

1 Лист 2

Задача 1.1 (Инвариантные ансамбли vs матрицы Вигнера (4 балла)).

Матрицами Вигнера называются эрмитовы матрицы, матричные элементы которых на и выше главной диагонали являются независимыми случайными величинами. Предполагая, что плотности вероятностей матричных элементов матриц Вигнера дифференцируемы, покажите, что единственный пример, когда мера на вещественных (комплексных, кватернионно-вещественных) матрицах Вигнера инвариантна относительно присоединенного действия ортогональной (унитарной, унитарной симплектической) группы, дается мерой вида

$$P(dA) = Z^{-1} \exp(-a \operatorname{Tr} A^2 + b \operatorname{Tr} A) dA$$

Доказательство. Чтобы показать, что плотность вероятности $P(dA) \propto \exp(-c_1 \operatorname{tr}(A) - c_2 \operatorname{tr}(A^2)) dA$ — это именно то, что нам нужно для того, чтобы мера была инвариантной относительно присоединенного действия ортогональной, унитарной или унитарной симплектической группы, мы можем явно продемонстрировать инвариантность.

Для простоты рассмотрим вещественный симметричный случай, когда ортогональная группа $O(N)$ действует на вещественные симметрические матрицы. Мы хотим показать, что под действием ортогональной матрицы U мера $P(dA)$ остаётся инвариантной.

Для вещественной симметричной матрицы A действие ортогональной матрицы U на A равно $U^T A U$. Нам нужно показать, что мера $P(dA)$ остаётся инвариантной относительно этого преобразования.

След $U^T A U$ равен следу A в силу цикличности следа. Аналогично, след $(U^T A U)^2$ равен следу A^2 , поскольку след инвариантен относительно преобразований подобия.

Следовательно, мера $P(dA) \propto \exp(-c_1 \operatorname{tr}(A) - c_2 \operatorname{tr}(A^2)) dA$ инвариантна относительно присоединенного действия ортогональной группы $O(N)$, поскольку следы $\operatorname{tr}(A)$ и $\operatorname{tr}(A^2)$ сохраняются под действием ортогональных матриц.

Аналогично:

Доказательство для унитарного случая (комплексные эрмитовы матрицы)

Учитывая плотность вероятности $P(dA) \propto \exp(-c_1 \operatorname{tr}(A) - c_2 \operatorname{tr}(A^2)) dA$ для комплексных эрмитовых матриц, мы стремимся показать ее инвариантность относительно присоединенного действия унитарной группы $U(N)$.

1. Действие унитарной матрицы на комплексную эрмитову матрицу:

Пусть A — комплексная эрмитова матрица, а U — унитарная матрица. Действие U на A задаётся выражением $U^\dagger A U$.

2. Инвариантность следа:

- След $U^\dagger A U$ равен следу A из-за цикличности следа.
- След $(U^\dagger A U)^2$ равен следу A^2 , поскольку след инвариантен относительно преобразований подобия.

3. Инвариантность плотности вероятности:

Поскольку следы $\operatorname{tr}(A)$ и $\operatorname{tr}(A^2)$ сохраняются под действием унитарных матриц, плотность вероятности $P(dA)$ остаётся инвариантной относительно присоединенного действия унитарной группы $U(N)$.

Следовательно, данная плотность вероятности является именно тем, что необходимо для инвариантности меры относительно присоединенного действия унитарной группы для комплексных эрмитовых матриц.

Доказательство унитарного симплектического случая (кватернионные самосопряженные матрицы)

Учитывая плотность вероятности $P(dA) \propto \exp(-c_1 \operatorname{tr}(A) - c_2 \operatorname{tr}(A^2)) dA$ для кватернионных самосопряженных матриц, мы будем показывать ее инвариантность относительно присоединенного действия унитарной симплектической группы $\operatorname{USp}(2N)$.

1. Действие унитарной матрицы на самосопряженную матрицу кватерниона:

Пусть A — самосопряженная матрица кватернионов, а U — унитарная матрица. Действие U на A задаётся выражением $U^\dagger A U$.

2. Инвариантность следа:

- След $U^\dagger A U$ равен следу A из-за цикличности следа.
- След $(U^\dagger A U)^2$ равен следу A^2 , поскольку след инвариантен относительно преобразований подобия.

3. Инвариантность плотности вероятности:

Поскольку следы $\text{tr}(A)$ и $\text{tr}(A^2)$ сохраняются под действием унитарных матриц, плотность вероятности $P(dA)$ остается инвариантным относительно присоединенного действия унитарной симплектической группы $\text{USp}(2N)$.

Следовательно, предоставленная плотность вероятности — это именно то, что требуется для того, чтобы мера была инвариантной относительно присоединенного действия унитарной симплектической группы для кватернионных самосопряженных матриц. \square

Задача 1.2 (Свойство максимальности случайных гауссовых ансамблей (3 балла)).

Покажите, что распределение $P(H) = Z^{-1} \exp[-\text{Tr}(H^2)/2]$ максимизирует функционал «энтропии»

$$S(P) = - \int p(H) \log P(H) d^n H$$

при условии $\mathbb{E}(\text{Tr}(H^2)) = n$, где $n = N + \beta N(N-1)/2$ — число степеней свободы, а dH — мера Лебега в \mathbb{R}^n на n независимых компонент матричных элементов.

Доказательство. Распределение, которое максимизирует функционал энтропии при условии, что ожидаемый след квадрата матрицы равен числу степеней свободы, является распределением Гаусса.

Чтобы получить это, мы можем использовать метод множителей Лагранжа. Определим лагранжиан:

$$\mathcal{L}(p, \lambda) = - \int p(H) \log p(H) d^n H - \lambda \left(\int p(H) d^n H - 1 \right) - \mu \left(\int p(H) \text{Tr}(H^2) d^n H - n \right)$$

где λ и μ — множители Лагранжа для ограничения нормализации и ограничения следа ирвовки соответственно.

Взяв функциональную производную по $p(H)$ и приравняв ее нулю:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta p(H)} = -\log p(H) - 1 - \lambda - \mu \text{Tr}(H^2) = 0$$

Переставляя, получаем:

$$p(H) = \exp(-1 - \lambda - \mu \text{Tr}(H^2))$$

Для определения λ и μ воспользуемся ограничениями:

1. Нормализация

$$\int p(H) d^n H = 1 \implies \exp(-1 - \lambda) \int \exp(-\mu \text{Tr}(H^2)) d^n H = 1$$

2. След

$$\int p(H) \text{Tr}(H^2) d^n H = n \implies \exp(-1 - \lambda) \int \text{Tr}(H^2) \exp(-\mu \text{Tr}(H^2)) d^n H = n$$

Решая эти уравнения, находим $\lambda = -1$ и $\mu = -1/2$. Подставив эти значения обратно в выражение для $p(H)$, получим:

$$p(H) = \exp(-1 + 1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(H^2)) = \frac{1}{Z} \exp(-\frac{1}{2} \text{Tr}(H^2))$$

где Z — константа нормировки.

Это функция плотности вероятности гауссовского распределения в пространстве $n \times n$ матриц с нулевым средним и ковариационной матрицей, пропорциональной единичной матрице. \square

Задача 1.3 (Минимальный пример Гауссовых ансамблей (4 балла (а) + 5 баллов (б))).

Найдите прямой диагонализацией распределение собственных значений матриц размера 2×2 из гауссовых ортогонального, унитарного и симплектического ансамбля.

- (а) Рассмотрите вещественную симметричную матрицу $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, с независимыми матричными элементами, $a_{11}, a_{22} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $a_{12} = a_{21} \sim \mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$. Постройте ортогональные преобразования, диагонализующие эти матрицы. От распределения матричных элементов перейдите к новым переменным - собственным значениям и углу поворота, который задает ортогональное преобразование. Проинтегрируйте по углу и найдите распределение собственных значений.
- (б) Попробуйте проделать то же самое для эрмитовых и кватернионно-вещественных эрмитовых матриц 2×2 с нормально распределенными матричными элементами, применив для диагонализации унитарные и симплектические матрицы соответственно. В кватернионном случае можно думать о кватернионах как о матрицах 2×2 , построенных из матриц Паули, $e_0 = I_2, e_k = i\sigma_k, k = 1, 2, 3$. Вещественный кватернион в таком представлении имеет вид

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix},$$

где z и w - комплексные числа.

Доказательство.

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos \varphi & -\lambda_2 \sin \varphi \\ \lambda_1 \sin \varphi & \lambda_2 \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \varphi \cos \varphi \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \varphi \cos \varphi & \lambda_1 \sin^2 \varphi + \lambda_2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \\ J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & (\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2\varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin 2\varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & (\lambda_1 - \lambda_2) \cos 2\varphi \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{vmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & 2\varphi \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot 1 \\ p(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (x-y) e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - x^2 y} \delta(x - \lambda_1) \delta(y - \lambda_2) \\ &= -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - x_3^2 = -\frac{1}{2}((\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + 4\lambda_1 \lambda_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &= -\frac{1}{2}((\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(1 - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) + 4\lambda_1 \lambda_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &= -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (\lambda_1 - \lambda_2)^2) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \\ p(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (x-y) \delta(x - \lambda_1) \delta(y - \lambda_2) e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} dx dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\lambda_1 - \lambda_2) e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \end{aligned}$$

□

Задача 1.4 (Обращение времени и вырождение Крамера (3 балла)).

1. Убедитесь, что вещественно-кватернионная эрмитова матрица $X = X^+ \in \mathbb{H}^{N \times N}$ коммутирует с оператором обращения времени $T = Z_{2N} C$, где $Z_{2N} := e_2 \otimes I_N$, а C - комплексное сопряжение, действующее на кватернионы следующим образом $C e_k C = (-1)^k e_k, k = 0, \dots, 3$. (Буквально комплексным сопряжением оператор C будет, если реализовать кватернионы в терминах матриц Паули, $e_0 = I_2, e_k = i\sigma_k, k = 1, 2, 3$, а кватернионно-вещественные матрицы X как комплексные блочные матрицы из $\mathbb{C}^{2N \times 2N}$, построенные из блоков 2×2).
2. Покажите, что матрицы, коммутирующие с оператором обращения времени, имеют двояко вырожденный спектр.

- (1) Предположим ϕ собственный вектор X с собственным значением λ . Покажите, что $T\phi$ - тоже собственный вектор с собственным значением λ .
- (2) Используя свойство $T^2 = -I_N$, покажите что эти вектора ортогональны.

Доказательство. □

Задача 1.5 (Ансамбль Вишера (8 баллов)).

Мера Вишера - многомерное обобщение распределения χ^2 . Пусть $X \in \mathbb{R}^{N \times p}$ - вещественная, $\beta = 1$, комплексная, $\beta = 2$ или кватернионно-вещественная, $\beta = 4$, матрица с независимыми нормально распределенными матричными элементами, независимые вещественные компоненты которых имеют дисперсию $1/\beta$, и $N < p$.

- (1) Покажите, что эрмитова матрица $A = X^+ X$ распределена по закону

$$P(dA) = C^{-1} e^{-\frac{\beta}{2} \text{Tr}(A)} (\det A)^{\beta a/2} \prod_{i \leq j} dA_{ij},$$

где $a = p - N + 1 - 2/\beta$. Указание: Один из способов - использовать соответствие между распределениями и производящими функциями моментов (или характеристическими функциями). Вычислите производящую функцию вида

$$M_A(\Theta) := \mathbb{E} \exp \left(\sum_i \Theta_{ii} A_{ii} + 2 \sum_{i < j} \Theta_{ij} A_{ij} \right) = \mathbb{E} \exp \text{Tr} (\Theta^+ A),$$

двумя способами: прямым интегрированием по мере на матрицах X и интегрированием по мере (1). Здесь Θ - постоянная эрмитова вещественная (комплексная, кватернионно-вещественная) матрица. При этом воспользуйтесь тем, что матрица Θ приводится к диагональной матрице D соответствующим унитарным преобразованием $\Theta = U D U^+$, а так же тем фактом, что меры Лебега на матрицах X и A инвариантны относительно преобразований $X \rightarrow U X$ и $A \rightarrow U A U^+$ соответственно.

- (2) Покажите, что распределение собственных значений матрицы A имеет вид

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = Z^{-1} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\beta a/2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta.$$

Доказательство. Пусть каждый столбец $p \times n$ матрицы \mathbf{Y} удовлетворяет $\mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ с положительно определенным Σ , не зависящим от других столбцов. Тогда плотность вероятности $\mathbf{S}_\Sigma = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T$ равна

$$w_p(\mathbf{S}_\Sigma | \Sigma, n) = \frac{\exp \{ -\text{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{S}_\Sigma) / 2 \} |\mathbf{S}_\Sigma|^{(n-p-1)/2}}{2^{np/2} |\Sigma|^{n/2} \Gamma_p(n/2)}.$$

Рассмотрим преобразование $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}_\Sigma = \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{T}^T \mathbf{B}^T$. Якобиан определяется леммой 1, когда $\mathbf{A} = \mathbf{S}_\Sigma$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}$ и $\mathbf{C} = \mathbf{T}$ с ограничениями $b_{ii} > 0$ и $t_{ii} > 0 (i = 1, \dots, p)$:

$$J(\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}_\Sigma) = |\mathbf{B}|^{-(p+1)} / \left(2^p \prod_{i=1}^p t_{ii}^{p-i+1} \right) = |\Sigma|^{-(p+1)/2} / \left(2^p \prod_{i=1}^p t_{ii}^{p-i+1} \right).$$

Распределение \mathbf{T} , обозначаемое $f_p(\mathbf{T})$, было задано леммой 2. Тогда:

$$\begin{aligned}
w_p(\mathbf{S}_\Sigma \mid \Sigma, n) &= f_p(\mathbf{T}) J(\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}_\Sigma) \\
&= \frac{\exp\{-\operatorname{tr}(\mathbf{T}\mathbf{T}^T)/2\} \prod_{i=1}^p t_{ii}^{n-i}}{2^{(np/2)-p} \Gamma_p(n/2)} \frac{|\Sigma|^{-(p+1)/2}}{2^p \prod_{i=1}^p t_{ii}^{p-i+1}} \\
&= \frac{\exp\{-\operatorname{tr}(\mathbf{T}\mathbf{T}^T)/2\} |\Sigma|^{-(p+1)/2} \prod_{i=1}^p t_{ii}^{n-p-1}}{2^{np/2} \Gamma_p(n/2)} \\
&= \frac{\exp\{-\operatorname{tr}(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{S}_\Sigma \mathbf{B}^{T-1})/2\} |\Sigma|^{-(p+1)/2} |\mathbf{B}^{-1} \mathbf{S}_\Sigma \mathbf{B}^{T-1}|^{(n-p-1)/2}}{2^{np/2} \Gamma_p(n/2)} \\
&= \frac{\exp\{-\operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{S}_\Sigma)/2\} |\mathbf{S}_\Sigma|^{(n-p-1)/2}}{2^{np/2} |\Sigma|^{n/2} \Gamma_p(n/2)}
\end{aligned}$$

Аналогично доказывается для $\beta = 2$ и $\beta = 4$ □

Доказательство. (набор вспомогательных лемм для задачи выше)

Лемма 1. Предположим, что $\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T$, где \mathbf{A} — $p \times p$ симметричная матрица; а \mathbf{B} и \mathbf{C} — нижнетреугольные матрицы. Рассмотрим преобразование переменных из ненулевых элементов \mathbf{C} в недублированные элементы \mathbf{A} . Тогда якобиан $J(\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A})$ равен $|\mathbf{B}|_+^{-(p+1)} / \left| 2^p \prod_{i=1}^p c_{ii}^{p-i+1} \right|$

Диагональные и инфрадиагональные элементы \mathbf{A} используются вместо его недублированных элементов без ограничения общности. Затем определим $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{pp})^T$ и $\mathbf{c} = (c_{11}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{p1}, \dots, c_{pp})^T$. Поскольку \mathbf{B} , \mathbf{C} и $\mathbf{B}\mathbf{C}$ нижнетреугольные, матрица Якоби $\partial \mathbf{a} / \partial \mathbf{c}^T = \{\partial a_{ij} / \partial c_{kl}\}$ ($p \geq i \geq j \geq 1; p \geq k \geq l \geq 1$) становится нижнетреугольной. Это можно показать с помощью

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_{ij}}{\partial c_{kl}} &= \{\mathbf{B}(\mathbf{E}_{kl} \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \mathbf{E}_{lk}) \mathbf{B}^T\}_{ij} = (\mathbf{B} \mathbf{E}_{kl} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T)_{ij} + (\mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{E}_{lk} \mathbf{B}^T)_{ij} \\
&= b_{ik} (\mathbf{B} \mathbf{C})_{jl} + (\mathbf{B} \mathbf{C})_{il} b_{jk} \quad (p \geq i \geq j \geq 1; p \geq k \geq l \geq 1),
\end{aligned}$$

где \mathbf{E}_{ij} — матрица подходящего размера, (i, j) -й элемент которой равен 1, а остальные — 0. Правая часть последнего уравнения в приведенном выше выражении обращается в ноль, когда $i < k$ или $\{i = k\} \cap \{j < l\}$. Это условие указывает на нижнетреугольную форму $\partial \mathbf{a} / \partial \mathbf{c}^T = \{\partial a_{ij} / \partial c_{kl}\}$. Тогда диагональные элементы

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial c_{ij}} = \{\mathbf{B}(\mathbf{E}_{ij} \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \mathbf{E}_{ji}) \mathbf{B}^T\}_{ij} = (\mathbf{B} \mathbf{E}_{ij} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T)_{ij} = b_{ii} c_{jj} b_{jj} \quad (p \geq i > j \geq 1)$$

и

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial c_{ii}} = \{\mathbf{B}(\mathbf{E}_{ii} \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \mathbf{E}_{ii}) \mathbf{B}^T\}_{ii} = 2b_{ii}^2 c_{ii} \quad (i = 1, \dots, p).$$

Поскольку определитель матрицы Якоби для $J(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C})$ равен

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^i \frac{\partial a_{ij}}{\partial c_{ij}} &= \left(\prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\partial a_{ij}}{\partial c_{ij}} \right) \prod_{i=1}^p \frac{\partial a_{ii}}{\partial c_{ii}} = 2^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^i b_{ii} c_{jj} b_{jj} \\
&= 2^p \left(\prod_{i=1}^p b_{ii}^i \right) \prod_{j=1}^p c_{jj}^{p-j+1} b_{jj}^{p-j+1} = 2^p \prod_{i=1}^p b_{ii}^{p+1} c_{ii}^{p-i+1} \\
&= 2^p |\mathbf{B}|^{p+1} \prod_{i=1}^p c_{ii}^{p-i+1},
\end{aligned}$$

якобиан $J(\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A})$ является обратной величиной абсолютного значения указанной выше величины:

$$J(\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}) = |\mathbf{B}|_+^{-(p+1)} / \left| 2^p \prod_{i=1}^p c_{ii}^{p-i+1} \right|,$$

что и требовалось.

Лемма 2. При условии, что n столбцы \mathbf{X} удовлетворяют $\mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$, плотность вероятности Уишарта \mathbf{S} определяется выражением

$$w_p(\mathbf{S} | \mathbf{I}_p, n) = \frac{\exp\{-\text{tr}(\mathbf{S})/2\} |\mathbf{S}|^{(n-p-1)/2}}{2^{np/2} \Gamma_p(n/2)} (n \geq p).$$

Рассмотрим случай $t_{ij} = X_{ij}$ и $t_{ii} = \sqrt{\sum_{k=i}^n X_{ik}^2}$ ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, i-1$). Поскольку X_{ij} ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, n$) взаимно независимы, t_{ij} ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, i$) независимы. Обратим внимание, что $(\mathbf{T}\mathbf{T}^T)_{ii} = \sum_{j=1}^i t_{ij}^2 = (\mathbf{X}\mathbf{X}^T)_{ii}$ ($i = 1, \dots, p$) независимо распределены по χ -квадрату с n df, где $(\cdot)_{ij}$ — (i, j) -й элемент матрицы; и t_{ii} χ -распределено с $n - i + 1$. Далее заметим, что распределения недиагональных элементов $(\mathbf{T}\mathbf{T}^T)_{ij} = \sum_{k=1}^j t_{ik}t_{jk}$ и $(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)_{ij}$ ($p \geq i > j \geq 1$) с использованием t_{jj} и t_{ij} ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, i-1$) одинаковы. То есть распределение $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ и $\mathbf{T}\mathbf{T}^T$ одинаково, когда t_{ij} ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, i$) распределяются, как указано выше. Плотность вероятности t_{ij} ($p \geq i \geq j \geq 1$), обозначенных $f_p(\mathbf{T})$, будет

$$\begin{aligned} f_p(\mathbf{T}) &= \left[\prod_{i=1}^p \frac{t_{ii}^{n-i} \exp(-t_{ii}^2/2)}{2^{\{(n-i+1)/2\}-1} \Gamma\{(n-i+1)/2\}} \right] \\ &\times \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{(p^2-p)/2}} \left\{ \prod_{p \geq i > j \geq 1} \exp(-t_{ij}^2/2) \right\} \\ &= \frac{\left\{ \prod_{i=1}^p t_{ii}^{n-i} \exp(-t_{ii}^2/2) \right\} \left\{ \prod_{p \geq i > j \geq 1} \exp(-t_{ij}^2/2) \right\}}{2^{\frac{(n+1)p - p(p+1)}{2} - p} \times 2^{\frac{p(p-1)}{4}} \pi^{\frac{(pp-1)}{4}} \prod_{i=1}^p \Gamma\{(n-i+1)/2\}} \\ &= \frac{\left(\prod_{i=1}^p t_{ii}^{n-i} \right) \exp\{-\text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{T}^T)/2\}}{2^{\frac{np}{2} - p} \Gamma_p(n/2)}. \end{aligned}$$

В приведенном выше выражении плотность вероятности χ -распределения t_{ii} с k , обозначаемая $f_\chi(t_{ii} | k)$, задается плотностью вероятности χ -квадратного распределения $u = t_{ii}^2$ с k , т.е. $f_{\chi^2}(u | k) = \frac{u^{(k/2)-1}}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} \exp(-u/2)$ с якобианом $du/dt_{ii} = 2t_{ii}$, что дает

$$f_\chi(t_{ii} | k) = \frac{u^{(k/2)-1}}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} \exp(-u/2) \frac{du}{dt_{ii}} = \frac{t_{ii}^{(n-i+1)-2+1} \exp(-t_{ii}^2/2)}{2^{(n-i+1)/2-1} \Gamma\{(n-i+1)/2\}}$$

Рассмотрим преобразование $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}$ в $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{T}\mathbf{T}^T$. Якобиан $J(\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S})$ этого преобразования задается обратной величиной $J(\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T})$, $J(\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}) = 1/|\partial \mathbf{s}/\partial \mathbf{t}|_+ = \left(2^p \prod_{i=1}^p t_{ii}^{p-i+1}\right)^{-1}$. Следовательно, используя $|\mathbf{S}|^{1/2} = |\mathbf{T}| = t_{11} \cdots t_{pp}$ плотность распределения \mathbf{S} становится

$$\begin{aligned} w_p(\mathbf{S} | \mathbf{I}_p, n) &= f_p(\mathbf{T}) J(\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}) \\ &= \frac{\left(\prod_{i=1}^p t_{ii}^{n-i} \right) \exp\{-\text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{T}^T)/2\}}{2^{\frac{np}{2} - p} \Gamma_p(n/2) 2^p \prod_{i=1}^p t_{ii}^{p-i+1}} = \frac{\exp\{-\text{tr}(\mathbf{S})/2\} |\mathbf{S}|^{(n-p-1)/2}}{2^{np/2} \Gamma_p(n/2)} \end{aligned}$$

□

Доказательство. (доказательство, основанное на указании) Поскольку A симметричен, элементы $p + \binom{p}{2}$ ниже главной диагонали являются избыточными и, следовательно, должны быть исключены. Таким образом, преобразование Лапласа-Фурье A определяется как функция

$$\varphi(\Theta) := E \exp \left\{ \sum_i \Theta_{ii} A_{ii} + 2 \sum_i \sum_{j>i} \Theta_{ij} A_{ij} \right\}$$

переменных $p + \binom{p}{2} \Theta_{ij}$, где $j \geq i$. Естественно думать об этом как о функции вещественной симметричной матрицы Θ с элементами Θ_{ij} для $j \geq i$. Тогда

$$\varphi(\Theta) = E \exp\{\text{Tr}(\Theta A)\} = E \exp\{\text{Tr}(X^T \Theta X)\}.$$

Поскольку матрица Θ симметрична, из спектральной теоремы следует, что ее можно диагонализировать. Таким образом, существуют ортогональная матрица U и диагональная матрица D , диагональные элементы которой d_{ii} являются собственными значениями матрицы Θ такие, что $\Theta = U^T D U$. Так как столбцы X независимы, одинаково распределены по нормальным $N(0, I)$ с p -вариантами и умножение случайного вектора $N(0, I)$ на ортогональную матрицу дает еще один $N(0, I)$ случайный вектор. Следовательно, случайная матрица UX имеет то же распределение, что и X , и поэтому

$$\varphi(\Theta) = \varphi(D) = E \exp\{\text{Tr}(X^T D X)\}.$$

Наконец, поскольку D диагональна,

$$\begin{aligned} E \exp\{\text{Tr}(X^T D X)\} &= E \exp\left\{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n d_{ii} X_{ij}\right\} = \prod_{i=1}^p (1 - 2d_{ii})^{-n/2} \\ &= \det(I - 2D)^{-n/2} = \det(I - 2\Theta)^{-n/2}, \end{aligned}$$

при условии, что $|d_{ii}| < 1/2$. Далее вычисляем соответствующее преобразование Лапласа-Фурье плотности относительно меры Лебега $dS := \prod_i dA_{ii} \prod_{i < j} dA_{ij}$:

$$\psi(\Theta) := \int |\det(A)|^{(n-p-1)/2} \exp\{-\text{Tr} A/2\} \exp\{\text{Tr}(\Theta A)\} dA / C_{I,n}$$

Как и выше, $\Theta = U^T D U$. Мера Лебега dA в инварианте сопряжения с U ; также $\det(USU^T) = \det(S)$ и $\text{Tr}(USU^T) = \text{Tr} S$. Следовательно,

$$\psi(\Theta) = \psi(D) = \int |\det(S)|^{(n-p-1)/2} \exp\{-\text{Tr}((I - 2D)S)/2\} dS / C_{I,n}$$

Матрица $S = (I - 2D)$ диагональна с диагональными элементами $\alpha_{ii} = 1 - 2d_{ii}$. Предположим, что $d_{ii} < 1/2$, так что записи $\alpha_{ii} > 0$. Теперь произведем линейную замену переменных

$$\bar{A}_{ij} = \sqrt{\alpha_{ii}\alpha_{jj}} A_{ij}.$$

Эта замена переменных осуществляется сначала умножением i -й строки на $\sqrt{\alpha_{ii}}$, а затем умножением j -го столбца на $\sqrt{\alpha_{jj}}$. Следовательно,

$$\det(\bar{A}) = \prod_{i=1}^p \alpha_{ii} \det(A) = \det(I - 2D) \det(A).$$

Кроме того, поскольку i -й диагональный элемент умножается на α_{ii} ,

$$\text{Tr}(I - 2D)A = \text{Tr}(\tilde{A}).$$

Наконец, рассмотрим влияние замены переменных на меру Лебега $dA = \prod_i dA_{ii} \prod_{i < j} dA_{ij}$: Каждый индекс $1 \leq k \leq p$ равен перечислены один раз по диагонали, $(p - k)$ раз как индекс строки A_{kj} , где $j > k$, и $k - 1$ раз как индекс столбца A_{ik} с $i < k$. Каждое появление в виде диагональной записи дает коэффициент α_{kk} , а каждое второе появление дает $\sqrt{\alpha_{kk}}$. Таким образом,

$$d\bar{A} = \left(\prod_{i=1}^p \alpha_{ii}\right)^{(p+1)/2} d\bar{A} = (\det(I - 2D))^{(p+1)/2} dA.$$

Теперь следует, что

$$\begin{aligned}
\psi(\Theta) &= \psi(D) = \det(I - 2D)^{-n/2} \int |\det(\bar{A})|^{(n-p-1)/2} \exp\{-\operatorname{Tr} \bar{A}/2\} d\bar{A}/C_{I,n} \\
&= \det(I - 2D)^{-n/2} \\
&= \det(I - 2\Theta)^{-n/2} \\
&= \varphi(\Theta).
\end{aligned}$$

Следствие. Если $A \sim W(I, n)$, где I — единичная матрица $p \times p$, то совместная плотность собственных значений λ_i матрицы S равна

$$C_n^{-1} \prod_i \lambda_i^{(n-p-1)/2} e^{-\lambda_i/2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|$$

□

Задача 1.6 (Вариационная задача для распределения Пастура-Марченко. (7 баллов)).

Плотность распределения собственных значений выборочной ковариационной матрицы $N \times N$ имеет вид

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = Z^{-1} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\beta a/2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

где $\beta = 1, 2, 4$ и $a = \alpha N$. Предположим, что при $N \rightarrow \infty$ случайная эмпирическая спектральная мера

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i/N}$$

стремится к некоторой детерминистической мере L_∞ с конечным носителем, в том смысле, что для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ предел среднего вида $N^{-1} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N f(\lambda_i/N) \right)$ вычисляется как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N f(\lambda_i/N) \right) = \int f(x) dL_\infty(x).$$

- (а) Стартуя с плотности (2) сформулируйте вариационную задачу о нахождении предельной эмпирической меры.
- (б) Запишите решение вариационной задачи в виде интегрального уравнения и, продифференцировав его, с помощью формул Сохоцкого-Племеля запишите задачу Римана-Гильберта для преобразования Стильтьеса от L_∞ .
- (в) Решите полученную задачу и, обратив преобразование Стильтьеса, выведите распределение Пастура-Марченко.

Доказательство.

□

Задача 1.7 (Формула Гейне для унитарных ортогональных многочленов. (2 балла)).

Пусть

$$P_n(n) = x^n + \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

система унитарных многочленов, ортогональных относительно меры $\alpha(x)$,

$$\int P_n(x) P_m(x) d\alpha(x) = h_n \delta_{n,m}.$$

Докажите, что $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = \frac{1}{n!D_{n-1}} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n (x - x_i) \right]$$

где матожидание вычисляется относительно меры

$$\mu(dx_1 \times \dots \times dx_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 d\alpha(x_1) \dots d\alpha(x_n),$$

и $D_n = \det \left[\int x^{i+j} d\alpha(x) \right]_{0 \leq i, j \leq n}.$

Доказательство.

$$D_n = \det \left[\int x^{i+j} d\alpha(x) \right]_{0 \leq i, j \leq n} = G_\alpha(1, x, \dots, x^n) = \det_{0 \leq i, j \leq n} [\langle x^i, x^j \rangle]$$

$P_n(x)$ - ортогонализация Грамма-Шмидта относительно

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)d\alpha(x) \quad f_i(x) = x^i$$

$$\mu_k = \int x^k d\alpha(x)$$

$$d_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & & \mu_{n+1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x & & x^n \end{vmatrix}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}} d_n$$

$$\det A(t_1, \dots, t_m) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{m-1} \\ 1 & t_2 & & t_2^{m-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & t_m & & t_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j) \mathbb{E}_\mu \left(\prod_{i=1}^n (x - x_i) \right)$$

$$= \int \prod_{i=1}^n (x - x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 d\alpha(x_1) \dots d\alpha(x_n)$$

$$= \int \det A(x, x_1, \dots, x_n) \cdot \det A(x_1, \dots, x_n) d\alpha(x_1) \dots d\alpha(x_n) = \int I(x, x_1, \dots, x_n) d\alpha(x_1) \dots d\alpha(x_n)$$

$$I(x, x_1, \dots, x_n) = I(x, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \quad \forall \sigma \in S_n$$

$$I(x, x_1, \dots, x_n) = \det A(x, x_1, \dots, x_n) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot x_{\sigma(1)}^0 \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{n-1}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma x_{\sigma(1)}^0 \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{n-1} \cdot \text{sgn } \sigma A(x, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{i-1} A(x, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
d_n &= \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) x^{\sigma(0)} \int t^{\sigma(1)} d\alpha(t) \int t^{1+\sigma(2)} d\alpha(t) \cdot \dots \cdot \int t^{n-1+\sigma(n)} d\alpha(t) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) x^{\sigma(0)} \int x_1^{\sigma(1)} d\alpha(x_1) \int x_2^{\sigma(2)+1} d\alpha(x_2) \cdot \dots \cdot \int x_n^{n-1+\sigma(n)} d\alpha(x_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \int \prod_{i=1}^n x_i^{i-1} x^{\sigma(0)} x_1^{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma(n)} d\alpha(x_1) \cdot \dots \cdot d\alpha(x_n) \\
&= \int \prod_{i=1}^n x_i^{i-1} \sum \operatorname{sgn} x^{\sigma(0)} x_1^{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma(n)} d\alpha(x_1) \cdot \dots \cdot d\alpha(x_n) \\
&= \int \prod_{i=1}^n x_i^{i-1} \det A(x, x_1, \dots, x_n) d\alpha(x_1) \cdot \dots \cdot d\alpha(x_n) \\
&= \int J(x, x_1, \dots, x_n) d\alpha(x_1) \cdot \dots \cdot d\alpha(x_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(x, x_1, \dots, x_n) &= \operatorname{sgn} \sigma J(x, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \quad \forall \sigma \in S_n \\
I(x, x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma J(x)(x, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} J(x, x_1, \dots, x_n) = n! J(x, x_1, \dots, x_n) \\
\int I d\alpha(x_1) \dots d\alpha(x_n) &= n! \int J d\alpha(x_1) \dots d\alpha(x_n)
\end{aligned}$$

□

Задача 1.8 (Лемма Кристоффеля-Дарбу (2 балла)).

Рассмотрите систему унитарных многочленов

$$p_n(x) = x^n + \dots,$$

ортогональных относительно веса $w(x)$ с нормировкой

$$\langle p_k, p_m \rangle := \int p_k(x) p_m(x) w(x) dx = \delta_{k,m} h_m, \quad k, m = 0, 1, \dots,$$

которые удовлетворяют трёхчленным рекуррентным соотношениям

$$p_{k+1}(x) + (A_k - x) p_k(x) + B_k p_{k-1}(x) = 0,$$

где

$$A_k = \frac{\langle x p_k, p_k \rangle}{h_k} \text{ и } B_k = \frac{h_k}{h_{k-1}}.$$

Пусть

$$\psi_n(x) := p_n(x) \sqrt{\frac{w(x)}{h_n}}$$

соответствующий базис Фурье, а

$$K_N(x, y) := \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(x) \psi_n(y)$$

проектор ранга N . Докажите формулы Кристоффеля-Дарбу

$$K_N(x, y) = \gamma_N \frac{\psi_{N-1}(x)\psi_N(y) - \psi_N(x)\psi_{N-1}(y)}{y - x}$$

и

$$K_N(x, x) = \gamma_N (\psi'_N(x)\psi_{N-1}(x) - \psi_N(x)\psi'_{N-1}(x)),$$

где $\gamma_k = \sqrt{h_k/h_{k-1}}$.

Доказательство. Воспользуемся следующим обозначением скобок: $p_n(x)$ обозначается $|n\rangle$. Свертка с K_n по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy w(y) K_n(x, y) f(y) = \sum_{k=0}^n p_k(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dy w(y) p_k(y) f(y)$$

Таким образом, оператор $K_n : f \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} dy w(y) K_n(x, y) f(y)$ имеет вид

$$K_n = \sum_{k=0}^n |k\rangle \langle k|$$

Вычислим коммутатор $[x, K_n]$

$$\begin{aligned} [x, K_n] f(x) &= x K_n f(x) - K_n x f(x) \\ &= x \int_{-\infty}^{+\infty} dy w(y) K_n(x, y) f(y) - \int_{-\infty}^{+\infty} dy w(y) K_n(x, y) y f(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy w(y) (x - y) K_n(x, y) f(y) \end{aligned}$$

Таким образом, формула Кристоффеля-Дарбу эквивалентна формуле

$$[x, K_n] = \frac{k_n}{k_{n+1}} (|n+1\rangle \langle n| - |n\rangle \langle n+1|)$$

Данная формула вычисляется на основе предыдущих. Сначала разложим оператор умножения x по базису $|k\rangle$

$$x = \sum_{k,l} |k\rangle \langle k|x|l\rangle \langle l|$$

Элементы матрицы $\langle k|x|l\rangle$ образуют матрицу Якоби; поэтому $J_{k,l} = \langle k|x|l\rangle$. Вычислим:

$$\begin{aligned} [x, K_n] &= \sum_{\substack{k,l \\ m \leq n}} J_{k,l} [|k\rangle \langle l|, |m\rangle \langle m|] \\ &= \sum_{\substack{k,l \\ m \leq n}} J_{k,l} (|k\rangle \langle l| |m\rangle \langle m| - |m\rangle \langle m| |k\rangle \langle l|) \end{aligned}$$

использование ортонормированности дает

$$[x, K_n] = \sum_{\substack{k \\ l \leq n}} J_{k,l} |k\rangle \langle l| - \sum_l J_{k,l} |k\rangle \langle l|$$

Теперь воспользуемся тем, что матрица Якоби $J_{k,l}$ трехдиагональна, почти все члены сокращаются, кроме двух. Это дает

$$[x, K_n] = J_{n+1,n} |n+1\rangle \langle n| - J_{n,n+1} |n\rangle \langle n+1|$$

И так как

$$J_{n+1,n} = J_{n,n+1} = \frac{k_n}{k_{n+1}}$$

формула Кристоффеля-Дарбу доказана, $K_N(x, x)$ следует из предельного перехода $y \rightarrow x$ □

Доказательство. (2й вариант)

Пусть $f_k(x, y) = \sqrt{\frac{h_k}{h_{k-1}}} \cdot \frac{\varphi_{k-1}(x)\varphi_k(y) - \varphi_k(x)\varphi_{k-1}(y)}{y-x}$

$$\begin{aligned}
f_{N+1}(x, y) - f_N(x, y) &= \sqrt{\frac{h_{k+1}}{h_k}} \cdot \frac{\varphi_k(x)\varphi_{k+1}(y) - \varphi_{k+1}(x)\varphi_k(y)}{y-x} - \sqrt{\frac{h_k}{h_{k-1}}} \cdot \frac{\varphi_{k-1}(x)\varphi_k(y) - \varphi_k(x)\varphi_{k-1}(y)}{y-x} \\
&= \sqrt{w(x)w(y)} \cdot \left(\frac{1}{h_N} \frac{1}{y-x} ((y - A_N)p_N(x)p_N(y) - B_N p_N(x)p_{N-1}(y)) \right. \\
&\quad \left. - (x - A_N)p_N(x)p_N(y) + B_N p_N(x)p_{N-1}(y)) - \frac{1}{h_{N-1}} \frac{1}{y-x} (p_{N-1}(x)p_N(y) - p_N(x)p_{N-1}(y)) \right) \\
&= -\sqrt{w(x)w(y)} \left(\frac{1}{h_N} (p_N(x)p_N(y) - B_N \frac{1}{y-x} (p_N(x)p_{N-1}(y) - p_{N-1}(x)p_N(y))) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h_{N-1}} \frac{1}{y-x} (p_{N-1}p_N(y) - p_N(x)p_{N-1}(y)) \right) \\
&= -\sqrt{w(x)w(y)} \left(\frac{1}{y-x} (p_{N-1}p_N(y) - p_N(x)p_{N-1}(y)) \left(\frac{1}{h_{N-1} - \frac{B_N}{h_N}} \right) - \frac{1}{h_N} p_N(x)p_N(y) \right) \\
&= \sqrt{w(x)w(y)} \frac{1}{h_N} p_N(x)p_N(y) = \varphi_N(x)\varphi_N(y)
\end{aligned}$$

Тогда так как $K_1(x, y) = f_1(x, y)$, и $f_{N+1}(x, y) - f_N(x, y) = k_{N+1}(x, y) - k_N(x, y)$, то $K_N(x, y) = f_N(x, y)$ по индукции, $K_N(x, x)$ следует из предельного перехода $y \rightarrow x$ \square

Задача 1.9 (Матрица Якоби (2 балла)).

В условиях предыдущей задачи бесконечная матрица вида

$$Q = \begin{pmatrix} A_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdot \\ \gamma_1 & A_1 & \gamma_2 & 0 & \cdot \\ 0 & \gamma_2 & A_2 & \gamma_3 & \cdot \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

называется матрицей Якоби. Докажите следующие формулы для представления ортогональных многочленов и ядра

$$p_N(x) = \det_{N \times N}(x - Q), \quad K_N(x, y) = \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_{N-1}} \det_{(N-1) \times (N-1)}[(x - Q)(y - Q)],$$

где определители понимаются как главные миноры порядка N .

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\det_{N \times N}(x - a) &= \begin{vmatrix} x - A_0 & -\gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma_1 & x - A_1 & -\gamma_2 & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \end{vmatrix} \\
&= (x - A_N) \det_{(N-1) \times (N-1)}(x - a) - \gamma_N^2 \begin{vmatrix} x - A_0 & -\gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma_1 & x - A_1 & -\gamma_2 & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & x - A_{N-2} \end{vmatrix} \\
&= (x - A_N) \det_{(N-1) \times (N-1)}(x - a) - B_N \det_{(N-2) \times (N-2)}(x - a) \\
&\text{рассмотрим меньшие матрицы} \\
\det_{1 \times 1}(x - a) &= x - A_0 = p_1(x) \\
\det_{2 \times 2}(x - a) &= (x - A_0)(x - A_1) - \gamma_1^2 = (x - A_0)(x - A_1) - B_1 = p_2(x)
\end{aligned}$$

То есть $\det_{1 \times 1}(x - a) = p_1(x)$, $\det_{2 \times 2}(x - a) = p_2(x)$, $\det_{N \times N}(x - a) = (x - A_N) \det_{(N-1) \times (N-1)}(x - a) - B_N \det_{(N-2) \times (N-2)}(x - a)$, откуда $p_N(x) = \det_{N \times N}(x - Q)$

$$\begin{aligned} \det[(x - Q)(y - Q)] &= \det[(x - a) \cdot (y - a) + \text{diag}(0, \dots, 0, B_N)] = p_N(x)P_N(y) + B_N \det[(x - Q)(y - Q)] \\ K_N(x, y) &= \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_{N-3}} \frac{p_{N-3}(x)p_N(y) - p_N(x)p_{N-1}(y)}{y - x} \\ K_2(x, y) &= \varphi_0(x)\varphi_0(y) + \varphi_1(x)\varphi_1(y) = \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_0} + \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_1} p_1(x)p_1(y) = \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_1} (p_1(x)p_1(y) + \frac{h_1}{h_0}) \\ &= \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_1} ((x - A_0)(y - A_0) + B_1) = \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_0} \det[(x - Q)(y - Q)] \\ &= \frac{p_{N-1}(x)p_N(y) - p_N(x)p_{N-1}(y)}{y - x} \\ &= \frac{((y - A_N)p_{N-1}(y) - B_N p_{N-2}(y))p_{N-1}(x) - p_{N-1}(y)(x - A_N)p_{N-1}(x) - B_{N+1}p_{N-2}(x)}{y - x} \\ &= p_{N-1}(x)p_{N-1}(y) + B_N \frac{p_{N-2}(x)p_{N-1}(y) - p_{N-1}(x)p_{N-2}(y)}{y - x} \end{aligned}$$

То есть $\frac{p_{N-1}(x)p_N(y) - p_N(x)p_{N-1}(y)}{y - x}$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и $\det_{(N-1) \times (N-1)}[(x - Q)(y - Q)]$ и совпадает при $N = 2$, из чего следует верность формулы \square

Задача 1.10 (Ансамбль Лаггера-Вишера (10 баллов)).

Плотность распределения собственных значений ковариационных выборочных матриц из ансамбля Лаггера-Вишера имеет вид

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = Z^{-1} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\beta a/2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

где $\lambda_i \in [0, \infty)$ (см. Листок 1.). Используя многочлены Лагерра, $L_n^{(a)}(x)$ (необходимые справочные сведения приведены в конце задачи), постройте корреляционное ядро $K_N(x, y)$, для случая $\beta = 2$ и $a \geq 0$. Проведите его асимптотический анализ в различных пределах:

1. Выведите уравнение на производящую функцию многочленов Лагерра из трёхчленных рекуррентных соотношений и, решив его, покажите, что производящая функция имеет вид

$$G^{(a)}(x, t) := \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(a)}(x) t^k = \frac{\exp\left(-\frac{tx}{1-t}\right)}{(1-t)^{a+1}}.$$

Запишите интегральное представление многочленов Лагерра.

2. Исследуйте поведение полученного интеграла в пределе $N \rightarrow \infty$, считая что $0 \leq a \leq \infty$ остается конечной величиной, и выведите предельные формулы для корреляционного ядра в различных скейлинговых пределах:

- (a) Покажите, что средняя плотность

$$\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} K_N(Nx, Nx)$$

дается частным случаем распределения Пастура-Марченко. Его можно переписать как как четверть-круговой закон - половину полукруглого закона Вигнера. Объясните эту связь.

- (b) Покажите, что во внутренней части спектра, $0 < w < 4$, предельное корреляционное ядро

$$K_{\infty}^{\text{bulk}}(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho(w)} K_N\left(Nw + \frac{x}{\rho(w)}, Nw + \frac{y}{\rho(w)}\right)$$

не зависит от референтной точки w и стремится к синус-ядру.

- (с) Покажите что при некотором выборе константы σ корреляционное ядро в окрестности правого края спектра (режим мягкого края, soft edge)) сходится к ядру Айри

$$\begin{aligned} K_{\infty}^{\text{soft edge}}(x, y) &:= \lim_{N \rightarrow \infty} N^{1/3} \sigma K_N \left(4N + \sigma N^{1/3} x, 4N + \sigma N^{1/3} y \right) \\ &= \frac{Ai(x)Ai'(y) - Ai(y)Ai'(x)}{x - y} \\ &= K_{\infty}^{\text{soft edge}}(x, y) = K_{\text{Airy}}(x, y). \end{aligned}$$

- (d) Покажите, что на левой границе спектра (в режиме жесткого края, hard edge scaling limit) корреляционное ядро сходится к ядру Бесселя

$$\begin{aligned} K_{\infty}^{\text{hard edge}}(x, y) &\doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4N} K_N \left(\frac{x}{4N}, \frac{y}{4N} \right) \\ &= \frac{J_a(\sqrt{x})\sqrt{y}J'_a(\sqrt{y}) - J_a(\sqrt{y})\sqrt{x}J'_a(\sqrt{x})}{2(x - y)}. \end{aligned}$$

- (е) Убедитесь, что при $a = \pm 1/2$ мы возвращаемся к четной и нечетной части синус ядра, а в пределе $a \rightarrow \infty$, когда левый край отодвигается от твердой стенки, к ядру Эйри.

Доказательство.

1. Далее расписано получение трехчленной формулы из производящей функции, но все переходы работают в обе стороны

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (1 + \alpha)_n x^m}{m!(n - m)!(1 + \alpha)_m} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n L_n^{(\alpha)}(x) t^n}{(1 + \alpha)_n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_n (-1)^m (1 + \alpha)_n x^m t^n}{m!(n - m)!(1 + \alpha)_m (1 + \alpha)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c)_n (-x)^m t^n}{m!(n - m)!(1 + \alpha)_m} \\ &\quad n \rightarrow n + m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c)_{n+m} (-x)^m t^{n+m}}{m!n!(1 + \alpha)_m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c)_m (c + m)_n (-xt)^m t^n}{m!n!(1 + \alpha)_m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n L_n^{(\alpha)}(x) t^n}{(1 + \alpha)_n} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c + m)_n t^n}{n!} \right] \cdot \frac{(c)_m (-xt)^m}{m!(1 + \alpha)_m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (1 - t)^{-(c+m)} \right\} \frac{(c)_m (-xt)^m}{m!(1 + \alpha)_m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 - t)^{-c} (c)_m}{m!(1 + \alpha)_m} \left(\frac{-xt}{1 - t} \right)^m \end{aligned}$$

$$c = 1 + \alpha$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n &= (1 - t)^{-(1+\alpha)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1 + \alpha)_n}{(1 + \alpha)_n n!} \left(\frac{-xt}{1 - t} \right)^n \\ &= (1 - t)^{-(1+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-xt}{1 - t} \right)^n \times \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = (1 - t)^{-(1+\alpha)} e^{-xt/(1-t)}$$

Diff. w.r. to t

$$\begin{aligned}
& \{-1\}\{-(1+\alpha)\}(1-t)^{-(1+\alpha)-1}e^{-\frac{xt}{1-t}} + (1-t)^{-(1+\alpha)}e^{-\frac{xt}{1-t}} \left\{ \frac{-x}{(1-t)} - xt \left\{ \frac{-1x(-1)}{(1-t)^2} \right\} \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n t^{n-1} \\
& \frac{(1+\alpha)}{(1-t)^{2+\alpha}} e^{-\frac{xt}{1-t}} + \frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} e^{-\frac{xt}{1-t}} \left\{ x \left(\frac{1+t-t}{(1+t)^2} \right) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^k \\
& \frac{(1+\alpha)}{(1-t)^{2+\alpha}} e^{-\frac{xt}{1-t}} + \frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} e^{-\frac{xt}{1-t}} \left\{ \frac{-x}{(1-t)^2} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n t^{n-1} \\
& \frac{1+\alpha}{1+t} (1-t)^{-(1+\alpha)} e^{-\frac{xt}{1-t}} + (1-t)^{-(1+\alpha)} e^{-\frac{xt}{1-t}} \left\{ \frac{-x}{(1-t)^2} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n t^{n-1} \\
& \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n - \frac{x}{(1-t)^2} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n L_n^{(\alpha)}(x) \cdot t^{n-1} \\
& (1+\alpha)(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n - x \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = (1-t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n t^{n-1} \\
& (1+\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n - (1+\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^{n+1} - x \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n \cdot t^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n \cdot t^n \\
& (1+\alpha) L_n^{(\alpha)}(x) - (1+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - x L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n-1) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - 2n L_n^{(\alpha)}(x) \\
& (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \{1+\alpha-x+2n\} L_n^{(\alpha)}(x) - \{1+\alpha+n-1\} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \\
& (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \{1+\alpha-x+2n\} L_n^{(\alpha)}(x) - \{\alpha+n\} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \\
& n \rightarrow n-1 \\
& n L_n^{(\alpha)}(x) = \{2n-1+\alpha-x\} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \{\alpha+n-1\} L_{n-2}^{(\alpha)}(x)
\end{aligned}$$

2. (a)

(b)

(c,d,e) Теорема 1. Пусть $K_n(x, y; t)$ — ядро

$$K_n(x, y; t) = \gamma_{n-1}^2 w(x) w(y) \frac{\pi_n(x) \pi_{n-1}(y) - \pi_{n-1}(x) \pi_n(y)}{x-y},$$

то он имеет Ψ -ядерное асимптотическое приближение

$$\frac{1}{4n} K_n \left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n}; t \right) = K_{\Psi}(u, v, 2nt) + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

при $n \rightarrow \infty$, равномерно для u, v в компактных подмножествах $(0, \infty)$ и равномерно для t в $(0, d]$, где d — положительное число константа, а Ψ -ядро имеет вид.

$$K_{\Psi}(u, v, s) = \frac{\psi_1(-v, s) \psi_2(-u, s) - \psi_1(-u, s) \psi_2(-v, s)}{2\pi i(u-v)}$$

где скалярная функция $\psi_k(\zeta, s)$, $k = 1, 2$, будет определена позже

Имеет место следующий результат:

Если параметр $t \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ таким образом, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2nt = \tau, \quad \tau \in (0, \infty),$$

у нас есть предел двойного масштабирования для $K_n(x, y)$, заданный в терминах Ψ -ядра

$$K_\Psi(u, v, s) = \frac{\psi_1(-v, s)\psi_2(-u, s) - \psi_1(-u, s)\psi_2(-v, s)}{2\pi i(u - v)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} K_n\left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n}; t\right) = K_\Psi(u, v, \tau)$$

равномерно для u, v и τ в компактных подмножествах $(0, \infty)$.

Переход к ядру Бесселя

Случай, рассматриваемый в теореме 1, относится к параметру $s = 2nt$ в компактных подмножествах $(0, \infty)$. Представляет интерес рассмотреть возможный переход Ψ -ядра

$$\frac{1}{4n} K_n\left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n}; t\right) = K_\Psi(u, v, 2nt) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

как $s \rightarrow 0^+$ и $s \rightarrow +\infty$. Действительно, в результате анализа мы имеем

Теорема 2. Получаем предел типа Бесселя для малого параметра:

(a2) Ψ -ядро аппроксимируется ядром Бесселя как $s \rightarrow 0^+$

$$K_\Psi(u, v, s) = \mathbb{J}_a(u, v) + O(s),$$

где член ошибки однороден для u и v в компактных подмножествах $(0, \infty)$. Ядро Бесселя \mathbb{J}_α определяется как:

$$\mathbb{J}_\alpha(x, y) := \frac{J_\alpha(x)yJ'_\alpha(y) - J_\alpha(y)xJ'_\alpha(x)}{2(x - y)}$$

(b2) Если параметр $t \rightarrow 0^+$ и $n \rightarrow \infty$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2nt = 0,$$

у нас есть предел ядра Бесселя для K_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} K_n\left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n}; t\right) = \mathbb{J}_a(u, v),$$

равномерно по u и v в компактных подмножествах $(0, \infty)$.

Переход на ядро Эйри

Теорема 3. Мы получаем предел типа Эйри для больших параметров.

(a3) Ψ -ядро аппроксимируется ядром Эйри как $s \rightarrow +\infty$

$$\frac{s^{4/9}}{c} K_\Psi\left(s^{2/3}\left(1 - \frac{u}{cs^{2/9}}\right), s^{2/3}\left(1 - \frac{v}{cs^{2/9}}\right), s\right) = \mathbb{A}(u, v) + O\left(s^{-2/9}\right),$$

где член ошибки однороден для u и v в компактных подмножествах $(-\infty, \infty)$, $c = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ и ядро Эйри \mathbb{A} определяется как:

$$\mathbb{A}(x, y) := \frac{\text{Ai}(x)\mathbf{Ai}'(y) - \text{Ai}(y)\text{Ai}'(x)}{x - y}$$

(b3) Если параметры $t \in (0, d]$ и $n \rightarrow \infty$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2nt = \infty$$

у нас есть предел ядра Эйри для K_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{cs^{2/9}} K_n \left(\alpha_n \left(1 - \frac{u}{cs^{2/9}} \right), \alpha_n \left(1 - \frac{v}{cs^{2/9}} \right); t \right) = \mathbb{A}(u, v),$$

где $s = 2nt$, $\alpha_n = s^{\frac{2}{3}}/(4n) = 2^{-4/3}n^{-1/3}t^{2/3}$, $c = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ и формула справедлива равномерно для u и v в компактных подмножествах $(-\infty, \infty)$.

Мы сформулируем задачу РН, которая в дальнейшем сыграет роль в анализе метода наискорейшего спуска. Модельная задача для $\Psi(\zeta) = \Psi(\zeta, s)$ состоит в следующем:

- * $\Psi(\zeta)$ аналитичен в $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^3 \Sigma_j$;
- * $\Psi(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$\Psi_+(\zeta) = \Psi_-(\zeta) \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Sigma_1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Sigma_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Sigma_3; \end{cases}$$

- * Асимптотическое поведение $\Psi(\zeta)$ на бесконечности таково:

$$\Psi(\zeta, s) = \left[I + \frac{C_1(s)}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \right] \zeta^{-\frac{1}{4}\sigma_3} \frac{I + i\sigma_1}{2} e^{\zeta\sigma_3}, \quad \arg \zeta \in (-\pi, \pi), \zeta \rightarrow \infty,$$

где $C_1(s)$ — матрица, не зависящая от ζ ;

- * Асимптотическое поведение $\Psi(\zeta)$ при $\zeta = 0$ имеет вид

$$\Psi(\zeta, s) = Q(s) \{I + O(\zeta)\} e^{\frac{s}{\zeta}\sigma_3} \zeta^{\frac{\alpha}{2}\sigma_3} \begin{cases} I, & \zeta \in \Omega_1 \cup \Omega_4, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi i \alpha & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_3 \end{cases}$$

для $\arg \zeta \in (-\pi, \pi)$, как $\zeta \rightarrow 0$, где $Q(s)$ не зависит от матрицы ζ , такие что $\det Q(s) = 1$, а σ_j — матрицы Паули, а именно,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство Теоремы 1

В терминах матриц-функции

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \pi_n(z) & \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\pi_n(s)w(s)}{s-z} ds \\ -2\pi i \gamma_{n-1}^2 \pi_{n-1}(z) - \gamma_{n-1}^2 \int_0^\infty \frac{\pi_{n-1}(s)w(s)}{s-z} ds & \end{pmatrix},$$

ядро $K_n(x, y)$ можно записать как

$$K_n(x, y) = \frac{w(x)w(y)}{2\pi i(x-y)} \{Y_+^{-1}(y)Y_+(x)\}_{21},$$

где x и y принадлежат носителю равновесной меры, которой в данном случае является $[0, 4n]$. Поэтому естественно ввести перемасштабирование переменной, чтобы зафиксировать носитель $[0, 1]$, и рассмотреть перемасштабированное ядро $4nK_n(4nx, 4ny)$ такое, что

$$\tilde{K}_n(x, y) := 4nK_n(4nx, 4ny) = \frac{w(4nx)w(4ny)}{2\pi i(x-y)} \{Y_+^{-1}(4ny)Y_+(4nx)\}_{21}, x, y \in (0, 1).$$

Отметим, что такое изменение масштаба равнозначно рассмотрению так называемого изменяющегося веса, в этом случае вес представляет собой перемасштабированную версию $w(x) = w(x; t) = x^\alpha e^{-V_t(x)}$, $x \in (0, \infty)$, $t > 0, \alpha > 0$, а именно,

$$\tilde{w}(x; n) = 4nw(4nx; t_n) = (4n)^{\alpha+1} x^\alpha e^{-4nx - t_n/(4nx)} \text{ для } x \in (0, \infty).$$

Однако в асимптотическом анализе, проведенном в предыдущем разделе, мы решили проанализировать исходный $w(x; t)$.

Асимптотика ядра

$$\tilde{K}_n(x, y) := 4nK_n(4nx, 4ny) = \frac{w(4nx)w(4ny)}{2\pi i(x-y)} \{Y_+^{-1}(4ny)Y_+(4nx)\}_{21}, \quad x, y \in (0, 1)$$

или его n -большой предел может быть получен из анализа Римана-Гильберта. Заметим, что пределом при больших n для $\tilde{K}_n(x, y)$, как ожидается, будет синусоидальное ядро для x, y внутри равновесной меры, а именно $x, y \in (0, 1)$, а на мягком крае $x = 1$ ожидается, что ядро будет аппроксимироваться ядром Эйри.

Объединяя

$$\begin{aligned} T(z) &= (4n)^{-(n+\frac{\alpha}{2})\sigma_3} e^{-n\frac{1}{2}l\sigma_3} Y(4nz) e^{-n(g(z)-\frac{1}{2}l)\sigma_3} e^{-\frac{t_n}{8nz}\sigma_3} (4n)^{\frac{\alpha}{2}\sigma_3} \\ S(z) &= \begin{cases} T(z), & \text{для } z \text{ outside the lens shaped region;} \\ T(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z^{-\alpha} e^{2n\phi(z)} & 1 \end{pmatrix}, & \text{для } z \text{ in the upper lens region;} \\ T(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z^{-\alpha} e^{2n\phi(z)} & 1 \end{pmatrix}, & \text{для } z \text{ in the lower lens region,} \end{cases} \\ R(z) &= \begin{cases} S(z)N^{-1}(z), & z \in \mathbb{C} \setminus \{U(0, r) \cup U(1, r) \cup \Sigma_s\}; \\ S(z)(P^{(0)})^{-1}(z), & z \in U(0, r) \setminus \Sigma_s; \\ S(z)(P^{(1)})^{-1}(z), & z \in U(1, r) \setminus \Sigma_s. \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$P^{(0)}(z) = \hat{P}^{(0)}(z)(-z)^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_3} e^{n\phi(z)\sigma_3}, \quad z \in U(0, r) \setminus \Sigma_S, \quad \hat{P}^{(0)}(z) = E(z)\Psi(n^2\phi^2, 2nt_n) e^{-\frac{\pi}{2}i\sigma_3},$$

Получим

$$Y_+(4nx) = c_n^{\sigma_3} R(x) E(x) \Psi_-(f_n(x), s) e^{\frac{i\pi}{2}(\alpha-1)\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} [w(4nx)]^{-\frac{1}{2}\sigma_3},$$

Для $0 < x < r$, где

$$f_n(x) = n^2\phi^2(x), \quad s = 2nt_n, \quad c_n = (-1)^n (4n)^{n+\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{1}{2}nl},$$

и был использован тот факт, что $e^{n\pi i\sigma_3} = (-1)^n I$,

$$g_+(x) + \phi_+(x) - \frac{1}{2}l = 2x + \pi i \text{ для } x \in (0, 1)$$

границное значение на положительной стороне $P_+^{(0)}$ соответствует значению Ψ_- на отрицательной стороне \mathcal{U} нас есть

$$\tilde{K}_n(x, y) = \frac{(-\psi_2(f_n(y)), \psi_1(f_n(y))) E^{-1}(y) R^{-1}(y) R(x) E(x) (\psi_1(f_n(x)), \psi_2(f_n(x)))^T}{2\pi i(x - y)},$$

где X^T обозначает транспонированную матрицу X , а

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\zeta) \\ \psi_2(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(\zeta, s) \\ \psi_2(\zeta, s) \end{pmatrix} = (\Psi)_-(\zeta, s) \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{2}i(\alpha-1)} \\ e^{-\frac{\pi}{2}i(\alpha-1)} \end{pmatrix} \text{ для } \zeta \in (-\infty, 0)$$

Пусть $x = \frac{u}{16n^2}$ и $y = \frac{v}{16n^2}$, где оба u и v положительны размера $\hat{1}(1)$. Учитывая $\phi(z) = 2 \int_0^z \frac{s-1}{s} ds$, $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, получаем

$$f_n(z) = n^2 \phi^2(z) = n^2 [-16z + O(z^2)]$$

для малых z . В частности,

$$f_n(x) = -u \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right], \text{ and } f_n(y) = -v \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

Из аналитичности $E(z)$ в $U(1, r)$ следует, что и $E(z)$, и $E^{-1}(z)$ ограничены в окрестности начала координат, и

$$E^{-1}(y)E(x) = I + E^{-1}(y)(E(x) - E(y)) = I + O(x - y) = I + (u - v)O(n^{-2})$$

для ограниченных u, v . Аналогично, поскольку $R(z)$ — матрица-функция, аналитическая относительно $U(0, r)$, имеем

$$R^{-1}(y)R(x) = I + (u - v)O(n^{-2})$$

Здесь погрешность совпадает для u и v , лежащих в компактных подмножествах $(0, \infty)$. Также

$$\psi_k(f_n(x), s) = \psi_k(-u, s) + O(n^{-2})$$

при $k = 1, 2$, а граница погрешности одинакова как для u , так и для s в компактных подмножествах $(0, \infty)$.

Таким образом, имеем

$$\frac{1}{4n} K_n \left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n} \right) = \frac{\psi_1(f_n(y), s) \psi_2(f_n(x), s) - \psi_1(f_n(x), s) \psi_2(f_n(y), s)}{2\pi i(u - v)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

для больших n .

Введем вспомогательную функцию с двумя переменными

$$H(\xi, \eta) = \frac{\psi_1(\eta, s) \psi_2(\xi, s) - \psi_1(\xi, s) \psi_2(\eta, s)}{2\pi i(\eta - \xi)}, \xi, \eta \in (-\infty, 0)$$

При фиксированном $s \in (0, \infty)$ $\psi_k(\eta, s)$, $k = 1, 2$ можно расширить до аналитической функции. Таким образом, легко видеть, что $H(\xi, \eta)$ — это C^∞ в $(-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$, и особенности на луче $\xi = \eta$ нет. Поэтому

$$H(\xi, \eta) = H(\xi_0, \eta_0) + O(|\xi - \xi_0| + |\eta - \eta_0|)$$

Подставив $\xi = f_n(x) = f_n\left(\frac{u}{16n^2}\right)$, $\eta = f_n(y) = f_n\left(\frac{v}{16n^2}\right)$, $\xi_0 = -u$ и $\eta_0 = -v$ в полученное выше уравнение:

$$\frac{1}{4n} K_n \left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n} \right) = \frac{\psi_1(-v, s) \psi_2(-u, s) - \psi_1(-u, s) \psi_2(-v, s)}{2\pi i(u - v)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

для больших n , где ошибка $o(n^{-2})$ одинакова для u и v в компактных подмножествах $(0, \infty)$ и для $s \in (0, \infty)$. При выводе последней формулы было использовано также то, что

$$\frac{\xi - \eta}{v - u} = 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

равномерно по u, v принадлежат компактным подмножествам $(0, \infty)$ и при больших n .

Это в точности $\frac{1}{4n} K_n\left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n}; t\right) = K_\Psi(u, v, 2nt) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

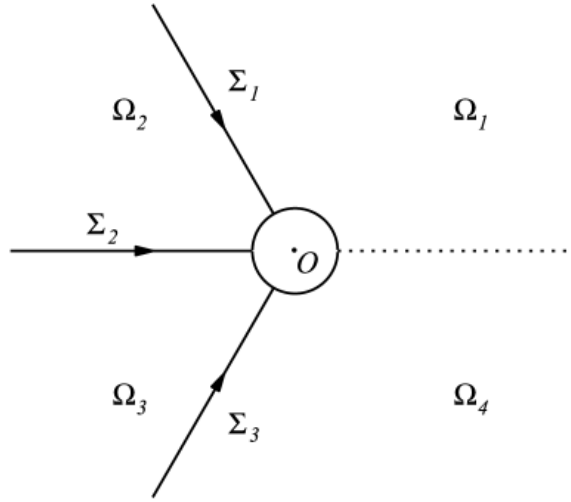


Рис. 1: Ψ для Бесселя

Доказательство Теоремы 2

Сведем $\Psi(\zeta, s)$ к решению $\Phi(\zeta)$ задачи Бесселя для малых s и получим начальные условия для нелинейных уравнений

$$\begin{cases} sq''(s) = q(s)r'(s) + \frac{1}{2}t'(s) \\ sr''(s) = -q'(s) - \frac{1}{2}r'(s) + r(s)r'(s) \\ st''(s) = -2q(s)q'(s) + \frac{1}{2}t'(s) - r(s)t'(s) \\ q'(s)^2 + r'(s)t'(s) = 1. \end{cases}$$

и

$$2s^2 r' r''' - s^2 r''^2 + 2sr' r'' - 4sr'^3 + \left(2r + 2l - \frac{1}{4}\right) r'^2 + 1 = 0$$

выведено из условий совместности пары Лакса $\Psi(\zeta, s)$:

$$\begin{aligned} \Psi_\zeta(\zeta, s) &= \left(A_0(s) + \frac{A_1(s)}{\zeta} + \frac{A_2(s)}{\zeta^2}\right) \Psi(\zeta, s), \\ \Psi_s(\zeta, s) &= \frac{B_1(s)}{\zeta} \Psi(\zeta, s), \end{aligned}$$

Это следует из того, что если $s = 0$, то в задаче РН для $\Psi(\zeta, s)$ существенная сингулярность в начале координат исчезает. Итак, чтобы рассмотреть аппроксимацию $\Psi(\zeta, s)$ для малых s ,

естественно временно игнорировать экспоненциальный член $e^{\frac{s}{\zeta}}$ в

$$\Psi(\zeta, s) = Q(s)\{I + O(\zeta)\}e^{\frac{s}{\zeta}\sigma_3}\zeta^{\frac{\alpha}{2}\sigma_3} \begin{cases} I, & \zeta \in \Omega_1 \cup \Omega_4, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi i \alpha & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_3 \end{cases}$$

и рассмотреть предельную РН задачу $\Psi_0(\zeta)$.

* $\Psi_0(\zeta)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus U_{j=1}^3 \Sigma_j$;

* $\Psi_0(\zeta)$ удовлетворяет условию 1

$$(\Psi_0)_+(\zeta) = (\Psi_0)_-(\zeta) \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Sigma_1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Sigma_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Sigma_3; \end{cases}$$

* Асимптотическое поведение $\Psi_0(\zeta)$ на бесконечности таково:

$$\Psi_0(\zeta) = \left(I + O\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) \zeta^{-\frac{1}{4}\sigma_3} \frac{I + i\sigma_1}{2} e^{\zeta\sigma_3}, \quad \arg \zeta \in (-\pi, \pi), \zeta \rightarrow \infty.$$

Функция $\Phi(\zeta)$ может быть построена через функции Бесселя

$$\Phi(\zeta) = M_1 \pi^{\frac{1}{2}\sigma_3} \begin{cases} \begin{pmatrix} I_a(\zeta) & \frac{i}{\pi} K_a(\zeta) \\ \pi i \zeta I'_a(\zeta) - \zeta K'_a(\zeta) & \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_1 \cup \Omega_4, \\ \begin{pmatrix} I_a(\zeta) & \frac{i}{\pi} K_a(\zeta) \\ \pi i \zeta I'_a(2\zeta) - \zeta K'_a(\zeta) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_2, \\ \begin{pmatrix} I_a(\zeta) & \frac{i}{\pi} K_a(\zeta) \\ \pi i \zeta I'_a(\zeta) - \zeta K'_a(\zeta) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_3, \end{cases}$$

где $\arg \zeta \in (-\pi, \pi)$ и $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{i}{8}(4\alpha^2 + 3) & 1 \end{pmatrix}$.

Из

$$R_0(\zeta) = \begin{cases} \Psi(\zeta, s)\Phi^{-1}(\zeta), & |\zeta| > \epsilon, \\ \Psi(\zeta, s)F^{-1}(\zeta), & |\zeta| < \epsilon. \end{cases}$$

и

$$R_0(\zeta) = \begin{cases} I + O(s^\mu), & s \rightarrow 0^+, \text{ равномерно для ограниченных } \zeta, \\ I + O(s^\mu \zeta^{-1}), & \zeta \rightarrow \infty, s \rightarrow 0^+, \end{cases}$$

Следует

$$\Psi(\zeta, s) = [I + O(s^\mu/\zeta)] \Phi(\zeta), s \rightarrow 0^+,$$

для $|\zeta| > \epsilon$, где $\mu = 1$ для $\alpha \geq 0$ и $\mu = \alpha + 1$ для $-1 < \alpha < 0$, ϵ равен небольшой положительной константе, а $\Phi(\zeta)$ — решение модельной задачи Бесселя, явно заданной ранее. Затем

$$\Phi(\zeta) = \left[I + \frac{4\alpha^2 - 1}{128\zeta} \begin{pmatrix} 4\alpha^2 - 9 & 16i \\ \frac{i}{12}(4\alpha^2 - 9)(4\alpha^2 - 13) & 9 - 4\alpha^2 \end{pmatrix} + O\left(\zeta^{-\frac{3}{2}}\right) \right] \zeta^{-\frac{1}{4}\sigma_3} M e^{\zeta\sigma_3},$$

вместе с

$$\Psi(\zeta, s) = [I + O(s^\mu/\zeta)] \Phi(\zeta), s \rightarrow 0^+$$

дает

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta, s) e^{-\zeta\sigma_3} M^{-1} \zeta^{\frac{1}{4}\sigma_3} &= I + \frac{4\alpha^2 - 1}{128\zeta} \begin{pmatrix} 4\alpha^2 - 9 & 16i \\ \frac{i}{12}(4\alpha^2 - 9)(4\alpha^2 - 13) & 9 - 4\alpha^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + O(s^\mu/\zeta) + O\left(\zeta^{-3/2}\right) \end{aligned}$$

как $\zeta \rightarrow \infty$, равномерно для $s \in (0, \varepsilon]$ с малым положительным значением ε , где $M = (I + i\sigma_1)/2$ $\mu = 1$ для $\alpha \geq 0$ и $\mu = \alpha + 1$ для $\alpha \in (-1, 0)$.

Пусть $s \rightarrow 0^+$, ввиду

$$\Psi(\zeta, s) = \left[I + \frac{C_1(s)}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \right] \zeta^{-\frac{1}{4}\sigma_3} \frac{I + i\sigma_1}{2} e^{\zeta\sigma_3}, \quad \arg \zeta \in (-\pi, \pi), \quad \zeta \rightarrow \infty,$$

и

$$C_1(s) = \begin{pmatrix} q(s) - ir(s) \\ it(s) - q(s) \end{pmatrix}$$

получим начальное условие для неизвестных функций $q(s), r(s)$ и $t(s)$:

Начальные значения нелинейных уравнений для $q(s), r(s)$ и $t(s)$:

$$\begin{cases} sq''(s) = q(s)r'(s) + \frac{1}{2}t'(s) \\ sr''(s) = -q'(s) - \frac{1}{2}r'(s) + r(s)r'(s) \\ st''(s) = -2q(s)q'(s) + \frac{1}{2}t'(s) - r(s)t'(s) \\ q'(s)^2 + r'(s)t'(s) = 1. \end{cases}$$

и

$$2s^2r'r''' - s^2r''^2 + 2sr'r'' - 4sr'^3 + \left(2r + 2l - \frac{1}{4}\right)r'^2 + 1 = 0,$$

можно определить следующим образом:

$$\begin{cases} q(0) = \frac{1}{128} (4\alpha^2 - 1) (4\alpha^2 - 9) \\ r(0) = \frac{1}{8} (1 - 4\alpha^2) \\ t(0) = \frac{1}{1536} (4\alpha^2 - 1) (4\alpha^2 - 9) (4\alpha^2 - 13). \end{cases}$$

Для завершения доказательства теоремы 2 подставим

$$\Phi(\zeta) = M_1 \pi^{\frac{1}{2}\sigma_3} \begin{cases} \begin{pmatrix} I_\alpha(\zeta) & \frac{i}{\pi} K_\alpha(\zeta) \\ \pi i \zeta I'_\alpha(\zeta) - \zeta K'_\alpha(\zeta) & \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_1 \cup \Omega_4, \\ \begin{pmatrix} I_a(\zeta) & \frac{i}{\pi} K_\alpha(\zeta) \\ \pi i \zeta I'_\alpha(2\zeta) - \zeta K'_a(\zeta) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_2, \\ \begin{pmatrix} I_a(\zeta) & \frac{i}{\pi} K_\alpha(\zeta) \\ \pi i \zeta I'_\alpha(\zeta) - \zeta K'_\alpha(\zeta) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_3, \end{cases}$$

и

$$R_0(\zeta) = \begin{cases} \Psi(\zeta, s) \Phi^{-1}(\zeta), & |\zeta| > \epsilon, \\ \Psi(\zeta, s) F^{-1}(\zeta), & |\zeta| < \epsilon. \end{cases}$$

в

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\zeta) \\ \psi_2(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(\zeta, s) \\ \psi_2(\zeta, s) \end{pmatrix} = (\Psi) - (\zeta, s) \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{2}i(\alpha-1)} \\ e^{-\frac{\pi}{2}i(\alpha-1)} \end{pmatrix} \text{ для } \zeta \in (-\infty, 0)$$

и получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_1(\zeta, s) \\ \psi_2(\zeta, s) \end{pmatrix} &= R_0(\zeta) M_1 \pi^{\frac{\sigma_3}{2}} e^{\frac{\pi i}{2}(\alpha-1)} \begin{pmatrix} I_\alpha(|\zeta| e^{-\frac{\pi i}{2}}) \\ \pi |\zeta| I'_\alpha(|\zeta| e^{-\frac{\pi i}{2}}) \end{pmatrix} \\ &= R_0(\zeta) M_1 \pi^{\frac{\sigma_3}{2}} \begin{pmatrix} -i J_\alpha(|\zeta|) \\ \pi |\zeta| V'_\alpha(|\zeta|) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Тут мы использовали формулу $e^{\frac{1}{2\pi i \alpha}} I_\alpha(z) = J_\alpha\left(ze^{\frac{1}{2\pi i}}\right)$ для $\arg z \in (-\pi, \pi/2]$, а аппроксимация для $R_0(\zeta)$ равна $\Psi(\zeta, s) = [I + O(s^\mu/\zeta)] \Phi(\zeta), s \rightarrow 0^+$.

Заметим, что для произвольной матрицы \tilde{M} с $\det \tilde{M} = 1$ выполнено

$$\tilde{M}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь, как и раньше, \tilde{M}^T обозначает транспонирование \tilde{M} . Подставив приведенное выше представление для ψ_k в следующую формулу

$$\frac{1}{4n}K_n\left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n}\right) = \frac{\psi_1(-v, s)\psi_2(-u, s) - \psi_1(-u, s)\psi_2(-v, s)}{2\pi i(u - v)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

выведем

$$\begin{aligned}\frac{1}{4n}K_n\left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n}\right) &= \frac{\psi_1(-v, s)\psi_2(-u, s) - \psi_1(-u, s)\psi_2(-v, s)}{2\pi i(u - v)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathbb{J}_a(u, v) + o(s^\mu) + o(1/n^2),\end{aligned}$$

при $s = 2nt = 2nt_n \rightarrow 0^+$, t — параметр, входящий в

$$w(x) = w(x; t) = x^\alpha e^{-V_t(x)}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0, \quad \alpha > 0$$

, где \mathbb{J}_α — ядро Бесселя, определяемое как

$$\mathbb{J}_\alpha(x, y) := \frac{J_\alpha(x)yJ'_\alpha(y) - J_\alpha(y)xJ'_\alpha(x)}{2(x - y)}$$

Уравнение

$$\begin{aligned}\frac{1}{4n}K_n\left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n}\right) &= \frac{\psi_1(-v, s)\psi_2(-u, s) - \psi_1(-u, s)\psi_2(-v, s)}{2\pi i(u - v)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathbb{J}_a(u, v) + o(s^\mu) + o(1/n^2),\end{aligned}$$

выполняется для u и v из компактных подмножеств $(0, \infty)$ и для $s \in (0, \varepsilon]$.

Теорема 2 доказана

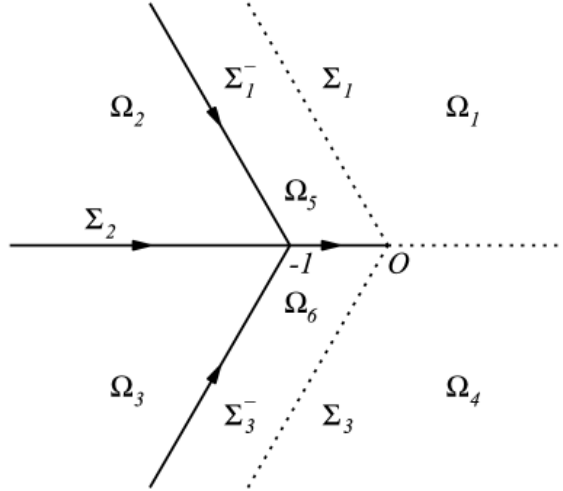


Рис. 2: Ψ для Эйри

Доказательство Теоремы 3

Теперь мы применим приведенные выше асимптотические результаты, чтобы добиться перехода Ψ -ядра к Эйри ядро и извлечь асимптотику нелинейных уравнений

$$\begin{cases} sq''(s) = q(s)r'(s) + \frac{1}{2}t'(s) \\ sr''(s) = -q'(s) - \frac{1}{2}r'(s) + r(s)r'(s) \\ st''(s) = -2q(s)q'(s) + \frac{1}{2}t'(s) - r(s)t'(s) \\ q'(s)^2 + r'(s)t'(s) = 1. \end{cases}$$

и

$$2s^2 r' r''' - s^2 r''^2 + 2sr' r'' - 4sr'^3 + \left(2r + 2l - \frac{1}{4}\right) r'^2 + 1 = 0,$$

выведенных из условий совместимости пары Лакса

$$\begin{aligned}\Psi_\zeta(\zeta, s) &= \left(A_0(s) + \frac{A_1(s)}{\zeta} + \frac{A_2(s)}{\zeta^2}\right) \Psi(\zeta, s) \\ \Psi_s(\zeta, s) &= \frac{B_1(s)}{\zeta} \Psi(\zeta, s)\end{aligned}$$

для $\Psi(\zeta, s)$

Рассмотрев преобразования $\Psi(\zeta, s) \rightarrow U(\lambda, s) \rightarrow X(\lambda, s) \rightarrow R_1(\lambda)$:

$$U(\lambda, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2}is^{\frac{1}{3}} & 1 \end{pmatrix} s^{s\sigma_6} \Psi(s^{2/3}\lambda, s) e^{-s^{1/3}\theta(\lambda)\sigma_3}, \quad \theta(\lambda) = (\lambda + 1)^{3/2}/\lambda,$$

где $\arg(\lambda + 1) \in (-\pi, \pi)$ и $\arg \lambda \in (-\pi, \pi)$

$$X(\lambda) = X(\lambda, s) = \begin{cases} U(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{\alpha i \pi} e^{-2s^{1/3}\theta(\lambda)} & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \Omega_5 \\ U(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\alpha i \pi} e^{-2s^{1/3}\theta(\lambda)} & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \Omega_6, \\ U(\lambda), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

и

$$R_1(\lambda) = \begin{cases} X(\lambda, s) \tilde{N}^{-1}(\lambda), & |\lambda + 1| > r, \\ X(\lambda, s) P_1^{-1}(\lambda), & |\lambda + 1| < r. \end{cases}$$

Из аапроксимации $R_1(\lambda) = I + O(s^{-1/3})$, $s \rightarrow \infty$ следует

$$\Psi(s^{2/3}\lambda, s) = s^{-\frac{1}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}is^{1/3} & 1 \end{pmatrix} \left(I + O(s^{-1/3}/\lambda)\right) \tilde{N}(\lambda) e^{s^{1/3}\theta(\lambda)\sigma_3}$$

для больших λ и больших s . Здесь использован тот факт, что $e^{-2s^{1/3}\theta(\lambda)}$ экспоненциально мало для $\lambda \in \Omega_5 \cup \Omega_6$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Заменяя поведения

$$R_1(\lambda) = \begin{cases} X(\lambda, s) \tilde{N}^{-1}(\lambda), & |\lambda + 1| > r, \\ X(\lambda, s) P_1^{-1}(\lambda), & |\lambda + 1| < r. \end{cases}$$

в бесконечности $\tilde{N}(\lambda)$ на

$$\Psi(s^{2/3}\lambda, s) = s^{-\frac{1}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}is^{1/3} & 1 \end{pmatrix} \left(I + O(s^{-1/3}/\lambda)\right) \tilde{N}(\lambda) e^{s^{1/3}\theta(\lambda)\sigma_3}$$

получим

$$\Psi(s^{2/3}\lambda, s) e^{-s^{1/3}\lambda\sigma_3} = (s^{2/3}\lambda)^{-\frac{1}{4}\sigma_3} \left[I + O(s^{\frac{1}{3}}/\lambda)\right] \frac{I + i\sigma_1}{2}$$

для $\lambda \rightarrow \infty$ и $s \rightarrow \infty$. Аналогично для $|\lambda + 1| < r$:

$$\Psi(s^{2/3}\lambda, s) = s^{-\frac{1}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}is^{1/3} & 1 \end{pmatrix} R_1(\lambda) P_1(\lambda) e^{s^{1/3}\theta(\lambda)\sigma_3}$$

для $\arg(\lambda + 1) \in (\frac{2}{3}\pi, \pi) \cup (-\pi, -\frac{2}{3}\pi)$, т.е. для $\lambda \in \Omega_2 \cup \Omega_3$, такой, что $|\lambda + 1| < r$, где $R_1(\zeta) = I + O(s^{-1/3})$; а $P_1(\lambda)$ строится через функцию Эйри;

$$P_1(\lambda) = E_1(\lambda) \Phi_A(s^{\frac{2}{9}} f_1(\lambda)) e^{-s^{\frac{1}{3}}\theta(\lambda)\sigma_3} e^{\pm \frac{1}{2}\alpha i \pi \sigma_3} \quad \text{для } \pm \operatorname{Im} \lambda > 0, \lambda \in U(-1, r)$$

Подобные формулы верны и для λ в других секторах. Таким образом, $\Psi(s^{2/3}\lambda, s)$ представляется решением Φ_A задачи Эйри RH в виде

$$\Psi(s^{2/3}\lambda, s) = s^{-\frac{1}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}is^{1/3} & 1 \end{pmatrix} R_1(\lambda)E_1(\lambda)\Phi_A(s^{\frac{2}{3}}f_1(\lambda))e^{\pm\frac{1}{2}\alpha i\pi\sigma_3},$$

соответственно для $\pm \operatorname{Im} \lambda > 0$, где $|\lambda + 1| < r$. Аналогично получаем

$$\frac{s^{4/9}}{c} K_\Psi \left(s^{2/3} \left(1 - \frac{u}{cs^{2/9}} \right), s^{2/3} \left(1 - \frac{v}{cs^{2/9}} \right), s \right) = \mathbb{A}(u, v) + O(s^{-2/9}),$$

При выводе нам необходимо аппроксимировать в каждом конкретном случае функцию $\Psi(s^{2/3}\lambda, s)$ для $\zeta \in \Omega_3$ и для $\zeta \in \Omega_6$. Также мы выводим

$$\frac{1}{4n} K_n \left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n} \right) = \frac{\psi_1(-v, s)\psi_2(-u, s) - \psi_1(-u, s)\psi_2(-v, s)}{2\pi i(u - v)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

из

$$\frac{1}{4n} K_n \left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n} \right) = \frac{\psi_1(f_n(y), s)\psi_2(f_n(x), s) - \psi_1(f_n(x), s)\psi_2(f_n(y), s)}{2\pi i(u - v)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Отметим, что если $\lambda = -1 + \frac{u}{c^{2/9}}$, то фазовую переменную $s^{2/9}f_1(\lambda)$ можно разложить в ряд Маклорена в u для ограниченного u и большого s и что $s^{2/9}f_1(\lambda) = u[1 + o(u/s^{2/9})]$;

Теперь рассмотрим асимптотические свойства уравнения

$$2s^2 r' r''' - s^2 r''^2 + 2sr' r'' - 4sr'^3 + \left(2r + 2l - \frac{1}{4}\right) r'^2 + 1 = 0,$$

Для $\operatorname{Re} \lambda > 0$,

$$X(\lambda) = X(\lambda, s) = \begin{cases} U(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{\alpha i\pi} e^{-2s^{1/3}\theta(\lambda)} & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \Omega_5 \\ U(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\alpha i\pi} e^{-2s^{1/3}\theta(\lambda)} & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \Omega_6, \\ U(\lambda), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

,

$$R_1(\lambda) = \begin{cases} X(\lambda, s)\tilde{N}^{-1}(\lambda), & |\lambda + 1| > r, \\ X(\lambda, s)P_1^{-1}(\lambda), & |\lambda + 1| < r. \end{cases}$$

и $R(z) = I + O(n^{-1/3})$ подразумевает

$$U(\lambda) = \left(I + O\left(\frac{s^{-1/3}}{\lambda}\right) \right) \tilde{N}(\lambda) \text{ as } \lambda \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, подставив

$$\Psi(\zeta, s) = \left[I + \frac{C_1(s)}{\zeta} + o\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \right] \zeta^{-\frac{1}{4}\sigma_3} \frac{I + i\sigma_1}{2} e^{\zeta\sigma_3}, \quad \arg \zeta \in (-\pi, \pi), \quad \zeta \rightarrow \infty,$$

и

$$C_1(s) = \begin{pmatrix} q(s) - ir(s) \\ it(s) - q(s) \end{pmatrix}$$

в

$$U(\lambda, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2}is^{\frac{1}{3}} & 1 \end{pmatrix} s^{5\sigma_6\sigma_3} \Psi(s^{2/3}\lambda, s) e^{-s^{1/3}\theta(\lambda)\sigma_3}, \quad \theta(\lambda) = (\lambda + 1)^{3/2}/\lambda,$$

, аппроксимируем $U(\lambda)$ для больших λ

$$U(\lambda)M^{-1}\lambda^{\frac{\sigma_3}{4}} = I + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} i \left\{ \frac{3}{2}s^{\frac{1}{3}} - rs^{-\frac{1}{3}} \right\} & \left\{ \frac{27}{16}s - \left(\frac{9}{4}r + \frac{3}{8} \right) s^{\frac{1}{3}} + 3qs^{-\frac{1}{3}} + \frac{t}{s} \right\} \\ -\frac{3}{2}r + \frac{9}{8}s^{\frac{2}{3}} + qs^{-\frac{2}{3}} & \frac{3}{2}r - \frac{9}{8}s^{\frac{2}{3}} - qs^{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Разложим $\tilde{N}(\lambda)$ в

$$\tilde{N}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\alpha & 1 \end{pmatrix} (\lambda + 1)^{-\frac{1}{4}\sigma_3} M \left(\frac{\lambda + 1 + 1}{\lambda + 1 - 1} \right)^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_3}$$

для больших λ так что

$$\tilde{N}(\lambda) M^{-1} \lambda^{\frac{1}{4}} \sigma_3 = I + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{4} & c \\ i\alpha & \\ i \left\{ \frac{1}{2} \alpha^3 - \alpha \right\} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{4} & \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Объединив все вместе, получим

$$r(s) = \frac{3}{2} s^{\frac{2}{3}} - \alpha s^{\frac{1}{3}} + O(1) \text{ as } s \rightarrow +\infty.$$

Рассмотрим переход от Ψ -ядра к ядру Эйри при $s \rightarrow \infty$. Для начала мы вычислим величину α_n в переменной z , соответствующей $\lambda = -1$, через конформное отображение $\zeta = n^2 \left\{ \phi\left(\frac{z}{4n}\right) \right\}^2 \approx -4nz$ в $\zeta = n^2 \phi^2(z)$ и перемасштабируем $\zeta = s^{2/3} \lambda$ в

$$U(\lambda, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} i s^{\frac{1}{3}} & 1 \end{pmatrix} s^{5\sigma_6} \sigma_3 \Psi\left(s^{2/3} \lambda, s\right) e^{-s^{1/3} \theta(\lambda) \sigma_3}, \quad \theta(\lambda) = (\lambda + 1)^{3/2} / \lambda,$$

. Заметим, что $\alpha_n = \frac{s^{2/3}}{4n}$ приводит к $n^2 \left\{ \phi\left(\frac{\alpha_n}{4n}\right) \right\}^2 \sim -s^{2/3}$. А также $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поскольку $s = 2nt$ и t ограничена сверху.

Стоит отметить, что α_n играет роль в прямом вычислении $w(x) = w(x; t) = x^a e^{-V_t(x)}$, $x \in (0, \infty)$, $t > 0$, $\alpha > 0$, называемого мягким краем.

Мы имеем асимптотическую аппроксимацию Эйри для $\Psi\left(s^{2/3} \lambda, s\right)$:

$$\Psi\left(s^{2/3} \lambda, s\right) = s^{-\frac{1}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} i s^{1/3} & 1 \end{pmatrix} R_1(\lambda) P_1(\lambda) e^{s^{1/3} \theta(\lambda) \sigma_3}$$

и

$$P_1(\lambda) = E_1(\lambda) \Phi_A\left(s^{\frac{2}{9}} f_1(\lambda)\right) e^{-s^{\frac{1}{3}} \theta(\lambda) \sigma_3} e^{\pm \frac{1}{2} \alpha i \pi \sigma_3} \quad \text{для } \pm \operatorname{Im} \lambda > 0, \lambda \in U(-1, r)$$

Аппроксимация дана в окрестности $\lambda = -1$ и, что то же самое, в сжимающейся окрестности $z = \alpha_n$ размера $O(\alpha_n)$.

Подставив

$$\Phi(\zeta) = M_1 \pi^{\frac{1}{2}\sigma_3} \begin{cases} \begin{pmatrix} I_\alpha(\zeta) & \frac{i}{\pi} K_\alpha(\zeta) \\ \pi i \zeta I'_\alpha(\zeta) - \zeta K'_\alpha(\zeta) & \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_1 \cup \Omega_4, \\ \begin{pmatrix} I_a(\zeta) & \frac{i}{\pi} K_\alpha(\zeta) \\ \pi i \zeta I'_\alpha(2\zeta) - \zeta K'_\alpha(\zeta) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_2, \\ \begin{pmatrix} I_a(\zeta) & \frac{i}{\pi} K_\alpha(\zeta) \\ \pi i \zeta I'_\alpha(\zeta) - \zeta K'_\alpha(\zeta) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\pi i \alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \zeta \in \Omega_3, \end{cases}$$

и

$$\Psi\left(s^{2/3} \lambda, s\right) = s^{-\frac{1}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} i s^{1/3} & 1 \end{pmatrix} \left(I + O\left(s^{-1/3} / \lambda\right) \right) \tilde{N}(\lambda) e^{s^{1/3} \theta(\lambda) \sigma_3}$$

в Ψ -ядро в

$$\frac{1}{4n} K_n\left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n}\right) = \frac{\psi_1(-v, s) \psi_2(-u, s) - \psi_1(-u, s) \psi_2(-v, s)}{2\pi i(u - v)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

аналогично с

$$\begin{aligned} \frac{1}{4n} K_n\left(\frac{u}{4n}, \frac{v}{4n}\right) &= \frac{\psi_1(-v, s) \psi_2(-u, s) - \psi_1(-u, s) \psi_2(-v, s)}{2\pi i(u - v)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathbb{J}_\alpha(u, v) + o(s^\mu) + o(1/n^2), \end{aligned}$$

получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{c s^{2/9}} K_n \left(\alpha_n - \frac{\alpha_n}{c s^{2/9}} u, \alpha_n - \frac{\alpha_n}{c s^{2/9}} v; t \right) = \frac{\text{Ai}(u) \text{Ai}'(v) - \text{Ai}(v) \text{Ai}'(u)}{u - v}$$

как $s = 2nt \rightarrow +\infty$, где $\alpha_n = s^{2/3}/(4n)$, $c = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}$, а предел берется равномерно для ограниченных $u, v \in \mathbb{R}$. Это в точности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{c s^{2/9}} K_n \left(\alpha_n \left(1 - \frac{u}{c s^{2/9}}\right), \alpha_n \left(1 - \frac{v}{c s^{2/9}}\right); t \right) = \mathbb{A}(u, v),$$

Так мы доказали теорему 3

□

Задача 1.11 (Число частиц в детерминантном точечном процессе (4 балла)).

Пусть $(\mathfrak{X}, \text{Conf}(\mathfrak{X}), \mathbb{P})$ - детерминантный точечный процесс, задаваемый корреляционным ядром $K_n : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{C}$, которое определяет линейный оператор $\hat{K}_n : L_2(\mathfrak{X}, \mu) \rightarrow L_2(\mathfrak{X}, \mu)$

$$\hat{K}_n f(x) = \int_{\mathfrak{X}} K_n(x, y) f(y) d\mu(y), \quad f(x) \in L_2(\mathfrak{X}, \mu),$$

являющийся проектором, $\hat{K}_n^2 = \hat{K}_n$, на подпространство размерности n , т.е. $\dim \text{Im } \hat{K}_n = n$. Докажите, что общее число частиц в этом процессе почти наверное равно n ,

$$\mathbb{P}(\nu(\mathfrak{X}) = n) = 1.$$

Доказательство.

$$P(\nu(\mathfrak{X}) = n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \Big|_{z=-1} \det(1 + z\hat{k})_{L^2(\mathfrak{X}, \mu)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \Big|_{z=-1} (1 + z)^n = \frac{n!}{n!} = 1$$

так как $\det(1 + z\hat{k}) = (1 + z)^n$ так как размерность образа $\hat{k} - n$

□

Задача 1.12 (Число частиц в интервале в гауссовом унитарном ансамбле и пуассоновском процессе. (6 баллов)).

Рассмотрите гауссов унитарный ансамбль матриц $n \times n$, где плотность распределения собственных значений имеет вид

$$f_{\Lambda_n}^{G, \beta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n^{GUE}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^2.$$

Пусть $E_n(L) := \nu([-L/\sqrt{n}, L/\sqrt{n}])$ - число собственных значений в отрезке $[-L/\sqrt{n}, L/\sqrt{n}]$ и $E(L) := \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(L)$ в смысле моментов. Вычислите дисперсию $\mathbb{D}(E(L))$ случайной величины $E(L)$ и докажите, что имеет место предел

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{D}E(L)}{\ln L} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Прodelайте то же самое для пуассоновского точечного процесса с интенсивностью ρ в \mathbb{R}^d для куба $[-L, L]^d$, а также вычислите вероятность отсутствия частиц в этом кубе

Доказательство.

□