

基于MPI的Jacobi迭代算法的并行化

卢可佩, 祝永志

(曲阜师范大学 信息科学与工程学院, 山东 日照 276826)

摘要: Jacobi迭代算法是解线性方程组的最常用的方法, 具有广泛的应用。Jacobi迭代属于计算密集型^[1], 将并行计算技术应用到Jacobi迭代中, 具有重要的意义。通过使用消息传递编程模型mpi提供的向量数据类型和虚拟进程拓扑来实现Jacobi迭代的并行化。

关键词: MPI; Jacobi迭代; 向量数据类型; 虚拟进程拓扑

中图分类号: TP301.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3044(2014)31-7485-03

Parallel of Jacobi Iteration Algorithm Based on MPI

LU Ke-pei, ZHU Yong-zhi

(School of Information Science and Engineering, Qufu Normal University, Rizhao 276826, China)

Abstract: Jacobi iteration algorithm is the most commonly used method of solving linear equations, that has widely application. Jacobi iteration belongs to computationally intensive. The parallel computing technology is applied to the Jacobi iteration, which has the vital significance. Using vector data types and virtual process topology, which are provided by MPI message passing programming model achieves the Jacobi iteration parallelization.

Key words: MPI; Jacobi iteration; vector data types; virtual process topology

Jacobi迭代法是一种常用求解偏微分方程组(Partial Differential Equation, PDE)的算法^[2], 被广泛的应用于许多领域, 特别是高性能计算领域。随着科学计算所涉及的对象越来越复杂多样, 处理问题的规模也越来越大, 单线程串行的Jacobi迭代算法已经无法满足其对实际应用的需求, 因此提高Jacobi迭代算法的计算速度就成为研究Jacobi迭代算法的一个重要方向。近年来并行计算技术的发展为我们提供了提高计算速度的一种新的途径。因此, 将雅克比同并行计算结合起来, 实现Jacobi迭代的并行化, 具有重要的意义。

1 Jacobi迭代算法

Jacobi迭代是计算线性方程组的一种基本方法^[3]。对于求解N阶线性方程组 $Ax=b$, 设方程组 $Ax=b$ 中的A是 $n \times n$ 阶矩阵, x和b都是n维列向量。若系数矩阵A为非奇异的且 $a_{ii} \neq 0, i=1, 2, \dots, n$, 将A分解为: $A=D+L+U$, 其中 $D=\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

将方程组 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i=1, 2, \dots, n$ 乘以 $\frac{1}{a_{ii}}$, 得到等价的方程 $x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j), i=1, 2, \dots, n$ 简记为: 其中 $X=Bx+f, B=I-D^{-1}A=-$

$D^{-1}(L+U), f=D^{-1}b$ 我们称 $\varphi(x)=Bx+f$ 为迭代函数, 任取初始向量 $x=x^{(0)}$, 按照 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 用矩阵运算表示, 完成这一步骤相当于用 L_k 左乘以第k-1步所形成的方程组, 称此方法为Jacobi迭代法。

2 MPI并行编程环境及程序设计

MPI是一个函数库, 而不是一门语言, 它是一种通信协议^[4]。MPI为消息传递和相关操作提供了功能强大的库函数^[5], MPI-1和MPI-2中分别有128个和287个库函数。但是从理论上来说, MPI的所有通信功能都可以用它的6个基本调用来完成^[6,7]。最近几年, MPI-2被推出了。MPI-2相对于MPI-1来说增加了一系列的新特性。在MPI-1中一个程序启动到结束, 是不可以改变进程

收稿日期: 2014-10-15

基金项目: 山东省自然科学基金项目(ZR2013FL015); 山东省研究生教育创新资助计划(SDYY12060)

作者简介: 卢可佩(1990-), 男, 曲阜师范大学信息科学与工程学院硕士研究生, 研究方向为网络与并行计算; 祝永志(1964-), 男, 教授, 曲阜师范大学信息科学与工程学院硕士生导师, 研究方向为网络与并行计算。

本栏目责任编辑: 梁书

的数量的而在MPI-2中是可以的,MPI-2并提供了动态进程创建和管理的各种调用。

3 MPI实现Jacobi迭代

将待处理的数据(二维数组)同时按行和列来均匀分块,比较理想的情况是计算这一问题的并行计算机的处理器也是排列成二维的网格,这样就可以将不同的数据块交给不同的处理器去处理,这是一种自然和直观的并行化思路^[6]。通过虚拟进程拓扑,可无需考虑实际中并行处理机的处理器是如何排列的,都可以实现上面的并行计算模型。所以通过使用mpi提供的向量数据类型和虚拟进程拓扑来实现Jacobi迭代的并行化。

3.1 矩阵数据的分割

设定只有四个处理器可以使用,划分成2*2的网格,每个处理器计算一块数据。假设整个数组的大小为256*256,则均匀划分后每一块的大小为128*128。数据块和处理器阵列的对应关系如图1所示。对于更大的数据块或更多的处理器这里介绍的方法同样适用。所以采用虚拟进程拓扑后,程序就有较好的通用性和可移植性。

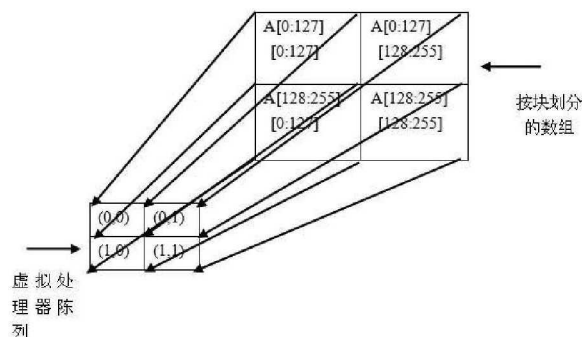


图1 分块数组向虚拟处理器阵列的映射

3.2 数据通信

同时按行和列来均匀分配时,划分的块需要和上下左右的邻居同时通信,为此分块数组的上下左右都预留出需要通信的部分用来存放各个方向邻居通信得到的数据(如图2)。



图2 各处理器上声明的包含通信边界的局部数组

从整体上看处理器阵列上的通讯有四个方向:从左到右、从上到下、从右到左、从下到上。具体到每一个处理器,与处理器阵列外的通信方向可以排除。如果处理器个数更多比如68*68,则处于处理器阵列中间的处理器其四个方向的通信都需要。

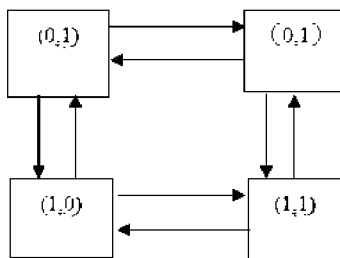


图3 二维网格上各处理器之间的通信关系

具体到不同的通信,在c语言定义的数组中对一行的数据和对一列的数据进行通信是不用的。c语言定义的数组一行的数据是连续存放的,通信可以直接进行。而水平方向的通信,由于是不能连续存放的,不能直接进行。对于水平方向的通信需要定义新的数据类型来表示一列的数据,可以通过同时使用了派生数据类型和虚拟进程拓扑^[9]来实现。

3.3 编写基于MPI的Jacobi迭代算法的并行程序

下面为基于MPI并行化的代码一部分:

```
MPI_Sendrecv(&a[1][1], arysize2, MPI_FLOAT, t, row_tag, &a[arysize2+1][1],
arysize2, MPI_FLOAT, d, r_tag, c2d, &ss);/*向上数据传送*/
MPI_Sendrecv(&a[arysize2][1], arysize2, MPI_FLOAT, d, row_tag, &a[0][1],
arysize2, MPI_FLOAT, t, r_tag, c2d, &ss);/*向下数据传送*/
MPI_Sendrecv(&a[1][1], 1, nt, l, col_tag, &a[1][arysize2+1], 1, nt,
r, col_tag, comm2d, &sts);/*向左数据传送*/
```

```

MPI_Sendrecv( &a[1][arysize2], 1, nt, r, col_tag, &a[1][0], 1, nt, l, col_tag, comm2d, &ss );/*向右数据传送*/
for ( i=left_bound;i<right_bound;i++) for (j=top_bound;j<down_bound;j++)
b[i][j] = (a[i][j+1]+a[i][j-1]+ a[i+1][j]+a[i-1][j])*0.25;
for ( i=left_bound;i<right_bound;i++) for (j=top_bound;j<down_bound;j++)
a[i][j] = b[i][j];}endtime=MPI_Wtime();

```

3.4 实验结果

表1 不同规模方阵的Jacobi迭代时间开销(单位:s)

时间开销	矩阵规模			
	200	500	1000	2000
串行开销	1.5389	9.8923	39.3405	161.7152
并行开销	1.8065	5.6738	16.0179	62.2123
加速比	0.8518	1.7435	2.4560	2.5994

由表1可以看出,随着矩阵规模的不断扩大,Jacobi迭代算法并行化的优势逐渐显示出来。在此定义:加速比=串行开销/并行开销。由表1发现加速比^[9]由矩阵规模为200*200时的0.8518,增加到了2000*2000时的2.5994。加速比的数值越大表明Jacobi算法并行化的优势与串行相比更为明显。

4 结束语

在很多领域中,很多问题的解决常常归结到解线性方程组,如电磁场的模拟分析、热传输分析、机械和建筑结构的设计和计算等等^[10]。但是往往来源于实际问题的方程组的规模是很大的,利用传统的串行Jacobi迭代算法来求解,速度很慢。该文基于MPI将Jacobi迭代算法并行化,通过实验对比可以发现在需要求解的方程组规模较大时,提高了算法的效率。

参考文献:

- [1] 狄鹏,胡长军,李建江. GPU上高效Jacobi迭代算法的研究与实现[J]. 小型微型计算机系统, 2012(9): 1962-1967.
- [2] 吴玫华. 在GPU上实现Jacobi迭代法的分析与设计[J]. 电子设计工程, 2012(10): 28-30.
- [3] Barry Wilkinson, Michael Allen. Parallel Programming[M]. Beijing: China Machine Press, 2005.
- [4] 陈国良. 并行算法的设计与分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [5] 郭燕莎. 组合算法的研究与实现[D]. 天津: 天津工业大学, 2008.
- [6] 许丽, 周南, 徐泳. 基于MPI的二维稳态温度场的并行计算[J]. 计算机应用与软件, 2012(11): 52-55.
- [7] 张帆. 基于MPI的并行计算可视化的研究[D]. 中国地质大学(北京), 2007.
- [8] 游佐勇. OpenMP并行编程模型与性能优化方法的研究及应用[D]. 成都: 成都理工大学, 2011.
- [9] 吴华平. 基于多核处理器的数值算法并行优化研究[D]. 大连: 辽宁师范大学, 2011.
- [10] 王磊. 基于MPI的串行程序自动并行化的应用研究[D]. 淮南: 安徽理工大学, 2013.

(上接第7479页)

参考文献:

- [1] 李鸿燕, 张立毅. 基于单片机控制的甲烷浓度报警监控仪[J]. 电脑开发与应用, 2002, 15(8): 29-30.
- [2] 朱经国. 可燃气体监测报警器的检定[J]. 中国计量, 2001(62): 53-53.
- [3] 王幸之. 单片机应用系统抗干扰技术[M]. 北京: 航空航天大学出版社, 1999.
- [4] 孙彦景, 钱建生, 李世银, 等. 煤矿物联网系统理论与关键技术[J]. 煤炭科学技术, 2011(2).
- [5] 王建, 王汝琳, 王学民, 等. 基于无线传感器网络的煤矿瓦斯监测系统[J]. 矿山机械, 2007(2).
- [6] 徐长安. 基于AT89C52单片机的智能型瓦斯检测仪的设计[J]. 中州煤炭, 2007(3).
- [7] 付华, 池继辉, 乔德浩. 基于随机共振现象的瓦斯检测方法研究[J]. 煤矿机电, 2010(3).
- [8] 黄庆南, 蔡启仲, 章帆. 基于ZigBee和GPRS煤矿安全监测系统的设计与实现[J]. 煤炭技术, 2011(8).