Über eine Anwendung der Primzahltheorie auf das Waringsche Problem in der elementaren Zahlentheorie.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Ich begrüße die vorangehende Arbeit von Herrn Wieferich*) als einen der erfreulichsten Fortschritte, welche die elementare Zahlentheorie in der letzten Zeit gemacht hat. Der Verfasser löst ein altes Problem, indem er eine Vermutung beweist, welche schon im Jahre 1782 in der Literatur vorkam und seitdem allen Zahlentheoretikern vorgelegen hat. Nun ist mit Herrn Wieferichs Ergebnis noch nicht alles geklärt, was mit der Zerlegbarkeit der Zahlen in Kuben zusammenhängt. Es bleibt zunächst folgende bestimmte Frage offen, auf welche der Vergleich mit den entsprechenden, schon durch Lagrange völlig bekannten Tatsachen bei der Zerlegbarkeit in Quadrate führt.

Es bezeichne $f(n)$ die kleinste Anzahl von Quadraten, als deren Summe die positive ganze Zahl n darstellbar ist, d. h. es sei

$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, f(4)=1, f(5)=2, f(6)=3, f(7)=4, f(8)=2, \cdots.$

Lagrange hat bewiesen, daß für alle n

$$f(n) \leqq 4$$

ist. Da

$$f(7)=4$$

ist, so ist nach Lagrange

$$\text{obere Grenze von } f(n) = 4.$$

Da ferner für $n \equiv 7 \pmod{8}$ stets

$$f(n)=4$$

ist, so ist nach Lagrange

$$\limsup_{n=\infty} f(n) = 4.$$

---

*) „Beweis des Satzes, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen läßt" [Mathematische Annalen, Bd. 66 (1908), S. 95—101]. Durch die Freundlichkeit des Verfassers und der Redaktion war mir die Arbeit vor ihrem Erscheinen zugänglich, so daß ich die vorliegenden Bemerkungen, zu denen sie mir Anlaß gab, in demselben Heft der Annalen erscheinen lassen kann.

Entsprechend sei $g(n)$ die kleinste Anzahl von positiven Kuben, aus denen n additiv gebildet werden kann:

$$g(1) = 1,\ g(2) = 2,\ g(3) = 3,\ \cdots,\ g(7) = 7,\ g(8) = 1,\ g(9) = 2,\ \cdots.$$

Herr Wieferich hat bewiesen, daß für alle n

$$g(n) \leqq 9$$

ist. Da

$$g(23) = 9$$

ist, so ist nach Herrn Wieferich

$$\text{obere Grenze von } g(n) = 9.$$

Aber es bleibt unentschieden, ob

$$\limsup_{n=\infty} g(n) = 9$$

oder

$$\limsup_{n=\infty} g(n) < 9$$

ist; denn man kennt nur endlich viele Zahlen ($n = 23$ und $n = 239$), für welche

$$g(n) = 9$$

ist.

Ich bin nun imstande, durch Verbindung von Herrn Wieferichs scharfsinniger Methode mit einem neueren Satz aus der Primzahltheorie zu beweisen, daß

$$\limsup_{n=\infty} g(n) < 9$$

ist; nämlich: *Jede Zahl oberhalb einer gewissen Schranke ist als Summe von höchstens acht positiven Kuben darstellbar.*

Jener Satz aus der Primzahltheorie, welcher zuerst von Herrn de la Vallée Poussin*) auf Hadamardscher Grundlage und später einfacher von mir**) bewiesen worden ist, lautet: Es seien k und l zwei positive teilerfremde Zahlen, $\varrho(x)$ die Anzahl der bis x (inkl.) gelegenen Primzahlen von der Form $ky + l$. Dann ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x}\, \varrho(x) = \frac{1}{\varphi(k)}.$$

Daraus folgt, wenn $\delta > 0$ eine positive Konstante ist,

---

*) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers" [Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2 (1896), S. 183—256, 281—397], S. 360—361.

**) „Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression" [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2a (1903), S. 493—535], S. 532.

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log x}{x}\left(\varrho(x+\delta x)-\varrho(x)\right)=(1+\delta)\lim_{x=\infty}\frac{\log(x+\delta x)}{x+\delta x}\varrho(x+\delta x)-\lim_{x=\infty}\frac{\log x}{x}\varrho(x)$$
$$=\frac{1+\delta}{\varphi(k)}-\frac{1}{\varphi(k)}=\frac{\delta}{\varphi(k)}>0;$$

die Anzahl $\varrho(x+\delta x)-\varrho(x)$ der Primzahlen zwischen x (exkl.) und $x+\delta x$ (inkl.) aus der Progression wird also mit x unendlich.

Speziell $\left(\text{für } k=3,\ l=2,\ \delta=\sqrt[9]{\frac{12}{8}}-1\right)$: Für alle hinreichend großen ganzen z gibt es mindestens zehn Primzahlen p, welche die Bedingungen

$$(1)\qquad \sqrt[9]{\frac{z}{12}}<p\leqq\sqrt[9]{\frac{z}{8}},$$

$$(2)\qquad p\equiv 2 \pmod{3}$$

erfüllen. Von je zehn solchen Primzahlen geht für alle hinreichend großen z mindestens eine nicht in z auf, da ihr Produkt $>\left(\frac{z}{12}\right)^{\frac{10}{9}}$, also von einer gewissen Stelle an größer als z ist. p bezeichne eine solche Primzahl, die also nicht in z aufgeht und (1), (2) erfüllt.

Aus (1) folgt

$$8p^9\leqq z<12p^9;$$

aus (2) ergibt sich, daß $\varphi(p^3)=p^2(p-1)$ nicht durch 3 teilbar, also jede zu p^3 teilerfremde Zahl, insbesondere z, kubischer Rest mod. p^3 ist. Es gibt also ein β derart, daß

$$0<\beta<p^3$$

und

$$z-\beta^3=p^3M$$

ist. Hierin ist

$$7p^9<p^3M<12p^9,$$
$$7p^6<\quad M<12p^6.$$

Es werde nun

$$M=6p^6+M_1$$

gesetzt:

$$p^6<M_1<6p^6.$$

Von M_1 läßt sich nach der ersten Wieferichschen Tabelle*) stets ein Kubus $\gamma^3 (0\leqq\gamma<96)$ subtrahieren, so daß

$$M_1-\gamma^3=M_2$$

mod. 96 einen der Reste 6, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 54, 60, 66, 78, 84 läßt. Für alle hinreichend großen z ist also

$$M_2=6M_3,$$

*) l. c., S. 97.

wo die unterhalb p^6 gelegene Zahl M_3 in drei Quadrate zerlegbar ist:

$$M_3 = A^2 + B^2 + C^2,$$

deren Basen A, B, C zwischen 0 (inkl.) und p^3 (exkl.) gelegen sind.

Alsdann ist

$$\begin{aligned} z &= \beta^3 + p^3 M = \beta^3 + p^3(6p^6 + M_1) = \beta^3 + p^3(6p^6 + \gamma^3 + M_2) \\ &= \beta^3 + (p\gamma)^3 + p^3(6p^6 + 6M_3) = \beta^3 + (p\gamma)^3 + 6p^3(p^6 + A^2 + B^2 + C^2) \\ &= \beta^3 + (p\gamma)^3 + (p^3 + A)^3 + (p^3 - A)^3 + (p^3 + B)^3 + (p^3 - B)^3 + (p^3 + C)^3 \\ &\quad + (p^3 - C)^3, \end{aligned}$$

also die gegebene Zahl z in acht nicht negative Kuben zerlegbar.

Anhang: Die Waringsche Vermutung, daß jede positive ganze Zahl sich als Summe einer festen Anzahl von nicht negativen s^{ten} Potenzen darstellen läßt, ist bisher nur für alle $s \leqq 6$ und $s = 8$ bewiesen.*) Mein Freund J. Schur hat nun die Identität gefunden, welche ich mit seiner Zustimmung hier veröffentliche**):

$$22680(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^5 = 9 \sum_{a \cdots d}^{(4)} (2a)^{10} + 180 \sum_{a \cdots d}^{(12)} (a \pm b)^{10}$$
$$+ \sum_{a \cdots d}^{(48)} (2a \pm b \pm c)^{10} + 9 \sum_{a \cdots d}^{(8)} (a \pm b \pm c \pm d)^{10}.$$

Hierdurch***) ist, da die Waringsche Vermutung für $s = 5$ durch Herrn Maillet bewiesen war, der Fall $s = 10$ erledigt und der Satz festgestellt: *Jede positive ganze Zahl läßt sich als Summe einer festen Anzahl von zehnten Potenzen darstellen.*

Berlin, den 21. Juni 1908.

---

*) Literaturangaben siehe in Herrn Maillets kürzlich erschienener Arbeit „Sur la décomposition d'un entier en une somme de puissances huitièmes d'entiers (problème de Waring)" [Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. 36 (1908), S. 69—77]. Zu den dort zitierten Arbeiten sind inzwischen drei weitere hinzugekommen: 1) Hurwitz, „Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n^{ten} Potenzen ganzer Zahlen" [Mathematische Annalen, Bd. 65 (1908), S. 424—427], 2) die oben zitierte Arbeit von Herrn Wieferich, 3) Wieferich, „Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten" [Mathematische Annalen, Bd. 66 (1908), S. 106—108].

**) In Fleck-Hurwitzscher Bezeichnungsweise.

***) Vgl. die allgemeinen Bemerkungen von Herrn Hurwitz (l. c., S. 424—425) über die Tragweite einer solchen Identität.