

1) $V(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$

$V'(x) = +2e^{-x}(1 - e^{-x})$

- минимум (точка покоя):

$x = 0 \Rightarrow (0, 0)$ — особая точка
типа центр

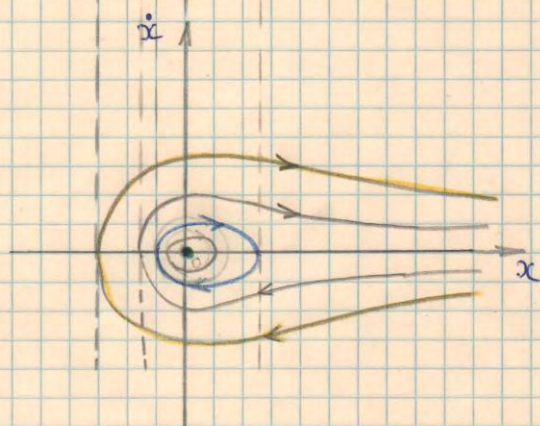
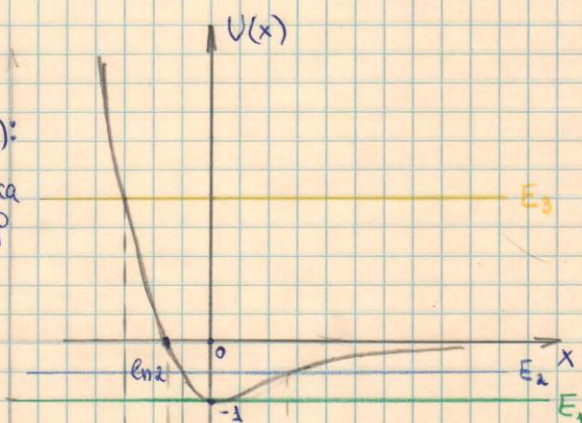
- точек максимума
(уст. равновесие) нет
 \Rightarrow нет сепаратрис.

- По 2-му сохр. энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$$

$$\begin{matrix} \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow E \geq -1$



2

- минимум (точка покоя):

$x_0 = 0$, т.е.

$(0,0)$ - особая точка
типа центр

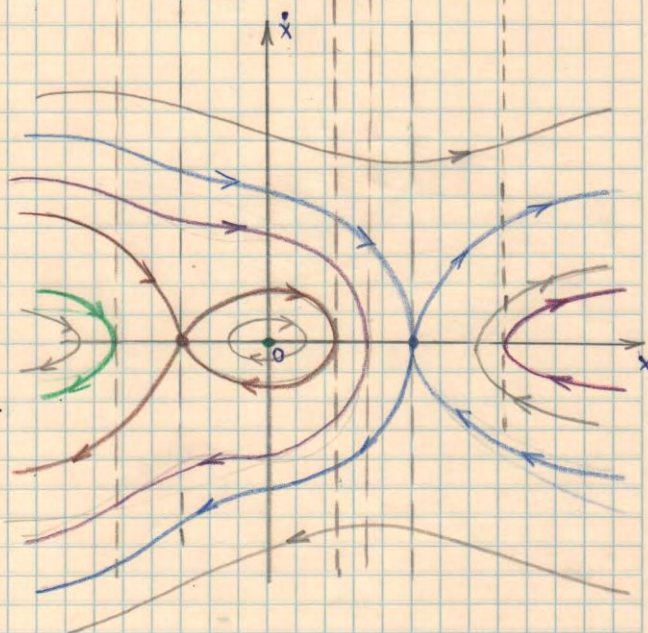
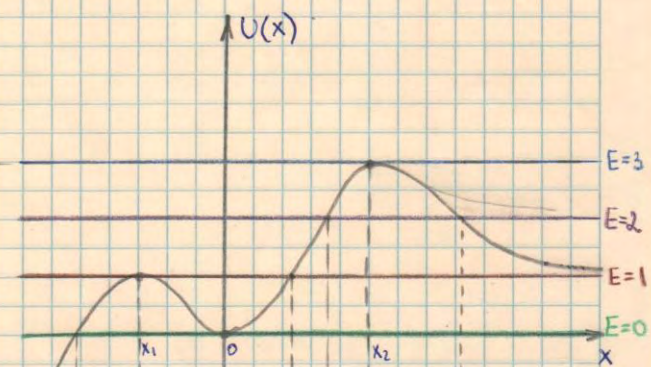
- максимумы (точки неуст. равн.):

x_1 и x_2 , т.е.

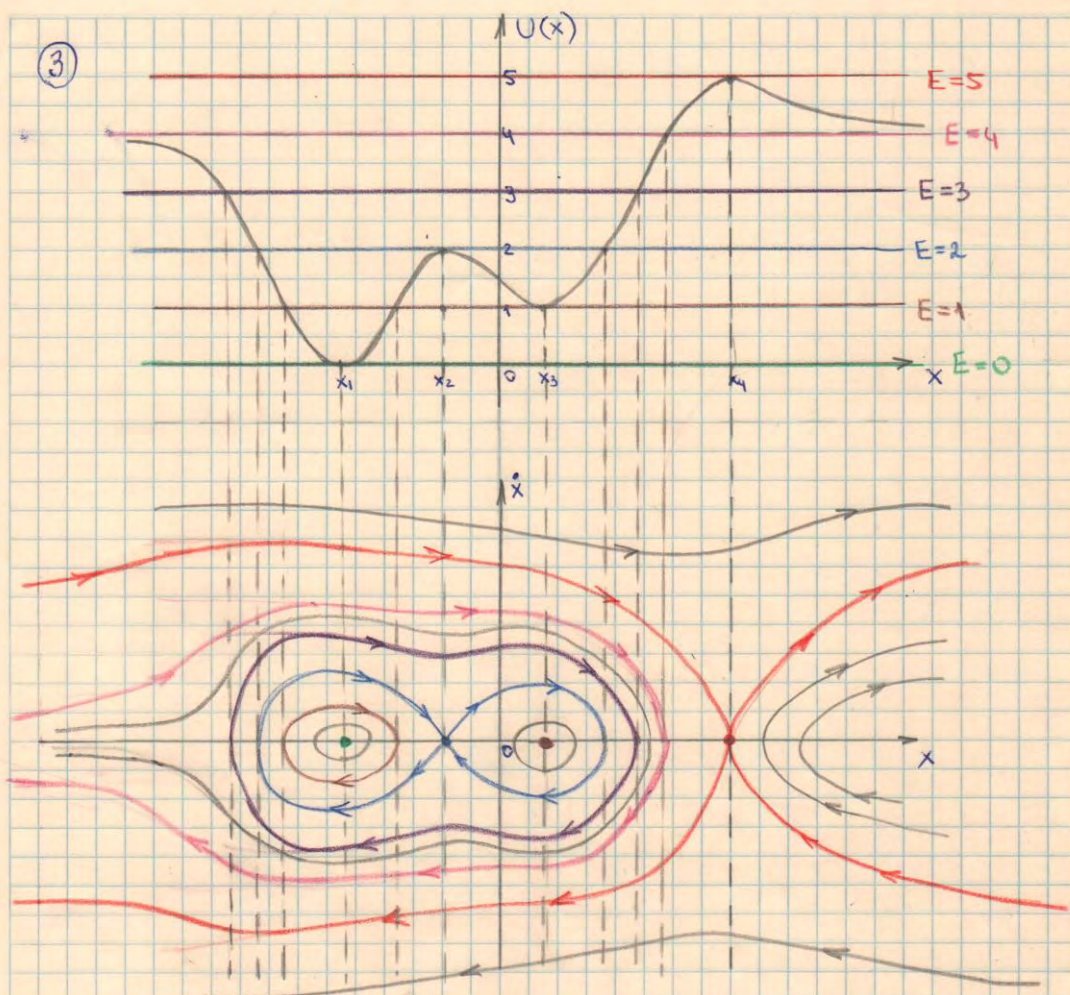
$(x_1, 0)$

$(x_2, 0)$ - особые точки
типа седло

E	# фаз. кривых
0	2
1	4
2	2
3	5

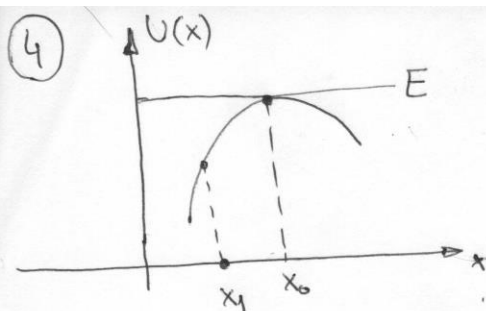


3



- минимумы (точки покоя): x_1 и x_3 , т.е.
 $(x_1, 0)$, $(x_3, 0)$ — особые точки типа центр
- максимумы (точки неуст. равновесия): x_2 и x_4 , т.е.
 $(x_2, 0)$, $(x_4, 0)$ — особые точки типа седло.

E	0	1	2	3	4	5
# фаз. кривых	1	2	3	1	1	5



$$1) \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

$$t = \int_0^t dt = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

2) Пусть x_0 - точка максимума $U(x)$.

В окрестности x_0 :

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{U''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$U(x) = E + k(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$t = \pm \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{k(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{\sqrt{k(x - x_0)^2}}}{\frac{1}{\sqrt{k(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)}}} = 1 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{k(x - x_0)^2}} \text{ и } \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{k(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)}}$$

расх-ся или расх-ся одновременно

$$\int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{k(x - x_0)^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{k}} \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{x - x_0} = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \ln(x - x_0) \Big|_{x_1 - x_0}^0 = \pm \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{интеграл } \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \text{ расх-ся} \Rightarrow$$

\Rightarrow время движения по сепаратрисе бесконечно большое.

$$\textcircled{5} \begin{cases} \dot{x} = y \\ m\dot{y} = f(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} \end{cases}$$

Площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t) \dot{y}(t) - y(t) \dot{x}(t)] dt$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[-x(t) \frac{\partial U(x)}{\partial x} \cdot \frac{1}{m} - y^2(t) \right] dt$$

По закону сохранения энергии: $\frac{my^2}{2} + U(x) = E$

$$y^2 = \frac{2(E-U)}{m}$$

$$S = \frac{1}{2m} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[-x \frac{\partial U}{\partial x} - 2E + 2U \right] dt$$

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{2m} \cdot \left(\cancel{\frac{d}{dE} \int_{t_0}^{t_0+T} -x \frac{\partial U}{\partial x} dt} - \frac{d}{dE} \int_{t_0}^{t_0+T} 2E dt + \cancel{\frac{d}{dE} \int_{t_0}^{t_0+T} 2U dt} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2m} \cdot 2 \int_{t_0}^{t_0+T} dt = -\frac{T}{m} \Rightarrow |T| = m \frac{dS}{dE}$$

$$\textcircled{6} \quad \vec{F} : \begin{aligned} F_x &= yz - x \\ F_y &= xz - dy \\ F_z &= dxy + z, \quad d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

а) $d = ?$, м.т. \vec{F} потенциальна; $U(x, y, z) = ?$

Сила \vec{F} потенциальна, если 1-форма $\omega = \sum F_i dx_i$ точна, т.е. $\omega = -dU$. Конфигурационное пр-во системы односвязно \Rightarrow по лемме Пуанкаре замкнутая форма эквив-ва точной.

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j.$$

$$\text{Надо проверить: } \begin{cases} \partial_x F_y = \partial_y F_x \\ \partial_y F_z = \partial_z F_y \\ \partial_z F_x = \partial_x F_z \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = z \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_x}{\partial y} = z$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = dx \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_y}{\partial z} = x \Leftrightarrow \boxed{d=1}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = y \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_z}{\partial x} = dy \Leftrightarrow d=1$$

$\Rightarrow \vec{F}$ потенциальна только при $d=1$.

Найдем $U(\vec{r})$, м.т. $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$.

$$\begin{cases} \partial_x U = -F_x & (1) \\ \partial_y U = -F_y & (2) \\ \partial_z U = -F_z & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow U = -\int F_z dz = -xyz - \frac{z^2}{2} + C_1(x, y)$$

$$\partial_x U = -yz + \frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} \quad (*)$$

Из (*) и (1) получаем, что $\frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} = x \Rightarrow C_1(x,y) = \frac{x^2}{2} + C_2(y)$.

Тогда $U = -xyz - \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} + C_2(y)$.

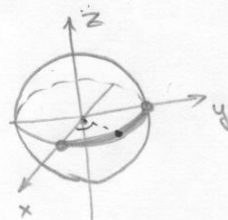
$$\partial_y U = -xz + \frac{\partial C_2(y)}{\partial y} \quad (**)$$

Из (**) и (2) получаем, что $\frac{\partial C_2}{\partial y} = y \Rightarrow C_2(y) = \frac{y^2}{2} + C_3$.

Значит, $U = -xyz - \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C_3$.

Ответ: $d=1$; $U(x,y,z) = -xyz - \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C_3$.

б) 1) γ_1 - дуга окр-ти $x^2+y^2=1, z=0$, заключенная между $M_1(1,0,0)$ и $M_2(0,1,0)$.



В сферических координатах:

$$\vec{r}_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \text{ где } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$d\vec{r}_1 = (-\sin \varphi d\varphi, \cos \varphi d\varphi, 0)$$

$$\begin{aligned} A_{\gamma_1} &= \int_{\gamma_1} (\vec{F}, d\vec{r}_1) = \int_0^{\pi/2} ((yz-x)(-\sin \varphi) + (xz-2y)\cos \varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi (1-2) d\varphi = \frac{1}{2}(1-2) \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1-2}{2} \end{aligned}$$

2) $\gamma_2: x^2+y^2=1, z=\frac{2\varphi}{\pi}$ между $M_1(1,0,0)$ и $M_2(0,1,1)$.

В сферических координатах:

$$\vec{r}_2 = (\cos \varphi, \sin \varphi, \frac{2\varphi}{\pi}), \text{ где } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$d\vec{r}_2 = (-\sin \varphi d\varphi, \cos \varphi d\varphi, \frac{2}{\pi} d\varphi)$$

$$\begin{aligned} A_{\gamma_2} &= \int_{\gamma_2} (\vec{F}, d\vec{r}_2) = \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{2\varphi}{\pi} \sin \varphi - \cos \varphi \right) (-\sin \varphi) + \left(\frac{2\varphi}{\pi} \cos \varphi - 2 \sin \varphi \right) \cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{2\varphi}{\pi} \right) \frac{2}{\pi} \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\sin \varphi \cos \varphi \left(1 - 2 + \frac{2d}{\pi} \right) + \frac{2\varphi}{\pi} (-\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \frac{4\varphi}{\pi^2} \right] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - 2 + \frac{2d}{\pi} \right) \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi \cos 2\varphi d\varphi + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - 2 + \frac{2d}{\pi} \right) + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\varphi^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi \cos 2\varphi d\varphi$$

$$\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \varphi \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \varphi \rightarrow du = d\varphi \\ dv = \cos 2\varphi d\varphi \rightarrow v = \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \varphi \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \pi - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

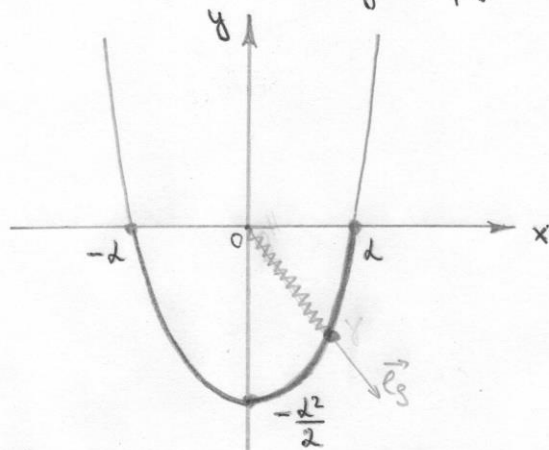
$$A_{x_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) = 2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + 1 - \frac{1}{\pi}$$

Ombem: $A_{x_1} = \frac{1-d}{2}$; $A_{x_2} = 2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + 1 - \frac{1}{\pi}$.

⑦ \mathbb{R}^2 $y = \frac{x^2 - d^2}{2}$

$$\vec{F} = -k g \vec{e}_g, \quad g = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad k > 0$$

$A_\gamma = ?$ при перемещ. из точки с абсциссой $x=0$,
в точку с ординатой $y=0$



$$\vec{r} = (x, \frac{x^2 - d^2}{2}), \quad x \in [0, d]. \Rightarrow d\vec{r} = (dx, x dx)$$

$$\vec{e}_g = (\frac{x}{g}, \frac{y}{g}) \Rightarrow \vec{F} = -k(x, y)$$

$$A_\gamma = \int_\gamma (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_0^d (-kx - kxy) dx = -k \int_0^d (x + x \frac{x^2 - d^2}{2}) dx =$$

$$= -k(1 - \frac{d^2}{2}) \int_0^d x dx - k \int_0^d \frac{x^3}{2} dx = -k(1 - \frac{d^2}{2}) \frac{d^2}{2} -$$

$$- \frac{k}{2} \frac{d^4}{4} = -k \frac{d^2}{2} + \frac{k d^4}{4} - \frac{k d^4}{8} = -k \frac{d^2}{2} + \frac{k d^4}{8} =$$

$$= k \frac{d^2}{2} (\frac{d^2}{4} - 1) \quad (\text{Заметим, что } \int_0^d (-kx - kxy) dx = \int_{-d}^0 (-kx - kxy) dx)$$

Ответ: $A_\gamma = k \frac{d^2}{2} (\frac{d^2}{4} - 1).$

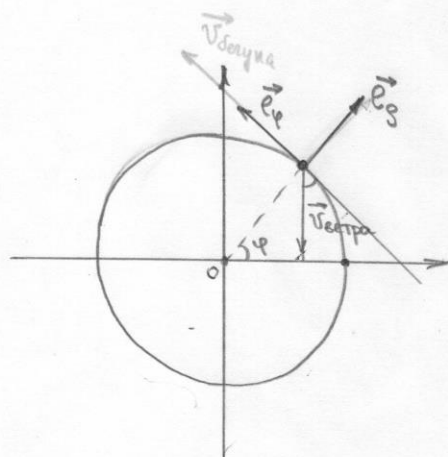
8) R-радиус крива.

$$|\vec{v}_{\text{дегуна}}| = v$$

$$|\vec{v}_{\text{демпа}}| = dt^2, \quad d = \text{const} > 0.$$

$$\vec{F}_{\text{конп}} = -k\vec{v}_{\text{ому}}$$

$$A_{\text{окр}} \rightarrow \min, \quad v = ?$$



$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{ому}} &= \vec{v}_{\text{дегуна}} - \vec{v}_{\text{демпа}} = (0, v) - (-dt^2 \sin \varphi, -dt^2 \cos \varphi) = \\ &= (dt^2 \sin \varphi, v + dt^2 \cos \varphi). \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{r}} = (0, v) \Rightarrow d\vec{r} = (0, v dt)$$

Поскольку дегуна крива крива за время T.

$$A_{\text{окр}} = \int_{\text{окр}} (\vec{F}_{\text{конп}}, d\vec{r}) = -k \int_0^T (v + dt^2 \cos \varphi) v dt$$

$$t = \frac{\varphi R}{v} \Rightarrow dt = \frac{R}{v} d\varphi. \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{окр}} &= -k \int_0^{2\pi} (v + d \frac{\varphi^2 R^2}{v^2} \cos \varphi) \cancel{v} \cdot \frac{R}{\cancel{v}} d\varphi = -k R v \int_0^{2\pi} d\varphi - \\ &- k R^3 \frac{d}{v^2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos \varphi d\varphi = -k R v 2\pi - k R^3 \frac{d}{v^2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos \varphi d\varphi = \\ \int \varphi^2 \cos \varphi d\varphi &= \int \varphi^2 d \sin \varphi = \varphi^2 \sin \varphi - 2 \int \sin \varphi \cdot \varphi d\varphi = \\ &= \varphi^2 \sin \varphi + 2 \int \varphi d \cos \varphi = \varphi^2 \sin \varphi + 2 \varphi \cos \varphi - 2 \int \cos \varphi d\varphi = \\ &= \varphi^2 \sin \varphi + 2 \varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi + C \\ \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos \varphi d\varphi &= 2 \cdot 2\pi = 4\pi \end{aligned}$$

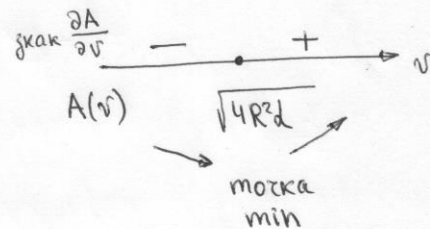
$$A_{\text{окр}} = -2k R v \pi - \frac{4k R^3 d \pi}{v^2}$$

По условию $A_{\text{зерна}} = -A_{\text{кр}}$.

$$\frac{\partial A_{\text{зерна}}}{\partial v} = 2kR\pi - \frac{8kR^3d\pi}{v^3} = 0$$

$$2kR\pi \left(1 - \frac{4R^2d}{v^3}\right) = 0$$

$$\frac{4R^2d}{v^3} = 1 \Rightarrow v = \sqrt[3]{4R^2d}$$



Ответ: $v = \sqrt[3]{4R^2d}$.

9) m - масса бусинки.

ω - угловая скорость стержня.

$g(0) = a$ - положение бусинки при $t=0$.

$$g'(0) = 0.$$

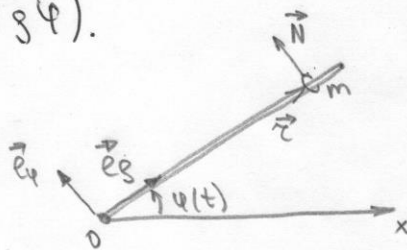
а) $N(t) = ?$ $A_N = ?$ (за время T)

$$\vec{r} = g \vec{e}_g \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{g} \vec{e}_g + g \dot{\psi} \vec{e}_\psi \Rightarrow \boxed{d\vec{r} = (\dot{g} dt, g \omega dt)}.$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{g} \vec{e}_g + \dot{g} \dot{\psi} \vec{e}_\psi + \dot{g} \dot{\psi} \vec{e}_\psi + g \ddot{\psi} \vec{e}_\psi - g \dot{\psi}^2 \vec{e}_g = \\ &= \vec{e}_g (\ddot{g} - g \dot{\psi}^2) + \vec{e}_\psi (2 \dot{g} \dot{\psi} + g \ddot{\psi}). \end{aligned}$$

По II закону Ньютона:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{N}$$



В полярных координатах

$$\vec{e}_g: m(\ddot{g} - g \dot{\psi}^2) = 0 \rightarrow \ddot{g} - g \dot{\psi}^2 = 0$$

$$\vec{e}_\psi: m(2 \dot{g} \dot{\psi} + g \ddot{\psi}) = 0$$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} \ddot{g} - g \dot{\psi}^2 = 0. \\ \dot{g}(0) = 0 \\ g(0) = a \end{cases}$$

$$\lambda^2 - \dot{\psi}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \dot{\psi} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y_1(t) &= e^{\dot{\psi} t} = e^{\omega t} \\ y_2(t) &= e^{-\dot{\psi} t} = e^{-\omega t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

$$g(0) = c_1 + c_2 = a$$

$$\dot{g}(0) = \omega c_1 e^{\omega t} \Big|_{t=0} + c_2 (-\omega) e^{-\omega t} \Big|_{t=0} = \omega(c_1 - c_2) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{g(t) = \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t})}$$

$$\dot{g}(t) = \frac{a}{2} \omega (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

$$\text{Значит, } \boxed{\vec{N} = (0, m a \omega^2 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}))}$$

$$\begin{aligned}
 A\vec{N} &= \int_0^T (\vec{N}, d\vec{z}) = \int_0^T m a \omega^2 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \omega dt = \\
 &= \frac{m a^2 \omega^3}{2} \int_0^T (e^{2\omega t} - e^{-2\omega t}) dt = \frac{m a^2 \omega^3}{2} \left(\frac{e^{2\omega t}}{2\omega} \Big|_0^T - \frac{e^{-2\omega t}}{-2\omega} \Big|_0^T \right) = \\
 &= \frac{m a^2 \omega^3}{2} \left(\frac{e^{2\omega T}}{2\omega} - \frac{1}{2\omega} + \frac{e^{-2\omega T}}{2\omega} - \frac{1}{2\omega} \right) = \frac{m a^2 \omega^2}{2} \left(\frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} - 1 \right) \\
 \Rightarrow A\vec{N} &= \frac{m a^2 \omega^2}{2} \left(\frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

б) $\Delta T_{\text{кин}}$ за време $T = ?$

$$\Delta T_{\text{кин}} = T_{\text{кин}}(T) - T_{\text{кин}}(0)$$

$$T_{\text{кин}}(T) = \frac{m \vec{v}^2}{2} = \frac{m}{2} (\vec{e}_g \cdot \dot{\vec{g}} + \vec{e}_\varphi \omega \dot{\varphi})^2 = \frac{m}{2} (\dot{g}^2 + (\omega \dot{\varphi})^2) =$$

$$= \frac{m}{2} \left(\frac{a^2 \omega^2}{4} (e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} - 2) + \omega^2 \frac{a^2}{4} (e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} + 2) \right) =$$

$$= \frac{m a^2 \omega^2}{8} (2e^{2\omega T} + 2e^{-2\omega T}) = \frac{m a^2 \omega^2}{4} (e^{2\omega T} + e^{-2\omega T})$$

$$T_{\text{кин}}(0) = \frac{m}{2} (\vec{e}_g \dot{\vec{g}}(0) + \vec{e}_\varphi \omega \dot{\varphi}(0))^2 = \frac{m \omega^2 a^2}{2}$$

$$\Delta T_{\text{кин}} = \frac{m a^2 \omega^2}{4} (e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} - 2) = \frac{m a^2 \omega^2}{2} \left(\frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta T_{\text{кин}} = A\vec{N}}$$

Объём: а) $N(t) = m a \omega^2 (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$

$$A\vec{N}(T) = \frac{m a^2 \omega^2}{2} \left(\frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} - 1 \right)$$

б) $\Delta T_{\text{кин}}(T) = A\vec{N}(T).$