

Листок 1 - Теория вероятностей - 2021/22

Дедлайн 20 октября

3.1. (1Б) Вычислите число неубывающих путей на целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 (то есть таких, что за один шаг происходит сдвиг на единицу либо вправо, либо вверх), ведущих из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) , и не пересекающих диагональ (то есть, проходящих только через такие точки (i, j) , для которых $j \leq i$). Затем почитайте в Википедии про числа Каталана.

3.2. (1Б) Имеется код длины n , состоящий из цифр от 0 до 9. Найдите вероятность того, что цифры в коде расположены в неубывающем порядке.

3.3. (1Б) Из мешка, в котором лежат все кости набора домино (их 28 штук, соответствующих неупорядоченным парам чисел от 0 до 6), извлекают две костяшки. Найдите вероятность того, что их можно приложить друг к другу по правилам игры в домино.

3.4. (1Б) На экзамене студенты по очереди вытягивают билеты (и, естественно, не возвращают их на место). Всего имеется n билетов, из которых k — простые, и $m \leq n$ студентов. Чему равна вероятность того, что первый студент вытянет простой билет? А последний? Меняется ли вероятность вытянуть простой билет в зависимости от того, каким номером студент тянет билет?

3.5. (1Б) Пассажиры заходят в самолет и рассаживаются случайным образом, не обращая внимания на свои билеты. С какой вероятностью ни один пассажир не сядет на свое место?

3.6. (1Б) Профессор разбирает на семинаре k задач, вызывая для каждой из них одного из n присутствующих студентов случайным образом. Какова вероятность того, что к концу семинара каждый из студентов побывает у доски не более двух раз?

3.7. (1Б) Приведите пример n случайных событий, таких что любые $n - 1$ из них независимы (в совокупности), а все они вместе — зависимы.

3.8. (1Б) Тест на ковид имеет чувствительность 50% (т.е. верно диагностирует больного в 50% случаев) и специфичность 70% (30% здоровых людей объявляет больными). Известно, что на данной территории ковидом болеет 1 человек из 300. Какова вероятность того, что житель этой территории, объявленный больным по результатам теста, действительно болен?

3.9. (1Б) Треугольник ABC — прямоугольный равнобедренный с прямым углом C и катетами, равными 1. В нём случайным образом выбирается точка Z . Пусть X и Y — основания перпендикуляров из Z на катеты. Обозначим буквами P и S соответственно периметр и площадь прямоугольника $CXZY$.

(9a) **(1Б)** Найдите вероятность того, что $S < 8/81$.

(9b) **(1Б)** Найдите вероятность того, что $P < 4/3$.

(9c) **(1Б)** Найдите условную вероятность того, что $S < 8/81$ при условии, что $P < 4/3$.

(9d) **(1Б)** Найдите условную вероятность того, что $P < 4/3$ при условии, что $S < 8/81$.

(9e) **(3Б)** Существуют ли такие числа $S_0 \in (0, 1/4)$ и $P_0 \in (0, 2)$, что события $\{S < S_0\}$ и $\{P < P_0\}$ будут независимы?

3.10. (1Б) Вася и Петя ездят в школу на автобусе. Вася приходит на автобусную остановку в момент времени, равномерно распределённый на отрезке между 8:00 и 8:17, и садится в первый подошедший автобус; если же в 8:17 Вася всё ещё не уехал, то он бежит в школу бегом. Его одноклассник Петя поступает ровно таким же образом. Автобусы подъезжают к остановке каждые 5 минут (время прибытия первого из них равномерно распределено на отрезке от 8:00 до 8:05). Какова вероятность того, что Вася и Петя поедут в школу на одном и том же автобусе, если времена появления на остановке Васи, Пети и первого автобуса независимы?

3.11. (4Б) На гранях двух кубиков расставлены натуральные числа k_1, \dots, k_6 и l_1, \dots, l_6 соответственно, причём неверно, что $\{k_1, \dots, k_6\} = \{l_1, \dots, l_6\} = \{1, \dots, 6\}$. Можно ли подобрать числа k_i, l_j так, что для любого $s = 2, \dots, 12$ вероятность того, что при броске этих кубиков выпадет сумма очков, равная s , совпадает с той же вероятностью для «классических» кубиков (с цифрами от 1 до 6 на гранях)?