В. В. Пржиялковский, Инварианты Громова–Виттена трехмерных многообразий Фано рода 6 и рода 8, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 3, 145–158

DOI: https://doi.org/10.4213/sm3773

УДК 512.776

В. В. Пржиялковский

Инварианты Громова–Виттена трехмерных многообразий Фано рода 6 и рода 8

Работа посвящена доказательству для многообразий V_{10} и V_{14} гипотезы Голышева о модулярности уравнений $D3$ для гладких трехмерных многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$. А именно, найдены считающие матрицы примарных двухточечных инвариантов многообразий V_{10} и V_{14} с помощью метода нахождения инвариантов Громова–Виттена полных пересечений в многообразиях, для которых эти инварианты (частично) известны.

Библиография: 33 названия.

Для того чтобы найти двухточечные инварианты Громова–Виттена многообразий V_{10} и V_{14}, в работе использован следующий метод. Согласно Ш. Мукаи эти многообразия являются полными пересечениями в грассманианах (теорема 3.1.1). Найдем производящий ряд их одноточечных инвариантов с потомками (так называемый I-ряд). Воспользуемся квантовой теоремой Лефшеца (см. следствие 4.2.2), чтобы найти I-ряд для V_{10} и V_{14}. После этого по аксиоме дивизора и топологической рекурсии найдем полиномиальные выражения для коэффициентов I-ряда через двухточечные примарные инварианты (предложение 6.2.2). Наконец, вычислим значения двухточечных инвариантов, обратив эти выражения.

В § 1 даются определения инвариантов Громова–Виттена и пространств модулей кривых и отображений рода 0 с отмеченными точками. В § 2 формулируется гипотеза Голышева. Третий параграф посвящен I-рядам для грассманианов. Четвертый параграф содержит квантовую теорему Лефшеца. В пятом содержатся необходимые соотношения между одно- и многоточечными инвариантами. И наконец, в шестом доказывается основная теорема этой работы (теорема 6.1.1), в которой находятся считающие матрицы многообразий V_{10} и V_{14}.

Библиография. Инварианты Громова–Виттена были введены для подсчета чисел кривых различного рода, лежащих на многообразиях и пересекающих данные гомологические классы. Однако потом это понятие было расширено. Аксиоматическое определение примарных инвариантов было дано в [1]. В дальнейшем они были построены и обобщены в [2] и [3].

Сведение инвариантов Громова–Виттена гиперповерхности к инвариантам объемлющего многообразия (зеркальная формула), основной из известных на сегодня методов вычисления квантовых когомологий, принадлежит, по-видимому, А. Гивенталю (см., к примеру, [4]). В этой работе она используется в форме, полученной А. Гатманном (см. [5]). Гипотеза Хори–Вафа (т.е. I-ряд для грассманианов) была доказана А. Бертрамом, И. Циоканн-Фонтанином и

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 04-01-00613, 05-01-00353) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-489.2003.1)

Б. Кимом (см. [6]). А. Бертрамом и Х. Клеем, а также Я.-П. Ли и Р. Пандарипанде были получены соотношения, позволяющие сводить многоточечные инварианты к одноточечным (см. [7] и [8]).

Трехмерные многообразия Фано родов 6 и 8 изучались в работах [9]–[19]. Инварианты Громова–Виттена для таких многообразий, соответствующие прямым, были найдены в [19], см. также [15]; число коник на многообразии рода 6, проходящих через точку, было найдено в [16].

Инварианты Громова–Виттена трехмерных многообразий Фано начали изучаться в [20]. Квантовые когомологии некоторых многообразий были найдены в [21] (некоторые раздутия проективного пространства и квадрики), [22], [23] (торические многообразия), [24] (расслоения над $\mathbb{P}^n$) и [25] (некоторые полные пересечения).

Гипотеза модулярности трехмерных гладких многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ была сформулирована В. Голышевым в [26].

Соглашения и обозначения. Основным полем считается поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Под *грассманианом* $G(r,n)$ будет подразумеваться многообразие r-мерных линейных подпространств в n-мерном линейном пространстве. Под *инвариантами Громова–Виттена* подразумеваются инварианты *рода* 0, т.е. соответствующие рациональным кривым. Алгебру когомологий $H^*(X,\mathbb{Q})$ многообразия X будем обозначать через $H^*(X)$. Двойственный по Пуанкаре класс к классу $\gamma\in H^*(X)$ на многообразии X будем обозначать через $\gamma^\vee$. Подалгебру алгебраических циклов в $H^*(X)$ будем обозначать через $H^*_{\mathrm{alg}}(X)$. Подмножество классов эффективных кривых в $H_2(X,\mathbb{Z})$ будем обозначать через $H_2^+(X)$.

§ 1. Основные определения

Рассмотрим гладкое проективное многообразие X с группой Пикара $\mathbb{Z}$ такое, что $-K_X$ численно эффективен.

Мы ограничимся только теми определениями и аксиомами, которые будут использоваться в дальнейшем.

1.1. Пространства модулей.

Определение 1.1.1. *Родом* кривой C называется число $h^1(\mathscr{O}_C)$.

Легко видеть, что связная кривая имеет род 0 тогда и только тогда, когда она является деревом рациональных кривых.

Определение 1.1.2. Связная кривая C с $n\geqslant 0$ отмеченными точками $p_1,\dots,p_n\in C$ называется *предстабильной*, если она имеет особенности не хуже обыкновенных двойных точек, а $p_1,\dots,p_n$ – различные гладкие точки (см. [27; гл. III, п. 2.1]). Отображение $f\colon C\to X$ связной кривой рода 0 с n отмеченными точками называется *стабильным*, если C – предстабильная кривая, а на каждой ее стягиваемой компоненте лежат как минимум три отмеченные или особые точки ([27; гл. V, п. 1.3.2]).

Другими словами, стабильное отображение связной кривой – это отображение, имеющее лишь конечное число инфинитезимальных автоморфизмов.

Определение 1.1.3. *Семейством стабильных отображений* (над схемой S) кривых рода 0 с n отмеченными точками называется набор

$$(\pi\colon \mathscr{C} \to S,\ p_1,\dots,p_n,\ f\colon \mathscr{C} \to X),$$

где π – плоское проективное отображение с n сечениями $p_1,\dots,p_n$, геометрические слои $(\mathscr{C}_s, p_1(s),\dots,p_n(s))$ которого являются предстабильными кривыми рода 0 с n отмеченными точками такими, что ограничение $f|_{\mathscr{C}_s}$ на каждый из этих слоев является стабильным отображением.

Два семейства над S

$$(\pi\colon \mathscr{C} \to S,\ p_1,\dots,p_n,\ f), \qquad (\pi'\colon \mathscr{C}' \to S,\ p'_1,\dots,p'_n,\ f')$$

называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\tau\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ такой, что $\pi = \pi' \circ \tau$, $p'_i = \tau \circ p_i$, $f = f' \circ \tau$.

Пусть $\beta \in H_2^+(X)$. Рассмотрим следующий (контравариантный) функтор $\overline{\mathscr{M}}_n(X,\beta)$ из категории (комплексных алгебраических) схем в категорию множеств. Пусть $\overline{\mathscr{M}}_n(X,\beta)(S)$ – это множество классов изоморфизмов семейств стабильных отображений кривых рода 0 с n отмеченными точками $(\pi\colon \mathscr{C} \to S$, $p_1,\dots,p_n,\ f)$ таких, что $f_*([\mathscr{C}_s]) = \beta$, где $[C_s]$ – фундаментальный класс C_s.

Определение 1.1.4. *Пространством модулей отображений* в X кривых рода 0 класса $\beta \in H_2^+(X)$ с n отмеченными точками $\overline{M}_n(X,\beta)$ называется стек Делиня–Мамфорда (см. [27; гл. V, п. 5.5]), являющийся грубым пространством модулей, представляющим $\overline{\mathscr{M}}_n(X,\beta)$.

$\overline{M}_n(X,\beta)$ – компактный гладкий стек, локально являющийся фактором неособого многообразия по конечной группе, так что на нем существует теория пересечений (см. [28]). В общем случае $\overline{M}_n(X,\beta)$ имеет "неправильную" размерность, так что его принято снабжать виртуальным фундаментальным классом $[\,\overline{M}_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}$ виртуальной размерности

$$\operatorname{vdim} \overline{M}_n(X,\beta) = \dim X - \deg_{K_X} \beta + n - 3.$$

Пусть X – *выпуклое* многообразие (т.е. для любого отображения $\mu\colon \mathbb{P}^1 \to X$ выполнено $H^1(\mathbb{P}^1, \mu^*(TX)) = 0$). Тогда $\overline{M}_n(X,\beta)$ – проективное нормальное многообразие чистой размерности $\dim X - \deg_{K_X} \beta + n - 3$, так что виртуальный фундаментальный класс совпадает с обычным. Подробнее о его конструкции можно прочесть в [27; гл. VI, п. 1.1].

1.2. Инварианты Громова–Виттена. Рассмотрим отображения

$$\mathrm{ev}_i\colon \overline{M}_n(X,\beta) \to X, \qquad \mathrm{ev}_i(C; p_1,\dots,p_n,f) = f(p_i).$$

Пусть $\pi_{n+1}\colon \overline{M}_{n+1}(X,\beta) \to \overline{M}_n(X,\beta)$ – *морфизм, забывающий точку* p_{n+1} (и стягивающий компоненты, которые становятся нестабильными при забывании p_{n+1}), а $\sigma_i\colon \overline{M}_n(X,\beta) \to \overline{M}_{n+1}(X,\beta)$ – сечение, соответствующее отмеченной точке p_i. Образом кривой $(C; p_1,\dots,p_n,f)$ при отображении σ_i будет кривая $(C'; p_1,\dots,p_{n+1},f')$, где $C' = C \cup C_0$, $C_0 \simeq \mathbb{P}^1$, C_0 и C пересекаются в (не отмеченной на C') точке p_i, а точки p_{n+1} и p_i лежат на C_0. При этом f' стягивает C_0 в точку, а $f'|_C = f$ (см. рис. 1).

Пусть $L_i = \sigma_i^* \omega_{\pi_{n+1}}$, где $\omega_{\pi_{n+1}}$ – относительный дуализирующий пучок π_{n+1}. Слоем L_i над точкой $(C; p_1,\dots,p_n,f)$ является $T^*_{p_i}C$. Пусть кокасательный линейный класс равен $\psi_i = c_1(L_i) \in H^2(\overline{M}_n(X,\beta))$.

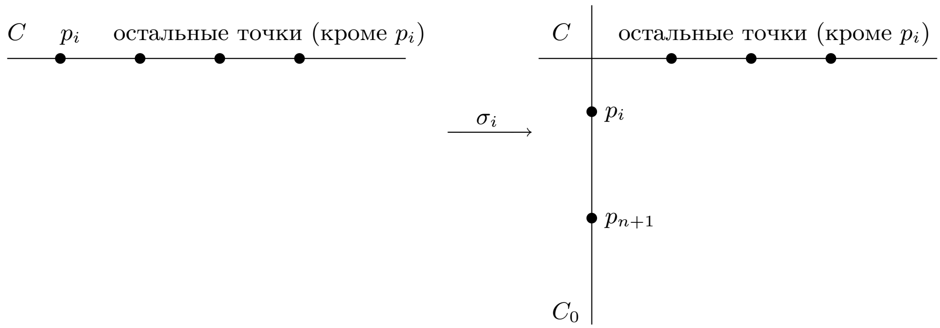

Рис. 1

Определение 1.2.1 [27; гл. VI, п. 2.1]. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in H^*(X)$, $d_1, \ldots, d_n$ – целые неотрицательные числа. *Инвариантом Громова–Виттена* (*коррелятором*) *с потомками* называется число

$$\langle \tau_{d_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{d_n}\gamma_n \rangle_\beta = \mathrm{ev}_1^*\,\gamma_1 \cdot \psi_1^{d_1} \cdots \mathrm{ev}_n^*\,\gamma_n \cdot \psi_n^{d_n} \cdot [\,\overline{M}_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}},$$

если $\sum \operatorname{codim}\gamma_i + \sum d_i = \operatorname{vdim}\overline{M}_n(X,\beta)$, и 0 в противном случае. Число $\sum d_i$ называется *степенью инварианта относительно потомков*. Инварианты степени 0 называются *примарными* (и символы τ_0 опускаются).

При таком определении аксиомы инвариантов Громова–Виттена становятся их свойствами. Приведем некоторые из них.

– *Аксиома дивизора* [27; гл. VI, п. 5.4]. Пусть $\gamma_0 \in H^2(X)$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle \gamma_0, \tau_{d_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{d_n}\gamma_n \rangle_\beta &= (\gamma_0 \cdot \beta)\langle \tau_{d_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{d_n}\gamma_n \rangle_\beta \\ &+ \sum_{k, d_k \geqslant 1} \langle \tau_{d_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{d_k-1}(\gamma_0 \cdot \gamma_k), \ldots, \tau_{d_n}\gamma_n \rangle_\beta, \end{aligned} \tag{1}$$

за исключением случая $\beta = 0$ и $n = 2$. В этом случае

$$\langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \rangle_0 = \gamma_0 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot [X].$$

– *Аксиома фундаментального класса* [27; гл. VI, п. 5.1]. Пусть $\mathbf{1}$ – фундаментальный класс X. Тогда

$$\langle \mathbf{1}, \tau_{d_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{d_n}\gamma_n \rangle_\beta = \sum_{k, d_k \geqslant 1} \langle \tau_{d_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{d_k-1}\gamma_k, \ldots, \tau_{d_n}\gamma_n \rangle_\beta, \tag{2}$$

за исключением случая $\beta = 0$ и $n = 2$. В этом случае

$$\langle \mathbf{1}, \gamma_1, \gamma_2 \rangle_0 = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot [X].$$

Замечание 1.2.2. Инварианты Громова–Виттена будут рассматриваться в случае ранга группы Пикара равного 1. В этом случае класс кривой $\beta \in H_2^+(X)$ характеризуется своей степенью d (относительно положительной образующей группы Пикара), поэтому вместо $\langle \ldots \rangle_\beta$ мы часто будем писать $\langle \ldots \rangle_d$. Для случая большего ранга необходимо использовать мультистепень.

1.3. I-ряды [5]. Пусть $R \subset H^*(X)$ – самодвойственная по Пуанкаре алгебра (т.е. для любого класса $\gamma \in R$ имеем $\gamma^\vee \in R$). Пусть $1 = \gamma_0, \dots, \gamma_N$ – базис в R. Пусть $\beta \in H_2^+(X)$ – эффективная кривая степени d (относительно положительной образующей группы Пикара). Положим

$$I_{d,R}^X = I_{\beta,R}^X = \sum_{i,j} \langle \tau_i \gamma_j \rangle_\beta \gamma_j^\vee.$$

Определение 1.3.1 [5]. *I-ряд I_R^X* задается следующей формулой:

$$I_R^X = \sum_{d \geqslant 0} I_{d,R}^X \cdot q^d.$$

Для $R = H^*(X)$ I-ряд I_R^X мы будем обозначать просто через I^X; для $R = H^*_{\mathrm{alg}}(X)$ – через I^X_{alg}. Если $Y \subset X$ – полное пересечение, а $\pi\colon H^*(X) \to H^*(Y)$ – естественный гомоморфизм ограничения, то для $R = \pi(H^*(X))$ ряд I_R^X будем обозначать через I^X_{rest}.

Определение 1.3.2. Пусть $I \in H^*(X) \otimes \mathbb{C}[[q]]$. Положим

$$I = \sum_{0 \leqslant i \leqslant N} \gamma_i \otimes I^{(i)}(q).$$

Член $I^{(0)}$ мы будем обозначать через I_{H^0}.

§ 2. Считающие матрицы трехмерных многообразий Фано

2.1. Считающие матрицы.

Определение 2.1.1 [26]. Пусть X – гладкое трехмерное многообразие Фано с одномерной группой Пикара, $K = -K_X$. *Считающей матрицей* называется матрица $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4)$ вида

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{33} \end{bmatrix},$$

нумерация столбцов и строк которой начинается с нуля, а элементы задаются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{\langle K^{3-i}, K^j, K \rangle_{j-i+1}}{\deg X} = \frac{j-i+1}{\deg X} \cdot \langle K^{3-i}, K^j \rangle_{j-i+1}$$

(степень антиканоническая).

Легко видеть, что матрица A симметрична относительно побочной диагонали: $a_{ij} = a_{3-j,3-i}$. По определению $a_{ij} = 0$ при $j-i+1 < 0$. Если $j-i+1 = 0$, то $a_{ij} = 1$, так как a_{ij} в этом случае – просто число точек пересечения K^{3-i}, K^j и K, которое, очевидно, равно $\deg X$; $a_{00} = a_{33} = 0$. Остальные коэффициенты a_{ij} – это "ожидаемые" числа рациональных кривых степени $j-i+1$, пересекающих K^{3-i} и K^j, умноженные на $(j-i+1)/\deg X$, за одним исключением. А именно, по аксиоме дивизора

$$a_{01} = 2 \cdot \bigl(2 \cdot \mathrm{ind}(X) \cdot [\text{число коник, проходящих через общую точку}]\bigr).$$

2.2. Гипотеза Голышева. Вместо *одной* матрицы нам будет удобней рассматривать *семейство* матриц $A^\lambda = A+\lambda E$, где E – единичная матрица. Таким образом, элемент семейства A^λ определяется заданием *шести* параметров – пяти различных GW-инвариантов a_{ij} и λ.

Рассмотрим одномерный тор $\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ и дифференциальный оператор $D = t\frac{\partial}{\partial t}$ на нем. Построим семейство матриц M^λ с элементами m^λ_{kl}, равными

$$m^\lambda_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > l+1, \\ 1, & \text{если } k = l+1, \\ a^\lambda_{kl}\cdot (Dt)^{l-k+1}, & \text{если } k < l+1. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим семейство дифференциальных операторов

$$\widetilde{L}^\lambda = \det\nolimits_{\mathrm{right}}(DE - M^\lambda),$$

где $\det_{\mathrm{right}}$ означает “правый определитель”, т.е. определитель, полученный путем разложения по *правому столбцу*. Все миноры также разлагаются по правому столбцу. Разделив $\widetilde{L}^\lambda$ слева на D, получим семейство операторов L^λ, т.е. $\widetilde{L}^\lambda = DL^\lambda$.

Определение 2.2.1 [26; п. 1.8]. Уравнение из семейства $L^\lambda[\Phi(t)] = 0$ называется *считающим уравнением* $D3$.

Гипотеза 2.2.2 (В. Голышев [26]). *Для трехмерного гладкого многообразия Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ решение считающего уравнения $D3$ модулярно. Конкретнее, пусть X – такое многообразие, i_X – его индекс, а $N = \deg X/(2i_X^2)$. Тогда в семействе считающих уравнений для X есть такое уравнение $L^{\lambda_X}[\Phi(t)] = 0$, решением которого является ряд Эйзенштейна веса 2 на $X_0(N)$.*

Основываясь на этой гипотезе, В. Голышев в [26] составил список матриц, гипотетически совпадающих со считающими матрицами трехмерных многообразий Фано. Для проверки гипотезы необходимо найти все такие матрицы.

§ 3. I-ряды и грассманианы

3.1. Теорема Мукаи.

Теорема 3.1.1 [18]. *Гладкое трехмерное многообразие Фано V_{10} рода 6 (и антиканонической степени 10) является сечением грассманиана $G(2,5)$ линейным пространством коразмерности 2 и квадрикой в плюккеровом вложении.*

Гладкое трехмерное многообразие Фано V_{14} рода 8 (и антиканонической степени 14) является сечением грассманиана $G(2,6)$ линейным пространством коразмерности 5 в плюккеровом вложении.

Эта теорема является частным случаем общей теоремы Мукаи, описывающей гладкие трехмерные многообразия Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ в терминах сечений пучков на грассманианах.

3.2. I-ряды для грассманианов.

Теорема 3.2.1 (гипотеза Хори–Вафа [29; Appendix A], доказательство см. в [6]). *Пусть $x_1,\dots,x_r$ – корни Чженя расслоения S^* на $G=G(r,n)$, двойственного к тавтологическому подрасслоению, где $r>1$. Тогда*

$$I^G=\sum_{d\geqslant 0}(-1)^{(r-1)d}\sum_{d_1+\dots+d_r=d}\frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}(x_i+d_i-x_j-d_j)}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}(x_i-x_j)\prod_{i=1}^{r}\prod_{l=1}^{d_i}(x_i+l)^n}\,q^d.$$

В случае $r=1$ (т.е. для проективного пространства)

$$I^{\mathbb{P}^{n-1}}=\sum_{d\geqslant 0}\prod_{i=1}^{d}\frac{q^d}{(H+i)^n}\,,$$

где H – класс, двойственный гиперплоскому сечению.

Следствие 3.2.2 [6; предложение 3.5]. *Свободный член ряда I^G для $G=G(2,n)$ равен*

$$\sum_{d\geqslant 0}\frac{q^d}{(d!)^n}\,\frac{(-1)^d}{2}\sum_{m=0}^{d}\binom{d}{m}^n\bigl(n(d-2m)(\gamma(m)-\gamma(d-m))+2\bigr),$$

где

$$\gamma(m)=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\,,\qquad \gamma(0)=0.$$

§ 4. Квантовая теорема Лефшеца

Многообразие X, как и раньше, предполагается гладким проективным с группой Пикара $\mathbb{Z}$.

4.1. I-ряд гиперповерхности.

Лемма 4.1.1 [30; лемма 5.5], [8; доказательство леммы 1]. *Пусть $Y\subset X$ – полное пересечение, $\varphi\colon H^*(X)\to H^*(Y)$ – гомоморфизм ограничения. Пусть*

$$\widetilde{\gamma}_1\in\varphi(H^*(X))^{\perp},\qquad \gamma_2,\dots,\gamma_l\in\varphi(H^*(X)).$$

Тогда для любого $\beta\in\varphi(H_2^+(X))\subset H_2^+(Y)$ инвариант Громова–Виттена на Y вида

$$\langle\tau_{d_1}\widetilde{\gamma}_1,\tau_{d_2}\gamma_2,\dots,\tau_{d_l}\gamma_l\rangle_\beta$$

равен нулю.

Таким образом, по аксиоме дивизора (1) и лемме 4.1.1 $I^Y=I^Y_{\mathrm{rest}}$.

Замечание 4.1.2. В отличие от одноточечных инвариантов двухточечные инварианты, соответствующие классам в $\varphi(H^*(X))^{\perp}$, могут быть ненулевыми (см. [25; предложение 1]).

4.2. Зеркальная формула.

Теорема 4.2.1 (зеркальная формула [5; следствие 1.13]). *Рассмотрим гиперповерхность $Y \subset X$ такую, что $-K_Y \geqslant 0$. Тогда существуют ряды $R(q) \in H^*(X)[[q]]$ и $S(q) \in H^*(X)[[q]]$ такие, что*

$$\sum_\beta \prod_{i=0}^{Y\cdot\beta}(Y+i)\cdot I_\beta^X \cdot q^{Y\cdot\beta} = R(q)\cdot \sum_\beta I_\beta^Y \cdot \widetilde{q}^{\,Y\cdot\beta},$$

где $\widetilde{q} = q\cdot e^{S(q)}$.

А. Гатманн в [5; определение 1.11 и лемма 1.12] дал описание этих рядов. В случае многообразий Фано зеркальная формула упрощается.

Следствие 4.2.2. *Пусть*

$$I = \operatorname{ind} Y \in \mathbb{N}$$

– индекс многообразия Фано Y. Тогда если Y – полное пересечение гиперповерхностей $Y_1,\dots,Y_k$ степеней $d_1,\dots,d_k$ в X, то

$$\sum_\beta \prod_{j=1}^{k}\prod_{i=0}^{Y_j\cdot\beta}(Y_j+i)\cdot I_\beta^X\cdot q^{Y\cdot\beta} = e^{\alpha_Y\cdot q^{\deg Y}}\cdot \sum_\beta I_\beta^Y\cdot q^{Y\cdot\beta}, \tag{3}$$

где $\alpha_Y = \prod d_i!\cdot I^X_{1,H^0}$, если $I=1$, и $\alpha_Y = 0$, если $I \geqslant 2$.

Доказательство. Из вида рядов $R(q)$ и $S(q)$ в случае многообразий Фано следует, что $R(q) = e^{\alpha_Y\cdot q^{\deg Y}}$, а $S(q) = 0$. Для $I > 1$ имеем $R(q) = 1$. Чтобы найти α_Y для индекса 1, заметим, что по соображениям размерности $\langle H^{\dim Y}\rangle_l = 0$, где H – гиперплоское сечение X. Сравнив коэффициенты формулы (3) при $q^{\deg Y}$ и H^k, получим

$$\alpha_Y = \prod_{i=1}^{k} d_k!\cdot I^X_{1,H^0},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 4.2.3. Гипотеза 2.2.2 может быть усилена следующим образом. Положим $\alpha_Y = \lambda_Y$. Тогда решением уравнения $L^{\lambda_X}[\Phi(t)] = 0$ является ряд Эйзенштейна веса 2 на $X_0(N)$.

§ 5. Выражение одноточечных инвариантов через примарные двухточечные

Определение 5.1. Подалгебра $R \in H^*(Y)$ называется *квантово самодвойственной*, если для всех $\gamma \in R$, $\mu \in R^\perp$ и $\beta \in H_2^+(Y)$ выполнено $\gamma^\vee \in R$ и $\langle\gamma,\mu\rangle_\beta = 0$.

Предложение 5.2. *Для каждых $n, I \in \mathbb{N}$, $k, d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ существует многочлен $f_k^d \in \mathbb{Q}[a_{i,j}]$, $0 \leqslant i,j \leqslant n$, $j-i+1 \leqslant d$, такой, что верно следующее. Рассмотрим многообразие Фано Y размерности n и индекса I такое, что подалгебра $R \in H^*(Y)$, порожденная $-K_Y = IH$, квантово самодвойственна. Тогда*

$$\langle \tau_k H^{d+n-2-k}\rangle_d = f_k^d(a_{ij}),$$

где

$$a_{i,j} = \frac{1}{\deg Y}\langle H^{n-i}, H^{\beta}, H\rangle_{j-i+1} = \frac{j-i+1}{\deg Y}\langle H^{n-i}, H^{j}\rangle_{j-i+1}.$$

Доказательство. Стратегия нахождения f_k^d такова: по аксиоме дивизора выразим данный одноточечный инвариант через трехточечные с потомками, а потом с помощью топологической рекурсии выразим эти трехточечные инварианты через примарные двухточечные.

Применяя аксиому дивизора для H

$$\langle \tau_k H^{d+n-2-k}\rangle_d = \frac{1}{d}\cdot\bigl(\langle H, \tau_k H^{d+n-2-k}\rangle_d - \langle \tau_{k-1} H^{d+n-1-k}\rangle_d\bigr),$$

легко получить, что

$$\langle \tau_k H^{d+n-2-k}\rangle_d = \frac{1}{d}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{d^i}\langle H, \tau_{k-i} H^{d+i+n-2-k}\rangle_d.$$

Далее, по топологической рекурсии (см., например, [31; следствие 1.3])

$$\begin{aligned}&\langle H^a, \tau_k H^{d+n-1-a-k}\rangle_d\\ &\quad= \frac{1}{d}\biggl(\sum_{d_1\leqslant d}\langle H^{d_1-d+1+a}, \tau_{k-1}H^{d+n-1-a-k}\rangle_{d_1}\cdot a_{d_1-d+a+1,a}\\ &\qquad - \langle H^a, \tau_{k-1}H^{d+n-a-k}\rangle_d\biggr).\end{aligned}$$

Эту формулу также легко упростить. Рекурсивно выражая последнее слагаемое в правой части, получаем

$$\begin{aligned}&\langle H^a, \tau_k H^{d+n-1-a-k}\rangle_d\\ &\quad= \sum_{\substack{i=1,\dots,k\\ d_1\leqslant d}}\frac{(-1)^{i+1}}{d^i}a_{d_1-d+1+a,a}\langle H^{d_1-d+1+a}, \tau_{k-i}H^{d+n-2-a-k+i}\rangle_{d_1}\\ &\qquad + \frac{(-1)^k}{d^k}\langle H^a, H^{d+n-a}\rangle_d.\end{aligned}$$

Замечание 5.3. Мы предположили, что $\operatorname{Pic} Y = \mathbb{Z}$ и R порождено H для простоты, так как мы будем использовать это в дальнейшем. Аналогичные выражения могут быть найдены так же, как и в доказательстве предложения 5.2, и в общем случае с единственным условием $R\cap H^2(Y)\neq\varnothing$.

Пример 5.4. Рассмотрим гладкое многообразие Фано Y индекса 1 и размерности 3, алгебраические когомологии которого порождены образующей группы Пикара H. Тогда

– свободный член I-ряда:

1) $\langle H^3\rangle_2 = \deg Y\cdot\dfrac{a_{01}}{4}$;

2) $\langle \tau H^3\rangle_3 = \deg Y\cdot\left(\dfrac{a_{11}a_{01}}{18} + \dfrac{a_{02}}{27}\right)$;

3) $\langle \tau_2 H^3\rangle_4 = \deg Y\cdot\left(\dfrac{a_{01}^2}{64} + \dfrac{a_{11}^2 a_{01}}{96} + \dfrac{7a_{11}a_{02}}{576} + \dfrac{a_{01}a_{12}}{128} + \dfrac{a_{03}}{256}\right)$;

– линейный по H член I-ряда:

1) $\langle H^2\rangle_1 = \deg Y \cdot a_{11}$;

2) $\langle \tau H^2\rangle_2 = \deg Y \cdot \left(\dfrac{a_{11}^2}{4} + \dfrac{a_{12}}{8} - \dfrac{a_{01}}{4}\right)$;

3) $\langle \tau_2 H^2\rangle_3 = \deg Y \cdot \left(\dfrac{5a_{11}a_{01}}{108} + \dfrac{a_{11}^3}{18} + \dfrac{a_{11}a_{12}}{12} - \dfrac{2a_{02}}{81}\right)$;

4) $$\langle \tau_3 H^2\rangle_4 = \deg Y \cdot \left(\frac{13a_{11}^2a_{01}}{576} + \frac{17a_{11}a_{02}}{1728} - \frac{a_{03}}{256} - \frac{3a_{01}^2}{128} + \frac{a_{11}^4}{96} + \frac{a_{12}^2}{256} + \frac{a_{11}^2a_{12}}{32}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
I^Y = 1 + a_{11}q + \left(\frac{a_{01}}{4} + \left(\frac{a_{11}^2}{4} + \frac{a_{12}}{8} - \frac{a_{01}}{4}\right)H\right)q^2 + \left(\left(\frac{a_{11}a_{01}}{18} + \frac{a_{02}}{27}\right)\right.\\
+ \left.\left(\frac{5a_{11}a_{01}}{108} + \frac{a_{11}^3}{18} + \frac{a_{11}a_{12}}{12} - \frac{2a_{02}}{81}\right)H\right)q^3\\
+ \left(\left(\frac{a_{01}^2}{64} + \frac{a_{11}^2a_{01}}{96} + \frac{7a_{11}a_{02}}{576} + \frac{a_{01}a_{12}}{128} + \frac{a_{03}}{256}\right)\right.\\
+ \left.\left(\frac{13a_{11}^2a_{01}}{576} + \frac{17a_{11}a_{02}}{1728} - \frac{a_{03}}{256} - \frac{3a_{01}^2}{128} + \frac{a_{11}^4}{96} + \frac{a_{12}^2}{256} + \frac{a_{11}^2a_{12}}{32}\right)H\right)q^4\\
+ \cdots \pmod{H^2}.
\end{aligned}$$

§ 6. Основная теорема

6.1. Полные пересечения в грассманианах.

Теорема 6.1.1. *Считающие матрицы многообразий V_{10} и V_{14} совпадают с предсказанными в [26] и равны*

1) *для многообразия V_{10}*

$$M(V_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 156 & 3600 & 33120\\ 1 & 10 & 380 & 3600\\ 0 & 1 & 10 & 156\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

сдвиг $\alpha_{V_{10}}$ равен 6;

2) *для многообразия V_{14}*

$$M(V_{14}) = \begin{bmatrix} 0 & 64 & 924 & 5936\\ 1 & 5 & 140 & 924\\ 0 & 1 & 5 & 64\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

сдвиг $\alpha_{V_{14}}$ равен 4.

Доказательство. По теореме 3.1.1 эти многообразия – полные пересечения в $G(2,5)$ (для V_{10}) и $G(2,6)$ (для V_{14}).

Пусть H – эффективная образующая группы Пикара грассманиана $G = G(r,n)$. Положим $I^G = I^G_{H^0}(q) + I^G_{H^1}(q)\cdot H \pmod{H^4(G)}$, т.е.

$$I^G = I^G_{H^0}(q) + I^G_{H^1}(q)\cdot H + \widetilde{I},$$

где $\widetilde{I} \in H^{>2}(G)$.

По следствию 3.2.2

$$I^{G(2,5)}_{H^0} = 1 + 3q + \frac{19}{32}\,q^2 + \frac{49}{2592}\,q^3 + \frac{139}{884736}\,q^4 + \cdots\,,$$
$$I^{G(2,6)}_{H^0} = 1 + 4q + \frac{3}{4}\,q^2 + \frac{95}{5832}\,q^3 + \frac{865}{11943936}\,q^4 + \cdots\,.$$

Пользуясь теоремой 3.2.1, рассмотрим I-ряды грассманианов $G(2,5)$ и $G(2,6)$ как ряды от элементарных симметрических функций x_1+x_2 и x_1x_2 от корней Чженя x_1 и x_2 расслоения, двойственного к тавтологическому подрасслоению. Тогда $I^G_{H^1}$ – это коэффициент при линейной симметрической функции x_1+x_2. Таким образом,

$$I^{G(2,5)}_{H^1} = 10q + \frac{105}{32}\,q^2 + \frac{3115}{23328}\,q^3 + \frac{6875}{5308416}\,q^4 + \cdots\,,$$
$$I^{G(2,6)}_{H^1} = 15q + \frac{609}{128}\,q^2 + \frac{6197}{46656}\,q^3 + \frac{528737}{764411904}\,q^4 + \cdots\,.$$

По следствию 4.2.2 $\alpha_{V_{10}} = 6$ и $\alpha_{V_{14}} = 4$. По формуле (3), взятой по модулю H^2,

$$\begin{aligned} I^{V_{10}} &= 1 + 10Hq + \left(39 + \frac{67}{2}\,H\right)q^2 + \left(220 + \frac{3200}{9}\,H\right)q^3 \\ &\quad + \left(\frac{6291}{4} + \frac{89387}{48}\,H\right)q^4 + \cdots \pmod{H^2}, \\ I^{V_{14}} &= 1 + 5Hq + \left(16 + \frac{31}{4}\,H\right)q^2 + \left(2 + \frac{1031}{18}\,H\right)q^3 \\ &\quad + \left(230 + \frac{14863}{96}\,H\right)q^4 + \cdots \pmod{H^2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что выражения из примера 5.4 позволяют восстановить коэффициенты считающей матрицы многообразия Y из ряда $I^Y \pmod{H^2}$.

6.2. Выражение примарных двухточечных инвариантов через одноточечные. Метод нахождения двух- (и более) точечных инвариантов через одноточечные, использованный в теореме 6.1.1, работает и в общем случае. А именно, рассмотрим многообразие Y размерности n и квантово самодвойственную подалгебру $R \subset H^*(Y)$ с базисом $\{\gamma_0,\ldots,\gamma_N\}$. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\langle \tau_i\gamma_j\rangle_k = f^k_{ij}(\langle\gamma_t,\gamma_r\rangle_s)$ (см. замечание 5.3). Пусть известны одноточечные инварианты Y и двухточечные примарные инварианты, соответствующие кривым степени не больше d. Тогда одноточечные инварианты, соответствующие кривым степени $d+1$, с помощью функций $f^{d+1}_{i,j}$ линейно выражаются через двухточечные примарные инварианты, соответствующие кривым степени $d+1$.

Более того, можно выбрать такой набор $\{(i,j)\}$ (где $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $i+j = d+n-1$), что система линейных уравнений $\left\{f_{ij}^{d+1}(\langle \gamma_k, \gamma_l\rangle_{d+1}) = \langle \tau_i\gamma_j\rangle_{d+1}\right\}$ задается невырожденной верхнетреугольной матрицей. Таким образом, индукцией по d можно найти полиномиальные выражения для двухточечных инвариантов через одноточечные. Этот метод обобщает следующую теорему.

Теорема 6.2.1 [7; теорема 5.2]. *Пусть $R \subset H^*(X)$ – подалгебра, порожденная образующей группы Пикара X, а $I^X = I^X_R$. Тогда инварианты Громова–Виттена вида $\langle \tau_{i_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{i_n}\gamma_n\rangle_d$, $\gamma_i \in R$, полностью определяются коэффициентами I-ряда I^X.*

Кроме того, есть еще один способ найти двухточечные инварианты, зная лишь свободный член I-ряда. Продемонстрируем его на примере трехмерного многообразия.

Рассмотрим гладкое трехмерное многообразие Фано Y ранга 1 и индекса 1. Положим $I^Y_{H^0} = 1+d_2q^2+d_3q^3+d_4q^4+d_5q^5+d_6q^6+\cdots$. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{A}^5 \to \mathbb{A}^5$, задаваемое многочленами $f^i_{i-2,3}$, соответствующими инвариантам $\langle \tau_{i-2}pt\rangle_i = d_i$ для $i = 2,\ldots,6$.

Предложение 6.2.2. *Отображение f бирационально.*

Доказательство. Предложение проверяется непосредственным вычислением. Заметим, что это отображение бирегулярно, если

$$-495d_3d_5 + 261d_2d_3^2 - 312d_4d_2^2 + 432d_4^2 + 56d_2^4 \neq 0,$$

что (апостериори) верно для гладких трехмерных многообразий Фано ранга 1.

6.3. Гипотеза Голышева. Рассуждения, изложенные в этой статье, позволяют найти считающие матрицы для полных пересечений в проективных пространствах (восстановленные Голышевым в [32] по соответствующим уравнениям $D3$ из теоремы Гивенталя в [4]) и матрицу для многообразия V_5, полученную Бовилем в [25], и доказать гипотезу Голышева для них. Также можно показать ее справедливость для V_{12} (сечения ортогонального грассманиана $\mathrm{OG}(5,10)$ линейным подпространством коразмерности 7), V_{16} (сечения лагранжева грассманиана $\mathrm{LG}(3,6)$ линейным подпространством коразмерности 3) и V_{18} (сечения грассманиана группы G_2 линейным подпространством коразмерности 2). Квантовое умножение на дивизор для грассманианов этих групп описано в [33]. Свидетельство того, что гипотеза для этих многообразий верна, получено В. Голышевым. Считающая матрица многообразия V_{22} найдена А. Кузнецовым; она также согласуется с гипотезой. Наконец, считающие матрицы накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике, двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике и двойного накрытия конуса над поверхностью Веронезе степени 4 с ветвлением в кубике можно также найти по этому методу. Для этого воспользуемся их описанием как гиперповерхностей во взвешенных проективных пространствах и найдем их I-ряд, обобщив формулу Гивенталя для гладких полных пересечений в торических многообразиях на случай полных пересечений в особых торических многообразиях.

6.4. Случай числа Пикара, большего 1.

Замечание 6.4.1. Все методы для многообразий с числом Пикара, равным 1, описанные выше, без труда обобщаются на случай многообразий с числом Пикара, большим 1. Вместо степени в этом случае необходимо ввести мультистепень $d=(d_1,\dots,d_r)$, вместо переменной q надо ввести многомерную переменную $q=(q_1,\dots,q_r)$ и т.д.

Автор благодарит В. Голышева за тесное обсуждение этой работы, А. Гатманна за полезные советы, А. Гивенталя за ссылку на гипотезу Хори–Вафа, Д. Орлова, И. Чельцова и К. Шрамова за комментарии при подготовке работы.

Список литературы

[1] M. Kontsevich, Yu. Manin, “Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry”, *Comm. Math. Phys.*, **164**:3 (1994), 525–562.

[2] K. Behrend, Yu. Manin, “Stacks of stable maps and Gromov–Witten invariants”, *Duke Math J.*, **85**:1 (1996), 1–60; `arXiv: alg-geom/9506023`.

[3] K. Behrend, “Gromov–Witten invariants in algebraic geometry”, *Invent. Math.*, **127**:3 (1997), 601–617.

[4] A. B. Givental, “Equivariant Gromov–Witten invariants”, *Int. Math. Res. Not.*, **1996**:13 (1996), 613–663; `arXiv: alg-geom/9603021`.

[5] A. Gathmann, “Relative Gromov–Witten invariants and the mirror formula”, *Math. Ann.*, **325**:2 (2003), 393–412; `arXiv: math.AG/0009190`.

[6] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, “Two proofs of a conjecture of Hori and Vafa”, *Duke Math. J.*, **126**:1 (2005), 101–136; `arXiv: math.AG/0304403`.

[7] A. Bertram, H. P. Kley, “New recursions for genus-zero Gromov–Witten invariants”, *Topology*, **44**:1 (2005), 1–24; `arXiv: math.AG/0007082`.

[8] Y.-P. Lee, R. Pandharipande, “A reconstruction theorem in quantum cohomology and quantum K-theory”, *Amer. J. Math.*, **126**:6 (2004), 1367–1379; `arXiv: math.AG/0104084`.

[9] Н. П. Гушель, “О многообразиях Фано рода 6”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:6 (1982), 1159–1174; англ. пер.: N. Gushel', “On Fano varieties of genus 6”, *Math. USSR-Izv.*, **21**:3 (1983), 445–459.

[10] Н. П. Гушель, “О многообразиях Фано рода 8”, *УМН*, **38**:1 (1983), 163–164; англ. пер.: N. Gushel', “Fano varieties of genus 8”, *Russian Math. Surveys*, **38**:1 (1983), 192–193.

[11] Н. П. Гушель, “О трехмерных многообразиях Фано рода 8”, *Алгебра и анализ*, **4**:1 (1992), 120–134; англ. пер.: N. Gushel', “On Fano 3-folds of genus 8”, *St. Petersburg Math. J.*, **4**:1 (1993), 115–129.

[12] В. А. Исковских, *Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано*, Изд-во МГУ, М., 1988.

[13] В. А. Исковских, “Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий”, Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем., **12**, ВИНИТИ, М., 1979, 59–157; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Anticanonical models of three-dimensional algebraic varieties”, *J. Soviet Math.*, **13** (1980), 745–814.

[14] A. Iliev, “Geometry of the Fano threefold of degree 10 of the first type”, *Curves, Jacobians, and Abelian varieties* (Amherst, AM, 1990), Contemp. Math., **136**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 209–254.

[15] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Fano varieties*, Algebraic geometry V, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer, Berlin, 1999.

[16] D. Logachev, *Fano threefolds of genus* 6, `arXiv: math.AG/0407147`.

[17] D. Yu. Logachev, “Birational isomorphism of a three-dimensional cubic and of the section of $G(2,6)$ by five hyperplanes, and similar problems”, *The birational geometry of algebraic varieties*, Sbornik Nauchnykh Trudov, **203**, Yaroslav. Gos. Ped. Inst., Yaroslavl', 1983, 39–45.

[18] Sh. Mukai, "Fano 3-folds", *Complex projective geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **179**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, 255–263.

[19] Д. Г. Маркушевич, "Численные инварианты семейств прямых на некоторых многообразиях Фано", *Матем. сб.*, **116(158)**:2(10) (1981), 265–288; англ. пер.: D. G. Markuševič, "Numerical invariants of families of lines on some Fano varieties", *Math. USSR-Sb.*, **44**:2 (1983), 239–260.

[20] A. Bayer, Yu. I. Manin, "(Semi)simple exercises in quantum cohomology", *The Fano conference*, Univ. Torino, Turin, 2004, 143–173; `arXiv: math.AG/0103164`.

[21] G. Ciolli, "On the quantum cohomology of some Fano threefolds and a conjecture of Dubrovin", *Internat. J. Math.*, **16**:8 (2005), 823–839; `arXiv: math.AG/0403300`.

[22] V. Ancona, M. Maggesi, "On the quantum cohomology of Fano bundles over projective spaces", *The Fano conference*, Univ. Torino, Turin, 2004, 81–98; `arXiv: math.AG/0012046`.

[23] V. V. Batyrev, "Quantum cohomology rings of toric manifolds", *Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay* (Orsay, 1992), Astérisque, **218**, 1993, 9–34; `arXiv: alg-geom/9310004`.

[24] Z. Qin, Y. Ruan, "Quantum cohomology of projective bundles over $\mathbb{P}^n$", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:9 (1998), 3615–3638.

[25] A. Beauville, "Quantum cohomology of complete intersections", *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **2**:3–4 (1995), 384–398; `arXiv: alg-geom/9501008`.

[26] В. В. Голышев, "Проблемы геометричности и модулярность некоторых вариаций Римана–Роха", *Докл. РАН*, **386**:5 (2002), 583–588; англ. пер.: V. V. Golyshev, "The geometricity problem and modularity of certain Riemann–Roch variations", *Dokl. Math.*, **66**:2 (2002), 231–236.

[27] Ю. И. Манин, *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей*, Факториал, М., 2002; Yu. I. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **47**, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.

[28] A. Vistoli, "Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces", *Invent. Math.*, **97**:3 (1989), 613–670.

[29] H. Hori, C. Vafa, *Mirror symmetry*, `arXiv: hep-th/0002222`.

[30] A. Gathmann, "Absolute and relative Gromov–Witten invariants of very ample hypersurfaces", *Duke Math. J.*, **115**:2 (2002), 171–203; `arXiv: math.AG/9908054`.

[31] M. Kontsevich, Yu. Manin, "Relations between the correlators of the topological sigma-model coupled to gravity", *Comm. Math. Phys.*, **196** (1998), 385–398.

[32] В. В. Голышев, "Модулярность уравнений D3 и классификация В. Исковских", *Докл. РАН*, **396**:6 (2004), 733–739; англ. пер.: V. V. Golyshev, "Modularity of equations D3 and the Iskovskikh classification", *Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 443–449; `arXiv: math.AG/0405039`.

[33] W. Fulton, C. Woodward, "On the quantum product of Schubert classes", *J. Algebraic Geom.*, **13**:4 (2004), 641–661; `arXiv: math.AG/0112183`.

В. В. Пржиялковский (V. V. Przyjalkowski)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `victorprz@mi.ras.ru`

Поступила в редакцию
13.07.2004 и 20.04.2006