Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

» On peut appliquer une méthode analogue aux équations homogènes du type

$$y^{m-n-1}\Phi_n(y, y')y'' = \Psi_m(y, y'),$$

Φ_n et Ψ_m désignant des fonctions homogènes de y et y' de degrés entiers positifs n et m, avec $n < m - 1$. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations différentielles linéaires.* Note de M. **Paul Painlevé**, présentée par M. Darboux.

« Comme je l'ai montré dans une Communication précédente (*voir* les *Comptes rendus* du 27 juin), on peut ramener une équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre à la forme

$$(1)\qquad y''' + by' + cy = 0,$$

et si l'intégrale d'une telle équation (où b et c sont rationnels) est algébrique et correspond à un des groupes finis (α) à deux variables, analogues aux groupes du dièdre, une intégrale y_1 est nécessairement de la forme

$$y_1 = \sqrt[3n]{g(x)},$$

où $g(x)$ vérifie une relation $f(g, x) = 0$, du troisième degré en g. Il s'ensuit que le produit des trois valeurs linéairement distinctes de y_1, y_2, y_3 est de la forme

$$y_1 y_2 y_3 = \sqrt[3n]{\frac{M(x)}{N(x)}} = \frac{\Pi(x - x_i)^{\mu_i}}{\Pi(x - X_j)^{\nu_j}}.$$

» Les zéros X_j de $N(x)$ sont nécessairement des points singuliers de l'équation (1); on connaît une limite supérieure de la somme $\Sigma\nu_j$, en même temps qu'une limite supérieure de la différence $\Sigma\mu_i - \Sigma\nu_j$; on en conclut que le nombre des zéros x_i de $M(x)$, pour lesquels μ_i est entier, ne peut dépasser une certaine valeur m, et, en ajoutant à m le nombre des points singuliers de (1), on obtient une limite supérieure M du nombre des points pour lesquels l'intégrale y_1 est infinie ou nulle.

» Ceci posé, soit $\frac{y'}{y} = \eta$; η satisfait à une équation différentielle du second ordre, dont une intégrale η_1 doit vérifier une relation $f_1(\eta_1, x) = 0$, du troisième degré en η_1; d'autre part, les pôles de η_1 sont tous du premier ordre et leur nombre ne peut dépasser M. On déduit de là une limite du degré en x de f_1, et l'on peut reconnaître, par un nombre fini d'opérations, si l'équation en η admet effectivement une telle intégrale. Quand cette condition est satisfaite, on a

$$y_1 = Ce^{\int_{x_0}^{x} \eta_1\, dx};$$

la relation $f_1(\eta_1, x) = 0$ peut se décomposer parfois en relations du second et du premier degré en η. Mais, dans tous les cas, à chaque valeur de x, correspondent trois valeurs de y_1, y_2, y_3, linéairement distinctes, et l'intégrale générale de (1) peut s'écrire

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3.$$

» Nous arrivons bien ainsi à la conclusion énoncée : *On peut toujours vérifier si l'intégrale de l'équation* (1) *est algébrique, ou ramener l'équation à une quadrature.*

» La méthode employée s'applique à une équation linéaire A d'ordre quelconque; pour simplifier l'écriture, admettons qu'elle soit du quatrième ordre

$$\text{A)} \qquad y^{\text{IV}} + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

» Pour une telle équation, il existe trois invariants du cinquième ordre, où figurent les rapports t, u, v de quatre intégrales distinctes.

» Si l'on pose

$$D_1 = \begin{vmatrix} t^{\text{IV}} & 4t''' & 6t'' & 4t' \\ u^{\text{IV}} & 4u''' & 6u'' & 4u' \\ v^{\text{IV}} & 4v''' & 6v'' & 4v' \\ t^{\text{V}} & 5t^{\text{IV}} & 10t''' & 5t'' \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} t^{\text{IV}} & 4t''' & 6t'' & 4t' \\ u^{\text{IV}} & 4u''' & 6u'' & 4u' \\ v^{\text{IV}} & 4v''' & 6v'' & 4v' \\ t''' & 3t'' & 3t' & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} t^{\text{IV}} & 4t''' & 6t'' & 4t' \\ u^{\text{IV}} & 4u''' & 6u'' & 4u' \\ v^{\text{IV}} & 4v''' & 6v'' & 4v' \\ t'' & 2t' & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} t^{\text{IV}} & 4t''' & 6t'' & 4t' \\ u^{\text{IV}} & 4u''' & 6u'' & 4u' \\ v^{\text{IV}} & 4v''' & 6v'' & 4v' \\ t' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

et si l'on appelle $D'_1, D'_2, \ldots, D''_1, \ldots$ les expressions obtenues en permutant t, u, v dans les précédentes, les trois invariants I_1, I_2, I_3 sont donnés par trois équations

$$D_1 + I_1 D_2 + I_2 D_3 + I_3 D_4 = 0,$$
$$D'_1 + I_1 D'_2 + I_2 D'_3 + I_3 D'_4 = 0,$$
$$D''_1 + I_1 D''_2 + I_2 D''_3 + I_3 D''_4 = 0.$$

En fonction des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, ces invariants s'expriment de la manière suivante :

$$I_1 = \frac{a_3^2}{4} - \frac{2}{3} a_2 + a'_3,$$
$$I_2 = -\frac{3}{16} a_3^3 + \frac{3}{4} a_3 a_2 - \frac{3}{2} a_1 - \frac{3}{4} a_3 a'_3 + a'_2,$$
$$I_3 = \frac{3}{32} a_3^4 - \frac{1}{2} a_3 a_2 + a_3 a_1 + \frac{1}{3} a_2^2 - 4 a_0 + \frac{1}{4} a_3^2 a'_3 - \frac{1}{2} a_3 a'_2 - \frac{1}{2} a'_3 a_2 + a'_1.$$

On trouve, comme pour le troisième ordre, que

$$y = C \begin{vmatrix} t' & u' & v' \\ t'' & u'' & v'' \\ t''' & u''' & v''' \end{vmatrix}^{-\frac{1}{4}} \times e^{-\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} a\,dx}.$$

On peut toujours vérifier si l'intégrale de l'équation (A) correspond à un groupe donné. Si le groupe de l'équation doit être un des groupes analogues aux groupes du dièdre, une intégrale est de la forme $\sqrt[n]{g(x)}$, où $g(x)$ est définie par une équation du quatrième degré en g, et l'équation se ramène à une quadrature. Il est à présumer que tous les groupes finis à trois variables, dont l'indice est indéterminé, rentrent dans les précédents.

» Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, que j'ai considérés dans une Note précédente (*Comptes rendus* du 31 mai), se ramènent aux équations différentielles. Mais on peut les étudier directement de la même manière. Soit un système

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \dfrac{\partial z}{\partial x} + b \dfrac{\partial z}{\partial y} + c z, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a' \dfrac{\partial z}{\partial x} + b' \dfrac{\partial z}{\partial y} + c' z, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a'' \dfrac{\partial z}{\partial x} + b'' \dfrac{\partial z}{\partial y} + c'' z, \end{cases}$$

où les conditions d'intégrabilité sont remplies. On trouve, en conservant la même notation, que

$$z = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}\int (a+b')\,dx + (a'+b'')\,dy}.$$

Le raisonnement s'achève comme précédemment. J'ajoute que la recherche des cas où l'intégrale de (S) est algébrique rentre dans le problème plus général de la transformation de ces systèmes. Soit Σ un second système analogue à S, où figure la fonction $\zeta(\xi, \eta)$: on peut toujours passer de S à Σ (si les conditions d'intégrabilité sont également satisfaites pour Σ) par une transformation

$$x = f(\xi, \eta), \qquad y = \varphi(\xi, \eta), \qquad z = w(\xi, \eta)\zeta;$$

f et φ vérifient un système de quatre équations du second ordre qui se trouve formé dans la Note déjà citée, et $\frac{\partial w}{\partial \xi}$, $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ sont connus, quand f et φ sont déterminés. Ces remarques s'étendent sans peine aux systèmes analogues à S où figurent un plus grand nombre de variables. »

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur les explosions au sein des liquides*. Note de M. G. Robin, présentée par M. Darboux.

« La solution du problème d'Hydrodynamique qui fait l'objet de cette Note repose sur le principe suivant, qui contient toute la théorie des percussions :

» Étant donné un système actionné par des percussions connues P, si l'on désigne par p l'excès géométrique de la vitesse du point de masse m après la percussion sur sa vitesse avant la percussion, la quantité

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m p^2 - \Sigma P p \cos(P, p)$$

doit être un minimum.

» Soit maintenant un liquide en repos, limité par des surfaces libres et des parois fixes. Dans ce liquide homogène de densité μ plonge ou flotte un corps solide libre dont nous désignerons la surface immergée par S. Une sphère de rayon infiniment petit R éclate au sein du liquide avec une intensité de percussion $\frac{\mu m}{R}$ uniforme en tous les points de sa surface σ.

» On demande : 1° la vitesse (u, v, w, p, q, r) imprimée au corps solide par l'explosion; 2° la percussion $\mu\Phi$ en tout point du liquide.