$\Leftrightarrow M'' \models P(m_1, \ldots, m_k)$

„интерпретация в модели M''"

$(\Leftarrow)$ Определим $\varphi(m) := m_{M''}$

Пример 4 | теория алг. замкн. полей · AC

$\Omega = \{+, \cdot, 0, 1, =\} \cup \{-\}$ ← для удобства (1-местная операция!).

Аксиомы для поля:

(1) ассоц. +

(2) коммут +

(3) $\forall x\,(x+0=x)$

(4) $\forall x\,(x+(-x)=0)$

(5) ассоц. $\cdot$

(6) коммут $\cdot$

(7) $\forall x\,(x\cdot 1 = x)$

(8) дистрибутивность.

(9) $\forall x\,(x \neq 0 \rightarrow \exists y\,(x\cdot y = 1))$.

\+ Алг. замкнутость:

$(10_n)\ \forall y_0 y_1, \dots y_n\,(y_n \neq 0 \rightarrow \exists x\ y_n x^n + \dots + y_1 x + y_0 = 0)$

↓ куча аксиом. $n \geq 1$. ↓ сущ-е корней.

$$AC_p = AC + (\underbrace{1 + \dots + 1}_{p} = 0)$$

$$AC_0 = AC + \{p\cdot 1 \neq 0 \mid p - \text{простое}\}.$$

Теорема: AC_0 полна (+ категорична в несчет. мощности) изоморфизм

○ **Опр**: Диаграмма модели

замкн. формула расшир. сигнатуры $\Omega(M)$

$D(M) := \{A \mid M \models A$, A-оценённая в M формула одного из видов: (1)-(5)$\}$

Виды: (1) $m = m'$, $m \neq m'$

(2) $m = c$ $\qquad c \in Const_{\Omega}$

(3) $P(m_1, \dots, m_k)$ $\qquad P \in Pred_{\Omega}$

(4) $\neg P(m_1, \dots, m_k)$

(5) $f(m_1, \dots, m_k) = m$ $\qquad f \in Func_{\Omega}$

○ Лемма 6.1: Одну модель можно вложить в другую (т.е. M вложима в M') $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ M' обогащается до $M'' \models D(M)$

такое обозн. вложения

Док-во: $(\Rightarrow)$: $\varphi : M \rightarrowtail M'$

$m_{M''} := \varphi(m)$

Тогда $M'' \models D(M)$.

Проверим для предикатного символа — остальное — упр:

$$M \models P(m_1, \dots, m_k) \underset{\text{вложн.}}{\Longleftrightarrow} M' \models P(\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_k)).$$

Сделаем цепочку расширений:

$K \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$

$K_{n+1} = E'\langle K_n \rangle$,

В K_{n+1} полиномы над K_n имеют корни.

Если взять $K' = \bigcup_n K_n$, тогда $K' \models$ ~~AAA~~.ACF

$f \in K_n[t] \Rightarrow f$ имеет корни в K_{n+1}.

Теорема 6.3: $\forall K$ (K-поле) $\exists K' \models ACF : K \subset K'$.

Док-во = (?):

Ω - сигнатура полей.

$T := D(K) \cup \{\exists x \ f(x) = 0 \mid f \in K[t], f \neq const\}$.

формула в сигнатуре $\Omega(K)$ (расширенной элементами поля K).

• Утв: T выполнима. ← здесь пригодится теорема компактности.

Возьмём теорию $T_0 = D(K) \cup \{\exists x \ f_1(x) = 0, \dots, \exists x \ f_n(x) = 0\}$ - выполнима (следует из предыдущей леммы).

▸ $K \subset E_1 \subset \dots \subset E_n$

$E_1 \models \exists x \ f_1(x) = 0$

$E_2 \models \exists x \ f_1(x) = 0, \ \exists x \ f_2(x) = 0$.

$\vdots$

и т.д.

Отсюда вывод: раз T_0 выполнимо, то T выполн.