



ELSEVIER

Discrete Mathematics 165/166 (1997) 555–565

DISCRETE
MATHEMATICS

Empilement de cercles égaux dans un triangle équilatéral A propos d'une conjecture d'Erdős–Oler

Charles Payan

Université Joseph Fourier, CNRS, BP53, 38041 Grenoble, France

Résumé

Les empilements optimaux de n cercles égaux dans un triangle équilatéral ne sont connus que pour les premières valeurs de n ($n \leq 12$) et pour les nombres triangulaires, c'est à dire les nombres de la forme $\Delta(k) = k(k+1)/2$, cas où l'empilement dans le triangle est un 'morceau' de l'empilement optimal dans le plan. Erdős et Oler ont conjecturé (1961) que pour $n = \Delta(k-1)$ l'empilement optimal était obtenu à partir de l'empilement optimal de $\Delta(k)$ cercles en enlevant un cercle quelconque. Cette conjecture n'est montrée que pour $k \leq 4$. Nous donnons une preuve pour $k = 5$ (empilement de 14 cercles). Cette preuve s'étend de manière un peu plus laborieuse pour $k = 6$ (empilement de 20 cercles) et devrait permettre une approche de la conjecture générale.¹

Abstract

Optimal packings of n equal disks in an equilateral triangle are only known for $n \leq 12$ and for n of the form $\Delta(k) = k(k+1)/2$. In this case, optimal arrangements are given by the regular lattice arrangement corresponding with the densest packing in the plane. The optimal arrangements for $n = \Delta(k) - 1$ seem to be obtained by removing one arbitrary disk from the optimal arrangement for $\Delta(k)$ disks. This conjecture was posed as an open problem by Erdős and Oler in 1961. Its validity is known for $k \leq 4$. In this paper, we give a proof for $k = 5$ (arrangement for 14 disks). This proof can be extended for the case $k = 6$ (arrangement for 20 disks) and should allow an approach of the general conjecture.¹

1. Introduction

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'empilement de cercles égaux à l'intérieur de différents domaines, principalement des formes géométriques simples [2].

Les empilements dans des carrés ou des cercles trouvaient leurs motivations dans des problèmes pratiques: emballage de bouteilles dans des caisses, réalisation de

¹ La recherche des preuves a été grandement facilitée par l'utilisation de Cabri-géomètre, un logiciel de géométrie développé dans notre laboratoire (LSD2-IMAG) [1].

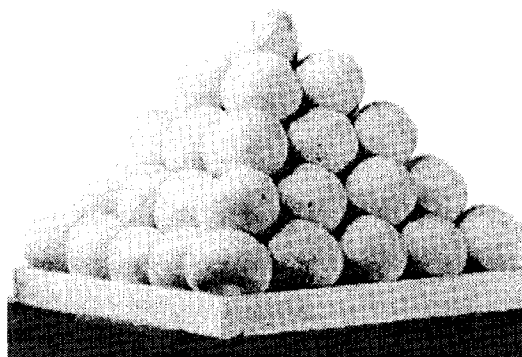


Fig. 1. L'empilement des épiciers est-il optimal?

câbles électriques ... Les empilements dans des triangles apparaissent comme liés l'empilement optimal (le plus dense) de cercles dans le plan. Rappelons à ce sujet que l'empilement optimal de sphères égales dans R^3 , conjecturé par Kepler comme étant celui dit 'des épiciers' n'est toujours pas connu (la preuve donnée par Wu-Yi Hsiang est toujours contestée) (Fig. 1).

Le problème de l'empilement de cercles égaux dans un domaine se ramène de façon évidente, par changement de frontière, au placement de points dans un domaine de telle sorte que la distance entre deux points quelconques soit supérieure ou égale à 1. Dans la suite de cet article, cette dernière condition sera toujours sous-entendue.

On ne connaît les placements optimaux de n points dans un triangle équilatéral que pour les premières valeurs de n ($n \leq 12$) et pour les nombres triangulaires, c'est à dire les nombres de la forme $\Delta(k) = k(k+1)/2$.

Soit un triangle équilatéral (ce qualificatif sera omis dans la suite) de côté $k-1$. En divisant son côté en $k-1$ segments unités, on le partitionne en $(k-1)^2$ petits triangles de côté 1 et on obtient ainsi $k(k+1)/2$ sommets. Ces sommets correspondent au placement optimal de $\Delta(k)$ points [5].

Melissen [4] a donné une preuve rapide de ce résultat, utilisant l'unicité du placement optimal de points dans le plan aux nœuds du réseau régulier triangulaire unitaire. Il a été conjecturé par Erdős et Oler [5] que le placement de $\Delta(k) - 1$ points s'obtenait en retirant un point du placement optimal de $\Delta(k)$ points. Autrement dit ce placement s'obtient en plaçant les points aux nœuds du réseau régulier triangulaire. Cette conjecture n'est montrée que pour $k \leq 4$, c'est à dire pour le placement de 2, 5 et 9 points. Nous la démontrons pour $k = 5$ et $k = 6$.

On peut énoncer une conjecture plus générale.

Soit un domaine formé par un ensemble de triangles équilatéraux unité formant un sous ensemble du réseau régulier triangulaire unitaire. Soit p le nombre de sommets appartenant à ces triangles. Le placement optimal de $p - 1$ points dans ce domaine se fait nécessairement aux nœuds du réseau.

Par la suite nous ne nous intéresserons qu'aux domaines formés par la juxtaposition de triangles de côté $c \leq 1$, et nous serons amenés naturellement à considérer le réseau régulier triangulaire sous-jacent de 'maille' c .

2. Empilements de $n = 4(k) - 1$ cercles

Le premier cas de la conjecture d'Erdős–Oler est le cas $n = 2$ pour lequel la réponse est immédiate.

Pour le cas suivant ($n = 5$), la validité de la conjecture se démontre en utilisant le principe de Dirichlet dit des 'cages à pigeons': le triangle équilatéral de côté ≤ 2 est partitionné en 4 triangles de côté ≤ 1 ; l'un d'entre eux contient au moins 2 points ce qui est impossible si son côté est < 1 . Si le côté est égal à 1 ceci entraîne le placement de ces deux points, et par suite des autres points, aux sommets du réseau triangulaire.

Le même raisonnement permet de montrer que le placement optimal de 10 points se fait nécessairement dans un triangle de côté 3, aux nœuds du réseau triangulaire: le triangle de côté 3 est partitionné en 9 petits triangles.

On obtient le même résultat pour 9 points (cas suivant de la conjecture d'Erdős–Oler). Nous en redonnerons une preuve plus loin.

Lorsque le nombre de points augmente, ce type de raisonnement ne peut continuer à s'appliquer. En effet, le nombre de petits triangles dépasse rapidement le nombre de nœuds du réseau triangulaire.

A partir de quelques considérations géométriques assez élémentaires, nous allons introduire une relation entre les petits triangles du réseau. Ceci va nous permettre de démontrer la conjecture d'Erdős–Oler pour le cas $n = 14$. Des considérations géométriques un peu plus fines, et l'examen de cas beaucoup plus nombreux, nous permettent également de conclure pour $n = 20$.

Entre les petits triangles du réseau triangulaire, nous définissons la relation d'*adjacence*: deux triangles sont adjacents si et seulement s'ils ont un côté en commun.

3. Relation de confinement entre triangles voisins

Nous allons définir une relation entre deux triangles qui sont soit adjacents, soit tels que l'un partage un seul sommet avec un triangle adjacent à l'autre.

(a) Soient deux triangles ABC et BCD de côté $c \leq 1$, adjacents en BC . ABC contient un point P_1 , BCD contient un point P_2 . La distance entre ces deux points est au moins 1. Dans ABC on marque le sommet A , dans BCD , l'un des deux sommets B ou C , par exemple B .

Nous allons montrer que si $c < 1$ ou si les points P_1 et P_2 ne sont pas tous deux situés sur des sommets des triangles, alors $|AP_1| \leq |BP_2|$, avec l'égalité si et seulement

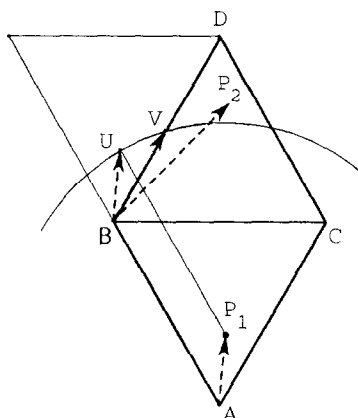


Fig. 2.

si $c = 1$ et $\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{BP_2}$ (donc P_1 et P_2 sont placés respectivement sur AC et BD). La preuve est immédiate si on se reporte à la Fig. 2.

Soit un cercle unité centré en P_1 . P_2 est à l'extérieur de ce cercle. Ce cercle coupe BD en V . Soit $P_1U \parallel AB$. On a $|AP_1| \leq |BU| \leq |BV| \leq |BP_2|$. Le cas de l'égalité est clair.

Cette propriété, ' P_1 , placé dans ABC , est plus près de A , que P_2 , placé dans BCD , ne l'est de B ', permet de définir une relation dite *de confinement* entre deux triangles marqués:

$$BCD \rightarrow ABC.$$

(b) Soient maintenant, trois triangles de côté $c \leq 1$, ABC , BCD et DEF , et trois points, P_1 dans ABC , P_2 dans BCD , P_3 dans DEF .

Nous allons montrer que si $c < 1$ ou si les points P_1 et P_2 ne sont pas tous deux situés sur des sommets des triangles, alors $|AP_1| \leq |DP_3|$, avec l'égalité si et seulement si $c = 1$ et $\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{BP_2} = \overrightarrow{DP_3}$ (ou $\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{CP_2} = \overrightarrow{DP_3}$).

Preuve (voir Fig. 3). Soient quatre cercles de rayon $|AP_1|$ centrés en A, B, C, D . D'après la preuve de a), le point P_2 est situé à l'intérieur du cercle de centre D et de rayon $|DX_2| = c - |AP_1|$. Comme $|P_2P_3| \geq 1 \geq c$, P_3 est situé à l'extérieur du cercle de centre D et de rayon $|AP_1|$. On a donc $|DP_3| \geq |AP_1|$. On a l'égalité ssi $P_i = X_i$ (ou $P_i = X'_i$) lorsque $c = 1$ et dans ce cas $\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{BP_2} = \overrightarrow{DP_3}$ (ou $\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{CP_2} = \overrightarrow{DP_3}$). La direction de ces vecteurs étant alors soit AC , soit AB . Comme précédemment, ceci nous permet de définir la relation de confinement entre les triangles marqués ABC et DEF :

$$DEF \rightarrow ABC.$$

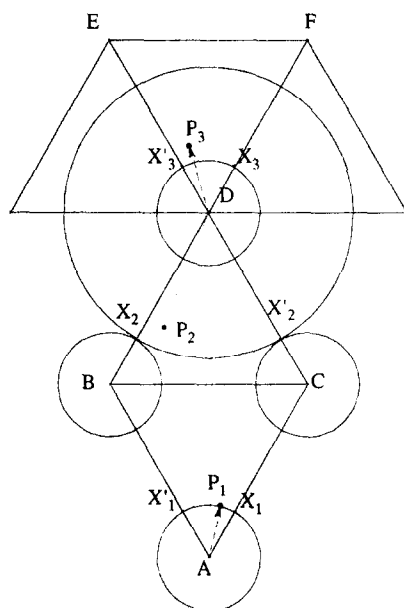
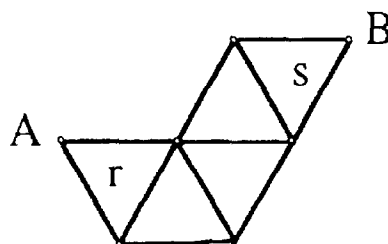


Fig. 3.

Fig. 4. Triangles-extrêmes: r et s . Sommets-extrêmes: A et B .

4. Circuit de triangles

La relation d'adjacence entre triangles permet de définir le graphe d'adjacence des triangles, et notamment une *chaîne* de triangles, que nous supposons toujours de longueur ≥ 1 , ou un *cycle* de triangles.

Un triangle adjacent à un seul triangle sera appelé *triangle-extrême*. Une chaîne possède deux triangles-extrêmes. Un sommet n'appartenant pas à deux triangles adjacents sera appelé *sommet-extrême*. On peut remarquer qu'une chaîne de triangles possède soit deux sommets-extrêmes, soit un seul sommet-extrême dans le cas où ses deux triangles-extrêmes ont un sommet commun (Fig. 4).

Un *circuit* de triangle est:

— soit un cycle de triangles, pour la relation d'adjacence

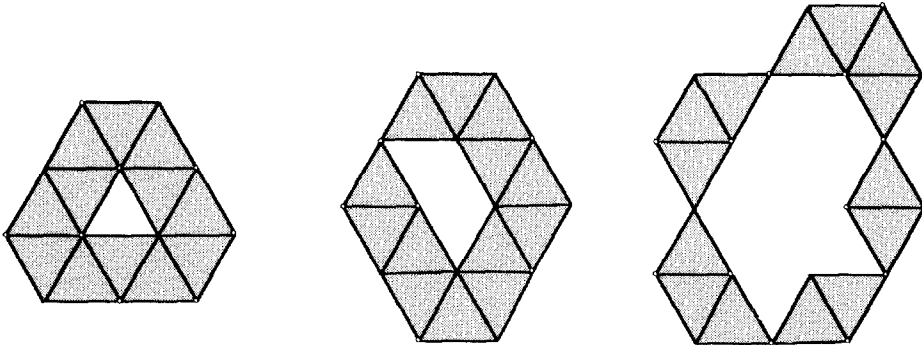


Fig. 5.

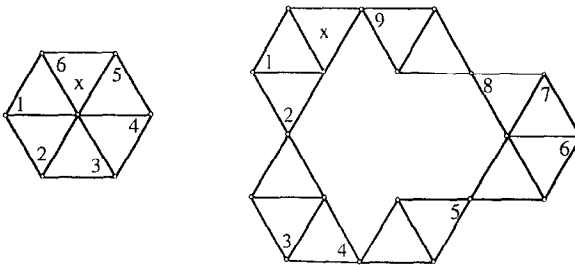


Fig. 6.

- soit une chaîne de triangle ayant un seul sommet extrémité
- soit une suite de chaînes, $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$, telle que C_i , et $C_{i+1} \pmod n$ aient un sommet extrémité en commun.

Exemples de circuits (voir Fig. 5).

5. Marquage de triangles dans un circuit

On choisit un *triangle de départ*: soit un triangle extrémité d'une chaîne appartenant au circuit, soit, dans le cas où le circuit est un cycle de triangles, l'un quelconque des triangles de ce circuit.

Si un triangle est adjacent par une arête e au triangle de départ ou à un triangle déjà marqué ou à un triangle extrémité de chaîne ayant un sommet en commun avec un triangle déjà marqué, on marque le sommet de ce triangle n'appartenant pas à l'arête e .

Exemples (voir Fig. 6). Les sommets sont ici marqués par des nombres correspondant à l'ordre dans lequel ils ont été marqués. Le triangle de départ est marqué d'une croix.

Si chaque triangle du circuit contient un point, le triangle marqué à l'étape i est en relation de confinement avec le triangle marqué à l'étape $i + 1$. A un circuit de triangles correspond donc un circuit de la relation de confinement.

Si on désigne par x_1, x_2, \dots, x_k les sommets marqués (dans cet ordre) et par d_1, d_2, \dots, d_k les distances des points situés dans les triangles marqués à ces sommets x_1, x_2, \dots, x_k , on a:

— soit $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k \geq d_1$ et donc $d_1 = d_2 = \dots = d_k$.

Mais alors, les translations des points par rapport aux sommets marqués devraient être toutes égales, ce qui est impossible: il suffit de remarquer que sur un circuit les six types, par rapport à la direction, de sommets, donc d'angles, marqués existent et ne possèdent donc pas de direction commune.

— soit les points appartenant à au moins l'une des chaînes du circuit sont situés sur des sommets de triangles et les triangles ont donc un côté $c = 1$.

On peut donc énoncer le lemme suivant:

Lemme 1. *Si chaque triangle d'un circuit (formé de triangles de côté ≤ 1) contient un point, alors*

- (i) les triangles ont un côté égal à 1
- (ii) les points appartenant à au moins l'une des chaînes de ce circuit sont situés sur des sommets de triangles.

5.1. Notation graphique.

Pour représenter une partition d'un certain domaine (sous-ensemble du réseau triangulaire formé par l'union de 'petits' triangles) en triangles ouverts auxquels on ajoute certains de leurs sommets et certaines de leurs arêtes on adopte la convention graphique suivante : un petit trait incident à un sommet du réseau, situé dans un triangle signifie que ce sommet appartient à ce triangle. Une arête commune à deux triangles adjacents sera attribuée à l'un ou l'autre de ces deux triangles.

6. Placement de 9 points dans un triangle

Nous allons montrer que le côté du triangle est égal à 3 et que les points sont nécessairement placés aux nœuds du réseau triangulaire sous-jacent.

Soit un triangle de côté $c \leq 3$, partitionné de la façon indiquée à la Fig. 7. Chaque petit triangle contient au plus un point, sauf le triangle PQR qui peut en contenir deux. On a deux cas:

— soit le triangle PQR contient deux points, et dans ce cas les petits triangles ont un côté égal à 1 et le grand un côté égal à 3. Un point est situé au nœud P ; et par suite tous les autres points sont situés sur des nœuds du réseau.

— soit chaque triangle contient exactement un point, et dans ce cas l'hexagone $QRSTUV$ de centre P constitue un circuit dont les six points sont situés aux

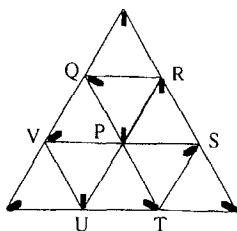


Fig. 7.

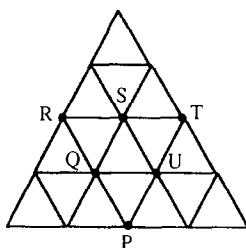


Fig. 8.

nœuds du réseau. De même pour les trois autres points. Le côté du grand triangle est égal à 3.

7. Placement de 14 points

Nous allons montrer que le côté du triangle est alors égal à 4 et que les points sont nécessairement placés aux nœuds du réseau triangulaire sous-jacent.

Soit un triangle de côté ≤ 4 et le réseau triangulaire sous-jacent (voir Fig. 8).

Lemme 2. *Si l'un des 14 points est situé sur l'un des nœuds du réseau appartenant à l'ensemble $E = \{P, Q, R, S, T, U\}$, alors tous les points sont situés aux nœuds du réseau qui est donc unitaire.*

Preuve

1^{er} cas: Un point est situé en P (ou en R , ou en T). cf. Fig. 9. Soit la partition suivante: le demi-hexagone qui ne contient que le nœud P , les quatre petits triangles du bas contenant chacun un nœud du réseau, le triangle XYZ qui contient tous les autres nœuds du réseau.

Le triangle XYZ doit contenir au moins $14 - (1 + 4) = 9$ points. Ce triangle a donc un côté égal à 3 et les points dans ce triangle sont situés aux nœuds du réseau. Par suite, il en est de même pour les autres points.

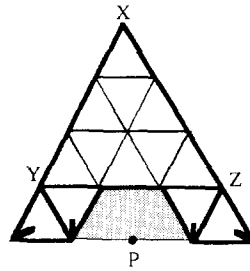


Fig. 9.

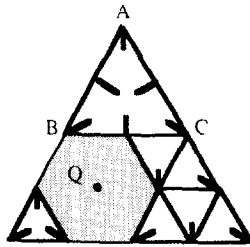


Fig. 10.

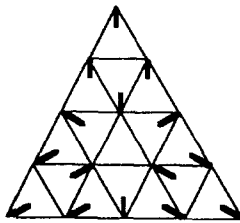


Fig. 11.

2^{ème} cas: Un point est situé en Q (ou en S , ou en U). Soit la partition donnée à la Fig. 10. Le triangle ABC contient au moins $14 - (3 + 1 + 5) = 5$ points. Ce triangle a donc un côté égal à 2 et les points dans ce triangle sont situés aux nœuds du réseau. L'un de points est donc situé en B ou en C , et d'après le cas précédent, tous les points sont situés aux nœuds du réseau. \square

Soit maintenant la partition du grand triangle en 16 petits triangles donnée à la Fig. 11. Chaque petit triangle ne peut contenir qu'un point. Donc exactement deux petits triangles ne contiennent pas de points ($16 - 14 = 2$). Si un hexagone formé de six petits triangles ne contient pas de triangle sans point, il forme un circuit dont les six points sont situés au nœud du réseau (Lemme 1). Un point est donc situé sur l'un des sommets de l'ensemble E et d'après le Lemme 2, tous les points sont situés aux nœuds du réseau.

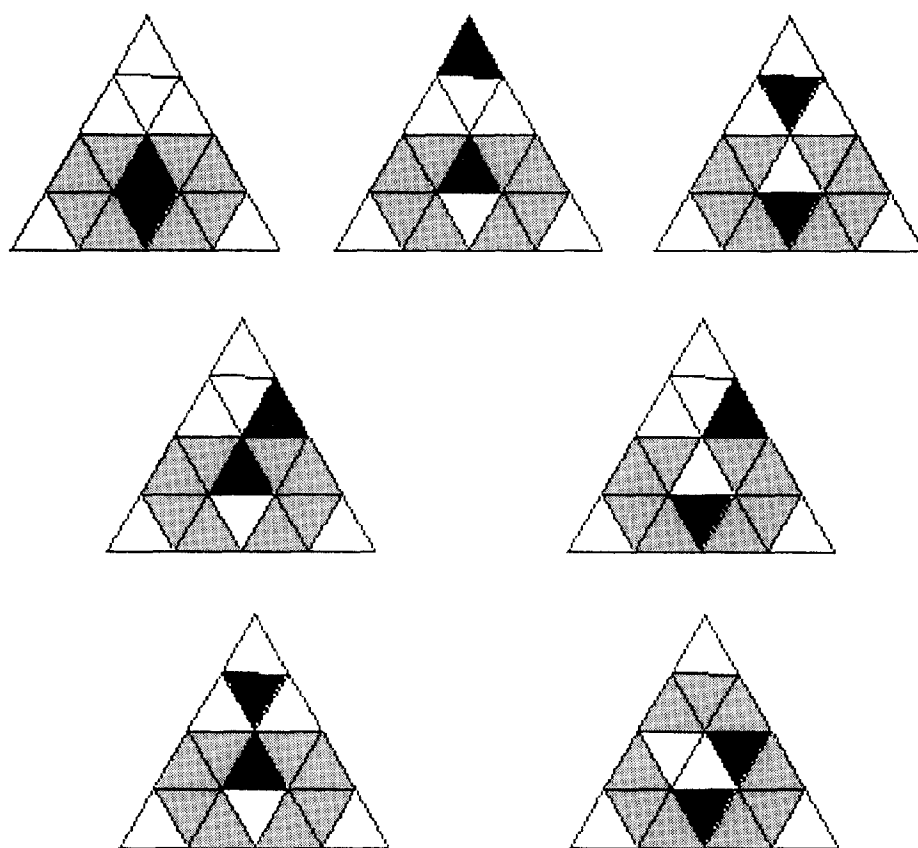


Fig. 12.

On peut donc supposer que tous les hexagones doivent contenir un triangle sans point. On a donc, aux symétries près, l'un des sept cas suivants, donnés à la Fig. 12 (les triangles noirs ne contiennent pas de points)

Dans chacun des cas on trouve un circuit (représenté en grisé). Les points appartenant à l'une des chaînes de ce circuit sont situés aux nœuds du réseau (Lemme 1). Dans tous les cas, l'un au moins de ces points est situé sur l'un des sommets du réseau appartenant à l'ensemble E. Et donc d'après le Lemme 2, tous les points sont situés aux nœuds du réseau triangulaire. Ceci achève la démonstration du résultat.

8. Placement de 20 points

Soit un triangle de côté ≤ 5 , partitionné en 25 petits triangles de côté ≤ 1 , de façon analogue à celle donnée précédemment. Cinq petits triangles ne contiennent pas de

points. Le nombre de cas à examiner est ici beaucoup plus important. Nous avons pu toutefois en faire l'étude exhaustive et ainsi démontrer la conjecture d'Erdős–Oler pour 20 points. Dans chaque cas on fait apparaître soit des circuits, soit d'autres configurations qui imposent le placement des points aux nœuds du réseau triangulaire. La mise en évidence de ces configurations s'appuie sur des propriétés géométriques plus fines que celles donnant les circuits.

La preuve étant vraiment trop longue, nous ne la présenterons pas dans cet article. Les méthodes présentées ici peuvent peut-être donner quelques idées pour aborder la conjecture d'Erdős–Oler. Toutefois les configurations mises en évidence ne sont pas suffisamment générales pour aller au delà de 20 points.

Références

- [1] Y. Baulac, F. Bellemain et J.-M. Laborde, Cabri-géomètre, un logiciel d'aide à l'apprentissage de la géométrie, logiciel et manuel d'utilisation (Cedic-Nathan, Paris, 1988).
- [2] H.T. Croft, K.J. Falconer et R.K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry* (Springer, Berlin, 1991) 107–111.
- [3] R.L. Graham et B.D. Lubachevsky, Dense packings of equal disks in an equilateral triangle: from 22 to 34 and beyond, *Electronic J. Combin.* 2 (1995).
- [4] J.B.M. Melissen, Densest packings of congruent circles in an equilateral triangle, *Amer. Math. Monthly* 100 (1993) 916–925.
- [5] N. Oler, A finite packing problem, *Canad. Math. Bull.* 4 (1961) 153–155.