Мозговой Владислав

№1

$$U(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$$

$$U'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$$

- минимум (точка покоя)

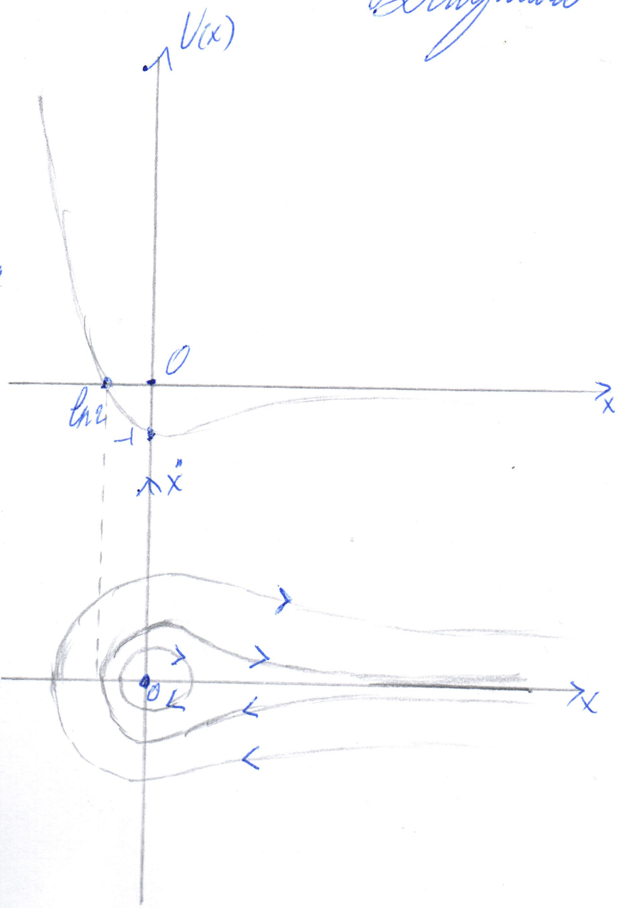
  $x = 0 \Rightarrow (0,0)$ - особая точка, тип центр

- точек максимума нет $\Rightarrow$ нет сепаратрис

По закону сохранения энергии

$$\underbrace{\frac{m\dot{x}^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{U(x)}_{\geq -1} = E$$

$\Rightarrow E \geq -1$



№2

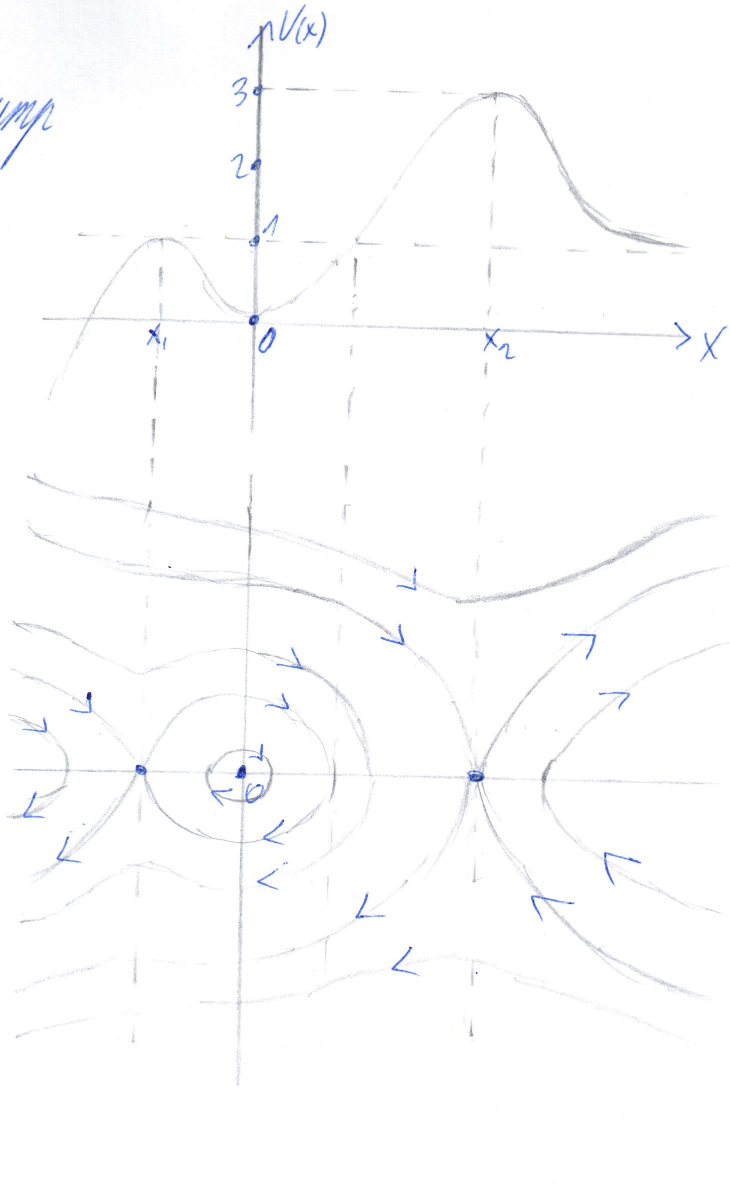
минимум

$x = 0 \Rightarrow (0,0)$ - особая точка, тип центр

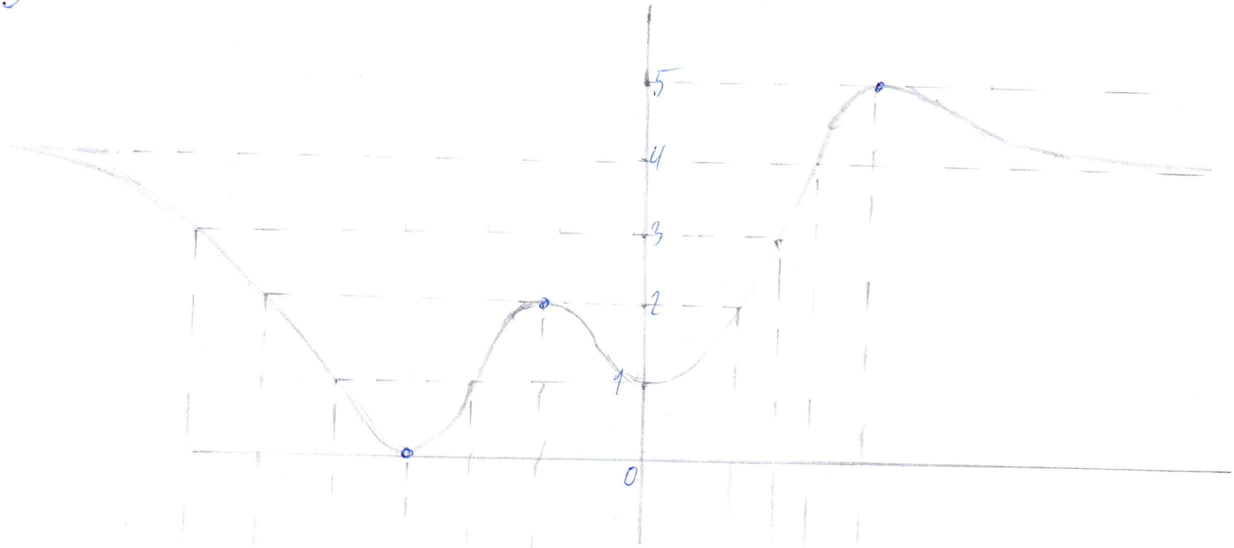
максимумы

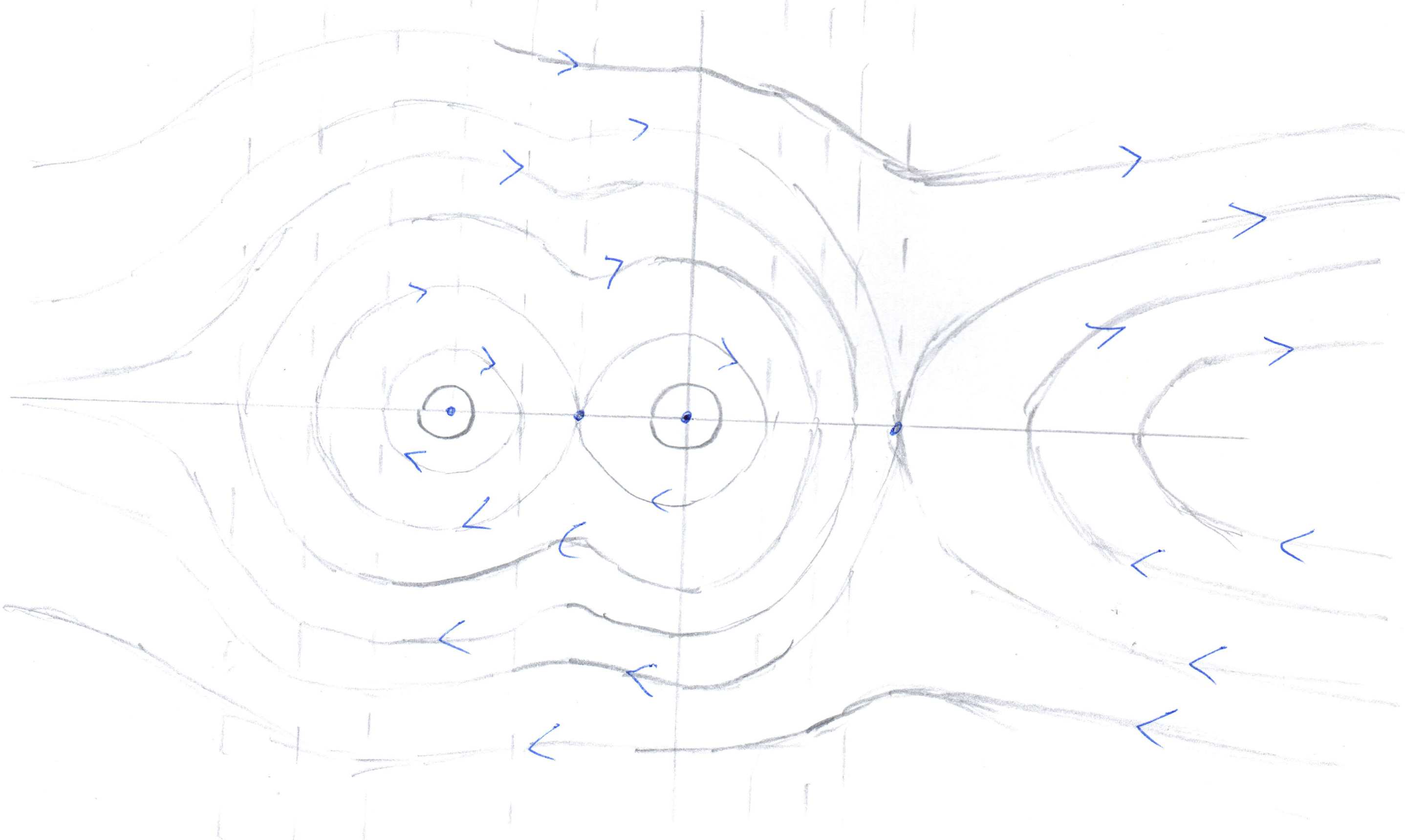
$x_1, x_2 \Rightarrow (x_1, 0), (x_2, 0)$ - ~~ос~~ особая точка тип седло

E	# фазовых кривых
0	2
1	4
2	2
3	5



N 3





минимумы $x_1, x_3 \Rightarrow (x_1, 0), (x_3, 0)$ - особые точки, тип центр
максимумы $x_2, x_4 \Rightarrow (x_2, 0), (x_4, 0)$ - особые точки, тип седло

E	0	1	2	3	4	5
# фаз. кривых	1	2	3	1	1	5

№4

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = const.$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{(x)})}$$

Обозначим x_0 точку максимума $U(x)$ и разложим в ряд Тейлора в окрестности x_0

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x-x_0) + \frac{U''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^2) =$$

$$= \underset{\underset{U(x_0)}{\parallel}}{E} + \underset{\underset{U'(x_0)=0}{\uparrow}}{0} + \frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^2)$$

$$t(x, x_0) = \int_0^t dt = \pm\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U_{(x)})}} = \pm\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(-\frac{U''(x)}{2}(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^2)\right)}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^2)}}$$

Заметим, что $\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+O((x-x_0)^2)}}$ и $\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}}$ одновременно сходятся/расходятся

так как $\lim\limits_{x \to x_0 - 0}\frac{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+O((x-x_0)^2)}} = 1$

$$\int_{x_1}^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}}}\int_{x_1}^{x_0}\frac{dx}{x-x_0} = \pm\sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\int_{x_1}^{x_0}\frac{dx}{x-x_0} = \pm\sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\ln(x-x_0)\Big|_{x_1}^{x_0}$$ – расходится

То есть двигаясь по сепаратрисе, тело никогда не достигнут положения неустойчивого равновесия.

№5

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ m\dot{y} = f(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} \end{cases}$$

Площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\ dt$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} -x(t)\frac{\partial U(x)}{\partial x}\cdot\frac{1}{m} - y^2(t)\ dt$$

По закону сохранения энергии: $\frac{my^2}{2} + U(x) = E$ $\qquad y^2 = \frac{2(E-U)}{m}$

$$S = \frac{1}{2m}\int_{t_0}^{t_0+T} -x\frac{\partial U}{\partial x} - 2E + 2U\ dt$$

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dE}\int_{t_0}^{t_0+T} -x\frac{\partial U}{\partial x}\,dt - \frac{d}{dE}\int_{t_0}^{t_0+T} 2E\,dt + \frac{d}{dE}\int_{t_0}^{t_0+T} 2U\,dt\right) = -\frac{1}{2m}\,2\int_{t_0}^{t_0+T} dt = -\frac{T}{m}$$

$$\Rightarrow |T| = m\frac{dS}{dE}$$

№6

$\bar{F}: \quad F_x = yz - x \qquad F_y = xz - \alpha y \qquad F_z = \alpha xy + z \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

а) Сила F потенциальна, если 1-форма $\omega = (\bar{F}, d\bar{r})$ точна, то есть $\omega = -dU$

Конфигурационное пр-во односвязно $\Rightarrow$ замкнутая форма точна

$$d\omega = 0 \iff \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j$$

проверим
$$\begin{cases} \partial_x F_y = \partial_y F_x \\ \partial_y F_z = \partial_z F_y \\ \partial_z F_x = \partial_x F_z \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = z = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \alpha x, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = x \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = y, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \alpha y \Rightarrow \alpha = 1$$

то есть F потенциальна при $\alpha = 1$

Найдем $U(\bar{r})$, такое что $\bar{F}(\bar{r}) = -\nabla U(\bar{r})$

$$\begin{cases} \partial_x U = -F_x & (1) \\ \partial_y U = -F_y & (2) \\ \partial_z U = -F_z & (3) \end{cases} \Rightarrow U = -\int F_z dz = -xyz - \frac{z^2}{2} + C_1(x,y)$$

$$\partial_x U = -yz + \frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} \quad (4)$$

из (1), (4) получим $\frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} = x \Rightarrow C_1(x,y) = \frac{x^2}{2} + C_2(y)$

Тогда $U = -xyz - \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} + C_2(y)$

$$\partial_y U = -xz + \frac{\partial C_2(y)}{\partial y} \quad (5)$$

из (2), (5) получим $\frac{\partial C_2(\cancel{x}y)}{\partial \cancel{x}} = y \Rightarrow C_2(y) = \frac{y^2}{2} + C_3$

Значит $U = -xyz - \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C_3$

<u>Ответ:</u> $\alpha = 1$, $U(x,y,z) = -xyz + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} + C_3$

№6

б) (*) в сферических координатах

$\bar{r}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$d\bar{r}_1 = (-\sin\varphi d\varphi, \cos\varphi d\varphi, 0)$

$A_{\gamma_1} = \int\limits_{\gamma_1} (\bar{F}, d\bar{r}_1) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ((yz - x) \cdot -\sin\varphi + (xz - \alpha y)\cos\varphi) d\varphi =$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi (1-\alpha) d\varphi = \frac{1}{2}(1-\alpha) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1-\alpha}{2}$

Ответ: $A_{\gamma_1} = \frac{1-\alpha}{2}$

(**) в сферических координатах:

$\bar{r}_2 = (\cos\varphi, \sin\varphi, \frac{2\varphi}{\pi})$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$d\bar{r}_2 = (-\sin\varphi d\varphi, \cos\varphi d\varphi, \frac{2}{\pi} d\varphi)$

$A_{\gamma_2} = \int_{\gamma_2} (\bar{F}, d\bar{r}_2) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\frac{2\varphi}{\pi}\sin\varphi - \cos\varphi) \cdot -\sin\varphi + (\frac{2\varphi}{\pi}\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)\cos\varphi + \right.$

$\left. + (\alpha\cos\varphi\sin\varphi + \frac{2\varphi}{\pi})\frac{2}{\pi} \right) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi(1 - \alpha + \frac{2\alpha}{\pi}) + \frac{2\varphi}{\pi}(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \frac{4\varphi}{\pi^2} d\varphi =$

$= \frac{1}{2}(1 - \alpha + \frac{2\alpha}{\pi}) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cos 2\varphi d\varphi + \frac{4}{\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi d\varphi =$

$= \frac{1}{2}(1 - \alpha + \frac{2\alpha}{\pi}) + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\varphi^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cos 2\varphi d\varphi$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\sin\pi - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

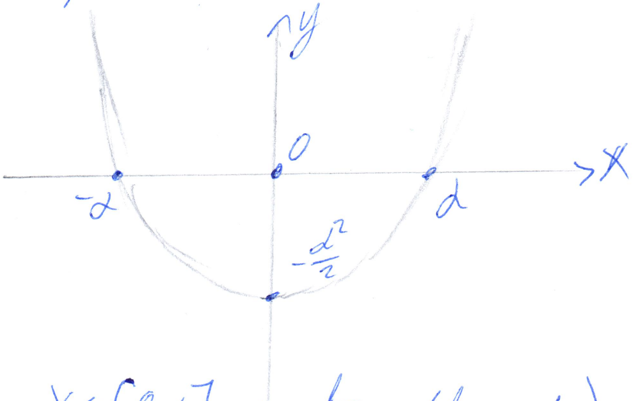
$A_{\gamma_2} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(-\frac{1}{\alpha}) = \alpha(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}) + 1 - \frac{1}{\pi}$

Ответ: $A_{\gamma_2} = \alpha(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}) + 1 - \frac{1}{\pi}$

№7

$\overline{F} = -k\rho\,\overline{e}_\rho \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad k>0$

$A_\gamma = ?$ при перемещении из точки с абсциссой $x=0$, в точку с ординатой $y=0$



$\overline{r} = \left(x, \frac{x^2-d^2}{2}\right), \ x\in[0,d] \Rightarrow d\overline{r} = (dx, x\,dx)$

$\overline{e}_\rho = \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right) \Rightarrow \overline{F} = -k(x,y)$

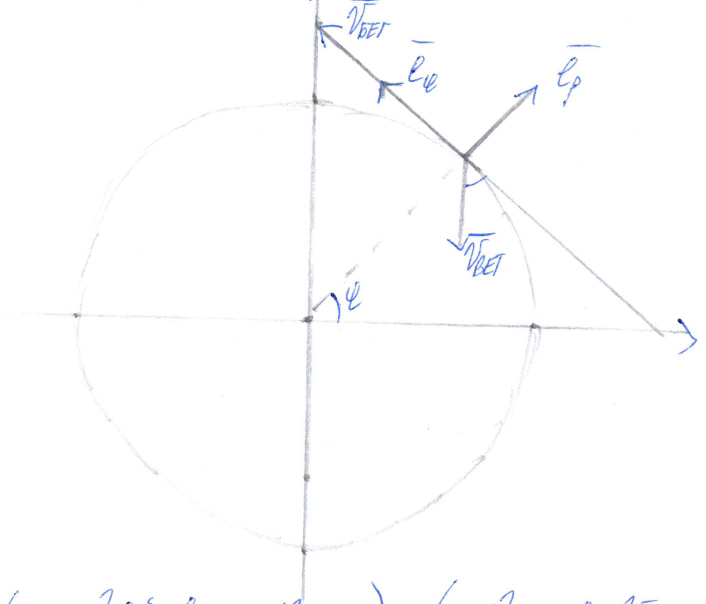
$A_\gamma = \int_\gamma (\overline{F}, d\overline{r}) = \int_0^d (-kx - kxy)\,dx = -k\int_0^d \left(x + x\frac{x^2-d^2}{2}\right)dx =$

$= -k\left(1-\frac{d^2}{2}\right)\int_0^d x\,dx - k\int_0^d \frac{x^3}{2}\,dx = -k\left(1-\frac{d^2}{2}\right)\frac{d^2}{2} - \frac{k}{2}\cdot\frac{d^4}{2} =$

$= -k\frac{d^2}{2} + k\frac{d^4}{4} - k\frac{d^4}{8} = -k\frac{d^2}{2} + k\frac{d^4}{8} = k\frac{d^2}{2}\left(\frac{d^2}{4}-1\right)$

Ответ: $A = k\frac{d^2}{2}\left(\frac{d^2}{4}-1\right)$

№8



$|\overline{V}_{бег}| = v$

$|\overline{V}_{вет}| = \alpha t^2$

$\overline{F}_{сопр} = -k\overline{V}_{отн}$

$A_{окр} \to min, \; v = ?$

$\overline{V}_{отн} = \overline{V}_{БЕГ} - \overline{V}_{ВЕТ} = (0, v) - (-\alpha t^2 \sin\varphi, -\alpha t^2 \cos\varphi) = (\alpha t^2 \sin\varphi, v + \alpha t^2 \cos\varphi)$

$\dot{r} = (0, v) \Rightarrow dr = (0, v\,dt)$

Пусть бегун сделал круг за время T

$A_{окр} = \int\limits_{окр} (F_{сопр}, dr) = -k\int\limits_0^T (v + \alpha t^2 \cos\varphi) v\,dt$

$t = \frac{\varphi R}{v} \Rightarrow dt = \frac{R}{v} d\varphi$

$A_{окр} = -k\int\limits_0^{2\pi} \varphi^2 \cos\varphi\, d\varphi = -kRv2\pi - kR^3\frac{\alpha}{v^2}\int\limits_0^{2\pi} \varphi^2 \cos\varphi\, d\varphi$

$\int \varphi^2 \cos\varphi\, d\varphi = \int \varphi^2 d\sin\varphi = \varphi^2 \sin\varphi - 2\int \sin\varphi \cdot \varphi\, d\varphi = \varphi^2 \sin\varphi + 2\int \varphi\, d\cos\varphi =$
$= \varphi^2 \sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi - 2\int \cos\varphi\, d\varphi = \varphi^2 \sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi + C$

$\int\limits_0^{2\pi} \varphi^2 \cos\varphi\, d\varphi = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$

$A_{окр} = -2kRv\pi - \frac{4kR^3\alpha\pi}{v^2}$

$A_{БЕГ} = -A_{окр}$

$\frac{\partial A_{БЕГ}}{\partial v} = 2kR\pi - \frac{8kR^3\alpha\pi}{v^3} = 0$

$2kR\pi\left(1 - \frac{4R^2\alpha}{v^3}\right) = 0$

$\frac{4R^2\alpha}{v^3} = 1 \Rightarrow v = \sqrt[3]{4R^2\alpha}$

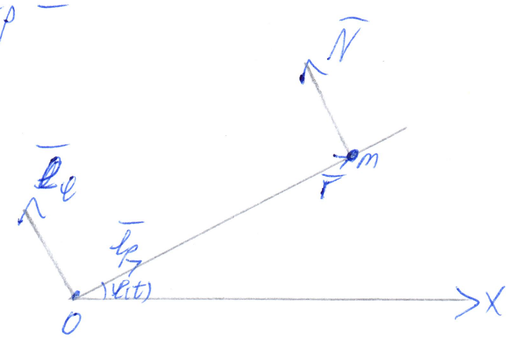
Ответ: $v = \sqrt[3]{4R^2\alpha}$

№9

а) $r = \rho \bar e_\rho \Rightarrow \dot r = \dot\rho \bar e_\rho + \rho\dot\varphi \bar e_\varphi \Rightarrow dr = (\dot\rho\, dt, \rho\omega\, dt)$

$\ddot r = \ddot\rho \bar e_\rho + \dot\rho\dot\varphi \bar e_\varphi + \dot\rho\dot\varphi \bar e_\varphi + \rho\ddot\varphi \bar e_\varphi - \rho\dot\varphi^2 \bar e_\rho =$

$= \bar e_\rho(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) + \bar e_\varphi(2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)$



По 2 закону Ньютона $m\ddot{\bar r} = \bar N$

В полярных координатах

$\bar e_\rho: m(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) = 0 \to \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 = 0$

$\bar e_\varphi: m(2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi) = N$

Для Коши: $\begin{cases} \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 = 0 \\ \dot\rho(0) = 0 \\ \rho(0) = a \end{cases}$

$\lambda^2 - \dot\varphi^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\dot\varphi \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1(t) = e^{\dot\varphi t} = e^{\omega t} \\ y_2(t) = e^{-\dot\varphi t} = e^{-\omega t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$

$\rho(0) = C_1 + C_2 = a$

$\dot\rho(0) = \omega C_1 e^{\omega t}\Big|_{t=0} + C_2 \cdot (-\omega) e^{-\omega t}\Big|_{t=0} = \omega(C_1 - C_2) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$

$\rho(t) = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

$\dot\rho(t) = \frac{a}{2}\omega(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$

то есть $\bar N = (0, ma\omega^2(e^{\omega t} - e^{-\omega t}))$

$A_{\bar N} = \int (\bar N, dr) = \int_0^T ma\omega^2(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})\omega\, dt =$

$= \frac{ma^2\omega^3}{2}\int_0^T (e^{2\omega t} - e^{-2\omega t})\, dt = \frac{ma^2\omega^3}{2}\left(\frac{e^{2\omega t}}{2\omega}\Big|_0^T - \frac{e^{-2\omega t}}{-2\omega}\Big|_0^T\right) =$

$= \frac{ma^2\omega^3}{2}\left(\frac{e^{2\omega T}}{2\omega} - \frac{1}{2\omega} + \frac{e^{-2\omega T}}{2\omega} - \frac{1}{2\omega}\right) = \frac{ma^2\omega^2}{2}\left(\frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} - 1\right)$

$\Rightarrow A_{\bar N} = \frac{ma^2\omega^2}{2}\left(\frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} - 1\right)$

№9

б) $\Delta E_{k} = E_k(T) - E_k(0)$

$$E_k(T) = \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\bar{e}_\rho \dot{\rho} + \bar{e}_\varphi \omega\rho\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + (\omega\rho)^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{a^2\omega^2}{4}\left(e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} - 2\right) + \omega^2\frac{a^2}{4}\left(e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} + 2\right)\right) =$$

$$= \frac{ma^2\omega^2}{8}\left(2e^{2\omega T} + 2e^{-2\omega T}\right) = \frac{ma^2\omega^2}{4}\left(e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}\right)$$

$$E_k(0) = \frac{m}{2}\left(\bar{e}_\rho \dot{\rho}(0) + \bar{e}_\varphi \omega\rho(0)\right)^2 = \frac{m\omega^2 a^2}{2}$$

$$\Delta E_k = \frac{ma^2\omega^2}{4}\left(e^{2\omega T} + e^{-2\omega T} - 2\right) = \frac{ma^2\omega^2}{2}\left(\frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \Delta E_k = A_{\bar{N}}$$

Ответ: а) $N(t) = ma\omega^2\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$

$$A_{\bar{N}}(T) = \frac{ma^2\omega^2}{2}\left(\frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} - 1\right)$$

б) $\Delta E_k = A_{\bar{N}}(T)$