Лекция 2

Числа Гурвица

Т. Кэли $T_n = n^{n-2}$

T_n – число помеченных деревьев на n вершинах.

t_n – число помеч. корневых деревьев

$t_n = n \cdot T_n$ $\quad t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 9,$
$t_4 = 4 \cdot 16 = 64, \ldots$

$$T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n!} s^n$$ экспоненциальная производящая ф-ия

Теорема 1 $T(s) = s \cdot e^{T(s)}$

Как из теоремы 1 получить т. Кэли?

Утв. 1 Уравнение $F(s) = s \cdot e^{F(s)}$ имеет ! реш-ие в пр-ве формальных степенных рядов $F(s) = a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots$

$$e^{F(s)} = 1 + (a_1 s + a_2 s^2 + \ldots) + (a_1 s + a_2 s^2 + \ldots)^2 \frac{1}{2!} + \ldots$$

Коэф-т при фикс. степени k

$$a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots = s\left(1 + (a_1 s + a_2 s^2 + \ldots) + \frac{(a_1 s + a_2 s^2 + \ldots)^2}{2!} + \ldots\right)$$

Коэфф-т при s^1 $[s^1]$: $a_1 = 1 = \frac{1}{1!}$ $\quad t_1 = 1$

$[s^2]$: $a_2 = a_1 = 1 = \frac{2}{2!}$ $\quad t_2 = 2$

$[s^3]$: $a_3 = a_2 + \frac{a_1^2}{2} = \frac{3}{2} = \frac{9}{3!}$ $\quad t_3 = 9$

$[s^4]$: $a_4 = a_3 + \frac{2a_1 a_2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!} = \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{64}{4!}$ $\quad t_4 = 64$

a_n однозначно выражается через $a_1, \ldots, a_{n-1}$ $\Rightarrow$ реш-ие единственно

Утв Формула обращения Лагранжа

$\varphi(s)$, $\psi(t)$ — формальные степенные ряды

$\varphi(0) = 0$ и пусть $\varphi(s) = s\,\psi(\varphi(s))$

Тогда $$[s^n]\,\varphi(s) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\,\psi^n(t)$$

У нас $\psi(t) = e^t$, $\varphi(s) = F(s)$,

$$\frac{1}{n}[t^{n-1}]\,\psi^n(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\,e^{nt} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}$$

$$e^{nt} = 1 + nt + \frac{n^2 t^2}{2!} + \ldots$$

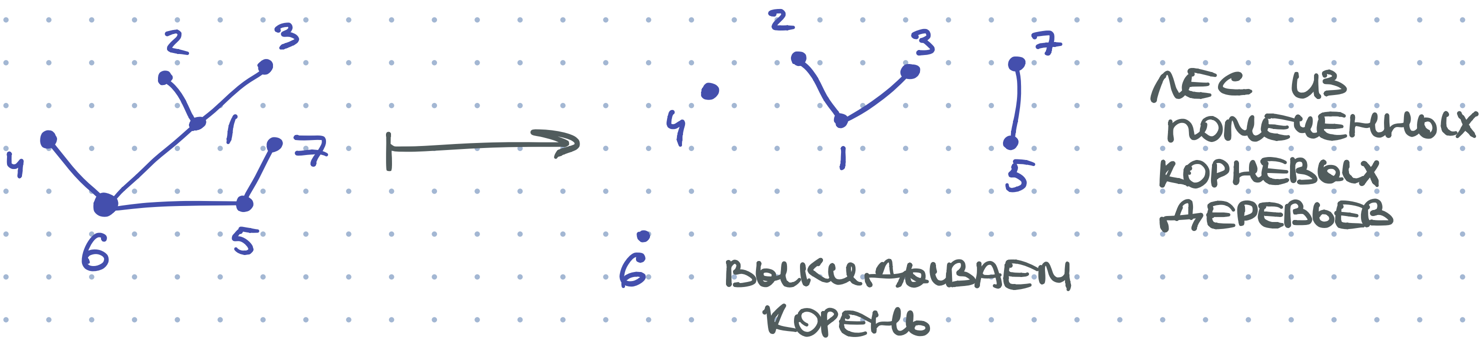
Итого $t_n = n!\,a_n = n!\,\frac{n^{n-1}}{n!} = n^{n-1}$

Доказывать ф-лу обращения Лагранжа мы не будем.

Док-во теоремы 1

$$T(s) = \sum \frac{t_n s^n}{n!}$$

$$T(s) = s e^{T(s)}$$



$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n s^n}{n!}$$

Утв. Пусть $F(s)$ — производящая ф-ия некоторых объектов, занумерованных элементами мн-ва A.

Разобьем A на 2 подмн-ва A_1 и A_2 и $G(s)$ — произв. ф-ия, занумерованная эл-тами A_1

$H(s)$ —— // —— A_2

Тогда $F(s) = G(s) \cdot H(s)$

Дано g_n, h_n. Ищем f_n

$|A_n| = n$

$$\frac{f_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{g_k h_{n-k}}{n!}$$

Пользуясь утверждением, получаем $T(s) = s \cdot G(s)$, где $G(s)$ — произв. ф-ия помеченных лесов на n вершинах

Утв. Пусть $F(s) = \frac{f_n}{n!} s^n$

$$F(s) = G(H(s))$$

$$H(0) = 0$$

(Дерево разбили на k подмножеств $\Rightarrow$ получили k наборов)

В нашем случае $H(t) = \Pi(s)$

блок = набор $\qquad G(t) = e^t$

Пусть k блоков, тогда

$$f_n = [s_n] \frac{H^k(s)}{k!} g_k \qquad G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k g_k}{k!}$$

$$\Downarrow$$

$$F(s) = G(H(s))$$

$$g_n = [s_n] \frac{\Pi^k(s)}{k!}$$

$\Rightarrow$ доказали Утв. 1 $\Rightarrow$ доказали теорему Кэли