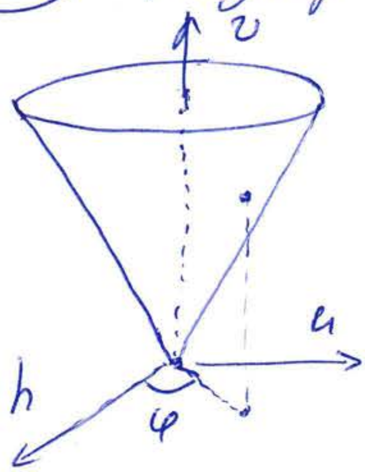
18.05.2021 | Механика 2021

Семинар 16

(I) Разбор 5 мин. прошлого занятия.



$h^2+u^2-v^2=0$

Удобная параметризация:

$h = v\cos\varphi \quad u = v\sin\varphi \quad v = v$

$v \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ — независимые координаты.

Требования на параметризацию:

Пусть $f(h,u,v)=0$ — поверхность.

$h=h(\xi,\eta) \quad u=u(\xi,\eta) \quad v=v(\xi,\eta)$ —

— параметризация.

(а) Число параметров 2 (размерность поверхности)

(б) $f(h(\xi,\eta), u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)) \equiv 0$

тождество по ξ и η

— при любых ξ и η — точка на поверхности, ξ и η — независимы

(в) $\forall$ точка поверхности получается при некоторых ξ и η.

Скобки Пуассона

$\{h,u\}=2v \quad \{h,v\}=2u \quad \{u,v\}=-2h.$

$$\cos\varphi = \frac{h}{v}$$

$$\left.\begin{aligned} &\{\cos\varphi, v\} = -\sin\varphi\,\{\varphi, v\} \\ &\left\{\frac{h}{v}, v\right\} = \frac{1}{v}\{h,v\} = 2\frac{u}{v} = 2\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\{\varphi, v\} = -2}$$

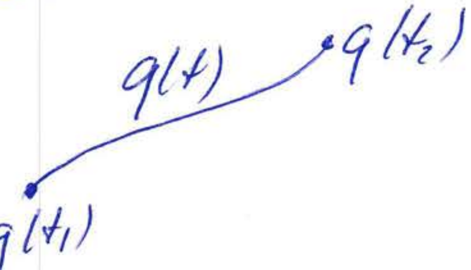
~~[illegible]~~

Канонические преобразования

Напомним смысл этих преобразований:

(а) Лагранжев формализм.

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt$$



При любых обратимых заменах $q^i \to Q^i$

$q^i = f^i(Q,t)$ (точечные преобразования)

уравнения Эйлера-Лагранжа с <u>новым</u> Лагранжианом имеют прежний вид :

$$L \to \tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} = 0$$

(б) В Гамильтоновом формализме:
<u>не любая</u> замена координат

$$q_i, p_i \to q_i = f_i(Q, P, t)$$
$$p_i \to g_i(Q, P, t)$$

не изменяет структуру уравнений движения:

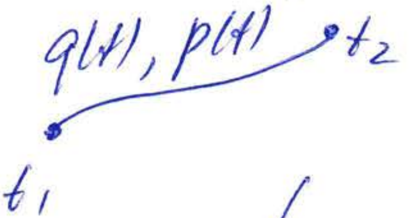
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

После <u>произвольной</u> замены (пусть даже и обратимой) <u>может не найтись</u> новая функция Гамильтона $\tilde{H}(Q, P, t)$ такая, что

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}$$

Канонические преобразования — это подмножество (на самом деле, подгруппа) обратимых преобразований, которые этим св-вом обладают: сохраняют гамильтоновость динамики в новых переменных.

Вариационный принцип на гамильтоновом уровне:



$$\Rightarrow \boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i(t)\dot{q}_i(t) - H(q,p,t) \right) dt = 0} \quad (\bigstar)$$

$$\Rightarrow \left(\text{при } \delta q(t_1) = 0 = \delta q(t_2)\right) \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Если новые переменные

$$Q_i = Q_i(q,p,t)$$
$$P_i = P_i(q,p,t)$$

канонические, то помимо $(\bigstar)$, должно выполняться равенство

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(P,Q,t) \right) dt = 0} \quad (\bigstar\bigstar)$$

Таким образом, подынтеграль-ные выражения (A) и ($\frac{A}{A}$) отмечаются на полный дифференциал некоторой ф-ции F, т.к. $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \int_1^2 dF = F(2) - F(1)$ — пропадает при вариации:

$$\boxed{\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) = \sum P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q,P,t) + \frac{dF}{dt}} \quad (*)$$

Функция F должна быть функцией от $\underline{4n}$ переменных q_i, p_i, Q_i и P_i, но т.к. есть $2n$ зависимостей

$Q_i = Q_i(q, p, t)$

$P_i = P_i(q, p, t)$

то F зависит от каких-то $\underline{2n}$ переменных.

F называется <u>производящей ф-цией</u> канонического преобразования.

Обычно её выбирают в одном из 4х видов: $F_1(q, Q, t)$, $F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$ и $F_4(p, P, t)$.

Например, для $F_1(q, Q, t)$
(q и Q рассм. как независимые переменные)
из (*) получаем равенство:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q,P,t) + \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right)$$

В силу независимости Q и q, надо приравнять коэфф. при $\dot{q}_i$ и $\dot{Q}_i$ по отдельности:

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \sum_i \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i = H(q,p,t) - \tilde{H}(Q,P,t) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}}$$

$$\boxed{\tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}}$$ – т.к. справа нет зависимости от $\dot{q}$ и $\dot{Q}$.

$$\Rightarrow p_i = \frac{\partial F(Q,q,t)}{\partial t} \Rightarrow Q_i = Q_i(q,p,t)$$

$$P_i = -\frac{\partial F(Q,q,t)}{\partial Q_i} \Rightarrow P_i = P_i(q,p,t)$$

Переход к другому типу производящей ф-ции: проще всего преобразованием Лежандра.

Например, если хотим $F_2(q, P, t)$.

Поскольку $\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i$, то

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i$$

И тогда $(*)$ превращается в другое равенство:

$$\sum p_i \dot{q}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{F_2 - \sum P_i Q_i}_{F_1}\Big) =$$

$$= -\sum \dot{P}_i Q_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt} F_2(q, P, t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_i} \\ \tilde{H} = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases}$$

Необх. и достаточное условие каноничности:

$\boxed{\text{Теорема}}$ Преобразование $q, p \to Q, P$ каноническое, если оно не изменяет скобок Пуассона:

$$\{q_i, q_j\} = 0 \qquad\qquad \{Q_i, Q_j\}_{p,q} = 0$$
$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad \longrightarrow \quad \{P_i, P_j\}_{p,q} = 0$$
$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad\qquad \{Q_i, P_j\}_{p,q} = \delta_{ij}$$

(канонические скобки для простоты)

Скобки вычисляются как от функций от p и q

~~Нахо~~ Канонические преобразования используются, среди прочего, для поиска переменных, в которых точно решаются уравнения движения.

Пусть, например, после канонич. преобразования $\tilde{H}(Q, P, t) = \underline{\tilde{H}(P)}$.

Тогда $\dot{P}_i = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow P_i(t) = P_i^{(0)} = \text{const}$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} = f_i(P_j) = f_i(P_j^{(0)}) = \omega_j = Const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_i = \omega_i t + Q_i^{(0)}$$

<u>Тривиальный</u> пример:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$ — гарм. осциллятор.

Потребуем найти канон. преобр. вида

$$p = f(P)\cos Q$$

$$q = \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q$$

Если производящая ф-ция не зависит явно от t $\left(\frac{\partial F}{\partial t} = 0\right)$, то

$$\tilde{H}(P,Q) = H(q,p)\Big|_{\substack{q=q(Q,P)\\ p=p(Q,P)}} = \frac{f^2(P)}{2m} -$$

— зависит только от P. Надо, ~~чтобы~~ подобрать такую f, чтобы преобр. действительно стало каноническим.

Вычислим скобку Пуассона:

$$1 = \{q, p\} = \left\{ \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q,\ \frac{f(P)}{\cancel{m\omega}}\cos Q \right\} =$$

$$= \{\text{по прав. Лейбница}\} =$$

$$= \frac{f(P) f'(P)}{m\omega}\cos^2 Q\,\{Q, P\} - \frac{f'(P) f(P)}{m\omega}\{P, Q\}\sin^2 Q$$

$$= \left(\{P, Q\} = -1,\ \{Q, P\} = 1 \text{ — для каноничности} \right) =$$

$$= \frac{f(P) f'(P)}{m\omega} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dP}\left(\frac{f^2}{2}\right) = m\omega$$

$$f^2(P) = 2m\omega P + \text{const}$$

можно 0 положить.

$$\begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}\sin Q \\ p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q \end{cases}$$

$$H = \omega P$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ $f^2 = m\omega P \Rightarrow f = \underset{?}{\pm}\sqrt{m\omega P}$

Выбор знака — означает переопределение $Q \to Q + \pi$.

Производящая функция:

$$F_1(q,Q) = \frac{m\omega q^2}{2}\,\mathrm{ctg}\,Q$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q\,\mathrm{ctg}\,Q$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q} \Rightarrow \begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}\sin Q \\ p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q \end{cases}$$

Решение уравнений движения:

$$H = \omega P \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$$ (E – энергия системы)

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \quad Q = \omega t + \alpha$$

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$p = \sqrt{2mE}\cos(\omega t + \alpha)$$

$\boxed{\text{П}}$римеры

① $\begin{cases} Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right) \\ P = q\,\mathrm{ctg}\,p \end{cases}$ — каноническое преобразование

Доказать, вычислив скобки. (бонус)
Производящая ф-ция?

② В Лагранжевом порядке
$L(q,\dot{q}) \to \tilde{L} = L + \frac{d}{dt}f(q,t)$ —
— не изменяет вид уравн. движения.

$\boxed{\text{У}}$ На Гамильтоновом уровне — это канон. преобразование с произв. функцией $F_2(q,P,t) = q_i P_i - f(q,t)$

③ $\boxed{\text{У}}$ Пусть $\begin{matrix} M^T M = 1 \\ \det M = 1 \end{matrix} \Rightarrow M \in SO(3)$ —
— матрица поворота.

Доказать, что $\begin{cases} Q_i = M_{ij} q_j \\ P_i = M_{ij} p_j \end{cases}$ —
— канон. преобразование (вычислив скобки) и

Найти производ. функцию:

Ответ: $\underline{F_2(q,P) = P_i S_{ij} q_j}$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

(4) Каков смысл канонич. преобразований с произв. функцией вида:

a) $F_2(\vec{r}, \vec{P}) = \vec{r}\cdot\vec{P} + \vec{a}\vec{P}$, $\vec{a}$ - пост. вектор.

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial r_i} = P_i$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = r_i + a_i$$ — сдвиг начала координат в конфигур. пр-ве.

$\cancel{б)\ F_2(\vec{r}, \vec{P}) = \vec{r}\vec{P} + \varepsilon\vec{n}\cdot[\vec{r}\times\vec{P}] + o(\varepsilon^2)}$

$\cancel{\vec{Q} = \vec{r} + \varepsilon[\vec{n}\times\vec{r}] + o(\varepsilon)}$

$\cancel{P =}$

Разбор примеров

(1) $Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right) = \ln\sin p - \ln q$

$P = q\,\mathrm{ctg}\,p$

$$\{Q, P\} = \frac{1}{\sin p}\cos p\,\{p, q\}\,\mathrm{ctg}\,p - \frac{1}{q}\{q, p\}\left(\frac{-q}{\sin^2 p}\right) =$$

$$= -\frac{\cos^2 p}{\sin^2 p} + \frac{1}{\sin^2 p} = 1$$

Найдём производ. функцию.

$$\begin{cases} q e^{Q} = \sin p \Rightarrow p = \arcsin(q e^{Q}) \\ P = q\,\mathrm{ctg}\,p = e^{-Q}\sqrt{1 - q^2 e^{2Q}} \end{cases}$$

Видно, что надо искать произв. ф-цию вида $F_1(q, Q)$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \arcsin(q e^{Q})$$

$$\int(\arcsin x)\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

по частям

$$\Rightarrow \int \arcsin(qe^{Q})dq =$$

$$= \underbrace{q\arcsin(qe^{Q}) + e^{-Q}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}}_{= F_1(q,Q)} + \Phi(Q)$$

$\Phi(Q)$ — $\forall$ ф-ция

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \underbrace{\frac{d\Phi(Q)}{dQ}}_{=0} + \underbrace{e^{-Q}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}}_{\text{то, что нужно}}$$

Итог: $F_1(q,Q) = q\arcsin(qe^{Q}) + e^{-Q}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}$

---

(2) $\tilde{L} = L + \frac{df(q,t)}{dt} = L + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$

$$P_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \partial_i f$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \dot{q}_i = \Phi(q,p)$$

$$P_i - \partial_i f = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \dot{q}_i = \Phi(q, P - \partial f)$$

$$\tilde{H}(P,q) = P_i \dot{q}_i - \tilde{L} \equiv$$

$Q=q$

$$\equiv \Big[\underline{(P_i - \partial_i f)\dot{q}_i} + \partial_i f \dot{q}_i - \underline{\underline{L}} - \frac{df}{dt} \Big] \Big|_{\dot{q} = \dot{q}(P - \partial_i f, q)} =$$

$$= H(P_i - \partial_i f, q) + \partial_i f \dot{q}_i - \underbrace{\partial_i f \dot{q}_i - \frac{\partial f}{\partial t}}_{-\frac{df}{dt}} =$$

$$= H(P_i - \partial_i f, q) - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Итак
$$\begin{cases} P_i = p_i + \frac{\partial f}{\partial t}(q,t) \Rightarrow p_i = P_i - \frac{\partial f}{\partial q_i} \\ Q_i = q_i \\ \tilde{H} = H - \frac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

Произв. ф-ция $F_2(q,P) = q_i P_i - f(q,t)$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i},$$