* [Прямые на плоскости](https://foxford.ru/lessons/32288/conspects/1)
* [Прямая, параллельная данной, отстоящая от нее на расстояние d](https://foxford.ru/lessons/32288/conspects/2)
* [Расстояние от точки до прямой](https://foxford.ru/lessons/32288/conspects/3)
* [Пересечение двух прямых](https://foxford.ru/lessons/32288/conspects/4)
* [Пересечение двух отрезков](https://foxford.ru/lessons/32288/conspects/5)

**Прямые на плоскости**

Прямую на плоскости можно задать несколькими разными способами.

1. Двумя точками (такой способ использовался ранее).
2. Уравнением. При этом «классическое» уравнение прямой y=kx+b не употребляется, поскольку таким образом невозможно задать прямую, параллельную оси OY. Вместо него используется более общий вид уравнения ax+by+c=0, то есть прямая задается  тремя числами (a,b,c), являющимися коэффициентами уравнения. При этом из чисел a и b хотя бы одно должно быть ненулевым. Недостатком такой формы задания является неоднозначность — различные уравнения могут задавать одну и ту же прямую.
3. Параметрическое задание прямой. В этом случае прямая задается двумя уравнениями:

x(t)=pxt+x0,

y(t)=pyt+y0.

где (x0,y0) - координаты некоторой точки на прямой, (px,py) - координаты некоторого ненулевого вектора, направленного вдоль прямой.

**Вектор нормали и уравнение прямой**

Рассмотрим прямую ax+by+c и произвольные две точки на этой прямой: A0(x0,y0) и A1(x1,y1). Поскольку ax0+by0+c=0, ax1+by1+c=0, то a(x0−x1)+b(y0−y1)=0. Последнее равенство означает, что вектор n¯(a,b) ортогонален вектору (x0−x1,y0−y1), то есть вектор n¯ ортогонален нашей прямой. Такой вектор называется  нормалью или вектором нормали. Легко видеть, что вектор p¯ с координатами (−b,a) ортогонален вектору n¯, так как (p¯,n¯)=−ba+ab=0, то есть вектор p¯ параллелен прямой. Такой вектор будем называть направляющим вектором - этот вектор направлен вдоль прямой. Итак, для прямой ax+by+c нормальным вектором является вектор n¯(a,b), а направляющим - вектор p¯(−b,a), а также любые вектора, полученные из данных умножением на ненулевое число.

**Уравнение прямой, проходящей через две точки**

Пусть даны две точки A0(x0,y0) и A1(x1,y1), необходимо построить уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Вектор A0A1¯=(x1−x0,y1−y0) является направляющим вектором для этой прямой. В качестве вектора нормали можно взять любой вектор, ортогональный данному. Например, легко видеть, что вектором, ортогональным к вектору (a,b) будет вектор (−b,a), так как их скалярное произведение равно нулю. Таким образом в виде вектора нормали можно взять вектор (y0−y1,x1−x0), что означает, что можно взять в качестве коэффициентов нормального уравнения прямой значения a=y0−y1 и b=x1−x0.

Значение свободного члена c можно получить из условия прохождения прямой через точку A0, то есть выразив c из уравнения ax0+by0+c=0, то есть взяв c=−ax0−by0.

#### Прямая, параллельная данной, отстоящая от нее на расстояние d

Пусть дана прямая ax+by+c=0. Если изменять значение коэффициента c, зафиксировав при этом значения a и b, то мы получим семейство параллельных прямых. Как получить из этого семейства прямую, параллельную исходной и удаленной от нее на заданное расстояние d?

Вектор нормали к этой прямой будет иметь вид (a,b). Длина этого вектора a2+b2.

Поделив вектор на его длину, получим вектор  (aa2+b2,ba2+b2) единичной длины.

Умножив его на d, получим вектор (ada2+b2,bda2+b2).

Этот вектор будет нормальным к исходной прямой и его длина равна d. Искомая прямая получается из исходной сдвигом на этот вектор.

Таким образом, если точка (x,y) принадлежала исходной прямой, то точка (x′,y′), где x′=x+ada2+b2, y′=y+bda2+b2 принадлежит искомой прямой.

Запишем уравнение ax+by+c=0 и подставим в него x=x′−ada2+b2, y=y′−bda2+b2, получим уравнение:

ax′−a2da2+b2+by′−b2da2+b2+c=0

или

ax′+by′+c-dsqrt(a2+b2)=0..

Уравнение второй прямой, удаленной на расстояние d от исходной, но в направлении, противоположном нормали, имеет вид:

ax′+by′+c+dsqrt(a2+b2)=0.

#### Расстояние от точки до прямой

Пусть задана прямая ax+by+c=0 и точка (x0,y0). Найдем расстояние от этой точки до прямой.

Пусть искомая точка удалена на расстояние d от данной прямой (будем считать, что d может быть отрицательной величиной). Тогда прямая ax+by+c−da2+b2=0 проходит через точку (x0,y0), откуда

ax0+by0+c−da2+b2=0

Преобразовав, получаем:

d=ax0+by0+ca2+b2.

В этой формуле величина d может быть отрицательной, поэтому расстояние от точки до прямой равно |d|.

#### Пересечение двух прямых

Задача о нахождении точки пересечения двух прямых сводится к решению системы из двух линейных уравнений:

{a11x1+a12x2=b1,a21x1+a22x2=b2.

Домножим первое уравнение на a22, второе - на a12, вычтем из первого уравнения второе, получим:

a11a22x1−a21a12x1=a22b1−a12b2,

откуда

x1=a22b1−a12b2a11a22−a21a12.

Домножим первое уравнение на a21, второе на a11, вычтем из второго уравнения первое:

a11a22x2−a21a12x2=a11b2−a21b1.

откуда

#### Пересечение двух отрезков

Пусть даны два отрезка AB и CD. Необходимо проверить, пересекаются ли они, то есть есть ли у них хотя бы одна общая точка.

Вообще, случаев пересечения двух отрезков довольно много — отрезки могут пересекаться одним концом, могут лежать на одной прямой и т. д. То есть это довольно сложная задача, если пытаться разбирать случаи.

В общем случае если отрезки пересекаются, то точки C и D должны лежать по разные стороны от прямой AB, что означает, что векторные произведения [AB¯,AC¯] и [AB¯,AD¯] разных знаков. Причем одно из этих выражений может быть равно 0, что означает, что соответствующая точка (C или D) лежит на прямой AB, этот случай также подходит.

Аналогично, точки A и B должны лежать по разные стороны от прямой CD, поэтому векторные произведения [CD¯,CA¯] и [CD¯,CB¯] также должны быть  разных знаков.

Остался случай, когда все четыре точки A, B, C, D лежат на одной прямой, в этом случае все четыре указанных векторных произведения равны 0. В этом случае отрезки пересекаются тогда и только тогда, когда один из концов одного отрезка (например, точка A) лежит на другом отрезке (CD), что нужно проверить для всех четырех концов (можно только для любых трех из них).