GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ROGER APÉRY

Sur certaines séries entières arithmétiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n^{o} 1 (1981-1982), exp. n^{o} 16, p. 1-2.
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A9_0>

Groupe d'étude D'analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 16, 2 p.

15 février 1982

SUR CERTAINES SÉRIES ENTIÈRES ARITHMÉTIQUES

par Roger APÉRY (*)
[Université de Caen]

r étant un entier > 0 fixé, on considère le monoïde additif constitué par les r-uples $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$; en particulier, on pose $(n, n, \ldots, n) = \hat{n}$; on identifie $\hat{0}$ et 0.

Les r-uples sont munis de la relation d'ordre (partielle)

$$(n_1, n_2, \ldots, n_r) \leqslant (n'_1, n'_2, \ldots, n'_r) \Longleftrightarrow \forall\, i,\ n_i \leqslant n'_i .$$

Si $n = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, on appelle monôme, et on note x^n, le produit $\prod_i x_i^{n_i}$. Si $r > 1$, x n'est pas un monôme et ne doit pas être confondu avec $x^{\hat{1}} = x_1 x_2 \ldots x_r$. Les monômes en x munis de la multiplication constituent un monoïde M_x. Les sommes formelles de monômes constituent l'anneau $\mathbb{Z}[[x]]$ des séries formelles à r indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_r$ à coefficients entiers. Nous appelons fonction (en toute rigueur "germe" de fonction) tout élément de $\mathbb{Z}[[x]]$ qui converge dans une partie ouverte de $\mathbb{C}^r$ contenant l'origine.

Toute surjection φ de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dans l'ensemble $\{y_1 \ldots y_s\}$ définit un morphisme injectif de M_y dans M_x qui associe à chaque y_j le produit des images réciproques de y_j par φ ; ce morphisme se prolonge en une application linéaire $\tilde{\Phi}$ injective de $\mathbb{Z}[[y]]$ dans $\mathbb{Z}[[x]]$. On définit également la contraction Φ qui est l'application linéaire surjective de $\mathbb{Z}[[x]]$ dans $\mathbb{Z}[[y]]$ qui associe x^n à chaque monôme $\tilde{\Phi}(x^n)$ et 0 à chaque monôme qui n'appartient pas à l'image de $\mathbb{Z}[[y]]$ par Φ. En particulier, la contraction globale applique $\mathbb{Z}[[x]]$ dans l'anneau des séries formelles à une indéterminée. Le produit d'Hadamard $F(t) * g(t)$ est le contracté du produit, $f(x) \cdot g(y)$.

On appelle fonction de base toute fonction $F(x)$ égale à 1 à l'origine telle que $1/F(x)$ soit un polynôme du premier degré par rapport à chaque indéterminée séparément.

Pour un nombre premier p arbitraire, on appelle p-composantes du r-uple n les r-uples $n_k < \widehat{p-1}$ tels que

$$n = n_0 + pn_1 + \ldots + p^k n_k + \ldots$$

(*) Texte reçu le 4 octobre 1982.

Roger APÉRY, 552 rue d'Epron, LEBISEY, 14200 HÉROUVILLE SAINT CLAIR.

Nous dirons qu'une série à r indéterminées $\sum a_n x^n$ satisfait à la condition Γ si

$$a_0 = 1 \ ,$$

$$a_n \equiv \prod_{k\geq 0} a_{n_k} \mod p \ ,$$

où les n_k sont les p-composantes de n.

La condition (Γ) exprime que

$$f(x) \equiv [P(x)]^{1/(1-p)} \mod p \ ,$$

où $P(x)$ est un polynôme égal à 1 à l'origine et de degré $\leqslant p-1$; en effet,

$$f(x^p) \equiv [f(x)]^p \mod p \ ,$$

et la condition Γ exprime que

$$f(x) \equiv P(x)\ f(x^p) \mod p \ ;$$

les deux facteurs du second membre ont respectivement tous les monômes de degré $\leqslant \widehat{p-1}$ et tous les termes de degré multiples de p.

La condition Γ est vérifiée pour les fonctions de base et se conserve par contraction.

Par la contraction $(x_1\ ,\ x_2) \dashrightarrow t$ de la fonction de base à deux indéterminées $1/(1 - ax_1 - bx_2 + cx_1\ x_2)$, on obtient $1/\sqrt{(1 + ct)^2 - 4\ abt}$.

On voit déjà dans ce cas que deux fonctions de base distinctes peuvent avoir même contractée.

La fonction $F_2 = 1 + 3t + 19t^2 + 147t^3 \ldots$, liée à l'approximation de $\zeta 2$, s'obtient par contration globale d'une fonction de base à trois indéterminées par exemple

$$\frac{1}{1 - x_1 - x_2 - x_2\,x_3 - x_3\,x_1 + x_1\,x_2 + x_1\,x_2\,x_3} \text{ ou } \frac{1}{1 - x_1 - x_2 - x_3 + x_1 x_3 + x_2\,x_3 - x_1\,x_2\,x_3} .$$

La fonction $1 + 5t + 73t^2 + 1445t^3 + \ldots$, liée à l'approximation de $\zeta 3$, s'obtient par contraction globale d'une fonction de base à quatre indéterminées.

La contractée globale de $1/(1 - x_1 - x_2 - x_3 + 4x_1\,x_2\,x_3)$ a comme coefficients la somme des cubes des coefficients binomiaux.
