des droites $B\beta$, $C\gamma$ sera le centre d'homologie relatif aux axes de direction $A\alpha$.

Les ponctuelles β, γ étant homographiques, *le lieu de n est une conique circonscrite à* ABC, *et qui passe en l*, car si AP, AQ rencontrent lB, lC en B', C', la droite $B'C'$ est perpendiculaire sur lA (¹).

BC étant une transversale de $A\beta\gamma$, on aura

$$\frac{\beta\alpha.\gamma Q.AP}{\alpha\gamma.QA.P\beta}=-1;$$

d'où

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}=\frac{QA}{Q\gamma}\frac{P\beta}{PA}=\frac{Q'A}{Q'\beta}:\frac{PA}{P\beta}=(PQ'A\beta),$$

Q' étant l'intersection de AP avec la parallèle à $\gamma\beta$, menée de Q. Mais, $Q'B$ étant la tangente à la conique en B, on a

$$(A\beta Q'P)=B(AnBC)=l(AnBC),$$

et j désignant le point à l'infini dans la direction $\beta\gamma$, on a

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}=A(j\alpha\gamma\beta).$$

Donc

$$A(j\alpha\gamma\beta)=l(AnBC),$$

mais les rayons Aj, $A\gamma$, $A\beta$ étant respectivement perpendiculaires sur Al, Bl, Cl, il en est de même des quatrièmes rayons $A\alpha$, ln.

Ainsi la perpendiculaire du centre d'homologie sur l'axe correspondant passe par le centre d'orthologie. C. Q. F. D.

B. Sollertinsky (Saint-Pétersbourg).

42. (Laisant). — Étant donnés deux polynomes entiers quelconques

$$f(x)=\Sigma a_n x^n,\qquad f_1(x)=\Sigma b_n x^n,$$

le nouveau polynome $\varphi(x)=\Sigma a_n b_n.x^n$ sera égal à l'intégrale définie (²)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x^{\mu}e^{i\theta})f_1(x^{1-\mu}e^{-i\theta})\,d\theta,$$

(¹) La conique est une hyperbole équilatère, car la perpendiculaire abaissée de B sur Al rencontrera AQ au point D appartenant à la courbe, et le point est l'orthocentre de ABD.

(²) Voir Hadamard, *Étude des propriétés des fonctions entières* (*J. M.*, 1893).

où μ désigne une quantité quelconque, puisque l'intégrale $\int_0^{2\pi} e^{(m-n)i\theta}\,d\theta$ où m et n sont entiers est toujours nulle sauf lorsque $m=n$. Si l'on fait $(1+x)^n = \Sigma\, C_k^n x^k$, puis qu'on applique deux fois la formule précédente, la valeur du polynome $\Sigma(C_k^n)^3 x^k$ sera donnée par une certaine intégrale double. En faisant $x=1$ et en désignant par S_n la somme des cubes des coefficients du développement de $(1+x)^n$, il viendra

$$S_n = \frac{2^{2n}}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\varphi\right)^n d\theta\, d\varphi,$$

ou bien

$$S_n = \frac{2^{2n}}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{x^n u_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

en désignant, pour abréger, par $u_n(x)$ le polynome entier

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+\cos\varphi)^n\,d\varphi.$$

Ce polynome satisfait aux équations

$$\frac{du_n}{dx} = n\,u_{n-1},$$

$$nu_n = (2n-1)x\,u_{n-1} + (n-1)(1-x^2)\,u_{n-2}.$$

En transformant, au moyen de l'intégration par parties, l'identité

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x_n dx}{\sqrt{1-x^2}} \times [n\,u_n - (2n-1)x\,u_{n-1} - (n-1)(1-x^2)\,u_{n-2}] = 0,$$

on obtient finalement la formule

$$n^2 S_n = (7n^2 - 7n + 2)S_{n-1} + 8(n-1)^2 S_{n-2},$$

avec $S_0 = 1$, $S_1 = 2$.

En posant $\frac{S_n}{S_{n-1}} = q_n$, on voit facilement que q_n reste, quel que soit n, inférieur à un nombre fixe et croît constamment avec n. Si l'on admet, en effet, que q_n est $> q_{n-1}$, on verra, sans trop de peine, au moyen de notre formule, que $q_{n+2} > q_{n+1}$; q_n tend donc vers une limite quand n augmente indéfiniment, et cette limite est évidemment égale à la racine positive de l'équation $x = 7 + \frac{8}{x}$, c'est-à-dire est égale à 8. J. FRANEL (Zurich).

42. (LAISANT). *Deuxième réponse.* — Soient $S_2(n)$ et $S_3(n)$ les sommes des carrés et des cubes des coefficients de $(x+1)^n$; on trouve successivement

$$S_2(n) = \frac{2^{2n}}{\pi} \int_0^{\pi} d\alpha \cos^{2n}\alpha,$$
$$S_3(n) = \frac{2^{2n}}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} d\alpha\, d\beta \cos^n\alpha (\cos\alpha + \cos\beta)^n;$$

on déduit de là, pour n quelconque plus grand que $-\frac{1}{2}$,

$$S_2(n) = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)}$$

et, pour n entier positif,

$$S_2(n) = C_{2n,\,n},$$
$$S_3(n) = \sum_{a=0}^{a=E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{n,\,2a} S_2(a) S_2(n-a).$$

C. MOREAU.

43. (ZIWET). — Le travail préparatoire avance rapidement. Tout fait espérer que d'ici quelques mois le commencement de la publication pourra avoir lieu.

Depuis le 6 décembre dernier, M. Laisant est Secrétaire de la Commission; et, conformément à une décision prise, sur notre offre, dans la séance du 3 février, l'*Intermédiaire* se tiendra à la disposition de la Commission pour porter ses résolutions sous forme sommaire à la connaissance du public mathématique.

LA RÉDACTION.

45. (E. LEMOINE). — Cette proposition revient à dire que l'équation

$$f^2 + g^2 + h^2 = \lambda k^2$$

n'est possible que si λ est une somme de deux ou de trois carrés.

Il est évidemment permis de supposer que les trois nombres f, g, h sont premiers entre eux, et par suite qu'ils ne sont pas pairs en même temps.

l'équation, x_3 est constant, ce qu'on peut écrire

$$x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} u^{\delta} = \text{const.} \quad (\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0);$$

c'est l'équation connue des surfaces anharmoniques, ou surfaces W de MM. Klein et Lie (*C. R.*, 1870). Ces dernières ne représentent donc pas à elles seules toutes les surfaces admettant un groupe continu d'homographies, comme il semblerait en lisant le Mémoire de ces deux illustres géomètres.

Ch. Rabut.

168. (J. de Vries). — Sans prétendre donner une réponse complète à la question, je me contente de signaler quelques travaux d'une importance capitale dans la matière :

Gauss (*Cr.*, t. XX, 312). — Lejeune-Dirichlet (*J. M.*, 1859). — Poincaré (*J. E. P.*, 1879). — Klein (*Evanston Colloquium*, New-York, 1893).

Joseph Perott (U. S. A.)

170. (J. Franel.) — Je suis revenu sur la question 170 qui m'avait été suggérée par la question 42; et voici la solution que j'ai trouvée. Si l'on définit le polynome $U_n(x)$ par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz - (1 - x^2) z^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n(x) z^n,$$

on trouve, sans peine,

$$^{(4)}S_n = \frac{2^{2n}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{U_n^2(x)\, dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d'où l'on déduit, après un calcul assez laborieux,

$$n^3\, {}^{(4)}S_n = 2(6n^3 - 9n^2 + 5n - 1)\, {}^{(4)}S_{n-1} + (4n-3)(4n-4)(4n-5)\, {}^{(4)}S_{n-2}.$$

Cette formule peut s'écrire ainsi :

$$(2n)^3\, {}^{(4)}S_n = 4[3(2n-1)^3 + (2n-1)]\, {}^{(4)}S_{n-1} + 16[4(2n-2)^3 - (2n-2)]\, {}^{(4)}S_{n-2}.$$

On a, d'autre part (voir *Intermédiaire*, 1894, p. 46),

$$(2n)^2\, {}^{(3)}S_n = [7(2n-1)^2 + 1]\, {}^{(3)}S_{n-1} + 8(2n-2)^2\, {}^{(3)}S_{n-2},$$

et l'on sait que

$$(2n)\, {}^{(2)}S_n = 4(2n-1)\, {}^{(2)}S_{n-1}, \qquad {}^{(1)}S_n = 2\, {}^{(1)}S_{n-1}.$$

Il semble donc que l'on puisse énoncer le résultat suivant : *En* *faisant* $p = 2q + 1$ *ou* $p = 2q + 2$, *selon que* p *est impair ou pair, on a généralement*

$$(2n)^{p-1}\,{}^{(p)}S_n = f_0(2n-1)\,{}^{(p)}S_{n-1} + f_1(2n-2)\,{}^{(p)}S_{n-2} + \ldots + f_q(2n-1-q)\,{}^{(p)}S_{n-q-1},$$

où $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_q(x)$ *désignent des polynomes entiers, de degré* $p-1$, *satisfaisant à l'équation* $f_i(-x) = (-1)^{p-1} f_i(x)$, $(i = 0, 1, \ldots, q)$. Voici quelques indications pour les correspondants qui seraient tentés de vérifier cette formule dans le cas de $p = 5$. On a

$${}^{(5)}S_n = \frac{2^{2n}}{\pi^2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{x^n F_n(x, y)\, dx\, dy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$F_n(\cos\alpha, \cos\beta) = 2^n U_n\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] U_n\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right].$$

$F_n(x, y)$ est un polynome entier, de degré n, en x et en y. Parmi les nombreuses propriétés de ce polynome nous citerons les suivantes :

$$F_n(x, y) = F_n(y, x) = (-1)^n F_n(-x, -y),$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial x} = (2n-1) F_{n-1} + (y - x)\frac{\partial F_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial y} = (2n-1) F_{n-1} - (y - x)\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y},$$

$$(y - x)\frac{\partial^2 F_n}{\partial x\, \partial y} + n\left(\frac{\partial F_n}{\partial y} - \frac{\partial F_n}{\partial x}\right) = 0,$$

$$2(2n-1)\left[(1-x^2)\frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + (1-y^2)\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y}\right] = n^2 F_n - (2n-1)^2 (x+y) F_{n-1} - (n-1)^2 (x-y)^2 F_{n-2},$$

$$2(2n-1)\left[(1-x^2)\frac{\partial F_n}{\partial x} - (1-y^2)\frac{\partial F_n}{\partial y}\right] = (y-x)[n^2 F_n + (2n-1)^2 (x+y) F_{n-1} - (n-1)^2 (x-y)^2 F_{n-2}].$$

La fonction

$$y_p = \sum_{n=0}^{n=\infty} {}^{(p)}S_n \left(\frac{x}{2^p}\right)^n$$

satisfait à une équation différentielle linéaire homogène à coefficients rationnels. On a, par exemple,

$$(x^3+7x^2-8x)\frac{d^2y_3}{dx^2}+(3x^2+14x-8)\frac{dy_3}{dx}+(x+2)y_3=0,$$

$$(x^4+3x^3-4x^2)\frac{d^3y_4}{dx^3}+\frac{3}{2}(4x^3+9x^2-8x)\frac{d^2y_4}{dx^2}$$
$$+\left(\frac{111}{16}x^2+10x-4\right)\frac{dy_4}{dx}+\left(\frac{15}{16}x+\frac{1}{2}\right)y_4=0.$$

J. FRANEL (Zurich).

172. (S.- W. TESCH). *Deuxième réponse. — Addition à la solution publiée*, 1894, *p.* 203. — Le problème : « Placer un triangle donné de telle manière que chacun de ses sommets soit sur l'un de trois cercles donnés » est classé parmi les problèmes démontrés impossibles par la Géométrie canonique de la règle et du compas. (*Voir* PETERSEN, *Méthodes et Théories*, etc., trad. O. Chemin, 1880, p. 109).

E. FAUQUEMBERGUE.

174. (J. CARDINAAL). Dans un Mémoire inséré dans le tome I des M. A. (*Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung*) Clebsch a démontré : 1° que sur toute surface du quatrième ordre à droite double, il existe 16 droites qui coupent la droite double et qu'*il n'y en a pas d'autres;* 2° qu'il y a 64 plans triplement tangents qui coupent la surface suivant deux coniques.

E. GENTY.

175. (J. CARDINAAL). — *Voir* la réponse à la question 174.

E. GENTY.

182. (KORKINE.) — Si p désigne un nombre premier de la forme $4n+3$, le produit $\mathrm{P}=1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}$ est congru, suivant le module p, à $+1$ ou à -1, selon que P est résidu ou non résidu quadratique de p.

En faisant $\mathrm{P}\equiv(-1)^m(p)$, on aura donc

$$(-1)^m=\prod_{r=1}^{r=\frac{p-1}{2}}\left(\frac{r}{p}\right)\quad(2).$$

Mais, en vertu d'un lemme bien connu, dû à Gauss,

$$\left(\frac{r}{p}\right)=(-1)^{m_r},$$