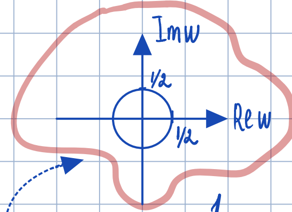
№1. $a_0=4,\ a_1=7 \Rightarrow a_0+a_1=11 \equiv_{10} 1$.

(1) $X=\{|z|=2\},\ f(z)=\frac{1}{z}$.

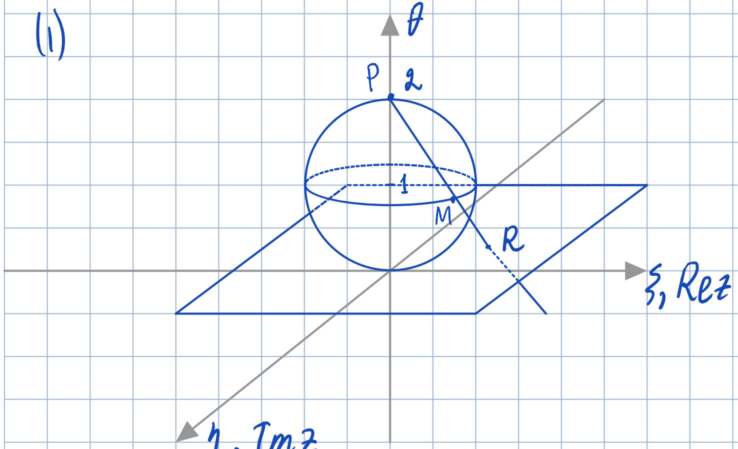


X — это окружность с центром $z_0=0$ и радиусом 2. Пусть $w=\frac{1}{z}$. Тогда $z=\frac{1}{w}$. $\left|\frac{1}{w}\right|=2 \to |w|=\frac{1}{2}$. Это окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в $w_0=0$. Итак, $\operatorname{Im} X=\{|w|=\frac{1}{2}\}$. (т.к. преобр. $f(z)=\frac{1}{z}$ может перевести окружность только в окр-ть или прямую, все так, наша окр-ть перевелась в окр-ть радиуса 1/2 с центром в нуле).

Ответ. Окружность, радиус 1/2, центр в нуле, рисунок выше.

№2. $a_2=9,\ a_3=4 \to 3a_2+a_3=27+4=31 \equiv_{10} 1$.

(1)



Назовем оси ξ, η, θ (см. рисунок). Совместим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с плоскостью $\eta O \xi$, т.ч. действ. ось совпадает с $O\xi$, мнимая — с $O\eta$, полож. напр. соотв. осей совпадают. Отождествим $\overline{\mathbb{C}}$ и сферу, как сказано в условии.

Уравнение сферы с центром $(0,0,1)$ и радиусом 1: $\xi^2+\eta^2+(\theta-1)^2=1$. (*)
Пусть $P=(0,0,2)$ — полюс, $M(\alpha,\beta,\gamma)$ — какая-то точка на сфере, $R(x,y,0)$ — ее стереографич-я проекция на пл-ть $\theta=0$, а также $R\in\mathbb{C}$.

P, R, M по их определению лежат на одной прямой, т.е. $\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}$ лежат на одной прямой:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{-2}{\gamma-2} \Rightarrow x=\frac{2\alpha}{2-\gamma},\ y=\frac{2\beta}{2-\gamma}.$$ (α,β,γ) — т. на сфере, $(x,y,0)$ — проекция.

Рассмотрим экватор. Это точки в плоскости $\theta=1$, т.ч. $\xi^2+\eta^2=1$. Рассмотрим образ таких точек при стереогр. пр-ии. Поняли, что $x=\frac{2\xi}{2-1}=2\xi$, $y=\frac{2\eta}{2-1}=2\eta$. Т.о., $x^2+y^2=4(\xi^2+\eta^2)=4$. Значит, получим окружность радиуса 2 с центром в нуле.

Ответ. Окружность радиуса 2 с центром в нуле.

№3. $a_4 = 7,\ a_5 = 9 \Rightarrow a_4 + 2a_5 = 7 + 18 = 25 \equiv_{10} 5.$

(5) Прямая через $-3+i,\ 2-4i$.

Из учебника знаем, что уравнение прямой на комплексной пл-ти: $Az + \bar{A}\bar{z} + r = 0$, где $A \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R}$. Рассмотрим варианты:

• $r = 0 \Rightarrow Az + \bar{A}\bar{z} = 0.$

Подставим данные точки и распишем $A = a + bi$:

$$\begin{cases} (a+bi)(-3+i) + (a-bi)(-3-i) = 0, \\ (a+bi)(2-4i) + (a-bi)(2+4i) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a - \cancel{3bi} + \cancel{ai} - b - 3a + \cancel{3bi} - \cancel{ai} - b = 0, \\ 2a + \cancel{2bi} - \cancel{4ai} + 4b + 2a - \cancel{2bi} + \cancel{4ai} + 4b = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a - 2b = 0, \\ 4a + 8b = 0, \end{cases} \to \begin{cases} b = -3a, \\ b = -\frac{a}{2}, \end{cases} \to \begin{cases} -3a = -\frac{a}{2}, \\ b = -3a, \end{cases} \to \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Итак, прямая примет вид $0 \cdot z + 0 \cdot \bar{z} = 0$, т.е. все коэффициенты одновременно 0. Это не прямая. Случай невозможен.

• $r \neq 0 \Rightarrow$ делим на r: $\frac{A}{r} z + \frac{\bar{A}}{r} \bar{z} + 1 = 0$. Пусть $\frac{A}{r} = B,\ \frac{\bar{A}}{r} = \overline{\left(\frac{A}{r}\right)} = \bar{B},\ B \in \mathbb{C}.$

$Bz + \bar{B}\bar{z} + 1 = 0$. Подставим данные точки. И пусть $B = c + di$.

$$\begin{cases} (c+di)(-3+i) + (c-di)(-3-i) + 1 = 0, \\ (c+di)(2-4i) + (c-di)(2+4i) + 1 = 0. \end{cases}$$

Скобочки мы уже раскрывали.

$$\begin{cases} -6c - 2d + 1 = 0, \\ 4c + 8d + 1 = 0, \end{cases} \to \begin{cases} 2d = -6c + 1, \\ 4c + 4 - 24c + 1 = 0, \end{cases} \to \begin{cases} 2d = -6c + 1, \\ -20c + 5 = 0, \end{cases} \to \begin{cases} 2d = -\frac{6}{4} + 1, \\ c = \frac{1}{4}, \end{cases} \to \begin{cases} d = -\frac{1}{4}, \\ c = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Итак, прямая: $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right)z + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)\bar{z} + 1 = 0. \to (1-i)z + (1+i)\bar{z} + 4 = 0.$

Ответ. $(1-i)z+(1+i)\bar{z}+4=0.$

№4. $a_6=5,\ a_7=1 \to 2a_6+3a_7=10+3 \equiv_{10} 3.$

(3) $|z-2|=|z+2|.$

Пусть $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$. Тогда $|(a-2)+bi|=|(a+2)+bi|.$

$\sqrt{(a-2)^2+b^2}=\sqrt{(a+2)^2+b^2}$

$\underbrace{(a-2)^2+b^2}_{\geq 0}=\underbrace{(a+2)^2+b^2}_{\geq 0}$

$(a-2-a-2)(a-2+a+2)=0 \to a=0.$

Значит, $z=bi,\ b\in\mathbb{R}$. Действительно, $|bi-2|=|bi+2| \Leftrightarrow \sqrt{b^2+4}=\sqrt{b^2+4}$ — правда $\forall b\in\mathbb{R}$.

На комплексной плоскости $\{z\in\mathbb{C} \mid z=bi,\ b\in\mathbb{R}\}$ — это ось $\operatorname{Im} z$ (во всех остальных точках, отличных от нее, действительная часть ненулевая).

Ответ. На комплексной плоскости это ось $\operatorname{Im} z$.