GIẢI ĐỀ 8 – THPT CHUYÊN NGOẠI NGỮ

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1: -5 **Câu 2:** $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ **Câu 3:** $m=\dfrac{-17}{3}$

Câu 4: $S=\left[1;\dfrac{3}{2}\right)$. **Câu 5:** $y=\dfrac{x+2}{2}$ hoặc $y=\dfrac{x+10}{2}$

Câu 6: a, Xem chứng minh trong giải **b,** $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

c, $d(A'B,B'C')=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 7: $-1;0;1$.

Câu 1: + Ta có: $f'(x)=5(\sin x)'-(\cos 2x)'+(3)'=5\cos x+2\sin 2x$

$\Rightarrow f'(\pi)=5\cos\pi+2\sin 2\pi=-5$.

Câu 2: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

+ Điều kiện: $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

+ Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

+ Đạo hàm: $y'=\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-1}\right)'$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{(x^2-x+1)'(x-1)-(x^2-x+1).(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Câu 3: Ta có:

$$+\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x-1)\left(\sqrt{x+1}+2\right)=8.$$

$$+\lim_{x\to 3^-}f(x)=f(3)=-(3m+9).$$

+ Để hàm số đã cho liên tục tại $x=3$ thì:

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^-}f(x)=f(3)\Leftrightarrow -(3m+9)=8\Leftrightarrow m=\frac{-17}{3}.$$

Câu 4: + Điều kiện: $-x^2+4x-3>0 \Leftrightarrow 1<x<3$

+ Tập xác định của hàm số: $D=[1;3]$.

+ Ta có: $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+4x-3}}{x}=\sqrt{\dfrac{-3}{x^2}+\dfrac{4}{x}-1}$.

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\dfrac{-3}{x^2}+\dfrac{4}{x}-1\right)'}{2\sqrt{\dfrac{-3}{x^2}+\dfrac{4}{x}-1}}=\frac{\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{-3}{x^2}+\dfrac{4}{x}-1}}.$$

+ Bất phương trình $f'(x)>0$ khi đó sẽ tương đương với:

$$\frac{\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{-3}{x^2}+\dfrac{4}{x}-1}}>0 \Leftrightarrow \frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}>0 \Leftrightarrow \frac{3-2x}{x^3}>0 \Leftrightarrow 3-2x>0\left(do\, x\in[1;3]\right) \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)>0$ là: $S=\left[1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 5: + Ta có: $y'=\dfrac{2}{(x+4)^2}$.

+ Gọi x_0 là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C), khi đó ta có:

$$y'(x_0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{(x_0+4)^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0+4)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-2 \\ x_0=-6 \end{array}\right.$$

+ Với $x_0=-2$, phương trình đường tiếp tuyến là:

$(d): y=\dfrac{1}{2}(x+2)+y(-2)$ hay $(d): y=\dfrac{1}{2}(x+2)$.

+ Với $x_0=-6$, phương trình đường tiếp tuyến là:

$(d): y=\dfrac{1}{2}(x+6)+y(-6)$ hay $(d): y=\dfrac{1}{2}(x+10)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc $k=\dfrac{1}{2}$ là: $y=\dfrac{x+2}{2}$ hoặc $y=\dfrac{x+10}{2}$.

Câu 6:

a,Tam giác ABC vuông cân tại A nên: $AI\perp BC$.

Lại có: $A'A\perp BC$ nên: $(A'IA)\perp BC \Rightarrow (A'IA)\perp(BCC'B')$.

(Đpcm)

+ Ta có: $BC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}=B'B$ nên mặt bên $(B'CC'B)$ là hình vuông.

$\Rightarrow B'C\perp C'B$ mà IM là đường trung bình của tam giác BCC' nên:

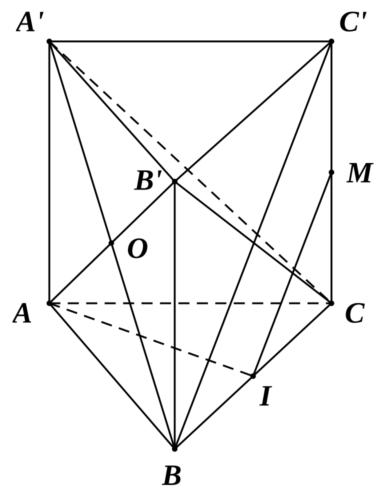
$\Rightarrow B'C\perp IM$. (1)

Lại có: $\begin{cases} AI\perp BB'(BB'\perp(ABC)\supset AI) \\ AI\perp BC(\Delta ABC \perp \text{can tai } A) \end{cases}$

$\Rightarrow AI\perp(BCB')$

$\Rightarrow AI\perp B'C$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B'C\perp(AIM)$.



b, Do $AB = AC$ nên: $A'B = A'C$

$\Rightarrow \Delta A'BC$ cân tại A' hay $A'I \perp BC$.

Kết hợp với: $AI \perp BC; (A'BC) \cap (ABC) = BC$. Ta suy ra:

$$(A'BC),(\text{ABC}) = \alpha = A'IA \Rightarrow \sin\alpha = \sin A'IA = \frac{A'A}{A'I}.$$

Ta có: $AI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'I = \sqrt{AI^2 + A'A^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{A'A}{A'I} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

c, Ta có: $B'C'//BC \Rightarrow B'C'//(A'BC)$.

$\Rightarrow d(A'B/B'C') = d(B'C'/(A'BC)) = d(B'/(A'BC))$.

$+$ Gọi O là giao điểm của $A'B$ và AB'.

$+$ Do $A'BB'A$ là hình chữ nhật nên: $AO = B'O$

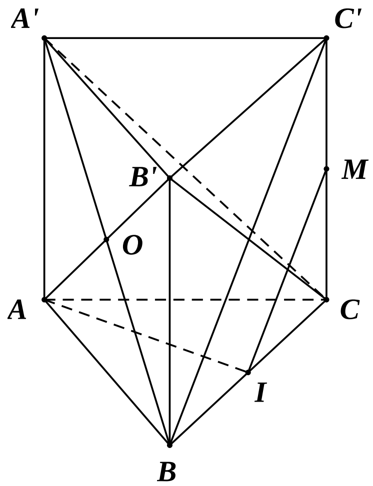
$\Rightarrow d(B'/(A'BC)) = d(A/(A'BC))$.

$+$ Gọi H là hình chiếu của A xuống $A'I$

Ta có: $(A'IA) \perp (A'BC)$ nên:

$$d(A/(A'BC)) = AH = \frac{A'A.AI}{A'I} = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Vậy khoảng cách giữa $A'B$ và $B'C'$ là: $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.



Câu 7: $+$ ĐKXĐ: $x \le 4$.

$+$ Đặt $\sqrt{4-x} = t\,(t \ge 0) \Rightarrow x = 4 - t^2$, khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$(m^2-4)(4-t^2-1)^{2020} = 2019t \Leftrightarrow m^2 - 4 = \frac{2019t}{(t^2-3)^{2020}}.$$

$+$ Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2019t}{(t^2-3)^{2020}}\left(t \ge 0; t \ne \sqrt{3}\right)$.

$+$ Với $0 \le t < \sqrt{3}$, ta có: $f(t) = \dfrac{2019t}{(t^2-3)^{2020}} \ge 0$; $\lim\limits_{t \to \sqrt{3}^-} f(t) = \lim\limits_{t \to \sqrt{3}^-} \dfrac{2019t}{(t^2-3)^{2020}} = +\infty$

- Mặt khác hàm số liên tục trên $\left[0;\sqrt{3}\right)$ nên tập giá trị của hàm số trên nửa đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right)$ là: $[0;+\infty)$

- Khi đó để phương trình vô nghiệm trên $\left[0;\sqrt{3}\right)$ thì:

$\Rightarrow m^2 - 4 \notin [0;+\infty) \Rightarrow m^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < m < 2$ (1)

$+$ Với $\sqrt{3} < \text{t}$, ta có: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{2019t}{(t^2-3)^{2020}} = 0$; $\lim\limits_{t \to \sqrt{3}^+} f(t) = \lim\limits_{t \to \sqrt{3}^+} \dfrac{2019t}{(t^2-3)^{2020}} = +\infty$

- Mặt khác hàm số liên tục trên $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ nên tập giá trị của hàm số trên nửa đoạn $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ là: $(0;+\infty)$

- Khi đó để phương trình vô nghiệm trên $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ thì:

$\Rightarrow m^2-4\notin\left(0;+\infty\right)\Rightarrow m^2-4\le 0\Rightarrow -2\le m\le 2.$ (2)

+ Từ (1) và (2) ta suy ra để phương trình vô nghiệm thì: $-2<m<2.$

+ Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên: $m=-1;0;1.$

Vậy các giá trị m cần tìm để phương trình vô nghiệm là: $-1;0;1.$