11.05.2021 | Механика 2021

Напоминание о скобках Пуассона

Гамильтонова динамика на T^*M определяется 2 объектами:

(а) Пуассоновой структурой $\{f, g\}$ $f, g \in C^\infty(T^*M)$ с 4 аксиомами
$\{f, g\} \in C^\infty(T^*M)$

(б) Введенной функцией $H(q, p)$
(локальные) коорд. в T^*M.

Эволюция $\forall$ наблюдаемой $f(q,p)$:

$$\frac{d}{dt} f(q,p) = \{f, H\}$$

$\Leftrightarrow$ подставим вместо q и p решение динам. уравнений Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$q(t) \qquad\qquad p(t)$$

В общем случае фазовое пространство может отличаться от кокасательного пространства T^*M, $\dim T^*M = 2\dim M$.

Если (локальные) координаты на фазовом пр-ве Φ обозначать x^i, то скобка Пуассона $\{\,\}$ на Φ определяется пуассоновым тензором $\mathcal{J}$ — антисимм. тензором второго ранга с матрицей

$$\mathcal{J}^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}; \text{ тогда}$$

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathcal{J}^{ij} \frac{\partial g}{\partial x^j}$$

Мы вводили гамильтоновы векторные поля: $\forall F \in C^\infty(\Phi)$ — функции на фаз. пространстве

$$X_F = \{F, \cdot\},$$

$$\text{т.е. } X_F \circ G = \{F, G\}$$

В локальных коорд. x^i базисные векторные поля (касательные) на Φ находятся во взаимно-однозн.

Соответствии с $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

[IV] В этом базисе компоненты гамильтонова векторного поля имеют вид:

$$X_F = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x^j}\,\omega^{ji}}_{X_F^i(x)}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$X_F^i(x) = X_F \cdot x^i = \{F, x^i\}$$

Интегральные кривые гамильтонова векторного поля — $x^i(t, x_{(0)})$ — решения системы

$$\begin{cases} \dot{x}^i = X_F^i = \{F, x^i\} \\ x^i(0) = x^i_{(0)} \end{cases}$$

[V] Гамильтоновы вект. поля образуют алгебру Ли ~~над (вещ.) пол~~ (обычно рассм. веществ., т.к. в механике — веществ. числовое поле)

$$[X_F, X_G] = X_F X_G - X_G X_F = X_{\{F,G\}}$$ — ал.

тожд. Якоби.

<u>Пример:</u> $\Phi = \mathbb{R}^2$, p и q — канонические координаты: $\{q, p\} = 1$.

$F = \frac{q^2+p^2}{2}$ $G = qp$.

(а) Написать X_F и X_G в базисе $\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}$

(б) Найти коммутатор X_F и X_G и убедиться, что он равен $X_{\{F,G\}}$.

Вырожденная Пуассонова структура:

<u>$\det J = 0$</u> $\Leftarrow$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Это с необходимостью так, если $\dim \Phi = 2k+1$ — нечётная.

$\boxed{\text{О}}$ Пуассонов центр: ф-ии g такие, что $\{g, f\} = 0$ $\forall f \in C^\infty(\Phi)$.

У <u>невырожд.</u> скобки пуассонов центр — только константы.

Если же есть отличное от констант Пуассон-центр. ф-ции, то <u>скобка вырождена</u>.

Эти функции не годятся на роль $\int$лов движения, т.к. они Пуассон-коммутируют с $\forall$ гамильтонианом. Их значение другое: ~~...~~ если $f(x)$ – Пуассон-центральна, то $f(x) = \text{const}$ определяет некоторое подмногообразие в Φ_ξ и <u>все</u> гамильтоновы вект. поля <u>касательны</u> к этому подмногообразию:

$$X_F \triangleright f = \{F, f\} = 0$$

Обратное тоже верно (т. Фробениуса) поскольку Гам. вект. поля образуют алг. Ли. Доказывается, что $\exists$ разложение Φ ~~на~~ в $\cup$ непересекающихся подмногообразий (слоение симплектическое) и все гам. векторные поля $\Rightarrow$ касательны к листам слоения. Это, в частности, означает, что если точка начальных данных $\{z^i_{(0)}\}$ лежит на каком-то листе, то вся динамика при $\forall$ гамильтониане остается на этом листе (траектории $z^i(t)$ не покидают лист, на котором выбраны нач. данные $z^i_{(0)}$).

$\boxed{V}$ Ограничение скобки Пуассона на листы симпл. слоения невырождено.

Пример вырожд. скобки П.

Линейная скобка:

$$\{z_i, z_j\} = C_{ij}^{\ k} z_k$$

$C_{ij}^{\ k}$ – структ. конст. алгебры Ли

Рассм. алг. Ли $sl(2,\mathbb{R})$ =7=

— бесследовых вещ. матриц 2×2:

$H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$; $F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ —

— базис $[H,E]=2E$ (над $\mathbb{C}$ эта

$[H,F]=-2F$ алг. Ли изоморфна $SO(3)$.)

$[E,F]=H$

Рассм. трёхмерное веществ. пр-во $\mathbb{R}^3$ с координатами h, x, y:

(☆) $\boxed{\{h,x\}=2x \quad \{h,y\}=-2y \quad \{x,y\}=h}$

[У] $F=\frac{h^2}{4}+xy$ — Пуассон-центр. ф-ция.

[У] Это генератор Пуассонова центра.

$\forall$ Пуассон-центральная ф-ция

$$G(h,x,y)=\tilde{G}\left(\frac{h^2}{4}+xy\right).$$

[Сл] Поверхности уровня ф-ции F — листы симплектического слоения $\mathbb{R}^3$ относительно ск. Пуассона (☆):

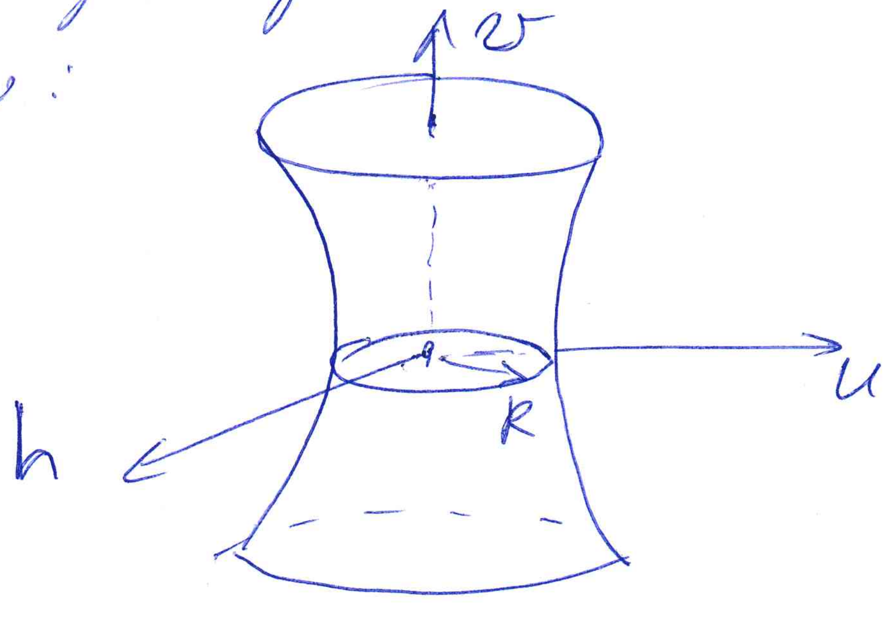
$$\boxed{\frac{h^2}{4}+xy=\mathrm{Const}}$$

Удобно сделать замену координат: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$

Тогда поверхности уровня:

$$\boxed{h^2+u^2-v^2=c}$$

а) $c=R^2>0$ — однополостные гиперболоиды вращения с осью Ov:



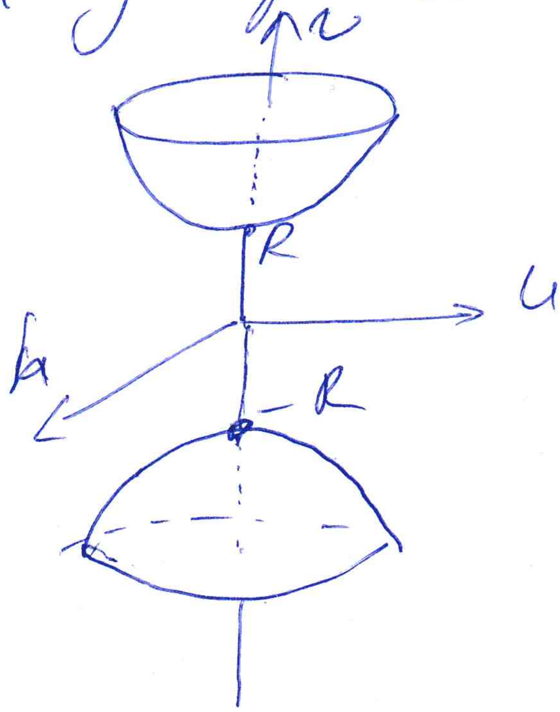
б). $c=0$ — $\underline{3}$ ~~поверхности~~ "листа": верхняя и нижняя половины конуса $\begin{cases} h^2+u^2-v^2=0 \\ v>0 \end{cases} \cup \begin{cases} h^2+u^2-v^2=0 \\ v<0 \end{cases}$

и начало координат $h=u=v=0$

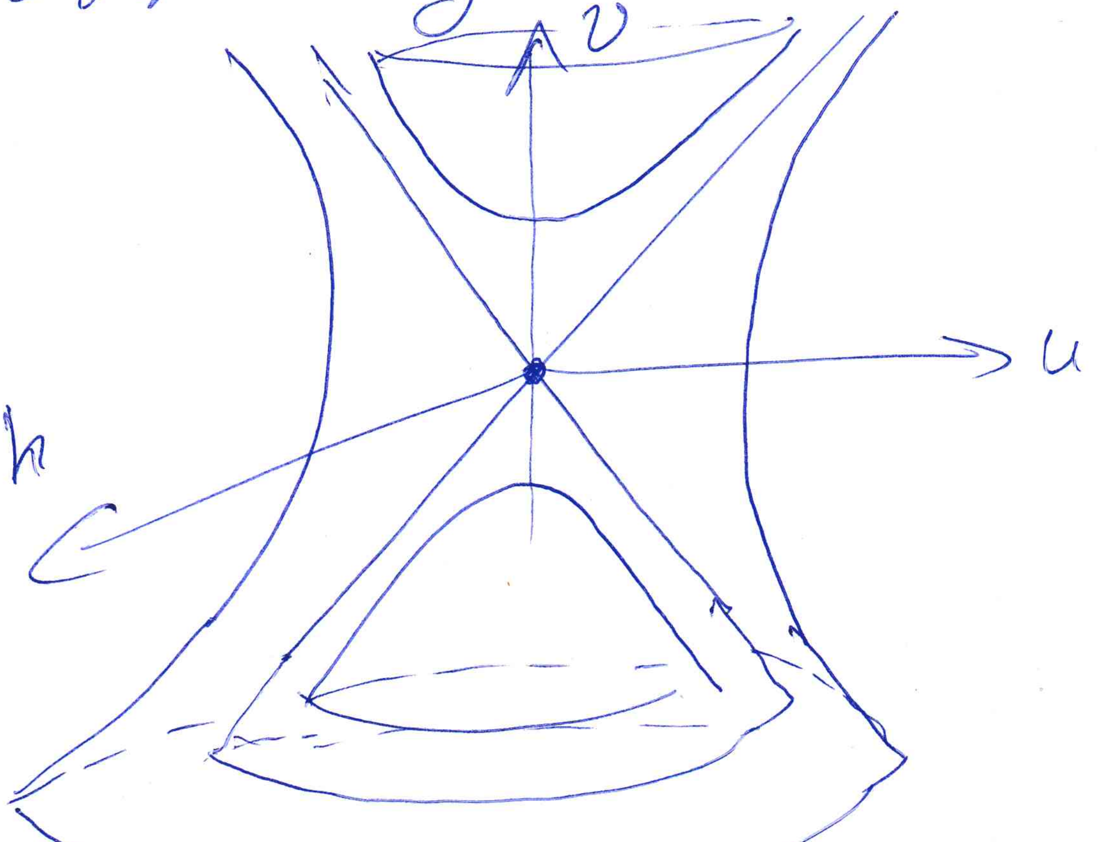
в) $C = -R^2 < 0$

$v^2 - h^2 - u^2 = R^2$ — 2х полостной

Гиперболоид вращения:



Общий вид слоения



<u>Пример:</u> Ограничим скобку Пуассона ($\star$) на листы слоения и убедимся в её невырожденности.

(а) В области пространства <u>вне</u> конуса $h^2+u^2-v^2=0$ (однополостные гиперболоиды) введём координаты r, ~~ξ~~ s и φ формулами:

$$\begin{cases} h = r\,\mathrm{ch}\,s\cos\varphi \\ u = r\,\mathrm{ch}\,s\sin\varphi \\ v = r\,\mathrm{sh}\,s \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r>0 \\ s\in(-\infty;+\infty) \\ \varphi\in[0,2\pi) \end{array}$$

Гиперболоид задаётся условием

$$\boxed{r = R > 0 = \mathrm{const}}$$

$$r^2 = h^2+u^2-v^2$$

На поверхности $r=R$ остаются 2 координаты: s и φ (независимые). Найдём их скобку на гиперболоиде.

В терминах h, u и v:

$$\{h, u\} = \{h, x+y\} = 2(x-y) = 2v$$

$$\{h, v\} = \{h, x-y\} = 2(x+y) = 2u$$

$$\{u, v\} = \{x+y, x-y\} = -2h$$

Скобку $\{s, \varphi\}$ проще всего посчитать так:

$$\operatorname{sh} s = \frac{v}{r}, \quad r = \sqrt{h^2+u^2-v^2} \text{ — центр. ф-ция}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{h}$$

Поэтому: $\{\operatorname{sh} s, \operatorname{tg}\varphi\} = \operatorname{ch} s\,\{s, \varphi\}\,\frac{1}{\cos^2\varphi}$

и

$$\left\{\frac{v}{r}, \frac{u}{h}\right\} = \frac{1}{r}\left\{v, \frac{u}{h}\right\} =$$

центр. ф-ция

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{h}\{v, u\} - \frac{u}{h^2}\{v, h\}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(2 + \frac{2u^2}{h^2}\right) = \frac{2(h^2+u^2)}{r h^2} =$$

$$= \frac{2\, r^2 \operatorname{ch}^2 s}{r\, r^2 \operatorname{ch}^2 s \cos^2\varphi} = \frac{\operatorname{ch} s}{\cos^2\varphi}\{s,\varphi\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\{s,\varphi\} = \frac{2}{r \operatorname{ch} s}}\Bigg|_{z=R}$$ — не вырождена в $\forall$ точке

Гиперболоида.