Лекция 1. Комплексные числа

Теория функций комплексного переменного

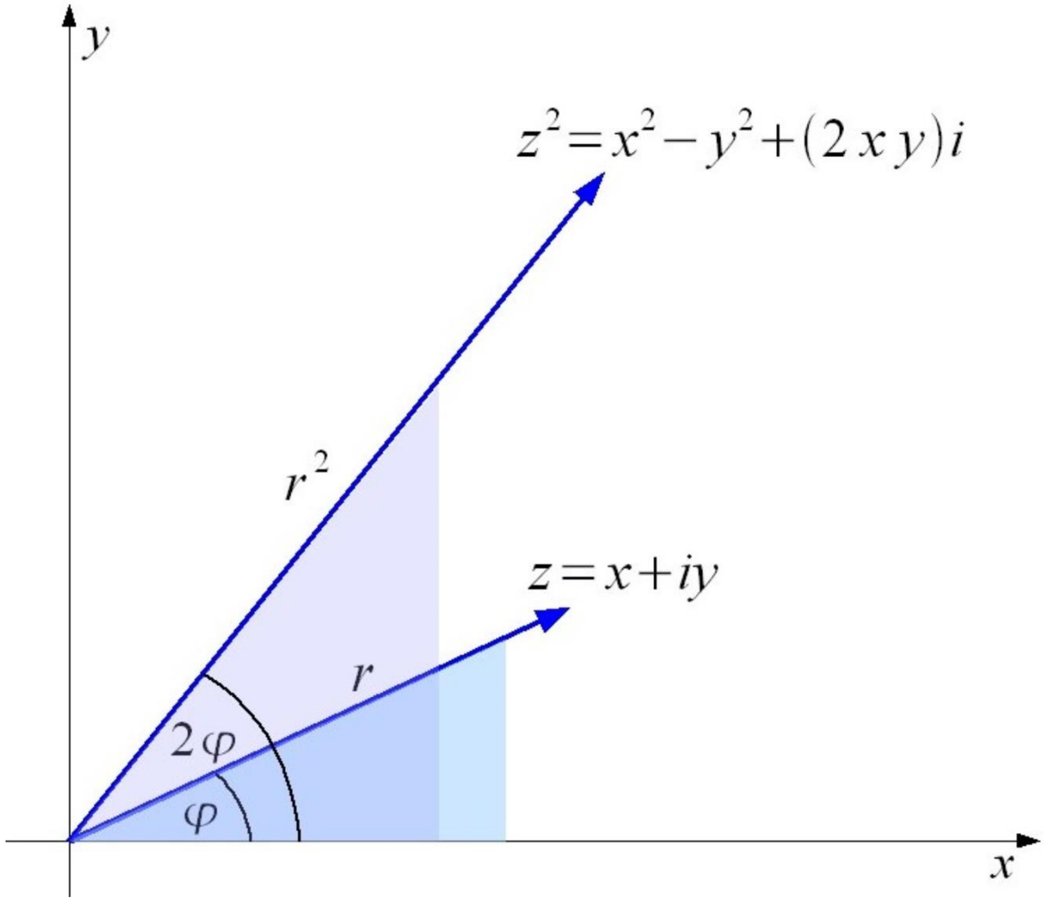
Повторение: алгебра комплексных чисел

- Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел является полем.
- Множество $\mathbb{R}$ действительных (a.k.a. вещественных) чисел является подполем: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Поле $\mathbb{C}$ порождается над $\mathbb{R}$ образующей i и соотношением
$$i^2 = -1.$$
- Комплексное сопряжение
$$z \mapsto \overline{z}, \qquad x + iy \mapsto x - iy$$

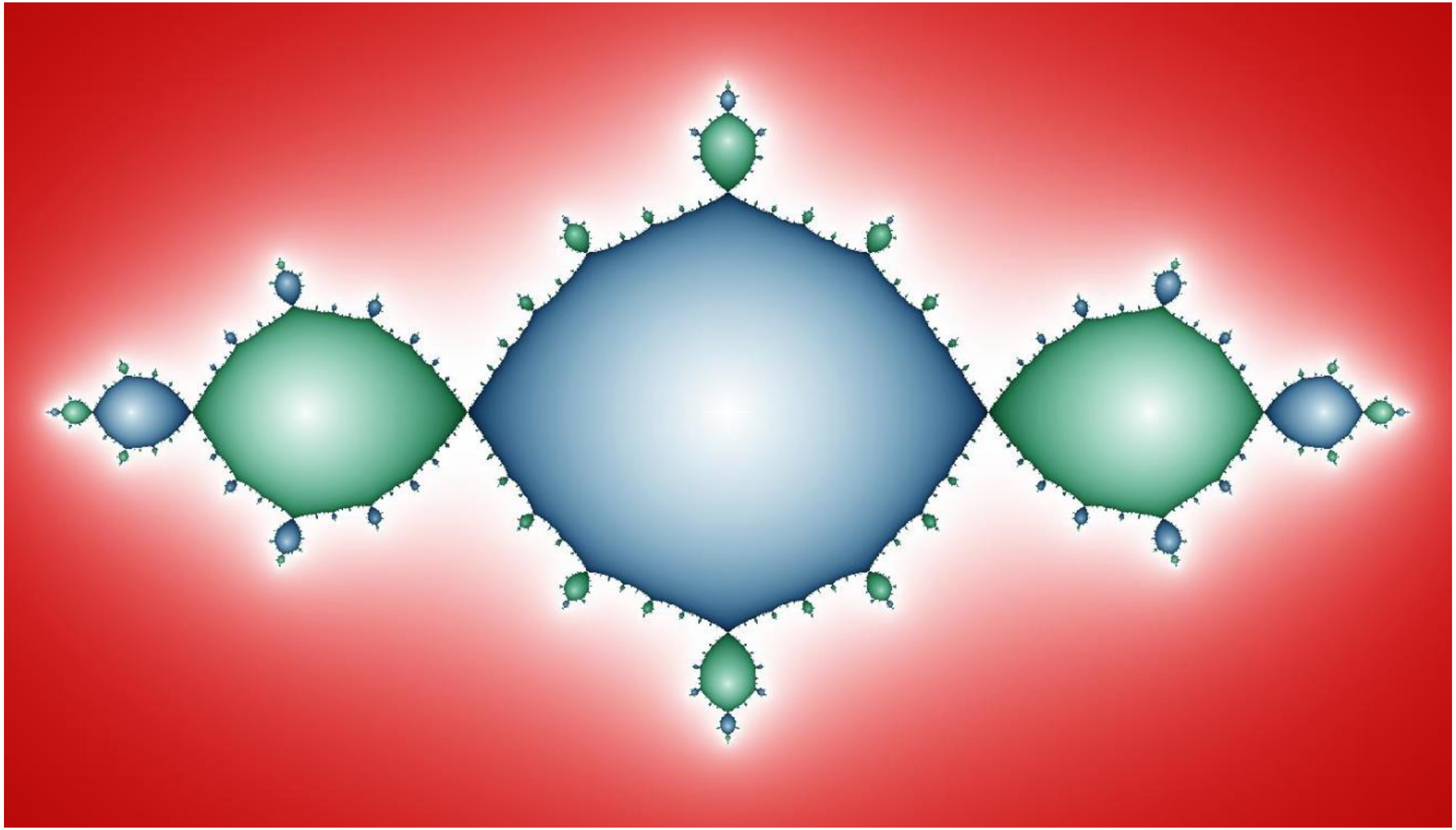
является единственным нетривиальным автоморфизмом поля $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$. Норма $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Повторение: геометрия комплексных чисел

- Сложение комплексных чисел – сложение векторов.
- Норма = длина.
- Умножение на комплексное число = поворот с гомотетией.
- Преобразование $z \mapsto az + b$ сохраняет все углы и умножает все расстояния на одно и то же число $|a|$.



Итерации отображения $f(z) = z^2 - 1$.



Перемножая суммы квадратов…

Если каждое из двух чисел a, b можно представить как сумму квадратов двух целых чисел, то в таком же виде можно представить произведение ab. Это следствие тождества Диофанта-Брахмагупты-Фибоначчи:

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2.$$

Эта формула связана с законом умножения комплексных чисел:

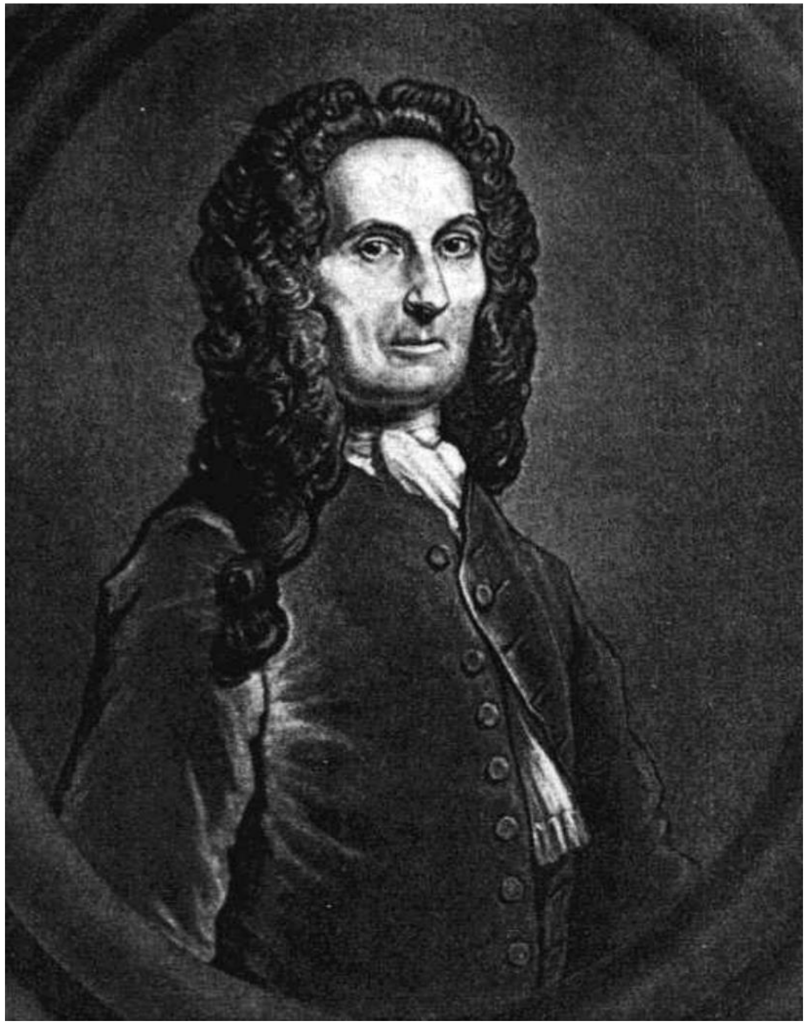
$$|z_1|^2|z_2|^2 = |z_1z_2|^2, \qquad z_1 \coloneqq x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Формула Муавра

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

… позволяет:

- быстро возводить комплексные числа в высокие степени;
- выражать $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ через $\cos\theta$, $\sin\theta$ и наоборот;
- извлекать корни любых степеней из комплексных чисел.



Абраха́м де Муа́вр (1667 — 1754) — английский математик французского происхождения.

Абсолютная и равномерная сходимость

Пусть X — произвольное множество (вы ничего не потеряете, если будете считать X подмножеством комплексной плоскости) и $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — счетное семейство *ограниченных* функций на X со значениями в $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится *абсолютно и равномерно* на X, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x)|$.

Мажорантный признак сходимости

Предложение 1.2 (мажорантный признак Вейерштрасса). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ — *ряд из ограниченных функций на множестве* X. *Если существует такое натуральное* N, *что* $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)| \leqslant a_n$ *для всех* $n \geqslant N$, *и если при этом ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится абсолютно и равномерно.*

Следствия абсолютной и равномерной сходимости

Предложение 1.3. *Если ряд из ограниченных функций* $\sum f_n$ *сходится на* X *абсолютно и равномерно, то он сходится на* X *равномерно. Более того, ряд, полученный из ряда* $\sum f_n$ *любой перестановкой слагаемых, также сходится на* X *абсолютно и равномерно, причем к той же функции.*

- Последнее утверждение вытекает из возможности переставлять члены в абсолютно сходящихся числовых рядах.

Топология плоскости

- Открытый диск $\mathbb{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$.
- Положим $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$.
- Множество $A \subset \mathbb{C}$ открыто, если $\forall\, a \in A \;\; \exists\, r > 0 \;\; \mathbb{D}(a, r) \subset A$.
- Множество $A \subset \mathbb{C}$ замкнуто, если $\mathbb{C} \setminus A$ открыто.
- Множество $A \subset \mathbb{C}$ связно, если его нельзя представить в виде $(U \cup V) \cap A$ для открытых непересекающихся множеств U, V, таких, что $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset$.
- Множество $A \subset \mathbb{C}$ компактно, если оно замкнуто и ограниченно (т.е. $\exists\, R > 0 \;\; A \subset \mathbb{D}(0, R)$).

Формула Коши-Адамара

Рассмотрим степенной ряд

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \qquad (1.3)$$

(все коэффициенты c_j и число a — комплексные числа, переменная z также предполагается комплексной).

Предложение 1.18. (1) *Существует* $R \in [0; +\infty]$ *с тем свойством, что ряд* (1.3) *абсолютно сходится при* $|z-a| < R$ *и расходится* (*общий член не стремится к нулю*) *при* $|z-a| > R$.

(2) *Имеем*

$$R = 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}. \qquad (1.4)$$

Жак Адамар (1865 – 1963)

- Член Французской академии наук, почётный член попечительского совета Еврейского университета в Иерусалиме. Иностранный член-корреспондент (1922) и иностранный почётный член (1929) Академии наук СССР.

Круг сходимости

- $\mathbb{D}(a, R)$, где R – радиус сходимости.

Предложение 1.19. *Ряд (1.3) сходится абсолютно и равномерно на каждом компактном подмножестве своего круга сходимости.*

Сравнение с геометрической прогрессией.

Следствие 1.20. *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией от z на его круге сходимости.*

Комплексная экспонента

Предложение-определение 1.21. Для всякого $z \in \mathbb{C}$ ряд

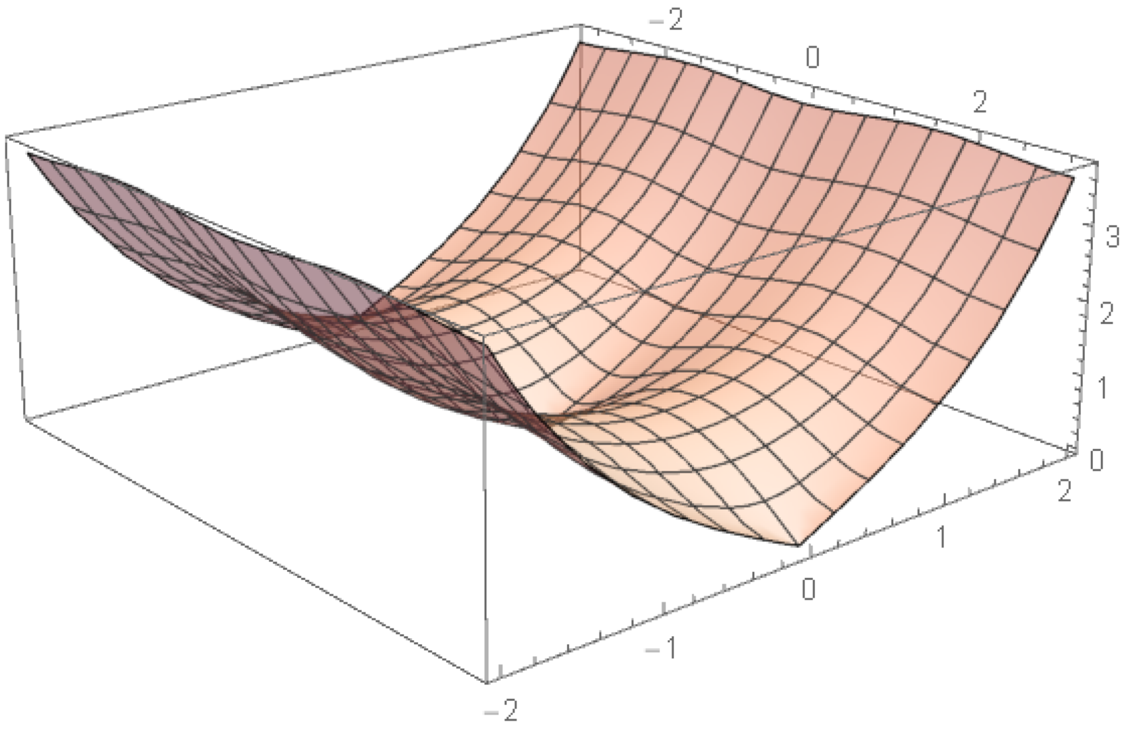
$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \qquad (1.5)$$

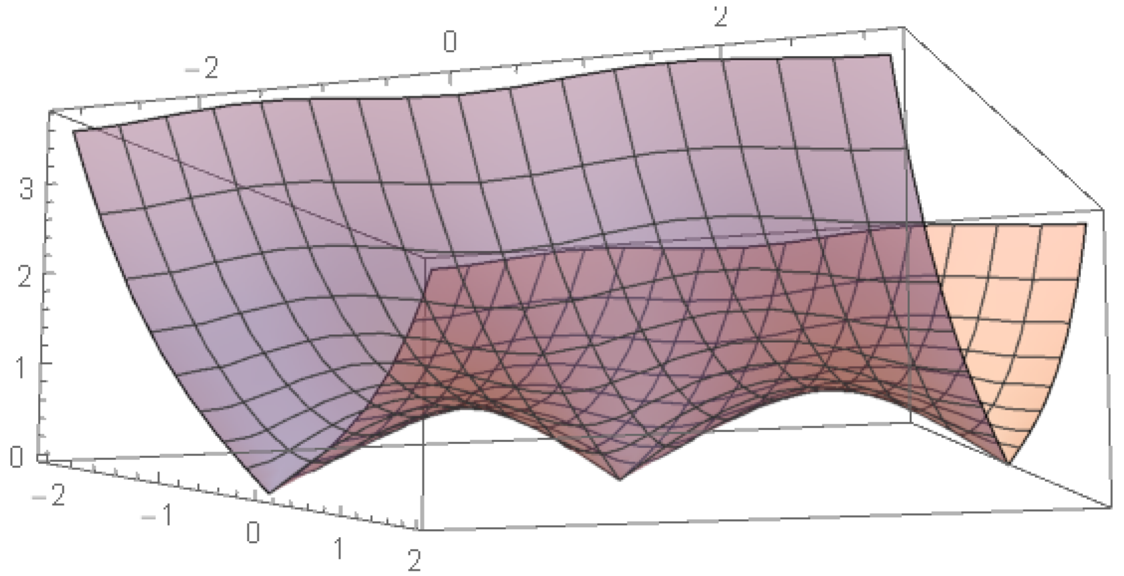
абсолютно сходится. Его сумма обозначается e^z или $\exp(z)$, а функция $z \mapsto e^z$ называется *экспоненциальной функцией* или *экспонентой*.

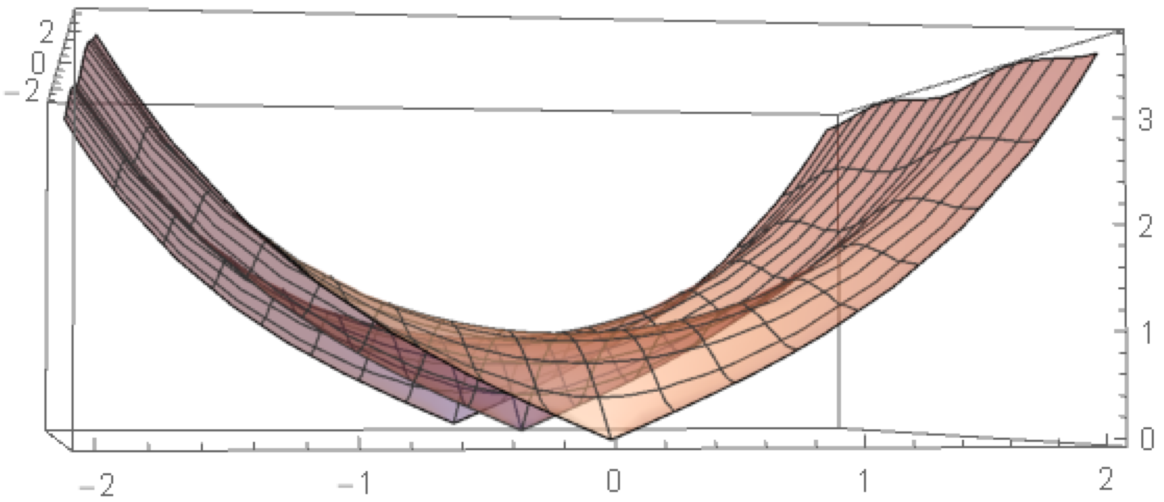
- Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Функция $|\sin z|$

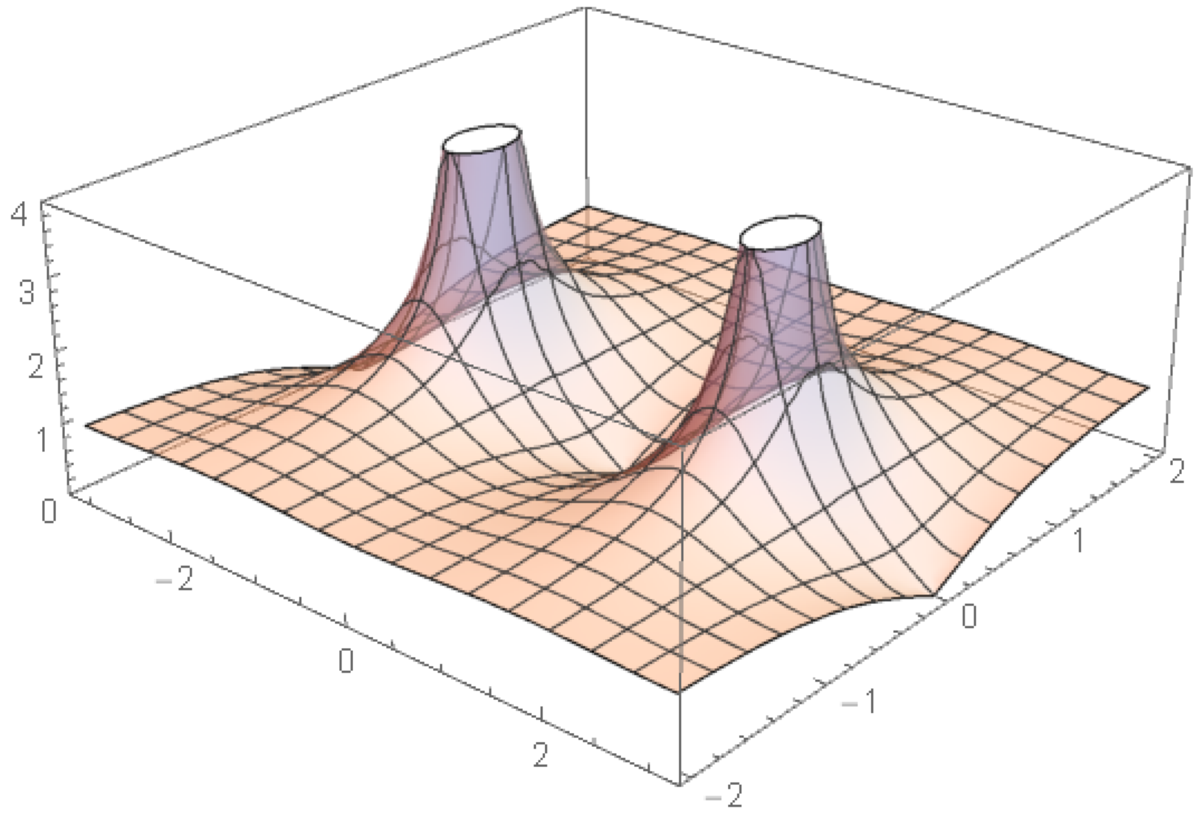


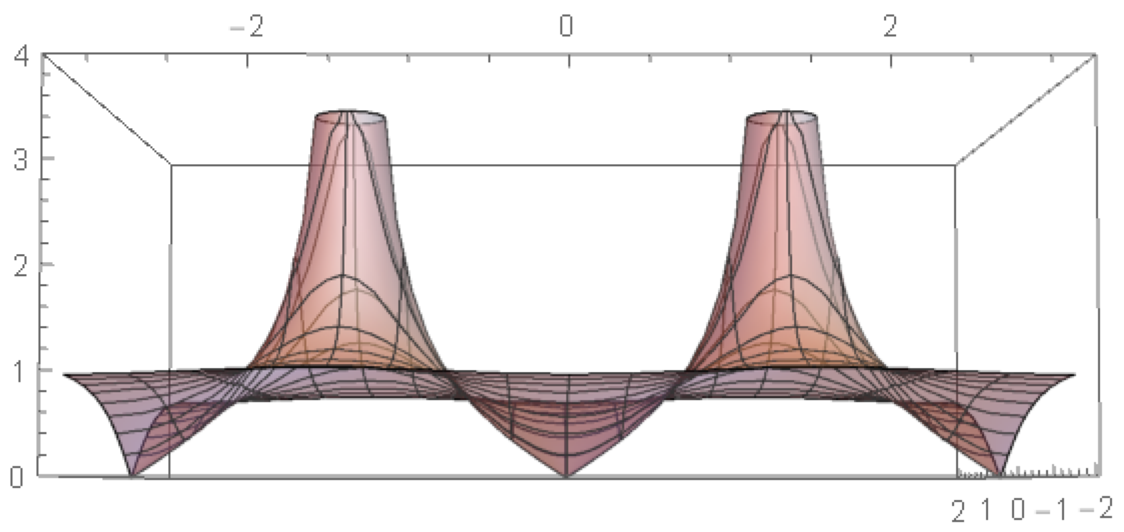


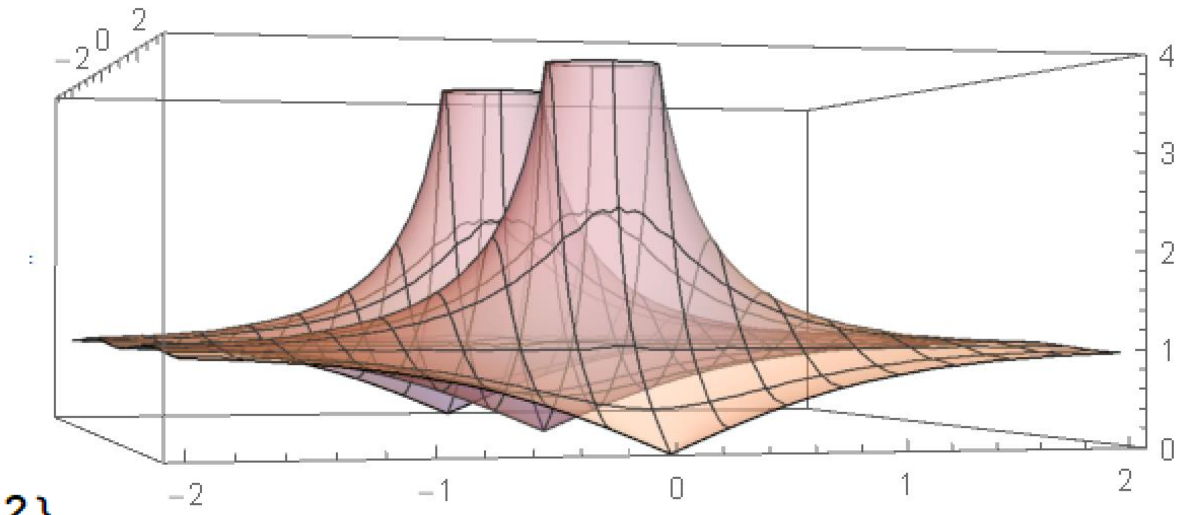



```
Plot3D[Abs[Sin[x + I y]], {x, -Pi, Pi}, {y, -2, 2},
 PlotStyle → Directive[LightRed, Opacity[.5]]]
```

Функция $|\mathrm{tg}(z)|$








```
Plot3D[Abs[Tan[x + I y]], {x, -Pi, Pi}, {y, -2, 2},
 PlotStyle → Directive[LightRed, Opacity[.5]],
 PlotRange → {0, 4}, MaxRecursion → 3]
```

В лекции использованы иллюстрации и материалы из следующих источников:

- https://wikipedia.org
- https://bookshop.org
- Wolfram Mathematica
- С.М. Львовский, «Принципы комплексного анализа». МЦНМО.

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ •

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ