№1. $a_1 = 4,\ a_2 = 7 \to a_1 + a_2 \equiv_{10} 1.$

(1) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \dfrac{(1+i)^5(1+i)^3}{(1^2-i^2)^3} = \dfrac{(1+i)^8}{8} = \dfrac{(1+2i+i^2)^4}{8} = \dfrac{(2i)^4}{8} = \dfrac{16i^4}{8} = 2 = 2+0\cdot i.$

Ответ: вещественная часть: 2, мнимая: 0.

№2. $a_3 = 9,\ a_4 = 4 \to 3a_3 + 7a_4 = 27 + 28 \equiv_{10} 5.$

(5) $\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow$
- модуль: 1
- аргументом может быть любое из чисел $\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, напр., $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Ответ. модуль: 1, аргумент: $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

№3. $a_6 = 9,\ a_7 = 5 \to 2a_6 + a_7 = 18 + 5 \equiv_{10} 3.$

(3) $\cos 4x + i\sin 4x \overset{\text{ф-ла муавра}}{=} (\cos x + i\sin x)^4 \overset{\text{бином}}{=} \cos^4 x + 4\cos^3 x\, i\sin x + 6\cos^2 x\, i^2 \sin^2 x + 4\cos x\, i^3 \sin^3 x + i^4 \sin^4 x = \cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x.$

Приравняем действительные и мнимые части:

- $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x.$
- $\sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x.$

Тогда $tg\,4x = \dfrac{\sin 4x}{\cos 4x} = \dfrac{4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x}{\cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x} \overset{\text{делим на } \cos^4 x}{=} \dfrac{4\frac{\sin x}{\cos x} - 4\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}{1 - 6\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}} = \dfrac{4tg\,x - 4tg^3 x}{1 - 6tg^2 x + tg^4 x}.$

Ответ: $tg\,4x = \dfrac{4tg\,x - 4tg^3 x}{1 - 6tg^2 x + tg^4 x}.$

№4. $a_8 = 1,\ a_9 = 9 \to a_8 + a_9 \equiv_{10} 0.$

(о) $\cos z = 2 \to \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2.$

Пусть $t = e^{iz} \neq 0$ (иначе из $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ следует $\cos z = \sin z = 0$ — противоречие основному триг. тождеству). Тогда $t + \dfrac{1}{t} = 4 \to t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}.$

Итак, $e^{iz} = \underbrace{2\pm\sqrt{3}}_{>0}$. Прологарифмируем обе части. Аргументом $2\pm\sqrt{3}$ могут быть все $2\pi k$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, напр., 0, тогда знаем, что справа будет $\ln|\underbrace{2\pm\sqrt{3}}_{>0}| + (0 + 2\pi k)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

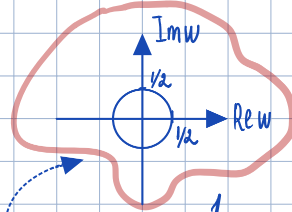
$\Rightarrow iz = \ln(2\pm\sqrt{3}) + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$. $\to z = \dfrac{\ln(2\pm\sqrt{3})}{i} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i \to z = -i\ln(2\pm\sqrt{3}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$z = -i \cdot \ln(2\pm\sqrt{3}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-i\cdot\ln(2\pm\sqrt{3}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

№1. $a_0=4,\ a_1=7 \Rightarrow a_0+a_1=11\equiv_{10}1.$



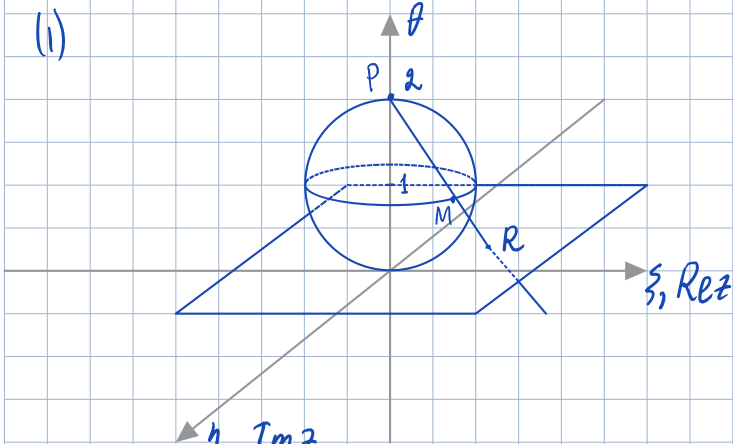
(1) $X=\{|z|=2\},\ f(z)=\frac{1}{z}.$

X — это окружность с центром $z_0=0$ и радиусом 2. Пусть $w=\frac{1}{z}$. Тогда $z=\frac{1}{w}$. $\left|\frac{1}{w}\right|=2 \to |w|=\frac{1}{2}$. Это окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в $w_0=0$. Итак, $\operatorname{Im}X=\{|w|=\frac{1}{2}\}$. (т.к. преобр. $f(z)=\frac{1}{z}$ может перевести окружность только в окр-ть или прямую, все так, наша окр-ть перевелась в окр-ть радиуса 1/2 с центром в нуле).

Ответ. Окружность, радиус 1/2, центр в нуле, рисунок выше.

№2. $a_2=9,\ a_3=4 \to 3a_2+a_3=27+4=31\equiv_{10}1.$

(1)



Назовем оси ξ, η, θ (см. рисунок). Совместим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с плоскостью $\eta O\xi$, т.ч. действ. ось совпадает с $O\xi$, мнимая — с $O\eta$, полож. напр. соотв. осей совпадают. Отождествим $\overline{\mathbb{C}}$ и сферу, как сказано в условии.

Уравнение сферы с центром $(0,0,1)$ и радиусом 1: $\xi^2+\eta^2+(\theta-1)^2=1$. (*)

Пусть $P=(0,0,2)$ — полюс, $M(\alpha,\beta,\gamma)$ — какая-то точка на сфере, $R(x,y,0)$ — ее стереографич-я проекция на пл-ть $\theta=0$, а также $R\in\mathbb{C}$.

P, R, M по их определению лежат на одной прямой, т.е. $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PM}$ лежат на одной прямой:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{-2}{\gamma-2}\Rightarrow x=\frac{2\alpha}{2-\gamma},\ y=\frac{2\beta}{2-\gamma}.$$ (α,β,γ) — т. на сфере, $(x,y,0)$ — проекция.

Рассмотрим экватор. Это точки в плоскости $\theta=1$, т.ч. $\xi^2+\eta^2=1$.

Рассмотрим образ таких точек при стереогр. пр-ии. Поймём, что $x=\frac{2\xi}{2-1}=2\xi$, $y=\frac{2\eta}{2-1}=2\eta$. Т.о., $x^2+y^2=4(\xi^2+\eta^2)=4$. Значит, получим окружность радиуса 2 с центром в нуле.

Ответ. Окружность радиуса 2 с центром в нуле.

№3. $a_4 = 7,\ a_5 = 9 \Rightarrow a_4 + 2a_5 = 7 + 18 = 25 \equiv_{10} 5.$

(5) Прямая через $-3+i,\ 2-4i.$

Из учебника знаем, что уравнение прямой на комплексной пл-ти: $Az + \bar{A}\bar{z} + r = 0$, где $A \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R}$. Рассмотрим варианты:

• $r = 0 \Rightarrow Az + \bar{A}\bar{z} = 0.$

Подставим данные точки и распишем $A = a+bi$:

$$\begin{cases} (a+bi)(-3+i) + (a-bi)(-3-i) = 0, \\ (a+bi)(2-4i) + (a-bi)(2+4i) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a - \cancel{3bi} + \cancel{ai} - b - 3a + \cancel{3bi} - \cancel{ai} - b = 0, \\ 2a + \cancel{2bi} - \cancel{4ai} + 4b + 2a - \cancel{2bi} + \cancel{4ai} + 4b = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a - 2b = 0, \\ 4a + 8b = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -3a, \\ b = -\frac{a}{2}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a = -\frac{a}{2}, \\ b = -3a, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Итак, прямая примет вид $0 \cdot z + 0 \cdot \bar{z} = 0$, т.е. все коэффициенты одновременно 0. Это не прямая. Случай невозможен.

• $r \neq 0 \Rightarrow$ делим на r: $\frac{A}{r}z + \frac{\bar{A}}{r}\bar{z} + 1 = 0.$ Пусть $\frac{A}{r} = B,\ \frac{\bar{A}}{r} = \overline{\left(\frac{A}{r}\right)} = \bar{B},\ B \in \mathbb{C}.$

$Bz + \bar{B}\bar{z} + 1 = 0.$ Подставим данные точки. И пусть $B = c + di.$

$$\begin{cases} (c+di)(-3+i) + (c-di)(-3-i) + 1 = 0, \\ (c+di)(2-4i) + (c-di)(2+4i) + 1 = 0. \end{cases}$$

Скобочки мы уже раскрывали.

$$\begin{cases} -6c - 2d + 1 = 0, \\ 4c + 8d + 1 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2d = -6c + 1, \\ 4c + 4 - 24c + 1 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2d = -6c + 1, \\ -20c + 5 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2d = -\frac{6}{4} + 1, \\ c = \frac{1}{4}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = -\frac{1}{4}, \\ c = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Итак, прямая: $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right)z + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)\bar{z} + 1 = 0. \rightarrow (1-i)z + (1+i)\bar{z} + 4 = 0.$

Ответ. $(1-i)z+(1+i)\bar{z}+4=0.$

N4. $a_6=5,\ a_7=1 \rightarrow 2a_6+3a_7=10+3\equiv_{10} 3.$

(3) $|z-2|=|z+2|.$

Пусть $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$. Тогда $|(a-2)+bi|=|(a+2)+bi|.$

$\sqrt{(a-2)^2+b^2}=\sqrt{(a+2)^2+b^2}$

$\underbrace{(a-2)^2+b^2}_{\geqslant 0}=\underbrace{(a+2)^2+b^2}_{\geqslant 0}$

$(a-2-a-2)(a-2+a+2)=0 \rightarrow a=0.$

Значит, $z=bi,\ b\in\mathbb{R}$. Действительно, $|bi-2|=|bi+2| \Leftrightarrow \sqrt{b^2+4}=\sqrt{b^2+4}$ — правда $\forall b\in\mathbb{R}$.

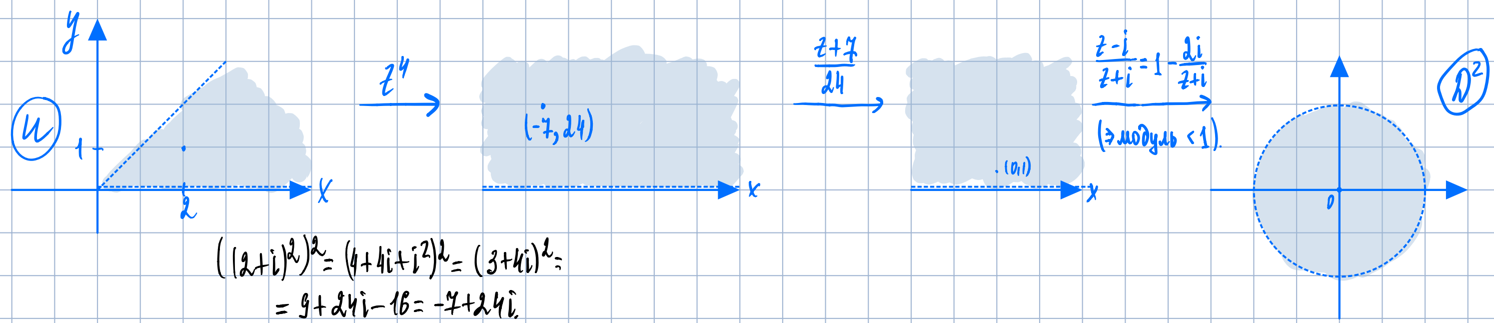
На комплексной плоскости $\{z\in\mathbb{C}\,|\,z=bi,\ b\in\mathbb{R}\}$ — это ось $\operatorname{Im} z$ (во всех остальных точках, отличных от нее, действительная часть ненулевая).

Ответ. На комплексной плоскости это ось $\operatorname{Im} z$.

№3. $a_3 = 4,\ a_4 = 1 \to a_3 + a_4 = 5.$

(5) Найти $u(x,y)$, определенную и гармоничную в $U\setminus\{(2,1)\}$, $u|_{\partial U}\to 0$, $u|_{(2,1)}\to\infty$, где $U=\{x>0,\ 0<y<x\}$.

Построим голоморфную $f: U\to D^2$.



$((2+i)^2)^2=(4+4i+i^2)^2=(3+4i)^2=$
$=9+24i-16=-7+24i.$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "g\circ f"'] & & \mathbb{R} \\
& D^2 \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "g"] & \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

f — голоморфная.

Построим $h: D^2\to\mathbb{R}$ — гармоническую (позже, сейчас план). (*)

Построим $g: D^2\to\mathbb{C}$, $g = h + ik$, h, k гарм. сопряжены. Т.к. h гармоническая, g голоморфная.

$u = \operatorname{Re}(g\circ f)$. $g\circ f$ голоморфна как композиция голоморфных ⇒ $\operatorname{Re}(g\circ f)$ гармонична на обл. опр. $g\circ f$. $u = h\circ f$.

(*) Настало время h. Рассмотрим $h(z)=\ln|z| : D^2\to\mathbb{R}$, $h|_{(0,0)}\to\infty$, $h|_{\partial D^2}=\ln|1|=0$. $\ln|z|=\operatorname{Re}(\ln z)$, где $\ln z$ — голоморфная, ⇒ h гармонична в $D^2\setminus\{(0,0)\}$.

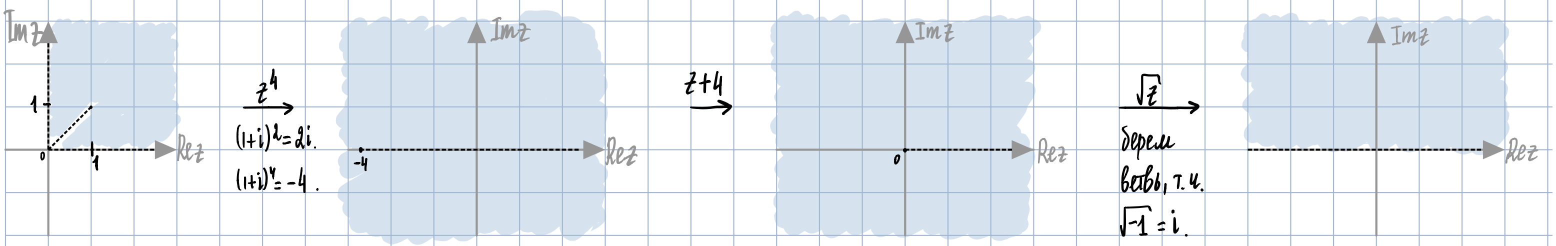
Тогда $u = h\circ f = \ln\left|\dfrac{\frac{z^4+7}{24}-i}{\frac{z^4+7}{24}+i}\right| = \ln\left|\dfrac{z^4+7-24i}{z^4+7+24i}\right|.$

u определена в U ⇒ u в $U\setminus\{(2,1)\}$. h гарм. в $D^2\setminus\{(0,0)\}$, а $(0,0)$ появляется из равенства нулю модуля аргумента логар., т.е. если $z^4+7-24i=0$, т.е. $z=(2,1)$. Значит, u гармонична на $D^2\setminus\{(2,1)\}$. Остальное проверим на логарифме и на u.

Ответ. $\ln\left|\dfrac{z^4+7-24i}{z^4+7+24i}\right|.$

№1. $a_0=4$, $a_7=1 \to a_0+a_7=5$.

(5) Выписать формулу голоморф. биект. отобр. $X=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z>0\} \setminus \{(1+i)t \mid t\in(0,1]\} \to \mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z>0\}$.



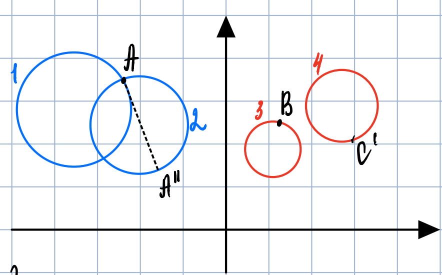
плоскость с разрезом по лучу $[-4,+\infty)$.

Значит, нужное преобразование: $\sqrt{z^4+4}$.

Ответ: $\sqrt{z^4+4}$.

№2. $a_6=5$, $a_9=1 \to a_6+a_9=6$.

(6) Попробуем перевести синие окружности в красные (синие — пересекаются, красные — нет).



Автоморфизмы полуплоскости — это дробно-линейные преобразования. Дробно-линейное преобразование переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности. Значит, каждая синяя окружность переходит в какую-то красную. Для определенности пусть окр.-1 переходит в окр.-3, а окр.-2 переходит в окр.-4.

Пусть A — точка пересечения окр.-1 и окр.-2. При автоморфизме пл-ти она перейдет в какую-то точку на одной из красных окружностей. Для определенности пусть в точку B на окр.-3 (не ограничивая общности).

Знаем, что при дробно-линейном преобразовании симметричные точки перейдут в симметричные. Пусть A'' — точка, симметричная A, на окр.-2. При автоморфизме она перейдет в точку на окр.-4 (окр. 2 переходит в окр.-4). Назовем ее C'. Она была симметрична A на окружности-2, значит, образ A должен лежать на окр.-4 и быть симметричен C'! Но образ A не лежит на окр.-4, он лежит на окр.-3, а окр.-3 и окр.-4 не пересекаются. Значит, картинка невозможна. Т.е. перевести можно не любую пару в верхней полуплоскость автоморфизмом полуплоскость в любую др. пару таких окружностей.

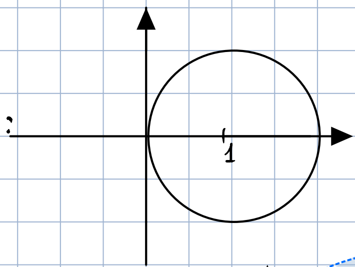
Ответ. Неверно.

$(a+bi)^2 = a^2+2abi-b^2$

№4. Зад = 3.

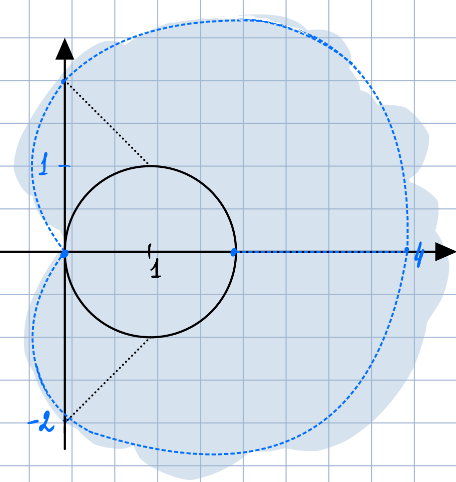
(3) Нарисовать образ $X=\{z \mid |z|<1\}$ при $f(z)=(z+1)^2$.

Образ открытого круга при $z \mapsto z+1$:



Посмотрим, куда перейдут отдельные точки.

- $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$
- $2^2 = 4$
- $0^2 = 0$
- $(1-i)^2 = -2i$



Ответ — закрашенная голубая фигура внутри штриховки.

код: 4794795191
0123456789

N1. $a_5 = 9,\ a_7 = 1 \to a_5 + a_7 \equiv 0.$

Опр. $\gamma: [A, B] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — кусочно-гладкий путь, f — непр. ф-ия с комплексными знач., опр. на $\gamma([A,B])$ или некотором откр. мн-ве, содерж. $\gamma([A,B])$. Тогда $\int\limits_\gamma f(z)dz := \int\limits_A^B f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$

(a) $f(x+iy) = x$, $\gamma: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{\pi i \sin t}$, $\int\limits_\gamma f(z)dz = ?$

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

$$\gamma(t) = e^{i(\pi \sin t)} = \underbrace{\cos(\underbrace{\pi \sin t}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sin(\underbrace{\pi \sin t}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}} \Rightarrow f(\gamma(t)) = \cos(\pi \sin t).$$

$$\gamma'(t) = (e^{\pi i \sin t})' = e^{\pi i \sin t} \cdot \pi i \cos t.$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos(\pi \sin t) e^{\pi i \sin t} \pi i \cos t\, dt = \left\{ \begin{array}{l} u = \pi \sin t \Rightarrow du = \pi \cos t\, dt \Rightarrow dt = \frac{du}{\pi \cos t} \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \sin t \le 1 \Rightarrow 0 \le \pi \sin t \le \pi. \end{array} \right\} = \int\limits_0^{\pi} \cos u\, e^{iu} i\, du =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \cos u\, de^{iu} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^{iu} de^{iu} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{e^{iu}} de^{iu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2iu}}{2}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^{iu})\Bigg|_0^{\pi} = \cancel{\frac{1}{4}(e^{2i\pi} - 1) + \frac{1}{2}(\ln(e^{i\pi}) -}$$

$$\frac{e^{2iu}}{4}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{iu}{2}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$\cancel{- \ln 1)} = \frac{1}{2} i\pi.$$

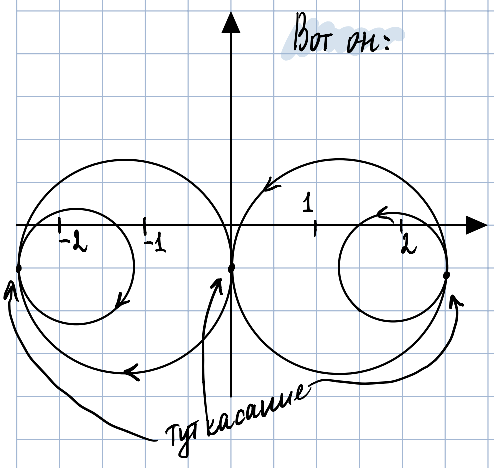
Ответ. $\frac{\pi i}{2}$.

№2. $a_3 = 4,\ a_4 = 7 \Rightarrow a_3 + 2a_4 = 4 + 14 \equiv 8$

число оборотов пути вокруг точки k (полож. ориент.)

(8) Нарисовать замкнутый путь γ, т.ч. $\forall k \in \mathbb{Z}, |k| \le 2 : \mathrm{Ind}_k \gamma = k$.

Вот он:



$k \in \mathbb{Z}, |k| \le 2 \Leftrightarrow k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Вокруг -2 с учетом ориентации -2 оборота, вокруг -1 с учетом ориентации -1 оборот, вокруг 1 — один оборот, 2 — два оборота, вокруг 0 — 0 оборотов.

это тире, я их очень люблю

$\exists$ то, что надо.

№3. $a_0 = 4$, $a_1 = 7$ $\Rightarrow 5a_0 + 7a_1 = 20 + 49 \equiv 9.$

(9) Найти все знач. $\int\limits_C f(z)\,dz$, C – замкнутый путь, $f(C)$ опр. и не обр. в беск. нигде.

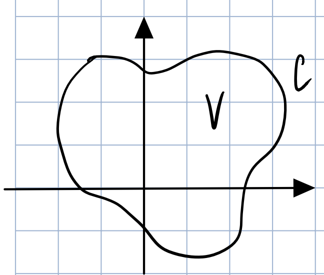
$$f(z) = \frac{z^3 - 7z^2 + 16z - 12}{z^3 - 8z^2 + 19z - 12} = \frac{z^3 - 8z^2 + z^2 + 19z - 3z - 12}{z^3 - 8z^2 + 19z - 12} = 1 + \frac{z^2 - 3z}{z^3 - 8z^2 + 19z - 12} = 1 + \frac{z(z-3)}{(z-1)(z-3)(z-4)} =$$

$$= 1 + \frac{z}{(z-1)(z-4)} = 1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z-4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1} \text{ при } z \neq 3.$$

$\Rightarrow$ есть три особые точки: $z = 1, 3, 4.$

Т. Коши, V_3, а)

$f: U \to \mathbb{C}$ – голом., $U \subset \mathbb{C}$ – откр. $\gamma_1, \gamma_2 \subset U$ – замкнутые несамопересек. и не пересек. друг с другом кривые, ориент-ые полож. Если часть плоск., заключ. между γ_1 и γ_2, целиком сод. в U, то $\int\limits_{\gamma_1} f\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f\,dz.$



По т. Коши V_3 можем вместо пути C брать окружность, лежащую внутри C, для подсчёта интеграла.

Пример 4.7 из учебника: если γ – окр. радиуса $r > 0$ с центром в т. $a \in \mathbb{C}$, ориент. положит., т.е. против ч.с., то $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$

С.52 учебника: интеграл от $(z-a)^n$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ равен 0.

Предл.-опр. 4.19: $\mathrm{Ind}_a\,\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a}.$

---

1) Если особые точки не лежат в V, то по теореме Коши $\forall \gamma$ $\int\limits_C f(z)dz=0$

(f — голоморфная из выпуклого откр. мн-ва $\mathbb{C}\setminus\{1,2,4\}$.

2) Если все лежат, возьмем в кач-ве γ окр. с центром в $z=1$ и $r=1$.

$$\int\limits_\gamma f(z)dz=\int\limits_\gamma\left(1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z-4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1}\right)dz=\int\limits_\gamma dz+\frac{4}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-1}=\frac{8\pi i}{3}-\frac{2\pi i}{3}=\frac{6\pi i}{3}=2\pi i.$$

по теореме

индекс отн. окр. с центром в $z=1$ и радиусом 1 равен $0\Rightarrow$ интеграл $=0$.

Теперь если не все точки лежат, но какие-то лежат. Дальше будем брать окр. с центрами в леж. точке и $r=1$. И пользоваться, если индекс $=0\Rightarrow$ инт. $=0$

- Если 1 лежит, а остальные нет.

$$\int\limits_\gamma dz+\frac{4}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-1}=0+0-\frac{1}{3}\cdot 2\pi i=-\frac{2\pi i}{3}.$$

- Если 3 лежит, а остальные нет, то $\int\limits_\gamma dz+\frac{4}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-1}=0.$

- Если 4 лежит, а ост. нет, то $\int\limits_\gamma dz+\frac{4}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-1}=0+\frac{4}{3}\cdot 2\pi i-0=\frac{8\pi i}{3}.$

индекс отн. окруж. с центром в 4 равен 0

- Если 1 не лежит, а ост. лежат, то $\int\limits_\gamma dz+\frac{4}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-1}=\frac{8\pi i}{3}.$

- Если 3 не лежит, а ост. лежат, то $\int\limits_\gamma dz+\frac{4}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-1}=2\pi i.$

- Если 4 не лежит, а ост. лежат, то $\int\limits_\gamma dz+\frac{4}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-4}-\frac{1}{3}\int\limits_\gamma\frac{dz}{z-1}=\frac{-2\pi i}{3}.$

Ответ: $-\frac{2\pi i}{3}$, 0, $2\pi i$, $\frac{8\pi i}{3}$.

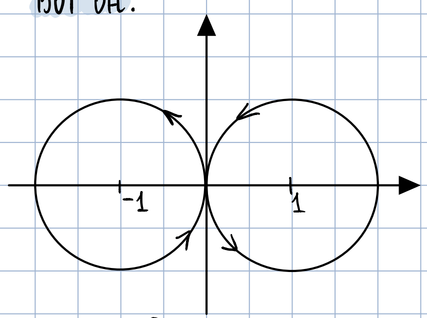
№4. $a_1 = 7$
$a_6 = 5$ $\Rightarrow 6a_1 + a_6 = 42+5 \equiv 7.$

Пример 4.7 из учебника: если γ – окр. радиуса $r>0$ с центром в т. $a\in\mathbb{C}$, ориент. положит., т.е. против ч.с., то $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$

---

(7) Привести пример контура C, т.ч. $\int_C f(z)dz = 10\pi i$, $f(z) = \frac{5z-1}{z^2-1} = \frac{5z-1}{(z-1)(z+1)} = \frac{3}{z+1} + \frac{2}{z-1}.$

Вот он:



$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$\gamma_2 : [2\pi, 4\pi] \to \mathbb{C}$ $\Rightarrow \int_C f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$

$F(z) = 3\ln(z+1) + 2\ln(z-1)$ – первообразная.

Пусть γ_1 – окружность радиуса 1 с центром в $a=-1$, ориент. полож., тогда $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1} \frac{3}{z+1}dz + \int_{\gamma_1}\frac{2}{z-1}dz = 6\pi i$:

- $3\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z+1} = 3\cdot 2\pi i$ из примера 4.7,
- $2\int_{\gamma_1}\frac{d}{z-1} = 0$, т.к. как в прошлой задаче индекс относительно контура равен нулю $\Rightarrow$ интеграл 0 (или т.к. можем определить первообр., а инт. по замкнутому контуру $\Rightarrow$ равен 0).

Аналогично $\int_{\gamma_2} f(z)dz = 0 + 2\cdot 2\pi i.$

$\Rightarrow \int_C f(z)dz = 10\pi i.$

N1. $a_7 = 1,\ a_9 = 1 \Rightarrow a_7 + 2a_9 = 1+2 = 3.$

(3) g непр. на $D(a,R)$. Д-ть: $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{2\pi} g(a+\varepsilon e^{i\varphi})d\varphi = 2\pi g(a)$.

Запишем в параметрической форме ур-ие окр. с центром в $a=(x_0, y_0)$ и радиусом R:

$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi] \Rightarrow$ $z(t) = x(t) + iy(t) = x_0 + R\cos t + i(y_0 + R\sin t) = z_0 +$ $+ R(\cos t + i\sin t) \Rightarrow z(t) = z_0 + Re^{it},\ t\in[0,2\pi]$.

Таким образом, $\gamma(t) = a + \varepsilon\cdot e^{i\varphi},\ \varphi\in[0,2\pi]$.

Тогда пусть $z = a+\varepsilon e^{i\varphi} \Rightarrow dz = d(\varepsilon e^{i\varphi}) = \varepsilon d(e^{i\varphi}) = i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi \Rightarrow d\varphi \overset{(*)}{=} \frac{dz}{i\varepsilon e^{i\varphi}}$. А интеграл из интеграла с пределами 0 и 2π станет интегралом по $\partial D(a,R)$.

Следствие 5.14. Пусть $\gamma\subset\mathbb{C}$ — кусочно-гладкая кривая и $f:\gamma\to\mathbb{C}$ — непр. ф-ия. Тогда ф-ия $z\mapsto \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$ голоморфна на $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

По условию g непр. на $D(a,R)$, а контур у нас как раз $\partial D(a,R)$, на $\partial D(a,R)\subset D(a,R)$ g непр. $\Rightarrow$ используем следствие, $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(a,R)} \frac{g(z)dz}{z-a}$ голоморфна на $\mathbb{C}\setminus\partial D(a,R)$. Теперь воспользуемся формулой Коши, ее я выписала в след. задаче, для нее у нас как раз все выполнено.

это из (*) обратно заменили

$$g(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{g(z)dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{g(a+\varepsilon e^{i\varphi})\, i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = \frac{1}{2\pi i}\cdot i\int\limits_0^{2\pi} g(a+\varepsilon e^{i\varphi})d\varphi \Rightarrow 2\pi\cdot g(a) = \int\limits_0^{2\pi} g(a+\varepsilon e^{i\varphi})d\varphi.$$

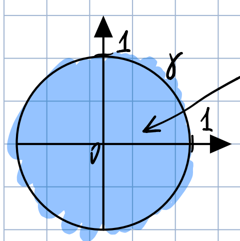
ч.т.д.

№2. $a_0=4,\ a_3=4 \Rightarrow 9a_0+a_3=36+4 \equiv_{10} 0.$

Формула Коши. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — часть комплексной плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой γ ($\gamma \subset \overline{U}$); положим $\mathrm{Int}(\overline{U})=U$. Если функция $f:\overline{U}\to\mathbb{C}$ непр-на на $\overline{U}$ и голоморфна в U, то $\forall a\in U$: $f(a)=$
$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a}$.

Пусть $f(z)=\frac{e^z}{z+2}$, тогда нужно вычислить $\int\limits_\gamma \frac{f(z)}{z}dz$, где γ — единичный круг с центром в нуле.

Теперь посмотрим на формулу Коши. $f:\overline{U}\to\mathbb{C}$ голоморфна в U



только голубое: U

голубое $+\gamma$: $\overline{U}$

$\forall z_0\in U\ \exists \lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ (да, не существует только в $z_0=-2\notin U$).

и непр. на $\overline{U}$: $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{e^{z_0}}{z_0+2}=\frac{e^{z_0}}{z_0+2}$, а $z_0=-2\notin\overline{U}$.

$\Rightarrow \forall a\in U:\ f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{f(z)dz}{z-a}$.

Возьмем тогда $a=0\in U$. $f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{f(z)dz}{z}$, т.е. наш искомый интеграл — это $2\pi i\cdot f(0)=2\pi i\cdot\frac{e^0}{2}=\pi i$.

Ответ: πi.

№3. $a_6 = 5,\ a_8 = 9 \Rightarrow a_6 + 4a_8 = 5 + 36 \underset{10}{\equiv} 1.$

Разложить $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ в степенной ряд по степеням $(z-a)$ для $a=0$ и найти радиус сходимости этого ряда.

Предложение-определение 1.21. $\forall z \in \mathbb{C}$ ряд $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$ абсолютно сходится. Его сумма обозначается e^z.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \ldots \Rightarrow \frac{e^z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \ldots \Rightarrow \frac{e^z}{z} - \frac{1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \ldots$$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(n+1)!}$. Теперь найдем радиус сходимости R.

Учебник, стр 15, формула Коши-Адамара для ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j (z-a)^j$; $c_j, a, z \in \mathbb{C}$:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

У нас ряд с $a=0$, $c_j = \dfrac{1}{(j+1)!}$. Тогда $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(n+1)!} = \infty.$

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(n+1)!}$, $R = \infty$.

№4. $a_1 = 7,\ a_6 = 5 \Rightarrow a_1 + a_6 \equiv_{10} 2.$

(2) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$, найти $f'''(0)$.

Предложение 5.17. Если ф-ия f голоморфна в открытом круге $\{z : |z-a| < r\}$, то в этом круге она представляется в виде суммы след. степенного ряда:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z-a)^n}{n!} + \ldots$$

— ряд Тейлора.

$\forall z_0 \neq 0$ существует комплексная пр-ая $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ и можем ее явно вычислить: $\dfrac{e^z - 1 - z \cdot e^z}{(e^z-1)^2}$. Посмотрим, что в $z_0 = 0$. Вычислим предел:

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-1}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{z - e^z + 1}{e^z - 1}\right)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{z+1-e^z}{e^z-1}\right)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{z+1-1-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3!}-\ldots-\frac{z^n}{n!}-\ldots}{z}\right)}{e^z - 1} =$$

$$= -\lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \ldots\right)}{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots} = -\lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n+1)!} + \ldots}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{n!} + \ldots} = -\frac{1}{2}. \Rightarrow \text{предел } \exists,$$

производная существует, тогда f голоморфна, разложим теперь в ряд Тейлора в $a=0$. Тогда третий, считая с нуля, коэф-т в ряде Тейлора — это $\dfrac{f'''(0)}{3!}$. Хотим найти.

Доопределим в нуле $f(0) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{e^z - 1} = 1$. Итак, нулевой член ряда $= 1$, первый $= -\frac{1}{2} \cdot z$.

Рассмотрим $g(z) = \dfrac{z}{e^z-1} - \left(1 - \frac{z}{2}\right)$, т.е. вычтем первые два элемента в разложении.

Теперь рассмотрим $g(-z) = -\dfrac{z}{e^{-z}-1} - 1 - \dfrac{z}{2}$. Т.к. $e^{-z} - 1 = \dfrac{1}{e^z} - 1 = \dfrac{1 - e^z}{e^z}$, $g(-z) =$

$$= \frac{ze^z}{e^z - 1} - 1 - \frac{z}{2} = \frac{z(e^z-1)+z}{e^z-1} - 1 - \frac{z}{2} = z + \frac{z}{e^z - 1} - 1 - \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z-1} - \left(1 - \frac{z}{2}\right) = g(z).$$ Получается, $g(z)$ — четная

$\Rightarrow$ все нечетные коэф-ты, начиная считать с нуля, равны нулю.

Итак, мы разложили g в ряд Тейлора и увидели, что нечетные коэф-ты равны нулю. Теперь припишем к сумме первыми двумя элементами (ряд Тейлора ф-ии g, представляем сейчас так g) 1 и $z/2$, чтобы получить снова f (g была голоморфна как разность голоморфных $\Rightarrow$ ряд Тейлора существовал). Значит, у f в ряде Тейлора нечетные коэф., начиная с третьего, равны нулю. $\Rightarrow$ и $\frac{f'''(0)}{6}$. $\Rightarrow f'''(0) = 0$.

Прямое диф-ие: $f'(z) = \dfrac{e^z - 1 - z \cdot e^z}{(e^z-1)^2}$, $f''(z) =$ пожалуй, тут остановлюсь, конечно, так тяжелее, разве что думать почти не надо, только аккуратность и терпение.

Ответ: 0, по-умному проще.

№2. $a_5=9,\ a_7=1 \Rightarrow (1)$.

(1)? $\exists!$ росток в $z=0$: $f(z)$ — аналит., $f'(z)=f(z)$, $f(0)=1$.

Предл. 6.7. $\exists!$ вз.-одн. соответствие между ростками голоморфных ф-ий в т. $p\in\mathbb{C}$ и степ. рядами вида $\sum c_k(z-p)^k$ с $R>0$.

Предположим, $\exists$ росток в $z=0$: $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

$c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$c_1=\frac{f'(0)}{1!}=\frac{f(0)}{1}=1,\ c_2=\frac{f''(0)}{2!}=\frac{f'(0)}{2!}=\frac{f(0)}{2!}=\frac{1}{2!},\ \dots,\ c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{f(0)}{k!}=\frac{1}{k!}$

$\Rightarrow f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$. Нетрудно заметить, что это e^z, $\Rightarrow$ знаем, что у этого ряда R сходимости >0. $\Rightarrow$ по предл. 6.7 росток $\exists!$

Ответ: $\exists!$ росток (доказано).

№3. $a_2=9$
$a_6=5$
$\Rightarrow (5)$

$w(z)$ в $\gamma(0)$: $\cos w=z$, $w(0)=\frac{\pi}{2}$, $\underset{[0,1]\to\mathbb{C}}{\gamma(t)}=e^{\pi i t}-1$. $w(\gamma(1))=?$

$w=\arccos z+2\pi k$, $w(0)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, а надо $\frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow w=\arccos z$, $\underline{\underline{k=0}}$.

$\gamma(1)=e^{\pi i}-1=-2$.

$w(\gamma(1))=w(-2)=\arccos(-2)$

• $t=\arccos(-2)$.

$\cos t=-2 \to \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=-2$. Пусть $m=e^{it}\neq 0$ (иначе $e^{it}=\cos t+i\sin t \Rightarrow \cos t=\sin t \Rightarrow$ прот. с ОТТ). Тогда

$m+\frac{1}{m}=-4 \to m^2+4m+1=0 \to m=-2\pm\sqrt{3}$. Итак, $e^{it}=-2\pm\sqrt{3}<0$. Прологарифмируем обе части.
$\Rightarrow |-2\pm\sqrt{3}|=-(-2\pm\sqrt{3})=2\mp\sqrt{3}$.

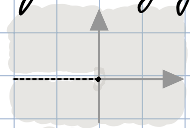
Аргумент $-2\pm\sqrt{3}$: $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ Справа: $\ln(2\mp\sqrt{3})+(\pi+2\pi k)i,\ k\in\mathbb{Z}$, $\Rightarrow it=\ln(2\pm\sqrt{3})+\pi(2k+1)i,\ k\in\mathbb{Z}$; $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

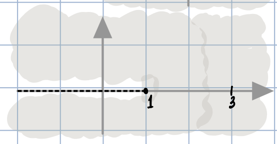
$\Rightarrow t=-i\cdot\ln(2\pm\sqrt{3})+\pi(2k+1)$. Мы брали ветвь арккосинуса, т.ч. в нуле было $\frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow t=-i\cdot\ln(2+\sqrt{3})+\pi$.

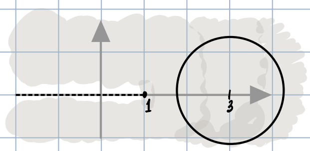
Ответ: $-i\cdot\ln(2+\sqrt{3})+\pi=\arccos(-2)$.

№4. $a_0=4,\ a_7=1 \Rightarrow a_0+a_7+1=6$.

(6) радиус сходимости ряда для $f(z)=\log(\log z)$ с центром в $a=3$, $f(a)>0$.

$g(z)=\log z$ голоморфна на 

$f(z)=\log(\log z)$ на 



Максимальный радиус круга, внутри к-го $f(z)$ голоморфна, это $R=2$. $\exists$ при таком R аналит. соотв. ряд сходится. Т.к. $R=2$ – максимальный радиус, это и есть радиус сход-ти.

Ответ: 2.

N1. $a_2=9$, $a_8=9 \Rightarrow (9)$.

(9) Росток в т. 0 с $s(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z^k)^k$, $\gamma: [0,1]\to\mathbb{C}$, $t\mapsto t$.

Пусть $s_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z^k)^k$. Перезразложим ряд: $s_0(z)=s_{\gamma(z)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z^k-\gamma(z)+\gamma(z))^k$. Если $\exists z\in[0,1]$, т.ч. в нем $s_{\gamma(z)}(z)$ не сх-ся, то аналит. продолж. нет. Такое z существует: в $z=1$ $s_0(1)=\infty=s_{\gamma(1)}(1) \Rightarrow$ аналит. прод. нет.

Ответ: нет.