Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Heidelberg.)

Wird eine lineare Differentialgleichung durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so ist eine lineare homogene Function der Glieder eines Fundamentalsystems von Integralen derselben mit constanten Coefficienten Wurzel einer rationalen Function. Sind die sämmtlichen Integrale algebraische Functionen, und bildet man alle diejenigen Werthe, welche ein Integral durch die verschiedenen Umläufe der unabhängigen Variablen annimmt, so ist jede symmetrische Function dieser Werthe eine rationale Function. Da aber jeder dieser Werthe als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der Glieder eines Fundamentalsystems dargestellt werden kann, so bin ich auf den Gedanken geführt worden, die mit den Gliedern eines Fundamentalsystems gebildeten Formen näher zu untersuchen. Es ergab sich, dass stets solche Formen angegeben werden können, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function sind, und dass der niedrigste Grad, welcher den Formen der letzteren Art zukommt, eine für alle Fundamentalsysteme sich gleichbleibende Zahl N ist. Wir haben eine Form, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function ist und welche sich nicht in Formen niedrigeren Grades derselben Art zerlegen lässt, eine *Primform* genannt. Es liess sich nun erwarten, dass die Primformen vom Grade N bei der Untersuchung der algebraischen Gleichungen, welchen die Integrale der Differentialgleichung genügen, eine fundamentale Bedeutung haben würden. In der That zeigte sich, dass durch die Betrachtung derselben die wichtigsten Eigenschaften, wodurch diejenigen algebraischen Functionen, welche einer Differentialgleichung von gegebener Ordnung genügen, verknüpft sind, sich aufdecken, und namentlich die Frage sich beantworten liess, unter welchen Umständen eine lineare Differentialgleichung algebraische Integrale besitzt.

Da die Glieder eines Fundamentalsystems von Integralen sich durch die verschiedenen Umläufe der unabhängigen Variablen in lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten derselben Glieder verwandeln, so werden sich die verschiedenen Werthe, welche eine aus denselben Gliedern gebildete Form durch dieselben Umläufe erhält, durch die Ausführung linearer Substitutionen der Formenargumente erzielen lassen. Dieser Umstand veranlasste mich, die *Covarianten* dieser Formen in die Untersuchung hereinzuziehen, da die Veränderungen der Covarianten durch lineare Substitutionen mit denen der Form im einfachsten Zusammenhange stehen. Es ergab sich nun hierbei, dass die Covarianten von Formen, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function sind, ebenfalls Wurzeln rationaler Functionen darstellen, und dass daher die Covarianten der Primformen vom Grade N, welche selber von niedrigerem als dem N^{ten} Grade sind, *identisch* verschwinden müssen. Der weitere Fortgang meiner Untersuchung würde nun eine wesentliche Erleichterung gefunden haben, wenn in der Invariantenlehre das Problem, die Formen n^{ten} Grades zu bestimmen, deren Covarianten von niedrigerem als dem n^{ten} Grade identisch verschwinden, schon gelöst wäre. Da aber dieses nicht der Fall ist, so musste dieses Problem umgangen werden. Es ist mir in der That auch gelungen, durch die Betrachtung der *Hesse*schen Covariante die Lösung dieses Problems für die vorliegende Untersuchung entbehrlich zu machen.

Ich habe im Folgenden die Untersuchung für die linearen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung, bei welchen die zu betrachtenden Formen *binäre* sind, durchgeführt, und behalte mir die Ausdehnung auf die Differentialgleichungen höherer Ordnung für eine andere Gelegenheit vor. Ich hoffe, dass die neue Anwendung, welche wir hier von der Invariantenlehre auf algebraisch-analytische Untersuchungen gemacht, schon in diesem einfachen Falle nicht unwichtig erscheinen werde.

Von den Resultaten der vorliegenden Arbeit heben wir hier nur hervor den Nachweis, dass für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Grad N nicht höher als der *zwölfte* sei, und die Methode, die Beschaffenheit der Differentialgleichung anzugeben, damit sie algebraische Integrale besitze, oder, wenn die Differentialgleichung vorgelegt, zu erkennen, ob sie durch algebraische Integrale befriedigt werde.

1.

Wir wollen mit Herrn *Liouville* (journ. de l'école polyt. cah. 22, p. 184) eine Gleichung

$$(1.)\qquad A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_0 = 0,$$

in welcher die Coefficienten A_m, A_{m-1}, ... A_0 rationale Functionen von z sind, *irreductibel* nennen, wenn sich die linke Seite derselben nicht in Factoren zerlegen lässt, die in Bezug auf u niedrigeren Grades sind und deren Coefficienten ebenfalls rationale Functionen von z sind.

Besitzt die irreductible Gleichung (1.) *zwei Wurzeln u_1 und u_2, deren Quotient eine rationale Function j von z, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.*

Denn der Voraussetzung gemäss genügen u_1 und ju_1 der Gleichung (1.). Es genügen daher wegen der vorausgesetzten Irreductibilität dieser Gleichung die sämmtlichen Wurzeln derselben der Gleichung:

$$(2.)\qquad A_m j^m u^m + A_{m-1} j^{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_1 j u + A_0 = 0.$$

In Folge der Irreductibilität der Gleichung (1.) ist A_0, daher auch j von Null verschieden. Es verschwindet aber auch nicht A_m, da der Grad der Gleichung (1.) der m^{te} sein soll. Man hat also:

$$\frac{A_{m-i}}{A_m} = \frac{A_{m-i}}{A_m} j^{-i} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots m$$

oder

$$(3.)\qquad A_{m-i} = A_{m-i} j^{-i},$$

d. h. entweder

$$A_{m-i} = 0$$

oder

$$j^i = 1.$$

Da aber wegen der Irreductibilität der Gleichung (1.) A_{m-i} nicht für alle angegebenen Werthe von i verschwinden kann, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

Ist *j eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit,* so ist nach Gleichung (3.) $A_{m-i} = 0$ oder von Null verschieden, je nachdem

$$i \text{ nicht } \equiv 0 \bmod. \lambda \quad \text{oder} \quad i \equiv 0 \bmod. \lambda.$$

Da A_0 von Null verschieden ist, so ergiebt sich insbesondere:

Der Exponent λ der primitiven Einheitswurzel j ist ein Divisor von m.

2.

Es werde vorausgesetzt, dass die Differentialgleichung:

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{d^2u}{dz^2}+p_1\frac{du}{dz}+p_0u = 0$$

mit rationalen Coefficienten ein algebraisches Integral u besitzt, und es sei

$$(1.)\qquad A_m u^m + A_{m-1}u^{m-1}+\cdots+A_0 = 0$$

die irreductible Gleichung mit rationalen Coefficienten, welcher dasselbe genügt.

I. *Alsdann sind die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung* (1.) *Integrale derselben Differentialgleichung.*

Denn aus (1.) ergeben sich $\frac{du}{dz}$ und $\frac{d^2u}{dz^2}$ als rationale Functionen von u und z. Die Substitution derselben in die Differentialgleichung (A) liefert eine Gleichung zwischen u und z, welcher der Voraussetzung nach eine Wurzel u der Gleichung (1.), also wegen der vorausgesetzten Irreductibilität dieser Gleichung sämmtliche Wurzeln derselben genügen (vergl. *Liouville* l. c. und eine Abh. desselben Verfassers in *Liouville,* journal t. IV. p. 432).

II. *Wenn die Gleichung* (1.) *zwei Wurzeln u_1 und u_2 besitzt, deren Quotient nicht für jeden Werth von z constant ist, so hat die Differentialgleichung* (A) *nur algebraische Integrale.*

Denn alsdann lässt sich (s. meine Arbeit dieses Journal Bd. 66, No. 2) jedes Integral u in der Form

$$(2.)\qquad u = c_1u_1+c_2u_2$$

mit constanten Coefficienten c_1 und c_2 darstellen. Der Ausdruck (2.) genügt aber einer algebraischen Gleichung, welche z. B. dadurch erhalten werden kann, dass man in Gleichung (1.) nach einander u_1 und u_2 für u setzt und zwischen den zwei so gebildeten Gleichungen und Gleichung (2.) u_1 und u_2 eliminirt.

III. *Ist der Quotient je zweier Wurzeln der Gleichung* (1.) *constant, so ist ein Integral der Differentialgleichung* (A) *Wurzel einer rationalen Function.*

Ist nämlich u_1 eine Wurzel der Gleichung (1.), so besitzt dieselbe die Wurzeln

$$u_1,\ u_1j_1,\ u_1j_2,\ \ldots\ u_1j_{m-1},$$

wo $j_1, j_2, \ldots j_{m-1}$ nach der vorigen Nummer ganzzahlige Wurzeln der Einheit sind. Es seien $j_1, j_2, \dots j_{m-1}$ resp. $\lambda_1^{\text{te}}, \lambda_2^{\text{te}}, \dots \lambda_{m-1}^{\text{te}}$ primitive Wurzeln der Einheit, λ das kleinste Vielfache dieser Zahlen, so sind j_1, j_2, j_{m-1} auch λ^{te} Wurzeln der Einheit. Da nach der vorigen Nummer λ_1, $\lambda_2, \dots \lambda_{m-1}$ Divisoren von m sind, so ist auch λ Divisor von m. Nun aber sind wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (1.) j_1, $j_2, \dots j_{m-1}$ unter einander und von der Einheit verschieden. Andererseits hat aber die Gleichung

$$x^\lambda = 1$$

nicht mehr als λ verschiedene Wurzeln. Es ergiebt sich demnach $m=\lambda$.

Nach der vorigen Nummer ist $A_{m-i}=0$, wenn nicht $i\equiv 0$ nach den Moduln $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{m-1}$, d. h. wenn nicht i durch λ oder m theilbar ist. Demnach erhält die Gleichung (1.) die Form

$$\text{(3.)} \qquad A_m u^m + A_0 = 0.$$

Wenn die Differentialgleichung (A) demnach ein algebraisches Integral u, welches nicht die Wurzel einer rationalen Function ist, besitzt, so sind ihre sämmtlichen Integrale algebraisch. Dieses ergiebt sich aus den Sätzen II und III. Aus dem letzteren folgt nämlich, dass in diesem Falle die Gleichung (1.), welcher u genügt, mindestens zwei Wurzeln hat, deren Quotient nicht für jedes z constant ist. Dann aber ergiebt sich unsere Behauptung aus dem Satze II.

3.

Die Beurtheilung, ob eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch die Wurzel aus einer rationalen Function befriedigt werde, führt in jedem Falle auf die Frage zurück, ob ein gegebenes System linearer Gleichungen endliche Lösungen besitzt.

Es ist nämlich

$$y = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2} \dots (z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho} g(z),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho$ rationale (nicht positive ganze) Zahlen, $g(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet, der allgemeinste Ausdruck für die Wurzel einer rationalen Function. Für die singulären Punkte $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ wird entweder y oder die Ableitungen von y von einer gewissen Ordnung an unendlich.

Soll also eine lineare Differentialgleichung durch einen solchen Ausdruck befriedigt werden, so müssen $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ mit singulären Punkten der Differentialgleichung zusammenfallen. Die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho$

werden durch gewisse algebraische Gleichungen bestimmt (cf. *Liouville*, journ. de l'école polyt. cah. 22, p. 154 sqq.). Ergeben sich für diese Grössen rationale Werthe, und substituirt man alsdann den obigen Ausdruck y in die Differentialgleichung, welche von Nennern befreit gedacht wird, so erhält man nach Division mit $(z-a_1)^{\alpha_1-n}(z-a_2)^{\alpha_2-n}\dots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho-n}$, wo n die Ordnung der Differentialgleichung ist, eine Gleichung, welche ausdrückt, dass eine ganze rationale Function von z identisch verschwindet. Setzt man die einzelnen Coefficienten derselben gleich Null, so erhält man ein System *linearer Gleichungen* zur Bestimmung der Coefficienten von $g(z)$. Je nachdem letztere Gleichungen Lösungen haben oder nicht, hat die gegebene Differentialgleichung die Wurzel einer rationalen Function zum Integral oder nicht.

Es ist selbstverständlich, dass in jedem gegebenen Falle durch besondere Methoden das Verfahren vereinfacht werden kann.

Weit schwieriger ist die Frage, ob eine lineare Differentialgleichung algebraische Integrale besitzt, welche nicht gleich Wurzeln aus rationalen Functionen sind. Wir wollen uns von jetzt ab mit der letzteren Frage für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschäftigen.

4.

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A) sämmtlich algebraisch, so gehört dieselbe zu der Klasse der Differentialgleichungen (12.) No. 4 meiner Arbeit dieses Journal B. 66. Sind daher die singulären Punkte $a_1, a_2, \dots a_\varrho$, so ist

$$(1.)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{\alpha_1}{z-a_1}+\dfrac{\alpha_2}{z-a_2}+\cdots+\dfrac{\alpha_\varrho}{z-a_\varrho}, \\ p_0 = \dfrac{\beta_1}{(z-a_1)^2}+\dfrac{\beta_2}{(z-a_2)^2}+\cdots+\dfrac{\beta_\varrho}{(z-a_\varrho)^2}+\dfrac{\gamma_1}{z-a_1}+\dfrac{\gamma_2}{z-a_2}+\cdots+\dfrac{\gamma_\varrho}{z-a_\varrho}, \end{cases}$$

wo die Grössen α, β, γ Constanten bedeuten und $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\varrho=0$ ist.

Wir nehmen nunmehr an, dass in der Gleichung (A) p_1 und p_0 diese Form haben, und substituiren in der Gleichung (A)

$$(2.)\quad u = \mu y,$$

wo

$$(3.)\quad \mu = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz} = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}\alpha_1}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}\alpha_2}\dots(z-a_\varrho)^{-\frac{1}{2}\alpha_\varrho},$$

und erhalten für y die Differentialgleichung

$$(\text{B})\quad \frac{d^2y}{dz^2} = P.y,$$

wo

$$(4.)\qquad P = \tfrac{1}{4}p_1^2 + \tfrac{1}{2}\frac{dp_1}{dz} - p_0.$$

Da P eine rationale Function ist, welche nur für $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ unendlich wird, so sind auch für die Differentialgleichung (B) diese Grössen ausschliesslich die singulären Punkte.

Die zum singulären Punkt a_i gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (A) ist

$$(5.)\qquad r(r-1)+\alpha_i r+\beta_i = 0.$$

Die zu demselben singulären Punkte gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B) ist:

$$(6.)\qquad r(r-1) = \tfrac{1}{4}\alpha_i^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_i - \beta_i.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung (6.) *ergänzen sich zur Einheit.*

Setzt man in der Differentialgleichung (B)

$$z = \frac{1}{t},$$

so hat P die Form

$$(7.)\qquad P = t^2.P_1(t),$$

wo $P_1(0)$ nicht unendlich ist. Die Differentialgleichung (B) verwandelt sich in

$$(\mathrm{B}')\qquad t^2\frac{d^2y}{dt^2}+2t\frac{dy}{dt} = P_1(t).$$

Demnach ist die zu $z=\infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B)

$$r(r-1)+2r = P_1(0),$$

oder

$$(8.)\qquad r^2+r = P_1(0).$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung (8.) *ergänzen sich zur negativen Einheit.*

Sind die Wurzeln der Gleichung (5.) *rationale Zahlen, so sind* α_i *und* β_i *ebenfalls rationale Zahlen.*

Denn es sind $1-\alpha_i$ und β_i resp. die Summe und das Product der beiden Wurzeln der Gleichung (5.).

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A) sämmtlich algebraisch, so sind die Wurzeln der zu jedem der singulären Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen (s. meine Arbeit dieses

Journal B. 66 No. 6. II.), also die sämmtlichen Grössen α_i und β_i ebenfalls rationale Zahlen. Es ergiebt sich also aus der Form von μ Gleichung (3.):

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A) *sämmtlich algebraisch, so sind auch die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung* (B) *algebraisch.*

Sind umgekehrt die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B) *algebraisch und* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho$ *rationale Zahlen, so sind auch die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung* (A) *algebraisch.*

5.

Es sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung:

$$(1.)\qquad \frac{d^2y}{dz^2} = P.y,$$

wo P eine beliebige rationale Function von z bedeutet, so ist bekanntlich (vergl. *Liouville* in dessen Journal B. 4 p. 428 und meine Arbeit dieses Journal B. 66 No. 2)

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dz} & y_1 \\ \frac{dy_2}{dz} & y_2 \end{vmatrix} = C,$$

wo C eine *von Null verschiedene* Constante bedeutet. Nach irgend einem Umlaufe von z mögen nun y_1 und y_2 übergehen in y'_1, y'_2, so ist bekanntlich (s. meine Arbeit B. 66 No. 2)

$$(3.)\qquad \begin{cases} y'_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2, \\ y'_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2, \end{cases}$$

wo $\alpha_{11} \ldots \alpha_{22}$ Constanten sind.

Aus Gleichung (2.) ergiebt sich aber

$$\begin{vmatrix} \frac{dy'_1}{dz} & y'_1 \\ \frac{dy'_2}{dz} & y'_2 \end{vmatrix} = C,$$

d. h.

$$(4.)\qquad \triangle \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dz} & y_1 \\ \frac{dy_2}{dz} & y_2 \end{vmatrix} = C,$$

wo die Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

mit $\triangle$ bezeichnet worden ist. Aus den Gleichungen (2.) und (4.) folgt:

I. *Die Substitutionsdeterminante* $\triangle$ *ist für jeden Umlauf von* z *der Einheit gleich.*

Es sei $f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ eine mit y_1, y_2 gebildete Form, d. h. eine ganze homogene Function von y_1, y_2 mit constanten Coefficienten $a, b, c, \ldots$; $\varphi(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ eine *Covariante* der Form $f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$.

Wenn durch eine Substitution

$$(5.)\quad \begin{cases} y_1 = k_{11}Y_1 + k_{12}Y_2, \\ y_2 = k_{21}Y_1 + k_{22}Y_2 \end{cases}$$

$f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ in $f(Y_1, Y_2, A, B, C, \ldots)$ übergeht, so ist den Eigenschaften der Covarianten gemäss:

$$(6.)\quad \begin{cases} \varphi(k_{11}Y_1 + k_{12}Y_2,\ k_{21}Y_1 + k_{22}Y_2,\ a, b, c, \ldots) \\ = (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})^{\lambda}.\varphi(Y_1, Y_2, A, B, C, \ldots), \end{cases}$$

wo λ eine positive ganze Zahl bedeutet.

Wenn Y_1, Y_2 resp. mit y_1, y_2 zusammenfallen, also

$$f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots) \text{ in } f(y_1, y_2, A, B, C, \ldots)$$

übergeht, so ist auch

$$(6^a.)\quad \begin{cases} \varphi(k_{11}y_1 + k_{12}y_2,\ k_{21}y_1 + k_{22}y_2,\ a, b, c, \ldots) \\ = (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})^{\lambda}\varphi(y_1, y_2, A, B, C, \ldots). \end{cases}$$

Ist die Substitution (5.) mit der Substitution (3.) identisch, so ergiebt sich nach Satz I.:

$$(7.)\quad \varphi(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2,\ \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2,\ a, b, c, \ldots) = \varphi(y_1, y_2, A, B, C, \ldots).$$

Diese Gleichung ist eine in Bezug auf y_1, y_2 identische, da sich sonst aus derselben für $\frac{y_2}{y_1}$ ein constanter Werth ergeben würde, was der Voraussetzung widerstritte, da y_1, y_2 ein Fundamentalsystem bilden. Es sei nunmehr insbesondere

$$(8.)\quad f(y_1, y_2, A, B, C, \ldots) = \gamma f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots),$$

wo γ eine Constante bedeutet, so ist auch diese Gleichung in Bezug auf y_1, y_2 identisch, so dass

$$A = \gamma a, \quad B = \gamma b, \quad C = \gamma c \;\ldots\ldots;$$

also auch, da die Covariante in Bezug auf die Coefficienten der Form homogen ist:

$$(9.)\qquad \varphi(y_1,\ y_2,\ A,\ B,\ C,\ \ldots) = \gamma^k \varphi(y_1,\ y_2,\ a,\ b,\ c,\ \ldots),$$

wo k eine positive ganze Zahl bedeutet. Es ergiebt sich alsdann aus Gleichung (7.)

$$(10.)\qquad \varphi(\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2,\ \alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2,\ a,\ b,\ c,\ \ldots) = \gamma^k \varphi(y_1,\ y_2,\ a,\ b,\ c,\ \ldots),$$

d. h.

II. *Wenn nach irgend einem Umlauf der Variablen z die Form $f(y_1,\ y_2,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)$ in sich selbst mit einer Constanten multiplicirt übergeht, so wird sich nach demselben Umlauf jede Covariante dieser Form ebenfalls in sich selbst mit einer Potenz derselben Constanten multiplicirt verwandeln.*

Da eine Form $f(y_1,\ y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist, durch einen *beliebigen* Umlauf von z in sich selbst mit einer Einheitswurzel multiplicirt übergeht, so folgt aus Satz II, dass auch die Covariante einer solchen Form durch einen beliebigen Umlauf in sich selbst mit einer Einheitswurzel multiplicirt übergeht. Sind nun y_1, y_2 Integrale der Differentialgleichung (B), so wird die Covariante unendlich nur von einer endlichen Ordnung, da y_1 und y_2 diese Eigenschaft besitzen (s. meine Arbeit B. 66 No. 4). Da nun eine Function, welche durch einen beliebigen Umlauf der unabhängigen Variablen in sich selbst mit Einheitswurzeln multiplicirt übergeht und überall von endlicher Ordnung unendlich wird, eine Wurzel einer rationalen Function ist, so ergiebt sich der Satz:

III. *Ist y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung* (B), *so ist die Covariante jeder Form $f(y_1,\ y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist, ebenfalls Wurzel einer rationalen Function.*

6.

Sind wieder y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) vor. Nummer, so ergiebt sich aus der Gleichung (2.) derselben Nummer

$$(1.)\qquad \frac{y_2}{y_1} = -C\int\frac{dz}{y_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{y_1}{y_2} = C\int\frac{dz}{y_2^2}.$$

Es werde von jetzt ab vorausgesetzt, dass die sämmtlichen Integrale derselben Differentialgleichung algebraische Functionen von z sind, alsdann ist auch $\frac{y_2}{y_1}$ eine algebraische Function von z, demnach nach Gleichung (1.)

$$(2.)\quad \int \frac{dz}{y_1^2},\quad \int \frac{dz}{y_2^2}$$

algebraische Functionen von z.

Nach einem Satze von *Abel* (dieses Journal B. 4 p. 264, oder Oeuvres compl. 1. Th. p. 355, vergl. auch *Liouville* journal de l'école polyt. cah. 22 p. 147) müssen unter diesen Voraussetzungen die Integrale (2.) rationale Functionen von z und resp. der algebraischen Functionen $\frac{1}{y_1^2}$ oder $\frac{1}{y_2^2}$ sein. Hieraus folgt, dass y_2 eine rationale Function von z und y_1 und umgekehrt y_1 eine rationale Function von z und y_2 ist. Ist der Quotient von y_1 und y_2 für jedes z constant, so sind y_1 und y_2 ebenfalls rationale Functionen von einander. Es ergiebt sich demnach der Satz:

Sind die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B) *algebraische Functionen von z, so ist jedes Integral derselben eine rationale Function von z und einem beliebigen anderen Integrale derselben Differentialgleichung.*

7.

I. Ist y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B) und m der Grad der irreductiblen Gleichung, welcher y genügt, so lässt sich bekanntlich jede rationale Function $\varphi(y)$ von y und z stets und nur auf eine Weise in die Form

$$(1.)\quad \varphi(y) = c_0+c_1y+c_2y^2+\cdots+c_{m-1}y^{m-1}$$

bringen, wo $c_0, c_1, \ldots c_{m-1}$ rationale Functionen von z sind. Demnach hat jedes andere Integral y_1 ausser y nach voriger Nummer die Gestalt:

$$(2.)\quad y_1 = \varphi(y).$$

Ist $\frac{y_1}{y}$ nicht für jedes z constant, so lässt sich bekanntlich (s. No. 2) jedes dritte Integral durch die Form

$$(3.)\quad \alpha y+\beta\varphi(y)$$

darstellen, wo α und β Constanten bedeuten.

Wir nehmen nun an, dass auf einem gewissen Wege y in yj übergeht, so genügt yj der irreductiblen Gleichung für y, und es ist deshalb nach No. 1 j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit. Das Integral $\varphi(y)$ geht alsdann auf demselben Wege in $\varphi(yj)$ über. Da $\varphi(yj)$ ein Integral der Differentialgleichung (B) ist, so muss dasselbe die Form (3.) haben, also

$$(4.)\quad \varphi(yj) = \alpha y+\beta\varphi(y)$$

sein. Die dem angegebenen Wege entsprechende Substitution des Fundamentalsystems y, $\varphi(y)$ ist daher

$$\begin{pmatrix} j & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Die Determinante $\triangle$ dieser Substitution ist nach Satz I No. 5 der Einheit gleich. Demnach ist

$$(5.)\quad \beta = j^{-1},$$

und man erhält

$$(6.)\quad \varphi(yj) = \alpha y + j^{-1}\varphi(y).$$

Wegen der Irreductibilität der Gleichung, welcher y genügt, folgt hieraus:

$$(7.)\quad c_i j^i = c_i j^{-1},\ i = 0,\ 2,\ 3,\ \dots\ m-1,$$

$$(7^a.)\quad c_1 j = \alpha + c_1 j^{-1}.$$

Ist j eine primitive l^{te} Wurzel der Einheit, so ergeben die Gleichungen (7.) und (7^a.)

$$(8.)\quad c_i = 0,\ \text{wenn nicht}\ i = 1\ \text{oder}\ i \equiv -1\ \text{mod}\, l.$$

Es sei daher

$$(9.)\quad \psi(y^l) = c_0 + c_l y^l + \cdots + c_{\left(\frac{m}{l}-1\right)l}\, y^{\left(\frac{m}{l}-1\right)l}$$

$\left(\frac{m}{l}\right.$ ist eine ganze Zahl, da nach No. 1 l ein Divisor von m ist$\left.\right)$, so ist

$$(10.)\quad \varphi(y) = c_1 y + y^{l-1}\psi(y^l),$$

und jedes Integral hat die Form

$$(11.)\quad (\alpha' + \beta' c_1)y + \beta' y^{l-1}\psi(y^l).$$

Ist j eine *höhere Einheitswurzel als die zweite,* so folgt aus Gleichung (7^a.), dass c_1 *eine Constante*

$$(12.)\quad c_1 = \frac{\alpha}{j - j^{-1}}.$$

Es ergiebt die Gleichung (10.), dass

$$y^{l-1}\psi(y^l)$$

ein Integral der Differentialgleichung (B) *ist.*

Es bilden auch, wenn nicht $\psi(y^l)$ identisch Null ist, y und $y^{l-1}\psi(y^l)$ ein Fundamentalsystem, da $y^{l-2}\psi(y^l)$ nicht einer Constanten gleich ist.

Ist aber

$$(13.)\quad j^2 = 1,$$

so ist $\alpha = 0$.

Es ist also immer

$$(14.)\qquad \alpha = c_1(j - j^{-1}).$$

Im zweiten Falle hat nach Gleichung (10.) *jedes* Integral die Form

$$y\,\psi(y^2).$$

II. Es sei $F(y)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B), welches nicht gleich y mit einer Constanten multiplicirt, und von der Beschaffenheit, dass

$$(15.)\qquad F(yj^k) = \varepsilon F(y),$$

wo ε eine constante Grösse. Da ein gewisser Weg y in yj überführt, so führt auch ein Weg (welcher der k maligen Wiederholung des ersteren aequivalent ist) y in yj^k über. Der letztere führt aber nach der Voraussetzung $F(y)$ in $\varepsilon F(y)$ über. Es ist daher die zu diesem Wege gehörige Substitution des Fundamentalsystems $y,\ F(y)$

$$\begin{pmatrix} j^k & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Da nach No. 5. Satz I die Determinante dieser Substitution gleich der Einheit ist, so ergiebt sich:

$$(16.)\qquad \varepsilon = j^{-k}.$$

Da aber $F(y)$ die Form (11.) hat, so ist:

$$(17.)\qquad F(y) = (\alpha' + \beta' c_1)y + \beta' y^{l-1}\psi(y^l).$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (15.) und (16.) folgt:

$$(18.)\qquad (\alpha' + \beta' c_1)yj^k + \beta' y^{l-1} j^{-k}\psi(y^l) = j^{-k}(\alpha' + \beta' c_1)y + j^{-k}\beta' y^{l-1}\psi(y^l).$$

Es ergiebt sich hieraus entweder

$$(19.)\qquad \alpha' + \beta' c_1 = 0 \quad (k \text{ unbestimmt})$$

oder

$$(19^a.)\qquad j^{2k} = 1, \quad \text{d. h.} \quad 2k \equiv 0 \bmod l.$$

Im Falle (19.) ist

$$(20.)\qquad F(y) = \beta' y^{l-1}\psi(y^l).$$

Im Falle (19^a.) ist:

1) wenn l ungerade, $k \equiv 0 \bmod l$, also $j^k = 1$, $\varepsilon = 1$; d. h. die Gleichung (15.) ist die selbstverständliche

$$F(y) = F(y);$$

2) wenn l gerade, so würde $k \equiv \frac{l}{2} \mod l$ sein können, d. h. $j^k = -1$ und $\varepsilon = -1$, und die Gleichung (15.)

$$(15^a.) \qquad F(-y) = -F(y).$$

Fasst man dieses zusammen, so erhält man den Satz:

Die Gleichung (15.) *erfordert, dass* $\varepsilon = j^{-k}$, *und sie besteht für ein nicht durch l theilbares k nur dann, wenn entweder $F(y)$ die Form $\beta' y^{l-1} \psi(y^l)$ hat, oder wenn l eine gerade Zahl und* $k \equiv \frac{l}{2} \mod l$, *also* $\varepsilon = -1$ *ist.*

III. Es sei $F(y)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B), welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten, und es sei

$$(21.) \qquad F(yj^p) = \varepsilon F(yj^q),$$

wo p und q ganze Zahlen, ε eine Constante ist. Diese Gleichung wird von jeder Wurzel der irreductiblen Gleichung für y, also wenn yj^{-q} für y gesetzt wird, befriedigt; es ist also:

$$(22.) \qquad F(yj^{p-q}) = \varepsilon F(y).$$

Es ergiebt sich daher aus dem Satze in II. dieser Nummer:

Die Gleichung (21.) *erfordert, dass* $\varepsilon = j^{q-p}$, *und sie besteht, wofern nicht* $p \equiv q \mod l$, *nur dann, wenn entweder $F(y)$ die Form $\beta' y^{l-1} \psi(y^l)$ hat, oder wenn l eine gerade Zahl ist und* $p - q \equiv \frac{l}{2} \mod l$, *also* $\varepsilon = -1$ *ist.*

IV. 1) Ist

$$(23.) \qquad F(y) = \beta' y^{l-1} \psi(y^l),$$

so ist

$$(24.) \qquad F(yj^k) = j^{-k} F(y)$$

für jedes ganzzahlige k, und die Glieder der Reihe

$$(25.) \qquad F(y),\ F(yj),\ \ldots\ F(yj^{l-1})$$

sind nur um constante Factoren von einander verschieden.

2) Ist l eine ungerade Zahl, $F(y)$ ein beliebiges Integral, welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten und nicht von der Form (23.), so ist nach II und III *kein Glied der Reihe* (25.) *gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten.*

3) Ist l eine gerade Zahl und $F(y)$ ein wie in (2.) beschaffenes Integral, so sind die Glieder der Reihe

$$(25^a.)\quad F(y),\quad F(yj),\quad \dots\quad F(yj^{\frac{l}{2}-1})$$

nicht um nur constante Factoren verschieden, dagegen ist

$$(26.)\quad F(yj^{\frac{l}{2}+i}) = -F(yj^i).$$

8.

Der Grad der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher ein Integral der Differentialgleichung (B) *genügt, ist für alle Integrale unverändert derselbe.*

Es sei y ein algebraisches Integral, m der Grad der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher y genügt, y_1 irgend ein anderes Integral, so ist nach No. 6 y_1 eine rationale Function $\varphi(y)$ von y und z. Da m die Anzahl der verschiedenen Werthe ist, die y durch alle möglichen Umläufe von z erhält, so nimmt y_1 durch alle möglichen Umläufe von z eine Anzahl m' verschiedener Werthe an, die nicht grösser ist als m. Bildet man eine Gleichung m'^{ten} Grades, welcher diese m' Werthe genügen, so sind die Coefficienten derselben rationale Functionen von z. Dieselbe Gleichung befriedigen die sämmtlichen Wurzeln der irreductiblen Gleichung, welcher y_1 genügt. Es ist daher der Grad m_1 der letzteren Gleichung nicht grösser als m', also auch nicht grösser als m. Andererseits ist aber nach No. 6 auch y eine rationale Function von y_1 und z. Es ergiebt sich daher ebenso, dass m nicht grösser als m_1. Es ist demnach $m=m_1$, wie behauptet worden.

Man könnte daher mit Recht m *den zur Differentialgleichung* (B) *gehörigen Grad* nennen.

9.

Es sei y ein Integral der Differentialgleichung (B), und

$$(1.)\quad A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \dots + A_0 = 0$$

die irreductible Gleichung, welcher y genügt. Es seien $y_1, y_2, \dots y_{m-1}$ die $m-1$ übrigen Wurzeln der Gleichung (1.). Unter den Wurzeln derselben Gleichung seien $y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ so beschaffen, dass nicht der Quotient irgend zweier derselben für jedes z constant ist. Wir wollen $y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ *das reducirte Wurzelsystem* der Gleichung (1.) nennen.

Es kann eintreten, dass $n = m$.

Ist aber $n < m$, so ist nach No. 1 jede nicht zum reducirten Wurzelsystem gehörige Wurzel gleich einer des reducirten Systems mit einer ganzzahligen Wurzel der Einheit multiplicirt.

I. *Sind diese Multiplicatoren resp.* l^{te}, l_1^{te}, l_2^{te} *etc. primitive Wurzeln der Einheit* j, j_1, j_2, *etc., und unter den Zahlen* l, l_1, l_2, *etc.* l *die grösste, so liefert das System:*

$$(2.)\qquad y_i,\ y_i j,\ y_i j^2,\ \dots\ y_i j^{l-1}\quad \text{für}\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ n-1$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1.).

Ist nämlich η eine beliebige Wurzel der Gleichung (1.) und genügt derselben der Werth ηj_x, so genügt ihr auch wegen ihrer Irreductibilität $\eta' j_x$, wo η' eine beliebige andere Wurzel derselben ist. Aus demselben Grunde genügt ihr auch $\eta j_x^{\mathfrak{a}}$, für ein beliebiges ganzzahliges $\mathfrak{a}$. Es ist demnach allgemein

$$(3.)\qquad y_i j^{\mathfrak{a}} j_x^{\mathfrak{b}}$$

eine der Wurzeln der Gleichung (1.), wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ beliebige ganze Zahlen und i eine der Zahlen 0, 1, ... $n-1$ bedeutet.

Es sei nun das kleinste Vielfache von l und l_x gleich λ, und g eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, so ist

$$(4.)\qquad j = g^{r\frac{\lambda}{l}},\quad j_x = g^{r'\frac{\lambda}{l_x}},$$

wo r und r' resp. relativ prim zu l und l_x sind. Man hat also

$$(5.)\qquad j^{\mathfrak{a}} j_x^{\mathfrak{b}} = g^{r\mathfrak{a}\frac{\lambda}{l}+r'\mathfrak{b}\frac{\lambda}{l_x}}.$$

Nun aber sind $\frac{\lambda}{l}$ und $\frac{\lambda}{l_x}$ relativ prim, ferner ist r zu $\frac{\lambda}{l_x}$ relativ prim, folglich ist $r\frac{\lambda}{l}$ zu $\frac{\lambda}{l_x}$ relativ prim. Der grösste gemeinschaftliche Theiler von $r\frac{\lambda}{l}$ und $r'\frac{\lambda}{l_x}$ ist also der grösste gemeinschaftliche Theiler von $r\frac{\lambda}{l}$ und r'. Nun ist r' zu $\frac{\lambda}{l}$ relativ prim, demnach ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von $r\frac{\lambda}{l}$ und $r'\frac{\lambda}{l_x}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von r und r', also zu l und l_x, und demnach auch zu λ relativ prim. Derselbe sei τ, so können bekanntlich ganze Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ so bestimmt werden, dass

$$(6.)\qquad r\frac{\lambda}{l}\mathfrak{a}+r'\frac{\lambda}{l_x}\mathfrak{b} = \tau$$

wird. Es ergiebt sich alsdann für diese Werthe $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus Gleichung (5.)

$$(7.)\qquad j^{a} j_{\varkappa}^{b} = g^{\tau}.$$

Wir behaupten nun, dass $\lambda = l$ sei. Denn wenn dieses nicht stattfände, so wäre $\lambda > l$, und es ergäbe sich aus der Gleichung (7.), dass die Gleichung (1.) eine Wurzel $y_i g^{\tau}$ hätte, wo g^{τ} eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, also von höherer als der l^{ten} Ordnung wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Man schliesst hieraus:

Die Zahl l ist ein Vielfaches der Zahlen l_1, l_2, etc.

Daher sind j_1, j_2, etc. in der Reihe

$$j^0,\ j^1,\ j^2,\ \dots\ j^{l-1}$$

enthalten. Da aber nach No. 1 die sämmtlichen Grössen der Reihe (2.) Wurzeln der Gleichung (1.) sind, und diese Gleichung wegen ihrer Irreductibilität nur ungleiche Wurzeln hat, so ist unser Satz bewiesen.

Wir wollen l *den Index* der Gleichung (1.) oder des reducirten Wurzelsystems derselben nennen. Wir haben alsdann den Satz:

II. *Das Product aus der Gliederzahl des reducirten Wurzelsystems der Gleichung* (1.) *in den Index derselben ist gleich dem Grade der Gleichung.*

III. *Wenn durch irgend einen Umlauf von z zwei verschiedene Glieder y_i und y_k des reducirten Wurzelsystems gleichzeitig in $y_{i'}.j^{\alpha}$ und $y_{k'}.j^{\beta}$ übergehen, wo $y_{i'}$ und $y_{k'}$ ebenfalls Glieder des reducirten Wurzelsystems sind, so sind $y_{i'}$ und $y_{k'}$ ebenfalls verschieden.*

Denn durch einen dem angegebenen Umlauf entgegengesetzten Umlauf gehen gleichzeitig $y_{i'}$ in $y_i j^{-\alpha}$ und $y_{k'}$ in $j^{-\beta} y_k$ über. Wäre nun $i' = k'$, so müsste

$$j^{-\alpha} y_i = j^{-\beta} y_k$$

oder

$$y_k = j^{\beta-\alpha}.y_i$$

sein, gegen die Voraussetzung.

10.

Es sei η ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B), welches einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades genügt, η, η_1, η_2, ... η_{n-1} das reducirte Wurzelsystem dieser Gleichung und l der Index derselben. Da die sämmtlichen Wurzeln Integrale der Differentialgleichung (B) sind, so lassen sie sich als lineare homogene Functionen eines beliebigen Fundamentalsystems von Integralen y_1, y_2 mit constanten Coefficienten darstellen. Es sei also:

$$(1.)\qquad \eta_i = A_{i1} y_1 + A_{i2} y_2,\quad i = 0,\ 1,\ 2, \dots\ n-1.$$

Wir bilden die Form n^{ten} Grades:

$$(2.)\qquad f(y_1, y_2) = (A_{01}y_1 + A_{02}y_2)(A_{11}y_1 + A_{12}y_2)\dots(A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2),$$

so wird $f(y_1, y_2)$ durch einen beliebigen Umlauf von z in sich selbst, multiplicirt mit einer l^{ten} Einheitswurzel, übergehen. Da dieselbe Function überall nur von endlicher Ordnung unendlich wird, so ergiebt sich:

I. *Die Form $f(y_1, y_2)$ ist Wurzel einer rationalen Function von z, deren Exponent höchstens gleich l.*

II. *Ist umgekehrt eine Form $F(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function von z und*

$$\eta = A_{01}y_1 + A_{02}y_2$$

ein Factor der Form, und bilden $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_{n-1}$ ein reducirtes Wurzelsystem der irreductiblen Gleichung, welcher η genügt, so ist η_i von der Gestalt:

$$\eta_i = A_{i1}y_1 + A_{i2}y_2$$

und die Form $F(y_1, y_2)$ enthält auch die Factoren $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{n-1}$.

Denn bezeichnet man den durch irgend einen Umlauf von z erhaltenen Werth von $F(y_1, y_2)$ mit $F'(y_1, y_2)$, so ist der Voraussetzung gemäss

$$(3.)\qquad F'(y_1, y_2) = \varepsilon F(y_1, y_2),$$

wo ε eine ganzzahlige Einheitswurzel ist. Diese Gleichung ist eine identische, da sich sonst für $\frac{y_2}{y_1}$ ein für jedes z constanter Werth ergäbe. Es verschwinden daher beide Seiten der Gleichung für dieselben Werthe des Verhältnisses $\frac{y_2}{y_1}$. Wenn nun durch den angegebenen Umlauf η in η_i übergeführt wird, so enthält die linke Seite den Factor η_i, folglich auch die rechte. Da es aber stets Wege giebt (s. *Puiseux* in *Liouville*s Journal t. XV), welche die Wurzel einer irreductiblen Gleichung in jede andere Wurzel derselben überführen, so ist unser Satz bewiesen.

Wir wollen eine Form, welche nur solche Factoren enthält, die zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, welcher ein bestimmtes Integral genügt, und zwar diese Factoren alle und jeden zur *ersten Potenz*, eine *Primform* nennen.

Aus dem Satze I ergiebt sich dann:

III. *Jede Primform ist Wurzel einer rationalen Function.*

Aus dem Satze II folgt aber:

IV. *Haben zwei Primformen einen gemeinschaftlichen Linearfactor, so sind sie bis auf einen constanten Factor identisch.*

V. *Ist eine Form $f(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function, so lässt sich dieselbe in ein Product von Primformen zerlegen.*

Denn ist η einer der Factoren der Form, und bilden $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{n-1}$ zusammen mit η das reducirte Wurzelsystem der irreductiblen Gleichung, welcher η genügt, so ist nach dem Satze II $f(y_1, y_2)$ durch die Primform

$$\varphi(y_1, y_2) = \eta\eta_1\eta_2\dots\eta_{n-1}$$

theilbar. Nach dem Satze III ist aber $\varphi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function, also auch die Form

$$f'(y_1, y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{\varphi(y_1, y_2)}$$

Wurzel einer rationalen Function. Durch Fortsetzung desselben Schlusses in Bezug auf $f'(y_1, y_2)$ u. s. w. ergiebt sich unser Satz von selbst.

Man hat also, wenn $\varphi(y_1, y_2)$, $\varphi_1(y_1, y_2)$, $\varphi_2(y_1, y_2)$, ... Primformen sind,

$$(4.) \quad f(y_1, y_2) = C\varphi(y_1, y_2)\varphi_1(y_1, y_2)\varphi_2(y_1, y_2)\dots,$$

wo C eine Constante bedeutet.

Als Corollar ergiebt sich der Satz:

VI. *Ist eine Form $f(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function, so enthält sie alle solche Linearfactoren, welche zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, gleich oft.*

In der That, die Form enthalte den Factor η genau zur λ^{ten} Potenz, so müssen, da jede Primform in Gleichung (4.) jeden ihrer Factoren nur einfach enthält, genau λ Primformen in dem Producte auf der rechten Seite dieser Gleichung den Factor η enthalten. Diese Primformen sind aber nach Satz IV bis auf einen constanten Factor identisch, folglich ist $f(y_1, y_2)$ genau durch die λ^{te} Potenz einer Primform, welche η enthält, theilbar, also auch genau durch die λ^{te} Potenz jedes Factors derselben.

11.

Es sei m der zur Differentialgleichung (B) gehörige Grad.

Die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems der irreductiblen Gleichung, welcher ein Integral y der Differentialgleichung (B) genügt, ist im Allgemeinen für die verschiedenen Integrale verschieden. Der *geringste* Werth, welchen diese Anzahl annehmen kann, sei N, und der Index der irreductiblen Gleichung, welcher die Glieder eines reducirten Wurzelsystems von der Anzahl N genügen, sei L, so ist nach Satz II No. 9

$$m \doteq NL.$$

I. *Die Zahl N ist auch der niedrigste Grad einer Form $f(y_1, y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist.*

Dieser Satz ist eine Folgerung des Satzes II voriger Nummer, aus welchem sich ergiebt, dass jede Form, welche Wurzel einer rationalen Function ist, mindestens so viel Linearfactoren enthält, als die Anzahl der Glieder eines reducirten Wurzelsystems beträgt. Die aus dem Product der Glieder eines reducirten Wurzelsystems von der Anzahl N gebildete Form ist nach Satz III voriger Nummer eine Form N^{ten} Grades, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function.

II. *Eine Form $F(y_1, y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist und den niedrigsten Grad N hat, ist eine Primform N^{ten} Grades.*

Wäre nämlich $F(y_1, y_2)$ nicht Primform, so liesse sich diese Form nach Satz V voriger Nummer in ein Product von Primformen zerlegen. Diese Primformen müssten aber von niedrigerem Grade als dem N^{ten} sein, was dem Satz III voriger Nummer und dem Satze I dieser Nummer widerspräche.

12.

Die Hessesche Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ einer Primform $\Phi(y_1, y_2)$ des N^{ten} Grades ist ebenfalls eine Primform.

Nach dem Satze III No. 10 ist $\Phi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function, folglich nach Satz III No. 5 auch $\Psi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function. Diese Form ist bekanntlich vom $(2N-4)^{\text{ten}}$ Grade. Wäre sie keine Primform, so liesse sich dieselbe nach Satz V No. 10 in ein Product von Primformen zerlegen. Von diesen müsste aber wenigstens eine von niedrigerem Grade als dem N^{ten} sein, was nicht möglich ist.

Wir können im Folgenden voraussetzen, dass die *Hesse*sche Covariante einer Primform N^{ten} Grades *nicht identisch* verschwindet. Denn das identische Verschwinden der *Hesse*schen Covariante einer binären Form hat zur Folge, dass die Form der Potenz einer linearen homogenen Function ihrer Argumente gleich wird. Es würde demnach schon eine lineare homogene Function zweier Integrale Wurzel einer rationalen Function werden, d. h. $N=1$ sein.

13.

Es sei eine aus dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete quadratische Form von ungleichen Linearfactoren

$$(1.)\qquad a_0 y_1^2 + a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2 = \varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ Wurzel einer rationalen Function. Setzen wir

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{y_2}{y_1} = u, \\ a_0+a_1u+a_2u^2 = f(u), \end{cases}$$

so folgt aus (1.)

$$(3.)\quad f(u) = \frac{\varphi(z)}{y_1^2}.$$

Bezeichnet man die logarithmischen Ableitungen von $f(u)$ nach u und von $\varphi(z)$ nach z resp. mit $f_1(u)$, $\varphi_1(z)$, so folgt durch Differentiation der Gleichung (3.) mit Rücksicht auf Gleichung (1.) No. 6:

$$(4.)\quad -Cf_1(u) = y_1^2\varphi_1(z)-2y_1\frac{dy_1}{dz}.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung und abermalige Berücksichtigung der Gleichung (1.) No. 6, und mit Benutzung der Differentialgleichung (B) folgt:

$$(5.)\quad C^2\frac{df_1(u)}{du} = 2y_1^3\varphi_1(z)\frac{dy_1}{dz}+y_1^4\left[\frac{d\varphi_1(z)}{dz}-2P\right]-2y_1^2\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2.$$

Durch Elimination von $\frac{dy_1}{dz}$ aus den Gleichungen (4.) und (5.) ergiebt sich:

$$(6.)\quad C^2\left[2\frac{df_1(u)}{du}+f_1(u)^2\right] = y_1^4\left[\varphi_1(z)^2+2\frac{d\varphi_1(z)}{dz}-4P\right].$$

Substituirt man hierin den Werth y_1 aus Gleichung (3.), so folgt:

$$C^2\left[2f(u)\frac{d^2f(u)}{du^2}-\left(\frac{df(u)}{du}\right)^2\right] = \varphi(z)^2\left[\varphi_1(z)^2+2\frac{d\varphi_1(z)}{dz}-4P\right]$$

oder

$$(7.)\quad \lambda = \varphi(z)^2\left[\varphi_1(z)^2+2\frac{d\varphi_1(z)}{dz}-4P\right],$$

wo λ den constanten Werth $C^2(4a_0a_2-a_1^2)$ bedeutet.

Die Constante λ ist von Null verschieden, da C nach No. 5 nicht verschwindet und die quadratische Form ungleiche Factoren enthält. Wie man unmittelbar sieht, ist dieselbe von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig.

Sind P und $\varphi(z)$ gegeben, so bestimmt sich λ aus Gleichung (7.) am zweckmässigsten durch Substitution eines besonderen Werthes für z.

Da der Factor von $\varphi(z)^2$ in Gleichung (7.) eine rationale Function von z ist, so ergiebt sich zunächst:

I. ***Das Quadrat von $\varphi(z)$ ist eine rationale Function.***

Setzen wir

$$(8.)\quad -\frac{\lambda}{4\varphi(z)^2} = \psi(z),$$

so ergiebt sich aus Gleichung (7.)

$$(9.)\qquad P = \frac{5}{16}\left(\frac{d\log\psi(z)}{dz}\right)^2 - \frac{1}{4\psi(z)}\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + \psi(z).$$

II. *Die Differentialgleichung* (B) *hat in diesem Falle das Fundamentalsystem von Integralen:*

$$(10.)\qquad y_1 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}}e^{\int\sqrt{\psi(z)}dz},\quad y_2 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}}e^{-\int\sqrt{\psi(z)}dz}.$$

Diese Integrale sind dann und nur dann algebraisch, wenn $\int\sqrt{\psi(z)}\,dz$ *gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function ist.*

In dem Falle, dass y_1, y_2 algebraisch sind, haben sie, wie sich aus der Abhandlung von *Abel* (Oeuvres compl. t. I p. 350 sqq.) ergiebt, die Form:

$$(11.)\qquad \begin{cases} y_1 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}}[p+q\sqrt{\psi(z)}]^{\alpha}, \\ y_2 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}}[p+q\sqrt{\psi(z)}]^{-\alpha}, \end{cases}$$

wo p, q rationale Functionen von z, α eine rationale Zahl ist.

Die Entscheidung hierüber erfolgt auf bekannte Weise.

Wir haben also unsere fernere Untersuchung nur auf die Fälle $N>2$ auszudehnen.

14.

Es sei wieder $\Psi(y_1, y_2)$ die *Hesse*sche Covariante der Primform N^{ten} Grades $\Phi(y_1, y_2)$, und es werde $N>2$ vorausgesetzt. Da diese Covariante eine Primform ist (s. No. 12), so bilden ihre Linearfactoren das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades (s. No. 10), dessen Gliederzahl $2N-4$ ist. Der Index dieser Gleichung sei L', so ist nach Satz II No. 9 und No. 11

$$(1.)\qquad (2N-4)L' = m = LN.$$

Es bedeute nun η einen Linearfactor von $\Phi(y_1, y_2)$, J eine primitive L^{te} Wurzel der Einheit, ζ einen beliebigen Linearfactor von $\Psi(y_1, y_2)$. Da η und ζ Integrale der Differentialgleichung (B) sind, so ist ζ nach No. 6 eine rationale Function von η und z.

Es sei der Factor $\zeta = F(\eta)$ so beschaffen, dass

$$(2.)\qquad F(\eta) = \beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L),$$

wo

$$(3.)\qquad \psi(\eta^L) = c_0 + c_L\eta^L + c_{2L}\eta^{2L} + \cdots + c_{(N-1)L}\eta^{(N-1)L}$$

(s. No. 7), so geht durch einen Umlauf, welcher η in ηJ überführt, $F(\eta)$

in $J^{-1}F(\eta)$ über. Es genügt daher der irreductiblen Gleichung, welche ζ befriedigt, auch ζJ^{-1}. Nach Satz I. No. 9 ist demnach

$$(4.) \quad L' \geqq L.$$

Ist 1) $N \geqq 4$, so ist

$$N \leqq 2N-4.$$

Es folgt also aus (1.) und (4.), dass nur

$$L' = L \quad \text{und} \quad N = 4$$

sein kann.

Ist 2) $N = 3$, so ergiebt die Gleichung (1.)

$$(5.) \quad 3L = 2L'.$$

Es ist also $L' > L$. In diesem Falle ist aber nach Satz I. No. 9 L ein Divisor von L', also $2\frac{L'}{L}$ eine gerade Zahl, daher kann die Gleichung (5.) oder

$$3 = 2\frac{L'}{L}$$

nicht bestehen.

Hat also ein Linearfactor ζ der Hesseschen Covariante die Form (2.), *so ist* $N = 4$.

Hierher gehört auch der Fall $L = 1$, da in diesem Falle jedes Integral die Form (2.) hat. Aus Gleichung (1.) folgt

$$(6.) \quad L'(2N-4) = N,$$

also

$$N = 2 + \frac{2}{2L'-1},$$

eine Gleichung, welche in ganzen Zahlen nur bestehen kann, wenn

$$L' = 1, \quad N = 4.$$

Ist endlich ein Factor ζ der *Hesse*schen Covariante gleich $\alpha\eta$, wo α eine Constante, so ist nach Satz IV. No. 10 und nach No. 12 diese Covariante von $\Phi(y_1, y_2)$ nur um einen constanten Factor verschieden, also:

$$2N-4 = N,$$

d. h. wieder

$$(7.) \quad N = 4$$

15.

Es mögen die Bezeichnungen der vorigen Nummer beibehalten werden, aber es werde vorausgesetzt, dass *keiner* der Factoren ζ die Form $\beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L)$ habe, oder gleich η multiplicirt mit einer Constanten sei.

Es ist alsdann nach No. 7, IV. *kein* Glied der Reihe:

$$(1.)\quad F(\eta),\quad F(\eta J),\quad F(\eta J^2),\quad \ldots\quad F(\eta J^{\lambda-1}),$$

wo $\zeta = F(\eta)$ und $\lambda = L$ oder $\frac{L}{2}$, je nachdem L ungerade oder gerade, gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten. Demnach sind die Glieder der Reihe (1.) Glieder des reducirten Wurzelsystems der irreductiblen Gleichung, welcher ζ genügt, also sämmtlich Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$.

Ist $F_1(\eta)$ ein Linearfactor von $\Psi(y_1, y_2)$, welcher keinem Gliede der Reihe (1.) mit einer Constanten multiplicirt gleich ist, so ist auch $F_1(\eta J^a)$ für ein beliebiges ganzzahliges a nicht gleich einem Gliede der Reihe (1.) mit einer Constanten multiplicirt.

Denn aus der Gleichung

$$F_1(\eta J^a) = \varepsilon F(\eta J^b),$$

wo ε eine Constante ist, würde sich wegen der Irreductibilität der Gleichung für η ergeben:

$$F_1(\eta) = \varepsilon F(\eta J^{b-a}),$$

gegen die Voraussetzung.

Es ist also keines der Glieder der Reihe

$$(2.)\quad F_1(\eta),\quad F_1(\eta J),\quad \ldots\quad F_1(\eta J^{\lambda-1})$$

gleich einem Gliede der Reihe (1.) mit einer Constanten multiplicirt. Es ist aber auch nach No. 7, IV. kein Glied der Reihe (2.) gleich einem anderen derselben Reihe mit einer Constanten multiplicirt. Die Glieder dieser Reihe sind also neue Glieder des reducirten Wurzelsystems der Gleichung für ζ, also sämmtlich Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$.

In ähnlicher Weise würde aus der Existenz eines Linearfactors $F_2(\eta)$ von $\Psi(y_1, y_2)$, welcher weder gleich einem Gliede der Reihe (1.) noch einem Gliede der Reihe (2.) mit einer Constanten multiplicirt, die Existenz einer von (1.) und (2.) verschiedenen Reihe:

$$(3.)\quad F_2(\eta),\quad F_2(\eta J),\quad \ldots\quad F_2(\eta J^{\lambda-1})$$

von Gliedern desselben reducirten Wurzelsystems oder λ neue Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$ sich ergeben.

Durch Fortsetzung dieses Schlusses gelangt man zu dem Satze:

I. ***Ist*** $N > 2$, ***und kein Factor der Hesseschen Covariante*** $\Psi(y_1, y_2)$ ***der Primform*** $\Phi(y_1, y_2)$ N^{ten} ***Grades von der Gestalt*** $\beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L)$, ***so ist*** $\Psi(y_1, y_2)$

ein Product von Factoren der Form:

$$(4.)\qquad P_i = F_i(\eta).F_i(\eta J)\ldots F_i(\eta J^{\lambda-1}),$$

wo $\lambda = L$ *oder* $\frac{L}{2}$, *je nachdem* L *ungerade oder gerade ist.*

Da die Anzahl der Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$ gleich $2N-4$, so ergiebt sich aus diesem Satze:

II. *Es ist* λ *ein Divisor von* $2N-4$.

Setzt man also

$$(5.)\qquad \frac{2N-4}{\lambda} = \lambda',$$

so ist

$$(6.)\qquad \Psi(y_1, y_2) = C.P_1 P_2 \ldots P_{\lambda'},$$

wo C eine Constante bedeutet.

16.

Unter den Voraussetzungen der vorigen Nummer sei:

1) $L = 2$. Aus Gleichung (1.) No. 14 folgt alsdann

$$(1.)\qquad N = \frac{2L'}{L'-1} = 2 + \frac{2}{L'-1},$$

d. h.

$$(2.)\qquad L' = 2,\quad N = 4$$

oder

$$(3.)\qquad L' = 3,\quad N = 3.$$

2) $L > 2$. In diesem Falle bilden nach No. 7, I.

$$\eta \quad \text{und} \quad \eta^{L-1}\psi(\eta^L)$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B). Setzen wir demnach

$$(4.)\qquad y_1 = \eta,\quad y_2 = \eta^{L-1}\psi(\eta^L).$$

Wir haben alsdann

$$(5.)\qquad F_i(\eta) = \alpha_i y_1 + \beta_i y_2,$$

wo α_i, β_i Constanten bedeuten. Ferner ist

$$(6.)\qquad F_i(\eta J^{\varkappa}) = \alpha_i J^{\varkappa} y_1 + \beta_i J^{-\varkappa} y_2.$$

Demnach ist

$$(7.)\qquad P_i = J^{-\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}}[\beta_i^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_i^\lambda y_1^\lambda].$$

Es ergiebt sich also aus Gleichung (6.) vor. Nummer:

Ist $N > 2$, $L > 2$, und kein Factor der Hesseschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ der Primform $\Phi(y_1, y_2)$ N^{ten} Grades der Gestalt $\beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L)$ und nicht gleich η multiplicirt mit einer Constanten, so hat $\Psi(y_1, y_2)$ die Form:

$$(8.)\quad \Psi(y_1, y_2) = C(\beta_1^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_1^\lambda y_1^\lambda)(\beta_2^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_2^\lambda y_1^\lambda)\ldots(\beta_\lambda^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_\lambda^\lambda y_1^\lambda),$$

wo C eine Constante bedeutet. Diese Covariante enthält also y_1 und y_2 nur in solchen Potenzen, deren Exponenten Vielfache von λ sind.

17.

Die *Hesse*sche Covariante der *Hesse*schen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ Gleichung (8.) vor. Nummer hat die Gestalt:

$$(1.)\qquad \Psi_1(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{\lambda-2}.\ \Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda),$$

wo $\Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda)$ nur solche Potenzen von y_1 und y_2 enthält, deren Exponenten Vielfache von λ sind.

Da die *Hesse*sche Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ nach No. 12 Wurzel einer rationalen Function ist, so ist nach Satz III. No. 5 auch die *Hesse*sche Covariante der *Hesse*schen Covariante $\Psi_1(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function. Da $\Psi_1(y_1, y_2)$ den Factor y_1 $\lambda-2$ mal enthält, so enthält dieselbe Form nach Satz VI. No. 10 sämmtliche mit y_1 zu einem reducirten Wurzelsystem zu vereinigenden Integrale als Linearfactoren und zwar jedes mindestens zur $\lambda-2^{\text{ten}}$ Potenz. Da die Anzahl der Glieder dieses Wurzelsystems mindestens gleich N ist, so ist $\Psi_1(y_1, y_2)$ demnach durch eine Form vom mindestens $(\lambda-2)N^{\text{ten}}$ Grade theilbar. Nun ist $\Psi_1(y_1, y_2)$ vom Grade $4N-12$. Es muss also:

$$(2.)\qquad 4N-12 \geqq (\lambda-2)N$$

oder

$$(2^a.)\qquad (6-\lambda)N \geqq 12$$

sein. Aus dieser Ungleichung folgt:

I. *Die Zahl λ ist kleiner als 6.*

Aus Gleichung (1.) No. 14 folgt:

$$(3.)\qquad N = 2 + \frac{2L}{2L'-L}.$$

Aus No. 14, ferner dem Satze II. No. 15, dem Satze I. dieser Nummer und der Gleichung (3.) ergiebt sich, dass für $N > 2$, $L > 2$ die folgende Tabelle die *allein zulässigen Werthcombinationen* von N, L, L' sämmtlich enthält:

$$(4.)\quad \begin{cases} L=3,\ \lambda=3:\ L'=2,\ N=8 \text{ oder } L'=3,\ N=4, \\ L=4,\ \lambda=2:\ L'=3,\ N=6 \text{ oder } L'=4,\ N=4 \text{ oder } L'=6,\ N=3, \\ L=5,\ \lambda=5:\ L'=3,\ N=12 \text{ oder } L'=5,\ N=4, \\ L=6,\ \lambda=3:\ L'=4,\ N=8 \text{ oder } L'=5,\ N=5 \text{ oder } L'=6,\ N=4, \\ L=8,\ \lambda=4:\ L'=5,\ N=10 \text{ oder } L'=6,\ N=6 \text{ oder } L'=8,\ N=4, \\ L=10,\ \lambda=5:\ L'=6,\ N=12 \text{ oder } L'=7,\ N=7. \end{cases}$$

Aus No. 14, den Gleichungen (2.) und (3.) in No. 16, dem Satze I. in No. 11 und aus der eben aufgestellten Tabelle (4.) dieser Nummer ergiebt sich der Satz:

II. *Der niedrigste Grad N einer aus einem beliebigen Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung* (B) y_1, y_2 *gebildeten Form* $f(y_1, y_2)$, *welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function von z, ist niemals grösser als* 12.

18.

Es sei wieder η ein Linearfactor einer Primform niedrigsten Grades, und es werde $L>2$ vorausgesetzt. Es giebt alsdann nach No. 7, I. ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B) von der Form

$$(1.)\qquad y_1=\eta,\quad y_2=\eta^{L-1}\psi(\eta^L).$$

Stellen wir die Primform N^{ten} Grades durch dasselbe dar, so haben wir

$$(2.)\qquad \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^N + a_1 y_1^{N-1} y_2 + \cdots + a_n y_2^N.$$

Diese Form hat die Eigenschaft:

$$(2.)\quad \Phi(y_1 J, y_2 J^{-1}) = \varepsilon \Phi(y_1, y_2),$$

wo ε eine Constante bedeutet.

Da die Gleichung (2.) identisch erfüllt werden muss, so ergiebt sich, dass

$$(3.)\qquad \varepsilon = J^{N-2k},$$

wo k eine der Zahlen 0, 1, ... N bedeutet, und dass

$$(4.)\qquad a_i=0,\quad \text{wenn nicht}\quad 2i\equiv 2k \bmod L,\ \text{d. h.}\ i\equiv k \bmod \lambda.$$

Da aber $\Phi(y_1, y_2)$ als Primform keinen quadratischen Factor enthält, so dürfen *nicht gleichzeitig*

$$a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_1 = 0$$

und *nicht gleichzeitig*

$$a_{N-1} = 0 \quad \text{und} \quad a_N = 0$$

sein. Da aber der Voraussetzung nach y_1 ein Divisor der Form $\Phi(y_1, y_2)$ ist, so hat man

$$(5.) \qquad a_N = 0.$$

Demnach ist entweder

$$(6.) \qquad 2k \equiv 0 \quad \text{und} \quad 2k \equiv 2(N-1)$$

oder

$$(6^a.) \qquad 2k \equiv 2 \quad \text{und} \quad 2k \equiv 2(N-1) \quad \bmod L.$$

Im Falle (6.) wäre

$$2(N-1) \equiv 0 \quad \bmod L,$$

d. h.

$$(7.) \qquad N-1 \equiv 0 \quad \bmod \lambda.$$

Finden nun 1) die Voraussetzungen der No. 14 statt, so ist

$$N = 4,$$

also, da $L > 2$, nach Congruenz (7.),

$$\lambda = 3.$$

Es ergiebt sich also

$$(8.) \qquad N = 4, \quad L = 3 \quad \text{oder} \quad L = 6.$$

Finden 2) die Voraussetzungen der No. 15 statt, so folgt aus der Congruenz (7.)

$$(9.) \qquad 2N-2 \equiv 0 \quad \bmod \lambda.$$

Unter denselben Voraussetzungen ist aber nach dem Satze II. in No. 15

$$(10.) \qquad 2N-4 \equiv 0 \quad \bmod \lambda.$$

Aus den Congruenzen (9.) und (10.) ergiebt sich:

$$2 \equiv 0 \quad \bmod \lambda,$$

d. h.

$$(11.) \qquad \lambda = 2, \quad L = 4.$$

Die möglichen Gestalten der Primformen niedrigsten Grades, für $N > 2$, $L > 2$ *sind danach in folgender Tabelle enthalten:*

$$
(12.)\quad \left\{\begin{array}{ll}
(\alpha) & N=3,\quad L=4,\\
 & \Phi(y_1,y_2)=a_0y_1^3+a_2y_1y_2^2,\\
(\beta) & N=4,\quad L=3 \text{ oder } 6,\\
 & \Phi(y_1,y_2)=a_0y_1^4+a_3y_1y_2^3,\\
 & N=4,\quad L=4,\\
 & \Phi(y_1,y_2)=a_1y_1^3y_2+a_3y_1y_2^3,\\
(\gamma) & N=5,\quad L=6,\\
 & \Phi(y_1,y_2)=a_1y_1^4y_2+a_4y_1y_2^4,\\
(\delta) & N=6,\quad L=4,\\
 & \Phi(y_1,y_2)=a_1y_1^5y_2+a_3y_1^3y_2^3+a_5y_1y_2^5,\\
 & N=6,\quad L=8,\\
 & \Phi(y_1,y_2)=a_1y_1^5y_2+a_5y_1y_2^5,\\
(\varepsilon) & N=7,\quad L=10,\\
 & \Phi(y_1,y_2)=a_1y_1^6y_2+a_6y_1y_2^6,\\
(\zeta) & N=8,\quad L=3 \text{ oder } 6,\\
 & \Phi(y_1,y_2)=a_1y_1^7y_2+a_4y_1^4y_2^4+a_7y_1y_2^7,\\
(\eta) & N=10,\quad L=8,\\
 & \Phi(y_1,y_2)=a_1y_1^9y_2+a_5y_1^5y_2^5+a_9y_1y_2^9,\\
(\vartheta) & N=12,\quad L=5 \text{ oder } 10,\\
 & \Phi(y_1,y_2)=a_1y_1^{11}y_2+a_6y_1^6y_2^6+a_{11}y_1y_2^{11}.
\end{array}\right.
$$

19.

Die Tabelle (12.) der vorigen Nummer gestattet noch einige Reductionen.

In der That ist die *Hesse*sche Covariante einer kubischen Form eine quadratische Form. Es kann demnach N nicht den Werth 3 haben (siehe auch No. 12). Deshalb ist in obiger Tabelle die Form (α) auszuschliessen.

Die *Hesse*sche Covariante der Form (β) für $N=4$, $L=4$ obiger Tabelle ist

$$-3^2(a_1y_1^2-a_3y_2^2)^2.$$

Es ist daher nach Satz III. No. 5 schon $a_1y_1^2-a_3y_2^2$ Wurzel einer rationalen Function, also $N<4$. Demnach ist die Form (β) für $N=4$, $L=4$ auszuschliessen.

Ist $f(y_1, y_2)$ eine beliebige binäre Form, so ist bekanntlich

$$(1.)\qquad \frac{\partial^r f}{\partial y_1^r}\frac{\partial^r f}{\partial y_2^r} - r_1 \frac{\partial^r f}{\partial y_1^{r-1}\partial y_2}\frac{\partial^r f}{\partial y_1 \partial y_2^{r-1}} + r_2 \frac{(r-1)}{1.2}\frac{\partial^r f}{\partial y_1^{r-2}\partial y_2^2}\frac{\partial^r f}{\partial y_1^2 \partial y_2^{r-2}} - \text{etc.}$$

eine Covariante von $f(y_1, y_2)$.

Danach ist für $r = 4$ eine Covariante der Form (γ)

$$(1^a.)\qquad -(1.2.3.4)^3.2.3.a_1 a_4 y_1 y_2.$$

Da nun weder a_1 noch a_4 verschwinden dürfen, weil $\Phi(y_1, y_2)$ als Primform nicht durch einen quadratischen Factor theilbar ist, so ist demnach $(1^a.)$ eine Form *zweiten* Grades, welche nach Satz III. No. 5 Wurzel einer rationalen Function ist. Es wäre also $N < 5$, und deshalb Form (γ) auszuschliessen.

Ebenso ist für $r = 6$ eine nach (1.) gebildete Covariante der Form (ε):

$$(1^b.)\qquad -2.5.(1.2.3.4.5.6)^2 a_1 a_6 y_1 y_2.$$

Es ist also aus denselben Gründen Form (ε) auszuschliessen. Es verbleibt demnach folgende Tabelle:

$$N > 2, \quad L > 2,$$

(2.)

N	L	$\Phi(y_1, y_2)$
4	3 oder 6	$a_0 y_1^4 + a_3 y_1 y_2^3$
6	4	$a_1 y_1^5 y_2 + a_3 y_1^3 y_2^3 + a_5 y_1 y_2^5$
6	8	$a_1 y_1^5 y_2 + a_5 y_1 y_2^5$
8	3 oder 6	$a_1 y_1^7 y_2 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_7 y_1 y_2^7$
10	8	$a_1 y_1^9 y_2 + a_5 y_1^5 y_2^5 + a_9 y_1 y_2^9$
12	5 oder 10	$a_1 y_1^{11} y_2 + a_6 y_1^6 y_2^6 + a_{11} y_1 y_2^{11}$

Nach Gleichung (2.) No. 16 muss noch der Fall $N = 4$, $L = 2$ berücksichtigt werden ($N = 3$ Gleichung (3.) daselbst ist aus dem im Anfange dieser Nummer angegebenen Grunde auszuschliessen). In diesem Falle hat nach No. 7, I. jedes Integral die Form

$$y\,\psi(y^2).$$

Nach No. 14 ist auch der Fall $N = 4$, $L = 1$ in Betracht zu ziehen.

Hieraus folgt, dass zur Tabelle (2.) noch die aus einem *beliebigen Fundamentalsystem* η_1, η_2 gebildete Form vierten Grades hinzugefügt werden muss, nämlich

$$(3.)\qquad \begin{cases} N = 4, \quad L = 1 \quad \text{oder} \quad 2, \\ \Phi(\eta_1, \eta_2) = a_0\eta_1^4 + a_1\eta_1^3\eta_2 + a_2\eta_1^2\eta_2^2 + a_3\eta_1\eta_2^3 + a_4\eta_2^4. \end{cases}$$

20.

Aus der vorigen Nummer und No. 2 ergiebt sich der Satz:

I. *Wenn die Differentialgleichung* (B) *ein algebraisches Integral besitzt, so ist entweder dieses selber, d. h. eine aus einem Fundamentalsysteme von Integralen y_1, y_2 gebildete Form ersten Grades, oder eine aus denselben Integralen gebildete Form, deren Grad eine der Zahlen* 2, 4, 6, 8, 10, 12 *ist, Wurzel einer rationalen Function.*

II. *Ist umgekehrt eine aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form, höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades, Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differentialgleichung* (B) *ein algebraisches Integral.*

Es sei nämlich die Form:

$$(1.)\qquad \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^n + a_1 y_1^{n-1} y_2 + \cdots + a_n y_2^n = \varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ die Wurzel einer rationalen Function bedeutet. Ist $\Phi(y_1, y_2)$ die Potenz einer Form niedrigeren Grades $\Psi(y_1, y_2)$, so ergiebt sich, dass auch die letztere Form gleich der Wurzel einer rationalen Function ist. Dieselbe ist der Voraussetzung nach entweder vom *ersten* Grade — in welchem Falle die Differentialgleichung (B) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird — oder *höheren als zweiten Grades.* Im zweiten Falle sei also:

$$(2.)\qquad \Psi(y_1, y_2) = b_0 y_1^k + b_1 y_1^{k-1} y_2 + \cdots + b_k y_2^k = X(z),$$

wo $k > 2$, und wo der Voraussetzung nach, wenn

$$(2^a.)\qquad \Psi(y_1, y_2) = (c_{11} y_1 + c_{12} y_2)^{\alpha_1} (c_{21} y_1 + c_{22} y_2)^{\alpha_2} (c_{31} y_1 + c_{32} y_2)^{\alpha_3} \ldots,$$

die Exponenten α_1, α_2, α_3, ... keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen.

Wir setzen wie in No. 13

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{y_2}{y_1} = u, & b_0 + b_1 u + \cdots + b_k u^k = f(u), \\[2mm] \dfrac{d \log f(u)}{du} = f_1(u), & \dfrac{d \log X(z)}{dz} = X_1(z). \end{cases}$$

Alsdann geht die Gleichung (2.) über in:

$$(4.)\qquad f(u) = \frac{X(z)}{y_1^k}.$$

Die logarithmische Differentiation dieser Gleichung unter Benutzung der Gleichung (1.) No. 6 ergiebt:

$$(5.)\qquad -C f_1(u) = y_1^2 X_1(z) - k y_1 \frac{dy_1}{dz}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergiebt unter abermaliger Anwendung der Gleichung (1.) No. 6 und Berücksichtigung der Differentialgleichung (B):

$$(6.)\qquad C^2\frac{df_1(u)}{du} = 2y_1^3\frac{dy_1}{dz}X_1(z)+Qy_1^4-ky_1^2\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2,$$

wo

$$(7.)\qquad Q = \frac{dX_1(z)}{dz}-kP.$$

Die Elimination von $\frac{dy_1}{dz}$ aus den Gleichungen (5.) und (6.) ergiebt:

$$(8.)\qquad C^2\left[k\frac{df_1(u)}{du}+f_1(u)^2\right] = [X_1(z)^2+kQ]\,y_1^4.$$

Substituirt man hierin für y_1 seinen Werth aus Gleichung (4.), so folgt:

$$(9.)\qquad C^2\left[k\frac{df_1(u)}{du}+f_1(u)^2\right]f(u)^{\frac{4}{k}} = [X_1(z)^2+kQ]\,X(z)^{\frac{4}{k}}.$$

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass diese Gleichung in Bezug auf u ***nicht identisch*** erfüllt ist.

Dieselbe wäre nur dann identisch in Bezug auf u erfüllbar, wenn die linke Seite von u unabhängig wäre. Nun ist zunächst der Voraussetzung nach $f(u)$ nicht identisch Null, und es kann auch nicht identisch

$$k\frac{df_1(u)}{du}+f_1(u)^2 = 0$$

sein. Denn hieraus ergäbe sich

$$f(u) = K(u-\mu)^k,$$

wo K und μ Constanten sind, oder was dasselbe ist:

$$\Psi(y_1, y_2) = K(y_2-\mu y_1)^k.$$

Dieses widerspräche aber der Voraussetzung. Es könnte also nur noch

$$R = f(u)^{\frac{4}{k}}\left[k\frac{df_1(u)}{du}+f_1(u)^2\right] = \nu$$

sein, wo ν eine von u unabhängige und von Null verschiedene Grösse wäre. Da der zweite Factor von R eine rationale Function von u ist, so müsste auch

$$f(u)^{\frac{4}{k}} = g(u)$$

eine rationale Function von u sein. Hieraus ergäbe sich aber

$$f(u)^4 = g(u)^k$$

oder

$$(c_{11}+c_{12}u)^{4\alpha_1}(c_{21}+c_{22}u)^{4\alpha_2}(c_{31}+c_{32}u)^{4\alpha_3}\cdots = g(u)^k.$$

Es müssten also die Exponenten $4\alpha_1$, $4\alpha_2$, $4\alpha_3$, ... den gemeinschaftlichen Theiler k haben. Da aber der Voraussetzung nach α_1, α_2, α_3, ... keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so muss k ein Theiler von 4 sein, also, da $k > 2$,

$$k = 4$$

sein.

In diesem Falle ist also:

$$R = 4\frac{d^2f(u)}{du^2} - \frac{3}{f(u)}\left(\frac{df(u)}{du}\right)^2.$$

Da aber der Voraussetzung nach $f(u)$ mindestens zwei ungleiche Linearfactoren hat, so ist $\left(\frac{df(u)}{du}\right)^2$ nicht durch $f(u)$ theilbar, deshalb kann R sich nicht identisch auf eine Constante reduciren.

Es ergiebt sich daher aus der Gleichung (9.) u als algebraische Function von z. Alsdann aber liefert auch die Gleichung (4.) y_1 als algebraische Function von z, wodurch unser Satz bewiesen ist.

21.

Ist y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B), so genügt

$$(1.)\qquad v = y^\mu$$

einer linearen Differentialgleichung $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$(\mathrm{C})\qquad \frac{d^{\mu+1}v}{dz^{\mu+1}} + P_{\mu-1}\frac{d^{\mu-1}v}{dz^{\mu-1}} + P_{\mu-2}\frac{d^{\mu-2}v}{dz^{\mu-2}} + \cdots + P_0 v = 0,$$

(vergl. die Abhandlung des Herrn *Liouville,* dessen Journal t. IV p. 430).

Dieselbe wird erhalten, wenn man in der Gleichung:

$$(2.)\qquad \frac{dv_{i+1}}{dz} = (i+1)(\mu-i)Pv_i + v_{i+2}, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \mu-1$$

setzt, $v_0 = v$, $v_{\mu+1} = 0$ annimmt, und aus diesen μ Gleichungen durch successive Differentiation und Elimination v_1, v_2, ... v_μ herausschafft.

I. *Der Differentialgleichung* (C) *genügt auch jede aus einem Fundamentalsysteme* y_1, y_2 *gebildete Form* μ^{ten} *Grades.*

In der That, da derselben der Ausdruck

$$(c_1y_1 + c_2y_2)^\mu$$

für beliebige Werthe der Constanten c_1, c_2 genügt, so ist auch

$$(3.)\qquad \sum_0^\mu {}_i\lambda_i (c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2)^\mu,$$

wo die λ_i ebenfalls Constanten bedeuten, ein Integral der Differentialgleichung (C). Setzt man nun

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2\ldots k} = \mu_k$$

und

$$(4.)\qquad \mu_k \sum_0^\mu {}_i\lambda_i c_{i1}^{\mu-k} c_{i2}^k = a_k,\quad k = 0,\ 1,\ \ldots\ \mu,$$

wo a_0, a_1, ... a_μ beliebig gegebene Grössen sind, so ist die Determinante des Systems linearer Gleichungen (4.) für die Grössen λ_0, λ_1, ... λ_μ wegen der Willkürlichkeit der Grössen c_{i1}, c_{i2} von Null verschieden, woraus sich ergiebt, dass das Integral (3.) der Differentialgleichung (C) gleich einer beliebigen Form

$$a_0 y_1^\mu + a_1 y_1^{\mu-1} y_2 + \cdots + a_\mu y^\mu$$

gemacht werden kann.

In der oben angeführten Abhandlung des Herrn *Liouville* bemerkt derselbe pag. 431 in einer Note gelegentlich, dass

$$A_1 y_1^\mu + A_2 y_1^{\mu-1} y_2 + \cdots + A_{\mu+1} y_2^{\mu+1},$$

wo y_1, y_2 zwei verschiedene Integrale der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dz^2} = Py$, A_1, A_2, ... $A_{\mu+1}$ willkürliche Constanten bedeuten, das vollständige Integral der linearen Differentialgleichung $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sei, welcher y^μ genügt. Den Beweis theilt er nicht mit, da diese Bemerkung für die Frage, welche dort verhandelt wird, nicht von Belang sei. Wie man sieht, stimmt der Sache nach diese Bemerkung mit unserem Satze I. dieser Nummer überein.

Es lässt sich übrigens auch direct durch Differentiation in analoger Weise wie für $v = y^\mu$, für $v = y_1^{\mu-k}.y_2^k$ zeigen, dass die lineare Differentialgleichung, welcher dasselbe genügt, durch Elimination des Systems (2.) erhalten wird. Aus der Homogeneität der Differentialgleichung (C) ergiebt sich alsdann, dass eine beliebige aus y_1, y_2 gebildete Form ein Integral derselben ist.

II. *Die Integrale*

$$(5.)\qquad y_1^\mu,\quad y_1^{\mu-1}y_2,\quad \ldots\quad y_2^\mu$$

der Differentialgleichung (C) *bilden ein Fundamentalsystem.*

Denn wenn die Gleichung

$$a_0 y_1^\mu + a_1 y_1^{\mu-1} y_2 + \cdots + a_\mu y_2^\mu = 0$$

bestehen könnte, ohne dass die constanten Coefficienten $a_0, a_1, \dots a_\mu$ sämmtlich Null wären, so ergäbe sich aus derselben ein für jedes z constanter Werth des Verhältnisses $\frac{y_2}{y_1}$, was der Voraussetzung widerspricht, dass y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B) bilden.

Aus der Bildungsweise der Differentialgleichung (C) ergiebt sich:

III. *Die Differentialgleichung* (C) *hat keine anderen singulären Punkte als die der Differentialgleichung* (B).

IV. *Sind die Integrale der Differentialgleichung* (B) *sämmtlich algebraisch, so sind auch die Integrale der Differentialgleichung* (C) *sämmtlich algebraisch.*

Sind nämlich die Integrale der Differentialgleichung (B) sämmtlich algebraisch, so gilt dasselbe für das Fundamentalsystem (5.) der Integrale der Differentialgleichung (C), folglich für jedes Integral derselben.

22.

Aus den Sätzen I. und II. No. 20 und aus No. 13 ergiebt sich, wenn man noch erwägt, dass die Differentialgleichung (C) für $\mu = 1$ mit der Differentialgleichung (B) coincidirt, der folgende Satz:

Die nothwendige Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung (B) *algebraische Integrale besitzt, ist die, dass die Differentialgleichung* (C) *für eine der Zahlen* $\mu = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ *durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt werde.*

Erfolgt dieses für $\mu = 1$, *oder erst für einen der angegebenen Zahlenwerthe von* μ, *der grösser ist als* 2, *so hat auch umgekehrt die Differentialgleichung* (B) *algebraische Integrale.*

Erfolgt dieses aber zuerst für $\mu = 2$, *und ist* $\varphi(z)$ *ein Integral der Differentialgleichung* (C) *für* $\mu = 2$, *welches gleich einer Wurzel einer rationalen Function, so ist* $\varphi(z)^2$ *eine rationale Function von* z, *und*

$$\varphi(z)^2\left[\left(\frac{d\log\varphi(z)}{dz}\right)^2+2\frac{d^2\log\varphi(z)}{dz^2}-4P\right]$$

eine constante Grösse λ. *Ist nun* $\lambda\int\frac{dz}{\varphi(z)}$ *gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function, so sind die Integrale der Differentialgleichung* (B) *algebraisch.*

Durch diesen Satz ist die Untersuchung der Frage, wie die Differentialgleichung (B) beschaffen sein müsse, um algebraische Integrale zu besitzen, bis auf die Untersuchung von $\int \frac{dz}{\varphi(z)}$ für den Fall $\mu = 2$, nach No. 3 auf die elementare Aufgabe zurückgeführt worden, zu ermitteln, unter welchen Umständen ein System linearer Gleichungen Lösungen zulässt oder nicht zulässt.

In der That wird man ein für allemal für $\mu = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ die Differentialgleichung (C) aufstellen können, und in jedem gegebenen Falle die Untersuchung anzustellen haben, unter welchen Umständen eine dieser Differentialgleichungen durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird, eine Untersuchung, welche nach No. 3 auf die Frage der Lösbarkeit eines Systems linearer Gleichungen zurückgeführt wird.

23.

Wir wollen nunmehr zeigen, dass man die *allgemeine Aufstellung der Differentialgleichung* (C) *für die angegebenen Werthe von μ auch entbehren kann.*

Soll nämlich die Differentialgleichung (C) für $\mu > 2$ durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt werden, so sind nach dem Satze der vorigen Nummer die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B), folglich auch nach dem Satze IV. No. 21 die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (C) algebraisch. Diese gehört demnach zur Classe der Differentialgleichungen (12.) No. 4 meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66) (vergl. diese Arbeit No. 4), und hat nach Satz III. No. 21 die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$.

Es seien jetzt r_i und $1-r_i$ die beiden Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B) (s. No. 4), y_1, y_2 das Fundamentalsystem, zu welchem diese Wurzeln als Exponenten resp. gehören, so gehören die nach Satz II. No. 21 ein Fundamentalsystem bildenden Integrale y_1^μ, $y_1^{\mu-1}y_2, \ldots y_2^\mu$ der Differentialgleichung (C) resp. zu den Exponenten:

$$(1.)\quad \mu r_i,\quad (\mu-2)r_i+1,\quad (\mu-4)r_i+2,\quad \ldots\quad (\mu-2\mu)r_i+\mu,$$

welche demnach auch die $\mu+1$ Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (C) sind.

Sind ferner σ und $-\sigma-1$ die beiden Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B) (s. No. 4), so ergiebt sich ebenso, dass die zu $z = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (C) die Wurzeln

$$(2.)\qquad +\mu\sigma,\quad (\mu-2)\sigma-1,\quad (\mu-4)\sigma-2,\quad \dots\quad (\mu-2\mu)\sigma-\mu$$

hat. Ist ein Integral v der Differentialgleichung (C) Wurzel einer rationalen Function, so hat dasselbe die Form:

$$(3.)\qquad v = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\dots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho}.g(z)\quad \text{(s. No. 3)},$$

wo α_1, α_2, ... α_ϱ rationale Zahlen und $g(z)$ eine ganze rationale Function bedeuten.

Aus meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66, No. 5) ergiebt sich, dass die Grössen α_1, α_2, ... α_ϱ Zahlenwerthe aus der Reihe (1.) sind.

Ist ferner ν der Grad von $g(z)$, so ist nach derselben Arbeit

$$-(\nu+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\varrho)$$

mit einer der Grössen (2.) identisch.

Man hat also nachzusehen, für welche ganzzahligen Werthe von k_1, k_2, ... k_ϱ und $\mathfrak{a}$ die Summe

$$(4.)\qquad -[(\mu-2k_1)r_1+k_1+(\mu-2k_2)r_2+k_2+\dots+(\mu-2k_\varrho)r_\varrho+k_\varrho+(\mu-2\mathfrak{a})\sigma-\mathfrak{a}],$$

wo μ einen der Zahlenwerthe 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 darstellt, eine ganze positive Zahl ν wird, und dann

$$(5.)\qquad \alpha_1=(\mu-2k_1)r_1+k_1,\quad \alpha_2=(\mu-2k_2)r_2+k_2,\quad \dots\quad \alpha_\varrho=(\mu-2k_\varrho)r_\varrho+k_\varrho$$

und den Grad von $g(z)$ gleich ν zu wählen, und mit diesen Werthen zu untersuchen, ob v in (3.) der Differentialgleichung (C) genügt.

Diese Untersuchung lässt sich nun folgendermassen ausführen:

Es sei μ eine der Zahlen 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, und es werde das Gleichungssystem (2.) No. 21 gebildet:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dz} = v_1, \\[1ex] \dfrac{dv_1}{dz} = \mu P v + v_2, \\[1ex] \dfrac{dv_2}{dz} = 2(\mu-1)Pv_1+v_3, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dv_\mu}{dz} = \mu P v_{\mu-1}. \end{cases}$$

Ist nunmehr

$$(7.)\qquad g(z) = g_0+g_1.z+g_2.z^2+\dots+g_\nu.z^\nu,$$

und substituiren wir in die erste der Gleichungen (6.) den Werth v aus

Gleichung (3.), so liefert dieselbe v_1. Setzen wir diesen Werth für v_1 und v aus Gleichung (3.) in die zweite der Gleichungen (6.), so erhalten wir v_2 u. s. w. Die letzte der Gleichungen (6.) muss identisch befriedigt werden. Man erhält also aus dieser zuletzt ein System linearer Gleichungen für die Coefficienten $g_0, g_1, \dots g_\nu$. Je nachdem dasselbe für irgend eine der Zahlen $\mu = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ und irgend eines der oben bestimmten Werthsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho, \nu$ endliche Lösungen besitzt oder nicht, wird die Differentialgleichung (C) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt oder nicht.

24.

Wir schliessen dem Vorstehenden einige Sätze an, aus welchen sich in vielen Fällen auch ohne die nach voriger Nummer zu veranstaltende Rechnung beurtheilen lässt, ob die Differentialgleichung (B) algebraische Integrale besitzt.

Es sei r eine Wurzel der zum singulären Punkte a oder zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B), wo a einen der Punkte $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ bedeutet, und es werde vorausgesetzt, dass die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B) algebraisch sind, so ist r eine rationale Zahl (s. No. 4). Bezeichnen wir mit y das Glied des zu a gehörigen Fundamentalsystems von Integralen derselben Differentialgleichung, welches dem Exponenten r entspricht, und setzen:

$$(1.)\qquad r = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}},$$

wo $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{n}$ zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler bedeuten.

Nach einem Umlaufe von z um a geht y in $yj^{\mathfrak{z}}$ über, wo j eine primitive Wurzel der Gleichung

$$(2.)\qquad j^{\mathfrak{n}} = 1$$

ist. Nach No. 1 ist $\mathfrak{n}$ ein Theiler des Grades m der irreductiblen Gleichung, welcher y genügt.

Die Anzahl ν der Glieder des reducirten Wurzelsystems derselben Gleichung kann nicht kleiner als N sein (s. Satz I. No. 11).

Nach No. 1 und No. 9 ist aber

$$(3.)\qquad \nu \leqq \frac{m}{\mathfrak{n}},$$

d. h. nach No. 11

$$(4.)\qquad \nu \leqq \frac{N.L}{\mathfrak{n}}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$(5.)\qquad n \leqq L.$$

Ist demnach

$$(6.)\qquad N > 2,$$

so folgt aus der Tabelle (2.) No. 19 und Gleichung (3.) derselben Nummer

$$(7.)\qquad n \leqq 10.$$

Wir erhalten also den Satz:

Ist irgend ein Nenner der auf ihre kleinste Benennung gebrachten rationalen Zahlen, welche die zu den singulären Punkten und zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (B) *darstellen, grösser als* 10, *so besitzt dieselbe Differentialgleichung kein algebraisches Integral, wenn nicht diese selber oder die Differentialgleichung* (C) *für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird.*

25.

Wird die Differentialgleichung (C) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so ist unter Beibehaltung der Bezeichnungen der No. 13

$$(1.)\qquad y_1 y_2 = \psi(z)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ist a irgend ein singulärer Punkt der Differentialgleichung (B), r und $1-r$ die Wurzeln der zu demselben gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ist in der Umgebung von a:

$$(2.)\qquad \begin{cases} y_1 = c_{11} X_1 (z-a)^r + c_{12} X_2 (z-a)^{1-r}, \\ y_2 = c_{21} X_1 (z-a)^r + c_{22} X_2 (z-a)^{1-r}, \end{cases}$$

wo X_1 und X_2 nach positiven ganzen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihen sind, die für $z = a$ nicht verschwinden.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt:

$$(3.)\qquad \begin{cases} y_1 y_2 = c_{11} c_{21} X_1^2 (z-a)^{2r} + (c_{11} c_{22} + c_{21} c_{12}) X_1 X_2 (z-a) \\ \qquad\qquad + c_{12} c_{22} X_2^2 (z-a)^{2(1-r)} \\ \quad = \psi(z)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Ist $\psi(z)$ für $z = a$ von der μ^{ten} Ordnung Null oder unendlich, und hat r einen von den Zahlen 1, 2, 4 verschiedenen Nenner, so ergiebt sich aus dieser

Gleichung

$$c_{11} = 0, \quad c_{22} = 0 \quad \text{oder} \quad c_{12} = 0, \quad c_{21} = 0$$

und $-\frac{\mu}{2} = 1$ oder

$$(4.) \qquad \mu = -2,$$

d. h. $\psi(z)$ kann in einem singulären Punkte nur unendlich werden, und zwar *zweiter* Ordnung. Nach Gleichung (1.) wäre aber jeder Punkt, in welchem $\psi(z)$ verschwindet, ein singulärer, es kann deshalb $\psi(z)$ überhaupt für keinen endlichen Werth von z verschwinden. Wird aber $\psi(z)$ in einem nicht singulären Punkte b unendlich, so folgt aus Gleichung (1.), dass $\psi(z)$ den Factor $z-b$ eine gerade Anzahl mal enthält. Es ist demnach

$$(5.) \qquad \psi(z) = \frac{1}{g(z)^2},$$

wo $g(z)$ eine ganze rationale Function von z ist.

Je nachdem also $\int \frac{dz}{g(z)}$ gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function ist oder nicht, sind die Integrale der Differentialgleichung (B) Wurzeln rationaler Functionen oder überhaupt nicht algebraisch.

Man hat also den Satz:

Wird die Differentialgleichung (C) *für* $\mu = 2$ *durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, und sind die sämmtlichen Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen von den Zahlen* 1, 2, 4 *verschieden, so wird die Differentialgleichung* (B) *entweder überhaupt durch kein algebraisches Integral oder durch die Wurzeln rationaler Functionen befriedigt.*

In einer Abhandlung dieses Journal Bd. 75 S. 292 ff. hat Herr *Schwarz* unter Anwendung von Abbildungsproblemen die Bedingungen aufgestellt, unter welchen die Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe algebraische Integrale besitzt. Da diese Differentialgleichung einen besonderen Fall der Differentialgleichung (A) bildet, wenn nämlich die Anzahl der singulären Punkte gleich zwei, so liessen sich die Resultate des Herrn *Schwarz* aus den oben entwickelten Principien für den besonderen Fall $\varrho = 2$ herleiten. Wir heben hier nur hervor, dass aus der vorhergehenden und dieser Nummer sich der wahre Grund dafür ergiebt, dass in der Tabelle derselben Abhandlung S. 323, wenn nicht von den drei Zahlen λ, μ, ν zwei den Nenner 2 haben, die Nenner die Zahl 5 nicht übersteigen dürfen.

26.

Es seien wieder die rationalen Zahlen

$$\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i} \quad \text{und} \quad 1-\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$$

die Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B) und y_{i1}, y_{i2} das zu demselben singulären Punkte gehörige Fundamentalsystem von Integralen derselben Differentialgleichung, welche resp. den Exponenten $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ und $1-\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ entsprechen. Ferner sei $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ die in algebraischem Sinne grössere dieser beiden Zahlen, so dass $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ positiv ist.

Alsdann ist nach meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66 No. 5) in der Umgebung von a_i

$$(1.) \qquad y_{i1} = (z-a_i)^{\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}}.\omega_{i1},$$

wo ω_{i1} eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z-a_i$ fortschreitende Reihe bedeutet, welche für $z=a_i$ nicht verschwindet.

Nach No. 6 Gleichung (1.) ist

$$(2.) \qquad y_{i2} = C_i y_{i1} \int \frac{dz}{(z-a_i)^{\frac{2\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}} \omega_{i1}^2},$$

wo C_i eine Constante bedeutet.

Ist nun $\mathfrak{n}_i = 2$ und der Coefficient γ_i von $(z-a_i)^{\mathfrak{z}_i-1}$ in der Reihe für $\frac{1}{\omega_{i1}^2}$ gleich Null, so tritt in der Entwickelung von y_{i2} kein Logarithmus auf, und man hat in der Umgebung von a_i ebenfalls

$$(3.) \qquad y_{i2} = (z-a_i)^{1-\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}}.\omega_{i2},$$

wo ω_{i2} eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z-a_i$ fortschreitende Reihe bedeutet, die für $z=a_i$ nicht verschwindet.

Wir setzen jetzt voraus, dass für *alle* singulären Punkte

$$(4.) \qquad \mathfrak{n}_i = 2, \quad \gamma_i = 0$$

sei. Es bleiben alsdann y_{i1}^2, $y_{i1}y_{i2}$, y_{i2}^2 nach einem Umlaufe von z um a_i ungeändert.

Ist k eine von i verschiedene Zahl der Reihe 1, 2, ... ρ, so ist

$$(5.)\quad \begin{cases} y_{i1} = c_{11}y_{k1}+c_{12}y_{k2}, \\ y_{i2} = c_{21}y_{k1}+c_{22}y_{k2}. \end{cases}$$

Es ist demnach y_{i1}^2 von der Form:

$$(6.)\quad y_{i1}^2 = A_0 y_{k1}^2+A_1 y_{k1}y_{k2}+A_2 y_{k2}^2.$$

Nach einem Umlauf von z um a_k bleibt daher y_{i1}^2 ebenfalls ungeändert. Da aber y_{i1} als Integral einer Differentialgleichung von der Form (12.) meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66 No. 4) überall von endlicher Ordnung unendlich wird, so ist y_{i1} die Quadratwurzel einer rationalen Function.

Wir erhalten also den Satz:

Ist für alle singulären Punkte $\mathfrak{n}_i = 2$, $\gamma_i = 0$, ***so wird die Differentialgleichung*** (B) ***durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt.***

27.

Wir wollen zum Beschluss noch ein Verfahren angeben, ***vermöge dessen die Betrachtung der Differentialgleichung*** (C) ***entbehrlich gemacht und durch die directe Untersuchung der aus einem Fundamentalsysteme*** y_1, y_2 ***gebildeten Formen ersetzt wird.***

Es sei y_1, y_2 ein beliebiges Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B),

$$(1.)\quad \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^N + a_1 y_1^{N-1} y_2 + \cdots + a_N y_2^N$$

eine Primform niedrigsten Grades, wo also nach Satz I. No. 20 N ***eine der Zahlen*** 2, 4, 6, 8, 10, 12 ***bedeutet.***

Zum singulären Punkte a_i gehöre das Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B) y_{i1}, y_{i2}, so ist bekanntlich

$$(2.)\quad \begin{cases} y_1 = c_{11}^{(i)} y_{i1} + c_{12}^{(i)} y_{i2}, \\ y_2 = c_{21}^{(i)} y_{i1} + c_{22}^{(i)} y_{i2}. \end{cases}$$

Sind die Exponenten, zu welchen y_{i1}, y_{i2} resp. gehören, $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ und $1-\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$, und bedeutet j_i eine primitive Wurzel der Gleichung

$$(3.)\quad j_i^{\mathfrak{n}_i} = 1,$$

so verwandeln sich y_1, y_2 nach einem Umlauf von z um a_i resp. in

$$(4.)\quad \begin{cases} y_1' = b_{11}^{(i)} y_1 + b_{12}^{(i)} y_2, \\ y_2' = b_{21}^{(i)} y_1 + b_{22}^{(i)} y_2, \end{cases}$$

wo

$$(5.)\quad \begin{cases} b_{11}^{(i)} = \dfrac{c_{11}^{(i)}c_{22}^{(i)}j_i^{k_i} - c_{12}^{(i)}c_{21}^{(i)}j_i^{-k_i}}{\Delta^{(i)}}, \\[2ex] b_{12}^{(i)} = \dfrac{-c_{11}^{(i)}c_{12}^{(i)}(j_i^{k_i} - j_i^{-k_i})}{\Delta^{(i)}}, \\[2ex] b_{21}^{(i)} = \dfrac{c_{21}^{(i)}c_{22}^{(i)}(j_i^{k_i} - j_i^{-k_i})}{\Delta^{(i)}}, \\[2ex] b_{22}^{(i)} = \dfrac{c_{11}^{(i)}c_{22}^{(i)}j_i^{-k_i} - c_{12}^{(i)}c_{21}^{(i)}j_i^{k_i}}{\Delta^{(i)}}, \\[2ex] \Delta^{(i)} = c_{11}^{(i)}c_{22}^{(i)} - c_{12}^{(i)}c_{21}^{(i)}. \end{cases}$$

Da $\Phi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function sein soll, so muss die Substitution

$$(6.)\quad S_i = \begin{pmatrix} b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} \\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} \end{pmatrix}$$

diese Form in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten verwandeln, also

$$(7.)\quad \Phi(b_{11}^{(i)}y_1 + b_{12}^{(i)}y_2,\ b_{21}^{(i)}y_1 + b_{22}^{(i)}y_2) = \varepsilon_i \Phi(y_1, y_2)$$

sein, wo ε_i eine Constante bedeutet.

Da diese Gleichung identisch erfüllt sein muss, so müssen die Coefficienten der Grössen $y_1^{N-k}y_2^k$ auf beiden Seiten übereinstimmen. Man erhält so $N+1$ Gleichungen für jeden singulären Punkt, im ganzen demnach

$$(N+1)\varrho$$

Gleichungen, deren System wir mit G bezeichnen wollen.

Es sei a_1 einer der singulären Punkte, und die Grössen $c_{11}^{(1)}$, $c_{12}^{(1)}$, $c_{21}^{(1)}$, $c_{22}^{(1)}$ *beliebig* gewählt, ferner sei

$$(8.)\quad \begin{cases} y_{11} = \gamma_{11}^{(i)}y_{i1} + \gamma_{12}^{(i)}y_{i2}, \\ y_{12} = \gamma_{21}^{(i)}y_{i1} + \gamma_{22}^{(i)}y_{i2}, \end{cases} \quad \text{für } i = 2, 3, \ldots \varrho,$$

so ist

$$(9.)\quad \begin{cases} c_{11}^{(i)} = c_{11}^{(1)}\gamma_{11}^{(i)} + c_{12}^{(1)}\gamma_{21}^{(i)}, & c_{21}^{(i)} = c_{21}^{(1)}\gamma_{11}^{(i)} + c_{22}^{(1)}\gamma_{21}^{(i)}, \\ c_{12}^{(i)} = c_{11}^{(1)}\gamma_{12}^{(i)} + c_{12}^{(1)}\gamma_{22}^{(i)}, & c_{22}^{(i)} = c_{21}^{(1)}\gamma_{12}^{(i)} + c_{22}^{(1)}\gamma_{22}^{(i)}. \end{cases}$$

In meiner Abhandlung (dieses Journal Bd. 75 S. 208 ff.) ist gelehrt worden, wie die Coefficienten der linearen homogenen Relationen, durch welche die zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme mit einander verbunden sind, aus den in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten zu bestimmen sind. Danach ergeben sich die Grössen $\gamma_{11}^{(i)}$, $\gamma_{12}^{(i)}$, $\gamma_{21}^{(i)}$, $\gamma_{22}^{(i)}$ als bekannte Functionen der in den Coefficienten der Differentialgleichung (B) enthaltenen Constanten. Ihre Werthe sind z. B. für den Fall $\varrho = 2$ übereinstimmend mit den durch die *Gauss*sche Π-Function ausgedrückten Coefficienten jener linearen homogenen Relationen, welche zwischen den zu je einem der beiden singulären Punkte gehörigen Fundamentalsystemen von Integralen der Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe bestehen (s. die Abhandlung des Herrn *Kummer* dieses Journal Bd. 15 S. 58, vergl. auch die im Nachlass enthaltene Arbeit von *Gauss* in dessen Werken 3. Band).

Die Function P in der Differentialgleichung (B) hat die Form:

$$(10.)\qquad P = \frac{f_{2\varrho-2}(z)}{(z-a_1)^2(z-a_2)^2\dots(z-a_\varrho)^2},$$

wo $f_{2\varrho-2}(z)$ eine ganze rationale Function von z vom $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet. Dieselbe enthält also ausser den singulären Punkten $a_1, a_2, \dots a_\varrho$, *die wir als gegeben annehmen,* noch $2\varrho-1$ Constanten. Das System G implicirt also als bestimmbare Grössen:

1) die Grössen $c_{11}^{(1)}$, $c_{12}^{(1)}$, $c_{21}^{(1)}$, $c_{22}^{(1)}$,

2) die Coefficienten von $f_{2\varrho-2}(z)$,

3) die Coefficienten $a_0, a_1, \dots a_N$ der Form (1.).

Das System G ist nun für jedes N der Zahlenreihe 2, 4, 6, 8, 10, 12 aufzustellen. Alsdann ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Form Wurzel einer rationalen Function ist, die, dass wenigstens für eines dieser Systeme G, die Grössen 1), 2), 3) so bestimmt werden können, dass dasselbe befriedigt wird, und sich ε_i als Einheitswurzel ergiebt. Denn die Form $\Phi(y_1, y_2)$, welche nach den Umläufen von z um je einen singulären Punkt sich nur mit je einer Einheitswurzel multiplicirt, ist eine rationale Function, da y_1, y_2 als Integrale der Differentialgleichung (B) überall von endlicher Ordnung unendlich sind.

Es ist hiermit die Frage beantwortet, wie die Coefficienten von $f_{2\varrho-2}(z)$ beschaffen sein müssen, damit die Differentialgleichung (B) algebraische Integrale besitzt.

Wir haben oben dieselbe Frage unter Zuhülfenahme der Differentialgleichung (C) gelöst, indem wir sie im Allgemeinen auf die Untersuchung zurückführten, unter welchen Umständen ein System *algebraischer linearer* Gleichungen befriedigt werden könne.

Das in *dieser* Nummer gelehrte Verfahren führt insofern auf *transcendente* Gleichungen, als die Coefficienten $\gamma_{11}^{(i)}$ durch die in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten sich im Allgemeinen vermittelst unendlicher Reihen darstellen lassen (s. meine Arbeit, dieses Journal Bd. 75 S. 212). Indessen wo die Gesetze dieser transcendenten Functionen sich einer ähnlichen Einfachheit wie die *Gauss*sche Π-Function erfreuen, wird die zweite eben angegebene Methode nicht ohne Vortheil anwendbar sein.

28.

Ist die Differentialgleichung (B) *gegeben*, und soll entschieden werden, ob dieselbe algebraische Integrale besitzt, so lässt die in voriger Nummer gelehrte zweite Methode Vereinfachungen zu.

Wir wählen

$$(1.)\qquad y_1 = y_{i1},\quad y_2 = y_{i2}.$$

Nach einem Umlaufe von z um a_i ist alsdann:

$$(2.)\qquad \Phi(y_{i1}j_i^{\mathfrak{z}_i}, y_{i2}j_i^{-\mathfrak{z}_i}) = \varepsilon_i \Phi(y_{i1}, y_{i2}).$$

Diese Gleichung erfordert, dass ε_i die Form hat:

$$(3.)\qquad \varepsilon_i = j_i^{(N-2k_i)\mathfrak{z}_i},$$

wo k_i eine der Zahlen 0, 1, 2, ... N bedeutet. Andererseits aber muss $\Phi(y_{i1}, y_{i2})$ durch beliebige Umläufe in sich selbst multiplicirt mit einer L^{ten} Wurzel der Einheit übergehen (s. No. 9 Satz I. und No. 10 und 11). Hieraus folgt:

$$(N-2k_i)\mathfrak{z}_i L \equiv 0 \mod \mathfrak{n}_i,$$

oder da $\mathfrak{z}_i$ zu $\mathfrak{n}_i$ relativ prim,

$$(4.)\qquad (N-2k_i)L \equiv 0 \mod \mathfrak{n}_i.$$

Nun ist nach Nummer 1 $\mathfrak{n}_i$ Divisor von $m = NL$, folglich

$$(5.)\qquad 2k_i L \equiv 0 \mod \mathfrak{n}_i.$$

Es ist ferner

$$a_\mathfrak{a} = 0, \text{ wenn nicht } 2\mathfrak{a} \equiv 2k_i \mod \mathfrak{n}_i,$$

wo $\mathfrak{a}$ eine der Zahlen 0, 1, 2, ... N bedeutet, während für

$$2\mathfrak{a} \equiv 2k_i \mod \mathfrak{n}_i,$$

$a_\mathfrak{a}$ *unbestimmt* bleibt.

Hiernach lässt sich, wenn die Differentialgleichung (B) vorgelegt ist, analog der Tabelle (2.) in No. 19 eine Tabelle (T) aufstellen, welche für

$N = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ die den eben gefundenen Bedingungen genügenden Gestalten der mit je einem der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen gebildeten Primformen enthält.

Ist nun

$$(6.)\quad \begin{cases} y_{i1} = \gamma_{11}^{(ik)} y_{k1} + \gamma_{12}^{(ik)} y_{k2}, \\ y_{i2} = \gamma_{21}^{(ik)} y_{k1} + \gamma_{22}^{(ik)} y_{k2}, \end{cases}$$

so wird

$$(7.)\quad \Phi(y_{i1}, y_{i2}) = \Phi_k(y_{k1}, y_{k2}).$$

Soll $\Phi(y_{i1}, y_{i2})$ Wurzel einer rationalen Function sein, so muss auch nach einem Umlaufe von z um a_k die Form $\Phi(y_{i1}, y_{i2})$ in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergehen. Demnach muss $\Phi_k(y_{k1}, y_{k2})$ zu den *möglichen* Formen derselben Tabelle (T) gehören.

Wendet man demnach die Transformation (6.) für alle von i verschiedenen Werthe von k der Reihe $k = 1, 2, \dots \varrho$ an und identificirt $\Phi_k(y_{k1}, y_{k2})$ mit den entsprechenden Formen der Tabelle (T), welche mit y_{k1}, y_{k2} gebildet sind, so erhält man ein gewisses System (H) von Gleichungen, welches befriedigt werden muss.

Da nun umgekehrt eine Form der Tabelle (T), die aus dem zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalsysteme gebildet ist, nach einem Umlaufe von z um diesen Punkt in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergeht, und die Integrale überall von endlicher Ordnung unendlich werden, so ergiebt sich:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Form Wurzel einer rationalen Function wird, ist die, dass das System (H) befriedigt wird.

Heidelberg, im Juli 1875.