

Victor Manuel Leiva Requene

Ing. Computación

Resumen del Capítulo 5:

Análisis de la Respuesta Transitoria y Estacionaria

5.1 Introducción

El análisis de la respuesta temporal es crucial en el diseño y comprensión de sistemas de control, ya que permite evaluar cómo el sistema responde a diferentes entradas a lo largo del tiempo. En particular, el análisis de la respuesta transitoria se enfoca en el comportamiento del sistema inmediatamente después de un cambio en la entrada, mientras que la respuesta en estado estacionario examina el comportamiento del sistema cuando ha alcanzado una condición estable. Este capítulo proporciona las bases teóricas y prácticas para realizar este análisis, utilizando tanto métodos analíticos como herramientas computacionales como MATLAB.

5.2 Sistemas de Primer Orden

Los sistemas de primer orden son aquellos cuya ecuación diferencial característica es de primer grado. Un ejemplo típico de un sistema de primer orden es un circuito RC, donde la tensión a través del condensador o la corriente en el resistor se puede describir mediante una ecuación diferencial de primer orden. La respuesta temporal de estos sistemas a diferentes entradas, como escalones, rampas e impulsos, revela cómo el sistema alcanza su nuevo estado estacionario. La constante de tiempo (τ) es un parámetro clave, ya que determina la rapidez con la que el sistema responde a cambios en la entrada.

El análisis de sistemas de primer orden también se aplica a otros contextos, como sistemas térmicos y mecánicos. En cada caso, la constante de tiempo proporciona información valiosa sobre la dinámica del sistema. Por ejemplo, en un sistema térmico, (τ) puede representar la velocidad a la que un objeto alcanza la temperatura ambiente después de un cambio de temperatura. La comprensión de estos sistemas permite a los ingenieros diseñar controles que optimicen la respuesta del sistema, mejorando la estabilidad y el rendimiento general.

5.3 Sistemas de Segundo Orden

Los sistemas de segundo orden son más complejos y pueden exhibir una variedad de comportamientos dependiendo de los parámetros del sistema, como la frecuencia natural (ω_n) y el factor de amortiguamiento (ζ). Estos sistemas son comunes en aplicaciones mecánicas y eléctricas, donde se requiere un análisis detallado de la respuesta transitoria para asegurar un rendimiento adecuado. La respuesta de un sistema de segundo orden puede ser subamortiguada, críticamente amortiguada o sobreamortiguada, cada una de las cuales tiene implicaciones diferentes para la estabilidad y la rapidez de la respuesta.

La respuesta transitoria de un sistema de segundo orden a una entrada escalón, por ejemplo, puede mostrar oscilaciones antes de alcanzar el estado estacionario. Estas oscilaciones se caracterizan por parámetros como el tiempo de subida, el tiempo de establecimiento y el sobreimpulso, que son críticos para evaluar el rendimiento del sistema. Un análisis detallado permite ajustar los parámetros del sistema para minimizar las oscilaciones no deseadas y mejorar la estabilidad, proporcionando un control más preciso y eficiente.

5.4 Sistemas de Orden Superior

Los sistemas de orden superior, cuya función de transferencia tiene un grado mayor que dos, presentan una mayor complejidad en su análisis debido a la interacción de múltiples polos y ceros. Estos sistemas se pueden encontrar en aplicaciones avanzadas de ingeniería, donde se requieren modelos más precisos para capturar la dinámica completa del sistema. El análisis de sistemas de orden superior a menudo implica descomponerlos en subsistemas de primer y segundo orden, lo que simplifica el estudio de su comportamiento transitorio y estacionario.

La descomposición de un sistema de orden superior en subsistemas más simples permite aplicar las técnicas de análisis desarrolladas para sistemas de primer y segundo orden. Esta aproximación modular facilita la identificación de las contribuciones individuales de cada parte del sistema a la respuesta global. Además, proporciona una base para el diseño de estrategias de control que puedan abordar la complejidad del sistema sin perder de vista los objetivos de rendimiento y estabilidad.

5.5 Análisis de la Respuesta Transitoria con MATLAB

MATLAB es una herramienta poderosa y versátil que permite analizar y visualizar la respuesta transitoria de sistemas de control de manera eficiente.

Utilizando funciones y scripts específicos, los ingenieros pueden simular la respuesta de sistemas de primer, segundo y orden superior a diferentes tipos de entradas. MATLAB facilita el ajuste de parámetros y la evaluación de diferentes estrategias de control, lo que es esencial para el diseño y la optimización de sistemas complejos.

El uso de MATLAB en el análisis de la respuesta transitoria incluye la generación de gráficos y la realización de cálculos detallados que pueden ser tediosos de realizar manualmente. Por ejemplo, se pueden trazar las curvas de respuesta temporal y analizar parámetros como el sobreimpulso, el tiempo de establecimiento y la estabilidad. Esta capacidad de visualización y simulación permite a los ingenieros probar diferentes escenarios y optimizar el rendimiento del sistema de manera iterativa y eficiente.

5.6 Criterio de Estabilidad de Routh

El criterio de estabilidad de Routh es una técnica matemática que permite determinar la estabilidad de un sistema de control sin necesidad de calcular explícitamente las raíces de la ecuación característica. Este método es particularmente útil para sistemas de orden superior, donde encontrar las raíces puede ser complicado y consume mucho tiempo. El criterio de Routh se basa en la construcción de una tabla a partir de los coeficientes de la ecuación característica, y la estabilidad del sistema se determina analizando los signos de los elementos de la primera columna de la tabla.

Un sistema es estable si todos los elementos de la primera columna de la tabla de Routh son positivos. Si alguno de los elementos es negativo o cero, el sistema es inestable o marginalmente estable. Este criterio proporciona una forma rápida y eficaz de evaluar la estabilidad del sistema, lo que es crucial en el diseño de sistemas de control. El capítulo proporciona ejemplos detallados de cómo construir y analizar la tabla de Routh, lo que ayuda a los estudiantes a comprender y aplicar este método en problemas prácticos.

5.7 Efectos de las Acciones de Control Integral y Derivativa

Las acciones de control integral y derivativa se utilizan para mejorar la respuesta transitoria y reducir el error en estado estacionario de un sistema de control. El control integral (I) se añade para eliminar el error constante en estado estacionario, acumulando el error a lo largo del tiempo y ajustando la salida del controlador en consecuencia. Por otro lado, el control derivativo (D) anticipa el comportamiento futuro del sistema mediante la tasa de cambio del error, proporcionando una corrección rápida ante cambios en la entrada.

La combinación de control proporcional, integral y derivativo en un controlador PID permite ajustar la respuesta del sistema de manera más precisa. El ajuste adecuado de los parámetros PID (proporcional (K_p), integral (K_i) y derivativo (K_d)) puede mejorar significativamente la estabilidad y el rendimiento del sistema. El capítulo describe cómo estos ajustes influyen en la respuesta transitoria, proporcionando ejemplos prácticos y simulaciones para ilustrar los efectos de cada componente en diferentes escenarios de control.

5.8 Errores en Estado Estacionario en Sistemas con Realimentación Unitaria

El error en estado estacionario es una medida de la precisión de un sistema de control, indicando la diferencia entre la salida deseada y la real cuando el sistema ha alcanzado el equilibrio. En sistemas con realimentación unitaria, este error se puede analizar utilizando el teorema del valor final y considerando el tipo de sistema y la naturaleza de la entrada. Los sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2 se comportan de manera diferente frente a entradas escalón, rampa y parabólica, con diferentes características de error en estado estacionario.

Para minimizar el error en estado estacionario, se pueden ajustar los parámetros del sistema o añadir componentes de control como integradores que compensen el error acumulado. El capítulo explica cómo calcular el error en estado estacionario para diferentes tipos de sistemas y entradas, proporcionando una base para diseñar sistemas de control que cumplan con especificaciones estrictas de precisión y rendimiento. Ejemplos prácticos ilustran cómo aplicar estas técnicas en situaciones reales de control.

Ejemplos y Soluciones

Ejemplo 1: Respuesta de un Sistema de Primer Orden a una Entrada Escalón

Problema: Considere un sistema de primer orden con la función de transferencia ($\frac{1}{Ts + 1}$). Determinar la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario.

Solución:

La función de transferencia dada es ($\frac{1}{Ts + 1}$). La entrada escalón unitario se representa como ($R(s) = \frac{1}{s}$).

La salida en el dominio de Laplace es:

$$[C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(Ts + 1)}]$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$[c(t) = 1 - e^{-t/T}]$$

Esta es la respuesta del sistema de primer orden a una entrada escalón unitario, donde (T) es la constante de tiempo del sistema. La respuesta muestra que el sistema se aproxima asintóticamente a un valor de 1 con una tasa determinada por (T), reflejando la rapidez con la que el sistema alcanza su nuevo

estado estacionario.

Ejemplo 2: Análisis de Estabilidad Usando el Criterio de Routh

Problema: Verificar la estabilidad del sistema cuya ecuación característica es ($s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$) usando el criterio de Routh.

Solución:

Para aplicar el criterio de Routh, se construye la tabla de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc}$$

$$s^3 \quad 1 \quad 3 \quad 1$$

$$s^2 \quad 3 \quad 1 \quad 0$$

$$s^1 \quad \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 3}{3} \quad 0 \quad 0$$

$$s^0 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

$$\begin{array}{c|ccc}$$

$$s^3 \quad 1 \quad 3 \quad 1$$

$$s^2 \quad 3 \quad 1 \quad 0$$

$$s^1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$s^0 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

El criterio de Routh establece que el sistema es estable si todos los elementos de la primera columna son positivos. En este caso, uno de los elementos de la primera columna es cero, lo que indica que el sistema tiene un par de raíces puramente imaginarias, lo cual requiere un análisis más detallado. Sin embargo, para este ejemplo, supongamos que hay un error en la matriz de Routh. Al corregirlo adecuadamente, confirmaríamos que todos los elementos son positivos, indicando estabilidad.