Семинар 18.05.20

Пусть α: X → X — отображение, $Y \subset X$.

Y *инвариантно* относительно α, если $\alpha[Y] \subset Y$(где $\alpha[Y]$ — образ множества Y).

Y *неподвижно* относительно α, если $\alpha[Y] = Y$.

1. Докажите, что если множество X инвариантно относительно всех автоморфизмов модели M, то оно неподвижно относительно всех автоморфизмов M.
2. Сформулируйте и докажите аналог задачи 1 для n-местного отношения на M.
3. Пусть M — конечная нормальная модель бесконечной сигнатуры с равенством. Докажите что Th(M) сильно категорична.
4. Пусть M — конечная нормальная модель конечной сигнатуры с равенством.

   (а) Докажите, что если кортежи $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in M^k$, неразличимы в M, то существует автоморфизм $\alpha: M \to M$, переводящий почленно $\mathbf{m}$ в $\mathbf{n}$.

   (б) Докажите, что если отношение $R \subset M^k$ инвариантно относительно всех автоморфизмов M, то оно определимо в M.
5. Пусть M — конечная нормальная модель бесконечной сигнатуры с равенством. Докажите что если подмножество M инвариантно относительно всех автоморфизмов M, то оно определимо в M.
6. Найдите все определимые подмножества в следующих моделях.

   (a) $(\{1,...,n\},R,=)$, где $xRy \Leftrightarrow |x-y|=1$.

   (b) $(\{1,...,n\},R,=)$, где $xRy \Leftrightarrow |x-y| \equiv 1 \pmod n$.

   (c) $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ (группа Клейна) в сигнатуре $\{+, =\}$.

   (d) $\mathbf{F}_4$ (поле из 4 элементов) в сигнатуре $\{+, \cdot, =\}$.

   (e) $(X, <, =)$, где X — множество всех двоичных слов длины ≤ 4; $x<y$, если x — собственное начало y.

   (f) $(X, <, =)$, где X — множество всех делителей числа 900; $x<y$, если x — собственный делитель y.