Логика и алгоритмы

Задачи семинаров 2

Обозначения: $0 := \varnothing$, $x + 1 := x \cup \{x\}$. Множество Y называется *индуктивным*, если $0 \in Y$ и $\forall x\ (x \in Y \to x + 1 \in Y)$. *Множество натуральных чисел* $\mathbb{N}$ определяется, как наименьшее по включению ($\subset$-наименьшее) множество. Элементы этого множества называются *натуральными числами*.

Теорема 1 (принцип математической индукции)**.** *Дано некоторое множество A. Если $0 \in A$ и $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \in A \to n + 1 \in A)$, то $\mathbb{N} \subset A$.*

Обозначение: $x < y :\Leftrightarrow x \in y$.

Теорема 2 (принцип порядковой индукции)**.** *Дано некоторое множество A. Если $\forall n \in \mathbb{N}\ (\forall m < n\ m \in A \to n \in A)$, то $\mathbb{N} \subset A$.*

Теорема 3 (принцип минимального элемента)**.** *Пусть A – некоторое непустое подмножество $\mathbb{N}$. Тогда A содержит $<$-минимальный элемент, т.е. такой элемент $n \in A$, что $\forall m < n\ m \notin A$.*

1. Почему существует хотя бы одно индуктивное множество? Могут ли существовать два различных наименьших по включению индуктивных множества?

2. Докажите, что $x + 1 \neq 0$ и $x + 1 = y + 1 \to x = y$ для любых множеств x и y.

3. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}\ (n = 0 \vee \exists m \in \mathbb{N}\ (n = m + 1))$.

4. Докажите, что $<$ задает на $\mathbb{N}$ строгий частичный порядок, т.е. что $\forall n \in \mathbb{N}(n \not< n)$ и $\forall n, m, k \in \mathbb{N}\ (n < m < k \to n < k)$.

5. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ не существует инъективного отображения из $n + 1$ в n.

6. Для натуральных чисел n и m докажите, что не существует инъекции из n в m, если $m < n$.

7. Докажите, что порядок, задаваемый $<$ на $\mathbb{N}$, является линейным.

8. Докажите, что два различных натуральных числа неравномощны.

9. Дана функция $+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая следующим рекурсивным условиям:

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ m + (n + 1) = (m + n) + 1. \end{cases}$$

   Докажите, что $m + n = n + m$ для любых натуральных числе n и m.

   Множество x называется *конечным*, если $x \sim n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В последнем случае мы также говорим, что *x содержит n элементов*. Множество x называется *счетным*, если $x \sim \mathbb{N}$.

10. Докажите, что любое подмножество конечного множества конечно, а также, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Дополнительные задачи к листку sem2 (26.01)

0. Если $y \in x \in \mathbf{N}$, то $y \in \mathbf{N}$ (т. е. **N** транзитивно).

   0.05. Если $x+1 \in \mathbf{N}$, то $x \in \mathbf{N}$.

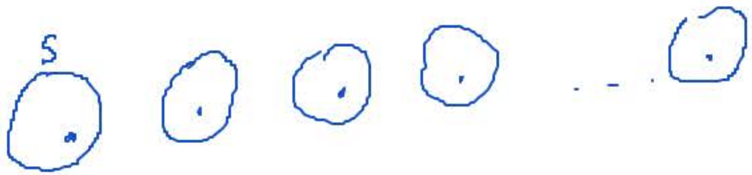
   0.5. Если $m,n \in \mathbf{N}$, то $m \subset n \leftrightarrow m \leq n$.

5.1 Если $n \in \mathbf{N}$ и $x \in (n+1)$, то $(n+1) \setminus \{x\} \sim n$.

11. Объединение двух конечных множеств конечно.

12. Декартово произведение двух конечных множеств конечно.

$\{x \mid \varphi(x)\}$ – множество?



S

$f(s) \in S$

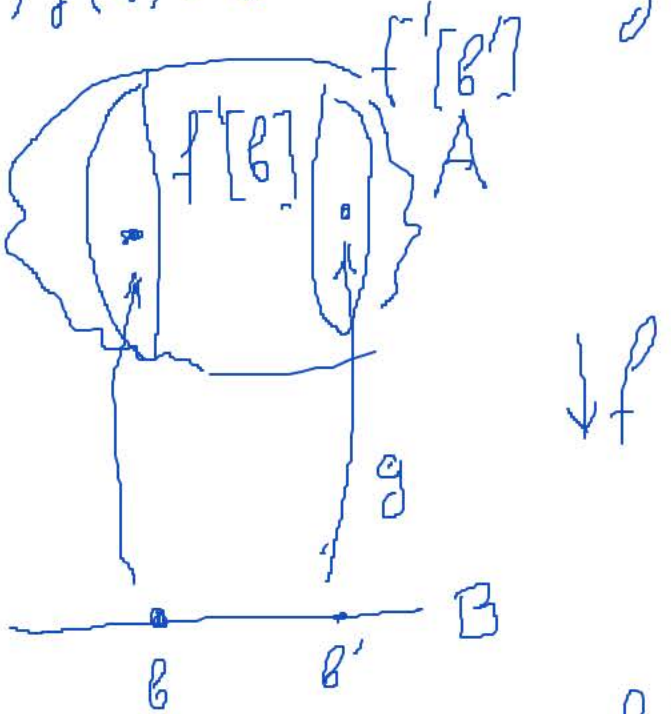
S $\quad \varnothing \quad x \mapsto x \cup \{x\}$

$y \cap x = \varnothing$

sem1 8

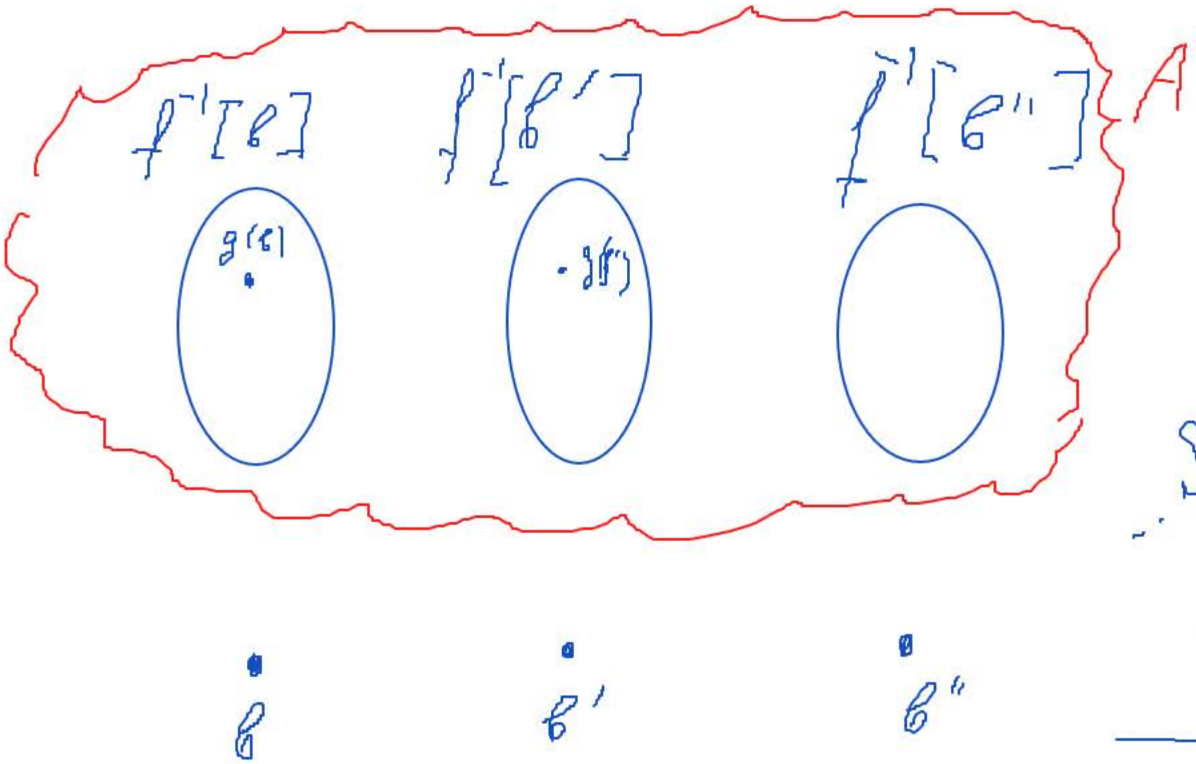
$\exists g \quad fg(b) = b \qquad g$ - инъекция

$A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$



$b \neq b' \qquad g(b) = g(b') \longrightarrow f(g(b)) = f(g(b'))$

$b = b'$



$h: S \to \bigcup S$

$\forall s \in S \; h(s) \in S$

$S = \{ f^{-1}[b] \mid b \in B \}$

$S \subset P(A)$

$s \in S \iff \exists b \in B$
$s = f^{-1}[b]$

существует $f^{-1}[b]$?

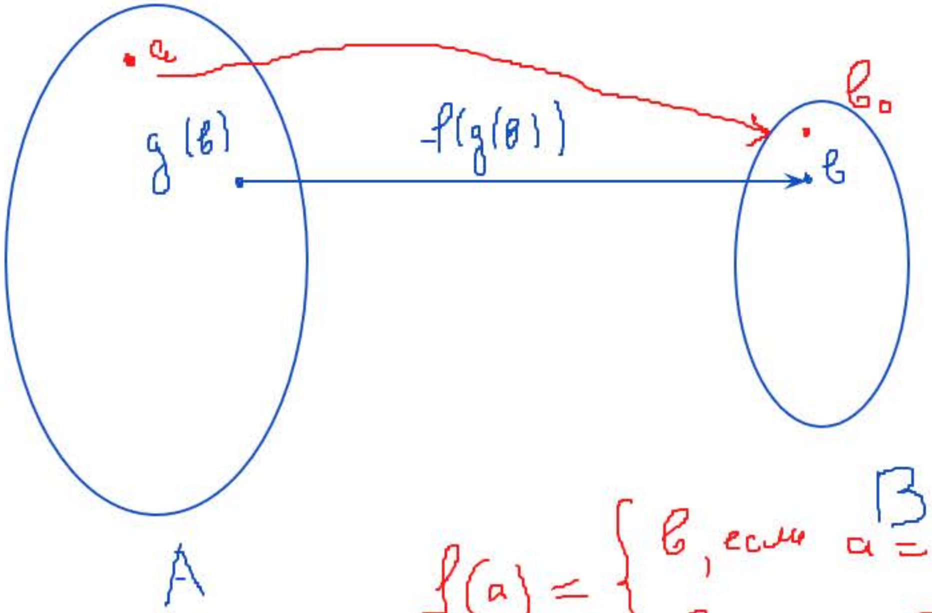
$\{ a \in A \mid f(a) = b \}$

$g(b) = h(f^{-1}[b])$

У1б

$$\forall g: B \rightarrowtail A \quad \exists f: A \to B \quad f \circ g = id_B$$

$B \neq \varnothing$



$B \mapsto b_0$

$$f(a) = \begin{cases} b, \text{ если } a = g(b) \\ b_0, \text{ если } a \notin \operatorname{Im} g \end{cases}$$

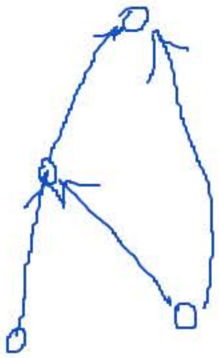
$\forall A \quad A \notin A$

$X = \{A\}$

$$\begin{cases} y \cap X = \emptyset \\ y \in X \end{cases}$$

$A \in A$

$A \cap \{A\} = \{A\}$



Не сущ.

$a_0 \ni a_1 \ni a_2 \ni \dots \qquad \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \operatorname{ran} \alpha$$

$$\begin{cases} y \in X \\ y \cap X = \varnothing \end{cases}$$

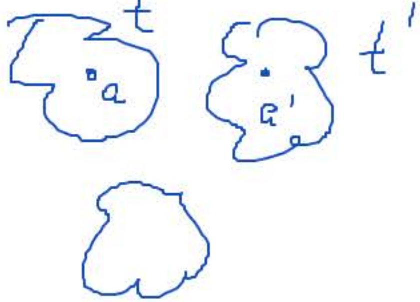
$y = a_i$

$a_{i+1} \in a_i$

$\Rightarrow a_{i+1} \in a_i \cap X$

T транзитивно: $\bigcup T \subset T$

$a \in t \in T \rightarrow a \in T$



$T \subset \mathcal{P}(T)$ $t \in T \rightarrow t \subset T$

$\emptyset$

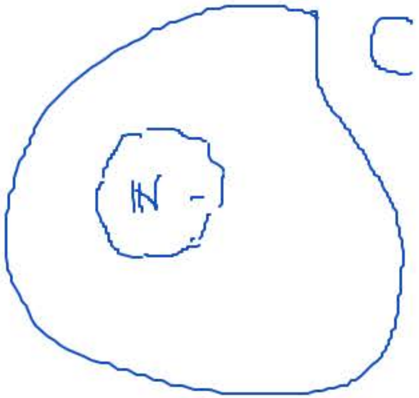
$\{\emptyset\}$

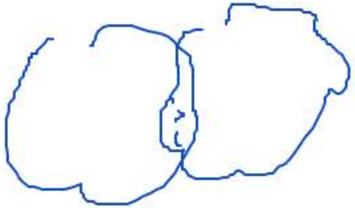
Все нат. числа транзитивны

$\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

1. Почему $\exists$ наим.

$\{y\}$





2. • $x+1 \neq 0$

• $x+1 = y+1 \to x = y$

$x \in x+1$

$x_0 \in X \setminus y$

$x+1 = x \cup \{x\}$

$y+1 = y \cup \{y\}$

$y \in X$

$\boxed{x_0 = y}$

$$x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$$

$$y \in x$$

$$x \setminus y = \{y\}$$

$$x = y \cup \{y\}$$

$$y \notin y$$

$$x_0 = y$$

$$x = y + \underline{1}$$

$$x \cup \{x\} = x$$

$n \neq 0$

$n \neq m+1 \quad \forall m$

$\mathbb{N} \setminus \{n\}$ индуктивно

$k+1 = k \cup \{k\}$

$n \in m \in k \to n \in k \subset k+1$

$n \in m = k \to n \in k \cup \{k\}$

4 $\quad n \notin n$ можно док. без регул.

k транз:

? $\forall m, n\, (n < m < k \to n < k)$

f

vshehtman@gmail.com

- 0 транз.
- k транз $\to$ $k+1$ транз.