Eine Anwendung des *Eisenstein*schen Satzes auf die Theorie der *Gauss*schen Differentialgleichung.

(Von Herrn *Edmund Landau* in Berlin.)

Man verdankt *Eisenstein* einen der wenigen Sätze, welche gestatten, aus der arithmetischen Natur der Koeffizienten einer gegebenen Potenzreihe Schlüsse auf die analytische Natur der durch sie dargestellten Funktion zu ziehen.

Der *Eisenstein*sche Satz*) gibt eine notwendige Bedingung dafür an, daß eine Potenzreihe

$$(1.)\qquad y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

mit rationalen Zahlenkoeffizienten c_n einer algebraischen Gleichung

$$(2.)\qquad f(x,y) = \sum_{r=0}^{\varrho} \sum_{s=0}^{\sigma} a_{rs} x^r y^s = 0$$

---

*) „Über eine allgemeine Eigenschaft der Reihen-Entwicklungen aller algebraischen Funktionen", Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1852, S. 441—443. *Eisenstein* bemerkt, der Satz sei durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten nicht schwer zu erweisen; er hat aber die nähere Ausführung nicht mehr veröffentlicht. Ein Beweis wurde zuerst von *Heine* mitgeteilt, und zwar in der Arbeit „Über die Entwicklung von Wurzeln algebraischer Gleichungen in Potenzreihen", dieses Journal, Bd. 48, 1854, S. 267 bis 275; vergl. auch sein „Handbuch der Kugelfunktionen", 2. Aufl., Bd. 1, 1878, S. 50 bis 52. Ein zweiter Beweis rührt von *Hermite* her, vergl. „Sur un théorème d'*Eisenstein*", Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 7, 1876, S. 173—175 und „Cours de la faculté des sciences", 4. Aufl., 1891, S. 195—197. Ein dritter Beweis findet sich bei Herrn *Suták*, „Ein neuer Beweis eines *Eisenstein*schen Satzes", mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 12, 1894, S. 1—10.

mit rationalen Zahlenkoeffizienten a_{rs} genügt. Er sagt aus: Wenn die Reihe (1.) einer Gleichung von der Gestalt (2.) genügt, so gibt es eine ganze Zahl k derart, daß die Koeffizienten aller Potenzen von z in der durch die Substitution $x = kz$ aus (1.) hervorgehenden Reihe

$$y = c_0 + c_1 k \cdot z + c_2 k^2 \cdot z^2 + \cdots + c_n k^n \cdot z^n + \cdots,$$

d. h. $c_1 k$, $c_2 k^2, \ldots, c_n k^n, \ldots$ ganze Zahlen sind.

Daraus folgt insbesondere,*) daß die c_n, in reduzierter Form geschrieben, nur endlich viele verschiedene Primzahlen in den Nennern enthalten können. Es gibt also eine Schranke N, so daß kein Nenner eines (in reduzierter Form geschriebenen) c_n durch eine Primzahl $> N$ teilbar ist.

*Heine***) hat zum *Eisenstein*schen Satz eine Ergänzung hinzugefügt, welche leicht beweisbar ist, aber jedenfalls von *Eisenstein* noch nicht ausgesprochen war. *Heine* zeigte: Wenn eine Potenzreihe (1.) mit rationalen Zahlenkoeffizienten einer algebraischen Gleichung

$$g(x, y) = \sum_{r=0}^{\varrho} \sum_{s=0}^{\sigma} \gamma_{rs} x^r y^s = 0$$

mit beliebigen, nicht notwendig rationalen Zahlenkoeffizienten γ_{rs} genügt, so befriedigt sie auch eine Gleichung der Form (2.) mit rationalen Zahlenkoeffizienten. Daraus durfte dann *Heine* schließen: Das *Eisenstein*sche Kriterium liefert eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Potenzreihe mit rationalen Zahlenkoeffizienten Element einer algebraischen Funktion ist.

Von diesem Satze scheint noch keine Anwendung bei Problemen gemacht worden zu sein, in denen ermittelt werden soll, wann Transzendenten gewisser Art, insbesondere durch Differentialgleichungen definierte Funktionen in algebraische Funktionen degenerieren. Der Zweck der folgen-

---

*) Diesen Spezialfall hatte *Heine* schon in der Abhandlung bewiesen: „Der *Eisenstein*sche Satz über Reihen-Entwicklung algebraischer Funktionen", dieses Journal, Bd. 45, 1853, S. 285—302. Einen Beweis des Spezialfalles siehe auch bei Herrn *Teixeira*, „Sur le théorème d'*Eisenstein*", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 3, 1886, S. 389—390 und „Über den *Eisenstein*schen Satz", Archiv der Mathematik und Physik, Ser. 2, Bd. 3, 1886, S. 315—317.

**) Vergl. die auf S. 92 zitierte Abhandlung, S. 269—271, und das „Handbuch", S. 52—53.

den Untersuchungen ist, eine solche Anwendung durchzuführen. Ich werde zeigen, daß es möglich ist, den *Eisenstein*schen Satz mit dem Problem in Verbindung zu bringen, welches zuerst von Herrn *Schwarz* in seiner bekannten Arbeit*) gelöst worden ist: „Über diejenigen Fälle, in welchen die *Gauß*sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt".

Die folgende Untersuchung dürfte schon mit Rücksicht auf die von *Eisenstein***) gemachte, aber nicht mehr ausgeführte***) Ankündigung von Interesse sein: „Die wichtigsten Anwendungen der so erhaltenen Sätze habe ich auf Fälle gemacht, in denen die algebraischen Funktionen als Integrale von Differentialgleichungen definiert werden, und diese Differentialgleichungen für einfache Reihenentwicklung geeignet sind, während die vielleicht sehr komplizierte Darstellung in endlicher Form ganz unbekannt bleibt und für diesen Zweck auch wirklich ganz aus dem Spiele gelassen werden kann. Das Einzelne der hierauf bezüglichen Untersuchungen mag für eine künftige Mitteilung vorbehalten bleiben."

Die Entwicklung der Theorie der automorphen Funktionen hat gezeigt, daß die Bedeutung der *Schwarz*schen Arbeit nicht nur in der Ermittlung derjenigen Fälle besteht, in denen die hypergeometrische Funktion algebraisch ist, sondern namentlich in dem dort ausgeführten Studium des allgemeinen Falles, daß sie transzendent ist. Wenn dagegen im Folgenden auf direktem Wege — d. h. ohne Benutzung des *Schwarz*schen Hilfsmittels der Kreisbogendreiecke oder der von späteren Autoren†) herangezogenen Hilfsmittel — der Transzendenzbeweis in einer umfassenden Klasse von Fällen geführt wird, so beansprucht die dabei angewendete Methode nicht,

*) Dieses Journal, Bd. 75, 1873, S. 292—335; gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 2, 1890, S. 211—259.

**) a. a. O., S. 442.

***) *Eisenstein* starb bald nach dem Erscheinen seiner Mitteilung.

†) Vergl. insbesondere *Fuchs*, „Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie", dieses Journal, Bd. 81, 1876, S. 136; *Klein*, „Über lineare Differentialgleichungen", Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen, Heft 8, 1876, S. 182—186; *Goursat*, „Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 2, Bd. 10, 1881, Suppl., S. 46—65.

mehr als den bloßen Transzendenzbeweis zu liefern. Es ist jedenfalls bemerkenswert, daß das vorliegende funktionentheoretische Problem, welches ja bekanntlich mit den verschiedensten geometrischen, analytischen und algebraischen Sätzen in Zusammenhang gebracht werden kann, auch zur Anwendung eines rein zahlentheoretischen Satzes Anlaß gibt, wie*) des Satzes vom Vorhandensein unendlich vieler Primzahlen in der arithmetischen Progression $tm+1$.

Ich mache im Folgenden von zwei Tatsachen Gebrauch, welche sehr leicht festgestellt werden können und z. B. von Herrn *Schwarz* bei Beginn seiner Untersuchung begründet werden:

I.**) Wenn keine der vier Größen $\alpha, \beta, \gamma-\alpha$ und $\gamma-\beta$ eine ganze rationale Zahl ist, so ist entweder das allgemeine Integral der *Gauß*schen Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

algebraisch, oder es ist kein partikuläres Integral derselben algebraisch.

II.***) Wenn das allgemeine Integral der *Gauß*schen Differentialgleichung algebraisch ist, so sind α, β und γ rational.

Wenn also keine der Zahlen α, β, $\gamma-\alpha$ und $\gamma-\beta$ ganz ist und die Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ \ldots\ n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n$$

algebraisch ist, so hat sie rationale Zahlenkoeffizienten.

Ich werde nun zeigen, daß sich aus dem *Eisenstein-Heine*schen Satz der Transzendenzbeweis in dem einen der beiden *Schwarz*schen Hauptfälle direkt herleiten läßt, und zwar in dem Fall, welcher unter Anwendung der a. a. O. angestellten Untersuchungen über die konforme Abbildung der Kreisbogendreiecke so definiert†) ist: Die Winkelsumme des reduzierten

*) Siehe unten, S. 98.

**) a. a. O., S. 293—294 bezw. 213—214.

***) a. a. O., S. 297—298 bezw. 217—218.

†) a. a. O., S. 317 ff. bezw. 239 ff.

Kreisbogendreiecks ist kleiner als π. Ohne Bezugnahme auf jene Theorie erklärt, bedeutet diese Voraussetzung:*)

Es werde

$$|1-\gamma| = \lambda, \quad |\alpha-\beta| = \mu, \quad |\gamma-\alpha-\beta| = \nu$$

gesetzt und es werde angenommen, daß keine der — reellen — Zahlen

$$\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma-\alpha, \gamma-\beta$$

ganz ist. Es seien λ', μ', ν' die absoluten Beträge der modulo 2 absolut kleinsten Reste von λ, μ, ν; es bedeute λ'', μ'', ν'' dasjenige der vier Wertsysteme

$$\begin{array}{ccc} \lambda', & \mu', & \nu'; \\ \lambda', & 1-\mu', & 1-\nu'; \\ 1-\lambda', & \mu', & 1-\nu'; \\ 1-\lambda', & 1-\mu', & \nu', \end{array}$$

welches die kleinste Summe hat. Dieses System möge so beschaffen sein, daß

$$\lambda''+\mu''+\nu'' < 1 \tag{3.}$$

ist.

Ich werde nun im Folgenden mit Hilfe des *Eisenstein-Heine*schen Satzes beweisen, daß unter diesen Annahmen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ Element einer transzendenten Funktion ist.

§ 1.

Gesetzt, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sei algebraisch, während keine der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma-\alpha, \gamma-\beta$ ganz ist; dann sind nach I. und II. α, β und γ rational; es möge $m > 0$ ein gemeinsames Vielfaches der Nenner von α, β, γ sein und

$$\alpha = \frac{a}{m}, \quad \beta = \frac{b}{m}, \quad \gamma = \frac{c}{m};$$

dann ist keine der ganzen Zahlen a, b und c durch m teilbar, falls auch $\lambda = |1-\gamma|$ als nicht ganz vorausgesetzt wird. In

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ist dann

*) a. a. O., S. 301, 312, 314 und 221, 234, 236.

$$c_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{1\cdot 2\quad\dots(1+n)\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)}$$

$$= \frac{\frac{a}{m}\left(\frac{a}{m}+1\right)\dots\left(\frac{a}{m}+n\right)\frac{b}{m}\left(\frac{b}{m}+1\right)\dots\left(\frac{b}{m}+n\right)}{1\cdot 2\quad\dots(1+n)\quad\frac{c}{m}\left(\frac{c}{m}+1\right)\dots\left(\frac{c}{m}+n\right)}$$

$$= \frac{a(a+m)\dots(a+nm)\,b(b+m)\dots(b+nm)}{m\cdot 2m\,\dots(m+nm)\cdot c(c+m)\dots(c+nm)}.$$

Da $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ algebraisch ist, so ist nach dem *Eisenstein-Heine*schen Satze in seiner speziellen Fassung*) jede Primzahl p oberhalb einer gewissen Schranke N so beschaffen, daß sie den Zähler

$$a(a+m)\dots(a+nm)\,b(b+m)\dots(b+nm)$$

jedes c_{n+1} mindestens so oft teilt als den zugehörigen Nenner

$$m\cdot 2m\,\dots(m+nm)\,c(c+m)\dots(c+nm).$$

Ich nehme — aus nachher ersichtlichen Gründen — N oberhalb der vier Zahlen m, $2|a|$, $2|b|$, $2|c|$ gewählt an, was erlaubt ist.

Aus dem Vorigen folgt insbesondere: Wenn p eine Primzahl $> N$ und

$$c+nm \equiv 0 \pmod p$$

ist, so ist mindestens eine der beiden Kongruenzen

$$a(a+m)(a+2m)\dots(a+nm) \equiv 0 \pmod p$$

und

$$b(b+m)(b+2m)\dots(b+nm) \equiv 0 \pmod p$$

erfüllt; mit anderen Worten: Wenn x_0 die kleinste positive Wurzel der (wegen $p>N>m$ lösbaren und wegen $p>N>2|a|>|a|$ nicht die Wurzel 0 besitzenden) Kongruenz

$$(4.)\qquad a+xm \equiv 0 \pmod p$$

und ebenso y_0 die kleinste positive Wurzel der Kongruenz

$$(5.)\qquad b+ym \equiv 0 \pmod p$$

bezeichnet, so ist mindestens eine der beiden Ungleichheitsbedingungen

$$x_0 \leqq n, \quad y_0 \leqq n$$

erfüllt.

---

*) Vergl. oben, S. 93.

Daraus folgt: Ist p eine Primzahl $>N$ und sind x_0, y_0 und z_0 die kleinsten positiven Wurzeln der Kongruenzen (4.), (5.) und

$$(6.) \qquad c+zm \equiv 0 \pmod{p},$$

so besteht mindestens eine der beiden Ungleichheitsbedingungen

$$x_0 \leqq z_0, \quad y_0 \leqq z_0.$$

§ 2.

Nun gibt es bekanntlich unendlich viele Primzahlen der Form $tm+1$; dieser Spezialfall des *Dirichlet*schen Satzes über die arithmetische Progression ist nach *Serret**) sogar mit elementaren Mitteln beweisbar. Also gibt es oberhalb N eine Primzahl

$$p = t_0 m + 1;$$

auf diese werde das in § 1 gefundene Resultat angewendet.

Es können zunächst die durch die Kongruenzen (4.), (5.) und (6.) eindeutig bestimmten Zahlen x_0, y_0 und z_0 durch p ausgedrückt werden. Es genügt offenbar die Zahl $x = at_0$ der Kongruenz (4.), da

$$a+at_0 \cdot m = a(1+t_0 m) = ap \equiv 0 \pmod{p}$$

ist. Also ist x_0 der kleinste positive Rest von

$$at_0 = a\frac{p-1}{m}$$

modulo p. Es bezeichne a_0 (bezw. nachher b_0 und c_0) den kleinsten positiven Rest von a (bezw. b und c) modulo m, so daß also

$$1 \leqq a_0 \leqq m-1$$

ist, und es werde die ganze Zahl

$$\frac{a-a_0}{m} = A$$

gesetzt; dann ist

$$a\frac{p-1}{m} = a\frac{p}{m} - \frac{a}{m} = (a_0+mA)\frac{p}{m} - \frac{a}{m} = a_0\frac{p}{m} - \frac{a}{m} + pA \equiv a_0\frac{p}{m} - \frac{a}{m} \pmod{p}.$$

---

*) „Note sur un théorème de la théorie des nombres", Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 1, Bd. 17, 1852, S. 186—189.

Nun ist die rechte Seite dieser Kongruenz zwischen 0 und p gelegen, stellt also die gesuchte Zahl x_0 dar; in der Tat ist wegen $p > N > 2|a| > |a|$

$$a_0 \frac{p}{m} - \frac{a}{m} \leqq (m-1)\frac{p}{m} + \frac{|a|}{m} = p - \frac{p-|a|}{m} < p$$

und

$$a_0 \frac{p}{m} - \frac{a}{m} \geqq \frac{p}{m} - \frac{|a|}{m} = \frac{p-|a|}{m} > 0.$$

Es ist also

$$x_0 = a_0 \frac{p}{m} - \frac{a}{m} \tag{7.}$$

und ebenso

$$y_0 = b_0 \frac{p}{m} - \frac{b}{m}, \tag{8.}$$

$$z_0 = c_0 \frac{p}{m} - \frac{c}{m}. \tag{9.}$$

Es mußte nun wenigstens eine der beiden Bedingungen

$$x_0 \leqq z_0, \quad y_0 \leqq z_0$$

erfüllt sein; daraus folgt mit Hilfe der Ausdrücke (7.), (8.) und (9.), daß mindestens eine der beiden Ungleichheitsbedingungen

$$a_0 \leqq c_0, \quad b_0 \leqq c_0$$

besteht; denn wäre zugleich

$$a_0 > c_0, \quad b_0 > c_0,$$

so wäre wegen

$$\frac{p}{2m} > \frac{N}{2m} > \frac{|a|}{m}, \quad \frac{p}{2m} > \frac{|b|}{m}, \quad \frac{p}{2m} > \frac{|c|}{m}:$$

$$x_0 - z_0 = (a_0 - c_0)\frac{p}{m} - \frac{a}{m} + \frac{c}{m} \geqq \frac{p}{m} - \frac{|a|}{m} - \frac{|c|}{m} > \frac{p}{m} - \frac{p}{2m} - \frac{p}{2m} = 0$$

und

$$y_0 - z_0 = (b_0 - c_0)\frac{p}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} \geqq \frac{p}{m} - \frac{|b|}{m} - \frac{|c|}{m} > \frac{p}{m} - \frac{p}{2m} - \frac{p}{2m} = 0.$$

Also ist von den beiden Zahlen a_0 und b_0 mindestens eine $\leqq c_0$. Das Gleichheitszeichen ist hier ausgeschlossen, da nach Voraussetzung weder $\gamma - \alpha$ noch $\gamma - \beta$ ganz ist; daher ist mindestens eine der beiden Zahlen a_0 und b_0 unterhalb c_0 gelegen; wegen der Symmetrie der *Gaußschen* Differentialgleichung in α und β kann angenommen werden, daß etwa $b_0 < c_0$ ist.

§ 3.

Da nach I. auch das allgemeine Integral der *Gaußschen* Differentialgleichung algebraisch ist, so ist auch das zweite Integral des zu $x=0$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems, nämlich

$$x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$$

algebraisch, also auch $F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$, und das in § 2 Gefundene kann auf diese hypergeometrische Reihe angewendet werden. Es ist, wenn

$$\alpha+1-\gamma=\alpha',\ \beta+1-\gamma=\beta',\ 2-\gamma=\gamma'$$

gesetzt wird, keine der vier Zahlen α', β', $\gamma'-\alpha'$ und $\gamma'-\beta'$ ganz; es ist nämlich

$$\alpha'=1+\frac{a-c}{m},\ \beta'=1+\frac{b-c}{m},\ \gamma'=2+\frac{-c}{m}.$$

Wird nun analog wie oben

$$\alpha'=\frac{a'}{m},\ \beta'=\frac{b'}{m},\ \gamma'=\frac{c'}{m}$$

gesetzt und werden unter a_0', b_0', c_0' die kleinsten positiven Reste von a', b', c' modulo m verstanden, so ist

$$a'=m+a-c,\ b'=m+b-c,\ c'=2m-c$$

und

$$(10.)\qquad a_0'=\begin{cases} a_0-c_0 \text{ für } a_0>c_0 \\ m+a_0-c_0 \text{ für } a_0<c_0,\end{cases}\qquad b_0'=m+b_0-c_0,\ c_0'=m-c_0.$$

Die Anwendung des in § 2 gefundenen Resultates auf die neue hypergeometrische Reihe $F(\alpha',\beta',\gamma',x)$ ergibt: Es besteht mindestens eine der beiden Ungleichheitsbedingungen

$$a_0'<c_0',\ b_0'<c_0'.$$

Da nun

$$b_0'=m+b_0-c_0>m-c_0=c_0'$$

und

$$m+a_0-c_0>m-c_0=c_0'$$

ist, so muß a_0' den ersten der beiden in (10.) möglichen Werte haben, d. h. es muß $a_0>c_0$ sein.

Folglich ist

$$b_0 < c_0 < a_0$$

und daher

$$\frac{b_0}{m} < \frac{c_0}{m} < \frac{a_0}{m}.$$

Diese drei Brüche stellen nun die kleinsten positiven Reste $\beta_0, \gamma_0, \alpha_0$ der rationalen Zahlen

$$\beta = \frac{b}{m}, \quad \gamma = \frac{c}{m}, \quad \alpha = \frac{a}{m}$$

modulo 1 dar, und es hat sich also ergeben, daß

$$\beta_0 < \gamma_0 < \alpha_0$$

ist.

§ 4.

Wird

$$\alpha = A + \alpha_0, \quad \beta = B + \beta_0, \quad \gamma = C + \gamma_0$$

gesetzt, wo also A, B, C ganze Zahlen sind und

$$0 < \beta_0 < \gamma_0 < \alpha_0 < 1 \tag{11.}$$

ist, so ist nach der Definition der Zahlen λ, μ, ν

$$\lambda = |1 - C - \gamma_0|, \quad \mu = |A - B + \alpha_0 - \beta_0|, \quad \nu = |C - A - B + \gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0|.$$

Um die Zahlen λ', μ', ν' (modulo 2 absolut kleinste Reste von λ, μ, ν) daraus herzuleiten, sind vier Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{cases} C \equiv 0, & A - B \equiv 0 \pmod 2; \\ C \equiv 0, & A - B \equiv 1 \pmod 2; \\ C \equiv 1, & A - B \equiv 0 \pmod 2; \\ C \equiv 1, & A - B \equiv 1 \pmod 2). \end{cases}$$

In diesen vier Fällen ist beziehlich λ', μ', ν' gleich dem System

$$\begin{cases} 1 - \gamma_0, & \alpha_0 - \beta_0, & \alpha_0 - \gamma_0 + \beta_0; \\ 1 - \gamma_0, & 1 - \alpha_0 + \beta_0, & 1 - \alpha_0 + \gamma_0 - \beta_0; \\ \gamma_0, & \alpha_0 - \beta_0, & 1 - \alpha_0 + \gamma_0 - \beta_0; \\ \gamma_0, & 1 - \alpha_0 + \beta_0, & \alpha_0 - \gamma_0 + \beta_0. \end{cases} \tag{12.}$$

Das System λ'', μ'', ν'' entsteht aus λ', μ', ν', indem keine oder zwei der Zahlen λ', μ', ν' durch ihre Komplemente zu 1 ersetzt werden; da im obigen Schema (12.) durch jene Transformation aus jeder Zeile gerade die drei anderen hervorgehen, ist λ'', μ'', ν'' jedenfalls eines der vier Systeme, welche sich für λ', μ', ν' ergeben hatten.

Also ist, wie man durch Addition der entsprechenden Größen erhält,

$$\lambda''+\mu''+\nu'' \begin{cases} = 1+2(\alpha_0-\gamma_0) \text{ oder} \\ = 3-2\alpha_0 = 1+2(1-\alpha_0) \text{ oder} \\ = 1+2(\gamma_0-\beta_0) \text{ oder} \\ = 1+2\beta_0; \end{cases}$$

in jedem dieser vier Fälle ist nach (11.)

$$\lambda''+\mu''+\nu''>1.$$

Wenn also, wie in der Einleitung angenommen wurde,

$$\lambda''+\mu''+\nu''<1 \tag{3.}$$

ist, so ist $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ Element einer transzendenten Funktion, was zu beweisen war.