Логика, множества.

frm[o]–. Равенство множеств и «аксиома» объемности. Аксиомы пары, выделения, объединения и степени. Примеры применения.

Аксиомы теории множеств.

(0) *Аксиома объемности.* $x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$.

(1) *Аксиома равенства.* $x = y \leftrightarrow \forall z(z \ni x \leftrightarrow z \ni y)$.

(2) *Аксиома пары.* Для любых двух множеств x, y существует множество $\{x, y\}$, состоящее в точности из x и y.

(3) *Схема аксиом выделения.* Для любого свойства $\varphi(x)$ и множества X существует множество $Y = \{x \in X \mid \varphi(x)\}$.

(4) *Аксиома объединения.* Для любого множества X существует множество $\bigcup X$, состоящее в точности из тех элементов, которые содержатся хотя бы в одном элементе X.

(5) *Аксиома степени.* Для любого множества X существует множество $\mathcal{P}(X)$, состоящее из всех подмножеств X.

(6) *Аксиома бесконечности.* Существует бесконечное множество. Существует такое множество S, что $\varnothing \in S$ и $\forall x \in S \to x \cup \{x\} \in S$.

(7) *Аксиома регулярности.* Для любого $x \neq \varnothing$ существует такое $y \in x$, что $x \cap y = \varnothing$.

(8) *Схема аксиом подстановки.* Пусть для свойства $\varphi(x, y)$ выполнено свойство, что для любого x найдется не более одного y, что $\varphi(x, y)$ тогда для любого множества X существует такое множество $Y = \{y \mid \exists x \in X, \varphi(x, y)\}$.

(9) *Аксиома выбора.* Для любого семейства непустых множеств S существует функция выбора на S, то есть такая f, что $\forall x \in S(f(x) \in x)$.

2. Упорядоченная пара. Декартовое произведение двух множеств. Бинарные отношения и отношения между множествами. Тотальность, функциональность, сюръективность, инъективность. Функция между множествами, биекция. Равномощные множества.

Определение 2.1. *Упорядоченной парой* (по Куратовскому) называется $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. *(Пример использования аксиомы пары.)*

Определение 2.2. *Декартовым произведением* множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Предложение 2.1. $X \times Y$ — множество.

Доказательство. Рассмотрим множество $Z = X \cup Y$ *(аксиом а объединения)* и множество $\mathcal{P}(\mathcal{P}(Z))$ *аксиома степени*, заметим, что все упорядоченные пары там лежат. Будем их выделять *(аксиома выделения)*. Для этого нужно придумать нужное свойство $\varphi(a)$. Свойство $\varphi(a) = \exists x \in X \exists y \in Y(a = \{\{x\}, \{x, y\}\})$ — подходит.

$\square$

Определение 2.3. *Бинарным отношением между множествами* A *и* B называется тройка $\langle R, A, B\rangle$, что $R \subset A \times B$. Часто вместо $(x, y) \in R$ пишут xRy.

У отношений бывают разные свойства.

(1) *Функциональность.* $\forall x \in A \forall y_1, y_2 \in B(xRy_1 \wedge xRy_2 \to y_1 = y_2)$.

(2) *Тотальность.* $\forall x \in A \exists y \in B(xRy)$.

(3) *Инъективность.* $\forall x_1, x_2 \in A \forall y \in B(x_1Ry \wedge x_2Ry \to x_1 = x_2)$.

(4) *Сюръективность.* $\forall y \in B \exists x \in A(xRy)$.

В случае, когда $A = B$, для отношения R на множестве A тоже бывают разные свойства.

(1) *Рефлексивность.* $\forall x \in A(xRx)$.

(2) *Симметричность.* $\forall x, y \in A(xRy \to yRx)$.

(3) *Транзитивность.* $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$.

(4) *Антисимметричность.* $\forall x, y \in A(xRy \wedge yRx \to x = y)$.

(5) *Линейность.* $\forall x, y \in A(xRy \vee yRx)$.

(6) *Плотность.* $\forall x, y \in A(xRy \to \exists z(xRz \wedge zRy))$.

(7) *Иррефлексивность.* $\forall x \in A(\neg xRx)$.

Определение 2.4. *Функцией между множествами* называется функциональное и тотальное отношение.

Определение 2.5. *Биекцией* называется инъективная и сюръективная функция.

Определение 2.6. Два множества *равномощны*, если между ними существует биекция.

3. Сравнение множеств по мощности («отношение» $A \gtrsim B$). Рефлексивность и транзитивность $\gtrsim$. Теорема Кантора-Бернштейна.

Определение 3.1. Будем говорить, что множетво A не меньше по мощности чем B ($A \gtrsim B$), если A содержит подмножество, равномощное B.

Замечание 3.1. Очевидно, что это отношение рефлексивно и транзитивно.

Теорема Кантора – Бернштейна. Если $A \gtrsim B$ и $B \gtrsim A$, то A равномощно B.

Доказательство. Условие теоремы равносильно существованию инъективных функций $f : A \to B$ и $g : B \to A$. Пусть $C_0 = A \backslash g(B)$, $C_{i+1} = g(f(C_i))$, $C = \bigcup C_i$. Определим $h : A \to B$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in C \\ g^{-1}(x), & x \notin C \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что это действительно функция. Осталось проверить ее биективность.

(1) Проверим сюръективность. Рассмотрим $y \in Y$. Есть всего две возможности либо $Y \in f(C_i)$, и тогда все хорошо, либо нет, тогда $g(y) \in A \backslash C$, тоже все хорошо.

(2) Проверим инъективность. Пусть $x_1 \in C$, $x_2 \in A \backslash C$. Предположим, что $f(x_1) = g^{-1}(x_2)$. Тогда $x_2 = g(f(x_1)) \in C$. Противоречие.

$\square$

4. Отношение порядка, линейного порядка. Сумма и произведение линейно упорядоченных множеств (определение и доказательство линейности).

Определение 4.1. *Порядком* на множестве A называется пара $\langle A, \leqslant \rangle$, где $\leqslant$ — рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение.

Определение 4.2. *Линейным порядком называется* порядок, где отношение $\leqslant$ — линейно.

Определение 4.3. *Суммой* двух линейно упорядоченных множеств $(A, \leqslant_A)$ и $(B, \leqslant B)$ называется упорядоенное множество

$$C = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

с порядком

$$(x, i) \leqslant_C (y, j) \iff \left[\begin{array}{l} i = j = 0 \text{ и } x \leqslant_A y \\ i = j = 1 \text{ и } x \leqslant_B y \\ \quad i = 0 \text{ и } j = 1 \end{array}\right.$$

Будем писать в таких случаях $C = A + B$.

Замечание 4.1. Сумма линейных порядков линейна.

Определение 4.4. *Произведением* двух линейно упорядоченных множеств $(A, \leqslant_A)$ и $(B, \leqslant B)$ называется упорядоенное множество

$$C = A \times B$$

с порядком

$$(x_A, x_B) \leqslant_C (y_A, y_B) \iff \left[\begin{array}{c} x_B < y_B \\ x_B = y_B \text{ и } x_A \leqslant y_A \end{array}\right.$$

Будем писать в таких случаях $C = A \cdot B$.

Замечание 4.2. Произведение линейных порядков линейно.

5. Аксиомы бесконечности, регулярности и подстановки. Индуктивные множества. Натуральные числа по фон Нейману.

Определение 5.1. Множество S называется *индуктивным*, если оно удовлетворяет условию аксиомы бесконечности, то есть $\varnothing \subset S\ \forall x \in S \to x \cup \{x\} \in S$.

Определение 5.2. Минимальное по включению индуктивное множество называется *множеством натуральных чисел.*

6. Принцип математической индукции, его вывод из определения множества натуральных чисел.

Принцип математической индукции. Пусть A — множество, причем $\varnothing \in A$ и $\forall n \in \mathbb{N}(n \in A \to (n+1) \in A)$. Тогда $\mathbb{N} \subset A$.

Доказательство. Заметим, что $A \cap \mathbb{N}$ — индуктивно и $(A \cap \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, хотя N — наименьшее по включению. Таким образом $\mathbb{N} = A \cap \mathbb{N}$.

□

7. Принцип наименьшего числа, принцип порядковой индукции и их эквивалентность принципу индукции.

Предложение 7.1. Если $m < n+1$, то $m < n$ или $m = n$.

Доказательство. Это верно по постороению следующего элемента.

□

Предложение 7.2. Следующие 2 утверждения выводятся из принципа индукции:

(1) (принцип порядковой индукции) если $\forall n \in \mathbb{N}(\forall m(m < n \to m \in A) \to n \in A)$, то $\mathbb{N} \subset A$.

(2) (принцип минимального элемента) если $A \subset \mathbb{N}$ и $A \neq \varnothing$, то в A есть минимальный элемент.

Доказательство. **(1)** Пусть $A' = \left\{x \mid \forall(y < x) \to (y \in A)\right\}$. Докажем, что если $n \in A'$, то $n+1 \in A'$. Любое число, меньшее $n+1$, это либо само n (и мы победили), либо его элемент, тогда из того, что $n \in A'$, будет следовать, что любой его элемент — тоже. Таким образом, $\mathbb{N} \subset A' \subset A$

(1)$\Rightarrow$ **(2)** Предположим противное и рассмотрим множество $B = \mathbb{N} \backslash A$. Для него выполнено **(1)**. Тогда $\mathbb{N} \subset B$, то есть A — пустое.

□

8. Принцип Дирихле: неравномощность различных натуральных чисел (как множеств).

Принцип Дирихле. Не существует инъекции $f : n+1 \to n$.

Доказательство. Докажем индукцией по n. Предположим, существует некая инъекция $f : n + 1 \to n$. Пусть $f(n) = m < n$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} n-1, & x = m \\ m, & x = n-1 \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$

Заметим, что $g : n \to n$ — биекция, поэтому $g \circ f$ — инъекция. Рассмотрим ограничение $g \circ f$ на n — это инъекция, что противоречит предположению индукции. $\square$

9. Вполне упорядоченные множества (ВУМы). Сохранение вполне упорядоченности при сложении и умножении. Свойства ВУМов.

Определение 9.1. *Вполне упорядоченным множеством (ВУМом)* называется линейно упорядоченное множество, в любом подмножестве которого есть минимальный элемент.

Предложение 9.1. Сумма и произведение ВУМов — тоже ВУМ.

Доказательство. **(1)** Рассмотрим ограничение на первую компоненту, оно либо пусто, тогда ищем минимум по второй, либо нет, тогда ищем минимум сначала по первой, потом по второй.

(2) Рассмотрим все элементы с минимальной второй координатой, это подмножество, найдем теперь минимум по первой координате. $\square$

Свойства ВУМов. **(1)**Для любого ВУМа верен принцип порядковой индукции.

(2) В ВУМе есть минимальный элемент.

(3) У любого элемента есть следующий.

(4) У любого ограниченного сверху подмножества есть точная верхняя грань.

(5) Любое подмножество ВУМа само является ВУМом.

10. Начальный отрезок ВУМ. Обозначение начальных отрезков: $[0, a]$ и $[0, a)$. Свойства начальных отрезков. Вполне упорядоченность множества начальных отрезков данного ВУМ.

Определение 10.1. *Начальным отрезком* называется подмножество $B \subset A$ ВУМа, если $\forall x, y \in A((y \in B) \wedge (x < y) \to x \in B)$, если $B \neq A$, то B — *собственный начальный отрезок.*

Предложение 10.1. **(1)** Любой собственный отрезок имеет вид $[0, a)$.

(2) Начальный отрезок начального отрезка — начальный отрезок.

(3) Пересечение и объединение любого семейства начальных отрезков — начальный отрезок.

(4) Множество начальных отрезков образует ВУМ по включению

(5) У бесконечного ВУМ есть начальный отрезок, изоморфный $\mathbb{N}$.

11. Теорема о строго возрастающей функции из ВУМ в себя и её следствия.

Теорема 11.1. Пусть A — ВУМ, $f : A \to A$ — строго возрастающая функция. Тогда $\forall x \in A(f(x) \geqslant x)$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\{x \in A \mid f(x) < x\}$ и наименьший элемент в нем (в случае, когда оно непусто) — элемент a, для которого $f(a) = b < a$. По условию $f(b) < f(a) = b$, противоречие с минимальностью a.

□

Следствие 11.1. (1) ВУМ имеет только тождественный автоморфизм.

(2) Если два ВУМа изоморфны, то изоморфизм единственный.

(3) Никакой ВУМ не изоморфен своему собственному начальному отрезку.

Доказательство. **(1)** Рассмотрим изоморфизм f и множество $\{x \in A \mid f(x) > x\}$ и минимальный в нем элемент a. Поскольку f — изоморфизм, существует такое $b < a$ $f(b) = a$, противоречие с минимальностью.

(2) Следствие **(1)**.

(3) Рассмотрим начальный отрезок $[0, a)$. Тогда, если $f : A \to [0, a)$ — изоморфизм, то $f(a) < a$.

□

12. Теорема Кантора о сравнимости: два ВУМ либо изоморфны, либо одно из них изоморфно собственному начальному отрезку другого.

Теоема (Кантор). Если A и B — ВУМы, то один из них изоморфен начальному отрезку другого.

Доказательство. Рассмотрим

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid [0, x)_A \simeq [0, y)_B\}.$$

Отношение f — функционально и инъективно. Кроме того, это отношение монотонно (Если $(x, y), (x', y') \in f$ и $x < x'$, то $y < y'$).

Пусть $dom(f) = \{x \in A \mid \exists y \in B(xRy)\} \neq A$ (в противном случае отношение f — тотально и $f(X)$ — некоторый начальный отрезок B) и $ran(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A(xRy)\} \neq B$ (по аналогичным причинам). Рассмотрим $x_0 = min(A \backslash dom(f))$

и $y_0 = min(B\backslash ran(f))$. Тогда $dom(f) = [0, x_0)_A$ и $ran(f) = [0, y_0)_B$. Заметим, что $(x_0, y_0) \in f$, противоречие.

$\square$

13. Рекурсия. Существование и единственность функции, рекурсивно заданной на ВУМ.

Определение 13.1. Пусть A — ВУМ, B — множество, F — функция, ставящая в соответствие элементу $x \in A$ и функции $g : [0, x) \to B$ элемент множества B. Тогда такая функция $f : A \to B$, что

$$f(x) = F(x, f \mid_{[0,x)}),$$

называется *рекурсией.*

Теорема 13.1. Рекурсивная функция существует и единственна.

Доказательство. Назовем функцию *хорошей*, если она удовлетворяет рекурсивному условию. Пусть

$$\mathcal{D} = \left\{a \in A \;\middle|\; \text{существует хорошая функция } g_a : [0, a] \to B\right\}.$$

Заметим, что $\mathcal{D}$ — начальный отрезок в A. Покажем, что для всех $a \in \mathcal{D}$ функция g_a единственна. Докажем это по индукции. Заметим, что $g_0(0) = F(0, \varnothing)$ — база. Пусть для всех $b < a \in \mathcal{D}$ условие единственности выполнено и пусть $g_a, g'_a : [0, a] \to B$ — две разные функции, причем различаются они только на a. Но по условию

$$g_a(a) = F(a, g_a \mid_{[0,a)}) = F(a, g'_a \mid_{[0,a)}) = g'_a(a).$$

Противоречие. Таким образом, $f = \bigcup g_a$ — тоже хорошая функция, которая корректно определена и мы побеждаем, если $\mathcal{D} = A$.

Предположим противное, что $[0, d) = \mathcal{D} \neq A$. Доопределим f:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & x < d \\ F(d, f), & x = d \end{cases}$$

Это противоречит тому, что $d \notin \mathcal{D}$.

$\square$

14. Теорема Цермело. Сравнимость любых двух множеств по мощности.

Теорема Цермело. Любое множество может быть вполне упорядочено.

Доказательство. Пусть $X \neq \varnothing$. По аксиоме выбора существует такая функция $\varphi : \mathcal{P}(X) \backslash \{X\} \to X$, что $\varphi(x) \notin x$. Сейчас мы хотим построить $\leqslant$ на X так, чтобы

$$\varphi([0, x)) = x \ (*).$$

Определение 14.1. Назовем ВУМ $(S, \leqslant_S)$ *корректным фрагментом*, если $S \subset X$ и для S выполнено $(*)$.

Лемма 14.1. Пусть S, T — корректные фрагменты. Тогда один из них является начальным отрезком другого, причем порядки согласованы.

Доказательство. Без ограничения общности T изоморфен начальному отрезку S, $h : T \to S$ — этот изоморфизм. Докажем по индукции, что h — тождественный. База очевидна, минимальный элемент в каждом из ВУМов S и T это $\varphi(\varnothing)$ по $(*)$. Предположим, что $x \in T$ и $\forall y <_T x(h(y) = y)$. Поскольку $[0, x)_T = [0, x)_S$, то в силу условия $(*)$ $h(x) = x$.

□

Пусть $\mathbb{S}$ — множество всех корректных фрагментов. Все они согласованы и $M = \bigcup \mathbb{S}$ — тоже корректный фрагмент, еще он *максимальный*. Если $M \neq X$, рассмотрим $a = \varphi(M)$ и добавим к M в качестве максимального элемента. Фрагмент все еще корректный, противоречие.

□

Следствие 14.1. Для любых двух множеств одно из них равномощно подмножеству другого. То есть любые два множества сравнимы по мощности.

15. Лемма Цорна.

Лемма Цорна. Пусть Z — непустое частично упорядоченное множество, в котором всякая цепь имеет верхнюю грань. Тогда в этом множестве есть максимальный элемент.

Доказательство. Пусть в Z нет максимального элемента. По условию у любой цепи C есть верхняя грань a_C, но максимального элемента нет, поэтому есть $b_C > a_C$.

Рассмотрим произвольное ВУМ I, по мощности строго большее $|Z|$ (такое есть по теореме Кантора и теореме Цермело). Построим рекурсивно функцию $f : I \to Z$. Пусть $f_0(0) = a$, где $a \in Z$ — произвольное и $0 = min(I)$. Предположим, $i \in I$ и $\forall j < i$ функции $f_j : [0, j] \to Z$ определены, монотонны и согласованы. Определим $f_i : [0, i] \to Z$:

$$f_i(x) = \begin{cases} f_x(x), & x < i \\ b_C, & x = i \end{cases},$$

где $C = \{f_j(j) \mid j < i\}$ — цепь. Положим $f = \bigcup f_i$. Противоречие с мощностью.

$\square$

16. Равномощность A и $A \times \mathbb{N}$. Мощность $A \cup B$ для бесконечных A и B.

Лемма 16.1. Всякий элемент ВУМа A однозначно представляется в виде $z + n$, где Z — предельный, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Это очевидно по индукции. Рассмотрим минимальный элемент, для которого это не верно, тогда либо он предельный, либо есть предыдущий, противоречие в обоих случаях.

$\square$

Теорема 16.1. Если множество A — бесконечно, то множество $A \times \mathbb{N}$ равномощно A.

Доказательство. Вполне упорядочим множество A. По леммме любой элемент A однозначно представляется в виде $z + n$. Следовательно, A равномощно $B \times \mathbb{N}$, где B — множество предельных элементов. Теперь заметим, что множество $(B \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ равномощно $B \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, то есть $B \times \mathbb{N} = A$. Что и требовалось.

$\square$

Следствие 16.1. Объединение(сумма) двух множеств, хотя бы одно из котрых бесконечно, равномощно мощности большего из них.

Доказательство. Пусть без ограничения общности $|A| \leqslant |B|$. Тогда

$$|B| \leqslant |A \cup B| \leqslant |A + B| \leqslant |B + B| \leqslant |B \times \mathbb{N}| = |B|.$$

$\square$

17. Равномощность A и $A \times A$ для любого бесконечного множества A.

Теорема 17.1. Если множество A — бесконечно, то $A \times A$ равномощно A.

Доказательство. Рассмотрим семейство S пар $\langle B, f \rangle$, состоящее из подмножеств $B \subset A$, которые изоморфны своему квадрату, и биекций $f : B \to B \times B$. Оно непусто, там есть подмножество, которое изоморфно $\mathbb{N}$. Заведем на S порядок:

$$\langle B_1, f_1 \rangle \leqslant \langle B_2, f_2 \rangle \iff B_1 \subset B_2 \text{ и } f_2\Big|_{B_1} = f_1.$$

Заметим, что S — ЧУМ, для которого выполнено условие леммы Цорна. Тогда в S существует максимальный элемент $\langle B, f \rangle$. В случае, когда $|B| = |A|$, мы побеждаем.

Тогда $A = B \sqcup C$, где $|C| = |A| > |B|$. Рассмотрим в C такое подмножество C', что $|C'| = |B|$. Положим $B' = C' \cup B$. Тогда $|B' \times B'| = |4B| = |B|$. Заметим, что существует такой изоморфизм $f' : B' \to B' \times B'$, ограничение которого на B совпадает с f, получаем противоречие.

$\square$

18. Транзитивное множество. Ординалы: определение и свойства.

Определение 18.1. Множество x называется *транзитивным*, если

$$\forall y, z(z \in y \in x \to z \in x).$$

Определение 18.2. Множество A называется *ординалом*, если оно транзитивно и все его элементы транзитивны.

Лемма 18.1. Множество A не может модержать себя в качестве элемента.

Доказательство. Пусть $x = \{A\}$. По аксиоме регулярности $\{A\} \cap A = x \cap A = \varnothing$.

$\square$

Трансфинитная индукция. Пусть φ — некоторое свойство. Если для любого ординала α выполнено свойство $\forall \gamma \in \alpha\ \varphi(\gamma) \to \varphi(\alpha)$, то φ выполнено для всех ординалов.

Доказательство. Пусть α — ординал, для которого это свойство не выполнено. Тогда существует $\gamma \in \alpha$, для которого φ не выполнено. То есть множество $S = \big\{\gamma \in \alpha \bigm| \neg\varphi(\gamma)\big\}$ — непусто. Тогда по аксиоме регулярности $\exists \gamma_0 \in S$, такой, что $\gamma_0 \cap S = \varnothing$. $\gamma_0 \in S$, следовательно, существует $\gamma_1 \in \gamma_0$, такой, что $\varphi(\gamma_1)$ не выполняется. Получаем $\gamma_0 \cap S = \gamma_1 \neq \varnothing$, противоречие.

$\square$

Предложение 18.1. Свойства ординалов. (1) Элемент ординала — ординал.

(2) Отношение $\in$ на ординале задает частичный порядок (нужно еще сказать, что любой элемент сравним сам с собой).

(3) Любые два ординала сравнимы.

(4) Отношение $\in$ задает линейный порядок.

(5) Любой ординал — ВУМ.

(6) Если α — ординал, то $\alpha \cup \{\alpha\}$ — тоже ординал, причем между ними нет других ординалов.

(7) Натуральные числа — ординал.

Доказательство. **(1)** Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. По определению β — транзитивный. Нужно доказать, что $\forall \gamma \in \beta$ — тоже транзитивный. По определению ординала $\gamma \in \alpha$ — транзитивный.

(2) Это отношение рефлексивно по условию. Покажем, что оно рефлексивно. Пусть $\alpha \in \beta \in \alpha$. Тогда, поскольку α — транзитивно, то $\alpha \in \alpha$, что противоречит лемме. Еще это отношение транзитивно, потому что каждый его элемент транзитивен.

(3) Обозначим $\varphi(\alpha, \beta)$ — свойство сравнимости. Предположим, существуют не сравнимые ординалы α, β. Зафиксируем β и будем доказывать утверждение двойной трансфинитной индукцией. Мы знаем, что $\varphi(\beta, \gamma)$. Если они равны, то мы победили, тогда $\beta \in \alpha$, если $\beta \in \gamma \in \alpha$, то $\beta \in \alpha$ по транзитивности. Таким образом заключаем, что для всех $\gamma \in \alpha$ выполнено $\gamma \in \beta$. Аналогичное верно и для элементов β. Тогда $\alpha = \beta$ по аксиоме объемности.

(4) Следствие **(2)** и **(3)**.

(5) Рассмотрим некторое подмножество X. По аксиоме регулярности найдется такой $y \in X$, что $y \cap X = \varnothing$. Он и является минимальным.

(6) Это просто по определению.

(7) Это так, потому что $\varnothing$ — ординал и выполнено **(6)**.

□

19. Существование ординала, изоморфного данному ВУМ. Ординалы не образуют множество.

Теорема 19.1. Для любого ВУМ A найдется изоморфный ему ординал.

Доказательство. Докажем по индукции, что для любого $x \in A$ существует ординал β_x, изоморфный $[0, x)$ (ну еще они все вложенные).

(1) Если x — предельный. Тогда $[0, x) = \bigcup\limits_{y<x} [0, y)$ и $\sup\limits_{y<x} \beta_y = \beta_x$.

(2) Если $x = z + 1$, то $\beta_x = \beta_z + 1$.

Теперь, если в A есть максимальный элемент a, то $A \simeq \beta_a + 1 = \alpha$, иначе $A \simeq \sup\limits_{x \in A} \beta_x$.

□

Теорема 19.2. Ординалы не образуют множество.

Доказательство. Пусть образует. Тогда их можно объединить и снова получится ординал, он будет максимальным, но у любого ординала есть следующий, противоречие.

□

20. Рекурсивное определение суммы ординалов, и его согласованность с суммой ВУМ.

Определение 20.1. *Сложение ординалов*:

$$\alpha + 0 = \alpha,$$

$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1,$$

$$\alpha + \beta = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma), \text{ если } \alpha - \text{ предельный.}$$

Замечание 20.1. Сложение согласовано с суммой ВУМов.

21. Рекурсивное определение произведения ординалов и его согласованность с произведением ВУМ.

Замечание 21.1. *Умножение ординалов*:

$$\alpha \cdot 0 = \alpha,$$

$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \beta,$$

$$\alpha \cdot \beta = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha \cdot \gamma), \text{ если } \alpha - \text{ предельный.}$$

Замечание 21.2. Умножение согласовано с суммой ВУМов.

22. Вычитание и деление с остатком ординалов.

Следствие 22.1. Пусть $\alpha \geqslant \beta$ — ординалы, тогда существует и единственный такой ординал γ, что $\alpha = \beta + \gamma$. Так можно определить *вычитание.*

Доказательство. Будем рассматривать ординалы как ВУМы. Тогда один — начальный отрезок другого, а в качестве γ подойдет тот ординал, который соответствует дополнению.

Единственность следует из монотонности сложения.

□

Предложение 22.1. Любой ординал, меньший $\alpha\beta$, однозначно представим в виде $\alpha\beta' + \alpha'$, где $\beta' < \beta$, $\alpha' < \alpha$.

Доказательство. Пусть ординалам α, β соответствуют ВУМы A и B. Тогда наш ординал изоморфен некторому начальному отрезку $[0, (a, b)) = A \times [0, b) + [a, b)$. Осталось доказать однозначность. Это нектоторый несложный разбор случаев.

□

Замечание 22.1. Аналогично определено *деление с остатком.* Для любых α, γ существует единственное такое представление $\alpha = \gamma \cdot \alpha' + \gamma'$, где $\gamma' < \gamma$ (это верно в силу предыдущго прежположения, достаточно доказть, что найдется такой ординал β, что $\alpha\beta > \gamma$).

23. Возведение в степень для ординалов. Соответствующая операция на ВУМ.

Определение 23.1.

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha,$$
$$\alpha^\gamma = \sup_{\beta<\gamma} \alpha^\beta.$$

Предложение 23.1. Рассмотрим ВУМы A и B, изоморфные ординалам α и β соответственно. Мы хотим построить ВУМ, который изоморфен α^β. Рассмотрим множество $[B \to A]$ функций из B в A, которые имеют конечный носитель (все элементы, кроме конечного числа, бьют в минимальный элемент A). Введем на этом множестве порядок: $f_1 \leqslant f_2$, если b — наибольший элемент, в котором функции различаются, и $f_1(b) \leqslant f_2(b)$. Множество $[B \to A]$ с таким порядком — ВУМ, причем он изоморфен ординалу α^β.

Доказательство. Очевидно, что все свойства ЧУМа выполнены. Докажем, что в любом подмножестве из функций есть наименьшая. Назовем *рангом* функции соответствующее наибольшее число $b \in B$, что $f(b) > \min A$ (в случае, когда такого элемента нет, соответствующий ранг называется нулевым). Будем вести индукцию по рангу некоторой функции из подмножества. База: существует функция с нулевым рангом, тогда она просто меньше всех остальных. Переход: пусть существует функция с рангом b. Тогда минимальная функция, которую мы ищем, имеет ранг уж точно не больше b. Еще в этом подмножестве нет функций ранга меньше b, иначе смотрели бы на них и пользовались индукцией. Значит, искомый минимальный элемент имеет ранг b. Рассмотрим в нашем множестве множество всех функций, имеющих ранг b. Это значит, что все функции сравниваются между собой по элементу строго меньше b. «Обнулим» все функции на элементе b — спускаемся в предположение индукции.

Теперь нужно доказать, что данный ВУМ изоморфен α^β. Для этого нужно проверить для $\beta = \gamma + 1$ и $\beta = \sup\limits_{\gamma<\beta} \gamma$.

В первом случае по определению $\alpha^\beta = \alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \cdot \alpha \simeq [C \to A] \times A$. Это согласуется, потому что сравнение функций происходит с конца.

Во втором случае $\alpha^\beta = \bigcup \alpha^\gamma = \bigcup [C \to A] = [B \to A]$.

□

24. Кардиналы: определение и существование. Кардиналы

Определение 24.1. Кардиналом $card(A)$ множества A называется наименьший ординал, для которого существует биекция $A \to card(A)$.

Замечание 24.1. Для любого множества такой ординал определен, потому что любое множество можно вполне упорядочить, а для любого ВУМа существует изоморфный ему ординал.

Замечание 24.2. Обозначим $\aleph_0$ — мощность $\mathbb{N}$ и первый бесконечный кардинал, $\aleph_1$ — следующий по мощности кардинал и так далее, $\aleph_\omega = \sup\limits_{n\in\omega} \aleph_n$ (все другие алеыф определены аналогично).

Замечание 24.3. Обозначим $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, $\beth_\alpha = \sup\limits_{\gamma<\alpha} \beth_\gamma$.