» La surface est du quatrième degré et a 14 points doubles.

» Chacun des plans $x_1=0$, $x_2=0$ la coupe suivant une conique, courbe unicursale singulière, et lui est tangent suivant une droite qui contient 3 points doubles.

» Chacun des plans $x_3=0$, $x_4=0$ la coupe suivant deux coniques dont les points d'intersection sont 4 points doubles.

» J'ai démontré que les courbes algébriques tracées sur ces surfaces s'obtiennent en égalant à zéro une fonction thêta normale paire ou impaire admettant les périodes du Tableau (T_2) avec une caractéristique quelconque. On peut, par cette proposition, arriver à la classification de ces courbes.

» Je poursuis l'étude de ces surfaces par une méthode géométrique qui utilise la relation dont le calcul a déjà montré l'existence entre elles et la surface de Kummer. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les séries entières à coefficients entiers.* Note de M. **Fatou**, présentée par M. Painlevé.

« Les séries entières à coefficients entiers s'introduisent dans un grand nombre de questions d'analyse. On sait, par exemple, qu'une série entière à coefficients rationnels, qui est le développement d'une fonction algébrique, peut être ramenée à avoir *ses coefficients entiers* par le changement de x en Nx (N étant un entier). C'est la forme que l'on peut donner à la célèbre proposition d'Eisenstein [1].

» Je me propose de faire voir que *le rayon de convergence d'une telle série est toujours plus petit que* 1, *à moins que la fonction algébrique considérée ne se réduise à une fraction rationnelle dont tous les pôles sont des racines de l'unité.* Supposons, en effet, que la série

$$y(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

convergente dans le cercle de rayon 1, représente une branche de fonction algébrique définie d'autre part par l'équation algébrique irréductible

$$F(x,y)=0.$$

F aura ses coefficients entiers. On pourra donc, en multipliant y par un polynome à coefficients entiers, obtenir une fonction algébrique $z(x)$ qui

---

(1) Voir Hermite, *Cours lithographié de la Faculté des Sciences.*

reste finie en tout point à distance finie. Soit $\bar{z}(x)$ la branche de cette fonction correspondant à $\bar{y}(x)$; $\bar{z}(x)$ sera également représentée par un développement de Maclaurin à coefficients entiers convergent dans le cercle de rayon 1. Or $z(x)$ étant régulière, sauf en un nombre limité de points où elle reste finie, il résulte de propositions bien connues que la série $\bar{z}(x)$ devrait converger sur le cercle de rayon 1, résultat incompatible avec ce fait qu'elle a ses coefficients entiers; il faut donc que $z(x)$ se réduise à un polynome. Nous arrivons donc à cette conclusion : une fonction algébrique (non rationnelle) représentée par une série entière à coefficients entiers possède au moins un point de ramification à l'intérieur du cercle de rayon 1.

» Quelles sont maintenant les fractions rationnelles auxquelles correspond un développement en série à coefficients entiers de rayon de convergence égal à 1, ce que nous appelons *une série du type* (E)? La solution de cette question est de nature purement arithmétique. Elle repose sur le lemme suivant :

» *Si la fraction rationnelle irréductible* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *donne lieu à un développement à coefficients entiers ordonné suivant les puissances ascendantes de* x, *le polynome* $g(x)$ *sera nécessairement à coefficients entiers, son terme constant étant égal à* 1.

» Soit alors A le coefficient du terme du plus haut degré dans $g(x)$; les racines de $g(x)$ devront être $\geqq 1$ en module; le produit des modules étant égal à $\frac{1}{|A|}$, il faut que l'on ait : $A = \pm 1$, et les zéros de $g(x)$, qui sont des entiers algébriques, ont tous l'unité pour module. Ce sont donc, d'après un théorème de Kronecker, des racines de l'unité, et la fraction rationnelle pourra être mise sous la forme

$$\frac{P(x)}{(1-x^n)^m}.$$

» On démontrerait, comme plus haut, que, les fractions rationnelles précédentes étant exclues, une série du type (E) ne peut représenter une intégrale régulière d'une équation différentielle linéaire.

» Les séries du type (E) se rencontrent fréquemment dans la théorie des fonctions elliptiques et dans les applications de l'analyse à la théorie des nombres. Celles de ces séries dont la nature analytique nous est connue ont d'ailleurs leur cercle de convergence comme coupure.

» Je citerai, comme exemple nouveau, la série :

$$x^2 + x^3 + x^5 + \ldots + x^q + \ldots,$$

les exposants de x étant les nombres premiers. Cette série ne rentre dans aucun des types connus de séries non continuables; j'ai pu démontrer cependant qu'*elle a comme points singuliers sur le cercle, toutes les racines de l'unité d'ordre p*, quand p est premier. En réalité, je fais cette démonstration pour la série $\sum \frac{x^q}{q}$, ce qui permet d'utiliser les formules de M. Mertens (*Journal de Crelle*, t. 78) relatives à la distribution des nombres premiers dans la progression arithmétique.

» Il en résulte de là que le procédé de Riemann pour obtenir le prolongement de la fonction $\zeta(s)$ ne s'applique pas à la série $\sum \frac{1}{q^s}$ [étendue aux nombres premiers q (¹)]. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les zéros d'une classe de transcendantes multiformes*. Note de M. **Georges Remoundos**, présentée par M. Émile Picard.

« 1. Dans un travail, qui paraîtra prochainement dans le *Bulletin de la Société mathématique*, nous avons envisagé les fonctions $u(z)$, d'un nombre infini de branches, définies par une équation telle que

$$(1)\quad \sigma_0(u) + \sigma_1(u)A_1(z) + \sigma_2(u)A_2(z) + \ldots + \sigma_\nu(u)A_\nu(z) = F(z, u) = 0,$$

où les $\sigma_i(u)$ et $A_i(z)$ désignent des fonctions entières quelconques (²) et nous avons démontré le théorème suivant, en nous appuyant sur un *théorème fondamental de M. Borel* [*Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX, p. 387)], à savoir :

» *Si* $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, u_{\nu+1}$ *désignent* $\nu + 1$ *valeurs exceptionnelles de* u, *ne faisant pas partie de l'ensemble* (E) (³), *on aura*

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\nu, u_{\nu+1}) = \begin{vmatrix} \sigma_0(u_1) & \sigma_0(u_2) & \ldots & \sigma_0(u_{\nu+1}) \\ \sigma_1(u_1) & \sigma_1(u_2) & \ldots & \sigma_1(u_{\nu+1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sigma_\nu(u_1) & \sigma_\nu(u_2) & \ldots & \sigma_\nu(u_{\nu+1}) \end{vmatrix} = 0.$$

(¹) Voir à ce sujet un Mémoire de M. Landau, *Journal de Crelle*, t. 125, p. 102.

(²) A la vérité, j'avais dû supposer que les $A(z)$ sont de genre fini. Mais je me suis aperçu récemment qu'une importante proposition de M. Borel m'affranchit de toute restriction.

(³) L'ensemble E comprend toutes les valeurs de u, pour lesquelles $F(z, u)$ est une constante.