MATEMATIKA DISKRIT 2: FUNGSI

AYU LATIFAH, ST., MT.

FUNGSI

Ambil himpunan tak kosong A dan B.

Sebuah fungsi f dari A ke B, dituliskan $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah relasi dari A ke B sehingga $\forall a \in \text{Dom}(f)$, $f(a)$ hanya mengandung satu elemen B.

Relasi f dapat dinyatakan sebagai himpunan dari pasangan $\{(a, f(a)) \mid a \in \text{Dom}(f)\}$.

FUNGSI

Fungsi disebut juga pemetaan (*mapping*) atau transformasi (*transformation*), karena secara geometri dapat dipandang sebagai aturan-aturan yang memberi pada setiap elemen $a \in A$ elemen unik $f(a) \in B$.

Elemen a disebut argumen dari fungsi f, dan $f(a)$ disebut nilai dari a dibawah f.

FUNGSI

Contoh 1

Ambil $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, dan $f = \{(1,a), (2,a), (3,d), (4,c)\}$.

Diperoleh, $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = d$, $f(4) = c$.

Karena setiap himpunan $f(n)$ bernilai tunggal, f sebuah fungsi.

FUNGSI

Contoh 1

Ambil $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, dan $f = \{(1,a), (2,a), (3,d), (4,c)\}$.

Diperoleh, $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = d$, $f(4) = c$.

Karena setiap himpunan $f(n)$ bernilai tunggal, f sebuah fungsi.

FUNGSI

Contoh 2

Ambil $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ serta

$R = \{(1,x), (2,x), (3,z)\}$ dan $S = \{(1,x), (1,y), (2,z), (3,y)\}$.

Relasi S bukan sebuah fungsi karena $S(1) = \{x, y\}$.

Relasi R adalah sebuah fungsi dengan Dom $(R) = \{1, 2, 3\}$ dan Ran $(R) = \{x,z\}$.

FUNGSI

Ambil sebuah himpunan tak kosong sembarang A.

Fungsi identitas pada A, dituliskan I_A, didefinisikan oleh

$$I_A(a) = a.$$

(Ingat kembali bahwa I_A adalah relasi Δ).

Jelas jika $A_1 \subseteq A$, maka $I_A(A_1) = A_1$.

KOMPOSISI FUNGSI

Misalkan fungsi-fungsi $f : A \to B$ dan $g : B \to C$.

Maka komposisi dari f dan g, $g \circ f$, adalah sebuah relasi.

Karena f sebuah fungsi, $f(a)$ terdiri dari sebuah elemen tunggal $b \in B$.

Karena g sebuah fungsi, $g(b)$, yang mana adalah $g(f(a))$, hanya mengandung sebuah elemen tunggal $c \in C$.

Jadi setiap himpunan $(g \circ f)(a)$ untuk $a \in \mathrm{Dom}\ (g \circ f)$ hanya mengandung sebuah elemen C, dengan demikian $g \circ f$ adalah sebuah fungsi.

Contoh 3

Ambil $A = Z$, $B = Z$, dan C = himpunan bilangan bulat genap.

Ambil $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ didefinisikan oleh

$$f(a) = a + 1;\ g(b) = 2b.$$

Cari: $g \circ f$.

Jawab. Diperoleh,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a) &= g(f(a)) \\ &= g(a + 1) \\ &= 2(a + 1)\end{aligned}$$

Ambil *f* sebuah fungsi dari *A* ke *B*.

f disebut ***everywhere defined*** jika Dom (*f*) = *A*.

f disebut ***onto*** jika Ran (*f*) = *B*.

f disebut ***one to one*** jika tidak dapat diperoleh $f(a) = f(a')$ untuk dua elemen *a* dan *a*' yang berbeda pada *A*.

Contoh 4

Ambil $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2\}$, dan $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$.

Pertimbangkan empat fungsi dari A ke B, A ke D, B ke C, dan D ke B berikut;

a) $f_1 = \{(a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1)\}$

b) $f_2 = \{(a_1, d_2), (a_2, d_1), (a_3, d_4)\}$

c) $f_3 = \{(b_1, c_2), (b_2, c_2), (b_3, c_1)\}$

d) $f_4 = \{(d_1, b_1), (d_2, b_2), (d_3, b_1)\}$

Jawab

(a) f_1 everywhere defined, one to one, dan onto.

(b) f_2 everywhere defined, one to one, dan tidak onto

(c) f_3 everywhere defined, onto, dan tidak one to one

(d) f_4 tidak everywhere defined, tidak one to one, dan tidak onto.

Jika $f : A \to B$ sebuah fungsi *one-to-one*, maka f mengaitkan setiap elemen a pada Dom (f) sebuah elemen $b = f(a)$ pada Ran (f).

Dengan cara ini, setiap elemen b pada Ran (f) klop dengan satu dan hanya satu elemen pada Dom (f).

f seperti ini seringkali disebut sebagai ***one-to-one correspondence*** atau ***bijection***.

Jika f juga *everywhere defined* dan *onto*, maka f disebut ***one-to-one correspondence between A and B***.

FUNGSI INVERTIBLE

Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan sebagai *invertible* jika relasi inversnya, f^{-1}, juga sebuah fungsi.

Contoh 5

Ambil $f = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, c)\}$. Maka

$f^{-1} = \{(a, 1), (a, 2), (d, 3), (c, 4)\}$.

Terlihat bahwa f^{-1} bukan sebuah fungsi, karena $f^{-1}(a) = \{1, 2\}$.

TEOREMA

Ambil sebuah fungsi $f : A \to B$.

a) Maka f^{-1} adalah sebuah fungsi dari B ke A jika dan hanya jika f one to one.

b) Jika f^{-1} sebuah fungsi, maka f^{-1} juga one to one.

c) f^{-1} everywhere defined jika dan hanya jika f onto.

d) f^{-1} onto jika dan hanya jika f everywhere defined.

TEOREMA

Ambil fungsi $f : A \to B$. Maka

a) $I_B \circ f = f$

b) $f \circ I_A = f$

Dan jika f *one-to-one correspondence*, maka

a) $f^{-1} \circ f = I_A$

b) $f \circ f^{-1} = I_B$.

a) Ambil fungsi $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow A$ sehingga $g \circ f = I_A$ dan $f \circ g = I_B$. Maka f *one-to-one correspondence between* A dan B, g *one-to-one correspondence between* B dan A, dan masing-masing adalah invers satu sama lain.

b) Ambil $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ adalah *invertible*. Maka $g \circ f$ adalah *invertible*, dan $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ambil A dan B dua himpunan hingga dengan jumlah elemen sama, dan ambil $f : A \to B$ adalah sebuah fungsi everywhere defined.

(a) Jika f one-to-one, maka f adalah onto.

(b) Jika f onto, maka f adalah one-to-one.

Jadi untuk himpunan hingga A dan B dengan jumlah elemen sama, dan terutama jika $A = B$, hanya perlu dibuktikan fungsi tersebut one-to-one atau onto untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut adalah sebuah bijeksi.

SEKIAN DAN TERIMA KASIH