MATEMATIKA DISKRIT 2: KOMBINASI

AYU LATIFAH, ST., MT.

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Teorema 1

Misalkan bahwa dua pekerjaan T_1 dan T_2 dikerjakan berurutan satu setelah yang lain. Jika T_1 dapat dikerjakan dalam n_1 cara, dan untuk setiap cara tersebut T_2 dapat dilaksanakan dalam n_2 cara, maka sekuen T_1T_2 dapat dilaksanakan dalam n_1n_2 cara.

Teorema ini seringkali disebut sebagai prinsip perkalian kombinatorik

Selanjutnya dapat diperluas sebagai berikut.

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Teorema 2

Misalkan bahwa tugas $T_1, T_2, \ldots, T_k$ dikerjakan berurutan. Jika T_1 dapat dilaksanakan dalam n_1 cara, dan untuk setiap cara tersebut T_2 dapat dilaksanakan dalam n_2 cara, dan untuk masing-masing dari $n_1 n_2$ cara pelaksanaan $T_1 T_2$, T_3 dapat dikerjakan dalam n_3 cara, dan seterusnya, maka pelaksanaan $T_1 T_2 \ldots T_k$ berurutan dapat dilaksanakan tepat dalam $n_1 n_2 \ldots n_k$ cara.

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Contoh 1

Sebuah label identifier, untuk sebuah program komputer, terdiri dari sebuah huruf diikuti dengan tiga digit desimal. Jika pengulangan diizinkan, berapa banyak label yang dapat dibuat?

Jawab. Ada 26 kemungkinan untuk huruf yang mengawali dan ada 10 kemungkinan untuk masing-masing dari tiga digit yang mengikuti. Berdasarkan Teorema 2, didapat

$$26 \times 10 \times 10 \times 10 = 26.000 \text{ kemungkinan label.}$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Contoh 2

Ambil A sebuah himpunan dengan n elemen. Berapa himpunan bagian yang dimiliki A?

Jawab. Setiap himpunan bagian dari A dapat dinyatakan dengan persamaan karakteristiknya, dan jika A mempunyai n elemen, fungsi ini dapat dinyatakan dengan barisan 0 dan 1 dengan panjang n.

Elemen pertama dapat diisi dalam dua cara, demikian pula dengan elemen-elemen berikutnya, jadi terdapat

$$2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2 = 2^n \text{ himpunan bagian.}$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Beralih pada dua problem pencacahan (*counting*) berikut.

Ambil A himpunan sembarang dengan n elemen, dan misalkan bahwa $1 \leq r \leq n$.

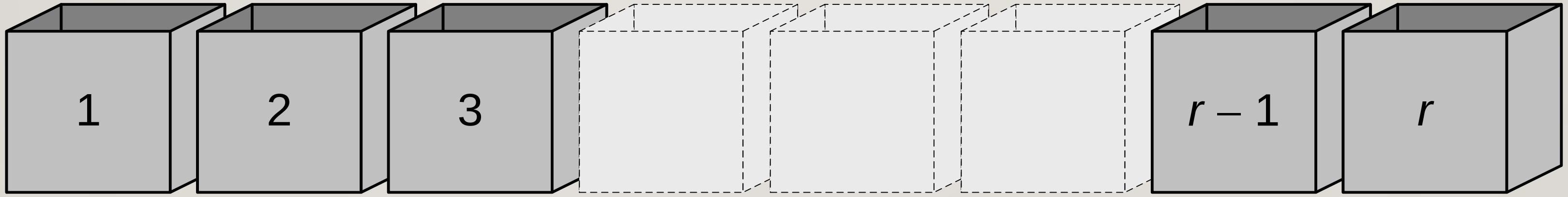
Problem 1. Berapa banyak barisan yang berbeda, masing-masing dengan panjang r, yang dapat dibentuk dengan menggunakan elemen A jika

a) anggota barisan tersebut boleh berulang, atau
b) semua anggota barisan tersebut harus berbeda?

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Problem 2. Berapa banyak himpunan bagian dengan *r* elemen, yang berbeda, dari himpunan *A* yang dapat dibentuk?

Untuk problem 1, barisan dengan panjang *r* dapat dibentuk dengan mengisi *r* kotak secara berurutan dari kiri ke kanan.



PERMUTASI DAN KOMBINASI

Ambil T_1 tugas mengisi kotak-1, T_2 tugas mengisi kotak-2, dst. Maka gabungan tugas-tugas $T_1T_2\ldots T_r$ menggambarkan formasi barisan tsb.

Problem 1, kasus (a).

T_1 dapat dikerjakan dalam n cara. Karena anggota barisan tsb. boleh berulang, demikian pula untuk $T_2, T_3, \ldots, T_r$.

Jadi jumlah barisan yang dapat dibentuk

$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^r$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Teorema 3

Ambil A sebuah himpunan dengan $|A| = n$, dan $1 \leq r \leq n$. Maka jumlah barisan dengan panjang r (pengulangan diizinkan) yang dapat dibentuk dari elemen-elemen A adalah n^r.

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Contoh 3

Berapa banyak "kata" tiga-huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf pada himpunan {*a*, *b*, *y*, *z*)? Bila pengulangan diizinkan.

Jawab.

Di sini $n = 4$ dan $r = 3$, jadi, berdasarkan Teorema 3, jumlah kata tersebut adalah $4^3 = 64$.

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Problem 1, kasus (b).

Di sini, T_1 juga dapat dilakukan dalam n cara, karena sembarang elemen A dapat dipilih dan diletakkan pada posisi pertama.

Begitu elemen tsb. dipilih, hanya tersisa (n – 1) elemen, sehingga T_2 dapat dikerjakan dlm. (n – 1) cara, dst. sampai akhirnya, T_r dapat dilaksanakan dalam (n – r + 1) cara.

Berdasarkan Teorema 2, sebuah barisan dari r elemen berbeda dari A dpt. dibentuk dalam

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1) \text{ cara.}$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Sebuah barisan dari r elemen yang berbeda dari A acapkali disebut sebuah permutasi dari A diambil r setiap kalinya, atau lebih tepatnya sebuah permutasi dari r elemen yang dipilih dari A.

Jumlah barisan seperti yang disebut pada slide sebelumnya (jumlah banyaknya permutasi) hanya tergantung pada n dan r, bukan pada A.

Jumlah ini seringkali dituliskan dengan $P(n, r)$ dan disebut jumlah permutasi dari n objek diambil r setiap kalinya.

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Teorema 4

Jika $1 \leq r \leq n$, maka $P(n, r)$, jumlah permutasi dari n objek diambil r setiap kalinya, adalah

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \cdot \cdot (n - r + 1).$$

Jika $r = n$, kita mencacah susunan yang berbeda dari elemen-elemen himpunan A, dengan $|A| = n$, ke dalam barisan dengan panjang n. Barisan seperti ini disebut permutasi dari A. Dengan demikian jumlah permutasi A adalah

$$P(n, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!, \text{ jika } n \geq 1.$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Definisikan 0! = 1, maka untuk $n \geq 0$ jumlah permutasi n objek adalah n!

Jika $n \geq 1$ dan $1 \leq r \leq n$, dapat kita tuliskan bentuk yang lebih kompak untuk $P(n, r)$.

$$
\begin{aligned}
P(n,r) &= n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1) \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot(n-r-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)\cdot(n-r-1)\cdots 2\cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}
$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Contoh

Ambil $A = \{a, b, c\}$. Maka permutasi dari A adalah barisan abc, acb, bac, bca, cab, dan cba.

Jadi untuk $n = 3$, $P(3, 3) = 3! = 6$; seperti yang terdaftar di atas.

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Contoh

Berapa banyak "kata" tiga huruf yang berbeda yang dapat dibentuk dari alfabet {*a*, *b*, *y*, *z*}?

Jawab. Jumlah kata tersebut adalah

$$P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Problem 2.

Menghitung jumlah himpunan bagian r-elemen dari sebuah himpunan n-elemen.

Paling mudah dikerjakan dengan menggunakan informasi yang telah diperoleh pada permutasi.

Bahwa setiap permutasi dari elemen himpunan diambil r setiap kalinya dapat dihasilkan dengan melakukan dua pekerjaan berikut berurutan.

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Pekerjaan 1: pilih himpunan bagian B dari A yang mengandung r elemen A.

Pekerjaan 2: pilih sebuah permutasi tertentu dari B.

Coba hitung jumlah cara memilih B. Sebut jumlah ini C.

Maka pekerjaan 1 dapat dikerjakan dalam C cara, dan pekerjaan 2 dapat dilakukan dalam $r!$ cara.

Total jumlah cara pelaksanaan kedua pekerjaan tersebut, yang mana adalah $P(n, r)$, adalah $Cr!$.

Karena itu,

PERMUTASI DAN KOMBINASI

$$Cr! = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dengan demikian,

$$C = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Teorema 5

Ambil A sebuah himpunan dengan $|A| = n$, dan ambil $1 \leq r \leq n$. Maka jumlah kombinasi dari elemen-elemen A diambil r setiap kalinya, yaitu jumlah himpunan bagian r-elemen dari A, adalah

$$C = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Dituliskan $C(n, r)$, dan disebut jumlah kombinasi dari n objek diambil r setiap kalinya.

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Contoh

Berapa banyak komite yang berbeda dari tujuh orang yang dapat dibentuk yang masing-masingnya terdiri dari tiga wanita yang diambil dari 20 anggota wanita dan empat pria yang diambil dari 30 anggota pria?

Jawab. Dalam hal pembentukan komite ini, dapat dilakukan dengan melaksanakan dua pekerjaan berikut berurutan.

T_1: Pilih tiga wanita dari himpunan 20 wanita

T_2: Pilih empat pria dari himpunan 30 pria

PERMUTASI DAN KOMBINASI

T_1 dapat dilakukan dalam

$$C(20,3) = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

dan T_2 dapat dilakukan dalam

$$C(30,4) = \frac{40!}{4!(30-4)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 27.405$$

Berdasarkan prinsip perkalian, terdapat

(1140)(27.405) = 31.241.700 komite berbeda.

SEKIAN DAN TERIMA KASIH