1 2021 Вариант 2

Задача 1.1. Найдите экстремаль функционала

$$S[y] = 2y^2(\pi) + \int_0^\pi dx\left((y'(x))^2 - y^2(x) + 3y(x)\cos 2x\right),$$

заданного на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций $y(x) \in C^2[0,\pi]$ с фиксированным граничным значением $y(0) = 0$.

Доказательство.

$$\Delta S[y] = S[y+\delta y] - S[y] = 2(y+\delta y)^2(\pi) - 2y^2(\pi)$$

$$+\int\limits_0^\pi dx((y'(x) + (\delta y)'(x))^2 - (y+\delta y)^2(x) + 3(y(x)+\delta y(x))\cos 2x - (y^\partial(x)) + y^2(x) - 3y(x)\cos 2x)$$

$$= 4y\delta y(\pi) + 2\delta y^2(\pi) + \int\limits_0^\pi dx(2y'(x)\delta y'(x) + (\delta y'(x))^2 - 2y\delta y(x) - (\delta y(x))^2 + 3\delta y(x)\cos 2x)$$

$$\delta S[y] = 4y(\pi)\delta y(\pi) + \int\limits_0^\pi dx(2y'(x)\delta y'(x) - 2y(x)\delta y(x) + 3\delta y(x)\cos 2x)$$

$$\int\limits_0^\pi 2y'(x)\delta y'(x)dx = \int\limits_0^\pi 2y' d\delta y(x) = 2y'(x)\delta y(x)\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \delta y(x) d2y'(x) = 2y'(x)\delta y(x)\Big|_0^\pi - 2\int\limits_0^\pi \delta y''(x)d2y(x)dx$$

$$\delta S[y] = 4y(\pi)\delta y(\pi) + \int\limits_0^\pi dx(3\cos 2x - 2y(x) - 2y''(x))\delta y(x) + 2y'(x)\delta y(x)\Big|_0^\pi$$

$$= (4y(\pi) + 2y'(\pi))\delta y(\pi) - 2y'(0)\delta y(0) + \int\limits_0^\pi dx(3\cos 2x - 2y - 2y'')\delta y$$

$$2y''2y - 3\cos 2x = 0$$

$$y(x) = c_2\sin x + c_1\cos x - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$y(0) = c_1 - \frac{1}{2} = 0 \qquad c_1 = \frac{1}{2}$$

$Sy|_{x=\pi}$ - произвольна $\Rightarrow (4y + 2y')|_{x=\pi} = 0$

$$(2y + y')|_{x=\pi} = 0$$

$$y'(x) = c_2\cos x - c_1\sin x + \frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x$$

$$y'(\pi) = -c_2 \qquad y(\pi) = -c_1 - \frac{1}{2}$$

$$2y(\pi) + y'(\pi) = -2c_1 - 1 - c_2 = 0$$

$$c_2 = -2c_1 - 1 = -2\cdot\frac{1}{2} - 1 = -2$$

Откуда $y(x) = -2\sin x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$ □

Задача 1.2. Найдите экстремаль функционала

$$S[y(x)] = \int_0^{\pi/2} dx\left((y'')^2 - 81y^2 + 18xy'\right),$$

заданного на пространстве гладких функций $y(x) \in C^\infty[0,\pi/2]$ с фиксированными граничными значениями:

$$y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = -\frac{1}{9}, \quad y'(0) = 0$$

Доказательство.

$$S[y+\delta y]-S[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx((y+8y)'')^2-81(y+8y)^2+18(y+8y)'x-(y'')^2+81y^2-18y'x)$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\delta y'')^2-81(\delta y)^2+18(\delta y)'x+2y''\delta y''-162y\delta y)dx$$

$$\delta S[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2y''\delta y''-162y\delta y)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2y''d(\delta y')-162\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}y\delta ydx=2y''\delta y'\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\delta y'y'''dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}162y\delta ydx$$

$$=2y''\delta y'\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2y'''\delta y|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\delta yy''''dy-162\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}y\delta ydx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2y''''-162y)=0$$

$$2y''''-162y=0$$
$$y''''-81y=0$$
$$t^4-81=0 \qquad t=\pm3,\pm3i$$
$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{3x}+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x$$

□

Задача 1.3. Точечная частица массы m движется без трения по поверхности, заданной соотнопением:

$$z=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$$

где x, y и z - декартовы прямоугольные координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Частица соединена с началом координат невесомой пружиной, потенциальная энергия деформации пружины задается формулой:

$$U(l)=\frac{kl^2}{2},$$

где l - длина пружины, k - коэффициент ее упругости.

(а) Составьте лагранжиан этой механической системы и выпините уравнения Эйлера-Лагранжа.

(б) Приведите формулы для всех интегралов движения (законов сохранения).

(в) Убедитесь, что уравнения движения допускают стационарнње репения, отвечаюпие постоянному значению z, и найдите, при каких условиях на начальные данные задачи такие репения существуют.

Доказательство. Введем цилиндрические координаты ρ, z, ϕ

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z=\frac{1}{2\rho^2}\Leftrightarrow\rho^2=\frac{1}{2z}$$
$$l=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\frac{1}{2z}+z^2}$$
$$L=T-U$$
$$T=\frac{m}{2}(\dot\rho^2+\dot z^2+\rho^2\dot\phi^2)=\frac{m}{2}(\frac{\dot z^2}{8z^3}+\dot z^2+\frac{\dot\phi^2}{2z})$$
$$U=\frac{k}{2}(\frac{1}{2z}+z^2)$$

(а)

$$L=T-U=\frac{m}{2}(\frac{\dot z^2}{8z^3}+\dot z^2+\frac{\dot\phi^2}{2z})-\frac{k}{2}(\frac{1}{2z}+z^2)$$
$$L_\phi=\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi})-\frac{\partial L}{\partial\phi}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}(\frac{2\dot\phi m}{4z})=0\Rightarrow I=\frac{\dot\phi m}{2z}$$
$$L_z=\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot z})-\frac{\partial L}{\partial z}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}(\frac{2m\dot z}{16z^3}+\frac{2m\dot z}{2})-(-\frac{3}{16}mz^2\frac{1}{z^4}-\frac{m\dot\phi^2}{4z^2}+\frac{k}{4z^2}-\frac{2zk}{2})$$

(б)

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{const}$$
$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{выполняется ЗСЭ} E = T + U = \text{const}$$

(в)

$$z = \text{const} = z_0 \Rightarrow \dot{z} = 0$$
$$L_z|_{z=z_0} = \frac{m\dot{\phi}^2}{4z_0^2} - \frac{k}{4z_0^2} + z_0 k = 0 \Rightarrow z_0^3 = \frac{m\dot{\phi}^2 - k}{4k}$$
$$z \neq 0 \quad m\dot{\phi} \neq k$$

□

Задача 1.4. Точечная частица массы m движется по окружности радиуса R. Вторая точечная частица такой же массы m соединена жестким невесомым стержнем длины ℓ с первой частицей. Стержень может свободно вращаться в плоскости окружности R вокруг первой частицы. Вненние силы отсутствуют, трения нет.

(а) Составьте лагранжиан этой механической системы и выпишите ее уравнения движения.

(б) Найдите все интегралы движения (сохраняющиеся величины).

Доказательство.

(а) Для первой частицы

$$x_1 = R\cos\phi \qquad \dot{x_1} = -R\sin\phi\dot{\phi}$$
$$y_1 = R\sin\phi \qquad \dot{x_2} = R\cos\phi\dot{\phi}$$

Для второй частицы

$$x_2 = R\cos\phi + l\cos(\theta + \phi - \pi) = R\cos\phi - l\cos(\theta + \phi)$$
$$y_2 = R\sin\phi + l\sin(\theta + \phi - \pi) = R\sin\phi - l\sin(\theta + \phi)$$

Откуда

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{m}{2}(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2)$$
$$= \frac{m}{2}(R^2\dot{\phi}^2) + \frac{m}{2}(-R\sin\phi\dot{\phi} + l\sin(\theta + \phi)(\dot{\theta} + \dot{\phi}))^2 + (R\cos\phi\dot{\phi} - l\cos(\theta + \phi)(\dot{\theta} + \dot{\phi}))^2$$
$$= \frac{m}{2}(R^2\dot{\phi}^2) + \frac{m}{2}(R^2\dot{\phi}^2 + l^2(\dot{\theta} + \dot{\phi}) - 2\dot{\phi}(\dot{\theta} + \dot{\phi})Rl(\sin\phi\sin(\theta + \phi) + \cos\phi\cos(\theta + \phi)))$$
$$U = 0$$

Значит

$$L = T = \frac{m}{2}(R^2\dot{\phi}^2) + \frac{m}{2}(R^2\dot{\phi}^2 + l^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - 2\dot{\phi}(\dot{\theta} + \dot{\phi})Rl\cos\theta)$$

(б)

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{ выполняется ЗСЭ } E = T + U = T = const$$
$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = const$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2mR^2\dot{\phi} + 2l^2\dot{\phi} + 2\dot{\theta}l^2 - 2(2\dot{\phi} + +\dot{\theta})Rl\cos\theta = const$$

□