Дискретная математика
Домашняя работа
Мозговой Владислав
группа А (БМТ191)

Домашнее задание 2

Задача 1

Условие

Найдите без помощи компьютера коэффициент при q^{24640} в q-биноминальном коэффициенте $\begin{bmatrix} 314 \\ 159 \end{bmatrix}_q$

Решение

q-биноминальный коэффициент $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_{m+n}$ равен количеству диаграмм Юнга вписанных в прямоугольник $m \times n$

Заметим, что производящая функция имеет вид $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \sum\limits_{k=0}^{mn} = a_k q^k$.

Заметим также что

$$\begin{bmatrix} 314 \\ 159 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} 159+155 \\ 159 \end{bmatrix}_q$$

То есть это диаграммы юнга вписанные в прямоугольник 159×155, его площадь $159 \cdot 155 = 24645$, следовательно коэффициент перед q^{24640} равен количеству диаграмм Юнга из 24640 или $24645 - 24640 = 5$ блоков. Диаграмм из 5 блоков ровно 7, а следовательно и коэффициент перед q^{24640} – 7.

Ответ: 7

Задача 2

Условие

(а) Докажите равенство

$$(1+t)(1+t^2)(1+t^3)\ldots = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\ldots}$$

(б) Докажите, что для каждого целого $n > 0$ следующие два числа равны:

- количество наборов целых чисел $(x_1, \ldots, x_k)$ (со всевозможными k), в которых $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ и $x_1 + \ldots + x_k = n$
- количество наборов нечетных чисел $(y_1, \ldots, y_k)$ (со всевозможными k), в которых $0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_k$ и $y_1 + \ldots + y_k = n$

Решение

(а)

$$(1+t)(1+t^2)(1+t^3)\ldots = \frac{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)\ldots}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\ldots} =$$
$$\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1-t^2}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t^3} \cdot \frac{1-t^4}{1-t^4} \cdot \ldots = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\ldots}$$

(б) Обозначим за A_0 количество разбиений первого типа (на различные целые), а за A_1 второго типа (на нечетные числа). Тогда посчитаем производящие функции A_0 и A_1:

$$A_0(t) = \sum A_0(n) t^n = (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\ldots$$
$$A_1(t) = \sum A_1(n) t^n = (1+t+t^2+\ldots)(1+t^3+t^6+\ldots)\ldots = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t^3} \cdot \ldots = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\ldots}$$

Остается заметить, что

$$A_0(t) = (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\ldots = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\ldots} = A_1(t)$$

Задача 3

Условие

Изобразите дерево на десяти вершинах, пронумерованных числами от 0 до 9, кодом Прюфера которого являются восемь цифр Вашего дня рождения, записанного в формате DD-MM-YYYY.

Решение

код Прюфера: 27012002. Восстановим по нему граф: