Логика и алгоритмы 2021. Листок 2.
Срок сдачи 09.04.2021

Каждая задача оценивается некоторым количеством баллов, которое указано в скобках после ее номера. Оценка за листок равна сумме баллов сданных задач, но не может превышать 10.

В задачах 2, 7, 8, 9, 12 рассматриваются сигнатуры с равенством и все модели предполагаются нормальными.

---

1. (1) Докажите, что любую булеву функцию от произвольного числа аргументов можно записать с помощью $x \leftrightarrow y$ (эквиваленция), $x \oplus y$(сложение по модулю 2) и функции $maj(x, y, z)$ от трех аргументов, которая равна значению, которое встречается среди аргументов x, y и z по крайней мере 2 раза.

2. Для сигнатуры с одним предикатным символом $\leqslant$ и равенством, рассмотрим модель $M = (P(\mathbb{N}), \subset)$ (т.е. носитель состоит из всех подмножеств $\mathbb{N}$, а $\leq$ интерпретируется как включение). Докажите, что в M:
а) (1 балл) множество $\{\{0\}\}$ не определимо,
б) (1 балл)множество $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots\}$ определимо.

3. (1) Приведите следующую формулу, в которой P и Q — двуместные предикатные символы, к предваренной нормальной форме
$$\forall x \exists y \big(P(x, a) \to Q(y, a)\big) \to \exists y \big(P(b, y) \to \neg \forall x Q(y, x)\big).$$

4. Для следующих формул проверьте выполнимость и общезначимость:
   (a) (1 балл) $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \to \exists z \forall y \exists x P(x, y, z)$;
   (b) (1 балл) $\exists x \forall y \exists z P(x, y, z) \to \forall y \exists z \exists x P(x, y, z)$.

5. (2) Покажите, что следующая формула выполнима, но только на бесконечных моделях:
$$\neg \exists x \left(\exists y \left(R(y, x) \wedge \forall z (R(x, z) \to R(y, z))\right) \to R(x, x)\right).$$

6. Докажите выводимость следующих формул в исчислении предикатов, не используя теорему о полноте:
   (a) (2 балл) $(\forall x\, A \wedge \forall x\, B) \to \forall x\, (A \wedge B)$;
   (b) (2 балл) $\exists x\, [a/x](A \wedge B) \to (\exists x\, [a/x]A \wedge B)$, где a не входит в B;

7. (2) Пусть сигнатура Ω конечна и состоит из одноместных предикатных символов и равенства. Докажите, что всякая теория в сигнатуре Ω имеет не более счетного числа попарно неизоморфных счетных нормальных моделей.

8. (2) Докажите, что теория в сигнатуре с одним 2-местным предикатным символом R, равенством и двумя аксиомами:
$$\begin{array}{ll} \forall x \forall y\, (R(x, y) \to R(y, x)) & \text{(симметричность)}, \\ \forall x\, R(x, x) & \text{(рефлексивность)}, \end{array}$$
имеет бесконечно много попарно не эквивалентных расширений (в той же сигнатуре).

9. (2) Рассмотрим абелевы группы в сигнатуре $\{0, +, =\}$. Верно ли, что $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \equiv \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$?

10. (1) Постройте формулу в какой-нибудь сигнатуре без равенства, имеющую 3-элементную модель, но не имеющую 2-элементных моделей.

11. (2) Можно ли построить в сигнатуре без равенства формулу, имеющую 2-элементную модель, но не имеющую 3-элементных моделей?

В последней задаче используются следующие сокращения:

$$\exists! x\, A(x) := \exists x (A(x) \wedge \forall y (A(y) \to y = x)) \text{ (где } y \text{ не входит в } A(x)),$$

$$\exists_{=n} x\, A(x) :=$$

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (A(x_1) \wedge \ldots \wedge A(x_n) \wedge \bigwedge \{\neg(x_i = x_j) \mid i < j\} \wedge \forall y (A(y) \to (y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n)))$$

(где y, $x_1, \ldots, x_n$ — различные связанные переменные, не входящие в $A(x)$).

12. (3) («Проективная геометрия») Докажите, что теория в сигнатуре $(R^2, =)$ со следующими аксиомами сильно категорична:

   (a) $\forall x (\exists y\, R(y, x) \to \exists_{=3} y\, R(y, x))$,
   (b) $\forall x (\exists y\, R(x, y) \to \exists_{=3} y\, R(x, y))$,
   (c) $\forall x \forall y (x = y \vee \exists z R(z, x) \vee \exists z R(z, y) \vee \exists! z (R(x, z) \wedge R(y, z)))$,
   (d) $\forall x \forall y (x = y \vee \exists z R(x, z) \vee \exists z R(y, z) \vee \exists! z (R(z, x) \wedge R(z, y)))$,
   (e) $\forall x (\exists y R(x, y) \leftrightarrow \neg \exists y R(y, x))$.