Математический анализ
первый модуль 1 курса
Коллоквиум
Ю.М. Бурман

23 октября 2019 г.

Содержание

1 Задачи

1.1 1

Корректность определения сравнения, суммы и произведения действительных чисел
Если одно из чисел x, y или оба – конечные десятичные дроби, то результат сравнения не зависит от того, какое из двух представлений (с периодом 0 или с периодом 9) выбрано.
Пусть $y = b_0.b_1b_2...$,

1.2 2

Определение точной верхней и точной нижней граней ограниченного числового множества. Существование точной верхней грани (как следствие из аксиомы непрерывности). Единственность точней верхней грани.
1. A - множество ограниченное сверху.
Число $d \in R$ называется точной верхней гранью (супремумом) множества , если:
1) d - верхняя грань
2) $\forall c < d$ не является верхней гранью для
Иначе говоря, $d = \sup A$, если:
1) $\forall a \in A$, $a \leqslant d$
2) $\forall c < d$ $\exists a \in A$, $a > c$

2. **У ограниченного сверху мн-ва существует супремум.**
Рассмотрим $=$ {мн-во всех верхних граней мн-ва A} $= \{b \in \mathbb{R} | \forall a \in A, a \leqslant b\}$, $A, B \neq \emptyset$
По аксиоме (14): $\exists d \in \mathbb{R} : a \leqslant d \leqslant b \Rightarrow d$ - $\sup A$
Возьмем $c < d$: Допустим, что - верхняя грань, тогда $\in B$,
но $\forall b \in B$ $b \geqslant d \Rightarrow c \geqslant d$.
Противоречие.

3. **Супремум единственный**
Пусть множество A имеет 2 точных верхних грани: a_1 и a_2.
Допустим, что $a_1 < a_2$. Так как $a_1 < a_2$ и $a_2 =$ supA, то $\exists a' \in A$: a' $> a_1$, что противоречит тому факту, что $a_1 = \sup A$.

1.3 3

$$m + n = n + m$$
$$m \cdot n = n \cdot m$$
$$m + (n + l) = (m + n) + l = m + n + lm \cdot (n \cdot l) = (m \cdot n) \cdot l = m \cdot n \cdot l$$

По аксиомам индукции:
определим x' как элемент, следующий за x
для сложения

$$\forall a, b \in \mathbb{N}$$
$$a + 1 = a'$$
$$a + b' = (a + b)'$$

для умножения

$$\forall a, b \in \mathbb{N}$$
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$
$$a \cdot 1 = a$$
$$a \cdot b' = a \cdot b + a$$

1.4 4

1.5 5

Композиция непрерывных отображений непрерывна
Если $a, b, c \subset \mathbb{R}$, функция f непрерывна в точке $a \in A$, а функция g непрерывна в точке $f(a) \in B$, то функция $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Пусть U – произвольная окрестность точки $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Поскольку g непрерывна в точке $f(a)$, существует окрестность W точки $f(a)$ такая, что если $y \in B \cap W$, то $g(y) \in U$. Но функция f непрерывна в точке a, поэтому найдется окрестность V точки a такая, что если $x \in V$, то $f(x) \in W$. Следовательно, если $x \in V$, то $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in U$, что и означает непрерывность.

Так как мы выбрали произвольную точку $a \in A$, повторив такое рассуждение для всех точек a из A, мы получим, что если функции f и g непрерывны, то и их композиция непрерывна.

1.6 6

Единственность предела
Пусть $X,\ B$ – хаусдорфовы топологические пространства, $A \subset X,\ f : A \Rightarrow B$ – отображение, $a \in x$, $a \in A$ не изолирована в множестве $A \cup \{a\} \subset X : \forall$ окрестности $V(a) \subset X \exists b \in V \cap A \setminus \{a\}$, то есть $\exists b \in V : b \in A, b \neq a$. Тогда если существует предел $\lim_{x\to a} f(x) \in B$, то он единственный.

Доказательство. Пусть u_1, u_2 – пределы, $u_1 \neq u_2$. Из свойства Хаусдорфова пространства $\exists U_1(u_1),\ U_2(u_2) : U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
Из определения предела: $\exists V_1, V_2 : x_1 \in \mathring{V}_1(a) \Rightarrow f(x_1) \in U_1, x_2 \in \mathring{V}_2(a) \Rightarrow f(x_2) \in U_2$.

$x \in \mathring{V}_1(a), x \in \mathring{V}_2(a) \Rightarrow \exists V : V \subset \mathring{V}_1 \cap \mathring{V}_2$.

Из условия $a \in A \cup \{a\}$ не изолирована $\Rightarrow \exists x \in V \cap A \neq a, x \in \mathring{V}_1 \cap \mathring{V}_2 \Rightarrow f(x) \in U_1, f(x) \in U_2 \Rightarrow f(x) \in U_1 \cup U_2 = \emptyset \Rightarrow$ предел единственен.

1.7 7

Декартово произведение хаусдорфовых топологических пространств – хаусдорфово топологическое пространство
Для всех $a \in X, b \in Y$ окрестностью точки $(a, b) \in X \times Y$ называется множество $U(a) \times V(b) = \{(x, y) \mid x \in U(a),\ y \in V(b)\}$, где $U(a) \subset X, V(b) \subset Y$ – произвольные окрестности точек a и b соответственно.

1.8 8

1.9 9

1) **Функция $f(x, y) = x + y$ непрерывна**
Рассмотрим $f : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$. Как мы знаем, функция непрерывна в точке a, если для любой окрестности точки $f(a)$ существует такая окрестность точки a, что, если x лежит в окрестности точки a, то $f(x)$ лежит в окрестности точки $f(a)$.

Возьмем произвольную точку $a = (p, q)$ и произвольную окрестность $U(f(p, q)) = U(p+q) = (p+q-\varepsilon, p+q+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$, а также окрестность $V((p, q)) = (p - \frac{\varepsilon}{2}, p + \frac{\varepsilon}{2}) \times (q - \frac{\varepsilon}{2}, q + \frac{\varepsilon}{2}) \subset \mathbb{R}^2$.
Теперь возьмем точку $z(x, y) \in V$. Значит, $p - \frac{\varepsilon}{2} < x < p + \frac{\varepsilon}{2}, q - \frac{\varepsilon}{2} < y < q + \frac{\varepsilon}{2}$. Сложим эти неравенства: $p + q - \varepsilon < x + y < p + q + \varepsilon$, то есть $f(z) \in U$.
Получается, для произвольной точки $a \subset \mathbb{R}^2$ (а значит, для всех точек из $\mathbb{R}^2$) для любой окрестности точки $f(a)$ существует такая окрестность точки a, что если z лежит в этой окрестности точки a, то и $f(z)$ лежит в окрестности точки $f(a)$. Значит, функция непрерывна.

2) **Сумма непрерывных функций непрерывна**
$f_1 : A_1 \Rightarrow \mathbb{R}, f_2 : A_2 \Rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, то функция $f_1 + f_2 : A_1 \cap A_2 \Rightarrow \mathbb{R}$ также непрерывна.
Отображение $F = (f_1, f_2) : A_1 \cap A_2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывно в точке $a^\star$, где a – любая точка из $A_1 \cap A_2$ (так как сумма определена на пересечении, непрерывность точек, не лежащих в нем, нам неважна). Так как функция $f_1 + f_2 = f \circ F$, где $f(x, y) = x + y$, то она непрерывна в точке a (f_1, f_2, определенные на пересечении A_1, A_2, очевидно, непрерывны в точке) – пользуемся (9.1).
($\star$) Откуда появилось, что $F = (f_1, f_2) : A_1 \cap A_2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывно в точке a? Докажем следующее предложение: пусть $X,\ B,\ C$ – хаусдорфовы топологические пространства, $A \subset X$, тогда вектор-функция $f = (g, h) : A \Rightarrow B \times C$ непрерывна в точке $a \in A \leftrightarrow$ оба отображения g, h непрерывны в a.

1.10 10

1.11 11

1.12 12

1.13 13

Лемма о последователности вложенных отрезков и о стягивающейся последовательности вложенных отрезков
Лемма о вложенных отрезках
(принцип непрерывности Кантора):

Для всякой системы вложенных отрезков $\exists \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}\ c \in [a_n, b_n]$

Доказательство:
$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
Имеем $\forall n, m \in \mathbb{N}$
$a_n \leqslant a_{n+m} < b_{n+m} \leqslant b_m$
Значит $\forall$ элемент из меньше (левее), чем $\forall$ элемент из .
По аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}$: $a_n \leqslant c \leqslant b_m\ \forall a_n \in A\ \forall b_m \in B$
Значит $\in [a_n; b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$

Система вложенных отрезков называется стягивающейся, если
$\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}:\ b_n - a_n < \epsilon$

Теорема: стягивающаяся система вложенных отр. имеет ровно 1 общую точку

Доказательство:
Предположим противное.
$\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant c < c' \leqslant b_n \ \Rightarrow\ c' - c \leqslant b_n - a_n$
$\epsilon = c' - c\ \exists k \in \mathbb{N} : b_k - a_k < c' - c$
Противоречие.

1.14 14

1.15 15

Определение: Последовательность $\{X_n\}$ называется фундаментальной если выполнено условие Коши: $\forall \varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n, m \geqslant n_0\ : |X_n - X_m| < \varepsilon$
Отрицание условия Коши: $\exists \varepsilon\ \forall n_0 = n_0(\varepsilon)\ \exists n, m \geqslant n_0 : |X_n - X_m| \geqslant \varepsilon$
Теорема(критерий Коши):
Последовательность фундаментальна в том и толко в том случае, когда она сходится и имеет предел.
Доказательство:
1) Если $\lim\limits_{x\to\infty} X_n = c$, то $\{X_n\}$ фундаментальна:
$\forall \varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\frac{\varepsilon}{2})\quad \forall n \geqslant n_0\ : |X_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall \varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\frac{\varepsilon}{2})\quad \forall m \geqslant n_0\ : |X_m - c| < \frac{\varepsilon}{2}$, значит $|X_n - X_m| < |X_n - c| + |X_m - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \Rightarrow$ Есть условие Коши
2) Докажем, что из фундаментальнсоти следует сходимость:
(Лемма: фундаментальная последовательность ограничена)
Доказательство:
Пусть $\{X_n\}$ - фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет конечный предел. $\{X_n\}$ - фундаментальная последовательность значит у нее есть сходящаяся подпоследовательность $\{X_{n_k}\}\ \lim\limits_{x\to\infty} X_{n_k} = c$
По определению фундаментальной последовательЕности: $\forall \varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n, m \geqslant n_0\ : |X_n - X_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, значит при $m = n_k\ \rightarrow\ \forall \varepsilon\ \exists n_0, k_0\ \forall n \geqslant n_0 и k \geqslant k_0\ : |X_n - X_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ (устремим k к ∞), тогда $|X_n - c| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, получим $\forall \varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\quad \forall n \geqslant n_0\ : |X_n - c| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ значит по определению предела $\lim\limits_{x\to\infty} X_{n_k} = c$ Ч.Т.Д

1.16 16

Пусть $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, тогда $\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s$. Но $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, поэтому $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = \lim s_{n+1} - \lim s_n = s - s = 0$ откуда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

1.17 17

$$\left|\sum_{k=0}^{p} u_n + k\right| \leq \sum_{k=0}^{p} |u_n + k|$$

В самом деле, в силу критерия Коши абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \in \mathcal{C}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $p > 0$ правая часть неравенства меньше ε. Следовательно, и левая часть этого неравенства окажется меньше ε, то есть для ряда выполняется критерий Коши сходимости рядов, и потому ряд сходится.

1.18 18

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{i=0}^{\infty} b_n$ – абсолютно сходящиеся ряды. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ положим: $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.
Если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{i=0}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то и $\sum_{i=0}^{\infty}{}_n$ абсолютно сходится, а его сумма равна произведению сумм двух других

Доказательство

$$A_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

$$\widetilde{A}_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

$$B_k = \sum_{i=0}^{k} b_i$$

$$\widetilde{B}_k = \sum_{i=0}^{k} b_i$$

$$C_k = \sum_{i=0}^{k} c_i$$

$$A = \lim_{k\to\infty} A_k$$
$$\widetilde{A} = \lim_{k\to\infty} A_k$$
$$B = \lim_{k\to\infty} A_k$$
$$\widetilde{B} = \lim_{k\to\infty} A_k$$

Необходимо доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} C_k = AB$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} A_k B_k = AB$ по теореме о пределе произведения, то требуемое равносильно $\lim\limits_{k\to\infty} |A_n B_n - C_n| = 0$
Заметиим, что

$$|A_n B_n - C_n| = \left|\sum_{\substack{i\leq n, j\leq n\\ i+j>n}} a_i b_j\right| \leqslant \sum_{\substack{i\leqslant n, j\leqslant n\\ i+j>n}} |a_i| \cdot |b_j|$$

Тогда достаточно показать, что правая часть этогоуравнения стремится к 0 при $n \to \infty$. Заметим что если $i + j > n$, то либо $i >\left[\,\frac{n}{2}\,\right]$, либо $j >\left[\,\frac{n}{2}\,\right]$. Поэтому правую часть можно оценить как:

$$\sum_{i\leq n, j\leqslant n} |a_i| \cdot |b_j| \leqslant \sum_{\substack{i>|n/2|\\ \text{или}\\ j>|n/2|}} = \sum_{i>i\leq n} |a_i| \cdot |b_j| - \sum_{\substack{0\leq i\leq |n|2|\\ 0\leqslant j\leqslant |n/2|}} |a_i| \cdot |b_j| =$$
$$= \tilde{A}_n \tilde{B}_n - \tilde{A}_{[n/2]} \tilde{B}_{[n/2]}$$

Тогда заметим, что, в силу абсолютной сходимости рядов $\sum_{i=0}^{k} a_i$ и $\sum_{i=0}^{k} b_i$, существуют конечные пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_n$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{B}_n$, а значит – и предел $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_n \widetilde{B}_n$. Теперь равенство $\lim\limits_{k\to\infty} (\widetilde{A}_n \widetilde{B}_n - \widetilde{A}_{n/2} \widetilde{B}_{n/2}) = 0$ очевидно

ввиду критерия Коши.
Аккурано доказательство можнопривести так: для всякого $\varepsilon > 0$ существо N, что при $k > l > N$ имеет $\tilde{A}_k\tilde{B}_k - \tilde{A}_l\tilde{B}_l < \varepsilon$. $N_1 > 2N+2$, то при $n > N_1$ имеет $n > [n/2] > N$, что:

$$\left|\tilde{A}_n\tilde{B}_n - \tilde{A}_{[n/2]}\tilde{B}_{[n/2]}\right| = \tilde{A}_n\tilde{B}_n - \tilde{A}_{[n/2]}\tilde{B}_{[n/2]} < \varepsilon$$

1.19 19

Для любого $x \in \mathbb{C}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \exp(x)$$

Докажем это:

$$\frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h} = \frac{\exp(a)\exp(h)-\exp(a)}{h} = \exp(a)\frac{\exp(h)-1}{h}$$

Стало быть, достаточно

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = 1$$

Из определения экспоненты следует

$$\frac{\exp(h)-1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots + \frac{h^n}{(n+1)!} + \ldots$$

Поскольку $(n+1)! \geqslant 2^n$ при $n \geqslant 1$, имеем, при $|h| < 2$

$$\left|\frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots + \frac{h^n}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{|h|}{2!} + \frac{|h|^2}{3!} + \ldots + \frac{|h|^n}{(n+1)!} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|h|}{2} + \frac{|h|^2}{2^2} + \ldots + \frac{|h|^n}{2^n} \leqslant \frac{|h|/2}{1-|h|/2}$$

(в правой части мы оценили через сумму бесконечной геометрической прогрессии). Итак,

$$\left|\frac{\exp(h)-1}{h} - 1\right| \leqslant \frac{|h|/2}{1-|h|/2} \qquad \text{при } |h| < 2$$

Поскольку правая часть в этом неравенстве стремится к нулю при $h \to 0$, левая часть стремится к нулю по теореме о двух милиционерах. Доказано

1.20 20

Экспонента обладает свойством $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$
По определению $a^b = \exp(b\cdot\ln(a)))$, тогда, так как $\exp(x+y) = \exp((x+y)\ln(e)) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \exp(x)\cdot\exp(y)$. Экспонента обладает свойством $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$

1.21 21

21.1. $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1$

$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ...$

$\exp(x) - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ...$

$\frac{\exp(x)-1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + ... = \frac{x^k}{(k+1)!}$

Найдем $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{x^m}{(m+1)!}$. $|\sum_{k=0}^{m}\frac{x^m}{(m+1)!} - 1| = |\frac{x}{2} + ... + \frac{x^m}{(m+1)!}| \leq \frac{|x|}{2} + ... + \frac{|x|^m}{(m+1)!} \leq |x| + |x|^2 + ... + |x|^m \leq \frac{|x|}{1-|x|}$ при $|x| < 1$.

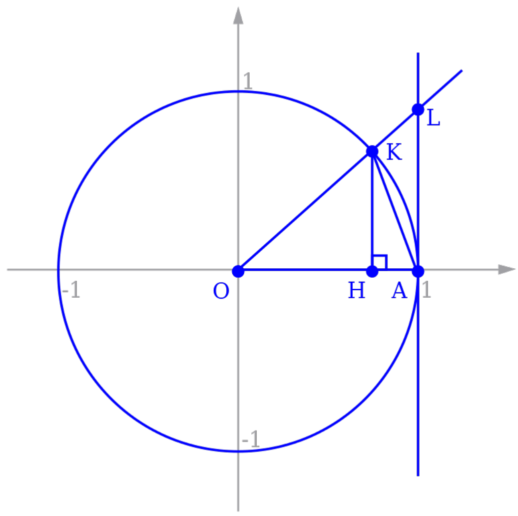
$|\sum_{k=0}^{m}\frac{x^m}{(m+1)!}| \leq \frac{|x|}{1-|x|} \Rightarrow |\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{x^m}{(m+1)!}| = |\frac{\exp(x)-1}{x}| \leq \lim_{m\to\infty}\frac{|x|}{1-|x|} = \frac{|x|}{1-|x|}$.

Тогда $0 \le |\frac{\exp(x)-1}{x} - 1| \le \frac{|x|}{1-|x|}$. По лемме о двух полицейских $\lim_{x\to 0}|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1| = 0$. Распишем предел по определению: для любого положительного эпсилон существует такая положительная дельта, что $|x| < \delta \Rightarrow ||\frac{\exp(x)-1}{x} - 1|| = |\frac{\exp(x)-1}{x} - 1| < \epsilon$.

Посмотрим, что значит, что предел $\frac{\exp(x)-1}{x}$ при $x \to 0 = 0$: для любого положительного эпсилон существует такая положительная дельта, что $|x| < \delta \Rightarrow |\frac{\exp(x)-1}{x} - 1| < \epsilon$. Получается, $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} - 1 = 0$. $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1$. Что и требовалось доказать.

21.2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Выберем точку $x \in (0; \frac{pi}{2})$, тогда $\sin x > 0$.



$|KH| = \sin x,\ |LA| = \operatorname{tg} x,\ S_{OAK} = 0.5 \cdot OA \cdot KH = 0.5 \cdot \sin x, S_{sectKOA} = 0.5 \cdot (OA)^2 \cdot x = 0.5 \cdot x, S_{OAL} = 0.5 \cdot OA \cdot LA = 0.5 \cdot \operatorname{tg} x$.

$S_{OAK} < S_{sectKOA} < S_{OAL} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Так как $\sin x > 0$, можем разделить на него. $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{cosx} \Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > cosx$. По лемме о двух полицейских $\frac{\sin x}{x} \to 1, x \to 0$.

1.22 22

1) **Непрерывность экспоненты (в любой точке $a \in \mathbb{C}$)**

Пусть $a = 0$. $\lim_{x\to 0}\exp(x) = 1 + \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1 + 0 \cdot 1 = 1 = \exp(0)$ – непрерывность доказана.

Для произвольного a получим $\lim_{x\to a}\exp(x) = \lim_{y\to 0}\exp(a+y) = \lim_{y\to 0}\exp(a)\cdot\exp(x) = \exp(x)\cdot\lim_{y\to 0}\exp(x) = \exp(a)$.

2) **Существование и непрерывность логарифма**

Существует функция $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, обратная к exp на действительной оси: $\ln(\exp) = x, \exp(\ln(y)) = y \forall x \in \mathbb{R}, y \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Так как функция $\exp(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ строго возрастает и ее множество значений состоит из всех положительных чисел (*), $\forall y \in (0, +\infty)$ $\exists! x \in \mathbb{R}$, для которого $y = \exp(x)$ – существование доказано, единственность следует из строгой монотонности. Положим $\ln y = x$ по определению.

(*) Функция $\exp(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ строго возрастает и ее множество значений состоит из всех положительных чисел.

Доказательство. Так как $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$, то есть $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$. Значит, $\exp(x) \neq 0$ (в т.ч. $\forall x \in \mathbb{C}$).

Рассматриваем $x \in \mathbb{R}$. $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2})^2 > 0$.

$\exp(x) > x + 1\ \forall x > 0$, так как $\exp(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... > 1 + x$.

$\Rightarrow$ по лемме о двух полицейских (? – нет оценки сверху) $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$. Так как $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{y\to+\infty} e^(- y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0$. То есть среди значений $\exp(x)$ на действительной оси есть сколь угодно близкие к нулю и сколь угодно большие числа. Из теоремы о промежуточном значении функция принимает все положительные значения y.

Если $y > x$, $\exp(y) = \exp(x) \cdot \exp(y - x) > \exp(x)(1 + y - x) > \exp(x) \Rightarrow$ на действительной оси функция строго монотонна.

1.23 23