

Comptes rendus  
hebdomadaires des séances  
de l'Académie des sciences /  
publiés... par MM. les  
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:utilisationcommerciale@bnf.fr).

» On peut appliquer une méthode analogue aux équations homogènes du type

$$y^{m-n-1} \Phi_n(y, y') y'' = \Psi_m(y, y'),$$

$\Phi_n$  et  $\Psi_m$  désignant des fonctions homogènes de  $y$  et  $y'$  de degrés entiers positifs  $n$  et  $m$ , avec  $n < m - 1$ . »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations différentielles linéaires.*

Note de M. PAUL PAINLEVÉ, présentée par M. Darboux.

« Comme je l'ai montré dans une Communication précédente (*voir les Comptes rendus* du 27 juin), on peut ramener une équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre à la forme

$$(1) \quad y''' + by' + cy = 0,$$

et si l'intégrale d'une telle équation (où  $b$  et  $c$  sont rationnels) est algébrique et correspond à un des groupes finis ( $\alpha$ ) à deux variables, analogues aux groupes du dièdre, une intégrale  $y_1$  est nécessairement de la forme

$$y_1 = \sqrt[n]{g(x)},$$

où  $g(x)$  vérifie une relation  $f(g, x) = 0$ , du troisième degré en  $g$ . Il s'ensuit que le produit des trois valeurs linéairement distinctes de  $y_1, y_2, y_3$  est de la forme

$$y_1 y_2 y_3 = \sqrt[n]{\frac{M(x)}{N(x)}} = \frac{\prod (x - x_i)^{\mu_i}}{\prod (x - X_j)^{\nu_j}}.$$

» Les zéros  $X_j$  de  $N(x)$  sont nécessairement des points singuliers de l'équation (1); on connaît une limite supérieure de la somme  $\sum \nu_j$ , en même temps qu'une limite supérieure de la différence  $\sum \mu_i - \sum \nu_j$ ; on en conclut que le nombre des zéros  $x_i$  de  $M(x)$ , pour lesquels  $\mu_i$  est entier, ne peut dépasser une certaine valeur  $m$ , et, en ajoutant à  $m$  le nombre des points singuliers de (1), on obtient une limite supérieure  $M$  du nombre des points pour lesquels l'intégrale  $y_1$  est infinie ou nulle.

» Ceci posé, soit  $\frac{y'}{y} = \eta$ ;  $\eta$  satisfait à une équation différentielle du second ordre, dont une intégrale  $\eta_1$  doit vérifier une relation  $f_1(\eta_1, x) = 0$ , du troisième degré en  $\eta_1$ ; d'autre part, les pôles de  $\eta_1$  sont tous du pre-

mier ordre et leur nombre ne peut dépasser  $M$ . On déduit de là une limite du degré en  $x$  de  $f_1$ , et l'on peut reconnaître, par un nombre fini d'opérations, si l'équation en  $\eta$  admet effectivement une telle intégrale. Quand cette condition est satisfaite, on a

$$y_1 = Ce^{\int_{x_0}^x \eta_1 dx};$$

la relation  $f_1(\eta_1, x) = 0$  peut se décomposer parfois en relations du second et du premier degré en  $\eta$ . Mais, dans tous les cas, à chaque valeur de  $x$ , correspondent trois valeurs de  $y_1, y_2, y_3$ , linéairement distinctes, et l'intégrale générale de (1) peut s'écrire

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3.$$

» Nous arrivons bien ainsi à la conclusion énoncée : *On peut toujours vérifier si l'intégrale de l'équation (1) est algébrique, ou ramener l'équation à une quadrature.*

» La méthode employée s'applique à une équation linéaire  $A$  d'ordre quelconque; pour simplifier l'écriture, admettons qu'elle soit du quatrième ordre

A) 
$$y^{iv} + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

» Pour une telle équation, il existe trois invariants du cinquième ordre, où figurent les rapports  $t, u, v$  de quatre intégrales distinctes.

» Si l'on pose

$$D_1 = \begin{vmatrix} t^{iv} & 4t''' & 6t'' & 4t' \\ u^{iv} & 4u''' & 6u'' & 4u' \\ v^{iv} & 4v''' & 6v'' & 4v' \\ t^{iv} & 5t''' & 10t'' & 5t' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} t^{iv} & 4t''' & 6t'' & 4t' \\ u^{iv} & 4u''' & 6u'' & 4u' \\ v^{iv} & 4v''' & 6v'' & 4v' \\ t''' & 3t'' & 3t' & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} t^{iv} & 4t''' & 6t'' & 4t' \\ u^{iv} & 4u''' & 6u'' & 4u' \\ v^{iv} & 4v''' & 6v'' & 4v' \\ t'' & 2t' & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} t^{iv} & 4t''' & 6t'' & 4t' \\ u^{iv} & 4u''' & 6u'' & 4u' \\ v^{iv} & 4v''' & 6v'' & 4v' \\ t' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

et si l'on appelle  $D'_1, D'_2, \dots, D'_4, \dots$  les expressions obtenues en permutant  $t, u, v$  dans les précédentes, les trois invariants  $I_1, I_2, I_3$  sont donnés

par trois équations

$$D_1 + I_1 D_2 + I_2 D_3 + I_3 D_4 = 0,$$

$$D'_1 + I_1 D'_2 + I_2 D'_3 + I_3 D'_4 = 0,$$

$$D''_1 + I_1 D''_2 + I_2 D''_3 + I_3 D''_4 = 0.$$

En fonction des coefficients  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , ces invariants s'expriment de la manière suivante :

$$I_1 = \frac{a_3^2}{4} - \frac{2}{3} a_2 + a'_3,$$

$$I_2 = -\frac{3}{16} a_3^3 + \frac{3}{4} a_3 a_2 - \frac{3}{2} a_1 - \frac{3}{4} a_3 a'_3 + a'_2,$$

$$I_3 = \frac{3}{32} a_3^4 - \frac{1}{2} a_3 a_2 + a_3 a_1 + \frac{1}{3} a_2^2 - 4a_0 + \frac{1}{4} a_3^2 a'_3 - \frac{1}{2} a_3 a'_2 - \frac{1}{2} a'_3 a_2 + a'_1.$$

On trouve, comme pour le troisième ordre, que

$$\gamma = C \begin{vmatrix} t' & u' & v' \\ t'' & u'' & v'' \\ t''' & u''' & v''' \end{vmatrix}^{-\frac{1}{4}} \times e^{-\frac{1}{4} \int_{x_0}^x a dx}.$$

On peut toujours vérifier si l'intégrale de l'équation (A) correspond à un groupe donné. Si le groupe de l'équation doit être un des groupes analogues aux groupes du dièdre, une intégrale est de la forme  $\sqrt[n]{g(x)}$ , où  $g(x)$  est définie par une équation du quatrième degré en  $g$ , et l'équation se ramène à une quadrature. Il est à présumer que tous les groupes finis à trois variables, dont l'indice est indéterminé, rentrent dans les précédents.

» Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, que j'ai considérés dans une Note précédente (*Comptes rendus* du 31 mai), se ramènent aux équations différentielles. Mais on peut les étudier directement de la même manière. Soit un système

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a' \frac{\partial z}{\partial x} + b' \frac{\partial z}{\partial y} + c' z, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a'' \frac{\partial z}{\partial x} + b'' \frac{\partial z}{\partial y} + c'' z, \end{cases}$$

où les conditions d'intégrabilité sont remplies. On trouve, en conservant

la même notation, que

$$z = \left( \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3} \int (a+b') dx + (a'+b'') dy}.$$

Le raisonnement s'achève comme précédemment. J'ajoute que la recherche des cas où l'intégrale de (S) est algébrique rentre dans le problème plus général de la transformation de ces systèmes. Soit  $\Sigma$  un second système analogue à S, où figure la fonction  $\zeta(\xi, \eta)$  : on peut toujours passer de S à  $\Sigma$  (si les conditions d'intégrabilité sont également satisfaites pour  $\Sigma$ ) par une transformation

$$x = f(\xi, \eta), \quad y = \varphi(\xi, \eta), \quad z = \omega(\xi, \eta)\zeta;$$

$f$  et  $\varphi$  vérifient un système de quatre équations du second ordre qui se trouve formé dans la Note déjà citée, et  $\frac{\partial \omega}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial \eta}$  sont connus, quand  $f$  et  $\varphi$  sont déterminés. Ces remarques s'étendent sans peine aux systèmes analogues à S où figurent un plus grand nombre de variables. »

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur les explosions au sein des liquides.* Note de M. G. ROBIN, présentée par M. Darboux.

« La solution du problème d'Hydrodynamique qui fait l'objet de cette Note repose sur le principe suivant, qui contient toute la théorie des percussions :

» Étant donné un système actionné par des percussions connues P, si l'on désigne par  $p$  l'excès géométrique de la vitesse du point de masse  $m$  après la percussion sur sa vitesse avant la percussion, la quantité

$$\frac{1}{2} \Sigma m p^2 - \Sigma P p \cos(P, p)$$

doit être un minimum.

» Soit maintenant un liquide en repos, limité par des surfaces libres et des parois fixes. Dans ce liquide homogène de densité  $\mu$  plonge ou flotte un corps solide libre dont nous désignerons la surface immergée par S. Une sphère de rayon infiniment petit R éclate au sein du liquide avec une intensité de percussion  $\frac{\mu m}{R}$  uniforme en tous les points de sa surface  $\sigma$ .

» On demande : 1° la vitesse ( $u, v, w, p, q, r$ ) imprimée au corps solide par l'explosion; 2° la percussion  $\mu \Phi$  en tout point du liquide.