МАТ АНАЛИЗ СЕМИНАР

07.09.20

Пусть X — множество

Опр. Класс подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^X$ называв. **σ-алгеброй**, если

1) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$
2) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

Пусть $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$A \cap (X \setminus B)$ $\quad A \setminus B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$

$A, B \in \mathcal{A}$

Примеры: $\underset{\text{max}}{2^X}, \underset{\text{min}}{\{\varnothing, X\}}$

$\mathcal{A}$ замк. отн. дополнения и счётного объединения $\Rightarrow \mathcal{A}$ замк. отн. счётного пересечения

Пусть $A_n \in \mathcal{A}$

$$X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$$

Опр. Пусть X – множ., $\mathcal{F} \subset 2^X$

σ-алгебра, порожд. $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{F})$ – наименьшая σ-алгебра, содерж. $\mathcal{F}$

так как
$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{A}:\ \mathcal{A} \supset \mathcal{F},\ \mathcal{A} \text{ – σ-алг.}} \mathcal{A}$$

Опр. Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ – σ-алгебра, порожд. открытыми мн-вами в $\mathbb{R}^n$

Задачи

1. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ порождается (a, b), $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{Q}$

открытое мн-во $= \bigcup$ непересек. интервалов

порожд. всеми интервалами

$\Rightarrow$

интервалы можно приближать к отрезку

$a_n \to a$

$b_n \to b$

$\boxed{2}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ порожд. замк. квадратами

Пусть

$U \subset \mathbb{R}^2$ откр.

$x=(a,b)$
$\cap \ \cap$
$\mathbb{Q}$

$K_{x,r}$

Берем открыт. квадрат, центр квадр. — рац. точка (x,y), квадрат $\in U$ и сторона кв. $= r \in \mathbb{Q}$

$$\left|\bigcup_{x,r} K_{x,r}\right| \in \mathbb{Q}$$

откр. кв. $\to$ замк. кв. $\Rightarrow$

$$\sigma(\{\text{замкн. квадр.}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$
$$\supset (\{\text{откр. квадр.})$$

Докажем, что ∀ рац. точки $\in \bigcup_x K_x$

т.к. $y \in U$, то $\exists$ откр. шар $r_1 = \varepsilon$ с центром в т. $y \Rightarrow \exists$ квадрат $r_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ с центром в рац. точке

$$K_{y,\frac{\varepsilon}{2}} \subset U_\varepsilon(x)$$

$\boxed{3}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ не порожд. отрезками

σ-алгебра, порожд. отрезками $\subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$\not\ni$ квадрат

Пусть $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^2 \mid A$ или $\mathbb{R}^2 \setminus A$ можно покрыть счётным объед. отрезков$\}$

$\mathcal{A}$ — σ-алгебра. Докажем это

- $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{R}^2 \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Пусть $A_n \subset$ счёт. объед. отрезков $\forall n$

$\Downarrow$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset$ счёт. объед. отр.

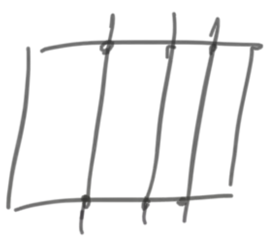
Если $\exists n \mid \mathbb{R}^2 \setminus A_n$ покр. счёт. объед. отр. $\Rightarrow$

$\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A_n$

сч. объед. отр.

$\Downarrow$

$\mathcal{A}$ — σ-алгебра



квадрат нельзя покрыть счёт. объед. отрезков

круги с центром в 0: аналогично (центр. симметричная алгебра)

$\boxed{4}$ X — мн-во, $\mathcal{A}$ — конечная σ-алгебра на X

$\Rightarrow X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_k$

$$\mathcal{A} = \sigma(\{X_1, \ldots, X_k\})$$

Берём $A \in \mathcal{A} \mid \nexists \underset{\neq \varnothing}{B} \subset A$

Если $\underset{\subset X_i}{X_i \cap X_j} \neq \varnothing \Rightarrow$ противоречие

$$X \setminus (X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_k) \in \mathcal{A} \Rightarrow$$

$$\exists i : X_i \subset X \setminus (X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_k)$$

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_{n,1} \bigcup \bigcup I_{n,\frac{1}{2}} \bigcup \ldots$

куб со стороной 1

$n_1 : I_{n,1} \subset U$ $\quad$ $n_2 : I_{n,2} \subset U \setminus \left(\bigcup\limits_{n} I_{n,1}\right)$

6] $\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \exists F_1, \ldots F_n \in \mathcal{F} \ldots$

$A \in \sigma(\{F_1, \ldots, F_n, \ldots\})\}$

Док-ть, что $\mathcal{A}$ — σ-АЛГЕБРА

Пусть $A \in \mathcal{A}$ $\quad X \setminus A \in \sigma(\{F_1, \ldots, F_n \ldots\})$

Пусть $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$A_n \in \sigma(\{F_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\{F_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ $\quad$ ПРОВЕРИЛИ ЗАМКНУТОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СЧЁТНОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ

σ-АЛГЕБРА

Листок 1.

1. Доказать, что борелевская σ-алгебра прямой порождается как интервалами с рациональными концами, так и отрезками с рациональными концами.

2. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости порождается замкнутыми квадратами.

3. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости не порождается отрезками, а также не порождается кругами с центром в нуле.

4. Доказать, что всякая конечная σ-алгебра порождается множествами из конечного разбиения пространства на дизъюнктные множества.

5. Доказать, что всякое непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ является счетным объединением кубов с попарно дизъюнктными внутренностями.

6. Доказать, что всякое множество из σ-алгебры, порожденной набором множеств, входит в σ-алгебру, порожденную некоторым не более чем счетным поднабором этих множеств.

7. Доказать, что в сепарабельном метрическом пространстве борелевская σ-алгебра порождается счетным набором открытых шаров.

8. Привести пример метрического пространства, в котором борелевская σ-алгебра строго шире σ-алгебры, порожденной всеми открытыми шарами.

9. Привести пример под-σ-алгебры борелевской σ-алгебры прямой, которая не порождается никаким счетным набором множеств.

10. Привести пример σ-алгебры, в которой всякое непустое множество содержит непустое строго меньшее подмножество из этой σ-алгебры.

11. Привести пример такой счетной последовательности интервалов, что она порождает борелевскую σ-алгебру, но никакая ее собственная часть уже не порождает борелевскую σ-алгебру.

12. Доказать, что σ-алгебра, порожденная счетным набором множеств, имеет мощность не выше континуума.