

Алгебра, семинар №3

ВШЭ, осень, первый курс

1. Поделите с остатком многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$ и в кольце $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$:
a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 6x + 4$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$;
b) $f(x) = x^7 + 3x^3 + 2x^2 + 1$, $g(x) = x^3 + 2$.
2. Поделите многочлен $f(x)$ с остатком на $x - x_0$:
a). $f(x) = 4x^6 + 2x^4 - 3x + 7$, $x_0 = -1$,
b). $f(x) = -x^5 + 3x^3 - x$, $x_0 = 2$.
3. Найдите остаток от деления многочлена $x^{179} + x^{57} + x^2 + 1$ в кольце многочленов $\mathbb{Z}[x]$ на многочлены
a) $x^2 + 1$, b) $x^2 - 1$, c) $x^2 + x + 1$.
4. Вычислите остаток от деления многочлена $(x + 1)^{2019}$ на многочлен $x^2 + x + 1$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$.
5. Какие многочлены делятся нацело на a) $x + 1$ и b) $x^2 + 1$ в кольце $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$?
6. При каких n в кольце $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ имеются нетривиальные (то есть отличные от 1 и 0) идемпотенты (то есть решения уравнения $a^2 = a$)?
7. Сколько решений имеет уравнение $x^3 = 1$ в кольце $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$?