ALGÈBRE. — *Séries formelles algébriques*. Note (*) de M. **Jean-Pierre Lafon**, présentée par M. René Garnier.

Les séries formelles algébriques satisfont au lemme de préparation de Weierstrass.

1. Soit K un corps. L'anneau $K[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$ n'étant pas hensélien, il résulte de la proposition 1 de (4) que l'anneau

$$A = \bigcup_n K[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$$

et les applications d_n, degré en X_n, et ω_n, ordre résiduel en X_n, ne peuvent satisfaire aux axiomes (1)-...-(13) de (4).

On sait que l'hensélisation de $K[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$ est l'anneau $K[[X_1, \ldots, X_n]]_a$ des séries formelles algébriques [conséquence facile du théorème 4 de (3)]. On se propose de montrer que l'anneau $\bigcup_n K[[X_1, \ldots, X_n]]_a$ et les applications d_n et ω_n comme ci-dessus satisfont aux axiomes, soit

Théorème. — *Soient $f(X_1, \ldots, X_n)$, $g(X_1, \ldots, X_n)$ deux séries formelles algébriques en les indéterminées $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients dans K telles que l'ordre $\omega_n(f)$ de f en X_n soit fini et égal à s.*

Les séries formelles $q(X_1, \ldots, X_n)$ et $r(X_1, \ldots, X_n)$ telles que

$$g(X_1, \ldots, X_n) = q(X_1, \ldots, X_n) f(X_1, \ldots X_n) + r(X_1, \ldots, X_n),$$

avec $r = 0$ ou degré de r en X_n strictement inférieur à s sont aussi algébriques.

Il en résulte la possibilité de transposer à la catégorie des anneaux locaux quotients d'anneaux de séries formelles algébriques sur K un grand nombre de résultats valables pour les anneaux analytiques. On construit de manière naturelle si K est valué complet non discret une sous-catégorie de la catégorie des espaces analytiques : un espace analytique de cette sous-catégorie est obtenu par recollement de nappes analytiques de variétés algébriques de manière éventuellement non algébrique. On pourrait reprendre littéralement la démonstration [15.2 de (1)] du théorème de cohérence d'Oka.

2. Démonstration du théorème (*début*). — Contrairement à ce qui se passe pour les séries convergentes, il est faux que toute série extraite d'une série algébrique soit encore algébrique. C'est ainsi que la série $1 + X^{1!} + X^{2!} + \ldots + X^{n!} + \ldots$ est transcendante alors qu'elle

un polynome unitaire en Y à coefficients dans

$$K[[X]] = K[[X_1, \ldots, X_n]] \quad \text{tel que} \quad g_0(0) = \ldots = g_{n-1}(0) = 0.$$

Soient Ω une clôture algébrique du corps $K((X))$ et y une racine de $g(X, Y)$ dans Ω.

Si $\varphi(X, Y) \in K[[X, Y]]$, le lemme classique de préparation nous donne une égalité

$$\varphi(X, Y) = \psi(X, Y)\, g(X, Y) + \varphi_0(X) + \varphi_1(X)\, Y + \ldots + \varphi_{n-1}(X)\, Y^{n-1}.$$

Nous poserons

$$\varphi(X, y) = \varphi_0(X) + \varphi_1(X)\, y + \ldots + \varphi_{n-1}(X)\, y^{n-1}.$$

L'application $\varphi(X, Y) \rightsquigarrow \varphi(X, y)$ de $K[[X, Y]]$ dans Ω est un homomorphisme de K-algèbres. Si $\varphi(X, Y)$ est un polynome en Y, $\varphi(X, y)$ a la signification usuelle. Si $f(X, Y)$ est associée à $g(X, Y)$, $f(X, y) = 0$.

3. Démonstration du théorème (*fin*). — Nous reprenons les notations du paragraphe 1. On peut supposer que $f(X)$ est irréductible : il est, en effet, facile de montrer que si deux séries $f(X)$ et $f_1(X)$ d'ordres finis en X_n satisfont aux conclusions du théorème, il en est de même de leur produit. Le polynome de Weierstrass $P(f)(X)$ de f est donc aussi irréductible.

1° *Le polynome de Weierstrass* $P(f)(X)$ *est séparable.* — Soient alors $y_1, \ldots, y_s$ ses racines distinctes dans la clôture algébrique Ω de $K((X_1, \ldots, X_{n-1}))$. Écrivons

$$r(X) = r_0(X_1, \ldots, X_{n-1}) + \ldots + r_{s-1}(X_1, \ldots, X_{n-1})\, X_n^{s-1}.$$

On obtient les s équations

$$g(X_1, \ldots, X_{n-1}, y_j) = r_0(X_1, \ldots, X_{n-1}) + \ldots + r_{s-1}(X_1, \ldots, X_{n-1})\, y_j^{s-1} \quad (j = 1, \ldots, s)$$

qui permettent de résoudre en $r_0, \ldots, r_{s-1}$.

Il suffit alors de vérifier les points suivants :

(1) y_j est algébrique sur $K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$: si

$$b_0(X) + b_1(X)\, f(X) + \ldots + b_k(X)\, f(X)^k = 0, \quad \text{où} \quad b_i(X) \in K[X],$$

on a $b_0(X_1, \ldots, X_{n-1}, y_j) = 0$;

(2) $g(X_1, \ldots, X_{n-1}, y_j)$ est algébrique sur $K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$: c'est évident par transitivité.

2° *Le polynome de Weierstrass n'est pas séparable.* — Ce polynome est alors un polynome irréductible en $Y = X_n^{p^q}$. On écrit alors la série formelle $g(X_1, \ldots, X_n)$ sous la forme

$$G_0(X_1, \ldots, X_n^{p^q}) + G_1(X_1, \ldots, X_n^{p^q})\, X_n + \ldots + G_{p^q-1}(X_1, \ldots, X_n^{p^q})\, X_n^{p^q-1}.$$

Il résulte alors de la proposition que les séries formelles $G_i(X, \ldots, Y)$ sont algébriques sur $K[X_1, \ldots, Y]$.

est extraite de la série $1 + X + \ldots + X^n + \ldots$. On a toutefois le résultat suivant :

Proposition. — *Soit* $f(X, Y) = f(X_1, \ldots, X_n, Y)$ *une série formelle algébrique en les indéterminées* $X_1, \ldots, X_n, Y$ *à coefficients dans* K, *écrite sous la forme*

$$f(X, Y) = f_0(X) + f_1(X) Y + \ldots + f_s(X) Y^s + \ldots$$

Alors, les séries partielles

$$F_0(X, Y^s) = f_0(X) + f_s(X) Y^s + \ldots + f_{ns}(X) Y^{ns} \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F_{s-1}(X, Y^s) = f_{s-1}(X) + f_{2s-1}(X) Y^s + \ldots + f_{(n+1)s-1}(X) Y^{ns} + \ldots$$

sont aussi algébriques.

Preuve :

1° *La caractéristique de* K *est* 0 *ou ne divise pas l'entier s.* — On peut alors supposer que K contient les racines $s^{\text{ièmes}}$ de l'unité $z_1 = 1, \ldots, z_s$. On peut alors écrire

$$f(X, z_j Y) = F_0(X, Y^s) + (F_1(X, Y^s) Y) z_j + \ldots + (F_{s-1}(X, Y^s) Y^{s-1}) z_j^{s-1} \qquad (j = 1, \ldots s).$$

Il est évident que $f(X, z_j Y)$ est algébrique. Il va donc de même des séries formelles $F_0(X, Y^s), \ldots, F_{s-1}(X, Y^s) Y^{s-1}$ qui s'obtiennent par résolution d'un système de Cramer et donc des séries $F_j(X, Y^s)$.

2° *La caractéristique p de* K *est non nulle et* $s = p$. — On s'appuie sur le résultat suivant :

Si $f(X, Y)$ *est algébrique, il en est de même de* $\partial f / \partial Y$, obtenu par dérivation d'une équation de dépendance algébrique de plus petit degré possible, compte tenu du fait que $f(X, Y)$ est séparable sur $K[X, Y]$.

On écrit alors

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= F_0(X, Y^p) + F_1(X, Y^p) Y + \ldots + F_{p-1}(X, Y^p) Y^{p-1}, \\ \frac{\partial f}{\partial Y} &= F_1(X, Y^p) + \ldots + (p-1) F_{p-1}(X, Y^p) Y^{p-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial^{p-1} f}{\partial Y^{p-1}} &= (p-1)!\, F_{p-1}(X, Y^p). \end{aligned}$$

3° *Cas où s est divisible par la caractéristique p supposée non nulle.* — Si $s = pq$, il est clair que la série formelle obtenue en prenant dans $f(X, Y)$ les termes de s en s s'obtient en prenant les termes de q en q dans une série $F_j(X, Y^p) Y^j$ $(j = 0, \ldots, p-1)$. Le résultat provient alors de ce que, si $F(X, Y^p)$ est algébrique sur $K[X, Y]$, $F(X, U)$ l'est sur $K[X, U]$.

Avant de démontrer le théorème, il nous faut indiquer un procédé qui généralise celui de la substitution d'une série formelle dans une autre.

Soit

$$g(X, Y) = g_0(X) + g_1(X) Y + \ldots + g_{n-1}(X) Y^{n-1} + Y^n$$

Soit $p^q m$ avec $(m, p) = 1$, le degré en X_n de $P(f)$. Le polynome correspondant en $Y = X_n^{p^q}$ est de degré m et admet m racines distinctes $y_1, \ldots, y_m$ dans Ω.

On pourra écrire

$$G_i(X_1, \ldots, Y) = Q_i(X_1, \ldots, Y)(Y - y_1)\ldots(Y - y_m) + G_{i0}(X_1, \ldots, X_{n-1}) + \ldots + G_{im-1}(X_1, \ldots, X_{n-1})Y^{m-1}$$

et il résulte de l'étude du premier cas que les séries $G_{ij}(X_1, \ldots, X_{n-1})$ sont algébriques. On obtient ainsi

$$G_i(X_1, \ldots, X_n^{p^q}) = Q'_i(X_1, \ldots, X_n^{p^q})f(X_1, \ldots, X_n) + G_{i0}(X_1, \ldots, X_{n-1}) + \ldots + G_{im-1}(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^{p^q(m-1)},$$

où $Q'_i(X_1, \ldots, X_n^{p^q})$ est évidemment algébrique comme les autres séries apparaissant dans cette égalité.

Revenant à $g(X_1, \ldots, X_n)$, on voit que

$$g(X_1, \ldots, X_n) = q(X_1, \ldots X_n)f(X_1, \ldots, X_n) + g_0(X_1, \ldots, X_{n-1}) + \ldots + g_{s-1}(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^{s-1},$$

où $s = p^q m - 1$ et où $q, g_0, \ldots, g_{s-1}$ se calculent à partir des séries Q'_i, G_{ij} par des formules faciles à écrire. On en déduit l'algébricité de ces séries.

Remarque. — Il nous paraît vraisemblable que dans la catégorie des anneaux locaux quotients d'anneaux de séries formelles algébriques sur le corps K, la quasi-finitude équivaille à la finitude ([2]). Nous ne savons actuellement montrer que le résultat suivant : Un homomorphisme quasi-fini θ de $k[[X_1, \ldots, X_n]]_a$ dans l'anneau de valuation discrète $k[[Y]]_a$ est nécessairement fini.

(*) Séance du 8 mars 1965.

([1]) S. S. Abhyankar, *Local Analytic Geometry*, Academic Press, 1964.
([2]) *Séminaire H. Cartan*, 1960-1961, fasc. 2, Exposé 18.
([3]) J. P. Lafon, *Bull. Soc. math. Fr.*, 1963, p. 77-107.
([4]) J. P. Lafon, *Comptes rendus*, 260, 1965, p. 2660.

(7, *rue de l'Imprimerie, Montpellier, Hérault.*)