预备知识

1、三角函数公式

三角恒等式

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

(2) $\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$

(3) $\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha$

(4) $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$

(5) $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$

(6) $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

两角和(差)公式

(1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

(4) $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cos\beta\mp1}{\cos\beta\pm\cot\alpha}$

二倍角公式

(1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

(3) $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(4) $\cot2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$

$\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha)$

$\cos^4\alpha=\frac{1}{8}(3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha)$

和差化积、积化和差

(1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(5) $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

(6) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

(7) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

2、不等式

(1) 三角不等式 $\big||a|-|b|\big|\le|a\pm b|\le|a|+|b|$

(2) 伯努利(Bernoulli)不等式：设 $a_i\in R,\ a_i>-1\ (i=1,2,\cdots,n)$ 且符号相同，则有 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+a_i)\ge1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$

特别地，当 a_i 均相等时，记为 $x>-1$，则有 $(1+x)^n\ge1+nx,\ (\forall n\in N,\ x>-1)$ 即 $1+\frac{x}{n}\ge(1+x)^{\frac{1}{n}}$

(3) 设 n 个正数之积为 1，则这 n 个数之和必不小于 n，即若 $a_i\in R^+$ 且 $\prod\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\ge n$

(4) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\ a_i>0$ (5) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ge\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},\ a_i>0$

(6) 柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式：设 $a_i,b_i\in R$，则 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$

闵可夫斯基(Minkowski)不等式：设$a_i, b_i \in R$，则$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3、复数

复数对应的向量与实轴正向间的夹角称为复数的幅角，记为$\theta=\arg z$，且$-\pi\leq\theta<\pi$或$0\leq\theta<2\pi$.

复数的三角表示：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　　复数的指数表示 $z=re^{i\theta}$

复数指数表示的乘除法则：(1)乘法运算：$z_1 \cdot z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$，特别地，$z^n=r^ne^{in\theta}$

(2)除法运算：$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$