Calcul des valeurs propres

1 Introduction

On trouve de très nombreuses applications des problèmes de valeurs propres dans des domaines aussi variés que: l'ingénierie des structures (calcul des fréquences de résonance), l'analyse de stabilité (mécanique des systèmes, réseaux électriques, réacteurs nucléaires,...), la chimie quantique (équation de Schrödinger). Les calculs de valeurs propres sont également très utilisés dans les algorithmes pour le web (par exemple le **"page ranking" de Google**) ou bien en intelligence artificielle avec le **"clustering" de données**.

Pour simplifier, nous considérons dans ce qui suit des matrices à coefficients réels mais les mêmes notions s'appliquent à des matrices à coefficients complexes.

2 Exemple et principales notions

Nous avons précédemment étudié la résolution de systèmes linéaires d'équations algébriques or de nombreux problèmes physiques sont également décrits par des systèmes d'équations différentielles qui modélisent un processus qui évolue dans le temps. Par exemple:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{du_1}{dt} & = & 7u_1 - 4u_2 \\ \frac{du_2}{dt} & = & 5u_1 - 2u_2 \end{array} \right.$$

qui peut s'écrire de façon matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}}_{u'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{u}. \tag{1}$$

Puisque les solutions de l'équation différentielle simple dans $\mathbb{R}$ $u'(t) = \lambda\ u(t)$ sont de la forme $u = \alpha\ e^{\lambda t}$, on va chercher les solutions de (1) sous la forme $u_1 = \alpha_1\ e^{\lambda t}$ et $u_2 = \alpha_2\ e^{\lambda t}$ i.e $u = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. En remplaçant dans l'équation (1) on obtient alors:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 \lambda e^{\lambda t} & = & 7\alpha_1 e^{\lambda t} - 4\alpha_2 e^{\lambda t} \\ \alpha_2 \lambda e^{\lambda t} & = & 5\alpha_1 e^{\lambda t} - 2\alpha_2 e^{\lambda t} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 \lambda & = & 7\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ \alpha_2 \lambda & = & 5\alpha_1 - 2\alpha_2 \end{array} \right.$$

D'où le système

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}}_{x} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = \lambda x. \tag{2}$$

Si l'on peut trouver λ et x vérifiant (2), on obtient alors des solutions pour (1).

Déf: Si l'on cherche $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$, λ et x sont appelés respectivement **valeur propre et vecteur propre de A**.

Déf: $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ (\lambda \neq 0)\ /\ \exists x \in \mathbb{C}^n\ (x \neq 0),\ Ax = \lambda x\}$ est appelé **spectre de A**.

Géométriquement, $Ax = \lambda x$ signifie que, sous l'action de A, les vecteurs propres changent seulement de longueur ou de signe.

La valeur propre λ est simplement le facteur avec lequel on "étire" ou "rétrécit" le vecteur propre lorsqu'on lui applique A.

Par ailleurs on a: $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow x \in Ker(A - \lambda I)$. On cherche donc les valeurs λ telles que $A - \lambda I$ est singulière (ou non inversible) i.e telles que $det(A - \lambda I) = 0$.

$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ est un polynôme en λ appelé **polynôme caractéristique de A**.

$E_\lambda = Ker(A - \lambda I)$ est le **sous-espace propre** associé à λ et sa dimension est appelée **multiplicité géométrique** de λ.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite **diagonalisable** si il existe P matrice inversible et D matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ (décomposition spectrale de A). Les colonnes de P sont alors des vecteurs propres de A.

Revenons à notre exemple de départ et calculons les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

On a $det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

Les valeurs propres sont donc $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$.

Pour trouver les vecteurs propres, on détermine les vecteurs non nuls de $Ker(A - \lambda I)$ avec $\lambda = 2$ et 3.

$(A - 2I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow 5x_1 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{4}{5}x_2 \\ x_2 \text{ libre} \end{array} \right.$.

D'où $Ker(A - 2I) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = \alpha \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

De la même manière $(A - 3I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ libre} \end{array} \right.$.

D'où $Ker(A - 3I) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Pour chaque valeur propre il y a une infinité de vecteurs propres mais dans ce cas précis chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Concernant le système différentiel $u' = Au$, les solutions s'expriment sous la forme de combinaisons linéaires des solutions particulières $u = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3 Polynôme et équation caractéristiques (résumé)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, le polynôme caractéristique de A est $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$. Il est de degré n et le terme de plus haut degré est $(-1)^n\lambda^n$.
L'équation caractéristique est $p_A(\lambda) = 0$ et ses solutions sont les valeurs propres de A.
A a n valeurs propres qui peuvent être complexes et multiples. La multiplicité de λ dans $p_A(\lambda)$ est appelée **multiplicité algébrique** (rem: multiplicité algébrique $\geq$ multiplicité géométrique).
Si A est à coefficients réels, ses valeurs propres complexes apparaissent par paires conjuguées (i.e si $\lambda \in \sigma(A)$, alors $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$).

Toute matrice possède au moins une valeur propre. **Si A est symétrique, alors ses valeurs propres sont réelles et A est diagonalisable**. Par ailleurs on peut trouver pour A une famille orthonormée de vecteurs propres (voir exercice 2.2).

En pratique, calculer les valeurs propres par le polynôme caractéristique s'avère très compliqué pour $n \geq 5$ (pas de formule explicite pour résoudre l'équation en un nombre fini d'opérations). On utilise plutôt des méthodes itératives, surtout lorsque la matrice A est creuse (i.e contient beaucoup de zéros).

4 Exemple de calcul itératif: méthode de la puissance

4.1 Algorithme

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la méthode de la puissance permet de calculer la plus grande valeur propre de A (en module) et un vecteur propre unitaire associé.

Algorithm 4.1 Power method

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné.
k=0
repeat
  $x_{k+1} = Ax_k / \|Ax_k\|_2$ ▷ x_{k+1} = approximation d'un vecteur propre
  $\lambda^{(k+1)} = x_{k+1}^T \, A \, x_{k+1}$ ▷ $\lambda^{(k+1)}$ = approximation de la valeur propre
  $k = k + 1$
until convergence

4.2 Démonstration de la convergence

Supposons que A est diagonalisable et que l'on a la décomposition spectrale $A = S \, \Lambda \, S^{-1}$ avec

- $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$,
- $S = [s_1, \ldots, s_n]$ avec $\forall i, s_i$ vecteur propre et $\|s_i\|_2 = 1$.

On a:

$$x_0 = S \, (S^{-1} x_0) = S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

où $S^{-1}x_0$ correspond aux coefficients de x_0 dans la base $\{s_1, \ldots, s_n\}$.

On a également

$$A^k = \underbrace{S \, \Lambda \, S^{-1} \ldots S \, \Lambda \, S^{-1}}_{k fois} = S \, \Lambda^k \, S^{-1}. \tag{4}$$

Selon l'algorithme 4.1:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 / \|Ax_0\|_2 \\ x_2 &= Ax_1 / \|Ax_1\|_2 = (A^2 x_0 / \|Ax_0\|_2) \times (\|Ax_0\|_2 / \left\|A^2 x_0\right\|_2) = A^2 x_0 / \left\|A^2 x_0\right\|_2 \\ &\vdots \\ x_k &= A^k x_0 / \left\|A^k x_0\right\|_2 . \end{aligned}$$

En utilisant les formules (3) et (4), on obtient

$$A^k x_0 = (S\ \Lambda^k\ S^{-1}) S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = S\ diag(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda_n^k \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \lambda_1^k\ S \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k \\ \vdots \\ \frac{\alpha_n}{\alpha_1} (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k \end{pmatrix}}_{\longrightarrow S e_1 = s_1}.$$

Donc $A^k x_0$ converge vers un vecteur proportionnel à s_1, vecteur propre associé à λ_1. Par conséquent le vecteur unitaire $x_k = A^k x_0 / \left\| A^k x_0 \right\|_2$ converge vers $\pm s_1$ et $\lambda^{(k)} = x_k^T\ A\ x_k$ converge vers $s_1^T A s_1 = s_1^T \lambda_1 s_1 = \lambda_1 s_1^T s_1 = \lambda_1$ (car $s_1^T s_1 = \|s_1\|_2^2 = 1$).

Remarques:

- La méthode suppose que $\alpha_1 \neq 0$, i.e $x_0 \notin span\{s_2, \dots, s_n\}$ (sous-espace invariant, engendré par $s_2, \dots, s_n$), ce qui est vrai avec une forte probabilité si x_0 est choisi aléatoirement.
- La vitesse de convergence dépend de $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$ (qui peut être proche de 1 et donc entrainer une convergence très lente). Par exemple, dans les cas suivants, l'analyse de convergence précédente ne marche pas:
  - si A est réelle et la plus grande valeur propre est complexe, alors on a 2 valeurs propres complexes conjuguées telles que $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.
  - si A est orthogonale, alors on a $|\lambda_i| = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

4.3 Puissance inverse

L'algorithme ci-dessous permet de calculer la plus petite valeur propre de A en module.

Algorithm 4.2 Inverse power method

```
x_0 ∈ R^n donné.
k=0
repeat
    x_{k+1} = A^{-1} x_k / ||A^{-1} x_k||_2      ▷ approximation d'un vecteur propre
    λ^{(k+1)} = x_{k+1}^T A x_{k+1}              ▷ approximation de la valeur propre
    k = k + 1
until convergence
```

En général on ne calcule pas explicitement A^{-1} et donc $A^{-1} x_k$ s'obtient par résolution d'un système linéaire $Ay = x_k$ à partir d'une factorisation de A obtenue en début d'algorithme.

Convergence: On a $A = S\ \Lambda\ S^{-1}$ d'où $A^{-1} = S\ \Lambda^{-1}\ S^{-1}$. A^{-1} a donc les mêmes vecteurs propres $s_1, \dots, s_n$ que A, associés aux valeurs propres $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$. On obtient que $x_k = A^{-k} x_0 / \left\| A^{-k} x_0 \right\|_2$ converge vers $\pm s_n$ et donc $x_k^T\ A\ x_k$ converge vers $s_n^T A s_n = \lambda_n$.

Remarque: Dans l'algorithme (4.2), il est possible d'écrire $\lambda^{(k+1)} = x_{k+1}^T\ A^{-1}\ x_{k+1}$ qui converge vers $1/\lambda_n$ et non λ_n. Dans ce cas il faudra penser à inverser le résultat à la fin de l'algorithme pour obtenir λ_n. D'un point de vue calculatoire, pour $k \geq 1$, cela revient à résoudre le système $Ay = x_k$ (pour calculer $A^{-1} x_k$) à l'itération précédente par rapport à l'algorithme (4.2).

Généralisation: On applique la méthode de la puissance à $(A - \sigma I)^{-1}$ afin de calculer la valeur propre la plus proche de σ.

5 Exercices

Exercice 1: système différentiel

Résoudre le système différentiel

$$u'(t) = A\ u(t),$$

où $u = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ (dépendant du temps t) et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2: valeurs/vecteurs propres de matrices particulières

1. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite définie positive si et ssi $\forall x \in \mathbb{R}^n (x \neq 0),\ x^T Ax > 0$. Montrer que dans ce cas ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

2. Montrer que si A est symétrique, alors les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux deux à deux.