1 Problem List 1

Задача 1.1. Find critical points of the following function on $\mathbb{R}^2$ and analyze each point about whether it is a local/global minimum/maximum or saddle point

$$f(x) = 3x_1x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2$$

Доказательство. Заметим что критические точки удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 = x_1(3 - 2x_2 - x_1) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2 - x_2^2 - 2x_1x_2 = x_2(3 - 2x_1 - x_2) = 0$$

то есть это $(x_1, x_2) \in \{(0,0), (1,1), (0,3), (3,0)\}$ Расммотрим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(-x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 3x_1x_2) = -2x_2$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(-x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 3x_1x_2) = -2x_1 - 2x_2 + 3$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(-x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 3x_1x_2) = -2x_1$$

Откуда

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 4x_1x_2 - (2x_1 + 2x_2 - 3)^2$$

Тогда $D(0,0) = -9 < 0$ то есть это седло, $D(0,3) = -9 < 0$ тоже седло, $D(1,1) = 3 > 0$ и так как $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(-x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 3x_1x_2)\ |_{((x_1,x_2)=(1,1))} = -2 < 0$ то это максимум, $D(3,0) = -9 < 0$ то есть это седло □

Задача 1.2. Find the maximum of the function $F(x) = \sum_{i=1}^{n} \log(\alpha_i + x_i)$ with $\alpha_i > 0, i = 1, \ldots, n$ subject to constraints: $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Prove that your solution is the global optimum.

Доказательство. Так как log - вогнутая функция, а $\alpha_i + x$ - линейная функция, то итоговая функция также вогнутая, а следовательно локальный максимум также является и глобальным максимумом Рассмотрим

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} log(\alpha_i + x_i) + \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)$$
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{1}{\alpha_i + x_i} + \lambda = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$
$$\frac{1}{\lambda} = -(\alpha_i + x_i)$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} = -\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + x_i) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1$$
$$\tilde{x_i} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1) - \alpha_i$$
$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\alpha_1 + x_1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\frac{1}{(\alpha_n + x_n)^2} \end{pmatrix}$$

Так как H определен отрицательно, то точка $(\tilde{x_i})$ - локальный максимум, а следовательно и глобальный тоже (так как максимум один) □

Задача 1.3. Using method of Lagrange multipliers in optimization problem

$$\min\left(-\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0,$$

prove the Arithmetic-Mean Geometric-Mean inequality

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}, \quad x_i \geq 0$$

Доказательство. Заметим, что $\min(-\prod_{i=1}^{n} x_i)$ достигается при тех же значениях x_i что и $\max(\prod_{i=1}^{n} x_i)$ Пусть $L(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i + \lambda(\sum\limits_{i=1}^{n} -1)$ родифференцируем по x_i, получим n уравнений вида

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \prod_{j\neq i} x_j + \lambda = 0$$

$$x_i(\prod_{j\neq i} x_j + \lambda) = \prod_{i=1}^{n} x_i + \lambda x_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\prod_{i=1}^{n} x_i + \lambda x_j) = n\prod_{i=1}^{n} x_i + \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i) = n\prod_{i=1}^{n} x_i + \lambda = 0$$

$$\lambda = -n\prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{тогда} \quad \prod_{j\neq i} x_j = n\prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{то есть} \quad x_i = \frac{1}{n}$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\cdot 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\square$

Задача 1.4. Using method of Lagrange multipliers in optimization problem

$$\min_{x_i\in\mathbb{R}^n}\left(-\det\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right) \quad \text{s.t.} \quad \|x_i\|^2 = 1$$

, prove Hadamard inequality

$$\det\left(x_1,\ldots,x_n\right) \leq \prod_{i=1}^{n}\|x_i\|$$

Доказательство. Утверждение можно записать как $-1 \leqslant f(x_1,\ldots,x_n) \leqslant 1$ где f - функция от n векторов и $|x_i| = 1$, то есть

$$F_k(x_1,\ldots,x_n) := \frac{1}{2}(x_{1k}^2 + \ldots + x_{nk}^2 - 1) = 0 \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Тогда функция лагранжа имеет вид

$$\Phi = f - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k F_k$$

Продифференцируем по всем x_{ik}, получим n^2 уравнений $\frac{\partial\Phi}{\partial x_{ik}} = X_{ik} - \lambda_k x_{ik} = 0$ где X_{ik} - кофактор x_{ik} в определителе f Домножим $\frac{\partial\Phi}{\partial x_{ik}}$ на x_{ir} и просуммируем по i:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ir}X_{ir} - \lambda_k x_r \cdot x_k = 0\lambda_k x_r x_k = \begin{cases}\det(X) & (r = k)\\ 0 & (r \neq k)\end{cases}$$

При $r = k$ можно заметить что все λ_k имеют одинаковое значение $\det(X) \neq 0$ в экстремуме, а при $r \neq k$ можно заметить $x_r x_k = 0$. Откуда $X' \cdot X = \mathrm{Id}$, то есть $|\det(X)| = 1$ $\square$

Задача 1.5. Find a local minimum of the following function using the Gradient Descent method with the best step size starting from the point $x^0 = (1,3)$

$$f(x) = x_1^3 + 4x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (3x_1^2 + 8x_1 + 2x_2, 2x_1 + 5x_2)\\
&\nabla f(x_0) = \nabla f(1,3) = (17,17)\\
&x_1 = x_0 - \alpha_0 \nabla f(x_0)\\
&f(x_1) \to \min : f(x_1) = f(1-17\alpha, 3-17\alpha) = (1-17\alpha)^3 + 4(1-17\alpha)^2 + 2(1-17\alpha)(3-17\alpha) + \frac{5}{2}(3-17\alpha)^2
\end{aligned}$$

Минимум $f(x_1)$ в точке экстремума:

$$\begin{aligned}
f(x_1)' &= -3\cdot 17(1-17\alpha)^2 + 8(-17)(1-17\alpha) + 2(-17\cdot 4 + 17^2\cdot 2\alpha) + 5\cdot(-17)(3-17\alpha)\\
&= -17(3 - 6\cdot 17\alpha + 17^2\cdot 3\alpha^2 + 8 - 8\cdot 17\alpha + 8 - 17\cdot 4\alpha + 15 - 5\cdot 17\alpha)\\
&= -17(34 + 3\cdot 17^2\alpha^2 - 23\cdot 17\alpha)\\
&= -17^2(51\alpha^2 - 23\alpha + 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f(x_1)' = 0 \Leftrightarrow 51\alpha^2 - 23\alpha + 2 = 0\\
&\alpha = \frac{2}{17}\\
&\alpha = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Так как у параболы ветви внизу, то минимум будет в $\alpha = \frac{2}{17}$
То есть $x_1 = (1,3) - \frac{2}{17}(17,17) = (-1,1)$

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x_1) = (-3,3)\\
&x_2 = x_1 - \alpha_1(-3,3) = (-1+3\alpha, 1-3\alpha)\\
&f(x_2) = (3\alpha-1)^3 + 4(3\alpha-1)^2 + 2(3\alpha-1)^2 + 2(3\alpha-1)(1-3\alpha) + \frac{5}{2}(1-3\alpha)^2\\
&= (3\alpha-1)^3 + 4(3\alpha-1)^2 - 2(3\alpha-1)^2 + \frac{5}{2}(3\alpha-1)^2 = (3\alpha-1)^2(3\alpha + \frac{7}{2})\\
&f(x_2)' = (3\alpha + \frac{7}{2})\cdot 2\cdot 3(3\alpha-1) + (3\alpha-1)^2\cdot 3\\
&= 54\alpha^2 + 3\alpha(-6+21) - 21 + 27\alpha^2 - 18\alpha + 3 = 81\alpha^2 + 27\alpha - 18
\end{aligned}$$

Корни $\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha = -\frac{2}{3}$ парабола с ветвями вверх, то есть минимум $f(x_2)^3$ в $\alpha = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
&x_2 = (-1,1) - \frac{1}{3}(-3,3) = (0,0)\\
&\nabla f(x_2) = (0,0)\\
&H = \begin{pmatrix} 6x_1 + 8 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\\
&D(0,0) = 6(5\cdot 0 + 6) = 36 > 0, \qquad f_{xx}(0,0) = 8 > 0
\end{aligned}$$

То есть это минимум $\square$

Задача 1.6. Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be differentiable function and let $x \in \mathbb{R}^n$ be such that $\nabla f(x) \neq 0$. The approximation

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^t h + o(h), \quad \|h\|_2 \to 0$$

motivates the problem of finding best descent direction h on some subset $D \subset \mathbb{R}^n$:

$$\min_{h\in D} \nabla f(x)^t h.$$

Find optimal h if the set D is given by the constraint

a) $\|h\|_2 \leq 1$,

b) $\|h\|_1 \leq 1$,

c) $\|h\|_\infty \le 1$,

d) $h^t Q h \le 1$, where $Q \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ is positive definite matrix

Доказательство. a)

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i h_i + \lambda(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 - c)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial h_i} = \varphi_i + 2\lambda h_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2 = c \end{cases}$$

$$c = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i^2}{4\lambda^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^2}{4\lambda^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^2}{4c}$$

$$h_i = -\frac{\varphi_i \sqrt{c}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^2}}$$

$$\min\langle \varphi, h\rangle = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^2 \sqrt{c}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^2}} = -\sqrt{c}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2}$$

То есть минимум $h = -\frac{\varphi_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^2}}$

b)

$$-\max_i |\varphi_i| \le \min_n (\varphi, h)$$

$$\max_i \ge \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i h_i| = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i||h_i|$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i||h_i| \le \max_i |\varphi_i| \sum_{i=1}^{n} |h_i| = \max_i |\varphi_i|$$

Тогда $h = (0, 0, \ldots, -\mathrm{sign}(\varphi_i), 0, 0, \ldots)$ где $i = \mathrm{argmax}(\varphi_i)$

c)

$$||h||_\infty \le 1 \Leftrightarrow \max_i |h_i| \le 1$$

$$\max_i |h_i| \le 1 \forall i : \quad |h_i| \le 1$$

Значит $\langle \varphi, h\rangle \to \min \Leftrightarrow \forall i : \quad \varphi_i h_i \to \min$
Аналогично (b) получим $h_i = -\mathrm{sign}\varphi_i$

d)

□

Задача 1.7. Find a local minimum of the following function using the Newton Method starting from the point $x^0 = (1, 2)$

$$f(x) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

Доказательство. $x_0 = (1, 2)$ Тогда

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$$
$$f'(x) = \begin{bmatrix} 4x + y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$
$$f''(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$f''(x)^{-1} f'(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 + 2 \\ 1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$x_1 = x_0 - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Минимум достигается в $(0, 0)$ □

Задача 1.8. Find a minimum on the set $X = \{2x_1 - x_2 = 6\} \subset \mathbb{R}^2$ of the following function using the Penalty Method with squared penalty function

$$f(x) = 4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5$$

Доказательство. Quadratic penalty function:

$$Q(x, c = 4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5 + \frac{c}{2}(2x_1 - x_2 - 6)^2)$$

Тогда для $c = 1$

$$\nabla Q(x, 1) = \begin{pmatrix} 12x_1 - 2x_2 + 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

для $c = 10$

$$\nabla Q(x, 10) = \begin{pmatrix} 4(12x_1 - 2x_2 - 29) \\ -20x_1 + 12x_2 - 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{c \to \infty} \nabla Q(x, c) = \begin{pmatrix} 2c(2x_1 - x_2 - 6) + 8x_1 + 4 \\ -c(2x_1 - x_2 - 6) + 2(x_2 - 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

При $c \neq 0$: $x_2 = \frac{2(cx_1 - 3c + 2x_1 + 1)}{c}$ чтобы было выполнено $2c(2x_1 - x_2 - 6) + 8x_1 + 4 = 0$ и при $c \neq -2$: $x_2 = \frac{2(cx_1 - 3c + 4)}{c + 2}$ чтобы $-c(2x_1 - x_2 - 6) + 2(x_2 - 4) = 0$, т.е. при $\lim_{c \to \infty}$: $x_2 = 2(x_1 - 3)$
Откуда $4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5 = 4x_1^2 + 4x_1 + (2(x_1 - 3))^2 - 8(2(x_1 - 3)) + 5 = 8x_1^3 - 36x_1 + 89$, то есть вершина параболы $x_1 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$, откуда $x_2 = -\frac{3}{2}$ и значение в этой точке $\frac{97}{2}$, гессиан $H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, его определитель $\det(H) = 16 > 0$ и $f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) = 8 > 0$, то есть это минимум □

Задача 1.9. Solve the following LP problem using the simplex method

$$f(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3,$$
$$-x_1 + 2x_2 \geq 2,$$
$$-x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 7,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \ge 3, \\ x_1-2x_2 \le -2, \\ -x_1+5x_2+x_3 \le 7 \end{cases}$$

Добавим переменные

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-a_1 = 3, \\ x_1-2x_2-a_2 = -2, \\ -x_1+5x_2+x_3+a_3 = 7 \end{cases}$$

И еще 2 переменные такие что $b_1+b_2 = 5-3x_2-x_3+a_1+a_2$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-a_1+b_1 = 3, \\ x_1-2x_2-a_2+b_2 = -2, \\ -x_1+5x_2+x_3+a_3 = 7 \end{cases}$$

Тогда одно из решений: $(x_1,x_2,x_3,a_1,a_2,a_3,b_1,b_2) = (0,0,0,0,0,7,3,2)$ и $b_1+b_2 = 5$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-a_1+b_1 = 3, \\ x_1-2x_2-a_2+b_2 = -2, \\ -x_1+5x_2+x_3+a_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3-a_1+b_1 = 3, \\ -\frac{1}{2}x_1+x_2-\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}b_2 = 1, \\ -x_1+5x_2+x_3+a_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1+x_3-a_1+\frac{1}{2}a_2+b_1-\frac{1}{2}b_2 = 2, \\ -\frac{1}{2}x_1+x_2-\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}b_2 = 1, \\ \frac{3}{2}x_1+x_3+\frac{5}{2}a_2+a_3-\frac{5}{2}b_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+\frac{2}{3}x_3-\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{2}{3}b_1-\frac{1}{3}b_2 = \frac{4}{3}, \\ -\frac{1}{2}x_1+x_2-\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}b_2 = 1, \\ \frac{3}{2}x_1+x_3+\frac{5}{2}a_2+a_3-\frac{5}{2}b_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x_1+\frac{2}{3}x_3-\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{2}{3}b_1-\frac{1}{3}b_2 = \frac{4}{3}, \\ x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{3}b_2 = \frac{5}{3}, \\ a_1+2a_2+a_3-b_1-b_2 = 0 \end{cases}$$

То есть частное решение $(x_1,x_2,x_3,a_1,a_2,a_3,b_1,b_2) = (\frac{4}{3},\frac{5}{3},0,0,0,0,0,0)$ и $b_1+b_2 = 5-\frac{5}{3}\cdot 3 = 0$, откуда

$$\begin{cases} x_1+\frac{2}{3}x_3-\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2 = \frac{4}{3}, \\ x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2 = \frac{5}{3}, \\ a_1+2a_2+a_3 = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} F &= x_1+3x_2-x_3 \\ &= \left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x_3+\frac{2}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2\right)+3x_2-x_3 \\ &= \frac{4}{3}+3x_2-\frac{5}{3}x_3+\frac{2}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2 \\ &= \frac{4}{3}+3(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)-\frac{5}{3}x_3+\frac{2}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2 \\ &= \frac{19}{3}-\frac{8}{3}x_3+\frac{5}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2 \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{cases} x_1+\frac{2}{3}x_3-\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2 = \frac{4}{3} \\ x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2 = \frac{5}{3} \\ a_1+2a_2+a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x_1+x_3-a_1+\frac{1}{2}a_2 = 2 \\ x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2 = \frac{5}{3} \\ a_1+2a_2+a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1+x_3-a_1+\frac{1}{2}a_2 = 2 \\ -\frac{1}{2}x_1+x_2-\frac{1}{2}a_2 = 1 \\ a_1+2a_2+a_3 = 0 \end{cases}$$

То есть $(x_1,x_2,x_3) = (0,1,2)$, откуда $F = 1$ $\square$