Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreducible Factoren.

(Von Herrn *Edmund Landau.*)

Herr *Frobenius**) hat in die Theorie der linearen Differentialgleichungen den Begriff der Irreducibilität eingeführt. Wenn die Coefficienten einer homogenen linearen Differentialgleichung**) einem gewissen Bereiche von Functionen angehören, so heisst die Differentialgleichung irreducibel in Bezug auf den Bereich, wenn sie mit keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten dem Bereiche angehören, ein Integral gemeinsam hat; anderenfalls heisst sie reducibel für den Bereich. Ist der gegebene Bereich so beschaffen, dass Summe, Differenz, Product und Quotient je zweier ihm angehörigen Functionen und der Differentialquotient jeder solchen Function gleichfalls in ihm vorkommt, so gilt nach Herrn *Frobenius****) der Satz:

„Eine Differentialgleichung

$$P(y) = 0,$$

die mit einer irreduciblen Differentialgleichung

$$Q(y) = 0$$

ein Integral gemeinsam hat, wird durch jedes Integral von $Q = 0$ befriedigt,

---

*) „Ueber den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen", dieses Journal, Bd. 76, 1873, S. 237.

**) Es handelt sich in dieser Arbeit durchweg um homogene lineare Differentialgleichungen und Differentialausdrücke, auch wenn dies nicht besonders bemerkt wird.

***) a. a. O., S. 257.

und es existirt ein Differentialausdruck R, dessen Coefficienten dem Bereiche angehören, für welchen

$$P = RQ$$

ist."

So fortschliessend gelangt man zu dem bekannten Satze*), dass der Differentialausdruck P in irreducible Factoren zerlegbar ist:

$$P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \dots Q_2 Q_1,$$

wo die Summe der Ordnungen von $Q_1, Q_2, \dots, Q_\lambda$ gleich der Ordnung n von P und das Product der Coefficienten der höchsten beziehlich in $Q_1, Q_2, \dots, Q_\lambda$ vorkommenden Ableitungen gleich dem Coefficienten von $y^{(n)}$ in P ist. Diese Zerlegung von P ist aber nicht eindeutig, schon aus dem Grunde, weil man einen beliebigen der Factoren Q_ϱ mit einer willkürlichen, dem Bereiche angehörigen Function von x multipliciren und dann entsprechend die Kette weiter nach links fortsetzen kann.**) Aber auch wenn man diese Willkürlichkeit durch die Verfügung beseitigt, dass in P und in allen Q_ϱ der Coefficient der höchsten vorkommenden Ableitung gleich 1 ist, kann die Zerlegung von P in irreducible Factoren mehrdeutig und sogar unendlich vieldeutig sein, wie folgendes einfache Beispiel lehrt: die linke Seite der im Bereiche der rationalen Functionen von x reduciblen Differentialgleichung

$$P(y) = y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$y = ax + bx^2$$

ist, ist durch jeden der unendlich vielen Differentialausdrücke erster Ordnung

$$Q(y) = y' - \frac{1 + 2cx}{x + cx^2} y$$

theilbar, wo c eine willkürliche Constante bezeichnet; für jedes c giebt es ein R, sodass $P = RQ$ ist.

Im Folgenden werde ich nun den Nachweis des Satzes führen:

---

*) Vergl.. *Heffter*, „Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen", Leipzig 1894, S. 193 und *Schlesinger*, „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen", Bd. 1, Leipzig 1895, S. 85.

**) Wenn P durch S theilbar ist, d. h. wenn $P = 0$ durch alle Lösungen von $S = 0$ befriedigt wird, so wird ja $P = 0$ auch durch alle Lösungen von $f(x).S = 0$ befriedigt, da diese keine anderen sind als die von $S = 0$; P ist also durch $f(x).S$ theilbar.

Bei allen Zerlegungen eines Differentialausdruckes in irreducible Factoren ist die Anzahl der Factoren dieselbe, und es sind die Ordnungen der Factoren, abgesehen von der Reihenfolge, dieselben.

Beweis: Der Satz ist evident für $n = 1$, da alsdann P stets irreducibel ist. Er gilt auch für $n = 2$; denn entweder P ist irreducibel, dann giebt es gar keine Zerlegungen ausser der identischen $P = P$; oder P ist reducibel, dann giebt es nur Zerlegungen in zwei Factoren erster Ordnung. Ich nehme den Satz für alle Ordnungen bis $n-1$ als bewiesen an und beweise ihn für n.

Es mögen

$$P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \ldots Q_2 Q_1, \tag{1.}$$

$$P = K_\mu K_{\mu-1} \ldots K_2 K_1 \tag{2.}$$

zwei verschiedene Zerlegungen von P in irreducible Factoren sein; dann ist erstens zu zeigen, dass $\lambda = \mu$ ist, und zweitens, dass die Ordnungen der Q_ϱ in einer gewissen Reihenfolge beziehlich mit denen der K_σ übereinstimmen.

Ich vergleiche die beiden irreduciblen Differentialausdrücke Q_1 und K_1; es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem sie eine (von Null verschiedene) Lösung gemeinsam haben oder nicht.

I. Wenn $Q_1 = 0$ und $K_1 = 0$ ein Integral gemeinsam haben, so sind nothwendig Q_1 und K_1 von gleicher Ordnung und stimmen abgesehen von einem nur von x abhängigen Factor überein:

$$K_1 = f(x) \, . \, Q_1 .$$

α) Wenn $f(x) = 1$, also $K_1 = Q_1$ ist, so folgt aus (1.) und (2.), dass

$$Q_\lambda Q_{\lambda-1} \ldots Q_2 = K_\mu K_{\mu-1} \ldots K_2$$

ist. Man hat hier einen Differentialausdruck von niedrigerer als der n-ten Ordnung, der auf zwei Arten in irreducible Factoren zerlegt ist; für einen solchen ist aber der Satz als bewiesen angenommen worden; daher ist $\lambda - 1 = \mu - 1$, d. h. $\lambda = \mu$, und die Ordnungen von $Q_\lambda, \ldots, Q_2$ stimmen beziehlich mit denen von $K_\mu, \ldots, K_2$ überein, womit die Behauptung auch für die beiden Zerlegungen (1.), (2.) von P bewiesen ist.

β) Ist $f(x)$ nicht gleich 1, so kann man aus

$$P = K_\mu \ldots K_3 K_2 K_1 = K_\mu \ldots K_3 K_2 (f Q_1) \tag{3.}$$

dadurch eine mit Q_1 endigende Zerlegung von P in irreducible Factoren herleiten, dass man in $K_2(fQ_1)$ die im Symbol K_2 enthaltenen Differentialoperationen ausführt und nach Ableitungen von Q_1 ordnet. In der entstehenden Gleichung

$$(4.)\qquad K_2(fQ_1) = RQ_1$$

ist R irreducibel. Denn es ist

$$K_2(fy) = R(y).$$

Wäre R reducibel, so gäbe es eine von 0 verschiedene Lösung y von $R(y) = 0$, welche einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $S(y) = 0$ genügt; $S(y)$ lässt sich aber in die Form $T(fy)$ bringen, so dass $K_2 = 0$ mit der Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $T = 0$ die Lösung $f(x) . y$ gemeinsam hätte, also gegen die Voraussetzung reducibel wäre. Aus (3.), (4.) folgt also für P die neue Zerlegung

$$(5.)\qquad P = K_\mu \dots K_3 R Q_1$$

in irreducible Factoren. (5.) hat dieselbe Factorenzahl wie (2.) mit beziehlich (sogar in derselben Reihenfolge) gleichen Ordnungen; in der That sind die $\mu - 2$ Factoren $K_\mu, \dots, K_3$ in (2.) und (5.) vorhanden und K_2, R, sowie K_1, Q_1, sind von beziehlich gleicher Ordnung. (5.) hat nun mit (1.) den letzten Factor Q_1 gemeinsam; der Fall (β) ist also auf den bereits erledigten Fall (α) zurückgeführt.

II. Wenn $Q_1 = 0$ und $K_1 = 0$ kein Integral gemeinsam haben, so giebt es*) eine abgesehen von einem willkürlichen, nur von x abhängigen Factor wohlbestimmte Differentialgleichung $U = 0$ mit Coefficienten im Bereiche, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen von Q_1 und K_1 ist und welche durch alle Lösungen von $Q_1 = 0$, sowie durch alle Lösungen von $K_1 = 0$ befriedigt wird. Das allgemeine Integral von $U = 0$ ist in der Form $y + z$ enthalten, wo y das allgemeine Integral von $Q_1 = 0$ und z das allgemeine Integral von $K_1 = 0$ bezeichnet. U ist einerseits durch Q_1, andererseits durch K_1 theilbar; es bestehen also zwei Gleichungen

$$U = AQ_1,$$
$$U = BK_1;$$

Q_1 und K_1 sind nach Voraussetzung irreducibel; ich behaupte, dass

---

*) Vergl. ***Brassinne***, „Analogie des équations différentielles linéaires à coefficients variables avec les équations algébriques", Note III in ***Sturm***, „Cours d'analyse", Bd. 2, und ***Heffter***, „Ueber gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse", dieses Journal, Bd. 116, 1896, S. 157.

auch A und B irreducibel sind. Wegen der Symmetrie genügt es, ersteres zu zeigen. Gesetzt, es gäbe eine Zerlegung

$$A = CD,$$

wo die Ordnungen von C und D grösser als 0 sind, so wäre

$$U = CDQ_1.$$

Jede Lösung von $Q_1 = 0$ befriedigt auch $DQ_1 = 0$, und jede Lösung von $DQ_1 = 0$ befriedigt auch $U = 0$, ist also von der Form $y+z$, wo $Q_1(y) = 0$, $K_1(z) = 0$. Da DQ_1 von höherer Ordnung ist als Q_1, hat also $DQ_1 = 0$ sicher eine Lösung der Form $y+z$, bei der z von 0 verschieden ist. Aus

$$DQ_1(y+z) = 0$$

folgt aber

$$DQ_1(y) + DQ_1(z) = 0,$$
$$DQ_1(z) = 0.$$

$DQ_1 = 0$ hat also mit der irreduciblen Differentialgleichung $K_1 = 0$ ein von 0 verschiedenes Integral z gemeinsam, wird daher durch jedes Integral z von $K_1 = 0$ befriedigt, also durch jedes $y+z$, d. h. durch jedes Integral von $U = 0$. DQ_1 kann also nicht von niedrigerer Ordnung sein als

$$U = AQ_1 = CDQ_1,$$

sodass die Annahme der Zerlegbarkeit von A zu einem Widerspruche führt. A und B sind also irreducibel.

Der vorgelegte Differentialausdruck P ist durch Q_1 und K_1, also durch U theilbar:

$$P = VU.$$

Es sei

$$V = L_\nu L_{\nu-1} \dots L_1$$

eine Zerlegung von V in irreducible Factoren. Dann erhält man ausser (1.) und (2.) noch folgende zwei Zerlegungen von P in irreducible Factoren:

$$P = L_\nu \dots L_1 A Q_1, \tag{6.}$$

$$P = L_\nu \dots L_1 B K_1. \tag{7.}$$

Aus (1.), (6.) folgt, da der letzte Factor übereinstimmt, nach (I. α), dass $\nu = \lambda - 2$ ist und dass die Ordnungen in (1.), (6.) abgesehen von der Reihenfolge beziehlich übereinstimmen. Das Entsprechende folgt für (2.), (7.); es ist $\nu = \mu - 2$, folglich $\lambda = \mu$. Der Vergleich von (6.), (7.) zeigt nun, da die Ordnungen von A und K_1, sowie die von Q_1 und B beziehlich übereinstimmen, dass (6.) und (7.) gleich viele Factoren von beziehlich gleicher Ordnung haben. Also ist, wenn man von (1.) über (6.) und (7.) zu (2.) übergeht, die behauptete Invarianz für (1.) und (2.), d. h. für zwei beliebige Zerlegungen von P in irreducible Factoren bewiesen.

Der *Jordan*sche*) Satz über die Compositionsreihe einer endlichen Gruppe, an dessen Herleitung diese Beweismethode erinnert, hat zwar schon durch die Untersuchungen von *Lie***) und *Vessiot****) ein Analogon in der Theorie der linearen Differentialgleichungen gefunden, jedoch erst in einem viel höheren Theile, bei der Lehre von der Zerlegbarkeit der Transformationsgruppe der Differentialgleichung, während der im Vorstehenden bewiesene Satz in einem der elementarsten Kapitel seine Stelle findet.

---

*) „Traité des substitutions et des équations algébriques", Paris 1870, S. 42 und 663.

**) „Zur Theorie der Berührungstransformationen", Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 14, 1888, S. 562 und „Theorie der Transformationsgruppen", Bd. 3, Leipzig 1893, S. 704.

***) „Sur l'intégration des équations différentielles linéaires", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 3me série, t. 9, 1892, S. 203—206; s. auch *Schlesinger*, „Handbuch etc.", Bd. 2, Theil 1, Leipzig 1897, S. 83.