ЛЕКЦИЯ ГЛАДКИЕ

15.09.20

ОРИЕНТАЦИЯ МНОГООБРАЗИЯ

в $\mathbb{R}^n$ определяется репером

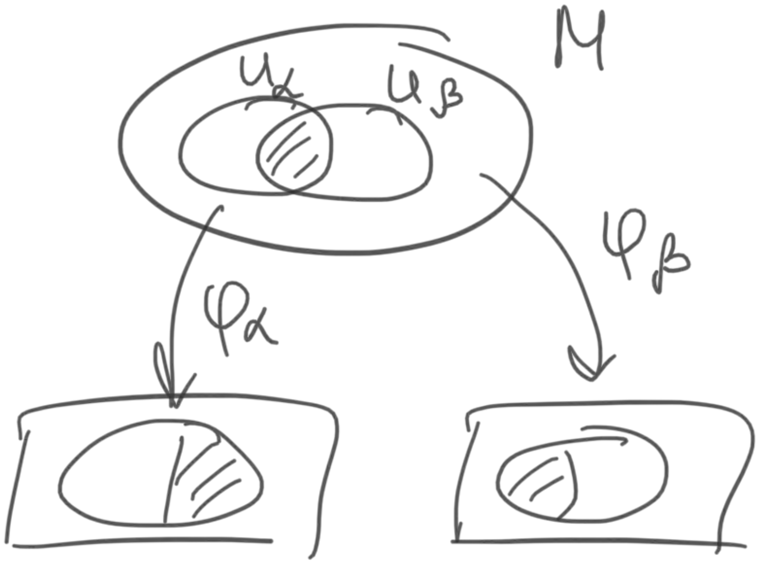
$$\begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{vmatrix} > 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}$$

M – многообр. $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$

Опр. Карты согласованы, если

$$\det J(\varphi_{\alpha\beta}) > 0$$

$$x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$



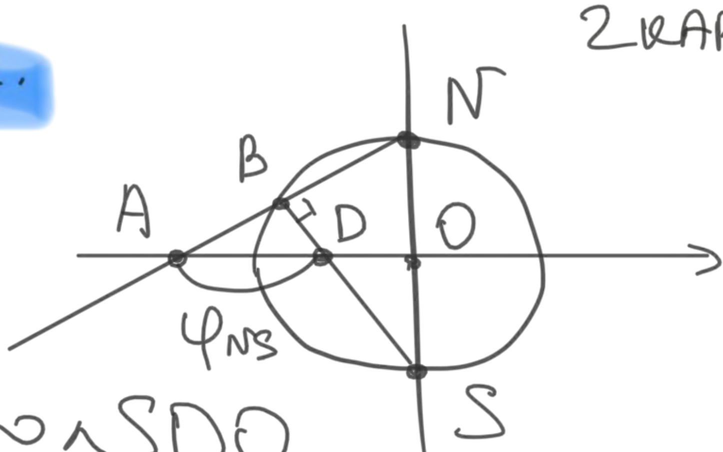
Опр. Атлас $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ наз. ориентирующим, если все его карты согласованы.

Опр. 1) Многообразие M наз. ориентируемым, если на нём $\exists$ хотя бы один ориентирующий атлас.

2) — и — ориентированным, если на нём зафиксирован ориентирующий атлас.

Опр. Ориентирующие атласы A и A' многообр. M наз. эквивалентными, если $A \cap A'$ — ориентирующий атлас

Примеры.



2 карты: $S^1 \setminus N$ и $S^1 \setminus S$

$\triangle ANO \sim \triangle SDO$

$$\frac{AO}{SO} = \frac{NO}{DO} \Rightarrow AO \cdot DO = r^2$$

$\boxed{\text{пусть } r = 1}$

$$\varphi_{NS} : x \to \varphi(x) \;\Big|\; x \cdot \varphi(x) = r^2 = 1 \left(\text{инверсия}\right)$$

Посмотрим, будет ли атлас (U_N, φ_N), (U_S, φ_S) ориентирующим

$$\varphi_{NS}(x) = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \varphi_{NS}'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$\Rightarrow J < 0 \Rightarrow$ атлас не ориентирующий

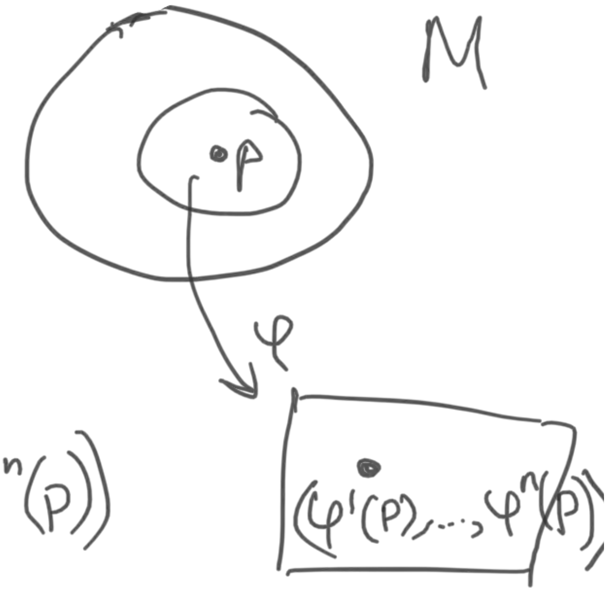
Можем поменять (U_N, φ_N) на $(U_N, -\varphi_N)$. Тогда $J > 0$

$$\varphi_N : (x_1, y_1) \longmapsto (x_2, y_2)$$
$$-\varphi_N : (x_1, y_1) \longmapsto (-x_2, y_2)$$

Замечание.

Для карты (U, φ)

$\exists$ антиподальная карта $(U, \tilde{\varphi})$



$$\tilde{\varphi}(p) = (-\varphi^1(p), \varphi^2(p), \ldots, \varphi^n(p))$$

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto (-x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

$$\det J(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) = \det \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Теорема. У связанного ориентир. многообразия $\exists$ ровно 2 различных ориентации.

Док-во: M – связное многообр.,

$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha', \varphi_\alpha')\}$ – два ориентир. атласа

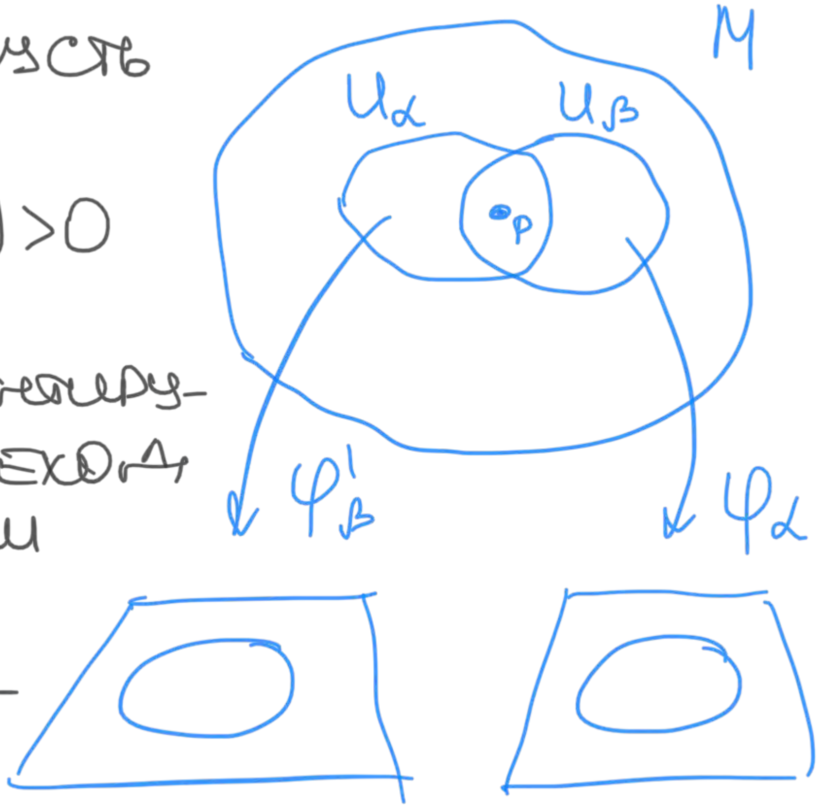
Рассмотрим антиподальный атлас

$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$

Покажем, что $\mathcal{A}' \sim \mathcal{A}$ или $\mathcal{A}' \sim \tilde{\mathcal{A}}$

$p \in U_\alpha \cap U'_\beta$. Пусть

$\det J(\varphi'_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p)) > 0$



Т.к. атласы ориентирующие, то переход между картами таких атласов имеет положительный в т. p якобиан $\Rightarrow$ для другой любой пары карт в т. $p \in M$ $J > 0$

Обозначим через M^+ мн-во точек $p \in M$ таких, что якобиан отображ-ия перехода между картами атласов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ положителен

Свойства M^+: 1) M^+ — открыто
(т.к. ф-ция φ непрер. $\Rightarrow$ $\exists$ окрестность т. p ...)
2) M^+ — замкнуто
(можем определить M^+ как мн-во, где $J \geq 0$ прообраз замкнутого мн-ва $[0, +\infty)$ замкнут

3) $M^+ \neq \varnothing$ т.к. M связно, то $\exists$ только 2 откр. и замк. подмн-ва — $\varnothing$ и M

$$\Downarrow$$

$$M^+ = M$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{A} \sim A$$

аналогично с $\det J < 0$

$\square$

КРИТЕРИЙ ОРИЕНТИРУЕМОСТИ МНОГООБРАЗИЯ

Опр. **Цепочкой** карт наз. последовательность карт: $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_k, \varphi_k)$, т.ч. $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$ $i = 1, \ldots, k-1$

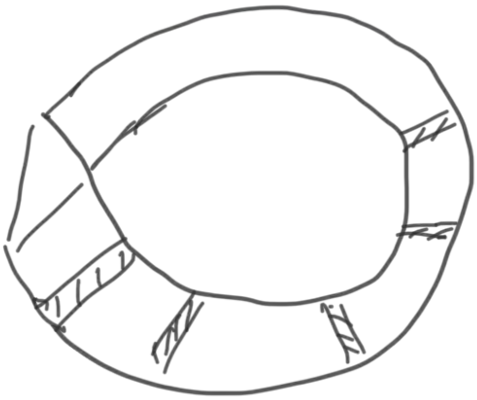
Опр. Назовём цепочку карт (U_i, φ_i) $i = 1, \ldots, k$ **противоречивой**, если

$$\begin{cases} J(\varphi_{i,i+1}(x)) > 0 \ \forall x \in \varphi_i(U_i \cap U_{i+1}), \\ U_1 \cap U_k \neq \varnothing \\ \exists x \in \varphi_k(U_1 \cap U_k) \mid \det J(\varphi_{k1}(x)) < 0 \end{cases}$$

Теорема (критерий ориентируемости многообразия)

Многообр. M не ориентируемо $\Longleftrightarrow$ на M $\exists$ противоречивая цепочка карт

Пример:



$x \mapsto x + l$

$y \mapsto -y$ $\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Док-во: рассмотрим связную компоненту отдельно

Необходимость: M ориент. $\Rightarrow \nexists$ ...

карта 1 задаёт ориентирующий атлас $\Rightarrow$ согласована либо с $\mathcal{A}$, либо с $\mathcal{A}'$. Далее берём карту 2 и т.д.

Достаточность: 1. На M $\exists$ атлас, состоящий из конечного или счётного числа карт

База топологии $\{V_\alpha \in \tau\}$

$\forall\, U \subset \tau \quad U = \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$

$(U_\alpha, \varphi_\alpha) \quad U_\alpha = \bigcup_\beta V_\beta \rightsquigarrow (V_\beta, \varphi_\alpha|_{V_\beta})_{\beta \in B}$

Пусть $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ — атлас из конечного или счётного числа карт.

$(U_1, \varphi_1), (U_i, \varphi_i)$

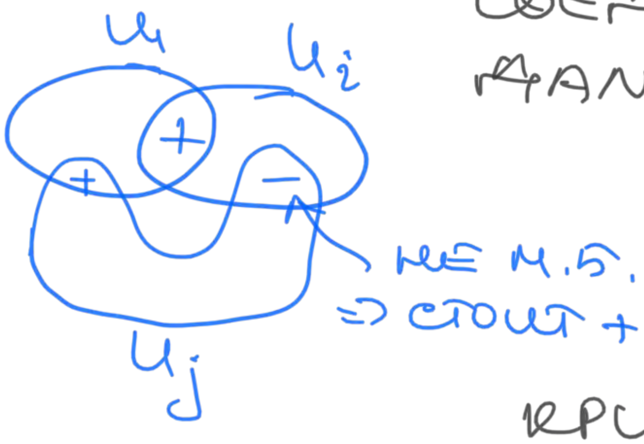
$U_1 \cap U_i \neq \varnothing$

Если $|J(\varphi_{1i}(p))| > 0$ $\forall\, p \in U_1 \cap U_i$

Тогда добавим к (U_1, φ_1) карту (U_i, φ_i)

Если $|J(\varphi_{1i}(p))| < 0$, то добавим антиподальную к (U_i, φ_i)

Рассмотрим цепочку карт $(U_1, \varphi_1), (U_+, \varphi_1), (U_i, \varphi_i), (U_-, \varphi_i)$ она противоречива $\Rightarrow$ получим $(U_1, \varphi_1), (U_i, \varphi_i)$. Можем так



соединять карты дальше. (Мы их переберём все, т.к. $\exists$ образ гладкой кривой)