MONATSBERICHT

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

Februar 1880.

Mit 2 Tafeln.

BERLIN 1880.

BUCHDRUCKEREI DER KGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN (G. VOGT)
NW. UNIVERSITÄTSSTR. 8.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

MONATSBERICHT

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

Februar 1880.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

2. Februar. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.

Hr. Virchow las über anomale Bildungen der Schläfengegend und über partielle Microcephalie, besonders der Umgebung der sylvischen Grube.

Hr. Kronecker las:

Über die Irreductibilität von Gleichungen.

Seitdem ich mich genau vor 35 Jahren bei Gelegenheit einer von Hrn. Kummer in Breslau gehaltenen Vorlesung über Zahlentheorie auf seine specielle Anregung mit der Vereinfachung des Beweises der Irreductibilität der Kreistheilungsgleichungen beschäftigt und das Ergebniss im XXIX. Bande des Crelle'schen Journals veröffentlicht habe, bin ich wiederholt auf die Frage zurückgekommen und habe mich namentlich bemüht, charakteristische Eigenschaften der irreductibeln Zahlengleichungen aufzufinden. Ich habe dafür sowohl in meinen allgemeinen Untersuchungen über algebraische Zahlen als auch in den specielleren über die singulären Moduln der elliptischen Functionen mancherlei Anhaltspunkte gefunden (vgl. Monatsbericht vom Juni 1862 pag. 368.), bin aber erst neuerdings zu einem befriedigenden Resultate gelangt, und zwar gerade rechtzeitig, um die erste Mittheilung davon meinem Freunde Kummer an seinem siebzigsten Geburtstagsfeste am 29. v. M. widmen zu können.

Den Kernpunkt der ganzen Entwickelung bildet folgender Satz:

> „Ist $F(x)$ eine ganze ganzzahlige Function von x und bedeutet ν_p in der auf alle Primzahlen p ausgedehnten Summe
> $$\Sigma \nu_p p^{-1-w}$$
> die Anzahl der (gleichen oder verschiedenen) Wurzeln der Congruenz $F(x) \equiv 0 \bmod. p$, so wird der Grenzwerth jener Reihe für unendlich kleine positive Werthe von w proportional $\log \frac{1}{w}$ und zwar gleich $\log \frac{1}{w}$ multiplicirt mit der Anzahl der irreductibeln Factoren von $F(x)$."

Für irreductible Functionen ist also der Grenzwerth der Reihe $\log \frac{1}{w}$ selbst, und hieraus ergiebt sich eben unmittelbar jener Werth der Reihe für beliebige Functionen $F(x)$. Da ν_p nur die Werthe $0, 1, 2, \ldots n$ haben kann, wenn n den Grad von $F(x)$ bezeichnet, so ist jene Reihe in n Partialreihen zu zerlegen und in folgender Weise darzustellen:

$$\sum_{k=1}^{k=n} k \Sigma p_k^{-1-w},$$

wo p_k jede Primzahl bedeutet, für welche k Congruenzwurzeln von $F(x) \equiv 0$ existiren. Für alle Primzahlen ist bekanntlich der Grenzwerth von $\sum \frac{1}{p^{1+w}}$ gleich $\log \frac{1}{w}$; wenn man daher die Existenz einer Function voraussetzt, welche die Dichtigkeit der Primzahlen angiebt, so kann man den obigen Satz einfach so formuliren, dass diese Dichtigkeit mit derjenigen übereinstimmt, welche resultirt, wenn jede Primzahl p soviel mal genommen wird, als die Congruenz $F(x) \equiv 0 \bmod. p$ Wurzeln hat, vorausgesetzt, dass $F(x)$ irreductibel ist.

Nimmt man die Dichtigkeit aller Primzahlen als Maass und bezeichnet alsdann die Dichtigkeit der Primzahlen p_k mit D_k, so ist dem obigen Satze gemäss die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=n} k D_k = 1$$

charakteristisch für irreductible Gleichungen $F(x) = 0$ überhaupt. Die Einzelwerthe der Dichtigkeiten D_k sind im Allgemeinen für die verschiedenen Grade der Gleichungen verschieden, aber stets dieselben für alle Gleichungen einer und derselben Classe.

Wenn $F(x) = 0$ eine allgemeine Gleichung ist, d. h. keinen besonderen Affect besitzt, so resultirt, indem man sich die Gleichung für eine lineare Function von h Wurzeln gebildet denkt, die Relation

$$\sum_{k=1}^{k=n} k(k-1)\dots(k-h+1)\, D_k = 1\,,$$

und diese ergiebt für die Dichtigkeit D_k den Werth

$$\frac{1}{k!}\sum_h \frac{(-1)^h}{h!} \qquad (h=0,1,\dots n-k) \qquad (0!=1),$$

welcher für grosse Werthe von n und relativ kleine von k nahezu gleich $\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{k!}$ wird, und die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e.k!}$$

wird eben wieder gleich 1. Dagegen wird die Gesammtdichtigkeit der Primtheiler einer irreductibeln Function $F(x)$, die gleich Null gesetzt eine allgemeine Gleichung repräsentirt, für grössere Werthe des Grades n nahezu $\left(1-\frac{1}{e}\right)$ also etwa $\frac{7}{11}$.

Die Dichtigkeit D_{n-1} ist stets gleich Null. Für solche irreductible Gleichungen, deren Wurzeln sämmtlich rationale Functionen einer sind, werden auch alle vorhergehenden Werthe von D gleich Null und also $D_n = \frac{1}{n}\cdot$ Hieraus folgt, dass jede irreductible ganzzahlige Function einer Variabeln $F(x)$ für unendlich viele Primzahlmoduln einem Product von Linearfactoren congruent ist, und dass die Dichtigkeit dieser Primzahlen durch den reciproken Werth der Ordnung des Affects der Gleichung $F(x) = 0$ d. h. durch den reciproken Werth des Grades der irreductibeln Factoren der Galois'schen Resolvente ausgedrückt wird. Aber nicht bloss diese Dichtigkeit, deren Index gleich dem Grade von $F(x)$ ist, sondern auch alle andern Werthe D_1, D_2, ... werden durch den Affect bestimmt, und es wird z. B., wenn $F(x) = 0$ eine auflösbare Gleichung vom Primzahlgrade n und die Ordnung ihres Affects nd ist, wo d einen Divisor von $(n-1)$ bedeutet,

$$D_1 = 1 - \frac{1}{d}\,,\; D_2 = 0\,,\; \dots.\; D_{n-1} = 0\,,\; D_n = \frac{1}{nd}.$$

Wenn zwei Functionen $n$ten Grades $F(x)$ und $F_1(x)$ dieselben charakteristischen Zahlen ν_p besitzen, so hat die aus den Wurzeln beider gebildete Gleichung n^2ten Grades für die Zahlen p_k die Zahl $\nu_p = k^2$ als charakteristische Zahl. Da jedenfalls $D_n > 0$ ist, so ist also

$$\Sigma k D_k > 1$$

d. h. die Gleichung muss reductibel sein. Dies kann auch schon erschlossen werden, wenn man nur voraussetzt, dass die Dichtigkeit der Primzahlen, für welche beide Congruenzen $F(x) \equiv 0$ und $F_1(x) \equiv 0$ genau k Congruenzwurzeln haben, mit der Dichtigkeit derjenigen, für welche je eine derselben diese Eigenschaft besitzt, für jedes k übereinstimmt. Ohne heute näher auf den allgemeinen Fall einzugehen, hebe ich hervor, dass die zugehörigen Galois'schen Gleichungen in dieselbe Gattung gehören müssen, und dass also, wenn n Primzahl ist, auch die Gleichungen selbst zu einer Gattung gehören, d. h.

> wenn für zwei Functionen, deren Grad eine Primzahl ist, die Primtheiler der verschiedenen Arten im Allgemeinen beiden gemeinsam sind, so sind die Wurzeln der einen Gleichung rational durch die der andern ausdrückbar,

und es ist also (in ähnlicher Weise, wie nach dem Cauchy'schen Satze eine Function durch ihre Randwerthe bestimmt wird) mit blossen Congruenzbestimmungen der ganze Inbegriff der durch die Gleichung definirten algebraischen Irrationalitäten bestimmt.

Um die einfachen Betrachtungen, welche zu dem obigen Satze führen, an den Kreistheilungsgleichungen darzulegen, knüpfe ich an Hrn. Kummer's Ausführungen im §. VIII seiner im XVI. Bande von Liouville's Journal veröffentlichten Abhandlung an. Darnach ergiebt sich, wenn α wie a. a. O. eine Wurzel der Gleichung

$$x^{\lambda-1} + x^{\lambda-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

bedeutet, auch ohne die Voraussetzung der Irreductibilität, dass der mittlere Werth von $Nf(\alpha)$ constant und also $\Sigma Nf(\alpha)^{-1-w}$ für unendlich kleine positive Werthe von w proportional $\frac{1}{w}$ ist. Wird der Grad der irreductibeln Gleichung für α mit r bezeichnet, so ist unter $Nf(\alpha)$ natürlich nur das Product der r conjugirten Factoren zu verstehen. Nun ist andrerseits $\Sigma Nf(\alpha)^{-1-w}$ gleich dem auf alle Primzahlen $p_{\lambda-1}$ von der Form $n\lambda+1$ zu erstreckenden Producte

$$\Pi\,(1-p_{\lambda-1}^{-1-w})^{-r},$$

multiplicirt mit einem Producte von Factoren $(1-p^{-h-hw})^{-1}$, welches, da $h>1$ ist, für $w=0$ endlich und grösser als Eins bleibt. Man hat daher

$$\lim_{w=0}.\sum \frac{r}{p_{\lambda-1}^{1+w}} = \log\frac{1}{w},$$

und dies ist für den vorliegenden Fall der Inhalt des obigen allgemeinen Satzes, da die Primzahlen $p_{\lambda-1}$ die sämmtlichen Primtheiler von

$$x^{\lambda-1}+x^{\lambda-2}+\cdots+x+1$$

bilden. — Der Nachweis, dass jene Gleichung für α irreductibel oder also dass $r=\lambda-1$ ist, lässt sich im Wesentlichen nunmehr darauf gründen, dass die Differenzen

$$\sum_{m=1}^{\infty}(m\lambda+h)^{-1-w} - \sum_{m=1}^{\infty}(m\lambda+k)^{-1-w}$$

und also auch jene Dirichlet'schen Reihen

$$\sum_{n} \frac{\beta^{h\,\mathrm{ind}.\,n}}{n^{1+w}} \qquad (h=1,2,\ldots\lambda-2),$$

wenn β wie in der Kummer'schen Abhandlung eine primitive $(\lambda-1)$te Wurzel der Einheit bedeutet, für $w=0$ endlich bleiben. Dass eben diese Reihen für $w=0$ auch nicht gleich Null werden, ergiebt sich gleichzeitig mit der Irreductibilität. Ist nämlich $P(w)$ das Product aller dieser $(\lambda-2)$ Reihen, so hat man die identische Gleichung

$$P(w)\sum n^{-1-w} = \prod_{d}\prod_{p_d}\left(1-p_d^{-\delta(1+w)}\right)^{-d},$$

wenn mit d die verschiedenen Divisoren von $\lambda-1$, mit δ die complementären, wofür $d\delta=\lambda-1$ ist, und mit p_d die zum Divisor δ für den Modul λ gehörigen Primzahlen bezeichnet werden, und da die sämmtlichen den Werthen $d<\lambda-1$ entsprechenden Producte für $w=0$ endlich und grösser als Eins bleiben, so kommt

$$\lim_{w=0}.\log.\frac{P(w)}{w} = \lim_{w=0}.\sum\frac{\lambda-1}{p_{\lambda-1}^{1+w}}.$$

Der Grenzwerth des Ausdrucks auf der rechten Seite ist nach der obigen Deduction

$$\frac{\lambda - 1}{r} \log \frac{1}{w};$$

es muss daher erstens $P(w)$ für $w = 0$ von Null verschieden und zweitens $r = \lambda - 1$ sein. Der Kernpunkt des hier geführten Nachweises der Irreductibilität, der sich ohne Weiteres auf Wurzeln der Einheit mit zusammengesetzten Exponenten übertragen lässt, ist darin zu finden, dass jene Dirichlet'schen Reihen selbst ein System von conjugirten Einheiten liefern, deren Unabhängigkeit darauf beruht, dass die Werthe der Reihen für $w = 0$ von Null verschieden sind.

Die singulären Moduln der elliptischen Functionen führen zu Gattungen von ganzzahligen Gleichungen $F(x) = 0$, die ich in meiner Mittheilung vom 26. Juni 1862 näher charakterisirt habe. Wird der Grad der Function $F(x)$ wie dort mit $2N$ bezeichnet, so ist N gleich der Classenanzahl quadratischer Formen einer bestimmten negativen Determinante oder Discriminante, wenn man, wie ich es seit lange in meinen Universitäts-Vorlesungen zu thun pflege, hierbei die Formen $ax^2 + bxy + cy^2$ mit ganzen Zahlen a, b, c zu Grunde legt und $b^2 - 4ac$ als deren Discriminante bezeichnet. Jede der Gleichungen $F(x) = 0$ zerfällt unter Adjunction der Quadratwurzel der Discriminante in zwei Abelsche Gleichungen Nten Grades, und deren besondere Natur bestimmt sich durch die auf die Composition bezüglichen Eigenschaften der zugehörigen quadratischen Formen. Denkt man sich nämlich in der Weise wie im Monatsbericht vom December 1870 S. 882 bis 885 sämmtliche Formenclassen durch ein Fundamentalsystem

$$\theta_1^{h_1} \theta_2^{h_2} \theta_3^{h_3} \ldots \theta_\nu^{h_\nu} \qquad (h_\alpha = 0, 1, \ldots n_\alpha - 1 \; ; \; N = n_1 n_2 \ldots n_\nu)$$

dargestellt, so sind die den einzelnen Classen entsprechenden Wurzeln jener Abelschen Gleichung Nten Grades gemäss den Auseinandersetzungen, welche ich im Monatsbericht vom December 1877 unter Nr. III gegeben habe, durch die entsprechenden Systeme der ν Indices

$$h_1, h_2, \ldots h_\nu$$

charakterisirt, und wenn wie bei Gaufs (Disqu. arithm. sectio V, art. 305) m diejenige Zahl bedeutet, zu der im Sinne der Composition eine Classe quadratischer Formen gehört, so ist m als die kleinste den Congruenzen

$$mh_\alpha \equiv 0 \text{ mod. } n_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \dots \nu)$$

genügende Zahl bestimmt. Bezeichnet man nun die Discriminante der quadratischen Formen mit D und die sämmtlichen nicht in D enthaltenen Primzahlen mit p oder q, so dass stets

$$\left(\frac{D}{p}\right) = +1 \ , \ \left(\frac{D}{q}\right) = -1$$

ist, so zerfällt $F(x)$ für jeden Primzahlmodul q in N irreductible Factoren zweiten Grades, für jeden Primzahlmodul p aber in lauter irreductible Factoren $m$ten Grades, wenn die Formenclasse, durch welche p darstellbar ist, zu m gehört. Dabei ist zu bemerken, dass, falls p durch zwei entgegengesetzte Formenclassen darstellbar ist, beide zu derselben Zahl m gehören. Hiernach ist es das Product

$$\prod_m \prod_p \left(1 - p^{-m(1+w)}\right)^{-\frac{2N}{m}} . \prod_q \left(1 - q^{-2(1+w)}\right)^N ,$$

welches in diesem Falle auftritt und jenem zu den Kreistheilungsgleichungen gehörigen Doppelproducte auf p. 159 entspricht. Die auf p bezügliche Multiplication erstreckt sich auf die im Sinne der Composition zu m gehörigen Primzahlen p. Das Product ist in N Theilproducte

$$\prod_p \left(1 - \omega_1^{h_1} \omega_2^{h_2} \dots \omega_\nu^{h_\nu} p^{-(1+w)}\right)^{-1} \prod_q \left(1 - q^{-2(1+w)}\right)^{-1}$$

zu zerlegen, deren jedes genau wie das speciellere bei Dirichlet im Monatsbericht vom März 1840 als Reihe darstellbar ist:

$$\tfrac{1}{2} \sum_{a, b, c} \omega_1^{h_1} \omega_2^{h_2} \dots \omega_\nu^{h_\nu} \sum_{x, y} (ax^2 + bxy + cy^2)^{-1-w} ,$$

und diese Reihe ist nach einer im Monatsbericht vom Jan. 1863 S. 46 aufgestellten Formel durch ϑ-Functionen zu summiren. Das erste Summenzeichen in der Reihe bezieht sich auf die verschiedenen Formenclassen (a, b, c) der Discriminante D, das zweite auf alle ganzen Zahlen x, y, für welche $ax^2 + bxy + cy^2$ zu D prim ist; die Grössen ω sind die verschiedenen durch die Gleichungen

$$\omega_1^{n_1} = 1 \ , \ \omega_2^{n_2} = 1 \ , \ \dots \ \omega_\nu^{n_\nu} = 1$$

bestimmten Wurzeln der Einheit, und die Exponenten h wie oben die ν Indices, welche der Classe (a, b, c) resp. den durch dieselbe darstellbaren Primzahlen p angehören.

Nach diesen Auseinandersetzungen sind es einzig und allein die durch die Hauptclasse darstellbaren Primzahlen p, für welche $F(x) \equiv 0$ wird, und deren Dichtigkeit ist gleich dem reciproken Werthe des Grades der irreductibeln Factoren von $F(x)$. Da nun die Differenzen

$$\sum_{x,y} (ax^2 + bxy + cy^2)^{-1-w} - \sum_{x,y} (a'x^2 + b'xy + c'y^2)^{-1-w}$$

für $w = 0$ endlich bleiben (vgl. meine Mittheilung im Monatsbericht vom Jan. 1863), so folgt in der oben für die Kreistheilungsgleichungen ausgeführten Weise, dass $F(x)$ irreductibel und dass die Dichtigkeit der Primzahlen in den einzelnen Classen quadratischer Formen (in erster Annäherung) proportional der Anzahl der Classen ist, durch welche die Primzahlen darstellbar sind. Die Dichtigkeit der Primzahlen ist demnach

$$\frac{1}{2N} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{N}$$

je nachdem die darstellende Classe *anceps* ist oder nicht, und die Dichtigkeit der den quadratischen Formen entsprechenden complexen Primfactoren ist in jeder Classe gleich $\frac{1}{N}$.

Um zum Schlusse nur ein Beispiel anzuführen sei $D = -31$. Alsdann kann für $F(x)$ die Function

$$(x^3 - 10x)^2 + 31(x^2 - 1)^2$$

genommen werden, welche unter Adjunction von $\sqrt{-31}$ in zwei Factoren dritten Grades mit der Discriminante 1 zerfällt. Die je 3 Wurzeln der betreffenden Gleichungen entsprechen den Formenclassen $(1, 1, 8)$, $(2, \pm 3, 5)$, und die Anzahl der Primzahlen $x^2 + 31y^2$ ist etwa halb so gross als diejenige der Primzahlen von der Form $5x^2 \pm 4xy + 7y^2$.

5. Februar. Gesammtsitzung der Akademie.

Hr. Vahlen las über ungedruckte Schriftstücke des Laurentius Valla.
