Числа Гурвица

Уравнение транспозиции
для перечисления детских рисунков

вложенный граф
(граф + циклический порядок в вершинах)

Предыстория

$$\chi_G(t) = \chi_{G/e}(t) - \chi_{G/e}(t)$$

хроматич. мн-н   (число правильных раскрасок)

Мн-н Татта
(обобщим
Мн-н Боллобаша–Риордана

Были простые числа Гурвица:

$$\sigma = \tau_M \circ \dots \circ \tau_1,$$

$$\Updownarrow$$

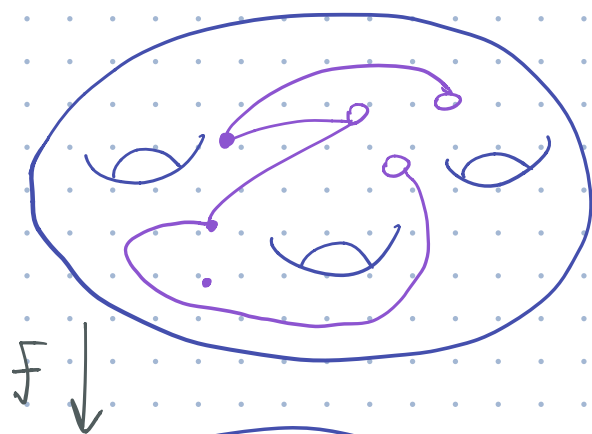$$\sigma^{-1} \circ \tau_M \circ \dots \circ \tau_1 = id$$

$$\Updownarrow$$

РАЗВЕТВЛЁННЫЕ НАКРЫТИЯ С $m+1$ ТОЧКОЙ ВЕТВЛЕНИЯ, Т.ЧТО ПРООБРАЗЫ НАД 1ОЙ ТОЧКОЙ ЭТО $(\mu_1, \dots, \mu_M)$, А ВСЕ ОСТАЛЬНЫЕ ПРООБРАЗЫ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ: $2^1 1^{n-2} = (2, 1, \dots, 1)$
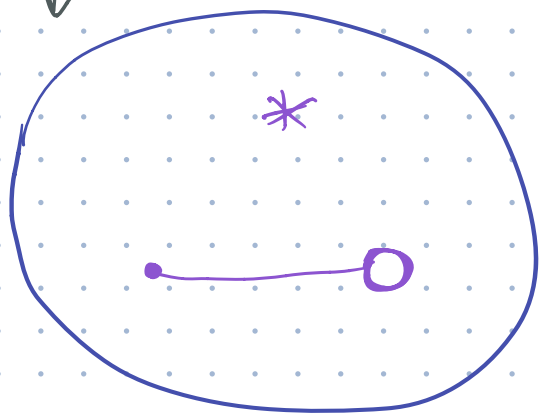
ВАРИАЦИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ГУРВИЦА

$m = 2$ τ_1, τ_2 — ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ПЕРЕСТА-
НОВКИ

$$\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = id$$

ТАКАЯ ТРОЙКА ЗАДАЁТ ДЕТСКИЙ РИСУНОК

ВЛОЖЕННЫЙ
ГРАФ В РИСУНОК

$f \downarrow$

S^2

ЧТОБЫ ВОССТАНОВИТЬ ГРАФ, НУЖНО
ЗАФИКС. 3 ПЕРЕСТАНОВКИ

$n, \mu_1, \ldots, \mu_m, \nu_1, \ldots \nu_k, \eta_1, \ldots \eta_l, g$

ФИКСИРУЕМ $\mu_1, \ldots, \mu_m$ — ПРООБРАЗЫ $*$

$k = |f^{-1}(\bullet)|$

$l = |f^{-1}(\circ)|$

$d = \mu_1 + \ldots + \mu_m$

ПО Ф-ЛЕ РИМАНА-ГУРВИЦА

$$2 - 2g = d(2-3) + k + l + m \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ РОД ПОВЕРХНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕТСЯ ОДНОЗНАЧНО

<mark>Опр.</mark> $N_{k,l}(\mu) = \sum\limits_{\Gamma}' \dfrac{1}{|Aut\,\Gamma|}$

ВСЕ ВЛОЖЕННЫЕ
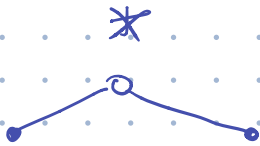ГРАФЫ ТАКОГО
ТИПА
(Т.Е. k, l ФИКС.)

ЭТО НЕКОТОРЫЕ
ЧИСЛА ГУРВИЦА

$$N_{k,l}(\mu) = \frac{1}{d!} \left\{ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = id \;\middle|\; C(\sigma_3) = \mu_1 \to \mu_m, \right.$$

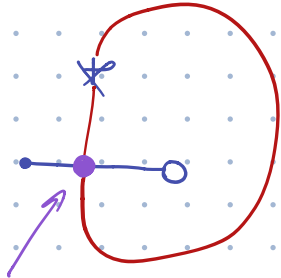$$\left. l(\sigma_2) = k, \; l(\sigma_1) = l \right\}$$

ЦИКЛИЧ.
ТИП

ДЛИНА
(ЧИСЛО ЦИКЛОВ)

ХОТИМ РАССМАТРИВАТЬ ДВОЙСТВЕННЫЙ ГРАФ

m ГРАНЕЙ
С $\mu_1, \dots, \mu_m$
РЁБРАМИ

(ПО ОПР. ИЗ
ДЕТСКИХ
РИСУНКОВ)

↗
НУЖНО ПРО
ЭТО ПОЧИТАТЬ

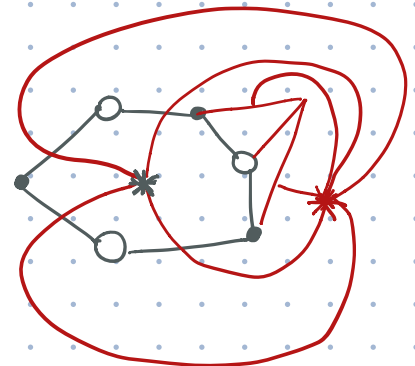НЕ ТОЧКА
ВЕТВЛЕНИЯ

(СТАВИМ ВЕРШИНЫ В ЦЕНТР ГРАНЕЙ И

СОЕДИНЯЕМ)

- ДВОЙСТВЕННЫЙ
ГРАФ

$N_{k\ell}(\mu)$

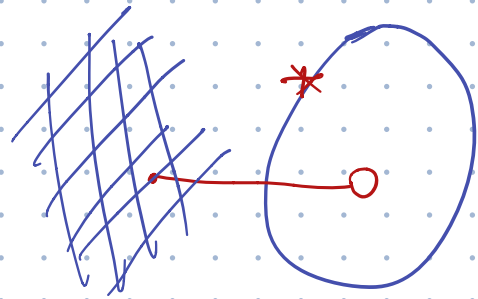$\mu = \mu_1 \dots \mu_m$ — ЦИКЛ. ТИП σ_3
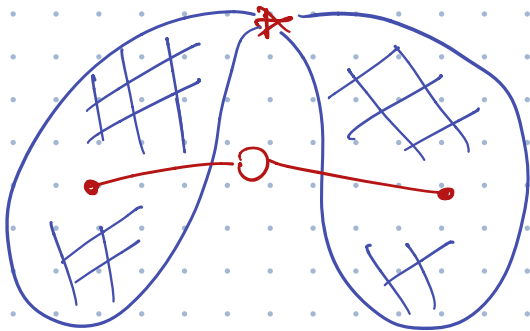
k — ЧИСЛО ЦИКЛОВ σ_2

ℓ — // — σ_1

В ДВОЙСТВЕННОМ ГРАФЕ
m ВЕРШИН, И $2\mu_1, \dots, 2\mu_m$ —
ВАЛЕНТНОСТИ ВЕРШИН

$$\mathcal{N}_1 \, N_{k\ell}(\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_m) = \sum_{j=2}^{m} (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_j - 1) \times$$

$$\times \, N_{k,\ell}\big(\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_j - 1,\ \mathcal{N}_2,\ldots,\ \hat{\mathcal{N}}_j,\ldots,\mathcal{N}_m\big) +$$

$$+ (\mathcal{N}_1 - 1)\Big(N_{k-1,\ell}(\mathcal{N}_1 - 1,\ \mathcal{N}_2,\ldots,\mathcal{N}_m) + N_{\ell-1,k}(\mathcal{N}_1 - 1,\ \mathcal{N}_2,\ldots,\mathcal{N}_m)\Big) +$$

$$+ \sum_{i+j=\mathcal{N}_1-1} ij\ \Big(N_{k,\ell}(i,j,\mathcal{N}_2,\ldots,\mathcal{N}_m) + \sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ \ell_1+\ell_2=\ell}}\ \sum_{I \sqcup J = \{2,\ldots,m\}} N_{k,\ell}(i,\mathcal{N}_I) \times$$

$$\times N_{k_2,\ell_2}(j,\mathcal{N}_I)\Big)$$

$$I = i_1,\ldots,i_k$$
$$\mathcal{N}_I = \mathcal{N}_{i_1},\ldots,\mathcal{N}_{i_k}$$

СВЯЗАНО С УРАВНЕНИЕМ ТРАНСПОЗИЦИИ