1 Лист 1

Задача 1.1.

$$2x - 6y \to \max$$
$$x + y + z \geqslant 2$$
$$2x - y + z \leqslant 1$$
$$x, y, z \geqslant 0$$

Доказательство.

$$\begin{cases} m \leqslant 2x - 6y \\ x + y + z \geqslant 2 \\ 2x - y + z \leqslant 1 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leqslant 2x - 6y \\ z \geqslant 2 - x - y \\ z \leqslant 1 - 2x + y \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leqslant 2x - 6y \\ 1 - 2x + y \geqslant 2 - x - y \\ 1 - 2x + y \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6y \leqslant 2x - m \\ 2y \geqslant 1 + x \\ y \geqslant -1 + 2x \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - m \geqslant 0 \\ 2x - m \geqslant 3 + 3x \\ 2x - m \geqslant -6 + 12x \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \geqslant m \\ -x \geqslant 3 + m \\ -10x \geqslant -6 + m \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}m \\ x \leqslant -3 - m \\ x \leqslant \frac{1}{10}(6 - m) \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 - m \geqslant \frac{1}{2}m \\ \frac{1}{10}(6 - m) \geqslant \frac{1}{2}m \\ \frac{1}{10}(6 - m) \geqslant 0 \\ -3 - m \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 - 2m \geqslant m \\ 6 - m \geqslant 5m \\ 6 - m \geqslant 0 \\ -3 - m \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \geqslant 3m \\ 6 \geqslant 6m \\ 6 \geqslant m \\ -3 \geqslant m \end{cases} \Rightarrow -3 \geqslant m$$

Откуда максимум $2x - 6y$ равен -3, данное значение достигается, например, при $x = 0, y = \frac{1}{2}, z = \frac{3}{2}$ □

Задача 1.2. Докажите с.тедующий вариант леммы Фаркашга: для матриц A, B, C и векторов u, v, w выполнена одна из двух взаимоисключаюших возможностей.

- - Существует вектор x т.ч.

  $$Ax = u, Bx \geqslant v, Cx \leqslant \omega$$

- - существуют такие векторы a, b, c, что

  $$A^T a + B^T b + C^T c = 0, b \leqslant 0, c \geqslant 0, \langle a, u\rangle + \langle b, v\rangle + \langle c, \omega\rangle < 0$$

Доказательство. Для удобства рассмотрим $b \geqslant 0$, то есть условие примет вид

$$A^T a - B^T b + C^T c = 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ \langle a, u\rangle - \langle b, v\rangle + \langle c, \omega\rangle < 0$$

Предположим, что выполнено первое условие, то есть $\exists x : Ax = u,\ Bx \geqslant v,\ Cx \leqslant w$, что равносильно $Ax \leqslant u,\ -Ax \leqslant -u,\ v \leqslant Bx,\ Cx \leqslant w$, что можно записать как

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -B \\ C \end{pmatrix} x \leqslant \begin{pmatrix} u \\ -u \\ -v \\ w \end{pmatrix}$$

Тогда по лемме Фракаша 2 для любых a_1, a_2, b, c, таких что

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -B \\ C \end{pmatrix}^\top (a_1, a_2, b, c) = 0$$

Выполнено

$$\langle (u, -u, -v, w), (a_1, a_2, b, c) \rangle = \langle a_1 - a_2, u \rangle - \langle b, v \rangle + \langle c, w \rangle \geqslant 0$$

То есть если существуют такие $a_1, a_2, b, c \geqslant 0$, что $A^\top(a_1 - a_2) - B^\top b + C^\top c = 0$, то выполнено $\langle a_1 - a_2, u \rangle - \langle b, v \rangle + \langle c, w \rangle \geqslant 0$, то есть при выполненном первом условии, второе не выполнено.

Заметим, что числа $a_1 = a_2 = b = c = 0$ подходят. Если первое условие не выполнено, то есть такого x не существует, то для каких-то $a_1, a_2, b, c \geqslant 0$ выполнено $A^\top(a_1 - a_2) + B^\top b + C^\top c = 0$, $\langle a_1 - a_2, u \rangle - \langle b, v \rangle + \langle c, w \rangle < 0$, то есть $a_1 - a_2, b, c$ подходит под 2 условие. □

Задача 1.3. Напомним, что гиперплоскостью, несущей к выпуклому телу A в точке $x \in A$, называется такая гиперплоскость $H \ni x$, что A содержится в одном из полупространств, определяемых этой гиперплоскостью. Пусть A-замкнутое выпуклое множество, $x \notin A$.

- Докажите, что существует единственная точка $y \in A$, для которой

  $$|x - y| \leq |x - z|, \forall z \in A$$

- Докажите, что гиперплоскость, содержащая y и ортогональная к $x - y$ является несущей к A.

Доказательство.

- Покажем, что ближайшая точка существует. Рассмотрим какое-то $a \in A$, если для $y = a$ условие выполнено, то мы её нашли, иначе рассмотрим $A \cap B_{|x-y|}(x)$, это множество выпукло, замкнуто и ограничено, то есть компакт. Построим отображение $F : A \cap B_{|x-y|}(x) \mapsto \mathbb{R}_{\geqslant 0}, F(y) = |x - y|$, оно непрерывно, а так как функция на компакте, то есть минимум, который и будет ближайшей точкой. Предположим, что существуют 2 ближайшие точки, назовем их $y_1,\ y_2$, в силу выпуклости A, $\frac{y_1+y_2}{2} \in A$ и при $z = \frac{y_1+y_2}{2}$ условие $|x - y| \leqslant |x - z|$ выполнено не будет.
- Рассмотрим опорную (несущую) гиперплоскость H, точку касания назовем y, полупространство с точкой x назовем X, пусть $\exists y_0 \in A, y_0 \in X, y_0 \notin B_{|x-y|}[x]$, тогда yy_0 пересекает границу $B_{|x-y|}[x]$ в $y_1 = ky + (1 - k)y_0$, рассмотрим $\frac{y+y_0}{2} \in A$, заметим $|x - \frac{y+y_0}{2}| < |x - y|$ – противоречие, то есть пересечение X и A непусто и H является опорной.

□

Задача 1.4. Найдите решение задачи

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \to \min \\
&x_1 \geqslant 1, x_1 + x_2 \geqslant 2, \cdots, x_1 + \cdots + x_n \geqslant n \\
&x_i \geqslant 0
\end{aligned}$$

Сформулируйте и решите двойственную задачу.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \geqslant x_1 + \cdots + x_n \geqslant n \\
&\min(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n) \geqslant n
\end{aligned}$$

Осталось заметить, что n достигается при $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (n, 0, \ldots, 0)$

Двойственная

$$\begin{cases}
y_1 + 2y_2 + \ldots + n \cdot y_n \to \max \\
y_1 + \ldots + y_n \leqslant 1 \\
\vdots \\
y_i + \ldots + y_n \leqslant i \\
\vdots \\
y_n \leqslant n \\
y_1, \ldots, y_n \geqslant 0
\end{cases}$$

Решение:

$$y_1 + 2y_2 + \ldots n \cdot y_n \leqslant n \cdot y_1 + \ldots + n \cdot y_n \leqslant n$$
$$\max(y_1 + 2y_2 + \ldots n \cdot y_n) \leqslant n$$

Осталось заметить, что n достигается при $(y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 0, 1)$ □

Задача 1.5. Описать все решения задачи

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_j x_j \leq b, \quad x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n$$

где $b, a_j > 0$. Показать, что если $c_j > 0$ и все числа $b\frac{c_j}{a_j}$ различны, то решение единственно.

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, заметим, что в нем можно задать каждое решение системы в виде точки $(x_1, \ldots, x_n)$. Далее рассмотрим выпуклую оболочку множества точек $x_i = \frac{b}{a_i}$ (то есть точки вида $(0, \ldots, 0, \frac{b}{a_i}, 0, \ldots, 0)$, где $\frac{b}{a_i}$ стоит на i позиции) и точки $(0, \ldots, 0)$, заметим, что все решения $\sum a_j x_j \leqslant b$ будут ей принадлежать, так как в выпуклой оболочке точек $(0, \ldots, 0, \frac{b}{a_i}, 0, \ldots, 0)$ будет b, а в 0 будет 0, и в силу непрерывности и линейности между ними значения в точках будут принадлежать интервалу $(0, b)$. Пусть какое-то решение не принадлежит данному симплексу, обозначим эту точку как x_q, пусть $Ax_q = b_q \leqslant b$, тогда проведем прямую из 0 в x_q, она где-то пересечет симплекс, причем в точке пересечения, обозначим её x_p, $Ax_p = b$, но тогда получится, что на участке от 0 до x_p значения возрастают, на $x_p x_q$ убывают, а этого не может быть в силу линейности.

Теперь найдем точки, где $\sum c_i x_i$ достигает своего максимума.

Так как на любом отрезке линейная функция достигает максимума в одном из концов, то для любой предположительно максимальной точки, принадлежащей некой k-мерной грани, можно провести прямую, проходящую через неё и пересекающую данную k-мерную грань в каких-то точках i_1, i_2. В силу линейности максимум будет достигаться либо в одной из этих точек, либо же значения на всем отрезке $i_1 i_2$ будут равны (соответственно если известно, что максимум достигается на каком-то множестве вершин, то он достигается на выпуклой оболочке всех этих вершин).

Рассмотрим вершины выпуклой оболочки, заметим, что в $(0, \ldots, 0)$ значение $\sum_i c_i x_i$ равно 0, а в остальных вершинах, имеющих координаты $(0, \ldots, 0, \frac{b}{a_i}, 0, \ldots, 0)$, значения соответственно будут равны $b\frac{c_i}{a_i}$, то есть максимум будет достиагаться при максимальном значении $\frac{c_i}{a_i}$, а если максимальных значений $\frac{c_i}{a_i}$ несколько, то максимум будет достигаться на выпуклой оболочке вершин, соответствующих максимальным значениям $\frac{c_i}{a_i}$.

Теперь докажем, что если все $b\frac{c_i}{a_i}$ различны, то максимум ровно один. Заметим, что помимо вершины, соответствующей максимальному значению $\frac{c_i}{a_i}$, вершины не содержат максимума, а следовательно, если максимум не один, то точки максимума, отличные от данной вершины, находятся в какой-то из 2+-мерных граней данной выпуклой оболочки. Рассмотрим какую-то грань, которой принадлежит данный максимум, рассмотрим 1-мерные грани данной грани, заметим, что по утверждению выше, либо в какой-то из вершин есть значение больше (что противоречит предположению, что рассматриваемая точка – максимум), либо есть вершина с таким же значением, и тогда на оси, их соединяющей, все значения равны максимуму, однако эта ось еще в какой-то точке пересекает выпуклую оболочку, и, если рассмореть грань, в которой она её пересекает, то для её вершин можно провести аналогичное рассуждение, однако тогда мы найдем 2 вершины, чьи значения равны максимуму, а такого быть не может при различных $\frac{c_i}{a_i}$. □

Задача 1.6. Сформулируйте двойственную задачу к задаче 1 и решите её

Доказательство.

$$\begin{cases} 2x-6y \to \max \\ x+y+z \geqslant 2 \\ 2x-y+z \leqslant 1 \\ x,y,z \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+b \to \min \\ -a+2b \geqslant 2 \\ -a-b \geqslant -6 \\ -a+b \geqslant 0 \\ a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+b \leqslant m \\ -a+2b \geqslant 2 \\ -a-b \geqslant -6 \\ -a+b \geqslant 0 \\ a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \leqslant m+2a \\ b \geqslant 1+\frac{1}{2}a \\ b \leqslant 6-a \\ b \geqslant a \\ a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+2a \geqslant 1+\frac{1}{2}a \\ m+2a \geqslant a \\ m+2a \geqslant 0 \\ 6-a \geqslant 1+\frac{1}{2}a \\ 6-a \geqslant a \\ 6-a \geqslant 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+3a \geqslant 2 \\ m+a \geqslant 0 \\ m+2a \geqslant 0 \\ 10-3a \geqslant 0 \\ 6-2a \geqslant 0 \\ 6-a \geqslant 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \geqslant \frac{2}{3}-\frac{2}{3}m \\ a \geqslant -m \\ a \geqslant -\frac{1}{2}m \\ a \leqslant \frac{10}{3} \\ a \leqslant 3 \\ a \leqslant 6 \\ a \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geqslant \frac{2}{3}-\frac{2}{3}m \\ a \geqslant -m \\ a \geqslant -\frac{1}{2}m \\ a \leqslant 3 \\ a \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \geqslant \frac{2}{3}-\frac{2}{3}m \\ 3 \geqslant -m \\ 3 \geqslant -\frac{1}{2}m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 \leqslant 2m \\ -3 \leqslant m \\ -6 \leqslant m \end{cases} \Rightarrow -3 \leqslant m$$

Значение достигается при $a=3, b=3$ □

2 Лист 2

Задача 2.1.

$$\begin{aligned} &-x_1+x_2-2x_3+3x_4+x_5 \to \max \\ &x_1+2x_2-x_3-2x_4+x_5 \leqslant 3 \\ &-x_1-x_2+x_3+2x_4+x_5 \leqslant 1 \\ &2x_1+x_2+x_3-x_4 \leqslant 1 \\ &x_i \geqslant 0 \end{aligned}$$

Доказательство.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
y_1	1	2	−1	−2	1	−3
y_2	−1	−1	1	2	1	−1
y_3	2	1	1	−1	0	−1
	−1	1	−2	3	1	0

Откуда

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1-y_2+2y_3-1 \\ x_2 &= 2y_1-y_2+y_3+1 \\ x_3 &= -y_1+y_2+y_3-2 \\ x_4 &= -2y_1+2y_2-y_3+3 \\ x_5 &= y_1+y_2+1 \end{aligned}$$

В зависимости

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+2x_2-x_3-2x_4+x_5-3 \\ y_2 &= -x_1-x_2+x_3+2x_4+x_5-1 \\ y_3 &= 2x_1+x_2+x_3-x_4-1 \end{aligned}$$

Выразим через x_1, y_1 остальные переменные

$$x_1 = y_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 3$$

Получим

$$y_2 = -(y_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 3) - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 - 1 = -y_1 + x_2 + 2x_5 - 4$$
$$y_3 = 2(y_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 3) + x_2 + x_3 - x_4 - 1 = 2y_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 + 5$$

Выразим через y_1, x_2, x_3, x_4, x_5 функцию стоймости в двойственной задаче

$$\begin{aligned}&-x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5\\&= -(y_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 3) + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5\\&= -y_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 - 3\end{aligned}$$

Получим

	y_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-2	1	2	-1	-3
y_2	-1	1	0	0	2	4
y_3	2	-3	3	3	-2	-5
	-1	3	-3	1	2	3

Выразим через x_2, y_2 остальные переменные

$$y_2 = -y_1 + x_2 + 2x_5 - 4$$
$$x_2 = y_1 + y_2 - 2x_5 + 4$$

Получим

$$x_1 = y_1 - 2(y_1 + y_2 - 2x_5 + 4) + x_3 + 2x_4 - x_5 + 3 = -y_1 - 2y_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 5$$
$$y_3 = 2y_1 - 3(y_1 + y_2 - 2x_5 + 4) + 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 + 5 = -y_1 - 3y_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 7$$

Выразим через y_1, y_2, x_3, x_4, x_5 функцию стоймости в двойственной задаче

$$\begin{aligned}&-x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5\\&= -y_1 + 3(y_1 + y_2 - 2x_5 + 4) - 3x_3 + x_4 + 2x_5 - 3\\&= 2y_1 + 3y_2 - 3x_3 + x_4 - 4x_5 + 9\end{aligned}$$

Получим

	y_1	y_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	-1	2	1	2	3	5
x_2	1	-1	0	0	-2	-4
y_3	2	-3	0	7	4	7
	2	3	-3	1	-4	9

Откуда максимум равен 9 и достигается при $x = (0, 3, 0, 2, 0)$ $\square$

Задача 2.2.

$$\begin{aligned}&3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max\\&x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 1\\&-3x_1 + x_3 \leqslant -1\\&-2x_1 - x_2 \leqslant -1\\&x_j \geqslant 0\end{aligned}$$

Доказательство.

	x_1	x_2	x_3	
y_1	1	2	2	-1
y_2	-3	0	1	1
y_3	-2	-1	0	1
	3	4	5	0

Откуда

$$x_1 = y_1 - 3y_2 - 2y_3 - 3$$
$$x_2 = 2y_1 - y_3 - 4$$
$$x_3 = 2y_1 + y_2 - 5$$

В зависимости

$$y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1$$
$$y_2 = -3x_1 + x_3 + 1$$
$$y_3 = -2x_1 - x_2 + 1$$

Выразим через x_1, y_2 остальные переменные

$$y_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_3 - 1$$

Получим

$$x_2 = 2y_1 - y_3 - 4$$
$$x_3 = 2y_1 + y_2 - 5 = 2y_1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_3 - 1 - 5 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{7}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_3 - 6$$

Выразим через y_1, x_1, y_3 функцию стоймости в двойственной задаче

$$y_1 - y_2 - y_3 = y_1 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_3 + 1 - y_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_3 + 1$$

Получим

	y_2	x_2	x_3	
y_1	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_3	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
	-1	-4	-6	1

Выразим через x_2, y_3 остальные переменные

$$y_3 = 2y_1 - x_2 - 4$$

Получим

$$y_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}(2y_1 - x_2 - 4) - 1 = -y_1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}$$
$$x_3 = \frac{7}{3}y_1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}(2y_1 - x_2 - 4) - 6 = y_1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{10}{3}$$

Выразим через y_1, x_1, x_2 функцию стоймости в двойственной задаче

$$y_1 - y_2 - y_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}(2y_1 - x_2 - 4) + 1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{7}{3}$$

Получим

	y_2	y_3	x_3	
y_1	-1	2	1	0
x_1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{5}{3}$	-4	$-\frac{10}{3}$	$\frac{7}{3}$

Выразим через y_1, y_3 остальные переменные

$$y_3 = 2y_1 - x_2 - 4$$

Получим

$$y_2 = -\frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}$$
$$x_3 = \frac{1}{2}y_3 + \frac{7}{6}x_2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}$$

Получим

	y_2	y_3	x_3	
x_1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_1	-1	2	1	0
	$\frac{5}{3}$	-4	$-\frac{10}{3}$	$\frac{7}{3}$

Выразим через x_2, y_2 остальные переменные

$$x_2 = 6y_1 + 3y_3 + 2x_1 + 2$$

Получим

$$y_1 = \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}(6y_2 + 3y_3 + 2x_1 + 2) + 2 = 2y_3 + 3y_2 + x_1 + 3$$
$$x_3 = 4y_3 + 2x_1 + 7y_2 + 1$$

Выразим функцию стоймости

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}(6y_2 + 3y_3 + 2x_1 + 2) + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}x_1 + 2y_2 + y_3 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = x_1 + 2y_2 + y_3 + 3$$

Получим

	y_1	x_2	x_3	
x_1	1	2	2	1
y_2	3	6	7	2
y_3	2	3	4	1
	3	2	1	3

Откуда максимум равен 3 и достигается при $x = (1, 0, 0)$ □

Задача 2.3. Найти все вершины многогранника в $\mathbb{R}^4$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leqslant 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 3$$
$$x_i \geqslant 0, i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Доказательство. Вершина в $\mathbb{R}^4$ – решение системы, в котором 4 неравенства обращены в равенства.

- В случае, когда зануляются неравенства $x_i \geqslant 0$, вершиной является $(0, 0, 0, 0)$
- Если зануляются 3 неравенства $x_i \geqslant 0$ и $x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$, то вершинами являются $(0, 0, \frac{1}{4}, 0)$ и $(1, 0, 0, 0)$, а точки $(0, -\frac{1}{2}, 0, 0), (0, 0, 0, 1)$ вершинами не являются в силу $x_2 < 0$ и $x_4 < 0$
- Если зануляются 3 неравенства $x_i \geqslant 0$ и $2x_1+3x_2+x_3+2x_4 = 3$, то вершины это $(0, 0, 0, \frac{3}{2}), (0, 0, 3, 0), (0, 1, 0, 0), (\frac{3}{2}, 0,$
- Если зануляются 2 неравенства $x_i \geqslant 0$, а также выполнено $x_1-2x_2+4x_3-x_4 = 1$, $2x_1+3x_2+x_3+2x_4 = 3$, то есть задачу можно представить в виде 6 систем:
  –
  $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$
  $$x_1 = \frac{9}{7} \quad x_2 = \frac{1}{7}$$

–

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{11}{7} \quad x_3 = -\dfrac{1}{7}$ не вершина, так как не выполнено $x_i \geqslant 0$

–

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{5}{4} \quad x_4 = \dfrac{1}{4}$

–

$$\begin{cases} -2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$x_2 = \dfrac{11}{14} \quad x_3 = \dfrac{9}{14}$

–

$$\begin{cases} -2x_2 - x_4 = 1 \\ 3x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_2 = -5 \quad x_4 = 9$ не вершина, так как не выполнено $x_i \geqslant 0$

–

$$\begin{cases} 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_3 = \dfrac{5}{9} \quad x_4 = \dfrac{11}{9}$

То есть у данного многогранника 11 вершин:

- $(0, 0, 0, 0)$
- $(0, 0, \frac{1}{4}, 0)$
- $(1, 0, 0, 0)$
- $(0, 0, 0, \frac{3}{2})$
- $(0, 0, 3, 0)$
- $(0, 1, 0, 0)$
- $(\frac{3}{2}, 0, 0, 0)$
- $(\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, 0, 0)$
- $(\frac{5}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$
- $(0, \frac{11}{14}, \frac{9}{14}, 0)$
- $(0, 0, \frac{5}{9}, \frac{11}{9})$

Однако, так как по условию $x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$, $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$, то из этих вершин подходят только

- $(\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, 0, 0)$
- $(\frac{5}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$
- $(0, \frac{11}{14}, \frac{9}{14}, 0)$
- $(0, 0, \frac{5}{9}, \frac{11}{9})$

$\square$

Задача 2.4. Дано число n. Найти

$$\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \to \max$$

при условии

$$u_i + v_j \leqslant 2^{i+j}, \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

Доказательство. Заметим что $u_i + v_j \leqslant 2^{i+j} \Rightarrow u_i \leqslant 2^{i+j},\ v_j \leqslant 2^{i+j}$, откуда $u_i + v_1 \leqslant 2^{i+1} \Rightarrow u_i \leqslant 2^{i+1}$, аналогично $v_j \leqslant 2^{j+1}$. Пусть $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n, v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ – значения коэффициентов при максимуме суммы, заметим, что если u_1 или $v_1 > 0$, то сделав замену $u'_1 = v'_1 = 0, v'_i = v_i + v_1\ \forall i \geqslant 2$, сумма всех элементов не уменьшится. Так как $u_1 = v_1 = 0$, то $u_i = v_i = 2^{i+1}\ \forall i \geqslant 2$ является решением, и максимальная сумма элементов $2 \cdot (0 + 2^3 + \ldots + 2^{n+1}) = 2 \cdot (2^{n+2} - 2^3)$ □

Задача 2.5. Матрица размера $m \times n$ называется латинским прямоугольником, если элементы каждой строки этой матрицы образуют перестановку чисел от 1 до n, и в каждом столбце все числа разные. Докажите, что латинский прямоугольник $m \times n$ всегда можно дополнить до латинского квадрата.

Доказательство. Рассмотрим двудольный граф, где вершины одной доли соответствуют колонкам, назовем их $c_1, \dots, c_n$, а другой доли числам $n_1, \dots, n_n$. Пусть ребро соединяет 2 вершины c_i, n_j, если в колонке i не стоит число j, заметим, что если рассмотреть латинский прямоугольник с m колонками и n строками, то вершины будут иметь степень $n - m$, тогда, убирая ребра, можно ставить числа в квадрат, дополняя его. (по факту решение задачи эквивалентно лемме Холла, где одна доля соответствет колонкам, а другая числам) □

Задача 2.6. Докажите теорему, "двойственную"к теореме Дилуорса. В конечном, частично упорядоченном множестве мощность длиннейшей цепи равна мощности наименьшего разбиения на антицепи

Доказательство. Пусть $L(a)$ – длина длинной цепи с началом в a, заметим, что если $a_1 > a_2$, то $L(a_1) < L(a_2)$, и если $L(a_1) = L(a_2)$, то a_1, a_2 несравнимы и $A_k = \{a | L(a) = k\}$ – антицепь. Пусть длина наибольшей цепи b, тогда в ней есть все значения L от 1 до b (больше b быть не может, так как в таком случае рассматриваемое множество не является самой длинной цепью), тогда заметим, что $A_1, \dots, A_b$ – является наименьшим разбиением на атицепи. □

Задача 2.7. В последоватетьности из $nm + 1$ различных действитетьных чисел П.Эрдёш ищет "длинную цепь $n + 1$ элемент, идущие слева направо в порядке возрастания. Д.Секерёш, напротив, ищет "длинную антицепь $m + 1$ элемент, идущие слева направо в порядке убывания. Докажите, что хотя бы один из них преуспеет.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x),\ x \in [1, mn + 1]$, значения которой равны длинам возрастающих последовательностей, начинающихся с числа на позиции x. Допустим цепи длины $n + 1$ нет, то есть значения $f(x)$ лежат в $[0, n]$. Тогда по принципу Дирихле для какого-то значения существует хотя бы $m + 1$ число x_i, такое что $f(x_1) = \ldots = f(x_{m+1})$, заметим, что эта последовательность является убывающей, так как иначе, если $\exists i, j : x_i \leqslant x_j$, то возрастающую последовательность можно продолжить на 1 элемент (x_j), а следовательно для какого-то x_k равенство $f(x_1) = \ldots = f(x_{m+1})$ не будет выполнено. □