

Distribución Binomial:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

n es el número de pruebas.

p es la probabilidad de éxito.

k es el número de éxitos.

q=1-p es la probabilidad de fracaso.

El número combinatorio:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

La distribución Binomial se utiliza en experimentos con dos resultados posibles, caso favorable (éxito), caso desfavorable (fracaso) y donde se realizan pruebas repetidas e independientes del mismo experimento, es decir en experimentos con reemplazo.

La media y la varianza para $X \sim B(n, p)$ son:

- **Media:** $\mu = n \cdot p$
- **Varianza:** $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$
- **Desviación típica:** $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Ejemplos:

1. Se sabe que el 15% de las fallas de cierta marca de motores se deben al desgaste de las escobillas. Si se seleccionan al azar 5 motores con reemplazo de dicha marca. Calcular:

- a. La probabilidad de que exactamente 2 motores fallen por desgaste de las escobillas.
- b. La probabilidad de que a lo más 2 motores fallen por desgaste de las escobillas.
- c. La probabilidad de que a lo menos 4 motores fallen por desgaste de las escobillas.
- d. $E(X)$ y $V(X)$.

Probabilidad de éxito: $p = 0,15$

Probabilidad de fracaso: $q = 1 - p = 0,85$

Número de pruebas: $n = 5$

a. $P(X = 2) = \binom{5}{2} (0,15)^2 \cdot (0,85)^3 = 0,1382$

b. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \binom{5}{0} (0,15)^0 \cdot (0,85)^5 + \binom{5}{1} (0,15)^1 \cdot (0,85)^4 + \binom{5}{2} (0,15)^2 \cdot (0,85)^3$$

$$= 0,4437 + 0,3915 + 0,1382 = 0,9734$$

c. $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$

$$= \binom{5}{4} (0,15)^4 \cdot (0,85) + \binom{5}{5} (0,15)^5 \cdot (0,85)^0$$

$$= 0,0022 + 0,000076 = 0,002276$$

d. $E(X) = 5 \cdot (0,15) = 0,75$ y $V(X) = 5 \cdot (0,15) \cdot (0,85) = 0,6375$.

2. La última novela de un autor ha tenido un gran éxito, hasta el punto de que el 80% de los lectores ya la han leído. Un grupo de 4 amigos son aficionados a la lectura:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan leído la novela 2 personas?

$$B \sim (4, 0.8) \quad p = 0.8 \quad q = 0.2$$

$$p(X=2) = \binom{4}{2} 0.8^2 \cdot 0.2^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 0.64 \cdot 0.04 = 0.1536$$

b. ¿Y a lo más 2?

$$\begin{aligned} p(X \leq 2) &= p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = \\ &= \binom{4}{0} 0.8^0 \cdot 0.2^4 + \binom{4}{1} 0.8^1 \cdot 0.2^3 + \binom{4}{2} 0.8^2 \cdot 0.2^2 = 0.1808 \end{aligned}$$

3. Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. Según las tablas actuales, la probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es $2/3$. Hállese la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan:

a. Las cinco personas.

$$B \sim (5, 2/3) \quad p = 2/3 \quad q = 1/3$$

$$p(X=5) = \binom{5}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0.132$$

b. Al menos tres personas.

$$\begin{aligned} p(X \geq 3) &= p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) = \\ &= \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{5}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0.791 \end{aligned}$$

c. Exactamente dos personas.

$$p(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0.164$$

4. En unas pruebas de alcoholemia se ha observado que el 5% de los conductores controlados dan positivo en la prueba y que el 10% de los conductores controlados no llevan puesto el cinturón de seguridad. También se ha observado que las dos infracciones son independientes.

Un guardia de tráfico para cinco conductores al azar. Si tenemos en cuenta que el número de conductores es suficientemente importante como para estimar que la proporción de infractores no varía al hacer la selección.

a. Determinar la probabilidad de que exactamente tres conductores hayan cometido alguna de las dos infracciones.

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= 0.05 + 0.1 - 0.05 \cdot 0.1 = 0.145 \\ B(5, 0.145) \quad p &= 0.145 \quad q = 0.855 \\ p(X=3) &= \binom{5}{3} 0.145^3 \cdot 0.855^2 = 0.0223 \end{aligned}$$

b. Determine la probabilidad de que al menos uno de los conductores controlados haya cometido alguna de las dos infracciones.

$$p(\text{al menos uno}) = 1 - \binom{5}{0} 0.855^5 = 0.543$$

Ejercicios Propuestos:

- 1) Si de seis a siete de la tarde se admite que un número de teléfono de cada cinco está comunicando, ¿cuál es la probabilidad de que, cuando se marquen 10 números de teléfono elegidos al azar, sólo comuniquen dos?

$$B(10, 1/5) p = 1/5 q = 4/5$$

R: 0.3020

- 2) La probabilidad de que un hombre acierte en el blanco es $1/4$. Si dispara 10 veces ¿cuál es la probabilidad de que acierte exactamente en tres ocasiones? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte por lo menos en una ocasión?

$$B(10, 1/4) p = 1/4 q = 3/4$$

R: 0.25 ; 0.9437

- 3) La probabilidad de que un artículo producido por una fábrica sea defectuoso es $p = 0.02$. Se envió un cargamento de 10.000 artículos a unos almacenes. Hallar el número esperado de artículos defectuosos, la varianza y la desviación típica.

$$R: 200; 196; 14$$

- 4) En una urna hay 30 bolas, 10 rojas y el resto blancas. Se elige una bola al azar y se anota si es roja; el proceso se repite, devolviendo la bola, 10 veces. Calcular la media y la desviación típica.

$$B(10, 1/3) p = 1/3 q = 2/3$$

R: 3.33; 1.49

- 5) Un laboratorio afirma que una droga causa de efectos secundarios en una proporción de 3 de cada 100 pacientes. Para contrastar esta afirmación, otro laboratorio elige al azar a 5 pacientes a los que aplica la droga. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a) Ningún paciente tenga efectos secundarios.

$$R: 0.8587$$

b) Al menos dos tengan efectos secundarios.

$$R: 0.00847$$

c) ¿Cuál es el número medio de pacientes que espera laboratorio que sufran efectos secundarios si elige 100 pacientes al azar?

$$R: 3$$

- 6) La probabilidad de que un estudiante que ingresa en la Universidad se licencie es 0,4. Encuentra la probabilidad de que entre 5 estudiantes escogidos al azar:

a) Ninguno se licencie.

$$P(x = 0) = 0,0778$$

b) No se licencie más de uno.

$$P(x \leq 1) = 0,337$$

c) Al menos uno se licencie.

$$P(x \geq 1) = 0,9222$$

d) Todos se licencien.

$$P(x = 5) = 0,0102$$

- 7) Se ha pasado una prueba sobre fluidez verbal a un numeroso grupo de niños de una ciudad y se ha detectado que el 35% de ellos tienen una fluidez verbal prácticamente nula; el resto se puede considerar aceptable. De una muestra aleatoria formada por siete niños, hallar la probabilidad de que:

a) Tres niños hablen con una fluidez aceptable.

b) A lo más cuatro niños hablen con una fluidez aceptable.

c) A lo menos 2 hablen con una fluidez aceptable.

d) Ningún niño hable con una fluidez aceptable.

- 8) Una cadena metálica está compuesta por 4 eslabones, La probabilidad de ruptura de cada eslabón a un peso de 100 kilos es de 0,6. Se somete la cadena a un peso de 100 kilos se pide: $B(4, 0,6)$
- a) Probabilidad de que no se rompa la cadena. $P(x = 0) = 0,0256$
 - b) Probabilidad de que se rompa a lo menos un eslabón
 - c) Probabilidad de que se rompan a lo más tres eslabones
- 9) Una encuesta revela que el 20% de la población es favorable a un político y el resto desfavorable. Elegidas 6 personas al azar, se desea saber:
- a) La probabilidad de que las 6 personas sean desfavorables. $P(x = 6) = 6,4 \cdot 10^{-5}$
 - b) La probabilidad de que las 6 personas sean favorables. $P(x = 0) = 0,26$
 - c) La probabilidad de que a lo más una sea desfavorable
 - d) La probabilidad de que dos sean favorables
 - e) La probabilidad de que a lo más cinco sean favorables
- 10) Una determinada raza de perros tiene cuatro cachorros en cada camada. Si la probabilidad de que un cachorro sea macho es de 0,55, se pide calcular la probabilidad de que:
- a) En una camada dos exactamente sean hembras. 0,3675
 - b) En una camada al menos dos sean hembras. 0,6089
 - c) En una camada no haya hembras. 0,0915
 - d) En una camada no haya machos 0,0410
- 11) La probabilidad de que salga cara en una moneda trucada es 0,45. Se lanza la moneda 7 veces. Calcular la probabilidad de que:
- a) Salgan exactamente tres caras. $P(x = 3) = 0,27$
 - b) Salgan al menos tres caras. $P(x \geq 3) = 0,77$
 - c) Salgan a lo sumo tres caras. $P(x \leq 3) = 0,77$
- 12) La probabilidad de éxito de una determinada vacuna es 0,72. Calcula la probabilidad de que una vez administrada a 15 pacientes:
- a) Ninguno sufra la enfermedad
 - b) Todos sufran la enfermedad
 - c) Dos de ellos contraigan la enfermedad