А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 1

1.1. Введение

По-видимому, не существует единого общепринятого мнения о том, что такое функциональный анализ. Наиболее широкая точка зрения состоит в том, что *основным предметом функционального анализа следует считать объекты, наделенные согласованными алгебраической и топологической структурами* (цит. по А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани, «Теоремы и задачи функционального анализа», М.: Наука, 1988)[1]. В качестве простейшего примера рассмотрим хорошо вам знакомое пространство $\mathbb{R}^n$. Во-первых, оно является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. Во-вторых, на нем есть стандартная топология, относительно которой операции сложения и умножения на скаляр непрерывны; это означает, что $\mathbb{R}^n$ — *топологическое векторное пространство.* Кроме того, у каждого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ есть евклидова длина (или *норма*), обозначаемая через $\|x\|$ и равная $(\sum_i x_i^2)^{1/2}$. Эта норма задает обычную евклидову метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$, которая, в свою очередь, порождает стандартную топологию на $\mathbb{R}^n$. Это означает, что $\mathbb{R}^n$ — не просто топологическое векторное пространство, а *нормированное пространство.* Более того, это пространство полно, т.е. любая фундаментальная последовательность в нем сходится; нормированные пространства с этим свойством называют *банаховыми пространствами.* Наконец, для любых двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ определено их *скалярное произведение* $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$, которое порождает евклидову норму по формуле $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Это означает, что $\mathbb{R}^n$ — не просто банахово пространство, а *гильбертово пространство*[2].

Приведенный пример в какой-то мере иллюстрирует понятия, которыми мы будем заниматься, однако он слишком уж «игрушечный». Почему? Дело в том, что с точки зрения функционального анализа конечномерные пространства не слишком-то интересны. Во-первых, как мы покажем через некоторое время, на конечномерном векторном пространстве есть только одна топология, относительно которой оно будет хаусдорфовым топологическим векторным пространством, — а именно, вышеупомянутая стандартная топология. Поэтому конечномерные векторные пространства с точки зрения функционального анализа почти настолько же просты, насколько они просты с точки зрения линейной алгебры[3]. А во-вторых, хотя методы функционального анализа при-

[1] Следует все же уточнить, что алгебраическая структура, имеющаяся на объектах функционального анализа, обычно *линейна*, т.е. включает в себя структуру векторного пространства над полем $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или над каким-либо другим нормированным полем. Что же касается таких общих объектов, как, например, топологические группы и топологические кольца (без линейной структуры), то их изучает *топологическая алгебра* — раздел математики, который, как правило, не относят к функциональному анализу.

[2] На самом деле гильбертовы пространства обычно рассматриваются над полем комплексных чисел, так что более естественный пример гильбертова пространства — не $\mathbb{R}^n$, а $\mathbb{C}^n$.

[3] Справедливости ради отметим, что конечномерные пространства все же играют заметную роль в так называемой *локальной теории* банаховых пространств — науке, изучающей бесконечномерные

менимы в том числе и к конечномерным пространствам, они в сущности не дают ничего нового — почти все интересные результаты о конечномерных пространствах можно получить методами линейной алгебры и классического анализа. Поэтому функциональный анализ имеет дело преимущественно с бесконечномерными пространствами.

Наряду с банаховыми, гильбертовыми и топологическими векторными пространствами, в функциональном анализе изучаются различные операторы между этими пространствами — линейные, нелинейные, ограниченные, неограниченные... На самом деле операторы, пожалуй, даже важнее, чем пространства, в которых они действуют. Отчасти это обусловлено всевозможными приложениями функционального анализа в смежных областях математики и математической физики. Часто бывает так, что задан какой-то оператор (например, дифференциальный или интегральный), и специально для его изучения строится некое пространство, в котором он действует. Так возникли, например, знаменитые пространства Соболева, играющие важную роль в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Несмотря на абстрактность объектов, изучаемых в функциональном анализе, не следует думать, что такие понятия, как банахово пространство, топологическое векторное пространство и т.п. были придуманы «из любви к искусству», просто чтобы обобщить известные свойства пространства $\mathbb{R}^n$. На самом деле функциональный анализ, как и большинство абстрактных математических дисциплин, имеет свои корни в конкретных задачах классической математики и математической физики. Одна из таких задач — задача о распространении тепла, изучавшаяся Ж.-Б. Фурье в начале XIX в. Идея Фурье состояла в том, чтобы искать неизвестную функцию — т.е. решение уравнения теплопроводности — в виде суммы ряда из «элементарных гармоник», т.е. функций $\cos nx$ и $\sin nx$, с неопределенными коэффициентами a_n, b_n (зависящими от времени). Эта идея привела к общей теории рядов Фурье, в которой функции вещественного переменного сопоставляется последовательность чисел (c_n) (называемых коэффициентами Фурье данной функции), удовлетворяющая условию $\sum_n c_n^2 < \infty$ и содержащая в себе в сущности всю информацию об этой функции. Позднее — в начале XX в. — возникла идея о том, что для решения конкретных задач полезно рассмотреть множество всех таких последовательностей (теперь оно обозначается символом ℓ^2) и изучить его геометрические свойства. Помимо теории рядов Фурье, основными стимулами для изучения этого пространства послужили некоторые вопросы теории квадратичных форм и теории интегральных уравнений. В течение некоторого времени пространство ℓ^2 называли «гильбертовым пространством»[1]; позднее (с легкой руки Дж. фон Нойманна) этот термин закрепился за более абстрактными пространствами со скалярным произведением.

Более подробно о конкретных задачах, из которых вырос функциональный анализ, можно прочитать в статье Ю. И. Любича «Линейный функциональный анализ» (Итоги науки и техники, современные проблемы математики, фундаментальные направления, т. 19, М.: ВИНИТИ, 1988).

Несколько слов об истории возникновения функционального анализа. Считается, что в самостоятельную дисциплину он начал оформляться в начале XX в. благодаря

банаховы пространства в терминах метрических свойств их конечномерных подпространств.

[1]Существует легенда, согласно которой Г. Вейль, делая доклад на математическом семинаре в Геттингене, несколько раз упомянул термин «гильбертово пространство». После окончания доклада Гильберт подошел к докладчику и сказал: «Я не понял только одно: а что же такое гильбертово пространство?».

работам И. Фредгольма, Д. Гильберта и Э. Шмидта по интегральным уравнениям и квадратичным формам, Ф. Рисса и Э. Фишера по функциональным пространствам, М. Фреше по общим метрическим пространствам. Существенную роль сыграли также работы А. Лебега по теории интегрирования. Однако, пожалуй, основной вклад в формирование функционального анализа внесли работы С. Банаха 1920-х–1930-х гг. и в особенности его знаменитая монография «Теория линейных операций», опубликованная в 1932 г. (но переведенная на русский язык лишь в 2001 г.) Именно в работах Банаха появились общие понятия нормированного и банахова пространств (сам Банах называл последние «(B)-пространствами») и были доказаны фундаментальные результаты об этих пространствах и операторах между ними. Из многочисленных разделов функционального анализа, появившихся впоследствии, выделим спектральную теорию операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения в квантовой механике (основы этой теории были заложены еще Гильбертом, но законченный вид она приобрела в работах Дж. фон Ноймана 1930-х гг.), теорию операторных полугрупп и ее приложения к дифференциальным уравнениям (Э. Хилле, Р. Филлипс, К. Иосида), теорию операторных алгебр и более общих банаховых алгебр (Ф. Мюррей, Дж. фон Нойманн, И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Г. Е. Шилов), эргодическую теорию (А. Н. Колмогоров, В. А. Рохлин, А. Я. Хинчин), теорию топологических векторных пространств (Ж. Дьедонне, Л. Шварц, А. Гротендик), теорию обобщенных функций (И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Н. Я. Виленкин, Л. Шварц)…

В настоящее время функциональный анализ представляет собой весьма обширную и разветвленную часть математики с разнообразными приложениями в смежных областях, таких, как дифференциальные уравнения, гармонический анализ, теория представлений групп, дифференциальная и комплексно-аналитическая геометрии, вычислительная математика, вариационное исчисление, теория оптимизации, теория вероятностей, квантовая физика. Многие разделы функционального анализа бурно развиваются и в настоящее время; из наиболее популярных и «модных» отметим некоммутативную геометрию в духе А. Конна и теорию локально компактных квантовых групп.

1.2. Нормированные пространства

Функциональный анализ имеет дело с векторными пространствами над полем действительных или комплексных чисел[1]. На первых порах будет все равно, какое из этих двух полей брать в качестве основного, поэтому мы будем использовать символ $\mathbb{K}$ для обозначения либо поля $\mathbb{R}$, либо поля $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{K}$. *Нормой* на X называется функция $X \to [0, +\infty)$, $x \mapsto \|x\|$, обладающая следующими свойствами:

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любых $\lambda \in \mathbb{K}$ и $x \in X$;

2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in X$ (*неравенство треугольника*);

3) $\|x\| = 0$ только при $x = 0$.

[1]Есть, правда, и так называемый неархимедов функциональный анализ, в котором в качестве основного выбирается какое-нибудь неархимедово поле — например, поле p-адических чисел; но это уже другая наука со своей спецификой, и мы ею заниматься не будем.

Если выполнены только условия 1 и 2, то такая функция называется *полунормой*.

Нормированным пространством называется векторное пространство, снабженное нормой (точнее, пара $(X, \|\cdot\|)$, состоящая из векторного пространства X и нормы $\|\cdot\|$ на нем). Аналогично определяются и *полунормированные пространства*[1].

Если $\|\cdot\|$ — норма на X, то формула $\rho(x,y) = \|x-y\|$ задает метрику на X (проверьте!). Поэтому каждое нормированное пространство является метрическим и, в частности, обладает естественной топологией.

Примеры: нормы на конечномерных пространствах

Пример 1.1. Само поле $\mathbb{K}$ является нормированным пространством относительно нормы $\|x\| = |x|$. Из аксиом нормы следует, что это единственная норма на $\mathbb{K}$ с точностью до умножения на положительную константу.

Пример 1.2. Определим норму $\|\cdot\|_1$ на пространстве $\mathbb{K}^n$ формулой

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n).$$

Легко проверить (проверьте!), что норма $\|\cdot\|_1$ в самом деле является нормой. Полученное нормированное пространство $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ будем сокращенно обозначать через $\mathbb{K}^n_1$.

Пример 1.3. Определим норму $\|\cdot\|_\infty$ на пространстве $\mathbb{K}^n$ формулой

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n).$$

Легко проверить (проверьте!), что норма $\|\cdot\|_\infty$ в самом деле является нормой. Полученное нормированное пространство $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ будем сокращенно обозначать через $\mathbb{K}^n_\infty$.

Пример 1.4. Зафиксируем число $p \in (1, +\infty)$ и определим норму $\|\cdot\|_p$ на пространстве $\mathbb{K}^n$ формулой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n).$$

В отличие от предыдущих примеров, здесь уже не столь очевидно, что норма $\|\cdot\|_p$ удовлетворяет неравенству треугольника. Неравенство треугольника применительно к норме $\|\cdot\|_p$ называется *неравенством Минковского*; его доказательство мы разберем на семинаре (см. листок 1). Полученное нормированное пространство $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ будем сокращенно обозначать через $\mathbb{K}^n_p$. Отметим, что $\mathbb{R}^2_2$ и $\mathbb{R}^3_2$ — это обычные евклидова плоскость и трехмерное евклидово пространство.

[1] На первых порах полунормы, не являющиеся нормами, будут встречаться нам довольно редко; однако впоследствии, когда мы будем изучать более общие топологические векторные пространства, полунормы начнут играть весьма важную роль.

Примеры: пространства последовательностей

Обозначим через $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ векторное пространство всех числовых последовательностей $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ с обычными покоординатными операциями. На само́м этом пространстве никакой естественной нормы нет, однако она есть на некоторых его подпространствах.

Пример 1.5. Зафиксируем число $p \in [1, +\infty)$ и положим

$$\ell^p = \Big\{ x = (x_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \Big\}.$$

Из неравенства Минковского следует, что ℓ^p — векторное подпространство в $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ и что формула

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (x = (x_i) \in \ell^p)$$

задает норму на ℓ^p (обратите внимание, что при $p = 1$ эти два утверждения очевидны.) Следовательно, ℓ^p — нормированное пространство.

Разумеется, в примере 1.5 вместо последовательностей можно рассматривать функции, заданные на любом счетном множестве I; в результате получатся пространства, обозначаемые через $\ell^p(I)$. (На самом деле в качестве I можно брать множество произвольной мощности, но это мы обсудим несколько позже.)

Пример 1.6. Обозначим через ℓ^∞ подпространство в $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, состоящее из всех ограниченных последовательностей. Оно является нормированным пространством относительно *равномерной нормы*

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \qquad (x = (x_i) \in \ell^\infty).$$

Пример 1.7. Символом c_0 обозначается множество всех числовых последовательностей, стремящихся к нулю на бесконечности. Очевидно, c_0 — векторное подпространство в ℓ^∞, поэтому оно является нормированным пространством относительно равномерной нормы.

Примеры: пространства функций

Пример 1.8. Для произвольного множества X обозначим через $\ell^\infty(X)$ векторное пространство всех ограниченных $\mathbb{K}$-значных функций на X. Оно является нормированным пространством относительно *равномерной нормы*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad (f \in \ell^\infty(X)).$$

Отметим, что $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^\infty$ (см. пример 1.6). Нетрудно проверить (проверьте!), что последовательность ограниченных функций сходится по равномерной норме тогда и только тогда, когда она сходится равномерно (см. курс матанализа).

Пример 1.9. Если X — топологическое пространство, то множество $C_b(X)$ всех непрерывных ограниченных $\mathbb{K}$-значных функций на X является векторным подпространством в $\ell^\infty(X)$. Следовательно, $C_b(X)$ — нормированное пространство относительно равномерной нормы. Отметим, что если X компактно, то $C_b(X) = C(X)$, а если X дискретно, то $C_b(X) = \ell^\infty(X)$.

Следующий пример может показаться несколько искусственным, однако он играет важную роль, например, в теории банаховых алгебр и в теории преобразования Фурье, с которыми нам еще предстоит познакомиться.

Пример 1.10. Пусть X — топологическое пространство. Говорят, что функция $f\colon X \to \mathbb{K}$ *исчезает на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset X$, что $|f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \notin K$. Пространство всех непрерывных исчезающих на бесконечности функций на X обозначается через $C_0(X)$. Очевидно, $C_0(X) \subset C_b(X)$, и поэтому $C_0(X)$ является нормированным пространством относительно равномерной нормы. Ясно, что если X компактно, то $C_0(X) = C_b(X) = C(X)$. Нетрудно проверить (проверьте), что $C_0(\mathbb{N}) = c_0$ (см. пример 1.7).

Пример 1.11. Для $p \in \mathbb{N}$ пространство $C^p[a,b]$ по умолчанию снабжается нормой

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant p} \|f^{(k)}\|_\infty.$$

По ряду причин она более естественна для этого пространства, чем, скажем, равномерная норма. Отметим, что последовательность функций (f_n) сходится к функции f в топологии пространства $C^p[a,b]$ тогда и только тогда, когда производные $(f_n^{(k)})$ равномерно сходятся к $f^{(k)}$ для всех $k = 0, \ldots, p$.

В качестве упражнения полезно попробовать определить норму на пространстве $C^p(M)$, где M — компактное C^p-многообразие. Отметим, что на пространствах бесконечно дифференцируемых функций никакой естественной нормы нет (хотя на них и есть естественная топология, с которой мы познакомимся, когда будем изучать топологические векторные пространства).

Прежде чем переходить к дальнейшим примерам, обсудим одну несложную конструкцию. Пусть X — *полунормированное пространство*, т.е. векторное пространство, снабженное полунормой. Нетрудно убедиться (убедитесь!), что множество

$$N = \{x \in X : \|x\| = 0\}$$

является векторным подпространством в X, и что формула

$$\|x + N\|^\wedge = \|x\| \qquad (x \in X)$$

корректно определяет норму на факторпространстве X/N.

Определение 1.2. Нормированное пространство $(X/N, \|\cdot\|^\wedge)$ называется *нормированным пространством, ассоциированным с X*.

Приведем теперь несколько важных примеров нормированных пространств, определяемых в терминах интеграла Лебега. Сначала условимся о следующей терминологии. Под *пространством с мерой* мы будем понимать тройку $(X, \mathscr{A}, \mu)$, где X — множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств, а $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ — σ-аддитивная мера на $\mathscr{A}$. Для простоты будем предполагать, что мера μ *σ-конечна*; это означает, что X является не более чем счетным объединением множеств конечной меры. Как правило, вместо $(X, \mathscr{A}, \mu)$ мы будем писать просто (X, μ), не указывая σ-алгебру $\mathscr{A}$ в явном виде; к путанице это не приведет.

Пример 1.12. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Зафиксируем число $p \in [1, +\infty)$ и положим

$$\mathscr{L}^p(X, \mu) = \Big\{f\colon X \to \mathbb{K} : f \text{ измерима и } |f|^p \text{ интегрируема}\Big\}.$$

Из *неравенства Минковского* для функций (см. листок 1) следует, что $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ — векторное подпространство в пространстве всех $\mathbb{K}$-значных функций на X, и что формула

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\Big)^{1/p}$$

задает полунорму на $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ (разумеется, при $p = 1$ эти два утверждения очевидны.) Нормированное пространство, ассоциированное с $\mathscr{L}^p(X, \mu)$, обозначается через $L^p(X, \mu)$.

Напомним, что интеграл от неотрицательной функции равен нулю тогда и только тогда, когда эта функция равна нулю почти всюду (т.е. всюду, за исключением множества меры нуль). Поэтому для $f \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$ условия $\|f\|_p = 0$ и $f = 0$ п.в. эквивалентны. Следовательно,

$$L^p(X, \mu) = \mathscr{L}^p(X, \mu)/\{f : f = 0 \text{ п.в.}\}.$$

Таким образом, пространство $L^p(X, \mu)$ состоит из классов эквивалентности функций из пространства $\mathscr{L}^p(X, \mu)$, где отношение эквивалентности — это равенство почти всюду. Тем не менее, при работе с L^p-пространствами удобно позволять себе некоторую вольность речи и называть элементы этих пространств «функциями», помня при этом, что две функции равны как элементы пространства $L^p(X, \mu)$ тогда и только тогда, когда они равны почти всюду. Эта вольность речи является общепринятой и не приводит к недоразумениям, поэтому мы в дальнейшем без особых оговорок будем использовать речевой оборот «функция из $L^p(X, \mu)$».

Пример 1.13. Пусть, как и в предыдущем примере, (X, μ) — пространство с мерой. Измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{K}$ называется *существенно ограниченной*, если она ограничена на некотором множестве $E \subset X$, удовлетворяющем условию $\mu(X \setminus E) = 0$. (По-другому можно сказать и так: функция существенно ограничена, если она эквивалентна ограниченной.) Положим

$$\mathscr{L}^\infty(X, \mu) = \Big\{f\colon X \to \mathbb{K} : f \text{ измерима и существенно ограничена}\Big\}.$$

Существенной верхней гранью вещественной функции $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ называется величина

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\Big\{\sup_{x \in E} f(x) : E \subset X,\ \mu(X \setminus E) = 0\Big\}.$$

Нетрудно проверить (проверьте), что $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ — векторное подпространство в пространстве всех $\mathbb{K}$-значных функций на X, и что формула

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup}|f|$$

задает полунорму на $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$. Ассоциированное с $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ нормированное пространство обозначается через $L^\infty(X,\mu)$.

Как и в предыдущем примере, легко проверить (по поводу подробностей см. задачи из листка 1), что для $f \in \mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ условия $\|f\| = 0$ и $f = 0$ п.в. эквивалентны. Следовательно,

$$L^\infty(X,\mu) = \mathscr{L}^\infty(X,\mu)/\{f : f = 0 \text{ п.в.}\}.$$

При работе с L^∞-пространствами мы будем следовать тому же соглашению, что и в случае L^p-пространств, а именно, рассматривать элементы этих пространств как функции с точностью до равенства почти всюду.

Замечание 1.1. Отметим, что для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ пространства ℓ^p — это частный случай пространств $L^p(X,\mu)$. В самом деле, определим *считающую меру* μ на $2^{\mathbb{N}}$ формулой

$$\mu(A) = \text{число элементов в } A.$$

Нетрудно проверить (проверьте!), что $\mathscr{L}^p(\mathbb{N},\mu) = L^p(\mathbb{N},\mu) = \ell^p$.

1.3. Ограниченные линейные операторы

В курсе алгебры вы познакомились с языком категорий и функторов. Этот язык удобен для использования практически в любой области современной математики, и функциональный анализ — не исключение. Одна из основных категорий функционального анализа — категория нормированных пространств, объектами которой являются, разумеется, нормированные пространства, а роль морфизмов играют *ограниченные линейные операторы*, которые мы сейчас определим.

Определение 1.3. Пусть X, Y — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *ограниченным*, если существует такое $C \geqslant 0$, что $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$.

Условие ограниченности оператора можно выразить и в несколько других терминах. Для этого удобно ввести следующие обозначения. Для нормированного пространства X и $r > 0$ положим

$$\mathbb{B}_{r,X} = \{x \in X : \|x\| \leqslant r\}, \quad \mathbb{B}^\circ_{r,X} = \{x \in X : \|x\| < r\}, \quad \mathbb{S}_{r,X} = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Таким образом, $\mathbb{B}_{r,X}$ и $\mathbb{B}^\circ_{r,X}$ — это соответственно замкнутый и открытый шары, а $\mathbb{S}_{r,X}$ — сфера радиуса r с центром в нуле. Если пространство X фиксировано, то мы часто будем обозначать эти множества просто $\mathbb{B}_r$, $\mathbb{B}^\circ_r$ и $\mathbb{S}_r$. При $r = 1$ они называются *единичными шарами* (соответственно, *единичной сферой*) пространства X.

Предложение 1.1. *Для линейного оператора $T\colon X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *T ограничен;*
(ii) *множество $T(B) \subset Y$ ограничено для любого ограниченного множества $B \subset X$;*
(iii) *множество $T(\mathbb{B}_1) \subset Y$ ограничено;*
(iv) *множество $T(\mathbb{S}_1) \subset Y$ ограничено.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть оператор T ограничен, т.е. $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$. Если $B \subset X$ — ограниченное множество, то $B \subset \mathbb{B}_r$ для некоторого $r > 0$, и поэтому $T(B) \subset T(\mathbb{B}_r) \subset \mathbb{B}_{Cr}$. Следовательно, множество $T(B)$ ограничено.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv): очевидно.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Предположим, что множество $T(\mathbb{S}_1)$ ограничено. Это означает, что $T(\mathbb{S}_1) \subset \mathbb{B}_C$ для некоторого $C \geqslant 0$, т.е. $\|Tx\| \leqslant C$ для всех $\|x\| = 1$. Возьмем теперь произвольный $x \in X$, $x \neq 0$, и положим $x_0 = x/\|x\|$. Тогда $\|x_0\| = 1$, поэтому $\|Tx_0\| \leqslant C$, откуда после умножения на $\|x\|$ получаем $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$. Ясно, что для $x = 0$ полученное неравенство также выполнено. □

Замечание 1.2. Замена вектора x на вектор $x/\|x\|$, которую мы проделали в доказательстве, называется *нормировкой* этого вектора. Прием нормировки используется в функциональном анализе на каждом шагу; в дальнейшем мы часто будем его применять без каких-либо особых оговорок.

Теорема 1.2. *Для линейного оператора $T\colon X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *T ограничен;*
(ii) *T непрерывен в нуле;*
(iii) *T непрерывен.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (iii). Пусть $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$. Если $x_n \to x$ в X, то

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leqslant C\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

т.е. $Tx_n \to Tx$ в Y. Следовательно, T непрерывен.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): очевидно.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Пусть T неограничен; тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой вектор $x_n \in \mathbb{B}_{1,X}$, что $\|Tx_n\| > n^2$. Положим $y_n = x_n/n$; тогда $\|y_n\| \leqslant 1/n$, поэтому $y_n \to 0$ в X. С другой стороны, $\|Ty_n\| = \|Tx_n\|/n > n \to \infty$, поэтому $Ty_n \not\to 0$ в Y. Это противоречит непрерывности оператора T в нуле. □

Доказанная теорема позволяет, в частности, сравнивать между собой разные нормы, заданные на одном и том же векторном пространстве.

Определение 1.4. Пусть $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ — нормы на векторном пространстве X, и пусть $\mathscr{T}'$ и $\mathscr{T}''$ — задаваемые ими топологии на X. Говорят, что норма $\|\cdot\|'$ *мажорируется* нормой $\|\cdot\|''$ (и пишут $\|\cdot\|' \prec \|\cdot\|''$), если топология $\mathscr{T}'$ не сильнее, чем $\mathscr{T}''$ (т.е. $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}''$). Если же эти топологии равны, то нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ называют *эквивалентными* (и пишут $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|''$).

Следствие 1.3. *Пусть $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ — нормы на векторном пространстве X.*

(i) $\|\cdot\|' \prec \|\cdot\|'' \iff$ *существует такое $C > 0$, что $\|x\|' \leqslant C\|x\|''$ для всех $x \in X$;*
(ii) $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|'' \iff$ *существуют такие $c, C > 0$, что $c\|x\|'' \leqslant \|x\|' \leqslant C\|x\|''$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $I\colon (X, \|\cdot\|'') \to (X, \|\cdot\|')$, $I(x) = x$. Очевидно, $\|\cdot\|' \prec \|\cdot\|''$ тогда и только тогда, когда он непрерывен. Это, в силу теоремы 1.2, эквивалентно ограниченности оператора I, т.е. существованию константы $C > 0$ со свойством, указанным в (i). Это доказывает (i), а (ii) очевидным образом следует из (i). □

Обратите внимание, что из задачи 1.5 (см. листок 1) следует, что нормы $\|\cdot\|_p$ на $\mathbb{K}^n$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, см. примеры 1.2–1.4) эквивалентны друг другу. На самом деле верно следующее более общее утверждение.

Предложение 1.4. *На конечномерном векторном пространстве любые две нормы эквивалентны друг другу.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|$ — какая-то норма на $\mathbb{K}^n$, а $\|\cdot\|_2$ — обычная евклидова норма (см. пример 1.4). Докажем, что они эквивалентны. Рассмотрим стандартный базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbb{K}^n$, где $e_i = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (единица на i-м месте). Для любого $x \in \mathbb{K}^n$ по неравенству Коши-Буняковского[1] имеем

$$\|x\| = \Big\|\sum_i x_i e_i\Big\| \leqslant \sum_i |x_i| \|e_i\| \leqslant C\|x\|_2,$$

где $C = (\sum_i \|e_i\|^2)^{1/2}$. Следовательно, $\|\cdot\| \prec \|\cdot\|_2$.

Заметим теперь, что функция $f(x) = \|x\|$ непрерывна на $\mathbb{K}^n_2$. Это следует из неравенства

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant C\|x - y\|_2.$$

Пусть $S = \mathbb{S}_{\mathbb{K}^n_2}$ — единичная сфера в $\mathbb{K}^n_2$ с центром в нуле. Поскольку она компактна, существует $\min_{x \in S} f(x) = a$. Ясно, что $a > 0$ (так как f — норма). Для любого ненулевого $x \in \mathbb{K}^n$ положим $y = x/\|x\|_2$. Поскольку $y \in S$, мы получаем неравенство $\|y\| \geqslant a$, т.е. $\|x\| \geqslant a\|x\|_2$. Следовательно, $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$. □

Отметим, что для бесконечномерных векторных пространств утверждение, аналогичное предложению 1.4, неверно; примеры см. в листке 1.

Разобравшись со сравнением норм, вернемся к линейным операторам. Если X и Y — нормированные пространства, то множество всех ограниченных линейных операторов из X в Y обозначается через $\mathscr{B}(X, Y)$. Если $Y = X$, то вместо $\mathscr{B}(X, X)$ пишут обычно $\mathscr{B}(X)$. Наша ближайшая цель — показать, что $\mathscr{B}(X, Y)$ является нормированным пространством.

Определение 1.5. *Нормой* ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$ называется число

$$\|T\| = \inf\big\{C \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant C\|x\| \quad \forall\, x \in X\big\}.$$

Замечание 1.3. Обратите внимание, что множество, от которого берется inf в этом определении, представляет собой замкнутый луч на прямой. Следовательно, само число $\|T\|$ также принадлежит этому множеству, так что

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\| \quad \text{для всех } x \in X. \tag{1.1}$$

[1] Так называется неравенство Гёльдера при $p = q = 2$, см. задачу 1.3 из листка 1.

Кроме того, легко проверить (проверьте), что при $X \neq 0$

$$\begin{aligned}\|T\| &= \inf\bigl\{C \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant C\|x\| \quad \forall\, x \in X \setminus \{0\}\bigr\} = \\ &= \inf\left\{C \geqslant 0 : C \geqslant \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad \forall\, x \in X \setminus \{0\}\right\} = \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Первое и второе из этих равенств очевидны, третье следует из определения точной верхней грани, а четвертое и пятое доказываются с помощью приема нормировки. Если положить по определению $\sup \varnothing = 0$, то равенства (1.2) будут верны и для $X = 0$.

Подводя итог этим рассуждениям, можно (несколько нестрого) сказать, что норма оператора — это максимальное число раз, в которое он может растягивать векторы.

Предложение 1.5. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства.*

(i) *Если $S, T \in \mathscr{B}(X, Y)$, то $S + T \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $\|S + T\| \leqslant \|S\| + \|T\|$.*
(ii) *Если $S \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $\lambda \in \mathbb{K}$, то $\lambda S \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $\|\lambda S\| = |\lambda| \|S\|$.*
(iii) *Если $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $S \in \mathscr{B}(Y, Z)$, то $ST \in \mathscr{B}(X, Z)$ и $\|ST\| \leqslant \|S\| \|T\|$.*

Доказательство. (i) Для каждого $x \in X$ с учетом (1.1) имеем

$$\|(S + T)(x)\| = \|Sx + Tx\| \leqslant \|Sx\| + \|Tx\| \leqslant (\|S\| + \|T\|)\|x\|.$$

Дальше ясно.

(ii) С учетом (1.2) получаем равенства

$$\|\lambda S\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda Sx\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Sx\| = |\lambda| \|S\|.$$

(iii) Для каждого $x \in X$ с учетом (1.1) имеем

$$\|STx\| \leqslant \|S\| \|Tx\| \leqslant \|S\| \|T\| \|x\|.$$

Дальше ясно. $\square$

Следствие 1.6. *$\mathscr{B}(X, Y)$ — нормированное пространство.*

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 2

2.1. Топологические и метрические свойства линейных операторов

Операторы, о которых пойдет речь в следующем определении, являются аналитическими аналогами вложений. Вложения в функциональном анализе бывают двух типов: «топологические» и «метрические».

Определение 2.1. Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется

(i) *топологически инъективным*, если он осуществляет гомеоморфизм между X и своим образом[1] $\operatorname{Im} T$;

(ii) *топологическим изоморфизмом*, если он топологически инъективен и сюръективен;

(iii) *изометрическим* (или *изометрией*), если $\|Tx\| = \|x\|$ для всех $x \in X$;

(iv) *изометрическим изоморфизмом*, если он изометричен и сюръективен.

Сделаем несколько несложных наблюдений, связанных с этим определением. Во-первых, ясно, что топологический изоморфизм обладает обратным, который также является топологическим изоморфизмом. Далее, любой изометрический линейный оператор $T\colon X \to Y$ инъективен, т.к. если $x \in \operatorname{Ker} T$, то $\|x\| = \|Tx\| = 0$, поэтому $x = 0$. Следовательно, изометрический изоморфизм обладает обратным, который также, очевидно, является изометрическим изоморфизмом.

Дадим теперь характеризацию топологически инъективных операторов в метрических терминах.

Предложение 2.1. *Следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ эквивалентны:*

(i) *T топологически инъективен;*

(ii) *существует такое $c > 0$, что $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ для всех $x \in X$* (это свойство оператора иногда называют *ограниченностью снизу*).

Доказательство. Положим $Y_0 = \operatorname{Im} T$ и рассмотрим оператор $T_0\colon X \to Y_0$, $T_0(x) = T(x)$. Заметим, что каждое из условий (i) и (ii) влечет за собой инъективность оператора T, т.е. биективность оператора T_0. Имеем следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \iff T_0^{-1} \text{ непрерывен } &\iff \exists C > 0 : \|T_0^{-1}y\| \leqslant C\|y\| \ \forall y \in Y_0\\
&\iff \exists C > 0 : \|x\| \leqslant C\|Tx\| \ \forall x \in X\\
&\iff \text{выполнено (ii) с константой } c = 1/C.
\end{aligned}$$
□

[1] Под *образом* линейного оператора $T\colon X \to Y$ мы всегда будем понимать его теоретико-множественный образ $\operatorname{Im} T = T(X)$. Следует иметь в виду, что это не то же самое, что образ в смысле теории категорий. Полезно проверить, что категорным образом морфизма T в категории нормированных пространств $\mathscr{N}\!orm$ или $\mathscr{N}\!orm_1$ (см. замечание 2.2) является замыкание множества $T(X)$.

Следствие 2.2. *Изометрический линейный оператор топологически инъективен. В частности, изометрический изоморфизм является топологическим изоморфизмом.*

Обсудим теперь операторы, которые являются аналитическими аналогами сюръекций. Как и в случае с инъекциями, сюръекции в функциональном анализе бывают двух типов.

Определение 2.2. Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется

(i) *открытым*, если для любого открытого множества $U \subset X$ множество $T(U)$ открыто в Y;

(ii) *коизометрическим* (или *коизометрией*), если $T(\mathbb{B}^{\circ}_{1,X}) = \mathbb{B}^{\circ}_{1,Y}$.

Чтобы увидеть связь между этими двумя понятиями, дадим несколько эквивалентных описаний открытых операторов.

Предложение 2.3. *Следующие свойства линейного оператора $T\colon X \to Y$ эквивалентны:*

(i) *T открыт;*

(ii) *$T(\mathbb{B}^{\circ}_1) \supset \mathbb{B}^{\circ}_r$ для некоторого $r > 0$;*

(iii) *существует такое $C > 0$, что для каждого $y \in Y$ найдется такой $x \in X$, что $Tx = y$ и $\|x\| \leqslant C\|y\|$.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii): очевидно.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Зафиксируем $y \in Y$, $y \neq 0$, и положим $y' = (r/2\|y\|)\, y$. Очевидно, $y' \in \mathbb{B}^{\circ}_{r,Y}$, поэтому $y' = Tx'$ для некоторого $x' \in \mathbb{B}^{\circ}_{1,X}$. Положим $x = (2\|y\|/r)\, x'$; тогда $Tx = y$ и $\|x\| \leqslant (2/r)\|y\|$. Ясно, что для $y = 0$ свойство (iii) также выполнено.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): очевидно (достаточно положить $r = 1/C$).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Пусть $U \subset X$ — открытое подмножество и $x \in U$. Достаточно показать, что Tx — внутренняя точка множества $T(U)$. Подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $x + \varepsilon\mathbb{B}^{\circ}_1 \subset U$; тогда $T(U) \supset Tx + \varepsilon T(\mathbb{B}^{\circ}_1) \supset Tx + \mathbb{B}^{\circ}_{\varepsilon r}$, так что Tx — внутренняя точка $T(U)$. □

Следствие 2.4. *Коизометрический линейный оператор открыт, а открытый линейный оператор сюръективен.*

Наблюдение 2.5. Отметим тот очевидный факт, что если оператор $T\colon X \to Y$ изометричен и $X \neq 0$, то $\|T\| = 1$. То же самое равенство верно и для коизометрического оператора $T\colon X \to Y$ при условии, что $Y \neq 0$. В самом деле, из равенства $T(\mathbb{B}^{\circ}_{1,X}) = \mathbb{B}^{\circ}_{1,Y}$ по непрерывности следует включение $T(\mathbb{B}_{1,X}) \subset \mathbb{B}_{1,Y}$, которое дает оценку $\|T\| \leqslant 1$. С другой стороны, если бы норма T была меньше 1, то включение $T(\mathbb{B}^{\circ}_{1,X}) \subset \mathbb{B}^{\circ}_{\|T\|,Y}$ противоречило бы определению коизометрии. Следовательно, $\|T\| = 1$.

Замечание 2.1. Операторы $T\colon X \to Y$, удовлетворяющие условию $T(\mathbb{B}_{1,X}) = \mathbb{B}_{1,Y}$, называются иногда *строгими коизометриями*. Можно проверить, что всякая строгая коизометрия является коизометрией, но не наоборот (см. задачу 2.10 из листка 2).

Замечание 2.2. Операторы, о которых шла речь выше, можно интерпретировать в терминах теории категорий. А именно, рассмотрим категорию $\mathscr{N}\!orm$, объектами которой являются нормированные пространства, а морфизмами — ограниченные линейные операторы. Тогда изоморфизмы в этой категории — это в точности топологические изоморфизмы, мономорфизмы — инъективные операторы, эпиморфизмы — операторы с плотным образом, ядра — топологически инъективные операторы с замкнутым образом и коядра — открытые операторы. Рассмотрим теперь еще одну категорию $\mathscr{N}orm_1$, объекты которой — это по-прежнему нормированные пространства, а морфизмы — *линейные сжатия*, т.е. линейные операторы T со свойством $\|T\| \leqslant 1$. Тогда изоморфизмы в этой категории — это в точности изометрические изоморфизмы, мономорфизмы — инъективные операторы, эпиморфизмы — операторы с плотным образом, ядра — изометрические операторы с замкнутым образом и коядра — коизометрические операторы. Попробуйте доказать все эти утверждения (прочитав сперва параграф о факторпространствах; см. ниже).

Обсудим теперь несколько базовых примеров.

2.2. Примеры ограниченных линейных операторов

Пример 2.1. Обозначим через $\mathbf{1}_X$ тождественный оператор в нормированном пространстве X. Очевидно, он ограничен и $\|\mathbf{1}_X\| = 1$.

Пример 2.2 (*диагональный оператор*)**.** Пусть $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность, т.е. элемент пространства ℓ^∞. Пусть X — какое-либо из пространств последовательностей ℓ^p (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или c_0.

Предложение 2.6. *Для любого $x \in X$ последовательность $\lambda x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ также принадлежит X, и отображение $M_\lambda \colon X \to X$, $x \mapsto \lambda x$, является ограниченным линейным оператором. При этом $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$.*

Доказательство. Проведем доказательство для $X = \ell^p$ при $p < \infty$ (для ℓ^∞ и c_0 все делается аналогично). Для каждого $x \in \ell^p$ имеем

$$\sum_i |\lambda_i x_i|^p \leqslant \sup_i |\lambda_i|^p \sum_i |x_i|^p = \|\lambda\|_\infty^p \|x\|_p^p\,.$$

Следовательно, ряд в левой части неравенства сходится, так что $\lambda x \in \ell^p$, и определен (очевидно, линейный) оператор $M_\lambda \colon \ell^p \to \ell^p$. Из того же неравенства видно, что $\|M_\lambda\| \leqslant \|\lambda\|_\infty$. Обозначим через e_i последовательность с единицей на i-ом месте и нулем на остальных. Тогда

$$\|M_\lambda\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|M_\lambda x\| \geqslant \sup_{i\in\mathbb{N}} \|M_\lambda e_i\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|\lambda_i e_i\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| = \|\lambda\|_\infty.$$

Отсюда получаем требуемое равенство $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$. □

Оператор M_λ называется *диагональным оператором* в X.

Замечание 2.3. Из проведенного доказательства видно, что для ограниченного оператора T не обязательно существует такой ненулевой вектор x, что $\|Tx\| = \|T\|\|x\|$. Если такое все же случилось, то говорят, что оператор *достигает нормы.* А в общем случае можно лишь гарантировать, что для каждого $\delta > 0$ найдется такой ненулевой x_δ, что $\|Tx_\delta\| \geqslant (\|T\| - \delta)\|x_\delta\|$.

Пример 2.3 (*операторы сдвига*)**.** Пусть X — любое из пространств ℓ^p или c_0, как и в предыдущем примере. Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} &T_r\colon X \to X, \qquad T_r(x) = (0, x_1, x_2, \ldots) \qquad \text{(оператор \textit{правого сдвига})},\\ &T_\ell\colon X \to X, \qquad T_\ell(x) = (x_2, x_3, \ldots) \qquad \text{(оператор \textit{левого сдвига})}. \end{aligned}$$

Ясно, что они оба линейны и ограничены. Оператор T_r, очевидно, изометричен, поэтому $\|T_r\| = 1$. Оператор же T_ℓ, как нетрудно проверить, коизометричен (проверьте!), поэтому $\|T_\ell\| = 1$.

Если в качестве X взять пространство «двусторонних» последовательностей $\ell^p(\mathbb{Z})$ или $c_0(\mathbb{Z})$, то можно определить оператор

$$T_b\colon X \to X, \quad (T_b(x))_i = x_{i-1} \quad \text{(оператор \textit{двустороннего сдвига})}.$$

Очевидно, он изометричен и имеет поэтому норму 1.

Операторы, аналогичные оператору двустороннего сдвига, можно определить во многих других пространствах функций на группах. Пусть, например, X — это одно из пространств $C_b(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$ или $L^p(\mathbb{R})$ (относительно меры Лебега); тогда для каждого $a \in \mathbb{R}$ определен изометрический оператор

$$T_a\colon X \to X, \quad (T_a f)(t) = f(t-a).$$

Изометричность этого оператора (в случае $X = L^p(\mathbb{R})$ при $p < \infty$) следует из инвариантности меры Лебега относительно сдвигов.

Вместо группы $\mathbb{R}$ можно взять единичную окружность $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, снабженную нормализованной мерой Лебега[1]. Если X — это одно из пространств $C(\mathbb{T})$ или $L^p(\mathbb{T})$, то для каждого $\zeta \in \mathbb{T}$ определен изометрический оператор

$$T_\zeta\colon X \to X, \quad (T_\zeta f)(z) = f(\zeta^{-1} z).$$

Изометричность этого оператора (в случае $X = L^p(\mathbb{T})$ при $p < \infty$) следует из инвариантности меры Лебега относительно поворотов окружности.

Замечание 2.4. Отметим, что для $G = \mathbb{R}$ или $G = \mathbb{T}$ сопоставление каждому $g \in G$ оператора сдвига T_g является представлением G в X; оно называется *регулярным представлением.* Аналогичную конструкцию можно проделать для любой локально компактной топологической группы G, снабженной так называемой *мерой Хаара* — регулярной борелевской мерой, инвариантной относительно левых сдвигов. Существование и единственность (с точностью до множителя) такой меры — это весьма глубокая теорема, доказанная в разное время и в разной степени общности А. Хааром, Дж. фон Нойманном и А. Вейлем. Впрочем, для групп Ли меру Хаара построить довольно легко; знакомые с группами Ли могут попробовать сделать это в качестве упражнения.

Пример 2.4 (*оператор умножения* в $C_b(X)$)**.** Пусть X — топологическое пространство и $f \in C_b(X)$. *Оператор умножения* $M_f\colon C_b(X) \to C_b(X)$ действует по формуле $M_f(g) = fg$ (где $g \in C_b(X)$). Легко проверить (проверьте), что оператор M_f ограничен и $\|M_f\| = \|f\|_\infty$. Обратите внимание, что при $X = \mathbb{N}$ оператор M_f — это в точности диагональный оператор из примера 2.2.

[1] Это означает, что мы переносим меру Лебега с полуинтервала $[0, 2\pi)$ на $\mathbb{T}$ посредством отображения $t \mapsto e^{it}$, а потом нормируем ее, т.е. делим на 2π, чтобы мера всей окружности равнялась 1.

Пример 2.5 (*оператор умножения* в $L^p(X,\mu)$)**.** Пусть (X,μ) — пространство с мерой и $f \in L^\infty(X,\mu)$. Зафиксируем произвольное $p \in [1,+\infty]$. *Оператор умножения* $M_f\colon L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ действует по той же формуле, что и в предыдущем примере. Можно проверить (проверьте), что оператор M_f ограничен и $\|M_f\| = \|f\|_{L^\infty}$. Обратите внимание, что при $X = \mathbb{N}$ (со считающей мерой) мы снова получаем диагональный оператор из примера 2.2.

Отметим, что диагональный оператор и оператор умножения — это больше чем просто примеры. Через некоторое время мы увидим, что при $p = 2$ они служат моделями для весьма важных классов операторов — *нормальных* и *нормальных компактных* операторов в гильбертовом пространстве.

Следующий класс операторов также играет весьма важную роль как в общей теории, так и в приложениях.

Определение 2.3. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, K — измеримая функция на $X \times X$ и E — некоторое векторное пространство функций на X. *Интегральным оператором* на E называется оператор вида

$$T_K\colon E \to E, \quad (T_K f)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y). \tag{2.1}$$

Функцию K иногда называют *ядром*[1] оператора T_K.

Обратите внимание, что формула (2.1) — это обобщение формулы умножения матрицы на столбец. В самом деле, если $X = \{1,\ldots,n\}$ и μ — считающая мера, то K — это просто квадратная $n\times n$-матрица, функция f — столбец чисел, а оператор T_K действует по формуле $(T_K f)_i = \sum_j K_{ij} f_j$.

Важный частный случай интегральных операторов — это так называемые операторы Вольтерра.

Определение 2.4. Пусть $I = [a,b]$ — отрезок с мерой Лебега, K — измеримая функция на $I\times I$ и E — некоторое векторное пространство функций на I. *Оператором Вольтерра* на E называется оператор вида

$$V_K\colon E \to E, \quad (V_K f)(x) = \int_a^x K(x,y) f(y)\, dy.$$

Заметим, что $V_K = T_{\tilde K}$, где функция $\tilde K$ определена формулой

$$\tilde K(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & \text{если } y \leqslant x,\\ 0, & \text{если } y > x.\end{cases}$$

Разумеется, чтобы оператор T_K (или V_K) был определен, следует наложить на функцию K и пространство E определенные условия. Вот два конкретных примера.

Пример 2.6. Пусть $I = [0,1]$ (с мерой Лебега) и $K \in C(I\times I)$. Нетрудно проверить (проверьте), что формула (2.1) задает ограниченный линейный оператор $T_K\colon C(I) \to C(I)$, причем $\|T_K\| \leqslant \|K\|_\infty$. Аналогичное утверждение справедливо и для оператора Вольтерра $V_K\colon C(I) \to C(I)$.

[1] Хотя она и не имеет ничего общего с подпространством $\operatorname{Ker} T_K$; в данном случае термин «ядро» — это просто дань традиции.

Пример 2.7. Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Используя теорему Фубини, можно показать (покажите), что для каждой $f \in L^2(X, \mu)$ интеграл в правой части равенства (2.1) существует для почти всех $x \in X$ и определяет функцию $T_K f \in L^2(X, \mu)$. Таким образом, получаем линейный оператор $T_K \colon L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$. Можно проверить (проверьте), что он ограничен, и что $\|T_K\| \leqslant \|K\|_2$.

Последний пример также является модельным — на этот раз для так называемых *операторов Гильберта–Шмидта*.

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 3

3.1. Основные конструкции нормированных пространств

3.1.1. ℓ^p-суммы и c_0-суммы

Пусть X и Y — нормированные пространства. Зафиксируем $p \in [1, +\infty)$ и для каждого вектора $(x, y) \in X \oplus Y$ положим

$$\|(x, y)\|_p = \big(\|x\|^p + \|y\|^p\big)^{1/p}.$$

Из неравенства Минковского следует, что $\|\cdot\|_p$ — норма на $X \oplus Y$. Введем также норму $\|\cdot\|_\infty$ на $X \oplus Y$, полагая

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Определение 3.1. Пространство $X \oplus Y$, снабженное нормой $\|\cdot\|_p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), называется *$\ell^p$-суммой* пространств X и Y и обозначается через $X \oplus_p Y$.

Замечание 3.1. Легко проверить, что нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $X \oplus Y$ эквивалентны для всех p, q и задают на $X \oplus Y$ обычную топологию прямого произведения. Это можно вывести либо из задачи 1.5 (листок 1), либо из предложения 1.5. Поэтому в тех случаях, когда нас будут интересовать топологические (а не метрические) свойства нормированного пространства $X \oplus_p Y$, мы будем обозначать его просто $X \oplus Y$ и называть *прямой суммой* пространств X и Y.

Точно так же определяется ℓ^p-сумма любого конечного числа нормированных пространств. Чтобы определить ℓ^p-сумму бесконечного семейства пространств, введем следующее понятие.

Пусть I — произвольное множество и $\mathrm{Fin}(I)$ — семейство всех его конечных подмножеств.

Определение 3.2. *Суммой* семейства $(a_i)_{i\in I}$ неотрицательных чисел называется величина

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J\in \mathrm{Fin}(I)} \sum_{i\in J} a_i \in [0, +\infty].$$

Упражнение 3.1. Покажите, что $\sum_{i\in I} a_i < +\infty$ тогда и только тогда, когда множество $S = \{i \in I : a_i > 0\}$ не более чем счетно, причем если оно счетно, то ряд $\sum_{i\in S} a_i$ сходится при какой-либо (или, что эквивалентно, при любой) нумерации множества S.

Определение 3.3. Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство нормированных пространств.

(i) Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Положим

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} X_i\Big)_p = \Big\{x = (x_i) \in \prod_{i\in I} X_i : \sum_{i\in I} \|x_i\|^p < \infty\Big\}.$$

Из неравенства Минковского следует, что $(\bigoplus X_i)_p$ — векторное подпространство в $\prod X_i$, и что формула

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

задает норму на $(\bigoplus X_i)_p$. Полученное нормированное пространство $(\bigoplus X_i)_p$ называется ℓ^p-*суммой* семейства (X_i).

(ii) Положим

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} X_i\Big)_\infty = \Big\{ x = (x_i) \in \prod_{i\in I} X_i : \sup_{i\in I} \|x_i\| < \infty \Big\}.$$

Очевидно, что $(\bigoplus X_i)_\infty$ — векторное подпространство в $\prod X_i$, и что оно является нормированным пространством относительно нормы

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in I} \|x_i\|.$$

Полученное нормированное пространство $(\bigoplus X_i)_\infty$ называется ℓ^∞-*суммой* семейства (X_i).

(iii) Положим

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} X_i\Big)_0 = \Big\{ x = (x_i) \in \prod_{i\in I} X_i : \text{функция } i \mapsto \|x_i\| \text{ исчезает на бесконечности} \Big\}.$$

Очевидно, $(\bigoplus X_i)_0$ — векторное подпространство в $(\bigoplus X_i)_\infty$, поэтому оно является нормированным пространством относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$. Это пространство называется c_0-*суммой* семейства (X_i).

Если $X_i = \mathbb{K}$ для всех $i \in I$, то пространство $(\bigoplus X_i)_p$ обозначается через $\ell^p(I)$, а пространство $(\bigoplus X_i)_0$ — через $c_0(I)$. Отметим, что $\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p$ и $c_0(\mathbb{N}) = c_0$.

3.1.2. Факторпространства

Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Наша ближайшая цель будет состоять в том, чтобы ввести норму на факторпространстве X/X_0.

Обозначим через $Q\colon X \to X/X_0$ факторотображение, т.е. отображение, действующее по правилу $x \mapsto x + X_0$. Естественно попытаться ввести норму на X/X_0 таким образом, чтобы Q было ограничено. Заметим, что если такая норма существует, то X_0 должно быть замкнутым; в самом деле, $X_0 = \operatorname{Ker} Q = Q^{-1}(\{0\})$, а прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут.

Оказывается, верно и обратное: если X_0 замкнуто в X, то на X/X_0 есть норма с нужным нам свойством. На самом деле таких норм много, но среди них есть одна, которая «лучше всех»; ее-то мы и построим.

Для каждого $u \in X/X_0$ положим

$$\|u\|^\wedge = \inf\{\|z\| : z \in Q^{-1}(u)\}. \tag{3.1}$$

Эквивалентно,

$$\|x + X_0\|^\wedge = \inf\{\|x + y\| : y \in X_0\}. \tag{3.2}$$

Заменяя в формуле (3.2) y на $-y$, видим, что величина $\|x + X_0\|$ равна расстоянию $\rho(x, X_0)$ от x до X_0.

Предложение 3.1. *Функция $\|\cdot\|^\wedge$ — полунорма на X/X_0.*

Докажите это предложение сами в качестве упражнения.

Предложение 3.2. *Функция $\|\cdot\|^\wedge$ — норма $\iff$ X_0 замкнуто в X.*

Доказательство. Функция $\|\cdot\|^\wedge$ является нормой на X/X_0 тогда и только тогда, когда $\|x + X_0\| > 0$ для всех $x \in X \setminus X_0$. Поскольку $\|x + X_0\| = \rho(x, X_0)$ (см. выше), положительность этого числа для всех $x \in X \setminus X_0$ равносильна замкнутости X_0. $\square$

Определение 3.4. В случае замкнутого подпространства $X_0 \subset X$ построенная выше норма $\|\cdot\|^\wedge$ называется *факторнормой* нормы $\|\cdot\|$ на X. Факторпространство X/X_0 по умолчанию снабжается этой нормой.

Предложение 3.3. *Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда факторотображение $Q\colon X \to X/X_0$ коизометрично.*

Доказательство. Из (3.2) следует, что $\|x + X_0\|^\wedge \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$; стало быть, $Q(\mathbb{B}^\circ_{1,X}) \subset \mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}$. Обратно, пусть $u \in \mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}$, т.е. $\|u\|^\wedge < 1$. Тогда из (3.1) получаем, что $u = Q(z)$ для некоторого $z \in X$, $\|z\| < 1$. Следовательно, $Q(\mathbb{B}^\circ_{1,X}) = \mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}$, т.е. Q коизометрично. $\square$

Замечание 3.2. Поскольку факторотображение Q коизометрично, оно открыто. Отсюда нетрудно вывести (сделайте это), что топология на X/X_0 — это в точности фактортопология топологии на X; иными словами, подмножество $U \subset X/X_0$ открыто тогда и только тогда, когда множество $Q^{-1}(U)$ открыто в X.

Теперь мы можем ответить на вопрос, почему факторнорма — это наиболее «правильная» норма на X/X_0. Дело в том, что факторпространство X/X_0, снабженное этой нормой, обладает следующим универсальным свойством, полностью его характеризующим.

Теорема 3.4. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — замкнутое подпространство, $Q\colon X \to X/X_0$ — факторотображение. Тогда для каждого нормированного пространства Y и каждого оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, удовлетворяющего условию $T(X_0) = 0$, существует единственный оператор $\widehat{T} \in \mathscr{B}(X/X_0, Y)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ X/X_0 \arrow[ur, dashed, "\widehat{T}"'] \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

При этом $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

Доказательство. Существование и единственность линейного оператора $\widehat{T}$, делающего диаграмму (3.3) коммутативной, известны из курса алгебры. Докажем его ограниченность. Из коммутативности диаграммы и условия $T(X_0) = 0$ получаем, что для любых $x \in X$ и $y \in X_0$ справедливы равенства

$$\widehat{T}(x + X_0) = T(x) = T(x + y),$$

и, следовательно,

$$\|\widehat{T}(x + X_0)\| = \|T(x + y)\| \leqslant \|T\| \|x + y\|.$$

Беря inf по всем $y \in X_0$, получаем неравенство

$$\|\widehat{T}(x + X_0)\| \leqslant \|T\| \|x + X_0\|^\wedge.$$

Следовательно, оператор $\widehat{T}$ ограничен, причем $\|\widehat{T}\| \leqslant \|T\|$. Для доказательства противоположного неравенства заметим, что если $X/X_0 \neq 0$ (т.е. $X \neq X_0$), то $\|Q\| = 1$, т.к. Q — коизометрия. Следовательно,

$$\|T\| = \|\widehat{T} Q\| \leqslant \|\widehat{T}\| \|Q\| = \|\widehat{T}\|.$$

Вместе с уже доказанной оценкой $\|\widehat{T}\| \leqslant \|T\|$ это дает нужное равенство $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. При $X/X_0 = 0$ это равенство также справедливо по очевидным причинам. □

Доказанную теорему можно по-другому сформулировать так:

Теорема 3.5. *Для любого нормированного пространства Y отображение*

$$\mathscr{B}(X/X_0, Y) \to \big\{T \in \mathscr{B}(X, Y) \, : \, T(X_0) = 0\big\} \subset \mathscr{B}(X, Y), \quad S \mapsto S \circ Q,$$

является изометрическим изоморфизмом.

Замечание 3.3. На категорном языке теорема 3.4, как и эквивалентная ей теорема 3.5, означают, что пара $(X/X_0, Q)$ есть *коядро* вложения $X_0 \hookrightarrow X$ (как в категории $\mathscr{N}orm$, так и в категории $\mathscr{N}orm_1$). Это и есть наиболее «правильное» объяснение того, почему норма на факторпространстве вводится именно так, а не иначе.

Упражнение 3.2. Докажите, что в категориях $\mathscr{N}orm$ и $\mathscr{N}orm_1$ (см. замечание 2.2) каждый морфизм имеет ядро и коядро.

Следствие 3.6. *Пусть X и Y — нормированные пространства, $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$ — замкнутые подпространства, $Q_X \colon X \to X/X_0$ и $Q_Y \colon Y \to Y/Y_0$ — соответствующие факторотображения. Тогда для каждого оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, удовлетворяющего условию $T(X_0) \subset Y_0$, существует единственный оператор $\bar{T} \in \mathscr{B}(X/X_0, Y/Y_0)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q_X"'] & Y \arrow[d, "Q_Y"] \\
X/X_0 \arrow[r, dashed, "\bar{T}"'] & Y/Y_0
\end{tikzcd}$$

При этом $\|\bar{T}\| \leqslant \|T\|$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 3.4 к оператору $Q_Y T$. $\square$

Сформулируем полезное добавление к теореме 3.4.

Предложение 3.7. *В обозначениях теоремы* 3.4 *справедливы следующие утверждения:*

(i) $\widehat{T}$ *открыт* $\iff$ T *открыт;*
(ii) $\widehat{T}$ *коизометричен* $\iff$ T *коизометричен.*

Доказательство. Поскольку оператор Q коизометричен, из коммутативности диаграммы (3.3) следует равенство $\widehat{T}(\mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}) = T(\mathbb{B}^\circ_{1,X})$. Из него понятным образом вытекает как (i), так и (ii). $\square$

Следствие 3.8. *Пусть X и Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. Обозначим через $\widehat{T} \in \mathscr{B}(X/\operatorname{Ker} T, Y)$ оператор, делающий диаграмму*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\
X/\operatorname{Ker} T \arrow[ur, dashed, "\widehat{T}"'] &
\end{tikzcd}
\tag{3.4}
$$

коммутативной (он существует в силу теоремы 3.4*). Тогда*

(i) $\widehat{T}$ *— топологический изоморфизм* $\iff$ T *открыт;*
(ii) $\widehat{T}$ *— изометрический изоморфизм* $\iff$ T *коизометричен.*

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{Ker} \widehat{T} = 0$. Поэтому оба утверждения следуют из предложения 3.7 с учетом того, что инъективный оператор $\widehat{T}$ является топологическим (соответственно, изометрическим) изоморфизмом тогда и только тогда, когда он открыт (соответственно, коизометричен). $\square$

Замечание 3.4. Обратите внимание на отличие следствия 3.8 от его алгебраических аналогов, коротко формулируемых фразой «фактор по ядру изоморфен образу». Отличие состоит в том, что в категориях $\mathscr{N}orm$ и $\mathscr{N}orm_1$ морфизм $X/\operatorname{Ker} T \to Y$, индуцированный эпиморфизмом $T \colon X \to Y$, вовсе не обязан быть изоморфизмом[1].

3.2. Банаховы пространства

Напомним, что последовательность (x_n) в метрическом пространстве (X, ρ) называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m > N$. Каждая сходящаяся последовательность фундаментальна, но обратное в общем случае неверно. Метрические пространства, в которых всякая фундаментальная последовательность сходится, называются *полными*.

[1] По этой причине аддитивная категория $\mathscr{N}orm$ не является абелевой в отличие от, скажем, категорий векторных пространств, абелевых групп, или — более общим образом — модулей над произвольным кольцом.

Определение 3.5. Нормированное пространство называется *банаховым*, если оно полно относительно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Пример 3.1. В курсе классического анализа доказывается, что $\mathbb{R}$ полно (критерий Коши), а также что $\mathbb{R}_2^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ полно. Отождествляя стандартным образом $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$, видим, что и $\mathbb{C}_2^n = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ полно.

Как и раньше, обозначим через $\mathbb{K}$ любое из полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и будем рассматривать нормированные пространства над $\mathbb{K}$. Будет ли $\mathbb{K}^n$ банаховым пространством, если снабдить его какой-нибудь нормой, отличной от евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$? Чтобы ответить на этот вопрос, сделаем следующее несложное наблюдение.

Предложение 3.9. *Пусть X и Y — нормированные пространства.*

(i) *Если (x_n) — фундаментальная последовательность в X, то (Tx_n) — фундаментальная последовательность в Y для любого $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.*
(ii) *Если X и Y топологически изоморфны и X полно, то и Y полно.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из оценки $\|Tx_n - Tx_m\| \leqslant \|T\|\|x_n - x_m\|$. Чтобы доказать утверждение (ii), достаточно заметить, что топологический изоморфизм устанавливает биекцию между классами сходящихся последовательностей в X и Y. В силу (i), он же устанавливает биекцию между классами фундаментальных последовательностей в X и Y. Дальше ясно. □

Отметим, что при произвольных гомеоморфизмах метрических пространств полнота сохраняться вовсе не обязана (приведите пример!).

Следствие 3.10. *Если $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ — эквивалентные нормы на векторном пространстве X и $(X, \|\cdot\|')$ полно, то и $(X, \|\cdot\|'')$ полно.*

Следствие 3.11. *Конечномерное векторное пространство полно относительно любой нормы.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться предложением 1.5 и примером 3.1. □

Напомним следующий несложный факт (если вы с ним незнакомы, обязательно докажите его в качестве упражнения).

Предложение 3.12. *Пусть X — метрическое пространство и $Y \subset X$.*

(i) *Если X полно и Y замкнуто в X, то Y полно.*
(ii) *Если Y полно, то Y замкнуто в X.*

Объединяя этот факт со следствием 3.11, получаем следующее.

Следствие 3.13. *Конечномерное векторное подпространство нормированного пространства замкнуто.*

Вот еще одно непосредственное следствие из предложений 3.9 и 3.12.

Следствие 3.14. *Пусть X и Y — нормированные пространства, причем X полно. Тогда любой топологически инъективный оператор $T\colon X \to Y$ имеет замкнутый образ.*

Вернемся к примерам банаховых пространств. Следующий пример знаком вам из курса анализа.

Пример 3.2. $\ell^\infty(X)$ — банахово пространство для любого множества X.

Поскольку предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций также является непрерывной функцией (см. курс анализа), получаем следующий пример.

Пример 3.3. Для любого топологического пространства X пространство $C_b(X)$ замкнуто в $\ell^\infty(X)$ и является, следовательно, банаховым пространством.

Упражнение 3.3. Для любого топологического пространства X пространство $C_0(X)$ замкнуто в $C_b(X)$ и является, следовательно, банаховым пространством. В частности, $c_0 = C_0(\mathbb{N})$ — банахово пространство.

Пример 3.4. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Из курса анализа вы знаете, что пространства $L^1(X, \mu)$ и $L^2(X, \mu)$ полны. Точно так же доказывается, что пространство $L^p(X, \mu)$ полно для любого $p \in [1, +\infty)$. Для $p = \infty$ это утверждение тоже верно и доказывается еще проще (убедитесь!). Как следствие, пространство ℓ^p полно для любого $p \in [1, +\infty]$.

Упражнение 3.4. Полезное упражнение — доказать полноту пространств ℓ^p «в лоб», не используя общей теоремы о полноте пространств $L^p(X, \mu)$.

Обсудим теперь, какие из стандартных конструкций сохраняют полноту. Следующее предложение докажите сами в качестве упражнения (действуйте по той же схеме, что и в упражнении 3.4).

Предложение 3.15. *Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство банаховых пространств. Тогда $(\bigoplus X_i)_p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) и $(\bigoplus X_i)_0$ — банаховы пространства.*

Предложение 3.16. *Пусть X — банахово пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное пространство. Тогда и X/X_0 — банахово пространство.*

Для доказательства предложения 3.16 удобно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 3.17. *Следующие свойства нормированного пространства X эквивалентны:*

(i) *X полно;*
(ii) *если $x_1, x_2, \ldots \in X$ и $\sum_n \|x_n\| < \infty$, то ряд $\sum_n x_n$ сходится.*

Сходимость ряда в этой лемме понимается в том же смысле, что и сходимость числовых рядов: по определению, ряд в нормированном пространстве сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Докажите эту лемму сами в качестве упражнения; при доказательстве импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i) выделите из произвольной фундаментальной последовательности (y_n) подпоследовательность (y_{n_k}), для которой $\|y_{n_k} - y_{n_{k-1}}\| \leqslant 1/2^k$, докажите ее сходимость и выведите отсюда сходимость последовательности (y_n).

Доказательство предложения 3.16. Пусть элементы $u_1, u_2, u_3, \ldots \in X/X_0$ таковы, что $\sum_n \|u_n\|^\wedge < \infty$. С учетом леммы 3.17 достаточно показать, что ряд $\sum_n u_n$ сходится в X/X_0. Обозначим через Q факторотображение X на X/X_0. По определению факторнормы, для каждого n существует такой $x_n \in Q^{-1}(u_n)$, что $\|x_n\| \leqslant \|u_n\|^\wedge + 1/2^n$. Тогда $\sum_n \|x_n\| < \infty$, поэтому в силу леммы 3.17 ряд $\sum_n x_n$ сходится к некоторому $x \in X$. Применяя отображение Q, получаем, что ряд $\sum_n u_n$ сходится к $Q(x)$. Следовательно, X/X_0 полно. □

Теорема 3.18. *Пусть X и Y — нормированные пространства, причем Y полно. Тогда и пространство $\mathscr{B}(X,Y)$ полно.*

Доказательство. Пусть (T_n) — фундаментальная последовательность в $\mathscr{B}(X,Y)$. Тогда $(T_n(x))$ — фундаментальная последовательность в Y для любого $x \in X$, поэтому она сходится. Положим $T(x) = \lim_n T_n(x)$. Получаем (очевидно, линейный) оператор $T\colon X \to Y$. Покажем, что T ограничен и $T_n \to T$ по норме. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|T_n - T_m\| \leqslant \varepsilon$ при $n, m > N$. Тогда $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{B}_{1,X}$. Фиксируем $n > N$; тогда при $m \to \infty$ получим $\|T_n(x) - T(x)\| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{B}_{1,X}$. Отсюда следует, во-первых, что $T_n - T \in \mathscr{B}(X,Y)$, так что $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, а во-вторых — что $\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$ при $n > N$. Значит, $T_n \to T$ по норме, и все доказано. □

Замечание 3.5. Приведенное выше доказательство полноты пространства $\mathscr{B}(X,Y)$ иллюстрирует общую схему, по которой доказывается полнота многих классических пространств, состоящих из отображений со значениями в банаховом пространстве Y — в частности, многих пространств $\mathbb{K}$-значных функций, таких, как $\ell^\infty(X)$ или ℓ^p. Сначала берется фундаментальная последовательность, доказывается, что последовательность ее значений в каждой точке фундаментальна, а значит, и сходится (так как Y полно). В итоге получается «кандидат на предел» — отображение, к которому наша последовательность сходится поточечно. А затем надо еще раз воспользоваться фундаментальностью последовательности и доказать, что этот «кандидат на предел» на самом деле лежит в нашем пространстве и наша последовательность сходится к нему по норме. Обычно два последних утверждения доказываются «одним махом», как и в предыдущей теореме.

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 4

4.1. Банаховы пространства (продолжение)

Докажем одно несложное, но полезное свойство банаховых пространств. Его иногда называют *теоремой о продолжении по непрерывности*, хотя правильнее было бы, пожалуй, называть ее «теоремой о продолжении по равномерной непрерывности» (см. ниже замечание 4.1).

Теорема 4.1. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — плотное векторное подпространство, Y — банахово пространство. Тогда для любого $T_0 \in \mathscr{B}(X_0, Y)$ существует единственный $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, продолжающий T_0. При этом $\|T\| = \|T_0\|$. Если T_0 топологически инъективен или изометричен, то таков же и T.*

Доказательство. Единственность T очевидна ввиду плотности X_0 в X. Существование доказывается «в лоб» первым приходящим в голову способом. А именно, возьмем произвольный $x \in X$ и подберем последовательность (x_n) в X_0, сходящуюся к x. Ясно, что она фундаментальна, поэтому такова же и последовательность $(T_0 x_n)$ в Y (см. предложение 3.9). Но Y полно, поэтому существует $\lim_n T_0 x_n = y$. Этот предел не зависит от выбора последовательности (x_n), сходящейся к x: если (x_n') — другая такая последовательность, то $x_n' - x_n \to 0$ и $T_0 x_n' - T_0 x_n \to 0$, так что $\lim_n T_0 x_n' = \lim_n T_0 x_n = y$. Поэтому, полагая $Tx = y$, мы получаем корректно определенное отображение из X в Y, продолжающее T_0. Из линейности T_0 и непрерывности алгебраических операций в X и Y легко следует линейность T. Далее, если $\|T_0 x\| \leqslant C\|x\|$ или же $\|T_0 x\| \geqslant c\|x\|$ для всех $x \in X_0$ (где $c, C > 0$ — некоторые константы), то те же оценки справедливы и для T и для всех $x \in X$. Отсюда следуют оставшиеся утверждения. □

Замечание 4.1. Напомним, что отображение $f \colon X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *равномерно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x, x' \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x') < \delta$, выполнено $\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Легко проверить (проверьте!), что ограниченный линейный оператор между нормированными пространствами равномерно непрерывен (это уточняет теорему 1.2), и что равномерно непрерывное отображение метрических пространств переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные (это уточняет часть (i) предложения 3.9). Как следствие, полнота метрических пространств сохраняется при их *равномерных изоморфизмах*, т.е. равномерно непрерывных биекциях с равномерно непрерывным обратным (ср. замечание после предложения 3.9). Фактически при доказательстве теоремы 4.1 использовалась именно *равномерная* непрерывность оператора T_0. В качестве упражнения попробуйте сформулировать и доказать аналог теоремы 4.1 для метрических пространств.

4.2. Пополнение

Напомним, что *пополнением* метрического пространства X называется пара $(\widetilde{X}, J)$, где $\widetilde{X}$ — полное метрическое пространство, а $J\colon X \to \widetilde{X}$ — изометрическое отображение с плотным образом.

Определение 4.1. *Пополнением* нормированного пространства X называется пара $(\widetilde{X}, J)$, где $\widetilde{X}$ — банахово пространство, а $J\colon X \to \widetilde{X}$ — изометрический линейный оператор с плотным образом.

Таким образом, отличие этого определения от обычного определения пополнения метрического пространства состоит в том, что на $\widetilde{X}$ должна иметься структура векторного пространства, метрика на $\widetilde{X}$ должна порождаться некоторой нормой, и вложение J должно быть линейным.

Теорема 4.2. *У каждого нормированного пространства есть пополнение.*

Доказательство. Пусть $(\widetilde{X}, J)$ — пополнение X как метрического пространства. Отождествим X с $J(X)$ посредством J (т.е. договоримся отождествлять точки $x \in X$ и $J(x) \in J(X)$). Таким образом, X становится плотным подмножеством в $\widetilde{X}$. Зафиксируем $x, y \in \widetilde{X}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, и подберем последовательности (x_n) и (y_n) в X так, чтобы $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Положим по определению

$$\begin{aligned} x + y &= \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n),\\ \lambda x &= \lim_{n\to\infty} \lambda x_n,\\ \|x\| &= \lim_{n\to\infty} \|x_n\|. \end{aligned}$$

Несложная проверка, аналогичная той, которая была проделана в доказательстве теоремы 4.1, показывает, что указанные пределы существуют и не зависят от выбора последовательностей (x_n) и (y_n), сходящихся к x и y. Выполнение аксиом векторного пространства и аксиом нормы в $\widetilde{X}$ также проверяется без труда. Очевидно, что при так определенных операциях в $\widetilde{X}$ вложение J становится линейным. $\square$

Замечание 4.2. Через некоторое время мы сможем предъявить более простое доказательство существования пополнения для нормированных пространств, не требующее (по сравнению с доказательством, приведенным выше) никаких дополнительных проверок.

Следующее свойство пополнения — больше чем просто свойство; на самом деле оно полностью характеризует пополнение с точностью до изометрического изоморфизма (см. соответствующую задачу в листке 4). Полезно сравнить следующую теорему с теоремой 3.4.

Теорема 4.3. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда для любого банахова пространства Y и любого оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ существует единственный оператор $\widetilde{T} \in \mathscr{B}(\widetilde{X}, Y)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\widetilde{T}"] & Y \\ X \arrow[u, "J"] \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

При этом $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Доказательство. Достаточно отождествить X с подпространством $J(X) \subset \widetilde{X}$ и воспользоваться теоремой 4.1. $\square$

По-другому теорему 4.3 можно переформулировать так:

Теорема 4.4. *Для любого банахова пространства* Y *отображение*

$$\mathscr{B}(\widetilde{X}, Y) \to \mathscr{B}(X, Y), \quad S \mapsto S \circ J,$$

является изометрическим изоморфизмом.

В качестве следствия теоремы 4.3 получаем следующее утверждение о единственности пополнения.

Следствие 4.5. *Пусть* $(\widetilde{X}, J)$ *и* $(\widehat{X}, J')$ — *пополнения нормированного пространства* X. *Тогда существует единственный изометрический изоморфизм* $I \colon \widetilde{X} \to \widehat{X}$, *делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, dashed, "I"] & & \widehat{X} \\ & X \arrow[ul, "J"] \arrow[ur, "J'"'] & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Доказательство. При $X = 0$ утверждение очевидно, поэтому мы будем считать, что $X \neq 0$. Из теоремы 4.3 следует, что существует единственный оператор $I \in \mathscr{B}(\widetilde{X}, \widehat{X})$, делающий диаграмму (4.1) коммутативной; при этом $\|I\| = \|J'\| = 1$. Из той же теоремы (примененной на этот раз к пополнению $(\widehat{X}, J')$) следует, что существует единственный оператор $I' \in \mathscr{B}(\widehat{X}, \widetilde{X})$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} & & \widehat{X} \arrow[ll, dashed, "I'"'] \\ & X \arrow[ul, "J"] \arrow[ur, "J'"'] & \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

При этом $\|I'\| = \|J\| = 1$. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, dashed] & & \widetilde{X} \\ & X \arrow[ul, "J"] \arrow[ur, "J"'] & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Из коммутативности диаграмм (4.1) и (4.2) следует, что диаграмма (4.3) также будет коммутативной, если в качестве горизонтальной стрелки взять оператор $I' \circ I$. Но та же диаграмма (4.3), очевидно, будет коммутативной, если в качестве горизонтальной стрелки взять тождественный оператор $\mathbf{1}_{\widetilde{X}}$. Применяя утверждение о единственности из теоремы 4.3, получаем равенство $I' \circ I = \mathbf{1}_{\widetilde{X}}$. Меняя ролями пополнения $(\widetilde{X}, J)$ и $(\widehat{X}, J')$ и повторяя те же рассуждения, получаем равенство $I \circ I' = \mathbf{1}_{\widehat{X}}$. Следовательно, I — топологический изоморфизм и $I' = I^{-1}$. Наконец, из уже доказанных равенств $\|I\| = \|I^{-1}\| = 1$ следует, что I — изометрический изоморфизм. $\square$

Следующее свойство пополнения называют его «естественностью», или «функториальностью».

Следствие 4.6. *Для каждой пары нормированных пространств X и Y и каждого оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ определен единственный оператор $\widetilde{T} \in \mathscr{B}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \widetilde{Y} \\ X \arrow[u, "J_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "J_Y"'] \end{tikzcd}$$

При этом $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Кроме того, $\widetilde{\mathbf{1}}_X = \mathbf{1}_{\widetilde{X}}$ и $(S \circ T)^{\sim} = \widetilde{S} \circ \widetilde{T}$ для любого $S \in \mathscr{B}(Y,Z)$.

Доказательство. Существование оператора $\widetilde{T}$, его единственность и равенство $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$ следуют из теоремы 4.3, примененной к оператору $J_Y T$. Остальные утверждения легко выводятся из утверждения о единственности. □

Замечание 4.3. Обозначим через $\mathscr{B}an$ (соответственно, $\mathscr{B}an_1$) полную подкатегорию в категории $\mathscr{N}orm$ (соответственно, в категории $\mathscr{N}orm_1$; см. замечание 2.2), объектами которой являются банаховы пространства. Следствие 4.6 утверждает, что пополнение может рассматриваться как функтор из $\mathscr{N}orm$ в $\mathscr{B}an$ (или из $\mathscr{N}orm_1$ в $\mathscr{B}an_1$). При этом теорема 4.4 означает, что функтор пополнения сопряжен слева к вложению $\mathscr{B}an$ в $\mathscr{N}orm$ (соответственно, $\mathscr{B}an_1$ в $\mathscr{N}orm_1$). В этом свете следствие 4.5 становится частным случаем теоремы о единственности представляющего объекта — в данном случае для функтора $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{N}orm_1}(X,Y)$, определенного на категории $\mathscr{B}an_1$.

4.3. Гильбертовы пространства

Гильбертовы пространства, о которых пойдет речь ниже, играют весьма важную роль как в самом функциональном анализе, так и в различных его приложениях к дифференциальным уравнениям, геометрии, матфизике, теории представлений и многим другим областям. Определяются они как банаховы пространства, норма в которых порождена скалярным произведением (подробности см. ниже). Наличие скалярного произведения позволяет значительно лучше понять строение гильбертовых пространств, чем это возможно в случае банаховых пространств, и в конечном итоге полностью их классифицировать. Кроме того — и это, пожалуй, еще важнее — для каждого линейного оператора в гильбертовом пространстве определен его так называемый *сопряженный оператор*, действующий в том же пространстве. Наличие операции перехода к сопряженному оператору существенно обогащает теорию операторов и расширяет спектр ее возможных приложений. В частности, самосопряженные операторы (т.е. операторы, совпадающие со своими сопряженными) являются одним из важнейших ингредиентов математического аппарата квантовой механики, с которым мы познакомимся в конце нашего курса.

Понятие скалярного произведения, на котором основано определение гильбертова пространства, вводится аксиоматически. Начнем мы с несколько более общего понятия полуторалинейной формы.

4.3.1. Полуторалинейные формы

Пусть H — векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Определение 4.2. Отображение $f\colon H\times H \to \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой*, если

1) $f(\lambda x + \mu y, z) = \lambda f(x,z) + \mu f(y,z)$,
2) $f(x, \lambda y + \mu z) = \bar\lambda f(x,y) + \bar\mu f(x,z)$

для всех $x, y, z \in H$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Определение 4.3. Отображение $q\colon H \to \mathbb{C}$ называется *комплексно-квадратичной формой*, если существует такая полуторалинейная форма $f\colon H\times H \to \mathbb{C}$, что $q(x) = f(x,x)$ для всех $x \in H$. В этой ситуации говорят, что q *ассоциирована* с f, и пишут $q = q_f$.

На первый взгляд, комплексно-квадратичная форма q_f содержит в себе меньше информации, чем полуторалинейная форма f. Однако это не так: на самом деле f полностью восстанавливается по q_f.

Предложение 4.7 (тождество поляризации)**.** *Для любой полуторалинейной формы $f\colon H\times H \to \mathbb{C}$ справедливо тождество*

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k q_f(x + i^k y).$$

Доказательство этого тождества — простое вычисление, которое мы опускаем.

Следствие 4.8. *Пусть $f, g\colon H\times H \to \mathbb{C}$ — полуторалинейные формы. Тогда $f = g \iff q_f = q_g$.*

Замечание 4.4. Обратите внимание, что для билинейных форм утверждение, аналогичное следствию 4.8, неверно: например, любой кососимметрической билинейной форме отвечает квадратичная форма, тождественно равная нулю.

Обозначение 4.1. Пусть $f\colon H\times H \to \mathbb{C}$ — полуторалинейная форма. Для каждых $x, y \in H$ положим $f^*(x,y) = \overline{f(y,x)}$. Очевидно, $f^*\colon H\times H \to \mathbb{C}$ также является полуторалинейной формой.

Определение 4.4. Полуторалинейная форма f называется *эрмитовой*, если $f = f^*$, т.е. $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$ для всех $x, y \in H$.

Следствие 4.9. *Полуторалинейная форма f эрмитова тогда и только тогда, когда $q_f(x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in H$.*

Доказательство. В силу следствия 4.8, f эрмитова тогда и только тогда, когда $q_f = q_{f^*}$, т.е. когда $f(x,x) = \overline{f(x,x)}$ для всех $x \in H$. Это и означает, что $f(x,x) = q_f(x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in H$. □

4.3.2. Предгильбертовы пространства

Определение 4.5. Полуторалинейная форма $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ называется *скалярным произведением*, если

1) f эрмитова;
2) $f(x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$;
3) $f(x, x) = 0$ только для $x = 0$.

Замечание 4.5. Согласно следствию 4.9, условие (2) в определении скалярного произведения влечет условие (1).

Определение 4.6. *Предгильбертовым пространством* называется векторное пространство над $\mathbb{C}$, снабженное скалярным произведением (точнее, пара (H, f), состоящая из векторного пространства H и скалярного произведения f на нем).

Обозначение 4.2. В дальнейшем скалярное произведение на предгильбертовом пространстве H будет обозначаться символом $\langle x, y\rangle$.

Пример 4.1. Пространство $\mathbb{C}^n$ является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Пример 4.2. Пространство ℓ^2 является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}.$$

Абсолютная сходимость этого ряда вытекает из очевидного неравенства $ab \leqslant a^2 + b^2$, справедливого для всех $a, b \geqslant 0$.

Пример 4.3. Для любого пространства с мерой (X, μ) пространство $L^2(X, \mu)$ является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x).$$

Существование этого интеграла следует из задачи 1.12 (см. листок 1).

Замечание 4.6. Отметим, что примеры 4.1 и 4.2 — частные случаи примера 4.3, соответствующие считающей мере μ на $X = \{1, \dots, n\}$ или на $X = \mathbb{N}$ (см. также замечание 1.1).

Заметим, что предгильбертовы пространства из приведенных выше примеров являются нормированными пространствами относительно норм $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (см. примеры 1.4, 1.5 и 1.12). Это наводит на мысль, что той же формулой можно ввести норму в любом предгильбертовом пространстве.

Обозначение 4.3. Пусть H — предгильбертово пространство. Для каждого $x \in H$ положим по определению $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Разумеется, надо еще доказать, что введенная таким образом «норма» действительно является нормой, т.е. удовлетворяет аксиомам 1–3 из определения 1.1. Прежде чем это делать, докажем одно важное неравенство.

Предложение 4.10 (неравенство Коши–Буняковского–Шварца)**.** *Для всех $x, y \in H$ справедливо неравенство $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.*

Доказательство. Очевидно, мы можем считать, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geqslant 0$, т.е.

$$\|x\|^2 - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2 \geqslant 0.$$

Подставляя сюда $\lambda = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, получаем $\|x\|^2 - \dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \geqslant 0$. Дальше ясно. □

Предложение 4.11. *Функция $\|\cdot\| \colon H \to [0, +\infty)$, заданная формулой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, является нормой на H.*

Доказательство. Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, для любых элементов $x, y \in H$ получаем:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Это доказывает справедливость неравенства треугольника. Остальные свойства нормы очевидны. □

В дальнейшем каждое предгильбертово пространство будет рассматриваться как нормированное относительно введенной выше нормы.

Предложение 4.12 (тождество параллелограмма)**.** *В предгильбертовом пространстве справедливо тождество*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Доказательство. Прямая проверка. □

Из тождества параллелограмма нетрудно вывести, что далеко не всякая норма порождается скалярным произведением; более того, далеко не всякая норма эквивалентна норме, порожденной скалярным произведением (см. задачи листка 4). Так что предгильбертовы пространства — это весьма специальный класс нормированных пространств.

Предложение 4.13. *Для любого предгильбертова пространства H скалярное произведение $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle \colon H \times H \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция.*

Докажите это утверждение сами в качестве упражнения.

Определение 4.7. *Гильбертово пространство* — это предгильбертово пространство, полное относительно нормы $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Примеры 4.4. Предгильбертовы пространства из примеров 4.1–4.3 являются гильбертовыми пространствами (см. следствие 3.11 и пример 3.4). Пространство $C[a, b]$, снабженное унаследованным из $L^2[a, b]$ скалярным произведением, является неполным предгильбертовым пространством (см. задачу 3.9 из листка 3).

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 5

5.1. Гильбертовы пространства (продолжение)

5.1.1. Унитарные изоморфизмы

Обсудим теперь, какие предгильбертовы пространства следует считать «одинаковыми».

Определение 5.1. Пусть H_1 и H_2 — предгильбертовы пространства. Линейное отображение $U\colon H_1 \to H_2$ называется *унитарным изоморфизмом*, если оно биективно и $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in H_1$.

Предгильбертовы пространства называются *унитарно изоморфными*, если между ними существует унитарный изоморфизм.

Пример 5.1. Положим $H_1 = L^2(\mathbb{T})$ и $H_2 = L^2[-\pi, \pi]$; тогда, как нетрудно убедиться (убедитесь!), оператор $U\colon H_1 \to H_2$, $(Uf)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(e^{it})$ — унитарный изоморфизм.

Следующее предложение показывает, что понятие унитарного изоморфизма на самом деле для нас не ново.

Предложение 5.1. *Пусть H_1 и H_2 — предгильбертовы пространства. Линейное отображение $U\colon H_1 \to H_2$ удовлетворяет условию $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in H_1$ тогда и только тогда, когда оно изометрично.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться тождеством поляризации. □

Следствие 5.2. *Линейное отображение между предгильбертовыми пространствами является унитарным изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно является изометрическим изоморфизмом.*

Наша цель — полностью описать строение гильбертовых пространств и классифицировать их с точностью до унитарного изоморфизма. Для этого нам сначала понадобится ввести ряд геометрических понятий.

5.1.2. Проекции и ортогональные дополнения

Пусть H — предгильбертово пространство.

Определение 5.2. Говорят, что элементы $x, y \in H$ *ортогональны* (и пишут $x \perp y$), если $\langle x, y\rangle = 0$.

Предложение 5.3 (теорема Пифагора)**.** *Если $x \perp y$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Доказательство. Прямая проверка. □

Определение 5.3. Говорят, что элемент $x \in H$ *ортогонален* подмножеству $M \subset H$ (и пишут $x \perp M$), если $x \perp y$ для всех $y \in M$.

Определение 5.4. Для каждого подмножества $M \subset H$ его *ортогональным дополнением* называется множество

$$M^\perp = \{x \in H : x \perp M\}.$$

Причина, по которой ортогональное дополнение называется «дополнением», выяснится впоследствии. А пока установим простейшие свойства ортогональных дополнений.

Предложение 5.4. *Пусть M — подмножество в H.*

(i) *$M^\perp$ — замкнутое векторное подпространство в Y;*
(ii) *$M^\perp = (\overline{\operatorname{span}}(M))^\perp$;*
(iii) *$\{0\}^\perp = H$, $H^\perp = \{0\}$;*
(iv) *$M_1 \subset M_2 \Longrightarrow M_2^\perp \subset M_1^\perp$;*
(v) *$\overline{\operatorname{span}}(M) \subset M^{\perp\perp}$.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) следуют из определения скалярного произведения и из его непрерывности, утверждения (iii) и (iv) очевидны, включение $M \subset M^{\perp\perp}$ также очевидно, а из него с учетом (i) следует (v). □

Определение 5.5. Пусть $H_0 \subset H$ — векторное подпространство и $x \in H$. Вектор $y \in H_0$ называется *проекцией* x на H_0, если $x - y \perp H_0$.

Геометрическая интуиция может подсказать и другое разумное определение проекции вектора на подпространство: проекция x на H_0 — это элемент из H_0, *ближайший* к x, т.е. такой элемент $y \in H_0$, что $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$ для всех $z \in H_0$ (или, что то же самое, $\|x - y\| = \rho(x, H_0)$). Как и следовало ожидать, эти два определения проекции эквивалентны:

Предложение 5.5. *Пусть H — предгильбертово пространство, $H_0 \subset H$ — векторное подпространство и $x \in H$.*

(i) *Вектор $y \in H_0$ является проекцией x на H_0 тогда и только тогда, когда y — ближайший к x элемент H_0.*
(ii) *Если такой вектор y существует, то он единственный.*

Доказательство. Предположим, что y — проекция x на H_0. Из теоремы Пифагора следует, что для каждого $z \in H_0$

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geqslant \|x - y\|^2,$$

причем при $z \neq y$ имеем строгое неравенство. Следовательно, y — ближайший к x элемент H_0, и другого такого элемента нет.

Предположим теперь, что y — ближайший к x элемент подпространства H_0. Возьмем $z \in H_0$ и рассмотрим функцию $\varphi(t) = \|x - y + tz\|^2$ ($t \in \mathbb{R}$). Заметим, что $\varphi(t) = \|x - y\|^2 + 2t\operatorname{Re}\langle x - y, z\rangle + t^2\|z\|^2$. По условию, φ имеет минимум при $t = 0$, откуда $\operatorname{Re}\langle x - y, z\rangle = 0$. Если теперь рассмотреть функцию $\psi(t) = \|x - y + itz\|^2$, то аналогичное рассуждение показывает, что и $\operatorname{Im}\langle x - y, z\rangle = 0$. Следовательно, $\langle x - y, z\rangle = 0$ для любого $z \in H_0$, т.е. y — проекция x на H_0. □

Обратите внимание: пока что мы ничего не утверждаем о существовании проекций. Вначале — простое необходимое условие:

Наблюдение 5.6. Если каждый вектор $x \in H$ обладает проекцией на подпространство $H_0 \subset H$, то H_0 замкнуто. В самом деле, для любого $x \in \overline{H_0}$ имеем $\rho(x, H_0) = 0$, поэтому ближайший к x элемент подпространства H_0 — если только он существует — должен совпадать с самим x.

В случае полного H верно и обратное:

Теорема 5.7 (о проекции). *Пусть H — гильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда каждый вектор $x \in H$ обладает единственной проекцией на H_0.*

Доказательство. Положим $d = \rho(x, H_0)$. Ввиду предложения 5.5, нам достаточно найти элемент $y \in H_0$, для которого $\|x - y\| = d$. Выберем последовательность (y_n) в H_0 так, чтобы $\|x - y_n\| \to d$ при $n \to \infty$, и покажем, что она сходится к нужному нам y.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|x - y_n\|^2 \leqslant d^2 + \varepsilon$ при $n > N$. Зафиксируем произвольные $m, n > N$ и применим к векторам $x - y_n$ и $x - y_m$ тождество параллелограмма (см. предложение 4.12):

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - \|2x - (y_n + y_m)\|^2 = \\ &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2(d^2 + \varepsilon) + 2(d^2 + \varepsilon) - 4d^2 = 4\varepsilon, \end{aligned}$$

поскольку $\|x - (y_n + y_m)/2\| \geqslant d$. Отсюда следует, что последовательность (y_n) фундаментальна, и поэтому сходится (ввиду полноты H и замкнутости H_0) к некоторому $y \in H_0$. Вспоминая, что $\|x - y_n\| \to d$ при $n \to \infty$, получаем $\|x - y\| = d$, как и требовалось. $\square$

Замечание 5.1. На самом деле мы доказали даже более сильное утверждение, чем требовалось: *если H — гильбертово пространство и $M \subset H$ — замкнутое выпуклое подмножество, то для каждого $x \in H$ в множестве M существует единственный элемент, ближайший к x.* Попробуйте понять это, проанализировав доказательство теоремы 5.7.

Теорему о проекции удобно переформулировать в терминах ортогональных дополнений. Сначала сделаем следующее несложное наблюдение.

Наблюдение 5.8. Если H_1 и H_2 — предгильбертовы пространства, то норма на их ℓ^2-сумме $H_1 \oplus_2 H_2$ (см. определение 3.1) порождается скалярным произведением

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle.$$

Следовательно, $H_1 \oplus_2 H_2$ — предгильбертово пространство. Если же H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, то таково же и $H_1 \oplus_2 H_2$ (см. 3.15).

Через некоторое время мы обобщим это наблюдение на случай произвольного семейства предгильбертовых пространств.

Следующая теорема, в сущности, эквивалентна теореме о проекции. Она, в частности, объясняет, почему ортогональное дополнение так называется.

Теорема 5.9 (об ортогональном дополнении)**.** *Пусть H — гильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. Более того, отображение*

$$H_0 \oplus_2 H_0^\perp \to H, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

— унитарный изоморфизм.

Доказательство. Изометричность указанного отображения следует из теоремы Пифагора, а сюръективность — из теоремы о проекции 5.7. □

Следствие 5.10. *Для любого подмножества M гильбертова пространства H справедливо равенство $\overline{\operatorname{span}}(M) = M^{\perp\perp}$.*

Доказательство. Положим $H_0 = \overline{\operatorname{span}}(M)$. Поскольку $M^\perp = H_0^\perp$ (см. предложение 5.4), нам достаточно доказать равенство $H_0 = H_0^{\perp\perp}$. Применяя теорему 5.9 сначала к H_0, а потом к $H_0^\perp$, получаем разложения

$$H = H_0 \oplus H_0^\perp = H_0^\perp \oplus H_0^{\perp\perp}.$$

Отсюда с учетом включения $H_0 \subset H_0^{\perp\perp}$ (см. предложение 5.4) следует требуемое равенство $H_0 = H_0^{\perp\perp}$. □

5.2. Направленности и суммируемые семейства

Прежде чем продолжить изучение гильбертовых пространств, нам понадобится ненадолго отвлечься и поговорить о более общих вещах. Мы уже знаем (см. определение 3.2), что такое сумма произвольного (не обязательно счетного) семейства неотрицательных чисел. Наша ближайшая цель — обобщить это понятие на случай семейств элементов произвольного нормированного пространства.

Определение 5.6. Частично упорядоченное множество $(\Lambda, \leqslant)$ называется *направленным*, если для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует такое $\nu \in \Lambda$, что $\lambda \leqslant \nu$ и $\mu \leqslant \nu$.

Вот два типичных примера, которые полезно держать в голове.

Пример 5.2. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и — более общим образом — любое линейно упорядоченное множество являются направленными.

Пример 5.3. Пусть Λ — множество всех окрестностей какой-либо точки в топологическом пространстве, упорядоченное по обратному включению (т.е. $U \leqslant V \iff U \supset V$). Легко видеть, что Λ — направленное множество.

Определение 5.7. *Направленностью* в множестве X называется любое отображение $x \colon \Lambda \to X$, где Λ — какое-либо направленное множество.

Ясно, что понятие направленности обобщает понятие последовательности. Если x — направленность в X, то для $\lambda \in \Lambda$ вместо $x(\lambda)$ обычно пишут x_λ (как это и принято в случае последовательностей), а всю направленность x представляют себе как семейство (x_λ), проиндексированное элементами множества Λ.

Пусть теперь X — топологическое пространство. Сходимость направленностей в X определяется дословно так же, как для последовательностей:

Определение 5.8. Говорят, что направленность (x_λ) *сходится* к точке $x \in X$ (и пишут $x_\lambda \to x$ или $x = \lim_\Lambda x_\lambda$), если для любой окрестности $U \ni x$ найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $x_\lambda \in U$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Свойства пределов направленностей во многом аналогичны свойствам пределов последовательностей:

Предложение 5.11. *Пусть X — топологическое пространство.*

(i) *Если X хаусдорфово, то каждая сходящаяся направленность в X имеет только один предел.*
(ii) *Если $f\colon X \to Y$ — отображение, непрерывное в точке $x \in X$, то для каждой направленности (x_λ) в X, сходящейся к x, направленность $f(x_\lambda)$ сходится к $f(x)$.*
(iii) *Если Y — подмножество в X и (y_λ) — направленность в Y, сходящаяся к точке $x \in X$, то $x \in \overline{Y}$.*

Доказывается это предложение дословно так же, как и для последовательностей (убедитесь!).

Может возникнуть вопрос: а зачем нужны направленности, если есть последовательности? Основное преимущество направленностей по сравнению с последовательностями состоит в том, что каждое из утверждений предложения 5.11 допускает обращение (см. задачи листка 4). В частности, множество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит пределы всех своих направленностей, сходящихся в X. Следовательно, топология на множестве полностью определяется запасом сходящихся направленностей. Для последовательностей это уже не так. Бывают, например, недискретные топологические пространства, в которых всякая сходящаяся последовательность стабилизируется (т.е. становится постоянной начиная с некоторого номера) — попробуйте привести пример! Понятно, что в таких пространствах описать топологию с помощью сходящихся последовательностей нельзя. Впрочем, если пространство X метризуемо или, более общим образом, удовлетворяет первой аксиоме счетности (это означает, что каждая его точка обладает счетной базой окрестностей), то, как вам известно из курса анализа, все утверждения предложения 5.11 допускают обращение и в случае последовательностей.

Нам с вами направленности понадобятся для того, чтобы дать следующее важное определение суммируемого семейства. Для произвольного множества I обозначим через $\mathrm{Fin}(I)$ семейство всех его конечных подмножеств и упорядочим $\mathrm{Fin}(I)$ по включению. Очевидно, $\mathrm{Fin}(I)$ — направленное множество.

Пусть теперь X — нормированное пространство.

Определение 5.9. Пусть $(x_i)_{i\in I}$ — семейство элементов в X. Для каждого $A \in \mathrm{Fin}(I)$ положим $x_A = \sum_{i\in A} x_i$. Семейство $(x_i)_{i\in I}$ называется *суммируемым*, если направленность $(x_A)_{A\in\mathrm{Fin}(I)}$ сходится. Предел этой направленности называется *суммой* семейства $(x_i)_{i\in I}$ и обозначается через $\sum_{i\in I} x_i$.

На самом деле можно дать и другое определение суммируемого семейства, не использующее направленностей:

Упражнение 5.1. Докажите, что семейство $(x_i)_{i\in I}$ в нормированном пространстве X суммируемо к $x \in X$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) множество $S = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ не более чем счетно;
(ii) если S конечно, то $\sum_{i\in S} x_i = x$, а если S счетно, то для любой биекции $\pi\colon \mathbb{N} \to S$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ сходится к x.

Таким образом, понятие суммируемого семейства фактически сводится к известному вам понятию безусловно сходящегося ряда (т.е. ряда, сходящегося при любой перестановке его членов). Тем не менее, по техническим причинам часто бывает удобнее работать с суммируемыми семействами в смысле определения 5.9, чем с безусловно сходящимися рядами.

Для семейств неотрицательных чисел понятие суммируемости эквивалентно обсуждавшемуся в лекции 3:

Упражнение 5.2. Семейство неотрицательных чисел суммируемо тогда и только тогда, когда оно суммируемо в смысле определения 3.2.

Вот типичный пример суммируемого семейства:

Пример 5.4. Пусть $1 < p < \infty$ и $X = \ell^p(I)$ (см. определение 3.3). Для каждого $i \in I$ обозначим через e_i функцию на I, которая принимает значение 1 в точке i, а в остальных точках равна нулю. Ясно, что $e_i \in \ell^p(I)$. Мы утверждаем, что для любого $x \in \ell^p(I)$ справедливо равенство

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i. \tag{5.1}$$

В самом деле, числовое семейство $(|x_i|^p)$ суммируемо по определению пространства $\ell^p(I)$, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A \in \mathrm{Fin}(I)$, что

$$\sum_{i\in I\setminus A} |x_i|^p < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $B \in \mathrm{Fin}(I)$, содержащего A, мы имеем

$$\Big\|x - \sum_{i\in B} x_i e_i\Big\|^p = \sum_{i\in I\setminus B} |x_i|^p < \varepsilon,$$

а это и означает справедливость формулы (5.1).

Предостережение 5.2. Из курса анализа вы знаете, что ряд действительных чисел сходится безусловно (т.е. при любой перестановке его членов) тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно. Аналогичное утверждение справедливо и в любом конечномерном нормированном пространстве (попробуйте его доказать). Однако следует иметь в виду, что в бесконечномерных банаховых пространствах это уже не так. С одной стороны, всякий абсолютно сходящийся ряд сходится безусловно (см. лемму 3.17), и всякое абсолютно суммируемое семейство суммируемо (убедитесь). С другой стороны, нетрудно привести пример (попробуйте это сделать) безусловно сходящегося ряда в бесконечномерном банаховом пространстве, который не сходится абсолютно. На самом деле, согласно глубокой теореме Дворецкого–Роджерса (которую мы доказывать не будем), в любом бесконечномерном нормированном пространстве существует безусловно сходящийся ряд, не сходящийся абсолютно.

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 6

6.1. Гильбертовы пространства (продолжение)

6.1.1. Ортонормированные системы

Пусть H — предгильбертово пространство.

Определение 6.1. Система векторов $(e_i)_{i\in I}$ в H называется *ортогональной системой*, если $e_i \perp e_j$ для всех $i \neq j$. Если, кроме того, $\|e_i\| = 1$ для всех $i \in I$, то система $(e_i)_{i\in I}$ называется *ортонормированной системой*.

Пример 6.1. Пусть $H = \mathbb{C}^n$ или $H = \ell^2$, и пусть $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (единица на i-ом месте). Очевидно, (e_i) — ортонормированная система в H. Более общим образом, если $H = \ell^2(I)$, то система $(e_i)_{i\in I}$ из примера 5.4 тоже является ортонормированной.

В следующих трех примерах описана, по сути, одна и та же система, но «в разных обличьях».

Пример 6.2 (*тригонометрическая система*)**.** Пусть $H = L^2[-\pi, \pi]$. Нетрудно убедиться (убедитесь!), что система функций $\bigl(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\bigr)_{k\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная.

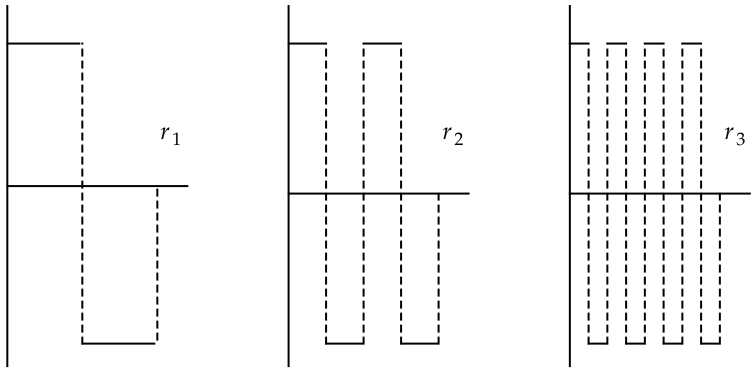
Пример 6.3 (*тригонометрическая система*)**.** Пусть снова $H = L^2[-\pi, \pi]$ и $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$. Нетрудно убедиться (убедитесь!), что $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированная система.

Пример 6.4 (*тригонометрическая система*)**.** Пусть $H = L^2(\mathbb{T})$ и $e_n(z) = z^n$. Нетрудно убедиться (убедитесь!), что $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированная система.

Замечание 6.1. С тригонометрической системой из примера 6.2 вы встречались в курсе анализа, когда изучали тригонометрические ряды Фурье. Это, пожалуй, самая классическая ортонормированная система функций, из которой и выросла общая наука об ортонормированных системах в гильбертовом пространстве. Системы из примеров 6.2 и 6.3 легко выражаются друг через друга посредством простого преобразования (убедитесь); первая система удобней с точки зрения всевозможных приложений к матфизике (потому что она состоит из вещественнозначных функций), вторая же удобнее в некоторых теоретических вопросах. Наконец, система из примера 6.4 получается из предыдущей применением унитарного изоморфизма $L^2[-\pi, \pi] \cong L^2(\mathbb{T})$, который был описан в примере 5.1.

Преимущество системы из примера 6.4 заключается в том, что состоит она в точности из *унитарных характеров* группы $\mathbb{T}$, т.е. из непрерывных гомоморфизмов $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$. У этой системы есть далеко идущее обобщение: для любой компактной группы G ее унитарные характеры $G \to \mathbb{T}$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L^2(G)$ (см. замечание 2.4). Попробуйте доказать это утверждение, приняв на веру существование меры Хаара на G.

Пример 6.5 (*Система Радемахера*)**.** Пусть $H = L^2[0,1]$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n \pi t)$:



Нетрудно проверить (проверьте!), что система функций $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная. Она называется *системой Радемахера*.

Система Радемахера играет довольно заметную роль в разных разделах математики. На нее можно (и полезно) смотреть как на последовательность независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностью $1/2$.

Приступим к изучению общих свойств ортонормированных систем.

Определение 6.2. Пусть $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированная система в H, и пусть $x \in H$. Числа $c_i = \langle x, e_i\rangle$ ($i \in I$) называются *коэффициентами Фурье* вектора x относительно системы $(e_i)_{i\in I}$.

Следующее простое предложение описывает, пожалуй, основное геометрическое свойство коэффициентов Фурье.

Предложение 6.1. *Пусть* $(e_1, \ldots, e_n)$ *— ортонормированная система в* H*,* $H_0 = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$*,* $x \in H$ *и* $c_i = \langle x, e_i\rangle$*. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *вектор* $y = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ *— проекция* x *на* H_0*;*
(ii) $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n |c_i|^2$*;*
(iii) $\rho(x, H_0)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |c_i|^2$.

Доказательство. Для каждого $j = 1, \ldots, n$ имеем

$$\langle x - y, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{i=1}^n c_i \langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - c_j = 0.$$

Это доказывает утверждение (i). Утверждения (ii) и (iii) следуют из (i) и теоремы Пифагора. □

Следствие 6.2 (неравенство Бесселя)**.** *Пусть* $(e_i)_{i\in I}$ *— ортонормированная система в* H*,* $x \in H$ *и* $c_i = \langle x, e_i\rangle$*. Тогда семейство* $|c_i|^2$ *суммируемо и* $\sum_{i\in I} |c_i|^2 \leqslant \|x\|^2$*.*

Доказательство. Из п. (iii) предложения 6.1 следует, что $\sum_{i\in A} |c_i|^2 \leqslant \|x\|^2$ для каждого конечного подмножества $A \subset I$. Остальное следует из определения суммируемого семейства. □

При исследовании гильбертовых пространств[1] важную роль играют ряды по ортонормированным системам, т.е. выражения вида $\sum_{i\in I} a_i e_i$, где $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированная система и $a_i \in \mathbb{C}$. Разумеется, чтобы такое выражение имело смысл, нужно, чтобы семейство $(a_i e_i)_{i\in I}$ было суммируемым.

Определение 6.3. Пусть $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированная система в предгильбертовом пространстве H, $x \in H$ и $c_i = \langle x, e_i\rangle$. Формальное выражение $\sum_{i\in I} c_i e_i$ называется *рядом Фурье* вектора x по системе $(e_i)_{i\in I}$.

Подчеркнем, что мы пока ничего не утверждаем про сходимость ряда Фурье, т.е. про суммируемость семейства $(c_i e_i)_{i\in I}$.

Предложение 6.3. *Пусть $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированная система в H.*

(i) (единственность ряда Фурье). *Пусть вектор $x \in H$ имеет вид $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$ для некоторых $a_i \in \mathbb{C}$. Тогда $a_i = \langle x, e_i\rangle$ для всех $i \in I$.*

(ii) *Пусть векторы $x, y \in H$ имеют вид $x = \sum_{i\in I} c_i e_i$, $y = \sum_{i\in I} d_i e_i$. Тогда $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} c_i \bar{d}_i$.*

(iii) (равенство Парсеваля). *Пусть вектор $x \in H$ имеет вид $x = \sum_{i\in I} c_i e_i$. Тогда $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |c_i|^2$.*

Доказательство. (i) Для каждого $j \in I$ с учетом непрерывности скалярного произведения имеем:

$$\langle x, e_j\rangle = \Big\langle \sum_{i\in I} a_i e_i, e_j \Big\rangle = \sum_{i\in I} a_i \langle e_i, e_j\rangle = a_j.$$

(ii) С учетом непрерывности скалярного произведения имеем:

$$\langle x, y\rangle = \Big\langle \sum_{i\in I} c_i e_i, \sum_{j\in I} d_j e_j \Big\rangle = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} c_i \bar{d}_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i\in I} c_i \bar{d}_i.$$

(iii) Очевидным образом следует из (ii). □

До сих пор мы занимались изучением свойств ортонормированных систем. А что можно сказать об их существовании? Исходя из известного вам конечномерного случая, естественно попытаться построить «достаточно большую» ортонормированную систему в H — настолько большую, чтобы каждый вектор можно было по ней разложить так, как в предложении 6.3. На самом деле существует не одно, а целых три взаимосвязанных определения «большой» ортонормированной системы.

Определение 6.4. Ортонормированная система $(e_i)_{i\in I}$ в предгильбертовом пространстве H называется

(i) *ортонормированным базисом*, если каждый $x \in H$ имеет вид $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$ для некоторых $a_i \in \mathbb{C}$ (или, что эквивалентно ввиду предложения 6.3, каждый вектор $x \in H$ является суммой своего ряда Фурье);

(ii) *тотальной*, если $\overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in I\} = H$;

(iii) *максимальной*, если она не содержится ни в какой большей ортонормированной системе.

[1] А также всюду, где используется техника гильбертовых пространств — в теории функций, матфизике, геометрии, теории представлений…

Замечание 6.2. Следует иметь в виду, что ортонормированный базис не является базисом в алгебраическом смысле (за исключением случая, когда H конечномерно). Иначе говоря, ряд Фурье вектора $x \in H$ содержит, вообще говоря, бесконечно много ненулевых членов.

Замечание 6.3. В литературе тотальные ортонормированные системы иногда называют *замкнутыми*, а максимальные — *полными*. Впрочем, эта не слишком удачная терминология, по-видимому, постепенно выходит из употребления.

Следующая теорема устанавливает связь между свойствами базисности, тотальности и максимальности ортонормированных систем.

Теорема 6.4. *Рассмотрим следующие свойства ортонормированной системы $(e_i)_{i\in I}$ в предгильбертовом пространстве H:*

(i) $(e_i)_{i\in I}$ *— ортонормированный базис;*
(ii) $(e_i)_{i\in I}$ *тотальна;*
(iii) $(e_i)_{i\in I}$ *максимальна.*

Тогда (i) $\iff$ (ii) $\implies$ (iii). *Если же пространство H гильбертово, то эти три свойства эквивалентны друг другу.*

Доказательство. (i) $\implies$ (ii): очевидно.

(ii) $\implies$ (iii). Если система $(e_i)_{i\in I}$ тотальна, то

$$\{e_i : i \in I\}^\perp = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in I\}^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

Следовательно, $(e_i)_{i\in I}$ максимальна.

(ii) $\implies$ (i). Зафиксируем $x \in H$ и для каждого $A \in \operatorname{Fin}(I)$ положим

$$H_A = \operatorname{span}\{e_i : i \in A\}.$$

Из тотальности системы $(e_i)_{i\in I}$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A \in \operatorname{Fin}(I)$, что $\rho(x, H_A) < \varepsilon$. Тогда для любого $B \in \operatorname{Fin}(I)$, содержащего A, с учетом предложения 6.1 имеем

$$\Big\| x - \sum_{i\in B} c_i e_i \Big\| = \rho(x, H_B) \leqslant \rho(x, H_A) < \varepsilon,$$

где $(c_i)_{i\in I}$ — коэффициенты Фурье вектора x. Это и означает, что $x = \sum_{i\in I} c_i e_i$.

Предположим теперь, что пространство H гильбертово, и докажем импликацию (iii) $\implies$ (ii). Положим $H_0 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in I\}$. Из теоремы об ортогональном дополнении следует, что $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. С другой стороны, $H_0^\perp = 0$ в силу максимальности системы $(e_i)_{i\in I}$. Таким образом, $H = H_0$, т.е. система $(e_i)_{i\in I}$ тотальна. □

Теорема 6.5. *В любом предгильбертовом пространстве H существует максимальная ортонормированная система. Как следствие, в любом гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Рассмотрим множество M, состоящее из всех ортонормированных подмножеств в гильбертовом пространстве H, и упорядочим его по включению. Нетрудно видеть, что оно удовлетворяет условиям леммы Цорна: если $N \subset M$ — линейно упорядоченное подмножество, то объединение всех ортонормированных подмножеств, принадлежащих N, является верхней гранью для N. Следовательно, в M есть максимальный элемент, а значит, в H есть максимальная ортонормированная система. □

Упражнение 6.1. С помощью леммы Цорна докажите, что в любом векторном пространстве существует *алгебраический* базис (т.е. максимальная линейно независимая система).

Пример 6.6. Пусть I — произвольное множество. Для каждого $i \in I$ обозначим через e_i функцию на I, которая принимает значение 1 в точке i, а в остальных точках равна нулю (см. примеры 5.4 и 6.1). Тогда из (5.1) следует, что $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\ell^2(I)$. Это — так называемый *стандартный* ортонормированный базис в $\ell^2(I)$.

Пример 6.7. Тригонометрическая система (см. примеры 6.2–6.4) является ортонормированным базисом в пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ (или, смотря по смыслу, $L^2(\mathbb{T})$). Тотальность этой системы следует из классической теории рядов Фурье (см. курс анализа).

По поводу других примеров см. задачи 4.12 и 4.13 из листка 4.

В случае, когда пространство H сепарабельно, ортонормированный базис можно построить «вручную» с помощью *процесса ортогонализации Грама–Шмидта*, который составляет доказательство следующего предложения.

Предложение 6.6. *Пусть H — предгильбертово пространство и $(x_i)_{1\leqslant i<N}$ — линейно независимая система в H (где $N \in \mathbb{N}$ или $N = \infty$). Для каждого $n < N$ положим $H_n = \operatorname{span}\{x_1,\ldots,x_n\}$. Тогда в H существует ортонормированная система $(e_i)_{1\leqslant i<N}$, такая, что $H_n = \operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_n\}$ для всех $n < N$.*

Доказательство. Положим $e_1 = x_1/\|x_1\|$ и предположим, что векторы $e_1,\ldots,e_{n-1}$ уже построены. Положим

$$e'_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1}\langle x_n, e_i\rangle e_i.$$

Согласно предложению 6.1 (i), $e'_n \perp H_{n-1}$. Очевидно, $H_n = \operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_{n-1},e'_n\}$ и $e'_n \neq 0$ в силу линейной независимости x_i-ых. Остается положить $e_n = e'_n/\|e'_n\|$. □

С помощью процесса ортогонализации получаются многие важные конкретные ортонормированные системы. Вот один пример:

Пример 6.8. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим функцию $x_n(t) = t^n e^{-t^2/2}$ $(t \in \mathbb{R})$. Легко видеть, что $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — линейно независимая система в H. Применяя к ней процесс ортогонализации, получим ортонормированную систему, которая называется *системой Эрмита.* Можно показать (мы это сделаем несколько позже), что система Эрмита является ортонормированным базисом в $L^2(\mathbb{R})$.

Предложение 6.7. *В любом сепарабельном предгильбертовом пространстве существует не более чем счетный ортонормированный базис.*

Доказательство. Согласно задаче 2.14 из листка 2, в сепарабельном предгильбертовом пространстве существует не более чем счетная тотальная линейно независимая система. Применим к ней процесс ортогонализации (предложение 6.6) и получим требуемый ортонормированный базис. □

Замечание 6.4. В силу задачи 4.14 из листка 4, в сепарабельном предгильбертовом пространстве любая ортонормированная система не более чем счетна. Тем не менее, предложение 6.7 не является следствием теоремы 6.5, т.к. в нем не предполагается, что рассматриваемое пространство полно. На самом деле существуют примеры неполных несепарабельных предгильбертовых пространств, в которых нет ортонормированного базиса (см. задачу 4.20-b из листка 4).

Следующая теорема полностью описывает все гильбертовы пространства с точностью до унитарного изоморфизма.

Теорема 6.8. *Пусть H — гильбертово пространство и $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированный базис в H. Рассмотрим отображение*

$$U\colon H \to \ell^2(I), \quad U(x) = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}.$$

Тогда U — унитарный изоморфизм.

Доказательство. Из неравенства Бесселя (следствие 6.2) следует, что U действительно отображает H в $\ell^2(I)$, а из базисности системы $(e_i)_{i\in I}$ и равенства Парсеваля (см. предложение 6.3) — что U изометричен. Осталось доказать, что U сюръективен. Для этого рассмотрим подпространство

$$c_{00}(I) = \bigl\{x \in \ell^2(I) : x_i = 0 \text{ для всех } i \in I, \text{ кроме конечного их числа}\bigr\}.$$

Из примера 6.6 следует, что $c_{00}(I)$ плотно в $\ell^2(I)$. Кроме того, ясно, что $c_{00}(I) \subset \operatorname{Im} U$. Но $\operatorname{Im} U$ замкнут в $\ell^2(I)$, так как он полон ввиду полноты H и изометричности U. Следовательно, $\operatorname{Im} U = \ell^2(I)$, и U — унитарный изоморфизм. □

Следствие 6.9. *Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство унитарно изоморфно пространству ℓ^2.*

Пример 6.9. Из теоремы 6.8 и из тотальности системы Эрмита (см. пример 6.8) следует, что существует унитарный изоморфизм между пространствами $L^2(\mathbb{R})$ и $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ переводящий n-ую функцию Эрмита в n-ый вектор стандартного ортонормированного базиса в $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ (см. пример 6.6). Этот изоморфизм несет в себе глубокий физический смысл: он осуществляет эквивалентность между матричной квантовой механикой Гейзенберга и волновой квантовой механикой Шредингера. Об этом мы поговорим подробнее в конце нашего курса (если позволит время).

Следствие 6.10 (теорема Рисса–Фишера)**.** *Пусть H — гильбертово пространство и $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированная система в H. Тогда для любого числового семейства $c = (c_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ семейство $(c_i e_i)_{i\in I}$ суммируемо в H.*

Доказательство. Положим $H_0 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in I\}$. В силу теоремы 6.8, существует унитарный изоморфизм между H_0 и $\ell^2(I)$, сопоставляющий каждому вектору из H_0 семейство его коэффициентов Фурье относительно системы $(e_i)_{i\in I}$. Для каждого $i \in I$ положим $\bar e_i = U(e_i)$. Легко видеть, что $(\bar e_i)_{i\in I}$ — это в точности стандартный ортонормированный базис пространства $\ell^2(I)$ из примера 6.6, поэтому $c = \sum_{i\in I} c_i \bar e_i$ в $\ell^2(I)$ (см. формулу (5.1)). Следовательно, $U^{-1}(c) = \sum_{i\in I} c_i e_i$ в H_0, так что семейство $(c_i e_i)_{i\in I}$ суммируемо в H. □

Замечание 6.5. Мы получили теорему Рисса–Фишера как следствие теоремы 6.8. Чаще, однако, поступают наоборот: сначала доказывают теорему Рисса–Фишера, а потом выводят из нее теорему 6.8. В этой связи слушателям курса рекомендуется придумать определение фундаментальной направленности в метрическом пространстве, доказать, что в полном метрическом пространстве каждая фундаментальная направленность сходится, затем с помощью этого утверждения доказать теорему Рисса–Фишера и, наконец, вывести из нее теорему 6.8.

Чтобы завершить классификацию гильбертовых пространств, нам осталось научиться отвечать на вопрос, какие гильбертовы пространства изоморфны, а какие нет. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 6.11. *Пусть H — предгильбертово пространство, $(e_i)_{i\in I}$ и $(f_j)_{j\in J}$ — максимальные ортонормированные системы в H. Тогда* $\operatorname{card} I = \operatorname{card} J$.

Доказательство. Положим $\alpha = \operatorname{card} I$ и $\beta = \operatorname{card} J$. Нам достаточно доказать, что $\beta \leqslant \alpha$, при этом мы можем считать, что мощность α бесконечна (в противном случае H конечномерно, и все ясно). Для каждого $i \in I$ рассмотрим подмножество

$$J(i) = \{j \in J : \langle e_i, f_j \rangle \neq 0\} \subset J.$$

Из неравенства Бесселя следует, что $J(i)$ не более чем счетно. С другой стороны, $J = \bigcup_{i\in I} J(i)$ ввиду максимальности системы $(e_i)_{i\in I}$. Следовательно, $\beta \leqslant \alpha \cdot \aleph_0 = \alpha$, как и требовалось. $\square$

Определение 6.5. Мощность любой максимальной ортонормированной системы в предгильбертовом пространстве H называется его *гильбертовой размерностью* и обозначается $\operatorname{hilb.dim} H$.

Объединяя теорему 6.8 с предложением 6.11, получаем следующую теорему о классификации гильбертовых пространств.

Теорема 6.12. *Любое гильбертово пространство H унитарно изоморфно пространству $\ell^2(I)$, где I — множество, мощность которого равна* $\operatorname{hilb.dim} H$. *Гильбертовы пространства H_1 и H_2 унитарно изоморфны тогда и только тогда, когда их гильбертовы размерности равны.*

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 7

7.1. Сопряженное пространство и сопряженный оператор

Пусть X — нормированное пространство над полем $\mathbb{K}$ (как обычно, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 7.1. Нормированное пространство $X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ называется *сопряженным* к X. Его элементы называются *ограниченными линейными функционалами* на X.

Из теоремы 3.18 следует, что X^* — банахово пространство (независимо от того, полно X или нет).

Конструкция «навешивания звездочки» естественна (в категорном смысле): она определена не только на пространствах, но и на операторах.

Определение 7.2. Пусть X и Y — нормированные пространства и $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Его *сопряженным оператором* называется отображение

$$T^*\colon Y^* \to X^*, \quad T^*(f) = f \circ T.$$

Легко видеть, что T^* — линейный оператор.

Предложение 7.1. *Пусть X и Y — нормированные пространства.*

(i) *Для каждого $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ оператор $T^*\colon Y^* \to X^*$ ограничен, и $\|T^*\| \leqslant \|T\|$*[1].
(ii) *Если $S, T \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, то $(\lambda S + \mu T)^* = \lambda S^* + \mu T^*$.*
(iii) $(\mathbf{1}_X)^* = \mathbf{1}_{X^*}$.
(iv) *Если $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $S \in \mathscr{B}(Y, Z)$, то $(ST)^* = T^* S^*$.*

Доказательство. Для каждого $f \in Y^*$ имеем

$$\|T^*(f)\| = \|f \circ T\| \leqslant \|f\| \|T\|.$$

Это доказывает (i). Остальные утверждения докажите сами в качестве упражнения. □

Замечание 7.1. Из предложения 7.1 следует, что сопоставление $X \mapsto X^*$ и $T \mapsto T^*$ представляет собой контравариантный функтор из категории $\mathscr{N}orm$ в категорию $\mathscr{B}an$ (или из категории $\mathscr{N}orm_1$ в категорию $\mathscr{B}an_1$); по поводу обозначений см. замечание 4.3.

Сопряженные пространства и сопряженные операторы играют очень важную роль в функциональном анализе. На них основана так называемая *теория двойственности* — совокупность методов и результатов, устанавливающих взаимосвязи свойств банаховых пространств и линейных операторов со свойствами их сопряженных. Через некоторое время мы увидим, что взаимосвязи эти весьма тесны. А пока для примера сформулируем самое простое (но важное) утверждение из теории двойственности.

[1] Через некоторое время мы докажем, что на самом деле $\|T^*\| = \|T\|$.

Предложение 7.2. *Пусть X и Y — нормированные пространства.*

(i) *Если $T\colon X \to Y$ — топологический изоморфизм, то и $T^*\colon Y^* \to X^*$ — топологический изоморфизм.*

(ii) *Если $T\colon X \to Y$ — изометрический изоморфизм, то и $T^*\colon Y^* \to X^*$ — изометрический изоморфизм.*

Доказательство. Топологический изоморфизм — это то же самое, что изоморфизм в категории $\mathscr{N}orm$, а изометрический изоморфизм — то же самое, что изоморфизм в категории $\mathscr{N}orm_1$ (см. замечание 2.2). Остается воспользоваться тем, что любой функтор переводит изоморфизмы в изоморфизмы. □

Посмотрим теперь, как устроены сопряженные пространства к некоторым классическим банаховым пространствам. Начнем с гильбертовых пространств.

Пример 7.1. Пусть H — предгильбертово пространство. Каждый вектор $y \in H$ определяет линейный функционал

$$f_y\colon H \to \mathbb{C}, \quad f_y(x) = \langle x, y\rangle.$$

Из неравенства Коши–Буняковского–Шварца немедленно следует, что f_y ограничен и $\|f_y\| \leqslant \|y\|$. Поскольку $f_y(y) = \|y\|^2$, мы видим, что $\|f_y\| = \|y\|$.

Оказывается, если H — гильбертово пространство, то других ограниченных линейных функционалов на H, кроме описанных выше, не бывает. Прежде чем формулировать соответствующее утверждение, дадим одно определение.

Определение 7.3. Пусть X и Y — векторные пространства над $\mathbb{C}$. Отображение $\varphi\colon X \to Y$ называется *антилинейным*, если

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \bar\lambda\varphi(x) + \bar\mu\varphi(y) \quad (x, y \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

Теорема 7.3 (Рисс). *Пусть H — гильбертово пространство. Рассмотрим отображение $R\colon H \to H^*$, переводящее каждый вектор $y \in H$ в функционал f_y, действующий по правилу $f_y(x) = \langle x, y\rangle$. Тогда R антилинейно, биективно и изометрично.*

Доказательство. Антилинейность отображения R очевидна, а его изометричность уже была установлена выше (см. пример 7.1). Поэтому остается доказать его сюръективность.

Пусть $f \in H^*$ — ненулевой функционал. Положим $H_0 = \operatorname{Ker} f$. По теореме об ортогональном дополнении, $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. Поскольку $\operatorname{Im} f = \mathbb{C}$, имеем изоморфизмы векторных пространств $H_0^\perp \cong H/H_0 \cong \mathbb{C}$. Следовательно, $\dim H_0^\perp = 1$, и

$$H = H_0 \oplus \mathbb{C}y \tag{7.1}$$

для любого ненулевого $y \in H_0^\perp$. Зафиксируем такой y и покажем, что $f = \lambda f_y$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Для этого заметим, что как f, так и λf_y обращаются в нуль на H_0 для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому с учетом (7.1) нам достаточно подобрать λ так, чтобы $f(y) = \lambda f_y(y)$. А такое λ, разумеется, существует — а именно, $\lambda = f(y)/\|y\|^2$. □

Замечание 7.2. Обратите внимание, что, хотя теорема Рисса и позволяет отождествить H и H^*, это отождествление не является изоморфизмом: оно антилинейно. Впрочем, изоморфизм между H и H^* все же существует, хотя и не канонический. Для случая сепарабельного H мы вскоре в этом убедимся.

Замечание 7.3. Полезно проследить путь, по которому мы пришли к теореме Рисса. Если H — гильбертово пространство, то из его полноты следует теорема об ортогональном дополнении, из которой, в свою очередь, следует, что

$$(\operatorname{Ker} f)^\perp \neq 0 \quad \text{для любого } f \in H^* \setminus \{0\}. \tag{7.2}$$

Но, в сущности, именно утверждение (7.2) и использовалось в доказательстве теоремы Рисса (убедитесь!); полнота H как таковая в доказательстве не фигурировала. Если же для какого-то предгильбертова пространства H справедливо утверждение теоремы Рисса, то ясно, что H должно быть полным (почему?). Таким образом, мы видим, что для предгильбертова пространства H следующие утверждения эквивалентны:

$$\begin{aligned} H \text{ полно} &\iff \text{для } H \text{ справедлива теорема об ортогональном дополнении}\\ &\iff \text{для } H \text{ справедливо утверждение (7.2)}\\ &\iff \text{для } H \text{ справедлива теорема Рисса.}\end{aligned}$$

Опишем теперь пространство, сопряженное к ℓ^p.

Предложение 7.4. *Пусть числа $p, q \in (1, +\infty)$ связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$. Тогда существует изометрический изоморфизм $\ell^q \to (\ell^p)^*$, переводящий каждый вектор $y \in \ell^q$ в функционал $f_y \in (\ell^p)^*$, действующий по правилу*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \qquad (x \in \ell^p). \tag{7.3}$$

Доказательство. Из неравенства Гёльдера (см. задачу 1.3 из листка 1) следует, что для любых $y \in \ell^q$ и $x \in \ell^p$ ряд (7.3) абсолютно сходится, причем сумма его по модулю не превосходит $\|y\|_q \|x\|_p$. Следовательно, формула (7.3) определяет ограниченный линейный функционал f_y на ℓ^p, и $\|f_y\| \leqslant \|y\|_q$. Таким образом, определено линейное отображение

$$\alpha \colon \ell^q \to (\ell^p)^*, \quad \alpha(y) = f_y \qquad (y \in \ell^q).$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $e_n \in \ell^p$ последовательность с единицей на n-ом месте и нулем на остальных. Тогда $f_y(e_n) = y_n$ для каждого $y \in \ell^q$, откуда следует, что $\operatorname{Ker} \alpha = 0$. Остается доказать, что α сюръективно и изометрично.

Зафиксируем произвольный $f \in (\ell^p)^*$. Мы должны подобрать $y \in \ell^q$ так, чтобы $f = f_y$. Для этого положим $y_n = f(e_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ (никакая другая последовательность на роль y, понятно, не подойдет). Чтобы показать, что $y \in \ell^q$, для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим

$$x_i = \begin{cases} |y_i|^q / y_i & \text{при } y_i \neq 0,\\ 0 & \text{при } y_i = 0.\end{cases}$$

Тогда для произвольного $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = f\Big(\sum_{i=1}^{N} x_i e_i\Big) \leqslant \|f\| \Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\Big)^{1/p} = \\ = \|f\| \Big(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^{(q-1)p}\Big)^{1/p} = \|f\| \Big(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\Big)^{1/p}.$$

После сокращения получаем неравенство

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\Big)^{1/q} \leqslant \|f\|.$$

Ввиду произвольности $N \in \mathbb{N}$ отсюда следует, что $y \in \ell^q$ и $\|y\|_q \leqslant \|f\|$. Поскольку линейная оболочка e_n-ых плотна в ℓ^p, а функционалы f и f_y линейны и непрерывны, из равенств $f(e_n) = f_y(e_n) = y_n$ следует, что $f = f_y$. Следовательно, α — биекция. Кроме того, $\|y\|_q \leqslant \|f\| = \|f_y\| \leqslant \|y\|_q$ (см. выше), так что α — изометрия. □

Упражнение 7.1. Постройте изометрические изоморфизмы $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ и $(c_0)^* \cong \ell^1$.

Предостережение 7.4. Может возникнуть предположение, что пространство $(\ell^\infty)^*$ изоморфно ℓ^1, однако это не так (см. задачу 5.8 из листка 5)! Чему изоморфно пространство $(\ell^\infty)^*$, мы узнаем через некоторое время.

Опишем теперь сопряженные к некоторым линейным операторам. Прежде чем это делать, договоримся о том, какие операторы следует считать «одинаковыми».

Определение 7.4. Пусть X и Y — нормированные пространства. Операторы $S \in \mathscr{B}(X)$ и $T \in \mathscr{B}(Y)$ называются *подобными* (соответственно, *изометрически эквивалентными*), если существует топологический (соответственно, изометрический) изоморфизм $U\colon X \to Y$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "U"'] & X \arrow[d, "U"] \\ Y \arrow[r, "T"] & Y \end{tikzcd}$$

Про такой оператор U говорят, что он *осуществляет подобие* (соответственно, *изометрическую эквивалентность*) между S и T.

В случае гильбертовых пространств изометрическую эквивалентность чаще называют *унитарной эквивалентностью* (см. следствие 5.2).

Смысл этого определения в том, что операторы $S \in \mathscr{B}(X)$ и $T \in \mathscr{B}(Y)$ следует считать «одинаковыми», если пространства X и Y можно отождествить (топологически либо изометрически) так, что оператор S «превратится» в оператор T.

Предложение 7.5. *Пусть числа $p, q \in (1, +\infty)$ связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$. Зафиксируем $\lambda \in \ell^\infty$ и рассмотрим следующие операторы:*

$M_\lambda^{(p)} \colon \ell^p \to \ell^p$ — *диагональный оператор (см. пример 2.2);*

$T_r^{(p)} \colon \ell^p \to \ell^p$ — *оператор правого сдвига (см. пример 2.3);*

$T_\ell^{(p)} \colon \ell^p \to \ell^p$ — *оператор левого сдвига (см. пример 2.3);*

$\alpha \colon \ell^q \to (\ell^p)^*$ — *изометрический изоморфизм из предложения 7.4.*

Тогда α осуществляет изометрическую эквивалентность между $M_\lambda^{(q)}$ и $(M_\lambda^{(p)})^*$, между $T_r^{(q)}$ и $(T_\ell^{(p)})^*$ и между $T_\ell^{(q)}$ и $(T_r^{(p)})^*$.

Доказательство. Прямая проверка (упражнение). □