На протяжении всего курса мы не будем различать *римановы поверхности* и *комплексные кривые*. В свою очередь, *компактные* римановы поверхности не отличаются от комплексных *гладких алгебраических* кривых.

Литература:
Основная:
М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов, Алгебраические кривые: по направлению к пространствам модулей, М., МЦНМО, 2019
Дополнительная:
Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, Принципы алгебраической геометрии, Глава 2
С. М. Львовский, Введение в римановы поверхности, https://math.hse.ru/spec-riman
А.К.Звонкин, С.К.Ландо, Графы на поверхностях и их приложения, М. МЦНМО, 2010

С точки зрения топологии компактная риманова поверхность представляет собой двумерную ориентируемую поверхность. Все такие поверхности — это сфера S^2, тор $T^2 = S^1 \times S^1$, и т.д. Поверхность в этом списке однозначно задается натуральным числом — своим *родом* g.

Всякая некомпактная риманова поверхность получается вырезанием некоторого замкнутого подмножества из компактной.

Внутренность всякого многоугольника является поверхностью. Склеивая многоугольники по сторонам (так, чтобы *всякая сторона многоугольника склеилась ровно с одной стороной того же или другого многоугольника*), мы получаем новые поверхности. При этом надо следить, чтобы склеенная поверхность оставалась ориентируемой, т.е. чтобы из нее нельзя было вырезать ленту Мебиуса.
Наоборот, всякую поверхность можно разрезать на многоугольники. Причем это можно сделать бесконечным числом различных способов.

Если включать в пары не все стороны склеиваемых многоугольников, а только некоторые из них, то получится *ориентированная двумерная поверхность с краем*. *Край* поверхности образуют те стороны многоугольников, которые не попали в пары. Край представляет собой несвязное объединение нескольких окружностей.

Склеивая данную поверхность из многоугольников, мы можем использовать разное количество многоугольников, а также многоугольники с различным числом сторон. Стороны склеиваемых многоугольников образуют граф на поверхности; вершинами этого графа являются отождествленные вершины многоугольников. Обозначим количество многоугольников через F, количество вершин полученного графа через V и количество его ребер через E. Тогда справедливо следующее утверждение:

Theorem

Величина $V - E + F$ не зависит от способа разрезания поверхности на многоугольники. Для поверхности рода g эта величина равна $2 - 2g$.

Величина $V - E + F = 2 - 2g$ называется *эйлеровой характеристикой* данной поверхности.

Будучи равной $2 - 2g$, эйлерова характеристика поверхности тесно связана с ее родом, который кажется более простой характеристикой поверхности. Однако она во многих отношениях удобнее рода: во-первых, эйлерову характеристику легко определить для любой поверхности, в том числе некомпактной или с краем, во-вторых, она аддитивна: $\chi(M \sqcup N) = \chi(M) + \chi(N)$ для несвязного объединения любых двух поверхностей (и не только поверхностей, а и для любого *симплициального комплекса*).
Например, если из поверхности выкинуть n точек (или n дисков), то ее эйлерова характеристика уменьшится на n (поскольку эйлерова характеристика точки или диска равна 1).
Эйлеровы характеристики гомотопически эквивалентных симплициальных комплексов совпадают.

Пусть $f : M \to N$ — непрерывное отображение двух поверхностей. Отображение f называется *накрытием степени d*, если у каждой точки $y \in N$ есть окрестность $U(y) \subset N$, гомеоморфная диску D^2, полный прообраз которой $f^{-1}(U(y))$ гомеоморфен несвязному объединению d дисков D^2, причем ограничение f на каждый из этих дисков является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом. Здесь d может быть натуральным числом или бесконечностью (если у каждой точки в N бесконечно много прообразов).

Типичный пример накрытия дается отображением $z \mapsto z^d, d = 1, 2, \ldots$, проколотого в нуле единичного диска D' в себя. Степень этого отображения равна d. Всякое *голоморфное* отображение комплексных кривых имеет такой вид в подходящих локальных координатах, что и устанавливает прямую связь между голоморфными отображениями и накрытиями.

Типичный пример накрытия дается отображением $z \mapsto z^d, d = 1, 2, \ldots$, проколотого в нуле единичного диска D' в себя. Степень этого отображения равна d. Всякое *голоморфное* отображение комплексных кривых имеет такой вид в подходящих локальных координатах, что и устанавливает прямую связь между голоморфными отображениями и накрытиями.
Выберем на данной поверхности N базисную точку $y_0 \in N$. Накрытия $(M, x_0) \to (N, y_0)$ поверхности N с базисной точкой y_0 (рассматриваемые с точностью до гомеоморфизма поверхности (M, y_0)) находятся во взаимно-однозначном соответствии с подгруппами фундаментальной группы $\pi_1(N, y_0)$
Задача. Опишите все накрытия двумерной сферы. (только двумерная сфера)

Предыдущая задача показывает, что у поверхности может быть совсем мало накрытий. В то же время, отображение $z \mapsto z^d$ является голоморфным отображением единичного диска в себя, но не накрытием единичного диска. Поэтому для работы с голоморфными отображениями больше подходят разветвленные накрытия.
Непрерывное отображение компактных ориентированных поверхностей $f : N \to M$ называется *разветвленным накрытием* степени d, если в M можно выкинуть конечный набор точек $\{y_1, \ldots, y_n\}$ так, что над дополнением к этому набору отображение $f : (N \setminus f^{-1}(\{y_1, \ldots, y_n\})) \to (M \setminus \{y_1, \ldots, y_n\})$ становится накрытием степени d.
В частности, отображение $z \mapsto z^d$ является разветвленным накрытием единичного диска степени d.

Пусть $f : N \to M$ — разветвленное накрытие степени d. Набор точек $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset M$ называется набором *точек ветвления*, если над дополнением к нему f является накрытием, а над дополнением к любому его подмножеству — нет.
У каждой точки ветвления y_i меньше, чем d прообразов при f; у каждой из остальных точек поверхности M ровно d прообразов. У каждого прообраза $x \in f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in M$ есть *кратность* — число прообразов точки y', близкой к y, лежащих вблизи x. В окрестности точки кратности d_j можно выбрать комплексную координату z так, что в окрестности ее образа есть комплексная координата, в которой отображение f имеет вид $z \mapsto z^{d_j}$. Сумма кратностей прообразов любой точки равна d.

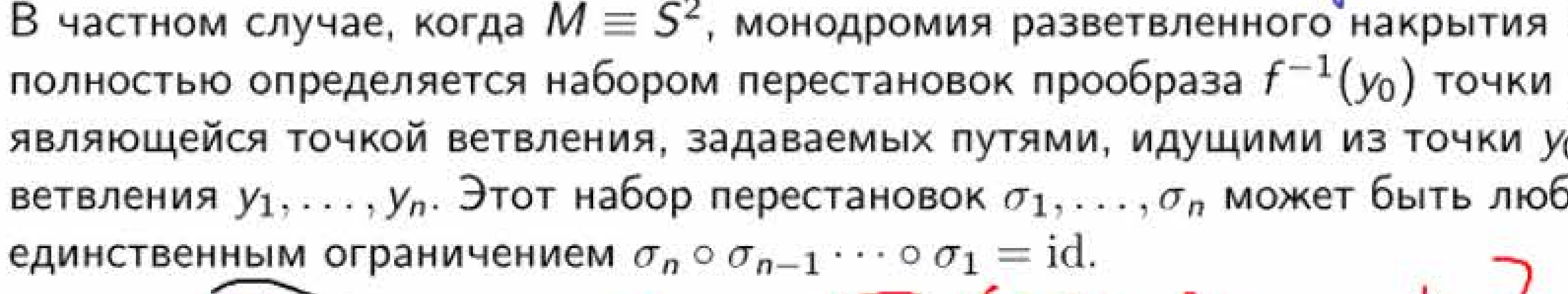
Пусть $f : N \to M$ — разветвленное накрытие степени d, $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset M$ — набор его точек ветвления, и пусть $m_i = |f^{-1}(y_i)|$ — количество прообразов точки y_i.

Theorem (формула Римана–Гурвица)

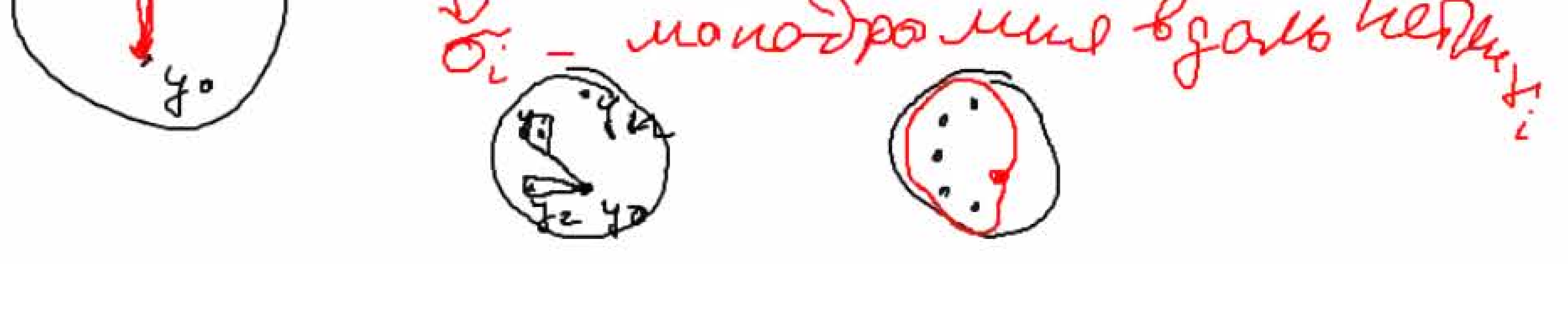
Эйлерова характеристика поверхности N выражается следующей формулой:

$$\chi(N) = d(\chi(M) - n) + \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Пусть $f : N \to M$ — накрытие степени d, $y_0 \in M$. Всякая непрерывная петля в M с началом и концом в y_0 определяет перестановку множества точек прообраза $f^{-1}(y_0)$, т.е. перестановку множества из d элементов. Эта перестановка зависит только от гомотопического класса петли и называется *монодромией* пути. Определенный таким образом гомоморфизм $\pi_1(M, y_0) \to S_d$ называется *гомоморфизмом монодромии*, а его образ — *группой монодромии* накрытия. Для разветвленного накрытия монодромия определяется как монодромия соответствующего ему неразветвленного накрытия. Накрывающая поверхность является *связной*, если и только если группа монодромии действует на слое *транзитивно*, т.е. если для любых двух прообразов точки y_0 есть перестановка монодромии, переводящая одну из них в другую.



В частном случае, когда $M \equiv S^2$, монодромия разветвленного накрытия $f : N \to S^2$ полностью определяется набором перестановок прообраза $f^{-1}(y_0)$ точки $y_0 \in S^2$, не являющейся точкой ветвления, задаваемых путями, идущими из точки y_0 в точки ветвления $y_1, \ldots, y_n$. Этот набор перестановок $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ может быть любым — с единственным ограничением $\sigma_n \circ \sigma_{n-1} \cdots \circ \sigma_1 = \mathrm{id}$.



$\gamma_i \in \pi_1(S^2 \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}, y_0)$
$\downarrow$
σ_i — монодромия вдоль петли γ_i

Плоская кривая — это кривая на плоскости. Обычно мы представляем себе вещественную кривую, нарисованную на вещественной плоскости. В этом курсе нас будут интересовать, однако, комплексные кривые на комплексной плоскости. Имея дело с алгебраическими кривыми, естественно рассматривать — как в комплексном, так и в вещественном случае, — кривые на проективной, а не в аффинной, плоскости.

Комплексная проективная плоскость $\mathbb{C}P^2$ определяется как множество троек комплексных чисел, не все из которых равны нулю, рассматриваемых с точностью до умножения на общее ненулевой комплексное число, $\mathbb{C}P^2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$
Мы будем использовать *однородные координаты* $(x : y : z)$ для точек в комплексной проективной плоскости и записывать уравнения кривых в этих координатах. Условие $x \neq 0$ (так же, как и условия $y \neq 0$, $z \neq 0$) определяет открытое подмножество в проективной плоскости, изоморфное аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$. Иногда мы будем записывать уравнения кривых в аффинных координатах (y, z) (соответственно, (x, z), (x, y)), полагая $x = 1$ (соответственно, $y = 1$, $z = 1$).

Тройка комплексных чисел a, b, c, не все из которых равны 0, определяет в $\mathbb{C}P^2$ прямую $ax + by + cz$.

Еще одним примером плоской кривой является квадрика $x^2 + y^2 + z^2$.

Более общим образом, *плоской алгебраической кривой степени d* называется однородный многочлен степени d

$$F(x, y, z) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=d}} a_{i,j,k} x^i y^j z^k,$$

в котором не все коэффициенты $a_{i,j,k}$ равны 0. Каждой плоской алгебраической кривой соответствует множество ее точек $\{(x : y : z) | F(x, y, z) = 0\}$.
Задача. Докажите, что множество точек всякой плоской алгебраической кривой непусто.

Обе кривые на предыдущем слайде являются гладкими. Точка кривой $F(x, y, z) = 0$ называется *гладкой*, если не все частные производные $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z$ обращаются в этой точке в 0. Кривая называется *гладкой*, если все ее точки гладкие. Точки кривой, не являющиеся гладкими, называются *особыми*; кривая, на которой есть особые точки, называется *особой*.

Для прямой $F(x, y, z) = ax + by + cz = 0$ частные производные функции F не зависят от выбранной точки кривой и равны a, b, c; поскольку не все числа a, b, c равны 0, все точки кривой гладкие.

Для квадрики $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0$ частные производные функции F равны $2x, 2y, 2z$; все они равны 0 только если $x = y = z = 0$. Такой точки нет на проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, а значит и на кривой $F = 0$.

$F(x, y, z) = 0$ $\quad z = 1$
$dF \neq 0 \Leftrightarrow df$ $\quad f(x, y) = 0 = F(x, y, 1)$

Согласно теореме о неявной функции, в окрестности своей гладкой точки всякая плоская кривая C допускает параметризацию $\varphi^{-1} : D \to \mathbb{C}P^2$ голоморфным отображением единичного диска, дифференциал которого не обращается в 0. Поэтому гладкая плоская кривая покрывается картами, функции перехода которых имеют положительный определитель, а значит, является ориентируемым вещественным двумерным многообразием.

Квадрика $F(x, y, z) = x^2 + y^2 = 0$ не является гладкой. Она содержит особую точку
Пример особой кривой степени n:

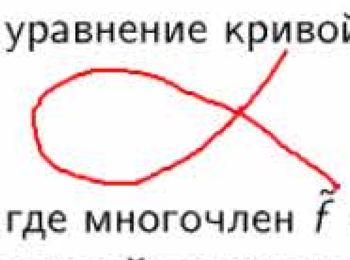
$$F(x, y, z) = \ell_1 \ell_2 \dots \ell_n = 0,$$

где $\ell_1, \dots, \ell_n$ — ненулевые линейные многочлены.

Плоская алгебраическая кривая степени d называется *приводимой*, если однородный многочлен $F = F(x, y, z)$, задающий ее, раскладывается в произведение двух однородных многочленов, степень каждого из которых меньше d, $F = HG$. Если такого разложения не существует, то кривая $F = 0$ называется *неприводимой*.
Если плоская кривая $F = 0$ приводима, $F = GH$, то она является объединением кривых $G = 0$ и $H = 0$. Всякая плоская кривая $F = 0$ представляет собой объединение конечного числа неприводимых кривых. Это представление единственно.
Задача. Докажите, что всякая точка пересечения плоских кривых $G = 0$ и $H = 0$ является особой точкой кривой $GH = 0$.
Задача. Приведите пример плоской алгебраической кривой, множество гладких точек которой пусто.

Пусть $(x_0 : y_0 : z_0)$ — точка пересечения двух плоских алгебраических кривых $G = 0$ и $H = 0$. Эта точка называется *точкой трансверсального пересечения кривых*, если дифференциалы dG и dH линейно независимы (т.е. непропорциональны друг другу) в этой точке. В частности, эта точка должна быть гладкой для обеих кривых.
Точка трансверсального пересечения сохраняется при малом возмущении многочленов G и F.

Пусть $(x_0 : y_0 : z_0)$ — особая точка плоской алгебраической кривой $F = 0$. Выберем систему аффинных координат (X, Y) с центром в этой точке. В этой системе координат уравнение кривой имеет вид



$$aX^2 + bXY + cY^2 + \tilde{f}(X, Y) = 0,$$

где многочлен $\tilde{f}$ содержит мономы степени 3 и выше. Точка $(x_0 : y_0 : z_0)$ называется *точкой трансверсального самопересечения* кривой $F = 0$, если квадратичная часть $aX^2 + bXY + cY^2$ аффинного уравнения кривой невырождена.
В окрестности точки трансверсального самопересечения кривая имеет два гладких *листа*, касательные к которым задаются прямыми, определяемыми разложением

$$aX^2 + bXY + cY^2 = (a_1 X + b_1 Y)(a_2 X + b_2 Y) = 0.$$

Точка трансверсального самопересечения сохраняется при малом возмущении многочлена F.
Задача. Приведите пример неприводимой кривой с точкой трансверсального самопересечения.

Многие свойства плоских алгебраических кривых можно предсказать, а иногда и доказать, рассматривая особые кривые, являющиеся объединениями различных прямых, задаваемых линейными уравнениями.
Например, общий набор прямых $\ell_1 \dots \ell_k = 0$ пересекается с общим набором прямых $\ell_{k+1} \dots \ell_{k+m} = 0$ трансверсально в $k \cdot m$ точках. Первая из этих кривых является плоской алгебраической кривой степени k, вторая — степени m.

Theorem (Bezout)

Гладкая алгебраическая кривая степени k пересекает общую алгебраическую кривую степени m трансверсально в mk точках.

Что означают слова 'общая' в формулировке теоремы?
Пусть $F = 0$ — данная плоская кривая степени k. Множество всех плоских кривых степени m представляет собой проективное пространство.
Задача. Чему равна размерность этого пространства?

Theorem

Плоские кривые степени m, пересекающие данную гладкую плоскую кривую C нетрансверсально, образуют алгебраическую гиперповерхность в проективном пространстве плоских кривых степени m.

Дополнение к алгебраической гиперповерхности в комплексном проективном пространстве связно, поэтому количество точек пересечения кривой, отвечающей точке этого дополнения, с кривой $F = 0$ не зависит от точки дополнения, а значит, равно mk.

Пусть, например, $F = 0$ — прямая; ее степень равна 1. Ее можно параметризовать проективной прямой: $(x_0 + \alpha_t : y_0 + \beta t : z_0 + \gamma t)$.
Для определяния точек пересечения с кривой $G = 0$ степени m сделаем подстановку $G(x_0 + \alpha_t : y_0 + \beta t : z_0 + \gamma t)$. Корни полученного многочлена степени m дяют точки пересечения прямой и кривой. Если все корни простые, то точки пересечения трансверсальны и их количество равно m.

Пусть F — кубическая кривая, G — квадрика, представленные как многочлены от y

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= a_0 y^3 + a_1(x, z) y^2 + a_2(x, z) y + a_3(x, z) \\ G(x, y, z) &= b_0 y^2 + b_1(x, z) y + b_2(x, z) \end{aligned}$$

где a_i, b_i — однородные многочлены степени i.
В точках пересечения $(x_0 : y : z_0)$ кривых $F = 0$ и $G = 0$ эти многочлены имеют общий корень. Значит, существуют многочлены $f_1(y) = u_0 y^2 + u_1 y + u_2$ и $g_1(y) = v_0 y + v_1$, такие, что

$$(a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3)(v_0 y + v_1) \equiv (b_0 y^2 + b_1 y + b_2)(u_0 y^2 + u_1 y + u_2),$$

что дает линейную систему уравнений на коэффициенты v_0, v_1, u_0, u_1, u_2:

$$\begin{aligned} a_0 v_0 &= b_0 u_0 \\ a_1 v_0 + a_1 v_1 &= b_1 u_0 + b_0 u_1 \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Эта система имеет ненулевое решение если и только если невырождена ее матрица

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы называется *результантом* многочленов F и G. Он однороден степени $\deg F \cdot \deg G$, его корни — $(\cancel{x}, z)$-координаты точек пересечения кривых $F = 0$ и $G = 0$.

Теорема Безу утверждает, что общая плоская алгебраическая кривая степени m пересекает данную гладкую алгебраическую плоскую кривую степени k трансверсально в km точках.

Theorem

Пусть две плоские кривые степени n трансверсально пересекаются в n^2 точках. Тогда если для данного числа p, $0 < p < n$, p из этих точек лежат на плоской кривой степени p, то оставшиеся $n(n-p)$ точек лежат на кривой степени $(n-p)$.

Следствие. Если $2n$-угольник вписан в квадрику, то точки пересечения его сторон с четными номерами со сторонами с нечетными номерами лежат на кривой степени $(n-2)$.
Пример. Пусть $n = 3$. Тогда точки пересечения четных сторон вписанного в квадрику 6-угольника с нечетными лежат на одной прямой.

Пусть F, G два однородных многочлена степени d от трех переменных. Однопараметрическое семейство кривых $aF + bG = 0, a, b \in \mathbb{C}$, называется *пучком* кривых. Все кривые пучка проходят через точки пересечения кривых $F = 0$ и $G = 0$ и не имеют других точек пересечения.

Lemma

Пучок кривых степени d, проходящий через данные $D - 1 = d(d+3)/2 - 1$ точек общего положения имеет еще $(d-1)(d-2)/2$ общих точек.

Доказательство. Эти два числа в сумме дают d^2. Если мы зафиксируем $D - 1$ точек общего положения на плоскости, то через них проходит пучок кривых d.

Corollary

Для любых 8 точек общего положения на плоскости существует девятая точка, такая, что всякая кубика, проходящая через первые 8 точек, проходит и через нее.

Теорема Безу утверждает, что общая плоская алгебраическая кривая степени m пересекает данную гладкую алгебраическую плоскую кривую степени k трансверсально в km точках.

Theorem

Пусть две плоские кривые степени n трансверсально пересекаются в n^2 точках. Тогда если для данного числа p, $0 < p < n$, p из этих точек лежат на плоской кривой степени p, то оставшиеся $n(n-p)$ точек лежат на кривой степени $(n-p)$.

Следствие. Если $2n$-угольник вписан в квадрику, то точки пересечения его сторон с четными номерами со сторонами с нечетными номерами лежат на кривой степени $(n-2)$.
Пример. Пусть $n = 3$. Тогда точки пересечения четных сторон вписанного в квадрику 6-угольника с нечетными лежат на одной прямой.

$\mathbb{C}P^1 \cong S^2$

Построим явную рациональную параметризацию окружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Начало координат $(0,0)$ лежит на этой окружности; всякая проходящая через него прямая имеет вид $y = tx$. Подставив в уравнение окружности, получаем

$$(x-1)^2 + t^2x^2 = 1, \text{ или } x^2 - 2x + 1 + t^2x^2 = 1, \text{ или } x((1+t^2)x - 2) = 0.$$

Поэтому либо $x = 0$, либо $x = \frac{2}{1+t^2}$. В первом случае $y = 0$ и точка пересечения прямой с окружностью это начало координат. Во втором случае $y = \frac{2t}{1+t^2}$. Эти рациональные функции (отношения двух многочленов) задают изоморфизм комплексной проективной прямой на квадрику в проективной плоскости.
Задача. Найдите рациональную параметризацию произвольной квадрики на плоскости (например, показав, что любая квадрика подходящей проективной заменой координат переводится в указанную).

$$x' = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \qquad y' = \frac{2(1+t^2) - 4t}{(1+t^2)^2}$$

Плоские кривые степени старше 2 могут допускать рациональную параметризацию только, если у них есть особенности.

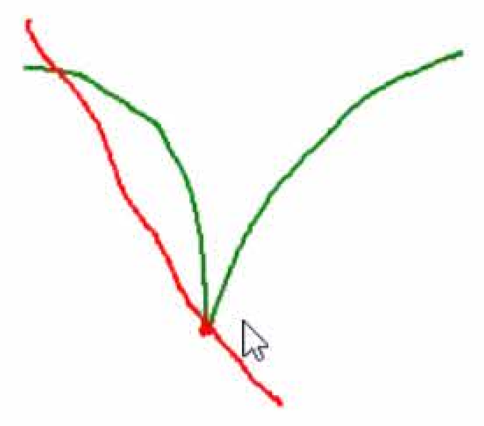
Lemma

Неприводимая плоская кубическая кривая может иметь не более одной особой точки.

Доказательство. Если у кривой есть две особых точки, то проведем через них прямую. Сумма кратностей точек пересечения этой прямой с кубикой не меньше 4, что противоречит теореме Безу.

Lemma

Кубика с особой точкой допускает рациональную параметризацию.



$y^3 = x^2$
$y = tx$
$t^3x^3 = x^2$
$x = \frac{1}{t^3}$
$y = \frac{1}{t^2}$

Theorem

Плоская неприводимая алгебраическая кривая степени d не может иметь больше $D = (d-1)(d-2)/2$ особых точек.

Доказательство. Пусть на кривой степени d есть больше, чем D особых точек. Возьмем $D + 1$ таких точек и добавим к ним еще $d - 3$ точек кривой. Через полученные $(d-1)(d-2)/2 + 1 + (d-3) = (d+1)(d-2)/2$ точек проходит кривая степени $d - 2$. Кратность ее пересечения с исходной кривой не меньше, чем $(d-1)(d-2) + 2 + (d-3) = d(d-2) + 1$, что противоречит теореме Безу.

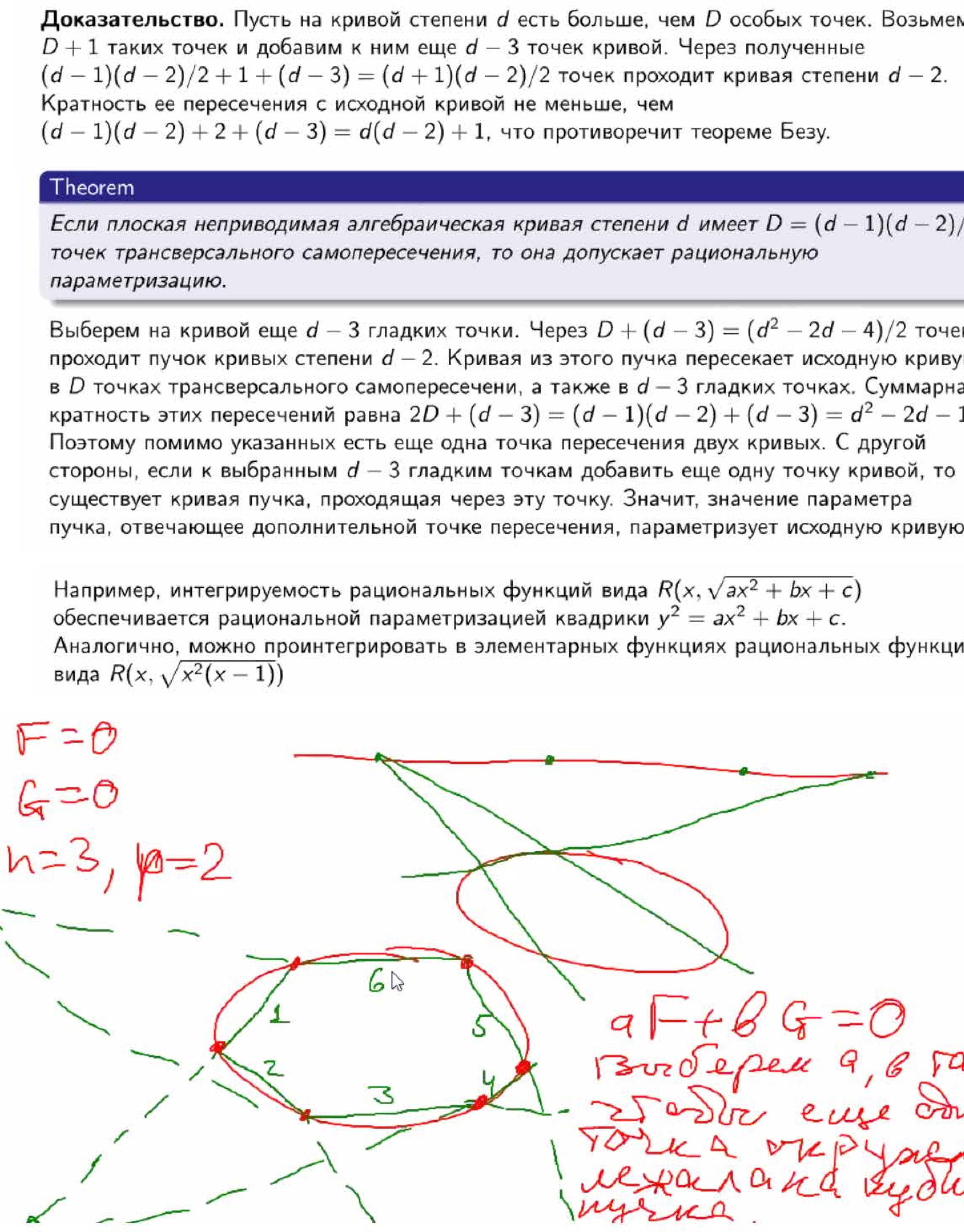
Theorem

Если плоская неприводимая алгебраическая кривая степени d имеет $D = (d-1)(d-2)/2$ точек трансверсального самопересечения, то она допускает рациональную параметризацию.

Выберем на кривой еще $d - 3$ гладких точки. Через $D + (d-3) = (d^2 - 2d - 4)/2$ точек проходит пучок кривых степени $d - 2$. Кривая из этого пучка пересекает исходную кривую в D точках трансверсального самопересечения, а также в $d - 3$ гладких точках. Суммарная кратность этих пересечений равна $2D + (d-3) = (d-1)(d-2) + (d-3) = d^2 - 2d - 1$. Поэтому помимо указанных есть еще одна точка пересечения двух кривых. С другой стороны, если к выбранным $d - 3$ гладким точкам добавить еще одну точку кривой, то существует кривая пучка, проходящая через эту точку. Значит, значение параметра пучка, отвечающее дополнительной точке пересечения, параметризует исходную кривую.

Например, интегрируемость рациональных функций вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ обеспечивается рациональной параметризацией квадрики $y^2 = ax^2 + bx + c$. Аналогично, можно проинтегрировать в элементарных функциях рациональных функций вида $R(x, \sqrt{x^2(x-1)})$

$F = 0$
$G = 0$
$n = 3, p = 2$



$aF + bG = 0$
Выберем a, b так, чтобы еще одна точка окружности лежала на кубике пучка.

- Рассмотрим все кривые степени d, проходящие через данные $dp - (p-1)(p-2)/2$ точек данной кривой степени p, $p < d$. Тогда все они имеют еще $(p-1)(p-2)/2$ общих точек, причем эти точки также ледат на данной кривой степени p.
- Пусть $k > d$, $k > p$ и $k < d + p - 3$. Тогда любая кривая степени k, проходящая через

$$dp - \frac{(d+p-k-1)(d+p-k-2)}{2}$$

точек пересечения данной кривой степени d и данной кривой степени p, проходит и через остальные точки их пересечения.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: комплексная структура на кривой

До сих пор мы имели дело только с плоскими алгебраическими кривыми. Общая *риманова поверхность* (или *комплексная кривая*) это двумерная ориентируемая поверхность с комплексной структурой на ней. *Комплексной структурой* на двумерной поверхности называется ее покрытие открытыми дисками вместе с гомеоморфизмами этих дисков на единичный круг на комплексной прямой $\{(U_i, \varphi_i : U_i \to D)\}$, обладающее следующим свойством: если два диска U_i и U_j пересекаются, то композиция $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, определенная на прообразе относительно φ_i пересечения этих дисков, является голоморфным (т.е. комплексно аналитическим) отображением.

Для гладкой плоской алгебраической кривой комплексная структура определяется в согласии с теоремой о неявной функции. В каждой точке кривой $F(x, y, z) = 0$ какая либо из частных производных многочлена F отлична от 0, а значит соответствующая переменная служит локальным параметром в окрестности этой точки. Таким образом мы получаем покрытие плоской кривой подходящими окрестностями ее точек.

Для гладкой плоской алгебраической кривой комплексная структура определяется в согласии с теоремой о неявной функции. В каждой точке кривой $F(x, y, z) = 0$ какая либо из частных производных многочлена F отлична от 0, а значит соответствующая переменная служит локальным параметром в окрестности этой точки. Таким образом мы получаем покрытие плоской кривой подходящими окрестностями ее точек.

Аналогично вводится комплексная структура на гладкой алгебраической кривой в проективном пространстве произвольной размерности. Пусть $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — проективные координаты в $\mathbb{C}P^n$, Подмножество $C \subset \mathbb{C}P^n$ называется *гладкой алгебраической кривой*, если у любой точки множества C существует окрестность, в которой это подмножество задается набором однородных полиномиальных уравнений $F_1(x_0, \dots, x_n) = 0, \dots, F_{n-1}(x_0, \dots, x_n) = 0$, причем ранг матрицы Якоби этого набора равен $n - 1$.

Голоморфное отображение кривых $f : C_1 \to C_2$ это отображение, уважающее комплексную структуру. Если точка $A \in C_1$ покрыта окрестностью $(U, \varphi : U \to D)$, а точка $B = f(A \in C_2)$ покрыта окрестностью $(V, \psi : V \to D)$, то отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ должно быть комплексно аналитическим там, где оно определено.
С топологической точки зрения голоморфное отображение комплексных кривых является разветвленным накрытием.

Theorem (Принцип максимума для голоморфных отображений)

Пусть $f : C_1 \to C_2$ — непостоянное голоморфное отображение компактной комплексной кривой C_1 в связную компактную комплексную кривую C_2. Тогда его образ совпадает со всей кривой C_2.

Действительно, образ отображения f компактен. Если он не совпадает с кривой C_2, то дополнение к нему открыто. Возьмем точку на границе образа. Любая ее окрестность пересекает дополнение к образу. В то же время, на кривой C_1 существует точка, переходящая в выбранную точку границы. Маленький диск вокруг этой точки переходит в открытое множество в C_2, которое поэтому пересекается с дополнением к образу отображения f, и мы приходим к противоречию.

Воспользуемся голоморфными отображениями для вычисления рода гладких плоских алгебраических кривых.
Начнем с вычисления рода *какой-нибудь* гладкой плоской кривой данной степени d. Одной из наиболее популярных кривых является *кривая Ферма*, задаваемая уравнением $F(x, y, z) = x^d + y^d + z^d = 0$. Эта кривая гладкая. Действительно, все частные производные многочлена F обращаются в 0 только, если $x = y = z = 0$, а такой точки на проективной плоскости нет. Рассмотрим отображение φ этой кривой в проективную прямую $\mathbb{C}P^1$, заданное отображением проколотой в точке $(0 : 0 : 1)$ проективной плоскости $(x : y : z) \mapsto (x : y)$. Отметим, что точка прокола не лежит на кривой Ферма.

Критическими точками проекции φ являются те точки кривой Ферма, в которых $z = 0$. Их d штук. Это точки $(1 : \varepsilon_d^i : 0)$, где ε_d — примитивный корень из -1 степени d, а $i = 0, 1, \dots, d - 1$. Такая критическая точка при отображении φ переходит в критическое значение $(1 : \varepsilon_d^i)$. У каждого такого критического значения один прообраз; все остальные точки проективной прямой имеют ровно d прообразов. По теореме Римана–Гурвица эйлерова характеристика накрывающей кривой равна

$$\chi = d \cdot (2 - d) + d = d \cdot (3 - d).$$

Поэтому ее род равен

$$\frac{2 - \chi}{2} = \frac{2 - d(3 - d)}{2} = \frac{(d - 1)(d - 2)}{2}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для *общей кривой* степени d. Без ограничения общности можно считать, что кривая не проходит через точку $(0 : 0 : 1)$. Проекция вдоль оси z определяет голоморфное отображение кривой в проективную прямую, являющееся разветвленным накрытием сферы степени d. Критические точки этого отображения — это решения системы уравнений $F = 0, \partial F/\partial z = 0$, т.е. точки пересечения кривой степени d и кривой степени $d - 1$. В общем положении эти две кривые имеют $d(d - 1)$ точек трансверсального пересечения, и каждая из этих точек является простой точкой ветвления разветвленного накрытия. Поэтому эйлерова характеристика накрывающей поверхности равна

$$\chi = d \cdot (2 - d(d - 1)) + d(d - 1)^2 = d(d - 3),$$

как и в случае кривой Ферма. Тем самым, справедлива

Theorem

Род гладкой плоской кривой степени d равен $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

В частности, род гладкой плоской кривой не может принимать других значений кроме $0, 1, 3, 6, 10, 15, \dots$.

Вот еще одно доказательство этой теоремы. Пространство плоских кривых степени d это проективное пространство. Особые кривые задаются такими многочленами F, что существуют точки $(x : y : z)$, в которых $F = 0, \partial F/\partial x = 0, \partial F/\partial y = 0, \partial F/\partial z = 0$. Из этой системы уравнений первое можно исключить благодаря формуле Эйлера, а из остальных трех исключить поочередно z, y и x. Останется одно полиномиальное уравнение от коэффициентов многочлена F, которое выделяет в пространстве многочленов степени d гиперповерхность уравнений особых кривых. Дополнение к этой гиперповерхности связно и состоит из гладких кривых. Поскольку род кривой — непрерывная функция ее коэффициентов, он одинаков для всех гладких кривых. Поэтому его достаточно вычислить у одной кривой.

Вот еще одна гладкая плоская кривая степени d, род которой просто вычисляется. Рассмотрим аффинную кривую $\ell_1 \cdot \dots \cdot \ell_d = \varepsilon$, где линейные многочлены $\ell_1, \dots, \ell_d$ задают набор прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку. При малых ненулевых значениях ε это гладкая кривая. При $\varepsilon = 0$ это особая кривая, представляющая собой объединение d проективных прямых (двумерных сфер), любые две из которых пересекаются трансверсально по одной точке. Добавляем поочередно по одной прямой и сглаживаем точки пересечения. Шаг индукции состоит в доказательстве того, что добавление прямой, пересекающей гладкую кривую в $d - 1$ точке, с последующим сглаживанием в окрестности каждой точки пересечения, увеличивает род гладкой кривой на $d - 2$. Поэтому род сглаженной кривой будет равен

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (d - 2) = \frac{(d - 1)(d - 2)}{2}.$$

Рассуждение, позволяющее вычислить род гладкой плоской кривой данной степени d, позволяет подсчитать и число касательных, которые можно к ней провести через данную точку.

Lemma

Через данную общую точку вне кривой можно провести $d(d - 1)$ касательных к данной гладкой кривой степени d.

Действительно, пучок прямых, проходящих через данную точку, определяет отображение данной кривой в проективную прямую: каждой точке кривой сопоставляется прямая, соединяющая ее с данной. Точки касания — критические точки этого отображения. Число критических точек у общего голоморфного отображения степени d кривой степени d в проективную прямую мы уже подсчитали.

При стремлении точки, из которой мы проводим касательные, к общей точке кривой, две проходящие через нее касательные сливаются в одну — касательную к кривой в предельной точке.

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} \cdot \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta} \in \mathbb{C}P^1.$$

Corollary

Через общую точку на гладкой плоской кривой можно провести к этой кривой $d(d - 1) - 2$ касательных (не считая касательной в этой точке).

Мы определяли кривую в n-мерном проективном пространстве как подмножество в этом пространстве, которое можно задать набором из $n-1$ независимых полиномиальных уравнений в окрестности каждой ее точки. Как получить такое подмножество?
Один из способов — отобразить кривую в пространство. Например, отображение

$$(u:v) \mapsto (u^3 : u^2v : uv^2 : v^3)$$

проективной прямой в проективное пространство $\mathbb{C}P^3$ задает в нем *скрученную кубику*. Скрученная кубика является алгебраической кривой: в окрестности каждой своей точки она задается двумя из трех уравнений $z_0z_3 = z_1z_2$, $z_1^2 = z_0z_2$, $z_2^2 = z_1z_3$. В то же время, любые два из этих уравнений задают, помимо скрученной кубики, выделяют еще прямую. Например, первые два уравнения выделяют прямую $z_0 = z_1 = 0$. Эта прямая пересекает скрученную кубику в точке $(0:0:0:1)$.

Степень алгебраической кривой в проективном пространстве нельзя определить как степень задающего ее многочлена, поскольку кривую нельзя задать одним уравнением. Однако второе определение степени работает.

Степень алгебраической кривой в проективном пространстве нельзя определить как степень задающего ее многочлена, поскольку кривую нельзя задать одним уравнением. Однако второе определение степени работает.

Definition

Степенью кривой в проективном пространстве называется количество точек ее пересечения с общей гиперплоскостью.

Общая гиперплоскость пересекает кривую трансверсально, и кратность всех точек пересечения равна 1. Как и в плоском случае, количество точек пересечения с общей гиперплоскостью мы можем заменить количеством точек пересечения с произвольной гиперплоскостью, если будем учитывать их кратность.
Задача. Чему равна степень скрученной кубики? (3)

Степень можно определить не только у кривой, но и у гладкого алгебраического подмногообразия любой размерности в проективном пространстве.

Definition

Подмножество $X \subset \mathbb{C}P^n$ называется *гладким алгебраическим подмногообразием коразмерности* k, если для любой его точки $x \in X$ существует такой набор из k однородных многочленов $F_1, \dots, F_k$, что X в некоторой окрестности точки x задается набором уравнений $F_1 = \dots = F_k = 0$ и дифференциалы $dF_1, dF_2, \dots, dF_k$ линейно независимы в точке x (а значит, и в некоторой ее окрестности).

Theorem (Теорема Безу)

Пусть F, G — однородные многочлены от четырех переменных и X — кривая, заданная уравнениями $F = G = 0$, причем в каждой ее точке дифференциалы dF и dG линейно независимы. Тогда степень кривой X равна произведению степеней многочленов F и G.

Разумеется, аналогичная теорема верна для гладких алгебраических многообразий, заданных трансверсальным пересечением произвольного набора гиперповерхностей в комплексном проективном пространстве произвольной размерности. Она носит (ко)гомологический характер. Кольцо когомологий $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ порождено классом h гиперплоскости, причем $h^{n+1} = 0$. Гиперповерхность степени d представляет класс когомологий $d \cdot h$, а алгебраическое подмногообразие X коразмерности k представляет класс когомологий $\deg X \cdot h^k$.
Это означает, в частности, что скрученную кубику нельзя представить в виде трансверсального пересечения двух гиперповерхностей в $\mathbb{C}P^3$. Если бы это можно было сделать, то эти гиперповерхности должны были бы иметь степени 1 и 3, т.е. кубика лежала бы на плоскости, а это не так (она "скрученная").

Пусть $F(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, $G(z_0, z_1, z_2, z_3) = a_0z_0^2 + a_1z_1^2 + a_2z_2^2 + a_3z_3^2$ — два однородных многочлена степени 2 от 4 переменных. Поверхность $F = 0$ гладкая, и при общем значении параметров a_i поверхность $G = 0$ тоже гладкая и пересекает поверхность $F = 0$ трансверсально. Вычислим род кривой, являющейся пересечением этих поверхностей.
Рассмотрим проекцию кривой пересечения из точки $(0:0:0:1)$, т.е. отображение $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \mapsto (z_0 : z_1 : z_2)$. Это отображение переводит пересечение квадрик в конику $a_0z_0^2 + a_1z_1^2 + a_2z_2^2 = a_3(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2)$ и является разветвленным накрытием кратности 2. У этого отображения 4 точки ветвления (все они простые).
Таким образом, накрывающая кривая имеет род 1. Поскольку условие нетрансверсальности пересечения выделяет в пространстве пар квадрик гиперповерхность, трансверсальное пересечение любых двух квадрик в проективном пространстве имеет род 1.

Любую гладкую кривую в проективном пространстве размерности больше 3 можно биголоморфно спроектировать в проективное пространство меньшей размерности.

Theorem (Whitney)

Всякую алгебраическую кривую можно вложить в $\mathbb{C}P^3$.

Доказательство. Пусть $C \subset \mathbb{C}P^n$ — гладкая алгебраическая кривая, $n \geq 4$. Рассмотрим многообразие в $\mathbb{C}P^n$, являющееся замыканием множества точек, лежащих на хордах кривой C, т.е. прямых, соединяющих пары ее точек. Это подмногообразие имеет размерность 3, а значит содержит не все точки пространства $\mathbb{C}P^n$. Поэтому есть точка, проектирование из которой осуществляет биголоморфное отображение кривой C в кривую в проективном пространстве меньшей размерности.

Кривую в проективном пространстве $\mathbb{C}P^3$ можно спроектировать в кривую на плоскости, но эта проекция уже не обязательно будет биголоморфизмом.

Theorem

Пусть $C \subset \mathbb{C}P^3$ — гладкая алгебраическая кривая. Тогда в $\mathbb{C}P^3$ существует точка, образ проекции кривой C из которой — погруженная кривая.

Плоская кривая называется *погруженной* (или *нодальной*), если ее единственные особенности — точки двойного трансверсального самопересечения (*узлы*, *ноды*).
Доказательство. Исключительными направлениями проектирования являются касательные к кривой C и тройные секущие. Замыкание множества точек, лежащих на этих прямых — двумерное подмногообразие в $\mathbb{C}P^3$, поэтому в пространстве есть точки, не лежащие на нем.
Гладкая кривая, невырожденное голоморфное отображение которой в нодальную плоскую кривую взаимно-однозначно на дополнении к множеству двойных точек, называется *нормализацией* этой нодальной кривой. Теорема означает, что всякая гладкая алгебраическая кривая является нормализацией некоторой нодальной плоской кривой.

При проектировании из общей точки степень кривой остается неизменной.

Theorem

Пусть δ — количество двойных точек плоской нодальной кривой степени d. Тогда род нормализации этой кривой равен $(d-1)(d-2)/2 - \delta$.

Доказательство. Пусть нодальная кривая имеет в аффинной карте уравнение $f = 0$, причем обе касательные к кривой в двойной точке невертикальны. Эта кривая пересекается с кривой $\partial f/\partial y$ по $d(d-1)$ точкам с учетом кратности. Каждая из δ двойных точек является точкой пересечения кратности 2 кривых $f = 0$ и $\partial f/\partial y = 0$ (по одной точке на каждой из ветвей). Поэтому на кривой $f = 0$ имеется $d(d-1) - 2\delta$ точек ветвления проекции на ось x. По формуле Римана–Гурвица

$$d(d-1) - 2\delta = 2d + 2g - 2,$$

откуда

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta.$$

Рациональная нормальная кривая в $\mathbb{C}P^n$
$(u:v) \longmapsto (u^n : u^{n-1}v : u^{n-2}v^2 : \dots : v^n)$

- Постройте нормализацию плоской кривой
$$y^2z^2 - x^2(z^2 - x^2) = 0.$$
- Представьте рациональную нормальную кривую в $\mathbb{C}P^4$ в виде пересечения гиперповерхностей.
- Докажите, что любая рациональная кривая степени 3 в проективном пространстве, не лежащая ни в какой гиперплоскости, переводится в скрученную кубику проективным преобразованием пространства.

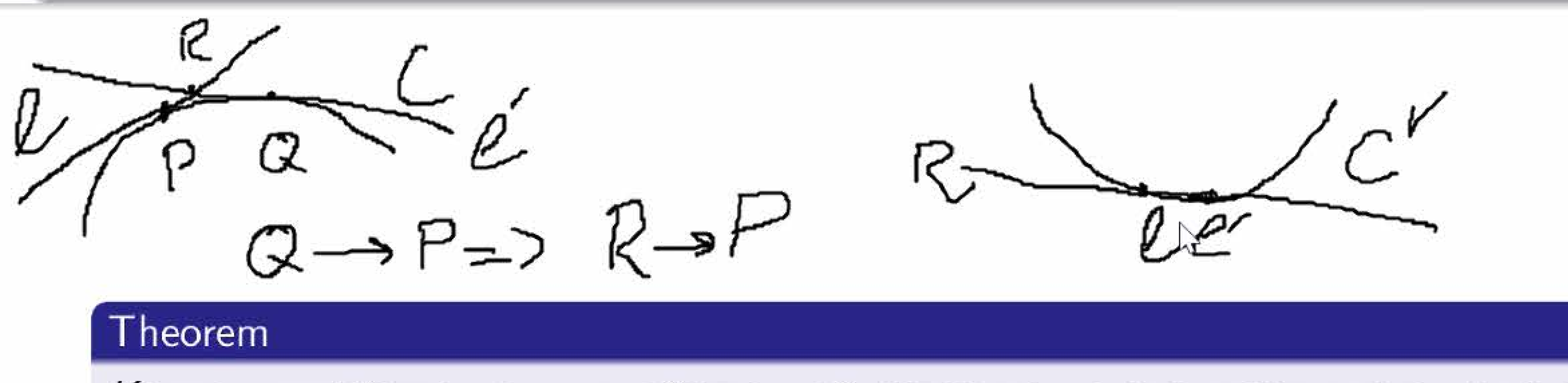
Любая кривая степени 3 в $\mathbb{C}P^3$, никакие 4 точки которой не лежат ни в какой гиперплоскости.

Каждая плоская алгебраическая кривая определяет другую алгебраическую кривую, которая лежит в двойственной проективной плоскости. Как хорошо известно, *двойственным векторным пространством* к данному векторному пространству $V = \mathbb{C}^n$ называется пространство линейных функционалов $V^\vee = \{f : V \to \mathbb{C}\}$ на V.
Проективизация $PV^\vee$ двойственного пространства называется *двойственным проективным пространством* к проективизированному пространству PV.
В свою очередь, каждой точке $v \in V$ пространства V соответствует линейный функционал на двойственном пространстве $V^\vee$: мы полагаем $v(f) = f(v)$. Это соответствие отождествляет V с $(V^\vee)^\vee$ и, в свою очередь, PV с $(PV^\vee)^\vee$.

Каждой точке f двойственного проективного пространства $PV^\vee$ соответствует гиперплоскость в пространстве V. Эта гиперплоскость состоит из нулей функционала f, определенного с точностью до умножения на ненулевую константу.
В частности, точки проективной плоскости, двойственной к данной, находятся во взаимно-однозначном соответствии с прямыми на исходной плоскости.

Definition

Пусть $C \subset \mathbb{C}P^2$ — плоская алгебраическая кривая. Двойственной кривой $C^\vee$ в двойственной проективной плоскости называется кривая, образованная касательными к кривой C.



Theorem

Кривая, двойственная к двойственной, естественно отождествляется с исходной кривой, $(C^\vee)^\vee = C$.

Theorem

Кривая двойственная к гладкой алгебраической является алгебраической.

Доказательство. Каждой алгебраической кривой $C \subset \ PV = \mathbb{C}P^2$ можно сопоставить кривую $\hat{C}$ в произведении $PV \times PV^\vee$ проективной плоскости и двойственной к ней, состоящую из пар (точка кривой C, касательная к C в этой точке). Кривая $\hat{C}$ называется *конормальной разверткой* кривой C; она алгебраическая. Действительно, если $F(x, y, z) = 0$ — уравнение кривой C, то касательная к ней в точке $(x_0 : y_0 : z_0)$ имеет вид

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Поэтому конормальную развертку можно задать уравнениями

$$a = \partial F/\partial x, \qquad b = \partial F/\partial y, \qquad c = \partial F/\partial z, \qquad F = 0,$$

причем последнее уравнение можно заменить более простым $ax + by + cz = 0$, поскольку многочлен F однороден. (Здесь $(a : b : c)$ — проективные координаты в двойственной проективной плоскости.)

Уравнения конормальной развертки имеют вид

$$\begin{aligned} a + 3x^2 - \alpha z^2 &= 0 \\ b - 2yz &= 0 \\ c - y^2 - 2\alpha xz &= 0 \\ ax + by + cz &= 0. \end{aligned}$$

Выражая y из второго уравнения и подставляя результат в первое и третье, получаем систему

$$\begin{aligned} 4a^3z^2 - 4\alpha a^2z^4 + 12c^4z^4 + 3b^4 &= 0 \\ bc^2 - 4acz^2 - 4\alpha b^2z^2 - 8\alpha cz^4 &= 0. \end{aligned}$$

Наконец, исключая z, получаем уравнение двойственной кривой

$$4a^3c^3 + 27b^2c^4 - \alpha(\alpha a^4b^2 + 24\alpha ab^4c + 30a^2b^2c^2 + 4a^5c + 4\alpha^2b^6) = 0.$$

Это кривая степени 6. Степень $d^\vee$ двойственной кривой $C^\vee$ называется *классом* плоской алгебраической кривой C.
При $\alpha = 0$ уравнение двойственной кривой вырождается в уравнение $c^3(4a^3 + 27b^2c) = 0$.
Прямая $c = 0$ является "лишней", и двойственной кривой к полукубической параболе $x^3 = y^2z$ является полукубическая парабола $4a^3 + 27b^2c = 0$. В частности, класс полукубической параболы равен 3.

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Theorem

Класс гладкой плоской алгебраической кривой степени d равен $d(d-1)$.

Corollary

Кривая, двойственная гладкой плоской алгебраической кривой степени $d \geq 3$, не может быть гладкой.

Доказательство теоремы. Степень двойственной кривой это число точек ее пересечения с общей прямой в двойственной проективной плоскости. Прямая в двойственной проективной плоскости состоит из прямых в исходной плоскости, проходящих через данную точку. Как мы знаем, из данной общей точки вне кривой к плоской алгебраической кривой степени d можно провести $d(d-1)$ касательных. Они и являются точками пересечения прямой с двойственной кривой.
Доказательство следствия. Если бы двойственная кривая была гладкой, то двойственная к ней кривая не могла бы иметь степень d.

Особенности у кривой, двойственной к данной общей гладкой кривой, бывают двух различных типов. Особенности первого типа соответствуют двойным касательным к исходной кривой. Эти особенности — точки самопересечения двойственной кривой. Особенности второго типа отвечают точкам перегиба исходной кривой. Как мы видели для случая полукубической параболы, эти особенности — точки возврата (каспы).

Особенности у кривой, двойственной к данной общей гладкой кривой, бывают двух различных типов. Особенности первого типа соответствуют двойным касательным к исходной кривой. Эти особенности — точки самопересечения двойственной кривой. Особенности второго типа отвечают точкам перегиба исходной кривой. Как мы видели для случая полукубической параболы, эти особенности — точки возврата (каспы).

Theorem

Кривая, двойственная общей гладкой плоской алгебраической кривой степени d, имеет $3d(d-2)$ каспов.

Действительно, на общей гладкой кривой степени d есть $3d(d-2)$ точек перегиба.

Полученные результаты позволяют вычислить количество точек самопересечения двойственной кривой, т.е. количество двойных касательных к исходной кривой.

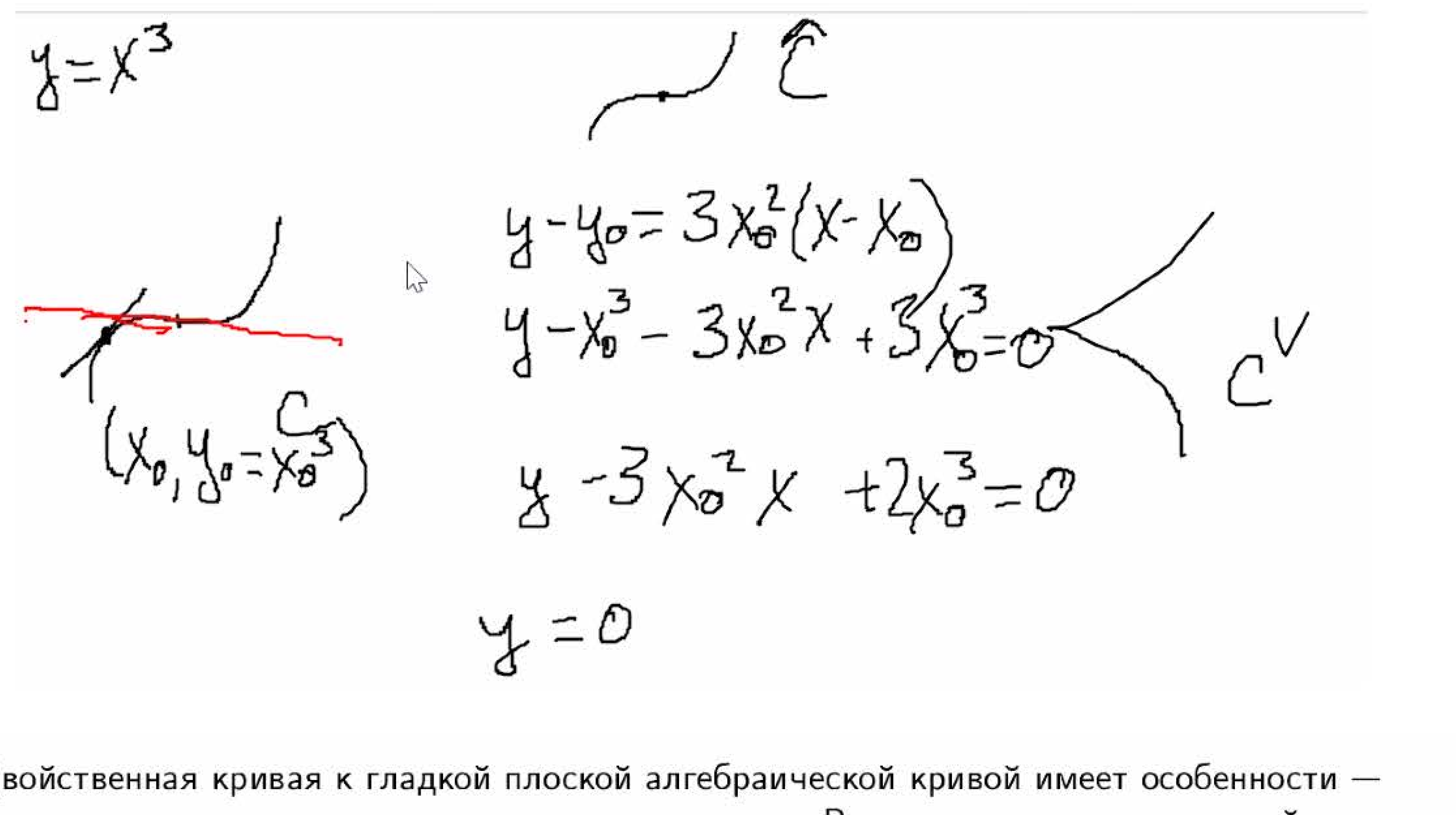
Theorem

Количество двойных касательных к общей гладкой плоской алгебраической кривой степени d равно

$$\frac{1}{2}d(d-2)(d-3)(d+3).$$

В частности, у кубической кривой нет двойных касательных (что мы и так знали), а у кривой степени $d = 4$ их 28.
Доказательство. Каждое самопересечение и каждый касп понижают род (нормализации) кривой на 1. Род конормальной развертки $\hat{C}$ совпадает с родом кривой C и равен $(d-1)(d-2)/2$. Поэтому количество двойных точек на двойственной кривой равно

$$\frac{1}{2}((d(d-1)-1)(d(d-1)-2) - \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - 3d(d-2) \quad = \quad \frac{1}{2}d(d-2)(d-3)(d+3).$$



Двойственная кривая к гладкой плоской алгебраической кривой имеет особенности — точки простого самопересечения и точки возврата. В свою очередь, кривая двойственная к ней — гладкая. Не расширяя списка допустимых особенностей, можно распространить формулы Плюккера на более широкую ситуацию, когда не только двойственной кривой, но и исходной разрешается иметь точки двойного самопересечения и точки возврата. Конормальная развертка $\hat{C}$ при этом остается гладкой.

Theorem

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} d^\vee &= d(d-1) - 2\delta - 3\kappa \\ d &= d^\vee(d^\vee - 1) - 2\delta^\vee - 3\kappa^\vee \\ \kappa^\vee &= 3d(d-2) - 6\delta - 8\kappa \\ \kappa &= 3d^\vee(d^\vee - 2) - 6\delta^\vee - 8\kappa^\vee. \end{aligned}$$

Эти четыре равенства не являются независимыми. Любое из них является следствием остальных трех.

Доказывать формулы Плюккера можно так же, как и для гладкой кривой C. Следующее рассуждение, однако, носит более общий характер и проясняет геометрическую природу формул. Рассмотрим однопараметрическое семейство $F_t(x, y, z)$ однородных многочленов степени d, являющееся деформацией многочлена F_0, такое, что кривая $F_t = 0$ является неособой при малых t, отличных от 0. Из точки $P \in \mathbb{C}P^2$ общего положения можно провести $d(d-1)$ касательных к кривой $C_t = \{(x : y : z) | F_t(x, y, z) = 0\}$, $t \neq 0$. При $t \to \infty$ часть из этих касательных стремятся к касательным к кривой C, в то время как остальные стремятся к прямым, соединяющим P с точками самопересечения и каспами кривой C ("исчезают" в этих точках). Аналогично, некоторые точки перегиба кривых C_t стремятся к точками перегиба кривой $C = C_0$, тогда как остальные стремятся к ее особым точкам.

Lemma

В общем положении

- *в точке простого самопересечения кривой C исчезает две касательные из данной точки и три точки перегиба кривых C_t;*
- *в точке возврата кривой C исчезает три касательные из данной точки и восемь точек перегиба кривых C_t.*

Мы знаем, что гладкая плоская кубика имеет род 1, т.е. является эллиптической кривой. Наша цель — доказать обратное утверждение.

Theorem

Всякая эллиптическая кривая реализуется некоторой гладкой плоской кубикой.

Для доказательства мы построим вложение эллиптической кривой E, представленной в виде $E = \mathbb{C}/L$, где L — некоторая решетка в $\mathbb{C}$, в плоскость, образ которого имеет степень 3. (Точнее говоря, мы построим вложение, образ которого гладкий, — такой образ неизбежно будет иметь степень 3.)
Для построения вложения нам потребуются две мероморфные функции на E; одна из них будет функцией степени 2, вторая будет иметь степень 3. Напомним, что все голоморфные функции на E постоянны, поэтому для построения отображений кривой они бесполезны — приходится пользоваться мероморфными функциями. Кроме того на E нет мероморфных функций степени 1, поэтому 2 — минимально возможная степень мероморфной функции.

Пусть решетка $L \subset \mathbb{C}$ порождена двумя $\mathbb{R}$-линейно независимыми векторами ω_1, ω_2, $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$; координату в $\mathbb{C}$ обозначим через z. Положим

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Lemma

Функция P_L является корректно определенной мероморфной функцией на $\mathbb{C}$. Она инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L и опускается до мероморфной функции степени 2 на эллиптической кривой $E = \mathbb{C}/L$, имеющей единственный полюс порядка 2 в нуле.

Функция P_L называется *функцией Вейерштрасса* кривой $\mathbb{C}/L$ и обозначается специальной буквой $\wp$ с индексом L.

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \leq C_1 \sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$$

Доказательство. На любом компакте, не содержащем точек решетки L, ряд, определяющий функцию P_L, сходится абсолютно и равномерно:

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{2z\omega - z^2}{\omega^2 (z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^3} \frac{2z - z^2\omega^{-1}}{(z\omega^{-1} - 1)^2}.$$

Учитывая, что при достаточно большом $|\omega|$

$|\omega| = R$

$$\frac{2z - z^2\omega^{-1}}{(z\omega^{-1} - 1)^2} \approx 2z$$

$R + \frac{1}{2}$

$R - \frac{1}{2}$

0

заключаем, что для каждого $z \notin L$ найдется $C > 0$, т.ч.

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| < \frac{C}{\omega^3} \qquad \forall \omega \in L \setminus \{0\}.$$

Ряд $1/\omega^3$ на решетке сходится (число элементов решетки с данным $|\omega|$ линейно по $|\omega|$):

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Производная функции P_L имеет вид

$$P_L'(z) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Она, очевидно, инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L. Поэтому при сдвиге на элемент решетки к P_L прибавляется некоторая константа c. Подставляя $z = \pm\omega_1/2$, получаем $P_L(\omega_1/2) = P_L(-\omega_1/2) + c$, откуда $c = 0$ в силу (очевидной) четности функции P_L. Теорема доказана.

Theorem

Функция Вейерштрасса удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(\wp_L')^2 = 4\wp_L^3 - g_2\wp_L - g_3$$

для некоторых констант g_2, g_3, определяемых решеткой L.

Доказательство. Поскольку

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)^2 = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots,$$

имеет место разложение в ряд в окрестности точки $z = 0$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\omega}\right)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \left(2\frac{z}{\omega} + 3\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 + \dots \right), \qquad \omega \neq 0.$$

Суммируя по всем ненулевым векторам решетки L, получаем разложение

$$\wp_L(z) = z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots,$$

где $G_k = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \omega^{-k}$ (для нечетных k сумма равна 0 в силу симметрии).

$$\begin{aligned}
\wp_L(z) &= z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots, \\
(\wp_L(z))^2 &= z^{-4} + 6G_4 + \dots, \\
(\wp_L(z))^3 &= z^{-6} + 9G_4 z^{-2} + 15G_6 + \dots, \\
\wp_L'(z) &= -2z^{-3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots, \\
(\wp_L'(z))^2 &= 4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6 + \dots.
\end{aligned}$$

$$(4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6) - \left((4z^{-6} + 36G_4 z^{-2} + 60G_6) - (60G_4 z^{-2} + \dots) - 140G_6\right)$$

Из этих разложений вытекает, что разложение функции

$$(\wp_L'(z))^2 - (4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6) \equiv 0$$

начинается не ранее, чем с члена z^2 (отметим, что эта функция четна). Тем самым, она мероморфна и не имеет полюсов на E, равна 0 при $z = 0$, а значит равна нулю тождественно. Полагаем $g_2 = 60G_4, g_3 = 140G_6$. Теорема доказана.

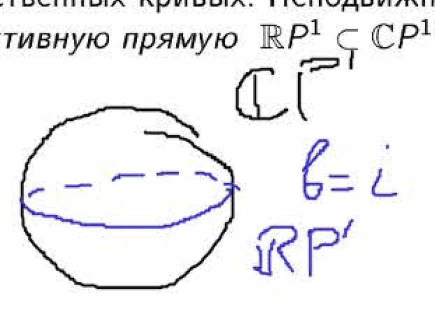
Функция $\wp_L : E \to \mathbb{C}P^1$ имеет степень 2 и осуществляет эллиптическое накрытие проективной прямой. Отображение $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ осуществляет биголоморфизм кривой E на гладкую плоскую кубику

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Замечание. Считая, что решетка L порождена векторами 1 и $\tau, \Im\tau > 0$, мы превращаем функции $G_4 = \sum'(m + n\tau)^{-4}, G_6 = \sum'(m + n\tau)^{-6}$ в функции точки τ в верхней полуплоскости. Эти функции являются примерами *модулярных форм* (*весов* 4 и 6 соответственно).

На проективной прямой имеется естественное антиголоморфное отображение — комплексное сопряжение $\sigma : z \mapsto \bar{z}$. (Отображение кривых называется *антиголоморфным*, если в локальных комплексных координатах оно комплексно сопряжено голоморфному отображению, т.е. представляется рядом от переменной $\bar{z}$.) Это отображение не является голоморфным, является инволюцией, $\sigma^2 = \mathrm{id}$, и играет ключевую роль при изучении вещественных кривых. Неподвижные точки этого отображения образуют *вещественную проективную прямую* $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$.

$\mathbb{C}P^1$ $\quad z = a + bi, \ \bar{z} = a - bi$



Definition

Вещественной алгебраической кривой называется пара (C, η), где C — комплексная алгебраическая кривая, $\eta : C \to C$ — антиголоморфная инволюция, $\eta^2 = \mathrm{id}$.
Неподвижные точки отображения η называются *вещественными точками* кривой (C, η).

Упражнение. Почему отображение $z \mapsto \bar{z}$ неголоморфно?
Упражнение. Придумайте антиголоморфную инволюцию проективной прямой $\mathbb{C}P^1$, не имеющую неподвижных точек.

$z \mapsto \bar{z} + c$; $z \mapsto z + c + \bar{c}$

$c + \bar{c} = 0 \Rightarrow c = ui, u \in \mathbb{R}$, $z = +\frac{ui}{2}$ — неподв. т.

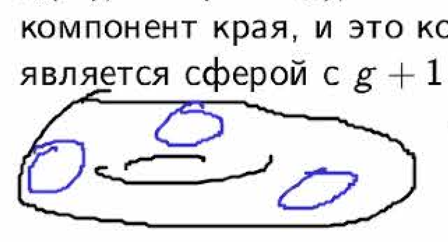
Типичным примером вещественной алгебраической кривой служит гладкая плоская комплексная кривая, заданная однородным полиномиальным уравнением с *вещественными* коэффициентами. Отображение η индуцируется отображением комплексной проективной плоскости в себя $(x : y : z) \mapsto (\bar{x} : \bar{y} : \bar{z})$; это отображение переводит кривую в себя, поскольку при вещественном a выполняется равенство $\overline{ax^iy^jz^k} = a\bar{x}^i\bar{y}^j\bar{z}^k$ для любых целых неотрицательных i, j, k.
Множество вещественных точек такой кривой образует вещественную кривую — пересечение исходной комплексной кривой с вещественной проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{C}P^2$. Эта вещественная кривая может оказаться пустой, как, например, в случае кривой $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Однако кривая нечетной степени обязательно является непустой (поскольку вещественный многочлен нечетной степени обязательно имеет вещественный корень).

В окрестности каждой неподвижной точки антиголоморфной инволюции $\eta : C \to C$ эта инволюция приводится в подходящей голоморфной координате z к виду $z \mapsto \bar{z}$. Поэтому множество неподвижных точек инволюции — гладкое вещественно одномерное подмногообразие в C. Это подмногообразие компактно, поэтому оно состоит из конечного числа окружностей.

Theorem (Harnack's curve theorem, Неравенство Харнака)

Множество неподвижных точек антиголоморфной инволюции на вещественной алгебраической кривой рода g имеет не более $g + 1$ компонент связности.

Доказательство. Пусть (C, η) — вещественная алгебраическая кривая рода g. Тогда факторповерхность C/η — поверхность с краем, эйлерова характеристика которой равна $\chi(C)/2 = (2 - 2g)/2 = 1 - g$. Поэтому эта поверхность не может иметь больше $g + 1$ компонент края, и это количество реализуемо лишь если факторповерхность C/η является сферой с $g + 1$ дырками.

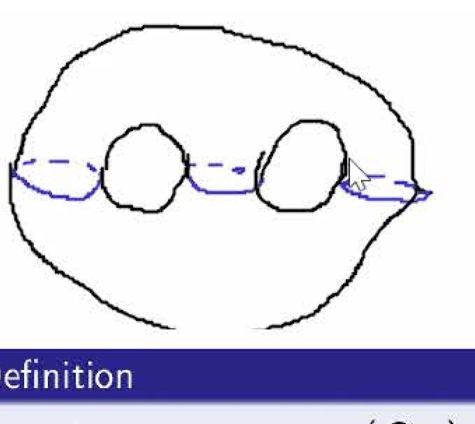


род g', k дырок
$2 - 2g' - k = 1 - g$

Definition

Вещественная кривая (C, η) называется *разделяющей*, если множество ее вещественных точек $C^{\mathbb{R}} \subset C$ разбивает ее на две компоненты связности. В противном случае она называется *неразделяющей*.

Упражнение. Докажите, что всякая M-кривая является разделяющей.



Definition

Вещественная кривая (C, η) называется *разделяющей*, если множество ее вещественных точек $C^{\mathbb{R}} \subset C$ разбивает ее на две компоненты связности. В противном случае она называется *неразделяющей*.

Упражнение. Докажите, что всякая M-кривая является разделяющей.
Упражнение. Докажите, что факторповерхность C/η вещественной алгебраической кривой (C, η) ориентируема тогда и только тогда, когда кривая (C, η) разделяющая.
Упражнение. Пусть вещественная часть плоской вещественной кубики имеет одну компоненту связности. Является ли эта кубика разделяющей?

Упражнение. Докажите, что количество компонент связности вещественной части $C^{\mathbb{R}}$ вещественной разделяющей кривой (C, η) рода g имеет ту же четность, что и $g + 1$.

Антиголоморфная инволюция η вещественной алгебраической кривой (C, η) переводит в себя каждый замкнутый контур вещественной части кривой C. Однако на C есть и другие η-инвариантные контуры.

Упражнение. Найдите на $\mathbb{C}P^1$ контур, инвариантный относительно антиголоморфной инволюции $z \mapsto -1/\bar{z}$.

Theorem

На всякой вещественной кривой рода g существует разделяющий набор из $g + 1$ попарно непересекающихся инвариантных контуров.

Замечание. Таких наборов (рассматривающихся с точностью до гомотопической эквивалентности) бесконечно много.

Definition

Голоморфное отображение $f : (C_1, \eta_1) \to (C_2, \eta_2)$ вещественных кривых называется *вещественным*, если $\eta_2 \circ f = f \circ \eta_1$. *Вещественной мероморфной функцией* на вещественной кривой (C, η) называется ее вещественное отображение $(C, \eta) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$ в комплексную проективную прямую со стандартной антиголоморфной инволюцией — комплексным сопряжением.

Упражнение. Докажите, что всякая вещественная мероморфная функция $(\mathbb{C}P^1, \sigma) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$ задается рациональной функцией с вещественными коэффициентами.
Упражнение. Опишите все вещественные мероморфные функции $(\mathbb{C}P^1, \eta) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$, где $\eta : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — антиголоморфная инволюция, имеющая вид $z \mapsto -1/\bar{z}$.

Простая замкнутая кривая на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ может принадлежать к одному из двух типов:

- не *разделяющая кривая* — кривая C, дополнение $\mathbb{R}P^2 \setminus C$ к которой гомеоморфно ~~ленте Мебиуса~~; диску
- *овал* — кривая, разбивающая проективную плоскость на две компоненты связности, одна из которых гомеоморфна диску, вторая — ленте Мебиуса.

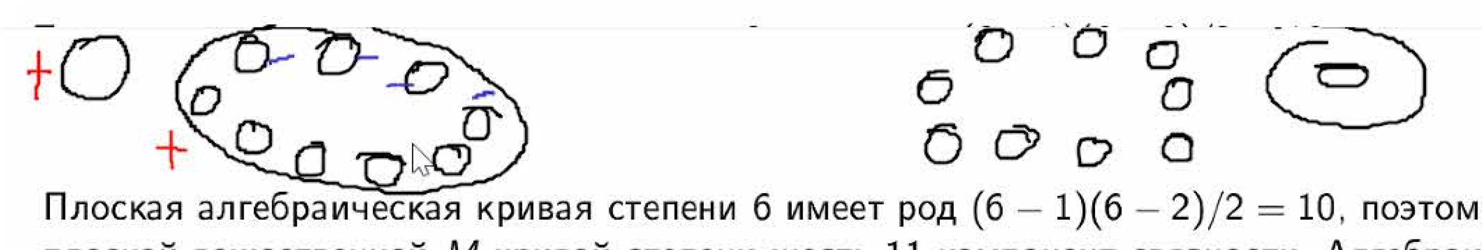
Прямая в вещественной проективной плоскости является не разделяющей кривой.

Прямая в вещественной проективной плоскости является разделяющей кривой.
Кубическая вещественная M-кривая состоит из одной разделяющей компоненты и одного овала.
Вещественная M-квартика состоит из 4 овалов.

Lemma

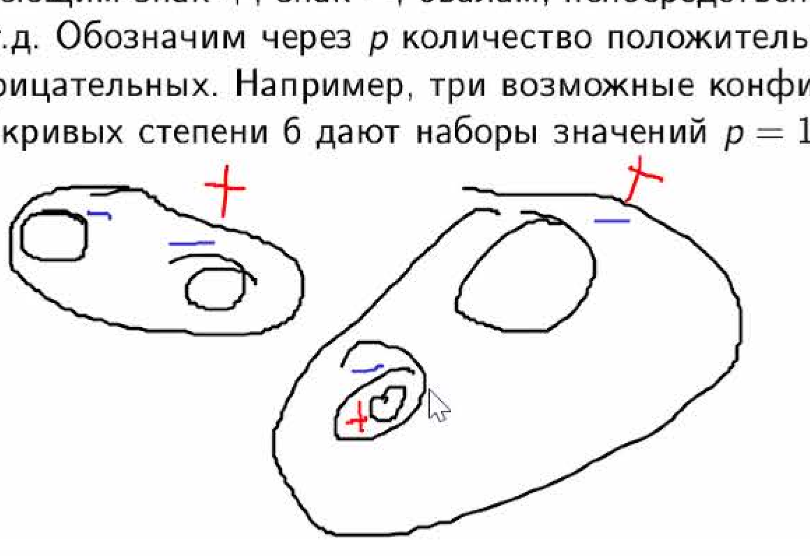
Всякая гладкая плоская вещественная кривая нечетной степени содержит ровно одну разделяющую компоненту связности. Все компоненты связности гладкой плоской вещественной кривой четной степени — овалы.

Доказательство.
Любые две разделяющие кривые на проективной плоскости пересекаются, поэтому у гладкой кривой не может быть больше одной такой компоненты.
Прямая общего положения пересекает разделяющую кривую в нечетном числе точек, а всякий овал - в четном числе точек. Количество точек пересечения общей вещественной прямой с вещественной частью плоской вещественной кривой имеет ту же четность, что и степень кривой.



Плоская алгебраическая кривая степени 6 имеет род $(6 - 1)(6 - 2)/2 = 10$, поэтому у плоской вещественной M-кривой степени шесть 11 компонент связности. Алгебраическая часть 16-й проблемы Гильберта состоит в описании всех возможных взаимных расположений компонент связности такой кривой на вещественной проективной плоскости. Гильберт утверждал, что среди 11 овалов есть один, содержащий внутри себя еще один, и еще 9 простых овалов вне него, либо наоборот. Д.А.Гудков обнаружил еще один случай: овал, внутри и снаружи которого находится по 5 простых овалов, и доказал, что других возможностей нет.

Овалам кривой четной степени можно приписать знаки. Овалам, не содержащимся в других овалах, приписывается знак $+$. Овалам, непосредственно содержащимся в овале, имеющим знак $+$, знак $-$, овалам, непосредственно содержащимся в овалах со знаком $+$, и т.д. Обозначим через p количество положительных овалов, через n — количество отрицательных. Например, три возможные конфигурации овалов вещественных плоских M-кривых степени 6 дают наборы значений $p = 10, n = 1$, $p = 6, n = 5$, $p = 2, n = 9$.



Theorem (сравнение Гудкова, доказано В.И.Арнольдом, 1971, и В.А.Рохлиным, 1972)

Для плоской вещественной M-кривой четной степени $2k$ выполняется сравнение

$$p - n \equiv k^2 \mod 8.$$

Простые замкнутые кривые на вещественной проек-
тивной плоскости делятся на
односторонние (прямая) и двусторонние
(овалы)

Функции на кривой можно понимать как сечения тривиального линейного расслоения над ней. Тривиальное линейное расслоение над кривой C — это прямое произведение $C \times \mathbb{C}$ этой кривой на комплексную прямую. Каждой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ сопоставляется мероморфное сечение этого расслоения $C \to C \times \mathbb{C}$, переводящее точку $x \in C$ в точку $(x, f(x)) \in C \times \mathbb{C}$. Прообразы бесконечности являются полюсами функции f в C. Если кривая C компактна, то все голоморфные функции на ней постоянны, а у всякой непостоянной мероморфной функции есть полюса.

$M \times \mathbb{C}$

$f : M \to M \times \mathbb{C}$

$x \mapsto (x, f(x))$

Функции на кривой можно понимать как сечения тривиального линейного расслоения над ней. Тривиальное линейное расслоение над кривой C — это прямое произведение $C \times \mathbb{C}$ этой кривой на комплексную прямую. Каждой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ сопоставляется мероморфное сечение этого расслоения $C \to C \times \mathbb{C}$, переводящее точку $x \in C$ в точку $(x, f(x)) \in C \times \mathbb{C}$. Прообразы бесконечности являются полюсами функции f в C. Если кривая C компактна, то все голоморфные функции на ней постоянны, а у всякой непостоянной мероморфной функции есть полюса.
Помимо тривиального линейного расслоения над всякой кривой есть еще два естественных линейных расслоения: касательное TC и кокасательное $T^\vee C$. Эти два расслоения имеются не только над кривыми, но и над произвольными комплексными многообразиями. Однако над комплексным многообразием размерности $n > 1$ эти расслоения не являются линейными; их ранг (т.е., размерность слоя), равен n, тогда как ранг линейного расслоения, по определению, равен 1.

Definition

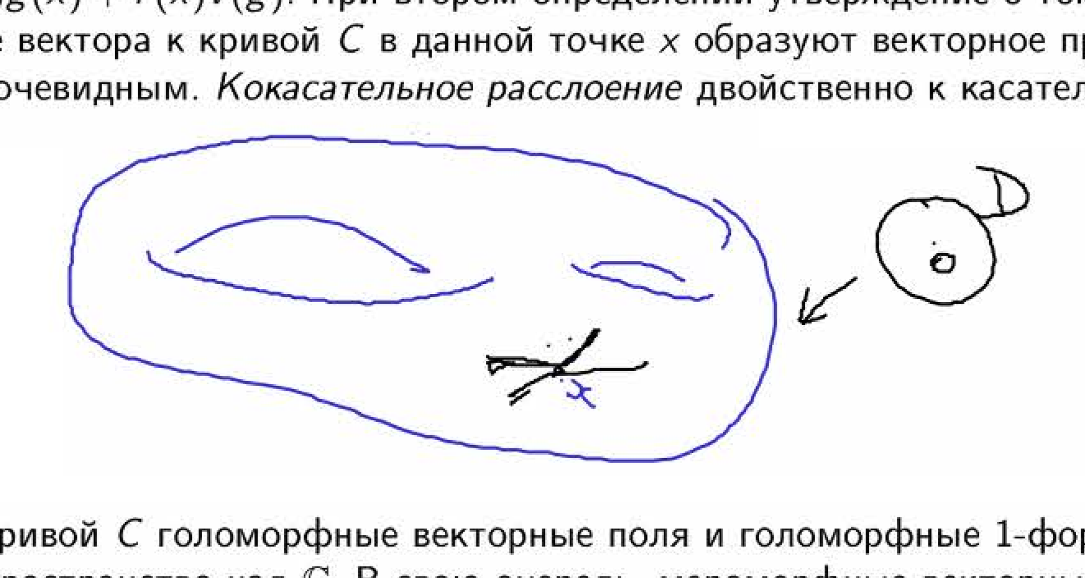
Векторным расслоением ранга k, $k \in \mathbb{N}$, над комплексным многообразием M размерности m называется пара, состоящая из комплексного многообразия E размерности $m + k$ и голоморфного отображения $p : E \to M$, такого, что у любой точки $x \in M$ существует открытая окрестность $U(x) \subset M$ и биголоморфизм $\varphi : U(x) \times \mathbb{C}^k \to p^{-1}(U(x))$ прямого произведения $U(x)$ и $\mathbb{C}^k$ на полный прообраз этой окрестности, причем

- $p \circ \varphi : (x, v) \mapsto x$ для любой точки $x \in M$;
- ограничение отображения φ на $y \times \mathbb{C}^k$ является линейным изоморфизмом на $p^{-1}(y)$ для любой точки $y \in U(x)$.

$U(x)$ M

Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in M$ называется *слоем* векторного расслоения $p : E \to M$. *Мероморфным сечением* голоморфного векторного расслоения $p : E \to M$ называется мероморфное отображение $\sigma : M \to E$, такое, что $p \circ \sigma : M \to M$ есть тождественное отображение.
Если ранг k векторного расслоения равен 1, то расслоение называется *линейным*.

Слоем T_x *касательного расслоения* TC к кривой C над точкой $x \in C$ является касательная прямая к C в точке x. Касательная прямая состоит из *касательных векторов*, которые можно определять по-разному. Например, как классы эквивалентности голоморфных отображений $(D, 0) \to (C, x)$, где D — единичный диск в $\mathbb{C}$, или как *дифференцирования*, т.е. линейные отображения из ~~пространства~~ кольца ростков голоморфных функций в точке $x \in C$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющие правилу Лейбница $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$. При втором определении утверждение о том, что касательные вектора к кривой C в данной точке x образуют векторное пространство, становится очевидным. *Кокасательное расслоение* двойственно к касательному.



На любой кривой C голоморфные векторные поля и голоморфные 1-формы образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$. В свою очередь, мероморфные векторные поля и мероморфные 1-формы образуют векторное пространство как над $\mathbb{C}$, так и над полем мероморфных функций на C. Отношение любых двух ненулевых векторных полей является мероморфной функцией, поэтому последнее векторное пространство одномерно. То же самое справедливо и для 1-форм (и сечений любых линейных расслоений).
Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, в частности, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Corollary

Всякое голоморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $P_2(z)\partial/\partial z$, где $P_2(z)$ — многочлен степени не выше 2.

1-форма dz имеет в бесконечности полюс второго порядка: $dz = d\frac{1}{w} = -\frac{dw}{w^2}$.

Corollary

На проективной прямой нет ненулевых голоморфных 1-форм.

Одним из основных источников мероморфных 1-форм на комплексных кривых являются дифференциалы функций. Всякой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ на кривой C соответствует 1-форма df, ее дифференциал, на C. По определению, 1-форма df действует на касательный вектор $v \in T_xC$ по правилу $df : v \mapsto v(f)$. В локальной координате z дифференциал мероморфной функции f записывается в виде $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz$.
Упражнение. 1-форма dz на проективной прямой является дифференциалом мероморфной функции z. Дифференциалом какой мероморфной функции является 1-форма $\frac{dz}{z}$? (никакой)

$f(z) = \frac{1}{z^k} + \frac{a}{z^{k-1}} + \dots$ $\quad df = \left(-\frac{k}{z^{k+1}} + \dots\right)dz$

$k > 0$

Векторное поле $\partial/\partial z$ на комплексной прямой $\mathbb{C}$ инвариантно относительно сдвигов на любой вектор в $\mathbb{C}$. В частности, оно инвариантно относительно сдвигов на элементы любой решетки $L \subset \mathbb{C}$, и определяет поэтому векторное поле на факторкривой $\mathbb{C}/L$. Это векторное поле голоморфно (у него нет полюсов) и не имеет нулей. Если V — другое голоморфное векторное поле на $\mathbb{C}/L$, то, разделив его на $\partial/\partial z$, получаем голоморфную функцию на $\mathbb{C}/L$, т.е. константу. Поэтому пространство голоморфных векторных полей на $\mathbb{C}/L$ одномерно.
Векторное поле $\partial/\partial z$ на эллиптической кривой $C = \mathbb{C}/L$ задает *тривиализацию* касательного расслоения TC к C. Таким образом, в случае эллиптической кривой касательное расслоение тривиально, $TC \cong C \times \mathbb{C}$.
Аналогичные утверждения справедливы и для 1-форм. Кокасательное расслоение $T^\vee C$ к эллиптической кривой тривиально и порождается голоморфной 1-формой dz, не имеющей нулей.

Сумма порядков нулей и полюсов ~~голо~~меро морфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Голоморфная 1-форма на кривой рода g имеет $2g-2$ нуля (с учетом порядков)

Сумма порядков нулей и полюсов голоморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.
Задавать векторные поля и 1-формы на кривых рода $g > 1$ сложнее, чем на кривых рода 0 и 1, — из-за отсутствия глобальной координаты и трудностей определения мероморфных функций на произвольной кривой. В то же время, 1-форму можно задать на кривой, отображенной в проективное пространство, подняв на нее мероморфную 1-форму на объемлющем пространстве. Например, если кривая C погружена в плоскость, то всякая 1-форма на плоскости задает 1-форму на C. Дифференциал функции также является поднятием 1-формы dz на $\mathbb{C}P^1$ при отображении $f : C \to \mathbb{C}P^1$.

-форма ω на $\mathbb{P}^2$ $\quad F : C \to \mathbb{C}P^2$

$F^*\omega$ — 1-форма на C, $\quad F^*\omega(v) = \omega(dF(v))$, $v \in T_xC$

Упражнение. Почему мероморфное векторное поле на плоскости не задает векторного поля на погруженной в плоскость кривой?
Более общим образом, голоморфное отображение $F : C \to M$ кривой C в комплексное многообразие M позволяет поднять на C любую 1-форму ω на M, положив $F^*\omega(v) = \omega(dF(v))$. Поэтому 1-формы — более подходящий объект для изучения и более подходящий инструмент, чем векторные поля.

Ограничивая 1-форму dx на произвольную плоскую алгебраическую кривую, мы получаем 1-форму на этой кривой. Если кривая C задана уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 1$, то ее можно параметризовать рациональной кривой, положив

$$x = \frac{2}{1+t^2}; \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда $dx = -\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}$, и нулями этой 1-формы являются те точки кривой, в которых $t = 0$ и $t = \infty$, т.е. точки $(2, 0)$ и $(0, 0)$. Кроме того, у нее два полюса, оба порядка 2, в точках, отвечающих значениям параметра $t = \pm i$, т.е. в точках $(1 : \pm i : 0)$ на бесконечности нашей кривой.
Другой — и более универсальный, пригодный не только для рациональных кривых, — способ находить нули 1-формы, состоит в том, чтобы сравнить дифференциал на плоскости с дифференциалом df функции f, задающей кривую. В нулях ограничения дифференциала на кривую он пропорционален df; действительно, значение df на любом касательном векторе к кривой $f = 0$ равно 0. Полюсами ограничения дифференциала на кривую могут оказаться точки пересечения кривой его полюсов с самой кривой; в частности, это могут быть точки кривой на бесконечности, которые нужно проверять.

Ограничивая 1-форму dx на произвольную плоскую алгебраическую кривую, мы получаем 1-форму на этой кривой. Если кривая C задана уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 1$, то ее можно параметризовать рациональной кривой, положив

$$x = \frac{2}{1+t^2}; \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда $dx = -\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}$, и нулями этой 1-формы являются те точки кривой, в которых $t = 0$ и $t = \infty$, т.е. точки $(2, 0)$ и $(0, 0)$. Кроме того, у нее два полюса, оба порядка 2, в точках, отвечающих значениям параметра $t = \pm i$, т.е. в точках $(1 : \pm i : 0)$ на бесконечности нашей кривой.
Другой — и более универсальный, пригодный не только для рациональных кривых, — способ находить нули 1-формы, состоит в том, чтобы сравнить дифференциал на плоскости с дифференциалом df функции f, задающей кривую. В нулях ограничения дифференциала на кривую он пропорционален df; действительно, значение df на любом касательном векторе к кривой $f = 0$ равно 0. Полюсами ограничения дифференциала на кривую могут оказаться точки пересечения кривой его полюсов с самой кривой; в частности, это могут быть точки кривой на бесконечности, которые нужно проверять.

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ней не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Доказательство. Выберем на проективной плоскости координаты $(x : y : z)$ таким образом, чтобы прямая $z = 0$ пересекала кривую C в d точках (т.е., трансверсально). Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $f(x, y) = 0$.

Lemma

Дифференциальная 1-форма

$$\omega_C = \frac{dx \wedge dy}{df} = \frac{dx \wedge dy}{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}}dy = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}dx$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C.

Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $F(x, y, 1) = f(x, y) = 0$.

Lemma

Дифференциальная 1-форма

$$\boxed{\omega_C = \frac{dx \wedge dy}{df}}$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C.

Гиперповерхность $F(x_1, \dots, x_n) = 0$

$(n-1)$-форма $\frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n}{dF}$

форма Гельфанда

Доказательство. В аффинной карте $z = 1$ 1-форма ω_C не имеет особенностей, поскольку df не обращается в нуль на C. Достаточно проверить, что она не имеет полюсов на бесконечности. Перейдем от карты $z = 1$ к карте $x = 1$: $x = \frac{1}{v}, y = \frac{u}{v}$. Тогда

$$\omega_C = \frac{dx}{\partial f/\partial y} = -\frac{dv/v^2}{\partial f/\partial y\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v},\right)} = -\frac{P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) v^{d-3}dv}{\underline{v^{d-1}\partial f/\partial y\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)}}.$$

В знаменателе последнего выражения стоит производная по u функции $F(1, u, v)$.

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ней не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Lemma

Для всякого многочлена $p(x, y)$ степени, не превосходящей $d - 3$, дифференциальная 1-форма

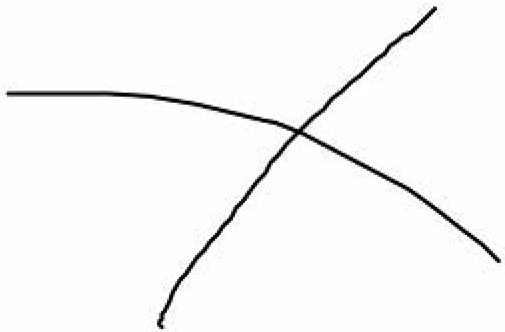
$$p(x, y)\omega_C$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C.

Доказательство. $1 + 2 + 3 + \dots + (d-2) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

Theorem

Пусть C — гладкая плоская нодальная кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ее нормализации не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2 - \delta$, где δ — число точек простого самопересечения кривой C.



Нод (точка трансверсального самопересечения)

Lemma

Для всякого многочлена $p(x, y)$ степени, не превосходящей $d-3$, обращающегося в нуль в двойных точках кривой C, дифференциальная 1-форма

$$p(x, y)\frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на нормализации кривой C.

Для любой пары точек проективной прямой существует ее автоморфизм, переводящий первую точку во вторую. То же самое справедливо и для любой эллиптической кривой. Однако для кривых рода $g \geq 2$ аналогичное утверждение уже неверно, и точки на них отличаются друг от друга. Формула Римана–Роха позволяет "измерить" это отличие.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

Для любой пары точек проективной прямой существует ее автоморфизм, переводящий первую точку во вторую. То же самое справедливо и для любой эллиптической кривой. Однако для кривых рода $g \geq 2$ аналогичное утверждение уже неверно, и точки на них отличаются друг от друга. Формула Римана–Роха позволяет "измерить" это отличие.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

Применим ее к ситуации, когда дивизор D эффективен и сосредоточен в одной точке $x \in C$, $D = k \cdot x$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Lemma

Если $k \geq 2g - 1$, то $l(k \cdot x) = k - g + 1$.

Действительно, при таких k размерность $i(k \cdot x) = 0$ для любой точки $x \in C$, поскольку не существует голоморфных 1-форм с нулем порядка $2g - 1$ или выше.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

$l(k \cdot x) = k - g + 1$ при $k \geq 2g - 1$.

Lemma

Последовательность $l(k \cdot x)$ монотонно неубывающая, причем $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x)$, если на C не существует мероморфной функции с единственным полюсом в точке x, порядок которого в точности равен $k + 1$, и $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$ в противном случае.

В частности, для всех $k \geq 2g - 1$ выполняется равенство $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$.

$L((k+1)x) \supset L(k \cdot x)$

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

$l(k \cdot x) = k - g + 1$ при $k \geq 2g - 1$.

$\ell((2g-1)x) = (2g-1) - g + 1 = g$

Lemma

Последовательность $l(k \cdot x)$ монотонно неубывающая, причем $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x)$, если на C не существует мероморфной функции с единственным полюсом в точке x, порядок которого в точности равен $k + 1$, и $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$ в противном случае.

В частности, для всех $k \geq 2g - 1$ выполняется равенство $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$.

Corollary

На отрезке $1 \leq k \leq 2g - 1$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет $g - 1$ подскоков на 1.

Lemma

Пусть k_1, k_2 — две точки подскока последовательности $l(k \cdot x)$. Тогда $k_1 + k_2$ также является точкой подскока. Другими словами, множество точек подскока является подполугруппой в группе $\mathbb{N}$ натуральных чисел по сложению.

Действительно, если на C есть мероморфная функция f_1 с полюсом порядка k_1 в x, не имеющая других полюсов, и мероморфная функция f_2 с полюсом порядка k_2 в x, не имеющая других полюсов, то их произведение $f_1 f_2$ является мероморфной функцией с полюсом порядка $k_1 + k_2$ в x, не имеющей других полюсов.
Remark. Полного независимого описания всех встречающихся подполугрупп в $\mathbb{N}$ такого вида не существует.
Значения параметра k, для которых $l(k \cdot x) = l((k-1) \cdot x)$ называются *лакунами* в точке x. Число лакун в каждой точке равно g и все они находятся на начальном отрезке $\{1, 2, \ldots, 2g - 1\}$ значений параметра k. При $g \geq 1$ значение $k = 1$ является лакуной в любой точке x: $l(1 \cdot x) = l(0 \cdot x) = 1$. Множество лакун образует дополнение к полугруппе подскоков.

Example

При $g = 0$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $2, 3, 4, \ldots$ для любой точки $x \in \mathbb{C}P^1$.
При $g = 1$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $1, 2, 3, 4, \ldots$ для любой точки $x \in C$.

Example

Всякая кривая рода $g = 2$ гиперэллиптическая, и последовательность $l(k \cdot x)$ зависит от выбора точки x. Если x является неподвижной точкой гиперэллиптической инволюции, то $l(2 \cdot x) = 2$, т.е. значение $k = 2$ является точкой подскока. Поскольку на отрезке $\{1, 2, 3\}$ значений k должно быть две лакуны, то это значения $k = 1$ и $k = 3$. Таким образом, последовательность значений $l(k \cdot x)$ имеет вид $1, 2, 2, 3, 4, 5, \ldots$.
Если же x не является неподвижной точкой гиперэллиптической инволюции, то $l(2 \cdot x) = 1$, а значит лакуны это $k = 1$ и $k = 2$; последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $1, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

$f: C \xrightarrow{2:1} \mathbb{C}P^1$ - гиперэл. накр. $a \in \mathbb{C}P^1$ — точка ветвления
$f^{-1}(a)$ — неподв. точка гиперэл. инв. $f(z) - a$

Definition

Точка $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется *точкой Вейерштрасса*, если $l(k \cdot x) = 2$ для некоторого значения $k \leq g$ (эквивалентно, если $l(g \cdot x) \geq 2$). Точка Вейерштрасса называется *нормальной*, если последовательность ее лакун имеет вид $1, 2, 3, \ldots, g - 1, g + 1$.

Нормальное поведение $\underbrace{\{1, 2, \ldots, g\}}_{\text{лакуны}} \subset \{1, 2, \ldots, 2g-1\}$

Definition

Точка $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется *точкой Вейерштрасса*, если $l(k \cdot x) = 2$ для некоторого значения $k \leq g$ (эквивалентно, если $l(g \cdot x) \geq 2$). Точка Вейерштрасса называется *нормальной*, если последовательность ее лакун имеет вид $1, 2, 3, \ldots, g - 1, g + 1$.

Пусть $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_g \leq 2g - 1$ — последовательность лакун точки x гладкой кривой C рода g.

Definition

Весом точки $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется величина $\sum_{i=1}^{g}(a_i - i)$.

Definition

Точка $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется *точкой Вейерштрасса*, если $l(k \cdot x) = 2$ для некоторого значения $k \leq g$ (эквивалентно, если $l(g \cdot x) \geq 2$). Точка Вейерштрасса называется *нормальной*, если последовательность ее лакун имеет вид $1, 2, 3, \ldots, g - 1, g + 1$.

Пусть $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_g \leq 2g - 1$ — последовательность лакун точки x гладкой кривой C рода g.

Definition

Весом точки $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется величина $\sum_{i=1}^{g}(a_i - i)$.

В частности, если x — не точка Вейерштрасса, то ее вес равен 0. Вес нормальной точки Вейерштрасса равен 1.

Lemma

Если $x \in C$ — точка Вейерштрасса, то ее вес положителен.

$g = 2$ $2g + 2 = 6$ точек Вейерштрасса
каждая веса 1 $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Доказательство.
Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис в пространстве голоморфных 1-форм на кривой C. Запишем эти 1-формы в локальной координате z в окрестности данной точки $x \in C$: $\omega_i = \varphi_i(z)dz$. Составим из коэффициентов ϕ_i этих 1-форм и их производных $g \times g$-матрицу Вронского

И Вес

$$W(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1'(z) & \ldots & \varphi_1^{(g-1)}(z) \\ \varphi_2(z) & \varphi_2'(z) & \ldots & \varphi_2^{(g-1)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_g(z) & \varphi_g'(z) & \ldots & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{pmatrix}.$$

Corollary

Число точек Вейерштрасса на всякой гладкой алгебраической кривой конечно и не превосходит $(g-1)g(g+1)$, где g — род кривой.

Lemma

~~Порядок~~ точки кривой совпадает с порядком нуля определителя $|W(z)|$ матрицы Вронского (вронскиана) в этой точке.

Lemma

~~Порядок~~ точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

В частности, если точка кривой не является точкой Вейерштрасса, то вронскиан в ней отличен от нуля. Ясно также, что порядок нуля вронскиана в данной точке не зависит от выбора базиса в пространстве голоморфных 1-форм.
Вывод теоремы из леммы: выбор базиса в пространстве голоморфных 1-форм определяет отображение кривой C в пространство, двойственное пространству голоморфных сечений тензорного произведения линейных расслоений

$\omega_1 = \varphi_1(z)dz$
$\omega_1' = \varphi_1'(z)dz^{\otimes 2}$

$$T^\vee C \otimes (T^\vee)^{\otimes 2} C \otimes (T^\vee)^{\otimes 3} C \otimes \cdots \otimes (T^\vee)^{\otimes g} C.$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' & \ldots & \varphi_1^{(g-1)} \\ \varphi_2 & \varphi_2' & \ldots & \\ \varphi_g & \varphi_g' & & \end{vmatrix}$$

Степень этого линейного расслоения равна

$$(2g-2) + 2 \cdot (2g-2) + 3 \cdot (2g-2) + \cdots + g \cdot (2g-2) = (g-1)g(g+1).$$

Эта степень совпадает с суммой порядков нулей любого его голоморфного сечения, в том числе, вронскиана в любом базисе.

Lemma

~~Порядок~~ Вес точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

Доказательство. Утверждение локально. Пусть $x \in C$. Построим индуктивно базис в пространстве голоморфных 1-форм:

- в качестве $\boxed{\omega_1}$ возьмем 1-форму, отличную от нуля в т. x (такая 1-форма существует, поскольку у кокасательного расслоения к C нет базисных точек);
- разложим пространство голоморфных 1-форм в прямую сумму прямой $\mathbb{C}\omega_1$ и дополнительного подпространства, состоящего из 1-форм, имеющих нуль в т. x; пусть b_2 — наименьший порядок нуля в x у 1-форм из этого подпространства;
- выберем в построенном подпространстве 1-форму с нулем порядка b_2 в x и возьмем ее в качестве ω_2; $0 = b_1 < b_2 < b_3 <$
- разложим построенное подпространство голоморфных 1-форм в прямую сумму прямой $\mathbb{C}\omega_2$ и дополнительного подпространства, состоящего из 1-форм, имеющих в т. x нуль порядка $> b_2$; пусть b_3 — наименьший порядок нуля в x у 1-форм из этого подпространства; и т.д.

Lemma

Порядок точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

Получили упорядоченный базис 1-форм $\omega_1, \ldots, \omega_g$, порядки нулей элементов которого в точке x равны $0 = b_1 < b_2 < \cdots < b_g$. Матрица Вронского такого набора 1-форм имеет вид

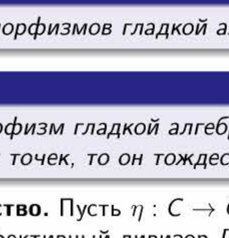
$$W(z) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha z & \alpha \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{b_2} + \ldots & b_2 z^{b_2 - 1} + \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{b_g} + \ldots & b_g z^{b_g - 1} + \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Порядок нуля вронскиана равен $0 + (b_2 - 1) + (b_3 - 2) + \cdots + (b_g - g + 1)$.
С другой стороны, условие $\mathrm{Res}_x f\omega = 0$ накладывает на коэффициенты главной части функции f в точке x линейные условия, количество независимых среди которых в точности равно требуемому числу.

Главная часть $\frac{c_{2g-1}}{z^{2g-1}} + \frac{c_{2g-2}}{z^{2g-2}} + \ldots + \frac{c_1}{z}$

Гладкая плоская кривая C степени $d = 4$ (квартика) является кривой рода $g = (d-1)(d-2)/2 = 3$. Каждая точка x гладкой плоской квартики определяет мероморфную функцию степени 3 на ней — проекцию из этой точки. Одну из прямых, проходящих через x, мы можем считать бесконечностью. Если y — точка простого перегиба кривой C, то проходящая через нее касательная пересекает C еще в одной точке, которую мы обозначим через x.
Проекция, определяемая точкой $x \in C$, имеет в точке y полюс третьего порядка и не имеет других полюсов (прямая xy не пересекает C в других точках). Тем самым, $l(3 \cdot y) \geq 2$, т.е. y является точкой Вейерштрасса кривой C. На общей гладкой квартике имеется 24 точки простого перегиба. Поскольку $(g-1)g(g+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, мы заключаем, что все точки простого перегиба имеют вес 1, а лакуны в этих точках равны $1, 2, 4$.

$g-1$ $g+1$



Каждая гладкая плоская квартика является канонической кривой рода 3, при каноническом вложении негиперэллиптической кривой рода 3 точки Вейерштрасса переходят в точки перегиба. Точки Вейерштрасса канонических кривых старших родов представляют собой обобщения точек перегиба плоских квартик.

Theorem

Группа автоморфизмов гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ конечна.

Lemma

Если автоморфизм гладкой алгебраической кривой C рода g имеет более $2g + 2$ неподвижных точек, то он тождественный.

Доказательство. Пусть $\eta : C \to C$ — автоморфизм, имеющий s неподвижных точек. Возьмем эффективный дивизор D, состоящих из $g + 1$ точек кратности 1, ни одна из которых не является неподвижной точкой автоморфизма η. По теореме Римана–Роха, $l(D) = (g+1) - g + 1 + i(D) = 2 + i(D)$. ≥ 2 Поэтому существует функция $f : C \to \mathbb{C}P^1$, имеющая полюса не выше первого порядка, причем только в точках дивизора D. Функция $f - f \circ \eta$ имеет не более чем $2g + 2$ полюсов первого порядка и не менее s нулей (всякая неподвижная точка автоморфизма η является ее нулем). Поэтому $s \leq 2g + 2$.

Lemma

Минимальное количество точек Вейерштрасса на кривой рода g равна $2g + 2$, и оно достигается только для гиперэллиптических кривых.

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Здесь $l(D) = \dim L(D)$ — размерность пространства мероморфных функций на C, дивизор которых не меньше $-D$; $i(D)$ — рамерность пространства мероморфных 1-форм на C, дивизор которых не меньше D.
Заменив в этом равенстве дивизор D дивизором $K - D$ (K — канонический дивизор), степень которого равна $\deg(K - D) = 2g - 2 - d$, мы можем переписать его в виде

$$l(K - D) = 2g - 2 - d - g + 1 + i(K - D) = g - 1 - d + i(K - D).$$

Пространство мероморфных 1-форм, дивизор которых не меньше $K - D$, изоморфно пространству $L(D)$ мероморфных функций, дивизор которых не меньше $-D$, т.е. $i(K - D) = l(D)$, или, что то же самое, $i(D) = l(K - D)$. Поэтому формулу Римана–Роха можно переписать в виде

$$l(D) = d - g + 1 + l(K - D).$$

Theorem

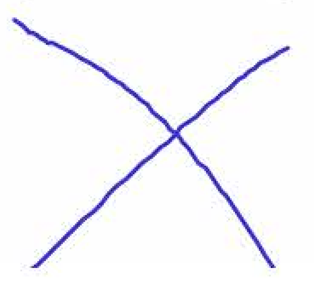
Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + l(K - D).$$

Theorem (неравенство Римана)

Справедливо неравенство $l(D) \geq d - g + 1$.

Доказательство. Пусть C является нормализацией плоской нодальной кривой C', заданной уравнением $F = 0$ степени m, с δ двойными точками $\{p_1, \dots, p_\delta\}$, прообразы которых на C образуют дивизор $\Delta = 1 \cdot p_{11} + 1 \cdot p_{12} + \dots + 1 \cdot p_{\delta 1} + 1 \cdot p_{\delta 2}$.



$D = D' - D''$ — разность эффективных дивизоров, $d' = \deg D'$, $d'' = \deg D''$.
S^n — пространство многочленов степени n от трех переменных, $\dim S^n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

дивизор пересечения C' с $G=0$

Lemma

При n достаточно большом в S^n есть многочлен G, такой, что а) F не делит G; б) $G \cdot C \geq \Delta + D'$.

$$G = F \cdot \underbrace{H}_{\in S^{m-n}}$$

Lemma

При n достаточно большом в S^n есть многочлен G, такой, что а) F не делит G; б) $G \cdot C \geq \Delta + D'$.

Доказательство. Условие "F делит G" выделяет в S^n алгебраическое подмногообразие положительной коразмерности. Каждое условие вида $G \cdot C \geq k \cdot p, p \in C$ накладывает k линейных ограничений на коэффициенты многочлена G. Поэтому условие $G \cdot C \geq \Delta + D'$ эквивалентно набору из $2\delta + d'$ линейных уравнений на коэффициенты многочлена G.
Если n таково, что $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \geq 2\delta + d'$, то искомый многочлен G существует.
Зафиксируем такое n и такой многочлен G.

Рассмотрим дивизор $E = G \cdot C - D' - \Delta$, $E \geq 0$, $\deg E = mn - d' - 2\delta$. Введем пространство многочленов $S = \{H \in S^n | H \cdot C \geq \Delta + E + D''\}$. Условие $H \cdot C \geq \Delta + E + D''$ эквивалентно набору из

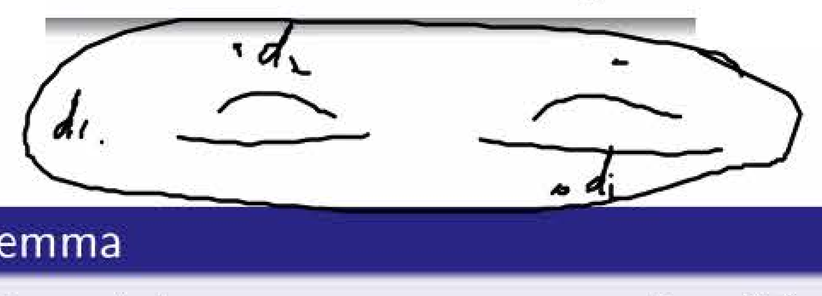
$$\delta + (mn - d' - 2\delta) + d'' = mn - \delta - d' + d'' = mn - \delta - d$$

линейных уравнений. Поэтому $\dim S \geq \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \delta + d - mn$.
Рассмотрим отображение $S \to L(D)$, сопоставляющее многочлену $H \in S$ функцию $\frac{H}{G}\big|_{C'}$:

$$(f_H) + D = (H \cdot C) - (G \cdot C) + D \geq (\Delta + E + D'') - (E + D' + \Delta) + D = 0.$$

Ядро $F \cdot S^{n-m}$ этого отображения состоит из многочленов, делящихся на F, его размерность равна $(n - m + 1)(n - m + 2)/2$. Поэтому

$$\begin{aligned} l(D) &\geq \dim S - \frac{1}{2}(n - m + 1)(n - m + 2) \\ &\geq \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + \delta + d - mn - \frac{1}{2}(n - m + 1)(n - m + 2) \\ &= d - \frac{1}{2}m(m-3) + \delta = d - g + 1. \end{aligned}$$



Lemma

Для эффективного дивизора $D = \sum d_i \cdot p_i, d_i > 0$ справедливо неравенство

$$l(D) - l(K - D) \leq d - g + 1.$$

Доказательство. Принадлежность к $L(D)$ накладывает на главные части порядков d_i в точках p_i g линейных условий — обращений в нуль вычетов с голоморфными формами. Из этих g линейных условий только $g - l(K - D)$ линейно независимых.

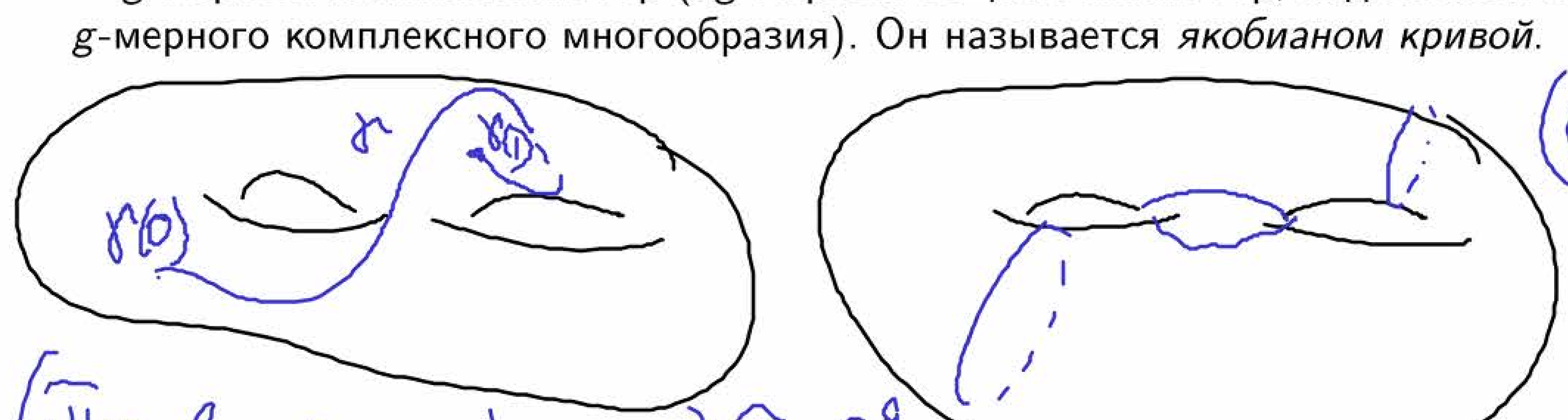
$i(D)$

$$l(K-D) - l(D) \leq (2g-2-d) - g + 1 = g - 1 - d$$

$$l(K-D) \geq (2g-2-d) - g + 1 = g - 1 - d$$

Вне рамок курса: якобиан

Вещественная кривая $\gamma : [0,1] \to C$ на комплексной алгебраической кривой C определяет линейный функционал l_γ на g-мерном пространстве голоморфных 1-форм на C: $l_\gamma : \omega \mapsto \int_\gamma \omega$. Этот функционал зависит только от гомотопического класса кривой γ в классе кривых, соединяющих две данные точки $\gamma(0), \gamma(1)$.
Гомотопические классы замкнутых кривых образуют полную решетку в векторном пространстве, двойственном пространству голоморфных 1-форм. Фактор по этой решетке — g-мерный комплексный тор ($2g$-мерный вещественный тор, наделенный структурой g-мерного комплексного многообразия). Он называется *якобианом кривой*.



$(\mathbb{C}^g)^\vee \supset L$ решетка ранга $2g$

$(\text{Пр-во гол. 1-форм})^* \cong \mathbb{C}^g$

Example

Якобиан эллиптической кривой изоморфен самой этой кривой.

Теорема Торелли утверждает, что якобианы различных кривых различны. Не каждый комплексный тор является якобианом какой-либо кривой. Задача выделения якобианов среди торов называется *проблемой Шоттки*. Якобианы кривых несут важную информацию о самих кривых.

У каждой комплексной кривой есть универсальное накрытие. Накрывающая кривая представляет собой (вообще говоря, некомпактную), связную односвязную комплексную кривую, и таких кривых (с точностью до изоморфизма) всего три: $\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}$ и единичный диск D (или изоморфная ему верхняя полуплоскость $\{z | \Im z > 0\} \subset \mathbb{C}$).
Проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ накрывает только саму себя. Прямая $\mathbb{C}$ накрывает проективную прямую, проколотую в одной или двух точках, а также все эллиптические кривые. Все кривые, эйлерова характеристика которых отрицательна, накрываются верхней полуплоскостью.

Гиперболическая метрика постоянной отрицательной кривизны -1 на верхней полуплоскости задается формулой $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, где $z = x + iy$. Фундаментальная группа накрытия действует на универсальной накрывающей изометриями, поэтому на всякой комплексной кривой отрицательной эйлеровой характеристики имеется естественная гиперболическая метрика постоянной отрицательной кривизны -1. Это соответствие взаимно-однозначно.