Логика и алгоритмы

Задачи семинаров 3

Начальным отрезком множества $(X,<)$ называется такое подмножество $Y \subset X$, для которого $\forall x, y \in X\ (y < x \wedge x \in Y \Rightarrow y \in Y)$. Начальный отрезок, не совпадающий со всем множеством X, называется *собственным.*

Теорема 1. *Никакое вполне упорядоченное множество* $(X,<)$ *не является изоморфным своему собственному начальному отрезку.*

Теорема 2 (Кантор)**.** *Для двух вполне упорядоченных множеств верно, что одно из них изоморфно начальному отрезку другого.*

Для двух линейно упорядоченных множеств $(A,<_A)$ и $(B,<_B)$ их *суммой* называется множество $A \sqcup B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ вместе с отношением порядка

$$(x,i) < (y,j) \iff \left[\begin{array}{l} i=j=0 \text{ и } x <_A y, \\ i=j=1 \text{ и } x <_B y, \\ i=0 \text{ и } j=1. \end{array}\right.$$

Произведением двух линейно упорядоченных множеств $(A,<_A)$ и $(B,<_B)$ называется множество $A \times B$ вместе с отношением порядка

$$(x_1,y_1) < (x_2,y_2) \iff \left[\begin{array}{l} y_1 = y_2 \text{ и } x_1 <_A x_1, \\ y_1 <_B y_2. \end{array}\right.$$

1. Верно ли, что операции сложения и умножения линейно упорядоченных множеств обладают свойствами коммутативности, ассоциативности, левой и правой дистрибутивности (с точностью до изоморфизма)?

2. Докажите, что для линейно упорядоченного множества $(X,<)$ следующие условия эквивалентны:

   а) для любого множества A верно, что если $\forall x \in X\ (\forall y < x\ y \in A \to x \in A)$, то $X \subset A$;

   б) любое непустое подмножество X содержит минимальный элемент;

   в) не существует убывающей последовательности $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$ элементов множества X.

3. Докажите, что сумма двух вполне упорядоченных множеств и произведение двух вполне упорядоченных множеств также является вполне упорядоченным.

4. Докажите, что всякое вполне упорядоченное множество изоморфно сумме α и β, где α — множество без наибольшего элемента, β — конечное множество.

5. Докажите, что любое вполне упорядоченное множество без наибольшего элемента изоморфно произведению ω на α.

6. Докажите, что любой собственный начальный отрезок вполне упорядоченного множества $(X,<)$ имеет вид $[0,a) = \{x \in X \mid x < a\}$ для некоторого $a \in X$.

7. Докажите, что любое подмножество вполне упорядоченного множества $(X, <)$, как множество с индуцированным порядком, изоморфно начальному отрезку $(X, <)$.

   Множество T называется *транзитивным*, если $\bigcup T \subset T$. *Ординал* — это транзитивное множество, каждый элемент которого транзитивен.

8. Приведите пример транзитивного множества, которое не является ординалом.

9. Докажите, что элемент любого ординала является ординалом, что для любого ординала α множество $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ является ординалом, а также, что $\bigcup X$ является ординалом для любого множество ординалов X.

10. Докажите, что каждое натуральное число и всё множество $\mathbb{N}$ — ординалы.

    Обозначение: $x < y :\Leftrightarrow x \in y$. Мы также будем писать $x \leqslant y$, если $x < y$ или $x = y$.

    Теорема 3. *Класс всех ординалов линейно упорядочен с помощью $<$. Более того, всякое непустое множество ординалов содержит $<$-наименьший элемент.*

11. Докажите, что для ординалов α и β

$$\alpha < \beta \iff \alpha \subsetneqq \beta, \qquad\qquad \alpha \leqslant \beta \iff \alpha \subset \beta.$$

    Также для для ординалов α и β проверьте, что если $\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha + 1$, то $\beta = \alpha$ или $\beta = \alpha + 1$.

12. Докажите, что всякий ординал α либо имеет вид $\beta + 1$ для некоторого ординала β, либо равен объединению всех предшествующих ординалов $\bigcup \alpha$.

    Ординалы вида $\beta + 1$ называются ординалами-*последователями*; все остальные ординалы, кроме 0, называются *предельными*.

13. Докажите, что для любого множество ординалов X множество $\bigcup X$ является точной верхней гранью множества X, $\sup X$.

14. В две строчки докажите, что любое подмножество конечного множества конечно, а также, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

15. Бывают ли конечные ординалы, которые отличны от всех натуральных чисел?

$$\left|\begin{array}{l} 0 = \varnothing \\ x+1 = x \cup \{x\} \end{array}\right.$$

$\mathbb{N}$ – наим. по включению

$x \in M \to x+1 \in M$

$0 \in M$

$P \subset \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \in P \\ \forall x \in P \ \ x+1 \in P \end{array}\right\} \Rightarrow P = \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+1 = y+1 \to x = y \end{cases}$$

$x < y$, если $x \in y$

$$x = \{y \mid y \in x\} = \{\overset{\mathbb{N}}{y} \mid y < x\}$$

Задача 0

$y \in X \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \mathbb{N}$, т.е. $\mathbb{N}$ транзитивно

инд. по X

x

$y \in X+1 \in \mathbb{N}$

$y \in X \cup \{x\}$

$y \in X \Rightarrow y \in N$

$y \in \{x\} \Rightarrow y = X$

Задача

$X+1 \in \mathbb{N} \to X \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \setminus \{x+1\}$

$X+1 \in \mathbb{N}$

$X+1 = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{m}+1$

$m \in n \to m \subset n$ — (4)

$\Updownarrow$

$m < n$

Задача 0.5

$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{m} \subset \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{n} \longleftrightarrow m \leq n$

$n+1 = n \cup \{n\}$

$m \subset n+1$.

$m \in n \to m \leq n \leq n+1$

$n \in m$

$n \in m \subset n+1 \longrightarrow m = n+1$

$m \in n+1$

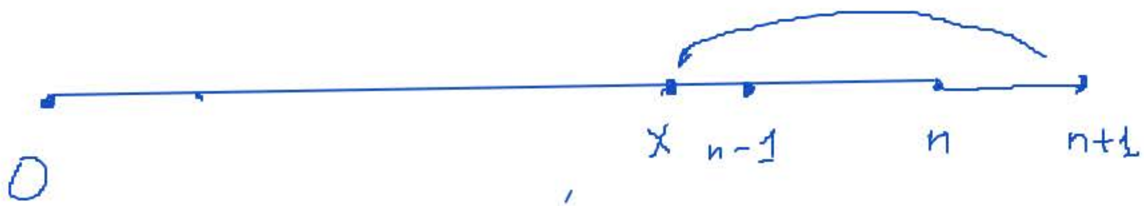
$m \in (n \cup \{n\})$

$m = n$

$n \in m \in n$

$n \in n$

5



$\varphi: n+2 \rightarrowtail n+1$

$\varphi|_{n+1}$ – инъекция

$n+1 \to (n+1)\setminus\{x\}$

$x = \varphi(n+1)$

$(n+1)\setminus\{x\} \sim n$

$n+1 \to n$

$n+1$

$n+1 \not\preccurlyeq n$

$\Downarrow$

$n+1+1 \not\preccurlyeq n+1$

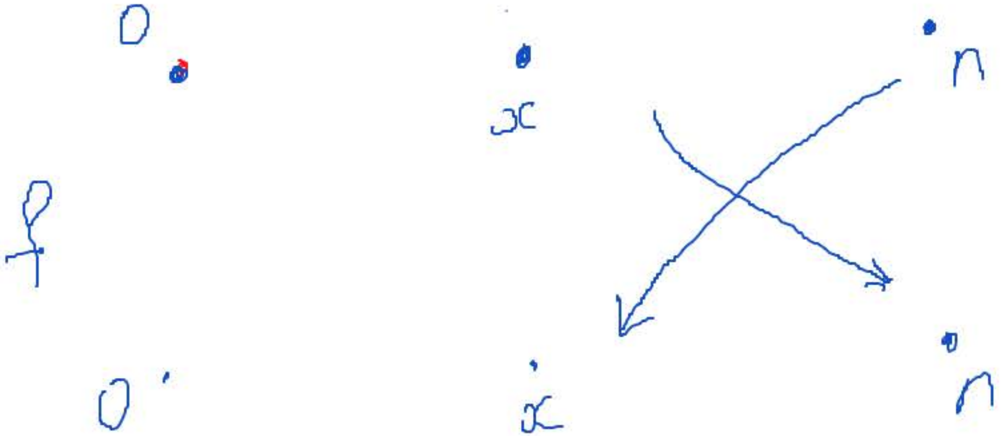
$(n+2)$

Задача 5.1

$$(n+1)\setminus\{x\} \sim n$$

$$(x \in n+1)$$

нужн. $f : (n+1)\setminus\{x\} \to n$



$f : n+1 \to n+1$ биекция

6 $n \nmid m$, если $m < n$

$n \leq m$

$$\boxed{m < n \to m \leq n-1}$$

$m = n-1$

$m < n-1 \to m \leq n-1$

8 $\leftarrow$ 7, 6

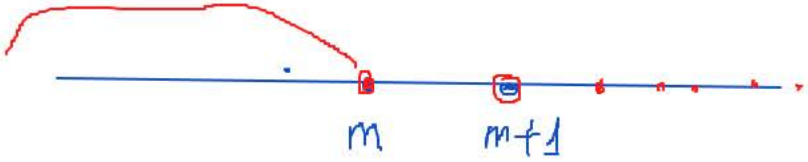
(7) $m \le n \leftrightarrow m < n+1$

m сравнимо с любым n

$\rightarrow$ m+1 сравн. с любым n $\rightarrow$

$0 < n$

$0 \le n$ (Задача 0.5)



$n < m \rightarrow n < m+1$

$< m+1$

$m = n \rightarrow m < n+1$

$m < n+1$

? $\underline{m < n} \rightarrow m+1 \le n$

$m < n-1 \rightarrow m+1 < n$

$m \le n \rightarrow m < n-1 \vee m = n-1$

Опр $X \sim n \in \mathbb{N}$ $\quad |X| = n$ $\quad$ корректно опр.

10 $\left.\begin{array}{l} X \text{ - кон.} \\ Y \subset X \end{array}\right\} \to Y$ конечно

$X \sim n$

$Y \subset X$ -

$Y \sim Z \subset n$

Z конечно

$Z \subset n \setminus \{a\} \sim (n-1)$

$Z \sim Z' \subset n-1$

конечно

(11) X, Y конечны $\longrightarrow X \cup Y$ конечно

(12) X, Y кон. $\Longrightarrow X \times Y$ конечно

$X \sim n$

$Y \sim m$

$$X \cup Y = \underbrace{(X \setminus Y)}_{\text{конечно}} \cup Y$$

$X \cap Y = \varnothing$ инд. по $|Y|$

$|Y'| = n$

$X \cup Y$

$X \cup Y' \cup \{a\}$

$|Y| = n+1$ $Y \sim n \cup \{n\}$