Занятие 4

Логика предикатов первого порядка (ЛП) Синтаксис языка первого порядка сигнатуры $\sigma = \langle Cnst,\ Fn,\ Pr\rangle$ обсуждался на предыдущем занятии.

Семантика. Выбираем множество $M \neq \emptyset$ (носитель) и интерпретацию I сигнатуры σ в M:

$$c \in Cnst \;\mapsto\; \overline{c} \in M, \quad f^n \in Fn \;\mapsto\; \overline{f}\colon M^n \to M, \quad P^n \in Pr \;\mapsto\; \overline{P} \subseteq M^n.$$

(Предикат $\overline{P} : M^n \to \{0,1\}$ отождествлен с его областью истинности $\overline{P} \subseteq M^n$.)

Каждая *замкнутая* (т.е. без свободных переменных) формула становится обозначением для некоторого высказывания про конкретные (заданные интерпретацией) элементы, операции и отношения на множестве M. Оно оказывается истинным или ложным. Тем самым определяется истинность/ложность формулы в данной интерпретации (обозначение: $I \models \varphi$).

Пример. $\varphi = \forall x_0 \exists x_1 (P_3^2(x_0, x_1) \wedge P_0^1(x_1))$ (удобнее $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(y))$).

> $M := N$, $\overline{P} := \{\langle x,y\rangle \mid x < y\}$, $\overline{Q} := \{x \mid x$ простое число$\}$. Тогда φ выражает факт бесконечности множества простых чисел, поэтому $I \models \varphi$.
>
> Изменим интерпретацию $\overline{P} := \{\langle x,y\rangle \mid x > y\}$. Тогда φ выражает ложное высказывание об отсутствии наименьшего простого числа, поэтому $I \not\models \varphi$.

Истинность/ложность незамкнутых формул $\varphi(\bar{x})$ в интерпретации I зависит от выбора значений свободных переменных $\bar{x}$. Чтобы фиксировать этот выбор, к интерпретации добавляют оценку свободных переменных $\theta : Var \to M$. Тогда $I, \theta \models \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow I \models \varphi(\theta(\bar{x}))$. (Все корректно? Подумать, как исправить.)

I. Выполнимость и общезначимость формул ЛП. Замкнутая формула называется выполнимой, если существует интерпретация, в которой она истинна. Общезначимость означает истинность во всех интерпретациях.

1. Исследовать на выполнимость и общезначимость:

$$\exists x\, P(x,x)$$
$$\forall x(P(x)\vee Q(x)) \to \forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$$
$$\forall x(P(x)\vee Q(x)) \to \forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$$
$$\exists x\forall y\exists zP(x,y,z) \to \forall x\exists yP(x,y,y)$$
$$\exists y\forall xP(x,y,y) \to \forall x\exists y\forall zP(x,y,z)$$

II. Эквивалентность формул в ЛП. Основные эквивалентности:

- Все табличные эквивалентности логики высказываний.
- Вынесение кванторов:

$$Qx\, A(x)\, op\, B \equiv Qx(\, A(x)\, op\, B\,), \qquad Q\in\{\forall,\exists\},\ op\in\{\wedge,\vee\}.$$

$$\neg\exists xA(x)\equiv\forall x\neg A(x), \qquad \neg\forall xA(x)\equiv\exists x\neg A(x).$$

- Переименование кванторов:
$Qx\, A(x) \equiv Qy\, A(y)$ (y — новая переменная).
- Сокращение кванторов:

$$\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\equiv\forall x(A(x)\wedge B(x)), \quad \exists xA(x)\vee\exists xB(x)\equiv\exists x(A(x)\vee B(x)).$$

- Фиктивный квантор: $\forall xA\equiv A, \quad \exists xA\equiv A$.

2. В каждом из четырех примеров вынести кванторы наружу:
$Q_1x\, A(x)\to Q_2x\, B(x)$, где $Q_1, Q_2\in\{\forall,\exists\}$.
3. Сформулировать общий метод вынесения кванторов.
4. Среди следующих формул найти все пары равносильных формул:

1) $\forall x\forall y(P(x)\to Q(y))$ 2) $\forall x\exists y(P(x)\to Q(y))$ 3) $\exists y\forall x(P(x)\to Q(y))$

4) $\forall y\exists x(P(x)\to Q(y))$ 5) $\exists x\forall y(P(x)\to Q(y))$ 6) $\exists x\exists y(P(x)\to Q(y))$

5. Добавление. В реальной математике мы часто выходим за рамки языка ЛП (1-го порядка) в языки 2-го и больших порядков. Пример — перевод $I \models \forall\bar{x}\exists y Q(\bar{x}, y)$ в язык второго порядка с кванторами по функциям: $I \models \exists f \forall\bar{x} Q(\bar{x}, f(\bar{x}))$ (введение скулемовских функций). Пусть надо доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{R}^+ \models \forall\varepsilon\exists a \underbrace{\forall x(x > a \to (1/x) < \varepsilon)}_{Q(\varepsilon,a)}.$$

Вместо этого обычно ищут такую функцию $f(\varepsilon)$, для которой верно $\forall x(x > f(\varepsilon) \to (1/x) < \varepsilon)$, например, $f(\varepsilon) = 1/\varepsilon$, т.е. доказывают

$$\mathbf{R}^+ \models \exists f \forall\varepsilon\forall x(x > f(\varepsilon) \to (1/x) < \varepsilon).$$

Это вполне корректный и работоспособный метод доказательства истинности формул ЛП в данной интерпретации.

Домашнее задание

6. Доделать предыдущее домашнее задание (про невыразимость).

7. Доделать задачу 1.

8. Доказать, что следующая формула выполнима только в бесконечных интерпретациях:
$\forall x\exists y Q(x, y) \wedge \forall x\forall y\forall z(\neg Q(x, x) \wedge (Q(x, y) \to (Q(y, z) \to Q(x, z))))$.

9. Доказать, что следующая формула истинна в каждой интерпретации с трехэлементным носителем:
$\forall x\forall y\forall z(R(x, x) \wedge (R(x, z) \to R(x, y) \vee R(y, z))) \to \exists x\forall y R(x, y)$.

10. Уметь доказывать основные эквивалентности. Почему формул вынесения кванторов 4, а сокращения кванторов — только 2 ?

11. Доделать задачу 4.

12. Вынести кванторы наружу (привести к предваренной нормальной форме):

$$\neg\forall x\forall y P(x, y) \vee \forall x\exists y Q(x, y).$$
$$\forall x\neg\exists y P(x, y) \wedge \exists x\forall y Q(x, y),$$
$$\forall x\exists y P(x, y) \to \forall x\exists y Q(x, y).$$

13. С помощью введения скулемовских функций $z(x)$ и $u(x,y)$ установить истинность следующей формулы в стандартной интерпретации на натуральном ряду. (Символы “$<$”, “$>$” интерпретируются отношениями “меньше” и “больше”.)

$$\forall x \exists z \forall y \exists u ((y > z \to y > u) \wedge (u < z) \wedge \neg(u < x)).$$

Почему у скулемовских функций именно такие аргументы?

Занятие 3

Сигнатура $\sigma = \langle Cnst, Fn, Pr \rangle$ — это фиксированный набор констант, функциональных символов и предикатных символов. Она определяет *язык первого порядка* (элементарный язык) сигнатуры σ. Синтаксис языка содержит определения правильно построенных выражений двух сортов — термов и формул.

Фиксируем множество $Var = \{x_0, x_1, \ldots\}$ *индивидных* переменных (мыслятся пробегающими одно и то же множество значений).

Термы (Tm).

- $Cnst \cup Var \subseteq Tm$
- Если $t_1, \ldots, t_n \in Tm$, $f \in Fn$, $arity(f) = n$, то $f(t_1, \ldots, t_n) \in Tm$.

Формулы (Fm).

- Если $t_1, \ldots, t_n \in Tm$, $P \in Pr$, $arity(P) = n$, то $P(t_1, \ldots, t_n) \in Tm$.
- Если $\varphi, \psi \in Fm$, то $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in Fm$.
- Если $\varphi \in Fm$, $x \in Var$, то $(\forall x\varphi), (\exists x\varphi) \in Fm$. В этих случаях φ считается *областью действия* квантора, а все вхождения переменной x в φ (если они есть) объявляются *связанными*.

Переменные, которые имеют несвязанное вхождение в формулу, называются *свободными* переменными формулы (или ее параметрами). Формула без свободных переменных называется *замкнутой*.

Семантика. Фиксируем интерпретацию I сигнатуры в некоторой математической структуре (модели языка). Переменные пробегают носитель структуры, константы обозначают конкретные (выделенные) элементы носителя, функциональные символы — конкретные (выделенные) операции на носителе, а предикатные символы — конкретные (выделенные) предикаты на носителе структуры. Замкнутые формулы получают однозначно определенное истинностное значение — 0 или 1.

Получаем язык для описания свойств этой структуры.

1. Сигнатура содержит двухместные $=^2$, $\in^2$, $\perp^2$. Констант нет. Носитель интерпретации M — все точки и прямые на плоскости. Предикатные символы интерпретируются равенством, принадлежностью

(точка лежит на прямой) и перпендикулярностью (прямых). Выразить:

(a) “x — точка”, “x — прямая”.

(b) “Прямые x и y параллельны”.

(c) “x, y, z — вершины (невырожденного) треугольника”.

(d) “Высоты каждого треугольника пересекаются в одной точке”.

(e) “Точки x, y, z , t являются последовательными вершинами параллелограмма”.

(f) “Точка z делит отрезок x, y пополам”.

2. Язык арифметики. На множестве натуральных чисел заданы трехместные предикаты $S(x, y, z) =$ и $\iff$ $x+y = z$, $P(x, y, z) =$ и $\iff$ $x \cdot y = z$. На языке первого порядка с предикатными символами S, P записать:

   (a) формулы с одной свободной переменной a, истинные тогда и только тогда, когда $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, a — чётное число, a — нечётное число;

   (b) формулы с двумя свободными переменными a и b, истинные тогда и только тогда, когда $a = b$, $a \leq b$, a делит b;

   (c) формулы с тремя свободными переменными a, b и c, истинные тогда и только тогда, когда a — наименьшее общее кратное чисел b и c, a — наибольший общий делитель чисел b и c.

β-функция Гёделя. В стандартной интерпретации (см. задачу 2) языка арифметики выразим график β-функции Геделя. Эта такая функция, что для каждой конечной последовательности натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$ существуют x, y такие, что

$$\beta(x, y, 0) = n, \quad \beta(x, y, 1) = a_1, \quad \ldots \quad , \beta(x, y, n) = a_n.$$

3. Доказать выразимость в стандартной интерпретации языка арифметики условия “ $y = 2^x$ ”.

Техника доказательства невыразимости. Если отношение не сохраняется при некотором автоморфизме модели, то оно невыразимо. (Автоморфизм — это биекция носителя на себя, сохраняющая все сигнатурные операции, отношения и константы.) Выразимы ли следующие отношения?

4. $a = b$, $b = a + 1$, $c = a + b$ в $(\mathbf{Z}, <)$.

5. $a = 0$, $a = b$, $a < b$ в $(\mathbf{Z}, a + b = c)$.

6. $a = b$, $a = 1$, $a = 3$ в $(\mathbf{N}, a \vdots b)$ где $a \vdots b \Leftrightarrow \exists k(a = k \cdot b)$, т.е. $0 \vdots 0$.

Домашнее задание

7. Доделать задачи 1 и 2.

8. Пусть график функции $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ выразим в стандартной интерпретации языка арифметики. Доказать выразимость графика функции g, определенной рекурсией: $g(0) = a, \quad g(n{+}1) = f(n, g(n))$.

9. Выразимы ли следующие отношения?

   (a) $a = b$, $|a - b| = 2$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.

   (b) $a < b$, $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$ в $(\mathbf{N}, a + b = c)$.

   (c) “a — простое число” в $(\mathbf{N}, a \vdots b)$.

   (d) $a = 1$, $a = 2$ в $(\mathbf{Z}, a + b = c)$.

   (e) $a = 0$ в $(\mathbf{Z}, a = b + 1)$.

   (f) $a = b + 1$ в $(\mathbf{Z}, a = b + 2)$.

   (g) $a = b + 1$ в $(\mathbf{Z}, |a - b| = 1)$.

   (h) $|a - b| = 3$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.