Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen.

(Von Herrn *G. Frobenius.*)

Wenn alle Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung λ^{ter} Ordnung in der Umgebung einer bestimmten Stelle, für die wir der Einfachheit halber den Nullpunkt der Constructionsebene wählen wollen, die Eigenschaft haben, mit einer gewissen Potenz der Variablen x multiplicirt, endlich zu bleiben, so muss dieselbe, wie zuerst Herr *Fuchs* (dieses Journal, Bd. 66, S. 146 und Bd. 68, 360) und nachher auf einem kürzeren Wege Herr *Thomé* (dieses Journal Bd. 74, S. 200) bewiesen hat, für alle Werthe von x, die eine gewisse Grenze nicht überschreiten, die Gestalt

$$p(x)x^\lambda y^{(\lambda)} + p_1(x)x^{\lambda-1}y^{(\lambda-1)} + \cdots + p_\lambda(x)y = 0$$

haben, wo $y^{(\varkappa)}$ die $\varkappa^{\text{te}}$ Ableitung von y nach x bedeutet, $p(x)$, $p_1(x)$, ... $p_\lambda(x)$ nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende convergente Reihen sind, und $p(x)$ für $x=0$ nicht verschwindet. Hat umgekehrt eine lineare Differentialgleichung die angegebene Form, so werden auch alle ihre Integrale, mit einer bestimmten Potenz von x multiplicirt, endlich und haben daher in Folge der allgemeinen Gestalt der Integrale linearer Differentialgleichungen (vergl. d. Abh. d. Herrn *Fuchs,* dieses Journal Bd. 66, S. 136) in der Umgebung des Nullpunktes die Form

$$y = x^\varrho \sum_\nu {}_0^\infty \left(g_\nu^{(\varkappa)} + g_\nu^{(\varkappa-1)}\log x + g_\nu^{(\varkappa-2)}(\log x)^2 + \cdots + g_\nu(\log x)^\varkappa\right)x^\nu,$$

wo ϱ eine Wurzel einer gewissen, aus den Coefficienten der Differentialgleichung leicht zu bildenden Gleichung λ^{ten} Grades $f(\varrho)=0$ ist, und die Grössen $g_0^{(\varkappa)}$, $g_0^{(\varkappa-1)}$, ... g_0 nicht sämmtlich verschwinden.

Um zu zeigen, dass den λ Wurzeln dieser Gleichung wirklich λ von einander unabhängige Integrale entsprechen, vertheilt Herr *Fuchs* (dieses Journal, Bd. 68, S. 362) dieselben in Gruppen, in der Weise, dass er alle diejenigen Wurzeln zu einer Gruppe zusammenfasst, die sich nur um reelle ganze Zahlen unterscheiden. Sind dann ϱ_0, ϱ_1, ... ϱ_μ die Wurzeln einer Gruppe, so geordnet, dass, wenn $\alpha < \beta$ ist, $\varrho_\alpha - \varrho_\beta$ eine positive ganze Zahl ist, so beweist er zunächst, dass der Wurzel ϱ_0 ein Integral von der Form

$$y_0 = x^{\varrho_0} \Sigma g_\nu x^\nu$$

entspricht. Zu dem Zwecke vergleicht er die gegebene Differentialgleichung mit einer andern, die durch eine Reihe von der Form

$$\Sigma c_\nu x^\nu$$

befriedigt wird, in welcher c_ν dem absoluten Betrage nach grösser als g_ν ist. Indem er dann mittelst der letzteren Differentialgleichung die Berechnung der Coefficienten c_ν wirklich ausführt und aus ihren Werthen den Radius R des Convergenzbereiches der zweiten Reihe bestimmt, schliesst er, dass wenigstens innerhalb des mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises auch die Reihe für y_0 convergent ist. Nun macht er in der gegebenen Differentialgleichung die Substitution

$$y = y_0 \int z\, dx$$

und wendet auf die lineare Differentialgleichung $(\lambda-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die er für z findet, dieselben Schlüsse an.

Diese Beweismethode ist dieselbe, welche Herr *Weierstrass* benutzt hat, um allgemein die Existenz der Integrale für alle algebraischen Differentialgleichungen nachzuweisen. Daher war zu erwarten, dass bei den linearen einfachere Methoden zum Ziele führen würden. Indem ich diesen Gedanken verfolgte, fand ich, dass sich bei irgend einer Differentialgleichung von der oben angegebenen Form die Coefficienten der sie befriedigenden Reihen ebenso einfach berechnen lassen, und dass aus ihren Werthen der Convergenzbereich dieser Reihen mit wenig grösserer Mühe bestimmt werden kann, wie bei der speciellen Differentialgleichung, mit welcher Herr *Fuchs* die allgemeine vergleicht. Auch zeigte sich, dass sich auf diesem Wege die den Wurzeln einer Gruppe entsprechenden Integrale, in deren Entwickelungen meist Logarithmen auftreten, ohne Benutzung von Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung direct berechnen lassen, und dass auch bei diesen Reihen aus der Form der Coefficienten die Ausdehnung des Convergenzbezirkes mit Leichtigkeit erschlossen werden kann.

§. 1.

Wenn über die Coefficienten der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad p(x)x^\lambda y^{(\lambda)} + p_1(x)x^{\lambda-1}y^{(\lambda-1)} + \cdots + p_\lambda(x)y = 0,$$

deren linke Seite wir mit $P(y)$ bezeichnen wollen, die oben gemachten Annahmen gelten, denen zufolge alle ihre Integrale in der Umgebung des Nullpunktes, mit einer bestimmten Potenz von x multiplicirt, endlich werden, so bleiben diese Voraussetzungen auch bestehen, wenn man die Gleichung durch $p(x)$ dividirt. Zur Vereinfachung der Beweise nehmen wir daher zunächst an, dass $p(x) = 1$ ist. Wir setzen in die Differentialgleichung (1.) für y eine Reihe von der Form

$$(2.)\qquad g(x,\varrho) = \Sigma g_\nu x^{\varrho+\nu}$$

ein. Der Summationsbuchstabe ν durchläuft hier und im Folgenden, wenn die Grenzen der Summation nicht ausdrücklich angegeben sind, die Zahlen von 0 bis ∞. Man übersieht zunächst leicht, dass

$$P(\Sigma g_\nu x^{\varrho+\nu}) = \Sigma g_\nu P(x^{\varrho+\nu})$$

ist. Nun ist aber

$$P(x^\varrho) = x^\varrho f(x,\varrho),$$

wenn

$$(3.)\quad f(x,\varrho) = \varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-\lambda+1)p(x)+\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-\lambda+2)p_1(x)+\dots+p_\lambda(x)$$

gesetzt wird. Folglich ist

$$P(g(x,\varrho)) = \Sigma g_\nu f(x,\varrho+\nu)x^{\varrho+\nu}.$$

Da sich $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... $p_\lambda(x)$ in convergente, nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihen entwickeln lassen, so convergirt auch die Reihe

$$(4.)\qquad f(x,\varrho) = \Sigma f_\nu(\varrho)x^\nu,$$

deren Coefficienten ganze Functionen höchstens λ^{ten} Grades von ϱ sind. Daher nimmt die linke Seite der Differentialgleichung (1.), wenn für y die Function $g(x,\varrho)$ eingesetzt wird, die Gestalt

$$\Sigma(g_\nu f(\varrho+\nu)+g_{\nu-1}f_1(\varrho+\nu-1)+\dots+g_1 f_{\nu-1}(\varrho+1)+gf_\nu(\varrho))x^{\varrho+\nu}$$

an. (Vergl. d. Abh. des Herrn *Fuchs* dieses Journal Bd. 68 S. 375.) Soll also die Reihe (2.) die Differentialgleichung befriedigen, so müssen ihre Coefficienten durch die Recursionsformeln

$$(5.)\qquad \begin{cases} gf(\varrho) = 0, \\ g_1 f(\varrho+1)+gf_1(\varrho) = 0, \qquad \text{u. s. w.,} \\ g_\nu f(\varrho+\nu)+g_{\nu-1}f_1(\varrho+\nu-1)+\dots+g_1 f_{\nu-1}(\varrho+1)+gf_\nu(\varrho) = 0 \end{cases}$$

bestimmt werden. Nehmen wir an, dass gx^ϱ das wirkliche Anfangsglied der

Reihe (2.) ist, also g von Null verschieden ist, so muss ϱ, weil $gf(\varrho) = 1$ ist, eine Wurzel der Gleichung λ^{ten} Grades $f(\varrho) = 0$ sein. Da es aber vortheilhaft ist, wenn man ϱ zunächst als variabel betrachten kann, so wollen wir vorläufig von der Gleichung $gf(\varrho) = 0$ absehen, und indem wir unter g eine willkürliche Function von ϱ verstehen, g_1, g_2, ... mittelst der Formel (5.) als Functionen von ϱ bestimmen. Man erkennt leicht, dass $g_\nu(\varrho)$ von der Form

$$(6.)\qquad g_\nu(\varrho) = \frac{g(\varrho)h_\nu(\varrho)}{f(\varrho+1)f(\varrho+2)\dots f(\varrho+\nu)}$$

ist, wo $h_\nu(\varrho)$ eine ganze Function von ϱ bedeutet. Für diese findet man durch Auflösung des Gleichungssystems, das man aus der Formel (5.) erhält, indem man für ν der Reihe nach die Zahlen 1, 2, ... ν setzt, den Werth

$$(7.)\qquad (-1)^\nu . h_\nu(\varrho) = \begin{vmatrix} f_1(\varrho+\nu-1) & f_2(\varrho+\nu-2) & \dots & f_{\nu-1}(\varrho+1) & f_\nu\ (\varrho) \\ f\ (\varrho+\nu-1) & f_1(\varrho+\nu-2) & \dots & f_{\nu-2}(\varrho+1) & f_{\nu-1}(\varrho) \\ 0 & f\ (\varrho+\nu-2) & \dots & f_{\nu-3}(\varrho+1) & f_{\nu-2}(\varrho) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & f\ (\varrho+1) & f_1\ (\varrho) \end{vmatrix}.$$

Wir beschränken die Veränderlichkeit von ϱ auf die Umgebungen der Wurzeln der Gleichung $f(\varrho) = 0$. Diese Bereiche können wir, wie leicht zu sehen, da die Wurzeln der Gleichung $f(\varrho) = 0$ alle dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegen, so klein wählen, dass die Nenner der rationalen Functionen $g_\nu(\varrho)$ in dem Gebiete der Variabeln ϱ nur für Wurzeln der Gleichung $f(\varrho) = 0$ verschwinden. Aber auch letzteres kann man durch eine passende Verfügung über die willkürliche Function $g(\varrho)$ verhindern. Werden nämlich die Wurzeln der Gleichung $f(\varrho) = 0$ auf die oben angegebene Weise in Gruppen vertheilt, und ist das Maximum der Differenz zweier Wurzeln irgend einer Gruppe gleich ε, so braucht man nur

$$(8.)\qquad g(\varrho) = f(\varrho+1)f(\varrho+2)\dots f(\varrho+\varepsilon)\,C(\varrho)$$

zu setzen, wo $\varphi(\varrho)$ eine willkürliche Function von ϱ ist.

Alsdann sind die Functionen $g_\nu(\varrho)$ für alle in Betracht kommenden Werthe von ϱ endlich, und wenn die Reihe (2.) convergent ist, so ist $y = g(x, \varrho)$ ein Integral der Differentialgleichung

$$P(y) = f(\varrho)g(\varrho)x^\varrho.$$

Es kommt nun zunächst darauf an, die Convergenz der Reihe (2.) nachzuweisen.

§. 2.

Wenn $\nu > \varepsilon$ ist, so kann $f(\varrho+\nu+1)$ für keinen Werth im Gebiete der Veränderlichen ϱ verschwinden, und daher ergiebt sich aus der Formel (5.) die Gleichung

$$g_{\nu+1} = -\frac{1}{f(\varrho+\nu+1)}(g_\nu f_1(\varrho+\nu)+g_{\nu-1}f_2(\varrho+\nu-1)+\cdots+g f_{\nu+1}(\varrho)).$$

Bezeichnet man die absoluten Beträge der Functionen $f_\nu(\varrho)$ und $g_\nu(\varrho)$ mit $F_\nu(\varrho)$ und $G_\nu(\varrho)$, so folgt daraus, weil der absolute Werth einer Summe nicht grösser ist, als die Summe der absoluten Werthe der Summanden,

$$G_{\nu+1} \leqq \frac{1}{F(\varrho+\nu+1)}(G_\nu F_1(\varrho+\nu)+G_{\nu-1}F_2(\varrho+\nu-1)+\cdots+G F_{\nu+1}(\varrho)).$$

Sei R der Radius eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, der beliebig wenig kleiner ist, als der, innerhalb dessen $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... $p_\lambda(x)$ sämmtlich convergiren. Dann sind die Reihen

$$f(x,\varrho) = \Sigma f_\nu(\varrho)x^\nu$$

und

$$f'(x,\varrho) = \Sigma(\nu+1)f_{\nu+1}(\varrho)x^\nu$$

ebenfalls für alle Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach nicht grösser als R sind, convergent. Wenn daher $M(\varrho)$ der grösste Werth ist, den der absolute Betrag von $f'(x,\varrho)$ auf der Peripherie des mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises annimmt, so ist nach einem bekannten Satze

$$F_{\nu+1}(\varrho) < \frac{1}{\nu+1}M(\varrho)R^{-\nu} < M(\varrho)R^{-\nu}$$

und folglich

$$G_{\nu+1} < \frac{1}{F(\varrho+\nu+1)}(G_\nu M(\varrho+\nu)+G_{\nu-1}M(\varrho+\nu-1)R^{-1}+\cdots+G M(\varrho)R^{-\nu}).$$

Bezeichnet man die rechte Seite dieser Ungleichheit mit $a_{\nu+1}$, so ist

$$a_{\nu+1} = \frac{G_\nu M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)}+\frac{a_\nu F(\varrho+\nu)}{RF(\varrho+\nu+1)}$$

oder da $G_\nu < a_\nu$ ist,

$$a_{\nu+1} < a_\nu\left(\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)}+\frac{1}{R}\,\frac{F(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)}\right).$$

Werden also die Grössen $b_\nu(\nu > \varepsilon)$ mittelst der Recursionsformel

$$b_{\nu+1} = b_\nu\left(\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)}+\frac{1}{R}\,\frac{F(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)}\right)$$

berechnet, so ist bei passender Verfügung über b_e

$$G_\nu < a_\nu < b_\nu.$$

Da aber $f(\varrho)$ eine ganze Function λ^{ten} Grades von ϱ ist, so nähert sich bei wachsendem ν der Quotient $\frac{f(\varrho+\nu)}{f(\varrho+\nu+1)}$ und folglich auch sein absoluter Betrag $\frac{F(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)}$ der Grenze Eins. Weil ferner $p(x)=1$ angenommen, also $f'(x,\varrho)$ eine ganze Function höchstens $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grades von ϱ ist, und $M(\varrho)$ das Maximum dieser Function für die Werthe von x, deren absoluter Betrag gleich R ist, bedeutet, so ist leicht zu sehen, dass sich, wie auch am Ende dieses Paragraphen noch in aller Strenge erwiesen werden soll, $\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)}$ bei wachsendem ν der Grenze Null nähert. Daher ist

$$\lim \frac{b_{\nu+1}}{b_\nu} = \frac{1}{R},$$

und mithin convergirt die Reihe $\Sigma b_\nu x^\nu$ und folglich auch

$$(2.)\qquad g(x,\varrho) = \Sigma g_\nu(\varrho) x^{\varrho+\nu}$$

innerhalb des mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises.

Für die Folgerungen, die wir im nächsten Paragraphen aus dem eben gewonnenen Resultate ziehen wollen, ist es noch wichtig zu zeigen, dass die Reihe (2.) für alle in Betracht kommenden Werthe von ϱ gleichmässig convergirt, dass sich also, wenn δ eine beliebig gegebene kleine Grösse ist, eine endliche Zahl $\varkappa$ angeben lässt, so dass der absolute Betrag der Summe

$$\Sigma_\varkappa^\infty g_\nu(\varrho) x^{\varrho+\nu}$$

für alle gestatteten Werthe von ϱ kleiner als δ ist. Zu dem Zwecke bezeichnen wir den absoluten Betrag von ϱ mit σ und die Maxima der absoluten Beträge der Functionen $p_1'(x)$, $p_2'(x)$, ... $p_\lambda'(x)$ für die Werthe von x auf dem mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreise mit M_1, M_2, ... M_λ. Wird dann *)

$$\psi(\sigma) = \sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+\lambda-2)M_1+\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+\lambda-3)M_2+\dots+M_\lambda$$

gesetzt, so ist

$$M(\varrho) < \psi(\sigma).$$

*) Ich mache darauf aufmerksam, dass von hier an ϱ als unbeschränkt veränderlich aufzufassen ist, bis wieder $\varrho+\nu$ als Argument auftritt.

Ferner ist $f(\varrho)=\varrho^\lambda+(f(\varrho)-\varrho^\lambda)$, und da der absolute Betrag einer Summe nicht kleiner, als die Differenz der absoluten Beträge der Summanden ist, so ist

$$F(\varrho) \geqq \sigma^\lambda-[f(\varrho)-\varrho^\lambda],$$

wo für den in die eckigen Klammern eingeschlossenen Ausdruck sein absoluter Betrag zu setzen ist. Es ist aber

$$(9.)\quad f(\varrho) = \varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-\lambda+1)+p_1(0)\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-\lambda+2)+\dots+p_\lambda(0).$$

Werden also die absoluten Beträge von $p_1(0)$, $p_2(0)$, ... $p_\lambda(0)$ mit P_1, P_2, ... P_λ bezeichnet und wird

$$\varphi(\sigma) = \sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+\lambda-1)+P_1\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+\lambda-2)+\dots+P_\lambda-\sigma^\lambda$$

gesetzt, so ist

$$[f(\varrho)-\varrho^\lambda] < \varphi(\sigma)$$

und daher

$$F(\varrho) > \sigma^\lambda-\varphi(\sigma),$$

wenn nur σ gross genug gewählt wird, damit die rechte Seite dieser Ungleichheit positiv ist. Das ist aber stets zu erreichen, weil $\varphi(\sigma)$ nur vom $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grade ist.

Aus den entwickelten Ungleichheiten folgt

$$\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} < \frac{\psi[\varrho+\nu]}{[\varrho+\nu+1]^\lambda-\varphi[\varrho+\nu+1]}.$$

Nun ist aber

$$[\varrho+\nu]<\nu+\sigma \quad\text{und}\quad [\varrho+\nu+1]>\nu-\sigma,$$

und da die positiven Functionen $\psi(\sigma)$ und $\sigma^\lambda-\varphi(\sigma)$ von einer gewissen Grenze an beständig mit dem Argumente wachsen, so ist für hinreichend grosse Werthe von ν

$$\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} < \frac{\psi(\nu+\sigma)}{(\nu-\sigma)^\lambda-\varphi(\nu-\sigma)}.$$

Der letztere Ausdruck nähert sich, da der Zähler eine ganze Function niedrigeren Grades von ν ist als der Nenner, bei wachsendem ν der Grenze 0. Damit ist zunächst der oben versprochene Nachweis gegeben, dass $\lim\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu-1)}=0$ ist.

Da alle Wurzeln der Gleichung $f(\varrho)=0$ in einem endlichen Bereiche liegen und ϱ sich nur in den nächsten Umgebungen derselben bewegen darf, so ist σ stets kleiner als eine bestimmte Grösse τ. Wenn ν nur genügend gross ist, so ist

$$\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} < \frac{\psi(\nu+\tau)}{(\nu-\tau)^\lambda-\varphi(\nu-\tau)}$$

und

$$\frac{F(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} < \frac{(\nu+\tau)^\lambda+\varphi(\nu+\tau)}{(\nu-\tau)^\lambda-\varphi(\nu-\tau)}.$$

Haben diese Ungleichheiten von dem Werthe $\nu=\mu$ an Geltung, und werden die Grössen c_ν von $\nu=\mu$ an mittelst der Recursionsformel

$$c_{\nu+1} = c_\nu\left(\frac{\psi(\nu+\tau)}{(\nu-\tau)^\lambda-\varphi(\nu-\tau)}+\frac{1}{R}\,\frac{(\nu+\tau)^\lambda+\varphi(\nu+\tau)}{(\nu-\tau)^\lambda-\varphi(\nu-\tau)}\right)$$

berechnet, so ist, wenn $c_\mu > b_\mu$ gewählt wird, auch $b_\nu < c_\nu$. Da aber $\lim\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}=\frac{1}{R}$ ist, so muss, wenn r beliebig wenig kleiner als R ist, die Reihe $\Sigma c_\nu r^\nu$ convergent sein. Daher lässt sich eine endliche Anzahl von Gliedern so absondern, dass die Summe aller übrigen $\Sigma_\varkappa^\infty c_\nu r^\nu$ kleiner als eine beliebig gegebene Grösse $\delta r^{-\sigma}$ ist. Weil man $\varkappa>\mu$ wählen kann, so ist so ist dann um so mehr

$$[\Sigma_\varkappa^\infty g_\nu(\varrho)x^{\varrho+\nu}] < \delta$$

für sämmtliche Werthe von ϱ in den Umgebungen der Wurzeln der Gleichung $f(\varrho)=0$ und für die Punkte x innerhalb des mit dem Radius r um den Nullpunkt beschriebenen Kreises.

Mithin ist die Reihe (2.) für alle in Betracht kommenden Werthe von ϱ gleichmässig convergent und kann daher nach ϱ differentiirt werden, und zwar in der Weise, dass die Differentiation an ihren einzelnen Gliedern ausgeführt wird.

§. 3.

Seien $\varrho_0, \varrho_1, \dots \varrho_\mu$ die zu einer Gruppe gehörigen $\mu+1$ Wurzeln der Gleichung $f(\varrho)=0$, so geordnet, dass, wenn $\alpha<\beta$ ist, $\varrho_\alpha-\varrho_\beta$ eine positive ganze Zahl ist. Von diesen Grössen können einige unter einander gleich sein. Sind $\varrho_0, \varrho_\alpha, \varrho_\beta, \varrho_\gamma, \dots$ die unter einander verschiedenen Wurzeln der Gruppe, so ist $\varrho_0=\varrho_1=\dots=\varrho_{\alpha-1}$ eine αfache, $\varrho_\alpha=\varrho_{\alpha+1}=\dots=\varrho_{\beta-1}$ eine $(\beta-\alpha)$fache, $\varrho_\beta=\varrho_{\beta+1}=\dots=\varrho_{\gamma-1}$ eine $(\gamma-\beta)$fache u. s. w. Wurzel der Gleichung $f(\varrho)=0$. Da wir

$$(8.)\qquad g(\varrho) = f(\varrho+1)f(\varrho+2)\dots f(\varrho+\varepsilon)C(\varrho)$$

gesetzt haben, und $\varepsilon \geqq \varrho_0-\varrho_\mu$ ist, so ist $g(\varrho)$ für $\varrho=\varrho_0=\varrho_1=\dots=\varrho_{\alpha-1}$ von

Null verschieden und verschwindet für $\varrho = \varrho_\alpha = \varrho_{\alpha+1} = \cdots = \varrho_{\beta-1}$ von der α^{ten}, für $\varrho = \varrho_\beta = \varrho_{\beta+1} = \cdots = \varrho_{\gamma-1}$ von der β^{ten} u. s. w., allgemein also für $\varrho = \varrho_\varkappa$ höchstens von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung. Dagegen verschwindet der Ausdruck $f(\varrho)g(\varrho)x^\varrho$ für $\varrho=\varrho_0=\varrho_1=\cdots=\varrho_{\alpha-1}$ von der α^{ten}, für $\varrho=\varrho_\alpha=\varrho_{\alpha+1}=\cdots=\varrho_{\beta-1}$ von der β^{ten} u. s. w. und allgemein für $\varrho = \varrho_\varkappa$ wenigstens von der $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Daher muss seine $\varkappa^{\text{te}}$ Ableitung nach ϱ für $\varrho = \varrho_\varkappa$ verschwinden.

Nun ist die Function $g(x, \varrho)$ so bestimmt worden, dass

$$P(g(x, \varrho)) = f(\varrho)g(\varrho)x^\varrho$$

eine identische Gleichung ist. Wir differentiiren dieselbe $\varkappa$ Mal nach ϱ und und setzen dann $\varrho = \varrho_\varkappa$. Da die Differentiationen nach den beiden Variablen x und ϱ in willkürlicher Ordnung ausgeführt werden können, so ergiebt sich auf diese Weise, wenn man

$$(10.)\qquad \frac{d^\varkappa g(x, \varrho)}{d\varrho^\varkappa} = g^{(\varkappa)}(x, \varrho)$$

setzt, die Gleichung

$$P(g^{(\varkappa)}(x, \varrho_\varkappa)) = 0,$$

aus der hervorgeht dass

$$(11.)\qquad y = g^\varkappa(x, \varrho_\varkappa)$$

ein Integral der Differentialgleichung $P(y) = 0$ ist. Aus der Gleichung

$$(2.)\qquad g(x, \varrho) = x^\varrho \Sigma g_\nu(\varrho) x^\nu$$

ergiebt sich in Folge der gleichmässigen Convergenz dieser Reihe die Gleichung

$$(12.)\quad \begin{cases} g^\varkappa(x, \varrho_\varkappa) = x^{\varrho_\varkappa} \Sigma \Big(g_\nu^{(\varkappa)}(\varrho_\varkappa) + \varkappa g_\nu^{(\varkappa-1)}(\varrho_\varkappa)(\log x) + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2} g_\nu^{(\varkappa-2)}(\varrho_\varkappa)(\log x)^2 + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + g_\nu(\varrho_\varkappa)(\log x)^\varkappa \Big) x^\nu. \end{cases}$$

Da $g(\varrho)$ für $\varrho = \varrho_\varkappa$ höchstens von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden kann, so können $g(\varrho_\varkappa)$, $g^{(1)}(\varrho_\varkappa)$, ... $g^{(\varkappa)}(\varrho_\varkappa)$ nicht alle gleich Null sein. Daraus folgt, dass dies Integral, um die von Herrn *Fuchs* (dieses Journal Bd. 66, S. 155) gewählte Ausdrucksweise zu benutzen, zum Exponenten $\varrho_\varkappa$ gehört.

Ist $\varkappa < \alpha$, so ist $(\log x)^\varkappa$ in $g^{(\varkappa)}(x, \varrho_\varkappa)$ mit $x^{\varrho_\varkappa} \Sigma g_\nu(\varrho_\varkappa) x^\nu$ multiplicirt. Da $g(\varrho_\varkappa) = g(\varrho_0)$ ist, diese Reihe also nicht identisch verschwindet, so ist $\varkappa$ der Exponent der höchsten in diesem Integrale wirklich auftretenden Potenz von $\log x$. Indem man diesen Schluss fortsetzt, findet man, dass allgemein in den zu gleichen Wurzeln der Gleichung $f(\varrho) = 0$ gehörigen Integralen der Differentialgleichung $P(y) = 0$ die Exponenten der höchsten in ihnen vorkommenden Potenzen von $\log x$ von einander verschieden sind. Daraus folgt, dass diese Integrale unter einander unabhängig sind, und da dasselbe von den zu verschiedenen Wurzeln gehörigen unmittelbar einleuchtet, so ergiebt sich schliesslich *), dass die λ zu den einzelnen Wurzeln der Gleichung $f(\varrho)=0$ gehörigen Integrale $g^{(\varkappa)}(x, \varrho_\varkappa)$ alle unter einander unabhängig sind.

Das Integral $g^{(\varkappa)}(x, \varrho_\varkappa)(\varkappa=0, 1, \dots \mu)$ ändert seine Form nicht, wenn dazu die Integrale $g^{(\varkappa-1)}(x, \varrho_{\varkappa-1}), \dots g(x, \varrho_0)$, mit willkürlichen Constanten multiplicirt, hinzugefügt werden. Folglich enthält das allgemeinste zur Wurzel $\varrho_\varkappa$ gehörige Integral $\varkappa+1$ willkürliche Constanten. Geht $g(x, \varrho)$ in $h(x, \varrho)$ über, wenn der willkürlichen Function $C(\varrho)$, welche in allen Coefficienten der Reihe $\Sigma g_\nu(\varrho)x^{\varrho+\nu}$ als Factor auftritt, der constante Werth Eins ertheilt wird, so ist $g(x, \varrho) = C(\varrho)h(x, \varrho)$ und daher

$$g^{(\varkappa)}(x, \varrho) = Ch^{(\varkappa)}(x, \varrho)+\varkappa C^{(1)}h^{(\varkappa-1)}(x, \varrho)+\dots+C^{(\varkappa)}h(x, \varrho),$$

wo die oberen Indices die Ableitungen nach ϱ bezeichnen. Die Functionen $h^{(\varkappa)}(x, \varrho_\varkappa), h^{(\varkappa-1)}(x, \varrho_\varkappa), \dots h(x, \varrho_\varkappa)$ sind, wie ich hier nicht weiter ausführen will, unter einander unabhängig, und daher enthält $g^{(\varkappa)}(x, \varrho_\varkappa)$ die $\varkappa+1$ willkürlichen Constanten $C, C^{(1)}, \dots C^{(\varkappa)}$ und ist, auch ohne dass

$$g^{(\varkappa-1)}(x, \varrho_{\varkappa-1}), \quad \dots \quad g(x, \varrho_0),$$

mit willkürlichen Constanten multiplicirt, ihm hinzugefügt werden, das allgemeinste zur Wurzel $\varrho_\varkappa$ gehörige Integral.

Insbesondere enthält das zur Wurzel ϱ_0 gehörige Integral $g(x, \varrho_0)$ nur eine einzige willkürliche Constante. Mithin ist ein Integral der Differentialgleichung $P(y)=0$ bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmt durch die Bedingungen, dass es, durch x^ϱ dividirt, in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig und für $x=0$ selbst endlich sein soll, wenn ϱ der Gleichung $f(\varrho)=0$ genügt, und von keiner anderen Wurzel derselben um eine positive ganze Zahl übertroffen wird.

Um zu vermeiden, dass die Coefficienten der Reihe $g(x, \varrho)$ für einen Werth im Bereiche der Variablen ϱ unendlich gross werden, haben wir

$$(8.) \qquad g(\varrho) = f(\varrho+1)f(\varrho+2)\dots f(\varrho+\varepsilon)C(\varrho)$$

gesetzt und ε gleich dem Maximum der Differenz zwischen zwei Wurzeln

---

*) Ausführlicher ist diese Schlussweise entwickelt in einer Abhandlung des Herrn *Thomé*, dieses Journal Bd. 74, p. 195.

irgend einer Gruppe gewählt. Wie leicht zu sehen, ist es aber auch gestattet, für ε irgend eine noch grössere ganze Zahl zu setzen. Dies ist besonders dann vortheilhaft, wenn man die Berechnung der Function $g(x,\varrho)$ bis zu einer bestimmten Potenz von x, etwa der $(\varrho+\varkappa)^{\text{ten}}$ wirklich ausführen will. Setzt man nämlich $\varepsilon=\varkappa$; so werden die Coefficienten $g_\nu(\varrho)$ sämmtlich ganze Functionen von ϱ, und man entgeht so der Unbequemlichkeit, gebrochene Functionen von ϱ differentiiren zu müssen. Die Function $C(\varrho)$ kann dann immer noch so gewählt werden, dass die willkürlichen Constanten die durch die Aufgabe vorgeschriebenen Werthe erhalten.

Eine andere Erleichterung der Rechnung ergiebt sich, wenn $p(x)$ nicht mehr, wie bisher, gleich Eins angenommen wird. Sind nämlich die Coefficienten der Differentialgleichung rationale Functionen, so kann man sie alle auf denselben Nenner bringen und mit diesem die ganze Gleichung multipliciren. Dann sind $p(x)$, $p_1(x)$, $\dots$ $p_\lambda(x)$ und folglich auch $f(x,\varrho)$ sämmtlich ganze Functionen von x. Wenn auch in diesem Falle die Functionen $g_\nu(\varrho)$ mittelst der Recursionsformel

$$(5.)\qquad g_\nu f(\varrho+\nu)+g_{\nu-1}f_1(\varrho+\nu-1)+\cdots+gf_\nu(\varrho) = 0$$

berechnet werden, so convergirt die Reihe $g(x,\varrho)$ innerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, in dessen Innern $p(x)$ nirgends verschwindet. Der Beweis dieser Behauptung, auf den ich hier nicht näher eingehen will, lässt sich auf den in §. 2 gegebenen Convergenzbeweis zurückführen. Die Berechnung der Coefficienten $g_\nu(\varrho)$ wird bei der jetzigen Bedeutung von $f(x,\varrho)$ darum einfacher, weil die Functionen $f_\nu(\varrho)$, sobald ν den Grad der ganzen Function $f(x,\varrho)$ überschreitet, sämmtlich verschwinden.

§. 4.

Aus der Formel (12.) lassen sich mit Leichtigkeit die Bedingungen dafür herleiten, dass in dem zu einer Wurzel $\varrho_\varkappa$ der Gleichung $f(\varrho)=0$ gehörigen Integral der Differentialgleichung $P(y)=0$ keine Logarithmen auftreten. (Vergl. die Herleitung dieser Bedingungen in der Abh. des Herrn *Fuchs*, dieses Journal Bd. 68, S. 373—378.) Dazu ist zunächst erforderlich, dass die Gleichung $f(\varrho)=0$ keine mehrfachen Wurzeln hat, da, wie oben gezeigt, von den zu α unter einander gleichen Wurzeln gehörigen Integralen wenigstens $\alpha-1$ Logarithmen enthalten. Die Wurzeln ϱ_0, ϱ_1, $\dots$ ϱ_μ der

Gruppe, zu welcher $\varrho_\varkappa$ gehört, sind also in diesem Falle sämmtlich unter einander verschieden.

Da der durch die Gleichung (12.) gegebene Ausdruck von $(g^{(\varkappa)}(x, \varrho_\varkappa))$ das allgemeinste zur Wurzel $\varrho_\varkappa$ gehörige Integral darstellt, so ist, damit dasselbe keine Logarithmen enthalte, nothwendig und hinreichend, dass die Functionen $g_\nu(\varrho)$ für $\varrho = \varrho_\varkappa$ sämmtlich von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden. Nun ist aber

$$(6.)\qquad g_\nu(\varrho) = \frac{g(\varrho) h_\nu(\varrho)}{f(\varrho+1)f(\varrho+2)\dots f(\varrho+\nu)},$$

und $g(\varrho)$ verschwindet für $\varrho = \varrho_\varkappa$ von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung. Daher darf

$$\frac{h_\nu(\varrho)}{f(\varrho+1)f(\varrho+2)\dots f(\varrho+\nu)} = H_\nu(\varrho)$$

für $\varrho = \varrho_\varkappa$ nicht unendlich werden. Weil aber

$$H_\nu(\varrho) = \frac{g_\nu(\varrho)}{g(\varrho)}$$

ist, so ergiebt sich aus der Gleichung (5.) für diese Functionen die Recursionsformel

$$H_\nu f(\varrho+\nu) + H_{\nu-1} f_1(\varrho+\nu-1) + \dots + H f_\nu(\varrho) = 0.$$

Wenn also $H_{\nu-1}, H_{\nu-2}, \dots H$ für $\varrho = \varrho_\varkappa$ alle endlich sind, so ist es auch $H_\nu f(\varrho+\nu)$. Weil $H = 1$ ist, so ist daher $H_\nu(\varrho_\varkappa)$ für alle Werthe von ν endlich, wenn es für diejenigen nicht unendlich wird, für welche $\varrho_\varkappa + \nu$ gleich einer Wurzel der Gleichung $f(\varrho) = 0$ ist, also für die Werthe $\varrho_{\varkappa-1} - \varrho_\varkappa$, $\varrho_{\varkappa-2} - \varrho_\varkappa, \dots \varrho_0 - \varrho_\varkappa$. Damit $H_\nu(\varrho_\varkappa)$ für $\nu = \varrho_{\varkappa-1} - \varrho_\varkappa$ endlich sei, ist nothwendig und hinreichend, dass $h_\nu(\varrho)$ für $\varrho = \varrho_\varkappa$ von der ersten Ordnung verschwindet. Für $\nu = \varrho_{\varkappa-2} - \varrho_\varkappa$ und $\varrho = \varrho_\varkappa$ ist dann

$$H_\nu(\varrho) f(\varrho+\nu) = \frac{h_\nu(\varrho)}{f(\varrho+1)f(\varrho+2)\dots f(\varrho+\nu-1)}$$

endlich, und folglich verschwindet $h_\nu(\varrho)$ von der ersten Ordnung. Damit $H_\nu(\varrho)$ auch endlich sei, ist daher nur noch erforderlich, dass auch $h'_\nu(\varrho_\varkappa)$ verschwindet. Indem man so fortfährt, findet man als nothwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass das zur Wurzel $\varrho_\varkappa$ gehörige Integral keine Logarithmen enthalte, die folgende:

Bedeutet $h_\nu(\varrho)$ die Determinante

$$(7.)\quad (-1)^\nu h_\nu(\varrho) = \begin{vmatrix} f_1(\varrho+\nu-1) & f_2(\varrho+\nu-2) & \dots & f_{\nu-1}(\varrho+1) & f_\nu(\varrho) \\ f(\varrho+\nu-1) & f_1(\varrho+\nu-2) & \dots & f_{\nu-2}(\varrho+1) & f_{\nu-1}(\varrho) \\ 0 & f(\varrho+\nu-2) & \dots & f_{\nu-3}(\varrho+1) & f_{\nu-2}(\varrho) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & f(\varrho+1) & f_1(\varrho) \end{vmatrix},$$

so müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} h_\nu(\varrho) &= 0 \quad \text{für} \quad \nu = \varrho_{\varkappa-1} - \varrho_\varkappa, \\ h'_\nu(\varrho) &= 0 \quad \text{für} \quad \nu = \varrho_{\varkappa-2} - \varrho_\varkappa, \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ h_\nu^{(\varkappa-1)}(\varrho) &= 0 \quad \text{für} \quad \nu = \varrho_0 \;\; - \varrho_\varkappa \end{aligned}$$

durch den Werth $\varrho = \varrho_\varkappa$ befriedigt werden.

§. 5.

Die Integration der linearen Differentialgleichung $P(y) = 0$ ist auf die Ermittlung der Function

$$(2.)\qquad g(x, \varrho) = \Sigma g_\nu(\varrho) x^{\varrho+\nu}$$

zurückgeführt, welche ausser der Variablen x noch den veränderlichen Parameter ϱ enthält. Zur Berechnung der Coefficienten $g_\nu(\varrho)$ fanden wir die Gleichung

$$(5.)\quad g_\nu(\varrho) f(\varrho+\nu) + g_{\nu-1}(\varrho) f_1(\varrho+\nu+1) + \cdots + g_1(\varrho) f_{\nu-1}(\varrho+1) + g(\varrho) f_\nu(\varrho) = 0.$$

Aus dieser soll jetzt eine andere Recursionsformel entwickelt werden, welche ebenso bequem zur Bestimmung der Functionen $g_\nu(\varrho)$ dienen kann.

Zu dem Zwecke führen wir die Bezeichnungen

$$(13.)\qquad G_\nu(\varrho) = \frac{g_\nu(\varrho)}{f(\varrho) g(\varrho)}$$

und

$$(15.)\qquad G(x, \varrho) = \Sigma G_\nu(\varrho) x^{\varrho+\nu} = \frac{g(x, \varrho)}{f(\varrho) g(\varrho)}$$

ein. Die Function $G(x, \varrho)$ ist, wenn ϱ veränderlich ist, vollständig durch die Bedingungen definirt, dass sie die Differentialgleichung

$$P(y) = x^\varrho$$

befriedigt, bei einem Umlaufe der Variablen x um den Nullpunkt in sich selbst, mit einer Constanten multiplicirt, übergeht und, durch x^ϱ dividirt, für

$x = 0$ den Werth

$$(15.)\qquad G(\varrho) = \frac{1}{f(\varrho)}$$

annimmt. Die Coefficienten $G_\nu(\varrho)$ der Reihe (14.) können mittelst der identischen Gleichung

$$(16.)\qquad \Sigma G_\nu(\varrho) f(x, \varrho+\nu) x^{\varrho+\nu} = x^\varrho$$

gefunden werden. Aus derselben ergiebt sich nämlich, dass

$$(15.)\qquad G(\varrho) = \frac{1}{f(\varrho)}$$

ist, und dass für die Functionen $G_\nu(\varrho)$ dieselbe Recursionsformel (5.) wie für $g_\nu(\varrho)$ besteht. Da aber diese Recursionsformel eine in Bezug auf ϱ identische Gleichung ist, so kann man darin für ϱ auch $\varrho+1$, $\varrho+2$ u. s. w. setzen. Auf diese Weise gelangt man zu den Gleichungen

$$(17.)\quad \begin{cases} G_\nu(\varrho)\, f(\varrho+\nu) + G_{\nu-1}(\varrho)\, f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + G_1(\varrho)\, f_{\nu-1}(\varrho+1) + G(\varrho) f_\nu(\varrho) = 0, \\ G_{\nu-1}(\varrho+1)\, f(\varrho+\nu) + G_{\nu-2}(\varrho+1) f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + G(\varrho+1) f_{\nu-1}(\varrho+1) = 0, \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad \cdot \\ G_1(\varrho+\nu-1) f(\varrho+\nu) + G(\varrho+\nu-1) f_1(\varrho+\nu-1) = 0. \end{cases}$$

Diese multipliciren wir der Reihe nach mit $f(\varrho)$, $f_1(\varrho)$, ... $f_{\nu-1}(\varrho)$ und addiren sie. Setzt man zur Abkürzung

$$f(\varrho) G_\nu(\varrho) + f_1(\varrho) G_{\nu-1}(\varrho+1) + \cdots + f_{\nu-1}(\varrho) G_1(\varrho+\nu-1) + f_\nu(\varrho) G(\varrho+\nu) = F_\nu,$$

so ergiebt sich auf diese Weise

$$F_\nu f(\varrho+\nu) + F_{\nu-1} f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + F_1 f_{\nu-1}(\varrho+1) + f(\varrho) G(\varrho) f_\nu(\varrho) = f(\varrho+\nu)\, G(\varrho+\nu) f_\nu(\varrho).$$

Da aber

$$f(\varrho)\, G(\varrho) = f(\varrho+\nu)\, G(\varrho+\nu) = 1$$

ist, so folgt aus der vorigen Gleichung

$$F_\nu f(\varrho+\nu) + F_{\nu-1} f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + F_1 f_{\nu-1}(\varrho+1) = 0.$$

Nun ist

$$F_1 = f(\varrho)\, G_1(\varrho) + f_1(\varrho)\, G(\varrho+1) = \frac{G_1(\varrho)}{G(\varrho)} + \frac{f_1(\varrho)}{f(\varrho+1)} = \frac{G_1(\varrho) f(\varrho+1) + G(\varrho) f_1(\varrho)}{G(\varrho) f(\varrho+1)} = 0.$$

Setzt man daher in der für F_ν gefundenen Recursionsformel $\nu = 2$, so zeigt sich, dass auch $F_2 = 0$ ist u. s. w. Allgemein ist also $F_\nu = 0$ oder

$$(17^*.)\qquad f(\varrho)\, G_\nu(\varrho) + f_1(\varrho)\, G_{\nu-1}(\varrho+1) + \cdots + f_{\nu-1}(\varrho)\, G_1(\varrho+\nu-1) + f_\nu(\varrho)\, G(\varrho+\nu) = 0.$$

Dies ist die zweite Form der Recursionsformel, mittelst deren man ebenfalls $G_\nu(\varrho)$ und $g_\nu(\varrho)$ berechnen kann.

Multiplicirt man sie mit $x^{\varrho+\nu}$ und summirt dann nach ν, so erhält man

$$(16^*.)\qquad \Sigma f_\nu(\varrho)G(x,\varrho+\nu) = x^\varrho.$$

Ist $f(x,\varrho)$ eine ganze Function von x, so ist diese Gleichung, deren linke Seite dann nur eine endliche Summe ist, eine Functionalgleichung, der $G(x,\varrho)$ genügen muss.

Aus dieser Gleichung werden wir im nächsten Paragraphen weitere Folgerungen ableiten. Um schon hier ihre Brauchbarkeit zu zeigen, wollen wir sie auf die beiden Fälle anwenden, wo $f(x,\varrho)$ eine ganze Function 0ten oder 1ten Grades ist.

Im ersten Falle ist

$$P(y) = ax^\lambda y^{(\lambda)} + a_1 x^{\lambda-1} y^{(\lambda-1)} + \cdots + a_\lambda y$$

mit den constanten Coefficienten $a, a_1, \ldots a_\lambda$, also $P(y)=0$ die bekannte, zuerst von Cauchy (Exercices, Bd. I., S. 262) behandelte Differentialgleichung. Die Formel (16*.) lautet für diesen Fall

$$f(\varrho)G(x,\varrho) = x^\varrho.$$

Daher genügt

$$g(x,\varrho) = g(\varrho)x^\varrho$$

der Differentialgleichung

$$P(y) = f(\varrho)g(\varrho)x^\varrho,$$

wo für $g(\varrho)$ eine willkürliche Function C von ϱ genommen werden kann. Einer einfachen Wurzel ϱ der Gleichung

$$f(\varrho) = a_0\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\lambda+1) + a_1\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\lambda+2) + \cdots + a_\lambda = 0$$

entspricht daher das Integral Cx^ϱ, einer $\varkappa$fachen

$$x^\varrho(C^{(\varkappa)} + C^{(\varkappa-1)}\log x + \cdots + C(\log x)^\varkappa).$$

Im zweiten Falle *) ist

$$P(y) = (a+bx)x^\lambda y^{(\lambda)} + (a_1+b_1x)x^{\lambda-1}y^{(\lambda-1)} + \cdots + (a_\lambda+b_\lambda x)y,$$

wo die Constante a nicht verschwinden darf. Aus Gleichung (16*.) ergiebt sich die Relation

$$f(\varrho)G(x,\varrho) + f_1(\varrho)G(x,\varrho+1) = x^\varrho,$$

in welcher

$$f(\varrho) = a\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\lambda+1) + a_1\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\lambda+2) + \cdots + a_\lambda,$$
$$f_1(\varrho) = b\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\lambda+1) + b_1\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\lambda+2) + \cdots + b_\lambda$$

*) Ueber diese Differentialgleichung vergleiche man die Abhandlung von *Malmstèn*, dieses Journal, Bd. 39, S. 99.

zu setzen ist. Daraus folgt die Gleichung

$$G(x,\varrho) = \frac{x^\varrho}{f(\varrho)} - \frac{f_1(\varrho)}{f(\varrho)} G(x,\varrho+1),$$

durch deren wiederholte Anwendung sich ergiebt:

$$G(x,\varrho) = \Sigma_0^\varkappa (-1)^\nu \frac{f_1(\varrho)f_1(\varrho+1)\dots f_1(\varrho+\nu-1)}{f(\varrho)f(\varrho+1)\dots f(\varrho+\nu-1)} \frac{x^{\varrho+\nu}}{f(\varrho+\nu)}$$
$$+(-1)^{\varkappa+1} \frac{f_1(\varrho)f_1(\varrho+1)\dots f_1(\varrho+\varkappa)}{f(\varrho)f(\varrho+1)\dots f(\varrho+\varkappa)} G(x,\varrho+\varkappa+1).$$

Aehnlich wie in diesem Falle kann man immer, wenn $f(x,\varrho)$ eine ganze Function von x ist, die Formel (16*.) zur Ermittlung des Restes der Reihe $G(x,\varrho)$ benutzen. Da wir wissen, dass diese Reihe convergent ist, so muss ihr Rest bei wachsendem $\varkappa$ unendlich klein werden, und daher ist schliesslich

$$G(x,\varrho) = \Sigma_0^\infty (-1)^\nu \frac{f_1(\varrho)f_1(\varrho+1)\dots f_1(\varrho+\nu-1)}{f(\varrho)f(\varrho+1)\dots f(\varrho+\nu-1)} \frac{x^{\varrho+\nu}}{f(\varrho+\nu)}.$$

Der Convergenzbereich dieser Reihe ist ein um den Nullpunkt beschriebener Kreis, in dessen Innern $p(x) = a + b(x)$ nicht verschwindet, auf dessen Peripherie also der Punkt $-\frac{a}{b}$ liegt.

Wenn man aus den beiden Gleichungen

$$f(\varrho)G(x,\varrho)+f_1(\varrho) \quad G(x,\varrho+1) = x^\varrho,$$
$$f(\varrho+1)G(x,\varrho+1)+f_1(\varrho+1)G(x,\varrho+2) = x^{\varrho+1}$$

x^ϱ eliminirt, so erhält man

$$f(\varrho)xG(x,\varrho)-(f(\varrho+1)-f_1(\varrho)x)G(x,\varrho+1)+f_1(\varrho+1)G(x,\varrho+2) = 0$$

oder

$$\frac{G(x,\varrho+1)}{G(x,\varrho)} = \frac{f(\varrho)x}{f(\varrho+1)-f_1(\varrho)x+f_1(\varrho+1)\dfrac{G(x,\varrho+2)}{G(x,\varrho+1)}}.$$

Daraus ergiebt sich für

$$G(x,\varrho) = \frac{x^\varrho}{f(\varrho)+f_1(\varrho)\dfrac{G(x,\varrho+1)}{G(x,\varrho)}}$$

die Kettenbruchentwicklung *)

$$G(x,\varrho) = \cfrac{x^\varrho}{f(\varrho)+\cfrac{f(\varrho)f_1(\varrho)x}{f(\varrho+1)-f_1(\varrho)x+\cfrac{f(\varrho+1)f_1(\varrho+1)x}{f(\varrho+2)-f_1(\varrho+1)x+\cdots}}}.$$

*) Vergl. *Euler,* Introductio in Analysin infinitorum, Tom. I., Cap. 18, 373.

Da dieser Kettenbruch mit der Reihe für $G(x,\varrho)$ Glied für Glied übereinstimmt, so convergirt er für dieselben Werthe von x, wie diese.

Ein specieller Fall der eben behandelten Reihe ist die hypergeometrische Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, welche der Differentialgleichung

$$(1-x^2)x^2y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)xy'-\alpha\beta xy = 0$$

genügt.

§. 6.

Wenn $f(x,\varrho)$ keine ganze Function ist, so steht auf der linken Seite der Gleichung (16*.) eine unendliche Reihe. Um ihren Convergenzbereich zu ermitteln, müssen wir die Grenze suchen, der sich $G(x,\varrho)$ bei wachsendem ϱ nähert. In dem Ausdrucke

$$f(\varrho)x^{-\varrho}G(x,\varrho)$$

ist der Coefficient von x^ν

$$f(\varrho)G_\nu(\varrho) = \frac{h_\nu(\varrho)}{f(\varrho+1)f(\varrho+2)\dots f(\varrho+\nu)},$$

wo die ganze Function $h_\nu(\varrho)$ durch die Gleichung (7.) in Form einer Determinante gegeben ist. Jedes Glied dieser Determinante ist ein Product von ν-Factoren, das aus jeder Verticalreihe ein Element enthält, und hat daher die Form

$$\pm f_{\mu_1}(\varrho)f_{\mu_2}(\varrho+1)\dots f_{\mu_\nu}(\varrho+\nu-1)$$

wo $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_\nu$ Zahlen von 0 bis ν sind. Setzt man

$$p(x) = \Sigma a_\nu x^\nu,$$

so ist

$$\lim\frac{f_{\mu_\varkappa}(\varrho+\varkappa-1)}{f(\varrho+\varkappa)} = \frac{a_{\mu_\varkappa}}{a}, \qquad (\varrho=\infty)$$

und folglich

$$\lim\frac{f_{\mu_1}(\varrho)f_{\mu_2}(\varrho+1)\dots f_{\mu_\nu}(\varrho+\nu-1)}{f(\varrho+1)f(\varrho+2)\dots f(\varrho+\nu)} = \frac{a_{\mu_1}a_{\mu_2}\dots a_{\mu_\nu}}{a^\nu}.$$

Daher nähert sich $f(\varrho)G_\nu(\varrho)$ bei wachsendem ϱ der Grenze

$$b_\nu = \frac{(-1)^\nu}{a^\nu}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{\nu-1} & a_\nu \\ a & a_1 & \dots & a_{\nu-2} & a_{\nu-1} \\ 0 & a & \dots & a_{\nu-3} & a_{\nu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a & a_1 \end{vmatrix}.$$

Bedenkt man, wie die Gleichung (7.) aus der Formel (5.) abgeleitet wurde, so erhält man zur Berechnung von b_ν die Recursionsformel

$$ab_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \cdots + a_\nu b = 0.$$

Mittelst derselben lässt sich der Beweis für die Convergenz der Reihe $\Sigma b_\nu x^\nu$ nach der in §. 2 angewandten Methode führen. Sind nämlich A_ν und B_ν die absoluten Beträge von a_ν und b_ν, so ist

$$B_{\nu+1} \leqq \frac{1}{A}(B_\nu A_1 + B_{\nu-1}A_2 + \cdots + BA_{\nu+1}).$$

Wenn nun für die Werthe von x auf dem mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreise die Reihe für $p(x)$ convergent ist, und der absolute Betrag dieser Function den Werth M nicht überschreitet, so ist

$$A_\nu < MR^{-\nu}$$

und folglich

$$B_{\nu+1} < \frac{M}{A}(B_\nu R^{-1} + B_{\nu-1}R^{-2} + \cdots + BR^{-(\nu+1)}).$$

Bezeichnet man die rechte Seite dieser Ungleichheit mit $C_{\nu+1}$, so ist

$$C_{\nu+1} = \frac{MB_\nu}{AR} + \frac{C_\nu}{R}$$

oder, weil $B_\nu < C_\nu$ ist

$$\frac{C_{\nu+1}}{C_\nu} < \frac{M+A}{AR}.$$

Daher convergirt die Reihe $\Sigma C_\nu x^\nu$ und um so mehr $\Sigma b_\nu x^\nu$ innerhalb des mit dem Radius $\frac{AR}{M+A}$ um den Nullpunkt beschriebenen Kreises.

Nun ist aber

$$\Sigma a_\nu x^\nu . \Sigma b_\nu x^\nu = \Sigma(ab_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \cdots + a_\nu b)x^\nu = a,$$

da $b = 1$ ist. Folglich ist

$$\Sigma b_\nu x^\nu = \frac{a}{p(x)} \text{*)}$$

---

*) Beiläufig ergiebt sich daraus der Satz:
Wenn für die Werthe von x auf dem mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreise die Reihe $p(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$ convergirt und dem absoluten Betrage nach die Grösse M nicht überschreitet und wenn ihr constantes Glied nicht verschwindet, sondern den absoluten Betrag A hat, so liegt keine Wurzel der Gleichung $p(x) = 0$ dem absoluten Betrage noch unter der Grenze $\frac{AR}{M+A}$.

und daher

$$\lim G(x,\varrho) = \frac{a}{p(x)} \lim \frac{x^\varrho}{f(\varrho)}, \qquad (\varrho = \infty).$$

Zu demselben Resultat gelangt man auf folgendem *) Wege: Die Function $G(x,\varrho)$ ist vollständig definirt durch die Bedingungen der Differentialgleichung $P(y) = x^\varrho$ zu genügen und, durch x^ϱ dividirt, in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig und für $x = 0$ gleich $\frac{1}{f(\varrho)}$ zu werden. Setzt man

$$y = \frac{x^\varrho}{f(\varrho)} z,$$

so nimmt die Differentialgleichung $P(y) = x^\varrho$ die Form

$$\frac{p(x)}{f(\varrho)} x^\lambda z^{(\lambda)} + \frac{p_1(x,\varrho)}{f(\varrho)} x^{\lambda-1} z^{(\lambda-1)} + \cdots + \frac{p_{\lambda-1}(x,\varrho)}{f(\varrho)} x z^{(1)} + \frac{f(x,\varrho)}{f(\varrho)} z = 1,$$

wo $(p_\varkappa(x,\varrho))$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots \lambda-1)$ eine ganze Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von ϱ ist. Die Coefficienten dieser Differentialgleichung sind für alle Werthe von ϱ, für die $f(\varrho)$ nicht verschwindet, bestimmte, endliche Functionen von x. Schliessen wir daher ausser den Wurzeln der Gleichung $f(\varrho) = 0$ noch alle Grössen, welche um positive ganze Zahlen kleiner als diese Wurzeln sind, vom Gebiete von ϱ aus, so hat diese Differentialgleichung nach einem weiter unten angeführten Satze ein ganz bestimmtes Integral, welches in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig ist und für $x = 0$ den Werth 1 annimmt. Dasselbe bleibt, wie die im Anfang dieses Paragraphen angestellten Betrachtungen zeigen, nebst seinen Ableitungen endlich, wenn ϱ sich der Grenze ∞ nähert. Setzen wir $\varrho = \infty$, so lautet die Differentialgleichung, da der Coefficient von ϱ^λ in $f(x,\varrho)$ gleich $p(x)$ und in $f(\varrho)$ gleich a ist

$$\frac{p(x)}{a} z = 1,$$

und daraus ergiebt sich wieder

$$\lim f(\varrho) x^{-\varrho} G(x,\varrho) = \frac{a}{p(x)}.$$

Die Annahme, dass $p(x)$ von Eins verschieden ist, ist nur dann vortheilhaft, wenn dadurch $f(x,\varrho)$ zu einer ganzen Function von x wird. Ist dies nicht der Fall, so soll $p(x) = 1$ angenommen werden. Dann ist

$$\lim G(x,\varrho) = \lim \frac{x^\varrho}{f(\varrho)},$$

*) Diese Methode hat zuerst Herr *Thomé* (dieses Journal Bd. 66, S. 329) angewendet, um die Grenze zu ermitteln, der sich die Näherungsnenner der *Gauss*ischen Kettenbrüche nähern.

und daher convergirt die Reihe

$$(16^*.) \qquad \Sigma f_\nu(\varrho) G(x, \varrho+\nu) = x^\varrho$$

ebenso weit, wie

$$\Sigma \frac{f_\nu(\varrho) x^{\varrho+\nu}}{f(\varrho+\nu)}$$

oder wie

$$\Sigma f_\nu(\varrho) x^\nu = f(x, \varrho),$$

d. h., innerhalb des Kreises, in dessen Innern auch $G(x, \varrho)$, $G(x, \varrho+1)$, ... sämmtlich convergiren.

Damit diese Functionen in diesem Bereiche stets endlich bleiben, schliessen wir wie schon oben die Wurzeln der Gleichungen $f(\varrho) = 0$, $f(\varrho+1) = 0$, ... vom Gebiete von ϱ aus. Wenn man dann die Gleichungen

$$\Sigma f_\nu(\varrho) G(x, \varrho+\nu) = x^\varrho,$$

$$\Sigma f_\nu(\varrho+1) G(x, \varrho+\nu+1) = x^{\varrho+1} \quad \text{u. s. w.}$$

mit gewissen Coefficienten a, a_1, ... multiplicirt und addirt, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\Sigma a_\nu x^{\varrho+\nu} = \Sigma c_\nu G(x, \varrho+\nu).$$

Daraus schliesst man, dass eine Function, die, durch x^ϱ dividirt, in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig ist und für $x=0$ den nicht verschwindenden Werth a annimmt, in eine Reihe von der Form $\Sigma c_\nu G(x, \varrho+\nu)$ entwickelbar ist. Strenger lässt sich dieser Satz folgendermassen beweisen.

Ist $H(x)$ eine Function, die, durch x^ϱ dividirt, in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig ist und für $x=0$ nicht verschwindet, also von der Form $\Sigma c_\nu x^{\varrho+\nu}$, und ist ϱ keine Wurzel der Gleichung $f(\varrho) = 0$ noch um eine ganze Zahl kleiner als eine solche Wurzel, so ist eine Function $F(x)$ vollständig bestimmt durch die Bedingungen, dass sie der Differentialgleichung

$$P(y) = H(x)$$

genügen und in der Umgebung des Nullpunktes in eine Reihe von der Form $\Sigma a_\nu x^{\varrho+\nu}$ entwickelbar sein soll, in der a von Null verschieden ist. Denn diese Function $F(x)$ genügt auch der homogenen linearen Differentialgleichung

$$H(x)\frac{dP(y)}{dx} - H'(x) P(y) = 0,$$

deren zum Nullpunkt gehörige determinirende Fundamentalgleichung nach einem Satze des Herrn *Fuchs* (dieses Journal Bd. 68, S. 372) durch ϱ und die Wurzeln der Gleichung $f(\varrho)=0$ befriedigt wird. In Folge unserer Annahmen bildet ϱ entweder eine Gruppe für sich oder diejenige Wurzel einer Gruppe, deren reeller Theil am grössten ist. Das Integral dieser Differentialgleichung, welches zur Wurzel ϱ gehört, ist daher bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmt.

Wenn umgekehrt die Function $F(x)$ durch die Reihe

$$F(x) = \Sigma a_\nu x^{\varrho+\nu}$$

gegeben ist, in der a nicht verschwindet, und die in einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise convergirt, so ist die Reihe

$$P(F(x)) = \Sigma c_\nu x^{\varrho+\nu}$$

ebenfalls convergent und hat ein von Null verschiedenes Anfangsglied $c=af(\varrho)$. Eine Function, welche die Differentialgleichung

$$P(y) = \Sigma c_\nu x^{\varrho+\nu}$$

befriedigt und, durch x^ϱ dividirt, in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig ist und für $x=0$ den Werth $a=\frac{c}{f(\varrho)}$ annimmt, kann demnach von $F(x)$ nicht verschieden sein. Alle diese Bedingungen erfüllt aber die Reihe

$$\Sigma c_\nu G(x, \varrho+\nu).$$

Denn sie convergirt in dem Bereiche, in welchem $\Sigma c_\nu x^{\varrho+\nu}$ und $G(x,\varrho)$ convergiren und genügt der Differentialgleichung

$$P(y) = \Sigma c_\nu x^{\varrho+\nu},$$

weil

$$P(\Sigma c_\nu G(x, \varrho+\nu)) = \Sigma c_\nu P(G(x, \varrho+\nu))$$

und

$$P(G(x, \varrho+\nu)) = x^{\varrho+\nu}$$

ist. Daher muss

$$F(x) = \Sigma c_\nu G(x, \varrho+\nu)$$

sein.

So folgt z. B. aus der in §. 1 benutzten Relation

$$P(x^\varrho) = x^\varrho f(x,\varrho) = \Sigma f_\nu(\varrho)\, x^{\varrho+\nu}$$

die Gleichung

$$(16^*.) \qquad \Sigma f_\nu(\varrho)\, G(x, \varrho+\nu) = x^\varrho.$$

Dies ist eine einfache Verification der Formel, welche oben durch eine mühsame Rechnung abgeleitet wurde.

Wenn keine Wurzel der Gleichung $f(\varrho) = 0$ eine positive ganze Zahl oder Null ist, so lässt sich jede in der Umgebung des Nullpunktes eindeutige und stetige Function von x in eine Reihe entwickeln, welche nach den Functionen

$$G(x, 0), \quad G(x, 1), \quad \ldots$$

fortschreitet und innerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises convergirt, in dessen Innern sowohl die zu entwickelnde Function als auch die Entwickelungsfunctionen eindeutig und stetig sind.

Berlin, den 15. April 1873.