# ТФКП
# 2 курс
# Домашнее задание

Владислав Мозговой
1789769386

8 июня 2021 г.

## Домашнее задание 8

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

**1.** Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_7+a_9$. Функция $f$ определена и голоморфна на некоторой проколотой окрестности точки 0. Докажите или опровергните следующие утверждения. Можно пользоваться утверждениями из учебника, снабжая их точными ссылками.

**(0)** Если $f$ имеет полюс или устранимую особенность в точке 0, то $f(z) = z^{\mathrm{ord}_0(f)}g(z)$, причем $g$ имеет устранимую особенность в точке 0.

**(1)** Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $z$, такая, что $|z| < \varepsilon$ и $|f(z)| > e^{\frac{1}{|z|}}$, то 0 является существенной особой точкой для $f$.

**(2)** Если $|f(z)| < \frac{|\log|z||}{|z|}$ для всех $z$ из достаточно малой проколотой окрестности точки 0, то 0 является полюсом для $f$ порядка не выше 1.

**(3)** Если $|f(z)| \leqslant |z|^{4/3}$ для всех достаточно маленьких $z \neq 0$, то $|f(z)| \leqslant |z|^{5/3}$ для всех достаточно маленьких $z \neq 0$.

**(4)** Если $f$ имеет полюс в 0, то $f(z) = g(z) + P(1/z)$, где $P$ — это многочлен, а $g$ — голоморфная функция в (заполненной) окрестности точки 0.

**(5)** Если $f$ является суммой рациональной и целой функций, то $f$ имеет в 0 полюс или устранимую особенность.

**(6)** Если 0 является существенной особенностью функции $f$, то $|f(z_n)| < |z_n|^{2021}$ для некоторой последовательности $z_n \to 0$.

**(7)** Если 0 является существенной особенностью функции $f$, то $|f(z_n)| > |z_n|^{-2021}$ для некоторой последовательности $z_n \to 0$.

**(8)** Если 0 является существенной особенностью функции $f$, то $|f(z_n)| < e^{-1/|z_n|}$ для некоторой последовательности $z_n \to 0$. .

**(9)** Если $f$ является отношением двух целых функкий, то $f$ не может иметь существенную особенность в 0.

**2.** Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4+a_5$. Для следующих аналитических функций найдите все нули и их кратности. Также, найдите все особенности и определите их тип (устранимая особенность, полюс, существенная особенность, неизолированная особенность). Для тех особенностей, которые являются полюсами, найдите порядок полюса.

**(0)** $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

**(1)** $f(z) = z \sin z$.

**(2)** $f(z) = (\sin z)^3$.

**(3)** $f(z) = \operatorname{tg}(z^3)$.

**(4)** $f(z) = \frac{1}{z(z^2-4)^2}$.

**(5)** $f(z) = \frac{z}{\sin(z^2)}$.

**(6)** $f(z) = e^{\operatorname{tg} z}$.

**(7)** $f(z) = e^{\frac{1}{\sin(1/z)}}$.

**(8)** $f(z) = \frac{\sin z}{2-\cos z}$.

**(9)** $f(z) = \frac{1}{\sin z+\cos z}$.

**3.** Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_6$. Найдите ряд Лорана для указанной ниже функции $f$ в указанном кольце $A$.

**(0)** $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

**(1)** $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$.

**(2)** $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

**(3)** $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

**(4)** $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < \infty\}$.

**(5)** $f(z) = \frac{z}{1+z^3}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$.

**(6)** $f(z) = \cos \frac{1}{z}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$.

**(7)** $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

**(8)** $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$.

**(9)** $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

**4.** Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_6+a_7$. Для каждой из следующих функций найдите ее вычеты во всех изолированных особенностях.

**(0)** $f(z) = \operatorname{tg} z$.
**(1)** $f(z) = \frac{1}{z^3+z}$.
**(2)** $f(z) = \frac{e^z}{z^2-4}$.
**(3)** $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z+1}$.
**(4)** $f(z) = \sin z \, \sin \frac{1}{z}$.
**(5)** $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$.
**(6)** $f(z) = \frac{1}{z^3+z^2}$.
**(7)** $f(z) = \frac{z^2}{(z^2-1)^2}$.
**(8)** $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}$.
**(9)** $f(z) = \frac{1}{z(\sin z)^2}$.

**5. Бонусная задача.** Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_4 + a_6$.

**(0)** Упражнение 7.7 ($a$) на странице 117 основного учебника.
**(1)** Упражнение 7.7 ($b$) на странице 117 основного учебника.
**(2)** Упражнение 7.9 на странице 118 основного учебника.
**(3)** Упражнение 7.10 на странице 118 основного учебника.
**(4)** Упражнение 7.11 на странице 118 основного учебника.
**(5)** Упражнение 7.12 на странице 118 основного учебника.
**(6)** Упражнение 8.3 на странице 145 основного учебника.
**(7)** Упражнение 8.4 на странице 145 основного учебника.
**(8)** Упражнение 8.5 на странице 145 основного учебника.
**(9)** Упражнение 8.6 на странице 145 основного учебника.

## Решения

### Задача 1

Необходимо решить задачу $a_7 + a_9 = 3 + 6 = 9 \mod 10$ Пусть $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, тогда особенности $f(z)$ это нули $q(z)$ и $\infty$. Так как $q(z)$ – некий многочлен, то все его нули конечного порядка – они являются полюсами этого порядка (мы исходим из того, что у $p(z), q(z)$ нет общих корней). Заметим, что $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ либо 0 (если $\deg(p) < \deg(q)$), либо $\infty$ (если $\deg(p) > \deg(q)$), либо является отношением коэффициентов перед старшими членами (если $\deg(p) = \deg(q)$), а следовательно предел существует и в $\infty$ также не может быть существенной особенности.
Так мы доказали, что если $f(z)$ является отношением двух целых функций, то у нее вообще нет существуенных особенностей, а следовательно и в 0 они тоже отсутствуют.

### Задача 2

Необходимо решить задачу $a_4 + a_5 = 7 + 6 = 3 \mod 10$

$$\tan(z^3)$$

Найдем нули

$$\begin{aligned}
&\tan(z^3) = 0\\
&z^3 = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\\
&z_1 = \sqrt[3]{\pi n_1},\ n_1 \in \mathbb{Z}\\
&z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\pi n_2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\pi n_2},\ n_2 \in \mathbb{Z}\\
&z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\pi n_3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\pi n_3},\ n_3 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Найдем особенности

$$\tan(z^3) = \frac{\sin(z^3)}{\cos(z^3)} = -\frac{\cos(z^3 - \frac{\pi}{2})}{\sin(z^3 - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{z^3 - \frac{\pi}{2}}\left(-\frac{z^3 - \frac{\pi}{2}}{\sin(z^3 - \frac{\pi}{2})} \cdot \cos(z^3 - \frac{\pi}{2})\right)$$

Уравнение в скобках аналитическое и имеет проколотую окрестность $z^3 = \frac{\pi}{2}$ пределом $-1$ при $z \to \frac{\pi}{2}$, откуда следует что в $z_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ полюс порядка 1. Заметим, что другие полюса имеют координаты $z = \sqrt[3]{\frac{(2n+1)\pi}{2}},\ n \in \mathbb{Z}$ (так как $\tan(x) = \tan(\pi + x)$) и также имеют порядок 1.

### Задача 3

Необходимо решить задачу $a_5 + a_6 = 6 + 9 = 5 \mod 10$

$$\begin{aligned}
&f(z) = \frac{z}{1+z^3},\ A = \{z \in \mathbb{C} |\ 1 < |z| < \infty\}\\
&\frac{z}{1+z^3} = \frac{1}{\frac{1}{z} + z^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{z^3})} = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{z^3}\right)^n\right)\\
&= \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{z}\right)^{3n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{3n+2}\right)\\
&\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow 1 < |z|
\end{aligned}$$

### Задача 4

Необходимо решить задачу $a_6 + a_7 = 9 + 3 = 2 \mod 10$

$$\begin{aligned}
&f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 4}\\
&z = \pm 2
\end{aligned}$$

$\mathrm{Res}_2(f)$ равен коэффициенту при $(z-2)^{-1}$ в разложении $f$ в точке 2, а $\mathrm{Res}_{-2}(f)$ коэффициенту при $(z+2)^{-1}$ разложения в точке $-2$.
Разложим в ряд Лорана по степеням $(z-2)$ в окр $z=2$

$$\frac{e^z}{z^2-4} = e^z \cdot \frac{1}{(z-2)(z+2)} = e^z \cdot \frac{1}{(z-2)((z-2)+4)} = e^z \cdot \frac{1}{(z-2)^2(1+\frac{4}{z-2})} = e^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{(z-2)^{k+2}}$$

$$\mathrm{Res}_2(f) = \frac{e^2}{-4} = -\frac{e^2}{4}$$

Разложим в ряд Лорана по степеням $(z+2)$ в окр $z=-2$

$$\frac{e^z}{z^2-4} = e^z \cdot \frac{1}{(z-2)(z+2)} = e^z \cdot \frac{1}{(z+2)((z+2)-4)} = e^z \cdot \frac{1}{(z+2)^2(1-\frac{4}{z+2})} = e^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{(z+2)^{k+2}}$$

$$\mathrm{Res}_{-2}(f) = \frac{e^{-2}}{-4} = -\frac{1}{4e^2}$$

То есть $\mathrm{Res}_{-2}(f) = -\frac{1}{4e^2},\ \mathrm{Res}_2(f) = -\frac{e^2}{4}$