Rappels d'algèbre linéaire: orthogonalité, normes

1 Transposition

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}.$

Si A est à coefficients complexes, $A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} \end{pmatrix}.$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique ssi $A^T = A$ (Hermitienne ssi $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $A^* = A$).

Produit scalaire: $x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ avec $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Norme euclidienne: $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$.

$cos\widehat{(x,y)} = \frac{x^T y}{\|x\|_2 \|y\|_2}$.

Propriétés:

- $(AB)^T = B^T A^T$
- notation: $(A^T)^{-1} = A^{-T}$. Cette notation est possible car on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2 Orthogonalité de vecteurs

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, x est orthogonal à y ssi $x^T y = 0$.

Une famille de vecteurs non nuls est orthogonale si ses éléments sont orthogonaux 2 à 2 (orthonormale si en plus ils sont de norme 1).

Décomposition orthogonale d'un vecteur:
Soit $\{q_1, \ldots, q_p\}$ une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $v = r + \sum_{i=1}^p (q_i^T v) q_i$ avec r vecteur orthogonal à $\{q_1, \ldots, q_p\}$.

Exercice: vérifier que r est orthogonal à $\{q_1, \ldots, q_p\}$.

3 Matrices orthogonales

Déf: $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale $\Leftrightarrow\ Q^T = Q^{-1}\ \Leftrightarrow\ Q^T Q = I$.

Propriétés:

- Les colonnes de Q forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. En effet, si on écrit Q avec ses vecteurs colonnes $q_1, \ldots, q_n$ on a:

$$Q^T Q = I \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix}}_{Q^T} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 & \ldots & q_n \end{bmatrix}}_{Q} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall i, j,\ q_i^T q_j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } q_i^T q_i = 1.$$

- Le produit scalaire et la norme euclidienne sont conservés par Q, i.e $(Qx)^T(Qy) = x^T y$ et $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$.
- Interprétation de $Q\, b$ et $Q^T\, b$, pour $b \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ccc} & \times Q^T & \\ b & \longrightarrow & Q^T b\ (= Q^{-1}\, b) \\ \text{coeff. de } b \text{ dans } \{e_1, \dots, e_n\} & \longleftarrow & \text{coeff. de } b \text{ dans } \{q_1, \dots, q_n\} \\ & \times Q & \end{array}$$

4 Normes de vecteurs

Déf: Une norme est une mesure réelle positive assignée à chaque vecteur de $\mathbb{R}^n$ et vérifiant les propriétés suivantes: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

4.1 Normes p

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$
- $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Exercice: dessiner la sphère unité $S = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$ pour chacune des normes ci-dessus.

4.2 Norme pondérée

$\|x\|_W = \|Wx\|$ avec $W = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n \end{pmatrix}$, les w_i étant le poids de chaque coefficient.

Exemple: $\|x\|_W = \|Wx\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (w_i x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

4.3 Inégalités

- Hölder: $|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 \leq p, q \leq \infty$.
- Cas $p = q = 2$: $|x^T y| \leq \|x\|_2\, \|y\|_2$ (Cauchy-Schwarz).

5 Normes de matrices

On peut voir une matrice $m \times n$ comme un long vecteur de longueur mn ou comme un opérateur linéaire:

$$\begin{array}{cccc} A\ : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & Ax \end{array}$$

A noter que les espaces de départ $\mathbb{R}^n$ et d'arrivée $\mathbb{R}^m$ sont munis de normes que l'on notera simplement $\|.\|$ et qui pourront être les normes vues dans le paragraphe précédent. Bien entendu ce ne sera pas nécessairement les mêmes normes pour $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

5.1 Norme induite (ou norme "opérateur")

Déf: $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$

$\|A\|$ correspond ainsi au facteur maximum par lequel A "contracte" un vecteur x.

Exemples de normes induites:

- $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$, appelée norme spectrale (ou norme 2) de A.
- $\|A\|_1 = \max_{j=1,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ (max des sommes des colonnes).
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (max des sommes des lignes).

5.2 Propriétés

- Si $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ et $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, alors $\|AB\| \leq \|A\| \ \|B\|$. En général, l'égalité n'est pas vraie (voir par exemple $\|A^n\|$ et $\|A\|^n$).
- Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, et $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonale, alors $\|QA\|_2 = \|A\|_2$.
  Dém: $\|QA\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|QAx\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2$.
- Norme 2 d'une matrice orthogonale:
  $\|Q\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1$

6 Exercices

Exercice 1: orthogonalité de vecteurs

Soit S une famille orthogonale de vecteurs (non nuls) $v_1, \ldots, v_p$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que les vecteurs de S sont linéairement indépendants.
2. A quelle condition S sera-t-elle une base de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 2: norme de Frobenius d'une matrice

On définit la norme de Frobenius d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ par: $\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que pour 2 matrices A et B de dimensions adhoc on a: $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \ \|B\|_F$.
2. On définit la "trace" d'une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ par la somme de ses coefficients diagonaux, i.e $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Montrer que $\|A\|_F = \sqrt{Tr(A^T A)}$.
3. Montrer l'invariance de la norme de Frobenius par multiplication orthogonale.