А. И. Галочкин, О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E-функций, *Матем. заметки*, 1981, том 29, выпуск 1, 3–14

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 29, № 1 (1981)

О КРИТЕРИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЗИГЕЛЯ КЛАССУ E-ФУНКЦИЙ

А. И. Галочкин

Пусть $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел, K — алгебраическое числовое поле конечной степени, K^* — кольцо целых чисел в поле K. Через p и $\mathfrak{p}$ будем обозначать соответственно простые рациональные числа и простые идеалы поля K, через $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$ — показатель степени, в которой входит идеал $\mathfrak{p}$ в разложение идеала $\mathfrak{a}$ на простые сомножители, через $N(\alpha)$ — абсолютную норму числа $\alpha \in K$. Аналогично будет обозначаться норма идеала; $[x]$ — целая часть числа x.

Функция $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{x!}$, где все $c_n \in K$, называется E-функцией, если для любого $\varepsilon > 0$ максимум модулей всех чисел, сопряженных c_n в поле K при $n = 1, 2, \ldots$ есть $O(n^{\varepsilon n})$ и существует растущая не быстрее, чем $O(n^{\varepsilon n})$, последовательность $\{q^{(n)}\}$ натуральных чисел такая, что $q^{(n)} c_k \in K^*$, $n = 1, 2, \ldots$; $k = 0, 1, \ldots, n$.

При помощи метода К. Зигеля [1], [2] и общих теорем А. Б. Шидловского к настоящему времени получено довольно много результатов об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами — рациональными функциями (см. [3]). К. Зигель [2, стр. 58] предположил, что все такие функции могут быть получены при помощи некоторых простых операций из

E-функций

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a_1+1,n]\dots[a_u+1,n]}{[b_1+1,n]\dots[b_v+1,n]}z^{tn},$$

$$t=v-u>0,\quad [x+1,\ n]=(x+1)\dots\ (x+n),\qquad (1)$$
$$[x+1,0]=1,$$

с рациональными параметрами $a_1,\dots,\ a_u,\ b_1,\dots,\ b_v$. Эта гипотеза не доказана и не опровергнута. Долгое время не было известно, не являются ли функции (1) E-функциями и при алгебраических параметрах. Первый результат в этом направлении получил в 1968 году В. Г. Спринджук [4]. Он доказал, что функция

$$\varphi_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{[\lambda+1,n]}$$

не является E-функцией, если λ — квадратичная иррациональность. В [5] он обобщил этот результат на случай алгебраического λ такого, что $Q(\lambda)$ — поле Галуа. Из теоремы 1 статьи [6] следует, что при $u=0$ функция 1 не E-функция, если только не все параметры $b_1,\dots,\ b_v$ рациональны. В настоящей работе устанавливается необходимое и достаточное условие принадлежности функции (1) общего вида классу E-функций.

Введем следующее

Определение. Будем говорить, что две системы алгебраических чисел $(a_1,\dots,\ a_u)$ и $(b_1,\dots,\ b_v)$ удовлетворяют условию E, если либо все числа $a_i,\ b_j$ рациональные, либо существует такое разбиение всех тех из этих чисел, которые не являются рациональными, на пары $(a_{i_1},\ b_{j_1}),\dots,\ (a_{i_w},\ b_{j_w})$ $(i_\nu\neq i_\mu$ при $\nu\neq\mu,\ j_\eta\neq j_\lambda$ при $\eta\neq\lambda)$, что все разности $a_{i_s}-b_{j_s},\ s=1,\dots,\ w$ — неотрицательные целые рациональные числа.

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы функция* (1) *с комплексными параметрами* $a_1,\dots,\ a_u,\ b_1,\dots,\ b_v$, *отличными от* $-1,\ -2,\dots$ *и такими, что* $a_i\neq b_j$ *при* $i=1,\dots,\ u$; $j=1,\dots,\ v$ *была E-функцией, необходимо и достаточно, чтобы все числа* $a_1,\dots,\ a_u,\ b_1,\dots,\ b_v$ *были алгебраическими и чтобы системы чисел* $(a_1,\dots,\ a_u)$ *и* $(b_1,\dots,\ b_v)$ *удовлетворяли условию E.*

ЛЕММА 1. *Пусть* $a_1,\dots,\ a_u,\ b_1,\dots,\ b_v$ $(v\geqslant u)$ — *комплексные числа, отличные от* $-1,\ -2,\dots$ *и* $a_i\neq b_j$

при $i = 1, \ldots, u$; $j = 1, \ldots, v$. *Тогда, если все коэффициенты степенного ряда* (1) — *алгебраические числа, то и все числа* $a_1, \ldots, a_u, b_1, \ldots, b_v$ *алгебраические.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что алгебраическими являются все числа

$$\alpha_n = \frac{(a_1+n)\ldots(a_u+n)}{(b_1+n)\ldots(b_v+n)} = \frac{P(n)}{Q(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

где

$$P(x) = (x+a_1)\ldots(x+a_u) = x^u + p_{u-1}x^{u-1} + \ldots + p_0,$$

$$Q(x) = x^v + q_{v-1}x^{v-1} + \ldots + q_0.$$

Разлагая коэффициенты $p_0, \ldots, p_{u-1}, q_0, \ldots, q_{v-1}$ по базису $\omega_1 = 1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ линейного пространства, натянутого на все эти коэффициенты над полем всех алгебраических чисел, из (2) получим

$$\sum_{k=1}^{r} (P_k(n) - \alpha_n Q_k(n))\,\omega_k = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

где $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ — многочлены с алгебраическими коэффициентами. Поскольку $Q_1(x) \not\equiv 0$, при $n > n_0$ $Q_1(n) \neq 0$, поэтому из (2) и (3) имеем $P(x)/Q(x) = P_1(x)/Q_1(x)$ при всех натуральных значениях $x > n_0$. Следовательно, это равенство есть тождество, в силу условий леммы и выбора $\omega_1 = 1$ это означает, что $P(x) \equiv P_1(x)$, $Q(x) \equiv Q_1(x)$, откуда получаем утверждение леммы.

Для алгебраических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ степеней соответственно $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ будем обозначать $\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 1 - \frac{1}{m\varkappa_1} - \ldots - \frac{1}{m\varkappa_m}$. Заметим, что $\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0$ тогда и только тогда, когда все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ рациональны. Знаки «и» будут скрывать не зависящие от n положительные постоянные.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *числа из алгебраического поля* K *степени* $\varkappa$, *отличные от* $-1, -2, \ldots$; $\tau(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \tau$, $\varepsilon > 0$ *и* $\gamma \geqslant 1$ — *произвольные положительные постоянные,* d — *натуральное число такое, что все* $d\lambda_i \in K^*$, $A_n = d^{mn}[\lambda_1 + 1, n] \ldots [\lambda_m + 1, n]$. *Далее, пусть главный идеал* (A_n) *разбит на два сомножителя* $(A_n) = \mathfrak{v}_n\mathfrak{u}_n$ *так, что в идеал* $\mathfrak{v}_n$ *входят только простые идеалы* $\mathfrak{p} \mid p$ *при* $p \leqslant \gamma n$, *а в* $\mathfrak{u}_n$ — *только* $\mathfrak{p} \mid p$ *при* $p > \gamma n$. *Тогда*

$$n^{(m\tau-\varepsilon)\varkappa n} \leqslant N(\mathfrak{u}_n) \leqslant n^{(m\tau+\varepsilon)\varkappa n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $\gamma = 1$, поскольку при $\gamma > 1$ норма произведения всех простых идеалов, делящих простые числа p при $n \leqslant p \leqslant \gamma n$, растет как $e^{O(n)}$ и каждый из таких идеалов $\mathfrak{p}$ делит при каждом i не более одного из чисел $d(\lambda_i + 1), \ldots, d(\lambda_i + n)$, если только $p \nmid d$. Далее, можно считать, что $m = 1$ и $K = Q(\lambda_1)$. Переход к общему случаю проводится так же, как в [6, стр. 1229]. С учетом этих ограничений оценка снизу $N(\mathfrak{u}_n)$ следует из [6, лемма 5]. Из [6, равенства (19), (20), (24) — (26)] следует, что существует целый идеал $\mathfrak{m}_n \mid \mathfrak{v}_n$ с $N(\mathfrak{v}_n) \gg n^{(1-\varepsilon)n}$, откуда получаем оценку сверху $N(\mathfrak{u}_n)$.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть среди отличных от* $-1, -2, \ldots$ *чисел* $a_1, \ldots, a_v, b_1, \ldots, b_v$ $(a_i \neq b_j, 1 \leqslant i, j \leqslant v)$ *из алгебраического поля* K *степени* $\varkappa$ *содержится* $w = v - m$ $(0 \leqslant w < v)$ *пар*

$$(a_{m+1}, b_{m+1}), (a_{m+2}, b_{m+2}), \ldots, (a_v, b_v) \tag{4}$$

таких, что все разности $d_i = a_i - b_i$, $i = m+1, m+2, \ldots, v$, *— натуральные числа, и не содержится* $w+1$ *пар* $(a_{i_1}, b_{j_1}), \ldots, (a_{i_{w+1}}, b_{j_{w+1}})$ $(i_\nu \neq i_\mu$ *при* $\nu \neq \mu$ *и* $j_\eta \neq j_\lambda$ *при* $\eta \neq \lambda)$, *обладающих аналогичным свойством;* m_1 *и* m_2 *— количество чисел соответственно из наборов* $(a_1, \ldots, a_m)$ *и* $(b_1, \ldots, b_m)$, *не являющихся рациональными,* $\tau_1 = \tau(a_1, \ldots, a_m)$, $\tau_2 = \tau(b_1, \ldots, b_m)$, $\tau = \max(\tau_1, \tau_2)$ *— произвольное положительное число;*

$$g_k = \frac{[a_1 + 1, k] \ldots [a_v + 1, k]}{[b_1 + 1, k] \ldots [b_v + 1, k]}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Тогда для любой последовательности $\{q_n\}$ *не равных нулю целых чисел из поля* K *таких, что при* $n = 1, 2, \ldots$

$$q_n g_k \in K^*, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

справедлива оценка

$$|N(q_n)| \gg n^{(m|\tau_1 - \tau_2| - \varepsilon)\varkappa n}. \tag{7}$$

Если же, кроме того, $m_1 m_2 = 0$, *то*

$$|N(q_n)| \gg n^{\frac{m^2\tau^2}{6m_1m_2}\varkappa n}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть d — натуральное число такое, что все числа $da_i = \alpha_{1,i}$ и $db_j = \alpha_{2,j}$ $(i, j =$

$= 1, \ldots, v$) — целые алгебраические. Обозначим при $\nu = 1, 2$; $k = 1, 2, \ldots$

$$A_{\nu, k} = \prod_{i=1}^{m} (\alpha_{\nu, i} + d) \ldots (\alpha_{\nu, i} + kd),$$
$$B_k = \prod_{i=m+1}^{v} \prod_{j=1}^{d_i} ((b_i + j + k)\, d), \quad G_k = A_{1, k}/A_{2, k}, \tag{9}$$

полагая, что $B_k = 1$, если $w = 0$, и что $B_0 = G_0 = 1$. $A_{\nu, k}$, B_k — числа из K^*. Число $G_k B_k$ равно произведению числа g_k на число K^*, поэтому в силу (6)

$$q_n G_k B_k = q_n A_{1, k} A_{2, k}^{-1} B_k \in K^*, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Для продолжения доказательства нам потребуется следующая

ЛЕММА 3. *Пусть выполнены условия основной леммы и (4) — тот из всевозможных наборов пар* $(a_{i_1}, b_{j_1}), \ldots, (a_{i_w}, b_{j_w})$ $(i_\nu \neq i_\mu$ *при* $\nu \neq \mu$ *и* $j_\eta \neq j_\lambda$ *при* $\eta = \lambda)$ *с натуральными разностями* $a_{i_s} - b_{j_s}$, $s = 1, \ldots, w$, *для которого сумма* $S = (a_{i_1} - b_{j_1}) + \ldots + (a_{i_w} - b_{j_w})$ *принимает наименьшее значение. Тогда существует зависящая только от* $a_1, \ldots, a_v$, $b_1, \ldots, b_v$ *постоянная* γ_1 *такая, что*

1) *если* $\mathfrak{p}'$ — *произвольный простой идеал, делящий простое число* $p' > \gamma_1$ *и* $\mathfrak{p}' \mid \alpha_{1, i} + k_1 d$, $i \leqslant m$, *при натуральном* k_1, *то* $\mathfrak{p}' \nmid B_{k_1 - 1}$;

2) *если* $\mathfrak{p}''$ — *какой-либо простой идеал, делящий простое число* $p'' > \gamma_1$ *и* $\mathfrak{p}'' \mid \alpha_{2, j} + k_2 d$, $j \leqslant m$, *то* $\mathfrak{p}'' \nmid B_{k_2}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p}' \mid (a_i + k_1)\, d$ и $\mathfrak{p}' \mid B_{k_1 - 1}$, тогда при некоторых индексах l и h, $l > m$, $1 \leqslant h \leqslant d_l$, $\mathfrak{p}' \mid (b_l + h + k_1 - 1)\, d$, следовательно, $\mathfrak{p}' \mid (a_i - a_l + t)\, d$ с $t = d_l - h + 1$, $1 \leqslant t \leqslant d_l$. Если $\mathfrak{p}' \mid p'$ и простое p' больше модулей норм всех таких чисел $(a_i - a_l + t)\, d$, то $a_i = a_l - t$. Тогда $0 \neq a_i - b_l = d_l - t$ — натуральное число, и, заменив в наборе (4) пару (a_l, b_l) на (a_i, b_l) получим набор со значением S меньшим $d_{m+1} + \ldots + d_v$, что противоречит выбору набора (4). Второе утверждение леммы 3 доказывается аналогично.

Будем в дальнейшем считать, что условия леммы 3 выполнены — в противном случае соответствующим образом перенумеруем параметры a_i, b_j.

По лемме 2 с

$$\gamma = \max_{\nu, i} \{\gamma_1, \mid \alpha_{\nu, i} \mid + d\}, \tag{11}$$

$$(A_{\nu, n}) = \mathfrak{v}_{\nu, n}\mathfrak{u}_{\nu, n},$$

$$n^{(m\tau_\nu - \varepsilon/4)\varkappa n} \leqslant N(\mathfrak{u}_{\nu, n}) \leqslant n^{(m\tau_\nu + \varepsilon/4)\varkappa n}, \tag{12}$$

$\nu = 1, 2$, причем все $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{u}_{1, n}\mathfrak{u}_{2, n}$ являются делителями простых чисел $p > \gamma n$ и идеалы $\mathfrak{u}_{1, n}\mathfrak{u}_{2, n}$ и $\mathfrak{v}_{1, n}\mathfrak{v}_{2, n}$ взаимно просты. Тогда вследствие (10) идеалы $(q_n B_n)\,\mathfrak{u}_{1, n}\mathfrak{u}_{2, n}^{-1}$ и $(q_n B_n)\,\mathfrak{v}_{1, n}\mathfrak{v}_{2, n}^{-1}$ целые. Поэтому в силу (9) и (12)

$$|N(q_n B_n)| \geqslant \max \{N(\mathfrak{u}_{2, n}\mathfrak{u}_{1, n}^{-1}), N(\mathfrak{u}_{1, n}\mathfrak{u}_{2, n}^{-1})\,|N(A_{2, n}A_{1, n}^{-1})|\} \geqslant$$
$$\geqslant n^{\left(m|\tau_1 - \tau_2| - \frac{3}{4}\varepsilon\right)\varkappa n},$$

откуда следует (7),

Положим $\mathfrak{a}_{\nu, i, s}^{(0)} = (\alpha_{\nu, i} + sd)$, $\nu = 1, 2$; $i = 1, \ldots, m$; $s = 1, \ldots, n$. Идеалы $\mathfrak{a}_{\nu, i, s}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, построим по индукции следующим образом. Допустим, что при $\lambda \leqslant t - 1$, где $t \geqslant 1$, такие идеалы построены. В множестве всех простых идеалов $\mathfrak{p}$ таких, что $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{u}_{1, n}\mathfrak{u}_{2, n}$ и при некоторых индексах i, j, s, l $(1 \leqslant i, j \leqslant m, 1 \leqslant s \leqslant l \leqslant n)$ $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_{1, i, s}^{(t-1)}$ и $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_{2, j, l}^{(t-1)}$, если это множество не пусто, выделим тот идеал $\mathfrak{p}_t$, для которого разность $l - s$ принимает наименьшее неотрицательное значение. Эту разность обозначим через Δ_t. Идеалу $\mathfrak{p}_t$ поставим в соответствие некоторую пару идеалов $\mathfrak{a}_{1, i_t, s_t}^{(t-1)}$, $\mathfrak{a}_{2, j_t, l_t}^{(t-1)}$ такую, что $l_t - s_t = \Delta_t \geqslant 0$ и

$$\mathfrak{a}_{1, i_t, s_t}^{(t)} = \mathfrak{a}_{1, i_t, s_t}^{(t-1)}\mathfrak{p}_t^{-1}, \quad \mathfrak{a}_{2, j_t, l_t}^{(t)} = \mathfrak{a}_{2, j_t, l_t}^{(t-1)}\mathfrak{p}_t^{-1}$$

— целые идеалы. Положим $\mathfrak{a}_{1, i, s}^{(t)} = \mathfrak{a}_{1, i, s}^{(t-1)}$ при $(i, s) \neq (i_t, s_t)$, $\mathfrak{a}_{2, j, l}^{(t)} = \mathfrak{a}_{2, j, l}^{(t-1)}$ при $(j, l) \neq (j_t, l_t)$.

Очевидно, что $0 \leqslant \Delta_1 \leqslant \Delta_2 \leqslant \ldots$ Обозначим

$$\mathfrak{a}_{\nu, k}^{(\lambda)} = \prod_{s=1}^{k} \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_{\nu, i, s}^{(\lambda)}, \quad g_k^{(\lambda)} = \frac{\mathfrak{a}_{1, k}^{(\lambda)}}{\mathfrak{a}_{2, k}^{(\lambda)}}. \tag{13}$$

Пусть δ — положительное число, не зависящее от n, точное значение которого будет выбрано в дальнейшем, u — наибольший из индексов t, при которых $\Delta_t \leqslant \delta n$. Обозначим далее

$$\mathfrak{m}_n = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_u, \quad \mathfrak{w}_{\nu, n} = \mathfrak{u}_{\nu, n}\mathfrak{m}_n^{-1}, \quad \nu = 1, 2, \tag{14}$$

полагая при этом $\mathfrak{m}_n = (1)$, если нет такого идеала $\mathfrak{p}_1$, что $0 \leqslant \Delta_1 \leqslant \delta n$. Идеалы $\mathfrak{w}_{\nu, n}$ целые и $\mathfrak{w}_{\nu, n} \mid \mathfrak{a}_{\nu, n}^{(u)}$. Для доказательства оценки (8) нам потребуется

ЛЕММА 4. *Пусть выполнены условия основной леммы и леммы* 3. *Тогда*

1) *все идеалы* $(q_n, B_k)\, \mathfrak{g}_k^{(\lambda)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\lambda = 0, 1, \ldots, u$ *— целые, и для любого простого идеала* $\mathfrak{p}$ *кольца* K^*

$$\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{g}_k^{(\lambda)}) \leqslant \nu_\mathfrak{p}(G_k), \quad \lambda = 0, 1, \ldots, u; \quad k = 1, \ldots n; \tag{15}$$

2) *если* $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{u}_{1, n}\mathfrak{u}_{2, n}$, $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_{1, i, s}^{(u)}$, $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_{2, j, l}^{(u)}$ *и* $1 \leqslant s \leqslant l \leqslant n$, *то* $l - s > \delta n$;

3) $N(\mathfrak{w}_{\nu, n}) \geqslant n^{(m\tau_\nu - \delta m_1 m_2 - \varepsilon)\varkappa n}$, $\nu = 1, 2$. $\quad$ (16)

Доказательство. Первое утверждение докажем индукцией по λ. При $\lambda = 0$ оно следует из (10) и равенства $\mathfrak{g}_k^{(0)} = (G_k)$. Допустим, что это утверждение доказано при $\lambda = t - 1$, где $t \geqslant 1$. Установим его справедливость при $\lambda = t$. По построению идеалов $\mathfrak{a}_{\nu, i, s}^{(t)}$ и $\mathfrak{g}_k^{(t)}$

$$\mathfrak{g}_k^{(t)} = \begin{cases} \mathfrak{g}_k^{(t-1)} & \text{при } 1 \leqslant k < s_t \text{ и } l_t \leqslant k \leqslant n, \\ \mathfrak{g}_k^{(t-1)} \mathfrak{g}_t^{-1} & \text{при } s_t \leqslant k < l_t, \end{cases} \tag{17}$$

поэтому $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{g}_k^{(t)}) \leqslant \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{g}_k^{(t-1)})$ и (15) следует из предположения индукции. В силу (17) и индуктивного предположения для доказательства того, что все идеалы $(q_n B_k)\, \mathfrak{g}_k^{(t)}$, $k = 1, \ldots, n$, целые, достаточно установить, что при $\lambda = t$

$$\nu_{\mathfrak{p}_t}((q_n B_k)\, \mathfrak{g}_k^{(\lambda)}) \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Справедливость этого неравенства при $\lambda = t - 1$ вытекает из предположения индукции. Из определения чисел Δ_t, s_t, l_t и i_t следует, что $\mathfrak{p}_t \mid \mathfrak{a}_{1, i_t, s_t}^{(t-1)}$, $\mathfrak{p}_t \nmid \mathfrak{a}_{2, j, k}^{(t-1)}$ при $j = 1, \ldots, m$ и $s_t \leqslant k < l_t$, кроме того, по лемме 3 $\mathfrak{p}_t \nmid B_{s_t - 1}$. Поэтому из (18) при $\lambda = t - 1$ и (13) $\nu_{\mathfrak{p}_t}((q_n) \times \mathfrak{g}_{s_t-1}^{(t-1)} \geqslant 0$, а $\nu_{\mathfrak{p}_t}((q_n)\, \mathfrak{g}_k^{(t-1)}) \geqslant 1$ при $s_t \leqslant k < l$, и из (17) следует справедливость неравенства (18) при $\lambda = t$.

Второе утверждение леммы вытекает из способа выделения идеалов $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ и выбора u.

Каждому идеалу $\mathfrak{p}_t$, $1 \leqslant t \leqslant u$, соответствует пара чисел $\alpha_{1, i_t} + s_t d$ и $\alpha_{2, j_t} + l_t d$ с $0 \leqslant l_t - s_t = \Delta_t \leqslant \delta n$. Идеал $\mathfrak{p}_t$ делит оба эти числа. Если некоторой паре чисел соответствует несколько простых идеалов $\mathfrak{p}_t$, среди которых могут быть и одинаковые, то произведение этих идеалов делит каждое из чисел пары, а, следовательно, и их разность $\alpha_{2, j} - \alpha_{1, i} + \Delta_t d$. Величины Δ_t при $t = 1, \ldots$ $\ldots, u$ могут принимать не более $\delta n + 1$ различных значений. Из (11), определения идеалов $\mathfrak{u}_{\nu, n}$ и того, что $\mathfrak{m}_n \mid \mathfrak{u}_{\nu, n}$ следует, что количество пар (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant m$, для которых каждый из идеалов $(\alpha_{1, i} + d) \ldots (\alpha_{1, i} + nd))$, $(\alpha_{2, j} + d) \ldots (\alpha_{2, j} + nd)$ не взаимно прост с $\mathfrak{m}_n$, не превышает $m_1 m_2$, кроме того, при фиксированных ν и i идеал $\mathfrak{p}_t$ делит не более одного из чисел $\alpha_{\nu, i} + d, \ldots, \alpha_{\nu, i} + nd$. Поэтому можно выделить идеал $\mathfrak{n}_n \mid \mathfrak{m}_n$, для определенности $\mathfrak{n}_n = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_r$ $(r \leqslant u)$, такой, что каждому из идеалов $\mathfrak{p}_t$, $1 \leqslant t \leqslant r$, соответствует пара $\alpha_{1, i} + s_t d$, $\alpha_{2, j} + l_t d$ с фиксированными индексами i и j $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ и фиксированной разностью $l_t - s_t = \Delta$, $0 \leqslant \Delta \leqslant \delta n$, и

$$(N(\mathfrak{n}_n))^{(\delta n+1) m_1 m_2} \geqslant N(\mathfrak{m}_n). \tag{19}$$

Сказанное выше означает, что $\mathfrak{n}_n \mid (\alpha_{2, j} - \alpha_{1, i} + \Delta d)$. Так как по условию основной леммы $\alpha_{1, i} - \alpha_{2, j} \neq \Delta d$,

$$N(\mathfrak{n}_n) \leqslant |\, N(\alpha_{2, j} - \alpha_{1, i} + \Delta d) \,| \ll n^{\varkappa},$$

поэтому в силу (19) $N(\mathfrak{m}_n) \ll n^{\varkappa(\delta n+1) m_1 m_2}$ и (16) следует из (12) и (14). Лемма 4 доказана.

В дальнейшем, вместо $\mathfrak{a}_{\nu, i, s}^{(u)}$, $\mathfrak{a}_{\nu, k}^{(u)}$ и $\mathfrak{g}_k^{(u)}$, будем писать соответственно $\mathfrak{a}_{\nu, i, s}$, $\mathfrak{a}_{\nu, k}$, $\mathfrak{g}_k$, опуская индекс u. Для неотрицательных чисел k_1, k_2, $k_2 \geqslant k_1$, обозначим

$$\mathfrak{a}_\nu(k_1, k_2) = \frac{\mathfrak{a}_{\nu, k_2}}{\mathfrak{a}_{\nu, k_1}}, \quad \mathfrak{g}(k_1, k_2) = \frac{\mathfrak{a}_1(k_1, k_2)}{\mathfrak{a}_2(k_1, k_2)}, \tag{20}$$

полагая $\mathfrak{a}_{\nu, 0} = (1)$. Разобьем идеалы $\mathfrak{a}_{\nu, n}$ на произведение $t = [1/\delta] + 1$ сомножителей $\mathfrak{a}_{\nu, n} = \mathfrak{b}_{\nu, 1} \ldots \mathfrak{b}_{\nu, t}$, где

$$\mathfrak{b}_{\nu, s} = \mathfrak{a}_\nu\left(\left[\frac{s-1}{t} n\right], \left[\frac{s}{t} n\right]\right).$$

В соответствии с этим разбиением идеалы $\mathfrak{w}_{\nu, n}$ тоже разобьются в произведение t сомножителей

$$\mathfrak{w}_{\nu,\,n} = \mathfrak{w}_\nu^{(1)} \dots \mathfrak{w}_\nu^{(t)}, \quad \mathfrak{w}_\nu^{(s)} \mid \mathfrak{b}_{\nu,\,s}, \qquad \nu = 1, 2,$$

и в силу (15) хотя бы для двух индексов s_1 и s_2

$$N(\mathfrak{w}_\nu^{(s_\nu)}) \geqslant (N(\mathfrak{w}_{\nu,\,n}))^{\frac{1}{t}} \gg n^{\frac{\delta(m\tau_\nu - \delta m_1 m_2 - \varepsilon)\varkappa n}{1+\delta}}, \qquad \nu = 1, 2. \tag{21}$$

Обозначим $h_\nu = \left[\dfrac{s_\nu - 1}{t} n\right]$, $l_\nu = \left[\dfrac{s_\nu}{t} n\right]$, $\nu = 1, 2$.

Пусть $\mathfrak{p}$ — произвольный простой идеал, делящий $\mathfrak{w}_1^{(s_1)}$, а k_1 — наименьший из индексов, больших h_1, при котором $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_1(h_1, k_1)$. Тогда

$$\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{w}_1^{(s_1)}) = \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_1(k_1 - 1, l_1))$$

и при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_{1,\,i,\,k_i}$. По лемме 3 $\mathfrak{p} \nmid B_{k_1-1}$, а, так как $l_1 - k_1 \leqslant \delta n$, то по второму утверждению леммы

$$4 \quad \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a}_1(k_1 - 1, l_1).$$

Поэтому из первого утверждения леммы 4 и (20) следует

$$\begin{aligned}(\nu_\mathfrak{p}(q_n B_{l_1} G_{l_1}) &\geqslant \nu_\mathfrak{p}((q_n)\,\mathfrak{g}_{l_1}) = \\ &= \nu_\mathfrak{p}((q_n)\,\mathfrak{g}_{k_1-1}) + \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{g}(k_1 - 1, l_1)) = \\ &= \nu_\mathfrak{p}((q_n B_{k_1-1})\,\mathfrak{g}_{k_1-1}) + \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_1(k_1 - 1, l_1)) \geqslant \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{w}_1^{(s_1)}).\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathfrak{w}_1^{(s_1)} \mid q_n B_{l_1} G_{l_1}$ и в силу (10)

$$|N(q_n)| \geqslant N(\mathfrak{w}_1^{(s_1)})\,|N(B_{l_1} G_{l_1})|^{-1}. \tag{22}$$

Пусть теперь $\mathfrak{p}$ — произвольный простой идеал, делящий $\mathfrak{w}_2^{(s_2)}$, а k_2 — наибольший из не превосходящих l_2 индексов, при котором

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_2(k_2 - 1, l_2).$$

Тогда

$$\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{w}_2^{(s_2)}) = \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_2(h_2, k_2))$$

и при некотором j, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_{2,\,j,\,k_2}$. По лемме 3

$\mathfrak{p} \nmid B_{k_2}$, а по лемме 4 $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a}_1 (h_2, k_2)$. Снова по лемме 4 имеем

$$\nu_{\mathfrak{p}} (q_n B_{h_2} G_{h_2}) \geqslant \nu_{\mathfrak{p}} ((q_n)\ \mathfrak{g}_{h_2}) =$$
$$= \nu_{\mathfrak{p}} ((q_n)\, \mathfrak{g}_{k_2}) - \nu_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{g}\ (h_2,\ k_2)) =$$
$$= \nu_{\mathfrak{p}} ((q_n B_{k_2})\, \mathfrak{g}_{k_2}) + \nu_{\mathfrak{p}}\ (\mathfrak{a}_2\ (h_2,\ k_2)) \geqslant \nu_{\mathfrak{p}}\ (\mathfrak{w}_2^{(s_2)}),$$

и, аналогично предыдущему,

$$\mathfrak{w}_2^{(s_2)} \mid q_n B_{h_2} G_{h_2}$$

и

$$|N\ (q_n)\ | \geqslant N \mathfrak{w}_2^{(s_2)})\ |\ N\ (B_{h_2} G_{h_2})\ |^{-1}. \tag{23}$$

Положим при $m_1 m_2 = 0$

$$\delta = m\tau\ /(2m_1 m_2),$$

тогда из определения τ_1, τ_2 и τ вытекает, что

$$1 + \delta < 1{,}5,$$

и при достаточно малом ε оценка (8) следует из (9), (21) — (23). Основная лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Достаточность в теореме 1 легко следует из определения E-функции и доказанного К. Зигелем [2, стр. 56—58] утверждения о том, что функция (1) с рациональными параметрами a_i, b_j является E-функцией.

Необходимость. Пусть при выполнении условий теоремы функция (1) есть E-функция. Тогда по лемме 1 все параметры $a_1, \ldots, a_u$, $b_1, \ldots, b_v$ — алгебраические числа и, согласно определению E-функции, существует последовательность натуральных чисел $\{q^{(tn)}\}$ такая, что для каждого натурального n

$$q^{(tn)} g_k\ (tk)!\ (k!)^{-t} \in K^*,$$

где числа g_k определяются посредством (5) при

$$a_{u+1} = a_{u+2} = \ldots = a_v = 0,$$

и

$$q^{(tn)} \ll n^{\varepsilon n}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что если Q_n — общее наименьшее кратное натуральных чисел $(tk)!\ (k!)^{-t}$, $k = 1, \ldots, n$, то выполняется (6) с натуральным $q_n = q^{(tn)} Q_n$.

Мы имеем

$$\ln Q_n=$$

$$=\sum\nolimits_{p\leqslant tn}\left\{\sum\nolimits_{s=1}^{\left[\frac{\ln tn}{\ln p}\right]}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\left[\frac{tk}{p^s}\right]-t\left[\frac{k}{p^s}\right]\right)\right\}\ln p\leqslant$$

$$\leqslant\sum\nolimits'_{p\leqslant tn}t\left[\frac{\ln tn}{\ln p}\right]\ln p\ll n,$$

поэтому

$$|N(q_n)|=q^{\varkappa}_n\ll n^{2\varepsilon\varkappa n}.$$

Допустим, что системы алгебраических чисел $(a_1,\ldots,a_n)$ и $(b_1,\ldots,b_v)$ не удовлетворяют условию E. Тогда по основной лемме

$$|N(q_n)|\gg n^{\gamma_2\varkappa n}$$

с постоянной $\gamma_2>0$, не зависящей от n. Последние две оценки $|N(q_n)|$ при $2\varepsilon<\gamma_2$ и достаточно большом n противоречивы. Противоречие доказывает теорему.

В последние годы значительное внимание уделяется исследованию арифметических свойств значений еще одного класса аналитических функций, тоже введенного К. Зигелем в [1], — класса так называемых G-функций. Определение G-функции можно также найти в [3, стр. 196]. Непосредственным следствием основной леммы и леммы 1 является следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $a_1,\ldots,a_v$, $b_1,\ldots,b_v$ — *комплексные числа, отличные от* -1, $-2,\ldots$ *и такие, что* $a_i\neq b_j$ *при* i, $j=1,\ldots,v$. *Тогда для того, чтобы функция*

$$g(z)=\sum\nolimits'_{n=0}^{\infty}\frac{[a_1+1,n]\ldots[a_v+1,n]}{[b_1+1,n]\ldots[b_v+1,n]}z^n$$

была G-функцией, необходимо и достаточно, чтобы все числа a_i, b_j были алгебраическими и чтобы системы чисел $(a_1,\ldots,a_v)$ и $(b_1,\ldots,b_v)$ удовлетворяли условию E.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
20.III.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Siegel C. L., Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abhandl. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., № 1 (1929), 1—70.

[2] Siegel C. L., Transcendental numbers, Princeton, 1949.
[3] Шидловский А. Б., Об арифметических свойствах значений аналитических функций, Тр. Матем. ин-та АН СССР, **132** (1973), 169—202.
[4] Спринджук В. Г., Иррациональность значений некоторых транцендентных функций, Изв. АН СССР, Сер. матем., **32**, № 1 (1968), 93—107.
[5] Спринджук В. Г., К теории гипергеометрических функций Зигеля, Докл. АН БССР, **13**, № 5 (1969), 389—391.
[6] Галочкин А. И., Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций, Сиб. матем. ж., **17**, № 6 (1976), 1220—1235.