**Алгебраическая геометрия: дз 6, до 09.12**

1) Пусть $f : Spec(B) \to Spec(A)$ открытое вложение аффинных схем, докажите, что$B$ конечно порожденная $A$-алгебра.

2) Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ морфизмы схем, докажите, что если $gf$ локально конечного типа, то $f$ тоже. А как насчет $g$?

3) а) Пусть $f : X \to Y$ конечный морфизм, являющийся сюръекцией топологических пространств. Докажите, что размерности $X$ и $Y$ равны.

б) Верно ли это без предположения о сюръективности $f$? а с более слабым предположением доминантности $f$ (т. е. что $f(X)$ плотно в $Y$)?

4) Пусть $f : X \to Y$ морфизм схем, $x \in X \times_Y X$, $p, q$ две проекции $X \times_Y X$ на $X$ . Верно ли, что если $x \in \Delta(X)$, то $p(x) = q(x)$? Верно ли, что если $p(x) = q(x)$, то $x \in \Delta(X)$?

5) Докажите, что свойство отделимости сохраняется при замене базы.

6) Докажите, что если $gf$ отделим, то $f$ отделим.

№1

$f: Spec B \hookrightarrow Spec A$ - откр влож. $\Rightarrow$ отождествим $Spec B$ с откр подсх $U$ в $Spec A$. $Spec B = \bigcup_{i=1}^{n} Spec B_{g_i} \Rightarrow Spec B_{g_i}$ - гл. в $Spec A$

$f^\# A \to B$

$\Rightarrow B_{g_i} = A[\frac{a_{ij}}{g_i}]$. $Spec B = \bigcup Spec B_{g_i} \Rightarrow 1 = \sum g_i b_i$. Пусть $C = A[a_{ij}, g_i, b_i]$ и $C' = A[a_{ij}, g_i]$

$C \subset B$ - по опр

$C'_{g_i} = B_{g_i} \Rightarrow \forall b \in B \ \exists k \ \ g_i^k b = g_i^k c_i \ \ c_i \in C'$, т.к. $i$ конечное кол-во $\Rightarrow k$ можно взять одно

$\Rightarrow$ для достаточно большого $k$ $1 = \sum \lambda_i f_i^k$ $\lambda_i \in C \Rightarrow$ $b = \sum b \lambda_i f_i^k = \sum c_i \lambda_i f_i^m \in C$

$\Rightarrow B \subset C$



№2

$f: X \to Y$ $\forall U = Spec B \subset Y$ $g(U) = \bigcup W_i = \bigcup Spec A_i$

$\exists V_i = Spec C_i \subset X$ : $C_i$ - алг. кон типа над $A_i$

$U = \bigcup g^{-1}(W_i)$

$g^{-1}(W_i) = \bigcup U_{ij} = \bigcup \operatorname{Spec} B_{ij}$

$B_{ij}$ – алг кон типа над $B$

$V_i \supset f^{-1}(U_{ij}) \Rightarrow f^{-1}(U_{ij}) = \bigcup V_{ijk} = \bigcup \operatorname{Spec} C_{ijk}$

$C_{ijk}$ – алг кон. типа над $C_i \Rightarrow$ и над $A_i$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Мы свели задачу к аффинному случаю

$\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} C$

$C \xrightarrow{f^\#} B \xrightarrow{g^\#} A$

$A$ - алг кон. типа над $C$ $\Rightarrow \exists a_1, \dots a_n \in A$, т.ч.

$\forall a \in A \quad a = \sum c_i a_i = \sum g^\#(f^\#(c_i)) a_i = \{ f^\#(c_i) = b_i \} =$

$= \sum g^\#(b_i) a_i = \sum b_i a_i \Rightarrow A = \langle a_1, \dots a_n \rangle$ - как $B$-алг $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ - алг кон. типа над $B$

$f$ может не быть морфизмом лок. кон. типа, например

$\operatorname{Spec} k \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} k[xy, xy^2, xy^3, \dots] \xrightarrow{g} \operatorname{Spec} k[x,y]$

$(gf)$ - морфиз лок кон. типа, но $f$ очевидно нет

№3

$f: X \to Y$ - конечный сюръективный морфизм

$Y = \bigcup U_i = \bigcup \operatorname{Spec} A_i$ - aff покр.

$X = \bigcup f^{-1}(U_i) = \bigcup \operatorname{Spec} B_i$ - aff покр.

$f$-сюр $\Rightarrow f f^{-1}(U_i) = U_i \Rightarrow f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \to U_i$ - корр. опр.

$\dim Y = \max(\dim(U_i))$, возьмём $i$ с макс. размерн.

$\Rightarrow$ задача сводится к aff. случаю

$f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ - конечный сюр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $B$ - к. п. $A$-модуль, $f$ - сюр $\Rightarrow f$ - домин

$\Rightarrow f^{\#} : A \to B$ - инъ. $\Rightarrow f^{\#} A \to B$ - целое расширение колец

$\Rightarrow \forall q, q' \in \operatorname{Spec} B$, s.t. $(f^{\#})^{-1}(q) = (f^{\#})^{-1}(q') = p$, тогда $q \not\subset q'$ и $q' \not\subset q$

$\Rightarrow q_0 \subset \dots \subset q_n \subset B$ - цепочка простых, т.ч. $\dim B = n \Rightarrow$

$\Rightarrow p_i := (f^{\#})^{-1}(q_i)$ $\quad p_0 \subset \dots \subset p_n \subset A$ $\forall i$ $p_i \in \operatorname{Spec} A$ и $p_i \neq p_{i+1}$ (иначе $q_i \not\subset q_{i+1}$) $\Rightarrow \dim A \geq n \Rightarrow \dim A \geq \dim B$

$f^{\#}$ - целое расширение $\Rightarrow f^{\#}$ удовл „lying over prop"

$\Rightarrow \forall p \in \operatorname{Spec} A$ $\exists q \in \operatorname{Spec} B$, s.t. $q \cap A = p \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall p_0 \subset \dots \subset p_n \subset A$ $\exists q_0 \subset \dots \subset q_n \subset B \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim A \leq \dim B \Rightarrow \dim A = \dim B$

Если $f$ не доминантный морфизм (в том числе не сюр.), то это не всегда правда, например $\operatorname{Spec} \mathbb{Q} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ - конечный морфизм
$pt \to (0)$

№4

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "\Delta"] & &
\end{tikzcd}$$

$x \in X \times_Y X$ $\quad x \in \Delta(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y \in X$ $\Delta(y) = x \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$
with $\mathrm{id}$ curving into the lower $X$.

$\Rightarrow \exists y \in X \quad \Delta(y) = x$

$\Rightarrow p(x) = p(\Delta(y)) = \mathrm{id}(y) =$

$= q(\Delta(y)) = q(x)$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \arrow[r] & \mathrm{Spec}\,\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2+1} = \frac{\mathbb{C}[x]}{x^2+1} = \frac{\mathbb{C}[x]}{(x+i)(x-i)} =$$

$$= \frac{\mathbb{C}[x]}{x+i} \times \frac{\mathbb{C}[x]}{x-i} = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \Rightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \{pt\} \sqcup \{pt\} =$$

$= \{a, b\} \quad \Delta(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}) = \{a\} \quad p(b) = q(b) = \{pt\}$, но

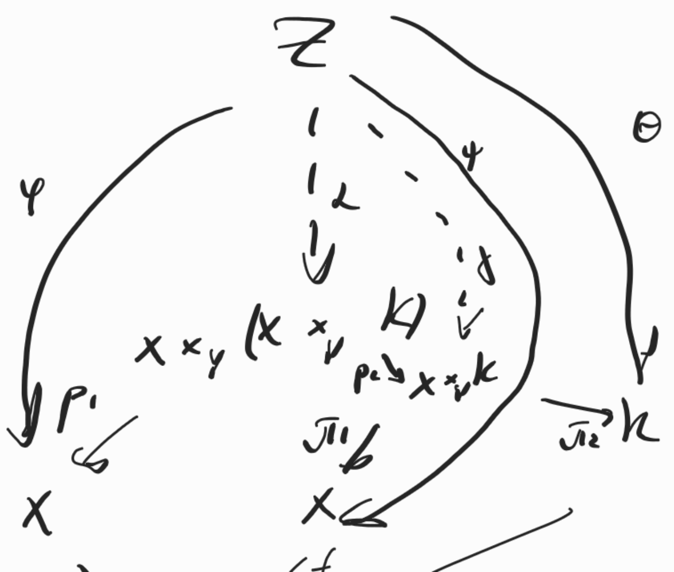
$\Delta(\{pt\}) \neq \{b\}$

№5

$$\begin{tikzcd} X \times_Y K \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d, "f"] \\ K \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

$f$ - отделим, т.е. $\Delta_{X/Y}$ - замкн влож

w.t.s. $X \times_Y (X \times_Y K) \simeq (X \times_Y X) \times_Y K$



$\varphi, \psi, \theta \quad f\varphi = f\psi = g\theta \Rightarrow \exists!\, \gamma : Z \to X \times_Y K$

$\psi = \pi_1 \gamma \quad \theta = \pi_2 \gamma$

$f\pi_1\gamma = g\pi_2\gamma = f\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!\, \alpha : Z \to X \times_Y (X \times_Y K) \quad p_2\alpha = \gamma, \; p_1\alpha = \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2 p_2 \alpha = \theta \quad \pi_1 p_2 \alpha = \psi \quad p_1 \alpha = \varphi$

при пост-композиции с $\pi_1$ и $\pi_2$ может пропасть единств. $\alpha$

Пусть $\exists \beta : Z \to X \times_Y (X \times_Y K)$, т.ч.

$\beta \neq \alpha \quad \pi_2 p_2 \beta = \theta \quad \pi_1 p_2 \beta = \psi \quad p_1 \beta = \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (из ед. $\gamma$) $p_2 \beta = \gamma$, $p_1\beta = \varphi \Rightarrow \beta = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow X \times_Y (X \times_Y K)$ предел диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "f"] & K \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

оказывается, что

Аналогично доказываем ...

$(X \times_Y X) \times_Y K$ предел этой диаграммы $\Rightarrow$

$\Rightarrow (X \times_Y X) \times_Y K \simeq X \times_Y (X \times_Y K)$

w.t.s $\Delta_{\frac{X \times_Y K}{K}} : X \times_Y K \to X \times_Y K \times_K X \times_Y K$ — замкн влож.

$$X \times_Y K \times_K X \times_Y K \simeq X \times_Y (X \times_Y K) \simeq (X \times_Y X) \times_Y K$$

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y K \arrow[d, phantom, "\wr"] & \\
X \times_{X \times_Y X} (X \times_Y X) \times_Y K \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_{\frac{X \times_Y K}{K}}"] & X \arrow[d, "\Delta_{\frac{X}{Y}}"] \\
X \times_Y K \times_K X \times_Y K \simeq (X \times_Y X) \times_Y K \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \times_Y X \arrow[d, "\pi_1"] \\
X \times_Y K \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

нижний квадрат декартов и

прямоугольник $id = p_2 \circ \Delta_{\frac{X \times_Y K}{K}}$ $\quad id = \pi_1 \times \Delta_{\frac{X}{Y}}$

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
X \times_Y K \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$
— тоже декартов

$\Rightarrow$ и верхний квадрат декартов

$\Delta_{\frac{X \times_Y K}{K}}$ — замкн влож., т.к. замкн влож. стабильно относ. смены базы

№6

$\Delta(X)$ - замкн $\Rightarrow$ $\Delta$ - замкн. влож.

$$\begin{tikzcd} X\times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X\times_Z X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Y\times_Z Y \end{tikzcd}$$

– декартов квадрат

$Y \to Y\times_Z Y$ - влож. $\Rightarrow$ $X\times_Y X \to X\times_Z X$ - влож.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_{X/Z}"] \arrow[dr, bend right, "\Delta_{X/Y}"'] & X\times_Z X \\ & X\times_Y X \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

$h$ - влож.

$\Delta_{X/Z}(X)$ - замкн $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\Delta_{X/Y}(X)$ - замкн.