MATEMATIKA DISKRIT 2: RELASI DAN SIFATNYA

AYU LATIFAH, ST., MT.

PATH DALAM RELASI DAN DIGRAPH

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan A.

Sebuah ***path* dengan panjang *n*** dalam R dari a ke b adalah sebuah sekuen hingga $\pi = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$, berawal dengan a dan berakhir dengan b, sehingga

$$a \, R \, x_1, x_1 \, R \, x_2, \ldots, x_{n-1} \, R \, b$$

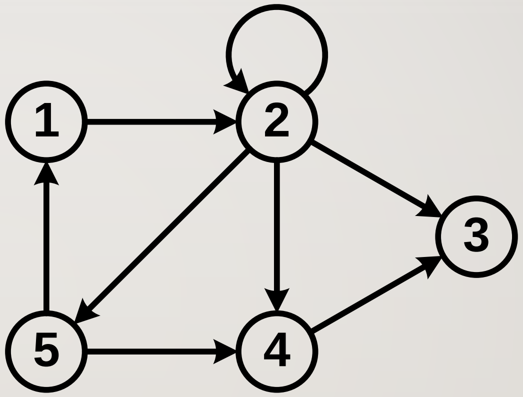
Sebuah path dengan panjang n melibatkan $n + 1$ elemen A, meskipun mereka tidak perlu berbeda.

Panjang dari sebuah path adalah jumlah sisi (*edge*) dalam path tersebut, dengan simpul[2] (*vertices*) tidak perlu semuanya berbeda.

PATH DALAM RELASI DAN DIGRAPH

Contoh 12

Perhatikan digraph berikut.



Maka π_1 = 1, 2, 5, 4, 3 adalah sebuah path dengan panjang 4 dari simpul 1 ke simpul 3.

π_2 = 1, 2, 5, 1 adalah sebuah path dengan panjang 3 dari simpul 1 ke dirinya sendiri.

π_3 = 2, 2 adalah sebuah path dengan panjang 1 dari simpul 2 ke dirinya sendiri.

PATH DALAM RELASI DAN DIGRAPH

- Sebuah path yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut siklus (***cycle***).
- Dalam Contoh 12, π_2 adalah siklus dengan panjang 3, sedangkan π_3 adalah siklus dengan panjang 1
- Path pada sebuah relasi *R* dapat dipakai untuk mendefinisikan relasi[2] baru.
- Definisikan sebuah relasi R^n sbb. $x\ R^n\ y$ berarti ada sebuah path dengan panjang *n* dari *x* ke *y* dalam *R*.

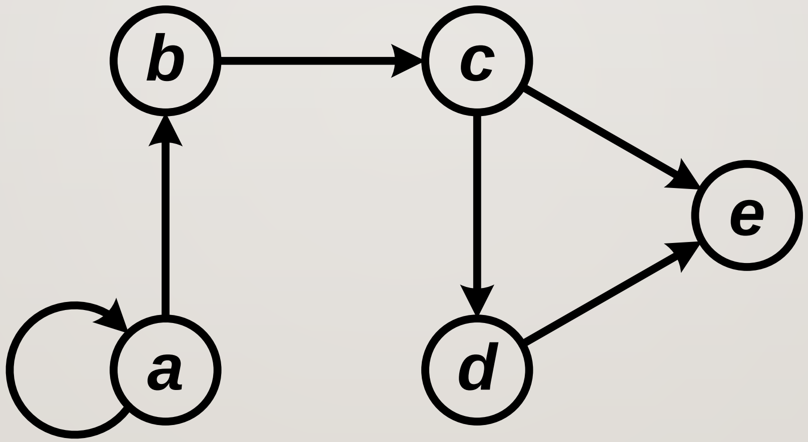
PATH DALAM RELASI DAN DIGRAPH

- Juga dapat didefinisikan sebuah relasi R^∞ pada A, dituliskan $x\ R^\infty\ y$, yang berarti ada suatu path dalam R dari x ke y.
- R^∞ disebut ***connectivity relation*** untuk R.

PATH DALAM RELASI DAN DIGRAPH

<u>Contoh 13</u>

Ambil $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan R direpresentasikan oleh digraph berikut.



Hitung: R^2 dan R^∞.

PATH DALAM RELASI DAN DIGRAPH

Jawab: berdasarkan digraph dari *R*, diperoleh;

$a\ R^2\ a$ karena $a\ R\ a$ dan $a\ R\ a$

$a\ R^2\ b$ karena $a\ R\ a$ dan $a\ R\ b$

$a\ R^2\ c$ karena $a\ R\ b$ dan $b\ R\ c$

$b\ R^2\ d$ karena $b\ R\ c$ dan $c\ R\ d$

$b\ R^2$ e karena $b\ R\ c$ dan $c\ R$ e

$c\ R^2$ e karena $c\ R\ d$ dan $d\ R$ e

Karena itu,

R^2 = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,d), (b,e), (c,e)}

PATH DALAM RELASI DAN DIGRAPH

Untuk menghitung R^∞, diperlukan seluruh pasangan terurut dari simpul[2] untuk mana terdapat sebuah path dengan panjang sembarang dari simpul pertama ke simpul kedua.

Dari digraph diperoleh,

$R^\infty = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e), (c,d), (c,e), (d,e)\}$.

PATH DALAM RELASI DAN DIGRAPH

<u>Teorema 3</u>

Jika R adalah sebuah relasi pada $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, maka

$$M_{R^2} = M_R \otimes M_R$$

Contoh 14

Ambil *A* dan *R* seperti pada Contoh 13. Maka,

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$M_{R^2} = M_R \otimes M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Teorema 4</u>

Untuk $n \geq 2$, dan R sebuah relasi pada sebuah himpunan hingga A, diperoleh

$$M_{R^n} = M_R \otimes M_R \otimes \cdots \otimes M_R \qquad (n \text{ faktor})$$

SIFAT-SIFAT RELASI

SIFAT-SIFAT RELASI

Relasi refleksif dan irrefleksif

Sebuah relasi R pada sebuah himpunan A adalah **refleksif** jika $(a,a) \in R, \forall a \in A$, yaitu jika a R a untuk seluruh $a \in A$.

Sebuah relasi R pada sebuah himpunan A adalah **irrefleksif** jika $(a,a) \notin R, \forall a \in A$.

Jadi R adalah refleksif jika setiap elemen $a \in A$ berelasi dengan dirinya sendiri dan irrefleksif jika tidak ada elemen yang berelasi dengan dirinya sendiri.

SIFAT-SIFAT RELASI

Contoh

Relasi ***equality*** pada himpunan A, yang didefinisikan $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$, adalah **refleksif** karena $(a,a) \in \Delta, \forall a \in A$.

Relasi ***inequality*** pada himpunan A, yang didefinisikan $R = \{(a,b) \in A \times A \mid a \neq b\}$ adalah **irrefleksif** karena $(a,a) \notin R, \forall a \in A$.

SIFAT-SIFAT RELASI

Contoh

Ambil $A = \{1, 2, 3\}$ dan $R = \{(1,1), (1,2)\}$, maka

R **tidak refleksif** karena $(2,2) \notin R$ dan $(3,3) \notin R$.

Juga, R **tidak irrefleksif** karena $(1,1) \in R$.

Relasi refleksif dan irrefleksif dapat dicari dengan matrik relasinya, refleksif bila diagonal utamanya semuanya 1, irrefleksif bila diagonal utamanya semuanya 0.

SIFAT-SIFAT RELASI

Relasi simetri, asimetri, dan antisimetri

Sebuah relasi R pada sebuah himpunan A adalah **simetri** jika bilamana $(a,b) \in R$, maka $(b,a) \in R$.

Sebuah relasi R pada sebuah himpunan A adalah **asimetri** jika bilamana $(a,b) \in R$, maka $(b,a) \notin R$.

Sebuah relasi R pada sebuah himpunan A adalah **antisimetri** jika bilamana $(a,b) \in R$ dan $(b,a) \in R$, maka $a = b$.

SIFAT-SIFAT RELASI

Contoh

Ambil $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $R = \{(1,2), (2,2), (3,4), (4,1)\}$.

Maka R tidak simetri, karena $(1,2) \in R$ tetapi $(2,1) \notin R$.

R tidak asimetri, karena $(2,2) \in R$.

R antisimetri, karena jika $a \neq b$, apakah $(a,b) \notin R$ atau $(b,a) \notin R$.

SIFAT-SIFAT RELASI

Matrik $M_R = [m_{ij}]$ dari sebuah relasi simetri memenuhi sifat, jika

$m_{ij} = 1$, maka $m_{ji} = 1$, selanjutnya jika

$m_{ji} = 0$, maka $m_{ij} = 0$.

Atau $M_R = (M_R)^T$, sehingga M_R adalah matrik simetri.

Matrik $M_R = [m_{ij}]$ dari sebuah relasi asimetri memenuhi sifat, jika

$m_{ij} = 1$, maka $m_{ji} = 0$,

Jika R asimetri, membawa bahwa $m_{ii} = 0$ untuk semua i.

SIFAT-SIFAT RELASI

Matrik M_R = [m_{ij}] dari sebuah relasi antisimetri memenuhi sifat, bahwa jika

$i \neq j$, maka m_{ij} = 0 atau m_{ji} = 0.

SIFAT-SIFAT RELASI

Contoh

Untuk matrik[2] relasi berikut, apa sifat relasinya?

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R_1: simetri

R_2: simetri

SIFAT-SIFAT RELASI

Contoh

Untuk matrik² relasi berikut, apa sifat relasinya?

$$M_{R_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R_3: antisimetri, tidak asimetri

R_4: tidak simetri

SIFAT-SIFAT RELASI

Contoh

Untuk matrik[2] relasi berikut, apa sifat relasinya?

$$M_{R_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R_5: antisimetri,
tidak asimetri

R_6: asimetri,
antisimetri

SIFAT-SIFAT RELASI

Relasi transitif

Sebuah relasi R pada sebuah himpunan A adalah transitif jika bilamana $a\ R\ b$ dan $b\ R\ c$, maka $a\ R\ c$.

Kadang² lebih mudah untuk mengatakan apa artinya sebuah relasi yang tidak transitif.

Sebuah relasi R pada sebuah himpunan A adalah tidak transitif jika terdapat a, b, dan c dalam A sehingga $a\ R\ b$ dan $b\ R\ c$ tetapi $a \not R\ c$. Jika a, b, dan c ini tidak ada, maka R tidak transitif.

Contoh

Ambil $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $R = \{(1,2), (1,3), (4,2)\}$.

Apakah R transitif?

Jawab

Karena tidak ditemukan elemen^2 a, b, dan c dalam A sehingga $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$, tetapi $(a,c) \notin R$, maka kesimpulannya R tidak transitif.

Sebuah relasi transitif dapat dicari dengan matrik relasinya M_R = [m_{ij}] sbb.

Jika m_{ij} = 1 dan m_{jk} = 1, maka m_{ik} = 1.

Atau dengan kata lain, jika

$$(M_R)^2_{\otimes} = M_R$$

maka *R* adalah transitif.

Contoh

Ambil A = {1, 2, 3} dan R relasi pada A yang matrik relasinya sbb.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa R transitif.

Jawab

Dengan perhitungan langsung, didapat $(M_R)^2_{\otimes} = M_R$; oleh karena itu, R transitif.

Teorema

Sebuah relasi R adalah transitif jika dan hanya jika memenuhi sifat berikut.

Jika terdapat sebuah path dengan panjang lebih besar dari 1 dari simpul a ke simpul b, ada sebuah path dengan panjang 1 dari a ke b (yaitu, a berelasi dengan b)

Dinyatakan secara aljabar, R adalah transitif jika dan hanya jika $R^n \subseteq R$ untuk semua $n \geq 1$.

Teorema

Ambil R sebuah relasi pada sebuah himpunan A. Maka,

(a) Refleksivitas dari R berarti bahwa $a \in R(a), \quad \forall a \in A$.

(b) Simetri dari R berarti bahwa $a \in R(b) \leftrightarrow b \in R(a)$.

(c) Transitivitas dari R berarti bahwa jika $b \in R(a)$ dan $c \in R(b)$, maka $c \in R(a)$.

SEKIAN DAN TERIMA KASIH