SOLUTION

DE

DIFFÉRENTS PROBLÈMES

DE

CALCUL INTÉGRAL.

(*Miscellanea Taurinensia*, t. III, 1762-1765.)

Sur l'intégration de l'équation

$$\text{(A)} \qquad Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \ldots = T,$$

dans laquelle L, M, N,..., T *sont des fonctions de t.*

1. Je multiplie cette équation par $z\,dt$, z étant une variable indéterminée; j'en prends l'intégrale, j'ai

$$\int Lzy\,dt + \int Mz\frac{dy}{dt}\,dt + \int Nz\frac{d^2y}{dt^2}\,dt + \int Pz\frac{d^3y}{dt^3}\,dt + \ldots = \int Tz\,dt;$$

je change les expressions

$$\int Mz\frac{dy}{dt}\,dt, \quad \int Nz\frac{d^2y}{dt^2}\,dt, \quad \int Pz\frac{d^3y}{dt^3}\,dt, \ldots,$$

en leurs égales

$$Mzy - \int \frac{dMz}{dt}\,y\,dt,$$

$$\mathrm{N}z\frac{dy}{dt}-\frac{d\mathrm{N}z}{dt}y+\int\frac{d^2\mathrm{N}z}{dt^2}y\,dt,$$

$$\mathrm{P}z\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d\mathrm{P}z}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2\mathrm{P}z}{dt^2}y-\int\frac{d^3\mathrm{P}z}{dt^3}y\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

j'ai, en ordonnant les termes par rapport à y,

$$\begin{aligned}&y\left(\mathrm{M}z-\frac{d\mathrm{N}z}{dt}+\frac{d^2\mathrm{P}z}{dt^2}-\ldots\right)\\&\quad+\frac{dy}{dt}\left(\mathrm{N}z-\frac{d\mathrm{P}z}{dt}+\ldots\right)+\frac{d^2y}{dt^2}(\mathrm{P}z-\ldots)+\ldots\\&\quad+\int\left(\mathrm{L}z-\frac{d\mathrm{M}z}{dt}+\frac{d^2\mathrm{N}z}{dt^2}-\frac{d^3\mathrm{P}z}{dt^3}+\ldots\right)y\,dt=\int\mathrm{T}z\,dt.\end{aligned}$$

Soit maintenant

$$\text{(B)}\qquad \mathrm{L}z-\frac{d\mathrm{M}z}{dt}+\frac{d^2\mathrm{N}z}{dt^2}-\frac{d^3\mathrm{P}z}{dt^3}\cdots=0,$$

et l'équation précédente se réduira à celle-ci :

$$\text{(C)}\qquad\left\{\begin{aligned}&y\left(\mathrm{M}z-\frac{d\mathrm{N}z}{dt}+\frac{d^2\mathrm{P}z}{dt^2}-\ldots\right)\\&\quad+\frac{dy}{dt}\left(\mathrm{N}z-\frac{d\mathrm{P}z}{dt}+\ldots\right)+\frac{d^2y}{dt^2}(\mathrm{P}z-\ldots)+\ldots=\int\mathrm{T}z\,dt,\end{aligned}\right.$$

laquelle est d'un ordre moins élevé d'une unité que l'équation proposée (A).

2. Donc : 1° si l'on peut trouver une valeur de z, laquelle satisfasse à l'équation (B), on aura tout de suite l'intégrale de l'équation proposée (A), en mettant cette valeur dans l'équation (C); 2° si l'on avait deux valeurs différentes de z, lesquelles satisfissent également à l'équation (B), on aurait, par la substitution successive de ces valeurs dans l'équation (C), deux intégrales de l'équation (A), à l'aide desquelles on éliminerait la plus haute différentielle de y, et l'équation résultante serait l'intégrale seconde de la proposée (j'entends par intégrale première, ou intégrale simplement, une équation qui est d'un ordre moins

élevé d'une unité que la proposée; par intégrale seconde, une équation qui est d'un ordre moins élevé de deux unités, et ainsi de suite); 3° de même, si l'on avait trois valeurs différentes de z, on trouverait trois équations intégrales; d'où, éliminant les deux plus hautes différentielles de y, on aurait une équation qui serait l'intégrale troisième de la proposée, et ainsi de suite. D'où il est aisé de conclure, qu'en connaissant un nombre de valeurs de z égal à celui de l'exposant de l'ordre de l'équation (A), on pourra trouver l'intégrale finie et algébrique de cette même équation.

3. Qu'on multiplie l'équation (B) par $y\,dt$, et qu'on en prenne l'intégrale, en faisant disparaître de dessous le signe $\int$ toutes les différences de z, par des intégrations par parties, comme nous l'avons pratiqué sur l'équation (A), on aura, en changeant les signes,

$$\begin{aligned}
&y\left(\mathrm{M}z - \frac{d\mathrm{N}z}{dt} + \frac{d^2\mathrm{P}z}{dt^2} - \ldots\right)\\
&\quad + \frac{dy}{dt}\left(\mathrm{N}z - \frac{d\mathrm{P}z}{dt} + \ldots\right) + \frac{d^2y}{dt}(\mathrm{P}z - \ldots) + \ldots\\
&\quad - \int\left(\mathrm{L}y + \mathrm{M}\frac{dy}{dt} + \mathrm{N}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{P}\frac{d^3y}{dt^3} + \ldots\right) z\,dt = \text{const.}
\end{aligned}$$

Donc, si l'on fait

$$\mathrm{L}y + \mathrm{M}\frac{dy}{dt} + \mathrm{N}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{P}\frac{d^3y}{dt^3} + \ldots = 0, \tag{D}$$

et qu'on ordonne l'équation restante par rapport à z, on aura

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned}
&z\left[\left(\mathrm{M} - \frac{d\mathrm{N}}{dt} + \frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2} - \ldots\right)y + \left(\mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}}{dt} + \ldots\right)\frac{dy}{dt}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left. + (\mathrm{P} - \ldots)\frac{d^2y}{dt} + \ldots\right]\\
&-\frac{dz}{dt}\left[\left(\mathrm{N} - 2\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \ldots\right)y + (\mathrm{P} - \ldots)\frac{dy}{dt} + \ldots\right]\\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{d^2z}{dt}\Big[(\mathrm{P} - \ldots)y + \ldots\Big] - \ldots = \text{const.}
\end{aligned}\right.$$

4. Donc, si l'on peut trouver une valeur de y qui satisfasse à l'équation (D), on aura l'intégrale première de l'équation (B); si l'on a deux valeurs différentes de y, qui satisfassent à la même équation (D), on aura l'intégrale seconde de l'équation (B), et ainsi de suite; de sorte que, si l'on connaissait un nombre de valeurs de y égal à celui de l'exposant de l'équation (B), on pourrait trouver (2) l'intégrale finie et algébrique de cette même équation.

5. Cette dernière intégrale contiendra, comme on voit, autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle (B); car les équations (E), d'où elle résulte, contiennent chacune une constante arbitraire. Donc, si l'on fait successivement toutes ces constantes, moins une, égales à zéro, on aura autant d'intégrales particulières, et par conséquent autant de valeurs différentes de z qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation (B); or il est facile de voir que cette équation est du même ordre que l'équation (A) (1); donc on trouvera aussi l'intégrale finie et algébrique de cette dernière équation (2).

6. Donc l'équation (A), savoir

$$\mathrm{L}y + \mathrm{M}\frac{dy}{dt} + \mathrm{N}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{P}\frac{d^3y}{dt^3} + \ldots = \mathrm{T},$$

sera intégrable algébriquement toutes les fois qu'on aura m valeurs de y en t dans le cas de $\mathrm{T}=0$, m étant l'exposant de l'ordre de cette équation.

7. Si l'on ne connaissait que $m-1$ valeurs de y, dans le cas de $\mathrm{T}=0$, on pourrait néanmoins trouver l'intégrale algébrique de l'équation (A), car on aurait dans ce cas $m-1$ équations (E); d'où, éliminant les plus hautes différences de z, on parviendrait à une équation de cette forme $\mathrm{V}z + \mathrm{X}\frac{dz}{dt} = \mathrm{Y}$; V, X et Y étant des fonctions de t, laquelle donnerait

$$z = e^{-\int \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{X}} dt}\left(\text{const.} + \int \frac{\mathrm{Y} e^{\int \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{X}} dt}}{\mathrm{X}} dt\right);$$

donc, etc.

8. Donc l'équation (A) sera aussi intégrable algébriquement, toutes les fois qu'on aura $m - 1$ valeurs de y dans le cas de $T = 0$.

9. Si les valeurs connues de y n'étaient qu'au nombre de $m - 2$, alors il faudrait, pour avoir les m valeurs de z, intégrer une équation de cette forme

$$Vz + X\frac{dz}{dt} + Y\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

laquelle n'est intégrable que dans quelques cas particuliers, et ainsi de suite.

10. Au reste, si l'on ne connaissait pas d'avance les valeurs particulières de y dans le cas de $T = 0$, il vaudrait mieux chercher directement les valeurs de z par la résolution de l'équation (B), laquelle n'est guère plus compliquée que l'équation (D).

11. Soit l'équation

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = T,$$

pour laquelle on connait deux valeurs particulières de y dans le cas de $T = 0$.

On aura d'abord l'équation en z (3)

$$z\left[\left(M - \frac{dN}{dt}\right)y + N\frac{dy}{dt}\right] - \frac{dz}{dt}Ny = \text{const.};$$

donc, supposant que y_1 et y_2 soient les deux valeurs de y qui satisfont à l'équation

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

on aura

$$z\left[\left(M - \frac{dN}{at}\right)y_1 + N\frac{dy_1}{dt}\right] - \frac{dz}{dt}Ny_1 = A,$$

$$z\left[\left(M - \frac{dN}{dt}\right)y_2 + N\frac{dy_2}{dt}\right] - \frac{dz}{dt}Ny_2 = B,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

On tire de ces deux équations

$$z = \frac{Ay_2 - By_1}{N\left(y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt}\right)}.$$

Soit d'abord $A = 0$, on aura

$$z = -\frac{B}{N}\frac{y_1}{y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt}} = z_1;$$

soit ensuite $B = 0$, on aura

$$z = \frac{A}{N}\frac{y_2}{y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt}} = z_2.$$

Ayant deux valeurs de z, savoir z_1 et z_2, on les substituera successivement dans l'équation (C), et l'on aura

$$y\left(Mz_1 - \frac{dNz_1}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}Nz_1 = \int Tz_1\,dt,$$

$$y\left(Mz_2 - \frac{dNz_2}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}Nz_2 = \int Tz_2\,dt;$$

d'où l'on tire

$$\text{(F)}\qquad y = \frac{z_2\int Tz_1\,dt - z_1\int Tz_2\,dt}{N\left(z_1\frac{dz_2}{dt} - z_2\frac{dz_1}{dt}\right)}.$$

C'est la valeur générale et complète de y qui satisfait à l'équation proposée.

Si l'on ne connaissait que la valeur y_1, on aurait simplement l'équation

$$z\left[\left(M - \frac{dN}{dt}\right)y_1 + N\frac{dy_1}{dt}\right] - \frac{dz}{dt}Ny_1 = A,$$

laquelle étant intégrée donnerait

$$z = e^{\int\left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{Ndt} + \frac{dy_1}{y_1dt}\right)dt}\left[\text{const.} - A\int\frac{e^{-\int\left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{Ndt} + \frac{dy_1}{y_1dt}\right)dt}}{Ny_1}dt\right]$$

ou bien

$$z = \frac{y_1}{N} e^{\int \frac{M}{N} dt} \left[C - A \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{y_1^2} dt \right].$$

Donc, en faisant $A = 0$, on aurait

$$z = \frac{Cy_1}{N} e^{\int \frac{M}{N} dt} = z_1,$$

et, en faisant $C = 0$,

$$z = -\frac{Ay_1}{N} e^{\int \frac{M}{N} dt} \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{y_1^2} dt = z_2.$$

Supposons que les quantités L, M, N soient constantes, on aura, comme on sait, pour les deux valeurs de y qui satisfont à l'équation $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $e^{k_1 t}$ et $e^{k_2 t}$; k_1 et k_2 étant les racines de l'équation $L + Mk + Nk^2 = 0$; donc

$$y_1 = e^{k_1 t}, \quad y_2 = e^{k_2 t};$$

et par conséquent

$$z_1 = -\frac{B}{N} \frac{e^{-k_2 t}}{k_1 - k_2}, \quad z_2 = \frac{A}{N} \frac{e^{-k_1 t}}{k_1 - k_2};$$

donc

$$y = \frac{e^{k_2 t} \int T e^{-k_2 t} dt - e^{k_1 t} \int T e^{-k_1 t} dt}{N(k_2 - k_1)}.$$

Si l'on voulait employer les valeurs de z_1 et de z_2 trouvées à la fin du numéro précédent, on aurait

$$z_1 = \frac{Cy_1}{N} e^{\frac{M}{N} t} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{Ay_1}{N} e^{\frac{M}{N} t} \int \frac{e^{-\frac{M}{N} t}}{y_1^2} dt,$$

ou bien, en mettant pour y_1 sa valeur $e^{k_1 t}$,

$$z_1 = \frac{C}{N} e^{\left(k_1 + \frac{M}{N}\right) t} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{A}{M + 2Nk_1} e^{-k_1 t}.$$

Or, k_1 et k_2 étant les racines de l'équation $L + Mk + Nk^2 = 0$, on aura

$$k_1 + k_2 = -\frac{M}{N};$$

donc

$$k_1 + \frac{M}{N} = -k_2 \quad \text{et} \quad M + 2Nk_1 = N(k_1 - k_2);$$

donc, en faisant $C = -\frac{B}{k_1 - k_2}$, les valeurs de z_1 et de z_2 seront les mêmes que ci-dessus.

Ces valeurs pourraient encore se trouver d'une manière plus simple par la remarque du n° **10**. Car l'équation (B) sera, dans le cas présent,

$$Lz - M\frac{dz}{dt} + N\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$z = Fe^{h_1 t} = z_1 \quad \text{et} \quad z = Ge^{h_2 t} = z_2,$$

F, G étant deux constantes arbitraires, et h_1, h_2 les racines de l'équation $L - Mh + Nh^2 = 0$; de sorte qu'on aura

$$h_1 = -k_1 \quad \text{et} \quad h_2 = -k_2.$$

Recherche des cas d'intégration de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ayt^m = T.$$

12. On aura ici $L = at^{2m}$, $M = 0$, $N = 1$; donc l'équation (B) deviendra

$$(G) \qquad azt^{2m} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Supposons dt variable, nous aurons, au lieu du terme $\frac{d^2z}{dt^2}$, ces deux-ci $\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz\,d^2t}{dt^3}$; donc, faisant cette substitution et divisant toute l'équation par t^{2m}, on aura la transformée

$$\frac{d^2z}{t^{2m}dt^2} - \frac{dz\,d^2t}{t^{2m}dt^3} + az = 0.$$

Soit maintenant $t^m\,dt = du$, c'est-à-dire $u = \frac{t^{m+1}}{m+1}$, on aura, en pre-