Aequationes Mathematicae **43** (1992) 159–176
University of Waterloo

0001-9054/92/030159-18 \$1.50 + 0.20/0


# Sur les équations fonctionnelles aux $q$-différences

JEAN-PAUL BÉZIVIN

*Summary.* In this paper, we study the convergence of formal power series solutions $\psi$ of functional equations of the form $\sum P_k(x)\psi(\varphi^{[k]}(x)) = \theta(x)$, where $\varphi^{[k]}(x)$ denotes the $k$-th iterate of the function $\varphi$.

We obtain results similar to the results of Malgrange and Ramis for formal solutions of differential equations: if $\varphi(0) = 0$, and $\varphi'(0) = q$ is a nonzero complex number with absolute value less than one then, if $\psi(x) = \sum a(n)x^n$ is a divergent solution, there exists a positive real number $s$ such that the power series $\sum a(n)q^{sn(n+1)/2}x^n$ has a finite and nonzero radius of convergence.

## I. Introduction

Dans cet article, nous allons étudier une classe d'équations fonctionnelles, du point de vue de leurs solutions séries formelles.

Plus précisément, soit $K$ un corps commutatif de caractéristique nulle et $\varphi(x)$ une série formelle donnée de $K[[x]]$, telle que l'on ait $\varphi(x) = \sum q_n x^n$, avec $q_0 = 0$, $q_1 = q \in K$, $q$ étant non nul.

Pour $k$ entier naturel, nous définissons $\varphi^{[k]}(x)$ comme étant l'itérée $k$-ième de la série $\varphi(x)$ si $k$ est non nul, avec la convention $\varphi^{[0]}(x) = x$.

Soient $s$ un entier positif, et $P_i$, $i = 0, \dots, s$, et $\theta$, des séries formelles de $K[[x]]$. Nous nous intéressons aux séries formelles $\psi$ solutions de l'équation fonctionnelle:

$$\sum_{i=0}^{s} P_i(x)\psi(\varphi^{[i]}(x)) = \theta(x). \tag{1.1}$$

En fait, nous prendrons $K$ égal à $\mathbb{C}$, les séries $\varphi$, $P_i$, $i = 1, \dots, s$, et $\theta$ de rayon de convergence non nul, et notre problème sera alors d'étudier du point de vue de la convergence une série formelle $\psi(x)$ solution de (1.1).

---

AMS (1980) subject classification: Primary 39B10.

*Manuscript received July 7, 1990, and in final form, September 23, 1991.*

Pour ce qui concerne les résultats déjà connus sur ce type d'équations, nous renvoyons aux références [7] et [8], où le lecteur trouvera une bibliographie abondante.

Comme nous le verrons plus loin, pour étudier ce problème dans le cas général, il suffit d'étudier un problème un peu plus général que le cas particulier où $\varphi(x) = qx$, concernant des équations de la forme

$$\sum_{i \geq 0} P_i(x)\psi(xq^{k_i}) = \theta(x) \tag{1.2}$$

où $k_i$ est une suite de réels de limite l'infini, et les $P_i$ des séries entières convergentes, ainsi que $\theta(x)$.

Les parties II, III et IV sont consacrées à l'étude des équations de la forme (1.2), en regardant l'action des opérateurs de la forme

$$L(\psi) = \sum_{i \geq 0} P_i(x)\psi(xq^{k_i}) \tag{1.3}$$

dans différents espaces de séries formelles, quand $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$.

Nous allons pour cela nous inspirer de l'analogie avec les opérateurs différentiels. Il est bien connu que le $q$-analogue de la dérivation opérant sur les séries formelles est l'application qui à la série formelle $\psi$ associe la série formelle $(\psi(qx) - \psi(x))/(x(q-1))$.

Le problème analogue à celui que nous étudions dans cet article a été étudié par Malgrange ([10]) et Ramis ([13], [14]) dans le cadre des opérateurs différentiels.

Nous suivons d'assez près les techniques utilisées par ces auteurs.

Celles-ci fonctionnent d'ailleurs de manière un peu plus simple que dans le cas des opérateurs différentiels.

Le partie V donne les résultats que nous en déduisons pour les équations de la forme (1.1).

Nous n'avons pas considéré le cas où $q$ est une racine de l'unité. D'une part, si $q$ est une racine de l'unité différente de un, il semble difficile d'obtenir des résultats intéressants, comme le montre l'exemple de l'équation $\psi(-x) - \psi(x) = \theta(x)$, où des phénomènes de parité interviennent, et pour le cas $q$ égal à un, $\varphi(x)$ différent de $x$, les méthodes utilisées ici ne semblent pas s'appliquer.

Par contre, nous avons aussi étudié ce qui se passe dans le cas où $q$ est un nombre complexe de module un qui n'est pas une racine de l'unité, dans la partie VI.

Il y a certainement la possibilité de transcrire tous ces résultats dans un cadre $p$-adique, le corps $\mathbb{C}$ étant remplacé par $\mathbb{C}_p$, complété d'une clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres $p$-adiques, les méthodes devant se transposer sans trop de modifications.

Nous devons aux Referees, que nous remerçions vivement, outre des références additionnelles, les remarques suivantes.

Tout d'abord, si nous étudions de manière principale les solutions séries formelles de rayon de convergence nul, les résultats démontrés donnent des renseignements sur la convergence des séries formelles solutions, cf. le corollaire 2.8 et la proposition 2.9.

Ce résultat sur la convergence des solutions est connu, et a été étudié par de nombreux auteurs (voir [6], [4], [1]), la première solution complète ayant été donnée par Adams ([1]), où il donne le premier exemple de solution divergente.

Dans le cas particulier des équations de la forme:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x)\psi(xq^{k_i}) = \theta(x)$$

on peut donner une interprétation des résultats en introduisant un polygone de Newton, comme dans [1] et [5].

Enfin, en ce qui concerne les équations aux différences, les solutions séries formelles divergentes ont été étudiées par Praagman ([11], [12]), en utilisant une méthode semblable.

## II. Action des opérateurs de la forme (1.2) dans des espaces de fonctions analytiques

Nous commençons par introduire quelques notations.

Nous notons $G(\mathbb{C})$ l'espace des germes de fonctions analytiques à l'origine, et $A(\mathbb{C})$ l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Pour $r$ réel positif, on note $C(r)$ l'espace des fonctions continues sur le disque fermé, $\bar{D}(0, r)$ de centre 0, rayon $r$, et analytiques sur le disque ouvert $D(0, r)$.

L'espace $C(r)$ est muni de la norme de la convergence uniforme sur $\bar{D}(0, r)$, notée $\| \ \|_r$, qui en fait un espace de Banach. L'espace $G(\mathbb{C})$ est muni de la topologie déduite du fait qu'il est la limite inductive des espaces $C(r)$ quand $r$ tend vers zéro.

L'espace $A(\mathbb{C})$ est muni de la topologie déduite du fait qu'il est la limite projective des espaces $C(r)$ quand $r$ tend vers l'infini.

Nous rappelons qu'un opérateur $L$ d'un espace vectoriel $E$ dans un espace vectoriel $F$ est dit "à indice" si $\mathrm{Ker}(L)$ et $\mathrm{coker}(L)$ sont tous les deux de dimension finie, l'indice étant alors $\chi(L) = \dim \mathrm{Ker}(L) - \dim \mathrm{coker}(L)$.

Nous aurons besoin des résultats suivants:

LEMME 2.1. *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, et $u$ un opérateur continu de $E$ dans $F$, que l'on suppose à indice. Soit $v$ un opérateur continu de $E$ dans $F$, que l'on suppose compact.*

*Alor $u+v$ est un opérateur à indice, et de plus on a $\chi(u+v)=\chi(u)$.*

*Démonstration.* Voir [13], théorème 0.12, p. 5.

LEMME 2.2. *Soient $E_1, E_2, F_1, F_2$ des espaces de Banach (de Fréchet). Soit le diagramme commutatif d'applications $\mathbb{C}$-linéaires continues:*

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{u_1} & F_1 \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ E_2 & \xrightarrow{u_2} & F_2 \end{array}$$

*On suppose que $u_1$ et $u_2$ sont à indice, que $v$ est injective, et $w$ injective d'image dense. Alors on a la suite exacte:*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \bar{u}_2 \longrightarrow E_2/E_1 \xrightarrow{u_2} F_2/F_1 \longrightarrow 0,$$

*et* $\dim \operatorname{Ker} \bar{u}_2 = \chi(u_2) - \chi(u_1)$.

*Démonstration.* Voir [13], lemme 0.13, p. 5.

Soit maintenant $q$ dans $\mathbb{C}$, tel que $0<|q|<1$, fixé dans tout ce qui suit. Nous fixons une détermination de $\operatorname{Log}(q)$, de sorte que la notation $q^z$ sera utilisée sans ambiguité pour $\exp(z \operatorname{Log} q)$ dans la suite.

Soit $k_i$, $i \geqslant 0$, une suite de réels, que nous supposons strictement croissante, de limite l'infini si i tend vers $+\infty$, et $P_i$, $i \geqslant 0$, une suite de séries formelles de $\mathbb{C}[[x]]$, dont nous notons $v(P_i)$ la valuation $x$-adique. Nous faisons l'hypothèse que la suite $v(P_i)$ tend vers l'infini si $i$ tend vers $+\infty$.

Avec ces hypothèses, l'opérateur $L$ donné par:

$$L(\psi) = \sum_{i \geqslant 0} P_i(x)\psi(xq^{k_i}) \tag{2.1}$$

est bien défini sur l'espace $\mathbb{C}[[x]]$.

Nous ferons de plus l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes, suivant les cas:

*H*1. Il existe un réel positif $r$ tel que les séries $P_i$ soient dans $C(r)$ et la série de terme général $\|P_i\|_r$ soit convergente.

*H*2. Les séries $P_i$ sont dans $A(\mathbb{C})$ et, pour tout réel positif $r$, la série de terme général $\|P_i\|_r$ est convergente.

Sous l'hypothèse $H1$, $L$ défini un opérateur continu de $G(\mathbb{C})$ dans lui-même, et sous l'hypothèse $H2$, de $A(\mathbb{C})$ dans lui-même.

Nous commençons par regarder l'action de $L$ sur $\mathbb{C}[[x]]$.

PROPOSITION 2.3. *L'application L, de* $\mathbb{C}[[x]]$ *dans lui-même, est un opérateur à indice, qui est* $\chi(L, \mathbb{C}[[x]]) = \sup(-v(P_i))$.

*Démonstration.* Posons $m(L) = \sup(-v(P_i))$. On peut écrire $L$ comme la composée d'un opérateur $L_1$ du même type avec $m(L_1) = 0$, et de l'opérateur de multiplication par $x^{-m(L)}$, que l'on voit facilement être à indice, égal à $m(L)$.

Il suffit donc de démontrer le résultat quand $m(L)$ est égal à zéro.

L'ensemble des indices $i$ tels que $v(P_i) = 0$ est donc non vide, et fini puisque $v(P_i)$ tend vers l'infini.

On en déduit facilement qu'une égalité de la forme $L(\psi) = \theta$, où $\psi = \sum a_n x^n$ et $\theta = \sum b_n x^n$ sont deux séries formelles, se traduit par une égalité de la forme

$$U(n)a(n) = S_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n) \tag{2.2}$$

où $U(n)$ est une expression de la forme:

$$U(n) = \sum \lambda_j q^{p_j n}$$

où la somme est finie, les $\lambda_j$ appartenant à $\mathbb{C}$ sont non nuls, et les $p_j$ appartenant à $\mathbb{R}$, distincts, et $S_n(a_0, \dots, a_{n-1}, b_n)$, une expression algébrique en les $a_0, \dots, a_{n-1}, b_n$.

Comme $|q| < 1$, la suite $U(n)$ est non nulle à partir d'un certain rang.

On en déduit qu'il existe un entier $N$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, et pour toute série $\theta$ telle que $v(\theta) \geqslant n$, il existe une unique série $\psi$ telle que $v(\psi) \geqslant n$ et $L(\psi) = \theta$.

Il en résulte que $L$ a un indice, qui est nul, en suivant la démonstration de Malgrange dans [10], proposition 1.3, p. 149.

Nous regardons maintenant l'action de $L$ sur les espaces $C(r)$, $G(\mathbb{C})$, $A(\mathbb{C})$.

PROPOSITION 2.4. *Soit r un réel positif tel que l'hypothèse* $H1$ *soit satisfaite. On suppose de plus que* $k_0$ *est nul, et que la série* $P_0(x)$ *a m zéros, compte-tenu de leurs* *multiplicités, dans le disque ouvert $D(0, r)$, et aucun sur le cercle de centre zéro, rayon $r$.*

*Alors $L$, considéré comme opérateur de $C(r)$ dans lui-même, a un indice, qui est $\chi(L, \mathbb{C}(r)) = -m$.*

*Démonstration.* Nous allons écrire $L$ comme la somme de deux opérateurs, à savoir $L_1(\psi) = P_0(x)\psi(x)$, et $L_2(\psi) = \sum_{i \geqslant 1} P_i(x)\psi(xq^{k_i})$.

Considérons tout d'abord l'opérateur $L_1$. Il est clair que $L_1$ définit un opérateur injectif de $C(r)$ dans lui-même. D'autre part, on voit facilement que toute série $\theta$ dans $C(r)$ s'écrit de manière unique $Q + P_0\psi$, où $Q$ est un polynôme de degré inférieur à $m$, et $\psi$ est dans $C(r)$, de sorte que $L_1$ est un opérateur à indice dans $C(r)$, avec $\chi(L_1, C(r)) = -m$.

L'opérateur $L_2$ est un opérateur compact de $C(r)$ dans lui-même. En effet, soit $\varepsilon$ un réel positif, et $N$ un entier tel que $\sum_{i \geqslant N} \|P_i\|_r < \varepsilon$.

Pour $i = 1, 2, \ldots, N$, soit $Q_i$ un polynôme tel que l'on ait $\|P_i - Q_i\|_r < \varepsilon/2^i$. Soit $L_3$ l'opérateur $L_3(\psi) = \sum_{i=1}^{N} Q_i(x)\psi(xq^{k_i})$. On a $\|L_2 - L_3\|_r < 2\varepsilon$, de sorte qu'il suffit de montrer que $L_3$ est limite au sens de la norme d'opérateurs de rang fini pour prouver l'assertion.

Soit $M$ un entier, et $T_M$ la projection de $C(r)$ sur l'espace des polynômes de degré $\leqslant M$. On voit facilement que $\|T_M \circ L_3 - L_3\|_r$ tend vers zéro si $M$ tend vers l'infini, d'où l'assertion.

On applique alors le lemme 2.1, ce qui termine la démonstration.

PROPOSITION 2.5. *On suppose qu'il existe un réel positif $r$ tel que l'hypothèse $H1$ soit satisfaite. Alors $L$ est un opérateur continu de $G(\mathbb{C})$ dans lui-même, et cet opérateur est à indice, qui est $\chi(L) = -v(P_0)$.*

*Démonstration.* On peut supposer sans perte de généralité que $k_0$ est nul. Pour tout $\rho$, $0 < \rho < r$, $L$, considéré comme opérateur de $C(\rho)$ dans lui-même, a alors un indice, s'il n'a pas de zéro sur le cercle de centre zéro, rayon $\rho$. Si l'on prend $\rho$ assez petit, de façon que $P_0(x)$ n'ait pas de zéro dans $D(0, \rho)$ autre éventuellement que zéro, alors $\chi(L, C(\rho))$ est constant et égal à $-v(P_0)$.

Par suite, on en déduit comme dans [10], p. 148, ou [13], lemme 1.3.8, p. 20, que $L$ a un indice dans $G(\mathbb{C})$, qui est $-v(P_0)$.

PROPOSITION 2.6. *On suppose que l'hypothèse $H2$ est satisfaite. De plus, on fait l'hypothèse que $P_0(x)$ a un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$, que l'on note $N$ (compte-tenu des multiplicités). Alors $L$, considéré comme opérateur de $A(\mathbb{C})$ dans lui-même, a un indice, qui est $-N$.*

*Démonstration.* Comme $P_0$ a un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$, il existe $r$ tel que pour tout $z$ tel que $P_0(z) = 0$, on a $|z| < r$.

Pour $\rho > r$, l'opérateur $L$ a alors un indice dans $C(\rho)$, qui est $-N$.

Il en résulte, en raisonnant comme dans [13], lemme 1.3.8, p 20 que $L$ a un indice dans $A(\mathbb{C})$, qui est $-N$.

PROPOSITION 2.7. *Soit L un opérateur de la forme* 2.1. *On suppose que l'hypothèse $H1$ est vérifiée. Alors*:

a) $\operatorname{coker}(L, \mathbb{C}[[x]]/G(\mathbb{C})) = 0$

b) $\dim \operatorname{Ker}(L, \mathbb{C}[[x]]/G(\mathbb{C})) = \operatorname{Sup}(-v(P_i)) + v(P_0)$.

*Démonstration.* Pour montrer a) on raisonne comme dans [10], théorème 1.4, p. 149, la démonstration se recopie sans difficultés. L'assertion b) résulte alors de ce quie précède.

COROLLAIRE 2.8. *Soit L un opérateur de la forme* (2.1). *On suppose que l'hypothèse $H1$ est vérifiée. Alors L possède la propriété suivante*: "*Pour tout couple* $(\psi, \theta)$ *de séries formelles, telles que* $L(\psi) = \theta$, *l'hypothèse que* $\theta$ *a un rayon de convergence non nul, entraîne qu'il en est de même pour* $\psi$", *si et seulement si* $v(P_0) \leqslant v(P_i)$ *pour tout* $i \geqslant 0$.

*Démonstration.* La propriété indiquée équivaut à dire que $\operatorname{Ker}(L, \mathbb{C}[[x]]/G(\mathbb{C})) = 0$, i.e. $\operatorname{Sup}(-v(P_i)) + v(P_0) = 0$, d'où le résultat.

On a, en suivant le même type de raisonnement, le résultat suivant, dont nous laissons la démonstration au lecteur:

PROPOSITION 2.9. *Soit L un opérateur de la forme* (2.1). *On suppose que l'hypothèse $H2$ est vérifiée et que $P_0$ a un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$. Alors L possède la propriété suivante*: "*Pour tout couple* $(\psi, \theta)$ *de séries formelles telles que* $L(\psi) = \theta$, *l'hypothèse que* $\theta$ *est dans* $A(\mathbb{C})$ *entraîne qu'il en est de même pour* $\psi$", *si et seulement si $P_0$ n'a pas de zéros non nuls dans $\mathbb{C}$, et* $v(P_0) \leqslant v(P_i)$ *pour tout i entier.*

## III. Action des opérateurs de la forme (1.2) dans les espaces $q$-Gevrey

Soit $s$ un réel positif. Nous définissons deux espaces associés à $s$.

Soit $\eta_s^*(x) = \sum q^{-sn(n+1)/2} x^n$; cette série a un rayon de convergence nul dans $\mathbb{C}$. Nous notons $\eta_s(x)$ la série $\sum q^{s[n(n-1)/2]} x^n$; cette série est l'inverse de $\eta_s^*$ pour le produit de Hadamard de deux séries formelles (ce produit, noté $\square$, étant défini par l'égalité $(\sum a_n x^n) \square (\sum b_n x^n) = \sum a_n b_n x^n$).

Nous notons $\mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ (resp. $\mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$) l'espace des séries $f = \sum a_n x^n$ telles que $\eta_s \square f$ soit dans $G(\mathbb{C})$ (resp. dans $A(\mathbb{C})$).

Les espaces $\mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ et $\mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$ seront munis de la topologie déduite de celles des espaces $G(\mathbb{C})$ et $A(\mathbb{C})$.

Soit $L$ un opérateur de la forme (2.1).

Nous notons $P_i(x) = \sum a_{i,m} x^m$.

Nous faisons dans la suite l'hypothèse que l'opérateur $L$ vérifie l'hypothèse $H1$. Il existe $r$ positif tel que les $P_i$ soient dans $C(r)$, et la série de terme général $\|P_i\|_r$ est convergente.

Nous notons $\tilde{L}$ l'opérateur sur $\mathbb{C}[[x]]$ défini par:

$$\tilde{L}(\psi) = \eta_s \square L(\eta_s^* \square \psi).$$

Lemme 3.1. *Sous les conditions précédentes, l'opérateur $\tilde{L}$ est un opérateur de la forme* (2.1), *qui vérifie les hypothèses $H2$. De plus, les coefficients de cet opérateur sont des polynômes.*

*Démonstration.* Nous regardons le transformé d'un opérateur de la forme

$$\psi \to x^m \psi(xq^k).$$

Un calcul facile montre que c'est l'opérateur qui à $\psi$ associe

$$x^m q^{s[m(m+1)/2]} \psi(xq^{k+sm})$$

Par suite, $\tilde{L}$ est l'opérateur qui à $\psi$ associe

$$\tilde{L}(\psi) = \sum a_{i,m} x^m q^{s[m(m+1)/2]} \psi(xq^{k_i+sm}).$$

Soit $E$ l'ensemble des $k_i + sm$, pour les couples $(i, m)$ tels que $a_{i,m}$ soit non nul. Alors $E$ est une suite de nombres réels tendant vers $+\infty$; nous notons $P_j$, $j = 0, 1, \ldots$, la suite des éléments de $E$ rangés par ordre croissant.

Posons $G_j(x) = \sum a_{i,m} q^{s[m(m+1)/2]} x^m$, où la somme est étendue aux couples $(i, m)$ tels que $k_i + sm = p_j$ et $a_{i,m}$ soit non nul. Il n'y a qu'un nombre fini de tels couples, de sorte que $G_j$ est un polynôme. Si $(i, m)$ est un tel couple, on a $k_i \geqslant p_j/2$ ou $sm \geqslant P_j/2$, de sorte que, puisque $v(P_i)$ tend vers l'infini si $i$ tend vers l'infini, on a la même propriété pour $Q_j$.

Montrons maintenant que l'hypothèse $H2$ est vérifiée.

Soit $\rho$ un réel, que nous pouvons supposer plus grand que le réel positif $r$ donné dans l'hypothèse $H1$.

On a: $|a_{i,m}|r^m \leqslant \|P_i\|_r$ pour tout couple $(i, m)$.

Donc:

$$\|Q_j\|_\rho \leqslant \sum |a_{i,m}|\rho^m|q|^{s[m(m+1)/2]} = \sum |a_{i,m}|r^m\left(\frac{\rho}{r}\right)^m|q|^{s[m(m+1)/2]}.$$

Soit

$$\|G_j\| \leqslant \sum \|P_i\|_r\left(\frac{\rho}{r}\right)^m|q|^{s[m(m+1)/2]}.$$

Les sommations précédentes étant étendues aux couples $(i, m)$ tels que $a_{i,m}$ soit non nul et $k_i + sm = p_j$.

On a:

$$\sum \|G_j\|_\rho \leqslant \sum \|P_i\|_r\left(\frac{\rho}{r}\right)^m|q|^{s[m(m+1)/2]}.$$

La sommation étant étendue à tous les couples $(i, m)$.

Donc

$$\sum \|G_j\|_\rho \leqslant \left(\sum \|P_i\|_r\right)\left(\sum\left(\frac{\rho}{r}\right)^m|q|^{s[m(m+1)/2]}\right) < +\infty$$

et ceci termine la démonstration du lemme 3.1.

PROPOSITION 3.2. *Soit $L$ un opérateur de la forme* (2.1) *vérifiant $H1$, et $s$ un réel strictement positif. Nous notons $N(s)$ l'ensemble des couples $(i, m)$ tels que $k_i + sm = \inf(E) = \inf(k_p + sm, a_{p,m} \neq 0)$, et $I^+(s) = \sup\{m \mid (i, m) \in N(s)\}$, $I^-(s) = \inf\{m \mid (i, m) \in N(s)\}$.*

*Alors, $L$ considéré comme opérateur de $\mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ (resp. $\mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$) dans lui-même, a un indice, qui est $-I^-(s)$ (resp. $-I^+(s)$).*

*Démonstration.* Tout d'abord $N(s)$ est un ensemble fini, puisque $k_i$ et $v(P_i)$ tendent vers l'infini si i tend vers l'infini; donc $I^+(s)$ et $I^-(s)$ existent bien.

Maintenant $L$ et $\tilde{L}$ opèrent et ont un indice ou non simultanément dans les espaces $G(\mathbb{C})$ (resp. $A(\mathbb{C})$) et $\mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ (resp. $\mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$) et alors ces indices sont les mêmes.

On applique alors les propositions 2.5 et 2.6, qui donnent les résultats indiqués.

En général, on a $I^+(s) = I^-(s)$, de sorte que $L$ a un même indice dans les espaces $\mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ et $\mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$. Pour certaines valeurs exceptionnelles, on a $I^+(s) > I^-(s)$.

Comme nous appliquerons ces résultats à des cas particuliers où les valeurs exceptionnelles seront en nombre fini, nous ne poursuivons pas l'étude de ce sujet dans le cas général.

PROPOSITION 3.3. *Soit $L$ un opérateur de la forme* (2.1) *vérifiant $H1$. Soit $J = [a, b]$ un intervalle inclus dans $]0, +\infty[$, tel que pour tout $s$ dans $]a, b[$, $s$ n'est pas exceptionnelle. Alors on a*:

$$I^+(s) = I^-(s) = I \qquad \textit{pour } s \in ]a, b[$$

$$I^-(a) = I^+(b) = I.$$

*Démonstration.* On doit simplement démontrer que $I^-(a) = I$ et $I^+(b) = I$. Soit $h(s) = \inf\{k_i + sm$, pour les couples $(i, m)$ tels que $a_{i,m} \neq 0\}$.

Pour $a < s < b$, $h(s) = k_i + sm$ pour un unique couple $(i, m)$ tel que $a_{i,m}$ soit non nul. Ce couple $(i, m)$ est alors indépendant de $s$ appartenant à $]a, b[$, parce qu'il est localement constant.

On a clairement: $\inf(k_j + ap, a_{j,p} \neq 0) = k_i + am$.

Supposons qu'il existe $(j, p)$, avec $p < m$, tel que $k_j + ap = k_i + am$. On a donc: $k_j - k_i + a(p - m) = 0$.

La fonction $f(x) = k_j - k_i + x(p - m)$ est décroissante, et nulle en a, donc pour $b > s > a$, elle est négative, i.e. $k_j + sp < k_i + sm$, ce qui est absurde. Donc, pour tout $(j, p)$ avec $a_{j,p} \neq 0$ et $p < m$, on a $k_j + ap > k_i + am$.

Par suite: $I^-(a) = m = I$.

Supposons qu'il existe $(j, p)$ avec $a_{j,p} \neq 0$, et $k_j + bp = k_i + bm$, tel que $p > m$. Alors la fonction $k_j - k_i + x(p - m)$, qui est croissante, vérifie $f(b) = 0$, donc pour $s$ dans $]a, b[$, elle est négative, ce qui est absurde.

Donc $I^+(b) = m = I$.

PROPOSITION 3.4. *Soit $L$ un opérateur de la forme* (2.1), *vérifiant $H1$. Soit $J = [a, b]$ un intervalle inclus dans $]0, +\infty[$ tel que, pour tout $s$ dans $]a, b[$, $s$ n'est pas exceptionnelle pour $L$. Alors*:

$$\operatorname{Ker}(L, \mathbb{C}[[x]]_{q,(b)}/\mathbb{C}[[x]]_{q,a}) = 0.$$

*Démonstration.* Il résulte de ce qui précède que $L$ est un opérateur à indice dans $\mathbb{C}[[x]]_{q,(b)}$ et $\mathbb{C}[[x]]_{q,a}$ et que ces indices sont égaux.

D'autre part, l'injection $\mathbb{C}[[x]]_{q,a} \to \mathbb{C}[[x]]_{q,(b)}$ est d'image dense.

On peut donc appliquer le lemme 2.2 en prenant

$$E_1 = F_1 = \mathbb{C}[[x]]_{q,a} \quad \text{et} \quad E_2 = F_2 = \mathbb{C}[[x]]_{q,(b)}.$$

Il en résulte que: $\dim \operatorname{Ker} L^- = -I^+(b) + I^-(a) = 0$ où $L^-$ est l'opérateur induit par $L$ sur $\mathbb{C}[[x]]_{q,(b)}/\mathbb{C}[[x]]_{q,a}$, d'où le résultat.

## IV. Les opérateurs de la forme (1.1) avec $\varphi(x) = qx$

Nous considérons donc des opérateurs de la forme:

$$\sum_{i=0}^{t} P_i(x)\psi(xq^{k_i}) \tag{4.1}$$

où les $P_i$ sont des séries formelles non nulles, et les nombres $k_i$ des réels distincts (qui seront en général entiers), avec $k_0 < k_1 < \cdots < k_t$.

Nous supposerons que les séries $P_i$ sont dans $G(\mathbb{C})$; plus précisément, nous noterons $r$ un réel positif tel que $P_i$ appartienne à $C(r)$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, t$.

Nous rappelons que $q$ est un nombre complexe non nul tel que $|q| < 1$.

On a alors le résultat suivant:

THÉORÈME 4.1. *L'opérateur $L$ a un nombre fini de valeurs exceptionnelles, dont nous notons l'ensemble $E$.*

*Soit $\psi$ et $\theta$ deux séries formelles telles que $L(\psi) = \theta$.*

*On suppose que $\theta$ appartient à $G(\mathbb{C})$. Alors $\psi$ appartient à $G(\mathbb{C})$, ou il existe un unique réel positif $s$ dans $E$ tel que $\psi$ appartienne à $\mathbb{C}[[x]]_{q,s}$, mais pas à $\mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$.*

*Démonstration.* Une valeur $s > 0$ est exceptionnelle pour $L$ s'il existe deux indices $i$ et $j$ distincts tels que $k_i + sw_i = k_j + sw_j$, où $w_i = v(P_i)$. Donc l'ensemble $E$ est inclus dans l'ensemble des valeurs $(k_i - k_j)/(w_j - w_i)$ et par suite est donc fini.

En particulier, pour $s$ assez grand, $s$ n'est pas exceptionnelle, et on voit que si $s$ est assez grand, $I^+(s) = I^-(s) = \inf(v(P_i))$. Donc l'indice de $L$ dans $\mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ est $-\inf(v(P_i))$, soit $\operatorname{Sup}(-v(P_i))$, qui est aussi l'indice de $L$ dans $\mathbb{C}[[x]]$. (Proposition 2.3).

On montre alors comme dans la proposition 2.7 que l'on a:

$$\mathrm{Ker}(L, \mathbb{C}[[x]]/\mathbb{C}[[x]]_{q,s}) = 0;$$

ceci prouve déjà qu'il existe $s$ tel que la série $\psi$ soit dans $\mathbb{C}[[x]]_{q,s}$.

On utilise ensuite la proposition 3.4: si $\psi$ appartient à $\mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$, celle-ci prouve que $\psi$ appartient à $\mathbb{C}[[x]]_{q,s'}$, où $s'$ cest une valeur exceptionnelle pour $L$ telle que $s' < s$, et que pour tout $t$ dans $]s', s[$, $t$ ne soit pas une valeur exceptionnelle pour $L$.

On en déduit facilement le résultat.

## V. Le cas général de l'équation (1.1)

Dans cette partie, nous considérons des équations de la forme donnée dans l'introduction:

$$\sum_{i=0}^{s} P_i(x)\psi(\varphi^{[i]}(x)) = \theta(x). \tag{5.1}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes: les $P_i$ sont des séries entières de rayon de convergence non nul, ainsi que $\theta(x)$ et la série $\varphi(x)$.

Nous aurons besoin de la série de Schröder associée à la série $\varphi(x)$.

Celle-ci est définie par les conditions:

$$\phi(0) = 0, \qquad \phi'(0) = 1 \quad \text{et} \quad \phi(q\phi^{[-1]}(x)) = \varphi(x),$$

où $\phi^{[-1]}$ est l'inverse de $\phi$ pour la composition des séries formelles.

Il est connu que puisque le rayon de convergence de $\varphi$ est non nul, il en est de même de $\phi$ (voir [7], chap 6, p 139–140)).

Posons $\tilde{\psi}(x) = \psi \circ \phi(x)$. On voit facilement que $\tilde{\psi}$ vérifie l'équation:

$$\sum_{i=0} P_i \circ \phi(x)\tilde{\psi}(q^i x) = \theta \circ \phi(x)$$

de sorte le cas général est ramené au cas particulier que nous avons étudié par conjugaison analytique.

On a alors le résultat suivant:

THÉORÈME 5.1. *Soit $L$ un opérateur de la forme* 5.1 *vérifiant les hypothèses précédentes; soient $\psi$ et $\theta$ deux séries formelles telles que $L(\psi) = \theta$, avec $\theta$ de rayon de convergence non nul.*

*Alors, on $\psi$ a un rayon de convergence non nul, ou il existe une valeur exceptionnelle s de l'opérateur L telle que $\psi$ appartienne à $\mathbb{C}[[x]]_{q,s}$, et pas à $\mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$.*

*Démonstration.* Ce qui précède permet d'appliquer le théorème 4.1, et il en résulte que $\tilde{\psi} = \psi \circ \phi$ appartient à $\mathbb{C}[[x]]_{q,s}$, et pas à $\mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$ pour une unique valeur exceptionnelle de l'opérateur $\tilde{L} = \sum P_i \circ \phi(x)\psi(q^i x)$, ou alors $\tilde{\psi}$ est convergente. Si $\tilde{\psi}$ est convergente, il en est de même pour $\psi$ qui est égal à $\tilde{\psi} \circ \phi^{[-1]}$.

Il reste à démonstrer que $\tilde{\psi} \in \mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ entraîne $\psi \in \mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ et $\psi \in \mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$ entraîne $\psi \in \mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$.

Il suffit, pour démontrer cette assertion, de montrer que si $u$ et $v$ sont deux séries formelles, avec $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$, $v$ convergente, alors $u \in \mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ implique $u \circ v \in \mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ et $u \in \mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$ implique $u \circ v \in \mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$.

Posons $u = \sum a(n)x^n$, $v = \sum b(n)x^n$. Alors $u \circ v(x) = \sum a(n)v(x)^n$, et par suite on a la formule suivante pour le coefficient $c(m)$ de $x^m$ dans $u \circ v$:

$$c(m) = \sum a(n) \sum_{k_1 + \cdots + k_n = m} b(k_1) \cdots b(k_n). \tag{5.2}$$

Supposons que l'on ait: $|a(n)| \leqslant \alpha\beta^n |q|^{-s[n(n+1)/2]}$ et $|b(n)| \leqslant c_1 c_2^n$. Il vient grâce à la formule (5.2):

$$|c(m)| \leqslant \sum_{n \leqslant m} \alpha\beta^n |q|^{-s[n(n+1)/2]} c_1^n c_2^m d(n, m)$$

où $d(n, m)$ est le nombre de $n$-uplets $k_1, \ldots, k_n$, avec $k_i \geqslant 1$ pour tout $i$, tels que $k_1 + \cdots + k_n = m$, i.e., $d(n, m) = \binom{m-1}{n-1}$.

Soit $m_0$ un entier tel que $m \geqslant m_0$ implique $|q|^{(s/2)m} \leqslant \beta c_1$. On a alors pour $m \geqslant m_0$:

$$|c(m)| \leqslant \alpha |q|^{-s[m(m+1)/2]m} c_2 \sum_{n \leqslant m} \beta^n c_1^n \binom{m-1}{n-1} |q|^{s[(m-n)(m+n+1)/2]}$$

$$|c(m)| \leqslant |q|^{-s[m(m+1)/2]m} c_2 \textstyle\sum_{n \leqslant m} (\beta c_1)^n \binom{m-1}{n-1} (\beta c_1)^{m-n}.$$

Soit:

$$|c(m)| \leqslant \alpha c_2 (\beta c_1 c_2)^m 2^{m-1} |q|^{-s[m(m+1)/2]} = c_3 (2\beta c_1 c_2)^m |q|^{-s[m(m+1)/2]}.$$

Ceci prouve que si $u \in \mathbb{C}[[x]]_{q,s}$, il en est de même de $u \circ v$; de plus, si $u \in \mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$, alors pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha$ tel que l'on ait $|a(n)| \leqslant \alpha\beta^n|q|^{-s[n(n+1)/2]}$, et par suite il en est de même pour $c(m)$, et ceci prouve que $u \circ v$ appartient à $\mathbb{C}[[x]]_{q,(s)}$, et termine la démonstration du théorème 5.1.

On remarquera que les valeurs exceptionnelles sont déterminées en regardant simplement les quantités $i + sv(P_i \circ \phi)$ pour $s$ réel positif, et que $v(P_i \circ \phi) = v(P_i)$ pour tout $i$, puisque $\phi(0) = 0, \phi'(0) = 1$, et par suite on détermine les valeurs exceptionnelles en ne considérant que les $P_i$.

## VI. Le cas où $|q| = 1$

Dans cette partie, nous considérons maintenant le cas de l'équation (1.1), quand $q_1 = q$, coefficient de $x$ dans $\varphi(x)$, est un nombre complexe de module 1, qui n'est pas une racine de l'unité.

Nous allons nous limiter à considérer des équations de la forme 1.1.

Nous avons alors les résultats suivants:

THÉORÈME 6.1. *On note $Q(x)$ le polynôme non nul égal à $\sum_{i \geqslant 0} a_{i,j}x^i$ où $j = \inf(v(P_i))$. On suppose que, pour toute racine $u$ du polynôme $(x-1)Q(x)$, on a $|q^n - u| \geqslant c_1 n^{-c_2}$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, pour tout $n$ assez grand.*

*Alors, pour tout couple $(\psi, \theta)$ de séries formelles telles que $L(\psi) = \theta$, si la série $\theta$ est convergente, il en est de même de la série $\psi$.*

*Démonstration.* Nous allons nous ramener une fois encore au cas où $\varphi(x) = qx$. Pour cela, nous procédons de la même manière que dans la partie V. Le fait que la série de Schröder $\Phi(x)$ associée à $\varphi(x)$ soit convergente si $\varphi$ l'est, sous l'hypothèse du théorème 6.1, est un résultat de Siegel ([7], chap 6, p 147, th-613, [15]).

Par suite, il suffit de démontrer l'assertion dans le cas de $\varphi(x) = qx$. Nous supposerons aussi, sans que cela nuise à la généralité, que $\inf(v(P_i)) = 0$. En fait, nous allons voir que dans ce cas, une condition de la forme

$$|q^n - u| \geqslant c_2 c_3^n, \qquad c_2 > 0, \qquad c_3 > 0,$$

suffit pour entraîner la conclusion du théorème.

Notons $P_i(x) = \sum a_{i,j}x^j$; $\psi(x) = \sum u(n)x^n$; $\theta(n) = \sum v(n)x^n$.

On a donc: $\sum\sum a_{i,j}u(n)q^{in}x^{n+j} = \sum v(n)x^n$.

Donc: $v(m) = \displaystyle\sum_{\substack{i,j,n \\ n+j=m}} a_{i,j}u(n)q^{in}$.

Soit:

$$v(m) = u(m)Q_0(q^n) + \cdots + u(m-j)Q_j(q^m) + \cdots + u(0)Q_m(q^m)$$

$$Q_j(q^m) = \sum a_{i,j} q^{i(n-j)}.$$

Par suite:

$$u(m)Q_0(q^n) = -\sum_{j \geqslant 1} u(m-j)\left(\sum a_{i,j} q^{i(m-j)}\right) + v(m).$$

Il existe des constantes positives $\lambda_1$ et $\mu_1$ telles que l'on ait:

$$|a_{i,j}| \leqslant \lambda_1 \mu_1^j$$

pour tout couple $(i, j)$ et des constantes $\lambda_2$ et $\mu_2$ telles que:

$$|v(m)| \leqslant \lambda_2 \mu_2^m.$$

Donc:

$$|u(m)||Q_0(q^m)| \leqslant \sum_{j \geqslant 1} |u(m-j)|\left(\sum |a_{i,j}|\right) + \lambda_2 \mu_2^m,$$

$$|u(m)||Q_0(q^m)| \leqslant \sum_{j \geqslant 1} |u(m-j)|(s+1)\lambda_1 \mu_1^j + \lambda_2 \mu_2^m,$$

$$|u(m)||Q_0(q^m)| \leqslant (s+1)\lambda_1\left(\sum_{j \geqslant 1} |u(m-j)|\mu_1^j\right) + \lambda_2 \mu_2^m.$$

Posons $\lambda_3 = (s+1)\lambda_1$,

$$w(m) = \sum_{j \geqslant 1} |u(m-j)|\mu_1^j.$$

On a donc:

$$|u(m)||Q_0(q^m)| \leqslant \lambda_3 w(m) + \lambda_2 \mu_2^m,$$

$$w(m+1) = |u(m)|\mu_1 + |u(m-1)|\mu_1^2 + \cdots + |u(0)|\mu_1^{m+1},$$

$$w(m+1) = \mu_1 |u(m)| + \mu_1 w(m).$$

Donc:

$$|Q_0(q^m)|w(m+1) \leqslant \mu_1 \lambda_3 w(m) + \mu_1 \lambda_2 \mu_2^m + \mu_1 w(m).$$

Soit:

$$|Q_0(q^m)|w(m+1) \leqslant \lambda_4 w(m) + \lambda_5 \mu_2^m.$$

Nous admettons provisoirement le résultat dans le cas de $\lambda_5$ égal à zéro (donc la série dont le $m$-ième coefficient de Taylor est $(\prod_N^{m-1} |Q_0(q^k)|)^{-1}$ a un rayon de convergence non nul), et nous poursuivons la démonstration.

Posons:

$$v(m) = \left(\prod_N^{m-1} |Q_0(q^k)|\right) w(m).$$

$v(m)$ vérifie alors:

$$v(m+1) \leqslant \lambda_4 v(m) + \lambda_5 \left(\prod_N^{m-1} |Q_0(q^k)|\right) \mu_2^m.$$

Soit:

$$v(m+1) \leqslant \lambda_4 v(m) + \lambda_6 \mu_3^m.$$

On en déduit qu'il existe $\lambda_7$ et $\mu_4$ positifs tels que:

$$v(m) \leqslant \lambda_7 \mu_4^m.$$

Donc:

$$\left(\prod_N^{m-1} |Q_0(q^k)|\right) w(m) \leqslant \lambda_7 \mu_4^m$$

d'où on déduit que $w(m) \leqslant \lambda_8 \mu_5^m$, $\lambda_8 > 0$, $\mu_5 > 0$.

Donc:

$$|u(m-1)|\mu_1 + \cdots \leqslant \lambda_8 \mu_5^m$$

et par suite $|u(m)| \leqslant \lambda_8 \mu_1^{-1} \mu_5 \mu_5^m = \lambda_9 \mu_5^m$ et le résultat.

Il nous reste à démontrer le résultat dans le cas où $\lambda_5$ est égal à zéro. On a alors pour $w(m)$ l'inégalité:

$$|Q_0(q^m)|w(m+1) \leqslant \lambda_4 w(m).$$

En décomposant $Q_0(x)$ en ses facteurs linéaires, on voit qu'il suffit de prouver l'assertion dans le cas où $Q_0(x)$ est égal à $x - u$ (avec $u$ non nul, car ce cas est trivial).

On peut supposer aussi sans nuire à la généralité que $q^k - u$ est non nul pour tout entier naturel $k$.

Posons $a(n) = \prod_{k=1}^{n} (q^k - u)^{-1}$ pour $n$ supérieur ou égal à un.

Soit $\theta(x) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} a(n)x^n$. On voit facilement que $\theta(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle:

$$\theta(qx) - (u + x)\theta(x) = 1 - u. \tag{6.1}$$

D'autre part, $\theta(x)$ est l'unique solution série formelle de (6.1) telle que $\theta(0) = 1$.

Soit $h(x) = \exp(\sum (-1)^n x^{n+1}/((n+1)u^{n+1}(q^{n+1} - 1)))$.

La série $h(x)$ a un rayon de convergence non nul d'après les hypothèses du théorème 6.1, et d'autre part on a $h(0) = 1$ et $h(qx) = (1 + x/u)h(x)$.

Soit $g(x) = \sum c(n)x^n$ la solution de l'équation fonctionnelle:

$$g(qx) - ug(x) = u(1 - u)/((x + u)h(x)) = \sum b(n)x^n \tag{6.2}$$

telle que $g(0) = 1$.

On a $(q^n - u)c(n) = b(n)$ pour tout $n$, et le rayon de convergence de $\sum b(n)x^n$ est non nul d'après ce qui précède; les hypothèses du théorème 6.1 impliquent alors qu'il en est de même de $g(x)$.

On voit facilement que la série $f(x) = g(x)h(x)$ vérifie l'équation (6.1), et d'autre part $f(0) = 1$. Donc $f(x) = \theta(x)$, ce qui termine la démonstration.

Remarque. Ce qui précède permet d'améliorer des résultats de [16] dans le cas de l'équation du premier ordre:

$$\psi(\varphi(x)) - g(x)\psi(x) = \theta(x)$$

où $\varphi(x) = sx + \cdots$, $s$ étant un nombre complexe de module un qui n'est pas une racine de l'unité, et $g$ et $\theta$ des séries convergentes.

Ces auteurs montrent alors que s'il existe un entier naturel $k$ tel que $g(0) = s^k$, il existe une solution $\psi$ de rayon de convergence non nul.

Les résultats précédents permettent d'affirmer qu'il en est de même sous les deux hypothèses $|s^n - 1| \geqslant c_1 n^{-c_2}$ et $|s^n - g(0)| \geqslant c_3 c_4^n$ pour tout $n$, où les $c_i$ sont des constantes positives.

En effet le fait que $s^n - g(0)$ soit non nul pour tout $n$ montre qu'il existe une solution série formelle, et le théorème 6.1 s'applique alors.

D'autre part une condition de la forme $|s^n - g(0)| \geqslant c_3 c_4^n$ ne peut être évitée en général, comme le montre l'exemple de l'équation précédente avec $\varphi(x) = sx$, $g(x) = g(0) = \alpha$ et $\theta(x) = x/(1-x)$, qui admet la solution formelle $\psi(x) = \sum x^n/(s^n - \alpha)$, si $s^n$ est différent de $\alpha$ pour tout $n$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] ADAMS, C. R., *On the linear ordinary q-difference equations.* Ann. of Math. (2) *30* (1929), 195–205.

[2] BIRKHOFF, G. D., *The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations.* Proc. Amer. Acad. *49* (1913), 521–568.

[3] BIRKHOFF, G. D. et GUENTHER, P. E., *Note on a canonical form for the linear q-difference equation.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *27* (1941), 218–222.

[4] CARMICHAEL, R. D., *The general theroy nof linear q-difference equations.* Amer. J. Math. *34* (1912), 146–168.

[5] DUVAL, A., *Lemmes de Hensel et factorisation formelle pour les opérateurs aux différences.* Funkcial. Ekvac. *26* (1983), 349–368.

[6] GREVY, A., *Thèse.* Gauthier-Villars, Paris, 1894 (publiée en grande partie dans Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. *11* (1894), 249–323).

[7] KUCZMA, M., *Functional equations in a single variable.* Polish Scientific Publ., Warszawa-Katowice, 1968.

[8] KUCZMA, M., CHOCZEWSKI, B. et GER, R., *Iterative functional equations.* [Encyclopedia Math. Appl., Vol. 32]. Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1990.

[9] LEAU, L., *Etude sur les équations fonctionnelles.* (Thèse). Paris, 1897.

[10] MALGRANGE, B., *Sur les points singuliers des équations différentielles.* Enseign. Math. *20* (1974), 147–176.

[11] PRAAGMAN, C., *The formal classification of linear difference equations.* Nederl-Akad. Wetensch. Indag. Math. *45* (1983), 249–261.

[12] PRAAGMAN, C., *Stokes and Gevrey phenomena in relation to index theorems in the theory of meromorphic linear difference equations.* Funkcial. Ekvac. *29* (1986), 259–279.

[13] RAMIS, J.-P., *Théorèmes d'indice Gevrey pour les équations différentielles ordinaires.* [Mem. Amer. Math. Soc., No. 296]. A.M.S., Providence, RI, 1984.

[14] RAMIS, J.-P., *Dévissage Gevrey.* Astérisque *59-60* (1978), 173–204.

[15] SIEGEL, C., *Iteration of analytic functions.* Ann. of Math. *43* (1942), 607–612.

[16] SMAJDOR, A et SMAJDOR, W., *On the existence and uniqueness of analytic solutions of a linear functional equations.* Math Z. *98* (1967), 235–242.

[17] TRJITZINSKY, W. J., *Analytic theory of linear q-difference equations.* Acta Math. *61* (1933), 1–38.



*Université de Caen,*
*Mathématiques, Esplanade de la Paix,*
*F-14032 Caen Cedex, France.*