MATEMATIKA DISKRIT 2: POSET DAN LATTICES

AYU LATIFAH, ST., MT.

ISOMORPHISM

Ambil poset $(A, \leq)$ dan $(A', \leq)$, serta fungsi $f : A \rightarrow A'$ adalah sebuah *one-to-one correspondence between* A dan A'. Fungsi f disebut sebuah ***isomorphism*** dari $(A, \leq)$ ke $(A', \leq)$, jika untuk sembarang a dan b dalam A,

$$a \leq b \text{ jika dan hanya jika } f(a) \leq' f(b).$$

Jika $f : A \rightarrow A'$ adalah sebuah isomorphism, kita katakan bahwa $(A, \leq)$ dan $(A', \leq)$ adalah ***isomorphic poset***.

CONTOH

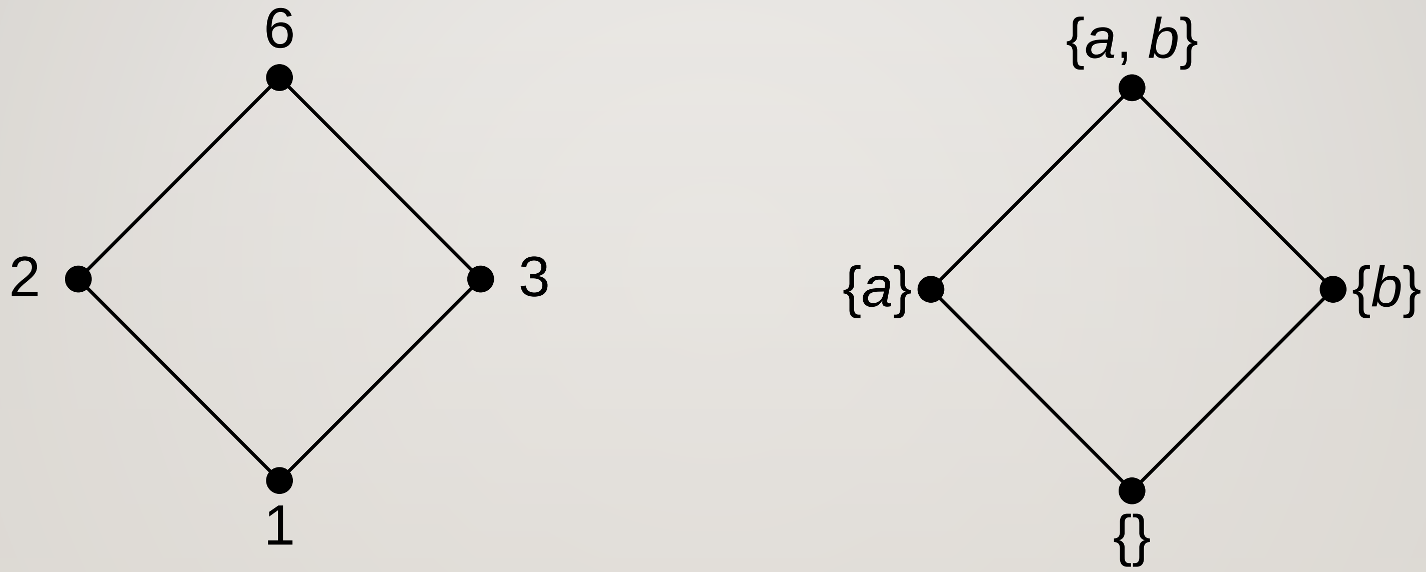
Ambil $A = \{1, 2, 3, 6\}$ dan $\leq$ adalah relasi "|" (membagi). Ambil $A' = P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ dan $\leq'$ adalah set containment, $\subseteq$.

Jika $f : A \to A'$ didefinisikan oleh,

$$f(1) = \emptyset, f(2) = \{a\}, f(3) = \{b\}, f(6) = \{a, b\},$$

Terlihat bahwa f adalah sebuah *one-to-one correspondence*.

CONTOH



Hasse diagram dari poset-poset yang isomorphic adalah sama.

ELEMEN^2 EKSTREMUM PADA POSET

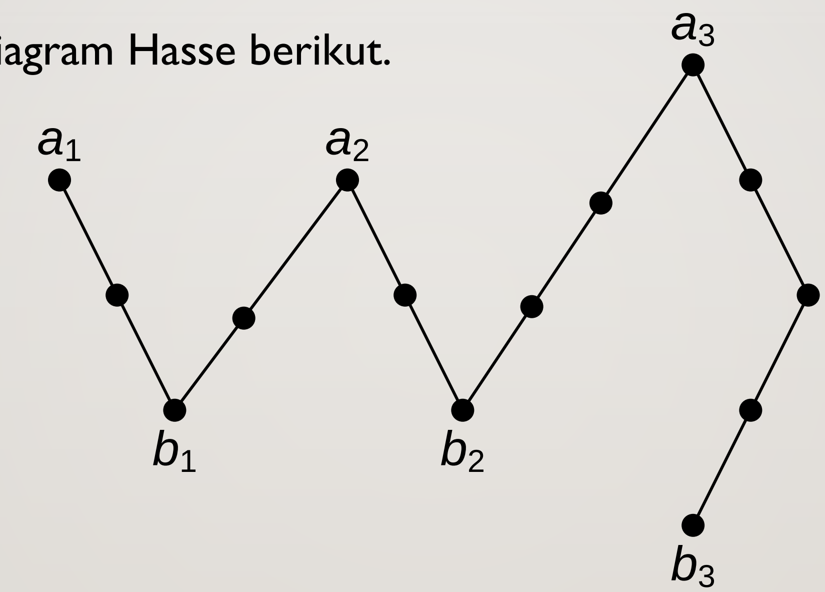
Sebuah elemen $a \in A$ disebut sebuah **elemen maksimal** dari A jika tidak ada elemen c pada A sehingga $a < c$.

Sebuah elemen $b \in A$ disebut sebuah **elemen minimal** dari A jika tidak ada elemen c pada A sehingga $c < b$.

Akibatnya, jika $(A, \leq)$ sebuah poset dan $(A, \geq)$ poset dualnya, $a \in A$ sebuah elemen maksimal pada $(A, \leq)$ hanya jika a sebuah elemen minimal pada $(A, \geq)$. Juga, a adalah sebuah elemen minimal pada $(A, \leq)$ jika dan hanya jika a elemen maksimal pada $(A, \geq)$.

CONTOH

Perhatikan poset *A* dengan diagram Hasse berikut.



Elemen-elemen a_1, a_2, dan a_3 adalah elemen-elemen maksimal dari *A*, sedangkan elemen-elemen b_1, b_2, dan b_3 adalah elemen-elemen minimal dari *A*.

TEOREMA

Ambil A adalah sebuah poset hingga tak kosong dengan partial order $\leq$. Maka A mempunyai sekurangnya satu elemen maksimal dan sekurangnya satu elemen minimal.

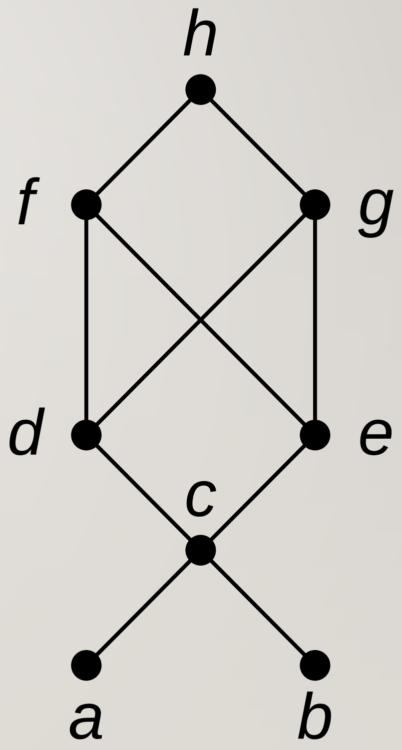
Sebuah elemen $a \in A$ disebut sebuah **elemen terbesar** dari A jika $x \leq a, \forall x \in A$. Sebuah elemen $a \in A$ disebut sebuah **elemen terkecil** dari A jika $a \leq x, \forall x \in A$.

CONTOH

Perhatikan poset *A* dengan diagram Hasse sbb.

h adalah satu-satunya elemen maksimal, dan karena itu elemen terbesar.

a dan *b* adalah elemen-elemen minimal, dan karena itu poset ini tidak mempunyai elemen terkecil.



TEOREMA

Sebuah poset mempunyai paling banyak satu elemen terbesar dan paling banyak satu elemen terkecil.

Elemen terbesar pada sebuah poset, jika ada, dinyatakan dengan *I*, dan seringkali disebut **elemen satuan** (***unit element***). Serupa, elemen terkecil dari sebuah poset, jika ada, dinyatakan dengan *0*, dan disebut **elemen nol (*zero element*)**.

UPPER BOUND & LOWER BOUND

Perhatikan sebuah poset $(A, \leq)$ dan sebuah himpunan bagian $B \subseteq A$.

Sebuah elemen $a \in A$ disebut sebuah **batas atas (*upper bound*)** dari B jika $b \leq a, \forall b \in B$.

Sebuah elemen $a \in A$ disebut sebuah **batas bawah (*lower bound*)** dari B jika $a \leq b, \forall b \in B$.

LUB & GLB

Sebuah elemen $a \in A$ disebut sebuah ***least upper bound* (*LUB*)** dari B jika a adalah sebuah *upper bound* dari B dan $a \leq a'$, bilamana a' adalah sebuah *upper bound* dari B.

Sebuah elemen $a \in A$ disebut sebuah ***greatest lower bound* (*GLB*)** dari B jika a adalah sebuah *lower bound* dari B dan $a' \leq a$, bilamana a' adalah sebuah *lower bound* dari B.

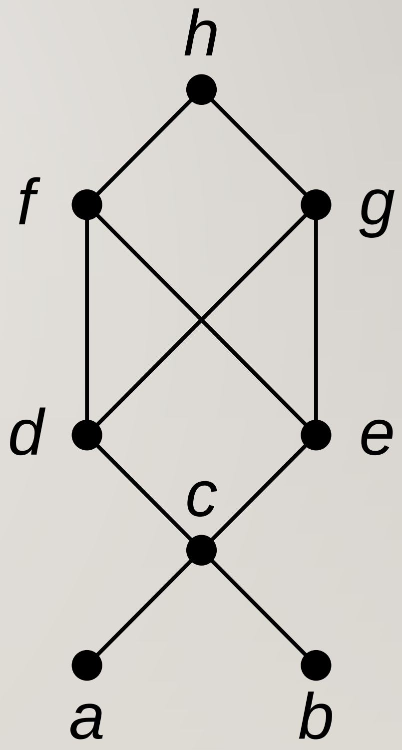
CONTOH

Perhatikan poset *A* dengan diagram Hasse sbb.

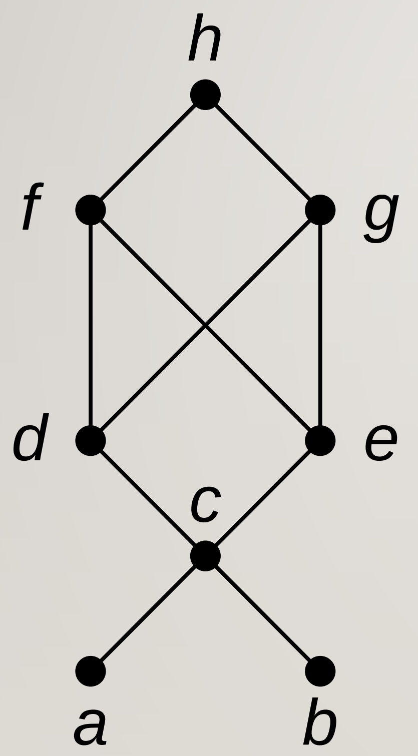
Cari seluruh *upper bound* dan seluruh *lower bound*, serta *LUB* dan *GLB* dari himpunan bagian *A* berikut;

$B_1 = \{a, b\}$, dan

$B_2 = \{c, d, e\}$.



JAWAB



B_1 tidak mempunyai lower bounds. Sedangkan upper bounds nya adalah *c*, *d*, e, *f*, dan *g*.

Karena tidak mempunyai lower bounds, dia tidak mempunyai *GLB*, namun, *LUB* (B_1) = *c*.

Upper bounds dari B_2 adalah *f*, *g*, dan *h*. Sedangkan *lower bounds* nya adalah *c*, *a*, dan *b*.

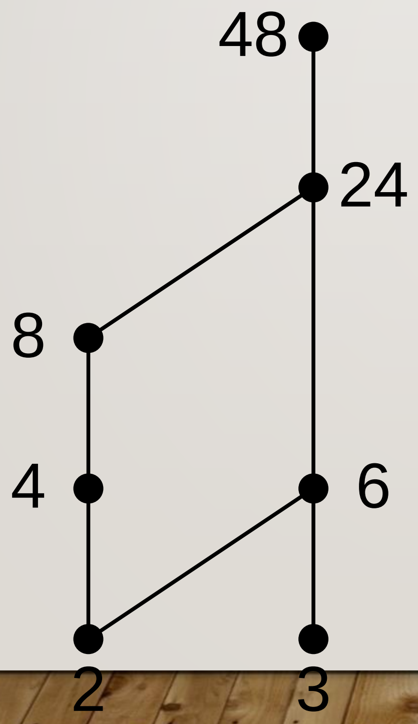
Karena *f* dan *g* tidak *comparable*, B_2 tidak mempunyai *LUB*. Sedangkan *GLB* (B_2) = *c*.

TEOREMA

Ambil $(A, \leq)$ adalah sebuah poset. Maka sebuah himpunan bagian B dari himpunan A mempunyai paling banyak satu *LUB* dan satu *GLB*.

CONTOH

Ambil poset $(A, \leq)$ dengan $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 24, 48\}$, dan $\leq$ adalah relasi keterbagian. Cari *LUB* dan *GLB* dari $B = \{4, 6\}$.



$LUB\ (B) = 24$

dan

$GLB\ (B) = 2$

TEOREMA

Ambil $(A, \leq)$ dan $(A', \leq')$ poset-poset isomorphic di bawah isomorphism $f : A \rightarrow A'$.

(a) Jika *a* sebuah elemen maksimal (minimal) dari $(A, \leq)$, maka $f(a)$ adalah sebuah elemen maksimal (minimal) dari $(A', \leq')$.

(b) Jika *a greatest* (*least*) *element* dari $(A, \leq)$, maka $f(a)$ adalah *greatest* (*least*) *element* dari $(A', \leq')$.

(c) Jika *a* sebuah *upper bound* (*lower bound*, *LUB*, *GLB*) dari $B \subseteq A$, maka $f(a)$ adalah sebuah *upper bound* (*lower bound*, *LUB*, *GLB*) untuk himpunan bagian $f(B) \subseteq A'$.

(d) Jika setiap himpunan bagian dari $(A, \leq)$ mempunyai sebuah *LUB* (*GLB*), maka setiap himpunan bagian dari $(A', \leq')$ mempunyai sebuah *LUB* (*GLB*).

LATTICES

Lattice adalah sebuah poset $(L, \leq)$ di mana setiap himpunan bagian $\{a, b\}$ yang terdiri dari dua elemen mempunyai sebuah LUB dan sebuah GLB.

Kita nyatakan LUB $(\{a, b\})$ dengan $a \vee b$ dan menyebutnya ***join*** dari a dan b.

Serupa, kita nyatakan GLB $(\{a, b\})$ dengan $a \wedge b$ dan menyebutnya ***meet*** dari a dan b.

CONTOH

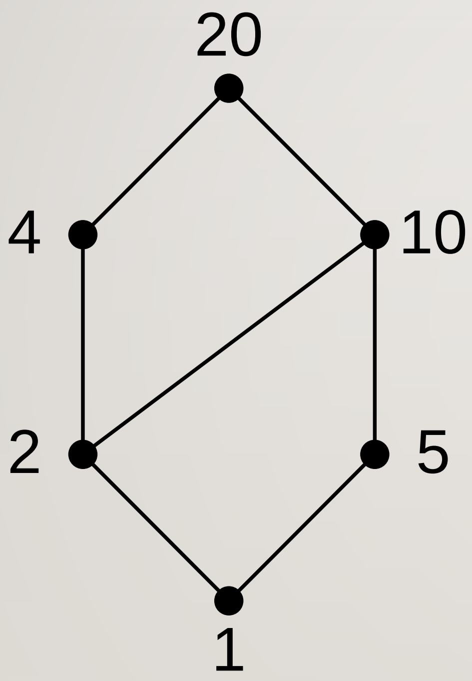
Ambil n adalah sebuah bilangan bulat positip dan ambil D_n adalah himpunan dari seluruh pembagi positip dari n.

Jadi bila $n = 20$, kita peroleh $D_{20} = \{1,2, 4, 5, 10, 20\}$.

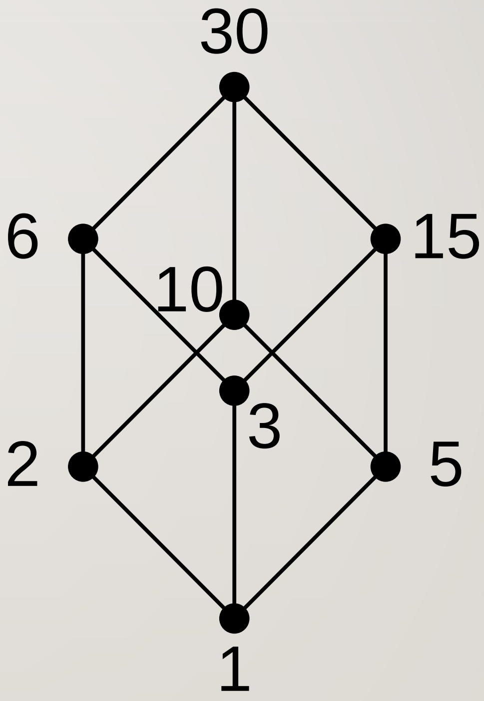
Bila $n = 30$, diperoleh $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Berikut diagram Hasse dari D_{20} dan D_{30}.

CONTOH



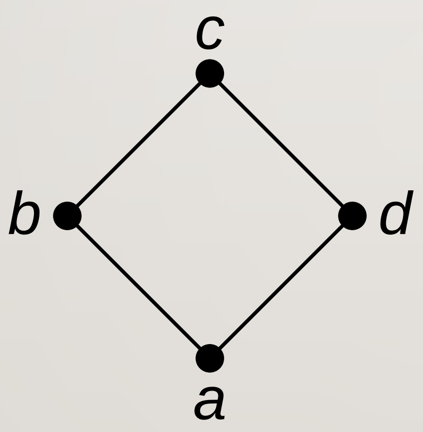
D_{20}

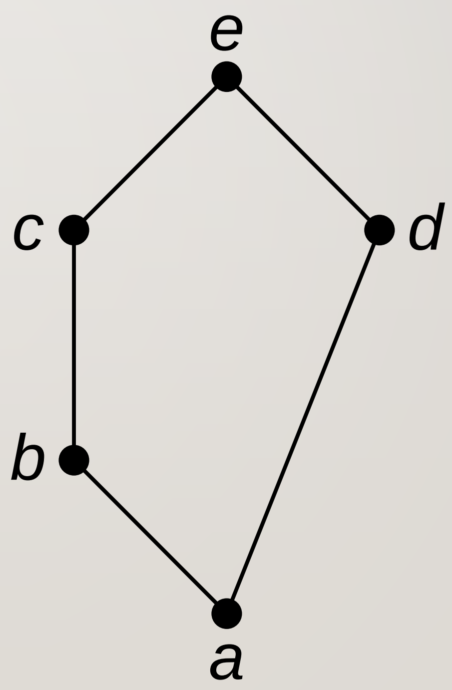


D_{30}

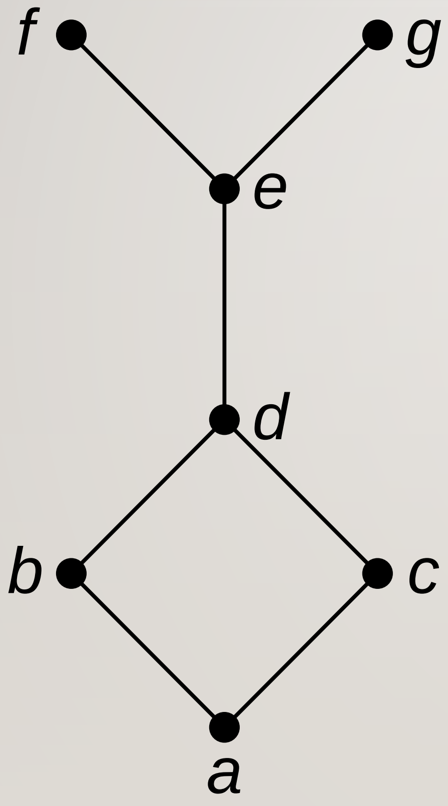
CONTOH

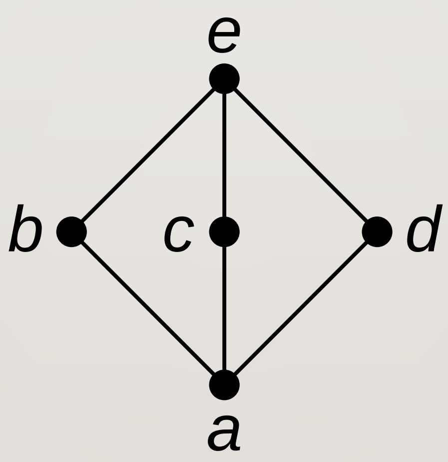
Dari dagram-diagram Hasse berikut, mana yang lattice dan mana yang bukan.

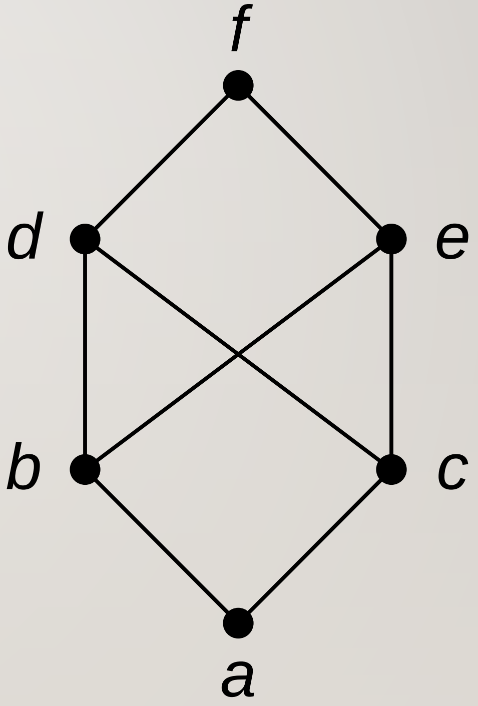




CONTOH



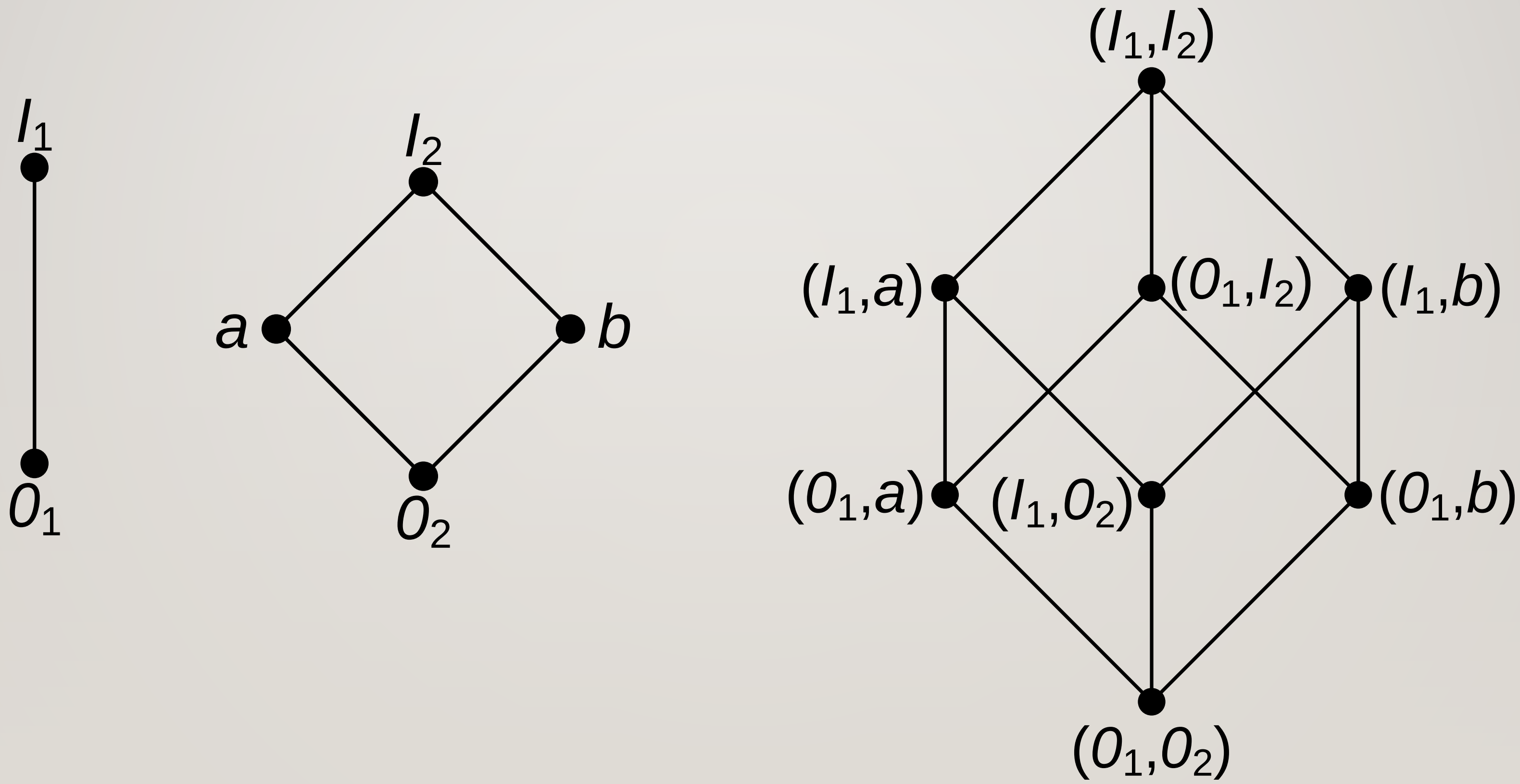




TEOREMA

Jika $(L_1, \leq)$ dan $(L_2, \leq)$ adalah lattice, maka $(L, \leq)$ adalah sebuah lattice, dengan $L = L_1 \times L_2$, dan partial order $\leq$ dari L adalah *product partial order*.

CONTOH

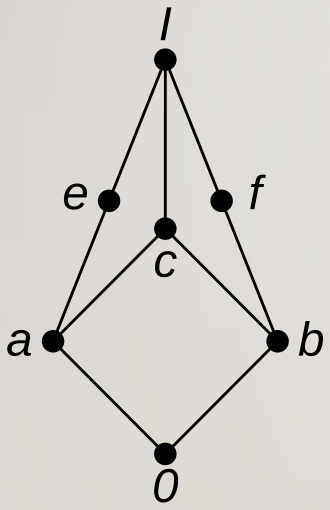


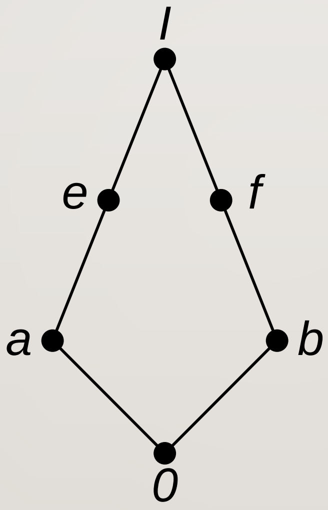
SUBLATTICE

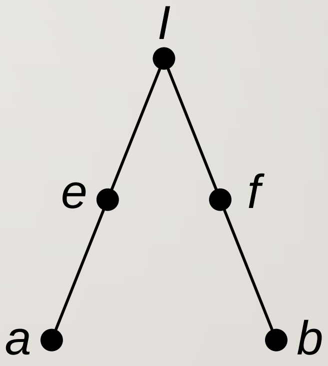
Ambil $(L, \leq)$ sebuah lattice. Sebuah himpunan bagian tak kosong S dari L disebut sebuah ***sublattice*** dari L jika $a \vee b \in S$ dan $a \wedge b \in S$ bilamana $a \in S$ dan $b \in S$.

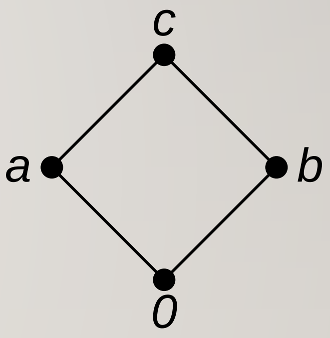
CONTOH

Perhatikan lattice *L* pada gambar berikut.





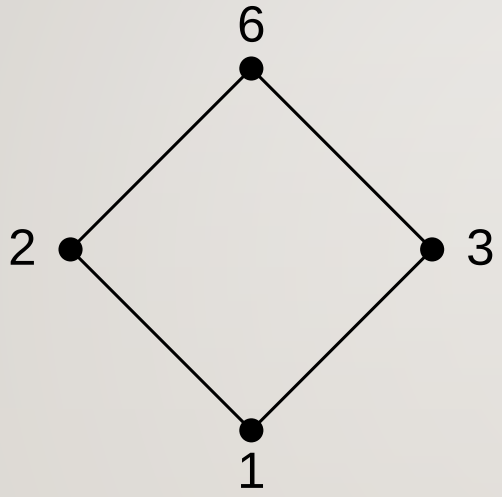




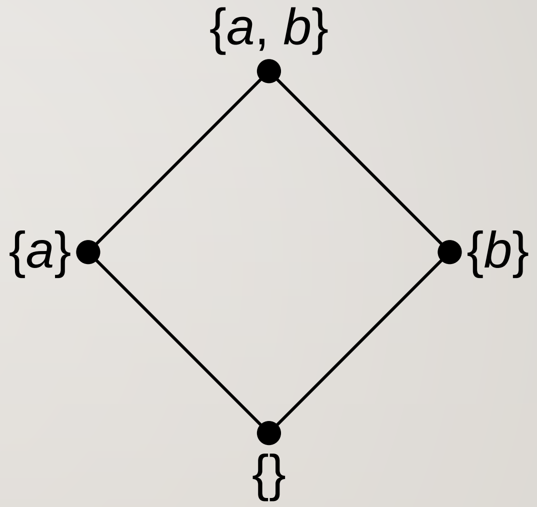
ISOMORPHIC LATTICES

Jika $f : L_1 \to L_2$ adalah sebuah isomorphism dari poset $(L_1, \leq_1)$ ke poset $(L_2, \leq_2)$, maka berdasarkan teorema tentang isomorphism pada poset, menyatakan bahwa L_1 adalah lattice jika dan hanya jika L_2 sebuah lattice. Sebenarnya, jika a dan b elemen dari L_1, maka $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ dan $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. Jika dua lattice adalah isomorphic, sebagai poset, dikatakan mereka adalah ***isomorphic lattices***.

CONTOH



Lattice D_6



Lattice $(P(S), \subseteq)$ dengan $S = \{a, b\}$.

SIFAT-SIFAT LATTICE

Teorema

Ambil L adalah sebuah lattice. Maka untuk setiap a dan b pada L:

(a) $a \vee b = b$ jika dan hanya jika $a \leq b$.

(b) $a \wedge b = a$ jika dan hanya jika $a \leq b$.

(c) $a \wedge b = a$ jika dan hanya jika $a \vee b = b$.

TEOREMA

Ambil sebuah lattice L. Maka

1. Sifat idempotent
   (a) $a \vee a = a$
   (b) $a \wedge a = a$
2. Sifat komutatif
   (a) $a \vee b = b \vee a$
   (b) $a \wedge b = b \wedge a$
3. Sifat asosiatif
   (a) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
   (b) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
4. Sifat absorbsi
   (a) $a \vee (a \wedge b) = a$
   (b) $a \wedge (a \vee b) = a$

TEOREMA

Ambil sebuah lattice L. Maka untuk setiap a, b dan c pada L:

1. Jika $a \leq b$, maka
   (a) $a \vee c \leq b \vee c$
   (b) $a \wedge c \leq b \wedge c$

2. $a \leq c$ dan $b \leq c$ jika dan hanya jika $a \vee b \leq c$

3. $c \leq a$ dan $c \leq b$ jika dan hanya jika $c \leq a \wedge b$

4. Jika a $\leq$ b dan c $\leq$ d, maka
   (a) $a \vee c \leq b \vee d$
   (b) $a \wedge c \leq b \wedge d$

TIPE KHUSUS PADA LATTICE

Sebuah lattice *L* dikatakan ***bounded*** jika mempunyai sebuah *greatest elemen I* dan sebuah *least elemen 0*.

Jika *L* sebuah *bounded lattice*, maka untuk seluruh $a \in A$

$$0 \leq a \leq I$$

$$a \vee 0 = a \qquad a \wedge 0 = 0$$

$$a \vee I = I \quad a \wedge I = a$$

TEOREMA

Ambil $L = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ adalah sebuah lattice hingga.

Maka L adalah *bounded*.

DISTRIBUTIVE LATTICE

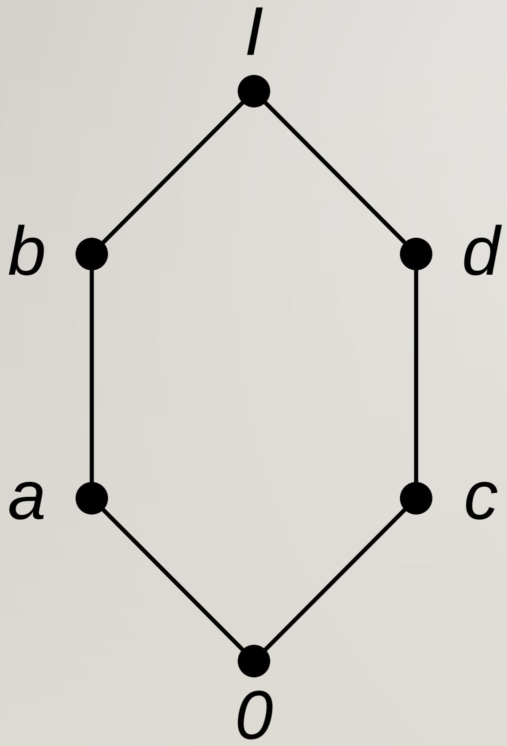
Sebuah lattice L disebut ***distributive*** jika untuk sembarang elemen a, b, dan c pada L, kita peroleh hukum distributive berikut:

(a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(b) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee c) \wedge (a \vee d)$

Jika L tidak distributif, kita sebut L adalah ***nondistributive***.

CONTOH



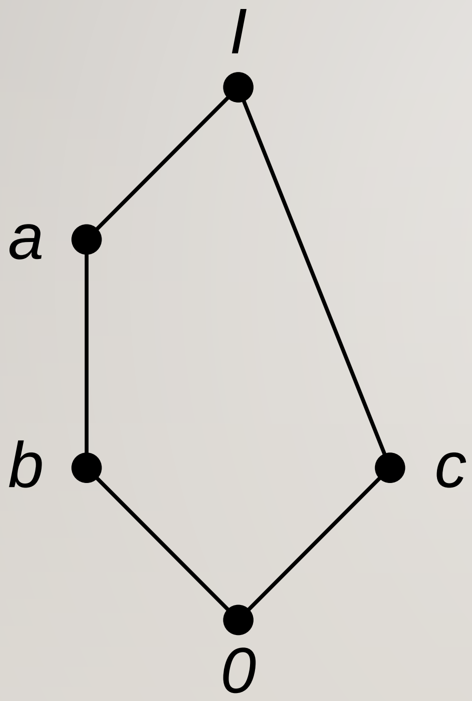
Lattice distributif, karena

$a \wedge (b \vee c) = a \wedge I = a$

Sedangkan

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee 0 = a$

CONTOH



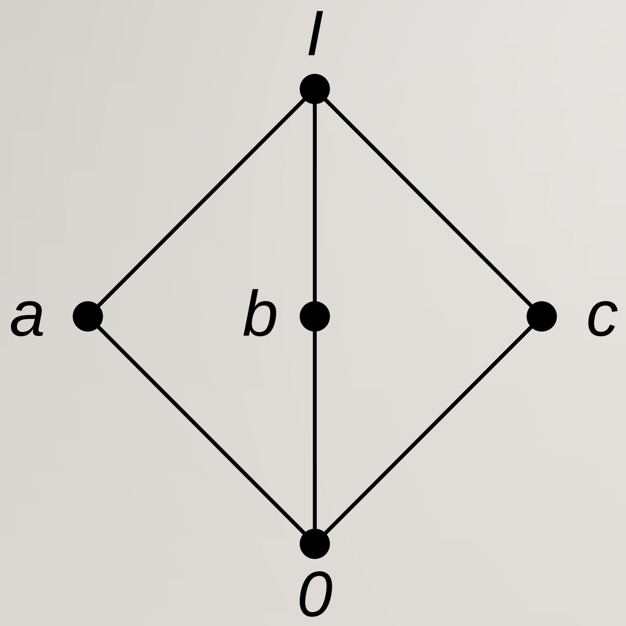
Lattice nondistributif, karena

$a \wedge (b \vee c) = a \wedge I = a$

Sedangkan

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee 0 = b$

CONTOH



Lattice nondistributif, karena

$a \wedge (b \vee c) = a \wedge I = a$

Sedangkan

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$

TEOREMA

Sebuah lattice *L* adalah nondistributif jika dan hanya jika lattice tersebut mengandung sebuah sublattice yang isomorphic dengan salah satu dari dua contoh lattice nondistributif di atas.

Ambil L adalah sebuah *bounded lattice* dengan *greatest element I* dan *least element 0*, dan ambil $a \in L$.

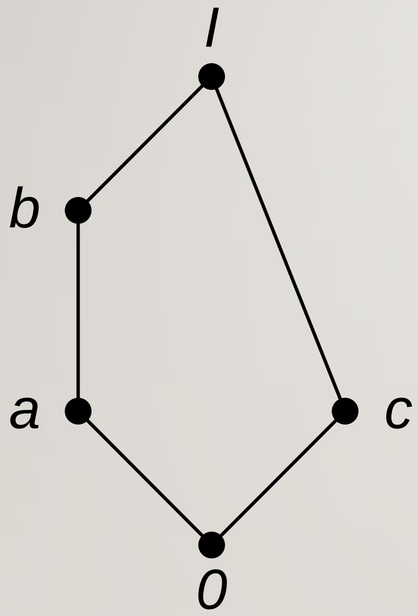
Sebuah elemen $a' \in L$ disebut sebuah ***complement*** dari a jika

$$a \vee a' = I \text{ dan } a \wedge a' = 0$$

Amati bahwa

$$0' = I \text{ dan } I' = 0$$

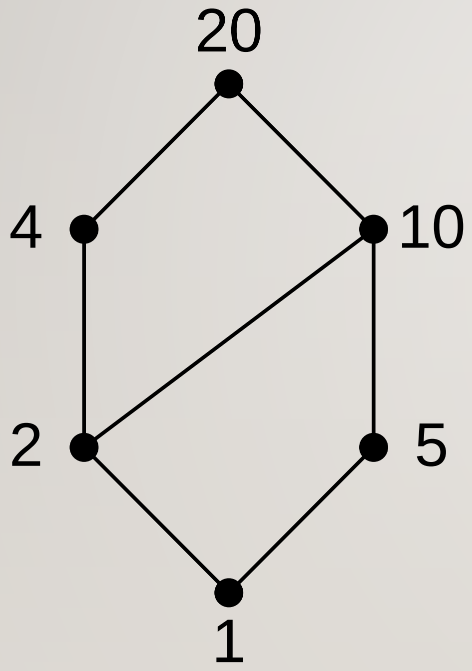
CONTOH



$a' = c$

$b' = c$

CONTOH

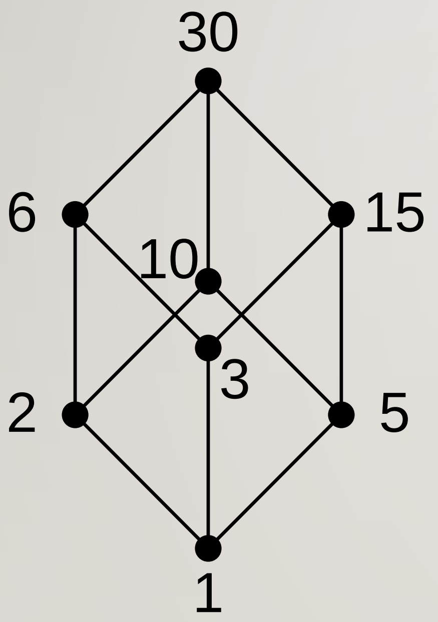


4’ = 5, dan

5’ = 4

Elemen 2 dan 10 tidak mempunyai komplemen

CONTOH



30’ = 1 dan 1’ = 30

15’ = 2 dan 2’ = 15

10’ = 3 dan 3’ =10

6’ = 5 dan 5’ = 6

TEOREMA

Ambil L adalah sebuah *bounded distributive lattice*. Jika ada sebuah komplemen maka komplemen tersebut unik.

Sebuah lattice L disebut ***complemented*** jika dia *bounded* dan jika setiap elemen dalam L mempunyai komplemen.

SEKIAN DAN TERIMA KASIH