Вариант 0 (для разбора)

(1) ([10]) В области $Q = \{0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ 0 < t < +\infty\}$ решить задачу

$$u_{tt} - \Delta u = 3\sin(2t)\sin(x)\cos(y/2),$$

с условиями $\begin{cases} u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 6\sin(2x)\cos(3y/2), \end{cases}$ $\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$

Указать, является ли полученное решение классическим решением этой задачи.

(2) ([10]) Записать формальное решение в области $Q = \{0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ 0 < t < +\infty\}$ задачи

$$u_{tt} - \Delta u = 3\sin(2t)f(x,y),$$

с условиями $\begin{cases} u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$

Указать, определяет ли полученная формула обобщенное решение дифференциального уравнения, если $f \in L^2(\Omega)$.

(3) ([10]) найти первую и вторую обобщенные производные функции

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 1, x < 1, \\ 5, x = 1, \\ x - 1, x > 1 \end{cases}$$

Являются ли эти производные регулярными обобщенными функциями?

(4) ([10]) В области $Q = \{0 < x < \pi,\ 0 < t < +\infty\}$ решить задачу

$$u_t = 4u_{xx} + te^{-t}\sin\frac{5x}{2}, \qquad u(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \quad u(0,x) = \sin\frac{x}{2}\cos x.$$

Дополнительная задача:

В области $\begin{cases} \Omega = \{1 < r < 2\}, \\ r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi = \arctan y/x, \end{cases}$ решить задачу $\begin{cases} \Delta u = 2r^3\cos(2\varphi) \quad \text{в } \Omega \\ u|_{r=1} = 0, \\ u|_{r=2} = 2\cos^2\varphi. \end{cases}$

(Лапласиан в полярной системе координат записывается как

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}.)$$

Вариант 0 (для разбора)

(1) ([10]) В области $Q = \{0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ 0 < t < +\infty\}$ решить задачу

$$u_{tt} - \Delta u = 3\sin(2t)\sin(x)\cos(y/2),$$

с условиями $\begin{cases} u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 6\sin(2x)\cos(3y/2), \end{cases}$ $\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$

Указать, является ли полученное решение классическим решением этой задачи.

(2) ([10]) Записать формальное решение в области $Q = \{0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ 0 < t < +\infty\}$ задачи

$$u_{tt} - \Delta u = 3\sin(2t)f(x, y),$$

с условиями $\begin{cases} u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$

Указать, определяет ли полученная формула обобщенное решение дифференциального уравнения, если $f \in L^2(\Omega)$.

(3) ([10]) найти первую и вторую обобщенные производные функции

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 1, x < 1, \\ 5, x = 1, \\ x - 1, x > 1 \end{cases}$$

Являются ли эти производные регулярными обобщенными функциями?

(4) ([10]) В области $Q = \{0 < x < \pi,\ 0 < t < +\infty\}$ решить задачу

$$u_t = 4u_{xx} + te^{-t}\sin\frac{5x}{2}, \qquad u(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad u(0, x) = \sin\frac{x}{2}\cos x.$$

Решения

Задача 1