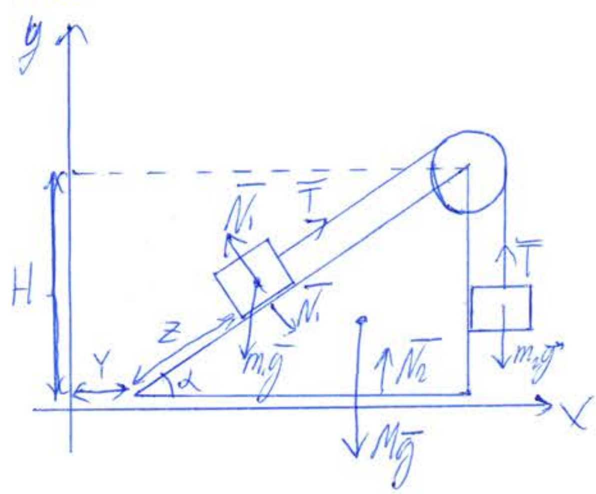
№1

Мозговой Владислав



Заметим, что система однозначно задается по углу клина и расстоянии от него до 1 бруска
=> 2 степени свободы
Пусть l - длина нити

Пусть L_1 - гипотенуза клина, её проекция $\sqrt{L_1^2-H^2}$ $\quad X_{m_2}=X+\sqrt{L_1^2-H^2}+C$

$$\left(X+\sqrt{L_1^2-H^2}+c\right)^{\circ}=\dot{X}$$

$$y_{m_2}=H-(l-(L_1-z))=H+L_1-l-z \qquad (H+L_1-l-z)^{\circ}=-\dot{z}$$

$$x_{m_1}=X+Z\cos\alpha \qquad y_{m_1}=Z\sin\alpha$$

$$T=\frac{M\cdot\dot{X}^2}{2}+m_1\frac{((\dot{X}+\dot{Z}\cos\alpha)^2+(\dot{Z}\sin\alpha)^2)}{2}+\frac{m_2}{2}(\dot{X}^2+\dot{Z}^2)$$

$$X=\frac{Mx+m_1(Z\cos\alpha+x)+m_2(x+L\cos\alpha)}{m_1+m_2+M}\Rightarrow\dot{X}=\frac{M\dot{x}+m_1(\dot{x}+\dot{z}\cos\alpha)+m_2\dot{x}}{M+m_1+m_2}=\dot{x}+\frac{m_1\dot{z}\cos\alpha}{M+m_1+m_2}$$

$$T=\frac{M}{2}\left(\dot{X}-\frac{2\dot{X}m_1\dot{z}\cos\alpha}{m_1+m_2+M}+\frac{m_1^2\cdot\dot{z}^2\cos^2\alpha}{(M+m_1+m_2)^2}\right)+\frac{m_1}{2}\left(\dot{z}^2\cos^2\alpha+\dot{z}^2\sin^2\alpha\right)+\left(\dot{X}^2-\frac{2\dot{X}m_1\dot{z}\cos\alpha}{m_1+m_2+M}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_1^2z^2\cos^2\alpha+\dot{z}^2}{(m_1+m_2+M)^2}\right)=\frac{m_1+m_2+M}{2}\dot{X}^2-\dot{X}\left(\frac{Mm_1\dot{z}\cos\alpha}{m_1+m_2+M}+\frac{m_1^2\dot{z}\cos\alpha}{m_1+m_2+M}-m_1\dot{z}\cos\alpha+\frac{m_1m_2\dot{z}\cos\alpha}{M+m_1+m_2}\right)+$$

$$+\frac{m_1}{2}\left(\frac{Mm_1\dot{z}^2\cos^2\alpha}{(m_1+m_2+M)^2}+\dot{z}^2+\frac{m_1^2\dot{z}^2\cos^2\alpha}{(m_1+m_2+M)^2}-\frac{2\dot{z}^2\cos^2\alpha\, m_1}{m_1+m_2+M}+\frac{m_2\dot{z}^2m_1\cos^2\alpha}{(m_1+m_2+M)^2}\right)+\frac{m_2}{2}\dot{z}^2=$$

$$=\dot{X}^2\frac{m_1+m_2+M}{2}+\frac{m_2\dot{z}^2}{2}+\frac{m_1(Mm_1\dot{z}^2\cos^2\alpha+m_1^2\dot{z}^2\cos^2\alpha+m_1m_2\dot{z}^2\cos^2\alpha-(M+m_1+m_2)2\dot{z}^2\cos^2\alpha\, m_1)}{2(m_1+m_2+M)^2}+\frac{m_1}{2}\dot{z}^2=$$

$$=\dot{X}^2\frac{m_1+m_2+M}{2}+\frac{m_2\dot{z}^2}{2}+\frac{\dot{z}^2m_1(\sin^2\alpha\, m_1+m_2+M)}{2(m_1+m_2+M)}$$

$$U=m_2g\left(H-l+\frac{H}{\sin\alpha}-z\right)+m_1gz\sin\alpha$$

$$L=T-U=\dot{X}^2\left(\frac{m_1+m_2+M}{2}\right)+\frac{m_2\dot{z}^2}{2}+\frac{m_1\dot{z}^2(m_1\sin^2\alpha+M+m_2)}{2(m_1+m_2+M)}-m_2g\left(H-l+\frac{H}{\sin\alpha}-z\right)$$

$$-m_1gz\sin\alpha$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$L_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(m_2 \dot z + \frac{m_1 \dot z (m_1 \sin^2\alpha + M + m_2)}{M + m_1 + m_2}\right) + m_2 g \sin\alpha - m_2 g =$$

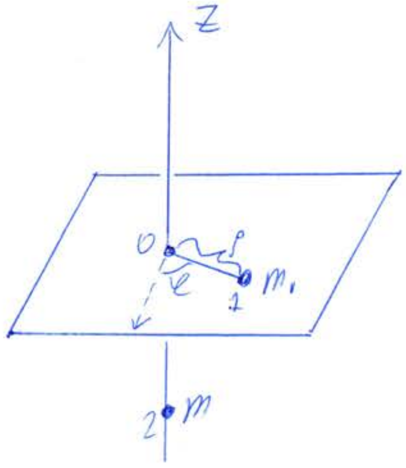
$$= \ddot z \left(m_2 + \frac{m_1 (m_1 \sin^2\alpha + m_2 + M)}{m_1 + m_2 + M} \right) + m_1 g \sin\alpha - m_2 g = 0$$

$$L_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left((M + m_1 + m_2)\dot x\right) = \ddot x (M + m_1 + m_2) = 0$$

т.к. $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, то выполнен ЗСИ: $\dot x (M + m_1 + m_2) = const$

т.к. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то также выполнен ЗСЭ: $E = T + U$

№2



Введем цилиндрические координаты, пусть у первого тела ρ и φ, длина нити l, тогда часть от 0 до 2 тела $l-\rho$, но координата отрицательна, поэтому $\rho-l$

У системы 2 степени свободы ρ и φ, положение тел ими задается однозначно

$$T=\frac{m}{2}(\dot\rho^2+\dot\varphi^2\rho^2)+\frac{m}{2}\dot\rho^2 \qquad U=(\rho-l)mg=\rho mg-const$$

$$L=T-U=m\dot\rho^2+\frac{m\dot\varphi^2\rho^2}{2}-\rho mg+c=m\dot\rho^2+\frac{m\dot\varphi^2\rho^2}{2}-(\rho-l)mg$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$L_\varphi=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=\frac{d}{dt}(m\dot\varphi\rho^2)=0 \Rightarrow m\dot\varphi\rho^2=c=J$$

$$L_\rho=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}-\frac{\partial L}{\partial\rho}=\frac{d}{dt}(2m\dot\rho)-m\dot\varphi^2\rho+mg=0 \quad \text{при } \rho-l=c$$

$$2m\ddot\rho-m\dot\varphi^2\rho+mg=0$$

$$L_\varphi=m\rho_0^2\ddot\varphi=0 \Rightarrow m\rho_0^2\dot\varphi=c \qquad \rho_0=\frac{g}{\dot\varphi^2} \qquad \dot\varphi^2=\frac{g}{\rho_0} \qquad \dot\varphi=\frac{c}{m\rho_0^2}$$

Значит, стационарные траектории при условии $\rho=const$ $\dot\varphi=const$

$\frac{\partial L}{\partial t}=0$ ~~значит~~ выполн. ЗСЭ: $E=T+U$

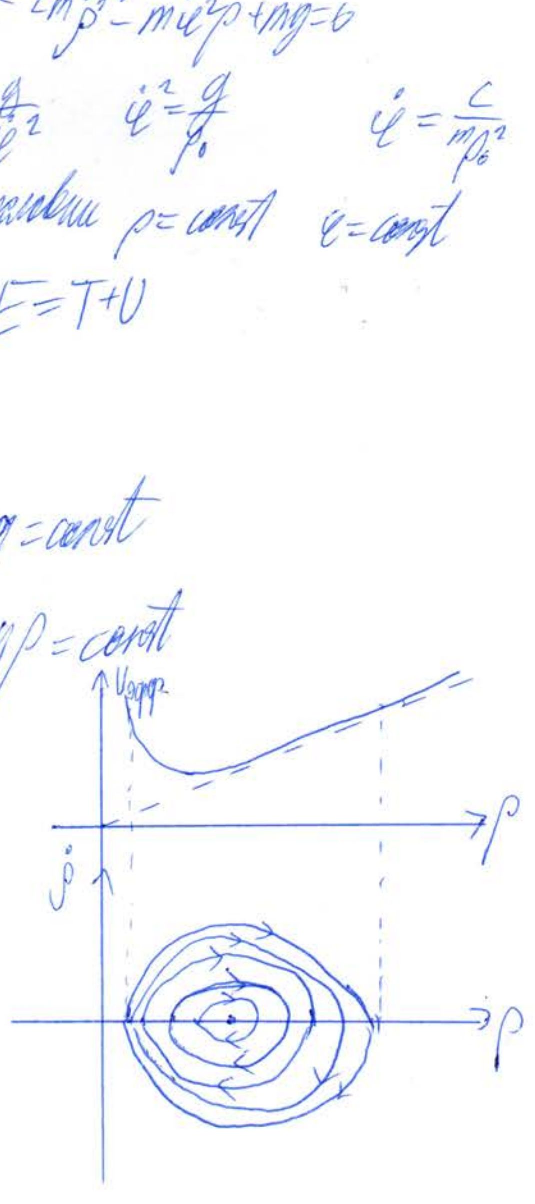
$$E=m\dot\rho^2+\frac{m\dot\varphi^2\rho^2}{2}+(\rho-l)mg=const$$

$$m\dot\rho^2+\frac{m\dot\varphi^2\rho^2}{2}+\rho mg=const \qquad lmg=const$$

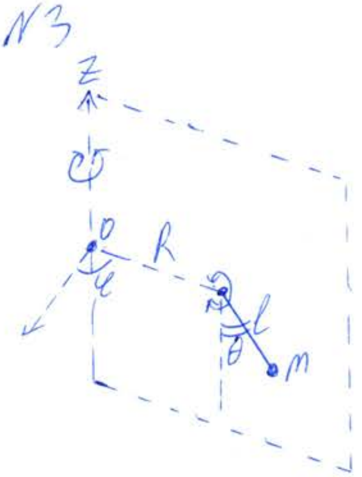
Подставим $\dot\varphi$: $m\dot\rho^2+\frac{m\rho^2}{2}\left(\frac{c}{m\rho^2}\right)^2+mg\rho=const$

$T_{эфф}(\dot\rho)=m\dot\rho^2$

$V_{эфф}(\rho)=\frac{c^2}{2m\rho^2}+mg\rho$



N3



Число степеней свободы: 2

обобщ. координаты:

$\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [-\pi, \pi)$

$x_1 = (R + l\sin\theta)\cos\varphi$ $\dot x = l\cos\theta\cdot\dot\theta\cos\varphi - (R+l\sin\theta)\sin\varphi\cdot\dot\varphi$

$y_1 = (R+l\sin\theta)\sin\varphi$ $\dot y = l\cos\theta\cdot\dot\theta\sin\varphi + (R+l\sin\theta)\cos\varphi\cdot\dot\varphi$

$z = -l\cos\theta$ $\dot z = l\sin\theta\cdot\dot\theta$

$U = -mgl\cos\theta$ $T = \frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) = \frac{m}{2}\left(l^2\cos^2\theta\cdot\dot\theta^2\cos^2\varphi + (R+l\sin\theta)^2\sin^2\varphi\cdot\dot\varphi^2\right.$

$-2l\cos\theta\cdot\dot\theta\cos\varphi(R+l\sin\theta)\sin\varphi\cdot\dot\varphi + l^2\cos^2\theta\cdot\dot\theta^2\sin^2\varphi + (R+l\sin\theta)^2\cos^2\varphi\cdot\dot\varphi^2 +$

$\left.+2l\cos\theta\cdot\dot\theta(R+l\sin\theta)\cos\varphi\cdot\dot\varphi\sin\varphi + l^2\sin^2\theta\cdot\dot\theta^2\right) = \frac{m}{2}\left(l^2\dot\theta^2 + (R+l\sin\theta)^2\dot\varphi^2\right)$

$L = T - U = \frac{m}{2}\left(l\dot\theta^2 + (R+l\sin\theta)^2\dot\varphi^2\right) + mgl\cos\theta = \frac{m}{2}\left(l\dot\theta^2 + R^2\dot\varphi^2 + 2Rl\sin\theta\,\dot\varphi^2 + l^2\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2\right)$

$+mgl\cos\theta$

$L_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(2\dot\varphi(R+l\sin\theta)^2\cdot\frac{m}{2}\right) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0 \Rightarrow$ выполнен ЗСМ: $m\dot\varphi(R+l\sin\theta)^2 = C$ $\dot\varphi = \frac{C}{m(R+l\sin\theta)^2}$

$L_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot\theta) - mRl\cos\theta\cdot\dot\varphi^2 - \frac{m}{2}l^2\,2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot\varphi^2 +$

$+mgl\sin\theta = 0$

$ml^2\ddot\theta - mRl\cos\theta\,\dot\varphi^2 - ml^2\sin\theta\cdot\cos\theta\,\dot\varphi^2 + mgl\sin\theta = 0$

$mR\cos\theta_0\cdot\dot\varphi^2 + l\sin\theta_0\cos\theta_0\cdot\dot\varphi^2 - g\sin\theta_0 = 0$

$\dot\varphi^2 = \frac{g\sin\theta_0}{R\cos\theta_0 + l\cos\theta_0\sin\theta_0}$ $D = l^2\sin^2\theta_0\cos^2\theta_0 + 4Rg\cos\theta_0\sin\theta_0$

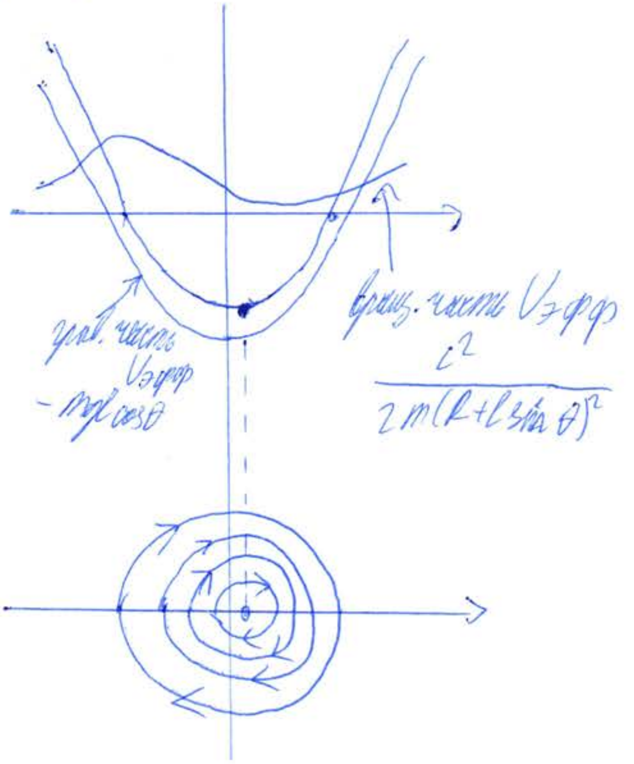
если $\sin\theta_0\cos\theta_0(l^2\sin\theta_0\cos\theta_0 + 4Rg) > 0$, то 2 решения, <0 нет, $=0$ 1 реш

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ выполнен ЗСЭ: $E = T+V = \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}(R+l\sin\theta)^2\cdot\dot\varphi^2 - mgl\cos\theta =$

$= \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}(R+l\sin\theta)^2\frac{C^2}{m^2(R+l\sin\theta)^4} - mgl\cos\theta = const$

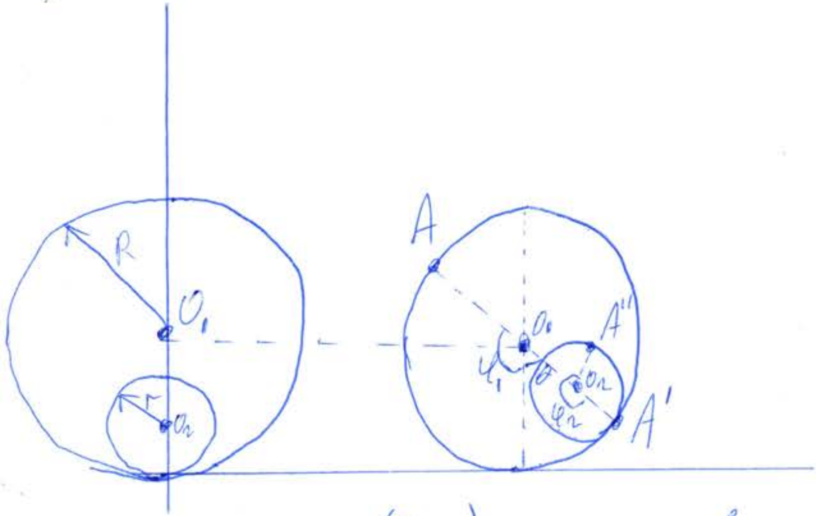
$\underbrace{\frac{m}{2}l^2\dot\theta^2}_{T_{эфф}(\theta)} + \underbrace{\frac{C^2}{2m(R+l\sin\theta)^2} - mgl\cos\theta}_{V_{эфф}(\theta)} = const$

$R > l$



грав. часть $V_{эфф}$
$-mgl\cos\theta$
вращ. часть $V_{эфф}$
$\frac{L^2}{2m(R+l\sin\theta)^2}$

№4



Заметим, что система имеет 2 степени свободы по φ_1 и θ картинка однозначно восстанавливается

$x_1 = R\varphi_1 \qquad R\dot\varphi_1 = \dot x$

$y_1 = R \qquad \dot y_1 = 0$

$x_2 = x_1 + (R-r)\sin\theta \qquad \dot x_2 = R\dot\varphi_1 + \dot\theta(R-r)\cos\theta$

$y_2 = R-(R-r)\cos\theta \qquad \dot y_2 = \dot\theta(R-r)\sin\theta$

При этом $r\varphi_2 = R(\varphi_1+\theta) \Rightarrow \varphi_2 = R(\varphi_1+\theta) \Rightarrow \varphi_2 - \theta = \frac{R}{r}\left(\varphi_1 + \left(1+\frac{r}{R}\right)\theta\right)$

Кин. энергия T_1 большого цилиндра: $T_1 = \frac{M}{2}(R\dot\varphi_1)^2 + \frac{MR^2\dot\varphi_1^2}{2} = MR^2\dot\varphi_1^2$

маленького: $T_2 = \frac{m}{2}(\dot x_2^2 + \dot y_2^2) + \frac{I}{2}(\dot\varphi_2 - \dot\theta)^2 = \frac{m}{2}\left((R\dot\varphi_1 + \dot\theta(R-r)\cos\theta\right)^2$

$+ \frac{m}{2}\left(\dot\theta^2(R-r)^2\sin^2\theta\right) + \frac{mr^2}{2}\left(\frac{R}{2}\left(\dot\varphi_1 + \left(1-\frac{r}{R}\right)\dot\theta\right)\right)^2$

$T = T_1 + T_2$

$T = MR^2\dot\varphi_1^2 + mR^2\dot\varphi_1^2 + mR(R-r)(\cos\theta+1)\dot\theta\dot\varphi_1 + m(R-r)^2\dot\theta^2$

$U = -mg(R-r)\cos\theta$

Пусть $a = R-r$

Лагранжиан: $L = T - U = R^2M\dot\varphi_1^2 + mR^2\dot\varphi_1^2 + mRa(\cos\theta+1)\dot\theta\dot\varphi_1 + ma^2\dot\theta^2 + mga\cos\theta$

уравнение Эйлера-Лагранжа: $L_{\varphi_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = \frac{d}{dt}\left(2(M+m)R^2\dot\varphi_1 + mR(R-r)(\cos\theta+1)\dot\theta\right) = 0$

$\Rightarrow$ ЗСИ $\quad \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1} = J = const$

Также L явно не зависит от t $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right) \Rightarrow$ ЗСИ $E = T + U = const$

Т.е. $J = 2(M+m)R^2\dot\varphi_1 + mRa(\cos\theta+1)\dot\varphi_1\dot\theta + ma^2\dot\theta^2 - mga\cos\theta$

$\theta(t) = \varepsilon \sin \omega t, \ \varepsilon \to 0$

$$L_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 = \frac{d}{dt}\left(mRa(\cos\theta+1)\dot\varphi_1 + 2ma^2\dot\theta\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} =$$

$$= mRa(\cos\theta+1)\ddot\varphi_1 - mRa\dot\varphi_1 \sin\theta \cdot \dot\theta + 2ma^2\ddot\theta + mRa\sin\theta\dot\varphi_1\dot\theta + mga\sin\theta = 0$$

Значит, $R(\cos\theta+1)\ddot\varphi_1 + 2a\ddot\theta + g\sin\theta = 0$

Из ЗСИ $\dot\varphi_1 = \dfrac{J - mRa(\cos\theta+1)\dot\theta}{2(m+M)R^2}$

Пусть $\omega_0 = \dfrac{J}{2(m+M)R^2}$ $\quad A = \dfrac{ma}{2(M+m)R}$

Тогда $\dot\varphi_1 = \omega_0 - A(\cos\theta+1)\dot\theta$

$$\ddot\varphi_1 = A\left(\dot\theta^2\sin\theta - \ddot\theta(\cos\theta+1)\right)$$

$$R(\cos\theta+1)A\left(\dot\theta^2\sin\theta - \ddot\theta(\cos\theta+1)\right) + g\sin\theta + 2a\ddot\theta = 0$$

$\ddot\theta = -\omega^2\theta, \ \dot\theta^2 = \varepsilon^2\omega^2 - \omega^2\theta^2 = \omega^2(\varepsilon^2 - \theta^2)$ $\qquad \sin\theta \approx \theta$ и $\cos\theta \approx 1$

$\varepsilon \to 0: \ -\omega^2(-4AR + 2a) = -g$

$$\omega^2 = \frac{g}{2a - 4AR} = \frac{g}{2a - 2\frac{ma}{M+m}} = \frac{g(M+m)}{2(R-r)M}$$

Тогда $\omega = \pm\sqrt{\dfrac{g(M+m)}{2(R-r)M}}$