MATEMATIKA DISKRIT 2: POSET

AYU LATIFAH, ST., MT.

POSET

Sebuah relasi R pada sebuah himpunan A disebut ***partial order*** jika R refleksif, antisimetri dan transitif.

Himpunan A bersama dengan partial order R disebut sebuah ***partially ordered set***, atau ***poset***, dan dituliskan dengan (A, R).

POSET: CONTOH 1

Ambil A sebuah himpunan dari himpunan bagian himpunan S, atau $A = \mathcal{P}(S)$.

Maka relasi $\subseteq$ adalah sebuah partial order pada A, sehingga $(A, \subseteq)$ adalah sebuah poset.

POSET:CONTOH 2

Ambil Z^+ adalah himpunan bilangan bulat positip, maka relasi $\leq$ (lebih kecil atau samadengan) adalah sebuah partial order pada Z^+, jadi $(Z^+, \leq)$ adalah sebuah poset.

Contoh Lainnya:

Ambil R sebuah partial order pada sebuah himpunan A, dan ambil R^{-1} adalah relasi invers dari R. Maka, R^{-1} juga sebuah partial order.

POSET

Poset (A, R^{-1}) disebut ***dual*** dari poset (A, R), dan partial order R^{-1} disebut *dual* dari partial order R.

Partial order yang biasa ditemui adalah relasi $\leq$ (lebih kecil atau sama dengan) dan $\geq$ (lebih besar atau sama dengan) pada himpunan $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{P}$.

POSET

Untuk alasan inilah, dalam membicarakan sebuah relasi partial order R pada himpunan A, digunakan simbol $\leq$ atau $\geq$ untuk R.

Jadi bila $(A, \leq)$ sebuah poset, akan selalu digunakan simbol $\geq$ untuk partial order $\leq^{-1}$, sehingga $(A, \geq)$ adalah dual poset $(A, \leq)$.

POSET

Jika $(A, \leq)$ sebuah poset, elemen a dan b pada A dikatakan ***comparable*** jika

$$a \leq b \text{ atau } b \leq a.$$

Amati bahwa dalam *sebuah partially ordered set* setiap pasang elemen tidak perlu comparable.

POSET: CONTOH 3

Ambil A = {2, 3, 6, 9, 12, 18, 24}, dan relasi R adalah; $a\ R\ b$ jika $a \mid b$. Jadi relasi R (atau dituliskan dengan notasi $\leq$) adalah:

R = {(2,2), (2,6), (2,12), (2,18), (2,24), (3,3), (3,6), (3,9), (3,12), (3,18), (3,24), (6,6), (6,12), (6,18), (6,24), (9,9),(9,18), (12,12),(12,24), (18,18), (24,24)}

Jelas R adalah sebuah relasi ***partial order***, sehingga (A, |) sebuah ***poset***.

Karena (2,3) $\notin R$, maka 2 dan 3 **tidak *comparable***.

Sedangkan 2 dan 6 adalah ***comparable***, karena (2,6) $\in R$ (atau $2 \leq 6$).

POSET

Dengan demikian, kata "partial" dalam partially ordered set berarti bahwa beberapa elemen boleh tidak *comparable*.

Jika setiap pasang elemen dalam sebuah *poset* *A* adalah *comparable*, dikatakan bahwa *A* adalah sebuah ***linearly ordered set*** dan relasi *partial order* nya disebut sebuah ***linear order***. Disebut juga bahwa *A* adalah sebuah ***chain***.

POSET: CONTOH 5

Ambil A = {2, 4, 8, 16, 32} dan relasi R didefinisikan oleh a R b jika a | b. Jadi,

R = {(2,2), (2,4), (2,8), (2,16), (2,32), (4,4), (4,8), (4,16), (4,32), (8,8), (8,16), (8,32), (16,16), (16,32), (32,32)}

Terlihat bahwa setiap pasang elemen dalam (A, |) adalah *comparable*.

Maka A adalah sebuah ***chain***.

POSET

Jika $(A, \leq)$ dan $(B, \leq)$ adalah poset, maka $(A \times B, \leq)$ adalah sebuah poset dengan partial order $\leq$ didefinisikan oleh

$$(a, b) \leq (a', b') \quad \text{jika } a \leq a' \text{ dalam } A \text{ dan } b \leq b' \text{ dalam } B.$$

Partial order $\leq$ yang didefnisikan pada *Cartesian product* $A \times B$ seperti di atas disebut ***product partial order***.

POSET: CONTOH 6

Ambil himpunan $A = \{a\}$, dan himpunan $B = \{1, 2, 3, 6\}$.

R_1 adalah relasi himpunan bagian dari ($\subseteq$), dan relasi R_2 adalah relasi dapat membagi.

Maka $(\mathcal{P}(A), R_1)$ dan (B, R_2) adalah poset.

$R_1 = \{(\{\}, \{\}), (\{\}, \{a\}), (\{a\},\{a\})\}$.

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)\}$.

POSET

$\mathcal{P}(A) \times B = \{\{\}, \{a\}\} \times \{1, 2, 3, 6\} = \{(\{\}, 1), (\{\}, 2), (\{\}, 3), (\{\}, 6), (\{a\}, 1), (\{a\}, 2), (\{a\}, 3), (\{a\}, 6)\}$.

Berdasarkan definisi, maka ***product partial order***, R_3, adalah

$\{((\{\}, 1), (\{\}, 1)), ((\{\}, 1), (\{\}, 2)), ((\{\}, 1), (\{\}, 3)), ((\{\}, 1), (\{\}, 6)), ((\{\}, 1), (\{a\}, 1)), ((\{\}, 1), (\{a\}, 2)),$
$((\{\}, 1), (\{a\}, 3)), ((\{\}, 1), (\{a\}, 6)), ((\{\}, 2), (\{\}, 2)), ((\{\}, 2), (\{\}, 6)), ((\{\}, 2), (\{a\}, 2)), ((\{\}, 2), (\{a\}, 6)),$
$((\{\}, 3), (\{\}, 3)), ((\{\}, 3), (\{\}, 6)), ((\{\}, 3), (\{a\}, 3)), ((\{\}, 3), (\{a\}, 6)), ((\{\}, 6), ((\{\}, 6)), ((\{\}, 6), (\{a\}, 6)),$
$((\{a\}, 1), (\{a\}, 1)), ((\{a\}, 1), (\{a\}, 2)), ((\{a\}, 1), (\{a\}, 3)), ((\{a\}, 1), (\{a\}, 6)), ((\{a\}, 2), (\{a\}, 2)), ((\{a\}, 2),$
$(\{a\}, 6)), ((\{a\}, 3), (\{a\}, 3)), ((\{a\}, 3), (\{a\}, 6)), ((\{a\}, 6), (\{a\}, 6))\}$.

POSET

Jika $(A, \leq)$ sebuah poset, dikatakan bahwa $a < b$ jika $a \leq b$ tetapi $a \neq b$.

Misalkan sekarang $(A, \leq)$ dan $(B, \leq)$ adalah poset. Telah didefinisikan product partial order pada $A \times B$.

Partial order lain pada $A \times B$, dinyatakan dengan , didefinisikan sebagai berikut.

jika a < a' atau jika a = a' dan b ≤ b'.

Pengurutan (*ordering*) seperti ini disebut pengurutan ***lexicographic***.

POSET

Karena pengurutan parsial adalah sebuah relasi, maka untuk sembarang pengurutan parsial pada sebuah himpunan hingga dapat digambarkan digraphnya.

Akan diperoleh bahwa digraph dari sebuah pengurutan parsial dapat direpresentasikan dengan cara yang lebih sederhana daripada digraph dari relasi pada umumnya.

POSET

Teorema

Digraph dari sebuah pengurutan parsial tidak mempunyai siklus dengan panjang lebih besar dari 1.

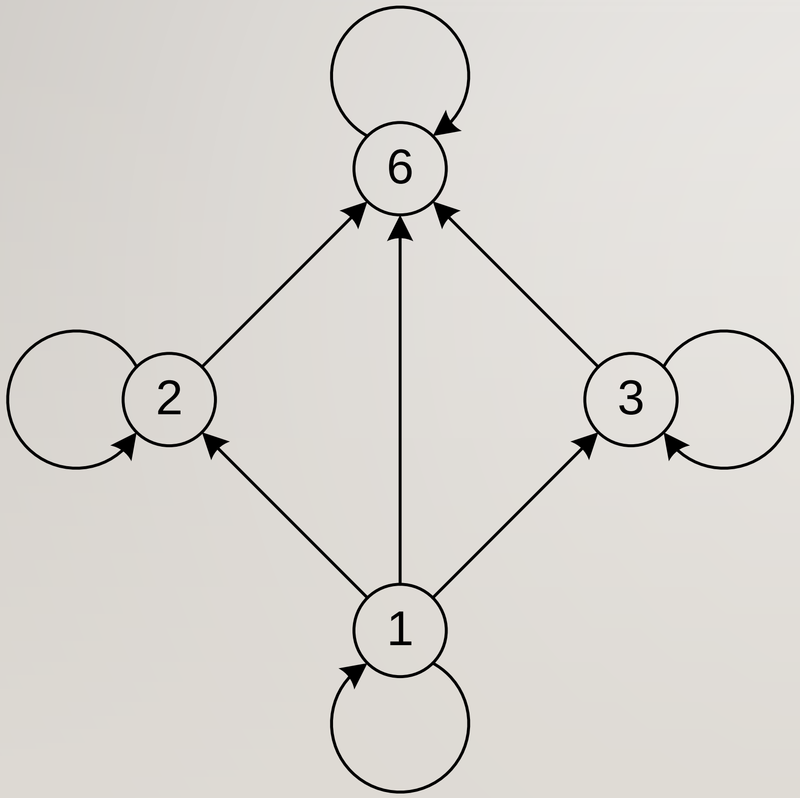
Contoh 7

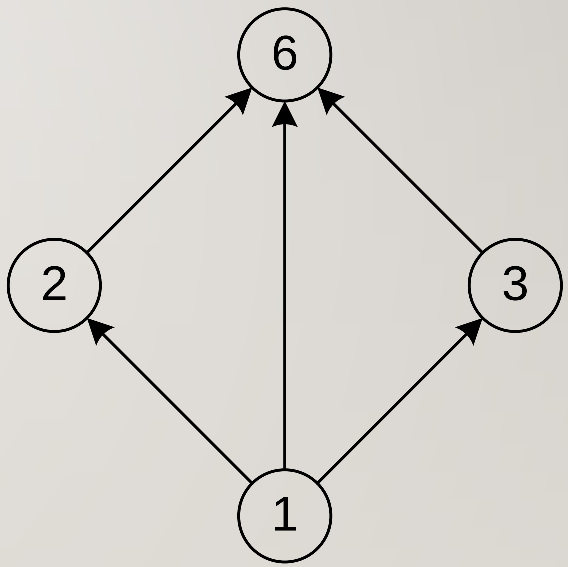
Ambil poset $(\{1, 2, 3, 6\}, |)$, maka relasi partial ordernya adalah

$$\leq \; = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (2,2), (2,6), (3,3), (3,6), (6,6)\}.$$

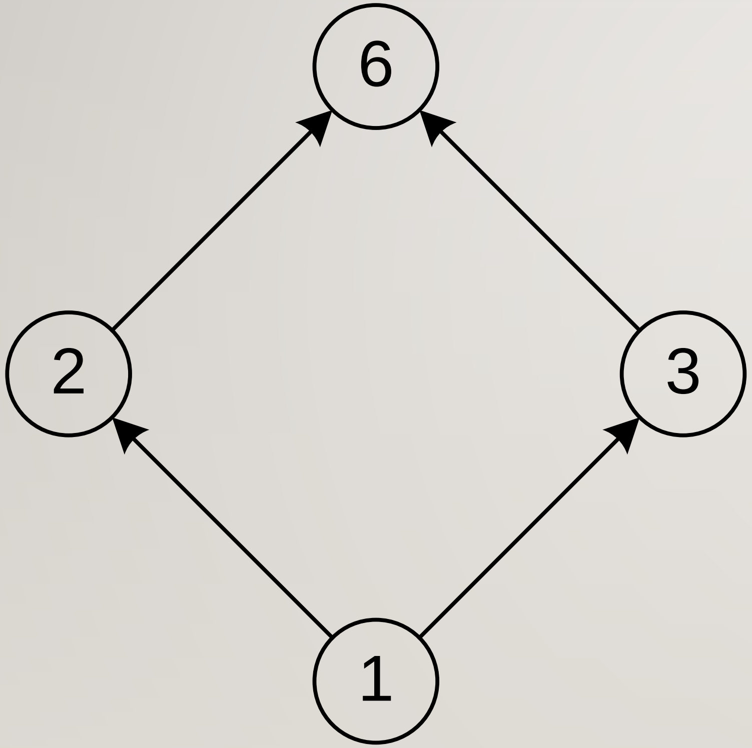
Digraphnya,

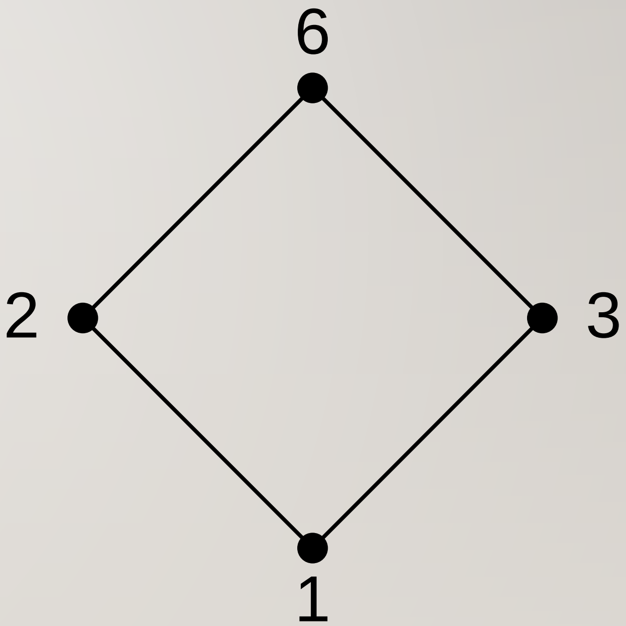
POSET





POSET: DIAGRAM HASSE





POSET: CONTOH 8

Ambil poset pada Contoh 5, yaitu ({2, 4, 8, 16, 32}, |).

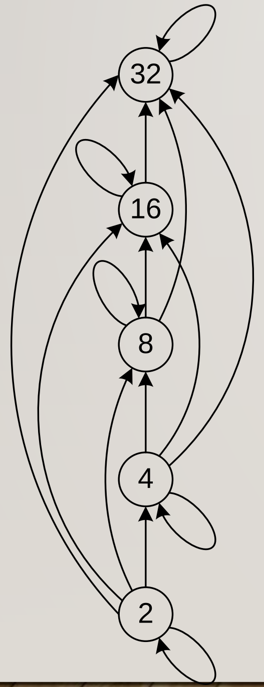
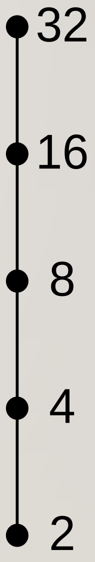


Diagram Hasse finite linearly ordered set



SEKIAN DAN TERIMA KASIH