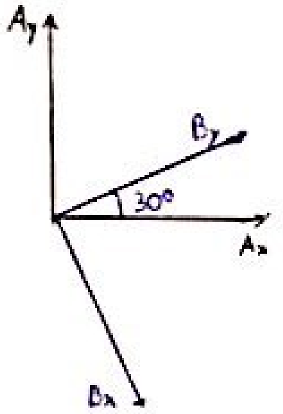
# PRACTICA 3: TRANSFORMACIONES AFINES

## Ejercicio 1

$P_A = (3,4) \rightarrow$ En el sist de coord A

$P_B = (-2'5, 0'5) \rightarrow$ En el sist de coord B




Ejemplificación de la situación entre ejes

Pondremos A en el origen de coordenadas (0,0), de manera que $A_y = (0,1)$ y $A_x = (1,0)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(-60) & \cos(30) & t_1 \\ \sin(-60) & \sin(30) & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$t_1$ y $t_2$ son las coordenadas del origen del sistema B

$$P = \begin{pmatrix} \cos(-60) & \cos(30) & t_1 \\ \sin(-60) & \sin(30) & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \cdot \cos(-60) + 0,5 \cdot \cos(30) + t_1 \\ -2,5 \sin(-60) + 0,5 \sin(30) + t_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 + t_1 \\ 2,4 + t_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos los puntos para encontrar el origen de B

$-0,8 + t_1 = 3 \rightarrow t_1 = 3,8$

$2,4 + t_2 = 4 \rightarrow t_2 = 1,6$

$1 = 1$

1.

$$P_{0A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t_x$ y $t_y$ son los puntos de origen del sistema A vistos desde b

$$P_{0A} = \begin{pmatrix} \cos(-60) & \cos(30) & 3,8 \\ \sin(-60) & \sin(30) & 1,6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_x \cdot \cos(-60) + t_y \cos(30) + 3,8 \\ t_x \cdot \sin(-60) + t_y \sin(30) + 1,6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos los puntos para encontrar $t_x$ y $t_y$

$$\left.\begin{array}{l} t_x \cos(-60) + t_y \cos(30) + 3,8 = 0 \\ t_x \sin(-60) + t_y \sin(30) + 1,6 = 0 \\ 1 = 1 \end{array}\right\} \text{Resolvemos el sistema}$$

$$t_x = \frac{-3,8 - t_y \cos(30)}{\cos(-60)} \xrightarrow{\text{Substituimos}} \frac{-3,8 - t_y \cos(30)}{\cos(-60)} \sin(-60) + t_y \sin(30) + 1,6 = 0$$

Tras resolver $\rightarrow t_y = -6$ $\qquad t_x = \frac{-3,8 + 6\cos(30)}{\cos(-60)} = 2,8 \qquad {}^{b}A_o = (2,8 \ , \ -6)$

Escaneado con CamScanner

2.

$$P_{OB} = \begin{pmatrix} 3,8 \\ 1,6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-60) & \cos(30) & 3,8 \\ \sin(-60) & \sin(30) & 1,6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P_{OB} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ 1 \end{pmatrix}$ Siendo $t_x$ y $t_y$ los puntos del origen de B vistos desde A

$$P_{OB} = \begin{pmatrix} 3,8 \cdot \cos(-60) + 1,6 \cdot \cos(30) + 3,8 \\ 3,8 \cdot \sin(-60) + 1,6 \cdot \sin(30) + 1,6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,1 \\ -0,9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t_x = 7,1$ $t_y = -0,9$ Origen de B desde A = $(7,1 ; 0.9)$

3-

$^{B}q_B = (3,1)^T \qquad ^{A}q_B = (e,d)^T$

$^{A}B \cdot {}^{A}q_B = {}^{B}B \cdot {}^{B}q_B$

$$\begin{bmatrix} e \\ d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-60) & \cos(30) & 3{,}8 \\ \sin(-60) & \sin(30) & 1{,}6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$e = 3\cos(-60) + \cos(30) + 3{,}8 = 6{,}2$

$d = 3\sin(-60) + \sin(30) + 1{,}6 = -0{,}5$

$\boxed{^{A}q_B = (6'2, -0'5)^T} \rightarrow$ coordenadas de q vistas desde A.

2

$^{A}O_B(3,1,-2)$ $\quad$ $^{B}O_C(-3,1,-2)$

A → B : 25° en z + 145° en y + 30° en x

$O_B = O_C \to q = \frac{1}{7}\left(-\frac{7\sqrt{3}}{2} + 3i - j - \frac{3}{2}k\right)$

$^{C}v_1\ (0,2,0)$ $\quad$ $^{C}v_2\ (0,2,5)$

1_ Para transformar un vector dado en C ($^{C}p$) a B ($^{B}p$) se necesita la matriz afín del sistema B (~~un vector de C a B~~) visto desde A y otra matriz afín del sistema C vista desdel mismo sistema. Por lo tanto, tenemos que:

$$p = {}^{A}B_B \cdot {}^{B}p \qquad p = {}^{A}B_C \cdot {}^{C}p$$

$$p = {}^{A}B_B \cdot {}^{B}p = {}^{A}B_C \cdot {}^{C}p$$

$$^{B}p = \left({}^{A}B_B\right)^{-1} \cdot {}^{A}B_C \cdot {}^{C}p$$

Consideramos el sistema A como base canónica.

Nomenclatura usada:

$^{A}B_C$ → Matriz afín de C vista desde A.

2_ Como consideramos los ejes del sistema A como la base canónica, tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ y debemos rotar esta base:

25° alrededor del eje z: $R_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$R_z \cdot A = \begin{pmatrix} \cos(25) & -\sin(25) & 0 \\ \sin(25) & \cos(25) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z$$

Escaneado con CamScanner

Después giramos 145° alrededor de "y":

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_y \cdot R_z = \begin{pmatrix} \cos(145) & 0 & \sin(145) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(145) & 0 & \cos(145) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(25) & -\sin(25) & 0 \\ \sin(25) & \cos(25) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Después giramos 30° alrededor del eje x:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_x \cdot R_y \cdot R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(30) & -\sin(30) \\ 0 & \sin(30) & \cos(30) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(145) & 0 & \sin(145) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(145) & 0 & \cos(145) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(25) & \sin(25) & 0 \\ \sin(25) & \cos(25) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x \cdot R_y \cdot R_z = \begin{pmatrix} -0{,}742404 & 0{,}346189 & 0{,}573576 \\ 0{,}625917 & 0{,}663684 & 0{,}409576 \\ 0{,}238883 & 0{,}663082 & -0{,}709406 \end{pmatrix} = B$$

Por lo tanto:

${}^{A}B_{B}$ → Matriz afín de B vista desde A.

$${}^{A}B_{B} = \begin{pmatrix} -0{,}742404 & 0{,}346189 & 0{,}573576 & 3 \\ 0{,}625917 & 0{,}663684 & 0{,}409576 & 1 \\ -0{,}238883 & 0{,}663082 & -0{,}709406 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, tenemos el quaternión de rotación "q" que rota de C a B. Por lo tanto, si encontramos el ángulo y eje e invertimos uno de los dos, encontraremos la rotación de B a C.
"q" es unitario, comprobado en "julia".

quat = $\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot u\right)$, siendo "u" el eje de rotación

Tenemos que: $q = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{7}i - \frac{1}{7}j - \frac{3}{14}k\right)$, por lo que:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 150^\circ$$

$$\alpha = 300^\circ$$

Encontramos también el eje "u":

$$u_1 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{7} \rightarrow u_1 \cdot \sin(150) = \frac{3}{7} \rightarrow u_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$$

$$u_1 = \frac{6}{7}$$

$$u_2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{1}{7} \rightarrow u_2 \cdot \sin(150) = -\frac{1}{7} \rightarrow u_2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{7}$$

$$u_2 = -\frac{2}{7}$$

$$u_3 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{3}{14} \rightarrow u_3 \cdot \sin(150) = -\frac{3}{14} \rightarrow u_3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{14}$$

$$u_3 = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

$$u = \left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

Ahora tenemos $\alpha = 300°$ y $u = \left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$, que proporcionan un giro de C a B. Si cambiamos a $\alpha = -300°$ obtenemos la rotación de B a C. Con la fórmula de Rodrigues obtenemos la matriz de Rotación de B a C.

$$R_{B\to C} = I + U \cdot \sin(\alpha) + U^2(1-\cos(\alpha))$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & 0 & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{B\to C} = I + U\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + U^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$R_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & 0 & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & 0 & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \frac{1}{2}$$

Resolviendo estas operaciones nos queda que:

$$R_{B\to C} = \begin{pmatrix} 0{,}867347 & -0{,}493603 & -0{,}0637624 \\ 0{,}248705 & 0{,}540816 & -0{,}803532 \\ 0{,}431109 & 0{,}681083 & 0{,}591837 \end{pmatrix}$$

Si ahora multiplicamos la base de B por $R_{B\to C}$, encontramos la base de C (vista desde A).

$$R_{B\to C} \cdot B =$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}867347 & -0{,}493603 & -0{,}0637624 \\ 0{,}248703 & 0{,}540816 & -0{,}803532 \\ 0{,}431109 & 0{,}681083 & 0{,}591837 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}742404 & 0{,}346189 & 0{,}573576 \\ -0{,}625917 & 0{,}663684 & 0{,}409576 \\ 0{,}238883 & 0{,}663082 & -0{,}709406 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}937644 & -0{,}0696101 & 0{,}340555 \\ 0{,}345816 & -0{,}0877777 & 0{,}939187 \\ -0{,}0351357 & 0{,}993703 & 0{,}106377 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos la base C. Nos falta saber el origen de C visto desde A $({}^{A}O_C)$

${}^{B}O_C\ (-3, 1, -2)$ $\qquad O_C = {}^{A}B_A \cdot {}^{A}O_C$ , ${}^{A}B_A = I$ (ya que es la base canónica)

$$O_C = {}^{A}O_C$$

$$O_C = {}^{A}B_B \cdot {}^{B}O_C$$

$$\underline{\underline{{}^{A}O_C = {}^{A}B_B \cdot {}^{B}O_C}}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}742404 & 0{,}346189 & 0{,}573576 & 3 \\ 0{,}625917 & 0{,}663684 & 0{,}409576 & 1 \\ -0{,}238853 & 0{,}663082 & -0{,}709406 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}4262489 \\ -1{,}0332189 \\ 0{,}798543 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{A}O_C = (4'4262489, -1'0332189, 0'798543)^T$$

Por lo tanto, teniendo el origen de C visto desde A y teniendo la base C, podemos formar la matriz afín que transforma un punto de C a A.

$$\boxed{{}^{A}B_C = \begin{pmatrix} -0{,}937644 & -0{,}0696101 & 0{,}340555 & 4{,}4262489 \\ 0{,}345816 & -0{,}0877777 & 0{,}934187 & -1{,}0332189 \\ -0{,}0351357 & 0{,}993705 & 0{,}106377 & 0{,}798543 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Esta es la matriz afín que convierte las coordenadas de un vector en el sistema C al sistema A.

4

$\overline{ab} = b - a = (3'7207, 2'8794, 4'4372) - (0'9115, 1'9397, 3'3304)$

$\overline{ab} = (2'8092, 0'9397, 1'1068)$

$\overline{cd} = d - c = (2'6663, 3'8191, 4'5087) - (1'9659, 1'0000, 3'2588)$

$\overline{cd} = (0'7004, 2'8191, 1'2499)$

Una vez calculados los dos segmentos, formamos dos matrices ($M$ y $M'$). ~~(donde en $M$ se encontraran los dos vectores y en $M'$)~~

Transfomamos los segmentos en vectores en el espacio.

$\overline{ab} = \vec{v}$ $\qquad\qquad$ $\overline{cd} = \vec{w}$

De manera que:

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & d_1 - a_1 \\ v_2 & w_2 & d_2 - a_2 \\ v_3 & w_3 & d_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

donde "d" es un punto del segmento $\overline{cd}$ y "a" es un punto del segmento $\overline{ab}$.

Para saber si las dos rectas se intersectan debemos calcular los rangos de las matrices $M$ y $M'$.

$$M = \begin{pmatrix} 2'8092 & 0'7004 \\ 0'9397 & 2'8191 \\ 1'1068 & 1'2499 \end{pmatrix} \qquad |M| = \begin{vmatrix} 2'8092 & 0'7004 \\ 0'9397 & 2'8191 \end{vmatrix} = 7'26125 \neq 0$$

(operado con julia)

Debido que $|M| \neq 0$, el rango de $M$ es 2.

$$M' = \begin{pmatrix} 2'8092 & 0'7004 & 1'7548 \\ 0'9397 & 2'8191 & 1'8799 \\ 1'1068 & 1'2499 & 1'1783 \end{pmatrix}$$

Escaneado con CamScanner

$$|M'| = \begin{vmatrix} 2'8092 & 0'7004 & 1'0544 \\ 0'9397 & 2'8191 & -0'9377 \\ 1'1068 & 1'2499 & -0'0716 \end{vmatrix} = -0{,}0003 \simeq 0$$

Debido a que el determinante de $M' = 0$, el rango de $M' = 2$.

Así pues, como el $rg(M) = 2$ y $rg(M') = 2$, las dos rectas se intersectan.
Esta conclusión la sacamos porque $\vec{u}$ y $\vec{w}$ no son proporcionales (por eso el $rg(M) = 2$) y por lo tanto no son paralelas (se cruzan en algún punto del espacio), y $\overline{AD}$ la podemos escribir como una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$ (por eso el $rg(M') = 2$).

Ejercicio 4.

2.

$$\begin{array}{cc} \vec{a} & \vec{b} \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 0,9115 & 3,7207 & 1,9659 & 2,6663 \\ 1,9397 & 2,8794 & 1,0000 & 3,8191 \\ 3,3304 & 4,4372 & 3,2588 & 4,5087 \end{array}\right]$$

Primero encontramos los dos vectores

$\vec{a} = (3'7207,\ 2'8794,\ 4'4372) - (0'9115,\ 1'9397,\ 3'3304) = (2'8092, 0'9397, 1'1068)$

$\vec{b} = (2'6663,\ 3'8191,\ 4'5087) - (1'9659,\ 1'00,\ 3'2588) = (0'7004, 2'8191, 1'2499)$

Para encontrar el angulo usaremos esta fórmula: $\vec{u}\ \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$.

Aislando la fórmula sabemos que $\rightarrow \cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ por lo tanto

$|\vec{a}| = \sqrt{2'8092^2 + 0'9397^2 + 1'1068^2} = 3'1622$

$|\vec{b}| = \sqrt{0'7004^2 + 2'8191^2 + 1'2499^2} = 3'1623$

$\cos(\alpha) = \dfrac{(2'8092, 0'9397, 1'1068)\ (0'7004, 2'8191, 1'2499)}{3'1622 \cdot 3'1623} = 0,6$

$\alpha = \arccos(0.6) = 53'13°$

3. Para calcular los puntos en el plano de la cámara hemos creado una función en julia que se llama camera_plane_without_focus() Esta la puedes ver en el archivo affin_transformation.jl, en la línea 97.

Gracias a la función sabemos que los puntos en el plano de la cámara son:

$$\left.\begin{array}{l} a=(1'3451,\ 0'7241) \\ b=(-0'1117,\ 0'5500) \\ c=(0'9358,\ 1'1498) \\ d=(0'0419,\ 0'1382) \end{array}\right\}$$

En la función los puntos salen homogeneos, aquí hemos quitado el 1

· Calculamos los vectores

$$\vec{u}=b-a=(-0'1117,\ 0'5500)-(1'3451,\ 0'7241)=(-1'4568,\ -0'1741)$$

$$\vec{v}=d-c=(0'0419,\ 0'1382)-(0'9358,\ 1'1498)=(-0'8939,\ -1,0116)$$

· Teniendo los vectores y sabiendo que $\cos(\alpha)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$:

$$|\vec{u}|=\sqrt{(-1'4568)^2+(-0'1741)^2}=1'4672$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-0'8939)^2+(-1'0116)^2}=1'3500$$

$$\cos(\alpha)=\frac{(-1'4568,\ -0'1741)\cdot(-0'8939,\ -1'0116)}{1'4672\cdot 1'35}=0'7464 \rightarrow \alpha=\arccos(0'7464)=41'72^{\circ}$$

4_ Encontramos el origen de la cámara en coordenadas estándard.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B_{cam \to E} \cdot \begin{bmatrix} 4'665 \\ 3'735 \\ -0'5395 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{cam \to E} = \begin{bmatrix} -0'8658 & 0'4867 & 0'1160 & X \\ -0'4939 & -0'7943 & -0'3539 & Y \\ -0'0801 & -0'3637 & 0'9281 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(matriz hecha en julia desde la línea 137-140) en "drawer_ex4.jl")

Por lo tanto:

$$0 = 0'8658 \cdot 4'665 + 0'4867 \cdot 3'735 + 0'1160 \cdot (-0'5395) + X$$

$$X = 2{,}2837$$

$$0 = (-0'4939 \cdot 4'665) + (-0'7943) \cdot 3'735 + (-0'3539) \cdot (-0'5395) + y$$

$$y = 5{,}0798$$

$$0 = (-0{,}0801) \cdot 4{,}665 + (0{,}3637) \cdot 3'735 + 0{,}9281 \cdot (-0{,}5395) + z$$

$$z = 2{,}2328$$

$$O_c\,(2'2837,\ 5'0798,\ 2'2328)$$