Θ-функции.

Тут всю жизнь будет все сходиться, а мы будем в это верить.

1 Вступление

Определение 1.1. Функция $f(z)$ называется *двоякопериодической*, если $f(z+\omega_1) \equiv f(z) \equiv f(z+\omega_2)$ для некоторых $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$.

Определение 1.2. Двоякопериодическая аналитическая функция, которая не имеет особенностей, кроме полюсов (которых конечно внутри ограниченной области), называется *эллиптической.*

Предложение 1.1. Сумма вычетов внутри параллелограмма эллиптической функции равна 0.

Доказательство. По теореме о вычетах сумма вычетов это

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)dz.$$

Когда мы пройдем контур C по параллельным сторонам, то соответствующие подынтегральные суммы сократятся, поскольку совмещаются параллельным переносом, но направления обхода разные.

□

Теорема Лиувилля (одна из кучи). Эллиптическая функция, не имеющая полюсов, есть константа.

Доказательство. Доказывается это примерно так. Поскольку параллелограмм компакт, то во всех точках $f(z) < K$. Есть в ТФКП замечательная формула

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Она справедливо для любой функции, аналитической в и на контуре C и точки a внутри него.

Потом по этой формуле нужно написать значение $|f(z) - f(z')|$ и оценить это как сколь угодно малое число. Доказательство есть в первом томе Курса современного анализа.

□

Определение 1.3. Функция $F(z)$ называется *квазиинвариантной* относительно действия группы Γ, если существует такая голоморфная и нигде не нулевая функция $a(\gamma, z)$, что $F(\gamma z) = a(\gamma, z)F(z)$. Функция $a(\gamma, z)$ в таком случае называется *фактор автоморфности.*

Вот этот момент я не поняла. Мы хотим изучить пространство $H^1(\Gamma, O^*(X))$, где X — односвязное пространство, Γ — дискретная группа на нем, а O^* — пространство голоморфных функций, отличных от нуля во всех точках. Утверждается, что это коциклы, удовлетворяющие

$$a(\gamma_1\gamma_2, x) = a(\gamma_1, \gamma_2 x)a(\gamma_2, x).$$

То есть это факторы автоморфности (почему-то). Не, ну понятно, что факторы автоморфности этому удовлетворяют, но в чем связь с коциклами пока не ясно.(?)

Определение 1.4. Два коцикла a_1 и a_2 называются *эквивалентными*, если $a_1 = a_2\dfrac{F(\gamma x)}{F(x)}$.

Ряд Пуанкаре. Пусть $a(\gamma, x)$ — коцикл. Тогда

$$P(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma z)a^{-1}(\gamma, z)$$

квазиинвариантна и равномерно сходится на компакте.

Доказательство. Проверим: $P(\gamma' z) = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma\gamma' z)a^{-1}(\gamma, \gamma' z) = a(\gamma', z)\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma\gamma' z)a^{-1}(\gamma$

∎

2 Знакомство с тэтами

Обозначение 2.1. $e(z) = e^{2\pi iz}$.

Определение 2.1. *«Классическая тэта»* $\Theta(z, \tau) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau n^2 + 2\pi inz} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e\left(\dfrac{\tau n^2}{2} +\right.$

Главная лемма. (1)$\Theta(z + 1) = \Theta(z)$;

(2) $\Theta(z + m\tau) = e\left(-\dfrac{\tau m^2}{2} - mz\right)\Theta(z)$.

Доказательство. **(1)** Нетрудно видеть, что при сдвиге на 1 каждое слагаемое умножается на $e(n) = e^{2\pi in} = 1$.

(2) $\Theta(z + m\tau)e\left(\dfrac{\tau m^2}{2} + mz\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e\left(\dfrac{\tau n^2}{2} + n(z + m\tau) + \dfrac{\tau m^2}{2} + mz\right) =$

$= \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e\left(\dfrac{\tau(n + m)^2}{2} + (n + m)z\right)$. Что и требовалось.

∎

Замечание 2.1. Таким образом, мы нашли фактор автоморфности для классической тэты: $a(n+m\tau, z) = e\left(-\dfrac{\tau m^2}{2} - mz\right)$.

Предложение. Сходимость тэты. Все корректно и ряд сходится.

Доказательство. В силу главной леммы достаточно проверить сходимость на фундаментальном параллелограмме. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e\left(\dfrac{\tau n^2}{2} + nz\right) \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |e^{-\pi Im(\tau)n^2 - 2\pi Im(z)n}|$. $Im(z)$ ограничен (компактность). Что и требовалось.

□

Определение 2.2. *«Модернизированная тэта»* $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Theta_\tau \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e\left(\frac{\tau(n+b)^2}{2} + (n+b)(z+a)\right).$$

Замечание 2.2. Индекс τ можно писать, а можно не писать.

Предложение 2.1. $\Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z)$ и $\Theta(a + b\tau + z)$ очень похожи:

$$\Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z) = e\left(\frac{\tau b^2}{2} + b(z+a)\right)\Theta(a + b\tau + z).$$

Доказательство. Чтобы убедиться в этом, нужно написать на одно равенство больше, чем в определении 2.2. □

Предложение. Фактор автоморфности произвольной тэты. Он такой:

$$a(n + m\tau, z)e(bn - am).$$

Доказательство. $\Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z + n + m\tau) = e\left(\dfrac{\tau b^2}{2} + b(z + a + n + m\tau)\right)\Theta(a + b\tau + z + n + m\tau) =$

$= e\left(\dfrac{\tau b^2}{2} + b(z+a)\right)e(b(n+m\tau)) \cdot \Theta(a + b\tau + z)e\left(-\dfrac{\tau m^2}{2} - m(a + b\tau + z)\right) =$

$= \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z) \cdot e(b(n+m\tau))e\left(-\dfrac{\tau m^2}{2} - m(a + b\tau + z)\right) =$

$= \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z) \cdot e\left(-\dfrac{\tau m^2}{2} - m(a+z) + bn\right) = \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z) \cdot a(n + m\tau, z)e(bn - am)$.

□

Среди всех тэт выделим четыре особенных, потом они будут нужны: $\Theta_{00} = \Theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ — классическая, $\Theta_{01} = \Theta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}$, $\Theta_{10} = \Theta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}$, $\Theta_{11} = \Theta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$.

Замечание 2.3. **(1)** Θ_{00} четная.

(2) Θ_{11} нечетная.

3 Матанское отступление

Теорема 3.1. Ряд Фурье кусочно гладкой функции f выглядит так: $f(x) = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{2\pi i n x}$, где $a_n = \int\limits_0^1 f(x)e^{-2\pi i n x}dx$.

Преобразование Фурье. Перегоняет функцию f в $\hat{f}$ так: $\hat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x y}dx$.

Замечание 3.1. В курсе матана это определяют чутка иначе, но смысл везде один.

Формула Пуассона. Для быстроубывающей на бесконечности $f(x)$ $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$.

Доказательство. $F(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$. Разложим в ряд Фурье: $F(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x} =$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_0^1 \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m)\right) e^{-2\pi i n x}dx\right) e^{2\pi i n x} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^1 f(x+m)e^{-2\pi i n(x+m)}d(x+m)\right) e^{2\pi i n x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i n t}dt\right) e^{2\pi i n x} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi i n x}.$$

Положим теперь $x = 0$, получим что хотим.

□

Определение 3.1. *Индексом* кривой $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ относительно точки $p \in \mathbb{C}$ называется

$$ind_\gamma(p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-p} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p}dt.$$

Замечание 3.2. Топологически это число оборотов кривой вокруг точки с ориентацией, то есть целое число в случае, когда кривая замкнутая. Но это уже

ТФКП.

Теорема (опять ТФКП). Дана голоморфная функция f, Тогда сумма количеств корней с кратностями (отрицательная кратность=полюс) n_i внутри соответствующего контура вычисляется так:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum n_i.$$

Теорема (опять и опять ТФКП). Дана голоморфная функция f, Тогда сумма корней с коэффициентами кратности (отрицательная кратность=полюс) n_i внутри соответствующего контура вычисляется так:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint z\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum z_i n_i.$$

4 Нули тэты

Покажем, что у классической тэты внутри параллелограмма $(0, 1, 1+\tau, \tau)$ всего один и притом простой. Тогда нули всех остальных тэт устроены тоже понятно.

Предложение 4.1. Центр параллелограмма $\dfrac{1+\tau}{2}$ — нуль тэты.

Доказательство. Как мы уже справедливо заметили, тэта нечётная. Тогда $\Theta(\dfrac{1+\tau}{2}) = \Theta(-\dfrac{1+\tau}{2})$. Но еще эти функции отличаются домножением на фактор автоморфности — на $e\left(\dfrac{\tau}{2} - \dfrac{1+\tau}{2}\right) = e^{-\pi i} = -1$. То есть это действительно нуль. □

Предложение 4.2. Больше нулей нет, а этот нуль простой.

Доказательство. Для этого мы хотим применить теорему из ТФКП (посчитать интеграл по контуру параллелограмма и убедиться, что он $2\pi i$). Разобьем контур фундаментального параллелограмма на отрезки: $[0,1] = a$, $[1, 1+\tau] = b$, $[1+\tau, \tau] = c$, $[\tau, 0]$. Тогда интеграл тоже разобьется на сумму четырех. Заметим, что

$$\int\limits_b \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz + \int\limits_d \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz = 0,$$

поскольку Θ 1-периодична, а отрезки ориентированы в разные стороны.

Далее, из равенства $\Theta(z+\tau) = a(\tau, z)\Theta(z)$ получаем, что $\frac{\Theta'(z+\tau)}{\Theta(z+\tau)} = \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} + \frac{a'(\tau, z)}{a(\tau, z)}$.

Таким образом, для победы достаточно показать, что $-2\pi i \int\limits_0^1 \frac{a'(\tau, z)}{a(\tau, z)} dz = 1$, а это прямая подстановка a.

□

5 Теорема Абеля о нулях мероморфной функции

Теорема (Абель). Пусть на эллиптической кривой задана $\Gamma-$периодическая функция f. Пусть внутри образующего параллелограмма есть корни z_i кратностей n_i соответственно. Тогда выполнены следующие условия:
(1) $\sum n_i = 0$;
(2) $\sum z_i n_i = 0$.
Более того, этих условий на корни и кратности достаточно, чтобы такая функция существовала, даже в каком-то смысле единственная. Доказывать мы это не будем, но функцию построим.

Построение такой функции. Пусть

$$f = \prod_i \Theta_{11}^{n_i}(z - z_i).$$

Доказательство. **(1)** Очевидно, что нули нужные и с нужной кратностью.
(2) Осталось показать периодичность по Γ.

$$f(\gamma + z) = f = \prod_i \Theta_{11}^{n_i}(z + \gamma - z_i) = \prod_i \Theta_{11}^{n_i}(z - z_i) e(n_i(A_\gamma(z - z_i) + B_\gamma)) = 0.$$

Последнее равенство верно по условию Абеля, предпоследнее — по уже доказанному виду фактора автоморфности.

□

n-ый пустяк (A. Weyl). Пусть $f, g \in Mer(X)$. Пусть $D_f = \sum\limits_i n_i v_i$, $D_g = \sum\limits_j m_j w_j$ (речь все еще про корни с кратностями). Тогда

$$\prod_j f^{m_j}(w_j) = f(D_g) = g(D_f) = \prod_i g^{n_i}(v_i).$$

Доказательство. Докажем это для эллиптических кривых. Как они выглядят мы знаем по теореме Абеля.

$$g(D_f) = \prod_i g^{n_i}(v_i) = \prod_{i,j} \Theta^{n_i m_j}(v_i - w_J).$$

Абсолютно так же считается $f(D_g)$. Они отличаются друг от друга домножением на $(-1)^{\sum\limits_{i,j} n_i m_j} = (-1)^{(\sum\limits_i n_i)(\sum\limits_j m_j)} = 1.$

$\square$

6 Градуированная алгебра тэт

Обозначение 6.1. $\Theta_N = \{f \in Hol(\mathbb{C}) \mid f(z+\gamma) = a^N f(z)\}$.

Таким образом, получилась градуированная алгебра

$$\Theta_a = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \Theta_N.$$

Почему это градуированная алгебра? Градуированность очевидна, нужно лишь доказать линейную независимость компонент.

Лемма 6.1. Пусть $f_i \in \Theta_i$ и $f_0 + f_1 + \ldots + f_N = 0$. Тогда все $f_i = 0$.

Доказательство. Подействуем на это дело $\gamma_j \in \Gamma$:

$$\sum_{i=0}^{N} a^i(\gamma_j, z) f_i = 0, \ j = 0, 1, \ldots, N.$$

Это означает, что соответствующий определитель Вандермонда, который равен $\prod\limits_{n,m} (a(\gamma_{j_n}, z) - a(\gamma_{j_m}, z))$, равен нулю. Но очевидно, что можно подобрать такие γ_j, чтобы равенство было выполнено не при всех z.

$\square$

Теорема 6.1. $dim\Theta_N = N$.

Доказательство. Пусть $f \in \Theta_N$. Разложим в ряд Фурье: $f = \sum\limits_s a_s e^{2\pi i s z}$ (*тут мы верим, что разложение существует и оно единственно*).

$f(z+m+n\tau) = e^N(-\frac{\tau n^2}{2} - nz) f(z) = \sum\limits_s a_s e^{2\pi i s z} e^N(-\frac{\tau n^2}{2} - nz) = \sum\limits_s a_s e^{-\pi i \tau N n^2} \cdot$
$\cdot\, e^{2\pi i z(s-nN)} = \sum\limits_s a_{s+nN} e^{-\pi i \tau N n^2} \cdot e^{2\pi i z s}.$

С другой стороны, $f(z+m+n\tau) = \sum\limits_s a_s e^{2\pi i s(z+n\tau)} = \sum\limits_s a_s e^{2\pi i s n\tau} \cdot e^{2\pi i s z}$. Таким образом, $a_{s+nN} = e^{2\pi i s n\tau + \pi i N\tau n^2} a_s$. Таким образом, размерность пространства действительно не превышает N.

Осталось показать, что при любом выборе начальных коэффициентов $a_0, \ldots, a_{N-1}$ ряд сойдется. Для этого достаточно показать, что при $a_0 = 1$ и $a_1 = \ldots = a_{N-1} = 0$ ряд сойдется.

Действительно, тогда $a_{nN} = e^{\pi i N n^2 \tau}$. То есть мы хотим показать, что ряд $\sum\limits_n e^{\pi i N n^2 \tau + 2\pi n N z}$ сходится. Достаточно будет доказать абсолютную сходимость, то есть просуммировать модули. Это делается аналогично сходимости тэты, правда.

□

Замечание 6.1. *Это несложно проверяется, честно.*
(1) $\Theta_{01}\Theta_{10}\Theta_{11} \in \Theta_3$;
(2) $\Theta_{11}^2, \Theta_{01}^2, \Theta_{10}^2 \in \Theta_2$;
(3) $\Theta_{00}^n \in \Theta_n$.

Задачка. (Уиттекер-Уотсон). Как мы знаем, $\Theta_2 = \left\langle \Theta_{00}^2, \Theta_{11}^2 \right\rangle$. Тогда существует какая-то линейная комбинация, выражающая Θ_{01}^2 и Θ_{10}^2 через базисные элементы. Так вот задачка в том, что

$$\Theta_{01}^2(\tau, z) = k_1(\tau)\Theta_{00}^2(z) + k_2(\tau)\Theta_{11}^2(z),$$

$$\Theta_{10}^2(\tau, z) = -k_2(\tau)\Theta_{00}^2(z) + k_1(\tau)\Theta_{11}^2(z)$$

Более того,

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{vmatrix} = 1$$

Тут у меня получилась только первая половина (та, что без определителя).

Лемма 6.2. На градуированной алгебре тэт действует инволюция $z \to (-z)$, то есть если $f(z) \in \Theta_a$, то $f(-z) \in \Theta_a$.

Доказательство. Достаточно это показать для $f(z) \in \Theta_N$. Обозначим $F(z) = f(-z)$. Тогда $F(z+m+n\tau) = a^N(m+n\tau)f(-z)$.

□

Таким образом, на алгебре действует двухэлементная группа, она действует тождественно на подалгебре Θ_a^{ev} — подалгебре четных функций, кроме того $\Theta_a = \Theta_a^{ev} \oplus \Theta_a^{odd}$. Дальше мы попытаемся поизучать эти две компоненты.

Поскольку Θ_a^{odd} — модуль над Θ_a^{ev}, было бы неплохо найти его образующие.

Лемма 6.3. $\Theta_a^{odd} = \Theta_{01}\Theta_{10}\Theta_{11} \cdot \Theta_a^{ev}$.

Доказательство. Пусть $f \in \Theta_a^{odd}$. Тогда $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\tau$ — нули функции f. Действитльно, $f(0) = f(-0) = 0$. $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ по определению коцикла, а из нечетности следует, что знак там другой. Наконец, $f\left(\frac{\tau}{2}\right) = -f\left(-\frac{\tau}{2}\right)$ из нечетности, а, поскольку $a(\tau, \tau/2) = e\left(-\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = 1$, $f\left(\frac{\tau}{2}\right) = f\left(-\frac{\tau}{2}\right)$.

Тогда функция $\dfrac{f}{\Theta_{01}\Theta_{10}\Theta_{11}}$ — голоморфна, поскольку нули знаменателя имеют кратность 1 и принадлежат нулям числителя.

□

Лемма 6.4. $\Theta_a^{ev} = \mathbb{C}[\Theta_{00}, \Theta_{11}^2]$.

Доказательство. **Мини – лемма.** Если $\lambda\Theta_{00}^2 + \mu\Theta_{11}^2 = 0$, то $\lambda = \mu = 0$. Действительно, это очевидно, поскольку у этих функций просто разные нули.

Докажем теперь, что не существует такого многочлена $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, что $P(\Theta_{00}^2, \Theta_{11}^2) = 0$. Предположим, такой P существует. По уже доказанной лемме достаточно доказывать для однородного многочлена. Пусть $P = \prod(x - \lambda_i y)$. Такое невозможно по мини – лемме.

Заметим теперь, что тогда Θ_{00} и Θ_{11}^2 — тоже алгебраически независимы. Осталось показать, что любой элемент $f \in \Theta_a^{ev}$ представим в виде какого-то многочлена от Θ_{00} и Θ_{11}. Разобъем алгебру Θ_a^{ev} на однородные компоненты:

$$\theta_N^{ev} = \left\{ f \in \Theta_a^{ev} \;\middle|\; f(z + \gamma) = a^N(\gamma, z) f(z) \right\}.$$

Без ограничения общности f лежит в одной из таких компонент. Будем доказывать это утверждениепо индукции: база для $N = 1$ очевидна. Рассмотрим два случая:

(1) $f \in \Theta_{2N}^{ev}$. Тогда при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ функция $F = (f - \lambda\theta_{11}^{2N}) \in \Theta_{2N}^{ev}$ и $F\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = 0$. Тогда $\dfrac{F}{\Theta_{00}} \in \Theta_{2N-1}^{ev}$ — переход.

(2) $f \in \Theta_{2N+1}$. Покажем, что $f\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = 0$ и тогда $\dfrac{f}{\Theta_{00}} \in \Theta_{2N}^{ev}$ — переход индукции.

$$f\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = f\left(-\frac{1+\tau}{2} + (1+\tau)\right) = e^{2N+1}\left(-\frac{\tau}{2} + \frac{1+\tau}{2}\right) f\left(-\frac{1+\tau}{2}\right) =$$

$$e^{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right) f\left(-\frac{1+\tau}{2}\right) = -f\left(-\frac{1+\tau}{2}\right).$$

Но в силу четности $f\left(-\frac{1+\tau}{2}\right) = f\left(\frac{1+\tau}{2}\right)$. Что и требовалось.

□

Замечание 6.2. Таким образом, $\Theta_a^{odd} = \Theta_{00}\Theta_{01}\Theta_{10}\mathbb{C}[\Theta_{00}, \Theta_{11}^2]$.

7 Пытаемся обобщить

Определение 7.1. Пусть $E_{\mathbb{R}}^n$ — евклиово пространство, L — некоторая решетка в нем (целые комбинации линейно независимых $e_1, \dots, e_n$). Решетка называется *квадратичной*, если для любых двух $\ell_i, \ell_j \in L$ скалярное произведение $(\ell_i, \ell_j) \in \mathbb{Z}$.

Определение 7.2. *Двойственной решеткой* для L называется решетка $L^* = \left\{x \in E_{\mathbb{R}}^n \;\middle|\; (x, \ell) \in \mathbb{Z} \text{ для любого } \ell \in L\right\}$.

Замечание 7.1. $L \subset L^*$, это значит, что можно посчитать отношение объемов фундаментальных параллелограммов.

Замечание 7.2. $L^* = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$, где f_i образуют двойственный базис к e_j (это значит, что $(f_i, e_j) = \delta_{ij}$ — *символ Кронекера*, при всех i и j).

Теорема 7.1. $[L^* : L] = \det Gr(e_1, \dots, e_n)$ — индекс решетки.

Доказательство. Действительно, $G = Gr(e_1, \dots, e_n) = Gr^{-1}(f_1, \dots, f_n)$. Тогда

$$\frac{Vol(L)}{Vol(L^*)} = \frac{\sqrt{detG}}{\sqrt{detG^{-1}}} = detG$$

.

□

Рассмотрим теперь пространство $\mathbb{C}^n$ и векторы в нем $e_1, \dots, e_n$ и $\tau e_1, \dots, \tau e_n$, где $\tau \in H^+$, а e_i — вещественные. На них натянута решетка $\widetilde{L}$.

Определим аналогично

$$\Theta_{00} = \sum_{\ell \in L} e\left(\frac{\tau(\ell, \ell)}{2} + (\ell, z)\right),$$

$$\Theta_\lambda = \sum_{\ell \in L} e\left(\frac{\tau(\ell + \lambda, \ell + \lambda)}{2} + (\ell + \lambda, z)\right), \text{ где } \lambda \in L^*/L.$$

Короче говоря, *произведения* в нужных местах заменили на *скалярные произведения.*

Теорема. О том, что все точно так же.

$$\Theta_\lambda(m + n\tau + z) = e\left(-\frac{\tau(n, n)}{2} - (n, z)\right)\Theta_\lambda(z).$$

Доказательство. **(1)** Докажем независимость от m.

$$\sum_{\ell\in L} e\left(\frac{\tau(\ell+\lambda,\ell+\lambda)}{2}+(\ell+\lambda,z+m)\right)=\sum_{\ell\in L} e\left(\frac{\tau(\ell+\lambda,\ell+\lambda)}{2}+(\ell+\lambda,z)\right)\cdot e((\ell,m)).$$

Теперь, проверим при $m=0$.

$$\sum_{\ell\in L} e\left(\frac{\tau(\ell+\lambda,\ell+\lambda)}{2}+(\ell+\lambda,z+n\tau)\right)\cdot e\left(\frac{\tau(n,n)}{2}+(n,z)\right)=$$

$$=\sum_{\ell\in L} e\left(\frac{\tau(\ell+\lambda,\ell+\lambda)+\tau(n,n)}{2}+(n,z)+(\ell+\lambda,z+n\tau)\right)=$$

$$=\sum_{\ell\in L} e\left(\frac{\tau(\ell+n+\lambda,\ell+n+\lambda)}{2}-\tau(n,\ell+\lambda)+(n,z)+(\ell+\lambda,z+n\tau)\right)=$$

$$=\sum_{\ell\in L} e\left(\frac{\tau(\ell+n+\lambda,\ell+n+\lambda)}{2}+(\ell+n+\lambda,z)\right)=\Theta_\lambda(z).$$

□

Замечание 7.3. $dim\Theta_{a^N}=detG\cdot N^n$, где n — размерность пространства. Заметим, что при $n=1$ для нашей решетки $L=\langle 1,\tau\rangle$ все так и есть.

8 Комплексные торы

Мы живем в пространстве $\mathbb{C}^n$. Тут есть решетка L полного ранга над $\mathbb{R}$ (то есть ранга $2n$). Назовем n – мерным *тором* факторпространство $\mathbb{C}^n/L$.

Определение 8.1. *Комплексным многообразием* называется хаусдорфово топологическое многообразие $\mathcal{M}$, для которого существует открытое покрытие картами $\mathcal{M}=\cup U_\alpha$, для которых существует голоморфное отображение в какую-то область в $\mathbb{C}^n$: $z_\alpha: U_\alpha\to V_\alpha\subset\mathbb{C}^n$, причем отображения между картами на пересечениях тоже голоморфны.

Замечание 8.1. Комплексный тор — компактное комплексное многообразие.

Замечание 8.2. Если брать разные τ, то будут получаться разные торы. Хотелось бы понять, когда эти торы будут одинаковыми.

Теорема 8.1. Я тут не все еще поняла, но тут говорят, что изоморфизм поднимается обязательно до линейного отображения.

Следствие 8.1. $E_\tau\simeq E_{\tau'}$ тогда и только тогда, когда $\tau'=\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$.

9 Всякие операторы на формах

Определение 9.1. *Оператором Лапласа* относительно квадратичной формы $Q(x) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j > 0$, где $a_{ij} = a_{ji}$, называется оператор

$$\Delta_Q = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Замечание 9.1. Оператор Лапласа линеен. Доопределим его еще и для форм

$$\Delta(\varphi\omega_{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_k}) = \Delta(\varphi)\omega_{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_k}.$$

Обозначение 9.1. $H : \Lambda^k(U) \to \Lambda^k(U)$ — $\mathbb{C}$ –линейный оператор,

$$H(\varphi\omega_{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_k}) = \left(\int_{T^n}\varphi d\mu\right)\omega_{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_k},$$

где $Vol(T^n) = 1$.

Замечание 9.2. $H^2 = H$. Тогда $\Lambda^k = kerH \oplus imH$.

Замечание 9.3. Пусть $f \in Hol(\mathbb{C}^n)$ — периодична по решетке L. Тогда существует разложение в многомерный ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{\ell^*\in L^*} a(\ell^*)e^{2\pi i\langle x,\ell^*\rangle},\ \text{где}\ a(\ell^*) = \int\limits_{T^n} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\ell^*\rangle}d\mu.$$

Теорема (частный случай теоремы Ходжа). Существует такой $\mathbb{C}$ – линейный оператор $G : \Lambda^k(U) \to \Lambda^k(U)$, что

(1) $\Delta G(\varphi) = G\Delta(\varphi) = \varphi - H\varphi$;

(2) $HG(\varphi) = GH(\varphi) = 0$.

Доказательство. Конструкция.

$$G(f) = -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\ell^*\in L^*,\ell^*\neq 0}\frac{a(\ell^*)}{Q(\ell^*)}e^{2\pi i\langle x,\ell^*\rangle}.$$

Далее при проверке свойств будем считать, что $f = a(\ell^*)e^{2\pi i\langle x,\ell^*\rangle}$.

Свойство (1). Тогда $G(f) = -\dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{a(\ell^*)}{Q(\ell^*)}e^{2\pi i\langle x,\ell^*\rangle}$. или $G(f) = 0$, в случае, когда $\ell^* = 0$ (но этот случай очевиден, не будем его рассматривать). А $\Delta(f) = -4\pi^2 Q(\ell^*)f$. Теперь вроде видно.

Свойство (2). Оба равенства верны просто по построению и предложению **(0)**.

□

Следствие 9.1. **(0)** $H(f) = a(0)$.

(1) $\Delta H = H\Delta = 0$.

(2) Если $\varphi \in kerH$, то $G\varphi \in \ker H$. Таким образом, G действует на $kerH$. Аналогичное верно и для Δ.

(3) Если $\varphi \in kerH$, то $\Delta G(\varphi) = G\Delta(\varphi) = \varphi$.

Доказательство. **(0)** Ну действительно, остальные просто обнулятся.

(1) $\Delta(H(f)) = \Delta(a(0)) = 0$.

В обратную сторону чуть сложнее. Докажем это покомпонентно. Пусть $f = a(\ell^*)e^{2\pi i\langle x,\ell^*\rangle}$. Заметим, что тогда $\Delta(f) = -4\pi^2 Q(\ell^*)f$. В случае, когда $\ell^* = 0$, уже $\Delta(f) = 0$, иначе члены ряда Фурье обнулятся при интегрировании.

(2) Действительно, $H(G(\varphi)) = G(H(\varphi)) = G(0) = 0$. Для Δ все аналогично.

(3) Следствие 1 свойства.

□

Лемма 9.1. $ker\Delta = imH$ и $\ker G = imH$.

Доказательство. Действительно, пусть $\varphi = \varphi_K + \varphi_H$, где $\varphi_K \in \ker H$,$\varphi_H \in imH$. Тогда $\Delta(\varphi) = \Delta(\varphi_K)$, кроме того $G\Delta(\varphi_K) = \varphi_K$. Значит, ядро Δ это в точности образ H.

Аналогично, $G(\varphi) = G(\varphi_K)$ b $\Delta(G(\varphi_K)) = \varphi_K$.

□

Предложение 9.1. Пусть $T : \Lambda^k \to \Lambda^k$ — некоторый $\mathbb{C}$ – линейный оператор, который коммутирует с Δ. Тогда он коммутирует с H **(1)** и G **(2)** тоже.

Доказательство. **(1)** Разложим опять $\varphi = \varphi_K + \varphi_H$. Достаточно доказать покомпонентно.

$\varphi = \varphi_K$. Тогда $TH(\varphi) = T(0) = 0$. По доказанному ранее $\varphi_K = \Delta G(\varphi_K)$, следовательно, $HT(\varphi_K) = HT\Delta G(\varphi_K) = (H\Delta)T(\varphi_K) = 0$.

$\varphi = \varphi_H = Hf$. Тогда $TH(\varphi) = TH(f)$. Таким образом, нам хочется показать, что $HTH(f) = TH(f)$, иными словами, $TH(f) \in imH$. Поскольку $imH = \ker\Delta$, достаточно проверить, что $\Delta TH(f) = T(\Delta H)(f) = 0$.

(2) Разберем аналогичные 2 случая.

$\varphi = \varphi_K$. Тогда $GT(\varphi_K) = GT(\Delta G\varphi_K) = (G\Delta)(TG\varphi_K) = TG\varphi_K - HTG\varphi_K = TG\varphi_K - T(HG)\varphi_K = TG\varphi_K$.

$\varphi = \varphi_H = Hf$. Тогда $T(GH)f = 0$ и $GTHf = (GH)(Tf) = 0$.

□

10 Дивизоры

Пусть $\mathcal{M}$ — комплексное многообразие, с атласом $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ (считаем, что карты связны). Пусть на каждой карте задана мероморфная структура f_α, причем на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ отношение $\zeta_{\alpha\beta} = \dfrac{f_\alpha}{f_\beta}$ — голоморфная функция, нигде не равная 0.

Определение 10.1. Голоморфную функцию, нигде не равную 0, назовем *единицей,* а семейство пар $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ — *представлением.*

Определение 10.2. Два представления $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ и $\{V_\beta, g_\beta\}$ называются *эквивалентными*, если на пересечении любых двух карт $U_\alpha \cap V_\beta$ существует такая единица $h_{\alpha\beta}$, что $f_\alpha = h_{\alpha\beta} \cdot g_\beta$.

Замечание 10.1. Это честное отношение эквивалентности.

Определение 10.3. *Дивизором* $\mathcal{D}$ на многообразии $\mathcal{M}$ называется класс эквивалентных представлений.

Замечание 10.2. Любые два дивизора допускают представления на картах одного и того же атласа. Действительно, если карту порезать на маленькие кусочки и перенести функцию, получится эквивалентное представление.

Определение 10.4. Пусть функция f — мероморфна на всем многообразии $\mathcal{M}$. Тогда для любого атласа она определяет дивизор (f) с представлением $\{U_\alpha, f_\alpha\}$, где $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$. Такой дивизор (f) называется *главным.*

Определение 10.5. Дивизор называется *положительным* $\mathcal{D} > 0$, если он допускает представление $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ с голоморфными f_α.

Проблема Кузена. Верно ли, что любой положительный дивизор на $\mathcal{M}$ является главным?

Задачка. Покажите, что для тора это не так.

Определение 10.6. У проблемы Кузена существует обобщение, связанное с переходом к универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Задачка. Докажите, что если $\mathcal{M}$ — комплексное многообразие, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ — тоже. Верно ли обратное?

11 Тэта – функции решают обобщенную проблему Кузена

Рассмотрим комплексное векторное пространство V размерности n и решетку $L \subset V$ на нем. Комплексный тор обозначим через $T_{\mathbb{C}}$.

Определение 11.1. Голоморфная на V (отличная от 0) функция Θ называется *тэта – функцией*, если для всех $x \in V$, $\ell \in L$ выполнено

$$\Theta(z + \ell) = e(Q_\ell(z) + c_\ell)\Theta(z),$$

где $Q_\ell(z)$ — $\mathbb{C}$ – линейный функционал, а $c_\ell \in \mathbb{C}$ — некоторая константа.

Предложение 11.1. Если $P(z)$ — многочлен степени не большей, чем 2, на V, то $e(P(z))$ — тэта – функция.

Доказательство. Действительно, пусть $P(z) = az^2 + bz + c$. Тогда

$$e(P(z+\ell)) = e(P(z) + a(2\ell z + ell^2) + b\ell) = e(2a\ell z + a\ell^2 + b\ell) \cdot e(P(z)).$$

□

Определение 11.2. Тэта – функцию вида $e(P(z))$ принято называть *тривиальной.*

Предложение 11.2. Тэта – функции образуют полугруппу по умножению, а все ее обратимые элементы — тривиальны.

Доказательство. То, что это полугруппа, очевидно — при умножении показатели экспоненты складываются.

Чтобы доказать, что все обратимые тривиальны, достаточно показать, что их коциклы имеют нужный вид. Тогда остается заметить, что все функции с данным коциклом отличаются друг от друга домножением на константу.

Итак, поскольку $\Theta \neq 0$, то от нее можно взять логарифм, зафиксировав одну ветвь: $\varphi = ln(\Theta)$. Тогда $\varphi(z+\ell) = \varphi(z) + (Q_\ell(z) + c_\ell)$. Следовательно, функция φ'' периодична по L, значит, является константой. Таким образом, $\varphi(z) = az^2+bz+c$.
□

Вернемся к комплексному тору $T_\mathbb{C}$. Пусть

$$\pi : T \xrightarrow[mod\ L]{} T_\mathbb{C} \ \text{ – отображение факторизации,}$$

которое является универсальным накрытием тора.

Определение 11.3. Назовем атлас $\{T_\alpha\}$ на торе *хорошим*, если прообраз $\pi^{-1}(T_\alpha)$ любой карты состоит из объединения таких попарно непересекающихся окрестностей U_α^ℓ, что ограничение $\pi : U_\alpha^\ell \to T_\alpha$ является гомеоморфизмом для всех α и ℓ. *Тут мы пользуемся тем фактом, что элементы прообраза нумеруются элементами фундаментальной группы.*

Пусть $\mathcal{D}$ — дивизор на торе $T_\mathbb{C}$. Рассмотрим его представление $\{T_\alpha, f_\alpha\}$ на хорошем атласе (такое представление существует, достаточно рассмотреть любое представление и порезать его карты на компоненты связности на фундаментальном параллелограмме). Тогда $\mathcal{D}$ определит дивизор на V, который называется *подъемом* $\pi^*(\mathcal{D})$ дивизора $\mathcal{D}$. Ему будет соответствовать атлас $\{U_\alpha^\ell, f_\alpha \circ \pi\}$.

Вопрос. Верно ли, что $\pi^*(\mathcal{D})$ — главный дивизор на V?

Теорема 11.1. Если $\mathcal{D}$ — положительный дивизор на $T_\mathbb{C}$, то $\pi^*(\mathcal{D})$ — главный дивизор некторой тэта — функции.

Замечание – цитата. Голыми руками эту теорему не возьмешь. Хитроумному Мамфорду и то потребовалось 1,5 страницы, чтобы объясниться.

Предложение 11.3. Пусть $\pi^*(\mathcal{D})$ — главный дивизор (F). Тогда $F(z)$ — автоморфная форма (то есть $F(z+\ell) = a(\ell, z)F(z)$ для некоторого фактора автоморфности).

Доказательство. F и $\widetilde{f}_\alpha$ — два представления одного и того же дивизора, поэтому они отличаются домножением на единицу $F(z) = h_0(z)\widetilde{f}_\alpha(z)$ и $F(z+\ell) = h_\ell(z)\widetilde{f}_\alpha(z+\ell)$. Таким образом, поскольку $\widetilde{(f)}_\alpha(z) = \widetilde{f}_\alpha(z+\ell)$, то искомых коцикл — это $\dfrac{h_0}{h_\alpha}$.

□

12 Введение в доказательство теоремы по А.Вейлю

Определение 12.1. В силу компактности тора $T_{\mathbb{C}}$ можно выбрать конечный хороший атлас, обладающий следующим свойством: связные компоненты прообразов карт — суть открытые шары. Таким образом, все пересечения $T_i \cap T_j$ связны и односвязны. Назовем такой атлас *великолепным.*

Рассмотрим положительный дивизор $\mathcal{D} > 0$ и его представление в великолепном атласе:

$$\mathcal{D} = \{T_i, f_i\}, \ f_i \in O(T_i).$$

На пересечении $T_i \cap T_j$ определены единицы $\zeta_{ij} \dfrac{f_i}{f_j} \in O(T_{ij})$.

Рассмотрим голоморфные функции $g_{jk} = \dfrac{1}{2\pi i} \ln \zeta_{jk}$, в односвязной области $T_i \cap T_j$ они определены однозначно с точностью до сдвига на $\mathbb{Z}$. Однако функции $Im(g_{ij})$ определены однозначно и на $T_{ijk} = T_i \cap T_j \cap T_k$ выполнено:

$$Im(g_{ij}) + Im(g_{jk}) + Im(g_{ki}) = -Re\left(\frac{1}{2\pi} \ln\left(\zeta_{ij} \cdot \zeta_{jk} \cdot \zeta_{ki}\right)\right) = 0.$$

Выбрем разбиение единицы $\{\rho_i\}$, подчиненное покрытию T_i и рассмотрим функции

$$g_j = \sum_i \left(Im(g_{ji})\right) \rho_i.$$

Замечание 12.1.

$$g_j - g_k = \sum_i Im(g_{ji} - g_{ki})\rho_i = \sum_i Im(g_{jk})\rho_i = Im(g_{jk}).$$

13 Ликбез для понимания доказательства длинной леммы

Пусть $V_{\mathbb{C}}$ — комплексное векторное пространство размерности n. $L \subset V_{\mathbb{C}}$ — решетка полного ранга, $T_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}}/L$ — соответствующий комплексный тор.

Отождествим $V_{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{C}^n$ с координатами $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и дифференциалами $dz_1, \ldots, dz_n$. Эти дифференциалы определяют базис $\omega_1, \ldots, \omega_n, \overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_n$ в пространстве $\mathcal{F}^1$ 1-форм. Это означает, что (p, q) форму можно однозначно определить локально:

$$\varphi^{(p,q)} = \sum \varphi_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p} \wedge \overline{\omega}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}_{j_q} = \sum \varphi_{I,J} \Omega_I \wedge \widetilde{\Omega}_J.$$

Пусть U — это координатная карта на торе, то $\mathcal{F}(U)$ — это биградуированное линейное пространство:

$$\mathcal{F}(U) = \oplus \mathcal{F}^{(p,q)}()U).$$

Замечание 13.1. $2\dfrac{\partial}{\partial z_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} - i\dfrac{\partial}{\partial y_i}$, $2\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} + i\dfrac{\partial}{\partial y_i}$.

Определение 13.1. Опрераторы $d_z : \mathcal{F}^{(p,q)} \to \mathcal{F}^{(p+1,q)}$ и $d_{\overline{z}} : \mathcal{F}^{(p,q)} \to \mathcal{F}^{(p,q+1)}$ определены естественно, заменой $\varphi_{I,J}$ на $d_z \varphi_{I,J}$ (или $d_{\overline{z}} \varphi_{I,J}$ соответственно). Оператор d — это их сумма: $d = d_z + d_{\overline{z}}$.

Замечание 13.2. $d_z^2 = d_{\overline{z}}^2 = d_z d_{\overline{z}} + d_{\overline{z}} d_z = 0$.

Операторы δ_z и $\delta_{\overline{z}}$.

Пусть $\Omega_I = \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p}$ и для любого $frm[o]--leqa \leqslant p$ определим форму $\Omega_I^a = \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_{a-1}} \wedge \omega_{i_{a+1}} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p}$. Аналогичный смысл у $\widetilde{\Omega}_J$ и $\widetilde{\Omega}_J^b$.

Определим оператор δ_z ($\delta_{\overline{z}}$ будет определен аналогично). Определим на (p, q) – формах, на всех остальных формах доопределим по линейности. Пусть $\varphi = f\Omega_I \wedge \Omega_J$, тогда

$$\delta_z \varphi = 2 \sum (-1)^a (\partial_{\overline{z}_{i_a}} f) \Omega_I^a \wedge \overline{\Omega}_J.$$

Соответственно

$$\delta_{\overline{z}} \varphi = 2 \sum (-1)^{p+b} (\partial_{z_{i_b}} f) \Omega_I \wedge \overline{\Omega}_J^b.$$

Замечание 13.3. $\delta_{\overline{z}} : \mathcal{F}^{(p,q)} \to \mathcal{F}^{(p-1,q)}$, $\delta_z : \mathcal{F}^{(p,q)} \to \mathcal{F}^{(p,q-1)}$ и $\delta_{\overline{z}}^2 = \delta_z^2 = \delta_{\overline{z}} \delta_z + \delta_z \delta_{\overline{z}} = 0$.

Про операторы Лапласа, G и H. Пусть теперь оператор Лапласа ассоциирован с квадратичной формой $Q = \sum x_i^2 + \sum y_i^2$.

$$\Delta f = -4 \sum \partial_{z_i} \partial_{\overline{z}_i} f.$$

Замечание 13.4. Нетрудно проверить, что

$$\Delta = 2(d_z \delta_z + \delta_z d_z) = 2(d_{\overline{z}} \delta_{\overline{z}} + \delta_{\overline{z}} d_z).$$

Лемма 13.1. Операторы $d_z, d_{\overline{z}}, \delta_z, \delta_{\overline{z}}$ коммутируют с оператором Лапласа Δ.

Доказательство. Следует из предыдущего замечания прямыми выкладками.

□

Следствие 13.1. Как мы знаем, из коммутируемости с Δ следует коммутируемость с G и H.

14 Вспомогательная длинная лемма

Лемма 14.1. Существуют такие $(1,0)$ – формы $\varphi_j \in \mathcal{F}^{(1,0)}(T_j)$, что
(1) $\Delta\varphi_j = 0$ (локально гармонические);
(2) $\varphi_i - \varphi_j = dg_{ij}$ на T_{ij};
(3) существует такая $(1,1)$ – форма α, что $\alpha\,\Big|_{T_i} = d\varphi_i = d_{\overline{z}}\varphi_i$;
(4) $H\alpha = \alpha$, то есть α — это $(1,1)$ – форма с постоянными коэффициентами.

Доказательство. 1 шаг. Построение φ_j. Введем вспомогательные $(1,1)$ – формы $\widetilde{\varphi}_j = 2id_z g_j$ на T_j.

Замечание 14.1. Поскольку функция голоморфна то,

$$\widetilde{\varphi}_j - \widetilde{\varphi}_k = 2id_z(g_j - g_k) = 2id_z(Img_{jk}) = d_z(g_{jk}).$$

Замечание 14.2. В силу предыдущего замечания, продифференцировав равенство по $\overline{z}$ получаем: $d_{\overline{z}}\widetilde{\varphi}_j = d_{\overline{z}}\widetilde{\varphi}_k$ на T_{jk} (потому что дифференцируем голоморфную функцию).

Таким образом, формы $\{d_{\overline{z}}\widetilde{\varphi}_k\}$ можно склеить в глобальную $(1,1)$ – форму на $T_{\mathbb{C}}$.

$$\Delta\widetilde{\varphi}_j = 2(d_{\overline{z}}\delta_{\overline{z}} + \delta_{\overline{z}}d_{\overline{z}})\widetilde{\varphi}_j = 2\delta_{\overline{z}}d_{\overline{z}}\widetilde{\varphi}_j.$$

Таким образом, $\Delta\widetilde{\varphi}_j$ является ограничением на T_j глобальной $(1,0)$ – формы $\widetilde{\Psi}$.

Поскольку H коммутирует с $d_{\overline{z}}$ и $\delta_{\overline{z}}$, а $\delta_{\overline{z}}H = 0$, то $H\widetilde{\Psi} = 0$.

Оператор G обратен оператору Лапласа на ядре H: $\widetilde{\Psi} = \Delta G\widetilde{\Psi}$. Выберем

$$\varphi_j = \widetilde{\varphi}_j - G\widetilde{\Psi}.$$

2 шаг. Проверка (1) и (2). Проверим свойство **(1)**:

$$\Delta\varphi_j = \Delta\widetilde{\varphi}_j - \Delta G\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Psi} - \widetilde{\Psi} = 0.$$

Проверим свойство **(2)**:

$$\varphi_i - \varphi_j = \widetilde{\varphi}_i - \widetilde{\varphi}_j = d_z g_{ij} = dg_{ij}.$$

Шаг третий. Проверка (3). Из **(2)** следует, что $d\varphi_j = d\varphi_k$ на T_{jk}. Тогда существует такая глобальная $(1,1)$ – форма α, что $d\,\Big|_{T_j} = d\varphi_j$.

Шаг 4. Проверка (4). $H\alpha = \alpha$ равносильно тому, что $\alpha \in im(H) = \ker(\Delta)$. Проверим это:

$$\Delta\alpha = \Delta d_{\overline{z}}\varphi_i = d_{\overline{z}}\Delta\varphi_i = 0.$$

□

15 Конец длинного доказательства теоремы

Сохраним обозначения из леммы. Пусть $\widetilde{F}_i^\ell$ — поднятие формы φ_i на компоненту U_i^ℓ прообраза T_i. Итак, $\widetilde{F}_i^\ell = \varphi_i(\pi(z))$. Напомним, что $\alpha = \sum\limits_{i,j} a_{i,j}\omega_i \wedge \overline{\omega}_j$. Ясно, что $\alpha^* = \pi^*\alpha = \sum\limits_{i,j} a_{i,j} dz_i \wedge d\overline{z}_j$.

Рассмотрим $(1,0)$ – форму на U_i^ℓ:

$$F_i^\ell = \widetilde{F}_i^\ell + \sum_{i,j} a_{i,j}(\overline{z} - \overline{e})_j dz_i.$$

Замечание 15.1. $d_{\overline{z}} F_i^\ell = 0$.

Голоморфный вариант теоремы Пуакаре для односвязной области U_i^ℓ в $\mathbb{C}^n$ гарантирует существование такой голоморфной функции $h_i^\ell \in O(U_i^\ell)$, что $dh_i^\ell = d_z h_i^\ell = F_i^\ell$.

Локальные тэты и их аналитическое продолжение.

Пусть дивизор $\mathcal{D}$ имеет представление $\{T_i, f_i\}$. На карте U_i^ℓ в $\mathbb{C}^n$ определим функцию

$$\Theta_i^\ell(z) = f_i(\pi(z))e(-h_i^\ell(z)).$$

Предложение 15.1. Локально определенные таким образом теты неплохо связаны на пересечениях. Если $z \in U_i^\ell \cap U_j^m$:

$$\Theta_i^\ell(z) = \Theta_j^m(z)e(\sum_{p,q} z_p(\overline{\ell} - \overline{m})_q + const).$$

Доказательство. Применим оператор $d\ln$ как указано:

$$d(\ln f_i(\pi(z)) - h_i^\ell - \ln f_j(\pi(z)) + h_j^m(z) - \sum_{p,q} a_{p,q}(\overline{\ell} - \overline{m})_q z_p) =$$

$$= dg_{ij}(\pi(z)) - F_i^\ell + F_j^m - \sum_{p,q}(\overline{\ell} - \overline{m})_q dz_p.$$

А это уже вверно по выбору функции F_i^ℓ.

□

Замечание 15.2. Аналогично доказывается, что $\Theta_i^\ell(z+\ell) = \Theta_i^0(z) \cdot e(const)$.

Строим единую тэту. Зафиксируем карту $U_{i_0}^0$ и положим на ней $\Theta = \Theta_{i_0}^0$, доопределим на всех соседних картах, потом на соседних новой области и так далее. Все корректно. Несложно заметить, что

$$\Theta = \Theta_i^\ell e\left(-\sum_{p,q} a_{p,q} z_p \overline{\ell}_q + const\right).$$

Фактор автоморфности тэты. В силу предыдущего замечания

$$\Theta(z+\ell) = \Theta(z) e\left(-\sum_{p,q} a_{pq} z_p \overline{\ell}_q + const\right).$$

полученная тэта — честное представление дивизора $\mathcal{D}$.

16 Квазиэрмитовы формы

Определение 16.1. Пусть V — комплекное векторное пространство. *Квазиэрмитовой формой* на $V \times V$ называется комплекснозначная функция $Q(z, w)$, для которой выполнено:

(1) $\mathbb{C}$ – линейна по переменной z;

(2) $\mathbb{R}$ – линейна по переменной w;

(3) $A_Q(z, w) = \dfrac{1}{2i}(Q(z, w) - Q(w, z))$ принимает вещественные значения.

Лемма 16.1. Для того, чтобы квазиэрмитова форма была эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы $Q(iz, w) + Q(z, iw) = 0$ $(*)$.

Доказательство. Для эрмитовой функции $Q(iz, w) + Q(z, iw) = iQ(z, w) - iQ(z, w) = 0$.

Теперь в другую сторону. По условию функция $\mathbb{C}$ – линейна по первой координате. То есть достаточно показать, что $Q(z, w) = \overline{Q(w, z)}$. По условию 3 имеем $Q(z, w) = \overline{Q(w, z)} + \alpha(z, w)$, где $\alpha(z, w)$ — чисто мнимое. Покажем, что α — тождественно нулевая функция. По условию $(*)$

$$-iQ(z, w) = Q(z, iw) = -i\overline{Q(w, z)} + \alpha(z, iw).$$

Прибавим к обеим частям $i(Q(w, z))$. Слева получим вещественное число, а справа будет сумма: $i(Q(w, z) - \overline{Q(w, z)})$ — вещественное, $\alpha(z, iw)$ — мнимое. Получается, что α — одновеременно мнимое и вещественное, то есть 0.

∎

Предложение 16.1. Предположим, форма Q — квазиэрмитова. Тогда

(1) форма $H(z,w) = \dfrac{1}{2i}(Q(iz,w) - Q(z,iw))$ — эрмитова;

(2) форма $S(z,w) = \dfrac{1}{2i}(Q(iz,w) + Q(z,iw))$ — $\mathbb{C}$ – билинейная и симметрическая.

Доказательство. Тут нужно ловко выносить i. $\square$

Маленькая теорема. Форма $Q(z,w)$ тогда и только тогда квазиэрмитова, когда она единственным образом представима в виде суммы эрмитовой и $\mathbb{C}$ – билинейной симметричной формы

$$Q(z,w) = H(z,w) + S(z,w).$$

Доказательство. Естественное следствие предыдущего предложения. $\square$

17 Меморандум Эрмита

Эрмит учил, что если $H(z,w)$ — эрмитова форма в комплексном векторном пространстве, то

а) $H = ReH + iImH$, причем ReH — это $\mathbb{R}$ – билинейная симметрическая форма, а ImH — это $\mathbb{R}$ –билинейная кососимметрическая форма, которую мы будем обозначать буквой A.

Проверим это. Пункт **а)** видно просто из явных формул $ReH = \dfrac{H(z,w)+H(w,z)}{2}$, $ImH = \dfrac{H(z,w)-H(w,z)}{2i}$.

б) $A(iz,iw) = A(z,w)$ и $H(z,w) = A(iz,w) + iA(z,w)$.

Проверим и это.

$$A(iz,w) = \frac{H(iz,iw) - H(iw,iz)}{2i} = \frac{H(z,w)-H(w,z)}{2i} = A(z,w).$$

$$A(iz,w) + iA(z,w) = \frac{H(iz,w) - H(w,iz) + iH(z,w) - iH(w,z)}{2i} =$$
$$= \frac{iH(z,w) + iH(w,z) + iH(z,w) - iH(w,z)}{2i} = H(z,w).$$

Лемма 17.1. Ядро кососимметрической формы A состоит из изотропных векторов H.

Доказательство. Пусть $z_0 \in \ker A$. Это значит, что для любого $w \in V$ выполнено $A(z_0, w) = 0$. По пункту **б)** имеем:

$$H(z_0, z_0) = A(iz_0, z_0) + iA(z_0, z_0) = 0.$$

$\square$

Замечание 17.1. При условии, что $H \geqslant 0$, верно и обратное. Достаточно предположить противное: существуют такие $z_0, x \in V$, что $H(z_0, z_0) = 0$, $H(z_0, x) = i$, тогда при всех $a \in \mathbb{R}$ должо быть верно $H(az_0 + ix, az_0 + ix) > 0$. Дальше нужно скобки раскрыть.

Следствие 17.1. Если $H > 0$, то форма A — невырождена.

Определение 17.1. Пусть V — комплексное векторное пространство, $L \subset V$ — решетка полного ранга. Эрмитова форма $H(z, w)$ для пары (V, L) называется *формой Римана,* если $H \geqslant 0$ и $(ImH)(L \times L) = A(L \times L) \in \mathbb{Z}$.

Напоминание. Любая решетка в нужном базисе записывается в виде $\Omega_{n\times 2n}(E_n, \tau_n)$ любой вектор этой решетки однозначно представляется в виде $\ell = E_n m + \tau_n k$, где m, k — целочисленные вектор – столбцы.

Теорема, которую пока что не будем доказывать. *(Но если станет интересно, это записывается в 10 строк у Мамфорда «Лекции о тэта – функциях».)*

(1) Решетка $L = E_n m + \tau_n k$ в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда допускает *невырожденную риманову эрмитову форму*, когда матрица τ_n — симметрична и ее мнимая часть положительно определена.

(2) Решетки L в $\mathbb{C}^n$, допускающие риманову невырожденную эрмитову форму, — это ровно те решетки, для которых комплексный тор $T = \mathbb{C}^n/L$ является проективным алгебраическим многообразием, которое называется абелевым.

(3) Риманова форма выглядит так:

$$H(E, \tau) = z^t (Im\tau)^{-1}\overline{w}.$$

Замечание 17.2. Формы $A = \dfrac{Q(z,w) - Q(w,z)}{2i}$ и ImH на самом деле совпадают:

$$A = \frac{Q(z,w) - Q(w,z)}{2i} = \frac{S(z,w) - S(w,z) + H(z,w) - H(w,z)}{2i} = ImH.$$

18 Снова к тэтам

Теорема 18.1. Пусть $\Theta(\ell, z) = e(Q_\ell(z) + c_\ell)$ — тэта – фактор автоморфности для решетки L. Тогда существует такая квазиэрмитова форма $Q(z, w)$, что

(1) $Q(z, \ell) = 2iQ_\ell(z)$.

(2) Кососимметрическая форма $\dfrac{1}{2i}(Q(z,w)-Q(w,z))$ принимает целые значения на $L\times L$.

(3) Если $Q=H+S$ — разложение формы на эрмитову и симметрическую части, то $H\geqslant 0$.

Доказательство. **(1)** Вспоминая, что $\Theta(z,\ell)$ — фактор автоморфности, получаем

$$Q_{\ell_1+\ell_2}(z)+c_{\ell_1+\ell_2}=Q_{\ell_1}(z+\ell_2)+c_{\ell_1}+Q_{\ell_2}(z)+c_{\ell_2}\ mod\ \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$Q_{\ell_1+\ell_2}(z)=Q_{\ell_1}(z)+Q_{\ell_2}(z),$$

$$c_{\ell_1+\ell_2}\equiv Q_{\ell_1}(\ell_2)+c_{\ell_1}+c_{\ell_2}\ mod\ \mathbb{Z}.$$

Из последнего следует, что $Q_{\ell_1}(\ell_2)=Q_{\ell_2}(\ell_1)\ mod\mathbb{Z}$. А из первого, что $Q_\ell(z)$ $\mathbb{C}$ – линейна по z и $\mathbb{Z}$ – линейна по ℓ. Но решетка L свободно порождает V над $\mathbb{R}$, то есть при фиксированном z функцию $Q_\ell(z)$ можно продолжить на V по линейности, которое мы обозначим $Q_w(z)$. Докажем, что $Q(z,w)=2iQ_w(z)$ является искомой квазиэрмитовой формой. Обе линейности есть по построению, то есть нужно проверить только последнее условие, что $A_Q(z,w)=Q_w(z)-Q_z(w)$ — вещественная, а это так.

(2) $Q_{\ell_1}(\ell_2)-Q_{\ell_2}(\ell_1)\in\mathbb{Z}$ по доказанному.

(3) *Следующая секция.*

□

19 Доказательство последний части теоремы о факторах автоморфности и квазиэрмитовых форм

Запишем нашу форму в виде $Q(z,w)=H+S$. Положим $b_\ell=c_\ell-\dfrac{Q(\ell,\ell)}{4i}$, $\ell\in L$, форма $A(z,w)=\dfrac{1}{2i}(Q(z,w)-Q(w,z))=ImH$ — целая на $L\times L$.

Лемма 19.1. Числа $\{b_\ell\}$ удовлетворяют условию

$$b_{\ell_1+\ell_2}=b_{\ell_1}+b_{\ell_2}+\frac{A(\ell_1,\ell_2)}{2}\ (mod\ \mathbb{Z})\ (**).$$

Доказательство.

$$b_{\ell_1+\ell_2}=c_{\ell_1+\ell_2}-\frac{Q(\ell_1+\ell_2,\ell_1+\ell_2)}{4i}=\frac{1}{2i}Q(\ell_1,\ell_2)+c_{\ell_1}+c_{\ell_2}-$$

$$-\frac{Q(\ell_1,\ell_1)+Q(\ell_2,\ell_2)+Q(\ell_1,\ell_2)+Q(\ell_2,\ell_1)}{4i}=b_{\ell_1}+b_{\ell_2}+\frac{A(\ell_1,\ell_2)}{2}.$$

$\square$

Следствие 19.1. Числа $\varphi(\ell) = e(b_\ell)$ удовлетворяют *уравнению квазихарактера* относительно кососимметрической формы A:

$$\varphi(\ell_1 + \ell_2) = \varphi(\ell) \cdot \varphi(\ell_2) e^{i\pi A(\ell_1, \ell_2)} \ (***).$$

Действительно, нужно просто число e возвести в степень (**), умноженную на $2\pi i$.

Замечание 19.1. Если $A(L \times L) \subset 2\mathbb{Z}$, то квазихарактер становится настоящим характером (то есть коэффициент $e^{i\pi A(\ell_1, \ell_2)}$ исчезает). Отношение двух квазихарактеров относительно одних и тех же формы A и решетки L является характером.

Лемма 19.2. Для любого квазихарактера φ решетки L относительно кососимметрицеской формы A (целочисленной на решетке) существует такая $\mathbb{C}$ – линейная функция $m(z) : V \to \mathbb{C}$, что квазихарактер $\widetilde{\varphi}(\ell) = \varphi(\ell) e(-m(\ell))$ принимает на решетке L значения, равные по модулю 1. Такая функция $m(z)$ единственна.

Доказательство. Докажем сначала, что мнимя часть функции $m(z)$ определена однозначно. Действительно, $|e(-m(\ell))| = |\varphi(\ell)|^{-1}$, то есть $Imm(\ell)$ определена однозначно, но решетка L — полная, тогда по линейности $Imm(z)$ определена однознечно. Любая вещественная часть — чья-то мнимая. поэтому в силу $\mathbb{C}$ – линейности и сама функция определена однозначно. Это определение корректно по построению.

$\square$

Теорема 19.1. Пусть $\Theta_\ell(z)$ — тэта фактор автоморфности. Тогда существуют такая квазиэрмитова форма $Q(z, w)$ на $V \times V$, $\mathbb{C}$ – линейная форма m на V и квазифактор $\widetilde{\varphi}$ решетки L относительно формы $A = ImH = \dfrac{Q(z, w) - Q(w, z)}{2i}$, принимающий значения в множестве $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| = 1\right\}$, что

$$\Theta(\ell, z) = e\left(\frac{1}{2i} Q(z, \ell) + \frac{1}{4i} Q(\ell, \ell) + m(\ell)\right) \widetilde{\varphi(\ell)}.$$

Доказательство.

$$\Theta(\ell, z) = e\left(\frac{1}{2i} Q(z, \ell) + b_\ell + \frac{Q(\ell, \ell)}{4i}\right) = e\left(\frac{1}{2i} Q(z, \ell) + \frac{Q(\ell, \ell)}{4i}\right) \varphi(\ell) = e\left(\frac{1}{2i} Q(z, \ell) + \frac{Q(\ldots}{}\right.$$

$\square$

Замечание 19.2. По фактору автоморфности тройка $(Q, m, \widetilde{\varphi})$ определяется однозначно.

Операция нормализации. Пусть есть тэта – функция Θ:

$$\Theta(z+\ell) = a(z,\ell)\Theta(z),$$

где фактору автоморфности $a(z,\ell)$ соответствует тройка $(Q, m, \widetilde{\varphi})$. Рассмотрим обратимую тэту:

$$\Theta_0 = 6\left(\frac{S(z,z)}{4i} + m(z)\right).$$

Её фактор автоморфности – $e\left(\dfrac{S(\ell,\ell)}{4i} + \dfrac{S(\ell,z)}{2i} + m(\ell)\right)$.Тогда тэта – функции $\widetilde{\Theta} = \Theta\Theta_0^{-1}$ будет соответствовать тройка $(H, 0, \widetilde{\varphi})$.

Лемма 19.3. Рассмотрим функцию $|\widetilde{\Theta}| \cdot e^{-\frac{\pi}{2}H(z,z)}$.

(1) Эта функция непрерывна и инвариантнаотносительно сдвигов на векторы решетки L.

(2) $|\widetilde{\Theta}| < e^{\frac{\pi}{2}H(z,z)} \cdot const$.

Доказательство. **(1)** Функция непрерывна как произведение непрерывных. Докажем инвариантность:

$$\widetilde{\Theta}(z+\ell)\cdot e^{-\frac{\pi}{2}H(z+\ell,z+\ell)} = \widetilde{\Theta}(z)\cdot e\left(\frac{H(z,\ell))}{2i} + \frac{H(\ell,\ell)}{4i} - \frac{H(z+\ell,z+\ell)}{4i}\right)\cdot\varphi(\ell) =$$

$$= \widetilde{\Theta}(z)\cdot e^{-\frac{\pi}{2}H(z,z)} e\left(\frac{H(z,\ell) - H(\ell,z))}{4i}\right)\cdot\varphi(\ell).$$

Осталось заметить, что то, что стоит по экспонентой — вещественно, то есть модуль действительно не изменился.

(2) Непрерывная функция на фундаментальном параллелепипеде достигает максимума по модулю, а поскольку функция инвариантна о тносительно сдвигов, то этот максимум — максимум для всего пространства.

□

Наконец-то доказываем. Тут начинается доказательство пункта **(3)** теоремы 17, то есть доказываем, что $H \geqslant 0$.

Предположим, для некоторого $z_0 \in V$ это неверно, то есть $H(z_0, z_0) < 0$. Тогда $H(z+\lambda z_0, z+\lambda z_0) = H(z_0,z_0)|\lambda|^2 + O(\lambda)$. Тогда по предыдущей лемме при $|\lambda| \to \infty$ выполнено $\widetilde{\Theta}(z+\lambda z_0) \to 0$. Но функция периодична по L, тогда $\widetilde{\Theta}(z) = 0$ на всем пространстве. Тогда и $\Theta = 0$, что противоречит выбору Θ.

20 Размерность пространства тэта – функций с фактором автоморфности, определяемым тройкой $(Q, 0, 0)$

Будем считать, что $H > 0$.

Лемма о симплектическом базисе решетки (есть в Винберге). Решетка L допускает базис $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$, что $A(e_i, i_j) = A(f_i, f_j) = 0$, $A(e_i, f_j) = \delta_{ij} d_{ij}$, причем $d_{11}|d_{22}|\ldots|d_{nn}$.

Произведение $Pf(L) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$ называется *пфаффианом* формы A на решетке L. Далее будем обозначать $d_{ii} = d_i$.

Теорема 20.1. $dim_{\mathbb{C}} \Theta(Q, 0, 0) = Pf(L)$.

Доказательство. Будем изучать свойства формы Q. Выберем базис в комплексном векторном пространстве $\{\frac{f_i}{d_i}\}$. Форма A на подпространстве $\mathcal{L} = \mathbb{R}\left(\frac{f_1}{d_1}\right) + \ldots + \mathbb{R}\left(\frac{f_n}{d_n}\right)$ (*лагранжевом подпространстве*) тождественно нулевая. То есть форма H в этом базисе записывается *вещественной* матрицей h (заметим, что $h = h^t$). Таким образом,

$$H(z, w) = z^t h \overline{w}.$$

Рассмотрим симметрическую на V форму $S_0(z, w) = z^t h w$. Тогда, домножив нашу тэту на тривиальную тэту $e\left(\frac{-S(z,z) - S_0(z,z)}{4i}\right)$, получим новую тэту с *хорошим свойством*:

$$w \in \mathcal{L}, z \in V \Longrightarrow Q(z, w) = 0.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно посчитать фактор автоморфности тривиальной тэты. Ноль получится за счет того, что $\overline{w} = w$.

Теперь наша ближайшая цель — понять, что такое $Q(z, w)$ в выбранном базисе.

$$Q(z, w) = Q\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \left(\frac{f_i}{d_i}\right), w\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i Q(f_i, w)}{d_i} \ (*).$$

Заметим, что тэта инвариантна относительно сдвигов на $v^t = (d_1\mathbb{Z}, d_2\mathbb{Z}, \ldots, d_n\mathbb{Z})$.

Вспоминаем про оставшиеся базисные векторы решетки — $\{e_i\}$. Введем матрицу периодов $\Omega = (\omega_{ij})$:

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \left(\frac{f_j}{d_j}\right).$$

Пусть теперь $w = p_1e_1 + \ldots + p_ne_n \in (e_1\mathbb{Z} + \ldots + e_n\mathbb{Z})$. Тогда

$$Q(z, w) = 2i \sum_{i,j=1}^{n,n} \frac{p_j z_i}{d_i} A(f_i, e_j) = -2iz^t p,$$

тут мы воспользовались *хорошим свойством* во втором равенстве, а p — вектор-столбец.

Заметим, что $Q(e_i, e_j) = Q\left(\sum \omega_{ik}\frac{f_k}{d_k}, e_j\right) = -2i\omega_{ij}$. Поэтому

$$Q\left(\sum p_ie_i, \sum q_ie_i\right) = -2ip^t\omega q.$$

Таким образом, значение фактора автоморфности:

$$\Theta(z, \sum p_ie_i) = e\left(\frac{Q\left(z, \sum p_ie_i\right)}{2i} + \frac{Q(\sum p_ie_i, \sum p_je_j)}{4i}\right) = e(-z^tp - \frac{1}{2}p^t\Omega p).$$

Теперь докажем, что матрица Ω обладает двумя свойствами: $\Omega^t = \Omega$ и $Im\Omega > 0$. Первое понятно: $Q(e_i, e_j) = Q(e_j, e_i)$ (потому что их разность — $A(e_i, e_j) = 0$)) В самом деле, $Q(z, w) = z^th(\overline{w} - w) = -2iz^thIm(w)$. Следовательно, $Re(Q(z, w)) = 2(Im(z))^th(Im(w))$.

Поскольку h — симметричная положительно определенная матрица, то $Re(Q(z, z)) > 0$, если $Im(z) \neq 0$. Как уже было замечено, $Im\Omega = \frac{1}{2}Re(Q(e_i, e_j))$. То есть Ω — положительно определена.

Следствие 20.1. $h = (Im\Omega)^{-1}$.

Доказательство. Хотим показать, что $Im(\Omega h) = E$. Достаточно показать, что $f_i^tIm(\Omega h)f_j = d_id_j\delta_{ij}$. Действительно,

$$Im((f_i^t\Omega)hf_j) = Im(d_ie_i^thf_j = d_iA(e_i, f_j) = d_id_j\delta_{ij}.$$

□

Замечание 20.1. Комплексные симметрические матрицы вида $Z_n = X_n + iY_n$, $Y_n > 0$ являются аналогом верхней полуплоскости и называются *верхней полуплоскостью Зигеля рода n*

Поскольку наша тэта инвариантна относительно сдвигов на $d_1\mathbb{Z} + \ldots + d_n\mathbb{Z}$, то она раскладывается в ряд Фурье:

$$\Theta(z) = \sum_{r = \frac{\mathbb{Z}}{d_1} + \ldots + \frac{\mathbb{Z}}{d_n}} a(r)e(z^tr).$$

Дальше доказательство аналогично доказательству теоремы о размерности в пункте 6. Заметим, что

$$\Theta(z+p) = \Theta(z)e(-z^t p - \frac{1}{2}p^t\Omega p).$$

Сгруппируем теперь все коэффициенты со здвигом на целое p. Таких групп будет как раз $d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$.

Ряды сходятся по обсолютно аналогичным причинам. Линейная независимость следует из единственности разложения в ряд Фурье.

□

21 Короткий разговор про одномерные тэты

Напоминание про классическю тэту. Она выглядит так:

$$\Theta(\tau, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e\left(\frac{\tau}{2}n^2 + nz\right)$$

Напоминание про формулу Пуассона. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — быстроубывающая на бесконечности функция. $\hat{f} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e(-xy)$ — её преобразование Фурье. Тогда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e(kx).$$

Если подставить $x = 0$, получится

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$

Замечание 21.1. Если $f(x) = e^{-\pi x^2 v}, v > 0$ то $\hat{f}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{v}e^{-\frac{\pi y^2}{v}}}$. Для этой функции Формула Пуассона дает:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(x+k)^2 v} = v^{-\frac{1}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{-\pi k^2}{v}} e(kx),\ x \in \mathbb{R}.$$

Эта функция аналитична, значит, ее можно аналитически продолжить до $\mathbb{C}$. Немножко перепишем её:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(z+k)^2(vi)} = \left(\frac{vi}{i}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{-i\pi k^2}{iv}} e(kz),\ z \in \mathbb{C}.$$

Заменим $iv = \tau$:

$$\sqrt{\frac{\tau}{i}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(z+k)^2\tau} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{-i\pi k^2}{\tau}} e(kz).$$

Таким образом,

$$\Theta\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e\left(-\frac{1}{2\tau}n^2 + \frac{nz}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{(\frac{z}{\tau}+k)^2\tau}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\Theta(\tau, z)e\left(\frac{z^2}{2\tau}\right).$$

Таким образом, $\Theta(\frac{-1}{\tau}, 0) = \dfrac{\tau}{i}\Theta(\tau, 0)$.

Определение 21.1. Голоморфная на верхней полуплоскости функция $f(\tau)$ называется *модулярной формой*, если $f(\tau+1) = f(\tau)$ и $f(\frac{-1}{\tau}) = \tau^k f(\tau)$.

Замечание 21.2. Тут должно было случиться чудо, но оно не произошло.