Машинное обучение

Лекция 5

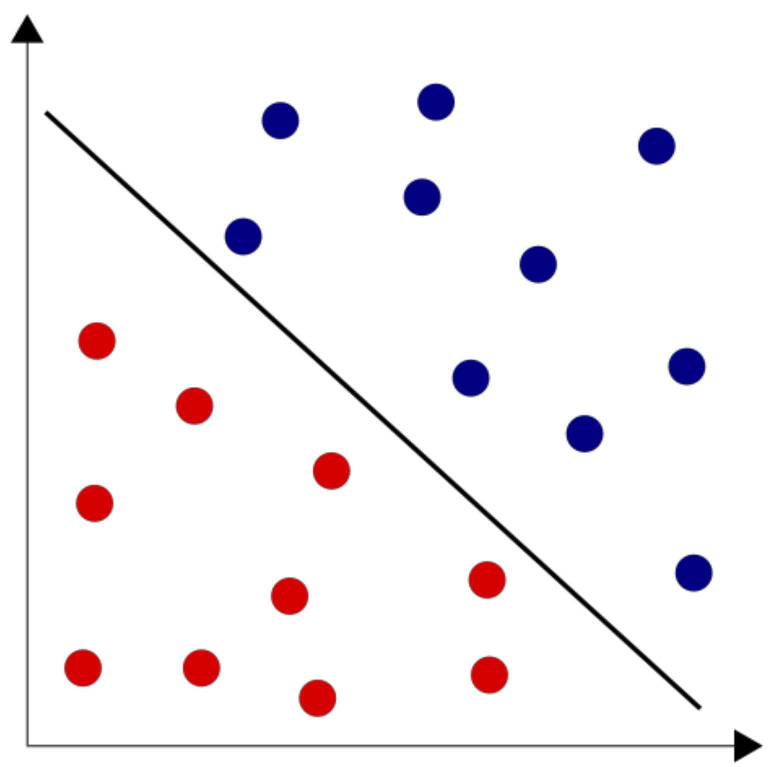
Линейные модели (Продолжение)

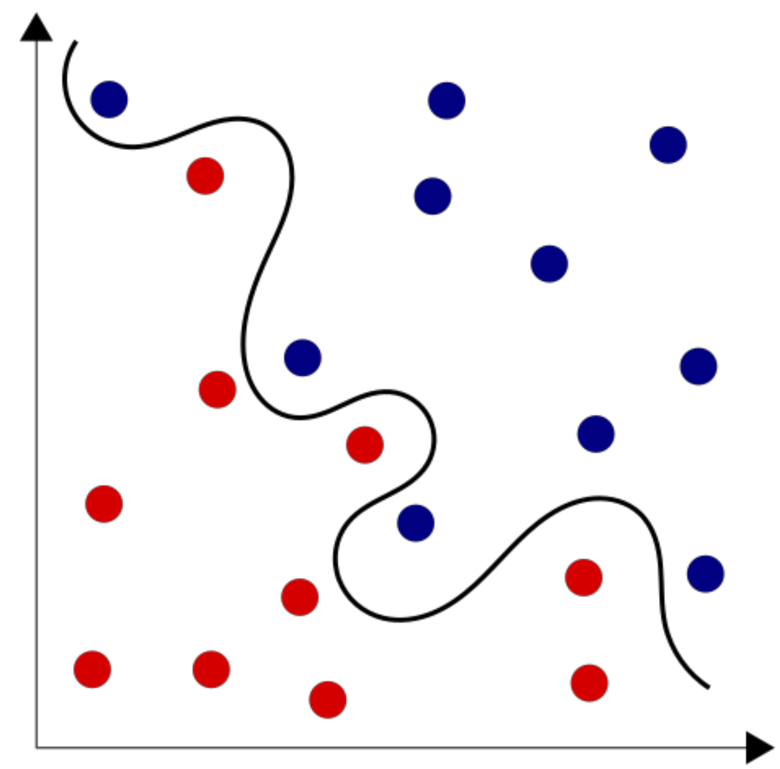
Власов Кирилл Вячеславович

2018

Линейные модели в задаче классификации

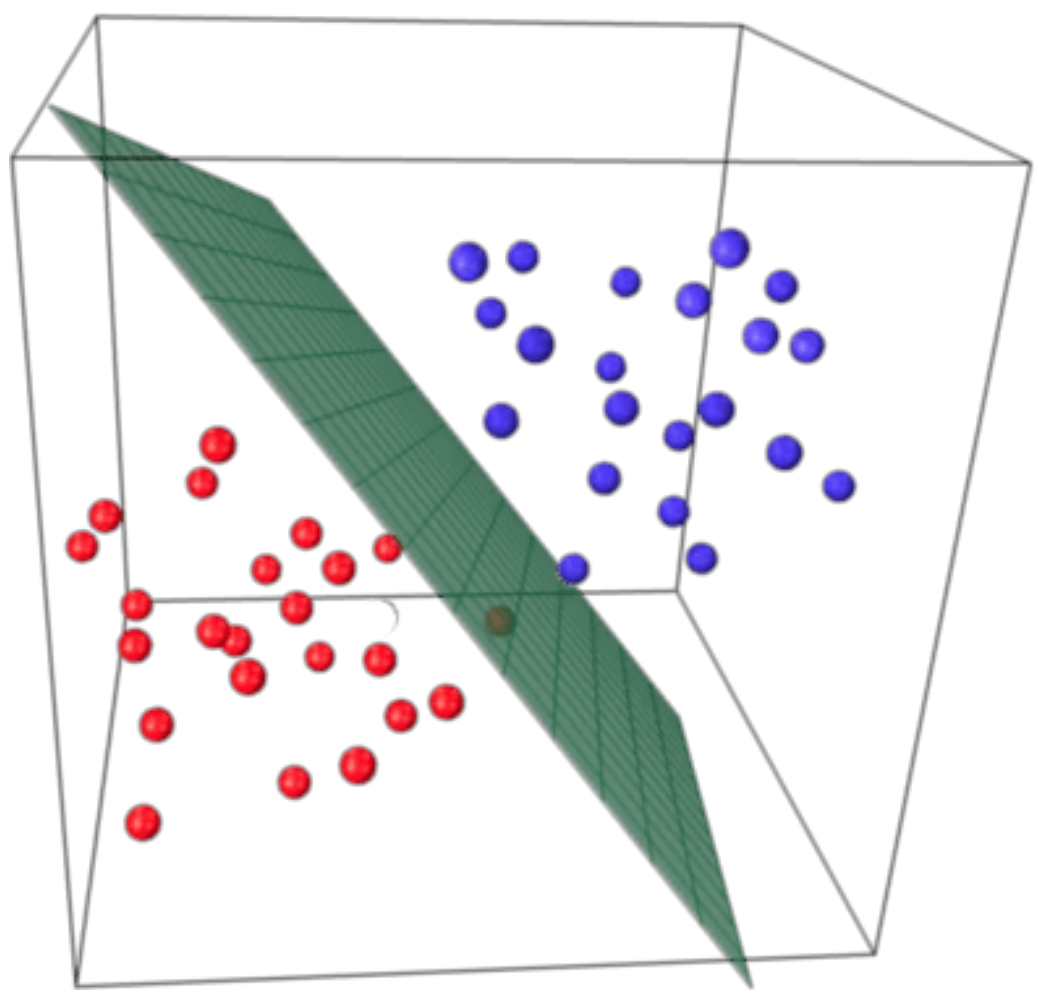
<u>Основная идея:</u>
Предполагаем, что существует такая гиперплоскость, которая делит пространство на два полупространства в каждом из которых одно из двух значений целевого класса.





Если существует гиперплоскость которой можно разделить пространство на два класса без ошибок, то обучающая выборка называется *линейно разделимой*

Линейные модели в задаче классификации



Дана обучающая выборка:

$$X_l = \{ (x_1, y_1), \dots, (x_l, y_l) \}$$

Для задачи классификации - Целевая переменная задана конечным числом меток

$$(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{Y},\ \mathbb{Y} = \{-1; 1\}$$

Простейший классификатор:

$$a(x) = sign(\langle w, x \rangle + x_0) = sign\left(\overrightarrow{w}^T \cdot x\right)$$

$\overrightarrow{w}$ – нормаль гиперплоскости

$\overrightarrow{w}^T \cdot x_i$ – расстояние от гиперплоскости до x_i, знак показывает отношение к классу

Рассмотрим пример!

Линейные модели в задаче классификации

$$a(x) = sign(\langle w, x \rangle + x_0) = sign\left(\overrightarrow{w}^T \cdot x\right)$$

доля правильных ответов (accuracy):

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[a(x_i) = y_i\right]$$

Линейные модели в задаче классификации

$$a(x) = sign(\langle w, x \rangle + x_0) = sign\left(\overrightarrow{w}^T \cdot x\right)$$

доля правильных ответов (accuracy):

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[a(x_i) = y_i\right] \to max$$

Линейные модели в задаче классификации

$$a(x) = sign(\langle w, x \rangle + x_0) = sign\left(\overrightarrow{w}^T \cdot x\right)$$

доля правильных ответов (accuracy):

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[a(x_i) = y_i\right] \to max$$

доля неправильных ответов:

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[a(x_i) \neq y_i\right] = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[sign\left(\langle w, x_i \rangle\right) \neq y_i\right] \to min$$

Проблемы:

1. *Функционал дискретный относительно весов ⇒ мы не сможем искать минимум с помощью градиентных методов.*
2. *Функционал может иметь несколько глобальных минимумов ⇒ может быть много способов добиться оптимального количества ошибок.*

Линейные модели в задаче классификации

$$a(x) = sign(\langle w, x \rangle + x_0) = sign\left(\overrightarrow{w}^T \cdot x\right)$$

доля правильных ответов (accuracy):

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[a(x_i) = y_i\right]$$

доля неправильных ответов:

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[a(x_i) \neq y_i\right] = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[sign\left(\langle w, x_i \rangle\right) \neq y_i\right] \to min$$

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[\underbrace{y_i \langle w, x_i \rangle}_{M_i} < 0\right] \to min$$

$M_i = y_i \langle w, x_i \rangle$ – отступ (margin)

Знак отступа говорит о корректности ответа классификатора (положительный отступ соответствует правильному ответу, отрицательный неправильному)
абсолютная величина М – характеризует степень уверенности классификатора в своём ответе.

Линейные модели в задаче классификации

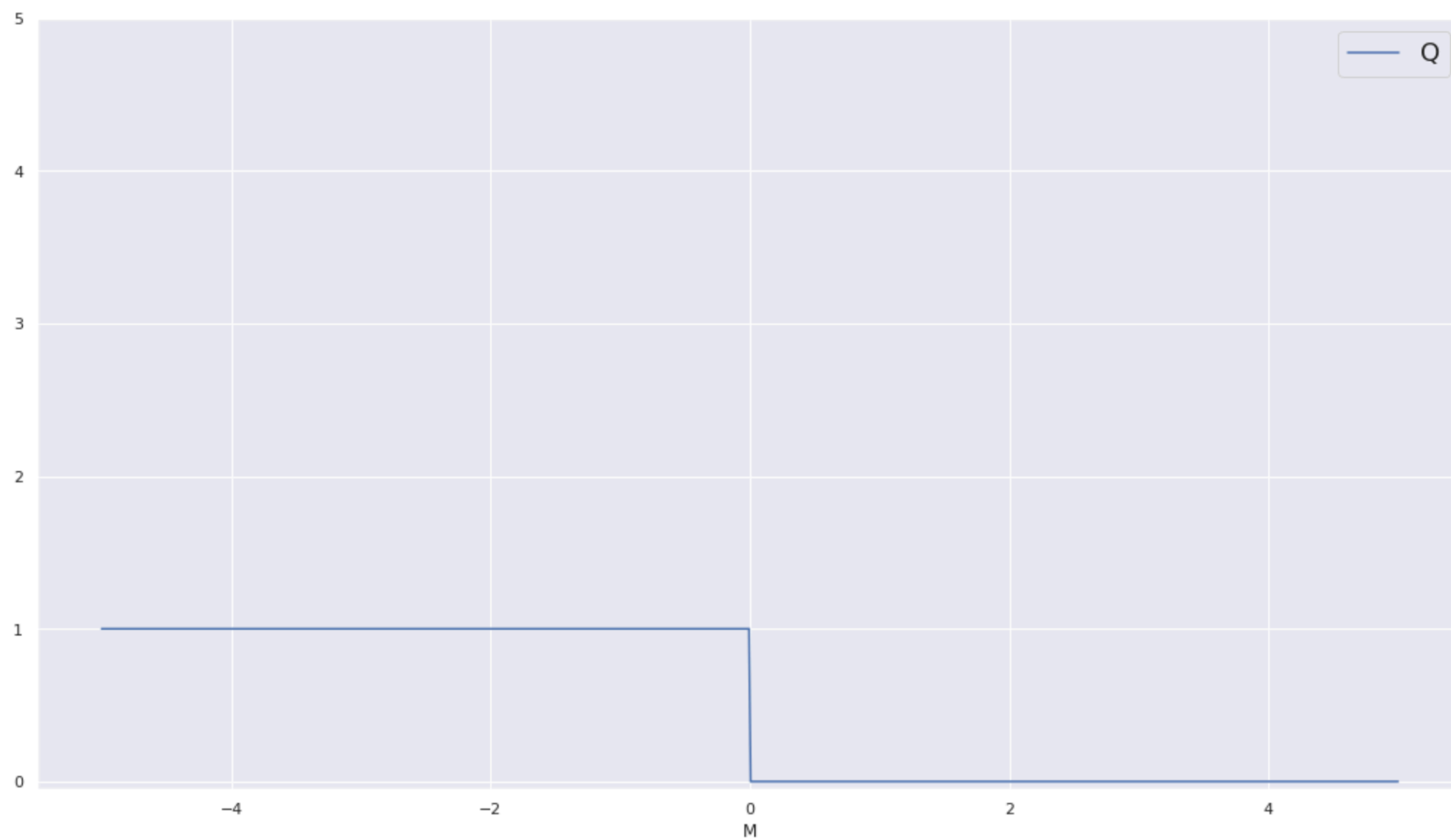
$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[\underbrace{y_i \langle w, x_i \rangle}_{M_i} < 0 \right] \to min$$

$$L(M) = [M < 0]$$

Линейные модели в задаче классификации

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left[\underbrace{y_i \langle w, x_i \rangle}_{M_i} < 0 \right] \to min$$

$L(M) = [M < 0]$ – *пороговая функции потерь*



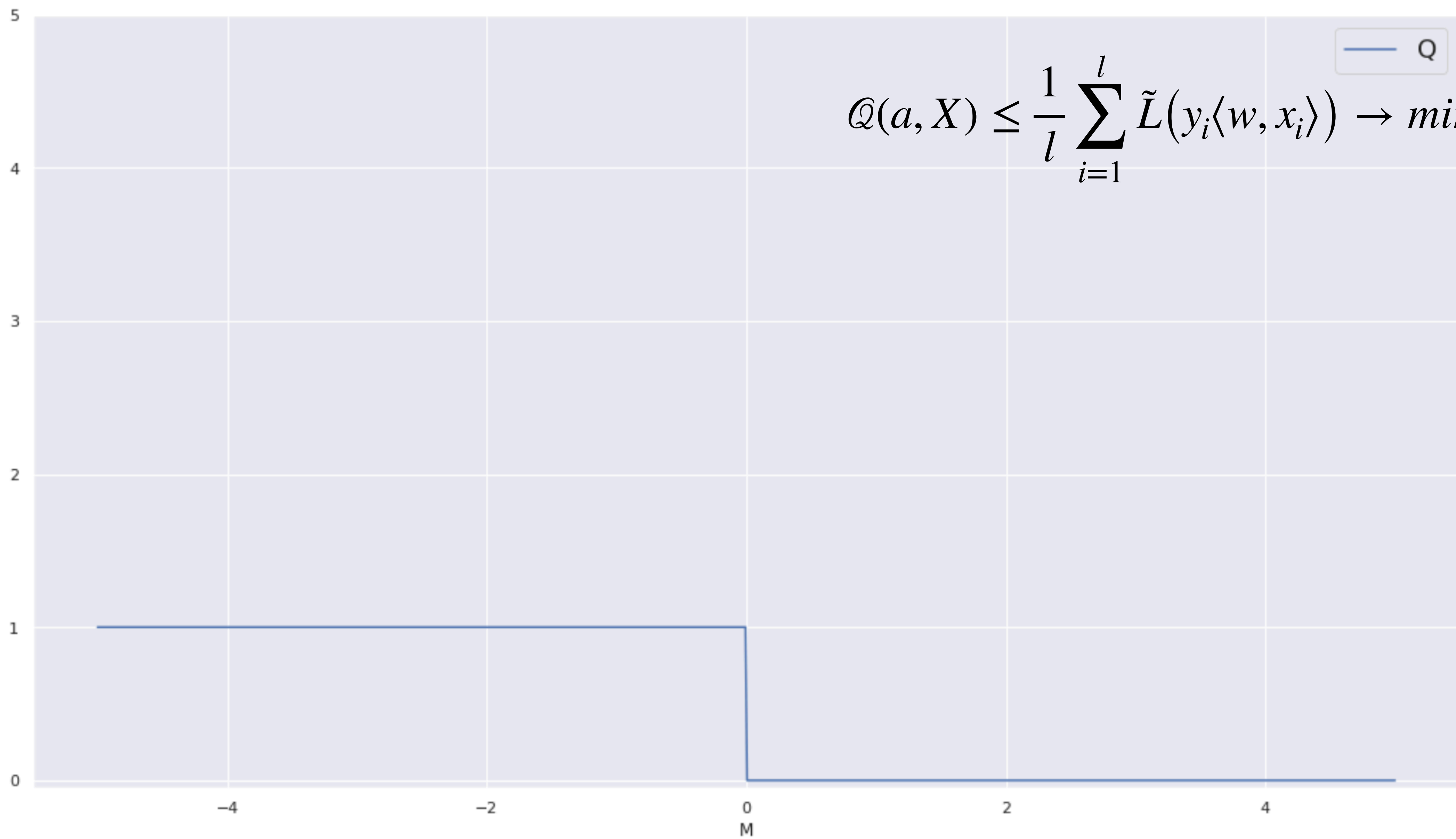
Линейные модели в задаче классификации

$$Q(a, X) = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\left[\underbrace{y_i\langle w, x_i\rangle}_{M_i} < 0\right] \to min$$

$L(M) \leq \tilde{L}(M)$ *– верхняя оценка функции потерь*

$L(M) = [M < 0]$ *– пороговая функции потерь*

Если верхнюю оценку удастся приблизить к нулю, то и доля неправильных ответов тоже будет близка к нулю



$$Q(a, X) \leq \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\tilde{L}\big(y_i\langle w, x_i\rangle\big) \to min$$

Линейные модели в задаче классификации

$\tilde{L}(M) = (1 - M)^2$

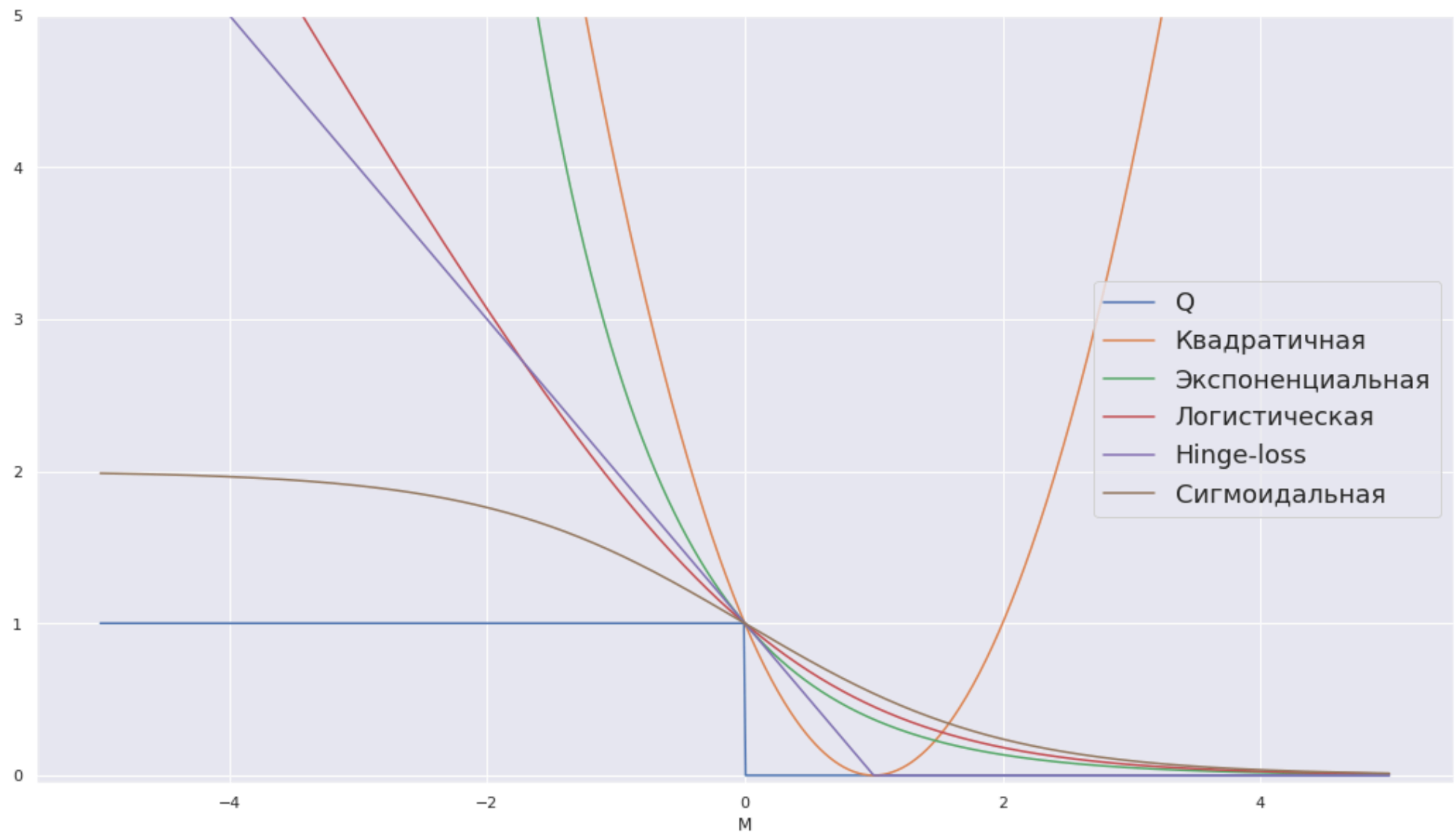
$L(M) = [M < 0]$ *– пороговая функции потерь*

$\tilde{L}(M) = e^{-M}$

$\tilde{L}(M) = \log(1 + e^{-M})$

$\tilde{L}(M) = (1 - M)_+ = \max(0, 1 - M)$

$\tilde{L}(M) = \dfrac{2}{1 + e^{-M}}$



Линейные модели в задаче классификации

$$\tilde{L}(M) = (1 - M)^2$$

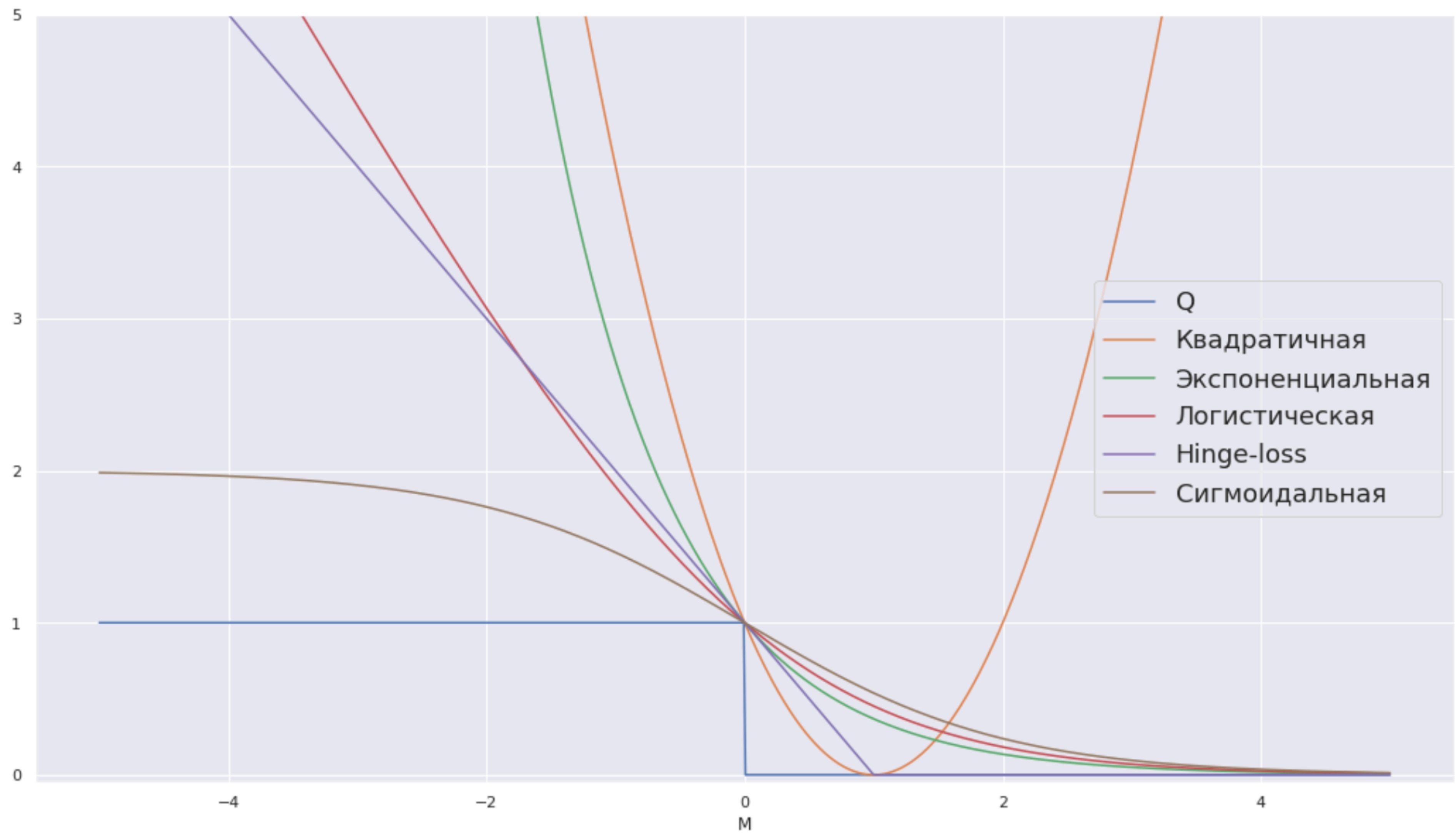
$$\tilde{L}(M) = e^{-M}$$

$$\tilde{L}(M) = \log(1 + e^{-M})$$

$$\tilde{L}(M) = (1 - M)_+ = \max(0, 1 - M)$$

$$\tilde{L}(M) = \frac{2}{1 + e^{-M}}$$

$L(M) = [M < 0]$ *– пороговая функции потерь*



Линейные модели в задаче классификации

$$\tilde{L}(M) = \log(1 + e^{-M})$$

Минимизация эмпирического риска:

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \log(1 + e^{-y_i \langle w, x_i \rangle}) \to min$$

$$a(x) = sign\left(\overrightarrow{w}^T \cdot x\right)$$

Линейные модели в задаче классификации

$$\tilde{L}(M) = \log(1 + e^{-M})$$

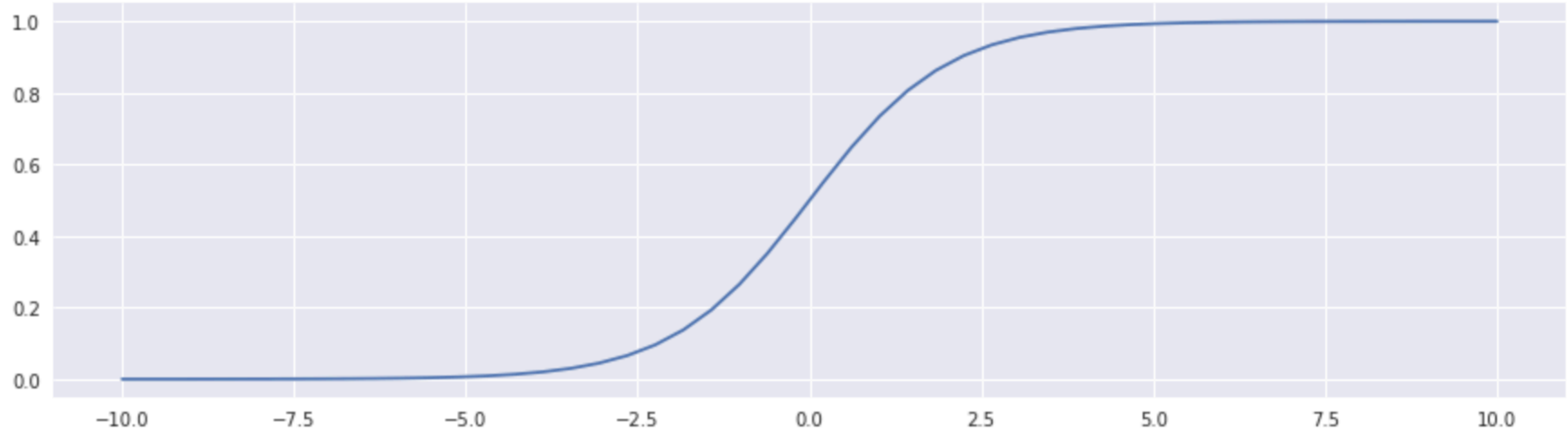
Минимизация эмпирического риска:

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \log(1 + e^{-y_i \langle w, x_i \rangle}) \to min$$

$$a(x) = sign\left(\overrightarrow{w}^T \cdot x\right)$$

Оценка апостериорных вероятностей принадлежности классам

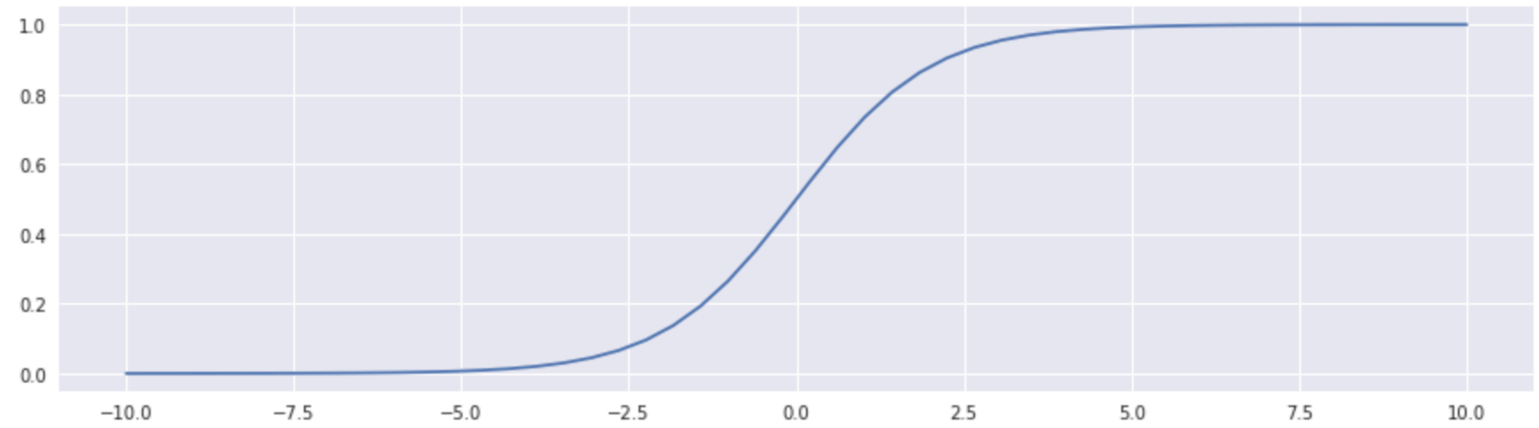
$$\overrightarrow{w}^T \cdot x \in R \qquad f(x_i, w) = \sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \in [0; 1]$$



Линейные модели в задаче классификации

$$y_i = f(x_i, w) + \varepsilon$$

$$f(x_i, w) = \sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$



Шансы

$$odds = \frac{p}{1-p} \in [0; \infty] \qquad \ln(odds) \in R$$

где p вероятность, что событие состоится (в нашем случае, что класс примет значение 1):

$$\ln(odds_+) = ln(\frac{p}{1-p}) = ln(p) - ln(1-p)$$

$$\ln(odds_-) = ln(\frac{1-p}{p}) = ln(1-p) - ln(p)$$

$$\ln(odds_+) = -\ln(odds_-) = w^T \cdot x \qquad odds = e^{w^T x} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{e^{w^T x}}{1 + e^{w^T x}}$$

Линейные модели в задаче классификации

$$P(y_i = 1 \,|\, x_i, w) = \sigma(w^T x) \qquad\qquad P(y_i = -1 \,|\, x_i, w) = \sigma(-w^T x)$$

$$P(y = y_i | x_i, w) = \sigma(y_i w^T x)$$

Правдоподобие (вероятность наблюдать вектор *y* при заданных значениях *X* и *w*)

Делаем предположение: объекты приходят независимо, из одного распределения

$$P(\overrightarrow{y} \,|\, X, w) = \prod_{i=1}^{l} P(y = y_i | x_i, w) \to max$$

Так как логарифм монотонно возрастающая функция, то оценка *w* максимизирующая логарифм, будет максимизировать и само правдоподобие

$$\log P(\overrightarrow{y} \,|\, X, w) = \sum_{i=1}^{l} \log \sigma(y_i w^T x) = \sum_{i=1}^{l} \log \frac{1}{1 + e^{-y_i \langle w, x_i \rangle}} = -\sum_{i=1}^{l} \log(1 + e^{-y_i \langle w, x_i \rangle})$$

$$Q(a, X) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \log(1 + e^{-y_i \langle w, x_i \rangle}) \to min$$

Рассмотрим пример!

Ссылки

Открытый курс машинного обучения

Репозитории Евгения Соколова