О. М. Макаров, Алгоритм умножения матриц размера 3×3, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1986, том 26, номер 2, 293–294

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 2

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.61

АЛГОРИТМ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ РАЗМЕРА 3×3

МАКАРОВ О. М.

(Севастополь)

Дается алгоритм умножения двух квадратных матриц размера 3×3 с коммутативными переменными, требующий выполнения 22 умножений.

Известные в литературе алгоритмы для решения указанной задачи требуют выполнения не менее 23 умножений (см. [1]–[3]). Если элементы перемножаемых матриц некоммутативные, то лучший из известных алгоритмов требует выполнения того же количества умножений [4].

1. Рассмотрим задачу умножения квадратных матриц с коммутативными переменными:

$$\begin{Vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Вычислим (1) по следующему алгоритму, требующему выполнения 22 умножений:

$$r_1=M_5+M_{10}+M_{11}+M_{12},\qquad r_2=M_8+M_{10}-M_{14}+M_{17}-M_{18}+M_{19}-M_{22},$$
$$r_3=M_1-M_{11}-M_{12}-M_{16}+M_{17}-M_{18}+M_{19}-M_{22},\qquad r_4=M_6-M_{10}+M_{11}+M_{13},$$
$$r_5=M_2-M_{10}+M_{13}+M_{14}+M_{15}+M_{17},\qquad r_6=M_9-M_{11}+M_{15}-M_{16}+M_{17},$$
$$r_7=M_7-M_{10}-M_{11}+M_{20}-M_{21}+M_{22},\qquad r_8=M_3-M_{10}+M_{14}-M_{17}+M_{18}+M_{20}+M_{22},$$
$$r_9=M_4+M_{11}+M_{16}-M_{17}+M_{18}+M_{21},$$

где

$$M_1=(a_3+c_1-c_2)(k_1+k_7-k_8+k_9),\qquad M_2=(a_2+b_1+b_2)(k_2-k_4+k_5-k_6),$$
$$M_3=(a_2+b_1+b_3)(k_3-k_4+k_5-k_6),\qquad M_4=(a_3-c_2-c_3)(k_3-k_7+k_8-k_9),$$
$$M_5=(a_1-c_1+c_2)k_1,\qquad M_6=(a_1+b_1+b_2)k_2,\qquad M_7=(a_1+b_1+b_3+c_2+c_3)k_3,$$
$$M_8=a_2(k_1+k_4-k_5+k_6),\qquad M_9=a_3(k_2+k_7-k_8+k_9),\qquad M_{10}=b_1k_4,\qquad M_{11}=c_2k_7,$$
$$M_{12}=(c_1-c_2)(k_1+k_7),\qquad M_{13}=(b_1+b_2)(k_4-k_2),\qquad M_{14}=(a_2+b_1)(k_4-k_5+k_6),$$
$$M_{15}=b_2k_6,\qquad M_{16}=(a_3-c_2)(k_7-k_8+k_9),\qquad M_{17}=c_2k_8,\qquad M_{18}=(b_3-c_2-c_3)k_6,$$
$$M_{19}=(c_1+c_3-b_1-b_3)k_8,\qquad M_{20}=(b_1+b_3)(k_4-k_3+k_6+k_8),$$
$$M_{21}=(c_2+c_3)(k_3+k_6-k_7+k_8),\qquad M_{22}=(c_2+c_3-b_1-b_3)(k_6+k_8).$$

Отметим, что приведенный алгоритм не требует умножений на константы (в отличие от алгоритмов [2], [3]).

2. При синтезе алгоритма из п.1 использовались следующие положения:

а) чтобы найти коммутативный алгоритм умножения вектора на матрицу вида

$$G_1=\begin{Vmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{Vmatrix},\qquad \text{где } B=\begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{Vmatrix},$$

достаточно найти некоммутативный алгоритм умножения вектора на матрицу вида (см. [5], [6])

$$G_2 = \begin{Vmatrix} B^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{Vmatrix};$$

б) в [4] при синтезе алгоритма умножения вектора на матрицу G_1 находились целочисленные решения системы из 729 нелинейных алгебраических уравнений с 621 неизвестными.

В данной работе бралось два базисных алгоритма умножения вектора на матрицы:

$$\left\Vert \begin{array}{cc|cc} 0 & a_1 & & \\ a_2 & a_3 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 0 & a_1 - a_3 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & a_2 - a_3 & a_3 \end{array} \right\Vert, \quad \left\Vert \begin{array}{cc|cc} 0 & g_1 & & \\ g_2 & g_3 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 0 & g_2 - g_3 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & g_1 - g_3 & g_3 \end{array} \right\Vert, \tag{2}$$

каждый из которых требует выполнения 5 умножений. Алгоритм из п.1 был получен путем выделения в матрице G_2 подматриц вида (2) (удалось выделить 5 таких подматриц). На первых шагах (шаг – это выделение в G_2 подматрицы вида (2)) такое выделение можно произвести многими способами, большинство из которых не позволило произвести более 4 шагов. Основной сложностью при синтезе алгоритма из п.1 было определение такого пути, который позволил бы 5 раз выделить в G_2 подматрицы вида (2). Например, способ выделения, приводящий к алгоритму [3], оказался тупиковым, так как не позволил выделить больше ни одной подматрицы (2) в матрице, в которую превратилась матрица G_2 после выделения в ней 4 подматриц вида (2).

Литература

1. *Winograd S.* A new algorithm for inner product.– IEEE Trans. Comput., 1968, v. 17, № 7, p. 693–694.
2. *Waksman A.* On Winograd's algorithm for inner product.– IEEE Trans. Comput., 1970, v. 19, № 4, p. 360–361.
3. *Brocket R., Dobkin D.* On the number of multiplication required for matrix multiplication.– SIAM J. Comput., 1976, v. 5, № 4, p. 624–628.
4. *Laderman J. D.* A noncommutative algorithm for multiplying 3×3 matrices using 23 multiplications.– Bull. Amer. Math. Soc., 1976, v. 82, № 1, p. 126–128.
5. *Makarov O. M.* Using duality for the synthesis of an optimal algorithm involving matrix multiplication.– Inform. Proc. Letters, 1981, v. 13, № 2, p. 48–49.
6. *Ja' Ja' J.* On the complexicity of bilinear forms with commutativity.– Communs ACM, 1979, p. 179–208.
7. *Макаров О. М.* Введение в теорию оптимизации вычислений билинейных форм. Киев: Наук. думка, 1983.

Поступила в редакцию 24.VII.1984

УДК 519.6:517.958

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОИМПУЛЬСА В НЕПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ В ИНТЕГРАЛЬНОМ ВИДЕ

КОЗЛОВ Н. И., СОКОЛОВА Л. Н.

(Москва)

Получено с помощью метода Фурье нестационарное решение уравнений Максвелла в непроводящей среде в случае цилиндрической симметрии.

Для уравнений Максвелла рассматривается смешанная задача с нулевыми начальными и граничными условиями. Последние задаются для тангенциальных компонент электрического поля на поверхности идеального проводника. Среда, в которой рассматриваются поля, считается непроводящей.