \in X$ верно, что $\rho(\Phi_\lambda(x), \Phi_\lambda(y)) \leq q_0 \rho(x, y)$

Тогда если $z(\lambda)$ неподвижная точка Φ_λ, то $z : \Lambda \to X$ – непрерывно.

Доказательство:
Докажем, что z непрерывна в λ_0. $z_0 = z(\lambda_0)$
Рассмотрим последовательность $z_0, \Phi_\lambda(z_0), \Phi_\lambda^2(z_0), \ldots$
Тогда $\rho(z_0, \Phi_\lambda(z_0)) = \rho(\Phi_{\lambda_0}(z_0), \Phi_\lambda(z_0))$.
Из непрерывности Φ_λ следует, что $\exists\, U \ni \lambda_0 : \forall \lambda \in U : \rho(\Phi_{\lambda_0}(z_0), \Phi_\lambda(z_0)) \leq \epsilon$

$\rho(\Phi_\lambda^n(z_0), \Phi_\lambda^m(z_0)) \leq \epsilon \sum\limits_{k=n}^{m-1} q_0^k \leq \dfrac{\epsilon q^n}{1-q}$. Опять пользуемся фундаментальностью последовательности, поэтому последовательность имеет предел. $\Phi_\lambda^m(z_0) \to z(\lambda), m \to +\infty$.
Перейдем к пределу. $\rho(\Phi_\lambda^n(z_0), z(\lambda)) \leq \frac{\epsilon q^n}{1-q}$.
При $n = 0\;\; \rho(z(\lambda_0), z(\lambda)) \leq \frac{\epsilon}{1-q}$

11.09

3. Продолжение второй лекции

Решили, для каких отображений стоит применять принцип сжимающих отображений. Осталось проверить, что Φ непрерывно по λ

1) $\Phi_\lambda : E \to E$ непрерывно и сжимает с коэффициентом $0,5$. Дословно переносится из доказательства Теоремы существования и единственности. Только в нужные места встаить "непрерывно по λ"

2) Φ непрерывн.

$$\left|\Phi(\lambda, x)(t) - \Phi(\tilde{\lambda}, \tilde{x})(t)\right| = \left|x_0(\lambda) + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s), \lambda) ds - x_0(\tilde{\lambda}) - \int\limits_{t_0}^{t} F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda}) ds\right| \leq$$

$$\leq \left|x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})\right| + \int\limits_{t_0}^{t} \left|F(s, x(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda}) ds\right| \leq$$

$$\leq \left|x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})\right| + \int\limits_{t_0}^{t} |F(s, x(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \lambda) ds| + \int\limits_{t_0}^{t} \left|F(s, \tilde{x}(s), \lambda) - F(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda}) ds\right|$$

1) Здесь пользуемся равномерной непрерывностью $x_0(\lambda)$: Для любого $\xi \ \exists \ \alpha \ : \ |\lambda - \tilde{\lambda}| < \alpha \implies |x_0(\lambda) - x_0(\tilde{\lambda})| \leq \dfrac{\xi}{3}$

2) Пользуемся липшиевостью

3) Здесь пользуемся равномерной непрерывностью: Для любого $\xi \ \exists \ \beta : |\lambda - \tilde{\lambda}| < \beta \implies |F(t, x, \lambda) - F(t, x, \tilde{\lambda})| < \xi \ \ \forall t, x$

Выражение оценивается $\leq \frac{\xi}{3} + L||x - \tilde{x}|| \cdot |t - t_0| + \xi|t - t_0| \leq \xi(\frac{1}{3} + \tau) + L\tau||x - \tilde{x}||$, где $|t - t_0|$ оценивается τ.

Теперь если потребуем еще одно доп. условие $||x - \tilde{x}|| < \xi$, то все выражение оценивается $|\Phi(\lambda, x)(t) - \Phi(\tilde{\lambda}, \tilde{x})(t)| \leq \xi(\frac{1}{3} + \tau + L\tau) \ \ \forall t$. То есть норма меньше либо равно то выражение. Значит непрерывно.

3.1. Глобальная теорема непрерывной зависимости от параметра

Рассмотрим задачу Коши $(*_\lambda)$
$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0(\lambda) \end{cases}$, $F, F' \in C(\Omega)$
при $\lambda = \lambda_0, \ x_{\lambda_0}$ – решение $(*_{\lambda_0})$. Решение определено на некотором интервале, но мы выделим отрезок I. $x_{\lambda_0} : I \to \mathbb{R}^n$

Тогда $\exists \ U \ni \lambda_0$:

1) $\forall \lambda \in U$ решение $(*_\lambda)$ существует на I (по глобальной теореме единственности, раз существует, то и единственно)

2) $x(\lambda, t) = x_\lambda(t), x$ непрерывно на $U \times I$.

3.2. Доказательство:

Основа: решаем задачу Коши на маленьких отрезках и собираем все глобальное решение из множества локальных.

Посмотрим множество точек $K = \{(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda), t \in I\}$ – график непрерывной функции на компакте. Значит это тоже компакт.

Тогда расстояние от компакта до границы $dist(K, \partial\Omega) = \alpha > 0$. Действительно, $dist(x, \partial\Omega)$ непрерывная функция, поскольку даже липшицева (если сдвинули точку x, то расстояние до любого множества не может измениться больше чем на то, что мы сдвинули). Неперывная функция на компакте достигает своего минимума, а ноль быть не может, поскольку тогда точка x лежит на границе.

Фиксируем $\epsilon = \delta = \zeta = \frac{\alpha}{4}$

То есть $\forall\ (\hat{t}, \hat{x}, \hat{\lambda}) \in K\ \overline{B_\delta}(\hat{t}) \times \overline{B_\epsilon}(\hat{x}) \times \overline{B_\zeta}(\hat{\lambda}) \subset \hat{K} \subset \Omega$

Рассмотрим $\{(t, x, \lambda) : dist((t, x, \lambda), K) \le \frac{3\alpha}{4}\} = \hat{K}$ – компакт (замкнуто и ограничено). $\hat{L} \subset \Omega$.

$||F||_{C^0(\hat{K})} \le M, ||F'_x||_{C^0(\hat{K})} \le L$, потому что непрерывная функция на компакте. Все 4 константы, участвующие в локальных теоремах, одинаковы для всех точек компакта K.

Вывод: $\tau = \tau(\delta, \epsilon, L, M)$ можно выбрать одним и тем же для всех точек компакта K.

Рассмотрим $\{\min I = t_{-l} < t_{-l+1} < \ldots < t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \max I : |t_i - t_{i-1}| < \tau\}$

Рассматриваем такую последовательность задач Коши:

$$(*_i) \begin{cases} \dot{x}_i = F(t, x_i, \lambda) \\ x_i(t_{i-1}, \lambda) = \begin{cases} x_{i-1}(t_{i-1}, \lambda), & i \ge 2 \\ x_0(\lambda), i = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$(*_1)$ – задача Коши с начальным условием $x_1(t_0) = x_0(\lambda)$. При $\lambda \in U_1 \ni \lambda_0$ $x_{1\lambda}$ опеределен на $[t_0, t_1]$ (и даже немного шире, потому что расстояние между сосежними точками строго меньше τ).

В частности, $x_1(t_1, \lambda)$ непрерывно по $\lambda, x_1(t_1, \lambda_0) = x_{\lambda_0}(t_1)$.

$(*_2)$ – задача Коши с начальным условием $x_2(t_1) = x_1(t_1, \lambda)$. Правая часть непрерывная функция, которая при $\lambda = \lambda_0$ попадает на наш компакт. То есть решения этой задачи при $\lambda \in U_2 \ni \lambda_0$ определен на $[t_1, t_2]$ (и даже немного шире, потому что расстояние между соседними точками строго меньше τ). $x_2(t_2, \lambda)$ непрерывно по $\lambda, x_2(t_2, \lambda_0) = x_{\lambda_0}(t_2)$.

Замечание: $x_{1,\lambda}, x_{2,\lambda}$ – решения $*_2$. По локальной или глобальной теореме единственности $x_{1,\lambda} = x_{2,\lambda}$ на пересечении областей определения.

Весь процесс продолжается и продолжается. И в итоге...

$$\hat{x}(t) = x_i(t, \lambda), \text{если } x_i(t, \lambda) \text{ определено и } t \in \left(\frac{t_{i-1} + t_{i-2}}{2}, \frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right), \lambda \in \cap U_i$$

$x(t)$ определено на $[t_0, max(I)]$. Аналогично для $t \in [min(I), t_0]$. Осталось проверить, что $\hat{x}(t, \lambda)$ – решение Коши $(*)$

Дейстивтельно: Уравнение: $\forall t\ \exists\ (t-\beta, t+\beta) : \hat{x}|_{(t-\beta,t+\beta)} = x_i|_{(t-\beta,t+\beta)}.x_i$ удовлетворяет уравнению в $t \Longrightarrow \hat{x}$ тоже, но с начальным условием $\hat{x}(t_0) = x_1(t_0) = x_0(\lambda)$.

Итак. доказали, что при $\lambda \in \cap U_i$ (конечное пересение) все решение $x(t, \lambda)$ существуют. Покажем, что $\hat{x}(t, \lambda)$ непрерывна.

Возьмем $\tilde{t} \in [t_i, t_{i+1}], i \ge 0$. Локально $\hat{x} = x_i$, тогда проверим, что x_i непрерывна по λ. Заметим. что зависимость от λ передается в каждую следующую задачу Коши и входит в уравнение. Но каждая функция непрерывн по (t, λ).

■

24.09

4.

4.1. Операторы Коши

$\dot{x} = F(t, x), F, F'_x \in C(\Omega)$. Рассмотрим отображение $X_{t_0 t_1}(y) = \hat{x}$
$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = y \end{cases}$ $\hat{x}$ ее решение

Свойства:

1) $X_{tt} = id$

2) $X_{t_2 t_3} X_{t_1 t_2} = X_{t_1 t_3}$. Если t_2 между t_1, t_3 – область определения совпадает. Иначе – на пересечении областей определения.

3) $X_{st} = X_{ts}^{-1}$

4) $X_{ts}(y)$ непрерывно по (t, s, y)

5) X_{ts} определено на $A_{ts} \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество из глобальной теоремы непрерывной зависимости. $B_{ts} = X_{ts}(A_{ts}) = A_{st}$

   $X_{ts} : A_{ts} \to A_{st}, X_{st} : A_{st} \to A_{ts}$ непрерывные. Вывод: X_{ts} гомеоморфзим.

Лемма 4.1. *(λ – параметр) $\dot{x} = f(t, x, \lambda), f \in C$. $X^{\lambda}_{t_0 t_1}$ – его оператор Коши. Тогда $X^{\lambda}_{t_0 t_1}(y)$ непрерывно по $(t, t_0, t_1 . \lambda)$*

Доказательство:
Мы решим задачу Коши: $(*) \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = y \end{cases}$. Проблема возникает в зависимости от t_0 (В доказательстве непрерывности раннее предполагали t_0 постоянным, а тут надо непрерывность по t_0 еще)

Пусть $z(s) = x(t_0 + s)$, тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{ds}(s) = \dot{x}(t_0 + s) = f(t_0 + s, x(t_0, s), \lambda) = f(t_0 + s, z(s), \lambda) \\ z(0) = y \end{cases}$$

$(*) \iff (**) \begin{cases} \dfrac{dz}{ds} f(t_0 + s, z, \lambda) \\ z(0) = y \end{cases}$. Посмотрим на эту систему, как на задачу коши с параметром-тройкой (λ, t_0, y)

$z_{\lambda, t_0, y}(s)$ непрерывно по (λ, t_0, y, s). Тогда $X^{\lambda}_{t_0 t_1}(y) = z_{\lambda, t_0, y}(t_1 - t_0)$ непрерывна.

4.2. Автономные ДУ

$\dot{x} = f(x)$ – нет зависимости от времени

Лемма 4.2. *Если x – решение автономного ДУ, то $\hat{x}(t) = x(t + a)$ тоже решение $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Доказательство:
$\dot{\hat{x}}(t) = \dot{x}(t + a) = f(x(t + a)) = f(\hat{x}(t))$

■

Следствие:
Для автономного ДУ $X_{t_0t_1} = X_{t_0+a,t_1+a}$ операторы Коши зависят не от t_0, t_1, а от их разности
Определение. Преобразования потока автономного ДУ – это $g^t = X_{o,t}$.

Свойства:

1) $g^0 = id$
2) $g^{t+s} = g^t g^s$ так как $(g^t g^s = X_{0,t}X_{0,s} = X_{s,t+s}X_{0,s} = X_{0,t+s} = g^{t+s})$
3) $g^{-t} = (g^t)^{-1}$
4) $g^t(x)$ непрерывно по (t, x)
5) g^t – гомеоморфизм

Определение. Решение задачи Коши $x : I \to \mathbb{R}^n$ (I интервал) непродолжимо, если не существует $\hat{x} : J \to \mathbb{R}, I \subset J : \hat{x}|_I = x$

Теорема 4.1. *Всякое решение продолжается до непродолжимого. (Если верна теореме существования и единственности, то есть $f, f'_x \in C$)*

Доказательство:
Пусть Ξ – множество всех решений задачи Коши. Рассмотрим $J = \bigcup\limits_{(x:I\to\mathbb{R}^n)\in\Xi} I$. Тогда J – открытое множество.

1) J – интервал.
   Если $t \in J$, то $t \in I$ для некоторого $(x : I \to \mathbb{R}^n) \in \Xi$. Тогда $[t_0, t] \subset I \subset J \Longrightarrow J = (\inf(J), \sup(J))$.
2) Определим $\overline{x} : J \to \mathbb{R}^n, \overline{x}(t) = x(t)$, если $(x : I \to \mathbb{R}^n) \in \Xi, t \in I$.
   Корректность:
   $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n \in \Xi, t \in I_1 \cap I_2$.
   Тогда $x_1(t) = x_2(t)$ из глобальной теоремы единственности $(x_1|_{I_1\cap I_2} = x_2|_{I_1\cap I_2})$
3) $\overline{x} \in \Xi$
   Если $t \in J$, то $\exists\ (x : I \to \mathbb{R}^n) \in \Xi, t \in I$.
   Тогда некоторая $B_\delta(t) \subset I \Longrightarrow x|_{B_\delta(t)} = \overline{x}|_{B_\delta(t)}$
   $\Longrightarrow \frac{d\overline{x}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) = f(t, \overline{x}(t))$
   $\overline{x}(t_0) = x_0$
4) $\overline{x}$ непродолжимо.
   Если нет, то существует $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n) \in \Xi, J \subset \tilde{I}$. НО это противоречит $J = \bigcup\limits_{(x:I\to\mathbb{R}^n)\in\Xi} I$

4.3. Теорема о продолжении решения до границы (или за границу) компакта

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n,\ f, f'_x \in C(\Omega)$. $K \subset \Omega,\ (t_0, x_0) \in \Omega,\ x : J \to \mathbb{R}^n$ непродолжимое решение задачи Коши.
Тогда $\exists\, T : t_0 < T < \sup(J) : x(t) \notin K$ при $t \in (T, \sup(J))$
Замечание, если $\sup(J) = +\infty$, то $T \in \mathbb{R}$

4.3.1. Доказательство:

Если $\sup(J) = +\infty$, то очевидно. Действительно, $T = \max(t|(t,x) \in K)$
$\sup(J) = t_+ \in \mathbb{R}$.

Напоминание (если помним формулировку теоремы существования и единственности):

Если $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$, то решение задачи Коши определено на $B_\tau(\tilde{t})$, причем $\tau = \tau(\epsilon, \delta, M, L)$, где эти параметры определяются так: $B = \overline{B_\delta}(\tilde{t}) \times \overline{B_\epsilon}(\tilde{x}) \subset \Omega, \sup_B |f| \leq M, \sup |f'_x| \leq L$

Идея: если точка $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in K$, то можем гарантировать фиксированные значения для (ϵ, δ, M, L)

Рассмотрим $\rho = \min_K(dist(t,x), \mathbb{R}^n \backslash \Omega) > 0$. Тогда $\tilde{K} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : dist((t,x), K) \leq \dfrac{\rho}{2}\}$ – непрерывная функция принимает значения из данного замкнутого множетсва, поэтому тоже замкнуто и $\tilde{K} \subset \Omega$.

$\tilde{K}$ ограничено ($K \subset B_R(0,0) \Longrightarrow \tilde{K} \subset B_{R+\rho/2}(0,0)$). Тогда $\tilde{K}$ компакт.

Положим $\epsilon = \delta = \dfrac{\rho}{4}$. Тогда $\forall\ (\tilde{t}, \tilde{x}) \in K$ верно что $B = \overline{B_\delta}(\tilde{t}) \times \overline{B_\epsilon}(\tilde{x} \subset \tilde{K}$

$\sup_B |f| \leq \sup_{\tilde{K}} |f| := M, \sup_B |f'_x| \leq \sup_{\tilde{K}} |f'_x| := L$.

Итак $\tau = \tau_K$ можно считать одинаковым для всех $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in K$.

Положим $T = t_+ - \tau_K$. Если $\exists\ t \in (\tau, t_+) : (\hat{t}, x|_{\hat{t}}) \in K$, то задача Коши $(*_y)$ $\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(\hat{t}) = x(\hat{t}) \end{cases}$ имеет решение $y : B_\tau(\hat{t}) \to \mathbb{R}^n$ (теорема существования и единственности с нашей количественной оценкой).

С другой стороны, x – тоже решение задачи коши $(*_y)$

Тогда $\exists\ \overline{y}$ непродолжимое решение $(*_y)$

$\overline{y}(t_0) = x(t_0) = x_0 \Longrightarrow \overline{y}$ решение $(*)$. НО $\overline{y}$ определено при $t = t_+$ (и равно $y(t_+)$), а $\overline{x}$ непродолжимое решение $(*)$ – не определено при $t = t_+$. Противоречие с тем, что $\overline{x}$ продолжение $\overline{y}$

■

4.4. Линейное ДУ

$\dot{x} = A(t)x + b(t), A(t) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, A, b \in C(I), I$ – интервал. Тогда выполнено условие теоремы сущ. и един. $f'_x = A$

Теорема 4.2. *Пусть $A, b \in C(I)$. Тогда все решения $\dot{x} = A(t)x + b(t), A(t) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ продолжаются на весь I*

Доказательство:

Пусть $[\alpha, \beta] \subset I$ Рассмотрим $x(t)$ – решение $x(\alpha)$ определено. Докажем, что x определено на $[\alpha, \beta]$. Устремляя $\beta \to \sup I$ получим требуемое.

$||A(t)|| \leq M, |b(t)| \leq B\ \forall t$ (Норма здесь значит, что применяя A к вектору, он удлинится не более чем в M раз) $\forall u\ |Au| \leq M|u|$. $M = n \cdot \max_{[t\in[\alpha,\beta]]} |a_{ij}(t)|, ||Au||_\infty = \max |(Au)_j| \leq \max_{[t\in[\alpha,\beta]]} \cdot (\sum |u_i|) \leq M \max |u_i| = M \cdot ||u||_\infty$

У нас будет евклидова норма $||Au||_2 \leq \tilde{M}||u||_2$

$\dfrac{d}{dt}(||x||^2) = \frac{d}{dt}(< x, x >) = 2 < x, \dot{x} > \leq 2||x||(||Ax + b||) \leq 2||x||(\tilde{M}||x|| + B)$

$\dfrac{d}{dt}(||x||) = \frac{1}{2||x||} \frac{d}{dt}(||x||^2) \leq \tilde{M}||x|| + B$

Пусть $R(t) = ||x(t)||$ (по дороге доказали, что она дифференцируема. если норма не равняется нулю)

И пусть $S(t) = e^{-(\tilde{M}+1)t}R(t)$

$$\frac{dS}{dt} = -(\tilde{M}+1)S(t) + e^{-(\tilde{M}+1)t}\dot{R}(t) \leq e^{-(\tilde{M}+1)t}(-R(t)(\tilde{M}+1) + R(t)\tilde{M} + B) \leq$$
$$\leq e^{-(\tilde{M}+1)t}(B - R(t)) \leq e^{-(\tilde{M}+1)t}(B - e^{(\tilde{M}+1)t}S(t)) \leq e^{(\tilde{M}+1)t}(B - e^{-(\tilde{M}+1)\alpha S(t)}).$$

Пусть $S(\alpha) = S_0$, $S_1 = 2Be^{-(\tilde{M}+1)\alpha}$, то $S(t)$ не может превзойти $\max(S_0, S_1) = \overline{S}$ (S убывает). Тогда $R(t) = e^{-(\tilde{M}+1)t}S(t) \le e^{-(\tilde{M}+1)t}\overline{S}(t)$. То есть R не может неограничено возрастать, что значит, что R определено вплоть до β

■

25.09

5.

5.1. Фазовые пространства

$\dot{x} = f(t, x), f : \Omega \to \mathbb{R}^n$
Тогда про область Ω говорят, что она расширенное фазовое пространство.
Рассмотрим АДУ: $\dot{x} = f(x), f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, тогда $\tilde{\Omega}$ – фазовое пространство
Следиствие: $\Omega = \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$
Пусть $x(t)$ – решение з. Коши, тогда Кривая $\{t, x(t)\}$ – **интегральная кривая**.
Если спроецировать **интегральную кривую** на фазовое пространство, то получится **траектория**.
Предположение: Интегральные кривые это кривые, касающиеся прямых (**) в каждой своей точке.
Доказательство:
Касательный вектор к интегральной кривой это $(1, \dot{x}_1(t_0), \dots, \dot{x}_n(t_0))$

Лемма 5.1. *Пусть $f \in C^1(\tilde{\Omega})$. Тогда траектория $\dot{x} = f(x)$ не пересекаются (1) и заполняют (2) все пространство $\tilde{\Omega}$*

Доказательство:

(1) Пусть есть две траектории: $x, \tilde{x}$ – решения $\dot{x} = f(x)$ и пусть $x(t_0) = \tilde{x}(\tilde{t}_0) = x_0$

Тогда пусть $\overline{x}(t) = \tilde{x}(t - t_0 + \tilde{t}_0) \Rightarrow \overline{x}$ – тоже решение

Пусть $\overline{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$

Т.е. $x, \overline{x}$ – решение одной з. Коши $\Rightarrow x \equiv \overline{x} \Rightarrow$ траектории $x, \overline{x}$ совпадают

НО траектории $\tilde{x}, \overline{x}$ сопадают по строению, так как сдвиг по времени не влияет на траекторию.

(2) Очевидно (??????????)

Поле направлений – это множество всех прямых проведенных к каждой точке **интегральной кривой**. (В **фазовом пространстве** мы получаем **векторное поле**)

5.2. Уравнения с разделяюшимися переменными

$*_1 \ \dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

$\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. Пусть $G(y), F(x)$ – первообразные $\dfrac{1}{g(y)}$ и $f(x)$ соответственно, тогда $G(y) = F(x) + C$, где C – константа.

$*_2 \ \dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$

Можно совершить замену на уравнение $\dfrac{dx}{dy} = G(x, y)$, где $G = \dfrac{1}{F}$, если $\begin{cases} F \text{ – Определена} \\ F \neq 0 \end{cases}$

Теорема 5.1. *Интегральная кривая $\dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$ проходящ. через (x_0, y_0) совпадает с инт. кривой $\dfrac{dx}{dy} = G(x, y)$ проход. через ту же точку (x_0, y_0), если $F, G \neq 0$ (эквив. "Определены")*

Доказательство:

Т.к. $F(x_0, y_0) > 0$, то $\exists\ U : F(U) > 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} > 0 \ \ \forall x \in B_\delta(x_0)$, т.е. $y(x)$ монот. возраст в $B_\delta(x_0) \Rightarrow$ там есть обратная функция $x(y)$

$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{dy/dx(x(y))} = \frac{1}{F(x(y), y)} = G(x(y), y)$$

5.2.1. Обобщенное решение $*_1, *_2$

Это такая кривая на плоскости (x, y), в $\forall$ окрестности $(x_0, y_0) : F(x_0, y_0) \neq 0$ – график решения $y = y(x)$ (тоже самое для $G(x_0, y_0)$)

Теорема 5.2. (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\Phi(x,y)}{\Psi(x,y)}; \Phi, \Psi \in C$

Рассмотрим систему: (2) $\begin{cases} \dot{x} = \Psi(x,y) \\ \dot{y} = \Phi(x,y) \end{cases}$ *, тогда в области* $\{(\Phi, \Psi) \neq (0,0)\}$ *обобщ. решение* (1) = *траектории* (2)

Доказательство:
($\Longleftarrow$) Пусть $\Psi(x_0, y_0) \neq 0$ и $(x(t), y(t))$ – решение $(2), x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$
Тогда $\dot{x}(t_0) = \Psi(x_0, y_0) \neq 0$, а по Т. о неявной ф-ции локально $t = t(x)$ – обратная функция.
$\dfrac{dt}{dx}(\hat{x}) = \dfrac{1}{\dot{x}(t)} = \dfrac{1}{\Psi(\hat{x}, \hat{y})}$

Рассмотрим функцию $y(t(x)) : \dfrac{dy}{dx}\hat{x} = \dfrac{dy}{dt}(t(\hat{x})) \cdot \dfrac{dt}{dx}(\hat{x}) = \Phi(x(t(\hat{x})), y(t(\hat{x}))) \cdot \dfrac{1}{\Psi(\hat{x}, \hat{y})} = \dfrac{\Phi(\hat{x}, y(t(\hat{x})))}{\Psi(\hat{x}, y(t(\hat{x})))}$, а $y(x) = y(t(\hat{x}))$ локально удоавлетворяет (1)

($\Longrightarrow$) Пусть $y(x)$ – решение (1)
Тогда $\dot{x}(t) = \Psi(x(t), y(x(t)))$ (3) это Автономное уравнение на прямой.
Оно имеет решение (см. ниже) $x = x(t)$, где $x(t_0) = x_0$
Положим $y(t) = y(x(t))$, тогда $(x(t), y(t))$ удовл. (2):
1е уравнению (2) – по постронию $x(t)$
$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dot{x} = \dfrac{\Phi\left(x(t), y(x(t))\right)}{\Psi\left(x(t), y(x(t))\right)} \cdot \Psi\left(x(t), y(x(t))\right) = \Phi\left(x(t), y(x(t))\right)$ таким образом мы установили соответствие.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) = \frac{g(y)}{1/f(x)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = g(y) \\ \dot{x} = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$$

5.3. АДУ на прямой

$\dot{x} = f(x), f \in C(I), I \subset \mathbb{R}$
Предложение:
Если $f(x_0) = 0$, то $x \equiv x_0$ – решение нашего АДУ.
Пусть $f(x_0) \neq 0$, тогда $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{f(x)}$ (локально эквивалентно)

$$t(x) = t_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

Это были локальные решения.
Теперь пусть $x(t)$ – решение
Пусть $F(x(t)) > 0$ при $t \in (t_0, t_1)$, то $\dot{x}(t) > 0, x : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$, x – обратима и обратная функция локально равна $t(x) = F(x) + C$

Т.е. функция $t(x) - F(x)$ локально постоянная $\Rightarrow$ глобально постоянная.

Предложение:

Если $F|_J > 0, x(t_0) \in J$, то либо $\exists\, T : x(T) = \sup J$, либо $x(t)$ определена на $(t_0, +\infty)$ и $x(t) \overset{t\to+\infty}{\to} \sup J$

Доказательство:

(Теорема о продолжении до границы компакта) + надо исключить $x(t) \overset{t\to+\infty}{\to} a < \sup J$

$F(a) > 0$ тогда $F(x) \geq \epsilon > 0$ при $x \in B_\delta(a)$

Если $x(\hat{t}) \in B_\delta(a)$, то $x\left(\hat{t} + \frac{2\delta}{\epsilon}\right)$

$x\left(\hat{t} + \frac{2\delta}{\epsilon}\right) = x(\hat{t}) + \dfrac{2\delta}{\epsilon}\dot{x}(\tilde{t}) \geq (a - \delta) + 2\delta > a.$

■

Теорема 5.3. *Пусть $f(x_0) = 0$ – дискретный ноль функции f, тогда решение* $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *справа от t_0 ведет себя одним из следующих способов:*

1) $x \equiv x_0$

2) $x = x_0$ *на* $[t_0, T]$, $x(t) > x_0$ *при* $t \in (T, T + \epsilon)$

3) $x = x_0, t \in [t_0, T], x(t) < x_0, t \in (T, T + \epsilon)$

причем 2), 3) *возможно только если*

а) $f(x) > 0$ *при* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

б) $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)} < \infty$ *(сходится)*

Предложение:

Если $f \in C^1$, то возможен только вариант А, т.е. $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x_0+\epsilon} \frac{d\xi}{|f(\xi)|}$

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0) \Rightarrow |f(x)| \leq C|x - x_0| \Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x_0+\epsilon} \frac{d\xi}{|f(\xi)|} \geq \int\limits_{x_0}^{x_0+\epsilon} \frac{d\xi}{C|\xi - x_0|} = +\infty$$

1.10

6.

7. Продолжение шестой лекции

09.10

8.