Логика и алгоритмы, лекция 26

лектор: Кудинов Андрей Валерьевич

1 июня 2021 г.

План лекции:

- Универсальная машина Тьюринга
- Главность универсальной МТ
- m-сводимость и m-полнота
- Теорема Клини о неподвижной точке
- Арифметика Пеано

Кодирование машин Тьюринга

Машина $M = \langle Q, \Sigma, P, q_0, q_1 \rangle$ задаётся

- $Q = \{q_0, \ldots, q_s\}$ — внутр. состояния;
- $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_r\}$ — рабочий алфавит;
- $P = \{p_0, \ldots, p_{s(r+1)}\}$ -1 — набор команд.

q_1 — нач., q_0 — кон., $a_0 = \#$ — пробел.

$P : \underbrace{Q \setminus \{q_0\} \times \Sigma} \to \ldots\ldots$

Кодирование Q и Σ

Алфавит программ есть $\Pi := \{\to, L, N, R, q, a, \mathbf{1}\}$.

Сопоставим элементам Q и Σ следующие коды в алфавите Π:

$\overset{Code}{q_i \longmapsto} q\mathbf{1}^i$; $\quad \overset{Code}{a_j \longmapsto} a\mathbf{1}^j$.

Слово $x \in \Sigma^*$ кодируется конкатенацией $Code(x)$ кодов всех его букв, например $Code(a_2 a_0 a_1) = a\mathbf{11}aa\mathbf{1}$.

$$Code(a^0 a^1 \ldots a^n) = Code(a^0) \cdot Code(a^1) \cdot \ldots \cdot Code(a^n)$$

Коды команд

Код команды $q_i a_k \to q_j a_l \nu$, где $\nu \in \{L, N, R\}$, есть слово $q\mathbf{1}^i a\mathbf{1}^k \to q\mathbf{1}^j a\mathbf{1}^l \nu$ в алфавите Π.

Код команды $p \in P$ обозначим $Code(p)$.

Коды машин

Код машины M есть конкатенация кодов всех её команд, то есть $Code(M) := Code(p_0) \dots Code(p_{s(r+1)})$.

Утверждение

Отображение $M \longmapsto Code(M)$ инъективно.

В частности, по $Code(M)$ однозначно восстанавливаются рабочий алфавит, множество внутренних состояний, команды и т.д.

Утверждение

Множество кодов всевозможных машин Тьюринга (выбранного нами формата) есть разрешимое подмножество Π^*.

$Code(M) \in \Pi^*$

Функция, вычислимая машиной Тьюринга

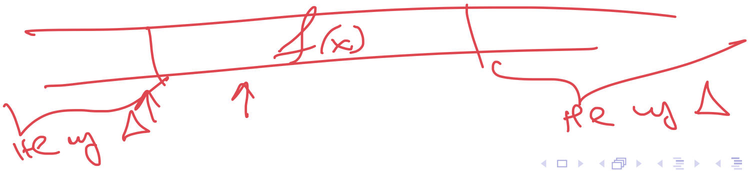
Пусть $\Delta \subset \Sigma$ и $\# \notin \Delta$.

M **чисто вычисляет** частичную функцию $f : \Delta^* \to \Delta^*$, если для каждого $x \in \Delta^*$

- если $x \in dom(f)$, то начав работу в конфигурации $q_1\#x$, машина M останавливается в конфигурации $q_0\#f(x)$;
- если $x \notin dom(f)$, то машина M не останавливается.

M вычисляет частичную функцию $f : \Delta^* \to \Delta^*$, если для каждого $x \in \Delta^*$

- если $x \notin dom(f)$, то начав работу в конфигурации $q_1\#x$, машина M не останавливается;
- если $x \in dom(f)$, то машина M останавливается, на ленте написано слово $y = f(x)$, слева и справа от него стоят символы не из Δ^*, а головка остановилась внутри или непосредственно перед y.



Обозначения

$M_\Delta(x)$ есть результат работы M на слове $x \in \Delta^*$.

$M_\Delta : \Delta^* \to \Delta^*$ — частичная функция, вычислимая M.

Замечание 26.1

M_Δ определена для любой машины M с рабочим алфавитом $\Sigma \supset \Delta$.

Утверждение

Для любой МТ M и Δ можно указать машину M' вычисляющую функцию M_Δ чисто.

- Преобразуем M так, чтобы M не печатала $\#$ (добавив «двойник» пробела).
- Добавим к программе M инструкции, определяющие по завершении работы M слово $M_\Delta(x)$ и удаляющие весь мусор слева и справа до символов $\#$.

Универсальная машина Тьюринга

Универсальная машина U_Δ с рабочим алфавитом, содержащим $\Pi \cup \Delta \cup \{\$\}$, для любой МТ M и слова $x \in \Delta^*$ (чисто) вычисляет результат работы машины M на входе x, то есть частичную функцию

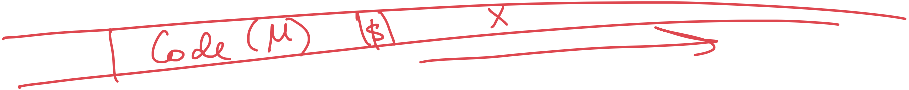
$$Code(M)\$x \longmapsto M_\Delta(x).$$

Другими словами:

- Если U_Δ начинает работу в конфигурации $q_1\#Code(M)\$x$ для $x \in \Delta^*$, то заключительная конфигурация $q_0\#M_\Delta(x)$;
- Иначе U_Δ зацикливается.

Алгоритм работы машины U_Δ:

- Читаем входное слово вплоть до первого пробела и проверяем, что оно имеет вид $Code(M)\$x$ для $x \in \Delta^*$. Если нет, зацикливаемся.
- Эмулируем работу M на входе x, пользуясь частью ленты справа от \$ для записи кодов конфигураций M.



- В случае завершения работы M на входе x с результатом y выделяем слово $Code(y)$ из кода заключительной конфигурации M.
- Преобразуем $Code(y)$ в y.

Главность универсальной МТ

$F(n,x)$ – главная УВФ в $Com(\mathbb{N},\mathbb{N})$, если $\forall\, g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\exists\, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – тотальная выч. $\forall n \forall x\ F(s(n), x) \simeq g(n,x)$

Пусть $\Delta = \{1\}$ и МТ M вычисляет $g(e,x)$ в унарной записи, то есть $M_\Delta(\overline{c(e,x)}) \simeq \overline{g(e,x)}$.

$e \$ x \mapsto \overline{g(e,x)}$

Сопоставим МТ M машину $M[n]$, которая для данного входа $\overline{x}$ вычисляет $\overline{c(n,x)}$, а далее работает как M. Преобразование $n \mapsto Code(M[n])$ является тотальной вычислимой функцией.

$\boxed{\text{На вход } M \text{ и } n}$

на выходе $M[n]$

$\boxed{\text{На вход } \underline{x}\quad \underline{c(n,x)}\ M}$

$Code(M[n])$ – код

Пусть $\phi_\Pi : \mathbb{N} \to \Pi^*$ произвольная вычислимая тотальная биекция, такая что обратная биекция тоже вычислима.
Имеем

$$M_\Delta(\overline{c(e,x)}) \simeq M[e]_\Delta(\overline{x}) \simeq U_\Delta(Code(M[e])\$\overline{x}).$$

Вспомним, что универсальная функция $F(i,n) := |U_\Delta(\phi_\Pi(i)\$\overline{n})|$.

Отсюда $g(e,x) \simeq F(s(e),x)$, где

$$s(e) = \phi_\Pi^{-1}(Code(M[e])).$$

m-сводимость

Говорят, что множество A натуральных чисел m-сводится к другому множеству B натуральных чисел, если существует всюду определённая вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с таким свойством:

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

для всех $x \in \mathbb{N}$. Обозначение: $A \leqslant_m B$.

m-сводимость

Говорят, что множество A натуральных чисел m-сводится к другому множеству B натуральных чисел, если существует всюду определённая вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с таким свойством:

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

для всех $x \in \mathbb{N}$. Обозначение: $A \leqslant_m B$.

Свойства:

- $\leqslant_m$ — рефлексивно и транзитивно;
- B — разрешима (перечислима) и $A \leqslant_m B \Rightarrow A$ — разрешима (перечислима);
- B — неразреш. (неперечис.) и $A \leqslant_m B \Leftarrow A$ — неразреш. (неперечис.);
- $A \leqslant_m B \iff \mathbb{N} \setminus A \leqslant_m \mathbb{N} \setminus B$;
- A — разрешима и $B \neq \varnothing, \mathbb{N} \Rightarrow A \leqslant_m B$.

Пусть F — главная универсальная вычислима функция.
$A = \{e \mid F_e(0) \neq 0\}$. Что можно сказать про множество A?

По Т. Райса-Усп. A — неразрешимо

χ^*_A — вычислима, значит A — перечислимо

$A = \{e \mid F_e$ — тотально$\}$

A — неразрешимо

A — неперечислимо

m-полные множества

Множество A называется m-полным (в классе перечислимых множеств), если для любого перечислимого множества B верно, что $B \leqslant_m A$.

m-полные множества

Множество A называется m-полным (в классе перечислимых множеств), если для любого перечислимого множества B верно, что $B \leqslant_m A$.

Теорема 26.2

Для главной УВФ $F(e, x)$ множество $K = \{e \mid F(e, e) \text{ определено}\}$ является m-полным.

K — перечислимо.

Предположим, что A — перечислимо. Рассмотрим функцию

$$g(n, x) = \begin{cases} \text{неопред.}, & \text{если } n \in A; \\ 1, & \text{если } n \notin A; \end{cases}$$

По главность F найдется тотальная вычисл функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т.ч.

$$g(n, x) \simeq F(f(n), x).$$

$$g(n,x) = \begin{cases} \text{неопред.}, & \text{если } n \notin A; \\ 1, & \text{если } n \cancel{\notin} \in A; \end{cases}$$

$$g(n,x) \simeq F(f(n),x).$$

— вычисл.

$g(n,x) = \chi^*_A(n)$

Покажем, что

$$\cancel{x}\, n \in A \iff f(\cancel{x}\, n) \in K$$

$\Downarrow$

$\forall x \; g(n,x) = 1$

$\Downarrow$

$F_{f(n)}$ — всюду опр.

$\Uparrow$

$n \notin A \qquad f(n) \notin K$

$\Downarrow$

$\forall x \; g(n,x)$ неопр

$\Downarrow$

$F_{f(n)}$ — нигде неопр

$$x \in A \iff f(x) \in K$$

$$A \leq_m K$$

Теорема Клини о неподвижной точке

Теорема 26.3 (Клини)

Пусть F — главная УВФ для класса $\mathrm{Com}(\mathbb{N},\mathbb{N})$, а h — всюду определённая вычислимая функция одного аргумента. Тогда существует такое число n, что $F_n \simeq F_{h(n)}$, то есть n и $h(n)$ — номера одной функции.

$n \equiv m \iff F_n \simeq F_m$

Лемма $\forall f$ - вычисл ф-у $\exists s$ - тотально выч ф-ция, т.ч. s продолжае f (по модулю $\equiv$), т.е. $\forall n \in \mathrm{dom} f \, (f(n) \equiv s(n))$

Док-во $g(n,x) \simeq F(f(n),x)$ - вычисл $\Rightarrow \exists s$ т.ч.

$F(s(n),x) \simeq g(n,x) \simeq F(f(n),x)$

$s(n) \equiv f(n)$ для $n \in \mathrm{dom} f$

Теорема Клини о неподвижной точке

Теорема 26.3 (Клини)

Пусть F — главная УВФ для класса $\mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, а h — всюду определённая вычислимая функция одного аргумента. Тогда существует такое число m, что $F_n = F_{h(n)}$, то есть n и $h(n)$ — номера одной функции.

$n \equiv h(n)$

Пусть h не имеет неподв. точки в смысле $\equiv$

$f(n) = F(n,n)$ Заметим, что f не имеет всюду опр продолжения отличающегося от f на всех точках Упр

По лемме $\exists f_0$ — тотальн. вч и $\forall n \in \mathrm{dom}\, f$ $f_0(n) \equiv f(n)$

$t(n) = h(f_0(n))$

1) t — тотально вычислима

2) $t(n) \not\equiv f(n)$

$f(n)$ — неопр. $t(n)$ ~~опр~~

$f(n)$ — опр. $t(n) = h(f_0(n)) \not\equiv f(n)$

$\Rightarrow t(n) \not\equiv f(n)$

Программа печатающая свой номер (текст)

Следствие 26.4

Существует n, такой что $F(n, x) = n$ при любом x.

пуф

$g(n,x) = n$ — вычислима

$\exists s$ — тот. выч т.ч. $\forall x (F(s(n), x) \simeq g(n,x))$

По Т. Клини $\exists k$ т.ч. $\forall x (F(s(k), x) \simeq F(k,x))$

$F(k,x) = F(s(k), x) = g(k,x) = k$

Программа печатающая свой номер (текст)

Следствие 26.4

Существует n, такой что $F(n, x) = n$ при любом x.

Упр $\exists\, n, m$

$\forall x \left(F(n,x) = m \wedge F(m,x) = n \right)$

Арифметика Пеано PA

Сигнатура: $0,\ S,\ +,\ \cdot,\ \mathrm{Exp},\ \leq,\ =$

Стандартная модель: $(\mathbb{N}; 0, S, +, \cdot, \mathrm{Exp}, \leq, =)$, где $S(x) = x + 1$ и $\mathrm{Exp}(x) = 2^x$.

$\forall x \leq n\ \exists y \leq t$

Аксиомы PA

1. $\neg S(a) = 0, \quad S(a) = S(b) \to a = b,$
2. $a + 0 = a, \quad a + S(b) = S(a + b),$
3. $a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot S(b) = a \cdot b + a,$
4. $\mathrm{Exp}(0) = S(0), \quad \mathrm{Exp}(S(a)) = \mathrm{Exp}(a) + \mathrm{Exp}(a),$
5. $a \leq 0 \leftrightarrow a = 0,$
6. $a \leq S(b) \leftrightarrow (a \leq b \vee a = S(b)),$
7. (Схема аксиом индукции)

   $A[a/0] \wedge \forall x\, (A[a/x] \to A[a/S(x)]) \to \forall x\, A[a/x],$

   для любой формулы A.

Арифметика Робинсона

Теория Q получается из PA заменой схемы индукции единственной аксиомой:

$$a \leq b \vee b \leq a.$$

Упражнение 26.1

Показать, что $\mathsf{PA} \vdash Q$.

Решение

(1) Сначала покажем индукцией по x, что $\forall x\,(a \leq x \leftrightarrow a = x \vee S(a) \leq x)$.

(2) Затем покажем индукцией по x, что $\forall x\,(a \leq x \vee x \leq a)$.

Заметим, что из (1) следует $a \leq a$ и $a \leq S(a)$.

Вывод (1)

Базис: $a \leq 0 \leftrightarrow a = 0 \lor S(a) \leq 0$. Поскольку $S(a) \leq 0 \to S(a) = 0$, имеем $\neg S(a) \leq 0$.

Вывод (1)

Базис: $a \leq 0 \leftrightarrow a = 0 \vee S(a) \leq 0$. Поскольку $S(a) \leq 0 \to S(a) = 0$, имеем $\neg S(a) \leq 0$.

Шаг: эквивалентно преобразуем

1. $a \leq S(x)$
2. $a \leq x \vee a = S(x)$ (аксиома)
3. $(a = x \vee S(a) \leq x) \vee a = S(x)$ (пр. инд.)
4. $S(a) = S(x) \vee S(a) \leq x \vee a = S(x)$ (аксиома)
5. $S(a) \leq S(x) \vee a = S(x)$

Вывод (2)

Базис: $a \leq 0 \vee 0 \leq a$ поскольку $0 \leq a$.

Шаг:

1. $a \leq x \vee x \leq a \quad$ (пр. инд.)
2. $x \leq a \to (a = x \vee S(x) \leq a)$ (1)
3. $a \leq x \vee a = x \vee S(x) \leq a$
4. $a \leq x \to a \leq S(x) \quad$ (аксиома)
5. $a = x \to a \leq S(x) \quad$ (из (1))
6. $a \leq S(x) \vee S(x) \leq a$