Алгебра

2 курс

Домашняя Работа

Владислав Мозговой

Задачи для Мозговой Владислава

18 ноября 2020 г.

Группа G задана образующими a, b и соотношениями

$$a^P = b^Q = 1 \quad bab^{-1} = a^S,$$

где $P = 11$, $Q = 5$ и $S = 4$.

1. Сколько элементов в группе G?

2. Сколько классов сопряженных элементов в группе G?

3. Найдите размерности неприводимых комплексных представлений группы G.

4. Найдите спектр оператора, соответствующего элементу a, в каждом неодномерном неприводимом представлении группы G.

Решения

Задача 1

Так как a, b – образующие группы G, то $G = \{a^m b^n |\ m \in \{0, \dots, 10\},\ n \in \{0, \dots, 4\}\}$.
Заметим, что любой элемент представим в виде $a^i b^j$ так как в последовательности из a и b мы можем заменять ba на $a^4 b$, при этом не существует $i, j, k, l :\ a^i b^j = a^k b^l$, так как $a^i b^j = a^k b^l \Leftrightarrow a^{i-k} b^{j-l} = 1$, но тогда мы знаем, что $(i - k) \vdots 11,\ (j - l) \vdots 5$, а следовательно $i \equiv k \mod 11,\ j \equiv l \mod 5$.
Тогда $G = \{a^m b^n |\ m \in \{0, \dots, 10\},\ n \in \{0, \dots, 4\}\}$, а следовательно $|G| = 5 \cdot 11 = 55$

Задача 2

(количество элементов класс сопряженности)|(порядок группы), следовательно количество элементов классов сопряженности может быть только $1, 5, 11, 55$, но 55 быть не может, так как $h1h^{-1} = 1$, следовательно $\{1\}$ – класс сопряженности состоящий из одного элемента.
Класс сопряженности $\{hgh^{-1} | g \text{ фиксированное }, h \in G\}$
Рассмотрим g – элемент $N_{11} = a^k$

$$ba^k b^{-1} = a^4 ba^{k-1} b^{-1} = a^{4k}$$

$$a^k \to a^{4k} \to a^{5k} \to a^{9k} \to a^{3k}$$

$$N_{11} = \{1\} \cup \{a, a^4, a^5, a^9, a^3\} \cup \{a^2, a^8, a^{10}, a^7, a^6\}$$

Рассмотрим как выглядит орбита b

$$(a^x b^y) b (a^x b^y) = a^x b^y b b^{-y} a^{-x} = a^x b a^{-x}$$

То есть элемент вида $a^i b$
Покажем, что любой такой мы можем получить:

$$a^{-x} b a^x = a^{-x} a^4 b a^{x-1} = a^{-x} a^4 \dots a^4 b = a^{4x} b$$

Заметим, что $\gcd(4, 11) = 1$, следовательно с помощью $3x$ можно получить все остатки по $\mod 11$, заметим, что в данном класс сопряженности ровно 31 элемент.
Класс элемента b^2
Заметим, что в классе сопряженности есть элементы только вида $a^i b^2$:

$$(a^x b^y) b^2 (a^x b^y)^{-1} = a^x b^y b^2 b^{-y} a^{-x} = a^x b^2 a^{-x} = a^x a^{-x \cdot 4^2} b^2 = a^i b^2$$

Тогда

$$a^{-x} b^2 a^x = a^{-x} a^{4^2 x} b^2 = a^{5x} b$$

Заметим, что $\gcd(5, 11) = 1$, а следовательно таким образом можно получить любой остаток по $\mod 31$, следовательно все элементы вида $a^i b^2$ лежат в одном классе сопряженности.
Также для $a^i b^3$

$$(a^x b^y) b^3 (a^x b^y)^{-1} = a^x b^y b^3 b^{-y} a^{-x} = a^x b^3 a^{-x} = a^x a^{-x \cdot 4^3} b^3 = a^i b^3$$

$$a^{-x} b^3 a^x = a^{-x} a^{4^3 x} b^3 = a^{9x} b^3$$

$$\gcd(9, 11) = 1$$

И для $a^i b^4$

$$(a^x b^y) b^4 (a^x b^y)^{-1} = a^x b^y b^4 b^{-y} a^{-x} = a^x b^4 a^{-x} = a^x a^{-x \cdot 4^4} b^4 = a^i b^4$$

$$a^{-x} b^4 a^x = a^{-x} a^{4^4 x} b^4 = a^{3x} b^4$$

$$\gcd(3, 11) = 1$$

Следовательно всего классов сопряженности $3 + 4 = 7$

Задача 3

Известно, что существует 7 классов сопряженных элементов, а следовательно 7 неприводимых представлений. $x_i = \dim \rho_i$, причем $\sum x_i^1 = |G| = 55$
Рассмотрим одномерные представления. a, b – образующая

$$\rho(a) = x \quad a^{11} = 1,\ x^{11} = 1,\ x \in \mathbb{C}$$
$$\rho(b) = y \quad a^5 = 1,\ y^5 = 1,\ y \in \mathbb{C}$$
$$\rho(b)\rho(a)\rho(b^{-1}) = yxy^{-1} = x^4$$
$$x = x^4 \Leftrightarrow 1 = x^3$$

Но $x^{11} = 1$, а следовательно $x = 1$ (так как $\gcd(11, 3) = 1$)
$b^5 = 1\ \Rightarrow b = 1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$
Следовательно существует 5 одномерных представлений.
Посмотрим, существуют ли двумерные представления
Пусть ρ – неприводимое двумерное

$$\rho(a) = A \in GL_2(\mathbb{C}) \quad A^{11} = E$$
$$\rho(b) = B \in GL_2(\mathbb{C}) \quad B^5 = E$$

Заметим, что так как $A^{11} = E$, то она диагонализуема и

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$
$$B = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \text{ – в том же базисе}$$
$$BA = A^4B$$
$$\begin{pmatrix} kx & ly \\ mx & ny \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & y^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^4k & x^4l \\ y^4m & y^4n \end{pmatrix}$$

Получим систему

$$\begin{cases} kx = x^4k \\ ly = x^4l \\ mx = y^4m \\ yn = ny^4 \end{cases}$$
$$k, n = 0 \qquad m, l \neq 0$$
$$\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l \\ m & 0 \end{pmatrix} \text{ – невырождена}$$
$$\begin{cases} ly = x^4l \\ mx = y^4m \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^4 \\ x = y^4 \end{cases}$$
$$y = x^4 = y^{4^4} = y^{16} = y^5 \quad y = 1$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Противоречие с неприводимостью, так как у B существует хотя бы один собственные вектор, а следовательно и для $A = E$ он тоже будет собственным.
Далее заметим, что $5^2 = 4^2 + 3^2$, то есть 3 и 4 мерных представлений либо 0, либо 2, так как иначе $55 \neq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2$. Тогда доказав, что нет 2 представлений 3 или 4 степени, мы докажем, что все остальные представления имеют степень 1 или 5, то есть

$$55 = x_1^2 + \ldots + x_7^2 \text{ , где } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1 \text{ и } x_i \geqslant 5 \text{ при } i \geqslant 6$$
$$50 = x_6^2 + x_7^2 = 5^2 + 5^2$$

Равенство достигается и все остальные представления пятимерны.
То есть существует 5 одномерных и 2 пятимерных представления

Задача 4

Пусть ρ – пятимерное неприводимое представление

$$\rho(a) = A \in GL(5,\mathbb{C}) \quad A^{11} = E$$
$$\rho(b) = B \in GL(5,\mathbb{C}) \quad B^{5} = E$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} a_1^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5^4 \end{pmatrix} \qquad BAB^{-1} = A^4$$

A и A^4 сопряжены, а следовательно у них совпадают ЖНФ, следовательно $a_1^4, a_2^4, a_3^4, a_4^4, a_5^4$ – перестановка $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

$$A^{11} = E$$
$$a_1 = \sqrt[11]{1} = 1, \omega, \ldots, \omega^{10}$$
$$\vdots$$
$$a_5 = \sqrt[11]{1} = 1, \omega, \ldots, \omega^{10}$$

Перестановка не тождественна, так как иначе $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ и представление приводимо
Перестановка (ij)

$$\begin{cases} a_1^4 = a_2 \\ a_2^4 = a_1 \\ a_3^4 = a_3 \\ a_4^4 = a_4 \\ a_5^4 = a_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = a_2^4 = a_1^{16} \\ a_1^{11} = a_2^{11} \\ a_3^4 = a_3 \\ a_4^4 = a_4 \\ a_5^4 = a_5 \end{cases} \qquad a_1 = a_2 = 1 \text{ представление приводимо}$$

Перестановка (ijk)

$$\begin{cases} a_1^4 = a_2 \\ a_2^4 = a_3 \\ a_3^4 = a_1 \\ a_4^4 = a_4 \\ a_5^4 = a_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = a_2^4 = a_3^{4^2} = a_1^{4^3} \\ a_1^{11} = a_2^{11} = a_3^{11} \\ a_4^4 = a_4 \\ a_5^4 = a_5 \end{cases} \qquad a_1 = a_2 = a_3 = 1 \text{ представление приводимо}$$

Перестановка $(ijkl)$

$$\begin{cases} a_1^4 = a_2 \\ a_2^4 = a_3 \\ a_3^4 = a_4 \\ a_4^4 = a_1 \\ a_5^4 = a_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = a_2^4 = a_3^{4^2} = a_4^{4^3} = a_1^{4^4} \\ a_1^{11} = a_2^{11} = a_3^{11} = a_4^{11} \\ a_5^4 = a_5 \end{cases} \qquad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1 \text{ представление приводимо}$$

Перестановка $(ijklm)$

$$\begin{cases} a_1^4 = a_2 \\ a_2^4 = a_3 \\ a_3^4 = a_4 \\ a_4^4 = a_5 \\ a_5^4 = a_1 \end{cases} \qquad a_1 = a_2^4 = a_3^{4^2} = a_4^{4^3} = a_5^{4^4}$$

Рассмотрим циклы $x \to x^4 \to x^{4^2} \to \ldots$

$$a \to a^4 \to a^5 \to a^9 \to a^3 \to a$$
$$a^2 \to a^8 \to a^{10} \to a^7 \to a^6 \to a$$

Существует 2 цикла длины 5, 0 циклов длины 4,3,2 и 1 цикл длины 1
Ответ:
1) (a, a^4, a^5, a^9, a^3)
2) $(a^2, a^8, a^{10}, a^7, a^6)$