код: 4794795191
0123456789

N1. $a_5 = 9,\ a_7 = 1 \to a_5 + a_7 = 0.$

Опр. $\gamma: [A, B] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — кусочно-гладкий путь, f — непр. ф-ия с комплексными знач., опр. на $\gamma([A,B])$ или некотором откр. мн-ве, содерж. $\gamma([A,B])$. Тогда $\int\limits_\gamma f(z)dz := \int\limits_A^B f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$

---

(0) $f(x+iy) = x$, $\gamma: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{\pi i \sin t}$, $\int\limits_\gamma f(z)dz = ?$

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

$$\gamma(t) = e^{i(\pi \sin t)} = \underbrace{\cos(\underbrace{\pi \sin t}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sin(\underbrace{\pi \sin t}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}} \Rightarrow f(\gamma(t)) = \cos(\pi \sin t).$$

$$\gamma'(t) = (e^{\pi i \sin t})' = e^{\pi i \sin t} \cdot \pi i \cos t.$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos(\pi \sin t) e^{\pi i \sin t} \pi i \cos t\, dt = \left\{ \begin{array}{l} u = \pi \sin t \Rightarrow du = \pi \cos t\, dt \Rightarrow dt = \dfrac{du}{\pi \cos t} \\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \sin t \le 1 \Rightarrow 0 \le \pi \sin t \le \pi. \end{array} \right\} = \int\limits_0^\pi \cos u\, e^{iu}\, i\, du =$$

$$= \int\limits_0^\pi \cos u\, de^{iu} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi e^{iu} de^{iu} + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \frac{1}{e^{iu}} de^{iu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2iu}}{2}\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^{iu})\Bigg|_0^\pi = \cancel{\frac{1}{4}(e^{2i\pi} - 1)} + \frac{1}{2}(\ln(e^{i\pi}) -$$

$$\frac{e^{2iu}}{4}\Bigg|_0^\pi + \frac{iu}{2}\Bigg|_0^\pi =$$

$$- \ln 1) = \frac{1}{2} i\pi.$$

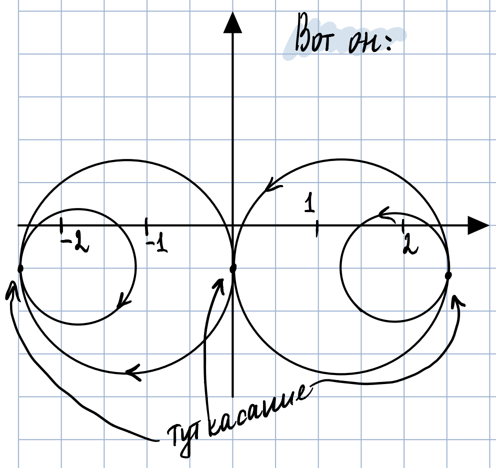
Ответ. $\frac{\pi i}{2}$.

№2. $a_3 = 4,\ a_4 = 7 \Rightarrow a_3 + 2a_4 = 4 + 14 \equiv 8$

число оборотов пути вокруг точки k (полож. ориент.)

(8) Нарисовать замкнутый путь γ, т.ч. $\forall k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2 : \operatorname{Ind}_k \gamma = k$.

Вот он:



$k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2 \Leftrightarrow k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Вокруг -2 с учетом ориентации -2 оборота, вокруг -1 с учетом ориентации -1 оборот, вокруг 1 – один оборот, 2 – два оборота, вокруг 0 – 0 оборотов.

это тире, я их очень люблю

$\exists$ то, что надо.

№3. $a_0 = 4$

$a_1 = 7$ $\Rightarrow 5a_0 + 7a_1 = 20 + 49 \equiv 9.$

(9) Найти все знач. $\int\limits_C f(z)\,dz$, C — замкнутый путь, $f(C)$ опр. и не обр. в беск. нигде.

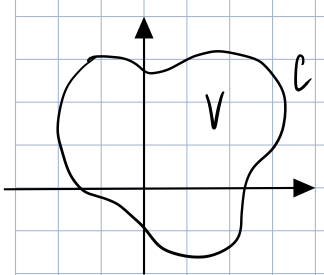
$$f(z) = \frac{z^3 - 7z^2 + 16z - 12}{z^3 - 8z^2 + 19z - 12} = \frac{z^3 - 8z^2 + z^2 + 19z - 3z - 12}{z^3 - 8z^2 + 19z - 12} = 1 + \frac{z^2 - 3z}{z^3 - 8z^2 + 19z - 12} = 1 + \frac{z(z-3)}{(z-1)(z-3)(z-4)} =$$

$$= 1 + \frac{z}{(z-1)(z-4)} = 1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z-4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1} \text{ при } z \neq 3.$$

$\Rightarrow$ есть три особые точки: $z = 1, 3, 4.$

Т. Коши, v_3, a)

$f: U \to \mathbb{C}$ — голом., $U \subset \mathbb{C}$ — откр. $\gamma_1, \gamma_2 \subset U$ — замкнутые несамопересек. и не пересек. друг с другом кривые, ориент-ые полож. Если часть плоск., заключ. между γ_1 и γ_2, целиком сод. в U, то $\int\limits_{\gamma_1} f\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f\,dz.$



По т. Коши v_3 можем вместо пути C брать окружность, лежащую внутри C, для подсчета интеграла.

Пример 4.7 из учебника: если γ — окр. радиуса $r > 0$ с центром в т. $a \in \mathbb{C}$, ориент. положит., т.е. против ч.с., то $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$

С.52 учебника: интеграл от $(z-a)^n$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ равен 0.

Предл.-опр. 4.19: $\operatorname{Ind}_a \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a}.$

---

1) Если особые точки не лежат в V, то по теореме Коши V2 $\int_C f(z)dz=0$

(f — голоморфная из выпуклого откр. мн-ва $\mathbb{C}\setminus\{1,2,4\}$.

2) Если все лежат, возьмем в кач-ве γ окр. с центром в $z=1$ и $r=1$.

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma \left(1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z-4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1}\right)dz=\underbrace{\int_\gamma dz}_{\text{по теореме}}+\frac{4}{3}\underbrace{\int_\gamma\frac{dz}{z-4}}-\frac{1}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-1}=\frac{8\pi i}{3}-\frac{2\pi i}{3}=\frac{6\pi i}{3}=2\pi i.$$

индекс отн. окр. с центром в $z=1$ и радиусом 1 равен $0\Rightarrow$ интеграл $=0$.

Теперь если не все точки лежат, но какие-то лежат. Дальше будем брать окр. с центрами в леж. точке и $r=1$. И пользоваться, если индекс $=0\Rightarrow$ инт. $=0$

- Если 1 лежит, а остальные нет.

$$\int_\gamma dz+\frac{4}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-1}=0+0-\frac{1}{3}\cdot 2\pi i=-\frac{2\pi i}{3}.$$

- Если 3 лежит, а остальные нет, то $\int_\gamma dz+\frac{4}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-1}=0.$

- Если 4 лежит, а ост. нет, то $\int_\gamma dz+\frac{4}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\underbrace{\int_\gamma\frac{dz}{z-1}}_{\text{индекс отн. окруж. с центром в 4 равен 0}}=0+\frac{4}{3}\cdot 2\pi i-0=\frac{8\pi i}{3}.$

- Если 1 не лежит, а ост. лежат, то $\int_\gamma dz+\frac{4}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-1}=\frac{8\pi i}{3}.$

- Если 3 не лежит, а ост. лежат, то $\int_\gamma dz+\frac{4}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-1}=2\pi i.$

- Если 4 не лежит, а ост. лежат, то $\int_\gamma dz+\frac{4}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int_\gamma\frac{dz}{z-1}=\frac{-2\pi i}{3}.$

Ответ: $-\frac{2\pi i}{3}$, 0, $2\pi i$, $\frac{8\pi i}{3}$.

№4. $a_1 = 7$

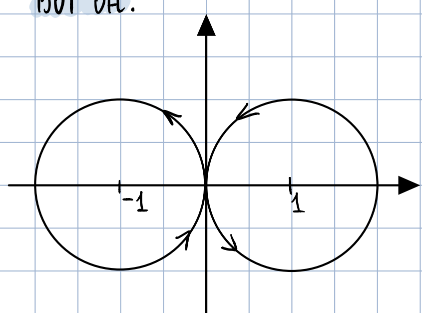
$a_6 = 5$ $\Rightarrow 6a_1 + a_6 = 42 + 5 \equiv 7.$

Пример 4.7 из учебника: если γ — окр. радиуса $r>0$ с центром в т. $a \in \mathbb{C}$, ориент. положит., т.е. против ч.с., то $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$

---

(7) Привести пример контура C, т.ч. $\int\limits_C f(z)\,dz = 10\pi i$, $f(z) = \frac{5z-1}{z^2-1} = \frac{5z-1}{(z-1)(z+1)} = \frac{3}{z+1} + \frac{2}{z-1}.$

Вот он:



$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma_2 : [2\pi, 4\pi] \to \mathbb{C}$ $\Rightarrow \int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz.$

$F(z) = 3\ln(z+1) + 2\ln(z-1)$ — первообразная.

Пусть γ_1 — окружность радиуса 1 с центром в $a = -1$, ориент. полож., тогда $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{3}{z+1}\,dz + \int\limits_{\gamma_1} \frac{2}{z-1}\,dz = 6\pi i$:

- $3\int\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1} = 3 \cdot 2\pi i$ из примера 4.7,
- $2\int\limits_{\gamma_1} \frac{d}{z-1} = 0$, т.к. как в прошлой задаче индекс относительно контура равен нулю $\Rightarrow$ интеграл 0 (или т.к. можем определить первообр., а инт. по замкнутому контуру $\Rightarrow$ равен 0).

Аналогично $\int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0 + 2 \cdot 2\pi i.$

$\Rightarrow \int\limits_C f(z)\,dz = 10\pi i.$