Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique.

(Par M. *Camille Jordan* à Paris.)

Introduction.

M. *Fuchs* s'est proposé (ce Journal, T. 81) de déterminer les divers types d'équations linéaires du second ordre

$$\frac{d^2u}{dz^2}+f(z)\frac{du}{dz}+f_1(z)u = 0$$

dont l'intégrale générale est algébrique.

A cet effet, après avoir transformé l'équation proposée en une autre ne contenant plus la dérivée $\frac{du}{dz}$, il établit, par des considérations fondées sur la théorie des covariants, qu'en désignant par x, y deux intégrales particulières de l'équation transformée, il existe une fonction entière et homogène $\varphi(x,y)$, d'un degré non supérieur à 12, qui soit racine d'une équation binôme ayant pour second membre une fonction rationnelle de la variable.

M. *Klein* a confirmé et précisé ces résultats (Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, 26 juin 1876) en s'appuyant sur la détermination qu'il avait faite précédemment (Mathematische Annalen, T. IX) des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à deux variables.

Il est aisé en effet de se rendre compte de l'identité de ces deux problèmes:

Soit

$$\frac{d^mu}{dz^m}+f_1(z)\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}}+\cdots+f_m(z)u = 0$$

une équation différentielle linéaire ayant pour coefficients des fonctions monodromes de z.

Elle a un nombre infini de fonctions intégrales, chacune d'elles étant déterminée par les valeurs que prennent la fonction et ses $m-1$ premières dérivées pour la valeur initiale de z. Ces intégrales sont toutes des fonctions linéaires de m d'entre elles, $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Supposons que la variable z décrive un contour fermé arbitraire. Lorsqu'elle reviendra au point de départ, les fonctions $u_1, u_2, \ldots$ pourront redevenir les mêmes, ou plus généralement, auront été transformées en $\alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \cdots$, $\alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots$, $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_2, \beta_2, \ldots$ étant des constantes dont le déterminant est $\gtrless 0$.

L'ensemble des substitutions

$$|u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \cdots, \quad \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots, \quad \cdots|$$

correspondantes aux divers contours fermés que l'on peut tracer dans le plan, formera le ***groupe*** de l'équation différentielle proposée.

Si les diverses intégrales $u_1, u_2, \ldots$ satisfont à des équations algébriques ayant pour coefficients des fonctions monodromes de z, une intégrale quelconque

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots$$

n'aura qu'un nombre fini de valeurs distinctes; et par suite le groupe de l'équation ne contiendra qu'un nombre fini de substitutions.

Il y a donc identité entre les deux questions suivantes:

1°. Enumérer les divers types d'équations différentielles linéaires d'ordre m dont toutes les intégrales soient algébriques.

2°. Construire les divers groupes d'ordre fini que contient le groupe linéaire à m variables.

Dans le Chapitre I du présent Mémoire nous résolvons ce second problème, pour les équations du second ordre, par une méthode nouvelle et directe. Nous trouvons, d'accord avec M. ***Klein****), qu'en dehors des groupes exclusivement composés de substitutions de la forme

$$|x, \quad y \qquad ax, \quad by|$$

ou de substitutions de cette forme, combinées avec une substitution

$$|x, \quad y \qquad cy, \quad dx|$$

il n'existe que trois types de groupes d'ordre fini.

Le premier est dérivé de substitutions des formes suivantes

$$\begin{aligned}
a &= |x, \quad y \qquad ax, \quad ay|, \\
A &= |x, \quad y \qquad ix, \quad -iy|, \\
B &= |x, \quad y \qquad y, \quad -x|, \\
C &= \left|x, \quad y \qquad m\frac{1-i}{2}(x-y), \quad m\frac{1+i}{2}(x+y)\right|
\end{aligned}$$

---

*) Voir aussi un récent mémoire de M. *Gordan* (Mathematische Annalen, T. XII).

où $i=\sqrt{-1}$, a et m étant des racines de l'unité.

Le second s'obtient en adjoignant au précédent une substitution

$$D = |x, \quad y \qquad njx, \quad nj^{-1}y|$$

où $j^8=1$, n étant racine de l'unité.

Le troisième type résulte de l'adjonction de substitutions de l'espèce a aux suivantes:

$$|x, \quad y \qquad \theta x, \quad \theta^{-1}y|,$$
$$|x, \quad y \qquad y, \quad -x|,$$
$$|x, \quad y \qquad \lambda x+\mu y, \quad \mu x-\lambda y|$$

où l'on a

$$\theta^{10}=1, \quad \lambda=\frac{1}{\theta^2-\theta^{-2}}, \quad \mu^2+\lambda^2+1=0.$$

Dans le Chapitre II, nous étendons cette méthode au cas d'un nombre quelconque p de variables, et nous arrivons à ce théorème fondamental:

Tout groupe G d'ordre fini, contenu dans le groupe linéaire à p variables, contiendra un groupe F de substitutions de la forme

$$|x, \quad y, \quad z, \quad \ldots \qquad ax, \quad by, \quad cz, \quad \ldots|$$

auquel toutes ses substitutions seront permutables; et G aura pour ordre λf, f étant l'ordre de F, et λ un entier inférieur à une limite fixe, laquelle ne dépend que de p.

Cette proposition, qui ne diffère que par l'énoncé de celle trouvée par M. *Fuchs* pour le cas où $p=2$, peut encore se formuler comme il suit:

Théorème I. ***Si une équation différentielle linéaire***

$$\frac{d^pu}{dt^p}+A_1\frac{d^{p-1}u}{dt^{p-1}}+\cdots+A_pu = 0$$

a toutes ses intégrales algébriques, ces intégrales s'exprimeront linéairement par les racines d'équations binômes, dont les seconds membres sont des fonctions monodromes de t et des racines d'une équation auxiliaire $X=0$.

Le degré de cette équation auxiliaire sera inférieur à une limite fixe.

Dans le Chapitre III, nous traitons le cas où $p=3$. Les types correspondants sont les suivants:

1°. Groupes dont les substitutions sont de la forme

$$|x, \quad y, \quad z \qquad \alpha x+\beta y, \quad \alpha' x+\beta' y, \quad \gamma z|$$

les coefficients γ étant des racines de l'unité, et les coefficients α, β, α', β'

étant tels que les substitutions à deux variables

$$|x,\ \ y \qquad \alpha x+\beta y,\ \ \alpha' x+\beta' y|$$

forment un groupe Γ d'ordre fini.

On obtiendra ainsi cinq sortes de groupes différents, suivant le type auquel appartient le groupe Γ.

2°. Groupes dérivés de substitutions de la forme

$$|x,\ \ y,\ \ z \qquad ax,\ \ by,\ \ cz|$$

et de la substitution

$$S = |x,\ \ y,\ \ z \qquad a'y,\ \ b'z,\ \ c'x|$$

(où les coefficients a, b, c, a', b', c' sont des racines de l'unité).

3°. Groupes obtenus par l'adjonction au groupe précédent d'une nouvelle substitution de la forme

$$|x,\ \ y,\ \ z \qquad a''y,\ \ b''x,\ \ c''z|$$

(où a'', b'', c'' sont des racines de l'unité).

En dehors de ces groupes, dont l'existence était évidente, il n'existe que quatre types ainsi définis:

4°. Type dérivé de la combinaison des substitutions

$$\begin{aligned} m &= |x,\ \ y,\ \ z \qquad mx,\ \ my,\ \ mz|, \\ A &= |x,\ \ y,\ \ z \qquad \tau x,\ \ \tau^{-1}y,\ \ z|, \\ B &= |x,\ \ y,\ \ z \qquad y,\ \ x,\ \ -z|, \end{aligned}$$

$$C = \begin{vmatrix} x & ax-(1+a)y & -2a^2z \\ y & -(1+a)x. \quad +ay & +2a^2z \\ z & x \quad -y-(1+2a)z \end{vmatrix}$$

où τ est une racine cinquième de l'unité, a un coefficient défini par l'équation

$$a(\tau+\tau^{-1}-2) = 1$$

et m une racine de l'unité.

Si $m = 1$, le groupe sera d'ordre 60 et coïncidera avec le groupe formé par les substitutions qui superposent à lui-même l'icosaèdre régulier.

5°. Type dérivé des substitutions

$$\begin{aligned} m &= |x,\ \ y,\ \ z \qquad mx,\ \ my,\ \ mz|, \\ A &= |x,\ \ y,\ \ z \qquad x,\ \ \theta y,\ \ \theta^2 z|, \\ B &= |x,\ \ y,\ \ z \qquad y,\ \ z,\ \ x|, \\ rD &= |x,\ \ y,\ \ z \qquad rjx,\ \ rj\theta^2 y,\ \ rjz|, \end{aligned}$$

$$r^2E = \begin{vmatrix} x & r^2a(x+y+\theta z) \\ y & r^2a(x+\theta y+z) \\ z & r^2a(x+\theta^2 y+\theta^2 z) \end{vmatrix}$$

où l'on a

$$\theta^3 = 1, \quad j^3 = \theta, \quad a^3 = \frac{1}{3(1-\theta^2)},$$

$m^{3\varrho} = 1$, $r^3 = m^\mu$ (ϱ quelconque, $\mu = 0$, 1 ou 2).

Si r et ϱ se réduisent à l'unité, ce groupe contiendra 27.24 substitutions, toutes de déterminant 1.

6°. Type dérivé des substitutions m, A, B, sDE, où $s^4 = 1$, m, m^2 ou m^3, le reste défini comme au type précédent.

7°. Type dérivé des substitutions m, A, B, sDE, tED, où $t^2 = s^2$ ou ms^2, le reste défini comme au type précédent.

Ces résultats, appliqués aux équations différentielles donnent le théorème suivant:

Théorème II. *Si l'équation linéaire du 3ᵉ ordre*

$$\frac{d^3u}{dt^3} + A_1\frac{d^2u}{dt^2} + A_2\frac{du}{dt} + A_3u = 0$$

a ses intégrales algébriques, l'équation auxiliaire $X = 0$ *du théorème I aura pour degré* 1, 2, 3, 4, 5 *ou* 9. *Dans ce dernier cas, ce sera une équation Hessienne.*

Chapitre I. Equations du second ordre.

1. Soit

$$S = |u_1, \quad u_2 \quad \alpha u_1 + \beta u_2, \quad \gamma u_1 + \delta u_2|$$

une substitution linéaire à deux variables. Elle multipliera la fonction linéaire $mu_1 + nu_2$ par un facteur constant s, si l'on a identiquement

$$m(\alpha u_1 + \beta u_2) + n(\gamma u_1 + \delta u_2) = s(mu_1 + nu_2)$$

d'où

$$\alpha m + \gamma n = sm, \quad \beta m + \delta n = sn.$$

Ces deux équations de condition se réduiront à une seule, de laquelle on pourra déduire le rapport $\frac{m}{n}$, si le *déterminant caractéristique*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha - s & \gamma \\ \beta & \delta - s \end{vmatrix}$$

se réduit à zéro.

L'équation $\varDelta = 0$ étant du second degré, aura en général deux racines distinctes a et b. Il existera donc deux fonctions linéaires x, y des variables primitives (fonctions définies chacune à un facteur constant près) que S multiplie respectivement par a et b. En les prenant pour variables, S sera réduite à la forme canonique

$$|x, \ y \quad ax, \ by|, \quad \text{où} \quad a \gtrless b.$$

Nous dirons dans ce cas que S est une substitution de *première espèce.*

Si les deux racines de l'équation en S se confondent en une seule, a, soient x une fonction linéaire que S multiplie par a, y une autre fonction linéaire. Prenant x et y pour variables, S sera réduite à la forme

$$|x, \ y \quad ax, \ cx+dy|.$$

Son équation caractéristique deviendra

$$(a-s)(d-s) = 0$$

et comme elle a la racine double a, on aura nécessairement $d = a$. Posant pour abréger $c = a\lambda$, S prendra la forme

$$|x, \ y \quad ax, \ a(y+\lambda x)|.$$

Nous dirons que S est de *seconde espèce* si $\lambda = 0$; de *troisième espèce,* si $\lambda \gtrless 0$.

2. Soit maintenant G un groupe formé d'un nombre limité de substitutions linéaires. Il ne peut contenir aucune substitution S de troisième espèce. Car il contiendrait ses puissances, qui ont pour formule générale

$$S^m = |x, \ y \quad a^m x, \ a^m(y+m\lambda x)|$$

et sont évidemment en nombre illimité. Quant aux substitutions de première espèce, leurs puissances ont pour formule

$$S^m = |x, \ y \quad a^m x, \ b^m y|$$

et seront en nombre limité, lorsque a et b seront des racines de l'unité. De même pour les substitutions de seconde espèce.

3. Nous désignerons pour abréger par a la substitution de seconde espèce $|x, \ y \quad ax, \ ay|$. Cette substitution, multipliant évidemment par a toute fonction linéaire de x, y, conservera sa forme pour tout changement linéaire de variables; et (ce qui est au fond la même chose) elle est échangeable à une substitution linéaire quelconque*).

---

*) *Définitions:* On appelle *transformée de S par T* la substitution $T^{-1}ST$.

Si $T^{-1}ST = S$, d'où $ST = TS$, les substitutions S et T sont dites *échangeables.*

Les transformées par T des diverses substitutions d'un groupe G forment un groupe G', *transformé* de G par T.

Si $G' = G$, on dit que le groupe G et la substitution T sont *permutables.*

4. Soit maintenant

$$S = |x,\ y \quad ax,\ by|$$

une substitution de première espèce; et cherchons à quelles conditions sa transformée par une substitution linéaire (de déterminant $\gtrless 0$), telle que

$$T = |x,\ y \quad \alpha x+\beta y,\ \gamma x+\delta y|$$

aura elle-même la forme canonique.

Soit

$$U = |x,\ y \quad cx,\ dy|$$

cette transformée. On a $U = T^{-1}ST$, d'où $ST = TU$. Mais on a

$$ST = |x,\ y \quad \alpha a x+\beta b y,\ \gamma a x+\delta b y|$$
$$TU = |x,\ y \quad c(\alpha x+\beta y),\ d(\gamma x+\delta y)|$$

d'où les équations de condition

$$\alpha a = \alpha c,\quad \beta b = \beta c,\quad \gamma a = \gamma d,\quad \delta b = \delta d.$$

D'ailleurs $\alpha\delta-\beta\gamma \gtrless 0$, et $a \gtrless b$. Ces équations ne pourront donc être satisfaites qu'en posant ou bien

$$(1.)\qquad \beta = \gamma = 0,\quad c = a,\quad b = d$$

d'où

$$(2.)\qquad U = S,\quad T = |x,\ y \quad \alpha x,\ \delta y|,$$

ou bien

$$(3.)\qquad \alpha = \delta = 0,\quad c = b,\quad d = a$$

d'où

$$(4.)\qquad U = |x,\ y \quad bx,\ ay|,\quad T = |x,\ y \quad \beta y,\ \gamma x|.$$

Les relations que nous venons de trouver nous permettent d'énoncer la proposition suivante.

Théorème. *Pour qu'une substitution T soit échangeable à une substitution S de première espèce, il faut et il suffit qu'en choisissant les variables indépendantes x, y de manière à réduire S à sa forme canonique, T prenne également la forme canonique.*

On en déduit cette conséquence évidente:

Les diverses substitutions T, T', ... échangeables à une substitution S de première espèce sont échangeables entre elles.

5. Nous sommes actuellement en mesure de signaler deux types de groupes d'ordre fini*).

*) On nomme *ordre* d'un groupe le nombre de ses substitutions.

Premier type. On l'obtiendra en combinant ensemble des substitutions canoniques

$$(5.)\quad S = |x,\ y \quad ax,\ by|,\quad S' = |x,\ y \quad a'x,\ b'y|,\ \ldots$$

en nombre fini quelconque, où les coefficients $a,\ b,\ a',\ b',\ \ldots$ soient des racines de l'unité.

Tout groupe G formé d'un nombre fini de substitutions échangeables entre elles appartiendra à ce type. En effet, si parmi les substitutions dont il est dérivé il en est une S de première espèce, ramenons-la à sa forme canonique $S = |x,\ y \quad ax,\ by|$. Les autres substitutions $S',\ \ldots$ du groupe, étant échangeables à celle-là, prendront également la forme canonique. Si au contraire toutes les substitutions de G sont de seconde espèce, elles auront la forme canonique, quel que soit le choix des variables.

6. Deuxième type. Pour le former, adjoignons au groupe G dérivé des substitutions (5.) une substitution de la forme

$$(6.)\quad T = |x,\ y \quad y,\ kx|$$

où k soit une racine de l'unité. Le groupe obtenu par cette adjonction contiendra les substitutions (5.), leurs transformées

$$|x,\ y \quad bx,\ ay|,\quad |x,\ y \quad b'x,\ a'y|,\ \ldots$$

par la substitution T, et la substitution

$$T^2 = |x,\ y \quad kx,\ ky|.$$

Ces substitutions combinées ensemble, donneront un groupe G' appartenant au premier type et d'ordre fini. La substitution T étant évidemment permutable à ce groupe G', lequel contient d'ailleurs T^2, il est clair que son adjonction au groupe G' doublera le nombre de ses substitutions.

7. ***Tout groupe H d'ordre fini, dont les substitutions sont permutables à celles d'un groupe G' du premier type, lequel contient une substitution S de première espèce, appartiendra au premier ou au second type.***

Choisissons en effet les variables $x,\ y$ de manière à ramener les substitutions de G' à la forme canonique. Toute substitution de H, transformant S en une autre substitution canonique, sera de l'une des deux formes

$$|x,\ y \quad \alpha x,\ \delta y|,\quad |x,\ y \quad \beta y,\ \gamma x|.$$

Si toutes les substitutions de H sont de la première forme, H appartiendra au premier type. Si au contraire H contient des substitutions de la seconde forme, elles résulteront évidemment de la combinaison d'une seule d'entre elles

$$T = |x,\ y \quad \beta y,\ \gamma x|$$

avec les substitutions de la première forme que H contient. Celles-ci forment un groupe du premier type et ne changent pas de forme si l'on prend pour variable $\beta y = y'$ à la place de y; changement qui donne à T la forme

$$|x, y' \quad y', kx|$$

en posant pour abréger $\beta\gamma = k$.

8. Cherchons à déterminer les groupes d'ordre fini qui peuvent exister en dehors des types ci-dessus.

Soient G un semblable groupe; Ω son ordre; g le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont de seconde espèce; ω son ordre.

Considérons une substitution S, arbitrairement choisie parmi les substitutions de première espèce que G contient. Celles des substitutions de G qui sont échangeables à S forment un faisceau F, contenant évidemment toutes les substitutions de g; l'ordre de ce faisceau sera donc un multiple de ω, tel que $\mu\omega$. D'ailleurs μ sera >1, puisque F contient la substitution S, qui n'appartient pas à g.

Si nous prenons successivement pour point de départ les diverses substitutions $S, S', \dots$ de première espèce que G contient, nous obtiendrons une suite de faisceaux $F, F', \dots$ dont chacun contiendra toutes les substitutions de g.

Au contraire, une substitution S de première espèce ne peut être contenue dans deux faisceaux *différents* de la suite $F, F', \dots$ Supposons en effet que S soit contenue dans le faisceau F'. Les substitutions de ce faisceau, étant échangeables à S', seront échangeables entre elles (N^o. 4.) Elles sont donc échangeables à S, et par suite appartiendront au faisceau F. Donc F' est contenu tout entier dans F. Réciproquement, F contenant F', contiendra en particulier la substitution S' et par suite sera contenu dans F'. Donc les faisceaux F et F' seront identiques.

9. Cela posé, admettons que la substitution S ait été réduite à la forme canonique

$$(7.) \qquad S = |x, y \quad ax, by|,$$

Le faisceau correspondant F sera formé de celles des substitutions de G qui ont également la forme canonique. Soit E le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à F; ses substitutions, devant transformer S en une substitution canonique, seront d'après le N^o. 4. de l'une des formes

$$(8.) \qquad |x, y \quad \alpha x, \delta y|,$$

$$(9.) \qquad |x, y \quad \beta y, \gamma x|.$$

Celles de ces substitutions qui sont de la forme (8.) ne seront autres que les $\mu\omega$ substitutions de F.

S'il y a des substitutions de la forme (9.), il y en aura évidemment $\mu\omega$, qui s'obtiendront en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les $\mu\omega$ substitutions de F.

L'ordre de E sera donc $k\mu\omega$, k étant égal à 2 où à 1, suivant que G contiendra ou non une substitution de la forme (9.). Par suite, le nombre des faisceaux distincts F, F_1, ... transformés de F par les Ω substitutions de G, sera $\frac{\Omega}{k\mu\omega}$. Chacun d'eux contient d'ailleurs les ω substitutions de g, et $(\mu-1)\omega$ substitutions de première espèce. Le nombre total des substitutions de première espèce contenues dans les faisceaux F, F_1, ... sera donc égal à $\frac{\Omega}{k\mu\omega}(\mu-1)\omega = \Omega\frac{\mu-1}{k\mu}$.

Si la suite F, F' ... contient un faisceau F', autre que F et ses transformés; soit $\mu'\omega$ son ordre, on verra de même que F' et ses transformés contiendront $\Omega\frac{\mu'-1}{k'\mu'}$ substitutions de première espèce, k' étant égal à 1 ou à 2.

Continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé le nombre des faisceaux F, F', ... on voit que le groupe G contient en tout

$$\Omega\left\{\frac{\mu-1}{k\mu}+\frac{\mu'-1}{k'\mu'}+\cdots\right\}$$

substitutions de première espèce. Il en contient d'ailleurs ω de seconde espèce. On aura donc l'égalité

$$\Omega\left\{\frac{\mu-1}{k\mu}+\frac{\mu'-1}{k'\mu'}+\cdots\right\}+\omega = \Omega$$

d'où

$$(10.)\qquad \Omega = \frac{\omega}{1-\frac{\mu-1}{k\mu}-\frac{\mu'-1}{k'\mu'}-\cdots}.$$

10. Il s'agit de discuter cette formule. A cet effet nous remarquerons que Ω étant fini et positif, son dénominateur doit être positif. D'autre part, G contenant le groupe E, d'ordre $k\mu\omega$, on doit avoir $\Omega \geqq k\mu\omega$. On doit même exclure l'hypothèse $\Omega = k\mu\omega$; car si cela avait lieu, G se confondant avec E, appartiendrait au premier ou au second type (N°. 7.).

Cela posé, chacun des termes $\frac{\mu-1}{k\mu}$, $\frac{\mu'-1}{k'\mu'}$, ... étant au moins égal à $\frac{1}{4}$ (puisque $k \leqq 2$, $\mu \geqq 2$), il faudra, pour que le dénominateur de Ω soit positif, que leur nombre ne surpasse pas 3. D'où trois cas à discuter.

11. Premier cas: Il n'existe qu'un terme $\frac{\mu-1}{k\mu}$. On aura

$$\Omega = \frac{\omega}{1-\frac{\mu-1}{k\mu}} = \frac{\omega}{1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k\mu}} \leqq \frac{\omega}{\frac{1}{k\mu}} \leqq k\mu\omega$$

ce qui est impossible (No. 10).

12. Deuxième cas. Il existe deux termes $\frac{\mu-1}{k\mu}$ et $\frac{\mu'-1}{k'\mu'}$.

Si $k = k' = 1$, chacun de ces deux termes étant au moins égal à $\frac{1}{2}$, le dénominateur de Ω ne pourra être positif, conséquence absurde.

Si $k = k' = 2$, on aura

$$\Omega = \frac{\omega}{\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{2\mu'}} < 2\mu\omega,$$

conséquence absurde.

Soit enfin $k = 2$, $k' = 1$. On aura

$$\Omega = \frac{\omega}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{\mu'}}.$$

Si $\mu' > 3$ le dénominateur de Ω ne pourra être positif.

Si $\mu' = 2$, on aura

$$\Omega = \frac{\omega}{\frac{1}{2\mu}} = 2\mu\omega$$

et G appartiendra au second type.

Enfin, si $\mu' = 3$, il viendra

$$\Omega = \frac{\omega}{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2\mu}} = \frac{6\mu\omega}{3-\mu}.$$

Pour que son dénominateur soit positif, il faudra poser $\mu = 2$, d'où

$$\Omega = 12\omega.$$

13. Troisième cas. Il existe trois termes $\frac{\mu-1}{k\mu}$, $\frac{\mu'-1}{k'\mu'}$, $\frac{\mu''-1}{k''\mu''}$.

Si l'un des nombres k, k', k'' était égal à 1, le terme correspondant étant $\geqq \frac{1}{2}$ et les autres $\geqq \frac{1}{4}$, le dénominateur de Ω ne pourrait être positif.

Soit donc $k = k' = k'' = 2$. On aura

$$\Omega = \frac{\omega}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu'} + \frac{1}{2\mu''}}.$$

Pour que le dénominateur soit positif, il faudra que l'un au moins des termes $\frac{1}{2\mu}$, $\frac{1}{2\mu'}$, $\frac{1}{2\mu''}$ surpasse $\frac{1}{6}$.

Soit donc $\frac{1}{2\mu''} > \frac{1}{6}$, d'où $\mu'' < 3$. On en déduira

$$\mu'' = 2, \quad \Omega = \frac{\omega}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu'}}.$$

L'un au moins des termes $\frac{1}{2\mu}$, $\frac{1}{2\mu'}$, devra surpasser $\frac{1}{8}$. Soit donc $\frac{1}{2\mu'} > \frac{1}{8}$. On en déduira $\mu' < 4$.

Si $\mu' = 2$, il viendra

$$\Omega = \frac{\omega}{\frac{1}{2\mu}} = 2\mu\omega$$

et ~~Ω~~ G appartiendra au deuxième type. Il en sera de même si $\mu = 2$.

Soit enfin $\mu' = 3$, avec $\mu > 2$. Il viendra

$$\Omega = \frac{\omega}{-\frac{1}{12} + \frac{1}{2\mu}} = \frac{12\mu\omega}{6-\mu}.$$

On pourra supposer

$$\begin{aligned} \mu &= 3, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 12\omega, \\ \mu &= 4, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 24\omega, \\ \mu &= 5, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 60\omega. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le théorème suivant:

Théorème. ***Tout groupe G, d'ordre fini, et n'appartenant pas aux deux types déjà étudiés, a pour ordre $r\omega$, r désignant l'un des trois nombres*** 12, 24, 60.

14. Le problème étant ainsi nettement circonscrit, procédons à la construction de ces groupes.

Considérons dans ce but la fonction linéaire $z = \frac{mx+ny}{px+qy}$, où m, n, p, q sont des constantes arbitraires. Les ω substitutions de g, multipliant

x et y par un même facteur, n'altéreront pas cette fonction. Le nombre des transformées distinctes z, z_1, ... de la fonction par les $r\omega$ substitutions de G sera donc égal à r.

Chaque substitution de G permutera les unes dans les autres les r fonctions z, z_1, ... Les divers déplacements de ces fonctions opérés par les substitutions de G formeront évidemment un groupe Γ d'ordre r, *isomorphe* à G (c'est-à-dire tel qu'à chaque substitution de G corresponde une seule substitution de Γ et qu'au produit de deux substitutions de G corresponde le produit de leurs correspondantes). Réciproquement, à chaque substitution de Γ correspondront dans G ω substitutions, qui s'obtiendront en multipliant l'une d'elles par les substitutions de g.

15. *Il ne peut exister aucun groupe d'ordre premier, contenu dans Γ et permutable à ses substitutions.* Soit en effet Φ un semblable groupe; il serait formé des puissances d'une seule substitution circulaire Σ. Soit S l'une des substitutions de G qui correspondent à Σ. Le groupe F, formé par celles des substitutions de G qui correspondent à celles de Φ, résultant de la combinaison des puissances de S avec les substitutions de g, ses substitutions seront échangeables entre elles. D'ailleurs les substitutions de Γ étant permutables à Φ, celles de G le seront évidemment à F. Donc G appartiendra au premier ou au second type (N°. 7.), contrairement à notre supposition.

16. Ces préliminaires posés, trois cas seront à discuter, suivant la valeur de r.

Premier cas. Soit d'abord $r = 12$. D'après un théorème de M. *Sylow* (Mathematische Annalen, T. V), r étant divisible par 3 sans l'être par 3^2, le groupe Γ contiendra des groupes Δ, Δ', ... d'ordre 3, en nombre $3\alpha+1$, α étant un entier; ces groupes sont les transformés d'un seul d'entre eux Δ par les substitutions de Γ; et si 3β est l'ordre du groupe formé par celles de ces substitutions qui sont permutables à Δ, on aura

$$(11.)\qquad 12 = 3\beta(3\alpha+1).$$

Cette égalité ne peut avoir lieu que si $\beta = 1$ et $\alpha = 1$. Il y aura donc quatre groupes d'ordre 3, que les substitutions de Γ permuteront ensemble. Les déplacements de ces groupes formeront un groupe transitif G' entre 4 quantités, lequel sera évidemment isomorphe à Γ, et par suite à G.

Soit l le nombre des substitutions de Γ qui correspondent à chaque substitution de G'; l'ordre de G' sera évidemment $\frac{12}{l}$. D'ailleurs G' étant transitif entre 4 quantités, son ordre est un multiple de 4. Donc $l = 3$ ou 1.

Si l était égal à 3, les substitutions de G' étant permutables au groupe formé par la substitution 1, celles de Γ le seraient au groupe d'ordre 3 formé par ses correspondantes, ce qui est impossible (N°. 15.). On aura donc $l = 1$; donc G' sera d'ordre 12 et par suite ne sera autre que le groupe alterné entre 4 lettres.

17. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ces quatre lettres. Le groupe G' s'obtiendra en combinant au groupe G'_1 dérivé des substitutions binaires

$$A' = (\alpha\beta)(\gamma\delta),$$
$$B' = (\beta\gamma)(\alpha\delta)$$

la substitution ternaire

$$C' = (\alpha\beta\gamma)$$

laquelle transforme A', B' en B', $A'B'$.

Soient A, B, C des substitutions arbitrairement choisies parmi celles de G qui correspondent respectivement à A', B', C'. La substitution

$$(A'B')^{-1}.C'^{-1}.A'B'.C'$$

laquelle se réduit à A', aura pour correspondante

$$(AB)^{-1}.C^{-1}.AB.C = A$$

dont le déterminant, étant le produit des déterminants de ses composantes (qui sont réciproques les unes des autres), se réduit à l'unité.

De même, à la substitution

$$C'^{-1}A'C' = B'$$

correspondra la substitution

$$C^{-1}AC = B$$

de déterminant 1. D'où ce résultat:

Le groupe G contient des substitutions A et B de déterminant 1 *et respectivement correspondantes à A' et B'.*

18. Construisons ces substitutions.

Supposons les variables choisies de manière à ramener A à sa forme canonique

$$|x, y \quad ax, by|.$$

On aura $ab = 1$.

D'autre part, A' ne se réduisant pas à l'unité, mais son carré s'y réduisant, A^2 multipliera x et y par un même facteur sans que A jouisse de cette propriété. On aura donc

$$a \gtrless b, \quad a^2 = b^2$$

d'où

$$a^4 = a^2 b^2 = 1, \quad a = -b = i.$$

$$(12.) \qquad A = |x,\ y \quad ix,\ -iy|.$$

19. Passons à la substitution B. Puisque B' est échangeable à A', B transformera A en mA, m désignant une substitution qui multiplie x et y par un même facteur m. Mais A ayant l'unité pour déterminant, le déterminant de la transformée, qui est m^2, doit aussi se réduire à l'unité. Donc $m = \pm 1$.

Si m était égal à l'unité, B serait de la forme

$$|x,\ y \quad ax,\ by|$$

(N°. 4.) et B' étant d'ordre 2, on trouverait comme tout à l'heure

$$a = -b = \pm i$$

et par suite

$$B = \pm A.$$

Les deux substitutions A et B ne différant que par un facteur constant ± 1, leurs correspondantes A' et B' devraient être identiques, ce qui n'est pas.

On aura donc $m = -1$, et B sera de la forme (N°. 4.)

$$|x,\ y \quad ay,\ bx|,$$

On peut d'ailleurs supposer $a = 1$, car rien n'empêche de prendre pour variable ay au lieu de y. Cela posé, pour que B ait l'unité pour déterminant, il faudra qu'on ait $b = -1$, et par suite

$$(13.) \qquad B = |x,\ y \quad y,\ -x|.$$

20. Soit maintenant C une des substitutions de G correspondantes à C'. Des égalités

$$C'^{-1}A'C' = B', \quad C'^{-1}B'C' = A'B'$$

on déduira

$$\mathrm{C}^{-1}A\mathrm{C} = mB, \quad \mathrm{C}^{-1}B\mathrm{C} = nAB,$$

m et n étant des substitutions qui multiplient x et y par un même facteur constant m ou n. Ces facteurs doivent être égaux à ± 1 pour que les transformées aient encore pour déterminant l'unité.

Soit donc $m=(-1)^\beta$, $n=(-1)^\alpha$. On aura $C=A^\alpha B^\beta C$, C étant une nouvelle substitution appartenant également à G, et transformant A et B en B et AB.

Soit

$$C=\begin{vmatrix} x & \lambda x+\mu y \\ y & \nu x+\varrho y \end{vmatrix}.$$

On aura

$$(14.)\qquad AC=CB,\quad BC=CAB.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} AC &= |x,\ y\quad \lambda i x-\mu i y,\ \ \nu i x-\varrho i y|,\\ CB &= |x,\ y\quad \nu x+\varrho y,\ \ -\lambda x-\mu y|,\\ BC &= |x,\ y\quad \lambda y-\mu x,\ \ \nu y-\varrho x|,\\ CAB &= |x,\ y\quad -i(\nu x+\varrho y),\ \ -i(\lambda x+\mu y)|. \end{aligned}$$

Les identités (14.) donneront donc

$$\nu=\lambda i,\quad \varrho=-\mu i,\quad \nu i=-\lambda,\quad \mu=\varrho i,$$
$$\mu=\nu i,\quad \lambda=-\varrho i,\quad \varrho=\lambda i,\quad \nu=-\mu i$$

d'où

$$\mu=-\lambda,\quad \nu=\lambda i,\quad \varrho=\lambda i$$

et par suite, en posant $\lambda=m\frac{1-i}{2}$,

$$(15.)\qquad C=\begin{vmatrix} x & m\frac{1-i}{2}(x-y) \\ y & m\frac{1+i}{2}(x+y) \end{vmatrix},$$

substitution qui aura m^2 pour déterminant.

Le groupe cherché G sera dérivé des substitutions A, B, C, jointes à des substitutions de seconde espèce, m', m'', ...

21. Il est aisé de voir que l'ordre du groupe ainsi construit est bien 12ω. En effet, chacune de ses substitutions transforme circulairement les unes dans les autres les trois substitutions A, B, AB, ou les transforme chacune en elle-même (au facteur près ± 1). Son ordre est donc égal à $3\Omega'$, Ω' étant l'ordre du groupe formé par celles de ses substitutions qui transforment A, B, AB en elles-mêmes (au facteur près ± 1). Celles-ci sont évidemment de la forme $A^\alpha B^\beta T$, α et β étant égaux à 0 ou à 1, et T étant l'une des substitutions échangeables à la fois à A et à B. On

aura donc $\Omega' = 4\Omega''$, Ω'' étant le nombre des substitutions T. Celles-ci étant échangeables à A, seront de la forme

$$|x, \; y \quad ax, \; by|$$

et l'on vérifie immédiatement que pour qu'elles soient échangeables à B, il faudra qu'on ait $a = b$. Les T se réduisent donc aux ω substitutions de seconde espèce que G contient.

On remarquera que pour que G ne contienne qu'un nombre limité de substitutions, il est nécessaire que m soit une racine de l'unité.

22. Deuxième cas. Soit $r = 24$. Le groupe Γ contiendra $3\alpha+1$ groupes d'ordre 3 (Théorème de *Sylow*), et l'équation

$$24 = 3\beta(3\alpha+1)$$

montre que l'on aura $\beta = 2$, $\alpha = 1$. Il existera un groupe G' entre 4 lettres et isomorphe à Γ (Voir le N°. 16 pour les détails).

Son ordre sera $\frac{24}{l}$, et comme il est un multiple de 4, l sera un diviseur de 6. Il ne pourra être un nombre premier 2 ou 3 (Voir le N°. 16). D'autre part, s'il était égal à 6, Γ contiendrait un groupe Γ_1 d'ordre 6 et permutable à toutes ses substitutions. Ce groupe Γ_1 contient d'ailleurs un groupe Γ_2 d'ordre 3, lequel est unique (Théorème de *Sylow*). Les substitutions de Γ étant permutables à Γ_1, le seraient à Γ_2, ce qui est impossible (N°. 15).

On aura donc $l = 1$, et le groupe G', d'ordre 24, contiendra toutes les substitutions possibles entre 4 lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, entre autres les substitutions

$$A' = (\alpha\beta)(\gamma\delta), \quad B' = (\beta\gamma)(\alpha\delta), \quad C' = (\alpha\beta\gamma).$$

Celles des substitutions de G qui correspondent à ces substitutions, formeront un groupe, dérivé des substitutions A, B, C jointes à des substitutions de seconde espèce (N^{os}. 18 à 20).

23. On obtient le groupe G' en combinant aux substitutions précédentes A', B', C' la substitution

$$D' = (\alpha\gamma\beta\delta)$$

laquelle transforme A' et B' en A' et $A'B'$.

Soit $\mathfrak{D}$ une des substitutions qui lui correspondent dans G. Elle transformera A, B en $\pm A$, $\pm AB$, et par suite sera de la forme $A^\alpha B^\beta D$, D étant une nouvelle substitution échangeable à A et qui transforme B en AB.

Pour que D soit échangeable à A, il faut qu'elle soit de la forme

$$|x,\ y \quad ax,\ by|.$$

On doit avoir en outre

$$BD = DAB.$$

Mais on a

$$BD = |x,\ y \quad ay,\ \ -bx|;$$
$$DAB = |x,\ y \quad -biy,\ \ -aix|.$$

On devra donc avoir $b = ai$, et si nous posons $a = nj$, j étant une racine huitième de l'unité, il viendra

$$(16.)\qquad D = |x,\ y \quad njx,\ \ nj^{-1}y|.$$

24. On vérifiera, comme au N°. 21, que le groupe G dérivé des substitutions A, B, C, D, jointes à des substitutions de seconde espèce m', m'', ... a bien pour ordre 24ω.

25. On peut d'ailleurs sans inconvénient supposer $m = 1$ dans l'expression (15.) de la substitution C. En effet, cette substitution, dont la troisième puissance se réduit à la seconde espèce, correspondra dans G' à l'une des quatre substitutions circulaires ternaires C', $A'^{-1}C'A'$, $B'^{-1}C'B'$, $(A'B')^{-1}C'A'B'$ qui transforment A' et B' en B' et $A'B'$. Supposons pour fixer les idées qu'elle corresponde à C'. Le groupe G' contient la substitution

$$S' = (\alpha\beta).$$

Soit S l'une de ses correspondantes. A la substitution

$$C'^{-1}S'^{-1}C'S' = C'$$

correspondra la substitution de déterminant 1, $C^{-1}S^{-1}CS = C_1$. Mais C est une autre correspondante. Donc C_1 ne différera de C que par la valeur du facteur constant m, lequel devra s'y réduire à ± 1. D'ailleurs G contenant la substitution $A^2 = -1$, contiendra à la fois la substitution C_1 et la substitution $-C_1$. Il est donc permis de supposer $m = +1$.

26. Troisième cas. Soit $r = 60$. On verra comme dans les deux cas précédents 1°. que Γ contient $5\alpha+1$ groupes d'ordre 5; 2°. que $\alpha = 1$ (en vertu de l'équation $60 = 5\beta(5\alpha+1)$); 3°. que Γ est isomorphe à un groupe entre 6 lettres et d'ordre 60.

Mais on sait qu'il n'existe qu'un groupe d'ordre 60 entre 6 lettres, lequel est isomorphe au groupe alterné entre 5 lettres. Donc G sera isomorphe à un groupe alterné G' entre 5 lettres.

Soient S' et T' deux substitutions de G', non échangeables entre elles; S et T des substitutions correspondantes arbitrairement choisies dans G. La substitution

$$S'^{-1}T'^{-1}S'T' = U'$$

aura parmi ses correspondantes la substitution $S^{-1}T^{-1}ST = U$ de déterminant 1.

Soient maintenant $V', W', \ldots$ les diverses substitutions de G'; $V, W, \ldots$ des substitutions arbitrairement choisies parmi leurs correspondantes. Les substitutions

$$(17.)\qquad U',\quad V'^{-1}U'V',\quad W'^{-1}U'W',\quad \ldots$$

transformées de U', auront parmi leurs correspondantes les substitutions

$$U,\quad V^{-1}UV,\quad W^{-1}UW,\quad \ldots$$

de déterminant 1. On sait d'ailleurs que toute substitution de G' résulte de la combinaison des substitutions (17.). Donc chaque substitution de G' aura parmi ses correspondantes au moins une substitution de déterminant 1.

Ces substitutions de déterminant 1 formeront un groupe G_1 contenu dans G; et ce dernier groupe résultera évidemment de la combinaison de G_1 avec des substitutions de seconde espèce.

Tout se réduit donc à former le groupe G_1.

27. Le groupe G' est dérivé des substitutions

$$A' = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon),$$
$$B' = (\beta\varepsilon)(\gamma\delta),$$
$$C' = (\beta\delta)(\gamma\varepsilon).$$

Cherchons à construire leurs correspondantes dans G_1.

Supposons A ramené à la forme canonique

$$A = |x,\ y\quad ax,\ by|.$$

On aura $ab = 1$.

D'autre part, A'^5 se réduisant à l'unité, on aura $a^5 = b^5$, d'où $a^{10} = 1$. Donc $a = \theta$, $b = \theta^{-1}$, θ étant une racine primitive de l'une des deux équations

$$\theta^5 = 1,\quad \theta^5 = -1.$$

On aura par suite

$$(18.)\qquad A = |x,\ y\quad \theta x,\ \theta^{-1}y|.$$

28. En second lieu, B' transformant A' en A'^{-1}, sa correspondante

B transformera A en

$$mA^{-1} = |x, \; y \quad m\theta^{-1}x, \; m\theta y|.$$

Pour qu'une telle transformation soit possible, il faut (N°. 4) qu'on ait

$$\theta = m\theta^{-1}, \quad m\theta = \theta^{-1},$$

ou

$$\theta^{-1} = m\theta^{-1}, \quad \theta = m\theta.$$

Le premier système d'équations donnerait $\theta^4 = 1$, ce qui est absurde.

Le second donnera $m = 1$.

La substitution B sera de la forme

$$|x, \; y \quad \alpha y, \; \delta x|$$

(N°. 4). On peut supposer $\alpha = 1$, et comme B a 1 pour déterminant, on en déduira $\delta = -1$, d'où

$$(19.) \qquad B = |x, \; y \quad y, \; -x|.$$

29. Avant d'aller plus loin, remarquons qu'on peut supposer $\theta^5 = -1$. En effet, G contenant A et B, contiendra la substitution

$$AB^2 = |x, \; y \quad -\theta x, \; -\theta^{-1}y|$$

qui correspond à A', ainsi que A, dont elle ne diffère que par le signe de θ; d'ailleurs si l'on avait $\theta^5 = 1$, on aurait $(-\theta)^5 = -1$.

30. Soit enfin

$$C = |x, \; y \quad \lambda x + \mu y, \; \nu x + \varrho y|$$

une substitution correspondante à C'. Soient x', y' les variables indépendantes qui la ramèneraient à sa forme canonique

$$C = |x', \; y' \quad ax', \; by'|.$$

On aura $ab = 1$.

D'autre part, C'^2 se réduisant à l'unité (sans que C' s'y réduise), C ne sera pas de seconde espèce, mais C^2 en sera. On aura donc

$$a \gtrless b, \quad a^2 = b^2,$$

d'où

$$a = -b = \pm i$$

et enfin

$$a + b = 0.$$

Mais a et b étant les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \lambda - s & \mu \\ \nu & \varrho - s \end{vmatrix} = 0$$

leur somme est $\lambda+\varrho$. On aura donc

$$(20.)\qquad \lambda+\varrho = 0.$$

En second lieu, la substitution

$$BC = |x,\ y\quad -\mu x+\lambda y,\ -\varrho x+\nu y|$$

a pour correspondante $B'C'$ dont le carré est égal à l'unité. On aura donc comme tout à l'heure

$$(21.)\qquad -\mu+\nu = 0.$$

En troisième lieu, considérons la substitution

$$A^2C = |x,\ y\quad \lambda\theta^2x+\mu\theta^{-2}y,\ \nu\theta^2x+\varrho\theta^{-2}y|.$$

Soit

$$|x'',\ y''\quad ax'',\ by''|$$

sa forme canonique. On aura encore $ab=1$. D'autre part, sa correspondante

$$A'^2C' = (\alpha\varepsilon\delta)$$

étant d'ordre 3, on aura

$$a \gtrless b,\quad a^3 = b^3,$$

d'où $a^3=\pm 1$.

Il est permis de supposer $a^3=-1$. Car à la substitution C' correspond outre la substitution C, la substitution $B^2C=-C$ qu'on pourrait considérer s'il le fallait à la place de C.

Donc a et b seront les racines de l'équation

$$0=\frac{a^3+1}{a+1}=a^2-a+1$$

et auront pour somme l'unité.

Cela donnera l'équation

$$(22.)\qquad \lambda\theta^2+\varrho\theta^{-2} = 1.$$

Enfin, C ayant l'unité pour déterminant, on aura

$$(23.)\qquad \lambda\varrho-\mu\nu = 1.$$

31. On déduit des équations (20.), (21.), (22.), (23.)

$$(24.)\qquad \lambda=-\varrho=\frac{1}{\theta^2-\theta^{-2}},$$

$$(25.)\qquad \mu = \nu$$

et enfin

$$(26.)\qquad \lambda^2+\mu^2+1 = 0.$$

Cette dernière équation donne pour μ deux valeurs égales et contraires. Il semble donc qu'on puisse construire de deux manières différentes le groupe G_1. Mais on voit immédiatement que les deux groupes ainsi obtenus sont transformés l'un dans l'autre par la substitution

$$|x,\ y \quad x,\ -y|.$$

Ils ne diffèrent donc que par la notation.

32. Il reste à prouver que le groupe G dérivé des substitutions A, B, C jointes à des substitutions m, m', ... de seconde espèce, a bien pour ordre 60ω.

Remarquons à cet effet que les six fonctions

$$(27.)\qquad \varphi = xy,\quad \varphi_\alpha = (\lambda\theta^\alpha x + \mu\theta^{-\alpha} y)(\mu\theta^\alpha x - \lambda\theta^{-\alpha} y)\qquad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

sont permutées entre elles, à des facteurs constants près, et d'une manière deux fois transitive, par les substitutions de G.

En effet, les substitutions m, m', ... les multiplient par des facteurs constants, et l'on vérifie sans peine que A les transforme respectivement en φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_0; que B les transforme en $-\varphi$, $-\varphi_0$, $-\varphi_4$, $-\varphi_3$, $-\varphi_2$, $-\varphi_1$; enfin que C les transforme, à des facteurs constants près, en φ_0, φ, φ_1, φ_3, φ_2, φ_4.

L'ordre de G sera donc égal à $6.5\Omega'$, Ω' étant l'ordre du groupe H formé par celles de ces substitutions qui multiplient φ et φ_0 par un simple facteur constant.

Or les substitutions de H, multipliant φ par un facteur constant, seront de l'une des deux formes

$$(28.)\qquad |x,\ y \quad ax,\ by|,$$

$$(29.)\qquad |x,\ y \quad ay,\ bx|.$$

Parmi elles, se trouve la substitution B, qui appartient à la seconde forme; et l'on aura évidemment $\Omega' = 2\Omega''$, Ω'' étant le nombre des substitutions de H qui sont de la forme (28.).

Or une substitution de cette forme transforme φ_0 en

$$(\lambda ax + \mu by)(\mu ax - \lambda by)$$

qui sera égale à φ_0 à un facteur constant près, si l'on a

$$\frac{\lambda\mu a^2}{\lambda\mu} = \frac{(\mu^2-\lambda^2)ab}{\mu^2-\lambda^2} = \frac{-\lambda\mu b^2}{-\lambda\mu}.$$

Mais λ, μ, $\mu^2-\lambda^2$ sont $\gtrless 0$. Ces équations se réduisent donc à

$$a^2 = ab = b^2,$$

d'où $a = b$.

Les substitutions cherchées sont donc de seconde espèce, et leur nombre Ω' sera égal à ω.

33. Nous pouvons donc formuler le théorème suivant:

Théorème. *Les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à deux variables peuvent se ramener à cinq types.*

Premier type. *Ses substitutions sont de la forme*

$$(30.)\qquad |x,\ y\quad ax,\ by|.$$

Deuxième type. *Il s'obtient en adjoignant aux substitutions précédentes une substitution de la forme*

$$(31.)\qquad |x,\ y\quad cy,\ dx|.$$

Troisième type. *Il est dérivé de substitutions de la forme*

$$(32.)\qquad a = |x,\ y\quad ax,\ ay|$$

jointes aux substitutions

$$(33.)\qquad A = |x,\ y\quad ix,\ \ -iy|,\quad (i^4=1)$$

$$(34.)\qquad B = |x,\ y\quad y,\ \ -x|,$$

$$(35.)\qquad mC = \left|x,\ y\quad m\frac{1-i}{2}(x-y),\ \ m\frac{1+i}{2}(x+y)\right|.$$

Quatrième type. *Il résulte des substitutions a, A, B, C jointes à une substitution de la forme*

$$(36.)\qquad nD = |x,\ y\quad njx,\ \ nj^{-1}y|,\quad (j^8=1).$$

Cinquième type. *Il est dérivé de substitutions de la forme*

$$(37.)\qquad |x,\ y\quad ax,\ ay|$$

jointes aux substitutions

$$(38.)\qquad |x,\ y\quad \theta x,\ \ \theta^{-1}y|,\quad (\theta^{10}=1)$$

$$(39).\qquad |x,\ y\quad y,\ \ -x|,\quad \left(\lambda = \frac{1}{\theta^2-\theta^{-2}}\right)$$

$$(40.)\qquad |x,\ y\quad \lambda x+\mu y,\ \ \mu x-\lambda y|,\quad (\mu^2+\lambda^2+1=0).$$

On peut donner à ces trois derniers types le nom de types *tétraédrique, octaédrique, icosaédrique.* Ils sont en effet respectivement isomorphes aux groupes formés par les mouvements qui superposent à eux-mêmes ces trois polyèdres réguliers.

34. On pourra donc avoir cinq types d'équations linéaires du second ordre à intégrales algébriques. Ces intégrales donnent lieu aux remarques suivantes:

Premier type. Les quantités a, étant des racines de l'unité, seront les puissances de l'une d'entre elles, racine primitive d'une certaine équation binôme $X^\alpha = 1$. De même les b seront les puissances d'une racine primitive d'une équation binôme $Y^\beta = 1$. Cela posé, les quantités x^α, y^β ne seront altérées par aucune des substitutions du groupe; ce seront donc des fonctions monodromes de la variable t. Les deux intégrales particulières x, y seront donc des racines d'équations binômes

$$x^\alpha = \psi(t), \quad y^\beta = \psi_1(t)$$

où ψ, ψ_1 sont des fonctions monodromes.

Deuxième type. La substitution

$$|x, y \quad cy, dx|$$

transformant

$$|x, y \quad ax, by|$$

en

$$|x, y \quad bx, ay|$$

la série des coefficients a sera identique à celle des coefficients b. On aura donc $\beta = \alpha$. Toute fonction rationnelle de x^α, y^α, étant invariable par la moitié des substitutions de G, n'aura que deux valeurs distinctes. Donc x^α, y^α seront racines d'une équation du second degré, à coefficients monodromes en t.

Troisième type. Les a sont les puissances d'une racine primitive d'une équation binôme $X^\alpha = 1$. Soit z une intégrale quelconque de l'équation: z^α étant invariable par les ω substitutions a, dépendra d'une équation d'ordre 12, équivalente à une équation du 4e degré, à discriminant carré. Donc z^α s'exprimera rationnellement au moyen des racines de cette équation du 4e degré. Soit d'ailleurs u une autre intégrale quelconque; u^α, étant invariable par les mêmes substitutions que z^α, sera une fonction rationnelle de z^α et de t.

Quatrième type. Mêmes conclusions, sauf que la réduite du 4e degré n'aura pas son discriminant carré.

Cinquième type. La réduite sera du 5e degré, à discriminant carré.

Chapitre II. Equations d'ordre p.

35. Passons aux équations linéaires d'ordre p. Nous aurons à construire les groupes H d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire d'ordre p.

36. On verra tout d'abord, comme au No. 2, que chaque substitution d'un pareil groupe aura pour forme canonique

$$|x, y, z, \ldots \quad ax, by, cz, \ldots|$$

les coefficients $a, b, c, \ldots$ étant des racines de l'unité, et pouvant être égaux ou non.

37. Soit en second lieu

$$S = |x, y, z, u, v, \ldots \quad ax, ay, cz, cu, ev, \ldots|$$

une substitution réduite à sa forme canonique par un choix de variables approprié, et dans laquelle les coefficients égaux soient mis en évidence. On vérifiera aisément que pour qu'une substitution linéaire soit échangeable à S, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme

$$T = |x, y, z, u, v, \ldots \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z+\delta u, \gamma' z+\delta' u, \varepsilon v, \ldots|.$$

Plus généralement, pour qu'une substitution linéaire transforme S en une substitution canonique S', il faut et il suffit qu'elle soit le produit d'une substitution de la forme T par une autre substitution U qui permute ensemble les systèmes de variables, tels que $x, y; z, u;$ etc. que S multiplie par un même facteur.

Il résulte évidemment de là que si m désigne le nombre des substitutions linéaires de la forme T que contient un groupe H, et n l'ordre du groupe K formé par celles des substitutions de H qui transforment les unes dans les autres les substitutions canoniques telles que S, on aura $n = km$, k désignant le nombre des déplacements différents que les substitutions de K font subir aux systèmes de variables $x, y; z, u; \ldots$ Ce nombre k est évidemment un diviseur de $1.2\ldots p$.

38. Soient

$$S' = |x, y, z, u, v, \ldots \quad a'x, a'y, c'z, c'u, e'v, \ldots|,$$
$$S'' = |x, y, z, u, v, \ldots \quad a''x, a''y, c''z, c''u, e''v, \ldots|$$
etc.

celles des substitutions de H qui ont la même forme que S, et ne diffèrent les unes des autres que par les valeurs (égales ou inégales) attribuées aux coefficients $a, c, e, \ldots$ Nous dirons que ces substitutions forment un *faisceau,* si chacune des séries de rapports

$$\frac{c'}{a'}, \quad \frac{c''}{a''}, \quad \ldots$$
$$\frac{e'}{a'}, \quad \frac{e''}{a''}, \quad \ldots$$
$$\frac{e'}{c'}, \quad \frac{e''}{c''}, \quad \ldots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

contient un nombre illimité de termes numériquement distincts.

Il importe pour l'étude qui va suivre de bien préciser le sens que nous attachons aux mots *limité* et *illimité*. Ils ne sont pas synonymes de *fini* et *infini*. Nous dirons qu'un nombre est limité, lorsqu'il est inférieur à une limite *déterminée*. Il résulte de cette définition qu'un nombre fini, sur lequel on n'a aucune donnée, est illimité; mais il devient limité dès qu'on parvient à assigner sa limite.

39. Si le groupe G formé des substitutions S', S'', ... n'est pas un faisceau, c'est que l'un des rapports $\frac{c}{a}, \frac{e}{a}, \frac{e}{c}, \ldots$, par exemple $\frac{c}{a}$, n'y prend qu'un nombre limité l de valeurs distinctes. Dans ce cas, celles des substitutions de G dans lesquelles $a = c$ forment un groupe G_1, dont l'ordre est l fois moindre que celui de G, et dont les substitutions seront de la forme

$$|x, y, z, u, v, \ldots \quad ax, ay, az, au, ev, \ldots|.$$

Si G_1 n'est pas un faisceau, l'un des rapports $\frac{e}{a}, \ldots$, par exemple $\frac{e}{a}$, n'y prendra qu'un nombre limité l_1 de valeurs; et celles des substitutions de G_1 pour lesquelles $e = a$, formeront un nouveau groupe G_2, d'ordre l_1 fois moindre.

Poursuivant ainsi, on arrivera nécessairement à un dernier groupe F qui sera un faisceau, ou au groupe Φ formé par celles des substitutions de H qui multiplient toutes les variables par un même facteur.

Ce groupe Φ, que nous pourrons appeler le *faisceau singulier*, existe toujours; mais il peut se réduire à la substitution unité. Il est évidemment contenu dans tous les autres faisceaux que H peut renfermer. Ses substitutions gardent la forme canonique quel que soit le choix des variables, et sont échangeables à toute substitution linéaire.

40. Cela posé, nous allons établir le théorème fondamental suivant:

Théorème. *Tous les faisceaux que H peut contenir, sont contenus dans un seul d'entre eux F_0, lequel est permutable aux substitutions de H.*

L'ordre de H est égal au produit de l'ordre de F_0 par un entier limité λ.

Le théorème est évident pour une seule variable. Nous allons le démontrer pour p variables, en admettant qu'il soit établi pour moins de p variables.

41. Cette extension n'offre aucune difficulté, dans le cas particulier où l'on peut répartir les variables en plusieurs catégories, telles que chaque substitution de H remplace les variables de chaque catégorie par des fonotions linéaires de ces mêmes variables.

Supposons, par exemple, que les substitutions de H soient de la forme

$$|x, y, z, u, \ldots \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z+\delta u+\cdots, \gamma' z+\delta' u+\cdots, \ldots|.$$

A chacune de ces substitutions, faisons correspondre la substitution à deux variables

$$|x, y \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y|.$$

Ces dernières substitutions formeront un groupe H', isomorphe à H. Soit maintenant F un faisceau contenu dans H. Ses correspondantes formeront évidemment un faisceau F' contenu dans H'. Mais le théorème est vrai, par hypothèse, pour le groupe H', où il y a moins de p variables. Les faisceaux qu'il contient, et en particulier le faisceau F', seront donc tous contenus dans un seul d'entre eux $\mathfrak{F}'$, dont les substitutions pourront se mettre sous la forme canonique

$$|x, y \quad ax, by|$$

par un choix convenable de variables. De plus, les substitutions de H' seront permutables à celles de $\mathfrak{F}'$, et en nombre $\lambda' f'$, λ' étant un nombre limité, et f' étant l'ordre de $\mathfrak{F}'$.

Soit de même H'' le groupe isomorphe à H et formé des substitutions

$$|z, u, \ldots \quad \gamma z+\delta u+\cdots, \gamma' z+\delta' u+\cdots, \ldots|.$$

Tous les faisceaux que contient H'', et en particulier le faisceau F'' formé par les substitutions correspondantes à celles de F, seront contenus dans un faisceau unique $\mathfrak{F}''$, dont on pourra mettre les substitutions sous la forme canonique

$$|z, u, \ldots \quad cz, du, \ldots|.$$

Enfin les substitutions de H'' seront permutables à $\mathfrak{F}''$, et en nombre $\lambda'' f''$, où λ'' est un entier limité, et f'' l'ordre de $\mathfrak{F}''$.

Il résulte évidemment de là:

1°. Que les substitutions de H sont permutables au groupe G formé par celles de ses substitutions qui sont de la forme

$$|x, y, z, u, \ldots \quad ax, by, cz, du, \ldots|.$$

2°. Que leur nombre h est au plus égal à $\lambda' \lambda'' g$, g désignant l'ordre de G.

3°. Que F est contenu dans G.

Si G est un faisceau, le théorème est démontré.

42. Si G n'est pas un faisceau, on pourra en déduire, par le procédé du N°. 39 un faisceau $\mathfrak{F}$, lequel jouira de la triple propriété qui a été reconnue au groupe G.

En effet le procédé par lequel on passe du groupe G au faisceau réduit $\mathfrak{F}$ ne présentant évidemment aucune ambiguïté quant au résultat final, les substitutions de H, permutables à G, le seront nécessairement à $\mathfrak{F}$.

En second lieu, l'ordre f du faisceau $\mathfrak{F}$ étant égal à $\frac{g}{ll_1\dots}$ où $l, l_1, \dots$ sont limités, h sera égal au produit de f par un entier limité $\overline{\overline{<}}\, \lambda' \lambda'' ll_1 \dots$

Enfin $\mathfrak{F}$ contient F. Soit en effet pour fixer les idées

$$(41.)\qquad |x,\ y,\ z,\ u,\ \dots\quad ax,\ ay,\ cz,\ cu,\ \dots|$$

la forme générale des substitutions de $\mathfrak{F}$.

Chacun des rapports $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{d}$ ne peut prendre plus de $ll_1 \dots$ valeurs distinctes dans les substitutions de G et *à fortiori* dans celles de F; car si cela avait lieu, g serait $> f.ll_1 \dots$ D'ailleurs F étant un faisceau, ceux des rapports $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{c}{b}, \dots$ qui ne sont pas égaux à l'unité dans toutes ses substitutions doivent y prendre un nombre illimité de valeurs distinctes. Donc $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{d}$ doivent s'y réduire à l'unité; donc F aura ses substitutions de la forme (41.), et sera contenu dans $\mathfrak{F}$.

43. Abordons maintenant le cas général.

Lemme I. ***Ceux des faisceaux contenus dans H dont les substitutions sont échangeables à une substitution donnée S (autre que celles de Φ) sont contenus dans un seul d'entre eux F. En outre les substitutions de H qui sont échangeables à S seront en nombre λf, f étant l'ordre de F, et λ un entier limité.***

Soit par exemple

$$S = |x,\ y,\ z,\ u,\ \dots\quad ax,\ ay,\ cz,\ cu,\ \dots|.$$

Soit I le groupe formé par celles des substitutions de H qui sont échangeables à S. Ses substitutions auront la forme

$$|x,\ y,\ z,\ u,\ \dots\quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z+\delta u,\ \gamma' z+\delta' u,\ \dots|$$

(N°. 37). Les faisceaux $F_1, F_2, \dots$ contenus dans H et dont les substitutions sont échangeables à S seront contenus dans I. Le théorème étant démontré pour ce dernier groupe (N^{os} 41—42), ces faisceaux seront contenus dans un seul d'entre eux F; et l'ordre de I sera égal à λf.

Nous dirons que la substitution S est *afférente* au faisceau F.

44. Soient maintenant $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, ... ceux des faisceaux de H qui sont *généraux*, c'est-à-dire ne sont contenus dans aucun autre.

Lemme II. *Un faisceau quelconque F (autre que Φ) ne sera contenu que dans un seul des faisceaux $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, ...*

Supposons en effet que F fût contenu dans $\mathfrak{F}$ et dans $\mathfrak{F}_1$. Les substitutions d'un même faisceau étant échangeables entre elles, l'une quelconque S des substitutions de F sera échangeable à la fois à celles de $\mathfrak{F}$ et de $\mathfrak{F}_1$. Si S est choisie de manière à ne pas appartenir à Φ, on en conclut (Lemme I) que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ sont contenus dans un même faisceau. Ils ne pourront donc être tous deux généraux que s'ils se confondent.

Les divers faisceaux F, F_1, ... (autres que Φ) que H contient pourront donc être distribués en *classes*, en associant ceux qui sont contenus dans un même faisceau général.

Corollaire. *Tout faisceau F_1 qui contient le faisceau F appartiendra à la même classe que lui.*

En effet si F était contenu dans $\mathfrak{F}$ et F_1 dans $\mathfrak{F}_1$, F serait contenu dans $\mathfrak{F}$ et dans $\mathfrak{F}_1$, ce qui est absurde.

45. Lemme III. *Chaque classe ne contient qu'un nombre limité de faisceaux.*

Soit en effet $\mathfrak{F}$ un faisceau général, dont les substitutions seront, par exemple, de la forme

$$|x, y, z, u, v, \dots \quad ax, ay, cz, cu, ev, \dots|.$$

Les divers faisceaux contenus dans $\mathfrak{F}$ s'obtiendront évidemment par le procédé suivant:

On prendra, parmi les substitutions de $\mathfrak{F}$, celles où les coefficients $a, c, e, \dots$ satisfont à certaines relations d'égalité. Celles où $a = c$, par exemple, seront de la forme

$$|x, y, z, u, v, \dots \quad ax, ay, az, au, ev, \dots|$$

et formeront un groupe G. Si les rapports des coefficients restants $a, e, \dots$ y prennent un nombre illimité de valeurs, G sera un faisceau. Dans le cas contraire, on en déduira un faisceau par le procédé du N°. 39.

Le nombre des systèmes d'égalités que l'on peut établir entre les coefficients $a, c, e, \dots$, dont le nombre $\overline{\overline{<}}\, p$, étant évidemment limité, et chacun d'eux ne fournissant qu'un faisceau, le nombre des faisceaux ainsi obtenus (et qui d'ailleurs ne sont pas nécessairement distincts) sera limité.

46. Lemme IV. ***Celles des substitutions de H qui sont échangeables à celles d'un faisceau F (autre que Φ) sont en nombre λf, f désignant l'ordre du faisceau général $\mathfrak{F}$ qui contient F, et λ un entier limité.***

En effet, soit par exemple

$$|x,\ y,\ z,\ u,\ \dots\quad ax,\ ay,\ cz,\ du,\ \dots|$$

la forme générale des substitutions de F. Les substitutions de H qui leur sont échangeables forment un groupe I et sont de la forme

$$|x,\ y,\ z,\ u,\ \dots\quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z,\ \delta u,\ \dots|.$$

Le faisceau $\mathfrak{F}$, ayant ses substitutions échangeables à celles de F, sera contenu dans I. Mais le théorème étant établi pour ce dernier groupe, les faisceaux qu'il contient seront contenus dans un seul d'entre eux, qui se confondra avec $\mathfrak{F}$, ce dernier faisceau étant général, par hypothèse. De plus, l'ordre de I sera égal à λf.

47. Corollaire. ***Le groupe M formé par celles des substitutions de H qui sont permutables à F a pour ordre μf, μ étant un entier limité.***

En effet, les fonctions linéaires des variables que toutes les substitutions de F multiplient par un facteur constant sont: 1°. les fonctions linéaires de x, y; 2°. les fonctions linéaires de z, u; etc. Toute substitution permutable à F doit donc remplacer les uns par les autres ces divers systèmes de fonctions. Les déplacements opérés entre ces systèmes de fonctions, en nombre $\overline{\overline{<}}\,p$, forment un groupe, isomorphe à M, et dont l'ordre l sera un diviseur de $1.2\dots p$. L'ordre de M sera évidemment égal au produit de l par l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de M qui remplacent x, y par des fonctions de x, y; u, v par des fonctions de u, v; etc. Ces dernières sont précisément les λf substitutions échangeables à F. Donc M aura pour ordre $l\lambda f=\mu f$, μ étant un entier limité.

48. Lemme V. ***Celles des substitutions de G qui sont afférentes au faisceau F sont en nombre νf, ν étant un entier limité.***

Soient en effet F_1, F_2, ... ceux des faisceaux de G qui contiennent F, lesquels seront contenus dans $\mathfrak{F}$, et en nombre limité (Nos. 44 et 45). Soient respectivement N, N_1, N_2, ... les nombres de substitutions afférentes aux faisceaux F, F_1, F_2, ... On aura

$$(42.)\qquad N+N_1+N_2+\cdots = \mu f.$$

Car il est clair que toute substitution échangeable à celles de F est afférente à ce faisceau ou à l'un de ceux qui le contiennent, et réciproquement.

Cette égalité montre que N sera de la forme νf, si N_1, N_2, ... sont eux-mêmes de cette forme. La proposition étant ainsi démontrée pour un faisceau quelconque F, si elle l'est pour les faisceaux qui le contiennent, il suffira de l'établir pour le faisceau $\mathfrak{F}$ qui contient tous les autres faisceaux de la classe. Mais pour ce faisceau, la proposition est évidente, l'équation (42.) se réduisant à

$$N = \mu f.$$

49. Procédons maintenant à la démonstration du théorème. Soit h le nombre des substitutions de H; nous allons les énumérer de manière à obtenir une équation d'où nous déduirons le résultat désiré.

1°. Nous aurons en premier lieu les substitutions du faisceau singulier Φ. Soient φ leur nombre; 1, a, b, ... les facteurs par lesquels chacune d'elles multiplie les variables. Nous pourrons représenter ces substitutions elles-mêmes par 1, a, b, ...

50. 2°. H pourra contenir une substitution S afférente à ce faisceau singulier. Considérons dans ce cas le système Σ formé par les φ substitutions

$$S,\quad aS,\quad bS,\quad \ldots$$

Chacune d'elles, étant échangeable aux mêmes substitutions que S, sera afférente à φ.

Soient Σ, Σ_1, ... les systèmes distincts qu'on obtient en transformant Σ par les substitutions de H; leur nombre sera $\frac{h}{m}$, m étant le nombre des substitutions permutables à Σ. D'ailleurs chacun de ces systèmes pouvant s'obtenir en multipliant une quelconque de ses substitutions par les substitutions de Φ, deux systèmes ne peuvent avoir de substitution commune sans se confondre. Le nombre total des substitutions distinctes contenues dans Σ, Σ_1, ... sera donc $\varphi\cdot\frac{h}{m}\cdot$

51. Reste à évaluer m.

Or pour qu'une substitution soit permutable à Σ, il faut et il suffit qu'elle transforme S en une substitution de Σ. Soient k le nombre des substitutions de Σ dans lesquelles S peut être transformée par les substitutions de H; n le nombre des substitutions de H qui sont échangeables à S; on aura $m = kn$.

Mais pour que S puisse être transformée en aS, il faut que ces substitutions aient le même déterminant; si d'ailleurs Δ est le déterminant de

S, celui de aS sera $a^p \varDelta$. Il faut donc qu'on ait $a^p = 1$. Le nombre k des valeurs qui peuvent être assignées au coefficient a sera donc $\overline{\overline{<}} p$.

D'autre part, le nombre n des substitutions de G échangeables à S est égal à $\lambda\varphi$, λ étant un entier limité (N°. 43).

Le nombre des substitutions distinctes qui résultent de la transformation de celles de Σ sera donc

$$\varphi \cdot \frac{h}{k\lambda\varphi} = \frac{h}{k\lambda}.$$

52. S'il existe une autre substitution S' afférente à Φ, on verra de même que les substitutions S', aS', bS', ... et leurs transformées sont en nombre $\frac{h}{k'\lambda'}$, k' et λ' étant limités.

Continuant ainsi, on voit que le nombre total des substitutions afférentes à Φ sera

$$h\left\{\frac{1}{k\lambda} + \frac{1}{k'\lambda'} + \cdots\right\}.$$

53. 3°. H pourra contenir des substitutions T afférentes à un faisceau F non général, mais différent de Φ.

Soient $\mathfrak{F}$ le faisceau général qui contient F; f son ordre. Le nombre des substitutions T sera νf, et le nombre des substitutions permutables à F sera μf, μ et ν étant limités (N$^{\text{os}}$. 47 et 48).

Le nombre des faisceaux transformés de F par les substitutions de H sera donc $\frac{h}{\mu f}$; à chacun d'eux seront afférentes νf substitutions transformées des T; ce qui donnera $\frac{h\nu f}{\mu f} = h\frac{\nu}{\mu}$ substitutions résultant des T par transformation. Ces substitutions seront toutes distinctes, une même substitution ne pouvant être afférente à deux faisceaux différents (N°. 43)*).

54. Si H contenait d'autres substitutions T' afférentes à un autre faisceau F' non général, les T' et leurs transformées fourniraient de même $h\frac{\nu'}{\mu'}$ substitutions distinctes.

Continuant ainsi, on voit que le nombre total des substitutions afférentes à des faisceaux autres que Φ et non généraux sera

$$h\left\{\frac{\nu}{\mu} + \frac{\nu'}{\mu'} + \cdots\right\}.$$

---

*) On doit excepter les substitutions de Φ; mais celles-ci, étant évidemment afférentes aux faisceaux généraux, ne figurent pas parmi les T.

55. 4°. Considérons enfin les substitutions U afférentes à un faisceau général tel que $\mathfrak{F}$. Leur nombre sera nf, n étant un entier limité. Mais parmi elles se trouvent les φ substitutions de Φ, qui ont déjà été énumérées. En les supprimant, il en restera $nf-\varphi$.

D'autre part, le nombre des substitutions permutables à $\mathfrak{F}$ est égal à mf, m étant un entier limité. Le nombre des faisceaux transformés de $\mathfrak{F}$ sera donc $\frac{h}{mf}$, et le nombre total des substitutions qui leur sont afférentes sera $h\frac{nf-\varphi}{mf}$.

D'ailleurs $\mathfrak{F}$ contenant le faisceau Φ, on aura $f=q\varphi$, q étant un entier >1; et par suite

$$\frac{nf-\varphi}{mf} = \frac{n}{m}-\frac{1}{mq}.$$

56. Si H contenait des substitutions U' afférentes à un autre faisceau général $\mathfrak{F}'$, on verrait de même que ces substitutions et leurs transformées sont en nombre

$$\frac{n'}{m'}-\frac{1}{m'q'}$$

où n' et m' sont limités.

Continuant ainsi, on voit que le nombre des substitutions afférentes aux faisceaux généraux (celles de Φ exceptées) sera

$$h\left\{\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{mq}\right)+\left(\frac{n'}{m'}-\frac{1}{m'q'}\right)+\cdots\right\}.$$

57. L'énumération étant maintenant achevée, nous aurons:

$$(42.)\qquad h = \varphi+h\Sigma\frac{1}{k\lambda}+h\Sigma\frac{\nu}{\mu}+h\Sigma\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{mq}\right).$$

Dans cette équation, le nombre des termes contenus dans les sommes du second membre sera limité. Car leur somme doit être $<h$. Mais chacun d'eux est égal au produit de h par un coefficient dont on connaît une limite inférieure. En effet, k, λ, μ, m sont limités, et q étant >1,

$$\frac{n}{m}-\frac{1}{mq} \geqq \frac{1}{2m}.$$

Posons pour abréger

$$1-\Sigma\frac{1}{k\lambda}-\Sigma\frac{\nu}{\mu}-\Sigma\frac{n}{m} = -C.$$

L'équation (42.) donnera

$$(43.)\qquad h = \frac{\varphi}{-C+\frac{1}{mq}+\frac{1}{m'q'}+\cdots}.$$

Soit $\frac{1}{mq}$ le plus petit des termes $\frac{1}{mq}$, $\frac{1}{m'q'}$, ... Deux cas seront à distinguer, suivant la valeur de l'expression $-C+\frac{1}{m'q'}+\cdots$

58. Premier cas: $-C+\frac{1}{m'q'}+\cdots \gtreqqless 0$. On aura

$$h \gtreqqless \frac{\varphi}{\frac{1}{mq}} \gtreqqless mq\varphi.$$

Mais H contient le groupe I d'ordre $mq\varphi$ formé par celles de ses substitutions qui sont permutables à $\mathfrak{F}$. On aura donc $h = mq\varphi$ et $H = I$. D'ailleurs m est un entier limité. La démonstration du théorème sera donc complète, si nous établissons que tout faisceau contenu dans H est nécessairement contenu dans $\mathfrak{F}$.

Soit F un semblable faisceau, dont les substitutions aient pour forme canonique

$$|x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots \quad ax,\ ay,\ cz,\ du,\ \ldots|$$

par exemple.

Chacune d'elles, élevée à une puissance au maximum égale à m, appartiendra à $\mathfrak{F}$; sans quoi l'ordre du groupe dérivé de $\mathfrak{F}$ et de F, et *à fortiori* l'ordre de H, serait $> mq\varphi$. Si donc nous posons pour abréger $1.2\ldots m = t$, les substitutions

$$(44.)\qquad |x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots \quad a^t x,\ a^t y,\ c^t z,\ d^t u,\ \ldots|$$

appartiendront toutes à $\mathfrak{F}$. Or, par hypothèse, les rapports de deux quelconques coefficients $a, c, d, \ldots$ prennent dans les substitutions de F un nombre illimité de valeurs; t étant limité, les rapports de a^t, c^t, d^t, ... auront également un nombre illimité de valeurs. Les substitutions de $\mathfrak{F}$, étant échangeables aux substitutions (44.), seront de la forme

$$|x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots \quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z,\ \delta u,\ \ldots|$$

et auront pour forme canonique

$$|X,\ Y,\ z,\ u,\ \ldots \quad \alpha_1 X,\ \beta_1 Y,\ \gamma z,\ \delta u,\ \ldots|$$

X et Y étant des fonctions de x, y. Les substitutions de F, exprimées au moyen des variables $X, Y, z, u, \ldots$, sont évidemment de la forme

$$|X, Y, z, u, \ldots \quad aX, aY, cz, du, \ldots|$$

cas particulier de la précédente. Elles sont donc contenues parmi celles de $\mathfrak{F}$.

59. Deuxième cas. $-C+\frac{1}{m'q'}+\cdots<0$. *A fortiori* $-C$ sera négatif. C'est d'ailleurs la somme algébrique d'un nombre limité de fractions dont chacune a son numérateur et son dénominateur limités. Donc C sera lui-même une fraction, à numérateur et dénominateur limités.

Soit maintenant r le nombre des termes de la somme $\frac{1}{mq}+\frac{1}{m'q'}+\cdots$ et soit $\frac{1}{m'q'}$ le plus grand de ces termes. On aura, d'une part,

$$-C+\frac{1}{m'q'}<0,$$

et d'autre part

$$-C+\frac{r}{m'q'}\gtreqless -C+\frac{1}{mq}+\frac{1}{m'q'}+\cdots>0,$$

car h doit avoir son dénominateur positif. On en déduit

$$\frac{r}{Cm'}>q'>\frac{1}{Cm'}.$$

L'entier q' est donc limité.

Posons $-C+\frac{1}{m'q'}=-C'$. Cette quantité sera une fraction négative, à numérateur et dénominateur limités.

Soit $\frac{1}{m''q''}$ la plus grande des quantités $\frac{1}{mq}, \frac{1}{m''q''}, \ldots$ On aura d'une part

$$-C'+\frac{1}{m''q''}<0$$

et d'autre part

$$-C'+\frac{r-1}{m''q''}\gtreqless -C+\frac{1}{mq}+\frac{1}{m'q'}+\frac{1}{m''q''}+\cdots>0$$

d'où

$$\frac{r-1}{C'm''}>q''>\frac{1}{C'm''}.$$

L'entier q'' est donc limité.

Continuant ainsi, on trouvera que $q', q'', \ldots$ et enfin q sont limités. Le dénominateur de h sera donc une fraction à numérateur et dénominateur

16*

limités, et l'on aura

$$h = \lambda\varphi$$

λ étant un nombre limité.

Il est clair que les substitutions de H sont permutables à Φ.

Enfin H ne contient pas d'autre faisceau que Φ. Soit en effet F un faisceau quelconque contenu dans H, et soient

$$|x, y, z, \ldots \quad ax, by, cz, \ldots|$$

ses substitutions, ramenées à la forme canonique. Chacun des rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{c}$, ... y est susceptible de λ valeurs distinctes tout au plus, sans quoi l'ordre de H serait $> \lambda\varphi$. Donc, d'après la définition des faisceaux, ces rapports doivent se réduire à l'unité, et F se confond avec Φ.

Le théorème est donc démontré dans toutes ses parties.

60. Soit F_0 le faisceau défini au théorème, et dont l'existence vient d'être démontrée; et soit pour fixer les idées

$$|x, y, z, u, \ldots \quad ax, ay, cz, du, \ldots|$$

la forme de ses substitutions. Les coefficients a, c, d, ... dans chacune d'elles sont des racines de l'unité. Les divers coefficients a, par exemple, seront donc les puissances d'une quantité θ, racine primitive d'une certaine équation binôme $\theta^\alpha = 1$.

De même, les b seront les puissances d'une racine primitive θ_1 d'une équation binôme $\theta_1^\beta = 1$; les c seront les puissances de θ_2, racine d'une équation $\theta_2^\gamma = 1$; etc.

Il en résulte que chacune des fonctions x^α, y^β, z^γ, ... sera invariable par les substitutions de F_0. L'ordre de H étant égal à λ fois celui de F_0 (λ étant limité), x^α, y^β, z^γ, ... s'exprimeront au moyen des racines d'une même équation d'ordre λ. On pourra donc donner au théorème l'énoncé suivant:

Théorème. *Si une équation différentielle linéaire d'ordre p*

$$\frac{d^p u}{dt^p} + A_1 \frac{d^{p-1}u}{dt^{p-1}} + \cdots + A_p u = 0,$$

où A_1, ... A_p sont des fonctions rationnelles de u, a ses intégrales algébriques, elle admettra p intégrales particulières x, y, z, ... qui satisfassent à des équations binômes, dont les seconds membres soient des fonctions rationnelles de t et des racines d'une équation auxiliaire.

L'ordre λ de cette équation auxiliaire sera inférieur à une limite fixe, laquelle ne dépend que de p.

61. Soient enfin x^α, x_1^α, ... les diverses transformées de x^α par les substitutions de H; leur nombre ne peut surpasser λ; et leur produit

$$x^\alpha x_1^\alpha \ldots = (x x_1 \ldots)^\alpha$$

sera rationnel.

D'ailleurs x_1, ... sont des fonctions linéaires de $x, y, z, \ldots$ L'expression $X = x x_1 \ldots$ sera donc une fonction entière et homogène de $x, y, z, \ldots$ de degré $\overline{\overline{<}}\, \lambda$, et qui satisfera à une équation binôme. On peut donc donner au théorème ce troisième énoncé, conforme à celui qu'a donné M. *Fuchs* pour les équations du second ordre.

On peut déterminer une fonction entière et homogène des intégrales de l'équation différentielle proposée, dont le degré soit inférieur à une limite fixe, et qui soit racine d'une équation binôme à coefficients rationnels.

Chapitre III. Equations du troisième ordre.

§. 1. Démonstration de l'équation fondamentale.

62. Proposons-nous de déterminer les groupes d'ordre fini formés de substitutions linéaires à trois variables.

Nous obtiendrons un semblable groupe en combinant ensemble un nombre quelconque de substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

où a, b, c sont des racines de l'unité.

On obtiendra de nouveaux groupes d'ordre fini en adjoignant aux substitutions qui précèdent une substitution de la forme

$$|x, y, z \quad a'y, b'x, c'z|$$

ou de la forme

$$|x, y, z \quad a''y, b''z, c''x|$$

ou de l'une et l'autre à la fois (a', b', c', a'', b'', c'' étant des racines de l'unité).

Le groupe formé des substitutions

$$|x, y, z \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z|$$

sera également d'ordre fini, si les substitutions à deux variables

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y|$$

forment un groupe tétraédrique, octaédrique ou icosaédrique, les coefficients γ étant des racines de l'unité.

63. Cherchons si en dehors de ces solutions évidentes, il existe d'autres groupes d'ordre fini.

Soient G l'un d'entre eux; $S, S', \ldots$ les substitutions dont il est dérivé; $\delta, \delta', \ldots$ leurs déterminants respectifs. Le groupe H dérivé des substitutions $\delta^{\frac{1}{3}} S$, $\delta'^{\frac{1}{3}} S', \ldots$ sera évidemment d'ordre fini, et chacune de ses substitutions aura pour déterminant l'unité.

Nous aurons donc à trouver la forme des groupes tels que H; les groupes G correspondants s'en déduiront ensuite sans difficulté; car on n'aura qu'à multiplier dans chaque substitution de H tous les coefficients par un même facteur, racine de l'unité, pour obtenir la substitution correspondante de G.

64. Soient $F, F', \ldots$ les faisceaux les plus généraux de substitutions échangeables entre elles que contient H. Chaque substitution de H sera contenue dans un faisceau au moins; et ces substitutions seront de trois espèces.

1°. Celles qui ont pour forme canonique

$$S = |x, y, z \quad ax, by, cz| \quad (a \gtrless b \gtrless c).$$

Elles n'appartiennent qu'à un seul faisceau. En effet, pour qu'une substitution T fasse partie d'un même faisceau avec S, il faut qu'elle lui soit échangeable, et par suite, qu'elle soit de la forme

$$|x, y, z \quad \alpha x, \beta y, \gamma z|$$

analogue à S. Or toutes les substitutions de cette forme constituent un seul et même faisceau.

65. 2°. Celles qui ont pour forme canonique

$$S = |x, y, z \quad ax, ay, cz| \quad (a \gtrless c).$$

La forme des substitutions qui leur sont échangeables est la suivante

$$|x, y, z \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z|.$$

Soit donc K le groupe formé par celles des substitutions de H qui sont de cette forme. La substitution S appartiendra aux divers faisceaux contenus dans K, lesquels correspondent respectivement aux divers faisceaux contenus dans le groupe K' à deux variables formé des substitutions

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y, \quad \alpha' x + \beta' y|.$$

Si K' appartient au premier type, ces faisceaux se réduisent à un seul.

66. Si K' appartient au second type, ses substitutions appartiendront

aux deux formes

$$(45.) \qquad |x,\ y \quad \lambda x,\ \mu y|,$$

$$(46.) \qquad |x,\ y \quad \lambda y,\ \mu x|.$$

Les substitutions (45.) constituent un premier faisceau.

Chacun des autres faisceaux contient une substitution T de la forme (46); ses autres substitutions sont échangeables à T. Or on vérifie immédiatement que les substitutions de K' échangeables à T se réduisent à celles qui résultent de la combinaison de T avec les substitutions de la forme

$$(47.) \qquad a = |x,\ y \quad ax,\ ay|.$$

Prenons pour variables indépendantes à la place de x, y d'autres variables ξ, η qui ramènent T à sa forme canonique

$$|\xi,\ \eta \quad \sqrt{\lambda\mu}\,\xi,\ -\sqrt{\lambda\mu}\,\eta|.$$

Les substitutions a prenant la forme

$$|\xi,\ \eta \quad a\xi,\ a\eta|,$$

on voit que chacune des substitutions du faisceau considéré sera de la forme

$$|\xi,\ \eta \quad a\xi,\ b\eta|, \quad \text{où} \quad b = \pm a.$$

Les substitutions du faisceau correspondant de K, ayant pour déterminant 1, seront

$$|\xi,\ \eta,\ z \quad a\xi,\ b\eta,\ a^{-1}b^{-1}z|, \quad \text{où} \quad b = \pm a.$$

Le rapport $\frac{b}{a}$ n'y sera donc susceptible que des deux valeurs ± 1.

67. Si K' appartient au type tétraédrique, les divers faisceaux qu'il contient auront pour ordre les uns 2ω, les autres 3ω, ω étant le nombre des substitutions de la forme

$$|x,\ y \quad ax,\ ay|$$

contenues dans K' (N^{os}. 12 et 13). Leurs substitutions, ramenées à la forme canonique, seront donc de la forme

$$|\xi,\ \eta \quad a\xi,\ b\eta|$$

et celles des faisceaux correspondants du groupe K de la forme

$$|\xi,\ \eta,\ z \quad a\xi,\ b\eta,\ a^{-1}b^{-1}z|$$

où le rapport $\frac{b}{a}$ est susceptible de deux ou trois valeurs différentes.

68. Si K' appartient au type octaédrique, il contient trois sortes de faisceaux, d'ordre 2ω, 3ω, 4ω (N°. 13). Les faisceaux correspondants de K seront de la forme

$$|\xi,\ \eta,\ z\quad a\xi,\ b\eta,\ a^{-1}b^{-1}z|$$

où $\frac{b}{a}$ admet 2, 3 ou 4 valeurs différentes.

69. Enfin si K' appartient au type icosaédrique, il contiendra des faisceaux d'ordre 2ω, 3ω, 5ω (N°. 13) et les faisceaux correspondants de K seront de la forme

$$|\xi,\ \eta,\ z\quad a\xi,\ b\eta,\ a^{-1}b^{-1}z|$$

où $\frac{b}{a}$ admet 2, 3 ou 5 valeurs distinctes.

70. 3°. Enfin les substitutions de la forme

$$|x,\ y,\ z\quad ax,\ ay,\ az|$$

étant échangeables à toute substitution linéaire, appartiendront à tous les faisceaux. Celles de ces substitutions que H contient ayant pour déterminant 1, le coefficient a y sera une racine cubique de l'unité. Le nombre φ de ces substitutions sera donc égal à 1 ou à 3; elles forment un groupe, que nous désignons par Φ.

71. Proposons-nous maintenant d'énumérer les substitutions de H.

Nous aurons en premier lieu les φ substitutions de Φ.

Soit en second lieu F un des faisceaux contenus dans H; supposons ses substitutions ramenées à la forme canonique

$$|x,\ y,\ z\quad ax,\ by,\ cz|.$$

Nous distinguerons divers cas:

Admettons d'abord que dans toutes les substitutions de F on ait $a=b$. Elles se réduiront à la forme

$$|x,\ y,\ z\quad ax,\ ay,\ cz|.$$

Le faisceau F contenant le groupe Φ, leur nombre sera un multiple de φ, tel que $m\varphi$.

Cela posé, les fonctions des variables que chaque substitution de F multiplie par un facteur constant, sont les fonctions linéaires de x, y, d'une part, et les multiples de z, d'autre part.

Pour qu'une substitution linéaire soit permutable à F, il faut qu'elle remplace ces fonctions les unes par les autres; et par suite qu'elle soit de la forme

$$|x,\ y,\ z\quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z|.$$

Or soit K le groupe formé par les substitutions de cette sorte que H contient. Il se réduira à F; car s'il contenait une substitution S autre que celles de F, cette substitution, évidemment échangeable à celles de F, pourrait leur être adjointe pour former un faisceau plus général que F, ce qu'on suppose impossible.

Donc les seules substitutions de H qui soient permutables à F sont les $m\varphi$ substitutions de F; donc le nombre des faisceaux $F, F' \dots$ transformés de F par les substitutions de H sera $\frac{\Omega}{m\varphi}$, Ω étant l'ordre de H.

Cela posé, chacun des faisceaux $F, F', \dots$ contient $(m-1)\varphi$ substitutions autres que celles de Φ; et toutes ces substitutions sont distinctes, car chacune d'elles ne peut appartenir qu'à un seul faisceau, $K=F$ appartenant au premier type.

Le nombre des substitutions nouvelles résultant de la transformation de celles de F sera donc

$$\frac{(m-1)\varphi}{m\varphi}\Omega = \frac{m-1}{m}\Omega.$$

73. Si l'on avait un nouveau faisceau F_1 différent de F et de ses transformés, mais jouissant comme lui de la propriété que ses substitutions étant ramenées à la forme canonique deux des coefficients y fussent constamment égaux, soit $m_1\varphi$ le nombre de ces substitutions; on en déduirait de même par transformation $\frac{m_1-1}{m_1}\Omega$ substitutions distinctes entre elles et distinctes des précédentes, puisque chacune d'elles ne peut appartenir qu'à un seul faisceau.

Continuant ainsi, on voit que le nombre total des substitutions nouvelles existant dans les faisceaux de l'espèce considérée sera

$$\Omega.\Sigma\frac{m-1}{m}.$$

74. Soit au contraire F un faisceau tel que dans ses diverses substitutions, aucun des rapports $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}$ ne soit constamment égal à l'unité. Soit $n\varphi$ l'ordre de F; et soient K, L, M les groupes respectivement formés par celles des substitutions de H qui sont des formes suivantes:

$$|x, y, z \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z|,$$
$$|x, y, z \quad \alpha x, \beta y+\gamma z, \beta' y+\gamma' z|,$$
$$|x, y, z \quad \alpha x+\gamma z, \beta y, \alpha' x+\gamma' z|.$$

Considérons les groupes K', L', M' à deux variables, respectivement correspondants à K, L, M, et formés des substitutions

$$|x,\ y \quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y|,$$
$$|y,\ z \quad \beta y+\gamma z,\ \beta' y+\gamma' z|,$$
$$|x,\ z \quad \alpha x+\gamma z,\ \alpha' x+\gamma' z|.$$

Nous supposerons d'abord

1°. Que chacun des groupes K', L', M' appartient au premier ou au second type.

2°. Que chacun des rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{c}$ calculé successivement dans les diverses substitutions de F, y prend plus de deux valeurs distinctes.

Cela posé, les fonctions de x, y, z que chaque substitution de F multiplie par un facteur constant, se réduisent aux multiples de x, de y et de z. Toute substitution linéaire permutable à F, devant remplacer ces fonctions les unes par les autres, appartiendra à l'une des six formes

$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ by,\ cz|, \tag{48.}$$
$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bx,\ cz|, \tag{49.}$$
$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ bz,\ cy|, \tag{50.}$$
$$|x,\ y,\ z \quad az,\ by,\ cx|, \tag{51.}$$
$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bz,\ cx|, \tag{52.}$$
$$|x,\ y,\ z \quad az,\ bx,\ cy|. \tag{53.}$$

Soit G le groupe formé par celles des substitutions de H qui sont permutables à F. Celles de ses substitutions qui sont de la forme (48.) se réduisent évidemment aux $n\varphi$ substitutions de F; et l'ordre de G sera évidemment égal à $kn\varphi$, k étant égal à 1, 2, 3 ou 6 suivant que G contiendra des substitutions de la forme (48.) et d'une des formes (49.), (50.), (51.), ou des formes (48.), (52.) et (53.), ou enfin des 6 formes à la fois.

Le nombre des faisceaux distincts transformés de F sera donc $\frac{\Omega}{kn\varphi}$. Chacun d'eux contient d'ailleurs $(n-1)\varphi$ substitutions autres que celles de φ; ce qui donnera en tout

$$\frac{n-1}{kn}\Omega$$

substitutions.

Ces substitutions sont toutes distinctes. En effet, celles des substitutions de F où les trois coefficients a, b, c sont inégaux n'appartiennent qu'à un seul faisceau. Considérons d'autre part celles où deux coefficients, ceux de x et y par exemple, sont égaux. Elles seront contenues dans ceux des faisceaux transformés de F que contient le groupe K. Mais si K' appartient au premier type, ces faisceaux se réduisent à un seul; s'il appartient au second type, il y aura plusieurs faisceaux; mais parmi eux il n'en est qu'un seul tel qu'en ramenant ses substitutions à la forme canonique les rapports des coefficients y aient plus de deux valeurs distinctes; F jouissant de cette propriété ainsi que ses transformés, les substitutions considérées ne pourront leur être communes.

75. Soit F_1 un autre faisceau différent de F et de ses transformés, mais jouissant des mêmes propriétés. Une énumération analogue entreprise sur F_1 et ses transformés donnera $\frac{n_1-1}{k_1 n_1}\Omega$ substitutions nouvelles.

Les faisceaux de l'espèce que nous considérons fourniront donc en tout

$$\Omega\Sigma\frac{n-1}{kn}$$

substitutions nouvelles.

76. Remarque. Si $k=3$ ou 6, le nombre n est assujetti à certaines conditions qu'il est utile de connaître.

1°. Si $k=6$, n est un carré, ou le triple d'un carré.

En effet, les substitutions des formes (49.) à (53.) que H contient transformant chacune des substitutions

$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ by,\ cz|$$

de F en une substitution analogue, où les coefficients a, b, c sont permutés entre eux d'une manière quelconque, la suite des coefficients a sera identique à celle des b et à celle des c. Ces quantités étant d'ailleurs des racines de l'unité, chacune de ces suites sera formée des puissances d'une racine irréductible θ d'une certaine équation binôme $\theta^\varrho=1$. Le coefficient c étant ainsi susceptible de ϱ valeurs distinctes, l'ordre $n\varphi$ de F sera égal à ϱ fois le nombre des substitutions de F qui se réduisent à la forme

$$|x,\ y,\ z \quad a'x,\ b'y,\ z|.$$

Les b' étant des puissances de θ seront les diverses puissances d'une même irrationnelle $\theta^{\frac{\varrho}{\delta}}$, δ étant un diviseur de ϱ; b' sera donc susceptible de δ valeurs distinctes; à chacune d'elles correspond une valeur de a', déterminée par l'équation $a'b'=1$. L'ordre de F sera donc $\varrho\delta$.

Or nous allons prouver que δ est au moins égal à $\frac{\varrho}{3}$.

En effet, F contient une substitution de la forme

$$|x, y, z \quad ax, by, \theta z|, \qquad (\text{où } ab\theta = 1)$$

ainsi que sa transformée

$$|x, y, z \quad bx, ay, \theta z|.$$

Il contient leur produit

$$P = |x, y, z \quad \theta^{-1}x, \theta^{-1}y, \theta^2 z|,$$

et sa transformée

$$Q = |x, y, z \quad \theta^{-1}x, \theta^2 y, \theta^{-1}z|$$

et enfin il contiendra

$$PQ^2 = |x, y, z \quad \theta^{-3}x, \theta^3 y, z|$$

ce qui montre que 3 est un multiple de $\frac{\varrho}{\delta}$. On aura donc $\varrho = \delta$ ou 3δ, d'où $n\varphi = \delta^2$ ou $3\delta^2$. D'ailleurs $\varphi = 1$ ou 3. Donc n sera un carré ou le triple d'un carré.

77. 2°. Si $k = 3$, ceux des facteurs premiers de n qui sont de la forme $3i-1$ y figureront à une puissance paire.

Soient en effet p l'un de ces facteurs, μ son degré de multiplicité. Le faisceau F contiendra un groupe Ψ d'ordre p^μ. Soient

$$|x, y, z \quad a'x, b'y, c'z|$$

ses substitutions. La suite des a', celle des b' et celle des c' seront identiques et formées des puissances d'une racine primitive θ d'une équation binôme $\theta^{p^\lambda} = 1$. Celles de ces substitutions où $c' = 1$ seront de la forme

$$|x, y, z \quad a''x, b''y, z|$$

et b'' y prendra $p^{\lambda'}$ valeurs distinctes, λ' étant $\overline{\gtrless} \lambda$. L'ordre de Ψ sera $p^{\lambda+\lambda'} = p^\mu$.

Nous allons prouver que $\lambda = \lambda'$.

En effet, Ψ contient une substitution où $c' = \theta$; laquelle sera de la forme

$$S = |x, y, z \quad \theta^\alpha x, \theta^{-\alpha-1}y, \theta z|.$$

Il contient sa transformée

$$T = |x, y, z \quad \theta^{-\alpha-1}x, \theta y, \theta^\alpha z|.$$

Il contiendra donc la substitution

$$S^m T^n = |x,\ y,\ z \quad \theta^{\alpha m-(\alpha+1)n}x,\ \theta^{-(\alpha+1)m+n}y,\ \theta^{m+\alpha n}z|.$$

Or on peut déterminer m et n de telle sorte qu'on ait

$$\left.\begin{aligned} -(\alpha+1)m+n &\equiv r, \\ m+\alpha n &\equiv s, \end{aligned}\right\} \text{mod.}\, p^\lambda$$

r et s étant des entiers quelconques. Car le déterminant des deux congruences, ayant pour valeur

$$\alpha^2+\alpha+1 = \frac{\alpha^3-1}{\alpha-1}$$

diffère de 0 mod. p, la congruence $\alpha^3-1=0$ n'admettant, comme on sait, d'autre racine réelle que l'unité lorsque p est de la forme $3i-1$.

On obtient donc, en faisant varier r et s, $p^{2\lambda}$ substitutions distinctes. D'ailleurs Ψ n'en peut contenir davantage. Donc $\mu=2\lambda$, ce qu'il fallait démontrer.

78. Supposons maintenant que le groupe K' soit icosaédrique. On sait (N°. 33.) qu'il est dérivé de la combinaison de substitutions A, B, C de déterminant 1 avec des substitutions de la forme

$$(54.) \qquad |x,\ y \quad ax,\ ay|$$

et qu'en désignant par ω le nombre de ces dernières substitutions, les faisceaux contenus dans K' seront d'ordre $\mu\omega$, μ étant l'un des trois nombres 2, 3, 5.

Le faisceau F', d'ordre $\mu\omega$, correspondant à F, s'obtiendra en combinant des substitutions de la forme (54.) avec une substitution d'ordre μ et de déterminant 1, laquelle aura par conséquent pour forme canonique

$$|x,\ y \quad \theta x,\ \theta^{-1}y|$$

θ étant racine primitive de l'équation $\theta^{2\mu}=1$.

Parmi les substitutions du faisceau F se trouvera donc la suivante:

$$S = |x,\ y,\ z \quad \theta x,\ \theta^{-1}y,\ z|.$$

Les groupes L', M' appartiendront au premier type. En effet, considérons par exemple le groupe L'. Il contient un faisceau F'' correspondant à F et d'ordre $r\omega'$, r étant le nombre des valeurs distinctes que prend dans ses substitutions le rapport des coefficients de y et de z et ω' le nombre de celles de ces substitutions où ces coefficients sont égaux. D'ailleurs r est un multiple de 2μ; car le rapport des coefficients prend dans S et ses puissances 2μ valeurs distinctes.

Or on sait (Nos. 11 à 13) que dans un groupe tétraédrique on a $r = 2$ ou 3, dans un groupe octaédrique $r = 2$, 3 ou 4, et dans un groupe icosaédrique $r = 2$, 3 ou 5.

Donc si $\mu > 2$, le groupe L' appartiendra au premier ou au second type. Si $\mu = 2$, il appartiendra à l'un de ces deux types, ou au type octaédrique.

Mais si L' appartenait au second type ou au type octaédrique, le groupe formé par les substitutions de L' permutables à F'' aurait son ordre double de l'ordre de F'' (Nos. 6 ou 13); donc L' contiendrait une substitution de la forme

$$(55.) \qquad |y, z \quad bz, cy|,$$

et L une substitution de la forme

$$T = |x, y, z \quad ax, bz, cy|.$$

F contiendrait la substitution

$$T^{-1}ST = |x, y, z \quad \theta x, y, \theta^{-1}z|$$

et ses puissances. Le nombre des valeurs du rapport des coefficients de x et de y y serait donc au moins égal à 2μ, au lieu d'être simplement égal à μ.

Notre proposition est donc démontrée. Il est établi en outre que H ne peut contenir aucune substitution de la forme (50.) (car L' en contiendrait une de la forme (55.)). D'ailleurs il en contient une de la forme

$$|x, y, z \quad ay, bx, cz|$$

puisque K' est icosaédrique.

Donc le nombre des substitutions permutables à F sera $2\mu\omega$ (No. 74); et les faisceaux transformés de F seront en nombre $\frac{\Omega}{2\mu\omega}$.

Cela posé, F contient $(\mu-1)\omega$ substitutions pour lesquelles $a \gtrless b$; chacune d'elles n'appartient qu'à un seul faisceau, même celles où l'on aurait $a = c$ ou $b = c$ (car L' et M' appartiennent au premier type).

On aura donc $\frac{\mu-1}{2\mu}\Omega$ substitutions résultant de la transformation de celles de F où $a \gtrless b$.

Posant successivement $\mu = 2$, 3, 5, et ajoutant, on voit qu'on obtiendra

$$\tfrac{1}{4}\Omega + \tfrac{2}{6}\Omega + \tfrac{4}{10}\Omega = \tfrac{59}{60}\Omega$$

substitutions par la transformation des substitutions de F, les ω substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad ax, ay, cz|$$

étant exceptées.

Parmi ces dernières substitutions, il en est $\omega-\varphi$ qui n'appartiennent pas à Φ. Chacune d'elles étant échangeable aux 60ω substitutions de K, elles donneront $\frac{\omega-\varphi}{60\omega}\Omega$ substitutions distinctes.

On peut d'ailleurs remarquer que ω est un multiple de φ. En outre ω est pair, car F contient la substitution

$$B^2 = |x, y, z \quad -x, -y, z|,$$

qui est d'ordre 2.

Posons donc $\omega = 2\lambda\varphi$, d'où

$$\frac{\omega-\varphi}{60\omega}\Omega = \left(\tfrac{1}{60}-\frac{1}{120\lambda}\right)\Omega.$$

Ajoutant ces substitutions aux précédentes, on voit que K et ses transformés donneront

$$\Omega\left(1-\frac{1}{120\lambda}\right)$$

substitutions nouvelles.

79. Supposons maintenant K' octaédrique. Il sera dérivé (N°. 33) de substitutions de la forme (32.) en nombre ω, jointes à des substitutions A, B, C, nD et contiendra la substitution

$$A^{-1}(nD)^2 = n^2.$$

Le faisceau F' correspondant à F et contenu dans K' aura pour ordre $\mu\omega$, μ étant l'un des nombres 2, 3 ou 4; et résultera de la combinaison des substitutions (32.) avec une substitution S où le rapport des coefficients de x et de y soit une racine $\mu^{\text{ième}}$ de l'unité. Cette substitution S sera évidemment de la forme $n^\varrho\Sigma$, où Σ est une substitution de déterminant 1, laquelle sera par suite de la forme

$$\Sigma = |x, y \quad \theta x, \theta^{-1}y|$$

où θ est racine primitive de l'équation $\theta^{2\mu} = 1$.

On peut supposer $\varrho = 0$ ou 1, car K' contient la substitution n^2, laquelle est de la forme (32.), et il est évidemment indifférent de combiner aux substitutions de cette forme la substitution S ou la substitution $n^{2\sigma}S$, où σ est un entier quelconque. On pourrait même supposer $\varrho = 0$ si F'

contenait la substitution n. Supposons qu'il ne la contienne pas, et qu'on ait $\mu = 3$, le faisceau F' se confondra avec le faisceau dérivé des substitutions (32.) et de C, ou avec l'un de ses transformés. La substitution C étant de déterminant 1, on pourra supposer $S = \Sigma$, d'où $\varrho = 0$.

Au contraire, si $\mu = 4$, F' sera l'un des transformés du faisceau dérivé des substitutions (32.) et de nD; on aura donc $\varrho = 1$.

Enfin, si $\mu = 2$, le faisceau F' sera l'un des transformés du faisceau dérivé des substitutions (32.) et de la substitution nDC (laquelle correspond à une transposition de deux lettres dans le groupe des substitutions entre 4 lettres isomorphe à K'). Donc ici encore $\varrho = 1$.

80. Cela posé, F sera évidemment dérivé des substitutions

$$(56.)\qquad |x,\ y,\ z\quad ax,\ ay,\ a^{-2}z|,$$

$$(57.)\qquad |x,\ y,\ z\quad n^{\varrho}\theta x,\ n^{\varrho}\theta^{-1}y,\ n^{-2\varrho}z|.$$

Si la substitution n appartient au faisceau F, on aura toujours $\varrho = 0$ et l'on verra comme pour le groupe icosaédrique 1°. que le rapport du coefficient de z à ceux de x et y a au moins 2μ valeurs distinctes dans les substitutions de F. 2°. Que les groupes L' et M' appartiennent au premier type. 3°. Que les substitutions de F autres que les substitutions (56.) fournissent par transformation $\frac{\mu-1}{2\mu}$ substitutions distinctes.

Prenant successivement $\mu = 2,\ 3,\ 4$ et ajoutant les résultats, on trouvera $\frac{23}{24}\Omega$ substitutions. D'autre part les substitutions (56.) fourniront par transformation $\frac{\omega-\varphi}{24\omega}\Omega$ substitutions; ce qui en posant $\omega = 2\lambda\varphi$, donnera un total de

$$\Omega\left(1-\frac{1}{48\lambda}\right)$$

substitutions transformées des substitutions de K.

81. Supposons au contraire que n n'appartienne pas à F, mais que a^3 soit susceptible de plus de 4 valeurs distinctes dans les substitutions (56.). (Le nombre de ces valeurs est pair, F contenant la substitution A^2, pour laquelle on a $a = -1$, d'où $a^3 = -1$); les rapports du coefficient de z à ceux de x et de y dans les substitutions de F ayant au moins 6 valeurs, on pourra appliquer le raisonnement et arriver au même résultat.

Si a^3 a 4 valeurs, ce seront les racines de l'équation $i^4 = 1$; n^2 faisant partie de la série des a sans que n en fasse partie, n^3 sera une puissance impaire de j, racine primitive de l'équation $j^8 = 1$. Comme on peut d'ailleurs remplacer n par une quelconque de ses puissances impaires, on pourra supposer n égal à une puissance impaire de j, et enfin égal à j.

Les substitutions (56.) résulteront évidemment de la combinaison des puissances de la substitution

$$|x, y, z \quad ix, iy, i^{-2}z|$$

avec des substitutions où $a^3 = 1$, lesquelles appartiendront à Φ.

Cela posé, si $\mu = 3$, d'où $\varrho = 0$, ou bien $\mu = 2$, d'où $\varrho = 1$, le nombre des valeurs des rapports du coefficient de z à ceux de x et de y dans les puissances de la substitution (57.) étant 6 ou 8, on pourra appliquer les mêmes raisonnements que dans les cas précédents.

On trouvera ainsi, que celles des substitutions de F pour lesquelles x et y ont des coefficients différents, en fournissent

$$\frac{\mu-1}{2\mu}\Omega$$

par transformation; et que celles où ces coefficients sont égaux en fournissent

$$\frac{\omega-\varphi}{24\omega}\Omega.$$

82. Soit au contraire $\mu = 4$, d'où $\varrho = 1$. La substitution (57.) se réduisant à

$$|x, y, z \quad ix, y, i^{-1}z|$$

dont la combinaison avec (56.) fournit les substitutions

$$|x, y, z \quad i^{\alpha}x, i^{\beta}y, i^{-\alpha-\beta}z|,$$

F résultera de la combinaison de celles-ci avec les Φ.

Les rapports des coefficients de x, y, z dans ces substitutions ayant chacun 4 valeurs distinctes, chacun des groupes L', M', pourra appartenir soit au premier type, soit au second, soit enfin au type octaédrique.

Si tous deux étaient du premier type, on retrouverait encore les conclusions précédentes.

Supposons au contraire que L' soit du second type, ou du type octaédrique; il contiendra une substitution de la forme

$$|y, z \quad bz, cy|.$$

Donc H contient une substitution de la forme

$$S = |x, y, z \quad ax, bz, cy|.$$

D'ailleurs, K' étant octaédrique, H contient une substitution de la forme

$$T = |x, y, z \quad ay, bx, cz|.$$

En les combinant ensemble, on voit que H contient une substitution de chacune des 6 formes (48.) à (53.).

L'ordre de F étant 16φ, l'ordre du groupe I formé par les substitutions de H qui lui sont permutables sera donc 6.16φ.

Cela posé, F contient 6φ substitutions où les coefficients de x, y, z sont inégaux. Ces substitutions sont spéciales à ce faisceau; et leurs transformées seront en nombre

$$\frac{6\varphi}{6.16\varphi}\Omega = \frac{\Omega}{16}.$$

Les autres substitutions de F ont déjà été comptées. En effet, celles où x et y ont le même coefficient ont été comptées dans les faisceaux d'ordre 2φ et 3φ contenus dans K; et celles où x et z, ou y et z ont le même coefficient ont été également comptées, étant les transformées de celles-là par les substitutions dérivées de S et T.

Remarquons d'ailleurs que les groupes K, L, M étant transformés les uns dans les autres par ces mêmes substitutions, L' et M' seront octaédriques, ainsi que K'.

Réunissant les $\frac{\Omega}{16}$ substitutions que nous venons de trouver à celles en nombre

$$\tfrac{1}{4}\Omega + \tfrac{2}{6}\Omega + \frac{\omega-\varphi}{24\,\omega}\Omega$$

que fournissent les transformés des autres faisceaux contenus dans K, et remarquant d'ailleurs que dans les hypothèses actuelles on aura $\omega = 4\varphi$, on trouvera pour le nombre total des transformées des substitutions de K

$$\tfrac{65}{96}\Omega.$$

83. Supposons maintenant que a^3 n'ait que les deux valeurs ± 1; n^3 sera une puissance impaire de i, et l'on pourra supposer $n = i$. Les substitutions (56.) résulteront de la combinaison de

$$|x, y, z \quad -x, -y, z|$$

avec les Φ.

Si $\mu = 3$ ou 4, les raisonnements ci-dessus seront applicables. Mais si $\mu = 2$, la substitution (57.) se réduisant à

$$|x, y, z \quad -x, y, -z|,$$

F résultera de la combinaison des Φ avec les substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad (-1)^\alpha x, (-1)^\beta y, (-1)^{\alpha+\beta} z|$$

et les groupes L, M pourront appartenir à un type quelconque.

Si tous deux étaient du premier type, on raisonnerait comme précédemment. Dans le cas contraire, nous remettrons à plus tard l'énumération des substitutions fournies par F et ses transformés. Les autres faisceaux contenus dans K fourniront

$$\tfrac{2}{6}\Omega + \tfrac{3}{8}\Omega + \frac{\omega-\varphi}{24\omega}\Omega$$

substitutions; mais $\omega = 2\varphi$; le nombre ci-dessus se réduira donc à

$$\tfrac{3}{4}\tfrac{3}{8}\Omega.$$

84. Supposons maintenant K' tétraédrique. Il sera dérivé (N°. 33) de substitutions de la forme (32.) en nombre $\omega = 2\lambda\varphi$, jointes à des substitutions A, B, mC, et contiendra la substitution $(mC)^3 = m^3$.

L'ordre de F' sera $\mu\omega$, où $\mu = 2$ ou 3.

Si $\mu = 2$, les raisonnements ci-dessus seront applicables, et les transformées des substitutions de F, autres que celles de la forme (56.) seront en nombre $\frac{1}{4}\Omega$, celles des substitutions (56.) seront en nombre

$$\frac{\omega-\varphi}{12\omega}\Omega = \left(\tfrac{1}{12} - \frac{1}{24\lambda}\right)\Omega.$$

85. Soit d'autre part $\mu = 3$; et supposons les substitutions de F ramenées à leur forme canonique

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|.$$

On aura 3 valeurs distinctes pour $\frac{b}{a}$; et un nombre pair de valeurs distinctes pour $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, F contenant la substitution

$$A^2 = |x, y, z \quad -x, -y, z|.$$

Celles des substitutions de H qui sont permutables à F forment un groupe I et sont toutes de l'une des six formes (48.) à (53.).

Mais aucune d'elles n'est de la forme (49.). Car elle aurait pour correspondante dans K' la substitution

$$S = |x, y \quad ay, bx|$$

permutable à F', sans lui appartenir.

Or une semblable substitution ne peut exister. En effet, K' est isomorphe au groupe alterné entre 4 lettres α, β, γ, δ, et F' est formé de celles des substitutions de K' qui correspondent aux puissances d'une substitution circulaire ternaire telle que $(\alpha\beta\gamma)$. La substitution correspondante à S serait permutable au groupe formé par ces puissances, sans lui appartenir, ce qui est manifestement impossible.

Les formes (50.) à (53.) sont également inadmissibles. Supposons en effet, pour fixer les idées, qu'on eût une substitution de la forme (50.). Elle transformerait chaque substitution de F, telle que

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

en

$$|x, y, z \quad ax, cz, by|.$$

Mais le groupe formé par ces transformées ne peut être identique à F, $\frac{c}{a}$ et $\frac{b}{a}$ n'ayant pas le même nombre de valeurs distinctes.

Les substitutions de I seront donc toutes de la forme (48.); donc I se confond avec F, et a pour ordre $\mu\omega$.

Cela posé, si $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ ont chacun plus de deux valeurs, on voit aisément que les groupes L' et M' appartiendront au premier type.

Le nombre des faisceaux distincts transformés de F étant $\frac{\Omega}{\mu\omega}$, celles des substitutions de F où $a > b$ fourniront $\frac{(\mu-1)\omega}{\mu\omega}\Omega = \frac{2}{3}\Omega$ transformées distinctes.

Joignant ces substitutions à celles déjà énumérées, on voit que les substitutions de K fourniront en tout

$$\Omega\left(1-\frac{1}{24\lambda}\right)$$

transformées distinctes.

86. Supposons enfin que $\frac{c}{b}$, par exemple, n'ait que deux valeurs distinctes; F résultera de la combinaison de la substitution A^2 avec des substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad ax, by, bz|$$

et comme $\frac{b}{a}$ a 3 valeurs, ces dernières substitutions résulteront elles-mêmes de la combinaison d'une substitution

$$(58.) \qquad |x, y, z \quad a\tau x, ay, az|$$

où τ est une racine cubique de l'unité, avec les substitutions de Φ.

La substitution (58.) ayant pour déterminant 1, on aura $a^3\tau = 1$, ce qui montre que a est une racine neuvième de l'unité. En la désignant par θ, la substitution (58.) deviendra

$$|x, y, z \quad \theta^{-2}x, \theta y, \theta z|.$$

Son cube multipliant toutes les variables par une même racine cubique de l'unité, on aura $\varphi = 3$; et les substitutions de F auront pour forme générale

$$|x, y, z \quad (-1)^\varrho\theta^{-2\sigma}x, (-1)^\varrho\theta^\sigma y, \theta^\sigma z|.$$

Cela posé, le rapport des coefficients de x et de z ayant six valeurs distinctes, M' appartiendra au premier type. Si L' y appartenait également, les raisonnements précédents seraient applicables. Dans le cas contraire, $\frac{c}{b}$ ayant 2 valeurs, L' sera du second type; car s'il était de l'un des types polyédriques, H contiendrait une substitution de la forme (50.) ce qui a été démontré impossible.

87. Celles des substitutions de L' qui multiplient y et z par un même facteur constant sont les 9 substitutions

$$|y, z \quad \theta^\sigma y, \theta^\sigma z|$$

et l'ordre de L' sera égal à $18t$, en désignant par $9t$ l'ordre du groupe A du premier type auquel les substitutions de L' sont permutables.

On aura $t > 2$. En effet, les 18 substitutions

$$|y, z \quad (-1)^\varrho\theta^\sigma y, \theta^\sigma z|$$

que nous désignerons par $\psi_1, \psi_2, \ldots$ forment un faisceau Ψ contenu dans L'. Soit S une autre substitution de L'; ce groupe contiendra les 36 substitutions

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \quad S\psi_1, S\psi_2, \ldots$$

évidemment distinctes. Si t était égal à 2, il n'en contiendrait pas d'autres. Donc les substitutions

$$\psi_1 S, \psi_2 S, \ldots$$

qu'il contient également, et qui diffèrent de $\psi_1, \psi_2, \ldots$, se confondraient à l'ordre près avec $S\psi_1, S\psi_2, \ldots$ Donc S serait permutable au faisceau Ψ, et par suite serait de la forme

$$|y, z \quad bz, cy|.$$

H contiendrait une substitution correspondante

$$|x, y, z \quad ax, bz, cy|$$

ce qui est impossible.

88. Cela posé, prenons au lieu de y, z de nouvelles variables y', z' choisies de manière à ramener A à sa forme canonique.

Ses substitutions seront de la forme

$$|y',\ z' \quad by',\ cz'|$$

où le rapport $\frac{c}{b}$ aura t valeurs distinctes. Les substitutions correspondantes de H forment un faisceau

$$(59.) \qquad |x,\ y',\ z' \quad ax,\ by',\ cz'|$$

où chacun des rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ a aussi au moins 3 valeurs distinctes; car parmi ces substitutions se trouve la suivante

$$|x,\ y,\ z \quad \theta^{-2}x,\ \theta y,\ \theta z| = |x,\ y',\ z' \quad \theta^{-2}x,\ \theta y',\ \theta z'|$$

où ce rapport est une racine cubique de l'unité.

Le faisceau (59.) est donc l'un de ceux dont on a précédemment énuméré les substitutions (Nos. 74, 78, 80 à 83 et 85).

89. Si donc nous voulons énumérer les substitutions de F, il faudra exclure celles de ses substitutions qui lui sont communes avec le faisceau (59.), c'est-à-dire toutes celles où y et z ont le même coefficient. Il faudra exclure également les substitutions pour lesquelles x et y ont le même coefficient, celles-ci ayant été déjà comptées.

Ces suppressions faites, il restera dans F les substitutions de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad -\theta^{2\sigma}x,\ -\theta^{\sigma}y,\ \theta^{\sigma}z|$$

où $\sigma \gtrless 0 \bmod. 3$. Elles sont en nombre 6, car σ pourra prendre 6 valeurs distinctes par rapport au module 9.

D'ailleurs F contient 18 substitutions et le groupe I formé par les substitutions de H qui lui sont permutables se confond avec lui (No. 85); F aura donc $\frac{\Omega}{18}$ transformés distincts; ce qui donnera

$$\tfrac{6}{18}\Omega = \tfrac{1}{3}\Omega$$

substitutions nouvelles (toutes distinctes évidemment, puisque M' appartient au premier type).

La transformation de K fournira donc en tout

$$\tfrac{1}{4}\Omega + \left(\tfrac{1}{12} - \frac{1}{24\lambda}\right)\Omega + \tfrac{1}{3}\Omega = \tfrac{15}{24}\Omega$$

substitutions nouvelles (λ étant ici égal à 1).

90. Il ne nous reste plus à examiner que les faisceaux F tels que dans leurs substitutions

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

$\frac{b}{a}$ n'ait que deux valeurs distinctes, ± 1, et qu'aucun des groupes K', L', M' ne soit tétraédrique ou icosaédrique.

Supposons d'abord que $\frac{c}{a}$ ne soit pas constamment égal à ± 1. Il en sera évidemment de même de $\frac{c}{b}$.

On peut admettre que K' n'est pas octaédrique; car le faisceau F serait l'un de ceux précédemment étudiés (N°. 82.).

Quant à L' et M', ils appartiendront au premier type, car si L', par exemple, appartenait au second type, ou au type octaédrique, H contiendrait une substitution de la forme (50.), qui serait permutable à F, ce qui est absurde, les rapports $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ n'ayant pas le même nombre de valeurs.

On voit de la même manière que H ne peut contenir aucune substitution des formes (51.), (52.), (53.). Si donc on désigne par $2p\varphi$ l'ordre de F, le nombre des faisceaux transformés de F sera $\frac{\Omega}{2lp\varphi}$, l étant égal à 1 ou à 2, suivant que H contiendra ou non une substitution de la forme (49.).

91. Cela posé, celles des substitutions de F pour lesquelles $\frac{b}{a} = -1$ sont en nombre $p\varphi$ et fourniront par transformation

$$\frac{p\varphi}{2lp\varphi}\,\Omega = \frac{\Omega}{2l}$$

substitutions distinctes.

Considérons d'autre part les $p\varphi$ substitutions de la forme

$$(60.) \qquad |x, y, z \quad ax, ay, cz|.$$

Deux cas pourront se présenter:

92. 1°. Si l'ordre du groupe K', lequel est évidemment un multiple de $2lp\varphi$, est égal à $2mp\varphi$, m étant > 2, les substitutions où $a = b$ auront déjà été comptées.

En effet, K', n'appartenant pas aux types polyédriques, et ayant son ordre $> 2p\varphi$, appartiendra au second type, et contiendra un faisceau J'

d'ordre $mp\varphi$, permutable à ses substitutions. Soient x', y', les variables qui le ramènent à sa forme canonique

$$|x',\ y' \quad a'x',\ b'y'|.$$

Il sera dérivé d'une substitution de cette forme, où $\frac{b'}{a'}$ est racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, jointe aux substitutions

$$|x,\ y \quad ax,\ ay| = |x',\ y' \quad ax',\ ay'|.$$

Quant au faisceau F', d'ordre $2p\varphi$, il résultera de la combinaison des substitutions (60.) avec une substitution de la forme

$$(61.) \qquad |x',\ y' \quad \alpha y',\ \beta x'|.$$

Soit J le faisceau formé par les substitutions

$$(62.) \qquad |x',\ y',\ z \quad a'x',\ b'y',\ cz|$$

de H qui correspondent à celles de J'. Les rapports $\frac{c}{a'}$, $\frac{c}{b'}$ auront chacun plus de deux valeurs. Supposons en effet que $\frac{c}{a'}$, par exemple, fût toujours égal à ± 1; J contient la transformée

$$|x',\ y',\ z \quad b'x',\ a'y',\ cz|$$

de (62.) par (61.); donc $\frac{c}{b'}$ serait égal à ± 1. Donc $\frac{b'}{a'}$ serait aussi toujours égal à ± 1, contrairement à l'hypothèse.

Le faisceau J sera donc un de ceux étudiés plus haut; et les substitutions (60.) y auront déjà été comptées. Donc F et ses transformés ne fourniront que $\frac{\Omega}{2}$ ou $\frac{\Omega}{4}$ substitutions nouvelles, suivant qu'on aura $l = 1$ ou 2.

93. 2°. Si $m = 1$, K' se réduisant à F', appartiendra au premier type, et F fournira par transformation

$$\frac{2p\varphi - \varphi}{2p\varphi}\,\Omega = \Omega . \frac{2p-1}{2p}$$

substitutions.

94. 3°. Soit enfin $m = 2$. K' contenant F' et ayant un ordre double de celui de F' résultera de la combinaison de F' avec une substitution S permutable à F' (N°. 87), laquelle sera de la forme

$$|x,\ y \quad a'y,\ b'x|.$$

On aura donc $l = 2$; et celles des substitutions de F où $a \gtrless b$ donneront $\frac{\Omega}{4}$ transformées. Celles où $a = b \gtrless c$ sont en nombre $(p-1)\varphi$, et donneront

$\frac{(p-1)\varphi}{4p\varphi}\Omega = \frac{\Omega}{4} - \frac{\Omega}{4p}$ transformées. Le total des transformées fournies par F sera donc

$$\Omega\left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{4p}\right) = \Omega . \frac{2p-1}{2.2p}.$$

Ce nombre se réduirait à $\frac{\Omega}{4}$ si l'on avait déjà compté les substitutions où $a = b$, ce qui arriverait si les faisceaux autres que F et contenus dans K avaient déjà été considérés avant lui.

95. Il ne nous reste plus qu'à considérer les faisceaux F tels que dans toutes leurs substitutions

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

les rapports des coefficients deux à deux soient égaux à ± 1.

Ces substitutions seront de 4 sortes contenant chacune φ substitutions:

$$\begin{array}{ll} \text{Celles où} & a = b = c. \\ \text{Celles où} & a = b = -c. \\ \text{Celles où} & a = -b = c. \\ \text{Celles où} & -a = b = c. \end{array}$$

Les substitutions de la première sorte sont celles de Φ, qui ont été comptées.

Celles de la seconde sorte, étant échangeables aux substitutions

$$|x, y, z \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z|$$

du groupe K, donneront par transformation $\frac{\varphi}{\psi}\Omega$ substitutions, ψ étant l'ordre de K. Mais il se peut que ces substitutions aient été comptées.

Elles l'auront été nécessairement si ψ, lequel est un multiple de 4φ, ordre de F, est supérieur à 8φ.

Considérons en effet le groupe K' formé des substitutions

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y|:$$

il a évidemment le même ordre que K. D'ailleurs celles de ses substitutions qui correspondent aux substitutions des deux premières sortes sont en nombre 2φ.

Si ce groupe est polyédrique, il contiendra un faisceau d'ordre 6φ, dont les substitutions, ramenées à la forme canonique, seront

$$|x', y' \quad a'x', b'y'|$$

$\frac{b'}{a'}$ ayant trois valeurs distinctes.

S'il est du second type, et d'ordre $4m\varphi$, où $m > 2$, il contiendra un faisceau analogue où $\frac{b'}{a'}$ aura m valeurs distinctes.

Dans l'un et l'autre cas H contiendra un faisceau

$$|x', y', z \quad a'x', b'y', cz|$$

dont font partie les substitutions considérées

$$|x, y, z \quad ax, ay, -az| = |x', y', z \quad ax', ay', -az|,$$

et $\frac{b'}{a'}$ ayant plus de deux valeurs, les substitutions de ce faisceau auront été énumérées.

Pour que les substitutions en question doivent être comptées, il faut donc, ou bien que K' soit du premier type, auquel cas il se confondra avec le groupe F' formé par les substitutions correspondantes à celles de F, en nombre 4φ, ou qu'il soit du second type, et d'ordre 8φ.

Si donc les substitutions considérées n'ont pas encore été comptées, on aura $\psi = 4\varphi$ ou 8φ; et par suite

$$\frac{\varphi}{\psi}\Omega = \frac{\Omega}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega}{8}.$$

Les substitutions de chacune des deux autres sortes donneront de même un nombre de substitutions nouvelles égal à $\frac{\Omega}{4}$ ou à $\frac{\Omega}{8}$ ou à zéro.

Tout autre faisceau analogue à celui que nous venons de considérer donnerait des résultats de même nature.

96. L'énumération des substitutions de H est maintenant terminée. Le nombre total étant Ω, il résulte de l'analyse précédente qu'on aura l'équation fondamentale

$$\varphi + \Omega\Sigma = \Omega$$

d'où

$$(63.) \qquad \Omega = \frac{\varphi}{1-\Sigma},$$

Σ étant une somme de termes des formes suivantes

$$1-\frac{1}{120\lambda},\ 1-\frac{1}{48\lambda},\ \tfrac{65}{96},\ \tfrac{33}{48},\ 1-\frac{1}{24\lambda},\ \tfrac{15}{24},\ \frac{m-1}{km},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8}$$

où $k = 1, 2, 3$ ou 6, et où m est assujetti aux restrictions suivantes:

1°. Si $k = 3$, m ne contient de facteurs premiers de la forme $3i-1$ qu'à des puissances paires. 2°. Si $k = 6$, m est carré ou triple d'un carré.

§. 2. Recherche des solutions de l'équation fondamentale.

97. Il nous reste à discuter l'équation (63.). Mais nous simplifierons notablement cette étude à l'aide des remarques suivantes.

Remarque I. ***Si M désigne le dénominateur de l'un quelconque des termes de Σ, Ω sera divisible par $M\varphi$. Il sera d'ailleurs $> M\varphi$.***

En effet ce terme a été obtenu par la considération d'un groupe d'ordre $M\varphi$ contenu dans H. Donc $M\varphi$ divise Ω.

D'ailleurs ce groupe d'ordre $M\varphi$ appartient à l'un des types du N°. 62. Donc si H n'appartient pas lui-même à ces types, son ordre Ω sera $> M\varphi$.

98. Remarque II. ***Si H contient deux groupes I et J, contenant eux-mêmes Φ, et ayant respectivement pour ordres $r\varphi$ et $s\varphi$; et si d'ailleurs la série des transformées des substitutions de I par celles de H, et la série des transformées des substitutions de J n'ont aucune substitution commune sauf celles de Φ, Ω sera divisible par $rs\varphi$.***

En effet, soient $\varphi_0 = 1$, φ_1, φ_2, ... les substitutions de Φ; $i_0 = 1$, i_1, ..., i_{r-1} des substitutions convenablement choisies dans I; on sait que les substitutions de I seront de la forme $i_\alpha \varphi_\beta$, chaque système de valeurs de α, β fournissant une substitution différente.

Les substitutions de J pourront de même se mettre sous la forme $j_\gamma \varphi_\delta$, $j_0 = 1$, j_1, ..., j_{s-1} étant des substitutions convenablement choisies, et chaque système de valeurs de γ, δ fournissant une substitution différente.

Cela posé, soit S une substitution quelconque de H; ce groupe contiendra les $rs\varphi$ substitutions

$$i_\alpha \varphi_\beta S j_\gamma$$

lesquelles seront distinctes.

Supposons en effet qu'on eût

$$(64.) \qquad i_\alpha \varphi_\beta S j_\gamma = i_{\alpha'} \varphi_{\beta'} S j_{\gamma'}.$$

On en déduirait

$$S^{-1} \varphi_{\beta'}^{-1} i_{\alpha'}^{-1} i_\alpha \varphi_\beta S = j_{\gamma'} j_\gamma^{-1}.$$

Le premier membre de cette égalité est la transformée par S d'une substitution de I; le second est une substitution de J; ces deux substitutions ne pourront être égales, par hypothèse, que si elles appartiennent à Φ.

On aura donc

$$j_\gamma j_{\gamma'}^{-1} = \varphi_\delta, \quad \text{d'où} \quad j_\gamma = \varphi_\delta j_{\gamma'} = j_{\gamma'} \varphi_{\delta'}$$

et par suite

$$\gamma = \gamma', \quad \delta = 0.$$

L'équation (64.) deviendra alors

$$i_\alpha \varphi_\beta = i_{\alpha'} \varphi_{\beta'}$$

et l'on en déduit $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$.

Donc les deux substitutions considérées ne peuvent être égales que si elles sont identiques.

Si H contient plus de $rs\varphi$ substitutions, soit T l'une de celles qui n'ont pas été énumérées: H contiendra les $rs\varphi$ substitutions

$$i_\alpha \varphi_\beta T j_\gamma$$

qui sont distinctes les unes des autres; elles sont également distinctes des précédentes; car si l'on avait

$$i_\alpha \varphi_\beta S j_\gamma = i_{\alpha'} \varphi_{\beta'} T j_{\gamma'},$$

on en déduirait

$$T = \varphi_{\beta'}^{-1} i_{\alpha'}^{-1} i_\alpha \varphi_\beta S j_\gamma j_{\gamma'}^{-1}.$$

Or $j_\gamma j_{\gamma'}^{-1}$, appartenant à J, pourra se mettre sous la forme $j_\mu \varphi_\lambda$; et comme φ_λ est échangeable à j_μ et à S, on aura

$$T = \varphi_{\beta'}^{-1} i_{\alpha'}^{-1} i_\alpha \varphi_\beta \varphi_\lambda S j_\mu.$$

Mais $\varphi_{\beta'}^{-1} i_{\alpha'}^{-1} i_\alpha \varphi_\beta \varphi_\lambda$, appartenant à I, pourra se mettre sous la forme $i_\nu \varphi_\varrho$. On aurait donc pour T une expression de la forme $i_\nu \varphi_\varrho S j_\mu$, et T serait, contre l'hypothèse, une des substitutions déjà énumérées.

Donc H contient au moins $2rs\varphi$ substitutions. On verra de même que s'il en contient davantage, il en contiendra $3rs\varphi$; et ainsi de suite.

99. Corollaire I. *Si Σ contient deux termes $\frac{m-1}{km}$, $\frac{m'-1}{k'm'}$, Ω sera divisible par $mm'\varphi$.*

Car les deux faisceaux F, F', d'ordres $m\varphi$ et $m'\varphi$, qui ont fourni les deux termes en question dans l'expression de Σ, satisfont, d'après notre analyse, aux conditions imposées aux groupes I et J du N°. précédent.

100. Corollaire II. *Si Σ contient un terme $\frac{m-1}{km}$ avec un terme $\frac{6}{6}\frac{5}{6}$, ou avec un terme $\frac{3}{4}\frac{3}{8}$, ou avec un terme $\frac{1}{2}\frac{5}{4}$, Ω sera divisible par $96m\varphi$, par $48m\varphi$ ou par $24m\varphi$.*

Car Ω contient d'une part un faisceau F d'ordre $m\varphi$, qui a donné naissance au terme $\frac{m-1}{km}$, et d'autre part un groupe K d'ordre 96φ, 48φ

ou 24φ qui a produit l'autre terme; et il résulte de notre analyse que leurs transformés n'ont pas de substitutions communes, sauf les Φ.

101. Corollaire III. *Si Σ contient un terme $\frac{m-1}{km}$ où $k=1$ ou 3, et un terme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$, Ω sera divisible par $2m\varphi$; il le serait par $4m\varphi$, si Σ contenait, avec le terme $\frac{m-1}{km}$, un terme $\frac{1}{8}$.*

Soient en effet

$$|x,\ y,\ z\quad ax,\ by,\ cz|$$

les substitutions du faisceau F qui a donné le terme $\frac{m-1}{km}$; K', L', M' les groupes correspondants définis au N°. 74; et qui, par hypothèse, appartiennent au premier ou au second type. Si l'un deux, tel que K', appartenait au second type, il contiendrait une substitution de la forme

$$|x,\ y\quad ay,\ bx|$$

et H contenant la substitution correspondante

$$|x,\ y,\ z\quad ay,\ bx,\ cz|$$

le nombre k serait pair, contrairement à ce qu'on a supposé.

Donc K', L', M' sont du premier type; et les substitutions de F et de ses transformés n'appartiennent chacune qu'à un seul faisceau (N°. 74).

Or un terme de la forme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ dans l'expression de Σ serait produit par un faisceau F' d'ordre $2p\varphi$ (N^{os}. 90 à 94); un terme de la forme $\frac{1}{8}$ serait produit par un faisceau d'ordre 4φ (N°. 95). Ces faisceaux et leurs transformés n'ayant aucune substitution commune avec F et ses transformés, on pourra appliquer la proposition du N°. 98.

102. Remarque III. *L'existence dans Σ d'un terme $\frac{m-1}{6m}$ entraîne en général l'existence d'un terme $\frac{1}{2}$ ou de deux termes $\frac{1}{4}$, sauf les exceptions suivantes.*

1°. *Si $m=9$ ou 27, ces termes pourront être remplacés par un terme $\frac{1}{2}\frac{5}{4}$.*

2°. *Si $m=12$ on pourra n'avoir qu'un seul terme égal à $\frac{1}{4}$.*

3°. *Enfin si $m=3$, ces termes pourront ne pas exister.*

Soient F le faisceau qui a fourni le terme $\frac{m-1}{6m}$;

$$|x,\ y,\ z\quad ax,\ by,\ cz|$$

ses substitutions. Les coefficients a, b, c seront (N°. 76) les puissances d'une racine irréductible θ d'une équation binôme θ[illegible] $=1$; et F contiendra entre autres substitutions les suivantes

$$(65.) \qquad P = |x, y, z \quad \theta^{-1}x, \theta^{-1}y, \theta^{2}z|,$$

$$(66.) \qquad |x, y, z \quad \theta^{-1}x, \theta^{2}y, \theta^{-1}z|.$$

Soient K, L, M les groupes définis au N°. 74; K sera dérivé des substitutions de F, jointes à des substitutions de la forme

$$(67.) \qquad |x, y, z \quad \alpha y, \beta x, \gamma z|.$$

103. Soit $\mathfrak{F}$ l'un des faisceaux autres que F contenus dans K. Il contiendra une substitution S de la forme (67.) et s'obtiendra en la combinant avec celles des substitutions de F qui lui sont échangeables, lesquelles auront pour forme

$$(68.) \qquad |x, y, z \quad ax, ay, cz|.$$

Remplaçons x, y par d'autres variables x', y', choisies de manière à ramener S à sa forme canonique

$$S = |x', y', z \quad \sqrt{\alpha\beta}x', -\sqrt{\alpha\beta}y', \gamma z|.$$

Les substitutions (68.) deviendront

$$|x', y', z \quad ax', ay', cz|$$

et en particulier P deviendra

$$|x', y', z \quad \theta^{-1}x', \theta^{-1}y', \theta^{2}z|.$$

Dans les substitutions de $\mathfrak{F}$, le rapport des coefficients de x', y' sera partout égal à ± 1. Au contraire, le rapport des coefficients de z à ceux de x' et y', prenant dans les puissances successives de P les valeurs $\theta^3, \theta^6, \theta^9, \dots$ aura plus de deux valeurs distinctes si $\theta^6 \gtrless 1$, et plus de trois, si l'on a en même temps $\theta^9 \gtrless 1$.

Admettons donc que ces rapports aient plus de deux valeurs dans les substitutions de $\mathfrak{F}$; H ne pourra contenir aucune substitution des formes (50.), (51.), (52.), (53.) (N°. 90).

Soient donc L, M les groupes respectivement formés par les substitutions de H qui sont de la forme

$$|x', y', z \quad \alpha x', \beta y' + \gamma z, \beta' y' + \gamma' z|,$$

$$|x', y', z \quad \alpha x' + \gamma z, \beta y', \alpha' x' + \gamma' z|.$$

Le groupe L' formé des substitutions

$$|y', z \quad \beta y' + \gamma z, \beta' y' + \gamma' z|$$

appartiendra au premier type, ou au type tétraédrique; ce dernier cas ne pouvant d'ailleurs se présenter que si le rapport des coefficients de y' et de z n'a que trois valeurs dans les substitutions de $\mathfrak{F}$; ce qui suppose $\theta^\rho = 1$.

Le groupe M' formé des substitutions

$$|x', z \quad \alpha x' + \gamma z, \ \alpha' x' + \gamma' z|$$

appartiendra de même au premier type, sauf le cas ou $\theta^\rho = 1$, auquel cas il pourrait être tétraédrique.

104. Raisonnons dans le cas général, où L' et M' appartiennent au premier type. Le faisceau $\mathfrak{F}$ appartiendra à l'espèce considérée au N°. 90 et fournira par transformation $\frac{\Omega}{2l}$ substitutions nouvelles, l étant égal à 2 ou à 1, suivant que K contient ou non une substitution de la forme

$$|x', y', z \quad \alpha y', \beta x', \gamma z|.$$

Or soit ω le nombre des substitutions de la forme (68.); $\mu\omega$ l'ordre de F; K contiendra $2\mu\omega$ substitutions, dont $\mu\omega$ de la forme (67.), parmi lesquelles ω appartiendront à $\mathfrak{F}$. Le nombre total des faisceaux $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \ldots$ analogues à $\mathfrak{F}$ que K contient est donc μ, et chacun d'eux a pour ordre 2ω. D'ailleurs celles des substitutions de K qui sont permutables à $\mathfrak{F}$ sont évidemment en nombre $2l\omega$; $\mathfrak{F}$ aura donc $\frac{2\mu\omega}{2l\omega}$ transformés.

Si donc $l = 1$, les groupes $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \ldots$ seront les transformés d'un seul d'entre eux, fournissant dans Σ le terme $\frac{1}{2}$. Mais si $l = 2$, chacun de ces μ groupes n'ayant que $\frac{\mu}{2}$ transformés, ils se partageront en deux séries fournissant chacune un terme $\frac{1}{4}$.

105. On voit donc que les substitutions du groupe K, étant transformées par les substitutions de H, fourniront en tout

$$\left(\frac{m-1}{6m} + \frac{1}{2}\right)\Omega$$

substitutions distinctes.

Ces substitutions n'appartiendront à aucun faisceau, autre que ceux qui sont contenus dans K et ses transformés.

En effet, cela résulte pour celles des substitutions de K qui appartiennent à $\mathfrak{F}$ de ce que les groupes L', M' appartiennent au premier type. Quant aux substitutions de F, celles où $a \gtreqless b \gtreqless c$ n'appartiennent qu'à un faisceau; celles où $a = b$, où $b = c$, où $a = c$ appartiennent respectivement aux faisceaux contenus dans K, L, M. Mais K, L, M sont transformés les uns dans les autres par la substitution de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bz,\ cx|$$

que H contient.

106. Ces conséquences pourraient cesser d'avoir lieu, si θ étant une racine 9ième de l'unité, l'un des groupes L', M' était tétraédrique. La considération de ce groupe donnerait dans Σ un terme $\frac{1}{2}\frac{5}{4}$. D'ailleurs les substitutions de F étant de la forme

$$(69.)\qquad |x,\ y,\ z \quad \theta^{\alpha}x,\ \theta^{\beta}y,\ \theta^{-\alpha-\beta}z|$$

où α et β peuvent varier de 0 à 8, on aura $m\varphi = 81$, si F contient toutes les substitutions (69.) et comme on aura évidemment dans ce cas $\varphi = 3$, on aura $m = 27$.

Si F ne contient pas toutes les substitutions (69.) il contiendra au moins celles qui dérivent des substitutions (65.) et (66.), lesquelles forment le tiers du total. On aura donc $m\varphi = 27$ et $\varphi = 3$, d'où $m = 9$.

107. Il nous reste à considérer le cas où $\theta^6 = 1$. Les rapports des coefficients a, b, c dans les substitutions de F devant prendre plus de 2 valeurs, θ sera nécessairement une racine cubique, ou une racine sixième de l'unité; de plus, F devra contenir, non seulement les substitutions (65.) et (66.), mais toutes les substitutions (69.).

Si $\theta^3 = 1$, on aura $m = 3$, $\varphi = 3$. Ce cas échappe à nos raisonnements.

108. Soit $\theta^6 = 1$, d'où $m = 12$, $\varphi = 3$. Considérons comme tout à l'heure le faisceau $\mathfrak{F}$ dérivé de la substitution

$$(70.)\qquad S = |x,\ y,\ z \quad \alpha y,\ \beta x,\ \gamma z| = |x',\ y',\ z \quad \sqrt{\alpha\beta}\,x',\ -\sqrt{\alpha\beta}\,y',\ \gamma z|$$

et des substitutions de F

$$(71.)\qquad |x,\ y,\ z \quad \theta^{\lambda}x,\ \theta^{\lambda}y,\ \theta^{-2\lambda}z| = |x',\ y',\ z \quad \theta^{\lambda}x',\ \theta^{\lambda}y',\ \theta^{-2\lambda}z|$$

où x et y ont le même coefficient.

Les rapports du coefficient de z à celui de x et à celui de y ont les deux valeurs ± 1 dans les substitutions (71.) suivant que λ est pair ou impair. Ces rapports auront donc dans les substitutions de $\mathfrak{F}$ un nombre pair de valeurs, lequel sera > 2 si l'on n'a pas $\gamma = \pm\sqrt{\alpha\beta}$. On pourra donc, si cette équation n'a pas lieu, appliquer tous les raisonnements précédents, et en déduire l'existence dans Σ d'un terme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ fourni par le faisceau $\mathfrak{F}$.

Supposons au contraire qu'on ait $\gamma^2 = \alpha\beta$. F contenant la substitution

$$T = |x,\ y,\ z \quad \theta x,\ y,\ \theta^{-1}z|$$

K contiendra le produit

$$TS = |x,\ y,\ z\quad \alpha y,\ \beta\theta x,\ \ \gamma\theta^{-1}z|$$

où l'équation analogue à $\gamma^2 = \alpha\beta$ ne sera plus vérifiée. Le faisceau $\mathfrak{F}'$ dérivé de TS et des substitutions (71.) fournira donc un terme $\frac{1}{4}$.

109. Ces préliminaires posés, procédons à la discussion de l'équation (63.).

Premier cas: *Σ contient un terme de la forme* $1-\frac{1}{120\lambda}$.

Ce terme sera unique; autrement $1-\Sigma$ serait évidemment négatif, ce qui est absurde. On aura donc

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-1+\frac{1}{120\lambda}} = 120\lambda\varphi.$$

Mais Ω contient un groupe K dont les substitutions sont de la forme

$$|x,\ y,\ z\quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z|$$

ayant pour ordre $120\lambda\varphi$ et tel que le groupe correspondant K' formé des substitutions

$$|x,\ y\quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y|$$

soit icosaédrique.

Les groupes Ω et K, ayant le même ordre, se confondront. Le groupe Ω sera donc l'un de ceux déjà signalés (N°. 62.).

On voit de même qu'on doit rejeter l'hypothèse où Σ contiendrait un terme de l'une des formes $1-\frac{1}{48\lambda}$, $1-\frac{1}{24\lambda}$.

110. Ces trois formes écartées, pour simplifier la discussion des autres cas, nous distinguerons les termes $\frac{m-1}{km}$ en quatre classes, $\frac{m-1}{m}$, $\frac{n-1}{2n}$, $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{q-1}{6q}$ suivant la valeur du coefficient k.

Lorsque à un terme $\frac{q-1}{6q}$ sera associé un terme $\frac{1}{2}$ ou deux termes $\frac{1}{4}$ (N°. 102), nous les grouperons en un seul $\left(\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}\right)$.

Les termes $\frac{q-1}{6q}$ qui font exception au théorème du N°. 102 auront pour valeur numérique

$$\tfrac{13}{81} \text{ si } q = 27,$$
$$\tfrac{4}{27} \text{ si } q = 9,$$
$$\tfrac{11}{72} \text{ si } q = 12,$$
$$\tfrac{1}{9} \text{ si } q = 3.$$

D'ailleurs Σ ne pourra contenir de termes $\frac{13}{81}$, $\frac{4}{27}$ à l'état isolé que s'il contient un terme $\frac{15}{24}$; et de termes $\frac{11}{72}$ que s'il contient un terme $\frac{1}{4}$.

Enfin, pour plus de simplicité, nous fondrons en un seul terme $\frac{\alpha}{8}$ les termes de la forme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ qui n'auraient pas été groupés avec des termes $\frac{q-1}{6q}$, et ceux des termes $\frac{m-1}{m}$, $\frac{n-1}{2n}$, $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{q-1}{6q}$ dont le dénominateur diviserait 8.

On réunira de même en un seul terme $\frac{\beta}{9}$ ceux des termes $\frac{m-1}{m}$, $\frac{n-1}{2n}$, $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{q-1}{6q}$ dont le dénominateur divise 9.

Cela posé, Σ sera exprimé par une somme de termes des formes suivantes $\frac{65}{96}$, $\frac{33}{48}$, $\frac{15}{24}$, $\frac{m-1}{m}$, $\frac{n-1}{2n}$, $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$, $\frac{13}{81}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{11}{72}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$ avec les restrictions suivantes:

$$m > 4 \gtreqless 8 \gtreqless 9,$$
$$n > 4 \gtreqless 9.$$

D'autre part, p étant >4 et n'admettant qu'à des puissances paires les facteurs premiers de la forme $3i-1$, on aura

$$p > 6.$$

Enfin q est carré ou triple d'un carré, et >4; on aura donc

$$q \geqq 9.$$

111. Deuxième cas: *Σ contient un terme $\frac{15}{24}$.*

Ce terme ne peut être unique, car Ω ne serait pas un multiple de φ, comme cela doit être.

D'ailleurs $1-\Sigma$ devant être >0, les termes complémentaires ne pourront appartenir qu'aux formes suivantes $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{13}{81}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$ (car un terme $\frac{11}{72}$ entraînerait l'existence d'un terme $\frac{1}{4}$).

1°. Si dans la somme S des termes complémentaires figure un terme $\frac{p-1}{3p}$, il ne peut être seul; car on aurait

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{15}{24}-\frac{p-1}{3p}} = \frac{\varphi}{\frac{1}{24}+\frac{1}{3p}} < 3p\varphi,$$

résultat absurde, Ω devant être un multiple de $3p\varphi$ (N°. 97).

Mais p étant $\geqq 7$, $\frac{p-1}{3p} \geqq \frac{2}{7}$. Si donc Σ contenait quelque autre terme, il serait >1, ce qui est absurde.

2^0. Si S contient un terme $\frac{13}{81}$, elle ne pourra contenir plus d'un autre terme, et de quelque manière qu'on le choisisse, $\frac{\Omega}{\varphi}$ serait fractionnaire.

3^0. Si S contenait deux termes $\frac{4}{27}$, $\frac{\Omega}{\varphi}$ serait ou négatif ou fractionnaire.

4^0. Si S contient un terme égal à $\frac{4}{27}$, $\frac{\Omega}{\varphi}$ sera négatif ou fractionnaire, à moins qu'on ne pose

$$S = \tfrac{4}{27} + \tfrac{2}{9},$$

ce qui donnera

$$\Omega = 8.27.\varphi.$$

5^0. Enfin si S se réduit à la forme $\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9}$, on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1 - \frac{15}{24} - \frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{9}} = \frac{72\varphi}{27 - 9\alpha - 8\beta}.$$

D'ailleurs Ω doit être > 0 et divisible par 24φ (N°. 97) et même par 3.24φ si $\beta > 0$ (N°. 100).

On ne peut satisfaire à ces conditions qu'en posant $\alpha = 2$, $\beta = 1$

$$\Omega = 72\varphi.$$

112. Admettons désormais que Σ ne contienne aucun terme $\frac{15}{24}$. Elle ne contiendra par suite aucun terme $\frac{13}{81}$ ou $\frac{4}{27}$.

Troisième cas: *Σ contient un terme $\frac{65}{96}$.*

S'il était seul, $\frac{\Omega}{\varphi}$ serait fractionnaire. $1 - \Sigma$ étant positif, la somme S des termes complémentaires sera exclusivement formée de termes $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$.

1^0. Si S contient un terme $\frac{p-1}{3p}$, il sera seul (sinon $1 - \Sigma$ serait négatif), et l'on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1 - \frac{65}{96} - \frac{p-1}{3p}} = \frac{96p\varphi}{32 - p}.$$

Mais Ω est divisible par $96p\varphi$ (N°. 100). Donc $p = 31$,

$$\Omega = 96.31\varphi.$$

2^0. Si S est de la forme $\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9}$, on aura $\alpha + \beta < 3$, (sinon $1 - \Sigma$ serait négatif); et par suite

$$\Omega \overline{\overline{<}} \frac{\varphi}{1 - \frac{65}{96} - \frac{2}{8}} < 96\varphi,$$

ce qui est absurde (N°. 97.).

113. Quatrième cas: Σ *contient un terme* $\frac{3}{4}\frac{3}{8}$.

Ce terme ne peut être seul, car $\frac{\Omega}{\varphi}$ serait fractionnaire. Les termes complémentaires auront la même forme qu'au cas précédent.

1°. Si S contient un terme $\frac{p-1}{3p}$, il sera seul, et l'on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{3}{4}\frac{3}{8}-\frac{p-1}{3p}} = \frac{48p\varphi}{16-p}.$$

Mais il est divisible par $48p\varphi$. On aurait donc $p=15$, valeur inadmissible (N°. 77) comme contenant le facteur 5 à une puissance impaire.

2°. Si $S=\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{9}$, on aura $\Omega<0$ si $\alpha+\beta>2$; $\Omega<48\varphi$ si $\alpha+\beta \overline{\overline{<}} 2$; l'un et l'autre est absurde.

114. Il reste à discuter les cas où Σ est exclusivement formé de termes

$$\frac{m-1}{m},\quad \frac{n-1}{2n},\quad \frac{p-1}{3p},\quad \frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{7}\frac{1}{2},\quad \frac{\alpha}{8},\quad \frac{\beta}{9}.$$

Cinquième cas: Σ *contient un terme* $\frac{m-1}{m}$.

Soit S la somme des autres termes. On aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{m-1}{m}-S} = \frac{\varphi}{-S+\frac{1}{m}}.$$

Or $\Omega > m\varphi$ (N°. 97). Donc $S>0$.

D'autre part, m étant au moins égal à 5, on aura

$$0<1-\Sigma<1-\tfrac{4}{5}-S, \quad \text{d'où} \quad S<\tfrac{1}{5}.$$

Il faudra par suite supposer $S=\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{9}$.

1°. Si $S=\frac{1}{8}$, on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{8}+\frac{1}{m}} = \frac{8m\varphi}{8-m}.$$

Mais il est divisible par $4m\varphi$ (N°. 101). Donc $8-m$ divise 2; $m=6$ ou 7.

$$\text{Si} \quad m=6, \quad \Omega=24\varphi.$$

$$\text{Si} \quad m=7, \quad \Omega=56\varphi.$$

2°. Si $S=\frac{1}{9}$, on aurait $\Omega=\frac{9m\varphi}{9-m}$. Il devrait être divisible par $3m\varphi$. Donc $9-m$ divise 3; $m=6$ ou 8.

Mais $m \gtrless 8$ (N°. 110); donc on aura

$$m = 6, \quad \Omega = 18\varphi.$$

115. Sixième cas: *Σ contient deux termes* $\frac{n-1}{2n}$, $\frac{n'-1}{2n'}$.

Soit S la somme des autres termes: on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{n-1}{2n}-\frac{n'-1}{2n'}-S} = \frac{\varphi}{-S+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n'}}.$$

Ω étant $> 2n\varphi$, (N°. 97) on aura

$$-S+\frac{1}{2n'} < 0, \quad \text{et } \textit{à fortiori} \quad S > 0.$$

D'autre part, Ω étant > 0, et n, n' au moins égaux à 5, on aura

$$-S+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{10} > 0, \quad S < \tfrac{1}{5}.$$

Donc $S = \frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{9}$.

1°. Soit $S = \frac{1}{8}$, et supposons $n' \overline{\gtrless} n$. On aura

$$0 < -\tfrac{1}{8}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n'} < -\tfrac{1}{8}+\frac{1}{n'}, \quad \text{d'où} \quad n' < 8.$$

Si $n' = 7$:

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{8}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{14}} = \frac{8.7n\varphi}{28-3n}.$$

Or il est divisible par $2n\varphi$ et $7n\varphi$ (N^os. 97 et 99); donc $28-3n$ divise 4, d'où $n = 8$ ou 9. Mais $n \gtrless 9$ (N°. 110). Donc $n = 8$, d'où

$$\Omega = 2.7.8\varphi.$$

Si $n' = 6$, $\Omega = \frac{24n\varphi}{12-n}$. Il est divisible par $6n\varphi$. Donc $12-n$ divise 4; et l'on pourra poser

$$n = 8, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 48\varphi,$$
$$n = 10, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 120\varphi,$$
$$n = 11, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 4.6.11\varphi.$$

Enfin, si $n' = 5$, $\Omega = \frac{8.5n\varphi}{20-n}$; $20-n$ divisera 4; d'où

$$n = 16, \quad \Omega = 160\varphi,$$
$$n = 18, \quad \Omega = 360\varphi,$$
$$n = 19, \quad \Omega = 8.5.19\varphi.$$

2°. Soit $S = \frac{1}{9}$, $n' \overline{\gtrless} n$. On aura $n' < 9$.

Si $n' = 8$, $\Omega = \frac{18.8n\varphi}{72-7n}$. Or il est divisible par $2n\varphi$, $nn'\varphi$, $3n\varphi$ (Nos. 97 et 99). Donc $72-7n$ divise 6; d'où

$$n = 10, \quad \Omega = 9.8.10\varphi.$$

Si $n' = 7$, $\Omega = \frac{18.7n\varphi}{63-5n}$; $63-5n$ divisera 6; d'où

$$n = 12, \quad \Omega = 6.7.12\varphi.$$

Si $n' = 6$, $\Omega = \frac{36n\varphi}{18-n}$; et $18-n$ divise 6; d'où les solutions

$$n = 12, \quad \Omega = 72\varphi,$$
$$n = 15, \quad \Omega = 180\varphi,$$
$$n = 16, \quad \Omega = 18.16\varphi,$$
$$n = 17, \quad \Omega = 36.17\varphi.$$

Enfin, si $n' = 5$, $\Omega = \frac{18.5n\varphi}{45-n}$; et comme il est divisible par $2n\varphi$, $nn'\varphi$, $3n\varphi$, $45-n$ divisera 3; d'où les solutions

$$n = 42, \quad \Omega = 6.5.42\varphi,$$
$$n = 44, \quad \Omega = 18.5.44\varphi.$$

116. Septième cas: *Σ contient un seul terme de l'espèce $\frac{n-1}{2n}$, et deux termes $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{p'-1}{3p'}$.*

La somme de ces termes étant $\overline{\gtrless}\, \frac{4}{10}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$, on aurait $1-\Sigma < 0$, si Σ contenait un autre terme, lequel serait au moins égal à $\frac{1}{9}$.

Ces termes étant seuls, on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{n-1}{2n}-\frac{p-1}{3p}-\frac{p'-1}{3p'}} = \frac{\varphi}{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}},$$

p et p' étant $\overline{\gtrless}\, 7$, Ω serait < 0 si n était $\overline{\gtrless}\, 7$.

1°. Soit donc $n = 6$. On aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{12}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}}.$$

Soit $p' \overline{\gtrless}\, p$; Ω serait négatif si p' était > 8; donc, vu les restrictions imposées à p' (No. 110), on aura $p' = 7$, d'où

$$\Omega = \frac{3.28p\varphi}{28-3p},$$

$28-3p$ devra diviser 4; et comme $p \gtrless 8$, il faudra poser

$$p=9, \quad \Omega = 3.28.9\varphi.$$

2°. Soit $n=5$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{15}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}}.$$

Si $p' \overline{\gtrless} p$, on aura $p'<10$, d'où $p'=7$ ou 9.

Soit d'abord $p'=7$, d'où $\Omega = \frac{105 p\varphi}{35-2p}$. Il doit être divisible par $2n\varphi$, $3p\varphi$, $np\varphi$, $pp'\varphi$. Donc p doit être pair, et $35-2p$ se réduire à l'unité; ce qui est contradictoire.

Soit enfin $p'=9$, d'où $\Omega = \frac{3.45 p\varphi}{45-4p}$; p devra être pair, et $45-4p$ divisera 3; ce qui est contradictoire.

117. Huitième cas: *Σ contient un seul terme $\frac{n-1}{2n}$, et un seul terme $\frac{p-1}{3p}$.*

Soit S la somme des autres termes; on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{n-1}{2n}-\frac{p-1}{3p}-S} = \frac{\varphi}{\frac{1}{6}-S+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3p}}.$$

Comme $n \overline{\gtrless} 5$, $p \overline{\gtrless} 7$, il faudra, pour que Ω soit positif, qu'on ait

$$\tfrac{1}{6}-S+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{21}>0, \quad \text{d'où} \quad S<\tfrac{76}{210}.$$

On a d'autre part $\Omega > 2n\varphi$, d'où $S>\frac{1}{6}$.

S étant composé de termes $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$ (un terme $\frac{11}{12}$ entraînant d'ailleurs l'existence d'un terme $\frac{3}{8}$) ne pourra satisfaire aux deux inégalités ci-dessus que s'il est égal à $\frac{2}{8}$, à $\frac{2}{9}$ ou à $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$.

1°. Soit d'abord $S=\frac{2}{8}$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{12}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3p}}.$$

Ω étant >0 et $p \overline{\gtrless} 7$, on aura

$$-\tfrac{1}{12}+\frac{1}{2n}+\tfrac{1}{21}>0, \quad \text{d'où} \quad n<14.$$

Si $n=13$, $\Omega = \frac{12.13 p\varphi}{52-7p}$; et comme il est divisible par $3p\varphi$, $np\varphi$, $2p\varphi$ (Nos. 99 et 101), $52-7p$ devrait diviser 2, ce qui est absurde.

Si $n=12$, $\Omega=\frac{24p\varphi}{8-p}$; $8-p$ divisera 2; donc $p=7$.

$$\Omega = 24.7\varphi.$$

Enfin, si $n \overline{\gtrless} 11$, Ω sera négatif dès que p sera égal à 9; donc $p=7$, d'où $\Omega=\frac{28n\varphi}{14-n}$. Il est divisible par $pn\varphi$. Donc $14-n$ divise 4; d'où $n=10$, $\Omega=280\varphi$; solution inadmissible, Ω devant être divisible par $3p\varphi$.

2°. Soit $S=\frac{2}{9}$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{18}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3p}}$$

p n'ayant de facteurs premiers $3i-1$ qu'à des puissances paires, sera l'un des nombres 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, 31, ...

Si $p=7$, il viendra $\Omega=\frac{126n\varphi}{63-n}$; et $63-n$ divisera 3; d'où les solutions

$$n=60, \quad \Omega=42.60\varphi,$$
$$n=62, \quad \Omega=126.62\varphi.$$

Si $p=9$, $\Omega=\frac{54n\varphi}{27-n}$; et $27-n$ divisera 3; donc $n=24$, $\Omega=54.8\varphi$, ou $n=26$, $\Omega=54.26\varphi$. Mais ces solutions sont absurdes, Ω devant être divisible par $3p\varphi$.

Si $p=12$, $\Omega=\frac{36n\varphi}{18-n}$; $18-n$ divisera 3; donc

$$n=15, \quad \Omega=12\,15\varphi$$

ou

$$n=17, \quad \Omega=36.17\varphi.$$

Si $p=13$, $\Omega=\frac{2.3.39n\varphi}{3.39-7n}$; et $3.39-7n$ diviserait 3, ce qui est absurde.

Si $p=16$, $\Omega=\frac{144n\varphi}{72-5n}$; et $72-5n$ diviserait 3, ce qui est absurde.

Soit enfin $p \overline{\gtrless} 19$, on aura $n<14$; sinon Ω serait négatif.

Posons d'abord $n=13$. $\Omega=\frac{9.13p\varphi}{39-2p}$; p devra être pair, et $39-2p$ diviser 3; donc $p=18$, solution inadmissible.

Si $n=12$, $\Omega=\frac{72p\varphi}{24-p}$; $24-p$ divisera 6. Donc $p=18$, 21, 22 ou 23. La solution $p=21$, seule admissible pour p, donnera

$$\Omega = 72.7\varphi.$$

Si $n=11$, $\Omega=\frac{99p\varphi}{33-p}$; et $33-p$ divisera 3; donc $p=30$ ou 32, solutions inadmissibles.

Si $n=10$, $\Omega=\frac{180p\varphi}{60-p}$; $60-p$ divisera 6; donc $p=54$, 57, 58 ou 59. La solution $p=57$, seule admissible, donnera

$$\Omega = 60.57\varphi.$$

Enfin si n était <10, on aurait $\Omega \overline{\overline{<}} 3p\varphi$, ce qui est impossible.

3°. Soit $S=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{5}{72}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3p}}.$$

Si $p=7$, $\Omega=\frac{7.72n\varphi}{7.36-11n}$, et $7.36-11n$ devra diviser 12, ce qui est impossible.

Si $p=9$, $\Omega=\frac{3.72n\varphi}{108-7n}$; et $108-7n$ devra diviser 12; donc $n=15$, d'où

$$\Omega = 72.15\varphi.$$

Si $p=12$, $\Omega=\frac{24n\varphi}{12-n}$; $12-n$ devra diviser 2; d'ailleurs Ω étant divisible par $3p\varphi$, n serait un multiple de 3, ce qui est contradictoire.

Si $p=16$, $\Omega=\frac{144n\varphi}{72-7n}$ et le dénominateur devrait diviser 3, ce qui est impossible.

Si $p \overline{\overline{>}} 19$ on aura $n<10$; sinon Ω serait négatif.

Soit donc $n=9$, d'où $\Omega=\frac{72p\varphi}{24-p}$; $24-p$ devra diviser 2; donc $p=22$ ou 23, solutions inacceptables.

Si $n=8$, $\Omega=\frac{144p\varphi}{48-p}$, et $48-p$ divisera 6; donc $p=42$, 45, 46 ou 47, solutions inadmissibles.

Enfin si $n \overline{\overline{<}} 7$, on aura $\Omega<3p\varphi$, ce qui est absurde.

118. Neuvième cas: *Σ contient un seul terme $\frac{n-1}{2n}$ et ne contient aucun terme $\frac{p-1}{3p}$.*

Il ne peut contenir aucun terme $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$; car même dans le cas le plus favorable, où $n=5$, $q=9$, $1-\Sigma$ serait <0.

On aura donc

$$\Sigma = \frac{n-1}{2n}+\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{9}+\tfrac{1}{12}\gamma.$$

1⁰. Soit d'abord $\gamma=0$. On aura

$$\Omega = \frac{72n\varphi}{36-(9\alpha+8\beta-36)n}$$

n étant $\overline{\gtrless} 5$, et $\Omega>0$ et $>2n\varphi$, $9\alpha+8\beta-36$ devra être >0 et <8. On aura donc

$$\alpha=3,\ \beta=2,\quad \text{d'où}\quad \Omega=\frac{72n\varphi}{36-7n},$$

$$\alpha=2,\ \beta=3,\quad \text{d'où}\quad \Omega=\frac{72n\varphi}{36-6n},$$

$$\alpha=1,\ \beta=4,\quad \text{d'où}\quad \Omega=\frac{72n\varphi}{36-5n},$$

ou enfin

$$\alpha=0,\ \beta=5,\quad \Omega=\frac{72n\varphi}{36-4n}.$$

D'ailleurs Ω étant divisible par $2n\varphi$ et $3n\varphi$, son dénominateur divisera 12, ce qui donnera les solutions suivantes

$$\alpha=3,\ \beta=2,\ n=5,\quad \Omega=72.5\varphi,$$
$$\alpha=2,\ \beta=3,\ n=5,\quad \Omega=60\varphi,$$
$$\alpha=1,\ \beta=4,\ n=6,\quad \Omega=72\varphi,$$
$$\alpha=1,\ \beta=4,\ n=7,\quad \Omega=72.7\varphi,$$
$$\alpha=0,\ \beta=5,\ n=6,\quad \Omega=36\varphi,$$
$$\alpha=0,\ \beta=5,\ n=8,\quad \Omega=72.2\varphi.$$

2⁰. Soit $\gamma>0$, ce qui entraîne forcément $\alpha\overline{\gtrless}2$.

Si $\gamma>2$, Ω sera négatif. De même si $\gamma=2$, à moins qu'on n'ait $\alpha=2$, $\beta=0$. On trouvera dans ce cas

$$\Omega = \frac{72n\varphi}{36-4n}$$

et Ω étant divisible par $12n\varphi$, $36-4n$ devrait diviser 6, ce qui est absurde.

Si $\gamma=1$, il faudra, pour que Ω soit >0 et $>2n\varphi$, qu'on ait $\alpha=3$, $\beta=0$, ou $\alpha=2$, $\beta=1$.

On aura dans le premier cas

$$\Omega = \frac{72n\varphi}{36-2n}$$

et comme il est divisible par $12n$ et par 72, n devra être pair, et $36-2n$ diviser 6, ce qui est contradictoire.

Enfin si $\alpha=2$, $\beta=1$, on aura

$$\Omega = \frac{72n\varphi}{36-n}$$

et $36-n$ devant diviser 6, on aura les solutions

$$\begin{aligned} n &= 30, \quad \Omega = 12.30\varphi, \\ n &= 33, \quad \Omega = 24.33\varphi, \\ n &= 34, \quad \Omega = 36.34\varphi, \\ n &= 35, \quad \Omega = 72.35\varphi. \end{aligned}$$

119. Supposons maintenant Σ exclusivement formé de termes $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$, $\frac{1}{12}$.

Dixième cas: *Σ contient trois termes* $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{p'-1}{3p'}$, $\frac{p''-1}{3p''}$.

Soit S la somme des autres termes. On aura

$$1-\frac{p-1}{3p}-\frac{p'-1}{3p'}-\frac{p''-1}{3p''}-S>0$$

et comme p, p', p'' sont $\gtreqless 7$, on aura *à fortiori*

$$1-3.\tfrac{2}{7}-S>0, \quad \text{d'où} \quad S<\tfrac{1}{7}.$$

D'autre part, $S>0$. Car si l'on avait $S=0$, on aurait

$$\Omega = \frac{\varphi}{\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}+\frac{1}{3p''}} < \frac{\varphi}{3p} < 3p\varphi,$$

ce qui est absurde.

On aura donc $S=\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{9}$.

1°. Si $S=\frac{1}{8}$, on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{8}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}+\frac{1}{3p''}}.$$

Soit $p''\gtreqless p'\gtreqless p$. On aura $-\frac{1}{8}+3.\frac{1}{3p''}>0$, d'où $p''<8$.

Donc

$$p''=7,\quad \Omega=\frac{\varphi}{-\frac{13}{168}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}}.$$

On aura $-\frac{13}{168}+\frac{2}{3p'}>0$, d'où $p'<9$.

Donc

$$p'=7,\quad \text{et}\quad \Omega=\frac{\varphi}{-\frac{5}{168}+\frac{1}{3p}}=\frac{168p\varphi}{56-5p}.$$

Mais Ω doit être divisible par $7p\varphi$ et $3p\varphi$. Donc $56-5p$ divisera 8; ce qui est impossible.

2⁰. Si $S=\frac{1}{9}$, on aura

$$\Omega=\frac{\varphi}{-\frac{1}{9}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}+\frac{1}{3p''}}.$$

Soit encore $p''\overline{\overline{<}}p'\overline{\overline{<}}p$. On trouvera $p''<9$, d'où

$$p''=7,\quad \Omega=\frac{\varphi}{-\frac{4}{63}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}}.$$

On trouvera ensuite $p'<\frac{2.63}{12}$, d'où $p'=7$ ou 9. Si $p'=7$, $\Omega=\frac{63p\varphi}{21-p}$; et comme il est divisible par $3p\varphi$ et $7p\varphi$, $21-p$ divisera 3. D'où $p=18$ ou 20, solutions inacceptables.

Si $p'=9$, $\Omega=\frac{3.63p\varphi}{63-5p}$; et comme il est divisible par $7p\varphi$ et $9p\varphi$, $63-5p$ divisera 3; on aura donc $p=12$; d'où

$$\Omega = 63.12\varphi.$$

120. Onzième cas: *Σ ne contient que deux termes de l'espèce $\frac{p-1}{3p}$.*

Chacun de ces deux termes étant au moins égal à $\frac{2}{7}$, la somme S des termes restants sera $<\frac{3}{7}$. D'autre part, elle sera $>\frac{1}{3}$, sans quoi on aurait

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{p-1}{3p}-\frac{p'-1}{3p'}-S}<3p\varphi.$$

Pour satisfaire à ces inégalités, il faudra qu'on ait

$$S = \frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{9}+\frac{1}{12}\gamma.$$

1°. Si $\gamma > 0$, d'où $\alpha \geqq 2$, ces inégalités ne pourront être satisfaites qu'en posant

$$\alpha = 2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1$$

d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{5}{72} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p'}}.$$

Soit $p' \leqq p$. On aura $-\frac{5}{72} + \frac{2}{3p'} > 0$, d'où $p' < \frac{144}{15}$. Donc $p' = 7$, ou 9.

Si $p' = 7$, $\Omega = \frac{7.72 p\varphi}{7.24 - 11p}$. D'ailleurs il est divisible par $7p\varphi$ et $12p\varphi$. Donc $7.24 - 11p$ divise 6; d'où $p = 15$, solution inacceptable.

Si $p' = 9$, $\Omega = \frac{3.72 p\varphi}{72 - 7p}$; il est d'ailleurs divisible par $9p\varphi$ et $12p\varphi$. Donc $72 - 7p$ divise 6; d'où $p = 10$, solution inacceptable.

2°. Si $\gamma = 0$, les inégalités $S > \frac{1}{3} < \frac{3}{7}$ donnent

$$\beta = 2, \quad \alpha = 1 \quad \text{ou} \quad \beta = 1, \quad \alpha = 2 \quad \text{ou} \quad \beta = 0, \quad \alpha = 3.$$

Soit d'abord $\beta = 2$, $\alpha = 1$. On aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{72} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p'}}.$$

Soit $p' \leqq p$; on aura $-\frac{1}{72} + \frac{2}{3p'} > 0$, d'où $p' < 48$. D'autre part $p' > 24$, sans quoi on aurait $\Omega \leqq 3p\varphi$, ce qui est inadmissible.

On pourra donc poser $p' = 25, 27, 28, 31, 36, 37, 39, 43$.

Si $p' = 25$, on aura $\Omega = \frac{1800 p\varphi}{600 - p}$ et comme Ω est divisible par $25p\varphi$, $3p\varphi$ et $4p\varphi$, $600 - p$ divisera 6; ce qui fournit comme seule solution acceptable la suivante:

$$p = 597, \quad \Omega = 600.597\varphi.$$

Si $p' = 27$, $\Omega = \frac{9.72 p\varphi}{216 - p}$; et $216 - p$ divisera 6; ce qui ne fournit pour p aucune valeur acceptable.

Si $p' = 28$, $\Omega = \frac{7.72 p\varphi}{168 - p}$; et $168 - p$ divisera 6; ce qui ne donne pour p aucune valeur acceptable.

Si $p' = 31$, $\Omega = \frac{72.31 p\varphi}{24.31 - 7p}$, et $24.31 - 7p$ divisera 6; ce qui ne donne aucune valeur acceptable.

Si $p' = 36$, $\Omega = \frac{6.36 p\varphi}{72-p}$; $72-p$ divise 6; ce qui ne donne aucune valeur acceptable.

Si $p' = 37$, $\Omega = \frac{37.72 p\varphi}{37.24-13p}$; $37.24-13p$ divise 6; ce qui ne donne aucune valeur acceptable.

Si $p' = 39$, $\Omega = \frac{13.72 p\varphi}{13.24-5p}$; $23.24-5p$ divisera 6; ce qui ne donne aucune valeur acceptable.

Si $p' = 43$, $\Omega = \frac{43.72 p\varphi}{43.24-19p}$; et le dénominateur divisera 24; ce qui ne donne aucune valeur acceptable.

3⁰. Soit $\gamma = 0$, $\beta = 1$, $\alpha = 2$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{36}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}}.$$

Si $p' \leqq p$, on aura $-\frac{1}{36}+\frac{2}{3p'} > 0$, $p' < 24$. D'autre part $p' > 12$; sinon on aurait $\Omega \leqq 3p\varphi$. Donc $p' = 13$, 16, 19 ou 21.

Si $p' = 13$, $\Omega = \frac{13.36 p\varphi}{13.12-p}$; le dénominateur divisera 6; ce qui ne donnera pour p aucune valeur admissible.

Si $p' = 16$, $\Omega = \frac{144 p\varphi}{48-p}$; le dénominateur divisera 3; ce qui ne donne pour p aucune valeur admissible.

Si $p' = 19$, $\Omega = \frac{19.36 p\varphi}{19.12-7p}$; le dénominateur doit diviser 6; ce qui ne donne aucune valeur admissible.

Si $p' = 21$, $\Omega = \frac{84 p\varphi}{28-p}$; et $28-p$ divisera 2. On pourra poser

$$p = 27, \quad \Omega = 84.27\varphi.$$

4⁰. Soit enfin $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = 3$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{24}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}}.$$

Si $p' \leqq p$, on aura $p' < 16 > 8$. D'où $p' = 9$, 12 ou 13.

Si $p' = 9$, $\Omega = \frac{9.24 p\varphi}{72-p}$; et $72-p$ divisera 6; ce qui ne donnera aucune solution acceptable.

Si $p' = 12$, $\Omega = \frac{72 p \varphi}{24 - p}$, et $24 - p$ divisera 6; d'où l'on déduit $p = 21$, $\Omega = 24.21 \varphi$. Mais on doit rejeter cette solution, Ω devant être divisible par $4 p' \varphi$.

Enfin, si $p' = 13$, $\Omega = \frac{13.24 p \varphi}{104 - 5p}$; et $104 - 5p$ divisera 8; ce qui ne donne aucune solution admissible.

121. Douzième cas: *Σ contient un seul terme de l'espèce* $\frac{p-1}{3p}$.

Soit S la somme des autres termes; on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1 - \frac{p-1}{3p} - S} = \frac{\varphi}{\frac{2}{3} - S + \frac{1}{3p}},$$

et comme $p \geqq 7$ et $\Omega > 0$, on aura $S < \frac{5}{7}$. D'autre part $\Omega > 3 p \varphi$; d'où $S > \frac{2}{3}$.

S ne peut contenir aucun terme $\frac{q-1}{6q} + \frac{1}{2}$; car s'il était seul, S serait $< \frac{2}{3}$; et si S contenait un autre terme, il serait $> \frac{5}{7}$.

On aura donc $S = \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9} + \frac{1}{12} \gamma$.

1°. Si $\gamma = 0$, il faudra, pour satisfaire aux inégalités ci-dessus, poser $\beta = 5$, $\alpha = 1$, ou $\beta = 4$, $\alpha = 2$ ou $\beta = 3 = \alpha$.

Si $\beta = 5$, $\alpha = 1$, on aura $\Omega = \frac{72 p \varphi}{24 - p}$; et $24 - p$ divisera 6; ce qui donnera une seule solution acceptable

$$p = 21, \quad \Omega = 7.72 \varphi.$$

Si $\beta = 4$, $\alpha = 2$, on aura $\Omega = \frac{36 p \varphi}{12 - p}$, et $12 - p$ divisera 6; d'où

$$p = 9, \quad \Omega = 36.3 \varphi.$$

Si $\beta = 3$, $\alpha = 3$, on aura $\Omega = \frac{24 p \varphi}{8 - p}$, d'où $p = 7$, $\Omega = 24.7 \varphi$, solution absurde, Ω devant être divisible par 9φ.

2°. Si $\gamma = 1$, d'où $\alpha \geqq 2$, les inégalités $S > \frac{2}{3} < \frac{5}{7}$ seront contradictoires.

3°. Si $\gamma = 2$, ces inégalités donneront $\alpha = 3$, $\Omega = \frac{72 p \varphi}{24 - p}$; et $24 - p$ diviserait 6, d'où $p = 21$, $\Omega = 7.72 \varphi$; solution absurde, car Ω devrait être divisible par 12.12φ.

4°. Si $\gamma > 2$, on aura nécessairement $\gamma = 3$, $\alpha = 2$, $\Omega = \frac{24 p \varphi}{8 - p}$, d'où $p = 7$, $\Omega = 24.7 \varphi$; solution à rejeter, Ω devant être divisible par 12.12φ.

122. Il reste à discuter les cas où Σ ne contient que des termes $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$, $\frac{1}{72}$. Il ne peut évidemment contenir plus d'un terme de la première forme.

Treizième cas: *Σ contient un terme* $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$.

On aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{\frac{1}{3}-S+\frac{1}{6q}},$$

et comme $q \gtreqless 9$, on aura

$$S < \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{54} < \tfrac{19}{54}.$$

D'autre part, Ω étant $> 6q\varphi$, on aura

$$S > \tfrac{1}{3}.$$

S ne peut contenir de terme $\frac{1}{72}$; car il serait accompagné d'un terme $\frac{1}{4}$, et S serait $> \frac{19}{54}$; donc S sera de la forme $\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{9}$; et l'on voit aisément qu'on doit avoir $\alpha = 1$, $\beta = 2$,

$$\Omega = \frac{72q\varphi}{12-q},$$

$12-q$ divisant 12; d'où

$$q = 9, \quad \Omega = 72.3\varphi.$$

123. Quatorzième cas: *Σ ne contient que des termes* $\frac{1}{72}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$.

On aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{\alpha}{8}-\frac{\beta}{9}-\frac{1}{72}\gamma} = \frac{72\varphi}{r},$$

r étant un entier.

Donc Ω sera un diviseur de 72φ. D'ailleurs on aura $\gamma = 0$. Sans quoi H se confondrait avec le groupe K d'ordre 72φ, formé par celles de ses substitutions qui sont permutables à celles du faisceau F d'où provient le terme $\frac{1}{72}$; ce serait donc un des groupes déjà étudiés.

124. Les solutions obtenues peuvent être récapitulées dans le tableau suivant:

(I.)	$\Sigma = \frac{15}{24}+\frac{4}{27}+\frac{2}{9}$,		$\Omega = 8.27\varphi$.
(II.)	$\Sigma = \frac{15}{24}+\frac{2}{8}+\frac{1}{9}$,		$\Omega = 72\varphi$.
(III.)	$\Sigma = \frac{65}{96}+\frac{p-1}{3p}$,	$p = 31$,	$\Omega = 96.31\varphi$.
(IV.)	$\Sigma = \frac{m-1}{m}+\frac{1}{8}$,	$m = 6$,	$\Omega = 24\varphi$.

(V.)	$\Sigma=\frac{m-1}{m}+\frac{1}{8}$,	$m=7$,	$\Omega=56\varphi$.
(VI.)	$\Sigma=\frac{m-1}{m}+\frac{1}{9}$,	$m=6$,	$\Omega=18\varphi$.
(VII.)	$\Sigma=\frac{n-1}{2n}+\frac{n'-1}{2n'}+\frac{1}{8}$,	$n'=7,\ n=8$,	$\Omega=2.7.8\varphi$.
(VIII.)	id.	$n'=6,\ n=8$,	$\Omega=48\varphi$.
(IX.)	id.	$n'=6,\ n=10$,	$\Omega=120\varphi$.
(X.)	id.	$n'=6,\ n=11$,	$\Omega=4.6.11\varphi$.
(XI.)	id.	$n'=5,\ n=16$,	$\Omega=160\varphi$.
(XII.)	id.	$n'=5,\ n=18$,	$\Omega=360\varphi$.
(XIII.)	id.	$n'=5,\ n=19$,	$\Omega=8.5.19\varphi$.
(XIV.)	$\Sigma=\frac{n-1}{2n}+\frac{n'-1}{2n'}+\frac{1}{9}$,	$n'=8,\ n=10$,	$\Omega=9.8.10\varphi$.
(XV.)	id.	$n'=7,\ n=12$,	$\Omega=6.7.12\varphi$.
(XVI.)	id.	$n'=6,\ n=12$,	$\Omega=72\varphi$.
(XVII.)	id.	$n'=6,\ n=15$,	$\Omega=180\varphi$.
(XVIII.)	id.	$n'=6,\ n=16$,	$\Omega=18.16\varphi$.
(XIX.)	id.	$n'=6,\ n=17$,	$\Omega=36.17\varphi$.
(XX.)	id.	$n'=5,\ n=42$,	$\Omega=6.5.42\varphi$.
(XXI.)	id.	$n'=5,\ n=44$,	$\Omega=18.5.44\varphi$.
(XXII.)	$\Sigma=\frac{n-1}{2n}+\frac{p-1}{3p}+\frac{p'-1}{3p'}$,	$n=6,\ p'=7,\ p=9$,	$\Omega=3.28.9\varphi$.
(XXIII.)	$\Sigma=\frac{n-1}{2n}+\frac{p-1}{3p}+\frac{2}{8}$,	$n=12,\ p=7$,	$\Omega=24.7\varphi$.
(XXIV.)	$\Sigma=\frac{n-1}{2n}+\frac{p-1}{3p}+\frac{2}{9}$,	$p=7,\ n=60$,	$\Omega=42.60\varphi$.
(XXV.)	id.	$p=7,\ n=62$,	$\Omega=126.62\varphi$.
(XXVI.)	id.	$p=12,\ n=15$,	$\Omega=12.15\varphi$.
(XXVII.)	id.	$p=12,\ n=17$,	$\Omega=36.17\varphi$.
(XXVIII.)	id.	$p=21,\ n=12$,	$\Omega=72.7\varphi$.
(XXIX.)	id.	$p=57,\ n=10$,	$\Omega=60.57\varphi$.
(XXX.)	$\Sigma=\frac{n-1}{2n}+\frac{p-1}{3p}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$,	$p=9,\ n=15$,	$\Omega=72.15\varphi$.
(XXXI.)	$\Sigma=\frac{n-1}{2n}+\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{9}$,	$\alpha=3,\ \beta=2,\ n=5$,	$\Omega=72.5\varphi$.
(XXXII.)	id.	$\alpha=2,\ \beta=3,\ n=5$,	$\Omega=60\varphi$.
(XXXIII.)	id.	$\alpha=1,\ \beta=4,\ n=6$,	$\Omega=72\varphi$.
(XXXIV.)	id.	$\alpha=1,\ \beta=4,\ n=7$,	$\Omega=72.7\varphi$.
(XXXV.)	id.	$\alpha=0,\ \beta=5,\ n=6$,	$\Omega=36\varphi$.
(XXXVI.)	id.	$\alpha=0,\ \beta=5,\ n=8$,	$\Omega=72.2\varphi$.

(XXXVII.) $\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{2}{8} + \frac{1}{9} + \frac{11}{12}, \quad n = 30, \quad \Omega = 12.30\varphi.$

(XXXVIII.) id. $\quad n = 33, \quad \Omega = 24.33\varphi.$

(XXXIX.) id. $\quad n = 34, \quad \Omega = 36.34\varphi.$

(XL.) id. $\quad n = 35, \quad \Omega = 72.35\varphi.$

(XLI.) $\Sigma = \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'} + \frac{p''-1}{3p''} + \frac{1}{9}, \quad p''=7, \ p'=9, \ p=12, \quad \Omega = 63.12\varphi.$

(XLII.) $\Sigma = \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9}, \quad p'=25, \ p=597, \quad \Omega = 600.597\varphi.$

(XLIII.) $\Sigma = \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'} + \frac{2}{8} + \frac{1}{9}, \quad p'=21, \ p=27, \quad \Omega = 84.27\varphi.$

(XLIV.) $\Sigma = \frac{p-1}{3p} + \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9}, \quad \alpha = 1, \ \beta = 5, \ p = 21, \quad \Omega = 7.72\varphi.$

(XLV.) id. $\quad \alpha = 2, \ \beta = 4, \ p = 9, \quad \Omega = 36.3\varphi.$

(XLVI.) $\Sigma = \frac{q-1}{6q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9}, \quad q = 9, \quad \Omega = 72.3\varphi.$

(XLVII.) $\Sigma = \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9}, \quad \Omega =$ diviseur de $72\varphi.$

§. 3. Discussion des solutions. — Construction des groupes d'ordre fini.

125. Il nous reste à discerner, parmi les solutions précédentes, celles qui donnent lieu effectivement à des groupes d'ordre fini, et à construire ces groupes.

Nous distinguerons à cet effet, les groupes à construire en groupes *simples* et groupes *composés.*

Nous dirons qu'un groupe H, d'ordre $M\varphi$, est composé, s'il contient un groupe moindre h, d'ordre $m\varphi$ (contenant lui-même Φ) et auquel ses substitutions soient permutables.

Cette définition établie, nous procéderons de la manière suivante:

Nous construirons d'abord les divers groupes simples H, d'ordre fini; nous les joindrons aux groupes du No. 62.

Nous chercherons ensuite les groupes qui contiennent les précédents, et sont permutables à leurs substitutions, ce qui nous donnera une première classe de groupes composés.

Nous formerons ensuite les groupes qui contiennent ceux-ci et sont permutables à leurs substitutions; et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous n'obtenions plus de nouveaux groupes.

126. Soit H un groupe simple et d'ordre $M\varphi$. Une fonction linéaire fractionnaire à coefficients indéterminés:

$$\frac{ax+by+cz}{a'x+b'y+c'z}$$

étant évidemment invariable par les substitutions de Φ, prendra M valeurs distinctes par les substitutions de H. Elle dépendra donc d'une équation $X=0$ de degré M. Chaque substitution de H permutera ses racines les unes dans les autres, et correspondra à une substitution opérée entre ces racines. Ces dernières substitutions formeront évidemment un groupe H' d'ordre M, et isomorphe à H.

Si le groupe H est simple, H' sera lui-même simple, c'est-à-dire ne contiendra aucun groupe moindre permutable à ses substitutions. Car s'il contenait un semblable groupe J' d'ordre m, le groupe J d'ordre $m\varphi$, formé par les substitutions de H qui correspondent à celles de J', serait évidemment permutable aux substitutions de H.

Cela posé, soient I un groupe d'ordre $N\varphi$ contenu dans H; I' le groupe d'ordre N formé par les substitutions correspondantes de H'; une fonction des racines de X, invariable par les substitutions de I' et variable par toute autre substitution dépendra, comme on sait, d'une équation réduite Y de dégré $\frac{M}{N}$, et dont le groupe H'', isomorphe à H', sera simple comme lui, et aura pour ordre M.

127. On peut déduire immédiatement de ces remarques l'impossibilité de l'existence de groupes simples correspondants à la plupart des solutions du tableau précédent.

Théorème. *Il n'existe aucun groupe simple d'ordre* $8.27\varphi = 3.72\varphi$.

Le groupe correspondant H' serait en effet d'ordre 8.27. Il contiendrait un groupe I' d'ordre 27 (*Sylow*). La réduite correspondante Y aurait pour degré 8; son groupe H'' aurait pour ordre 8.27, ce qui est absurde, cet ordre devant diviser $1.2.3\ldots 8$.

128. Théorème. *Il n'existe aucun groupe simple d'ordre* 72φ.

Car H', ayant pour ordre 72, contiendrait un groupe I' d'ordre 9. La réduite Y aura pour degré 8; son groupe H'' serait simple, et d'ordre 8.9; ce qu'on sait être impossible, d'après l'énumération des groupes de 8 lettres faite par divers géomètres.

129. Théorème. *Il n'existe aucun groupe simple d'ordre* 6φ, 12φ, 24φ, 56φ, 18φ, $2.7.8\varphi$, 48φ, 160φ, 18.16φ, 36φ, 18φ, 36.3φ.

On raisonnera de même, en prenant pour I' le groupe d'ordre 3, 4, 8, 8, 9, 16, 16, 32, 32, 9, 9 ou 27 contenu dans H'.

130. Théorème. *La solution* (IX.) *ne peut donner de groupe simple.*

En effet H contient un groupe d'ordre $2n\varphi = 20\varphi$; donc H' contiendra un groupe I' d'ordre 20. La réduite Y sera de degré 6; et son groupe H'' contiendrait un faisceau F'' de 10 substitutions échangeables entre elles, correspondantes à celles du faisceau F d'ordre $n\varphi$ que contient H; F'' devrait contenir une substitution d'ordre 5, et une substitution binaire qui lui fût échangeable, ce qui est évidemment absurde dans un groupe de 6 lettres.

131. Théorème. *La solution* (X.) *ne peut donner de groupe simple.*

Car H contient un groupe d'ordre 2.11φ; H' un groupe d'ordre 2.11. La réduite Y serait de degré 12; et l'on sait qu'il n'existe aucun groupe entre 12 lettres et d'ordre 12.11.2.

132. Théorème. *Les solutions* (XVII.) *et* (XXVI.) *ne donnent aucun groupe simple.*

Car on aurait une réduite Y de degré 6 et dont le groupe contiendrait un faisceau F'' de 15 substitutions échangeables entre elles, ce qui est absurde (N°. 130.)

133. Théorème. *La solution* (XX.) *ne donne aucun groupe simple.*

Car H' contient un groupe I' d'ordre 2.42; la réduite Y sera de degré 15, et son groupe aurait pour ordre 15.2.42. Il contiendrait un faisceau F'' de 42 substitutions échangeables entre elles, dont l'une S d'ordre 7 et à 2 cycles (s'il n'y en avait qu'un, F' contiendrait le groupe alterné et n'aurait pas pour ordre 15.2.42). Or les substitutions entre 15 lettres échangeables à une telle substitution S sont en nombre $2.7 < 42$.

134. Théorème. *La solution* (XXIII.) *ne donne aucun groupe simple.*

Car H' contenant un groupe d'ordre 2.12 on aurait une réduite Y de degré 7 et dont le groupe H'' aurait pour ordre 24.7. Or le seul groupe entre 7 lettres qui soit de cet ordre est le groupe linéaire

$$\begin{vmatrix} x & ax+by+cz \\ y & a'x+b'y+c'z \\ z & a''x+b''y+c''z \end{vmatrix} \quad \text{mod. } 2$$

lequel ne contient pas de faisceau F' de 12 substitutions échangeables entre elles, comme cela devrait être.

135. Théorème. *Les solutions* (XXVIII.) *et* (XLIV.) *ne donnent aucun groupe simple.*

Car on aurait une réduite Y de degré 8, dont le groupe aurait pour ordre 72.7, ce qui n'est pas possible.

136. Théorème. *Les solutions* (XXIX.), (XXXVIII.), (XXXIX.), (XLII.) *ne donnent aucun groupe simple.*

Prenons pour exemple la solution (XXIX.).

On aurait une réduite d'ordre 20, dont le groupe H'' contiendrait un faisceau F'' formé de $57 = 3.19$ substitutions échangeables entre elles. L'une d'elles serait circulaire et d'ordre 19. Mais les substitutions échangeables à une telle substitution dans un groupe de 20 lettres se réduisent à ses puissances, en nombre $19 < 57$.

137. Théorème. *La solution* (XXXVII.) *ne donne aucun groupe simple.*

Car on aurait une réduite d'ordre 6, dont le groupe, ayant pour ordre 360, serait alterné. Il devrait contenir un faisceau de 30 substitutions échangeables entre elles, ce qui est évidemment impossible.

138. Théorème. *Il n'existe aucun groupe simple d'ordre* 9φ, 8φ, *ou* 4φ.

Car le groupe correspondant H', d'ordre 9, 8 ou 4, ayant pour ordre une puissance d'un nombre premier, ne peut être simple (*Sylow*, Mathematische Annalen T. V).

139. Théorème. *La solution* (XXXVI.) *ne fournit aucun groupe simple.*

Car on aurait une réduite d'ordre 9, dont le groupe serait simple, et d'ordre 72.2. Mais il n'existe aucun semblable groupe (Comptes Rendus, 23 X^bre^ 1872).

140. Théorème. *La solution* (XIII.) *ne fournit aucun groupe simple.*

En effet H' contient un groupe d'ordre 19.2 et l'on aura une réduite Y de degré 20 et d'ordre 20.19.2. Son groupe H'' contient un groupe d'ordre 19.2, dérivé d'une substitution circulaire d'ordre 19 et d'une substitution binaire qui lui est permutable. Cette dernière substitution contenant 9 cycles, n'appartiendra pas au groupe alterné. Cela posé, le groupe H'' de l'équation Y sera permutable au groupe d'ordre moitié moindre formé par celles de ses substitutions qui appartiennent au groupe alterné. Il ne sera donc pas simple.

141. Théorème. *La solution* (XXV.) *ne fournit aucun groupe simple.*

On aura en effet une réduite Y de degré 63 et dont le groupe H'' devrait être simple et d'ordre 126.62. Il doit être primitif; sinon on aurait une réduite de degré diviseur de 63 et dont l'ordre ne pourrait être divisible par 31. D'ailleurs il doit contenir un faisceau F'' d'ordre 62 et dont les substitutions sont échangeables. L'une d'elles est d'ordre 31; elle aura deux cycles, sinon H'' serait 32 fois transitif (Voir notre Traité des Substitutions, Note C), et n'aurait pas pour ordre 126.62. H'' contient en outre une substitution binaire échangeable à celle-là, laquelle aura 31 cycles, et n'appartiendra pas au groupe alterné. Donc F'' ne sera pas simple.

142. Théorème. *La solution* (XL.) *ne peut donner de groupe simple.*

On aura en effet une réduite Y de degré 36, dont le groupe H'', d'ordre 72.35, contient un faisceau F'' formé de 35 substitutions échangeables entre elles, et d'une substitution binaire qui est permutable au groupe des précédentes.

F'' contient une substitution S d'ordre 7, qui aura nécessairement 5 cycles si H'' est primitif; sinon H'' contiendrait le groupe alterné (Bulletin de la Société Mathématique de France T. I, page 221). Il contient en outre une substitution T d'ordre 5 échangeable à celle-là, et qui par suite devra permuter les cinq cycles. Il contiendra ST, qui sera circulaire d'ordre 35. Il contient enfin une substitution binaire U permutable au groupe formé par les puissances de ST. U aura 17 cycles, et n'appartiendra pas au groupe alterné; donc H'' ne sera pas simple.

D'autre part, si H'' n'était pas primitif, on aurait une réduite Z, d'un degré diviseur de 36. Si ce degré était 18 ou 12, l'ordre de son groupe ne pourrait être divisible par 7 sans qu'il contînt le groupe alterné (Bulletin de la Société mathématique de France T. I, page 41). Cet ordre ne peut donc être égal à 72.35. Il en est évidemment de même si le degré de Z est < 7. Enfin si le degré de Z est 9, l'ordre de son groupe ne pourrait être divisible par 5 sans qu'il contînt le groupe alterné.

143. Théorème. *La solution* (XV.) *ne donne aucun groupe simple.*

Nous aurons en effet une réduite Y de degré 21 et d'ordre 21.12.2. Adjoignons-nous une de ses racines. L'équation Z de degré 20 qui nous reste a pour ordre 12.2. Son groupe G contient un groupe Γ d'ordre 3; et d'après la formule de *Sylow*, on aura $12.2 = 3\beta(3\alpha+1)$, 3β étant l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à Γ; mais on a $3\beta \gtreqless 12$; donc $3\beta = 12.2$, $\alpha = 0$ et le groupe Γ sera unique. Il est formé des puissances d'une substitution d'ordre 3, laquelle laissera immobiles au moins deux racines de l'équation Z. On en déduit (Traité des Substitutions N°. 399) que X n'est pas primitive. On aura donc une réduite nouvelle, ayant pour degré un diviseur de 21, et dont l'ordre ne pourra être égal à 6.7.12, comme on s'en assure aisément.

144. Théorème. *La solution* (XXIV.) *ne donne aucun groupe simple.*

On aurait en effet une réduite Y de degré 21, dont le groupe contient un faisceau F'' de 60 substitutions échangeables entre elles. L'une S de ces substitutions sera d'ordre 5, et contiendra 4 cycles si Y est primitive.

Les substitutions échangeables à S s'obtiennent en combinant ses puissances avec les permutations qu'on peut effectuer sur ces 4 cycles. Pour que F'' contînt 60 substitutions, il faudrait donc que parmi les 1.2.3.4 permutations de ces cycles on pût en trouver un groupe de 12 échangeables entre elles, ce qui est évidemment impossible.

Si Y n'était pas primitive, on aurait une autre réduite de degré 3 ou 7 dont le groupe devrait contenir un faisceau de 60 substitutions échangeables entre elles, ce qui est évidemment impossible.

145. Théorème. *Les solutions* (XIX.) *et* (XXVII.) *ne donnent aucun groupe simple.*

On aurait en effet une réduite Y de degré 18 et dont le groupe H'' aurait pour ordre 18.17.2. Celles des substitutions de F'' qui laissent une racine immobile formeront un groupe G d'ordre 17.2, dérivé d'une substitution circulaire S d'ordre 17 et d'une substitution binaire permutable à S; ses substitutions déplaceront toutes au moins 16 racines.

Cela posé, H'' contient un faisceau formé de 6 (ou 12) substitutions échangeables entre elles. Ce faisceau contiendra une substitution d'ordre 3 et une d'ordre 2, dont le produit sera une substitution T d'ordre 6.

Les cycles de T seront d'ordre 2, 3 ou 6. Mais si l'un d'eux était d'ordre 3, T^3 laisserait au moins 3 racines immobiles, et par suite en déplacerait moins de 16. Donc ils seront d'ordre 2 ou 6. Cela posé, T contiendra 3 cycles d'ordre 6; sinon T^2 ne pourrait déplacer plus de 12 racines. Mais alors T n'appartiendra pas au groupe alterné. Donc H'' ne sera pas simple.

146. Théorème. *La solution* (XII.) *ne fournit aucun groupe simple.*

On aurait en effet une réduite Y de degré 10, et d'ordre 10.18.2. En s'adjoignant une de ses racines, il resterait une équation de degré 9, dont le groupe G, d'ordre 18.2, contiendrait un groupe Γ de 18 substitutions échangeables entre elles.

Soit Δ le groupe d'ordre 9 formé par celles des substitutions de Γ qui ont pour ordre une puissance de 3. Ce groupe Δ ne pourra être exclusivement formé de substitutions déplaçant 6 racines.

En effet, supposons qu'il en fût ainsi: et soit $S = (a\,b\,c)(a'\,b'\,c')$ une des substitutions de $\varDelta$; a'', b'', c'' les trois racines restantes. $\varDelta$ contiendrait une autre substitution ternaire T, autre que les puissances de S, échangeable à S et déplaçant 6 lettres. On aurait évidemment $T = U(a''b''c'')$, U étant une puissance de l'une des deux substitutions circulaires (abc), $(a'b'c')$; et il est clair que ST ou ST^2 déplacera les 9 racines.

Cela posé, deux cas seront à distinguer: 1°. Si $\varDelta$ contient une substitution qui déplace les 9 racines, cette substitution elle-même, ou son cube, sera de la forme

$$V = (abc)(a'b'c')(a''b''c'').$$

Or les substitutions échangeables à V sont en tout en nombre 18, mais ne sont pas toutes échangeables entre elles.

2°. Si $\varDelta$ contenait une substitution circulaire ternaire, H'' contiendrait le groupe alterné, et par suite aurait un ordre supérieur à $10.18.2$; ou bien Y ne serait pas primitive, et l'on aurait une nouvelle réduite Z de degré 2 ou 5, qui ne pourrait avoir pour ordre $10.18.2$.

147. Théorème. *La solution* (XXX.) *ne peut fournir de groupe simple.*

On aurait en effet une réduite Y de degré 36 et d'ordre 36.30. Le groupe d'ordre 30 formé par celles des substitutions de H'' qui laissent une racine immobile, ayant 15 substitutions échangeables entre elles, contiendrait d'après le théorème de M. *Sylow* un seul groupe d'ordre 3. Parmi les 35 racines qui restent, 2 au moins resteraient immobiles par la substitution S d'ordre 3 dont les puissances forment ce groupe. Soit plus généralement $3k-1$ le nombre de ces racines immobiles; Y ne sera pas primitive, et ses racines se grouperont $3k$ à $3k$ en systèmes. (Traité des Substitutions N°. 399). On aura donc une nouvelle réduite Z de degré $\frac{12}{k}$, et dont le groupe devrait contenir un faisceau de 15 substitutions échangeables entre elles; ce qui est évidemment impossible, à moins qu'on n'ait $k = 1$ et que le faisceau ne contienne une substitution circulaire d'ordre 5. Mais alors Z serait elle-même non primitive, ou son groupe contiendrait le groupe alterné, et n'aurait pas pour ordre 36.30.

148. Théorème. *La solution* (XXI.) *ne peut donner de groupe simple.*

On aurait une réduite Y de degré 45 et d'ordre $45.44.2$. Celles des substitutions de H'' qui laissent une racine immobile forment un groupe Γ d'ordre 44.2 contenant un faisceau $\varDelta$ de 44 substitutions échangeables entre elles. $\varDelta$ contiendra une substitution S d'ordre 11, qui aura 4 cycles.

Car si elle en avait moins, H'' contiendrait le groupe alterné, ce qui est inadmissible, ou serait non primitif. On aurait dans ce dernier cas une nouvelle réduite, de degré diviseur de 45, et dont l'ordre ne pourra être divisible par 11 que si son degré est 15 et si son groupe contient le groupe alterné (Bulletin de la Société mathématique T. I page 41), ce qui est inadmissible.

Donc S aura 4 cycles; et $\varDelta$ sera formé de la combinaison de S avec des substitutions dont l'ordre est une puissance de 2, lesquelles, étant échangeables à S, permuteront ses cycles, et laisseront immobiles les lettres des cycles qu'elles ne déplacent pas.

Si l'une T de ces substitutions ne déplaçait que 2 cycles, elle déplacerait en tout 22 lettres et n'appartiendrait pas au groupe alterné. Donc H'' ne serait pas simple.

Donc les 43 substitutions de $\varDelta$, autres que l'unité, déplacent toutes les racines.

Or nous avons démontré (Journal de Liouville 2e série T. XVII) la proposition suivante.

Soient G un groupe transitif entre m lettres; H le groupe de degré $m-1$ formé par celles de ses substitutions qui laissent une lettre immobile; N_x le nombre des substitutions de H qui ne déplacent que x lettres; M le nombre des substitutions de G qui déplacent toutes les lettres; on aura la formule

$$M = m\left(\tfrac{1}{2}N_{m-2}+\tfrac{2}{3}N_{m-3}+\cdots+\frac{m-1}{m}N_0\right).$$

Appliquons cette formule au groupe H''. On aura $m = 45$,

$$N_{m-1}+N_{m-2}+\cdots+N_0 = 44.2.$$

On vient de voir que $N_{m-1} \gtreqless 43$. D'autre part N_0 est évidemment égal à 1. On aura donc

$$N_{m-2}+N_{m-3}+\cdots+N_1 \gtreqless 44$$

et par suite

$$\begin{aligned} M &= 45\,|\tfrac{1}{2}N_{m-2}+\tfrac{2}{3}N_{m-3}+\cdots+\tfrac{44}{45}| \\ &< 45\,|N_{m-2}+N_{m-3}+\cdots+\tfrac{44}{45}| < 45\,|44+\tfrac{44}{45}| \\ &< 44.46. \end{aligned}$$

Mais d'autre part, le groupe H contient un faisceau F d'ordre 5, dont les transformés fournissent $\frac{5-1}{2.5}\Omega$ substitutions distinctes, et un faisceau

F_1 d'ordre 3 dont les transformés fournissent $\frac{1}{9}\Omega$ substitutions distinctes. Les substitutions correspondantes dans H'' seront d'ordre 5 et 3, et déplaceront toutes les racines, car l'ordre du groupe Γ formé des substitutions qui laissent une racine immobile n'est divisible ni par 5 ni par 3. Le nombre de ces substitutions est d'ailleurs égal à $\frac{4}{10}+\frac{1}{9}$ du total. On devra donc avoir

$$(\tfrac{4}{10}+\tfrac{1}{9}).45.44.2 \leqq M < 44.46,$$

équation absurde.

149. Théorème. *La solution* (XXXIV.) *ne fournit aucun groupe simple.*

On a en effet dans cette solution $\Sigma = \frac{n-1}{2n}+\frac{1}{8}+\frac{4}{9}$ et $n=7$. Le premier terme de cette somme résulte de l'énumération des substitutions transformées de celles d'un certain faisceau F d'ordre 7φ (N°. 74). Le terme $\frac{4}{9}$ résulte de l'énumération des transformées des substitutions de certains faisceaux $F_1, \ldots$ d'ordre 3φ ou 9φ (id.). Enfin le terme $\frac{1}{8}$ résulte de l'énumération des transformées de certaines substitutions d'un faisceau $\mathfrak{F}$ d'ordre 4φ (N°. 95) et dont les substitutions auront pour forme canonique

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

où a, b, c sont égaux au signe près. Or 3φ et 9φ sont impairs. Donc celles des substitutions de H dont l'ordre est une puissance de 2 appartiendront à $\mathfrak{F}$ ou à ses transformés; et leur carré multipliant x, y, z par un même facteur, appartiendra à Φ, et par suite se réduira à l'unité (sinon il aurait pour ordre 3 et non une puissance de 2). Toutes ces substitutions seront donc d'ordre 2.

Cette conséquence est absurde. En effet, H ayant pour ordre 72.7φ, contiendra un groupe G d'ordre 8, dont une substitution sera échangeable à toutes les autres (*Sylow*, Mathematische Annalen, T. V).

Soit

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

cette substitution; a, b, c devant être, par hypothèse, égaux à ± 1, et le déterminant abc étant égal à 1, on pourra poser

$$S = |x, y, z \quad -x, -y, z|.$$

Soit T une seconde substitution de G, différente de S et de l'unité. Elle sera de la forme

$$T = |x, y, z \quad \alpha x+\beta y, \quad \alpha' x+\beta' y, \; \gamma z|$$

et l'on pourra disposer des variables x, y de manière à la ramener elle aussi à sa forme canonique

$$T = |x, y, z \quad ax, by, cz|.$$

D'ailleurs a, b, c doivent être égaux à ± 1, et $abc = 1$; on pourra donc supposer

$$T = |x, y, z \quad x, -y, -z|.$$

Les substitutions S et T, combinées entre elles, donneront un groupe g d'ordre 4; et G résultera de la combinaison de g avec une nouvelle substitution qui lui soit permutable. Cette substitution U, étant en même temps d'ordre 2 et échangeable à S, sera de l'une des deux formes

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|,$$
$$|x, y, z \quad ay, bx, cz|.$$

Si elle était de la première forme, elle appartiendrait évidemment à g; si elle est de la seconde forme, on aura nécessairement $ab = c = -1$.

Cela posé, G contiendra la substitution TU, laquelle est évidemment d'ordre 4.

150. Il ne nous reste plus à discuter que les solutions (III.), (XIV.), (XXII.), (XXXI.), (XXXII.), (XLI.), (XLIII.).

Théorème. *La solution* (III.) *ne peut fournir aucun groupe.*

On aurait en effet

$$\Sigma = \tfrac{6}{9}\tfrac{5}{6} + \frac{n-1}{3n}, \quad \text{avec} \quad n = 31.$$

Et H contiendrait un faisceau F d'ordre 31φ $\left(\text{fournissant le terme } \frac{n-1}{3n}\right)$, lequel résulterait de la combinaison de Φ avec une substitution S d'ordre 31, ayant pour forme canonique

$$|x, y, z \quad \tau x, \tau^\mu y, \tau^\nu z|$$

où τ est une racine $31^{\text{ème}}$ de l'unité.

Le groupe I formé des substitutions de H permutables à F, ayant pour ordre $3n\varphi$, contiendra une substitution T de la forme

$$(72.) \qquad |x, y, z \quad ay, bz, cx|$$

qui devra transformer S en une de ses puissances. Cette transformée étant

$$|x, y, z \quad \tau^\mu x, \tau^\nu y, \tau z|$$

on aura les conditions

$$\tau^\nu = \tau^{\mu^2}, \quad \tau = \tau^{\nu\mu} = \tau^{\mu^3},$$

d'où

$$\mu^3 \equiv 1, \quad \nu \equiv \mu^2 \quad \text{mod.}\,31.$$

D'ailleurs $\tau^{1+\mu+\nu} = 1$, d'où $1+\mu+\nu \equiv 0 \text{ mod.}\,31$. Donc μ et ν seront respectivement égaux à 5 et 25.

Les substitutions de Φ étant d'ailleurs de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad \theta^\varrho x,\ \theta^\varrho y,\ \theta^\varrho z|$$

où θ est une racine cubique de l'unité, celles de F auront pour forme générale

$$(73.) \qquad |x,\ y,\ z \quad \theta^\varrho \tau^\mu x,\ \theta^\varrho \tau^{5\mu} y,\ \theta^\varrho \tau^{25\mu} z|.$$

151. Les faisceaux contenus dans H, autres que F et ses transformés, seront contenus (N$^{\text{os}}$. 79 à 82) dans un groupe K, dont on pourra, par un choix de variables convenable, mettre les substitutions sous la forme

$$|x,\ y,\ z \quad \alpha x+\beta y,\quad \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z|.$$

Le groupe K' formé par les substitutions

$$|x,\ y \quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y|$$

sera octaédrique, et celles de ses substitutions en nombre ω qui multiplient x et y par un même facteur résulteront de la combinaison des substitutions

$$|x,\ y \quad \theta^\varrho x,\ \theta^\varrho y|$$

correspondantes à celles de Φ avec les puissances de la substitution

$$|x,\ y \quad j^2 x,\ j^2 y|$$

où j est une racine huitième de l'unité. Les faisceaux contenus dans K' seront les transformés de trois d'entre eux, respectivement formés de la combinaison des ω substitutions précédentes, avec les puissances d'une substitution

$$|x,\ y \quad ntx,\ nt^{-1}y|$$

où t est racine primitive de l'une des équations $t^4=1$, $t^6=1$, $t^8=1$, n se réduisant à l'unité si $t^6=1$, à j dans les deux autres cas.

Les substitutions du premier faisceau, où $t^4=1$, seront évidemment contenues dans la forme suivante

$$|x,\ y \quad j^\alpha \theta^\varrho x,\ j^\beta \theta^\varrho y|.$$

De même pour celles du troisième faisceau, où $t^8=1$.

Pour le second faisceau, où $t^6=1$, on remarquera que $t=-\theta=j^4\theta$, et $n=1$. Ses substitutions seront donc de la forme

$$|x,\ y \quad \theta^\varrho j^{2\gamma} \theta^\delta x,\ \theta^\varrho j^{2\gamma} \theta^{-\delta} y|.$$

Les substitutions de K correspondantes à celles de K' auront donc pour forme canonique l'une des deux suivantes

$$(74.)\qquad |x,\ y,\ z\quad j^{\alpha}\theta^{\varrho}x,\ j^{\beta}\theta^{\varrho}y,\ j^{-\alpha-\beta}\theta^{\varrho}z|,$$

$$(75.)\qquad |x,\ y,\ z\quad \theta^{\varrho}j^{2\gamma}\theta^{\delta}x,\ \theta^{\varrho}j^{2\gamma}\theta^{-\delta}y,\ \theta^{\varrho}j^{-4\gamma}z|.$$

152. Toute substitution de H étant la transformée de l'une des substitutions précédentes, aura même forme canonique, à savoir l'une des formes (73.), (74.), (75.).

Si elle a la forme canonique (73.), la somme des racines de son équation caractéristique sera

$$(76.)\qquad \theta^{\varrho}(\tau^{\mu}+\tau^{5\mu}+\tau^{25\mu}).$$

Si elle a la forme canonique (74.), la somme de ces racines sera

$$(77.)\qquad \theta^{\varrho}(j^{\alpha}+j^{\beta}+j^{-\alpha-\beta}).$$

Si elle a la forme canonique (75.), cette somme sera

$$(78.)\qquad \theta^{\varrho}(j^{2\gamma}\theta^{\delta}+j^{2\gamma}\theta^{-\delta}+j^{-4\gamma}).$$

153. Cela posé, on a vu que H contient la substitution

$$S = |x,\ y,\ z\quad \tau x,\ \tau^{5}y,\ \tau^{25}z|$$

et une substitution T de la forme (72.). Comme on peut, sans changer la forme de S, prendre pour variables au lieu de y, z, des multiples quelconques de ces quantités, on pourra faire en sorte que a et b, et par suite c, se réduisent à l'unité; d'où

$$T = |x,\ y,\ z\quad y,\ z,\ x|.$$

Cette substitution, étant d'ordre 3 et étrangère au groupe Φ, appartiendra à l'un des groupes transformés de K. Soient x', y', z' les nouvelles variables qui ramènent les substitutions de ce groupe à la forme

$$|x',\ y',\ z'\quad \alpha x'+\beta y',\ \alpha' x'+\beta' y',\ \gamma z'|.$$

Il contiendra la substitution

$$U = |x',\ y',\ z'\quad j^{2}x',\ j^{2}y',\ j^{-4}z'|$$

échangeable à toutes ses substitutions, et notamment à T.

La substitution

$$V = U^{2} = |x',\ y',\ z'\quad -x',\ -y',\ z'|$$

aura -1 pour somme des racines de son équation caractéristique.

Soit

$$\begin{vmatrix} x & ax+by+cz \\ y & a'x+b'y+c'z, \\ z & a''x+b''y+c''z \end{vmatrix}$$

la forme que prend cette substitution V, rapportée aux anciennes variables x, y, z.

Elle est échangeable à T; or on a

$$TV = \left|\begin{matrix} x & ay + bz + cx \\ y & a'y + b'z + c'x \\ z & a''y + b''z + c''x \end{matrix}\right|, \quad VT = \left|\begin{matrix} x & a'x + b'y + c'z \\ y & a''x + b''y + c''z \\ z & ax + by + cz \end{matrix}\right|.$$

Identifiant, il viendra

$$a = b' = c'', \quad b = c' = a'', \quad c = a' = b''$$

d'où

$$V = \left|\begin{matrix} x & ax + by + cz \\ y & cx + ay + bz \\ z & bx + cy + az \end{matrix}\right|.$$

Son équation caractéristique

$$\left|\begin{matrix} a-s & b & c \\ c & a-s & b \\ b & c & a-s \end{matrix}\right| = 0,$$

aura pour somme de ses racines la somme $3a$ des coefficients diagonaux. On aura donc $3a = -1$, $a = -\frac{1}{3}$.

154. Considérons maintenant la substitution

$$S^m V = \left|\begin{matrix} x & \tau^m ax + \tau^{5m} by + \tau^{25m} cz \\ y & \tau^m cx + \tau^{5m} ay + \tau^{25m} bz \\ z & \tau^m bx + \tau^{5m} cy + \tau^{25m} az \end{matrix}\right|.$$

La somme des racines de son équation caractéristique sera

$$\tau^m a + \tau^{5m} a + \tau^{25m} a = -\tfrac{1}{3}(\tau^m + \tau^{5m} + \tau^{25m})$$

quantité qui devrait être égale pour toute valeur de m à l'une des quantités (76.), (77.), (78.); ce qui est absurde. Car τ est racine d'une équation irréductible de degré 30

$$(79.) \qquad \frac{\tau^{31} - 1}{\tau - 1} = 0,$$

laquelle reste irréductible après l'adjonction des irrationnelles j et θ. L'équation

$$-\tfrac{1}{3}(\tau^m + \tau^{5m} + \tau^{25m}) = A,$$

où A est l'une des quantités (76.), (77.), (78.) convenablement choisie devrait donc être identique, ou se réduire à l'équation (79.) après qu'on aurait abaissé son degré par la suppression des multiples de 31 dans les exposants de τ. Or il est évident qu'il n'en peut être ainsi, de quelque manière que A soit choisi.

155. Théorème. *La solution* (XXII.) *ne peut fournir aucun groupe.*

On a

$$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'},$$

où $n = 6$, $p' = 7$, $p = 9$.

On verra comme au N°. 150 que le terme $\frac{p-1}{3p}$ provient de la considération d'un faisceau F' dont les substitutions ont pour forme canonique

$$(80.) \qquad |x, y, z \quad \theta^\varrho \tau^\alpha x, \theta^\varrho \tau^{2\alpha} y, \theta^\varrho \tau^{4\alpha} z|$$

où $\theta^3 = 1$, $\tau^7 = 1$.

156. Soit en second lieu

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

la forme canonique des substitutions du faisceau F qui donne le terme $\frac{p-1}{3p}$; l'ordre de ce faisceau étant 9φ, c'est-à-dire une puissance de 3, les coefficients a, b, c dans ses diverses substitutions seront des puissances d'une irrationnelle t, racine d'une équation binôme de degré 3^k. Nous allons montrer que l'on a $k = 2$, $\varphi = 3$.

En effet, F contient une substitution de la forme

$$(81.) \qquad |x, y, z \quad tx, t^\alpha y, t^{-\alpha-1} z|$$

laquelle, transformée par la substitution de la forme

$$(82.) \qquad |x, y, z \quad a'y, b'z, c'x|$$

que contient H, donnera la substitution

$$(83.) \qquad |x, y, z \quad t^\alpha x, t^{-\alpha-1} y, tz|.$$

Des substitutions (82.) et (83.) on déduit la suivante

$$|x, y, z \quad t^{m+\alpha n} x, t^{\alpha m-(\alpha+1)n} y, t^{-(\alpha+1)m+n} z|$$

où les exposants $m + \alpha n$, $\alpha m - (\alpha+1)n$ pourront prendre deux valeurs arbitraires quelconques mod. 3^k, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -\alpha-1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 - \alpha - 1$$

est premier à 3, ce qui arrivera toutes les fois que α sera $\gtrless 1$ mod. 3. Dans ce cas, F contiendra toutes les substitutions de la forme

$$(84.) \qquad |x, y, z \quad t^\mu x, t^\nu y, t^{-\mu-\nu} z|.$$

Il aura donc pour ordre 3^{2k}, et contiendra la substitution

$$|x, y, z \quad t^{3^{k-1}}x, t^{3^{k-1}}y, t^{3^{k-1}}z| = |x, y, z \quad \theta x, \theta y, \theta z|.$$

On aura donc $\varphi = 3$, et F aura pour ordre $3^{2k-1}\varphi$.

Soit au contraire $\alpha \equiv 1 \mod. 3$. On aura $-\alpha^2-\alpha-1 \equiv -3 \mod. 9$; et par suite, on pourra choisir m et n de telle sorte que $m+\alpha n$ et $\alpha m-(\alpha+1)n$ prennent deux valeurs quelconques congrues par rapport au module 3. Les substitutions de F auront encore la forme (84.), avec la seule restriction $\nu \equiv \mu \mod. 3$. Leur nombre sera $3^{2k-1} = 3^{2k-2}\varphi$, car on aura encore ici $\varphi = 3$.

Dans le cas actuel où cet ordre est égal à 9φ, on aura évidemment $k = 2$, et les substitutions de F seront de la forme (84.) avec la condition

$$\nu \equiv \mu \quad \mod. 3.$$

157. Cherchons enfin l'expression des substitutions du faisceau F_1 d'ordre 6φ qui a fourni le terme $\frac{n-1}{2n}$.

Soit

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

la forme canonique de ces substitutions. F_1 résulte de la combinaison de deux groupes G et G_1, l'un d'ordre 2, l'autre d'ordre 3φ.

Le premier est formé par une substitution S d'ordre 2, dans laquelle a, b, c se réduiront par suite à ± 1. On a d'ailleurs $abc = 1$.

D'ailleurs le groupe I_1, formé par celles des substitutions de H qui sont permutables à F_1, ayant pour ordre $2n\varphi$, H contiendra une substitution T de la forme

$$|x, y, z \quad a'y, b'x, c'z|.$$

Cela posé, on aura

$$S = |x, y, z \quad -x, -y, z|.$$

Car si S était égal, par exemple, à

$$|x, y, z \quad x, -y, -z|$$

T transformerait S en une nouvelle substitution

$$|x, y, z \quad -x, y, -z|$$

laquelle, combinée avec S, donnerait un faisceau d'ordre 4 contenu dans F_1, ce qui est impossible.

Quant à G_1, il résultera de la combinaison de Φ avec une substitution U d'ordre 3, dont la $3^{\text{ème}}$ puissance appartiendra à Φ.

D'ailleurs U^3 se réduit à l'unité. En effet, considérons le groupe I d'ordre 3.9φ formé par les substitutions de H permutables à F. Son ordre étant égal à la plus haute puissance de 3 qui divise l'ordre de H, toute substitution de H dont l'ordre est une puissance de 3 appartiendra à I ou à ses transformés (**Sylow**, Mathematische Annalen T. V). Donc U est transformée d'une substitution de I.

Or les variables étant supposées choisies de manière à ramener F à sa forme canonique, les substitutions de I appartiendront à l'une des deux formes (82.) ou (84.). Ces dernières substitutions sont celles de F, et aucune de leurs transformées n'appartient au faisceau F_1. Donc U est la transformée d'une substitution de la forme (82.) dont le cube se réduit évidemment à l'unité (le déterminant $a'b'c'$ étant égal à 1).

La substitution U sera donc de la forme

$$|x,\ y,\ z\quad \theta^\beta x,\ \theta^\gamma y,\ \theta^{-\beta-\gamma}z|$$

et combinée avec Φ reproduira toutes les substitutions de cette forme.

En les combinant avec S, on aura pour forme générale des substitutions de F_1 la suivante:

$$(85.)\qquad |x,\ y,\ z\quad (-1)^\delta\theta^\beta x,\ (-1)^\delta\theta^\gamma y,\ \theta^{-\beta-\gamma}z|.$$

158. Toute substitution de H sera donc réductible à l'une des formes canoniques (80.), (84.), (85.). La somme des racines de son équation caractéristique sera donc l'une des quantités

$$(86.)\qquad \theta^\varrho(\tau^\alpha+\tau^{2\alpha}+\tau^{4\alpha}),\quad (\tau^7=1),$$

$$(87.)\qquad t^\mu+t^\nu+t^{-\mu-\nu},\quad (t^9=1,\ \nu\equiv\mu \bmod. 3),$$

$$(88.)\qquad (-1)^\delta(\theta^\beta+\theta^\gamma)+\theta^{-\beta-\gamma},\quad (\theta^3=1).$$

159. Cela posé, soit

$$U' = |x,\ y,\ z\quad a'y,\ b'z,\ c'x|$$

celle des substitutions permutables à F dont U est une transformée. On pourra, en prenant pour variables au lieu de y et z des multiples de ces quantités, faire en sorte que $a'=b'=1$, d'où $c'=1$. Cela posé, la substitution de H qui transforme U en U' transformera S en une substitution V d'ordre 2 et échangeable à U'. On verra comme au No. 153 que V est de la forme

$$\begin{vmatrix} x & ax+by+cz \\ y & cx+ay+bz \\ z & bx+cy+az \end{vmatrix}$$

et que $a=-\frac{1}{3}$.

Faisons maintenant le produit de V par les diverses substitutions de F; nous obtiendrons de nouvelles substitutions, ayant pour coefficients diagonaux at^{μ}, at^{ν}, $at^{-\mu-\nu}$. La somme de ces coefficients sera

$$-\tfrac{1}{3}(t^{\mu}+t^{\nu}+t^{-\mu-\nu})$$

et doit être égale à l'une A des expressions (86.), (87.), (88.). Or si l'on pose, par exemple, $\mu=1$, $\nu=4$, il est aisé de voir que l'équation

$$-\tfrac{1}{3}(t+t^{4}+t^{4}) = A$$

laquelle devrait devenir identique en tenant compte des relations

$$\theta = t^{3},\quad \frac{t^{9}-1}{t^{3}-1}=0$$

n'a pas lieu, de quelque manière qu'on choisisse A.

160. Théorème. *La solution* (XLI.) *ne peut fournir aucun groupe.*

On verra comme dans le cas précédent qu'aux quatre termes $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{p'-1}{3p'}$, $\frac{p''-1}{3p''}$, $\frac{1}{9}$ de la somme Σ correspondent quatre faisceaux F, F', F'', F''', dont les substitutions, mises sous forme canonique, auront respectivement les expressions suivantes:

1°. Pour les substitutions de F

$$|x,\ y,\ z\quad (-1)^{\alpha}\theta^{\alpha'}x,\ (-1)^{\beta}\theta^{\beta'}y,\ (-1)^{\alpha+\beta}\theta^{-\alpha'-\beta'}z|.$$

2°. Pour celles de F'

$$|x,\ y,\ z\quad t^{\mu}x,\ t^{\nu}y,\ t^{-\mu-\nu}z|,\quad (\nu\equiv\mu \bmod. 3).$$

3°. Pour celles de F''

$$|x,\ y,\ z\quad \theta^{\varrho}\tau^{\gamma}x,\ \theta^{\varrho}\tau^{2\gamma}y,\ \theta^{\varrho}\tau^{4\gamma}z|.$$

4°. Pour celles de F'''

$$|x,\ y,\ z\quad \theta^{\alpha'}x,\ \theta^{\beta'}y,\ \theta^{-\alpha'-\beta'}z|$$

(cas particulier de la forme des substitutions de F).

161. Toute substitution de H étant transformée de l'une de celles qui précèdent, aura pour somme des racines de son équation caractéristique l'une des expressions

$$(-1)^{\alpha}\theta^{\alpha'}+(-1)^{\beta}\theta^{\beta'}+(-1)^{\alpha+\beta}\theta^{-\alpha'-\beta'}, \tag{89.}$$

$$t^{\mu}+t^{\nu}+t^{-\mu-\nu}, \tag{90.}$$

$$\theta^{\varrho}(\tau^{\gamma}+\tau^{2\gamma}+\tau^{4\gamma}). \tag{91.}$$

162. Cela posé, les variables étant choisies de manière à ramener F' à sa forme canonique, on verra comme précédemment que parmi les

substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad a'y, b'z, c'x|$$

il en existe une U' qui est la transformée d'une des substitutions U d'ordre 3 contenues dans F. Or F contient une substitution d'ordre 2 échangeable à U; donc H contiendra une substitution V d'ordre 2 et échangeable à U'.

Supposant, ce qui est permis, $a' = b' = c' = 1$, et achevant le raisonnement comme au cas précédent, on voit qu'on devrait avoir

$$-\tfrac{1}{3}(t+t^3+t^4) = A,$$

A désignant une des expressions (89.), (90.), (91.). On vérifie immédiatement que cela n'a pas lieu.

163. Théorème. *La solution* (XLIII.) *ne peut donner aucun groupe.*

On a $\Sigma = \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'} + \frac{2}{8} + \frac{1}{9}$, où $p' = 21$, $p = 27$. On voit comme précédemment qu'au terme $\frac{p-1}{3p}$ correspond un faisceau F, dont les substitutions auront pour forme canonique

$$(92.) \qquad |x, y, z \quad t^{\mu}x, t^{\nu}y, t^{-\mu-\nu}z|$$

où μ et ν sont quelconques (N°. 156).

Au terme $\frac{p'-1}{3p'}$ correspond un faisceau F', dont les substitutions auront pour forme canonique

$$(93.) \qquad |x, y, z \quad \theta^{\alpha}\tau^{\alpha'}x, \theta^{\beta}\tau^{\beta'}y, \theta^{-\alpha-\beta}\tau^{-\alpha'-\beta'}z|.$$

Au terme $\frac{1}{9}$, un faisceau F'', dont les substitutions auront pour forme canonique

$$|x, y, z \quad \theta^{\alpha}x, \theta^{\beta}y, \theta^{-\alpha-\beta}z|$$

laquelle rentre comme cas particulier dans les précédentes.

164. Enfin le terme $\frac{2}{8}$ résultera de l'énumération de substitutions permutables à l'un des faisceaux F, F', F'' (N°. 90) et d'ordre pair (leur équation caractéristique ayant deux racines égales et de signe contraire), ou de substitutions appartenant à des faisceaux d'ordre 4φ. (N°s. 74 ou 95).

Or un faisceau d'ordre 4φ résulte de la combinaison de Φ avec un faisceau d'ordre 4 dont les substitutions auront une forme canonique contenue dans la suivante

$$|x, y, z \quad i^{\gamma}x, i^{\delta}y, i^{-\gamma-\delta}z|, \quad (i^4 = 1)$$

par suite ses substitutions seront de la forme suivante

$$(94.) \qquad |x, y, z \quad \theta^{\varrho}i^{\gamma}x, \theta^{\varrho}i^{\delta}y, \theta^{\varrho}i^{-\gamma-\delta}z|.$$

D'autre part, les groupes I, I' formés par les substitutions de H respectivement permutables à F, F', ayant pour ordres les nombres impairs $3p\varphi$, $3p'\varphi$ ne contiendront aucune substitution d'ordre pair. Enfin, x, y, z étant supposés choisis de manière à ramener F'' à sa forme canonique, les substitutions qui lui sont permutables sans lui appartenir seront de l'une des formes

$$|x, y, z \quad ay, bx, cz|,$$
$$|x, y, z \quad ax, bz, cy|,$$
$$|x, y, z \quad az, by, cx|,$$
$$|x, y, z \quad ay, bz, cx|,$$
$$|x, y, z \quad az, ax, cy|.$$

Les deux dernières formes ne peuvent contenir aucune substitution d'ordre pair, car son cube, également d'ordre pair, appartiendrait à F'', dont l'ordre est un nombre impair 3φ.

Considérons d'autre part une substitution R d'une des autres formes, par exemple de la première. Son carré

$$|x, y, z \quad abx, aby, c^2 z|$$

appartient à F'' et a deux coefficients égaux. Il appartient donc à Φ. Donc $ab = c^2$. D'ailleurs le déterminant $-abc$ est égal à 1. Donc $c^3 = -1$, d'où $c = -\theta^\varrho$. Cela posé, remplaçant x et y par de nouvelles variables x', y' qui ramènent R à sa forme canonique, on aura

$$\begin{aligned} R &= |x', y', z \quad \sqrt{ab}\,x', -\sqrt{ab}\,y', -\theta^\varrho z| \\ &= |x', y', z \quad \theta^\varrho x', \quad -\theta^\varrho y', -\theta^\varrho z'|, \end{aligned}$$

ce qui est un cas particulier de la forme (94.).

165. Donc toute substitution de H ramenée à la forme canonique sera de l'une des espèces (92.), (93.), (94.). La somme des racines de son équation caractéristique sera donc de l'une des formes

$$(95.) \qquad t^\mu + t^\nu + t^{-\mu-\nu},$$
$$(96.) \qquad \theta^\alpha \tau^{\alpha'} + \theta^\beta \tau^{\beta'} + \theta^{-\alpha-\beta}\tau^{-\alpha'-\beta'},$$
$$(97.) \qquad \theta^\rho (i^\gamma + i^\delta + i^{-\gamma-\delta}).$$

166. Cela posé, F' contient en particulier deux substitutions

$$U = |x, y, z \quad x, \theta y, \theta^2 z|$$

et

$$S = |x, y, z \quad \tau x, \tau^2 y, \tau^4 z|$$

l'une d'ordre 3 et l'autre d'ordre 7.

On verra comme au N°. 157 1°. que U est une transformée d'une substitution U' permutable à F et pouvant se mettre sous la forme

$$|x,\ y,\ z \quad y,\ z,\ x|$$

les variables étant ici choisies de telle sorte que F prenne sa forme canonique; 2°. que S est la transformée d'une substitution V échangeable à U', et qui sera par suite de la forme

$$\begin{vmatrix} x & ax+by+cz \\ y & cx+ay+bz \\ z & bx+cy+az \end{vmatrix}.$$

V étant la transformée de S, aura la même équation caractéristique; donc on aura

$$3a = \tau+\tau^2+\tau^4.$$

Cela posé, multiplions V par une quelconque des substitutions de F; nous obtiendrons une nouvelle substitution où la somme des coefficients diagonaux sera

$$a(t^\mu+t^\nu+t^{-\mu-\nu}) = \tfrac{1}{3}(\tau+\tau^2+\tau^4)(t^\mu+t^\nu+t^{-\mu-\nu}).$$

Cette expression devrait pour toute valeur de μ et de ν être égale à l'une des expressions (95.), (96.), (97.) et cette égalité devrait devenir identique en tenant compte des équations

$$\theta = t^3,\quad \frac{t^9-1}{t^3-1} = 0,\quad \frac{\tau^7-1}{\tau-1} = 0.$$

On vérifiera immédiatement que cela n'a pas lieu.

167. Théorème. *La solution* (XIV.) *ne peut fournir aucun groupe.*

On a

$$\Sigma = \frac{n-1}{2n}+\frac{n'-1}{2n'}+\tfrac{1}{9},\quad \text{où}\quad n'=8,\ n=10.$$

Le terme $\frac{1}{9}$ résulte de la considération d'un faisceau F'', d'ordre 3φ, dont les substitutions ont pour forme canonique

$$(98.)\qquad |x,\ y,\ z \quad \theta^\alpha x,\ \theta^\beta y,\ \theta^{-\alpha-\beta} z|,\qquad (\theta^3=1).$$

168. Le terme $\frac{n-1}{2n}$ résulte de la considération d'un faisceau F d'ordre 10φ. Soit

$$(99.)\qquad |x,\ y,\ z \quad ax,\ by,\ cz|$$

la forme canonique de ses substitutions. Le groupe I, formé par celles des substitutions de H qui sont permutables à F, ayant pour ordre $2n\varphi$, résultera de la combinaison de F avec une substitution de la forme

$$(100.)\qquad T = |x,\ y,\ z \quad a'y,\ b'x,\ c'z|.$$

D'ailleurs, F résultera évidemment de la combinaison de Φ avec deux autres groupes de substitutions de la forme (99.), lesquels auront respectivement pour ordre 5 et 2.

Les coefficients $a,\ b,\ c$ seront égaux à des racines cinquièmes de l'unité dans le premier de ces groupes, à ± 1 dans le second. De plus, ces groupes sont permutables à la substitution T; on en déduit aisément que leurs substitutions sont de la forme

$$(101.)\qquad |x,\ y,\ z \quad \tau^{\alpha}x,\ \tau^{-\alpha}y,\ z|,\quad \text{où}\quad \tau^5 = 1$$

et

$$(102.)\qquad |x,\ y,\ z \quad -x,\ -y,\ z|.$$

En les combinant avec Φ, on aura pour les substitutions de F la forme générale suivante

$$(103.)\qquad |x,\ y,\ z \quad \theta^{\varrho}t^{\gamma}x,\ \theta^{\varrho}t^{-\gamma}y,\ \theta^{\varrho}z|$$

où t est une racine 10^e de l'unité.

169. Reste enfin le faisceau F' d'ordre 8φ correspondant au terme $\frac{n'-1}{2n'}$. Il résulte de la combinaison de Φ avec un groupe G' d'ordre 8. Soit

$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ by,\ cz|$$

la forme canonique des substitutions de ce dernier groupe; $a,\ b,\ c$ y seront des puissances d'une quantité j, racine $8^{\text{ème}}$ de l'unité. D'ailleurs le groupe I', formé par les substitutions de H qui sont permutables à F', ayant pour ordre $2n'\varphi$, H contiendra une substitution T' de la forme

$$T' = |x,\ y,\ z \quad a'y,\ b'x,\ c'z|.$$

Supposons d'abord que parmi les substitutions de G' il y en ait une

$$S = |x,\ y,\ z \quad j^{\lambda}x,\ j^{\mu}y,\ j^{\nu}z|$$

dans laquelle l'un des exposants $\lambda,\ \mu,\ \nu$ soit impair; G' se réduira évidemment aux puissances de S. T' étant permutable à G', la substitution

$$T'^{-1}ST' = |x,\ y,\ z \quad j^{\mu}x,\ j^{\lambda}y,\ j^{\nu}z|$$

sera une puissance de S. Il faut évidemment pour cela qu'on ait $\mu = \lambda$, ou $\nu = 0$. Mais si μ était égal à λ, T' serait échangeable à S, et par suite à toutes les substitutions de F'. On pourrait l'adjoindre à ce faisceau de manière à obtenir un nouveau faisceau plus général, ce qui est supposé impossible. Donc $\nu = 0$, et par suite $\lambda = -\mu$, S ayant l'unité pour déterminant.

Les substitutions de F' auront donc pour forme générale

$$(104.) \qquad |x, y, z \quad \theta^\varrho j^\lambda x, \theta^\varrho j^{-\lambda} y, \theta^\varrho z|.$$

170. Supposons au contraire que les exposants de j soient pairs dans toutes les substitutions de G'; elles seront de la forme

$$S = |x, y, z \quad i^\lambda x, i^\mu y, i^\nu z|$$

en posant $i = j^2$.

T' transformant une substitution de cette sorte en

$$S' = |x, y, z \quad i^\mu x, i^\lambda y, i^\nu z|$$

la série des valeurs de λ et celle des valeurs de μ se confondront. Chacun de ces exposants prendra 4 valeurs distinctes dans les substitutions de G'; sinon le nombre des systèmes de valeurs de λ, μ, et par suite le nombre des substitutions de F', se réduirait à 4, au lieu de 8.

D'autre part, ν sera pair; car s'il était impair, $\lambda + \mu$ le serait également, S ayant 1 pour déterminant; $\lambda - \mu$ le serait aussi. Cela posé, dans S et ses puissances le rapport des coefficients de x et de y aurait 4 valeurs distinctes, égales aux diverses puissances de $j^{\lambda-\mu}$. D'autre part, la substitution

$$SS' = |x, y, z \quad i^{\lambda+\mu} x, i^{\lambda+\mu} y, i^{2\nu} z|$$

et ses puissances, donneraient un système de 4 substitutions où ce rapport serait égal à 1. Donc l'ordre de G' serait 16 au lieu de 8.

Mettant donc 2ν à la place de ν, on aura pour la forme générale des substitutions de F'

$$(105.) \qquad |x, y, z \quad \theta^\varrho i^\lambda x, \theta^\varrho i^{-\lambda-2\nu} y, \theta^\varrho i^{2\nu} z|.$$

171. Toute substitution de F aura donc pour forme canonique une des expressions (98.), (103.) et (104.), ou (98.), (103.) et (105.).

La somme des racines de son équation caractéristique sera donc de l'une des formes

$$(106.) \qquad \theta^\alpha + \theta^\beta + \theta^{-\alpha-\beta},$$

$$(107.) \qquad \theta^\varrho (t^\gamma + t^{-\gamma} + 1),$$

$$(108.) \qquad \theta^\varrho (j^\lambda + j^{-\lambda} + 1)$$

ou de l'une des formes (106.), (107.) et

$$(109.) \qquad \theta^\varrho (i^\lambda + i^{-\lambda-2\nu} + i^{2\nu}).$$

172. Cela posé, admettons que les variables aient été choisies de telle sorte que F ait sa forme canonique. La substitution T de la forme (100.) aura évidemment pour ordre un nombre pair; on peut supposer que cet ordre est une puissance de 2. Car on pourrait au besoin considérer au lieu de T une de ses puissances impaires convenablement choisie. On peut en outre choisir y de telle sorte qu'on ait $a' = 1$.

Cela posé, la substitution

$$T^2 = | x,\ y,\ z \quad b'x,\ b'y,\ c'^2 z |$$

sera l'une des substitutions d'ordre puissance de 2 que contient F, lesquelles ne sont autres que l'unité et la substitution

$$S = | x,\ y,\ z \quad -x,\ -y,\ z |.$$

Donc $c'^2 = 1$; et comme $-b'c'$, déterminant de T, est égal à 1, T sera de l'une des deux formes

$$(110.) \qquad | x,\ y,\ z \quad y,\ -x,\ z |,$$

$$(111.) \qquad | x,\ y,\ z \quad y,\ x,\ -z |.$$

Or toute substitution de H est la transformée d'une substitution appartenant à l'un des faisceaux F, F', F''. Ce dernier ne contenant que des substitutions d'ordre impair, T sera la transformée d'une substitution de l'un des faisceaux F, F', d'ordre 10φ et 8φ. Donc le nombre des substitutions de F échangeables à T sera 10φ ou 8φ.

173. On en conclut que T ne peut être de la forme (110.). On vérifie en effet immédiatement que pour qu'une substitution

$$V = \left| \begin{array}{ll} x & ax + by + cz \\ y & a'x + b'y + c'z \\ z & a''x + b''y + c''z \end{array} \right|$$

soit échangeable à (110.), il faut qu'on ait

$$a' = -b, \quad b' = a, \quad c = c' = 0, \quad a'' = b'' = 0.$$

Donc V appartiendrait au groupe K formé par celles des substitutions de H qui ont pour expression

$$\left| \begin{array}{ll} x & \alpha x + \beta y \\ y & \alpha' x + \beta' y \\ z & \gamma z \end{array} \right|.$$

Ce groupe K est évidemment dérivé de la combinaison de T avec F; et celles de ses substitutions qui sont échangeables à T résultent de la combinaison de T avec les substitutions de F échangeables à T, lesquelles se réduisent aux 2φ substitutions dérivées de S et de Φ. Le nombre total des substitutions échangeables à T ne serait donc que 4φ, ce qui est absurde.

174. Supposons donc T de la forme (111.). Pour que la substitution V lui soit échangeable, il faudra qu'on ait

$$a' = b, \quad b' = a, \quad c' = -c, \quad a'' = -b'';$$

d'où

$$V = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz \\ y & bx + ay - cz \\ z & a''x - a''y + c''z \end{vmatrix}.$$

H doit contenir 10φ ou 8φ substitutions de cette forme, parmi lesquelles 4φ seulement appartiennent à K. Nous prendrons pour V l'une de celles qui ne lui appartiennent pas.

175. Cela posé, F contenant la substitution

$$S' = |x, y, z \quad tx, t^{-1}y, z|$$

et la substitution S, H contiendra les substitutions V, SV, $S'V$ où la somme des coefficients diagonaux sera respectivement

$$2a + c'', \quad -2a + c'', \quad a(t + t^{-1}) + c''.$$

On devrait donc avoir

$$(112.) \qquad \begin{cases} 2a + c'' = A, \\ -2a + c'' = B, \\ a(t + t^{-1}) + c'' = C. \end{cases}$$

A, B, C étant des quantités convenablement choisies parmi celles des formes (106.), (107.), (108.) ou (106.), (107.), (109.).

De ces trois équations on déduit

$$(113.) \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & A \\ -2 & 1 & B \\ t + t^{-1} & 1 & C \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui doit devenir identique lorsqu'on aura tenu compte des équations irréductibles

$$\theta^2 + \theta + 1 = 0,$$
$$\frac{t^5 + 1}{t + 1} = 0,$$
$$j^4 + 1 = 0,$$
$$i^2 + 1 = 0.$$

auxquelles satisfont θ, t, j, i.

Or on peut vérifier assez rapidement que l'équation (113.) ne peut être satisfaite que si l'on prend $A = B = C$; auquel cas les équations (112.) donneront $a = 0$.

Mais parmi les substitutions échangeables à T et n'appartenant pas à K se trouve la substitution

$$TV = \begin{vmatrix} x & bx + ay - cz \\ y & ax + by + cz \\ z & -a''x + a''y - c''z \end{vmatrix}.$$

Raisonnant sur celle-ci comme sur V, on trouverait $b = 0$.

On aurait donc $a = b = 0$; ce qui est absurde, car le déterminant de V serait nul.

176. Théorème. *La solution* (XXXI.) *ne peut fournir aucun groupe.*

On a

$$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{2}{9}, \quad \text{où} \quad n = 5.$$

Le terme $\frac{n-1}{2n}$ proviendra d'un faisceau F d'ordre 5φ, dont les substitutions seront de la forme

$$(114.) \qquad |x, y, z \quad \theta^{\varrho} t^{\alpha} x, \theta^{\varrho} t^{-\alpha} y, \theta^{\varrho} z|$$

t étant une racine cinquième de l'unité.

Le groupe K d'ordre $2n\varphi$ formé par les substitutions de H permutables à F s'obtiendra en combinant à F des substitutions de la forme

$$T = |x, y, z \quad a'y, b'x, c'z|.$$

Les faisceaux $f, f_1, \ldots$ autres que F contenus dans K résultent chacun de la combinaison de Φ avec une substitution de la forme T. Le carré de cette substitution appartient à F, et multiplie x et y par un même facteur. Il appartient donc à Φ; et par suite l'ordre de chacun des faisceaux $f, f_1, \ldots$ sera 2φ.

177. Le terme $\frac{2}{9}$ provient de la considération d'un ou plusieurs faisceaux d'ordre 3φ. Soit F' l'un de ces faisceaux. Ses substitutions auront pour forme canonique

$$(115.) \qquad |x, y, z \quad \theta^{\alpha} x, \theta^{\beta} y, \theta^{-\alpha-\beta} z|.$$

Si F' donne à lui seul le terme $\frac{2}{9}$, l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de H qui sont permutables à F' étant 9φ, H ne contiendra aucune substitution des formes

$$|x, y, z \quad ay, bx, cz|,$$
$$|x, y, z \quad ax, bz, cy|,$$
$$|x, y, z \quad az, by, cx|.$$

Il en contiendrait au contraire si F' ne donnait que la moitié du terme $\frac{2}{9}$.

Soient K', L', M' les groupes respectivement formés par celles des substitutions de H qui sont des formes

$$|x, y, z \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z|,$$
$$|x, y, z \quad \alpha x, \beta y+\gamma z, \beta' y+\gamma' z|,$$
$$|x, y, z \quad \alpha x+\gamma z, \beta y, \alpha' x+\gamma' z|.$$

Ces groupes sont transformés les uns dans les autres par les substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad ay, bz, cx|$$

que H contient nécessairement.

Si F' donne à lui seul le terme $\frac{2}{9}$, il se confondra avec K'. Sinon K' résultera de la combinaison de F' avec des substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad ay, bx, cz|.$$

Dans ce cas les divers faisceaux $f', \ldots$ autres que F', contenus dans K', auront pour ordre 2φ.

178. Reste le terme $\frac{3}{8}$. Il résultera de l'énumération totale ou partielle des substitutions contenues dans les transformés de $f, f_1, \ldots f', \ldots$ ou d'autres faisceaux ayant pour ordre $m\varphi$, m étant une puissance de 2 (Nos. 74, 90 et 95).

Chacun des faisceaux qui concourent à produire ce terme $\frac{3}{8}$ résultera donc de la combinaison de Φ avec un groupe g d'ordre puissance de 2.

Or la plus haute puissance de 2 qui divise 72.5φ étant 8, on sait (*Sylow*) que H contient un groupe G d'ordre 8, et que tout groupe d'ordre puissance de 2 contenu dans H sera contenu dans G ou dans l'un de ses transformés.

179. Les substitutions de ce groupe G ne peuvent être toutes échangeables entre elles. En effet supposons qu'il en fût ainsi, et considérons le faisceau F'' formé par la combinaison des substitutions de G et de Φ. Ramenons ses substitutions à la forme canonique

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|.$$

Le groupe K'' formé par celles des substitutions de H qui sont de la forme

$$|x, y, z \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z|$$

se réduit à F''.

Soit en effet $8p\varphi$ l'ordre de K''; p sera impair; car H, qui contient K'', n'a pas son ordre divisible par 16. Cela posé, si p était >1, K'' contiendrait un faisceau d'ordre $8p\varphi$ ou $4p\varphi$, suivant que le groupe

$$|x, y \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y|$$

appartiendrait au premier ou au second type. Cela est impossible, car on a vu que tous les faisceaux contenus dans H ont pour ordre 5φ, 3φ ou $m\varphi$, m étant une puissance de 2.

Il résulte de là que les substitutions de F'', même celles où $a=b$, n'appartiennent chacune (celles de Φ exceptées) qu'à un seul faisceau. L'énumération de leurs transformées donnerait donc dans Σ au lieu du terme $\frac{3}{8}$, un terme $\frac{7}{8k}$, $8k\varphi$ désignant l'ordre du groupe formé par les substitutions de H permutables à F'' (On aura évidemment ici $k=1$ ou 3).

180. D'ailleurs, G contient une substitution d'ordre 4. Supposons en effet qu'il en fût autrement. Parmi les substitutions de G, il en est une échangeable à toutes les autres. Soit

$$S = |x, y, z \quad -x, -y, z|$$

cette substitution.

Une seconde substitution S', d'ordre 2 et échangeable à S, pourra se mettre sous la forme

$$S' = |x, y, z \quad x, -y, -z|.$$

G résultera de ces deux substitutions, combinées avec une troisième S'' permutable au groupe (S, S'), et qui sera de la forme

$$|x, y, z \quad \alpha y, \beta x, \gamma z|.$$

On peut supposer $\alpha=1$; S''^2 se réduisant à l'unité, on aura $\beta=1$, $\gamma=-1$. Mais alors la substitution

$$S'S'' = |x, y, z \quad y, -x, z|$$

sera d'ordre 4.

181. La substitution d'ordre 4, dont l'existence vient d'être démontrée, peut se mettre sous la forme

$$S = |x, y, z \quad i^\lambda x, i^\mu y, i^\nu z|.$$

D'ailleurs G contient une substitution permutable au groupe Γ dérivé de S, sans être échangeable à S. Elle sera de la forme

$$T = |x, y, z \quad \alpha y, \beta x, \gamma z|$$

et transforme S en

$$|x, y, z \quad i^{\mu}x, i^{\lambda}y, i^{\nu}z|$$

laquelle doit être une puissance de S sans se confondre avec elle. On aura donc $\nu = 0$, et par suite $\mu = -\lambda$. Γ sera donc formé des puissances de la substitution

$$(116.) \qquad S = |x, y, z \quad ix, i^{-1}y, z|.$$

Quant à T, on pourra supposer $\alpha = 1$, et comme son carré appartient à Γ, on aura $\beta = \pm 1$ d'où $\gamma = \mp 1$. Donc T sera de l'une des formes suivantes

$$(117.) \qquad |x, y, z \quad y, x, -z|,$$

$$(118.) \qquad |x, y, z \quad y, -x, z|.$$

Remplaçant x, y par de nouvelles variables x', y' qui ramènent T à sa forme canonique, on trouvera dans le premier cas

$$T = |x', y', z \quad x', -y', -z|$$

et dans le second

$$T = |x', y', z \quad ix', i^{-1}y', -z|.$$

Les substitutions du groupe dérivé de G et de Φ, dont les transformées restaient à énumérer, ont donc chacune pour forme canonique une expression de l'espèce suivante

$$(119.) \qquad |x, y, z \quad \theta^{\varrho}i^{\lambda}x, \theta^{\varrho}i^{-\lambda}y, \theta^{\varrho}z|.$$

182. Toute substitution de H étant réductible à l'une des formes canoniques (114.), (115.), (119.), la somme de ses coefficients diagonaux sera l'une des expressions

$$(120.) \qquad \theta^{\varrho}(t^{\alpha} + t^{-\alpha} + 1),$$

$$(121.) \qquad \theta^{\alpha} + \theta^{\beta} + \theta^{-\alpha-\beta},$$

$$(122.) \qquad \theta^{\varrho}(i^{\lambda} + i^{-\lambda} + 1).$$

183. Cela posé, admettons que les variables soient choisies de manière à ramener S et T aux formes (116.) et (117.) ou (118). On verra comme au N°. 179, que le groupe K'' formé des substitutions

$$(123.) \qquad |x, y, z \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z|$$

a pour ordre 8φ, et par suite se réduit au groupe dérivé de la combinaison de S et T avec les substitutions de Φ. Donc les substitutions permutables à Γ, lesquelles se réduisent évidemment à celles de K'', sont en nombre 8φ, et Γ aura $\frac{\Omega}{8\varphi}$ transformés distincts (Ω étant l'ordre de H). D'autre part, Γ renferme 3φ substitutions autres que celles de Φ; et il est clair que toute substitution qui transforme une de ces substitutions en une autre substitution de Γ, appartient à K'', et par suite est permutable à Γ.

Le nombre des substitutions, autres que les Φ, contenues dans Γ et ses transformés, sera donc $\frac{3\varphi}{8\varphi}\Omega$; ce qui donnera dans Σ le terme $\frac{3}{8}$.

184. Si la substitution T échappait à cette énumération, la somme Σ devrait contenir quelque nouveau terme, contrairement à l'hypothèse. Donc T doit être la transformée de l'une des substitutions de Γ.

Supposons d'abord T de la forme (118.). On voit immédiatement que les substitutions susceptibles de produire cette transformation sont de la forme (123.) sans appartenir à K''. Elles ne peuvent donc se trouver contenues dans H.

185. Il faut donc supposer T de la forme (117.). Dans ce cas T, étant d'ordre 2, sera une transformée de S^2, seule substitution de Γ qui soit d'ordre 2; S aura pour transformée une substitution V, ayant pour carré T. V étant échangeable à T, sera de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x & ax+by+cz \\ y & bx+ay-cz \\ z & a''x-a''y+c''z \end{array}\right|.$$

D'ailleurs la somme des coefficients diagonaux doit y être la même que dans S dont elle est la transformée. Donc

$$(124.)\qquad 2a+c'' = i+i^{-1}+1 = 1.$$

Formons maintenant les substitutions SV, S^2V. Leurs coefficients diagonaux seront respectivement ai, $ai^{-1}=-ai$, c'' et $-a$, $-a$, c''. On aura par suite

$$(125.)\qquad \begin{cases} \quad c'' = A, \\ -2a+c'' = B. \end{cases}$$

A et B étant des quantités convenablement choisies dans les formules (120.), (121.), (122.).

Des équations (124.), (125.) on déduit la suivante

$$2A = B+1.$$

On vérifie immédiatement qu'elle ne peut être satisfaite qu'en posant

$$A = B = 1.$$

Mais alors on aura $a = 0$, $c'' = 1$.

186. Si au lieu de la substitution V, on considérait la substitution

$$TV = \begin{vmatrix} x & bx + ay \ -cz \\ y & ax + by \ +cz \\ z & -a''x + a''y - c''z \end{vmatrix}$$

qui jouit des mêmes propriétés, on trouverait de même $b = 0$.

Mais si a et b sont nuls, V aura son déterminant nul, ce qui est absurde.

187. Il nous reste à examiner les groupes simples que peut fournir la solution (XXXII.). On sait *à priori* qu'elle en donne au moins un, correspondant aux divers mouvements qui superposent à lui-même un icosaèdre régulier. Mais il est nécessaire de s'assurer si ce groupe est le seul.

H ayant pour ordre 60φ, son isomorphe H', formé comme il est indiqué au N°. 126, sera simple et d'ordre 60. Or on sait que tout groupe de cette sorte est isomorphe au groupe H'' alterné entre 5 lettres. Donc H sera lui-même isomorphe à H''.

188. Soient $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ les 5 lettres du groupe H''; il est dérivé des substitutions

$$\begin{aligned} A'' &= (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon), \\ B'' &= (\beta\varepsilon)(\gamma\delta), \\ C'' &= (\beta\gamma)(\delta\varepsilon), \end{aligned}$$

qui ont respectivement pour ordre 5 et 2. Soit A l'une des substitutions de H qui correspondent à A''; sa 5^e^ puissance appartiendra au groupe Φ formé des substitutions de H qui correspondent à l'unité dans H''.

Si Φ se réduit à la substitution 1, on aura $A^5 = 1$. Sinon, Φ sera formé des puissances d'une substitution qui multiplie x, y, z par une quantité θ, racine cubique de l'unité, substitution que nous désignerons elle-même par θ. On aura dans ce cas $A^5 = \theta^\varrho$. Mais H contiendra alors la substitution $\theta^\varrho A$, dont la 5^e^ puissance se réduit à l'unité, et qui correspond également à la substitution A''.

Parmi les substitutions de H correspondantes à A'', il en existe donc toujours une d'ordre 5; c'est celle-là que nous désignerons par A. De même parmi les substitutions correspondantes à B'' et C'' il en existera d'ordre 2 que nous appellerons respectivement B et C.

189. Cela posé, la substitution A, étant d'ordre 5, aura pour forme canonique

$$|x,\ y,\ z \quad \tau^\lambda x,\ \tau^\mu y,\ \tau^\nu z|, \quad \text{où} \quad \tau^5 = 1.$$

D'autre part, B'' transformant A'' en A''^{-1}, B devra transformer A en $\theta^\varrho A^{-1}$, substitution canonique. Donc B permutera les unes dans les autres les variables $x,\ y,\ z$ à des facteurs constants près; et comme elle est d'ordre 2, elle sera de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bx,\ cz|.$$

On peut choisir y de telle sorte que a se réduise à 1; B^2 étant égal à 1, on aura $b=1$; enfin B ayant 1 pour déterminant, on aura $c=1$; d'où

$$(126.) \qquad B = |x,\ y,\ z \quad y,\ x,\ -z|.$$

La transformée de A par B sera

$$|x,\ y,\ z \quad \tau^\mu x,\ \tau^\lambda y,\ \tau^\nu z|.$$

Pour qu'elle se réduise à $\theta^\varrho A^{-1}$, il faudra qu'on ait

$$\theta^\varrho \tau^{-\nu} = \tau^\nu, \quad \text{d'où} \quad \varrho = \nu = 0.$$

D'ailleurs A ayant 1 pour déterminant, on aura $\mu = -\lambda$. Enfin on pourra supposer $\lambda = 1$, τ désignant l'une quelconque des racines cinquièmes de l'unité. On aura donc

$$(127.) \qquad A = |x,\ y,\ z \quad \tau x,\ \tau^{-1} y,\ z|.$$

190. Reste à construire la substitution C. C'' étant échangeable à B'', C devra transformer B en une substitution de la forme $\theta^\varrho B$. Cette transformée devant d'ailleurs être réductible à la même forme canonique que B, on aura nécessairement $\varrho = 0$. Donc C sera échangeable à B, et par suite de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x & ax + by + cz \\ y & bx + ay - cz \\ z & a''x - a''y + c''z \end{array}\right|.$$

191. D'ailleurs $C^2 = 1$. Donc C aura pour forme canonique

$$|x',\ y',\ z' \quad \pm x',\ \pm y',\ \pm z'|.$$

D'ailleurs C diffère de l'unité, et a 1 pour déterminant. Donc l'un des coefficients ambigus sera $+1$ et les deux autres -1. Donc C aura pour équation caractéristique

$$(s+1)(s-1)^2 = 0.$$

Identifiant cette équation à la suivante

$$\begin{vmatrix} a-s & b & c \\ b & a-s & -c \\ a'' & -a'' & c''-s \end{vmatrix} = 0,$$

il viendra

$$(128.)\qquad 2a+c'' = -1,$$

$$(129.)\qquad 2(ac''-a''c)+a^2-b^2 = +1,$$

$$(130.)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & -c \\ a'' & -a'' & c'' \end{vmatrix} = 1.$$

En outre C multipliant $x+y$ par $a+b$, $a+b$ sera racine de son équation caractéristique; on aura donc l'équation

$$(131.)\qquad a+b = \pm 1,$$

qui pourra remplacer l'une des précédentes.

192. En second lieu, la substitution

$$A''C'' = (\alpha\gamma\varepsilon)$$

étant d'ordre 3, la substitution

$$(132.)\qquad AC = \begin{vmatrix} x & a\tau x + b\tau^{-1}y + cz \\ y & b\tau x + a\tau^{-1}y - cz \\ z & a''\tau x - a''\tau^{-1}y + c''z \end{vmatrix}$$

aura pour cube une substitution de Φ. Si donc on prend de nouvelles variables x', y', z' qui la ramènent à la forme canonique, on aura

$$AC = |x',\ y',\ z' \quad a'x',\ b'y',\ c'z'|$$

où a', b', c' ne diffèrent que par des puissances de θ.

D'ailleurs $B''C'' = (\beta\delta)(\gamma\varepsilon)$ est d'ordre 2, et transforme $A''C''$ en $(A''C'')^{-1}$. Donc BC aura pour carré une substitution de Φ et transformera AC en $\theta^{\varrho}(AC)^{-1}$, qui aura la forme canonique lorsqu'on prendra pour variables x', y', z'. Donc BC sera de la forme

$$|x',\ y',\ z' \quad a''y',\ b''x',\ c''z'|$$

et transforme AC en

$$|x',\ y',\ z' \quad b'x',\ a'y',\ c'z'|$$

qui doit se confondre avec $\theta^{\varrho}(AC)^{-1}$.

On aura donc

$$b' = \theta^{\varrho} a'^{-1}, \quad a' = \theta^{\varrho} b'^{-1}, \quad c' = \theta^{\varrho} c'^{-1}$$

d'où

$$c' = \theta^{2\varrho}, \quad a'b' = \theta^{\varrho}.$$

Mais a', b' ne diffèrent de c' que par des puissances de θ. Donc a', b', c' sont des puissances de θ. Si deux de ces coefficients étaient égaux, le troisième leur serait égal en vertu de l'équation $a'b'c' = 1$; et AC appartiendrait à Φ, ce qui est impossible, $A''C''$ ne se réduisant pas à l'unité. Donc a', b', c' reproduiront à l'ordre près les quantités 1, θ, θ^2, et AC aura pour équation caractéristique

$$0 = (s-1)(s-\theta)(s-\theta^2) = s^3-1.$$

Identifiant cette équation avec celle qui résulte de l'équation (132.), on aura les équations

$$(133.) \qquad a(\tau+\tau^{-1})+c'' = 0,$$

$$(134.) \qquad (ac''-ca'')(\tau+\tau^{-1})+a^2-b^2 = 0.$$

Cela posé, les équations (128.) et (133.) donneront

$$a = \frac{1}{\tau+\tau^{-1}-2}, \quad c'' = -1-2a.$$

Les équations (129.) et (134.), comparées aux précédentes, donneront

$$ac''-ca'' = -a, \quad a^2-b^2 = -c'' = -1-2a$$

d'où

$$ca'' = -2a^2,$$
$$b^2 = (1+a)^2.$$

Cette dernière équation comparée avec l'équation (131.) donnera

$$b = -1-a.$$

On peut d'ailleurs, sans altérer l'expression des substitutions A et B prendre pour variable au lieu de z un quelconque de ses multiples, et par suite donner à a'' une valeur arbitraire. Si nous faisons $a'' = 1$, par exemple, nous aurons

$$c = -2a^2.$$

On aura donc

$$C = \begin{vmatrix} x & ax-(1+a)y- & 2a^2z \\ y & -(1+a)x+ & ay+ & 2a^2z \\ z & x- & y-(1+2a)z \end{vmatrix}$$

où

$$a = \frac{1}{\tau + \tau^{-1} - 2}.$$

193. Le groupe (A, B, C), déterminé comme on le voit sans ambiguïté, se confond nécessairement avec celui des substitutions orthogonales qui superposent à lui même l'icosaèdre régulier. Il aura donc pour ordre 60.

On en déduirait un groupe d'ordre 60.3 en lui associant les puissances de la substitution θ.

194. La détermination des groupes simples étant actuellement terminée, il ne nous reste plus qu'à chercher les groupes composés, en commençant par ceux dont les substitutions sont permutables aux groupes déjà trouvés.

195. Théorème. *Il n'existe aucun groupe composé dont les substitutions soient permutables au groupe d'ordre* 60φ *que nous venons de déterminer.*

Soient H le groupe ci-dessus d'ordre 60φ; S une substitution qui lui soit permutable. Elle devra transformer les uns dans les autres les groupes d'ordre 5 que contient H. Mais ces groupes s'obtiennent tous (*Sylow*) en transformant par les substitutions de H l'un d'entre eux, par exemple le groupe F formé des puissances de la substitution A. On aura donc $S = TS'$, S' étant une substitution de H, et T une nouvelle substitution permutable à H.

Or A étant ramené à sa forme canonique (127.), il est évident que les substitutions permutables à F se réduisent aux deux formes

$$(135.)\qquad |x,\ y,\ z\quad ax,\ by,\ cz|,$$

$$(136.)\qquad |x,\ y,\ z\quad ay,\ bx,\ cz|.$$

D'ailleurs H contient B, qui est de cette dernière forme. On aura donc $T = U$ ou $T = BU$, U étant de la forme (135.) et permutable à H.

D'autre part, U transformera la substitution

$$B = |x,\ y,\ z\quad y,\ x,\ -z|$$

en

$$(137.)\qquad |x,\ y,\ z\quad ab^{-1}y,\ ba^{-1}x,\ -z|.$$

Or les substitutions de la forme (136.) que contient H sont de la forme

$$\theta^{\varrho} A^{\alpha} B = |x,\ y,\ z\quad \theta^{\varrho}\tau^{-\alpha}y,\ \theta^{\varrho}\tau^{\alpha}y,\ -\theta^{\varrho}z|.$$

La substitution (137.) étant de cette forme, on aura

$$ab^{-1} = \theta^{\varrho}\tau^{-\alpha},\quad \theta^{\varrho} = 1$$

d'où $b = a\tau^{\alpha}$. On aura par suite

$$U = VA^{-3\alpha},$$

V étant une substitution de la forme

$$|x, y, z \quad mx, my, nz|$$

et permutable à H.

La substitution

$$C = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz \\ y & bx + ay - cz \\ z & a''x - a''y + c''z \end{vmatrix}$$

transformée par V, donnera

$$C_1 = V^{-1}CV = \begin{vmatrix} x & ax + & by + \frac{mc}{n}z \\ y & bx + & ay - \frac{mc}{n}z \\ z & \frac{na''}{m}x - & \frac{na''}{m}y + & c''z \end{vmatrix}.$$

Cette substitution, ne différant de C que par le changement de c, a'' en $\frac{mc}{n}$, $\frac{n}{m}c$, satisfera à des relations

$$BC_1 = C_1B, \quad C_1^2 = 1, \quad (AC_1)^3 = 1$$

analogues à celles qui nous ont servi à calculer C. Car ces équations ne déterminaient comme on l'a vu, que le produit des deux coefficients a et c''.

Soit donc C_1'' celle des substitutions du groupe H'' alterné entre 5 lettres, qui correspond à C_1; on aura

$$B''C_1'' = C_1''B'', \quad C_1''^2 = 1, \quad (A''C_1'')^3 = 1.$$

Mais on vérifie immédiatement que la substitution $C'' = (\beta\gamma)(\delta\varepsilon)$ est la seule qui satisfasse à ces relations.

Donc $C_1'' = C''$; et par suite, les substitutions C_1 et C qui leur correspondent ne devront différer que par une puissance de θ. D'après ce qu'on connaît déjà de leurs formes, elles ne pourront être qu'identiques. Donc $m = n$.

La substitution V ayant d'ailleurs 1 pour déterminant, devra se réduire à une puissance de θ. Donc la substitution S sera le produit de substitutions, toutes contenues dans le groupe (A, B, C, θ).

On ne peut donc adjoindre à ce groupe de nouvelles substitutions qui lui soient permutables, ce qui établit notre proposition.

196. Théorème. *Les groupes permutables à un faisceau F dont toutes les substitutions ont la forme*

$$|x,\ y,\ z\quad ax,\ by,\ cz|$$

rentrent dans les catégories déjà étudiées.

En effet, si chacun des rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, a plusieurs valeurs dans chacune des substitutions de F, x, y, z et leurs multiples seront les seules fonctions des variables que les substitutions de F multiplient par un facteur constant. Toute substitution permutable à F devant les remplacer les unes par les autres sera de l'une des formes (48.) à (53.). Et tout groupe formé de semblables substitutions sera l'un des groupes du N°. 62.

Supposons au contraire que F ait toutes ses substitutions de la forme

$$|x,\ y,\ z\quad ax,\ ay,\ cz|.$$

Les substitutions permutables à F seront de la forme

$$|x,\ y,\ z\quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z|.$$

Soit K un groupe d'ordre fini formé de semblables substitutions. Le groupe K' formé des substitutions

$$|x,\ y\quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y|$$

sera également d'ordre fini, et appartiendra à l'un des 5 types trouvés pour le second ordre. Quel que soit ce type, K sera l'un des groupes du N°. 62.

197. Théorème. *Les groupes permutables à un groupe K dont toutes les substitutions sont de l'une des formes*

$$(138.)\qquad |x,\ y,\ z\quad ax,\ by,\ cz|,$$

$$(139.)\qquad |x,\ y,\ z\quad a'y,\ b'x,\ c'z|$$

appartiennent aux catégories déjà étudiées.

Soient en effet Ψ le groupe formé par celles des substitutions de K qui sont de la forme

$$(140.)\qquad |x,\ y,\ z\quad ax,\ ay,\ cz|,$$

$\omega = m\varphi$ son ordre. Soient d'autre part F le faisceau formé par celles des substitutions de K qui sont de la forme (138.), $pm\varphi$ son ordre. Les autres faisceaux contenus dans K s'obtiendront chacun en adjoignant à Ψ une substitution de la forme (139.) et auront pour ordre $2m\varphi$.

Si $p > 2$, F étant le seul faisceau contenu dans K qui ait pour ordre $pm\varphi$, toute substitution permutable à K le sera à F. On retombera donc sur le cas du N°. 196.

Il faut donc supposer $p=2$ (Car si p était égal à 1, les substitutions de K étant échangeables entre elles, K serait un faisceau).

D'autre part, les substitutions de Ψ jouissent de la propriété exclusive d'être échangeables à toutes les substitutions de K. Donc toute substitution permutable à K le sera à Ψ; et l'on retombera encore sur le cas du N°. 196, à moins que Ψ ne se réduise à Φ, auquel cas $m=1$.

F serait donc d'ordre 2φ, et Ψ d'ordre φ. Donc F résulterait de la combinaison de Φ avec une seule substitution de la forme

$$S = |x, y, z \quad ax, -ay, cz|.$$

Cela est impossible. Car K contient une substitution de la forme (139.) laquelle transformera S en

$$S' = |x, y, z \quad -ax, ay, cz|,$$

et Ψ renfermera la substitution

$$S^{-1}S' = |x, y, z \quad -x, -y, z|$$

laquelle n'appartient pas à Φ.

198. Problème. ***Trouver les groupes composés H dont les substitutions sont permutables à un groupe I dérivé de la combinaison d'un faisceau F dont les substitutions ont la forme***

$$(141.) \qquad |x, y, z \quad ax, by, cz|$$

avec des substitutions de la forme

$$(142.) \qquad |x, y, z \quad a'y, b'z, c'x|.$$

On peut choisir les variables y, z de telle sorte que dans l'une des substitutions (142.) on ait $a'=b'=1$, d'où $c'=1$,

$$B = |x, y, z \quad y, z, x|.$$

Cela posé, les faisceaux autres que F contenus dans I résultent de l'adjonction à Φ de l'une des substitutions (142.) et ont pour ordre 3φ.

Donc F aura aussi pour ordre 3φ; sinon il serait seul de son espèce, et toute substitution permutable à I l'étant à F, on retomberait sur le cas du N°. 196.

Les substitutions de F seront donc de la forme

$$|x, y, z \quad \theta^\alpha x, \theta^\beta y, \theta^{-\alpha-\beta} z|$$

où $\theta^3=1$ (N°. 156), et résulteront de la combinaison de la substitution θ avec la substitution

$$A = |x, y, z \quad x, \theta y, \theta^2 z|.$$

199. Voyons combien H pourra contenir de substitutions. Soit S l'une d'elles. Elle devra transformer A en une substitution du groupe I, lequel, étant dérivé de θ, A, B, contient 27 substitutions. D'ailleurs A ne peut être transformé en une des puissances de θ, ces puissances jouissant de la propriété exclusive d'être échangeables à toute substitution de I. Donc le nombre m des transformées distinctes de A par les substitutions de H ne peut surpasser 24.

Considérons maintenant celles des substitutions de H qui sont échangeables à A. Soit T l'une d'elles. La substitution B transformant A en θA, sa transformée B' par T, qui est échangeable à A et à θA, produira la même transformation. Ce sera donc une des 9 substitutions de la forme $\theta^{\varrho} A^{\alpha} B$, lesquelles jouissent seules de cette propriété. Donc le nombre n des transformées de B par les substitutions T ne peut surpasser 9.

Enfin celles des substitutions de H qui sont échangeables à A et à B devront multiplier x, y, z par un même facteur, qui sera nécessairement une puissance de θ; elles se réduiront donc aux trois substitutions de Φ.

Cela posé, il est clair que H aura pour ordre $m.n.3$, soit au maximum $24.9.3$.

200. Nous allons effectivement construire un groupe H permutable à I, et d'ordre $24.9.3$.

La substitution B transforme en effet A et B en θA, B.

A les transforme en A, $\theta^2 B$.

D'autre part la substitution

$$C = |x, y, z \quad y, x, z|$$

les transforme en θA^2, B^2.

La substitution

$$D = |x, y, z \quad jx, j\theta^2 y, jz| \quad \text{où} \quad j^3 = \theta$$

les transforme en A, AB.

Enfin la substitution

$$E = \begin{vmatrix} x & a(x+y+\theta z) \\ y & a(x+\theta y+z) \\ z & a(x+\theta^2 y+\theta^2 z) \end{vmatrix}$$

(où $a^3 = \dfrac{1}{3(1-\theta^2)}$, de telle sorte que le déterminant soit 1) les transforme en B, A^2B^2.

Cela posé, il est clair que le groupe dérivé de θ, A, B, C, D, E

est permutable à I, et que ses substitutions permettent de transformer A en une quelconque des 24 substitutions de la forme $\theta^\varrho A^\alpha B^\beta$ où α et β ne sont pas nuls tous deux; et que celles qui sont échangeables à A transforment B en une quelconque des 9 substitutions $\theta^\varrho A^\alpha B$. Enfin il contient les puissances de θ, échangeables à A et à B. Son ordre est donc bien 24.9.3.

201. Tout groupe dont les substitutions sont permutables à I est contenu dans H, ainsi qu'on l'a vu. Cherchons quels groupes moindres nous pourrons obtenir.

Remarquons à cet effet que les substitutions de H permutent l'un dans l'autre les 4 groupes α, β, γ, δ respectivement formés de la combinaison de θ avec les substitutions A, B, AB, A^2B.

Les substitutions de I, ainsi que C, ne déplacent pas ces 4 groupes; D opère sur eux la substitution

$$D' = (\beta\gamma\delta)$$

et E la substitution

$$E' = (\alpha\beta\gamma).$$

Les substitutions D', E' combinées ensemble, formeront un groupe H' alterné entre 4 lettres et isomorphe à H.

Soient maintenant h un groupe contenu dans H; h' le groupe correspondant contenu dans H'. Diverses hypothèses seront possibles sur la constitution du groupe h'.

1°. Si h' ne contient aucune substitution binaire, il sera formé tout au plus des puissances d'une substitution circulaire ternaire, par exemple D'. Le groupe h sera exclusivement formé des substitutions θ, A, B, C, D qui leur correspondent, et qui sont permutables au faisceau F. Ce sera donc l'un des groupes du N°. 62.

2°. Si h' contient une substitution binaire, par exemple celle-ci

$$D'E' = (\alpha\beta)(\gamma\delta)$$

h contiendra l'une des substitutions correspondantes de H. Celles-ci sont de la forme DES, S étant une substitution correspondante à l'unité, et par suite égale à T ou CT, T désignant une substitution de I; mais h contient I par hypothèse. Donc il contiendra l'une des deux substitutions DE ou DEC.

Mais s'il contient DE, qui transforme A et B en B et θA^2, il contiendra $(DE)^2A^2$, qui les transforme en θA^2 et B^2, et par suite sera de la forme CT; donc il contient C, et par suite DEC.

Réciproquement, s'il contient DEC, qui transforme A et B en B^2 et θA, il contiendra $(DEC)^2 BA^2$, qui les transforme en θA^2 et B^2, et sera de la forme CT. Donc il contient C, et par suite DE.

Le groupe h contient donc toutes les substitutions θ, A, B, C de H qui correspondent à l'unité dans h'. Il s'obtiendra en leur adjoignant une quelconque des substitutions qui correspondent à chacune des autres substitutions de h', à savoir DE, si h' ne contient pas d'autre substitution binaire que $D'E'$; DE et ED s'il contient en outre la substitution binaire $E'D' = (\alpha\gamma)(\beta\delta)$.

Nous obtenons donc en tout trois groupes nouveaux.

1°. Le groupe H, d'ordre 27.2.12, dérivé de θ, A, B, C, D, E.

2°. Un groupe h d'ordre 27.2.4, dérivé de θ, A, B, C, DE, ED.

3°. Un groupe h_1 d'ordre 27.2.2, dérivé de θ, A, B, C, DE.

202. Remarque. Les 9 substitutions de la forme $A^\alpha B^\beta$, respectivement combinées avec les puissances de θ, forment 9 systèmes, que toutes les substitutions de H permutent les uns dans les autres. Les déplacements de ces systèmes forment un groupe entre 9 lettres, d'ordre 9.2.12 (car les substitutions de H qui ne déplacent pas ces systèmes se réduisent aux puissances de θ). Ce groupe est évidemment identique au groupe ***hessien***, déjà rencontré dans des recherches assez variées (points d'inflexion des courbes du 3e ordre, etc.).

203. Théorème. ***Il n'existe aucun groupe plus général que H et permutable à ses substitutions.***

En effet, H contient le groupe I formé des 27 substitutions $\theta^\varrho A^\alpha B^\beta$ et auquel toutes ses substitutions sont permutables. Ce groupe I est le seul qui jouisse de ces propriétés.

Supposons en effet qu'on eût un autre groupe analogue I', contenant une substitution S autre que celles de I. S ayant pour ordre une puissance de 3, sa correspondante dans le groupe H' sera une substitution ternaire, telle que D'.

Cela posé, I' contiendrait la transformée de S par B et par suite la substitution $S^{-1}.B^{-1}SB$. Mais S ayant pour correspondante D', transforme B^{-1} en une substitution de la forme $\theta^\varrho (AB)^\alpha$. Donc $S^{-1}B^{-1}SB = \theta^\varrho (AB)^\alpha B$ sera une substitution de I, autre que les puissances de θ. Cette substitution est contenue dans I', ainsi que ses transformées, lesquelles reproduisent évidemment par leur combinaison tout le groupe I. Donc I', contenant en outre S, aurait, contre l'hypothèse, plus de substitutions que I.

Donc toute substitution permutable à H le sera à I, et par suite appartiendra à H.

204. Théorème. *Les substitutions permutables à un groupe I dérivé de substitutions des formes*

$$(143.)\qquad |x,\ y,\ z\quad ax,\ by,\ cz|,$$
$$(144.)\qquad |x,\ y,\ z\quad a'y,\ b'x,\ c'z|,$$
$$(145.)\qquad |x,\ y,\ z\quad a''y,\ b''z,\ c''x|,$$

ne fournissent aucun groupe nouveau.

En effet, les coefficients a, b, c dans les diverses substitutions de la forme (143.) sont des puissances d'une racine irréductible θ d'une certaine équation binôme. Si ϱ est le degré de cette équation, l'ordre du faisceau formé par les substitutions (143.) sera égal à $\frac{\varrho^2}{3}$ ou à ϱ^2 (N°. 76.).

Les autres faisceaux contenus dans I contiendront, soit une substitution de la forme (145.), auquel cas ils seront d'ordre 3φ, soit une substitution de la forme (144.) ou des formes analogues

$$|x,\ y,\ z\quad a'x,\ b'z,\ c'y|,$$
$$|x,\ y,\ z\quad a'z,\ b'y,\ c'x|.$$

Ils résulteront alors de la combinaison de cette substitution avec celles de la forme

$$|x,\ y,\ z\quad ax,\ ay,\ cz|$$

lesquelles sont évidemment les puissances de la substitution

$$|x,\ y,\ z\quad \theta^{-1}x,\ \theta^{-1}y,\ \theta^2 z|$$

dont on a établi l'existence (N°. 76.), et auront pour ordre 2ϱ.

Cela posé, si ϱ contient un facteur autre que 2 ou 3, ou s'il est divisible par 2^2 ou 3^2, l'ordre de F étant différent de 3φ ou de 2ϱ, le faisceau F sera seul de son espèce; et par suite, toute substitution permutable à I l'étant à F, on retombera sur le cas du N°. 196.

Il faudra donc supposer $\varrho = 6$, 3 ou 2.

1°. Si $\varrho = 3$, l'ordre de I étant égal à 6 fois l'ordre de F, sera égal à une puissance de 3 multipliée par 2.

Celles de ses substitutions dont l'ordre est une puissance de 3 formeront (*Sylow*) un seul groupe I', évidemment dérivé des substitutions (143.), (145.). Toute substitution permutable à I l'étant à I', on retombera sur le cas étudié au N°. 198.

2°. Soit $\varrho = 6$. Celles des substitutions de F dont l'ordre est puissance de 3 seront de la forme

$$(147.) \qquad |x,\ y,\ z \quad \theta^\alpha x,\ \theta^\beta y,\ \theta^{-\alpha-\beta} z|.$$

Si F contient une substitution de cette forme autre que celles de Φ, il contiendra également ses transformées par les substitutions de I, qui combinées ensemble reproduiront toutes les substitutions (147.). Dans ce cas l'ordre de F sera égal à ϱ^2 et $> 3\varphi$, $> 2\varrho$. Donc F sera seul de son espèce et l'on retombera sur le cas du N°. 196.

3°. Reste à discuter le cas où l'on a $\varrho = 2$ ou bien $\varrho = 6$, mais F ne contenant d'autre substitution ternaire que celles de Φ. F résulte alors de la combinaison de Φ avec un groupe Γ d'ordre 4 dont les substitutions sont de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad (-1)^\alpha x,\ (-1)^\beta y,\ (-1)^{\alpha+\beta} z|.$$

Ce groupe Γ est le seul d'ordre 4 qui soit permutable aux substitutions de I. En effet, soit S une substitution d'ordre puissance de 2 contenue dans I, mais étrangère à Γ. Elle sera de la forme (144.); et combinée avec sa transformée par une des substitutions (145.), elle donnera une substitution de la forme (145.), et dont par suite, l'ordre sera divisible par 3. Le groupe formé par S et ses transformées aura donc son ordre différent de 4.

Le groupe Γ étant seul de son espèce, toute substitution permutable à I le sera à Γ, et l'on retombera sur le cas traité au N°. 196.

205. La recherche des divers groupes H d'ordre fini, et dont les substitutions ont pour déterminant 1 est donc complétement terminée.

Les groupes G, d'ordre fini, dont les substitutions ont un déterminant quelconque, s'en déduiront immédiatement (N°. 63).

Soient en effet H l'un des groupes précédemment trouvés; $1, S, T, \ldots$ les substitutions dont il est dérivé; $a, a', \ldots, n, n', \ldots, p, p', \ldots$ des substitutions qui multiplient toutes les variables x, y, z par un même facteur, respectivement égal aux quantités $a, a', \ldots, n, n', \ldots, p, p', \ldots$ racines de l'unité; le groupe G dérivé des substitutions

$$a,\ a',\ \ldots;\ nS,\ n'S;\ \ldots;\ pT,\ p'T,\ \ldots;\ \ldots$$

sera d'ordre fini; et réciproquement tout groupe d'ordre fini se rattachera de cette façon à l'un des groupes H.

On peut remarquer que les quantités $a, a', \ldots$ étant des racines de l'unité, les quantités $a^\alpha a'^\beta \ldots$ seront les puissances d'une seule d'entre elles, que nous désignerons par m. Les substitutions dérivées de $a, a', \dots$ se réduiront donc aux puissances de la substitution m.

En second lieu, si G contient les substitutions $nS, n'S, \dots$ il contiendra les substitutions $n^{-1}n', \dots$, lesquelles, multipliant x, y, z par un même facteur, devront se réduire à des puissances de m. On aura donc $n' = m^\varrho n$; et les substitutions $n'S = m^\varrho nS, \dots$ étant dérivées de m et de nS pourront être supprimées de la suite des substitutions dont G est dérivé.

On pourra supprimer de même les substitutions $p'T$, etc. Donc G sera dérivé des seules substitutions

$$m, \quad nS, \quad pT, \quad \dots$$

206. 1°. Cela posé, admettons d'abord que H ait ses substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad \alpha x + \beta y, \ \alpha' x + \beta' y, \ \gamma z|.$$

Les substitutions de G seront évidemment de la même forme; et le groupe

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y, \ \alpha' x + \beta' y|$$

à deux variables, étant d'ordre fini, appartiendra à l'un des cinq types du N°. 33.

Soit $U=0$ une équation différentielle ayant pour groupe G. L'intégrale particulière z étant multipliée dans chaque substitution de ce groupe par un facteur γ racine de l'unité, sera racine d'une équation binôme, dont le second membre sera une fonction rationnelle de la variable t.

Quant aux intégrales x, y, elles seront racines d'équations binômes, dont les seconds membres seront des fonctions rationnelles de t, ou de t et des racines d'une équation auxiliaire, de degré 2, 4 ou 5 (N°. 34).

207. 2° et 3°. Si H est dérivé de substitutions

$$(148.) \qquad |x, y, z \quad ax, by, cz|$$

jointes à une substitution

$$S = |x, y, z \quad a'y, b'z, c'x|$$

ou à la substitution S et à une substitution

$$T = |x, y, z \quad a''y, b''x, c''z|,$$

il en sera évidemment de même de G.

Les permutations opérées entre les variables par les substitutions de G forment un groupe g, de degré 3 et d'ordre 3 ou 6, et isomorphe à G.

Si donc $U=0$ est une équation différentielle ayant pour groupe G, on pourra par la résolution d'une équation auxiliaire $X=0$ du troisième degré, réduire G à celles de ses substitutions qui sont de la forme (148.). Cela fait, x, y, z seront devenues les racines d'équations binômes.

208. 4°. Si H est dérivé des substitutions A, B, C des Nos. 187 à 192, seules ou jointes à la substitution θ (où $\theta^3=1$), G sera dérivé de substitutions de la forme

$$m, \quad nA, \quad pB, \quad qC.$$

Mais alors il contiendra la substitution

$$(nA)^{-1}(pB)^{-1}nApB = A^{-2}$$

ainsi que ses transformées par les substitutions de G, ou ce qui revient au même, par les substitutions du groupe dérivé de A, B, C. Ces transformées, combinées entre elles, reproduisent toutes les substitutions du groupe (A, B, C). Il suffit pour s'en assurer, de remarquer que (A, B, C) est isomorphe au groupe alterné entre cinq lettres (No. 187.), lequel est simple.

Donc G contiendra les substitutions A, B, C, et par suite les substitutions n, p, q, lesquelles, multipliant x, y, z par un même facteur, devront se réduire à des puissances de m. Donc G sera dérivé des substitutions

$$m, \quad A, \quad B, \quad C.$$

Si $U=0$ est une équation différentielle ayant pour groupe G, la résolution d'une équation du 5e degré $X=0$ réduira son groupe aux substitutions m, lesquelles multiplient une fonction linéaire quelconque de x, y, z par une même racine de l'unité.

Donc toute intégrale de l'équation $U=0$ sera racine d'une équation binôme, ayant pour second membre une fonction rationnelle de t et des racines de X.

209. 5°. Si H est dérivé des substitutions θ, A, B, C, D, E du No. 200, G sera dérivé de substitutions

$$m, \quad nA, \quad pB, \quad qC, \quad rD, \quad sE$$

et contiendra la substitution

$$(qC)^{-1}.(sE)^{-1}.qC.sE = C^{-1}E^{-1}CE$$

et ses transformées par les substitutions de G. On s'assure aisément que ces transformées, combinées entre elles, reproduisent toutes les substitutions dérivées de θ, A, B, C, DE, ED. Donc G contiendra ces substitutions, et par suite les substitutions n, p, q et $rs = rD.sE.(DE)^{-1}$, lesquelles devront se réduire à des puissances de m. Donc G sera dérivé des substitutions

$$(149.)\qquad m,\ A,\ B,\ C,\ rD,\ sE.$$

Il contient d'ailleurs la substitution

$$(rD)^3 = r^3.$$

Donc r^3 doit être une puissance de m, qu'on peut supposer égale à 1, m ou m^2; car si l'on avait $r^3 = m^{3k+\varrho}$, on pourrait remplacer dans la suite (149.) la substitution rD par la substitution $m^{-k}rD$, dont le cube se réduit à m^ϱ.

On pourra d'ailleurs supposer $s = r^2$; car rs et r^3 étant des puissances de m, s ne diffère de r^2 que par une puissance de m.

Enfin, la substitution C étant dérivée de la combinaison des autres substitutions de la série, on pourra la supprimer.

210. 6°. Si H est dérivé des substitutions

$$\theta,\quad A,\quad B,\quad C,\quad DE$$

du N°. 201, G le sera de substitutions

$$(150.)\qquad m,\quad nA,\quad pB,\quad qC,\quad sDE.$$

Il contiendra la substitution

$$(nA)^{-1}.(qC)^{-1}.nA.qC = \theta A$$

et ses transformées par les substitutions de G, lesquelles reproduisent toutes les substitutions dérivées de θ, A, B. On peut donc supposer $n = p = 1$.

D'ailleurs G contient $(sDE)^2A^2$, laquelle est de la forme s^2CT, où T est dérivé de θ, A, B (N°. 201); donc il contient s^2C, et par suite

$$qC(s^2C)^{-1} = qs^{-2}$$

laquelle devra se réduire à une puissance de m. On pourra donc dans la série (150.) effacer la substitution qC, qui résulte de la combinaison des autres.

Enfin G contient $(s^2C)^2 = s^4$, qui devra se réduire à une puissance de m. On pourra la supposer égale à 1, m, m^2 ou m^3.

211. 7°. Si H est dérivé des substitutions

$$\theta,\quad A,\quad B,\quad C,\quad DE,\quad ED$$

du N°. 201, G le sera des substitutions

$$m,\quad nA,\quad pB,\quad qC,\quad sDE,\quad tED$$

et l'on pourra supposer comme tout à l'heure $n = p = 1$, et effacer qC de la série. D'ailleurs G contient la substitution $(tED)^2$, laquelle est de la forme t^2CT. Donc G contient t^2C, et comme il contient d'autre part s^2C on aura $t^2 = s^2m^\varrho$, ϱ pouvant évidemment être supposé égal à 0 ou à 1.

212. Remarquons que dans les trois derniers cas que nous venons d'examiner, H contient la substitution θ, laquelle est une puissance de m. Donc le degré de l'équation binôme dont m est racine est un multiple de 3.

Enfin dans chacun de ces trois derniers cas, il existe un groupe Γ de degré 9, contenu dans le groupe hessien isomorphe à G, et tel que celles des substitutions de G qui y ont l'unité pour correspondante se réduisent aux puissances de m (N°. 202).

Donc si $U=0$ est une équation différentielle ayant pour groupe G, ses intégrales seront racines d'équations binômes dont les seconds membres sont fonctions rationnelles de t et des racines d'une équation hessienne.

Paris, juin 1877.