# 15.

# Ueber die Entwickelung von Wurzeln algebraischer Gleichungen in Potenzreihen.

(Von Herrn Prof. Dr. *Heine* zu Bonn.)

---

In einem Briefe an *Goldbach* macht *Euler* die Bemerkung, dass in der Entwickelung von $\sqrt[n]{(1-n^2a)}$ nach aufsteigenden Potenzen von $a$ alle Coefficienten *ganze* Zahlen werden*). *Eisenstein* hat diesen Satz verallgemeinert. Er giebt an**), dass in jeder Reihen-Entwickelung dieser Art, „wenn sie nur aus ei-„ner *algebraischen Function* stammt, mag dieselbe übrigens explicite oder im-„plicite gegeben sein," nur eine endliche Anzahl bestimmter Primzahlen und deren Potenzen als nothwendige Nenner vorkommen***). Es ist mir gelungen, diesen Satz zu verallgemeinern, indem ich die Methode genauer in's Auge fasste, durch die ich ihn früher auch für den Fall bewies, für welchen nach *Eisenstein's* (nicht richtiger) Angabe keine Reihen-Entwickelung existirt. In der gegenwärtigen Abhandlung findet man die Ableitung der neuen Resultate. Es ist bei denselben vermieden worden, auf die Entwickelungen der früheren zu verweisen.

Den von *Eisenstein* aufgestellten Satz werde ich in doppelter Beziehung verallgemeinern. Man nehme an, es sei eine algebraische Gleichung $f(y,x)=0$

---

*) S. Correspondance mathématique et physique, publiée par *Fuss*. St. Pétersbourg 1843 Tome I, Lettre CXLII, pag. 557. (Berlin d. 4. December 1751.) Unter $n$ muss eine ganze Zahl verstanden werden. Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus (§. 1) meiner Abhandlung im 45ten Bande dieses Journals, wenn man die dort in der Anmerkung gegebene, auch sonst bekannte Formel für den Exponenten der höchsten Potenz einer Primzahl $p$, die das Product $1.2.3\ldots\ldots m$ theilt, so schreibt:

$$\frac{m-(a_0+a_1+\ldots\ldots+a_r)}{p-1}.$$

Dieser Ausdruck ist offenbar kleiner als $m$.

**) Im Monatsbericht der Berliner Akademie vom Juli 1852, S. 441.

***) Den Beweis dieses Satzes findet man in meiner oben erwähnten Abhandlung (S. 291—296). Am Eingange derselben ist die betreffende Stelle des Monatsberichts abgedruckt.

gegeben, und stelle sich, ohne die Art der Gleichung dadurch weiter zu beschränken, $f(y, x)$ als ganze Function von $x$ und $y$ vor. Lässt sich irgend eine Wurzel dieser Gleichung in eine Reihe

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

entwickeln, deren Coefficienten $c$ rationale Zahlen in ihrer kleinsten Benennung bezeichnen, so behauptet *Eisenstein*, dass diese $c$, als Nenner, nur eine endliche Anzahl verschiedener Primzahlen enthalten. Ich werde zeigen, dass sämmtliche Nenner sich wegheben müssen, wenn man für $x$ ein gewisses ganzes Vielfache von $x$ setzt, und die Reihe, in der ja auch $c_0$ gebrochen sein kann, mit einer gewissen ganzen Zahl multiplicirt. Während es also nach dem von *Eisenstein* aufgestellten Satze noch möglich wäre, dass die Reihe

$$y = 1 + \frac{x}{3^1} + \frac{x^2}{3^4} + \frac{x^3}{3^9} + \frac{x^4}{3^{16}} + \dots,$$

in der ja *nur eine* Primzahl, nämlich 3, im Nenner vorkommt, die Wurzel einer algebraischen Gleichung sei, so könnte Dies nach der Verallgemeinerung des Satzes nicht mehr der Fall sein; welche ganze Zahl auch $k$ sein mag; es könnten sich nie alle Nenner wegheben, wenn man in die Reihe $kx$ statt $x$ setzt.

Wir erweitern den Satz noch in einer andern Richtung. Wenn *Eisenstein* es auch nicht ausdrücklich bemerkt, so hat er doch unter einer algebraischen Gleichung eine solche verstanden, deren Zahlcoefficienten *rational* sind. Es geht Dies daraus hervor, dass er sagt, die Primzahlen, welche als Nenner auftreten können, seien Divisoren von der *Determinante* der Function $f(y, 0)$. Die Determinante wäre aber im Allgemeinen eine irrationale Zahl, wenn nicht die Zahlcoefficienten von $f(y, x)$ rational sind. Der oben angegebene Satz gilt aber auch noch, wenn diese Coefficienten irrational sind, d. h. Irrationale von der allgemeinsten Art, nicht bloss algebraische Irrationale. Ich werde nämlich in (§. 1) folgenden Satz beweisen:

Ist

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

die Wurzel einer algebraischen Gleichung $f(y, x) = 0$ mit *irrationalen* Zahlcoefficienten, so genügt sie auch, vorausgesetzt dass die $c$ *rational* sind, einer algebraischen Gleichung $\psi(y, x) = 0$ mit *rationalen* Coefficienten.

## §. 1.

Die Function $f(y, x)$ ist ein Aggregat von Gliedern von der Form

$$g x^m y^p ,$$

wenn $m$ und $p$ *ganze positive*, $g$ *rationale* oder *irrationale* Zahlen bezeichnen. Es seien $r$ verschiedene derselben, nämlich $g_1, g_2, \ldots g_r$ irrational, die übrigen rational, oder, gleich einer der $r$, irrationalen Grössen $g$. Dann hat offenbar $f(y, x)$ die Form

$$\psi_0(y, x) + g_1\psi_1(y, x) + g_2\psi_2(y, x) + \ldots\ldots + g_r\psi_r(y, x) ;$$

wo die $\psi$ ganze rationale Functionen von $y$ und $x$ *mit rationalen Coefficienten* sind.

Sollte zwischen den irrationalen Zahlen $g$ und irgend welchen rationalen $\alpha$ eine Gleichung

$$\alpha_0 + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots\ldots + \alpha_r g_r = 0$$

bestehen (natürlich ohne dass *alle* $\alpha$ Null sind), so wird sich eine der Grössen $g$ z. B. $g_1$, eliminiren lassen, und daher $f(y, x)$ auch die Form

$$g_2\vartheta_2(y, x) + g_3\vartheta_3(y, x) + \ldots\ldots + g_r\vartheta_r(y, x)$$

haben, in welcher die $\vartheta$ Functionen wie die $\psi$ bedeuten; d. h. *ganze* Functionen mit *rationalen* Coefficienten. Hier kommen nur $r-1$ Irrationale vor. Besteht zwischen diesen und den rationalen Zahlen $\beta$ wiederum eine Gleichung

$$\beta_0 + \beta_2 g_2 + \ldots\ldots + \beta_r g_r = 0 ,$$

so fahre man in der Reduction fort, bis entweder keine irrationalen $g$ übrig bleiben, oder doch nur solche, zwischen denen keine lineare Gleichung von der obigen Art Statt findet. Es lässt sich daher $f(y, x)$ in eine Summe von der Form

$$\psi_0(y, x) + g_1\psi_1(y, x) + g_2\psi_2(y, x) + \ldots\ldots + g_r\psi_r(y, x) = f(y, x)$$

zerlegen, in welcher die $\psi$ ganze Functionen von $y$ und $x$ mit rationalen Coefficienten bedeuten, und die $g$ irrationale Grössen, zwischen welchen keine Gleichung

$$\alpha_0 + \alpha_1 g_1 + \ldots\ldots + \alpha_r g_r = 0$$

mit rationalen $\alpha$ besteht.

Ist nun die Reihe

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

in welcher die $c$ rational sind, eine Wurzel der Gleichung $f(y, x) = 0$, so muss, wie wir zeigen werden, derselbe Werth eine Wurzel der Gleichungen

$$\psi_0(y, x) = 0 \quad ; \quad \psi_1(y, x) = 0 \quad ; \quad \dots\dots \psi_r(y, x) = 0,$$

also gewiss einer Gleichung mit *rationalen* Coefficienten sein.

Man substituire für $y$ seinen Werth in $f(y, x)$, und dazu in $\psi_0, \psi_1, \dots \psi_r$, und ordne dann nach Potenzen von $x$. Es möge sich nach dieser Substitution

$$\begin{aligned}
\psi_0(y, x) &= \alpha_0 + \beta_0 x + \gamma_0 x^2 + \dots\dots \\
\psi_1(y, x) &= \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \dots\dots \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\
\psi_r(y, x) &= \alpha_r + \beta_r x + \gamma_r x^2 + \dots\dots
\end{aligned}$$

ergeben, wo die $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ offenbar rationale Zahlen vorstellen. (Die Coefficienten $c$ in der Entwickelung von $y$ nach Potenzen von $x$, also auch *die* in den Entwickelungen von jeder ganzen Potenz von $y$, sind nämlich rational; eben so die Zahlcoefficienten in allen $\psi$.) Es muss daher

$$\begin{aligned}
f(y, x) = & (\alpha_0 + g_1 \alpha_1 + g_2 \alpha_2 + \dots\dots + g_r \alpha_r) \\
& + (\beta_0 + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots\dots + \beta_r g_r) x \\
& + (\gamma_0 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \dots\dots + \gamma_r g_r) x^2 \\
& + \dots\dots
\end{aligned}$$

für alle Werthe von $x$ verschwinden, d. h. man hat dann:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_r g_r &= 0, \\
\beta_0 + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots + \beta_r g_r &= 0, \\
\gamma_0 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \dots + \gamma_r g_r &= 0;
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass alle $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ verschwinden, d. h. dass auch $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ durch die Substitution des Werths

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

für $y$ sich in Null verwandeln. Es ist also

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

eine Wurzel aller Gleichungen

$$\psi_0 = 0 \quad ; \quad \psi_1 = 0 \; ; \; \dots\dots \; \psi_r = 0 \, .$$

*Anm.* Bedeuten $c_0, c_1, \dots$ nicht rationale *Zahlen*, sondern nur rationale *Functionen* von gewissen irrationalen Grössen $i_0, i_1, \dots$, und ist

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

die Wurzel einer algebraischen Gleichung, so ist sie auch die Wurzel einer solchen algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von $i_0, i_1, \dots$ sind. Unter rationalen Functionen sind hier natürlich solche zu verstehen, deren Zahlcoefficienten rational sind.

## §. 2.

Wir gehen nun dazu über, die andere in der Einleitung angegebene Verallgemeinerung des *Eisenstein*schen Satzes zu beweisen. Zufolge (§. 1) kann man sich vorstellen, dass in der Gleichung $f(y, x) = 0$ selbst, welcher die Wurzel

$$y = c_0 = c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

genügt, nur rationale, oder sogar ganze Zahlcoefficienten vorkommen. Jeder Theil der Reihe für $y$, wie

$$c_m + c_{m+1} x + c_{m+2} x^2 + \dots,$$

wird dann ebenfalls die Wurzel einer Gleichung sein, die, $f = 0$, ganzzahlige Coefficienten hat, die man auch leicht aus $f = 0$ bilden kann, und es wird hinreichen, wenn man den Satz für einen *solchen Theil* der Reihe beweiset. In der That: kann man in diesem alle Nenner wegschaffen, indem man ihn mit einer ganzen Zahl multiplicirt und für $x$ ein ganzes Vielfache von $x$ setzt, so wird das Gleiche auch mit der ganzen Reihe $y$ geschehen können.

Ordnet man $f(y, x)$ nach Potenzen von $y$, so hat diese Function die Form

$$Ay^n + By^{n-1} + \dots\dots + Iy^2 + Ky + L \, ,$$

wo $A, B, \dots$ ganze Functionen von $x$ bezeichnen. Es sei

$$
\begin{aligned}
A &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots \\
B &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\cdots \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
I &= i_0 + i_1 x + i_2 x^2 + \cdots\cdots \\
K &= k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\cdots \\
L &= l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Sämmtliche Zahlen $a$, $b$, $c$, .... sind *ganz*; einige von ihnen können auch *Null* sein.

Aus der Gleichung $f = 0$ mag man die gleichen Wurzeln weggeschafft haben, so dass jede nur einmal vorkommt, also nicht zwei Wurzeln der Gleichung $f = 0$ dieselbe Reihen-Entwickelung in ihrer ganzen Ausdehnung geben. Setzt man dann

$$y = c_0 + xy_1 \quad , \quad y_1 = c_1 + xy_2 \ , \ \ldots\ldots$$

so wird man leicht die Gleichungen für $y_1$, $y_2$, .... bilden können, die sämmtlich, wie die ursprüngliche, vom $n$ten Grade sind und ganze Coefficienten haben, so dass z. B. $y_m$ eine Wurzel der Gleichung

$$A_m y_m^n + B_m y_m^{n-1} + \ldots + I_m y_m^2 + K_m y_m + L_m = 0$$

ist, in welcher $A_m$, $B_m$, .... ganze Functionen von $x$ mit ganzzahligen Coefficienten sind, die ich mir durch Division von jedem Factor, der allen gemein ist, befreit vorstelle. Es können daher $A_m$, $B_m$, .... $L_m$ für keinen Werth von $x$ *zugleich* verschwinden. Setzt man in jeder dieser abgeleiteten Gleichungen $x = 0$, so wird, von einem gewissen $m$ an, jede Gleichung *nur einen* Werth von $y_m$ für dieses besondere $x$ geben, weil nicht zwei Wurzeln der Gleichung $f(y, x) = 0$ in ihrer ganzen Entwickelung übereinstimmen. Solche Gleichungen wollen wir *reducirte* nennen. In einer reducirten Gleichung verschwinden daher $A_m$, $B_m$, ... $I_m$ für $x = 0$; $K_m$ kann nicht für $x = 0$ verschwinden, weil sonst auch $L_m$ gleich Null sein müsste, also alle Coefficienten verschwinden würden; was nicht möglich ist. (S. oben.) $L_m$ kann offenbar Null werden.

Genügt also $y$ der Gleichung $f(y, x) = 0$, so ist ein Theil der Reihen-Entwickelung von $y$, nämlich

$$y_m = c_m + c_{m+1} x + c_{m+2} x^2 + \ldots ,$$

eine Wurzel einer reducirten Gleichung.

Es reicht daher hin, den Satz für eine Reihe

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots.$$

zu beweisen, welche eine Wurzel der reducirten Gleichung

$$f(y, x) = Ay^n + By^{n-1} + \dots + Iy^2 + Ky + L$$

ist. Die Coefficienten in dieser Gleichung haben, da sie eine reducirte ist, die Form:

$$\begin{array}{rl} A = & \quad a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots \\ B = & \quad b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots, \\ \vdots & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ I = & \quad i_1 x + i_2 x^2 + \dots\dots \\ K = & k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots\dots \\ L = & l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \dots\dots \end{array}$$

Es sind hier $a$, $b$, .... ganze Zahlen, die auch zum Theil Null sein können; $k_0$, oder wie wir zur Abkürzung schreiben werden, $k$, ist bestimmt nicht Null.

Es wird ferner nur der Fall zu betrachten sein, wo das von $x$ freie Glied in $y$ *ganz* ist. Hätte nämlich $c_0$ den Nenner $g$, so würde

$$gy = gc_0 + gc_1 x + gc_2 x^2 + \dots.,$$

wo $gc_0$ eine ganze Zahl ist, gleichfalls einer reducirten Gleichung

$$A(gy)^n + Bg(gy)^{n-1} + \dots + Ig^{n-2}(gy)^2 + Kg^{n-1}(gy) + Lg^n = 0$$

genügen. Kann man daher den Satz beweisen, dass die Wurzel einer reducirten Gleichung (zu der wir wieder die obige $f(y, x) = 0$ nehmen)

$$y = c_0 + c_2 x + c_2 x^2 + \dots.$$

in welcher $c_0$ *ganz* ist und alle $c$ rational sind, durch Vertauschung von $x$ mit einem *ganzen Vielfachen* $kx$ von $x$, von allen Nennern befreit wird, so ist damit zugleich der in der Einleitung ausgesprochene Satz bewiesen.

## §. 3.

Man betrachte die Reihen-Entwickelung der Potenzen von $y$ genauer, als es oben in (§. 1) geschahe. In einer jeden Potenz von $y$ tritt als Factor ir-

36*

gend einer Potenz von $x$, z. B. $x^p$, ein Aggregat auf, dessen einzelne Glieder aus Binomialcoefficienten (und das sind ganze Zahlen) und aus Potenzen von $c_0$, $c_1$, $\dots c_p$ besteht, d. h. aus Gliedern von der Form

$$g\, c_0^{\alpha_0}\, c_1^{\alpha_1} \dots\dots c_p^{\alpha_p},$$

wenn $g$ eine ganze Zahl bezeichnet. Man sieht leicht, dass die Exponenten $\alpha$ durch die Gleichung

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots, + p\,\alpha_p = p$$

verbunden sind. Es ist $c_0$ eine ganze Zahl. Sollten $c_1$, $c_2$, $\dots c_p$ resp. nur die Nenner $k$, $k^2$, $\dots k^p$ enthalten, so wird der Coefficient von $x^p$ nur den Nenner $k^p$ haben.

Setzt man in $f(y, x) = 0$ für $y$ seinen Werth und ordnet nach $x$, so müssen die Coefficienten jeder Potenz von $x$ für sich verschwinden. Aus dem mit $x^1$ multiplicirten Gliede zunächst entsteht die Gleichung

$$[a_1 c_0^n + b_1 c^{n-1} + \dots + k_1 c_0 + l_1] + k_0 c_1 = 0\,;$$

woraus folgt, dass $k_0 c_1$ eine ganze Zahl ist, also $c_1$ nur den Nenner $k$ hat. Das mit $x^2$ multiplicirte Glied zeigt auf ähnliche Art, dass in $c_2$ der Nenner $k^2$ vorkommt. Allgemein wird durch vollständige Induction bewiesen, dass $k^m$ der Nenner von $c_m$ ist. Es sei nämlich der Satz bis zu einem gewissen $m$ wahr, so muss er, wie die Betrachtung des Coefficienten von $x^{m+1}$ lehrt, auch für $c_{m+1}$ gelten. Zu diesem Coefficienten geben nämlich in $Ay^n$, $By^{n-1}$, $\dots Iy^2$ (da $A, B$, $\dots I$ kein von $x$ freies Glied enthalten), nur diejenigen Glieder in der Entwickelung der Potenzen von $y$ einen Beitrag, welche höchstens mit $x^m$ multiplicirt sind, also nur den Nenner $k^m$ enthalten. $Ky$ giebt einen ähnlichen Beitrag, ausser diesem aber noch $k\,c_{m+1}$; endlich $L$ giebt den Beitrag $l_{m+1}$, welches *ganz*, und von einem gewissen $m$ an Null ist. Es enthält $k\,c_{m+1}$, also nur den Nenner $k^m$, oder $c_{m+1}$ den Nenner $k^{m+1}$. Die Reihe für $y$ hat demnach die Form

$$g_0 + \frac{g_1}{k}x + \frac{g_2}{k^2}x^2 + \dots,$$

wo sämmtliche $g$ *ganz* sind; sie verwandelt sich daher durch Vertauschung von $x$ mit $k\,x$ in eine Reihe mit *ganzen* Coefficienten.

§. 4.

Sind die Grössen $A$, $B$, .... nicht ganze Functionen von $x$, sondern nach $x$ geordnete unendliche Reihen, so lässt sich nicht mehr annehmen, dass sämmtliche $a, b,$.... *ganz* sind. Es ist leicht zu sehen, dass alsdann die Reihe für $y$, wenn man wiederum $x$ mit einem ganzen Vielfachen von $x$ vertauscht hat, keine andern Nenner enthalten kann, als die welche in $A$, $B$, .... selbst vorkommen. In diesem Falle werden die *Primzahlen*, welche in den Nennern auftreten, entscheidend sein können. Enthalten z. B. $A$, $B$, .... alle Zahlen von der Form $4g+1$ im Nenner, also auch unendlich viele Primzahlen von dieser Form, so wird $y$ keine Wurzel dieser Gleichung sein können, wenn es alle Zahlen $4g+3$ im Nenner enthält.

Ausser obigem Resultate wird man noch einige Sätze finden, die sich zum Theil auf den Fall beziehen, in welchem mit unendlichen Reihen gewisse algebraische Operationen vorgenommen werden; zum Theil auf den Fall, wenn die Coefficienten $c$ in $y$ irrational sind. So z. B. werden in der Potenz einer unendlichen Reihe die Primzahlen, welche im Nenner enthalten sind, an *der* Stelle, an welcher sie zuerst auftreten, im Allgemeinen in derselben Potenz vorkommen, in welcher sie in der ursprünglichen Reihe zuerst auftraten. Es wird überflüssig sein, bei diesen Sätzen zu verweilen, da sie sich unmittelbar durch die Methoden dieser oder der früheren Abhandlung ergeben.

Bonn, im Januar 1854.