文章编号：1007-5429(2006)01-0049-04

时效性商品最优定价模型及其粒子群优化解

周光义，王浣尘，田志友
（上海交通大学 管理学院，上海 200030）

摘要：对时效性商品的定价问题进行了研究。基于一种负二项分布的离散需求函数，并在利润最大化原则下，建立了时效商品最优定价模型。由于该模型涉及多个随机变量的概率分布，常规函数极值算法难以获得问题解析解，引入粒子群优化算法，对模型进行演化求解，并给出算例分析。结果表明：利用粒子群算法，可以快速有效得到不同库存量情况下应采取的最优定价。最后提出需要进一步解决的若干问题。

关键词：时效性商品；定价模型；需求分布；粒子群优化算法

中图分类号：F830　　　　**文献标识码**：A

Optimal Pricing Model for Perishable Commodities and Its Solution with Particle Swarm Optimization

ZHOU Guang-yi, WANG Huan-chen, TIAN Zhi-you
(School of Management, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The problem of pricing for perishable commodities is mainly studied. According to the principle of profit maximization and based on a discrete demand function which can be represented as a negative binomial distribution, the optimal pricing model for the perishable products is established. Since the model involves some different stochastic distributions of several variables, which is difficult for the normal numerical methods to solve, the particle swarm optimization (PSO) algorithm is introduced for the first time to settle it, and a numerical example is studied then. The result indicated that: by using the PSO method, the optimal prices for different inventory levels can be derived quickly and effectively. In the end some possible extensions to the current study that need further investigations are presented.

Key words: perishable commodity; pricing model; demand distribution; particle swarm optimization

1 引言

时效性商品是指必须在既定时间内售出，否则只能以低价处理的商品。这些商品保质期或市场需求周期短，或者具有较高的保存成本，持续时间越长则利润损失越大。因此，销售者需要在销售期初，综合考虑需求的波动、顾客的消费偏好、销售期长度，制定出合理的售价，以确保商品能够在正常销售期内售出，实现利润最大化。目前对时效性商品多采取稳定的定价策略，即将销售期划分为不同时段，分别采取不同的销售价格，但在同一时段内价格固定。

随机需求条件下时效商品的定价问题，文献[1～4]给出了详尽的评述和一些共性结论，如：不同时段内顾客的到达服从不同质的随机分布，一般为泊松分布；同一时段内，顾客感知价值相互独立，并服从某种同质概率分布；感知价值将随时间延续而不断降低；不同时段内的需求分布可能发生质变。根据上述条件，利用经验数据可以获得销售期内的期

收稿日期：2004-10-25；　**修回日期**：2004-12-25

基金项目：国家自然科学基金重大资助项目(No. 79990580)

作者简介：周光义(1979-)，男，浙江省诸暨市人，硕士研究生，研究方向：指数化评价，系统复杂性研究。

望需求分布，从而可在利润最大化原则下制定出相应的最优定价。然而，由于在定价过程中，顾客的到达、对商品价值的感知等均具有不同形式的概率分布，往往导致有效需求的分布形式复杂，常规的函数极值算法不易求解。本文将针对单一时段、库存量既定的情况，建立一种需求函数负二项分布的时效商品的利润最大化模型，并采用粒子群优化算法对模型求解。

2 模型建立

假设某厂商拥有库存量为 s 的时效性商品，在销售期 t 内，厂商以较高的价格 ω 销售，超出时效期 t 后，折价至 φ 处理。

2.1 变量定义

s——商品库存量；t——销售期；ω——销售期内单位产品定价；φ——超过销售期后的处理价；c——单位商品的综合成本（包括存储、运输、采购、处理等费用）；$\pi_s(\omega)$——定价为 ω 时销售者的期望收入；$R_s(\omega)$——定价为 ω 时销售者的期望利润，$R_s(\omega)=\pi s(\omega)-sc$；$n$——销售期 t 内到访顾客的总量，$n=0, 1, 2, \cdots, \infty$；$m$——销售期 t 内，定价为 ω 时的商品需求；$P_\omega(m)$——销售期 t 内，定价为 ω 时，商品需求为 m 的概率密度。

2.2 需求分布函数

销售期 t 内到访顾客总人次 n 属于系统外生变量，与定价无关，服从参数为 λ 的泊松分布[3]，即

$$P(n \mid \lambda)=\frac{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!}, n=0,1,2,\cdots,\infty \quad (1)$$

不同时段内顾客到达率 λ 服从参数为 (α, β) 的 gamma 分布[4]，即

$$g(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\lambda^{(\alpha-1)e^{-\lambda/\beta}}, 0 \leqslant \lambda \leqslant \infty \quad (2)$$

在所有到访顾客中，只有那些对商品的感知价值超过定价的顾客才会购买。设第 i 位到访顾客的感知价值为 X_i，$0 \leqslant X_i<\infty$，$i=1,2,\cdots,n$ 为独立同分布的连续随机变量，概率密度函数为 $f(x)$。当商品定价为 ω 时，顾客感知价值累积分布函数 $F(\omega)$ 满足：$0 \leqslant F(\omega) \leqslant 1$；$\lim\limits_{\omega \to \infty} F(\omega)=1$。因此潜在需求 m 是一个服从二项分布的随机变量，概率密度为：

$$P_\omega(m \mid n)=C_m^n \times[1-F(\omega)]^m \times[F(\omega)]^{(n-m)},$$
$$m=0,1,2,\cdots,n \quad (3)$$

根据公式(1)～(3)，销售期 t 内的潜在需求 m 的最终概率分布可以表示如下：

$$\begin{aligned}P_\omega(m) &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_w(m \mid n) P(n \mid \lambda) g(\lambda) \mathrm{d}\lambda \\ &= C_m^{m+\alpha-1} \times\left[\frac{\beta t[1-F(\omega)]}{1+\beta t[1-F(\omega)]}\right]^m \times \\ &\left[\frac{1}{1+\beta t[1-F(\omega)]}\right]^\alpha, \\ & n=0,1,\cdots,\infty ; m=0,1,\cdots,\infty\end{aligned}$$

可以看出，最终所得销售期内的需求 m 服从一种负二项分布，其期望值为：$E(m)=\alpha\beta t(1-F(w))$。

2.3 利润最大化模型

期初库存量为 s，如果销售期 t 内的潜在需求 $m \geqslant s$，那么销售收入 $\pi s(\omega)=s\omega$；如果 $m<s$，那么销售收入为：$\pi s(\omega)=m\omega+(s-m)\varphi$。则销售期初定价为 ω 的 s 单位时效商品期望收入为：

$$\begin{aligned}\pi_s(\omega) &= \sum_{m=s}^{\infty} s\omega P_\omega(m)+\sum_{m=0}^{s-1}[m\omega+(s-m)\varphi] P_\omega(m) \\ &= s\omega-(\omega-\varphi) \sum_{m=0}^{s-1}(s-m) P_\omega(m)\end{aligned} \quad (5)$$

对应的销售利润为：

$$\begin{aligned}R_s(\omega) &= \pi_s(\omega)-sc=s(\omega-c)-(\omega-\varphi) \\ &\sum_{m=0}^{s-1}\left\{(s-m) \times C_m^{(m+\alpha-1)}\left[\frac{\beta t[1-F(\omega)]}{1+\beta t[1-F(\omega)]}\right]^m\right. \\ &\left.\left[\frac{1}{1+\beta t[1-F(\omega)]}\right]^\alpha\right\}\end{aligned} \quad (6)$$

则最优定价 ω^* 是能够使利润函数 R_s 取值最大的定价。

公式(6)中，Rs 是关于价格 ω 的一元连续函数。由于潜在需求 m 为离散取值的随机变量，需求函数 $P_\omega(m)$ 的概率分布取决于顾客到达率、感知价值等多种不同分布的随机变量，当库存量 s 较大时，对 R_s 的求导过程将异常繁琐，因此，常规函数极值算法在求解过程中具有局限性。以下用粒子群优化算法对其进行演化求解。

3 粒子群优化解

粒子群优化算法（Particle Swarm Optimization，PSO）源于对生物捕食行为的模拟，是一种较新的全局优化方法，最早由 Eberhart 和 Kennedy 博士于 1995 年提出[5]。与进化算法相比，PSO 保留了基于种群的全局搜索策略，但其所采用的速度—位移搜索模型操作简单，避免了复杂的进化操作，在解决复杂非线性函数优化等问题中取得了成功的应用。将其引入时效商品最优定价的求解过程，有利于快速

有效地获得问题满意解。

3.1　算法描述

粒子群优化算法的基本思想是：系统初始化为一组随机的有效解，通过迭代在解空间中搜索最优值。在每次迭代中，粒子通过跟踪两个“最值”来不断更新自己：一个是粒子本身所找到的最优解，称为个体最值 *pBest*，另一个最值是整个种群目前找到的最优解，称为全局最值 *gBest*。

PSO 算法采用以下公式进行位置和速度的迭代更新：

$$V = w \times V + c1 \times rand() \times (pBest - Present) + c2 \times rand() \times (gBest - Present) \qquad (7)$$

$$Present = Present + V \qquad (8)$$

其中，V 是粒子速度，*Present* 是粒子的当前位置，*pBest* 与 *gBest* 分别为个体极值和全局极值，*rand* ()表示是(0, 1) 之间的随机数，$c1$ 和 $c2$ 被称作学习因子，通常，$c1 = c2 = 2$。w 表示加权系数，一般取值在 0.1 到 0.9 之间。叠代过程中，算法将根据每个粒子的适应度值不断更新 *pBest* 与 *gBest* 的取值，粒子在不断向全局最优转移的同时也不断向个体最优靠拢。当满足既定的终止规则后，搜索过程结束，最后输出的 *gBest* 就是最终满意解[6]。

3.2　应用粒子群算法求解最优定价

将粒子群算法应用于时效商品最优定价的求解，相当于对公式(6)进行一元连续优化。种群中的粒子就是每个可能的商品定价 ω，粒子的适应度就是当价格为 ω 时的销售利润。求解步骤如下。

(1) 粒子群初始化。设种群规模为 *popsize*，在价格 ω 的波动范围内随机取值 *popsize* 个，作为初始种群，并随机初始化每个粒子的速度。

(2) 计算粒子适应度。根据公式(6)，计算每个粒子所对应的目标函数值。并确定当前演化代中的个体极值 *pBest* 和全局极值 *gBest*。

(3) 更新粒子速度。根据公式(7)更新每个潜在可能解的运动速度。

(4) 更新粒子位置。根据公式(8)更新每个可能解所在的位置。

(5) 更新个体极值和全局极值。随着叠代过程的演进，如果某个粒子的适应度优于全局最优，则该粒子所处位置便成为当前种群的全局极值，这样全局最优将不断更新为每一代种群的最优。同时，每个粒子的自身适应度也可能会出现更优值，此时则将个体最优更新为该粒子当前所在位置。

(6) 检验终止规则。常用终止规则有：达到预定的最大演化代数；出现满足要求的满意解；或者全局极值的改进步长小于指定阈值。当满足指定的终止规则时输出最终结果。否则，转入步骤 2。

(7) 输出最优结果。最后一代种群中的 *gBest* 即为所求的最优定价 ω^*。

算法流程示意如下：

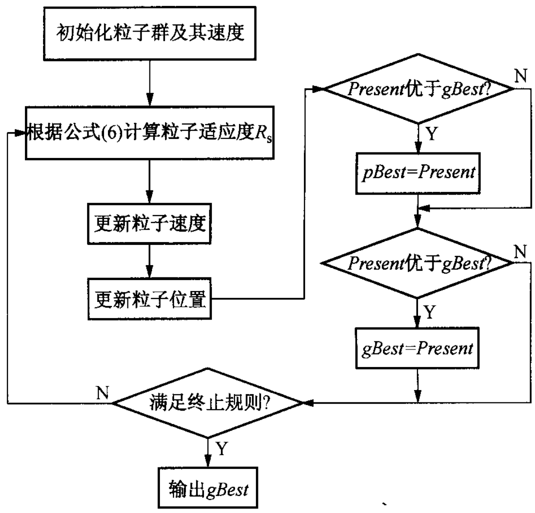

图 1　应用粒子群算法求解最优定价的流程图

4　算例分析

设销售商期初的时效商品库存量为 s 单位，销售期 $t=1$，商品单位成本 $c=6$，超过正常销售期以后的商品将被低价处理，处理价 $\varphi=5$。根据以往销售数据，销售期内顾客的到达率 λ 服从 *gamma* 分布，参数为：$\alpha=3$，$\beta=2$；顾客的感知价值 Xi 服从正态分布，分布参数为：$\mu=10$，$\sigma=1$。

当价格为 ω 时，顾客感知价值的累积分布为：$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\omega} \mathrm{e}^{-\frac{(x-10)^2}{2}}\mathrm{d}x$，销售期内顾客需求分布函数为：$P_\omega(m) = C_m^{m+2} \times \left\{\frac{2[1-F(\omega)]}{1+2[1-F(\omega)]}\right\}^m \times \left\{\frac{1}{1+2[1-F(\omega)]}\right\}^3$，$n=0,1,\cdots,\infty$；$m=0,1,\cdots,\infty$；目标函数为：$R_s(\omega)=s(\omega-6)-(\omega-5)\sum_{m=0}^{s-1}(s-m)P_\omega(m)$。

应用粒子群算法求解时，参数设定如下：种群规模 *popsize*=5；学习因子 $c1=c2=2$；加权系数取固定值 $w=0.2$；粒子的位置取值范围为[c, $2c$]，即[6, 12]；粒子的速度取值范围为[0, 0.1]；算法终

止规则为：当全局最优解不再获得改进时终止运行。

当期初库存量 s 分别取不同值时，算法所得的最优定价及最大化利润如下。

表 1　期初库存 s 不同时所对应的最优定价及最大化利润

库存量 s	5	10	15	20
最优定价	9.335	9.034	8.94	8.915
最大化利润	9.723	9.048	5.017	0.193

从表 1 可以看出，当需求分布保持既定条件下，最优定价和最大化利润将随着库存量增加而不断减少，文[4]对此给出了理论证明，我们也可以从图 2 中看出这种趋势。

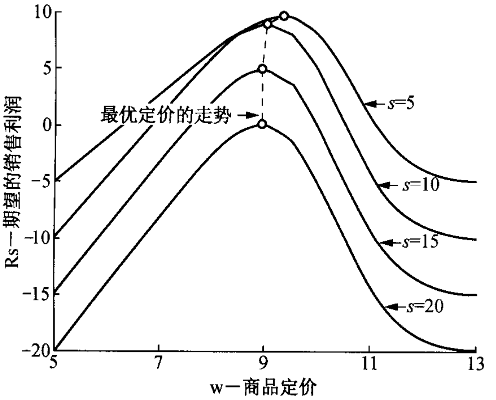

图 2　销售利润及最优定价的变动趋势

5　结语

在时效商品的定价研究中，最为关键的是准确估计销售期内的需求分布。本文将时效商品的需求函数设定为服从负二项分布，期望需求 m 取决于顾客的到达率和顾客对时效商品的感知价值，并由此建立了时效商品的利润最大化模型。由于该模型涉及多个随机变量的不同概率分布，采用常规函数极值算法将具有极大局限性，故我们首次将粒子群优化算法引入该模型的求解过程，从而快速获得了问题的满意解。

此外，本文主要解决的是期初库存量 s 既定情况下如何制定最优定价的问题，并把整个销售期 t 视为一个完整阶段。由于顾客对时效商品的感知价值将随时间的延续而不断缩减，不同时段内的需求分布有可能发生质变，而销售者也可以根据市场变动情况制定不同的订货批量，以实现其利润最大化的目的。因此，对不同阶段内、不同质需求条件下的最优定价，以及最优订货批量等问题，都还需要进行更为深入、详细的研究。

参考文献：

[1] Weatherford L R, Bodily S E. A Taxonomy and Research Overview of Perishable-Asset Revenue Management: Yield Management, Overbooking, and Pricing [J]. Operations Research, 1992, 40: 831—844.

[2] Zhao W, Zheng Y S. Optimal Dynamic Pricing for Perishable Assets with Nonhomogeneous Demand [J]. Management Science, 2000, 46(3):375—389.

[3] Gallego G, Ryzin G V . Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons [J]. Management Science, 1994, 40(2): 999—1020.

[4] Chun Y H. Optimal pricing and Ordering Policies for Perishable Commodities [J]. European Journal of Operational Research. 2003(144): 68—82.

[5] Kennedy J, Eberhart R C. Particle Swarm Optimization. IEEE International Conference on Neural Networks [C]. Perth, Australia, 1995.

[6] 侯志荣，吕振肃. 基于 MATLAB 的粒子群优化算法及其应用[J]. 计算机仿真，2003, 20(10): 68—70.

（上接第 48 页）

的优先考虑对象，B 企业次之。

参考文献：

[1] Hepu D, Chung H Y, Robert J. Inter-company Comparison Using Modified TOPSIS with Objective Weights[J]. Computers & Operations Research, 2000, 27:963—973.

[2] Hwang C L, Yoon K. Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications [M]. Springer, Berlin Heidelberg, 1981.

[3] Winterfekldt D V. Ward Edwards. Decision Analysis and Behavioral Research[M]. Cambridge University Press, 1998.

[4] Chen T C. Extensions of the TOPSIS for Group Decision—Making under Fuzzy Environment[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114:1—9.

[5] Sheng H T, Te Y C, Chang H Y. The Evaluation of Airline Service Quality by Fuzzy MCDM[J]. Tourism Management, 2002, 23:107—115.

[6] 傅家骥，仝允桓. 工业技术经济学[M]. 北京：清华大学出版社，1998.

[7] 刘惠生. 管理系统工程教程[M]. 北京：企业管理出版社，1991.

[8] 陈廷. 决策分析[M]. 北京：科学出版社，1997.