Алгебраическая геометрия с геометрической точки зрения.

1 Вступление

Пусть $\Bbbk$ — поле констант (очень часто $\bar{\Bbbk} = \Bbbk$ или $\operatorname{char} \Bbbk = 0$). Пусть $\mathbb{A}^n$ — аффинное пространство над полем $\Bbbk$ и пусть $y_1, \ldots, y_n$ — аффинные координаты.

Обозначение 1.1. Если $\mathfrak{a}$ — идеал в кольце многочленов $\Bbbk[y_1, \ldots, y_n]$, определим V

$$V(\mathfrak{a}) = \left\{ y \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; f(y) = 0 \text{ для любого } f \in \mathfrak{a} \right\}$$

Другими словами, $V(\mathfrak{a})$ — множество нулей всех многочленов $\mathfrak{a}$. Соответственно, если $\mathfrak{a}$ — конечно порожденный, то это множество решений конечной системы уравнений.

Обозначение 1.2. Если X — подмножество $\mathbb{A}^n$, определим I

$$I(X) := \left\{ f \in \Bbbk[y_1, \ldots, y_n] \;\middle|\; I(x) = 0 \text{ для любого } x \in X \right\}.$$

Другими словами, $I(X)$ — множество всех многочленов, зануляющихся на X.

Замечание 1.1. Соответствие V обладает следующими нехитрыми свойствами:

(1) $V((0)) = \mathbb{A}^n$, $V(\Bbbk[y_1, \ldots, y_n]) = \varnothing$;

(2) если $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, то $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$;

(3) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$;

(4) $V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_\mathfrak{i}) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_\mathfrak{i})$.

Замечание 1.2. Соответствие I обладает следующими свойствами:

(1) $I(\varnothing) = \Bbbk[y_1, \ldots, y_n]$, $I(\mathbb{A}^n) = (0)$;

(2) если $X \subset Y$, то $I(Y) \subset I(X)$;

(3) $I(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} I(X_i)$.

Определение 1.1. *Радикалом* идеала $\mathfrak{a}$ называется идеал

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = rad(\mathfrak{a}) := \left\{ g \in \Bbbk[y_1, \ldots, y_n] \;\middle|\; g^t \in \mathfrak{a} \right\}.$$

Замечание 1.3. Очевидно, что

$$V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}).$$

Топология Зарисского. Чтобы задать топологию достаточно определить замкнутые множества. В топологии Зарисского это множества $V(\mathfrak{a})$ (по всевозможным $\mathfrak{a}$). Нетрудно заметить, что база топологии состоит из множеств вида

$$\mathbb{A}^n_f := \mathbb{A}^n - V(f) = \{y \in \mathbb{A}^n, f \in \Bbbk[y_1, \ldots, y_n] \mid f(y) \neq 0\}.$$

То есть открытые множества дополняют гиперповерхности до $\mathbb{A}^n$.

2 Немного коммутача

Напоминание. Теорема Гильберта о базисе. Если кольцо A — нётерово, то $A[x]$ — тоже. Следовательно, $A[x_1, \ldots, x_n]$ — нётерово.

Замечание 2.1. Топология Зарисского на $\mathbb{A}^n$ задает не хаусдорфово пространство (но оно является пространством Фреше).

Замечание 2.2. Если $X = V(\mathfrak{a})$ — алгебраическое множество, будем говорить, что фактор-кольцо $\Bbbk[X] = \Bbbk[Y_1, \ldots, Y_n] \backslash I(X)$ является *координатным кольцом* X. Кроме того, пара $(X, \Bbbk[X])$ — это *аффинное алгебраическое многообразие*. Отсюда немедленно следует, что X неприводимо, если и только если идеал $I(X)$ прост. Иначе говоря, координатное кольцо — область целостности.

◀ Действительно, рассмотрим $f_1, f_2 \notin I(X)$, пусть X_i — подмножества, зануляющиеся на f_i. Тогда $X \supsetneq (X_1 \cup X_2)$. Тогда существует точка $x \in X - (X_i \cup X_2)$, для которой $f_1 f_2(x) \neq 0$, следовательно, $f_1 f_2 \notin I(X)$. Значит, идеал $I(X)$ — простой.

Наоборот, предположим, что $X = X_1 \cup X_2$, а $f_1, f_2 \notin I(X)$ таковы, что $f_1(X_1) = 0 = f_2(X_2)$. Отсюда следует, что $f_1 f_2 \in I(X)$. Противоречие с простотой идеала.

■

Определение 2.1. Элемент кольца называется *целым*, если он является корнем некоторого приведенного многочлена над данным кольцом.

Предложение 2.1. Следующие условия эквивалентны:

(1) x — целый над R степени n;

(2) $R[x]$ порожден $1, x, \ldots, x^{n-1}$;

(3) x лежит в некоторой подалгебре R', порожденной как R – модуль n элементами.

(4) Существует *точный* $R[x]$ – модуль M $(Ann(M) = 0)$, порожденный n элементами.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) любой одночлен x^k, где $k \geqslant n$ представляется как комбинация меньших.

(2) $\Rightarrow$ (3) Достаточно положить $R' = R[x]$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Достаточно положить $M = R'$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Пусть $m_1, \dots, m_n$ — порождающие. Запишем матрицу A отображения $m \mapsto mx$. По теореме Гамильтона-Кэли характеристический многочлен этого оператора его зануляет, то есть $0 = \chi_A(A)M = \chi_A(x)M$. Поскольку $Ann(M) = 0$, $\chi_A(x) = 0$.

$\square$

Определение 2.2. Пусть $K \subset L$ — расширение полей. Набор алгебраически независимых над K элементов $l_1, \dots, l_k \in L$ называется *трансцендентным базисом*, если $K(l_1, \dots, l_k) \subset L$ — алгебраическое. *Трансцендентной размерностью* $tr.deg_{\Bbbk} R$ целостного кольца R называется количество элементов трансцендентного базиса $Frac(R)$ над $\Bbbk$.

Замечание 2.3. Для трансцендентного базиса верно многое, что верно для обычного: любую алгебраически независимую систему можно дополнить до базиса, все базисы равномощны. Этого я доказывать не буду. Хотя, возможно, и стоило бы.

Лемма Эмми Нётер о нормализации. Пусть B — конечнопорjденная $\Bbbk$ – алгебра. Пусть $tr.deg_{\Bbbk} B = s$. Тогда существуют такие алгебраически независимые элементы $b_1, \dots, b_s$, что B — целое над $\Bbbk[b_1, \dots, b_s]$.

Доказательство. **(1)** Пусть char $\Bbbk = 0$. Начнем с системы породающих $x_1, \dots, x_l$. Если они алгебрически зависимы, то для некоторого $F \in \Bbbk[y_1, \dots, y_l]$ выполнено $F(x_1, \dots, x_l) = 0$. Сделаем линейную замену

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \alpha_2 x_1 \\ \dots \\ x_l - \alpha_l x_1 \end{pmatrix}$$

Можно подобрать такие $\alpha_i \in \Bbbk$, что коэффициент при старшем x_1^k будет в точности 1. Тогда y_1 зависит от $y_2, \dots, y_l$. Так можно делать, пока порождающие алгебраически зависимы.

(2) Пусть char $\Bbbk = p$. Хотим сделать похожую замену:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1^{k_2} \\ \dots \\ x_l - x_1^{k_l} \end{pmatrix}$$

Подберем l_i так, чтобы все одночлены имели разную степень по x_1 (Тода автоматически при старшем x^k коэффициент из поля $\Bbbk$). Пусть в записи F был одночлен $a_J x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_l^{j_n}$ (J пробегает все одночлены F). При такой замене он перейдет в

$$a_J x_1^{j_1} (x_2 + x_1^{k_2})^{j_2} \dots (x_l + x_1^{k_l})^{j_n}.$$

Таким образом, при раскрытии скобок вынесется самый старший по x_1 одночлен со степенью $d_J = j_1 + k_2 j_2 + \ldots + k_l j_n$. Пусть $l > \max\limits_{J,k}(j_k)$. Тогда установим $k_i = l^i$.

$\square$

Лемма 2.1. Пусть $A \subset B$, где B — область целостности, целая над A. Тогда A — поле, тогда и только тогда, когда B — поле.

Доказательство. Предположим, A — поле, рассмотрим произвольный ненулевой $b \in B$. Запишем для него многочен (такой есть в силу того, что b — не делитель нуля):

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,\ a_i \in A, a_0 \neq 0.$$

Тогда $b^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \ldots + a_1)$, то есть B — тоже поле.

Предположим, что B — поле. Нужно показать, что для любого ненулевого $a \in A$ его обратный элемент a^{-1} тоже лежит в A. Для начала заметим, что $\dfrac{1}{a} \in B$, то есть можно записать многочлен:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,\ a_i \in A.$$

Домножим все на a^{n-1} и выразим $\dfrac{1}{a}$:

$$\frac{1}{a} = -(a_{n-1} + a_{n-2}a + \ldots + a_0 a^{n-1}) \in A.$$

Таким образом, A — поле. $\square$

Теорема Гильберта о нулях Пусть $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле. Тогда

(1) для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$ справедливо $V(\mathfrak{m}) = P$ для некоторой точки $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$;

(2)если $\mathfrak{a}$ — идеал, отличный от $\Bbbk[Y_1, \ldots, Y_n]$, то $V(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$;

(3) Пусть $I = (f_1, \ldots, f_k)$. Предположим, что $f(x) = 0$ для любого $x \in V(I)$. Тогда $f^n \in I$ ($f \in \sqrt{I}$).

Доказательство. **(1)** Достаточно показать, что $\mathfrak{m} = ((x_1 - a_1), \ldots, (x_n - a_n))$ для некоторых a_i. А для этого достаточно показать, что $k = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m} \simeq \Bbbk$. Тогда $x_i \equiv_{\mathfrak{m}} a_i$.

k — поле. Тогда по теореме Нётер о нормализации существуют такие алгебраически независимые $y_1, \ldots, y_s \in k$, что расширение $A = \Bbbk[y_1, \ldots, y_s] \subset k = B$ —

алгебраическое. По предыдущей лемме $A = \Bbbk[y_1, \ldots, y_s]$ — поле. Но тогда $s = 0$. Что и требовалось.

(2) Очевидно следует из **(1)**, поскольку любой идеал содержится в некотором максимальном.

(3) Заметим, что $(f_1, \ldots, f_n, tf-1) = (1)$ по условию (это называется Rabinovich trick). Тогда существуют такие $g_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, что $\sum\limits_i g_i f_i + g_0(f-1) = 1$. Подставим $t = \dfrac{1}{f}$ и домножим на очень большую степень f. Получим то, что нужно.

□

Следствие 2.1. Для любого идеала $\mathfrak{a}$ справедливо $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

3 Компактность в топологии Зарисского

Предложение 3.1. $\mathbb{A}^n$ компактно в топологии Зарисского.

Доказательство. Действительно, кольцо $\Bbbk[Y_1, \ldots, Y_n]$ — нётерово, следовательно, любой идеал конечно порожден. Значит, любое замкнутое подмножество является пересечением конечного числа базовых замкнутых множеств (алгебраических множеств). Теперь, любое открытое покрытие можно разбить на множества из базы и искать конечное подпокрытие уже тут. Итак $\mathbb{A}^n = \bigcup_\alpha \mathbb{A}^n_{f_\alpha}$, следоватльно, $\bigcap_\alpha V(f_\alpha) = \varnothing$. Если $\mathfrak{a}$ — идеал, натянутый на f_α, то $\mathfrak{a} = \Bbbk[Y_1, \ldots, Y_n]$ (потому что любой идеал содержится в нектором максимальном, а максимальный задает точку — непустое множество). Но тогда 1 — линейная комбинация конечного числа f_i. Соответствующие им $\mathbb{A}^n_{f_i}$ образуют конечной подпокрытие.

□

4 Еще немного коммутача

Предложение 4.1. A-модуль M — нётеров, если и только если любой его подмодуль конечно порожден.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Утверждение очевидно, иначе можно построить бесконечно возрастающую цепочку.

$(\Leftarrow)$ Предположим, нашлась бесконечно возрастающая цепочка подмодулей. Рассмотрим их объединение, там есть конечная система порождающих, но тогда цепочка стабилизируется.

□

5 Алгебры на аффинных подмножествах

Замечание 5.1. Нам определили двойственное отображение. Пусть X, Y — аффинные алгебраические множества (хорошо вкладываются в $\mathbb{A}^n$), $\varphi : X \to Y$. Определим $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))$.

Определение 5.1. Отображение $f : X \to Y$ между алгебраическими множествами называется *регулярным*, если существуют такие i_x, i_y, Φ такие, что диаграмма коммутативна (i_x, i_y — вложения в аффинное пространство, $\Phi(x) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$, причем φ_k — многочлен).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_x"] & Y \arrow[d, "i_y"] \\ \mathbb{A}^n \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{A}^m \end{tikzcd}$$

Замечание 5.2. Потом это определение расширяется до существования рациональных отображений для окрестности каждой точки.

Теорема 5.1. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$, $W \subset \mathbb{A}^m$ — алгебраические множества, а $Y_1, \ldots, Y_n$, $T_1, \ldots, T_m$ — соответствующие координаты. Тогда имеет место следующее: **(1)** Морфизм $\varphi : X \to W$ индуцирует гомоморфизм $\Bbbk$ –алгебр $\varphi^* : \Bbbk[W] \to \Bbbk[X]$.

(2) Наоборот, любому гомоморфизму $\Bbbk$ –алгебр $\theta^* : \Bbbk[W] \to \Bbbk[X]$ соответствует единственный морфизм $\varphi : X \to W$.

(3) Если $\varphi : X \to W$, $\psi : W \to Z$ — морфизмы, то $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Доказательство. **(1)** Пусть $\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Установим $\varphi^*(g)(x) = g \circ \varphi(x) = g(f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Это отображение корректно определено на классах эквивалентности и сохраняет групповую структуру.

(2) Пусть $\theta(t_i) = \theta_i$. Так как θ — гомоморфизм алгебр, то $\theta(g) = g(\theta_1, \ldots, \theta_m)$. Определим морфизм φ как $\varphi(x) := (\theta_1(x), \ldots, \theta_m(x))$. Тогда $g \circ \varphi = \theta(g) = \varphi^*$.

Осталось доказать, что $\mathrm{im}(\varphi) \subset W$. Для этого достаточно доказать, что для любого $F \in I(W)$ выполнено $F(\theta_1, \ldots, \theta_m) = 0$. Действительно,

$$0 = \theta(0) = \theta(F((t_1, \ldots, t_m)) = F(\theta_1, \ldots, \theta_m).$$

Такое φ единственно, поскольку $\varphi^*(t_i) = f_i$.

(3) А это является следствием свойства ассоциативности

$$(\psi \circ \varphi)^*(h) = h \circ (\psi \circ \varphi) = \psi^*(h) \circ \varphi = \varphi^*(\psi^*(h)).$$

$\square$

Теперь отсюда вылазит два сюжета.

Сюжет 1. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм аффинных алгебраических многообразий, $Z \subset X$ — подмногообразие. Тогда хотелось бы понять, какое многообразие задается $f(Z)$. Стоит сразу отметить, что $f(Z)$ не обязано быть замкнутым и поэтому образ многообразия не всегда многообразие. А вот если взять его замыкание, то уже да.

Действительно, попробуем найти все многочлены φ, которые зануляются на $y = f(z)$:

$$0 = \varphi(y) = \varphi(f(y)) = f^*(\varphi(z)).$$

Таким образом, $f^*\varphi \in I(Z)$. Но тогда просто по определению топологии Зарисского $(f^*)^{-1}I(Z) = I(\overline{f(Z)})$.

Сюжет 2. Он в каком-то смысле обратный. Теперь есть подмногообразие $W \subset Y$. Тут уже все корректно $f^{-1}(W)$ — нормальное подмногообразие. В этом случае искомым идеалом будет $rad(f^*(I(W)))$. Почему? Потому что очевидно, что многочлены, которые задают нужное множество, это $f^*(I(W))$. Но это не все, по теореме Гильберта о нулях нужно взять радикал.

Следствие 5.1. Если Z — неприводим, то $\overline{f(Z)}$ — тоже, потому что прообраз простого идеала прост.

6 Регулярные функции

Определение 6.1. Пусть $U \subset X$ — открытое множество, а $P \in U$. Тогда функция $f \in \Bbbk(X)$ называется *регулярной* в точке P, если существует такая окрестность U_P точки P, что

$$f = \frac{g}{h},\ g, h \in \Bbbk[X],\ h(x) \neq 0 \text{ для любого } x \in U_P$$

Будем говорить, что f — *регулярно* на U, если оно регулярно в каждой его точке.

Теорема 6.1. Если функция $f(x)$ регулярна на X, то у нее существует единое для всех точек представление.

Доказательство. Покроем наше многообразие открытыми множествами $U_i = \{x \in X \mid q_i(x) \neq 0\}$, на которых $f(x) = \dfrac{p_i(x)}{q_i(x)}$. Поскольку U_i покрывают все многообразие, по теореме Гильберта о нулях существуют такие $g_i(x)$, что $\sum\limits_i g_i(x)q_i(x) = 1$. Тогда $f(x) = \sum\limits_i g_i(x)q_i(x)f(x)$. Как мы знаем, на U_i выполнено $p_i(x) = q_i(x)f(x)$. Тогда положим

$$F = \sum_i g_i(x)p_i(x).$$

Осталось проверить, что на U_i функция определена хорошо, то есть $f(x) = F(x)$. Заметим, что $U_i \cap U_j$ — открыто и непусто. На открытом множестве выполнено $\dfrac{p_i(x)}{q_i(x)} = \dfrac{p_j(x)}{q_j(x)}$, значит и везде выполнено, где определено. Тогда на U_i везде выполнено $p_j = q_j \dfrac{p_i}{q_i}$, то есть все хорошо.

□

Предложение 6.1. Регулярные на $\mathbb{P}(V)$ функции (согласующиеся со стандартным атласом) — суть константы.

Доказательство. Пусть даны функции на i – ых картах f_i соответственно. Что значит, что они согласованы на пересечении?

$$f_i(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) \cdot x_i^{deg(f_i)} = \hat{f}_i$$

— это однородный многочлен. Заметим, что $\hat{f}_i x_j^{deg(f_j)} = \hat{f}_j x_i^{deg(f_i)}$. Откуда следует, что f — константа.

□

7 Отделимость и полнота

Определение 7.1. *Диагональю* мноообразия X называется

$$\Delta_X = \big\{(x, y) \in X \times X \bigm| x = y\big\}.$$

Определение 7.2. Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если диагональ Δ_X замкнута в $X \times X$ в топологии Зарисского.

Замечание 7.1. Если алгебраическое многообразие Y — отделимо, то любое его алгебраическое подмногообразие X — тоже отделимо (потому что $\Delta_X = \Delta_Y \cap (X \times X)$). Поэтому, чтобы доказать что любое аффинное алгебраическое многообразие отделимо, достаточно показать, что $\mathbb{A}^n$ — отделимо.

Определение 7.3. Алгебраическое многообразие X называется *полным*, если для любого алгебраического Y и любого замкнутого подмножества $Z \subset X \times Y$ проекция $\pi_Y(Z) \subset Y$ — замкнута.

Предложение 7.1. Замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ алгебраического полного многообразия X тоже полно.

Доказательство. Рассмотрим произвольное алгебраическое Y и замкнутое подмногообразие $W \subset Z \times Y$. Достаточно показать, что W замкнуто в $X \times Y$. А это так, потому что $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$.

□

Замечание 7.2. Отсюда следует, что если $\mathbb{P}^n$ полно, то любое проективное многообразие тоже полно.

Предложение 7.2. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий, причем X — полно, а Y — отделимо. Тогда $f(X)$ замкнуто в Y и полно.

Доказательство. Построим множество

$$\Gamma_f = \big\{(x, y) \in X \times Y \bigm| y = f(x)\big\}.$$

Если Γ_f замкнуто в $X \times Y$, то поскольку X полно, то прокция будет замкнута в Y, а проекция — то в точности $f(X)$.

Для доказательства замкнутости рассмотрим отображение

$$\Phi : X \times Y \to Y \times Y,$$

$$\Phi : (x, y) \mapsto (f(x), y).$$

Заметим, что $\Phi^{-1}(\Delta_Y) = \Gamma_f$ — замкнуто как прообраз замкнутого.

Осталось доказать полноту. Пусть $W \subset f(X) \times Z$ — замкнуто, где Z — некоторое аффинное многообразие. Построим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} X \times Z & \xrightarrow{f \otimes 1} & f(X) \times Z & & \\ \big\uparrow \iota & & \big\uparrow \iota & & \\ f^{-1}(W) & \xrightarrow{f} & W & \longrightarrow & \pi_Z(W) \end{array},$$

здесь ι — вложение, а $f^{-1}(W)$ — полный прообраз отображения $f \otimes 1$.

□

Предложение 7.3. Пусть X — полно и неприводимо. Тогда $\Bbbk[X] = \Bbbk$.

Доказательство. Рассмотрим некоторую функцию f на X, $f : X \to \mathbb{A}^1$. Продолжим теперь f вложением в $\mathbb{P}^1$, получим морфизм $\widetilde{f} : X \to \mathbb{P}^1$ полного пространства в отделимое. По предложению 7.2. $\widetilde{f}(X)$ — замкнуто. Замкнутые подмножества $\mathbb{P}^1$ — только конечные наборы точек и все пространство. Но $\widetilde{f}(X)$ тоже должно быть неприводимо и отлично от всего $\mathbb{P}^1$, поскольку вложение $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^1$ — не сюръективно, то есть это на самом деле образ — всего одна точка.

□

8 Отступление про результант

Замечание 8.1. Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение векторных пространств. Оно сюрьективно тогда и только тогда, когда его матрица имеет ранг $\dim W$, то есть существует невырожденный минор соответствующего размера.

Теорема 8.1. Пусть $f_1, \ldots, f_n \in \Bbbk[x_0, \ldots, x_N]$ — однородные многочлены, $degf_i = d_i > 0$. Тогда существует система полиномиальных условий на коэффициенты, которая целиком зануляется в случае, когда существует нетривиальное решение $f_1(x_0 : \ldots : x_N) = \ldots = f_n(x_0 : \ldots : x_N)$.

Доказательство. Тривиальное решение всегда есть в силу однородности. Если есть только оно, тогда идеал, порожденный $\mathfrak{m} = (f_1, \ldots, f_n)$, содержит все x_i в некоторой степени (по теореме Гильберта о нулях):

$$x_i^{\ell_i} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} f_k.$$

Тогда для любых $h_i \geqslant \ell_i$ выполнено $x_i^{h_i} \in \mathfrak{m}$. Следовательно, если $\sum J_i \geqslant \sum \ell_i = M$, то некоторый $j_i \geqslant \ell_i$ и $x_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot x_N^{j_N} \in \mathfrak{m}$.

В частности, $\Bbbk[x_0 : \ldots : x_N]/\mathfrak{m}$ — векторное пространство конечной размерности.

Рассмотрим отображение

$$\Phi_d : S^{d-d_1}(V) \times \ldots \times S^{d-d_n}(V) \to S^d(V),$$

$$(g_1, \ldots, g_n) \to \sum g_i f_i.$$

Таким образом, решение системы тривиально тогда и только тогда, когда для больших d отображение Φ_d — сюръективно. Тогда нетривиальное решение существует тогда и только тогда, когда все Φ_d — не сюръективны, то есть все миноры нулевые.

Последнее, все миноры образуют идеал, который конечнопорожен в нётеровом кольце. Таким образом, базис этого идеала и есть система равенств, которую мы ищем.

□

9 Доказательство полноты $\mathbb{P}^N$

Предложение 9.1. Пусть $Z \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{A}^M$ — замкнуто. Тогда $\pi(Z) \subset \mathbb{A}^M$ — тоже замкнуто.

Доказательство. Пусть $x = (x_0 : \ldots : x_N)$, $t = (t_1, \ldots, t_M)$ — координаты в $\mathbb{P}^N$ и $\mathbb{A}^M$ соответственно, а поверхность Z задается однородными по t полиномами $f_1(x,t), \ldots, f_k(x,t)$. Тогда существует полиномиальное условие $g_1(t), \ldots, g_l(t)$ на коэффициенты при x (которые являются многочленами от t), чтобы система имела решение. Тогда многочлены $g_1(t), \ldots, g_l(t)$ и задают проекцию в $\mathbb{A}^M$.

$\square$

Теорема 9.1. Любое проективное многообразие полно.

Доказательство. По замечанию можно доказывать это утверждение только для $\mathbb{P}^N$. Пусть $Y = \cup U_i$ — покрытие аффинными подмножествами, $Z_i = Z \cap (\mathbb{P}^N \times U_i)$. Как мы проверили выше, условие полноты выполнено для $Y = \mathbb{A}^M$, тогда оно выполнено и для любого его замкнутого подмножества. Тогда и для конечного покрытия аффинными подмножествами — тоже.

$\square$

10 Какие-то примеры

Замечание 10.1. Аффинное многообразие не может быть замкнуто в $\mathbb{P}^n$ (Тогда оно полно как замкнутое подмножество в полном, но если оно полное и аффинное, то оно изоморфно точке).

Предложение 10.1. $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ не аффинно и не полно.

Доказательство. Очевидно, что многообразие не полно, потому что

$$\Bbbk[\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1] = \Bbbk[\mathbb{A}^1] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbb{P}^1] \simeq \Bbbk[x] \neq \Bbbk.$$

Осталось доказать, что $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ не аффинно. Докажем это двумя способами.

Способ 1. Заметим, что замкнутое подногообразие аффинного многообразия — аффинное. Но тогда $\mathbb{P}^1 \simeq \{0\} \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow AA^1 \times \mathbb{P}^1$ должно быть замкнутым, а мы доказали, что это не так.

Способ 2. Множество нулей максимального идеала $\Bbbk[\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1]$ — прямая, а должна быть точка.

$\square$

Тут нам напомнили про Сегре и Веронезе.

11 Конечные морфизмы

Определение 11.1. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм аффинных многообразий. f называется *конечным*, если $\Bbbk[X]$ конечно порожден как $\Bbbk[Y]$ – модуль (или, что то же самое, над $f^*(\Bbbk[Y])$).

Замечание 11.1. Тогда любой элемент $g \in \Bbbk[X]$ — целый над $\Bbbk[Y]$.

Определение 11.2. Морфизм $f : X \to Y$ называется *доминирующим*, если $\overline{f(X)} = Y$.

Замечание 11.2. Морфизм $\varphi : X \to Y$ — доминирующий тогда и только тогда, когда $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ — инъективен. Действительно, пусть $g \in \Bbbk[Y]$ такой, что $\varphi^*(g)(x) = 0$. Тогда $g(\varphi(x)) = 0$ для всех x, но значения $\varphi(x)$ — всюду плотны, а потому $g(y) = 0$ для всех y.

Определение 11.3. Пусть R'/R — целое расширение колец, $\mathfrak{p} \subset R$, $\mathfrak{p}' \subset R'$ — простые идеалы. Будем говорить, что $\mathfrak{p}'$ *лежит над* $\mathfrak{p}$, если $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$.

Теорема из коммутача. Пусть R'/R — целое расширение колец, $\mathfrak{p} \subset R$ — простой идеал. Пусть $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}' \subset R'$ — вложенные простые идеалы, $\mathfrak{a}'$ — произвольный идеал в R'.

(1) Если максимальный идеал $\mathfrak{p}'$ лежит над $\mathfrak{p}$, то $\mathfrak{p}$ — тоже максимальный.

(2) Если оба идеала $\mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{q}'$ лежат над $\mathfrak{p}$, то они совпадают, то есть $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'$.

(3) Существует простой идеал $\mathfrak{r}' \subset R'$, лежащий над $\mathfrak{p}$.

(4) Предположим, что $\mathfrak{a}' \cap R \subset \mathfrak{p}$. Тогда в **(3)** мы можем выбрать $\mathfrak{r}' \supset \mathfrak{a}'$.

Доказательство. **(1)** Заметим, что расширение $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow R'/\mathfrak{p}'$ — тоже целое. Тогда по лемме 1 если одно из них — поле, то и второе — тоже.

(2) Локализуем оба кольца по $R = \mathfrak{p}$. Тем самым сведем задачу к случаю, когда R — локально с максимальны идеалом $\mathfrak{p}$. Но тогда оба $\mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{q}'$ — максимальны, то есть совпадают.

(3) Локализуем так же. Теперь кольцо R локально. Тогда мы можем выбрать любой максимальный в R'. По **(1)** этот идеал лежит над некоторым максимальным в R, а там такой один — $\mathfrak{p}$.

(4) Теперь нужно выбрать не любой идеал, а содержащий $\mathfrak{a}$.

□

Предложение 11.1. Пусть $\varphi : X \to Y$ — конечный морфизм. $Z \subset X$ — замкнутое подмножество.

(1) Тогда морфизм $\varphi|_Z : Z \to Y$ — тоже конечный.

(2) Если X — неприводимо, то $\varphi(Z)$ замкнуто в Y.

(3) Если X — неприводимо и $Z \neq X$, то $\varphi(X) \neq Y$.

Доказательство. **(1)** Верно и более общее утверждение (которое очевидно): композиция конечных морфизмов сама является конечным морфизмом. Осталось заметить, что $i : Z \to X$ — конечный.

(2) Покажем, что $\overline{\varphi(X)} = \varphi(X)$. Рассмотрим точку $p \in \varphi(X)$, этой точке соответствует макимальный идеал $\mathfrak{m}(p)$. Посмотрим на его прообраз при отображении $\varphi^*(\mathfrak{m}(p))$. Точки, которые зануляются многочленами из этого прообраза — прообразы точки p. Действительно, пусть $f \in \mathfrak{m}(p)$ и $\varphi^*(f)(a) = f(\varphi(a)) = 0$. Это выполнено для все f, следовательно, $\varphi(a) = p$. Таким образом, достаточно доказать, что $V(\varphi^*(\mathfrak{m}(p)))$ — непусто. В случае, когда оно пусто, $\sqrt{\varphi^*(\mathfrak{m}(p))} = \Bbbk[X]$, но тогда $\langle\varphi^*(\mathfrak{m}(p))\rangle = \Bbbk[X]$. Заметим, что на самом деле мы уже доказали более общее утверждение в Теореме из коммутача (3). То есть над нашим максимальным идеалом $\mathfrak{m}(p)$ обязан лежать какой-то идеал из $\Bbbk[X]$.

(3) Поскольку $Z \neq X$, то существует такой ненулевой полином $f \in \Bbbk[X]$, что $f(z) = 0$ для любого $z \in Z$. Элемент f — целый над $\Bbbk[Y]$, это значит, что

$$f^n + \varphi^*(g_{n-1})f^{n-1} + \ldots + \varphi^*(g_0) \equiv 0, \text{ где } g_i \in \Bbbk[Y] \text{ и } g_0 \neq 0,$$

иначе это можно переписать как

$$f^n + g_{n-1}(\varphi(x))f^{n-1} + \ldots + g_0(\varphi(x)) = 0, \text{ для любого } x \in X.$$

Но тогда для любого $z \in Z$ $g_0(\varphi(z)) = 0$. Таким образом, $\varphi(Z)$ не может быть плотно в Y.

□

12 Конечные морфизмы в общем

Определение 12.1. Морфизм алгебраических многообразий $f : X \to Y$ называется *конечным*, если существует такое покрытие $Y = \cup U_i$ аффинными множествами, что $f^{-1}(U_i)$ — тоже аффинно и каждый из морфизмов $f : f^{-1}(U_i) \to U_i$ — конечен.

Теорема 12.1. Пусть X — отделимо. $U, V \subset X$ — аффинные открытые подмножества, тогда $U \cap V$ — тоже аффинное открытое.

Доказательство. Рассмотрим вложение

$$\Phi : U \times V \to X \times X.$$

Поскольку X — отделимо, то Δ_X — замкнуто, но тогда и $\Phi^{-1}(\Delta_X)$ — замкнуто в аффинном $U \times V$. Осталось заметить, что $\Phi^{-1}(\Delta_X) \simeq U \cap V$.

□

13 Нормальные многообразия

Определение 13.1. Область целостности R называется *нормальной*, если она целозамкнута в своем поле частных $Frac(R)$.

Предложение 13.1. Факториальное кольцо — нормально.

Определение 13.2. Аффинное многообразие X — *нормально*, если $\Bbbk[X]$ — нормально.

Определение 13.3. Произвольное многообразие X — *нормально*, если существут покрытие нормальными аффинными открытыми $X = \cup U_i$.

Замечание 13.1. Если A — нормально, а S — мультипликативное подмножество, то локализация $A_S = S^{-1}A$ — тоже нормальна. Таким образом, если X — нормальное аффинное многообразие, то $X \backslash \{f = 0\}$ — тоже нормальное аффинное.

Предложение 13.2. Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A и B — произвольная Q_A – алгебра. Если элемент $b \in B$ цел над A, то его минимальный многочлен $\mu(x)$ над Q_A принадлежит $A[x]$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in A[x]$ — минимальный приведенный многочлен b. Тогда $f(x) = \mu(x)q(x)$ и по лемме Гаусса $\mu \in A[x]$.

□

Лемма 13.1. Пусть $\varphi : X \to Y$ — сюръективный конечный морфизм аффинных многообразий, Y — нормально. Пусть $U \subset X$ — открыто, тогда $F(U)$ — тоже открыто в Y.

Доказательство. Представим U в виде объединения главных открытых $U = \cup U_i$, $U_i = X \backslash \{f_i = 0\}$. Достаточно доказать, что $f(U_i)$ — открыто. Пусть $f \in \Bbbk[X]$, $p \in X$, $f(p) \neq 0$. Покажем, что существет такая функция $a \in \Bbbk[Y]$, что $\varphi(p) \in D(a(x)) \subset \varphi(D(f))$.

Для этого рассмотрим $\psi = \varphi \times f : X \to Y \times \mathbb{A}^1$.

$$\psi^* : \Bbbk[Y][t] \to \Bbbk[X].$$

Таким образом, если φ — конечно, то и ψ — тоже.

По предыдущему предложению минимальный многочлен f над $\Bbbk(Y)$ принадлежит $\Bbbk[Y][x]$. Таким образом $(\mu_f) = \ker \psi^*$. Таким образом, образ ψ — это подмногообразие в $Y \times \mathbb{A}^1$, задаваемое уравнением:

$$\mu_f(y, t) = t^n + a_1(y)t^{n-1} + \ldots + a_n(y).$$

Образ $\varphi(D(f))$ остоит из тех точек y, для которых у многочлена $\mu_f(y, t)$ не все корни нулевые. Таким образом, существует такое i, для которого $a_i(p) \neq 0$. Положим тогда $a = a_i(y)$.

□

14 Теория размерностей

Определение размерности 1. Пусть X — неприводимо, а n — максимальная длина цепи вида

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_n = X,$$

где каждое из X_i тоже неприводимо. В этом случае $n = \dim X$ — *размерность* многообразия X.

Определение размерности 2. $\dim X = tr.deg_{\Bbbk}(\Bbbk(X))$.

Замечание 14.1. В случае, когда $\Bbbk = \bar{\Bbbk}$, мы докажем равносильность этих определений.

Лемма 14.1. Пусть $\varphi : X \to Y$ — сюръективный конечный морфизм неприводимых алгебраических многообразий. Тогда $\dim X = \dim Y$.

Доказательство. Определение 2. По условию $\Bbbk[X]$ конечно порожден над $\Bbbk[Y]$. Тогда $[\Bbbk(Y) : \Bbbk(X)]$ — конечное расширение и $tr.deg\Bbbk(X) = tr.deg\Bbbk(y)$.

Определение 1. Рассмотрим некоторую цепочку в $X : X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_n = X$. Заметим, что по предложению 11.1.(3) образ такой цепочки — тоже цепочка в Y. Таким образом, $\dim X \leqslant \dim Y$.

Далее, если рассмотреть цепочку в $Y : Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_n = Y$, то прообраз каждого Y_i содержит неприводимую компоненту, так можно найти вложенную цепочку.

□

Предложение 14.1. Проекция π_p гиперповерхности $X = \{f = 0\}$ в $\mathbb{P}^n$ на гиперплоскость $x_0 = 0$ через произвольную точку p $(f(p) \neq 0)$ — конечный морфизм проективных многообразий.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]/f(x)$. Покроем $\mathbb{P}^n$ афиными картами и ограничим проекцию на одну из них. Тогда $\Bbbk[X \cap \{x_i \neq 0\}] = \Bbbk[u_1, \ldots, u_n - 1][\lambda]/f(\lambda p + u)$. Мы хотим проверить, что это — конечно порожденный модуль над $\Bbbk[u_1, \ldots . u_{n-1}]$. Достаточно доказать, что λ — цел над $\Bbbk[u_1, \ldots . u_{n-1}]$.

Поскольку f — однородный, то старший коэффициент при λ — $f(p) \neq 0$. Таким образом, при раскрытии всех скобок и делении на $f(p)$, получится приведенный многочлен, зануляющий λ.

□

Лемма 14.2. $\dim \mathbb{A}^n = n$.

Доказательство. Неравенство $\dim \mathbb{A}^n \leqslant n$ — очевидно: $\mathbb{A}^0 \subsetneq \mathbb{A}^1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{A}^{n-1} \subsetneq \mathbb{A}^n$. Для доказательства второго неравенства рассмотрим предпоследнюю компоненту $X = \{f(x) = 0\}$. Многообразие X можно отобразить конечным сюрьективным морфизмом в $\mathbb{A}^{n-1}$ (по предложению 14.1.). Тогда $\dim X = n - 1$.

$\square$

15 Критерий аффинности многообразия

Определение 15.1. Морфизм $f : X \to Y$ называется *аффинным*, если для любого $U \subset Y$ — открытого аффинного открытого подмножества, $f^{-1}(U)$ — тоже открытое аффинное.

Теорема. Критерий аффинности. Пусть X — алгебраическое многообразие, $\Bbbk[X] = \mathcal{A}$ — конечно порожденная алгебра. Предположим, существуют такие $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}$, что $(f_1, \ldots, f_k) = 1$ (то есть существуют такие $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}$, что $f_1 g_1 + \ldots + f_k g_k = 1$) и $D_{f_i} = \{f_i(x) \neq 0\}$.

Доказательство. Пока что не поняла, стоит понять и дописать

$\square$

16 Про некоторые свойства аффинности и конечности

Лемма 16.1. Пусть M — A – модуль и существуют такие $f_i, g_i \in A$, что $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k g_k = 1$. Предположим, что M_{f_i} — конечно порожденный A_{f_i} – модуль для любого i. Тогда M — тоже конечно порожденный.

Доказательство. Пусть $\dfrac{m_i^{(j)}}{f_j^{N_j}}$ — образующие M_{f_j}. Тогда для некоторых $\widetilde{a}_i^{(j)} \in A_{f_j}$ выполнено $m = \sum\limits_i \widetilde{a}_i^{(j)} \dfrac{m_i^{(j)}}{f_j^{N_j}}$, следовательно, для некоторых $a_i^{(j)} \in A$ и большого единого $N \in \mathbb{N}$ верно:

$$f_j^N m = \sum_i a_i^{(j)} m_i^{(j)}.$$

по условию существуют такие $b_i \in A$, что $\sum\limits_j b_j f_j^N = 1$. Тогда

$$m = \sum_j b_j m f_j^N = \sum_{i,j} b_j a_i^{(j)} m_i^{(j)}.$$

Таким образом, $m_i^{(j)}$ — образующие. $\square$

Лемма 16.2. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм многообразий, причем X — аффинное, а Y — отделимое. Тогда для любого открытого аффинного $U \subset Y$ подмножество $f^{-1}(U)$ — тоже открытое аффинное.

Доказательство. Y — отделимое. Тогда $\Delta_Y \subset Y \times Y$ — замкуто. Рассмотрим морфизм

$$\Phi : X \to X \times Y,$$

$$x \mapsto (x, f(x)).$$

В силу предложения 7.2. подмножество $\Gamma = \Phi(X)$ — замкнуто. Заметим, что $f^{-1}(U) \simeq (X \times U) \cap \Gamma$ — замкнутое подмножество аффинного, то есть открытое. $\square$

Предложение 16.1. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм многообразий, $Y = \cup U_i$ — покрытие открытыми аффинными картами. Предположим, что $V_i = f^{-1}(U_i) \subset X$ — тоже открытое аффинное. Тогда для любого открытого аффинного $U \subset Y$ подмножество $V = f^{-1}(U)$ — тоже открытое аффинное.

Доказательство. Мы хотим воспользоваться критерием аффинности. Для этого нам нужно придумать покрытие V аффинными множествами, удовлетворяющими условию критерия, и показать, что $\Bbbk[V]$ — конечно порожденная.

$U \cap U_i = U \backslash Z$, где $Z = V(g_1^{(i)}, \ldots, g_k^{(i)})$. Положим

$$U_{g_j^{(i)}} = U \cap U_i \backslash \{g_j^{(i)} = 0\}.$$

Поскольку V_i — аффинно по условию, то по лемме 16.2. $f^{-1}(U \cap U_i)$ — аффинно. Заметим, что

$$f^{-1}(U_i \cap U) = \bigcup_j (V_i)_{f^*(g_j^{(i)})} = \bigcup_j (V_i \cap \{f^*(g_j^{(i)} \neq 0)\}).$$

В силу леммы 16.1. алгебра будет конечной. Тогда критерий аффинности применим (критерий мы применяем для $(V_i)_{f^*(g_j^{(i)})}$, так можно, потому что для некоторых $h_{i,j}$ выполнено $\sum h_{i,j} g_j^{(i)} = 1$). $\square$

Предложение 16.2. Композиция $f \circ \varphi$ конечных морфизмов произвольных многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{f} Z$ — тоже конечна.

Доказательство. Это прямое следствие предложения 16.1. $\square$

Предложение 16.3. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм многообразий. Предположим, для открытого аффинного покрытия $Y = \cup U_i$ выполнены условия, что $V_i = f^{-1}(U_i)$ — открытые аффиные и $f : V_i \to U_i$ — конечные морфизмы, тогда для любого $U \subset Y$ морфизм $V = f^{-1}(U) \to U$ — тоже конечный.

Доказательство. В силу предложения 16.1. подмножество V — аффинно. Обозначения будут все те же, что и в предложении 16.1.

По условию модуль $\Bbbk[V_i]$ — конечно порожден над $\Bbbk[U_i]$. Тогда $\Bbbk[V_i]_{f^* g_j^{(i)}}$ — конечно порожден над $\Bbbk[U_i]_{g_j^{(i)}}$. В силу леммы 16.1. тогда $\Bbbk[V]]$ — конечно порожден над $\Bbbk[U]$.

□

17 Теорема Крулля о главных идеалах

Замечание 17.1. Если $\{f = 0\} = Z \subset \mathbb{A}^n$, то $\dim Z = n - 1$. Это мы по сути доказали в 14 части.

Теорема (Крулль). Пусть X — произвольное неразложимое многообразие, $f \in \Bbbk[X]$ — некоторый необратимый элемент (иначе говоря, $(f) \neq \Bbbk[X]$). Рассмотрим подмногообразие $Z = \{f = 0\}$ (это замкнутое подмножество X). Тогда $\dim Z = \dim X - 1$.

Доказательство. Мы можем считать, что X – аффинно и $\dim X = N$. Тогда существует вложение $\pi^* : \Bbbk[t_1, \dots, t_N] \hookrightarrow \Bbbk[X]$, которое отправляет t_i в базис трансцендентности. $\Bbbk[X]$ — конечно порожденный модуль над $\Bbbk[t_1, \dots . t_N]$. Таким образом, мы имеем конечное сюрьективное отображение

$$\pi : X \to \mathbb{A}^N.$$

По сути тут мы доказали, что любое аффинное многообразие может быть конечно вложено в некторое $\mathbb{A}^n$.

Рассмотрим морфизм

$$\varphi = \pi \times f X \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1,$$

$$\varphi(x) = (\pi(x), f(x)).$$

Тогда мы имеем

$$\varphi^* : \Bbbk[\mathbb{A}^N][t] \to \Bbbk[X],$$

$$\varphi^*(t)(x) = t(\varphi(x)) = f(x).$$

Заметим, что $\Bbbk[X]$ — конечно порожденный и над $\Bbbk[\mathbb{A}^n][t]$. По лемме Нётер о нормализации f — целый над $\Bbbk[\mathbb{A}^N]$ (тут $\Bbbk[\mathbb{A}^N]$ отождествляется с $\pi^*(\Bbbk[\mathbb{A}^N])$), то есть существуют такие $a_i \in \mathbb{A}^N$, что

$$f^m + a_{m-1}f^{m-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

$\Bbbk[\mathbb{A}^N]$ — нормально, потому что факториально. Рассмотрим две вложенные точные последовательности:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Bbbk[\mathbb{A}^N][t] \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Bbbk[X] \arrow[d, hook] \\
0 \arrow[r] & \widetilde{\ker} \arrow[r] & \Bbbk(\mathbb{A}^N)[t] \arrow[r] & \Bbbk[X] \otimes \Bbbk(\mathbb{A}^N)
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $\widetilde{\ker}$ — главный идеал в $\Bbbk(\mathbb{A}^N)[t]$, то есть $\widetilde{\ker} = (F(t))$, где F — многочлен с коэффициентами $\Bbbk(\mathbb{A}^N)$. По предложению 13.2 коэффициенты многочлена лежат на самом деле в $\Bbbk[\mathbb{A}^N]$. Таким образом, $\ker = \widetilde{\ker} \cap \Bbbk[\mathbb{A}^N][t] = (F(t))$. Таким образом, $\varphi(X)$ — множество нулей $F(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_0$.

Поскольку φ — конечный морфизм, $\varphi(X)$ — замкнуто в $\mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^1$. По лемме 14.1. $\dim X = \dim \varphi(X)$ и $\dim(Z) = \dim(\varphi(Z))$. Заметим, что $\varphi(Z) = \varphi(X) \cap \{t = 0\}$. То есть $\varphi(Z)$ лежит в гиперплоскости $t = 0$, тогда по замечанию 17.1. $\dim(\varphi(Z)) = N - 1$.

□

Следствие 17.1. Пусть X — произвольное алгебраическое многообразие, $f_1, \ldots, f_t \in \Bbbk[X]$ — алгебраически независимы, $Z = \{f_1 = 0, \ldots, f_r = 0\}$. Тогда $\dim Z \leqslant \dim X - r$.

Доказательство. Будем доказывать по индукции, используя теорему Крулля. Если проблем не возникнет (то есть условия теоремы выполнены на каждом шаге), то достигается равенство. Если возникли проблемы, это значит, что многообразие в некоторый момент разложилось на компоненты. Без ограничения общности $Z(f_1) = \cup Z_i(f_1)$ — разложение на неприводимые компоненты. На одной из компонент f_2 может быть тождественно равно 0, таким образом, неравенство становится строгим.

□

Предложение 17.1. Пусть $X, Y \subset \mathbb{A}^N$ — аффинные многообразия и они непусто пересекаются. Тогда $\dim(X \cap Y) \geqslant \dim X + \dim Y - N$.

Доказательство. $\mathbb{A}^N$ — отделимо, $\Delta(\mathbb{A}^N) \hookrightarrow \mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^N$. Подмногообразие $(X \times Y) \cap \Delta(\mathbb{A}^N) = X \cap Y$ задается N полиномами: $x_i = y_i$. Тогда утверждение верно по следствию из теоремы Крулля.

□

Предложение 17.2. Если $X, Y \subset \mathbb{P}^N$ — проективные многообразия. Если $\dim X + \dim Y \geqslant N$, то многообразия X и Y непусто пересекаются.

Доказательство. $\mathbb{P}^n$ — проекция $\mathbb{A}^{N+1} \backslash \{0\}$, пусть $\hat{X}$, $\hat{Y}$ — прообразы X, Y соответственно. Заметим, что $\dim \hat{X} = \dim X + 1$ и $\dim \hat{Y} = \dim Y + 1$. Тогда по предложению 17.1. $\dim(X \cap Y) + 1 \geqslant \dim X + 1 + \dim Y + 1 - (N+1) = (\dim X + \dim Y - N) + 1 \geqslant 1$. □

18 Теорема о размерности слоя и следствия из неё

Теорема о размерности слоя. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий и $\overline{f(X)} = Y$. Тогда

(1) для любой точки $x \in X$ выполнено неравенство $\dim f^{-1}(f(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$;

(2) Существует такое открытое подмножество $U \subset Y$, что для любой точки $y \in U$ достигается равенство $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$.

Доказательство. **(1)** Без ограничения общности X, Y — аффинные.

По теореме Нётер о нормализации (аналогично тому, как мы это делали в теореме Крулля) мы имеем

$$\pi : Y \to \mathbb{A}^m, \ m = \dim Y,$$

где π — конечный сюрьективный морфизм.

Положим $\varphi : X \underset{f}{\to} Y \underset{\pi}{\to} \mathbb{A}^m$. Поскольку π — конечно, то $\pi^{-1}(z) = \bigcup\limits_i y_i$ — конечное множество. Пусть $z = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{A}^m$, эта точка определяется максимальным идеалом $(z_1 - a_1, \ldots, z_m - a_m)$. Что такое $\pi^{-1}(z)$? Это пересечение m гиперповерхностей $\pi^*(z_i - a_i) = 0$. Таким образом, множество $\varphi^{-1}(z) = \bigcup\limits_i f^{-1}(y_i)$ определяется m полиномами. Пусть $x \in \varphi^{-1}(z)$. По следствию из теоремы Крулля $\dim(\varphi^{-1}(z)) \geqslant \dim X - m = \dim X - \dim Y$.

(2) Предположим, $\dim \mathbb{A}^N > \dim f^{-1}(y)$. Замкнуто вложим $i : X \hookrightarrow \mathbb{A}^N$. Тогда

$$\psi : X \Rightarrow \mathbb{A}^N \times Y,$$

$$x \mapsto (i(x), f(x)).$$

Это инъекция. Рассмотрим новое вложение:

$$X \hookrightarrow \mathbb{A}^N \times Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N \times Y.$$

Выберем точку $p \in \mathbb{P}^N$ так, чтобы $p \times Y \notin \overline{X}$. Пусть $Z = p \times Y \cap \overline{X} \neq \overline{X}$. Заметим, что $Z \subset \mathbb{P}^n \times Y$, а $\mathbb{P}^N$ — полное, следовательно, $\pi_Y(Z) \subset Y$ — замкнуто. Существует точка $p \times y \notin Z$, тогда $\pi_Y(Z) \neq Y$. Рассмотрим $U_1 = Y \backslash \pi_Y(Z)$ — открытое подмножество.

Положим $X_1 = \overline{X} \cap (\mathbb{P}^N \times U_1)$. Тогда, если спроецировать в p на какую-то гиперплоскость, мы имеем $X_1 \to \mathbb{A}^N \times U_1 \times \mathbb{A}^{N-1} \times U_1$ — сюръективный конечный морфизм. Будем так спускаться и на ходу заменять X, Y на их аффинные подмножества. Мы можем так продолжать, пока умеем выбирать точку p. А когда не можем? Когда $\overline{X} = \mathbb{P}^N \times Y$. Это значит, что $\dim X - \dim Y = N$. Ограничим на слой: $\varphi^{-1}(y) = \mathbb{A}^N \times y$, то есть N — размерность слоя.

□

Теорема Шевалле о полунепрерывности. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий, $\overline{f(X)} = Y$

$$X_k = \left\{x \in X \;\middle|\; \dim_x f^{-1}(f(x)) \geqslant k\right\}.$$

Тогда подмножество X_k — замкнуто.

Доказательство. По теоерме о размерности слоя это выполнено для $k = \dim X - \dim Y$ (потому что $X_k = X$). Дальше будем доказывать индукцией по $\dim X + \dim Y$ и для больших k. По **(2)** мы знаем, что существует такое $U \subset Y$, что $f^{-1}(U) \cap X_k = \varnothing$. То есть X_k лежит в подмногообразии, размерность которого строго меньше $\dim X$. Вот и переход. □

Следствие 18.1. Предположим, $f : X \to Y$ — замкнутый морфизм алгебраических многообразий и $\dim(f^{-1}f(x)) = const$, а Y и все слои — неприводимыю. Тогда X — тоже неприводимо.

Доказательство. Пусть это не так и $X = X_1 \cup X_2$ — разложение на компоненты.

Заметим, что $\varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}\big|_{X_1}(y) \cup \varphi^{-1}\big|_{X_2}(y)$, следовательно, из неприводимости $\varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}\big|_{X_1}(y)$. $(X_1)_k$, $(X_2)_k$ — замкнуты в X. Тогда $\varphi((X_1)_k), \varphi((X_2)_k)$ — замкнуты в Y. Но Y — неприводимо, то есть $Y = \varphi((X_1)_k)$. Таким образом, все слои лежат в одной и той же компоненте X_1, значит, эта компонента совпадает с X

□

19 Лемма о конечных морфизмах

Предложение 19.1. Пусть $f : X \to Y$ — конечный морфизм аффинных многообразий, Y — нормально, $\Bbbk[X]$ — конечное расширение $\Bbbk[Y]$. Тогда для любого $y \in Y$
$$\#f^{-1}(y) \leqslant [\Bbbk[X] : \Bbbk[Y]].$$

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in f{-}1(y)$. Рассмотрим такое $g \in \Bbbk[X]$, что $g(x_i)\neg(x_j)$. Тогда минимальный многочлен $g(x)$ — это $F \in \Bbbk[Y](t)$ (в силу нормальности Y):

$$F(g) = g^n + a_{n-1}(f(x))g^{n-1} + \ldots + a_0(f(x)) = 0.$$

$\square$

20 Грассманианы

Определение 20.1. *Грассманианом* $Gr(k, n)$ называется множество всех подпространств размерности k в $\Bbbk^n$.

Мы хотим на этом множестве задать различные структуры, чтобы оно было хорошим.

Топологическая и алгебраическая структуры. Это множество можно представлять себе как множество матриц размера $k \times n$ ранга k, под действием группы $GL_k(\Bbbk)$ левыми умножениями. У каждой такой матрицы есть представитель, содержащий единичную подматрицу E_k. Покроем грассманиан аффинными картами U_I, где $I = (i_1, \ldots, i_k)$ — строго возраставющий набор индексов, а

$$U_I = \left\{x \in Mat_{k\times n} \;\middle|\; det(s_I(x)) \neq 0\right\}/GL_k,$$

где $s_I(x)$ — подматрица, соответствующая этому набору столбцов. Заметим, что в U_I лежат подпространства, которые биективно проектируются на I –ое стандартное подпространство вдоль других базисных векторов.

Рассмотрим теперь пространство матриц $Mat_{k\times(N-k)} \simeq \mathbb{A}^{k(N-k)}$. Для всех I ему соответствует карта X_I, которая состоит из матриц $Mat_{k\times N}$, приклеиванием единичной матрицы E_k на место I. Таким образом, имеем биективное отображение $X_I \to U_I$.

21 Вложение Плюккера

Пусть $U \subset V$ — линейные векторные пространства, $\dim U = k$, $\dim V = N$. Рассмотрим вложение $\Lambda^k U \hookrightarrow \Lambda^k V$. Заметим, что $pt = \mathbb{P}(\Lambda^k U) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k V)$. Это вложение $\mathcal{P} : Gr(k, N) \to \Lambda^k V$ называется *вложением Плюккера.* Это действительно вложение, потому что разные подпространства имеют разные базисы. Пусть $t \in \Lambda^k V$, тогда $t = \sum\limits_I a_I e_I = \sum\limits_I a_{i_1,\ldots,i_k} e_{is_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$. Мы хотим найти такие условия на t, что $t = u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$, то есть этот тензор разложим.

Определение 21.1. *Аннулятором* тензора t назовем множество

$$Ann(t) = \big\{ v \in V \ \big|\ v \wedge t = 0 \big\}.$$

Предложение 21.1. Тензор t — разложим ($t = u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$), если $Ann(t) = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$.

Доказательство. Ясно, что $Ann(t)$ — векторное подпространство V. Разложим дополним тогда базис $u_1, \ldots, u_k$ до базиса V. В получившемся большом базисе запишем t. Получается, что все одночлены содержат все u_i, что и требовалось.

□

Замечание 21.1. Это условие, кстати, однозначно восстанавливает U.

Определение 21.2. Пусть $t \in V^{\otimes k}$ (аналогично для $\Lambda^k V$, $S^k V$), определим

$$Supp(t) = \big\{ \text{ наименьшее подпространство } U \subset V \ \big|\ t \in U^{\otimes k} \big\}.$$

Предложение 21.2. $Ann(t) \subset Supp(t)$.

Доказательство. Предположим, $v \notin Supp(t) = U$. Выберем базис $u_1, \ldots, u_m$ в U. Дополним этот базис векторами $v, w_1, \ldots, w_l$. Если $v \in Ann(t)$, то в записи тензора t в выбранном базисе в каждом одночлене встречается v, а должны только $u_1, \ldots, u_m$, противоречие.

□

Следствие 21.1. Тензор разложим, если $Ann(t) = Supp(t)$.

Пусть $\varphi_I : V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes m}$, где $I \subset \{1, \ldots, k\}$, $k > m$, действует по правилу

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k, l_1 \otimes \ldots \otimes l_m) \mapsto l_1(v_{i_1}) \cdot \ldots \cdot l_m(v_{i_m}).$$

Пусть $U = Supp(t)$, обозначим $\Phi_I(t) \subset U^{\otimes(k-m)} \subset V^{\otimes(k-m)}$ — образы всевозможных (t, l).

Обозначим $\{\bar{i}\} = \{1, \ldots, \hat{i}, \ldots, k\}$.

Предложение 21.3. $Supp(t)$ — линейная оболочка $\Big\langle \Phi_{\{\bar{i}\}}(t) \Big\rangle$ по всем $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Доказательство.
$$\Phi_{\{\bar{i}\}} : V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes (k-1)} \to V,$$
Заметим, что $\Phi_{\{\bar{i}\}}(t) \subset Supp(t)$. Пусть $u_1, \dots, u_m$ — базис в U, $w_{m+1}, \dots, w_n$ его дополнение до базиса V, $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_{m+1}, \dots \eta_n$ — соответствующий двойственный базис.

Предположим противное, что $\left\langle \Phi_{\{\bar{i}\}}(t) \right\rangle_i \neq Supp(t)$. Это значит, что существует линейная функция ξ, которая зануляется на всех $\Phi_{\{\bar{i}\}}(t)$, но не зануляется на $Supp(t)$. Без ограничения общности $\xi = \xi_1$. Докажем тогда, что t может быть записана в базисе $u_2, \dots, u_k$.

Расмотрим одночлен, входящий в t: $a_I u_1 \otimes u_{i_2} \dots \otimes u_{i_k}$.
$$a_I = \langle t, \xi_1 \otimes \xi_{i_2} \otimes \dots \xi_{i_k} \rangle = \langle \xi_1, \langle t, \xi_{i_2} \otimes \dots \xi_{i_k} \rangle \rangle \in \left\langle \xi_1, \Phi_{\{\bar{1}\}} \right\rangle = \{0\}.$$
□

22 Соотношения Плюккера

В силу всего сказанного выше, нам интересно понять, когда $Ann(t) = Supp(t)$. А это так тогда и только тогда, когда $\Phi_{\{\bar{i}\}}(t) \in Ann(t)$ для всевозможных i. Таким образом, $t \in \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ соответствует некоторое k – гиперплоскости пространства V, когда для всех $i \in \{1, \dots, m\}$ и для всех $J = (j_{i_1}, \dots, j_{i_{k-1}}) \subset \{1, \dots, n\}$ выполнено $t \wedge \Phi_{\{\bar{i}\}}(t, \xi_J) = 0$. Ясно, что это какие-то квадратные уравнения от координат a_I. Эти уравнения определяют проективное многообразие $Gr(k, N)$ и называются *соотношениями Плюккера.* Отметим, что зачастую их больше, чем нужно.

Далее будем рассматривать случай $k = 2$.

Предложение 22.1. (Это мы доказывали на геометрии) t — разложимо, тогда и только тогда, когда $t \wedge t = 0$.

Предложение 22.2. Пусть ω, η — разложимые, тогда $\omega \wedge \eta = 0$ тогда и только тогда, когда $U \cap W = 6\{0\}$.

Доказательство. Пусть $U \cap W = \{0\}$. Тогда любые их базисы между собой независимы. Тогда и произведение не может обнулиться.

Ну а в другую сторону совсем очевидно.

□

Замечание 22.1. В силу предыдущих предложений, в случае $k = 2$ многообразие Грассмана — квадрика в проективном пространстве размерности $\frac{n(n-1)}{2} - 1$, то есть сама она имеет размерность $\frac{n(n-1)}{2} - 2$. Соотношение $\omega \wedge \eta = 0$ значит, что соответствующие точки лежат в касательных пространствах друг друга.

23 Разложение Шуберта

Надо написать.

24 Кубические поверхности в $\mathbb{P}^3$

Пусть V — четырехмерное векторное пространство. $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$, $S_f \subset \mathbb{P}^3$ — поверхность размерности d, задаваемая однородным многочленом f соответствующей степени. Мы хотим понять, когда такая поверхность содержит прямую $\ell \in Gr(2,4)$.

Пусть $\Gamma = 6\big\{(S,\ell) \mid \ell \subset S\big\} \subset \mathbb{P}(S^dV^*) \times Gr(2,4)$.

Напоминание. Грассманиан $Gr(2,4)$ живет в $\mathbb{P}^5$ и задается *квадрикой Плюккера* $Q = x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0$.

Предложение 24.1. Все слои $\Gamma \to Gr(2,4)$ — проективные пространства размерности $\dfrac{d(d+1)(d+5)}{6} - 1$.

Доказательство. Рассмотрим прямую ℓ, без ограничения общности она задается уравнениями $x_2 = x_3 = 0$, то есть определяется идеалом (x_2, x_3) (он простой $\Bbbk[x_0,x_1,x_2,x_3]/(x_2,x_3) = \Bbbk[x_0,x_1]$).

Если f зануляется на ℓ, то $f \in (x_2,x_3)$, другими словами $f(x) = x_2F_2(x) + F_3(x)$. То есть f лежит в образе отображения

$$\Phi : S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \to S^dV^*,$$

$$\Phi : (F_2, F_3) \mapsto x_2F_2(x) + F_3(x).$$

Заметим, что $\ker\Phi \simeq S^{d-2}V^*$. Тогда несложно посчитать, что $\dim(Im(\Phi)) = \dfrac{d(d+1)(d+5)}{6}$.

$\square$

Замечание 24.1. $\Gamma \to Gr(2,4)$ — сюръективно, тогда по следствию из теоремы Шевалле Γ — неприводимо и $\dim\Gamma = \dfrac{d(d+1)(d+5)}{6} + 3$.

Тут осталась 1-2 лекции.