1966 г. январь—февраль *т. XXI, вып. 1 (127)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 518

О СПОСОБАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОЧЛЕНОВ

В. Я. Пан

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач, связанных с вычислительной практикой, у ряда авторов (Н. С. Бахвалова, А. Г. Витушкина, Н. М. Коробова, С. Л. Соболева и др.) в последнее время возник вопрос о построении не просто удобных, но и оптимальных в каком-то смысле алгоритмов. Естественно, что решение этого вопроса начинается с простейших задач. Вычисление значений многочленов — одна из наиболее распространенных массовых операций в практике вычислений — дает примеры таких задач, и здесь удается найти оптимальные алгоритмы. При этом в данном случае, несмотря на элементарность формулировок результатов, для построения оптимальных алгоритмов и доказательства их неулучшаемости обычно приходится использовать разнообразные и непростые методы. Изложению этих результатов и основных методов и посвящен данный обзор.

1. Пусть задан многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ и нам требуется вычислить его значение в точке $x = x_0$. Простейший способ заключается в том, чтобы последовательно возвести x_0 в квадрат, куб и т. д.; наконец, в n-ю степень, затем $x_0{}^{n-k}$ умножить на a_k и все сложить. При этом будет произведено n сложений и $2n - 1$ умножений.

Однако существуют и более экономные способы вычисления $P_n(x_0)$. Имеется, например, общеизвестная «схема Горнера», позволяющая вычислить значение многочлена за n умножений и n сложений. Эта схема основана на тождестве

$$P_n(x) = (\ldots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \ldots + a_n).$$

Зададимся вопросом: нельзя ли еще более усовершенствовать схему вычислений, уменьшив число сложений или умножений или того и другого вместе в сравнении со схемой Горнера? Этот вопрос требует более точной постановки задачи. Нам надо точно описать, что мы понимаем под словом «схема».

Значком $\circ$ ниже мы обозначаем какую-нибудь арифметическую операцию: сложение, вычитание, умножение или деление. Сложения и вычитания мы обозначаем далее значком $\pm$, умножения и деления — значком $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$.

Конечный набор действий

$$p_i = R_i' \circ R_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{0.1}$$

$$p_m \equiv P_n(x), \tag{0.2}$$

где каждое R_i' и R_i'' есть либо переменное x, либо a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, либо абсолютная константа, не зависящая от x, a_0, a_1, ..., a_n, либо p_j, $j < i$, приводящий к тождеству (0.2) по x, a_0, a_1, ..., a_n, в соответствии с установившейся терминологией мы будем называть *схемой без предварительной обработки коэффициентов*.

Оба способа вычисления $P_n(x_0)$, указанные нами выше, являются, очевидно, схемами в только что указанном смысле.

В § 1 настоящей статьи (теорема 1.1) мы доказываем, что каждая схема (0.1) содержит не менее n операций $\pm$ и не менее n операций $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$.

Таким образом, схема Горнера для класса *всех многочленов* является неулучшаемой. Этот результат не противоречит, естественно, тому, что бывают более «легкие» для вычисления многочлены, для которых можно придумать «индивидуальные» схемы вычислений [1]), более экономичные, чем схема Горнера.

Например, для вычисления многочлена $x^{15} + x^{14} + \ldots + 1 = \frac{x^{16}-1}{x-1} = P(x)$ требуется лишь четыре операции умножения и одно деление, т. е. пять операций $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$, вместо 15 по схеме Горнера:

$$p_1 = x \times x = x^2,\ p_2 = p_1 \times p_1 = x^4,\ p_3 = p_2 \times p_2 = x^8,\ p_4 = p_3 \times p_3 = x^{16},$$
$$p_5 = x - 1,\ p_6 = p_4 - 1 = x^{16} - 1,\ p_7 = p_6 : p_5 = P(x).$$

Однако, как показано в § 1, для любого n множество всех «легких» многочленов степени n неплотно в пространстве всех многочленов степени не выше n и имеет в нем нулевую меру.

2. Иногда в вычислительной практике требуется многократно вычислять значения в различных точках одного и того же многочлена (например, в задачах вычисления $\sin x$ и других элементарных функций). Тогда естественно сначала попробовать произвести обработку коэффициентов, т. е.

---

[1]) В «индивидуальных» схемах без предварительной обработки коэффициентов не должны участвовать абсолютные константы, так как в этом случае они могли бы быть функциями от коэффициентов вычисляемого многочлена, т. е. мы имели бы схемы с предварительной обработкой коэффициентов (см. ниже).

сначала провести (один раз) вычисления с коэффициентами вычисляемого многочлена так, чтобы последующая схема вычислений с полученными функциями коэффициентов содержала бы возможно меньшее число арифметических операций.

Приведем простейший пример реализации этой идеи, описанный Тоддом. Воспользуемся тождеством

$$
\begin{aligned}
a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 &= a_0\{(x(x+\lambda_1)+\lambda_2)(x(x+\lambda_1)+x+\lambda_3)+\lambda_4\}= \\
&= a_0x^4+a_0(2\lambda_1+1)x^3+a_0(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_1(\lambda_1+1))x^2+ \\
&\quad + a_0((\lambda_2+\lambda_3)\lambda_1+\lambda_2)x+a_0(\lambda_2\lambda_3+\lambda_4). \qquad (0.3)
\end{aligned}
$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x и разрешая полученные уравнения, получим:

$$
\lambda_1=\frac{a_1-a_0}{2a_0},\ \lambda_2=\frac{a_3}{a_0}-\lambda_1\frac{a_2}{a_0}+\lambda_1^2(\lambda_1+1),\ \lambda_3=\frac{a_2}{a_0}-\lambda_1(\lambda_1+1)-\lambda_2,\ \lambda_4=\frac{a_4}{a_0}-\lambda_2\lambda_3.
$$

Итак, если мы заранее вычислим λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), то далее вычисления можно производить по схеме (см. тождество (0.3)):

$$
\left.\begin{aligned}
&p_1=x+\lambda_1,\ p_2=p_1\times x,\ p_3=p_2+\lambda_2,\ p_4=p_2+x, \\
&p_5=p_4+\lambda_3,\ p_6=p_3\times p_5,\ p_7=p_6+\lambda_4,\ p_8=a_0\times p_7.
\end{aligned}\right\} \qquad (0.4)
$$

Схема (0.4) содержит всего 3 умножения (а не 4, как было бы при стандартной схеме Горнера) и пять сложений. Схемам с предварительной обработкой коэффициентов посвящены §§ 2, 3 и 4.

Основной результат § 2 (теорема 2.1) заключается в том, что всякая схема с предварительной обработкой коэффициентов содержит не менее n операций $\pm$ и при $n \geqslant 2$ не менее $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ операций $\dot{\times}$ (здесь также имеет место сделанное выше замечание об «индивидуальных» схемах и о «легких» для вычисления многочленах, но не нужно запрещать операции над константами).

Подставляя $n = 4$, мы получаем, что необходимы 4 операции $\pm$ и 3 операции $\dot{\times}$, так что схема Тодда является наилучшей в смысле умножений и почти наилучшей в смысле сложений. § 3 и § 4 посвящены конструированию оптимальных схем вычислений с предварительной обработкой коэффициентов. Там, в частности, содержится следующий результат (теорема 3.2): существует схема, пригодная для вычисления любого многочлена степени n с комплексными коэффициентами, в которой нижние оценки теоремы 2.1 числа операций достигаются с точностью до одного сложения (при $n=2r$):

$$
\left.\begin{aligned}
&p_0=1, \\
&p_2=z(z+\lambda_1), \\
&p_4=(p_2+\lambda_2)(p_2+z+\lambda_3)+\lambda_4, \\
&p_{2s+2}=p_{2s}(p_2+\lambda_{2s+1})+\lambda_{2s+2}\quad (s=2,3,\ldots,r-1), \\
&P_n(z)=\begin{cases} a_0p_{2r} & \text{при } n=2r, \\ a_0zp_{2r}+a_n & \text{при } n=2r+1. \end{cases}
\end{aligned}\right\} \qquad (0.5)
$$

Для многочленов же нечетной степени можно построить еще лучшую схему

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= z \times z = z^2, \\ p_1 &= z + \lambda_1, \\ p_{2s+1} &= p_{2s-1}(p_0 + \lambda_{2s}) + \lambda_{2s+1} \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \\ P_{2r+1}(z) &\equiv a_0 p_{2r+1}. \end{aligned}\right\} \tag{0.6}$$

При этом в обеих схемах — (0.5) и (0.6) — функции $\lambda_i = \lambda_i(a_0, \ldots, a_n)$, вообще говоря, оказываются комплексными при вещественных $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Нижеследующая схема избавлена от этого недостатка:

$$\left.\begin{aligned} & p_0 = x \cdot x = x^2, \quad p_0' = p_0 + x, \\ & p_1 = x + \lambda_1, \\ & \left.\begin{aligned} p_4^{(s)} &= (p_0' + \lambda_{4s-2})(p_0 + \lambda_{4s-1}) + \lambda_{4s}, \\ p_{4s+1} &= p_{4s-3}p_4^{(s)} + \lambda_{4s+1}, \end{aligned}\right\} \quad (s = 1, 2, \ldots, k), \\ & p_{4k+3} = p_{4k+1}(p_0 + \lambda_{4k+2}) + \lambda_{4k+3}, \\ & P_n(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^{n-l} \equiv \begin{cases} a_0 p_n & \text{при } n = 4k+1,\ 4k+3, \\ a_0 x p_{n-1} + a_n & \text{при } n = 4k+2,\ 4k+4. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{0.7}$$

Тождество в конце осуществляется по всей области изменения $x, a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$. Функции $\lambda_i = \lambda_i(a_0, \ldots, a_n)$ вещественны, непрерывны и кусочно-аналитичны. Из непрерывности и кусочной аналитичности λ_i следует устойчивость схемы (0.7) при малых изменениях коэффициентов; устойчивы в этом смысле и все остальные схемы §§ 3 и 4.

Число операций $\pm$ в схеме (0.7) равно $n + 1$, число операций $\dot{\times}$ равно $\left[\frac{n+4}{2}\right]$, так что с точностью до одной операции $\pm$ и одной операции $\dot{\times}$ при четных n эта схема оптимальна.

3. § 4 посвящен схемам, пригодным для одновременного вычисления значений нескольких многочленов. Такой случай иногда встречается в вычислительной практике, например при одновременном вычислении $\sin x$ и $\cos x$. В схемах этого рода полезна, разумеется, предварительная обработка коэффициентов, но также возможен добавочный эффект уменьшения числа операций, так как промежуточные вычисления используются сразу для нескольких многочленов.

Приведем пример. Значения пары многочленов $P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ и $Q(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, можно вычислить по схеме

$$p_0 = x\left(x + \frac{a_1}{a_0}\right), \quad P(x) \equiv a_0 p_0 + a_2, \quad Q(x) = b_0\{(x + \lambda_1)(p_0 + \lambda_2) + \lambda_3\},$$

$$\lambda_1 = \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}, \quad \lambda_2 = \frac{b_2}{b_0} - \lambda_1 \frac{a_1}{a_0}, \quad \lambda_3 = \frac{b_3}{b_0} - \lambda_1\lambda_2,$$

где затрачивается четыре умножения и пять сложений, если не считать операций на предварительное вычисление значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \frac{a_1}{a_0}$. Если бы мы вычисляли многочлены раздельно, то согласно упоминавшейся теореме 2.1 нам понадобилось бы не меньше пяти сложений и пяти умножений.

4. Сделаем некоторые исторические замечания. Тематика статьи возникла на студенческом семинаре 1958 г., руководимом А. Г. Витушкиным и В. Д. Ерохиным.

Существенными для начала работы оказались статьи Островского [1], где оптимальность схемы Горнера доказана была для многочленов степеней $n = 1, 2, 3, 4$ при дополнительном условии отсутствия делений в схемах, а также Моцкина [2] и Тодда [3], где были предложены идеи обработки коэффициентов (Моцкин) и экономные схемы вычислений для $n = 4$; 6 (Тодд).

Теорема 1.1 была доказана Э. Г. Белагой [4], [5] для операций $\pm$ и автором для операций $\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\times}}$.

Теорема 2.1 была доказана Э. Г. Белагой [4], [5].

Обобщение конструкций Тодда на случай произвольного n (теорема 3.2) было произведено Белагой. Схема (0.6) для нечетных степеней многочленов и схема (0.7) принадлежат автору; последней предшествовала работа Ю. Л. Кеткова, где требовалось примерно $\frac{3}{4}n$ умножений (а не $\left[\frac{n+4}{2}\right]$, как в схеме (0.6)). Результаты § 4 принадлежат целиком автору. В настоящем обзоре некоторые схемы (например, схемы § 4), не вошедшие ни в опубликованные ранее статьи [6] — [9], ни в справочник [10], публикуются впервые. Некоторое количество отдельных указаний и ссылок содержится в тексте статьи. В заключение хочу воспользоваться случаем сказать здесь о моей благодарности А. Г. Витушкину и В. Д. Ерохину за поставленные ими задачи, а также поблагодарить за ряд ценных советов при написании данного обзора Л. А. Люстерника, за активное содействие в переработке текста и улучшении характера изложения § 3 О. Б. Лупанова, введения и § 1 — В. М. Тихомирова.

§ 1. Нижние оценки числа операций в схемах без предварительной обработки коэффициентов

Теорема 1.1. *В любой схеме без предварительной обработки коэффициентов имеется не меньше n операций $\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\times}}$ и не меньше n операций $\pm$.*

1) Теорему мы будем доказывать для операций $\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\times}}$. Доказательство для операций $\pm$ может быть проведено аналогично. Результат, относящийся к операциям $\pm$, был получен Э. Г. Белагой [4] для более общих схем, чем (0.1).

2) Сделаем несколько предварительных замечаний.

Через E_0 мы обозначаем далее $n+1$-мерное линейное пространство коэффициентов $L(a_0, \ldots, a_n) = \alpha$. Функции $F(\alpha)$ — ненулевые линейные функционалы на E_0 — назовем *аддитивными параметрами*. Множества $E_q(t) = E_q(F_i + R_i) = E_q(F_1 + R_1, \ldots, F_q + R_q)$, задаваемые q уравнениями

$$F_i(\alpha) + R_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

где $F_i(\alpha)$ $(i=1, \ldots, q)$ — аддитивные параметры, $R_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, q)$ — рациональные функции от t с числовыми коэффициентами, будем называть *параметрическими множествами*. При определении параметрического множества мы используем параметр t, который не надо смешивать с аддитивными параметрами. Мы скажем, что аддитивный параметр $F(\alpha)$ есть константа на параметрическом множестве $E_q(t) = E_q(F_i + R_i)$, если

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i F_i(\alpha),$$

т. е. если линейный функционал $F(\alpha)$ постоянен на E_q при любом фиксированном значении параметра t.

Определение 1.1. Будем называть операцию $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$, выполненную в равенстве $p = R' \dot{\underset{\cdot}{\times}} R''$, *активной на параметрическом множестве* $E(t) \subseteq E_0$, если:

1) по крайней мере одна из функций R' или R'' не является на $E(t)$ рациональной функцией t и x с числовыми коэффициентами;

2) результат p применения данной операции не пропорционален на $E(t)$ ни R', ни R''.

К примеру, $a_k \cdot x$ или $a_k \cdot a_s$ активны на E_0; $x \cdot x = x^2$, $2a_k$ не активны на E_0; вообще, как легко усмотреть, на параметрическом множестве $E(t) \subseteq E_0$ общий вид рациональной функции от α, x, полученной по схеме вида (1.1), не содержащей активных на $E(t)$ операций $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$, есть $F(\alpha) + R(x;\ t)$, где $F(\alpha)$ — аддитивный параметр или нуль, а $R(x;\ t)$ — рациональная функция x и t с коэффициентами, не зависящими от α.

Замечание 1.1. Если $E_2 \subset E_1$ и операция $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$ активна на E_2, то она активна и на E_1. Обратное не всегда верно.

Перейдем к доказательству теоремы. Положим $t = x$.

Пусть $p_{l_1} = p_{l_1}(\alpha,\ x) = R'_{l_1} \dot{\underset{\cdot}{\times}} R''_{l_1}$ есть первая по счету операция $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$ в схеме (0.1), активная на E_0.

Из сказанного выше следует, что

$$p_{l_1}(\alpha,\ x) = R'_{l_1} \dot{\underset{\cdot}{\times}} R''_{l_1} = (F' + R'(x)) \dot{\underset{\cdot}{\times}} (F'' + R''(x)) =$$
$$= (F(R'_{l_1}) + R'(x)) \dot{\underset{\cdot}{\times}} (F(R'_{l_1})),\ + R''(x)),$$

где $R'(x)$, $R''(x)$ не зависят от α на E_0, каждый из $F' = F(R'_{l_1}\ F'' = F(R''_{l_1})$ есть аддитивный параметр или константа на E_0 и где хотя бы один из F', F'' не есть константа.

Если F'' не есть константа, то зададим параметрическое множество E_1 соотношением

$$F_1(\alpha) + R_1(x) + \beta_1 = 0,$$

где $F_1(\alpha) = F''$, $R_1(x) = R''(x)$; константу β_1 выберем так, чтобы ни одна функция $p_s(\alpha,\ x)$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ не была равна нулю тождественно на E_1, если $p_s(\alpha,\ x) \not\equiv 0$ на E_0.

Если же F'' есть константа, то нечто похожее мы проделаем, положив $F_1(\alpha)=F'$, $R_1(x)=R'(x)$.

Итак, $E_1(t)=E_1(F_1+\beta_1+R_1)$ есть множество, задаваемое уравнением

$$F_1+R_1+\beta_1=0,$$

где

$$F_1=\begin{cases} F(R''_{l_1}), \text{ если } F(R''_{l_1}) \text{ не есть константа на } E_0, \\ F(R'_{l_1}), \text{ если } F(R''_{l_1}) \text{ есть константа на } E_0, \end{cases}$$

$$R_1=\begin{cases} R''_{l_1}-F_1, \text{ если } F(R''_{l_1}) \text{ не есть константа на } E_0, \\ R'_{l_1}-F_1, \text{ если } F(R''_{l_1}) \text{ есть константа на } E_0, \end{cases}$$

а β_1 подбирается так, чтобы ни одна функция $p_s(\alpha, x)$ $(s=1, 2, , \ldots, m)$ не равнялась нулю тождественно на E_1, если $p_s \not\equiv 0$ на E_0.

Мы получаем, что:

a$_1$) l_1-я операция $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$ не активна на E_1, так как p_{l_1} пропорционально на E_1 либо R''_{l_1}, либо R'_{l_1}, либо $\frac{1}{R''_{l_1}}$, причем в этом последнем случае, как видно из способа построения E_1, $R''_{l_1}\equiv R_1(x)$ не зависит от α;

b$_1$) найдется такой линейный функционал $F_1(\alpha)=F(p_{l_1})$, что $F(p_{l_1})-$ $-p_{l_1}$ на E_1 не зависит от α.

Пусть l_2 есть номер первой операции $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$ в схеме (0.1), активной на E_1. Из замечания 1.1 получаем: $l_2>l_1$.

Аналогично тому, как мы сделали выше, построим множество

$$E_2=E_2(F_1+R_1+\beta_1=0,\ F_2+R_2+\beta_2=0),$$

где

$$F_2=\begin{cases} F(R''_{l_2}), \text{ если } F(R''_{l_2}) \text{ не есть константа на } E_1, \\ F(R'_{l_2}), \text{ если } F(R''_{l_2}) \text{ есть константа на } E_1, \end{cases}$$

$$R_2=\begin{cases} R''_{l_2}-F_2, \text{ если } F(R'_{l_2}) \text{ не есть константа на } E_1, \\ R'_{l_2}-F_2, \text{ если } F(R''_{l_2}) \text{ есть константа на } E_1, \end{cases}$$

а β_2 выбрано так, чтобы никакая функция $p_s(\alpha, x)$ $(s=1, 2, \ldots, m)$ не равнялась нулю тождественно на E_2, если $p_s\not\equiv 0$ на E_0.

Аналогично получим, что:

a$_2$) на E_2 нет активных операций $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$ до l_2-й включительно;

b$_2$) найдутся такие линейные функционалы $F_s(\alpha)=F(p_s)$, что $F(p_s)-p_s$ при $s\leqslant l_2$ равны на E_2 рациональным функциям от x с числовыми коэффициентами.

Процесс построения параметрических множеств E_p продолжим до тех пор, пока при некотором $p=r$ в схеме (0.1.) не окажется ни одной активной на E_p операции $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$.

Очевидно, что число активных на E_0 операций $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\times}}$ не меньше r. Для завершения доказательства покажем, что $r \geqslant n$.

Из свойств $b_s)$ $(s=1, 2, \ldots, r)$ получаем, что $F(p_s)-p_s$ $(s=1, 2, \ldots, m)$ являются на E_r рациональными функциями от x с числовыми коэффициентами.

Следовательно, p_m на E_r может зависеть лишь от x, F_1, F_2, $\ldots$, F_r и $F(p_m)$, т. е. p_m зависит либо от r, либо от $r+1$ аддитивных параметров, в зависимости от того, является ли $F(p_m)$ на E_r константой или нет[1]).

Но $p_m = P_n(x)$, т. е. p_m зависит от $n+1$ аддитивных параметров. Отсюда $r \geqslant n$. Теорема доказана.

Переходя к вопросу об «индивидуальных» схемах вычисления без предварительной обработки коэффициентов (см. введение, стр. 104), заметим, что если ограничить количество всех арифметических операций в схемах некоторой константой, то всего различных схем будет лишь конечное число. Отсюда и из доказательства теоремы 1.1 (см. сноску на этой странице), получаем, что *в классе всех многочленов степени n при любом натуральном n почти для всякого в смысле меры M^{n+1} многочлена, взятого с некоторой окрестностью, схема Горнера является наиболее экономичной в отношении числа операций* $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\times}}$ *и* $\pm$ *среди всех «индивидуальных» схем без предварительной обработки коэффициентов.*

Если схема вычисления строится не для класса всех многочленов, а для некоторого подкласса $\mathfrak{P}$, то естественно разрешить в этих схемах операции над константами, зависящими от $\mathfrak{P}$ (но не зависящими от многочленов внутри $\mathfrak{P}$). Такие схемы будем называть *$\mathfrak{P}$-схемами* (0.1). Равенство $P_n(x) \equiv p_m$ в них следует рассматривать как тождество по x и по a_0, $\ldots$, a_n на $\mathfrak{P}$.

$\mathfrak{P}$-схемы (0.1) могут содержать меньшее количество арифметических операций, чем схема Горнера, как, например, при $\mathfrak{P} = \{(a_0, a_0, \ldots, a_0)\}$, $n = 2^k - 1$ (см. пример на стр. 104). Однако в этом случае почти все многочлены степени n, взятые с некоторой окрестностью, должны остаться вне класса $\mathfrak{P}$, так как из доказательства теоремы 1.1[1]) вытекает следующий результат.

Теорема 1.2. *Если некоторая $\mathfrak{P}$-схема* (0.1) *содержит не более $n-k$ операций* $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\times}}$ *или не более $n-k$ операций* $\pm$, *то множество $\mathfrak{P}$ образует в пространстве*

$$E_0 = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n)\}$$

рациональную поверхность размерности не более $n+1-k$.

---

[1]) Таким образом, вычисляемые по схемам (0.1) многочлены зависят не более чем от $k+1$ аддитивных параметров, где k — число операций $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\times}}$ в данной схеме. Так как схемы (0.1) содержат лишь арифметические операции, и притом в конечном числе, то зависимость эта — рациональная. Об аналогичной связи числа параметров, от которых зависит p_m, и числа операций $\pm$ в схеме (0.1) см. [4].

§ 2. Нижние оценки числа операций в схемах с предварительной обработкой коэффициентов

1. Постановка задачи. Схемами с предварительной обработкой коэффициентов будем называть цепочки равенств

$$\left.\begin{aligned} &p_i = R'_i \circ R''_i \, (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \\ &P_n(x) \equiv p_m, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

которые отличаются от схем (0.1) из введения (см. стр. 104) лишь тем, что в них разрешается производить операции над любыми вещественными функциями от коэффициентов вычисляемых многочленов (а не только над абсолютными константами и коэффициентами $a_0,\ \ldots,\ a_n$, как это было в § 1). Примером таких схем являются схемы (0.4)—(0.7), приведенные выше на стр. 105—106.

Аналогично $\mathfrak{P}$-схемам (0.1) (см. стр. 110) соответствуют $\mathfrak{P}$-схемы (2.1), в которых, в отличие от схем (2.1), в равенстве $P_n(x) \equiv p_m$ тождества выполняются не по всем наборам $x,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ а по всем x и по всевозможным наборам $a_0,\ \ldots,\ a_n$ из класса $\mathfrak{P}$. Схемы (2.1), очевидно, являются частным случаем $\mathfrak{P}$-схем (2.1), когда класс $\mathfrak{P}$ состоит из всевозможных наборов коэффициентов.

Все функции от коэффициентов, участвующие в $\mathfrak{P}$-схемах (2.1), будем называть *параметрами* и обозначать

$$\lambda_k = f_k(a_0,\ \ldots,\ a_n) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ r). \qquad (2.2)$$

Равенство $P_n(x) \equiv p_m$ в $\mathfrak{P}$-схемах (2.1) означает, что $P_n(x)$ задается в виде рациональной функции от x и параметров $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r$. Заметим, что $\mathfrak{P}$-схемы (0.1) являются частным случаем $\mathfrak{P}$-схем (2.1), когда $P_n(x)$ задается в виде функции от $x,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ [1]).

Основная цель настоящего параграфа — вывод нижних оценок для числа арифметических операций в схемах с предварительной обработкой коэффициентов. Для получения этих оценок устанавливается зависимость между числом арифметических операций в $\mathfrak{P}$-схемах (2.1) и размерностью $\mathfrak{P}$.

2. Зависимость между размерностью $\mathfrak{P}$ и количеством параметров, участвующих в $\mathfrak{P}$-схемах (2.1). Имеет место следующая простая, но важная лемма.

Лемма 2.1 (Э. Г. Белага). *Если в $\mathfrak{P}$-схеме* (2.1) *участвует не более r параметров, то $\mathfrak{P}$ является рациональной поверхностью размерности не более r в пространстве* $\{(a_0,\ \ldots,\ a_n)\}$.

Доказательство. Из условия $P_n(x) \equiv p_m(x,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_r)$ получаем

$$a_k = \varphi_k(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n), \qquad (2.3)$$

где все φ_k — рациональные функции, так как в $\mathfrak{P}$-схеме (2.1) использовались лишь арифметические операции, и притом в конечном числе. Лемма 2.1 доказана.

---

[1]) Если класс $\mathfrak{P}$ состоит из одного элемента, то параметры являются константами на $\mathfrak{P}$. Следовательно, в этом случае $\mathfrak{P}$-схемы (2.1) являются в то же время $\mathfrak{P}$-схемами (0.1).

В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

Определение 2.1. Будем называть $\mathfrak{P}$-схему вида (2.1) *минимизирующей* $\pm$ (или *минимизирующей* $\dot{\times}$) для другой $\mathfrak{P}$-схемы вида (2.1) (предполагается, что обеим схемам соответствует один и тот же класс $\mathfrak{P}$), если первая схема содержит не больше, чем вторая, операций $\pm$ (или $\dot{\times}$).

Например, схема, приведенная на стр. 105, является минимизирующей $\dot{\times}$ при $n=4$ $\mathfrak{P}$-схемой вида (2.1) для схемы Горнера, а схема Горнера является минимизирующей $\pm$ $\mathfrak{P}$-схемой вида (2.1) для схемы со стр. 105 при любом $\mathfrak{P}$.

3. Зависимость между числом сложений и вычитаний и числом параметров в $\mathfrak{P}$-схемах (2.1). Пусть задана некоторая $\mathfrak{P}$-схема (2.1). Выделим в ней все те строки, в которых $p_i = R'_i \pm R''_i$, и перенумеруем стоящие в них p_i в порядке следования в схеме: $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_k$. Оказывается, что в результате действий, совершаемых при переходе от $\tilde{p}_s$ к $\tilde{p}_{s+1}$, фактически вводится в схему не более одного нового независимого параметра. Например, действия $\lambda_1\lambda_2 x$ фактически увеличивают число параметров в схеме лишь на 1, так как вместо произведения $\lambda_1\lambda_2 x$ можно в дальнейших вычислениях пользоваться произведением $\lambda_3 x$, где $\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2$ является параметром. Это и дает нам искомую зависимость, выражаемую следующей леммой.

Лемма 2.2 (Э. Г. Белага). *Для всякой $\mathfrak{P}$-схемы* (2.1). *использующей не более k операций $\pm$, можно построить минимизирующую $\pm$ $\mathfrak{P}$-схему вида* (2.1), *в которой участвует не более $k+1$ параметров.*

Строгое доказательство леммы 2.2 имеется в [4], оно близко к доказательству леммы 2.3 (см. ниже).

4. Зависимость между числом умножений и делений и числом параметров в $\mathfrak{P}$-схемах (2.1). Пусть задана некоторая $\mathfrak{P}$-схема (2.1). Выделим в ней все те строки, в которых $p_j = R'_j \dot{\times} R''_j$, и перенумеруем стоящие в них p_j в порядке следования в схеме: $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_l$. Аналогично выводу нижней оценки для числа операций $\pm$ получим, что $\bar{p}_{s+1}$ фактически содержит не более чем два новых независимых параметра по сравнению с одним из $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_s$. Например, действия $x+\lambda_1+\lambda_2$ дают только один новый независимый параметр $\lambda_3 = \lambda_1+\lambda_2$. Для получения формального доказательства рассмотрим такую сокращенную запись $\mathfrak{P}$-схемы (2.1):

$$\left.\begin{aligned} &\bar{p}_j = T'_j \dot{\times} T''_j \quad (j=1, 2, \ldots, l), \\ &p_m = T'_{l+1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

где

1) $T'_j = U'_j + Z'_j,\ T''_j = U''_j + Z''_j, \quad j = 1, 2, \ldots, l+1;$

2) каждое U'_j, U''_j есть линейная комбинация параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ с целыми коэффициентами;

3) каждое Z'_j, Z''_j есть линейная комбинация с целыми коэффициентами x и всех $\bar{p}_i$, где $i<j$.

Очевидно, обе схемы: и $\mathfrak{P}$-схема (2.1), и (2.4) — содержат по l операций $\dot{\times}$. Обозначим:

$$U'_{l+1} = \overline{\lambda}_{2l+1}, \quad \overline{U}'_j = \overline{\lambda}_{2j-1}, \quad U''_j = \overline{\lambda}_{2j} \quad (j = 1, 2, \ldots, l). \tag{2.5}$$

Заменим в схеме (2.4) каждое из U'_j, U''_j на соответствующее $\overline{\lambda}_s$. Параметрами в полученной при этом схеме (2.5) будем считать $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_{2l+1}$. Искомая схема построена, и мы получили следующий результат.

Лемма 2.3 (Э. Г. Белага). *Для всякой $\mathfrak{P}$-схемы* (2.1), *использующей не более l операций $\dot{\times}$, можно построить минимизирующую $\dot{\times}$ $\mathfrak{P}$-схему вида* (2.1), *в которой участвует не более $2l+1$ параметров.*

5. Уточнение оценки п. 4. Пусть $n \geqslant 2$; a_0 не есть нулевая константа на $\mathfrak{P}$. Тогда для (2.5), следовательно, и для $\mathfrak{P}$-схемы (2.1) можно построить минимизирующую $\dot{\times}$ $\mathfrak{P}$-схему вида (2.1), в которую некоторые из операций $\dot{\times}$ вводят не более чем по одному параметру каждая. Придадим этим словам более точный смысл. Пусть некоторая $\mathfrak{P}$-схема имеет вид (2.4). Сопоставим j-й операции в этой схеме, $j = 1, 2, \ldots, l$, размерность D_j минимального пространства, образованного параметрами U'_q, U''_q $(q = 1, \ldots, j)$. Будем говорить, что *j-я операция $\dot{\times}$ вводит в эту схему* ν_j параметров, если $D_j - D_{j-1} = \nu_j$. Очевидно, $0 \leqslant \nu_j \leqslant 2$. Покажем, что $\sum\limits_{j=1}^{l} \nu_j \leqslant 2l-1$. Сначала будем предполагать, что в схеме (2.1) нет делений, т. е. все $\overline{p}_i$ — многочлены от x и $\overline{\lambda}_s$. Пусть $\overline{p}_j$ — первый из них с нецелым старшим коэффициентом, например:

$$\overline{p}_j = \overline{\lambda}_{2j-1} \times T''_j = \overline{\lambda}_{2j-1}(Z''_j + \overline{\lambda}_{2j}) = \overline{\lambda}_{2j-1}Z''_j + \overline{\lambda}_{2j-1}\overline{\lambda}_{2j}.$$

Если в (2.5) положить $\overline{p}_j = \overline{\lambda}_{2j-1}Z''_j$ вместо $\overline{p}_j = \overline{\lambda}_{2j-1} \times T''_j$, то получится минимизирующая $\dot{\times}$ для (2.5) $\mathfrak{P}$-схема вида (2.1), содержащая лишь $2l$ параметров. Этот путь не всегда верен: $p_1 = x(x+\lambda)$, $p_2 = x^2$, $p_3 = p_2 - p_1$.

Однако операция $\dot{\times}$, вводящая меньше двух параметров, имеется в схеме ввиду того, что в некоторый момент в ней появляется $\overline{p}_j$, нелинейное по x. С помощью равенства

$$(a_0x + \overline{\lambda}_1)(x + \overline{\lambda}_2) + \overline{\lambda}_3 = a_0x\left(x + \left(\frac{\overline{\lambda}_1}{a_0} + \overline{\lambda}_2\right)\right) + \overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2 + \overline{\lambda}_3$$

нетрудно построить для данной $\mathfrak{P}$-схемы (2.1) минимизирующую $\mathfrak{P}$-схему, в которой после приведения ее к виду (2.4) имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{l} \nu_j \leqslant 2l-1.$$

В общем случае, когда в схеме (2.1) могут выполняться деления, получается тот же результат. Для вывода его воспользуемся тем, что для любых рациональных дробей

$$R' = \frac{P'(x, \lambda)}{Q'(x, \lambda)}, \quad R'' = \frac{P''(x, \lambda)}{Q''(x, \lambda)}$$

знаменатель произведения $(R' + \lambda_1)(R'' + \lambda_2)$, где λ_1, λ_2 — параметры, не зависящие ни от x, ни от λ, равен после всевозможных сокращений $Q'(x, \lambda) \cdot Q''(x, \lambda)$, т. е. если операция $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$ вводит два параметра, то невозможно сокращение. С другой стороны, конечное выражение p_m не содержит знаменателя, зависящего от x, что можно обнаружить, например, дифференцируя $n+1$ раз p_m по x.

Теперь результат леммы 2.3 может быть усилен следующим образом.

Лемма 2.4. *Для всякой $\mathfrak{P}$-схемы вида* (2.1), *использующей не более l операций $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$, если $n \geqslant 2$ и a_0 не есть нулевая константа на $\mathfrak{P}$, можно построить минимизирующую $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$ $\mathfrak{P}$-схему вида* (2.1), *в которой участвует не более чем $2l$ параметров.*

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать только такие классы $\mathfrak{P}$, которые состоят из многочленов степени не ниже двух, и при этом предполагать старший коэффициент a_0 не равным тождественно нулю на $\mathfrak{P}$.

6. Оценка числа арифметических операций. Из лемм 2.1, 2.2 и 2.4 получаем следующий результат.

Теорема 2.1 (Э. Г. Белага)[1]. *Если $\mathfrak{P}$-схема* (2.1) *при $n \geqslant 2$ использует не более $n-t$ операций $\pm$ или не более $\left[\frac{n}{2}\right]+1-t$ операций $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$*[2]*, то $\mathfrak{P}$ является рациональной поверхностью размерности не более $n+1-t$ в пространстве $\{(a_0, a_1, \ldots, a_n)\}$.*

В частности, полагая $\mathfrak{P} = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n)\}$, получаем из теоремы 2.1

Следствие 2.1. *Всякая схема* (2.1) *при $n \geqslant 2$ использует не менее n операций $\pm$ и не менее $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ операций $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$.*

---

[1]) В теореме 2.1 оценка Э. Г. Белаги для числа операций $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$ уточняется на единицу (для вывода оценки Э. Г. Белаги достаточно воспользоваться леммой 2.3 вместо леммы 2.4).

[2]) Примером $\mathfrak{P}$-схем (2.1), использующих менее n операций $\pm$ и менее $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ операций $\dot{\underset{\cdot}{\times}}$, может служить следующая схема:

$$\begin{aligned}
g_2^{(0)} &= x(x+\lambda_1), \\
g_4^{(0)} &= (g_2^{(0)}+\lambda_2)(g_2^{(0)}+x+\lambda_3), \\
p_2 &= g_2^{(0)}+\lambda_4, \\
p_{4s+2} &= p_{4s-2}(g_4^{(0)}+\lambda_{2s+3})+\lambda_{2s+4} \qquad (s=1, 2, \ldots, k-1), \\
P_n(x) &= a_0 p_{4k-2}.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что размерность множества $\mathfrak{P}$ в этом случае оказывается меньше $n+1$.

Обозначим через $\mathfrak{P}_{N,t,n}$ объединение всех таких множеств $\mathfrak{P}$, для которых существуют $\mathfrak{P}$-схемы (2.1), содержащие не более N арифметических операций и среди них либо не более $n-t$ операций $\pm$, либо не более $\left[\frac{n}{2}\right]+1-t$ операций $\dot{\times}$.

Так как имеется лишь конечное число различных $\mathfrak{P}$-схем вида (2.1), в которых число арифметических операций равномерно ограничено, то из теоремы 2.1 получаем

Следствие 2.2. *Множество $\mathfrak{P}_{N,t,n}$ состоит из конечного числа рациональных поверхностей размерности не более $n+1-t$ в пространстве $\{(a_0, \ldots, a_n)\}$.*

Из следствия 2.2 вытекает, что *почти для всякого в смысле меры M^{n+1} многочлена степени n, взятого с некоторой окрестностью, любая схема вычисления, не зависящая от x и использующая только арифметические операции, содержит не менее $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ операций $\dot{\times}$ и не менее n операций $\pm$.*

Замечание 2.1. Все результаты и доказательства §§ 1 и 2 без сколько-нибудь существенных изменений переносятся на случай, когда коэффициенты, переменные и константы комплексные.

§ 3. Построение схем с предварительной обработкой коэффициентов для вычисления одного многочлена

В данном параграфе будут построены схемы с предварительной обработкой коэффициентов, в которых с точностью до одного-двух действий достигаются оценки предыдущего параграфа.

Прежде всего построим схему, по которой произвольный многочлен с вещественными коэффициентами степени n вычисляется за $\left[\frac{n+4}{2}\right]$ умножений и $n+1$ сложений, причем в них участвуют лишь вещественные числа. Это будет основным результатом § 3.

1. Леммы о трубе и проводах и одно свойство корней многочленов с вещественными коэффициентами. Нашей целью в данном пункте является вывод одного свойства многочленов с вещественными коэффициентами, выражаемого следующей леммой.

Лемма 3.1. *Для любого набора вещественных чисел $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ существуют константа $N>0$ и непрерывная кусочно-линейная вещественная функция $u(t)$, $-\infty<t<+\infty$, $u'(t)=\mathrm{const}<0$ при $|t|<N$, такие, что многочлен от z*

$$P_n(z, t)=\sum_{l=1}^{n} d_l z^l - u(t),$$

где $n=2k+1$, $d_n=1$, представляется в виде

$$P_n(z, t)=\prod_{l=0}^{2k}(z-z_l(t)), \tag{3.1}$$

где $z_l(t)$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, 2k)$ — *непрерывные кусочно-алгебраические комплексные функции от* t, *причем функции*

$$z_0(t),\ z_{2l-1}(t)+z_{2l}(t),\ z_{2l-1}(t)\,z_{2l}(t)\ \ (l=1, 2, \ldots, k),$$

непрерывны и вещественны.

Для удобства изложения мы построим наглядную модель многочлена и его корней, на которой будут видны требуемые свойства.

Пусть нам задан некоторый многочлен от x вида $u = P_n(x) = \sum_{m=1}^{n} d_m x^m$ нечетной степени $n = 2k+1$ с вещественными коэффициентами, причем $d_n = 1$. Расположим график $u = P_n(x)$ в вертикальной плоскости OXU с вертикальной осью OU и представим себе, что этот график проходит внутри бесконечной в обе стороны, изогнутой тонкой и полой *трубы* с отверстиями под точками минимума и над точками максимума $P_n(x)$, а также в бесконечно удаленных точках $P_n(x)$. Все отверстия трубы занумеруем слева направо числами от нуля до $2Q+1$, $2Q \leqslant n-1 = 2k$; отрезку трубы от $l-1$-го до l-го отверстия, $l = 1, 2, 3, \ldots, 2Q+1$, дадим номер l. В дальнейшем почти до конца доказательства леммы 3.1 будем предполагать, что все отверстия трубы находятся на разных уровнях u.

Построим перпендикулярно к плоскости OXU комплексную плоскость OXY с вещественной осью OX и мнимой OY. Для каждого значения u на OU имеем на плоскости OXY n корней $z_j = z_j(u) = x_j(u) + iy_j(u)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, уравнения $u = P_n(z)$, $z \in OXY$, $u \in OU$, $z_j(u)$ — непрерывные однозначные комплексные функции от u.

Мысленно построим в пространстве $OXYU$ графики этих функций. Окружим график каждой из них (представляющий бесконечную связную ветвь) бесконечно тонкой трубкой с отверстиями в точках, где $u = \pm\infty$, и только в них, причем считаем эти трубки не сообщающимися друг с другом. Данные трубки не надо смешивать с построенной выше в плоскости OXU трубой, окружающей график $u = P_n(x)$.

Откинем от графиков корней и от трубок все их отрезки положительной длины, лежащие на плоскости OXY, т. е. внутри трубы. У оставшихся частей трубок возникнут отверстия в точках экстремумов графика $u = P_n(x)$, в которых и труба имеет отверстия. Края этих отверстий в трубе можно спаять с краями отверстий в трубках. Сделаем это так, чтобы:

a) каждый отрезок трубы имел доходящие до $u = +\infty$, $u = -\infty$ продолжения в виде тонких трубок;

b) все отрезки трубы имели общую внутреннюю полость со своими продолжениями и друг с другом;

c) внутренние полости в системе «труба — трубки» сообщались с наружными лишь через бесконечно удаленные отверстия.

Все изолированные от трубы трубки будем считать продолжениями нулевого (несуществующего) отрезка трубы. Назовем каждый l-й отрезок трубы, взятый со своими продолжениями, $l = 0, 1, 2, \ldots, 2q+1$, $q = Q$, l-м *участком движения*. При $u \to \pm\infty$ имеем одну трубу и $2k$ трубок, окружающих $2k+1$ ветвей графиков корней $z_j(u)$. При $u = +\infty$ труба и каждая из $2k$ трубок имеют по одному отверстию, так же и при $u = -\infty$. Вставим при $u = +\infty$ в каждое из этих отверстий конец одного бесконечного тонкого провода (в различные отверстия — различные провода) и станем проталкивать все провода внутрь полостей трубок (и трубы), располагая провода все время в точках графиков корней $z_j(u)$ (рис. 1; на рисунке — пространство $OXYU$ спроектировано на плоскость OXU; стрелками обозначены пути концов проводов: сплошными — пути внутри трубы, пунктирными — пути вне трубы и плоскости OXU чертежа, спроектированные на эту плоскость OXU). Будем считать, что концы проводов вставляются

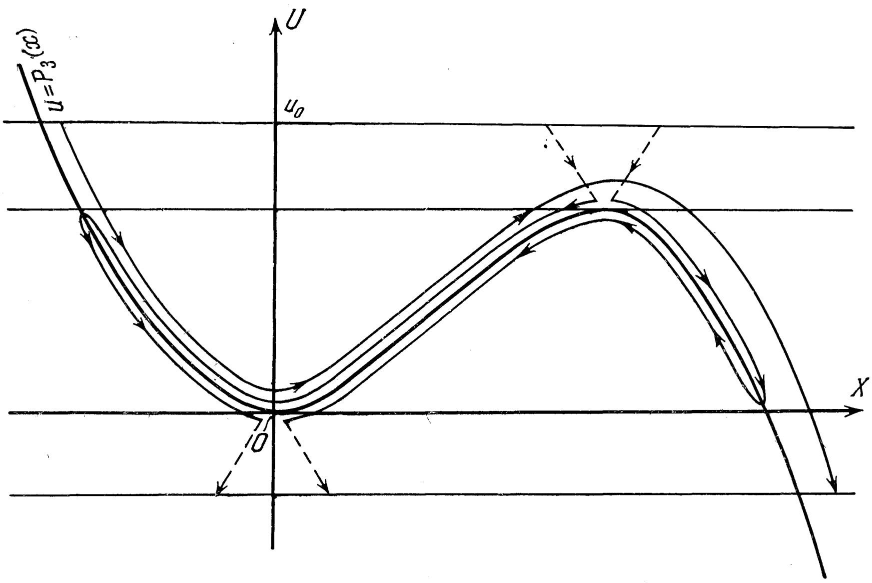

Рис. 1.

в отверстия в момент времени $t = -\infty$, а после этого двигаются попеременно то вниз, то вверх, не покидая соответствующих внутренних полостей изолированных трубок или внутренней полости трубы и трубок — продолжений трубы. В каждый момент времени t концы всех проводов должны иметь общую проекцию $u(t)$ на ось OU. При продвижении концов проводов внутри полостей трубок и трубы должны выполняться следующие условия.

1) Во всякий момент времени t на каждом ненулевом участке лежит ровно по одному концу провода[1]; на нулевом — ровно $2k - 2q$ концов проводов; каждый провод, таким образом, лежит на некотором участке — *участке его расположения в момент* t.

2) Все провода можно так перенумеровать числами $0, 1, 2, \ldots, 2k$, что в каждый момент времени t конец нулевого провода лежит внутри трубы, а концы $2l - 1$-го и $2l$-го проводов, $l = 1, 2, \ldots, k$, либо оба лежат внутри трубы, либо проектируются в комплексно сопряженные точки пространства OXY ($2l - 1$-й и $2l$-й провода, $l = 1, 2, \ldots, k$, будем называть *парой проводов*).

[1]) В точках стыка двух участков, лежащих на уровне $u(t)$, находятся в момент t концы ровно двух проводов.

3) В достаточно малой окрестности любого момента t_0 все время на одних и тех же участках находятся либо концы всех проводов, либо концы всех проводов, кроме двух, а эти два провода, двигаясь внутри трубы, в момент t_0 меняются своими участками расположения (эти участки должны быть соседними и ненулевыми). В последнем случае, и только в нем, направление движения уровня $u(t)$ вверх — вниз по оси OU изменяется в момент t_0 на противоположное.

Если положить $|u'(t)| = v = \text{const}$, т. е. фиксировать абсолютную величину скорости изменения $u(t)$, то движение концов проводов всегда может быть однозначно продолжено (и притом как в сторону увеличения t, так и в сторону уменьшения t) от любого момента t_0, при котором задано с соблюдением условий 1) и 2) положение концов $2k+1$ проводов на некотором общем уровне $u(t_0)$. Логически возможны три случая: либо определенный нами процесс зациклится, либо $u(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, т. е. концы всех проводов поднимутся при $t \to +\infty$ к верхним бесконечно удаленным отверстиям трубок (ср. ниже с первым условием окончания движения), либо $u(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, т. е. при $t \to +\infty$ концы проводов опустятся к нижним отверстиям трубок (ср. ниже со вторым условием окончания движения).

Для доказательства леммы 3.1 достаточно убедиться, что на самом деле возможен лишь третий случай: $u(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Покажем сначала, что зацикливание невозможно, т. е. что $|u(t)| \to \infty$ при $t \to +\infty$.

Очевидно, свойства 1) — 3) всегда можно удовлетворить на участке изменения t, где t столь мало, что $u(t)$ лежит выше проекции любого экстремума графика $u = P_n(x)$ на OU. Фиксируем нумерацию проводов, при которой свойство 2) удовлетворяется на этом участке изменения t. Для проведения доказательства перейдем на более формальный язык.

Будем называть *состоянием* A совокупность следующих заданных объектов:

a) *знака направления состояния*: плюс или минус;

b) набора *чисел состояния* — набора целых чисел $i_0(A)$, $i_1(A)$, ..., $i_{n-1}(A)$ от нуля до $2q+1$ включительно, $0 \leqslant q \leqslant k$, причем среди этих чисел $n-1-2q$ нулей, а остальные числа все различны.

Как видно из определения, различных состояний всего имеется конечное число, меньшее $2n!$.

Перенумеруем все последовательные моменты времени t_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, в которые изменяется направление движения уровня $u = u(t)$ вдоль OU, включив сюда также $t = \pm\infty$. Будем называть состояние A *совпадающим с состоянием проводов на интервале времени* $(t_\nu, t_{\nu+1})$, $\nu \geqslant 0$, если:

a) знак направления состояния A совпадает со знаком числа $u'(t)$ для значений t из интервала $(t_\nu, t_{\nu+1})$;

b) каждое число $i_s(A)$ состояния A, $s = 0, 1, \ldots, n-1$, равно номеру участка расположения конца s-го провода при $t \in (t_\nu, t_{\nu+1})$.

В дальнейшем для краткости состояние A, совпадающее с состоянием проводов на интервале $(t_\nu, t_{\nu+1})$, будем называть *состоянием с индексом* ν или *состоянием, имеющим индекс* ν.

Будем говорить, что *состояние B следует за состоянием A*, если состояние A имеет индекс ν, а состояние B — индекс $\nu + 1$, $\nu \geqslant 0$.

Если состояние B следует за состоянием A, то будем называть B *следующим за A, A — предыдущим к B.*

Если заданы состояние A с индексом ν и значение $u = u(t)$ уровня на OU при некотором $t \in (t_\nu, t_{\nu+1})$, $t_{\nu+1} \neq +\infty$, то в силу продолжимости и однозначной определенности движения уровня $u = u(t)$ и концов проводов в любой конечный момент времени состояние B с индексом $\nu + 1$ существует и определено однозначно.

Состояния A с индексом ν и B с индексом $\nu + 1$ всегда имеют противоположные знаки направлений и одинаковые наборы чисел, кроме двух чисел каждого из состояний A и B, которые меняются местами. Эти числа больше нуля и отличаются друг от друга на единицу: $i_s(A) = i_s(B)$, $s \neq$ $\neq p,\ q,\ 1 \leqslant i_p(A) = i_q(A) - 1 = i_q(B) = i_p(B) - 1$.

Из сказанного вытекают три простых *свойства следования состояний.*

1°. Если состояние B одновременно имеет два индекса ν и μ, $\nu \neq \mu$, то состояние C с индексом $\nu + 1$ имеет в то же время еще индекс $\mu + 1$, а состояние $\nu - 1$ имеет в то же время индекс $\mu - 1$ (*свойство независимости от времени порядка следования состояний*).

2°. Состояние с индексом ν не имеет предыдущего тогда и только тогда, когда $\nu = 0$.

3°. Состояние с индексом ν не имеет последующего тогда и только тогда, когда $t_{\nu+1} = +\infty$; в этом случае при некоторых $t < t_{\nu+1}$ выполняется одно из двух *условий окончания движения*:

1) $u(t)$ лежит выше проекции на OU всякого отверстия трубы, кроме одного бесконечно удаленного, и $u'(t) > 0$; при этом $u(t_{\nu+1}) = +\infty$.

2) $u(\widetilde{t})$ лежит ниже проекции на OU всякого отверстия трубы, кроме одного из бесконечно удаленных; $u'(\widetilde{t}) < 0$; в этом случае $u(t_{\nu+1}) = -\infty$.

Лемма 3.2. (о нецикличности состояний). *Одно и то же состояние не может иметь двух различных индексов.*

Доказательство. Пусть некоторое состояние A с индексом ν имеет индекс $\nu + r$, где $r \geqslant 1$. Тогда по свойству 1) следования состояний (свойству независимости от времени порядка следования) каждое состояние с индексом $\nu - \mu$, где $\mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, имеет индекс $\nu + r - \mu$. В частности, состояние с индексом 0 имеет индекс r, $r \geqslant 1$, а следовательно, имеет предыдущее состояние с индексом $r - 1$, что противоречит свойству 2) следования состояний. Лемма 3.2 доказана.

Ввиду конечности множества всех состояний из леммы 3.2 вытекает

Следствие 3.1. *Существует момент движения, в который одно из условий окончания движения выполняется.*

Докажем невозможность выполнения первого условия окончания движения. Для этого изучим более подробно поведение отдельно взятой пары проводов при всех t. Придадим знак движения и состояние в произвольный момент времени t каждой паре проводов. Направление движения конца любого провода внутри трубы слева направо будем считать положительным, а справа налево отрицательным. Движение пары проводов внутри трубы будем считать положительным, если знаки направлений движения концов проводов пары одинаковы, и отрицательным, если эти знаки противоположны. Движение всякой пары проводов вне трубы будем считать отрицательным.

Определим в момент t для любой заданной пары из $2l$ — 1-го и $2l$-го, $1 \leqslant l \leqslant k$, проводов состояние пары как совокупность:

a) знака плюс или минус, совпадающего со знаком движения данной пары в момент t;

b) двух целых чисел состояния пары, совпадающих с числами $i_{2l-1}(A)$, $i_{2l}(A)$ (см. выше, стр. 115—116), где A — состояние проводов на интервале $(t_\nu, t_{\nu+1})$, содержащем t.

При изменении времени t от $-\infty$ до $+\infty$ состояние данной пары $2l$ — 1-го и $2l$-го проводов может изменяться лишь в некоторые дискретно расположенные критические моменты времени, в которые изменяется направление движения $u(t)$ вдоль OU. Часть из них мы отбросим. Именно, если до и после критического момента вблизи него состояния нашей пары совпадают, а знаки направлений движения $u(t)$ вдоль OU противоположны, то отбрасываем этот момент, после чего исследуем так же оставшиеся критические моменты. После всех отбрасываний получим цепочку критических моментов: $t_{\nu_1} < t_{\nu_2} < \ldots < t_{\nu_r}$, $r \geqslant 0$. Дополним эту цепочку моментами $t_{\nu_0} = -\infty$ и $t_{\nu_{r+1}} = +\infty$.

Рассмотрим знаки движения данной пары и знаки направлений движения уровня $u(t)$ вдоль OU в достаточно малых полуокрестностях моментов t_{ν_j} $(j = 0, 1, \ldots, r+1)$, не содержащих самих моментов t_{ν_j}. Получаем:

a) при переходе от любого момента времени в левой полуокрестности момента t_{ν_j} $(j = 1, 2, \ldots, r)$ к любому моменту времени в правой полуокрестности t_{ν_j} оба знака (движения пары и направления движения $u(t)$) изменяются на противоположные[1];

b) при переходе от любого момента времени в правой полуокрестности момента t_{ν_j} $(j = 0, 1, 2, \ldots, r)$ к любому моменту времени в левой полуокрестности $t_{\nu_{j+1}}$ оба знака инвариантны.

Поскольку и в окрестности начального, $t_{\nu_0} = -\infty$, и в окрестности конечного, $t_{\nu_{r+1}} = +\infty$, моментов движения оказывается, что движения любой пары одинакового знака — отрицательные, то и знаки направлений движения $u(t)$ вдоль OU в этих окрестностях одинаковые — отрицательные. Следовательно, первое условие окончания движения не может быть выполнено. Отсюда вытекает утверждение основной леммы 3.1. Пока оно доказано нами для случая, когда все экстремумы многочленов $P_n(x) = \sum_{l=1}^{n} d_l x^l$ лежат на разных уровнях. В частности, таким свойством обладают многочлены $P_n(x, C) = P_n(x) + \frac{x}{C}$ при любом фиксированном наборе веществен-

[1] При переходе через критический момент времени знак направления движения одного из проводов пары изменяется на противоположный, а для другого провода — не меняется; одно из чисел $i_{2l}(A)$, $i_{2l-1}(A)$, соответствующее первому проводу, не изменяется, другое — изменяется на единицу.

ных коэффициентов многочлена $P_n(x)$, если C выбрано достаточно большим. Переходя к пределу при $C \to +\infty$, получаем отсюда утверждение леммы 3.1 в общем случае.

2. Дальнейшие свойства корней многочленов с вещественными коэффициентами. *Парой корней многочлена* с вещественными коэффициентами назовем такие два его корня, которые либо комплексно сопряжены друг другу, либо оба вещественны.

Лемма 3.3. *Каковы бы ни были вещественные числа* M, d_1, d_2, ..., d_{4j}, $j \geqslant 1$, *всегда можно выбрать такое вещественное число* d_0, *что среди корней многочлена от* z

$$\overline{P}_{4j+1}(z, d_0) = \sum_{l=0}^{4j+1} d_l z^l,$$

где $d_{4j+1} = 1$, *найдется четыре таких, что их сумма равна* M *и они распадаются на две пары корней.*

Доказательство. Выберем такие удовлетворяющие требованиям леммы 3.1 функции $u(t)$ и $z_l(t)$ $(l = 0, 1, \ldots, 4j)$, чтобы многочлен от z $P_{4j+1}(z, t) = \overline{P}_{4j+1}(z, -u(t))$ представлялся в виде (3.1). Так как при $t \to \mp\infty$ $u(t) \to \pm\infty$, то корни многочлена $\overline{P}_{4j+1}(z, -u(t))$ при $t \to \pm\infty$ асимптотически равны корням уравнения $z^{4j+1} - u(t) = 0$ (рис. 2 и 3).

Среди функций $z_l(t)$, $l = 1, 2, \ldots, 4j$ (см. формулу (3.1)), выберем две пары: $z_{2s-1}(t)$ и $z_{2s}(t)$, $z_{2r-1}(t)$ и $z_{2r}(t)$, из которых каждая при $t \to +\infty$

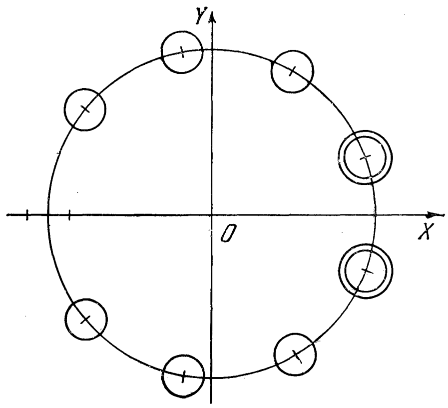

Рис. 2.

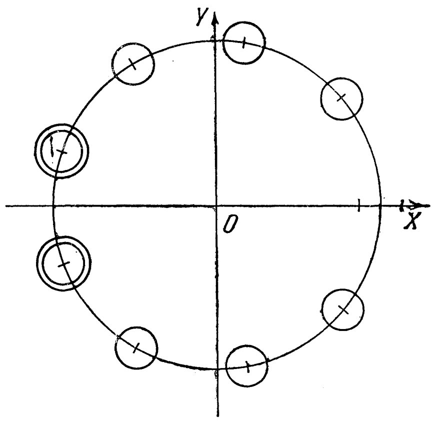

Рис. 3.

или при $t \to -\infty$ асимптотически равна паре корней уравнения $z^n - u(t) = 0$, $n = 4j + 1$, имеющих максимальную по абсолютной величине вещественную часть среди всех невещественных корней уравнения $z^n - u(t) = 0$, первая пара — при $t \to +\infty$, а вторая — при $t \to -\infty$ (на рис. 2 и 3 области, в которые попадают эти пары, ограничены двойными окружностями). Если такие две пары функций совпадают, т. е. $s = r$, то фиксируем в промежутке $1 \leqslant p \leqslant 2j$ произвольное целое число p, не равное r.

Тогда хотя бы одна из непрерывных по t вещественных функций

$$w_1(t) = z_{2r-1}(t) + z_{2r}(t) + z_{2s-1}(t) + z_{2s}(t) \quad \text{при } s \neq r,$$
$$w_2(t) = z_{2r-1}(t) + z_{2r}(t) + z_{2p-1}(t) + z_{2p}(t) \quad \text{при } s = r$$

стремится к $-\infty$ при $t \to -\infty$ и стремится к $+\infty$ при $t \to +\infty$, а следовательно, пробегает всевозможные вещественные значения, в том числе и значение M. Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. *Каковы бы ни были вещественные числа M, d_1, d_2, ..., d_{4p+2}, $p \geqslant 0$, всегда существует такое вещественное число d_0, что среди корней многочлена $\overline{P}_{4p+3}(z, d_0) = \sum_{m=0}^{4p+3} d_m z^m$, где $d_{4p+3} = 1$, найдется пара таких корней, которые в сумме равны M.*

Доказательство. Найдем для коэффициентов многочлена $\overline{P}_{4p+3}(z, 0)$ такие функции $u(t)$ и $z_l(t)$ $(l = 0, 1, \ldots, 4p+2)$, удовлетворяющие требованиям леммы 3.1, что многочлен $P_{4p+3}(z, t) = \overline{P}_{4p+3}(z, -u(t))$ записывается в виде (3.1). Используя асимптотическое равенство корней $z_l(t)$ $(l = 0, 1, \ldots, 4p+2)$, многочлена $\overline{P}_{4p+3}(z, -u(t))$ корням уравнения $z^{4p+3} - u(t) = 0$ при $t \to \infty$, получим, что среди пар функций $z_{2s-1}(t)$, $z_{2s}(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, 2p+1)$ имеется ровно $p+1$ различных пар, для которых $z_{2s-1}(t) + z_{2s}(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, и ровно $p+1$ различных пар, для которых $z_{2s-1}(t) + z_{2s}(t) \to -\infty$ при $t \to -\infty$. Так как всего различных пар функций $z_{2s-1}(t)$, $z_{2s}(t)$ имеется $2p+1$ штук, то хотя бы для одной из них справедливы оба соотношения одновременно. Ввиду непрерывности функций $z_l(t)$ $(l = 1, 2, \ldots, 4p+2)$ получаем отсюда утверждение леммы 3.4.

3. Схема вычисления многочленов с вещественными коэффициентами произвольных степеней. Построим теперь для любого натурального n схему вычисления многочленов степени n с вещественными коэффициентами, содержащую $\left[\frac{n+4}{2}\right]$ умножений и $n+1$ сложений.

Предварительно запишем в виде леммы следующий достаточно очевидный результат (см. во введении схему (0.4)).

Лемма 3.5. *Пусть задан некоторый многочлен $g_4(x) = x^4 + x^3 + \beta x^2 + \beta' x + \beta''$. Тогда существуют такие три многочлена $\lambda = \lambda(\beta, \beta', \beta'')$, $\lambda' = \lambda'(\beta, \beta', \beta'')$, $\lambda'' = \lambda''(\beta, \beta', \beta'')$ от β, β', β'' с числовыми вещественными коэффициентами, что выполняется следующее тождество по x, β, β', β'':*

$$g_4(x) = (x^2 + \lambda)(x^2 + x + \lambda') + \lambda''.$$

Построим теперь схему для вычисления многочленов с вещественными коэффициентами (эта схема уже приводилась во введении на стр. 106):

$$\left.\begin{array}{l} g_2 = x \cdot x = x^2, \\ h_2 = g_2 + x = x^2 + x, \\ p_1 = x + \lambda_1, \\ \left.\begin{array}{l} g_4^{(s)} = (g_2 + \lambda_{4s-1})(h_2 + \lambda_{4s-2}) + \lambda_{4s}, \\ p_{4s+1} = p_{4s-3} g_4^{(s)} + \lambda_{4s+1}, \end{array}\right\} (s = 1, 2, \ldots, k), \\ p_{4k+3} = p_{4k+1}(g_2 + \lambda_{4k+2}) + \lambda_{4k+3}, \\ P_n(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^{n-l} \equiv \begin{cases} a_0 p_n & \text{при } n = 4k+1,\ 4k+3, \\ a_0 x p_{n-1} + a_n & \text{при } n = 4k+2,\ 4k+4. \end{cases} \end{array}\right\} \quad (3.2)$$

В схеме (3.2) знак тождества означает тождество по всем наборам вещественных значений x, a_0, a_1, $\ldots$, a_n.

Теорема 3.1. *Всегда существуют непрерывные кусочно-аналитические вещественные функции* $\lambda_i=\lambda_i(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, *при которых удовлетворяются все равенства схемы* (3.2).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $n=4k+1$, $4k+2$. Определим из последнего равенства в схеме (3.2) коэффициенты многочлена $p_{4k+1}(x)$. Запишем выражения

$$(x^2+x+\lambda_{4s-2})(x^2+\lambda_{4s-1})+\lambda_{4s} \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

в виде

$$x^4+x^3+\beta_2^{(s)}x^2+\beta_3^{(s)}+\beta_4^{(s)}.$$

Согласно лемме 3.3 имеем: каковы бы ни были вещественные коэффициенты многочлена

$$p_{4s+1}(x)=\sum_{q=0}^{4s+1}\alpha_q^{(4s+1)}x^{4s+1-q},$$

где s — целое, $1\leqslant s\leqslant k$, $\alpha_0^{(4s+1)}=1$, всегда найдутся такие вещественные числа $\alpha_1^{(4s-3)}$, $\alpha_2^{(4s-3)}$, $\ldots$, $\alpha_{4s-3}^{(4s-3)}$, $\beta_2^{(s)}$, $\beta_3^{(s)}$, $\beta_4^{(s)}$, λ_{4s+1}, что

$$p_{4s+1}(x)=p_{4s-3}(x)\{x^4+x^3+\beta_2^{(s)}x^2+\beta_3^{(s)}x+\beta_4^{(s)}\}+\lambda_{4s+1},$$

где

$$p_{4s-3}(x)=\sum_{l=0}^{4s-3}\alpha_l^{(4s-3)}x^{4s-3-l}, \qquad \alpha_0^{(4s-3)}=1,\ 1\leqslant s\leqslant k.$$

Пользуясь этим, зададим рекуррентный процесс определения по известным коэффициентам $\alpha_q^{(4s+1)}$ $(q=1, 2, \ldots, 4s+1)$ неизвестных параметров λ_{4s+1}, $\beta_2^{(s)}$, $\beta_3^{(s)}$, $\beta_4^{(s)}$, $\alpha_l^{(4s-3)}$ $(l=1, 2, \ldots, 4s-3)$. Этот процесс начнем при $s=k$, а затем повторим при $s=k-1$, при $s=k-2$ и т. д. до $s=1$ включительно. В результате получим, в частности, набор значений искомых параметров $\lambda_1=\alpha_1^{(1)}$, λ_{4s+1} $(s=1, 2, \ldots, k)$, а также промежуточных параметров $\beta_2^{(s)}$, $\beta_3^{(s)}$, $\beta_4^{(s)}$ $(s=1, 2, \ldots, k)$. При каждом $s=1, 2, \ldots, k$ по теперь известным уже значениям параметров $\beta_2^{(s)}$, $\beta_3^{(s)}$, $\beta_4^{(s)}$ определим значения искомых параметров λ_{4s-2}, λ_{4s-1}, λ_{4s} из равенств

$$g_4^{(s)}=x^4+x^3+\beta_2^{(s)}x^2+\beta_3^{(s)}x+\beta_4^{(s)}=$$
$$=(g_2+\lambda_{4s-1})(h_2+\lambda_{4s-2})+\lambda_{4s}=(x^2+\lambda_{4s-1})(x^2+x+\lambda_{4s-2})+\lambda_{4s}.$$

Это можно сделать ввиду леммы 3.5. Теперь для случаев $n=4k+1$, $4k+2$ мы уже имеем искомые функции $\lambda_j=\lambda_j(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, удовлетворяющие схеме (3.2). В случае $n=4k+3$, $4k+4$ из двух последних равенств (3.2) найдем значения коэффициентов $p_{4k+1}(x)$ и параметров λ_{4k+2}, λ_{4k+3}, при которых эти равенства удовлетворяются. Существование таких вещественных значений следует из леммы 3.4. Далее по заданным коэффициентам $p_{4k+1}(x)$ определим значения всех остальных искомых параметров λ_j $(j=1, 2, \ldots, 4k+1)$ тем же способом, что и выше в случае $n=4k+1$.

Наконец, если раскрыть скобки и приравнять коэффициенты во всех равенствах (3.2), то задача определения λ_j сведется к решению системы алгебраических уравнений, т. е. все функции $\lambda_j = \lambda_j(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ являются непрерывными кусочно-аналитическими и даже, точнее, являются суперпозициями конечного числа многочленов и непрерывных кусочно-алгебраических функций. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Из того, что все функции $\lambda_j(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ кусочно-аналитические, следует *устойчивость схемы* (3.2). Устойчивость состоит в том, что если погрешность, с которой заданы коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$, стремится к нулю, то погрешность вычисления по схеме также стремится к нулю, и скорости стремления к нулю в обоих случаях пропорциональны. Устойчивы будут и все схемы, которые мы построим в дальнейшем.

4. Вычисление многочленов с комплексными коэффициентами. Оказывается, всякий многочлен степени n с любыми комплексными коэффициентами может быть вычислен с помощью $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ умножений и n или $n+1$ сложений, в которых участвуют комплексные, но не обязательно вещественные числа, т. е. при такой постановке задачи можно указать лучшие схемы вычисления, чем схема (3.2). Имеют место следующие результаты.

Теорема 3.2. (Т. С. Моцкин, Дж. Тодд, Э. Г. Белага)[1]. *Для любого многочлена степени $n=2k$ можно указать схему вычисления, в которой нижние оценки для числа операций из § 2: $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ умножений и n сложений — достигаются с точностью до одного сложения* (см. [4] и [5]; мы привели эту схему на стр. 105, схема (0.5)).

Теорема 3.3. *Существует схема, пригодная для вычисления любого многочлена нечетной степени, в которой нижние оценки числа операций из § 2 достигаются с точностью до одного умножения* (см. схему (0.6) на стр. 106 и лемму 4.3).

Что касается вопросов о выборе оптимальной схемы вычисления значений заданного многочлена и о построении алгоритма для предварительной обработки коэффициентов, то решение их можно найти в [6] и [11] вместе с многочисленными примерами применения схем с предварительной обработкой коэффициентов для приближенного вычисления элементарных функций.

§ 4. Схемы с предварительной обработкой коэффициентов для одновременного вычисления значений нескольких многочленов

В данном параграфе будет рассмотрен случай, когда значения нескольких фиксированных многочленов вычисляются одновременно в одних и тех же вещественных или комплексных точках z, общих для всех многочленов, причем вычисления повторяются многократно при многих значениях z. Такие случаи встречаются в вычислительной практике, например, при при-

---

[1]) Путь к построению схем такого вида впервые указан Т. С. Моцкином [2], Дж. Тодд [3] построил пример для $n=4, 6$, Э. Г. Белага [4], [5] доказал теорему 3.2 для любого k.

ближенном одновременном вычислении двух или нескольких элементарных функций ($\sin x$ и $\cos x$) или в задачах приближенного вычисления с последовательно повышающейся степенью точности. В схемах вычисления при этом разумно совершать предварительную обработку сразу для коэффициентов всех заданных многочленов, поскольку в дальнейшем возможен добавочный эффект, если некоторые промежуточные результаты использовать для вычисления сразу нескольких многочленов. В результате такого «переплетения» схем вычисления отдельных многочленов действительно удается сэкономить примерно θq операций, где q — число заданных для вычисления многочленов, степень которых больше единицы, $\sup\,\theta=\frac{3}{2}$. Этот добавочный эффект особенно заметен при вычислении нескольких многочленов малых степеней (см. пример во введении на стр. 106). Основная цель настоящего параграфа — построение схем вычисления, пригодных для вычислений совокупности многочленов при любых наборах их степеней. Отметим, что построение оптимальных схем и в этих условиях связано с преодолением известных трудностей (см. доказательство леммы 4.5). Предварительно найдем нижние оценки для числа операций. Вывод их аналогичен выводу оценок § 2, и мы можем обойтись здесь без подробных доказательств.

1. Нижние оценки числа арифметических операций. Будем называть *схемой* (4.1) *с предварительной обработкой коэффициентов для одновременного вычисления нескольких многочленов*

$$P_{n_i}^{(i)}(x)=\sum_{k=0}^{n_i} a_k^{(i)}x^{n_i-k}$$

степеней $n_i\,(i=1,\,2,\,\ldots,\,s)$ *цепочку арифметических операций*

$$p_l=R_l'\circ R_l''\,(l=1,\,2,\,\ldots,\,m),\tag{4.1}$$

где p_l, R_l', R_l'' и значок $\circ$ имеют тот же смысл, что и в схемах (2.1) (см. стр. 104), но вместо стоящего в (2.1) тождества $P_n(x)\equiv p_m$ имеют место s тождеств

$$P_{n_i}^{(i)}(x)\equiv p_{m_i},$$

где $m_i\leqslant m$ $(i=1,\,2,\,\ldots,\,s)$. Эти тождества выполняются при всех x и при всех наборах значений коэффициентов многочленов $P_{n_i}(x)$ $(i=1,2,\,\ldots,\,s)$. Наряду с этим можно рассматривать «индивидуальные» схемы вычислений (4.1), в которых наборы коэффициентов фиксированы, а тождества выполняются лишь по x. При выводе оценок снизу для числа операций безразлично, принимают ли переменное x и коэффициенты многочленов $P_{n_i}^{(i)}(x)$ лишь вещественные или все комплексные значения. Для определенности будем считать, что мы разбираем в этом пункте вещественный случай.

Пользуясь техникой, развитой в § 2, нетрудно получить следующее обобщение теоремы 2.1.

Теорема 4.1. *Пусть имеется набор из s, $s\geqslant 1$, натуральных чисел $n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_s$, среди которых хотя бы одно больше 1. Тогда всякая* *схема* (4.1) *для одновременного вычисления многочленов*

$$P_{n_i}^{(i)}(x)=\sum_{k=0}^{n_i} a_k^{(i)} x^{n_i-k}$$

степени n_i *с переменными и независимыми коэффициентами* $a_l^{(i)}$ $(l=0, 1, \ldots, n_i)$, $a_0^{(i)}\neq 0$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, *содержит не менее* $N-s$ *операций сложения и вычитания и не менее* $\left[\frac{N-s+2}{2}\right]$ *операций умножения и деления, где*

$$N=s+\sum_{i=1}^{s} n_i$$

— общее число коэффициентов во всех многочленах $P_{n_i}^{(i)}(x)(i=1, 2, \ldots, s)$.

Если $\mathfrak{P}_{N, s, t, M}$ *— класс всевозможных наборов коэффициентов* $a_l^{(i)}$ $(l=0, 1, \ldots, n_i;\ i=1, 2, \ldots, s)$, $a_0^{(i)}\neq 0$, *при которых существуют «индивидуальные» схемы* (4.1) *для одновременного вычисления соответствующих многочленов* $P_{n_i}^{(i)}(x)$, *состоящие каждая не более чем из* M *арифметических операций, среди которых либо не более* $N-s-t$ *сложений и вычитаний, либо не более* $\left[\frac{N-s+2}{2}\right]-t$ *умножений и делений* (M, t *— фиксированные заранее конечные натуральные числа*), *то множество* $\mathfrak{P}_{N, s, t, M}$ *лежит в* N*-мерном пространстве коэффициентов заданных многочленов на сумме конечного числа рациональных поверхностей размерности не более* $N-t$.

Вывод теоремы 4.1 в принципе немногим отличается от вывода теоремы 2.1. Отметим только, что в схему (4.1) могут «войти» параметры: s раз «без помощи» умножений и делений и s раз «без помощи» сложений и вычитаний (а не по одному разу, как это было в § 2), и это влияет на нижнюю оценку в сторону уменьшения ее.

Перейдем теперь к построению схем для одновременного вычисления значений нескольких многочленов. Если вести вычисления по схемам § 3 отдельно для каждого многочлена, то придется затратить на вычисление примерно на $\theta' s$ больше операций, чем в оценке теоремы 4.1, $\sup\limits_{n_i} \theta'=2$. Это расхождение между верхними и нижними оценками удается значительно уменьшить, иногда ликвидировать, в схемах с комбинированным использованием промежуточных результатов.

2. Некоторые вспомогательные результаты для построения схем одновременного вычисления значений нескольких многочленов с комплексными коэффициентами. Запишем две системы равенств:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_l^{(s)}+\alpha_{l-1}^{(s)}\mu=\alpha_l^{(s+1)} \quad (l=1, 2, \ldots, s),\\ &\mu\alpha_s^{(s)}+\mu'=\alpha_{s+1}^{(s+1)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

где

$$\alpha_0^{(s)}=1,$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_l^{(s)}+\alpha_{l-1}^{(s)}\lambda+\alpha_{l-2}^{(s)}\lambda'=\alpha_l^{(s+2)} \quad (l=1, 2, \ldots, s+1),\\ &\alpha_s^{(s)}\lambda'+\lambda''=\alpha_{s+2}^{(s+2)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

где
$$\alpha_{-1}^{(s)}=\alpha_{s+1}^{(s)}=0, \quad \alpha_0^{(s)}=1.$$

Имеет место очевидная лемма.

Лемма 4.1. *Пусть заданы многочлены*
$$p_r(z)=\sum_{j=0}^{r}\alpha_j^{(r)}z^{r-j} \qquad (\alpha_0^{(r)}=1)$$
($r=s,\ s+1,\ s+2$, s — натуральное) с комплексными или вещественными коэффициентами и произвольные комплексные или вещественные числа μ, μ', λ, λ', λ''. Тогда тождество по z
$$p_{s+1}(z)\equiv p_s(z)(z+\mu)+\mu'$$
эквивалентно системе равенств (4.2), а тождество по z
$$p_{s+2}(z)\equiv p_s(z)(z^2+\lambda z+\lambda')+\lambda''$$
эквивалентно системе равенств (4.3).

Лемма 4.2. *Пусть заданы многочлены*
$$p_r(z)=\sum_{j=0}^{r}\alpha_j^{(r)}z^{r-j}, \qquad (\alpha_0^{(r)}=1)$$
($r=s,\ s+2$, s — натуральное) с комплексными или вещественными коэффициентами. Тогда тождество по z
$$p_{s+2}(z)\equiv p_s(z)(z^2+\lambda')+\lambda''$$
эквивалентно следующей системе равенств:
$$\left.\begin{aligned}&\alpha_l^{(s)}=\alpha_l^{(s+2)}-\alpha_{l-2}^{(s)}\lambda' \quad (l=1,\ 2,\ \ldots,\ s),\\ &\alpha_s^{(s)}\lambda'+\lambda''=\alpha_{s+2}^{(s+2)},\\ &\sum_{j=0}^{\nu}\alpha_{s+1-2j}^{(s+2)}(-\lambda')^j=0,\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$
где
$$\alpha_{-1}^{(s)}=0, \quad \alpha_0^{(s)}=1, \quad \nu=\left[\frac{s+1}{2}\right].$$

Лемма 4.2 получается из леммы 4.1, в которой положено $\lambda=0$, в результате простых эквивалентных преобразований системы (4.3) — последовательных подстановок выражений для $\alpha_{s+1-2j}^{(s)}$ из $s+1-2j$-го равенства системы (4.3), $j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu$, в предпоследнее равенство этой же системы.

3. Схемы для одновременного вычисления нескольких многочленов с комплексными коэффициентами. Рассмотрим сперва следующую схему вычисления одного многочлена нечетной степени $n=2k+1$, содержащую n сложений и $k+2=\left[\frac{n+3}{2}\right]$ умножений, т. е. почти минимум арифметических операций:
$$\left.\begin{aligned}&g_2=z\cdot z=z^2,\\ &p_1=z+\lambda_1,\\ &p_{2i+1}=p_{2i-1}(g_2+\lambda_{2i})+\lambda_{2i+1} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r),\\ &P_{2k+1}(z)=\sum_{l=0}^{2k+1}a_l z^{2k+1-l}\equiv a_0p_{2k+1}.\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Тождество в схеме (4.5) означает, как обычно, выполнение тождественного равенства по всевозможным комплексным наборам значений z, a_0, $a_1, \ldots, a_n$.

Лемма 4.3. *Существуют алгебраические функции*

$$\lambda_j = \lambda_j(a_0, a_1, \ldots, a_{2k+1}) \quad (j = 1, 2, \ldots, 2k+1),$$

при подстановке которых в схему (4.5) *все равенства этой схемы удовлетворяются.*

Доказательство. Обозначим $p_m = \sum_{l=0}^{m} \alpha_l^{(m)} z^{m-l}$, $\alpha_0^{(m)} = 1$, $m = 2i+1$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$. Из тождества $P_{2k+1}(z) \equiv a_0 p_{2k+1}$ находим, что $\alpha_l^{(2k+1)} = \frac{a_l}{a_0}$ $(l = 0, 1, \ldots, 2k+1)$. Далее, согласно лемме 4.2 при каждом i от 1 до k равенство

$$p_{2i+1} = p_{2i-1}(g_2 + \lambda_{2i}) + \lambda_{2i+1}$$

удовлетворяется, если выразить λ_{2i}, λ_{2i+1} и коэффициенты $p_{2i-1} = p_{2i-1}(z)$ как алгебраические функции от коэффициентов $p_{2i+1} = p_{2i+1}(z)$ так, чтобы удовлетворялась система (4.4) при $s = 2i - 1$, $\lambda' = \lambda_{2i}, \lambda'' = \lambda_{2i+1}$. Легко проверить, что в данном случае, $s = 2i - 1$, система (4.4) при любом наборе $\alpha_j^{(2i+1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, 2i+1)$ имеет решение и, следовательно, указанные алгебраические функции существуют. Лемма 4.3 доказана.

Рассмотрим теперь схему для одновременного вычисления значений двух многочленов четных степеней, бо́льших двух:

$$\left.\begin{aligned}
g_2 &= z \cdot z = z^2, \\
g_3 &= (g_2 + \lambda_1)(z + \tilde{\lambda}_1), \\
p_3 &= g_3 + \lambda_2, \\
p_{2i+1} &= p_{2i-1}(g_2 + \lambda_{2i-1}) + \lambda_{2i} \qquad (i = 2, 3, \ldots, k-1), \\
p_{2k} &= p_{2k-1}(z + \lambda_{2k-1}) + \lambda_{2k}, \\
P_{2k}(z) &= \sum_{l=0}^{2k} a_l z^{2k-l} \equiv a_0 p_{2k}, \\
\tilde{p}_3 &= g_3 + \tilde{\lambda}_2, \\
\tilde{p}_{2j+1} &= \tilde{p}_{2j-1}(g_2 + \tilde{\lambda}_{2j-1}) + \tilde{\lambda}_{2j} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \tilde{k}-1), \\
\tilde{p}_{2\tilde{k}} &= \tilde{p}_{2\tilde{k}-1}(z + \tilde{\lambda}_{2\tilde{k}-1}) + \tilde{\lambda}_{2\tilde{k}}, \\
\tilde{P}_{2\tilde{k}}(z) &= \sum_{m=0}^{2\tilde{k}} \tilde{a}_m z^{2\tilde{k}-m} \equiv \tilde{a}_0 \tilde{p}_{2\tilde{k}},
\end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

где тождества в схеме означают тождественные равенства по всевозможным наборам значений: z, a_0, $a_1, \ldots, a_{2k}$, $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{2\tilde{k}}$.

Нетрудно подсчитать, что схема (4.6) содержит почти минимум операций $\dot{\times}$ и $\pm$ в классе схем для одновременного вычисления двух многочленов $P_{2k}(z)$ и $\tilde{P}_{2\tilde{k}}(z)$, где $k \neq 1, 2$; $\tilde{k} \neq 1$.

Лемма 4.4. *При некотором наборе алгебраических функций*

$$\lambda_j = \lambda_j(a_0, a_1, \ldots, a_{2k}, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{2\tilde{k}}),$$
$$\tilde{\lambda}_l = \tilde{\lambda}_l(a_0, a_1, \ldots, a_{2k}, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{2\tilde{k}})$$
$$(j = 1, 2, \ldots, 2k;\ l = 1, 2, \ldots, 2\tilde{k};\ k \geqslant 3;\ \tilde{k} \geqslant 2)$$

все равенства схемы (4.6) *удовлетворяются*[1]).

Доказательство. Предположим сначала, что у нас фиксировано некоторое значение для $\tilde{\lambda}_1$. Найдем старшие коэффициенты и следующие за ними у многочленов $p_{2i+1}(z)$, $\tilde{p}_{2j+1}(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1;\ j = 1, 2, \ldots, \tilde{k}-1)$ в схеме (4.6). Они одинаковы у всех многочленов: старшие коэффициенты равны 1, а следующие за старшими $\tilde{\lambda}_1$. Отсюда

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{a_1}{a_0} - \lambda_{2k-1} = \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0} - \tilde{\lambda}_{2\tilde{k}-1}.$$

Из равенства $p_{2k} = p_{2k-1}(z + \lambda_{2k-1}) + \lambda_{2k}$ находим выражение для λ_{2k} через $\tilde{\lambda}_1$ и коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{2k}$, а из равенства $\tilde{p}_{2\tilde{k}} = \tilde{p}_{2\tilde{k}-1}(z + \tilde{\lambda}_{2\tilde{k}-1}) + \tilde{\lambda}_{2\tilde{k}}$ находим выражения для $\tilde{\lambda}_{2\tilde{k}}$ через $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\ldots$, $\tilde{a}_{2\tilde{k}}$.

Теперь мы можем тем же способом, как и при доказательстве леммы 4.4, найти такие алгебраические функции $\lambda_i = \lambda_i^*(\tilde{\lambda}_1, a_0, a_1, \ldots, a_{2k})$ $(j = 1, 2, \ldots, 2k-2)$, что после подстановки их в (4.6) при любых наборах коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{2k}$ выполняются все равенства (4.6) от $g_2 = z^2$ до тождества $\sum_{l=0}^{2k} a_l z^{2k-l} \equiv a_0 p_{2k}$ включительно. Затем точно так же найдем алгебраические функции

$$\lambda_1 = \mu_1(\tilde{\lambda}_1, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{2\tilde{k}}),$$
$$\tilde{\lambda}_j = \mu_j(\tilde{\lambda}_1, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{2\tilde{k}}) \quad (j = 2, 3, \ldots, 2\tilde{k}-2),$$

подставляя которые в (4.6) добьемся выполнения при любых наборах коэффициентов $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{2\tilde{k}}$ всех равенств, записанных в (4.6) после тождества $\sum_{l=0}^{2k} a_l z^{2k-l} \equiv a_0 p_{2k}$, а также первых двух равенств (4.6).

---

[1]) Если $k = 2$, $\tilde{k} = 2$, то утверждение леммы 4.5 неверно при условии, что одновременно

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0}, \qquad \frac{a_2}{a_0} \neq \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_0}.$$

В противном случае оно верно. Поэтому всегда можно вычислить пару многочленов $P_{2k}(z)$ и $P_{2\tilde{k}}(z)$ либо по схеме (4.6), либо по схеме (4.7), которая получается применением и для $P_{2k}(z)$ и для $\tilde{P}_{2\tilde{k}}(z)$ схемы (0.5), т. е. добавлением одного сложения.

Пары многочленов $P_4(z)$, $\tilde{P}_4(z)$, значения которых нельзя вычислить по схеме (4.6), будем называть «трудными».

Докажем, что всегда можно выбрать такое

$$\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_1 (a_0, \ldots, a_{2k}, \widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{2\widetilde{k}}),$$

что $\lambda_1^* (\widetilde{\lambda}_1, a_0, a_1, \ldots, a_{2k}) = \mu_1 (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{2\widetilde{k}})$, причем функция $\widetilde{\lambda}_1 (a_0, a_1, \ldots, \widetilde{a}_{2\widetilde{k}})$ является алгебраической. Тогда, подставляя выражение $\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_1 (\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{2\widetilde{k}})$ в выражения для λ_i^* и μ_j, получим искомый набор алгебраических функций от коэффициентов $P_{2k}(z)$, $\widetilde{P}_{2\widetilde{k}}(z)$, при котором удовлетворяются все равенства (4.6). Тем самым мы докажем лемму 4.4.

Искомая алгебраическая функция $\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_1 (a_0, a_1, \ldots, a_{2k}, \widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{2\widetilde{k}})$ найдется в том и только в том случае, если при любом наборе $a_0, a_1, \ldots, a_{2k}$, $\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{2\widetilde{k}}$ функция $\lambda_1^* - \mu_1$ зависит от $\widetilde{\lambda}_1$, т. е. $\dfrac{\partial (\lambda_1^* - \mu_1)}{\partial \widetilde{\lambda}_1} \not\equiv 0$.

Фиксируем коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{2k}, \widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{2\widetilde{k}}$ и устремим $\widetilde{\lambda}_1$ к бесконечности вместе с $\lambda_{2k-1} = \dfrac{a_1}{a_0} - \widetilde{\lambda}_1$. Докажем, что при этом $\lambda_1^* - \mu_1 = \lambda_1^* (\widetilde{\lambda}_1, a_0, a_1, \ldots, a_{2k}) - \mu_1 (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{2\widetilde{k}})$ тоже устремится к бесконечности, откуда и получим искомое соотношение $\dfrac{\partial (\lambda_1^* - \mu_1)}{\partial \widetilde{\lambda}_1} \not\equiv 0$.

Обозначим

$$p_{2i+1} = \sum_{j=0}^{2i+1} \alpha_j^{(2i+1)} z^{2i+1-j}, \quad \alpha_0^{(2i+1)} = 1 \quad (i = 1, \ldots, k-1).$$

С помощью леммы 4.2 и соотношений (4.2) при $s = 2k - 1$ получаем

$$\alpha_l^{(2k-1)} = \widetilde{\lambda}_1^l (1 + o(1)) \quad (l = 0, 1, \ldots, 2k-1).$$

Далее, с помощью леммы 4.2 и соотношений (4.4) для $s = 2i - 1$ выразим при каждом i от 2 до $k - 1$ коэффициенты p_{2i-1}, а также λ_{2i-1}, λ_{2i} через коэффициенты p_{2i+1}. Полагая последовательно $i = k - 1$, $i = k - 2, \ldots, i = 2$, получим за $k - 2$ шагов алгебраические выражения для всех λ_l $(l = 3, 4, \ldots, 2k - 2)$ через коэффициенты p_{2k-1}. При этом на каждом шаге сначала по заданным коэффициентам p_{2i+1} определяются i значений λ_{2i-1} из алгебраического уравнения степени i (см. последнее из равенств (4.4)), затем фиксируется одно из этих значений и определяются значения λ_{2i} и коэффициенты p_{2i-1} по формулам (4.4), где $s = 2i - 1$, $\lambda' = \lambda_{2i-1}$, $\lambda'' = \lambda_{2i}$.

Отметим, что для полученных значений

$$\lambda_{2l+1}, \ \alpha_q^{(2i-1)} \ (q = 1, 2, \ldots, 2i-1; \ i = 2, 3, \ldots, k-2; \ l = 1, 2, \ldots, k-2)$$

выполняется соотношение

$$\max_{\substack{2 \leqslant q \leqslant 2i-1 \leqslant 2k-1 \\ 1 \leqslant l \leqslant k-2}} \{ \sqrt{|\lambda_{2l+1}|}, \ \sqrt[q]{|\alpha_q^{(2i-1)}|} \} \leqslant C |\widetilde{\lambda}_1|,$$

где $C = \mathrm{const}$.

Для каждых $l=2i-1$ и $q=1, 2, \ldots, l$; $i=2, 3, \ldots, k-1$ выделим главные части $\overline{\lambda}_l$, $\overline{\alpha}_q^{(l)}$ от λ_l, $\alpha_q^{(l)}$ такие, что

$$\frac{\sqrt{\overline{\lambda}_l}}{\widetilde{\lambda}_1}=\text{const}\,^{1)},\quad \frac{\sqrt[q]{\overline{\alpha}_q^{(l)}}}{\widetilde{\lambda}_1}=\text{const}\,^{1)},$$

$$\lambda_l-\overline{\lambda}_l=o(\widetilde{\lambda}_1^2),\quad \alpha_q^{(l)}-\overline{\alpha}_q^{(l)}=o(\widetilde{\lambda}_1^q).$$

Если в описанном выше процессе определения λ_l $(l=3, 4, \ldots, 2k-1)$ заменить $\alpha_j^{(2k-1)}$ $(j=1, 2, \ldots, 2k-1)$ соответствуюшими главными частями $\overline{\alpha}_l^{(2k-1)}$, а в остальном сохранить этот процесс без изменений, то вместо λ_{2i-1}, λ_{2i} и коэффициентов p_{2i-1} на каждом шаге будут определяться $\overline{\lambda}_{2i-1}$, $\overline{\lambda}_{2i}$ и главные части коэффициентов p_{2i-1} $(i=k-1, k-2, \ldots, 2)$. При этом всякие два различных значения $\overline{\lambda}_{2i-1}$ отличаются друг от друга на величину $\eta\cdot\widetilde{\lambda}_1^2$, где $\eta=\text{const}\neq 0$.

Выпишем особо выражения для $\alpha_2^{(2i-1)}$ (см. (4.4) при $s=2i-1$):

$$\alpha_2^{(2i-1)}=\alpha_2^{(2i+1)}-\lambda_{2i-1}=\alpha_2^{(2k-1)}-\sum_{j=i}^{k-1}\lambda_{2j-1}=$$
$$=\alpha_2^{(2k)}-\lambda_{2k-1}\alpha_1^{(2k-1)}-\sum_{j=i}^{k-1}\lambda_{2j-1}=\widetilde{\lambda}_1^2-\sum_{j=i}^{k-1}\lambda_{2j-1}+o(\lambda_1^2).$$

Отсюда получаем

$$\lambda_1^*=\alpha_2^{(3)}=\widetilde{\lambda}_1^2-\sum_{i=2}^{k-1}\lambda_{2i-1}+o(\widetilde{\lambda}_1^2).$$

Аналогично можно получить

$$\mu=\widetilde{\lambda}_1^2-\sum_{j=2}^{\widetilde{k}-1}\widetilde{\lambda}_{2j-1}+o(\widetilde{\lambda}_1^2).$$

Предположим, что нами уже определены значения $\widetilde{\lambda}_{2j-1}$ и их главных частей $\overline{\overline{\lambda}}_{2j-1}$ $(j=\widetilde{k}-1, \widetilde{k}-2, \ldots, 2)$. Будем искать $\overline{\lambda}_{2i-1}$ $(i=k-1, k-2, \ldots, 2)$.

Нам надо доказать, что в процессе определения $\overline{\lambda}_{2i-1}$ $(i=k-1, k-2, \ldots, 2)$ для них можно выбрать такие значения, что

$$\sum_{j=2}^{\widetilde{k}-1}\overline{\overline{\lambda}}_{2j-1}-\sum_{i=2}^{k-1}\overline{\lambda}_{2i-1}\neq 0, \tag{4.8}$$

а тогда

$$\sum_{j=2}^{\widetilde{k}-1}\widetilde{\lambda}_{2j-1}-\sum_{i=2}^{k-1}\lambda_{2i-1}=O(\widetilde{\lambda}_1^2). \tag{4.9}$$

Предположим, что у нас уже фиксированы значения $\overline{\lambda}_{2i-1}$, а также значения $\overline{\lambda}_{2i}$ и $\overline{\alpha}_q^{(2i-1)}$ при $q=1, 2, \ldots, 2i-1$; $i=k-1, k-2, \ldots, 3$.

---

[1]) Эта константа может зависеть лишь от значений $a_0, a_1, \ldots, a_{2k}$, которые мы фиксировали выше.

Значения $\bar{\lambda}_3$ определяются из уравнения (см. (4.4) при $s=3$)

$$\sum_{j=0}^{2} \bar{\alpha}_{4-2j}^{(5)}(-\bar{\lambda}_3)^j = 0. \tag{4.10}$$

Если это уравнение имеет два различных корня, то хотя бы для одного из них выполняется соотношение (4.8), а следовательно, и (4.9), и лемма 4.4 доказана. Пусть все корни (4.10) (их два) совпадают. Тогда $\bar{\lambda}_3 = \frac{\bar{\alpha}_2^{(5)}}{2}$. Вернемся в процессе определения значений $\bar{\lambda}_{2i-1}$ на один шаг назад, и пусть определены значения $\bar{\lambda}_{2i-1}$ вместе со значениями $\bar{\lambda}_{2i}$, $\bar{\alpha}_q^{(2i-1)}$ при $q=1, 2, \ldots, 2i-1$; $i=k-1, k-2, \ldots, 4$.

Значения $\bar{\lambda}_5$ определяются из уравнения (см. (4.4) при $s=5$)

$$\sum_{j=0}^{3} \bar{\alpha}_{6-2j}^{(7)}(-\bar{\lambda}_5)^j = 0. \tag{4.11}$$

Если это уравнение имеет хотя бы два различных корня, то сумма

$$\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_5 = \frac{\bar{\alpha}_2^{(5)}}{2} + \bar{\lambda}_5 = \frac{\alpha_2^{(7)} - \bar{\lambda}_5}{2} + \bar{\lambda}_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2^{(7)} + \bar{\lambda}_5)$$

также может принимать два различных значения, из которых хотя бы одно удовлетворяет соотношению (4.8), эквивалентному утверждению леммы 4.4. Следовательно, если лемма неверна, то все корни уравнения (4.11) совпадают и

$$\bar{\lambda}_5 = \frac{\bar{\alpha}_2^{(7)}}{3}, \qquad \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_5 = \frac{2}{3}\bar{\alpha}_2^{(7)} = \frac{2}{3}(\bar{\alpha}_2^{(9)} - \bar{\lambda}_7).$$

Аналогичным образом получаем, что если утверждение леммы не выполнено, то при всяком m от двух до $k-1$ включительно имеем

$$\sum_{i=2}^{m} \bar{\lambda}_{2i-1} = \frac{m-1}{m}\bar{\alpha}_2^{(2m+1)} = \frac{m-1}{m}(\bar{\alpha}_2^{(2m+3)} - \bar{\lambda}_{2m+1}),$$

а следовательно, при $2 \leqslant l \leqslant k-1$

$$\sum_{j=0}^{l} \bar{\alpha}_{2l-2j}^{(2l+1)}(-\bar{\lambda}_{2l-1})^j, \tag{4.12}$$

многочлен от $\bar{\lambda}_{2l-1}$, имеет вид

$$\left(-\bar{\lambda}_{2l-1} + \frac{\bar{\alpha}_2^{(2l+1)}}{l}\right)^l.$$

Однако это неверно для многочлена (4.12) при $l=k-1 \geqslant 2$, так как $\bar{\alpha}_q^{(2k-1)} = \tilde{\lambda}_1^q$. Следовательно, верно утверждение леммы 4.4, что и требовалось доказать.

Пусть нам теперь задан произвольный набор натуральных чисел n_1, $n_2, \ldots, n_s$. Построим схему для одновременного вычисления многочленов $P_{n_i}^{(i)}(z) = \sum_{l=0}^{n_i} a_l^{(i)} z^{n_i - l}$, $a_0^{(i)} \neq 0$, степени n_i, $i=1, 2, \ldots, s$, с произвольными комплексными коэффициентами.

Заданные многочлены степени 2 будем вычислять по схеме Горнера, многочлены нечетных степеней — по схеме (4.5), многочлены четных степеней, бо́льших чем 2, разбив на пары так, чтобы число T «трудных пар» (см. сноску на стр. 129) было минимальным, будем вычислять по схемам (4.6) и (4.7). Наконец, если многочленов четных степеней, бо́льших двух, было задано нечетное число, то один из них, $P_{n_j}^{(j)}(z)$, оставшийся без пары, вычислим по схеме (4.5), положив $P_{2k+2}^{(j)}(z)=a_0^{(j)}zp_{2k+1}+a_{n_j}^{(j)}$, где $n_j=2k+2$, $k\geqslant 1$. Естественно, что $g_2=z^2$ вычисляем при этом лишь один раз. Получаем следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть задан некоторый конечный набор* $n_1, n_2, \ldots, n_s$, $s\geqslant 1$, *натуральных чисел, среди которых* r *двоек,* $l+r$ *четных чисел,* $0\leqslant r\leqslant l+r\leqslant s$. *Тогда можно указать схему для одновременного вычисления совокупности многочленов* $P_{n_i}^{(i)}(z)=\sum\limits_{l=0}^{n_i} a_l^{(i)}z^{n_i-l}$ *степеней* n_i, $a_0^{(i)}\neq 0$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, *с произвольными и независимыми комплексными коэффициентами, содержащую* $N-s+T$ *сложений и* $\left[\frac{N+r+2}{2}\right]+\gamma_l$ *умножений, где* T — *минимальное число «трудных пар»* (см. сноску на стр. 129),

$$N=s+\sum_{i=1}^{s} n_i, \qquad \gamma_l=\begin{cases}0, & \text{если } l \text{ четно,}\\ 1, & \text{если } l \text{ нечетно.}\end{cases}$$

Сравнивая результаты теорем 4.1 и 4.2, видим, что нижние оценки чисел операций в схемах для одновременного вычисления значений нескольких заданных многочленов всегда могут быть достигнуты с точностью до T сложений и от $\frac{s+r}{2}$ до $\frac{s+r+4}{2}$ умножений, в зависимости от четности или нечетности l и $N+r$. Мы не будем здесь касаться приемов, дающих возможность дальнейшего улучшения схем.

4. Схемы для одновременного вычисления нескольких многочленов с вещественными коэффициентами. В вещественном случае оценки теоремы 4.1 могут быть достигнуты с точностью до одного сложения и $l+1+\frac{s}{2}$ умножений, где l — число многочленов четных степеней, s — число всех заданных для вычисления многочленов.

Соответствующую схему получим, вычисляя все многочлены второй степени по схеме Горнера, а остальные — по схеме вида (3.2) (см. теорему 3.1), причем, естественно, значения $g_2=x^2$ и $h_2=g_2+x$ вычисляются лишь один раз для всех многочленов из данного набора.

Для одновременного вычисления значений многочленов малых степеней с вещественными коэффициентами — случай, по-видимому, наиболее интересный для практики — существуют лучшие схемы. В частности, если все заданные многочлены имеют степени не больше 5, то можно указать схему вычисления, пригодную при любых наборах вещественных коэффициентов, в которой оценки теоремы 4.1 для числа операций достигаются с точностью приблизительно $\left[\frac{l+s}{2}\right]$ умножений, где l — число многочленов степени 4 в заданном наборе многочленов. Эти схемы для экономии места мы здесь опустим.

Поступило в редакцию 27 мая 1964 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. M. Ostrowski, On two problems in abstract algebra connected with Horner's rule, studies presented to R. von Mises, Ac. Press. N. Y. (1954), 40—48.

[2] T. S. Motskin, Evalution of polynomyals and evaluation of rational functions, Bull. Amer. Math. Soc. **61**, № 2 (1955), 163.

[3] J. Todd, Motivations for working in numerical Analisis, Comm. on Pure and Appl. Math. 8, № 1 (1955) (русский перевод: Дж. Тодд, Мотивы для работы в области численного анализа, Матем. просв., вып. 1 (1957), 77—79).

[4] Э. Г. Белага, Некоторые вопросы вычисления многочленов, ДАН **123**, № 5 (1958), 775—777.

[5] Э. Г. Белага, О вычислении многочленов от одного переменного с предварительной обработкой коэффициентов, Пробл. киберн., вып. 5 (1961), 7—15.

[6] В. Я. Пан, Вычисление многочленов по схемам с предварительной обработкой коэффициентов и программа автоматического нахождения параметров, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **2**, № 1 (1962), 133—140.

[7] В. Я. Пан, Некоторые схемы для вычисления многочленов с вещественными коэффициентами, ДАН **127**, № 2 (1959), 266—269.

[8] В. Я. Пан, Некоторые схемы для вычисления значений полиномов с вещественными коэффициентами, Пробл. киберн., вып. 5 (1961), 17—29.

[9] В. Я. Пан, О некоторых способах вычисления значений многочленов, Пробл. киберн., вып. 7 (1962), 21—30.

[10] Л. А. Люстерник, О. А. Червоненкис, А. Р. Янпольский, Математический анализ. Вычисление элементарных функций, Физматгиз, М., 1963.

[11] В. Я. Пан. О вычислении многочленов пятой и седьмой степеней с вещественными коэффициентами, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **5**, № 1 (1965), 116—118.