Вопросы коллоквиума по материалам первой четверти

Вопрос 1. Определение векторного пространства. Единственность нулевого вектора. Противоположный вектор $-v$ однозначно определяется по v. Соотношения $(-1)\cdot v = -v$, $0\cdot v = 0$, $\lambda\cdot 0 = 0$. Примеры векторных пространств. Определитель 2×2 и правила Крамера для разложения вектора по базису в двумерном векторном пространстве $\Bbbk^2$ и для решения систем из двух линейных уравнений на две неизвестных.

Вопрос 2. Два определения аффинного пространства, ассоциированного с данным векторным пространством. Равенства $\overrightarrow{pp} = 0$ и $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$. Равносильность равенств $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ и $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$. Векторизация и аффинизация. Примеры аффинных пространств. Существование и единственность центра тяжести набора взвешенных точек. Теорема о группировании масс. Барицентрические комбинации точек, независимость барицентрической комбинации точек от выбора начальной точки, барицентрическая комбинация барицентрических комбинаций является барицентрической комбинацией.

Вопрос 3. Площадь ориентированного параллелограмма в двумерном векторном пространстве: её определение, свойства, существование и единственность с точностью до пропорциональности. Площадь ориентированного треугольника на аффинной плоскости. Равенства $s(abc) = s(bca) = -s(bac)$ и $s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca)$. Выражение барицентрических координат точки относительно треугольника на плоскости через площади.

Вопрос 4. Определение евклидова пространства и длины вектора. Теорема Пифагора. Ортогональная проекция и нормальная составляющая произвольного вектора по отношению к ненулевому вектору. Существование ортонормального базиса на евклидовой плоскости. Неравенства Коши – Буняковского – Шварца и треугольника.

Вопрос 5. Равенство $\det^2(u,w) = \det\begin{pmatrix}(u,u) & (u,w)\\ (w,u) & (w,w)\end{pmatrix}$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Положительно и отрицательно ориентированные базисы в $\mathbb{R}^2$. Ориентированный угол $\measuredangle(u,w)$ между векторами u, w. Равенства $\cos\measuredangle(u,w) = \cos\measuredangle(u,v)\cos\measuredangle(v,w) - \sin\measuredangle(u,v)\sin\measuredangle(v,w)$ и $\sin\measuredangle(u,w) = \cos\measuredangle(u,v)\sin\measuredangle(v,w) + \sin\measuredangle(u,v)\cos\measuredangle(v,w)$.

Вопрос 6. Определение прямой. Геометрические свойства уравнения прямой на аффинной и евклидовой плоскости. Примеры: уравнение прямой, проходящей через две данные точки, расстояние от точки до прямой, уравнение срединного перпендикуляра к отрезку и уравнения биссектрис углов между двумя заданными прямыми.

Вопрос 7. Скалярное произведение однозначно восстанавливается по функции длины. Собственное ортогональное линейное преобразование двумерного евклидова векторного пространства является поворотом, а несобственное — отражением. Собственное движение евклидовой плоскости является сдвигом или поворотом, а несобственное — скользящей симметрией[1].

Вопрос 8. Определения порождающего набора векторов, линейной зависимости и базиса в произвольном векторном пространстве. Набор линейно зависим если и только если один из векторов линейно выражается через другие. Порождающий набор является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим. Каждый минимальный по включению порождающий набор является базисом. Каждый максимальный по включению линейно

[1] При ответе на этот вопрос разрешается использовать (без доказательства) тот факт, что биективное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, переводящее прямые в прямые, является композицией сдвига и линейного изоморфизма $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$, оставляющего на месте некоторую точку.

независимый набор является базисом. Аффинный репер и аффинные координаты точки в аффинном пространстве.

Вопрос 9. Лемма о замене. В конечно порождённом векторном пространстве любой линейно независимый набор включается в базис, любой порождающий набор содержит базис, и все базисы имеют одинаковую мощность. Определение размерности векторного пространства. В n-мерном векторном пространстве каждый линейно независимый набор из n векторов, и каждый порождающий набор из n векторов являются базисами.

Вопрос 10. Сумма и пресечение векторных подпространств $U, W \subset V$, равенство

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)\,.$$

Вопрос 11. Трансверсальные подпространства, прямая сумма подпространств. Каждый вектор $v \in U + W$ имеет единственное представление $v = u + w$ с $u \in U$, $w \in W$ если и только если $U \cap W = 0$ и $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$. Условие на подпространства $U_1, U_2, \dots, U_m \subset V$, необходимое и достаточное для существования прямого разложения $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$.

Вопрос 12. Определение линейного отображения $f : V \to W$, равенства $f(0) = 0$ и $f(-v) = -f(v)$. Композиция линейных отображений линейна. Подпространства $\ker f$ и $\operatorname{im} f$. Равенства $f^{-1}(f(v)) = v + \ker f$ и $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$. Линейный эндоморфизм $f : V \to V$ конечномерного векторного пространства V биективен если и только если $\ker f = 0$ и если и только если $\operatorname{im} f = V$.

Вопрос 13. Матрица перехода $C_{\boldsymbol{uw}}$, выражающая набор векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ через набор векторов $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ по формуле $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot C_{\boldsymbol{uv}}$. Три определения произведения матриц. Равенство $C_{\boldsymbol{uw}} = C_{\boldsymbol{uv}} C_{\boldsymbol{vw}}$. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрицы образуют ассоциативную алгебру. Равенство $(AB)^t = B^t A^t$. Обратимые матрицы. Квадратная матрица над полем обратима если и только если её строки линейно независимы и если и только если её столбцы линейно независимы.

Вопрос 14. Матрица линейного отображения. Размерность пространства линейных отображений. Матрица композиции линейных отображений. Изменение матрицы линейного отображения при изменении базисов.

Вопрос 15. Аффинные отображения. Независимость дифференциала от выбора начальной точки. Отображение аффинно если и только если оно перестановочно со взятием барицентрических комбинаций. В n-мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ любой не содержащийся в гиперплоскости упорядоченный набор из $n+1$ точек переводится в любой упорядоченный набор из $n+1$ точек единственным аффинным отображением $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$.

Вопрос 16. Взаимное расположение двух аффинных подпространств в конечномерном аффинном пространстве.

Вопрос 17. Комбинаторный тип векторного подпространства $U \subset \Bbbk^n$. Метод Гаусса, существование и единственность в U базиса со строгой ступенчатой матрицей координат. Отыскание базиса в линейной оболочке заданного набора векторов.

Вопрос 18. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса, свободные и зависимые переменные, общий вид решения системы. Оценка размерности пространства решений системы линейных однородных уравнений.

Вопрос 19. Фактор пространство V/U векторного пространства V по подпространству $U \subset V$. Изоморфизм $V / \ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$ для линейного отображения $f : V \to W$. Равенство $\dim V/U = \dim V - \dim U$. Отыскание базиса в факторе координатного пространства $\Bbbk^n$ по линейной оболочке заданного набора векторов методом Гаусса.

Вопрос 20. Обращение верхнеунитреугольной матрицы над произвольным ассоциативным кольцом с единицей. Обращение квадратной матрицы над полем методом Гаусса. Решение систем линейных уравнений с переменным столбцом правых частей и постоянными левыми частями при помощи умножения на обратную матрицу. Альтернатива Фредгольма для систем с квадратной матрицей левых частей.