Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

K. V. Safonov, A. K. Tsikh, Singularities of the Grothendieck parametric residue and diagonals of a double power series, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1984, Number 4, 51–58

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 82.231.251.251
January 17, 2015, 17:44:55

ЛИТЕРАТУРА

1. Чибрикова Л. И., Плещинский Н. Б. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами.—Изв. вузов. Матем., 1977, № 10, с. 150—162; 1979, № 9, с. 62—74.

2. Самко С. Г. Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования.—Дифференц. уравнения, 1968, т. IV, № 2, с. 298—314.

г. Казань

Поступила 21.04.1982

К. В. Сафонов, А. К. Цих

УДК 517.554

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВЫЧЕТА ГРОТЕНДИКА И ДИАГОНАЛИ ДВОЙНОГО СТЕПЕННОГО РЯДА

Хорошо известна классическая теорема Адамара об умножении особенностей (см. [1], [2]): если функции $a(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ и $b(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k z^k$ имеют особые точки $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_j\}$ соответственно, то функция $h(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k b_k z^k$ (композиция Адамара) может иметь особенности лишь в точках $\alpha_i\beta_j$ (причем, если $a(z)$ и $b(z)$ рациональны, то $h(z)$ тоже рациональна).

Теорема Адамара стимулировала развитие исследований по аналитическому продолжению степенных рядов (см. [3]). Доказательство теоремы проводится гомологическим исследованием интеграла, зависящего от параметра, который выражает функцию $h(z)$ через $a(z)$ и $b(z)$. Гомологический метод был впоследствии широко развит и нашел применения при исследовании фейнмановских интегралов (см. [4], с. 17).

Естественным обобщением композиции Адамара является диагональ

$$d(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{kk}t^k$$

двойного степенного ряда

$$f(w,z)=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}a_{mn}w^m z^n.$$

Если $f(w,z)=a(w)\,b(z)$, то $d(z)$ совпадает с композицией Адамара $h(z)$ функций a и b.

Диагональ двойного степенного ряда и ее многомерные аналоги изучались в работах [5]—[8]. Интерес к исследованию диагонали кратного ряда связан с ее применением в комбинаторике (см. [7], [6]), теоретической физике (см. [9], [10]), к решению разностных уравнений (см. [5]). Из результатов, касающихся диагонали, отметим следующие: получены интегральные представления [8], оценены области голоморфности [7], [8], найдены особые точки диагонали для рациональной функции специального вида [6], отмечено, что диагональ рациональной функции не всегда рациональна (см. [6]).

Однако в общем случае вопрос о нахождении особых точек диагонали двойного ряда по особенностям функции $f(w,z)$ не исследован. В данной работе этот вопрос решен полностью для диагонали двойного степенного ряда рациональной функции (в несколько более общей ситуации (p,q)-диагонали). Полученная теорема 2 обобщает теорему Адамара об умножении особенностей. Показано, что в общем случае диагональ рациональной функции есть функция алгебраическая, указано множество особых точек однозначного характера и приведено условие рациональности диагонали.

Интегральное представление диагонали двойного ряда выражается через вычет Гротендика (см. [11]), голоморфно зависящий от параметра. Общий метод аналитического продолжения параметрических интегралов по циклам, опирающийся на стратификацию особенностей и теорему Тома об изотопии, является весьма громоздким. Однако в данном случае исследование особенностей удается провести более простыми алгебраическими средствами. В § 1 находятся особенности параметрического вычета Гротендика (теорема 1 и следствие 1). В § 2 этот результат применяется к описанию особых точек диагонали двойного степенного ряда.

Теорема 1 получена А. К. Цихом, а теорема 2—К. В. Сафоновым.

§ 1. Особенности параметрического вычета Гротендика

Пусть M — n-мерное комплексное аналитическое многообразие, $z=(z_1,\dots$ $\dots,z_n)$—локальные координаты многообразия M в окрестности U_{z^0} точки $z^0\in M$, G—область в $\mathbf{C}^m_t$. Если $h(z,t)$, $f_1(z,t),\dots,f_n(z,t)$—функции, голоморфные в $M\times G\subset M\times\mathbf{C}^m_t$, причем при $t=t^0\in G$ отображение $f(z,t^0)=(f_1(z,t^0),\dots$ $\dots,f_n(z,t^0))$ имеет изолированный нуль $z^0\in M$, то параметрическим вычетом Гротендика назовем интеграл (см. [11]):

$$F(t)=(2\pi i)^{-n}\int\limits_{\Gamma_{t^0}(z^0)}\omega(z,t),\tag{1.1}$$

где $\omega(z,t)=h(z,t)\,dz/f_1(z,t)\dots f_n(z,t)$, $dz=dz_1\wedge\dots\wedge dz_n$, $\Gamma_{t^0}(z^0)=\{z\in U_{z^0}:$ $|f_j(z,t^0)|=\varepsilon;\ j=1,\dots,n\}$—так называемый локально разделяющий цикл в точке z^0.

Всюду в дальнейшем через $\mu_a(g(z))$ будем обозначать кратность нуля a отображения $g(z)=(g_1(z),\dots,g_n(z))$ (определение кратности нуля см., напр., в [12], с. 33), полагая при этом $\mu_a(g(z))=0$, если $g(a)\neq 0$ и $\mu_a(g(z))=\infty$, если a—неизолированный нуль отображения $g(z)$.

Теорема 1. *Аналитический элемент* $F(t)$, *определяемый параметрическим вычетом Гротендика* (1.1), *голоморфно продолжается вдоль каждого пути* $\gamma=\gamma(s)$ *в* G, *для которого существует поднятие* $\tilde\gamma=\tilde\gamma(s)$ *в* $M\times G$ *со свойствами*: 1) $\pi_2(\tilde\gamma)=\gamma$, $\tilde\gamma(0)=(z^0,\ t^0)$; 2) *кратность нуля* $\mu(s)=$ $=\mu_{\pi_1(\tilde\gamma(s))}(f(z,\gamma(s)))=\mathrm{const}$; *здесь* $\pi_1: M\times G\to M$, $\pi_2: M\times G\to G$—*проекции.*

Следствие 1. Если в условиях теоремы 1 для отображения $f(z,t)$ имеет место тождество $f(z^0,t)\equiv 0$, $t\in G$, то аналитический элемент (1.1) голоморфно продолжается в каждую точку $t\in G$, для которой кратность $\mu_{z^0}(f(z,t))=\mathrm{const}=\mu_{z^0}(f(z,t^0))$.

Доказательство теоремы 1. Заметим вначале, что в условиях теоремы для каждой точки $w=(z',t')\in\tilde\gamma(s)$ найдется окрестность $O_w=U_{z'}\times V_{t'}$, в которой аналитическое множество $S=\{(z,t)\in M\times G: f_1(z,t)=\dots=f_n(z,t)=0\}$ задается в виде

$$S\cap O_w=\{(z,t)\in U_{z'}\times V_{t'}: z=\varphi(t)\},\tag{1.2}$$

где $\varphi(t)$—голоморфная в $V_{t'}$ вектор-функция. Действительно, из условия постоянства кратности $\mu(s)$ заключаем, что для любого $w=(z',t')\in\tilde\gamma(s)$ существуют окрестности $U_{z'}$, $V_{t'}$ точек $z'=\pi_1(w)$, $t'=\pi_2(w)$ соответственно такие, что при всех $t\in V_{t'}$ система уравнений $f_1(z,t)=\dots=f_n(z,t)=0$ имеет в $U_{z'}$ единственное решение $z=\varphi(t)$. Поэтому согласно теореме о локальном описании аналитического множества ([13], с. 84) дискриминантное множество для $\varphi(t)$ пустое, откуда следует голоморфность $\varphi(t)$.

Используя компактность носителя пути $\tilde\gamma$, построим конечное семейство окрестностей $O_{w^k}=U_{z^k}\times V_{t^k}$, $w^k\in\tilde\gamma(s)$, $k=0,1,\dots,N$, в каждой из которых аналитическое множество S задается в виде (1.2). Поскольку остов $\Gamma_{t^k}(z^k)=$ $=\{z\in U_{z^k}:|f_j(z,t^k)|=\varepsilon;\ j=1,\dots,n\}$ компактен, и для функций $g_j^k(z,t)=$

$=f_j(z,t)-f_j(z,t^k)$ имеем $g_j^k(z,t^k)=0$, то окрестности V_{t^k} можно выбрать настолько малыми, чтобы для всех $t\in V_{t^k}$ на остове $\Gamma_{t^k}(z^k)$ выполнялись неравенства $|f_j(z,t^k)|>|g_j^k(z,t)|$, $j=1,\dots,n$. Поэтому согласно лемме А. П. Южакова ([12], с. 55, лемма 4.9) имеем при каждом $t\in V_{t^k}$ гомологию циклов

$$\Gamma_{t^k}(z^k)\sim\Gamma_t(\varphi(t))=\{z\in U_{z^k}:|f_j(z,t)|=\varepsilon,\ j=1,\dots,n\}\tag{1.3}$$

в области $U_{z^k}\setminus\{z:f_1(z,t)\times\dots\times f_n(z,t)=0\}$. По теореме Коши—Пуанкаре для всех $t\in V_{t^k}$ имеет место равенство интегралов

$$\int\limits_{\Gamma_{t^k}(z^k)}\omega(z,t)=\int\limits_{\Gamma_t(\varphi(t))}\omega(z,t).$$

Отсюда следует, что семейство аналитических элементов, определяемых вычетами

$$(2\pi i)^{-n}\int\limits_{\Gamma_{t^k}(z^k)}\omega(z,t),\quad t\in V_{t^k},\ k=0,1,\dots,N,$$

осуществляет непосредственное аналитическое продолжение элемента (1.1) вдоль пути γ.

Следствие 1 сразу получается из теоремы 1, если учесть, что путь $\gamma(s)$, соединяющий точки t_0 и t, поднимается до пути $\tilde\gamma(s)=(z^0,\gamma(s))$ с выполнением условий 1) и 2).

§ 2. Особенности диагонали двойного степенного ряда

1°. Пусть дана функция $f(w,z)$ от двух комплексных переменных w,z, голоморфная в окрестности нуля, и

$$f(w,z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}w^mz^n\tag{2.1}$$

—ее разложение Тейлора. Зафиксируем некоторые натуральные числа p и q и назовем (p,q)-диагональю двойного степенного ряда (2.1) функцию

$$d_{p,q}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{pk,\,qk}t^k.\tag{2.2}$$

Введем некоторые обозначения. Пусть дан многочлен

$$Q(w,z)=\sum_{m,n}c_{mn}w^mz^n.$$

Если $Q=Q_1^{r_1}\dots Q_\nu^{r_\nu}$ — разложение многочлена Q на неприводимые множители, то обозначим $Q_*=Q_1\dots Q_\nu$. Пусть Δ—многоугольник Ньютона для Q, т. е. выпуклая оболочка в $\boldsymbol{R}^2$ множества $\{(m,n)\in\boldsymbol{Z}^2\subset\boldsymbol{R}^2:c_{mn}\neq0\}$; σ_1,σ_2—совокупности целых точек (m,n) многоугольника Δ, лежащих на опорных прямых к Δ с направляющими векторами (p,q). Положим

$$Q_{\sigma_i}(w,z)=\sum_{(m,n)\in\sigma_i}c_{mn}w^mz^n,\quad i=1,2.$$

Отметим, что после деления на соответствующий моном $Q_{\sigma_i}(w,z)$ превращается в многочлен $\tilde Q_i$, зависящий только от произведения $w^{p_1}z^{q_1}$, где $p_1=p/d$, $q_1=q/d$, d—наибольший общий делитель чисел p и q: $Q_{\sigma_i}(w,z)=w^{a_i}z^{b_i}\tilde Q(z^{p_1}w^{q_1})$, $i=1,2$. Обозначим множество $\tilde T=\{t^d\in\boldsymbol{C}^1:\tilde Q_1(t)\tilde Q_2(t)=0\}$ (если Δ не имеет граней с направляющим вектором (p,q), то σ_i состоит из одной вершины, поэтому $\tilde Q_i\equiv\mathrm{const}\neq0$, и $\tilde T=\varnothing$), а также множество $T_*=\{t=w^pz^q\in\boldsymbol{C}^1:Q_*(w,z)=0,\ qw(Q_*)'_w-pz(Q_*)'_z=0,\ w\neq0,\ z\neq0\}$. При сделанных обозначениях имеет место

Теорема 2. *Если в* (2.1) $f(w, z) = P(w, z)/Q(w, z)$ — *рациональная функция*, $Q(0, 0) \neq 0$, *то* (p, q)-*диагональ* (2.2) *ряда* (2.1) *голоморфно продолжается из точки* $t=0$ *вдоль каждого пути, не проходящего через точки множества* $T = \widetilde{T} \cup T_*$.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что множество T конечно, поэтому конечно множество особенностей (p, q)-диагонали.

Замечание 2. При $f(w, z) = a(w) b(z)$, $p = q = 1$, из теоремы 2 получается теорема Адамара об умножении особенностей в случае рациональных функций.

Предложение 1. *Если функция* (2.1) *рациональна, то ее* (p, q)-*диагональ* (2.2) — *алгебраическая функция*.

Для каждого неприводимого множителя Q_j, $j = 1, \dots, \nu$, многочлена Q_* составим множество T_j аналогично множеству T_*, заменяя Q_* на Q_j. Очевидно, что $\bigcup\limits_{j=1}^{\nu} T_j \subset T_*$. Имеет место

Предложение 2. *Если* $t_0 \in T \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\nu} T_j$, *то функция* (2.2) *может иметь в точке* $t = t_0$ *только полюс однозначного характера*.

Следствие 2. Если $\bigcup\limits_{j=1}^{\nu} T_j = \varnothing$, то (p, q)-диагональ рациональной функции рациональна.

Замечание 3. Из следствия 2 вытекает рациональность композиции Адамара $h(z)$ рациональных функций $a(z)$, $b(z)$.

2°. Теорему 2 докажем с помощью теоремы 1, используя при этом для достаточно малых t интегральное представление (см. [6]):

$$d_{p,q}(t) = (2\pi i)^{-2} \int\limits_{\substack{|w|=\rho \\ |z|=\rho}} \frac{P(w, z)\, w^{p-1} z^{q-1}\, dw \wedge dz}{Q(w, z)(w^p z^q - t)}, \tag{2.3}$$

где ρ выбрано так, что $Q(w, z) \neq 0$ в бицилиндре $\{(w, z) : |w| \leqslant \rho, |z| \leqslant \rho\}$ и $|t| < \rho^{p+q}$.

Для доказательства нам понадобится одно вспомогательное утверждение. Пусть ξ, w, z — однородные координаты пространства CP^2, в которое $C^2 = C_w^1 \times C_z^1$ вложено условием $\xi = 1$. Обозначим

$$D_{R(t)} = \{w^p z^q - t\xi^{p+q} = 0\}, \quad D_Q = \left\{\xi^{\deg Q} Q\left(\frac{w}{\xi}, \frac{z}{\xi}\right) = 0\right\}$$

— кривые в CP^2, определяемые в аффинной части $C^2 = C_w^1 \times C_z^1$ уравнениями $R = w^p z^q - t = 0$ и $Q(w, z) = 0$ соответственно. Пусть также $D_\infty = \{\xi = 0\}$ — бесконечно удаленная комплексная прямая пространства CP^2. Заметим, что D_∞ может быть особенностью подынтегральной формы в (2.3), если степень числителя $P(w, z)$ достаточно велика. Поэтому нам будет удобно обозначить $D_{\xi Q} = D_Q \cup D_\infty$. Далее, нам также удобнее считать равноправными конечные и бесконечно удаленные точки из CP^2, поэтому локально разделяющий цикл $\Gamma(a)$, связанный с разделением кривых $D_{R(t)}$ и D_Q в точке $a \in CP^2$, будем записывать следующим образом: $\Gamma(a) = \{\zeta \in U_a : |\widetilde{R}(\zeta, t)| = |\widetilde{Q}(\zeta)| = \varepsilon\}$, где ζ — локальные координаты, действующие в окрестности U_a точки a, а $\widetilde{R}, \widetilde{Q}$ — функции, задающие кривые $D_{R(t)}$, D_Q в этих координатах.

Лемма. *Пусть* $\gamma = \{|w| = \rho, |z| = \rho\}$ — *цикл из интегрального представления* (2.3). *Тогда существуют такие* t_0 *и* $\delta > 0$, *что при всех* $t : |t - t_0| < \delta$ *имеет место гомология*

$$\gamma \sim \sum_{a_k(t_0) \in D_{R(t_0)} \cap D_Q} \alpha_k \Gamma(a_k(t_0)) \tag{2.4}$$

в области $CP^2 \setminus D_{R(t)} \cup D_Q$ *так же, как и в области* $CP^2 \setminus D_{R(t)} \cup D_{\xi Q}$; *здесь* α_k — *целые числа*.

Из леммы и формулы (2.3) следует равенство

$$d_{p,q}(t)=(2\pi i)^{-2}\sum_k \alpha_k \int\limits_{\Gamma(a_k(t_0))} \frac{P(w,z)\,w^{p-1}z^{q-1}\,dw\wedge dz}{Q(w,z)(w^p z^q-t)}. \qquad (2.5)$$

Доказательство леммы. Для определенности гомологию (2.4) будем доказывать в области $CP^2\setminus D_{R(t)}\cup D_Q$, в области $CP^2\setminus D_{R(t)}\cup D_{\xi Q}$ доказательство совершенно аналогично. Покажем, что цикл $\gamma\sim 0$ в $X_1=CP^2\setminus D_Q$ и в $X_2(t)=CP^2\setminus D_{R(t)}$. Действительно, $\gamma=\partial h_1$, где $h_1=\{|w|\leqslant\rho,\ |z|=\rho\}\subset\subset CP^2\setminus D_Q$. Далее, в карте $C^2_{\xi,w}$ многообразия CP^2, которая характеризуется условием $z=1$, цикл γ записывается в виде $\gamma=\{|w/\xi|=|z/\xi|=\rho\}=\{|\xi|=1/\rho,\ |w|=1\}$, а $D_{R(t)}=\{w^p-t\xi^{p+q}=0\}$. Теперь легко видеть, что из условия $|t|<\rho^{p+q}$, наложенного в (2.4) при определении цикла γ, вытекает следующее: $\gamma=\partial h_2$, где $h_2=\{|\xi|\leqslant 1/\rho,\ |w|=1\}\subset CP^2\setminus D_{R(t)}$. Следовательно, $\gamma\sim 0$ в X_2.

Множества X_1, $X_2(t)$ открыты в своем объединении $X_1\cup X_2(t)$, поэтому для них справедлива точная последовательность Майера—Вьеториса ([14], с. 242):

$$H_3(X_1\cup X_2(t))\xrightarrow{\partial_*}H_2(X_1\cap X_2(t))\xrightarrow{i_*}H_2(X_1)\oplus H_2(X_2(t)), \qquad (2.6)$$

где i_* индуцировано вложениями, а ∂_*—связывающий гомоморфизм. Принцип действия ∂_* следующий: если ω—трехмерный цикл в $X_1\cup X_2(t)$, а g_1—часть цикла ω, лежащая в X_1, то граница цепи g_1, будучи вложенной в $X_1\cap X_2(t)$ и будет представителем элемента $\partial_*[\omega]\in H_2(X_1\cap X_2(t))$.

По вышедоказанному для цикла $\gamma\subset X_1\cap X_2(t)=CP^2\setminus D_{R(t)}\cup D_Q$ вложение $i_*[\gamma]=0$ (через $[\gamma]$ обозначаем класс гомологий цикла γ), поэтому из точности (2.6) следует, что в $X_1\cup X_2(t)=CP^2\setminus D_{R(t)}\cap D_Q$ существует трехмерный цикл $\omega=\omega(t)$, для которого $\partial_*[\omega]=[\gamma]$. Если t достаточно близко к нулю, то пересечение $D_{R(t)}\cap D_Q$ дискретно, поэтому ввиду того, что $H_3(CP^2)\simeq 0$, имеем

$$\omega(t)\sim\sum_k \alpha_k(t)\,\omega_k(t) \text{ в } CP^2\setminus D_{R(t)}\cap D_Q, \qquad (2.7)$$

где $\omega_k(t)$—сфера достаточно малого радиуса с центром в $a_k(t)\in D_{R(t)}\cap D_Q$. Заметим, что каждая из сфер $\omega_k(t)$ гомологична в $CP^2\setminus D_{R(t)}\cap D_Q$ границе полиэдра $\Pi(a_k(t))=\{\zeta\in U_{a_k(t)}:|\widetilde{R}(\zeta,t)|\leqslant\varepsilon,\ |\widetilde{Q}(\zeta)|\leqslant\varepsilon\}$. Поэтому, учитывая конструкцию гомоморфизма ∂_* и то, что граница $\partial\Pi(a_k(t))=g_1+g_2=\{|\widetilde{R}(\zeta,t)|\leqslant\varepsilon,\ |\widetilde{Q}(\zeta)|=\varepsilon\}+\{|\widetilde{R}(\zeta,t)|=\varepsilon,\ |\widetilde{Q}(\zeta)|\leqslant\varepsilon\}$, имеем $\partial_*[\omega_k(t)]=[\partial g_1]=[\Gamma(a_k(t))]$. Согласно (2.7) $[\gamma]=\partial_*[\omega(t)]=\sum_k\alpha_k(t)[\Gamma(a_k(t))]$, и

$$\gamma\sim\sum_k\alpha_k(t)\,\Gamma(a_k(t)) \text{ в } CP^2\setminus D_{R(t)}\cup D_Q. \qquad (2.8)$$

Гомология (2.4) вытекает из (2.8) следующим образом. Если t достаточно близко к нулю, то множество $D_{R(t)}\cap D_Q=\{a_k(t)\}$ конечно. При этом, если одна из бесконечно удаленных точек $\{\xi=w=0\}$, $\{\xi=z=0\}$ лежит в D_Q, то она принадлежит пересечению $D_{R(t)}\cap D_Q$ при любом t. Далее, пусть $J(Q_*,R)$—якобиан функций Q_* и R; $J(Q_*,R)=w^{p-1}z^{q-1}(qw(Q_*)'_w-pz(Q_*)'_z)$. Покажем, что в конечных точках $a_k(t)\in D_{R(t)}\cap D_Q$ якобиан $J(Q_*,R)$ может быть тождественно равен нулю лишь для конечного числа значений t. Действительно, если $J(Q_*,R)\equiv 0$, то ([12], с. 39) система уравнений $Q_*=0$, $R=0$ при каждом t либо несовместна, либо имеет лишь неизолированные решения. В последнем случае из неприводимости множителей Q_j многочлена Q_* следует, что некоторый Q_j имеет вид $w^{p_1}z^{q_1}-c_j$. Таким образом, все неизолированные решения системы $Q_*=0$, $R=0$ удовлетворяют конечному числу уравнений $w^{p_1}z^{q_1}=c_j$, и конечность множества t, для которых $J(Q_*,R)\equiv 0$, доказана. Поэтому существует окрестность $B_\delta = \{|t - t_0| < \delta\}$ некоторой точки t_0 такая, что для всех $t \in B_\delta$ мощность множества $D_{R(t)} \cap D_Q$ одна и та же, причем все конечные точки $a_k(t) \in D_{R(t)} \cap D_Q = D_{R(t)} \cap D_{Q_*}$ являются нулями кратности 1 для отображения (R, Q_*). Теперь легко видеть, что в (2.7), следовательно, и в (2.8), $\alpha_k(t)$ не зависят от t, если t меняется в B_δ. Так же, как доказательство гомологии (1.3), показывается, что при $t \in B_\delta$ цикл $\Gamma(a_k(t))$ гомологичен в $\Pi(a_k(t_0)) \setminus D_{R(t)} \cup D_Q$ циклу $\Gamma(a_k(t_0))$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Из леммы и формулы (2.3) имеем равенство (2.5); причем если $a_k(t_0)$—конечная точка из пересечения $D_{R(t_0)} \cap D_Q$, то в ней якобиан $J(Q_*, R) \neq 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $a_k(t_0)$—конечная точка. По теореме 1 интеграл

$$\int\limits_{\Gamma(a_k(t_0))} \frac{P(w, z)\, w^{p-1} z^{q-1}\, dw \wedge dz}{Q(w, z)(w^p z^q - t)} \tag{2.9}$$

может испытывать особенность лишь в тех точках t, в которых происходит скачок кратности $\mu^*_{a_k(t)}(Q, R)$. Но скачок этой кратности происходит одновременно со скачком кратности $\mu_{a_k(t)}(Q_*, R)$. Поскольку $\mu_{a_k(t_0)}(Q_*, R) = 1$, то этот скачок может произойти лишь при тех t, для которых значение якобиана в $a_k(t)$ равно нулю, т. е. для $t \in T_*$.

Случай 2. $a_k(t_0)$—бесконечно удаленная точка. Пусть для определенности $a_k(t_0) = \{\xi = w = 0\}$. В локальных координатах ξ, w система уравнений $Q(w, z) = 0$, $R(w, z, t) = 0$ перейдет в следующую:

$$\begin{cases} \widetilde{Q}(\xi, w) = \xi^l Q(w/\xi, 1/\xi) = 0, \; l = \deg Q; \\ \widetilde{R}(\xi, w, t) = w^p - t\xi^{p+q} = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Многочлен $\widetilde{R}(\xi, w, t)$ является взвешенно однородным с весом $(p, p+q)$, поэтому ([12], с. 245) скачок кратности $\mu_0(\widetilde{Q}, \widetilde{R})$ происходит лишь при тех t, при которых система уравнений $\widetilde{Q}_{\min} = 0$, $\widetilde{R} = 0$, где $\widetilde{Q}_{\min}$—взвешенно однородная с весом $(p, p+q)$ составляющая многочлена $\widetilde{Q}$ младшей степени, имеет нетривиальное решение. Поскольку $\widetilde{Q}(\xi, w) = \sum\limits_{(m, n) \in \Delta} c_{mn} \xi^{l-m-n} w^m$, то в $\widetilde{Q}_{\min}$ входят лишь такие мономы $c_{m'n'} \xi^{l-m'-n'} w^{m'}$, для которых

$$\frac{l - m' - n'}{p+q} + \frac{m'}{p} = \min\left\{\frac{l-m-n}{p+q} + \frac{m}{p} : (m, n) \in \Delta \cap Z^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{p(p+q)}(\min\{mq - np : (m, n) \in \Delta \cap Z^2\} + pl).$$

Теперь легко видеть, что (m', n') лежат на одной из граней σ_1 или σ_2; предположим, что $(m', n') \in \sigma_1$. Таким образом, $\widetilde{Q}_{\min}(\xi, w) = \xi^s Q_{\sigma_1}(w/\xi, 1/\xi)$, $s > 0$—целое число, и, следовательно, скачок кратности $\mu_0(\widetilde{Q}, \widetilde{R})$ может произойти лишь при тех t, для которых совместна система уравнений $R = 0$, $Q_{\sigma_1} = 0$, из которой после вынесения общего множителя мономов Q_{σ_1} получается система $R = 0$, $\widetilde{Q}_1(w^{p_1} z^{q_1})$, т. е. скачок кратности $\mu_0(\widetilde{Q}, \widetilde{R})$ происходит при $t \in \{\tau^d : \widetilde{Q}_1(\tau) = 0\}$. Аналогично поступаем с точкой $a_k(t_0) = \{\xi = z = 0\}$, и окончательно получаем, что в бесконечно удаленных точках скачок кратности нуля системы $\widetilde{Q}, \widetilde{R}$ происходит лишь при $t \in \widetilde{T}$. Теорема 2 доказана.

Для доказательства предложения 1 воспользуемся результатами из работы [15]. Предложение 1 вытекает из теоремы 2 работы [15], т. к. локально разделяющий цикл $\Gamma(a_k(t_0))$ удовлетворяет условию первой части этой теоремы.

Доказательство предложения 2. Пусть $t_0 \in T_* \diagdown \bigcup_{j=1}^{\nu} T_j$; возьмем достаточно малую петлю $\lambda(t_0) = \{|t - t_0| = \varepsilon\}$ на плоскости переменного t. Условие $t_0 \in T_* \diagdown \bigcup_{j=1}^{\nu} T_j$ означает, что кривая $K_{t_0} = \{w^p z^q - t_0 = 0\}$ проходит через точку пересечения $(w_0, z_0) = a(t_0)$ некоторых кривых $S_{j_i} = \{Q_{j_i}(w, z) = 0\}$, $i = 1, \ldots, s$ $(s \leqslant \nu)$, причем пересекается с каждой S_{j_i} в общем положении. Отсюда следует, что „возмущенные“ кривые $K_t = \{w^p z^q - t = 0\}$, $|t - t_0| \leqslant \varepsilon$, пересекаются с S_{j_i} также в общем положении, т. е. в некоторой окрестности U точки $a(t_0)$ пересечения $K_t \cap S_{j_i}$ состоят из одной точки $a_i(t)$, $i = 1, \ldots, s$, причем эти точки могут сливаться лишь при $t = t_0$. Так как множества S_{j_l} в окрестности U попарно пересекаются лишь в точке $a(t_0)$, и кривая K_t при $t \neq t_0$ не проходит через точку $a(t_0)$, то при всех $t \in \lambda(t_0)$ имеем, что $a_i(t) \in S_{j_i} \diagdown \{a(t_0)\}$. Поскольку $a_i(t)$—единственная точка пересечения $K_t \cap S_{j_i} \cap U$, то при однократном обходе петли $\lambda(t_0)$ семейство точек $\{a_i(t)\}$ испытывает тождественную перестановку. Таким образом, циклы $\Gamma(a_i(t))$, связанные с разделением кривых K_t и S_{j_i} в точке $a_i(t)$, переходят в себя при однократном обходе петли $\lambda(t_0)$. Обращаясь к интегралам (2.9) и (2.5), получаем однозначный характер особой точки $t_0 \in T_* \diagdown \bigcup_{j=1}^{\nu} T_j$.

Пусть теперь $t_0 \in \widetilde{T} \diagdown \bigcup_{j=1}^{\nu} T_j$; это случай, когда в (2.5) входит точка $a_k(t_0) = \{\xi = w = 0\}$ или $a_k(t_0) = \{\xi = z = 0\}$. Пусть для определенности $a_k(t_0) = \{\xi = w = 0\}$, тогда непосредственное вычисление интеграла (2.9) при переходе к координатам $(w/\xi, 1/\xi)$ в окрестности точки $w = 0$, $\xi = 0$ показывает, что этот интеграл задает рациональную функцию, и t_0—полюс однозначного характера.

3°. Приведем некоторые примеры.

1. Примеры функций $(1 - wz - z)^{-1}$ и $(1 - w - z)^{-1}$, (1,1)-диагонали которых равны соответственно $1/(1-t)$ и $1/\sqrt{1-4t}$, показывают, что вклад в истинную особенность диагонали может давать как множество $\widetilde{T}$, так и T_*; при этом для первой функции выполняется условие рациональности, а для второй — не выполняется.

2. $f(w, z) = (1 - w - z - w^2 z^4)^{-1}$, $p = 2$, $q = 3$. Имеем $Q = Q_* = 1 - w - z - w^2 z^4$, $Q_{\sigma_1} = -z(1 + w^2 z^3)$, $Q_{\sigma_2} = -w$, $\widetilde{Q}_1(t) = -(1+t)$, $\widetilde{Q}_2(t) \equiv -1$, поэтому $\widetilde{T} = \{-1\}$, и $t = -1$—подозрительная на особенность точка диагонали $d_{2,3}(t)$ из (2.3). Множество T_* таково: $\{t \in \boldsymbol{C}^1 : t = w^2 z^3,\ 1 - w - z - w^2 z^4 = 0,\ -3w + 2z + 2w^2 z^4 = 0\}$, откуда $w = 2/5$ и $8z^4 + 50z - 30 = 0$. Следовательно, особыми точками функции $d_{2,3}(t)$, кроме $t = -1$, могут быть лишь точки $t_\alpha = \frac{4}{25} z_\alpha^3$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, где z_α—корни уравнения $8z^4 + 50z - 30 = 0$.

3. $f(w, z) = [(1 + aw^m + bz^n)(1 - cw)]^{-1}$, $p = 2$, $q = 1$. Имеем $Q_* = Q_1 Q_2$, $Q_1 = 1 + aw^m + bz^n$, $Q_2 = 1 - cw$, $\widetilde{T} = \varnothing$, $T_2 = \varnothing$, $T_1 = \{t = w^2 z : 1 + aw^m + bz^n = 0,\ amw^m - 2bnz^n = 0\}$. Отсюда получаем уравнения $z^n = \frac{-m}{(2n+m)b}$ (пусть z_k—его корни, $k = 1, \ldots, n$) и $w^m = \frac{-2n}{(2n+m)a}$ (обозначим корни этого уравнения w_j, $j = 1, \ldots, m$). Тогда $T_1 = \{w_j^2 z_k\}_{j,k=1}^{m,n}$. Далее, $\{Q_1 = 0\} \cap \{Q_2 = 0\} =$

$= \{(1/c, \zeta_i)\}_{i=1}^{n}$, где ζ_i—корни уравнения $\zeta^n = -(1 + a/c^m)/b$. Поэтому

$$T_* = \left\{\frac{1}{c^2}\zeta_i\right\}_{i=1}^{n} \cup \{w_j^2 z_k\}_{j,\,k=1}^{m,\,n}.$$

Все особые точки функции $d_{2,1}(t)$ могут быть только во множестве T_*, причем если $\zeta_i/c^2 \notin \{w_j^2 z_k\}$, то в точке $t = \zeta_i/c^2$ в силу предложения 2 может быть только полюс однозначного характера функции $d_{2,1}(t)$.

Авторы выражают благодарность А. П. Южакову и Е. К. Лейнартасу за полезные беседы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hadamard J. Theoreme sur les series entieres.—Acta math., 1899, v. 22, p. 55—63.
2. Титчмарш Е. Теория функций.—М., 1980.—463 с.
3. Бибербах Л. Аналитическое продолжение.—М., 1967.—240 с.
4. Хуа Р., Теплиц В. Гомология и фейнмановские интегралы.—М., 1969.—223 с.
5. Hautus M. L. J., Klarner D. A. The diagonal of a double power series.—Duke Math. J., 1971, v. 38, № 2, p. 229—235.
6. Djoković D. Ž. A property of the Taylor expansion of a class of rational functions in several variables.—J. Math. Anal. and appl., 1978, v. 66, p. 679—685.
7. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм.—Новосибирск, 1977.—286 с.
8. Лейнартас Е. К. Об аналитическом продолжении обобщенного произведения Адамара.—В сб.: Некотор. вопр. многомерн. комплексн. анализа. Красноярск, 1980, с. 73—78.
9. Парасюк О. С. Мультипликационная теорема Адамара и аналитическое продолжение двухчастичного условия унитарности.—ДАН СССР, 1962, т. 145, № 6, с. 1247—1248.
10. Gilbert R. P., Howard H. C. Singularities of analytic functions having integral representations; with a remark about the elastic.—J. Math. Phys., 1965, v. 6, № 7, p. 1157—1162.
11. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т. 2.—М., 1982.—862 с.
12. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.—Новосибирск, 1979.—368 с.
13. Эрве М. Функции многих комплексных переменных.—М., 1965.—164 с.
14. Спеньер Э. Алгебраическая топология.—М., 1971.—680 с.
15. Педан Ю. В. Исследование римановых поверхностей некоторых двукратных интегралов, зависящих от одного комплексного параметра, II. Риманова поверхность элемента $I_\tau(t)$.—Изв. вузов. Матем., 1976, № 12, с. 66—76.

г. Красноярск

Поступила
02.03.1983