МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет

«Харківський політехнічний інститут»

Реферат

з предмету «Фізичне виховання»

«Случайные процессы»

Виконав роботу студент

ІКМ-720а Кац В.Ю.

Перевірив роботу викладач

Гапон Д. А.

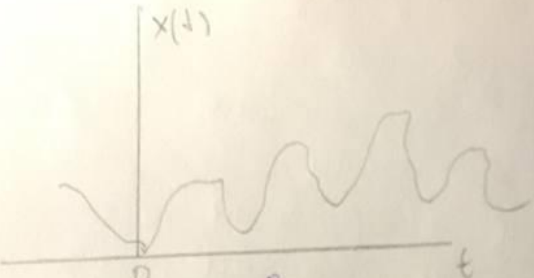
Харків 2022

1. Основные определения. Непрерывные СП.

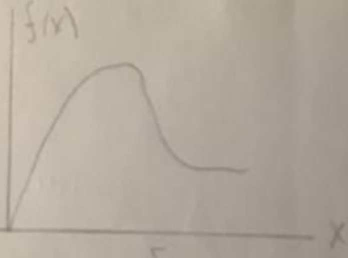
Случайный процесс представляет собой совокупность функций времени и имеет вероятностное описание. Соответствующие вероятностные характеристики могут быть безусловные и совместные плотности вероятностей всех случайных величин, являющихся точечными функциями процесса, для фиксированных моментов времени.

Непрерывный случайный процесс – это процесс, для которого случайные величины $X(t_1)$, $X(t_2)$ и т.д. могут принимать любые значения в пределах заданной области возможных значений. Эта область может быть конечной, бесконечной и полубесконечной. Более точное определение непрерывного случайного процесса исходит из того, что его функция распределения непрерывна. Это означает также что его плотность вероятностей не содержит в себе дельта функций.

2. Дискретный случайный процесс – это процесс, для которого случайные величины могут принимать только определённые значения и [illegible] функции. Например, напряжение, которое случайным образом принимает значение 0 или 100 В в зависимости от того, открыт или закрыт коммутатор (реле), является реализацией дискретного случайного процесса



а

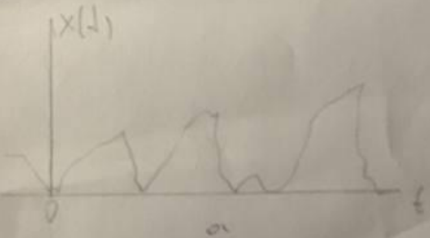


б

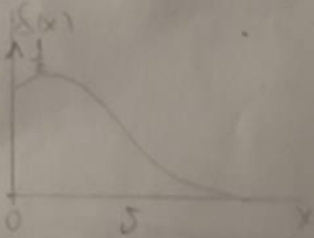
типовая реализация плотность вероятности

Непрерывный случайный процесс

Могут также существовать множества случайных процессов, которые имеют как непрерывную, так и дискретную компоненты. Например, ток, протекающий через идеальный выпрямитель, может иметь нулевое значение в течение 50% времени. Тепловой шум в электрической цепи - типовой пример непрерывного случайного процесса, так как его амплитуда может принимать любые положительные или отрицательные значения.



а



б

типовая реализация плотность вероятности

Смешанный случайный процесс

3. Детерминированные и недетерминированные случайные процессы

Почти все существующие в природе случайные процессы относятся к недетерминированным, так как физический механизм, лежащий в основе их возникновения, либо ненаблюдаем, либо очень сложный.

Имеется возможность определить случайные процессы, для которых будущие значения какой-либо реализации можно точно предсказать, зная прошлые значения. Такие случайные процессы называют детерминированными.

В качестве примера рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

где A и ω постоянные, θ - случайная величина с определённым вероятностным распределением т.е. для какой-то одной реализации величина θ имеет одно и то же значение для всех t, но для других членов ансамбля - другие значения. В этом случае имеют место случайные изменения только по ансамблю реализаций, но не по времени. Так и ранее, можно определить случайные величины $X(t_1)$, $X(t_2)$ и т.д. а также соответствующие им плотности вероятностей.

4 Стационарные и нестационарные СП.

Если все безусловные одномерные и совместные плотности вероятностей от времени t_1.

Если все безусловные одного случайного процесса не зависят от выбора начала отсчёта времени то такой процесс называется стационарным. В этом случае математическое ожидание и моменты, рассмотренные выше, являются постоянными, не зависящими от обычного значения времени.

Если какая-либо из плотностей вероятностей изменится при сдвиге начала отсчёта времени, то случайный процесс является нестационарным.

Детерминированные случайные процессы стационарны только при выполнении определённых физических условий. Обычно возникает желание предположить, что эти условия существуют, однако необходимо осознавать, что это вынужденный выбор и не обязательно естественный.

Требование чтобы все безусловные и совместные плотности вероятностей были независимы от выбора начала отсчёта времени, часто является более жёстким, чем это требуется для анализа систем. Процессы, удовлетворяющие этому требованию называются стационарными в узком смысле.

менее жесткое требование, которое часто оказывается достаточным, заключается в том, чтобы математическое ожидание любой случайной величины $X(t_1)$ не зависело от выбора t_1, а корреляционная функция двух случайных величин $X(t_1)\,X(t_2)$ зависела только от разности $(t_2 - t_1)$. Процессы, удовлетворяющие этим двум условиям, называются стационарными в широком смысле. Стационарность в широком смысле является достаточной хорошей для того, чтобы математическое ожидание, среднеквадратичное значение, дисперсия и коэффициент корреляции любой пары случайных величин были постоянными, не зависящими от выбора начала отсчёта времени.

5. Эргодические и неэргодические СП.

Некоторые стационарные случаи обладают свойством, заключающимся в том, что почти каждый член ансамбля „ведёт" себя в статистическом смысле также, как и весь ансамбль. Таким образом, можно проанализировать статистику динамику путём исследования только одной индивидуальной реализации. Такие случайные процессы называются эргодическими. Для эргодических случайных процессов математические ожидания и моменты могут быть определены как усреднением по времени, так и усреднением.

по ансамблю реализаций. В частности, n-й момент определяется как:

$$\overline{X^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx = \lim_{T \to \infty} (1/2T) \int_{-T}^{T} X^n(t)\,dt .$$

a)

Однако необходимо подчеркнуть что условие эргодичности выполняется только для стационарных процесса. Таким образом, эргодические случайные процессы являются также стационарными.

Случайный процесс, не удовлетворяющий свойству а) является неэргодическим. Все нестационарные случайные процессы неэргодичны, однако неэргодическими могут быть и стационарные случайные процессы.

В общем случае трудно, если только вообще возможно, доказать, что эргодичность - обычно важное допущение для какого-либо физического процесса, т.к. мы можем наблюдать только одна реализация этого процесса. Тем не менее обычно имеет смысл предположить эргодичность процесса если только отсутствуют веские доводы физического характера, препятствующие этому.

6. Статистические параметры СП

Статистическими параметрами случайного процесса X(t) являются ряд статистических параметров (напр., математическое ожидание, средний квадрат, дисперсия), связанных со случайными величинами X(t), рассматриваемыми в различные моменты времени t. Для стационарного случайного процесса эти параметры одинаковы для всех таких случайных величин и, следовательно, целесообразно рассматривать только одну группу параметров.

Значительный практический интерес представляет задача оценки параметров случайного процесса по результатам наблюдения одной реализации (так как все, что имеется в наличии - это одна реализация конечной длительности). Так как имеется только одна реализация конечной длительности). Так как имеется только одна реализация конечной длительности невозможно осуществить усреднение по ансамблю с целью получения оценок параметров, поэтому единственной альтернативой является осуществление усреднения по времени. Для эргодического случайного процесса это обоснованный подход, так как временное усреднение эквивалентно усреднению по ансамблю. Однако, в большинстве практических ситуаций мы не можем доказать, что случайный процесс является эргодическим; обычно необходимо предположить, что он эргодичен, если только нет явных физических причин, исключающих справедливость такого допущения. Кроме того, мы предполагаем возможным заменить временное усреднение в пределах интервала бесконечной длительности, а усреднение на интервале конечной длительности приводит к приближенным результатам. Цель м.

7. Корреляционная функция. Автокорреляционная (АКФ) и взаимная корреляционная функции (ВКФ)

Корреляция между двумя случайными величинами определяется математическим ожиданием их произведения. Если в качестве двух случайных величин выступают выборки случайного процесса в два различных момента времени, то такое математическое ожидание зависит от того, насколько быстро эти функции изменяются во времени. Можно полагать, что случайные величины будут сильно коррелированы, когда моменты времени очень близки к друг другу, поскольку случайная величина, зависящая от времени, за короткое время не может существенно измениться. В то же время корреляция между двумя выборками, взятыми в далеко отстоящие друг от друга моменты времени, скорее всего весьма мала, так как за большое время случайные величины могут претерпеть практически любые изменения.

Поскольку примеры безусловно зависят от того, насколько быстро меняется во времени случайная величина, можно предположить, что она определяется также и тем, каким образом энергия случайного процесса распределена по частотному спектру. Данное положение подтверждается тем фактом, что у процесса, быстро изменяющегося во времени, высокочастотные составляющие должны обладать достаточной энергией, чтобы обеспечивать его изменение.

Введённое выше определение корреляции давало представление о корреляции как о некотором числе, так как случайные величины не зависят в обязательном порядке от времени. Однако в примере, который мы рассмотрим ниже, когда пара случайных величин может быть охарактеризована разделяющим их временным интервалом, при этом корреляция становится функцией этого интервала. Поэтому для данного случая подходит использование так называемой корреляционной функции, у которой аргументом является временной интервал между двумя случайными величинами. Если эти случайные являются выборочными значениями одного и того же случайного процесса, то упомянутая функция называется автокорреляционной функцией данного процесса

Если же они принадлежат разным случайным процессам - взаимной корреляционной функции.

$$R_x(t_1, t_2) = E[X_1, X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_2$$

Можно рассматривать корреляцию между двумя случайными величинами, принадлежащими к различным случайным процессам. Такая ситуация возникает, когда на систему действует более одного случайного процесса или если требуется сравнить случайно изменяющиеся напряжения или токи, действующие в различных точках системы. Если два случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ совместно стационарны в широком смысле, то для случайных величин.

$$X_1 = X(t_1), \quad Y_2 = Y(t_1 + \tau)$$

можно определить взаимную корреляционную функцию.

$$R_{xy}(\tau) = E[X_1 Y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f(x_1, y_2) dy_2$$

9. Спектральная плотность

Большинство важных свойств спектральной плотности можно кратко сформулировать так: $S_x(\omega)$ есть вещественная, положительная, четная функция частоты ω. Из анализа преобразования Фурье известно, что его модуль - величина вещественная и положительная. Следовательно, этими же свойствами также будет обладать и математическое ожидание этой функции.

Отдельный класс спектральных плотностей, нашедших более широкое применение, нежели другие, образуют рациональные функции, называемые так потому, что они представляют собой отношение полиномов. Так как спектральная плотность является четной функцией частоты ω, эти полиномы состоят из членов только чётных степеней ω, а именно.

$$S_x(\omega) = \frac{S_0(\omega^{2n} + a_{2n-2}\,\omega^{2n-2} + \ldots + a_2\omega^2 + a_0)}{\omega^{2m} + b_{2m-2}\,\omega^{2m-2} + \ldots + b_2\omega^2 + b_0)}$$

Если значение среднего квадрата случайного процесса $X(t)$ конечно, то площадь под кривой $S_x(\omega)$ также должна быть ограниченной величиной. В данном случае необходимо, чтобы выполнялось условие $m>n$. В дальнейшем всегда будет подразумеваться выполнение этого условие, за исключением случая белого шума, являющегося предельным вариантом случайного процесса. Термин „белый шум" используют для случайного процесса, спектральная плотность которого постоянная для всех ω т.е. $S_x(\omega) = S_0$. Хотя такой процесс физически не может существовать, он является удобной математической моделью, в значительной степени упрощающей многие вычисления, которые в ряде случаев оказываются весьма громоздкими.