Г. В. Чудновский, Алгебраическая независимость нескольких значений показательной функции, *Матем. заметки*, 1974, том 15, выпуск 4, 661–672

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 15, № 4 (1974), 661—672

УДК 511

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ НЕСКОЛЬКИХ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Г. В. Чудновский

Доказаны общие результаты об алгебраической независимости трех значений показательной функции. Для алгебраического β степени 7 и алгебраического $\alpha \neq 0, 1$ среди $\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^6}$ существуют три алгебраически независимых. Доказательства ведутся с помощью метода А. О. Гельфонда и Н. И. Фельдмана. Библ. 8 назв.

В работе доказывается ряд теорем о существовании нескольких алгебраически независимых значений показательной функции. Следствия из полученных теорем относятся к алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел.

Полученные результаты связаны с предположением А. О. Гельфонда об алгебраической независимости чисел α^{β} при различных алгебраических α и β.

Ранее доказанные [1], [2] теоремы относились к случаю двух алгебраически независимых чисел, а недавно А. А. Шмелев [3] доказал первую теорему о существовании трех алгебраически независимых чисел среди совокупности 36 степеней алгебраических чисел. Следствие 1 обобщает его результат.

Доказанные общие теоремы основаны на методе А. О. Гельфонда 1949 г. [1], [4] и относятся (как и в [2]) к значениям экспоненциальной функции в любых точках. Остающиеся в формулировках теорем предположения о мере линейной независимости с помощью [2] могут быть устранены.

1. Используются стандартные понятия и обозначения (см. [1], [5]). Пусть C, Q, A — поле всех комплексных, рациональных и всех алгебраических чисел, Z — кольцо целых чисел, а $Z[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо полиномов над Z от n переменных ($n \geqslant 1$).

Расширим Q присоединением к нему m алгебраически независимых чисел $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Расширение $Q(\theta_1, \ldots, \theta_m)$ будем называть полем типа R_m [4]. Полученное поле расширим присоединением к нему корня алгебраического уравнения с коэффициентами из R_m. Любое такое поле будем называть полем типа Q_m (степени трансцендентности m); поле Q_0 — любое поле алгебраических чисел.

Очевидно, если расширить любое алгебраическое поле присоединением к нему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, то получим поле степени трансцендентности $\leqslant m$ (т. е. типа Q_n при некотором n, $0 \leqslant n \leqslant m$) тогда и только тогда, когда все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ алгебраически выражаются через m из них. Уже определенное поле Q_m будет образовано числами $\theta_1, \ldots, \theta_m$ и ω_1, где ω_1 — корень алгебраического уравнения с целыми коэффициентами из поля R_m (т. е. $Q(\theta_1, \ldots, \theta_m)$), причем (без ограничения общности) старший коэффициент этого уравнения равен 1. Степень числа ω_1 в R_m будет обозначаться через ν. Целым числом поля Q_m называется полином $P_1(\theta_1, \ldots, \theta_m) + \ldots + P_\nu(\theta_1, \ldots, \theta_m)\omega_1^{\nu-1}$, где $P_i(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in Z[x_1, \ldots, x_m]$, $1 \leqslant i \leqslant \nu$.

Для полинома $P(x_1, \ldots, x_m) \in Z[x_1, \ldots, x_m]$ его высота (максимум модуля коэффициентов) — $H(P)$, его степень (максимум степеней P по $x_1, \ldots, x_m$) — $d(P)$. Типом $t(P)$ назовем $\ln H(P) + d(P)$.

2. Сформулируем основные результаты работы. В дальнейшем M и N будут обозначать натуральные числа, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ и $\beta_1, \ldots, \beta_M$ — произвольные линейно независимые над Q наборы комплексных чисел.

Предположим далее, что неравенства

$$|x_1\alpha_1 + \ldots + x_N\alpha_N| > \exp(-\tau x), \tag{1}$$

$$|y_1\beta_1 + \ldots + y_M\beta_M| > \exp(-\tau y) \tag{2}$$

имеют место при любых $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M \in Z$, где $x = \sum_{i=1}^N |x_i| > x_0$, $y = \sum_{j=1}^M |y_j| > y_0$, а τ, x_0, y_0 — постоянные зависящие только от $\alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \ldots, \beta_M$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $4 \leqslant MN/(M+N)$. *Тогда расширение поля* Q *путем присоединения к нему* MN *чисел*

$$e^{\alpha_i\beta_j} \; (1 \leqslant i \leqslant N;\ 1 \leqslant j \leqslant M)$$

имеет степень трансцендентности $\geqslant 3$.

Схема доказательства этой теоремы, основанная на идеях А. О. Гельфонда и Н. И. Фельдмана [5], полностью применяется для доказательства теорем 2 и 3. Доказательство упрощается, если оценки (1)—(2) заменить на

$$|x_1\alpha_1 + \ldots + x_N\alpha_N| > \exp(-\tau' \ln x), \tag{3}$$
$$|y_1\beta_1 + \ldots + y_M\beta_M| > \exp(-\tau' \ln y) \tag{4}$$

при $x > x_0'$, $y > y_0'$ и новой постоянной $\tau' > 0$. В этом случае можно непосредственно использовать лемму Тийдемана (см. [6]). Для полноты изложения приводится доказательство теоремы 1 с оценками (1)—(2), хотя для большинства интересных случаев выполняются (3) и (4).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $4 \leqslant M(N+1)/(M+N)$. *Тогда расширение поля Q путем присоединения к нему $M(N+1)$ чисел*

$$\beta_1, \ldots, \beta_M, e^{\alpha_i\beta_j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant N;\ 1 \leqslant j \leqslant M) \tag{5}$$

имеет степень трансцендентности $\geqslant 3$. *Значит, среди чисел* (5) *существуют три алгебраически независимых.*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $4 < (MN + M + N)/(M + N)$. *Тогда расширение поля Q путем присоединения к нему $MN + M + N$ чисел*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \ldots, \beta_M, e^{\alpha_i\beta_j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant N;\ 1 \leqslant j \leqslant M)$$

имеет степень трансцендентности $\geqslant 3$.

Теоремы 1, 2 и 3 аналогичны теоремам С. Ленга [7], М. Вальдшмидта [2], А. О. Гельфонда [1], [4] и А. А. Шмелева [3].

Полученные результаты находят применения, основанные на следующем замечании: неравенства (3)—(4) выполняются, когда $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ и $\beta_1, \ldots, \beta_M$ являются: а) алгебраическими числами; б) рациональными степенями $\ln\alpha$ при $\alpha \in A$ или степенями e [1]; в) логарифмами алгебраических чисел [8].

В случае $M = N = 7$, $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_M = \beta^6$, $\alpha_1 = \ln\alpha, \ldots, \alpha_N = \beta^6 \ln\alpha$ из теоремы 2 получаем

Следствие 1. *Если β — алгебраическое число степени $\geqslant 7$, то среди 12 чисел $\alpha^\beta, \ldots, \alpha^{\beta^{12}}$ при алгебраическом $\alpha \neq 0, 1$ существуют три алгебраически независимых. В частности, если β — седьмой степени, то среди 6 чисел $\alpha^\beta, \ldots, \alpha^{\beta^6}$ существуют три алгебраически независимых.*

В случае $M = 6$, $N = 7$, $\alpha_1 = 1, \ldots, \alpha_N = e^{6\nu}$, $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_M = e^{5\nu}$ получаем из теоремы 3

Следствие 2. *Если ν — рациональное число, $\nu \neq 0$, то среди чисел $e, \ldots, e^{e^{10\nu}}, e^{e^{11\nu}}$ существуют три алгебраически независимых.*

Для доказательства теорем потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1 [3]. *Пусть $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ — полиномы из $Z[x, y]$, не имеющие общих делителей, а $R(x)$ — результант этих многочленов по y. Тогда $R(x)$ — полином из $Z[x]$, $R(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющий условию $t(R) \leqslant 6(t(P_1) + t(P_2))^2$. Далее, если числа θ_1, θ_2 — алгебраически независимы над Q, то*

$$|R(\theta_1)| \leqslant \max\{|P_1(\theta_1, \theta_2)|, |P_2(\theta_1, \theta_2)|\} \cdot e^{\gamma_1(t(P_1)+t(P_2))^2}.$$

Здесь γ_1 — константа, зависящая от θ_1, θ_2; $\gamma_1 = 2\ln\{(1 + |\theta_1|)(1 + |\theta_2|) + 2\}$.

ЛЕММА 2. *Пусть $P(x, y) \in Z[x, y]$; θ_1 и θ_2 — алгебраически независимые числа. Пусть имеют место неравенства*

$$|P(\theta_1, \theta_2)| < e^{-\lambda t^4}, \text{ где } t \geqslant t(P) + \gamma_2(\theta_1, \theta_2), \lambda > 1. \quad (6)$$

Тогда либо существует делитель $P_1(x, y)$, $P(x, y)$, являющийся степенью неприводимого в Q полинома, причем выполняются условия

$$|P_1(\theta_1, \theta_2)| < e^{-\frac{\lambda}{3}t^4} \quad \text{и} \quad t(P_1) \leqslant 3t(P) \leqslant 3t, \quad (7)$$

либо же существует полином $R(x) \not\equiv 0$ такой, что

$$|R(\theta_1)| < e^{-\frac{\lambda}{4}t^4} \quad \text{и} \quad t(R) \leqslant (8 \cdot t(P))^2 \leqslant 8^2 t^2. \quad (8)$$

Доказательство. Воспользуемся соображениями из [1], лемма VI, глава III, § 4. Предположим, что не существует $R(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющего (8). Тогда получаем, что из $P(x, y) = R_1(x, y) \cdot R_2(x, y)$, где R_1, R_2 — взаимно простые полиномы из $Z[x, y]$ и $|R_1(\theta_1, \theta_2)| \geqslant |R_2(\theta_1, \theta_2)|$, следует

$$e^{-\frac{\lambda}{3}t^4} < |R_1(\theta_1, \theta_2)|. \quad (9)$$

В самом деле, если (9) не выполнено, то построим результант $R(x)$ полиномов R_1 и R_2. Согласно [1], лемма II, глава III, § 4, имеем $t(R_1) + t(R_2) \leqslant 3t(P)$. Поэтому из леммы 1 вытекает для $R(x)$:

$$|R(\theta_1)| < e^{-\frac{\lambda}{4}t^4} \quad \text{и} \quad t(R) \leqslant 8^2(t(P))^2$$

и условие (8) выполнено, что невозможно.

Представим теперь $P(x, y)$ в виде произведения степеней различных неприводимых полиномов с целыми коэффициентами:

$$P(x, y) = P_1(x, y) \ldots P_s(x, y), \ |P_1(\theta_1, \theta_2)| \leqslant \ldots \ldots \leqslant |P_s(\theta_1, \theta_2)|.$$

Тогда существует такое $r \leqslant s/2$, что

$$|P_1(\theta_1, \theta_2)| \ldots |P_{r-1}(\theta_1, \theta_2)| \geqslant |P_r(\theta_1, \theta_2)| \ldots \ldots |P_s(\theta_1, \theta_2)|$$

и

$$|P_1(\theta_1, \theta_2)| \ldots |P_r(\theta_1, \theta_2)| \leqslant |P_{r+1}(\theta_1, \theta_2)| \ldots \ldots |P_s(\theta_1, \theta_2)|.$$

Согласно (6) и (9) получаем

$$|P_r(\theta_1, \theta_2)| \ldots |P_s(\theta_1, \theta_2)| < e^{-\frac{2\lambda}{3}t^4}$$

и

$$|P_{r+1}(\theta_1, \theta_2)| \ldots |P_s(\theta_1, \theta_2)| > e^{-\frac{\lambda}{3}t^4},$$

откуда следует $|P_1(\theta_1, \theta_2)| \leqslant |P_r(\theta_1, \theta_2)| < e^{-\frac{\lambda}{3}t^4}$, а остальные оценки в (7) получаем, так как по лемме II [1] $H(P_1) \leqslant H(P) \cdot e^{2d(P)}$ и, очевидно, $d(P_1) \leqslant d(P)$, т. е. $t(P_1) \leqslant 3t(P)$.

3. Доказательство теоремы 1. Схема доказательства в основном следует методу [1] и [5]. Рассуждения первого этапа доказательства те же, что и в [1], [2].

Предположим, что от присоединения к полю Q MN чисел $e^{\alpha_i\beta_j}$ $(1 \leqslant i \leqslant N;\ 1 \leqslant j \leqslant M)$ получилось поле K степени трансцендентности $\leqslant 2$. Однако в силу теоремы [2] среди чисел $e^{\alpha_i\beta_j}$ $(1 \leqslant i \leqslant N;\ 1 \leqslant j \leqslant M)$ существуют два алгебраически независимых. Поэтому поле $K = Q(e^{\alpha_i\beta_j}\colon 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant M)$ есть поле типа Q_2 и оно порождается числами θ_1, θ_2 и ω_1. Обозначим через $\omega_2, \ldots, \omega_\nu$ сопряженные для ω_1 относительно поля $Q(\theta_1, \theta_2)$. Согласно предположению MN чисел

$$e^{\alpha_i\beta_j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant N;\ 1 \leqslant j \leqslant M)$$

совпадают с MN числами поля $K = Q(\theta_1, \theta_2, \omega_1)$:

$$S_i/T_i \ (i = 1, \ldots, MN), \ T_0 = T_1 \ldots T_{MN},$$

где S_i, T_i — целые числа поля K, а $T_i \in Q(\theta_1, \theta_2)$.

В дальнейшем X обозначает любое достаточно большое натуральное число, а $c_i > 0$ обозначает постоянные, не зависящие от X (зависящие лишь от $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ и $\beta_1, \ldots, \beta_M$). Рассмотрим функцию $f(z) \ (= f^X(z))$:

$$\left.\begin{aligned} & f(z) = \sum_{k_1=0}^{L} \cdots \sum_{k_M=0}^{L} C_{k_1,\ldots,k_M} e^{(k_1\beta_1+\ldots+k_M\beta_M)z}, \\ & C_{k_1,\ldots,k_M} = \sum_{l_0=0}^{X} \sum_{l_1=0}^{X} C_{l_0,\, l_1,\, k_1,\ldots,\, k_M} \theta_1^{l_0} \theta_2^{l_1}, \\ & L = [X^{N/(M+N)}]. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Пользуясь принципом Дирихле (см. лемму 1 [5]), целые рациональные числа $C_{l_0, l_1, k_1, \ldots, k_M}$, в совокупности отличные от нуля, выбираем так, чтобы выполнялись условия

$$f(x_1\alpha_1 + \ldots + x_N\alpha_N) = 0, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant [c_1 X^{M/(M+N)}]: \\ 1 \leqslant i \leqslant N, \qquad (11)$$

$$\max |C_{l_0, l_1, k_1, \ldots, k_M}| < \exp(c_2 X). \qquad (12)$$

Если окажется, что все полиномы

$$C_{k_1,\ldots,k_M}(x, y) = \sum_{l_0=0}^{X} \sum_{l_1=0}^{X} C_{l_0,\, l_1,\, k_1,\ldots,\, k_M} x^{l_0} y^{l_1}$$

имеют общий делитель $R_0(x, y)$, то на этот делитель при $x = \theta_1$, $y = \theta_2$ можно разделить функцию $f(z)$. Получившаяся функция, которую также обозначим символом $f(z)$, будет иметь форму (10) и удовлетворять условиям (11)—(12), может быть, лишь с другим c_2. Поэтому считаем (ср. [1], [5]), что полиномы $C_{k_1, \ldots, k_M}(x, y) = C^X_{k_1, \ldots, k_M}(x, y)$ не имеют общего делителя.

Согласно лемме III, главы III [1] или лемме 3 [2] существует

$$z_0 = x_1^0\alpha_1 + \ldots + x_N^0\alpha_N, \quad 0 \leqslant x_i^0 \leqslant [c_3 X^{M/(M+N)}]: \\ 1 \leqslant i \leqslant N$$

такое, что

$$f_0(z_0) = T_0^{[c_3X]} f(x_1^0\alpha_1 + \ldots + x_N^0\alpha_N) \neq 0.$$

Оценим, пользуясь (10)—(12), величину $f(z)$:

$$|f(z)| \leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \prod_{x_1=0}^{[c_1 X^{M/(M+N)}]} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \prod_{x_N=0}^{[c_1 X^{M/(M+N)}]} \frac{z - x_1\alpha_1 - \ldots - x_N\alpha_N}{\zeta - x_1\alpha_1 - \ldots - x_N\alpha_N} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right|, \quad (13)$$

где Γ — окружность $|\zeta| = X^{(M+1)/(N+M)}$, а $|z| \leqslant \leqslant X^{M/(N+M)} \ln X$. Отсюда получаем при $X > c_4$, полагая $\varkappa = MN/(M+N)$,

$$|f_0(z_0)| < \exp(-c_5 X^\varkappa \ln X). \quad (14)$$

По предположению, $f_0(z_0)$ — целое число поля K, т. е. $f_0(z_0) = P(\theta_1, \theta_2, \omega_1)$, где $d(P) + \ln H(P) \leqslant c_6 X$ согласно (10) и (12). Рассмотрим числа $f_{i0} = P(\theta_1, \theta_2, \omega_i)$ для $i = 2, \ldots, \nu$.

Поскольку $f_{10} = f_0(z_0) \neq 0$, то и

$$P_X(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{\nu} f_{i0} \neq 0,$$

причем $P_X(\theta_1, \theta_2)$ — полином от θ_1 и θ_2 с целыми рациональными коэффициентами, удовлетворяющий условию

$$t(P_X) = d(P_X) + \ln H(P_X) \leqslant c_7 X, \quad (15)$$
$$|P_X(\theta_1, \theta_2)| < \exp(-c_8 X^\varkappa \ln X)$$

где $\varkappa = MN/(M+N)$, $X > c_9$.

В дальнейшем окажется полезной

ЛЕММА 3. *Существуют две постоянные* $c_{10}, c_{11} > 0$ *такие, что если для всех* $0 \leqslant x_i \leqslant [c_{10} X^{M/(N+M)}]$: $1 \leqslant \leqslant i \leqslant N$ *выполнено*

$$|f(x_1\alpha_1 + \ldots + x_N\alpha_N)| \leqslant \exp(-c_{11} X^\varkappa \ln X), \quad (16)$$

то для любых $k_1, \ldots, k_M$ *получаем*

$$|C_{k_1, \ldots, k_M}| < \exp(-c_{12} X^\varkappa \ln X). \quad (17)$$

Вывод леммы 3 из оценок (1)—(2) на основе метода А. О. Гельфонда, Н. И. Фельдмана [5] будет дан в конце статьи. Если воспользоваться оценками (3)—(4), то вывод будет проще.

Доказательство леммы 3. Лемма 3 выводится из леммы Тийдемана (см. [6]). Согласно лемме 1 [6]

из (3)—(4), (10)—(12), (16) при $c_{10} \geqslant 16$ следует
$\max | C_{k_1, \ldots, k_M} | \leqslant \exp (c_{10} X^{\varkappa} \ln X + \tau' N/(M +$
$+ N) X^{\varkappa} \ln X + c_{10}^N \tau' M/(M + N) X^{\varkappa} \ln X - c_{11} X^{\varkappa} \ln X)$,

где τ' — постоянная из (3)—(4). Выбирая $c_{11} > c_{10}^N (1 + \tau')$, получаем (17) для любых $k_1, \ldots, k_M = 0, \ldots, L$ и $c_{12} = c_{11} - c_{10}^N (1 + \tau')$. Лемма 3 в случае (3)—(4) доказана.

4. Далее символ $\langle Y, Z \rangle$ означает, что существует полином $P(x) \not\equiv 0$ с $t(P) \leqslant Y$ и $| P(\theta_1) | < \exp(-Z)$.

Согласно лемме VII главы III [1] для завершения доказательства достаточно показать для любого достаточно большого $X \langle X^2 \ln^{1/4} X,\ X^4 \ln^{5/8} X \rangle$. Тогда θ_1 будет алгебраическим числом вопреки предположению и поле K будет иметь степень трансцендентности > 2.

Применим далее лемму 2. Поскольку $\varkappa = MN/(M + N) \geqslant 4$, то из (15) следует: $| P_X(\theta_1, \theta_2) | < \exp(-c_8 X^4 \ln X)$ и $t(P_X) \leqslant c_7 X$.

Если для любого достаточно большого X выполняется (8) при $t = c_7 X$, то получаем $\langle X^2 \ln^{1/4} X,\ X^4 \ln^{5/8} X \rangle$. В этом случае согласно лемме Гельфонда теорема 1 доказана. Рассмотрим поэтому второй случай, когда согласно лемме 2 для бесконечной последовательности $X > 0$ существует делитель $Q_X(x, y)$ полинома $P_X(x, y)$, имеющий вид $Q_X(x, y) = (R_X(x, y))^{s_X}$, где $R_X(x, y)$ неприводим над Q, и такой, что

$$| Q_X(\theta_1, \theta_2) | < \exp(-c_{13} X^{\varkappa} \ln X),\ t(Q_X) \leqslant c_{14} X. \tag{18}$$

Обозначим $t_X = t(R_X)$ и $\delta_X = -\ln | R_X(\theta_1, \theta_2) | / \ln X$. Лемма II главы III [1] показывает, что

$$1/3\, t_X s_X \leqslant t(Q_X) \leqslant c_{14} X. \tag{19}$$

Учитывая (18) и (19), получаем $\delta_X \geqslant c_{13} X^{\varkappa} (s_X)^{-1} \geqslant 1/3 \cdot c_{13} X^{\varkappa} t_X (t(Q_X))^{-1} \geqslant c_{15} X^{\varkappa - 1} t_X$. Значит:

$$\delta_X \geqslant c_{15} X^{\varkappa - 1} t_X. \tag{20}$$

Здесь в (18)—(20) и далее (достаточно большое) $X > 0$ принадлежит бесконечной последовательности $X_1, \ldots, X_n \ldots$ натуральных чисел, для которых предполагается нарушение $\langle X^2 \ln^{1/4} X,\ X^4 \ln^{5/8} X \rangle$.

Случай 1. Пусть $\delta_X > X^{\varkappa} \ln^{1/8} X$. Положим $Y = [X \ln^{-1/16} X]$.

ЛЕММА 4. Для любого $T(x, y) \in Z[x, y]$ с $|T(\theta_1, \theta_2)| < \exp(-c_{16} Y^{\varkappa} \ln Y)$ и $t(T) \leqslant c_{17} Y$ имеем $|T(\theta_1, \theta_2)| < \exp(Y^{\varkappa} \ln^{9/8} Y)$.

Доказательство леммы 4. Если $R_X(x, y)$ делит $T(x, y)$, то в силу $\delta_X > X^{\varkappa} \ln^{1/8} X$ и $|R_X(\theta_1, \theta_2)| \leqslant \exp(-\delta_X \ln X)$ получаем $|T(\theta_1, \theta_2)| < \exp(-Y^{\varkappa} \ln^{9/8} Y)$. Если же $R_X(x, y)$ и $T(x, y)$ взаимно просты, то, рассматривая их результант, из леммы 1 получаем $\langle X^2, X^4 \ln^{5/8} X \rangle$, что не так и лемма 4 доказана.

Из леммы 3 следует, что либо для некоторых $y_1, \ldots, y_N$: $0 \leqslant y_i \leqslant [c_{10} Y^{M/(N+M)}] = Y_0$:

$$|f^Y(y, \alpha_1 + \ldots + y_N \alpha_N)| > \exp(-c_{11} Y^{\varkappa} \ln Y), \qquad (21)$$

либо же для всех $k_1, \ldots, k_M$: $0 \leqslant k_j \leqslant [Y^{N/(M+N)}]$:

$$|C^Y_{k_1, \ldots, k_M}| < \exp(-c_{12} Y^{\varkappa} \ln Y). \qquad (22)$$

Поскольку $C^Y_{k_1, \ldots, k_M}(x, y)$ не имеют общего делителя, то среди них существует полином $C(x, y)$, взаимно простой с $R_X(x, y)$. В случае (22), рассматривая результант полиномов $C(x, y)$ и $R_X(x, y)$, согласно (10), (12), (22) и лемме 1 $\langle X^2, X^4 \ln^{5/8} X \rangle$. Поэтому можно считать, что для некоторых $y_1, \ldots, y^N$: $0 \leqslant y_i \leqslant Y_0$ имеет место (21).

Обозначим далее $T_0^{[c_{18} Y]} f^Y(z)$ при $z = y_1 \alpha_1 + \ldots$ $\ldots + y_N \alpha_N$ через $T_1(\theta_1, \theta_2) + \ldots + T_\nu(\theta_1, \theta_2) \omega_1^{\nu-1}$, где $t(T_i) \leqslant c_{18} Y$.

Покажем, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant \nu$ существуют такие полиномы $Q_i^i, \ldots, Q_\nu^i$ из $Z[x_1, \ldots, x_\nu]$, что при $w = Q_i^i(\omega_1, \ldots, \omega_\nu) T_i(\theta_1, \theta_2) + \ldots + Q_\nu^i(\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_\nu) T_\nu(\theta_1, \theta_2)$:

$$\exp(-c_{20} Y^{\varkappa} \ln Y) > |w| > \exp(-c_{19} Y^{\varkappa} \ln Y), \qquad (23)$$

где тип $t(Q_j^i)$ ограничен абсолютной постоянной. Для $i = 1$ это следует из (13) и (21). Предположим, что утверждение (23) доказано для фиксированного i $(1 \leqslant i < \nu)$. Обозначим через $w^{(2)}, \ldots, w^{(d)}$, $d = [Q^i_\nu(\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_\nu, \theta_1, \theta_2): Q(\theta_1, \theta_2)]$, сопряженные к w числа.

Тогда $w_0 = w w^{(2)} \ldots w^{(d)}$ является (при замене θ_1 и θ_2 на x и y) полиномом от x, y таким, что $|w_0(\theta_1, \theta_2)| < \exp(-c_{21} Y^{\varkappa} \ln Y)$. Из леммы 4 получим $|w_0(\theta_1, \theta_2)| < \exp(-Y^{\varkappa} \ln^{9/8} Y)$ или же $|w^{(l)}| < \exp(-1/d \cdot Y^{\varkappa} \ln^{9/8} Y)$

для некоторого l, $1 \leqslant l \leqslant d$. Если $w^{(l)} = \widetilde{Q}_i^l(\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_\nu)T_i(\theta_1, \theta_2) + \ldots + \widetilde{Q}_\nu^i(\omega_1, \ldots, \omega_\nu)T_\nu(\theta_1, \theta_2)$, то для $v = w \cdot \widetilde{Q}_i^i(\omega_1, \ldots, \omega_\nu) - w^{(l)} \cdot Q_i^i(\omega_1, \ldots, \omega_\nu)$ из выведенных неравенств следует

$$\exp(-c_{23}Y^\varkappa \ln Y) > |v| > \exp(-c_{22}Y^\varkappa \ln Y).$$

Здесь $v = Q_{i+1}^{i+1}(\omega_1, \ldots, \omega_\nu)T_{i+1}(\theta_1, \theta_2) + \ldots$ $\ldots + Q_\nu^{i+1}(\omega_1, \ldots, \omega_\nu)T_\nu(\theta_1, \theta_2)$, т. е. (23) доказано и для $i+1$.

Из утверждения (23) при $i = \nu$ вытекает $\exp(-c_{24}Y^\varkappa \ln Y) >$ $> |T_\nu(\theta_1, \theta_2)| > \exp(-c_{25}Y^\varkappa \ln Y)$, что противоречит лемме 4, и случай 1 рассмотрен.

Случай 2. Пусть $\delta_X < X^\varkappa \ln^{1/8} X$. Положим $Y = [\delta_X^{1/(\varkappa-1)} \cdot X^{-1/(\varkappa-1)} \cdot \ln^{1/8} X]$. Согласно (20) $\ln X \leqslant$ $\leqslant \ln Y \leqslant 2 \ln X$. Полагая $p = \max(1, [X^\varkappa/\delta_X])$, получим согласно предположениям и (20)

$$\delta_X p \geqslant {}^1/_2 \cdot X^4, \quad Y^\varkappa \ln Y \geqslant X^4 \ln X, \tag{24}$$

$$t_X p Y \leqslant \delta_X^{1/(\varkappa-1)} \cdot t_X^{(\varkappa-2)/(\varkappa-1)} \cdot \ln^{1/8} X \cdot p \leqslant X^2 \ln^{3/16} X. \tag{25}$$

Пусть i — наибольшая степень, $i \geqslant 0$, в которой $R_X(x, y)$ делит $P_Y(x, y)$. Тогда, очевидно, $it_X \leqslant 3t(P_Y)$ и

$$ {}^1/_3 i\delta_X \cdot \ln X \leqslant \delta_X \cdot t(P_Y) \cdot t_X^{-1} \ln X \leqslant c_7 \cdot \delta_X \cdot Y \cdot t_X^{-1} \cdot \ln X \leqslant \leqslant c_{26} \cdot \delta_X^{\varkappa/(\varkappa-1)} \cdot t_X^{-\varkappa/(\varkappa-1)} \cdot \ln^{9/8} X.$$

Отсюда получаем

$$i\delta_X \ln X \leqslant Y^\varkappa \ln^{3/4} Y. \tag{26}$$

Запишем $P_Y(x, y)$ в виде $(R_X(x, y))^i \cdot S(x, y)$, где полином $S(x, y)$ взаимно прост с $R_X(x, y)$. Согласно (26) и $|P_Y(\theta_1, \theta_2)| < \exp(-c_8 Y^\varkappa \ln Y)$ получаем $|S(\theta_1, \theta_2)| <$ $< \exp(-c_8/2 \cdot Y^\varkappa \ln Y)$. Рассматривая результант $S(x, y)$ и $(R_X(x, y))^p$ по y, получаем (ср. [3]): $\langle X^2 \ln^{1/4} X,$ $X^4 \ln^{5/8} X \rangle$, и случай 2 также полностью рассмотрен. Теорема 1 доказана.

Покажем, наконец, как, следуя [5], можно доказать лемму 3, используя вместо оценок (3)—(4) более слабые оценки (1)—(2). В самом деле, применяя интерполяционную формулу Эрмита, получаем

$$f^{(s)}(z)=\frac{s!}{4\pi^2}\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma}\left[\frac{(y-t_1)\dots(y-t_p)}{(\zeta-t_1)\dots(\zeta-t_p)}\right]\cdot\frac{f(\zeta)\,d\zeta\,dy}{(y-z)^{s+1}(y-\zeta)}-$$

$$-\frac{s!}{4\pi^2}\sum_{i=1}^{p} f(t_i)\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma_i}\left[\frac{(y-t_1)\dots(y-t_p)}{(\zeta-t_1)\dots(\zeta-t_p)}\right]\cdot\frac{d\zeta\,dy}{(y-z)^{s+1}(y-\zeta)},$$

где $p=([c_{10}X^{M/(N+M)}]+1)^N$, а Γ', Γ, Γ_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ — окружности $|y|=X^{M/(N+M)}\ln X$, $|\zeta|=X^{(M+1)/(N+M)}$ и $|\zeta-t_i|=0{,}5\cdot\exp(-\tau X^{M/(N+M)})$, $|z|\leqslant 1$, $s\leqslant(L+1)^M$, а числа $t_1,\dots,t_p$ совпадают с числами $y_1\alpha_1+\dots+y_N\alpha_N$: $0\leqslant y_i\leqslant[c_{10}X^{M/(N+M)}]$. Оценив правую часть по модулю, получим для $0\leqslant k_i\leqslant L$ неравенства $|C_{k_1,\dots,k_M}|\leqslant\leqslant\exp(-c_{12}X^{\varkappa}\ln X)$, так как

$$|C_{k_1,\dots,k_M}|=\left|\sum_{k=0}^{(L+1)^M-1}C_k(\beta)f^{(k)}(0)\right|;\quad \beta=k_1\beta_1+\dots+k_M\beta_M,$$

где

$$\sum_{k=0}^{(L+1)^M-1}C_k(\beta)z^k=$$

$$=\prod_{r_1=0}^{L}\dots\prod_{r_M=0(r_1\beta_1+\dots+r_M\beta_M\neq\beta)}^{L}\frac{z-r_1\beta_1-\dots-r_M\beta_M}{\beta-r_1\beta_1-\dots-r_M\beta_M}.$$

Для доказательства теоремы 2 рассматривается функция

$$f_1(z)=\sum_{k_1=0}^{X}\dots\sum_{k_M=0}^{X}C_{k_1,\dots,k_M}e^{(k_1\beta_1+\dots+k_M\beta_M)z},$$

$$C_{k_1,\dots,k_M}=\sum_{l_0=0}^{L_1}\sum_{l_1=0}^{L_1}C_{l_0,l_1,k_1,\dots,k_M}\theta_1^{l_0}\theta_2^{l_1},$$

$$L_1=[X^{(M+N)/(N+1)}\cdot\ln^{1/(N+1)}X],$$

и для $0\leqslant y_i\leqslant[X^{(M-1)/(N+1)}\ln^{1/(N+1)}X]$ $(1\leqslant i\leqslant N)$ и $0\leqslant\leqslant s\leqslant[c_{27}X^{(M+N)/(N+1)}\ln^{-N/(N+1)}X]$ полагаем $f_1^{(s)}(y_1\alpha_1+\dots+y_N\alpha_N)=0$. Для доказательства теоремы 3 рассматривается функция

$$f_2(z)=\sum_{k_0=0}^{L_0}\sum_{k_1=0}^{X}\dots\sum_{k_M=0}^{X}C_{k_0,k_1,\dots,k_M}z^{k_0}e^{(k_1\beta_1+\dots+k_M\beta_M)},$$

$$C_{k_0,\dots,k_M}=\sum_{l_0=0}^{L_1}\sum_{l_1=0}^{L_1}C_{l_0,l_1,k_0,\dots,k_M}\theta_1^{l_0}\theta_2^{l_1},$$

$$L_0=[X^{(N+M)/N}\ln^{-1}X],\qquad L_1=[X^{(N+M)/N}].$$

Весь ход доказательства теорем 2 и 3 почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 (с естественной заменой X на L_1 и т. п.).

Пользуясь изложенным методом, можно доказать и общие теоремы о существовании $n+1$ алгебраически независимых чисел среди значений показательной функции (в теоремах 1—3 4 заменяется на 2^n).

Киевский государственный университет

Поступило 22.I.1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа М., 1952.

[2] Waldschmidt M., Independance algebrique des valeurs de la fonction exponentielle, Bull. Soc. Math. France, **99**, № 4 (1971), 285—304.

[3] Шмелев А. А., К вопросу об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел, Матем. заметки, **11** № 6 (1972), 635—644.

[4] Гельфонд А. О., Об алгебраической независимости трансцендентных чисел некоторых классов, Успехи матем. наук, **4**, № 5 (1949), 14—48.

[5] Гельфонд А. О., Фельдман Н. И., О мере взаимной трансцендентности некоторых чисел, Изв. АН СССР., Сер. матем., **14** (1950), 493—500.

[6] Shorey T., On a theorem of Ramachandra, Acta Arithm., **20** (1972), 215—221.

[7] Lang S., Introduction to transcendental numbers, Addison — Wesley, 1966.

[8] Фельдман Н. И., Улучшение оценки линейной формы от логарифмов алгебраических чисел, Матем. сб., Новая сер., **77**, № 3 (1968), 423—436.