Логика и алгоритмы

Задачи семинаров 2

Обозначения: $0 := \varnothing$, $x+1 := x \cup \{x\}$. Множество Y называется *индуктивным*, если $0 \in Y$ и $\forall x\ (x \in Y \to x+1 \in Y)$. *Множество натуральных чисел* $\mathbb{N}$ определяется, как наименьшее по включению ($\subset$-наименьшее) множество. Элементы этого множества называются *натуральными числами.*

Теорема 1 (принцип математической индукции)**.** *Дано некоторое множество A. Если $0 \in A$ и $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \in A \to n+1 \in A)$, то $\mathbb{N} \subset A$.*

Обозначение: $x < y :\Leftrightarrow x \in y$.

Теорема 2 (принцип порядковой индукции)**.** *Дано некоторое множество A. Если $\forall n \in \mathbb{N}\ (\forall m < n\ m \in A \to n \in A)$, то $\mathbb{N} \subset A$.*

Теорема 3 (принцип минимального элемента)**.** *Пусть A – некоторое непустое подмножество $\mathbb{N}$. Тогда A содержит $<$-минимальный элемент, т.е. такой элемент $n \in A$, что $\forall m < n\ m \notin A$.*

1. Почему существует хотя бы одно индуктивное множество? Могут ли существовать два различных наименьших по включению индуктивных множества?

2. Докажите, что $x+1 \neq 0$ и $x+1 = y+1 \to x = y$ для любых множеств x и y.

3. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}\ (n = 0 \vee \exists m \in \mathbb{N}\ (n = m+1))$.

4. Докажите, что $<$ задает на $\mathbb{N}$ строгий частичный порядок, т.е. что $\forall n \in \mathbb{N}(n \not< n)$ и $\forall n, m, k \in \mathbb{N}\ (n < m < k \to n < k)$.

5. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ не существует инъективного отображения из $n+1$ в n.

6. Для натуральных чисел n и m докажите, что не существует инъекции из n в m, если $m < n$.

7. Докажите, что порядок, задаваемый $<$ на $\mathbb{N}$, является линейным.

8. Докажите, что два различных натуральных числа неравномощны.

9. Дана функция $+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая следующим рекурсивным условиям:

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ m + (n+1) = (m+n) + 1. \end{cases}$$

   Докажите, что $m + n = n + m$ для любых натуральных числе n и m.

   Множество x называется *конечным*, если $x \sim n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В последнем случае мы также говорим, что *x содержит n элементов*. Множество x называется *счетным*, если $x \sim \mathbb{N}$.

10. Докажите, что любое подмножество конечного множества конечно, а также, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно.