Домашнее задание 5

Цифры Вашего кода — $a_0, \ldots, a_9$. В каждом из четырех блоков задач Вам нужно решить только один вариант, выбор которого определяется цифрами Вашего кода так, как указано.

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_7$. Вычислите интеграл

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

от функции f по пути γ.

(0) $f(x+iy) = x$, $\gamma(t) = e^{\pi i \sin t}$, $t \in [0, \pi/2]$.
(1) $f(z) = \bar{z}$, $\gamma(t) = 2t + i$, $t \in [0, 4]$.
(2) $f(z) = 1$, $\gamma(t) = t + i\,\mathrm{ch}(t)$, $t \in [0, 1]$.
(3) $f(x+iy) = 1 - ix$, $\gamma(t) = t + i\frac{t^2}{2}$, $t \in [0, 1]$.
(4) $f(z) = \frac{1}{z}$, $\gamma(t) = e^{it^2}$, $t \in [0, 3\pi]$.
(5) $f(x+iy) = e^y$, $\gamma(t) = t + i\,\ln(t)$, $t \in [1, 2]$.
(6) $f(x+iy) = x^2$, $\gamma(t) = t + i\,\ln(t)$, $t \in [0, 1]$.
(7) $f(x+iy) = x^5$, $\gamma(t) = t + \frac{i}{t}$, $t \in [0, 1]$.
(8) $f(x+iy) = x^2 + y^2$, $\gamma(t) = e^{it^2}$, $t \in [0, 2]$.
(9) $f(z) = e^z$, $\gamma(t) = (2+i)t$, $t \in [0, 1]$.

Напомним, что $\mathrm{ch}(t) = \cos(it) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

2. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_3 + 2a_4$.

(0) Нарисуйте замкнутый путь c, такой, что $\mathrm{Ind}_0\gamma = 3$ и $\mathrm{Ind}_1\gamma = -2$.

(1) Найдите максимум $\mathrm{Ind}_z\gamma$, где

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2e^{4\pi i t}, \text{если } t \in [0, 1/2], \\ e^{4\pi i(t-1)} + 1, \text{если } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

.

(2) Для каждой из связных областей, на которые плоскость разбивает лемниската Бернулли (“восьмёрка”, заданная в полярных координатах ρ, θ уравнением $\rho^2 = 2\cos 2\theta$), найдите значение индекса относительно лемнискаты (направление выберите произвольно).

(3) Нарисуйте схематично путь γ и найдите индекс относительно γ в каждой из связных областей, на которые он разбивает плоскость, где

$$\gamma(t) = \sin(t)e^{2it}, \quad t \in [0, \pi].$$

(4) Нарисуйте путь γ и найдите индекс относительно γ в каждой из связных областей, на которые он разбивает плоскость, где

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{6\pi i t}, \text{ если } t \in [0, 1/3], \\ 3e^{6\pi i(t-1/3)} + 1, \text{ если } t \in [1/3, 2/3], \\ e^{6\pi i(1-t)} - 1, \text{ если } t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

(5) Нарисуйте схематично путь γ и найдите индекс относительно γ в каждой из связных областей, на которые он разбивает плоскость, где

$$\gamma(t) = \sin(3t)e^{it}, \quad t \in [0, \pi].$$

(6) Нарисуйте схематично путь γ и найдите индекс относительно γ в каждой из связных областей, на которые он разбивает плоскость, где

$$\gamma(t) = \left(\sin(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{2it}, \quad t \in [0, \pi].$$

(7) Нарисуйте замкутый путь γ, такой что $\mathrm{Ind}_z\gamma$ принимает на $\mathbb{C}$ ровно 4 значения.

(8) Нарисуйте замкунтый путь γ, такой, что $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|k| \le 2$, верно $\mathrm{Ind}_k\gamma = k$.

(9) Для пути

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2e^{-6\pi i t}, \text{если } t \in [0, 1/3], \\ e^{6\pi i t} + 1, \text{если } t \in [1/3, 2/3], \\ e^{-6\pi i t} - 1, \text{если } t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

найдите площадь области, в которой $\mathrm{Ind}_z\gamma = -1$.

3. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $5a_0 + 7a_1$. Найдите все значения интеграла

$$\int_C f(z)\, dz$$

для выписанной ниже функции f и любых замкнутых контуров (=путей) C, не имеющих самопересечений и не проходящих через точки, в которых функция f не определена или обращается в бесконечность.

(0) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$.
(1) $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$.
(2) $f(z) = \frac{z^2+2z-3}{(z-1)^2(z+1)}$.
(3) $f(z) = \frac{z^2-3z-4}{(z-1)^2(z+1)}$.
(4) $f(z) = \frac{2}{z^3+z}$.

(5) $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-iz+2}$.
(6) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$.
(7) $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^2}$.
(8) $f(z) = \frac{e^z-\cos(z)-\sin(z)-z^2}{z^2}$.
(9) $f(z) = \frac{z^3-7z^2+16z-12}{z^3-8z^2+19z-12}$.

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $6a_1 + a_6$.

(0) Приведите пример открытой области $U \subset \mathbb{C}$, голоморфной функции $f : U \to \mathbb{C}$ и двух замкнутых контуров C_1, C_2, таких, что $\int_{C_1} f(z)\,dz = 1$ и $\int_{C_2} f(z)\,dz = \pi$.

(1) Приведите пример рациональной функции f и замкнутого контура C, таких, что $\int_C f(z)\,dz = 1$ и $\int_C zf(z)\,dz = -1$.

(2) Приведите пример открытой области $U \subset \mathbb{C}$, пары голоморфных функции $f, g : U \to \mathbb{C}$ и замкнутого контура C, таких, что $\int_C \frac{f(z)}{g(z)}\,dz = \int_C \frac{g(z)}{f(z)}\,dz = 1$.

(3) Приведите пример открытой области $U \subset \mathbb{C}$, голоморфной функции $f : U \to \mathbb{C}$ и замкнутых контуров C_1, C_2, C_3, таких, что $\int_{C_1} f(z)\,dz = 1$, $\int_{C_2} f(z)\,dz = 2$, $\int_{C_3} (z+3)f(z)\,dz = 3$.

(4) Приведите пример открытой области $U \subset \mathbb{C}$, голоморфной функции $f : U \to \mathbb{C}$ и замкнутых контуров C_1 и C_2, содержащих 0 внутри, таких, что $\int_{C_1} f(z)\,dz = 1$, $\int_{C_2} (f(z) - \frac{1}{z})\,dz = 1$.

(5) Приведите пример функции f, голоморфной на $\mathbb{C}$ без конечного числа точек, такой, что $\int_\gamma f(z)\;dz = 3$, где $\gamma(t) = \sin(3t)e^{it}, t \in [0, \pi]$.

(6) Приведите пример функции f, голоморфной на $\mathbb{C}$ без конечного числа точек, такой, что $\int_\gamma f(z)\;dz = 7$, где $\gamma(t) = e^{8it}, t \in [0, \pi]$.

(7) Приведите пример контура C, такого, что $\int_C f(z)\;dz = 10\pi i$, где $f(z) = \frac{5z-1}{z^2-1}$.

(8) Приведите пример контура C, такого, что $\int_C f(z)\;dz = 7\pi i$, где $f(z) = \frac{13z+4}{6z^2+6z}$.

(9) Приведите пример открытой области $U \subset \mathbb{C}$, пары голоморфных функции $f, g : U \to \mathbb{C}$ и замкнутого контура C, таких, что $\int_C f(z)\,dz \neq 0$, $\int_C g(z)\,dz \neq 0$, $\int_C f(z)g(z)\,dz = 0$.

5. Бонусная задача. Эту задачу не надо записывать. Вы можете рассказать ее вашему семинаристу и получить за нее бонусные баллы. Решайте тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_5 + a_8$.

(0) Упражнение 4.8 на странице 59 основного учебника.

(1) Упражнение 4.9 на странице 59 основного учебника.

(2) Упражнение 4.10 на странице 59 основного учебника.

(3) Упражнение 4.13 на странице 60 основного учебника.

(4) Упражнение 4.14 на странице 60 основного учебника.

(5) Для непрерывной функции $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, дайте определение интеграла

$$\int_\gamma \varphi(x + iy)\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

сформулируйте и докажите теорему о кусочно-гладкой замене параметра в этом интеграле.

(6) Пусть C — кусочно-гладкая замкнутая кривая (=образ кусочно-гладкого пути), а функция f определена и голоморфна в окрестности кривой C. Предполагая без доказательства непрерывность производной f' в некоторой окрестности кривой C, докажите, что интеграл

$$\int_C \overline{f(z)} f'(z) dz$$

выражается чисто мнимым числом.

(7) Пусть функция f определена и голоморфна в открытой области Ω, удовлетворяет в этой области неравенству $|f(z) - 1| < 1$, а также имеет непрерывную производную в Ω (последнее вытекает из голоморфности, но мы этого пока не знаем). Докажите, что

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

для любого замкнутого кусочно-гладкого пути γ.

(8) Пусть $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — многочлен, а через C обозначена окружность радиуса $R > 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{C}$. Докажите, что

$$\int_C P(z) d\overline{z} = -2\pi i R^2 P'(a).$$

(9) Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое связное множество, а $f : U \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Докажите, что любые две первообразные функции f (если они существуют) отличаются на постоянную. Что изменится, если не предполагать множество U связным?