

Работа и потенциальные силы. Первые примеры.

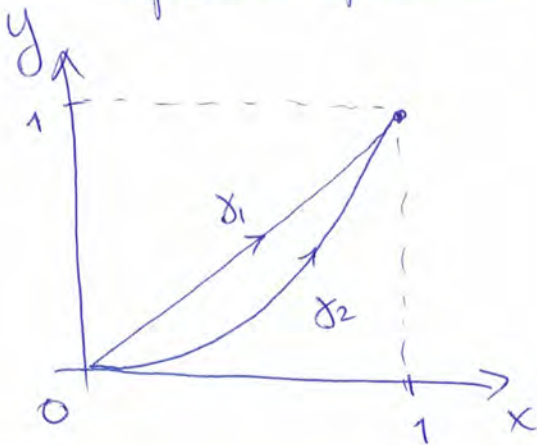
Пример 1

Сила \vec{F} с координатами

$$F_x = 1 + y, \quad F_y = \alpha x + 2y$$

($\alpha = \text{const}$ - параметр)

действует в \mathbb{R}^2 . Вычислите работу силы на траекториях



$$\gamma_1: (\nu t, \nu t), \quad t \in [0, 1/\nu]$$

ν - скорость движения
частицы, постоянный
параметр

$$\gamma_2: (t, t^2), \quad t \in [0, 1]$$

Обе траектории имеют концы $(0,0)$ и $(1,1)$ (см. Рис.)

Решение:

Для γ_1 $d\vec{r} = (\nu dt, \nu dt)$, поэтому

$$A_{\gamma_1} = \int_0^{1/\nu} \{ (1 + \nu t) \nu dt + (\alpha \cdot \nu t + 2 \cdot \nu t) \nu dt \} =$$

$$\stackrel{\text{замена } s = \nu t}{=} \int_0^1 ds (1 + (\alpha + 3)s) = \left(s + (\alpha + 3) \frac{s^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\alpha + 5}{2}$$

Для $\gamma_2: d\vec{r} = (dt, 2t dt)$, получим

$$A_{\gamma_2} = \int_0^1 \{ (1+t^2) dt + (2t+2t^2) 2t dt \} = \\ = \left(t + (1+2\alpha) \frac{t^3}{3} + 4 \cdot \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{7+2\alpha}{3}$$

Замечаем, что $A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}$ только если $\alpha = 1$. В этом случае выполняется условие $\partial_x F_y = \partial_y F_x$, то есть сила \vec{F} потенциальна.

Как найти отвечающий ей потенциал $U(x, y)$?

Общий метод: решить систему дифференциалов:

$$\begin{cases} \partial_x U(x, y) = -F_x = -(1+y) \\ \partial_y U(x, y) = -F_y = -(x+2y) \end{cases} \quad / \text{помним, } \alpha = 1 /$$

Сначала интегрируем 1-е уравнение по x при постоянном y (∂_x — производная по x при $y = \text{const}$):

$$U(x, y) = - \int dx (1+y) \Big|_{y=\text{const}} = -x(1+y) + C(y)$$

↑
это константа интегрирования по x , но она может быть разной при разных значениях параметра y .

Подставляем полученное выражение для $U(x, y)$ во второе уравнение системы:

$$-x + C'(y) = -(x+2y)$$

и подставляем уравнение на $C(y)$:

$$C'(y) = -2y \Rightarrow C(y) = \int (-2y) dy = -y^2 + C$$

уже просто константа.

В итоге:
$$U(x, y) = -x - xy - y^2 + C$$

Поскольку нас интересует не сама $U(x, y)$, а $dU = -(\vec{F}, d\vec{r})$, то константу C можно не вписывать.

Потенциальная энергия определяется с точностью до константы.

Ответ в этой задаче можно было увидеть сразу методом "пристального взгляда":

Запишем dU :

$$\begin{aligned} dU &= -(\vec{F}, d\vec{r}) = -(1+y)dx - (x+2y)dy = \\ &= -dx - 2ydy - (ydx + xdy) = -dx - d(y^2) - d(xy) \end{aligned}$$

группируем полные дифференциалы

$$= -d(x + xy + y^2)$$

$$\Downarrow$$
$$U = -x - xy + y^2$$

Вернемся к обсуждению работы силы \vec{F} при произвольном x .

Замечаем, что A_{χ_1} не зависит от значения параметра ψ , т.е. от скорости движения точки по траектории χ_1 .

Вопрос: Почему это так для нашей \vec{F} ?

Для каких сил \vec{F} работа может зависеть от скорости движения вдоль траектории?

Ответ: Наша сила $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ не зависит явно от $\dot{\vec{r}}$ и t . В случае, когда сила зависит явно от скорости движения точки и/или от времени, её работа может зависеть от скорости движения вдоль траектории. Обоснуйте.

Пример 2 Путник пересекает поле из точки $A(0,0)$ в точку $B(1,1)$ по траектории

$$\chi: \vec{r}(t) = v(t, t), \quad t = [0, 1/5],$$

$$v = \text{const} > 0$$

В это время в поле дует ветер. Скорость ветра $\vec{V} = (1, 0)$.

Сила сопротивления ветра прямо пропорциональна скорости воздуха относительно путника (безкое трение):

$$\vec{v}_{\text{отн.}} = \vec{V} - \dot{\vec{r}}(t)$$

Вычислите работу, производимую ветром над

путника.

Решение: Сила ветра, действующая на
путника $\vec{F} = \kappa \vec{v}_{отн.} = \kappa(\vec{V} - \vec{v}) = \kappa(1-v, -v)$
($\kappa = \text{const} > 0$)

Учитывая, что $d\vec{r} = (v, v)dt$

вычисляем интеграл работы

$$A_{\text{ветра}} = \int_0^{1/v} (\vec{F}, \dot{\vec{r}}) dt = \kappa \int_0^{1/v} \{ (1-v)v - v \cdot v \} dt =$$

$$= \kappa \int_0^1 \{ (1-v) - v \} ds = \kappa(1-2v)$$

(замена $s = vt$)

Видно, что работа силы
зависит от скорости пут-
ника v . Это потому, что
сила ветра от неё зависела.

Замечаем, что работа ветра может быть
как положительной (подгоняет при $v < 1/2$), так
и отрицательной (мешает при $v > 1/2$)

Зависимость работы от скорости движения
вдоль траектории гарантирует, что она
не потенциальна. Силы трения всегда
не потенциальны. Их работа вдоль замкну-
той траектории $\neq 0$, поскольку они направ-
лены против $d\vec{r} \Rightarrow (\vec{F}, d\vec{r}) < 0$

Пример 3

На материальную точку в \mathbb{R}^3 действует сила, декартовы координаты которой имеют вид:

$$F_x = 2x + y, \quad F_y = x + z^2, \quad F_z = 2yz + 1$$

а) Определите, является ли она потенциальной.

б) Если да, то постройте ее потенциал.

Решение: а) Проверим все 3 условия:

$$\partial_x F_y = \partial_y F_x : \quad 1 = 1 - \text{выполнено}$$

$$\partial_x F_z = \partial_z F_x : \quad 0 = 0 - \text{выполнено}$$

$$\partial_y F_z = \partial_z F_y : \quad 2z = 2z - \text{выполнено.}$$

Эта сила потенциальна в любой односвязной области \mathbb{R}^3 .

б) Строим $U(x, y, z)$ общим методом

* Интегрируем уравнение $F_x = 2x + y = -\partial_x U(x, y, z)$ по x при $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$:

$$U(x, y, z) = - \int (2x + y) dx = -x^2 - xy + C(y, z)$$

** Подставим результат в уравнение $F_y = x + z^2 = -\partial_y U$ и интегрируем по y при $x = \text{const}$ и $z = \text{const}$:

$$C(y, z) = \int \{ \cancel{x} - (\cancel{x} + z^2) \} dy = -z^2 y + C(z)$$

*** Подставляем результат в уравнение

$F_z = 2yz + 1 = -\partial_z U$ и интегрируем по z
при $x = \text{const}, y = \text{const}$:

$$C(z) = \int \{2zy - (2yz+1)\} dz = -z + C$$

Ответ: $U(x, y, z) = -x^2 - xy - z^2 y - z + C$

Метод "прямостоячного взрыва":

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -(2x+y)dx - (x+z^2)dy - (2yz+1)dz$$

$$= \underbrace{-2x dx - (y dx + x dy) - (z^2 dy + 2z dz \cdot y)}_{\text{сгруппированы полные дифференциалы}} - dz =$$

$$= -d(x^2 + xy + yz^2 + z)$$

$$\Downarrow$$

$U = -x^2 - xy - yz^2 - z$