Программа коллоквиума по курсу «Логика и алгоритмы»

лекторы: Шамканов Д.С. и Беклемишев Л.Д.

18 марта 2021 г.

1. Теория множеств Цермело-Френкеля с аксиомой выбора. Основные понятия: множество, принадлежность, равенство множеств. Аксиомы экстенсиональности (объемности) и равенства. Схема аксиом выделения. Парадокс Рассела. Аксиомы пары, степени, пустого множества, бесконечности и регулярности. Схема аксиом подстановки. Аксиома выбора.

2. Определение множества натуральных чисел по фон Нейману. Принцип математической индукции. Принцип порядковой индукции. Принцип минимального элемента.

3. Существование и единственность функции натурального аргумента, определяемой по рекурсии. Определение сложения и умножения натуральных чисел.

4. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку. Теорема Кантора: из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.

5. Ординалы. Порядок на ординалах. Принцип трансфинитной индукции. Парадокс Бурали-Форти.

6. Порядковый тип вполне упорядоченного множества. Теорема Кантора: для всякого вполне упорядоченного множества существует единственный ординал, который ему изоморфен.

7. Трансфинитные последовательности. Теорема о трансфинитной рекурсии.

8. Теорема Цермело. Сравнимость любых двух множеств по мощности. Кардиналы. Всякое множество равномощно единственному кардиналу.

9. Лемма Цорна. Объединение двух бесконечных множеств равномощно большему из них. Произведение двух бесконечных множеств равномощно большему из них. Бесконечное множество A равномощно A^* (множеству конечных последовательностей элементов A).

10. Принцип $\in$-индукции. Иерархия фон Неймана. Свойства множеств $\mathbb{V}_\alpha$. Ранг множества по фон Нейману. Вывод формулы $\operatorname{rnk} x = \sup\{\operatorname{rnk} y + 1 \mid y \in x\}$.

11. Формулы логики высказываний. Таблица истинности формулы. Связь между формулами логики высказываний от n переменных и булевыми функциями. Теорема о функциональной полноте.

12. Выполнимые формулы, тавтологии, тождественно ложные формулы и их взаимосвязь. Равносильность формул логики высказываний, связь с тождественной истинностью. Основные равносильности (тождества булевой алгебры).

13. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Приведение формул логики высказываний к совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме. Единственность совершенной дизъюнктивной нормальной формы.

14. Понятие сигнатуры и модели (алгебраической системы) данной сигнатуры. Примеры моделей: стандартная модель арифметики; евклидова плоскость в сигнатуре элементарной геометрии Тарского $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$; модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.
15. Язык логики предикатов первого порядка данной сигнатуры. Свободные и связанные переменные, термы, формулы. Замкнутые формулы. Подстановка терма вместо переменной.
16. Семантика логики предикатов первого порядка. Расширение сигнатуры данной модели константами. Значение замкнутого терма расширенной сигнатуры в данной модели. Истинностное значение замкнутой формулы расширенной сигнатуры в данной модели.
17. Предикаты и функции, выразимые в данной модели. Выразимость предиката параллельности прямых $ab \| cd$ в языке элементарной геометрии и формулировка аксиомы о параллельных.
18. Выполнимые формулы и множества формул языка первого порядка. Общезначимые и тождественно ложные формулы, их связь с выполнимыми формулами; примеры.
19. Равносильность формул языка первого порядка, важнейшие равносильности. Переименование связанных переменных. Приведение формулы языка первого порядка к предварённой форме.
20. Теория первого порядка, её аксиомы и теоремы. Модель данной теории. Понятие выполнимой теории. Примеры теорий: теория строгих частичных порядков, теория отношения эквивалентности, теория простых графов.
21. Теории первого порядка с равенством. Нормальные модели. Теорема о существовании нормальной модели у выполнимой теории с равенством.
22. Важнейшие формальные теории: арифметика Пеано PA, теория множеств Цермело–Френкеля ZFC.
23. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Выводимость в теории, простейшие свойства выводимости. Доказуемые, опровержимые, независимые формулы для данной теории.
24. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.
25. Общезначимость аксиом исчисления предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.
26. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (без доказательства). Следствие: теорема Гёделя–Мальцева о компактности для логики предикатов.
27. Нестандартные модели арифметики, их существование. Понятие галактики. Описание отношения порядка на элементах данной галактики. Плотность порядка на множестве галактик.