

Семинар №7

1. Составьте таблицу истинности следующих формул:

(a) $\neg(p \rightarrow (q \vee \neg r)) \rightarrow (r \rightarrow q)$

(b) $(p \wedge \neg q) \vee \neg(p \rightarrow (q \wedge r))$

2. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

(a) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$,

(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$,

(c) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$

3. В каждом из следующих случаев запишите формулу, выражающую приведенное рассуждение, и проверьте, является ли она тавтологией.

(a) Если птица розовая, то она летает; значит, если птица не розовая, то она не летает.

(b) Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

4. Докажите, что если A и $A \rightarrow B$ тавтологии, то и B — тавтология.

5. Докажите эквивалентности:

(a) $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$,

(b) $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$,

(c) $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$,

(d) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$,

(e) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.

6. Найдите более короткую эквивалентную запись для формулы

$$((p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow p)) \vee (r \rightarrow p)$$

7. Выразите связки \wedge , \vee через \neg , \rightarrow (т.е. постройте формулы, эквивалентные $(p \vee q)$ и $(p \wedge q)$, используя только \neg , \rightarrow и переменные p , q).

8. Придумайте формулу от двух переменных p и q , которая

(a) равна нулю при всех значениях, кроме случая, когда $p = 1$ и $q = 0$;

(b) равна единице при всех значениях, кроме случая, когда $p = 1$ и $q = 0$.

Литералом называется переменная или отрицание переменной. *Конъюнктом* называется конъюнкция литералов. *Дизъюнктом* называется дизъюнкция литералов. Формулой в *конъюнктивной нормальной форме*, или просто КНФ, называется конъюнкция дизъюнктов. Формулой в *дизъюнктивной нормальной форме*, или просто ДНФ, называется дизъюнкция конъюнктов. В каждом случае конъюнкция или дизъюнкция может состоять только из одного элемента.

9. Приведите к ДНФ и к КНФ следующие формулы
- (a) $((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg r),$
 - (b) $((r \vee (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow ((q \vee \neg p) \wedge r)) \wedge (q \rightarrow r).$
10. Докажите, что можно выразить любую булеву функцию с помощью следующих операций:
- (a) \oplus (сложение по модулю 2), \wedge и 1 (формально это не связка, а константа);
 - (b) штрих Шеффера: $p|q$ (равен нулю если $p = q = 1$ и единице во всех остальных случаях);
 - (c) \rightarrow и 0.
11. Докажите, что формула $p \rightarrow q$ не эквивалентна никакой формуле, построенной из переменных с помощью только \wedge, \vee .
12. Докажите, что формула $\neg p$ не эквивалентна никакой формуле, построенной из переменных с помощью только $\wedge, \vee, \rightarrow$.
13. Докажите, что формула, построенная из связок \leftrightarrow и \neg , является тавтологией тогда и только тогда, когда каждая переменная, а также знак отрицания встречаются в ней чётное число раз.
14. Сколько всего различных неэквивалентных формул от n переменных существует?