Подготовка к коллоквиуму по логике.

1) • Теория - мн-во замкн. формул языка L_Σ
• Модель - непустое мн-во вместе с интерпретацией. $P \rightsquigarrow P_M$ той же валентн. $f \rightsquigarrow f_M$, $c \rightsquigarrow c_M \in M$
• $Th(M) = \{A \mid M \vDash A\}$, A - замкн. формула ; $M \vDash A$ - „A истинна в M"
$M_1 \equiv M_2 \Leftrightarrow Th(M_1) = Th(M_2)$. - элем. экв-ть.

• Теория полна, если $\forall$ формула A или $\neg A$ доказуемы (выводимы) в T, т.е. $(T \vdash A) \vee (T \vdash \neg A)$.

Теорема Гёделя о полноте: 1) Всякая непротиворечив. теория T выполнима, т.е. имеет модель $M \vDash T$
2) Если $T \nvdash A$, то $\exists$ модель M, т.ч. $M \vDash T$, для к-ой $M \nvDash A$.
(лекция 11).

2) • $\alpha: M \to M'$ наз. изоморфизмом, если:
▹ α - биекция
▹ $\alpha(c_M) = c_{M'}$ для всех const
▹ $\alpha(f_M(m_1, \dots, m_k)) = f_{M'}(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k))$
▹ $\alpha(P_M(m_1, \dots, m_k)) = P_{M'}(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k))$.

• Терм, оценённый в M - замкн. терм расш. сигнатуры $\Omega(M)$: $t(a_1, \dots, a_n) \rightsquigarrow t(m_1, \dots, m_n) =: t[a_1, \dots, a_n / m_1, \dots, m_n]$
$|t|_M$ - значение оценён. терма
Формула, оценённая в M - —"— формула —"—. $|A|_M$ - значение (0 или 1).

• $\alpha \cdot t$ - терм, полученный из терма t заменой всех const m из M на их образы $\alpha(m)$.
$\alpha \cdot A$ - аналогично (A и t - оценённые в M).

• Теорема (лекция 12): $\alpha: M \cong M'$. ▹ Если t - терм, оценённый в M, то $|\alpha \cdot t|_{M'} = \alpha(|t|_M)$.
▹ Если A - формула, оценённая в M, то $|\alpha \cdot A|_{M'} = |A|_M$.
(док-ва формально „смотри в записях предыдущих лет").

• Если $M \cong M'$, то $M \equiv M'$.

3) • Теория сильно категорична, если все её модели изоморфны
Теория конечно аксиоматизируема, если она экв-на конечной теории.
Сильно категоричн. теория автоматически окажется полной, т.к. все её модели элементарно экв-ны
Примеры:

4) • Теорема 1.6 (лекция 13). Ω-конечная сигнатура; M-конечная модель Ω. Тогда:
▹ $Th(M)$ конечно аксиоматизируема
▹ $Th(M)$ сильно категорична.

• Следствие 2.1. Если M-конечная модель и $M' \equiv M$, то $M' \cong M$.
Док-во следствия: Если $M' \equiv M$, то $M' \vDash Th(M)$. Тогда по теореме 1.6. $M' \cong M$.

5) • k-местный предикат на мн-ве M - отобр-ие $\gamma: M^k \to \{0,1\}$
k-местное отношение на —"— M - мн-во $R \subset M^k$.
• Рассмотрим формулу $A(\vec{b})$, где $\vec{b} = (b_1, \dots, b_k)$
k-местный предикат, определённый формулой $A(\vec{b})$ в модели M - это
$A_M: M^k \to \{0,1\}$ такое, что для всех $m_1, \dots, m_k$: $A_M(m_1, \dots, m_k) = |A(m_1, \dots, m_k)|_M$

Теорема 2.2 (лекция 13). Пусть α - автоморфизм модели M, $A(b_1, \dots, b_k)$ - формула в её сигнатуре. Тогда для всех $m_1, \dots, m_k \in M$: $A_M(\alpha\vec{m}) = A_M(\vec{m})$, т.е.
$A_M(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) = A_M(m_1, \dots, m_k)$; $\vec{m}$ - „кортеж".

Док-во: $A_M(\alpha\vec{m}) = |A(\alpha\vec{m})|_M$ = [у нас автоморфизм, пользуемся опр. изоморфизма] = $|A(\vec{m})|_M = A_M(\vec{m})$

• Если отношение R определимо в M, $\alpha: M \cong M$, то $\vec{m} \in R \Leftrightarrow \alpha\vec{m} \in R$

• Лемма 2.3 (лекция 13): Пусть M - конечная модель конечной сигнатуры; $m_1, m_2 \in M$. $M \models A(m_1) \Leftrightarrow M \models A(m_2)$ $\forall$ формулы $A(a)$. Тогда $\exists$ автоморфизм $\alpha : M \cong M$, т.ч. $\alpha(m_1) = m_2$.
Док-во леммы:
(M, m_1) - модель $\Omega \cup \{c\}$
(M, m_2) - модель $\Omega \cup \{c\}$. Тогда $(M, m_1) \equiv (M, m_2)$, т.к. $(M, m_1) \models A(c) \Leftrightarrow M \models A(m_1)$
$((M, m_1) \models c = m_1)$
В M_2 то же самое.
(Тогда придём к $(M, m_1) \models A(c) \Leftrightarrow (M, m_2) \models A(c)$) —
И т.к. $(M, m_1) \equiv (M, m_2)$, то $(M, m_1) \cong (M, m_2)$, т.е. такой α $\exists$.

6) • M, M' - модели сигнатуры Ω. M' - подмодель M, если:
- $M' \subset M$ как мн-во
- $c_M = c_{M'}$
- $f_M(m_1, \ldots, m_k) = f_{M'}(m_1, \ldots, m_k)$
- $P_M(m_1, \ldots, m_k) = P_{M'}(m_1, \ldots, m_k)$.

Подмодель $M' \subset M$ - элементарная, если $\forall$ формулы $A(a_1, \ldots, a_k)$ и $m_1, \ldots, m_k \in M'$
$M' \models A(m_1, \ldots, m_k) \Leftrightarrow M \models A(m_1, \ldots, m_k)$.
(Тогда, в частности, $M' \equiv M$; обозначение: $M' \prec M$).

• Мощность сигнатуры Ω: $|\Omega| := |Const_\Omega \cup Fun_\Omega \cup Pred_\Omega|$
Теорема (Лёвенгейм-...): Для любой модели M сигнатуры Ω $\exists M' \prec M$, т.ч.
$|M'| \leq \max(|\Omega|, \aleph_0)$, т.е. не превышает мощности сигнатуры или счётной мощности.

Док-во (лекция 14): (то, что написано в двух следующ. слайдах) + следующее:
$M \models \exists x A(x, \vec{m}) \Rightarrow \exists e \in M_{n+1}$, т.ч. $M \models A(e, \vec{m})$. Заметим, что $e = S_{\exists x A}(\vec{m})$
$(\vec{m} \in M_n^k)$
Определим $M' = \bigcup_n M_n$. Утв: $M' \prec M$. Действительно, $M' \subset M$, т.к. $c_M \in M'$ (на самом деле $c \in M_1$), ведь $M \models \exists x\ x = c$; $m_1, \ldots, m_k \in M_n \Rightarrow f_M(m_1, \ldots, m_k) \in M_{n+1}$, т.к. $M \models \exists x\ x = f(m_1, \ldots, m_k)$, т.е. следовательно, M' содержит все c_M и замкн. относ f_M, переопределив $c_{M'} := c_M$; $f_{M'} := f_M$; $P_{M'} := P_M$, получим ~~M~~ $M' \subset M$.
Для того, чтобы $M' \prec M$, нужно док-ть, что $M' \models B(\vec{m}) \Leftrightarrow M \models B(\vec{m})$. Это док-ем по индукции длине формулы B: ▷ B - атомарн $\Rightarrow$ всё выполн. по опр. B
▷ $B = \neg C$ (аналогично с $\wedge$) $\Rightarrow$ ($M' \models B(\vec{m}) \Leftrightarrow M' \not\models C(\vec{m})$
$\Updownarrow$
$M \models B(\vec{m}) \Leftrightarrow M \not\models C(\vec{m})$)
▷ $B(\vec{m}) = \exists x A(x, \vec{m})$: $M' \models \exists x A(x, \vec{m}) \overset{?}{\Leftrightarrow} M \models \exists x A(x, \vec{m})$
$\Uparrow$
$M' \models A(e, \vec{m}) \Longrightarrow M \models A(e, \vec{m})$
В обратную сторону:
$M \models \exists x A(x, \vec{m})$; $e = S_{\exists x A}(\vec{m}) \in M$
$M \models A(e, \vec{m})$ · опред. $S_{\exists x A}$
Тогда по предп. индукции $M' \models A(e, m)$.
В результате $M' \models \exists x A(x, \vec{m})$.

Разберёмся с мощностями. Нужно док-ть, что $|M'| \leq \max(|\Omega|, \aleph_0)$:
$|M_0| = 1$; $|F_{m_\Omega}| = \max(|\Omega|, \aleph_0) = \lambda$
Если $|M_n| \leq \lambda$, то $|M_{n+1}| \leq \lambda$; $|\{s(\vec{m}) \mid \vec{m} \in M_n^k, s \in \Sigma$ - мн-во сколемских ф-ий $\}| \leq |M_n^k| \times |\Sigma| = \lambda$
Оценим M': $M' = \bigcup_n M_n$; $|M'| \leq \lambda \cdot \aleph_0 = \lambda$

(См. Верещагин, Шень „Лекции по мат. логике...“ часть 2; раздел 3.11; теорема 42, стр. 123)

7). Фильтр на мн-ве I - это непустое $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ со св-вами:

- $X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow (X \cap Y) \in \mathcal{F}$
- $X \in \mathcal{F}$ & $X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

Фильтр наз. собственным, если $\varnothing \in \mathcal{F}$

Ультрафильтр - максимальный по включению собств. фильтр.

• Пусть $(M_i)_{i \in I}$ - семейство моделей сигнатуры Ω, $\mathcal{U}$ - ультрафильтр на I.

Ультрапроизведение сем-ва $(M_i)_{i \in I}$ по ультрафильтру $\mathcal{U}$ задаётся следующим образом:

- Носитель M - это $\prod\limits_{i \in I} M_i / \sim_{\mathcal{U}}$
- $c_M := [c_{M_i}]_{i \in I}$, где $[c_{M_i}]_{i \in I}$ - класс элемента $(c_{M_i})_{i \in I}$ по отношению
  $\alpha \sim_{\mathcal{U}} \beta := \forall^\infty i\, (\alpha_i = \beta_i)$ ($\forall^\infty i$ - „почти для всех i")
- $M \models P([m_i^1], \ldots, [m_i]^k) \Leftrightarrow \forall^\infty i\; M_i \models P(m_i^1, \ldots, m_i^k)$.

Обозначение: $\prod\limits_{\mathcal{U}} M_i$.

• Теорема Лося: $\prod\limits_{\mathcal{U}} M_i \models A([m_i^1], \ldots, [m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i\; M_i \models A(m_i^1, \ldots, m_i^k)$;

Док-во:
- Если A - атомарная, т.е. $A = P(t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n)) = P(t_1([m_i^1], \ldots, [m_i^k]) \ldots)$;
  $\prod\limits_{\mathcal{U}} M_i \models A([m_i^1], \ldots, [m_i^k]) \Leftrightarrow \forall^\infty i\; M_i \models P(|t_1(m_i^1, \ldots)|_{M_i}, \ldots)$.
- Если A - формула, имеющ. вид $a_1 = a_2$
  Нужно проверить, что $\prod\limits_{\mathcal{U}} M_i \models [m_i^1] = [m_i^2] \Leftrightarrow \forall^\infty i\; M_i \models m_i^1 = m_i^2$
  $\forall^\infty i\; m_i^1 = m_i^2$
- Если $A = B \wedge C$ (← для B и C всё док-но)
  $\prod\limits_{\mathcal{U}} M_i \models (B \wedge C)([m_i^1], \ldots) \Leftrightarrow \prod\limits_{\mathcal{U}} M_i \models B([m_i^1], \ldots)$ & $\prod\limits_{\mathcal{U}} M_i \models C([m_i^1], \ldots) \overset{\text{(предпол. индукции)}}{\Longleftrightarrow}$
  $\Leftrightarrow \forall^\infty i\; M_i \models B(m_i^1, \ldots)$ & $\forall^\infty i\; M_i \models C(m_i^1, \ldots) \Leftrightarrow \forall^\infty i\; M_i \models B(m_i^1, \ldots) \wedge$
  $\wedge\, C(m_i^1, \ldots)$
- $A = \neg B$
  $\prod\limits_{\mathcal{U}} M_i \models A(\ldots) \Leftrightarrow \forall^\infty i\; M_i \models A \Leftrightarrow \forall^\infty i\; M_i \not\models B \Leftrightarrow \neg \forall^\infty i\; M_i \models B \overset{\text{предп. индук.}}{\Longleftrightarrow} \prod\limits_{\mathcal{U}} M_i \not\models B \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \prod\limits_{\mathcal{U}} M_i \models A$.
- $A = \exists x\, B(x, \vec{a})$; $M = \prod\limits_{\mathcal{U}} M_i \models A([\vec{n}]) \Leftrightarrow \exists [m] \in M\;\; M \models B([m], [\vec{n}])$
  $\overset{\text{предп. инд.}}{\Rightarrow} \forall^\infty i\; M_i \models B(m_i, \vec{n}_i) \Leftrightarrow \forall^\infty i\; M_i \models \underbrace{\exists x\, B(x, \vec{n}_i)}_{A(\vec{n}_i)}$

  $\Leftarrow$ можем построить $[m] = [m_i]_{i \in I} \Leftarrow \forall^\infty i\; M_i \models A(\vec{n}_i)$.
  и подставим в $B([m], [\vec{n}])$

~~Надо~~

(см. Верещагин, Шень „Лекции по мат. логике..." часть 2; раздел 5.6; теорема 78, стр. 206)

8) Теорема Гёделя-Мальцева.

(см. Верещагин, Шень „Лекции по мат. логике..." часть 2; раздел 5.6) (см. слайды лекции 15)
стр. 208 абзац 3.

9) Теорема о подъёме.

(см. Верещагин, Шень „Лекции..." часть 2, раздел 5.2
Теорема Левенгейма-Сколема о повышении мощности — стр. 170, теорема 61.

Вторая (безымянная) теорема — стр. 172, теорема 63.)

10) Существование нестандартных моделей арифметики.