Домашнее задание 10

Цифры Вашего кода — $a_0, \dots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + a_5$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Индекс ветвления рациональной функции степени $d > 1$ ни в какой точке не может быть больше чем d.

(1) Рациональная функция степени $d > 1$ не может иметь более двух точек, в которых индекс ветвления равен d.

(2) Рациональная функция степени $d > 1$ может иметь максимум $2d - 2$ критических точки.

(3) Рациональная функция степени $d > 1$ ни в одной точке не может иметь полюс порядка выше d.

(4) Рациональная функция степени $d > 1$ может иметь более одного полюса порядка d.

(5) Если рациональная функция f степени $d > 1$ имеет две геометрически различных точки ветвления степени d, то существует преобразование Мебиуса h, такое, что $h \circ f \circ h^{-1}(z) = z^{\pm d}$.

(6) Если рациональная функция f степени $d > 1$ имеет полюс степени d, то существует дробно-линейное преобразование h, такое, что $f \circ h(z)$ является многочленом степени d.

(7) Известно, что рациональная функция f степени 4 имеет два геометрически различных кратных нуля и только один полюс. Тогда f является квадратом некоторой рациональной функции степени 2.

(8) Известно, что рациональная функция f степени 2 имеет критическую точку c, такую, что $f(f(c)) = c$. В этом случае найдется такое дробно-линейное преобразование h, что $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \frac{a}{z^2-2z}$ для некоторого $a \in \mathbb{C}$ (не зависящего от z) или $h \circ f \circ h^{-1}(z) = 1/z^2$.

(9) Известно, что рациональная функция f степени 2 имеет критическую точку c, такую, что $f(c) = c$. В этом случае найдется такое дробно-линейное преобразование h, что $h \circ f \circ h^{-1}(z) = z^2 + a$ для некоторого $a \in \mathbb{C}$ (не зависящего от z).

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_4+a_6. Существуют ли многочлен $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и гомеоморфизмы $\alpha, \beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (не обязательно голоморфные), такие что $f = \beta \circ P \circ \alpha$ совпадает с выписанным ниже отображением? Строго обоснуйте ответ.

(0) $f(x + iy) = x^2 + iy$.

(1) $f(x + iy) = (x^2 - y^2) + ixy$.

(2) $f(re^{i\theta}) = re^{2i\theta}$.

(3) $f(x + iy) = x^3 + iy$.

(4) $f(x + iy) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2 + ixy)$.

(5) $f(z) = \frac{z|z|^2}{1+|z|^2}$.

(6) $f(z) = \frac{z^2|z|^2}{1+|z|^2}$.

(7) $f(x + iy) = e^x + iy$.

(8) $f(x + iy) = e^x - e^{-x} + iy$.

(9) $f(x + iy) = \sin x + iy$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_1+a_5. В следующих ниже задачах функции f, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ являются голоморфными, а подмножество $K \subset \mathbb{D}$ является компактным. Через $\mathbb{D}$ обозначен единичный диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(0) Множество $f(\mathbb{D} \setminus K) \setminus g(K)$ открыто в $\mathbb{C}$.

(1) Множество $f(K) \setminus g(\mathbb{D} \setminus K)$ компактно.

(2) Множество $\{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Re} f(z) > \operatorname{Im} g(z)\}$ открыто в $\mathbb{C}$.

(3) Множество $\operatorname{Re} f(\mathbb{D})$ открыто в $\mathbb{R}$.

(4) Множество $\operatorname{Re} f(\mathbb{D})$ ограниченно.

(5) Точняя верхняя грань чисел $(\operatorname{Re} f(z))^2 + (\operatorname{Im} f(z))^4$ не достигается при $z \in \mathbb{D}$.

(6) Множество $\operatorname{Re}(f(K)) \setminus \operatorname{Im}(g(\mathbb{D} \setminus K))$ компактно.

(7) Если $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} g(z)$ для всех z, таких, что $|z| = r > 0$, то $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} g(z)$ при $|z| < r$.

(8) Если $|f(z)|^2 < |g(z)|^3$ для всех z, таких, что $|z| = r > 0$, то $|f(z)|^2 < |g(z)|^3$ при $|z| < r$.

(9) Множество $\{|f(z)|^2 - |g(z)|^2 \mid z \in \mathbb{D}\}$ открыто в $\mathbb{R}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_7$.

(0) Выразив по формуле Коши n-ую производную функции e^z в нуле через интеграл по окружности радиуса ρ с центром в 0, докажите, что

$$\int_0^{2\pi} e^{\rho\cos\phi}\cos(\rho\sin\phi - n\phi)\,d\phi = 2\pi\frac{\rho^n}{n!}.$$

(1) Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta},$$

сведя его к интегралу от некоторой рациональной функции по окружности $\{|z|=1\}$. Здесь a и b — вещественные параметры, такие, что $0<b<a$.

(2) Докажите, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2\cos 2\alpha}\cos(x^2\sin 2\alpha)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\alpha,$$

проинтегрировав функцию e^{-z^2} по границе области, заданной в полярных координатах (ρ,θ) неравенствами $0<\rho<R$ и $0<\theta<\alpha$, а потом устремив R к бесконечности.

(3) Докажите, что

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Указание: проинтегрируйте функцию e^{iz}/z по границе области, заданной в полярных координатах (ρ,θ) неравенствами $r<\rho<R$ и $0<\theta<\pi$ (здесь $0<r<R$). Рассмотрите предельный переход $r\to 0$, $R\to\infty$.

(4) Пусть $-\pi<a<\pi$. Докажите, что

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh}\pi x}dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}.$$

Здесь $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ обозначает функцию гиперболического синуса. *Указание:* проинтегрируйте функцию $e^{az}/\operatorname{sh}\pi z$ по границе прямоугольника $\{z\in\mathbb{C} \mid -R\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant R,\ 0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1\}$, из которого удалены маленькие диски вокруг точек 0 и i.

(5) Найдите интеграл
$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n d\theta$$
для всех целых положительных n.

(6) Докажите, что
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$
Здесь $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ обозначает функцию гиперболического синуса.

(7) При $a > 0$, докажите, что
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x(x^2+a^2)} = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-a}).$$
Чему будет равен этот интеграл при $a < 0$?

(8) Пусть m и n — положительные целые числа, такие, что $m < n$. Докажите, что
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1} dx = \frac{\pi}{2n \sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

(9) Докажите, что если $b > 0$, то
$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - a - bi}{2} d\theta = 2\pi i.$$
Чему равен интеграл в левой части при $b < 0$?

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6 + a_9$.

(0) Задача 9.1 на стр. 159–160 основного учебника.
(1) Задача 9.2 на стр. 160 основного учебника.
(2) Задача 9.3 на стр. 160 основного учебника.
(3) Задача 9.4 на стр. 160 основного учебника.
(4) Задача 9.5 на стр. 160 основного учебника.
(5) Пусть $f_n : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ — последовательность отображений, голоморфных в диске $\mathbb{D}$ и непрерывных на его замыкании. Известно, что ограничения отображений f_n на границу диска (т.е. на единичную окружность) сходятся равномерно. Докажите, что последовательность f_n равномерно сходится в $\overline{\mathbb{D}}$.
(6) Задача 9.6 на стр. 160 основного учебника.

(7) Задача 9.7 на стр. 160 основного учебника.
(8) Задача 9.8 на стр. 161 основного учебника.
(9) Задача 9.9 на стр. 161 основного учебника.