2к Мат. Анализ Семинар № 4

Евклидовы пространства.

Нормированных и банаховых пространств очень много. $l_1, l_2, l_\infty, C[a,b], L_1(a,b)$. Все эти пространства разные, они не изометричны. В них разные свойства, например, разные топологии.

Евклидовы пространства все изоморфны (с сохранением линейной) структуры. Точнее полные евклидовы пр-ва.

---

① Скалярное произведение

E - линейное векторное пр-во над $\mathbb{R}$ - линейное векторное произведение:

Определение: Скалярное произведение

$\forall x, y \in E \longrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}$

$\forall x, y \in E$

1) $(x,y) = (y,x)$

2) $(x_1+x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ $\forall x_1, x_2, y \in E$

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$

4) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Утв. (неравенство Коши-Буняковского)

$|(x,y)| \leq (x,x)(y,y)$ $\forall x, y \in E$

Док-во: $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0$, $x, y \in E$.

$\varphi(\lambda) = \lambda^2(x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y)$

это квадратичный трехчлен, $\varphi(\lambda) \geq 0$.

тогда его дискриминант $D \le 0$, т.е.

$$\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \le 0.$$

Следовательно, $(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$. □

Задача 1. Неравенство К-Б есть равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y являются коллинеарными.

Решение: Если один из векторов x, y является нулевым, то это очевидно. $(x,y)=0$, $(x,x)=0$. Пусть оба x и y ненулевые. Если они коллинеарны, то $\exists \lambda \ne 0$: $y = \lambda x$, тогда

$$(x,y)^2 = (\lambda x, x)^2 = \lambda^2 (x,x)^2 = (x,x)\lambda^2(x,x) =$$
$$= (x,x)(\lambda x, \lambda x) = (x,x)\cdot(y,y)$$ - равенство

если x и y - неколлинеарны, то $\lambda x + y \ne 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, т.е. тогда $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) > 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, т.е.

$$D < 0 \Rightarrow (x,y)^2 < (x,x)(y,y).$$

Понятие нормы в евклидовом пр-ве

$$\|x\|_E = \|x\| = \sqrt{(x,x)} \quad \forall x \in E.$$

Задача 2. Проверить, что это норма.

1. $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \ge 0$, $|x| = 0 \Rightarrow (x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x,x)} = |\alpha| \cdot \|x\|$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. Неравенство треугольника:

Из неравенства КБ следует, что

$$|(x,y)| \le \|x\|\cdot\|y\| \quad \forall x,y \in E$$

Проверим нер-во треугольника.

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) =$$
$$= \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 =$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Если есть норма, то есть расстояние, или метрика:

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y, x-y)}.$$

Есть топология, есть понятие сходимости.

Задача 3. Проверить, что операция сложения, операция умножения и скалярное произведение все непрерывны относительно введенной топологии.

Решение: Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$ в E, $\lambda_n \to \lambda$ в $\mathbb{R}$, т.е. $\|x_n - x\|_E \to 0$ $\|x_n - x\|_E \to 0$ $|\lambda_n - \lambda| \to 0$. Проверим, что

$$x_n + y_n \to x + y, \quad \lambda_n x_n \to \lambda x, \quad (x_n, y_n) \to (x, y)$$

Это будет означать непрерывность всех этих операций в топологии E.

Действительно, $\|x_n+y_n-x-y\| \le \|x_n-x\|+\|y_n-y\|$

Следовательно, $x_n+y_n \to x+y$ в E

$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n(x_n-x)+(\lambda_n-\lambda)x\| \le$

$\le \|\lambda_n\| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n-\lambda|\,\|x\| \le C\cdot\|x_n-x\|+|\lambda_n-\lambda|\,\|x\|$

поскольку $\{\lambda_n\}$ – ограничена, $|\lambda_n|\le C$.

Следовательно, $\lambda_n x_n \to \lambda x$ в E

Наконец, рассмотрим скалярное произведение

<u>Лемма</u> Если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$.

(Это верно в любом нормированном пространстве).

<u>Док-во</u>: Применим неравенство треугольника:

$\|x\| \le \|x-x_n+x_n\| \le \|x-x_n\|+\|x_n\|$.

Значит $\|x\|-\|x_n\| \le \|x-x_n\|$.

Аналогично $\|x_n\|-\|x\| \le \|x-x_n\|$

т.е. $\big|\,\|x\|-\|x_n\|\,\big| \le \|x-x_n\| \to 0$.

Следовательно, $\|x_n\| \to \|x\|$.

<u>Следствие</u> Если $x_n \to x$, то $\|x_n\|$ – ограничена

Докажем непрерывность скалярного произведения: $x_n \to x$, $y_n \to y$.

Тогда $\|x_n\|$ – ограничена, $\|x_n\| \le C$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \leq$$

$$\leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| +$$

$$+ \|x_n - x\| \cdot \|y\| \leq C \cdot \|y_n - y\| + \|y\| \cdot \|x_n - x\| \to 0.$$

Следовательно $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

В вещественном евклидовом пространстве можно так же ввести понятие угла между векторами.

Угол φ между x и y определяется:

$$-1 \leq \cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \quad (\text{Нер. К.Б})$$

По этой формуле однозначно задается угол $\varphi \in [0, \pi]$

<u>Определение</u> Если $(x, y) = 0$ то векторы x и y называются ортогональными, т.е. $\varphi = 90^\circ$.

Примеры евклидовых пространств.

1) $E = \mathbb{R}^n$, $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

2) $E = \ell_2 = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Заметим, что если $x, y \in \ell_2$, т.е.

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ сходится абсолютно. Действительно, воспользуемся нер-вом К Б в конечномерн. простр-в

$$\sum_{k=n}^{n+m} |x_k \cdot y_k| \le \underbrace{\left(\sum_{k=n}^{n+m} x_k^2\right)^{1/2}}_{\le \varepsilon^{1/2}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=n}^{n+m} y_k^2\right)^{1/2}}_{\le \varepsilon^{1/2}}$$

т.е $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N, \forall m \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=n}^{n+m} |x_k y_k| \le \varepsilon$

Легко проверить, что это скалярное произведение. Поэтому, в частности, в ℓ_2 выполнено неравенство К Б

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2\right).$$

---

3) $E = L_2(a, b) = \{ f(t)$ - измеримые функции, для которых $\int_a^b f(t)^2 dt < \infty \}$

Скалярное произведение в $L_2(a,b)$

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt.$$

<u>Утверждение:</u> Если $f, g \in L_2(a,b)$, то

1) $f(t) \cdot g(t) \in L_1(a,b)$ и $\int_a^b f(t) g(t) dt < \infty$.

2) $f(t)+g(t)\in L_2(a,b)$

Док-во: Вытекает из неравенств

$$|f(t)\cdot g(t)|\le \frac{1}{2}\left(f(t)^2+g(t)^2\right)$$

$$|f(t)+g(t)|^2 \le f(t)^2+2|f(t)|\cdot|g(t)|+|g(t)|^2$$

Нер-во К-Б: $\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$

Вопрос: когда нормированное пространство является евклидовым пространством? Точнее, когда норма в пространстве порождена некоторым скалярным произведением.

Необходимое условие: тождество параллелограмма: $\forall x,y\in E$ — евкл. пр-во

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

Док-во $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2$

$\|x-y\|^2=\|x\|^2-2(x,y)+\|y\|^2$

Сложим: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$

Задача 4. Доказать, что пространство l_1 не является евклидовым.

$l_1=\{\{x_k\}: \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty\}$

Решение: Найдем 2 вектора, которые не удовлетворяют тождеству пар-мма.

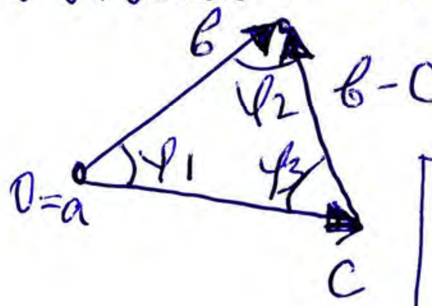
$x = (1, 0 \dots 0) \quad \|x\| = 1 \quad \|x+y\| = 2$

$y = (0, 1, 0 \dots 0) \quad \|y\| = 1 \quad \|x-y\| = 2$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8, \quad 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 4 \neq 8$$

Еще пример не евклидовых простр-ва: $C[a,b]$, l_∞. (Дом. задание)

Задача 5. В пространстве $E = L_2(0,1)$ найти углы треугольника с вершинами: $a = 0$, $b = 1$, $c = t$.



$$\cos\varphi_1 = \frac{(b,c)}{\|b\| \cdot \|c\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi_1 = 30^\circ$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(b,c) = \int_0^1 1 \cdot t\,dt = \frac{1}{2} \\ &\|b\| = 1, \quad \|c\|^2 = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}, \quad \|c\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}}$$

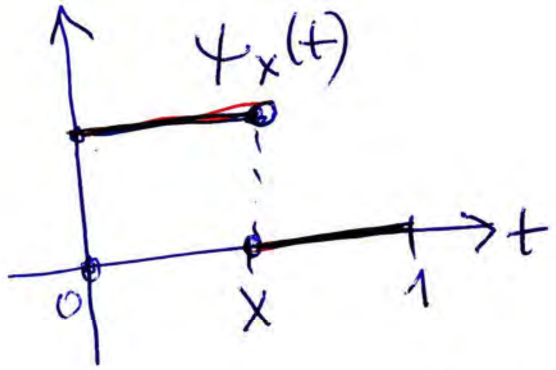
$$\cos\varphi_2 = \frac{(-b, c-b)}{\|b\| \cdot \|c-b\|} = \frac{(b, b-c)}{\|b\| \cdot \|c-b\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi_2 = 30^\circ$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(b, b-c) = \int_0^1 (1-t)\,dt = t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ &\|b-c\|^2 = \int_0^1 (t-1)^2\,dt = \frac{(t-1)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}}$$

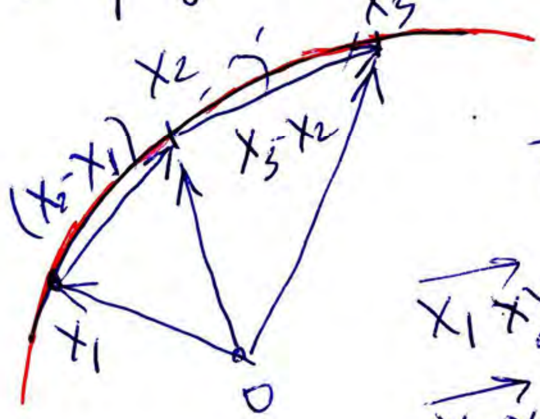
$$\cos\varphi_3 = \frac{(-c, b-c)}{\|c\| \cdot \|b-c\|} = \frac{(c, c-b)}{\|c\| \cdot \|c-b\|} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{(c, c-b) = \int_0^1 t(t-1)\,dt = \int_0^1 (t^2 - t)\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}} \quad \varphi_3 = 120^\circ$$

Задача 6. Рассмотрим в $L_2(0,1)$ кривую $f_x(t)$, где $f_x(t) = \chi_{[0,x]}(t)$



Это кривая в евклидовом пр-ве $L_2(0,1)$. Найти угол между $[x_1, x_2]$ и $[x_2, x_3]$ хордами



$\overrightarrow{x_1x_2} = x_2 - x_1$, $\overrightarrow{x_2x_3} = x_3 - x_2$

$$\overrightarrow{x_1x_2} = f_{x_2}(t) - f_{x_1}(t) = \chi_{[x_1, x_2]}(t)$$

$$\overrightarrow{x_2x_3} = f_{x_3}(t) - f_{x_2}(t) = \chi_{[x_2, x_3]}.$$

$$(\overrightarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_2x_3}) = \int_0^1 \chi_{[x_1,x_2]}(t) \cdot \chi_{[x_2x_3]}(t)\,dt = 0.$$

<u>Значит</u>: эти хорды ортогональны!

Для любых x_1, x_2, x_3.

В $\mathbb{R}^3$ (и в $\mathbb{R}^4$) такой кривой быть не может! А в бесконечномерном пространстве может.