Домашнее задание № 3. Механика

Стружиной Ксении

№1 $F_r = -2r\cos\varphi\sin 2\theta$, $F_\theta = -2r\cos\varphi(1+\alpha\sin^2\theta)$, $F_\varphi = -\alpha r\sin\varphi\cos\theta$

1) $\partial_\theta F_r = \partial_r(F_\theta r)$: $-4r\cos\varphi\cos 2\theta = -4r\cos\varphi(1+\alpha\sin^2\theta)$

2) $\partial_\varphi F_r = \partial_r(r\sin\theta F_\varphi)$: $2r\sin\varphi\sin 2\theta = -2r\alpha\sin\theta\cos\theta\sin\varphi$

3) $\partial_\varphi(rF_\theta) = \partial_\theta(r\sin\theta F_\varphi)$: $2r^2(1+\alpha\sin^2\theta)\sin\varphi = -\alpha r^2\sin\varphi\cos 2\theta$

1) $\cos 2\theta = 1+\alpha\sin^2\theta$ $\quad \alpha=-2$

2) $\sin 2\theta = -\alpha\sin\theta\cos\theta$ $\quad \alpha=-2$ $\quad \Rightarrow$ при $\alpha=-2$ F потенциальна.

3) $2(1+\alpha\sin^2\theta) = -\alpha\cos 2\theta$ $\quad \alpha=-2$

Найдем соответствующую функцию потенциальной энергии U:
$$\begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial r} = F_r \\ -\frac{\partial U}{\partial \theta} = rF_\theta \\ -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = r\sin\theta F_\varphi \end{cases}$$

$-\frac{\partial U}{\partial r} = -2r\cos\varphi\sin 2\theta$ $\quad \frac{\partial U}{\partial r} = 2r\cos\varphi\sin 2\theta \Rightarrow U = r^2\cos\varphi\sin 2\theta + V(\varphi,\theta)$

$-\frac{\partial U}{\partial \theta} = -2r^2\cos\varphi(\underbrace{1-2\sin^2\theta}_{\cos 2\theta}) = -2r^2\cos\varphi\cos 2\theta + \partial_\theta V \Rightarrow V(\varphi,\theta) = V(\varphi)$

$-\frac{\partial U}{\partial \varphi} = +2r^2\sin\theta\sin\varphi\cos\theta = \sin\varphi\, r^2\sin 2\theta + V'_\varphi \Rightarrow V'_\varphi = 0,\ V = \text{const}$

Значит, $U = r^2\cos\varphi\sin 2\theta + C^{\text{const}}$

И действительно 2π-периодична по φ $\Rightarrow$ работа силы $\vec F$ по любому замкнутому контуру вокруг оси Oz равна 0 и сила $\vec F$ потенциальна во всем $\mathbb{R}^3$

№2 $F_\rho = \rho X(z)\cos\varphi$; $F_\varphi = \rho Y(\varphi)e^{-z^2}$; $F_z = V(\rho,\varphi)ze^{-z^2}$

$\vec F|_{\rho=0} = 0$ на оси Oz, $\vec F|_{\varphi=z=0} = \vec\rho$ на оси Ox

1) $\partial_\varphi F_\rho = \partial_\rho(\rho F_\varphi)$: $-\rho\sin\varphi X(z) = 2\rho Y(\varphi)e^{-z^2} \Rightarrow \frac{-X(z)}{e^{-z^2}} = \frac{2Y(\varphi)}{\sin\varphi} = C_1$

$X(z) = -C_1e^{-z^2}$; $Y(\varphi) = \frac{1}{2}C_1\sin\varphi$ (1) Подставим $X(z)$ в F_ρ:

2) $\partial_\rho F_z = \partial_z F_\rho$: $\partial_\rho V(\rho,\varphi)\cdot ze^{-z^2} = 2C_1\rho\cos\varphi\, ze^{-z^2} \Rightarrow \partial_\rho V(\rho,\varphi) = 2C_1\rho\cos\varphi$

3) $\partial_\varphi F_z = \partial_z(\rho F_\varphi)$: $\partial_\varphi V(\rho,\varphi)\, ze^{-z^2} = \partial_z(\rho^2\frac{1}{2}C_1\sin\varphi\, e^{-z^2}) = -ze^{-z^2}\rho C_1\sin\varphi$

$\partial_\varphi V(\rho,\varphi) = -\rho^2C_1\sin\varphi \Rightarrow V(\rho,\varphi) = +\rho^2C_1\cos\varphi + C_2(\rho)$; $\partial_\rho V(\rho,\varphi) = 2C_1\rho\cos\varphi$ из 2) $\Rightarrow$

$2\rho C_1\cos\varphi + C_2'(\rho) = 2C_1\rho\cos\varphi \Rightarrow C_2'(\rho) = 0 \Rightarrow C_2 = C_2$ const $\Rightarrow$

$V(\rho,\varphi) = C_1\rho^2\cos\varphi + C_2$

Посмотрим на ограничения: $\vec F|_{\rho=0} = 0$: для $F_\rho|_{\rho=0} = 0$ и $F_\varphi|_{\rho=0} = 0$ верно

$F_z|_{\rho=0} = C_2\cdot ze^{-z^2} = 0 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$

$\rho = F_\rho|_{\varphi=z=0} = \rho\cdot\cos 0\cdot e^0\cdot(-c_1) \Rightarrow c_1 = -1$

$\vec{F} = (\underbrace{\rho e^{-z^2}\cos\varphi}_{F_\rho}, \underbrace{\rho e^{-z^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\varphi}_{F_\varphi}, \underbrace{-\rho^2\cos\varphi\, z e^{-z^2}}_{F_z})$

$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -\rho\cos\varphi e^{-z^2}d\rho + \frac{1}{2}\rho^2\sin\varphi e^{-z^2}d\varphi + \rho^2\cos\varphi\cdot z\, e^{-z^2}dz =$

$= d\left(-\frac{1}{2}\rho^2\cos\varphi\, e^{-z^2}\right)$

$U = -\frac{1}{2}\rho^2\cos\varphi\, e^{-z^2} + c$ - функция 2π-периодична по φ, поэтому интеграл по любому замкнутому контуру вокруг начала координат равен 0

N 3 F_φ потенц. силы $\vec{F}$: $F_\varphi = f(\rho, z)\cos\varphi$, $f(\rho, z)$ - гладк. ф-ия

$\vec{F} = (P(\rho, z, \varphi), f(\rho, z)\cos\varphi, Z(\rho, z, \varphi))$

Потенциальность: $\partial_\varphi P(\rho, z, \varphi) = \partial_\rho(f(\rho, z)\cos\varphi\cdot\rho) = \cos\varphi\cdot f(\rho, z) + \partial_\rho(f(\rho, z))\rho\cos\varphi$

$P(\rho, z, \varphi) = (f(\rho, z) + \rho\partial_\rho f(\rho, z))\sin\varphi + h_1(\rho, z)$

$\partial_\varphi Z(\rho, z, \varphi) = \rho(\partial_z f(\rho, z))\cos\varphi \to Z(\rho, z, \varphi) = \rho(\partial_z f(\rho, z))\sin\varphi + h_2(\rho, z)$

$\partial_z P(\rho, z, \varphi) = (\partial_z f(\rho, z) + \rho\partial_z\partial_\rho f(\rho, z))\sin\varphi + \partial_z h_1(\rho, z) =$

$= (\partial_z f(\rho, z) + \rho\partial_\rho\partial_z f(\rho, z))\sin\varphi + \partial_\rho h_2(\rho, z)$

$\partial_z h_1(\rho, z) = \partial_\rho h_1(\rho, z) \Rightarrow \exists$ гладкая h: т.ч. h_1 и h_2 $\partial_\rho h = h_1$ и $\partial_z h = h_2$

$\vec{F} = ((f(\rho, z) + \rho\partial_\rho f(\rho, z))\sin\varphi + \partial_\rho h(\rho, z), f(\rho, z)\cos\varphi, \rho(\partial_z f(\rho, z))\sin\varphi + \partial_z h_2(\rho, z))$

Тогда $du = -(\vec{F}, d\vec{r}) = d(-\rho f(\rho, z)\sin\varphi - h(\rho, z))$ 2π-периодична по φ

N 4 $\vec{F} = F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi$ $(F_r = 0)$

~~$\partial_\theta F_r = \partial_r F_\theta \ldots$~~

1) $\partial_\theta F_r = \partial_\theta 0 = 0 = \partial_r(r F_\theta) = F_\theta + r\partial_r F_\theta \Rightarrow \partial_r F_\theta = -\frac{F_\theta}{r}$

2) $\partial_\varphi F_r = \partial_r(r\sin\theta F_\varphi) = \sin\theta F_\varphi + r\sin\theta\,\partial_r F_\varphi \Rightarrow \partial_r F_\varphi = -\frac{F_\varphi}{r}$

Пусть $F_\theta = R_\theta(r)\cdot\Phi_\theta(\varphi)\cdot\Theta_\theta(\theta)$, $F_\varphi = R_\varphi(r)\cdot\Phi_\varphi(\varphi)\cdot\Theta_\varphi(\theta)$, тогда из 1) и 2) получаем, что $R_\theta = \frac{c_1}{r}$, $R_\varphi = \frac{c_2}{r}$

3) $\partial_\varphi(r F_\theta) = \partial_\theta(r\sin\theta F_\varphi) = \partial_\varphi\left(\frac{c_1}{r}\Phi_\theta(\varphi)\Theta_\theta(\theta)\cdot r\right) = \partial_\theta\left(r\sin\theta\frac{c_2}{r}\Phi_\varphi(\varphi)\Theta_\varphi(\theta)\right) \Rightarrow$

$\partial_\varphi\Phi_\theta(\varphi)\cdot\Theta_\theta(\theta) = \cos\theta\cdot\Phi_\varphi(\varphi)\cdot\Theta_\varphi(\theta) + \Phi_\varphi(\varphi)\sin\theta\cdot\partial_\theta\Theta_\varphi(\theta)$ - константы зависят от Φ и Θ

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{\partial \Phi_\Theta(\varphi)}{\Phi_\varphi(\varphi)} = \frac{\cos\theta \cdot \Theta_\varphi(\theta) + \sin\theta \cdot \partial_\theta \Theta_\varphi(\theta)}{\Theta_\varphi(\theta)}$$

Заметим, ~~по~~ что по $\Phi_\Theta(\varphi)$ и $\Theta_\varphi(\theta)$ найдутся две другие функции

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -0 - \Phi_\Theta(\varphi)\cdot c \cos\theta \left(\Theta_\varphi(\theta) + \sin\theta\, \partial_\theta \Theta_\varphi(\theta)\right) d\theta -$$

$$- \Theta_\varphi(\theta)\cdot c\, \partial\Phi_\Theta(\varphi)\cdot \sin(\theta) = d\left(-c\, \Theta_\varphi(\theta)\Phi_\Theta(\varphi)\sin(\theta)\right)$$

Условие потенциальности $\oint_\theta dU = 0$, тогда U 2π-периодична по φ $\Phi_\Theta(\varphi)$ периодична

Если $r_e(r)\cdot\Phi_\varphi(\varphi)\cdot\Theta_\varphi(\theta)$ не зависит от φ, то $\Phi_\varphi(\varphi) = const$

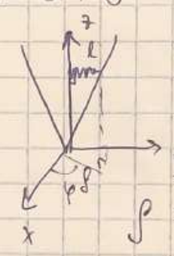
Тогда $\partial\Phi_\Theta(\varphi) = a\varphi + b$ не период по $\varphi \Rightarrow$ не потенциальны

а) Пример силы: $\vec{F} = \left(0, \frac{\sin 2\theta \sin\varphi}{r}, \frac{\sin\theta\cos\varphi}{r}\right)$

$\partial_r\, F_{\varphi/\theta} = \partial_\varphi 0$ – верно $\quad \sin 2\theta\cos\varphi = 2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi$ – верно

Тут $c = 1$, $\Phi_\Theta(\varphi) = \sin\varphi$, $\Theta_\varphi(\theta) = \sin\theta$

№5 $z^2 = x^2 + y^2 \qquad U = \frac{kl^2}{2}$



Число степеней свободы системы – $3 - 1 = 2$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \rho = z$

$$T_{кин} = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \dot z^2 + \rho^2\cdot\dot\varphi^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(2\dot z^2 + \rho^2\cdot\dot\varphi^2\right) = \frac{m}{2}\left(2\dot z^2 + z^2\cdot\dot\varphi^2\right)$$

$U = -\frac{kz^2}{2}$ $\qquad z = l$, т.к. сечение конуса горизонтальной плоскостью – окружность с радиусом z

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(2\dot z^2 + \rho^2\cdot\dot\varphi^2\right) - \frac{kz^2}{2} = \frac{1}{2}\left(m(2\dot z^2 + z^2\cdot\dot\varphi^2) - kz^2\right)$$

т.к. лагранжиан не зависит от φ, то выполняется ЗСИ

$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = c$. $ml^2\cdot\dot\varphi = c$ – не зависит явно от времени $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \to$ выполняется ЗСЭ: $E = T + V$

$$L_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\varphi}}_{0} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m z^2\cdot 2\dot\varphi\right) = 0$$

$$m\left((z^2)^\cdot\dot\varphi + \ddot\varphi z^2\right) = 0 \qquad m\left(2z\cdot\dot\varphi\dot z + \ddot\varphi z^2\right) = 0 \quad :z \quad \to 2\dot\varphi\dot z = -z\ddot\varphi$$

$$\ddot\varphi = -\frac{2\dot\varphi\dot z}{z}$$

$$L_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(2m\dot z\right) - \frac{1}{2}2mz\dot\varphi^2 + kz = 0$$

$$2m\ddot z = mz\dot\varphi^2 - kz \Rightarrow \ddot z = \frac{mz\dot\varphi^2 - kz}{2m}$$