Логика, вторая половина.

1 Аксиомы и правило вывода

A_1	$A \to (B \to A)$
A_2	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
A_3	$A \wedge B \to A$
A_4	$A \wedge B \to B$
A_5	$A \to (B \to (A \wedge B))$
A_6	$A \to (A \vee B)$
A_7	$B \to (A \vee B)$
A_8	$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
A_9	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
A_{10}	$\neg\neg A \to A$
MP	$A,\ (A \to B) \vdash B$

Определение 1.1. *Выводом в исчислении высказываний* называется конечная последовательность формул, каждая из которых является аксиомой или получается из предыдущих по правилу вывода.

Определение 1.2. Формула A называется выводимой ($\vdash A$), если существует вывод, в котором последняя формула — это A.

2 Выводы полезных формул

1. $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$.

A_6	$P \to (P \vee Q)$
A_7	$Q \to (P \vee Q)$
A_8	$(Q \to (P \vee Q)) \to ((P \to (P \vee Q)) \to ((Q \vee P) \to (P \vee Q)))$
MP	$(P \to (P \vee Q)) \to ((Q \vee P) \to (P \vee Q))$
MP	$(Q \vee P) \to (P \vee Q)$

2. $A \to A$.

A_1: $B = A$	$(A \to (A \to A)$
A_1: $B = (A \to A)$	$(A \to ((A \to A) \to A))$
A_2: $B = (A \to A)$, $C = A$	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$
MP:	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$
MP:	$(A \to A)$

3. $(P \wedge Q) \vdash (Q \wedge P)$.

A_3	$(P \wedge Q) \to P$
MP	P
A_4	$(P \wedge Q) \to Q$
MP	Q
A_5	$Q \to (P \to (Q \wedge P))$
MP	$P \to (Q \wedge P)$
MP	$Q \wedge P$

3 Корректность исчисления высказываний

Предложение 3.1. Всякая выводимая формула является тавтологией.

Доказательство. Все аксиомы и правило вывода — тавтологии. Значит, все, что можно из них получить — тоже.

□

4 Теорема о дедукции

Теорема о дедукции. Если $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, то $\Gamma \vdash (A \to B)$. Во вторую сторону тоже верно.

Доказательство. Сначала докажем во вторую сторону — это проще. Пусть существует вывод $(A \to B)$ из Γ, Допишем строчку

MP	B

Ну и все.

Теперь в другую сторону, будем доказывать индукцией по длине вывода B из $\Gamma \cup \{A\}$. База: B является аксиомой или совпадает с A. Во втором случае помогает полезная формула 2. В первом случае запишем явно вывод $(A \to B)$:

B	B
A_1	$B \to (A \to B)$
MP	$(A \to B)$

Теперь переход, B получена правилом вывода из некоторых предыдущих формул C и $C \to B$. Тогда, по предположению индукции $\Gamma \vdash (A \to C), (A \to (C \to B))$. Допишем к этому выводу строчки:

A_2	$(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$
MP	$(A \to C) \to (A \to B)$
MP	$(A \to B)$

$\square$

5 Больше полезных формул

4.*(Силлогизм)* $(A \to B),\ (B \to C) \vdash (A \to C)$.

По теореме о дедукции формула равносильна $(A \to B),\ (B \to C),\ A \vdash C$.

MP	B
MP	C

5.*(Контрапозиция)* $(A \to B) \vdash (\neg B \to \neg A)$.

По теореме о дедукции формула равносильна $(A \to B),\ \neg B \vdash A$.

A_9	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
MP	$(A \to \neg B) \to \neg A$
A_1	$\neg B \to (A \to \neg B)$
MP	$A \to \neg B$
MP	$\neg A$

6.*(Из лжи следует все)* $A, \neg A \vdash B$.

A_1	$A \to (\neg \to A)$
MP	$\neg \to A$
A_1	$\neg A \to (\neg \to \neg A)$
MP	$\neg \to \neg A$
A_9	$(\neg B \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B)$
MP	$(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$
MP	$\neg\neg B$
A_{10}	B

7. $A, B \vdash A \wedge B$.

A_5	$A \to (B \to (A \wedge B))$
MP	$B \to (A \wedge B)$
MP	$A \wedge B$

8. *(Правило разбора случаев)* $(A \to C),\ (B \to C) \vdash ((A \vee B) \to C)$.

A_8	$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
MP	$(B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$
MP	$(A \vee B) \to C$

9. *(От противного)* $(A \to B),\ (A \to \neg B) \vdash \neg A$.

A_9	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
MP	$(A \to \neg B) \to \neg A$
MP	$\neg A$

10. *(Двойственное к предыдущему)* $(A \to B),\ (\neg A \to B) \vdash B$.

5	$\neg B \to \neg A$
5	$\neg B \to \neg\neg A$
A_{10}	$\neg\neg A \to A$
4	$\neg B \to A$
9	$\neg\neg B$
A_{10}	B

11. $A \vee \neg A$.

A_6	$A \to (A \vee \neg A)$
A_7	$\neg A \to (A \vee \neg A)$
10	$A \vee \neg A$

12. $A \to \neg\neg A$.

A_1	$A \to (\neg A \to A)$
MP	$\neg A \to A$
5	$\neg A \to \neg\neg A$
2	$\neg A \to \neg A$
9	$\neg\neg A$

Кажется, на этом месте я набила руку, поэтому следующие полезные формулы оставлю без доказательства.

13. $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
14. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
14. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Последние два называются *законами де Моргана*.

6 Непротиворечивые множества формул

Определение 6.1. Множество формул Γ называется *противоречивым*, если для некоторой формулы A имеем $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$. А в противном случае — *непротиворечивым*.

Замечание 6.1. Если Γ — противоречиво, то в силу полезной формулы 6 имеем $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B.

Замечание 6.2. Множество формул противоречиво тогда и только тогда, когда оно содержит конечное противоречивое подмножество.

Лемма 6.1. Множество $\Gamma \cup \{B\}$ — противоречиво тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \neg B$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \vdash \neg B$, тогда $\Gamma \cup \{B\} \vdash B, \neq B$, то есть $\Gamma \cup \{B\}$ — противоречиво.

Пусть $\Gamma \cup \{B\}$ — противоречиво, то есть можно вывести A и $\neg A$. Тогда по теореме о дедукции имеем $\Gamma \vdash (B \to A), (B \to \neg A)$, а по полезной формуле 9 получаем $\neg B$.

□

Определение 6.2. Непротиворечивое множество Γ называется *максимальным непротиворечивым*, если для любой формулы $A \notin \Gamma$ множество $\Gamma \cup \{A\}$ — противоречиво.

Теорема Линденбаума. Любое непротиворечивое множество Γ содержится в некотором максимальном.

Доказательство. Рассмотрим семейство всех непротиворечивых множеств, содержащих Γ. Это ЧУМ по включению. Проверим условие леммы Цорна. Рассмотрим какую-то цепь и объединим все её элементы. Получилось множество, нужно показать, что оно непротиворечиво. Это так, потому что если выводимо A и $\neg A$, то они выводимы и из какого-то элемента цепи.

□