Билет 11

Монодромия. Теорема Римана-Фукса.

$\dot z = \frac{A(t) z}{t^2}$, $A(t)$ — голоморфная матр. функция, $z \in \mathbb{C}^n$

<u>Опр.</u> $z = 1$ — нуль-фуксова особая точка

$z > 1$ — не фуксова

<u>Опр.</u> Если все решения в секторах растут как степень, то 0 — регулярная особая точка.

Пусть Z — фунд. матрица решений. Результат продолжения этой Z вдоль контура γ (точка 0) $\Delta_\gamma Z = ZM$, где M — матрица монодромии.

В окр. точки A все реш. однозначны, рассмотрим в ней базис в пр-ве решений. При обходе контура новое решение явл. лин. комб. старых. Лин. комб. для первого решения — первый столбец матрицы M, и т.д.

<u>Теорема Римана-Фукса</u> Если $Z(t)$ голом. на сфере Римана с выколотыми особыми точками и обл. св-вами регулярности и монодромии, то $\dot z = B(t) z$, где B мероморфна с полюсами в точках a_j (возможно, ∞)

<u>Д-во</u> Рассм. $\dot Z Z^{-1}$. Продолжим вдоль контура γ_j вокруг ~~особенности~~ a_j, матр. монодромии M_j. $\Delta_\gamma \dot Z Z^{-1} = \dot Z \cancel{M} \cancel{M^{-1}} Z^{-1} = \dot Z Z^{-1}$ — регулярная матрицеоднозначная ф-ция $B(t)$. * $B^{(t)}$ огр. в проколотом шаре, голоморфная, продолж. в выколотую точку ⇒ исходная — голом. деленная на степень ⇒ мероморфна.

Билет 12

Регулярные и фуксовы особые точки. Соотношение фуксовости и регулярности.

Особая точка <u>регулярна</u>, если она является полюсом порядка не выше k для коэф. у-рия

Особая точка <u>фуксова</u>, если матрица системы имеет в ней полюс первого порядка

<u>Теорема</u> Фуксовость влечет регулярность $A(e^\tau)$ голоморфно в 0

<u>Д-во</u> $\dot z = \frac{A(t)}{t} z$, пусть $\tau = \ln t$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{t} = \frac{A(t)}{t} \cdot z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \tau} = A(e^\tau) z$$

$\|A(e^{\tau})\|$ огр. в полосе (из голоморфности)
По нер-ву Громуолла $\|Z(\tau)\| \le Ce^{b\,\mathrm{Re}\,\tau} \Rightarrow |Z(t)| \le C|t|^d$
! Из регулярности не следует фуксовость!
Пример уравнение Эйлера.

Билет 13

Уравнение Эйлера. Мероморфная эквивалентность регулярной и эйлеровой особой точки.

Опр. Система $\dot{z} = \frac{A(t)}{t^2} z$ голом. (мером.) экв. системе $\dot{w} = \frac{B(t)}{t^2} w$, если $\exists$ гол. невыр. (мером.) матр. ф-ция $H(t)$ такая, что $Z(t) = H(t)W(t)$.

Пример Система Эйлера $\dot{z} = \frac{A}{t} z$, где A — постоянная матрица

* У-рие Эйлера: $\sum a_k z^{(k)} t^{-k} = 0$.

При $n=1$. $A = a \in \mathbb{C}^1$ $Z(t) = t^a$

При $n>1$ $Z(t) = t^A = e^{A\ln t}$

$$(\underbrace{e^{A\ln t}}_{Z(t)})' = \frac{A}{t} Z(t)$$

Теорема Лин. система с регулярной особой точкой мероморфно эквивалентна системе Эйлера.

Д-во: Пусть $Z(t)$ — фунд. матр. реш., M — монодромия, $A = \frac{\ln M}{2\pi i}$. Рассм. систему Эйлера. Ее фунд. матр. реш. t^A и монодромия M. Рассм. $H = ZW^{-1}$. H однозначна, растет степенным образом $\Rightarrow$ H мероморфна.

Билет 14

Эвристический подход к теории нормальных форм фуксовой особой точки с точки зрения теории нелинейной теории.

① $\dot{z} = \frac{A(t)}{t} z \to$ ② $\dot{z} = A(t)z$, $\dot{t} = t$

$A(t) = \underbrace{A_0}_{\text{матрица вычета}} + tA_1 + \ldots + t^k A_k + \ldots$

Линейная часть ② — $\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}^{\cdot} = \tilde{A}_0 \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$

Сам подход: если ② аналитически экв. своей линейной части $\Rightarrow$ ① голом. экв. у-рию Эйлера.

/если работаем с ② или с нелин., все члены в записях мн. по z/

Одночлены в правой части — это $z_i e_j t^{k_0}$ → показатель: $\hat{k} = (0 \ldots 1_i \ldots k_0)$. Резонанс: $\lambda_j = (\hat{\lambda}, k) = \lambda_i + k_0$ (с.з. A_0 $t\lambda_1$) Пуанкаре-Дюлак

$\boxed{\lambda_j - \lambda_i = k_0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Опр. Фуксова особая точка нерезонансна, если никакие с.з. матрицы вычета не отл. на целое число, иначе резонансна.

Одночлен $z_i e_j t^k$ резонансный, если $\lambda_j - \lambda_i = k$.

Теорема нерезон. фуксова особая точка ~~[illegible]~~ экв. системе Эйлера с той же A_0, а резонансная —"— экв. системе с резонансными членами в правой части.

$\dot{z} = \frac{A(t)}{t} z$, в пр. части рез. члены

$t\dot{z}_j = \ldots + \boxed{a_{ij}(t)} z_i + \ldots$, $\lambda_j - \lambda_i = k$ / если $\lambda_j - \lambda_i \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow a_{ij} = 0$, иначе $a_{ij} = a_{ij} t^k$

Интегрирование: $\Lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ — с.з. A_0

$t^k \to 1$ $(A(1))$. $A(1) - \Lambda = I$ нильпотентна, верхнетреуг., хар. матр.

$Z(t) = t^\Lambda t^I$, $M = e^{2\pi i \Lambda} e^{2\pi i I}$

Билет 15

ФНФ фуксовых особых точек

Резон. норм. формы

$t\dot{z} = A(t) z$, $A(t) = A_0 + A_1 t + \ldots$ (A_0 — матр. вычета). Пусть A_0 — в ЖНФ

Λ — диаг. матр. λ_i (с.з. A_0)

Формальная замена $w = H(t) z$, H невырр., ФНФ резонансна $\Rightarrow A(t) = (a_{ij}(t))$, $\lambda_i - \lambda_j = k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}_{\geq +}$, $a_{ij}(t) = a_{ij} t$

Резонансные блоки: $\underbrace{\lambda_1 \ldots \lambda_k}_{\text{рез.}} \ldots \lambda_n$

λ_{k+1}, λ_{k+m_k}, пусть m_j убывают

$\lambda_1 \ldots \lambda_k$ — один резонансный блок

Тогда сама ФНФ распадается на рез. блоки $\lambda_k + m_1$, $\lambda_k + m_2 \ldots$ λ_k на диагонали, ниже 0:

$$\begin{pmatrix} \lambda_k + m_1 & a_{12} t^{\lambda_1 - \lambda_2} & \\ 0 & \lambda_k + m_2 & \ddots \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

2. Интегрируемость ФНФ

Фунд. матр. решений

$A(t) = \Lambda + A_0 + A_1 t$

рез. н.ф.

См. выше

Хар. матрица для $A(t)$ – это $J = A_0 + A_1 + \dots + A_N$

Теорема фунд. матр. реш. $Z = t^\Lambda t^J$

Д-во: $t\dot{Z} Z^{-1} = A(t)$

$t(\Lambda t^{\Lambda - E} t^J + t^\Lambda J t^{J-E}) t^{-J} t^{-\Lambda} = \underbrace{t^\Lambda \Lambda t^{-\Lambda}}_{\Lambda} + \underbrace{t^\Lambda J t^{-\Lambda}}_{?}$

$t^\Lambda \cdot A_k \cdot t^{-\Lambda} = (a_{ij} t^{\lambda_i - \lambda_j}) = A_k^* t^k$

a_{ij}

$t^\Lambda (A_0 + A_1^J + A_2 + \dots) t^{-\Lambda} = A_0 + A_1 t + \dots = A(t) - \Lambda$

3. Монодромия

Утв. Для $Z(t) = t^\Lambda t^J$ $M = e^{2\pi i \Lambda} \cdot e^{2\pi i J}$

Д-во $\Delta_t Z(t) = t^\Lambda e^{2\pi i \Lambda} \cdot t^J e^{2\pi i J}$

Д-ем, что $e^{2\pi i \Lambda}$ и t^J коммутируют.

скалярна в каждом рез. блоке, J – разб. на рез. блоки

Следовательно, $e^{2\pi i \Lambda}$ и t^J коммутируют. $\Rightarrow M = e^{2\pi i \Lambda} e^{2\pi i J}$

Билет 16

Аналитические нормальные формы фуксовых особых точек.

Лемма Пусть $t\dot{z} = A(t) z$ регулярную особую точку 0. Пусть $z(t)$ – форм. мероморфное решение. Тогда рег $z(t)$ – сходится.

$z(t) = H(t) w(t)$. Если H верна для $\dot{z} = A(t) z$, то верна и для любой системы. Но она экв. системе Эйлера

калибр. преобр.

$t\dot{w} = Aw$, A – пост. матр. Докажем для системы Эйлера.

Пусть $w(t) = \sum_{-N} a_k t^k$ – форм. решение, $a_k \in \mathbb{C}$. Тогда:

$\sum k a_k t^k = A \sum a_k t^k$ → конечна(?)

$A a_k = k a_k \Rightarrow w(t)$ – многочлен Лорана, сход. Доказано

Аналитические нормальные формы.

Теорема Если $H(t)$ приводит фуксову сист. в окр. особой точки к формальной норм. форме, то оно сходящееся.

Д-во Ответ. Экв.

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{B(t)}{t} z \\ z = H(t) w \Rightarrow \dot{z} = \dot{H} w + H \dot{w} = \dot{H} w + H \frac{A(t)}{t} w = \frac{B(t)}{t} H w \\ \dot{w} = \frac{A(t)}{t} z \end{cases}$$

$t \dot{H} + H A(t) - B(t) H = 0$ — фуксова система порядка n^2.

H — форм. решение $\Rightarrow$ по лемме H голоморфна.

~~* На всей сфере Римана ($\hat{\mathbb{C}}$)~~

~~Зам. Мером. ф-ция на $\hat{\mathbb{C}}$ с простыми полюсами, $=0$ на ∞ имеет вид $A(t) = \sum_1^N \frac{\lambda_j}{t-a_j}$. С матричной аналог, вместо λ_j стоят матрицы-вычеты.~~

~~$\dot{z} = \sum \frac{A_j}{t-a_j} z$ — фуксова система~~

~~Каждой точке a_j соотв. монодромия M_j~~

Билет 17.

Проблема Римана-Гильберта. Её разрешимость для коммутирующих операторов монодромии.

На всей сфере Римана ($\hat{\mathbb{C}}$)

Мером ф-ция на $\hat{\mathbb{C}}$ с простыми полюсами и $=0$ в ∞ имеет вид $A(t) = \sum_1^N \frac{\lambda_j}{t-a_j}$. С матричной аналог., вместо λ_j — A_j, матрицы вычетов

$\dot{z} = \sum \frac{A_j}{t-a_j} z$ — фуксова система. В каждой a_j есть монодромия M_j.

Проблема Римана-Гильберта. Всякий ли набор $M_1 \ldots M_N$ реализуется как набор операторов монодромии фуксовой системы?

1) Что на ∞? Карта $\tau = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{-1}{\tau^2}\frac{d}{dt}$

$w(\tau) = z(\frac{1}{\tau})$

$$\frac{dw}{d\tau} = -\frac{1}{t^2}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\tau^2} A(\frac{1}{\tau}) w(\tau)$$

Если $\sum A_j \neq 0$, то ∞ — фуксова особая точка, иначе — неособая

$\dot{z} = A(t) z$

мером.

Все особые точки регулярны

Всегда разрешима (проблема выше)

$\dot{z} = \sum_1^N \frac{A_j}{t-a_j} z$, можно ли по M_j найти A_j, $\sum A_j = 0$

Число данных совпадает число неизвестных $(k-1)n^2$

Разрешима в случае, если одна из A_j диагонализуема.

Th Болибруха-Костова: если M_j неприводима (нет нетрив. инвар. подпр.), то разрешима для фуксовых систем.

Коммутирующие операторы монодромии:

Берем фунд. матрицу $(z-a_r)^E$, если монодромии коммутируют, можем перемножить для каждой из точек: $\prod (z-a_i)^E$, E - нормированный логарифм монодромии.

Билет 18

Уравнения класса B. Их св-ва.

Данные монодромии класса B.

1) Все M_j из моноблока (жив. одной Жордановой клетке).

2) Система $\{M_j\}$ приводима

Системы класса B

Системы, у которых монодромия класса B.

<u>Теорема</u>: Все матрицы-вычеты систем класса B имеют одноточечный спектр.

<u>Следствия</u> 1) $\sum A_k = 0 \Rightarrow$ сумма следов $= 0 \Rightarrow$ сумма с.з. $= 0$

2) с.з. матрицы монодромии $\vartheta_j = e^{2\pi i \lambda_j} \Rightarrow$ произв. $\vartheta_j = 1$

ФНФ вблизи особых точек (для начала $a_j = 0$)

$M = \begin{pmatrix} \vartheta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \vartheta \end{pmatrix}$, $\lambda = \frac{\ln \vartheta}{2\pi i}$ - с.з. матрицы вычета

$\operatorname{Spec} A_j : \{\lambda + k_1, \lambda + k_2, \lambda + k_3, \lambda\} = \lambda$, $\Lambda = \operatorname{diag} \lambda$

$k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0$

$\dot{z} = \frac{A(t)}{z} z$, монодр. J_4, ФНФ для $Z(t) = t^{\Lambda} t^{I}$, I - хар. матр.

Остальные фунд. матрицы отл. от $Z_{норм.}$ на невыр. множитель справа.

$\dot{z} = \sum \frac{A_j}{t-a_j} z$

$Z(t) = M_j(t) Z_{norm}(t-a_j) C_j$

<u>Подсистема</u>: $Z(t) = \begin{pmatrix} y(t) & | & | & \end{pmatrix}$ пусть $n=4$, инв. пр-во пом. двумерно.

$y(t)$ — те решения, которые обр. инв. подпр-во.

$M_j = \left(\begin{array}{c|c} M_j^+ & \\ \hline & \end{array}\right)$

$a \neq a_j$. $y(a) = (e_1 e_2) \Rightarrow \forall \Delta t_{\text{Я}}\ y_a$ — числ. в подпр. нат. на базис.

$H_j^{-1} Z = (t-a_j)^{\Lambda} (t-a_j)^{I} C_j$: $\begin{pmatrix} (t-a_j)^{\Lambda_j + k_{1j}} & * & \\ 0 & (t-a_j)^{\Lambda_j + k_{2j}} & \\ \hline & 0 & \end{pmatrix} = Z_j^+$

$\cancel{\epsilon t}$ $\quad M_j$

<u>Предп.</u> у M_j есть только одно инв. подпр-во в каждой 2-й размерности. В каждом вектор явл. цикл. $e_3 \xrightarrow{M} \lambda e_3 + e_2$

$\Rightarrow$ и т. д. $\cancel{\epsilon t}$.

Тогда нужно, чтобы C_j сохр. первые 2 вектора

$C_j = \left(\begin{array}{c|c} C_j^+ & \\ \hline 0 & \end{array}\right) \Rightarrow y(t) = \left(\begin{array}{c} y^+(t) \\ \hline * \end{array}\right)$, $y^+(t) = H_j^+(t) Z_j^+(t) C_j^+$

<u>Предположение</u> $(\lambda_j + k_{1j} + \lambda_j + k_{2j}) \leq 0$

<u>Окончание д-ва H</u> $\quad \sum A_j = 0 \Rightarrow \sum \operatorname{tr} A_j = 0$

но $\Sigma \geq \frac{1}{2} \sum \operatorname{tr} A_j$, = если теорема верна

Если H не выполнена $\Rightarrow \Sigma > 0 \Rightarrow$ $\lightning$ с предположением.

<u>Д-во предположения</u> $y^+(t) \sim 2 \times 2$, $w(t) = \det y^+(t)$

$\dot{w}(t) = B(t) w(t)$, все особые точки опр. регулярные.

$\cancel{B}(t) = \sum_{1}^{N} \frac{\mu_j}{t - b_j}$, все $a_j = b_l$, если $b_m \neq a_j$, то $w(t)$ голоморфен в $b_m \Rightarrow \mu_j \in N$

Если $b_m = a_j$, тогда смотрим определитель Вронского

$y^+(t) = H_j^+(t) Z_j^+(t) C_j^+$. ~~От~~ Тогда $\mu_j = 2\lambda_j + k_1 + k_2 + \alpha_j$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$

$\cancel{B}\ \sum \mu_j = 0$, $\sum \mu_j \geq \Sigma$, $\Sigma = 2\lambda_j + k_1 + k_2 \Rightarrow$ предпол. доказано

Билет 19

Контрпример Болибруха.

Нереализуемая монодромия

J_4, с.з. 1, $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 3 & 1 \\ & & -4 & -1 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & -1 & 0 \\ & & 4 & -1 \end{array}\right)$

$tr = 2$, с.з. $= 1$ $\qquad$ $tr = -2$, с.з. $= -1$

$rk(M_1 - E) = 3$

$rk(M_2 + E) = 3$

$J_4 \cdot M_1 M_2 = E$

Произв. с.з $= -1 \Rightarrow$ нереализуем.

Билет 1

Преобразование фазового потока уравнения $\dot z = z^2$ и оно же в выпрямляющих координатах

$\frac{dz}{dt} = z^2$, $\frac{dz}{dz^2} = dt$, $t = -\frac{1}{z}$

выпрямляющее отображение $t = 1$:

$g^1: t \mapsto t+1$

$z \mapsto \frac{z}{1-z}$

Билет 2

ФНФ параболического ростка

Теорема (о секториальной нормализации)

f_0 аналитически $\tilde f_0$ в двух секторах

$f: z \mapsto z + z^2 + z^3 + \ldots$

ФНФ: $f_0: z \mapsto \frac{z}{1-z} = g^1_{z^2}$

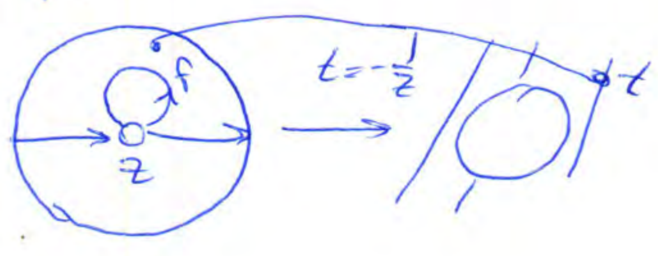
$t = -\frac{1}{z}(+C)$, $f_0: t \mapsto t+1$

$t \mapsto -\frac{1}{t} \xrightarrow{f} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \ldots\right) \xmapsto{t = -\frac{1}{z}} \frac{t}{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \ldots} = t\left(1 + \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \ldots\right) + (\ldots)^2 + \right.$

$+ (\ldots)^3 + \ldots = t + 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow \tilde f: t \mapsto t + 1 + O\left(\frac{1}{t}\right)$

если $f = f_0 + O(z^m)$, то $\tilde f = 1 + t + O(t^{2-m})$

f формально экв. f_0 $t \mapsto t+1$



Билет 3

Теорема о секториальной нормализации. У-ние Абеля и его решение.

Теорема $z \mapsto z + z^2 + \dots$, $t \mapsto -\frac{1}{z}$, отобр. в карте t

f форм. экв. $f_0: z \mapsto \frac{z}{1-z} = 9z^2$,

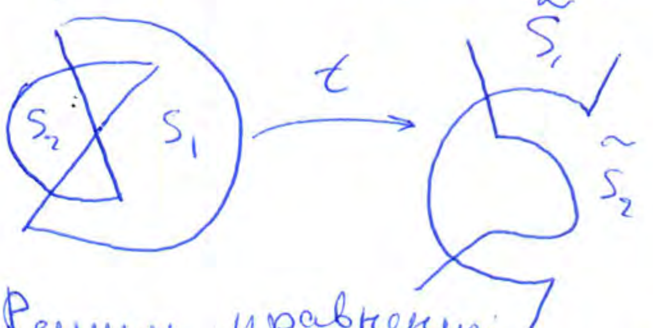
z t Рассмотрим ряд $\hat{H}: z \mapsto z + \dots$

f $\tilde{f}$ Существует биголоморфное отображение

f_0 $\tilde{f}_0 = t+1$ $H_j: S_j \to \mathbb{C}$

1) H_j сопрягает f и f_0: $H_j \circ f = f_0 \circ H_j$

2) H_j имеет асимптотический ряд в 0.



Д-во: ищем $\tilde{H}_j(t)$, сопр. $\tilde{f}$ и $\tilde{f}_0$

Если $f = f_0 + O(z^{m+2})$, то $\tilde{f} = t + 1 + \underbrace{O(t^{-m})}_{=F}$

Решим уравнение:

$(E + h) \circ (t + 1 + F) = E + h + 1$, E - тожд. преобр.

$t + 1 + F + h \circ \tilde{f} = t + h + 1$

$h - h \circ \tilde{f} = F$ - уравнение Абеля

$h = \sum_{k=0}^{\infty} F \circ \tilde{f}^k$ верно в S_2

$h = \sum_{k=-1}^{-\infty} - F \circ \tilde{f}^k$ верно в S_1

$+ \; h \circ \tilde{f} - h \circ \tilde{f}^2 = F \circ \tilde{f}$

$h \tilde{f}^2 - h \circ \tilde{f}^3 = F \circ \tilde{f}^2$

$\vdots$

$|\tilde{f}^k_{(t)}| > (|t| + \frac{k}{2}) c \Rightarrow |F| < \frac{c}{|F^m|} \Rightarrow |F \circ \tilde{f}^k| < \frac{c'}{(|t| + k/m)^m}$

$|H_2(t)| < \sum_0^{+\infty} \frac{c'}{(|t| + \frac{k}{2})^m} < \frac{c''}{|t|^{m-1}}$

Билет 4

Модули Экаля - Воронина. Их св-ва.

Есть ф-ции перехода $t_1 = \tilde{H}_1(t)$, $t_2 = \tilde{H}_2(t)$, $\tilde{H}_1 \circ \tilde{f} = \tilde{f}_0 \circ \tilde{H}_2$

Композиционное частное коммутирует с $\tilde{f}_0$.

$\tilde{\Phi} = \tilde{H}_2 \circ \tilde{H}_1^{-1}$

$\Phi(t_1 + 1) = \Phi(t_1) + 1$

$\tilde{\Phi} = \tilde{H}_2 \circ \tilde{H}_1^{-1}$ опр. в $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2$

замена $t_1 \to t$: $\tilde{\Phi}(t_1 + 1) = \tilde{\Phi}(t_1) + 1$

$\tilde{\Phi}(t) = t + \varphi(t)$

$\varphi(t+1) = \varphi(t)$ - периодическая

$(\varphi(t+1)+t+1 = \varphi(t)+t+1)$

φ опр. на пересечениях

$\varphi_+(t) = \sum_{-\infty} c_k e^{2\pi i k t}$

$t = i\omega,\ \omega \to +\infty \Rightarrow \varphi_+ \to 0$ при $\omega \to +\infty$

$\varphi_- \to 0$ при $\omega \to -\infty$

Т. е. $\varphi_+ = \sum^{\infty} c_k e^{2\pi i k t}$

$\varphi_1 = \sum_{-1}^{1} c_k e^{2\pi i k t}$ — модули Экаля - Воронина

$\varphi_\pm$ определены не однозначно. По опр. $\varphi_\pm \sim \psi_\pm$, если $\varphi_\pm(t+c) = \psi_\pm(t)+c$ для некоторого c.

Теорема. Два отобр. f и g форм. экв. $f_0 = \frac{z}{1-z}$, анал. экв. $\Leftrightarrow$ соотв. ф-ции перехода $\varphi_\pm$ и $\psi_\pm$ экв.

Теорема Все $\varphi_\pm$ реализуются как ф-ции перехода

Д-во: $\varphi_\pm$, $\Phi_\pm = t+\varphi_\pm$. Ищем $\tilde{F}$

Рассм. $S = S_1 \cup S_2 /_{t=\Phi(t)}$

На римановой пов-ти S возникает отобр. F: $F|_{S_{1,2}} = f_0$

Склейка коммутирует с f_0 (сдвигом на 1), из-за чего на пересечении все хорошо.

S - биголоморфно экв. проколотой окр. ∞

F - формально экв. $\tilde{f}_0$

Билет 5

Аналитическая классификация параболических ростков.

Класс ростков $z \mapsto z+\ldots$ ①

В сторону остальные: $z \mapsto \lambda z+\ldots$, $\lambda \neq 1$

$|\lambda| \neq 1 \Rightarrow$ Норм. форма линейна.

Теорема Зигеля (φ диофантово $\Rightarrow$ аналитически экв. своей лин. части.

$\lambda = e^{2\pi i \varphi}$, $\varphi \in \mathbb{Q}$, $\varphi = p/q$

$f^q: z \to \lambda^q z+\ldots$, $\lambda^q - 1 = 0$ - класс ①

Топологическая классификация:

$z \to z + a z^2 + \ldots \quad a \neq 0 \qquad \frac{w}{\alpha} \to \frac{w}{\alpha} + a\frac{w^2}{\alpha^2} + \ldots$

$z \to \frac{w}{\alpha}$

$\alpha z = w \Rightarrow w + a\alpha z^2 + \ldots \qquad w \to w + \frac{a}{\alpha} w^2,\ \alpha = a$

$b=1$ - упрощено

Ростки класса (3) $z \mapsto z+z^2+\dots$ топ. экв. $f_0=\frac{z}{1-z}$
существует гомеоморфизм $H\circ f = f_0 \circ H$

<u>Теорема</u> $z \to z+z^2+bz^3+\dots$ формально экв. $z\mapsto z+z^2+bz^3$
$\dot z = z^2+az^3+\dots$ аналит. экв. $\dot z = z^2+az^3$

<u>Следствие</u>: $\dot z = \frac{z^2}{1-\beta z}$, $\omega=\omega_\beta$ (вект. поле)

Билет 6

Почти комплексная структура

Уравнение Бельтрами и его св-ва.

На римановой поверхности S в T_*S задана форма $\omega = dz+\mu d\bar z$. $\mathbb{C}$-лин. формы в смысле ПКС - это формы вида $\lambda\omega$, $\omega(hv)=i\omega(v)$

<u>Опр</u>: ф-ция f голоморфна в смысле ПКС, если $df=c\omega$, c - функц. $df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z = c\omega$.

$\frac{f_{\bar z}}{f_z}=\mu$ - уравнение Бельтрами

Пусть H - решение у-ния Бельтрами задающее гомеоморфизм, а G - любое другое решение, тогда $G\circ H^{-1}=h$ голоморфная ф-ция: $G=h(H)$

Пусть S - риманова поверхность и $\exists$ квазиконформное отображение $H: S\to D_* = D\setminus\{0\}$
$(H_{\bar z}/H_z < q < 1)$, тогда S конф. экв. D_*
$\omega = d(H^{-1})$

Пусть $g=h\circ f$ голоморфна, тогда $\frac{g_{\bar z}}{g_z}=\frac{f_{\bar z}}{f_z} \Leftrightarrow \begin{matrix} g_{\bar z} = h'\circ f\circ f_{\bar z} \\ g_z = h'\circ f \circ f_z \end{matrix}$

На D_* возникает ПКС

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, shift left, "H"] \arrow[rr, bend left, dashed, "h"] & D_* \arrow[l, shift left, "H^{-1}"] \arrow[r, "G"] & D_* \end{tikzcd}$$

Решения того же у-ния Бельтрами

$\frac{G_{\bar z}}{G_z}=\mu$ $\quad \frac{(H^{-1})_{\bar z}}{(H^{-1})_z}=\mu$ $\quad h=G\circ H$

Билет 7

Реализация модулей Экаля-Воронина. Абстрактная риманова поверхность S и отображение F на ней.

В t-координатах:

$f: t \mapsto t+1+O(t^{-2})$, $(\mathbb{C},\infty)\to(\mathbb{C},\infty)$, $\hat{f}_0 = t\to t+1$

Два сектора $\tilde S_1, \tilde S_2$, норм. отобр. $t_1\circ\tilde f = t_1+1$, $t_2\circ \tilde f = t_2+1$

$\Phi_\pm = t_2\circ t_1^{-1} = t + \sum_{k=1}^{\pm\infty} c_k e^{2\pi i k t}$

$S = \tilde S_1 \sqcup \tilde S_2 /\Phi$ $\qquad D_*$ — проколотый диск

Возвращаемся к $z=-\frac{1}{t}$. $\quad f = z+z^2+z^3\dots$, $f_0 = g^1_{2,1} = \frac{z}{1-z}$

$z_j = -\frac{1}{t_j}$, $z_j\circ f = f_0\circ z_j$

$z_2\circ z_1^{-1} = \varphi(z)$, $\varphi = Id +$ экспоненц. малые члены в 0.

$S = S_1 \sqcup S_2 /_{t_1 = \Phi(t_1)}$

Предложение: S конформно экв. D_*.

Д-во: Пусть φ_1, φ_2 — разбиение 1, подчин. S_1, S_2. Тогда $\varphi_1 z_1 + \varphi_2 z_2 : S\to D_*$. $z_2 = \underset{Id + \text{плоское}}{\Phi}(z_1)$ на $S_1\cap S_2$

Вне пересечения H(коэф. Бельтрами): 0

Иначе: плоская функция

$t_2 = \Phi(t_1) = t +$ эксп. уб. добавка

$H|_{S_1} = t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2 = t_1 + \varphi_2\overbrace{(t_2-t_1)}^{\text{плоская}}$, $\quad t_2\varphi_2 = (t_1+(t_2-t_1))\varphi_2$

$\frac{H_{\bar t_1}}{H_{t_1}} = \mu$ — C^∞ плоская. Квазиконф. отобр. $S\to D_*\to S$ биол.

Экв. D^*: $\exists h: S\to D_*$

Пусть G: $\frac{G_{\bar z}}{G_z} = \mu$, $h = G\circ H$

Отображение F

S - РП, склейка по Φ.

Получилось F на РП S, на каждом секторе совп. с f_0

$h: S\to D^*$

$f: D^*\to\mathbb{C}$, $f = h\circ F\circ h^{-1}$

Хотим, что $f = z+z^2+\dots$ или что f форм. экв. f_0

$h = H\circ G$, G - реш. у-ние Бельтрами, $G\in C^\infty$, μ плоский в 0

$G_{\bar z} = G_z\mu$ - плоская в 0

плоская - все её коэф. Тейлора = 0.

Формальный ряд в "голом." (не сод. членов с $\bar z$)

f сопр. с f_0 форм. рядом Тейлора в карте z_1, значит, вг.

Билет 8

Квазиконформные отображения

Склеивание Римановой пов.-ти S

если $\varphi(t_1) = t_1 + \sum c_k e^{2\pi i k}$

$\varphi = \varphi_+ + \sum_{0}^{\infty}$, $\varphi_- - \sum_{-1}^{-\infty}$ $S = \hat S_1 \sqcup \hat S_2 / t_1 = \varphi(t_1) = t_2$

$d\tilde J = a\,dt + b\,d\bar t$, $a, b \in \mathbb{C}$

$|\frac{b}{a}| < q < 1$ - квазиконф. отобр.

разб. единицы, подчин. покр. $\{U_j\}$ пов-ти S - это $\varphi_j \in C^\infty$, $\operatorname{supp}\varphi_j \in U_j$, $\varphi_j \geq 0$ и $\sum \varphi_j = 1$

$t_2 - t_1 = \varphi(t_1) - t_1$ - экспон. уб.

$\frac{\partial \tilde J}{\partial t_1} = \begin{cases} 1 & \text{в } \hat S - S_2 \\ 1 + \text{плоская} & \text{в } \hat S_1 \cap S_2 \end{cases}$; $\frac{\partial \tilde J}{\partial \bar t_1} = \begin{cases} 0 & \text{в } \hat S_1 - \hat S_2 \\ \text{плоская} & \text{иначе} \end{cases}$

Билет 9

Склеивание отобр. F

Постр. $F: S_j \to S_j$, $F|_{S_j} = f_0$

биол. $h: S \to D$, $f: D \to \mathbb{C}$, $f = h \circ F \circ h^{-1}$

хотим $f = z + z^2 + \dots$

F форм. экв. f_0, рассм. f на $S_1 \setminus S_2$, $h = H \circ \sigma$, $\frac{\sigma_{\bar z}}{\sigma_z} = \mu$, $\sigma \in C^\infty$

$\sigma_{\bar z} = \mu \sigma_z$ - плоское в 0, f сопр. с f_0 форм. рядом Тейлора в $z_1 \Rightarrow$ в z тоже (см. билет 7)

Билет 10

Лин. системы с компл. временем.

Глобальная Т существования.

$z \in \mathbb{C}^n$ $t \in \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$

$\dot z = A(t) z$ $A(t)$ - мером. матрица

$\dot z = \frac{A(t)}{p(t)} z$, A - голом. на $\mathbb{C}$ (или полином)

Глобальная теорема существования:

Пусть $C \supset \{p = 0\}$ - мн-во особых точек.

Лок. th ∃! (стр. 14)

$\forall t_0 \in C, \forall z_0 \in \mathbb{C}^n$ ∃! решение $z(t)$ в $U(t_0)$: $z(t_0) = z_0$

Возьмем базис $\mathbb{C}^n$: $e_1 \dots e_n$

Пусть $\varphi_j(t)$: $\varphi_j(t_0) = e_j$, все φ_j опред. в $U \ni t_0$

Решение с любыми НУ t_0, z_0 опр. в U

$z_0 = \sum c_j e_j$, $z(t) = \sum c_j \varphi_j$

Это реш. с НУ $t_0 z_0$ — других нет

Все реш. в U обр. лин. пр-во, базис - ФСР

Матр. со столбцами $(\varphi_1 \dots \varphi_n) = Z(t)$ это ФМР

Теорема: все решения лин. сист. определены на универсальной накрывающей над $\mathbb{C} \setminus C$

(точка унив. накр — класс кривых с нач. в t_0 и общим конц. ом, гомотопных на M)