Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen.

Zweite Abhandlung.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Heidelberg.)

In meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 81 p. 97) habe ich die Frage, unter welchen Umständen eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung algebraische Integrale besitze, auf die Frage zurückgeführt, wann gewisse aus der gegebenen eindeutig ableitbare lineare Differentialgleichungen, deren Ordnungszahl nicht grösser als zwölf, durch Wurzeln rationaler Functionen befriedigt werden. Zu diesem Behufe führte ich (das. p. 114) den Begriff der Primform ein, und zeigte, dass der Grad der Primformen niedrigsten Grades in keinem Falle den zwölften überschreite. Zu den Zwecken meiner dortigen Abhandlung war eine Reduction der möglichen Gestalten dieser Primformen auf das geringste Mass nicht erforderlich. Ich beschränkte mich aus diesem Grunde daselbst auf diejenigen Reductionen dieser Formen, welche eine unmittelbare Folge des Begriffes derselben sind, und stellte dieselben in einer Tabelle (p. 126 das.) zusammen.

Seitdem haben die Herren *F. Klein* und *C. Jordan* sich mit demselben Gegenstande beschäftigt. Insbesondere hat Herr *Klein* in einer Reihe von Abhandlungen, welche theils in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, theils in den Mathematischen Annalen enthalten sind, die Eigenschaften der algebraischen Gleichungen, deren Wurzeln linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen, zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht, und meine oben genannte Tabelle einer Reduction unterworfen.

In neuerer Zeit ist es auch Herrn *Gordan* gelungen (Mathem. Ann. Bd. 12 p. 147) die von mir in der Einleitung zu meiner oben genannten Abhandlung aufgestellte Aufgabe, die Formen n^{ten} Grades zu bestimmen, deren Covarianten niedrigeren als n^{ten} Grades identisch verschwinden, für binäre Formen zu lösen, und zu zeigen, dass dieselben mit meinen Primformen niedrigsten Grades zusammenfallen.

Bei Gelegenheit einer Note des Herrn *P. Pepin* (Comptes rendus de l'acad. des sc. de Paris Juni 1876) habe ich (das. Juli 1876) nachgewiesen, dass der Grad zwölf von den Primformen niedrigsten Grades auch wirklich erreicht wird.

In dem Folgenden erlaube ich mir zu zeigen, wie eine consequente Ausführung der Theorie der Primformen, bei welcher nicht bloss diejenigen niedrigsten Grades, sondern die *Gesammtheit* derselben in Betracht gezogen wird, die natürliche Grundlage für alle auf die hier betrachteten Differentialgleichungen bezüglichen Fragen bildet. Es wird gezeigt, wie durch dieselbe nicht blos die in meiner oben genannten Abhandlung gefundenen Resultate auf die einfachste Weise erhalten werden, sondern auch die endgültig möglichen Gestalten der Primformen niedrigsten Grades sich von selbst ergeben, und neue Eigenschaften der linearen Differentialgleichungen, denen die Wurzeln algebraischer Gleichungen genügen, so wie die Form dieser Gleichungen erkannt werden.

Meine Abhandlung (Bd. 81 p. 97) erlaube ich mir im Folgenden, der häufig vorkommenden Citate wegen, zur Abkürzung mit (*A.*) zu bezeichnen.

1.

I. *Der Grad m einer irreductiblen algebraischen Gleichung, deren Wurzeln einer Differentialgleichung*

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py \quad \text{(Gl. (B.) in } A. \text{ p. 102)}$$

genügen, ist eine gerade Zahl.

Ist nämlich L' der Index des zu der *Hesse*schen Covariante einer Primform niedrigsten Grades N gehörigen reducirten Wurzelsystems, so besteht (*A.* p. 118) die Gleichung:

$$m = (2N-4)L',$$

woraus sich unsere Behauptung ergiebt.

II. *Der Grad einer beliebigen Primform, ebenso wie der Index des zugehörigen reducirten Wurzelsystems ist ein Divisor des zur Differentialgleichung gehörigen Grades m.*

In der That sei n der Grad einer beliebigen Primform und l der Index des zugehörigen reducirten Wurzelsystemes, so ist (*A.* p. 113)

$$m = nl.$$

III. *Es sei y_1, y_2 ein beliebiges Fundamentalsystem von Integralen, c_1, c_2 willkürliche Constanten, so ist die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems der Gleichung, welcher $c_1 y_1 + c_2 y_2$ genügt, m oder $\frac{m}{2}$.*

Sind nämlich unter den Wurzeln der Gleichung, welcher $c_1 y_1 + c_2 y_2$ genügt, zwei solche, deren Quotient gleich einer Einheitswurzel j, so ist (nach dem Satze *A.* p. 112) $j(c_1 y_1 + c_2 y_2)$ eine Wurzel derselben Gleichung. Da diese Gleichung irreductibel ist, so geht auf einem gewissen Wege $c_1 y_1 + c_2 y_2$ in $j(c_1 y_1 + c_2 y_2)$ über. Es mögen nun auf demselben Wege y_1, y_2 resp. in $\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2$, $\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2$ übergehen, so folgt:

$$(1.) \quad \begin{cases} c_1 \alpha_{11} + c_2 \alpha_{21} = j c_1, \\ c_1 \alpha_{12} + c_2 \alpha_{22} = j c_2. \end{cases}$$

Sollen diese Gleichungen für beliebige Werthe von c_1, c_2 bestehen, so ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(2.) \quad \begin{cases} \alpha_{11} = \alpha_{22} = j, \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0. \end{cases}$$

Da aber (*A.* p. 105) $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$, so müsste $j^2 = 1$, d. h. wegen der Irreductibilität der Gleichung, welcher $c_1 y_1 + c_2 y_2$ genügt:

$$(3.) \quad j = -1$$

sein. Es ist demnach der Index des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung entweder 1 oder 2, d. h. die Anzahl der Glieder des Systems m oder $\frac{m}{2}$.

Diese Anzahl stellt zu gleicher Zeit den grösstmöglichen Grad einer Primform dar, wir wollen diesen mit μ bezeichnen.

Die verschiedenen Werthe, welche y_1, y_2 annehmen können, sind in der Form $\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2$, $\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2$ enthalten. Sind γ_1, γ_2 bestimmte Constanten, so kann man auf unzählig viele verschiedene Arten c_1, c_2 so wählen, dass die Gleichungen (1.) nur für die Werthe (2.) und (3.) bestehen können und dass die den verschiedenen Werthen von y_1, y_2 entsprechenden Gleichungen:

$$c_1 \alpha_{11} + c_2 \alpha_{21} = \gamma_1,$$
$$c_1 \alpha_{12} + c_2 \alpha_{22} = \gamma_2$$

nicht erfüllt werden. Die Primform μ^{ten} Grades, von der $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ein Linearfactor ist, ist alsdann nicht durch $\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$ theilbar. Hieraus ergiebt sich, wenn wir, wie im Folgenden immer, Formen als identisch oder von einander verschieden bezeichnen, je nachdem sie bis auf einen constanten Factor gleich sind oder nicht:

IV. *Der höchste Grad* μ *einer Primform ist* m *oder* $\frac{m}{2}$, *und es giebt unzählig viele von einander verschiedene Primformen dieses höchsten Grades.*

2.

I. *Ist* f *eine Primform niedrigsten Grades* N, $H(f)$ *ihre Hessesche Covariante,* $H^2(f)$ *die Hessesche Covariante von* $H(f)$, *so ist eine Gleichung*

$$H(f)^3 = \gamma f^2 H^2(f) \quad (\gamma \text{ constant})$$

nicht möglich.

Denn f und $H(f)$ als Primformen können einen gemeinschaftlichen linearen Factor nur haben, wenn sie identisch sind (*A.* p. 114, S. IV.); hierzu wäre aber erforderlich, dass

$$2N-4=N, \quad \text{d. h.} \quad N=4.$$

Ist N von 4 verschieden, so müsste demnach, wenn die obige Gleichung stattfände, $H^2(f)$ durch $H(f)^3$ theilbar sein, dieses ist aber nicht möglich, da der Grad der letzteren Form höher ist als der der ersteren.

Ist $N=4$, so wähle man ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von der Beschaffenheit, dass y_2 ein Factor von f ist, alsdann hat f die Form

$$f = 4a_1 y_1^3 y_2 + 6a_2 y_1^2 y_2^2 + 4a_3 y_1 y_2^3 + a_4 y_2^4.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$H(f) = -12^2 a_1^2 y_1^4 + \cdots.$$

Da nun a_1 nicht verschwinden darf, weil f als Primform nicht durch y_2^2 theilbar ist, so folgt, dass $H(f)$ nicht durch y_2 theilbar, also von f verschieden ist. Demnach ist der Satz auch für diesen Fall bewiesen.

Es sei nun F eine Primform μ^{ten} Grades, welche mit keiner der Formen f, $H(f)$, $H^2(f)$ einen gemeinschaftlichen Linearfactor hat — nach S. IV voriger Nr. giebt es unzählig viele derartige Formen — so kann man nach S. I eine Constante λ so bestimmen, dass

$$\varphi = H(f)^3 - \lambda f^2 H^2(f)$$

durch einen Linearfactor von F theilbar wird, ohne dass φ identisch verschwindet.

Da $H(f)$, $H^2(f)$ homogene Functionen der Coefficienten von f, resp. des zweiten und vierten Grades sind, so bleibt der Quotient $\frac{f^2 H^2(f)}{H(f)^3}$ unverändert, wenn f in jf übergeht. Dieser Quotient bleibt also für jeden Weg der Variabeln z unverändert, er ist also eine rationale Function von z. Hieraus ergiebt sich aber, dass φ gleich ist der Wurzel einer rationalen Function und nach (*A.* p. 115, S. VI) durch F theilbar ist. Man erhält daher den Satz:

II. *Ist μ der höchste und N der niedrigste Grad einer Primform, so muss*

$$\mu \leqq 6N-12$$

sein.

Es sei L der Index eines reducirten Wurzelsystems von der kleinsten Anzahl N, so ist (*A.* p. 115)

$$m = NL.$$

Es ist demnach nach S. II dieser Nummer und S. IV voriger Nummer

1) entweder

$$NL \leqq 6N-12, \quad (\mu = m),$$

2) oder

$$NL \leqq 12N-24, \quad \left(\mu = \frac{m}{2}\right),$$

also

III. *Je nachdem* $\mu = m$ *oder* $\mu = \frac{m}{2}$, *ist* $L < 6$ *oder* $L < 12$.

Dieses ist der Fundamentalsatz unserer Abhandlung in Bd. 81 dieses Journals (p. 122 daselbst).

Die gegenwärtige von der dortigen verschiedene Herleitung desselben zeichnet sich vor jener dadurch aus, dass sie ohne Anwendung anderer Hülfsmittel als der Entwickelung des Primformenbegriffs sich ergiebt.

IV. *Ist eine Form g gleich der Wurzel einer rationalen Function, so sind*

$$\frac{H(g)}{g^2} \quad \text{und} \quad \frac{H^2(g)}{g^4}$$

rationale Functionen.

Da nämlich die verschiedenen Werthe, welche g annimmt, die Form jg haben, wo j eine Einheitswurzel bedeutet, so sind die verschiedenen Werthe von $H(g)$, $H^2(g)$ resp. der Form $j^2H(g)$, $j^4H^2(g)$ (*A.* p. 106), woraus die Richtigkeit des Satzes hervorgeht.

V. *Der Index des reducirten Wurzelsystems einer beliebigen irreductiblen Gleichung, deren Wurzeln der Differentialgleichung genügen, ist eine gerade Zahl.*

Zunächst ist ersichtlich, *dass der Index eines jeden reducirten Wurzelsystems eine gerade Zahl ist, wenn dieses für ein einziges System feststeht.*

Denn es gehöre ein Integral y_1 zu einem beliebigen Wurzelsystem, dessen Index $2l$ eine gerade Zahl ist, und es werde eine primitive $2l^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit mit j bezeichnet. Es giebt alsdann (*A.* p. 108 und 109) ein zweites Integral y_2, welches mit y_1 ein Fundamentalsystem bildet und nach Vollziehung desselben Umlaufes, auf welchem y_1 in $y_1 j$ übergeht, sich in $y_2 j^{-1}$ verwandelt. Eine l-malige Wiederholung desselben Umlaufes führt aber y_1 und y_2 gleichzeitig resp. in $-y_1$ und $-y_2$ über. Auf demselben Wege muss demnach *jedes* Integral, als lineare homogene Function von y_1, y_2, seinen entgegengesetzten Werth erhalten. Eine irreductible Gleichung muss aber die sämmtlichen Werthe, die eine Wurzel derselben annimmt, als Wurzeln enthalten. Hieraus folgt, dass wenn die Wurzeln irgend einer irreductiblen Gleichung der Differentialgleichung genügen, dieselben zu je zweien einander gleich und entgegengesetzt sind, d. h. dass der Index des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung eine gerade Zahl ist (*A.* p. 113).

Ist n die Anzahl der Glieder eines reducirten Wurzelsystems, l der Index desselben, so ergiebt die Gleichung $m = nl$ nach S. I No. 1, dass, wenn eine der beiden Zahlen n, l ungerade, die andere gerade sein müsse. Wenn demnach l für *jedes* reducirte Wurzelsystem eine ungerade Zahl wäre, so müsste der Grad *jeder* Primform, also nach (*A.* p. 115 S. V) der Grad *jeder* Form, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function ist, eine gerade Zahl sein. In der Gleichung, welcher das reducirte Wurzelsystem mit dem Index l genügt, sind (*A.* p. 99) die Exponenten der Unbekannten y durch l theilbar. Der Coefficient a_{m-li} von y^{m-li} ist eine rationale Function von z und durch eine Form li^{ten} Grades darstellbar. Demnach ist $a_{m-li} = 0$, wenn nicht i eine gerade Zahl. Die Gleichung enthielte also nur solche Potenzen von y, deren Exponenten durch $2l$ theilbar wären, d. h. (*A.* p. 111) der Index des reducirten Wurzelsystems wäre nicht l sondern $2l$.

Demnach muss mindestens ein reducirtes Wurzelsystem, folglich nach dem eben bewiesenen Hülfssatz *jedes* reducirte Wurzelsystem einen geradzahligen Index besitzen.

3.

Aus der Gleichung

$$m = NL = (2N-4)L' \tag{1.}$$

folgt, dass $\dfrac{LN}{2N-4}$ eine ganze Zahl ist. Setzen wir

$$(2.)\quad \frac{2L}{N-2} = \varrho,$$

so ist

$$(3.)\quad \frac{LN}{2N-4} = L' = \tfrac{1}{2}(L+\varrho).$$

Demnach ist ϱ eine *ganze* Zahl.

Nach Satz V voriger No. ist L' eine gerade Zahl, also

$$(4.)\quad L+\varrho \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4).$$

Da nach S. III und S. V voriger No. L eine gerade Zahl und kleiner als 12 ist, so ergiebt die Bedingung, dass ϱ eine ganze Zahl ist, welche der Congruenz (4.) genügt,

$$\text{für } N > 4$$

folgende Combinationen

$$\begin{aligned} L &= 6, & N &= 8 \\ L &= 8, & N &= 6 \\ L &= 10, & N &= 12. \end{aligned}$$

Die Combination $L = 6$, $N = 8$ liefert

$$m = 48$$

und nach S. III voriger No.

$$\mu = 24.$$

Nach S. II No. 1 wäre demnach der Grad einer beliebigen Primform im gegenwärtigen Falle eine der Zahlen 8, 12, 24, also stets durch 4 theilbar. Da jede Form $\varphi(y_1, y_2)$, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function, (*A.* p. 115) sich in ein Produkt von Primformen zerlegen lässt, so ist der Grad derselben durch 4 theilbar.

Es sei nunmehr y ein Linearfactor einer Primform f achten Grades, so genügt y einer Gleichung 48ten Grades, in welcher die Exponenten der Potenzen der Unbekannten durch 6 theilbar sind, weil der Index des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung gleich 6 angenommen worden. Da sich aber andererseits die Coefficienten der Potenzen der Unbekannten als ganze homogene Functionen $\varphi(y_1, y_2)$ von y_1, y_2 darstellen lassen und diese rationale Functionen von z sind, so folgt aus dem eben Bewiesenen, dass nur die Coefficienten derjenigen Potenzen von Null verschieden sein können, deren Exponenten durch 4 theilbar sind. Demnach genügt y einer Gleichung 48ten Grades, in welcher die Exponenten der Potenzen der Unbekannten durch 12 theilbar sind. Da aber die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung gleich 4 wäre, so ergäbe sich, dass schon eine Form vierten Grades gleich der Wurzel einer rationalen Function wäre, gegen die Voraussetzung.

Demnach ist die Combination $L=6$, $N=8$ *auszuschliessen. Es verbleiben demnach für* $N>4$ *die Combinationen*

$$(5.)\qquad \begin{cases} L=8, & N=6; \\ L=10, & N=12. \end{cases}$$

4.

Für die Combination $L=8$, $N=6$ hat eine Primform niedrigsten Grades (*A.* p. 125) die Gestalt

$$f = a_1 y_1^5 y_2 + a_5 y_1 y_2^5,$$

wo y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen ist, welche auf demselben Wege resp. in $y_1 j$, $y_2 j^{-1}$ übergehen, wenn j eine primitive achte Wurzel der Einheit bedeutet. (*A.* p. 123).

Da y_1, y_2 mit beliebigen constanten Factoren multiplicirt werden können, so ist

$$\text{für}\quad L=8,\quad N=6$$

$$(1.)\qquad f_6 = y_1^5 y_2 + y_1 y_2^5$$

eine Primform niedrigsten Grades.

Für die Combination $L=10$, $N=12$ hat die Primform niedrigsten Grades (*A.* p. 125) die Form

$$f = a_1 y_1^{11} y_2 + a_6 y_1^6 y_2^6 + a_{11} y_1 y_2^{11},$$

wo y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen bilden, welche auf demselben Wege resp. in $y_1 j$, $y_2 j^{-1}$ übergehen, wenn j eine primitive zehnte Wurzel der Einheit ist.

Damit die Covariante

$$\frac{\partial^8 f}{\partial y_1^8}\frac{\partial^8 f}{\partial y_2^8} - 8\frac{\partial^8 f}{\partial y_1^7\partial y_2}\frac{\partial^8 f}{\partial y_1\partial y_2^7} + \cdots$$

als Form achten Grades (S. *A.* p. 98) identisch verschwinde, ist erforderlich, dass

$$a_6^2 + 11^2 a_1 a_{11} = 0.$$

Da überdiess y_1, y_2 mit beliebigen constanten Factoren multiplicirt werden können, so ist für

$$L = 10, \quad N = 12$$

$$(2.) \qquad f_{12} = y_1^{11}y_2 + 11y_1^6y_2^6 - y_1y_2^{11}$$

eine Primform niedrigsten Grades *).

Die Formen (1.) *und* (2.) *besitzen die Eigenschaft:*

$$(3.) \qquad H^2(f_6) = \text{Const.} f_6^2,$$

$$(4.) \qquad H^2(f_{12}) = \text{Const.} f_{12}^3.$$

5.

Ist $N > 4$, so ist nach Gleichung (5.) No. 3, $L = 8$ oder 10, also nach S. III. No. 2, $\mu = \frac{m}{2}$. Man hat demnach

a) für die Combination $L = 8$, $N = 6$, $m = 48$, $\mu = 24$,

b) für die Combination $L = 10$, $N = 12$, $m = 120$, $\mu = 60$.

Im Falle a) könnte demnach nach S. II. No. 1 der Grad n einer Primform nur eine der Zahlen $n = 6, 8, 12, 16, 24$ sein. Da aber nach S. V. No. 2 das zu jedem n gehörige l eine gerade Zahl sein muss, so ist $n = 16$ auszuschliessen, dessen zugehöriges l den Werth 3 hätte.

Im Falle b) kann der Grad einer Primform nur durch eine der Zahlen $n = 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60$ dargestellt werden. Hiervon sind die Zahlen $n = 24$, $n = 40$ auszuschliessen, weil denselben resp. die ungradzahligen Werthe $l = 5$, $l = 3$ entsprechen würden. Gäbe es eine Primform φ vom 15ten Grade, so wäre $H(\varphi)$ vom Grade 26. Diese Form müsste nach (*A.* p. 115) sich in ein Product von Primformen niedrigeren als 26sten Grades zerlegen lassen, was nicht möglich ist.

Man erhält also den Satz:

Für $N = 6$, $L = 8$ *ist der Grad einer Primform durch eine der Zahlen* 6, 8, 12, 24; *für* $N = 12$, $L = 10$ *durch eine der Zahlen* 12, 20, 30, 60 *bestimmt.*

6.

Es seien ψ und χ zwei beliebige Formen n^{ten} Grades des Fundamentalsystems, so folgt aus den Gleichungen:

---

*) Diese beiden Formen (1.) und (2.) stimmen bis auf constante Factoren mit denjenigen überein, auf welche Herr *Klein* die Tabelle in meiner Abhandlung p. 126 reducirt hat.

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}y_1+\frac{\partial\psi}{\partial y_2}y_2=n\psi,\quad \frac{\partial\chi}{\partial y_1}y_1+\frac{\partial\chi}{\partial y_2}y_2=n\chi,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}y_1'+\frac{\partial\psi}{\partial y_2}y_2'=\psi',\quad \frac{\partial\chi}{\partial y_1}y_1'+\frac{\partial\chi}{\partial y_2}y_2'=\chi',$$
$$y_1'=\frac{dy_1}{dz},\quad y_2'=\frac{dy_2}{dz},\quad \psi'=\frac{d\psi}{dz},\quad \chi'=\frac{d\chi}{dz}$$

und unter Berücksichtigung von (*A.* p. 104 Gl. (2.))

$$(1.)\qquad \chi\frac{\partial\psi}{\partial y_1}-\psi\frac{\partial\chi}{\partial y_1} = Cy_2(\chi\psi'-\chi'\psi),$$

wo C eine Constante bedeutet.

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch y_2 theilbar.

Sind ψ und χ Wurzeln rationaler Functionen, so ist auch $\chi\psi'-\chi'\psi$ Wurzel einer rationalen Function. Man erhält demnach den Satz:

I. *Sind ψ und χ Formen desselben Grades und jede gleich der Wurzel einer rationalen Function, so ist auch die Form*

$$G(\psi,\chi)=\frac{1}{y_2}\left(\chi\frac{\partial\psi}{\partial y_1}-\psi\frac{\partial\chi}{\partial y_1}\right)$$

gleich der Wurzel einer rationalen Function.

Ist das eine Glied y_1 des Fundamentalsystems y_1, y_2 Linearfactor einer Primform f niedrigsten Grades N und $y_2=y_1^{L-1}\psi(y_1^L)$ (s. *A.* p. 123), so ist eine beliebige von f verschiedene Primform φ nicht durch y_1 theilbar (*A.* p. 114 S. IV.), dieselbe enthält demnach das von y_1 unabhängige Glied. Hieraus folgt aber wie in (*A.* p. 123 Gl. (4.) No. 18), dass φ die Form hat

$$(2.)\qquad \varphi = y_1^{\frac{1}{2}L}.\varphi_1+a_n y_2^n,$$

wo n den Grad von φ, und φ_1 eine Form $(n-\frac{1}{2}L)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet.

Es seien nunmehr ψ und χ zwei Primformen n^{ten} Grades, welche sowohl unter einander als auch von f verschieden sind, so ist $\chi\psi'-\chi'\psi$, also auch die Form $G(\psi,\chi)$ von Null verschieden. Nach S. I. ist dieselbe gleich der Wurzel einer rationalen Function, nach Gleichung (2.) ist sie durch $y_1^{\frac{1}{2}L-1}$ theilbar, folglich ist diese Form (*A.* p. 115 S. VI.) durch $f^{\frac{1}{2}L-1}$ theilbar. Der Quotient ist entweder eine Constante, oder als Wurzel einer rationalen Function mindestens vom N^{ten} Grade. Es ist also entweder

$$(3.)\qquad n=\tfrac{1}{4}NL-\tfrac{1}{2}N+1$$

oder

$$(3^a.)\qquad n\geqq\tfrac{1}{4}LN+1.$$

Für den Fall

$$(a.)\qquad N=6,\quad L=8$$

wäre demnach entweder

$$n = 10 \quad \text{oder} \quad n \geqq 13.$$

Für den Fall

$$(b.) \qquad N = 12, \quad L = 10$$

wäre entweder

$$n = 25 \quad \text{oder} \quad n \geqq 31.$$

Nach dem Satze voriger Nummer giebt es also für den Fall $(a.)$ nur je eine Primform 8^{ten} und 12^{ten} Grades, für den Fall $(b.)$ nur je eine des 20^{sten} und 30^{sten} Grades.

Es giebt aber überdiess ausser f nicht noch eine Primform f' N^{ten} Grades; da sonst nach S. I. $G(f, f')$ eine Form $(2N-2)^{\text{ten}}$ Grades wäre, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function. Aber für $N = 6$ giebt es keine solche Form 10^{ten}, und für $N = 12$ keine solche 22^{sten} Grades, weil diese weder Primformen sind noch sich in Producte aus den Primformen verwandeln lassen.

Man erhält also den Satz:

II. *Ist $n < \mu$, so giebt es nicht zwei verschiedene Primformen n^{ten} Grades.*

7.

I. *Das Quadrat der Primform f_6 und die Primform $H(f_6)$ sind rationale Functionen von z.*

Nach S. IV. No. 2 ist nämlich $\frac{H^3(f_6)}{f_6^4}$ rational. Nach No. 4 Gl. (3.) ist $H^2(f_6) = \text{Const.} f_6^2$, woraus sich ergiebt, dass f_6^2, also auch nach S. IV. No. 2 $H(f_6)$ rational ist.

Bezeichnen wir mit $\bar{H}(f_6)$ die von ihrem numerischen Factor befreite *Hesse*sche Covariante von f_6, so ist

$$(1.) \qquad \bar{H}(f_6) = y_1^8 - 14 y_1^4 y_2^4 + y_2^8.$$

Damit die Form

$$(2.) \qquad \psi = \bar{H}(f_6)^3 + \lambda f_6^4 \qquad (\lambda \text{ constant})$$

durch das Quadrat eines Ausdruckes $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ theilbar werde, muss der letztere Ausdruck ein Linearfactor der Form:

$$4\bar{H}(f_6)\frac{\partial f_6}{\partial y_1} - 3 f_6 \frac{\partial \bar{H}(f_6)}{\partial y_1}$$

d. h. der Form

$$(3.) \qquad \varphi_{12} = (y_1^4 - y_2^4)(y_1^8 + 34 y_1^4 y_2^4 + y_2^8)$$

sein.

Ist $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ ein Linearfactor von φ_{12} und wird λ so bestimmt, dass ψ durch $(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^2$ theilbar wird, so ist (*A.* p. 115 S. VI.) ψ durch das Quadrat derjenigen Primform theilbar, wovon $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ ein Linearfactor ist, da ψ nach S. I. eine rationale Function von z ist. Demnach müssen sämmtliche Linearfactoren von χ, also χ selber Factoren von φ_{12} sein. Die Primform χ ist aber von f_6 verschieden, weil φ_{12} nicht durch y_1 theilbar ist, und von $H(f_6)$ verschieden, weil sonst χ auch Divisor von f_6 sein müsste (nach Gl. (2.)). Die Primform χ ist also 12ten Grades, und demnach mit φ_{12} identisch.

Es ist also $\psi = \varphi_{12}^2$. Setzt man diesen Werth in Gl. (2.) und bestimmt die Constante λ durch Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten, so erhält man

$$(4.)\qquad \varphi_{12}^2 = \overline{H}(f_6)^3 + 108 f_6^4.$$

II. ***Es ist also φ_{12} die Primform 12ten Grades, und ihr Quadrat eine rationale Function von z.***

III. ***Die Primform f_{12} und die Primform $H(f_{12})$ sind rationale Functionen von z.***

In der That ist (Gl. (4.) No. 4) $H^2(f_{12}) = \text{Const.}\, f_{12}^3$, und nach S. IV. No. 2 $\dfrac{H^2(f_{12})}{f_{12}^4}$ rational, also auch f_{12}, und nach demselben Satze $H(f_{12})$ rationale Functionen.

Bezeichnen wir wieder mit $\overline{H}(f_{12})$ die vom numerischen Factor befreite Form $H(f_{12})$, so ist

$$(5.)\qquad \overline{H}(f_{12}) = y_1^{20} - 228 y_1^{15} y_2^5 + 494 y_1^{10} y_2^{10} + 228 y_1^5 y_2^{15} + y_2^{20}.$$

Setzen wir

$$(6.)\qquad \varphi_{30} = (y_1^{10} + y_2^{10})(y_1^{20} + 522 y_1^{15} y_2^5 - 10006 y_1^{10} y_2^{10} - 522 y_1^5 y_2^{15} + y_2^{20}),$$

so ergiebt sich, wie oben, dass φ_{30} eine Primform, und die Gleichung

$$(7.)\qquad \varphi_{30}^2 = \overline{H}(f_{12})^3 + 1728 f_{12}^5, \quad \text{also:}$$

IV. ***Die Form φ_{30} ist die Primform 30sten Grades, und ihr Quadrat eine rationale Function von z.***

Unter Zuhülfenahme des Satzes II. No. 6 und des Satzes in No. 5 ergiebt sich also:

V. ***Es giebt***

für $N = 6$ $L = 8$ ausser f_6, $H(f_6)$, φ_{12} und den in unendlicher Anzahl vorhandenen Primformen 24sten Grades,

und für $N = 12$ $L = 10$ ausser f_{12}, $H(f_{12})$, φ_{30} und den in unendlicher Anzahl vorhandenen Primformen 60^{sten} Grades keine anderen Primformen.

VI. *Für $N = 6$ $L = 8$ ist jede Primform F 24^{sten} Grades in der Form*

$$(8.) \qquad \Phi_{24} = \nu \bar{H}(f_6)^3 + \lambda f_6^4,$$

für $N = 12$ $L = 10$ ist jede Primform F 60^{sten} Grades in der Form

$$(8^a.) \qquad \Phi_{60} = \nu \bar{H}(f_{12})^3 + \lambda f_{12}^5$$

enthalten, und umgekehrt sind Φ_{24}, Φ_{60} Primformen 24^{sten} resp. 60^{sten} Grades, wenn nicht $\lambda = 0$ oder $\nu = 0$ oder resp. $\frac{\lambda}{\nu} = 108$, $\frac{\lambda}{\nu} = 1728$.

Man darf in der That nur ν und λ so bestimmen, dass Φ_{24} resp. Φ_{60} durch einen Linearfactor von F theilbar wird. Diese Formen sind alsdann (*A.* p. 115 S. VI.) durch F theilbar. Der Quotient ist eine von Null verschiedene Constante, weil die genannten Formen mit F von gleichem Grade sind und nur für $\lambda = \nu = 0$ identisch verschwinden können. Der zweite Theil des Satzes folgt daraus, dass, wenn nicht $\lambda = 0$ oder $\nu = 0$, Φ_{24} resp. Φ_{60} weder durch f noch durch $H(f)$ theilbar sein kann, und resp. durch φ_{24} und φ_{60} nur theilbar ist für $\frac{\lambda}{\nu} = 108$ resp. $\frac{\lambda}{\nu} = 1728$. Da also die Formen Φ_{24}, Φ_{60} ausser in diesen Fällen nicht in Primformen niedrigeren Grades zerlegbar sind, so sind sie selber Primformen.

Sind F_1, F_2, F_3 drei Primformen μ^{ten} Grades, so folgt aus ihrer Darstellung durch Gl. (8.) resp. (8^a.) der Satz:

VII. *Die sämmtlichen Primformen μ^{ten} Grades sind rationale Functionen. Zwischen je drei derselben findet eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt.*

8.

Es sei

$$(1.) \qquad f_6 = \chi(z),$$

wo $\chi(z)$ die Quadratwurzel einer rationalen Function von z, so ergiebt sich aus (*A.* p. 128 Gl. (8.))

$$(2.) \qquad \bar{H}(f_6) = C\left[\left(\frac{d\log\chi(z)}{dz}\right)^2 + 6\frac{d^2\log\chi(z)}{dz^2} - 36P\right]\chi(z)^2 = \chi_1(z),$$

wo C eine Constante.

Die mit noch zu bestimmenden Constanten zu multiplicirenden Linearfactoren von f_6 genügen einer Gleichung 48^{sten} Grades

$$(\text{A.}) \qquad y^{48} + p_1 y^{40} + p_2 y^{32} + p_3 y^{24} + p_4 y^{16} + p_5 y^8 + p_6 = 0.$$

Wir wollen die Coefficienten dieser Gleichung als ganze homogene Functionen der rationalen Functionen $\chi(z)^2$ und $\chi_1(z)$ darstellen.

Es seien α, α_1, β, β_1, γ, γ_1 noch zu bestimmende Constanten, η eine primitive 4te Wurzel der negativen Einheit, so sind die 8ten Potenzen der Wurzeln der Gl. (A.)

$$\alpha y_1^8,\quad \alpha_1 y_2^8,\quad \beta(y_1-\eta y_2)^8,\quad \beta_1(y_1+\eta y_2)^8,\quad \gamma(y_1-i\eta y_2)^8,\quad \gamma_1(y_1+i\eta y_2)^8.$$

Die Coefficienten p_1, p_2, ... sind Formen, welche gleich rationalen Functionen von z sind. Der Coefficient p als der negative Werth der Summe der 8ten Potenzen der Wurzeln ist eine Form 8ten Grades, demnach eine Primform, weil p_1 nicht verschwinden kann, ohne dass auch α verschwindet, was nicht möglich ist. Nach S. V. voriger Nummer ist also

$$(3.)\qquad p_1 = \lambda_1 \overline{H}(f_6),$$

wo λ_1 eine Constante. Durch Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten ergiebt sich

$$\alpha_1 = \alpha,\quad \beta_1 = \beta = \gamma_1 = \gamma = \tfrac{1}{16}\alpha,\quad \lambda_1 = \tfrac{5}{4}\alpha.$$

Wählen wir $\alpha = 16$, so dass $\sqrt{2}.y_1$ der Gleichung (*A.*) genügt, so sind die achten Potenzen der Wurzeln derselben:

$$(\omega.)\qquad 16y_1^8,\quad 16y_2^8,\quad (y_1-\eta y_2)^8,\quad (y_1+\eta y_2)^8,\quad (y_1-i\eta y_2)^8,\quad (y_1+i\eta y_2)^8$$

und

$$\lambda_1 = 20.$$

Bezeichnet man mit s_k die $k$te Potenzsumme der Grössen (ω.), so ist s_k eine Form $8k$ten Grades, welche gleich einer rationalen Function. Zerlegt man diese Form, unter Berücksichtigung der Gleichung (4.) in No. 7 und der Sätze V. und VI. derselben Nummer, in Primformen, so ergiebt sich folgende Gestalt derselben:

$$(4.)\qquad \begin{cases} s_2 = \lambda_2 \mathrm{H}^2, \\ s_3 = \lambda_3 \mathrm{H}^3 + \mu_3 f^4, \\ s_4 = \lambda_4 \mathrm{H}^4 + \mu_4 f^4 \mathrm{H}, \\ s_5 = \lambda_5 \mathrm{H}^5 + \mu_5 f^4 \mathrm{H}^2, \end{cases}$$

wo H und f zur Abkürzung für $\overline{H}(f_6)$ resp. f_6 gesetzt ist.

Die Grössen λ und μ werden durch Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten dieser Gleichungen bestimmt.

Mit Hülfe der Gleichungen (4.) werden alsdann die Coefficienten p_2, p_3, p_4, p_5 berechnet, während p_6 als Product der Grössen (ω.) die

Form hat:

$$(5.)\qquad p_6 = \lambda_6 f_6^8.$$

Die Vergleichung zweier Coefficienten auf beiden Seiten liefert

$$\lambda_6 = 16^2.$$

Man erhält demnach

$$(6.)\qquad \begin{cases} p_1 = -20\chi_1, \quad p_2 = 70\chi_1^2, \\ p_3 = -100\chi_1^3 - 14.3088\chi^4, \quad p_4 = 65\chi_1^4 - 40.424\chi_1\chi^4, \\ p_5 = -16\chi_1^5 - 1248\chi_1^2\chi^4, \quad p_6 = 16^2\chi^8, \end{cases}$$

wo χ, χ_1 zur Abkürzung für $\chi(z)$ resp. $\chi_1(z)$ gesetzt ist.

9.

Es sei wiederum

$$(1.)\qquad f_{12} = \chi(z),$$

wo $\chi(z)$ eine rationale Function von z, so ergiebt sich aus (*A.* p. 128 Gl. (8.))

$$(2.)\qquad \overline{H}(f_{12}) = C\Big[\Big(\frac{d\log\chi(z)}{dz}\Big)^2 + 12\frac{d^2\log\chi(z)}{dz^2} - 12^2 P\Big]\chi^2(z) = \chi_1(z).$$

Die mit bestimmten Constanten multiplicirten Linearfactoren von f_{12} genügen einer Gleichung 120sten Grades, welche nur solche Potenzen der Unbekannten enthält, deren Exponenten durch zehn theilbar.

Bezeichnet man also die beiden Wurzeln der Gleichung

$$(3.)\qquad x^2 + 11x - 1 = 0$$

mit p^5, q^5, ferner mit η eine primitive fünfte Wurzel der Einheit, endlich die zehnten Potenzen der Glieder des reducirten Wurzelsystems der Gleichung mit

$$\alpha y_1^{10}, \quad \alpha_1 y_1^{10}, \quad \beta_k(y_1 - p\eta^k y_2)^{10}, \quad \gamma_k(y_1 - q\eta^k y_2)^{10}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

so ergiebt die Bedingung, dass die Summe dieser Grössen als eine Form zehnten Grades, welche gleich einer rationalen Function, (in Folge der Voraussetzung $N = 12$) identisch verschwinden muss,

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \frac{-q^5}{5(q^5 - p^5)}\cdot\alpha,$$

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \frac{p^5}{5(q^5 - p^5)}\cdot\alpha.$$

Demnach sind die zehnten Potenzen der Wurzeln der Gleichung, welcher $\sqrt[4]{5}\,y_1$ genügt:

$$(\omega.)\qquad 25\sqrt{5}\,y_1, \quad 25\sqrt{5}\,y_2, \quad -q^5(y_1 - \eta^k p y_2)^{10}, \quad p^5(y_1 - \eta^k q y_2)^{10}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

und diese Gleichung lautet:

(B.) $y^{120}+p_2y^{100}+p_3y^{90}+p_4y^{80}+p_5y^{70}+p_6y^{60}+p_7y^{50}+p_8y^{40}+p_9y^{30}+p_{10}y^{20}+p_{11}y^{10}+p_{12}=0.$

Bezeichnet man wieder mit s_k die k^{te} Potenzsumme der Grössen (ω.), und zerlegt die Formen $10k^{\text{ten}}$ Grades in Primformen, so ergiebt sich unter Zuhülfenahme der Sätze II., IV., V. in No. 7 eine Darstellung derselben als ganze homogene Functionen von f_{12}, $\overline{H}(f_{12})$, φ_{30}, in welcher die Coefficienten durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten bestimmt werden. Aus den Potenzsummen ergeben sich alsdann *folgende Werthe der Coefficienten p als ganze homogene Functionen* von $\chi(z)$, $\chi_1(z)$, und von

$$\varphi_{30}(z) = \sqrt{\chi_1(z)^3+1728\chi(z)^5}:$$

$$(4.)\quad \begin{cases} p_2 = \varkappa_2\chi_1, \quad p_3 = \lambda_3\varphi, \quad p_4 = \varkappa_4\chi_1^2, \quad p_5 = \lambda_5\chi_1\varphi, \\ p_6 = \varkappa_6\chi_1^3+\lambda_6\chi^5, \quad p_7 = \lambda_7\chi_1^2\varphi, \quad p_8 = \varkappa_8\chi_1^4+\lambda_8\chi_1\chi^5, \\ p_9 = \lambda_9\chi_1^3\varphi+\mu_9\chi^5\varphi, \quad p_{10} = \varkappa_{10}\chi_1^5+\lambda_{10}\chi_1^2\chi^5, \\ p_{11} = \lambda_{11}\chi_1^4\varphi+\mu_{11}\chi^5\chi_1\varphi, \quad p_{12} = 5^5.\chi^{10}, \end{cases}$$

wo χ, χ_1, φ zur Abkürzung für resp. $\chi(z)$, $\chi_1(z)$, $\varphi_{30}(z)$ gesetzt ist, und worin $\varkappa_2, \varkappa_3, \ldots \lambda_3, \lambda_5, \ldots \mu_9, \ldots$ vollständig bestimmte numerische Grössen sind.

Natürlich könnte man auch die Formen (4.) der Coefficienten p direct aus der Zerlegung derselben in Primformen, unter Zuhülfenahme der Sätze II., IV., V. in No. 7 aufstellen, und die Unbekannten $\varkappa_1$, λ, μ durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten bestimmen. Allein es erleichtert wesentlich die Rechnung, die Coefficienten p durch Vermittlung der Potenzsummen s_k herzuleiten. Dieselbe Bemerkung ist auch bei den analogen Gleichungen (6.) voriger Nummer zu machen.

Die Form für p_{12} ergiebt sich daraus, dass dieser Coefficient das Product der Grössen (ω.) sein muss.

Da die Grössen p rationale Functionen von z sind und $L=10$, so ergiebt sich aus den Gleichungen (4.) ausserdem:

Die Primform φ_{30} ist eine rationale Function.

10.

Es sei a ein singulärer Punkt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py,$$

η_1, η_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, welche resp. den Wurzeln r, $1-r$ der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung entsprechen, wobei wir voraussetzen wollen, dass r die kleinere der beiden Wurzeln ist, was erlaubt ist, weil dieselben verschieden sein müssen (s. m. Abh. Bd. 66, No. 6). Es sei alsdann

$$(1.)\qquad y_1 = \gamma_1\eta_1+\delta_1\eta_2,\quad y_2 = \gamma_2\eta_1+\delta_2\eta_2.$$

Substituirt man diese Werthe für y_1, y_2 in eine Primform n^{ten} Grades, so kann zweierlei eintreten. Entweder ist der Coefficient von η_1^n Null oder nicht. Im ersteren Falle ist der Coefficient von $\eta_1^{n-1}\eta_2$ jedenfalls von Null verschieden, weil f als Primform nicht durch η_2^2 theilbar sein kann. Hieraus ergiebt sich der Satz:

I. *Eine Primform f n^{ten} Grades hat in der Umgebung eines singulären Punktes a entweder die Form*

$$(2.)\qquad f = (z-a)^{nr}\varphi(z)$$

oder

$$(2^a.)\qquad f = (z-a)^{(n-2)r+1}.\varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ Wurzel einer rationalen Function ist, welche für $z=a$ weder Null noch unendlich ist.

Wenn weder f noch $H(f)$ die Form $(2^a.)$ hat, so kann $\frac{\lambda}{\nu}$ so bestimmt werden, dass die Form Φ_{24}, resp. Φ_{30} durch η_2 theilbar wird. Es giebt also eine Primform der Gestalt $(2^a.)$. Andererseits sind nach (*A.* p. 114 S. IV.) nicht zwei verschiedene Primformen gleichzeitig durch η_2 theilbar. Es ergiebt sich also:

II. *Von der Gesammtheit der Primformen hat eine die Gestalt* $(2^a.)$, *die übrigen die Gestalt* (2.).

Ist f eine Primform niedrigsten Grades N, so ist nach No. 7

a) für $N=6$, f_6^2 rational, also

entweder $12r$ oder $8r$ eine ganze Zahl,

also weil $L=8$, unter Berücksichtigung von (*A.* p. 135 Gl. (5.)) der Nenner von r eine der Zahlen

$$(\alpha.)\qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8;$$

b) für $N=12$ ist f_{12} rational, also

entweder $12r$ oder $10r$ eine ganze Zahl, demnach, weil $L = 10$, der Nenner von r eine der Zahlen

$$(\beta.) \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10.$$

Fasst man beides zusammen, so erhält man den Satz:

III. *Die Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen haben für* $N = 6$ *einen der Zahlenwerthe* $(\alpha.)$, *für* $N = 12$ *einen der Zahlenwerthe* $(\beta.)$.

Aus dem Satze I. ergiebt sich übrigens folgende Gestalt einer Primform n^{ten} Grades als Function von z:

$$(3.) \quad f(z) = \psi(z)(z-a_1)^{(n-2\varepsilon_1)r_1+\varepsilon_1} \times (z-a_2)^{(n-2\varepsilon_2)r_2+\varepsilon_2} \ldots,$$

wenn man mit $a_1, a_2, \ldots$ die singulären Punkte, $r_1, r_2, \ldots$ resp. die jedesmal kleinere der beiden Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen, mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Zahlen, welche entweder den Werth Null oder Eins haben, endlich mit $\psi(z)$ eine ganze rationale Function bezeichnet, welche für keinen der singulären Punkte verschwindet.

11.

Wir betrachten jetzt den Fall

$$N = 4.$$

Nach S. II. No. 2 ist in diesem Falle

$$(1.) \quad \mu \leqq 12,$$

also nach S. IV. No. 1

$$(2.) \quad m \leqq 24,$$

folglich ist in Uebereinstimmung mit (*A.* p. 125)

$$(3.) \quad L \leqq 6.$$

Es sei

a) $L < 3$, so wird nach (*A.* p. 135 Gl. (5.) und p. 138 No. 26) die Differentialgleichung durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt.

b) $L = 4$ ist aus dem (*A.* p. 125) angegebenen Grunde auszuschliessen.

c) $L = 5$ kann nicht statthaben, weil in diesem Falle die Primform 4^{ten} Grades durch y_1^2 oder y_2^2 theilbar sein müsste.

d) $L = 3$ oder 6.

Ist j eine primitive dritte oder sechste Wurzel der Einheit und sind y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, welche auf einem gewissen Wege gleichzeitig in $y_1 j$, $y_2 j^{-1}$ resp. übergehen, so ergiebt sich, dass eine

Primform vierten Grades eine der beiden Gestalten hat

$$(\alpha.)\quad a_0 y_1^4 + a_3 y_1 y_2^3, \qquad (\beta.)\quad a_1 y_1^3 y_2 + a_4 y_2^4.$$

Da die erstere durch y_1, die zweite durch y_2 theilbar ist, so folgt aus (*A.* p. 114 S. IV.), dass wenn erst a_0, a_1, a_3, a_4 fixirt sind, jede Primform vierten Grades mit einer der beiden Formen (α.) oder (β.) übereinstimmt. Wir fixiren $a_0 = 1$, $a_3 = 1$, was erlaubt ist, da y_1, y_2 mit beliebigen constanten Factoren multiplicirt werden dürfen. Es wird dann die Form (α.)

$$(4.)\quad f_4 = y_1^4 + y_1 y_2^3.$$

Nun ist

$$(5.)\quad H(f_4) = 9(8y_1^3 y_2 - y_2^4).$$

Nehmen wir als Form (β.)

$$(6.)\quad \bar{H}(f_4) = 8y_1^3 y_2 - y_2^4,$$

so sind f_4 und $\bar{H}(f_4)$ die einzigen Primformen vierten Grades. Es ist demnach *die Hessesche Covariante von f_4 von dieser Form verschieden.*

Aus dem Satze V. No. 2 ergiebt sich aber, dass *der Index jedes reducirten Wurzelsystems, also auch L eine gerade Zahl sein muss.*

Wir erhalten also den Satz:

I. *Für $N = 4$ ist $L = 6$, und es sind f_4 und $\bar{H}(f_4)$ die einzigen Primformen vierten Grades.*

Es ergiebt sich

$$(7.)\quad H^2(f_4) = -9^2.24^2 f_4.$$

Demnach folgert man aus dem Satze IV. No. 2:

II. *f_4^3 und $\bar{H}(f_4)^3$ sind rationale Functionen von z.*

Bestimmt man λ so, dass

$$\psi = -\bar{H}(f_4)^3 + \lambda f_4^3$$

durch einen Linearfactor der Form

$$(8.)\quad \varphi_6 = \frac{1}{y_2}\left[\bar{H}(f_4)\frac{\partial f_4}{\partial y_1} - f_4\frac{\partial \bar{H}(f_4)}{\partial y_1}\right] = 8y_1^6 - 20y_1^3 y_2^3 - y_2^6$$

theilbar wird, so wird ψ aus demselben Grunde wie in No. 7 in den ähnlichen Fällen durch φ_6^2 theilbar. Es ergiebt sich

$$(9.)\quad \varphi_6^2 = -\bar{H}(f_4)^3 + 64 f_4^3.$$

Da eine Form sechsten Grades nicht Wurzel einer rationalen Function sein kann, ohne Primform zu sein (weil $N = 4$), *so ist φ_6 eine Primform.*

Nach No. 6 Gl. (3.) und (3^a.) giebt es nicht zwei verschiedene Primformen sechsten Grades.

Die Form

$$(10.)\qquad F = \nu \overline{H}(f_4)^3 + \lambda f_4^3$$

ist eine Primform für jedes Werthsystem der Constanten λ und ν, ausser für $\nu = 0$ oder $\lambda = 0$, oder $\nu = -1$, $\lambda = 64$. Umgekehrt ist jede Primform F zwölften Grades in der Form (10.) enthalten. Denn man kann $\frac{\lambda}{\nu}$ so bestimmen, dass die rechte Seite der Gleichung (10.) durch einen Linearfactor von F, also (*A.* p. 114 S. IV.) durch F theilbar wird. Der Quotient ist eine Constante, welche nicht verschwindet, weil f_4 und $\overline{H}(f_4)$ von einander verschieden sind. Fasst man das Vorhergehende zusammen, so folgt:

III. *Für $N = 4$ giebt es nur die Primformen f_4, $\overline{H}(f_4)$, φ_6 und die in unendlicher Anzahl vorhandenen Primformen zwölften Grades. Die letzteren sind sämmtlich durch die Gleichung (10.) dargestellt.*

Es ergiebt sich aus der Gleichung (10.) ebenso wie in No. 7, dass *zwischen je drei Primformen zwölften Grades eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfindet.*

12.

Die Linearfactoren von f_4 mit bestimmten Constanten multiplicirt, genügen einer Gleichung 24sten Grades, welche nur sechste Potenzen der Unbekannten enthält.

Die sechsten Potenzen der Glieder des reducirten Wurzelsystems derselben seien

$$\alpha y_1^6,\quad \beta(y_1+y_2)^6,\quad \gamma(y_1+py_2)^6,\quad \delta(y_1+p^2y_2)^6,$$

wo p eine primitive dritte Wurzel der Einheit bedeutet. Es ergiebt sich, dass die Summe dieser Grössen nicht Null sein darf, weil hierzu die unmögliche Bedingung $\alpha = 0$ zu erfüllen wäre. Diese Summe als Form sechsten Grades, welche gleich einer rationalen Function, ist demnach gleich φ_6 multiplicirt mit einer Constanten. Hieraus folgt

$$\beta = \gamma = \delta = -\tfrac{1}{27}\alpha, \text{ und die Summe gleich } \tfrac{1}{9}\alpha\varphi_6.$$

Wählen wir $\alpha = -27$, so ist das reducirte Wurzelsystem der Gleichung, welcher $\sqrt[6]{-27}.y_1$ genügt:

$$(\omega.)\qquad \sqrt[6]{-27}.y_1,\quad (y_1+y_2),\quad (y_1+py_2),\quad (y_1+p^2y_2).$$

Es sei wiederum

$$(1.)\qquad f_4 = \chi(z),$$

wo $\chi(z)$ die Kubikwurzel einer rationalen Function, und

$$(2.)\qquad \bar{H}(f_4) = C\Big[\Big(\frac{d\log\chi(z)}{dz}\Big)^2 + 4\frac{d^2\log\chi(z)}{dz^2} - 16P\Big]\chi(z)^2 = \chi_1(z),$$

so können wir die Coefficienten der Gleichung

$$(\mathrm{C.})\qquad y^{24}+p_1y^{18}+p_2y^{12}+p_3y^6+p_4 = 0,$$

welcher die Grössen (ω.) genügen, folgendermaassen *als ganze homogene Functionen von* $\chi(z)$, $\chi_1(z)$ *und*

$$(3.)\qquad \varphi_6(z) = \sqrt{-\chi_1(z)^3+64\chi(z)^3}$$

darstellen.

Bezeichnen wir nämlich wieder mit s_k die k^{te} Potenzsumme der sechsten Potenzen der Grössen (ω.), so ergiebt die Zerlegung der Form s_k in Primformen ihre Darstellung als ganze homogene Function von f_4, $\bar{H}(f_4)$ und φ_6. Die Unbekannten ergeben sich wieder durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten. Auf diesem Wege erhalten wir:

$$(4.)\qquad \begin{cases} s_1 = -3\varphi, \quad s_2 = -3\chi_1^3+732\chi^3, \\ s_3 = 3\chi_1^3\varphi - 2460\chi^3\varphi, \quad s_4 = 3\chi_1^6 - 6216\chi_1^3\chi^3 + 531444\chi_1^6, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung χ, χ_1, φ für $\chi(z)$, $\chi_1(z)$, $\varphi_6(z)$ resp. gesetzt ist.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, *dass* φ_6 *eine rationale Function von* z *ist.*

Aus den Gleichungen (4.) ergeben sich die Werthe der Coefficienten der Gleichung (C.)

$$(5.)\qquad p_1 = 3\varphi, \quad p_2 = -3\chi_1^3 - 78\chi^3, \quad p_3 = -\chi_1^3\varphi + 10\chi^3\varphi, \quad p_4 = -27\chi^6.$$

Die letztere dieser Gleichungen ergiebt sich auch unmittelbar daraus, dass p_3 gleich dem Producte der sechsten Potenzen der Grössen (ω.) ist.

Aus dem Satze I. No. 10 und aus (*A.* p. 135 Gl. (5.)) ergiebt sich:

Die Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen fallen für $N=4$ *mit einer der Zahlen*

1, 2, 3, 4, 6

zusammen.

Dieser Satz, zusammen mit Satz III. No. 10 liefern den Satz (*A.* p. 135) mit der näheren Bestimmung, dass die Nenner 7 und 9 für $N>2$ überhaupt ausgeschlossen sind.

13.

In den Nummern 8, 9, 12 ist gezeigt worden, wie die Coefficienten der algebraischen Gleichung, deren Wurzeln der Differentialgleichung genügen, vermittelst einer Function $\chi(z)$ ausgedrückt werden können.

Diese Function χ ist für $N=6$ die Quadratwurzel, für $N=4$ die Kubikwurzel einer rationalen Function, dagegen für $N=12$ eine rationale Function.

Die Exponenten der Factoren von χ, welche für die singulären Punkte Null oder unendlich werden, sind durch die Gleichung (3.) No. 10 näher bestimmt.

Die definitive Bestimmung von χ erfolgt nach (*A.* p. 129—133) dadurch, dass diese Function einer linearen homogenen Differentialgleichung resp. der 5ten, 7ten oder 13ten Ordnung, oder dem Systeme von resp. 4, 6, 12 solcher Differentialgleichungen zu genügen hat. Obgleich diese Bestimmung wesentlich durch die gewonnene Kenntniss der Beschaffenheit der Exponenten derjenigen Factoren von χ, welche für die singulären Punkte Null oder unendlich werden, erleichtert wird, so ist doch zuweilen folgender Weg zur Bestimmung von χ vorzuziehen.

Ist f eine Form vom k^{ten} Grade, so kann man aus den beiden Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1}y_1+\dfrac{\partial f}{\partial y_2}y_2=kf, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_1}y_1'+\dfrac{\partial f}{\partial y_2}y_2'=\dfrac{df}{dz}, \end{cases} \qquad y_1'=\frac{dy_1}{dz},\quad y_2'=\frac{dy_2}{dz},$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y_1}, \dfrac{\partial f}{\partial y_2}$ berechnen. Für jede dieser Formen $(k-1)^{\text{ten}}$ Grades werden die den beiden Gleichungen (1.) analogen Gleichungen aufgestellt, und aus diesen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1\partial y_2}$ berechnet.

Ist nun $f=\chi$, wo χ Wurzel einer rationalen Function von z, so ergiebt diese Rechnung, unter Zuhülfenahme von (*A.* p. 104 Gl. (2.))

$$(2.)\qquad H(f)=C\left[\left(\frac{d\log\chi}{dz}\right)^2+k\frac{d^2\log\chi}{dz^2}-k^2P\right]\chi^2=\chi_1,$$

wo C eine Constante bedeutet. Diese Gleichung haben wir in No. 8, 9, 12 bereits für $k=6, 12, 4$ aus (*A.* p. 128) durch directe Ausrechnung deducirt.

Aus den Gleichungen (3.) und (4.) No. 4 und Gleichung (7.) No. 11 ergiebt sich:

Die Functionen χ und χ_1 genügen den Systemen von Differentialgleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} C\left[\left(\frac{d\log\chi}{dz}\right)^2+N\frac{d^2\log\chi}{dz^2}-N^2P\right]\chi^2 = \chi_1 \\ C'\left[\left(\frac{d\log\chi_1}{dz}\right)^2+(2N-4)\frac{d^2\log\chi_1}{dz^2}-(2N-4)^2P\right]\chi_1^2 = \chi^\lambda, \end{cases}$$

wo C, C' Constanten und $\lambda=1$ für $N=4$, $\lambda=2$ für $N=6$, $\lambda=3$ für $N=12$.

Die Gleichungen (3.) können dazu dienen, die ganze rationale Function $\psi(z)$ zu bestimmen, welche in Gleichung (3.) No. 10 als Factor von χ auftritt, wodurch nach dem Obigen χ vollständig bestimmt ist. Der Grad von $\psi(z)$ ergiebt sich auf ähnliche Weise wie (*A.* p. 133) der Grad von $g(z)$.

14.

Zum Beschluss fügen wir noch zwei fernere Beweise des Satzes,

dass die Summe der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen mit einer der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 zusammenfallen müssen, wenn $N>2$, hinzu (siehe No. 10 S. III., den Satz am Schluss von No. 12 und *A.* p. 135). Wir glauben diese Beweise um so weniger unterdrücken zu dürfen, weil sie diesen Satz fast als eine unmittelbare Folge aus der Begriffsbestimmung einer Primform darstellen.

Ist f eine Primform n^{ten} Grades, gebildet aus ei[illegible]n beliebigen Fundamentalsystem von Integralen y_1, y_2, so dürfen in [illegible]selben nicht gleichzeitig die Glieder mit y_1^n und $y_1^{n-1}y_2$, ebenso wenig gleichzeitig die Glieder mit y_2^n, $y_2^{n-1}y_1$ fehlen, weil f weder durch y_1^2 noch durch y_2^2 theilbar sein darf (*A.* p. 114). Die Primform besteht daher aus mindestens zwei Gliedern.

Es sei demnach erstens

$$f = a_0y_1^n+a_ky_1^{n-k}y_2^k+\cdots,$$

wo a_0 und a_k von Null verschieden sind. Da $k\geqq 1$, so ergiebt sich, dass die höchste Potenz von y_1 in $H(f)$ die $(2n-k-2)^{\text{te}}$ ist, demnach ist die niedrigste Potenz von y_2 in derselben die $(k-2)^{\text{te}}$, weil $H(f)$ vom $(2n-4)^{\text{ten}}$ Grade.

Ist f eine Primform niedrigsten Grades, so ist auch $H(f)$ eine Primform (*A.* p. 116), und als solche nicht durch y_2^2 theilbar. Demnach muss

$$k-2<2,$$

d. h. k eine der Zahlen 1, 2, 3 sein.

Haben nun r und a dieselbe Bedeutung wie in No. 10, während y_1, y_2 mit den dortigen η_1, η_2 resp. übereinstimmen, so ist — da f nach einem Umlaufe um a sich mit einer Einheitswurzel multiplicirt —

$$nr-[(n-2k)r+k],$$

also auch $2kr$ eine ganze Zahl.

Der Nenner von r ist demnach eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6.

Es sei zweitens

$$f = a_1 y_1^{n-1} y_2 + a_k y_1^{n-k} y_2^k + \cdots,$$

a_1 und a_k von Null verschieden, so ist

$$H(f) = -(n-1)^2 a_1^2 y_1^{2n-4} + (n-1)k((k-3)n+2)a_1 a_k y_1^{2n-k-3}.y_2^{k-1} + \cdots.$$

Es sei $k > 2$, so sind die Coefficienten von y_1^{2n-4} und von $y_1^{2n-4-(k-1)} y_2^{k-1}$ in $H(f)$ von Null verschieden, und die höchste Potenz von y_1 in $H^2(f)$, nach dem im ersten Falle Bewiesenen, die $(4n-k-9)^{\text{te}}$. Demnach ist $H^2(f)$ als eine Form vom Grade $4n-12$ durch y_2^{k-3} theilbar.

Ist wieder f eine Primform niedrigsten Grades, so kann $H^2(f)$ nicht durch die vierte Potenz einer Primform, folglich auch nicht (*A.* p. 115) durch y_2^4 theilbar sein. Demnach ist

$$k-3 < 4,$$

d. h. k eine der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6.

In diesem Falle ist

$$(n-2)r+1-[(n-2k)r+k],$$

also auch $(2k-2)r$ eine ganze Zahl, d. h.

der Nenner von r ist eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10.

15.

Der einfachste Beweis des in voriger Nummer erwähnten Satzes ist wohl der folgende.

Ist f eine Primform niedrigsten Grades, so sind f und $H(f)$ nicht durch y_2^2 und $H^2(f)$ nicht durch y_2^4 theilbar. Demnach enthält

f ein Glied der Form $a_0 y_1^n$ oder $a_1 y_1^{n-1} y_2$,

$H(f)$ ein Glied der Form $b_0 y_1^{2n-4}$ oder $b_1 y_1^{2n-5} y_2$,

$H^2(f)$ ein Glied der Form $c_0 y_1^{4n-12}$ oder $c_1 y_1^{4n-13} y_2$ oder $c_2 y_1^{4n-14}.y_2^2$ oder $c_3 y_1^{4n-15} y_2^3$.

Haben a, r wieder dieselbe Bedeutung wie in No. 10, während y_1, y_2 mit den dortigen η_1, η_2 resp. übereinstimmen, bezeichnen wir ferner den Nenner von r mit ν und mit j eine primitive ν^{te} Wurzel der Einheit, so gehen nach einem Umlaufe von z um a

$$f \text{ in } j^n f \text{ oder in } j^{n-2}.f,$$
$$H(f) \text{ in } j^{2n-4}.H(f) \text{ oder in } j^{2n-6}.H(f),$$
$$H^2(f) \text{ in } j^{4n-12}.H^2(f) \text{ oder in } j^{4n-14}.H^2(f) \text{ oder in}$$
$$j^{4n-16}.H^2(f) \text{ oder in } j^{4n-18}.H^2(f) \text{ über.}$$

Da nach S. IV. No. 2 $\frac{H(f)}{f^2}$, $\frac{H^2(f)}{f^4}$ ungeändert bleiben müssen, so ist erforderlich, dass gleichzeitig eine der Congruenzen:

$$2n \equiv 2n-4, \quad 2n \equiv 2n-6 \quad (\text{mod.}\,\nu)$$

und eine der Congruenzen

$$4n \equiv 4n-12, \quad 4n \equiv 4n-14, \quad 4n \equiv 4n-16, \quad 4n \equiv 4n-18 \quad (\text{mod.}\,\nu)$$

statt finden, oder gleichzeitig eine der Congruenzen

$$2(n-2) \equiv 2n-4, \quad 2(n-2) \equiv 2n-6 \quad (\text{mod.}\,\nu)$$

und eine der Congruenzen

$$4(n-2) \equiv 4n-12, \quad 4(n-2) \equiv 4n-14, \quad 4(n-2) \equiv 4n-16,$$
$$4(n-2) \equiv 4n-18 \quad (\text{mod.}\,\nu).$$

Hieraus ergiebt sich, dass ν eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 ist.

Heidelberg, den 3. November 1877.