MINISTÈRE DES UNIVERSITÉS
COMITÉ DES TRAVAUX HISTORIQUES ET SCIENTIFIQUES

BULLETIN
DE LA
SECTION DES SCIENCES

TOME III

MATHÉMATIQUES

PARIS
BIBLIOTHÈQUE NATIONALE
1981

INTERPOLATION DE FRACTIONS CONTINUES

ET IRRATIONALITE DE CERTAINES CONSTANTES

par Roger APERY

Bulletin de la section des sciences du C.T.H.S., n° 3, p. 37-53.

CHAINE DE FRACTIONS

On appelle <u>fraction</u> un couple (p,q) de réels noté $\frac{p}{q}$; p et q s'appellent respectivement numérateur et dénominateur. La fraction $\frac{0}{0}$ est dite impropre, toute autre fraction est dite propre. A toute fraction propre est associé son <u>rapport</u> qui est un réel généralisé (si $q \neq 0$, le rapport est un réel fini ; si $q = 0$ le rapport est ∞).

L'égalité des fractions $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ signifie $p = p'$ $q = q'$.

L'égalité des rapports $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ signifie : $pq' - qp' = 0$.

On appelle <u>combinaison</u> des fractions $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ pour le couple (a,b) de réels finis la fraction : $\frac{ap + bp'}{aq + bq'}$.

On pose : $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right) * (a,b) = \frac{ap + bp'}{aq + bq'}$

Si les rapports $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ sont distincts, il existe exactement un couple (a,b) vérifiant l'égalité entre fractions :

$$\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right) * (a,b) = \frac{p''}{q''}$$

Si la fraction $\frac{p''}{q''}$ est propre, le couple (a,b) est non trivial, c'est à dire différent de $(0,0)$.

On dit que le couple (a,b) définit la combinaison $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}\right)$

Etant donnés deux fractions propres $\frac{p_o}{q_o}$, $\frac{p_1}{q_1}$ et une suite (finie ou infinie) de couples (a_1,b_1), $(a_2,b_2)\ldots(a_n,b_n)\ldots$

On appelle <u>chaîne de fractions</u> de fractions initiales $\frac{p_o}{q_o}$, $\frac{p_1}{q_1}$ et d'enchainement $\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} + \ldots$ une suite de fractions propres

$$\frac{p_o}{q_o}, \frac{p_1}{q_1} \ldots \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \ldots$$

définie par $\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right) * (a_n, b_n) = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$

Si on note

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \ldots \frac{u_n}{v_n}, \ldots$$

le développement en chaîne

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} + \ldots$$

on a l'égalité entre fractions

$$\frac{p_n}{q_n} = \left(\frac{p_o}{q_o}, \frac{p_1}{q_1}\right) * (u_n, v_n)$$

Si les rapports $\frac{u_n}{v_n}$ associés à un enchainement infini, convergent vers le réel (généralisé) ω, nous posons

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} + \ldots = \omega$$

Dans ce cas, quand n devient infini, $\frac{p_n}{q_n}$ a pour limite

le rapport $\frac{\omega p_o + p_1}{\omega q_o + q_1}$ si ω est fini

le rapport $\frac{p_o}{q_o}$ si ω est infini.

Si a_n et b_n sont > 0, $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ est entre $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et $\dfrac{p_n}{q_n}$, si la suite est convergente, on a une évaluation de l'erreur ; c'est le cas des sommes partielles, de séries alternées dont la valeur absolue du terme général décroit.

Si $a_n < 0$ et $b_n < 0$, les rapports s'écartent, le phénomène ne peut se produire que pour des suites divergentes.

Si $a_n < 0$ et $b_n > 0$, la suite des rapports $\dfrac{p_n}{q_n}$ est monotone ; c'est le cas des sommes partielles de séries convergentes à termes positifs, le développement ne permet pas une évaluation de l'erreur.

Soit λ_n une suite de réels > 0 (ou ${}_0 = 1$) la substitution à chaque chainon $\dfrac{a_n\,|}{|\,b_n}$ du chainon $\dfrac{a_n \lambda_n \lambda_{n-1}\,|}{|\,b_n \lambda_n}$ sans changer les fractions initiales substitue à la suite de fractions du développement en chaîne une suite de fractions ayant même rapport, le numérateur et le dénominateur de la fraction $\dfrac{p_n}{q_n}$ est multiplié par le produit $\lambda_0 \cdot \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$.

CRITERE D'IRRATIONALITE

Théorème :

Un réel θ est irrationnel si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe des entiers p, q tels que :

$$0 < \left|\frac{p}{q} - \theta\right| < \frac{\varepsilon}{q}$$

En effet, si $\theta = \dfrac{p_o}{q_o}$

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_o}{q_o}\right| > \frac{1}{q_o q}$$

ce qui pour $\varepsilon < \dfrac{1}{q_o}$ est contraire au critère.

On appelle mesure d'irrationalité d'un nombre irrationnel, tout réel $\rho > 0$, tel que :

$$\left|\frac{p}{q} - \theta\right| < \frac{1}{q^{\rho+\varepsilon}}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions en entiers p, q.

Nous montrons l'irrationalité d'un réel donné θ par la méthode suivante :

1) Substituer à la définition usuelle (suite, série, produit infini) un développement en chaîne

$$\frac{p_o}{q_o}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{P_1|}{|Q_1} + \ldots \frac{P_n|}{|Q_n} + \ldots$$

où P_n et Q_n sont des polynômes en n.

2) Déterminer un polynôme $\mathcal{S}_n$ tel que :

$$\frac{P_n|}{|Q_n} + \ldots = \mathcal{S}_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

$$\varphi_n(\varphi_{n+1} + Q_n) = P_n + R_n$$

où φ_n est déterminé pour que le degré du polynôme R_n soit le plus petit possible.

3) Remplaçons $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ par

$$\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}} = \frac{p_{n-1}\ \varphi_n + p_n}{q_{n-1}\ \varphi_n + q_n}$$

Examiner le développement en chaîne associé à la suite $\dfrac{p'_n}{q'_n}$.

Le procédé est efficace si on obtient $+\dfrac{P'_n|}{|Q'_n} + \ldots$ où P'_n et Q'_n ont respectivement même degré que P_n et Q_n.

Il faut que $P'_n - \dfrac{P_n\ R_{n+1}}{R_n}$ soit un polynôme.

Le cas le plus simple est celui où R_n est une constante.

4) Réitérer indéfiniment le procédé, ce qui donne une suite double de rationnels.

5) Utiliser le procédé diagonal.

Mettre en évidence certains facteurs des rationnels obtenus pour avoir enfin une suite permettant d'appliquer le critère d'irrationalité.

CHAINES ASSOCIEES AU LOGARITHME

A partir de la série usuelle $\log(1+t) = \frac{t}{1} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \ldots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ on considère les fractions $\frac{p_n}{q_n}$ ayant pour rapports les sommes partielles et pour dénominateur $n!$

$$\frac{0}{1}, \frac{t}{1}, \frac{2t-t^2}{2}, \frac{6t-3t^2+2t^3}{6}, \frac{24t-12t^2+8t^3-6t^4}{24},$$

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{\varepsilon t^n}{n} = \frac{np_{n-1} - \varepsilon t^n q_{n-1}}{nq_{n-1}}$$

où

$$\varepsilon = (-1)^{n-1}$$

$$q_n = nq_{n-1}$$

$$p_n = np_{n-1} - \varepsilon t^n q_{n-1}$$

$$q_{n+1} = n(n+1)q_{n-1}$$

$$p_{n+1} = (n+1)(np_{n-1} - \varepsilon t^n q_{n-1}) + \varepsilon t^{n+1} q_n$$

Le couple définissant la combinaison

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n+1}}, \frac{p_n}{q_n} \longrightarrow \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

$$\begin{cases} P_n = n^2 t \\ Q_n = (n+1) - nt \end{cases}$$

La chaîne de fractions considérée s'écrit donc

$$\frac{0}{1}, \frac{t}{1}, \frac{t|}{|2-t} + \frac{4t|}{|3-2t} + \frac{9t|}{|4-3t} + \ldots + \frac{n^2 t|}{|(n+1) - nt}$$

On interpole en posant

$$\frac{n^2 t|}{|n+1-nt} + \dots = \lambda n + \mu + O(\frac{1}{n})$$

$$\lambda(\lambda+1-t) = t$$

Si $\lambda = -1$, on a $\varphi_n = -n$ et toutes les "interpolées" sont infinies.

Nous posons $\lambda = -t$

$$\varphi_n = (n-1)t$$

$$\varphi_{n+1} + Q_n = n+1$$

$$R_n = -t$$

Les fractions interpolées sont

$$\frac{t}{1}, \frac{2t}{2+t}, \frac{6t+t^2}{6+4t}, \frac{24t+6t^2-t^3}{24+18t}$$

Les cœfficients du développement en chaîne interpolé sont

$$\begin{cases} P'_n = P_n = n^2 t \\ Q'_n = Q_{n+1} + \varphi_{n+2} - \varphi_n = (n+2) - (n-1)t \end{cases}$$

Supposons pour h quelconque,

$$P_n = n^2 t$$

$$Q_n = (n+1) - nt + h(1+t)$$

On en déduit

$$\varphi_n = (n-h-1)t$$

$$\varphi_{n+1} + Q_n = n+h+1$$

$$R_n = -(h+1)^2 t$$

$$P'_n = n^2 t$$

$$Q'_n = Q_{n+1} + \varphi_{n+2} - \varphi_n = (n+1) - nt + (h+1)(1+t)$$

On passe de la ligne h à la ligne $h+1$ en changeant h en $h+1$. L'antisymétrie de φ_n entre les variables n et $h+1$ entraine la symétrie du tableau des fractions d'approximation $\frac{u_{h,n}}{v_{h,n}}$ de $\log(1+t)$.

Posons

$$v'_{h,n} = \frac{u'_{h,n}}{n!h!}$$

$$v_{h,n} = \frac{u_{h,n}}{(n!)(h!)}$$

Les relations de récurrence entre $u_{h,n-1}$, $u_{h,n}$, $u_{h,n+1}$ déduites du développement en chaîne entraînent (en supprimant l'indice h pour simplifier la notation)

$$(n+1)v_{n+1} - ((n+1) - nt + h(1+t))v_n - ntv_{n-1} = 0$$

En posant

$$f_h(x) = \sum_{n\geq 0} v_{h,n}\, x^n$$

on voit que $f_h(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}\,[1-(1-t)x-x^2] - [1+h(1+t)+x]y = 0$$

d'où $$y = (1-x)^{-1-h}\,(1+tx)^h$$

Ce qui montre que les $v_{h,n}$ sont des polynômes en t à coefficients entiers.

Les $v'_{h,n}$ appartiennent au module $\mathbb{Z}(t, 1, \frac{1}{2}, \dots \frac{1}{n})$.

La diagonale du tableau des fractions $\frac{v'_{h,n}}{v_{h,n}}$ a des numérateurs et des dénominateurs qui vérifient

$$(n+1)w_{n+1} - (2n+1)(2+t)w_n + nt^2 w_{n-1} = 0.$$

En fait, l'équation différentielle associée est du premier ordre donc s'intègre immédiatement, $w_n = v_{n,n}$ est un polynôme de degré n en t égal à

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k}\binom{n}{k} t^{n-k}$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} \to 2 + t + \sqrt{4+3t+t^2} > e$$

On remarque que la suite $\frac{w'_n}{w_n}$ converge pour des valeurs de t pour laquelle la série initiale diverge.

On démontre donc l'irrationalité de logarithme des entiers > 1 et, avec de légères modifications du raisonnement, l'irrationalité du logarithme des rationnels.

DÉVELOPPEMENT DE $\zeta 2$

On utilise le développement en chaîne de $\zeta 2$ associé aux sommes partielles $\dfrac{p_n}{q_n}$ de dénominateur $(n!)^2$ de la série

$$\zeta 2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{1}{n^2}$$

$$\begin{cases} q_n = n^2 q_{n-1} \\ p_n = n^2 p_{n-1} + q_{n-1} \end{cases}$$

$$q_{n+1} = n^2 (n+1)^2 \; q_{n-1}$$

$$p_{n+1} = (n+1)^2 p_n + q_n = n^2 (n+1)^2 p_{n-1} + q_{n-1}[(n+1)^2 + n^2]$$

Les cœfficients P_n, Q_n de la combinaison $\left(\dfrac{p_n}{q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n}\right) \longrightarrow \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ sont donnés par

$$\begin{cases} P_n = -n^4 \\ Q_n = 2n^2 + 2n + 1 \end{cases}$$

Le développement en chaîne de $\zeta 2$ s'écrit

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1|}{|5} + \frac{-16|}{|13} + \frac{-81|}{|25} + \ldots + \frac{-n^4|}{|2n^2+2n+1} + \ldots$$

Il existe deux polynomes φ_n tels que, pour n infiniment grand,

$$\varphi_n (Q_n + \varphi_{n+1}) = -n^4 + O(n)$$

Nous éliminons la solution $(-n^2)$ qui donnerait une suite de termes tous infinis.

Nous posons

$$\varphi_n = -n^2 + n - \frac{1}{2}$$

d'où
$$\varphi_{n+1} + Q_n = n^2 + n + \frac{1}{2}$$

$$R_n = -\frac{1}{4}$$

Pour éviter les fractions de numérateur ou dénominateur non entier, nous remplaçons $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ par

$$\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}} = \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right) = (-2n^2 + 2n - 1, 2)$$

Les cœfficients du développement en chaîne "interpolé" sont

$$P'_n = P_n = -n^4$$

$$Q'_n = Q_{n+1} + \varphi_{n+2} - \varphi_n = 2n^2 + 2n + 3$$

En fait, la nouvelle suite (ligne 1) n'est pas proprement une interpolée de la suite initiale (ligne 0). La ligne 0 est croissante, la ligne 1 est décroissante, tout terme de la ligne 1 est supérieur à tout terme de la ligne 0.

Pour démontrer par récurrence la loi de développement en chaîne de la ligne h, nous supposons

$$\begin{cases} P_n = -n^4 \\ Q_n = 2n^2 + 2n + (h^2+h+1) \end{cases}$$

Il existe deux polynomes tels que

$$\varphi_n(\varphi_{n+1} + Q_n) = -n^4 + O(n)$$

Nous éliminons comme pour $h = 0$ le polynome $-n^2 - hn - \frac{h}{2}$ et nous posons $\varphi_n = -n^2 + (h+1)n - \frac{(h+1)^2}{2}$

d'où
$$\mathcal{P}_{n+1} + Q_n = n^2 + (h+1)n + \frac{(h+1)^2}{2}$$
$$R_n = -\frac{(h+1)^4}{4}$$

On en déduit

$$\begin{cases} P'_n = P_n = -n^4 \\ Q'_n = Q_n + \mathcal{P}_{n+2} - \mathcal{P}_n = 2n^2 + 2n + h^2 + 3h + 3 \end{cases}$$

P'_n et Q'_n se déduisent de P_n, Q_n en remplaçant h par $h+1$.

Pour la régularité des calculs, indépendamment de la parité de h, nous utilisons la combinaison $(2\mathcal{P}_n, 2)$ même quand $\mathcal{P}_n$ est entier.

En notant $\frac{u'_{h,n}}{u_{h,n}}$ la fraction de rang n de la ligne h, où h et n décrivent $\mathbb{N}$, nous posons

$$\left| \begin{aligned} v'_{h,n} &= \frac{u'_{h,n}}{(h!)^2(n!)^2} \\ v_{h,n} &= \frac{u_{h,n}}{(h!)^2(n!)^2} \end{aligned} \right.$$

Pour montrer que les $v_{h,n}$ sont entiers, nous considérons la fonction

$$f_h(x) = \sum_{n\geq 0} v_{h,n}\, x^n$$

Les relations de récurrence entre les $u_{h,n}$ se transforment en relation de récurrence entre $v_{h,n-1}$, $v_{h,n}$, $v_{h,n+1}$. En cessant d'indicer l'indice h

$$(n+1)^2 v_{n+1} - (2n^2+2n+h^2+h+1)v_n + n^2 v_{n-1} = 0$$

Ces relations expriment que $f_h(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$(x-2x^2+x^3)y'' + (1-4x+3x^2)y' + (x-(h^2+h+1))y$$

Cette équation admet les singularités régulières ∞, 0, 1, les polynômes caractéristiques correspondantes sont $(r+1)^2$, r^2, $(r^2+r)-(h^2+h)$.

On voit immédiatement que $f_n(x)$ est la fraction rationnelle $(1-x)^{-h-1} \sum\limits_{0\leq m\leq h} \binom{h}{m}^2 x^m$, ce qui montre immédiatement que les cœfficients sont entiers.

$v'_{h,n}$ appartient au module $\mathbb{Z}[1, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n^2}]$.

Les numérateurs et les dénominateurs de la suite diagonale des fractions $\frac{w'_n}{w_n}$ vérifie la relation de récurrence

$$(n+1)^2\, w_{n+1} - (11n^2+11n+3)w_n - n^2 w_{n-1} = 0$$

Comme $\dfrac{w_n}{w_{n-1}} \to \dfrac{11+5\sqrt{5}}{2} > e^2$ et que le p.p.c.m. de 1, 2...n est de l'ordre de $e^{n+\varepsilon}$, on en déduit l'irrationalité de $\zeta 2$.

DEVELOPPEMENT DE $\zeta 3$

On utilise le développement en chaîne de $\zeta 3$ associé aux sommes partielles $\frac{p_n}{q_n}$ de dénominateur $(n!)^3$ de la série

$$\zeta 3 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{1}{n^3}$$

$$\begin{cases} q_n = n^3\ q_{n-1} \\ p_n = n^3\ p_{n-1} + q_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{n+1} = n^3(n+1)^3\ q_{n-1} \\ p_{n+1} = (n+1)^3\ p_n + q_n \\ \qquad = n^3(n+1)^3\ p_{n-1} + q_{n-1}\ [(n+1)^3 + n^3] \end{cases}$$

Les cœfficients de la combinaison

$$\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right) \rightarrow \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

sont donnés par

$$\begin{cases} P_n = -n^6 \\ Q_n = 2n^3 + 3n^2 + 3n+1 \end{cases}$$

Le développement en chaîne de $\zeta 3$ s'écrit

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1|}{|9} + \frac{-64|}{|35} + \frac{-729|}{|91} + \ldots + \frac{-n^6|}{|2n^3+3n^2+3n+1} + \ldots$$

Nous cherchons un polynôme φ_n tel que

$$\varphi_n(Q_n + \varphi_{n+1}) = -n^6 + O(n^2)$$

Nous éliminons la solution $-n^3$ qui donne une suite d'éléments tous infinis, nous posons

$$\varphi_n = -n^3 + 2n^2 - 2n + 1$$

d'où
$$\varphi_{n+1} + Q_n = n^3 + 2n^2 + 2n+1$$

$$P'_n = - n^6$$

$$Q'_n = 2n^3 + 3n^2 + 11n+5$$

Comme dans le cas de l'approximation de $\zeta 2$ la nouvelle suite (ligne 1) est décroissante et n'est pas une véritable interpolée de la ligne 0.

Pour démontrer par récurrence la loi du développement en chaîne de la ligne h, nous supposons

$$\begin{cases} P_n = -n^6 \\ Q_n = 2n^3 + 3n^2 + (4h^2+4h+3)n + (2h^2+2h+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_n = -n^6 \\ Q_n = 2n^3 + 3n^2 + (4h^2+4h+3)n + (2h^2+2h+1) \end{cases}$$

Contrairement au cas où $h = 0$, il n'existe qu'un polynôme tel que

$$\varphi_n(\varphi_{n+1} + Q_n) = - n^6 + O(n^2)$$

$$\begin{cases} \varphi_n = - n^3 + 2(h+1)n^2 - 2(h+1)^2 n + (h+1)^3 \\ \varphi_{n+1} + Q_n = n^3 + 2(h+1)n^2 + 2(h+1)^2 n + (h+1)^3 \\ R_n = (h+1)^6 \end{cases}$$

Le "miracle mathématique" signalé par certains commentateurs, se manifeste en ce que, quel que soit l'entier h, le reste R_n, qu'on a seulement obligé à être de degré $\leqslant 2$ en n est en fait une constante.

On en déduit

$$\begin{cases} P'_n = - n^6 \\ Q'_n = Q_{n+1} + \varphi_{n+2} - \varphi_n = 2n^3 + 3n^2 + (4h^2+12h+11n) + 2h^2 + 6h+5 \end{cases}$$

Ces formules se déduisent de celles de P_n, Q_n par la substitution $h \to h+1$.

L'antisymétrie de $\mathcal{G}_n$ par rapport aux variables n et $(h+1)$ entraîne que, contrairement au tableau des fractions d'approximation de $\zeta 2$, le tableau des fractions d'approximation de $\zeta 3$ est symétrique.

Posons

$$v'_{h,n} = \frac{u'_{h,n}}{(h)!^3(n!)^3}$$

$$v_{h,n} = \frac{u_{h,n}}{(h!)^3 n!^3}$$

On montre que les $v_{h,n}$ sont entiers à l'aide de la fonction

$$f_h(x) = \sum_{n\geq 0} v_{h,n}\, x^n$$

Les relations de récurrence entre $v_{h,n-1}$, $v_{h,n}$, $v_{h,n+1}$ expriment que $f_h(x)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du troisième ordre qui est l'équation admettant pour solutions les carrés d'une équation différentielle du second ordre.

La fonction $f(x)$ est égale à la fraction rationnelle

$$(1-x)^{-2h-1} \left[\sum_{0\leq m\leq h} \binom{h}{m}^2 x^m\right]^2$$

$v'_{h,n}$ appartient au module $\frac{1}{2}\mathbf{Z}(1, \frac{1}{8} \ldots \frac{1}{n^3})$.

Numérateurs et dénominateurs de la suite diagonale vérifient la relation de récurrence

$$(n+1)^3\, w_{n+1} - (34n^3+51n^2+27n+5)w_n + n^3 w_{n-1} = 0$$

Comme $\dfrac{w_n}{w_{n-1}} \to 17+12\sqrt{2} > e^3$ on en déduit l'irrationalité de $\zeta 3$.