MATEMATIKA DISKRIT 2: RELASI

AYU LATIFAH, ST., MT.

RELASI

- Hubungan antara anggota² himpunan direpresentasikan dengan menggunakan struktur yang disebut relasi.
- Untuk mendiskripsikan relasi antara anggota² dua himpunan *A* dan *B*, dapat digunakan pasangan terurut dengan anggota pertamanya diambil dari *A* dan anggota keduanya diambil dari *B*.
- Karena ini merupakan relasi antara dua himpunan, maka disebut relasi biner.

DEFINISI

Ambil A dan B himpunan tak kosong.

Sebuah relasi R dari A ke B adalah sebuah himpunan bagian dari $A \times B$.

Jika $R \subseteq A \times B$ dan $(a, b) \in R$, a dikatakan berelasi dengan b oleh R, dan dituliskan $a\ R\ b$.

Jika a tidak berelasi dengan b oleh R, dituliskan $a\ R\ b$.

Biasanya $A = B$, dalam hal ini dikatakan bahwa $R \subseteq A \times A$ sebuah relasi pada himpunan A.

RELASI

Contoh 1

Misalkan M himpunan mahasiswa STEI, K himpunan matakuliah, dan R relasi yang mendeskripsikan siapa yang mengambil matakuliah tertentu.

M = {Adi, Budi, Dina, Susi},

K = {EL2009, EC3021, EL1001, ET3002}

R = {(Adi, EL2009), (Budi, ET3002), (Dina, EL1001), (Dina, EC3021), (Susi, EL2009)}

Artinya Adi mengambil EL2009, Budi mengambil ET3002, Dina mengambil EL1001 dan EC3021, dan Susi mengambil EL2009.

RELASI

<u>Contoh 2</u>

Ambil

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ dan } B = \{r, s\}.$$

Maka

$$R = \{(1, r), (2, s), (3, r)\}$$

adalah sebuah relasi dari A ke B.

RELASI

<u>Contoh 3</u>

Ambil $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Himpunan terurut manakah yang terdapat dalam relasi

$$R = \{(a, b) \mid a < b\}?$$

Jawab

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

HIMPUNAN-HIMPUNAN TERKAIT RELASI R

- Akan didefinisikan berbagai himpunan penting dan berguna terkait dengan relasi *R*.
- Ambil $R \subseteq A \times B$ sebuah relasi dari *A* ke *B*.
- ***Domain*** *R*, dituliskan *Dom* (*R*), adalah sebuah himpunan dari elemen² *A* yang berelasi dengan suatu elemen dalam *B*. *Dom* (*R*) $\subseteq$ *A*, himpunan seluruh elemen pertama dalam pasangan² yang membentuk *R*.
- ***Range*** *R*, dituliskan *Ran* (*R*), adalah himpunan dari elemen² *B* yang berelasi dengan suatu elemen *A*. *Ran* (*R*) $\subseteq$ *B*, himpunan seluruh elemen kedua dalam pasangan² yang membentuk *R*.

HIMPUNAN-HIMPUNAN TERKAIT RELASI R

Contoh 4

Untuk relasi pada Contoh 1, *Dom* (*R*) = *M*, dan *Ran* (*R*) = *K*.

Sedangkan untuk relasi pada Contoh 2, *Dom* (*R*) = *A*, dan *Ran* (*R*) = *B*.

Untuk relasi pada Contoh 3, *Dom* (*R*) = {1, 2, 3}, dan *Ran* (*R*) = {2, 3, 4}.

HIMPUNAN-HIMPUNAN TERKAIT RELASI R

$R \subseteq A \times B$ dan $x \in A$, definisikan $R(x)$, ***R-relative set of x*** (R-himpunan relatif dari x), sebagai

$$R(x) = \{y \in B \mid x \; R \; y\}$$

Serupa, jika $A_1 \subseteq A$, maka $R(A_1)$, ***R-relative set of*** $\boldsymbol{A_1}$ (R-himpunan relatif dari A_1), sebagai

$$R(A_1) = \{y \in B \mid x \; R \; y \text{ untuk suatu } x \text{ dalam } A_1\}.$$

HIMPUNAN-HIMPUNAN TERKAIT RELASI R

<u>Contoh 5</u>

Ambil $A = B = \{a, b, c, d\}$

dan ambil

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a), (c, b), (d, c)\}.$$

Maka

$$R(a) = \{a, b\}, R(b) = \{c\},$$

dan jika $A_1 = \{c, d\}$, maka

$$R(A_1) = \{a, b, c\}.$$

HIMPUNAN-HIMPUNAN TERKAIT RELASI R

Teorema 1

Ambil R relasi dari A ke B, dan ambil A_1 dan A_2 himpunan bagian A. Maka

(a) jika $A_1 \subseteq A_2$, maka $R(A_1) \subseteq R(A_2)$

(b) $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$

(c) $R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$

HIMPUNAN-HIMPUNAN TERKAIT RELASI R

<u>Contoh 6</u>

Ambil $R \subseteq A \times B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z, w, p, q\}$, dan $R = \{(1, x), (1, z), (2, w), (2, p), (2, q), (3, y)\}$.

Ambil $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$.

Maka $R(A_1) = \{x, z, w, p, q\}$, dan $R(A_2) = \{w, p, q, y\}$.

Jadi, $R(A_1) \cup R(A_2) = \{x, y, z, w, p, q\} = B$.

$R(A_1) \cap R(A_2) = \{w, p, q\} = R(\{2\}) = R(A_1 \cap R_2)$.

HIMPUNAN-HIMPUNAN TERKAIT RELASI R

<u>Teorema 2</u>

Ambil $R \subseteq A \times B$ dan $S \subseteq A \times B$.

Jika $R(a) = S(a)\ \forall a \in A$, maka $R = S$.

MATRIKS DARI SEBUAH RELASI

Jika $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ himpunan[2] hingga, yang secara berturut-turut mengandung m dan n elemen, dan R adalah sebuah relasi dari A ke B, R dapat direpresentasikan dengan matrik $m \times n$, $M_R = [m_{ij}]$, didefinisikan sbb.

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & jika\ (a_i, b_j) \in R \\ 0 & jika\ (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Matrik M_R disebut matrik dari R.

MATRIKS DARI SEBUAH RELASI

<u>Contoh 7</u>

Ambil *R* relasi pada Contoh 1, maka matrik dari *R* adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DIGRAPH

- Jika *A* sebuah himpunan hingga dan *R* sebuah relasi pada *A*, maka *R* dapat direpresentasikan secara *pictorial* dengan digraph.
- Jadi jika *R* sebuah relasi pada *A*, sisi^2 (*edges*) dari digraph *R* menyatakan pasangan^2 dalam *R*, dan simpul^2 (*vertices*) menyatakan elemen^2 *A*.

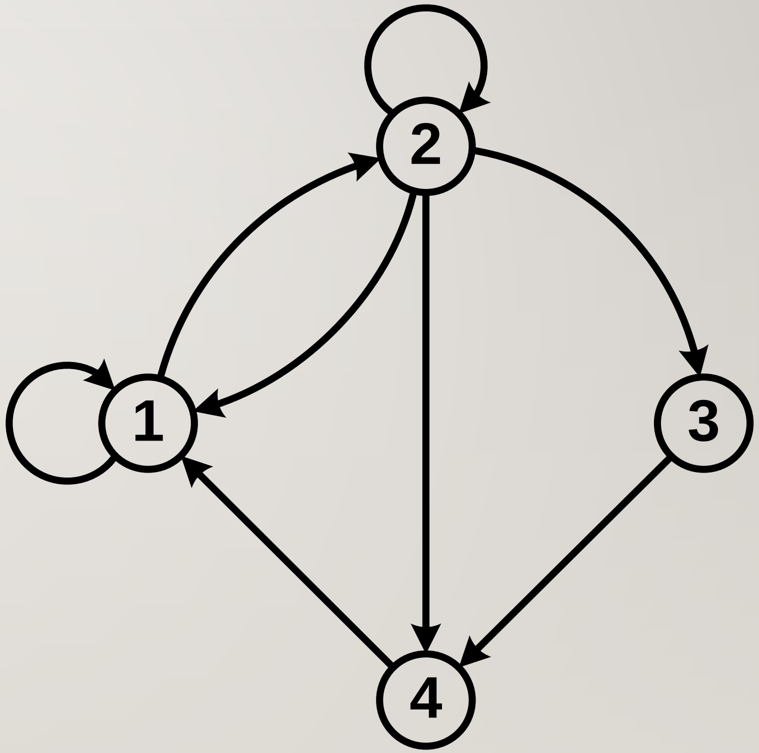
DIGRAPH

<u>Contoh 8</u>

Ambil $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,4), (4,1)\}$

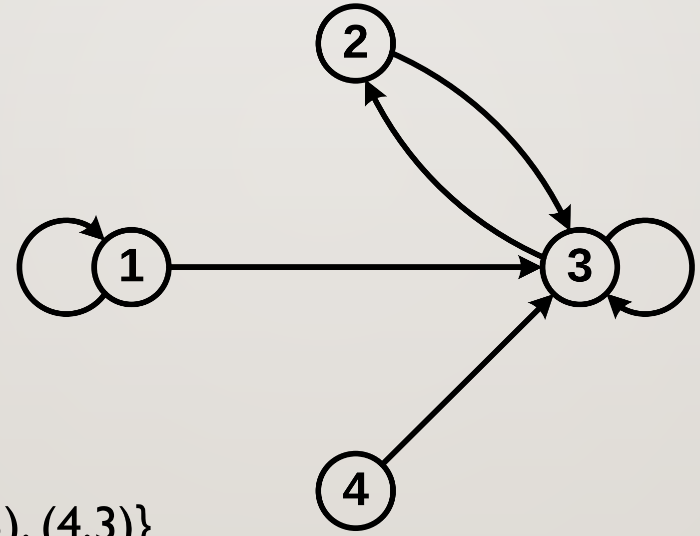
Maka digraph dari R adalah



DIGRAPH

<u>Contoh 9</u>

Relasi yang digambarkan oleh digraph berikut



$R = \{(1,1), (1,3), (2,3), (3,2), (3,3), (4,3)\}$

DIGRAPH

Jika R sebuah relasi pada himpunan A, dan $a \in A$, maka ***in-degree*** dari a (relatif terhadap relasi R) adalah banyaknya $b \in A$ sehingga $(b, a) \in R$.

Out-degree dari a adalah jumlah banyaknya $b \in A$ sehingga $(a, b) \in R$.

Out-degree dari a adalah $|R(a)|$.

DIGRAPH

Contoh 10

Ambil $A = \{a, b, c, d\}$, dan R relasi pada A dengan matrik relasi berikut

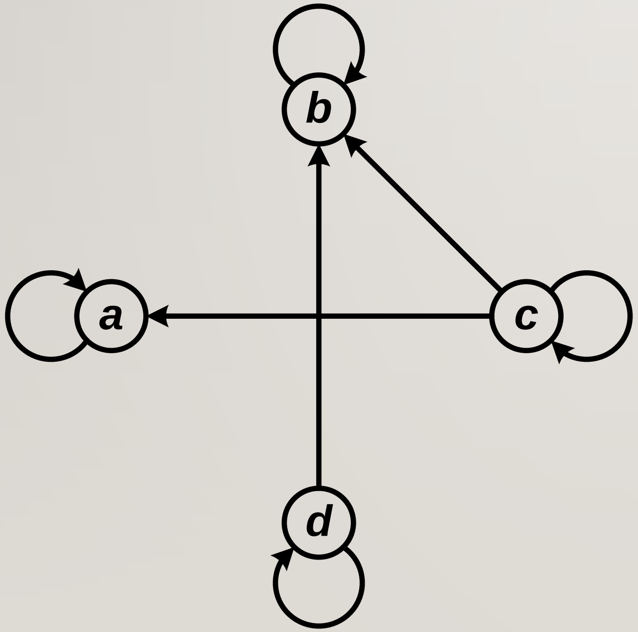
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gambarkan digraph dari R, dan daftar *in-degree* dan *out-degree* seluruh simpulnya.

DIGRAPH

Jawab Contoh 10

Berikut digraph dari *R* dan tabel in-degree dan out-degree.



	a	*b*	*c*	*d*
In-degree	2	3	1	1
Out-degree	1	1	3	2

DIGRAPH

Jika R sebuah relasi pada sebuah himpunan A dan B adalah sebuah himpunan bagian dari A, ***restriction of R to B*** (pembatasan R pada B) adalah $R \cap (B \times B)$.

DIGRAPH

<u>Contoh 11</u>

Ambil $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $R = \{(a,a), (a,c), (b,c), (a,e), (b,e), (c,e)\}$.

Misalkan $B = \{a, b, c\}$. Maka

$B \times B = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$, dan

Restriction of R to B adalah $\{(a,a), (a,c), (b,c)\}$.

SEKIAN DAN TERIMA KASIH