1 Домашняя работа 7

Задача 1.1. Пусть $\vec{F}:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ - произвольная гладкая векторная функция от трехмерньх векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$:

$$\vec{F}=f_1\vec{r}+f_2\vec{p}+f_3[\vec{r}\times\vec{p}],$$

где f_i - скалярные функции от $\vec{r}^2,\vec{p}^2$ и $(\vec{r}\cdot\vec{p})$, компоненты $\vec{r}$ и $\vec{p}$ - координаты и сопряженные импульсы с канонической скобкой Пуассона:

$$\{r_i,p_j\}=\delta_{ij}.$$

Вычислите следуюшие скобки Пуассона:

(а) $\{\vec{F},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}$, где $\vec{M}=[\vec{r}\times\vec{p}]$ - вектор углового момента, $\vec{n}$ - заданный постоянный вектор (его компоненты не зависят от $\vec{r}$ и $\vec{p}$).

(б) $\left\{\vec{F},\vec{M}^2\right\}$.

Доказательство. (а) Посчитаем $\{f_1\vec{r},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}$

$$\{f_1\vec{r},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}=f_1\{\vec{r},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}+\vec{r}\{f_1,(\vec{M}\cdot\vec{n})\}$$
$$\{r_l,\varepsilon_{ijk}r_jp_kn_i\}=\varepsilon_{ijk}n_i\{r_l,r_jp_k\}=\varepsilon_{ijk}n_ir_j=\varepsilon_{lij}n_ir_j=[\vec{n}\times\vec{r}]_l$$
$$\{\vec{r},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}$$

$$\{f_1,(\vec{M}\cdot\vec{n})\}=\sum_{i=1}^{3}\{r_i,(\vec{M}\cdot\vec{n})\}\frac{\partial f_1}{\partial r_i}+\sum_{i=1}^{3}\{p_i,(\vec{M}\cdot\vec{n})\}\frac{\partial f_1}{\partial p_i}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r_i}=2r_i\frac{\partial f_1}{\partial\vec{r}^2}+p_i\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial p_i}=2p_i\frac{\partial f_1}{\partial\vec{p}^2}+p_i\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}$$

Следовательно

$$\{f_1,(\vec{M}\cdot\vec{n})\}=\sum_{i=1}^{3}(2\frac{\partial f_1}{\partial\vec{r}^2}r_i[\vec{n}\times\vec{r}]_i+\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}p_i[\vec{n}\times\vec{r}]_i+2\frac{\partial f_1}{\partial\vec{r}^2}(\vec{r},[\vec{n}\times\vec{p}]_i)+\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}r_i[\vec{n}\times\vec{p}]_i)$$
$$=2\frac{\partial f_1}{\partial\vec{r}^2}(\vec{r},[\vec{n}\times\vec{r}])+\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}\vec{p}(\vec{n}\times\vec{r})+2\frac{\partial f_1}{\partial\vec{p}^2}\vec{p}(\vec{n}\times\vec{p})+\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}\vec{r}(\vec{n}\times\vec{p})$$
$$=\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}(\vec{r}(\vec{n}\times\vec{p})+\vec{p}(\vec{n}\times\vec{r}))=\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}(\vec{p}(\vec{r}\times\vec{n})+\vec{p}(\vec{n}\times\vec{r}))=0$$

Аналогично

$$\{f_2,(\vec{M}\cdot\vec{n}\}=\{f_3,(\vec{M}\cdot\vec{n})\}=0$$

Тогда

$$\{\vec{F},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}=f_1\{\vec{r},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}+f_2\{\vec{p},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}+f_3\{[\vec{r}\times\vec{p}],(\vec{M}\cdot\vec{n})\}$$

Где

$$\{\vec{r},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}=[\vec{n}\times\vec{r}]\{\vec{p},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}=[\vec{n}\times\vec{p}]\{[\vec{r}\times\vec{p}],(\vec{M}\cdot\vec{n})\}=\{\vec{M},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}$$

И так как

$$\{M_i,M_jn_j\}=n_j\{M_i,M_j\}=\varepsilon_{ijk}n_jM_k=[\vec{n}\times\vec{M}]_i$$
$$\Rightarrow\{[\vec{r}\times\vec{p}],(\vec{M}\cdot\vec{n}\}=[\vec{n}\times\vec{M}]$$

То

$$\{\vec{F},(\vec{M}\cdot\vec{n})\}=f_1[\vec{n}\times\vec{r}]+f_2[\vec{n}\times\vec{p}]+f_3[\vec{n}\times\vec{M}]$$

(б) Посчитаем $\{f_1\vec{r}, \vec{M}^2\}$

$$\{f_1\vec{r}, \vec{M}^2\} = f_1\{\vec{r}, \vec{M}^2\} + \vec{r}\{f_1, \vec{M}^2\}$$
$$\{r_l, \vec{M}^2\} = \{r_l, M_k^2\} = 2M_k\{r_l, M_k\} = 2M_k\{r_l, \varepsilon_{ijk}r_ip_j\} = 2M_kr_i\varepsilon_{ilk} = 2\varepsilon_{lki}M_kr_i = 2[\vec{M}\times\vec{r}]_l$$
$$\{f_1, \vec{M}^2\} = \{r_l, \vec{M}^2\}\frac{\partial f_1}{\partial r_l} + \{p_l, \vec{M}^2\}\frac{\partial f_1}{\partial p_l}$$
$$= 2[\vec{M}\times\vec{r}]_l(2r_l\frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}^2} + p_l\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}) + 2[\vec{M}\times\vec{p}]_l(2p_l\frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}^2} + r_l\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})})$$
$$= 4(\vec{r}\cdot[\vec{M}\times\vec{r}])\frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}^2} + 2(\vec{p}\cdot[\vec{M}\times\vec{r}])\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})} + 4(\vec{p}\cdot[\vec{M}\times\vec{p}])\frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}^2} + 2(\vec{r}\cdot[\vec{M}\times\vec{p}])\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}$$
$$= 2\frac{\partial f_1}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}(\vec{p}\cdot[\vec{M}\times\vec{r}] + \vec{r}\cdot[\vec{M}\times\vec{p}]) = 0$$

Аналогично

$$\{f_2, \vec{M}^2\} = \{f_3, \vec{M}^2\} = 0$$

Тогда

$$\{\vec{F}, \vec{M}^2\} = f_1\{\vec{r}, \vec{M}^2\} + f_2\{\vec{p}, \vec{M}^2\} + f_3\{[\vec{r}\times\vec{p}], \vec{M}^2\}$$

Где $\{\vec{r}, \vec{M}^2\} = 2[\vec{M}\times\vec{r}]$

$$\{p_l, M^2\} = 2M_k\{p_l, M_k\} = 2M_k\{p_l, \varepsilon_{ijk}r_ip_j\} = 2M_k\varepsilon_{ijk}p_j(-1) = 2\varepsilon_{lkj}M_kp_j = 2[\vec{M}\times\vec{p}]_l$$
$$\Rightarrow \{\vec{p}, \vec{M}^2\} = 2[\vec{M}\times\vec{p}]$$
$$\{[\vec{r}\times\vec{p}], \vec{M}^2\} = \{\vec{M}, \vec{M}^2\} = 2\vec{M}\{\vec{M}, \vec{M}\} = 0$$

Откуда

$$\{\vec{F}, \vec{M}^2\} = 2f_1[\vec{M}\times\vec{r}] + 2f_2[\vec{M}\times\vec{p}]$$

□

Задача 1.2. Лагранжиан одномерного гармонического осциллятора имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2x^2}{2}, \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}.$$

(а) Найдите обобпенный импульс и постройте гамильтониан H этой системы.

(б) С помоцнью вещественных переменных x и p построим комплесную величину a :

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right).$$

Запините гамильтониан в терминах a и $\bar{a}$.

(в) Вычислите скобки Пуассона $\{a, \bar{a}\}$ и $\{a, H\}$.

(г) Выпините гамильтоново уравнение движения для и найдите его обнее ренение.

Доказательство. (а) $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$ Проебразование Лежандра

$$L(q,\dot{q},t) \mapsto [\dot{q}_\alpha p_\alpha - L(q,\dot{q},t)]\Big|_{\dot{q}_\alpha = f_\alpha(q,p,t)} = H(q,p,t)$$
$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2}\cdot\frac{p^2}{m^2} + \frac{m\omega^2x^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}$$

(б)

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x + i\frac{p}{m\omega})$$
$$\alpha\overline{\alpha} = \frac{m\omega}{2}(x + i\frac{p}{m\omega})(x - i\frac{p}{m\omega}) = \frac{m\omega}{2}(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2}) = \frac{m\omega x^2}{2} + \frac{p^2}{2m\omega} = \frac{1}{\omega}(\frac{m\omega^2x^2}{2} + \frac{p^2}{2m})$$
$$H(x,p,t) = \omega\alpha\overline{\alpha}$$

(в)

$$
\begin{aligned}
&\{\alpha,\overline{\alpha}\} = \frac{m\omega}{2}\{x+i\frac{p}{m\omega}, x-i\frac{p}{m\omega}\}\\
&= \frac{m\omega}{2}(\{x,x\} - \frac{i}{m\omega}\{x,p\} + \frac{i}{m\omega}\{p,x\} + \frac{1}{m\omega}\{p,p\})\\
&= \frac{m\omega}{2}\cdot\frac{-2i}{m\omega} = -i\\
&\{\alpha,H\} = \{\alpha,\omega\alpha\overline{\alpha}\} = \omega\{\alpha,\alpha\overline{\alpha}\} = \omega\alpha\{\alpha,\overline{\alpha}\} = -i\omega\alpha
\end{aligned}
$$

(г)

$$
\begin{aligned}
&\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x+i\frac{p}{m\omega}) \in C^\infty(M) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \{\alpha,H\} + \frac{\partial\alpha}{\partial t} = -i\omega\alpha\\
&\int\frac{d\alpha}{\alpha} = -\int i\omega dt \quad \Rightarrow \ln\alpha = -i\omega t + c \quad \Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}\\
&\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} \quad \alpha_0 > 0
\end{aligned}
$$

□

Задача 1.3. Лагранжиан точечного заряда q массы m, движуцегося в пространстве $\mathbb{R}^3$ в постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$ параллельном оси Oz, в декартовых координатах имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) + \frac{qB}{2c}(x\dot{y}-y\dot{x}),$$

где $B=|\vec{B}|$, константа c - скорость света в вакууме.

(а) Найдите обобщенные импульсы и постройте гамильтониан этой системы.

(б) Найдите репение гамильтоновых уравнений движения, отвечаюпее началыным данным

$$x(0)=y(0)=z(0)=0, \quad p_x(0)=p_z(0)=p, \quad p_y(0)=0,$$

и определите соответствуюпуую траекторию движения.

(в) Вычислите скобки Пуассона $\{v_i,v_j\}, 1\le i,j\le 3$, между компонентами скорости заряда:

$$\vec{v} = (v_1,v_2,v_3) = (\dot{x},\dot{y},\dot{z}).$$

Доказательство. (а)

$$
\begin{aligned}
&p_x = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} - \frac{qB}{2c}y \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x+\frac{qB}{2c}y}{m}\\
&p_y = \frac{\partial L}{\partial\dot{y}} = m\dot{y} - \frac{qB}{2c}x \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \frac{p_y+\frac{qB}{2c}x}{m}\\
&p_z = \frac{\partial L}{\partial\dot{z}} = m\dot{z} \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H = (\frac{p_x}{m} + \frac{qB}{2mc}y)p_x + (\frac{p_y}{m} - \frac{qB}{2mc}x)p_y + \frac{p_z^2}{m}\\
&-\frac{m}{2}\frac{1}{m^2}((p_x+\frac{qB}{2c}y)^2 + (p_y-\frac{qB}{2c}x)^2 + p_z^2) - \frac{qB}{2cm}(p_yx - \frac{qB}{2c}x^2 - yp_x - \frac{qB}{2c}y^2)\\
&= \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) + p_xy\frac{qB}{2mc} - p_yx\frac{qB}{2mc} - \frac{1}{2m}\cdot(\frac{qB}{2c}y)^2 - p_xy\frac{qB}{2mc} + p_yx\frac{qB}{2mc}\\
&-\frac{1}{2m}\cdot(\frac{qB}{2c}x)^2 - p_yx\frac{qB}{2mc} + \frac{1}{m}\cdot(\frac{qB}{2c}x)^2 + p_xy\frac{qB}{2mc} + \frac{1}{m}(\frac{qB}{2c}y)^2\\
&= \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) + \frac{1}{2m}(\frac{qB}{2c})^2(y^2+x^2) + \frac{qB}{2mc}(p_xy - p_yx)\\
&\Rightarrow H = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) + \frac{q^2B^2}{8mc^2}(x^2+y^2) + \frac{qB}{2mc}(p_xy - p_yx)
\end{aligned}
$$

(б)

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0$$
$$p_x(0) = p_z(0) = p$$
$$p_y(0) = 0$$

Канонические уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases}$$
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_x}{m} + \frac{qB}{2mc}y$$
$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} - \frac{qB}{2mc}x$$
$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$
$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{q^2B^2}{4mc^2}x + \frac{qB}{2mc}p_y$$
$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{q^2B^2}{4mc^2}y - \frac{qB}{2mc}p_x$$
$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$
$$\Rightarrow p_z(t) = p$$
$$\dot{z} = \frac{p}{m} \Rightarrow z(t) = \frac{p}{m}t$$

Введем обозначение $k = \frac{qB}{2mc}$

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x m^{-1} + ky \\ \dot{y} = p_y m^{-1} - kx \\ \dot{p}_x = -mk^2 x + kp_y \\ \dot{p}_y = -mk^2 y - kp_x \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & k & m^{-1} & 0 \\ -k & 0 & 0 & m^{-1} \\ -mk^2 & 0 & 0 & m^{-1} \\ 0 & -mk^2 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & k & m^{-1} & 0 \\ -k & -\lambda & 0 & m^{-1} \\ -mk^2 & 0 & -\lambda & k \\ 0 & -mk^2 & -k & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 k^2 (\frac{\lambda^2}{k^2} + 4)\lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 = 2ik \quad \lambda_1 = -2ik$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad Au = \begin{bmatrix} kb + m^{-1}c \\ -ka + m^{-1}d \\ -mk^2 a + kd \\ -mk^2 b - kc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_1 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{mk} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_1 2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{mk} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2ik \qquad Au = \begin{bmatrix} kb + m^{-1}c \\ -ka + m^{-1}d \\ -mk^2 a + kd \\ -mk^2 b - kc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ika \\ 2ikb \\ 2ikc \\ 2ikd \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ mk \\ imk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{mk} \\ -\frac{i}{mk} \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2ik \qquad Au = \begin{bmatrix} kb + m^{-1}c \\ -ka + m^{-1}d \\ -mk^2 a + kd \\ -mk^2 b - kc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ika \\ -2ikb \\ -2ikc \\ -2ikd \end{bmatrix} \qquad u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{mk} \\ \frac{i}{mk} \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{mk} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{mk} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{mk} \\ -\frac{i}{mk} \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} e^{2ikt} + c_4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{mk} \\ \frac{i}{mk} \\ i \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2ikt}$$

Начальные условия

$$\begin{cases} x(0) = \frac{c_2}{mk} - \frac{c_3}{mk} - \frac{c_4}{mk} = 0 \\ y(0) = -\frac{c_1}{mk} - \frac{ic_3}{mk} + \frac{ic_4}{mk} = 0 \\ p_x(0) = c_1 - ic_3 + ic_4 = p \\ p_y(0) = c_2 + c_3 + c_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{p}{2} \\ c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{ip}{4} \\ c_4 = -\frac{ip}{4} \end{cases}$$

$$c_2 = 0 \quad c_3 = -c_4$$

$$-c_1 - ic_3 - ic_3 = 0 \Rightarrow c_1 = 2ic_3$$

$$-2ic_3 - ic_3 - ic_3 = p \Rightarrow c_3 = \frac{-p}{4i} = \frac{ip}{4}$$

Таким образом

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{2mk}\sin(2kt) \\ \frac{p}{2mk}(-1+\cos(2kt)) \\ \frac{p}{2}(1+\cos(2kt)) \\ -\frac{p}{2}\sin(2kt) \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \frac{pc}{qB}\sin(\frac{qB}{mc}t) \\ \frac{pc}{qB}(-1+\cos(\frac{qB}{mc}t)) \\ \frac{p}{2}(1+\cos(\frac{qB}{mc}t)) \\ -\frac{p}{2}\sin(\frac{qB}{mc}t) \end{cases}$$

То есть

$$x(t) = \frac{pc}{qB}\sin(\frac{qB}{mc}t)$$

$$y(t) = \frac{pc}{qB}(\cos(\frac{qB}{mc}t) - 1)$$

$$z(t) = \frac{p}{m}t$$

$$p_x(t) = \frac{p}{2}(\cos(\frac{qB}{mc}t) + 1)$$

$$p_y(t) = -\frac{p}{2}\sin(\frac{qB}{mc}t)$$

$$p_z(t) = p$$

(в)

$$\vec{v} = (\frac{p_x}{m} + ky, \frac{p_y}{m} - kx, \frac{p_z}{m}) = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\{v_1, v_2\} = \{\frac{p_x}{m}, \frac{p_y}{m}\} - \{\frac{p_x}{m}, kx\} + \{ky, \frac{p_y}{m}\} - \{ky, kx\} = -\frac{k}{m}\{p_x, x\} + \frac{k}{m}\{y, p_y\} = \frac{2k}{m} = \frac{qB}{m^2c}$$

$$\{v_1, v_3\} = \{\frac{p_x}{m}, \frac{p_z}{m}\} + \frac{k}{m}\{y, p_z\} = 0$$

$$\{v_2, v_3\} = \{\frac{p_y}{m}, \frac{p_z}{m}\} - \frac{k}{m}\{x, p_z\} = 0$$

$$\{v_1, v_2\} = -\{v_2, v_1\} = \frac{qB}{m^2c}$$

$$\{v_1, v_3\} = \{v_3, v_1\} = \{v_2, v_3\} = \{v_3, v_1\} = 0$$

□

Задача 1.4. Лагранжиан двумерного изотропного осциллятора в декартовых координатах пространства $\mathbb{R}^2$ имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

(а) Найдите обобщенные импульсы и постройте гамильтониан этой системы.

(б) Докажите, что следующие три функции

$$J_1 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 - p_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 - y^2\right), \quad J_2 = \frac{1}{m}p_x p_y + m\omega^2 xy, \quad J_3 = \omega\left(xp_y - yp_x\right)$$

являются интегралами движения.

(в) Докажите, линейная оболочка $\mathcal{L}$, порожденная всевозможными линейными комбинациями функций J_i, нnварnантна относительно скобки Пуассона: скобка Пуассона любых двух элементов из $\mathcal{L}$ принадлежит $\mathcal{L}$.

Доказательство. (а)

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$
$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \dot{y} = \frac{p_y}{m}$$
$$H = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} - \frac{m}{2}(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2}) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

(б)

$$J_1 = \frac{1}{2m}(p_x^2 - p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2-y^2)$$
$$\frac{dJ_1}{dt} = \{J_1, H\} + \frac{\partial J_1}{\partial t} = \{J_1, H\}$$
$$\{J_1, H\} = \{\frac{p_x^2 - p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2-y^2), \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)\}$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad \beta = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}y^2$$
$$\{J_1, H\} = \{\alpha - \beta, \alpha + \beta\} = \{\alpha, \beta\} - \{\beta, \alpha\} = 2\{\alpha, \beta\}$$
$$\{\alpha, \beta\} = \{\frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2, \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}y^2\} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dJ_1}{dt} = 0 \Rightarrow J_1(t) = const$$
$$J_2 = \frac{1}{m}p_xp_y + m\omega^2 xy$$
$$H + J_2 = \frac{p_x^2 + 2p_xp_y + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x+y)^2$$
$$\{J_2, H\} = \{H + J_2, H\} = \{\frac{(p_x+p_y)^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x+y)^2, \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)\}$$
$$= \frac{m\omega^2}{4m}\{(p_x+p_y), x^2+y^2\} + \frac{\omega^2}{4}\{(x+y)^2, p_x^2+p_y^2\}$$
$$= \frac{\omega^2}{2}(p_x+p_y)\{p_x+p_y, x^2+y^2\} + \frac{\omega^2}{2}(x+y)\{x+y, p_x^2+p_y^2\}$$
$$= \frac{\omega^2}{2}(p_x+p_y)(2x\{p_x, x\} + 2y\{p_y, y\}) + \frac{\omega^2}{2}(x+y)(2p_x\{x, p_x\} + 2p_y\{y, p_y\})$$
$$= \frac{\omega^2}{2}((x+y)(2p_x+2p_y) - (p_x+p_y)(2x+2y)) = 0$$

$$\frac{dJ_2}{dt} = \{J_2, H\} + \frac{\partial J_2}{\partial t} = 0 \Rightarrow J_2(t) = const$$

$$J_3 = \omega(xp_y - yp_x)$$
$$H + J_3 = \frac{p_y^2}{2m} + \omega x p_y + \frac{m\omega^2}{2}\cdot 2 + \frac{p_x^2}{2m} - \omega y p_x + \frac{m\omega^2}{2}y^2 = (\frac{p_y}{\sqrt{2m}} + \sqrt{\frac{m}{2}}\omega_x)^2 + (\frac{p_x}{\sqrt{2m}} - \sqrt{\frac{m}{2}}\omega_y)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\{J_3,H\}=\{J_3,H+J_3\}\\
&=\omega\{xp_y,(\frac{p_y}{\sqrt{2m}}+\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x)^2+(\frac{p_x}{\sqrt{2m}}-\sqrt{\frac{m}{2}}\omega y)^2\}-\omega\{yp_x,(\frac{p_y}{\sqrt{2m}}+\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x)^2+(\frac{p_x}{\sqrt{2m}}+\sqrt{\frac{m}{2}}\omega y)^2\}\\
&=\omega x\{p_y,\frac{p_x}{\sqrt{2m}}-\sqrt{\frac{m}{2}}\omega y\}\cdot 2(\frac{p_x}{\sqrt{2m}}-\sqrt{\frac{m}{2}}\omega y)+\omega p_y\{x,\frac{p_x}{\sqrt{2m}}-\sqrt{\frac{m}{2}}\omega y\}\cdot 2(\frac{p_x}{\sqrt{2m}}-\sqrt{\frac{m}{2}}\omega y)\\
&-(\omega y\{p_x,\frac{p_y}{\sqrt{2m}}+\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x\}+\omega p_x\{y,\frac{p_y}{\sqrt{2m}}+\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x\})\cdot 2(\frac{p_y}{\sqrt{2m}}+\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x)\\
&=2\omega(\frac{p_x}{\sqrt{2m}}-\sqrt{\frac{m}{2}}\omega y)(-\sqrt{\frac{m}{2}}\omega(-1)x+p_y\frac{1}{\sqrt{2m}})-2\omega(\frac{p_y}{\sqrt{2m}}+\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x)(y\sqrt{\frac{m}{2}}\omega(-1)+p_x\frac{1}{\sqrt{2m}})\\
&=2\omega((\frac{p_x}{\sqrt{2m}}-\sqrt{\frac{m}{2}}\omega y)(\frac{p_y}{\sqrt{2m}}+\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x)-(\frac{p_y}{\sqrt{2m}}+\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x)(\frac{p_x}{\sqrt{2m}}-\sqrt{\frac{m}{2}}\omega y))=0
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dJ_3}{dt}=\{J_3,H\}+\frac{\partial J_3}{\partial t}=0
$$

(в)

$$
\begin{aligned}
&\{\alpha_1J_1+\alpha_2J_2+\alpha_3J_3,\beta_1J_1+\beta_2J_2+\beta_3J_3\}\\
&=\{J_1,J_2\}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)+\{J_1,J_3\}(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)+\{J_2,J_3\}(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)
\end{aligned}
$$

Достаточно доказать $\{J_i,J_j\}\in\mathcal{L}$

$$
\begin{aligned}
&\{J_1,J_2\}=\{J_1+H,J_2\}=\{\frac{p_x^2}{m}+m\omega^2x^2,\frac{1}{m}p_xp_y+m\omega^2xy\}\\
&=\frac{1}{m}2p_x\{p_x,xy\}m\omega^2+m\omega^2 2x\{x,p_xp_y\}\frac{1}{m}=2p_x\omega^2y(-1)+2\omega^2xp_y\\
&=2\omega(\omega(xp_y-yp_x))=2\omega J_3\in\mathcal{L}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{J_2,J_3\}=\{J_2+H,J_3\}=\{\frac{(p_x+p_y)^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}(x+y)^2,xp_y-yp_x\}\omega\\
&=\omega\frac{1}{2m}2(p_x+p_y)\{p_x+p_y,xp_y-yp_x\}+\frac{m\omega^3}{2}2(x+y)\{x+y,xp_y-yp_x\}\\
&=\frac{\omega}{m}(p_x+p_y)(-p_y+p_x)+m\omega^3(x+y)(-y+x)=2\omega(\frac{1}{2m}(p_x^2-p_y^2)+\frac{m\omega^2}{2}(x^2-y^2))=2\omega J_1\in\mathcal{L}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{J_1,J_3\}=\{J_1+H,J_3\}=\{\frac{p_x^2}{m}+m\omega^2x^2,xp_y-yp_x\}\omega=\frac{\omega}{m}2p_x\{p_x,xp_y\}+m\omega^3 2x\{x,-yp_x\}\\
&=\frac{2\omega}{m}p_xp_y(-1)+2m\omega_3x(-y)=-2\omega(\frac{1}{m})p_xp_u+m\omega^2xy)=-2\omega J_2\in\mathcal{L}
\end{aligned}
$$

Значит $\mathcal{L}$ инвариантно относительно $\{\cdot,\cdot\}$

□

Задача 1.5. Гамильтониан намагниченного нара в однородном магнитном поле $\vec{B}$ имеет вид

$$
H=\frac{\vec{M}^2}{2I}-\gamma\vec{M}\cdot\vec{B},
$$

где $\vec{M}=(M_1,M_2,M_3)$ - вектор момента нмпульса пара, I и γ - заданные положительные константы (момент инерции пара и так называемое гиромагнитное отнопгение соответственно). Найдите гамильтоновы уравнения движения для компонент момента импульса M_i и рените их для случая однородного постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси $Oz:\vec{B}=(0,0,B)$.

Доказательство. (1)

$$\frac{dM_i}{dt} = \{M_i, H\}$$
$$\{M_i, H\} = \frac{1}{2I}\{M_i, \vec{M}^2\} - \gamma\{M_i, \vec{M}\cdot\vec{B}\}$$
$$\{M_i, M_j^2\} = 2M_j\{M_i, M_j\} = 2M_j\varepsilon_{ijk}M_k = 2\varepsilon_{ijk}M_jM_k = 2[\vec{M}\times\vec{M}]_i = 0$$
$$\{M_i, M_jb_j\} = b_j\{M_i, M_j\} = b_j\varepsilon_{ijk}M_k = \varepsilon_{ijk}b_jM_k = [\vec{B}\times\vec{M}]_i$$
$$\Rightarrow \{M_i, H\} = -\gamma[\vec{B}\times\vec{M}]_i$$
$$\Rightarrow \frac{dM_i}{dt} = -\gamma[\vec{B}\times\vec{M}]_i$$

(2)

$$\vec{B} = (0, 0, B)$$
$$[\vec{B}\times\vec{M}] = (-BM_2, BM_1, 0)$$
$$\begin{cases} (1) \qquad \dot{M}_1 = \gamma BM_2 \\ (2) \qquad \dot{M}_2 = -\gamma BM_1 \\ (3) \qquad \dot{M}_3 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow M_3(t) = M_3 = const$$
$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} \dot{M}_1 = \gamma BM_2 \\ \dot{M}_2 = -\gamma BM_1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & \gamma B \\ -\gamma B & 0 \end{bmatrix}$$
$$\chi_A(\gamma) = \gamma^2 + \gamma B$$
$$\lambda_1 = i\gamma B \qquad \lambda_2 = -i\gamma B$$

$\lambda_1 = i\gamma B$

$$AV_1 = \gamma B\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \gamma B\begin{pmatrix} ai \\ bi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = ai \\ -a = bi \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -i\gamma B$

$$AV_2 = \gamma B\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \gamma B\begin{pmatrix} -ai \\ -bi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -ai \\ a = bi \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = c_iV_ie^{\lambda_it} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}e^{i\gamma Bt} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}e^{-i\gamma Bt}$$
$$= \begin{pmatrix} c_1e^{i\gamma Bt} + c_2e^{-i\gamma Bt} \\ c_1ie^{i\gamma Bt} - c_2ie^{-i\gamma Bt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'\cos(\gamma Bt) + c_2'\sin(\gamma Bt) \\ c_2'\cos(\gamma Bt) - c_1'\sin(\gamma Bt) \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$M_1(t) = c_1\cos(\gamma Bt) + c_2\sin(\gamma Bt)$$
$$M_2(t) = c_2\cos(\gamma Bt) - c_1\sin(\gamma Bt)$$
$$M_3(t) = M_3 = const$$

□