# 9 БИЛЕТ

## Линейные ДУ

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

$A(t) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$

$x \in \mathbb{R}^n$ $\quad A, b \in C(I)$

(непрерывные) интервал

Тогда выполнено усл. т. $\exists$ и !

$f'(x) = A$

**Теорема.** Пусть $A, b$ непрерывны на $I$. Тогда все реш-ия $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ продолжаются на весь $I$

Д-во: 1) Пусть $[\alpha, \beta] \subset I$

Рассмотрим $x(t)$ — реш. $x(\alpha)$ определено. Докажем, что $x$ определено на $[\alpha, \beta]$

(устремляя $\beta \to \sup I$, получим требуемое)

Нужно наложить на $A$ и $b$ некоторые оценки:

2) $\|A(t)\| \leq M \qquad |b(t)| \leq B \qquad \forall t \in [\alpha, \beta]$

Что такое норма $A$ и $b$? Это

$\forall u \quad |Au| \leq M|u|$

пусть $M = n \cdot \max\limits_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}(t)| \qquad t \in [\alpha, \beta]$

$$|(Au)_j| \leq \underline{\max_{\dots}\left(\sum |u_i|\right) \leq M \max|u_i|} \quad ?$$

$$\underbrace{\max_j |(Au)_j|}_{=\|Au\|_\infty} \leq M \underbrace{\max_i |u_i|}_{\|u\|_\infty}$$

Перейдём к евклидовым нормам:

$$\|Au\|_2 \leq \tilde{M} \|u\|_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\|x\|^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\langle x, x\rangle\right) = 2\langle x, \dot{x}\rangle \leq$$

$$\leq 2\|x\|\|Ax+b\| \leq 2\|x\|(\tilde{M}\|x\|+B)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\|x\|) = \frac{1}{2\|x\|}\frac{d}{dt}\left(\|x\|^2\right) \leq \tilde{M}\|x\|+B$$

Пусть $R(t) = \|x(t)\|$ (проверим, может ли $R \to \infty$)

Тогда $S(t) = e^{-(\tilde{M}+1)t}R(t)$ (просто потому что)

$$\frac{dS}{dt} = -(\tilde{M}+1)S(t) + e^{-(\tilde{M}+1)t}\dot{R}(t) \leq$$

$$\leq e^{-(\tilde{M}+1)t}\left(-R(t)(\tilde{M}+1) + R(t)\tilde{M} + B\right) \leq$$

$$\leq e^{-(\tilde{M}+1)t}\left(B - R(t)\right) \leq e^{-(\tilde{M}+1)t}$$

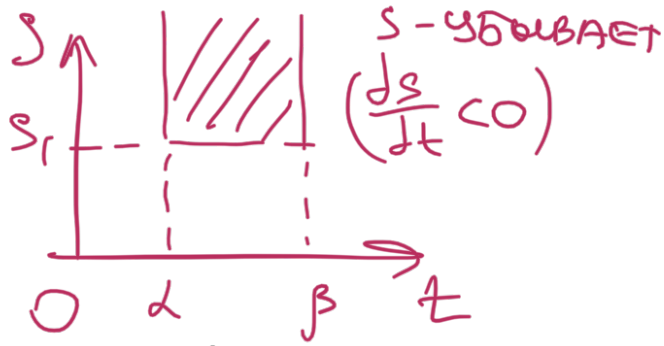
Вывод:

$$\left(B - e^{(\tilde{M}+1)t} S(t)\right) \le e^{-(\tilde{M}+1)t}\left(B - e^{(\hat{M}+1)\alpha} S(t)\right)$$

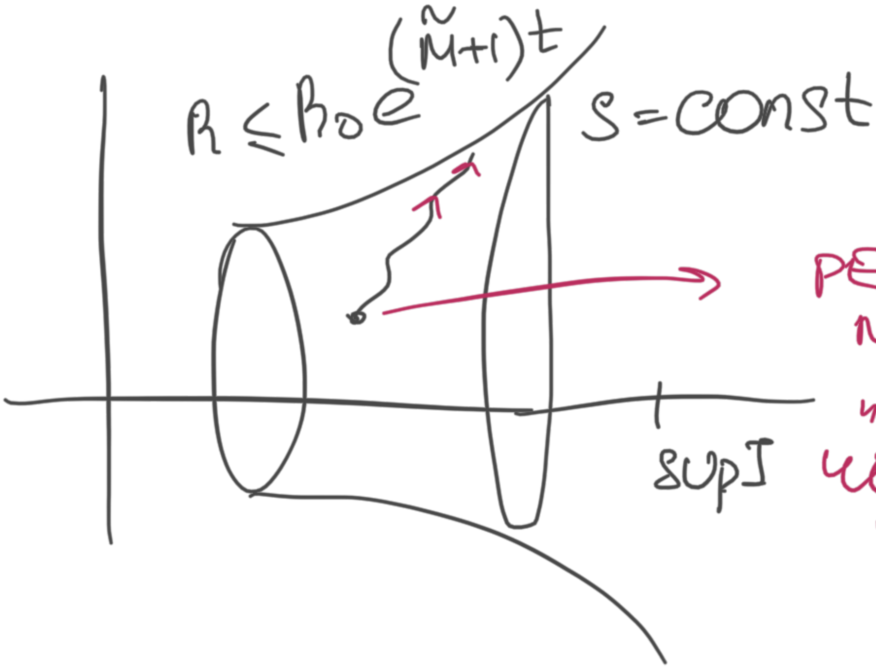
Если $S(\alpha) = S_0$

$S_1 = B e^{-(\hat{M}+1)\alpha}$, тогда $S(t)$ не может превзойти $\max(S_0, S_1) = \bar{S}$

Тогда $R$ не может неограниченно возрастать:




$$R(t) = e^{(\tilde{M}+1)t} S(t) \le e^{(\hat{M}+1)\beta} \bar{S}(t) \quad \blacksquare$$




РЕШ-ИЕ НЕ МОЖЕТ «ВЫЙТИ» ЧЕРЕЗ БОКОВУЮ ПОВЕРХНОСТЬ