Ueber Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

In der folgenden Mittheilung, welche sich an den im 42ten Bande dieser Zeitschrift von mir publicirten Aufsatz*): „Zur Theorie der Taylor'schen Reihe etc." anschliesst, will ich zunächst mit Hülfe eines elementaren functionentheoretischen Principes einen sehr einfachen Typus von analytischen Ausdrücken ableiten, welche trotz der Endlichkeit der Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung für gewisse Stellen beständig *divergirende* Taylor'sche Entwickelungen liefern (§ 1) und daran eine Betrachtung knüpfen, die zunächst zur Berichtigung eines bei Gelegenheit ähnlicher Untersuchungen von Du Bois-Reymond begangenen fundamentalen Irrthums dienen soll, sodann aber zur Aufstellung einer allgemeinen Classe von Functionen führt, welche die fragliche Singularität längs des ganzen Einheitskreises besitzen (§ 2). Daran schliessen sich dann einige functionentheoretische Bemerkungen über das Verhalten der Functionen $e^{-\frac{1}{x^2}}$ und $e^{-\frac{1}{x}}$ in der Nähe der Nullstelle (§ 3). Schliesslich wird gezeigt, dass man auch unbeschränkt differenzirbare analytische Ausdrücke herstellen kann, welche, als Functionen einer *reellen* Variabelen x aufgefasst, nur auf *einer* Seite einer Stelle $x = x_0$ durch die Taylor'sche Reihe dargestellt werden, obschon sie an der Stelle x_0 mit sämmtlichen vor- und rückwärts gebildeten Differentialquotienten endlich und stetig bleiben.

§ 1.

Ist der wahre Convergenzbezirk der Reihe:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_{\nu}\, a_\nu x^\nu$$

ein um den Nullpunkt beschriebener Kreis mit dem Radius R, so muss bekanntlich $f(x)$ auf der Peripherie dieses Kreises *mindestens eine* singuläre Stelle besitzen, d. h. es existirt daselbst mindestens ein Punkt A

*) a. a. O. p. 153 ff.

von der Beschaffenheit, dass der Convergenzbezirk *keiner* aus der Reihe (1) abgeleiteten Reihe:

$$(2) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(\xi) \cdot (x - \xi)^\nu \qquad (\text{wo: } |\xi| < R)$$

über A hinausragt und somit, wenn ξ auf dem Strahle $\overline{OA}$ liegt, den ursprünglichen Convergenzkreis in A berührt.

Sind nun die a_ν von irgend einer Stelle $\nu = n$ ab sämmtlich positiv, so lässt sich zeigen, dass gerade die Stelle $x = R$ selbst stets eine singuläre sein muss.

Nimmt man nämlich irgend einen positiven Werth $r < R$ an und setzt:

$$\xi = r \cdot e^{\varphi i}$$

so folgt aus:

$$(3) \qquad \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \right| = \left| \sum_n^\infty {}^\nu \nu_n a_\nu \xi^{\nu - n} \right| \leqq \sum_n^\infty {}^\nu \nu_n \cdot a_\nu r^{\nu - n},$$

dass die Coefficienten der Reihenentwickelung (2) von einer bestimmten Stelle $\nu = n$ ab durchweg ihre Maximalwerthe annehmen, wenn gerade $\xi = r$ wird. Daraus ergiebt sich aber, dass der Convergenzkreis der Reihe (2) für *keine* Stelle ξ mit dem absoluten Betrage r *kleiner* sein kann, als für $\xi = r$ selbst, und da *mindestens einer* dieser Convergenzkreise den ursprünglichen von innen berührt, so muss das sicher für den um $\xi = r$ zu beschreibenden der Fall sein, d. h. $x = R$ ist in der That eine singuläre Stelle für $f(x)$.

Wählt man nun eine Reihe von positiven Grössen a_ν so, dass:

$$(4) \quad \begin{cases} \text{(a)} \ \lim\limits_{\nu=\infty} \nu^p \cdot a_\nu = 0 \ \ (\text{für jedes noch so grosse, endliche, positive } p) \\ \text{(b)} \ \lim\limits_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{a_\nu} \ = 1, \end{cases}$$

so wird in Folge der Bedingung (a) nicht allein die Reihe (1), sondern auch jede durch beliebig oft wiederholte Differentiation daraus hervorgehende Reihe für $|x| = 1$ unbedingt *convergiren*, dagegen in Folge der Bedingung (b) für $|x| > 1$ *divergiren**), sodass also nach dem oben gesagten $f(x)$ in $x = 1$ eine singuläre Stelle besitzen muss.

Somit wird bei der angegebenen Wahl der Grössen a_ν durch die Reihe (1) eine analytische Function definirt, welche auf dem genannten Einheitskreise mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist, und welche dennoch für keine noch so kleine Umgebung der Stelle $x = 1$ nach Potenzen von $(x - 1)$ entwickelt werden kann.

*) Man kann die Bedingung (b) offenbar auch durch die etwas allgemeinere ersetzen, dass die *obere* Unbestimmtheitsgrenze von $\sqrt[\nu]{a_\nu}$ für $\nu = \infty$ den Werth 1 haben soll.

Hierzu wäre nur noch zu zeigen, dass man in der That (auf unendlich viele Arten) Grössen a_ν so bestimmen kann, dass sie den *beiden* Bedingungen (4) genügen. Man befriedigt nun aber offenbar die Bedingung (4a) und zwar in der allgemeinsten Weise*) wenn man setzt:

$$a_\nu = \nu^{-p_\nu} = e^{-p_\nu \lg \nu}$$

wo p_ν eine positive Grösse bedeutet, die mit ν irgendwie in's Unendliche wächst. Da hiernach:

$$\sqrt[\nu]{a_\nu} = e^{-\frac{1}{\nu} p_\nu \lg \nu}$$

wird, so ist zur Erfüllung von (4b) nothwendig und hinreichend, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu} p_\nu \lg \nu = 0,$$

sodass also gesetzt werden kann:

$$\frac{1}{\nu} p_\nu \lg \nu = \frac{1}{m_\nu} \qquad \text{wo:} \quad \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty.$$

Alsdann wird:

$$p_\nu = \frac{\nu}{m_\nu \lg \nu}$$

und:

$$\lim_{\nu=\infty} p_\nu^{-1} = \lim_{\nu=\infty} \frac{m_\nu}{\left(\frac{\nu}{\lg \nu}\right)} = 0$$

und somit schliesslich:

$$a_\nu = e^{-\frac{\nu}{m_\nu}}, \tag{5}$$

wo m_ν eine positive Grösse bedeutet, die mit ν schwächer in's Unendliche wächst, als $\left(\frac{\nu}{\lg \nu}\right)$. Man kann also z. B. setzen:

$$m_\nu = \frac{\nu}{\lg a \cdot \nu^\alpha} \left(\begin{matrix} a > 1 \\ 0 < \alpha < 1 \end{matrix}\right), \quad m_\nu = \frac{\nu}{(\lg \nu)^2}, \quad m_\nu = \frac{\lg \nu}{\lg a}, \text{ etc.}$$

und demnach:

$$a_\nu = a^{-\nu^\alpha}, \quad a_\nu = \nu^{-\lg \nu}, \quad a_\nu = a^{-\frac{\nu}{\lg \nu}}, \quad \text{etc.} —$$

*) Man erzielt keineswegs eine grössere Allgemeinheit, wenn man etwa setzt:

$$a_\nu = c_\nu \cdot \nu^{-p_\nu}$$

wo c_ν mit unendlich wachsendem ν unter einer endlichen Grenze bleibt. Denn man kann alsdann a_ν in die Form setzen:

$$a_\nu = \nu^{\frac{\lg c_\nu}{\lg \nu} - p_\nu} = \nu^{-q_\nu},$$

wo q_ν keinen grösseren Grad von Allgemeinheit besitzt, als das ursprüngliche p_ν.

Es liegt nun nahe mit Hülfe der Substitution: $x = e^{ti}$, welche den Einheitskreis der x-Ebene auf die reelle Axe der t-Ebene so abbildet, dass dem Punkte $x = 1$ der Punkt $t = 0$ (bezw. $t = \pm 2k\pi i$) entspricht, $f(x)$ in eine Function $f(e^{ti}) = \varphi(t)$ überzuführen, welche für alle reellen t bestimmte endliche Ableitungen jeder endlichen Ordnung besitzt und dennoch nicht nach Potenzen von t (bezw. $t \mp 2k\pi$) entwickelt werden kann. Um aber hierbei völlig sicher zu gehen, ist zunächst folgende Frage zu beantworten:

Wenn $f(x)$ auf dem Einheitskreise die singuläre Stelle $x_0 = e^{t_0 i}$ besitzt, ist dann stets t_0 auch eine singuläre Stelle für $f(e^{ti})$ als Function von t aufgefasst?

Zur Beantwortung dieser Frage beweise ich den folgenden Hülfssatz:

Es sei $f(x) = \sum b_\nu x^\nu$ convergent für $x \leqq 1$, also

$$f(e^{ti}) = \varphi(t) = \sum b_\nu e^{\nu t i}$$

convergent für alle complexen t mit nicht-negativem imaginären Theil, insbesondere also für alle reellen t. Ist dann $f(x)$ regulär für eine gewisse Umgebung der auf dem Einheitskreise gelegenen Stelle $x_0 = e^{t_0 i}$ (wo also $|x_0| = 1$ und t_0 reell), so gilt das gleiche von $\varphi(t)$ in der Umgebung von $t = t_0$ — *und umgekehrt.*

Beweis. Angenommen man habe zunächst:

$$f(x) = \sum b_\nu x^\nu = \sum c_\nu (x - x_0)^\nu \quad \text{für: } |x - x_0| < r,$$

so wird:

$$\varphi(t) = \sum c_\nu \,.\, e^{-\nu t_0 i} (e^{(t - t_0) i} - 1)^\nu.$$

Da aber $\{e^{(t-t_0)i} - 1\}^\nu$ in eine beständig convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}_\nu(t - t_0) = \sum_1^\infty {}_\varkappa A_\varkappa^{(\nu)} (t - t_0)^\varkappa$ *ohne constantes Glied* entwickelt werden kann, so existirt eine gewisse Umgebung $|t - t_0| < \varrho$, für welche nicht nur $|\mathfrak{P}_\nu(t - t_0)|$, sondern auch $\sum_1^\infty {}_\varkappa |A_\varkappa^{(\nu)} (t - t_0)^\nu|$ *beliebig* klein, also insbesondere $< r$ wird. Für diesen die Stelle t_0 umgebenden Bereich von t darf dann aber nach einem bekannten (Cauchy'schen) Satze die Reihe:

$$\varphi(t) = \sum c_\nu \,.\, e^{-\nu t_0 i} \,.\, \mathfrak{P}_\nu(t - t_0)$$

in eine solche nach positiven Potenzen von $(t - t_0)$ umgeformt werden, d. h. $\varphi(t)$ ist in der That regulär in der Umgebung der Stelle $t = t_0$.

Umgekehrt: Angenommen, man habe für eine gewisse (complexe) Umgebung des reellen Werthes $t = t_0$:

$$\varphi(t) = \sum \beta_\nu (t - t_0)^\nu$$

und man setzt:

$$e^{ti} = x, \quad e^{t_0 i} = x_0 \qquad (\text{wo also: } |x_0| = 1)$$

so wird:

$$t - t_0 = \frac{1}{i} \lg \frac{x}{x_0} = \frac{1}{i} \lg \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right),$$

sodass also für:

$$|x - x_0| < |x_0|, \text{ d. h. für } |x - x_0| < 1$$

$(t - t_0)$ und daher auch $(t - t_0)^\nu$ in eine convergirende Reihe nach Potenzen von $(x - x_0)$ *ohne constantes Glied* entwickelt werden kann. Daraus ersieht man dann aber, genau wie oben, dass die Reihe:

$$\varphi(t) = \sum \beta_\nu (t - t_0)^\nu$$

für eine gewisse Umgebung von $x = x_0$ in eine solche nach positiven Potenzen von $(x - x_0)$ umgeformt werden kann, sodass also:

$$\varphi(t) = f(e^{ti}) = f(x)$$

in eine für $x = x_0$ reguläre Function übergeht. —

Aus dem eben bewiesenen Hülfssatze folgt nun ohne weiteres, dass jeder auf dem Einheitskreise gelegenen *singulären* Stelle x_0 von $f(x)$ eine reelle singuläre Stelle t_0 von $\varphi(t)$ entspricht (*vice versa*), und dass daher:

$$(6) \qquad \varphi(t) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu e^{\nu t i},$$

sobald die Coefficienten a_ν der oben aufgestellten Form (5) angehören, eine mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endliche und stetige Function der reellen Variablen t darstellt, welche für $t = 0$ (und allgemein für $t = \pm 2k\pi i$) nicht nach der Mac Laurin'schen (bezw. Taylor'schen) Reihe entwickelbar ist.

§ 2.

Aus dem am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellten Resultate lässt sich zunächst folgern, dass *mindestens eine* der beiden, gleichfalls mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlichen und stetigen Functionen:

$$\varphi_1(t) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \cos \nu t, \qquad \varphi_2(t) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu \sin \nu t$$

nicht nach der Mac Laurin'schen Reihe entwickelt werden kann. Man kann nun aber ganz direct zeigen, dass diese Eigenschaft *jeder* der beiden genannten Functionen zukommt, und zwar aus dem Grunde, weil die betreffenden Reihen für jeden noch so kleinen Werth von t *divergiren.* Man hat nämlich:

$$\varphi_1^{(2\varkappa)}(0) = (-1)^\varkappa \cdot \sum_1^\infty {}^\nu \nu^{2\varkappa} \cdot a_\nu, \qquad \varphi_2^{(2\varkappa-1)}(0) = (-1)^\varkappa \cdot \sum_1^\infty {}^\nu \nu^{2\varkappa-1} \cdot a_\nu$$

$\left(\text{dagegen: } \varphi_1^{(2\varkappa-1)}(0) = 0,\ \varphi_2^{(2\varkappa)}(0) = 0\right)$. Bezeichnet man daher mit A_λ den Coefficienten von t^λ in der Mac Laurin'schen Reihe für $\varphi_1(t)$ bezw. $\varphi_2(t)$ (wobei also λ im Falle $\varphi_1(t)$ durchweg *gerade*, im Falle $\varphi_2(t)$ durchweg *ungerade*), so hat man:

$$|A_\lambda| = \frac{1}{\lambda!} \sum {}^\nu \nu^\lambda a_\nu = \frac{1}{\lambda!} \sum {}^\nu \nu^\lambda \cdot e^{-\frac{\nu}{m_\nu}} > \frac{\nu^\lambda}{\lambda!} \cdot e^{-\frac{\nu}{m_\nu}}$$

wie gross man auch ν in dem letzten Ausdrucke annehmen mag. Nimmt man nun insbesondere: $\nu \geqq \lambda$, also $m_\nu \geqq m_\lambda \geqq [m_\lambda]$ (wo $[m_\lambda]$ die grösste in m_λ enthaltene ganze Zahl bedeutet), so wird zunächst *a fortiori:*

$$|A_\lambda| > \frac{\nu^\lambda}{\lambda!} \cdot e^{-\frac{\nu}{[m_\lambda]}},$$

oder da bekanntlich*):

$$\lambda! = c_\lambda \cdot \lambda^{\lambda + \frac{1}{2}} \cdot e^{-\lambda}, \qquad \text{wo: } \lim_{\lambda=\infty} c_\lambda = \sqrt{2\pi}$$

gesetzt werden kann, so hat man:

$$|A_\lambda| > c_\lambda \cdot \nu^\lambda \cdot \lambda^{-\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \cdot e^{-\lambda - \frac{\nu}{[m_\lambda]}}.$$

Nun fixire man die oben nur der Bedingung $\nu \geqq \lambda$ unterworfene Zahl ν so, dass: $\nu = \lambda \cdot [m_\lambda]$; alsdann wird:

$$|A_\lambda| > c_\lambda \cdot [m_\lambda]^\lambda \cdot \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

und somit schliesslich:

$$|A_\lambda \cdot t^\lambda| > c_\lambda \cdot ([m_\lambda]^{\frac{1}{2}} \cdot t)^\lambda \cdot (\lambda^{-1} \cdot [m_\lambda]^\lambda)^{\frac{1}{2}},$$

woraus man erkennt, dass dieser Ausdruck mit λ in's Unendliche wächst, wie klein man auch t annehmen mag. Daraus folgt dann aber in der That, dass die Mac Laurin'sche Reihe für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ beständig divergirt.

---

*) Vgl. z. B. Meyer-Dirichlet, Vorl. über best. Integrale, p. 151.

Eine Reihe, wie die hier mit $\varphi_2(t)$ bezeichnete, hat schon Du Bois-Reymond betrachtet*) und für die specielle Wahl $a_\nu = e^{-\sqrt{\nu}}$ die Divergenz ihrer Mac Laurin'schen Entwickelung nachzuweisen versucht. Wenn er aber hieran die weitere Bemerkung knüpft, derartige Functionen seien dann überhaupt *nirgends* in Potenzreihen entwickelbar und lassen demnach keine analytische Fortsetzung in das complexe Gebiet zu, so beruht diese Behauptung (deren objective Richtigkeit vorläufig dahingestellt bleibe) auf einem vollkommenen Fehlschlusse.

Aus dem Umstande, dass die *trigonometrische* Reihe für $\varphi_2(t)$ offenbar für *keinen complexen* Werth von t convergirt**), glaubte er nämlich ohne weiteres folgern zu dürfen, dass daher $\varphi_2(t)$ für complexe Werthe von t *überhaupt nicht existire*, also nirgends nach Potenzen von $(t-t_0)$ entwickelbar sein könne. Dass diese Schlussweise aber falsch sein muss, lehrt schon ein Blick auf irgend eine der bekanntesten trigonometrischen Reihen, wie z. B.:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu} \cdot \cos \nu t = -\frac{1}{2} \lg\left(4 \sin^2 \frac{t}{2}\right),$$

welche gleichfalls für kein complexes t convergirt, während nichtsdestoweniger $\varphi(t) = -\frac{1}{2}\lg\left(4 \sin^2 \frac{t}{2}\right)$ mit einzigem Ausschlusse der Stellen $t = \pm m\pi$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, für welche die obige Reihe divergirt und $\varphi(t)$ selbst unendlich gross wird, nach Potenzen von $(t-t_0)$ entwickelbar ist und demgemäss in das complexe Gebiet hinein analytisch fortgesetzt werden kann.

Hat man nun allgemein eine *lediglich für reelle t* convergirende trigonometrische Reihe:

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \sum (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t) \\
&= \frac{1}{2}\sum \left\{ a_\nu(e^{\nu t i} + e^{-\nu t i}) - b_\nu i (e^{\nu t i} - e^{-\nu t i}) \right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum (a_\nu - b_\nu i) \cdot e^{\nu t i} + \frac{1}{2}\sum (a_\nu + b_\nu i) \cdot e^{-\nu t i}
\end{aligned}$$

---

*) „*Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihe*“, Math. Ann. Bd. XXI, p. 117. — Man vergl. auch eine Note von Herrn G. Vivanti: „*Sulle serie di potenze*“ — in der Rivista di Matematica 1893.

**) Dies gilt natürlich auch für die Reihe $\varphi_1(t)$, nämlich allgemein für:

$$\varphi(t) \pm \varphi(-t) = \sum a_\nu (e^{\nu t i} \pm e^{-\nu t i}) = \sum a_\nu (x^\nu \pm x^{-\nu}).$$

und setzt:

$$e^{ti} = x, \qquad \Phi(t) = F(x)$$

also:

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\sum(a_\nu - b_\nu i) \, . \, x^\nu + \tfrac{1}{2}\sum(a_\nu + b_\nu i) \, . \, x^{-\nu}$$
$$= F_1(x) + F_2(x^{-1})$$

so wird $F(x)$ als Reihe nach positiven und negativen ganzen Potenzen von x in Folge der über die Convergenz von $\Phi(t)$ gemachten Voraussetzung lediglich auf der Peripherie des Einheitskreises convergiren und also *in dieser besonderen Form* nur dort existiren. Dagegen wird offenbar in unendlich vielen Fällen $F(x)$ sowohl in das Innere des Einheitskreises, als auch nach aussen analytisch fortgesetzt werden können, da ja $F_1(x)$ *im Innern*, $F_2(x^{-1})$ *ausserhalb* des Kreises an sich analytisch ist und — bei passender Beschaffenheit der a_ν, b_ν — $F(x)$ eine analytische Fortsetzung *nach aussen*, $F_2(x^{-1})$ eine solche *nach innen* zulassen wird. (Man nehme z. B. für $F_1(x)$, $F_2(x)$ irgend zwei Functionen, die im Endlichen nur die singuläre Stelle $x = 1$ haben und noch für $|x| = 1$ durch eine absolut convergirende Potenzreihe in x dargestellt werden, z. B. $(1-x) \, . \lg(1-x)$, $\sqrt{1-x}$, etc.).

Da somit $F(x)$ in unendlich vielen Fällen eine analytische Fortsetzung besitzen wird, so folgt auf Grund des in § 1 bewiesenen Hülfssatzes das gleiche für $\Phi(t)$, auch wenn die trigonometrische Reihe, welche zunächst $\Phi(t)$ für *reelle* Werthe von t definirt, ausschliesslich für solche convergirt.

Wendet man dieses Ergebniss auf den vorliegenden Fall an, so erkennt man, dass die Frage nach der Entwickelbarkeit von $\sum a_\nu \cos \nu t$ $\sum a_\nu \sin \nu t$ in Potenzreihen für alle anderen Werthe ausser $t = \pm 2\varkappa\pi$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$ lediglich davon abhängen wird, ob $\sum a_\nu x^\nu$ für irgend welche Stellen des Einheitskreises nach der Taylor'schen Reihe entwickelt werden kann, oder ob die singulären Stellen dort überall dicht liegen. Hierüber irgend eine Entscheidung unmittelbar aus der arithmetischen Natur der Coefficienten zu gewinnen, dürfte indessen schwerlich gelingen, da die für alle anderen Werthe ausser für $x = 1$ resultirenden Zeichenwechsel eine directe Schätzung der Taylor'schen Entwickelungscoefficienten bei unendlich wachsender Stellenzahl kaum möglich erscheinen lassen. Andererseits bietet aber auch die Vergleichung mit anderen Functionen, welche auf dem Convergenzkreise noch endliche Ableitungen jeder endlichen Ordnung besitzen, keinen definitiven Anhaltspunkt für eine solche Entscheidung: denn es giebt, wie ich in der oben citirten Abhandlung ausdrücklich gezeigt habe*), deren sowohl solche, die thatsächlich die Entwickelbarkeit nur in einem *einzigen* Punkte verlieren; als auch solche, die überhaupt keine analytische Fortsetzung zulassen.

Soweit man indessen nach Analogien schliessen kann, möchte ich es für wenig wahrscheinlich halten, dass gerade die von Du Bois-Reymond betrachtete Function $f(x) = \sum e^{-\sqrt{\nu}} x^\nu$ *keine* analytische Fortsetzung besitzen sollte. Beachtet man nämlich, dass hier die Coefficienten $a_\nu = e^{-\sqrt{\nu}}$ in *ähnlich regelmässiger Weise* abnehmen, wie z. B. ν^{-1} und $(1+\varepsilon)^{-\nu}$ $(\varepsilon > 0)$, und zwar *schneller* als ν^{-1}, *langsamer* als $(1+\varepsilon)^{-\nu}$, dass andererseits:

$$\sum_1^\infty{}^\nu \nu^{-1} x^\nu = -\lg(1-x) \quad \text{und:} \quad \sum_1^\infty{}^\nu (1+\varepsilon)^{-\nu} x^\nu = \frac{x}{1+\varepsilon-x}$$

analytisch fortsetzbar sind, so könnte eine Veranlassung zu der gegentheiligen Vermuthung bezüglich der Function $\sum e^{-\sqrt{\nu}} . x^\nu$ doch lediglich in dem Umstande gefunden werden, dass hier — anders wie bei den oben erwähnten Functionen — die durch Differentiation abgeleiteten Reihen auf dem Convergenzkreise noch durchweg convergiren. Da man aber nach dem von mir a. a. O. angegebenen Verfahren leicht Potenzreihen mit der nämlichen Eigenschaft construiren kann, welche auf dem Einheitskreise zweifellos nur die eine singuläre Stelle $x = 1$ besitzen und deren Coefficienten mit $a_\nu = e^{-\sqrt{\nu}}$ die charakteristische Eigenschaft gemein haben durchweg positiv zu sein und nach einem bestimmten Gesetze regelmässig abzunehmen**), so darf man sicherlich wohl soviel sagen, dass nach Maassgabe dieser Analogien jeder bestimmte Anhalt dafür fehlt, um $\sum e^{-\sqrt{\nu}} x^\nu$ für *nicht* analytisch fortsetzbar zu halten.

Wesentlich anders liegt die Sache, wenn man die a_ν lediglich gemäss den Bedingungen (4) des § 1, im übrigen aber *völlig willkürlich* gewählt denkt. Hier muss vor allem bemerkt werden, dass die, wie ich glaube, ziemlich allgemein verbreitete Meinung, als ob ein durch

---

*) a. a. O. p. 169 ff., p. 182.

**) Beispiel. Man setze für $b < 1$:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{b^\lambda}{1+\frac{1}{\lambda}-x} = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^\nu$$

wo also:

$$A_\nu = \sum_1^\infty{}^\lambda b^\lambda \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\nu+1}.$$

eine Potenzreihe mit endlichem Convergenzbereiche definirtes Functionselement *in der Regel* eine analytische Fortsetzung besitze, während die *Nicht*-Fortsetzbarkeit als eine nur in *ganz speciellen Füllen* auftretende, höchst merkwürdige Erscheinung anzusehen sei, entschieden unrichtig ist. In Wahrheit verhält es sich genau umgekehrt: *nur dann*, wenn zwischen den Reihencoefficienten von vornherein *bestimmte Beziehungen* von verhältnissmässig *specieller* Natur bestehen, kann auf eine Fortsetzbarkeit gerechnet werden, während *im allgemeinen keine* analytische Fortsetzung existiren wird.

Zur näheren Begründung dieser Bemerkung diene folgendes. Es werde gesetzt:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu$$

wo c_ν durchweg positiv und $\lim \sqrt[\nu]{c_\nu} = 1$ sein soll. Versteht man sodann unter p_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Reihe positiver, mit ν in's Unendliche wachsender ganzer Zahlen von der Beschaffenheit, dass p_ν ein Theiler von $p_{\nu+1}$ und somit allgemein von $p_{\nu+\varrho}$ (z. B. $p_\nu = \nu!$, $p_\nu = a^\nu$, wo a eine ganze Zahl), und setzt man:

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty {}^\nu c_{p_\nu} \cdot x^{p_\nu} = \sum_0^{n-1} {}^\nu c_{p_\nu} \cdot x^{p_\nu} + R_n(x),$$

so erkennt man aus der Beziehung:

$$R_n(x) = \sum_n^\infty {}^\nu c_{p_\nu} \cdot x^{p_\nu} = \sum_0^\infty {}^\nu c_{p_{n+\nu}} \left(x^{p_n}\right)^{\frac{p_{n+\nu}}{p_n}},$$

dass $R(x)$ und folglich auch $\varphi(x)$ sich singulär verhält für $x^{p_n} = 1$, also für die p_n Stellen, welche den Einheitswurzeln vom Grade p_n entsprechen. Daraus ergiebt sich aber, da man der Zahl n jeden beliebig grossen Werth beilegen kann, dass die singulären Stellen von $\varphi(x)$ auf dem Einheitskreise überall dicht liegen, also $\varphi(x)$ keine analytische Fortsetzung zulässt.

Bezeichnet man jetzt diejenigen Zahlen, welche nach Ausschluss der Zahlen p_ν aus der natürlichen Zahlenreihe übrig bleiben, durch q_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, und setzt hierauf die oben definirte Function $f(x)$ in die Form:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu c_{p_\nu} \cdot x^{p_\nu} + \sum_0^\infty {}^\nu c_{q_\nu} \cdot x^{q_\nu} = \varphi(x) + \psi(x),$$

so erkennt man ohne weiteres, dass $f(x)$ nur dann eine analytische Fortsetzung besitzen wird, wenn: 1) auch die Singularitäten von $\psi(x)$ auf dem Einheitskreise überall dicht liegen; 2) zwischen den Coefficienten c_{p_ν}, c_{q_ν} *ganz bestimmte Relationen* bestehen, vermöge deren so viele Singularitäten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ *sich gegenseitig vernichten*, dass dieselben für $\varphi(x) + \psi(x)$ nicht mehr überall dicht liegen. —

Mit Benützung der Methode, welche soeben zu der mit $\varphi(x)$ bezeichneten Function geführt hat, kann man nun offenbar ohne weiteres jetzt auch einen allgemeinen Typus von Functionen aufstellen, welche auf dem Einheitskreise noch durchweg endliche Ableitungen jeder Ordnung besitzen und *sicher* keine analytische Fortsetzung zulassen: man hat hierzu offenbar nur den Coefficienten c_ν solche Werthe beizulegen, wie sie bisher mit a_ν bezeichnet wurden. Nimmt man z. B. $a_\nu = a^{-\overset{a}{\log}\nu}$, (s. § 1), $p_\nu = a^\nu$, so ergiebt sich:

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a^{-\nu^2} \cdot x^{a^\nu}.$$

Man erkennt auch, dass das früher*) von mir mitgetheilte Beispiel:

$$\varphi_1(x) = \sum{}^\nu \frac{1}{\nu!} x^{a^\nu}$$

gleichfalls einen speciellen Fall dieser Kategorie bildet.

§ 3.

Die in § 1 angestellten Betrachtungen legen den Versuch nahe, die von Cauchy herangezogene, in dem oben citirten Aufsatze von mir besprochene**) Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ bezw. $\mathfrak{P}(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ mit der singulären Stelle $x = 0$ dadurch zu einem einwandfreien Beispiele einer *nicht* entwickelbaren Function mit *convergirender* Mac Laurin'scher Reihe umzugestalten, dass man an Stelle des arithmetischen Ausdruckes $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ von vornherein eine für die Umgebung irgend einer reellen Stelle, z. B. $x = 1$, mit $e^{-\frac{1}{x^2}}$ gleichgeltenden Potenzreihe $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ zu Grunde legt, deren Convergenzkreis dann offenbar die imaginäre Axe im Punkte $x = 0$ tangirt. *Wenn* dann diese Potenzreihe mit ihren Ableitungen noch auf der Peripherie dieses Kreises convergirte, so würde sie in der That eine „*eigentliche*" Definition der Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ und ihrer Ableitungen für $x = 0$ liefern, und man könnte dann schliesslich, ähnlich wie in § 1, durch Substitution von $x - 1 = e^{ti}$ eine Function herstellen, welche die fragliche Singularität *im Innern* eines gewissen *reellen* Intervalles besitzt. Es lässt sich indessen zeigen, dass die obige Potenzreihe für $x = 0$ *divergiren* muss.

*) a. a. O. p. 182.
**) a. a. O. p. 160.

Bezeichnet man nämlich die Summe dieser Reihe mit $P(x)$, so müsste, *wenn* die Reihe für $x=0$ überhaupt *convergierte*, nach einem bekannten Abel'schen, von Stolz erweiterten Satze*), die Beziehung bestehen:

$$P(0)=\lim_{x=0} P(x)=\lim_{x=0} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

falls x *auf irgend einem beliebigen Strahle* aus dem *Innern* des Convergenzkreises der Stelle $x=0$ zustrebt. Daraus ergiebt sich aber als eine *nothwendige* Bedingung für die Convergenz von $P(x)$ an der Stelle $x=0$, dass $\lim\limits_{x=0} e^{-\frac{1}{x^2}}$ eindeutig bestimmt (nämlich durchweg $=0$) sein müsste, gleichgültig in welcher geradlinigen Richtung man x aus dem Innern des Kreises der Nullstelle nähert.

Setzt man nun:

$$x=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad \left(\text{wo: } -\tfrac{\pi}{2}<\varphi<+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

so wird:

$$\left|e^{-\frac{1}{x^2}}\right|=e^{-\frac{1}{r^2}\cos 2\varphi}$$

bei verschwindendem r nur dann der Null zustreben, wenn $\cos 2\varphi>0$, d. h. wenn φ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegt, dagegen ins Unendliche wachsen, wenn φ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{2}$ oder zwischen $+\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt. Daraus folgt dann aber nach dem oben gesagten in der That, dass die Reihe $P(x)=\sum c_\nu(x-1)^\nu$ an der Stelle $x=0$ *divergiren* muss.

Die Methode, durch welche diese Erkenntniss gewonnen wurde, führt auf die Vermuthung, dass eine analoge Betrachtung für die Function $e^{-\frac{1}{x}}$ ein günstigeres Resultat ergeben könnte, da hier in dem entsprechenden Ausdrucke φ an die Stelle von 2φ tritt. Wirklich folgt auch hier aus:

$$e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{r}(\cos\varphi-i\sin\varphi)},$$

dass der absolute Betrag dieser Grösse, nämlich: $e^{-\frac{1}{r}\cos\varphi}$ für jede Wahl von φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ verschwindet, sobald man r gegen Null convergiren lässt. Das gleiche gilt aber auch für alle Differentialquotienten von $e^{-\frac{1}{x}}$, da diese durchweg als Producte von $e^{-\frac{1}{x}}$ in eine ganze Function von $\frac{1}{x}$ darstellbar sind. Entwickelt man also hier:

---

*) Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II, p. 157.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} = \sum c_\nu (x-1)^\nu,$$

so wird hier $\lim f(x)$ und für jedes endliche n auch $\lim f^{(n)}(x)$ den Werth 0 haben, wenn x *auf einem ganz beliebigen Strahle* aus dem Innern des Convergenzkreises der Nullstelle zustrebt.

(Beiläufig bemerkt hat es keine Schwierigkeit, die Coefficienten c_ν der obigen Potenzreihe wirklich aufzustellen. Man findet nämlich nach einer bekannten Formel*):

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)}{dx^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{x}} \left\{\left(\frac{1}{x}\right)^n - (n-1) \cdot n_1 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \right.$$
$$\left. + (n-1)(n-2) \cdot n_2 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} - \cdots \right\}$$

und daher:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{1}{n!\, e} \{1 - (n-1)_1 \cdot n_1 + 2!\, (n-1)_2 \cdot n_2 - \cdots\cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\, (n-1)_{n-1} \cdot n_{n-1} + (-1)^n \cdot n!\, n_n\} . -)$$

Hier ist also die bei dem vorigen Beispiele erwähnte *nothwendige* Bedingung für die Convergenz der Reihe $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ und ihrer Ableitungen an der Stelle $x = 0$ erfüllt: nichtsdestoweniger lässt sich zeigen, dass dieselbe auch hier nicht stattfindet.

Für die Punkte x des Convergenzkreises hat man nämlich:

$$x = 1 + e^{\varphi i} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right),$$

also:

$$e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2 \cos \frac{1}{2}\varphi} \left\{\cos \frac{1}{2}\varphi - i \sin \frac{1}{2}\varphi\right\}}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}} \left\{\cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)\right\}.$$

Nähert sich jetzt x *auf* dem Convergenzkreise der Stelle $x = 0$, also φ dem Werthe π, so wächst $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ über alle Grenzen und daher besitzt der reelle, wie der imaginäre Theil von $e^{-\frac{1}{x}}$ auf dem Convergenzkreise in der Nähe der Stelle $x = 0$ unendlich viele Maxima und Minima mit der Amplitude $2 . e^{-\frac{1}{2}}$, ist also für $x = 0$ unstetig. Daraus folgt aber, dass die Reihe $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ *und ihre Ableitungen* keinesfalls auf dem Convergenzkreise convergiren können, da ja in diesem Falle $\sum c_\nu (x-1)^\nu$

*) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. II, p. 6.

daselbst auch *unbedingt* und somit auch *gleichmässig* convergiren müsste, was in Folge der soeben gemachten Bemerkung über das Verhalten von $e^{-\frac{1}{x}}$ ausgeschlossen erscheint*). Es kann aber auch hier wieder $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ *nicht* dazu dienen, um eine noch auf dem Convergenzkreise mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endliche und stetige Function zu definiren.

Diese letzte Betrachtung schien mir deshalb nicht ohne Interesse, weil daraus folgendes hervorgeht:

> Wenn ein analytischer Ausdruck $f(x)$, der für das Innere eines gewissen um irgend einen Punkt α beschriebenen Kreises durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ darstellbar ist, *mit allen Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung* endlich und stetig bleibt, falls x aus dem *Innern* des Kreises *in beliebiger Richtung jedem beliebigen Punkte der Peripherie* zustrebt, so darf man hieraus dennoch *nicht* schliessen, dass $\mathfrak{P}(x-\alpha)$, $\mathfrak{P}^{(n)}(x-\alpha)$ noch auf der Peripherie convergiren müssen.

Mit anderen Worten: der oben erwähnte Abel-Stolz'sche Satz ist *nicht* umkehrbar, auch wenn $f(x)$ *mit allen Differentialquotienten* die genannten Stetigkeitsbedingungen befriedigt.

§ 4.

Zur Vervollständigung der bisherigen Ergebnisse will ich noch zeigen, dass sich auch *durch unbeschränkt differenzirbare, analytische Ausdrücke* solche Functionen einer *reellen* Variablen x definiren lassen, welche in der Umgebung einer Stelle x_0 nur auf *einer* Seite dieser Stelle durch die Taylor'sche Reihe dargestellt werden, während auf der *anderen* die Summe der dort selbstverständlich gleichfalls convergirenden Reihe mit der betreffenden Function *nicht* übereinstimmt.

Obschon man mit Hülfe der von mir in dem mehrfach citirten Aufsatze betrachteten Ausdrücke**), wie:

$$(1) \qquad f(x)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\cdot\frac{1}{1+a^\nu x} \qquad (a>1)$$

ganz direct derartige Functionen erzeugen kann, erscheint es etwas

*) Die Reihe $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ wird, wie die Theorie der Fourier'schen Reihen lehrt, auf dem Kreise noch *bedingt* convergiren. Sie convergirt alsdann *ungleichmässig* in der Nähe der Stelle $\varphi=\pi$. Die durch gliedweise Differentiation von $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ hervorgehenden Reihen sind dagegen auf dem Convergenzkreise *divergent*.

**) Math. Ann. Bd. 42, p. 161.

einfacher, auf dem entsprechenden Wege zunächst eine unbeschränkt differenzirbare Function herzustellen, welche nur auf der *einen* Seite einer Stelle x_0 — etwa der Nullstelle — *identisch verschwindet*, auf der anderen von Null verschieden ist, ohne dass die Continuität *der Function und ihrer sämmtlichen Differentialquotienten* an der Nullstelle irgendwelche Unterbrechung erleidet.

Wie ich a. a O. gezeigt habe, ist die in Gl. (1) mit $f(x)$ bezeichnete Function an der Nullstelle nach *rechts* stetig und besitzt durchweg endliche *rechtsseitige* Differentialquotienten, es ist nämlich:

$$(2) \qquad f(0) = f(+0) = \frac{1}{e}, \quad f^{(n)}_{+}(0) = f^{(n)}(+0) = (-1)^n . n! \left(\frac{1}{e}\right)^{a^n}.$$

Nichtsdestoweniger wird $f(x)$ durch die entsprechende beständig convergirende Mac Laurin'sche Reihe:

$$(3) \qquad \varphi(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^\nu \left(\frac{1}{e}\right)^{a^\nu} \cdot x^\nu$$

nicht dargestellt.

In Folge dessen wird also der Ausdruck:

$$(4) \qquad \Phi(x) = \varphi(x) - f(x)$$

für $x = 0$ mit sämmtlichen rechtsseitigen Differentialquotienten *verschwinden*, und in der rechtsseitigen Nachbarschaft der Nullstelle mit sämmtlichen Differentialquotienten endlich und stetig sein, ohne daselbst *identisch zu verschwinden*. Daher würde eine Function $F(x)$, die für $x \leqq 0$ beständig den Werth 0, dagegen für $x \geqq 0$ den Werth $\Phi(x)$ hat, an der Nullstelle selbst mit sämmtlichen Differentialquotienten noch continuirlich sein. Wollte man nun aber versuchen eine solche Function $F(x)$ für irgend ein Intervall $(-c, +c)$ durch einen analytischen Ausdruck, etwa eine Fourier'sche Reihe wirklich darzustellen, so würde diese — wegen: $F(-c) = 0$, $F(+c) = \Phi(c)$ d. h. im allgemeinen *nicht* 0 — an den Grenzen nicht mehr gleichmässig convergiren und in Folge dessen auch *nicht gliedweise differenzirbar* sein, könnte also keinesfalls auch zur analytischen Darstellung der Differentialquotienten von $F(x)$ dienen.

Um diesem Uebelstande abzuhelfen, modificire ich nun die mit $F(x)$ bezeichnete Function noch folgendermassen. Bildet man:

$$(5) \qquad \Phi(1-x) = \varphi(1-x) - f(1-x),$$

so verhält sich offenbar dieser Ausdruck in der *linksseitigen* Nachbarschaft der Stelle $x = 1$ genau so, wie $\Phi(x)$ in der *rechtsseitigen* der Nullstelle, d. h. man hat:

$$(6) \qquad \Phi(1-0) = 0, \qquad \Phi^{(n)}(1-0) = 0.$$

Definirt man daher jetzt die Function $F(x)$ in der Weise, dass:

$$(7)\qquad \begin{cases} F(x) = 0 & \text{für:}\quad -1 \leqq x \leqq 0, \\ F(x) = \Phi(x) \,.\, \Phi(1-x) & \text{für:}\quad 0 \leqq x \leqq +1 \end{cases}$$

so wird die so definirte Function $F(x)$ für das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ nicht nur mit allen Differentialquotienten continuirlich sein, sondern auch noch die Eigenschaft besitzen, dass:

$$F\ \ (-1+0) = F\ \ (1-0) = 0,$$
$$F^{(n)}(-1+0) = F^{(n)}(1-0) = 0.$$

In Folge dessen lassen sich aber $F(x)$, $F^{(n)}(x)$ in *unbedingt und gleichmässig* convergirende Fourier'sche Reihen entwickeln, d. h. schliesslich: es lässt sich $F(x)$ durch eine unbeschränkt *gliedweise differenzirbare* Fourier'sche Reihe darstellen. Man erhält auf diese Weise:

$$(8)\qquad F(a) = \tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} (a_\nu \cos \nu\pi x + b_\nu \sin \nu\pi x)$$

wo:

$$(9)\qquad \left.\begin{matrix} a_\nu \\ b_\nu \end{matrix}\right\} = \int_0^1 \Phi(x) \cdot \Phi(1-x) \cdot \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \nu\pi x \cdot dx.$$

Bedeutet jetzt $\mathfrak{P}(x)$ eine für irgendwelche Umgebung der Nullstelle convergirende Potenzreihe, so wird der *analytische Ausdruck:*

$$(10)\qquad F_1(x) = F(x) + \mathfrak{P}(x)$$

in der Umgebung der Nullstelle durchweg endliche und stetige, durch litterale Ausführung der Differentiation herzustellende Differentialquotienten besitzen, aber nur *links* von der Nullstelle mit der *Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x)$ übereinstimmen.

Nimmt man speciell für $\mathfrak{P}(x)$ eine *beständig* convergirende Potenzreihe, die wie $F(x)$ die Periode 2 besitzt, z. B. $\mathfrak{P}(x) = \cos \pi x$, so wird der für jedes endliche x mit allen Differentialquotienten continuirliche Ausdruck:

$$(11)\qquad F_1(x) = \cos \pi x + F(x)$$

nur in allen denjenigen Intervallen, die *links* von einer *ungeraden*, *rechts* von einer *geraden* Zahl begrenzt werden, mit $\cos \pi x$ übereinstimmen. Daraus ergiebt sich, dass zwei *mit allen Differentialquotienten durchweg continuirliche* analytische Ausdrücke, auch wenn sie für unendlich viele *Strecken* einander *gleich* sind, dennoch *keineswegs identisch* zu sein brauchen.

München, Juli 1893.