6.1. Пусть X — нормированное пространство, $x_1, \ldots, x_n \in X$ — линейно независимые векторы. Докажите, что для любого набора чисел $c_1, \ldots, c_n$ найдется такой $f \in X^*$, что $f(x_i) = c_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

6.2. Пусть X и Y — нормированные пространства, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $T_0 \colon X_0 \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Обязательно ли T_0 продолжается до ограниченного линейного оператора $T \colon X \to Y$?

6.3. Пусть X — сепарабельное нормированное пространство. Не пользуясь леммой Цорна (см. доказательство теоремы Хана–Банаха с лекции), докажите, что для любого векторного подпространства $X_0 \subseteq X$ и любого $f_0 \in X_0^*$ существует такой $f \in X^*$, что $f|_{X_0} = f_0$ и $\|f\| = \|f_0\|$.

6.4. Пусть S — поглощающее множество в векторном пространстве X над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Обозначим через p_S функционал Минковского множества S. Докажите следующие утверждения:

1) $p_S(\lambda x) = \lambda p_S(x)$ для всех $x \in X,\ \lambda \geqslant 0$.
2) Если S выпукло, то $p_S(x + y) \leqslant p_S(x) + p_S(y)$ для всех $x, y \in X$.
3) Если S закруглено, то $p_S(\lambda x) = |\lambda| p_S(x)$ для всех $x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$.
4) Если S выпукло, то $\{x : p_S(x) < 1\} \subseteq S \subseteq \{x : p_S(x) \leqslant 1\}$.

6.5. Докажите, что

1) сумма любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;
2) пересечение любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;
3) образ и прообраз выпуклого множества при линейном отображении — выпуклые множества;
4) замыкание и внутренность выпуклого множества в нормированном пространстве — выпуклые множества;
5) аналогичные утверждения справедливы для закругленных множеств.

Определение 6.1. Пусть X — множество, $\ell^\infty(X)$ — пространство всех ограниченных $\mathbb{C}$-значных функций на X. Линейный функционал $m \colon \ell^\infty(X) \to \mathbb{C}$ называется *положительным*, если $m(f) \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$.

6.6. 1) Докажите, что положительный функционал m на $\ell^\infty(X)$ ограничен, и что $\|m\| = m(1)$.
2) Докажите, что ограниченный линейный функционал m на $\ell^\infty(X)$, удовлетворяющий условию $\|m\| = m(1)$, положителен.

Указание. В п. 1 воспользуйтесь тем, что формула $\langle f, g\rangle = m(f\bar{g})$ задает неотрицательно определенную эрмитову форму на $\ell^\infty(X)$. В п. 2 достаточно показать, что если $\|m\| = m(1) = 1$, то для $f \geqslant 0$ число $m(f)$ принадлежит любому кругу, содержащему множество значений f.

Определение 6.2. Пусть G — полугруппа. Для любой функции f на G и любого $x \in G$ определим функцию $L_x f$ формулой $(L_x f)(y) = f(xy)$. Полугруппа G называется *аменабельной*, если на $\ell^\infty(G)$ существует положительный линейный функционал m, удовлетворяющий условиям $m(1) = 1$ и $m(L_x f) = m(f)$ для всех $f \in \ell^\infty(G)$ и всех $x \in G$. Любой такой функционал m называется *инвариантным средним.*

6.7. Докажите, что любая конечная группа аменабельна.

6.8. Докажите, что группа $\mathbb{Z}$ аменабельна.

6.9. Докажите, что полугруппа $\mathbb{N}$ аменабельна, причем для любого инвариантного среднего m на ℓ^∞ и любой сходящейся числовой последовательности $x = (x_n)$ справедливо равенство $m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

6.10-b. Докажите, что свободная группа с двумя образующими не аменабельна.

Информация к размышлению. Известно, что любая абелева полугруппа аменабельна. С другой стороны, свободная группа с $n > 1$ образующими не аменабельна. Инвариантные средние и аменабельные группы имеют многочисленные приложения в различных областях математики. См. по этому поводу книги Ф. Гринлифа «Инвариантные средние на топологических группах» (М.: Мир, 1973); S. Wagon, “The Banach–Tarski Paradox” (Cambridge Univ. Press, 1985); V. Runde, “Lectures on amenability” (Springer, 2002).

6.11. Докажите, что любое банахово пространство X изометрически изоморфно факторпространству пространства $\ell^1(S)$ для некоторого множества S. (*Указание:* в качестве S можно взять единичный шар пространства X.)

6.12. Докажите, что любое нормированное пространство X изометрически вкладывается в $\ell^\infty(S)$ для некоторого множества S. (*Указание:* в качестве S можно взять единичный шар пространства X^*.)

Определение 6.3. Нормированное пространство Y называется *инъективным*, если для любого нормированного пространства X и любого векторного подпространства $X_0 \subset X$ каждый ограниченный линейный оператор $T_0 \colon X_0 \to Y$ продолжается до ограниченного линейного оператора $T \colon X \to Y$. Если вдобавок существует такое $C > 0$, что оператор T можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $\|T\| \leqslant C\|T_0\|$, то Y называется *C-инъективным.*

Из теоремы Хана–Банаха следует, что основное поле $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) 1-инъективно.

6.13-b. Докажите, что инъективное нормированное пространство полно.

6.14-b. Докажите, что банахово пространство $\ell^\infty(S)$ 1-инъективно для любого множества S.

6.15-b. Докажите, что если банахово пространство инъективно, то оно C-инъективно для некоторой константы C.

Определение 6.4. Банахово пространство Y называется *проективным*, если для любого банахова пространства X и любого замкнутого векторного подпространства $X_0 \subset X$ каждый ограниченный линейный оператор $T_0 \colon Y \to X/X_0$ поднимается до ограниченного линейного оператора $T \colon Y \to X$ в том смысле, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "Q"] \\ Y \arrow[ur, "T"] \arrow[r, "T_0"'] & X/X_0 \end{tikzcd}$$

Если вдобавок существует такое $C > 0$, что для каждого $\varepsilon > 0$ оператор T можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $\|T\| \leqslant (C+\varepsilon)\|T_0\|$, то Y называется *C-проективным.*

6.16-b. Докажите, что банахово пространство $\ell^1(S)$ 1-проективно для любого множества S.

6.17-b. Докажите, что если банахово пространство проективно, то оно C-проективно для некоторой константы C.

7.1. 1) Докажите, что в конечномерном векторном пространстве над $\mathbb{R}$ любые два непересекающихся выпуклых множества разделены гиперплоскостью.
2) Приведите пример двух замкнутых выпуклых непересекающихся подмножеств в $\mathbb{R}^2$, не разделенных гиперплоскостью строго.

7.2. Приведите пример двух непересекающихся выпуклых подмножеств в каком-либо вещественном векторном пространстве, не разделенных гиперплоскостью.

7.3-b. Приведите пример двух непересекающихся замкнутых выпуклых подмножеств в вещественном гильбертовом пространстве ℓ^2, не разделенных замкнутой гиперплоскостью.

Определение 7.1. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $S \subseteq X$. Назовем точку $x \in S$ *линейно внутренней* для S, если множество $S - x$ поглощающее. Назовем S *линейно открытым*, если все его точки линейно внутренние.

7.4. 1) Докажите, что семейство всех линейно открытых множеств в произвольном векторном пространстве X задает топологию на X.
2) Докажите, что топология из п. 1 не слабее топологии, порожденной любой нормой на X.
3) Докажите, что если $\dim X > 1$, то операция сложения в топологии из п. 1 не является непрерывной и, следовательно, эта топология строго сильнее, чем топология, порожденная любой нормой на X.

7.5. Докажите следующую разновидность теоремы об отделении выпуклых множеств (ср. теорему с лекции): если X — векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $A, B \subset X$ — выпуклые непересекающиеся множества, причем линейная внутренность одного из них непуста, то A и B разделены гиперплоскостью.

7.6. Выведите теорему Хана–Банаха из теоремы, сформулированной в предыдущей задаче.

7.7-b (*теорема Хелли*)**.** Пусть дано семейство выпуклых компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$, любые $n+1$ из которых имеют непустое пересечение. Докажите, что тогда и все семейство имеет непустое пересечение.

Указание. Сведите утверждение к случаю, когда семейство конечно. Если оно содержит $N = n+2$ множества, то проведите индукцию по n и воспользуйтесь теоремой об отделении выпуклых множеств. Если оно содержит $N > n+2$ множеств, проведите индукцию по N.

Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $S \subseteq X$ — выпуклое множество и $f_0, \ldots, f_n$ — выпуклые функции на S. *Задачей выпуклого программирования* называется задача отыскания минимума f_0 на множестве $S \cap \{x : f_i(x) \leqslant 0 \ \forall i = 1, \ldots, n\}$. *Функцией Лагранжа* этой задачи называется функция $\mathscr{L} \colon S \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x)$.

7.8-b (*теорема Куна–Таккера*)**.** Пусть $x_0 \in S$ — решение описанной выше задачи выпуклого программирования. Докажите, что существует такое $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (набор *множителей Лагранжа*), $\lambda \neq 0$, что

1) $\lambda_i \geqslant 0$ для всех $i = 0, \ldots, n$;
2) $\lambda_i f_i(x) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$;
3) (x_0, λ) — точка минимума $\mathscr{L}$ на S.

7.9-b (*теорема о минимаксе*)**.** Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые выпуклые компакты (множества стратегий двух игроков), и пусть $\varphi \colon A \times B \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, выпуклая по первому аргументу и вогнутая по второму (функция платы — сумма, которую заплатит 2-й игрок 1-му, если 1-й будет играть по стратегии x, а 2-й — по стратегии y). Докажите, что существует $(x_0, y_0) \in A \times B$ (оптимальная пара стратегий), для которой

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} \varphi(x, y).$$

8.1. Пусть μ — комплексная мера на алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств множества X.
1) Докажите, что ее вариация $|\mu|$ также является мерой.
2) Докажите, что если μ σ-аддитивна, то и $|\mu|$ σ-аддитивна.

8.2. Пусть μ — комплексная мера на алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств множества X. Назовем подалгебру $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ *плотной* относительно μ, если для каждого $A \in \mathscr{A}$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B \in \mathscr{B}$, что $|\mu|(A \triangle B) < \varepsilon$. Докажите, что если $\mathscr{B}$ плотна в $\mathscr{A}$ относительно μ, то для любого $B \in \mathscr{B}$ справедливо равенство $|\mu|(B) = \big|\mu|_{\mathscr{B}}\big|(B)$.

8.3. Восполните детали в доказательстве теоремы Хильдебрандта–Канторовича об изометрическом изоморфизме между $M(\mathscr{A})$ и $B_{\mathscr{A}}(X)^*$ (см. лекцию).

8.4. 1) Докажите, что каждая функция из $C^1[a,b]$ имеет ограниченную вариацию.
2) Приведите пример непрерывной функции на $[a,b]$ неограниченной вариации.
3) Приведите пример дифференцируемой функции на $[a,b]$ неограниченной вариации.

8.5. Пусть φ — кусочно постоянная функция на $[a,b]$. Как устроена соответствующая ей мера Лебега–Стилтьеса?

8.6. Пусть φ — функция ограниченной вариации на $[a,b]$, непрерывная справа на (a,b) и такая, что $\varphi(a)=0$. Пусть μ_φ — соответствующая ей мера Лебега–Стилтьеса. Вычислите (в терминах функции φ) значения μ_φ на всевозможных интервалах, полуинтервалах, отрезках и одноточечных множествах.

8.7. Докажите σ-аддитивность меры Лебега–Стилтьеса на алгебре подмножеств отрезка $[a,b]$, порожденной отрезками $[a,t]$ $(a < t \leqslant b)$.

8.8. Для каждого из следующих функционалов f на пространстве $C[-1,1]$ опишите соответствующую меру $\mu \in M[-1,1]$ и функцию ограниченной вариации $\varphi \in BV_0[-1,1]$. Вычислите вариацию $V_{-1}^1(\varphi)$ и убедитесь, что она равна $\|f\|$.
1) $f(x) = x(-1)$; **2)** $f(x) = x(-1/2) + 2x(0) + 3x(1/2)$; **3)** $f(x) = x(-1/2) - x(1/2)$;
4) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,dt$; **5)** $f(x) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x(t)\,dt$; **6)** $f(x) = x(-1) - 2\int\limits_{-1}^{1} x(t)\,dt + 3x(0)$.

8.9. Пусть (X,μ) — пространство с мерой. Зафиксируем $f \in L^1(X,\mu)$ и обозначим через ν_f комплексную меру с плотностью f относительно μ. Докажите, что $\|\nu_f\| = \|f\|_1$.

8.10. Для каждых $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ и $\mu \in M[a,b]$ обозначим через $F_{\lambda,\mu}$ линейный функционал на пространстве $C^n[a,b]$, заданный формулой

$$F_{\lambda,\mu}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{(k)}(a) + \int_a^b f^{(n)}\,d\mu.$$

Докажите, что $(\lambda,\mu) \mapsto F_{\lambda,\mu}$ — топологический изоморфизм между $\mathbb{K}^n \oplus M[a,b]$ и $C^n[a,b]^*$.

8.11-b (*представляющие меры*)**.** Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт и $\mathscr{A}(K)$ — подалгебра в $C(K)$, состоящая из функций, голоморфных во внутренности K и непрерывных на K.
1) Пусть $z_0 \in K$. Докажите, что существует вероятностная борелевская мера μ на ∂K, такая, что для каждой функции $f \in A$ справедлива формула $f(z_0) = \int_{\partial K} f\,d\mu$.
2) (*мера Пуассона*). Найдите меру μ из п. 1 в явном виде для случая, когда $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный круг. (*Указание*: в этом случае μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на окружности; найдите явную формулу для ее плотности.)
3) Докажите, что для круга K мера Пуассона из п. 2 — это единственная вероятностная борелевская мера, удовлетворяющая условиям п. 1. (*Указание*: можно воспользоваться теоремой Вейерштрасса, согласно которой любая непрерывная функция f на $[-\pi,\pi]$, удовлетворяющая условию $f(-\pi) = f(\pi)$, равномерно аппроксимируется тригонометрическими многочленами.)

9.1. Пусть X — нормированное пространство, $i_X\colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Докажите, что для любого оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "i_Y"'] \end{tikzcd}$$

9.2. Докажите, что

1) композиция канонического вложения $c_0 \to (c_0)^{**}$ и стандартного изоморфизма $(c_0)^{**} \cong \ell^\infty$ — это тождественное вложение c_0 в ℓ^∞;

2) композиция канонического вложения $\ell^1 \to (\ell^1)^{**}$ и стандартного изоморфизма $(\ell^1)^{**} \cong (\ell^\infty)^* \cong M(2^{\mathbb{N}})$ — это вложение ℓ^1 в $M(2^{\mathbb{N}})$, сопоставляющее каждой последовательности $x \in \ell^1$ меру μ_x, заданную формулой $\mu_x(A) = \sum_{n\in A} x_n$.

9.3. Докажите, что

1) гильбертово пространство рефлексивно;

2) пространства $L^p(X,\mu)$ $(1 < p < +\infty)$ рефлексивны;

3) пространство c_0 нерефлексивно;

4) пространство ℓ^1 нерефлексивно;

5) пространство $L^1(X,\mu)$ нерефлексивно (за исключением случая, когда оно конечномерно);

6) пространство $C[a,b]$ нерефлексивно.

9.4. Пусть X — нормированное пространство, $i_X\colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Исследуйте взаимосвязь между операторами $i_{X^*}\colon X^* \to X^{***}$ и $i_X^*\colon X^{***} \to X^*$.

9.5. 1) Докажите, что банахово пространство X рефлексивно $\iff$ X^* рефлексивно.
2) Выведите отсюда нерефлексивность ℓ^1, ℓ^∞, $L^\infty[a,b]$ и $M[a,b]$.

9.6. Докажите, что размерность бесконечномерного банахова пространства несчетна.

9.7. Приведите пример бочки в нормированном пространстве, не содержащей окрестности нуля.

9.8. Приведите пример нормированного пространства X и последовательности функционалов (f_n) в X^*, ограниченной на каждом векторе, но не ограниченной по норме.

9.9. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, причем X либо Y полно.
1) Докажите, что любой раздельно непрерывный билинейный оператор $X \times Y \to Z$ непрерывен. (*Указание:* воспользуйтесь теоремой Банаха–Штейнгауза).
2) Верно ли утверждение из п. 1 без предположения о полноте?

9.10-b. Пусть G — компактная топологическая группа и π — ее представление в банаховом пространстве X, непрерывное в том смысле, что отображение $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto \pi(g)x$, непрерывно. Докажите, что на X существует эквивалентная норма, относительно которой все операторы $\pi(g)$ изометричны. (*Указание:* проще всего воспользоваться теоремой Банаха–Штейнгауза. Впрочем, можно сделать эту задачу и «в лоб», не пользуясь полнотой X — см. контрольную за 1 модуль.)

9.11. 1) Выведите теорему об открытом отображении из теоремы об обратном операторе.
2) Выведите теорему об обратном операторе из теоремы о замкнутом графике.

9.12. Приведите пример банахова пространства X, нормированного пространства Y и биективного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, обратный к которому не является непрерывным.

9.13-b. Приведите пример нормированного пространства X, банахова пространства Y и биективного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, обратный к которому не является непрерывным.

9.14-b. Приведите пример абсолютно выпуклого поглощающего множества в банаховом пространстве, не содержащего окрестности нуля.