* [Векторное произведение векторов](https://foxford.ru/lessons/32287/conspects/1)
* [Применение скалярного и векторного произведения](https://foxford.ru/lessons/32287/conspects/2)

**Векторное произведение векторов**

По аналогии со скалярным произведением рассмотрим «векторное» произведение двух векторов, определенное следующим образом:

[a¯,b¯]=|a¯|⋅|b¯|⋅sin⁡φ, где φ -  угол между векторами. Поскольку синус — нечетная функция, то в данном случае берется ориентированный угол от вектора a¯ к вектору b¯, который может быть положительным, если направление вектора b¯ получается из вектора a¯ поворотом в положительном направлении (против часовой стрелки), и отрицательным — если поворот осуществляется в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

Название «векторное» в данном случае — условное, на самом деле результатом такого произведения явлется число (скаляр), но данное произведение связано с настоящим векторным произведением в трехмерном пространстве. Также используется название «псевдоскалярное произведение» или «косое» произведение.

Выражение векторного произведения через координаты: [a¯,b¯]=axby−aybx.

Свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение антикоммутативно: [a¯,b¯]=−[b¯,a¯].
2. Векторное произведение положительно, если угол поворота от первого вектора ко второму — положителен, отрицательно — если угол отрицателен, равно нулю — если вектора коллинеарны.
3. Векторное произведение линейно: [a+b¯,c¯]=[a¯,c¯]+[b¯,c¯], [ka¯,c¯]=k[a¯,c¯]. Аналогичные утверждение верны и для второго аргумента векторного произведения.

Векторное произведение необходимо использовать, когда нужно проверить два вектора (два отрезка, две прямые) на перпендикулярность или исследовать угол между векторами (является ли он острым или тупым).

#### Применение скалярного и векторного произведения

##### Угол между векторами

Векторное и скалярное произведение позволяет легко вычислять угол между векторами. Пусть даны два вектора a¯ и b¯, ориентированный угол между которыми равен φ. Вычислим значения x=(a¯,b¯) и y=[a¯,b¯]. Тогда x=rcos⁡φ, y=rsin⁡φ, где r=|a¯|⋅|b¯|, а φ - искомый угол, то есть точка (x,y) имеет полярный угол, равный φ, и, значит, φ может быть найдено, как atan2(y, x).

##### Площадь треугольника

Поскольку векторное произведение содержит в себе произведение двух длин векторов на косинус угла между ними, то векторное произведение можно использовать для вычисления площади треугольника ABC:

SABC=12|[AB¯,AC¯]|.

##### Принадлежность точки прямой

Пусть дана точка P и прямая AB (заданная двумя точками A и B). Необходимо проверить принадлежность точки прямой AB.

Точка принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда вектора AP и AB коллинеарны, то есть если [AP¯,AB¯]=0.

##### Принадлежность точки лучу

Пусть дана точка P и луч AB (заданный двумя точками — началом луча A и точкой на луче B). Необходимо проверить принадлежность точки лучу AB.

К условию принадлежности точки P прямой AB необходимо добавить дополнительное условие — вектора AP и AB сонаправлены, то есть они коллинеарны и их скалярное произведение неотрицательно, то есть (AB¯,AP¯)⩾0.

##### Принадлежность точки отрезку

Пусть дана точка P и отрезок AB. Необходимо проверить принадлежность точки отрезку AB.

В этом случае точка должна принадлежать и лучу AB, и лучу BA, поэтому необходимо проверить следующие условия:

[AP¯,AB¯]=0,

(AB¯,AP¯)⩾0,

(BA¯,BP¯)⩾0.

##### Расстояние от точки до прямой

Пусть дана точка P и прямая AB (заданная двумя точками A и B). Необходимо найти расстояние от точки прямой AB.

Рассмотрим треугольник ABP. С одной стороны, его площадь равна   SABP=12|[AB¯,AP¯]|.

С другой стороны, его площадь равна  SABP=12h|AB|, где h - высота, опущенная из точки P, то есть расстояние от P до AB. Откуда h=|[AB¯,AP¯]|/|AB|.

##### Расстояние от точки до луча

Пусть дана точка P и луч AB (заданный двумя точками — началом луча A и точкой на луче B). Необходимо найти расстояние от точки до луча, то есть длину кратчайшего отрезка от точки P до какой-либо точки луча.

Это расстояние равно либо длине AP, либо расстоянию от точки P до прямой AB. Какой из случаев имеет место быть легко определить по взаимному расположению луча и точки. Если угол PAB острый, то есть (AB¯,AP¯)>0, то ответом будет расстояние от точки P до прямой AB, иначе ответом будет длина отрезка AB.

##### Расстояние от точки до отрезка

Пусть дана точка P и отрезок AB. Необходимо найти расстояние от P до отрезка AB.

Если основание перпендикуляра, опущенного из P на прямую AB попадет на отрезок AB, что можно проверить по условиям

(AP¯,AB¯)⩾0,

(BP¯,BA¯)⩾0,

то ответом будет расстояние от точки P до прямой AB. Иначе расстояние будет равно min(AP,BP).