Семинар 3.

Задача 1. Даны две различные проективные прямые l и m в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и дано перспективное отображение $\bar{f} : l \xrightarrow{\sim} m$ с центром $A \notin l \cup m$. (По определению, образом произвольной точки $X \in l_1$ при отображении F является точка $Y = (AX) \cap m$.) Докажите, что $\bar{f}$ является проективным отображением.

Задача 2. Дана проективная прямая l в проективной плоскости (над полем $\mathbb{C}$), и дано проективное преобразование $F : l \xrightarrow{\sim} l$. В композицию какого минимального числа перспектив можно разложить преобразование F?

Задача 3. Сколько неподвижных точек может иметь произвольное нетождественное проективное преобразование f проективной прямой $\mathbb{P}^1$:
а) над произвольным основным полем $\mathbf{k}$,
б) над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$?
в) Ответьте на вопросы а) и б), когда f - инволюция.

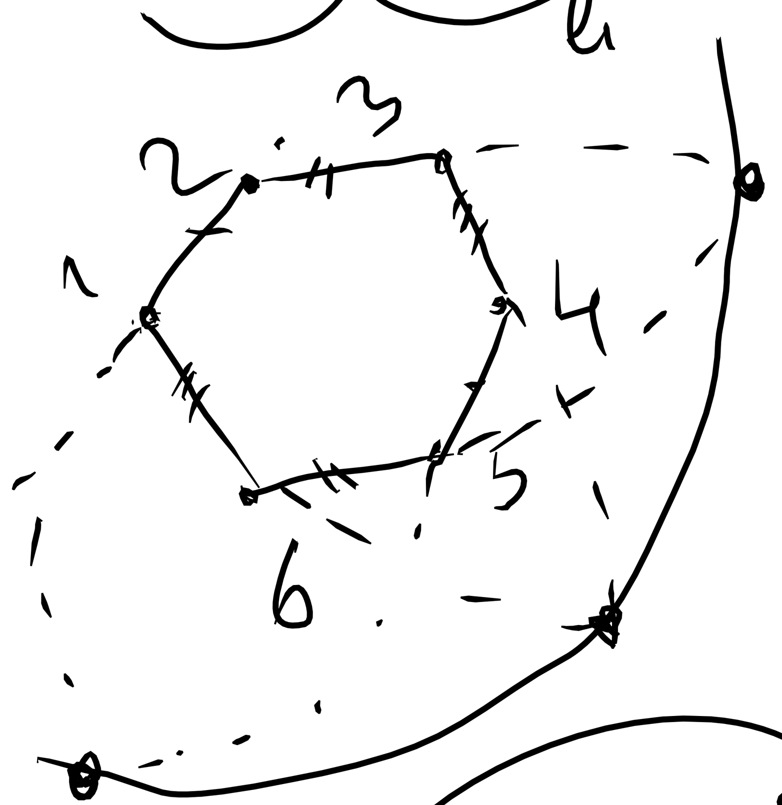
Задача 4. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ на проективной плоскости называются перспективными, если прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны. Обозначим точки пересечения соответственных прямых этих треугольников: $M = AB \cap A'B'$, $N = BC \cap B'C'$, $P = AC \cap A'C'$. Докажите теорему Дезарга, которая утверждает, что точки M, N и P коллинеарны.

Теорема Паппа

l_2

1 2 3 4 5 6

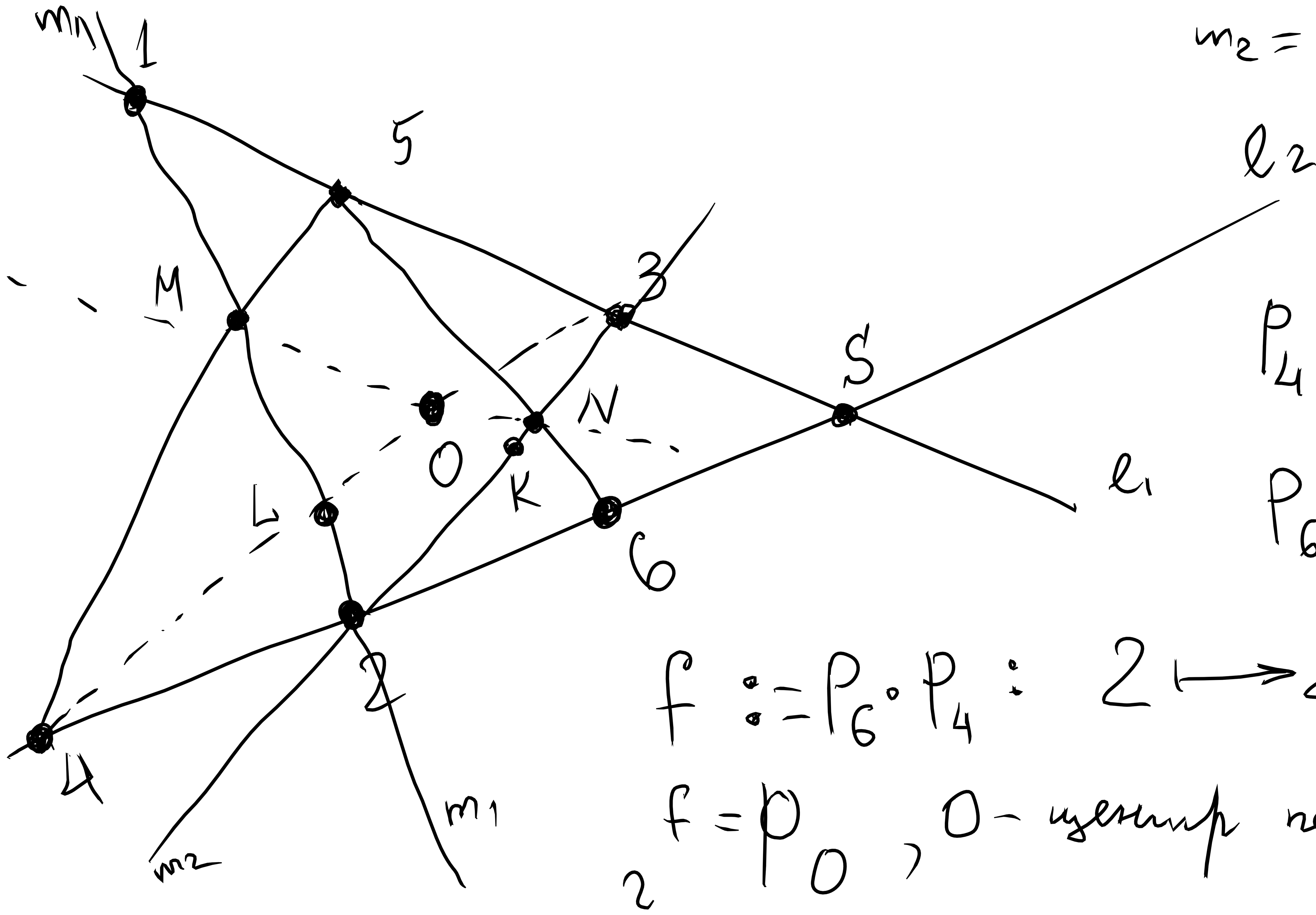
l_1



$m_1 = (1\,2)$

$m_2 = (2\,3)$

P_4 — персп. с цен. 4



$P_4 : m_1 \longrightarrow l_1$

$P_6 : l_1 \longrightarrow m_2$

$$P_4 : M \overset{P_4}{\longmapsto} 5 \overset{P_6}{\longmapsto} N \quad (f)$$

$$1 \longmapsto 1 \longmapsto K$$

$$2 \longmapsto S \longmapsto 2$$

$f := P_6 \circ P_4 : \ 2 \longmapsto 2 \Rightarrow f$ — персп

$f = P_O$, O — центр персп. f

$(34) \overset{?}{\ni} O \in (MN) \cap (1\,6)$

$f : m_1 \longrightarrow m_2$

$L \overset{?}{\longmapsto} 3$

$f(L) \doteq 3 \Longleftarrow 3 \overset{P_6}{\longmapsto} 3$

$P_4(L) = 3$

Теорема Дезарга

$\Delta ABC \overset{\text{персп.}}{\wedge} \Delta A'B'C'$

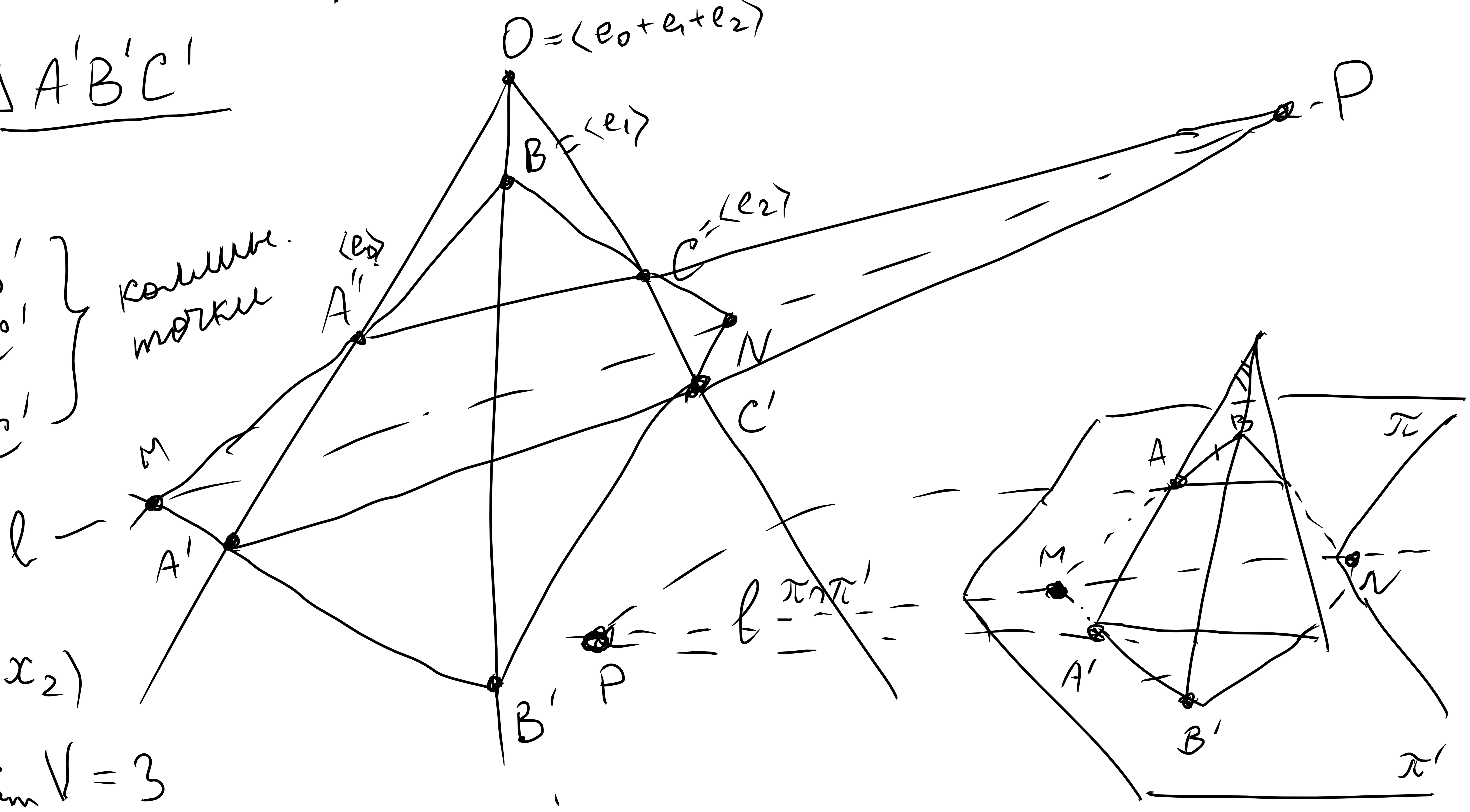
$\Updownarrow$

$M = AB \cap A'B'$

$N = BC \cap B'C'$

$P = AC \cap A'C'$

$\Big\}$ коллин. точки



$\mathbb{P}^2 \ni (x_0 : x_1 : x_2)$

$\parallel$

$\mathbb{P}(V)$ $\quad \dim V = 3$