Дифференциальные уравнения

2 курс

Домашняя работа

Владислав Мозговой

Дифференциальные уравнения 2020

Домашнее задание № 3

Зависимость от параметра. Линейные уравнения и системы

Дата сдачи задания: 15.12.2020

Рекомендация. В задачнике А.Ф. Филиппова “Сборник задач по дифференциальным уравнениям” имеется краткое изложение основных методов интегрирования предложенных ниже задач. Теория и полезные приемы представлены в начале каждого тематического раздела задачника.

Выберите значение параметра μ_0, при котором точно решается задача для главного приближения $x_{(0)}(t)$. Разложите точное решение в ряд в окрестности μ_0 и вычислите явный вид главного приближения $x_{(0)}(t)$ и первого поправочного слагаемого $x_{(1)}(t)$. Для коэффициента второго порядка малости $x_{(2)}(t)$ выпишите задачу Коши (т.е., дифференциальное уравнение и начальные данные).

1. $$\frac{dx}{dt} = \frac{2t + (\mu - 1)x^2}{\mu}, \qquad x(1) = \ln \mu.$$

Найдите значения частных производных $\partial x(t, \mu)/\partial \mu$ и $\partial y(t, \mu)/\partial \mu$ точного решения системы в точке $\mu = 2$.

2. $$\frac{dx}{dt} = xy + t^2, \quad \frac{dy}{dt} = -y^2/2, \qquad x(1) = 3, \ y(1) = \mu.$$

Для заданных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ найдите линейное однородное дифференциальное уравнение (с единичным коэффициентом при старшей производной), для которого $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Найдите решение $y(x)$ соответствующего неоднородного уравнения для данной правой части $f(x)$ и заданных начальных данных.

3. $$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2; \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \quad y(1) = y'(1) = -1.$$

4. $$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x; \qquad f(x) = 1 - x^2, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Найдите общее решение следующих неоднородных линейных уравнений:

5. $$y''' - 2y'' + y' - 2y = x + \cos x$$

6. $$y'' - 4y' + 4y = x \sin x$$

7. $$y''' - 3y' + 2y = (x + 1)e^x$$

Найдите общее решение следующих неоднородных систем линейных уравнений первого порядка для функций переменной t (штрих обозначает производную по t):

8. $$\begin{cases} x' = 4x - 6y \\ y' = 3x - 5y + t \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} x' = y + z + t \\ y' = x + z + 2t \\ z' = x + y + 3t \end{cases}$$

Решения

Задача 1

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t + (\mu - 1)x^2}{\mu} \qquad x(1) = \ln(\mu)$$

Рассмотрим $\mu_0 = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2t \;\Rightarrow\; x = t^2 + c \\ x(1) = \ln(1) = 0 \end{cases} \qquad x = t^2 - 1$$

Разложим в ряд вблизи $\mu = 1$

$$x = x_0 + (\mu - 1)x_1 + \frac{(\mu - 1)^2}{2}x_2 + o(\mu^2)$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0 + (\mu - 1)\dot{x}_1 + \frac{(\mu - 1)^2}{2}\dot{x}_2 + o(\mu^2)$$
$$x^2 = x_0^2 + (\mu - 1)2x_0x_1 + \frac{(\mu - 1)^2}{2}(2x_0x_2 + 2x_1^2) + o(\mu^2)$$
$$\mu\dot{x} = 2t + (\mu - 1)x^2 \qquad 1 - \dot{x}$$
$$(\mu - 1)\dot{x} = 2t + (\mu - 1)x^2 - \dot{x}$$

Рассмотрим $x(1)$

$$x(1) = \ln(\mu) = \ln(1 + (\mu - 1)) = (\mu - 1) - \frac{(\mu - 1)^2}{2} + o(\mu^2)$$
$$x_0(1) = 0 \qquad x_1(1) = 1 \qquad x_2(1) = -1$$

Составим задачи Коши

$(\mu - 1)^0$

$$\begin{cases} 0 = 2t + 0 - \dot{x}_0 \\ x_0(1) = 0 \end{cases}$$
$$x_0 = t^2 - 1$$

$(\mu - 1)^1$

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_0^2 - \dot{x}_1 \\ x_1(1) = 1 \end{cases}$$
$$\dot{x}_1 = (t^2 - 1)^2 - 2t = t^4 - 2t^2 - 2t + 1$$
$$x_1 = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} - t^2 + t + c$$
$$c = 1 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 - 1 = \frac{22}{15}$$

$(\mu - 1)^2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_0x_1 - \dot{x}_2 \\ x_2(1) = -1 \end{cases}$$
$$\dot{x}_2 = 2(t^2 - 1)\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} - t^2 + t + \frac{22}{15}\right) - t^4 + 2t^2 + 2t - 1 =$$
$$\frac{2t^7}{5} - \frac{26t^5}{15} - 3t^4 + \frac{10t^3}{3} + \frac{104t^2}{15} - \frac{59}{15}$$

Тогда задача Коши для x_2

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{2t^7}{5} - \frac{26t^5}{15} - 3t^4 + \frac{10t^3}{3} + \frac{104t^2}{15} - \frac{59}{15} \\ x_2(1) = -1 \end{cases}$$

Задача 2

$$\begin{cases} x(1) = 3 \\ y(1) = \mu = 2 + (\mu - 2) \end{cases}$$

$$x(t,\mu) = x^{(0)}(t,2) + (\mu-2)x^{(1)}(t) + \frac{(\mu-2)^2}{2}x^{(2)}(t) + \dots$$

$$\mu^{(0)} : \begin{cases} \dot{y}^{(0)} = -\frac{y^{(0)^2}}{2} \qquad y^{(0)} = \frac{2}{t} \\ \dot{x}^{(0)} = x^{(0)}y^{(0)} + t^2 = \frac{2x^{(0)}}{t} + t^2 \qquad x^{(0)} = t^3 + 2t^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{y^2}{2} \qquad -\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}t + \tilde{c} \qquad y = \frac{2}{t},\ y(1) = \mu = 2$$

$$x' - \frac{2}{t}x = t^2$$

$$x' - \frac{2}{t}x = 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{2x}{t} \qquad \frac{1}{2}\ln(x) = \ln(t) + c \quad x = t^2\tilde{c}$$

$$\frac{\partial t^2\tilde{c}(x)}{\partial t} = 2t\tilde{c}(x) + t^2\tilde{c}'(x)$$

$$2t\tilde{c}(x) + t^2\tilde{c}'(x) - 2t\tilde{c}(x) = t^2 \qquad \tilde{c}'(x) = 1,\ \tilde{c}(x) = t + c \quad x = t^3 + 2t^2$$

$$y^2 = (y^{(0)} + (\mu-2)y^{(1)} + \frac{(\mu-2)^2}{2!}y^{(2)}) = (y^{(0)})^2 + (\mu-2)2y^{(0)}y^{(1)} + \frac{(\mu-2)^2}{2}(2y^{(0)}y^{(2)} + (y^{(1)})^2) + \dots$$

$$\mu' : \begin{cases} \dot{y}^{(1)} = -\frac{1}{2}2y^{(0)}y^{(1)} = -\frac{2}{t}y^{(1)} \qquad y^{(1)} = \frac{\tilde{c}}{t^2} = \frac{1}{t^2} \\ \dot{x}^{(1)} = xy + t^2 \end{cases}$$

$$xy = (y^{(0)} + (\mu-2)y^{(1)} + \dots)(x^{(0)} + (\mu-2)x^{(1)} + \dots) = x^{(0)}y^{(0)} + (\mu-2)(y^{(1)}x^{(0)} + y^{(0)}x^{(1)}) + \dots$$

$$\begin{cases} \dot{y}^{(1)} = \frac{2}{t^2} \\ \dot{x}^{(1)} = t + 2 + x^{(1)}\frac{2}{t} \end{cases}$$

$$\dot{x}^{(1)} - \frac{2}{t}x^{(1)} = t^2 + 2t \qquad x^{(1)} = \tilde{c}(t)t^2$$

$$\frac{\partial\tilde{c}(t)t^2}{\partial t} = \tilde{c}'(t)t^2 + 2t\tilde{c}(t) \qquad \tilde{c}'(t)t^2 + 2t\tilde{c}(t) - 2t\tilde{c}(t) = t + 2$$

$$\tilde{c}'(t) = \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} \qquad \tilde{c}(t) = \ln(t) - \frac{2}{t} + c$$

$$x^{(1)} = (\ln(t) - \frac{2}{t} + c)t^2 \qquad x^{(1)}(1) = -2 + c = 0$$

$$x^{(1)} = (\ln(t) - \frac{2}{t} + 2)t^2$$

Задача 3

$$y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^2 \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad y(1) = y'(1) = -1$$

$$W_2[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$$

$$W_3[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} x & x^2 & g \\ 1 & 2x & g' \\ 0 & 2 & g'' \end{vmatrix} = 2x^2g'' + 2g - 2xg' - x^2g'' = 0$$

$$x^2g'' - 2xg' + 2g = 0$$

Решим ДУ

$$\begin{cases} y(x) = x^2g'' - 2xg' + 2g - \frac{1}{x} = 0 \\ y(1) = y'(1) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$y(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2$$

$$\begin{pmatrix} xc_1' + x^2c_2' \\ c_1' + 2xc_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} xc_1' = -x^2c_2' \\ c_1' + 2xc_2' \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1' = -xc_2' \\ \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$c_2' = \frac{1}{x^2} \qquad c_2 = -\frac{1}{x} + D_2$$

$$c_1' = -\frac{1}{x} \qquad c_1 = -\ln(x) + D_1$$

$$y(x) = (-\ln(x) + D_1)x + (-\frac{1}{x} + D_2)x^2 = -x\ln x + D_1x - x + D_2x^2$$

$$y(1) = D_1 + D_2 - 1 = -1 \quad D_1 + D_2 = 0$$

$$y'(1) = -\ln(1) - 1 + D_1 + 2D_2 - 1 = -1$$

$$\begin{cases} D_1 + D_2 = 0 \\ D_1 + 2D_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} D_1 = -1 \\ D_2 = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = -x\ln x - 2x + x^2$$

Задача 4

$$y_1(x) = x,\ y_2(x) = e^x \qquad f(x) = 1 - x^2,\ y(0) = y'(0) = 0$$

$$W_2[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x$$

$$W_3[y_1, y_2, y] = \begin{vmatrix} x & e^x & y \\ 1 & e^x & y' \\ 0 & e^x & y'' \end{vmatrix} = xe^xy'' + e^xy - xe^xy' - e^xy'' = e^x\left((x-1)y'' - xy' + y\right) = 0$$

Решим ДУ

$$\begin{cases} y(x) = e^x((x-1)y'' - xy' + y) = 1 - x^2 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - x^2 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = c_1(x)x + c_2(x)e^x$$

$$\begin{cases} xc_1' + e^x c_2' = 0 \\ c_1' + e^x c_2' = 1 - x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^x c_2' = -xc_1' \\ c_1'(1-x) = 1 - x^2 \end{cases}$$

$x = 1$ или

$$c_1' = 1 + x \qquad c_1 = x + \frac{1}{2}x^2 + D_1$$

$$c_2' = (-x^2 - \frac{1}{2}x^3 - D_1 x)e^{-x} = e^{-x}((x-2)x + \frac{1}{2}(x-3)x^2 + (x-1)D_1) + D_2$$

$$y(x) = (x + \frac{1}{2}x^2 + D_1)x + (x-2)x + \frac{1}{2}(x-3)x^2 + (x-1)D_1 + D_2 e^x$$

$$y(0) = D_2 = 0$$

$$y'(0) = D_1 - 2 + D_1 + D_2 = 0$$

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + x + x^2 - 2x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - 1 = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$$

Задача 5

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = x + \cos x$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i$$

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x)$$

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & \sin(x) & \cos(x) \\ 2e^{2x} & \cos(x) & -\sin(x) \\ 4e^{2x} & -\sin(x) & -\cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x + \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{2x}c_1' + \sin(x)c_2' + \cos(x)c_3' = 0 \\ 2e^{2x}c_1' + \cos(x)c_2' - \sin(x)c_3' = 0 \\ 4e^{2x}c_1' - \sin(x)c_2' - \cos(x)c_3' = x + \cos(x) \end{cases}$$

$$(1) + (3) = 5e^{2x}c_1' = x + \cos(x) \qquad c_1' = \frac{1}{5}(x + \cos(x))e^{-2x}$$

$$c_1 = -\frac{1}{100}e^{-2x}(10x - 4\sin(x) + 8\cos(x) + 5) + A$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}(x + \cos(x)) + \sin(x)c_2' + \cos(x)c_3' = 0 \\ \frac{2}{5}(x + \cos(x)) + \cos(x)c_2' - \sin(x)c_3' = 0 \end{cases}$$

$$5c_2' = 2x\sin(x) - x\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) - \cos(x)^2$$

$$c_2 = \frac{1}{10}(-x - 2(x-2)\sin(x) - 2\cos(x)^2 - 4x\cos(x) - \sin(x)\cos(x) - 2\cos(x)) + B$$

$$5c_3' = (2\cos(x) + \sin(x))(x + \cos(x))$$

$$c_3 = -\frac{1}{10}(2x + 4x\sin(x) + 2\sin(x) - \cos(x)^2 - 2x\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) + 4\cos(x)) + C$$

Подставим в $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x)$

$$y(x) = \left(-\frac{1}{100}e^{-2x}(10x - 4\sin(x) + 8\cos(x) + 5) + A\right)e^{2x} +$$
$$\left(\frac{1}{10}(-x - 2(x-2)\sin(x) - 2\cos(x)^2 - 4x\cos(x) - \sin(x)\cos(x) - 2\cos(x)) + B\right)\sin(x) +$$
$$\left(-\frac{1}{10}(2x + 4x\sin(x) + 2\sin(x) - \cos(x)^2 - 2x\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) + 4\cos(x)) + C\right)\cos(x) =$$

$$Ae^{2x} + B\sin(x) + C\cos(x) - \frac{1}{100}(10x - 4\sin(x) + 8\cos(x) + 5) +$$
$$\frac{1}{10}\sin(x)(-x - 2(x-2)\sin(x) - 2\cos(x)^2 - 4x\cos(x) - \sin(x)\cos(x) - 2\cos(x)) -$$
$$\frac{1}{10}\cos(x)(2x + 4x\sin(x) + 2\sin(x) - \cos(x)^2 - 2x\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) + 4\cos(x)) =$$

$$Ae^{2x} + B\sin(x) + C\cos(x) - \frac{10}{100}x + \frac{4}{100}\sin(x) - \frac{8}{100}\cos(x) - \frac{5}{100} -$$
$$\frac{1}{10}x\sin(x) - \frac{2}{10}x\sin(x)^2 + \frac{4}{10}\sin(x)^2 - \frac{2}{10}\cos(x)^2\sin(x) - \frac{4}{10}x\cos(x)\sin(x) - \frac{1}{10}\sin(x)^2\cos(x) - \frac{2}{10}\cos(x) +$$
$$\frac{2}{10}x\cos(x) - \frac{4}{10}x\sin(x)\cos(x) - \frac{2}{10}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{10}\cos(x)^3 + \frac{2}{10}x\cos(x)^2 - \frac{2}{10}\sin(x)\cos(x)^2 - \frac{4}{10}\cos(x)^2 =$$

$$Ae^{2x} + B\sin(x) + C\cos(x) - \frac{1}{10}x + \frac{1}{25}\sin(x) - \frac{2}{25}\cos(x) - \frac{1}{20} - \frac{1}{10}x\cos(x) -$$
$$\frac{2}{10}\cos(x)^3 - \frac{4}{10}x\cos(x)^2 - \frac{2}{10}\sin(x)^2 - \frac{2}{10}\sin(x)^2\cos(x) =$$

$$Ae^{2x} + B\sin(x) + C\cos(x) - \frac{2}{10} - \frac{4}{10}x - \frac{1}{10}x + \frac{1}{25}\sin(x) - \frac{2}{25}\cos(x)$$
$$-\frac{1}{20} - \frac{1}{10}x\cos(x) - \frac{2}{10}x\sin(x) - \frac{2}{10}\sin(x)^2\cos(x) - \frac{2}{10}\cos(x)^3 =$$

$$Ae^{2x} + B\sin(x) + C\cos(x) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{25}\sin(x) - \frac{2}{25}\cos(x) - \frac{1}{10}x\cos(x) - \frac{2}{10}x\sin(x) - \frac{2}{10}\cos(x) =$$

$$Ae^{2x} + B\sin(x) + C\cos(x) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x\cos(x) - \frac{2}{10}x\sin(x)$$

Ответ:

$$y(x) = Ae^{2x} + B\sin(x) + C\cos(x) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x\cos(x) - \frac{2}{10}x\sin(x)$$

Задача 6

$$y'' - 4y' + 4y = x \sin x$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$
$$(\lambda - 2)^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 2$$
$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$
$$\begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x\sin(x) \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} e^{2x} c_1' + xe^{2x} c_2' = 0 \\ 2e^{2x} c_1' + (2x+1)e^{2x} c_2' = x\sin(x) \end{cases}$$
$$(2) - 2(1) = e^{2x} c_2' = x\sin(x) \qquad c_2' = x\sin(x)e^{-2x}$$
$$(1):\ e^{2x} c_1' + x^2 \sin(x) = 0 \qquad c_1' = -x^2 \sin(x) e^{-2x}$$
$$c_2 = -\frac{1}{25} e^{-2x} \left((10x+3)\sin(x) + (5x+4)\cos(x)\right) + B$$
$$c_1 = \frac{1}{125} e^{-2x} \left((50x^2 + 30x + 4)\sin(x) + (25x^2 + 40x + 22)\cos(x)\right) + A$$

Подставим в $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

$$y(x) = \left(\frac{1}{125} e^{-2x} \left((50x^2 + 30x + 4)\sin(x) + (25x^2 + 40x + 22)\cos(x)\right) + A\right) \cdot e^{2x} +$$
$$\left(-\frac{1}{25} e^{-2x} \left((10x+3)\sin(x) + (5x+4)\cos(x)\right) + B\right) \cdot xe^{2x} =$$
$$Ae^{2x} + Bxe^{2x} + \frac{1}{125}\left((50x^2 + 30x + 4)\sin(x) + (25x^2 + 40x + 22)\cos(x)\right) - \frac{1}{25} x \left((10x+3)\sin(x) + (5x+4)\cos(x)\right) =$$
$$Ae^{2x} + Bxe^{2x} + \sin(x)\left(\frac{50x^2 + 30x + 4}{125} - \frac{10x^2 + 3x}{25}\right) + \cos(x)\left(\frac{25x^2 + 40x + 22}{125} - \frac{5x^2 + 4x}{25}\right) =$$
$$Ae^{2x} + Bxe^{2x} + \sin(x)\frac{15x + 4}{125} + \cos(x)\frac{20x + 22}{125}$$
$$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + \frac{3}{25} x \sin(x) + \frac{4}{125}\sin(x) + \frac{4}{25} x\cos(x) + \frac{22}{125}\cos(x)$$

Задача 7

$$y''' - 3y' + 2y = (x+1)e^x$$
$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$(\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$$
$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -2$$
$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}$$
$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{-2x} \\ e^x & (x+1)e^x & -2e^{-2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (x+1)e^x \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} e^xc_1' + xe^xc_2' + e^{-2x}c_3' = 0 \\ e^xc_1' + (x+1)e^xc_2' - 2e^{-2x}c_3' = 0 \\ e^xc_1' + (x+2)e^xc_2' + 4e^{-2x}c_3' = (x+1)e^x \end{cases}$$
$$(3) + (1) - 2(2) = 9e^{-2x}c_3' = (x+1)e^x \qquad c_3' = \frac{1}{9}(x+1)e^{3x}$$
$$c_3 = \frac{1}{81}(3x+2)e^{3x}$$
$$(3) - (2) = e^xc_2' + \frac{2+4}{9}e^x(x+1) = (x+1)e^x \qquad c_2' = \frac{1}{3}(x+1)$$
$$c_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$
$$(2) = e^xc_1' + (x+1)e^x \cdot \frac{1}{3}(x+1) - 2e^{-2x} \cdot \frac{1}{9}(x+1)e^{3x} =$$
$$e^xc_1' + \frac{1}{3}e^x(x+1)^2 - \frac{2}{9}e^x(x+1) =$$
$$e^xc_1' + \frac{1}{9}e^x(3x^2+4x+1) \qquad c_1' = -\frac{1}{9}(3x^2+4x+1)$$
$$c_1 = -\frac{1}{9}x(x+1)^2$$

Подставим в $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}$

$$y(x) = \left(-\frac{1}{9}x(x+1)^2 + A\right) \cdot e^x + \left(\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + B\right) \cdot xe^x + \left(\frac{1}{81}(3x+2)e^{3x} + C\right) \cdot e^{-2x} =$$
$$Ae^x + Bxe^x + Ce^{-2x} - \frac{1}{9}x(x+1)^2e^x + \frac{1}{3}xe^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + \frac{1}{81}(3x+2)e^x =$$
$$Ae^x + Bxe^x + Ce^{-2x} - \frac{1}{9}e^x(x^3 + 2x^2 + x) + e^x(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2) + \frac{1}{81}e^x(3x+2)$$
$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + Ce^{-2x} + \frac{1}{18}x^3e^x + \frac{1}{9}x^2e^x$$

Задача 8

$$\begin{cases} x' = 4x - 6y \\ y' = 3x - 5y + t \end{cases}$$

$$\dot{X} = AX + F(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) \qquad \det(E - A) = 0 \quad \det(-2E - A) = 0$$

$$A - E = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} u_0 = 0 \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} u_1 = 0 \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_ч(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0 t + \alpha_1 \\ \beta_0 t + \beta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \dot{X} = AX + F = \begin{pmatrix} t(4\alpha_0 - 6\beta_0) + (4\alpha_1 - 6\beta_1) \\ t(3\alpha_0 - 5\beta_0 + 1) + (3\alpha_1 - 5\beta_1) \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = 3,\ \beta_0 = 2,\ \alpha_1 = \frac{3}{2},\ \beta_1 = \frac{1}{2}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 3t + \frac{3}{2} \\ 2t + \frac{1}{2} \end{pmatrix} + Ae^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + Be^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 9

$$\begin{cases} x' = y + z + t \\ y' = x + z + 2t \\ z' = x + y + 3t \end{cases}$$

$$\dot{X} = AX + F(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 \qquad \det(-E - A) = 0 \quad \det(2E - A) = 0$$

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} u = 0 \qquad u = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$u_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} u_2 = 0 \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{\text{ч}}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0 t + \alpha_1 \\ \beta_0 t + \beta_1 \\ \gamma_0 t + \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \dot{X} = AX + F = \begin{pmatrix} t(\beta_0 + \gamma_0 + 1) + (\beta_1 + \gamma_1) \\ t(\alpha_0 + \gamma_0 + 2) + (\alpha_1 + \gamma_1) \\ t(\alpha_0 + \beta_0 + 3) + (\alpha_1 + \beta_1) \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = -2,\ \beta_0 = -1,\ \gamma_0 = 0,\ \alpha_1 = \frac{1}{2},\ \beta_1 = -\frac{1}{2},\ \gamma_1 = -\frac{3}{2}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} -2t + \frac{1}{2} \\ -t - \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + Ae^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Be^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + Ce^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$