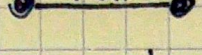
שאלה 3

נוכיח באינדוקציה על מספר האנשים בגרף.

בסיס:

- עבור $n=1$ - מתקיים באופן ריק (אין קשתות)
- עבור $n=2$ - נוריד את הקשת עם הלייבל שאנו מוצאים בגרף. לאחר עבור  נוריד phone.
- עבור $n=3$ - כאן, ישנם 2 מצבים אפשריים: 1) לכל הקשרות מאותו סוג 2) קשתות מאותו סוג וקשת שונה מסוג אחר.

עבור המקרה הראשון נוריד את הקשתות מהסוג האחר (הגרף ישאר כפי שהיה).

עבור המקרה השני נוריד את הקשת השונה ואז אין לאנשים ישארו מחוברים בצורה זו: כאשר הקשתות יהיו mail/phone כלשהי בקשת שהורדנו.

הנחה:

עבור גרף עם $n-1$ קודקודים הנ"ל ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ניתן להוריד סוג אחד של קשתות כך שבגרף אין ישאר קשר.

צעד:

נסתכל על גרף עם n קודקודים ונוציא את אחד הקודקודים מהגרף באופן שרירותי. כאן (עם הקשתות המחברות אותו) יש לנו גרף עם $n-1$ קודקודים שממנו קיים סוג של קשת שניתן להסיר כך שהגרף ישאר קשיר, נשמור את הסוג שהוצאנו כ-α. (α יכול להיות mail או phone). כעת נסביר את הקודקוד הזה ונחלק למקרים: לפי של הקשתות שחברו אותו לגרף הקטן מסוג α לכן ניתן להוריד את הסוג השני ($\bar{\alpha}$) והגרף אין ישאר קשיר כי הקודקוד מחובר את קשת α לפחות אחד מישאר $n-1$ הקודקודים. אחרת, לפי קיום קשת המקבר את הקודקוד שאינה α אז הקודקוד יהיה מקושר לגרף עם $n-1$ הקודקודים והגרף יהיה קשיר ∎

שאלה 4

נתון גרף עם 20 אנשים (קודקודים). לפי בירן ישנם 190 קשתות בסך הכל. אם נוריד 18 קשתות ישארו לנו 172 קשתות בגרף. כעת נחשב את המספר המקסימלי של קשתות שיכולים לקיים בגרף שאינו קשיר. יהי G גרף לא קשיר n קודקודים. לכן $\bar{G}$ גרף קשיר. אם $\bar{G}$ קשיר הוא מכיל לפחות $n-1$ קשתות. לכן, G מכיל לכל היותר $\frac{n(n-1)}{2} - n-1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ קשתות. במקרה לנו גרף שאינו קשיר עם 20 קודקודים יכול לכל היותר $\frac{19\cdot 18}{2} = 171$ קשתות. אך בגרף לאחר הסרת 18 קודקודים מכיל $172 > 171$ קשתות ולכן אינו קשיר.