RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

UEBER GANZWERTIGE GANZE FUNKTIONEN.

Von **Georg Pólya** (Zürich).

Adunanza del 24 gennaio 1915.

1. Es gibt *keine* ganze transzendente Funktion vom Geschlecht Null, die für die Argumente $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ganze rationale Zahlenwerte annimmt. Genauer und vollständiger, es besteht der

SATZ I. — *Es sei $g(x)$ eine ganze Funktion, und $M(r)$ das Maximum von $|g(x)|$ im Kreise $|x| \leqq r$. Sind die Werte*

$$g(0), \quad g(1), \quad g(2), \ldots, g(n), \ldots$$

ganze rationale Zahlen, und ist

$$\lim_{r=\infty} \frac{r^{\frac{1}{2}} M(r)}{2^r} = 0,$$

so ist $g(x)$ ein Polynom.

Zur Erläuterung dieses Satzes I. sei folgendes bemerkt: könnte man die ihm zugrundeliegende Limesbedingung durch die etwas weniger fordernde Bedingung

$$\lim_{r=\infty} \frac{M(r)}{2^r} = 0$$

ersetzen, so möchte Satz I. besagen, dass *unter allen ganzen transzendenten Funktionen, die für $x = 0, 1, 2, \ldots$ ganzzahlige Werte annehmen, die Funktion 2^x vom kleinsten Wachstum ist.* In dieser Formulierung — die wir zwar noch nicht mit voller Berechtigung aussprechen können — springt die Einfachheit des Satzes I. ins Auge.

Welche ist die ganze transzendente Funktion vom kleinsten Wachstum, die für alle ganze rationale Werte der Variablen (nicht nur für die positive, wie 2^x) ganze rationale Werte annimmt?

Diese Frage führt zu

SATZ II. — *Sei $g(x)$ eine ganze Funktion, und $M(r)$ das Maximum von $|g(x)|$ im Kreise $|x| \leqq r$. Sind die Werte*

$$\ldots g(-n), \ldots, g(-1), \quad g(0), \quad g(1), \ldots, g(n), \ldots$$

ganze rationale Zahlen, und ist

$$\lim_{r=\infty} \frac{r^{\frac{3}{2}} M(r)}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^r} = 0,$$

so ist $g(x)$ ein Polynom.

Im Satze II. kann die merkwürdige Konstante $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ durch keine bessere, d.h. durch keine grössere ersetzt werden. Das lehrt uns die ganze transzendente Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}\right\}.$$

Sie stellt nämlich für $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ lauter ganze rationale Werte dar. Es ist übrigens

$$2 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < e,$$

und $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ist das Quadrat der Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, die die allerlangsamste Kettenbruchentwicklung, und infolge dessen noch andere merkwürdige Eigenschaften hat [1]).

Die Beweise der Sätze I und II gebe ich in den Abschnitten 5. und 6., nachdem ich in den Abschnitten 3., 4., 5. die nötigen algebraischen und funktionentheoretischen Vorbereitungen getroffen habe. Den Beweisen folgen dann zahlentheoretische und funktionentheoretische Bemerkungen in den Abschnitten 7. und 8.

Abschnit 9. hängt mit dem Vorangehenden nur lose zusammen. Es wird da gezeigt, dass $g(z)$ keine ganze *transzendente* Funktion sein kann, wenn die Potenzreihenentwicklung von $g\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)$ lauter ganzzahlige Koeffizienten hat. Dieser Satz besagt, wie wir es sehen werden, dass das *Eisenstein*'sche Kriterium für gewisse Klassen von Potenzreihen einen hinreichenden Charakter besitzt.

Die Entwicklungen in 3. und 6. lassen sich von ungeraden auch auf gerade Funktionen übertragen. Man kann auf diese Weise den Satz II. verschärfen, die Potenz $r^{\frac{3}{2}}$ in der Limesbedingung durch $r^{\frac{1}{2}}$ ersetzend. Da aber auch so nicht gelingt, diese Potenz durch $r^0 = 1$ zu ersetzen, habe ich diese Verlängerung unterdrückt.

2. Um die Rechnungsweise des Abschnittes 3. zu verdeutlichen, behandle ich zuerst mit der dort zu benutzenden Methode die einfachsten Tatsachen der Differenzenrechnung, die ich dann ohnehin gebrauchen werde, und deren Kenntnis also nicht vorausgesetzt zu werden braucht.

---

[1]) HURWITZ, *Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche* [Mathematische Annalen, Bd. XXXIX (1891), S. 279-284]. Encyklopädie der mathematichen Wissenschaften, Bd. I, Teil II, S. 936.

Ich betrachte unendlich viele Unbestimmte $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ und setze

$$(1)\qquad \begin{cases} U_0 = \binom{0}{0} u_0 \\ U_1 = \binom{1}{0} u_0 + \binom{1}{1} u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n = \binom{n}{0} u_0 + \binom{n}{1} u_1 + \cdots + \binom{n}{n} u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Man kann auch

$$U_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1.2\ldots k} u_k$$

schreiben, denn für positives ganzzahliges x endigt die angeschriebene unendliche Reihe in lauter Nullen, und konvergiert selbstverständlich. Durch Auflösung der Gleichungen (1) erhält man

$$\begin{aligned} u_0 &= r_{00} U_0 \\ u_1 &= r_{10} U_0 + r_{11} U_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= r_{n0} U_0 + r_{n1} U_1 + \cdots + r_{nn} U_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Es ist ersichtlicherweise

$$r_{00} = r_{11} = r_{22} = \cdots = 1$$

und alle Zahlen $r_{\mu\nu}$ sind ganz.

Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grade $\leqq n$, so ist es immer, u.zw. nur auf eine Weise in der Form

$$(2)\qquad f(x) = a_0 + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2} + \cdots + a_n\binom{x}{n}$$

darstellbar. — Denn setzt man

$$(3)\qquad a_\nu = r_{\nu 0} f(0) + r_{\nu 1} f(1) + \cdots + r_{\nu\nu} f(\nu) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

so stimmt der Ausdruck auf der rechten Seite von (2) mit $f(x)$ für die $n+1$ Werte $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, also für alle Werte von x überein. Andererseits, setzt man (2) als bestehend voraus, so erhält man durch Einsetzung von $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ genau $n+1$ Gleichungen für $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, aus denen sich a_ν eindeutig nach der Formel (3) bestimmt.

Sei nun k der wahre Grad von $f(x)$, und $k < n$. Indem man $f(x)$ einmal als Polynom vom Grade $\leqq k$, und dann als Polynom vom Grade $\leqq n$ betrachtet, erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=0}^{k} \left(r_{\nu 0} f(0) + r_{\nu 1} f(1) + \cdots + r_{\nu\nu} f(\nu)\right)\binom{x}{\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \left(r_{\nu 0} f(0) + r_{\nu 1} f(1) + \cdots + r_{\nu\nu} f(\nu)\right)\binom{x}{\nu}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, wegen der Eindeutigkeit der Darstellung für Polynome vom Grade $\leqq n$

$$r_{n0} f(0) + r_{n1} f(1) + \cdots + r_{nn} f(n) = 0.$$

Setzt man $f(x) = 1$, und $f(x) = x^k$, so wird speziell

$$(4) \qquad \begin{cases} r_{n0} + r_{n1} + r_{n2} + \cdots + r_{nn} = 0, & \text{für} \quad 0 < n, \\ r_{n0} 0^k + r_{n1} 1^k + r_{n2} 2^k + \cdots + r_{nn} n^k = 0, & \text{für} \quad 1 \leqq k < n. \end{cases}$$

Die letzten beiden Zeilen drücken die wesentlichste Eigenschaft der Zahlen $r_{n\nu}$ aus. Sie lassen sich leicht explicite auf Grund dieser Eigenschaft bestimmen, am einfachsten so: man betrachte die rationale Funktion

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{r_{n0}}{x} + \frac{r_{n1}}{x-1} + \frac{r_{n2}}{x-2} + \cdots + \frac{r_{nn}}{x-n} \\ &= \frac{P(x)}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}, \end{aligned}$$

wo $P(x)$ ein gewisses Polynom ist, dessen Grad mit r bezeichnet werden soll. Der Grad r von $P(x)$ ist aus der Entwicklung von $R(x)$ nach fallenden Potenzen von x zu bestimmen. Diese Entwicklung beginnt nämlich mit x^{r-n-1}.

Bilden wir diese Entwicklung!

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{n0} 0^k + r_{n1} 1^k + \cdots + r_{nn} n^k}{x^{k+1}} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{r_{n0} 0^k + r_{n1} 1^k + \cdots + r_{nn} n^k}{x^{k+1}}, \end{aligned}$$

auf Grund der Formeln (4). Die Entwicklung von $R(x)$ beginnt also mit $\frac{1}{x^{n+1}}$, und folglich ist $r = 0$, d. h. $P(x)$ ist eine Konstante. Diese Konstante ist am einfachsten zu bestimmen, indem man in $(x-n)R(x)$ $x = n$ setzt, und $r_{nn} = 1$ beachtet. Man erhält

$$P(x) = n!$$

und

$$(5) \qquad \frac{r_{n0}}{x} + \frac{r_{n1}}{x-1} + \cdots + \frac{r_{nn}}{x-n} = \frac{n!}{x(x-1)\ldots(x-n)}.$$

Aus Formel (5) bestimmt sich $r_{n\nu}$ mit Leichtigkeit:

$$r_{n\nu} = (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu}.$$

Dies ist aus der Differenzenrechnung wohl bekannt.

Mag diese Betrachtung auch etwas gezwungen erscheinen, so führt sie doch, auch im nächsten Abschnitt, auf dem kürzesten Wege zum Ziel.

3. Ich betrachte wieder unendlichviele Unbestimmte $u_1, u_2, u_3, \ldots,$ und setze jetzt

$$(1')\quad \begin{cases} U_1 = \binom{1}{1} u_1 \\ U_2 = \binom{2}{1} u_1 + \binom{3}{3} u_2 \\ U_3 = \binom{3}{1} u_1 + \binom{4}{3} u_2 + \binom{5}{5} u_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_n = \binom{n}{1} u_1 + \binom{n+1}{3} u_2 + \binom{n+2}{5} u_3 + \cdots + \binom{n+n-1}{2n-1} u_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Formeln können durch die einzige

$$U_x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+k-1)\ldots(x+1)x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1\ldots(k-1)k(k+1)\ldots(2k-1)} u_k$$

ersetzt werden. Will man U_x für negatives und verschwindendes ganzzahliges x durch die letztangeschriebene Gleichung definieren, so ist

$$U_{-x} = -U_x$$
$$U_0 = 0.$$

Die Auflösung der Gleichungen (1′) soll das Resultat

$$\begin{aligned} u_1 &= s_{11} U_1 \\ u_2 &= s_{21} U_1 + s_{22} U_2 \\ u_3 &= s_{31} U_1 + s_{32} U_2 + s_{33} U_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= s_{n1} U_1 + s_{n2} U_2 + s_{n3} U_3 + \cdots + s_{nn} U_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ergeben. Es ist

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = \cdots = 1,$$

und alle Zahlen $s_{\mu\nu}$ sind ganz.

Es ergeben sich nun, analog wie in 2., folgende Tatsachen:

Ist das Polynom $f(x)$ ungerade, d. h. ist

$$f(-x) = -f(x)$$

und ist der Grad von $f(x) \leqq 2n-1$, so hat man die eindeutige Darstellung

$$(2')\qquad f(x) = a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x+1}{3} + \cdots + a_n \binom{x+n-1}{2n-1}$$

mit

$$(3')\qquad a_\nu = s_{\nu 1} f(1) + s_{\nu 2} f(2) + \cdots + s_{\nu\nu} f(\nu) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Ist das ungerade Polynom $f(x)$ vom Grade $2k-1$, so ist

$$s_{n1} f(1) + s_{n2} f(2) + \cdots + s_{nn} f(n) = 0$$

für $1 \leqq k < n$.

Setzt man speziell $f(x) = x^{2k-1}$, so erhält man

$$s_{n1} 1^{2k-1} + s_{n2} 2^{2k-1} + \cdots + s_{nn} n^{2k-1} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq k < n. \tag{4'}$$

Ich betrachte nun die rationale Funktion

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{s_{n1}}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{s_{n2}}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) + \cdots + \frac{s_{nn}}{2}\left(\frac{1}{x-n} - \frac{1}{x+n}\right) \\ &= s_{n1}\frac{1}{x^2-1^2} + s_{n2}\frac{2}{x^2-2^2} + \cdots + s_{nn}\frac{n}{x^2-n^2} \\ &= \frac{Q(x)}{(x^2-1^2)(x^2-2^2)\ldots(x^2-n^2)}, \end{aligned}$$

wo $Q(x)$ ein gewisses Polynom bedeutet. Die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{n1} 1^{2k-1} + s_{n2} 2^{2k-1} + \cdots + s_{nn} n^{2k-1}}{x^{2k}} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{s_{n1} 1^{2k-1} + s_{n2} 2^{2k-1} + \cdots + s_{nn} n^{2k-1}}{x^{2k}} \end{aligned}$$

fängt, kraft der Gleichungen (4′), mit $\frac{1}{x^{2n}}$ an, und daraus folgt, dass $Q(x)$ eine Konstante ist. Das Residuum des Poles $x = n$ ist $\frac{s_{nn}}{2} = \frac{1}{2}$, und daraus gewinnt man den Wert

$$Q(x) = 2n - 1\,!$$

So gelangt man zur Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{s_{n1}}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{s_{n2}}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) + \cdots + \frac{s_{nn}}{2}\left(\frac{1}{x-n} - \frac{1}{x+n}\right) \\ &\qquad = \frac{2n-1\,!}{(x^2-1^2)(x^2-2^2)\ldots(x^2-n^2)}. \end{aligned}\right. \tag{5'}$$

Aus (5′) folgt

$$s_{n\nu} = (-1)^{n-\nu} \frac{\nu}{n} \binom{2n}{n+\nu}, \qquad (1 \leqq \nu \leqq n)$$

diese explicite Form wird aber im Folgenden gar nicht gebraucht.

4. Im Vorhergehenden sind die algebraischen Hülfsmittel zusammengestellt. An funktionentheoretischen Hülfsmitteln brauche ich hauptsächlich den folgenden, den Elementen der Theorie der ganzen Funktionen angehörigen

HILFSSATZ. — *Sei $1 < a < e$. Genügen die beiden ganzen Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ für hinreichend grosses $|x|$ den Ungleichungen*

$$|g(x)| < a^{|x|}, \quad |h(x)| < a^{|x|} \tag{6}$$

und ist

$$g(1) = h(1), \quad g(2) = h(2), \quad \ldots, \quad g(n) = h(n), \ \ldots$$

so ist identisch

$$g(x) = h(x).$$

Würde die ganze Funktion $g(x) - h(x)$ nicht identisch verschwinden, so existierte ein positiver echter Bruch α, für den $g(\alpha) - h(\alpha) \neq 0$. Die Funktion

$$f(x) = g(x+\alpha) - h(x+\alpha)$$

genügt den Ungleichung

$$|f(x)| < b^{|x|} \tag{7}$$

für hinreichend grosses $|x|$, wo $a < b < e$, sie verschwindet für

$$x = 1 - \alpha, \quad 2 - \alpha, \quad 3 - \alpha, \ldots, n - \alpha, \ldots$$

und es ist $f(0) \neq 0$.

Sei n so gross, dass für $|x| = n$ die Ungleichung (7) schon richtig ist, so folgt, nach einem Satze von JENSEN [2]), dass

$$|f(0)| \frac{n^n}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} < b^n$$

oder um so mehr

$$\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{b}{|f(0)|^{\frac{1}{n}}}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung strebt bekanntlich gegen e, und so würde es für unendlich wachsendes n folgen

$$e \leqq b,$$

ein Widerspruch, da $e > b$.

5. Satz I. beweist sich nun so: ich bilde die ganzen Zahlen

$$g(n) - \binom{n}{1} g(n-1) + \binom{n}{2} g(n-2) + \cdots + (-1)^n g(0)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int g(x) \left\{ \frac{1}{x-n} - \frac{\binom{n}{1}}{x-n+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{x} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int g(x) \frac{n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)} dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Das Integral ist im positiven Sinne entlang eines Kreises erstreckt, dessen Mittelpunkt der Punkt $x = 0$, und dessen Radius $r > n$ ist. Der Uebergang von der zweiten Zeile zur dritten geschieht kraft der Formel (5).

Der Integralausdruck ist zum Zwecke einer Abschätzung eingeführt. Mit seiner Hülfe erhält man die Ungleichung

$$\left| g(n) - \binom{n}{1} g(n-1) + \cdots + (-1)^n g(0) \right| \leqq r M(r) \frac{n!}{r(r-1)\ldots(r-n)},$$

wo $M(r)$ die im Satz I. angegebene Bedeutung hat.

Wir wollen an der erhaltenen Ungleichung eine dreifache Aenderung vornehmen:

---

[2]) Vgl. z. B. É. BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1903), S. 105-107.

wir setzen

$$M(r) = \varepsilon(r) \frac{2^r}{r^{\frac{1}{2}}}$$

wo die stetige Funktion $\varepsilon(r)$ infolge der Voraussetzung des Satzes I. die Eigenschaft

$$\lim_{r=\infty} \varepsilon(r) = 0$$

hat. Wir führen ferner die Gammafunktion und die STIRLINGsche Formel ein. Endlich wollen wir das Verhältnis

$$\frac{n}{r} = \xi$$

betrachten. Die Zahl ξ muss ein positiver echter Bruch sein, aber sie kann zwischen den Grenzen 0 und 1 ganz beliebig gewählt werden.

In Ausführung des Angedeuteten erhalten wir:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| g(n) - \binom{n}{1} g(n-1) + \cdots + (-1)^n g(0) \right| \\ & \leqq \varepsilon(r) \frac{2^r}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{n!}{(r-1)(r-2)\ldots(r-n)} \\ & = \varepsilon(r) \frac{2^r}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(r-n)}{\Gamma(r)}. \end{aligned} \right.$$

Die rechte Seite von (8) stimmt im Grenzwerte für $n = \infty$, $r - n = \infty$ mit dem Ausdruck

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varepsilon(r) \frac{2^r}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}\,(r-n)^{r-n-\frac{1}{2}} e^{-r+n}}{\sqrt{2\pi}\, r^{r-\frac{1}{2}} e^{-r}} \\ & = \varepsilon(r) \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{r-n}\right)^{\frac{1}{2}} 2^r \frac{n^n (r-n)^{r-n}}{r^r} \\ & = \varepsilon(r) \frac{\sqrt{2\pi\xi}}{(1-\xi)^{\frac{1}{2}}} \left(2 \xi^{\xi} (1-\xi)^{1-\xi}\right)^r. \end{aligned} \right.$$

Die stetige Funktion $\xi^{\xi}(1-\xi)^{1-\xi}$ wird 1 für $\xi = 0$ und $\xi = 1$, und erreicht ihr Minimum, wie es durch Bildung des Derivierten leicht festzustellen ist, für $\xi = \frac{1}{2}$.

Für $\xi = \frac{1}{2}$ nimmt (9) den Wert

$$\varepsilon(r) \sqrt{2\pi}$$

an, und konvergiert so gegen 0 mit unendlich wachsendem $r = 2n$. Dasselbe muss der Fall mit der linken Seite von (8) sein. *Diese linke Seite ist aber eine rationale ganze Zahl.* Daher existiert N so, dass für $n > N$

$$g(n) - \binom{n}{1} g(n-1) + \cdots + (-1)^n g(0) = 0.$$

Das Polynom

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(g(n)-\binom{n}{1}g(n-1)+\cdots+(-1)^n g(0)\right)\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2\ldots n}$$
$$=\sum_{n=0}^{N}\left(g(n)-\binom{n}{1}g(n-1)+\cdots+(-1)^n g(0)\right)\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2\ldots n}$$

stimmt nun mit der ganzen Funktion $g(x)$ für $x=0, 1, 2, 3, \ldots$ überein (vergl. Abschnitt 2.). Da die Bedingungen (6) des Hilfssatzes offenbar erfüllt sind, ist die ganze Funktion $g(x)$ mit diesem Polynom identisch, w. z. b. w. [3]).

6. Nimmt die ganze Funktion $g(x)$ für $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ rationale ganze Werte an, so werden dies die beiden *ungeraden* Funktionen

$$g(x)-g(-x), \quad x\left(g(x)+g(-x)\right)$$

ebenfalls tun. Durch die Betrachtung dieser Funktionen kann Satz II. abgeleitet werden aus dem folgenden

SATZ II'. — *Sei $g(x)$ eine ungerade ganze Funktion, und $M(r)$ das Maximum ihres absoluten Betrages am Kreise $|x|=r$. Sind die Werte*

$$g(1), \quad g(2), \quad g(3), \ldots, g(n), \ldots$$

ganze rationale Zahlen, und ist

$$\lim_{r=\infty}\frac{r^{\frac{1}{2}}M(r)}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^r}=0,$$

so ist $g(x)$ ein Polynom.

BEWEIS. — Man betrachte die ganzen Zahlen

$$s_{n1}g(1)+s_{n2}g(2)+\cdots+s_{nn}g(n)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{s_{n1}\left(g(1)-g(-1)\right)+\cdots+s_{nn}\left(g(n)-g(-n)\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4\pi i}\int g(x)\left\{s_{n1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\cdots+s_{nn}\left(\frac{1}{x-n}-\frac{1}{x+n}\right)\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int g(x)\frac{2n-1\,!}{(x^2-1^2)(x^2-2^2)\ldots(x^2-n^2)}dx \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Das Integral ist entlang des Kreises mit dem Mittelpunkte $x=0$ und dem Radius $r=\frac{n}{\xi}$ $(0<\xi<1)$ erstreckt. Bei der Umformung wurde

$$g(x)=-g(-x)$$

sowohl wie die Gleichung (5') berücksichtigt.

3) In der Abhandlung: *Ueber einige Funktionentheoretische Anwendungen der* EULER*schen Reihen-Transformation.* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie, 1912, S. 11-92], stellt Herr PRINGSHEIM, S. 43-45 aus dem Anlasse eines ganz verschiedenen Gegenstandes Rechnungen an, die zu einem andern, wenn auch etwas weniger bietenden Beweise des Satzes I. ausgestaltet werden können.

Der Integralausdruck ergibt die Abschätzung

$$(8')\quad\left\{\begin{aligned} & |s_{n1}g(1)+s_{n2}g(2)+\cdots+s_{nn}g(n)| \\ & \leqq r\,M(r)\frac{2n-1\,!}{(r^2-1^2)(r^2-2^2)\ldots(r^2-n^2)} \\ & =\frac{\varepsilon(r)}{r^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^r r^2\,\frac{\Gamma(2n)\Gamma(r-n)}{\Gamma(r+n+1)}, \end{aligned}\right.$$

wo die Funktion $\varepsilon(r)$ durch die Gleichung

$$\varepsilon(r)=\frac{r^{\frac{1}{2}}M(r)}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^r}$$

definiert ist. Ersetzt man rechts in (8′) Γ durch den STIRLING'schen Ausdruck, so kommt

$$(9')\quad\left\{\begin{aligned} & \varepsilon(r)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^r r^{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n-\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{2\pi}(r-n)^{r-n-\frac{1}{2}}e^{-r+n}}{\sqrt{2\pi}(r+n)^{r+n+\frac{1}{2}}e^{-r-n}} \\ & =\varepsilon(r)\sqrt{\frac{2\pi}{(1+\xi)2\xi(1-\xi)}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,\frac{(2\xi)^{2\xi}(1-\xi)^{1-\xi}}{(1+\xi)^{1+\xi}}\right)^r. \end{aligned}\right.$$

Die stetige Funktion $\dfrac{(2\xi)^{2\xi}(1-\xi)^{1-\xi}}{(1+\xi)^{1+\xi}}$ nähert sich 1, wenn $\xi=0$ oder $\xi=1$ wird, und erreicht ihren kleinsten Wert für $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, wie es sich durch Differentialrechnung ergibt. Dieser kleinste Wert ist $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$ und so wird für $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ der Wert von (9)

$$\varepsilon(r)\sqrt{\frac{5^{\frac{3}{2}}}{4}\pi}$$

was gegen 0 strebt, wenn $r=n\sqrt{5}$ unendlich wächst.

Daher muss auch die durch die linke Seite von (8′) repräsentierte Folge von ganzen Zahlen gegen 0 streben, und es gibt eine Zahl N, so dass für $n>N$ die ganze Zahl

$$s_{n1}g(1)+s_{n2}g(2)+\cdots+s_{nn}g(n)=0.$$

Der Ausdruck

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty}\left(s_{n1}g(1)+s_{n2}g(2)+\cdots+s_{nn}g(n)\right)\frac{(x-n+1)\ldots(x-1)x(x+1)\cdots(x+n-1)}{1\ldots(n-1)n(n+1)\ldots(2n-1)} \\ = & \sum_{n=1}^{N}\left(s_{n1}g(1)+s_{n2}g(2)+\cdots+s_{nn}g(n)\right)\frac{(x-n+1)\ldots(x-1)x(x+1)\ldots(x+n-1)}{1\ldots(n-1)n(n+1)\ldots(2n-1)} \end{aligned}$$

wird zu einem Polynom, das mit $g(x)$ für $x=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, also, infolge des Hilfsatzes, für alle Werte von x übereinstimmt.

7. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ konjugierte ganze irrationale algebraische Zahlen, d. h. Wurzeln der irreduziblen Gleichung

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \tag{10}$$

mit rationalen ganzzahligen Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots, b_n$, wo $n \geqq 2$. Die ganze Funktion

$$\alpha_1^x + \alpha_2^x + \alpha_3^x + \cdots + \alpha_n^x$$

stellt für die Argumente $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ganze rationale Zahlen dar, und reduziert sich nicht auf ein Polynom. Daraus folgt, kraft unseres Satzes I, dass die Ungleichungen

$$|\log \alpha_i| < \log 2 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{11}$$

nicht sämtlich zu gleicher Zeit erfüllt werden können. (Es ist, wie es natürlich frei steht, für $\log \alpha_i$ unter den unendlich vielen Bestimmungen diejenige vom kleinsten absoluten Wert gewählt).

Diese Folgerung des Satzes I ist jedoch trivial. Denn aus Ungleichung (11) folgt durch einfache Rechnung

$$|\alpha_i - 1| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Nun können sogar die weniger fordernden Ungleichungen (12) nicht sämtlich bestehen, da

$$|\alpha_1 - 1|\,|\alpha_2 - 1| \ldots |\alpha_n - 1| = |1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n| \geqq 1.$$

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *Einheiten* (d. h. $b_n = \pm 1$ in Gleichung (10)), so stellt die Funktion

$$\alpha_1^x + \alpha_2^x + \cdots + \alpha_n^x$$

nicht nur für positive, sondern für alle ganze rationale Werte von x ganze rationale Zahlen dar, und daraus folgt, kraft des Satzes II, dass nicht alle Ungleichungen

$$|\log \alpha_i| < \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zu gleicher Zeit bestehen können. Dies bedeutet z. B., dass es keine Einheit gibt, die samt allen konjugierten reell, positiv und im Innern des Intervalles $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ gelegen wäre. Auch diese arithmetischen Folgerungen lassen sich elementar bestätigen, wie mir Herr I. SCHUR mitteilte.

8. Die Verfolgung der funktionentheoretischen Seite der Sätze I und II führt uns zu Fragen der Interpolation der ganzen Funktionen.

Es seien zwei unendliche Folgen

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

vorgegeben, deren erste den beiden Bedingungen

$$1) \quad x_\mu \neq x_\nu, \text{ wenn } \mu \lesseqgtr \nu, \qquad 2) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{x_n} = 0$$

genügt. So lässt sich bekanntlich [4]) immer eine ganze Funktion $g(x)$ angeben, die an den Stellen x_n die Werte y_n interpoliert, d. h. den Gleichungen

$$(13) \qquad g(x_1) = y_1, \quad g(x_2) = y_2, \ldots, g(x_n) = y_n, \ldots$$

genügt. Schwieriger ist die Frage: *was ist das kleinstmögliche Wachstum, das der interpolierenden Funktion $g(x)$ zukommt?*

Unter « Wachstum » (ordre apparent, Ordnung, etc.) der Funktion $g(x)$ sei die Zahl ρ verstanden, die folgendermassen definiert ist: sei $M(r)$ das Maximum der stetigen Funktion $|g(x)|$ für $|x| = r$, so setze ich

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = \rho \, .$$

(ρ ist nicht negativ. Wenn $g(x)$ ein Polynom ist, so ist sein Wachstum $\rho = 0$. Ich betrachte nur die Fälle, wo ρ endlich ist).

Die genannte Frage lautet also dahin: man bilde die Gesamtheit aller den Bedingungen (13) genügender ganzer Funktionen $g(x)$; was ist die untere Grenze ρ_0 der zu diesen Funktionen gehörigen Zahlen ρ?

Dass das minimale Wachstum durch die Zahl ρ_0 gemessen sei, dazu ist natürlich erforderlich, dass

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \log |y_n|}{\log |x_n|} \leqq \rho_0 \ [5]).$$

Für die Interpolationsstellen

$$\ldots -n, \ldots, -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ldots, \ n, \ldots$$

wird die aufgeworfene Frage, wenigstens in der Hauptsache, durch folgenden Satz erledigt:

Satz III. — *Es seien die Zahlen*

$$\ldots y_{-n}, \ldots, y_{-2}, \ y_{-1}, \ y_0, \ y_1, \ y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

der Bedingung

$$\overline{\lim_{|n|=+\infty}} \frac{\log \log |y_n|}{\log |n|} \leqq \rho$$

unterworfen. Es wird nach einer ganzen Funktion $g(x)$ gefragt, die den Gleichungen

$$\ldots g(-n) = y_{-n}, \ldots, g(0) = y_0, \ldots, g(n) = y_n, \ldots$$

und der Gleichung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = \rho$$

genügt. ($M(r)$ hat die obige Bedeutung).

---

[4]) Pringsheim, loc. cit. [3]), S. 27-36, wo weitere Litteratur.

[5]) Bei Bildung des $\overline{\lim}$ sollen alle Glieder der Folge $\dfrac{\log \log |y_n|}{\log |x_n|}$ die sinnlos oder imaginär werden, durch 0 ersetzt werden.

Ist $\rho < 1$, *so gibt es entweder keine oder nur eine einzige Funktion* $g(x)$.

Ist $\rho \geqq 1$, *so gibt es immer unendlich viele Funktionen* $g(x)$.

Der Beweis dieses Satzes möchte uns zu weit führen [6]). Ich will ihn nur durch die analogen Verhältnisse der Polynome erläutern. Da handelt es sich darum, bei vorgegebenen

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n \qquad \left(\frac{x_\mu - x_\nu}{\mu - \nu} \neq 0\right)$$

ein Polynom $P(x)$ vom Grade r zu finden, das den Gleichungen

$$P(x_1) = y_1, \quad P(x_2) = y_2, \quad \ldots, \quad P(x_n) = y_n$$

genügt. Es gibt kein solches Polynom $P(x)$, oder nur ein einziges, wenn $r < n$, und es gibt immer unendlich viele, wenn $r \geqq n$. Es werden also bei den Polynomen die beiden Fälle $r < n$ und $r \geqq n$ unterschieden, wo n der Grad des einfachsten für x_1, $x_2, \ldots, x_n$ verschwindenden Polynoms $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ ist. Im Satze III wurden die beiden Fälle $\rho < 1$ und $\rho \geqq 1$ unterschieden, wo 1 das Wachstum der einfachsten für $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$ verschwindenden ganzen Funktion

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = x \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}$$

ist.

Auf Grund der Sätze II und III lassen sich nun vollständig die verschiedenen Wachstumverhältnisse übersehen, die den ganzwertigen ganzen Funktionen zukommen können, d. h. solchen ganzen Funktionen, die für rationale ganzzahlige Argumente rationale ganzzahlige Werte annehmen.

1). Es gibt ganzwertige ganze Funktionen, deren Wachstum $\rho = 0$ ist. Es sind Polynome, und ihre Werte

$$\ldots g(-n), \ldots, g(-1), \quad g(0), \quad g(1), \ldots, g(n), \ldots$$

unterliegen der bekannten Bedingung, dass eine genügend hohe Differenzenreihe identisch verschwindet.

2). Es gibt keine ganzwertige ganze Funktionen, deren Wachstum ρ ein positiver echter Bruch wäre.

3). Es gibt ganzwertige ganze Funktionen $g(x)$ von jedem Wachstum $\rho \geqq 1$. Die Werte

$$\ldots g(-n), \ldots, g(-1), \quad g(0), \quad g(1), \ldots, g(n), \ldots$$

können bis auf die Bedingung

$$\overline{\lim_{|n|=\infty}} \frac{\log \log |g(n)|}{\log |n|} \leqq \rho$$

beliebig vorgeschrieben werden.

---

[6]) Das wesentlichste geht aus den Untersuchungen des Herrn Borel, loc. cit. [2]), S. 71-78 hervor.

Hier ist die geeignete Stelle zu erwähnen, dass es, in einem gewissen Gegensatze zu dem bisher Gefundenen, ganze transzendente Funktionen *von beliebig vorgeschriebenem Wachstum* gibt, die an jeder rationalen Stelle rationale Werte annehmen. Dies geht aus einer Untersuchung des Herrn STÄCKEL hervor [7]).

9. Dieser letzte Abschnitt behandelt eine von der bisher betrachteten ganz verschiedene arithmetische Eigenschaft der ganzen Funktionen. Sein Gegenstand ist nämlich der Beweis vom

SATZ IV. — *Es sei $g(z)$ eine ganze Funktion. Wenn die Potenzreihe*

$$g\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

(die sich nicht auf eine Konstante reduzieren soll) ganze rationale Koeffizienten hat, so ist $g(z)$ ein Polynom, und $\frac{\gamma}{\delta}$ eine ganze rationale Zahl.

Die vier Konstanten α, β, γ, δ genügen der Ungleichung

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,$$

und der Fall $\delta=0$ ist ausgeschlossen. Setzt man

$$g\left(\frac{\beta}{\delta}+\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\delta^2}z\right)=h(z)$$

so wird $h(z)$ eine ganze Funktion, und es ist

$$(14)\qquad g\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)=h\left(\frac{x}{1+\frac{\gamma}{\delta}x}\right)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots.$$

Die Funktion $h\left(\frac{x}{1+\frac{\gamma}{\delta}x}\right)$ hat nur den einen singulären Punkt $x=-\frac{\delta}{\gamma}$. Da die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung (14) reell sind, muss $-\frac{\delta}{\gamma}$ reell sein. Ich bestimme eine ganze Zahl n, die der Ungleichung

$$\left|\frac{\gamma}{\delta}-n\right|<1$$

genügt. Dies geht immer, nämlich nur auf eine Art, wenn $\frac{\gamma}{\delta}$ ganz ist, und auf zwei verschiedene Arten, wenn $\frac{\gamma}{\delta}$ nicht ganz ist. Ich führe die Variable u durch die Gleichung

$$\frac{x}{1+\frac{\gamma}{\delta}x}=\frac{u}{1+\left(\frac{\gamma}{\delta}-n\right)u}$$

---

7) P. STÄCKEL, *Ueber arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen* [Mathematische Annalen, Bd. XLVI, S. 513-520].

oder durch die gleichbedeutende

$$x = \frac{u}{1 - nu}$$

ein. Die Funktion

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} h\left(\frac{u}{1 + \left(\frac{\gamma}{\delta} - n\right)u}\right) &= c_0 + c_1 \frac{u}{1 - nu} + c_2 \left(\frac{u}{1 - nu}\right)^2 + \cdots \\ &= c_0 + c_1 u + c_1 n u^2 + c_1 n^2 u^3 + \cdots \\ &\qquad\qquad + c_2 u^2 + c_2 2 n u^3 + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + c_3 u^3 + \cdots \end{aligned} \right.$$

hat den einzigen singulären Punkt $\dfrac{1}{n - \frac{\gamma}{\delta}}$. Ihre MACLAURINsche Reihe hat daher den Konvergenzradius

$$\left| \frac{1}{n - \frac{\gamma}{\delta}} \right| > 1 .$$

Andererseits hat sie lauter rationale ganze Koeffizienten, wie es aus Formel (15) auf Grund des WEIERSTRASSschen Doppelreihensatzes hervorgeht. Eine *unendliche* Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten kann ausserhalb des Einheitskreises nicht konvergieren; daraus folgt nacheinander, dass $h\left(\dfrac{u}{1 + \left(\frac{\gamma}{\delta} - n\right)u}\right)$ ein Polynom und

$$\frac{\gamma}{\delta} - n = 0$$

ist, womit der volle Satz IV bewiesen ist.

Man kann anstatt rationale ganzzahlige Koeffizienten allgemeine rationale Koeffizienten betrachten, was zu einer anderen, eleganteren Formulierung des Satzes IV führt. Ich sage, dass eine Potenzreihe

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

mit rationalen Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ der « EISENSTEINschen Bedingung » genügt, wenn es eine ganze Zahl a gibt, so, dass jeder Koeffizient der Potenzreihe

$$c_1 a x + c_2 a^2 x^2 + c_3 a^3 x^3 + \cdots$$

ganz wird. Diese Definition festgelegt, besteht der Satz:

Es sei $g(z)$ *eine ganze Funktion,* $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, *und die Potenzreihenentwicklung*

$$(14) \qquad g\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

soll lauter rationale Koeffizienten haben. Dass $g(z)$ *ein Polynom sei, dafür ist notwendig und hinreichend, dass die Reihe* (14) *der* EISENSTEIN*schen Bedingung genügt.*

Dass diese Bedingung *hinreicht,* ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes IV; dass sie *notwendig* ist, ist ein trivialer Spezialfall des EISENSTEINschen Satzes [8]). Zum Vergleich will ich einen schönen Satz des Herrn BOREL [9]) in folgender Form aussprechen:

Dass eine meromorphe Funktion mit rationalzahligen Potenzreihenentwicklung rational sei, dafür ist notwendig und hinreichend, dass die Entwicklung der EISENSTEIN*schen Bedingung genügt.*

GEORG PÓLYA.

---

8) HEINE, *Der* EISENSTEIN*sche Satz über Reihenentwicklungen algebraischer Funktionen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XLV, S. 285-382].

9) BOREL, loc. cit., S. 32-38.