Fonctions et éléments algébriques

Article *in* Pacific Journal of Mathematics · November 1986

DOI: 10.2140/pjm.1986.125.1

1 author:

Gilles Christol
Sorbonne Université

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 125, No. 1, 1986

FONCTIONS ET ELEMENTS ALGEBRIQUES

GILLES CHRISTOL

Nous étudions les fonctions, analytiques dans le disque unité ouvert, qui sont algébriques sur le corps des éléments analytiques dans le disque générique (fonctions algébriques) et leurs limites uniformes (éléments algébriques). Nous donnons, entre autre, une caractérisation des éléments algébriques par leur développement de Taylor à l'origine et nous faisons le lien de ces résultats avec la structure de Frobénius forte des équations différentielles linéaires p-adiques.

We study the analytic functions in the open unit disk which are algebraic on the field of analytic elements in the generic disk (algebraic functions) and their uniform limits (algebraic elements). We give a characterisation of algebraic elements from their Taylor's series at the origin and we show the connection with the strong Frobenius structure of p-adic linear differential equations.

Dans tout cet article, nous considérons un corps k, dit corps des constantes, ultramétrique, d'inégales caractéristiques, complet et algébriquement clos.

Depuis les travaux de Krasner on sait associer à toute partie "raisonnable" D du corps k l'ensemble des "éléments analytiques sur D", c'est-à-dire l'ensemble des limites uniformes de fractions rationnelles sans pôles sur D. Lorsque D est un disque ouvert ($x \in k$; $|x - a| < r$), on n'obtient pas ainsi toutes les fonctions analytiques dans D. Pour aller plus loin, il est naturel de considérer les "fonctions algébriques dans D", c'est-à-dire les fonctions analytiques dans le disque D qui sont solution d'une équation polynômiale à coefficients dans l'anneau des éléments analytiques dans D. Par analogie avec la terminologie de Krasner, nous appellerons éléments algébriques dans D les limites uniformes (sur D) de fonctions algébriques dans D.

On peut, par une homotétie translation, se ramener au cas du disque $D = D(0,1) = \{x \in k;\ |x| < 1\}$. Le but de cet article est donc l'étude des fonctions et des éléments algébriques dans le disque $D(0,1)$. Nous simplifierons et compléterons les résultats de [3] et nous ferons le lien entre ceux-ci et le travail de Robba [**16**].

Les fonctions analytiques que l'on rencontre en théorie des nombres, en analyse combinatoire ou en géométrie algébrique sont souvent des éléments algébriques car elles apparaîssent comme solutions d'équations différentielles (linéaires à coefficients polynômes) qui ont une "structure de Frobenius forte" [5]. C'est le cas en particulier des solutions analytiques bornées dans $D(0,1)$ des équations différentielles associées aux connexions de Gaus-Manin. On trouve ainsi les fonctions hyper-géométriques ou, plus généralement, les diagonales de fractions rationnelles (dont un exemple intéressant apparaît dans les travaux de Apery sur la transcendance de $\zeta(3)$), la fonction exponentielle, la fonction de Bessel etc....

Les fonctions algébriques sont des fonctions analytiques bornées car elle n'ont qu'un nombre fini de zéros. Il en est donc de même des éléments algébriques. Par suite nous ferons notre étude dans l'anneau d'Amice (§1). En effet celui-ci contient à la fois l'anneau des fonctions analytiques bornées dans le disque $D(0,1)$ et le corps $k(x)$.

De plus, l'anneau W est complet pour la norme de la convergence "uniforme au bord" qui, restreinte au corps $k(x)$, donne la norme de Gauss. Autrement dit, l'anneau W contient le complété E du corps $k(x)$ pour la norme de Gauss (dans la terminologie de Dwork-Robba, le corps E est le corps des éléments analytiques dans le disque générique). Dans cet article nous nous intéresserons donc à l'ensemble des "fonctions" de W qui sont algébriques sur le corps E (fonctions algébriques) et à son complété F (éléments algébriques).

En nous appuyant sur un résultat profond de [13], nous montrons (§2) que toute extension finie du corps E qui est contenue dans l'anneau W possède une base normale (au sens de la théorie des espaces de Banach p-adiques) de la forme $1, e, e^2, \dots, e^{d-1}$.

A toute fonction algébrique nous associons l'anneau engendré (dans le corps k) par ses "coefficients de Laurent". Dans le §3, nous montrons que cet anneau a des propriétés de finitude qui permettront des raisonnements par récurrence analogues à ceux que l'on fait lorsque le corps k est à valuations discrètes (voir Lemme 4.4). Ce résultat nous permet de supprimer les restrictions techniques que nous avions dû faire dans [3].

La définition précise des éléments algébriques est donnée dans le paragraphe 4. Nous utilisons ici la présentation due à Robba [16] mais nous montrons qu'on retrouve essentiellement la définition que nous avions utilisée dans [3].

Nous introduisons un opérateur de Frobenius φ sur l'anneau W et nous montrons, dans le paragraphe 5, que toute fonction algébrique f vérifie la condition suivante:

(C) Les fonctions $\varphi^n(f)$ ($n = 0, 1, \dots$) sont contenues dans un espace vectoriel de dimension finie sur E.

[Cette propriété est l'analogue en caractéristique nulle d'une caractérisation évidente des fonctions algébriques sur le corps $\bar{k}(x)$ (avec $\bar{\varphi}(\bar{f}) = \bar{f}^p$ et $\bar{E} = \bar{k}(x)$).]

Sous certaines restrictions sur le corps k, nous montrons, dans le paragraphe 6, que les fonctions qui vérifient la condition (C) sont des éléments algébriques.

Dans le paragraphe 7 nous utilisons les résultats des paragraphes précédents pour montrer que l'existence d'une structure de Frobenius forte pour une équation différentielle (linéaire a coefficients dans le corps E) est liée à la nature algébrique de ses solutions. Plus précisément nous montrons qu'une équation différentielle a une structure de Frobenius forte si (resp. seulement si) elle possède un système complet de solutions qui sont des fonctions (resp. éléments) algébriques.

Le Paragraphe 8 est consacré à une étude approfondie des coefficients de Laurent des éléments algébriques. Dans le cas où le corps k est le complèté $\mathbf{C}_p$ de la clôture algébrique du corps des nombres p-adiques, nous obtenons une caractérisation des éléments algébriques à partir de leurs coefficients de Laurent. La caractérisation analogue, en caractéristique p, des fonctions algébriques a été faite dans **[6]** (on trouvera dans **[6]** une étude détaillée des liens entre cette caractérisation, les automates et les substitutions). Une des conséquences de notre résultat est la stabilité de l'ensemble des éléments algébriques par produit de Hadamard.

Finalement nous avons rassemblé dans le paragraphe 9 des exemples et des contre-exemples qui illustrent le reste de l'article.

1. L'anneau W. Soit k un corps de caractéristique nulle, algébriquement clos, complet pour une valeur absolue ultramétrique et dont le corps des restes $\bar{k}$ est de caractéristique p non nulle. Le corps $\bar{k}$ est algébriquement clos. Nous noterons $\bar{\alpha}$ l'image dans le corps $\bar{k}$ de l'élément α de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_k$ du corps k.

Nous noterons W l'ensemble des séries:

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n x^n$$

où les "coefficients de Laurent" α_n sont des nombres du corps k bornés et qui tendent vers 0 lorsque n tend vers $-\infty$. Nous poserons alors:

$$|f| = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |\alpha_n|.$$

PROPOSITION 1.1. *L'ensemble W est un anneau pour les opérations de somme et de produit de Cauchy, complet pour la valeur absolue $|\cdot|$.*

La seule partie non évidente de cette proposition concerne le produit de deux fonctions:

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n x^n, \quad g = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \beta_n x^n$$

de l'anneau W. Celui-ci est défini par les relations:

$$fg = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \gamma_n x^n, \quad \gamma_n = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \alpha_m \beta_{n-m}$$

cette dernière série converge, car, pour m tendant vers $-\infty$ (resp. $+\infty$), la suite α_m (resp. β_{n-m}) tend vers 0.

Pour démontrer l'égalité $|fg| = |f|\,|g|$, nous poserons:

$$f^+ = \sum_{n \geq 0} \alpha_n x^n.$$

Quitte à multiplier les fonctions f et g par des puissances convenables de x, nous pouvons supposer que:

$$|f - f^+| < |f|, \quad |g - g^+| < |g|.$$

Comme les fonctions f^+ et g^+ sont analytiques dans le disque $D(0,1) = \{x \in k;\ |x| < 1\}$, l'égalité

$$|f^+ g^+| = |f^+|\,|g^+|$$

est bien connue. La relation:

$$fg = (f - f^+)g^+ + f(g - g^+) + f^+ g^+$$

permet donc de conclure. □

Remarque. Nous appellerons "fonctions" les éléments de l'anneau W bien que ces fonctions ne soient définies nulle part.

Proposition 1.2. *Une fonction $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n x^n$ de l'anneau W est inversible si et seulement s'il existe un indice n_0 tel que l'on ait*: $|f| = |\alpha_{n_0}| \neq 0$.

Supposons la fonction f inversible et posons:

$$f^{-1} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \beta_n x^n.$$

En examinant le terme constant du produit ff^{-1}, on trouve:

$$\sup|\alpha_n \beta_{-n}| = \left| \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n \beta_{-n} \right| = 1.$$

Comme les nombres $\alpha_n \beta_{-n}$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $\pm\infty$, il existe un entier n_0 tel que:

$$|\alpha_{n_0} \beta_{-n_0}| = 1$$

et on trouve:

$$|f| = 1/|f^{-1}| \leq 1/|\beta_{n_0}| = |\alpha_{n_0}| \leq |f|.$$

Réciproquement, soit n_0 le plus petit indice tel que $|\alpha_{n_0}| = |f|$. La série:

$$1 + \sum_{n > n_0} \alpha_n \alpha_{n_0}^{-1} x^{n-n_0}$$

est inversible dans l'anneau $\mathcal{O}_{\mathrm{k}}[[\mathrm{x}]]$ donc dans l'anneau W. La fonction:

$$\sum_{n \geq n_0} \alpha_n x^n$$

sera donc, comme le monôme $\alpha_{n_0} x^{n_0}$, inversible dans l'anneau W. Maintenant ce dernier étant complet, l'inégalité:

$$\left| \sum_{n < n_0} \alpha_n x^n \right| < |\alpha_{n_0}| = \left| \sum_{n \geq n_0} \alpha_n x^n \right|$$

montre que la fonction f est inversible. □

Cette proposition montre en particulier que tout polynôme à coefficients dans k est inversible dans W. L'anneau W contient donc le corps $k(x)$. Etant complet, il contient aussi le complètè E du corps $k(x)$. Dans la terminologie "classique" de Dwork, la valeur absolue induite sur le corps $k(x)$ par celle de W s'appelle norme de Gauss et le corps E est le corps des éléments analytiques dans le disque générique.

COROLLAIRE 1.3. *Si H est un corps contenu dans l'anneau W, son corps des restes $\overline{H}$ (pour la valeur absolue induite par celle de W) est contenu dans le corps $\overline{k}((x))$.*

Les fonctions du corps H étant inversibles, la Proposition 1.2 montre que l'application:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n x^n \to \sum_{n \in \mathbf{Z}} \overline{\alpha}_n x^n$$

définie sur l'anneau des entiers du corps H et à valeurs dans le corps $\overline{k}((x))$, a pour noyau l'idéal maximal:

$$\{f \in H; |f| < 1\}$$

du corps H. □

2. Extensions algébriques du corps E contenues dans l'anneau W. Nous notons $\mathbf{w}$ l'anneau des vecteurs de Witt du corps $\overline{k}$ ([**19**] II 6) considéré comme plongé dans le corps k. Autrement dit $\mathbf{w}$ est l'anneau des entiers de l'extension maximale non ramifiée du corps $\mathbf{Q}_p$ contenue dans le corps k.

THEOREME 2.1. *Soit H une extension algébrique de degré d du corps E contenue dans l'anneau W. Il existe un élément primitif e du corps H tel que la base $1, e, \ldots, e^{d-1}$ soit normale, c'est-à-dire tel que, pour tout élément f du corps H, il existe des éléments analytiques a_i dans le corps E qui vérifient*:

$$f = \sum_{i=0}^{d-1} a_i e^i, \quad \sup|a_i| = |f|.$$

De plus, on peut choisir la fonction e dans l'anneau x $\mathbf{w}[[x]]$.

Soit $\bar{e}$ un élément primitif de l'extension $\overline{H}/\overline{E}$, soit $\overline{P}$ un polynôme minimal de $\bar{e}$ et soit P un polynôme à coefficients dans l'anneau $\mathbf{w}$ qui relève le polynôme $\overline{P}$ et tel que $\deg(P) = \deg(\overline{P})$. d'après le Corollaire 1.3, le corps $\overline{H}$ est contenu dans $\bar{k}((x))$. On sait alors que l'extension $\overline{H}$ du corps $\overline{E} = \bar{k}(x)$ est séparable (voir [**14**] par exemple). La racine $\bar{e}$ du polynôme $\overline{P}$ est donc simple. Comme le corps H est complet, le lemme de Hensel ([**1**]) assure que le polynôme P a, dans l'anneau des entiers du corps H, une (unique) racine e qui relève la racine $\bar{e}$.

Maintenant, on sait que, pour toute extension algébrique finie H du corps E, on a $[H:E] = [\overline{H}:\overline{E}]$ ([**13**] Corollaire (4) et Lemme (6) page 101, le corps k est stable au sens de ce livre car il est algébriquement clos). Il vient:

$$[H:E] \geq [E(e):E] \geq \left[\overline{E}(\bar{e}):\overline{E}\right] = \left[\overline{H}:\overline{E}\right] = [H:E]$$

c'est-à-dire $H = E(e)$.

Soit a_i $(i = 0, \ldots, d-1)$ des éléments analytiques du corps E tels que $\sup|a_i| = 1$. Le polynôme:

$$\overline{Q}(X) = \sum_{i=0}^{d-1} \bar{a}_i X^i$$

est non nul et de degré strictement inférieur à $d = [\overline{E}(\bar{e}):E]$. Donc $\overline{Q}(\bar{e}) \neq 0$. C'est-à-dire:

$$\left|\sum_{i=0}^{d-1} a_i e^i\right| = 1 = \sup|a_i|.$$

Autrement dit, les fonctions $\{1, e, \ldots, e^{d-1}\}$ forment une base normale de l'espace vectoriel H qu'elles engendrent sur le corps E.

D'après un théorème de Bateman-Duquette [**2**], l'extension finie $\overline{H}$ du corps $\overline{E} = \overline{k}(x)$, étant contenue dans le corps $\overline{k}((x))$, peut être engendrée par un élément de Pisot (PV élément), c'est-à-dire par un élément $\overline{g}$ entier sur l'anneau $\overline{k}[1/x]$, dont tous les conjugués sont de valuation x-adique strictement positive. En particulier, cet élément est de valuation x-adique strictement négative. Choisissons $\overline{e} = 1/\overline{g}$ comme élément primitif du corps $\overline{H}$. Il appartient à l'anneau $x\overline{k}[[x]]$ et ses conjugués sont de valuations x-adiques négatives. L'examen du polygone de Newton (x-adique) du polynôme $\overline{P}$ montre que ce dernier peut être pris de la forme:

$$\overline{P}(X) = X + x\overline{R}(X)$$

où $\overline{R}$ est un polynôme de l'anneau $\overline{k}[x, X]$. Nous choisissons un relèvement du polynôme $\overline{P}$ qui soit de la forme:

$$P(X) = X + xR(X)$$

où R est un polynôme de l'anneau $\mathbf{w}[x, X]$ tel que $\deg(R) = \deg(\overline{R})$. L'application $X \to -xR(X)$ étant une contraction de l'anneau $x\mathbf{w}[[x]]$ pour la valuation x-adique, le polynôme P a une unique racine dans cet anneau. Par passage au corps des restes, on vérifie que ce ne peut être que la racine e car c'est la seule dont l'image appartienne à l'anneau $x\overline{k}[[x]]$. □

3. Anneau des coefficients.

DEFINITION. Un sous anneau A de l'anneau $\mathcal{O}_k$ des entiers du corps k sera dit *séparable* s'il contient l'anneau $\mathbf{w}$ et si l'ensemble $|A|$ des valeurs absolues de ses éléments forme une suite décroissante qui tend vers 0.

Pour tout nombre ε positif, nous poserons:

$$|A|_\varepsilon = |A| \cap]\varepsilon, 1].$$

L'anneau A est séparable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, les ensembles $|A|_\varepsilon$ sont finis.

PROPOSITION 3.1. *Si $\{\alpha_n\}$ est une suite d'éléments de l'anneau $\mathcal{O}_k$ qui tend vers 0, l'anneau $\mathbf{w}[\{\alpha_n\}]$ engendré par les nombres α_n sur l'anneau $\mathbf{w}$ est séparable.*

Soit $\varepsilon > 0$. Notons A_ε l'anneau engendré sur l'anneau $\mathbf{w}$ par les nombres α_n tels que $|\alpha_n| > \varepsilon$. Comme la suite α_n tend vers 0, l'anneau A_ε est engendré par un nombre fini d'éléments. L'anneau $\mathbf{w}$ étant noethérien, il en est de même de l'anneau A_ε. En considérant les idéaux: $\{\alpha \in A; |\alpha| \leq r\}$, on en déduit que l'anneau A_ε est séparable. Or, par construction, on a:

$$|A|_\varepsilon = |A_\varepsilon|_\varepsilon.$$

Comme ces ensembles sont finis, on voit que l'anneau A_ε est séparable. □

REMARQUE. En général, l'anneau $\mathbf{w}[\{\alpha_n\}]$ n'est pas noethérien. Par exemple, si pour chaque nombre premier q nous choisissons un élément π_q du corps k tel que $\pi_q^q = p$, les idéaux:

$$\mathbf{w}\left[\pi_3 p^3, \ldots, \pi_q p^q\right]$$

forment une suite strictement croissante d'idéaux contenus dans l'anneau séparable $\mathbf{w}[\{\pi_q p^q\}]$.

DEFINITION. Soit $f_i = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_{n,i} x^n$ des fonctions de l'anneau W de valeur absolue inférieur ou égale à 1. Nous appellerons anneau des coefficients des fonctions f_i l'anneau $\mathbf{w}\langle\{f_i\}\rangle$ engendré par les nombres $\alpha_{n,i}$ sur l'anneau $\mathbf{w}$.

PROPOSITION 3.2. *Soit $\{f_i\}$ un ensemble fini de fonctions de l'anneau $\mathcal{O}_W$ qui sont algébriques sur le corps E. L'anneau $\mathbf{w}\langle\{f_i\}\rangle$ est séparable.*

D'après le Théorème 2.1, appliqué à l'extension finie $E(\{f_i\})$ du corps E, il existe une fonction e de l'anneau $\mathbf{w}((x))$ et des éléments analytiques $a_{i,j}$ du corps E tels que:

$$f_i = \sum_{j=0}^{d-1} a_{i,j} e^j, \quad |a_{i,j}| \leq |f_i| \leq 1.$$

On constate alors que l'anneau $\mathbf{w}\langle\{f_i\}\rangle$ est contenu dans l'anneau $\mathbf{w}\langle\{a_{i,j}\}\rangle$. Pour démontrer la proposition, il suffit donc de considérer le cas où les fonctions f_i sont des éléments analytiques. Dans ce cas, si nous choisissons pour chaque nombre $\bar{\alpha}$ du corps $\bar{k}$ un relèvement α dans l'anneau $\mathbf{w}$, le développement de Mittag-Leffler s'écrit:

$$f_i = \sum_{\bar{\alpha} \in \bar{k} \cup \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{i,n,\bar{\alpha}} e_{n,\bar{\alpha}}, \qquad |\lambda_{i,n,\bar{\alpha}}| \leq |f_i| \leq 1$$

où nous avons posé:

$$e_{n,\bar{\alpha}} = (x - \alpha)^{-n-1}, \qquad e_{n,\infty} = x^n$$

et où les nombres $\lambda_{i,n,\bar{\alpha}}$ forment une suite qui tend vers 0.

On constate alors que l'anneau $\mathbf{w}\langle\{f_i\}\rangle$ est contenu dans l'anneau $w[\{\lambda_{i,n,\bar{\alpha}}\}]$ et que ce dernier est séparable d'après la Proposition 3.1. □

4. Eléments algébriques. La définition que nous donnons des éléments algébriques est due à Robba [**16**] (l'anneau que nous notons W serait noté W^c dans cet article). Le but de ce paragraphe est de démontrer que cette définition est équivalente à celle qui est donnée dans [**3**].

Nous notons $\mathcal{W}$ le complété de la clôture algébrique du corps des quotients de l'anneau W et $\tilde{E}$ le complété de la clôture algébrique du corps E contenu dans le corps $\mathcal{W}$.

DEFINITION. Les éléments de l'anneau $F = \tilde{E} \cap W$ s'appellent germes d'éléments algébriques.

LEMME 4.1. *Les germes d'éléments algébriques sont les limites, dans l'anneau W, des suites de fonctions de W algébriques sur E.*

Ce lemme est démontré (Lemme 2.5) dans [**16**]: à priori tout germe d'élément algébrique f est limite d'une suite d'éléments f_n du corps $\mathcal{W}$ qui sont algébriques sur le corps E. Il faut montrer qu'on peut prendre les f_n dans l'anneau W.

COROLLAIRE 4.2. *L'anneau F est un corps. Pour tout germe d'élément algébrique f de l'anneau $\mathcal{O}_W$, l'anneau $\mathbf{w}\langle f\rangle$ est séparable.*

Soit f un germe d'élément algébrique. D'après le Lemme 4.1, il existe, dans l'anneau W, une fonction g algébrique sur le corps E telle que $|f-g|<|g|$. La fonction g étant inversible (car g^{-1} appartient au corps $E[g]$ lui même contenu dans l'anneau W) il en est de même de la fonction f.

Supposons maintenant que $|f|\le 1$. Pour tout nombre $\varepsilon>0$, nous savons, d'après le Lemme 4.1, qu'il existe, dans l'anneau W, une fonction f_ε algébrique sur le corps E telle que $|f-f_\varepsilon|<\varepsilon$. Dans ces conditions, avec les notations du paragraphe 3, on a:

$$|\mathbf{w}\langle f\rangle|_\varepsilon = |\mathbf{w}\langle f_\varepsilon\rangle|_\varepsilon.$$

Mais ce dernier ensemble est fini d'après la Proposition 3.2. L'anneau $\mathbf{w}\langle f\rangle$ est donc séparable. □

Nous noterons $\mathcal{B}$ l'anneau $W\cap k[[x]]$ des fonctions analytiques bornées dans le disque $D(0,1)$. Par définition, toute fonction de l'anneau W est somme d'une fonction de l'anneau $\mathcal{B}$ et d'une fonction du corps E

(cette dernière est en fait un élément analytique dans le complémentaire du disque $D(0,1)$). Ceci nous amène à la définition suivante:

DEFINITION. Nous appellerons éléments algébriques les fonctions de l'anneau $F \cap \mathscr{B}$. Par ailleurs, nous noterons k_0 le corps des quotients de l'anneau $\mathbf{w}$.

LEMME 4.3. *Soit $\bar{f}$ une fonction de l'anneau $\bar{k}[[x]]$ qui est algébrique sur le corps $\bar{k}(x)$. Il existe, dans l'anneau $\mathbf{w}[[x]]$, une fonction f, algébrique sur le corps $k_0(x)$, qui relève $\bar{f}$.*

Soit $\bar{P}$ le polynôme unitaire minimal de la fonction $\bar{f}$ sur le corps $\bar{k}(x)$ et soit P un polynôme unitaire, à coefficients dans le corps $k_0(x)$ qui relève le polynôme $\bar{P}$. Comme nous l'avons déjà vu (voir [**14**]), le polynôme $\bar{P}$ est séparable car la fonction $\bar{f}$ appartient au corps $\bar{k}((x))$. D'après le lemme de Hensel, le polynôme P a donc une solution g dans l'anneau $\mathbf{w}((x))$ telle que $\bar{g} = \bar{f}$. Posons:

$$g = f + g^-$$

où la fonction f appartient à l'anneau $\mathbf{w}[[x]]$ et où la fonction g^- appartient à l'anneau $\mathbf{w}[1/x]$ c'est-à-dire au corps $k_0(x)$. On constate alors que la fonction f est algébrique sur le corps $k_0(x)$ et que c'est un relèvement de la fonction $\bar{f}$ car $\bar{g}^- = 0$. □

LEMME 4.4. *Soit A un anneau séparable contenu dans l'anneau $\mathscr{O}_k$, et soit $\mathscr{F}$ un A-module contenu dans l'anneau $A[[x]]$ qui vérifie les conditions suivantes*:

(i) *le module $\mathscr{F}$ contient les fonctions de l'anneau $\mathbf{w}[[x]]$ qui sont algébriques sur le corps $k_0(x)$,*

(ii) *si f est une fonction du module $\mathscr{F}$ et si α est un élément de l'anneau A tel que $|\alpha| = |f|$, la restriction $\overline{(f/\alpha)}$ est algébrique sur le corps $\bar{k}(x)$. Alors les fonctions du module $\mathscr{F}$ sont des limites (dans l'anneau W) de fonctions de l'anneau $A[[x]]$ algébriques sur le corps $k(x)$. En particulier ce sont des éléments algébriques.*

Soit f une fonction du module $\mathscr{F}$. Nous commencons par construire, par récurrence, une suite de fonctions f_n, du module $\mathscr{F}$, algébriques sur le corps $k(x)$ et qui vérifient l'inégalité:

$$|f - f_{n+1}| < |f - f_n|.$$

Nous posons $f_0 = 0$ et nous supposons la fonction f_n construite. Comme l'anneau A est séparable, l'un des coefficients de Laurent de la fonction $f - f_n$ vérifie l'égalité $|\alpha| = |f - f_n|$. D'après la condition (ii) et le Lemme 4.3, il existe une fonction g dans l'anneau $\mathbf{w}[[x]]$, algébrique sur le corps $k_0(x)$, qui relève la fonction $\overline{(f - f_n)/\alpha}$. Posons:

$$f_{n+1} = f_n + \alpha g.$$

Comme le nombre α et l'anneau $\mathbf{w}$ sont contenus dans l'anneau A, la fonction f_{n+1} appartient bien à l'anneau $A[[x]]$. De plus elle est, comme les fonctions f_n et αg, algébrique sur le corps $k(x)$. Enfin on a:

$$|f - f_{n+1}| = |f - f_n - \alpha g| = |\alpha| \left| \frac{f - f_n}{\alpha} - g \right| < |\alpha| = |f - f_n|.$$

Pour démontrer le lemme, il suffit maintenant de remarquer que la suite $|f - f_n|$, étant une suite strictement décroissante de valeurs absolues d'éléments de l'anneau séparable A, tend vers 0. □

COROLLAIRE 4.5. *Les éléments algébriques sont les limites uniformes sur le disque $D(0,1)$ (c'est-à-dire les limites dans W) des suites de fonctions de l'anneau $\mathscr{B}$ qui sont algébriques sur le corps $k(x)$.*

Soit f un élément algébrique. Pour prouver le corollaire, quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $|f| \leq 1$. Dans ce cas, d'après la Proposition 3.2, l'anneau $\mathbf{w}\langle f \rangle$ est séparable. Comme la fonction f appartient au $\mathbf{w}\langle f \rangle$-module:

$$\mathscr{F} = F \cap \mathbf{w}\langle f \rangle[[x]]$$

il suffit de démontrer que ce dernier satisfait les hypothèses du Lemme 4.4.

La condition (i) est évidente car les fonctions algébriques sur $k_0(x)$ appartiennent au corps F. Soit g une fonction du module $\mathscr{F}$. D'après le Lemme 4.1, il existe une fonction g_1, algébrique sur le corps E, telle que $|g - g_1| < |g|$. Par suite, si α est un élément de l'anneau $\mathbf{w}\langle f \rangle$ tel que $|\alpha| = |g| = |g_1|$, la restriction $\overline{(g/\alpha)} = \overline{(g_1/\alpha)}$ est algébrique sur le corps $\bar{k}(x)$. □

La définition des éléments algébriques que donne le corollaire 4.5 est celle que nous avons utilisée dans [**3**].

5. Frobenius: action sur les fonctions algébriques. A partir de maintenant, nous supposons qu'il existe un automorphisme continu (et donc isométrique) σ du corps k dont la restriction à l'anneau $\mathbf{w}$ est l'automorphisme de Frobenius ([**19**] II 6). Pour tout élément α de l'anneau $\mathcal{O}_k$, on a alors:

$$|\sigma(\alpha) - \alpha^p| < 1.$$

Nous définissons des opérateurs φ et ψ sur l'anneau W par les formules:

$$\varphi\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_n x^n\Big) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \sigma(\alpha_n)x^{np}$$

$$\psi\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_n x^n\Big) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \sigma^{-1}(\alpha_{np})x^n.$$

On vérifie immédiatement que φ est un endomorphisme et que:

$$\psi(g\varphi(f)) = \psi(g)f, \quad \varphi\psi(f) = \frac{1}{p}\sum_{\xi^p=1} f(\xi x)$$

$$|\varphi(f)| = |f|, \quad |\psi(f)| \leq |f|.$$

PROPOSITION 5.1. *On a $\varphi(E) = E \cap \varphi(W)$ et $\psi(E) = E$.*

D'après un résultat classique ([**18**], [**3**]), une fonction f de l'anneau W appartient au corps E si et seulement si la suite $\{\alpha_n\}$ de ses coefficients de Laurent est presque périodique, c'est-à-dire si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε (positif) tel que, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on ait:

$$|\alpha_{n+n_\varepsilon} - \alpha_n| < \varepsilon.$$

Comme l'automorphisms σ est une isométrie, on obtient facilement:

$$\varphi(E) \subset E, \quad \psi(E) \subset E.$$

Il vient alors: $E = \psi\varphi(E) \subset \psi(E)$, c'est-à-dire $E = \psi(E)$. En remarquant que, pour toute fonction f de l'ensemble $\varphi(W) \cap E$, on a $f = \varphi\psi(f)$ où la fonction $\psi(f)$ appartient au corps E, on trouve que $\varphi(E) = E \cap \varphi(W)$. □

La Proposition 5.1. se généralise de la façon suivante:

THEOREME 5.2. *Soit H une extension algèbrique finie du corps E qui est contenue dans l'anneau W. On a $\varphi(H) = H \cap \varphi(W)$ et $\psi(H) = H$.*

Soit e l'élément primitif du corps H que nous avons construit dans le Théorème 2.1. Notons P le polynôme unitaire minimal de la fonction e. Par construction, la restriction $\bar{e}$ est un élément primitif du corps $\overline{H}$ et une racine simple du polynôme $\overline{P}$.

Nous notons P^φ le polynôme obtenu en appliquant l'opérateur φ à chacun des coefficients du polynôme P. La fonction $\varphi(e)$ est une racine du polynôme P^φ et $\overline{\varphi(e)} = \bar{e}^p$ est une racine simple du polynôme $\overline{P^\varphi}$. Comme la racine $\bar{e}^p$ appartient au corps $\overline{H}$, le lemme de Hensel montre que le polynôme P^φ possède une unique racine, dans le corps complet H, qui relève $\bar{e}^p$. Celle-ci ne peut être que $\varphi(e)$. Par suite la fonction $\varphi(e)$ appartient au corps H et le corps $\varphi(H) = \varphi(E)[\varphi(e)]$ est contenu dans l'intersection $H \cap \varphi(W)$. Il vient en outre $H = \psi\varphi(H) \subset \psi(H)$.

Comme $\bar{e}$ est un élément séparable sur le corps E, l'élément $\bar{e}^p = \overline{\varphi(e)}$ est primitif pour l'extension $\overline{H}$. On trouve:

$$[E[\varphi(e)]: E] \geq [\overline{E}[\bar{e}^p]: \overline{E}] = [\overline{H}:\overline{E}] = [H:E].$$

Par suite $H = E[\varphi(e)]$ et l'image $\psi(H) = \psi(E)[e]$ est contenue dans le corps $E[e] = H$. Nous avons donc démontré que $\psi(H) = H$.

Finalement, toute fonction de l'ensemble $H \cap \varphi(W)$ s'écrit $f = \varphi\psi(f)$ et appartient donc à l'ensemble $\varphi\psi(H) = \varphi(H)$. Autrement dit nous avons démontré que $\varphi(H) = H \cap \varphi(W)$. □

COROLLAIRE 5.3. *Toute fonction f de l'anneau W qui est algébrique de degré n sur le corps E vérifie la condition*:

(C_n) *il existe, dans le corps E, des fonctions a_i, non toutes nulles, telles que*:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi^i(f) = 0.$$

Les $n + 1$ fonctions $\varphi^i(f)$ appartiennent au corps $E[f]$ et celui-ci est de dimension n sur le corps E. □

6. Frobenius: action sur les éléments algébriques. Dans ce paragraphe, nous donnons une réciproque au Corollaire 5.3. L'exemple 6 du paragraphe 9 ci-dessous montre que, si le corps k est "trop gros", il existe des fonctions de l'anneau W, qui ne sont pas des germes d'éléments algébriques et qui, cependant, satisfont la condition (C_n). Pour éviter cette difficulté, nous devons, à partir de maintenant, supposer que le corps k est le complété de la clôture algébrique du corps des fractions de l'anneau **w**.

PROPOSITION 6.1. *Soit A un anneau séparable de l'anneau $\mathcal{O}_k$. L'anneau A^σ engendré par les nombres $\sigma^i(\alpha)$, pour i parcourant les entiers et α parcourant les éléments de A, est séparable.*

Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'anneau A est séparable, nous pouvons choisir un ensemble fini $\{\alpha_n\}$ d'éléments de A tel que:

$$\{|\alpha_n|\} = |A|_\varepsilon.$$

Pour tout élément α de l'anneau A, il existe alors un nombre α' dans l'anneau $\mathbf{w}[\{\alpha_n\}]$ tel que $|\alpha - \alpha'| < \varepsilon$.

Les nombres α_n étant dans le complété de la clôture algébrique du corps k_0, il existe des nombres β_n, algébriques sur le corps k_0, tels que $|\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon$. Si on remplace α_n par β_n dans l'expression de α', on obtient un nombre α'' du corps $k_0[\beta_n]$ tel que $|\alpha - \alpha''| < \varepsilon$.

Maintenant, le corps $k_0[\{\beta_n\}]$, étant une extension algébrique finie du corps k_0, est à valuation discréte. Comme le corps des restes $\bar{k}_0 = \bar{k}$ est algébriquement clos, si on note e l'indice de ramification du corps $k_0[\{\beta_n\}]$, on voit que ce dernier est contenu dans le corps k_e engendré sur le corps k_0 par les racines e-ièmes de p. Or l'automorphisme σ permute ces racines et laisse donc le corps k_e invariant. Par suite le corps $k_0[\{\sigma^i(\beta_n)\}]$ (i parcourt les entiers) est lui aussi contenu dans le corps k_e. On trouve alors:

$$|A^\sigma|_\varepsilon \subset |\mathcal{O}_{k_e}|_\varepsilon.$$

Le corps k_e étant à valuation discrète, l'anneau $\mathcal{O}_{k_e}$ est séparable et il en est donc de même de l'anneau A^σ. □

COROLLAIRE 6.2. *Si $\{f_i\}$ est une famille finie de germes d'éléments algébriques de l'anneau $\mathcal{O}_W$, l'anneau $\mathbf{w}\langle\{\varphi^j(f_i)\}\rangle$ $(j = 0, 1, \ldots)$ est séparable.*

Les fonctions f_i étant, d'après le Lemme 4.1, des limites de suites de fonctions algébriques, la Proposition 3.2 montre que l'anneau $\mathbf{w}\langle\{f_i\}\rangle$ est séparable. On déduit le corollaire de la Proposition 6.1 en remarquant que:

$$\mathbf{w}\langle\{\varphi^j(f_i)\}\rangle = \mathbf{w}\langle\{f_i\}\rangle^\sigma. \qquad □$$

LEMME 6.3. *Soit a_i et b des éléments algébriques. Si les fonctions a_i appartiennent à l'anneau $\mathcal{O}_W$, l'équation:*

$$f = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi^i(f) + xb$$

a une unique solution f dans l'anneau $x\mathcal{B}$. Cette solution est un élément algébrique et vérifie $|f| \leq |b|$.

L'image de l'anneau $x\mathcal{B}$ par l'opérateur φ étant contenue dans l'anneau $x^p\mathcal{B}$, l'application T définie par:

$$T(f) = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi^i(f) + xb$$

est une contraction de l'anneau $x\mathscr{B}$ pour la valuation x-adique. Elle a donc un unique point fixe f dans cet anneau.

Quitte à multiplier b, et donc f, par une constante nous pouvons supposer que la fonction b appartient à l'anneau $\mathscr{O}_W$.

Considérons l'anneau séparable (d'après le Corollaire 6.2):

$$A = \mathbf{w}\langle \{ \varphi^j(a_i) \} \cup \{ \varphi^j(b) \} \rangle \qquad (j = 0, 1, \ldots; \; i = 1, \ldots, r).$$

Comme l'anneau A est stable par l'automorphisme σ, l'image de l'anneau $xA[[x]]$ par l'opérateur φ est contenue dans l'anneau $x^pA[[x^p]]$ et l'application T est aussi une contraction de l'anneau $xA[[x]]$. Il en résulte que la fonction f appartient à ce dernier. En particulier elle appartient à l'anneau $\mathscr{O}_W$.

Pour toute fonction g de l'anneau W, notons $F\{ g \}$ l'espace vectoriel engendré sur le corps F par les fonctions 1, g, $\varphi(g), \ldots, \varphi^j(g), \ldots,$ et considérons l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions g de l'anneau $A[[x]]$ pour lesquelles cet espace vectoriel est de dimension finie sur le corps F. Si g et h sont des fonctions de l'ensemble $\mathscr{F}$, et si α est un nombre de l'anneau A, l'espace vectoriel $F\{ \alpha g + h \}$ qui est engendré par les fonctions 1 et:

$$\varphi^j(\alpha g + h) = \sigma^j(\alpha)\sigma^j(g) + \sigma^j(h)$$

est contenu dans l'espace vectoriel $F\{ g \} + F\{ h \}$. Il est donc de dimension finie. Autrement dit l'ensemble $\mathscr{F}$ est un A-module.

Le Corollaire 5.3 montre que, si g est une fonction algébrique sur le corps E, l'espace vectoriel $F\{ g \}$ est de dimension finie. Il en résulte immèdiatement que le module $\mathscr{F}$ satisfait la condition (i) du Lemme 4.4.

Soit g un élément du module $\mathscr{F}$ et soit α un élément de l'anneau A tel que $|\alpha| = |g|$. L'espace vectoriel $F\{ g \}$ étant de dimension finie, il existe une relation:

$$b_{-1} + \sum_{i=0}^{d} b_i \varphi^i(g/\alpha) = 0$$

où les b_i sont des germes d'éléments algébriques non tous nuls. On peut de plus choisir les fonctions b_i de telle sorte que $\sup|b_i| = 1$. Par passage au corps des restes, il vient:

$$\bar{b}_{-1} + \sum_{i=0}^{d} \bar{b}_i \left(\overline{g/\alpha}\right)^{p^i} = 0$$

où les fonctions $\bar{b}_i$ sont algébriques sur le corps $\bar{k}(x)$ et non toutes nulles. La fonction $(\overline{g/\alpha})$ est donc algébrique sur le corps $\bar{k}(x, \bar{b}_i)$ c'est-à-dire sur le corps $\bar{k}(x)$. Le module $\mathscr{F}$ satisfait donc la condition (ii) du Lemme 4.4.

D'après ce lemme, les fonctions du module $\mathscr{F}$, et en particulier la fonction f, sont des éléments algébriques. $\square$

PROPOSITION 6.4. *Si une fonction f de l'anneau W satisfait une inégalité du type*:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i(f)\right| < \varepsilon \sup|a_i|$$

où les a_i sont des germes d'éléments algébriques, il existe un germe d'élément algébrique f_ε tel que $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$.

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer qu'il existe un indice j $(0 \leq j \leq n)$ tel que:

$$a_j = 1, \quad |a_i| \leq 1, \quad |a_i| < 1 \quad si\ i < j.$$

Quitte à changer f en $x^{-m}f$ et a_i en $x^{m(p^i - p^j)}a_i$ pour un nombre m suffisamment grand, on peut supposer que les fonctions $\bar{a}_i$ appartiennent à l'anneau $x\bar{k}[[x]]$ (pour les indices $i < j$, on a de toute façon $\bar{a}_i = 0$). Nous posons alors:

$$a_i = b_i + c_i$$

avec

$$b_i = 0 \quad \text{si } i < j, \qquad b_j = 1, \qquad b_i = \gamma^+(a_i) \quad \text{si } i > j$$

où l'opérateur γ^+ est défini sur l'anneau W par la formule:

$$\gamma^+\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n.$$

Dans ces conditions nous avons $|c_i| < 1$ et les fonctions b_i appartiennent à l'anneau $x\mathscr{B}$.

Nous considérons alors les applications:

$$T = 1 + \sum_{i=j+1}^{n} \psi^j(b_i)\varphi^{i-j}; \qquad V = \gamma^+ \circ \psi^j \circ \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi^i\right).$$

Avec ces notations, en remarquant que les applications γ^+ et ψ diminuent les valeurs absolues, on obtient:

$$|\gamma^+ \circ T(f) + V(f)| \leq \left| f + \sum_{i>j} \psi^j(b_i)\varphi^{i-j}(f) + \psi^j\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi^i(f)\right)\right|$$

$$\leq \left|\psi^j\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i(f)\right)\right| < \varepsilon.$$

Comme, pour toute fonction g de l'anneau W, la fonction $\gamma^-(g) = g - \gamma^+(g)$ est un élément analytique, l'application γ^+ transforme les germes d'éléments algébriques en éléments algébriques. La fonction:

$$b = \gamma^+ \circ T \circ \gamma^-(f) + V \circ \gamma^-(f)$$

appartient à l'anneau $x\mathscr{B}$ et est un élément algébrique.

Comme $\gamma^+ \circ T \circ \gamma^+(f) = T \circ \gamma^+(f)$ (ces fonctions appartiennent à $x\mathscr{B}$), on a:

$$|T \circ \gamma^+(f) + V \circ \gamma^+(f) + b| < \varepsilon.$$

Le Lemme 6.3 permet de construire, par récurrence, une suite (unique) d'éléments algébriques g_n, contenus dans l'anneau $x\mathscr{B}$ et tels que:

$$g_0 = 0; \qquad T(g_{n+1}) + V(g_n) + b = 0.$$

On a alors:

$$T(g_{n+1} - g_n) + V(g_n - g_{n-1}) = 0$$

et le Lemme 6.3 donne la majoration:

$$|g_{n+1} - g_n| \leq |V(g_n - g_{n-1})| \leq \sup|c_i|\,|g_n - g_{n-1}|.$$

Comme $\sup|c_i| < 1$, on constate que la suite g_n est convergente. Sa limite g appartient à l'anneau complet $F \cap x\mathscr{B}$ et vérifie:

$$T(g) + V(g) + b = 0$$

c'est-à-dire:

$$|T(g - \gamma^+(f)) + V(g - \gamma^+(f))| < \varepsilon.$$

En appliquant une nouvelle fois le Lemma 6.3, on obtient:

$$|g - \gamma^+(f)| \leq \sup\big(|V(g - \gamma^+(f))|, \varepsilon\big) \leq \sup\big(|c_i|\,|g - \gamma^+(f)|, \varepsilon\big)$$

c'est-à-dire, comme $|c_i| < 1$, $|g - \gamma^+(f)| < \varepsilon$. La fonction $f_\varepsilon = g + \gamma^-(f)$ satisfait les conditions demandées. □

COROLLAIRE 6.5. *Si une fonction f de l'anneau W vérifie la conditon (C_n) du Corollaire* 5.3, *c'est un germe d'élément algébrique.* □

Signalons un résultat démontré dans [3] (§11) qui généralise, dans un cas particulier, le Corollaire 6.5.

THEOREME 6.6. *Soit f une fonction de l'anneau $\mathbf{w}[[x]]$. S'il existe un polynôme P de l'anneau $\mathbf{w}[x;\ y_0, \ldots, y_h]$ tel que*:

(i) $P(x;\ f, \varphi(f), \ldots, \varphi^h(f)) = 0$

(ii) *le polynôme $\overline{P}(x;\ y, y^p, \ldots, y^{p^h})$ n'est pas identiquement nul (dans l'anneau $\overline{k}[x, y]$)*

(iii) *il existe un entier* i $(0 \leq i \leq h)$ *pour lequel la fonction* $(\partial \bar{P}/\partial y_i)(x, \bar{f}, \bar{f}^p, \ldots, \bar{f}^{p^h})$ *(de l'anneau* $\bar{k}[[x]]$*) n'est pas nulle. Alors la fonction* f *est un élément algébrique.*

La démonstration de ce théorème repose sur une étude de l'anneau des vecteurs de Witt de $\bar{k}[[x]]$. □

7. Eléments algébriques et structure de Frobenius forte. Dans ce paragraphe nous appliquons les résultats des paragraphes 5 et 6 à l'étude des équations différentielles. En particulier nous supposerons toujours que le corps k est le complété de la clôture algébrique du corps des fractions de l'anneau $\mathbf{w}$.

Rappelons brièvement les définitions dont nous aurons besoin. Pour plus de détails voir [**5**].

Soit H un surcorps du corps k muni d'un ensemble de dérivations $\mathrm{Der}(H)$ qui forme un espace vectoriel de dimension un sur H et pour lesquelles le corps k est le corps des constantes. La catégorie abélienne $MC(H)$ des modules avec connexion sur H a pour objet les couples (M, ∇) formés d'un espace vectoriel M de dimension finie sur H et d'une connexion ∇ sur M c'est-à-dire d'une application H-linéaire de $\mathrm{Der}(H)$ dans $\mathrm{End}_k(M)$ telle que si D est une dérivation de $\mathrm{Der}(H)$, a un élément du corps H, et m un vecteur de M on ait:

$$\nabla(D)(am) = D(a)m + a\nabla(D)(m)$$

et pour morphisme s de (M, ∇) dans (N, ∇') les applications H-linéaires de M dans N qui vérifient:

$$s(\nabla(D)(m)) = \nabla'(D)(s(m)).$$

Si K est un anneau qui contient le corps H et dans lequel les dérivations de $\mathrm{Der}(H)$ se prolongent, on note $S((M, \nabla), K)$ le k espace vectoriel des solutions de (M, ∇) dans l'anneau K c'est-à-dire l'ensemble des applications H-linéaires s de M dans K telles que: $s(\nabla(D)(m)) = D(s(m))$.

Il est bien connu que l'ensemble $S((M, \nabla), K)$ est un espace vectoriel sur k de dimension inférieure ou égale à la dimension de M sur H. Lorsqu'il y a égalité entre ces dimensions on dit que le module (M, ∇) est entièrement soluble dans l'anneau K.

Si le corps K est une extension algébrique finie du corps H, toute dérivation D de H se prolonge de manière unique en une dérivation de K. Un tel corps, muni de la connexion canonique "prolongement des dérivations", définit donc un objet de la catégorie $MC(H)$.

Nous allons utiliser, dans un cas particulier, un théorème de Deligne [7] sur la semi-simplicité des connexions de Gauss-Manin. Nous en donnons la démonstration dans le cas qui nous intéresse.

PROPOSITION 7.1. *Toute extension algébrique finie du corps H est un objet semi-simple de la catégorie $MC(H)$.*

Tout sous objet d'un objet semi-simple étant semi-simple, il suffit de démontrer le résultat en considérant une extension normale K du corps H.

Notons G le groupe de Galois de l'extension K/H. On vérifie facilement que tout élément de G définit une solution du module avec connexion K dans le corps K. On définit ainsi un plongement de l'algèbre $k[G]$ dans $S(K, K)$. Le théorème d'indépendance linéaire des automorphismes (Bourbaki Alg. Chap. V, §7 n°5) montre que $k[G]$ est un espace vectoriel de dimension $[K:H]$ sur k. Par suite le module avec connexion K est entièrement soluble dans le corps K et $S(K, K) = k[G]$.

On sait que l'anneau $k[G]$ est semi-simple (théorème de Maschke). Autrement dit les idempotents S_i de $k[G]$ qui engendrent les idéaux à gauche minimaux vérifient $\Sigma S_i = 1$ et $S_i S_j = 0$ pour $i \neq j$.

Posons $M_i = \{ f \in K;\ S_i(f) = f \}$. Comme, pour toute dérivation D de K et toute fonction f de M_i, on a:

$$S_i(Df) = DS_i(f) = Df,$$

L'espace vectoriel M_i est stable par dérivation et, muni de la connexion "restriction des dérivations de K", définit un sous-objet du module avec connexion K dans la catégorie $MC(H)$. Pour toute fonction f de K on a $f = \Sigma S_i f$. Puisque S_i est idempotent, $S_i f$ appartient à M_i. Donc $K = \Sigma M_i$. Par ailleurs, si la fonction f appartient à l'intersection $M_i \cap M_j$, on trouve $f = S_i f = S_i S_j f = 0$. Donc le module avec connexion K est la somme directe des sous modules avec connexion M_i.

Pour achever la démonstration, il suffit de démontrer que les M_i sont des objets irréductibles. Considérons pour cela un module avec connexion M strictement contenu dans M_i. Nous avons une suite exacte:

$$0 \to M \to K \to K/M \to 0.$$

Puisque le module avec connexion K est entièrement soluble dans K on sait ([5] Corollaire 2.5) qu'il en est de même des modules avec connexion M et K/M et que l'espace vectoriel $S(K/M, K)$ est l'ensemble des éléments de $S(K, K)$ qui s'annulent sur M, c'est-à-dire l'annulateur

$\mathrm{Ann}(M)$ de M dans $k[G]$. Il vient:

$$\begin{aligned}\dim_k \mathrm{Ann}(M) &= \dim_k S(K/M, K)\\ &= \dim_H K/M = \dim_H K - \dim_H M.\end{aligned}$$

Comme M est strictement contenu dans M_i, on a $\dim M < \dim M_i$ donc $\dim \mathrm{Ann}(M) > \dim \mathrm{Ann}(M_i)$. L'idéal $k[G]S_i$ étant minimal, son annulateur est maximal. Par suite on a $\mathrm{Ann}(M) = k[G]$ donc $M = 0$. □

Nous posons $\mathrm{Der}(E) = Ed/dx$, ce qui nous permet de considérer la catégorie des E-modules avec connexion. Sur cette catégorie on définit le foncteur de Frobenius qui agit sur les objets par:

$$\phi(M, \nabla) = (M^{\varphi}, \nabla^{\varphi})$$

avec d'une part: $M^{\varphi} = \varphi(M) \otimes E$ où $\varphi(M)$ est le $\varphi(E)$-espace vectoriel obtenu à partir de M par transport de structure, et d'autre part:

$$\nabla^{\varphi}(xd/dx)\varphi(m) = p\varphi[\nabla(dx/dx)m].$$

DÉFINITION. On dit que le module (M, ∇) a une *structure de Frobenius forte* si les modules $\phi^h(M, \nabla)$ sont en nombre fini (à isomorphisme près).

THEOREME 7.2. *Si le E-module avec connexion (M, ∇) a une structure de Frobenius forte, toute solution de (M, ∇) dans l'anneau W est en fait une solution dans le corps F. Inversement si un E-module avec connexion est entièrement soluble dans le corps des fonctions de l'anneau W qui sont algébriques sur E, alors il a une structure de Frobenius forte.*

A toute solution s du E-module avec connexion (M, ∇) dans l'anneau W nous associons l'application E-linéaire $\varphi(s)$ de M^{φ} dans W qui est définie par: $\varphi(s)(\varphi(m)) = \varphi(s(m))$. Un calcul immédiat montre que $\varphi(s)$ est une solution du module avec connexion $\phi(M, \nabla)$ dans l'anneau W. Si le module (M, ∇) possède une structure de Frobenius forte, il y a un isomorphisme ρ de (M, ∇) dans $\phi^h(M, \nabla)$. Dans ce cas l'application θ, définie par $\theta(s) = \varphi^h(s) \circ \rho$, est un k-endomorphisme de $S((M, \nabla), W)$. Comme cet espace vectoriel est de dimension finie, il existe des nombres λ_i tels que:

$$\sum_{i=0}^{l} \lambda_i \theta^i = 0, \quad \lambda_l \neq 0.$$

Nous choisissons maintenant une base

$$(e) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

de l'espace vectoriel M sur E. L'isomorphisme ρ est représenté par une matrice A du groupe $Gl_n(E)$ telle que: $\rho(e) = A\varphi^h(e)$ et il vient:

$$\theta(s)(e) = \varphi^h(s)\big(A\varphi^h(e)\big) = A\varphi^h(s(e)).$$

Par récurrence, on obtient: $\theta^i(s)(e) = A_i\varphi^{hi}(s(e))$ avec

$$A_i = A\varphi^h(A) \cdots \varphi^{h(i-1)}(A),$$

ce qui donne:

$$\sum_{i=0}^{l} \lambda_i A_i \varphi^{hi}(s(e)) = 0.$$

Comme ρ est un isomorphisme, la matrice A est inversible et il en est de même de la matrice A_l. En multipliant l'égalité ci-dessus par $(\lambda_l A_l)^{-1}$ on obtient des égalités de la forme:

$$\varphi^l\big(s(e_j)\big) = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{k=0}^{n} B_{ijk}\varphi^i(s(e_k))$$

où les fonctions B_{ijk} sont des éléments analytiques. Autrement dit, le E-espace vectoriel V de base

$$\varphi^i\big[s(e_j)\big] \qquad (0 \le i < l, 1 \le j \le n)$$

(qui est contenu dans W) est conservé par l'opérateur φ.

Pour tout vecteur m de l'espace vectoriel M, la fonction $s(m)$ appartient à V. Les $ln + 1$ vecteurs $\varphi^i(s(m))$ $(0 \le i \le ln)$ appartiennent aussi à cet espace vectoriel de dimension ln. Il ne sont pas linéairement indépendants. Il existe donc des éléments analytiques a_i, non tous nuls, tels que $\Sigma a_i\varphi^i(s(m)) = 0$. D'après le Corollaire 6.4, la fonction $s(m)$ appartient au corps F.

L'image par le foncteur de Frobenius d'une somme directe étant la somme directe des images, pour démontrer la réciproque, nous n'avons besoin de nous intéresser qu'au cas où le module (M, ∇) n'est pas une somme directe dans $MC(E)$ et où il est entièrement soluble dans le corps des fonctions algébriques sur E.

LEMME 7.3. *Si un module avec connexion (M, ∇) est entièrement soluble dans un corps K et s'il n'est pas somme directe de sous-modules alors il possède une solution dans K qui est injective.*

Le résultat est évident si $\dim M = 1$. Nous démontrons le lemme par récurrence sur la dimension de M. Considérons un sous objet (N, ∇) de (M, ∇) de dimension maximale (N peut être éventuellement réduit à 0).

Le module (N,∇) est, comme le module (M,∇), entièrement soluble dans le corps K. D'après l'hypothèse de récurrence, comme $\dim N < \dim M$, il existe une solution injective s de (N,∇) dans K. Le module (M,∇) étant entièrement soluble dans le corps K, on sait que la solution s peut se prolonger en une solution (que nous noterons encore s) non nulle de (M,∇) dans K. L'espace vectoriel $V = \ker s$ est stable par dérivation. Comme $V \cap N = 0$, le module avec connexion $(V \oplus N,\nabla)$ est un sous objet de (M,∇) qui contient (N,∇).

Or le module avec connexion $(V \oplus N,\nabla) = (V,\nabla) \oplus (N,\nabla)$ étant une somme directe n'est pas égal à (M,∇). Comme (N,∇) a été choisi de dimension maximale on a $V \oplus N = N$ c'est-à-dire $V = 0$. Autrement dit s est injective. □

D'après le lemme nous pouvons choisir une solution injective s du module (M,∇) dans le corps des fonctions algébriques sur E qui sont contenues dans W. Posons $K = E(s(e_i))$ où $\{e_i\}$ est une base sur E de l'espace vectoriel M. Le corps K est donc une extension algébrique finie du corps E, contenue dans l'anneau W, et qui contient l'image de l'espace vectoriel M par la solution s.

Il résulte du Théorème 5.2 que le E-espace vectoriel $K^{\varphi} = \varphi(K) \otimes_{\varphi(E)} E$ est isomorphe à K (il y a deux définitions différentes de $\varphi(K)$: l'une comme image du corps K par l'opérateur φ de W, l'autre obtenue par transport de structure à partir du E espace vectoriel K, mais ces deux définitions coincident à isomorphisme près). Par suite, dans la catégorie $MC(E)$, on a $\phi(K) = K$. Or la solution s définit un isomorphisme de (M,∇) avec un sous-objet de K. Les modules avec connexion $\phi^h(M,\nabla)$ sont donc isomorphes à des sous objets du module avec connexion $\phi^h(K) = K$. Comme le module K est semi-simple, les modules avec connexion $\phi^h(M,\nabla)$ sont en nombre fini à isomorphisme près. Donc il existe des entiers h et k tels que $\phi^{k+h}(M,\nabla) = \phi^k(M,\nabla)$. Mais on démontre ([**5**] Proposition 10.1) que sur la sous catégorie de $MC(E)$ formée des objets entièrement solubles dans W, le foncteur ϕ est pleinement fidèle. Il en résulte que l'on a $\phi^h(M,\nabla) = (M,\nabla)$. □

Signalons pour terminer ce paragraphe que l'existence d'une structure de Frobenius forte n'est complètement élucidée que dans le cas des équations différentielles du premier ordre [**4**].

8. Caractérisation des éléments algébriques par leurs coefficients de Laurent. Dans le Théorème 5.2, nous avons vu que $\varphi(F) = F \cap \varphi(W)$ et $\psi(F) = F$. Nous nous proposons de préciser ce résultat.

Posons, pour $0 \leq r < p$, $\psi_r = \psi \circ x^{-r}$, c'est-à-dire:

$$\psi_r\left(\sum \alpha_n x^n\right) = \sum \sigma^{-1}(\alpha_{np+r})x^n$$

(on a en particulier $\psi_0 = \psi$).

Si V est un sous ensemble de W et si f est une fonction de W nous notons: $d(f, V) = \inf_{g \in V}|f - g|$.

THEOREME 8.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *la fonction f est un germe d'élément algébrique.*

(2) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *la fonction f est contenue dans un* $\mathcal{O}_K$*-module* V_ε *de type fini tel que, pour tout r* $(0 \leq r < p)$ *et toute fonction g de* V_ε *on ait* $d(\psi_r(g), V_\varepsilon) < \varepsilon$.

(3) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *la fonction f est contenue dans un* $\mathcal{O}_E$*-module* W_ε *de type fini tel que, pour tout r* $(0 \leq r < p)$ *et toute fonction g de* W_ε *on ait* $d(\psi_r(g), W_\varepsilon) < \varepsilon$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Le nombre $\varepsilon > 0$ est fixé dans toute la démonstration. Nous allons en fait montrer que la fonction f vérifie la condition:

(2') Il existe un $\mathcal{O}_K$-module V'_ε de type fini tel que, pour toute fonction g de V'_ε et tout nombre r $(0 \leq r < p)$, on ait $d(\psi_r(g), V_\varepsilon) < \varepsilon$ et une fonction f_ε de V'_ε telle que $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$.

Vérifions d'abord que (2') entraîne (2). Pour cela il suffit de considérer le $\mathcal{O}_K$-module $V_\varepsilon = V'_\varepsilon + \mathcal{O}_K f$. En effet, pour toute fonction $g + \alpha f$ de V_ε, la majoration

$$d(\psi_r(g + \alpha f), V_\varepsilon) < \varepsilon$$

s'obtient immédiatement à partir des majorations:

$$|\psi_r(\alpha f) - \psi_r(\alpha f_\varepsilon)| < \varepsilon$$

et

$$d(\psi_r(g + \alpha f_\varepsilon), V_\varepsilon) \leq d(\psi_r(g + \alpha f_\varepsilon), V'_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Maintenant, il est clair que pour vérifier la condition 2') on peut remplacer la fonction f par n'importe quelle fonction g telle que $|f - g| < \varepsilon$. Ceci permet de se ramener au cas où la fonction f est algébrique sur E.

Considérons la fonction e associée par le Théorème 2.1 à l'extension algébrique finie $E(f)$ de E. Nous avons vu dans le Théorème 5.2 que les fonctions $\varphi(e)^i$ (resp. $\overline{\varphi(e)^i}$) forment, pour $0 \leq i < n = [E(f)\colon E] = [\overline{E(f)}\colon \overline{E}]$, une base du corps $E(f)$ sur E(resp. $\overline{E(f)}$ sur $\overline{E}$). On obtient des développements:

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi(e)^i, \quad e^j = \sum_{i=0}^{n-1} b_{ij}\varphi(e)^i$$

et on vérifie, par passage au corps des restes après normalisation, que les éléments analytiques a_i et b_{ij} satisfont les inégalités:

$$\sup_i |a_i| = |f| \quad et \quad \sup_i |b_{ij}| = |e^j| = 1.$$

Les éléments analytiques étant des limites de fractions rationnelles, il existe des polynômes A_i, B_{ij} et Q de $k[x]$ qui satisfont les inégalités:

$$|a_i - A_i/Q| < \varepsilon, \quad |b_{ij} - B_{ij}/Q| < \varepsilon/|f|, \quad |Q| = 1,$$

$$|A_i| \leq |f|, \quad |B_{ij}| \leq 1.$$

Par ailleurs, comme:

$$|Q^p - \varphi(Q)| < 1$$

on peut trouver un nombre entier h tel que:

$$\left|Q^{p^h} - \varphi(Q)^{p^{h-1}}\right| < \varepsilon/|f|.$$

Pour tout polynôme P de $k[x]$ tel que $|P| \leq |f|$, on a:

$$\left|P/Q^{p^h} - P/\varphi(Q)^{p^{h-1}}\right| < \varepsilon.$$

Si on remarque que $\psi_r(g\varphi(f)) = \psi_r(g)f$, on obtient:

$$\left|\psi_r\left(P/Q^{p^h}\right) - \psi_r(P)/Q^{p^{h-1}}\right| < \varepsilon.$$

Nous posons:

$$\sup_i \deg A_i = \alpha, \quad \sup_{i,j} \deg B_{ij} = \beta, \quad \deg Q = \gamma$$

et nous considérons le sous ensemble de $E(e)$:

$$V'_\varepsilon = \left\{ g = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \varphi(e)^i / Q^{p^h}; \right.$$

$$\left. P_i \in k[x], |P_i| \leq |f|, \deg P_i < \alpha + \frac{p}{p-1}\beta + \gamma p^h \right\}.$$

Le degré des polynômes P_i étant borné, il est clair que V'_ε est un $\mathcal{O}_k$-module de type fini.

Soit g une fonction de V'_ε, on trouve:

$$\left|\psi_r(g) - \sum \psi_r(P_i) e^i / Q^{p^{h-1}}\right| < \varepsilon.$$

Comme $|\psi_r(P_i)/Q^{p^{h-1}}| \leq |P_i| \leq |f|$, on a:

$$\left|\psi_r(g) - \sum_{i,j} \psi_r(P_j) B_{ij} \varphi(e)^i / Q^{p^{h-1}+1}\right| < \varepsilon.$$

Nous considérons donc les polynômes:

$$R_i = \sum_{j=0}^{n-1} \psi_r(P_j) B_{ij} Q^{p^h - p^{h-1} - 1}.$$

De telle sorte que la fonction: $g_\varepsilon = \sum_i R_i \varphi(e)^i / Q^{p^h}$ vérifie $|\psi_r(g) - g_\varepsilon| < \varepsilon$. On trouve d'une part:

$$|R_i| \leq \sup |P_j| \leq |f|$$

et d'autre part, en remarquant que l'opérateur ψ_r divise le degré des polynômes par p:

$$\begin{aligned} \deg R_i &\leq \sup \deg P_j / p + \beta + (p^h - p^{h-1} - 1)\gamma \\ &\leq \alpha/p + \beta/(p-1) + \gamma p^{h-1} + \beta + (p^h - p^{h-1} - 1)\gamma \\ &\leq \alpha + \beta p/(p-1) + \gamma p^h. \end{aligned}$$

Par suite la fonction g_ε appartient au module V'_ε. On a donc $d(\psi_r(g), V'_\varepsilon) < \varepsilon$.

Les relations:

$$\left| A_i Q^{p^h - 1} \right| \leq |f|$$

et

$$\deg A_i Q^{p^h - 1} = \alpha + \gamma(p^h - 1) \leq \alpha + \beta p/(p-1) + \gamma p^h$$

montrent que la fonction $f_\varepsilon = \sum A_i \varphi(e)^i / Q$ appartient à V'_ε. Comme on a $|f - f_\varepsilon| \leq \sup |a_i - A_i/Q| < \varepsilon$, on trouve $d(f, V'_\varepsilon) < \varepsilon$, ce qui achève de démontrer que la fonction f satisfait à la condition 2').

(2) $\Rightarrow$ (3): Nous posons $W_\varepsilon = V_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_E$. Pour tout élément analytique a de $\mathcal{O}_E$ et toute fonction g de V_ε on a:

$$\psi_r(ag) = \sum_{s=0}^{r} \psi_s(a) \psi_{r-s}(g) + \sum_{s=r+1}^{p-1} x \psi_s(a) \psi_{p+r-s}(g).$$

Ce qui donne: $d(\psi_r(ag), W_\varepsilon) \leq \sup_s d(\psi_s(g), V_\varepsilon) < \varepsilon$. On en déduit que le $\mathcal{O}_E$-module W_ε vérifie la condition 3).

(3) $\Rightarrow$ (1): la condition 3) permet d'associer à chaque fonction g de W_ε des fonctions g_r $(0 \leq r < p)$, de W_ε, telles que $|\psi_r(g) - g_r| < \varepsilon$. Nous définissons une application θ de W_ε dans $\varphi(W_\varepsilon) \otimes_{\mathcal{O}_{\varphi(E)}} E$ en posant:

$$\theta(g) = \sum_{r=0}^{p-1} x^r \varphi(g_r)$$

et nous prolongeons par récurrence sur $h \geq 0$ cette application en une application de $\varphi^h(W_\varepsilon) \otimes_{\varphi^h(E)} E$ dans $\varphi^{h+1}(W_\varepsilon) \otimes_{\varphi^{h+1}(E)} E$ en posant $\theta(a\varphi^h(g)) = a\varphi^h(\theta(g))$.

Soit n la dimension du E-espace vectoriel $W_\varepsilon \otimes E$ (cet espace est de dimension finie car W_ε est de type fini). Les $n+1$ fonctions $f_i = \varphi^i(\theta^{n-i}(f))$ $(0 \leq i \leq n)$ appartiennent à $\varphi^n(W_\varepsilon) \otimes E$. Cet espace vectoriel étant de dimension n au plus, il existe des éléments analytiques a_i, tels que:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f_i = 0 \quad \sup_i |a_i| = 1.$$

Or la relation:

$$g = \sum_{r=0}^{p-1} x^r \varphi(\psi_r(g))$$

montre que l'on a: $|g - \theta(g)| < \varepsilon$. On en déduit que:

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i(f) \right| < \varepsilon.$$

D'après la Proposition 6.3, il existe un germe d'éléments algébriques f_ε tel que $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$. Ceci ayant lieu pour tout ε, la fonction f elle-même est un germe d'élément algébrique. □

REMARQUES: (1) Les modules V_ε et W_ε sont contenus dans le corps F. C'est en ce sens que la Proposition 8.1. précise le Théorème 5.2.

(2) Le fait que le corps k soit contenu dans le complété de la clôture algébrique de k_0 n'intervient que dans la démonstration $3 \Rightarrow 1$.

On peut définir sur l'anneau W un "*produit de Hadamard*" en posant:

$$\sum \alpha_n x^n * \sum \beta_n x^n = \sum \alpha_n \beta_n x^n.$$

COROLLAIRE 8.2. *F est stable par produit de Hadamard.*

Soit $(f_i)_{i=1,2}$ deux fonctions de F, et soit $V_\varepsilon(f_i)$ les $\mathcal{O}_k$-modules correspondants (Théorème 8.1.2). Considérons le $\mathcal{O}_k$-module $V_\varepsilon(f_1 * f_2)$ engendré par les produits $g_1 * g_2$ $(g_i \in V_\varepsilon(f_i))$. C'est un $\mathcal{O}_k$-module de type fini puisque un système générateur est donné par les produits de Hadamard des éléments des systèmes générateurs des modules $V_\varepsilon(f_i)$. D'autre part soit $g_{i,r}$ des fonctions du module $V_\varepsilon(f_i)$ telles que $|g_{i,r} - \psi_r(g_i)| < \varepsilon$. Comme:

$$\psi_r(g_1 * g_2) = \psi_r(g_1) * \psi_r(g_2).$$

On trouve $|\psi_r(g_1 * g_2) - g_{1,r} * g_{2,r}| < \varepsilon$. La fonction $f_1 * f_2$ vérifie la condition (2) de la Proposition 8.1 donc appartient à F. □

COROLLAIRE 8.3. *Supposons que le corps k est le complété $\mathbf{C}_p$ de la cloture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. Une fonction f de l'anneau W est un germe d'élément algébrique si et seulement si elle est contenue dans un sous-ensemble compact T de W qui est invariant par les opérateurs $\psi_r (0 \leq r < p)$.*

Un sous-ensemble T de W est contenu dans un compact si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il est contenu dans une réunion finie T_ε de disques de rayon ε. Supposons l'ensemble T compact et invariant par les opérateurs ψ_r, il en est de même de l'ensemble $T_\varepsilon = \{g \in W;\ d(g, T) < \varepsilon\}$. Nous choisissons un ensemble (fini) f_i de "centres" des disques qui composent T_ε. Le $\mathcal{O}_k$-module (de type fini) V_ε engendré par les fonctions f_i vérifie la condition 2) de la Proposition 8.1. Donc les éléments de T sont des germes d'éléments algébriques.

Inversement, dans la démonstration $1 \Rightarrow 2$ de la Proposition 8.1, puisque les polynômes A_i, B_{ij}, Q ne sont définis qu'à "ε près", nous pouvons choisir leurs coefficients dans la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. Ces coefficients étant en nombre fini, ils sont en fait contenus dans une extension galoisienne finie k_1 de $\mathbf{Q}_p$. Comme cette extension est galoisienne, elle est stable par les automorphismes σ et σ^{-1}. Autrement dit l'anneau $k_1[x]$ est stable par les opérateurs ψ_r. Nous pouvons, dans cette démonstration, remplacer l'ensemble V_ε par le $\mathcal{O}_{k_1}$-module V_ε^1 défini comme V_ε mais en se limitant à des polynômes P_i de $k_1[x]$. L'anneau $\mathcal{O}_{k_1}$ étant compact et le module V_ε^1 étant de type fini, celui-ci est compact. L'ensemble $T_\varepsilon = \{g \in W;\ d(g, V_\varepsilon^1) < \varepsilon\}$ est donc une réunion finie de disques de rayon ε. La condition 2) exprime alors que l'ensemble T_ε est stable par les opérateurs ψ_r. L'ensemble $T = \bigcap_{\varepsilon > 0} T_\varepsilon$ est compact, invariant par les opérateurs ψ_r et contient f. □

REMARQUES. Voici une autre manière d'énoncer le résultat du Corollaire 8.3.: Une fonction $f = \Sigma \alpha_n x^n$ est un germe d'élément algébrique si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des fonction $f_{r,h} = \Sigma \alpha_{np^h + r} x^{np^h}$, pour $h \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r < p^h$, est fini "à ε près". D'après **[12]** (Proposition 3.3 p. 107) ceci signifie que la suite α_n, considérée comme une suite de $\mathcal{O}_k / \alpha \mathcal{O}_k$ ($|\alpha| = \varepsilon$), est p-reconnaissable pour tout α de $\mathcal{O}_k$. On trouvera une étude de cet aspect des choses dans **[6]** où on se limite aux suites de $\bar{k}$.

9. Exemples et contre exemples:

EXEMPLE 1. La fonction $f = (1-x)^{-\alpha}$. Nous considérons la fonction:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n x^n/n!; \qquad (\alpha)_0 = 1, (\alpha)_n = \prod_{m=0}^{n-1} (\alpha + m).$$

On vérifie classiquement que cette fonction appartient à l'anneau W, c'est-à-dire est bornée dans le disque $D(0,1)$, si et seulement si le nombre α appartient à $\mathbf{Z}_p$. Dans ce cas on a $|f| = 1$.

Si le nombre α est rationnel, la fonction f est algébrique sur le corps $\mathbf{Q}(x)$. Montrons, inversement, que si la fonction f est un élément algébrique, le nombre α est rationnel.

Dans ce cas, puisque le corps F est contenu dans l'anneau W, le nombre α appartient à $\mathbf{Z}_p$. Nous avons donc, pour tout entier $h \geq 0$:

$$-\alpha = a_h - p^h \alpha_h, \qquad 0 \leq a_h < p^h,\ \alpha_h \in \mathbf{Z}_p.$$

Dans le corps $\mathbf{F}_p((x))$, nous trouvons alors:

$$\overline{\psi^h(f)} = \overline{\psi^h\left[(1-x)^{a_h}(1-x^{p^h})^{-\alpha_h}\right]} = \overline{(1-x)^{-\alpha_h}}.$$

Or, d'après le Corollaire 8.3, la suite $\overline{\psi^h(f)}$ $(h = 0, 1, \ldots)$ appartient à un ensemble fini T. Elle est donc périodique à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe des nombres h et h' tels que:

$$\overline{(1-x)^{-\alpha_{h'}}} = \overline{\psi^{h'}(f)} = \overline{\psi^h(f)} = \overline{(1-x)^{-\alpha_h}}, \qquad h \neq h'.$$

Si $\alpha_{h'}$ et α_h étaient distincts, nous aurions:

$$\alpha_{h'} - \alpha_h = \beta p^{\gamma} \quad \text{avec } |\beta| = 1$$

c'est-à-dire:

$$1 = \overline{(1-x)^{-\alpha_h + \alpha_h'}} = 1 - \bar{\beta} x^{p^{\gamma}} + \cdots \qquad \text{avec } \bar{\beta} \neq 0$$

ce qui n'est pas. Donc $\alpha_{h'} = \alpha_h$ et le nombre:

$$\alpha = -a_h - (a_{h'} - a_h)/(1 - p^{h'-h})$$

est rationnel.

En raffinant l'argument ci-dessus, Dwork a démontré ([**8**] Corollaire 1, §1) que l'on avait, pour $0 \leq n < p^h$ et $0 \leq r < p$:

$$\psi_r[\psi^h(x^{-n} f)] = \lambda \psi^h(x^{-n} f) \pmod{p^{h+1}}, \qquad |\lambda| \leq 1.$$

Ce résultat permet de préciser, dans le cas particulier considéré, l'ensemble V_ε du Théorème 8.1.

EXEMPLE 2. Les fonctions hypergéométriques $f = F(\alpha, \beta, 1;\, x)$.

Nous considérons la fonction:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n (\beta)_n x^n/(n!)^2 = (1-x)^{-\alpha} * (1-x)^{-\beta}.$$

Lorsque les nombres α et β appartiennent à l'ensemble $\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p$, le Corollaire 8.2 prouve que la fonction f est un élément algébrique.

Inversement, nous considérons deux nombres α et β de $\mathbf{Z}_p$, et nous posons:

$$-\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i p^i, \quad -\beta = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i p^i, \qquad 0 \le \alpha_i,\ \beta_i < p.$$

La méthode de l'exemple 1, permet d'obtenir:

$$\overline{f(x)} = \prod_{h=0}^{\infty} P\left(\alpha_h, \beta_h, x^{p^h}\right), \qquad P(a, b, x) = (1-x)^a * (1-x)^b.$$

On constate alors que les polynômes $P(\alpha_h, \beta_h, x)$ (de $\mathbf{F}_p[x]$) sont de degré strictement inférieur à p. Si nous supposons que la fonction f est un élément algébrique, la condition: $\overline{\psi^h(f)} = \overline{\psi^{h'}(f)}$ donnera alors, pour tout entier i:

$$P(\alpha_{i+h}, \beta_{i+h}, x) = P(\alpha_{i+h'}, \beta_{i+h'}, x).$$

Malheureusement, la condition $P(a, b, x) = P(a', b', x)$ n'implique $(a, b) = (a', b')$ que si le produit $ab = a'b'$ est non nul. Autrement dit, le calcul "mod p" que nous venons de faire ne permettra de conclure à la rationalité des nombres α et β que dans le cas où les suites α_i et β_i ne contiennent qu'un nombre fini de zéros.

Pour traiter le cas général, on est donc obligé de faire des calculs dans $\mathbf{Z}_p$. Pour cela il "suffit" de démontrer que la fonction:

$$\frac{\varphi[F(\alpha', \beta', 1, x)]}{F(\alpha, \beta, 1, x)}, \quad \text{avec } \alpha' = \frac{\alpha + \alpha_0}{p} \text{ et } \beta' = \frac{\beta + \beta_0}{p},$$

est un élément analytique, soit en utilisant la méthode "élémentaire" de Dwork ([**8**] §2 et 3) soit en utilisant la théorie des équations différentielles p-adique et l'existence d'une "structure de Frobenius faible" ([**5**]). La périodicité "modulo p^h" de la suite $\psi^h(f)$ entraîne alors celle des suites α_i et β_i.

EXEMPLE 3. Fonction exponentielle.

Soit π une racine $(p-1)$-ième de $(-p)$. Nous considérons la fonction:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n x^n/n! = e^{\pi x}.$$

C'est une fonction de l'anneau W. La fonction $f^p = e^{p\pi x}$ ayant un rayon de convergence égal à $|p|^{-1}$, c'est-à-dire strictement supérieur à 1, est un élément analytique (dans le disque $D(0,1)$). Autrement dit la fonction f est algébrique sur le corps E. C'est donc un élément algébrique. Cette propriété peut d'ailleurs être utilisée pour définir un prolongement de la fonction f en dehors du disque $D(0,1)$ ([**16**]).

D'après le Corollaire 5.3, la fonction f vérifie une condition (C_n). En effet, si l'automorphisme σ est tel que $\sigma(\pi) = \pi$, la fonction:

$$\varphi(f)/f = e^{\pi(x^p - x)}$$

(exponentielle de Artin-Hass) ayant un rayon de convergence égal à $|p|^{-(p-1)/p^2}$, donc strictement supérieur à 1, est un élément analytique et la fonction f vérifie la condition (C_1). Plus généralement, si $\sigma^h(\pi) = \pi$(un tel h existe forcément avec $h < p$), on trouve que la fonction $\varphi^h(f)/f$ est un élément analytique.

EXEMPLE 4. Fonction de Bessel.

Il résulte de l'exemple 3 et du Corollaire 8.2 que la fonction:

$$f(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^{2n}x^n/(n!)^2 = e^{\pi x} * e^{\pi x}$$

est un élément algébrique. Dans [**9**] Dwork a démontré que cette fonction vérifie la condition (C_1). Il est cependant raisonnable de conjecturer qu'elle n'est pas algébrique sur le corps E.

EXEMPLE 5. Un élément algébrique qui vérifie une condition (C_2) mais qui n'est pas algébrique sur le corps E.

Considérons la fonction:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p^n}.$$

On constate immédiatement que $\varphi(f) - f + x = 0$, c'est-à-dire que:

$$\varphi^2(f) - (1 + x^{p-1})\varphi(f) + x^{p-1}f = 0.$$

La fonction f vérifie donc la condition (C_2).

Supposons que cette fonction soit algébrique sur le corps E et notons:

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots$$

son polynôme unitaire minimal.

En dérivant par rapport à x, on trouve:

$$f'\left(nf^{n-1} + a_{n-1}(n-1)f^{n-2} + \cdots\right) + a'_{n-1}f^{n-1} + \cdots = 0.$$

Comme la fonction:

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^{p^n - 1}$$

est un élément analytique, on obtient ainsi un polynôme degré au plus $n - 1$, à coefficients dans le corps E, dont la fonction f est racine. Ce ne peut être que le polynôme identiquement nul. En particulier on a $nf' + a'_{n-1} = 0$, c'est-à-dire $nf + a_{n-1} =$ cste, donc f appartient au corps E. Or ceci est impossible car la suite des coefficients de Taylor de la fonction f est lacunaire, donc n'est pas presque périodique (voir Proposition 5.1). Donc la fonction f n'est pas algébrique sur le corps E.

REMARQUE. Dans le cas où la fonction $\varphi^h(f)/(f)$ est un élément analytique (en particulier si la fonction f vérifie la condition (C_1)), on montre facilement qu'il en est de même de la fonction f'/f. Si cette dernière est superadmissible (c'est-à-dire prolongeable dans le complémentaire d'une réunion finie de disques de rayon strictement inférieur à 1, par exemple si f'/f appartient au corps $k(x)$), on montre alors que la fonction f est algébrique sur le corps E (voir [**4**] introduction et §4). Ceci ne s'applique pas à l'exemple 4, ni à l'exemple 7 ci-dessous!

EXEMPLE 6. Un élément de l'anneau W qui vérifie une condition (C_2) mais qui n'est pas un élément algébrique parce que le corps k est "trop gros".

Pour cet exemple, nous choisissons le corps k maximalement complet et à valuation non discrète. Soit λ un élément du corps k. Nous considérons la fonction:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n(\lambda) x^{p^n}/(1 - x^{p^n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma^n(\lambda) x^{mp^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{v(n)} \sigma^h(\lambda) x^n \end{aligned}$$

où l'entier $v(n)$ est défini par les conditions:

$$n = n_0 p^{v(n)}, \quad (n_0, p) = 1.$$

On constate aisément que la fonction f satisfait la relation $f = \varphi(f) + \lambda x/(1 - x)$ c'est-à-dire:

$$\lambda x(1 - x^p)[\varphi(f) - \varphi^2(f)] = \sigma(\lambda) x^p (1 - x)[f - \varphi(f)].$$

Autrement dit la fonction f satisfait la condition (C_2).

D'après le Corollaire 4.2, pour démontrer que la fonction f n'est pas un élément algébrique, il suffit de vérifier que l'anneau $\mathbf{w}\langle f\rangle$ n'est pas séparable. Or, les coefficients de Taylor de la fonction f étant de la forme λ, $\lambda + \sigma(\lambda), \ldots,$ il est clair que $\mathbf{w}\langle f\rangle = \mathbf{w}[\{\sigma^i(\lambda)\}]$. Nous sommes donc amenés à construire un élément λ du corps k pour lequel ce dernier anneau n'est pas séparable.

Pour cela, nous commencons par construire, par récurrence, une suite α_i d'éléments du corps k tels que:

$$\alpha_0 = 1, \quad |\alpha_{i-1}| > |\alpha_i| > \sup_{j \le i}\left(\left|\sigma(\alpha_j) - \alpha_j\right|, |p|\right).$$

Supposons les nombres $\alpha_0, \ldots, \alpha_i$ construits. Comme le corps k n'est pas à valuation discrète, il existe un nombre β de k tel que:

$$|\alpha_i| > |\beta| > \sup_{j \le i}\left(\left|\sigma(\alpha_j) - \alpha_j\right|, |p|\right).$$

Par ailleurs, le corps $\bar{k}$ étant algébriquement clos, il existe un élément ω de l'anneau $\mathbf{w}$ tel que:

$$\left|\omega^{p-1} - \beta/\sigma(\beta)\right| < 1.$$

Un calcul élémentaire montre alors que l'élément $\alpha_{i+1} = \beta\omega$ vérifie la condition:

$$\left|\sigma(\alpha_{i+1}) - \alpha_{i+1}\right| < |\sigma(\beta)| = |\beta| = |\alpha_{i+1}| < |\alpha_i|$$

ce qui permet de construire la suite α_i.

Maintenant, le corps $\bar{k}$ étant algébriquement clos, il existe des éléments ω_i de l'anneau $\mathbf{w}$ tels que:

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{i}{j}\bar{\omega}_i^{p^j} = 1$$

c'est-à-dire tels que:

$$\left|(\sigma - 1)^i(\omega_i) - 1\right| \le |p|.$$

Le corps k étant maximalement complet, l'intersection des disques:

$$\left\{x \in k;\ |x - (1 + \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_i\omega_i)| \le |\alpha_{i+1}|\right\}$$

(qui sont clairement emboités) contient un élément λ du corps k. En faisant les calculs "modulo $|\alpha_{i+1}|$", on touve alors:

$$\sigma(\alpha_j) - \alpha_j \equiv p \equiv (\sigma - 1)^j(\omega_j) - 1 \equiv 0$$

ce qui donne:

$$(\sigma - 1)^i(\omega_j) \equiv 0 \quad \text{pour } j < i$$

$$(\sigma - 1)^i(\lambda) \equiv (\sigma - 1)^i(1 + \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_i\omega_i) \equiv \alpha_i$$

c'est-à-dire $|(\sigma - 1)^i(\lambda)| = |\alpha_i|$. Nous avons ainsi construit, dans l'anneau $\mathbf{w}[\{\sigma^i(\lambda)\}]$, une suite d'éléments $(\sigma - 1)^i(\lambda)$ dont les valeurs absolues sont décroissantes et ne tendent pas vers 0. L'anneau $\mathbf{w}[\{\sigma^i(\lambda)\}]$ n'est donc pas séparable.

EXEMPLE 7. Un élément algébrique dont la dérivée logarithmique est un élément analytique et qui ne vérifie aucune condition (C_n).

Soit π une racine $(p-1)$-ième de $-p$. Pour simplifier les calculs, nous supposerons que $\sigma(\pi)=\pi$. Nous posons:

$$g=\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)x^{p^h}$$

et nous considérons la fonction: $f=e^{\pi g}$. La dérivée logarithmique:

$$f'/f=\pi\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)p^h x^{p^h-1}$$

convergeant dans le disque $|x|\leq 1$ est un élément analytique du corps E. Par ailleurs, la relation (facile à vérifier):

$$g-2\varphi(g)+\varphi^2(g)=x$$

et le Lemme 6.3 montrent que la fonction g est un élément algébrique. La fonction:

$$f^p=e^{\pi p g}=\sum_{n=0}^{\infty}p^n g^n \pi^n/n!$$

appartient donc au corps complet F et la fonction f est algébrique sur celui-ci. Par suite elle appartient au complèté de la clôture algébrique du corps E. Or on constate que la fonction f est analytique bornée dans le disque $D(0,1)$, c'est-à-dire qu'elle appartient aussi à l'anneau W. D'après notre définition, c'est donc un élément algébrique.

En vue de démontrer que la fonction f ne vérifie aucune condition (C_n), nous posons:

$$g_i=\exp\pi\left[\frac{i(i-1)}{2}x-i\sum_{h=0}^{\infty}x^{p^h}\right],\qquad b_i=\varphi^i(f)/g_i f$$

et nous montrons par récurrence que la fonction b_i est un élément analytique. Tout d'abord on a $b_0=1$. Supposons donc que b_i est un élément analytique. On a:

$$\frac{\varphi(f)}{f}=\exp\pi(\varphi(g)-g)=\exp\pi\left(-\sum_{h=0}^{\infty}x^{p^h}\right),$$

$$\frac{\varphi(g_i)}{g_{i+1}}=\exp\pi\left[\frac{i(i-1)}{2}x^p-\frac{i(i+1)}{2}x-i\sum_{h=1}^{\infty}x^{p^h}+(i+1)\sum_{h=0}^{\infty}x^{p^h}\right]$$

$$=\exp\pi\left[\frac{i(i-1)}{2}(x^p-x)+\sum_{h=0}^{\infty}x^{p^h}\right].$$

D'où on déduit:

$$b_{i+1} = \varphi(b_i)\varphi(g_i)\varphi(f)/g_{i+1}f = \varphi(b_i)[\exp \pi(x^p - x)]^{i(i-1)/2}.$$

Comme la fonction $\exp \pi(x^p - x)$ est un élément analytique, il en sera de même de b_{i+1}.

Supposons maintenant que la fonction f vérifie une condition (C_n). Il existe alors des éléments analytiques a_i, non tous nuls, tels que:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i(f) = 0.$$

Comme $\varphi^i(f) = b_i g_i f$, on en déduit que les fonctions g_i ne sont pas linéairement indépendantes sur le corps E. Il existe donc un entier m tel que les fonctions $g_0, \dots, g_{m-1}$ soient linéairement indépendantes et tel que l'on ait:

$$g_m = \sum_{i=0}^{m-1} c_i g_i$$

où les c_i sont des éléments analytiques. En dérivant cette relation, il vient:

$$\frac{g'_m}{g_m} g_m = \sum_{i=0}^{m-1} \left(c'_i + c_i \frac{g'_i}{g_i} \right) g_i.$$

Or la fonction:

$$\frac{g'_i}{g_i} = \pi \frac{i(i-1)}{2} - \pi i \sum_{h=0}^{\infty} p^h x^{p^h}$$

est un élément analytique. On doit donc avoir:

$$c'_i + c_i \frac{g'_i}{g_i} = \frac{g'_m}{g_m} c_i.$$

Comme les éléments analytiques c_i ne sont pas tous nuls, il existe un indice i $(0 \leq i < m)$ pour lequel la fonction g_m/g_i est égal à αc_i c'est-à-dire est un élément analytique. Comme, modulo $(m-i)^2 p^2 \pi$, on a

$$\left(\frac{g_m}{g_i} \right)^p = \exp \pi p(m-i) \left[(m+i-1)\frac{x}{2} - \sum_{h=0}^{\infty} x^{p^h} \right]$$

$$\equiv 1 + \pi p(m-i) \left[(m+i-3)\frac{x}{2} - \sum_{h=1}^{\infty} x^{p^h} \right]$$

qui est une série lacunaire, ceci n'est pas possible. La fonction f ne satisfait donc aucune condition (C_n).

EXEMPLE 8. Formes modulaires.

Comme nous l'avons vu dans la remarque du Corollaire 8.3, pour qu'une fonction $f = \sum \alpha_n x^n$ soit un élément algébrique, il faut que la suite $\bar{\alpha}_n$ soit p-reconaissable. Ceci permet de démontrer que certaines fonctions ne sont pas des éléments algébriques. Par exemple, si P est un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 tel que $P(\mathbf{N})$ soit contenu dans $\mathbf{N}$, alors la fonction:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{P(n)}$$

n'est pas un élément algébrique d'après le résultat de **[15]**.

Suivant la même idée, on démontre que la fonction:

$$\eta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{(3n^2+n)/2} = \prod_{m=1}^{\infty} (1-x)^m$$

n'est pas un élément algébrique. Il est toutefois intéressant de noter que la fonction η satisfait la condition:

$$P(\eta, \varphi(\eta), \varphi^2(\eta)) = 0$$

où P est un polynôme de $\mathbf{Q}[y_0, y_1, y_2]$ tel que: $\overline{P}(y, y^p, y^{p^2})$ soit identiquement nul (en particulier, le polynôme P ne satisfait pas les hypothèses du Théorème 6.6).

EXEMPLE 9. Diagonales de fractions rationnelles.

On définit sur l'anneau $k[\![x_1, \ldots, x_r]\!]$ un opérateur de "diagonalisation" en posant:

$$\Delta\Big[\sum \alpha_{n_1,\ldots,n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}\Big] = \sum \alpha_{n,\ldots,n} x^n$$

et on appelle "diagonale de fraction rationnelle", toute fonction f qui est de la forme $\Delta(P/Q)$ où P (resp. Q) est un polynôme de l'anneau $k[x_1, \ldots, x_r]$ (resp. $\mathcal{O}_k[x_1, \ldots, x_r]$) et où $Q(0, 0, \ldots, 0) = 1$.

Lorsque le corps k est le corps $\mathbf{C}_p$, nous avons démontré dans [3] que les diagonales de fractions rationnelles sont des éléments algébriques (les fonctions algébriques sur le corps $\mathbf{Q}(x)$ sont exactement les diagonales des fractions rationnelles à deux variables). On peut aussi obtenir ce résultat en partant d'une remarque de Deligne: la diagonalisation consiste à intégrer la forme différentielle:

$$\frac{P}{Q} dx_1 \cdots dx_r / dx$$

sur le "cycle évanescent" $|x_2| = \cdots = |x_r| = \varepsilon$ de la variété algébrique $Q(x) \neq 0$, $x_1 \cdots x_r = x$. Avec cette interprétation, les diagonales de fractions rationnelles apparaîssent comme des solutions d'une équation différentielle de Gauss-Manin. Il est classique de démontrer que cette dernière a une structure de Frobenius Forte. Il en résulte (Théorème 7.2) que les diagonales de fractions rationnelles sont des éléments algébriques.

Par exemple, la fonction d'Apery:

$$f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 x^n$$

$$= \Delta[1/(1 - x_1)[(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)(1 - x_5) - x_1x_2x_3]]$$

(il n'y a évidemment pas unicité de la fraction rationnelle à plusieurs variables qui apparaît ici) est un élément algébrique. Plusieurs auteurs (par exemple Ira Gessel, *Some Congruence for Apery Numbers*, J. Number Theory, **749** (1982)) ont donné des congruences qui concrètisent dans ce cas particulier le Corollaire 8.3.

References

[1] Y. Amice, *Les nombres p-adiques P.U.F. collection*, SUP **14** (1975).

[2] P. T. Bateman and A. L. Duquette, *The analogue of Pisot Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series*, Illinois J. Math., **6** (1962), 594–606.

[3] G. Christol, *Limites uniformes p-adiques de fonctions algèbriques*, Thèse Sc. Math. Université Paris, **6** (1977).

[4] _____, *Solutions algèbriques des équations différentielles p-adiques*, Sém. Delange Pisot Poitou 1981/82, (1983), 51–58.

[5] _____, *Systèmes différentiels linéaires p-adiques: structure de Frobenius faible*, Bull. Soc. Math. France, **109** (1981), 83–122.

[6] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France and G. Rauzy, *Suites algèbriques automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France, **108** (1980), 401–419.

[7] P. Deligne, *Théorie de Hodge II*, Publ. I.H.E.S. *n*° **40**.

[8] B. Dwork, *p-adic cycles*, Publ. I.H.E.S., *n*° **37** (1969), 27–116.

[9] _____, *Bessel functions as p-adic functions of the argument*, Duke Math. J., **41** (1974), 711–738.

[10] B. Dwork, *On p-adic differential equations I*. Bull. Soc. Math. France Mémoire, **39–40** (1974), 27–37.

[11] B. Dwork and P. Robba, *On ordinary linear p-adic differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **231** (1977), 1–46.

[12] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, Vol. **A** (1974) Academic Press.

[13] L. Gerritzen and M. Van Der Put, *Schottky Groups and Mumford Curves*, Lectures Notes, *n*° **817** (1980).

[14] M. Grandet Hugot, *Nombres de Pisot dans un corps de séries formelles*, Sém. Delange Pisot Poitou, *n*° **4** (1966/67), 12p.

[15] M. Minski and S. Papert, *Unrecognizable sets of numbers*, J. Assoc. Comp. Mach., **13** (1966), 281–286.

[16] P. Robba, *Nouveau point de vue sur le prolongement algébrique*, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, n° **5** (1976/77), 14p.

[17] ______, *Prolongement algébrique et équations différentielles*, Pro. of the conference on p-adic analysis held in Nijmegen, (1978), 171–184.

[18] P. Robba, *Fonctions analytiques sur les corps valués complets ultramétriques*, Astérisque, n° **10** (1973), 109–218.

[19] J. P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1962.

Received May 14, 1985.

UNIVERSITE DE PARIS VI
4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS CEDEX 05
FRANCE