Matematika Diskrit

Oleh : Aldy Rialdy Atmadja

Proposisi

- Proposisi majemuk disebut **tautologi** jika bernilai benar untuk semua kasus
- Proposisi majemuk disebut **kontradiksi** jika bernilai salah untuk semua kasus.

Tautologi

$p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Kontradiksi

$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

- Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.
  Notasi: $P(p, q, \ldots) \leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Hukum-hukum Aljabar Proposisi

1. Hukum identitas: - $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ - $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: - $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ - $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: - $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ - $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: - $p \vee p \Leftrightarrow p$ - $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): - ${\sim}({\sim}\mathrm{p}) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): - $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ - $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Hukum-hukum Aljabar Proposisi

7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ – $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Latihan

Latihan. Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee \sim q$

<u>Penyelesaian</u>:

$$
\begin{aligned}
p \vee \sim(p \vee q) &\Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q) && \text{(Hukum De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) && \text{(Hukum distributif)} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (p \vee \sim q) && \text{(Hukum negasi)} \\
&\Leftrightarrow p \vee \sim q && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

Sehingga dapat terbukti bahwa $p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee \sim q$ adalah benar

Implikasi

- Disebut juga proposisi bersyarat
- Bentuk proposisi: “jika p, maka q”
- Notasi: $p \rightarrow q$
  - p disebut **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**
  - q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Implikasi

- **Contoh-contoh implikasi**
  a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari Ayah
  b. Jika suhu mencapai 80⍰C, maka *alarm* akan berbunyi
  c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Tabel kebenaran implikasi

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Penjelasan (dengan contoh)

Dosen: “Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini”.
Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong?
Tinjau empat kasus berikut ini:

- Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar).
  pernyataan dosen benar.
- Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).
  dosen berbohong (pernyataannya salah).
- Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar).
  dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).
- Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).
  dosen anda benar.

Varian Proposisi Bersyarat

- Konvers (kebalikan): $q \rightarrow p$
  Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$
  Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \rightarrow q$	Konvers $q \rightarrow p$	Invers $\sim p \rightarrow \sim q$	Kontraposisi $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh

- Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:
  "Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya"

<u>Penyelesaian</u>:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil

Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya

Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil

Bi-implikasi

- Bentuk proposisi: "*p* jika dan hanya jika *q*"
  Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Tabel Kebenaran

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Dengan kata lain, pernyataan **“*p* jika dan hanya jika *q*” dapat dibaca “Jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*”.**

Bentuk pernyataan lain Biimplikasi

- Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:
  (a) *p* jika dan hanya jika *q*.
  (b) *p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q*.
  (c) Jika *p* maka *q*, dan sebaliknya.
  (d) *p iff q*

Contoh

- Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:
  (a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.
  (b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.
  (c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.
  (d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

Argumen

- Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

yang dalam hal ini, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ disebut hipotesis (atau premis), dan q disebut konklusi.

- Sering ditulis dalam bentuk: *p*1, *p*2, ..., *pn* → *q*
- Konklusi biasanya ditandai dengan kata “Jadi”, “Oleh karen itu”, “Dengan demikian, “, dll

Contoh

- Contoh sebuah argumen:
  Jika anda mahasiswa Informatika maka anda tidak sulit belajar Bahasa Java. Jika anda tidak suka begadang maka anda bukan mahasiswa Informatika. Tetapi, anda sulit belajar Bahasa Java dan anda tidak suka begadang. Jadi, anda bukan mahasiswa Informatika.
- Argumen ada yang **sahih** (*valid*) dan **palsu** (*invalid*).

Argumen

- **Definisi**. Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

- Jika argumen sahih, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi
  $(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to q$
  adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Contoh

- Perlihatkan bahwa argumen berikut:
  Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang.
  adalah sahih.

<u>Penyelesaian</u>:

Misalkan:

p : Air laut surut setelah gempa di laut

q : Tsunami datang:

Argumen:

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \underline{p \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore & q \end{array}$$

Penyelesaian

- Terdapat dua cara dalam membuktikan kesahihan argumen diatas
  - Dengan membentuk tabel kebenaran untuk p, q, dan $p \rightarrow q$
  - Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah $[(p \rightarrow q) \land p] \rightarrow q$ merupakan tautologi.

Penyelesaian 1

p	q	$p \rightarrow q$	
T	**T**	**T**	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	T	T	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

Argumen dikatakan sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis p dan $p \rightarrow q$ benar, maka konklusi q juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa tabel, p dan $p \rightarrow q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini q juga benar. Jadi, argumen di atas **sahih**.

Penyelesaian 2

p	q	$p \to q$	$p \land (p \to q)$	$[p \land (p \to q)] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

$[p \land (p \to q)] \to q$ adalah tautologi

Tugas dan latihan (dikumpulkan hari ini)

1. Buktikan apakah pernyataan dibawah ini merupakan tautologi atau kontradiksi atau bukan keduanya (dengan menggunakan tabel kebenaran) :
   a. $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
   b. $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$
2. Tunjukkan dengan hukum aljabar proposisi bahwa : $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow q$
3. Nyatakan dalam bentuk notasi (p dan q), dan tentukan konvers, invers dan kontraposisinya
   a. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
   b. Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan melakukan naturalisasi pemain
   c. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi
4. Buktikan kesahihan dari argumen dibawah ini :

   Jika saya mendapat IPK diatas 3.5, maka saya termasuk mahasiswa cumlaude dan mahasiswa idaman. Jadi saya termasuk mahasiswa cumlaude.

   Catatan: Tugas dikumpulkan dengan difoto/ discan kemudian upload ke Google Classroom (setelah jam perkuliahan berakhir)