Листок 3. Векторные поля и потоки на многообразиях
Гладкие многообразия
Крайний срок сдачи 27.11.2020

Задачи со звездочками можно сдавать и после дедлайна.

1. Докажите, что инъективное погружение компактного многообразия M в многообразие N является вложением.

2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ векторное поле V_A, которое в точке $x \in \mathbb{R}^n$ принимает значение Ax, где A — квадратная матрица порядка n. Докажите, что

$$[V_A, V_B] = -V_{[A,B]},$$

где $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор матриц.

3. На многообразии M с локальными координатами $q^1, \dots, q^n$ для векторных полей $X = X^1(q)\frac{\partial}{\partial q^1} + \ldots + X^n(q)\frac{\partial}{\partial q^n}$ и $Y = Y^1(q)\frac{\partial}{\partial q^1} + \ldots + Y^n(q)\frac{\partial}{\partial q^n}$ и отображения потока X_t поля X за время t найдите первый порядок по t в разложении в ряд по t поля

$$Y^1(X_t(q))\frac{\partial}{\partial(X_t(q))^1} + \ldots + Y^n(X_t(q))\frac{\partial}{\partial(X_t(q))^n}.$$

4. Пусть X, Y — векторные C^∞-поля, определенные в окрестности $p \in M$. Пусть g_1 — интегральная кривая X, начинающаяся в p. Пусть для достаточно малого τ, g_2 — интегральная кривая поля Y, начинающаяся в $g_1(\tau)$; g_3 — интегральная кривая поля $-X$, начинающаяся в $g_2(\tau)$; g_4 — интегральная кривая поля $-Y$, начинающаяся в $g_3(\tau)$. Определим кривую γ для достаточно малых τ следующим образом $\gamma(\tau^2) = g_4(\tau)$. Докажите, что

$$[X, Y](p) = \lim_{t \to +0} \dot\gamma(t).$$

5. * Пусть X и Y — векторные поля и $[X, Y] \equiv 0$. Докажите, что потоки X_t и Y_s коммутируют.

6. Если M — компактное многообразие, а X — гладкое поле на нём, то действие X_t является полным, то есть для каждой точки $p \in M$ интегральная кривая, проходящая через эту точку, определена на всех $t \in \mathbb{R}$.

7. Пусть D — бесконечно малый параллелепипед, $V(D)$ — его объём, X — гладкое векторное поле с преобразованием потока φ_t, тогда

$$V\big(\varphi_t(D)\big) = V(D) + V(D)\,\mathrm{div}X(p)\cdot t + o(tV(D)), \quad t \to 0,$$

где p — одна из вершин параллелепипеда. В ортонормированной системе координат (x, y, z) дивергенция определяется как

$$\mathrm{div}X = \frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} + \frac{\partial X^3}{\partial z}, \qquad X = (X^1, X^2, X^3).$$

8. Для всяких двух точек x, y связного гладкого многообразия M существует диффеоморфизм f такой, что $f(x) = y$.

Решения

Задача 1

Заметим, что факт того, что F – гомеоморфизм на образ равносилен тому, что F – непрерывная биекция на образ, F^{-1} непрерывна.
F – гладкая, следовательно непрерывная. N – многообразие, следовательно оно хаусдорфово и F – непрерывное отображение из компактного многообразие в хаусдорфово. Тогда из курса топологии известно, что F – замкнута (и прообраз замкнутого замкнут), Тогда F^{-1} непрерывна ($A \subset M$ – компакт, то $F(A)$ – компакт в хаусдорфовом, а следовательно $F(A)$ замкнуто). Тогда так как F – инъекция, то F – биекция на образ (то есть M и $F(M)$ биективны), откуда следует, что F – гомеоморфизм на образ, а следовательно вложение.

Задача 2

Распишем векторные поля по определению

$$V_A := \sum_i a_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad a_j(x) = \sum_m A_{jm}x_m$$

$$V_B := \sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad b_j(x) = \sum_m B_{jm}x_m$$

$$\sum_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} = \sum_i \left(\frac{\partial \sum\limits_m B_{jm}x_m}{\partial x_i}\right) = \sum_i B_{ij}$$

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \sum_i A_{ij}$$

Распишем коммутатор векторных полей

$$[V_A, V_B] = \sum_i (a_i(x)B_{ij} - b_i(x)A_{ji}) = \sum_i \left(\left(\sum_m A_{im}x_m\right)B_{ji} - \left(\sum_m B_{im}x_m\right)A_{ji}\right) =$$

$$\sum_i\sum_m \left(A_{im}B_{ji} - B_{im}A_{ji}\right)x_m = \sum_m\sum_i \left(B_{ji}A_{im} - A_{ji}B_{im}\right)x_m$$

Последний переход можно сделать так как

$$\sum_i\sum_m A_{im}B_{ji} = \sum_i (A_{i1}B_{ji} + A_{i2}B_{ji} + \ldots + A_{in}B_{ji}) = \sum_i (B_{ji}A_{i1} + B_{ji}A_{i2} + \ldots + B_{ji}A_{in}) = \sum_m\sum_i B_{ji}A_{im}$$

Тогда

$$-V_{[A,B]} = V_{[B,A]} = V_{BA-AB} = \sum_i c_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_m c_{im}x_m = \sum_m\left(\sum_i (B_{ji}A_{im} - A_{ji}B_{im})x_m\right)$$

Задача 3

Введем $\gamma_q(0) = q$ такое что $\frac{\partial \gamma_q(r)}{\partial r}|_{r=0} = X_q$ Разложим в ряд тейлора по t

$$X_t(q) = \gamma_q(t) = q + tX_q + o(t)$$
$$Y^i(X_t(q)) = Y^i(q + tX_q + o(t))$$
$$\frac{\partial Y^i(X_t(q))}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial Y^i}{\partial q^j} x^j(q)$$
$$Y^i(X_t(q)) = Y^i(q) + t\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial Y^i}{\partial q^j} X^i(q)\right) + o(t)$$
$$\frac{\partial}{\partial (X_t(q))^i} = \frac{\partial q^i}{\partial (X_t(q))^i} \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \cdot \left(\frac{\partial (X_t(q))^i}{\partial q^i}\right)^{-1} =$$
$$\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial (q^i + tX^i(q) + o(t))}{\partial q^i}\right)^{-1} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(1 + t\cdot\frac{\partial X^i}{\partial q^i}\right)^{-1} = \frac{\partial}{\partial q^i}(1 - t\frac{\partial X^i}{\partial q^i} + o(t))$$
$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 + \ldots = 1 - q + o(q)\frac{\partial}{\partial (X_t(q))^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(1 - t\frac{\partial x^i}{\partial q^i} + o(t)\right)$$

Тогда

$$\sum_i \left(\left(Y^i(q) + t\sum_j \frac{\partial Y^i}{\partial q^i} X^j(q) + o(t)\right)\left(1 - t\frac{\partial X^i}{\partial q^i} + o(t)\right)\frac{\partial}{\partial q^i}\right)$$

При t стоит

$$\sum_{i,j}\left(\frac{\partial Y^i}{\partial q^j} X^j(q) - \frac{\partial X^i}{\partial q^i} Y^i(q)\right)\frac{\partial}{\partial q^i}$$

Задача 4

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}\cdot 2t = \frac{\partial G}{\partial t} \qquad \dot\gamma(t) = \frac{1}{2t}\cdot\frac{\partial G}{\partial t}$$

Заметим, что $G(t) = \gamma(t^2) = \gamma((-t)^2) = G(-t)$, следовательно G – четная функция и ее производная нечетная функция, то есть $\frac{\partial G}{\partial t}(0) = 0$
Тогда

$$\lim_{t\to 0_+} \dot\gamma(t) = \lim_{t\to 0_+} \frac{1}{2t}\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0_+} \frac{\dot G(t) - \dot G(0)}{t} = \frac{1}{2}\ddot G(0)$$

То есть необходимо доказать, что $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(0) = 2[X,Y](p)$
Пусть $G \in C^\infty$, тогда введем функции

$$G_2(t,\tau) = Y_t(X_\tau(p)) \qquad G_3(t,\tau) = X_{-t}(Y_\tau(X_\tau(p))) \qquad G_4(t,\tau) = Y_{-t}(X_{-\tau}(Y_\tau(X_\tau(p))))$$
$$G(t) = G_4(t,t) \qquad G_4(0,t) = G_3(t,t) \qquad G_3(0,t) = G_2(t,t)$$
$$G(0) = G_2(0,0) = G_3(0,0) = G_4(0,0) = p$$

И тогда

$$\frac{\partial (G\circ G_2)}{\partial t} = YG\circ G_2 \qquad \frac{\partial (G\circ G_3)}{\partial t} = -XG\circ G_3 \qquad \frac{\partial (G\circ G_4)}{\partial t} = -YG\circ G_4$$
$$\frac{\partial (G\circ G_2)}{\partial \tau}(0,0) = Xf(p) \qquad \frac{\partial (G\circ G_2)}{\partial \tau}(0,\tau) = XG\circ G_2$$
$$\frac{\partial^2 (G\circ G)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (G\circ G_4)}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 (G\circ G_4)}{\partial t\partial \tau} + \frac{\partial^2 (G\circ G_4)}{\partial \tau^2}$$

заметим что

(1)

$$\frac{\partial}{\partial t}(-YG \circ G_4) = Y(Yf(p))$$

(2)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(-YG \circ G_4) = \frac{\partial}{\partial t}(-YG \circ G_3) + \frac{\partial}{\partial \tau}(-YG \circ G_3) =$$
$$XYf(p) + \frac{\partial}{\partial t}(-YG \circ G_2) + \frac{\partial}{\partial \tau}(-YG \circ G_2) = XYf(p) - YYf(p) - XYf(p) = -YYf(p)$$

(3)

$$\frac{\partial^2(G \circ G_4)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2(G \circ G_3)}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2(G \circ G_3)}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2(G \circ G_3)}{\partial \tau^2} =$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(-XG \circ G_3) + 2\frac{\partial}{\partial \tau}(-XG \circ G_3) + \frac{\partial^2(G \circ G_2)}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2(G \circ G_2)}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2(G \circ G_3)}{\partial \tau^2} =$$
$$XXf(p) + 2\frac{\partial}{\partial t}(-XG \circ G_2) + 2\frac{\partial}{\partial \tau}(-XG \circ G_2) + 2\frac{\partial}{\partial \tau}(-XG \circ G_2) + \frac{\partial}{\partial t}(YG \circ G_2) + 2\frac{\partial}{\partial \tau}(YG \circ G_2) + \frac{\partial}{\partial \tau}(XG \circ$$
$$XXG(p) - 2YXG(p) - 2XXG(p) + YYG(p) + 2XYG(p) + XXG(p) =$$
$$2XYG(p) - 2YXG(p) + YYG(p) = 2[X,Y] + YYG(p)$$

$$(1) + (2) + (3) = 2[X,Y] + YYG(p) + YYG(p) - 2YYf(p) = 2[X,Y]$$

Задача 5*

Если $[X,Y] \cong 0$, то $\Psi_{X,t} \circ \Psi_{Y,s} = \Psi_{Y,s} \circ \Psi_{X,t}$
Можно заметить, что равенство верно для $t = 0$ так как $\Psi_{X,0}(y) = y \quad \forall y$. Тогда докажем

$$\partial_t \Psi_{X,t} \circ \Psi_{Y,s} = \partial_t \Psi_{Y,s} \circ \Psi_{X,t}$$

Левая часть равна векторному полю X по условию, а правая равна $D\Psi_{Y,s}(X)$, то есть

$$D\Psi_{Y,s}(X) = D\Psi_{Y,0}(X) + \int_0^s \frac{d}{dr} D\Psi_{Y,r}(X) dr = X + \int_0^s D\Psi_{Y,r} \frac{d}{dr'} D\Psi_{Y,r'}(X)|_{r'=0} dr$$
$$D\Psi_{Y,r+r'} = D\Psi_{Y,r} \circ D\Psi_{Y,r}$$

Тогда выполнено

$$D\Psi_{Y,r'}(X)|_{r'=0} = -[Y,X] = 0$$
$$D\Psi_{Y,s}(X) = X$$

Так как если $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ и $x \in M$, то существует $\delta > 0$, окрестность U у $x \in M$ и гладкое отображение $\Psi : U \times (-\delta, \delta) \to M$, удовлетворяющее условиям:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(y,t) = V_{\Psi(y,t)}$$
$$\Psi(y,0) = y$$
$$\forall y \in U \qquad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

Для каждого $t \in (-\delta, \delta)$ отображения $\Psi_t : U \to M$ определен локальный диффеоморфизм $\Psi_t(y) = \Psi(y,t)$ и $\Psi_t \circ \Psi_s = \Psi_{s+t}$

Задача 6

$\operatorname{supp} X$ это $\overline{\{p \in M |\ X(p) \neq 0\}}$. Заметим, что если $X(p) = 0$, то $F_X^t(p) = p$ определено при всех $t \in \mathbb{R}$. Для каждой точки $p \in \operatorname{supp} X$ можно указать такую открытую окрестность U_p и такое $\varepsilon_p > 0$, что $F_X^t(q)$ определено для всех $q \in U_p$ и всех t, удовлетворяющих $|t| < \varepsilon_p$. Так как $\operatorname{supp} X$ компактен, выберем из открытого покрытия $\{U_p\}_{p \in \operatorname{supp} X}$ этого множества конечное подпокрытие $\{U_{p_i}\}_{i=1}^N$ и положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_i} |\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$. Тогда при $|t| < \varepsilon$ отображение $F_x^t :\ M \to M$ определено глобально на всем M. Теперь, используя групповое свойство, можно заметить, что F_X^t определено глобально на при любом $t \in \mathbb{R}$. Действительно, представим t в виде $t = t_1 + \ldots + t_k$, где $|t_i| < \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Тогда $F_X^t = F_X^{t_1} \circ \ldots \circ F_x^{t_k}$. Правая часть этого равенства определена глобально. Следовательно и левая часть определена глобально.

Задача 7

Известно, что $V(\varphi_t(D)) = \int_{\varphi_t(D)} du$ и $\varphi_t : D \to \varphi_t(D)$ – диффеоморфизм, тогда по формуле замены координат в интеграле: $V(\varphi_t(D)) = \int_D \det\left(\frac{\partial \varphi_t^i}{\partial X^j}\right)_{ij} dv$.

$$\varphi_t(p) = p + X(p)t + o(t)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_t^i}{\partial X^j}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + t\frac{\partial X^1}{\partial X} + o(t) & t\frac{\partial X^1}{\partial y} + o(t) & t\frac{\partial X^1}{\partial z} + o(t) \\ t\frac{\partial X^2}{\partial X} + o(t) & 1 + t\frac{\partial X^2}{\partial y} + o(t) & t\frac{\partial X^2}{\partial z} + o(t) \\ t\frac{\partial X^3}{\partial X} + o(t) & t\frac{\partial X^3}{\partial y} + o(t) & 1 + t\frac{\partial X^3}{\partial z} + o(t) \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_t^i}{\partial X^j}\right) = 1 + t\left(\frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} + \frac{\partial X^3}{\partial z}\right) + o(t)$$

$$V(\varphi_t(D)) = \int_D 1 + t\left(\frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} + \frac{\partial X^3}{\partial z}\right) + o(t) = V(D) + V(D)t \operatorname{div} X + o(t)$$

Задача 8

$\forall x, y\ \exists f \in \mathrm{Diff}(M)$, такой что $f(x) = y$.
Рассмотрим множество $\delta_y = \{x \in M |\ \exists F \in \mathrm{Diff}(M)\ F(x) = y\}$, оно непусто так как $y \in \delta_y$ докажем, что δ_y открыто
Из свойств δ_y:

$$x \in \delta_y \Rightarrow y \in \delta_x$$
$$x \in \delta_{x'},\ x' \in \delta_y \Rightarrow x \in \delta_y$$

То есть мы имеем отношение эквивалентности, доказав открытость класса эквивалентности, мы получим утверждение задачи (так как если $\delta_y \neq M$, то $M = \delta_y \sqcup \delta_{y'},\ \delta_y, \delta_{y'}$ – непустые открытые, противоречие)
$\forall p \in M\ \exists U \ni p,\ \varphi$ – гомеоморфизм, такое что $\varphi(p) = 0,\ \varphi : U \to \mathbb{R}^n$
Пусть $p' \in U,\ \varphi(p') = C,\ C = (c^1, \ldots, c^n)$
Рассмотрим замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$ с y в 0, радиуса $\varepsilon + \delta$, такой что $\varphi^{-1}(\overline{C}_{\varepsilon+\delta}) \in U$
Возьмем функцию $f : M \to R \quad f(p) = \begin{cases} H_{\varepsilon,\delta}(\varphi(p)),\ p \in U \\ 0,\ p \in U \end{cases}$, где $H_{\varepsilon,\delta}$
Функция f имеет компактный носитель, а именно $\varphi^{-1}(\overline{C}_{\varepsilon+\delta})$. Определим локально векторное поле $X = \sum c^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (построим векторное поле). Векторное поле $fX = \tilde{X}$ определено глобально, $\tilde{X}|_{\varphi^{-1}(\overline{C}_\varepsilon)} = X$, имеет компактный носитель, а именно $\varphi^{-1}(\overline{C}_{\varepsilon+\delta})$
Определим локально векторное поле $X = \sum c^i \frac{\partial}{\partial x^i}$
Векторное поле $fX = \tilde{X}$ определено глобально, $\tilde{X}|_{\varphi^{-1}(\overline{C}_\varepsilon)} = X$, имеет компактный носитель (совпадает с носителем f). По задаче 6 действие $\tilde{X}_t$ является полным, причем $\tilde{X}_t : \ M \to M$ – диффеоморфизм. Рассмотрим интегральную кривую $\gamma(t) = \varphi^{-1}(ct) \quad (\dot{\gamma}^i(t) = c^i) \quad \gamma(0) = p \quad \gamma(1) = p'$.
Тогда для $t = 1$ имеем $\tilde{X}_t(p) = p'$, то есть $p \in \delta_{p'} \Rightarrow p' \in \delta_p$
Так мы доказали, что если $X \in \delta_y$, то $\forall x' \in U \quad x' \in \delta_x \Rightarrow x' \in \delta_y$, следовательно δ_y открыто