

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ZERO-TO-HERO PROJECT GUIDE
CẤU TRÚC DỮ LIỆU VÀ GIẢI THUẬT

ĐỀ TÀI:
**MÔ PHỎNG VŨ TRỤ 3D (N-BODY
SIMULATION)**
**THUẬT TOÁN BARNES-HUT VÀ CẤU TRÚC
OCTREE**

Nhóm thực hiện: [Tên Nhóm Của Bạn]

Thành viên:

1. [Tên thành viên 1] - Trưởng nhóm (Algorithm Lead)
2. [Tên thành viên 2] - Physics & Math Lead
3. [Tên thành viên 3] - Graphics & Optimization Lead

Giảng viên hướng dẫn: [Tên Giảng Viên]

Học kỳ 2 - Năm học 2025-2026

Mục lục

Phần I

Tổng quan và Mục tiêu Dự án

Chương 1

Giới thiệu Bài toán N-Body

1.1 Bài toán N-Body là gì?

Bài toán N-Body là bài toán **kinh điển** trong vật lý tính toán và thiên văn học. Mục tiêu là mô phỏng sự tương tác hấp dẫn giữa N vật thể (thiên thể, hạt, hoặc ngôi sao) trong không gian 3D.

[title=💡 Úng dụng thực tế]

- **Thiên văn học:** Mô phỏng sự hình thành thiên hà, va chạm giữa các thiên hà
- **Vật lý hạt:** Mô phỏng plasma, động lực học phân tử
- **Game Development:** Hệ thống particle nâng cao, hiệu ứng vũ trụ
- **Machine Learning:** Graph Neural Networks cho physical simulation

1.2 Vấn đề với Brute-Force

Với phương pháp tính toán trực tiếp (Brute-force), mỗi vật thể phải tính lực tác dụng từ **tất cả** ($N - 1$) vật thể còn lại:

$$\text{Số phép tính} = N \times (N - 1) = N^2 - N \approx O(N^2) \quad (1.1)$$

Bảng 1.1: So sánh hiệu năng theo số lượng hạt

Số hạt N	Brute-force $O(N^2)$	Barnes-Hut $O(N \log N)$	Tăng tốc
1,000	1,000,000	10,000	100x
10,000	100,000,000	133,000	750x
100,000	10,000,000,000	1,660,000	6,000x

⚠ Quan trọng

Với $N = 10,000$ và FPS mục tiêu = 60, Brute-force cần tính 6×10^9 phép tính/giây. Đây là **không khả thi** với CPU thông thường!

1.3 Giải pháp: Thuật toán Barnes-Hut

Năm 1986, Josh Barnes và Piet Hut công bố thuật toán giảm độ phức tạp xuống $O(N \log N)$ bằng cách sử dụng **cấu trúc dữ liệu cây** (Octree cho 3D).

Ý tưởng cốt lõi: Nếu một cụm sao ở *đủ xa*, ta có thể coi cả cụm đó như **một điểm khối lượng duy nhất** đặt tại trọng tâm.

1.4 Mục tiêu của Đồ án

1. Mục tiêu kỹ thuật:

- Cài đặt Octree và thuật toán Barnes-Hut từ đầu bằng C++
- Đạt hiệu năng real-time với $N \geq 10,000$ hạt
- Tích hợp đồ họa 3D với Raylib

2. Mục tiêu học tập:

- Nắm vững Con trỏ (Pointers) và Quản lý bộ nhớ động
- Hiểu sâu Dệ quy (Recursion) qua Tree traversal
- Phân tích độ phức tạp thuật toán (Big-O)

3. Mục tiêu mở rộng (nếu còn thời gian):

- Tối ưu hóa với OpenMP (Parallel Computing)
- Hiệu ứng đồ họa nâng cao (Bloom, Trails)

Phần II

Lộ trình Học tập Cấp tốc (Just-in-Time Learning)

Chương 2

Pointers & Memory Management

2.1 Tại sao Con trỏ quan trọng cho Octree?

Octree là cấu trúc dữ liệu **độ quy** - mỗi node có thể chứa tối đa 8 node con. Để biểu diễn mối quan hệ này, ta **bắt buộc** phải dùng con trỏ.

⚠ Quan trọng

Nếu không hiểu con trỏ, bạn sẽ gặp:

- **Segmentation Fault:** Truy cập vùng nhớ không hợp lệ
- **Memory Leak:** Quên giải phóng bộ nhớ, chương trình ngốn RAM
- **Dangling Pointer:** Trỏ đến vùng nhớ đã bị xóa

2.2 Kiến thức cần nắm

2.2.1 Con trỏ cơ bản

```
1 // 1. Khai bao con tro
2 int x = 10;
3 int* ptr = &x; // ptr LUU DIA CHI cua x
4
5 // 2. Truy cap gia tri qua con tro (Dereference)
6 int value = *ptr; // value = 10
7
8 // 3. nullptr - con tro khong tro den dau ca
9 int* safePtr = nullptr; // LUON khoi tao con tro = nullptr
10
11 // 4. Kiem tra truoc khi dung
12 if (ptr != nullptr) {
13     *ptr = 20; // An toan
14 }
```

Listing 2.1: Pointer Basics

2.2.2 Dynamic Memory (Heap vs Stack)

```

1 // STACK: Tu dong giao phong khi ra khoi scope
2 void stackExample() {
3     int arr[100]; // 100 int tren Stack
4 } // arr tu dong mat khi ham ket thuc
5
6 // HEAP: Phai TU TAY giao phong
7 void heapExample() {
8     // Cap phat 1 object
9     int* single = new int(42);
10
11    // Cap phat mang
12    int* arr = new int[1000];
13
14    // !!! PHAI GIAI PHONG !!!
15    delete single; // Xoa 1 object
16    delete[] arr; // Xoa mang (chu y [])
17 }

```

Listing 2.2: Dynamic Memory Allocation

💡 Mẹo

Quy tắc vàng: Mỗi `new` phải có một `delete` tương ứng!

Trong Modern C++, ưu tiên dùng `std::unique_ptr` hoặc `std::shared_ptr` để tự động quản lý bộ nhớ.

2.2.3 Con trỏ trong Struct/Class

```

1 // Day la ly do Octree can con tro
2 struct OctreeNode {
3     // Moi node co the co 8 con
4     // Neu dung object truc tiep -> VO HAN (infinite recursion)
5     // OctreeNode children[8]; // LOI! Khong the dinh nghia
6
7     // Phai dung CON TRO
8     OctreeNode* children[8]; // OK! Chi luu DIA CHI
9
10    OctreeNode() {
11        // Khoi tao tat ca con tro = nullptr
12        for (int i = 0; i < 8; i++) {
13            children[i] = nullptr;
14        }
15    }
16
17    ~OctreeNode() {
18        // Destructor: Giao phong tat ca node con (DE QUY!)
19        for (int i = 0; i < 8; i++) {
20            if (children[i] != nullptr) {
21                delete children[i]; // Gọi destructor của con
22                children[i] = nullptr;
23            }
24        }
25    }
26 };

```

Listing 2.3: Pointers in OctreeNode

2.3 Bài tập thực hành

1. Viết một Linked List đơn giản với các thao tác: `insert`, `remove`, `print`
2. Viết Binary Search Tree với: `insert`, `search`, `inorderTraversal`
3. Đảm bảo không có memory leak bằng cách chạy Valgrind (Linux) hoặc Visual Studio Memory Profiler

Chương 3

Recursion (Đệ quy)

3.1 Đệ quy là gì và tại sao cần cho Octree?

[title=<h> Định nghĩa Đệ quy] Đệ quy là kỹ thuật trong đó một hàm **tự gọi chính nó** với input nhỏ hơn cho đến khi đạt **điều kiện dừng** (base case).

Octree dùng đệ quy ở đâu?

1. **Insert:** Khi chèn body vào cây, nếu node đã có body, ta chia node thành 8 con và chèn đệ quy.
2. **ComputeMass:** Tính tổng khối lượng từ lá lên gốc (bottom-up).
3. **CalculateForce:** Duyệt cây từ gốc, quyết định đi sâu hay xấp xỉ.
4. **Destructor:** Xóa cây từ gốc, đệ quy xóa tất cả con.

3.2 Cấu trúc của hàm đệ quy

```
1 void recursiveFunction(Input input) {  
2     // 1. BASE CASE - Dieu kien dung  
3     //     Khong co base case = STACK OVERFLOW!  
4     if /* dieu kien dung */) {  
5         return; // hoac return gia tri  
6     }  
7  
8     // 2. RECURSIVE CASE - Xu ly va goi lai chinh minh  
9     //     Input PHAI nho hon de tien ve base case  
10    recursiveFunction(smallerInput);  
11}  
12  
13 // Vi du: Tinh giai thua  
14 int factorial(int n) {  
15     // Base case  
16     if (n <= 1) return 1;  
17  
18     // Recursive case: n! = n * (n-1)!  
19     return n * factorial(n - 1);  
}
```

20 }

Listing 3.1: Anatomy of Recursion

3.3 Đệ quy duyệt cây (Tree Traversal)

```

1 struct TreeNode {
2     int value;
3     TreeNode* left;
4     TreeNode* right;
5 };
6
7 // Pre-order: Xu ly node TRUOC khi xuong con
8 // Dung cho: In cay, copy cay
9 void preorder(TreeNode* node) {
10     if (node == nullptr) return; // Base case
11
12     process(node);           // Xu ly truoc
13     preorder(node->left);   // Xuong trai
14     preorder(node->right);  // Xuong phai
15 }
16
17 // Post-order: Xu ly node SAU khi xuong con
18 // Dung cho: Tinh toan tu duoi len (Center of Mass!)
19 void postorder(TreeNode* node) {
20     if (node == nullptr) return; // Base case
21
22     postorder(node->left);   // Xuong trai truoc
23     postorder(node->right);  // Xuong phai
24     process(node);           // Xu ly SAU CUNG
25 }
26
27 // In-order: Trai -> Node -> Phai (cho BST)
28 void inorder(TreeNode* node) {
29     if (node == nullptr) return;
30     inorder(node->left);
31     process(node);
32     inorder(node->right);
33 }
```

Listing 3.2: Tree Traversal Methods

⚠ Quan trọng

Octree dùng Post-order để tính Center of Mass!

Lý do: Phải biết khối lượng của tất cả node con **trước** khi tính khối lượng của node cha.

3.4 Ví dụ: Đệ quy trong Octree

```

1 void OctreeNode::computeMassDistribution() {
2     // BASE CASE 1: Node rong
3     if (isExternal && body == nullptr) {
```

```

4     totalMass = 0.0;
5     return;
6 }
7
8 // BASE CASE 2: La (External node) co body
9 if (isExternal && body != nullptr) {
10     totalMass = body->mass;
11     centerOfMass = body->pos;
12     return;
13 }
14
15 // RECURSIVE CASE: Node trong (Internal node)
16 // Buoc 1: Tinh khai luong cua tat ca con truoc
17 for (int i = 0; i < 8; i++) {
18     if (children[i] != nullptr) {
19         children[i]->computeMassDistribution(); // DE QUY!
20     }
21 }
22
23 // Buoc 2: Tong hop tu cac con
24 totalMass = 0.0;
25 centerOfMass = Vec3(0, 0, 0);
26
27 for (int i = 0; i < 8; i++) {
28     if (children[i] != nullptr && children[i]->totalMass > 0) {
29         double childMass = children[i]->totalMass;
30         Vec3 childCOM = children[i]->centerOfMass;
31
32         // Cong thuc trong tam: COM = sum(m_i * r_i) / sum(m_i)
33         centerOfMass = centerOfMass + childCOM * childMass;
34         totalMass += childMass;
35     }
36 }
37
38 if (totalMass > 0) {
39     centerOfMass = centerOfMass / totalMass;
40 }
41 }
```

Listing 3.3: Recursive Mass Computation

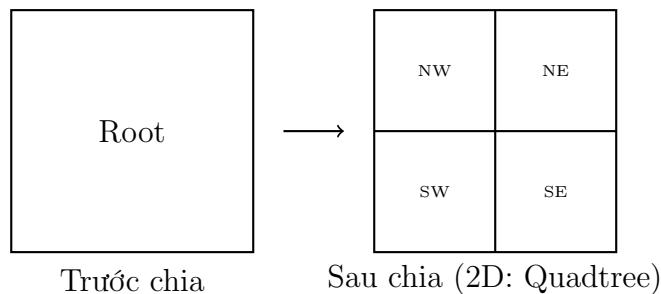
Chương 4

Octree Data Structure

4.1 Khái niệm Octree

[title=❓ Octree là gì?] Octree (Cây Bát phân) là cấu trúc dữ liệu cây dùng để **phân hoạch không gian 3D**.

Mỗi node đại diện cho một **hình lập phương** (cube) và có thể chia thành **8 hình lập phương con** (octants).



Hình 4.1: Minh họa phân chia không gian (2D cho đơn giản)

4.2 8 Octants trong 3D

Mỗi octant được xác định bởi vị trí tương đối với tâm của node cha:

Bảng 4.1: 8 Octants và điều kiện xác định

Index	Tên	X	Y	Z
0	Bottom-South-West	< center	< center	< center
1	Bottom-South-East	\geq center	< center	< center
2	Bottom-North-West	< center	\geq center	< center
3	Bottom-North-East	\geq center	\geq center	< center
4	Top-South-West	< center	< center	\geq center
5	Top-South-East	\geq center	< center	\geq center
6	Top-North-West	< center	\geq center	\geq center
7	Top-North-East	\geq center	\geq center	\geq center

```

1 // Tinh chi so octant (0-7) cho mot diem
2 int getOctantIndex(const Vec3& point, const Vec3& nodeCenter) {
3     int index = 0;
4
5     // Bit 0: X >= center.x
6     if (point.x >= nodeCenter.x) index |= 1;
7
8     // Bit 1: Y >= center.y
9     if (point.y >= nodeCenter.y) index |= 2;
10
11    // Bit 2: Z >= center.z
12    if (point.z >= nodeCenter.z) index |= 4;
13
14    return index; // Ket qua: 0 den 7
15 }

```

Listing 4.1: Calculate Octant Index

4.3 Hai loại Node trong Octree

1. External Node (Lá):

- Không có node con
- Chứa **tối đa 1 body** (hoặc rỗng)
- Đây là điểm dừng của đệ quy

2. Internal Node (Trong):

- Có ít nhất 1 node con
- **Không chứa body trực tiếp**
- Lưu trữ **totalMass** và **centerOfMass** (tổng hợp từ con)

Chương 5

Big-O Notation và Phân tích Độ phức tạp

5.1 Big-O là gì?

Big-O notation mô tả **tốc độ tăng trưởng** của thời gian chạy hoặc bộ nhớ khi input tăng.

Bảng 5.1: Các độ phức tạp phổ biến

Big-O	Tên	Ví dụ
$O(1)$	Constant	Truy cập array bằng index
$O(\log N)$	Logarithmic	Binary Search
$O(N)$	Linear	Duyệt mảng 1 lần
$O(N \log N)$	Linearithmic	Barnes-Hut , Merge Sort
$O(N^2)$	Quadratic	Brute-force N-Body , Bubble Sort
$O(2^N)$	Exponential	Brute-force Traveling Salesman

5.2 Tại sao Barnes-Hut là $O(N \log N)$?

Phân tích:

- Xây dựng Octree:** Chèn N body, mỗi lần chèn đi qua $O(\log N)$ mức $\Rightarrow O(N \log N)$
- Tính lực cho 1 body:** Duyệt cây, trung bình thăm $O(\log N)$ node (vì nhiều cụm được xấp xỉ)
- Tính lực cho N body:** $N \times O(\log N) = O(N \log N)$

Mẹo

Với $N = 10,000$:

- $O(N^2) = 100,000,000$ operations
- $O(N \log N) \approx 10,000 \times 13.3 = 133,000$ operations
- **Tăng tốc: 750 lần!**

5.3 So sánh trực quan

```
1 // BRUTE-FORCE: O(N^2)
2 // Moi body phai xet TAT CA body khac
3 for (int i = 0; i < N; i++) {
4     for (int j = 0; j < N; j++) { // N iterations
5         if (i != j) {
6             bodies[i].force += calculatePairForce(bodies[i], bodies[j]);
7         }
8     }
9 }
10 // Tong: N * N = N^2 lan tinh
11
12 // BARNES-HUT: O(N log N)
13 // Moi body chi xet ~log(N) "cum"
14 for (int i = 0; i < N; i++) {
15     // calculateForce duyet cay, nhieu node duoc SKIP
16     bodies[i].force = root->calculateForce(&bodies[i], theta);
17 }
18 // Trung binh: N * log(N) lan tinh
```

Listing 5.1: Brute-force vs Barnes-Hut

Phần III

Lộ trình 8 Tuần (Agile Sprints)

Chương 6

Sprint Planning Overview

Bảng 6.1: Tổng quan 8 Tuần

Tuần	Focus	Sunday Milestone
1	Setup & C++ Basics	Cửa sổ Raylib với hình lập phương quay
2	Brute-Force Physics	500 sao di chuyển theo hấp dẫn
3	Octree Structure	Khung dây Octree hiển thị trên màn hình
4	Octree Insert & Mass	Debug: In totalMass == sum of all bodies
5	Barnes-Hut Force	5,000 sao chạy real-time với BH
6	Optimization & Polish	10,000 sao + FPS stable > 30
7	Visual Effects	Màu sao theo khối lượng + Camera smooth
8	Report & Demo	Video demo + Báo cáo hoàn chỉnh

Chương 7

Week 1: Environment Setup & Raylib Basics

7.1 Focus: Môi trường phát triển và Đồ họa 3D cơ bản

7.1.1 Tasks

1. Cài đặt môi trường:

- Visual Studio 2022 hoặc VS Code + MinGW
- Raylib 4.5+ (download từ raylib.com)
- Git để quản lý version

2. Học Raylib basics:

- InitWindow(), CloseWindow()
- BeginDrawing(), EndDrawing()
- Camera3D và điều khiển camera

3. Code Vec3 struct với operator overloading

4. Vẽ hình 3D cơ bản: Cube, Sphere

7.1.2 Milestone: Spinning Cube

```
1 #include "raylib.h"
2
3 int main() {
4     // Khoi tao cua so 1280x720
5     InitWindow(1280, 720, "N-Body Simulation - Week 1");
6     SetTargetFPS(60);
7
8     // Thiet lap Camera 3D
9     Camera3D camera = { 0 };
10    camera.position = (Vector3){ 10.0f, 10.0f, 10.0f };
11    camera.target = (Vector3){ 0.0f, 0.0f, 0.0f };
12    camera.up = (Vector3){ 0.0f, 1.0f, 0.0f };
13    camera.fovy = 45.0f;
14    camera.projection = CAMERA_PERSPECTIVE;
```

```

15
16     float rotation = 0.0f;
17
18     while (!WindowShouldClose()) {
19         // Update
20         rotation += 1.0f;
21         UpdateCamera(&camera, CAMERA_ORBITAL); // Cho phép xoay camera
22         bang chuot
23
24         // Draw
25         BeginDrawing();
26             ClearBackground(BLACK);
27
28             BeginMode3D(camera);
29                 // Vẽ hình lập phương quay
30                 DrawCubeWires((Vector3){0, 0, 0}, 2.0f, 2.0f, 2.0f, GREEN)
31                 ;
32                 DrawGrid(10, 1.0f);
33             EndMode3D();
34
35             DrawText("Week 1: 3D Cube Spinning!", 10, 10, 20, WHITE);
36             DrawFPS(10, 40);
37         EndDrawing();
38     }
39
40     CloseWindow();
41     return 0;
42 }
```

Listing 7.1: Week 1 Milestone - main.cpp

Kết quả mong đợi: Một cửa sổ đen với lưới và hình lập phương wireframe. Có thể xoay camera bằng chuột.

Chương 8

Week 2: Brute-Force N-Body Implementation

8.1 Focus: Vật lý cơ bản và Brute-Force Algorithm

8.1.1 Tasks

1. Implement Body struct:

- Position, Velocity, Acceleration, Mass
- Hàm update(dt) để cập nhật vị trí

2. Implement Newton's Gravity:

- Công thức lực hấp dẫn với Softening
- Tính tổng lực từ tất cả body khác

3. Galaxy Initialization:

- Tạo N body ngẫu nhiên theo hình cầu hoặc đĩa
- Vận tốc ban đầu để tạo chuyển động xoay

4. Render bodies như các điểm sáng

8.1.2 Code: Body Struct

```
1 #pragma once
2 #include "Vec3.hpp"
3 #include "raylib.h"
4
5 struct Body {
6     Vec3 pos;           // Vi tri
7     Vec3 vel;           // Van toc
8     Vec3 acc;           // Gia toc (tinh moi frame)
9     double mass;        // Khoi luong
10    Color color;       // Mau hien thi
11
12    // Constructor
13    Body(Vec3 p = Vec3(), Vec3 v = Vec3(), double m = 1.0)
```

```
14     : pos(p), vel(v), acc(Vec3()), mass(m), color(WHITE) {}
15
16 // Cap nhat vi tri bang Euler Integration
17 void update(double dt) {
18     vel = vel + acc * dt;      // v = v + a*dt
19     pos = pos + vel * dt;      // x = x + v*dt
20     acc = Vec3();              // Reset gia toc cho frame sau
21 }
22
23 // Ve body len man hinh
24 void draw() const {
25     // Chuyen Vec3 sang Vector3 cua Raylib
26     Vector3 rlPos = { (float)pos.x, (float)pos.y, (float)pos.z };
27     DrawSphere(rlPos, 0.05f, color); // Ve hinh cau nho
28 }
29 };
```

Listing 8.1: Body.hpp

8.1.3 Code: Brute-Force Force Calculation

```

1 #include <vector>
2 #include "Body.hpp"
3
4 // Hang so vat ly
5 const double G = 6.67430e-11; // Hang so hap dan (SI units)
6 const double SOFTENING = 0.1; // Tranh chia cho 0
7
8 // Tinh luc hap dan giua 2 body
9 Vec3 calculatePairForce(const Body& a, const Body& b) {
10     Vec3 r = b.pos - a.pos; // Vector tu a den b
11     double distSq = r.x*r.x + r.y*r.y + r.z*r.z;
12
13     // Them softening de tranh vo cuc khi dist -> 0
14     double dist = sqrt(distSq + SOFTENING * SOFTENING);
15
16     // F = G * m1 * m2 / r^2
17     // a = F / m1 = G * m2 / r^2
18     // Huong: r / |r| (normalized)
19     double forceMagnitude = G * b.mass / (dist * dist * dist);
20
21     return r * forceMagnitude; // Vec3 acceleration
22 }
23
24 // BRUTE-FORCE: O(N^2)
25 void updateAllBodies_BruteForce(std::vector<Body>& bodies, double dt) {
26     int N = bodies.size();
27
28     // Tinh gia toc cho moi body
29     for (int i = 0; i < N; i++) {
30         Vec3 totalAcc;
31         for (int j = 0; j < N; j++) {
32             if (i != j) {
33                 totalAcc = totalAcc + calculatePairForce(bodies[i], bodies
34 [j]);
35             }
36         }
37     }
38 }
```

```
36     bodies[i].acc = totalAcc;
37 }
38
39 // Cap nhat vi tri
40 for (int i = 0; i < N; i++) {
41     bodies[i].update(dt);
42 }
43 }
```

Listing 8.2: Physics.cpp

8.1.4 Milestone: 500 Stars Moving

Kết quả mong đợi: 500 điểm sáng di chuyển và bắt đầu tụ lại với nhau do lực hấp dẫn. FPS có thể thấp (20-30) - đây là bình thường cho Brute-force!

Chương 9

Week 3: Octree Structure & Visualization

9.1 Focus: Xây dựng cấu trúc Octree cơ bản

9.1.1 Tasks

1. Implement `OctreeNode` class:
 - Constructor với center và size
 - Mảng 8 con trỏ children
 - Destructor đệ quy
2. Implement `getOctantIndex()`: Xác định body thuộc octant nào
3. Implement `subdivide()`: Chia node thành 8 con
4. Visual Debug: Vẽ wireframe của tất cả node

9.1.2 Code: OctreeNode Class

```
1 #pragma once
2 #include "Vec3.hpp"
3 #include "Body.hpp"
4 #include <array>
5
6 class OctreeNode {
7 public:
8     // ===== MEMBER VARIABLES =====
9
10    Vec3 center;           // Tam cua hinh lap phuong
11    double halfSize;        // Nua canh (de tinh bounds)
12
13    // == Du lieu vat ly (dung cho Barnes-Hut) ==
14    double totalMass;       // Tong khoi luong cua node va cac con
15    Vec3 centerOfMass;      // Trong tam khoi luong
16
17    // == Cau truc cay ==
18    Body* body;             // Chi dung khi la External Node (la)
19    std::array<OctreeNode*, 8> children; // 8 con tro den node con
```

```

20     bool isExternal;           // true = la (khong co con)
21
22 // ===== CONSTRUCTOR/DESTRUCTOR =====
23
24
25 OctreeNode(Vec3 c, double size)
26     : center(c), halfSize(size / 2.0),
27     totalMass(0.0), centerOfMass(Vec3()),
28     body(nullptr), isExternal(true)
29 {
30     // Khoi tao tat ca con tro children = nullptr
31     for (int i = 0; i < 8; i++) {
32         children[i] = nullptr;
33     }
34 }
35
36 // Destructor DE QUY - xoa tat ca node con
37 ~OctreeNode() {
38     for (int i = 0; i < 8; i++) {
39         if (children[i] != nullptr) {
40             delete children[i]; // Gọi destructor của con
41             children[i] = nullptr;
42         }
43     }
44 }
45
46 // ===== METHODS =====
47
48 // Xac dinh octant index (0-7) cho mot diem
49 int getOctantIndex(const Vec3& point) const {
50     int index = 0;
51     if (point.x >= center.x) index |= 1; // Bit 0
52     if (point.y >= center.y) index |= 2; // Bit 1
53     if (point.z >= center.z) index |= 4; // Bit 2
54     return index;
55 }
56
57 // Tinh tam cua octant thu i
58 Vec3 getOctantCenter(int i) const {
59     double offset = halfSize / 2.0;
60     return Vec3(
61         center.x + ((i & 1) ? offset : -offset),
62         center.y + ((i & 2) ? offset : -offset),
63         center.z + ((i & 4) ? offset : -offset)
64     );
65 }
66
67 // Chia node thanh 8 con
68 void subdivide() {
69     double childSize = halfSize; // Moi con co kich thuoc = nua cha
70     for (int i = 0; i < 8; i++) {
71         Vec3 childCenter = getOctantCenter(i);
72         children[i] = new OctreeNode(childCenter, childSize);
73     }
74     isExternal = false; // Khong con la la nua
75 }
76
77 // INSERT - Se implement o Week 4

```

```

78     void insert(Body* newBody);
79
80     // COMPUTE MASS - Se implement o Week 4
81     void computeMassDistribution();
82
83     // CALCULATE FORCE - Se implement o Week 5
84     Vec3 calculateForce(const Body* target, double theta, double G, double
85     softening);
86
87     // Ve wireframe de debug
88     void drawWireframe(Color color) const {
89         float s = (float)halfSize;
90         Vector3 c = { (float)center.x, (float)center.y, (float)center.z };
91         DrawCubeWires(c, s*2, s*2, s*2, color);
92
93         // Ve de quy cac con
94         if (!isExternal) {
95             for (int i = 0; i < 8; i++) {
96                 if (children[i] != nullptr) {
97                     children[i]->drawWireframe(color);
98                 }
99             }
100        }
101    };

```

Listing 9.1: OctreeNode.hpp

9.1.3 Milestone: Octree Wireframe Visible

Kết quả mong đợi: Các hình lập phương wireframe hiển thị, thể hiện cấu trúc phân cấp của Octree. Node có body sẽ được chia nhỏ hơn.

Chương 10

Week 4: Octree Insert & Mass Computation

10.1 Focus: Hoàn thiện Octree với Insert và ComputeMass

10.1.1 Tasks

1. Implement `insert(Body*)`:

- Xử lý 3 trường hợp: Node rỗng, Node có body, Node có con
- Logic để quy chia nhỏ khi cần

2. Implement `computeMassDistribution()`:

- Duyệt Post-order (con trước, cha sau)
- Tính totalMass và centerOfMass

3. Debug & Verify:

- In ra `root->totalMass`
- Phải bằng tổng khối lượng tất cả body!

10.1.2 Code: Insert Algorithm (Core of Octree)

```
1 void OctreeNode::insert(Body* newBody) {
2     // ===== CASE 1: External node va rong =====
3     // Chi can gan body vao
4     if (isExternal && body == nullptr) {
5         body = newBody;
6         return;
7     }
8
9     // ===== CASE 2: External node DA CO body =====
10    // Phai chia thanh 8 con, roi chen ca 2 body vao
11    if (isExternal && body != nullptr) {
12        // Buoc 1: Chia node hien tai
13        subdivide();
14
15        // Buoc 2: Chen body CU vao octant tuong ung
```

```

16     Body* oldBody = body;
17     body = nullptr; // Node nay khong con la la nua
18
19     int oldIndex = getOctantIndex(oldBody->pos);
20     children[oldIndex]->insert(oldBody); // DE QUY!
21
22     // Buoc 3: Chen body MOI vao octant tuong ung
23     int newIndex = getOctantIndex(newBody->pos);
24     children[newIndex]->insert(newBody); // DE QUY!
25
26     return;
27 }
28
29 // ===== CASE 3: Internal node (da co con) =====
30 // Chi can tim octant dung va chen de quy
31 int index = getOctantIndex(newBody->pos);
32
33 // Tao node con neu chua ton tai
34 if (children[index] == nullptr) {
35     Vec3 childCenter = getOctantCenter(index);
36     children[index] = new OctreeNode(childCenter, halfSize);
37 }
38
39 children[index]->insert(newBody); // DE QUY!
40 }
```

Listing 10.1: OctreeNode::insert()

10.1.3 Code: Compute Mass Distribution

```

1 void OctreeNode::computeMassDistribution() {
2     // ===== BASE CASE 1: Node rong =====
3     if (isExternal && body == nullptr) {
4         totalMass = 0.0;
5         centerOfMass = Vec3();
6         return;
7     }
8
9     // ===== BASE CASE 2: La co body =====
10    if (isExternal && body != nullptr) {
11        totalMass = body->mass;
12        centerOfMass = body->pos;
13        return;
14    }
15
16    // ===== RECURSIVE CASE: Node trong =====
17    // POST-ORDER: Tinh con truoc, cha sau
18
19    // Buoc 1: Goi de quy cho tat ca con
20    for (int i = 0; i < 8; i++) {
21        if (children[i] != nullptr) {
22            children[i]->computeMassDistribution();
23        }
24    }
25
26    // Buoc 2: Tong hop tu cac con
27    totalMass = 0.0;
```

```

28 Vec3 weightedSum = Vec3();
29
30 for (int i = 0; i < 8; i++) {
31     if (children[i] != nullptr && children[i]->totalMass > 0) {
32         double m = children[i]->totalMass;
33         Vec3 com = children[i]->centerOfMass;
34
35         weightedSum = weightedSum + com * m;
36         totalMass += m;
37     }
38 }
39
40 // Bước 3: Tính trọng tâm
41 if (totalMass > 0) {
42     centerOfMass = weightedSum / totalMass;
43 }
44 }
```

Listing 10.2: OctreeNode::computeMassDistribution()

10.1.4 Milestone: Debug Verification

```

1 // Trong main loop, sau khi build tree:
2 double totalBodyMass = 0.0;
3 for (const auto& b : bodies) {
4     totalBodyMass += b.mass;
5 }
6
7 root->computeMassDistribution();
8
9 std::cout << "Sum of body masses: " << totalBodyMass << std::endl;
10 std::cout << "Root totalMass: " << root->totalMass << std::endl;
11 std::cout << "MATCH: " << (abs(totalBodyMass - root->totalMass) < 0.001 ?
    "YES" : "NO") << std::endl;
```

Listing 10.3: Verification Code

Kết quả mong đợi: Console in ra "MATCH: YES". Nếu không, có bug trong insert hoặc computeMass!

Chương 11

Week 5: Barnes-Hut Force Calculation

11.1 Focus: Thuật toán Barnes-Hut hoàn chỉnh

11.1.1 Tasks

1. Implement calculateForce():

- Kiểm tra Multipole Acceptance Criterion ($s/d < \theta$)
- Nếu đủ xa: dùng centerOfMass
- Nếu quá gần: dẽ quy vào con

2. Thay thế Brute-force bằng Barnes-Hut trong main loop

3. Benchmark: So sánh FPS giữa 2 phương pháp

11.1.2 Code: Barnes-Hut Force Calculation

```
1 Vec3 OctreeNode::calculateForce(const Body* target, double theta,
2                                 double G, double softening) {
3     // ===== CASE 1: Node rong =====
4     if (totalMass == 0.0) {
5         return Vec3(); // Không có lực
6     }
7
8     // ===== CASE 2: Lá với 1 body =====
9     if (isExternal && body != nullptr) {
10        // Không tính lực len chính nó
11        if (body == target) {
12            return Vec3();
13        }
14
15        // Tính lực trực tiếp
16        Vec3 r = body->pos - target->pos;
17        double distSq = r.x*r.x + r.y*r.y + r.z*r.z;
18        double dist = sqrt(distSq + softening * softening);
19
20        //  $a = G * m / r^2 * direction$ 
21        double magnitude = G * body->mass / (dist * dist * dist);
22        return r * magnitude;
23    }
24}
```

```

25 // ===== CASE 3: Node trong - BARNES-HUT LOGIC =====
26 Vec3 r = centerOfMass - target->pos;
27 double distSq = r.x*r.x + r.y*r.y + r.z*r.z;
28 double dist = sqrt(distSq);
29
30 // Kich thuoc node
31 double s = halfSize * 2.0;
32
33 // *** MULTIPOLE ACCEPTANCE CRITERION ***
34 // Neu s/d < theta, cum nay "du xa" de xap xi
35 if (dist > 0 && (s / dist) < theta) {
36     // Dung centerOfMass va totalMass de tinh
37     double distSoftened = sqrt(distSq + softening * softening);
38     double magnitude = G * totalMass / (distSoftened * distSoftened *
39     distSoftened);
40     return r * magnitude;
41 }
42
43 // Neu khong du xa, phai di sau vao cac con
44 Vec3 totalForce;
45 for (int i = 0; i < 8; i++) {
46     if (children[i] != nullptr) {
47         totalForce = totalForce + children[i]->calculateForce(
48             target, theta, G, softening
49         ); // DE QUY!
50     }
51 }
52
53 return totalForce;
}

```

Listing 11.1: OctreeNode::calculateForce()

11.1.3 Code: Main Loop with Barnes-Hut

```

1 // Constants
2 const double THETA = 0.5;          // Accuracy parameter
3 const double G = 1.0;              // Simplified gravity constant
4 const double SOFTENING = 0.1;
5 const double DT = 0.01;            // Time step
6 const double UNIVERSE_SIZE = 100.0;
7
8 void simulationStep(std::vector<Body>& bodies) {
9     // ===== STEP 1: Rebuild Octree =====
10    // (Tree phai rebuild moi frame vi bodies di chuyen)
11
12    Vec3 center(0, 0, 0);
13    OctreeNode* root = new OctreeNode(center, UNIVERSE_SIZE);
14
15    for (auto& body : bodies) {
16        root->insert(&body);
17    }
18
19    // ===== STEP 2: Compute Mass Distribution =====
20    root->computeMassDistribution();
21
22    // ===== STEP 3: Calculate Forces using Barnes-Hut =====

```

```

23     for (auto& body : bodies) {
24         body.acc = root->calculateForce(&body, THETA, G, SOFTENING);
25     }
26
27     // ===== STEP 4: Update Positions =====
28     for (auto& body : bodies) {
29         body.update(DT);
30     }
31
32     // ===== STEP 5: Clean up =====
33     delete root; // Destructor se xoa toan bo cay
34 }
```

Listing 11.2: Main Loop

11.1.4 Milestone: 5,000 Stars Real-time

Kết quả mong đợi: FPS tăng đáng kể! Với $N = 5,000$:

- Brute-force: $\sim 5\text{-}10$ FPS
- Barnes-Hut: $\sim 30\text{-}60$ FPS

Chương 12

Week 6: Optimization & Boundary Handling

12.1 Focus: Tối ưu hóa và xử lý biên

12.1.1 Tasks

1. OpenMP Parallelization:

- Thêm #pragma omp parallel for vào vòng tính lực
- Compile với flag -fopenmp

2. Boundary Handling:

- Xử lý body bay ra ngoài universe bounds
- Options: Bỏ qua, teleport, hoặc expand bounds

3. Memory Optimization:

- Reuse memory thay vì new/delete mỗi frame
- Object pooling cho OctreeNode

12.1.2 Code: OpenMP Parallelization

```
1 #include <omp.h>
2
3 void simulationStep(std::vector<Body>& bodies) {
4     // ... Build tree ...
5
6     // *** PARALLEL FORCE CALCULATION ***
7     // Chi can them 1 dong nay!
8     #pragma omp parallel for
9     for (size_t i = 0; i < bodies.size(); i++) {
10         bodies[i].acc = root->calculateForce(&bodies[i], THETA, G,
11         SOFTENING);
12     }
13
14     // Update cung co the parallel
# pragma omp parallel for
```

```
15     for (size_t i = 0; i < bodies.size(); i++) {  
16         bodies[i].update(DT);  
17     }  
18  
19     delete root;  
20 }
```

Listing 12.1: Parallel Force Calculation

12.1.3 Milestone: 10,000 Stars Stable > 30 FPS

Compile command:

```
g++ -O3 -fopenmp main.cpp -o simulation -lraylib
```

Chương 13

Week 7: Visual Effects & Polish

13.1 Focus: Đồ họa đẹp và UX

13.1.1 Tasks

1. Mass-based Coloring: Sao nhỏ = đỏ, sao lớn = xanh

2. Smooth Camera:

- Orbital camera với zoom
- Follow camera theo center of mass

3. UI Overlay:

- Hiển thị FPS, số hạt, theta
- Controls help text

4. Optional - Bloom Effect: Post-processing cho sao phát sáng

13.1.2 Code: Mass to Color Mapping

```
1 // Anh xa khoi luong sang mau sac (Quang pho sao)
2 // Do lun (Red Dwarf) -> Vang (Sun) -> Xanh khong lo (Blue Giant)
3 Color massToColor(double mass, double minMass, double maxMass) {
4     // Normalize mass to [0, 1]
5     double t = (mass - minMass) / (maxMass - minMass);
6     t = fmax(0.0, fmin(1.0, t)); // Clamp
7
8     unsigned char r, g, b;
9
10    if (t < 0.25) {
11        // Do dam -> Do nhat (Red Dwarf)
12        double local_t = t / 0.25;
13        r = 139 + (unsigned char)(116 * local_t); // 139 -> 255
14        g = 0 + (unsigned char)(69 * local_t); // 0 -> 69
15        b = 0;
16    }
17    else if (t < 0.5) {
18        // Do nhat -> Vang (Orange to Yellow)
19        double local_t = (t - 0.25) / 0.25;
20        r = 255;
```

```

21     g = 69 + (unsigned char)(186 * local_t);    // 69 -> 255
22     b = 0 + (unsigned char)(100 * local_t);    // 0 -> 100
23 }
24 else if (t < 0.75) {
25     // Vang -> Trang (Yellow to White)
26     double local_t = (t - 0.5) / 0.25;
27     r = 255;
28     g = 255;
29     b = 100 + (unsigned char)(155 * local_t); // 100 -> 255
30 }
31 else {
32     // Trang -> Xanh (White to Blue Giant)
33     double local_t = (t - 0.75) / 0.25;
34     r = 255 - (unsigned char)(100 * local_t); // 255 -> 155
35     g = 255 - (unsigned char)(100 * local_t); // 255 -> 155
36     b = 255;
37 }
38
39 return (Color){ r, g, b, 255 };
40 }
```

Listing 13.1: Star Color based on Mass

13.1.3 Milestone: Beautiful Galaxy Visualization

Kết quả: Một thiên hà với sao nhiều màu sắc, camera mượt mà, và UI thông tin.

Chương 14

Week 8: Documentation & Demo

14.1 Focus: Hoàn thiện báo cáo và Demo

14.1.1 Tasks

1. Báo cáo kỹ thuật:

- Giải thích thuật toán với hình minh họa
- Biểu đồ so sánh performance
- Source code có comment đầy đủ

2. Video Demo:

- 3-5 phút showcase
- Thể hiện: Galaxy formation, real-time performance, code walkthrough

3. Presentation Slides:

- 15 slides max
- Focus: Problem → Solution → Demo → Lessons Learned

4. Code Cleanup:

- Xóa debug code
- Thêm README.md với build instructions

14.1.2 Deliverables

Item	Format
Source Code	GitHub Repository
Báo cáo	PDF (20-30 trang)
Video Demo	MP4 (3-5 phút)
Slides	PDF/PPTX (15 slides)

Phần IV

Kiến trúc Hệ thống & Code Hoàn chỉnh

Chương 15

Project Structure

15.1 Directory Layout

```
n-body-simulation/
|-- include/
|   |-- Vec3.hpp          # 3D Vector math
|   |-- Body.hpp           # Celestial body struct
|   |-- OctreeNode.hpp     # Octree data structure
|   |-- Physics.hpp        # Force calculations
|   |-- Galaxy.hpp         # Galaxy initialization
|   |-- Renderer.hpp       # Raylib rendering helpers
|
|-- src/
|   |-- main.cpp           # Entry point & main loop
|   |-- Vec3.cpp
|   |-- Body.cpp
|   |-- OctreeNode.cpp
|   |-- Physics.cpp
|   |-- Galaxy.cpp
|   |-- Renderer.cpp
|
|-- assets/                # (Optional) textures, fonts
|-- build/                  # Compiled output
|-- CMakeLists.txt          # Build configuration
|-- README.md
```

Chương 16

Complete Code Implementation

16.1 Vec3.hpp - 3D Vector Mathematics

```
1 #pragma once
2 #include <cmath>
3
4 /**
5 * @brief 3D Vector class for physics calculations
6 *
7 * Tai sao dung struct thay vi class?
8 * -> Vec3 la "Plain Old Data" (POD), khong can encapsulation
9 * -> Performance tot hon khi copy
10 */
11 struct Vec3 {
12     double x, y, z;
13
14     // ====== CONSTRUCTORS ======
15
16     // Default constructor - khai tao (0, 0, 0)
17     Vec3() : x(0.0), y(0.0), z(0.0) {}
18
19     // Parameterized constructor
20     Vec3(double x_, double y_, double z_) : x(x_), y(y_), z(z_) {}
21
22     // ====== OPERATOR OVERLOADING ======
23     // Cho phep viet code toan hoc tu nhien: v1 + v2, v * 2.0, etc.
24
25     // Vector + Vector
26     Vec3 operator+(const Vec3& other) const {
27         return Vec3(x + other.x, y + other.y, z + other.z);
28     }
29
30     // Vector - Vector
31     Vec3 operator-(const Vec3& other) const {
32         return Vec3(x - other.x, y - other.y, z - other.z);
33     }
34
35     // Vector * Scalar
36     Vec3 operator*(double scalar) const {
37         return Vec3(x * scalar, y * scalar, z * scalar);
38     }
39
40     // Vector / Scalar
```

```

41 Vec3 operator/(double scalar) const {
42     // Chu y: Khong check divide by zero o day de giu performance
43     return Vec3(x / scalar, y / scalar, z / scalar);
44 }
45
46 // Compound assignment operators
47 Vec3& operator+=(const Vec3& other) {
48     x += other.x; y += other.y; z += other.z;
49     return *this;
50 }
51
52 Vec3& operator-=(const Vec3& other) {
53     x -= other.x; y -= other.y; z -= other.z;
54     return *this;
55 }
56
57 Vec3& operator*=(double scalar) {
58     x *= scalar; y *= scalar; z *= scalar;
59     return *this;
60 }
61
62 // ===== UTILITY METHODS =====
63
64 // Do dai binh phuong (tranh sqrt khi khong can)
65 double magnitudeSq() const {
66     return x*x + y*y + z*z;
67 }
68
69 // Do dai vector
70 double magnitude() const {
71     return std::sqrt(magnitudeSq());
72 }
73
74 // Khoang cach binh phuong den vector khac
75 double distanceSq(const Vec3& other) const {
76     double dx = x - other.x;
77     double dy = y - other.y;
78     double dz = z - other.z;
79     return dx*dx + dy*dy + dz*dz;
80 }
81
82 // Khoang cach den vector khac
83 double distance(const Vec3& other) const {
84     return std::sqrt(distanceSq(other));
85 }
86
87 // Normalize (do dai = 1)
88 Vec3 normalized() const {
89     double mag = magnitude();
90     if (mag > 0) {
91         return *this / mag;
92     }
93     return Vec3(); // Tra ve (0,0,0) neu vector = 0
94 }
95
96 // Dot product (tich vo huong)
97 double dot(const Vec3& other) const {
98     return x*other.x + y*other.y + z*other.z;

```

```

99 }
100
101 // Cross product (tich co huong)
102 Vec3 cross(const Vec3& other) const {
103     return Vec3(
104         y*other.z - z*other.y,
105         z*other.x - x*other.z,
106         x*other.y - y*other.x
107     );
108 }
109 };
110
111 // Scalar * Vector (cho phep viet: 2.0 * vec)
112 inline Vec3 operator*(double scalar, const Vec3& vec) {
113     return vec * scalar;
114 }
```

Listing 16.1: include/Vec3.hpp

16.2 Body.hpp - Celestial Body Structure

```

1 #pragma once
2 #include "Vec3.hpp"
3 #include "raylib.h"
4
5 /**
6  * @brief Represents a celestial body (star, planet, particle)
7  *
8  * Moi Body co:
9  * - Position (vi tri trong khong gian 3D)
10 * - Velocity (van toc - huong va toc do di chuyen)
11 * - Acceleration (gia toc - duoc tinh moi frame tu luc hap dan)
12 * - Mass (khoi luong - quyet dinh luc hap dan)
13 * - Color (mau sac hien thi)
14 */
15 struct Body {
16     // ===== PHYSICS PROPERTIES =====
17     Vec3 pos;          // Position (meters in simulation space)
18     Vec3 vel;          // Velocity (meters/second)
19     Vec3 acc;          // Acceleration (meters/second^2) - reset moi frame
20     double mass;       // Mass (kilograms)
21
22     // ===== VISUAL PROPERTIES =====
23     Color color;      // Raylib Color for rendering
24     float radius;     // Visual radius for drawing
25
26     // ===== CONSTRUCTORS =====
27
28     Body()
29         : pos(Vec3()), vel(Vec3()), acc(Vec3()),
30           mass(1.0), color(WHITE), radius(0.1f) {}
31
32     Body(Vec3 position, Vec3 velocity, double m)
33         : pos(position), vel(velocity), acc(Vec3()),
34           mass(m), color(WHITE), radius(0.1f) {}
```

```

36 // ===== PHYSICS METHODS =====
37
38 /**
39 * @brief Update position using Semi-implicit Euler integration
40 * @param dt Time step (seconds)
41 *
42 * Semi-implicit Euler (aka Symplectic Euler):
43 * 1. v_new = v + a * dt
44 * 2. x_new = x + v_new * dt (dung v MOI, khong phai v cu)
45 *
46 * Tai sao khong dung Euler thuong?
47 * -> Euler thuong: x_new = x + v * dt (dung v cu)
48 * -> Gay ra "energy drift" - nang luong tang theo thoi gian
49 * -> Semi-implicit Euler bao toan nang luong tot hon
50 */
51 void update(double dt) {
52     // Step 1: Update velocity with current acceleration
53     vel = vel + acc * dt;
54
55     // Step 2: Update position with NEW velocity
56     pos = pos + vel * dt;
57
58     // Step 3: Reset acceleration for next frame
59     // (Se duoc tinh lai trong calculateForce)
60     acc = Vec3();
61 }
62
63 /**
64 * @brief Verlet Integration (more stable for long simulations)
65 * @param dt Time step
66 *
67 * Velocity Verlet algorithm:
68 * x_new = x + v*dt + 0.5*a*dt^2
69 * v_new = v + 0.5*(a_old + a_new)*dt
70 *
71 * Note: Can tinh a_new truoc khi update velocity
72 * Phuc tap hon nhung chinh xac hon Euler
73 */
74 void updateVerlet(double dt, const Vec3& newAcc) {
75     // Update position
76     pos = pos + vel * dt + acc * (0.5 * dt * dt);
77
78     // Update velocity using average of old and new acceleration
79     vel = vel + (acc + newAcc) * (0.5 * dt);
80
81     // Store new acceleration
82     acc = newAcc;
83 }
84
85 // ===== RENDERING METHODS =====
86
87 /**
88 * @brief Draw the body as a sphere in 3D space
89 */
90 void draw() const {
91     // Convert Vec3 to Raylib's Vector3
92     Vector3 rlPos = {
93         static_cast<float>(pos.x),

```

```

94         static_cast<float>(pos.y),
95         static_cast<float>(pos.z)
96     };
97
98     // Draw solid sphere
99     DrawSphere(rlPos, radius, color);
100 }
101
102 /**
103 * @brief Draw as a point (faster for many bodies)
104 */
105 void drawPoint() const {
106     Vector3 rlPos = {
107         static_cast<float>(pos.x),
108         static_cast<float>(pos.y),
109         static_cast<float>(pos.z)
110     };
111     DrawPoint3D(rlPos, color);
112 }
113 };

```

Listing 16.2: include/Body.hpp

16.3 OctreeNode.hpp - Complete Octree Implementation

```

1 #pragma once
2 #include "Vec3.hpp"
3 #include "Body.hpp"
4 #include <array>
5 #include <cmath>
6
7 /**
8 * @brief Octree Node for Barnes-Hut algorithm
9 *
10 * Octree la cau truc cay phan hoach khong gian 3D.
11 * Moi node dai dien cho mot hinh lap phuong (cube) trong khong gian.
12 *
13 * Co 2 loai node:
14 * 1. External (Leaf): Khong co con, chua toi da 1 body
15 * 2. Internal: Co it nhat 1 con, luu totalMass va centerOfMass
16 */
17 class OctreeNode {
18 public:
19     // ===== SPATIAL PROPERTIES =====
20     Vec3 center;           // Tam cua hinh lap phuong
21     double halfSize;       // Nua canh (bounds: center +/- halfSize)
22
23     // ===== PHYSICS PROPERTIES (for Barnes-Hut) =====
24     double totalMass;      // Tong khoi luong cua node va cac con
25     Vec3 centerOfMass;    // Trong tam khoi luong (weighted average)
26
27     // ===== TREE STRUCTURE =====
28     Body* body;           // Con tro den body (chi khi la
29     External)
30     std::array<OctreeNode*, 8> children; // 8 con tro den node con

```

```

30     bool isExternal;                                // true = leaf node
31
32     // ===== CONSTRUCTOR =====
33
34 /**
35  * @brief Construct a new Octree Node
36  * @param c Center position of the cube
37  * @param size Full size of the cube edge
38  */
39 OctreeNode(Vec3 c, double size)
40     : center(c),
41     halfSize(size / 2.0),
42     totalMass(0.0),
43     centerOfMass(Vec3()),
44     body(nullptr),
45     isExternal(true)
46 {
47     // Khoi tao tat ca children = nullptr
48     // Su dung std::array::fill() cho clean code
49     children.fill(nullptr);
50 }
51
52 // ===== DESTRUCTOR =====
53
54 /**
55  * @brief Recursive destructor - delete entire subtree
56  *
57  * QUAN TRONG: Day la vi du cua DE QUY trong destructor.
58  * Khi delete root, no se tu dong delete tat ca node con.
59  */
60 ~OctreeNode() {
61     for (int i = 0; i < 8; i++) {
62         if (children[i] != nullptr) {
63             delete children[i]; // Gọi destructor cua con (DE QUY!)
64             children[i] = nullptr;
65         }
66     }
67 }
68
69 // ====== HELPER METHODS ======
70
71 /**
72  * @brief Determine which octant a point belongs to
73  * @param point The 3D position to check
74  * @return Index 0-7 representing the octant
75  *
76  * Octant indexing using bit flags:
77  * Bit 0 (value 1): X >= center.x
78  * Bit 1 (value 2): Y >= center.y
79  * Bit 2 (value 4): Z >= center.z
80  *
81  * Example: point at (5, -2, 3) with center (0, 0, 0)
82  * - X >= 0: true -> bit 0 = 1
83  * - Y >= 0: false -> bit 1 = 0
84  * - Z >= 0: true -> bit 2 = 1
85  * - Result: 0b101 = 5
86  */
87 int getOctantIndex(const Vec3& point) const {

```

```

88     int index = 0;
89     if (point.x >= center.x) index |= 1;
90     if (point.y >= center.y) index |= 2;
91     if (point.z >= center.z) index |= 4;
92     return index;
93 }
94
95 /**
96 * @brief Calculate the center position of a child octant
97 * @param i Octant index (0-7)
98 * @return Center position of the child cube
99 */
100 Vec3 getOctantCenter(int i) const {
101     double offset = halfSize / 2.0;
102     return Vec3(
103         center.x + ((i & 1) ? offset : -offset),
104         center.y + ((i & 2) ? offset : -offset),
105         center.z + ((i & 4) ? offset : -offset)
106     );
107 }
108
109 /**
110 * @brief Check if a point is within this node's bounds
111 */
112 bool contains(const Vec3& point) const {
113     return (point.x >= center.x - halfSize && point.x < center.x +
halfSize) &&
114         (point.y >= center.y - halfSize && point.y < center.y +
halfSize) &&
115         (point.z >= center.z - halfSize && point.z < center.z +
halfSize);
116 }
117 // ===== CORE ALGORITHMS =====
118
119 /**
120 * @brief Subdivide this node into 8 children
121 *
122 * Duoc goi khi can chen body thu 2 vao External node.
123 */
124 void subdivide() {
125     double childSize = halfSize; // Moi con co kich thuoc = nua cha
126
127     for (int i = 0; i < 8; i++) {
128         Vec3 childCenter = getOctantCenter(i);
129         children[i] = new OctreeNode(childCenter, childSize);
130     }
131
132     isExternal = false; // Node nay tro thanh Internal
133 }
134
135 /**
136 * @brief Insert a body into the octree
137 * @param newBody Pointer to the body to insert
138 *
139 * THUAT TOAN INSERT (De quy):
140 *
141 * Case 1: External node, rong

```

```

143     *      -> Gan body vao , xong
144     *
145     * Case 2: External node, da co body
146     *      -> Chia thanh 8 con (subdivide)
147     *      -> Chen body cu vao octant tuong ung
148     *      -> Chen body moi vao octant tuong ung
149     *
150     * Case 3: Internal node (da co con)
151     *      -> Tim octant chua body moi
152     *      -> Tao node con neu chua ton tai
153     *      -> Goi insert de quy vao node con
154     */
155 void insert(Body* newBody) {
156     // Kiem tra body co nam trong bounds khong
157     if (!contains(newBody->pos)) {
158         // Body ngoai bounds - co the skip hoac expand tree
159         return;
160     }
161
162     // CASE 1: External node va rong
163     if (isExternal && body == nullptr) {
164         body = newBody;
165         return;
166     }
167
168     // CASE 2: External node DA CO body
169     if (isExternal && body != nullptr) {
170         // Luu body cu
171         Body* existingBody = body;
172         body = nullptr;
173
174         // Chia node
175         subdivide();
176
177         // Chen lai body cu
178         int existingIndex = getOctantIndex(existingBody->pos);
179         children[existingIndex]->insert(existingBody); // DE QUY
180
181         // Chen body moi
182         int newIndex = getOctantIndex(newBody->pos);
183         children[newIndex]->insert(newBody); // DE QUY
184
185         return;
186     }
187
188     // CASE 3: Internal node
189     int index = getOctantIndex(newBody->pos);
190
191     // Tao node con neu chua co
192     if (children[index] == nullptr) {
193         Vec3 childCenter = getOctantCenter(index);
194         children[index] = new OctreeNode(childCenter, halfSize);
195     }
196
197     children[index]->insert(newBody); // DE QUY
198 }
199
200 /**

```

```

201     * @brief Compute total mass and center of mass for Barnes-Hut
202     *
203     * THUAT TOAN COMPUTE MASS (Post-order traversal):
204     *
205     * 1. Neu la External rong: mass = 0
206     * 2. Neu la External co body: mass = body.mass, COM = body.pos
207     * 3. Neu la Internal:
208     *     a. Goi de quy cho tat ca con (POST-ORDER!)
209     *     b. Tong hop: totalMass = sum(child.totalMass)
210     *     c. COM = sum(child.COM * child.mass) / totalMass
211     */
212 void computeMassDistribution() {
213     // BASE CASE 1: External rong
214     if (isExternal && body == nullptr) {
215         totalMass = 0.0;
216         centerOfMass = Vec3();
217         return;
218     }
219
220     // BASE CASE 2: External co body
221     if (isExternal && body != nullptr) {
222         totalMass = body->mass;
223         centerOfMass = body->pos;
224         return;
225     }
226
227     // RECURSIVE CASE: Internal node
228     // Buoc 1: Tinh cho tat ca con truoc (POST-ORDER!)
229     for (int i = 0; i < 8; i++) {
230         if (children[i] != nullptr) {
231             children[i]->computeMassDistribution();
232         }
233     }
234
235     // Buoc 2: Tong hop tu cac con
236     totalMass = 0.0;
237     Vec3 weightedSum;
238
239     for (int i = 0; i < 8; i++) {
240         if (children[i] != nullptr && children[i]->totalMass > 0.0) {
241             totalMass += children[i]->totalMass;
242             weightedSum += children[i]->centerOfMass * children[i]->
243             totalMass;
244         }
245     }
246
247     // Buoc 3: Tinh Center of Mass
248     if (totalMass > 0.0) {
249         centerOfMass = weightedSum / totalMass;
250     }
251 }
252 /**
253  * @brief Calculate gravitational force on a target body using Barnes-
254  *        Hut
255  * @param target Body to calculate force on
256  * @param theta Accuracy parameter (typically 0.5)
257  * @param G Gravitational constant

```

```

257     * @param softening Softening parameter to avoid singularity
258     * @return Acceleration vector
259     *
260     * THUAT TOAN BARNES-HUT:
261     *
262     * 1. Neu node rong: return 0
263     * 2. Neu la External co body (va khong phai chinh no):
264     *      -> Tinh luc truc tiep
265     * 3. Neu la Internal:
266     *      a. Tinh ratio = s / d (kich thuoc / khoang cach)
267     *      b. Neu ratio < theta: "Du xa", dung centerOfMass de tinh
268     *      c. Neu ratio >= theta: "Qua gan", di sau vao cac con
269     */
270     Vec3 calculateForce(const Body* target, double theta,
271                         double G, double softening) const {
272         // CASE 1: Node rong
273         if (totalMass == 0.0) {
274             return Vec3();
275         }
276
277         // CASE 2: External co body
278         if (isExternal && body != nullptr) {
279             // Khong tinh luc len chinh no
280             if (body == target) {
281                 return Vec3();
282             }
283
284             // Tinh luc truc tiep
285             Vec3 r = body->pos - target->pos;
286             double distSq = r.magnitudeSq();
287             double dist = std::sqrt(distSq + softening * softening);
288
289             // F = G * m1 * m2 / r^2
290             // a = F / m1 = G * m2 / r^2
291             // Huong: r / |r| (normalized)
292             // Ket hop: a = G * m * r / |r|^3
293             double magnitude = G * body->mass / (dist * dist * dist);
294             return r * magnitude;
295         }
296
297         // CASE 3: Internal node - BARNES-HUT DECISION
298         Vec3 r = centerOfMass - target->pos;
299         double distSq = r.magnitudeSq();
300         double dist = std::sqrt(distSq);
301
302         // Kich thuoc node (canh day du)
303         double s = halfSize * 2.0;
304
305         // *** MULTIPOLE ACCEPTANCE CRITERION ***
306         // s/d < theta nghia la: "cum nay du xa de xap xi"
307         if (dist > 0 && (s / dist) < theta) {
308             // Du xa -> Coi nhu 1 khoi luong duy nhat tai centerOfMass
309             double distSoftened = std::sqrt(distSq + softening * softening
310 );
311             double magnitude = G * totalMass / (distSoftened *
312             distSoftened * distSoftened);
313             return r * magnitude;
314         }

```

```

313     // Qua gan -> Phai di sau vao tung con
314     Vec3 totalForce;
315     for (int i = 0; i < 8; i++) {
316         if (children[i] != nullptr) {
317             totalForce += children[i]->calculateForce(target, theta, G
318 , softening);
319         }
320     }
321
322     return totalForce;
323 }
324
325 // ===== DEBUG & VISUALIZATION =====
326
327 /**
328 * @brief Draw wireframe representation of the octree
329 */
330 void drawWireframe(Color color = GREEN) const {
331     // Convert to Raylib types
332     Vector3 c = {
333         static_cast<float>(center.x),
334         static_cast<float>(center.y),
335         static_cast<float>(center.z)
336     };
337     float size = static_cast<float>(halfSize * 2.0);
338
339     // Draw this node's cube
340     DrawCubeWires(c, size, size, size, color);
341
342     // Recursively draw children
343     if (!isExternal) {
344         for (int i = 0; i < 8; i++) {
345             if (children[i] != nullptr) {
346                 children[i]->drawWireframe(color);
347             }
348         }
349     }
350 }
351
352 /**
353 * @brief Count total nodes in the tree (for debugging)
354 */
355 int countNodes() const {
356     int count = 1; // This node
357     if (!isExternal) {
358         for (int i = 0; i < 8; i++) {
359             if (children[i] != nullptr) {
360                 count += children[i]->countNodes();
361             }
362         }
363     }
364     return count;
365 }
366
367 /**
368 * @brief Get maximum depth of the tree
369 */

```

```

370     int maxDepth() const {
371         if (isExternal) return 1;
372
373         int maxChildDepth = 0;
374         for (int i = 0; i < 8; i++) {
375             if (children[i] != nullptr) {
376                 maxChildDepth = std::max(maxChildDepth, children[i]->
377                     maxDepth());
378             }
379         }
380     }
381 };

```

Listing 16.3: include/OctreeNode.hpp

16.4 Galaxy.hpp - Galaxy Initialization

```

1 #pragma once
2 #include "Body.hpp"
3 #include <vector>
4 #include <random>
5 #include <cmath>
6
7 /**
8 * @brief Galaxy initialization utilities
9 *
10 * Cung cap cac ham de tao galaxy ban dau voi:
11 * - Phan bo khoi luong thuc te
12 * - Van toc xoay de galaxy on dinh
13 */
14
15 namespace Galaxy {
16
17 /**
18 * @brief Create a disk-shaped galaxy
19 * @param numBodies Number of stars
20 * @param diskRadius Radius of the disk
21 * @param diskHeight Thickness of the disk
22 * @param centralMass Mass of central black hole (optional)
23 * @return Vector of initialized bodies
24 */
25 std::vector<Body> createDiskGalaxy(int numBodies, double diskRadius,
26                                     double diskHeight, double centralMass
27                                     = 0.0) {
28     std::vector<Body> bodies;
29     bodies.reserve(numBodies);
30
31     // Random number generator
32     std::random_device rd;
33     std::mt19937 gen(rd());
34     std::uniform_real_distribution<double> angleDist(0.0, 2.0 * M_PI);
35     std::uniform_real_distribution<double> heightDist(-diskHeight/2,
36             diskHeight/2);
37     std::uniform_real_distribution<double> massDist(0.5, 2.0); // Solar
38     masses

```

```

36 // Exponential radius distribution (more stars near center)
37 std::exponential_distribution<double> radiusDist(3.0 / diskRadius);
38
39 // Optional: Central massive object (black hole)
40 if (centralMass > 0.0) {
41     Body centralBody(Vec3(0, 0, 0), Vec3(0, 0, 0), centralMass);
42     centralBody.color = YELLOW;
43     centralBody.radius = 0.5f;
44     bodies.push_back(centralBody);
45 }
46
47 // Create stars
48 for (int i = 0; i < numBodies; i++) {
49     // Position in disk
50     double r = std::min(radiusDist(gen), diskRadius);
51     double theta = angleDist(gen);
52     double h = heightDist(gen);
53
54     Vec3 pos(r * cos(theta), h, r * sin(theta));
55
56     // Velocity: Orbital velocity for circular orbit
57     // v = sqrt(G * M_enclosed / r)
58     // Simplified: Assume enclosed mass proportional to r
59     double orbitalSpeed = 0.0;
60     if (r > 0.1) {
61         // Empirical formula for realistic rotation curve
62         double enclosedMass = centralMass + (double)i * 1.0 * (r /
diskRadius);
63         orbitalSpeed = sqrt(0.1 * enclosedMass / r); // Simplified
64     }
65
66     // Perpendicular to radius (tangent direction for orbit)
67     Vec3 vel(-orbitalSpeed * sin(theta), 0.0, orbitalSpeed * cos(theta));
68 }
69
70 // Random mass
71 double mass = massDist(gen);
72
73 Body star(pos, vel, mass);
74 bodies.push_back(star);
75 }
76
77 return bodies;
78 }
79
80 /**
81 * @brief Create a spherical cluster
82 * @param numBodies Number of stars
83 * @param clusterRadius Radius of sphere
84 * @return Vector of initialized bodies
85 */
86 std::vector<Body> createSphereCluster(int numBodies, double clusterRadius)
87 {
88     std::vector<Body> bodies;
89     bodies.reserve(numBodies);
90
91     std::random_device rd;

```

```

91     std::mt19937 gen(rd());
92     std::uniform_real_distribution<double> dist(-1.0, 1.0);
93     std::uniform_real_distribution<double> massDist(0.5, 2.0);
94
95     for (int i = 0; i < numBodies; i++) {
96         // Random point in sphere using rejection sampling
97         Vec3 pos;
98         do {
99             pos = Vec3(dist(gen), dist(gen), dist(gen));
100            } while (pos.magnitudeSq() > 1.0);
101
102            pos = pos * clusterRadius;
103
104            // Small random velocity
105            Vec3 vel(dist(gen) * 0.1, dist(gen) * 0.1, dist(gen) * 0.1);
106
107            double mass = massDist(gen);
108
109            bodies.push_back(Body(pos, vel, mass));
110        }
111
112    return bodies;
113 }
114
115 /**
116 * @brief Create two colliding galaxies
117 */
118 std::vector<Body> createCollidingGalaxies(int bodiesPerGalaxy, double
119 separation) {
120     // Galaxy 1 at origin
121     auto galaxy1 = createDiskGalaxy(bodiesPerGalaxy, 20.0, 2.0, 100.0);
122
123     // Galaxy 2 offset and moving toward galaxy 1
124     auto galaxy2 = createDiskGalaxy(bodiesPerGalaxy, 20.0, 2.0, 100.0);
125
126     // Offset galaxy 2
127     for (auto& body : galaxy2) {
128         body.pos.x += separation;
129         body.vel.x -= 0.5; // Moving toward galaxy 1
130     }
131
132     // Combine
133     galaxy1.insert(galaxy1.end(), galaxy2.begin(), galaxy2.end());
134     return galaxy1;
135 }
136 } // namespace Galaxy

```

Listing 16.4: include/Galaxy.hpp

16.5 main.cpp - Complete Simulation Loop

```

1 /**
2 * @file main.cpp
3 * @brief 3D N-Body Simulation using Barnes-Hut Algorithm
4 *

```

```

5  * Main entry point for the simulation.
6  * Handles:
7  * - Raylib window initialization
8  * - Main loop (Input -> Physics -> Render)
9  * - Camera controls
10 * - Performance monitoring
11 */
12
13 #include "raylib.h"
14 #include "Vec3.hpp"
15 #include "Body.hpp"
16 #include "OctreeNode.hpp"
17 #include "Galaxy.hpp"
18
19 #include <vector>
20 #include <iostream>
21 #include <chrono>
22
23 // ===== SIMULATION CONSTANTS =====
24
25 namespace Config {
26     // Window
27     constexpr int SCREEN_WIDTH = 1280;
28     constexpr int SCREEN_HEIGHT = 720;
29     constexpr int TARGET_FPS = 60;
30
31     // Simulation
32     constexpr int NUM_BODIES = 10000;
33     constexpr double UNIVERSE_SIZE = 200.0; // Half-size of simulation
34     space
35     constexpr double G = 1.0; // Gravitational constant (scaled)
36     constexpr double SOFTENING = 0.5; // Softening parameter
37     constexpr double DT = 0.016; // Time step (~60 FPS)
38     constexpr double THETA = 0.5; // Barnes-Hut accuracy (0.5 is typical)
39
40     // Visual
41     constexpr bool DRAW_OCTREE = false; // Toggle octree visualization
42 }
43
44 // ===== COLOR MAPPING =====
45 /**
46 * @brief Map star mass to stellar color (Red Dwarf -> Blue Giant)
47 */
48 Color massToColor(double mass, double minMass, double maxMass) {
49     double t = (mass - minMass) / (maxMass - minMass);
50     t = fmax(0.0, fmin(1.0, t)); // Clamp to [0, 1]
51
52     unsigned char r, g, b;
53
54     if (t < 0.33) {
55         // Red -> Orange
56         double lt = t / 0.33;
57         r = 200;
58         g = static_cast<unsigned char>(50 + 150 * lt);

```

```

59         b = 50;
60     } else if (t < 0.66) {
61         // Orange -> White
62         double lt = (t - 0.33) / 0.33;
63         r = 255;
64         g = static_cast<unsigned char>(200 + 55 * lt);
65         b = static_cast<unsigned char>(50 + 205 * lt);
66     } else {
67         // White -> Blue
68         double lt = (t - 0.66) / 0.34;
69         r = static_cast<unsigned char>(255 - 100 * lt);
70         g = static_cast<unsigned char>(255 - 100 * lt);
71         b = 255;
72     }
73
74     return Color{r, g, b, 255};
75 }
76
77 /**
78 * @brief Apply colors to all bodies based on mass
79 */
80 void applyMassColors(std::vector<Body>& bodies) {
81     if (bodies.empty()) return;
82
83     // Find mass range
84     double minMass = bodies[0].mass;
85     double maxMass = bodies[0].mass;
86     for (const auto& b : bodies) {
87         minMass = fmin(minMass, b.mass);
88         maxMass = fmax(maxMass, b.mass);
89     }
90
91     // Apply colors
92     for (auto& b : bodies) {
93         b.color = massToColor(b.mass, minMass, maxMass);
94         b.radius = 0.05f + 0.1f * static_cast<float>((b.mass - minMass) /
95             (maxMass - minMass));
96     }
97
98 // ====== MAIN FUNCTION ======
99
100 int main() {
101     // ====== INITIALIZATION ======
102
103     // Initialize Raylib window
104     InitWindow(Config::SCREEN_WIDTH, Config::SCREEN_HEIGHT,
105                 "N-Body Simulation - Barnes-Hut Algorithm");
106     SetTargetFPS(Config::TARGET_FPS);
107
108     // Initialize 3D camera
109     Camera3D camera = { 0 };
110     camera.position = Vector3{ 100.0f, 80.0f, 100.0f };
111     camera.target = Vector3{ 0.0f, 0.0f, 0.0f };
112     camera.up = Vector3{ 0.0f, 1.0f, 0.0f };
113     camera.fovy = 60.0f;
114     camera.projection = CAMERA_PERSPECTIVE;
115 }
```

```

116 // Create galaxy
117 std::cout << "Initializing " << Config::NUM_BODIES << " bodies..." <<
118 std::endl;
119 std::vector<Body> bodies = Galaxy::createDiskGalaxy(
120     Config::NUM_BODIES,
121     50.0,    // Disk radius
122     5.0,     // Disk height
123     1000.0   // Central mass
124 );
125
126 // Apply colors based on mass
127 applyMassColors(bodies);
128
129 std::cout << "Simulation ready! Bodies: " << bodies.size() << std::endl;
130
131 // Performance metrics
132 double physicsTime = 0.0;
133 int frameCount = 0;
134
135 // ====== MAIN LOOP ======
136
137 while (!WindowShouldClose()) {
138     // ===== INPUT =====
139     UpdateCamera(&camera, CAMERA_ORBITAL);
140
141     // Keyboard controls
142     if (IsKeyPressed(KEY_R)) {
143         // Reset simulation
144         bodies = Galaxy::createDiskGalaxy(Config::NUM_BODIES, 50.0,
145                                         5.0, 1000.0);
146         applyMassColors(bodies);
147     }
148
149     if (IsKeyPressed(KEY_SPACE)) {
150         // Toggle pause (not implemented - exercise for reader)
151     }
152
153     // ===== PHYSICS (Barnes-Hut) =====
154     auto physicsStart = std::chrono::high_resolution_clock::now();
155
156     // Step 1: Build Octree
157     Vec3 center(0, 0, 0);
158     OctreeNode* root = new OctreeNode(center, Config::UNIVERSE_SIZE *
159                                     2);
160
161     for (auto& body : bodies) {
162         root->insert(&body);
163     }
164
165     // Step 2: Compute mass distribution
166     root->computeMassDistribution();
167
168     // Step 3: Calculate forces using Barnes-Hut
169 #ifdef _OPENMP
# pragma omp parallel for
# endif
        for (size_t i = 0; i < bodies.size(); i++) {

```

```

170         bodies[i].acc = root->calculateForce(
171             &bodies[i],
172             Config::THETA,
173             Config::G,
174             Config::SOFTENING
175         );
176     }
177
178     // Step 4: Update positions
179     for (auto& body : bodies) {
180         body.update(Config::DT);
181     }
182
183     // Cleanup
184     int treeNodes = root->countNodes();
185     int treeDepth = root->maxDepth();
186     delete root;
187     root = nullptr;
188
189     auto physicsEnd = std::chrono::high_resolution_clock::now();
190     physicsTime = std::chrono::duration<double, std::milli>(physicsEnd -
191     physicsStart).count();
192
193     // ===== RENDERING =====
194     BeginDrawing();
195         ClearBackground(Color{5, 5, 15, 255}); // Deep space blue
196
197         BeginMode3D(camera);
198             // Draw all bodies
199             for (const auto& body : bodies) {
200                 body.draw();
201             }
202
203             // Optional: Draw octree wireframe
204             if (Config::DRAW_OCTREE && root != nullptr) {
205                 root->drawWireframe(Color{0, 100, 0, 100});
206             }
207
208             // Reference grid
209             DrawGrid(20, 10.0f);
210             EndMode3D();
211
212             // UI Overlay
213             DrawRectangle(10, 10, 300, 150, Color{0, 0, 0, 150});
214             DrawText("N-Body Simulation (Barnes-Hut)", 20, 20, 20, WHITE);
215             DrawText(TextFormat("Bodies: %d", (int)bodies.size()), 20, 50,
216             16, GREEN);
217             DrawText(TextFormat("FPS: %d", GetFPS()), 20, 70, 16, GREEN);
218             DrawText(TextFormat("Physics: %.2f ms", physicsTime), 20, 90,
219             16, YELLOW);
220             DrawText(TextFormat("Tree Nodes: %d", treeNodes), 20, 110, 16,
221             GRAY);
222             DrawText(TextFormat("Tree Depth: %d", treeDepth), 20, 130, 16,
223             GRAY);
224
225             DrawText("Controls: Mouse to orbit, R to reset", 20,
SCREEN_HEIGHT - 30, 16, GRAY);
226             EndDrawing();

```

```
222     frameCount++;
223 }
225
226 // ====== CLEANUP ======
227 CloseWindow();
228
229 return 0;
230 }
```

Listing 16.5: src/main.cpp

Phần V

Vật lý và Toán học Đồ họa

Chương 17

Newton's Law of Gravitation

17.1 Công thức Lực Hấp dẫn

Lực hút giữa hai vật thể i và j được mô tả bởi định luật Newton:

$$\vec{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \quad (17.1)$$

Trong đó:

- $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ — Hằng số hấp dẫn
- m_i, m_j — Khối lượng của hai vật thể
- $r_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ — Khoảng cách giữa hai vật thể
- \hat{r}_{ij} — Vector đơn vị hướng từ i đến j

17.2 Từ Lực đến Gia tốc

Theo định luật Newton thứ 2: $\vec{F} = m\vec{a}$

Do đó, gia tốc của vật thể i do vật thể j gây ra:

$$\vec{a}_{ij} = \frac{\vec{F}_{ij}}{m_i} = G \frac{m_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \quad (17.2)$$

⚠ Quan trọng

Trong code, ta tính gia tốc (không phải lực) vì:

1. Không cần nhân với khối lượng của target body
2. Trực tiếp cộng vào velocity khi update

17.3 Softening Parameter (ϵ)

17.3.1 Vấn đề: Division by Zero

Khi hai vật thể quá gần nhau ($r \rightarrow 0$):

$$\vec{a} = G \frac{m}{r^2} \rightarrow \infty \quad (17.3)$$

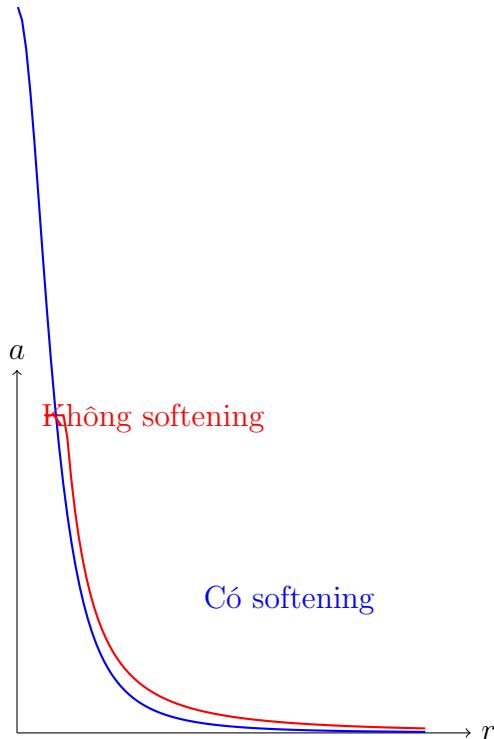
Điều này gây ra:

- Numerical overflow trong code
- Vận tốc tăng vọt phi thực tế
- Vật thể "bắn" ra khỏi simulation

17.3.2 Giải pháp: Plummer Softening

Thay r bằng $\sqrt{r^2 + \epsilon^2}$:

$$\boxed{\vec{a}_{ij} = G \frac{m_j}{(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \vec{r}_{ij}} \quad (17.4)$$



Hình 17.1: So sánh gia tốc có và không có softening

💡 Mẹo

Chọn giá trị ϵ :

- Quá nhỏ: Vẫn có numerical instability
- Quá lớn: Mất độ chính xác, các sao không tương tác đủ mạnh
- **Khuyến nghị:** $\epsilon \approx$ kích thước trung bình của vật thể, hoặc $\sim 1\%$ khoảng cách trung bình

17.4 Implementation trong Code

```

1 /**
2 * @brief Calculate gravitational acceleration with softening
3 * @param target The body receiving the force
4 * @param source The body exerting the force
5 * @param G Gravitational constant
6 * @param epsilon Softening parameter
7 * @return Acceleration vector
8 */
9 Vec3 calculateGravitationalAcceleration(
10     const Body& target,
11     const Body& source,
12     double G,
13     double epsilon
14 ) {
15     // Step 1: Compute displacement vector (from target to source)
16     Vec3 r = source.pos - target.pos;
17
18     // Step 2: Compute squared distance
19     double distSq = r.x*r.x + r.y*r.y + r.z*r.z;
20
21     // Step 3: Apply softening
22     // d = sqrt(r^2 + eps^2)
23     double softDistSq = distSq + epsilon * epsilon;
24     double softDist = std::sqrt(softDistSq);
25
26     // Step 4: Compute acceleration magnitude
27     // |a| = G * M / d^2
28     // But we need direction, so: a = G * M * r / d^3
29     // (r/d gives unit vector, then multiply by G*M/d^2)
30     double magnitude = G * source.mass / (softDist * softDist * softDist);
31
32     // Step 5: Return acceleration vector
33     return r * magnitude;
34 }
```

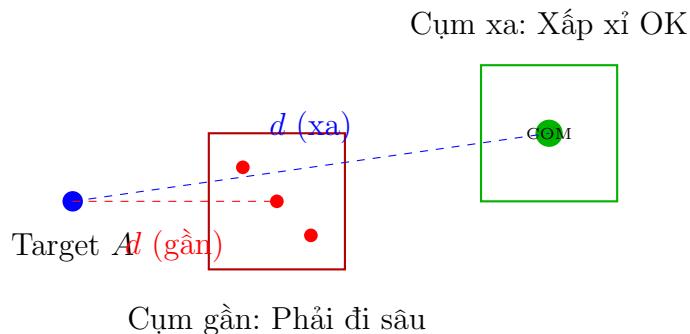
Listing 17.1: Complete Force Calculation

Chương 18

Barnes-Hut Multipole Acceptance Criterion

18.1 Ý tưởng Cốt lõi

Barnes-Hut dựa trên quan sát: Nếu một cụm sao ở đủ xa, ta có thể coi cả cụm như một điểm khôi lượng duy nhất.



Hình 18.1: Minh họa tiêu chuẩn Barnes-Hut

18.2 Tiêu chuẩn Multipole

Gọi:

- s = kích thước cạnh của node Octree
- d = khoảng cách từ target đến center of mass của node
- θ = tham số độ chính xác (thường chọn 0.5)

$$\boxed{\text{Điều kiện xấp xỉ: } \frac{s}{d} < \theta} \quad (18.1)$$

- $\frac{s}{d} < \theta$: Node này "đủ xa" \Rightarrow Dùng center of mass
- $\frac{s}{d} \geq \theta$: Node này "quá gần" \Rightarrow Di sâu vào con

18.3 Ảnh hưởng của θ

Bảng 18.1: Trade-off giữa độ chính xác và tốc độ

θ	Độ chính xác	Tốc độ	Ghi chú
0	Tuyệt đối (= Brute-force)	Chậm nhất	$O(N^2)$
0.3	Rất cao	Chậm	Scientific simulations
0.5	Tốt	Nhanh	Khuyến nghị
0.7	Trung bình	Rất nhanh	Game/Visualization
1.0+	Thấp	Nhanh nhất	Không khuyến nghị

18.4 Pseudo-code Barnes-Hut

Algorithm 1 Barnes-Hut calculateForce

```

1: function CALCULATEFORCE(node, targetBody,  $\theta$ ,  $G$ ,  $\epsilon$ )
2:   if node is empty then
3:     return  $\vec{0}$ 
4:   end if
5:   if node is external AND contains a body then
6:     if body == targetBody then
7:       return  $\vec{0}$                                  $\triangleright$  Không tự hấp dẫn
8:     end if
9:     return DirectForce(targetBody, node.body,  $G$ ,  $\epsilon$ )
10:   end if
11:    $\vec{r} \leftarrow$  node.centerOfMass – targetBody.pos
12:    $d \leftarrow |\vec{r}|$ 
13:    $s \leftarrow$  node.size
14:   if  $s/d < \theta$  then                       $\triangleright$  Multipole criterion
15:     return ApproximateForce(targetBody, node.totalMass, node.centerOfMass,  $G$ ,  $\epsilon$ )
16:   else
17:      $\vec{F} \leftarrow \vec{0}$ 
18:     for each child in node.children do
19:        $\vec{F} \leftarrow \vec{F} +$  CALCULATEFORCE(child, targetBody,  $\theta$ ,  $G$ ,  $\epsilon$ )
20:     end for
21:     return  $\vec{F}$ 
22:   end if
23: end function

```

Chương 19

Mass-based Star Coloring

19.1 Khoa học Màu sắc Sao

Trong thiên văn học, màu sắc của ngôi sao phụ thuộc vào **nhiệt độ bề mặt**, liên quan đến khối lượng:

Bảng 19.1: Phân loại Quang phổ Sao

Loại	Màu	Nhiệt độ (K)	Khối lượng (M_{\odot})
M	Dỏ	2,500 - 3,500	0.08 - 0.5
K	Cam	3,500 - 5,000	0.5 - 0.8
G	Vàng (như Mặt Trời)	5,000 - 6,000	0.8 - 1.1
F	Trắng-Vàng	6,000 - 7,500	1.1 - 1.5
A	Trắng	7,500 - 10,000	1.5 - 2.5
B	Xanh-Trắng	10,000 - 30,000	2.5 - 16
O	Xanh	30,000+	16+

19.2 Thuật toán Color Mapping

```
1 /**
2 * @brief Map star mass to realistic stellar color
3 * @param mass The star's mass
4 * @param minMass Minimum mass in simulation
5 * @param maxMass Maximum mass in simulation
6 * @return RGB Color
7 *
8 * THUAT TOAN:
9 * 1. Normalize mass to range [0, 1]
10 * 2. Map to color gradient:
11 *     0.0 -> Red (M-class, Red Dwarf)
12 *     0.25 -> Orange (K-class)
13 *     0.5 -> Yellow (G-class, like Sun)
14 *     0.75 -> White (F/A-class)
15 *     1.0 -> Blue (O/B-class, Blue Giant)
16 */
17 Color massToStellarColor(double mass, double minMass, double maxMass) {
18     // Step 1: Normalize to [0, 1]
19     double t = (mass - minMass) / (maxMass - minMass);
20     t = std::clamp(t, 0.0, 1.0); // C++17 clamp
```

```

21 // Step 2: Interpolate through color gradient
22 // Using piecewise linear interpolation
23
24 unsigned char r, g, b;
25
26 if (t < 0.2) {
27     // ===== RED DWARF ZONE (M-class) =====
28     // Deep Red (139, 0, 0) -> Bright Red (255, 69, 0)
29     double lt = t / 0.2;
30     r = static_cast<unsigned char>(139 + 116 * lt);    // 139 -> 255
31     g = static_cast<unsigned char>(0 + 69 * lt);        // 0 -> 69
32     b = 0;
33 }
34 else if (t < 0.4) {
35     // ===== ORANGE ZONE (K-class) =====
36     // Orange-Red (255, 69, 0) -> Orange (255, 140, 0)
37     double lt = (t - 0.2) / 0.2;
38     r = 255;
39     g = static_cast<unsigned char>(69 + 71 * lt);      // 69 -> 140
40     b = 0;
41 }
42 else if (t < 0.6) {
43     // ===== YELLOW ZONE (G-class, Sun-like) =====
44     // Orange (255, 140, 0) -> Yellow (255, 255, 100)
45     double lt = (t - 0.4) / 0.2;
46     r = 255;
47     g = static_cast<unsigned char>(140 + 115 * lt);    // 140 -> 255
48     b = static_cast<unsigned char>(0 + 100 * lt);      // 0 -> 100
49 }
50 else if (t < 0.8) {
51     // ===== WHITE ZONE (F/A-class) =====
52     // Yellow-White (255, 255, 100) -> Pure White (255, 255, 255)
53     double lt = (t - 0.6) / 0.2;
54     r = 255;
55     g = 255;
56     b = static_cast<unsigned char>(100 + 155 * lt);    // 100 -> 255
57 }
58 else {
59     // ===== BLUE ZONE (O/B-class, Blue Giant) =====
60     // White (255, 255, 255) -> Blue (155, 176, 255)
61     double lt = (t - 0.8) / 0.2;
62     r = static_cast<unsigned char>(255 - 100 * lt);    // 255 -> 155
63     g = static_cast<unsigned char>(255 - 79 * lt);     // 255 -> 176
64     b = 255;
65 }
66
67
68 return Color{r, g, b, 255};
69 }
```

Listing 19.1: Mass to Stellar Color

19.3 Visual Size based on Mass

Ngoài màu sắc, ta còn có thể điều chỉnh kích thước hiển thị theo khối lượng:

1 `/**`

```

2 * @brief Map mass to visual radius for rendering
3 *
4 * Note: Trong thuc te, ban kinh sao ~ M^0.8 (Main Sequence)
5 * Nhung de visual dep hon, ta dung logarithmic scaling
6 */
7 float massToRadius(double mass, double minMass, double maxMass) {
8     const float MIN_RADIUS = 0.03f;
9     const float MAX_RADIUS = 0.3f;
10
11    // Logarithmic scaling (looks better visually)
12    double logMin = std::log(minMass);
13    double logMax = std::log(maxMass);
14    double logMass = std::log(mass);
15
16    double t = (logMass - logMin) / (logMax - logMin);
17    t = std::clamp(t, 0.0, 1.0);
18
19    return MIN_RADIUS + static_cast<float>(t) * (MAX_RADIUS - MIN_RADIUS);
20}
21
22 // Trong main loop:
23 void applyVisuals(std::vector<Body>& bodies) {
24     // Tim min/max mass
25     double minM = bodies[0].mass, maxM = bodies[0].mass;
26     for (const auto& b : bodies) {
27         minM = std::min(minM, b.mass);
28         maxM = std::max(maxM, b.mass);
29     }
30
31     // Apply
32     for (auto& b : bodies) {
33         b.color = massToStellarColor(b.mass, minM, maxM);
34         b.radius = massToRadius(b.mass, minM, maxM);
35     }
36 }
```

Listing 19.2: Mass to Visual Radius

Phần VI

Tính năng Nâng cao (Tùy chọn)

Chương 20

Collision Detection & Merging

20.1 Phát hiện Va chạm

Hiện tại các sao đi xuyên qua nhau. Để thực tế hơn:

```
1  /**
2   * @brief Check and handle collisions between bodies
3   * @param bodies Vector of all bodies
4   *
5   * Note: O(N^2) - Trong production, dung spatial hashing
6   */
7 void handleCollisions(std::vector<Body>& bodies) {
8     std::vector<int> toRemove;
9
10    for (size_t i = 0; i < bodies.size(); i++) {
11        for (size_t j = i + 1; j < bodies.size(); j++) {
12            double dist = bodies[i].pos.distance(bodies[j].pos);
13            double minDist = bodies[i].radius + bodies[j].radius;
14
15            if (dist < minDist) {
16                // INELASTIC COLLISION: Merge into body i
17                // Conservation of momentum: m1*v1 + m2*v2 = (m1+m2)*
18                v_final
19                double totalMass = bodies[i].mass + bodies[j].mass;
20
21                bodies[i].vel = (bodies[i].vel * bodies[i].mass +
22                                 bodies[j].vel * bodies[j].mass) /
23                totalMass;
24
25                // Center of mass position
26                bodies[i].pos = (bodies[i].pos * bodies[i].mass +
27                                 bodies[j].pos * bodies[j].mass) /
28                totalMass;
29
30                bodies[i].mass = totalMass;
31
32                toRemove.push_back(j);
33            }
34        }
35    }
36
37    // Remove merged bodies (reverse order to preserve indices)
38    std::sort(toRemove.begin(), toRemove.end(), std::greater<int>());
39    for (int idx : toRemove) {
```

```
37     bodies.erase(bodies.begin() + idx);  
38 }  
39 }
```

Listing 20.1: Simple Collision Detection

Chương 21

OpenMP Parallelization

21.1 Tối ưu hóa với Đa luồng

```
1 #include <omp.h>
2
3 // Chi can them 1 dong de song song hoa tinh luc!
4 void updateWithOpenMP(std::vector<Body>& bodies, OctreeNode* root) {
5     // Parallel force calculation
6     // Moi thread tinh luc cho mot nhom bodies
7     #pragma omp parallel for schedule(dynamic)
8     for (size_t i = 0; i < bodies.size(); i++) {
9         bodies[i].acc = root->calculateForce(
10             &bodies[i], THETA, G, SOFTENING
11         );
12     }
13
14     // Parallel position update
15     #pragma omp parallel for
16     for (size_t i = 0; i < bodies.size(); i++) {
17         bodies[i].update(DT);
18     }
19 }
20
21 // Compile: g++ -O3 -fopenmp main.cpp -o simulation
```

Listing 21.1: OpenMP Integration

💡 Mẹo

Hiệu quả OpenMP:

- 4-core CPU: Tăng tốc ~3.5x
- 8-core CPU: Tăng tốc ~6-7x
- Schedule **dynamic** tốt hơn **static** vì workload không đều (phụ thuộc vị trí body trong tree)

Chương 22

Visual Effects: Trails & Bloom

22.1 Star Trails (Vết đuôi sao)

```
1 // Luu lich su vi tri
2 struct Body {
3     // ... existing members ...
4     std::deque<Vec3> trail; // Vi tri truoc do
5     static const int TRAIL_LENGTH = 50;
6
7     void updateTrail() {
8         trail.push_front(pos);
9         if (trail.size() > TRAIL_LENGTH) {
10             trail.pop_back();
11         }
12     }
13
14     void drawTrail() const {
15         for (size_t i = 1; i < trail.size(); i++) {
16             // Fade out theo vi tri
17             unsigned char alpha = 255 - (255 * i / TRAIL_LENGTH);
18             Color trailColor = {color.r, color.g, color.b, alpha};
19
20             Vector3 start = toRaylib(trail[i-1]);
21             Vector3 end = toRaylib(trail[i]);
22             DrawLine3D(start, end, trailColor);
23         }
24     }
25 };
```

Listing 22.1: Simple Trail Effect

Chương 23

Kết luận

23.1 Những gì nhóm sẽ đạt được

Sau 8 tuần thực hiện đồ án này, nhóm sẽ:

1. Kiến thức DSA:

- Hiểu sâu về Con trỏ và Quản lý bộ nhớ động
- Thành thạo Đệ quy qua Tree traversal
- Nắm vững phân tích Big-O và tối ưu thuật toán

2. Kỹ năng lập trình:

- Viết C++ sạch theo Modern conventions
- Sử dụng thư viện đồ họa (Raylib)
- Debug và optimize code hiệu quả

3. Kiến thức khoa học:

- Hiểu vật lý Newton và mô phỏng số
- Biết về thiên văn học cơ bản (màu sao, cấu trúc thiên hà)

4. Sản phẩm:

- Một mô phỏng vũ trụ 3D đẹp mắt
- Portfolio project ấn tượng cho CV

23.2 Lời khuyên cuối cùng

⚠ Quan trọng

1. **Đừng sợ sai:** Bugs là thầy giáo tốt nhất. Mỗi Segmentation Fault dạy bạn về pointers.
2. **Commit thường xuyên:** Dùng Git, commit mỗi khi hoàn thành một feature nhỏ.

3. **Visual debugging:** Vẽ Octree wireframe giúp debug cực kỳ hiệu quả.
4. **Incremental development:** Brute-force trước, Barnes-Hut sau. Dùng cỗ làm tất cả cùng lúc.
5. **Hỏi khi cần:** Stack Overflow, GitHub Issues, và thầy/cô luôn sẵn sàng giúp đỡ.

"The cosmos is within us. We are made of star-stuff."

— Carl Sagan

LET'S BUILD THIS UNIVERSE!