1

1. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_2$. Существует ли голоморфная функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ со следующими свойствами? Строго обоснуйте ответ.

(5) $f(i) = 2i$, $|f'(i)| = 1$.

$$f(z) = z + i = x + i(y+1)$$

голоморфная, т.к. выполн. условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad 1 = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad 0 = 0$$

$$\left|\left.\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right|_{z=i}\right| = |1+0| = 1 \Rightarrow \text{голом. ф-ия } f : H \to H \text{ существует}$$

4

4. Вам нужно решить тот пункт, номер которого совпадает с последней цифрой числа $a_0 + a_6$. Вычислите (при помощи вычетов) указанные ниже интегралы от многозначных аналитических функций. Во всех случаях выбирается такая ветвь функции x^a (в частности, $\sqrt{x}$, $\sqrt[5]{x}$ и т.д.), которая принимает положительные значения для положительных значений числа x.

(3) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \frac{dx}{1+x}$ при $-1 < \alpha < 1$.

$I =$

$$f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^\alpha \frac{1}{1+z}$$

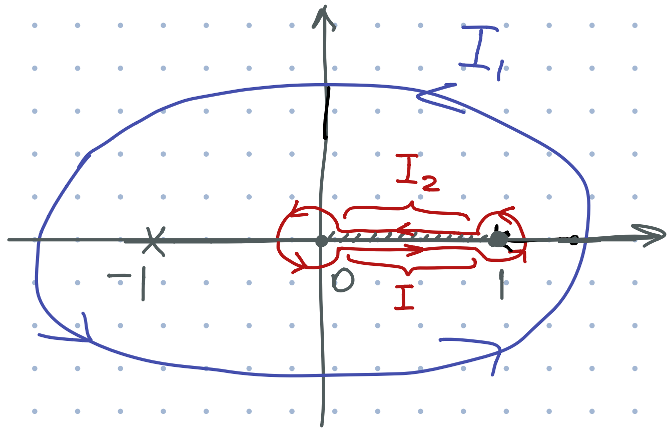
ВЫБЕРЕМ ВЕТВЬ

$f(x_-) \geq 0 \quad x > 0$

ПРОВЕРЯЕМ, $\exists$ ЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ С $[0,1]$ НА ВСЮ ВЕЩЕСТВЕННУЮ ОСЬ

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \frac{dx}{1+x} \qquad -1<\alpha<1$$

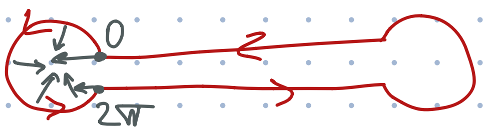
(С Ф-ЦЕЙ $\frac{1}{x+1}$ ВСЁ ХОРОШО, РАССМ. $\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha$)



рассмотрим инт. I_1 при $R \to \infty$

$$I_1 = 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} f(z) + I + I_2$$

выразим I_2 через I



параметризуем $z = \varepsilon e^{i\varphi}$
при обходе т. ветвления
φ изм. с 0 до 2π

$$I = e^{2\pi i \alpha} I_2$$

т.к. по ф-ле Муавра аргументы перемножаются

$\Downarrow$

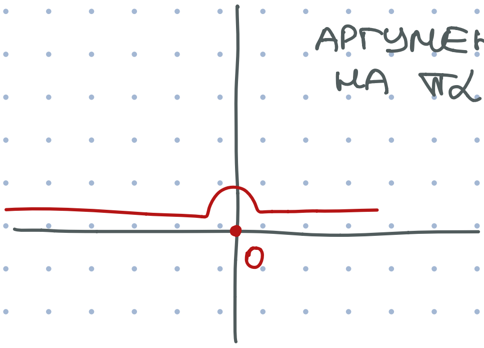
$$I_1 = I\left(1 - e^{2\pi i \alpha}\right)$$

т.к у I и I_2 противоположные направления

чтобы найти $\operatorname{res}_{z=-1} f(z)$ и $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$,

продолжим ф-цию на $z=-1$, $z=\infty$

$$f(z) \underset{z<0}{=} e^{\pi i \alpha}\left(\frac{-z}{1-z}\right)^{\alpha}\frac{1}{1+z}$$

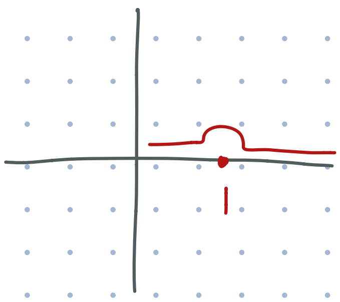


АРГУМЕНТ ИЗМ.
НА $\pi\alpha$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{1+z} + \ldots \Rightarrow$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1}\left(f(z)\right) = \frac{e^{\pi i \alpha}}{2^{\alpha}}$$

$$f(z) \underset{z>0}{=} e^{-\pi i \alpha}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}\frac{1}{1+z} = \frac{e^{-\pi i\alpha}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$



$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = e^{-\pi i \alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$2\pi i\, e^{-\pi i \alpha} = 2\pi i\, e^{-\pi i\alpha}\frac{1}{2^{\alpha}} + \left(1 - e^{-2\pi i \alpha}\right) I$$

$$1 = 2^{-\alpha} + \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} I$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I = \left(1 - 2^{-\alpha}\right)\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}}$$