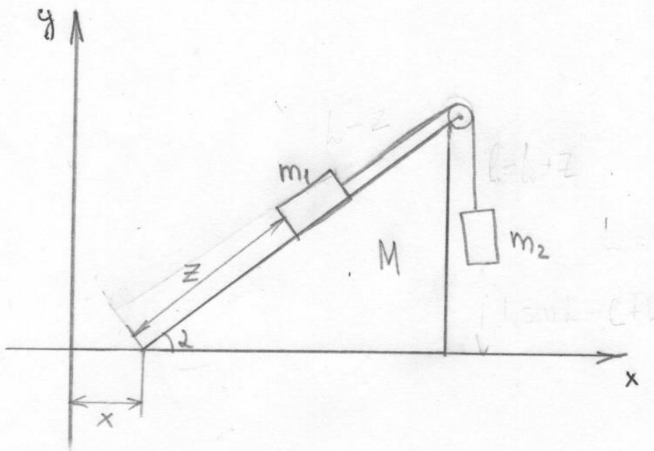
1



\# степеней свободы = 2

Выберем в качестве обобщ. координат x, z.

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}^2 + (\dot{z}\sin\alpha)^2\right) + \frac{m_1}{2}\left((\dot{x} + \dot{z}\cos\alpha)^2 + (\dot{z}\sin\alpha)^2\right) \tag{1}$$

$$U = m_1 g z \sin\alpha - m_2 g z$$

(Функция U определена с точностью до аддитивной константы)

Координата центра масс по оси Ox:

$$x_0 = \frac{Mx + m_1(x + z\cos\alpha) + m_2 x}{M + m_1 + m_2} \tag{2}$$

Координата центра масс по оси Oz:

$$z_0 = \frac{m_1 z - m_2 z \sin\alpha}{M + m_1 + m_2} \tag{3}$$

Выразим из (2), (3) x и z через x_0, z_0 и подставим в (2)

$$(3) \Rightarrow \quad z = \frac{z_0 (M + m_1 + m_2)}{m_1 - m_2 \sin\alpha}$$

$$(2) \Rightarrow \quad x = x_0 - \frac{m_1 z \cos\alpha}{M + m_1 + m_2} =$$

$$= x_0 - \frac{m_1 \cos\alpha}{\cancel{M+m_1+m_2}} \cdot \frac{z_0 \cancel{(M+m_1+m_2)}}{m_1 - m_2 \sin\alpha} = x_0 - z_0 \frac{m_1 \cos\alpha}{m_1 - m_2 \sin\alpha}$$

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{z}^2 \sin^2\alpha}{2} + \frac{m_1 \dot{z}^2 \sin^2\alpha}{2} + \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_1 \dot{z}^2 \cos^2\alpha}{2} +$$

$$+ m_1 \dot{x} \dot{z} \cos\alpha = \dot{x}^2 \left(\frac{M + m_1 + m_2}{2} \right) + \dot{z}^2 \left(\frac{m_2 \sin^2\alpha + m_1}{2} \right) +$$

$$+ m_1 \dot{x} \dot{z} \cos\alpha = \dot{x}_0^2 \left(\frac{M + m_1 + m_2}{2} \right) +$$

$$+ \dot{z}_0^2 \frac{(M + m_1 + m_2)^2}{2(m_1 - m_2 \sin\alpha)^2} \left(m_2 \sin^2\alpha + m_1 - \frac{m_1^2 \cos^2\alpha}{M + m_1 + m_2} \right)$$

$$U = z g (m_1 \sin\alpha - m_2) = z_0 g \frac{(M + m_1 + m_2)(m_1 \sin\alpha - m_2)}{m_1 - m_2 \sin\alpha}$$

Лагранжиан системы:

$$L = T - U = \dot{x}_0^2 \left(\frac{M + m_1 + m_2}{2} \right) + \dot{z}_0^2 \frac{(M + m_1 + m_2)^2}{2(m_1 - m_2 \sin\alpha)^2} \left(m_2 \sin^2\alpha + m_1 - \frac{m_1^2 \cos^2\alpha}{M + m_1 + m_2} \right)$$

$$- z_0 g \frac{(M + m_1 + m_2)(m_1 \sin\alpha - m_2)}{m_1 - m_2 \sin\alpha}$$

Уравнение Эйлера - Лагранжа

$$L_{x_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_0} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_0 (M+m_1+m_2)\right) = 0$$

$\Rightarrow$ закон сохранения проекции импульса центра масс системы на ось $O\vec{x}$:

$$P_{x_0} = (M+m_1+m_2)\dot{x}_0 = const$$

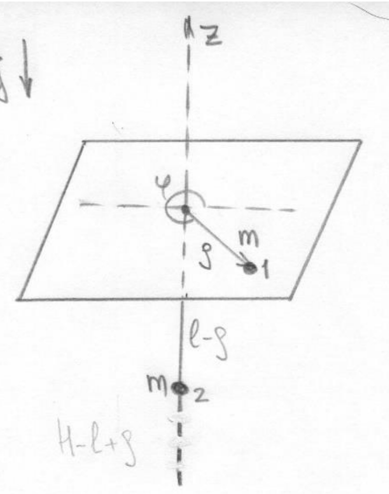
$$L_{z_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_0}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_0} = \frac{d}{dt}\left(\dot{z}_0 \left(\frac{M+m_1+m_2}{m_1-m_2\sin\alpha}\right)^2 \left(m_2\sin^2\alpha + m_1 - \frac{m_1^2\cos^2\alpha}{M+m_1+m_2}\right)\right) - g\,\frac{(M+m_1+m_2)(m_1\sin\alpha - m_2)}{m_1-m_2\sin\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_0 = \frac{g\,\cancel{(M+m_1+m_2)}(m_1\sin\alpha - m_2)(m_1-m_2\sin\alpha)}{(M+m_1+m_2)^2\left(m_2\sin^2\alpha + m_1 - \frac{m_1^2\cos^2\alpha}{M+m_1+m_2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_0 = \frac{g(m_1\sin\alpha - m_2)(m_1 - m_2\sin\alpha)}{(m_2\sin^2\alpha + m_1)(M+m_1+m_2) - m_1^2\cos^2\alpha}$$

Заметим, что $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ выполняется закон сохранения энергии.

2



\# степеней свободы = 2

В качестве обобщенных координат выберем ρ и φ.

(полярные координаты частицы 1 в горизонтальной пл-ти).

Пусть длина нити равна l.

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{m}{2}\dot{\rho}^2$$

$$U = mg\rho$$

(U определена с точностью до аддитивной константы)

Лагранжиан системы:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 - mg\rho$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$L_\rho = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}(2m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\varphi}^2 + mg =$$

$$= 2m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + mg = 0$$

$$L_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot\varphi\right) = m\rho^2\ddot\varphi + 2m\rho\dot\rho\dot\varphi = 0 \qquad (*)$$

Координата частицы 2 – это $-(l-\rho)$, то есть решение стационарно по координате частицы 2 при $\rho = const$.

Тогда из ур-ий Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{Vmatrix} -m\rho\dot\varphi^2 + mg = 0 \\ m\rho^2\ddot\varphi = 0 \end{Vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \rho\dot\varphi^2 = g \Rightarrow \dot\varphi^2 = \frac{g}{\rho} \Rightarrow \varphi(t) = \pm\sqrt{\frac{g}{\rho}}\,t + \varphi_0,\ \varphi_0 = const.$$

$m\rho^2\dot\varphi = J$, где $J = const$

$$J^2 = m^2\rho^4 \cdot \frac{g}{\rho} = m^2\rho^3 g$$

Заметим, что $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ выполняется закон сохранения энергии:

$$\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right) + \frac{m}{2}\dot\rho^2 + mg\rho = const.$$

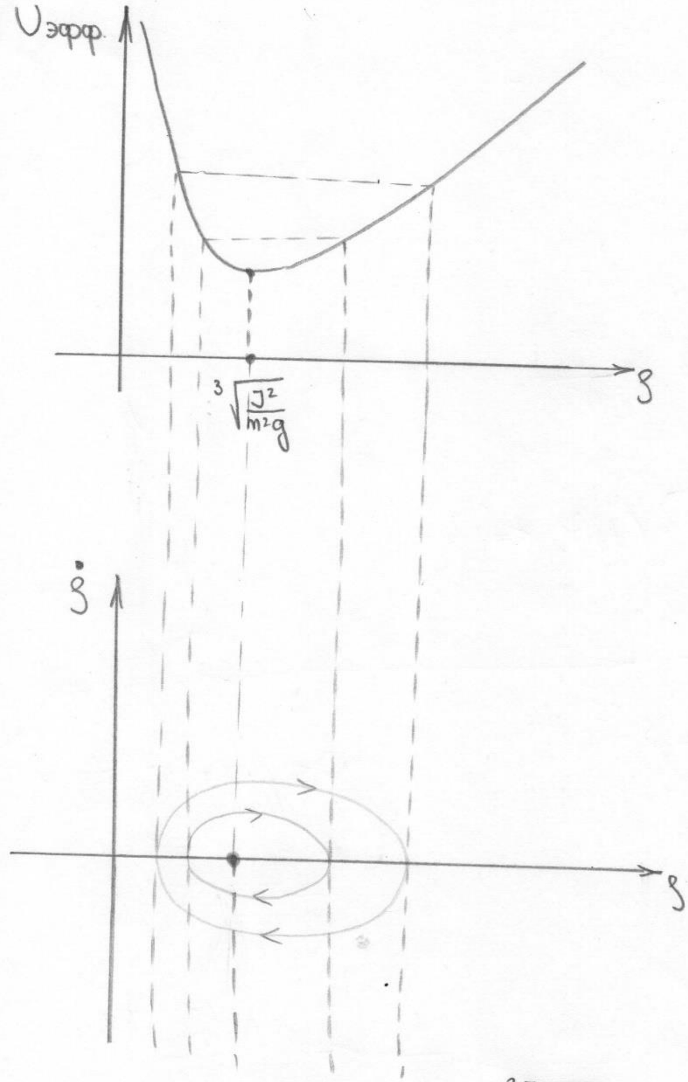
Из (*) следует, что $m\rho^2\dot\varphi = J \Rightarrow \dot\varphi = \frac{J}{m\rho^2}$

Подставим $\dot\varphi = \frac{J}{m\rho^2}$ в З.С.Э:

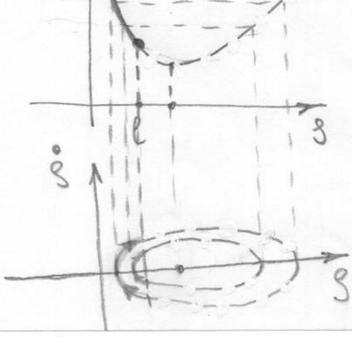
$$\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\cdot\frac{J^2}{m^2\rho^4}\right) + \frac{m}{2}\dot\rho^2 + mg\rho = const$$

$$\underbrace{m\dot\rho^2}_{T_{эфф}(\dot\rho)} + \underbrace{\frac{J^2}{2m\rho^2} + mg\rho}_{U_{эфф}(\rho)} = const$$

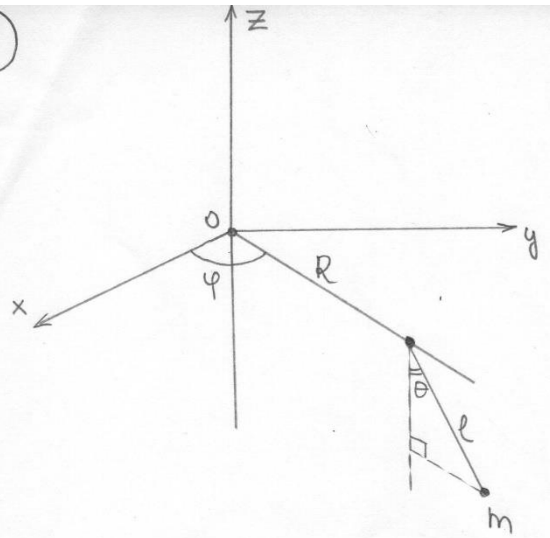
Фазовый портрет эффективной системы.



Заметим, что если $l < \sqrt[3]{\frac{J^2}{m^2 g}}$, то положения равновесия не будет.



(3)



$\varphi \in [0, 2\pi)$

$\theta \in [-\pi, \pi)$

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi\,(R + \ell\sin\theta) \\ y &= \sin\varphi\,(R + \ell\sin\theta) \\ z &= -\ell\cos\theta \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \\ U &= mgz \end{aligned} \qquad (2)$$

Подставим (1) в (2) и получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left((R+\ell\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2\right) \\ U &= -mg\ell\cos\theta \end{aligned}$$

Лагранжиан системы:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left((R+\ell\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2\right) + mg\ell\cos\theta$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$L_\varphi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(m\dot\varphi(R+l\sin\theta)^2\right) = m\ddot\varphi(R+l\sin\theta)^2 + m\dot\varphi\cdot 2(R+l\sin\theta)l\cos\theta\,\dot\theta =$$

$$= m\ddot\varphi(R+l\sin\theta)^2 + 2m\dot\varphi\dot\theta l\cos\theta(R+l\sin\theta) = 0$$

$$L_\theta = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial t}\left(m\dot\theta l^2\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{m}{2}(R+l\sin\theta)^2\dot\varphi^2 + mgl\cos\theta\right)$$

$$= ml^2\ddot\theta - m(R+l\sin\theta)l\cos\theta\,\dot\varphi^2 + mgl\sin\theta = 0$$

Решения стационарные по θ: $\theta = \theta_0 = \mathrm{const}$.

$$L_\varphi = 0 \Rightarrow m\ddot\varphi(R+l\sin\theta_0)^2 = 0 \Rightarrow m\dot\varphi(R+l\sin\theta_0)^2 = J = \mathrm{const}. \quad (3)$$

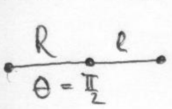
$$L_\theta = 0 \Rightarrow -\cancel{m}\dot\varphi^2(R+l\sin\theta_0)\cancel{l}\cos\theta_0 + \cancel{m}g\cancel{l}\sin\theta_0 = 0 \quad (4)$$

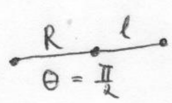
$$\dot\varphi^2 = \frac{g\,\mathrm{tg}\,\theta_0}{R+l\cdot\sin\theta_0}$$

Сначала рассмотрим особые случаи.

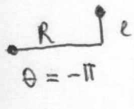
Если $\cos\theta = 0$, то из (4) $\sin\theta = 0$ – противоречие.

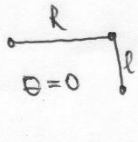
Если $\sin\theta = 0$, то из (4) либо $\cos\theta = 0$ – противоречие; либо $\dot\varphi = 0$, т.е. $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$. Это соответствует тому, что конфигурации



и


невозможны, а конфигурации



и


возможны при равномерном вращении.

Пусть теперь $\sin\theta, \cos\theta = 0$, т.е. $\theta \neq 0, -\pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

Если $R + l\sin\theta = 0$, то из ( ) $\sin\theta = 0$, поэтому пусть $R + l\sin\theta \neq 0$

Тогда (3) $\Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

$$(4) \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{g\,\mathrm{tg}\,\theta}{R + l\sin\theta} \quad (5)$$

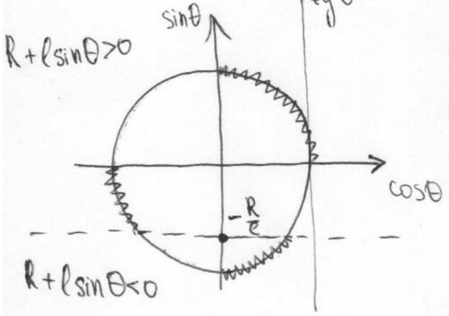
Рассмотрим (5).

1) Если $R > l$, то $R + l\sin\theta > 0 \ \forall\theta \Rightarrow$ необходимо, чтобы $\mathrm{tg}\,\theta > 0$, т.е. $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

В этом случае $\varphi = \omega t + \varphi_0$, где $\omega = \pm\sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\,\theta}{R + l\sin\theta}}$, $\varphi_0 = const$.

2) Если $R < l$, то сущ-ет $\tilde{\theta}$, т.ч. $\sin\tilde{\theta} = -\frac{R}{l}$.

(а именно $\tilde{\theta} = -\arcsin\frac{R}{l}$). Тогда необходимо, чтобы $\mathrm{tg}\,\theta$ и $(R + l\sin\theta)$ были одного знака.



Значит,

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-1, \tilde{\theta}\right) \cup \left(-\pi, -\pi - \tilde{\theta}\right).$$

в) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ выполняется З.С.Э.: $\mathcal{E} = T + U = const$

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}(R + l\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = const \quad (*)$$

Из ур-ия Эйлера-Лагранжа $L_\varphi = 0$, учитывая, что $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$,

получаем $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J = const$

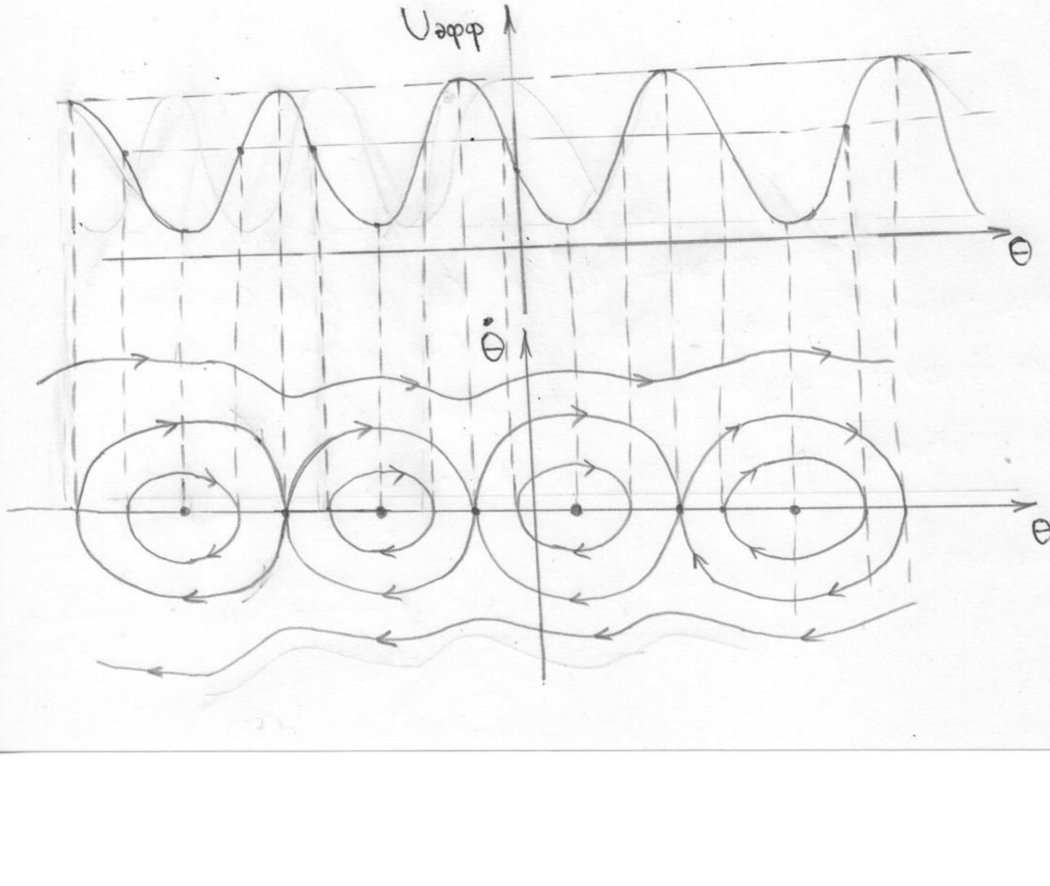
$$m(R + l\sin\theta)^2\dot{\varphi} = J$$

$$\Downarrow$$

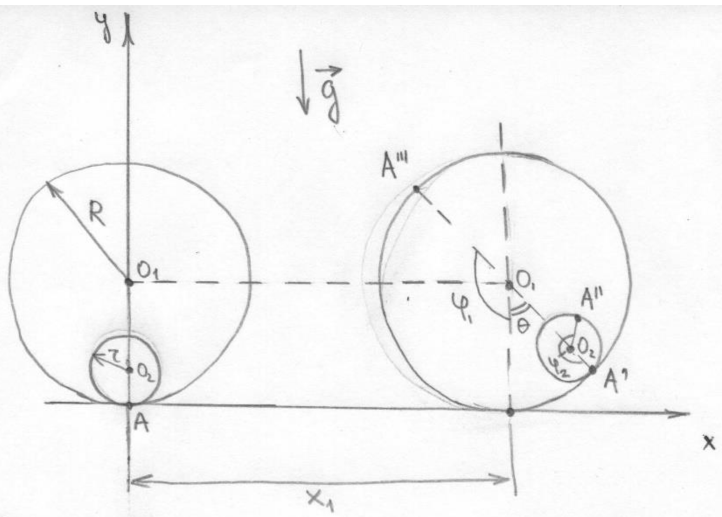
$$\dot{\varphi} = \frac{J}{m(R + l\sin\theta)^2} \quad (**)$$

Подставим (**) в (*)

$$\underbrace{\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2}_{T_{эфф}} + \underbrace{\frac{m}{2}(R + l\sin\theta)^2\frac{J^2}{m^2(R + l\sin\theta)^4} - mgl\cos\theta}_{U_{эфф}} = const$$



④



Система имеет две степени свободы: φ_1 и θ.

Пусть θ - угол между направлением вектора $\vec{g}$ и направлением луча O_1O_2, φ_1 - угол вращения цилиндра R, φ_2 - угол вращения цилиндра τ.

Координаты центра масс цилиндра R:

$$\left\| \begin{array}{l} x_1 = R\varphi_1 \\ y_1 = R \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = R\dot{\varphi}_1 \\ \dot{y}_1 = 0 \end{array}$$

Координаты центра масс цилиндра τ:

$$\left\| \begin{array}{l} x_2 = x_1 + (R-\tau)\sin\theta \\ y_2 = R - (R-\tau)\cos\theta \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_2 = R\dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}(R-\tau)\cos\theta \\ \dot{y}_2 = \dot{\theta}(R-\tau)\sin\theta \end{array}$$

Связь между φ_2 и θ

$$\tau\varphi_2 = R(\varphi_1+\theta) \Rightarrow \varphi_2 = \frac{R}{\tau}(\varphi_1+\theta) \Rightarrow \varphi_2 - \theta = \frac{R}{\tau}\left(\varphi_1 + \left(1-\frac{\tau}{R}\right)\theta\right)$$

Кинетическая энергия T_1 цилиндра R

$$T_1 = \frac{M}{2}(R\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{MR^2\dot{\varphi}_1^2}{2} = MR^2\dot{\varphi}_1^2.$$

Кинетическая энергия T_2 цилиндра r

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{I_2(\dot{\varphi}^2 - \dot{\theta})^2}{2} =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\left(R\dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}(R-r)\cos\theta\right)^2 + \dot{\theta}^2(R-r)^2\sin^2\theta\right) +$$

$$+ \frac{mr^2}{2}\left(\frac{R}{r}\left(\dot{\varphi}_1 + \left(1-\frac{r}{R}\right)\dot{\theta}\right)\right)^2$$

Введем обозначение $a := R - r$. $\qquad R^2\dot{\varphi}_1^2 + 2Ra\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 + a^2\dot{\theta}^2$

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}_1^2 + 2Ra\dot{\varphi}_1\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2a^2\right) + \frac{m}{2}\left(R\dot{\varphi}_1 + a\dot{\theta}\right)^2 =$$

$$= mR^2\dot{\varphi}_1^2 + mRa(\cos\theta + 1)\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\theta}^2$$

$$T = T_1 + T_2$$

Таким образом,

$$\left\|\begin{array}{l} T = MR^2\dot{\varphi}_1^2 + mR^2\dot{\varphi}_1^2 + mRa(\cos\theta+1)\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\theta}^2 \\ U = -mga\cos\theta \end{array}\right.$$

а) Лагранжиан системы

$$L = T - U = MR^2\dot{\varphi}_1^2 + mR^2\dot{\varphi}_1^2 + mRa(\cos\theta+1)\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$$

б) Найдем интегралы движения.

Ур-ие Эйлера - Лагранжа

$$L_{\varphi_1} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}}_{=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = J = \text{const}$$

$$2(m+M)R^2\dot{\varphi}_1 + mR(R-r)(\cos\theta+1)\dot{\theta} = J \quad (*)$$

Заметим, что $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ выполняется З.С.Э: $\mathcal{E} = T+U = const$

Таким образом, в системе два интеграла движение:

$$\begin{cases} J = 2(m+M)R^2\dot{\varphi}_1 + mRa(\cos\theta+1)\dot{\theta} \\ \mathcal{E} = (m+M)R^2\dot{\varphi}_1^2 + mRa(\cos\theta+1)\dot{\varphi}_1\dot{\theta} + ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta \end{cases}$$

в) Найдем угловую частоту малых колебаний системы вблизи положение равновесия

$\theta(t) = \varepsilon\sin wt$, $\varepsilon \to 0$. Найти: w.

Ур-ие Эйлера-Лагранжа: $L_\theta = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(mRa(\cos\theta+1)\dot{\varphi}_1 + 2ma^2\dot{\theta}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(mRa\cos\theta\,\dot{\varphi}_1\dot{\theta} + mga\cos\theta\right) =$$

$$= mRa(\cos\theta+1)\ddot{\varphi}_1 \cancel{- mRa\dot{\varphi}_1\sin\theta\,\dot{\theta}} + 2ma^2\ddot{\theta} +$$

$$\cancel{+ mRa\sin\theta\,\dot{\varphi}_1\dot{\theta}} + mga\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow R(\cos\theta+1)\ddot{\varphi}_1 + 2a\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \quad (**)$$

Из ур-ие $(*)$ следует, что

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{J - mRa(\cos\theta+1)\dot{\theta}}{2(m+M)R^2}$$

Введем обозначение: $w_0 = \frac{1}{2}\frac{J}{(m+M)R^2}$,

$$A = \frac{1}{2}\frac{ma}{(m+M)R}.$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi}_1 = w_0 - A(\cos\theta + 1)\dot{\theta}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = A\left(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta}(\cos\theta + 1)\right)$$

Подставим в ур-ие (**):

$$R(\cos\theta + 1)A\left(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta}(\cos\theta + 1)\right) + 2a\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

Заметим, что $\ddot{\theta} = -w^2\theta$, $\dot{\theta}^2 = \varepsilon^2 w^2 - w^2\theta^2 = w^2(\varepsilon^2 - \theta^2)$

$\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$.

$$\ddot{\theta}\left(-(\cos\theta + 1)^2 AR + 2a\right) + \dot{\theta}^2 AR\sin\theta(\cos\theta + 1) + g\sin\theta = 0$$

$$-w^2\cancel{\theta}(-4AR + 2a) + w^2(\varepsilon^2 - \theta^2)AR\cancel{\theta}\cdot 2 + g\cancel{\theta} = 0$$

Устремим $\varepsilon \to 0$, получаем

$$-w^2(-4AR + 2a) = -g$$

$$w^2 = \frac{g}{2a - 4AR} = \frac{g}{2a - 4\cdot\frac{1}{2}\frac{ma}{(m+M)R}\cdot R} = \frac{g}{2a - 2\frac{ma}{m+M}} =$$

$$= \frac{g}{2a\left(1 - \frac{m}{m+M}\right)} = \frac{g(m+M)}{2(R-r)M}$$

$$\Rightarrow w = \pm\sqrt{\frac{g(m+M)}{2(R-r)M}}$$