

# GIẢI ĐỀ 9 – THPT CHUYÊN AMSTERDAM

## BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.C	4.A	5.D	6.A	7.D	8.B	9.B	10.A
11.A	12.B	13.C	14.C	15.C	16.A				

**Câu 1:** a,  $+\infty$       b,  $a = \frac{3}{4}$

**Câu 2:** a,  $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$ .      b,  $y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}; y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$ .

**Câu 3:** a, Xem chứng minh trong giải

b,  $(\angle SCD, \angle ABCD) = \arctan \frac{\sqrt{6}}{2}$  ;  $d(O, (\angle SCD)) = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

c,  $d(BM, CD) = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

**Câu 4:**  $\frac{1}{2}$

## PHẦN I- TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** + Ba số thực  $x-2, x, \sqrt{x+8}$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên ta có:

Số đầu + Số cuối = 2. Số ở giữa

$$\Rightarrow x-2+\sqrt{x+8}=2x \Leftrightarrow \sqrt{x+8}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x+8=(x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

+ Với  $x=1$ : Ba số hạng của cấp số cộng là:  $-1; 1; 3$ , khi đó tổng của 3 số hạng trên là:

$-1+1+3=3$ . **Chọn C.**

**Câu 2:** + SHTQ CSN:  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

+  $u_1 = 1$

+  $u_4 = -8 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^3 = -8 \Leftrightarrow q^3 = -8 \Leftrightarrow q = -2$ .

$\Rightarrow u_6 = u_1 \cdot q^5 = 1 \cdot (-2)^5 = -32$ . **Chọn B.**

**Câu 3:** **C1:** + Dãy số giảm  $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$

Ta có:

+  $u_n = \frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$

+  $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{n+2}$

Lấy  $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{2}{n+2} - 1 - \frac{2}{n+1} = \frac{2(n+1) - 2(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số  $u_n = \frac{n+3}{n+1}$  là dãy giảm

**C2:** Dùng máy tính cầm tay, chức năng Mode +7

Thử đáp án C:  $u_n = \frac{n+3}{n+1}$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+3}{x+1} \\ \text{Start} = 1 \\ \text{End} = 10 \\ \text{Step} = \frac{9}{19} \end{cases} \Rightarrow$$

Math	
X	F(X)
3   1.9473	1.6785
4   2.421	1.5846
5   2.8947	1.513513514

Giá trị luôn giảm  $\Rightarrow$  Dãy số giảm. **Chọn C.**

**Câu 4:** C1:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-2} = \frac{-1}{1-2} = 1.$

C2: Dùng máy tính

Math
$\frac{ X-1 }{(X-1) \times (X-2)}$

CALC cho  $x = 1 - 0,0000001$

Math
$\frac{ X-1 }{(X-1) \times (X-2)}$
0.99999999

Vậy  $\lim = 1$ . **Chọn A.**

**Câu 5:**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - 4x + 1} + \sqrt{3}x)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1 - 3x^2}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - \sqrt{3}x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - \sqrt{3}x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$\Rightarrow a = 2; b = 3 \Rightarrow S = b - a = 1$ . **Chọn D.**

**Câu 6:** + Ta có:  $f'(x) = \begin{cases} 2x+4 & \Leftrightarrow x \geq 1 \\ 3ax^2+b & \Leftrightarrow x < 1 \end{cases}$ . Để hàm số có đạo hàm tại  $x = 1$  thì:

$$\begin{cases} f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3a + b \\ 1 = a + b - 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1; b = 3.$$

$\Rightarrow S = a + 2b = 1 + 2 \cdot 3 = 7$ . **Chọn A.**

**Câu 7:** + Ta có:  $f'(x) = (\sqrt{x^2+1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ .

$$\Rightarrow g'(x) = (f(\cos x))' = (\cos x)' \cdot f'(\cos x) = -\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} = \frac{-\sin 2x}{2\sqrt{\cos^2 x + 1}}. \text{ Chọn D.}$$

**Câu 8:** + Ta có:  $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'' = (y')' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1' \cdot 2\sqrt{x} - (2\sqrt{x})' \cdot 1}{4x} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ .

$$\Rightarrow y''(1) = -\frac{1}{4}. \text{ Chọn B.}$$

**Câu 9:** + Ta có:  $y' = x^2 + x - 2$ .

$$+ y' \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1. \text{ Chọn B.}$$

**Câu 10:** + Ta có:  $y' = \frac{(x-2)'(x+m) - (x+m)'(x-2)}{(x+m)^2} = \frac{m+2}{(x+m)^2}$ .

$$+ \frac{m+2}{(x+m)^2} > 0 \forall x \in [1; 3] \Leftrightarrow m+2 > 0 \Leftrightarrow m > -2 \quad (1)$$

$$+ \text{Mà: } x+m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -x \Leftrightarrow m \neq -[1; 3] \Leftrightarrow m \neq [-3; -1] \Rightarrow m \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty) \quad (2)$$

Từ (1) và (2). Vậy  $m > -1$  **Chọn A.**

**Câu 11:** + Ta có:  $y' = 3x^2 - 12x + 4 = 3(x-2)^2 - 8 \geq -8$ .

Vậy hsg nhỏ nhất là  $-8$ . **Chọn A.**

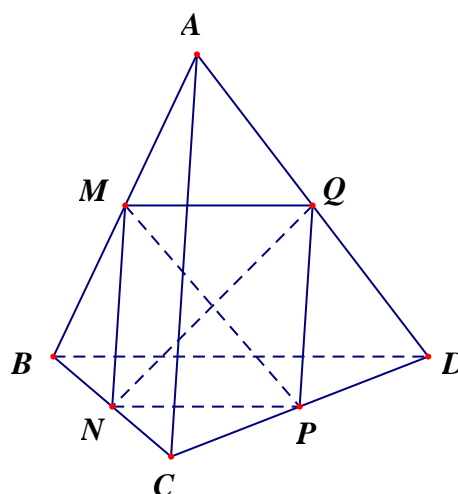
**Câu 12:** + Phương trình vận tốc theo thời gian của chất điểm là:  $v(t) = s'(t) = 2\pi \cos(\pi t)(m/s)$ .

$$+ \text{Vận tốc tại thời điểm } t=2 \Rightarrow v(2) = 2\pi \cos(2\pi) = 2\pi(m/s). \text{ Chọn B.}$$

**Câu 13:**

+ Ta thấy  $\overrightarrow{AB}$  không song song hoặc nằm trên mặt phẳng  $(MNQ)$  nên ba vectơ  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{AB}$  không đồng phẳng.

**Chọn C.**



**Câu 14:**

+ Do  $SO$  là đường cao của chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  nên:  $SO$  tạo với các mặt bên các góc bằng nhau. Khẳng định D đúng.

+  $SO \perp (ABCD); SO \in (SAC)$  nên:

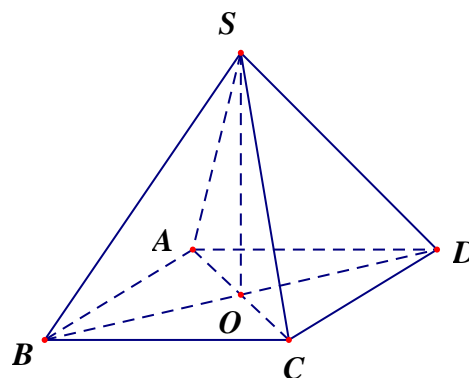
$(SAC) \perp (ABCD)$ . Khẳng định B đúng.

+ Ta có:

$$\begin{cases} DB \perp AC \\ DB \perp SO \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC).$$

Khẳng định A đúng.

Vậy khẳng định C sai. **Chọn C.**

**Câu 15:**

+ Qua B kẻ  $Bd \parallel AC$ .

$$\Rightarrow (SBd) \parallel AC$$

$$\Rightarrow d(AC/SB) = d(AC/(SBd)) = d(A/(SBd)).$$

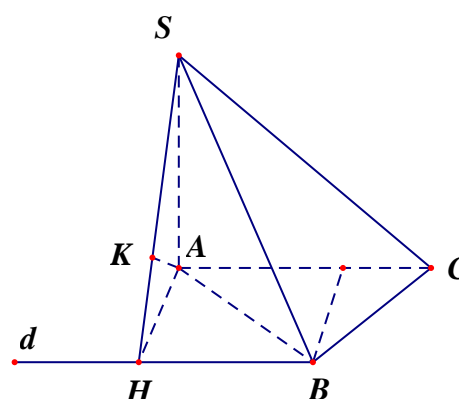
+ Kẻ  $AH \perp Bd = \{H\}$ ,  $SA \perp Bd$ :

$$\Rightarrow (SAH) \perp Bd \Rightarrow (SAH) \perp (SBd).$$

+ Kẻ  $AK \perp SH \Rightarrow d(A/(SBd)) = AK$ .

$$\text{Ta có: } AH = d(B/AC) = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \text{ Chọn C.}$$

**Câu 16:**

+ Gọi P là trung điểm của AB, khi đó ta có:

+ Xét hình thang ABCD ( $AD \parallel BC$ ), ta có:

$P; N$  là trung điểm các cạnh bên nên:  $PN \parallel AD$ .

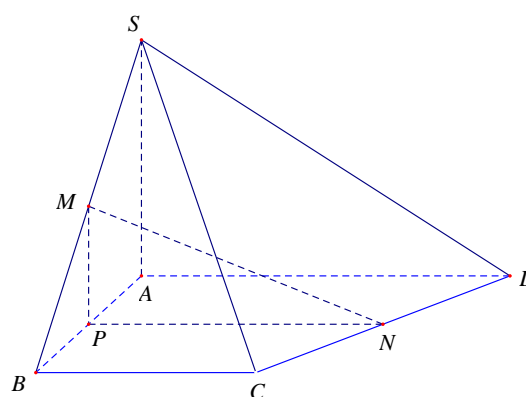
$MP$  là đường trung bình của tam giác SAB nên:

$$MP \parallel SA.$$

$$\Rightarrow (MNP) \parallel (SAD)$$

$$\Rightarrow MN \parallel (SAD).$$

Vậy  $(MN, SAD) = 0^\circ$  **Chọn A.**



**PHẦN II-TỰ LUẬN:****Câu 1:**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{x}\right)} - x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x}} - x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{b) + Ta có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{(x+1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \frac{3}{8} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{a(x^2 - 2)}{x - 3} = \frac{a}{2} \\ f(1) = \frac{a(1^2 - 2)}{1 - 3} = \frac{a}{2} \end{cases}$$

+ Để hàm số đã cho liên tục tại  $x=1$  thì:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$$

**Câu 2:** a) +Ta có:  $y' = (\cos^2 x + \sin x)' = -2\sin x \cdot \cos x + \cos x = \cos x(1 - 2\sin x).$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Vậy các giá trị  $x$  cần tìm là:  $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}.$

$$\text{b) +Ta có: } y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0 \forall x \in TXD.$$

+ Gọi  $x_0$  là tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị hàm số ( $C$ ), phương trình tiếp tuyến là:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$$

+ Tiếp tuyến cắt Ox, Oy tại A và B  $\Rightarrow |y'(x_0)| = \tan \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = \frac{1}{4} (L) \\ y'(x_0) = -\frac{1}{4} (TM) \end{cases} \quad (\text{vì } y' < 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow y=1 \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

Vậy các tiếp tuyến cần tìm là:  $y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$ ;  $y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$ .

### Câu 3:

a) Ta có:  $AM \parallel BC$  nên:  $\triangle AIM \sim \triangle CIB$

$$\Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{AM}{CB} = \frac{1}{2}; IA + IC = AC = a\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow IA = \frac{AC}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$\Rightarrow IA \cdot AC = a^2 = AB^2$  nên theo định lý Thales đảo ta suy ra:  $BM \perp AC = \{I\}$ .  $\Rightarrow \triangle AIB$  vuông tại I

$$+ \begin{cases} MB \perp AC \\ MB \perp SO \end{cases} \Rightarrow MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC).$$

(Đpcm)

b)

+ Gọi N là trung điểm của  $CD$ , ta có:

$$ON \perp CD; SN \perp CD$$

$$\Rightarrow ((SCD); (ABCD)) = \angle SNO.$$

$$+ \tan SNO = \frac{SO}{ON} = \frac{SO}{\frac{AD}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\Rightarrow \angle SNO = \arctan \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$+ \text{Kẻ } OH \perp SN = \{H\}$$

Mà  $OH \perp CD$  (Do  $CD \perp (SON)$ )

$$\Rightarrow OH \perp (SCD)$$

$$\Rightarrow OH = d(O / (SCD)) = \frac{SO \cdot ON}{\sqrt{SO^2 + ON^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$$

c) Gọi P là trung điểm của  $BC \Rightarrow DP \parallel BM$

$$\Rightarrow (SPD) \parallel BM$$

$$\Rightarrow d(BM / SD) = d(BM / (SPD)) = d(I / (SPD)).$$

+ Gọi  $I'$  là giao điểm của  $DP$ ;  $AC$ , ta có:

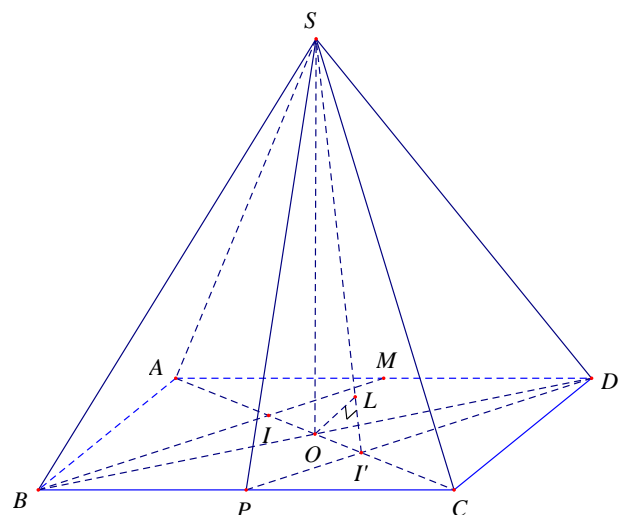
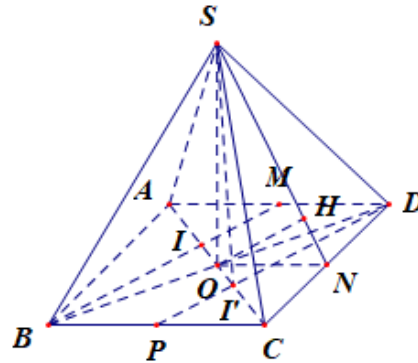
Theo tính chất đối xứng tâm O ta có  $I$ ;  $I'$  đối xứng nhau qua tâm O nên:

$$II' = 2OI' \Rightarrow d(I / (SPD)) = 2d(O / (SPD)).$$

Mà  $BM \perp AC = I$  nên  $DP \perp AC = I'$

$$\text{Kẻ } OL \perp SI' = L \Rightarrow d(O / (SPD)) = OL$$

$$\text{Ta có: } OI' = OI = AO - AI = \frac{AC}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$



$$\Rightarrow OL = \frac{SO \cdot OI'}{\sqrt{SO^2 + OI'^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{20}.$$

$$\Rightarrow d(I/(SPD)) = 2OL = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

**Câu 4:** + Gọi  $u_n; v_n$  là tỉ lệ giữa số lít nước với thể tích của cả bình sau mỗi quá trình đổ ở 2 bình  $A; B$ .

Ta có:

+ Do đầu tiên, đổ nước từ bình B vào bình A để bình A đầy và trộn đều\* hỗn hợp này.

Tiếp theo, đổ hỗn hợp vừa tạo thành từ bình A vào bình B để bình B đầy, sau đó trộn đều hỗn hợp này lên nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} u_0 = 0; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{4} \quad (n \in \mathbb{N}). \\ v_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{3v_n}{4} \end{cases}$$

+ Ta có:  $v_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{3v_n}{4} \Leftrightarrow u_n = 2v_{n+1} - \frac{3v_n}{2}$ . Thay vào phương trình số (2) của hệ ta có:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{4} \Leftrightarrow 2v_{n+2} - \frac{3v_{n+1}}{2} = v_{n+1} - \frac{3v_n}{4} + \frac{v_n}{4} \Leftrightarrow 4v_{n+2} - 5v_{n+1} + v_n = 0 \Leftrightarrow v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{1}{4}(v_{n+1} - v_n).$$

$$+ \text{Đặt } k_n = v_n - v_{n-1} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = v_1 - v_0 = -\frac{1}{4} \\ k_n = \frac{1}{4}k_{n-1} \end{cases} \Rightarrow k_n = k_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$\Rightarrow v_n - v_{n-1} = k_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$+ \text{Khi đó ta có hệ sau: } \Rightarrow \begin{cases} v_n - v_{n-1} = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ v_{n-1} - v_{n-2} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ \dots \\ v_1 - v_0 = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow v_n - v_0 = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \dots + (v_1 - v_0) = -\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \dots - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \cdot \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + \dots + 1 \right] = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}.$$

+ Do quá trình lặp lại liên tục nên  $n \rightarrow +\infty$ , khi đó:  $\left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0$ :

$$\Rightarrow v_n - 1 = v_n - v_0 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow v_n = \frac{2}{3}.$$

Khi đó tỉ số giữa số lít mật ong và số lít nước ở bình B sẽ bằng:  $\frac{1-v_n}{v_n} = \frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ .

Đáp án:  $\frac{1}{2}$ .