Postface

1) Après l'écriture de cet article, nous avons reçu un manuscrit, de J. Cougnard, $[C_3]$, qui démontre la monogénéité de O_N sur O_L quand $L=K(2)$, $N=K(2)K(f)$ et f est un idéal impair. Il en déduit la monogénéité de O_N sur O_H pour certaines familles d'extensions quadratiques dans lesquelles 2 est ramifié. Ses méthodes sont celles des fonctions elliptiques dans l'esprit de $[CN-T_1]$.

Les méthodes que nous avons développées, jointes à certains arguments de descente de $[C_3]$, semblent permettre de démontrer la monogénéité de O_N sur O_L lorsque $L=K(\ell)$, $N=K(\ell)K(f)$, ℓ un nombre premier quelconque et f un idéal entier de K, premier à ℓ.

2) On peut déduire de (2–8) et (3–5) une démonstration modulaire des résultats de $[C_2]$ et $[F_2]$ et traiter le cas des idéaux f premiers à 5 (resp. 7) lorsque $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$). En effet, si $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$), on a $5\,O_K=\mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}}$ (resp. $7\,O_K=q\bar{q}$) et $K=K(\mathcal{Y}).K(\overline{\mathcal{Y}})$ (resp. $K(q).K(\bar{q})$).

Séminaire de Théorie des Nombres
Paris 1986-87

DIAGONALES DE FRACTIONS RATIONNELLES

Gilles CHRISTOL

Dans cet exposé, nous donnons un aperçu général des résultats connus sur les diagonales de fractions rationnelles (voir définition ci–dessous) et nous montrons diverses applications de cette notion, en particulier en formulant une conjecture sur les solutions à coefficients entiers des équations différentielles linéaires à coefficients polynômes.

I.– Définitions

Si k *est un anneau commutatif intègre à élément unité, la formule :*

$$\Delta\left(\sum a_{n_1,\dots,n_s} x_1^{n_1}\dots x_s^{n_s}\right)=\sum a_{n,\dots,n}\lambda^n$$

définit, pour chaque entier $s\geq 1$, *une application* Δ, *appelée diagonalisation, de* $k((x_1,\dots,x_s))$ *dans* $k((\lambda))^{(*)}$. *Pour tout entier* $s\geq 1$, *nous noterons* $\mathcal{D}_s(k)$ *(ou* $\mathcal{D}_s$ *s'il n'y a pas de confusion possible) l'ensemble des fonctions* f *de* $k((\lambda))$ *pour lesquelles il existe deux polynômes* P *et* Q *de* $k[x_1,\dots,x_s]$, *tels que d'une part* P/Q *appartienne à* $k((x_1,\dots,x_s))$ *(pour cela il suffit que l'on puisse se ramener au cas où* $Q=x_1^{n_1}\dots x_s^{n_s}R$ *avec* $R(0,\dots,0)=1$) *et d'autre part on ait* $f=\Delta(P/Q)$.

Si F est un élément de $k((x_1,\dots,x_s))$, on a :

$$\Delta(F/(1-x_{s+1}))=\Delta(F)$$

Cette formule montre clairement que $\mathcal{D}_s$ est contenu dans $\mathcal{D}_{s+1}$. Nous noterons $\mathcal{D}(k)$ (ou $\mathcal{D}$ s'il n'y a pas de confusion possible) la réunion des $\mathcal{D}_s(k)$ et nous appellerons *diagonales de fractions rationnelles* les éléments de $\mathcal{D}$.

Nous dirons qu'une fonction de $k((\lambda))$ (resp. de $k((x_1,\dots,x_s))$) est *algébrique* si elle est algébrique sur $k(\lambda)$ (resp. $(k(x_1,\dots,x_s))$.

Soit $f=\sum a_n \lambda^n$ et $g=\sum b_n \lambda^n$ deux éléments de $k((\lambda))$. On définit le *produit de Hadamard* de f et g par :

$$f * g = \sum a_n b_n \lambda^n$$

leur *produit de Hurwitz* par :

$$f \vdash\!\dashv g = \sum_{n,m} \binom{m+n}{n} a_n b_m \lambda^{n+m}.$$

Enfin, on pose, pour $0 < r < d$:

$$\psi_{r,d}(f) = \sum a_{r+dn} \lambda^n$$

II.– **Propriétés de $\mathscr{D}$.**

Nous commençons par rappeler les principaux résultats connus sur $\mathscr{D}$ en les présentant dans l'ordre historique.

Proposition 2.1 (Furstenberg [18]) :

Si k *est un corps,* $\mathscr{D}_2(k)$ *est l'ensemble des fonctions algébriques de* $k((\lambda))$. *Si, de plus,* k *est de caractéristique non nulle, alors* $\mathscr{D}(k) = \mathscr{D}_2(k)$. ■

Proposition 2.2 (Deligne [15]) :

Si k *est un corps de caractéristique non nulle, la diagonale de toute fonction algébrique de* $k((x_1,\dots,x_s))$ *est une fonction algébrique.* ■

Proposition 2.3 (Denef–Lipschitz [13]) :

Si k *est un anneau local excellent, la diagonale d'une fonction algébrique de* $k((x_1,\dots,x_s))$ *appartient à* $\mathscr{D}_{2s}$. ■

Ce résultat montre qu'on ne gagne rien à considérer les "diagonales de fonctions algébriques" au lieu des diagonales de fractions rationnelles. Il permet en outre de déduire la proposition 2.2 de la proposition 2.1.

Proposition 2.4 ([7]) :

Soit $\mathbb{C}_p$ *le complété de la clôture algébrique du corps* $\mathbb{Q}_p$ *et soit* k *l'anneau des entiers de* $\mathbb{C}_p$, *les fonctions de* $\mathscr{D}(\mathbb{C}_p) \cap k((\lambda))$ *sont des éléments algébriques, c'est-à-dire des limites uniformes sur le disque* $D(0,1^-)$ *de fonctions algébriques de* $k((\lambda))$. ■

Les résultats suivants vont montrer que $\mathscr{D}$ est stable pour la plupart des opérations classiques sur les séries formelles.

Proposition 2.5 :

$\mathscr{D}$ *est une sous* k*–algèbre de* $k((\lambda))$.

On vérifie sans peine que $\mathscr{D}_r + \mathscr{D}_s$ est contenu dans $\mathscr{D}_{\sup(r,s)}$. D'autre part, la formule :

$$\Delta\Big(F(x_1y_2\dots y_r, x_2,\dots,x_s)\, G(x_1x_2\dots x_s, y_2,\dots,y_r)\Big) = \Delta(F)\,\Delta(G)$$

qui se vérifie en appliquant directement la définition, montre que $\mathscr{D}_s.\mathscr{D}_r$ est contenu dans $\mathscr{D}_{s+r-1}$. ■

Remarquons que, tout au moins dans le cas $r = s = 2$, la proposition 2.1 prouve que ce résultat n'est pas le meilleur possible.

Proposition 2.6 :

L'algèbre $\mathscr{D}$ *est stable par dérivation, produit de Hadamard, produit de Hurwitz et par les opérateurs* $\psi_{r,d}$.

La formule :

$$\lambda d/d\lambda(\Delta(F)) = \Delta(x_1 d/dx_1(F))$$

montre que $\mathscr{D}_s$ lui–même est stable par dérivation. La formule :

$$\Delta\Big(F(x_1,\dots,x_s)\, G(x_{s+1},\dots,x_{s+r})\Big) = \Delta(F) * \Delta(G)$$

permet de constater que $\mathcal{D}_s * \mathcal{D}_r$ est contenu dans $\mathcal{D}_{r+s}$ et la formule :

$$\Delta\left(\frac{F(x_1,\dots,x_s)\; G(x_{s+1},\dots,x_{s+r})}{(1-x_0x_1\dots x_s)(1-x_0x_{s+1}\dots x_{s+r})}\right) = \Delta(F) \vdash\!\dashv \Delta(G)$$

montre que $\mathcal{D}_s \vdash\!\dashv \mathcal{D}_r$ est contenu dans $\mathcal{D}_{r+s+1}$. Finalement, pour montrer la stabilité par l'opérateur $\psi_{r,d}$, on remarque que :

$$\psi_{r,d}(\Delta(F)) = \Delta(\phi_{r,d}(F))$$

où l'on a posé :

$$\phi_{r,d}\Big(\sum a_{n_1,\dots,n_s}\, x_1^{n_1}\dots x_s^{n_s}\Big) = \sum a_{r+dn_1,\dots,r+dn_s}\, x_1^{n_1}\dots x_s^{n_s}$$

Il suffit alors de remarquer que, si F est une fraction rationnelle, il en est de même de $\phi_{r,d}(F)(x_1^d,\dots,x_s^d)$ donc de $\phi_{r,d}(F)$. lorsque d est premier à la caractéristique, ceci se démontre facilement à partir de la formule :

$$\phi_{r,d}(F)(x_1^d,\dots,x_s^d) = d^{-s} \sum_{\zeta_i^d=1} \zeta_1^{-r}\dots\zeta_s^{-r}\, F(\zeta_1x_1,\dots,\zeta_sx_s)$$

et s'obtient dans les autres cas par relèvement en caractéristique nulle. ■

Proposition 2.7 :

Si k *est un anneau local excellent,* $\mathcal{D}(k)$ *est stable par changement de variable algébrique : si* f *appartient à* $\mathcal{D}$ *et si* g *est une fonction algébrique de* $\lambda\, k[[\lambda]]$, *alors* $f \circ g$ *appartient à* $\mathcal{D}$.

En regardant la démonstration du théorème 6.2 de [13] (c'est notre proposition 2.3), et en particulier le lemme 6.3, on constate qu'il existe des fractions rationnelles G et H appartenant à $k[[x_1,x_2]]$ telles que, pour tout entier n, on ait :

$$g^n = \Delta(H\, G^n).$$

Si, d'autre part, $f = \Delta(F)$, où F est une fraction rationnelle de $k((x_1,\dots,x_s))$, alors on vérifie aisément que :

$$f(g(\lambda)) = \Delta\left(\frac{F(x_1G(x_{s+1},x_{s+2}),x_2,\dots,x_s)\; H(x_{s+1},x_{s+2})}{1 - x_1x_2\dots x_s}\right)$$

dans ce calcul, on utilise de manière essentielle le fait que g^n appartient à $\lambda^n k[[\lambda]]$. ■

Proposition 2.8 :

Si k *est un corps de caractéristique nulle, pour tout élément* f *de* $\mathcal{D}(k)$, *il existe un polynôme différentiel* L *de* $k[\lambda, d/d\lambda]$, *non nul, tel que* $M(f)=0$.

Il existe des démonstrations élémentaires de ce résultat (en particulier [21]) mais celles-ci ne donnent aucune information sur le polynôme L.

Comme l'a remarqué Deligne, on a :

$$\Delta(F) = \frac{1}{(2i\pi)^{s-1}} \int_{\mathscr{C}} F(x_1,\dots,x_s)\, \frac{dx_1\dots dx_s}{d\lambda}$$

où $\mathscr{C}$ désigne le "cycle évanescent" :

$$x_1\dots x_s = \lambda,\; |x_1| = \dots = |x_{s-1}| = \epsilon.$$

Si X désigne la variété définie dans $A^s_{k(\lambda)}$ par les équations :

$$Q(x_1,\dots,x_s) \neq 0,\; x_1\dots x_s = \lambda$$

on constate donc que l'ensemble $\{\Delta(P/Q);\, P \in k[x_1,\dots,x_s]\}$ est l'image de l'espace $H^{s-1}_{DR}(X)$ (cohomologie de De Rham) par l'opérateur $\int_{\mathscr{C}}$. Si on fait agir la dérivation $d/d\lambda$ sur l'espace $H^{s-1}_{DR}(X)$ par la connexion de Gauss–Manin, les opérateurs $\int_{\mathscr{C}}$ et $d/d\lambda$ commutent. Notre proposition est alors évidente si on sait que l'espace vectoriel $H^{s-1}_{DR}(X)$ est de dimension finie sur $k(\lambda)$. Ce résultat se démontre en utilisant la résolution des singularités ([20] par exemple), mais peut aussi s'obtenir "directement" [16]. ∎

Remarques.

1) Si $Q = Q_1 \dots Q_r$, et si les Q_i forment une suite régulière, on peut voir, en utilisant le théorème des résidus composés, que les diagonales $\Delta(P/Q)$ sont associées à la variété :

$$Q_1 = \dots = Q_r = 0, \; x_1 \dots x_s = \lambda.$$

Par exemple, la fonction d'Apery :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \lambda^n$$

est la diagonale de la fraction $1/Q$ où $Q = Q_1 Q_2$, avec :

$$Q_1 = 1 - x_1 x_2 x_3 x_4, \; Q_2 = (1-x_3)(1-x_4) - x_0(1+x_1)(1+x_2).$$

Il en résulte que f est solution de l'équation de Picard–Fuchs de la différentielle $dx_3 dx_4 / \lambda x_3 x_4 (x_2 - x_1)$ sur la variété d'équations :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 1, \; (1-x_3)(1-x_4) = \lambda(1+x_1)(1+x_2).$$

Pour plus d'informations sur ce cas particulier on pourra se reporter à [2] et pour d'autres exemples à [9].

2) Si on note maintenant L le polynôme différentiel de degré minimum tel que $L(f)=0$, il résulte de la démonstration de la proposition 2.4, que l'équation différentielle $L=0$ "vient de la géométrie" comme facteur d'une équation de Picard–Fuchs. Il en résulte que cette équation n'a, comme singularités, que des points singuliers réguliers avec exposants rationnels.

3) Si k est l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$, et si f appartient à $\mathscr{D}(k)$, alors f est solution d'une équation de Picard–Fuchs c'est-à-dire munie d'une structure de Frobenius forte. Comme par ailleurs f est évidemment bornée dans le disque $D(0,1)^-$, il résulte du théorème 7.2 de [7] que la fonction f est un élément algébrique. On ne peut cependant pas retrouver ainsi la proposition 2.4 car on ne dispose pas d'un "lemme de Fatou" montrant que $\mathscr{D}(\mathbb{C}_p) \cap k((\lambda)) = \mathscr{D}(k)$.

Proposition 2.9 :

Si k est un corps de nombres, les éléments inversibles de $\mathscr{D}(k)$ sont les fonctions algébriques.

Il est clair, d'après la proposition 2.1, que les fonctions algébriques sont des éléments inversibles de $\mathscr{D}$.

Supposons donc que f et $1/f$ appartiennent à $\mathscr{D}$. D'après la proposition 2.4, ces deux fonctions sont solutions d'équations différentielles. Il résulte alors de [19] que la fonction $a = f'/f$ est algébrique. Mais, pour presque tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de k (précisément ceux qui ne contiennent pas $Q(0,\dots,0)$), les coefficients de la fonction f sont $\mathfrak{p}$-entiers. Autrement dit, pour presque tout $\mathfrak{p}$, l'équation $x' = ax$ a une solution non nulle modulo $\mathfrak{p}$. La conjecture de Grothendieck, démontrée pour les équations du premier ordre dans [12], affirme alors que sa solution f est algébrique. ∎

Proposition 2.10 [3] **:**

Si k est un corps de caractéristique nulle, les éléments de $\mathscr{D}(k)$ qui sont inversibles pour le produit de Hadamard sont les fractions rationnelles à coefficients non nuls qui peuvent se mettre sous la forme : $E(\lambda) + \sum_{r=0}^{d-1} \frac{a_r \lambda^r}{1 - b_r \lambda^d}$

où E est un polynôme de $k[\lambda, 1/\lambda]$.

En fait, dans [3] (théorème 5), seul le cas de $\mathscr{D}_2$ est examiné mais la démonstration se généralise immédiatement. ∎

III.– Des conjectures.

Conjecture 3.1 :

Toute fonction f de $\mathbb{Z}[[\lambda]]$ qui :

i) *a un rayon de convergence non nul dans $\mathbb{C}$,*

ii) *satisfait une équation différentielle $L(f)=0$ où L est un polynôme différentiel non nul de $\mathbb{Z}[\lambda, d/d\lambda]$,*

appartient à $\mathscr{D}(k)$.

L'exemple de la fonction $\sum n! \lambda^n$, qui n'est pas une diagonale de fraction rationnelle parce qu'elle ne vérifie aucune équation différentielle à points singuliers réguliers (voir remarque 2) ci–dessus), montre que la condition i) est indispensable.

Dans [10], on trouvera une étude systématique de cette conjecture dans le cas des fonctions hypergéométriques. Ici, nous proposons une approche plus générale. Nous allons donner deux conjectures équivalentes (même si elles semblent plus générales).

Conjecture 3.2 :

Soit k *un corps de nombre et soit* f *une fonction* $k((\lambda))$ *telle que :*

i) *pour toute place* $\mathfrak{p}$ *de* k, *la fonction* f *a un rayon de convergence non nul dans le complété* $k_{\mathfrak{p}}$ *de* k *en* $\mathfrak{p}$.

ii) *Il existe un polynôme différentiel non nul* L *de* $k[\lambda,d/d\lambda]$ *tel que* $L(f)=0$.

iii) *Pour presque toute place finie* $\mathfrak{p}$ *de* k, *les coefficients de* f *sont* $\mathfrak{p}$*–entiers.*

Alors la fonction f *appartient à* $\mathcal{D}(k)$.

Si la condition i) *est vérifiée, on peut remplacer* iii) *par la condition équivalente :*

iii bis) *Il existe deux nombres* a *et* b *de* k *tels que les coefficients de la fonction* $af(b\lambda)$ *soient des entiers du corps* k.

Montrons que la conjecture 3.2 est une conséquence de la conjecture 3.1. D'après la condition iii bis), nous pouvons supposer que les coefficients de f sont des entiers de k. Nous considérons alors une k–base $\{e_i\}$ des entiers de k et nous définissons des fonctions f_i de $\mathbb{Z}((\lambda))$ et des opérateurs différentiels L_{ij} de $\mathbb{Q}[\lambda,d/d\lambda]$ en posant :

$$f=\sum_i e_i f_i,\quad e_i L=\sum_j e_j L_{ji}.$$

Il est facile de constater que les f_i ont un rayon de convergence non nul dans $\mathbb{C}$. Il vient alors :

$$0=L(f)=\sum_{i,j} e_j L_{ji}(f_i)$$

et, comme les e_i sont indépendants sur $\mathbb{Q}$, nous obtenons :

$$\sum_i L_{ji}(f_i)=0 \quad (\forall j).$$

Si nous notons L la matrice dont les coefficients sont les L_{ji}, f le "vecteur–colonne" $(f_1,\ldots)^t$ et e^t le "vecteur–ligne" $(e_1,\ldots)$, nous avons donc les relations :

$$e^t.f=f,\quad e^t.L=Le^t,\quad L.f=0.$$

La théorie de facteurs invariants pour l'anneau factoriel (non commutatif) $\mathbb{Q}[\lambda,d/d\lambda]$ [23] montre qu'il existe deux matrices inversibles U et V et une matrice diagonale D, dont tous les éléments, sauf au plus un, sont des 0 ou des 1, telles que :

$$L=U\,D\,V.$$

Si la diagonale de D comportait un terme nul, le vecteur

$$Le^t.V^{-1}=e^t.U\,D$$

aurait un coefficient nul et, comme l'anneau $k[\lambda,d/d\lambda]$ est intégre et comme L n'est pas nul, il en serait de même du vecteur $e^t.V^{-1}$. Autrement dit, il existerait un indice ℓ tel que :

$$\sum_j e_j V^{-1}_{j\ell}=0$$

et, les e_i étant linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, la matrice V^{-1} aurait une colonne nulle, ce qui est impossible car elle est inversible.

Nous pouvons donc supposer que la diagonale de D est $(1,\ldots,1,M)$ où M est un opérateur différentiel non nul de $\mathbb{Q}[\lambda,d/d\lambda]$. Dans ces conditions, comme $L.f=0$, c'est–à–dire $D\,V.f=0$, on trouve que le vecteur–colonne $V.f$ est de la forme $(0,\ldots,0,g)^t$ où g est, comme les f_i, une fonction de $\mathbb{Z}((\lambda))$, de rayon de convergence non nul dans $\mathbb{C}$, telle que $M(g)=0$. Il résulte alors de la conjecture 3.1 que g appartient à $\mathscr{D}(k)$. La formule $f = V^{-1} V.f$ et les propositions 2.5 et 2.6 montrent alors que les f_i appartiennent eux aussi à $\mathscr{D}(k)$ d'où on déduit que f appartient à $\mathscr{D}(k)$. ∎

Pour introduire la troisième forme de notre conjecture nous avons besoin de quelques définitions.

Rappelons tout d'abord qu'un K–module différentiel, où K est une k–algèbre, consiste en une paire (M,∇) formée d'un K–module M, libre de type fini, et d'une application ∇ de M dans $M \otimes \Omega_{K/k}$, qui vérifie :

$$\nabla(am) = m \otimes da + a\nabla(m)$$

pour tout élément a de K et m de M. Si A est une k–algèbre contenant K et telle que $\Omega_{A/K} = \Omega_{K/k} \otimes A$, la connexion ∇ se prolonge de manière évidente au module $M \otimes A$. Par ailleurs, nous noterons M^{∇} l'ensemble des éléments "horizontaux" m de M c'est–à–dire tels que $\nabla(m)=0$.

Dans la suite, $\tilde{\mathbb{Q}}$ désignera une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et $\mathscr{A}$ sera une sous $\tilde{\mathbb{Q}}$–algèbre de $\tilde{\mathbb{Q}}((\lambda))$ telle que :

1) $\mathscr{A}$ contient les fonctions algébriques,

2) $\mathscr{A}$ est stable par dérivation et changement de variable algébrique,

3) si $f(\lambda^d)$ appartient à $\mathscr{A}$ il en est de même de f.

Il n'est pas difficile de constater que l'ensemble $\mathscr{D}_2(\tilde{\mathbb{Q}})$ des fonctions algébriques est un exemple d'une telle algèbre. Il résulte des propositions 2.5 et 2.6 que $\mathscr{D}(\tilde{\mathbb{Q}})$ en est un autre exemple. Un troisième exemple est donné par l'algèbre $\mathscr{B}$ des "fonctions bornées", c'est–à–dire des fonctions de $\tilde{\mathbb{Q}}((\lambda))$ qui vérifient les conditions i) et iii) de la conjecture 3.2. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $\mathscr{B}$ satisfait bien les conditions 1), 2) et 3) ci–dessus.

Soit maintenant C une courbe projective non singulière sur $\tilde{\mathbb{Q}}$ et soit K son corps des fonctions. Etant donné un point P de C et une uniformisante π de C en P, on définit un sous–anneau $\mathscr{A}_{C,P}$ de $\tilde{\mathbb{Q}}((\pi))$ en posant :

$$\mathscr{A}_{C,P} = \{f(\pi);\ f \in \mathscr{A}\}.$$

Toute autre uniformisante τ étant une fonction algébrique de $\pi\tilde{\mathbb{Q}}((\pi))$ et $\mathscr{A}$ étant stable par changement de variable algébrique, si on identifie les fonctions

$f(\tau)$ et $f \circ \tau(\pi)$, on constate que l'anneau $\mathscr{A}_{C,P}$ ne dépend pas de l'uniformisante choisie pour le définir. Par ailleurs, comme $\mathscr{A}$ contient les fonctions algébriques, le corps K (ainsi que toutes ses extensions non ramifiées en P) est contenu dans $\mathscr{A}_{C,P}$. Enfin, comme $\mathscr{A}$ est stable par dérivation, on vérifie que l'injection (première suite exacte) :

$$\Omega_{K/\tilde{\mathbb{Q}}} \otimes_K \mathscr{A}_{C,P} \longrightarrow \Omega_{\mathscr{A}_{C,P}/\tilde{\mathbb{Q}}} \longrightarrow \Omega_{\mathscr{A}_{C,P}/K} = 0$$

est une surjection. La connexion ∇ se prolonge donc au module $M \otimes_K \mathscr{A}_{C,P}$.

Nous posons alors :

$$(M,\nabla)_{P,\mathscr{A}} = (M \otimes_K \mathscr{A}_{C,P})^{\nabla}.$$

En particulier, $(M,\nabla)_{P,\mathscr{A}}$ est un $\tilde{\mathbb{Q}}$–espace vectoriel de dimension inférieure à la dimension de M sur K.

Conjecture 3.3 :

Pour toute courbe C projective non singulière, de corps de fonction K, tout point P de C et tout K–module différentiel (M,∇), on a $(M,\nabla)_{P,\mathscr{B}} = (M,\nabla)_{P,\mathscr{D}}$.

Démontrons que cette conjecture se déduit de la conjecture 3.2 et, pour cela choisissons une uniformisante π au point P et une fonction τ de K telle que $K = \tilde{\mathbb{Q}}(\pi,\tau)$ et notons d le degré de τ sur $\tilde{\mathbb{Q}}(\pi)$.

Si $(m_1,\dots,m_\mu)$ est une base de l'espace vectoriel M, nous avons :

$$\nabla(m_i) = \sum_{j,\ell} a_{ij\ell}(\pi)\, \tau^{\ell} m_j\, d\pi$$

où les éléments $a_{ij\ell}$ $(0 \le \ell < d,\ 1 \le i,j \le \mu)$ appartiennent à $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)$. Par définition tout élément m de $(M,\nabla)_{P,\mathscr{B}}$ peut se mettre sous la forme $f_1(\pi)m_1 + \dots + f_\mu(\pi)m_\mu$ où les f_i sont des fonctions de $\mathscr{B}$ et on trouve :

$$0 = \nabla(m) = \sum_i f_i'(\pi)\, m_i d\pi + f_i(\pi)\nabla(m_i)$$

c'est–à–dire, pour tout indice i :

$$f_i' + \sum_{j,\ell} f_j\, a_{ji\ell}\, g^\ell = 0$$

où g désigne la fonction algébrique de $\tilde{\mathbb{Q}}((\lambda))$ telle que $\tau = g(\pi)$. Maintenant il est bien connu que le corps $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda,g)$ est stable par dérivation. L'égalité ci–dessus prouve qu'il en est de même du $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)$–espace vectoriel (de dimension μd) engendré par les fonctions : $f_i g^\ell$ $(1 \le i \le \mu,\ 0 \le \ell < d)$. Chacune des fonctions f_i, qui appartient à cet espace vectoriel, est donc solution d'une équation différentielle (non nulle) à coefficients dans $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)$ et, par suite, satisfait à la condition ii) de la conjecture 3.2. D'après cette conjecture, ces fonctions sont donc dans $\mathscr{D}$. ∎

Considérons maintenant une extension finie K′ du corps K, C' la courbe projective non singulière associée et P′ un point de C' au-dessus de P. La connexion ∇ se prolonge à $M' = M \otimes K'$ faisant de (M',∇) un K′–module différentiel. On a alors la proposition suivante.

Proposition 3.4 :

Si la conjecture 3.3 est vraie pour (M',∇), elle est vraie pour (M,∇).

Soit π' une uniformisante de K′ en P′ et π une uniformisante de K en P. Il existe un élément f de $\lambda\tilde{\mathbb{Q}}((\lambda))$ tel que $\pi = f(\pi')$. Puisque $\mathscr{A}$ est invariant par changement de variable algébrique, l'application qui à $g(\pi)$ associe $g \circ f(\pi')$ définit une inclusion de $\mathscr{A}_{C,P}$ dans $\mathscr{A}_{C',P'}$. Comme il existe un entier d tel que $\tilde{\mathbb{Q}}((\pi')) = \tilde{\mathbb{Q}}((\pi^{1/d}))$, pour définir l'anneau $\mathscr{A}_{C',P'}$ on peut se servir de l'uniformisante $\pi^{1/d}$. En utilisant alors la propriété 3) de $\mathscr{A}$, on trouve que :

$$\mathscr{A}_{C,P} = \mathscr{A}_{C',P'} \cap \tilde{\mathbb{Q}}((\pi)).$$

Soit alors m un élément de $(M,\nabla)_{P,\mathscr{B}}$. Par définition, il peut se mettre sous la forme $a_1 m_1 + \ldots + a_\mu m_\mu$ où les a_i sont des éléments de $\mathscr{B}_{C,P}$ c'est–à–dire

des éléments de $\mathscr{B}_{C',P'}$ contenus dans $\tilde{\mathbb{Q}}((\pi))$. D'après notre hypothèse, comme m appartient à $(M',\nabla)_{P',\mathscr{B}}$ il appartient à $(M',\nabla)_{P',\mathscr{D}}$. Donc les a_i appartiennent à $\mathscr{D}_{C',P'} \cap \tilde{\mathbb{Q}}((\pi))$ c'est–à–dire à $\mathscr{D}_{C,P}$. ∎

Remarque :

Pour les différentes extensions K′ de K, les $(M',\nabla)_{P',\mathscr{A}}$ sont des $\tilde{\mathbb{Q}}$–espaces vectoriels de dimension bornée par la dimension de M sur le corps K. Il existe donc une extension finie K° de K telle que la dimension de $(M^\circ,\nabla)_{P^\circ,\mathscr{A}}$ soit maximum et égale à la dimension de $(M',\nabla)_{P',\mathscr{A}}$ pour tout corps K′ qui contient K°.

Proposition 3.5 :

La conjecture 3.3 *est vraie pour les modules différentiels de dimension* 1. *Plus précisément, si* C *est une courbe projective non singulière, de corps de fonction* K, P *un point de* C *et* (M,∇) *un* K*–module différentiel pour lequel* M *est de dimension* 1 *sur* K, *alors on a* $(M,\nabla)_{P,\mathscr{B}} = (M,\nabla)_{P,\mathscr{D}_2}$.

Si π est une uniformisante de C en P et si m est un élément non nul de M, tout élément de $(M,\nabla)_{P,\mathscr{B}}$ est de la forme $f(\pi)\, m$ où f appartient à l'algèbre $\mathscr{B}$. Si a est l'élément de K défini par $\nabla(m) = a\, m\, d\pi$, on trouve que $f' + af = 0$. Maintenant, puisque f appartient à $\mathscr{B}$, pour presque tout idéal premier $\mathfrak{p}$, f a une réduction (non nulle) modulo $\mathfrak{p}$. Il en résulte que l'équation différentielle du premier ordre $y' + a\,y = 0$ satisfait l'hypothèse de Grothendieck, donc, d'après le théorème de Chudnovski [12] f appartient à l'ensemble $\mathscr{D}_2$ des fonctions algébriques. ∎

Remarque :

Cette proposition prouve non seulement les conjectures 3.1 et 3.2 dans le cas des équations différentielles d'ordre un, mais aussi dans le cas de "projection sur la droite projective" d'équation différentielle d'ordre un sur une courbe.

IV.– Comment on peut espérer se ramener au cas des équations de Picard–Fuchs.

Nous commençons par rappeler quelques définitions, conjectures et résultats de la théorie "pour presque tout p" des équations différentielles.

Définitions :

1) On dit qu'une fonction $f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ de $\tilde{\mathbb{Q}}((\lambda))$ est une G–fonction si elle est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)$ et s'il existe une constante $c \geq 1$ et des entiers $d_n \leq c^n$ tels que d'une part $\lceil\overline{a_n}\rceil \leq c^n$ (où $\lceil\overline{\ }\rceil$ désigne le maximum des modules des conjugués) et d'autre part, pour tout $i \leq n$, $d_n a_i$ soit un entier algébrique.

On constate facilement que les fonctions de $\mathscr{B}$ solutions d'équations différentielles sont des G–fonctions.

2) Soit A une matrice à coefficients dans $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)$. Nous définissons les matrices A_i par la relation de récurrence : $A_0 = I$, $A_{i+1} = A_i' + A_i.A$.

Nous dirons que la matrice A satisfait la condition de Galočkin s'il existe une constante c, un polynôme P et des entiers $d_n \leq c^n$ tels que, pour tout $i \leq n$, les coefficients des matrices $d_n P^i A_i/i!$ soient des polynômes à coefficients entiers algébriques.

3) Si p est un nombre premier et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\tilde{\mathbb{Q}}$ ci–dessus de p, nous posons :

$$1/r_{\mathfrak{p}}(A) = \limsup (\| A_i/i! \|_{\mathfrak{p}}^{1/i}), \quad r_p(A) = \inf_{\mathfrak{p}/p} r_{\mathfrak{p}}$$

(l'idéal $\mathfrak{p}$ définit un plongement de $\tilde{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$ et $r_{\mathfrak{p}}$ est le rayon de convergence des solutions de l'équation différentielle $X' = A\,X$ dans le disque générique de $\mathbb{C}_p$).

Nous dirons, d'après Bombieri [5], que la matrice A est de type arithmétique si on a : $\Pi\, r_p(A) > 0$.

4) Si K est le corps des fonctions d'une courbe projective régulière C, on dira, après Dwork [16], qu'un K–module différentiel vient de la géométrie s'il peut s'obtenir par des constructions algébriques ($\oplus, \otimes, \hat{}$ extension et sous–module) à partir des $H^r_{DR}(X)$ (munis de la connexion de Gauss Manin) où X est une famille de variétés paramétrée par C. On dira qu'une équation différentielle $Y' = A\,Y\,d\tau$, où A est une matrice à coefficients dans K et τ un élément de K, vient de la géométrie s'il existe un K–module différentiel

(M,∇) qui vient de la géométrie et une base (m) de M telle que $\nabla(m) = A.m\,d\tau$.

Proposition 4.1 (Chudnovsky [11]) :

Soit $f = (f_1,\dots,f_\mu)^t$ *un vecteur de G–fonctions satisfaisant une équation différentielle* $f' = A\,f$, *où* A *est une matrice à coefficients dans* $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)$. *Si les fonctions* $f_1,\dots,f_\mu$ *sont linéairement indépendantes sur* $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)$, *alors la matrice* A *satisfait la condition de Galočkin.*

Signalons que la démonstration de [11] comporte une erreur corrigée par Y. André. ∎

Proposition 4.2 (Y. André) :

Si la matrice A *vérifie la condition de Galočkin, alors elle est de type arithmétique.*

On trouvera dans [1] une étude détaillée des relations existant entre ces deux notions. ∎

Conjecture 4.3 (Bombieri) :

Si la matrice A *est de type arithmétique, alors, pour presque tout idéal premier* $\mathfrak{p}$, *on a* $r_{\mathfrak{p}}(A)=1$. ∎

Conjecture 4.4 (Dwork [17]) :

Soit A *une matrice à coefficients dans* $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)$, *si, pour presque tout idéal* $\mathfrak{p}$, *on a* $r_{\mathfrak{p}}(A)=1$, *alors l'équation différentielle* $Y' = A\,Y\,d\lambda$ *vient de la géométrie.* ∎

Nous sommes maintenant en mesure de retourner à la "démonstration" de la conjecture 3.3. Soit (M,∇) un K–module différentiel et soit P un point de la courbe projective non singulière C dont K est le corps des fonctions. Nous choisissons une uniformisante π en P et une base $(m_1,\dots,m_\mu)$ du K–espace vectoriel M. Nous supposons en outre que l'espace vectoriel $(M,\nabla)_{P,\mathscr{B}}$ contient un vecteur non nul :

$$m = f_1(\pi)\, m_1 + \dots + f_\mu(\pi)\, m_\mu$$

où les f_i sont des fonctions de $\mathscr{B}$, donc des G–fonctions. Quitte à changer l'ordre, nous pouvons supposer que les fonctions $f_i(\pi)$ $(1 \leq 0 \leq \nu)$ sont linéairement indépendantes sur le corps K. Dans ces conditions, si nous posons :

$$f^t = (f_1,\ldots,f_\nu), \qquad g^t = (f_{\nu+1},\ldots,f_\mu)$$
$$m = (m_1,\ldots,m_\nu)^t \qquad n = (m_{\nu+1},\ldots,m_\mu)^t$$

il existe une matrice G, à coefficients dans K, telle que $g^t = f^t.G$ et on trouve $m = f^t(\pi).(m+G.n)$. Maintenant, il existe des matrices A et B à coefficients dans K telles que l'on ait :

$$\nabla(m + G.n) = (A.m + B.n) \otimes d\pi$$

le fait que $\nabla(m) = 0$ se traduit par la relation :

$$f^{t\prime}(\pi).(m + G.n) + f^t(\pi).(A.m + B.n) = 0.$$

Comme (m,n) est une base de M, on en déduit :

$$f^{t\prime}(\pi) + f^t(\pi).A = 0, \qquad f^{t\prime}(\pi).G + f^t(\pi).B = 0$$

c'est–à–dire, puisque les fonctions $f_1(\pi),\ldots,f_\nu(\pi)$ sont linéairement indépendantes sur K, $B = A.G$. Autrement dit, on a :

$$\nabla(m + G.n) = A.(m + G.n) \otimes d\pi.$$

Si on désigne par N le sous–espace vectoriel de base $(m + G.n)$, on constate d'une part que $\nabla(N)$ est contenu dans $N \otimes \Omega_K$ et d'autre part que le vecteur $n = f^t(\pi).(m + G.n)$ est un vecteur, non nul, de $(N,\nabla)_{P,\mathscr{B}}$.

Quitte à travailler éventuellement sur un sous–module différentiel, nous pouvons donc supposer que les fonctions $f_1(\pi),\ldots,f_\mu(\pi)$ sont linéairement indépendantes sur $K = \tilde{\mathbb{Q}}(\pi,g(\pi))$ en reprenant les notations de la conjecture 3.3. Autrement dit, les fonctions $f_i g^\ell$ $(1 \leq i \leq \mu,\ 0 \leq \ell \leq d)$ sont linéairement indépendantes sur $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)$. On peut leur appliquer la proposition 4.1 : la matrice A à coefficients dans $\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)$ telle que :

$$(\ldots,f_i g^\ell,\ldots)^{t\prime} = A.(\ldots,f_i g^\ell,\ldots)^t$$

vérifie la condition de Galočkin.

Si les conjectures 4.2, 4.3 et 4.4 étaient vérifiées, on en déduirait que l'équation différentielle $d(Y) = A\,Y\,d\lambda$ vient de la géométrie. Il n'est pas difficile de voir qu'il en serait de même de l'équation $d(Y) = A\,Y\,d\pi$ et donc du K–module avec connexion (M,∇). Autrement dit, pour démontrer la conjecture 3.3, il suffirait de savoir démontrer :

i) la conjecture est vraie pour les $H^r_{DR}(X)$,

ii) si la conjecture 3.3 est vraie pour deux modules différentiels elle est vraie pour toute extension de l'un par l'autre (les autres constructions ne présentant pas de difficultés).

Le point ii) se ramène à établir que toute fonction de $\mathscr{B}$ dont l'image par un opérateur différentiel de $\tilde{\mathbb{Q}}[\lambda,d/d\lambda]$ appartient à $\mathscr{D}$ est en fait une fonction de $\mathscr{D}$. Le résultat le plus important dans cette direction est celui de [4] qui traite le cas de $\mathscr{D}_1$.

Le point i) fera l'objet du paragraphe suivant.

V.– Le cas des équations de Picard–Fuchs.

Dans ce paragraphe C sera une courbe quasi–projective non singulière et X une variété de dimension r+1 sur le corps $\tilde{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques, P sera un point de C, et $f : X \longrightarrow C$ un morphisme projectif et surjectif dont la restriction à $X - f^{-1}(P)$ est lisse. Nous noterons σ le point générique de C et K son corps des fonctions. Nous nous intéressons au K–module différentiel $H^r_{DR}(X_\sigma/K)$ muni de la connexion de Gauss–Manin (nous pouvons nous limiter à la dimension r car, d'après le théorème de Lefschetz, les modules de cohomologie de dimension inférieure ou supérieure peuvent s'obtenir comme sous–module de la cohomologie d'une intersection de X et d'une variété linéaire).

Il résulte de la proposition 3.4 que, pour prouver la conjecture 3.3, on peut remplacer la courbe C par un revêtement fini C' (bien entendu en remplaçant X par $X \times_C C'$). D'après le théorème de la réduction semi–stable de Mumford [22], nous pouvons donc supposer qu'il existe un diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f'"'] & X \arrow[d] \\ P \arrow[rr, "i"] & & C \end{tikzcd}$$

où X' est non singulière, p est projective et est un isomorphisme sur $C-P$ et où la fibre $Y=f'^{-1}(P)$ est réduite et à croisements normaux.

Nous désignerons par Γ le graphe (dual de Y) qui a pour sommets les composantes irréductibles Y_i de Y et une face $<Y_{i(0)},\dots,Y_{i(k)}>$ pour chaque composante connexe (non vide) de $Y_{i(0)}\cap\dots\cap Y_{i(k)}$.

Proposition 5.1 :

La dimension de $(H^r_{DR}(X_\sigma/K))_{P,\mathscr{D}}$ *est au moins égale à la dimension de* $H^r(\Gamma)$.

Tout d'abord, comme $X'_\sigma=X_\sigma$, nous pouvons supposer, pour simplifier les notations, que $X'=X$. D'autre part, nous supposerons C affine.

La variété X_σ étant propre et lisse sur K, le théorème de dualité de Poincaré affirme que l'espace $H^r_{DR}(X_\sigma/K)$ est son propre dual. Par suite, si on définit la connexion sur Hom_K par la formule classique

$$<\nabla(m^*),m>=d<m^*,m>-<m^*,\nabla(m)>$$

on a un isomorphisme de K–module différentiel :

$$H^r_{DR}(X_\sigma/K)\otimes_K \mathscr{D}_{C,P}=\mathrm{Hom}_K(H^r_{DR}(X_\sigma/K),\mathscr{D}_{C,P}).$$

Autrement dit, $(H^r_{DR}(X_\sigma/K))_{P,\mathscr{D}}$ est isomorphe à l'ensemble des applications horizontales de $H^r_{DR}(X_\sigma/K)$ dans $\mathscr{D}_{C,P}$.

Localement sur X, Y est somme de diviseurs lisses et réduits. Soit $\mathscr{P}$ un point de X intersection de $r+1$ tels diviseurs (s'il en existe). Il existe alors un voisinage étale $\mathscr{U}$ de $\mathscr{P}$ des coordonnées locales x_i et une uniformisante π de C en P pour lesquels $\mathscr{U}$ soit un recouvrement étale de la courbe $x_0\dots x_r=\pi$. Dans ces conditions, $\mathscr{U}_\sigma$ étant affine, on a

$$H^r_{DR}(\mathscr{U}_\sigma/K)=\Omega^r_{\mathscr{U}_\sigma/K}/d(\Omega^{r-1}_{\mathscr{U}_\sigma/K}).$$

et tout élément de $\Omega^r_{\mathscr{U}_\sigma/K}$ peut s'écrire (de manière unique) :

$$\omega=f(x_0,\dots,x_r)\,\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_r}{x_r}\,.$$

où f est une fonction algébrique de $\bar{\mathbb{Q}}((x_0,\dots,x_r))$. On constate facilement que la formule

$$\delta(\omega)=\Delta(f)(\pi)$$

définit une application K–linéaire δ de $\Omega^r_{\mathscr{U}_\sigma/K}$ dans $K((\pi))$. Il est immédiat de vérifier que cette application s'annule sur $d(\Omega^{r-1}_{\mathscr{U}_\sigma/K})$ et qu'elle définit, par passage au quotient, une application horizontale sur $H^r_{DR}(\mathscr{U}_\sigma/K)$ (on peut en effet calculer l'action de la connexion ∇ en supposant que les x_i, $1\le i\le r$, sont constants). D'autre part, comme f est algébrique, il résulte de la proposition 2.3 que $\Delta(f)$ appartient à $\mathscr{D}$. Par passage au quotient, nous obtenons donc une application horizontale, encore notée δ, de $H^r_{DR}(\mathscr{U}_\sigma/K)$ dans $\mathscr{D}_{C,P}$.

Comme $\mathscr{U}_\sigma$ est un ouvert de X_σ, on a une application horizontale canonique $\imath$ de $H^r_{DR}(X_\sigma/K)$ dans $H^r_{DR}(\mathscr{U}_\sigma/K)$. Le produit :

$$\delta_{\mathscr{P}}=\delta\circ\imath$$

définit un élément de $(\mathrm{Hom}_K(H^r_{DR}(X_\sigma/K),\mathscr{D}_{C,P}))^\nabla$, c'est-à-dire de $(H^r_{DR}(X_\sigma/K))_{P,\mathscr{D}}$, qui ne dépend que du point $\mathscr{P}$.

Nous cherchons maintenant à évaluer la dimension du $\bar{\mathbb{Q}}$–espace vectoriel $\mathscr{S}$ engendré par les $\delta_{\mathscr{P}}$. On aura évidemment :

$$\dim(H^r_{DR}(X_\sigma/K))_{P,\mathscr{D}}\ge\dim\mathscr{S}.$$

Nous notons $\Omega_X^r\langle Y\rangle$ (resp. $\Omega^r_{X/C}\langle Y\rangle$) le complexe de De Rham (resp. de De Rham relatif) de X (resp. X/C) avec des singularités logarithmiques le long de Y et W la filtration par le poids de ce complexe (voir [14] § 3).

Comme $H^r_{DR}(X_\sigma/K) \simeq \mathbb{R}^r f_*(\Omega^{\cdot}_{X/C}\langle Y\rangle) \otimes K$, les $\delta_{\mathscr{P}}$ définissent des applications horizontales de $\mathbb{R}^r f_*(\Omega^{\cdot}_{X/C}\langle Y\rangle)$ dans $\mathscr{D}_{C,P}$. Soit $\bar\omega$ un élément de $\mathbb{R}^r f_*(\Omega^{\cdot}_{X/C}\langle Y\rangle)_P$ et soit ω une forme différentielle de $\Omega^r_{X/C}\langle Y\rangle$ représentant son image dans $H^r(\Omega^{\cdot}_{\mathscr{U}/C}\langle Y\rangle)$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert suffisamment petit contenant un point $\mathscr{P}$. En choisissant les coordonnées locales comme ci–dessus, on vérifie que l'on a, au voisinage du point $\mathscr{P}$:

$$\omega = f(x_0,\dots,x_r)\,\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_r}{x_r}$$

où f appartient à $\tilde{\mathbb{Q}}[[x_0,\dots,x_r]]$. On constate, en particulier, que $\delta_{\mathscr{P}}(\bar\omega)$ sera non nul s'il en est ainsi de :

$$\delta_{\mathscr{P}}(\bar\omega)(P) = \delta(\omega)(P) = \Delta(f)(0) = f(0,\dots,0)$$

(où, pour $a = f(\pi)$ élément de $\mathscr{D}_{C,P}$, on a posé $a(P) = f(0)$). Il est facile de constater que, lorsque cette situation se produit, la forme différentielle $\omega \wedge f^*(d\pi/\pi)$ n'est pas une section sur $\mathscr{U}$ de $W_r\Omega_X^{r+1}\langle Y\rangle$. Inversement, par définition de la filtration W, si $\omega \wedge f^*(d\pi/\pi)$ n'est pas une section sur $\mathscr{U}$ de $W_r\Omega_X^{r+1}\langle Y\rangle$, il existe $r+1$ diviseurs lisses de Y, d'intersection non vide, le long desquels $\omega \wedge f^*(d\pi/\pi)$ a une singularité. Ces diviseurs étant à croisements normaux, leur intersection est un ensemble fini de points. Il suffit de considérer l'un d'entre eux, disons $\mathscr{P}$, pour se trouver dans la situation ci–dessus.

Pour aller plus loin, nous utilisons les résultats de [24]. Considérons le complexe double de faisceaux sur Y :

$$A^{p,q} = \Omega_X^{p+q+1}\langle Y\rangle / W_q\Omega_X^{p+q+1}\langle Y\rangle$$

muni des différentielles :

$$d' : A^{p,q} \longrightarrow A^{p,q+1} \text{ induite par la différentielle extérieure,}$$
$$d'' : A^{p,q} \longrightarrow A^{p+1,q} \text{ induite par } \wedge f^*(d\pi/\pi).$$

On munit le complexe simple $A^{\cdot}$ correspondant d'une filtration W :

$$W_k A^{p,q} = W_{2q+k+1}\,\Omega_X^{p+q+1}\langle Y\rangle / W_q\,\Omega_X^{p+q+1}\langle Y\rangle.$$

On constate que $\wedge f^*(d\pi/\pi)$ envoie $W_k A^{\cdot}$ dans $W_{k+1}A^{\cdot}$ si bien que :

$$\mathrm{Gr}^W_k A^{\cdot} = \bigoplus_q \mathrm{Gr}^W_k A^{\cdot,q}[-q].$$

En particulier on trouve, en remarquant que X est de dimension $r+1$:

$$\mathrm{Gr}^W_{-k} A^{\cdot} = 0 \text{ pour } k > r$$
$$\mathrm{Gr}^W_{-r} A^{\cdot} = \bigoplus_q \mathrm{Gr}^W_{-r} A^{\cdot,q}[-q] = \mathrm{Gr}^W_{-r} A^{0,r}[-r] = \mathrm{Gr}^W_{r+1}\Omega_X^{r+1}\langle Y\rangle[-r].$$

L'application $\wedge f^*(d\pi/\pi)$ définit une surjection de $\Omega^p_{X/C}\langle Y\rangle \otimes \mathcal{O}_Y$ dans $A^{p,0}$ de telle sorte que $A^{p,\cdot}$ est une résolution de $\Omega^p_{X/C}\langle Y\rangle \otimes \mathcal{O}_Y$. On en déduit une suite spectrale :

$$E_1^{-k,q+k} = \mathbb{H}^q(Y, \mathrm{Gr}^W_k A^{\cdot}) \Longrightarrow \mathbb{H}^q(Y, \Omega^{\cdot}_{X/C}\langle Y\rangle \otimes \mathcal{O}_Y)$$

telle que $E_1^{k,\cdot} = 0$ pour tout $k>r$. Cette suite nous fournit une application

$$E_1^{r,0} = \mathbb{H}^r(Y, \mathrm{Gr}^W_{-r}A^{\cdot}) =$$
$$\mathbb{H}^0(Y, \mathrm{Gr}^W_{r+1}\Omega_X^{r+1}\langle Y\rangle) \xrightarrow{\not\sim} E_\infty^{r,0} = \mathrm{Gr}^W_0\mathbb{H}^r(Y, \Omega^{\cdot}_{X/C}\langle Y\rangle \otimes \mathcal{O}_Y).$$

Maintenant le faisceau $\mathbb{R}^p f_*(\Omega^r_{X/C}\langle Y\rangle)$ est localement libre, ([24] théorème 2.18), on a donc l'isomorphisme suivant :

$$\mathbb{H}^r(Y, \Omega^{\cdot}_{X/C}\langle Y\rangle \otimes \mathcal{O}_Y) \simeq \mathbb{R}^r f_*(\Omega^{\cdot}_{X/C}\langle Y\rangle) \otimes \mathcal{O}_P/\mathscr{M}_P.$$

Il résulte alors du calcul fait plus haut que pour tout élément $\bar{\omega}$ de $E_\infty^{r,0}$ on peut associer un $\mathscr{P}$ tel que $\delta_{\mathscr{P}} \otimes 1 \circ \not{\mathscr{J}}(\bar{\omega}) \neq 0$. On trouve donc :

$$\dim E_\infty^{r,0} \leq \dim \mathscr{S}^* = \dim \mathscr{S}.$$

Pour calculer la dimension de $E_\infty^{r,0}$ il suffit de remarquer que la suite spectrale E_1 dégénérant en E_2 ([24] corollaire 4.20) on a $E_\infty^{r,0} = E_2^{r,0}$. En utilisant le résidu de Poincaré, on trouve ([24] lemme 4.18) :

$$\mathrm{Gr}^W_{-k} A^\cdot \simeq \bigoplus_{q \geq k} a_* \Omega^\cdot_{\tilde{Y}^{(2q-k+1)}}[k-2q]$$

où $\tilde{Y}^{(p)}$ désigne l'union disjointe des intersections de p composantes lisses de Y et a la projection de $\tilde{Y}^{(p)}$ dans X. En particulier on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}^W_{-r} A^\cdot &\simeq a_* \Omega^\cdot_{\tilde{Y}^{(r+1)}}[-r] \\ \mathrm{Gr}^W_{-r+1} A^\cdot &\simeq a_* \Omega^\cdot_{\tilde{Y}^{(r)}}[1-r] \end{aligned}$$

et on constate que :

$$\begin{aligned} E_1^{r,0} &= \mathbb{H}^r(Y, \mathrm{Gr}^W_{-r} A^\cdot) = \mathbb{H}^0(\tilde{Y}^{(r+1)}, \Omega^\cdot_{\tilde{Y}^{(r+1)}}) = H^0(\tilde{Y}^{(r+1)}) \\ E_1^{r-1,0} &= \mathbb{H}^r(Y, \mathrm{Gr}^W_{-r+1} A^\cdot) = \mathbb{H}^0(\tilde{Y}^{(r)}, \Omega^\cdot_{\tilde{Y}^{(r)}}) = H^0(\tilde{Y}^{(r)}) \end{aligned}$$

et que d_1 est l'isomorphisme canonique. Il en résulte que :

$$E_2^{r,0} = H^0(\tilde{Y}^{(r+1)}) / \mathrm{Im}(H^0(\tilde{Y}^{(r)})) = H^r(\Gamma). \qquad \blacksquare$$

Corollaire 5.2 :

Si $(H^r_{DR}(X_\sigma/K))_{P,\mathscr{D}} = 0$ *alors la monodromie "tourner autour de* P" *agissant sur* $(H^r_{DR}(X_\sigma/K))$ *est quasi-unipotente d'échelon au plus* $r-1$.

Avec les hypothèses faites, on a :

$$E_2^{r,0} = \mathrm{GR}_0^W \mathbb{H}^r(Y, \Omega^\cdot_{X/C}\langle Y\rangle \otimes \mathcal{O}_Y) = 0$$

et le corollaire est une simple conséquence du théorème 5.9 de [24] qui montre, entre autre, que Gr_0^W est l'image de la monodromie d'ordre r. ■

Corollaire 5.3 :

Si X *est une famille de courbes* ($r=1$), *la dimension de* $(H^1_{DR}(X_\sigma/K))_{P,\mathscr{D}}$ *est au moins égale à* $pd - cp + 1$ *où* pd (resp. cp) *désigne le nombre de points doubles (resp. de composantes irréductibles) de la "réduction semi-stable"* Y.

Il suffit de remarquer que la dimension de $H^1(\Gamma)$ est donnée par la formule : nombre de sommets – nombre de faces + 1. Il est à remarquer que cette dimension est aussi égale à la différence entre le genre de X_σ et la somme des genres des composantes irréductibles Y_i. ■

Pour terminer, il faudrait montrer que le procédé utilisé dans la proposition 5.1 permet d'obtenir toutes les solutions bornées du module $H^r_{DR}(X_\sigma/K)$. Pour cela nous ne pouvons que proposer une justification heuristique que nous donnons ici pour les familles de courbes : si X_p est non singulière, les solutions bornées sont, pour presque tout p, dans la partie "unit root" du F cristal associé à $H^r_{DR}(X_\sigma/K)$. Si on ne tient pas compte des solutions algébriques, ces parties sont des sous–espaces vectoriels de dimension g d'un espace vectoriel de dimension $2g$ et il n'y a aucune raison que ces sous–espaces aient une intersection non vide lorsque p varie ! Cette argumentation a pu être mise en oeuvre pour les cas des familles de courbes elliptiques (et pour ce cas seulement).

(*) p. 65 : A notre connaissance, cette application a été introduite pour la première fois en 1938 par Cameron et Martin [6] pour étudier le produit de Hadamard de deux fonctions holomorphes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. André.– G–functions and differentials equations (preprint).

[2] F. Beukers and C.A.M. Peters.– A family of K3 surfaces and $\zeta(3)$, J. Für die reine und angew. Math., 351 (1984) 42–54.

[3] J.–P. Bezivin.– Sur un théorème de G. Polya, J. für die reine und angew. Math., 364 (1986) 60–68.

[4] J.–P. Bezivin and P. Robba.– Rational solutions of linear differential equations, (preprint).

[5] E. Bombieri.– On G–functions, Recent progress in analytic number theory, Symp. Durham 1979.2 (1981) 1–67.

[6] R.H. Cameron and W.T. Martin.– Analytic continuations of diagonals and Hadamard compositions of multiple power series, Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938) 1–7.

[7] G. Christol.– Fonctions et éléments algébriques, Pacific J. of Math. 125 (1986) 1–37.

[8] G. Christol.– Limites uniformes p–adiques de fonctions algébriques, Thèse Sc. Math. Paris 6 (1977).

[9] G. Christol.– Diagonales de fractions rationnelles et équations de Picard–Fuchs, Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique, 12ème année (1984/85) n° 13, 12 p.

[10] G. Christol.– Fonctions hypergéométriques bornées, Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétique, 14ème année (1986/87) N° 10, 16 p.

[11] D.V. Chudnovsky and G.V. Chudnovsky.– Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G–functions, Lecture Notes in Math. 1135 (1985) 9–51 (Springer–Verlag).

[12] D.V. Chudnovsky and G.V. Chudnovsky.– Applications of Padé approximations to the Grothendieck conjecture on linear differential equations, Lecture Notes in Math. 1135 (1985) 52–100 (Springer Verlag).

[13] J. Denef and L. Lipshitz.– Algebraic power series and diagonals, Jour. of number theory 26 (1987) 46–67.

[14] P. Deligne.– Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. 163 (1970) 131 p.

[15] P. Deligne.– Intégration sur un cycle évanescent, Invent. Math., Berlin, 76 (1984) 129–143.

[16] B. Dwork.– Differential systems associated with families of singular hypersurfaces (preprint).

[17] B. Dwork.– Differential equations which come from geometry, Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique, 10ème année (1982/83) n° 14 6 p.

[18] H. Furstenberg.– Algebraic functions over finite field, J. of algebra, 7, (1967) 271–277.

[19] W.A. Harris and Y. Sibuya.– The reciprocal of solutions of linear ordinary differential equations, Advances in Math. 58 (1985) 119–132.

[20] R. Hartshorne.– On the De Rham cohomologie of algebraic varieties, Publ. Math. IHES 45 (1976), 5–99.

[21] L. Lipshitz.– The diagonal of a D–finite power series is D–finite, (preprint).

[22] D. Mumford.– Semi–stable reduction, Toroïdal embedding 1 (G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint Donat) Lecture Note 339 (1973) 53–108.

[23] P. Robba.– Factorisation d'un opérateur différentiel, Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique 2ème année (1974/75) n° 2 16 p.

[24] J. Steenbrink.– Limits of Hodge structures, Invent. Math. 31 (1976), 229–257.

G. Christol
UER 47 Mathématique
Université de Paris 6
4, place Jussieu
75005 PARIS

Séminaire de Théorie des Nombres
Paris 1986-87

Arithmétique sur certaines hypersurfaces cubiques

Jean–Louis COLLIOT–THÉLÈNE

(d'après un travail en commun avec Per Salberger)

Théorème [1].*Soient* k *un corps de nombres et* $X \subset \mathbb{P}^n_k$ $(n \geq 3)$ *une hypersurface cubique définie sur* k *et possédant un ensemble de* 3 *points singuliers conjugués. Si* X *possède des points rationnels dans tous les complétés* k_v *de* k, *elle possède aussi un point rationnel dans* k.

La conclusion, qui exprime la validité du principe de Hasse pour les hypersurfaces cubiques considérées, s'écrit encore : $X(k_v) \neq \emptyset$ pour chaque place v entraîne $X(k) \neq \emptyset$.

En d'autres termes, soit $F(x_0,x_1,\dots,x_n)$ une forme homogène de degré 3 à coefficients dans k en $(n+1) \geq 4$ variables et soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ $(n \geq 3)$ l'hypersurface cubique qu'elle définit. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k. Supposons :

a) il existe trois points M_1, M_2, M_3 de $\mathbb{P}^n(\bar{k})$, globalement invariants sous l'action de $\mathfrak{g}$, qui sont singuliers sur l'hypersurface $F = 0$ (i.e. toutes les dérivées partielles s'annulent) : on dira, de façon un peu ambiguë, que X possède un triplet de points singuliers conjugués;

b) l'équation $F = 0$ admet des solutions non triviales à coordonnées dans k_v pour chaque complétion k_v de k (v parcourt l'ensemble des places de k).

Alors l'équation $F = 0$ possède une solution non triviale à coordonnées dans k.