Алгебра, семинар №1
ВШЭ, осень, первый курс

1. Сколько существует функций $f : \{1, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 5\}$, таких что $\# f^{-1}(k) \leq 2$ для всех $k = 1, \ldots, 5$?

2. Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражениях:

$$(a+b)^n, \ (a+b+c)^3, \ (a_1 + \cdots + a_m)^n.$$

3. Докажите (по-возможности, комбинаторно) следующие равенства:

$$\text{а). } \sum_{i=0}^{n} \binom{x+i}{i} = \binom{x+n+1}{n},$$

$$\text{б). } \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} = n 2^{n-1}.$$

4. а). Сколько существует путей на плоскости из точки $(0,0)$ в точку (n_1, n_2), $n_1, n_2 \geq 0$, состоящих из отрезков $(1,0)$ и $(0,1)$?
б). Обобщите пункт а) на высшие размерности (пути в d-мерном пространстве).

5. При каких n, m биномиальный коэффициент $\binom{n}{m}$ нечётный? При каких n все биномиальные коэффициенты $\binom{n}{m}$, $0 \leq m \leq n$ нечётны?

6. Назовём разложением числа n равенство вида $n = a_1 + \cdots + a_k$, $a_i > 0$. Например, число 3 имеет ровно 4 разложения $3 = 3$, $3 = 2+1$, $3 = 1+2$, $3 = 1+1+1$. Числа a_i называются частями разложения.
а). Найдите число разложений числа n.
б). Найдите число разложений числа n, имеющих чётное число чётных частей.

Алгебра, семинар №2
ВШЭ, осень, первый курс

1. Зафиксируем целые числа a, b. Опишите все числа, представимые в виде $ax + by$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

2. Вычислите наибольший общий делитель 10203 и 4687 и запишите его линейное представление.

3. Вычислите наибольшие общие делители $(8888888, 8888)$ и $(2^n - 1, 2^m - 1)$.

4. Найдите вещественную и мнимую части, модуль и аргумент следующих комплексных чисел

$$\frac{(4-i)(7+6i)}{3-i}, \qquad \frac{(1-i)^3}{(1+i)^5}, \qquad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{25}.$$

5. Вычислите $z^m + z^{-m}$, если $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$.

6. Решите уравнения

$$z^4 = i, \qquad (z+1)^n + (z-1)^n = 0, \qquad (z+i)^n + (z-i)^n = 0, \qquad \bar{z} = z^3.$$

7. Докажите, что три различных комплексных числа z_1, z_2, z_3 тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда $(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3) \in \mathbb{R}$.

Алгебра, семинар №3
ВШЭ, осень, первый курс

1. Поделите с остатком многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$ и в кольце $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$:
$a)$ $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 6x + 4,\ g(x) = x^2 - 2x + 1;$
$b)$ $f(x) = x^7 + 3x^3 + 2x^2 + 1,\ g(x) = x^3 + 2.$

2. Поделите многочлен $f(x)$ с остатком на $x - x_0$:
$a)$. $f(x) = 4x^6 + 2x^4 - 3x + 7,\ x_0 = -1,$
$b)$. $f(x) = -x^5 + 3x^3 - x,\ x_0 = 2.$

3. Найдите остаток от деления многочлена $x^{179} + x^{57} + x^2 + 1$ в кольце многчоленов $\mathbb{Z}[x]$ на многочлены

$$a)\ x^2 + 1, \qquad b)\ x^2 - 1, \qquad c)\ x^2 + x + 1.$$

4. Вычислите остаток от деления многочлена $(x+1)^{2019}$ на многочлен $x^2 + x + 1$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$.

5. Какие многочлены делятся нацело на $a)$ $x + 1$ и $b)$ $x^2 + 1$ в кольце $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$?

6. При каких n в кольце $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ имеются нетривиальные (то есть отличные от 1 и 0) идемпотенты (то есть решения уравнения $a^2 = a$)?

7. Сколько решений имеет уравнение $x^3 = 1$ в кольце $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$?

Алгебра, семинар №4
ВШЭ, осень, первый курс

Пусть $K[x]$ – кольцо многочленов от одной переменной над полем K, $f \in K[x]$. Через $K[x]/(f)$ обозначается факторкольцо многочленов по отношению эквивалентности

$$R = \{(a, b) : \ f \mid a - b\} \subset K[x] \times K[x]\}.$$

0. Проверьте, что R – отношение эквивалентности.

1. Является ли кольцо $\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ полем?

2. Является ли кольцо $\mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ полем?

3. Найдите минимальное k, такое что $\bar{x}^k = 1$ в кольце из задачи а). 1 и б). 2 ($\bar{x}$ – класс эквивалентности элемента x).

4. Найдите все обратимые элементы и все делители нуля в кольцах $\mathbb{F}_2[x]/(f)$ для следующих многочленов f:

$$x + 1, \quad x^4 + 1, \quad x^4 + x^2 + 1.$$

5. Обозначим через $\mathbb{F}_4$ поле $\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$. Найдите все обратимые элементы и все делители нуля в факторкольце $\mathbb{F}_4[y]/(y^2 + \bar{x}y + 1)$.

6. Является ли кольцо $\mathbb{R}[x]/(f)$ полем для следующих многочленов f:

$$x^2 + 1, \quad x^3 + 1, \quad x^4 + 1.$$

7. Найдите все корни многочлена $x^2 - 1$ в поле $\mathbb{F}_p$.

Алгебра, семинар №5
ВШЭ, осень, первый курс

1. Найдите все неприводимые многочлены степени не выше 5 с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$.

2. Найдите все неприводимые многочлены степени не выше 3 с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_3$.

3. Постройте какое-нибудь поле $\mathbb{F}$ из 9 элементов. Для такого поля найдите элемент $x \in \mathbb{F}$, такой, что любой ненулевой $y \in \mathbb{F}$ представим в виде x^k.

4. Постройте какое-нибудь поле из 4 элементов и опишите все его автоморфизмы (гомоморфизмы в себя).

5. Докажите, что а). над любым (в том числе конечным) полем имеется бесконечно много неприводимых многочленов. б). над полем $\mathbb{F}_p$ имеется неприводимый многочлен любой степени.

6. Докажие, что любой гомоморфизм из поля в произвольное кольцо является вложением.

7. Докажите, что натуральное число p просто тогда и только тогда, когда $(p-1)!+1$ делится на p.

8. Какие значения в $\mathbb{F}_p$ принимают многочлены $x^p - x$, x^{p-1} и $x^{\frac{p-1}{2}}$?