Домашнее задание 12

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_8$. Для указанной ниже открытой области U найдите неотрицательную функцию $\rho_U : U \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такую, что $\rho_U(z)|dz|$ — гиперболическая метрика в области U.

(0) $U = \{x + iy \mid x < 0\}$.

(1) $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(2) $U = \{x + iy \mid -\pi < y < \pi\}$.

(3) $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

(4) $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

(5) $U = \{x + iy \mid -\pi < y < \pi,\ x < 0\}$.

(6) $U = \{x + iy \mid x, y > 0\}$.

(7) $U = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

(8) $U = \{x + iy \mid x^2 + y^2 > 1,\ y > 0\}$.

(9) $U = \mathbb{C} \setminus \{x + 2\pi ik \mid -\infty < x \leqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_6$. Опишите (и нарисуйте) образ верхней полуплоскости относительно следующего отображения. (Точка z_0 — произвольная точка в верхней полуплоскости, а интеграл вычисляется по отрезку, соединяющему точки z_0 и z. Подынтегральное выражение понимается как произвольная однозначная ветвь на $\mathbb{H}$.)

(0) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$.

(1) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z(z^2-1)}}$.

(2) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z^2-1)^{2/3}}$.

(3) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)^3(z-2)}}$.

(4) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt[5]{z^2(z^2-1)^2(z^2-4)^2}}$.

(5) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt[3]{(z^2-1)^2(z^2-4)^2(z^2-9)^2}}$.

(6) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-2)}}$.

(7) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z}}$.

(8) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt[4]{z(z-1)^3}}$.

(9) $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z^4-3z^2+1}}$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа a_2+a_5. Докажите, что следующие уравнения имеют бесконечно много решений в комплексных числах.

(0) $\sin(z + e^z) = 2$.

(1) $(z + e^z)^2 = 1$.

(2) $(\sin z + 3z^3 + 1)^4 = -1$.

(3) $(\sin z - z)^3 + \sin z = z + 1$.

(4) $\cos(e^z - \sin z) = 2$.

(5) $\exp(1/\sin z) + z = 1$.

(6) $\mathrm{tg}(z^3) + z = 2$.

(7) $e^{1/(z^2-1)} = 2z - 5$.

(8) $(\sin(\mathrm{tg}(z)) - 2)(1 + 2z) = 3$.

(9) $\sin(\mathrm{ctg}\, z) = z + e$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_8 + a_9$. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — односвязная открытая область, отличная от $\mathbb{C}$. Рассмотрим голоморфное отображение $f : U \to U$ и точку $a \in U$, такую, что $f(a) = a$. (Такая точка называется *неподвижной*). *Итерация* $f^{\circ n} : U \to U$ определяется по индукции формулами $f^{\circ 1} = f$ и $f^{\circ n+1} = f \circ f^{\circ n}$. Докажите, что ...

(0) Если $f'(a) = e^{2\pi i/5}$, то $f \circ f \circ f \circ f \circ f = id$.

(1) Если $|f'(a)| < 1$, то уравнение $f' = 0$ имеет решение в U.

(2) Если $|f'(a)| < 1$, то $f^{\circ 3}(b) = b$ влечет $b = a$.

(3) Если f не является конформным автоморфизмом, то $f^{\circ n}(z) \to a$ равномерно на компактах.

(4) Если $f \in \mathrm{Aut}(U)$ и $f^{\circ n}(b) = b$ для $b \neq a$, то $f^{\circ n} = id$.

(5) Для всякой точки $b \in U$ последовательность $f^{\circ n}(b)$ лежит на некоторой гладкой кривой.

(6) Если $|f^{\circ n}(b) - a| > n^{-1/2}$ при $b \neq a$, то $|f'(a)| = 1$.

(7) Если a является единственной критической точкой для f в U, то существует конформный изоморфизм $h : U \to \mathbb{D}$, такой, что $h \circ f \circ h^{-1}(z) = z^k$ для некоторого натурального $k > 1$ и всех $z \in \mathbb{D}$.

(8) Если $f(b) = a$ для некоторого $b \in U \setminus \{a\}$, то $f' = 0$ имеет решение в U.

(9) Если $|f'(a)| = 1$, то $f \in \mathrm{Aut}(U)$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_8$.

(0) Упражнение 12.3 на стр. 246 основного учебника.
(1) Упражнение 12.4 на стр. 246 основного учебника.
(2) Упражнение 12.5 на стр. 246 основного учебника.
(3) Упражнение 12.6 на стр. 246 основного учебника.
(4) Упражнение 12.8 на стр. 247 основного учебника.
(5) Упражнение 12.9 на стр. 247 основного учебника.
(6) Докажите, что любой конформный изоморфизм прямоугольника на прямоугольник, переводящий (при соответствии границ) все четыре вершины в вершины, продолжается до конформного автоморфизма плоскости $\mathbb{C}$.
(7) Приведите пример голоморфного сюръективного отображения кругового кольца на круг.
(8) *Конечным произведением Бляшке* называется отображение вида

$$B(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z-a_1}{1-\overline{a}_1 z}\right)\left(\frac{z-a_2}{1-\overline{a}_2 z}\right)\cdots\left(\frac{z-a_n}{1-\overline{a}_n z}\right),$$

в котором $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$, а $\theta \in \mathbb{R}$. Пусть отображение $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ непрерывно на $\overline{\mathbb{D}}$ и голоморфно в $\mathbb{D}$. Предположим, что $|f(z)| = 1$ для любого z, такого, что $|z| = 1$. Докажите, что в этом случае f совпадает с конечным произведением Бляшке.
(9) Приведите пример голоморфного сюръективного отображения круга на круговое кольцо.